І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Том 3

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як підручник для студентів технічних університетів

Київ
2021

УДК [517.3+517.9](075.8)
М34

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(*протокол № 7 від 25.06.2018 р.*)

Рецензенти:

В. В. Гавриленко — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету,

П. В. Задерей — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри вищої математики Київського національного університету технології та дизайну,

Б. В. Олійник — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія»

М34 Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — Т. 3. — 454 с.

«Математика в технічному університеті» є навчальним комплексом, що складається з підручника та практикуму. Теоретична і практична частини комплексу відповідають навчальним програмам з вищої математики бакалавріату технічних університетів. Комплекс може бути застосований для забезпечення як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Для студентів технічних університетів.

УДК [517.3+517.9](075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В основу навчального комплексу «Математика в технічному університеті» покладено навчальні матеріали курсу вищої математики, які пройшли вже багаторічну серйозну апробацію викладачами та студентами Київського політехнічного інституту, а саме: конспекти лекцій та практикуми для проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів, матеріали дистанційних курсів.

Теоретична і практична частина комплексу відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського денної та заочної форм навчання. Комплекс може бути застосований для підтримки як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Гармонічне поєднання теоретичної частини (власне підручника) і практичної частини (практикуму — задачника з великою кількістю розв'язаних задач) уже можна вважати традицією написання навчальних видань для майбутніх інженерів чи економістів.

Третій том підручника складається з 4 розділів:

— інтегральне числення функцій однієї змінної;

— інтегральне числення функцій кількох змінних;

— теорія поля;

— диференціальні рівняння.

Треба зазначити, що навколо порядку вивчення тем, рівня строгості викладання для нематематиків (жодним чином не применшуючи важливість ґрунтовної математичної підготовки для майбутнього інженера, економіста чи соціолога) триває безперервна дискусія. Опанування студентами математичних основ дає надію, що надалі вони зможуть поглибити свої математичні знання під вивчення спеціальних дисциплін або самостійно.

Певної незалежності порядку вивчення розділів у виданні досягнуто завдяки модульній побудові комплексу (весь матеріал розбито на порівняно невеликі розділи). Для викладу теорії свідомо вибрано *базовий* рівень, «...щоб математичний підручник для інженера не перетворився на маленьку копію університетського курсу». Поглиблювати свої знання з основного курсу математики або вивчати ті спеціальні розділи, які не ввійшли до навчального комплексу можна за виданнями вказаними у списку рекомендованої літератури.

Кожен розділ побудовано за такою схемою:

— вступ (анотація розділу, місце розділу в курсі вищої математики, перелік ключових понять, основні знання та вміння);

— основна частина (власне, виклад теоретичного матеріалу);

— запитання та завдання для самоконтролю;

— формули, твердження, алгоритми;

— практикуми;

— основні поняття та вміння.

Основу тексту підручника складають опис основних понять, формулювання означень та теорем, обговорення умов теорем, доведення основних теорем, ілюстративні приклади (змістовні приклади подано у практикумі). У тексті також уміщено велику кількість рисунків, що унаочнюють і ілюструють математичні поняття та твердження.

Нумерація означень, теорем та рисунків є наскрізною в середині розділу. Розділ розбито на теми (обсяг наближено відповідає обсягу однієї лекції).

Кожен розділ містить опорний конспект теоретичного матеріалу, доповнений схемами та алгоритмами розв'язання задач і має назву *«Формули, твердження, алгоритми»*.

Вивчення теорії з кожної теми підкріплюється опануванням відповідного *практикуму*, яке полягає в розбиранні розв'язаних начальних задач і розв'язання певної кількості задач під керівництвом викладача чи самостійно. До всіх задач практикумів подано відповіді. Нумерація задач наскрізна. Обсяг кожного практикуму наближено відповідає обсягу практичного заняття.

Задачі вміщено тільки полегшеного і базових рівнів. Збірники задач та вправ, які містять складніші задачі, подано в *списку рекомендованих джерел*.

У тексті практикумів використано такі позначення:

$[X.Y.Z.]$ — посилання на опорний конспект, а саме клітинку Z, у якій уміщено теоретичний факт або формулу, таблиці $X.Y.$ з розділу X;

X.Y.Z. — посилання на навчальну задачу **X.Y.Z** практикуму **X.Y.**

①,②,③,... — посилання в навчальній задачі на коментар, який уміщено після її розв'язання.

Опорні конспекти та практикуми також допоможуть під час розв'язання індивідуальних домашніх завдань, підготовці до контрольних робіт та іспитів, заповненні прогалин у попередніх знаннях.

Перелік *основних понять і вмінь, запитання та завдання для самоконтролю* допоможуть у підготовці до контрольних робіт, колоквіумів та іспиту.

Вивчати теоретичний матеріал на *підвищеному* рівні (зокрема ознайомитись з відсутніми в тексті доведеннями), а також ознайомитись з мотивацією запровадження математичних понять, їх історією та застосуваннями можна за *списком рекомендованих джерел.*

Для зручності користування підручником подано *предметний та іменний покажчики.* Предметний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини розділу, де запроваджено чи розглянуто поняття і номери задач відповідного практикуму. Іменний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини, де згадано прізвище видатного математика і коротку біографічну довідку про нього.

У *додатку А* подано інформацію про походження деяких термінів та позначень.

Постановку курсу вищої математики в технічному університеті та розроблення відповідного навчально-методичного забезпечення доцільно орієнтувати на досягнення трьох основних цілей:

— розвиток у студентів культури мислення (особливо його логічного та алгоритмічного аспектів);

— опанування математики як універсальної мови науки, необхідної для вивчення всіх подальших дисциплін;

— перетворення математики на робочий інструмент аналізу та дослідження математичних моделей.

Потреба ефективного керування самостійною роботою студентів спонукає до подальшого розвитку і ставить задачу створення та доповнення комплексу збірниками індивідуальних домашніх завдань, контрольних робіт, тестів різних форм.

Автори висловлюють удячність рецензентам, колегам та студентам за корисні зауваження і поради, урахування яких дозволило покращити стиль викладу окремих розділів.

Зауваження та помічені огріхи та неточності можна надсилати на адреси:

alexir1@ukr.net,
victor144169@gmail.com,
a.dyx@ukr.net,
fedorova_lb@yahoo.com.ua

Автори

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\blacksquare$ — завершення доведення

❍ та ● — початок і завершення розв'язання прикладу

$\int f(x)dx$ — невизначений інтеграл від функції f *9.1.2*

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — визначений інтеграл за відрізком $[a;b]$ від функції f *9.6.2* або невластивий інтеграл 2-го роду від функції f *9.8.3*

$\int\limits_a^x f(t)dt$ — визначений інтеграл зі змінної верхньою межею *9.7.1*

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ — невластивий інтеграл 1-го роду за проміжком $[a;+\infty)$ від функції f *9.8.1*

$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ — головне значення невластивого інтеграла 1-го роду від функції f *9.8.1*

$v.p.\int\limits_a^b f(x)dx$ — головне значення невластивого інтеграла 2-го роду від функції f *9.8.3*

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ — подвійний інтеграл за областю D від функції f *10.2.2*

$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$ — потрійний інтеграл за областю G від функції f *10.3.1*

$\int\limits_L f(x,y,z)dl$ — криволінійний інтеграл 1-го роду уздовж кривої L від функції f *10.4.3*

$\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r})$, $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ — криволінійний інтеграл 2-го роду уздовж кривої L від вектор-функції $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ *10.5.2*

$\oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r})$ — криволінійний інтеграл 2-го роду за замкненим контуром L *10.5.5*

$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma$	— поверхневий інтеграл 1-го роду за поверхнею Ω від функції f *10.6.2*
$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma$	— поверхневий інтеграл 2-го роду за поверхнею Ω від вектор-функції $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ *10.7.2*
$\operatorname{div}\overline{a}(M)$	— дивергенція векторного поля $\overline{a}$ в точці M *11.1.3*
$\operatorname{rot}\overline{a}(M)$	— ротор векторного поля $\overline{a}$ в точці M *11.1.4*
∇	— оператор Гамільтона (набла) *11.2.1*
Δ	— оператор Лапласа *11.2.2*

РОЗДІЛ 9. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Центральне, разом з похідною, поняття — поняття інтеграла виникає у зв'язку з розв'язанням двох задач:

1) про відновлення функції за її похідною;

2) про обчислення площі криволінійної трапеції.

Указані задачі приводять до двох типів інтегралів: невизначеного й визначеного, яким і присвячено цей розділ.

Поданий матеріал використовується в розділах:

— Інтегральне числення функцій кількох змінних;

— Диференціальні рівняння;

— Ряди

— Теорія функцій комплексної змінної

— Інтегральні перетворення

Ключові поняття:

— *первісна функції;*

— *невизначений інтеграл;*

— *визначений інтеграл;*

— *інтегровність функції;*

— *невластиві інтеграли.*

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— *знаходити невизначені інтеграли за допомогою правил й основних формул інтегрування;*

— *обчислювати визначені інтеграли;*

— *застосовувати визначені інтеграли до розв'язання задач геометрії і фізики;*

— *обчислювати та досліджувати на збіжність невластиві інтеграли.*

***Попередні знання та вміння* з розділів:**

— *Теорія границь;*

— *Диференціальне числення функцій однієї змінної;*

— *Аналітична геометрія.*

9.1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Знаходження похідної заданої функції є однією з основних задач диференціального числення. Різноманітні питання математичного аналізу і його застосувань у математиці, фізиці й техніці приводять до оберненої задачі: знайти функцію, для якої задана функція є похідною.

9.1.1. Первісна

1. Розгляньмо функції f та F на проміжку X (скінченному чи нескінченному).

Означення 9.1 (первісної).

Функцію F називають *первісною* функції f на проміжку X, якщо для будь-якого $x \in X$ правдива рівність

$$F'(x) = f(x).$$

Якщо $X = [a;b]$, то під похідними $F'(a)$ та $F'(b)$ розуміють однобічні похідні $F'(a+0)$ та $F'(b-0)$.

Операцію відшукання первісної називають *інтегруванням*. Ця операція є оберненою до диференціювання.

Теорема 9.1 (достатня умова існування первісної).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона має на цьому відрізку первісну.

2. Приміром, функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на всій числовій осі, оскільки для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

3. Задача знаходження первісної заданої функції f має не єдиний розв'язок. Справді, якщо $F(x)$ — первісна функції f на проміжку X, то функція $F(x) + C$, де C — стала, також є первісною функції f на проміжку X, оскільки

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x), \ x \in X.$$

Теорема 9.2 (про первісну).

Якщо $F(x)$ є первісною функції f на проміжку X, то будь-яка інша первісна функції f на цьому проміжку має вигляд

$$F(x)+C,$$

де C — стала.

Доведення. Нехай Φ також первісна функції f на проміжку X. Тоді для будь-якого $x \in X$ правдива рівність

$$(F(x)-\Phi(x))' = F'(x)-\Phi'(x) = f(x)-f(x) = 0.$$

Із критерію сталості функції (п. 7.5.1.1) випливає, що для будь-якого $x \in X$

$$F(x)-\Phi(x) = C,$$

тобто для будь-якого $x \in X$

$$\Phi(x) = F(x)+C. \blacksquare$$

9.1.2. Невизначений інтеграл

1. Нехай функція F є первісною функції f на проміжку X.

Означення 9.2 (невизначеного інтеграла).

Сукупність $\{F(x)+C\}$ всіх первісних функції f на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* від функції f і позначають

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $C \in \mathbb{R}$ — довільна стала.

Вираз $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, x — *змінною інтегрування*.

2. З означення невизначеного інтеграла випливають такі його властивості:

1) похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2) диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Отже, правильність інтегрування можна перевірити диференціюванням: похідна від результату інтегрування повинна дорівнювати підінтегральній функції.

3. Геометричний зміст невизначеного інтеграла. Невизначений інтеграл геометрично є однопараметричною сукупністю кривих

$$y = F(x) + C,$$

де C — довільна стала, що мають спільну властивість: усі дотичні до кривих у точках з абсцисами $x = x_0$ паралельні між собою.

Справді,

$$(F(x) + C)'\,|_{x=x_0} = F'(x_0) = k_{\text{дот}}.$$

Криві сукупності $\{F(x) + C\}$ називають *інтегральними кривими*. Вони не перетинаються та не дотикаються одна до одної. Через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива (рис. 9.1).

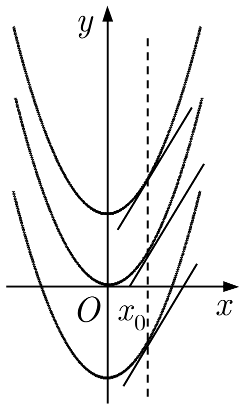


Рис. 9.1. Графік $\int 2x dx = x^2 + C$

9.1.3. Основні правила інтегрування

1. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C.}$$

Отже,

$$\boxed{\int dx = x + C.}$$

2. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, k \neq 0.}$$

3. Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\boxed{\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.}$$

4. Інваріантність формул інтегрування. Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити на будь-яку диференційовну функцію цієї змінної:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,}$$

де $u = u(x)$ — диференційовна функція.

9.1.4. Основні формули інтегрування

1. Оскільки інтегрування — це дія, обернена до диференціювання, то формули інтегрування можна одержати оберненням відповідних формул диференціювання. Інакше кажучи, таблицю основних формул інтегрування можна одержати з таблиці похідних елементарних функцій, якщо прочитати її у зворотному напрямі (справа наліво).

Приміром, з формул:

$$C' = 0,$$
$$x' = 1$$

випливає, що:

$$\int 0dx = C,$$
$$\int 1dx = \int dx = x + C.$$

З формули

$$(\sin x)' = \cos x$$

випливає

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Загальніше, з того що

$$F'(x) = f(x)$$

випливає рівність

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

2. Подаймо таблицю основних невизначених інтегралів (тут літера u може позначати як незалежну змінну $(u = x)$, так і функцію від незалежної змінної $(u = u(x))$.

1. $\int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C.$
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$
3. $\int e^u du = e^u + C.$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

6. $\int \cos u du = \sin u + C.$

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

9. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$

10. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$

11. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$

12. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a > 0).$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad (a > 0).$

15. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \ (a > 0).$

16. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \quad (a > 0).$

17. $\int \frac{dx}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C.$

18. $\int \frac{dx}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

19. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln\left|\cos u\right| + C.$

20. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln\left|\sin u\right| + C.$

Формули таблиці інтегралів називають за виглядом їх правої частини, зокрема, формулу 13 — «довгим логарифмом», формулу 16 — «високим логарифмом».

Формули 1–12 випливають з таблиці похідних. Формули 13–20 можна обґрунтувати диференціюванням.

Приміром, оскільки

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\right)' = \frac{1}{2a}\left(\ln\left|x-a\right|-\ln\left|x+a\right|\right)' =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2},$$

то

$$\int\frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C \quad (a>0).$$

3. Якщо первісна F для функції f є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ **виражається через елементарні функції**.

Але не будь-який інтеграл від елементарних функцій виражається через елементарні функції. Приміром, доведено, що такі інтеграли не виражаються через елементарні функції:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx.$$

Зауважмо, що диференціювання елементарної функції не виводить із класу елементарних функцій.

9.2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

На відміну від диференціального числення, де, користуючись правилами й формулами диференціювання, можна знайти похідну будь-якої заданої функції, в інтегральному численні немає загальних прийомів знаходження невизначених інтегралів, а є лише окремі методи, що дозволяють зводити заданий інтеграл до табличного.

9.2.1. Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні правил інтегрування та таблиці основних інтегралів.

Приміром,

$$\int\left(4x^2-\frac{3}{x^2+9}\right)dx=4\int x^2dx-3\int\frac{dx}{x^2+9}=$$
$$=4\cdot\frac{x^3}{3}+C_1-3\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C_2=\frac{4x^3}{3}-\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C,$$

де $C=C_1+C_2$.

9.2.2. Метод інтегрування заміною змінної

1. *Метод інтегрування заміною змінної* полягає в запровадженні нової змінної інтегрування (підстановки). При цьому заданий інтеграл зводять до нового інтеграла, який є простішим, ніж шуканий, «ближчим» до табличного.

Нехай функції f та φ задано відповідно на проміжках X та T, причому функція φ відображує проміжок T в X.

Теорема 9.3 (про заміну замінної).

Якщо функція f неперервна на проміжку X, а функція φ неперервно диференційовна і має обернену функцію на проміжку T, причому $\varphi(T)\subset X$, то правдива *формула заміни змінної* в невизначеному інтегралі
$$\int f(x)dx=\left|x=\varphi(t)\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$
де у правій частині після інтегрування треба підставити $t=\varphi^{-1}(x)$.

Доведення. Здиференціюємо ліву та праву частини формули
$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$
за змінною x:
$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x);$$
$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot t'_x=$$
$$=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x).$$

Тут ураховано, що похідна оберненої функції
$$t'_x=\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{\varphi'(t)},\varphi'(t)\neq 0.$$

Оскільки похідні вказаних вище інтегралів рівні, то ці інтеграли визначають одну й ту саму сукупність функцій, а саме — множину первісних функцій f. ■

Сформулювати правила вибору ефективної заміни змінної можна лише для певних класів функцій: раціональних, тригонометричних, ірраціональних.

2. Приміром, виконаємо заміну змінної $x = t^2, t \geq 0$, у невизначеному інтегралі $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \begin{vmatrix} x = t^2, t \geq 0, \\ dx = 2tdt, \\ t = \sqrt{x}. \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+1},$$

де після інтегрування треба підставити $t = \sqrt{x}$.

9.2.3. Уведення функції під знак диференціала

1. Лінійна підстановка. Розгляньмо спершу найпростіший випадок інтегрування введенням функції під знак диференціала, що дозволяє за відомим інтегралом

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

знайти інтеграл

$$\int f(au+b)du.$$

За властивістю інваріантності маємо

$$\int f(au+b)d(au+b) = F(au+b) + C.$$

Тоді,

$$\int f(au+b)du = \begin{vmatrix} d(au+b) = adu; \\ du = \frac{1}{a}d(au+b) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\int f(au+b)d(au+b) = \frac{1}{a}F(au+b) + C.$$

Отже,

$$\boxed{\int f(au+b)du = \frac{1}{a}F(au+b) + C.}$$

2. Приміром,

$$\int \sin(2x+3)dx = \begin{vmatrix} d(2x+3) = 2dx; \\ dx = \dfrac{1}{2}d(2x+3) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)d(2x+3) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C.$$

3. Загальний випадок. *Метод інтегрування введенням під знак диференціала* ґрунтується на формулі заміни змінної:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C,$$

у якій неявно використовують підстановку $u = \varphi(x)$:

$$\boxed{\begin{gathered}\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \Big|\, u = \varphi(x)\Big| = \int f(u)du = \\ = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.\end{gathered}}$$

Найважливішим для ефективного використання методу є «побачити» в підінтегральній функції множник, що є похідною внутрішнього аргументу складеної функції і ввести його під знак диференціала.

зовнішня функція

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

внутрішня функція

похідна внутрішньої функції

4. Часто використовують такі перетворення диференціала («введення під знак диференціала»):

$$f'(x)dx = df(x);$$

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2); \qquad \frac{1}{x}dx = d(\ln x);$$

$$\cos x dx = d(\sin x); \qquad \sin x dx = -d(\cos x);$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x);$$

$$\frac{1}{1+x^2}dx = d(\operatorname{arctg} x); \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x).$$

5. Приміром,

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \Big|d(\sin x) = \cos x dx\Big| = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Уведенням під знак диференціала можна одержати такий табличний інтеграл:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| d(\cos x) = -\sin x dx \right| =$$
$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C.$$

9.2.4. Метод інтегрування частинами

1. Метою методу інтегрування частинами є перехід від складнішого інтеграла $\int udv$ до простішого («нескладнішого») інтеграла $\int vdu$.

Теорема 9.4 (про інтегрування частинами).

Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовні на проміжку X, то на цьому проміжку правдива *формула інтегрування частинами* в невизначеному інтегралі

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доведення. Доведення теореми випливає із правила диференціювання добутку функцій:

$$d(uv) = udv + vdu,$$
$$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи обидві частини рівності й ураховуючи властивість інтеграла, дістаємо:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Завдяки неперервній диференційовності функцій u та v всі розглядувані інтеграли існують.■

Щоб перейти від функції u до її диференціала du, функцію u диференціюють, а щоб перейти від диференціала dv до функції v, диференціал dv інтегрують:

$$u \xrightarrow{\frac{d}{dx}} du; \quad dv \xrightarrow{\int} v,$$

Знаходячи функцію v за її диференціалом dv, можна брати будь-яке значення сталої $\tilde{C}$, оскільки в остаточний результат вона не входить. Тому для зручності покладають $\tilde{C} = 0$.

2. Розгляньмо основні типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами.

1-й тип. Інтеграли вигляду
$$\int P_n(x)e^{ax}dx, \int P_n(x)\cos bxdx, \int P_n(x)\sin bxdx,$$
де $P_n(x)$ — многочлен степеня n.

Щоб знайти інтеграли 1-го типу покладають
$$\boxed{u = P_n(x)}$$
і застосовують формулу інтегрування частинами n разів.

2-й тип. Інтеграли вигляду
$$\int P_n(x)\ln^k xdx, \int P_n(x)\arcsin^k axdx, \int P_n(x)\arccos^k axdx,$$
$$\int P_n(x)\operatorname{arctg}^k axdx, \int P_n(x)\operatorname{arcctg}^k axdx,$$
де $P_n(x)$ — многочлен степеня $n, k \in \mathbb{N}$.

Щоб знайти інтеграли 2-го типу, покладають:
$$\boxed{u = \ln^k x} \text{ чи } \boxed{u = \operatorname{arcf}^k ax,}$$
де arcf одна з обернених тригонометричних функцій.

3-й тип. Інтеграли вигляду
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx,$$
$$\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx, \int \cos\ln xdx, \quad \int \sin\ln xdx.$$

Щоб знайти інтеграли 3-го типу
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx,$$
вибирають
$$\boxed{u = \sqrt{a^2 - x^2}} \text{ чи } \boxed{u = \sqrt{x^2 \pm a^2},}$$
інтегрують частинами, перетворюють одержаний інтеграл і розв'язують лінійне рівняння щодо шуканого інтеграла.

Щоб знайти інтеграли 3-го типу
$$\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx,$$
двічі інтегрують частинами, вибираючи
$$\boxed{u = e^{ax},}$$
і розв'язують лінійне рівняння щодо шуканого інтеграла.

3. Розгляньмо приклад інтегрування частинами в інтегралі 1-го типу:

$$\int (3x-1)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = 3x-1 & \rightarrow & du = 3dx \\ dv = e^{2x}dx & \rightarrow & v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

$$\underset{\int udv = uv - \int vdu}{=} (3x-1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{3}{2}e^{2x}dx = \frac{3x-1}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

9.2.5. Узагальнений метод інтегрування частинами

1. Після n-кратного інтегрування частинами в інтегралі $\int udv$ дістаємо узагальнену формулу інтегрування частинами

$$\int uv'dx = uv - u'v^{(-1)} + u''v^{(-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v^{(-n)} +$$
$$+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v^{(-n)}dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}v^{(-k)} + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v^{(-n)}dx,$$

де $v^{(-1)}, v^{(-2)}, \ldots, v^{(-n)}$ — первісні функцій $v, v^{(-1)}, \ldots, v^{(-n+1)}$.

2. Знаходження послідовних похідних і первісних зручно оформлювати в табличному вигляді, що водночас зменшить і кількість можливих помилок.

Знак		u та її похідні		v' та її первісні
$+$	$\rightarrow$	u	$\searrow$	v'
$-$	$\rightarrow$	u'	$\searrow$	v
$+$	$\rightarrow$	u''	$\searrow$	$v^{(-1)}$
...	...	....	....	...
$(-1)^n$	$\rightarrow$	$u^{(n)}$	$\searrow$	$v^{(-n+1)}$
$(-1)^{n+1}$	$\rightarrow$	$u^{(n+1)}$	$\rightarrow$	$v^{(-n)}$

Запишімо в табличному вигляді двократне інтегрування частинами в інтегралі $\int (x^2+1)\sin 2x dx$.

$+$	$\rightarrow$	$u(x) = x^2+1$		$v'(x) = \sin 2x$
$-$	$\rightarrow$	$u'(x) = 2x$	$\searrow$	$v(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$
$+$	$\rightarrow$	$u''(x) = 2$	$\searrow$	$v^{(-1)}(x) = -\dfrac{1}{4}\sin 2x$
$-$	$\rightarrow$	$u'''(x) = 0 \rightarrow$	$\searrow$	$v^{(-2)}(x) = \dfrac{1}{8}\cos 2x$

Отже,

$$\int (x^2+1)\sin 2x dx =$$
$$= (x^2+1)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x - 2x\left(-\frac{1}{4}\sin 2x\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{8}\cos 2x\right) + C =$$
$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C.$$

9.3. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Основним способом інтегрування раціональних функцій є розкладання їх на суму елементарних дробів і подальше інтегрування цих елементарних дробів.

9.3.1. Раціональні функції

1. *Раціональною функцією* (*раціональним дробом*) називають частку многочленів

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0}.$$

Якщо степінь многочлена в чисельнику менший за степінь многочлена у знаменнику $(m < n)$, то раціональний дріб називають *правильним*; якщо $m \geq n$, то дріб називають *неправильним*.

Будь-який неправильний раціональний дріб можна записати як суму многочлена (цілої частини) і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_n(x)},$$

де $R_{m-n}(x)$ — ціла частина дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $\tilde{P}(x)$ — остача від ділення $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Цю операцію називають *виділенням цілої частину раціонального дробу*.

2. Приміром, для функції

$$f(x) = \frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$$

діленням чисельника на знаменник дістаємо:

$$\frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = x^3 - x^2 + 2 + \frac{-2x - 3}{x^2 + x + 1}.$$

9.3.2. Розклад на елементарні дроби

1. Елементарні дроби. Серед усіх правильних раціональних дробів розрізняють найпростіші правильні раціональні дроби чотирьох типів, які називають *елементарними дробами*:

1) $\dfrac{A}{x - a}$;

2) $\dfrac{A}{(x - a)^k}$ $(k \geq 2)$;

3) $\dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}$;

4) $\dfrac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ $(k \geq 2)$,

де A, a, p, q, M, N — дійсні числа, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

2. Теорема 9.5 (про розклад на суму елементарних дробів).

Правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$ зі знаменником

$$Q_n(x) = a_0(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2}\ldots(x - a_k)^{\alpha_k} \times$$
$$\times(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}\ldots(x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l},$$

де $\alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,k},$ $\mu_j \in \mathbb{N}, p_j^2 - 4q_j < 0, j = \overline{1,l},$ $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i + 2\sum\limits_{j=1}^{l}\mu_j = n,$ можна єдиним чином розкласти на суму елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} +$$
$$+ \ldots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} +$$
$$+ \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_{1\mu_1}x+N_{1\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}} +$$
$$+ \ldots + \frac{M_{l1}x+N_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \ldots + \frac{M_{l\mu_l}x+N_{l\mu_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}}.$$

У цьому розкладі

$$A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}, \ldots, A_{k1}, \ldots, A_{k\alpha_k},$$
$$M_{11}, N_{11}, \ldots, M_{1\mu_1}, N_{1\mu_1}, \ldots, M_{l1}, N_{l1}, \ldots, M_{l\mu_l}, N_{l\mu_l}$$

— деякі дійсні сталі, **невизначені** коефіцієнти, частина яких може дорівнювати нулю. Їхня загальна кількість дорівнює степеню n многочлена у знаменнику.

3. Приміром,

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

9.3.3. Метод невизначених коефіцієнтів

Для знаходження невизначених коефіцієнтів під час розкладу правильного раціонального дробу можна скористатись одним з поданих нижче способів або їх комбінацією.

1. Спосіб прирівнювання коефіцієнтів полягає в тому, що:

1) у правій частині рівності

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \text{розклад на суму елементарних дробів}$$

зводять дроби до спільного знаменника $Q(x)$, одержуючи тотожність

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{S(x)}{Q(x)},$$

де $S(x)$ — многочлен з невизначеними коефіцієнтами;

2) оскільки в одержаній тотожності знаменники рівні, то повинні бути рівні й чисельники

$$P(x) \equiv S(x);$$

3) прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності, одержують систему лінійних рівнянь, з якої і знаходять невизначені коефіцієнти (система завжди має єдиний розв'язок).

2. Приміром, знайдімо коефіцієнти розкладу

$$\frac{6x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

Праву частину цього розкладу зводимо до спільного знаменника:

$$\frac{6x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{x^3-8}.$$

Отже,

$$6x \equiv (A+B)x^2 + (2A+C-2B)x + 4A - 2C.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \\ x^1 & 6 = 2A+C-2B \\ x^0 & 0 = 4A-2C \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = 1, B = -1, C = 2.$$

3. Спосіб окремих значень полягає в тому, що в обидві частини тотожності многочленів можна підставляти будь-які значення змінної.

Приміром, у поданому вище прикладі, підставляючи в тотожність

$$6x \equiv A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

послідовно значення $x = 0, x = 1$ та $x = 2$, дістаємо систему

$$\begin{cases} 0 = 4A - 2C, \\ 6 = 7A - B - C, \\ 12 = 12A. \end{cases}$$

На практиці різні способи знаходження невизначених коефіцієнтів можна комбінувати.

4. Спосіб викреслювання. Нехай $x = a$ — корінь кратності 1 знаменника $Q_n(x)$. Тоді

$$Q_n(x) = (x-a)\varphi(x),$$

де $\varphi(a) \neq 0$.

Тоді правдивий такий розклад правильного дробу на суму дробів

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

Домножуючи цю рівність на $(x-a)$ і переходячи до границі, коли $x \to a$, дістаємо

$$\lim_{x\to a}\frac{P_m(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\left(A + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}(x-a)\right);$$

$$\frac{P_m(a)}{\varphi(a)} = A.$$

Отже, практично коефіцієнт A можна знайти викреслюванням зі знаменника множника $(x-a)$ і подальшим підставленням $x = a$:

$$A = \left.\frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)}\varphi(x)}\right|_{x=a}.$$

5. Нехай

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}, \quad \varphi(a) \neq 0.$$

Дійсному кореню $x = a$ кратності α відповідає в розкладі дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ α елементарних дробів:

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}.$$

Коефіцієнт A_α можна знайти за формулою

$$\boxed{A_\alpha = \left.\frac{P_n(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right|_{x=a} = \frac{P_m(a)}{\varphi(a)},}$$

а решту коефіцієнтів — за формулами:

$$\boxed{A_{\alpha-k} = \frac{1}{k!}\left.\left(\frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right)^{(k)}\right|_{x=a}, k = \overline{1, \alpha-1}.}$$

9.3.3. Інтегрування раціональних дробів

1. Інтегрування елементарних дробів. Елементарні дроби 1-го та 2-го типів інтегрують уведенням функції під знак диференціала.

1. $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln\left|x-a\right| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

3. Інтеграл від елементарного дробу 3-го типу зводять до табличних інтегралів виділенням у чисельнику дробу диференціала знаменника. А саме,

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{aligned} & d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \\ & Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2} \end{aligned} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

4. Знаходження інтеграла

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$$

заміною

$$t = x + \frac{p}{2}$$

зводять до знаходження інтеграла

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

який можна знайти за рекурентною формулою

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)a^2}\left((2k-3)I_{k-1} + \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right), k = 2,3,\ldots$$

3. Приміром, знаючи табличний інтеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

за рекурентною формулою знаходимо, що

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(I_1 + \frac{t}{t^2+a^2}\right) = \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

4. Отже, правильний раціональний дріб інтегрують розкладанням на суму елементарних дробів і подальшого їх інтегрування.

Щоб зінтегрувати неправильний раціональний дріб, спершу виділяють цілу частину дробу — многочлен, а остачу розкладають на суму елементарних дробів.

5. Оскільки інтеграли від елементарних дробів — елементарні функції, то висновуємо:

> Невизначений інтеграл від будь-якої раціональної функції можна завжди виразити через скінченну кількість елементарних функцій.

6. Обчислюючи інтеграли від раціональних виразів, не завжди треба розкладати вираз за загальною схемою. Так, оскільки

$$x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3-8),$$

то

$$\int\frac{x^2dx}{x^3-8} = \frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-8)}{x^3-8} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-8\right| + C.$$

9.4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

Основними методами інтегрування тригонометричних виразів є безпосереднє інтегрування з використанням тригонометричних тотожностей і заміни змінної.

9.4.1. Універсальна тригонометрична підстановка

1. Умовимося через $R(u, v, w, \ldots)$ позначати раціональну функцію щодо її аргументів $u, v, w, \ldots$, тобто вираз, який одержано з величин $u, v, w, \ldots$, а також дійсних чисел з допомогою чотирьох арифметичних дій.

Розгляньмо інтеграл вигляду
$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$
де підінтегральна функція є раціональною функцією від $\sin x$ та $\cos x$. Знайти його можна різними методами. Іноді буває досить перетворити підінтегральний вираз, використовуючи відомі тригонометричні формули, застосувати методи введення функції під знак диференціала, заміни змінної або інтегрування частинами.

2. Універсальна тригонометрична підстановка. Для обчислення інтегралів вигляду
$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$
існує загальна універсальна схема обчислення, яка ґрунтується на *універсальній тригонометричній підстановці*
$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, x \in (-\pi; \pi).}$$
За допомогою цієї підстановки інтеграл
$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$
перетворюють на інтеграл від раціональної функції змінної t, який завжди виражається через елементарні функції.

Справді, нехай $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Виразімо $\sin x, \cos x$ та dx через t:
$$\boxed{\begin{gathered}\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.\end{gathered}}$$
Тоді
$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\frac{2dt}{t^2+1} = \int R_1(t)dt.$$

За допомогою універсальної підстановки зручно обчислювати інтеграли вигляду
$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

9.4.2. Окремі випадки підстановок

1. Універсальна підстановка інколи приводить до громіздких раціональних дробів. Тому буває зручнішим використовувати інші підстановки, а саме:

1) якщо підінтегральна функція непарна щодо $\sin x$, тобто
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
то застосовують підстановку
$$\boxed{\cos x = t, x \in [0; \pi];}$$

2) якщо підінтегральна функція непарна щодо $\cos x$, тобто
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
то застосовують підстановку
$$\boxed{\sin x = t, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];}$$

3) якщо підінтегральна функція парна щодо $\sin x$ та $\cos x$, тобто
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$
то застосовують підстановку
$$\boxed{\operatorname{tg} x = t, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).}$$

2. Спосіб знаходження інтегралів вигляду
$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$
залежить від парності чисел $m \in \mathbb{N}$ та $n \in \mathbb{N}$.

I. Якщо хоча б одне з чисел m або n — непарне, то відокремлюють від непарного степеня один співмножник і виражають за допомогою формули
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
парний степінь, що залишився. Отже,

1) якщо $m = 2k-1, k \in \mathbb{N}$, то підінтегральний вираз перетворюють так:
$$\boxed{\sin^{2k-1} x dx = \sin x (\sin x)^{2k-2} dx = -(1-\cos^2 x)^{k-1} d(\cos x);}$$

2) якщо $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$, то підінтегральний вираз перетворюють так:
$$\boxed{\cos^{2k-1} x dx = (1-\sin^2 x)^{k-1} d(\sin x).}$$

II. Якщо ж m та n — парні числа, то степені понижують, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Отже,

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^{2k} x \cos^{2l} x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l, \\ \sin^{2k} x \cos^{2k} x &= \left(\frac{\sin^2 2x}{4}\right)^k = \left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)^k, \end{aligned} \quad k, l \in \mathbb{N}.}$$

9.4.3. Перетворення підінтегрального виразу

1. Щоб знайти інтеграли вигляду
$$\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx, n \in \mathbb{N},$$
використовують тригонометричні тотожності
$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$
а саме:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}^n x &= \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right); \\ \operatorname{ctg}^n x &= \operatorname{ctg}^{n-2} x \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right). \end{aligned}}$$

2. Щоб знайти інтеграли
$$\int \sin ax \cos bx dx, \int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx \ (m, n \in \mathbb{R}).$$
використовують формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x), \\ \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x), \\ \sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x). \end{aligned}}$$

9.5. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Основним методом інтегрування ірраціональних виразів є заміна змінної.

9.5.1. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей

1. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, \sqrt[s_1]{x^{r_1}}, \ldots, \sqrt[s_k]{x^{r_k}}\right) dx,$$

де $r_1, s_1, \ldots, r_k, s_k \in \mathbb{Z}$, зводять до інтегралів від раціональних функцій підстановкою

$$\boxed{x = t^s,}$$

де $s = \text{Н.С.К.}\{s_1, \ldots, s_k\}$.

2. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1/s_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k/s_k}\right) dx,$$

де $r_1, s_1, \ldots, r_k, s_k \in \mathbb{Z}$, зводять до інтегралів від раціональної функції підстановкою

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,}$$

де $s = \text{Н.С.К.}\{s_1, \ldots, s_k\}$.

3. Інтеграли від ірраціональних функцій не завжди виражаються через елементарні функції. Приміром, інтеграли

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$0 < k < 1,$$

не виражаються через елементарні функції.

9.5.2. Інтегрування квадратичних ірраціональностей

Розгляньмо, як знаходити інтеграл

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx.$$

Функцію вигляду $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, де $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, називають *квадратичною ірраціональністю*.

1. Інтеграл $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ обчислюють виділенням у чисельнику диференціала від підкореневого виразу і, за потреби, виділенням також повного квадрату під коренем.

Приміром,

$$\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left|\begin{array}{l} d(x^2+2x+2)=(2x+2)dx \\ 3x-1=\frac{3}{2}(2x+2)-4 \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}-4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}}-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)+C.$$

2. Інтеграл вигляду

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

зводять до інтеграла попереднього типу заміною

$$\boxed{x-\alpha=\frac{1}{t}.}$$

3. Інтеграли вигляду

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx, \int R(x,\sqrt{x^2\pm a^2})dx$$

можна перетворити з допомогою *тригонометричних підстановок*:

1) $\boxed{x=a\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],}$ для інтеграла $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx;$

2) $\boxed{x = a\operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),}$ для інтеграла $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$;

3) $\boxed{x = \frac{a}{\cos t}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right),}$ для інтеграла $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$.

Тригонометричні підстановки найефективніші в обчисленні визначених інтегралів, де не потрібно вертатись до старої змінної.

4. Інтеграли $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx$ та $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ можна також знаходити інтегруванням частинами.

9.5.3. Інтегрування диференціального біному

1. *Диференціальним біномом* називають вираз вигляду

$$x^m(a + bx^n)^p dx,$$

де $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Теорема 9.6 (Чебишова).

Інтеграл від диференціального біному

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx$$

виражається через елементарні функції лише у трьох випадках:

1) якщо $p \in \mathbb{Z}, m = \frac{r_1}{s_1}, n = \frac{r_2}{s_2}$, то застосовують підстановку $x = t^s$, де $s = \text{НСК}(s_1, s_2)$;

2) якщо $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $a + bx^n = t^s$, де s — знаменник дробу $p = \frac{r}{s}$;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $ax^{-n} + b = t^s$, де s — знаменник дробу $p = \frac{r}{s}$.

У решті випадків інтеграл від диференціального біному не виражається через елементарні функції.

2. Приміром,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m=-\dfrac{1}{2}, n=\dfrac{1}{4}, p=\dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{m+1}{n}=2 \Rightarrow 1+x^{1/4}=t^3; t=(1+x^{1/4})^{1/3}; \\ \dfrac{1}{4}x^{-3/4}dx=3t^2dt \end{array} \right| =$$

$$= \int x^{1/4}(1+x^{1/4})^{1/3}x^{-3/4}dx = \int (t^3-1)t\cdot 12t^2dt = 12\int (t^6-t^3)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$$

9.6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ЗА ВІДРІЗКОМ

Користуючись спеціальним граничним переходом, можна запровадити поняття інтеграла за найпростішим геометричним об'єктом — за відрізком і за допомогою визначеного інтеграла розв'язати задачу знаходження площі криволінійної трапеції.

9.6.1. Задача про площу плоскої фігури

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано невід'ємну неперервну функцію f $(f(x)\geq 0, x\in[a;b])$. Фігуру $aABb$, обмежену графіком функції $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ та $x=b$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 9.2).

Знайдімо площу S цієї трапеції.

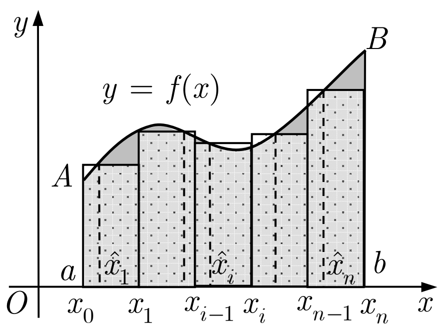


Рис. 9.2. Криволінійна трапеція

1. Розбиваємо відрізок $[a;b]$ на n ланок точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Проводячи вертикальні прямі $x = x_i, i = \overline{1, n-1}$, поділяємо криволінійну трапецію на n криволінійних трапецій площею $\Delta S_i, i = \overline{1, n}$.

2. На кожному відрізку вибираємо довільну точку $\hat{x}_i \in [x_{i-1}; x_i]$, і будуємо прямокутник з основою $[x_{i-1}; x_i]$ заввишки $f(\hat{x}_i), i = \overline{1, n}$.

Тоді

$$\Delta S_i \approx f(\hat{x}_i)\Delta x_i, i = \overline{1, n},$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n}$.

3. Одержуємо «східчасту» фігуру, утворену з n прямокутників, площа якої

$$S_n = f(\hat{x}_i)\Delta x_1 + f(\hat{x}_i)\Delta x_2 + \ldots + f(\hat{x}_i)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i.$$

Тоді

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i.$$

4. Точність наближення зростатиме, якщо відрізок $[a; b]$ ділитимемо так, щоб кількість ланок n збільшувалась, а їхні довжини $\Delta x_i, i = \overline{1, n}$, зменшувались.

Нехай $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ і $n \to \infty$.

Площею криволінійної трапеції $aABb$ називають

$$\boxed{S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i.}$$

Ця границя, якщо вона існує, не повинна залежати ані від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на ланки $[x_{i-1}; x_i]$, ані від вибору точок $\hat{x}_i$ на кожній з них.

9.6.2. Поняття визначеного інтеграла за відрізком

1. Розгляньмо на відрізку $[a; b], a < b$, функцію f і побудуймо для цієї функції визначений інтеграл за відрізком $[a; b]$, користуючись такою схемою.

1. Довільним чином точками
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$
розбиваємо відрізок $[a;b]$ на n ланок
$$[x_0;x_1],\ldots,[x_{i-1};x_i],\ldots.,[x_{n-1};x_n].$$

2. На кожній ланці $[x_{i-1};x_i], i=\overline{1,n}$, вибираємо довільно точку $\hat{x}_i$ й обчислюємо значення функції $f(\hat{x}_i)$.

3. Будуємо суму, яку називають n*-ю інтегральною* сумою для функції f, що відповідає певному розбиттю та вибору точок
$$\sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i,$$
де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1};x_i]$.

Означення 9.3 (визначеного інтеграла за відрізком).

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли довжина найбільшої ланки $\max \Delta x_i$ прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на ланки $[x_{i-1};x_i]$, ані від вибору точок $\hat{x}_i$ на кожній ланці, то цю границю називають *визначеним інтегралом за відрізком* $[a;b]$ від функції f і позначають
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i.$$

Функцію f називають *інтегровною на відрізку* $[a;b]$. Числа a та b називають *нижньою та верхньою межами інтегрування*; функцію $f(x)$ — *підінтегральною функцією*; $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*; x — *змінною інтегрування*; $[a;b]$ — *відрізком інтегрування*.

2. З означення визначеного інтеграла випливає, що визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, тобто:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Розширюючи означення визначеного інтеграла, природно вважати, що:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,\ b < a.$

3. З побудови визначеного інтеграла випливає, що його значення не зміниться, якщо значення функції f змінити в будь-якій точці відрізку $[a;b]$. Тобто, якщо замість функції $f(x)$ розглянути функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a;b], x \neq c, \\ A, & x = c, \end{cases}$$

де $A \neq f(c)$, то

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Цей висновок залишиться правдивим, якщо значення функції f змінити у скінченній кількості точок.

4. Із задачі про площу криволінійної трапеції випливає, що **площу криволінійної трапеції**, обмеженої прямими $y = 0, x = a, x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geq 0$, можна знайти за формулою

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx.}$$

9.6.3. Умови інтегровності

Теорема 9.7 **(необхідна умова інтегровності).**

Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Прикладом обмеженої, але неінтегровної на відрізку $[0;1]$ функції є *функція Діріхле*

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Теорема 9.8 **(достатні умови інтегровності).**

Функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, якщо виконано одну з умов:

1) функція f неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) функція f обмежена й неперервна на $[a;b]$, за винятком скінченної кількості точок;

3) функція f означена й монотонна на відрізку $[a;b]$.

Якщо змінити значення інтегровної функції у скінченній кількості точок, то інтегровність її не порушиться і значення інтеграла при цьому не зміниться.

Інтегровна функція f може бути й не визначеною у скінченній кількості точок відрізка $[a;b]$.

9.6.4. Властивості визначеного інтеграла

Розгляньмо інтегровну на відрізку $[a;b]$ функцію f. Визначений інтеграл за відрізком $[a;b]$ від функції f має такі властивості.

1 (*лінійність*). Для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2 (*адитивність*). Для довільного $c \in [a;b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3 (*нормованість*).

$$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = l([a;b]) = b - a, \ \ a < b,$$

де $l([a;b])$ — довжина відрізка $[a;b]$.

4 (*орієнтованість*).

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5 (*збереження знаку підінтегральної функції*). Якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a;b]$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6 (*монотонність визначеного інтеграла*). Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) \leq g(x)$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Доведення. Доведімо властивість 2 (адитивність). Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на ланки, то розіб'ємо $[a;b]$ так, щоб точка c була точкою розбиття (рис. 9.3). Якщо, приміром, $c = x_m$, то інтегральну суму можна розбити на дві суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\hat{x}_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i.$$

Переходячи в цій рівності до границі, коли $\max \Delta x_i \to 0$, дістаємо формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \blacksquare$$

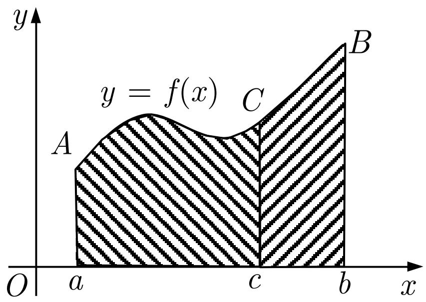


Рис. 9.3. Властивість адитивності

7. Нехай функція f — кусково-задана, неперервна на відрізку $[a;b]$, окрім точки $c \in (a;b)$, функція така, що:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \le x < c, \\ f_2(x), & c < x \le b, \end{cases}$$

де функція f_1 неперервна на $[a;c]$, а функція f_2 неперервна на $[c;b]$.

Покладають, що

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx.$$

Формула не зміниться, якщо функція f означена в точці c.

9.6.5. Оцінки визначеного інтеграла. Теорема про середнє

1. Теорема 9.9 (про оцінки визначеного інтеграла).

Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b], a < b$.

1. Правдива нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx.$$

2. Якщо для всіх $x \in [a;b]$ виконано нерівність $\left|f(x)\right| \le C$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le C(b-a).$$

3. Якщо m та M — відповідно найменше та найбільше значення функції f на відрізку $[a;b], a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2. Теорема 9.10 **(про середнє значення функції).**

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Геометрично теорема про середнє значення означає, що якщо $f(x) \geq 0, x \in [a;b]$, то площа криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника зі сторонами $b-a$ та $f(c)$ (рис. 9.4).

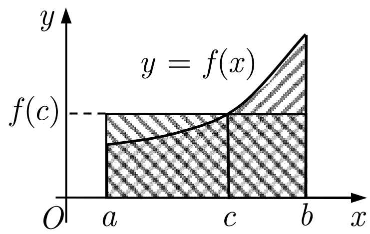


Рис. 9.4. Теорема про середнє значення функції

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

називають *середнім значенням функції на відрізку* $[a;b]$.

9.7. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

9.7.1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею
9.7.2. Формула Ньютона — Ляйбніца
9.7.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі
9.7.4. Інтеграли від парних, непарних і періодичних функцій
9.7.5. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Основним засобом обчислення визначеного інтеграла є формула, у якій поєднано визначений та невизначений інтеграли — формула Ньютона — Ляйбніца.

9.7.1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

1. Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a;x]\subset[a;b]$. Отже, визначений інтеграл

$$\int_a^x f(t)dt,$$

є функцію від x, означеною на відрізку $[a;b]$.

Функцію

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

називають *визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею* (рис. 9.5).

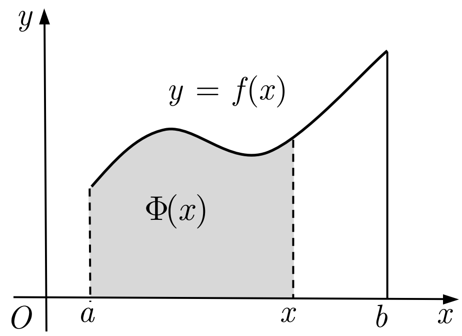


Рис. 9.5. Геометричний зміст інтеграла зі змінною верхньою межею

Теорема 9.11 (Бароу).
Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то функція

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

є диференційовною в будь-якій точці $x\in[a;b]$ і правдива *формула Бароу*

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x),\ \ x\in[a;b].$$

Доведення. Надаймо аргументу x приріст $\Delta x\neq 0$ такий, що $x+\Delta x\in[a;b]$. Тоді

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt.$$

З адитивності визначеного інтеграла випливає, що

$$\Delta\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Застосовуючи теорему 9.10 про середнє значення, дістаємо

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x,$$

де $c\in[x;x+\Delta x]$.

Якщо $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x\to x, c\to x$ і, завдяки неперервності функції f на відрізку $[a;b]$, $f(c)\to f(x)$. За означенням похідної

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (c \to x)}} f(c) = f(x). \ \blacksquare$$

2. З теореми 9.11 випливає, що визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

від неперервної функції f є первісною для підінтегральної функції f на відрізку $[a;b]$.

А отже, за означенням невизначеного інтеграла, маємо

$$\boxed{\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.}$$

3. Теорема Бароу дозволяє записувати первісні функцій, які не можна виразити через елементарні функції. Деякі з цих неелементарних первісних, мають широке застосування. Зокрема:

1) *інтегральний синус*

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt;$$

2) *інтеграли Френеля*:

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt;$$

$$C(x) = \int_0^x \cos t^2 dt;$$

3) *функція помилок*

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

9.7.2. Формула Ньютона — Ляйбніца

1. Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f має на цьому відрізку первісну, приміром

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a;b].$$

Поставмо зворотну задачу: знаючи одну з первісних Φ функції f на відрізку $[a;b]$, обчислити визначений інтеграл від функції f на цьому відрізку.

Теорема 9.12 (теорема Ньютона — Ляйбніца).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція F є її первісною на цьому відрізку, то правдива *формула Ньютона — Ляйбніца*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доведення. Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f має на цьому відрізку первісну

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a;b].$$

За теоремою 9.1 для всіх $x \in [a;b]$ правдива рівність

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

де C — довільна стала.

Для $x = a$ маємо

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a).$$

Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Покладаючи $x = b$, дістаємо

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \blacksquare$$

2. Позначаючи

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b,$$

формулу Ньютона — Ляйбніца можна записати коротше як

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b.}$$

Приміром,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

9.7.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі

1. Теорема 9.13 **(про заміну змінної).**

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервно диференційовна на відрізку $[t_1;t_2]$, причому

$$\varphi([t_1;t_2])=[a;b] \text{ та } \varphi(t_1)=a, \varphi(t_2)=b,$$

то правдива *формула заміни змінної* у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx = \left| x=\varphi(t) \right| = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доведення. Нехай F — первісна для функції f на відрізку $[a;b]$. Оскільки $\varphi(t_1)=a, \varphi(t_2)=b,$ то за формулою Ньютона — Ляйбніца маємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dF(\varphi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \ \blacksquare$$

2. Приміром, за допомогою тригонометричної підстановки обчислімо визначений інтеграл

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; \\ dx = 2\cos t dt \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 2 & \frac{\pi}{2} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi.$$

9.7.4. Інтеграли від парних, непарних і періодичних функцій

1. Розгляньмо визначений інтеграл за відрізком $[-a;a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

З адитивності визначеного інтеграла маємо

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Виконуючи в першому інтегралі заміну змінної:

$$x = -t, dx = -dt; t = -x,$$

маємо

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx.$$

2. Покладаючи в цій рівності $f(-x) = f(x)$ (парна функція) та $f(-x) = -f(x)$ (непарна функція), одержимо твердження:

$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx, & f - \text{парна функція;} \\ 0, & f - \text{ непарна функція.} \end{cases}}.$$

3. Для T-періодичної інтегровної на відрізку $[a; a+T]$ функції правдива формула

$$\boxed{\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx.}$$

Доведення. За властивістю адитивності маємо

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dx + \int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx.$$

Запроваджуючи нову змінну $t = x - T, dx = dt,$ маємо

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt.$$

Отже,

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx. \blacksquare$$

Приміром, завдяки 2π-періодичності та непарності функції $f(x) = \sin^5 x,$ маємо

$$\int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin^5 x dx = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^5 x dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx = 0.$$

9.7.5. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

1. Теорема 9.14 (про інтегрування частинами).

Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a;b]$, то правдива *формула інтегрування частинами* у визначеному інтегралі

$$\int\limits_a^b u dv = uv \,\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

2. Приміром, інтегруванням частинами обчислімо визначений інтеграл

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{matrix} \right| = x \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} - \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln|\cos x| \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

3. Інтегруванням частинами у визначеному інтегралі можна одержати *Валісову формулу*

$$\boxed{I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} 1, & n = 2k-1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},}$$

де $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k), (2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1), 0!! = 1.$

Приміром,

$$I_8 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^8 t dt = \frac{7!!}{8!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{35\pi}{256}.$$

9.8. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

За допомогою граничного переходу можна розширити поняття визначеного інтеграла від неперервної (обмеженої) функції за скінченним відрізком на нескінченний проміжок та інтеграл від необмеженої функції.

9.8.1. Невластивий інтеграл з нескінченними межами інтегрування (1-го роду)

1. Запроваджуючи поняття визначеного інтеграла як границі інтегральної суми, припускають, що виконано такі умови:

1) межі інтегрування a та b скінченні;

2) підінтегральна функція f на відрізку $[a;b]$ неперервна або має скінченну кількість точок розриву 1-го роду.

Якщо виконано обидві умови, то визначені інтеграли називають *властивими*. Якщо хоча б одну з умов не виконано, то інтеграли називають *невластивими*. При цьому означення визначеного інтеграла втрачає сенс. Справді, у разі нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n ділянок скінченної довжини, а в разі необмеженої функції інтегральна сума не завжди має скінченну границю.

2. Якщо функція f неперервна на проміжку $[a;+\infty)$, то вона неперервна на будь-якому скінченному відрізку $[a;B], a < B$. Для неперервної на відрізку $[a;B]$ функції f існує визначений інтеграл, залежний від верхньої межі інтегрування:

$$I(B) = \int_a^B f(x)dx.$$

Означення 9.4. **(невластивого інтеграла 1-го роду).**

Невластивим інтегралом з нескінченною верхньою межею інтегрування (*невластивим інтегралом 1-го роду*) від неперервної функції f на проміжку $[a;+\infty)$ називають границю функції $I(B)$, коли $B \to +\infty$, і позначають

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx.$$

Так само означують невластивий інтеграл з нескінченною нижньою межею інтегрування від неперервної функції f на проміжку $(-\infty;b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{b} f(x)dx.$$

Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла, то відповідний невластивий інтеграл називають *збіжним*, якщо границя не існує або існує нескінченна, то невластивий інтеграл називають *розбіжним*.

3. Дослідімо на збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}, \alpha\in\mathbb{R}$.

❍ Якщо $\alpha\neq 1$, то

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{1}^{B}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{B\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{1}^{B} = \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha}-1).$$

Отже,

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1,\\ \infty, & \alpha<1.\end{cases}$$

У разі $\alpha=1$ маємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty}\ln x\,\Big|_{1}^{B} = \lim_{B\to+\infty}\ln B = +\infty.$$

Отже, інтеграл

$$\boxed{\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} - \begin{cases}\text{збігається}, & \alpha>1,\\ \text{розбігається}, & \alpha\le 1.\end{cases}}$$

4. Якщо $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ збігаються, то $\int\limits_{a}^{+\infty}(f(x)+\varphi(x))dx$ також збігається, причому

$$\int\limits_{a}^{+\infty}(f(x)+\varphi(x))dx = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx.$$

Але зі збіжності $\int\limits_{a}^{+\infty}(f(x)+\varphi(x))dx$ не випливає збіжність $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ чи $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$.

5. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовні на проміжку $[a;+\infty)$ і збігаються невластиві інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} udv$ та $\int\limits_a^{+\infty} vdu$, то правдива *формула інтегрування частинами* в невластивому інтегралі 1-го роду

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} udv = uv\,\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} vdu,}$$

де $uv\,\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{B\to+\infty} uv\,\Big|_a^{B}$.

6. Невластивий інтеграл із двома нескінченними межами інтегрування від неперервної функції f на проміжку $(-\infty;+\infty)$ розуміють як суму двох невластивих інтегралів:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx =} \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{c} f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{c}^{B} f(x)dx,$$

причому цей невластивий інтеграл називають *збіжним*, якщо обидві границі існують і скінченні. Якщо хоча б одна з границь не існує або нескінченна, то невластивий інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним*. Збіжність і значення інтеграла не залежить від вибору точки c.

7. Головне значення невластивого інтеграла 1-го роду. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{B} f(x)dx$, то кажуть, що невластивий інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *збігається в розумінні головного значення*. Цю границю називають *головним значенням невластивого інтеграла 1-го роду* від функції f *за Коші* і позначають

$$\boxed{v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{B} f(x)dx.}$$

Якщо f — непарна функція на всій числовій осі, то

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

9.8.2. Ознаки збіжності невластивих інтегралів 1-го роду

1. У багатьох задачах обчислювати невластивий інтеграл не має потреби, а треба лише встановити, збігається цей інтеграл чи розбігається.

Теорема 9.15 **(ознака порівняння).**

Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції f та φ неперервні і справджують умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то зі збіжності невластивого інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності невластивого інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

2. Приміром, дослідімо на збіжність інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x}dx, a > 0.$

❍Дослідити на збіжність цей інтеграл за означенням неможливо. Скористаємось тим, що для всіх $x \ge 0$ функція

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x}$$

справджує умову

$$0 < \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x} \le \frac{1}{x^2} = \varphi(x).$$

Оскільки інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається, то за теоремою 9.15 збігається і розглядуваний інтеграл.●

3. **Теорема 9.16** **(гранична ознака порівняння).**

Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції f та φ додатні й неперервні, існує границя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L \quad (L \ne 0,\ L \ne \infty),$$

то невластиві інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Отже, якщо функція f є нескінченно малою функцією порядку α щодо $\frac{1}{x}$, коли $x \to +\infty$, то невластивий інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ $(a > 0)$ збігається для $\alpha > 1$ і розбігається для $\alpha \le 1$.

9.8.3. Невластиві інтеграли від необмежених функцій (2-го роду)

1. Нехай функція f означена на проміжку $[a;b)$ й необмежена в лівому околі точки b (b — точка розриву), тобто $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. Нехай також функція f інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тобто існує інтеграл

$$I(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

який залежить від змінної верхньої межі інтегрування.

Означення 9.5 **(невластивого інтеграла 2-го роду).**

Невластивим інтегралом від необмеженої функції f, неперервної на проміжку $[a;b)$, яка має нескінченний розрив у точці $x = b$, (*невластивим інтегралом 2-го роду*) називають границю інтеграла $I(\varepsilon)$, коли $\varepsilon \to 0$, і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Так само, якщо функція f має нескінченний розрив у точці $x = a$, то покладають

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо існують скінченні границі у правих частинах рівностей, то відповідні невластиві інтеграли від розривної в точках a або b функції називають *збіжними*, інакше — *розбіжними*.

2. Можна безпосередньо дослідити на збіжність важливі інтеграли:

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} - \begin{cases} \text{збігаються}, & \alpha < 1, \\ \text{розбігаються}, & \alpha \geq 1. \end{cases}}$$

3. Сформулюємо спільну для обох невластивих інтегралів теорему.

Теорема 9.17 **(про заміну змінної).**

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$ $(-\infty < a \leq b \leq +\infty)$, функція $\varphi(t)$ неперервно диференційовна на проміжку $[\alpha;\beta)$, де

$$\varphi([\alpha;\beta)) \subset [a;b), a = \varphi(\alpha), b = \lim_{t\to\beta}\varphi(t)$$

і збігається $\int_a^b f(x)dx$, то правдива *формула заміни змінної*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

4. Головне значення інтеграла 2-го роду. Якщо функція f на відрізку $[a;b]$ не обмежена лише в околі точки c, де $a < c < b$, то покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Причому для збіжності інтеграла мають існувати обидві границі, при незалежному прямуванні ε_1 та ε_2 до нуля.

Кажуть, що невластивий інтеграл 2-го роду *збігається в розумінні головного значення за Коші*, якщо існує скінченна границя

$$\boxed{v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right\}}.$$

Розбіжний невластивий інтеграл може збігатися в розумінні головного значення.

9.8.4. Ознаки збіжності невластивих інтегралів 2-го роду

Теорема 9.18 **(ознака порівняння).**

Якщо на проміжку $[a;b)$ функції f та φ неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = b$ і справджують умову $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то зі збіжності невластивого інтеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а з розбіжності невластивого інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 9.19 **(гранична ознака порівняння).** Якщо на проміжку $[a;b)$ функції f та φ додатні й неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = b$, існує границя

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L,\ \ (L \neq 0,\ \ L \neq \infty),$$

то невластиві інтеграли

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ \text{ та } \int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

9.9. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Визначений інтеграл за відрізком та невластиві інтеграли мають різноманітні застосування в математиці та фізиці.

9.9.1. Обчислення площі плоскої фігури у прямокутних координатах

1. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна й невід'ємна на відрізку $[a;b], a < b$, (рис. 9.6). Тоді площу криволінійної трапеції $aABb$ знаходять за формулою

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx.}$$

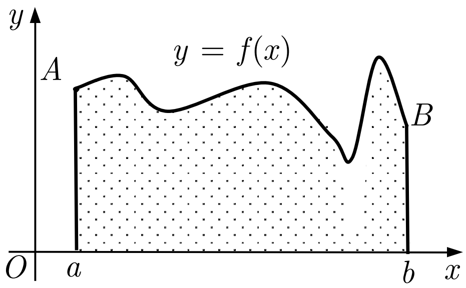


Рис. 9.6. Площа криволінійної трапеції

2. Нехай функція f від'ємна на відрізку $[a;b], a < b$. Тоді крива $y = f(x)$ розташована під віссю Ox і $\int_a^b f(x)dx < 0$.

Площа криволінійної трапеції

$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)dx.}$$

3. Нехай функція f змінює свій знак переходячи через точку $c \in (a;b)$, тобто частина криволінійної трапеції $aABb$ розташована над віссю Ox, а частина — під віссю Ox. Тоді площа всієї фігури

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx.}$$

4. Нехай функції f та g неперервні та $f(x) \geq g(x)$ на відрізку $[a;b], a < b$, причому криві $y = f(x)$ та $y = g(x)$ перетинаються в точках A та B (рис. 9.7). Тоді площу фігури, обмеженої цими лініями знаходять за формулою

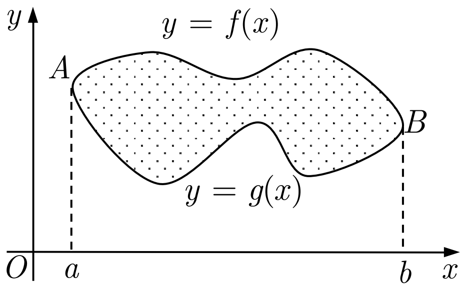


Рис. 9.7. Площа фігури

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.}$$

У найзагальнішому випадку, коли криві $y = f(x)$ та $y = g(x)$ можуть перетинатись на відрізку $[a;b]$, міняючись місцями, приміром,

$g(x) \le f(x), x \in [a;c]$ та $f(x) \le g(x), x \in [c;b]$, площу фігури обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx.}$$

5. Нехай криву задано в параметричній формі рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

де функції $x(t), y(t)$ неперервні, причому $x(t)$ має неперервну похідну $x'(t)$ на відрізку $[t_1;t_2]$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметричними рівняннями, знаходять за формулою

$$\boxed{S = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t)dx(t) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \right|.}$$

6. У деяких випадках для обчислення площ плоских фігур зручніше користуватися формулами, у яких інтегрують за змінною y. У цьому разі змінну x уважають функцією від y:

$$x = g(y),$$

де функція $g(y)$ однозначна, неперервна й невід'ємна на відрізку $[c;d]$ осі Oy (рис. 9.8).

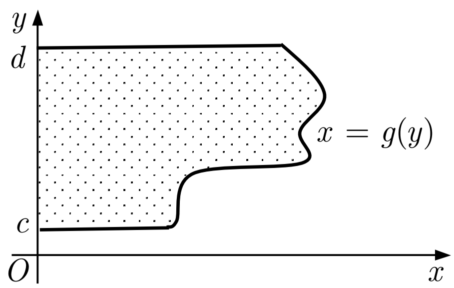


Рис. 9.8. Площа криволінійної трапеції

Площу криволінійної трапеції, обмеженою прямими $y = c, y = d$, віссю Oy і кривою $x = g(y)$ знаходять за формулою

$$\boxed{S = \int_c^d g(y)dy.}$$

9.9.2. Обчислення площі криволінійного сектора в полярних координатах

Нехай криву задано в полярній системі координат рівнянням

$$\rho = \rho(\varphi),$$

де функція ρ неперервна й невід'ємна на відрізку $[\alpha;\beta]$ (рис. 9.9).

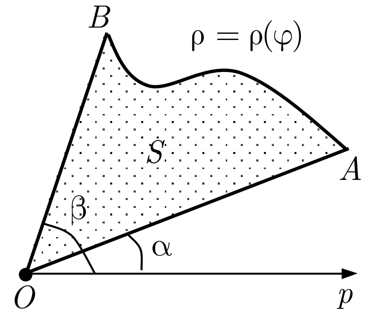


Рис. 9.9. Криволінійний сектор

Фігуру, обмежену кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і двома променями, що утворюють з полярною віссю кути α та β, називають *криволінійним сектором*.

1. Щоб знайти площу криволінійного сектора OBA, розбиваємо його на n довільних частин променями (рис. 9.10)

$$\varphi = \alpha = \varphi_0, \varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi = \varphi_{n-1}, \varphi = \varphi_n = \beta.$$

Позначаємо кути між цими променями через $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$.

2. Беремо довільний кут $\psi_k \in [\varphi_{k-1};\varphi_k]$ і обчислюємо $\rho_k = \rho(\hat{\varphi}_k)$. Розгляньмо круговий сектор з радіусом ρ_k і центральним кутом $\Delta\varphi_k$ площею

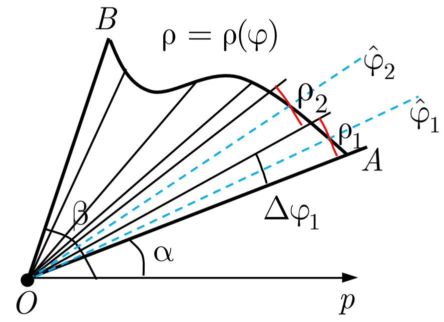


Рис. 9.10. Площа криволінійного сектора

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\rho_k^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\rho^2(\hat{\varphi}_k)\Delta\varphi_k.$$

3. Побудувавши такі кругові сектори в усіх частинах криволінійного сектора OBA, дістаємо фігуру, що складається з n кругових секторів, площа якої

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\hat{\varphi}_k)\Delta\varphi_k.$$

4. Ділитимемо кут AOB на все дрібніші і дрібніші частини так, щоб $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta\varphi_k \to 0$. Тоді одержана фігура все менше й менше відрізнятиметься від криволінійного сектора OBA, і тому природно вважати площею криволінійного сектора OBA число

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta\varphi_k \to 0 \\ n\to\infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta\varphi_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\hat{\varphi}_k)\Delta\varphi_k.$$

Сума S_n є інтегральною сумою для функції $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$, неперервної на відрізку $[\alpha;\beta]$, завдяки неперервності функції $\rho(\varphi)$. Отже, ця сума, коли $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta\varphi_k \to 0$, має границю і дорівнює

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

5. Площу криволінійного сектора OBA знаходять за формулою

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.}$$

9.9.3. Об'єм тіла

Розгляньмо тіло, обмежене замкненою поверхнею Ω. Нехай відома формула для площі $S(x)$ будь-якого перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox. Уважаємо, що функція $S(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$.

1. Довільно розбиваємо тіло на n шарів площинами (рис. 9.11)

$$x = a = x_0,$$
$$x = x_1, x = x_2, \ldots,$$
$$x = b = x_n.$$

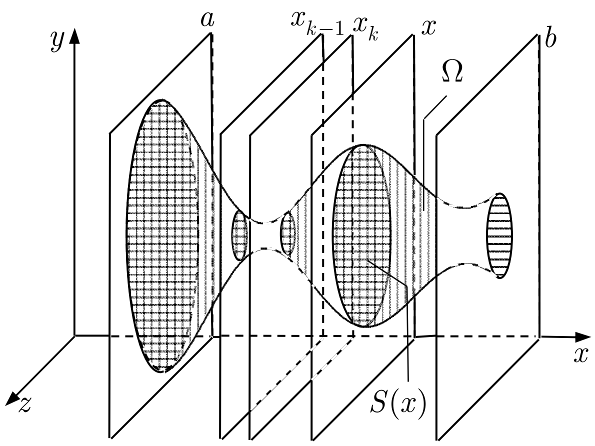


Рис. 9.11. Об'єм тіла за площами перерізів

2. На кожному відрізку $[x_{k-1};x_k], k = \overline{1,n}$, вибираємо довільну точку $\hat{x}_k$.

Заміняємо кожний шар тіла циліндром із твірними, паралельними осі Ox, напрямною циліндра є контур перерізу тіла площиною $x = \hat{x}_k$ (рис. 9.12).

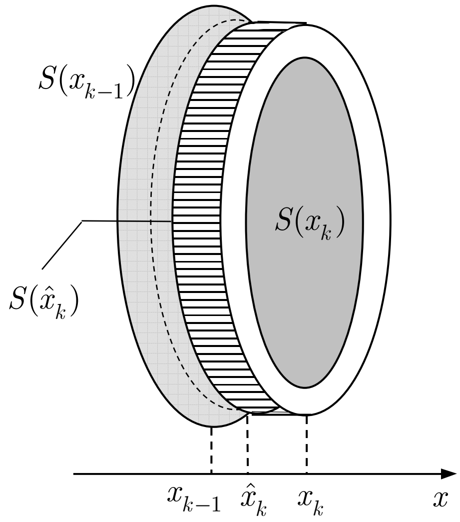


Рис. 9.12. Циліндр

3. Об'єм Δv_k такого циліндра дорівнює добутку площі $S(\hat{x}_k)$ основи, де $\hat{x}_k \in [x_{k-1}; x_k]$, на його висоту Δx_k: $S(\hat{x}_k)\Delta x_k$, а об'єм усіх циліндрів

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(\hat{x}_k)\Delta x_k.$$

4. Якщо ця сума має границю, коли $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$, то її природно взяти за об'єм заданого тіла

$$\boxed{V = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} S(\hat{x}_k)\Delta x_k.}$$

5. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} S(\hat{x}_k)\Delta x_k$ є інтегральною сумою для функції S, неперервної на $[a;b]$, то функція S є інтегровною на відрізку $[a;b]$ і

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx.}$$

9.9.4. Обчислення об'єму тіла обертання та площі поверхні обертання

1. Розгляньмо тіло, утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $abBA$, обмеженою кривою $y = f(x)$, прямими $x = a, x = b$ $(a < b)$ і віссю Ox. Це тіло називають *тілом обертання* (рис. 9.13).

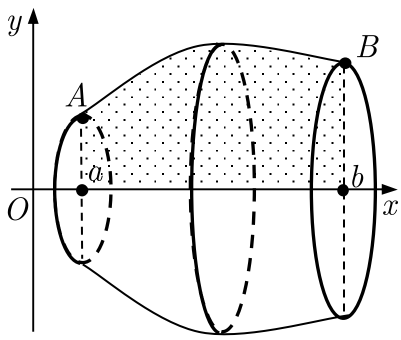


Рис. 9.13. Тіло та поверхня обертання

Переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, яка відповідає абсцисі x, є круг із площею

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Отже, об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox знаходять за формулою

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$$

2. Розгляньмо поверхню, утворену обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = f(x), x \in [a;b]$. Цю поверхню називають *поверхнею обертання* (див. рис. 9.13).

Площу поверхні обертання дуги кривої навколо осі Ox можна знайти за формулою

$$\boxed{Q_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.}$$

9.9.5. Деякі фізичні застосування

1. Масу прямолінійного стрижня з лінійною густиною $\mu = \mu(x), x \in [a;b]$, знаходять за формулою

$$\boxed{m = \int_a^b \mu(x)dx.}$$

2. Шлях, пройдений матеріальною точкою, яка рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$ від моменту $t = t_1$ до моменту $t = t_2 > t_1$, знаходять за формулою

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.}$$

3. Роботу, яку виконує змінна сила під час прямолінійного переміщення матеріальної точки вздовж осі Ox від точки a до точки b знаходять за формулою

$$\boxed{A = \int_a^b F(x)dx.}$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

9.1.1. 1. Якщо для всіх $x \in (a;b)$ виконано рівність $f'(x) = g'(x)$, то що можна сказати про залежність між функціями f та g?

2. Покажіть, що $F(x) = \operatorname{arctg} x$ та $G(x) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ відрізняються на сталу на проміжку $(0;+\infty)$ як первісні тієї самої функції.

3. Знайдіть сталу $C = F(x) - G(x)$.

4. Перевірте значення C за допомогою тригонометричних формул

9.1.2. Укажіть правдиві твердження.

1. Якщо f та g неперервні функції в інтервалі $(a;b)$ та $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, то $f(x) = g(x), x \in (a;b)$.

2. Якщо $F'(x) = G'(x)$, то $F(x) = G(x)$.

3. $F(x) = x^2 - 2x$ та $G(x) = x^2 - 2x + 1$ є первісні тієї самої функції.

9.1.3. Знайдіть усі первісні функції:

1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = 1$; 3) $f(x) = \left|x\right|$.

9.1.4. Нехай функція F є первісною функції f на всій числовій осі. Доведіть чи спростуйте твердження:

1) якщо f — періодична функція, то й F — періодична функція;

2) якщо f — непарна функція, то F — парна функція;

3) якщо f — парна функція, то F — непарна функція.

9.1.5. Нехай F є первісною функції f на проміжку X.

1. Якщо f є додатною функцією на X, то що відомо про функцію F на цьому проміжку?

2. Якщо f є зростаючою диференційовною функцією на X, то що відомо про функцію F?

9.1.6. Визначте, який із двох графіків є графіком функції та графіком її первісної?

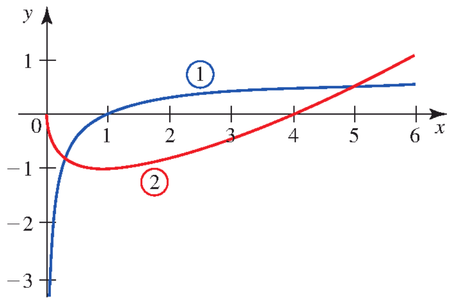


Рис. 9.1.6.1)

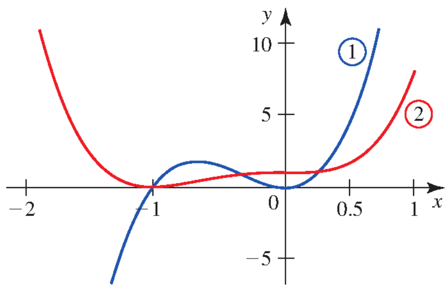


Рис. 9.1.6.2)

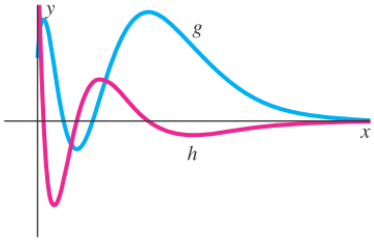


Рис. 9.1.6.3)

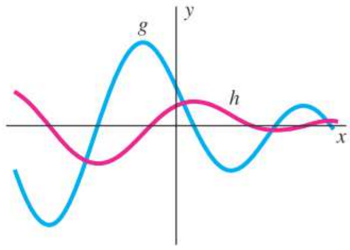


Рис. 9.1.6.4)

9.1.7. Визначте, графік якої функції F, G чи H є графіком первісної функції $y = f(x)$.

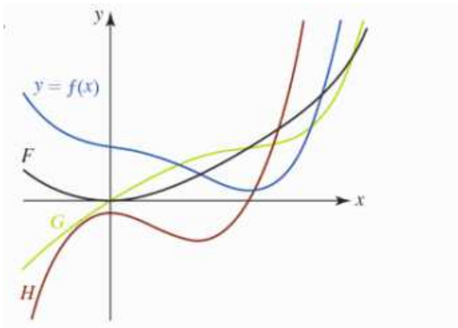


Рис. 9.1.7.1)

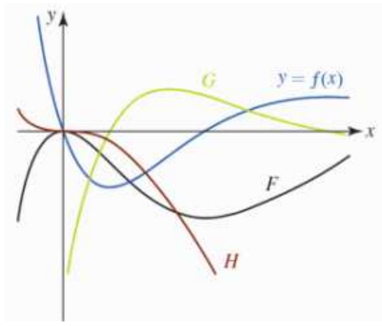


Рис. 9.1.7.2)

9.1.8. Для функції f, яку задано на рисунку, зобразіть графіки двох її первісних $F(x)$ та $G(x)$, де $F(0) = 0, G(0) = 1$. Визначте, у яких з точок x_1, x_2 та x_3, первісні мають локальний мінімум, локальний максимум та перегин.

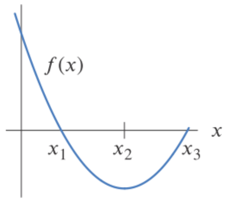


Рис. 9.1.8.1)

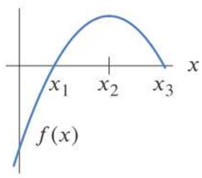


Рис. 9.1.8.2)

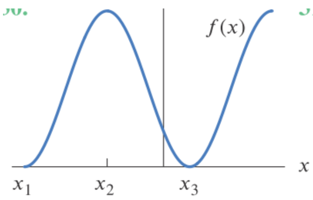


Рис. 9.1.8.3)

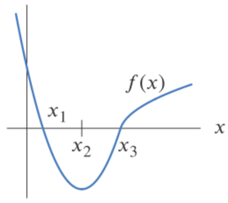


Рис. 9.1.8.4)

9.1.9. Знайдіть функцію f, якщо:

1) $\int f(x)dx = \ln\left|\ln x\right| + C$; 2) $\int f(x)dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

9.1.10. Знайдіть можливі формули для $f(x)$ та $g(x)$, якщо:

1) $\int g(f(x))g(x)dx = \sin(\sin x) + C$;

2) $\int f(g(x))g(x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = \sin e^{\sqrt{x}} + C$.

9.1.11. Знайдіть усі функції f, такі що $f^{(n)}(x) = 0$.

9.1.12. Для всіх значень k знайдіть інтеграл $\int \dfrac{1}{x^2+k}dx$.

9.2.1. Виконайте заміну змінної в інтегралі:

1) $\int \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx,\ u = e^x$;

2) $\int \dfrac{\ln x}{x}dx,\ u = \ln x$;

3) $\int \dfrac{x}{(x^2-3)^2}dx,\ u = x^2 - 3$;

4) $\int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx, u = \sqrt{x}$.

9.2.2. Покажіть, що результат інтегрування частинами не зміниться, якщо у формулі

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

замість $v(x)$ підставити $v(x) + C, C = \text{const}$.

9.2.3. Знайдіть інтеграл $\int x^4e^xdx$, користуючись рекурентною формулою

$$I_n = \int x^ne^xdx = x^ne^x - nI_{n-1}.$$

9.2.4. Знайдіть інтеграл $\int e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)dx$ інтегруванням частинами інтеграла $\int e^x \ln x dx$. Узагальніть цей результат на будь-який інтеграл вигляду $\int e^x[f(x) + f'(x)]dx$.

9.2.5. Нехай функція f має обернену функцію f^{-1} на області означення. Доведіть, що:

1) $\int f^{-1}(x)dx = \int yf'(y)dy$;

2) $\int f^{-1}(x)dx = yf(y) - \int f(y)dy$.

9.2.6. Для двічі диференційовної функції f, знайдіть

$$\int f''(x)\ln x dx + \int \frac{f(x)}{x^2}dx.$$

9.2.7. Знайдіть можливі формули для $f(x)$ та $g(x)$, якщо

$$\int x^3 g'(x)dx = f(x)g(x) - \int x^2 \cos x dx.$$

9.2.8. Який метод (уведенням під знак інтеграла чи інтегруванням частинами) знаходження інтеграла треба застосувати:

1) $\int x\cos x^2 dx$; 2) $\int x\cos x dx$; 3) $\int x^2 e^x dx$;

4) $\int xe^{x^2}dx$; 5) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; 6) $\int x\ln x dx$.

9.3.1. Запишіть розклад дробу на суму елементарних дробів (без знаходження коефіцієнтів):

1) $\frac{3x-1}{(x-3)(x+4)}$; 2) $\frac{5}{x(x^2-4)}$; 3) $\frac{2x-3}{x^3-x^2}$;

4) $\frac{x^2}{(x+2)^3}$; 5) $\frac{3x}{(x-1)(x^2+6x+10)}$; 6) $\frac{1-3x^3}{(x^2+1)^2}$.

9.3.2. Знайдіть інтеграл, ефективнішим способом, порівняно з безпосереднім розкладом на суму елементарних дробів:

1) $\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$; 2) $\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}dx$; 3) $\int \frac{x^5}{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}dx$.

Укажіть скільки треба було б знаходити коефіцієнтів під час безпосереднього розкладання.

9.3.3. Знаходження інтеграла $\int \frac{1+2x^2}{x^5(1+x^2)^3}dx$ розкладанням на суму елементарних дробів вимагає знаходження 11 коефіцієнтів. Знайдіть інтеграл ефективнішим методом після перетворення

$$\int \frac{1+2x^2}{x^5(1+x^2)^3}dx = \int \frac{x+2x^3}{x^6(1+x^2)^3}dx.$$

9.3.4. Доведіть, що для будь-якого інтегралу вигляду $\int \frac{ax^n+b}{x(cx^n+d)}dx$, де $ad-bc \neq 0$, можна знайти дійсне число r таке, що

$$\int \frac{ax^n + b}{x(cx^n + d)} \cdot \frac{x^r}{x^r} dx = \frac{1}{k} \int \frac{du}{u},$$

для деякої сталої k.

9.4.1. Обчисліть $\int \sin x \cos x dx$ 4 методами:

1) підстановкою $u = \sin x$; 2) підстановкою $u = \cos x$;

3) перетворенням $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; 4) інтегруванням частинами.

Поясніть різноманітність відповідей.

9.4.2. Обчисліть інтеграл $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ перетворенням підінтегральної функції (без використання універсальної тригонометричної підстановки).

9.4.3. Обчисліть інтеграл $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$, використовуючи формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

9.5.1. Виконайте заміну змінної $x = t^2, t \geq 0$, в інтегралі $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$.

9.5.2. Запишіть відповідну тригонометричну підстановку для інтеграла:
1) $\int \sqrt{9 + x^2} dx$; 2) $\int \sqrt{9 - x^2} dx$; 3) $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$.

9.6.1. Обчисліть інтегральну суму для функції, що задано графічно на відрізку $[0;8]$, використовуючи розбиття на 4 проміжки однакової довжини і вибираючи обчислення функції:

1) на лівому кінці проміжку;
2) на правому кінці проміжку;
3) у середині проміжку.

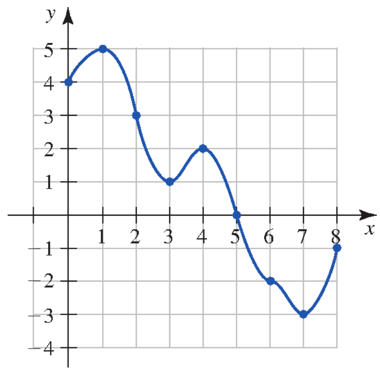


Рис. до 9.6.1

9.6.2. Для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f укажіть правдиві твердження.

1. Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$, то $f(x) > 0, x \in [a;b]$.

2. Якщо f спадає на $[a;b]$, то $(b-a)f(b) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(a)$.

3. Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) = 0, x \in [a;b]$.

4. $\int\limits_0^a f(x)dx \le \int\limits_0^{2a} f(x)dx, a > 0$.

5. Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$, то $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \in [a;b]$.

9.6.3. Для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f укажіть правдиві твердження.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx$ виражає площу між графіком функції і віссю Ox на відрізку $[a;b]$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx$ виражає площу між графіком функції і віссю Ox на відрізку $[a;b]$, якщо $f(x) \ge 0$.

3. $-\int\limits_a^b f(x)dx$ виражає площу між графіком функції і віссю Ox на відрізку $[a;b]$, якщо $f(x) \le 0$.

9.6.4. Відомо, що $\int\limits_{-3}^0 f(x)dx = 4, \int\limits_0^3 f(x)dx = 2, \int\limits_0^3 g(t)dt = 1$. Обчисліть:

1) $\int\limits_{-3}^0 5f(x)dx$; 2) $\int\limits_0^{-3} f(t)dt$; 3) $\int\limits_0^3 (f(x) + g(x))dx$; 4) $\int\limits_{-3}^3 f(x)dx$; 5) $\int\limits_3^3 f(x)dx$.

9.6.5. Запишіть одним інтегралом $\int\limits_0^8 f(x)dx + \int\limits_{-2}^0 f(x)dx + \int\limits_8^6 f(x)dx$.

9.6.6. Без обчислення з'ясуйте, який з інтегралів менше:

1) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^{10} x dx$ або $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^{11} x dx$; 2) $\int\limits_0^{13} x^{14} dx$ або $\int\limits_0^{13} x^{15} dx$.

9.6.7. Що можна стверджувати про неперервну на відрізку $[a;b]$ функцію f, якщо $\int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx = 0$?

9.6.8. Визначте знак інтеграла без обчислень:

1) $I = \int\limits_1^2 (x^2 - 4x + 3)dx$; 2) $I = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} x \sin x dx$.

9.6.9. Середнє значення функції f на відрізку $[1;4]$ дорівнює 4. Знайдіть $\int\limits_1^4 f(x)dx$.

9.6.10. Якщо $a < b$ та f — неперервна на $[a;b]$, $\overline{f}$ — середнє значення функції f на відрізку $[a;b]$. Доведіть, що $\int\limits_a^b (f(x) - \overline{f})dx = 0$.

9.6.11. Нехай $a < b$ та f — неперервна на $[a;b]$. Знайдіть таку сталу k, що інтеграл $\int\limits_a^b (f(x) - k)^2 dx$ набуває найменшого значення.

9.6.12. Знайдіть такі сталі a та b, для яких інтеграл $\int\limits_a^b (1 - x^2)dx$ набуває найбільшого значення.

9.6.13. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, знайдіть:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$; 2) $\int\limits_0^6 \left|x - 2\right| dx$.

9.6.14. Поясніть геометрично (без обчислення), чому для будь-якого $\alpha > 0$ правдива рівність

$$\int\limits_0^1 x^{\alpha} dx + \int\limits_0^1 x^{1/\alpha} dx = 1.$$

9.6.15. Нехай f зростаюча функція, що має обернену функцію $g = f^{-1}$. Витлумачте геометрично рівність

$$\int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_{f(0)}^{f(a)} g(x)dx = af(a).$$

9.7.1. Нехай $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. За рисунком, знайдіть:

1) $F(0)$;

2) $F'(1)$;

3) проміжок, де функція F опукла догори;

4) точку локального максимуму функції F на відрізку $[0;8]$.

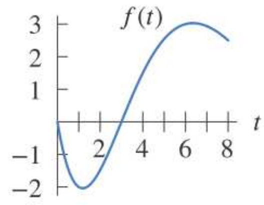


Рис. до 9.7.1

9.7.2. Нехай $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, де f зображено на рисунку. Визначте:

1) точки локального мінімуму F;

2) точки локального максимуму F;

3) точку глобального максимуму F на відрізку $[0;5]$;

4) точку глобального мінімуму F на відрізку $[0;5]$;

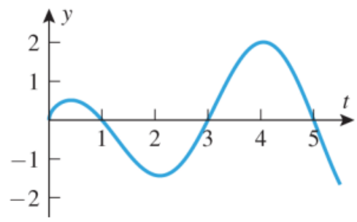


Рис. до 9.7.2

5) проміжки опуклості догори та донизу функції F;

6) точки перегину функції F на відрізку $[0;5]$.

9.7.3. Укажіть, які лінії на рисунку є графіками функцій $f(x), f'(x)$ та $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$.

9.7.4. Задано графік функції f. Для $g(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ знайдіть $g(4), g'(4)$ та $g''(4)$.

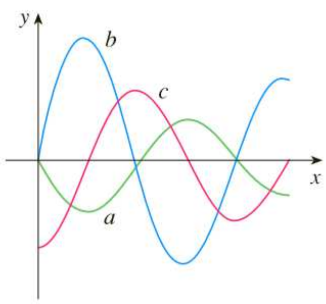


Рис. до 9.7.3

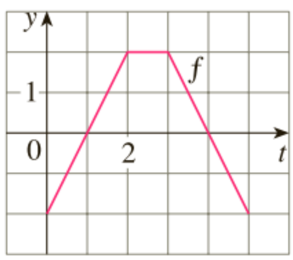


Рис. до 9.7.4

9.7.5. Для функції $f(x,y) = \int\limits_x^y e^{t^2} dt$ знайдіть f'_x та f'_y.

9.7.6. Доведіть, що функція $f(x) = \int\limits_0^{1/x} \frac{dt}{t^2+1} + \int\limits_0^x \frac{dt}{t^2+1}$ є сталою для $x > 0$.

9.7.7. Знайдіть функцію f та всі значення a такі, що

$$\int\limits_a^x f(t)dt = x^2 + x - 2.$$

9.7.8. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int\limits_3^x \frac{\sin t}{t}dt\right)$.

9.7.9. Знайдіть функцію F таку, що $F'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}, F(17) = 0$.

9.7.10. Відомо, що F є первісною для f на відрізку $[0;5]$, $F(0) = 10$ та $\int\limits_0^5 f(x)dx = 20$. Знайдіть $F(5)$.

9.7.11. Про диференційовну функцію f відомо:

x	0	1	$\pi/2$	e	3
$f(x)$	5	7	8	10	11
$f'(x)$	2	4	6	9	12

Обчисліть:

1) $\int\limits_0^1 f'(x)\sin f(x)dx$; 2) $\int\limits_1^3 f'(x)e^{f(x)}dx$; 3) $\int\limits_1^3 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$; 4) $\int\limits_0^1 e^x f'(e^x)dx$;

5) $\int\limits_1^e \frac{f'(\ln x)}{x}dx$; 6) $\int\limits_0^1 f'(x)f(x)dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cdot f'(\cos x)dx$.

9.7.12. Для яких значень a,b та c $\int\limits_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)dx = 0$?

9.7.13. Обчисліть $\left(\int\limits_0^{50} f(t)dt\right) : \left(\int\limits_0^1 f(50x)dx\right)$.

9.7.14. Нехай $\int\limits_0^1 f(t)dt = 3$. Обчисліть: 1) $\int\limits_0^{1/2} f(2t)dt$; 2) $\int\limits_0^1 f(1-t)dt$.

9.7.15. Доведіть, що якщо f та g неперервні функції, то

$$\int\limits_0^t f(t-x)g(x)dx = \int\limits_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

9.7.16. Доведіть, що $\int\limits_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$.

9.7.17. Нехай f є додатною неперервною на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функцією. Обчисліть $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx$

(Указівка: використайте формулу $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$).

9.7.18. Нехай $I_{n,m} = \int\limits_0^1 x^m(1-x)^n dx$ для сталих m та n. Доведіть, що $I_{m,n} = I_{n,m}$.

9.7.19. Якщо f непарна функція та $\int\limits_{-2}^3 f(x)dx = 30$, то знайдіть $\int\limits_2^3 f(x)dx$.

9.7.20. Якщо f є парна функція та $\int\limits_{-2}^2 (f(x)-3)dx = 8$, знайдіть $\int\limits_0^2 f(x)dx$.

9.7.21. Обчисліть $\int\limits_0^1 xf''(x)dx$, якщо $f(0)=6, f(1)=5$ та $f'(1)=2$.

9.7.22. Для двічі диференційовної на відрізку $[a;b]$ функції f, де $f(a)=f(b)=0$, доведіть, що

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)dx = -2\int_a^b f(x)dx.$$

9.7.23. Для двічі неперервно диференційовних на відрізку $[a;b]$ функцій f та g, де $f(a)=g(a)=f(b)=g(b)=0$, доведіть, що

$$\int_a^b f(x)g''(x)dx = \int_a^b f''(x)g(x)dx.$$

Для яких ще припущень про значення функцій f та g в точках a та b це твердження правдиве?

9.7.24. Для неперервно диференційовної на відрізку $[a;b]$ функції f, де $f'(a)=f'(b)=0$, доведіть, що

$$\int_a^b xf''(x)dx = f(a)-f(b).$$

9.7.25. Для неперервно диференційовної на відрізку $[a;b]$ функції f, доведіть, що

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}((f(b))^2-(f(a))^2).$$

9.8.1. Визначте, для яких значень a інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{ax}dx$ збігається?

9.8.2. Знайдіть значення $b>0$, для яких $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2-4}$ є невластивим.

9.8.3. Укажіть правдиві твердження.

1. Якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються, то $\int\limits_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$ збігається.

2. Якщо $\int\limits_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$ розбігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

3. Якщо f неперервна для всіх x і $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ розбігається, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

4. Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ розуміють як $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$.

5. Якщо f неперервна на $[0;+\infty)$ та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

6. Якщо $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ розбігаються, то $\int\limits_{a}^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$ розбігається.

9.8.4. Нехай $I(a) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^a)(1+x^2)}, a \in \mathbb{R}$. Обчисліть $I(a)$.

(Указівка: розбити інтеграл на суму двох інтегралів на відрізку [0;1] та $[1;+\infty)$, запроваджуючи нову зміну, звести 2-й інтеграл до інтеграла за відрізком [0;1]).

9.8.5. Відомо, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}dx$.

9.8.6. Припускаючи, що g є диференційовною обмеженою функцією на $\mathbb{R}$, доведіть тотожність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xg(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

9.8.7. Укажіть з якими інтегралами вигляду $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ порівняний інтеграл:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+4}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \left(e^{1/\sqrt{x}} - 1\right)^2 dx$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2x^5+4x+1}{5x^8+9x+7}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin\frac{2}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^2+4}$

9.8.8. Визначте, для яких значень α збігається інтеграл:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} x^\alpha dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} x^\alpha dx$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^\alpha dx$.

9.8.9. Який з невластивих інтегралів порівняний з $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}$:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/6}}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^6}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$?

9.8.10. Для функції f на рисунку обидва інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_0^a f(x)dx$ збігаються. Нехай функція g така, що $0 < g(x) < f(x), x > a$, та $0 < f(x) < g(x), x < a$.

Визначте, які з поданих інтегралів збігаються або розбігаються:

1) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$; 2) $\int\limits_0^a g(x)dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$; 4) $\int\limits_0^{+\infty} g(x)dx$;

5) $\int\limits_a^{+\infty} (f(x)-g(x))dx$; 6) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$; 7) $\int\limits_a^{+\infty} (f(x))^2 dx$.

9.9.1. За якою формулою можна знайти площу криволінійної трапеції?

9.9.2. Нехай два мазки фарби зроблено одним рухом щітки завширшки $k > 0$. Яка із зображених фігур мають більшу площу? Сформулюйте загальний принцип.

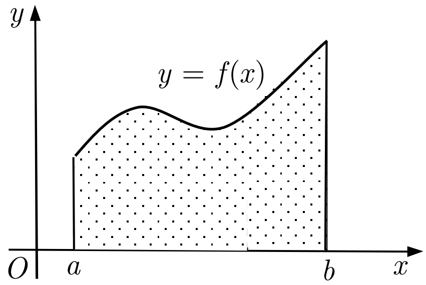


Рис. до 9.9.1

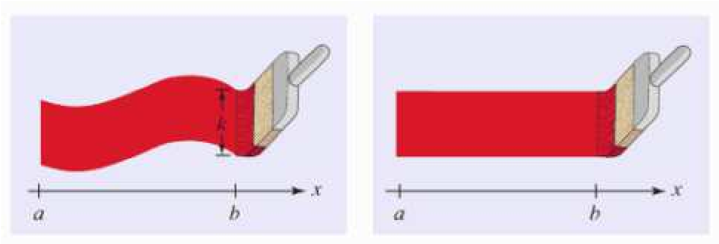


Рис. до 9.9.2

9.9.3. Виразіть інтегралом площу заштрихованої фігури.

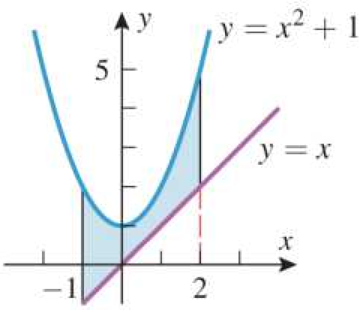


Рис. до 9.9.3.1)

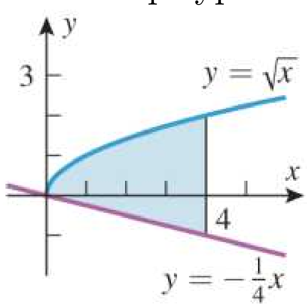


Рис. до 9.9.3.2)

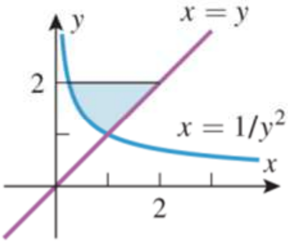


Рис. до 9.9.3.3)

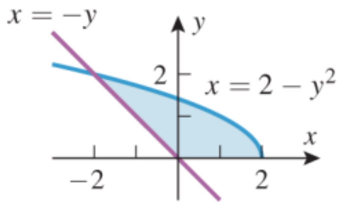


Рис. до 9.9.3.4)

9.9.4. Знайдіть значення a, для якого криволінійні трапеції, зображені на рисунку, мають однакову площу.

9.9.5. За рисунком знайдіть:

1) загальну площу, обмежену графіком функції f, віссю Ox, прямими $x = 0$ та $x = 5$;

2) інтеграл $\int\limits_0^5 f(x)dx$.

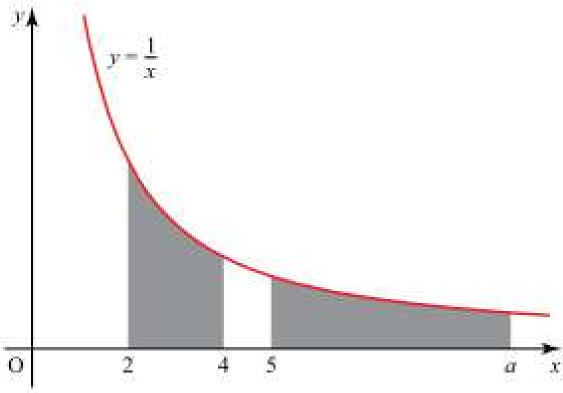


Рис. до 9.9.4

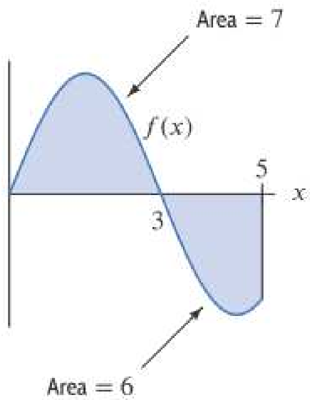


Рис. до 9.9.5

9.9.6. За рисунком знайдіть значення:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx$; 2) $\int\limits_b^c f(x)dx$; 3) $\int\limits_a^c f(x)dx$; 4) $\int\limits_a^c \left|f(x)\right|dx$.

9.9.7. За значенням інтеграла $\int\limits_{-2}^0 f(x)dx = 4$ та рисунком оцініть:

1) $\int\limits_0^2 f(x)dx$; 2) $\int\limits_{-2}^2 f(x)dx$; 3) площу заштрихованої фігури.

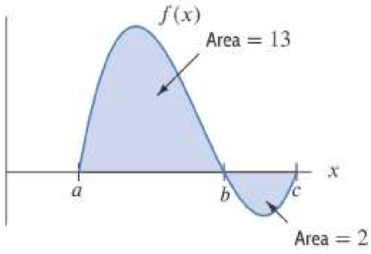


Рис. до 9.9.6

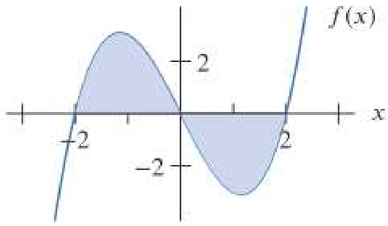


Рис. до 9.9.7

9.9.8. Для функції f, заданої графічно (дуги кривої є півколами), обчисліть:

1) $\int\limits_0^2 f(x)dx$; 2) $\int\limits_0^6 f(x)dx$;

3) $\int\limits_1^4 f(x)dx$; 4) $\int\limits_1^6 \left|f(x)\right|dx$.

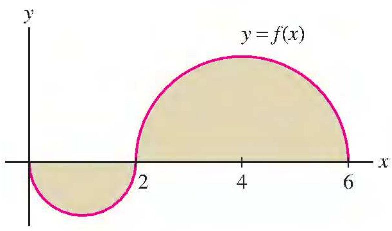


Рис. до 9.9.8

9.9.9. Знайдіть значення $k > 0$ таке, що:

1) площа, обмежена кривими $y = x^2$ та $y = k - x^2$ дорівнює 72;

2) пряма $y = k$ поділяє площу між параболою. $y = 100 - x^2$ та віссю Ox на фігури, що мають рівну площу.

9.9.10. Задано функцію f на відрізку [0;5]. Знайдіть значення a та b, де $a < b$, яке справджує умову:

1) значення $\int\limits_0^b f(x)dx$ найбільше;

2) значення $\int\limits_a^4 f(x)dx$ найменше;

3) значення $\int\limits_a^b f(x)dx$ найбільше;

4) значення $\int\limits_a^b f(x)dx$ найменше.

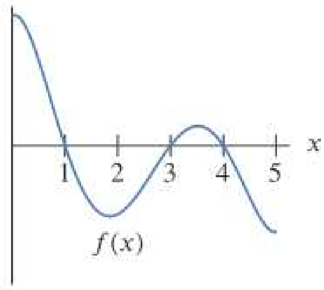


Рис. до 9.9.10

9.9.11. Доведіть рівність

$$\int\limits_0^a f(x)dx = af(a) - \int\limits_0^a xf'(x)dx$$

двома способами:

1) інтегруванням частинами, припускаючи, що f зростає;

2) підстановкою $u = f(x)$ доведіть, що $\int\limits_0^a xf'(x)dx$ дорівнює площі заштрихованої фігури на рисунку.

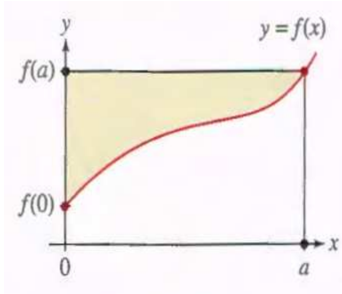


Рис. до 9.9.11

9.9.12. Який зі збіжних невластивих інтегралів:

а) $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} (2 - f(x))dx$; в) $\int\limits_2^{6} f(x)dx$; г) $\int\limits_0^{2} f(x)dx$.

виражає площу області D_i?

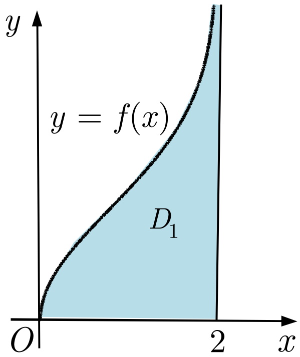


Рис. 9.9.12.1)

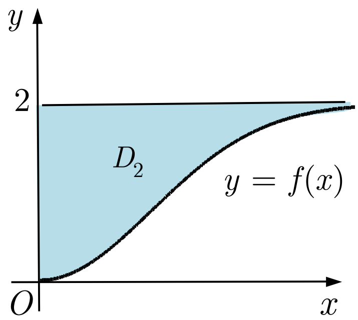


Рис. 9.9.12.2)

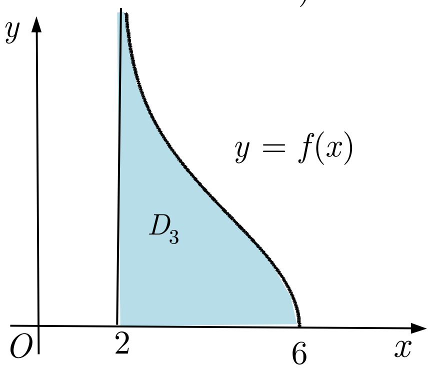


Рис. 9.9.12.3)

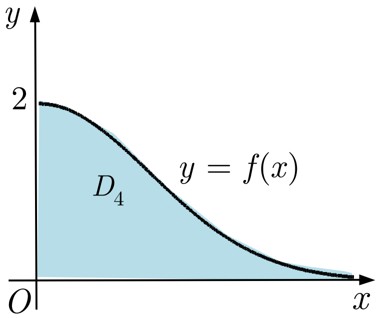


Рис. 9.9.12.4)

Відповіді

9.1.1. 1) $f(x) - g(x) = const, x \in (a;b)$; 3) $C = \frac{\pi}{2}$. **9.1.2.** 1), 3).

9.1.3. 1) $F(x) = C$; 2) $F(x) = x + C$; 3) $F(x) = \frac{x|x|}{2} + C$.

9.1.4. 1) Неправдиве твердження, приміром, $f(x) = f_{\text{пер.}}(x) + a$, де $f_{\text{пер.}}$ — T-періодична функція; 2) правдиве; 3) неправдиве, $F(x) = f_{\text{неп.}}(x) + a$, де $f_{\text{неп.}}$ — непарна функція, $a = \text{const}$.

9.1.5. 1) функція F зростає; 2) функція F опукла донизу.

9.1.6. 1) 1 — функція, 2 — первісна; 2) 1 — функція, 2 — первісна; 3) g — первісна, h — функція; 4) g — функція, h — первісна.

9.1.7. 1) G; 2) F.

9.1.8. 1) x_1 — max, x_2 — перегин, x_3 — min; 2) x_1 — min x_2 — перегин, x_3 — max; 3) x_1, x_2, x_3 —перегин; 4) x_1 — max, x_2 — перегин, x_3 — min.

9.1.9. 1) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; 2) $f(x) = x^2 e^x$.

9.1.10. 1) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x, g(x) = e^{\sqrt{x}}$.

9.1.11. $f(x) = P_{n-1}(x)$.

9.1.12. $\dfrac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{k}} + C$ для $k > 0$, $-\dfrac{1}{x} + C$ для $k = 0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{-k}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{-k}}{x+\sqrt{-k}}\right| + C$ для $k < 0$.

9.2.1. 1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{du}{1+u^2}$; 2) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u du$;

3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos u du$.

9.2.3. $I_4 = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$. **9.2.4.** $e^x \ln x + C$; $e^x f(x) + C$.

9.2.6. $f'(x)\ln x - \dfrac{f(x)}{x} + C$. **9.2.7.** $f(x) = x^3, g(x) = \dfrac{1}{3}\cos x$.

9.2.8. 1, 4), 5) уведенням під знак диференціала; 2), 3), 6) інтегруванням частинами.

9.3.1. 1) $\dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+4}$; 2) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+2}$; 3) $\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{B}{x-1}$;

4) $\dfrac{A_1}{x+2} + \dfrac{A_2}{(x+2)^2} + \dfrac{A_3}{(x+2)^3}$; 5) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Mx+N}{x^2+6x+10}$; 6) $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}$.

9.3.2. 1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-1)}{x^4-1}$, 4;

2) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^4+5x^2+6)}{x^4+5x^2+6}$, 4;

3) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^4}{(x^2-1)^{10}}d(x^2) = \left|\begin{matrix} x^4 = \\ (x^2-1)^2 + 2(x^2-1) + 1 \end{matrix}\right|$, 20.

9.3.3. $\displaystyle\int \frac{x+2x^3}{x^6(1+x^2)^3}dx = \int \frac{x+2x^3}{(x^4+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^4+x^2)}{(x^4+x^2)^3}$.

9.4.2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx =$

$= \operatorname{tg} x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C.$

9.4.3. $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C.$

9.5.1. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2tdt}{1+t}$. **9.5.2.** 1) $x = 3\operatorname{tg} t$; 2) $x = 3\sin t$; 3) $x = \frac{3}{\cos t}$.

9.6.1. 1) 14; 2) 4; 3) 6. **9.6.2.** 2.

9.6.3. 2, 3. **9.6.4.** 1) 20; 2) -4; 3) 3; 4) 6; 5) 0.

9.6.5. $\int\limits_{-2}^{6} f(x)dx$. **9.6.6.** 1) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^{11} x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{13} x^{14} dx$.

9.6.7. $f(x) \equiv 0, x \in [a;b]$. **9.6.8.** 1) $I < 0$; 2) $I > 0$.

9.6.9. 12. **9.6.11.** $k = \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

9.6.12. $a = -1, b = 1$. **9.6.13.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 10.

9.7.1. 1) $F(0) = 0$; 2) $F'(1) = -2$; 3) $(0;1)$ та $(6;8)$; 4) $x = 3$.

9.7.2. 1) $x = 3$; 2) $x = 1$ та $x = 5$; 3) $x = 5$; 4) $x = 3$; 5) опукла донизу $\left(0;\frac{1}{2}\right), (2;4)$, опукла догори $\left(\frac{1}{2};2\right), (4;5)$; 6) $x = \frac{1}{2}, x = 2, x = 4$.

9.7.3. a) $F(x)$; b) $f'(x)$; c) $f(x)$. **9.7.4.** 1) $g(4) = 2, g'(4) = 0, g''(4) = -2$.

9.7.5. $f'_x = -e^{x^2}, f'_y = e^{y^2}$. **9.7.7.** $f(t) = 2t + 1, a = -2$ або $a = 1$.

9.7.8. $\sin 3$. **9.7.9.** $F(x) = \int\limits_{17}^{x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt.$

9.7.10. $F(5) = 30$.

9.7.11. 1) $\cos 5 - \cos 7$; 2) $e^{11} - e^{7}$; 3) $\ln 11 - \ln 7$; 4) 3; 5) 2; 6) 12; 7) 2.

9.7.12. $a = -3c,\ b, c \in \mathbb{R}$. **9.7.13.** 50.

9.7.14. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3. **9.7.17.** $\frac{\pi}{4}$.

9.7.19. 30. **9.7.20.** 10.

9.7.21. 3

9.8.1. $a < 0$. **9.8.2.** $b \geq -2$.

9.8.3. 1 та 3. **9.8.4.** $I(a) = \frac{\pi}{4}$

9.8.5. $\sqrt{\pi b}$. **9.8.7.** 1) $\alpha = 2$; 2) $\alpha = 1$; 3) $\alpha = 3$; 4) $\alpha = 4$.

9.8.8. 1) $\alpha < -1$; 2) $\alpha > -1$; 3) $\alpha \in \varnothing$. **9.8.9.** 2.

9.8.10. 1) збігається; 2) невідомо; 3) збігається; 4) невідомо; 5) збігається; 6) розбігається; 7) збігається.

9.9.1. $S = \int\limits_a^b f(x)dx$

9.9.2. Площі однакові. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x), y = f(x) + k, x \in [a;b]$, не залежить від функції f.

9.9.3. 1) $\int\limits_{-1}^{2} (x^2 + 1 - x)dx$; 2) $\int\limits_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4}x\right)dx$; 3) $\int\limits_1^2 \left(y - \frac{1}{y^2}\right)dy$; 4) $\int\limits_0^2 (2 - y^2 + y)dy$.

9.9.4. $a = 10$.

9.9.5. 1) 13; 2) 1.

9.9.6. 1) 13; 2) -2; 3) 11; 4) 15.

9.9.7. 1) -4; 2) 0; 3) 8.

9.9.8. 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{2}$.

9.9.9. 1) $k = 18$; 2) $k = 100 - \frac{100}{\sqrt[3]{4}}$.

9.9.10. 1) $b = 1$; 2) $a = 1$; 3) $a = 0, b = 1$; 4) $a = 1, b = 5$.

9.9.12. 1-г; 2-б; 3-в; 4-а

Формули, твердження, алгоритми

9.1. Первісна. Невизначений інтеграл

❶ ***Первісна.*** Функцію F називають *первісною* функції f на проміжку X, якщо для будь-якого $x \in X$ правдива рівність	$F'(x) = f(x).$
❷ ***Теорема про первісну.*** Якщо $F(x)$ є первісною функції f на проміжку X, то будь-яка інша первісна функції f на цьому проміжку має вигляд	$F(x) + C,$ $C = \text{const} \in \mathbb{R}.$
❸ ***Достатня умова існування первісної.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона має на цьому відрізку первісну.	
❹ ***Невизначений інтеграл.*** Сукупність $\{F(x)+C\}$ всіх первісних функції f на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* від функції f і позначають	$\int f(x)dx = F(x) + C.$
Знаходження первісної та невизначеного інтеграла функції називають *інтегруванням.*	$f(x)dx$ — *підінтегральний вираз;* $f(x)$ — *підінтегральна функція*; x — *змінна інтегрування*; C — *довільна стала.*
❺ ***Властивості невизначеного інтеграла*** $(u = u(x))$***:***	
① $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$ ② $d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du;$ ③ $\int dF(u) = F(u) + C;$	④ $\int kf(u)du = k\int f(u)du, k \neq 0;$ ⑤ $\int (f_1(u) \pm f_2(u))du =$ $= \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du;$ ⑥ $\int f(u)du = F(u) + C$

9.2. Основні формули інтегрування*

❶ $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	❷ $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
❸ $\int e^u du = e^u + C$	❹ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
❺ $\int \sin u du = C - \cos u$	❻ $\int \cos u du = \sin u + C$
❼ $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	❽ $\int \frac{du}{\sin^2 u} = C - \operatorname{ctg} u$
❾ $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$	❿ $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$
⓫ $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	⓬ $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = C - \operatorname{cth} u$
⓭ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C,$ $a > 0$	⓮ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$ $a > 0$
⓯ $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C,$ $a > 0$	⓰ $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C,$ $a > 0$
⓱ $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C$	⓲ $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
⓳ $\int \operatorname{tg} u du = C - \ln\lvert\cos u\rvert$	⓴ $\int \operatorname{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

9.3. Основні методи інтегрування

Метод заміни змінної	
❶ ***Формула заміни змінної*** (f неперервна, φ неперервно диференційовна і має обернену функцію)	$\int f(x)dx = \lvert x = \varphi(t)\rvert = = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big\rvert_{t=\varphi^{-1}(x)}.$
❷ ***Формула введення функції під знак диференціала***	$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = = \lvert u = \varphi(x)\rvert = \int f(u)du$

* Формулу ⓭ називають «довгим логарифмом», а ⓰ — «високим логарифмом».

❸ ***Перетворення диференціалів деяких функцій:***	
① $dx = \frac{1}{a} d(ax+b), a, b = \text{const};$ ② $x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha} d(x^{\alpha}), \alpha \neq 0;$ ③ $\frac{dx}{x} = d(\ln x);$ ④ $e^x dx = d(e^x);$ ⑤ $\cos x dx = d(\sin x);$ ⑥ $\sin x dx = -d(\cos x);$	⑦ $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);$ ⑧ $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x);$ ⑨ $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x);$ ⑩ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$
Метод інтегрування частинами	
❹ ***Формула інтегрування частинами.*** ($u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовні)	$\int u dv = uv - \int v du$ $\left(\int uv' dx = uv - \int vu' dx\right)$
❺ ***Узагальнена формула інтегрування частинами***	$\int uv' dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)} v^{(-k)} +$ $+(-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v^{(-n)} dx,$ де $v^{(-1)} = \int v dx, \ldots, v^{(-n-1)} = \int v^{(-n)} dx$
❻ ***Типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами***	
1-й тип ($P_n(x)$ — многочлен степеня n)	
① $\int P_n(x) \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \\ e^{ax} \end{Bmatrix} dx$	$u = P_n(x)$
2-й тип ($m \in \mathbb{N}$)	
② $\int P_n(x)(\ln x)^m dx$	$u = (\ln x)^m$
③ $\int P_n(x)(\operatorname{arcf} x)^m dx$	$u = (\operatorname{arcf} x)^m$
3-й тип	
④ $\int e^{ax} \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} dx, \int \begin{Bmatrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{Bmatrix} dx$	Двічі інтегрувати частинами$\Rightarrow$ рівняння щодо шуканого інтеграла.
⑤ $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx, \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$	Один раз інтегрувати частинами$\Rightarrow$ рівняння щодо шуканого інтеграла.

9.4. Інтегрування раціональних функцій

<table>
<tr><th>Типи елементарних дробів</th><th>Інтегрування елементарних дробів</th></tr>
<tr><td>❶ Дріб 1-го типу $\dfrac{A}{x-a}$</td><td>$\displaystyle\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln\left|x-a\right|+C$</td></tr>
<tr><td>❷ Дріб 2-го типу $\dfrac{A}{(x-a)^k}, k\ge 2$</td><td>$\displaystyle\int\frac{A\,dx}{(x-a)^k}=\frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❸ Дріб 3-го типу $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \ D=p^2-4q<0$</td></tr>
<tr><td>① $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}$</td><td>Виділяють повний квадрат у знаменнику</td></tr>
<tr><td>② $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$</td><td>Виділяють у чисельнику похідну від знаменника:
$$d(x^2+px+q)=(2x+p)dx;$$
$$Mx+N\equiv\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❹ Дріб 4-го типу $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, D=p^2-4q<0, k\ge 2$</td></tr>
<tr><td>① $\displaystyle I_k=\int\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^k}$</td><td>$$I_k=\frac{1}{2\alpha^2(k-1)}\times$$
$$\times\left(\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^{k-1}}+(2n-3)I_{k-1}\right),$$
$$k\in\mathbb{N}$$</td></tr>
<tr><td>② $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$</td><td>$$t=x+\frac{p}{2}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів</td></tr>
<tr><td>❺ Раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називають правильним, якщо степінь чисельника менше, ніж степінь знаменника $(m<n)$.</td><td>Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати як суму многочлена і правильного дробу:
$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=R_{m-n}(x)+\frac{\tilde{P}(x)}{Q_n(x)},$$
де $R_{m-n}(x)$ — ціла частина дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $\tilde{P}(x)$ — остача від ділення $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.</td></tr>
</table>

❻ ***Теорема розкладання.*** Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(n > m)$ можна єдиним чином розкласти на суму елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{a_0(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}} =$$

$$= \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} +$$

$$+\ldots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} +$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_{1\mu_1}x+N_{1\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}} +$$

$$+\ldots + \frac{M_{l1}x+N_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \ldots + \frac{M_{l\mu_l}x+N_{l\mu_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}}.$$

Метод невизначених коефіцієнтів

❼ ***Спосіб прирівнювання коефіцієнтів.*** Праву частину рівності зводять до спільного знаменника, а потім прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої і правої частин.

❽ ***Спосіб викреслювання.***

Множнику $(x-a)^{\alpha}$ правильного дробу

$$\frac{P_m(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}, \varphi(a) \neq 0,$$

відповідає розклад

$$\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}$$

$$A_{\alpha} = \left.\frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)^{\alpha}}\varphi(x)}\right|_{x=a},$$

$$A_{\alpha-k} = \left.\frac{1}{k!}\left(\frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)^{\alpha}}\varphi(x)}\right)^{(k)}\right|_{x=a},$$

$$k = \overline{1, \alpha-1}$$

❾ ***Схема методу невизначених коефіцієнтів.***

① Розкладають знаменник правильного дробу на множники.

② Записують розклад на елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами.

③ Визначають коефіцієнти способом прирівнювання коефіцієнтів, викреслювання або окремих значень.

❿ ***Схема інтегрування раціонального дробу.***

① Виділяють (у разі потреби) цілу частину дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

② Правильний дріб розкладають на суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів.

③ Інтегрують суму цілої частини й елементарних дробів.

9.5. Інтегрування тригонометричних виразів

Основні способи знаходження $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$	
❶ Загальний випадок — *універсальна тригонометрична підстановка*	$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
❷ $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\cos x)d(\cos x) = \lvert t = \cos x\rvert$
❸ $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\sin x)d(\sin x) = \lvert t = \sin x\rvert$
❹ $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\operatorname{tg} x)d(\operatorname{tg} x) = \lvert t = \operatorname{tg} x\rvert$ або $I = \int \tilde{R}(\operatorname{ctg} x)d(\operatorname{ctg} x) = \lvert t = \operatorname{ctg} x\rvert$
Знаходження $\int \sin^m x \cos^n x dx$	
❺ $m = 2k-1, k \in \mathbb{N}$	$\sin^{2k-1} x dx = \sin x(\sin x)^{2k-2} dx =$ $= -(1-\cos^2 x)^{k-1} d(\cos x)$
❻ $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$	$\cos^{2k-1} x dx = (1-\sin^2 x)^{k-1} d(\sin x)$
❼ $m = 2k, n = 2l, k, l \in \mathbb{N}$	$\sin^{2k} x \cos^{2l} x =$ $= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l$
❽ $\int \operatorname{tg}^m x dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$	
❾ $\int \operatorname{ctg}^m x dx = \int \operatorname{ctg}^{m-2} x \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \operatorname{ctg}^{m-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx$	
❿ $\int \sin kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int \big(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x\big) dx$	
⓫ $\int \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int \big(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x\big) dx$	
⓬ $\int \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int \big(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x\big) dx$	

9.6. Інтегрування ірраціональних виразів

❶ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Виділяють повний квадрат під коренем
❷ $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$	Виділяють у чисельнику похідну від підкореневого виразу: $d(ax^2+bx+c)=(2ax+b)dx;$ $Ax+B\equiv\dfrac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\dfrac{Ab}{2a}\right)$
❸ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$x-\alpha=\dfrac{1}{t}$
❹ $\displaystyle\int R\left(x, X^{r_1/s_1},\ldots, X^{r_k/s_k}\right)dx,$ де $X=\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^s,$ $s=\text{НСК}(s_1,\ldots,s_k)$

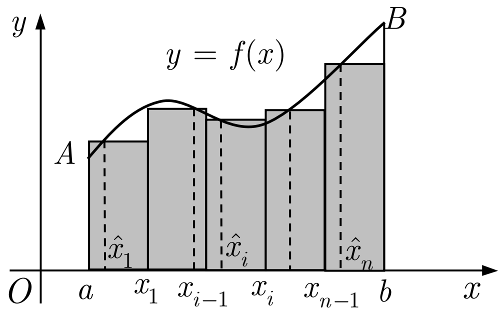
❺ ***Інтегрування диференціального бінома*** $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, m,n,p\in\mathbb{Q}$ (***теорема Чебишова***)

I	II	III	IV
$p\in\mathbb{Z}$	$\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$	$\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$	Решта випадків
$x=t^s,$ $s=\text{НСК}(s_1,s_2),$ $m=\dfrac{r_1}{s_1}, n=\dfrac{r_2}{s_2}$	$a+bx^n=t^s,$ $p=\dfrac{r}{s}$	$ax^{-n}+b=t^s,$ $p=\dfrac{r}{s}$	Інтеграл не виражається в елементарних функціях.

❻ ***Тригонометричні підстановки***

① $\displaystyle\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
② $\displaystyle\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$	$x=a\,\text{tg}\,t, t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
③ $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=\dfrac{a}{\cos t}, t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

9.7. Визначений інтеграл за відрізком

❶ ***Розбиття відрізка*** $[a;b]$	$[a;b]=[x_0;x_1]\cup\ldots\cup[x_{n-1};x_n]$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$
❷ ***Інтегральна сума*** для функції $f(x), x\in[a;b]$	$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i$, $\hat{x}_i\in[x_{i-1};x_i], \Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=\overline{1,n}$
❸ ***Визначений інтеграл*** від функції $f(x)$ ***за відрізком*** $[a;b]$ $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\(n\to\infty)}}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i<\infty$, де a — *нижня межа інтегрування*, b — *верхня межа інтегрування*. Функцію f називають *інтегровною* на відрізку $[a;b]$.	
❹ ***Геометричний зміст визначеного інтеграла:*** площа криволінійної трапеції $aABb$, якщо $f(x)\geq 0$.	$\int\limits_a^b f(x)dx=S$
❺ ***Необхідна умова інтегровності.*** Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.	
❻ ***Достатні умови інтегровності.*** Функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, якщо виконано одну з умов:	1) функція f неперервна на відрізку $[a;b]$; 2) функція f обмежена й неперервна на $[a;b]$, за винятком скінченної кількості точок; 3) означена й монотонна на відрізку $[a;b]$.

9.8. Властивості визначеного інтеграла.

❶ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$ (*незалежність від змінної інтегрування*);	
❷ $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$ (*лінійність*);	
❸ $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (*адитивність*);	
$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \le x < c, \\ f_2(x), & c < x \le b \end{cases}$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f_1(x)dx + \int\limits_c^b f_2(x)dx$
❹ $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (*орієнтованість*), $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;	
❺ якщо $f(x) \le g(x), x \in [a;b], a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$ (*монотонність*);	
❻ якщо $f(x) \ge 0, x \in [a;b], a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$ (*збереження знаку*);	
❼ якщо $a < b$, то $\left\lvert \int\limits_a^b f(x)dx \right\rvert \le \int\limits_a^b \lvert f(x) \rvert dx$;	
❽ $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, де $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x), M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$	
❾ ***Теорема про середнє значення функції.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що	$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.
Середнє значення функції f на відрізку $[a;b]$	$\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$
❿ ***Формула Бароу*** (f неперервна на $[a;b]$)	$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \ x \in [a;b]$

9.9. Обчислення визначеного інтеграла

❶ ***Формула Ньютона — Ляйбніца*** (f неперервна на $[a;b]$, F — первісна f на $[a;b]$)	$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$, $F'(x) = f(x)$
❷ ***Формула інтегрування частинами*** ($u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a;b]$)	$\int\limits_a^b udv = uv\Big\|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$
❸ ***Формула заміна змінних*** (f неперервна на $[a;b]$, $x = \varphi(t)$ неперервно диференційовна на $[t_1;t_2]$, $\varphi([t_1;t_2]) = [a;b]$ та $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$)	$\int\limits_a^b f(x)dx = \left\| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \begin{array}{c\|c} x & t \\ \hline b & \beta \\ \hline a & \alpha \end{array} \end{array} \right\| = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
❹ Інтеграл від ***парної функції*** f за симетричним відрізком	$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$
❺ Інтеграл від ***непарної функції*** f за симетричним відрізком	$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$
❻ Інтеграл від T***-періодичної функції*** f	$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$

❼ ***Формула Валіса***

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} 1, & n = 2k-1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

9.10. Застосування визначеного інтеграла

❶ ***Площа*** фігури, обмеженої лініями $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b$	$S=\int\limits_a^b \left\lvert f(x)-g(x)\right\rvert dx$
❷ ***Площа*** криволінійного сектора $\rho=\rho(\varphi), \varphi=\alpha, \varphi=\beta$ в ***полярних*** координатах	$S=\dfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$
❸ ***Площа*** криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданої ***параметрично***: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} t\in[t_1;t_2]$	$S=\left\lvert\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\right\rvert$
❹ ***Об'єм*** тіла за відомими площами ***перерізів*** $S(x)$, перпендикулярних до осі Ox	$V=\int\limits_a^b S(x)dx$
❺ ***Об'єм*** тіла, одержаного ***обертанням*** криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x), x\in[a;b]$, навколо ***осі*** Ox	$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$
❻ ***Довжина*** дуги кривої $y=f(x), x\in[a;b]$	$l=\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$
❼ ***Площа поверхні обертання***, утвореної обертанням кривої $y=f(x), x\in[a;b]$, навколо осі Ox	$Q=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

9.11. Невластиві інтеграли

Невластивий інтеграл 1-го роду	***Невластивий інтеграл 2-го роду***
❶ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx,$ f неперервна на кожному $[a;B]$	❷ $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$ b — точка нескінченного розриву, f неперервна на $[a;b)$
Якщо існує скінчена границя, то невластивий інтеграл *збігається*, якщо ж ні, то — інтеграл *розбігається*.	
❸ $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}-\begin{cases}\text{збігається}, & \alpha>1,\\ \text{розбігається}, & \alpha\le 1\end{cases}$	❹ $\int\limits_a^b\dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}-\begin{cases}\text{збігається}, & \alpha<1,\\ \text{розбігається}, & \alpha\ge 1\end{cases}$

❺ ***Ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції f та φ неперервні і справджують умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то зі збіжності $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ випливає збіжність $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.	❻ ***Ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;b)$ функції f та φ неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = b$ і справджують умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то зі збіжності $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx$ випливає збіжність $\int\limits_a^{b} f(x)dx$, а з розбіжності $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx$.
❼ ***Гранична ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції f та φ додатні й неперервні, існує границя $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L \quad (L \ne 0,\ L \ne \infty),$$ то невластиві інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.	❽ ***Гранична ознака порівняння.*** Якщо на проміжку $[a;b)$ функції f та φ додатні й неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = b$, існує границя $$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L,\ (L \ne 0,\ L \ne \infty),$$ то невластиві інтеграли $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{b} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.
❾ Якщо $\int\limits_a^{+\infty} \lvert f(x)\rvert dx$ збігається, то збігається і $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.	❿ Якщо збігається $\int\limits_a^{b} \lvert f(x)\rvert dx$, то збігається і $\int\limits_a^{b} f(x)dx$.
⓫ $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_A^{b} f(x)dx;$ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$$	⓬ $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx;$ $$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{b} f(x)dx,$$ $$c \in (a;b),\ \lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

Практикум 9.1. Метод безпосереднього інтегрування

Навчальні задачі

9.1.1.1. Знайти $\int x^3 dx$.

Розв'язання. [9.2.2, 9.1.5.]

[*У формулі* [*9.2.2*] *покладаємо* $\alpha = 3$.]

$$\int x^3 dx \overset{[9.2.2]}{=} \left[\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right] \overset{\alpha=3}{=} \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

[*Правильність інтегрування можна перевірити диференціюванням.*]

$$\left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

9.1.1.2. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. [9.2.2, 9.1.5.]

[*Переписуємо функцію у вигляді зручному для інтегрування, використовуючи формули* $\sqrt[q]{u^p} = u^{p/q}$ та $\frac{1}{u^{\alpha}} = u^{-\alpha}$.]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx \overset{[9.2.2]}{=} \left[\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right] \overset{\alpha=-1/2}{=} \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

9.1.1.3. Знайти $\int \frac{x^2 + 3\sqrt{x} - 2}{x^3} dx$.

Розв'язання. [9.2.1, 9.2.2, 9.1.5.][1]

$$\int \frac{x^2 + 3\sqrt{x} - 2}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 3x^{-5/2} - 2x^{-3} \right) dx \overset{[9.1.5]}{=}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \int kf(u)du = k\int f(u)du, k \neq 0, \\ \int (f_1(u) \pm f_2(u))du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-5/2} dx - 2\int x^{-3} dx \overset{[9.2.1, 9.2.2]}{=} \left[\begin{array}{l} \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \\ \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \end{array} \right] =$$

$$\overset{①}{=}\ln|x|+3\frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1}-2\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=$$

$$=\ln|x|+3\frac{x^{-3/2}}{-3/2}-2\frac{x^{-2}}{-2}+C=\ln|x|-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+C.$$

Коментар. ① Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності та інваріантності невизначеного інтеграла.

Інтегруючи алгебричну суму функцій, дістають кілька довільних сталих, але в результаті пишуть лише одну сталу — їхню алгебричну суму.

9.1.1.4. Знайти $\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}$.

Розв'язання. [9.2.1, 9.1.5.] ①

$$\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}\overset{[9.1.5]}{=}\left[\begin{array}{c}\int f(u)du=F(u)+C,\\ u=\varphi(x)\end{array}\right]=\int\frac{du}{u}\overset{[9.2.1]}{=}\ln|u|+C\overset{u=\sin x}{=}\ln|\sin x|+C.$$

9.1.2.1. Знайти $\int\frac{dx}{x^2+3}$.

Розв'язання. [9.2.15.]

$$\int\frac{dx}{x^2+3}\overset{[9.2.15]}{=}\left[\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C,a>0\right]\overset{a=\sqrt{3}}{=}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

9.1.2.2. Знайти $\int\frac{dx}{x^2-4}$.

Розв'язання. [9.2.16.]

$$\int\frac{dx}{x^2-4}\overset{[9.2.16]}{=}\left[\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C,a>0\right]\overset{a=2}{=}\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

9.1.2.3. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Розв'язання. [9.2.14.]

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}\overset{[9.2.14]}{=}\left[\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C,a>0\right]\overset{a=\sqrt{5}}{=}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

9.1.2.4. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$.

Розв'язання. [9.2.13.]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} \overset{[9.2.13]}{=} \left[\begin{array}{c} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, \\ a > 0 \end{array}\right] = \ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right| + C.$$

9.1.2.5. Знайти $\int 2^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x)$.

Розв'язання. [9.2.4, 9.1.5.]

$$\int 2^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) \overset{[9.1.5]}{=} \left[\begin{array}{c} \int f(u)du = F(u) + C, \\ u = \varphi(x) \end{array}\right] = \int 2^u du \overset{[9.2.4]}{=}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \\ a > 0, a \neq 1 \end{array}\right] \overset{[a=2]}{=} \frac{2^u}{\ln 2} + C \overset{u=\operatorname{tg} x}{=} 2^{\operatorname{tg} x} + C.$$

9.1.3.1. Перетворюючи підінтегральну функцію, знайти $\int \frac{dx}{4+5x^2}$.

Розв'язання. [9.2.15, 9.1.5.]

$$\int \frac{dx}{4+5x^2} \overset{[9.1.5]}{=} \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 4/5} \underset{a=2/\sqrt{5}}{\overset{[9.2.15]}{=}}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2} + C.$$

9.1.3.2. Перетворюючи підінтегральну функцію, знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

Розв'язання. [9.2.14, 9.1.5.]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} \overset{[9.1.5]}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{9/4 - x^2}} \underset{a=3/2}{\overset{[9.2.14]}{=}} \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right) + C.$$

9.1.3.3. Перетворюючи підінтегральну функцію, знайти $\int a^x e^x dx$.

Розв'язання. [9.2.4.]

$$\int a^x e^x dx \overset{[5.3.5]}{=} \int (ae)^x dx \overset{[9.2.4]}{=} \frac{(ae)^x}{\ln a + 1} + C.$$

9.1.3.4. Перетворюючи підінтегральну функцію, знайти $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв'язання. [9.2.7, 9.1.5.]

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx \overset{[5.9.5]}{=} \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \overset{[9.1.5]}{=} \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx \overset{[9.2.7]}{=} \operatorname{tg} x - x + C.$$

9.1.3.5. Перетворюючи підінтегральну функцію, знайти $\int (\arcsin x + \arccos x) dx$.

Розв'язання.

$$\int (\arcsin x + \arccos x) dx \overset{[5.9.3]}{=} \int \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int dx = \frac{\pi}{2} x + C.$$

9.1.3.6. Перетворюючи підінтегральну функцію, знайти $\int \frac{1}{x^4 + x^2} dx$.

Розв'язання. [9.2.2, 9.2.15, 9.1.5.]

$$\int \frac{1}{x^4 + x^2} dx = \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^4 + x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \overset{[9.1.5]}{=}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \overset{[9.2.2, 9.2.15]}{=} \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{x}{1} + C = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

9.1.3.7. Перетворюючи підінтегральну функцію, знайти $\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} dx$.

Розв'язання. [9.2.2, 9.2.16, 9.1.5.]

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{x(x^2 - 1) + 1}{x^2 - 1} dx =$$

$$= \int \left(x + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx \overset{[9.1.5]}{=} \int x dx + \int \frac{dx}{x^2 - 1} \overset{[9.2.2, 9.2.16]}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C.$$

9.1.4. Знайдіть таку функцію f, що $f'(x) = 2x, f(0) = 1$.

Розв'язання. [9.1.5.]

$$f(x) = \int 2x dx = 2 \int x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C.$$

[*Визначаємо значення сталої з початкової умови* $f(0) = 1$.]

$$1 = f(0) = C.$$

Отже, $f(x) = x^2 + 1$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.1.5. Знайдіть:

1) $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$;

2) $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} - 7\sqrt[4]{x^3}\right) dx$;

3) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$;

4) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$;

7) $\int \frac{dx}{1 + 9x^2}$;

8) $\int \frac{dx}{16x^2 + 9}$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$;

11) $\int \frac{dx}{9x^2 - 4}$;

12) $\int \frac{dx}{16x^2 - 25}$;

13) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

14) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$;

15) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;

16) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$;

17) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^4 - 9}} dx$;

18) $\int \frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} dx$;

19) $\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)} dx$;

20) $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$;

21) $\int \frac{x^4}{1 - x^2} dx$;

22) $\int \frac{x^6}{x^2 - 1} dx$.

9.1.6. Користуючись інваріантністю формул інтегрування, знайдіть:

1) $\int \sin x d(\sin x)$;

2) $\int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x)$;

3) $\int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}$;

4) $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}$;

5) $\int e^{\sin x} d(\sin x)$;

6) $\int \frac{d(e^x)}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

9.1.7. Знайдіть таку функцію f, що:

$$1)\ f'(x) = x^2 + 4x + 1, f(-1) = 1;\quad 2)\ f'(x) = \sin x + \cos x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Відповіді

9.1.5. 1) $x^3 - \ln|x| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$; 2) $x^4 - \frac{1}{x} - 4\sqrt[4]{x^7} + C$; 3) $3x - \frac{2\cdot(3/2)^x}{\ln 3/2} + C$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x \ln\frac{a}{b} - 2x + \left(\frac{b}{a}\right)^x \ln\frac{b}{a} + C$; 5) $\frac{1}{5}\arcsin 5x + C$; 6) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C$;

7) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$; 8) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}x + C$; 9) $\frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}\right) + C$;

10) $\frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}}\right) + C$; 11) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right| + C$; 12) $\frac{1}{40}\ln\left|\frac{4x-5}{4x+5}\right| + C$;

13) $x + \cos x + C$; 14) $C - \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$; 15) $-\operatorname{ctg} x - x + C$; 16) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$;

17) $\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2+3}}{x + \sqrt{x^2-3}}\right| + C$; 18) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x + C$; 19) $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$;

20) $-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$; 21) $-x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$; 22) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

9.1.6. 1) $\frac{\sin^2 x}{2} + C$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$; 3) $\ln(1 + x^2) + C$; 4) $\ln|\arcsin x| + C$;

5) $e^{\sin x} + C$; 6) $\arcsin e^x + C$.

9.1.7. 1) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x + \frac{1}{3}$;2) $f(x) = \sin x - \cos x + 1$.

Практикум 9.2. Метод заміни змінної

9.2.1.1. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int (2x+1)^{10}dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.2.]

$$\int (2x+1)^{10}dx = \left[dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a, b = \text{const}\right] = \left|dx = \frac{1}{2}d(2x+1)\right| =$$

$$= \int (2x+1)^{10}\cdot\frac{1}{2}d(2x+1) \overset{①}{=} \frac{1}{2}\int (2x+1)^{10}d(2x+1) \overset{[9.2.2]}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{11}}{11} + C = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + C.$$

Коментар. ① Інтеграл $\int (2x+1)^{10} d(2x+1)$ знаходимо за властивістю інваріантності:

$$\int (2x+1)^{10} d(2x+1) \overset{u=2x+1}{=} \int u^{10} du = \frac{u^{11}}{11} + C \overset{u=2x+1}{=} \frac{(2x+1)^{11}}{11} + C.$$

9.2.1.2. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \sqrt[3]{(x+2)^5} dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.2.]

$$\int \sqrt[3]{(x+2)^5} dx = \left| dx = d(x+2) \right| \overset{①}{=} \int (x+2)^{5/3} d(x+2) \overset{[9.2.2]}{=}$$

$$= \frac{(x+2)^{8/3}}{8/3} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x+2)^8} + C.$$

Коментар. ① Завдяки властивості

$$d(x+b) = dx, b = \text{const},$$

під знаком диференціала завжди можна додати чи відняти деяку сталу.

9.2.1.3. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \sin 3x dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.5.]

$$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) \overset{[9.2.5]}{=} -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

9.2.1.4. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int (x^2+4)^6 2x dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.2.]

$$\int (x^2+4)^6 \cdot 2x dx = \left[x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} d(x^\alpha), \alpha \neq 0 \right] = \left| 2x dx = d(x^2+4) \right| =$$

$$= \int (x^2+4)^6 d(x^2+4) \overset{[9.2.2]}{=} \frac{(x^2+4)^7}{7} + C.$$

9.2.1.5. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \frac{x^3}{x^8-1} dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.16.]

$$\int \frac{x^3}{x^8-1} dx = \left| x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4) \right| = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-1} \overset{[9.2.16]}{=} \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^4-1}{x^4+1}\right| + C.$$

9.2.1.6. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.1.]

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} \overset{[9.2.1]}{=} \ln\left|\ln x\right| + C.$$

9.2.1.7. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$.

***Розв'язання**. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.2.]*

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx = \left|\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)\right| =$$

$$= \int \operatorname{arctg}^3 x d(\operatorname{arctg} x) \overset{[9.2.2]}{=} \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

9.2.1.8. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.2.]

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left|\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)\right| =$$

$$= \int \arcsin x d(\arcsin x) \overset{[9.2.2]}{=} \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$$

9.2.1.9. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.3.]

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \left|\cos x dx = d(\sin x)\right| = \int e^{\sin x} d(\sin x) \overset{[9.2.3]}{=} e^{\sin x} + C.$$

9.2.1.10. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \frac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}}dx$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.2.]

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}}dx = \left|\sin x dx = d(3-\cos x)\right| =$$

$$= \int (3-\cos x)^{-1/2} d(3-\cos x) = \overset{[9.2.2]}{=} \frac{(3-\cos x)^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{3-\cos x} + C.$$

9.2.1.11. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.4.]

$$\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x} = \left|\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)\right| = \int 2^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) \overset{[9.2.4]}{=} \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\ln 2} + C.$$

9.2.1.12. Знайти введенням функції під знак диференціала $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.7.]

$$\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \int \frac{d(e^x)}{\cos^2 e^x} \overset{[9.2.7]}{=} \operatorname{tg} e^x + C.$$

9.2.2.1. Знайти $\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$ заміною змінної $x = t^2, t > 0$.

Розв'язання. [9.3.1.]

$$\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}} = \left[\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right] = \left|\begin{matrix} x = t^2, t > 0, \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{2tdt}{2t^2+t} = \int \frac{2dt}{2t+1} = \int \frac{d(2t+1)}{2t+1} = \ln(2t+1) + C \overset{①}{=}$$

$$= \left|t = \sqrt{x}\right| = \ln(2\sqrt{x}+1) + C.$$

Коментар. ① Після знаходження первісної потрібно повернутись до початкової змінної.

9.2.2.2. Знайти $\int x(3x-10)^{20}dx$ підстановкою $t = 3x - 10$.

Розв'язання. [9.3.1.]

$$\int x(3x-10)^{20}dx = \left|\begin{matrix} 3x-10 = t, \\ x = \dfrac{t+10}{3}, \\ dx = \dfrac{1}{3}dt \end{matrix}\right| = \int \frac{t+10}{3} t^{20} \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{9}\int (t^{21} + 10t^{20})dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{t^{22}}{22} + \frac{10t^{21}}{21}\right) + C = \frac{1}{9}\left(\frac{(3x-10)^{22}}{22} + \frac{10}{21}(3x-10)^{21}\right) + C.$$

9.2.2.3. Знайти $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$ підстановкою $t = \sqrt{1-e^x}$.

Розв'язання. [9.3.1.]

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{1-e^x}, \\ x = \ln\left(1-t^2\right), \\ dx = -\dfrac{2tdt}{1-t^2} \end{matrix}\right| = -2\int \frac{(1-t^2)^3}{t} \cdot \frac{tdt}{1-t^2} =$$

$$= -2\int (t^4 - 2t^2 + 1)dt = -2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right) + C =$$
$$= -\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(1-e^x)^3} - 2\sqrt{1-e^x} + C.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.2.3. Знайдіть уведенням під знак диференціала:

1) $\int (x+1)^{15}dx$;
2) $\int \frac{dx}{(x-3)^5}$;
3) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx$;
4) $\int \sqrt{8-2x}dx$;
5) $\int \frac{dx}{4x-1}$;
6) $\int \frac{dx}{3x+5}$;
7) $\int \cos(1-2x)dx$;
8) $\int \sin(2x-3)dx$;
9) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$;
10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;
11) $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$;
12) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$;
13) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$;
14) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$.

9.2.4. Знайдіть уведенням під знак диференціала:

1) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;
2) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;
3) $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}dx}{1+x^2}$;
4) $\int \frac{3^{\operatorname{arcctg} x}dx}{1+x^2}$;
5) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
6) $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;
7) $\int \sin^3 x\cos x dx$;
8) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$;

9) $\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{ctg}^7 x}{\sin^2 x} dx$;

11) $\int \frac{dx}{e^x - 1}$; 12) $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$;

13) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 8} dx$; 14) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$.

9.2.5. Виконуючи вказану підстановку, знайдіть:

1) $\int x(5x-1)^{19} dx, t = 5x - 1$; 2) $\int \frac{xdx}{(2x+1)^7}, t = 2x + 1$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}, t = \sqrt{1 + e^x}$; 4) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx, t = \sqrt[4]{e^x + 1}$.

Відповіді

9.2.3. 1) $\frac{(x+1)^{16}}{16} + C$; 2) $C - \frac{1}{4(x-3)^4}$; 3) $C - \frac{5}{33}(8 - 3x)^{11/5}$; 4) $C - \frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$; 5) $\frac{1}{4}\ln|4x - 1| + C$; 6) $\frac{1}{3}\ln|3x + 5| + C$; 7) $C - \frac{1}{2}\sin(1 - 2x)$; 8) $C - \frac{1}{2}\cos(2x - 3)$; 9) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$; 10) $\sqrt{x^2 + 1} + C$; 11) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6} + C$; 12) $\frac{2}{5}\sqrt{4 + x^5} + C$; 13) $\frac{1}{3}\arcsin x^3 + C$; 14) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$.

9.2.4. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x} + C$; 3) $\frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{\ln 2} + C$; 4) $-\frac{3^{\operatorname{arcctg} x}}{\ln 3} + C$; 5) $C - 2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$; 6) $C - \frac{1}{9}(\sqrt{1 - 9x^2} + \arccos^3 3x)$; 7) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$; 8) $\frac{1}{\cos x} + C$; 9) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$; 10) $C - \frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8}$; 11) $\ln|e^{-x} - 1| + C$; 12) $\operatorname{arctg} e^x + C$; 13) $\ln(x^2 - 3x + 8) + C$; 14) $C - \ln(1 + \cos^2 x)$.

9.2.5. 1) $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21} + \frac{(5x-1)^{20}}{20}\right) + C$; 2) $\frac{1}{24(2x+1)^6} - \frac{1}{20(2x+1)^5} + C$; 3) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} + C$; 4) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$.

Практикум 9.3. Метод інтегрування частинами

9.3.1.1. Знайти інтегруванням частинами $\int (3x-2)\cos 2x dx$.

Розв'язання. [9.3.4, 9.3.5.] ①

[*Оскільки маємо інтеграл 1-го типу, то за функцію, яку диференціюємо вибираємо многочлен.*]

$$\int (4x-2)\cos 2x dx = \left[\int u dv = uv - \int v du\right] \overset{②}{=} \left| \begin{array}{lcr} u = 4x-2 & \to & du = 4dx \\ dv = \cos 2x dx & \to & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= (4x-2)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 4dx = (2x-1)\sin 2x - \int \sin 2x d(2x) =$$

$$\overset{③}{=} (2x-1)\sin 2x + \cos 2x + C.$$

Коментар. ① Метою методу інтегрування частинами є перейти від заданого інтеграла до простішого.

② Від u до du переходять диференціюванням, а від dv до v — інтегруванням:

$$du = (3x-2)' dx = 3dx;$$

$$v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

покладаючи $C = 0$.

③ Інтегрування частинами можна записати ще в табличному вигляді:

$$\int (4x-2)\cos 2x dx = \left[\int uv' dx = uv - \int vu' dx\right] =$$

$$= \left| \begin{array}{ccccc} \text{Знак} & & u \text{ та її похідні} & & v' \text{ та її первісні} \\ + & \to & 4x-2 & & \cos 2x \\ - & \to & 4 & \searrow & \frac{1}{2}\sin 2x \\ + & \to & \underset{\substack{\text{диференціюємо,} \\ \text{поки не одержуємо } 0}}{0} & \searrow & \frac{1}{4}\cos 2x \end{array} \right|$$

$$= (4x-2)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - 4\cdot\frac{1}{4}\cos 2x + C = (2x-1)\sin 2x + \cos 2x + C.$$

9.3.1.2. Знайти інтегруванням частинами $\int (x^2-x)\sin 3x dx$.

Розв'язання. [9.3.4, 9.3.5.]①

[*Заповнюємо таблицю.*]

$$\int (x^2-x)\sin 3x dx =$$

$$=\left|\begin{array}{ccccc} \text{Знак} & & u \text{ та її похідні} & & v' \text{ та її первісні} \\ + & \to & x^2-x & & \sin 3x \\ - & \to & 2x-1 & \searrow & -\dfrac{1}{3}\cos 3x \\ + & \to & 2 & \searrow & -\dfrac{1}{9}\sin 3x \\ - & \to & 0 & \searrow & \dfrac{1}{27}\cos 3x \\ & & \text{диференціюємо,} & & \\ & & \text{поки не одержуємо } 0 & & \end{array}\right| =$$

$$= (x^2-x)\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - (2x-1)\left(-\frac{1}{9}\sin 3x\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{27}\cos 3x\right) + C =$$

$$= \left(\frac{2}{9}x - \frac{1}{9}\right)\sin 3x - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{27}\right)\cos 3x + C.$$

Коментар. ① У цій задачі потрібно інтегрувати частинами двічі.

② Знаходження похідних та первісних для реалізації узагальненої формули інтегрування частинами [9.3.5] зручно записувати у вигляді такої таблиці:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Знак} & & u \text{ та її похідні} & & v' \text{ та її первісні} \\ + & \to & u & \searrow & v' \\ - & \to & u' & \searrow & v \\ + & \to & u'' & \searrow & v^{(-1)} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots. & \dots \\ (-1)^n & \to & u^{(n)} & \searrow & v^{(-n+1)} \\ (-1)^{n+1} & \to & u^{(n+1)} & \to & v^{(-n)} \end{array}$$

9.3.2.1. Знайти інтегруванням частинами $\int \ln x dx$.

Розв'язання. [9.3.4, 9.3.5.]

[*Оскільки маємо інтеграл 2-го типу, то за функцію, яку диференціюємо, вибираємо* $\ln x$.]

$$\int \ln x dx = \left|\begin{array}{lcc} u = \ln x & \to & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & \to & v = x \end{array}\right| = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

9.3.2.2. Знайти інтегруванням частинами $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Розв'язання. [9.3.4, 9.3.5.]

[*Оскільки маємо інтеграл 2-го типу, то за функцію, яку диференціюємо, вибираємо* $\operatorname{arctg} x$.]

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ccc} u = \operatorname{arctg} x & \to & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx & \to & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \left| \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

9.3.3.1. Знайти інтегруванням частинами $\int e^{3x}\cos 2x dx$.

Розв'язання. [9.3.4, 9.3.5.]

[*Оскільки маємо інтеграл 3-го типу, то після двократного інтегрування частинами (у цьому випадку) дістаємо рівняння щодо шуканого інтеграла.*]

$$I = \int e^{3x}\cos 2x dx = \left| \begin{array}{ccc} u = e^{3x} & \to & du = 3e^{3x}dx \\ dv = \cos 2x dx & \to & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot e^{3x} - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x dx = \left| \begin{array}{ccc} u = e^{3x} & \to & du = 3e^{3x}dx \\ dv = \sin 2x dx & \to & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x dx.$$

[*Записуємо та розв'язуємо рівняння щодо шуканого інтеграла.*]

$$I = \frac{1}{4}e^{3x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) - \frac{9}{4}I;$$

$$I = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) + C.$$

9.3.3.2. Знайти інтегруванням частинами $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

***Розв'язання.* [9.3.4, 9.3.5.]**

[*Оскільки маємо інтеграл 3-го типу, то після інтегрування частинами дістаємо рівняння щодо шуканого інтеграла.*]

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{ccc} u = \sqrt{a^2 - x^2} & \to & du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx & \to & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx}_{\text{перетворюємо інтеграл}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a}.$$

[*Записуємо та розв'язуємо рівняння щодо шуканого інтеграла.*]

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I;$$

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.3.4. Знайдіть інтегруванням частинами:

1) $\int (6x - 4)\sin 2xdx$;
2) $\int (9x - 3)\cos 3xdx$;
3) $\int x\cos 3xdx$;
4) $\int x\sin 4xdx$;
5) $\int (2x - 1)e^{2x}dx$;
6) $\int xe^{-x}dx$;
7) $\int x3^{-x}dx$;
8) $\int x2^{x}dx$;
9) $\int (x^2 - 2x + 3)\sin xdx$;
10) $\int (x^2 - 3)e^{x}dx$;
11) $\int (x^2 - 2x)e^{-x}dx$;
12) $\int (x^2 + 2x - 3)\cos xdx$;
13) $\int \dfrac{xdx}{\cos^2 x}$;
14) $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$;
15) $\int e^{\sin x}\sin 2xdx$;
16) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;
17) $\int x\sin\sqrt{x}dx$;
18) $\int x^3 e^{x^2}dx$.

9.3.5. Знайдіть інтегруванням частинами:

1) $\int (2x-1)\ln x dx$; 2) $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

3) $\int \operatorname{arctg} x dx$; 4) $\int \ln(x^2+1) dx$;

5) $\int \arcsin x dx$; 6) $\int \arccos(2x) dx$;

7) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$; 8) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$;

9) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$; 10) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$;

11) $\int (\arcsin x)^2 dx$; 12) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

9.3.6. Знайдіть інтегруванням частинами:

1) $\int e^{-2x}\cos 5x dx$; 2) $\int e^{3x}\sin 4x dx$;

3) $\int \sin\ln x dx$; 4) $\int \cos\ln x dx$;

5) $\int \sqrt{x^2-4dx}$; 6) $\int \sqrt{x^2+9dx}$.

Відповіді

9.3.4. 1) $(2-3x)\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x + C$; 2) $(3x-1)\sin 3x + \cos 3x + C$;

3) $\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$; 4) $\frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{4}x\cos 4x + C$;

5) $(x-1)e^{2x} + C$; 6) $C-(x+1)e^{-x}$; 7) $-\left(\frac{1}{\ln 3}x + \frac{1}{\ln^2 3}\right)3^{-x} + C$; 8) $\left(\frac{x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}\right)2^x + C$;

9) $-(x-1)^2\cos x + 2(x-1)\sin x + C$; 10) $e^x(x^2-2x-1)+C$; 11) $C-e^{-x}x^2$;

12) $(x^2+2x-5)\sin x + 2(x+1)\cos x + C$; 13) $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$;

14) $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$; 15) $2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$; 16) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$;

17) $6(x-2)\sin\sqrt{x} - 2(x-6)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C$; 18) $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C$.

9.3.5. 1) $(x^2-x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$;

3) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$; 4) $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$;

5) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$; 6) $x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$;

7) $2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$; 8) $2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + C$;

9) $C - \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$; 10) $C - \frac{2}{3\sqrt{x^3}}\ln^2 x - \frac{8}{9\sqrt{x^3}}\ln x - \frac{16}{27\sqrt{x^3}}$;

11) $2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + x\arcsin^2 x + C$; 12) $-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + x\operatorname{arctg} x + C$.

9.3.6. 1) $\frac{e^{-2x}}{29}(5\sin 5x - 2\cos 5x) + C$; 2) $\frac{e^{3x}}{25}(3\sin 4x - 4\cos 4x) + C$;

3) $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$; 4) $\frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$;

5) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln(x + \sqrt{x^2-4}) + C$; 6) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+9}) + C$.

Практикум 9.4. Інтегрування раціональних функцій

Навчальні задачі

9.4.1.1. Знайти $\int \frac{2dx}{x-1}$.

Розв'язання. [9.4.]

$$\int \frac{2dx}{x-1} = 2\int \frac{d(x-1)}{x-1} \overset{[9.2.1]}{=} 2\ln|x-1| + C.$$

9.4.1.2. Знайти $\int \frac{3dx}{(x-2)^3}$.

Розв'язання. [9.4.]

$$\int \frac{4dx}{(x-2)^3} = 4\int (x-2)^{-3} d(x-2) \overset{[9.2.2]}{=} -\frac{2}{(x-2)^2} + C.$$

9.4.1.3. Знайти $\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$.

Розв'язання. [9.3.2, 9.3.3, 9.2.15.]

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+25} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2+3^2} \overset{[9.2.15]}{=} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3} + C.$$

9.4.1.4. Знайти $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx.$

Розв'язання. [9.4.]

[*Виділяємо в чисельнику похідну від знаменника.*]

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+2x+5) = (2x+2)dx \\ x+5 = \frac{1}{2}(2x+2)+4 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+4}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 4\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2+2x+5 = \\ = (x+1)^2+4 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

9.4.1.5. Знайти $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}.$

Розв'язання. [9.4.]

[*Застосовуємо рекурентну формулу [9.4.4]*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right), n \in \mathbb{N}.$$
]

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} = \left| \begin{array}{l} a=3; \\ n=3 \end{array} \right| = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 9}\left(\frac{x}{(x^2+9)^2} + (2\cdot 3-3)\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a=3; \\ n=2 \end{array} \right| = \frac{1}{36}\left(\frac{x}{(x^2+9)^2} + 3\cdot\frac{1}{2\cdot 1\cdot 9}\left(\frac{x}{x^2+9} + (2\cdot 2-3)\int \frac{dx}{x^2+9}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{216}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

9.4.1.6. Знайти $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+6x+13)^2}.$

Розв'язання. [9.4.]

$$\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+6x+13)^2} = \left| \begin{array}{c} d(x^2+6x+13) = 2x+6 \\ 2x+3 = (2x+6)-3 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+13)^2} - 3\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2} =$$

$$\int \frac{f'(t)}{f^2(t)}dt = -\frac{1}{f} + C \qquad x^2+6x+13=(x+3)^2+4$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+13} - 3\int \frac{d(x+3)}{((x+3)^2+4)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+13} - 3\left(\frac{1}{2\cdot 1\cdot 4}\left(\frac{x+3}{(x+3)^2+4} + (2\cdot 2-3)\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+13} - \frac{3}{8}\frac{x+3}{(x+3)^2+4} - \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$$

9.4.2. Виділити цілу частину раціонального дробу $\dfrac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання. [5.6.6.]

[*Виділяють цілу частину дробу діленням многочленів у стовпчик. Ділити припиняють тоді, коли степінь остачі стає меншим за степінь дільника.*]

$$\begin{array}{r|l}
-\;\begin{matrix} x^5+x^2-1 \\ x^5+x^4+x^3 \end{matrix} & \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x^2+2} \\
\hline
-\;\begin{matrix} -x^4-x^3+x^2-1 \\ -x^4-x^3-x^2 \end{matrix} & \\
\hline
-\;\begin{matrix} 2x^2-1 \\ 2x^2+2x+2 \end{matrix} & \\
\hline
-2x-3 &
\end{array}$$

[*Записуємо відповідь.*]

$$\frac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1} = x^3-x^2+2+\frac{-2x-3}{x^2+x+1}.$$

9.4.3.1. Записати розклад раціонального дробу $\dfrac{3x+1}{(x-2)(x+1)^3}$ на суму елементарних дробів.

Розв'язання. [9.4.6.]

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)^3} = \underbrace{\frac{A}{x-2}}_{\substack{\text{відповідає}\\(x-2)}} + \underbrace{\frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)^3}}_{\text{відповідає}\,(x+1)^3}.$$

9.4.3.2. Записати розклад раціонального дробу $\dfrac{x^2-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$ на суму елементарних дробів.

Розв'язання. [9.4.6.]

$$\frac{x^2-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\substack{\text{відповідає}\\(x-1)}} + \underbrace{\frac{Mx+N}{x^2+x+1}}_{\substack{\text{відповідає}\\(x^2+x+1)}}.$$

9.4.3.3. Записати розклад раціонального дробу $\dfrac{2x-1}{(x^2+1)^2x^2}$ на суму елементарних дробів.

Розв'язання. [9.4.6.]

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)^2x^2} = \underbrace{\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}}_{\text{відповідає } x^2} + \underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}}_{\text{відповідає } (x^2+1)^2}.$$

9.4.4.1. Розкласти раціональний дріб $\dfrac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів.

Розв'язання. [9.4.6, 9.4.7, 9.4.9, 5.6.2.]

[*Записуємо розклад правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами.***]**

$$\frac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

[*Зводимо розкладені дроби до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники дробів в обох частинах рівності (знаменники в них рівні).***]**

$$6x^3-11x^2+10x-9 \equiv$$

$$\equiv A(x-2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x-1)(x-2)(Cx+D).$$

[*Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях [5.6.2]*① .**]**:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 6 = A + B + C \\ x^2 & -11 = -2A - B - 3C + D \\ x^1 & 10 = A + B + 2C - 3D \\ x^0 & -9 = A - B + 2D \end{array} \overset{②}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = 2, \\ B = 3, \\ C = 1, \\ D = -1. \end{cases}$$

[*Записуємо відповідь.*]

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 10x - 9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Коментар. ① Два многочлена того самого степеня тотожно рівні, якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.

② Знаходження коефіцієнтів можна дещо спростити, підставляючи в тотожність зручні значення: перші два «зручних» значення — дійсні корені знаменника (*метод зручних значень*).

Підставляємо в тотожність значення:

$$x = 1 \Rightarrow -4 = -2A; A = 2;$$

$$x = 2 \Rightarrow 15 = 5B; B = 3;$$

$$x = 0 \Rightarrow -9 = -2A - B + 2D \Leftrightarrow D = -1.$$

Оскільки визначення коефіцієнту C потребує ще однієї рівності, прирівнюємо коефіцієнти в обох частинах тотожності при x^3:

$$6 = A + B + C; \; C = 1.$$

9.4.4.2. Розкласти раціональний дріб $\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+3)}$ на суму елементарних дробів.

Розв'язання. [9.4.6, 9.4.7, 9.4.9, 5.6.2.]

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+3}.$$

[*Коефіцієнти над степенями лінійних многочленів знаходимо способом викреслювання.*]

$$A_2 \overset{[9.4.8]}{=} \left.\frac{4x}{\cancel{(x-1)^2}(x+3)}\right|_{x=1} = 1.$$

$$B \overset{[9.4.8]}{=} \left.\frac{4x}{(x-1)^2\cancel{(x+3)}}\right|_{x=-3} = -\frac{3}{4};$$

$$A_1 \overset{[9.4.8]}{=} \frac{1}{1!}\left.\left(\frac{4x}{x+3}\right)'\right|_{x=1} = \left.\frac{4(x+3)-4x}{(x+3)^2}\right|_{x=1} = \frac{3}{4}.$$

Отже,

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+3}.$$

9.4.4.3. Розкласти раціональний дріб $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$ на суму елементарних дробів.

Розв'язання. [9.4.6, 9.4.7, 9.4.9, 5.6.2.]

[*Розкладаємо раціональний дріб на суму елементарних дробів перетворенням.***]**

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

9.4.5.1. Знайти $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx.$

Розв'язання*. *[9.4.10.]

Підінтегральна функція є неправильним дробом.

[*Крок 1.* *Виділяємо цілу частину неправильного дробу.***]**

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

[*Крок 2.* *Правильний дріб розкладаємо на суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів.***]**

$$x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2+1).$$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1};$$

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

[*Крок 3.* *Інтегруємо суму цілої частини дробу й елементарних дробів.***]**

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C_1;$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{dx}{x-1} -$$

$$-\int \frac{x-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|x-1\right| - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

9.4.5.2. Знайти $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx.$

Розв'язання. [9.4.10.]

1. $\frac{2x+3}{x^2-7x+12}$ — правильний дріб.

2. $x^2-7x+12 = (x-3)(x-4).$

$$\frac{2x+3}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}.$$

$$A = \left.\frac{2x+3}{\cancel{(x-3)}(x-4)}\right|_{x=3} = -9;$$

$$B = \left.\frac{2x+3}{(x-3)\cancel{(x-4)}}\right|_{x=4} = 11.$$

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12} = \frac{-9}{x-3} + \frac{11}{x-4}.$$

3.

$$\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12} = -9\int \frac{dx}{x-3} + 11\int \frac{dx}{x-4} = -9\ln\left|x-3\right| + 11\ln\left|x-4\right| + C.$$

9.4.5.3. Знайти $\int \frac{x^4}{8+x^3}dx.$

Розв'язання. [9.4.10.]

1. $\frac{x^4}{8+x^3}$ — неправильний дріб.

$$\frac{x^4}{x^3+8} = x - \frac{8x}{x^3+8}.$$

2. $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4).$

$$\frac{8x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+4} =$$
$$= \frac{A(x^2-2x+4)+(Mx+N)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}.$$

$$8x = A(x^2-2x+4)+(Mx+N)(x+2).$$

$$\begin{array}{c|l} x=-2 & -16 = 12A \Rightarrow A = -\dfrac{4}{3}; \\ x^2 & 0 = A + M \Rightarrow M = \dfrac{4}{3}; \\ x^0 & 0 = 4A + 2N \Rightarrow N = \dfrac{8}{3}. \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x^3+8} = x - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{x+2} + \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right).$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^3+8} = \int xdx + \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+2} - \frac{4}{3}\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx \boxed{=}$

$$\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx = \left|\begin{array}{l} d(x^2-2x+4) = 2x-2, \\ x+2 = \dfrac{1}{2}(2x-2)+3 \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4} + 3\int\frac{dx}{(x-1)^2+3} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

$$\boxed{=}\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x^2-2x+4) - \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.4.6. Розкладіть на суму елементарних дробів раціональний дріб:

1) $\dfrac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 2) $\dfrac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

3) $\dfrac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}$; 4) $\dfrac{x^4-x^3-9x^2-10x-14}{x^2-2x-8}$;

5) $\dfrac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}$; 6) $\dfrac{4x^3-8x^2-12x+16}{x^2(x-2)^2}$;

7) $\dfrac{3x^2+3}{x^3+1}$; 8) $\dfrac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$;

9) $\dfrac{4x^3}{x^4-1}$; 10) $\dfrac{8x^2}{x^4-16}$.

9.4.7. Знайдіть:

1) $\displaystyle\int\frac{4dx}{x+5}$; 2) $\displaystyle\int\frac{3dx}{4x+1}$;

3) $\displaystyle\int\frac{3dx}{(x+2)^4}$; 4) $\displaystyle\int\frac{12dx}{(x-5)^5}$;

5) $\displaystyle\int\frac{6dx}{x^2+4x-5}$; 6) $\displaystyle\int\frac{4dx}{x^2-2x-3}$;

7) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$; 8) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-4x+5}$;

9) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x^2-4)^2}$; 10) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^4+6x^2+13}$;

11) $\displaystyle\int\frac{2xdx}{(x+1)(2x+1)}$; 12) $\displaystyle\int\frac{10xdx}{2x^2-3x-2}$;

13) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-4x+5}$; 14) $\displaystyle\int\frac{4x-3}{x^2-2x+6}dx$.

9.4.8. Знайдіть:

1) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{33dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

3) $\displaystyle\int\frac{4x^3-4}{4x^3-x}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$;

5) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx$; 6) $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;

7) $\displaystyle\int\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx$; 8) $\displaystyle\int\frac{28x^3-36}{x^4-5x^3+6x^2}dx$;

9) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 10) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$;

11) $\int \frac{12x dx}{x^3-8}$; 12) $\int \frac{6dx}{1+x^3}$;

13) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; 14) $\int \frac{-x^2+13x-40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$;

15) $\int \frac{x^5+x^3-2x^2-20x-8}{x^4-16}dx$; 16) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$;

17) $\int \frac{4x^3+4x-4}{(x^2+2)^2}dx$; 18) $\int \frac{40x^2-96}{(x^2-6x+13)^2}dx$;

19) $\int \frac{48dx}{(1+x^2)^4}$; 20) $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx$;

21) $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$; 22) $\int \frac{16dx}{(x^4-1)^2}$.

Відповіді

9.4.6. 1) $\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}$; 2) $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x-3}$; 3) $3x+5-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-4}$;
4) $x^2+x+1+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-4}$; 5) $\frac{13}{(x-4)^3}-\frac{3}{(x-4)^2}+\frac{2}{x-4}-\frac{2}{x-2}$;
6) $\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{3}{x-2}$; 7) $\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}$; 8) $-\frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+4}$;
9) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}$; 10) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2+4}$.

9.4.7. 1) $4\ln|x+5|+C$; 2) $\frac{3}{4}\ln|4x+1|+C$; 3) $C-\frac{1}{(x+2)^3}$; 4) $-\frac{3}{(x-5)^4}+C$;
5) $\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$; 6) $\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; 8) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}}+C$;
9) $-\frac{1}{2(x^2-4)}+C$; 10) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{2}+C$; 11) $2\ln|x+1|-\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+C$;
12) $4\ln|x-2|+\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+C$; 13) $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)+C$;

14) $2\ln(x^2-2x+6)+\dfrac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt5}+C.$

9.4.8. 1) $4\ln\bigl|x-1\bigr|+5\ln\bigl|x-4\bigr|-7\ln\bigl|x+3\bigr|+C;$

2) $9\ln\bigl|3x+1\bigr|+2\ln\bigl|2x-3\bigr|-11\ln\bigl|x\bigr|+C;$ 3) $x+4\ln\bigl|x\bigr|-\dfrac{7}{4}\ln\left|x-\dfrac12\right|-\dfrac94\ln\left|x+\dfrac12\right|+C;$

4) $\dfrac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt2}{x+\sqrt2}\right|+\dfrac{1}{2\sqrt3}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt3}{x+\sqrt3}\right|+C;$ 5) $\dfrac{4}{x+2}+\ln\bigl|x+1\bigr|+C;$

6) $x+\dfrac1x+2\ln\bigl|x-1\bigr|-\ln\bigl|x\bigr|+C;$ 7) $\dfrac{3}{2(x-2)^2}+\ln\bigl|x-5\bigr|+C;$

8) $\dfrac6x-5\ln\bigl|x\bigr|+80\ln\bigl|x-3\bigr|-47\ln\bigl|x-2\bigr|+C;$ 9) $\ln\bigl|x\bigr|-\dfrac12\ln(x^2+1)+C;$

10) $\dfrac1x+\dfrac12\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C;$ 11) $2\ln\bigl|x-2\bigr|-\ln(x^2+2x+4)+2\sqrt3\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt3}+C;$

12) $2\ln\bigl|x+1\bigr|-\ln(x^2-x+1)+2\sqrt3\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt3}+C;$

13) $\dfrac32\ln(x^2-2x+5)-\ln\bigl|x-1\bigr|+\dfrac12\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C;$

14) $-3\ln\bigl|x+1\bigr|+\ln(x^2-4x+13)+\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{3}+C;$

15) $\dfrac12x^2+\dfrac12\ln\bigl|x+2\bigr|-\dfrac12\ln\bigl|x-2\bigr|+\dfrac12\ln(x^2+4)+C;$

16) $\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac2x+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C;$

17) $\dfrac{2-x}{x^2+2}+2\ln(x^2+2)-\dfrac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt2}+C;$ 18) $\dfrac{13x-159}{x^2-6x+13}+\dfrac{53}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}+C;$

19) $\dfrac{15x^5+40x^3+33x}{(1+x^2)^3}+15\operatorname{arctg}x+C;$ 20) $-\dfrac{1}{6(x+1)^6}+\dfrac{3}{7(x+1)^7}-\dfrac{1}{4(x+1)^8}+C;$

21) $\dfrac{1}{4\sqrt3}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt3}{x+\sqrt3}\right|-\dfrac14\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C;$ 22) $6\operatorname{arctg}x-\dfrac{4x}{x^4-1}-3\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C.$

Практикум 9.5. Інтегрування тригонометричних виразів

Навчальні задачі

9.5.1.1. Знайти $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^2 x}.$

Розв'язання. [9.5.1–9.5.4.]

[*Перевіряємо підінтегральну функцію на непарність за* $\sin x$.]

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \left| \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \right| \overset{[9.5.2]}{=}$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x) d(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \int d(\cos x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

9.5.1.2. Знайти $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx.$

Розв'язання. [9.5.1–9.5.4.]

[*Перевіряємо підінтегральну функцію на непарність за* $\cos x$.**]**

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx = \left| \frac{(-\cos x)^5}{\sin^4 x} = -\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} \right| \overset{[9.5.3]}{=} \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x dx}{\sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)}{\sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x} - 2\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} + \int d(\sin x) = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

9.5.1.3. Знайти $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x}.$

Розв'язання. [9.5.1–9.5.4.]

[*Перевіряємо підінтегральну функцію на парність за* $\sin x$ та за $\cos x$.**]**

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{(-\sin x)^2 + 3(-\sin x)(-\cos x) + (-\cos x)^2} = \\ = \dfrac{1}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x} \end{array} \right| \overset{[9.5.4]}{=}$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\left(\operatorname{tg} x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| \frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{5}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{5}} \right| + C.$$

9.5.1.4. Знайти $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}.$

Розв'язання. [9.5.1–9.5.4.]①

$$\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+5} \overset{[9.5.1]}{=} \left| \begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{3-3t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}+5}=\int \frac{dt}{t^2+t+4}=\int \frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{15}}\left(t+\frac{1}{2}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)+C.$$

Коментар. ① Оскільки підінтегральна функція не є непарною, ані за $\sin x$ та за $\cos x$, ані парною за обома функціями, то інтегруємо за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

9.5.1.5. Знайти $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$.

Розв'язання. [9.5.]

[*У чисельнику використовуємо основну тригонометричну тотожність.*] ①

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}dx=\int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int \frac{dx}{\cos x}+\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx \overset{[9.3.4]}{=}$$

$$=\left| \begin{array}{lcl} u=\sin x & \to & du=\cos x dx \\ dv=\dfrac{\sin x dx}{\cos^3 x} & \to & v=\dfrac{1}{2\cos^2 x} \end{array} \right| =\int \frac{dx}{\cos x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+C.$$

Коментар. ① Інтеграл можна також знайти: 1) уведенням під знак диференціала $\cos x$ (для цього треба помножити чисельник та знаменник дробу на $\cos x$); 2) за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $u=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$ [5.9.9.]

9.5.2.1. Знайти $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання. [9.5.]

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx \overset{[9.5.4]}{=} \int \operatorname{ctg}^4 x\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int \operatorname{ctg}^4 x d(\operatorname{ctg} x)=-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+C.$$

9.5.2.2. Знайти $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

Розв'язання. [9.5.]

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx \overset{[9.5.8]}{=} \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

9.5.2.3. Знайти $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.

Розв'язання. [9.5.]

$$\int \operatorname{ctg}^3 x dx \overset{[9.5.9]}{=} \int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \operatorname{ctg} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg} x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln\left|\sin x\right| + C.$$

9.5.3.1. Знайти $\int \sin 6x \cos 7x dx$.

Розв'язання. [9.5.10.]

[*Перетворюємо добуток тригонометричних функцій на суму, використовуючи відповідну формулу.*]

$$\left[\int \sin kx \cos lx dx = \frac{1}{2} \int \big(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x \big) dx. \right]$$

$$\int \sin 6x \cos 7x dx \overset{[9.5.10]}{=} =$$

$$\frac{1}{2} \int (-\sin x + \sin 13x) dx = \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{13} \cos 13x \right) + C.$$

9.5.3.2. Знайти $\int \cos^4 3x dx$.

Розв'язання. [9.5.7.]

$$\left[\sin^{2k} x \cos^{2l} x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^l . \right]$$

$$\int \cos^4 3x dx \overset{[9.5.7]}{=} \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\Big(1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x\Big) dx =$$

$$= \left| \cos^2 6x = \frac{1+\cos 12x}{2} \right| = \int \left(\frac{1+\cos 12x}{8} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.5.4. Знайдіть:

1) $\int \cos 3x \cos x dx$;
2) $\int \sin 5x \sin x dx$;
3) $\int \sin \frac{3}{4} x \cos \frac{x}{4} dx$;
4) $\int \sin 3x \cos 4x dx$;
5) $\int \sin^2 4x$;
6) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$.

9.5.5. Знайдіть:

1) $\int \sin^3 x dx$;
2) $\int \cos^5 x dx$;
3) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;
4) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$;
5) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;
6) $\int \sin^2 x \cos^4 x$;
7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;
8) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$;
9) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;
10) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$;
11) $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$;
12) $\int \mathrm{ctg}^5 x dx$;
13) $\int \mathrm{tg}^5 x dx$;
14) $\int \mathrm{tg}^6 x dx$;
15) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$;
16) $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$;
17) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$;
18) $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$;

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$; 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$;

21) $\displaystyle\int \operatorname{sh}^3 x dx$; 22) $\displaystyle\int \operatorname{ch}^3 x dx$;

23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; 24) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

Відповіді

9.5.4. 1) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$; 2) $-\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$; 3) $-\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos x + C$; 4) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{14}\cos 7x + C$; 5) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$; 6) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C$.

9.5.5. 1) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$; 2) $\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$; 3) $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$; 4) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$; 5) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$; 6) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$;
7) $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$; 8) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$; 9) $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$;
10) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + C$; 11) $x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$;
12) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln|\sin x| + C$; 13) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C$;
14) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C$; 15) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$; 16) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4}{3} + C$;
17) $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C$; 18) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) + C$; 19) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x + \sqrt{7}}\right| + C$;
20) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C$; 21) $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C$; 22) $\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C$;
23) $C - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x) + C$; 24) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$.

Практикум 9.6. Інтегрування ірраціональних виразів

Навчальні задачі

9.6.1.1. Знайти $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} dx$.

Розв'язання. [9.6.4.]

[*Раціоналізуємо підінтегральний вираз відповідною підстановкою.*]

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}} \overset{[9.6.4]}{=} \left| \begin{array}{l} \text{НСК}(2,3)=6. \\ x+1=t^6, \\ x=t^6-1, \\ dx=6t^5dt \end{array} \right| = 6\int \frac{(t^6-1)t^5}{t^3-t^2}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3(t^6-1)}{t-1}dt = 6\int \left(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^9}{9}+\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right)+C = \left|t=\sqrt[6]{x+1}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C.$$

9.6.1.2. Знайти $\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\frac{dx}{2x+1}$.

Розв'язання. [9.6.1.]

$$\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\frac{dx}{2x+1} \overset{[9.6.1]}{=} \left| \begin{array}{l} \frac{2x-1}{2x+1}=t^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx=\frac{2tdt}{(1-t^2)^2};\ 2x+1=\frac{2}{1-t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t\cdot 2tdt}{\frac{2}{1-t^2}(1-t^2)^2} = \int \frac{t^2}{1-t^2}dt = \int\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt = -t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C =$$

$$= \left|t=\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}\right| = -\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}\right|+C.$$

9.6.2.1. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}}$.

Розв'язання. [9.6.1]

[*Виділяємо повний квадрат під коренем.*]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2+4x+4)}} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{2}+C.$$

9.6.2.2. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$.

Розв'язання. [9.6.1.]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}} \overset{[9.6.1]}{=} \left| \begin{array}{c} 3x^2+6x+4 \overset{[5.5.3]}{=} \\ = 3\left(x^2+2x+\frac{4}{3}\right) = 3\left((x+1)^2+\frac{1}{3}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{3}} \right| + C.$$

9.6.2.3. Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$.

Розв'язання. [9.6.3.]

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}} \overset{[9.6.3]}{=} \left| x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{dt}{t^2} \right| =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\arcsin \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = -\arcsin \frac{2t+1}{\sqrt{5}} + C = \left| t = \frac{1}{x} \right| = -\arcsin \frac{2+x}{\sqrt{5}x} + C.$$

9.6.3.1. Використовуючи відповідну тригонометричну підстановку, знайти $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

Розв'язання. [9.6.6.]

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \left| \begin{array}{l} x = 3\operatorname{tg} t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);\ dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2+9} = \sqrt{9\operatorname{tg}^2 t+9} = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3dt}{\cos^2 t \cdot 9\operatorname{tg}^2 t \cdot \dfrac{3}{\cos t}} = \frac{1}{9}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{9}\int \frac{d\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9\sin t} + C =$$

$$= -\frac{1}{9}\frac{1}{\cos t}\frac{1}{\operatorname{tg} t} + C = \left| \frac{1}{\cos t} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1+\frac{x^2}{9}} \right|$$

$$-\frac{1}{3x}\sqrt{1+\frac{x^2}{9}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C.$$

9.6.3.2. Використовуючи відповідну тригонометричну підстановку, знайти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Розв'язання. [9.6.6.]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t, t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]; dx = 2\cos t dt; \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2\cos t dt}{8\cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} t + C =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}, \\ \sin t = \dfrac{x}{2}; \end{array} \right| = \frac{1}{4}\frac{x}{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C.$$

9.6.4.1. Використовуючи теорему Чебишова, знайти $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$.

Розв'язання. [9.6.5.]

$$\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3} = \underbrace{\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}dx}_{\text{записуємо підінтегральний вираз як диференціальний біном}} =$$

$$= \left[\int x^m(a+bx^n)^p dx\right] = \left| \begin{array}{c} m = -1, n = \dfrac{1}{3}, p = -3; \\ \text{визначаємо випадок} \\ p = -3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = \text{НСК}(1,3) = 3; \\ \boxed{x = t^3;}\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t^3}(1+t)^{-3}3t^2 dt = 3\int \frac{dt}{t(1+t)^3} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \dfrac{1+t-t}{t(1+t)^3} = -\dfrac{1}{(1+t)^3} + \dfrac{1}{t(1+t)^2} = \ldots = \\ = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2} - \dfrac{1}{(1+t)^3} \end{array} \right| =$$

$$= 3\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right) dt =$$

$$= 3\ln|t| - 3\ln|1+t| + \frac{3}{1+t} + \frac{3}{2(1+t)^2} + C = \left| t = \sqrt[3]{x} \right| =$$

$$= 3\ln\left| \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} \right| + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2(\sqrt[3]{x}+1)^2} + C.$$

9.6.4.2. Використовуючи теорему Чебишова, знайти $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Розв'язання. [9.6.5.]

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m = -\dfrac{1}{2}, n = \dfrac{1}{4}, p = \dfrac{1}{3}; \\ \text{визначаємо випадок} \\ \dfrac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{1 + x^{1/4} = t^3}; \\ d\left(1 + x^{1/4}\right) = d(t^3);\ \dfrac{1}{4}x^{-3/4}dx = 3t^2dt \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{\int x^{1/4}(1+x^{1/4})^{1/3}x^{-3/4}dx}_{\text{перетворюємо підінтегральний вираз}} = \int (t^3-1)t \cdot 12t^2dt = 12\int (t^6 - t^3)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \left| t = (1+x^{1/4})^{1/3} \right| = \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

9.6.4.3. Використовуючи теорему Чебишова, знайти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання. [9.6.5.]

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-1/4}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}; \\ \text{визначаємо випадок} \\ \frac{m+1}{n}+p=0\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x^{-4}+1=t^4;} \\ x=\frac{1}{(t^4-1)^{1/4}}; dx=-\frac{t^3dt}{(t^4-1)^{5/4}} \end{array} \right| = \underset{\text{перетворюємо підінтегральний вираз}}{\int (x^{-4}+1)^{-1/4}x^{-1}\,dx} =$$

$$= -\int \frac{(t^4-1)^{1/4}}{t}\frac{t^3dt}{(t^4-1)^{5/4}} = -\int\frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \left|t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1}+C.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.6.5. Знайдіть:

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

3) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$;

6) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$;

7) $\int \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\frac{dx}{x}$;

8) $\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}dx$.

9.6.6. Знайдіть:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+13x+8x^2}}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x+9x^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

5) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$;

6) $\int \frac{x+8}{\sqrt{3x^2+x+9}}dx$;

7) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$; 8) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{\sqrt{1-13x-5x^2}}dx$;

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$; 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$.

9.6.7. Знайдіть:

1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$; 6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$;

7) $\displaystyle\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$; 8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$;

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; 10) $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$;

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; 12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$;

13) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$; 14) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$;

15) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$; 16) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Відповіді

9.6.5. 1) $2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C$; 2) $\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}-3(x+1)^{1/3}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$; 3) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-2)^4}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-2)^7}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}-2\sqrt{x-2}+9\sqrt[3]{x-2}-$ $-18\sqrt[6]{x-2}+18\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+1\right|+C$

4) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+\dfrac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-$

$-\dfrac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$; 5) $\sqrt{t}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{t}+3\sqrt[6]{t}+3\ln(\sqrt[6]{t}-1)+C\Big|_{t=2x-1}$;

6) $\dfrac{3}{7}\sqrt[6]{t^7}-\dfrac{3}{5}\sqrt[6]{t^5}+\sqrt{t}-3\sqrt[6]{t}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{t}+C\Big|_{t=2x-3}$;

7) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$; 8) $(5-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-6\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+C$;

9.6.6. 1) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+\dfrac{13}{16}+\sqrt{x^2+\dfrac{13}{8}x+\dfrac{5}{8}}\right|+C$; 2) $\dfrac{1}{3}\ln\left(x+\dfrac{1}{3}+\sqrt{x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{9}}\right)+C$;

3) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$; 4) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$;

5) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+5x+3}-\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\ln\left|x+\dfrac{5}{4}+\sqrt{x^2+\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}}\right|+C$;

6) $\dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2+x+9}+\dfrac{47}{6\sqrt{3}}\ln\left|x+\dfrac{1}{6}+\sqrt{x^2+\dfrac{x}{3}+3}\right|+C$;

7) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{8-3x-2x^2}-\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{73}}+C$;

8) $-\sqrt{1-13x-5x^2}-\dfrac{19}{2\sqrt{5}}\arcsin\dfrac{10x+13}{\sqrt{189}}+C$;

9) $C-\dfrac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$; 10) $-\arcsin\dfrac{1}{x\sqrt{2}}+C$;

9.6.7. 1) $-\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{6x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}+6\arcsin\dfrac{x}{2}+C$;

2) $\sqrt{9-x^2}-3\ln(3+\sqrt{9-x^2})+3\ln|x|+C$;

3) $\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{24x}-\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{12x^3}+C$; 4) $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{120x}-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{5x^5}-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{60x^3}+C$;

5) $\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{9x^3}+\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{27x}+C$; 6) $\dfrac{\sqrt{x^2-8}}{24x}-\dfrac{\sqrt{x^2-8}}{3x^3}+C$;

7) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\dfrac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\dfrac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$;

8) $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\dfrac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$;

9) $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\dfrac{1}{4}\ln(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$;

10) $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$;

11) $\frac{1}{6}\ln(\sqrt[3]{(x^{-3}+1)^2}+\sqrt[3]{x^{-3}+1}+1)-\frac{1}{3}\ln(\sqrt[3]{x^{-3}+1}-1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^{-3}+1}+1}{\sqrt{3}}+C;$

12) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C;$

13) $6t+2\ln\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C, t=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}};$

14) $\frac{12\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}}{13}-\frac{18\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}}{5}+\frac{36\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}}{7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C;$

15) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C;$

16) $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

Практикум 9.7. Обчислення визначених інтегралів

Навчальні задачі

9.7.1.1. Обчислити $\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання. [9.9.1.]

$$\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\left|d\ln x=\frac{dx}{x}\right|\overset{①}{=}\int\limits_e^{e^2}\frac{d\ln x}{\ln x}\overset{[9.9.1]}{=}\ln\left|\ln x\right|\Big|_e^{e^2}\overset{②}{=}$$
$$=\ln\left|\ln e^2\right|-\ln\left|\ln e\right|=\ln 2.$$

Коментар. ① Знаходимо первісну для підінтегральної функції методом уведення функції під знак диференціала.

② Обчислюємо інтеграл за формулою Ньютона — Ляйбніца

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

де F — первісна для f на $[a;b]$.

9.7.1.2. Обчислити $\int\limits_2^5\frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Розв'язання. [9.9.1.]

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10} \overset{①}{=} \int_2^5 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+9} \overset{[9.9.1]}{=} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\bigg|_2^5 =$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}2 - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}1 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{12}.$$

Коментар. ① Виділяємо повний квадрат у знаменнику дробу.

9.7.1.3. Обчислити $\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx.$

Розв'язання. [9.9.2.]

[*Обчислюємо інтеграл інтегруванням частинами.*]

$$\left[\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.\right]$$

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \sin\frac{x}{2}dx & \to & v = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| \overset{[9.9.2]}{=}$$
$$= -2x\cos\frac{x}{2}\bigg|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx = -2\pi\cos\frac{\pi}{2} + 0 + 4\sin\frac{x}{2}\bigg|_0^{\pi} =$$
$$= 4\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin 0 = 4.$$

9.7.1.4. Обчислити $\int\limits_0^{3} x^2\sqrt{9-x^2}dx.$

Розв'язання. [9.9.3, 9.9.7.]

[*Використовуємо відповідну тригонометричну підстановку.*]

$$\int\limits_0^{3} x^2\sqrt{9-x^2}dx \overset{①}{=} \left| \begin{matrix} x = 3\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \\ dx = 3\cos t dt; \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \\ = 3\left|\cos t\right| = 3\cos t. \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \right| \overset{[9.9.3]}{=}$$
$$= 81\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t dt = 81\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t(1-\sin^2 t)dt =$$
$$= 81\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t dt - 81\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t dt \overset{[9.9.7]}{=} 81\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) = \frac{81\pi}{16}.$$

Коментар. ① Обчислюючи визначений інтеграл заміною змінних, на відміну від невизначеного інтегрування, не потрібно вертатись до старої змінної. Межі визначеного інтеграла перераховуємо, розв'язуючи тригонометричне рівняння на зазначеному відрізку:

$$x = 0 \Leftrightarrow 3\sin t = 0;\ t = 0.$$

$$x = 3 \Leftrightarrow 3\sin t = 3,\ t = \frac{\pi}{2}.$$

9.7.1.5. Обчислити $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

Розв'язання. [9.9.3.]

[*Використовуємо відповідну тригонометричну підстановку.*]

$$\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & \frac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} \\ \hline t & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} \end{array} \right| \overset{[9.9.3]}{=} = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^5 t dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^3 t dt = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \sin^2 t) d\sin t = \sin t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{11}{24}.$$

9.7.1.6. Обчислити $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$

Розв'язання. [9.9.3.]

$$\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} x = \frac{2}{\cos t}, t \in [0; \frac{\pi}{2}) \\ dx = \frac{2\sin t dt}{\cos^2 t}. \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 2 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \right| \overset{[9.9.3]}{=}$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/6} \cos t \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}\, \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \operatorname{tg}^2 t dt =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt = 2\operatorname{tg} t\Big|_0^{\pi/6} - 2t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}.$$

9.7.2.1. Обчислити $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt[3]{\sin x}dx.$

Розв'язання. [9.9.5.]

Оскільки $\sqrt[3]{\sin x}$ — непарна функція, то

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt[3]{\sin x}dx = \left[\begin{array}{l} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \\ f - \text{непарна} \end{array}\right] \overset{[9.9.5]}{=} 0.$$

9.7.2.2. Обчислити $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx.$

Розв'язання. [9.9.4.]

Оскільки $\left|\operatorname{tg} x\right|$ — парна функція, то

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx \overset{[9.9.4]}{=} \left[\begin{array}{c} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx, \\ f - \text{парна} \end{array}\right] = 2\int\limits_{0}^{\pi/4} \left|\operatorname{tg} x\right| dx = 2\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx =$$

$$= -2\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\pi/4} = -2\ln\cos\frac{\pi}{4} + 2\ln\cos 0 = \ln 2.$$

9.7.2.3. Обчислити $\int\limits_{0}^{6\pi} \sin^5 x dx.$

Розв'язання. [9.8.3, 9.9.5, 9.9.6.]

Функція $\sin^5 x$ має період 2π.

$$\int\limits_{0}^{6\pi} \sin^5 x dx \overset{[9.8.3]}{=} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^5 x dx + \int\limits_{2\pi}^{4\pi} \sin^5 x dx + \int\limits_{4\pi}^{6\pi} \sin^5 x dx \overset{[9.9.6]}{=}$$

$$= 3\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx \overset{[9.9.5]}{=} 3 \cdot 0 = 0.$$

Коментар. ① Використовуючи властивість адитивності, розбиваємо проміжок інтегрування на відрізки завдовжки 2π.

9.7.2.4. Обчислити $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x dx.$

Розв'язання. [9.9.7.]

Функція $\sin^4 x$ має період $T = \pi$.

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x dx \overset{[9.8.3]}{=} \int\limits_0^{\pi} \sin^4 x dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin^4 x dx \overset{[9.9.5]}{=} 2\int\limits_0^{\pi} \sin^4 x dx =$$

$$= 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x dx \overset{[9.9.4]}{=} 4\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x dx \overset{[9.9.7]}{=} 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3!!}{4!!} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3\pi}{4}.$$

9.7.2.5. Обчислити $\int\limits_0^2 f(x)dx$, де $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Розв'язання. [9.8.3.]

[*За властивістю адитивності записуємо визначений інтеграл як суму інтегралів.*]

$$\int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 (2-x)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.7.3. Обчисліть:

1) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

2) $\int\limits_{2}^{-29} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

3) $\int\limits_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$;

4) $\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$;

5) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;

6) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

7) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x} dx}{x^2}$;

8) $\int\limits_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$;

9) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$;

10) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$.

9.7.4. Обчисліть:

1) $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{4x^2+4x+5}dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; 4) $\displaystyle\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 6) $\displaystyle\int\limits_{4}^{5}\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$; 8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{5x-2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$;

9) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x+1}{x^3-x^2}dx$; 10) $\displaystyle\int\limits_{2}^{3}\frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2}dx$;

11) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}dx$; 12) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$;

13) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin^2\varphi d\varphi$; 14) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}\cos^4 x\sin^2 xdx$;

15) $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\mathrm{tg}^4\, xdx$; 16) $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{ctg}^3\,\varphi d\varphi$;

17) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; 18) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}2/3}\frac{6+\mathrm{tg}\,x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$.

9.7.5. Обчисліть:

1) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0}\left|1+x\right|dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\left|x^2-3x+2\right|dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$; 4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$;

5) $\int\limits_0^2 f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$

6) $\int\limits_{-3}^3 f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

9.7.6. Обчисліть:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$;

2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (x \cos^2 x + x^2 \sin x)dx$;

3) $\int\limits_{-2}^{2} (x^5 e^{-x^2} + 5x^4 - 3x^3 + x)dx$;

4) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 4}{\cos^2 x} dx$;

5) $\int\limits_{-6}^{6} (x^5 - 3x^3 + x) \cos x dx$;

6) $\int\limits_{-2}^{2} (x^7 - 7x) \ln^3(x^4 + 1)dx$;

7) $\int\limits_{-1}^{1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})dx$;

8) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1 + x}{1 - x} dx$.

9.7.7. Знайдіть похідну функції:

1) $F(x) = \int\limits_1^x \ln t dt, x > 0$;

2) $F(x) = \int\limits_x^0 \sqrt{1 + t^4} dt$;

3) $F(x) = \int\limits_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$;

4) $F(x) = \int\limits_0^1 \cos t^2 dt$;

5) $F(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$;

6) $F(x) = \int\limits_x^{x^2} e^{-t^2} dt$.

9.7.8. За допомогою інтегруванням частинами, обчисліть:

1) $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$;

2) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

3) $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\cos 3x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{3}(x^2-6x+9)\sin 2x dx$;

5) $\int\limits_{1}^{e}\ln^3 x dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1}x\ln(1+x^2)dx$;

7) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg} x dx$; 8) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$;

9) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{(4+x^2)^2}$; 10) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$.

9.7.9. Застосовуючи Валісову формулу, обчисліть:

1) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^5 x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^8 x dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin^6\frac{x}{2}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos^7 2x dx$;

5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^9 x dx$; 6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^8 x dx$.

9.7.10. За допомогою заміни змінної, обчисліть:

1) $\int\limits_{3}^{8}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; 2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$;

3) $\int\limits_{3}^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; 4) $\int\limits_{1}^{64}\frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx$;

5) $\int\limits_{0}^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$;

7) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; 8) $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

9) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$; 10) $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$;

11) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$; 12) $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$;

13) $\int\limits_3^6 \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$; 14) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \dfrac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$;

15) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{2\cos x+3}$; 16) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{2-\sin x}$.

Відповіді

9.7.3. 1) $\dfrac{7}{72}$; 2) -5; 3) $\dfrac{(e-1)^5}{5}$; 4) $\dfrac{\pi}{12}$; 5) $\ln(1+\sqrt{2})$; 6) $1-\cos 1$; 7) $e-\sqrt{e}$; 8) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; 9) $\dfrac{3}{32}(12-7\sqrt[3]{4})$; 10) $\dfrac{2}{7}$.

9.7.4. 1) $\dfrac{\pi}{16}$; 2) $\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{4}{3}$; 3) $\dfrac{\pi}{6}$; 4) $\arcsin\dfrac{1}{3}$; 5) $\ln\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 6) $\ln\dfrac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}$; 7) $10\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 8) $5\sqrt{10}-5\sqrt{5}+12\ln\dfrac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{10}}$; 9) $2\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}$; 10) $\ln\dfrac{9}{2}-1$; 11) $\dfrac{\pi}{4}$; 12) $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}+\ln 2\sqrt{7}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 13) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$; 14) $\dfrac{\pi}{16}$; 15) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{8}{9\sqrt{3}}$; 16) $\dfrac{3}{2}-\ln 2$; 17) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 18) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{36}\ln 4$.

9.7.5. 1) 1; 2) 1;3) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{3}$; 4) 2; 5) $\dfrac{5}{6}$; 6) 9.

9.7.6. 1) 0; 2) 0; 3) 64; 4) 8., 5) 0; 6) 0; 7) 0;8) 0;

9.7.7. 1) $\ln x$; 2) $-\sqrt{1+x^4}$; 3) 0; 4) 0; 5) $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x^2}$; 6) $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$.

9.7.8. 1) $1-\dfrac{2}{e}$; 2) $\dfrac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$; 3) $\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{27}\sin 3$; 4) $\dfrac{17}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 6$; 5) $6-2e$; 6) $\ln 2-\dfrac{1}{2}$; 7) $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\sqrt{2}\pi-4$; 9) $\dfrac{1}{16}+\dfrac{\pi}{32}$; 10) $\dfrac{\pi}{32}$.

9.7.9. 1) $\dfrac{8}{15}$; 2) $\dfrac{35\pi}{256}$; 3) $\dfrac{5\pi}{16}$; 4) $\dfrac{8}{35}$; 5) 0; 6) $\dfrac{35\pi}{64}$.

9.7.10. 1) $\dfrac{32}{3}$; 2) $2-\dfrac{\pi}{2}$; 3) $8+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$; 4) $6\ln\dfrac{4}{3}$; 5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$;$\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$; 6) $4-\pi$;
7) $\ln\dfrac{7+2\sqrt{7}}{9}$; 8) $\dfrac{\pi}{6}$; 9) $\sqrt{2}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; 10) $\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$; 11) $\sqrt{7}-\sqrt{3}+\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{6}$;
12) $\dfrac{8}{15}$; 13) $\dfrac{1}{24\sqrt{3}}$; 14) $\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{7\sqrt{3}}{64}-\dfrac{1}{4}$; 15) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 16) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Практикум 9.8. Застосування визначених інтегралів

Навчальні задачі

9.8.1. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y=e^x-1$, $y=e^{2x}-3$, $x=0$.

Розв'язання. [9.10.1.]

[*Записуємо формулу, виходячи із шуканого застосування інтеграла.*]

Площу фігури, обмеженої лініями $y=f(x), y=g(x)$, $x=a, x=b$, знаходять за формулою

$$S\overset{[9.10.1]}{=}\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx.$$

[*Зображуємо криволінійну трапецію.*]

Знаходимо точку перетину графіків функцій:

$$e^{2x}-3=e^x-1;\ t=e^x.$$

$$t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=-1\Rightarrow x\in\varnothing;\\ t_2=2\Rightarrow x=\ln 2.\end{array}\right.$$

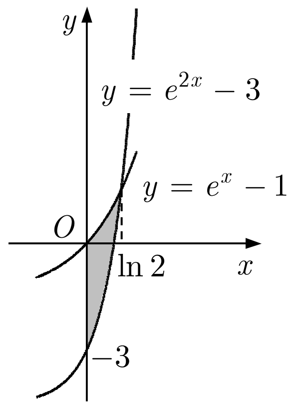


Рис. до 9.8.1

На відрізку $[0;\ln 2]$ маємо $e^x-1\ge e^{2x}-3$:

$$S=\int_0^{\ln 2}\Big((e^x-1)-(e^{2x}-3)\Big)dx=\int_0^{\ln 2}(e^x+2-e^{2x})dx=$$

$$=\left(e^x+2x-\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^{\ln 2}=2\ln 2-\frac{1}{2}.$$

9.8.2.1. Знайти площу області, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a,b>0$.

Розв'язання. [9.10.3.]

[*Параметризуємо рівняння еліпса.*]

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0; 2\pi].$$

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$, знаходять за формулою

$$S \overset{[9.10.3]}{=} \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \right|$$

[*Зображуємо криволінійну трапецію.*]

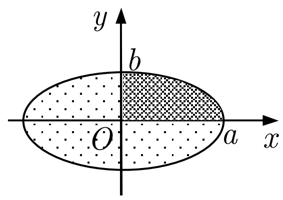


Рис. до 9.8.2.1

Ураховуючи симетрію фігури, одержимо:

$$S = 4\left| \int_0^{\pi/2} b\sin t(-a\sin t)dt \right| = 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 tdt =$$

$$= 4ab\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pi ab.$$

9.8.2.2. Знайти площу фігури, обмеженої циклоїдою $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ та прямою $y = 3 (0 < x < 4\pi, y \geq 3)$.

Розв'язання. [9.10.3.]

Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою заданої параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$, знаходять за формулою

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \right|.$$

[*Зображуємо криволінійну трапецію.*]

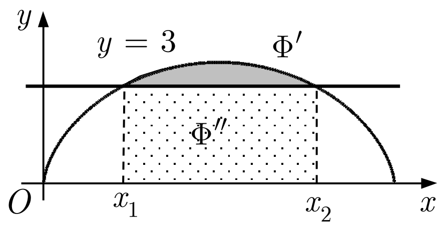


Рис. до 9.8.2.2

Обмеження $0 < x < 4\pi$ вказує на те, що розглядають лише 1-шу арку циклоїди. Пряма перетинає циклоїду в точках з абсцисами x_1 та x_2. Шукану площу фігури Φ' можна знайти віднявши від площі під циклоїдою в межах $x_1 \leq x \leq x_2$ площу прямокутника Φ''.

[*Знаходимо значення параметра t в точках перетину прямої та циклоїди.*]

$$\begin{cases} y = 2(1-\cos t), \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 = 2(1-\cos t) \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \ (0 \le t \le 2\pi);$$

$$t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

$$x_1 = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3},\ x_2 = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi''} = 3(x_2 - x_1) = 3\left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) = 4\pi + 6\sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi'\cup\Phi''} = 4\int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3}(1-\cos t)^2 dt = 4\int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= 4\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{4\pi/3} = 4\left(\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) = 4\pi + 9\sqrt{3}.$$

$$S_{\Phi'} = (4\pi + 9\sqrt{3}) - (4\pi + 6\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

9.8.3. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $\rho = 4\cos 3\varphi$ та $\rho = 2$ $(\rho \ge 2)$.

Розв'язання. [9.10.2.]

Площу фігури, обмеженої трипелюстковою розою та колом знаходимо, ураховуючи симетрію:

$$S = 3S_{\Phi'}.$$

Площу криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, у полярних координатах знаходять за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

[*Зображуємо фігуру.*]

[*Знаходимо за якого значення кута (для розглядуваної пелюстки), перетинаються коло й роза.*]

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \rho = 4\cos\varphi, \end{cases} \Leftrightarrow 4\cos 3\varphi = 2 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2}.$$

$$3\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = S_{\Phi} - S_{\Phi''},$$

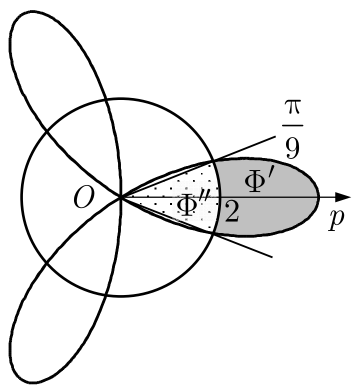


Рис. до 9.8.3.

де S_Φ — площа «розового» сектора $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, $S_{\Phi''}$ — площа кругового сектора.

$$S_\Phi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/9}^{\pi/9} 16\cos^2 3\varphi d\varphi = 16\int\limits_0^{\pi/9} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi = 8\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/9} =$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{6}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{\Phi''} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/9}^{\pi/9} 4d\varphi = 4\,\varphi\Big|_0^{\pi/9} = \frac{4\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$S = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

9.8.4. Обчислити об'єм тіла Ω, обмеженого еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ \ a > 0, b > 0, c > 0.$$

Розв'язання. [9.10.4.]

Об'єм тіла за відомою площею перерізу його площиною, перпендикулярною до осі Ox, знаходять за формулою

$$V \overset{[9.10.4]}{=} \int\limits_a^b S(x)dx.$$

[*Зображуємо тіло.*]

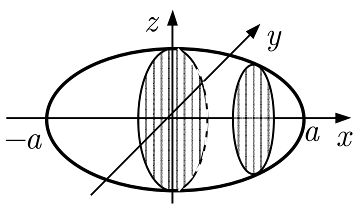


Рис. до 9.8.4

Кожний переріз тіла, обмеженого еліпсоїдом, площиною $x = x_0, -a \le x_0 \le a$, є плоскою фігурою, що обмежена еліпсом

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} = 1,$$

з півосями $\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$ та $\dfrac{c}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$, $-a \le x \le a$.

Площа фігури (**9.8.2.1**)

$$S(x_0) = \pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}\right)\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}\right) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x_0^2), -a \le x_0 \le a.$$

Отже, позначаючи x_0 через $x, -a \le x \le a$, одержимо

$$V = \int\limits_{-a}^{a} S(x)dx = \pi \int\limits_{-a}^{a} \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 2\pi \frac{bc}{a^2} \int\limits_{0}^{a} (a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

9.8.5. Обчислити об'єм, обмежений тором, і площу тора, утвореного обертанням кола $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ навколо осі $Ox\,(b > a)$.

Розв'язання. [9.10.5.]

1. Об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y = f(x), x \in [a;b]$, навколо осі Ox, знаходять за формулою

$$V = \pi \int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx.$$

[*Зображуємо тіло.*]

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійних трапецій, обмежених зверху лініями

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \text{ та } y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

знаходимо за формулою

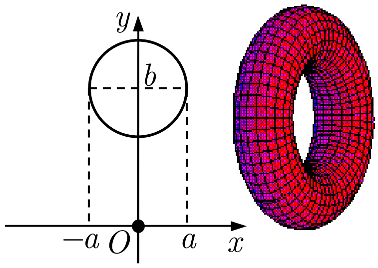


Рис. до 9.8.4.2

$$V_т = V_2 - V_1 = \pi \int\limits_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx - \pi \int\limits_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= 4\pi b \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4\pi b \frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b.$$

2. Площу поверхні обертання, утвореної обертанням кривої $y = f(x), x \in [a;b]$, навколо осі Ox, знаходять за формулою

$$Q = 2\pi \int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Площу поверхні обертання, утвореної обертанням ліній

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \text{ та } y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

знаходимо за формулою

$$Q = Q_1 + Q_2 =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx + 2\pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= 4\pi ba \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi ba \arcsin \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = 4\pi^2 ab.$$

9.8.6. Матеріальна точка M рухається прямолінійно зі швидкістю

$$v(t) = 3t^2 + 2t + 1 \text{ м/с.}$$

Знайти шлях, який пройде точка від моменту $t_0 = 0$ за 3 секунди.

Розв'язання.

Шлях, пройдений матеріальною точкою зі швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[t_1; t_2]$, знаходять за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Отже,

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 2t + 1)dt = (t^3 + t^2 + t)\Big|_0^3 = 39 \text{ м.}$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.8.7. Знайдіть площу фігур, обмежених:

1) параболою $y = x^2 + 2x$ і прямою $y = x + 2$;

2) параболою $y = 2x - x^2$ і прямою $y = -x$;

3) параболами $y^2 + 8x = 16$ та $y^2 - 24x = 48$;

4) параболами $y = x^2 + 8x - 12$ та $y = 18x - x^2$;

5) колом $x^2 + y^2 = 16$ і параболою $y^2 = 6x$;

6) колом $x^2 + y^2 = 8$ і параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$;

7*) еліпсом $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ і гіперболою $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

9.8.8. Знайдіть площу фігур, обмежених лініями:

1) $y = x(x-1)^2, y = 0$;   2) $x = y^2(y-1), x = 0$;

3) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$;   4) $y = \operatorname{tg} x, y = \dfrac{2}{3}\cos x, x = 0$.

9.8.9. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ та віссю абсцис;

2) астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

3) кардіоїдою $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t); \end{cases}$ 4) еліпсом $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$

9.8.10. Знайдіть площу петлі лінії:

1) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

9.8.11. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) двопелюстковою розою $\rho = a\sin 2\varphi$;

2) п'ятипелюстковою розою $\rho = a\cos 5\varphi$;

3) лініями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ та $\rho = 2 - \cos 4\varphi$;

4) лінією $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, що лежить поза лінією $\rho = 2 + \sin\varphi$;

5). лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

6) лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, яка лежить усередині кола $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

9.8.12. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, навколо осі Ox:

1) $y = x^3, x = 0, y = 8$;   2) $y = \dfrac{2}{1 + x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$;

3) $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$;

4) $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}, y = 0, x = -a, x = a$.

9.8.13. Крива обертається навколо осі Ox. Обчисліть площу поверхні обертання:

1) $y^2 = x, x \in [0;4]$; 2) $y^2 = 4 + x, x \in [0;2]$;

3) $y = \sin x, x \in [0;\pi]$; 4) $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}, x \in [0;a]$.

9.8.14. 1. Знайдіть об'єм кулі радіусом R.

2. Знайдіть об'єм конуса з радіусом основи R і висотою H.

9.8.15. Знайдіть шлях, який проходить тіло під час прямолінійного руху зі швидкістю $v(t)$ м/с за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1, t_1 = 0, t_2 = 4$; 2) $v(t) = 2t^2 + t, t_1 = 1, t_2 = 3$.

Відповіді

9.8.7. 1) $\dfrac{9}{2}$; 2) $\dfrac{9}{2}$; 3) $\dfrac{32}{3}\sqrt{6}$; 4) $\dfrac{343}{3}$; 5) $S_1 = \dfrac{16\pi}{3} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}, S_2 = \dfrac{32\pi}{3} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$;

6). $S_1 = 2\pi + \dfrac{4}{3}, S_2 = 6\pi - \dfrac{4}{3}$;7) $S_1 = S_3 = \pi - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln 3 - 2\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0,46, S_2 = 2(\pi - S_1)$.

9.8.8. 1).$\dfrac{1}{12}$; 2) $\dfrac{1}{12}$; 3) $e + \dfrac{1}{e} - 2$; 4) $\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

9.8.9. 1) $3\pi a^2$; 2) $\dfrac{3\pi a^2}{8}$; 3) $6\pi a^2$; 4) 6π.

9.8.10. 1) $\dfrac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $\dfrac{8}{15}$.

9.8.11. 1) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 2) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 3) $\dfrac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$; 4) $\dfrac{51\sqrt{3}}{16}$; 5) a^2; 6) $a^2\left(1 + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9.8.12. 1) $\dfrac{768}{7}\pi$; 2) $\dfrac{\pi^2 + 2\pi}{2}$; 3) 12π; 4) $\pi a^3\left(1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}\,2\right)$.

9.8.13. 1) $\dfrac{52}{3}\pi$; 2) $\dfrac{62}{3}\pi$; 3) $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$; 4) $\dfrac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$.

9.8.14. 1) $\dfrac{4}{3}\pi R^3$; 2) $\dfrac{\pi R^2 H}{3}$. **9.8.15.** 1) 68 м; 2) $\dfrac{64}{3}$ м.

Практикум 9.9. Обчислення та дослідження невластивих інтегралів

Навчальні задачі

9.9.1.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(x+1)}dx$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [9.11.1.]

Оскільки підінтегральна функція $\frac{1+2x}{x^2(x+1)}$ неперервна на $[1;+\infty]$ і проміжок інтегрування нескінченний, то маємо невластивий інтеграл 1-го роду.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(x+1)}dx \overset{[9.11.1]}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}\right)dx \overset{①}{=} \lim_{A\to+\infty} \left(\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\ln\frac{A}{A+1} - \frac{1}{A} + \ln 2 + 1\right) = \ln 2 + 1.$$

Інтеграл збігається.

Коментар. ① Інтеграл від суми дорівнюватиме сумі інтегралів лише в разі їхньої збіжності.

9.9.1.2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [9.11.1.]

Оскільки підінтегральна функція xe^{-2x} неперервна на $[0;+\infty]$ і проміжок інтегрування нескінчений, то маємо невластивий інтеграл 1-го роду.

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x}dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} xe^{-2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx & \to & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^A + \frac{1}{2}\int\limits_0^A e^{-2x}dx \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{A}{2}e^{-2A} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^A \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A}{2}e^{-2A} - \frac{1}{4}e^{-2A} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{e^{2A}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{①}{=} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2e^{2A}} = \frac{1}{4}.$$

Інтеграл збігається.

Коментар. ① За правилом Бернуллі — Лопіталя.

9.9.1.3. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [9.11.2.]

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ має дві точки розриву:

$$x_1 = 0 \notin [1;5], x_2 = 1 \in [1;5].$$

Оскільки $x = 1$ є точкою нескінченного розриву і проміжок інтегрування скінченний, то маємо невластивий інтеграл 2-го роду.①

$$\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x} \overset{[9.11.2]}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^5 \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\ln x\right|\Big|_{1+\varepsilon}^5 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 5 - \ln\ln\left(1+\varepsilon\right)\right) = +\infty.$$

Інтеграл розбігається.

Коментар. ① Межі інтегрування є скінченними. Досліджуючи невластивий інтеграл за означенням, відступаємо всередину проміжку інтегрування.

9.9.1.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання. [9.11.3.]

Підінтегральна функція має розриви в точках

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{3} \notin \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right], x_3 = \frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right].$$

Оскільки $x = \frac{1}{3}$ є точкою нескінченного розриву і проміжок інтегрування скінченний, то маємо невластивий інтеграл 2-го роду.

$$\int\limits_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}=\left|\begin{array}{ll} x=\dfrac{1}{t}, & \begin{array}{c|c|c} x & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline t & 3 & \frac{3}{2} \end{array} \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}. & \end{array}\right|=\int\limits_{3/2}^{3}\frac{dt}{t\sqrt{\dfrac{9}{t^2}-1}}=$$

$$=\int\limits_{3/2}^{3}\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=\left|\begin{array}{l} t=3-\text{ точка} \\ \text{нескінченного розриву}\end{array}\right|=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{3/2}^{3-\varepsilon}\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{t}{3}\Bigg|_{3/2}^{3-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)-\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Інтеграл збігається.

9.9.2.1. Дослідити на збіжність інтеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

Розв'язання. [9.11.3, 9.11.7.]

[*Плануючи використати ознаку порівняння, розбиваємо невластивий інтеграл 1-го роду на суму двох інтегралів так, щоб точка* 0 *не належала проміжку інтегрування невластивого інтеграла.*]

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}.$$

Перший доданок — визначений інтеграл, а другий — невластивий інтеграл 1-го роду.①

Досліджуємо $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ за ознакою порівняння.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^5+1}}>0, x\in[1;+\infty);$$

$$f(x)\sim\frac{x}{x^{5/2}}=\frac{1}{x^{3/2}}=g(x), x\to+\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Оскільки $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ збігається[9.11.3], то $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ збігається за граничною ознакою порівняння.

Інтеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$ збігається як сума визначеного і збіжного невластивого інтеграла.

Коментар. ① Точка $x = -1$, у якій підінтегральна функція стає необмеженою, не належить проміжку інтегрування.

9.9.2.2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{x^2} - 1}$.

Розв'язання. [9.11.4, 9.11.8.]

[*З'ясовуємо в яких точках підінтегральна функція стає необмеженою.*]

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2} - 1} > 0, x \in (0;1]; \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1} = +\infty.$$

Оскільки точка $x = 0$ — точка нескінченного розриву і проміжок інтегрування скінчений, то досліджуваний інтеграл є невластивим інтегралом 2-го роду.

[*Застосовуємо граничну ознаку порівняння.*]

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2} - 1} \sim \frac{1}{x^2} = g(x), x \to 0.$$

Оскільки $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ – розбігається[9.11.4], то $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{x^2} - 1}$ розбігається за граничною ознакою порівняння.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

9.9.3. Обчисліть невластивий інтеграл (або встановіть його розбіжність):

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} dx \ (a > 0)$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$;

5) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

6) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$;

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$;

11)* $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x dx$; 12)* $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$.

9.9.4. Користуючись ознаками збіжності, дослідіть на збіжність інтеграл:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$; 2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4+1}dx$;

3) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^{14}dx}{(x^3+x+1)^5}$; 4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^7dx}{(x^3+2x+1)^3}$;

5) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^3+1}}$; 6) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$;

7) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\sqrt{x}}dx$; 8) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{x}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$;

9) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+5)}{x^2}dx$; 10) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

9.9.5. Обчисліть невластивий інтеграл або встановіть його розбіжність:

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$;

3) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{\ln(x-1)}}$; 4) $\int\limits_{0}^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

5) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$; 6) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$;

7) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 8) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$;

9) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; 10) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$;

11) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$; 12) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$.

9.9.6. Обчисліть невластивий інтеграл або встановіть його розбіжність:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

3)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$; 4)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx$.

9.9.7. Користуючись ознаками збіжності, дослідіть на збіжність інтеграл:

1) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)-x}$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$;

9) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$; 10) $\int\limits_0^1 \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

9.9.8. З'ясуйте, для яких значень k збігається:

1) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k\ln x}$; 2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$.

9.9.9. Швидкість прямолінійного руху матеріальної точки $v(t)$. Знайдіть шлях, який пройде точка від початку руху до повної зупинки, якщо:

1) $v = te^{-0{,}01t}$ м/с; 2) $v = 4te^{-t^2}$ м/с.

Відповіді

9.9.3. 1) розбігається; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) розбігається; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{\pi^2}{8}$; 8) розбігається; 9) π; 10) $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$; 11) розбігається; 12) $\frac{a}{a^2+b^2}, a>0$, розбігається, $a \le 0$.

9.9.4. 1) збігається; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) збігається; 7) збігається; 8) розбігається; 7) збігається; 8) розбігається.

9.9.5. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) 1; 5) π; 6) $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$; 7) $\frac{8}{3}$; 8) $-\frac{2}{e}$; 9) $\frac{10}{7}$; 10) розбігається; 11) розбігається; 12) розбігається.

9.9.6. 1) розбігається; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}(3+2\sqrt{3})$.

9.9.7. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) розбігається; 7) збігається; 8) розбігається.

9.9.9 1) $k>1$; 2) $k>1$.

9.9.10. 1) 10^4 м; 2) 2 м.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Первісна функції на проміжку. **2.** Невизначений інтеграл від функції. **3.** Визначений інтеграл за відрізком. **4.** Невластивий інтеграл 1-го роду(з нескінченною межею). **5.** Збіжність (розбіжність) невластивого інтеграла 1-го роду.	**6.** Невластивий інтеграл 2-го роду (від необмеженої функції). **7.** Збіжність (розбіжність) невластивого інтеграла 2-го роду. **8.** Головне значення невластивих інтегралів.
Теореми	
1. Теорема про первісну. **2.** Достатня умова існування первісної. **3.** Теорема про заміну змінної в невизначеному інтегралі. **4.** Теорема про інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. **5.** Теорема про розклад раціонального дробу на суму елементарних. **6.** Теорема Чебишова. **7.** Необхідна умова існування визначеного інтеграла за відрізком. **8.** Достатня умова існування визначеного інтеграла за відрізком.	**9.** Властивості визначеного інтеграла. **10.** Теорема про середнє значення функції **11.** Теорема Бароу. **12.** Теорема Ньютона — Ляйбніца. **13.** Теорема про інтегрування частинами у визначеному інтегралі. **14.** Теорема про заміну змінної у визначеному інтегралі. **15.** Ознаки порівняння невластивих інтегралів 1-го роду. **16.** Ознаки порівняння невластивих інтегралів 2-го роду.
Методи	
1. Метод безпосереднього інтегрування. **2.** Метод заміни змінної. **3.** Метод інтегрування частинами.	**4.** Узагальнений метод інтегрування частинами. **5.** Метод невизначених коефіцієнтів.
Основні задачі	
Знаходити невизначений інтеграл: **1)** безпосереднім інтегруванням; **2)** заміною змінних; **3)** інтегруванням частинами; **4)** узагальненим інтегруванням частинами; **5)** від раціональної функції; **6)** від тригонометричного виразу; **7)** від ірраціонального виразу. **8.** Знаходити похідну від інтеграла зі змінною верхньою межею.	Обчислювати визначений інтеграл: **9)** за формулою Ньютона — Ляйбніца; **10)** за допомогою заміни змінної; **11)** за симетричним відрізком; **12)** від періодичної функції; **13)** за формулою Валіса. **14.** Знаходити площу криволінійної трапеції. **15.** Обчислювати невластиві інтеграли. **16.** Досліджувати на збіжність невластиві інтеграли за допомогою ознак збіжності.

РОЗДІЛ 10. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

10.1. Інтеграли за геометричними об'єктами
10.2. Подвійні інтеграли
10.3. Потрійні інтеграли
10.4. Криволінійні інтеграли першого роду
10.5. Криволінійні інтеграли другого роду
10.6. Поверхневі інтеграли першого роду
10.7. Поверхневі інтеграли другого роду

Розділ присвячено розширенню поняття інтеграла за відрізком на різні геометричні об'єкти: плоску область, криву, поверхню та просторову область. Інтеграли за геометричними об'єктами від функцій кількох змінних мають багато спільного: від схеми запровадження до умов існування і властивостей.

Розвинутий математичний апарат застосовано до задач геометрії та фізики.

Поданий матеріал використовується в розділах:

— Теорія поля;

— Теорія функцій комплексної змінної.

Ключові поняття:

— *інтеграл за геометричним об'єктом;*

— *інтегровність функції за геометричним об'єктом;*

— *подвійний інтеграл;*

— *потрійний інтеграл;*

— *криволінійні інтеграли;*

— *поверхневі інтеграли.*

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— *обчислювати подвійні, потрійні, криволінійні та поверхневі інтеграли;*

— *застосовувати інтеграли за геометричним об'єктом до розв'язання задач геометрії та фізики.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Диференціальне числення функцій однієї змінної;*

— *Диференціальне числення функцій кількох змінних;*

— *Інтегральне числення функцій однієї змінної;*

— *Аналітична геометрія.*

10.1. ІНТЕГРАЛИ ЗА ГЕОМЕТРИЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Поняття визначеного інтеграла за відрізком можна поширити й на інші геометричні об'єкти. Інтеграли за геометричними об'єктами мають багато спільного, а саме: схему запровадження, умови існування та властивості.

10.1.1. Міри геометричних об'єктів

1. Розгляньмо функцію n змінних $u = f(P)$ на деякому геометричному об'єкті Φ із простору $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$.

Під *геометричним об'єктом* Φ розуміють одну зі зв'язних множин точок:

1) у просторі $\mathbb{R}^1$ — відрізок $[a; b]$ (рис. 10.1);

2) у просторі $\mathbb{R}^2$ — криву L і плоску область D (рис. 10.2);

3) у просторі $\mathbb{R}^3$ — криву L, поверхню Ω і просторову область G (рис. 10.3).

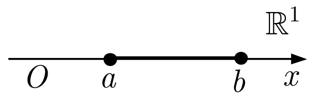


Рис. 10.1. Геометричний об'єкт на прямій

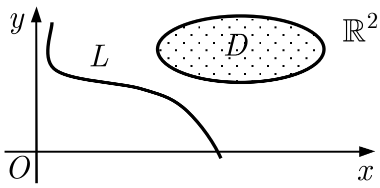


Рис. 10.2. Геометричні об'єкти на площині

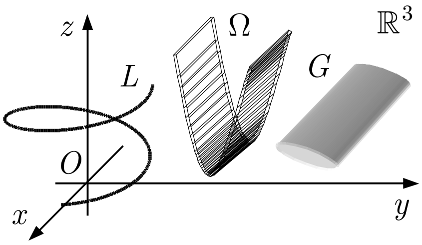


Рис. 10.3. Геометричні об'єкти у просторі

2. Розглядаючи об'єкти різних типів, запроваджують поняття *міри* μ об'єкта:

1) для відрізка і кривої L — довжини $l([a; b])$ й $l(L)$;

2) для плоскої області D й поверхні Ω — площі $S(D)$ й $S(\Omega)$;

3) для просторової області G — об'єму $V(G)$.

3. Узагальнюючи, під *мірою* геометричного об'єкта Φ розуміють дійсну функцію $\mu(\Phi)$, що справджує умови:

1) $\mu(\Phi) \geq 0$;

2) $\mu(\Phi_1 \cup \Phi_2) = \mu(\Phi_1) + \mu(\Phi_2)$, якщо $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ й Φ_1 та Φ_2 не мають спільних унутрішніх точок;

3) $\Phi_1 \subset \Phi_2 \Rightarrow \mu(\Phi_1) \leq \mu(\Phi_2)$;

4) $\exists \Phi : \mu(\Phi) = 0$.

Приміром, міра межі області D (див. рис. 10.2) дорівнює нулю.

4. *Діаметром* d геометричного об'єкта Φ називають найбільшу з віддалей між двома точками цього об'єкту:

$$d = \operatorname{diam} \Phi = \sup_{P', P'' \in \Phi} \rho(P', P'').$$

Приміром, діаметр еліпса дорівнює великій осі. Діаметр квадрата дорівнює його діагоналі. Діаметр круга й кулі збігається з діаметром круга й кулі у звичайному розумінні.

10.1.2. Визначений інтеграл за геометричним об'єктом

1. Розгляньмо геометричний об'єкт Φ з мірою $\mu(\Phi)$ й визначеною на ньому функцією $f(P), P \in \Phi$.

Для кожного типу геометричного об'єкта можна запровадити визначений інтеграл за цим об'єктом:

1) для відрізка $[a;b]$ — *визначений інтеграл за відрізком* $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) для кривої $L \subset \mathbb{R}^2$ (або $L \subset \mathbb{R}^3$) — *криволінійний інтеграл за довжиною дуги* $\int\limits_L f(x,y)dl$ або $\int\limits_L f(x,y,z)dl$;

3) для плоскої області D — *подвійний інтеграл* за областю $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$;

4) для поверхні Ω — *поверхневий інтеграл за площею поверхні* $\iint\limits_\Omega f(x,y,z)d\sigma$;

5) для просторової області G — *потрійний інтеграл* за областю $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$.

2. Усі визначені інтеграли за геометричними об'єктами можна запровадити за єдиною формальною процедурою.

Крок 1. Розбивають геометричний об'єкт Φ довільним чином на n елементів Φ_i з мірами $\Delta\mu_i$ й діаметрами $d_i = d(\Phi_i), i = \overline{1,n}$.

Крок 2. На кожному елементі Φ_i вибирають довільну точку P_i й обчислюють значення $f(P_i)$ функції в цій точці.

Крок 3. Утворюють суму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\mu_i$, яку називають n-*ю інтегральною сумою* для функції $f(P)$ за геометричним об'єктом Φ.

Крок 4. Знаходять границю інтегральної суми за умови, що найбільший з діаметрів елементів d_i прямує до нуля, що стає можливим, коли кількість елементів розбиття прямує до нескінченності:

$$\lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\mu_i.$$

Для заданого геометричного об'єкта Φ й вибраного n можна утворити скільки завгодно інтегральних сум, по-різному розбиваючи фігуру на елементи та вибираючи точки на кожному елементі.

3. Сформулюємо загальне означення визначеного інтеграла за геометричним об'єктом, яке згодом конкретизуємо для кожного геометричного об'єкту.

Означення 10.1 (визначеного інтеграла за геометричним об'єктом).

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли найбільший з діаметрів елементів d_i прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття геометричного об'єкту Φ на елементи Φ_i, ані від вибору точок P_i в цих елементах, то її називають *визначеним інтегралом за геометричним об'єктом* Φ від функції $f(P)$ і позначають

$$\int\limits_{\Phi} f(P)d\mu = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\mu_i.$$

Функцію f називають *інтегровною* на геометричному об'єкті Φ.

4. Як і для визначеного інтеграла за відрізком, правдиві теореми, які виражають необхідну й достатню умови існування визначеного інтеграла за геометричним об'єктом.

Теорема 10.1 (необхідна умова існування інтеграла).

Якщо функція f інтегровна на геометричному об'єкті Φ, то вона обмежена на цьому об'єкті.

Теорема 10.2 (достатня умова існування інтеграла).
Якщо на обмеженому геометричному об'єкті Φ функція f неперервна, то вона інтегровна на цьому об'єкті.

10.1.3. Властивості інтегралів за геометричними об'єктами

Подаймо спільні властивості інтегралів за геометричними об'єктами.

1 (*нормованість*). Інтеграл за геометричним об'єктом Φ від одиниці дорівнює мірі цього геометричного об'єкта:

$$\int\limits_{\Phi} 1 d\mu = \int\limits_{\Phi} d\mu = \mu(\Phi).$$

Доведення. $\int\limits_{\Phi} d\mu = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\mu_i = \mu(\Phi).$ ■

2 (*лінійність*). Інтеграл за геометричним об'єктом Φ від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації інтегралів від цих функцій:

$$\int\limits_{\Phi} [\alpha f(P) + \beta g(P)] d\mu = \alpha \int\limits_{\Phi} f(P) d\mu + \beta \int\limits_{\Phi} g(P) d\mu.$$

Доведення.

$$\int\limits_{\Phi} [\alpha f(P) + \beta g(P)] d\mu = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} [\alpha f(P_i) + \beta g(P_i)] \Delta\mu_i =$$

$$= \alpha \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\mu_i + \beta \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} g(P_i)\Delta\mu_i = \alpha \int\limits_{\Phi} f(P) d\mu + \beta \int\limits_{\Phi} g(P) d\mu. \blacksquare$$

3 (*адитивність*). Якщо геометричний об'єкт Φ є об'єднанням геометричних об'єктів Φ_1 та Φ_2 без спільних унутрішніх точок, то

$$\int\limits_{\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2} f(P) d\mu = \int\limits_{\Phi_1} f(P) d\mu + \int\limits_{\Phi_2} f(P) d\mu.$$

4 (*збереження знаку підінтегральної функції*). Якщо $f(P) \geq 0$ для всіх $P \in \Phi$, то

$$\int\limits_{\Phi} f(P) d\mu \geq 0.$$

5 (*монотонність*). Якщо $f(P) \geq g(P)$ для всіх $P \in \Phi$, то

$$\int\limits_{\Phi} f(P) d\mu \geq \int\limits_{\Phi} g(P) d\mu.$$

6 (*оцінка модуля інтеграла за геометричним об'єктом*)

$$\left| \int\limits_{\Phi} f(P) d\mu \right| \leq \int\limits_{\Phi} \left| f(P) \right| d\mu.$$

7 (*оцінка інтеграла за геометричним об'єктом*). Якщо m та M — відповідно найменше та найбільше значення функції f у замкненій області Φ, тобто

$$m = \min_{P \in \Phi} f(P),\, M = \max_{P \in \Phi} f(P),$$

то

$$m\mu(\Phi) \le \int\limits_{\Phi} f(P)d\mu \le M\mu(\Phi).$$

8 (*теорема про середнє*). Якщо $f(P)$ неперервна в обмеженій, замкненій області Φ, то знайдеться така точка $Q \in \Phi$, що

$$\int\limits_{\Phi} f(P)d\mu = f(Q)\mu(\Phi).$$

Доведення. За властивістю 7) маємо

$$m \le \frac{1}{\mu(\Phi)} \int\limits_{\Phi} f(P)d\mu \le M.$$

Число $\dfrac{1}{\mu(\Phi)} \int\limits_{\Phi} f(P)d\mu$ лежить між найменшим і найбільшим значеннями функції $f(P)$ в області Φ. Оскільки $f(P)$ неперервна, то знайдеться точка $Q \in \Phi$ така, що

$$f(Q) = \frac{1}{\mu(\Phi)} \int\limits_{\Phi} f(P)d\mu. \ \blacksquare$$

Число

$$f(Q) = \frac{1}{\mu(\Phi)} \int\limits_{\Phi} f(P)d\mu$$

називають *середнім значенням функції* $f(P)$ на геометричному об'єкті Φ.

10.2. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Розгляньмо означення, основні властивості та застосування подвійного інтеграла — інтеграла за плоскою областю. Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох визначених інтегралів.

10.2.1. Задача про об'єм криволінійного циліндра

1. Криву L, яку задано явно рівнянням $y = f(x), x \in [a;b]$, називають *гладкою*, якщо функція f неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$.

Криву, утворену зі скінченної кількості гладких кривих, і яка не має точок самоперетину, називають *кусково-гладкою*.

Розгляньмо на площині Oxy область D, обмежену кусково-гладкою кривою L (рис. 10.4).

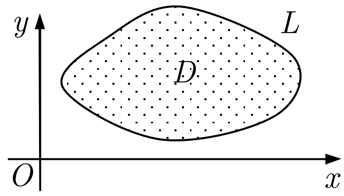


Рис. 10.4. Замкнена область з кусково-гладкою межею

2. Нехай $z = f(x,y)$ — невід'ємна та неперервна в замкненій обмеженій області D функція. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x,y)$ визначає деяку поверхню Ω, яка проєктується на площину Oxy в область D.

Тіло G, обмежене зверху поверхнею Ω, знизу — замкненою областю D площини Oxy, з межею L, з боків — циліндричною поверхнею з напрямною L і твірними, які паралельні осі Oz, називають *криволінійним циліндром* (рис. 10.5).

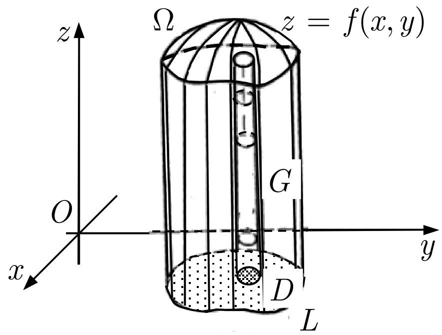


Рис. 10.5. Криволінійний циліндр

3. Знайдімо об'єм криволінійного циліндра.

Розбиваємо область D кусково-гладкими кривими L_i на n ділянок D_i із площами ΔS_i та діаметрами $d_i = d(D_i), i = \overline{1,n}$.

На кожній ділянці D_i вибираємо довільну точку M_i.

Будуємо циліндричні поверхні з напрямними L_i і твірними, паралельними осі Oz.

Ці поверхні розіб'ють тіло G на n стовпчиків G_i об'ємом

$$\Delta V_i \approx f(M_i)\Delta S_i, i = \overline{1,n}.$$

Тоді об'єм усього тіла

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Спрямовуючи найбільший діаметр ділянки d_i до нуля, дістаємо значення об'єму тіла

$$\boxed{V = \lim_{\substack{\max d_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.}$$

10.2.2. Поняття подвійного інтеграла

1. Нехай у замкненій області D площини Oxy з кусково-гладкою межею задано неперервну функцію $f(x,y)$.

Розбиваємо довільним чином область D кусково-гладкими кривими на n ділянок D_i із площами ΔS_i і діаметрами $d_i = d(D_i), i = \overline{1,n}$.

На кожній ділянці D_i вибираємо довільну точку $M_i(x_i;y_i)$ й обчислюємо значення $f(M_i)$ (рис. 10.6).

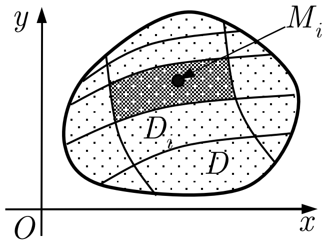


Рис. 10.6. Подвійний інтеграл

Утворюємо n-ту інтегральну суму для функції f в області D

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$$

Означення 10.2 (подвійного інтеграла).

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли найбільший з діаметрів d_i ділянок D_i прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття області D на ділянки, ані від вибору точок M_i на кожній ділянці, то її називають *подвійним інтегралом за областю* D від функції f і позначають

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$$

Функцію f називають *інтегровною в області* D, D — *областю інтегрування*, $dS = dxdy$ — *диференціалом площі*.

2. Оскільки границя інтегральної суми не повинна залежати від способу розбиття області D на ділянки D_i, то область D можна розбити на ділянки прямими, які паралельні осям координат (рис. 10.7).

Нехай D_{ij} — прямокутник зі сторонами

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1},$$
$$i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

що лежить усередині області D. Його площа дорівнює $\Delta x_i \Delta y_j$.

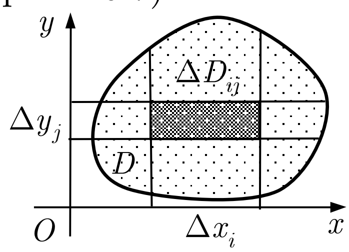


Рис. 10.7. Розбиття області вертикальними й горизонтальними прямими

Виберімо довільну точку $M_{ij}(\hat{x}_i;\hat{y}_j)$, $x_{i-1} \le \hat{x}_i \le x_i$, $y_{j-1} \le \hat{y}_j \le y_j$.

Такому розбиттю відповідає інтегральна сума

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\hat{x}_i, \hat{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Тоді за означенням подвійного інтеграла маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\hat{x}_i, \hat{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

що й обґрунтовує позначення $dS = dxdy$ як міри (площі) елементарної ділянки.

3. З означення подвійного інтеграла випливає, що об'єм криволінійного циліндра, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$, яка проєктується на площину Oxy в область D, можна знайти за формулою

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.}$$

10.2.3. Основні властивості подвійного інтеграла

1 (*нормованість*). Подвійний інтеграл за областю $D \subset \mathbb{R}^2$ від одиниці дорівнює площі цієї області:

$$\iint\limits_D 1dxdy = \iint\limits_D dxdy = \text{площа}(D) = S(D).$$

2 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ правдива рівність

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

3 (*адитивність*). Якщо область D розбити на дві області D_1 та D_2 без спільних унутрішніх точок (рис. 10.8), то

$$\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

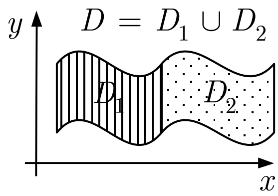


Рис. 10.8. Адитивність подвійного інтеграла

Властивості 4–8 інтегралів за геометричними об'єктами для подвійних інтегралів зберігаються.

10.2.4. Обчислення подвійного інтеграла у ПДСК

1. Покажімо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох визначених інтегралів.

Область D називають *правильною в напрямі осі* Oy, якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через унутрішню точку області перетинає межу області не більше як у двох точках (рис. 10.9).

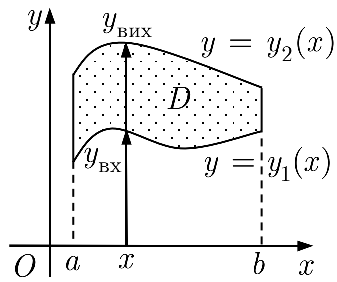


Рис. 10.9. Область правильна в напрямі осі Oy

2. Нехай в області інтегрування

$$D = \left\{(x,y) \middle| a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\right\}.$$

задано невід'ємну неперервну функцію $z = f(x,y)$. Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

виражає об'єм V циліндричного тіла.

Будуємо переріз циліндричного тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox: $x = \text{const} \in [a;b]$.

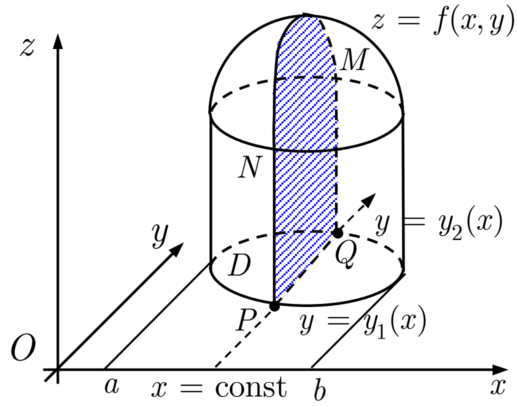


Рис. 10.10. Зведення подвійного інтеграла до повторних

У перерізі дістаємо криволінійну трапецію $PQMN$, площу якої можна знайти за формулою

$$S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \ x = \text{const} \in [a;b].$$

Згідно з методом перерізів

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Отже,

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.}$$

3. Праву частину одержаної формули називають *повторним* інтегралом. Інтеграл

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

називають *унутрішнім*, а інтеграл

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

— *зовнішнім*.

4. Для області D *правильної в напрямі осі* Ox, тобто області, для якої будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через унутрішню точку області перетинає межу області не більше як у двох точках (рис. 10.11), маємо формулу

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.}$$

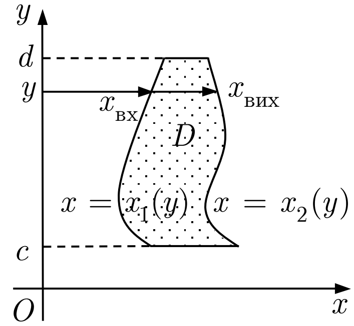


Рис. 10.11. Область правильна в напрямі осі Ox

Тут унутрішнім є інтеграл за змінною x.

Якщо область D правильна в обох напрямах, то інтеграл можна обчислювати за будь-якою з формул. Результати обчислень однакові.

Якщо область не є правильною в жодному з напрямів, то її треба розбити на області, правильні в одному з напрямів.

5. Приміром, обчислімо подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де область D обмежена прямими $y=0, y=x$ та $x=1$ (рис. 10.12). Область D правильна в обох напрямах. Інтегруватимемо вздовж осі Oy.

Прямі $y=0$ та $y=x$ перетинаються в точці $x=0$. Область D обмежена: знизу прямою $y=0$ та зверху прямою $y=x$.

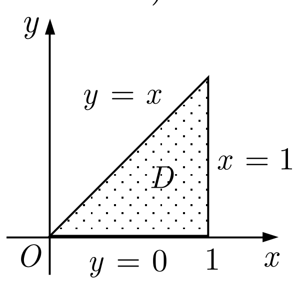


Рис. 10.12. Область D

$$\iint\limits_D (3x+6y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (3x+6y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (3xy+3y^2)\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 6x^2 dx = 2x^3\Big|_0^1 = 2.$$

6. Якщо область D — прямокутник, обмежений вертикальними прямими $x = a, x = b$ та горизонтальними прямими $y = c, y = d$, то

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.}$$

7. Якщо підінтегральну функцію можна подати як добуток функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ і межі внутрішнього інтеграла сталі, то подвійний інтеграл за прямокутником є добутком двох незалежних визначених інтегралів:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f_1(x)f_2(y)dy = \int\limits_a^b f_1(x)dx \cdot \int\limits_c^d f_2(y)dy$$

10.2.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах

1. Щоб спростити обчислення подвійного інтеграла, найчастіше застосовують перехід до полярних координат (рис. 10.13) за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2;}$$

$$\rho \geq 0, \ -\pi < \varphi \leq \pi.$$

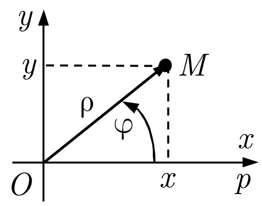


Рис. 10.13. Узгоджені полярні та декартові координати

2. Розгляньмо одночасно прямокутну декартову систему координат і узгоджену з нею полярну систему координат. Нехай $f(x,y)$ — неперервна функція в замкненій обмеженій області D з кусково-гладкою межею.

Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття області на ділянки D_k і від вибору точок на цих ділянках, то область D розбиваємо на ділянки D_k за допомогою координатних ліній полярної системи координат: кіл $\rho = \rho_k$ та променів $\varphi = \varphi_k$ (рис. 10.14).

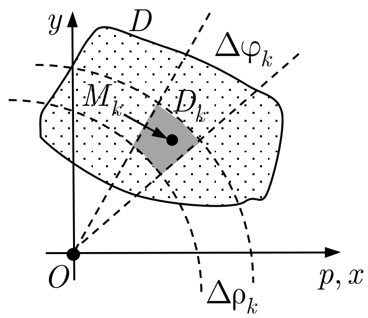


Рис. 10.14. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Оскільки ділянку D_k можна вважати наближено прямокутником зі сторонами $\rho_k\Delta\varphi_k$ і $\Delta\rho_k$, то його площа

$$\Delta S_k \approx \rho_k\Delta\varphi_k\Delta\rho_k.$$

Вибираємо на ділянці D_k точку

$$M_k(x_k;y_k) = M(\rho_k\cos\varphi_k;\rho_k\sin\varphi_k).$$

Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k =$$

$$= \lim_{\max d_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_k\cos\varphi_k,\rho_k\sin\varphi_k)\rho_k\Delta\varphi_k\Delta\rho_k =$$

$$= \iint\limits_{\tilde D} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{\tilde D}\tilde f(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Отже, правдива формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde D} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi,}$$

з якої випливає, співвідношення елементів площі у ПДСК і полярній системі координат

$$\boxed{dS = dxdy = \rho d\rho d\varphi.}$$

3. Для *радіальної* області, обмеженої променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$, (рис. 10.15), правдива формула

$$\boxed{\iint\limits_{\tilde D}\tilde f(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\tilde f(\rho,\varphi)\rho d\rho.}$$

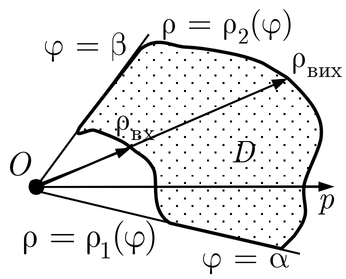


Рис. 10.15. Радіальна область

4. Якщо полюс O лежить усередині області D і кожний промінь $\varphi = \mathrm{const}$, що виходить з полюса (рис. 10.16), перетинає межу $\rho = \rho(\varphi)$ області лише в одній точці, то

$$\boxed{\iint\limits_{\tilde D}\tilde f(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi\int\limits_{0}^{\rho(\varphi)}\tilde f(\rho,\varphi)\rho d\rho.}$$

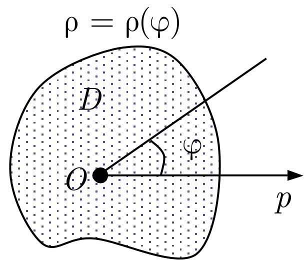


Рис. 10.16. Полюс належить області

5. Приміром, перейдімо до полярної системи координат у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy\,,$$

Область D є круговим сектором (рис. 10.17).

де $D = \left\{ (x;y) \middle| x^2 + y^2 \le 1, \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x \right\}.$

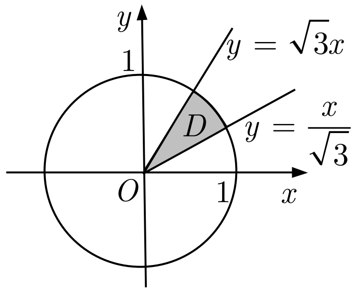


Рис. 10.17. Область D

Підставляємо вирази $x = \rho\cos\varphi\, x$ та $y = \rho\sin\varphi$ в рівняння межі області:

1) $x^2 + y^2 = 1$; $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1$, звідси $\rho = 1$ — полярне рівняння кола;

2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $\rho\sin\varphi = \dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, тобто $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ — полярне рівняння променя;

3) $y = \sqrt{3}x$; $\rho\sin\varphi = \sqrt{3}\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, тобто $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ — полярне рівняння променя.

Отже,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^1 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

10.2.6. Загальний випадок заміни змінної

1. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій замкненій обмеженій області D, то існує

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Перейдімо за допомогою співвідношень

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

у подвійному інтегралі до нових змінних u та v, припускаючи, що з цих співвідношень можна однозначно виразити

$$u = u(x,y), v = v(x,y).$$

Тоді кожній точці $M(x;y) \in D$ ПДСК Oxy відповідає деяка єдина точка $\tilde{M}(u;v) \in \tilde{D}$ ПДСК $\tilde{O}uv$.

Теорема 10.3 (про заміну змінних у подвійному інтегралі).

Нехай взаємно однозначне перетворення

$$u = u(x,y), v = v(x,y)$$

переводить замкнену обмежену область D площини Oxy у замкнену обмежену область $\tilde{D}$ площини Ouv. Якщо функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ мають в області $\tilde{D}$ неперервні частинні похідні, то правдива *формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv,$$

де $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0.$

2. Визначник $J(u,v)$ називають *якобіаном* (*визначником Якобі — Остроградського*). Його модуль є локальним коефіцієнтом деформації площі під час заміни змінних:

$$dxdy = \left|J(u,v)\right|dudv.$$

3. З розгляду безпосереднього переходу від декартових до полярних координат, маємо, що $\left|J(\rho,\varphi)\right| = \rho$. Той самий результат дістаємо, обчислюючи якобіан за загальною формулою:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

4. Для *узагальненої полярної системи координат*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2,}$$

$$\rho \geq 0, \ -\pi < \varphi \leq \pi.$$

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Отже, правдива формула переходу до узагальнених полярних координат у подвійному інтегралі

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)ab\rho\, d\rho\, d\varphi.}$$

10.2.7. Застосування подвійних інтегралів

1. Площу плоскої області D обчислюють за формулою

$$\boxed{S(D) = \iint\limits_D dxdy.}$$

2. Маса пластини D. Нехай маємо пластину у формі плоскої області D, по поверхні якої неперервно розподілена маса з густиною $\mu = \mu(x, y)$. Треба знайти масу цієї пластини.

Розбиваємо довільним чином пластину D кусково-гладкими кривими на ділянки D_i із площами ΔS_i і діаметрами $d_i = d(D_i), i = \overline{1, n}$ (рис. 10.18)

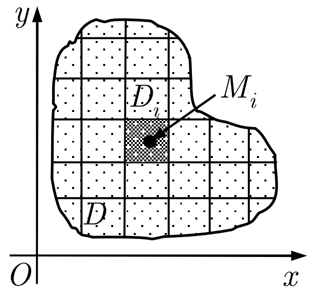


Рис. 10.18. Розбиття пластинки на ділянки

На кожній ділянці вибираємо довільну точку M_i і обчислюємо значення $\mu(M_i)$.

Якщо вважати, що густина на кожній ділянці D_i є сталою і наближено дорівнює $\mu(M_i)$, то дістаємо наближено масу ділянки D_i

$$\Delta m_i \approx \mu(M_i)\Delta S_i.$$

Тоді маса всієї пластини D наближено дорівнює

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\Delta S_i.$$

Масу пластини D дістаємо граничним переходом, коли найбільший діаметр d_i ділянки прямує до нуля:

$$m = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \mu(M_i)\Delta S_i = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy.$$

Отже, масу пластинки D з поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$ обчислюють за формулою

$$\boxed{m(D) = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy.}$$

3. Статичні моменти. *Статичними моментами* матеріальної точки $M(x; y)$ масою m відносно осі Ox та осі Oy називають:

$$M_x = my;$$
$$M_y = mx.$$

Статичні моменти пластини D з поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$ обчислюють за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_D y\mu(x, y)dxdy, \\ M_y &= \iint\limits_D x\mu(x, y)dxdy. \end{aligned}}$$

4. Координати центра мас пластинки знаходять за формулами:

$$\boxed{x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}.}$$

5. Моменти інерції пластини. *Моментами інерції* матеріальної точки масою m відносно осей Ox та Oy називають:

$$I_x = my^2;$$
$$I_y = mx^2.$$

Моменти інерції пластини D з поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$ обчислюють за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_D y^2\mu(x, y)dxdy, \\ I_y &= \iint\limits_D x^2\mu(x, y)dxdy. \end{aligned}}$$

Момент інерції пластини відносно початку координат обчислюють за формулою

$$\boxed{I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\mu(x, y)dxdy.}$$

10.3. ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Розгляньмо означення, основні властивості та застосування інтеграла за просторовою областю. Обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення визначеного та подвійного інтегралів.

10.3.1. Означення потрійного інтеграла

1. Поверхню $\Omega: F(x,y,z)=0$ називають *гладкою*, якщо в кожній її точці існує нормальний вектор $\overline{n}$ і його положення змінюється неперервно. Поверхні, які утворені скінченною кількістю гладких поверхонь, називають *кусково-гладкими*.

2. Нехай у замкненій області G простору $Oxyz$, обмеженій кусково-гладкою поверхнею, задано неперервну функцію $f(x,y,z)$ (рис. 10.19).

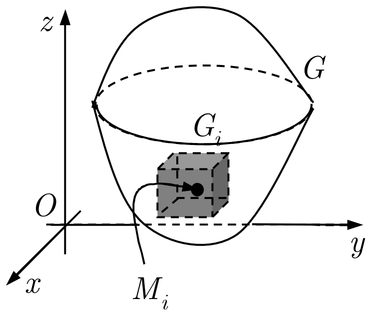


Рис. 10.19. Потрійний інтеграл за областю G

Розбиваємо довільним чином область G кусково-гладкими поверхнями на n елементів G_i з об'ємами ΔV_i й діаметрами $d_i = d(G_i), i=\overline{1,n}$.

У кожному елементі G_i вибираємо довільну точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ і обчислюємо значення функції $f(M_i)$.

Утворюємо n-ту інтегральну суму для функції f в області G

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i.$$

Означення 10.3 (потрійного інтеграла).

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли найбільший з діаметрів d_i елементів G_i прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття області G на елементи, ані від вибору точок M_i всередині цих елементів, то її називають *потрійним інтегралом за областю* G від функції f і позначають

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i.$$

Функцію $f(x,y,z)$ називають *інтегровною в області* G, G — *областю інтегрування*, $dV = dxdydz$ — *диференціалом об'єму*.

10.3.2. Основні властивості потрійного інтеграла

1 (*нормованість*). Потрійний інтеграл за просторовою областю $G \subset \mathbb{R}^3$ від одиниці дорівнює об'єму цієї області:

$$\iiint\limits_G 1dV = \iiint\limits_G dV = \text{об'єм } (G) = V(G).$$

2 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iiint\limits_G (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_G g(x,y,z)dxdydz.$$

3 (*адитивність*). Якщо область G розбити на дві області G_1 та G_2 без спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Властивості 4–8 інтегралів за геометричними об'єктами для потрійних інтегралів зберігаються.

10.3.3. Обчислення потрійного інтеграла

1. Потрійний інтеграл за певних умов можна звести до подвійного інтеграла від визначеного інтеграла або до трьох визначених інтегралів.

Область G називають *циліндричною в напрямі осі* Oz, якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через унутрішню точку $(x;y;0) \in D_{xy}$ паралельно осі Oz, перетинає межі області G не більше як у двох точках.

2. Розгляньмо циліндричну в напрямі осі Oz просторову область G, яка обмежена (рис. 10.20):

зверху поверхнею $z = z_2(x,y)$,

знизу поверхнею $z = z_1(x,y)$,

і проєктується на площину Oxy в область D_{xy}.

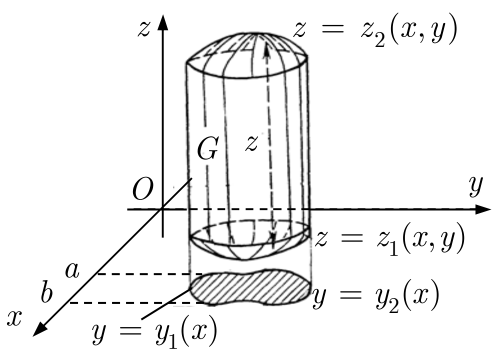


Рис. 10.20. Обчислення потрійного інтеграла

Тоді потрійний інтеграл можна звести до повторних за формулою

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.}$$

3. Якщо область D_{xy} є правильною, приміром, у напрямі осі Oy, тобто

$$D_{xy}: y_1(x) \le y \le y_2(x), x \in [a;b],$$

то потрійний інтеграл можна звести до трьох повторних:

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.}$$

4. Нехай область G є прямокутним паралелепіпедом

$$G = \left\{a \le x \le b, c \le y \le d, p \le z \le q\right\}$$

і проєктується на площину Oxy у прямокутник (рис. 10.21)

$$D_{xy} = \left\{a \le x \le b, c \le y \le d\right\}.$$

Тоді

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int\limits_p^q f(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_p^q f(x,y,z)dz.$$

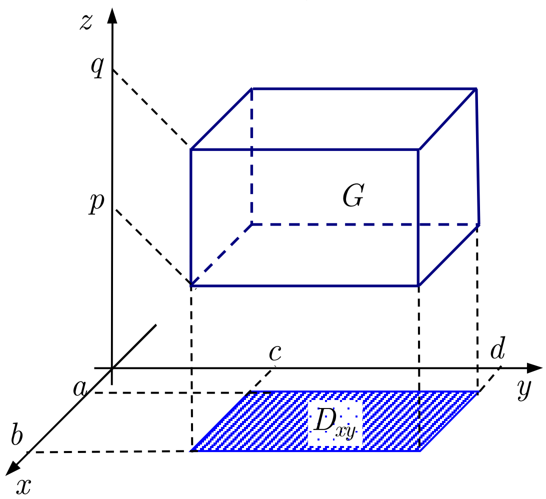


Рис. 10.21. Потрійний інтеграл за прямокутним паралелепіпедом

Послідовність інтегралів в останній формулі можна міняти місцями.

10.3.4 Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай взаємно однозначне перетворення

$$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$$

переводить обмежену замкнену область G простору $Oxyz$ в обмежену замкнену область $\tilde{G}$ простору $Ouvw$. Якщо функції x, y та z мають в області $\tilde{G}$ неперервні частинні похідні за всіма аргументами і якобіан

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, то правдива формула заміни змінних у потрійному інтегралі

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tilde G} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\big|J(u,v,w)\big|dudvdw.}$$

10.3.5. Перехід до сферичних координат у потрійному інтегралі

1. *Сферичними координатами* точки $M(x;y;z)$ простору $Oxyz$ називають трійку чисел $(r;\theta;\varphi)$ (рис. 10.22), де:

r — довжина радіуса-вектора точки M,

θ — кут, утворений радіусом-вектором $\overline{OM}$ з віссю Oz;

φ — кут, утворений проєкцією радіуса-вектора $\overline{OM}$ на площину Oxy і віссю Ox.

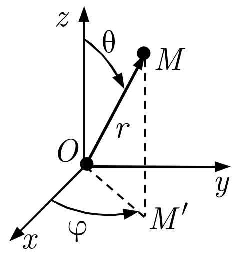


Рис. 10.22. Сферична система координат

Сферичні координати r,θ,φ зв'язані з узгодженими декартовими координатами x,y,z співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=r^2;} \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ -\pi < \varphi \le \pi.$$

2. Якобіан переходу від декартових координат до сферичних координат

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Отже, правдива формула переходу до сферичних координат у потрійному інтегралі

$$\boxed{\begin{gathered}\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tilde G} \tilde f(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi, \\ \tilde f(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).\end{gathered}}$$

Вираз

$$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

називають *диференціалом об'єму у сферичних координатах*.

3. Використовують також *узагальнені сферичні координати*:

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi, \\ y = br\sin\theta\sin\varphi, \\ z = cr\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2;}$$

$$r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ -\pi < \varphi \le \pi;$$

$$\left|J\right| = abcr^2\sin\theta.$$

10.3.6. Перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі

1. *Циліндричними координатами* точки $M(x;y;z)$ простору $Oxyz$ називають трійку чисел $(\rho;\varphi;z)$ (рис. 10.23), де:

ρ — довжина радіуса-вектора проєкції точки M на площину Oxy;

φ — кут, утворений проєкцією радіуса-вектора $\overline{OM}$ на площину Oxy і віссю Ox,

z — апліката точки M.

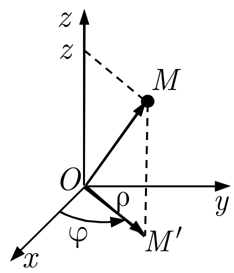


Рис. 10.23. Циліндрична система координат

Циліндричні координати ρ,φ,z зв'язані з узгодженими декартовими координатами x,y,z співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=\rho^2;}$$

$$\rho \ge 0, -\pi < \varphi \le \pi, -\infty < z < \infty.$$

2. Знайдімо якобіан переходу від декартових до циліндричних координат:

$$J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Отже, правдива формула переходу до циліндричних координат у потрійному інтегралі

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tilde{G}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz.}$$

Вираз

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

називають *диференціалом об'єму в циліндричних координатах*.

3. Використовують також *узагальнені циліндричні координати*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2;}$$

$$\rho \geq 0, \; -\pi < \varphi \leq \pi, \; -\infty < z < \infty;$$

$$\left|J\right| = ab\rho.$$

4. Приміром, обчислімо потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$$

за областю G, обмеженою поверхнями $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ та $z = 2$.

Область інтегрування G обмежена: коловим циліндром $x^2 + y^2 = 1$ з боків, площиною $z = 1$ знизу та площиною $z = 2$ зверху (рис. 10.24).

Тому для обчислення інтеграла переходимо до циліндричної системи координат:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z;$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

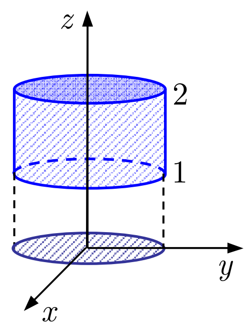


Рис. 10.24.
Циліндричне тіло G

Маємо:

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz = \iiint\limits_{\tilde{G}} z\rho^2 d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_1^2 zdz = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_1^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi.$$

10.3.7. Застосування потрійного інтеграла

1. Об'єм тіла G обчислюють за формулою

$$\boxed{V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.}$$

2. Масу тіла G з густиною $\mu = \mu(x, y, z)$ обчислюють за формулою

$$\boxed{m(G) = \iiint\limits_G \mu(x, y, z)dxdydz.}$$

3. Статичні моменти тіла відносно координатних площин обчислюють за формулами:

$$\boxed{M_{\begin{Bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz.}$$

4. Координати центра мас тіла знаходять за формулами:

$$\boxed{x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.}$$

5. Моменти інерції тіла. Моменти інерції тіла відносно координатних площин обчислюють за формулами:

$$\boxed{I_{\begin{Bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz,}$$

де індекс моменту відповідає певному рядку.

Моменти інерції тіла відносно координатних осей обчислюють за формулами:

$$\boxed{I_{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} y^2+z^2 \\ x^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz.}$$

Момент інерції тіла відносно початку координат обчислюють за формулою

$$I_O = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\mu dxdydz.$$

10.4. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Розгляньмо означення, основні властивості та застосування інтеграла за кривою (на площині та у просторі). Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

10.4.1. Задача про довжину дуги кривої

1. Криву L, що задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_1 \le t \le t_2,$$

називають *гладкою*, якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[t_1;t_2]$, причому

$$\left|x'(t)\right| + \left|y'(t)\right| \ne 0, t \in [t_1;t_2].$$

Якщо L замкнена, то виконано рівності:

$$x'(t_1) = x'(t_2), y'(t_1) = y'(t_2).$$

Якщо для скінченної кількості точок скінченні похідні не існують або одночасно дорівнюють нулю, то криву називають *кусково-гладкою*.

2. Нехай на площині Oxy задано гладку криву $L = AB$.

Розбиваємо криву L на n дуг точками $A_i(x_i;y_i)$ (рис. 10.25) і позначаємо

$$a = x_0, b = x_n,$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$
$$i = \overline{1,n}.$$

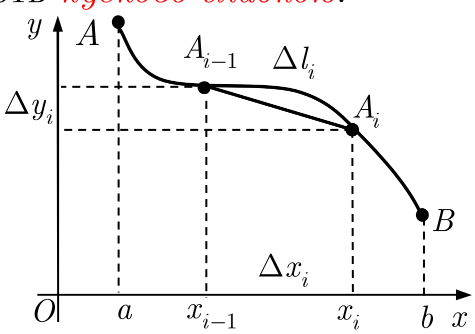


Рис. 10.25. Довжина дуги кривої

Розгляньмо ламану $AA_1 \ldots A_{n-1}B$, яку вписано у криву AB.

Знаходимо за теоремою Піфагора довжину кожної ланки ламаної:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Підсумовуючи, дістаємо довжину ламаної, що наближено дорівнює довжини дуги кривої

$$l(AB) \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

3. *Довжиною дуги* кривої називають скінченну границю довжин уписаних у цю криву ламаних, коли довжина найбільшої ланки прямує до нуля:

$$l(AB) = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

10.4.2. Диференціал довжини дуги кривої

1. Розгляньмо гладку плоску криву L, задану явно рівнянням $y = f(x), x \in [a; b]$ (рис. 10.26).

За теоремою Лаґранжа про скінченні прирости

$$\Delta y_i = f'(c_i)\Delta x_i,\ c_i \in (x_{i-1}; x_i).$$

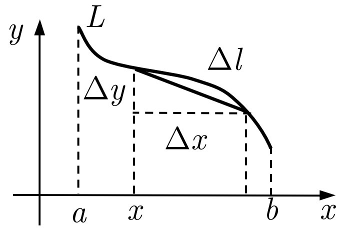


Рис. 10.26. Диференціал дуги плоскої кривої

Тому

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i,\ \Delta x_i > 0.$$

Отже, ураховуючи означення визначеного інтеграла, довжина гладкої кривої

$$l(AB) = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Вираз

$$\boxed{dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}$$

називають *диференціалом довжини дуги* кривої, заданої явно.

2. Оскільки $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, то

$$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Отже, диференціал дуги кривої дорівнює довжині відрізка дотичної до цієї кривої, що відповідає приросту $\Delta x = dx$. У цьому полягає **геометричний зміст** диференціала дуги кривої (рис. 10.27).

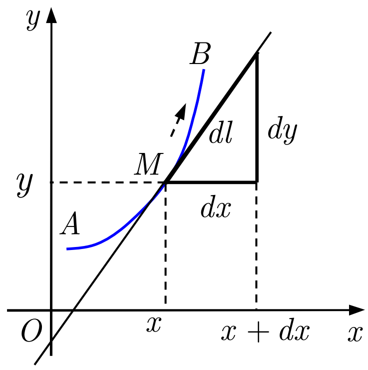


Рис. 10.27. Геометричний зміст диференціала дуги

3. Якщо плоску криву L задано параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2], \end{cases}$$

то, припускаючи, що $x'(t) > 0$, дістаємо

$$dl = \sqrt{1 + (y_x')^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2} x'(t)dt = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt;$$

$$\boxed{dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt.}$$

4. Якщо плоску криву L задано в полярних координатах рівнянням

$$\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta],$$

то її можна задати параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \varphi \in (\alpha; \beta),$$

й одержати формулу

$$\boxed{dl = \sqrt{(\rho_\varphi')^2 + \rho^2}d\varphi.}$$

5. Для просторової кривої L, заданої параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), t \in [t_1; t_2], \end{cases}$$

маємо

$$\boxed{dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}dt.}$$

10.4.3. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду

Нехай у просторі $Oxyz$ задано гладку криву $L = AB$, у точках якої означено неперервну функцію $f(x, y, z)$.

Розбиваємо довільним чином криву L точками на n дуг L_i із довжинами $\Delta l_i, \overline{1, n}$ (рис. 10.28).

На кожній дузі L_i вибираємо довільну точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ і обчислюємо значення функції $f(M_i)$.

Утворюємо n-ту інтегральну суму для функції f на кривій L

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i.$$

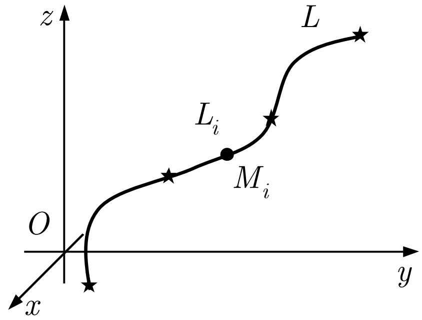


Рис. 10.28. Криволінійний інтеграл 1-го роду

Означення 10.4 (криволінійного інтеграла 1-го роду).

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли найбільша з довжин Δl_i дуг L_i прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття кривої L на дуги, ані від вибору точок M_i на кожній дузі, то її називають *криволінійним інтегралом 1-го роду* (*за довжиною дуги*) уздовж кривої L від функції f і позначають

$$\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i.$$

Функцію $f(x,y,z)$ називають *інтегровною на кривій* L, криву L називають *контуром інтегрування*, dl — *диференціалом довжини дуги* кривої.

10.4.4. Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду

1 (*нормованість*). Криволінійний інтеграл 1-го роду від одиниці дорівнює довжині дуги кривої:

$$\int_L 1dl = \int_L dl = \text{довжина } (L) = l(L).$$

2 (*лінійність*). Для будь-яких значень $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\int_L [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]dl = \alpha \int_L f(x,y,z)dl + \beta \int_L f(x,y,z)dl.$$

3 (*адитивність*). Якщо кусково-гладку криву L розбити на дві криві L_1 та L_2, то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{L_1} f(x,y,z)dl + \int_{L_2} f(x,y,z)dl.$$

Властивості 4–8 інтегралів за геометричними об'єктами для криволінійних інтегралів 1-го роду зберігаються.

4. Криволінійний інтеграл 1-го роду *не залежить від напряму шляху інтегрування*, тобто, якщо $L = AB$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{BA} f(x,y,z)dl.$$

Це означає, що межі інтегрування у криволінійному інтегралі 1-го роду завжди треба брати від меншого до більшого значення змінної, оскільки за означенням Δl_i — довжина дуги, тому $\Delta l_i > 0$.

5. Зауважмо, що у визначеному інтегралі за відрізком величина Δx_i може бути як додатною, так і від'ємною. У зв'язку з чим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

10.4.5. Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду

1. Якщо криву L задано параметричними рівняннями в ПДСК:

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), t \in [t_1; t_2], \end{cases}$$

то

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.}$$

2. Якщо криву L задано рівнянням $y = y(x), x \in [a; b]$, в ПДСК, то

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.}$$

3. Якщо криву L задано параметричними рівняннями в ПДСК:

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2], \end{cases}$$

то

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.}$$

4. Якщо криву L задано рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha;\beta]$, у полярній системі координат, то

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)}d\varphi.}$$

10.4.6. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду

1. Довжину дуги L обчислюють за формулою

$$\boxed{l(L) = \int\limits_L dl.}$$

2. Масу, розподілену по кривій L з густиною $\mu(x,y,z)$ обчислюють за формулою

$$\boxed{m(L) = \int\limits_L \mu(x,y,z)dl.}$$

3. Приміром, знайдімо масу, розподілену вздовж кривої $y = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in [1;2]$, якщо густина $\mu(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

Масу, розподілену вздовж кривої AB, де $A\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ і $B(2;2)$, знаходимо за формулою

$$m = \int\limits_{AB} \mu(x,y)dl = \int\limits_{AB} \frac{y}{x}dl.$$

Оскільки рівняння кривої $y = \dfrac{x^2}{2}$, а $y' = x$, то

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + x^2}dx\,.$$

Отже,

$$m = \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2x}\sqrt{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\sqrt{1 + x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_1^2 \sqrt{1 + x^2}d(1 + x^2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}.$$

10.5. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

Розгляньмо обчислення, властивості й застосування інтеграла за кривою від векторної функції кількох змінних.

10.5.1. Задача про роботу

1. Якщо в кожній точці області G простору $Oxyz$ векторну функцію

$$\boxed{\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},}$$

де $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ — скалярні функції, то кажуть, що в області G задано *векторне поле* $\overline{a}$.

Приклади векторних полів: поле швидкостей рухомої рідини, поле електричної напруженості, поле сил тощо.

2. Нехай у кожній точці просторової області G задано силове поле

$$\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},$$

де $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ — неперервні в області G функції.

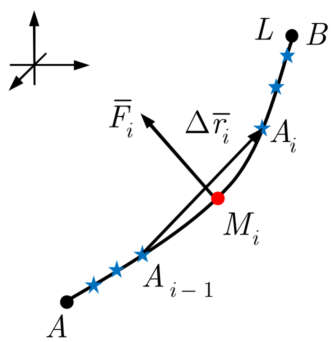


Рис. 10.29. Задача про роботу силового поля

Під час переміщення матеріальної точки вздовж гладкої кривої L поле $\overline{F}$ виконує деяку роботу A (рис. 10.29). Щоб знайти її, розбиваємо довільним чином криву L на n дуг L_i точками

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B,$$

і позначаємо $\Delta\overline{r}_i = \overline{A_{i-1}A_i}, i = \overline{1,n}.$

На кожній дузі L_i довільним чином вибираємо точку M_i. Силу $\overline{F}$ уважаємо сталою на кожній дузі $A_{i-1}A_i$ і рівною $\overline{F}(M_i)$. Тоді робота під час переміщення вздовж дуги L_i

$$\Delta A_i \approx (\overline{F}(M_i), \Delta \overline{r}_i).$$

Робота поля $\overline{F}$ під час переміщення вздовж кривої L

$$A_L(\overline{F}) \approx \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}(M_i), \Delta \overline{r}_i).$$

Спрямовуючи найбільшу з довжин $\left|\Delta \overline{r}_i\right|$ до нуля, дістаємо роботу силового поля $\overline{F} = \overline{F}(M)$ під час переміщення вздовж дуги L:

$$A_L(\overline{F}) = \lim_{\substack{\max\left|\Delta \overline{r}_i\right| \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}(M_i), \Delta \overline{r}_i).$$

Якщо позначити

$$\Delta \overline{r}_i = \Delta x_i \overline{i} + \Delta y_i \overline{j} + \Delta z_i \overline{k},$$

то можна одержати координатну форму цього виразу:

$$A_L(\overline{F}) = \lim_{\substack{\max\left|\Delta x_i\right| \to 0, \\ \max\left|\Delta y_i\right| \to 0, \\ \max\left|\Delta z_i\right| \to 0, \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i \right).$$

10.5.2. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду

1. Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ неперервні в точках гладкої кривої

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2]. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Точку $A(x(t_1); y(t_1); z(t_1))$ називають *початковою* точкою кривої L, а точу $B(x(t_2); y(t_2); z(t_2))$ — *кінцевою*.

2. Криву, для якої вибрано початкову та кінцеву точки й указано напрям руху, називають *орієнтованою*: L^+ означає, що крива L орієнтована і рух уздовж неї відбувається від початкової точки A до кінцевої точки B, а L^- — що рух відбувається від B до A. Криву можна орієнтувати, вибираючи напрям дотичного вектора.

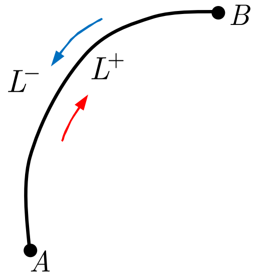


Рис. 10.30. Орієнтована крива

3. Нехай у просторі $Oxyz$ задано гладку орієнтовану криву $L = AB$, у точках якої означено неперервну векторну функцію

$$\overline{a} = \overline{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}.$$

Розбиваємо довільним чином криву L на n дуг точками

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B.$$

Позначаємо $\Delta\overline{r_i} = \overline{A_{i-1}A_i}, i = \overline{1,n}.$

На кожній дузі L_i вибираємо довільну точку точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ й обчислюємо значення вектор-функції $\overline{a}(M_i)$.

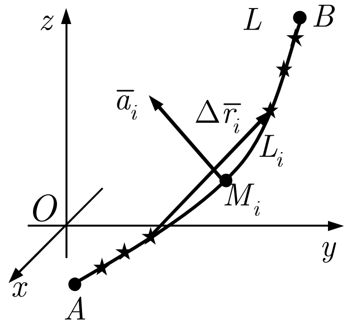


Рис. 10.31. Криволінійний інтеграл 2-го роду

Утворюємо n-ту інтегральну суму для вектор-функції $\overline{a}$ на кривій L

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r_i}).$$

Означення 10.5 (криволінійного інтеграла 2-го роду).

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли найбільша довжина $\left|\Delta\overline{r_i}\right|$ прямує до нуля, що не залежить ані від способу розбиття кривої L на дуги L_i, ані від вибору точок M_i на кожній дузі, то її називають *криволінійним інтегралом 2-го роду* (*за координатами*) уздовж кривої L від вектор-функції

$$\overline{a} = \overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$$

і позначають

$$\int_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \lim_{\substack{\max\left|\Delta\overline{r_i}\right| \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r_i}).$$

Оскільки $d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$, то криволінійний інтеграл можна записати в координатній формі:

$$\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_L P dx + Q dy + R dz.$$

4. Якщо гладку криву L задано параметричними рівняннями:

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha;\beta], \\ z = z(t), \end{cases}$$

то диференціал дуги кривої

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \left|\overline{\tau}\right| dt,$$

де $\overline{\tau} = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k}$ — вектор, дотичний до кривої L у точці $M(x(t); y(t); z(t))$.

Ураховуючи, що орт

$$\overline{\tau}^0 = \frac{\overline{\tau}}{\left|\overline{\tau}\right|},$$

підінтегральний вираз можна переписати як

$$Pdx + Qdy + Rdz = Px'(t)dt + Qy'(t)dt + Rz'(t)dt =$$
$$= (\overline{a}, \overline{\tau})dt = \left(\overline{a}, \frac{\overline{\tau}}{\left|\overline{\tau}\right|}\right)\left|\overline{\tau}\right| dt = (\overline{a}, \overline{\tau}^0)dl.$$

Дістаємо формулу зв’язку між криволінійними інтегралами 1-го та 2-го роду

$$\boxed{\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_L (\overline{a}, \overline{\tau}^0)dl.}$$

10.5.3. Основні властивості криволінійного інтеграла 2-го роду

1 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_L (\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2, d\overline{r}) = \alpha\int\limits_L (\overline{a}_1, d\overline{r}) + \beta\int\limits_L (\overline{a}_2, d\overline{r}).$$

2 (*адитивність*). Якщо криву L розбито на дві криві L_1 та L_2, то

$$\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{L_1} (\overline{a}, d\overline{r}) + \int\limits_{L_2} (\overline{a}, d\overline{r}).$$

3 (*орієнтованість*). Якщо на кривій L змінити орієнтацію на протилежну, то знак інтеграла $\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r})$ зміниться на протилежний, тобто

$$\int\limits_{L^+} (\overline{a}, d\overline{r}) = -\int\limits_{L^-} (\overline{a}, d\overline{r}).$$

Справді, зміна орієнтації кривої L^+ на протилежну L^- означає заміну вектора $d\overline{r}$ на вектор $(-d\overline{r})$.

10.5.4. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду

1. Якщо криву L задано параметричними рівняннями:

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2], \\ z = z(t), \end{cases}$$

то

$$\boxed{\begin{aligned} &\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &\quad = \int\limits_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t) + \tilde{R}(t)z'(t)]dt, \end{aligned}}$$

де $\tilde{P}(t) = P(x(t), y(t), z(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t), z(t)), \tilde{R}(t) = R(x(t), y(t), z(t))$.

2. Якщо криву L задано параметричними рівняннями:

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2],$$

то

$$\boxed{\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t)]dt,}$$

де $\tilde{P}(t) = P(x(t), y(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t))$.

3. Якщо криву L задано явно рівнянням $y = y(x), x \in [a; b]$, то

$$\boxed{\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx.}$$

4. Приміром, обчислімо криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int\limits_{AB} x^2dx + xydy\,,$$

де AB — чверть кола $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, причому точці A відповідає значення $t = 0$, а точці B — значення $t = \dfrac{\pi}{2}$.

З рівняння кола маємо

$$dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt\,.$$

Тоді

$$\int\limits_{AB} x^2dx + xydy = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(-\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t\right) dt = 0.$$

10.5.5. Формула Остроградського — Ґріна

1. Нехай у площині Oxy задано замкнену область D з межею L. Уважають, що межу L області D *орієнтовано додатно* (*від'ємно*), якщо під час руху вздовж L область D розташована ліворуч (праворуч) (рис. 10.32). Уважають також, що обмежену область D обмежує додатно орієнтована крива.

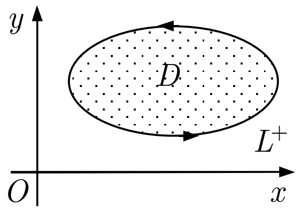


Рис. 10.32. Область D обмежена додатно орієнтованою кривою L^+

Криволінійний інтеграл уздовж додатно орієнтованого контуру L позначають як

$$\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy \text{ або } \oint\limits_{L} Pdx + Qdy\,,$$

а вздовж від'ємно орієнтованого позначають як

$$\oint\limits_{L^-} Pdx + Qdy \text{ або } \oint\limits_{L} Pdx + Qdy\,.$$

2. Установімо формулу, яка зв'язує криволінійний інтеграл 2-го роду вздовж замкненої кривої з подвійним інтегралом за областю, яка обмежена цією кривою.

Теорема 10.4 (Остроградського — Ґріна).

Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні й мають неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладкою кривою L, то правдива *формула Остроградського — Ґріна*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

де контур L обходиться в додатному напрямі.

Доведення. Нехай область D є правильною в напрямі осі Oy і обмежена (рис. 10.33):

зверху — кривою $y = f_2(x), x \in [a;b]$;

знизу — кривою $y = f_1(x), x \in [a;b]$.

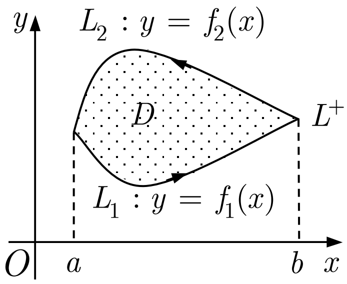


Рис. 10.33. Формула Остроградського — Ґріна

За формулою обчислення подвійного інтеграла маємо

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b P(x, f_2(x))dx - \int_a^b P(x, f_1(x))dx = -\int_{L_2} P(x,y)dx - \int_{L_1} P(x,y)dx =$$

$$= -\oint_L P(x,y)dx.$$

Якщо б область D з боків обмежували відрізки вертикальних прямих γ_1 та γ_2, то

$$\int_{\gamma_1} P(x,y)dx = \int_{\gamma_2} P(x,y)dx = 0,$$

оскільки $dx\,|_{\gamma_1} = dx\,|_{\gamma_2} = 0$.

Отже,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x,y)dx.$$

Так само доводять (якщо область D правильна в напрямі осі Ox), що

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy.$$

Віднімаючи дві рівності, дістаємо формулу Остроградського — Ґріна

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Формула є правдивою для довільної області, яку можна розбити на скінченну кількість правильних областей. ■

10.5.6. Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

1. Нехай L — довільна орієнтована крива з початковою точкою A та кінцевою точкою B.

У загальному випадку криволінійний інтеграл 2-го роду вздовж кривої L залежить не лише від розташування початкової і кінцевої точок шляху інтегрування, але й від самого шляху інтегрування (рис. 10.34).

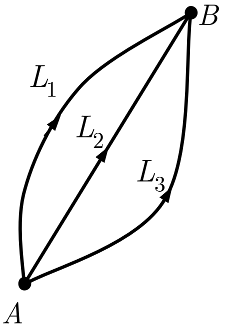


Рис. 10.34. Залежність інтеграла від шляху інтегрування

2. Наступна теорема дає 4 еквівалентних умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.

Теорема 10.5 (про еквівалентність чотирьох умов).

Якщо $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ $(P(x,y,z), Q(x,y,z)$ та $R(x,y,z))$ — функції, неперервно диференційовні в однозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^2$ (області $G \subset \mathbb{R}^3$), то рівносильні такі 4 твердження.

1. Криволінійний інтеграл за будь-яким замкненим контуром $L \subset D$ $(L \subset G)$ дорівнює нулю:

$$\oint_L P dx + Q dy = 0 \quad \left(\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0\right).$$

2. Криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування:

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_2} P dx + Q dy$$

$$\left(\int_{L_1} P dx + Q dy + R dz = \int_{L_2} P dx + Q dy + R dz,\right)$$

де L_1 та L_2 — довільні кусково-гладкі криві, що лежать в області D (області G), які мають спільний початок і кінець.

3. Існує неперервно диференційовна функція $u = u(x,y)$ (функція $u = u(x,y,z)$) така, що *диференціальна форма* $W = P dx + Q dy$ (диференціальна форма $W = P dx + Q dy + R dz$) є її повним диференціалом:

$$du = Pdx + Qdy \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P; \frac{\partial u}{\partial y} = Q;$$
$$\left(du = Pdx + Qdy + Rdz \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P; \frac{\partial u}{\partial y} = Q; \frac{\partial u}{\partial z} = R \right).$$

4. Для диференціальної форми $W = Pdx + Qdy$ (диференціальної форми $W = Pdx + Qdy + Rdz$) виконано *умови інтегровності*:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$
$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Доведення. Повне доведення цієї теореми проводять за коловою схемою

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1.$$

Обмежмося плоским випадком і доведенням лише трьох із чотирьох тверджень.

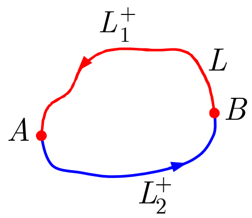


Рис. 10.35

$1 \Rightarrow 2$. Припускаємо, що криволінійний інтеграл за будь-яким замкненим контуром $L_+ \subset D$ дорівнює нулю. На замкненій кривій L вибираємо довільно дві точки A та B, які поділяють її на дві дуги L_1^+ та L_2^+ (рис. 10.35).

Тоді

$$0 = \oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_1^+} Pdx + Qdy + \int\limits_{L_2^+} Pdx + Qdy =$$
$$= \int\limits_{L_1^+} Pdx + Qdy - \int\limits_{L_2^-} Pdx + Qdy.$$

Тому

$$\int\limits_{L_1^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2^-} Pdx + Qdy,$$

тобто криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а залежить лише від початкової і кінцевої точок.

$3 \Rightarrow 4$. Нехай існує така диференційовна функція $u(x, y)$, що $du = Pdx + Qdy$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

За теоремою 8.5 про рівність мішаних похідних маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

що доводить виконання умови інтегровності.

$4 \Rightarrow 1$. Нехай для диференціальної форми $du = Pdx + Qdy$ виконано умову інтегровності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

$L \subset D$ — довільна замкнена кусково-гладка крива, що обмежує деяку область D^*. Оскільки для області D^* і кривої L виконано умови теореми 10.4 Остроградського — Ґріна, то

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Ураховуючи умову інтегровності, підінтегральна функція в подвійному інтегралі дорівнює нулю. Отже,

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0. \blacksquare$$

3. Криволінійні інтеграли, що не залежать від форми шляху інтегрування, з початковою точкою $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцевою $B(x_2; y_2; z_2)$ записують як

$$\int_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

10.5.7. Відновлення функції за її повним диференціалом

1. Якщо виконано умови теореми 10.5, то диференціальна форма

$$W = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

є повним диференціалом функції $u = u(x,y,z)$, тобто

$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Тоді функцію u можна відновити за формулою

$$\boxed{u(x,y,z) = \int_{M_0(x_0;y_0;z_0)}^{M(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz + C,}$$

де C — довільна стала.

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то за шлях можна вибрати ламану, що з'єднує точки M_0 та M, з ланками, паралельними осям координат (рис. 10.36).

$$u(x,y,z) = \int_{M_0 M_1 M_2 M} Pdx + Qdy + Rdz + C =$$

$$= \int\limits_{\substack{M_0M_1 \\ x=t, \\ y=y_0, \quad t\in[x_0;x] \\ z=z_0}} Pdx + Qdy + Rdz +$$

$$+ \int\limits_{\substack{M_1M_2 \\ x=x, \\ y=t, \quad t\in[y_0;y] \\ z=z_0}} Pdx + Qdy + Rdz +$$

$$+ \int\limits_{\substack{M_2M \\ x=x, \\ y=y, \quad t\in[z_0;z] \\ z=t}} Pdx + Qdy + Rdz + C$$

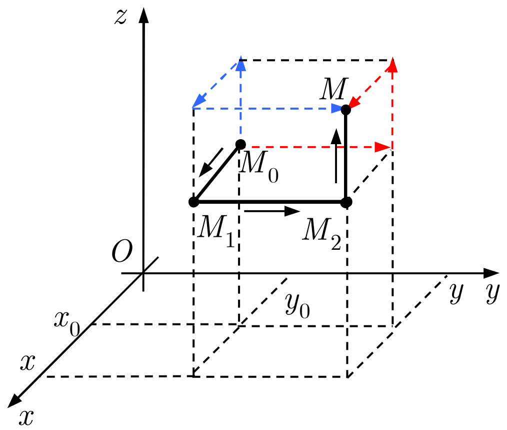


Рис. 10.36. Відновлення функції за її повним диференціалом у просторі

Отже,

$$\boxed{u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C,}$$

де $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — довільна точка неперервності функцій P,Q та R; C — довільна стала.

Зауважмо, що ще дві подібні формули можна одержати, інтегруючи спочатку вздовж ланок ламаної, які паралельні відповідно осям Oy та Oz.

2. Одержаний результат можна сформулювати і для двох змінних.

Нехай функції $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ неперервно диференційовні в однозв'язній області D (рис. 10.37). Тоді, якщо виконано умову

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},}$$

то диференціальна форма

$$W = Pdx + Qdy$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ в області D. Цю функцію можна відновити за формулою

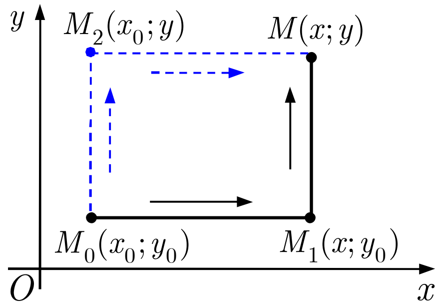


Рис. 10.37. Відновлення функції за її повним диференціалом на площині

$$\boxed{u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C,}$$

де $M_0(x_0; y_0)$ — довільна точка неперервності функцій P та Q; C — довільна стала.

3. Приміром, відновімо функцію $u(x, y)$ за її повним диференціалом

$$du = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

Функції $P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ та $Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ неперервні й мають неперервні частинні похідні, причому

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$$

Отже,

$$u(x, y) = \int\limits_0^x t^2 dt + \int\limits_0^y (x^2 - 2xt - t^2)dy + C =$$

$$= \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^x + \left(x^2 t - xt^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^y + C = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$

10.5.8. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду

1. Роботу векторного поля $\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки M до точки N обчислюють за формулою

$$\boxed{A_L(\overline{a}) = \int\limits_{L=MN} Pdx + Qdy + Rdz.}$$

2. Площу фігури, обмеженої замкненою кривою L, можна знайти за формулою

$$\boxed{S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.}$$

Справді, застосовуючи формулу Остроградського — Ґріна до криволінійного інтеграла, маємо:

$$\oint\limits_L -ydx + xdy = \left| \begin{matrix} P = -y, \\ Q = x, \end{matrix} \right| = \iint\limits_D 2dxdy = 2S(D).$$

10.6. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Розгляньмо означення, основні властивості й застосування інтеграла за поверхнею. Обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

10.6.1. Задача про площу поверхні

1. Нехай задано поверхню Ω, яка однозначно проєктується на область D площини Oxy. Це означає, що поверхню можна задати явно рівнянням

$$z = z(x,y),\ (x;y) \in D.$$

Якщо в області D функція $z(x,y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні $z'_x(x,y)$ та $z'_y(x,y)$, то поверхня є *гладкою*, тобто в кожній її точці існує дотична площина, яка змінює своє положення неперервно разом з точкою дотику.

2. Розбиваємо область D на n ділянок D_i із площами ΔS_i і діаметрами $d_i = d(D_i), i = \overline{1,n}$ (рис. 10.38). Нехай на ділянку D_i проєктується ділянка поверхні Ω_i із площею $\Delta\sigma_i$.

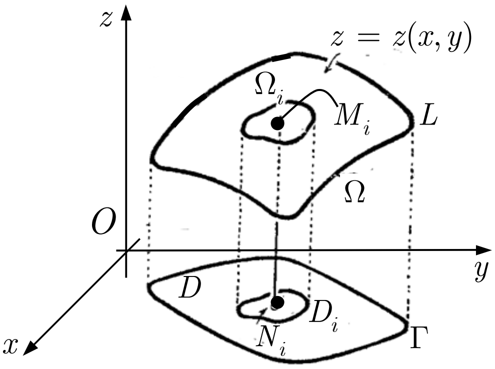


Рис. 10.38. Знаходження площі поверхні

У кожній ділянці D_i вибираємо точку $N_i(x_i;y_i)$, якій відповідає точка $M_i(x_i;y_i;z_i)$ поверхні Ω, де $z_i = z(x_i,y_i), i = \overline{1,n}$.

Проводимо в точці M_i дотичну площину T і розглядаємо ту її частину T_i із площею ΔT_i, яка на площину Oxy проєктується в область D_i. Ця площина має рівняння

$$z'_x(x_i,y_i)(x - x_i) + z'_y(x_i,y_i)(y - y_i) - (z - z_i) = 0,$$

де $\overline{n}(M_i) = z'_x(x_i,y_i)\overline{i} + z'_y(x_i,y_i)\overline{j} - \overline{k}$ —нормальний вектор площини.

Уважаємо, що площа $\Delta\sigma_i$ частини поверхні Ω, яка також проєктується на ділянку D_i, наближено дорівнює площі частини дотичної площини:

$$\Delta\sigma_i \approx \Delta T_i.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i.$$

Якщо існує скінченна границя сум площ частин дотичних площин, коли найбільший діаметр ділянки d_i прямує до нуля, то її називають *площею поверхні* Ω і позначають

$$S(\Omega) = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i.$$

Позначмо через γ_i кут між дотичною площиною до поверхні Ω в точці M_i і площиною Oxy (рис. 10.39). Тоді

$$\Delta S_i = \Delta T_i \left|\cos\gamma_i\right|.$$

Оскільки γ_i дорівнює куту між нормаллю $\overline{n}(M_i)$ до площини P і вектором $\overline{k}$ — ортом осі Oz, то

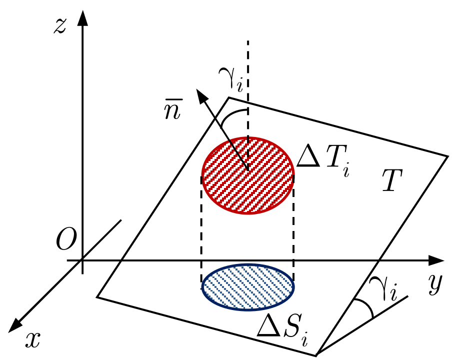


Рис. 10.39. Знаходження площі поверхні

$$\left|\cos\gamma_i\right| = \frac{\left|(\overline{n},\overline{k})\right|}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{k}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[z_x'(x_i,y_i)\right]^2+\left[z_y'(x_i,y_i)\right]^2}}.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[z_x'(x_i,y_i)\right]^2+\left[z_y'(x_i,y_i)\right]^2}\,\Delta S_i,$$

і за означенням подвійного інтеграла маємо

$$S(\Omega) = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(z_x'(M_i)\right)^2+\left(z_y'(M_i)\right)^2}\,\Delta S_i =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy.$$

Вираз

$$d\sigma = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$$

називають *диференціалом площі поверхні*.

10.6.2. Означення поверхневого інтеграла 1-го роду

Нехай гладку поверхню Ω у просторі $Oxyz$ задано явно рівнянням $z = z(x, y)$ і в кожній точці поверхні означено неперервну функцію $f(x, y, z)$.

Розбиваємо довільну чином кусково-гладкими кривими поверхню Ω на n ділянок Ω_i із площами $\Delta\sigma_i$ і діаметрами $d_i = d(\Omega_i), i = \overline{1, n}$ (рис. 10.40).

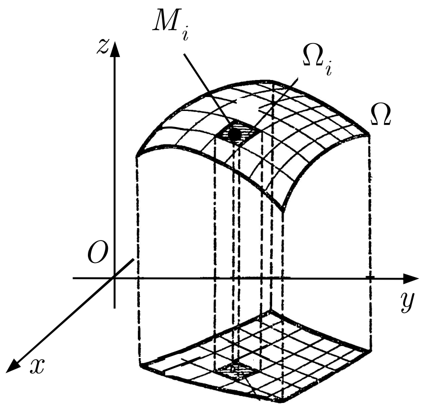


Рис. 10.40. Поверхневий інтеграл 1-го роду

На кожній ділянці Ω_i вибираємо довільну точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ і обчислюємо значення функції $f(M_i)$.

Утворюємо n-ту інтегральну суму для функції f на поверхні Ω

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Означення 10.6 (поверхневого інтеграла 1-го роду). Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли найбільший з діаметрів d_i ділянки Ω_i прямує до нуля, що не залежить ані від способу розбиття поверхні Ω на ділянки, ані від вибору точок M_i на кожній ділянці, то її називають *поверхневим інтегралом 1-го роду* (*за площею поверхні*) *за поверхнею* Ω від функції $f(x, y, z)$ і позначають

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y, z)d\sigma = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Функцію $f(x, y, z)$ називають *інтегровною за поверхнею* Ω, $d\sigma$ — *диференціалом площі поверхні*.

10.6.3. Основні властивості поверхневого інтеграла 1-го роду

1 (*нормованість*). Поверхневий інтеграл 1-го роду за поверхнею Ω від одиниці дорівнює площі цієї поверхні:

$$\iint\limits_{\Omega} 1d\sigma = \iint\limits_{\Omega} d\sigma = \text{площа}(\Omega) = S(\Omega).$$

2 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\right] d\sigma = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma + \beta \iint\limits_{\Omega} g(x,y,z)d\sigma.$$

3 (*адитивність*). Якщо поверхню Ω розбити на дві ділянки Ω_1 та Ω_2 без спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)d\sigma + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)d\sigma.$$

Властивості 4–8 інтегралів за геометричними об'єктами для поверхневих інтегралів 1-го роду зберігаються.

10.6.4. Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду

1. Обчислення поверхневого інтеграла за поверхнею Ω зводиться до обчислення подвійного інтеграла за областю D — проєкції на одну з координатних площин.

Якщо поверхню задано рівнянням $z = z(x,y)$, тобто вона однозначно проєктується на площину Oxy в область D_{xy}, то правдива формула

$$\boxed{\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy.}$$

2. Приміром, обчислімо поверхневий інтеграл

$$I = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + 3z^2)d\sigma,$$

де Ω — частина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, відрізана площиною $z = 1$.

Поверхня σ проєктується на площину Oxy у круг $D: x^2 + y^2 = 1$ (рис. 10.41).

Для конуса

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

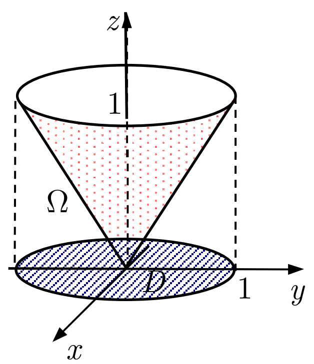


Рис. 10.41. Знаходження площі поверхні

Тому

$$I = \iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + 3z^2 \right) d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2 + 3(x^2 + y^2) \right) \sqrt{2} dxdy =$$

$$= 4\sqrt{2} \iint\limits_{D_{Oxy}} (x^2 + y^2) dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 1 \end{vmatrix} = \iint\limits_{\tilde{D}} \rho^3 d\rho d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = 8\sqrt{2}\pi \frac{\rho^4}{4} \Bigg|_0^1 = 2\sqrt{2}\pi.$$

10.6.5. Застосування поверхневого інтеграла 1-го роду

1. Площу поверхні Ω обчислюють за формулою

$$\boxed{S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma.}$$

2. Масу розподілену по поверхні Ω з густиною $\mu(x, y, z)$ обчислюють за формулою

$$\boxed{m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x, y, z) d\sigma.}$$

10.7. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

Розгляньмо означення, властивості, обчислення й застосування інтеграла за поверхнею від векторної функції кількох змінних.

10.7.1. Орієнтація поверхні

1. Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ задано гладку або кусково-гладку поверхню Ω. Візьмімо на поверхні довільну внутрішню точку M_0 і відкладімо від неї вектор нормалі певного напряму до поверхні Ω.

Якщо під час обходу довільного замкненого контуру, який проходить через M_0, лежить на поверхні Ω і не перетинає межу поверхні, вектор нормалі вертається в точку M_0 з початковим напрямом, то поверхню Ω називають *двобічною*.

Якщо під час обходу контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають *однобічною* (рис. 10.42). Двобічними поверхнями є площина, сфера, замкнена поверхня без самоперетинів тощо. Прикладом однобічної поверхні є листок Мебіуса.

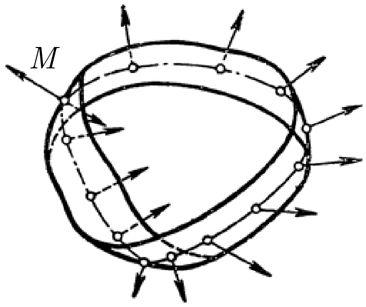


Рис. 10.42. Однобічна поверхня

Сукупність усіх точок поверхні з вибраними в них за певним правилом напрямами нормалі визначає певний *бік поверхні*.

2. Поверхню Ω, у кожній точці якої вказано нормальний вектор $\overline{n}$ і напрям обходу контуру L, називають *орієнтованою*.

Запровадьмо орієнтацію поверхні. Оточуємо точку $M \in \Omega$ замкненим контуром L з вибраним на ньому напрямом обходу. Напрям вектора нормалі $\overline{n}$ узгоджуємо з напрямом обходу контуру L за правилом правого гвинта, тобто з кінця вектора нормалі обхід контуру повинен відбуватися проти годинникової стрілки (у додатному напрямі) (рис. 10.43). Отже, вибір додатного напряму обходу контуру на поверхні однозначно визначає бік поверхні.

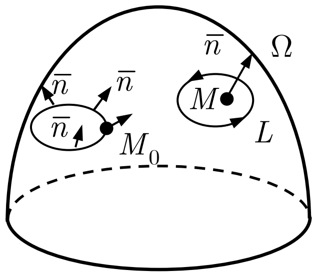


Рис. 10.43. Орієнтація поверхні

Усі двобічні поверхні орієнтовні, а однобічні — неорієнтовні.

Якщо поверхня замкнена, то домовимося вважати за додатну орієнтацію ту, що відповідає зовнішньому, а за від'ємну — внутрішньому боку поверхні.

10.7.2. Означення поверхневого інтеграла 2-го роду

1. Нехай у просторі $Oxyz$ задано гладку поверхню Ω, орієнтовану вектором нормалі з ортом $\overline{n}^0 = \overline{n}^0(M)$, у точках якої означено неперервну вектор-функцію

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}.$$

Розбиваємо довільним чином кусково-гладкими кривими вибраний бік поверхні Ω на n ділянок Ω_i із площами $\Delta\sigma_i$ і діаметрами $d_i = d(\Omega_i), i = \overline{1,n}$ (рис. 10.44).

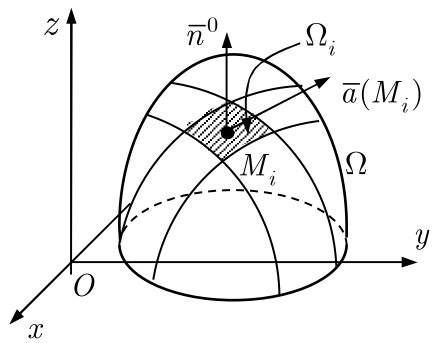


Рис. 10.44. Поверхневий інтеграл 2-го роду

На кожній ділянці вибираємо довільну точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$, обчислюємо значення вектор-функції $\overline{a}(M_i)$ і знаходимо орт вектора нормалі $\overline{n}^0(M_i)$.

Утворюємо n-ту інтегральну суму для вектор-функції $\overline{a}$ на вибраному боці поверхні Ω

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{a}(M_i),\overline{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i.$$

Означення 10.7 (поверхневого інтеграла 2-го роду).

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум, коли найбільший діаметр d_i ділянки Ω_i прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття поверхні Ω на ділянки, ані від вибору точок M_i на кожній ділянці, то її називають *поверхневим інтегралом 2-го роду* (*за координатами*) за поверхнею Ω від вектор-функції

$$\overline{a} = \overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$$

і позначають

$$\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}(\overline{a}(M_i),\overline{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i.$$

2. Одиничний вектор нормалі до орієнтованої поверхні $F(x,y,z) = 0$ знаходять за формулою

$$\boxed{\overline{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad} F}{\left|\operatorname{grad} F\right|},}$$

де знак вибирають з геометричних міркувань.

Ураховуючи, що

$$\overline{n}^0 = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma\end{pmatrix},$$

$$dydz = \cos\alpha d\sigma, dxdz = \cos\beta d\sigma, dxdy = \cos\gamma d\sigma,$$

дістаємо формулу

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma &= \iint\limits_{\Omega}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = \\ &= \iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.\end{aligned}}$$

3. Інтеграл $\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$ задає координатну форму поверхневого інтеграла 2-го роду.

Зауважмо, що в такій формі запису поверхневого інтеграла 2-го роду не міститься вказівки про вибраний бік поверхні обрано, тому вибір орієнтації поверхні під час інтегрування доводиться зазначати кожного разу додатково. В означенні вибір боку поверхні враховано напрямом нормалі $\overline{n}^0$.

10.7.3. Основні властивості поверхневого інтеграла 2-го роду

1 (*лінійність*). Для будь-яких $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{\Omega}(\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2,\overline{n}^0)d\sigma = \alpha\iint\limits_{\Omega}(\overline{a}_1,\overline{n}^0)d\sigma + \beta\iint\limits_{\Omega}(\overline{a}_2,\overline{n}^0)d\sigma.$$

2 (*адитивність*). Якщо поверхню Ω розбити на дві частини Ω_1 та Ω_2 без спільних унутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n})d\sigma = \iint\limits_{\Omega_1}(\overline{a},\overline{n})d\sigma + \iint\limits_{\Omega_2}(\overline{a},\overline{n})d\sigma.$$

3 (*орієнтованість*). Якщо на поверхні Ω змінити орієнтацію на протилежну, то знак інтеграла $\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma$ зміниться на протилежний, тобто

$$\iint\limits_{\Omega^+}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma = -\iint\limits_{\Omega^-}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma.$$

4. Якщо Ω_1,Ω_2 та Ω_3 — циліндричні поверхні з твірними, паралельними відповідно осям Oz,Ox та Oy, то

$$\iint\limits_{\Omega_1} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Omega_2} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{\Omega_3} Q(x,y,z)dxdz = 0.$$

Доведення. Для циліндричних поверхонь Ω_1,Ω_2 та Ω_3 маємо відповідно $\cos\gamma = \cos\alpha = \cos\beta = 0$, тому й інтеграли у правих частинах цих формул будуть рівні нулю. ■

10.7.4. Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду

1. Метод проєктування поверхні на всі координатні площини. Нехай поверхня Ω, яку задано рівнянням $F(x,y,z)=0$, однозначно проєктується на всі три координатні площини. Тоді рівняння поверхні однозначно розв'язується щодо кожної зі змінних x,y,z, тобто

$$x=x(y,z),\quad y=y(x,z),\quad z=z(x,y).$$

Позначмо проєкції Ω на координатні площини Oxy, Oyz та Oxz через D_{xy}, D_{yz} та D_{xz} відповідно. Нехай

$$\overline{a}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$$

і задано

$$\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma=\iint\limits_{\Omega}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy\,.$$

Розгляньмо спершу інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega}R(x,y,z)dxdy\,,$$

де рівняння поверхні Ω записуємо у вигляді

$$z=z(x,y)\,,\ (x;y)\in D_{xy}\,.$$

Тоді

$$\iint\limits_{\Omega:z=z(x,y)}R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{\Omega}R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma\,.$$

Ураховуючи, що $\cos\gamma d\sigma=\pm dxdy$ і в точках поверхні $z=z(x,y)$, маємо

$$\iint\limits_{\Omega}R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy\,,$$

причому, якщо $\cos\gamma>0$ $(\gamma=\widehat{(\overline{n}^0,\overline{k})}$ — гострий), то беремо знак «плюс», якщо $\cos\gamma<0$ $(\gamma=\widehat{(\overline{n}^0,\overline{k})}$ — тупий), то беремо знак «мінус».

Так само

$$\iint\limits_{\Omega:x=x(y,z)}P(x,y,z)dydz=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz,$$

$$\iint\limits_{\Omega:y=y(x,z)}Q(x,y,z)dxdz=\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)dxdz.$$

Отже, загальний поверхневий інтеграл знаходять як суму трьох інтегралів, кожний з яких обчислюють як подвійний інтеграл за проєкцією поверхні Ω на відповідну координатну площину:

$$\boxed{\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \\ = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \\ \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.\end{gathered}}$$

Знаки перед подвійними інтегралами збігаються зі знаками відповідних напрямних косинусів нормалі до обраного боку поверхні.

2. Метод проєктування поверхні на одну координатну площину. Нехай поверхня Ω однозначно проєктується на область D_{xy} площини Oxy. Тоді її можна задати рівнянням $z = z(x,y)$. Фіксуємо вектор нормалі $\overline{n}_1 = -z'_x\overline{i} - z'_y\overline{j} + \overline{k}$ до поверхні Ω. Оскільки $(\overline{n}_1, \overline{k}) = 1 > 0$, то заданий вектор нормалі утворює гострий кут з віссю Oz. Розглядаючи вектор нормалі $\overline{n}_1$, орієнтацію поверхні не враховували.

Нехай $\overline{n}$ — нормаль до орієнтованої поверхні Ω, тоді $\overline{n} = \overline{n}_1$, якщо вибраний верхній бік поверхні і $\overline{n} = -\overline{n}_1$, якщо розглядається нижній бік. Отже, орт $\overline{n}^0$ вектора $\overline{n}$ задає формула:

$$\overline{n}^0 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\begin{pmatrix}-z'_x \\ -z'_y \\ 1\end{pmatrix},$$

де знак «плюс» перед дробом беруть, якщо кут γ між віссю Oz і ортом $\overline{n}^0$ гострий, тобто $\cos\gamma > 0$; а знак «мінус», якщо $\cos\gamma < 0$. Ураховуючи, що диференціал площі поверхні

$$d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy,$$

для обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду від вектор-функції

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$$

за поверхнею Ω одержуємо формулу:

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma = \\ &= \pm\iint\limits_{D_{xy}} \big[P(x,y,z(x,y))(-z'_x) + Q(x,y,z(x,y))(-z'_y) + R(x,y,z(x,y)\big]dxdy,\end{aligned}}$$

де знак перед подвійним інтегралом збігається зі знаком $\cos\gamma$.

10.7.5. Формула Остроградського — Ґауса

1. Розгляньмо поверхню Ω, краєм якої є замкнена крива L. Один і той самий замкнений контур L може бути краєм нескінченної кількості поверхонь. Кажуть, що поверхня Ω *напнута* на контур L.

Обмежену поверхню, що не має краю, називають *замкненою*. Прикладами є сфера, еліпсоїд, поверхня куба чи піраміди тощо.

Нехай задано замкнену поверхню Ω та вектор-функцію

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},\ (x;y;z) \in G.$$

Поверхневий інтеграл від векторної функції $\overline{a}$ за замкненою поверхнею Ω позначають

$$\oiint\limits_{\Omega} (\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma = \oiint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy\,.$$

2. Формула Остроградського — Ґауса зв'язує поверхневий інтеграл 2-го роду за замкненою поверхнею і потрійний інтеграл за просторовою областю, обмеженою цією поверхнею.

Теорема 10.6 (Остроградського — Ґауса).

Якщо функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ та $R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми похідними $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ у замкненій області G, обмеженій кусково-гладкою поверхнею Ω, то правдива *формула Остроградського — Ґауса*

$$\oiint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

де поверхневий інтеграл обчислюють за зовнішнім боком поверхні Ω.

Доведення. Нехай область G обмежена знизу поверхнею Ω_1 з рівнянням $z = z_1(x,y)$; зверху — поверхнею Ω_2 з рівнянням $z = z_2(x,y)$, збоку — циліндричною поверхнею Ω_3, твірні якої паралельні осі Oz (рис. 10.45).

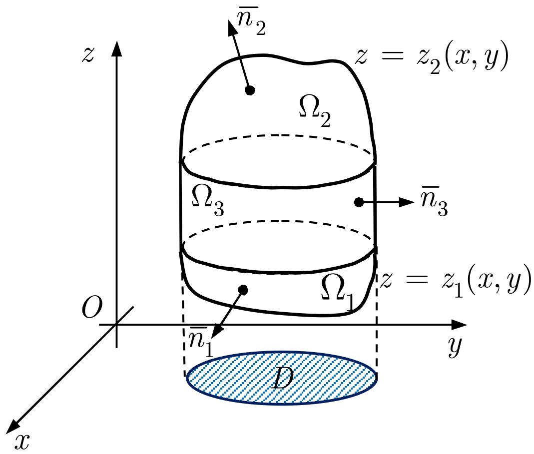


Рис. 10.45. Замкнена поверхня

Розгляньмо потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$
$$= \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))dxdy.$$

Подвійні інтеграли у правій частині рівності заміняємо поверхневими інтегралами 2-го роду за зовнішнім боком відповідно поверхонь Ω_2 та Ω_1. Ураховуючи для кожного інтеграла кут між нормаллю та віссю Oz $\left(\gamma_1 = (\widehat{\overline{n}_1, Oz}) > \frac{\pi}{2},\right.$ $\left.\gamma_2 = (\widehat{\overline{n}_2, Oz}) < \frac{\pi}{2}\right)$, одержимо

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_2} Rdxdy + \iint\limits_{\Omega_1} Rdxdy.$$

Якщо до правої частини останньої рівності додати інтеграл $\iint\limits_{\Omega_3} Rdxdy$, який дорівнює нулю за властивістю 4, остаточно маємо

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_2} Rdxdy + \iint\limits_{\Omega_1} Rdxdy + \iint\limits_{\Omega_3} Rdxdy$$

або

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dxdy,$$

де Ω — поверхня, що обмежує просторову область G.

Так само можна одержати формули:

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz,$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{\Omega} Q(x,y,z)dxdz.$$

Додаючи одержані рівності, дістаємо формулу Остроградського — Ґауса.■

3. Приміром, обчислімо поверхневий інтеграл

$$\oiint\limits_{\Omega} -xdydz + zx^2dxdy + 15dxdy,$$

де Ω — зовнішній бік піраміди, обмеженої площинами $2x-3y+z=6, x=0, y=0, z=0$.

Записуємо рівняння площини $2x-3y+z=6$ у відрізках:

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$$

і будуємо поверхню Ω (рис. 10.46).

Оскільки поверхня замкнена, то поверхневий інтеграл 2-го роду можна знайти за формулою Остроградського — Ґауса. Отже,

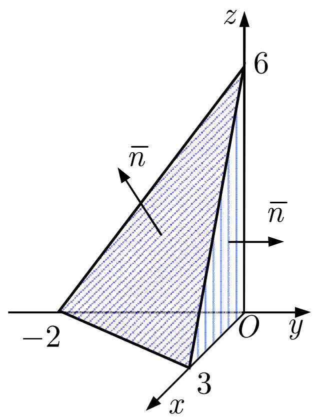


Рис. 10.46. Піраміда

$$\oiint\limits_{\Omega} -xdydz+zx^2dxdy+15dxdy=\left|\frac{\partial P}{\partial x}=-1, \frac{\partial Q}{\partial y}=0, \frac{\partial R}{\partial z}=0\right|=$$

$$=\iiint\limits_G \big(-1+0+0\big)dxdydz=-\iiint\limits_G dxdydz=-V_{\text{пір}}=-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6=-6.$$

10.7.6. Формула Стокса

1. Формула Стокса зв'язує криволінійний інтеграл 2-го роду за замкненою просторовою кривою з поверхневим інтегралом 2-го роду за поверхнею, напнутою на цю криву.

Розгляньмо просторову замкнену криву L і напнімо на цей контур деяку гладку орієнтовану поверхню Ω (рис. 10.47).

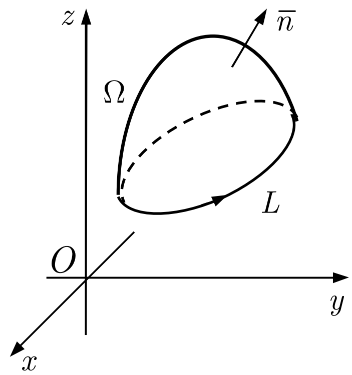


Рис. 10.47. Теорема Стокса

Теорема 10.7 (Стокса).

Якщо функції $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ та $R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними 1-го порядку в області G, яка містить гладку поверхню Ω, що напнута на кусково-гладку криву L, то правдива *формула Стокса*

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де орієнтація нормалі до поверхні Ω узгоджена з орієнтацією контуру L так, що, коли дивитися з кінця вектора нормалі, то обхід контуру відбувається проти годинникової стрілки.

Зауважмо, що у формулі Стокса вибір поверхні Ω із краєм L не впливає на значення інтеграла. Важлива лише орієнтація поверхні у просторі. Тому розв'язуючи певну задачу, поверхню Ω варто вибирати такою, щоб поверхневий інтеграл за нею легше було обчислювати.

2. Нехай тепер L — замкнена крива на площині Oxy, а Ω — область D, обмежена цією кривою. Тоді $dz = 0$, за вектор нормалі до області D можна взяти вектор $\overline{k}$ і формула Стокса переходить у формулу Остроградського — Ґріна (п. 10.5.5)

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

10.1.1. Укажіть, чому дорівнює діаметр:

1) квадрата зі стороною 1;

2) області, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b)$?

10.1.2. Поясніть, чому в означенні інтеграла за геометричним об'єктом умову «найбільший діаметр $d\to 0$» не можна замінити умовою « $n\to\infty$»?

10.2.1. Укажіть правдиві твердження.

1. Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ завжди додатний.

2. Якщо $f(x,y)=k$ для всіх $(x;y)\in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = k\cdot \text{площа}(D)$.

3. Якщо $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$, то $f(x,y)=0$ для всіх точок $(x;y)\in D$.

4. Якщо f та g неперервні в області D, то
$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy\cdot\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$

5. Якщо D — прямокутник $0\le x\le 1, 0\le y\le 2$ та E — квадрат $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=2\iint\limits_E f(x,y)dxdy.$

10.2.2. Укажіть правильну відповідь. Результат інтегрування $\int\limits_1^4 x^2\sqrt{y}dy$ є:

1) числом; 2) функцію від y; 3) функцією від x та y; 4) функцією від x.

10.2.3. Укажіть, за якою змінною взято зовнішній інтеграл у повторному інтегралі $\int\limits_1^2\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(x,y)dydx$ і якими лініями обмежено область інтегрування?

10.2.4. Після витирання з дошки залишився невитертим запис $\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}$. Визначте, який це інтеграл: унутрішній чи зовнішній? За якою змінною він узятий? Що можна зауважити про область інтегрування?

10.2.5. Подані інтеграли набувають одного із двох значень. Не обчислюючи, згрупуйте подвійні інтеграли з однаковим значенням:

1) $\int\limits_0^5 dy \int\limits_0^{10} xy^2 dx$; 2) $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{10} xy^2 dy$; 3) $\int\limits_0^{10} dy \int\limits_0^{5} xy^2 dx$;

4) $\int\limits_0^{10} dx \int\limits_0^{5} xy^2 dy$; 5) $\int\limits_0^5 dv \int\limits_0^{10} uv^2 du$; 6) $\int\limits_0^5 du \int\limits_0^{10} uv^2 dv$.

10.2.6. Запишіть для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ повторні інтеграли.

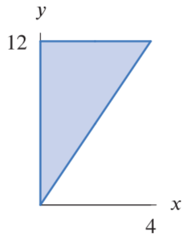


Рис. до 10.2.6.1)

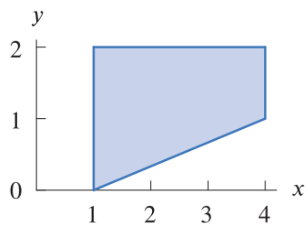


Рис. до 10.2.6.2)

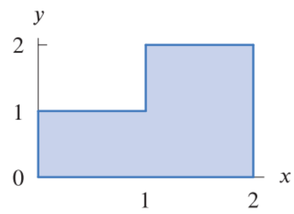


Рис. до 10.2.6.3)

10.2.7. Укажіть область інтегрування для $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{0} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$. Запишіть інтеграли для решти областей.

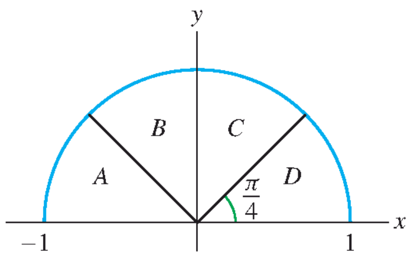


Рис. до 10.2.7

10.2.8. Для подвійного інтеграла $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ запишіть повторні інтеграли.

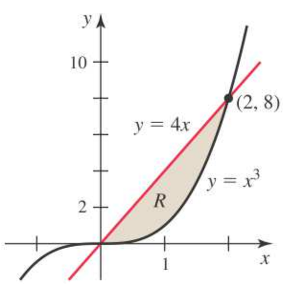


Рис. до 10.2.8.1)

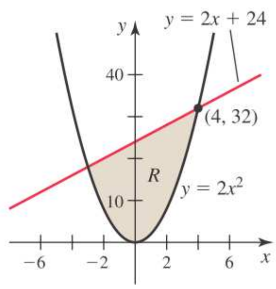


Рис. до 10.2.8.2)

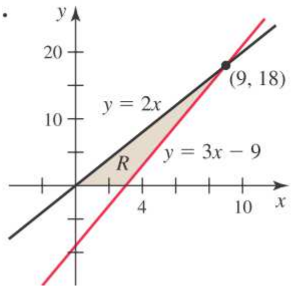


Рис. до 10.2.8.3)

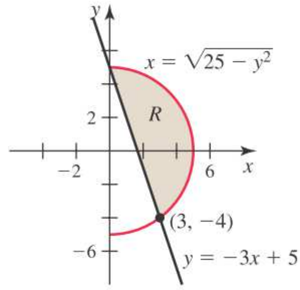


Рис. до 10.2.8.4)

10.2.9. Змініть порядок інтегрування в інтегралі:

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{6-2x} f(x,y)dy$.

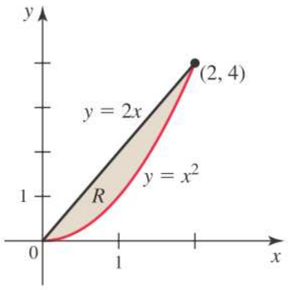


Рис. до 10.2.9.1)

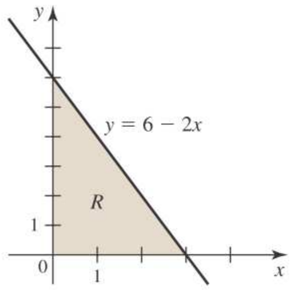


Рис. до 10.2.9.2)

10.2.10. Укажіть для яких з функцій:

1) $f(x,y) = x^2y$; 2) $f(x,y) = xy^2$; 3) $f(x,y) = \sin x$;

4) $f(x,y) = e^x$ виконано рівність $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$ і

поясніть чому (область D зображено на рис.)

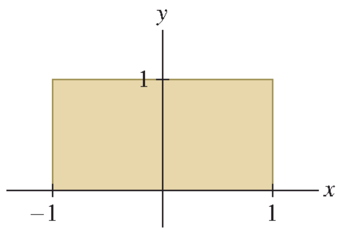


Рис. до 10.2.10

10.2.11. Укажіть правдиві твердження. Нехай D — прямокутник $a \le x \le b, c \le y \le d$.

1. $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy = \int\limits_a^b f(x)dx \cdot \int\limits_c^d g(y)dy.$

2. $\iint\limits_D (f(x) + g(y))dxdy = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_c^d g(y)dy.$

10.2.12. Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від неперервної у правильній області D функції дорівнює добутку двох визначених інтегралів, якщо:

1) підінтегральна функція $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$;

2) область D — прямокутна, тобто $D = \left\{a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$;

3) підінтегральна функція $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, а область $D = \left\{a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$;

4) підінтегральна функція $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, а область D — круг $D = \left\{0 \le x^2 + y^2 \le R^2\right\}$.

10.2.13. Як за допомогою подвійного інтеграла виразити об'єм тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y)$, а знизу — поверхнею $z = g(x,y)$, заданих на одній і тій самій області D? Функції $f(x,y)$ та $g(x,y)$ неперервні та $f(x,y) \ge g(x,y)$ $\forall (x;y) \in D$.

10.2.14. Знайдіть значення інтегралів, використовуючи їх геометричний зміст:

1) $\iint\limits_D 2dxdy$, де $D = \{(x;y) \mid -1 \le x \le 2, 3 \le y \le 5\}$;

2) $\iint\limits_D 3dxdy$, де $D = \{(x;y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x\}$;

3) $\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}dxdy$, де $D = \{(x;y) \mid x^2 + y^2 \le 9, x \ge 0, y \ge 0\}$;

4) $\iint\limits_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$, де $D = \{(x;y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

10.2.15. Визначте область D площини Oxy, для якої значення інтеграла $\iint\limits_D (x^2 + y^2 - 4)dxdy$ є найменшим.

10.2.16. Опишіть в полярній системі координат зображену область.

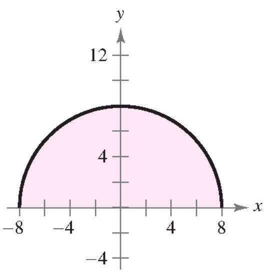


Рис. до 10.2.16.1)

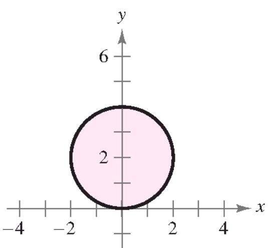


Рис. до 10.2.16.2)

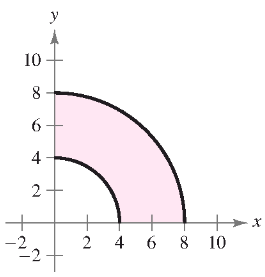


Рис. до 10.2.16.3)

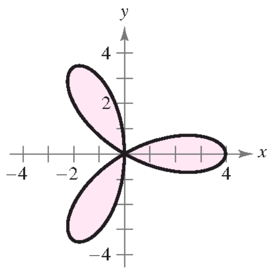


Рис. до 10.2.16.4) крива має рівняння $\rho = 4\cos 3\varphi$

10.2.17. Для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ запишіть повторні інтеграли в полярній системі координат.

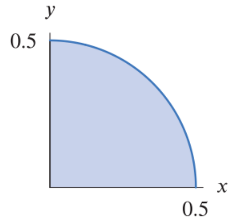


Рис. до 10.2.17.1)

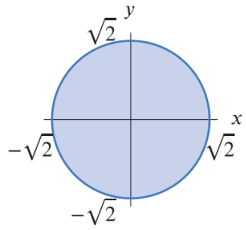


Рис. до 10.2.17.2)

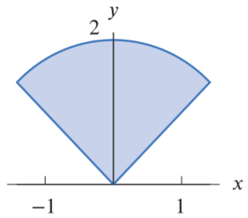


Рис. до 10.2.17.3)

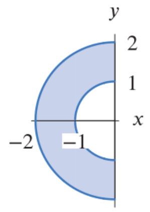


Рис. до 10.2.17.4)

10.2.18. Укажіть, у якій системі координат доцільніше обчислювати $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ за зображеною областю.

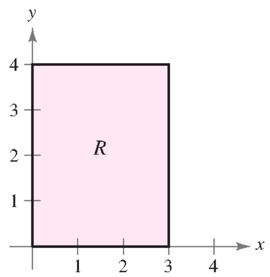


Рис. до 10.2.18.1)

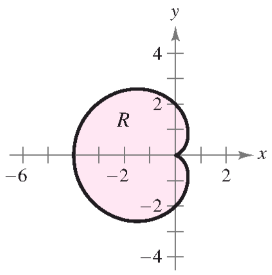


Рис. до 10.2.18.2)

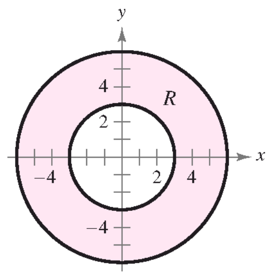


Рис. до 10.2.18.3)

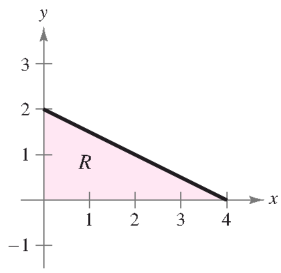


Рис. до 10.2.18.4)

10.2.19. Знайдіть перетворення $u = u(x,y), v = v(x,y)$, яке перетворює область R площини Oxy в область S площини Ouv.

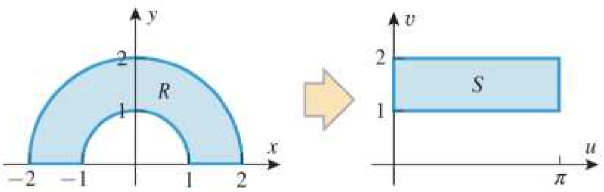


Рис. до 10.2.19.1)

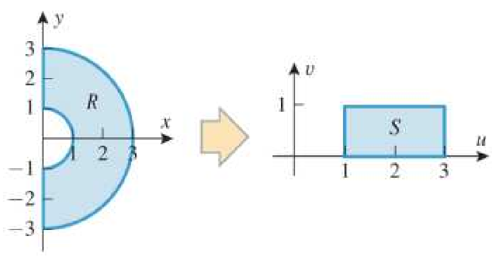


Рис. до 10.2.19.2)

10.2.20. Запишіть подвійні інтеграли у ПДСК та полярній системі координат, які виражають площу одиничного кола. Зведіть подвійні інтеграли до повторних.

10.3.1. Запишіть потрійний інтеграл, який виражає об'єм зображеного тіла, що обмежене циліндром $z = 2 - y^2$, площинами $Oxy, Oxz, y = x$ та $x = 1$. Розставте межі в повторних інтегралах.

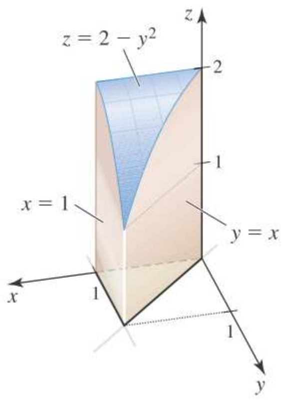


Рис. до 10.3.1

10.3.2. Визначте знак потрійного інтеграла, де S — куля $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, T — верхня півкуля $(z \geq 0)$, B — нижня півкуля $(z \leq 0)$; R — права півкуля $(x \geq 0)$, L — ліва півкуля $(x \leq 0)$.

1) $\iiint\limits_T e^z dxdydz$; 2) $\iiint\limits_B e^z dxdydz$; 3) $\iiint\limits_S \sin z dxdydz$;

4) $\iiint\limits_T \sin z dxdydz$; 5) $\iiint\limits_R \sin z dxdydz$.

10.3.3. Визначте без обчислення знак потрійного інтеграла за просторовою областю G, обмеженої поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $z = 2$.

1) $\iiint\limits_G y dxdydz$; 2) $\iiint\limits_G x dxdydz$; 3) $\iiint\limits_G z dxdydz$;

4) $\iiint\limits_G xy dxdydz$; 5) $\iiint\limits_G xyz dxdydz$; 6) $\iiint\limits_G (z-2) dxdydz$.

10.3.4. Визначте без обчислення знак потрійного інтеграла за просторовою областю G, обмеженої поверхнями $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ та $z = 2$.

1) $\iiint\limits_G x dxdydz$; 2) $\iiint\limits_G z dxdydz$;

3) $\iiint\limits_G (x^2 + y^2 - 2) dxdydz$; 4) $\iiint\limits_G (z-1) dxdydz$.

10.3.5. Подайте приклад:

1) функції f такої, що $\iiint\limits_G f(x,y,z) dxdydz = 7$, де G — область, обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ та $z = 3$;

2) функції $f(x,y,z) \neq 0$, такої, що $\iiint\limits_G f(x,y,z) dxdydz = 0$, де G — область, обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10.3.6. Зобразіть область інтегрування для інтеграла:

1) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R} f(x,y,z) dz$; 2) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z) dz$.

10.3.7. Запишіть у циліндричній системі координат:

1) рівняння колового циліндра радіусом R із центром у початку координат;

2) рівняння колового циліндра радіусом R із центром у точці $(R;0;0)$;

3) рівняння колового циліндра радіусом R із центром у точці $(0;R;0)$;

4) рівняння конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

10.3.8. Запишіть у сферичній системі координат:

1) рівняння сфери радіусом a і центром в точці $(a;0;0)$;

2) рівняння конуса $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$;

3) рівняння площини $y-\sqrt{3}x=0$.

10.3.9. Розставте межі в повторних інтегралах у різних системах координат за просторовою областю G.

1) $\int\limits_{?}^{?} d\varphi \int\limits_{?}^{?} d\rho \int\limits_{?}^{?} f(\rho,\varphi,z)\rho\, dz$ (циліндрична система координат);

2) $\int\limits_{?}^{?} d\varphi \int\limits_{?}^{?} d\theta \int\limits_{?}^{?} g(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta\, dr$ (сферична система координат);

3) $\int\limits_{?}^{?} dx \int\limits_{?}^{?} dy \int\limits_{?}^{?} h(x,y,z) dz$ (ПДСК).

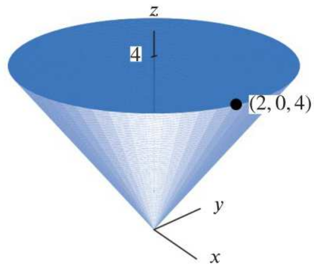


Рис. до 10.3.9 (конус $z=2\sqrt{x^2+y^2}$)

10.3.10. Виберіть найзручнішу систему координат для обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz$ і розставте межі в цій системі координат (додати систему координат)

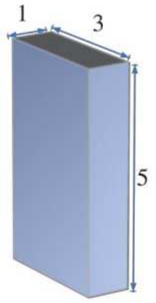


Рис. до 10.3.10.1)

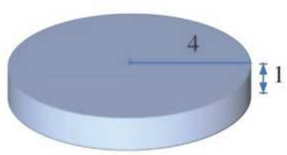


Рис. до 10.3.10.2)

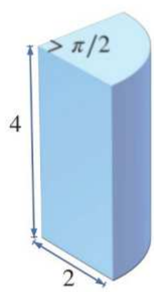


Рис. до 10.3.10.3)

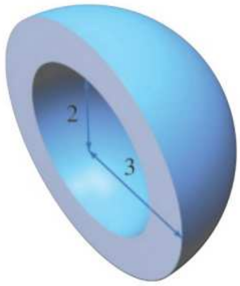
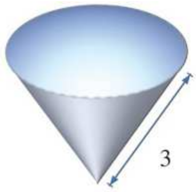


Рис. до 10.3.10.4)



Частина кулі, центральний кут

$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Рис. до 10.3.10.5)

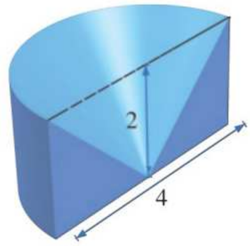


Рис. до 10.3.10.6)

17.

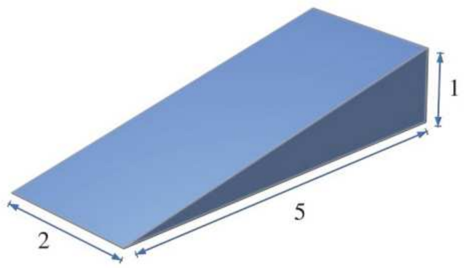


Рис. до 10.3.10.7)

10.3.11. Для кожної області інтегрування G вкажіть найзручнішу систему координат для обчислення об'єму тіла G:

1) $G: y = 4\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}, z = 0, x + z = 3$;

2) $G: x^2 + y^2 + 2x = 0, z = \dfrac{25}{4} - y^2, z = 0$;

3) $G: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0$;

4) $G: z^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}, z = 1$.

5) $G: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

10.3.12. Зведіть потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$ до повторного, вибравши найзручнішу систему координат, якщо область Ω обмежена поверхнями $z = x^2 + y^2, z = 9, x \geq 0$.

10.3.13. Перейдіть в інтегралі $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dz$ до сферичної системи координат.

10.3.14. Виразіть потрійним інтегралом об'єм зображеного тіла і зведіть його до подвійного інтеграла від визначеного.

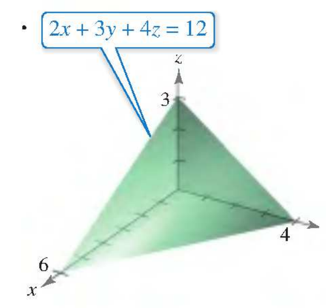


Рис. до 10.3.14.1)

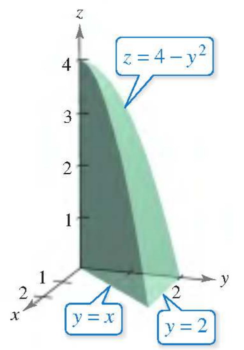


Рис. до 10.3.14.2)

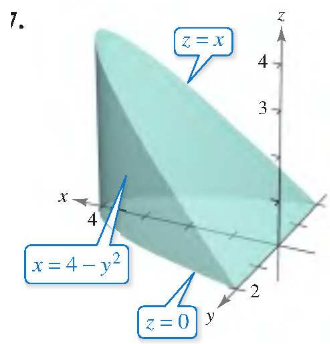


Рис. до 10.3.14.3)

10.3.14. Виразіть потрійним інтегралом об'єм тіла і запишіть повторні інтеграли в найзручнішій для цього тіла системі координат.

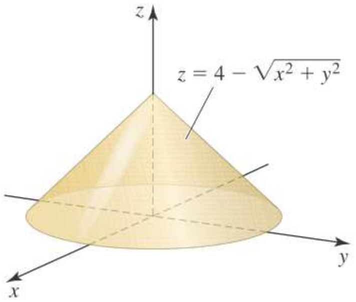


Рис. до 10.3.14.1)

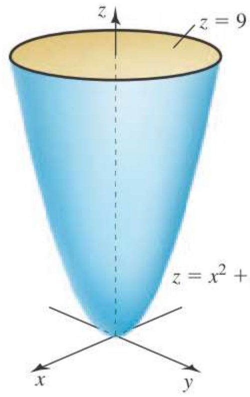


Рис. до 10.3.14.2)

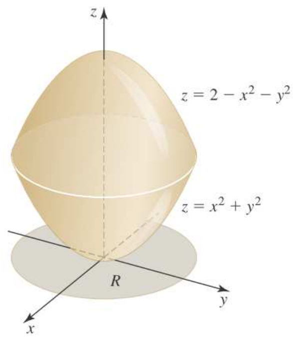


Рис. до 10.3.14.3)

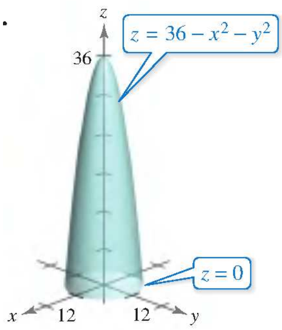


Рис. до 10.3.14.4)

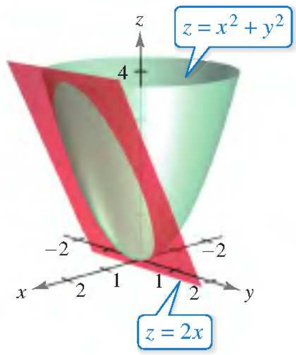


Рис. до 10.3.14.5)

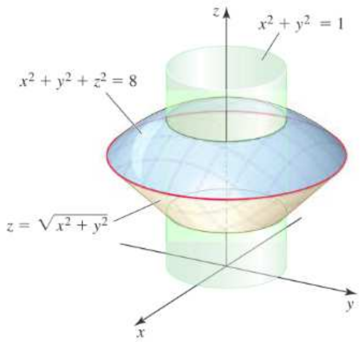


Рис. до 10.3.14.6)

10.3.16. Запишіть у ПДСК, циліндричній та сферичній системах інтеграл, який виражає об'єм одиничної сфери. Розставте межі в повторних інтегралах.

10.4.1. Чому дорівнює криволінійний інтеграл 1-го роду за кривою L, довжина якої дорівнює 5, від функції $f(x,y,z)=10$?

10.5.1. Доведіть, що якщо $f(u)$ — неперервно диференційовна функція, то $\int\limits_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$ для будь-якого гладкого контуру L.

10.5.2. Параметризуйте контур інтегрування:

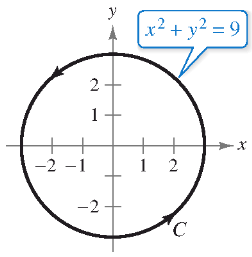


Рис. до 10.5.2

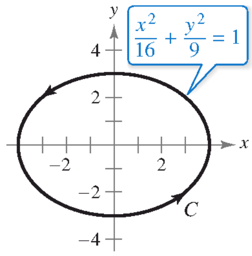


Рис. до 10.5.3

10.5.3. Нехай C — шлях від P до Q і контури C_1, C_2 та C_3 орієнтовані вказаним чином. Відомо, що

$$\int\limits_C (\overline{a}, d\overline{r}) = 5, \int\limits_{C_1} (\overline{a}, d\overline{r}) = 8, \int\limits_{C_3} (\overline{a}, d\overline{r}) = 8.$$

Знайдіть:

1) $\int\limits_{C_3^-} (\overline{a}, d\overline{r})$; 2) $\int\limits_{C_2} (\overline{a}, d\overline{r})$;

3) $\int\limits_{C_1^- \cup C_3^-} (\overline{a}, d\overline{r})$; 4) $\oint\limits_{C_4} (\overline{a}, d\overline{r})$,

де C_4 — контур C_2, який оббігається за годинниковою стрілкою двічі.

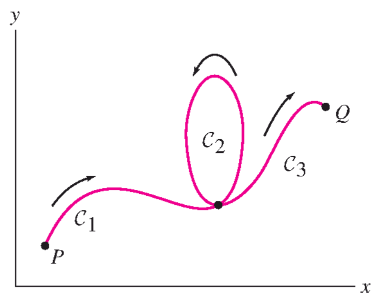


Рис. до 10.5.3

10.5.4. Підберіть число n так, щоб вираз $\dfrac{(x - y)dx + (x + y)dy}{(x^2 + y^2)^n}$ був повним диференціалом.

10.5.5. Підберіть числа a і b так, щоб вираз

$$\frac{(y^2 + 2xy + ax^2)dx + (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

був повним диференціалом.

10.6.1. Нехай Ω поверхня, яка задана додатною функцією $z = f(x, y)$, де $(x; y) \in D$. Чи можливо, щоб площа поверхні Ω:

1) дорівнювала площі області D;

2) була більша за площу області D;

3) була менша за площу області D?

10.7.1. Обчисліть поверхневі інтеграли 2-го роду $\iint\limits_{\Omega} dxdy$, $\iint\limits_{\Omega} dxdz$ та $\iint\limits_{\Omega} dydz$, де Ω — зовнішній бік сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Відповіді

10.1.1. 1) $\sqrt{2}$; 2) a.

10.2.1. 2.

10.2.2. 4)

10.2.3. За змінною x; область інтегрування обмежена лініями $y = -\sqrt{x}, y = x^3, x = 1$, $x = 2$.

10.2.4. Це внутрішній інтеграл, узятий за змінною x. Область інтегрування правильна в напрямі осі Ox, обмежена зліва прямою $x = -y$, справа параболою $x = \sqrt{y}$.

10.2.5. 1), 4), 5) та 2), 3), 6).

10.2.6. 1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x}^{12} f(x,y)dy = \int\limits_0^{12} dy \int\limits_0^{y/3} f(x,y)dx$;

2) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{(x-1)/3}^{2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_1^{3y+1} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^4 f(x,y)dx$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^2 f(x,y)dx$.

10.2.7. B. $D: \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$; $C: \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$; $A: \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{-y} f(x,y)dx$.

10.2.8. 1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^3}^{4x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_{-3}^4 dx \int\limits_{2x^2}^{2x+24} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^9 dy \int\limits_{y/2}^{3+y/3} f(x,y)dx$; 4) $\int\limits_{-4}^5 dy \int\limits_{5/3-y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$.

10.2.9. 1) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_0^{3-y/2} f(x,y)dx$.

10.2.10. 2), 3). Функція f непарна за змінною x.

10.2.11. 1. **10.2.12.** 3.

10.2.13. $\iint\limits_D (f(x,y) - g(x,y))dxdy$.

10.2.14. 1) 12; 2) 6; 3) $\frac{9\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$.

10.2.15. $D: x^2+y^2 \le 4.$

10.2.16. 1) $0 \le \rho \le 8, 0 \le \varphi \le \pi$; 2) $0 \le \rho \le 4\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi$; 3) $4 \le \rho \le 8, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;

4) $0 \le \rho \le 4\cos 3\varphi, \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

10.2.17. 1) $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 4) $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_1^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.

10.2.18. 1), 4) у ПДСК; 2), 3) в полярній системі координат.

10.2.19. 1) $x = v\cos u, y = v\sin u$; 2) $x = u\cos\left(\dfrac{\pi}{2}v\right), y = u\sin\left(\dfrac{\pi}{2}v\right)$.

10.2.20. ПДСК: $\iint\limits_{D: x^2+y^2 \le 1} dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$;

полярна система координат $\iint\limits_{D: \rho \le 1} \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho\, d\rho$.

10.3.1. $\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_{D_{Oxy}} dxdy \int\limits_0^{2-y^2} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{2-y^2} dz.$

10.3.2. 1), 2), 4) додатні, 3), 5) нуль.

10.3.3. 3) додатний; 1), 2), 4), 5) нуль; 6) від'ємний.

10.3.4. 1), 4) нуль; 2) додатний; 3) від'ємний. **10.3.5.** 1) $f(x,y,z) = \dfrac{7}{12\pi}$; 2) $f(x,y,z) = z$.

10.3.7. 1) $\rho = R$; 2) $\rho = 2R\cos\varphi$; 3) $\rho = 2R\sin\varphi$; 4) $z = \rho$.

10.3.8. 1) $r = 2a\sin\theta\cos\varphi$; 2) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$; 3) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ та $\varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$.

10.3.9. 1) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} d\rho \int\limits_{2\rho}^{4} f(\rho, \varphi, z)\rho\, dz$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} d\theta \int\limits_0^{4/\cos\theta} g(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta\, dr$;

3) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{4} h(x,y,z)dz.$

10.3.10. 1) ПДСК, $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^5 (x+y+z)dz$;

2) циліндрична, $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^1 (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z)\rho\, dz$;

3) циліндрична, $\int\limits_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{0}^{4} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z)\rho dz;$

4) сферична, $\int\limits_{-\pi}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} d\theta \int\limits_{2}^{3} (r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)r^2 \sin\theta dr;$

5) сферична, $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi/3} d\theta \int\limits_{0}^{3} (r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)r^2 \sin\theta dr;$

6) циліндрична, $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{0}^{\rho} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z)\rho dz;$

7) ПДСК, $\int\limits_{0}^{5} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{1-x/5} (x + y + z)dz.$

10.3.11. 1) ПДСК; 2) циліндрична система координат; 3) сферична система координат; 4) узагальнена циліндрична система координат; 5) узагальнена сферична система координат.

10.3.12. Циліндрична система координат, $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{3} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^{9} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz.$

10.3.13. $\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_{0}^{1} f(r^2)r^2 dr.$

10.3.14. ПДСК.

1) $\iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{0}^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} dz = \int\limits_{0}^{6} dx \int\limits_{0}^{3-\frac{x}{2}} dy \int\limits_{0}^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} dz$

2) $\iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{0}^{4-y^2} dz = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{x}^{2} dy \int\limits_{0}^{4-y^2} dz;$

3) $\iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{0}^{x} dz = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{0}^{4-y^2} dx \int\limits_{0}^{x} dz.$

10.3.14. Циліндрична система

1) $\iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{D} \rho d\rho d\varphi \int\limits_{0}^{4-\rho} dz = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{4} \rho d\rho \int\limits_{0}^{4-\rho} dz;$

2) $\iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{D} \rho d\rho d\varphi \int\limits_{\rho^2}^{9} dz = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{3} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^{9} dz;$

3) $\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi \int\limits_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz$'

4) $\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi \int\limits_0^{36-\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^6 \rho d\rho \int\limits_0^{36-\rho^2} dz;$

5) $\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi \int\limits_{\rho^2}^{2\rho\cos\varphi} dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\rho\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^{2\rho\cos\varphi} dz;$

6) $\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho \int\limits_{\rho}^{\sqrt{8-\rho^2}} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho}^{\sqrt{8-\rho^2}} dz.$

10.3.16. ПДСК: $\iiint\limits_{G:x^2+y^2+z^2\le 1} dxdydz = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz;$

циліндрична система: $\iiint\limits_{G:z^2\le 1-\rho^2} \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} dz;$

сферична система: $\iiint\limits_{G:r\le 1} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 r^2 dr.$

10.4.1. $\int\limits_L 5dl = 50.$

10.5.2. 1) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} t \in [0;2\pi];$ 2) $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} t \in [0;2\pi].$

10.5.3. 1) -8; 2) -11; 3) -16; 4) 22.

10.5.4. $n = 1$.

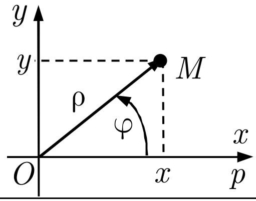
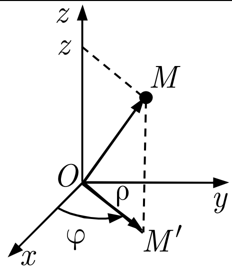
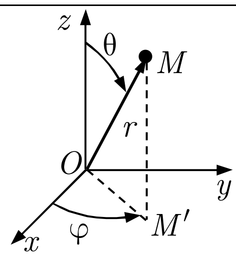
10.5.5. $a = b = -1$.

10.6.1. 1), 2) так; 3) ні.

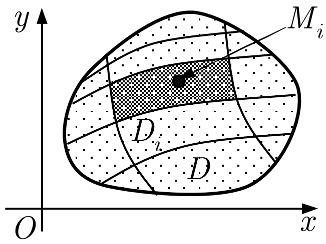
10.7.1. 0.

Формули, твердження, алгоритми

10.1. Недекартові системи координат

❶ ***Полярні координати*** $\rho \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi$ $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$	$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$	
❷ ***Узагальнені полярні координати*** $\rho \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi$	$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \rho^2}$
❸ ***Циліндричні координати*** $\rho \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi,\ -\infty < z < +\infty$ $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$	$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$	
❹ ***Узагальнені циліндричні координати*** $\rho \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi$	$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \rho^2}$
❺ ***Сферичні координати*** $r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ -\pi < \varphi \leq \pi$ $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$	
❻ ***Узагальнені сферичні координати*** $r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ -\pi < \varphi \leq \pi$	$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi, \\ y = br\sin\theta\sin\varphi, \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$	$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = r^2}$

10.2. Подвійні інтеграли

❶ ***Подвійний інтеграл*** від функції $f(x,y)$ за областю D $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i < \infty,$	
де ΔS_i — площа ділянки D_i; $d_i = d(D_i)$ — її діаметр.	

❷ ***Геометричний зміст подвійного інтеграла:*** об'єм циліндричного тіла G, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$.	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V(G)$

❸ ***Основні властивості подвійного інтеграла:***

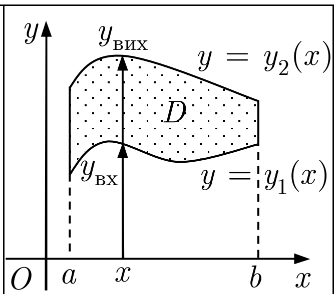
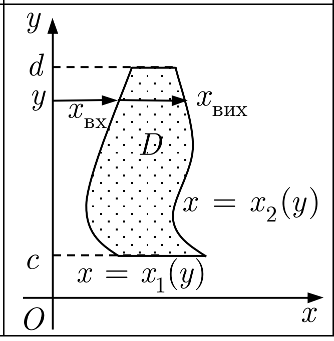
① $\iint\limits_D 1dxdy = \iint\limits_D dxdy = \text{площа}(D) = S(D)$ (*нормованість*);

② $\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy$ (*лінійність*);

③ $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ (*адитивність*)

Обчислення подвійних інтегралів

❹ ***Перехід до повторних інтегралів у декартових координатах***

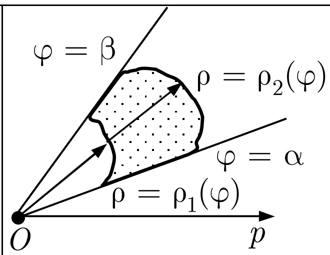
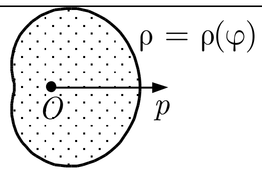
① ***Область правильна в напрямі осі*** Oy		$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ Пряма $x = \alpha$ $(a < \alpha < b)$ перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.
② ***Область правильна в напрямі осі*** Ox		$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ Пряма $y = \beta$ $(c < \beta < d)$ перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

❺ ***Заміна змінних у подвійному інтегралі***

① ***Перехід до нових координат*** $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ з ***якобіаном*** $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))\lvert J(u,v)\rvert dudv$
② ***Перехід до полярних координат*** $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ $\lvert J\rvert = \rho$	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$

③ ***Перехід до узагальнених полярних координат*** $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \lvert J \rvert = ab\rho$	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \\ = \iint\limits_{\tilde{D}} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)ab\rho\, d\rho\, d\varphi$

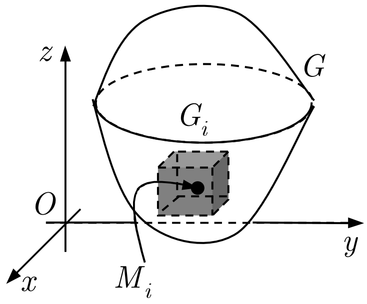
❻ ***Перехід до повторних інтегралів у полярних координатах***

① ***Криволінійний сектор («радіальна область»)***		$\iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho,\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho\, d\rho$ Будь-який промінь $\varphi = \gamma$ $(\alpha < \gamma < \beta)$ перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.
② ***Криволінійний сектор*** охоплює початок координат		$\iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho,\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho\, d\rho$

10.3. Застосування подвійного інтеграла

❶ ***Площа плоскої області*** D	$S(D) = \iint\limits_D dxdy$
❷ ***Маса пластини*** D з густиною $\mu = \mu(x,y)$	$m(D) = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$
❸ ***Статичні моменти*** пластини відносно осей	$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy,$ $M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy$
❹ ***Координати центра мас*** пластини	$x_c = \dfrac{M_y}{m}, y_c = \dfrac{M_x}{m}$
❺ ***Моменти інерції*** пластини відносно координатних осей	$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)dxdy,$ $I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)dxdy$
❻ ***Момент інерції*** пластини відносно початку координат	$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\mu(x,y)dxdy$

10.4. Потрійні інтеграли

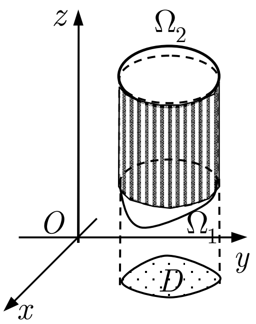
❶ ***Потрійний*** інтеграл від функції $f(x,y,z)$ ***за областю*** G $$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \\ = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i < \infty,$$	
де ΔV_i — об'єм елемента G_i; $d_i = d(G_i)$ — його діаметр.	
❷ ***Фізичний зміст потрійного інтеграла***: маса тіла G з густиною $\mu = \mu(x,y,z) \geq 0$.	$$\iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz = m(G)$$

❸ ***Основні властивості потрійного інтеграла:***

① $\iiint\limits_G 1dV = \iiint\limits_G dV =$ об'єм $(G) = V(G)$ (*нормованість*);

② *лінійність*; ③ *адитивність*

Обчислення потрійних інтегралів

❹ ***Область циліндрична в напрямі осі*** Oz $\Omega_2 : z = z_2(x,y)$, $\Omega_1 : z = z_1(x,y)$		$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \\ = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$$ Будь-яка вертикальна пряма перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

❺ ***Область циліндрична в напрямі осі*** Oz, проєкція D_{xy} правильна в напрямі осі Oy: $$D_{xy} : \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$	$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \\ = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

❻ ***Заміна змінних у потрійному інтегралі***

① ***Перехід до циліндричних координат*** $$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \lvert J \rvert = \rho$$	$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \\ = \iiint\limits_{\tilde{G}} \tilde{f}(\rho,\varphi,z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz, \\ \tilde{f}(\rho,\varphi,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

② ***Перехід до узагальнених циліндричних координат*** $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$ $\lvert J \rvert = ab\rho$	$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$ $= \iiint\limits_{\tilde G} \tilde f(\rho,\varphi,z)ab\rho d\rho d\varphi dz,$ $\tilde f(\rho,\varphi,z) = f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, z)$
③ ***Перехід до сферичних координат*** $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ $\lvert J \rvert = r^2\sin\theta$	$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$ $= \iiint\limits_{\tilde G} \tilde f(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi,$ $\tilde f(r,\theta,\varphi) =$ $= f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$
④ ***Перехід до узагальнених сферичних координат*** $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi, \\ y = br\sin\theta\sin\varphi, \\ z = cr\cos\theta, \end{cases}$ $\lvert J \rvert = abcr^2\sin\theta$	$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$ $= \iiint\limits_{\tilde G} \tilde f(r,\theta,\varphi)abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi,$ $\tilde f(r,\theta,\varphi) =$ $= f(ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)$

10.5. Застосування потрійного інтеграла

❶ ***Об'єм тіла*** G	$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz$
❷ ***Маса тіла*** G з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$	$m(G) = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz$
❸ ***Статичні моменти*** тіла відносно координатних площин	$M_{\begin{Bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz$
❹ ***Координати центра мас*** тіла	$x_c = \dfrac{M_{yz}}{m}; y_c = \dfrac{M_{xz}}{m}; z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$
❺ ***Моменти інерції*** тіла відносно координатних площин	$I_{\begin{Bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz$
❻ ***Моменти інерції*** тіла відносно координатних осей	$I_{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 \end{Bmatrix} \mu dxdydz$
❼ ***Момент інерції*** тіла відносно початку координат	$I_O = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\mu dxdydz$

10.6. Криволінійні інтеграли 1-го роду

❶ ***Гладкі криві.*** Криву

$$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$$

називають *гладкою*, якщо:

1) функції $x(t), y(t)$ — неперервно диференційовні;

2) $|x'(t)| + |y'(t)| \neq 0, t \in [t_1; t_2]$;

3) L не має точок самоперетину.

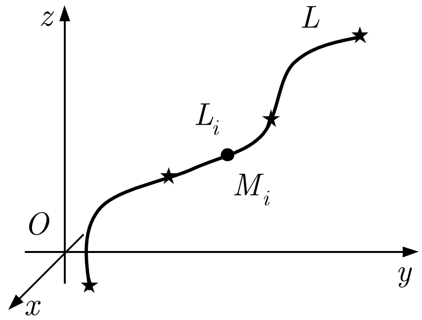
Якщо L замкнена, то

$$x'(t_1) = x'(t_2), y'(t_1) = y'(t_2).$$

❷ ***Криволінійний інтеграл 1-го роду*** від функції $f(x, y, z)$ уздовж кривої L

$$\int\limits_L f(x, y, z)dl = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i < \infty,$$

де Δl_i — довжина дуги L_i.



❸ ***Фізичний зміст криволінійного інтеграла 1-го роду***: маса, розподілена вздовж кривої L з густиною $\mu = \mu(x, y, z) \geq 0$.

$$\int\limits_L \mu(x, y, z)dl = m(L)$$

❹ ***Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду:***

① $\int\limits_L 1dl = \int\limits_L dl =$ довжина $(L) = l(L)$ (*нормованість*);

② *лінійність*;

③ *адитивність*.

Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду

❺ $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2] \\ z = z(t) \end{cases}$

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt$$

$$\int\limits_L f(x, y, z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt$$

❻ $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} t \in [t_1; t_2]$

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$$

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$$

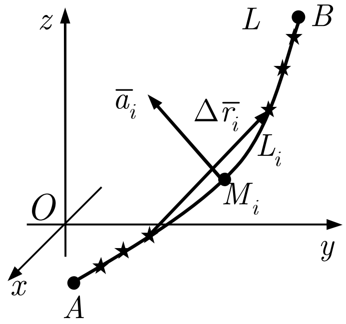
❼ $L: y = y(x), a \leq x \leq b$

$$dl = \sqrt{1 + y_x'^2}dx$$

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2}dx$$

❽ $L: \rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$ $dl = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$	$\int\limits_L f(x,y)dl =$ $= \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$
Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду	
❾ ***Довжина кривої*** L	$l(L) = \int\limits_L dl$
❿ ***Маса кривої*** L з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$	$m(L) = \int\limits_L \mu(x,y,z)dl$

10.7. Криволінійні інтеграли 2-го роду

❶ ***Вектор-функція 3-х змінних***	$\overline{a} = \overline{a}(M) =$ $= P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$
❷ ***Орієнтовані криві.*** Криву, для якої вибрано початкову та кінцеву точки і вказано напрям руху, називають *орієнтованою.*	Замкнену криву, яка обходиться проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою) вважають *додатно* (*від'ємно*) *орієнтованою.*
❸ ***Криволінійний інтеграл 2-го роду*** від вектор-функції $\overline{a} = \overline{a}(M)$ уздовж кривої L $\int\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$ $= \lim\limits_{\substack{\max\|\Delta\overline{r}_i\| \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^n (\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r}_i) < \infty$	
❹ ***Фізичний зміст криволінійного інтеграла 2-го роду***: робота, яку виконує змінна сила $\overline{F} = \overline{F}(x,y,z)$ під час переміщення вздовж кривої L.	$\int\limits_L (\overline{F}, d\overline{r}) = A_L(\overline{F})$
❺ ***Основні властивості криволінійного інтеграла 2-го роду:*** ① $\int\limits_{AB} (\overline{a}, d\overline{r}) = -\int\limits_{BA} (\overline{a}, d\overline{r})$ (*орієнтованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*	

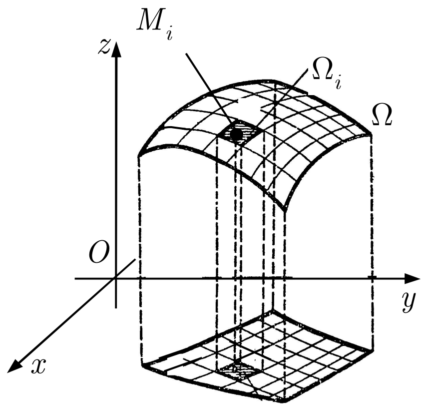
<table>
<tr><td colspan="2">Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду</td></tr>
<tr><td>❻ $L:\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), t_1\le t\le t_2\\ z=z(t),\end{cases}$</td><td>$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=$
$=\int\limits_{t_1}^{t_2}[\tilde P(t)x'(t)+\tilde Q(t)y'(t)+\tilde R(t)z'(t)]dt,$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tilde P(t)=P(x(t),y(t),z(t)),\tilde Q(t)=Q(x(t),y(t),z(t)),\tilde R(t)=R(x(t),y(t),z(t))$</td></tr>
<tr><td>❼ $L:\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} t_1\le t\le t_2$</td><td>$\int\limits_L Pdx+Qdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}[\tilde P(t)x'(t)+\tilde Q(t)y'(t)]dt,$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tilde P(t)=P(x(t),y(t)),\tilde Q(t)=Q(x(t),y(t))$</td></tr>
<tr><td>❽ $L: y=y(x), x\in[a;b]$</td><td>$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$
$=\int\limits_a^b[P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx$</td></tr>
<tr><td>❾ Формула Остроградського — Ґріна
(область D однозв’язна, обмежена додатно орієнтованим контуром L)</td><td>$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду</td></tr>
<tr><td>❿ Робота змінної сили
$\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ під час переміщення вздовж кривої L</td><td>$A_L(\overline{F})=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$</td></tr>
<tr><td>⓫ Площа плоскої області, обмеженої замкненим контуром L</td><td>$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$</td></tr>
</table>

10.8. Криволінійний інтеграл 2-го роду від повного диференціала

<table>
<tr><td>❶ Теорема про чотири твердження. Якщо $P(x,y),Q(x,y)$ — функції, неперервно диференційовні в однозв’язній області D, то рівносильні такі твердження:</td><td>① $\oint\limits_L Pdx+Qdy=0\ \forall L\subset D;$
② $\int\limits_L Pdx+Qdy$ не залежить від шляху інтегрування;
③ вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ — є повним диференціалом;
④ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$</td></tr>
</table>

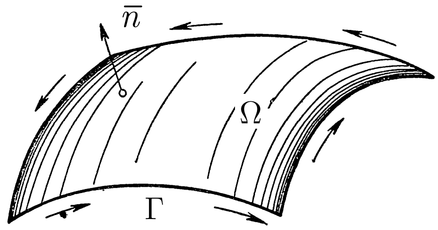
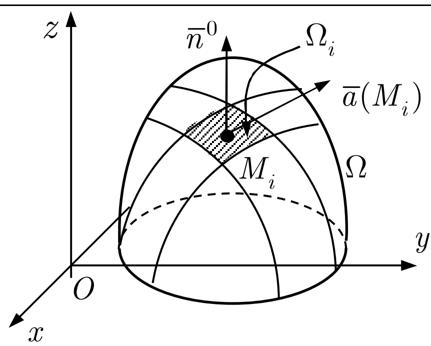
❷ Інтеграл від ***повного диференціала***	$\int\limits_{AB} du = u(B) - u(A)$
❸ ***Відновлення функції за її диференціалом***	
① $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$	$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C$
② $du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy +$ $+R(x,y,z)dz$ $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$	$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt +$ $+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C$

10.9. Поверхневі інтеграли 1-го роду (за площею поверхні)

❶ ***Поверхневий інтеграл 1-го роду*** від функції $f(x,y,z)$ за поверхнею Ω $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma =$ $= \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i < \infty,$ де $\Delta\sigma_i$ — площа ділянки Ω_i, $d_i = d(\Omega_i)$ — її діаметр.	
❷ ***Фізичний зміст поверхневого інтеграла 1-го роду***: маса, розподілена на поверхні Ω з густиною $\mu = \mu(x,y,z) \geq 0$.	$\iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma = m(\Omega)$
❸ ***Основні властивості поверхневого інтеграла 1-го роду:*** ① $\iint\limits_{\Omega} 1d\sigma = \iint\limits_{\Omega} d\sigma =$ площа$(\Omega) = S(\Omega)$ (*нормованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*.	
Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду	
❹ Поверхня $\Omega : z = z(x,y)$ ***однозначно проектується в область*** D_{xy} $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy$	$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma =$ $= \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy$

Застосування поверхневого інтеграла 1-го роду	
❺ ***Площа поверхні*** Ω	$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma$
❻ ***Маса поверхні*** Ω з густиною $\mu = \mu(x, y, z)$	$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x, y, z) d\sigma$

10.10. Поверхневі інтеграли 2-го роду

❶ ***Орієнтовані поверхні.*** Поверхню Ω, у кожній точці якої вказано нормальний вектор $\overline{n}$ і напрям обходу контуру L, називають *орієнтованою.*	
❷ ***Поверхневий інтеграл 2-го роду*** від вектор-функції $\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ за вибраним боком поверхні Ω $$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}(M_i), \overline{n}^0(M_i)) \Delta\sigma_i < \infty,$$	 де $\Delta\sigma_i$ — площа ділянки; $d_i = d(\Omega_i)$ — діаметр ділянки; $\overline{n}^0$ — одиничний вектор нормалі.
❸ ***Фізичний зміст поверхневого інтеграла 2-го роду***: потік векторного поля через вибраний бік поверхні Ω.	$\iint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = \Phi_{\Omega}(\overline{a})$

❹ ***Основні властивості поверхневого інтеграла 2-го роду:***
① $\iint\limits_{\Omega^+} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = -\iint\limits_{\Omega^-} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma$ (*орієнтованість*); ② *лінійність*; ③ *адитивність*

Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду	
❺ ***Проєктування*** поверхні $\Omega: F(x,y,z)=0$ на ***всі координатні площини*** (знаки перед подвійними інтегралами відповідають знакам напрямних косинусів вибраної нормалі $\overline{n}=\pm\operatorname{grad}F$), де D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} — проєкції поверхні Ω на відповідні координатні площини.	$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$
❻ ***Проєктування*** поверхні $\Omega: z=z(x,y),(x;y)\in D$, ***на площину*** Oxy (знак перед інтегралом відповідає знаку $\cos\gamma$ вибраної нормалі $\overline{n}$ до поверхні)	$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} [\tilde{P}(x,y)(-z'_x)+\tilde{Q}(x,y)(-z'_y)+ +\tilde{R}(x,y)]dxdy$$ $$\tilde{P}(x,y)=P(x,y,z(x,y)),$$ $$\tilde{Q}(x,y)=Q(x,y,z(x,y)),$$ $$\tilde{R}(x,y)=Q(x,y,z(x,y))$$
	$$\iint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{(\overline{a},\overline{n}^0)}{\lvert\cos\gamma\rvert}\right\rvert_{z=z(x,y)} dxdy$$
❼ ***Теорема Остроградського — Ґауса.*** Якщо функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ та $R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми похідними $\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ у замкненій області G, обмеженій кусково-гладкою поверхнею Ω, то правдива	*формула Остроградського — Ґауса* $$\oiint\limits_{\Omega} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy = \iiint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$ де поверхневий інтеграл обчислюють за зовнішнім боком поверхні Ω.

10.11. Застосування інтегралів за геометричними об'єктами

Об'єкт	**Тип інтеграла**	**Геометричне застосування**	**Фізичне застосування**
Область на площині	Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$	Площа області D $S(D)=\iint\limits_D dxdy$	Маса пластинки D $m(D)=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$
Просторова область	Потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$	Об'єм тіла G $V(G)=\iiint\limits_G dxdydz$	Маса тіла G $m(G)=$ $=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz$
Крива	Криволінійний інтеграл 1-го роду $\int\limits_L f(x,y,z)dl$	Довжина кривої L $l(L)=\int\limits_L dl$	Маса кривої L $m(L)=\int\limits_L \mu(x,y,z)dl$
Крива	Криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$	Робота змінної сили $\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ під час переміщення вздовж дуги L $A_L(\overline{F})=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$	
Поверхня	Поверхневий інтеграл 1-го роду $\iint\limits_\Omega f(x,y,z)d\sigma$	Площа поверхні Ω $S(\Omega)=\iint\limits_\Omega d\sigma$	Маса поверхні Ω $m(\Omega)=\iint\limits_\Omega \mu(x,y,z)d\sigma$
Поверхня	Поверхневий інтеграл 2-го роду $\iint\limits_\Omega (\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma$	Потік поля $\overline{a}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ через вибраний бік поверхні Ω $\Phi_\Omega(\overline{a})=\iint\limits_\Omega (\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma$	

Практикум 10.1. Подвійні інтеграли

Навчальні задачі

10.1.1. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^x xydy$ і записати рівняння ліній, що обмежують область інтегрування відповідного подвійного інтеграла.

Розв'язання. [10.2.4.]

Область обмежена відрізками прямих $x = 1, x = 3$ і лініями $y = 0,\ y = x$.

$$\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^x xydy = \int\limits_1^3 x\left(\int\limits_0^x ydy\right)dx \overset{①}{=} \int\limits_1^3 x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{8}\right|_1^3 = 10.$$

Коментар. ① Повторні інтеграли обчислюють справа наліво (із середини назовні). Коли інтегрують за змінною y, змінну x уважають сталою.

10.1.2.1. Обчислити $\iint\limits_D dxdy$, де область D обмежена параболою $y^2 = x$ та прямою $x = 1$.

Розв'язання. [10.2.4.]

[*Зображуємо область D й визначаємо, у напрямі якої осі область інтегрування є правильною.*]

Область інтегрування D є правильною в напрямі осі Ox. ①

[*Фігура проєктується у відрізок $-1 \le y \le 1$ і обмежена: зліва параболою $x = y^2$, справа прямою $x = 1$.*]

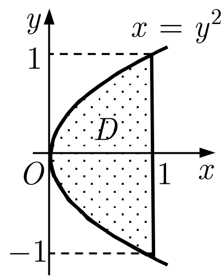


Рис. до 10.1.2.1

$$\left[\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{[10.2.4.1]}{=} \left|\begin{array}{l} c \le y \le d; \\ \text{справа } x = y_2(y), \\ \text{зліва } x = y_1(y) \end{array}\right| = \int\limits_c^d dy \int\limits_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x,y)dx\right]$$

$$\iint\limits_D dxdy = \left|\begin{array}{l} -1 \le y \le 1; \\ \text{справа } x = 1, \\ \text{зліва } x = y^2 \end{array}\right| = \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2}^1 dx = \int\limits_{-1}^1 (1 - y^2)dy = \left.\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\right|_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

Коментар. ① Область D правильна також і в напрямі осі Oy: проєктується у відрізок $0 \le x \le 1$; обмежена: знизу параболою $y = -\sqrt{x}$, зверху параболою $y = \sqrt{x}$ (рівняння кривої $y^2 = x$ треба розв'язати щодо y). Отже, інтегрувати можна й у напрямі осі Oy:

$$\iint\limits_D dxdy \overset{[10.2.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1; \\ \text{зверху } y = \sqrt{x}, \\ \text{знизу } y = -\sqrt{x} \end{array} \right| = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy = \frac{4}{3}.$$

10.1.2.2. Обчислити $\iint\limits_D xdxdy$, де область D обмежена лініями: $xy = 2$,

$$y = \frac{1}{2}x,\ y = 2x\ \ (x \ge 0).$$

Розв'язання. [10.2.4.]

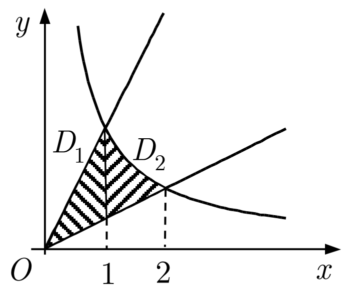


Рис. до 10.1.2.2

[*Зображуємо область D.*]

Оскільки область інтегрування D не є правильною, то подаємо її як об'єднання правильних у напрямі осі Oy областей:

$$D = D_1 \cup D_2.$$

[*Область* D_1 *є правильною в напрямі осі* Oy*: проєктується у відрізок* $0 \le x \le 1$ *і обмежена: знизу прямою* $y = \dfrac{x}{2}$, *зверху прямою* $y = 2x$.

Область D_2 *є правильною в напрямі осі* Oy*: проєктується у відрізок* $1 \le x \le 2$ *і обмежена: знизу прямою* $y = \dfrac{x}{2}$, *зверху гіперболою* $y = \dfrac{2}{x}$.]

$$\left[\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy \overset{[10.2.4.2]}{=} \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy. \right]$$

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} xdxdy = \iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_2} xdxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} D_1 : 0 \le x \le 1; & D_2 : 1 \le x \le 2; \\ \text{зверху } y = 2x, & \text{зверху } y = \dfrac{2}{x}, \\ \text{знизу } y = \dfrac{x}{2} & \text{знизу } y = \dfrac{x}{2} \end{array} \right| = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{x/2}^{2x} dy + \int\limits_1^2 xdx \int\limits_{x/2}^{2/x} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 xy \,\Big|_{x/2}^{2x} dx + \int\limits_1^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2}x^3 \,\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

10.1.3.1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$, де область D є трикутником з вершинами $O(0;0), A(0;1), B(1;1)$.

Розв'язання. [10.2.4.] ①

[*Зображуємо область* D *і знаходимо рівняння ліній, які її обмежують.*]

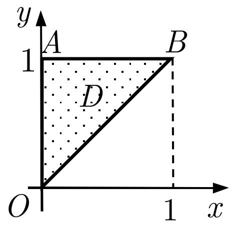


Рис. до 10.1.3.1

1-й спосіб. Область D є правильною в напрямі осі Oy.

[*Область* D *проєктується у відрізок* $0 \le x \le 1$; *обмежена знизу прямою* $y = x$, *зверху прямою* $y = 1$.]

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy \overset{[10.2.4.1]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1; \\ \text{зверху } y = 1, \\ \text{знизу } y = x \end{array} \right| = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 e^{-y^2}dy.$$

Інтеграл $\int e^{-y^2}dy$ не виражається через елементарні функції.

2-й спосіб. Область D є правильною в напрямі осі Ox.

[*Область* D *проєктується у відрізок* $0 \le y \le 1$; *обмежена: зліва прямою* $x = 0$, *справа прямою* $x = y$.]

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy \overset{[10.2.4.2]}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1; \\ \text{справа } x = y, \\ \text{зліва } x = 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 e^{-y^2}dy \int\limits_0^y dx = \int\limits_0^1 e^{-y^2}ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-y^2}d(y^2) = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}.$$

Коментар. ① Вибір напряму інтегрування залежить не тільки від форми області, а й від підінтегральної функції.

10.1.3.2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy$, де область D обмежена прямими $y = \ln 3$, $y = \ln 4, x = \dfrac{1}{6}$ та $x = \dfrac{1}{3}$.

Розв'язання. [10.2.4.2.]

[*Зображуємо область* D.]

Область інтегрування D є правильною в напрямах обох осей. Інтегруємо в напрямі осі Ox. ①

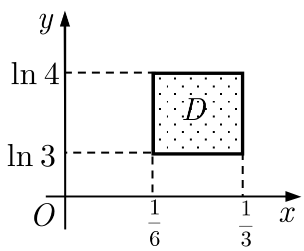


Рис. до 10.1.3.2

$$\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy \overset{[10.2.4.2]}{=} \left|\begin{array}{l} \ln 3 \le y \le \ln 4; \\ \text{справа } x = \dfrac{1}{3}, \\ \text{зліва } x = \dfrac{1}{6} \end{array}\right| = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy}dx =$$

$$= 12\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} y\frac{e^{6xy}}{6y}\Bigg|_{1/6}^{1/3} dy = 2\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4}(e^{2y} - e^{y})dy = 2\left(\frac{e^{2y}}{2} - e^{y}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln 4} =$$

$$= 2\left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2} - 4 + 3\right) = 5.$$

Коментар. ① Інтегрування в напрямі осі Oy призвело б до інтегрування частинами в унутрішньому інтегралі.

10.1.4. Змінити порядок інтегрування

$$I = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. [10.2.4.]

[*Записуємо рівняння ліній, які обмежують область D, і відновлюємо область інтегрування. Зображуємо її.*]

З першого доданку:

$$-2 \le x \le -\sqrt{3}; y = 0, y = \sqrt{4 - x^2}.$$

Із другого доданку:

$$-\sqrt{3} \le x \le 0; y = 0, y = 2 - \sqrt{4 - x^2}.$$

Точка $(-\sqrt{3};1)$ є точкою перетину кіл.

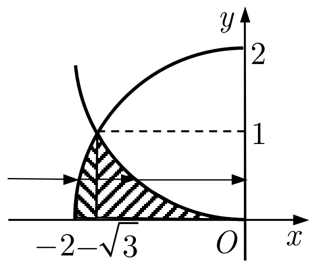


Рис. до 10.1.4

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Область D є правильною в напрямі осі Ox.

[*Розв'язуємо рівняння кіл щодо x.*]

$$y = \sqrt{4 - x^2} \overset{①}{\Rightarrow} x = -\sqrt{4 - y^2};$$

$$y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \overset{①}{\Rightarrow} x = -\sqrt{4y - y^2}.$$

$$I = \left| \begin{array}{c} 0 \le y \le 1, \\ \text{справа } x = -\sqrt{4y - y^2}, \\ \text{зліва } x = -\sqrt{4 - y^2}, \end{array} \right| = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx.$$

Коментар. ① Корені беремо зі знаком «мінус» тому, що всі точки області D мають недодатні абсциси.

10.1.5. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1, x = 0, y = 0$, виконати заміну змінних за формулами: $x = au\cos^4 v,\ y = bu\sin^4 v,\ v \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. [10.2.5.1.] ①

[*Записуємо рівняння ліній у новій системі координат.*]

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \Rightarrow u = 1;$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ або } v = \frac{\pi}{2};$$

$$y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ або } v = 0.$$

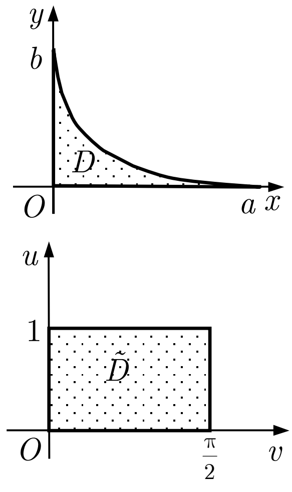


Рис. до 10.1.5

[*Зображуємо стару й нову області інтегрування. Обчислюємо якобіан переходу від змінних (x, y) до змінних (u, v).*]

$$J \overset{[10.2.5.1]}{=} \left[\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} a\cos^4 v & -4au\cos^3 v\sin v \\ b\sin^4 v & 4bu\sin^3 v\cos v \end{vmatrix} =$$

$$= 4abu\sin^3 v\cos^5 v + 4abu\cos^3 v\sin^5 v = 4abu\sin^3 v\cos^3 v.$$

[*Заміняємо змінні в подвійному інтегралі.*]

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{[10.2.5.1]}{=} \left[\iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv\right] =$$

$$= 4ab\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 v\cos^3 v\,dv \int\limits_0^1 f(au\cos^4 v, bu\sin^4 v)u\,du.$$

Коментар. ① Змінюючи систему координат чи залишаючись у декартовій, зважаємо на таке:
1) правильна чи неправильна відносно однієї з осей область у декартових координатах (якщо неправильна, то на скільки правильних областей її треба розбити);
2) чи спрощує відповідним чином підібрана заміна змінних область інтегрування (скажімо, вона стає правильною) і підінтегральну функцію.

10.1.6.1. Обчислити $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, де область D обмежена колами
$$x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x \text{ і прямими } y=x, y=2x.$$

Розв'язання. [10.2.5.2, 10.2.6.]

[*Зображуємо область D.*]

$$x^2+y^2=4x \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4,$$
$$x^2+y^2=8x \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=16.$$

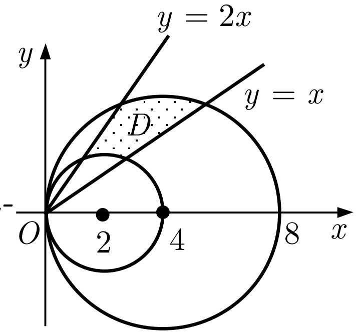


Рис. до 10.1.6.1

[*Вибираємо систему координат, у якій обчислюємо інтеграл.*]①

Переходимо до полярних координат.

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} \overset{[10.2.5.2]}{=} \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi, & \boxed{x^2+y^2=\rho^2,} \\ y=\rho\sin\varphi, & \boxed{|J|=\rho} \end{matrix} \right| = \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^4} = \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^3}.$$

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, у полярній системі координат.*]

$$x^2+y^2=4x;\ \rho^2=4\rho\cos\varphi;\ \rho=4\cos\varphi.$$
$$x^2+y^2=8x;\ \rho^2=8\rho\cos\varphi;\ \rho=8\cos\varphi.$$

$$y=x;\ \rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi; \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi=1, \\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

$$y=2x;\ \ \rho\sin\varphi=2\rho\cos\varphi; \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi=2, \\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \varphi=\operatorname{arctg}2.$$

$$\iint\limits_{\tilde{D}} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^3} = \left| \begin{matrix} \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\operatorname{arctg}2, \\ 4\cos\varphi\le\rho\le 8\cos\varphi \end{matrix} \right| \overset{[10.2.6]}{=} \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{d\rho}{\rho^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}\frac{1}{\rho^2}\Bigg|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}d\varphi = \frac{3}{128}\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{3}{128}\operatorname{tg}\varphi\Bigg|_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} = \frac{3}{128}.$$

Коментар. ① До **полярних** координат [10.1.1] доцільно переходити, якщо: 1) областю інтегрування є круг (кругове кільце) або круговий сектор; 2) підінтегральна функція залежить від x^2+y^2.

10.1.6.2. Обчислити $I = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy.$

Розв'язання. [10.2.5.3]①

[*Відновлюємо область інтегрування D в подвійному інтегралі.*]

$D: 0 \le x \le a$, обмежена лініями $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ та $y = 0$.

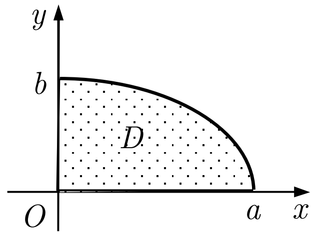


Рис. до 10.1.6.2

$$I = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy = \iint\limits_D \sqrt{9-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$$

[*Вибираємо систему координат, у якій обчислюємо інтеграл.*]①

Переходимо до узагальнених полярних координат.

$$I \overset{[10.2.5.3]}{=} \left| \begin{array}{ll} x = a\rho\cos\varphi, & \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2,} \\ y = b\rho\sin\varphi, & |J| = ab\rho \end{array} \right| = \iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{9-\rho^2}\,ab\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, в узагальнених полярних координатах.*]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1;\ \rho^2 = 1;\ \rho = 1.$$

$$0 \le x \le a;\ 0 \le a\rho\cos\varphi \le a;\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{9-\rho^2}\,ab\rho\,d\varphi\,d\rho = ab\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{9-\rho^2}\rho\,d\rho \overset{②}{=}$$

$$= -\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{9-\rho^2}\,d\left(9-\rho^2\right) =$$

$$= -\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}(9-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi ab}{6}\left(27-16\sqrt{2}\right).$$

Коментар. ① До **узагальнених полярних** координат [10.1.2] доцільно переходити, якщо:

1) область інтегрування обмежена еліпсами (еліпсом) $\dfrac{x^2}{a^2k^2}+\dfrac{y^2}{b^2k^2}=1;$

2) підінтегральна функція залежить від $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$

② Такі повторні інтеграли (сталі межі інтегрування в обох інтегралах і підінтегральна функція кожного інтеграла залежить лише від однієї змінної) можна обчислювати незалежно.

10.1.7.1. Знайти площу фігури, обмеженої колом $x^2+y^2=12$ та параболою $x\sqrt{6}=y^2$ $(x\ge 0)$.

Розв'язання. [10.3.1.]

[*Записуємо формулу, виходячи із шуканого застосування інтеграла.*]

Площу плоскої області D знаходять за формулою

$$S(D) \overset{[10.3.1]}{=} \iint\limits_D dxdy.$$

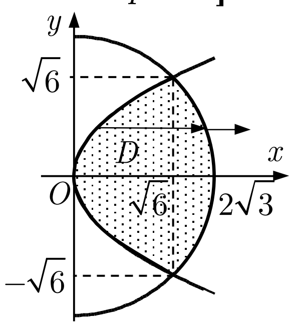


Рис. до 10.1.7.1

[*Зображуємо область D.*]

Область D є правильною в напрямі осі Ox.

[*Щоб визначити межі інтегрування, знаходимо абсциси точок перетину ліній.*]

$$\begin{cases} x^2+y^2=12, \\ x\sqrt{6}=y^2 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2\sqrt{6}, x_2=\sqrt{6}.$$

але $x\ge 0 \Rightarrow x=\sqrt{6}$, а отже $y_1=-\sqrt{6}$, $y_2=\sqrt{6}$.

$$S=\iint\limits_D dxdy = \left|\begin{array}{l} -\sqrt{6}\le y\le\sqrt{6}, \\ \text{справа } x=\sqrt{12-y^2}, \\ \text{зліва } x=\dfrac{1}{\sqrt{6}}y^2, \end{array}\right| = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}} \right) dy =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\sqrt{6}} \sqrt{12 - y^2} dy - \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^{\sqrt{6}} = \left| \begin{matrix} y = 2\sqrt{3}\sin t, \\ dy = 2\sqrt{3}\cos t dt. \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c|c} y & 0 & \sqrt{6} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi/4} \sqrt{12 - 12\sin^2 t} 2\sqrt{3}\cos t dt - 4 = 24\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^2 t dt - 4 =$$

$$= 12\int\limits_{0}^{\pi/4} (1 + \cos 2t) dt - 4 = 12\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi/4} - 4 = 3\pi + 2.$$

10.1.7.2. Знайти площу фігури, обмеженої колами $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$ і прямими $x = \sqrt{3}y, x = 0$.

Розв'язання. [10.3.1.]

Площу плоскої області D знаходять за формулою

$$S(D) \overset{[10.3.1]}{=} \iint\limits_{D} dxdy.$$

[*З'ясовуємо координати центрів та радіуси кіл.*]

$$y^2 - 4y + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 + x^2 = 4;$$

$$y^2 - 8y + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 4)^2 + x^2 = 16.$$

[*Зображуємо область D.*]

Переходимо до полярних координат.

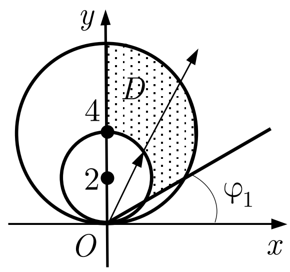


Рис. до 10.1.7.2

$$S(D) = \iint\limits_{D} dxdy \overset{[10.2.5.2]}{=} \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, & \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2,} \\ y = \rho\sin\varphi, & |J| = \rho \end{matrix} \right| = \iint\limits_{\tilde{D}} \rho d\rho d\varphi.$$

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, у полярній системі координат.*]

$$y^2 - 4y + x^2 = 0;\ \rho^2 - 4\rho\sin\varphi = 0;\ \rho = 4\sin\varphi, \varphi \in [0;\pi].$$

$$y^2 - 8y + x^2 = 0;\ \rho = 8\sin\varphi, \varphi \in [0;\pi].$$

$$\rho\sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi \in [0;\pi];\ \varphi_1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\rho\cos\varphi = 0; \cos\varphi = 0, \varphi \in [0;\pi];\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$S(D) = \iint\limits_{\tilde{D}} \rho\, d\varphi d\rho = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 4\sin\varphi \le \rho \le 8\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho\, d\rho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi = 24\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 12\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \big(1 - \cos 2\varphi\big) d\varphi = 12\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 4\pi + 3\sqrt{3}.$$

10.1.8.1. Знайти масу пластини D, яка обмежена лініями $2y = x^2$, $x + y = 4$, з густиною розподілу маси $\mu(x,y) = 2$.

Розв'язання. [10.3.2.]

Масу пластини D з густиною $\mu(x,y)$ знаходять за формулою

$$m(D) \overset{[10.3.2]}{=} \iint\limits_D \mu(x,y) dxdy = \iint\limits_D 2dxdy.$$

[*Зображуємо область* D.]

Область D правильна в напрямі осі Oy.

[*Щоб визначити межі інтегрування, знаходимо абсциси точок перетину ліній.*]

$$\begin{cases} 2y = x^2, \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -4, \\ x_2 = 2. \end{array} \right.$$

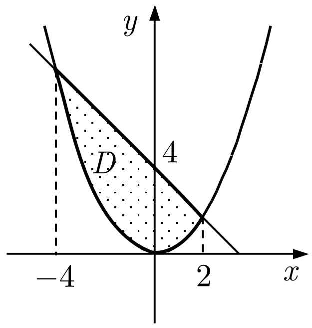


Рис. до 10.1.8.1

$$m(D) = 2\iint\limits_D dxdy = \left| \begin{array}{l} -4 \le x \le 2, \\ \text{зверху } y = 4 - x, \\ \text{знизу } y = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = 2\int\limits_{-4}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy =$$

$$= 2\int\limits_{-4}^{2} \left(4 - x - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-4}^{2} = 36.$$

10.1.8.2. Знайти масу пластини D, яку задано нерівностями $y \ge \dfrac{x}{4} \ge 0$, $1 \le \dfrac{x^2}{16} + y^2 \le 3$, з густиною розподілу маси $\mu(x,y) = \dfrac{x}{y^5}$.

Розв'язання. [10.3.2.]

Масу пластини D з густиною $\mu(x,y)$ знаходять за формулою

$$m(D) \overset{[10.3.2]}{=} \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D \frac{x}{y^5}dxdy.$$

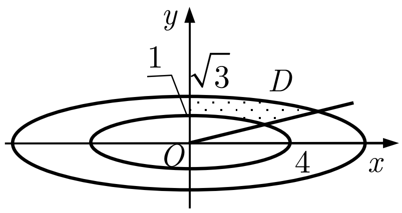


Рис. до 10.1.8.2

[*Зображуємо область D.*]

Переходимо до узагальнених полярних координат.

$$m(D) = \iint\limits_D \frac{x}{y^5}dxdy \overset{[10.2.3]}{=} \left| \begin{matrix} x = 4\rho\cos\varphi, & \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = \rho^2, \\ y = \rho\sin\varphi, & |J| = 4\rho \end{matrix} \right| =$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{4\cos\varphi}{\rho^4\sin^5\varphi}4\rho d\rho d\varphi = 16\iint\limits_{\tilde{D}} \frac{\cos\varphi}{\rho^3\sin^5\varphi}d\rho d\varphi.$$

[*Записуємо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, в узагальненій полярній системі координат.*]

$$1 \le \rho^2 \le 3;\ 1 \le \rho \le \sqrt{3}.$$

$$4\rho\sin\varphi \ge 4\rho\cos\varphi \ge 0;\ \operatorname{tg}\varphi \ge 1;\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$m(D) = 16\iint\limits_{\tilde{D}} \frac{\cos\varphi}{\rho^3\sin^5\varphi}d\rho d\varphi = 16\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{d\rho}{\rho^3} = 4.$$

10.1.9. Знайти координати центра маси однорідної матеріальної пластини, обмеженої кривими $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$.

Розв'язання. [10.3.4]

Координати центра мас $C(x_c;y_c)$ пластини знаходять за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m},$$

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy,\ M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy.$$

Пластина однорідна, тому $\mu(x,y) = \mu_0 = \text{const}$.

[*Зображуємо область D.*]

Оскільки пластина симетрична відносно осі Ox, то $y_c = 0$.

Область D правильна в напрямі осі Ox.

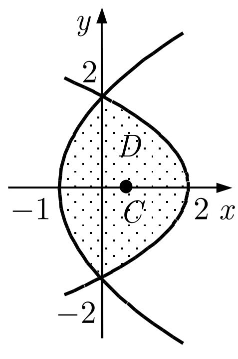


Рис. до 10.1.9

$$M_y = \iint_D x\mu_0 dxdy = \left| \begin{array}{l} -2 \le y \le 2, \\ \text{справа } x = (4-y^2)/2, \\ \text{зліва } x = (y^2-4)/4 \end{array} \right| = \mu_0 \int_{-2}^{2} dy \int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4}\left(4-y^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2 \right) dy =$$

$$= \frac{3}{16}\mu_0 \int_0^2 \left(16 - 8y^2 + y^4\right) dy = \frac{3}{16}\mu_0 \left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{5}\mu_0.$$

$$m = \iint_D \mu_0 dxdy = \mu_0 \int_{-2}^{2} dy \int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx = \mu_0 \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}\left(4-y^2\right) - \frac{1}{4}\left(y^2-4\right) \right) dy =$$

$$= 2\mu_0 \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{4}y^2\right) dy = 2\left(3y - \frac{y^3}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\mu_0.$$

$$x_c = \frac{16\mu_0}{5} \cdot \frac{1}{8\mu_0} = \frac{2}{5}.$$

Центр маси пластини міститься в точці $C\left(\frac{2}{5};0\right)$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

10.1.10. Обчисліть повторний інтеграл і відновіть область інтегрування:

1) $\int_0^4 dx \int_0^1 (x+3y^2)dy$; 2) $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2+2y)dy$;

3) $\int_1^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} xydy$; 4) $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy$;

5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho$; 6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} \rho^2 \sin^2\varphi d\rho$.

10.1.11. Розставте межі інтегрування в $\iint_D f(x,y)dxdy$, якщо область:

1) D — прямокутник з вершинами $O(0;0), A(2;0), B(2;1), C(0;1)$;

2) D — прямокутник з вершинами $A(-3;0), B(-3;2), C(0;2), O(0;0)$;

3) D — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(1;1)$;

4) D — трикутник зі сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 5$;

5) D — паралелограм з вершинами $A(1;2), B(2;4), C(2;7), D(1;5)$;

6) D — паралелограм зі сторонами $y = x, y = x - 4, y = 0, y = 2$;

7) D — фігура, обмежена лініями $y = x^2, x + y = 2$;

8) D — фігура, обмежена лініями $y = x^2, y = 4$;

9) D — фігура, обмежена лініями $x = \sqrt{4 - y^2}, x = \sqrt{4y - y^2}, y = 2$;

10) D — фігура, обмежена лініями $x = 0, x = 1, x = y^2, y = e^x$.

10.1.12. Змініть порядок інтегрування в повторних інтегралах:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx$;

2) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3 y} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)dx$;

3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{x/2} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_{\sqrt{x^2-3}}^{x/2} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{(x+2)/2} f(x,y)dy + \int\limits_2^{10/3} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{(x+2)/2} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_{R/\sqrt{2}}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$;

6) $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^0 dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

10.1.13. Обчисліть подвійний інтеграл:

1) $\iint\limits_D xydxdy$, де D — трикутник з вершинами $O(0;0), A(0;1), B(1;0)$;

2) $\iint\limits_D ydxdy$, де D — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;2), B(2;1)$;

3) $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, де D — область, обмежена параболами $y = x^2$, $y^2 = x$;

4) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, де D — область, обмежена прямими $x = 2, y = x$ і гіперболою $xy = 1$;

5) $\iint\limits_D e^{x/y} dxdy$, де D — область, обмежена лініями $x = y^2, x = 0$, $y = 1$;

6) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{ax - x^2}}$, де D — область, обмежена лініями $x = 0$, $y^2 = a^2 - ax$;

7) $\iint\limits_D e^{x^2} dxdy$, де D — область, обмежена лініями $y = 0, y = x$, $x = 1$;

8) $\iint\limits_D \sin(x^3 - 1) dxdy$, де D — область, обмежена лініями $y = 0$, $y = x^2, x = 1$.

10.1.14. Оцініть значення подвійного інтеграла:

1) $I_1 = \iint\limits_D (x + y + 1) dxdy$, де D — круг $x^2 + y^2 \le 4$;

2) $I_2 = \iint\limits_D (x^2 - y^2) dxdy$, де D — круг $x^2 + y^2 \le 2x$.

10.1.15. Розставте межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y) dxdy$, переходячи до полярних координат, якщо:

1) D — частина круга $x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0$;

2) D — частина круга $x^2 + y^2 \le 9, x \le 0, y \ge 0$;

3) D — круг $x^2 + y^2 \le ax, a \ge 0$;

4) D — круг $x^2 + y^2 \le by, b \ge 0$;

5) D — область, обмежена колами $x^2 + y^2 = 4y, x^2 + y^2 = 8y$ і прямими $y = x, y = 2x$;

6) D — область, обмежена колами $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x$ і прямими $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$.

10.1.16.* 1. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $xy = 2$, $xy = 1, y = 3x, y = 4x$, замінити змінні за формулами: $xy = u, y = vx$.

2. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де область D обмежена лініями $x^2 = ay$, $x^2 = by, y^2 = px, y^2 = qx$ $(0 < a < b, 0 < p < q)$, замінити змінні за формулами: $x^2 = uy, y^2 = vx$.

10.1.17. Обчисліть подвійні інтеграли, переходячи до полярних координат:

1) $\iint\limits_D (h - 2x - 3y)dxdy$, де D — круг $x^2 + y^2 \le R^2$;

2) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$, де D — круг $x^2 + y^2 \le 16$;

3) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy$, де D — частина кільця $x^2 + y^2 \ge 1, x^2 + y^2 \le 4$, $\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}$;

4) $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, де D — кільце $\dfrac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$;

5) $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, де D — круг $x^2 + y^2 \le Rx$;

6) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, де D — круг $x^2 + y^2 \le Ry$;

7) $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, де D — область, обмежена пелюсткою лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)(x \ge 0)$;

8) $\iint\limits_D x\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, де D — область, обмежена пелюсткою лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)(x \ge 0)$;

9) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)^4 dxdy$, де D — круг $x^2 + y^2 = 2Rx$;

10) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, де D — область, обмежена лініями $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax, y = 0$ $(y > 0)$;

11) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$; 12) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$;

10.1.18. Обчисліть подвійні інтеграли, переходячи до узагальнених полярних координат:

1) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}$, де D — область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

2) $\iint\limits_D \sqrt{16-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}dxdy$, де D — область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

10.1.19. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями:

1) $y^2=2x, y=x$; 2) $y=x^2, y=2x-x^2$;

3) $x=0, y=x, y=2-x^2\,(x\ge 0)$; 4) $x^2+y^2=4, y^2=4-4x\,(x<1)$;

5) $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x, y=x, y=0$;

6) $x^2+y^2=3y, x^2+y^2=5y, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, x=0$;

7) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2, x^2+y^2-\sqrt{2}x=0$;

8) $\rho=a(1+\cos\varphi), \rho=a\cos\varphi\,(a>0)$;

9) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$ (лемніската);

10) $\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)^2=4xy$ (лемніската);

11)* $x^2=3y, x^2=4y, y^2=x, y^2=2x$;

12)* $y^2=ax, y^2=bx, xy=\alpha, xy=\beta$ $(0<a<b, 0<\alpha<\beta)$.

10.1.20. Знайдіть масу пластини D з густиною $\mu(x,y)$:

1) $D: x=4, y=0, y=\sqrt{x}, \mu(x,y)=\frac{15}{16}(2x+y^2)$;

2) $D: x=0, y=4, y=x^2\ (x\ge 0), \mu(x,y)=\frac{15}{64}(x^2+2y)$;

3) $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16, x\le 0,\ y\ge 0, \mu(x,y)=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$;

4) $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=9, x\ge 0,\ y\ge 0, \mu(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5) $D: (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (x\ge 0),\ \mu(x,y)=15x\sqrt{x^2+y^2}$;

6) $D: (x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)\ (x\ge 0, y\ge 0),\ \mu(x,y)=32(x^2+y^2)$;

7) $D: 1\le \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 25, x\ge 0, y\ge \dfrac{2}{3}x, \mu(x,y)=\dfrac{x}{18y^2}$;

8) $D: 1\le \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\le 2, x\ge 0, x\le \dfrac{4}{3}y, \mu(x,y)=\dfrac{27x}{y^5}$.

10.1.21. Для пластини D з густиною $\mu(x,y)$ знайдіть: а) масу; б) координати центру мас; в) моменти інерції відносно осей Ox та Oy, якщо:

1) $D: x^2+y^2\le 2ax, \mu(x,y)=\mu_0\sqrt{x^2+y^2}$;

2) $D: x+y\ge a, a\ge x\ge 0, a\ge y\ge 0, \mu(x,y)=x$.

Відповіді

10.1.10. 1) 12; 2) $\dfrac{14}{3}$; 3) $\dfrac{15}{4}$; 4) $\dfrac{9}{4}$; 5) $\dfrac{3\pi}{2}$; 6) $\dfrac{12}{5}$.

10.1.11. 1) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 f(x,y)dx=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-3}^0 f(x,y)dx=\int\limits_{-3}^0 dx\int\limits_0^2 f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy$; 4) $\int\limits_0^5 dx\int\limits_0^{5-x} f(x,y)dy=\int\limits_0^5 dy\int\limits_0^{5-y} f(x,y)dx$;

5) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy$; 6) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{y+4} f(x,y)dx$; 7) $\int\limits_{-2}^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$;

8) $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_{x^2}^4 f(x,y)dy=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$; 9) $\int\limits_1^2 dy\int\limits_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$; 10) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{e^x} f(x,y)dy$.

10.1.12. 1) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{3^x}^{4-x} f(x,y)dy$; 3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^{\sqrt{y^2+3}} f(x,y)dx$;

4) $\int\limits_0^{8/3} dy\int\limits_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}} f(x,y)dx$; 5) $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$;

6) $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

10.1.13. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{33}{140}$; 4) $\frac{9}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $4a$; 7) $\frac{e-1}{2}$; 8) $\frac{\cos 1 - 1}{3}$.

10.1.14. 1) $(-2\sqrt{2}+1)4\pi \le I_1 \le (2\sqrt{2}+1)4\pi$; 2) $-\frac{\pi}{2} \le I_2 \le 4\pi$.

10.1.15. 1) $\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 2) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{3} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

5) $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.

10.1.16. 1. $\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{4} \frac{dv}{v} \int\limits_{1}^{2} f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) du$. 2. $\frac{1}{3}\int\limits_{a}^{b} du \int\limits_{p}^{q} f\left(\sqrt[3]{u^2 v}, \sqrt[3]{uv^2}\right) dv$.

10.1.17. 1) $\pi R^2 h$; 2) 4π; 3) $\frac{\pi^2}{16}$; 4) $2\pi - \pi^2$; 5) $\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$; 6) $\pi R - 2R$;

7) $\frac{a^3(3\pi + 20 - 16\sqrt{2}}{18}$; 8) $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$; 9) $\frac{126}{5}\pi R^{10}$; 10) $\frac{45}{64}\pi a^4$;

11) $\frac{\pi}{4}\Big((1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\Big)$; 12) $\frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1)$.

10.1.18. 1) 12π; 2) $4\pi(64 - 15\sqrt{15})$.

10.1.19. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{6}$; 4) $\frac{6\pi+8}{3}$; 5) $\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$; 6) $\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$; 7) $\frac{\pi - 1}{2}$; 8) $\frac{5}{4}\pi a^2$; 9) 6;

10) 72; 11) $\frac{1}{3}$; 12) $\frac{1}{3}(\beta - \alpha)\ln\frac{b}{a}$.

10.1.20. 1) 28; 2) 7; 3) 4; 4) 4; 5) $2\sqrt{2}a^4$; 6) 81π; 7) $\sqrt{2} - 1$; 8) 1.

10.1.21. 1) а) $\frac{32}{9}a^3\mu_0$; б) $x_c = \frac{6}{5}a, y_c = 0$; в) $I_x = \frac{512}{525}a^5\mu_0, I_y = \frac{1024}{175}a^5\mu_0$;

2) а) $\frac{a^3}{3}$; б) $x_c = \frac{3a}{4}, y_c = \frac{5a}{8}$; в) $I_x = \frac{3a^5}{20}, I_y = \frac{a^5}{5}$.

Практикум 10.2. Потрійні інтеграли

Навчальні задачі

10.2.1. Обчислити $I = \iiint\limits_G z dxdydz$, якщо область G обмежена параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ і площинами $x + y = 1,\ x, y, z = 0$.

Розв'язання. [10.4.4.]

[*Зображуємо область* G.

Визначаємо, у яких координатах обчислюємо інтеграл.]

Інтеграл обчислюємо в декартових координатах.

[*Визначаємо, чи є область* G *циліндричною.*]

Область інтегрування G є циліндричною в напрямі осі Oz.

[*Зображуємо проекцію* D_{xy} *області* G *на площину* Oxy.]

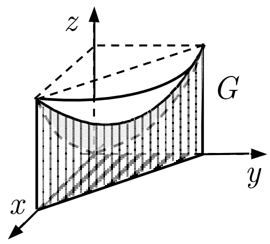


Рис. 1 до 10.2.1

$$\left[\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \left| \begin{array}{l} \text{проектується в } D_{xy} \\ \text{зверху } z = z_2(x,y), \\ \text{знизу } z = z_1(x,y) \end{array} \right| = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \right]$$

$$\iiint\limits_G z dxdydz \overset{[10.4.4]}{=} \left| \begin{array}{l} \text{зверху } z = x^2 + y^2, \\ \text{знизу } z = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{x^2+y^2} z dz = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{x^2+y^2} dxdy =$$

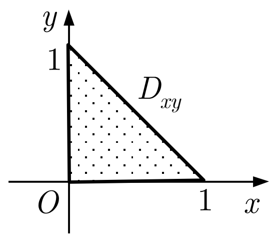


Рис. 2 до 10.2.1

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)^2 dxdy \overset{①}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1, \\ \text{зверху } y = 1 - x, \\ \text{знизу } y = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x^4 y + \frac{2}{3} x^2 y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x^4(1-x) + \frac{2}{3} x^2 (1-x)^3 + \frac{(1-x)^5}{5} \right) dx = \frac{7}{180}.$$

Коментар. ① Оскільки область D_{xy} є трикутником, залишаємось у декартовій системі координат. Вибираємо інтегрування вздовж осі Oy (область правильна в обох напрямах).

10.2.2. Обчислити $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де область $G: x^2+y^2+z^2 \le z$.

Розв'язання. [10.4.6.3.]

Область G обмежена сферою

$$x^2+y^2+z^2 = z \Leftrightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

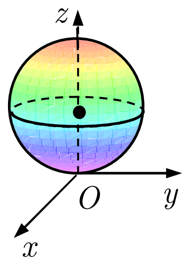


Рис. до 10.2.2

[*Зображуємо область* G.]

Інтеграл обчислюємо у сферичних координатах [10.1.5].①

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz \overset{[10.4.6.3]}{=} \left| \begin{array}{ll} x = r\sin\theta\cos\varphi, & \boxed{x^2+y^2+z^2 = r^2,} \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & |J| = r^2\sin\theta \\ z = r\cos\theta, & \end{array} \right| =$$

$$= \iiint\limits_{\tilde{G}} r^3\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

[*Записуємо рівняння поверхні у сферичній системі координат.*]

$$x^2+y^2+z^2 = z;\ r^2 = r\cos\theta;\ r = \cos\theta.$$

$$r = \cos\theta \ge 0;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\ -\pi \le \varphi \le \pi.$$

$$\iiint\limits_{\tilde{G}} r^3\sin\theta drd\theta d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 d\rho = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\theta\sin\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}\left.\frac{\cos^5\theta}{5}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}.$$

Коментар. ① Від декартових до сферичних координат [10.1.5] у потрійних інтегралів доцільно переходити для областей, обмежених сферами, конусами та площинами, які проходять через вісь Oz.

10.2.3.1. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболічними циліндрами $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}$ та площинами $z = 0, x+z = 2$.

Розв'язання. [10.5.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) \overset{[10.5.1]}{=} \iiint\limits_G dxdydz.$$

[*Зображуємо область* G.]

Тіло G[1] — циліндричне в напрямі осі Oz.

[*Зображуємо проєкцію* D_{xy} *області* G *на площину* Oxy.]

Область D_{xy} є правильною у напрямі осі Oy.

$$\left[\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \overset{[10.4.5]}{=} \left|\begin{matrix} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{matrix}\right| = \right.$$

$$\left. = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right]$$

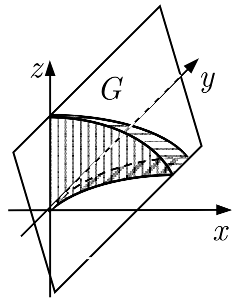


Рис. 1 до 10.2.3.1

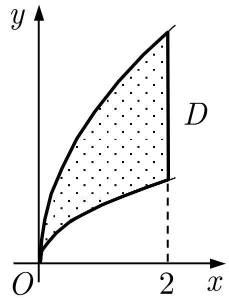


Рис. 2 до 10.2.3.1

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \left|\begin{matrix} 0 \le x \le 2, \\ \sqrt{2x} \le y \le 16\sqrt{2x}, \\ 0 \le z \le 2 - x \end{matrix}\right| = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{16\sqrt{2x}} dy \int\limits_0^{2-x} dz =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{16\sqrt{2x}} (2-x)dy = \int\limits_0^2 (2-x)15\sqrt{2x}dx =$$

$$= 15\sqrt{2}\left(2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^2 = 15\sqrt{2}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5}\right) = 32.$$

10.2.3.2. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $2z = x^2 + y^2$ та площиною $z = 2$.

Розв'язання. [10.5.1.]

Об'єм тіла G знаходять за формулою

$$V(G) \overset{[10.5.1]}{=} \iiint\limits_G dxdydz.$$

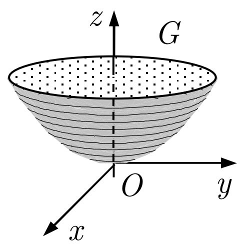


Рис. 1 до 10.2.3.2

[*Зображуємо область* G.]

Тіло G циліндричне в напрямі осі Oz.

[*З'ясовуємо форму проєкції області* G *на* Oxy*, виключаючи змінну* z *з рівнянь поверхонь.*]

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

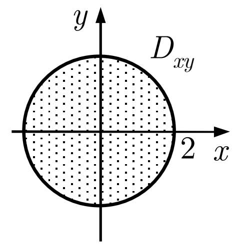


Рис. до 10.2.3.2

[*Зображуємо проєкцію* D_{xy} *області* G *на площину* Oxy*. Це круг, обмежений колом* $x^2 + y^2 = 4$*.*]

$$V = \iiint\limits_G dxdydz \overset{[10.4.4]}{=} \left| \begin{array}{l} \text{зверху } z = 2, \\ \text{знизу } z = x^2 + y^2 \end{array} \right| = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{2} dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dxdy.$$

Переходимо до полярних координат [10.1.1].

$$V(G) = \iint\limits_{D_{xy}} \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dxdy = \left| \begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi, & \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2,} \\ y = \rho \sin \varphi, & |J| = \rho \end{array} \right| =$$

$$= \iint\limits_{\tilde{D}} \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\varphi d\rho \overset{①}{=} \left| \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 2; \\ -\pi \le \varphi \le \pi \end{array} \right| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = 4\pi.$$

Коментар. ① $x^2 + y^2 = 4; \quad \rho^2 = 4; \quad \rho = 2.$

10.2.3.3. Знайти об'єм тіла, обмеженого коловим циліндром $x^2 + y^2 = 4x$ та площинами $z = x, z = 2x$.

Розв'язання. [10.5.1.]①

Об'єм тіла G знаходять за формулою:

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$$

[*Зображуємо область* G*.*]

Тіло циліндричне в напрямі осі Oz.

Проєкція D тіла G на площину Oxy є круг

$$x^2 + y^2 \le 4x \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \le 4,$$

обмежений колом $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Переходимо до циліндричних координат [10.1.3]. ①

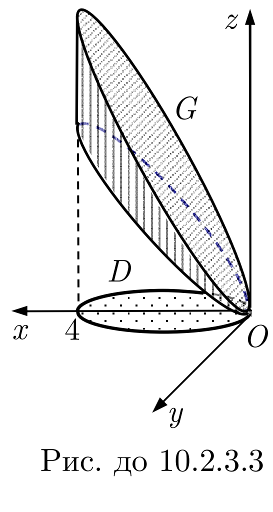


Рис. до 10.2.3.3

$$V(G)=\iiint\limits_{G}dxdydz\overset{[10.4.6.1]}{=}\left|\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi, & \boxed{x^2+y^2=\rho^2,}\\ y=\rho\sin\varphi, & |J|=\rho;\\ z=z, & \rho\ge 0,\varphi\in(-\pi;\pi]\end{matrix}\right|=\iiint\limits_{\tilde G}\rho d\varphi d\rho dz.$$

[*Записуємо рівняння поверхонь у циліндричних координатах.*]

$$x^2+y^2=4x;\ \rho^2=4\rho\cos\varphi;\ \rho=4\cos\varphi.$$

$$z=x;\ z=\rho\cos\varphi;$$

$$z=2x;\ z=2\rho\cos\varphi;$$

$$\rho(\varphi)=4\cos\varphi\ge 0;\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

$$V(G)=\iiint\limits_{\tilde G}\rho d\varphi d\rho dz=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{4\cos\varphi}\rho d\rho\int\limits_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi}dz=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{4\cos\varphi}\rho z\Big|_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi}d\rho=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{4\cos\varphi}\rho^2\cos\varphi d\rho=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{0}^{4\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{64}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi\overset{[9.9.4]}{=}\frac{128}{3}\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi\overset{[9.9.7]}{=}\frac{128}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=8\pi.$$

Коментар. ① Від декартових до циліндричних координат [10.1.3] у потрійних інтегралах доцільно переходити для областей з осьовою симетрією.

10.2.4. Знайти масу тіла G, заданого нерівностями $\frac{z^2}{64}\le x^2+y^2\le 4$, $y,z\ge 0$, з густиною розподілу маси $\mu(x,y,z)=\frac{5(x^2+y^2)}{4}$.

Розв'язання. [10.5.2.]

Масу тіла G з густиною $\mu(x,y,z)$ знаходять за формулою

$$m(G)\overset{[10.5.2]}{=}\iiint\limits_{G}\mu(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G}\frac{5(x^2+y^2)}{4}dxdydz.$$

[*Зображуємо область G. Тіло G обмежують поверхні: конус $z^2=64(x^2+y^2)$ $(z\ge 0)$; коловий циліндр $x^2+y^2=4$ і площини Oxz $(y=0)$ та Oxy $(z=0)$.*]

Тіло G циліндричне в напрямі осі Oz.

[*Зображуємо проекцію* D_{xy} *області* G *на площину* Oxy. *Це півкруг, обмежений колом* $x^2 + y^2 = 4$.]

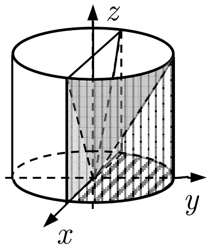


Рис. 1 до 10.2.4

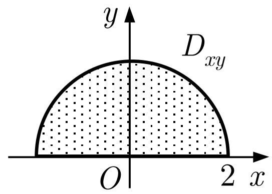


Рис. 2 до 10.2.4

$$m(G) = \iiint\limits_G \frac{5(x^2 + y^2)}{4} dxdydz \overset{[10.4.4]}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{зверху } z = 8\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \text{знизу } z = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{5}{4} \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy \int\limits_0^{8\sqrt{x^2+y^2}} dz =$$

$$= 10 \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)^{3/2} dxdy \overset{[10.2.5.2]}{=} = \left| \begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi, & \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2,} \\ y = \rho\sin\varphi, & |J| = \rho \end{array} \right| =$$

$$= 10 \iint\limits_{\tilde{D}} \rho^4 d\rho d\varphi = \left| \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 2; \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{array} \right| = 10 \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 d\rho = 10\varphi \Big|_0^{\pi} \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^2 = 10\pi \cdot \frac{32}{5} = 64\pi.$$

10.2.5. Знайти координати центра мас однорідного тіла G, обмеженого коловим циліндром $y^2 + z^2 = 3$, параболоїдом обертання $x = 6(y^2 + z^2)$ та площиною $x = 0$.

Розв'язання. [10.5.4.]

Координати центра мас $C(x_c; y_c; z_c)$ тіла знаходять за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \; y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \; z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

$$M_{\begin{Bmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} z \\ y \\ x \end{Bmatrix} \mu(x, y, z) dxdydz.$$

Тіло однорідне, тому $\mu(x, y, z) = \mu_0 = \text{const}$.

[*Зображуємо область* G.]

Оскільки вісь Ox є віссю симетрії тіла, то

$$y_c = z_c = 0.$$

Тіло циліндричне в напрямі осі Ox.

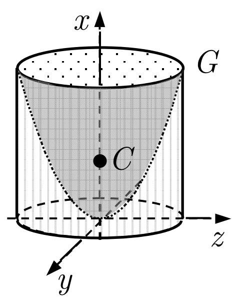


Рис. 1 до 10.2.5

[*Зображуємо проекцію D_{yz} області G на площину Oyz. Це круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = 3$.*]

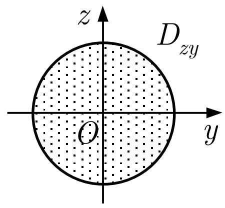


Рис. 2 до 10.2.5

$$m(G) = \iiint\limits_G \mu_0 dxdydz \overset{[10.4.4]}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_0^{6(y^2+z^2)} dx =$$

$$= 6\mu_0 \iint\limits_{D_{yz}} (y^2 + z^2)dydz \overset{[10.2.5.2]}{=} \left\| \begin{matrix} y = \rho\cos\varphi, & \boxed{y^2 + z^2 = \rho^2,} \\ z = \rho\sin\varphi, & |J| = \rho \end{matrix} \right\| =$$

$$= 6\mu_0 \iint\limits_{\tilde{D}_{yz}} \rho^3 d\varphi d\rho = 6\mu_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho = 6\mu_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{9}{4} = 27\pi\mu_0.$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V \mu_0 x dxdydz \overset{[10.4.4]}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_0^{6(y^2+z^2)} xdx =$$

$$= 18\mu_0 \iint\limits_{D_{yz}} (y^2 + z^2)^2 dydz \overset{[10.2.5.2]}{=} 18\mu_0 \iint\limits_{\tilde{D}_{yz}} \rho^5 d\rho d\varphi =$$

$$= 18\mu_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^5 d\rho = 18\mu_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{27}{6} = 162\pi\mu_0.$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{162\pi\mu_0}{27\pi\mu_0} = 6.$$

Центр мас тіла міститься в точці $C(6;0;0)$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

10.2.6. Обчисліть потрійний інтеграл:

1) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$, де G — область, обмежена площинами $x = 0,\ y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

2) $\iiint\limits_G (x + z)dxdydz$, де G — область, обмежена площинами $x + y = 1,\ x - y = 1, x + z = 1, z = 0, x = 0$;

3) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + z^2} dxdydz$, де G — область, обмежена параболоїдом обертання $y = x^2 + z^2$ та площиною $y = 1$;

4) $\iiint\limits_G xydxdydz$, де G — область, обмежена коловим циліндром $x^2+y^2=1$ та площинами $z=0, z=1, x\geq 0, y\geq 0$;

5) $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz, G: 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0, z\leq 0$;

6) $\iiint\limits_G \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz,\ G: x^2+y^2+z^2\leq R^2, z\geq\sqrt{x^2+y^2}$;

7) $\iiint\limits_G \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, де G — область, обмежена еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

8) $\iiint\limits_G \sqrt{1-\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}}dxdydz$, де G — область, обмежена еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

10.2.7. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x=4, y=4, z=x^2+y^2+1, x=0,\ y=0, z=0$;

2) $z=2x^2+y^2+1, x+y=1, x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0$;

3) $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, x+z=6, z=0$;

4) $y=x^2, y=1, z=0, z=x^2+y^2$;

5) $az=x^2+y^2, 2az=a^2-x^2-y^2$;

6) $x^2+y^2+z^2=2a^2, az=x^2+y^2$;

7) $x^2+y^2=2az, x^2+y^2+z^2=3a^2$;

8) $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=6-x^2-y^2$;

9) $x^2+y^2=a^2, x^2+y^2-z^2=-a^2$;

10) $2(x^2+y^2)=z^2, x^2+y^2-z^2=-a^2$;

11) $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, x^2+y^2\leq 60,\ z=1$;

12) $z=0, z=ae^{-(x^2+y^2)}, x^2+y^2=R^2$;

13) $z=0, x^2+y^2=2ax, x^2+y^2=z^2$;

14) $x^2+y^2=2Rx, z=x^2+y^2, z=0$;

15) $x^2+y^2=y, x^2+y^2=4y, z=0, z=\sqrt{x^2+y^2}$;

16) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \le ax, z \ge 0$;

17) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \le z^2$;

18) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \le z^2$;

19) $64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169, z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}, y \ge 0, y \ge -\sqrt{3}x$;

20) $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}}, y \le 0, y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

21) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

22) $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1, \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} \le \dfrac{z^2}{9}$.

10.2.8. 1. Знайдіть масу сферичного шару між сферами $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, якщо $\mu(x, y, z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

2. Знайдіть масу циліндра, обмеженого коловим циліндром $x^2 + y^2 = R^2$, та площинами $z = 0$ та $z = H$, якщо $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

3. Знайдіть масу тіла, обмеженого еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, з густиною $\mu(x, y, z) = k\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)$.

4. Знайдіть масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(y \ge 0)$, $y^2 \ge x^2 + z^2$, з густиною $\mu(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$.

5. Знайдіть масу тіла, обмеженого площиною $z = H$ та конусом $x^2 + y^2 = z^2$, з густиною $\mu(x, y, z) = kz$.

6. Знайдіть масу тіла, обмеженого площиною $z = H$ та конусом $x^2 + y^2 = z^2$, з густиною $\mu(x, y, z) = kz^2$.

10.2.9. Знайдіть координати центра мас тіла з густиною μ:

1) $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0,\ \mu = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

2) $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, y \ge 0,\ \mu = \mu_0(x^2 + y^2 + z^2)$;

3) $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h, \mu(x, y, z) = \mu_0 z^2$;

4) $x^2 + y^2 \le z \le h, \mu(x,y,z) = \mu_0\sqrt{h-z}$;

5) $z = \dfrac{y^2}{2}, x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y - 12 = 0, \mu(x,y,z) = 1$;

6) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6, \mu(x,y,z) = 1$.

10.2.10. Знайдіть моменти інерції відносно осі Oz однорідного ($\mu = 1$) тіла:

1) $x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le H$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0$.

Відповіді

10.2.6. 1) $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{5}{16}$; 2) $\dfrac{5}{12}$; 3) $\dfrac{4\pi}{15}$; 4) $\dfrac{1}{8}$; 5) $\dfrac{31\pi}{10}$; 6) $\dfrac{\pi R^3}{6}$; 7) $\dfrac{4}{5}\pi abc$; 8) $\dfrac{3\pi^2}{2}$.

10.2.7. 1) $\dfrac{560}{3}$; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) $\dfrac{48\sqrt{6}}{5}$; 4) $\dfrac{88}{105}$; 5) $\dfrac{\pi a^3}{12}$; 6) $\dfrac{\pi a^3}{6}(8\sqrt{2}-7)$; 7) $\dfrac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}\pm 5)$; 8) $\dfrac{32}{3}\pi$; 9) $\dfrac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$; 10) $\dfrac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$; 11) 276π; 12) $\pi a(1-e^{-R^2})$; 13) $\dfrac{32}{9}a^3$; 14) $\dfrac{3\pi R^4}{2}$; 15) 28; 16) $\dfrac{a^3}{9}(3\pi - 4)$; 17) $\dfrac{2\pi a^3}{3}(2-\sqrt{2})$; 18) πa^3; 19) 337π; 20) 52π; 21) $\dfrac{4\pi abc}{3}$; 22) $4\pi(2-\sqrt{2})$.

10.2.8. 1) $6k\pi R^2$; 2) $\dfrac{\pi R^4 H}{2} + \dfrac{\pi R^2 H^5}{3}$; 3) $\dfrac{4}{5}k\pi abc$; 4) $\dfrac{k\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$; 5) $\dfrac{\pi k H^4}{4}$; 6) $\dfrac{\pi k H^5}{5}$.

10.2.9. 1) $\left(\dfrac{8R}{3\pi^2};0;0\right)$; 2) $\left(0;\dfrac{105}{124};0\right)$; 3) $\left(0;0;\dfrac{5h}{6}\right)$; 4) $\left(0;0;\dfrac{4h}{7}\right)$; 5) $\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{12}{5};\dfrac{8}{5}\right)$; 6) $\left(\dfrac{18}{7};\dfrac{15\sqrt{6}}{16};\dfrac{12}{7}\right)$. **10.2.10.** 1) $\dfrac{\pi}{2}HR^4$; 2) $\dfrac{4\pi R^5}{15}$.

Практикум 10.3. Криволінійні інтеграли 1-го роду

Навчальні задачі

10.3.1.1. Обчислити $\displaystyle\int_L y\,dl$, де $L: y = x^3, 0 \le x \le 1$.

Розв'язання. [10.6.7.]

[*Зображуємо криву.*]

[*Залежно від способу задання кривої, вибираємо формулу для обчислення криволінійного інтеграла.*]

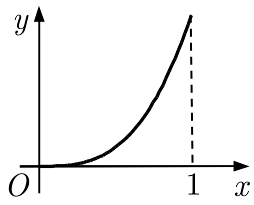


Рис. до 10.3.1.1

$$\left[\int\limits_L f(x,y)dl \overset{[10.6.7]}{=} \left| \begin{array}{l} L: y = y(x), a \le x \le b, \\ dl = \sqrt{1 + y_x'^2}dx \end{array} \right| = \\ = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2}dx.\right]$$

[*Обчислюємо інтеграл, підставляючи рівняння кривої в підінтегральну функцію і знаходячи диференціал довжини дуги.*]

$$\int\limits_L ydl \overset{[10.6.7]}{=} \left| \begin{array}{c} y = x^3, 0 \le x \le 1; y_x' = 3x^2. \\ dl = \left[\sqrt{1 + y_x'^2}dx\right] = \\ = \sqrt{1 + 9x^4}dx \end{array} \right| = \int\limits_0^1 x^3\sqrt{1 + 9x^4}dx =$$

$$= \frac{1}{36}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + 9x^4}d(1 + 9x^4) = \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + 9x^4\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{54}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

10.3.1.2. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, де L — дуга кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Розв'язання. [10.6.8.]

[*Зображуємо криву.*]

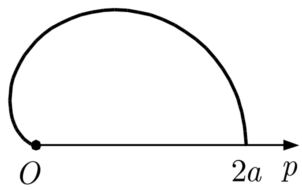


Рис. до 10.3.1.2

[*Залежно від способу задання кривої, вибираємо формулу для обчислення криволінійного інтеграла.*]

$$\left[\int\limits_L f(x,y)dl \overset{[10.6.8]}{=} \left| \begin{array}{l} L: \rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta, \\ x = \rho(\varphi)\cos\varphi, y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \\ dl = \sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}d\varphi \end{array} \right| = \\ = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}d\varphi\right]$$

[*Обчислюємо інтеграл, підставляючи рівняння кривої в підінтегральну функцію і знаходячи диференціал довжини дуги.*]

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl \overset{[10.6.8]}{=} \left| \begin{array}{c} \rho(\varphi) = a(1 + \cos\varphi), 0 \le \varphi \le \pi. \\ x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi \end{array} \right|$$

$$\left|\begin{array}{c} \rho(\varphi) = a(1+\cos\varphi), 0 \le \varphi \le \pi. \\ x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi, \\ \rho'_\varphi = -a\sin\varphi. \\ dl = \left[\sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2 d\varphi}\right] = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi} = \\ = a\sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi. \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \int_0^\pi a(1+\cos\varphi)2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 8a^2\int_0^\pi \cos^3\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \overset{[10.4.7]}{=} 8a^2\frac{2}{1\cdot 3} = \frac{16}{3}a^2.$$

10.3.1.3. Обчислити $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)dl$, де L — відрізок прямої AB, між точками $A(1;1;1)$ та $B(3;0;3)$.

Розв'язання. [10.6.5.]

[*Записуємо параметричні рівняння прямої* AB.] ①

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+1, \\ y = -t+1, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t+1, \end{cases}$$

Відрізку AB прямої відповідає відрізок $t \in [0;1]$.

[*Залежно від способу задання кривої вибираємо формулу для обчислення криволінійного інтеграла.*]

$$\left[\int_L f(x,y,z)dl \overset{[10.6.5]}{=} \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}dt.\right]$$

[*Обчислюємо інтеграл, підставляючи рівняння кривої в підінтегральну функцію і знаходячи диференціал довжини дуги.*]

$$\int_{AB}(x^2+y^2+z^2)dl \overset{[10.6.5]}{=} \left|\begin{array}{c} x = 2t+1, y = -t+1, z = 2t+1, t \in [0;1]. \\ x'_t = 2, y'_t = -1, z'_t = 2. \\ dl = \left[\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t dt}\right] = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3dt. \end{array}\right| =$$

$$= 3\int_0^1((2t+1)^2 + (1-t)^2 + (2t+1)^2)dt = 3\int_0^1(9t^2+6t+3)dt = 27.$$

Коментар. ① Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

10.3.2.1. Знайти довжину дуги кривої $y=\ln x, \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$.

Розв'язання. [10.6.9.]

Довжину дуги кривої L знаходять за формулою

$$l(L)\overset{[10.6.9]}{=}\int\limits_L dl.$$

[*Зображуємо криву.*]

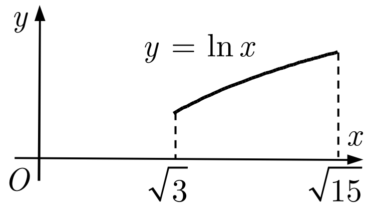


Рис. до 10.3.2.1

$$l(L)=\int\limits_L dl=\left|\begin{array}{l} y=\ln x, y'=\dfrac{1}{x}. \\ dl\overset{[10.6.7]}{=}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}dx \end{array}\right|=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx\overset{\textcircled{1}}{=}$$

$$=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x^{-1}\left(1+x^2\right)^{1/2}dx=\left|\begin{array}{ll} m=-1, n=2 & 1+x^2=t^2 \\ p=\dfrac{1}{2} & d(1+x^2)=dt^2 \\ \frac{m+1}{n}=0\in\mathbb{Z} & xdx=tdt \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x^{-2}\left(1+x^2\right)^{1/2}xdx=\int\limits_2^4\frac{t}{t^2-1}tdt=\int\limits_2^4\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^4 dt+\int\limits_2^4\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^4=\left(4-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}\right)\right)=2+\ln\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Коментар. ① Скористаємось теоремою Чебишова.

10.3.2.2. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho=3e^{3\varphi/4}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. [10.6.9.]①

Довжину дуги кривої L знаходять за формулою

$$l(L)=\int\limits_L dl.$$

[*Зображуємо криву.*]

$$l(L)=\int\limits_L dl=\left|\begin{array}{c}\rho=3e^{3\varphi/4},-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.\\ \rho'_\varphi=\dfrac{9}{4}e^{3\varphi/4}.\\ dl\overset{[10.6.8]}{=}\sqrt{\dfrac{81}{16}e^{3\varphi/2}+9e^{3\varphi/2}}d\varphi=\dfrac{15}{4}e^{3\varphi/4}d\varphi\end{array}\right|=$$

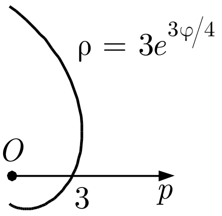


Рис. до 10.3.2.2

$$=\frac{15}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{3\varphi/4}d\varphi=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{3\varphi/4}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=5\left(e^{3\pi/8}-e^{-3\pi/8}\right)=$$

$$=10\cdot\frac{e^{3\pi/8}-e^{-3\pi/8}}{2}=\left[\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]=10\operatorname{sh}\frac{3\pi}{8}.$$

10.3.3. Знайти масу, розподілену з густиною $\mu=2z-\sqrt{x^2+y^2}$ уздовж дуги конічної гвинтової лінії $L\colon \begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\ t\in[0;2\pi].\\ z=t,\end{cases}$

Розв'язання. [10.6.10.]①

Масу дуги кривої L з густиною $\mu(x,y,z)$ знаходять за формулою

$$m(L)\overset{[10.6.10]}{=}\int\limits_L\mu(x,y,z)dl=\int\limits_L(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl.$$

[*Зображуємо криву.*]

$$m(L)=\int\limits_L(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl=$$

$$=\left|\begin{array}{c}x=t\cos t,y=t\sin t,z=t,t\in[0;2\pi].\\ x'=\cos t-t\sin t,y'=\sin t+t\cos t,z'=1.\\ dl\overset{[10.6.6]}{=}\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt=\\ =\sqrt{2+t^2}dt\end{array}\right|$$

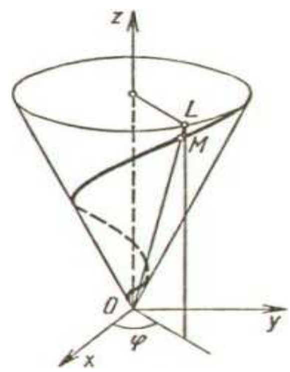


Рис. до 10.3.3

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(2t-\sqrt{t^2\cos^2t+t^2\sin^2t}\right)\sqrt{2+t^2}dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}t\sqrt{2+t^2}dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+t^2}d\left(2+t^2\right)=\frac{1}{3}\left(\left(2+4\pi^2\right)^{3/2}-2\sqrt{2}\right).$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

10.3.4. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, де L — відрізок прямої $y = x + 2$, який з'єднує точки $A(2;4)$ та $B(1;3)$;

2) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L — відрізок прямої $y = \frac{x}{2} - 2$, який з'єднує точки $A(0;-2)$ та $B(4;0)$;

3) $\int\limits_L (2x+y)dl$, де L — межа трикутника з вершинами $A(1;0), B(0;2), O(0;0)$;

4) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L — межа трикутника з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(0;1)$;

5) $\int\limits_L x dl$, де L — дуга параболи $y = x^2$ між точками $A(2;4)$ та $B(1;1)$;

6) $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2} dl$, де L — дуга гіперболи $xy = 1$ між точками $A(1;1)$ та $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$;

7) $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dl$, де L — дуга синусоїди $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$;

8) $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dl$, де L — дуга косинусоїди $y = \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

9) $\int\limits_L xy^2 dl$, де L — дуга кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка лежить у 1-й чверті;

10) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2} dl$, де L — дуга розгортки кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

11) $\int\limits_L \sqrt{2y} dl$, де L — перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

12) $\int\limits_L y^2 dl$, де L — перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

13) $\int\limits_L xy dl$, де L — частина еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить у 1-й чверті;

14) $\int\limits_L x^2 y dl$, де L — дуга астроїди $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$;

15) $\int\limits_L \dfrac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, де L — перший виток циліндричної гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t,\ z = bt$;

16) $\int\limits_L z dl$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x = t\cos t, y = t\sin t,\ z = t$;

17) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L — верхня половина кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

18) $\int\limits_L (x - y) dl$, де L — коло $x^2 + y^2 = ax$;

19) $\int\limits_L (x + y) dl$, де L — права частина лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

20) $\int\limits_L \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dl$, де L — верхня частина лемніскати $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$;

21) $\int\limits_L (x^2 + y^2)^2 dl$, де L — дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ між точками $A(0;a)$ до точки $O(-\infty;0)$;

22) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} dl$, де L — дуга спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$ між точками $A(0;0)$ та $B(a;a^2)$;

23) $\int\limits_L \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, де L — коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y$;

24) $\int\limits_L xyzdl$, де L — чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2, x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$, яка лежить у 1-му октанті.

10.3.5. Знайдіть довжину дуги кривої:

1) $y=\ln(1-x^2)$ від точки $x_1=0$ до точки $x_2=\dfrac{1}{2}$;

2) $y=a\ln\sin\dfrac{x}{a}$ від точки $x=\dfrac{\pi a}{2}$ до точки $x=2a$;

3) $y=\sqrt{x}$ від точки $x=0$ до точки $x=1$;

4) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ від точки $x=0$ до точки $x=a$;

5) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

6) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi; \end{cases}$

7) $\rho=2a(1+\cos\varphi)$;

8) $\rho=a\varphi$, перший виток;

9) $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, 0\le t\le 2$;

10) $x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t, -\infty<t\le 0$.

10.3.6. Визначте масу, розподілену з лінійною густиною μ вздовж кривої L:

1) $L: y=\dfrac{x^2}{2}, A\left(1;\dfrac{1}{2}\right), B(2;2), \mu=\dfrac{y}{x}$;

2) $L: y=\sqrt{x}, A(1;1), B(4;2), \mu=y$;

3) $L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \mu=|y|$;

4) $L: \begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} 0\le t\le 2\pi,\ \mu=y^{3/2}$;

5) $L: \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}, \mu=k\rho$;

6) $L: \rho=a(1+\cos\varphi), \mu=k\sqrt{\rho}$;

7) $L: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t,\ 0\le t\le 2\pi, \mu=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

8) $L: x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t,\ -\infty<t\le 0, \mu=kz$.

10.3.7. Визначте координати центра мас однорідної:

1) дуги циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), 0\le t\le \pi; \end{cases}$

2) кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

10.3.8. Знайдіть момент інерції I_x однорідного кола $x^2+y^2=R^2$.

Відповіді

10.3.4. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{3}{2}$; 2) $5\ln 2$; 3) $3+2\sqrt{5}$; 4) $1+\sqrt{2}$; 5) $\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$; 6) $\frac{17\sqrt{17}-2\sqrt{2}}{6}$; 7) $\frac{\pi}{2}$; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{R^4}{3}$; 10) $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2}-1\right]$; 11) $4\pi a\sqrt{a}$; 12) $\frac{256}{15}a^3$; 13) $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$; 14) $\frac{16}{385}a^4$; 15) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$; 16) $\frac{2\sqrt{2}((1+2\pi^2)^{3/2}-1)}{3}$; 17) $\frac{16a^2}{3}$; 18) $\frac{\pi a^2}{2}$; 19) $a^2\sqrt{2}$; 20) a^4; 21) $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$; 22) $\frac{a^5}{3}+a^3$; 23) $2\pi a^2$; 24) $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$.

10.3.5. 1) $\ln 3-\frac{1}{2}$; 2) $a\ln\operatorname{tg}1$; 3) $\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $a\operatorname{sh}1$; 5) $6a$; 6) $8a$; 7) $16a$; 8) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$; 9) $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$; 10) $a\sqrt{3}$.

10.3.6. 1) $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$; 2) $\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$; 3) $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$; 4) $3\sqrt{2}\pi a^{5/2}$; 5) $k\pi a^2$; 6) $\pi k(2a)^{3/2}$; 7) $\frac{4\left((1+2\pi^2)^{3/2}-1\right)}{3}$; 8) $\frac{\sqrt{3}ka^2}{2}$.

10.3.7. 1) $\left(\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{4a}{5};0\right)$. **10.3.8.** πR^3.

Практикум 10.4. Криволінійні інтеграли 2-го роду

Навчальні задачі

10.4.1.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_L xdy-ydx$ вздовж параболи $y=x^2$.від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Розв'язання. [10.7.8.]

[*Зображуємо криву.*]

[*Залежно від способу задання кривої, вибираємо формулу для обчислення криволінійного інтеграла.*]

$$\left[\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy \overset{[10.7.8]}{=} \left|\begin{matrix} y=y(x), x\in[a;b], \\ dy=y'dx \end{matrix}\right| = \int\limits_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx\right]$$

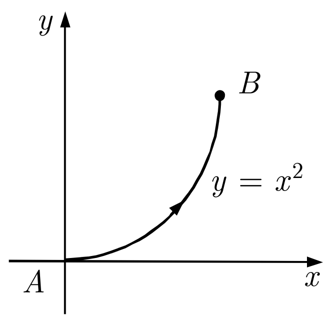


Рис. до 10.4.1.1

[*Обчислюємо інтеграл, підставляючи рівняння кривої в підінтегральну функцію і знаходячи диференціал* dy.]

$$\int\limits_{AB} xdy - ydx = \left| \begin{array}{c} y = x^2, 0 \le x \le 1, \\ dy = y'dx = 2xdx. \\ P(x,y) = -y, Q(x,y) = x \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 (-x^2 + x \cdot 2x)dx = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

10.4.1.2. Обчислити $\int\limits_{ABC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, уздовж ламаної ABC з вершинами $A(1;1), B(3;1)$ та $C(3;5)$.

Розв'язання. [10.7.8.]

[*Зображуємо ламану.*]

Оскільки ламана складається з ланок AB та BC, то

$$\int\limits_{ABC} \overset{[10.7.5]}{=} \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}.$$

[*Знаходимо значення інтеграла вздовж відрізка* AB.]

$$\int\limits_{AB} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy \overset{[10.7.8]}{=} \left| \begin{array}{c} y = 1, x \in [1;3], \\ dy = y'dx = 0. \\ P(x,y) = x^3 + y, \\ Q(x,y) = x + y^3 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^3 (x^3 + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Bigg|_1^3 = 22.$$

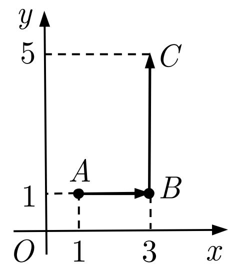


Рис. до 10.4.1.2

[*Знаходимо значення інтеграла вздовж відрізка* BC.]

$$\int\limits_{BC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = \left| \begin{array}{c} x = 3, y \in [1;5], \\ dx = x'dy = 0. \\ P(x,y) = x^3 + y, \\ Q(x,y) = x + y^3 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^5 (3 + y^3)dy = \left(3y + \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_1^5 = 168.$$

[*Знаходимо значення інтеграла вдовж ламаної.*]

$$\int\limits_{ABC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy = 22 + 168 = 190.$$

10.4.1.3. Обчислити $\int\limits_L xydx + zdy + (x^2 + y^2)dz$, де L — дуга циліндричної

гвинтової лінії $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \\ z = bt, \end{cases}$

Розв'язання. [10.7.6.]

[*Зображуємо криву.*]

[*Залежно від способу задання кривої, вибираємо формулу для обчислення криволінійного інтеграла.*]

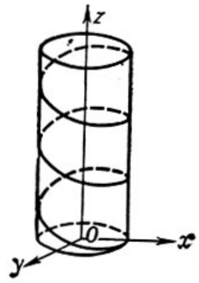


Рис. до 10.4.1.3

$$\left[\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \overset{[10.7.6]}{=}\right.$$

$$= \left|\begin{matrix} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), t_1 \le t \le t_2 \end{matrix}\right| = \int\limits_{t_1}^{t_2} [\tilde{P}(t)x'(t) + \tilde{Q}(t)y'(t) + \tilde{R}(t)z'(t)]dt,$$

де $\tilde{P}(t) = P(x(t), y(t), z(t)), \tilde{Q}(t) = Q(x(t), y(t), z(t)), \tilde{R}(t) = R(x(t), y(t), z(t)).$]

[*Обчислюємо інтеграл, підставляючи рівняння кривої в підінтегральну функцію і знаходячи диференціали змінних.*]

$$\int\limits_L xydx + zdy + (x^2 + y^2)dz =$$

$$= \left|\begin{matrix} x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}, \\ dx = x'dt = -a\sin tdt, dy = y'dt = a\cos tdt, \\ dz = z'dt = bdt. \\ P(x,y,z) = xy, Q(x,y,z) = z, R(x,y,z) = x^2 + y^2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \Big(a\cos t \cdot a\sin t \cdot (-a\sin t) + bt \cdot a\cos t + (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)b\Big)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \Big(-a^3\cos t\sin^2 t + bat\cos t + a^2 b\Big)dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{\pi/2} t\cos tdt + a^2 b\int\limits_0^{\pi/2} dt - a^3\int\limits_0^{\pi/2} \cos t\sin^2 tdt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t & \to & du = dt \\ dv = \cos t dt & \to & v = \sin t \end{matrix} ; \cos t dt = d(\sin t) \right| \overset{[10.4.2]}{=}$$

$$= \left(ab\cos t + abt\sin t + a^2bt - \frac{a^3}{3}\sin^3 t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{a^3}{3} - ab + \frac{\pi}{2}ab + \frac{a^2b\pi}{2}.$$

10.4.2.1. Обчислити інтеграл $\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$, де L — коло $x^2+y^2=R^2$, яке обходиться проти годинникової стрілки, за формулою Остроградського — Ґріна.

Розв'язання. [10.7.7, 10.7.9.]

[*Записуємо формулу Остроградського — Ґріна і перевіряємо умови її застосовності.*]

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

де $P(x,y) = (1-x^2)y, Q(x,y) = x(1+y^2)$.

Оскільки ці функції неперервні і мають неперервні частинні похідні P'_y, Q'_x у замкненій області $\bar{D}$, коло є гладкою кривою, то можна застосовувати формулу Остроградського — Ґріна.

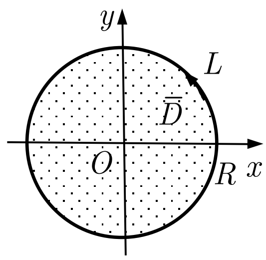


Рис. до 10.4.2.1

[*Зображуємо криву та область, яку вона обмежує.*]

$$\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy \overset{[10.7.9]}{=} \left| \begin{matrix} Q'_x = 1+y^2, \\ P'_y = 1-x^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \iint\limits_D (1+y^2-(1-x^2))dxdy = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy \overset{[10.2.5.2]}{=}$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, & x^2+y^2 = \rho^2, \\ y = \rho\sin\varphi, & |J| = \rho \end{matrix} \right| = \iint\limits_{\tilde{D}} \rho^3 d\varphi d\rho = \left| \begin{matrix} -\pi \le \varphi \le \pi, \\ 0 \le \rho \le R \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2}R^4.$$

10.4.2.2. Обчислити безпосередньо інтеграл $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, де L — коло $x^2+y^2=R^2$, яке обходиться проти годинникової стрілки.

Розв'язання. [10.7.7, 10.7.9.]①

[*Зображуємо криву.*]

[*Обчислюємо інтеграл безпосередньо, параметризуючи криву.*]

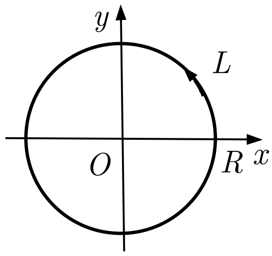


Рис. до 10.4.2.2

$$L:\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \overset{[10.7.7]}{=} \left| \begin{array}{l} x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le 2\pi, \\ dx = x'dt = -R\sin tdt, dy = y'dt = R\cos tdt. \\ P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R\sin t \cdot (-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = 2\pi.$$

Коментар. ① Оскільки функції $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ мають розрив у точці $O(0;0)$, яка лежить усередині круга $x^2+y^2 \le R^2$, то формула Остроградського — Ґріна не застосовна.

10.4.3. Знайти роботу сили $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$ під час переміщення вздовж верхньої половини еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \ge 0)$ від точки $M(a;0)$ до точки $N(-a;0)$.

Розв'язання. [10.7.10.]

Роботу силового поля $\overline{F} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ вздовж кривої L знаходять за формулою

$$A_L(\overline{F}) \overset{[10.7.10]}{=} \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L ydx - xdy.$$

[*Зображуємо криву.*]

Параметризуємо шлях переміщення:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

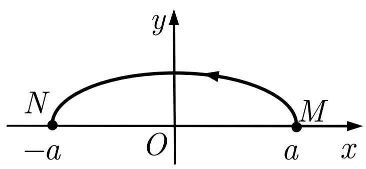


Рис. до 10.4.3

$$\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy \overset{[10.7.7]}{=} \left|\begin{array}{l} x=x(t), y=y(t), t_1\le t\le t_2, \\ dx=x'dt, dy=y'dt, \end{array}\right| = \\ \displaystyle\qquad = \int_{t_1}^{t_2}[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt. \end{array}\right]$$

$$A_L(\bar{F}) = \int_L ydx - xdy \overset{[10.7.7]}{=} \left|\begin{array}{l} x=a\cos t, y=b\sin t, 0\le t\le \pi, \\ dx=-a\sin tdt, dy=b\cos tdt. \\ P(x,y)=y, Q(x,y)=-x \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{\pi}(b\sin t\cdot(-a\sin t)-a\cos t\cdot b\cos t)dt = -ab\int_0^{\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = -\pi ab.$$

10.4.4. Знайти площу фігури, обмежену астроїдою $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi.$

Розв'язання. [10.7.11.]

Площу фігури D, обмежену замкненим контуром L, обчислюють за формулою

$$S(D) \overset{[10.7.12]}{=} \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx =$$

$$= \left|\begin{array}{c} x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi, \\ dx=-3a\cos^2 t\sin tdt, dy=3a\sin^2 t\cos tdt, \\ P=-y, Q=x. \end{array}\right| =$$

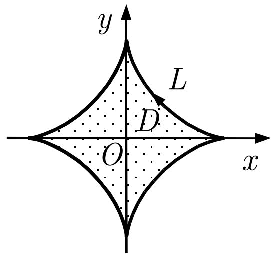


Рис. до 10.4.4

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3a^2\sin^2 t\cos^4 t + 3a^2\sin^4 t\cos^2 t)dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt =$$

$$\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

10.4.5. Перевірити чи є підінтегральний вираз повним диференціалом та обчислити $\displaystyle\int_{(0;0)}^{(1;1)}(x^2-y^2)dx-2xydy.$

Розв'язання. [10.8.1.]

[*Перевіряємо умову того, що підінтегральний вираз є повним диференціалом.*]

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$P(x,y) = x^2 - y^2, Q(x,y) = -2xy.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy).$$

Оскільки підінтегральний вираз є повним диференціалом, то інтеграл не залежить від того, якою лінією сполучено точки $O(0;0)$ і $A(1;1)$.

Обчислюємо інтеграл уздовж прямої $y = x, x \in [0;1]$.

[*Зображуємо лінію.*]

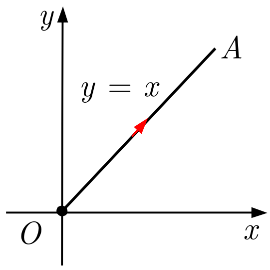


Рис. до 10.4.5

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int\limits_{L:y=x} (x^2 - y^2)dx - 2xydy \overset{[10.7.8]}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = x, x \in [0;1], \\ dy = y'dx = dx \\ P(x,y) = x^2 - y^2, \\ Q(x,y) = -2xy \end{array} \right| = \int\limits_0^1 (0 - 2x^2 \cdot 1)dx = -2\int\limits_0^1 x^2dx = -\frac{2}{3}.$$

10.4.6. Перевірити, що диференціальна форма

$$W = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy$$

є повним диференціалом du функції u й відновити функцію u.

Розв'язання. [10.8.1, 10.8.3.1]

[*Перевіряємо умову*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \overset{[10.8.1]}{=} \frac{\partial Q}{\partial x},$$

того, що форма $W = Pdx + Qdy$ *є повним диференціалом* du.]

$$P(x,y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} + 1.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, форма W є повним диференціалом du функції u.

Функцію $u(x,y)$ відновлюють за формулою

$$u(x,y) \overset{[10.8.3.1]}{=} \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C.$$

Вибираємо за початкову точку $M_0(0;0)$. ①

$$u(x,y) = \int\limits_0^x 0dt + \int\limits_0^y \left(\frac{e^t}{1+x^2} + 1\right)dt + C =$$

$$= \left(\frac{e^t}{1+x^2} + t\right)\Bigg|_0^y + C = \frac{e^y}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + y + C.$$

Коментар. ① Точку $M_0(x_0;y_0)$ можна вибирати довільно, але так, щоб функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ були в ній неперервними.

Запис $P(t,y_0)$ означає, що у функцію $P(x,y)$ підставляють t замість x і y_0 замість y.

Запис $Q(x,t)$ означає, що у функцію $Q(x,y)$ підставляють t замість y, а змінну x залишають без змін і під час інтегрування вважають сталою.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

10.4.7. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L xdy - ydx$, де L — дуга кривої $y = x^3$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(2;8)$;

2) $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + dy$, де L — дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$;

3) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, де L — верхня половина еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ що обходиться проти руху годинникової стрілки;

4) $\oint\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, де L — коло $x^2 + y^2 = a^2$;

5) $\int\limits_L xdx + ydy + (x+y-1)dz$, де L — відрізок AB від точки $A = (1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$;

6) $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, у напрямі збільшення параметра.

10.4.8. Обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_L xdy - ydx$, де L:

а) відрізок AB від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$;

б) дуга параболи $y = 2x^2$, від точки A до точки B;

в) ламана ACB, де $C(1;0)$;

2) $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$, де L: а) відрізок прямої $y = x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$; б) дуга параболи $y = x^2$ від точки A до точки B.

10.4.9. Застосовуючи формулу Остроградського — Ґріна, обчисліть криволінійний інтеграл уздовж кривої L :

1) $\oint\limits_L (2xy - y)dx + x^2dy$, де L — еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) $\oint\limits_L (x + y)^2dx - (x^2 + y^2)dy$, де L — трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(0;1)$;

3) $\oint\limits_L \dfrac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$, де L — коло $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$;

4) $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де L :

а) еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; б) коло $x^2 + y^2 = ax$.

10.4.10. Знайдіть роботу поля $\overline{F}$ під час переміщення точки вздовж дуги кривої L від точки A до точки B, якщо:

1) $\overline{F} = 2xy\overline{i} - y\overline{j}, L : y = x^2 - 1, A(1;0), B(2;3)$;

2) $\overline{F} = 3xy^2\overline{i} - (x + y)\overline{j}, L : y^2 = x + 1, A(0;1), B(3;2)$;

3) $\overline{F} = x^2\overline{i} + xy^2\overline{j}, L = AB, A(0;1), B(1;2)$;

4) $\overline{F} = x^2\overline{i} + \dfrac{1}{y^2}\overline{j}, L : xy = 1, A(1;1), B\left(4;\dfrac{1}{4}\right)$;

5) $\overline{F} = y\overline{i} - 2x\overline{j}, L : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, A(1;0), B(-1;0)$;

6) $\overline{F} = 2x\overline{j}, L: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} A(a;0), B\big(-a;0\big);$

7) $\overline{F} = -y\overline{i} + x\overline{j}, L: \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} A(0;0), B(2\pi a;0);$

8) $\overline{F} = y\overline{i} + x\overline{j}, L: \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} A(a;0), B\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}}; \dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right);$

9) $\overline{F} = (y^2 + z^2)\overline{i} - yz\overline{j} + x\overline{k},\ L: \begin{cases} x = bt, \\ y = a\cos t, \\ z = a\sin t, \end{cases} A(0;a;0), B\left(\dfrac{b\pi}{2}; 0; a\right);$

10) $\overline{F} = -\dfrac{yz}{x}\overline{i} + x\overline{j} + y\overline{k},\ L: \begin{cases} x = t, \\ y = t\cos t, \\ z = t\sin t \end{cases} A(0;0;0), B(2\pi;2\pi;0).$

10.4.11. 1. Знайдіть роботу поля $\overline{F} = (4x - 5y)\overline{i} + (2x + y)\overline{j}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки $A(1;-9)$ до точки $B(3;-3)$, якщо:
а) L — ламана APB, де $P(1;-3)$; б) L — ламана AQB, де $Q(3;-9)$.
2. Знайдіть роботу поля $\overline{F} = y^2\overline{i} + x^2\overline{j}$ під час переміщення вздовж кривої L від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$, якщо:
а) L — ламана OAB, де $A(1;0)$; б) L — ламана OCB, де $C(0;1)$.

10.4.12. Обчисліть площу фігури, обмежену:

1) еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) кардіоїдою $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

10.4.13. Переконайтесь у тому, що підінтегральний вираз є повним диференціалом і обчисліть криволінійний інтеграл:

1) $\displaystyle\int_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx;$ 2) $\displaystyle\int_{(0;0)}^{(1;1)} (x + y)(dx + dy);$

3) $\displaystyle\int_{(0;1)}^{(1;1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy;$

4) $\displaystyle\int_{(\pi;1)}^{(\pi;2)} \left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)dy.$

10.4.14. Перевірте, що диференціальна форма W є повним диференціалом du функції u й відновіть функцію u:

1) $W = (e^{2y} - 5y^3e^x)dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)dy;$

2) $W = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy;$

3) $W = \dfrac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3};$

4) $W = \left(12x^2y + \dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \dfrac{2x}{y^3}\right)dy;$

5) $W = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z};$ 6) $W = \dfrac{dx - 3dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}dz.$

Відповіді

10.4.7. 1) 8; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{4}{3}ab^2$; 4) -2π; 5) 13; 6) $-\pi a^2$.

10.4.8. 1) а) 0; б) $\frac{2}{3}$; в) 2; 2) а) 1; б) 1.

10.4.9. 1) πab; 2) -1; 3) 0; 4) а) 0; б) $-\frac{\pi a^3}{8}$.

10.4.10. 1) 0; 2) $\frac{113}{3}$; 3) $\frac{7}{4}$; 4) 18; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) πab; 7) $-6\pi a^2$; 8) $\frac{a^2}{8}$; 9) $\frac{\pi ab(a+1)}{2} + \frac{a^3}{3} - ab$; 10) π.

10.4.11. 1) а) 22; б) 106; 2) а) 1; б) 1.

10.4.12. 1) πab; 2) $6\pi a^2$.

10.4.13. 1) 8; 2) 2; 3) $\sqrt{2}$; 4) $1 + \pi$.

10.4.14. 1) $u = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$; 2) $u = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$; 3) $u = \dfrac{x - y}{(x + y)^2} + C$; 4) $u = 4x^3y + \dfrac{x}{y^2} + C$; 5) $u = \ln|x + y + z| + C$; 6) $u = \dfrac{x - 3y}{z} + \dfrac{z^2}{2} + C$.

Практикум 10.5. Поверхневі інтеграли 1-го роду

Навчальні задачі

10.5.1. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + 3z^2)d\sigma$ за частиною поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, відтятою площиною $z = 1$.

***Розв'язання.* [10.9.4.]**

[*Зображуємо поверхню.*]

[*З'ясовуємо, на яку площину поверхня проєктується однозначно.*]

Поверхня Ω проєктується на площину Oxy у круг D_{xy}, обмежений колом

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$

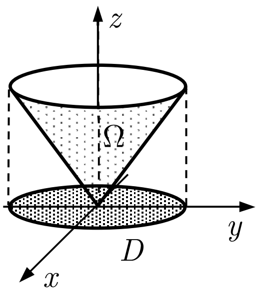


Рис. 1 до 10.5.1

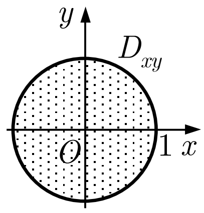


Рис. 2 до 10.5.1

[*Зображуємо проєкцію.*]

$$\left[\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \left|\begin{aligned}&\Omega : z = z(x,y),\\&(x;y)\in D_{xy}\end{aligned}\right| = \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy\end{aligned}\right]$$

[*Обчислюємо інтеграл, підставляючи рівняння поверхні в підінтегральну функцію і знаходячи диференціал площі поверхні.*]

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+3z^2)d\sigma \overset{[10.9.4]}{=} \left|\begin{aligned} &z = \sqrt{x^2+y^2},\\ &z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\\ &d\sigma = \left[\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy\right] = \\ &= \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}dxdy.\end{aligned}\right| =$$

$$= \iint\limits_{D}(x^2+y^2+3(x^2+y^2))\sqrt{2}dxdy = 4\sqrt{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy =$$

$$= 4\sqrt{2}\iint\limits_{\tilde{D}}\rho^3 d\varphi d\rho = 4\sqrt{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho^3 d\rho = 2\sqrt{2}\pi.$$

10.5.2. Знайти площу частини поверхні сфери $\Omega : x^2+y^2+z^2 = 3$, що міститься всередині параболоїда обертання $\Sigma : 2z = x^2+y^2$.

Розв'язання. [10.9.5.]

Площу поверхні Ω знаходять за формулою:

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma.$$

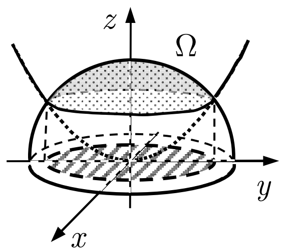


Рис. 1 до 10.5.2

[*Зображуємо поверхню.*]

Частина поверхні сфери, вирізаної параболоїдом, проєктується на площину Oxy у круг, обмежений колом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ 2z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

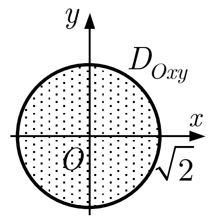


Рис. 2 до 10.5.1

[*Зображуємо проекцію.*]

Верхню півсферу задає рівняння $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\sigma \overset{[10.9.4]}{=} \left| \begin{array}{c} z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}, \\ z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}. \\ d\sigma = \left[\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy\right] = \\ = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{3 - x^2 - y^2} + \dfrac{y^2}{3 - x^2 - y^2}}dxdy = \\ = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}dxdy. \end{array} \right| =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}dxdy \overset{[10.2.5.2]}{=} \left| \begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi, & x^2 + y^2 = \rho^2, \\ y = \rho\sin\varphi, & |J| = \rho \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{3} \iint\limits_{\tilde{D}_{xy}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{3 - \rho^2}} = \left| \begin{array}{l} -\pi \le \varphi \le \pi, \\ 0 \le \rho \le \sqrt{3} \end{array} \right| = \sqrt{3}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{3 - \rho^2}} =$$

$$= -\sqrt{3}\pi \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{d(3 - \rho^2)}{\sqrt{3 - \rho^2}} = -2\sqrt{3}\pi\sqrt{3 - \rho^2}\ \Big|_0^{\sqrt{2}} = (6 - 2\sqrt{3})\pi.$$

10.5.3.1. Знайти масу частини поверхні $\Omega : z^2 = 2x$, відтятою площинами $z = y, z = 2y, z = 1$ з густиною $\mu = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{1 + z^2}}$.

Розв'язання. [10.9.6.]

Масу поверхні Ω з густиною $\mu(x, y, z)$ знаходять за формулою

$$m(\Omega) \overset{[10.9.6]}{=} \iint\limits_{\Omega} \mu(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega} \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + z^2}}d\sigma.$$

[*Зображуємо поверхню.*]

Частина поверхні параболічного циліндра $\Omega : x = \dfrac{1}{2}z^2$ однозначно проектується на площину Oyz в область D_{yz}.

[*Зображуємо проєкцію.*]

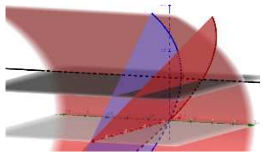


Рис. 1 до 10.5.3.1

$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \frac{\mu_0}{\sqrt{1+x^2}} d\sigma \overset{[10.9.4]}{=}$$

$$= \left| \begin{aligned} & x = \frac{1}{2}z^2, x'_y = 0, x'_z = z. \\ & d\sigma \overset{[10.9.4]}{=} \left[\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}dydz\right] = \sqrt{1+z^2}\,dydz \end{aligned} \right| =$$

$$= \mu_0 \iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z^2}} dydz =$$

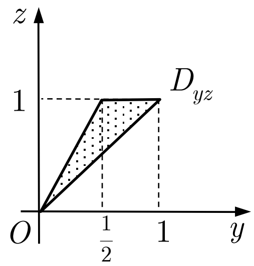


Рис. 2 до 10.5.3.1

$$\mu_0 \iint\limits_{D_{yz}} dydz = \mu_0 S(D_{yz}) = \mu_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\mu_0}{4}.$$

10.5.3.2. Знайти масу частини поверхні гіперболічного параболоїда $\Omega : 2az = x^2 - y^2, a > 0$, що міститься всередині колового циліндра $\Sigma : x^2 + y^2 = a^2$, з густиною $\mu = 15|z|$.

Розв'язання. [10.9.6.]

Масу поверхні Ω з густиною μ знаходять за формулою:

$$m(\Omega) \overset{[10.9.6]}{=} \iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega} 15|z|d\sigma.$$

Частина поверхні Ω, вирізана коловим циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, проєктується на площину Oxy у круг $D_{xy} : x^2 + y^2 \le a^2$.

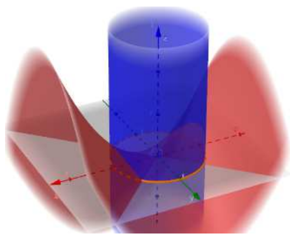


Рис. 1 до 10.5.3.2

[*Зображуємо проєкцію.*]

$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)d\sigma \overset{[10.9.4]}{=}$$

$$= \left| \begin{aligned} & z = \frac{x^2-y^2}{2a}, z'_x = \frac{x}{a}, z'_y = -\frac{y}{a}. \\ & d\sigma = \left[\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy\right] = \\ & = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}dxdy = \frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}dxdy \end{aligned} \right| =$$

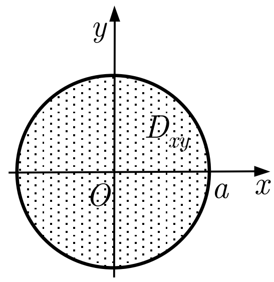


Рис. 2 до 10.5.3.2

$$= \iint\limits_{D_{xy}} 15\left|\frac{x^2-y^2}{2a}\right|\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\,dxdy \overset{[10.2.5.2]}{=} \left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi, & x^2+y^2=\rho^2, \\ y=\rho\sin\varphi, & \left|J\right|=\rho \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{15}{2a^2}\iint\limits_{\tilde{D}}\left|\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right|\sqrt{a^2+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \left|\begin{matrix} -\pi\le\varphi\le\pi, \\ 0\le\rho\le a \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{15}{2a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{a}\rho^2\left|\cos 2\varphi\right|\sqrt{a^2+\rho^2}\cdot\rho\,d\rho \overset{①}{=}$$

$$= \frac{15}{2a^2}\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi\int\limits_{0}^{a}\left(\sqrt{\left(a^2+\rho^2\right)^3}-a^2\sqrt{a^2+\rho^2}\right)d\left(a^2+\rho^2\right) =$$

$$= \frac{15}{a^2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\left(\frac{2}{5}\left(a^2+\rho^2\right)^{5/2}-\frac{2a^2}{3}\left(a^2+\rho^2\right)^{3/2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 30a^3\left(\frac{\left(4\sqrt{2}-1\right)}{5}-\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right) = 4a^3\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Коментар ① $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\cos 2\varphi\right|d\varphi \underset{T=\frac{\pi}{2}}{\overset{[9.9.6]}{=}} 4\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left|\cos 2\varphi\right|d\varphi \overset{[9.9.4]}{=} 8\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi.$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

10.5.4. Обчисліть поверхневий інтеграл:

1) $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)d\sigma$, де Ω — сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$;

2) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma$, де Ω — півсфера $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$;

3) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, де Ω — частина поверхні конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{b^2}$ $(0\le z\le b)$;

4) $\iint\limits_{\Omega}(2z^2-x^2-y^2)d\sigma$, де Ω — частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2=2x$;

5) $\iint\limits_{\Omega}(x+y+z)d\sigma$, де Ω — частина площини $x+2y+4z=4$, що лежить у 1-му октанті;

6) $\iint\limits_{\Omega} xyzd\sigma$, де Ω — частина поверхні параболоїда обертання $2z = x^2 + y^2$, відтята площиною $z = 1$.

10.5.5. Обчисліть площу частини:

1) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 - ax = 0$;

2) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, що міститься всередині конуса $x^2 + y^2 = z^2$;

3) конуса $x^2 = y^2 + z^2$, розташованої в 1-му октанті й відтятою площиною $y + z = a$;

4) конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$;

5) параболоїда обертання $2z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$;

6) параболоїда обертання $2z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$;

7) гіперболічного параболоїда $az = xy$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

8) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що міститься всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

10.5.6. Обчисліть масу:

1) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з густиною $\mu = \mu_0\sqrt{x^2 + y^2}$;

2) частини параболоїда обертання $x^2 + y^2 = 2z$, відтятої площиною $z = 1$, з густиною $\mu = \mu_0 z$;

3) частини конусу $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, відтятої площиною $z = 1$, з густиною $\mu = \mu_0(x^2 + y^2 + z^2)$;

4) частини колового циліндра $z = \sqrt{9 - x^2}, 0 \le y \le 2$, з густиною $\mu = \mu_0 z$.

10.5.7. Знайдіть координати центра мас однорідної поверхні:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$;

2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x \ge 0, y \ge 0,\ x + y \le R$;

3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \le x$.

Відповіді

10.5.4. 1) $\frac{8}{3}\pi a^4$; 2) $2\pi R^4$; 3) $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$; 5) $\frac{7\sqrt{21}}{3}$; 6) 0.

10.5.5. 1) $2a^2(\pi-2)$; 2) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$; 3) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$; 4) $\pi\sqrt{2}$; 5) $\frac{20-3\pi}{9}$; 6) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$;

7) $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$; 8) $2(\pi+4-4\sqrt{2})a^2$.

10.5.6. 1) $\mu_0\pi^2R^3$; 2) $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})\mu_0}{15}$; 3) $\pi\sqrt{2}\mu_0$; 4) $6\pi\mu_0$.

10.5.7. 1) $\left(\frac{R}{2};\frac{R}{2};\frac{R}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}R;\frac{\sqrt{2}}{4}R;\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}R\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2};0;\frac{16}{9\pi}\right)$.

Практикум 10.6. Поверхневі інтеграли 2-го роду

Навчальні задачі

10.6.1. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(2x-z)dydz+3zdxdz+(x+2z)dxdy$, де Ω — верхній бік трикутника $x+4y+z=4, x,y,z\geq 0$.

Розв'язання. [10.10.5.]

[*Зображуємо поверхню.*]

[*З'ясовуємо, на яку координатну площину поверхня однозначно проєктується*).]

Поверхня $\Omega: z=4-x-4y$ однозначно проєктується на площину Oxy у трикутник D_{xy}.

[*Зображуємо проєкцію.*]

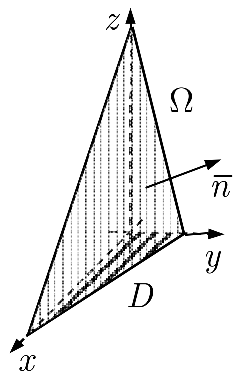


Рис. 1 до 10.6.1

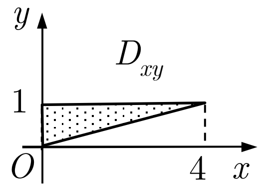


Рис. 2 до 10.6.1.2

$$\iint\limits_{\Omega}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$
$$=\left|\Omega: z=z(x,y),(x;y)\in D_{Oxy}\right|=$$
$$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}[\tilde{P}(x,y)(-z'_x)+\tilde{Q}(x,y)(-z'_y)+\tilde{R}(x,y)]dxdy,$$

де $\tilde{P}(x,y)=P(x,y,z(x,y)),\tilde{Q}(x,y)=Q(x,y,z(x,y)),\tilde{R}(x,y)=Q(x,y,z(x,y))$. *Перед подвійним інтегралом вибираємо знак «плюс», якщо нормаль до* *вказаного боку поверхні утворює гострий кут з віссю Oz, і «мінус», якщо тупий.*]

Нормальний вектор до верхнього боку площини ①

$$\overline{n} = \overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k} \Rightarrow 0 \le (\widehat{\overline{n},\overline{k}}) \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\iint\limits_{\Omega} (2x-z)dydz + 3zdxdz + (x+2z)dxdy = \left| \begin{matrix} z = 4 - x - 4y, \\ z'_x = -1, z'_y = -4 \end{matrix} \right| =$$

$$= +\iint\limits_{D_{xy}} [(2x - (4 - x - 4y)) \cdot 1 + 3(4 - x - 4y) \cdot 4 + (x + 2(4 - x - 4y)]dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (52 - 10x - 52y)dxdy \overset{[10.2.4]}{=} \left| \begin{matrix} y \in [0;1], \\ \text{справа } x = 4 - 4y, \\ \text{зліва } x = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{4-4y} (52 - 10x - 52y)dx = \frac{128}{3}.$$

Коментар. ① У загальному рівнянні площини $Ax + By + Cz + D = 0$ коефіцієнти A, B, C є відповідними координатами нормального вектора.

10.6.2.1. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} (5x^2 + 5y^2 + z^2)dxdy$, де Ω — зовнішній бік частини півсфери $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, вирізаної конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. [10.10.5.]

[*Зображуємо поверхню.*]

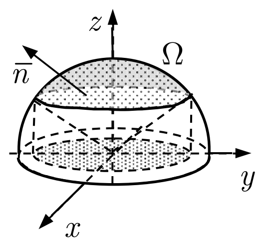


Рис. 1 до 10.6.2.1

Частина поверхні Ω однозначно проєктується в область D_{xy}, обмежену колом

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

[*Зображуємо проєкцію.*]

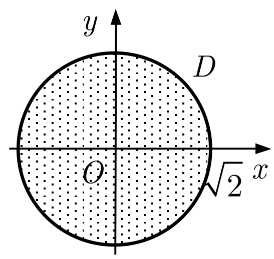


Рис. 2 до 10.6.2.1

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dxdy \overset{[10.10.5]}{=} \left| \begin{matrix} \Omega : z = z(x,y), \\ (x;y) \in D_{xy} \end{matrix} \right| =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

Оскільки на зовнішньому боці поверхні Ω нормаль утворює гострий кут з віссю Oz, то перед інтегралом вибираємо знак «+».

$$\iint\limits_{\Omega}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy \overset{[10.10.5]}{=} +\iint\limits_{D_{xy}}(5x^2+5y^2+(4-x^2-y^2))dxdy =$$

$$= 4\iint\limits_{D_{xy}}(1+x^2+y^2)dxdy \overset{[10.2.5.2]}{=} \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi, & x^2+y^2=\rho^2, \\ y=\rho\sin\varphi, & \left|J\right|=\rho \end{vmatrix} =$$

$$= 4\iint\limits_{\tilde{D}_{xy}}(1+\rho^2)\rho\, d\rho d\varphi = \begin{vmatrix} -\pi\le\varphi\le\pi, \\ 0\le\rho\le\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 4\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}(1+\rho^2)\rho\, d\rho = 4\cdot 2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 16\pi.$$

10.6.2.2. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} z^2dxdy$, де Ω — зовнішній бік півсфери $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$.

Розв'язання. [10.10.5.]

[*Зображуємо поверхню.*]

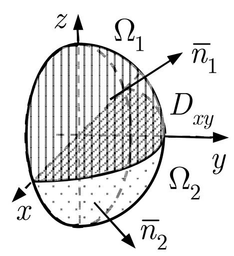


Рис. до 10.6.2.2

Оскільки поверхня Ω проєктується на площину Oxy неоднозначно, то розбиваємо поверхню Ω на частини Ω_1 та Ω_2, розташовані відповідно вище й нижче площини $z=0$.

$$\iint\limits_{\Omega} z^2dxdy \overset{①}{=} \iint\limits_{\Omega_1} z^2dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} z^2dxdy.$$

Поверхні Ω_1 та Ω_2 проєктуються на площину Oxy в одну й ту саму область $D_{xy}: x^2+y^2\le R^2, y\ge 0$. Зовнішня нормаль до Ω_1 утворює з віссю Oz гострий кут, а до Ω_2 — тупий. Отже,

$$\iint\limits_{\Omega_1} z^2dxdy \overset{[10.10.5]}{=} +\iint\limits_{D_{xy}}(R^2-x^2-y^2)dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega_2} z^2dxdy \overset{[10.10.5]}{=} -\iint\limits_{D_{xy}}(R^2-x^2-y^2)dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega} z^2dxdy = 0.$$

Коментар. ① Властивість адитивності поверхневого інтеграла.

10.6.3. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(2x-z)dydz+3zdxdz+(x+2z)dxdy$, де Ω — повна зовнішня поверхня піраміди, обмеженої площинами: $x+4y+z=4$, $x=0, y=0, z=0$ за формулою Остроградського — Ґауса.

Розв'язання. [10.10.7.]

[*Зображуємо поверхню.*]

[*Записуємо формулу Остроградського — Ґауса та перевіряємо умови її застосовності.*]

$$\oiint\limits_{\Omega} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$
$$=\iiint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

де $P(x,y,z)=2x-z, Q(x,y,z)=3z, R(x,y,z)=x+2z.$

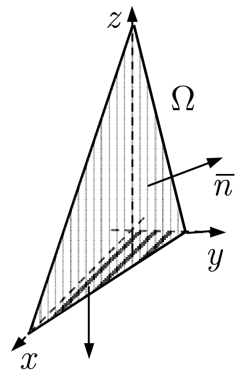


Рис. до 10.6.3

Оскільки ці функції неперервні і мають неперервні частинні похідні P'_x, Q'_y та R'_z у замкненій області G, поверхня Ω кусково-гладка, замкнена й орієнтована зовнішньою нормаллю, то можна застосовувати формулу Остроградського — Ґауса:

$$\oiint\limits_{\Omega}(2x-z)dydz+3zdxdz+(x+2z)dxdy=$$
$$=\left|P'_x=2,\ Q'_y=0,\ R'_z=2\right|=$$
$$=\iiint\limits_{G}(2+0+2)dxdydz=4\iiint\limits_{G}dxdydz=4V(G)=4\cdot\frac{1}{6}\cdot4\cdot1\cdot4=\frac{32}{3}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

10.6.4. Обчисліть:

1) $\iint\limits_{\Omega}(x-2z)dydz+(x+3y+z)dxdz+(5x+y)dxdy$, де Ω — протилежний початку координат бік площини $x+y+z=1$ $(x,y,z>0)$;

2) $\iint\limits_{\Omega}(1-z+y-x)dydz+xdxdz+zdxdy$, де Ω — протилежний початку координат бік площини $x-y+z=1$ $(x,y,z>0)$;

3) $\iint\limits_{\Omega} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, де Ω — зовнішній бік поверхні півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z \geq 0)$;

4) $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydxdz + zdxdy$, де Ω — внутрішній бік сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

5) $\iint\limits_{\Omega} \left(\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9}\right) dxdy$, де Ω — внутрішній бік параболоїда $z = 4 - \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9}$, відтятої площиною $z = 0$.

6) $\iint\limits_{\Omega} ydxdz$, де Ω — верхній бік частини площини $x + y + z = a$, що лежить у 1-му октанті.

10.6.5. Обчисліть:

1) $\iint\limits_{\Omega} yzdydz + zxdxdz + xydxdy$, де Ω — зовнішній бік поверхні тетраедра, обмеженого площинами $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

2) $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydxdz + zdxdy$, де Ω — унутрішній бік поверхні тетраедра, обмеженого площинами $x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$;

3) $\iint\limits_{\Omega} xdydz - ydxdz + zdxdy$, де Ω — зовнішній бік сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

4) $\iint\limits_{\Omega} z^2 dxdy$, де Ω — зовнішній бік сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Відповіді

10.6.4. 1) $\dfrac{5}{3}$; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{\pi R^4}{2}$; 4) $-4\pi R^3$; 5) -96π; 6) $\dfrac{a^3}{6}$.

10.6.5. 1) 0; 2) $-\dfrac{a^3}{6}$; 3) $\dfrac{4}{3}\pi R^3$; 4) 0.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Інтеграл за геометричним об'єктом. **2.** Подвійний інтеграл. **3.** Потрійний інтеграл. **4.** Криволінійний інтеграл 1-го роду.	**5.** Криволінійний інтеграл 2-го роду. **6.** Поверхневий інтеграл 1-го роду. **7.** Поверхневий інтеграл 2-го роду.
Теореми	
1. Необхідна умова існування інтеграла за геометричним об'єктом. **2.** Достатня умова існування інтеграла за геометричним об'єктом. **3.** Властивості інтеграла за геометричним об'єктом. **4.** Теорема про заміну змінних у подвійному інтегралі.	**5.** Теорема про заміну змінних у потрійному інтегралі. **6.** Теорема про еквівалентність 4-х тверджень. **7.** Теорема Остроградського — Ґріна. **8.** Теорема Остроградського — Ґауса. **9.** Теорема Стокса.
Методи	
1. Метод заміни змінної у подвійному та потрійному інтегралах.	
Основні задачі	
Обчислювати: **1)** подвійний інтеграл; **2)** потрійний інтеграл; **3)** криволінійний інтеграл 1-го роду; **4–5)** криволінійний інтеграл 2-го роду безпосередньо і за формулою Остроградського — Ґріна (Стокса); **6)** поверхневий інтеграл 1-го роду; **7–8)** поверхневий інтеграл 2-го роду проєктуванням і за формулою Остроградського — Ґауса.	Виконувати заміну змінних: **9)** у подвійному інтегралі (переходити до полярних та узагальнених полярних координат); **10)** у потрійному інтегралі (переходити до циліндричних, сферичних, узагальнених сферичних координат). Знаходити: **11)** площу плоскої області; **12)** масу пластини; **13)** об'єм тіла; **14)** масу тіла; **15)** довжину кривої; **16)** масу кривої; **17)** роботу змінної сили; **18)** площу поверхні; **19)** масу поверхні.

РОЗДІЛ 11.
ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Поняття поля є центральним поняттям сучасної фізики, механіки, електродинаміки тощо.

У розділі подано математичний апарат для знаходження характеристик скалярних і векторних полів.

Ключові поняття:

— скалярне поле;

— векторне поле;

— оператор Гамільтона (набла).

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— знаходити основні характеристики скалярних полів (похідна за напрямом, градієнт, лінії (поверхні) рівня);

— знаходити основні характеристики векторних полів (дивергенцію, ротор, потік, циркуляцію);

— визначати типи векторних полів;

— записувати диференціальні операції за допомогою оператора Гамільтона.

Попередні знання та вміння з розділів:

— Диференціальне числення функцій кількох змінних;

— Інтегральне числення функцій кількох змінних;

— Векторна алгебра;

— Аналітична геометрія.

11.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ СКАЛЯРНИХ І ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ

Розгляньмо скалярні й векторні поля та їх характеристики.

11.1.1. Скалярні й векторні поля

1. Поле. За допомогою поняття поля описують чимало фізичних явищ.

Полем називають область G простору, у кожній точці якої M і в кожен момент часу t задано скалярну або векторну функцію $f(M,t)$.

Якщо задано скалярну функцію $u(M,t)$, то поле

$$u = u(M,t), M \in G,$$

називають *скалярним*.

Якщо задано векторну функцію $\overline{a}(M,t)$, то поле

$$\overline{a} = \overline{a}(M,t), M \in G,$$

називають *векторним*.

Інакше кажучи, скалярне (векторне) поле це скалярна чи векторна функція разом зі своєю областю означення.

Якщо функція не залежить від часу, то поле називають *стаціонарним*. Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Якщо $G \subset \mathbb{R}^2$, то поле називають *пласким*.

Прикладами скалярних полів є: поле температур, атмосферного тиску, електричного потенціалу тощо.

Прикладами векторних полів є силове поле, поле швидкостей часток рідини, магнітне поле.

2. Поверхні (лінії рівня). Нехай в області $G \subset \mathbb{R}^3$ задано скалярне поле

$$u = f(M) = f(x,y,z),\ M(x;y;z) \in G.$$

Графічно скалярне поле зображують за допомогою *поверхонь рівня* (*еквіпотенціальних поверхонь*), у кожній точці яких значення поля (його потенціалу) стале, тобто ці поверхні мають рівняння

$$\boxed{f(x,y,z) = C.}$$

Пласке поле $u = f(x,y)$, зображують за допомогою *ліній рівня*, що мають рівняння

$$\boxed{f(x,y) = C.}$$

3. Прикладом поверхонь рівня є еквіпотенціальні поверхні в електростатичному полі, а ліній рівня — лінії однакової висоти на топографічних картах.

Поверхні рівня, які відповідають різним сталим C, заповнюють усю область, у якій означене поле, і жодні дві поверхні рівня, які відповідають різним значенням C, не мають спільних точок.

Приміром, якщо поле задане функцією $u = x^2 + y^2 + z^2$, то поверхнями рівня будуть сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = C, C \geq 0.$$

4. Силові лінії векторного поля. Нехай в області $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторне поле

$$\overline{a} = \overline{a}(M) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},\ \ M \in G.$$

Силовою лінією поля $\overline{a}$ називають криву, у кожній точці якої напрям дотичного вектора збігається з напрямом поля $\overline{a}$ (рис. 11.1).

Приклади силових ліній: лінії течії рідини, силові лінії магнітного поля.

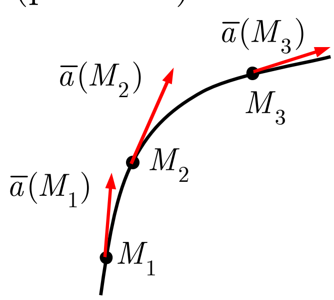


Рис. 11.1. Силові лінії

Складімо рівняння силових ліній поля $\overline{a}$.

Якщо

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},$$

то вектор

$$\overline{r}'(t) = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k}$$

напрямлений уздовж дотичної до неї. Тоді й вектор

$$d\overline{r} = \overline{r}'(t)dt = \begin{pmatrix} x'(t)dt \\ y'(t)dt \\ z'(t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

також напрямлений уздовж дотичної до векторної лінії. Звідси, за означенням силової лінії, вектори

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} \text{ і } d\overline{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

колінеарні, а отже, їхні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}}.$$

Це є системою диференціальних рівнянь силових ліній.

Просторові області, утворені з векторних ліній, називають *векторними трубками* (рис. 11.2). У кожній точці M поверхні векторної трубки вектор $\overline{a}(M)$ лежить у дотичній площині до поверхні.

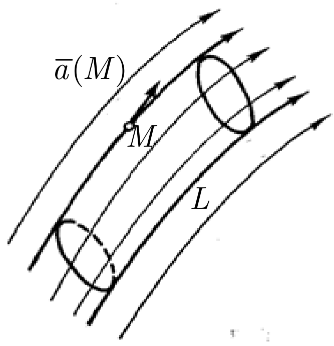


Рис. 11.2. Векторні трубки

11.1.2. Похідна за напрямом і градієнт скалярного поля

1. Нехай $u = f(x,y,z)$ — диференційовна функція. Нагадаємо (п. 8.4.1), що *похідну скалярного поля* за напрямом вектора $\overline{l}$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ можна знайти за формулою

$$\boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma,}$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — напрямні косинуси вектора $\overline{l}$.

Похідна скалярного поля в точці M_0 за напрямом вектора $\overline{l}$ характеризує швидкість змінювання поля в напрямі l.

2. *Інваріантами* об'єкта називають величини, що характеризують властивості об'єкта і не залежать від вибору системи координат. Ураховуючи властивості й геометричний зміст градієнта, можна сформулювати *інваріантне* означення градієнта.

Означення 11.1 (градієнта функції в точці).

Градієнтом скалярного поля $u = f(M), M \in G$, у точці M_0 називають вектор, напрямлений уздовж нормалі до поверхні (лінії) рівня в бік зростання функції поля, довжина якого дорівнює найбільшій похідній скалярного поля за напрямом у заданій точці.

Градієнт диференційовного скалярного поля $u = f(x,y,z)$ у точці M_0 можна знайти за формулою

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}.$$

Отже, правдива формула зв'язку похідної за напрямом і градієнта

$$\boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (\operatorname{grad} u(M_0), \overline{l}^{\,0}) = \operatorname{pr}_{\overline{l}^{\,0}} \operatorname{grad} u,}$$

і

$$\max \frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right|.$$

3. Правдиві такі **правила обчислення градієнта**:

1) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$;

2) $\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u, C = \text{const}$;

3) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;

4) $\operatorname{grad} \dfrac{u}{v} = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$;

5) $\operatorname{grad} f(u) = f'_u \operatorname{grad} u$.

11.1.3. Потік і дивергенція векторного поля

1. Розгляньмо випадок поля швидкостей $\overline{v}$ течії рідини. Нехай Ω — деяка поверхня. *Потоком рідини* через поверхню Ω називають кількість рідини, що протікає через поверхню Ω за одиницю часу.

Якщо швидкість течії стала $\overline{v} = \text{const}$, а поверхня Ω пласка, то потік Φ рідини дорівнює об'єму циліндричного тіла з паралельними основами і твірними завдовжки $\left|\overline{v}\right|$ (рис. 11.3). Отже,

$$\Phi = V_{\text{ц}} = Sh,$$

де S — площа основи, $h = \operatorname{pr}_{\overline{n}} \overline{v} = (\overline{v}, \overline{n}^0)$ — висота циліндра, $\overline{n}^0$ — орт вектора нормалі основи циліндра.

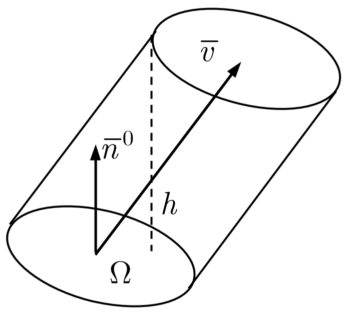


Рис. 11.3. Потік рідини через плоску поверхню

Отже, за сталої швидкості $\overline{v}$ потік рідини через пласку поверхню Ω дорівнює

$$\Phi = (\overline{v}, \overline{n}^0)S.$$

2. Нехай тепер швидкість $\overline{v}$ змінюється неперервно, а поверхня Ω — гладка.

Розбиваємо довільним чином поверхню Ω кусково-гладкими кривими на ділянки Ω_i, $i=\overline{1,n}$, кожну з яких наближено вважаємо пласкою, а вектор $\overline{v}$ на ній сталим (рис. 11.4). Оскільки потік рідини через поверхню Ω дорівнює сумі потоків через усі її частини Ω_i, то для обчислення потоку одержуємо наближену формулу

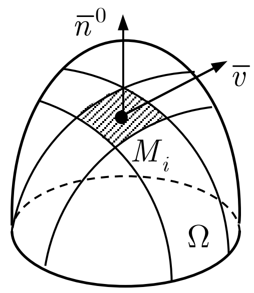


Рис. 11.4. Потік рідини через гладку поверхню

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\overline{v}, \overline{n}^0)\Big|_{M_i} \Delta\sigma_i,$$

де M_i — довільна точка на поверхні Ω_i, $\Delta\sigma_i$ — площа ділянки $\Omega_i, d_i = d(\Omega_i)$ — діаметр ділянки Ω_i.

Спрямовуючи найбільший діаметр ділянки до нуля, дістаємо формулу для потоку рідини через вибраний бік поверхні Ω:

$$\Phi_\Omega(\overline{v}) = \lim_{\substack{\max d_i \to 0, \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{v}, \overline{n}^0)\Big|_{M_i} \Delta\sigma_i = \iint\limits_{\Omega} (\overline{v}, \overline{n}^0) d\sigma.$$

3. Означимо потік векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M), M \in G$, через вибраний бік гладкої поверхні Ω, незалежно від фізичного змісту вектора $\overline{a}$.

Означення 11.2 (потоку векторного поля).

Потоком векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M), M \in G$, через поверхню Ω називають поверхневий інтеграл 2-го роду від векторного поля $\overline{a}$ за поверхнею Ω і позначають

$$\Phi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}(M), \overline{n}^0) d\sigma.$$

Формулу для обчислення потоку векторного поля

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$$

можна записати також і в координатній формі

$$\boxed{\Phi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.}$$

4. Потік векторного поля має такі **властивості** (рис. 11.5):

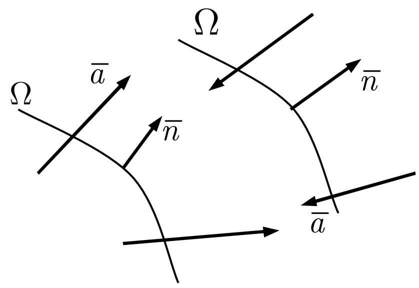


Рис. 11.5. Потік векторного поля

1) якщо $(\widehat{\overline{a},\overline{n}^0}) < \dfrac{\pi}{2}$, то $\Phi > 0$ (потік вектора $\overline{a}$ йде з унутрішнього на зовнішній бік поверхні Ω);

2) якщо $(\widehat{\overline{a},\overline{n}^0}) > \dfrac{\pi}{2}$, то $\Phi < 0$ (потік вектора $\overline{a}$ йде із зовнішнього на внутрішній бік поверхні Ω);

3) від зміни орієнтації поверхні потік Φ змінює знак на протилежний;

Для замкненої поверхні Ω:

4) якщо $\Phi = 0$, це означає що з тіла G, яке обмежене поверхнею Ω, витікає стільки ж рідини, скільки й утікає в нього;

5) якщо $\Phi > 0$, то рідини витікає більше, ніж утікає. Це означає, що всередині тіла G є *джерело* — місце, де з'являється рідина;

6) якщо $\Phi < 0$, то рідини витікає з тіла менше, ніж утікає. Це означає, що всередині тіла G є *стік* — місце, де зникає рідина.

5. Дивергенція векторного поля. Поняття про потік векторного поля через замкнену поверхню приводить до поняття *дивергенції*, яке дає кількісну характеристику джерел та стоків у кожній точці поля.

Розгляньмо векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ і виділімо в ньому тіло G об'ємом V, обмежене замкненою поверхнею Ω. Відношення потоку вектора $\overline{a}$ через поверхню Ω до об'єму V

$$\frac{\Phi_\Omega(\overline{a})}{V} = \frac{\iint\limits_\Omega (\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma}{V}$$

характеризує середню густину джерел або стоків у одиниці об'єму.

Означення 11.3 (дивергенції векторного поля).

Дивергенцією вектора $\overline{a}$ в точці M називають границю середньої густини джерел або стоків, коли тіло G стягується в точку M і позначають

$$\operatorname{div}\overline{a}(M) = \lim_{G\to M}\frac{\iint\limits_\Omega (\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma}{V}.$$

Можна довести, що означення дивергенції не залежить від вибору системи координат, тому його називають **інваріантним** означенням дивергенції.

У ПДСК $Oxyz$ дивергенцію гладкого векторного поля

$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$$

знаходять за формулою

$$\boxed{\operatorname{div}\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

6. **Дивергенція векторного поля** має такі **властивості**:

1) якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) > 0$, то в точці M є джерела;

2) якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) < 0$, то в точці M є стоки;

3) якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) = 0$, то в точці M немає ані джерел, ані стоків.

7. Правдиві такі **правила обчислення дивергенції**:

1) $\operatorname{div}(\overline{a} + \overline{b}) = \operatorname{div}\overline{a} + \operatorname{div}\overline{b}$;

2) $\operatorname{div}\overline{c} = 0, \overline{c} = \overline{\text{const}}$;

3) $\operatorname{div}(\varphi\overline{a}) = \varphi\operatorname{div}\overline{a} + (\overline{a}, \operatorname{grad}\varphi), \varphi = \varphi(x,y,z)$;

4) $\operatorname{div}(\varphi\overline{c}) = (\overline{c}, \operatorname{grad}\varphi)$, де $\overline{c} = \overline{\text{const}}$.

8. Використовуючи формулу обчислення дивергенції, можна записати *формулу Остроградського — Ґауса у векторній формі*

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma = \iiint_{G} \operatorname{div}\overline{a}dV,}$$

де виконано всі умови теореми 10.6.

Отже, потік векторного поля через зовнішній бік замкненої поверхні дорівнює потрійному інтегралу за областю, обмеженою цієї поверхнею, від дивергенції векторного поля.

9. Приміром, обчислімо потоки векторних полів $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$ та $\overline{b} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через зовнішній бік сфери $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Умови теореми Остроградського — Ґауса виконано. Отже,

$$\operatorname{div}\overline{a} = 0+0+0 = 0;$$
$$\operatorname{div}\overline{b} = 1+1+1 = 3.$$
$$\Phi_{\Omega}(\overline{a}) = \oiint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma = \iiint\limits_{G}\operatorname{div}\overline{a}dV = \iiint\limits_{G} 0dV = 0;$$
$$\Phi_{\Omega}(\overline{a}) = \oiint\limits_{\Omega}(\overline{b},\overline{n}^0)d\sigma = \iiint\limits_{G}\operatorname{div}\overline{b}dV = \iiint\limits_{G} 3dV =$$
$$= 3V(G) = 3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3.$$

11.1.4. Циркуляція і ротор векторного поля

1. Нехай у деякій області $G \subset \mathbb{R}^3$ задано неперервне векторне поле
$$\overline{a} = \overline{a}(M), M \in G,$$
і замкнений кусково-гладкий орієнтований контур L.

Означення 11.4 (циркуляції векторного поля).

Циркуляцією векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$, уздовж замкненої кривої L, називають криволінійний інтеграл 2-го роду від векторного поля $\overline{a}$ за кривою L і позначають
$$C_L(\overline{a}) = \oint\limits_L(\overline{a}, d\overline{r}).$$

Формулу для обчислення циркуляції векторного поля
$$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$$
можна записати також і в координатній формі
$$\boxed{C_L(\overline{a}) = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.}$$

Якщо векторне поле $\overline{a}$ є силовим, то циркуляція виражає роботу цієї сили за замкненим контуром L.

2. З'ясуймо фізичний зміст циркуляції, розглядаючи, зокрема, векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ як поле $\overline{v} = \overline{v}(M)$ лінійних швидкостей рухомої рідини.

Поміщаємо в потік рідини коліщатко з лопатями, розташованими по його ободу — колу L (рис. 11.6). Частинки рідини, діючи на лопаті, утворюють обертові моменти, сумарна дія яких може обертати коліщатко навколо осі $\overline{N}$, перпендикулярної до площини коліщатка, і яка проходить через його центр.

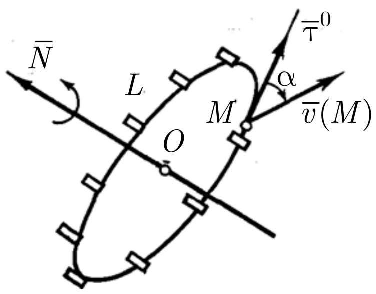


Рис. 11.6. Фізичний зміст циркуляції

Обертовий момент поля в кожній точці M характеризує проєкція вектора $\overline{v}(M)$ на вектор $\overline{\tau}^0(M)$ дотичний до кола L:

$$\operatorname{pr}_{\overline{\tau}^0}\overline{v}(M)=(\overline{v}(M),\overline{\tau}^0).$$

Підсумовуючи обертові моменти за всім контуром, приходимо до поняття циркуляції.

3. Ротор векторного поля. Нехай Ω — орієнтована пласка ділянка з вектором нормалі $\overline{n}^0$, а L — її край з указаним напрямом обходу. Відношення циркуляції вектора $\overline{a}$ до площі S ділянки

$$\frac{C_L(\overline{a})}{S}=\frac{\oint\limits_L(\overline{a},d\overline{r})}{S}$$

характеризує середню густину циркуляції в одиниці площі.

Густиною циркуляції векторного поля $\overline{a}$ в точці M у напрямі вектора $\overline{n}^0$ називають границю середньої густини циркуляції

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\oint\limits_L(\overline{a},d\overline{r})}{S},$$

де ділянка Ω стягується в точку $M\in\Omega$.

Означення 11.5 (ротора векторного поля).

Ротором векторного поля $\overline{a}$ називають вектор, який позначають $\operatorname{rot}\overline{a}$, проєкція якого на напрям нормалі $\overline{n}^0$ до ділянки Ω дорівнює густині циркуляції вектора $\overline{a}$ в заданій точці M у напрямі вектора $\overline{n}^0$:

$$(\operatorname{rot}\overline{a},\overline{n}^0)\,|_M=\operatorname{pr}_{\overline{n}^0}\operatorname{rot}\overline{a}(M)=\lim_{\Omega\to M}\frac{\oint\limits_L(\overline{a},d\overline{r})}{S}.$$

З означення випливає, що найбільша густина циркуляції векторного поля $\overline{a}(M)$ в точці досягається в напрямі ротора $\operatorname{rot}\overline{a}(M)$ і дорівнює $\left|\operatorname{rot}\overline{a}(M)\right|$.

У ПДСК $Oxyz$ ротор гладкого векторного поля

$$\overline{a}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$$

знаходять за формулою

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}.$$

4. З'ясуймо фізичний зміст ротора на прикладі поля швидкостей точки, що обертається навколо деякої осі. З механіки відомо, що лінійна швидкість $\overline{v}$ пов'язана з кутовою швидкістю $\overline{\omega}$ як

$$\overline{v} = [\overline{\omega}, \overline{r}],$$

де $\overline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \overline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ — радіус-вектор точки M.

Маємо

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overline{i}(z\omega_y - y\omega_z) - \overline{j}(z\omega_x - x\omega_z) + \overline{k}(y\omega_x - x\omega_y).$$

Звідси

$$\operatorname{rot}\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} = 2\omega_x\overline{i} + 2\omega_y\overline{j} + 2\omega_z\overline{k} = 2\overline{\omega}.$$

Тобто ротор швидкості $\overline{v}$ точки, що обертається навколо осі відмінний від нульового і дорівнює подвоєній кутовій швидкості обертання $\overline{\omega}$.

Отже, відмінний від нульового вектор $\operatorname{rot}\overline{a}$ характеризує обертання векторного поля $\overline{a}$.

5. Правдиві такі **правила обчислення ротора**:

1) $\operatorname{rot}(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) = \alpha\operatorname{rot}\overline{a} + \beta\operatorname{rot}\overline{b}$, де $\alpha, \beta = \text{const}$;

2) $\operatorname{rot}\overline{c} = \overline{0}$, де $\overline{c} = \overline{\text{const}}$;

3) $\operatorname{rot}(\varphi\overline{a}) = \varphi\operatorname{rot}\overline{a} + [\operatorname{grad}\varphi, \overline{a}], \varphi = \varphi(x, y, z)$.

6. Використовуючи формулу знаходження ротора, можна записати *формулу Стокса у векторній формі*

$$\boxed{\oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_\Omega (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma,}$$

де виконано всі умови теореми 10.7.

Отже, циркуляція векторного поля вздовж замкненого контуру дорівнює потоку ротора цього поля через відповідний бік поверхні, напнутої на контур.

7. Приміром, обчислімо циркуляцію векторних полів

$$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},\ \overline{b} = -2y\overline{i} + x\overline{j} - (z^2 + 1)\overline{k}$$

уздовж контуру L, утвореного перетином поверхонь $x^2 + y^2 = z$ та $z = 9$, який обходиться проти годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця вектора $\overline{k}$.

Виконано всі умови теореми Стокса. Отже,

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overline{i}(0-0) - \overline{j}(0-0) + \overline{k}(0-0) = \overline{0};$$

$$\operatorname{rot}\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2y & x & -(z^2+1) \end{vmatrix} = \overline{i}\left(0-0\right) - \overline{j}\left(0-0\right) + \overline{k}\left(1+2\right) = 3\overline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Контур L є колом, утвореним перетином параболоїда $z = x^2 + y^2$ і площини $z = 9$ (рис. 11.7). За поверхню, напнуту на контур L, вибираємо частину площини $z = 9$, що міститься всередині контуру L й орієнтовану в напрямі вектора

$$\overline{n}^0 = \overline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

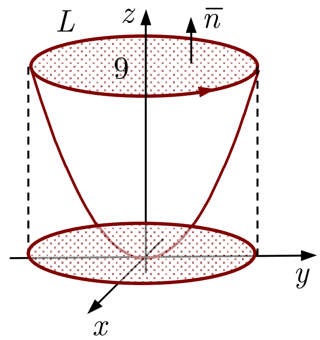


Рис. 11.7. Циркуляція векторного поля

$$(\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0) = 0;\ (\operatorname{rot}\overline{b}, \overline{n}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Тоді

$$C_\Omega(\overline{a}) = \oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_\Omega (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = \iint\limits_\Omega 0 dxdy = 0;$$

$$C_\Omega(\overline{b}) = \oint\limits_L (\overline{b}, d\overline{r}) = \iint\limits_\Omega (\operatorname{rot}\overline{b}, \overline{n}^0) d\sigma = 3\iint\limits_\Omega d\sigma = 3 \cdot S(\Omega) = 3 \cdot 9\pi = 27\pi.$$

11.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ПОЛЯМИ

За допомогою оператора Гамільтона можна символічно записати диференціальні операції 1-го та 2-го порядку над полями.

11.2.1. Оператор Гамільтона

1. Операції знаходження $\operatorname{grad} u$ для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ і $\operatorname{div}\overline{a}$ та $\operatorname{rot}\overline{a}$ для векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$ називають *диференціальними операціями 1-го порядку*.

2. Ці операції можна записати компактніше, застосовуючи символічний оператор «набла»

$$\nabla = \overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

який називають *оператором Гамільтона*.

3. Якщо $u = u(x, y, z)$ — скалярна диференційовна функція, то за правилом множення вектора на скаляр дістаємо

$$\nabla u = \left(\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k} = \operatorname{grad} u.$$

Отже,

$$\boxed{\nabla u = \operatorname{grad} u.}$$

4. Якщо

$$\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k},$$

— векторна диференційовна функція, то за формулою для знаходження скалярного добутку дістаємо

$$(\nabla, \overline{a}) = \left(\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\overline{a}.$$

Отже,

$$\boxed{(\nabla,\overline{a}) = \operatorname{div}\overline{a}.}$$

5. Обчислюючи векторний добуток $[\nabla,\overline{a}]$, дістаємо

$$\left[\nabla,\overline{a}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\overline{a}.$$

Отже,

$$\boxed{[\nabla,\overline{a}] = \operatorname{rot}\overline{a}.}$$

6. Для сталої функції $u = c$ дістаємо

$$\boxed{\nabla c = 0,}$$

а для сталого вектора $\overline{c}$ маємо

$$\boxed{(\nabla,\overline{c}) = 0,\ [\nabla,\overline{c}] = \overline{0}.}$$

7. Сформулюймо деякі правила дії з оператором ∇:

1) оператор ∇ діє на всі величини, написані за ним. У цьому розумінні, приміром$(\nabla,\overline{a}) \neq (\overline{a},\nabla)$, оскільки

$$(\nabla,\overline{a}) = \operatorname{div}\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

$$(\overline{a},\nabla) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z};$$

2) застосовуючи оператор ∇ до добутку яких-небудь величин, використовують правило диференціювання добутку;

3) щоб відзначити той факт, що «набла» не діє на величину, що входить у склад складної формули, цю величину відмічають індексом c (const), який у підсумку випускають;

4) використовуючи формалізм дій з оператором ∇ як з вектором, треба пам'ятати, що ∇ не є звичайним вектором — він не має ані довжини, ані напрямку, так що, приміром, вектор $[\nabla,\overline{a}]$ не буде, узагалі кажучи, перпендикулярним до вектора $\overline{a}$.

8. Приміром, нехай $u = u(x,y,z)$ — скалярна диференційовна функція, $\overline{a} = \overline{a}(x,y,z)$ — векторна диференційовна функція. Доведімо, що

$$\operatorname{div}(u\overline{a}) = u\operatorname{div}\overline{a} + (\overline{a},\operatorname{grad}u).$$

Доведення.

$$\operatorname{div}(u\overline{a}) = (\nabla,u\overline{a}) = (\nabla,u_c\overline{a}) + (\nabla,u\overline{a}_c) =$$
$$= u_c(\nabla,\overline{a}) + (\nabla u,\overline{a}_c) = u\operatorname{div}\overline{a} + (\overline{a},\operatorname{grad}u).\ \blacksquare$$

11.2.2. Диференціальні операції 2-го порядку

Диференціальні операції 2-го порядку є результатом дворазового застосування оператора ∇ до скалярного поля $u = u(M), M \in G$, чи до векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}, M \in G$.

Припускаємо, що функції u, P, Q та R достатню кількість разів неперервно диференційовні.

1. У скалярному полі $u = u(M), M \in G$, оператор ∇ породжує векторне поле

$$\nabla u = \operatorname{grad} u.$$

Застосовуючи до цього поля знову оператор ∇, дістаємо:

а) скалярне поле

$$\boxed{(\nabla, \nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u;}$$

б) векторне поле

$$\boxed{[\nabla, \nabla u] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u.}$$

2. У векторному полі $\overline{a} = \overline{a}(M), M \in G$, оператор ∇ породжує скалярне поле

$$(\nabla, \overline{a}) = \operatorname{div} \overline{a}.$$

У скалярному полі $\operatorname{div} \overline{a}$ оператор ∇ породжує векторне поле

$$\boxed{\nabla(\nabla, \overline{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{a}.}$$

3. У векторному полі $\overline{a} = \overline{a}(M), M \in G$, оператор ∇ породжує векторне поле

$$[\nabla, \overline{a}] = \operatorname{rot} \overline{a}.$$

Застосовуючи до цього поля знову оператор ∇, дістаємо:

а) скалярне поле

$$\boxed{(\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \overline{a};}$$

б) векторне поле

$$\boxed{[\nabla, [\nabla, \overline{a}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \overline{a}.}$$

4. Виберімо у просторі ПДСК $Oxyz$ і розгляньмо кожну операцію 2-го порядку детальніше.

А. Маємо

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \left(\overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k} \right) =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Символ

$$\boxed{\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

називають *оператором Лапласа* або *лапласіаном*. Його можна записати як скалярний добуток оператора Гамільтона ∇ на самого себе

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2.$$

Рівняння

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

називають *рівнянням Лапласа*.

Функцію $u = u(x, y, z)$, яка справджує рівняння Лапласа називають *гармонічною*.

Б. Маємо

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla]u = \overline{0},$$

оскільки $[\nabla, \nabla] = \overline{0}$, як векторний добуток двох однакових «векторів».

Отже,

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{grad} u \equiv \overline{0}.}$$

В. Маємо

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a} = \nabla(\nabla, \overline{a}) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\overline{j} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\overline{k} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\overline{i} +$$
$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\overline{k}.$$

Г. Маємо

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} = (\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = (\overline{a}, [\nabla, \nabla]) = 0,$$

оскільки $[\nabla, \nabla] = 0$ як векторний добуток двох однакових «векторів».

Отже,

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} \equiv 0.}$$

Ґ. Можна показати, що

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a} - \Delta\overline{a},}$$

де для вектора $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ вираз $\Delta\overline{a}$ треба розуміти як

$$\Delta\overline{a} = \Delta P\overline{i} + \Delta Q\overline{j} + \Delta R\overline{k}.$$

Зведімо всі можливі диференціальні операції 2-го порядку до табл. 11.1 (першим вибирається рядок; порожні клітинки таблиці означають неможливі операції).

Таблиця 11.1

	Скалярне поле $u(x,y,z)$	Векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$	
	grad	div	rot
grad		$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a}$	
div	$\operatorname{div}\operatorname{grad}u = \Delta u$		$\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a} = 0$
rot	$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u = \overline{0}$		$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a}$

11.3. ОСНОВНІ КЛАСИ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ

Розгляньмо основні класи векторних полів та їх властивості.

11.3.1. Соленоїдальне поле

1. Означення 11.6 (соленоїдального поля).

Векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ називають *соленоїдальним* в області G, якщо в будь-якій точці $M \in G$ виконано умову

$$\operatorname{div}\overline{a}(M) = 0.$$

Приклади соленоїдальних полів: поле швидкостей твердого тіла, що обертається навколо деякої осі; магнітне поле, створене прямолінійним провідником, уздовж якого тече електричний струм.

Будь-яке соленоїдальне поле не має в замкненій області ні джерел, ні стоків.

2. Соленоїдальне поле має такі **властивості**:

1) потік векторного поля $\overline{a}(M)$ через будь-яку замкнену поверхню Ω дорівнює нулю:

$$\Phi_{\Omega}(\overline{a}) = \oiint\limits_{\Omega}(\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma = 0;$$

2) (*принцип збереження інтенсивності векторної трубки*). У соленоїдальному полі потік вектора $\overline{a}$ через довільний переріз векторної трубки зберігає стале значення, яке називають *інтенсивністю трубки*;

3) силові лінії не можуть ані починатись, ані закінчуватись усередині поля. Вони або замкнені, або починаються і закінчуються на межі поля, або мають нескінченні гілки (у разі необмеженого поля);

4) в однозв'язній області потік вектора $\overline{a}(M)$ через будь-яку поверхню Ω, що напинається на замкнений контур L, не залежить від вигляду цієї поверхні, а лише від самого контуру L.

11.3.2. Потенціальне поле

1. Означення 11.7 (потенціального поля).

Векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ називають *потенціальним* в області G, якщо в будь-якій точці $M \in G$ виконано умову

$$\operatorname{rot} \overline{a}(M) = \overline{0}.$$

Приклади потенціальних полів: магнітне поле, створене рухомим прямолінійним провідником, гравітаційне поле, електричне поле напруженості точкового заряду тощо.

2. Потенціал потенціального поля. Гладке векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ є потенціальним в однозв'язній області G тоді й лише тоді, коли існує двічі неперервно диференційовна скалярна функція $u = u(x, y, z)$ така, що

$$\overline{a} = \operatorname{grad} u.$$

Функцію $u = u(x, y, z)$ називають *потенціальною функцією* або *потенціалом* потенціального векторного поля $\overline{a}$.

Співвідношення $\overline{a} = \operatorname{grad} u$ рівносильно трьом скалярним рівностям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Потенціал поля визначається неоднозначно, з точністю до довільного доданку. Справді, якщо u — потенціал поля, то

$$\overline{a} = \operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(u + C),$$

де C — довільна стала. Тобто $u + C$ — також потенціал поля $\overline{a}$.

3. **Потенціальне поле** має такі **властивості**:

1) циркуляція векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$ за будь-яким замкненим контуром L дорівнює нулю:

$$C_L(\overline{a}) = \oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = 0;$$

2) криволінійний інтеграл у векторному полі $\overline{a} = \overline{a}(M)$ не залежить від шляху інтегрування, а тільки від початкової і кінцевої точок:

$$\int\limits_{L_1 = AB} (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{L_2 = AB} (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{AB} (\overline{a}, d\overline{r});$$

3) у потенціальному полі $\overline{a} = \overline{a}(M)$ робота $A_{M_1M_2}(\overline{a})$ під час переміщення матеріальної точки з точки M_1 у точку M_2 дорівнює різниці потенціалів

$$\boxed{A = \int\limits_{M_1M_2} (\overline{a}, d\overline{r}) = u(M_2) - u(M_1).}$$

4. Можна показати, що задача знаходження потенціалу $u = u(M)$ потенціального векторного поля

$$\overline{a} = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$$

є задачею відновлення функції за її повним диференціалом

$$du = P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz\,.$$

Отже, потенціал знаходять за формулою

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C,$$

де точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — довільна.

11.3.3. Гармонічне поле

1. Означення 11.8 (гармонічного векторного поля).

Векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ називають *гармонічним* в області G, якщо воно є соленоїдальним і потенціальним одночасно, тобто для будь-якої точки $M \in G$ виконано умови:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \overline{a}(M) = 0, \\ \operatorname{rot} \overline{a}(M) = \overline{0}. \end{cases}$$

Прикладами гармонічних полів є: електричне поле точкового заряду; поле лінійних швидкостей стаціонарного безвихрового потоку рідини за відсутності в ньому джерел і стоків.

2. Оскільки поле $\overline{a}$ потенціальне, то його можна записати як

$$\overline{a} = \operatorname{grad} u\,,$$

де $u = u(x, y, z)$ — потенціал поля. Векторне поле соленоїдальне, тому

$$\operatorname{div} \overline{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0,$$

тобто

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.}$$

Отже, потенціал $u(x, y, z)$ гармонічного поля $\overline{a}$ є розв'язком диференціального рівняння Лапласа —гармонічною функцією.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

11.1.1. Чи можуть різні скалярні поля мати один і той самий набір поверхонь рівня?

11.1.2. Чи правильно, що якщо поверхні рівня у скалярних полів $u(x,y,z)$ та $v(x,y,z)$ однакові, то ці поля справджують умову $u(x,y,z)-v(x,y,z)=C$?

11.1.3. Чи може в різних векторних полів бути один і той самий набір векторних ліній?

11.1.4. Знайдіть похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ за напрямом градієнта скалярного поля $v(x,y,z)$. За якою умови ця похідна дорівнює нулю?

11.1.5. Покажіть, що для скалярного поля $u=x^2+y^2+z^2$ векторні поля $\operatorname{grad} u$ та $\operatorname{grad}\left|\operatorname{grad} u\right|$ колінеарні.

11.1.6. Запишіть формулу для похідної скалярного поля $u(x,y,z)$ за напрямом: 1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) осі аплікат.

11.1.7. Запишіть умову того, що скалярне поле $u(x,y,z)$ у заданому напрямі $\overline{l}$:

1) спадає; 2) зростає.

11.1.8. Знайдіть похідну функції $u=\dfrac{1}{r}$, де $r=\left|\overline{r}\right|$, у напрямі її градієнта.

11.1.9. Знайдіть геометричне місце точок простору $Oxyz$, у яких градієнт поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ перпендикулярний до осі Oz?

11.1.10. Доведіть, що для дифереційовних функцій $u=u(x,y,z)$ та $v=v(x,y,z)$ виконано властивості:

1) $\operatorname{grad}(\lambda u)=\lambda\operatorname{grad} u, \lambda=\text{const}$;

2) $\operatorname{grad}(u\pm v)=\operatorname{grad} u\pm\operatorname{grad} v$;

3) $\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v$;

4) $\operatorname{grad}\dfrac{u}{v}=\dfrac{v\operatorname{grad} u-u\operatorname{grad} v}{v^2},\ v\neq 0$.

11.1.11. Обчисліть дивергенцію і ротор векторного поля:

1) $\overline{a} = \overline{c}$, де $\overline{c}$ — сталий вектор; 2) $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$;

3) $\overline{a} = \operatorname{grad} u$; 4) $\overline{a} = y\overline{i} + z\overline{j} + x\overline{k}$;

5) $\overline{a} = f(r)\overline{c}, r = \left|\overline{r}\right|$.

11.1.12. Доведіть, що потік:

1) сталого векторного поля $\overline{a} = \overline{c}$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює 0;

2) радіуса-вектора $\overline{r}$ через будь-яку замкнену поверхню в напрямі зовнішньої нормалі дорівнює потроєному об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею.

11.1.13. Чи правильно, що потоки ротора векторного поля $\overline{a}$ через дві різні поверхні Ω_1 та Ω_2, які мають одну й ту саму межу L, рівні?

11.1.14. Знайдіть потік вектора $\overline{a} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j} + \gamma\overline{k}$, де α, β, γ — сталі, через верхній бік круга радіусом R, що лежить у площині перпендикулярній до осі Oz.

11.2.1. Запишіть за допомогою оператора Гамільтона операцію 2-го порядку:

1) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a}$; 2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$; 3) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$; 4) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a}$; 5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a}$.

11.2.2. Які з формально записаних диференціальних операцій другого порядку не мають сенсу?

1) $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\overline{a}$; 2) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$; 3) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$; 4) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a}$; 5) $\operatorname{rot}\operatorname{div}\overline{a}$.

11.2.3. Які з поданих диференціальних операцій 2-го порядку дорівнюють нулю (нуль-вектору) в довільній точці поля?

1) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{a}$; 2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$; 3) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$; 4) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a}$; 5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{a}$.

11.2.4. Покажіть, що якщо $r = \left|\overline{r}\right|$ довжина радіуса-вектор, то

$$\Delta r = \begin{cases} \dfrac{1}{r} \text{ на площині,} \\ \dfrac{2}{r} \text{ у просторі.} \end{cases}$$

11.2.5. Доведіть властивості оператора Лапласа:

1) $\Delta(C_1u_1 + C_2u_2) = C_1\Delta u_1 + C_2\Delta u_2$;

2) $\Delta(uv) = u\Delta v + 2(\nabla u, \nabla v) + v\Delta u$.

11.3.1. Подайте приклад векторного поля:

1) потенціального та соленоїдального;

2) потенціального, але не соленоїдального;

3) не потенціального, але соленоїдального;

4) не потенціального й не соленоїдального.

11.3.2. Покажіть, що якщо векторне поле $\overline{a} = f(|\overline{r}|)\overline{r}$ соленоїдальне, то

$$f(|r|) = \frac{k}{|\overline{r}|^3}.$$

11.3.3. Доведіть, що якщо векторне поле $\overline{a}$ потенціальне, то векторне поле $[\overline{c}, \overline{a}]$, де $\overline{c}$ — сталий вектор, є соленоїдальним.

11.3.4. Доведіть, що векторний добуток потенціальних полів — соленоїдальне поле.

11.3.5. Нехай C, D, E — орієнтовані криві на рис. та $\overline{a}$ — потенціальне поле. Якщо $\int\limits_C (\overline{a}, d\overline{r}) = 4$. Знайдіть $\int\limits_D (\overline{a}, d\overline{r})$ та $\int\limits_E (\overline{a}, d\overline{r})$.

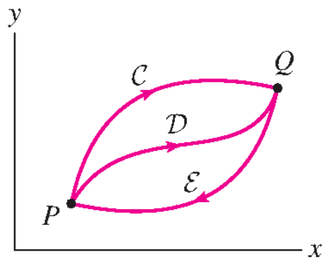


Рис. до 11.3.5

11.3.6. Доведіть, що поле $\overline{a} = f(r)\overline{r}$, де $f(r)$ — диференційовна функція, є потенціальним.

11.3.7. Знайдіть загальний вигляд гармонічного многочлена 2-го степеня від x та y.

Відповіді

11.1.1. Так, приміром $u(M)$ та $u(M) + C$.

11.1.2. Ні, приміром, у полів $u = x^2 + y^2 + z^2$ та $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ один і той самий набір поверхонь рівня.

11.1.3. Так, приміром, $\overline{a}_1(M) = k\overline{a}_2(M), k = \text{const}$.

11.1.4. $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} v|}$. $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 0$, коли $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$.

11.1.6. 1) $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{i}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; 2) $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{j}} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$; 3) $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{k}} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

11.1.7. 1) $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} > 0$; 2) $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} < 0$.

11.1.8. $\dfrac{1}{r^2}$.

11.1.9. $z^2 = xy$.

11.1.11. 1) $\operatorname{div} \overline{a} = 0, \operatorname{rot} \overline{a} = 0$; 2) $\operatorname{div} \overline{a} = 3, \operatorname{rot} \overline{a} = 0$;

3) $\operatorname{div}\overline{a} = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}, \operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}$; 4) $\operatorname{div}\overline{a} = 0, \operatorname{rot} a = -\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$;

5) $\operatorname{div}\overline{a} = \dfrac{f'(r)}{r}(\overline{r},\overline{c}) = (\operatorname{grad} f(r),\overline{c})$; $\operatorname{rot}\overline{a} = \dfrac{f'(r)}{r}[\overline{r},\overline{c}] = [\operatorname{grad} f(r),\overline{c}]$.

11.1.13. Ні, вони можуть відрізнятись знаком, навіть якщо поле $\overline{a}$ неперервно диференційовне.

11.1.14. $\gamma\pi R^2$.

12.2.1. 1) $\nabla(\nabla,\overline{a})$; 2) $[\nabla,\nabla\overline{a}]$; 3) $(\nabla,\nabla\overline{a})$; 4) $(\nabla,[\nabla,\overline{a}])$; 5) $[\nabla,[\nabla,\overline{a}]]$.

11.2.2. 1), 5).

11.2.3. 2), 4).

11.3.1. 1) $\overline{a} = \overline{c} = \overline{\text{const}}$; 2) $\overline{a} = \overline{r}$; 3) $\overline{a} = y\overline{i} + z\overline{j} + x\overline{k}$; 4) $\overline{a} = xyz\overline{i}$.

11.3.5. $\int\limits_D(\overline{a},d\overline{r}) = 4, \int\limits_E(\overline{a},d\overline{r}) = -4$.

11.3.7. $ax^2 + bxy - ay^2 + dx + ey + f$.

Формули, твердження, алгоритми

11.1. Характеристики скалярних полів

❶ ***Скалярне поле***	$u=f(M)=f(x,y,z), M\in G$
❷ ***Поверхні рівня***	$f(x,y,z)=C$
❸ ***Градієнт*** скалярного поля $u=f(M)$ у точці M_0	$\operatorname{grad}u(M_0)=$ $=\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\bar{i}+\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\bar{j}+\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\bar{k}$
❹ ***Правила обчислення градієнта:*** ① $\operatorname{grad}C=\bar{0}, C=\text{const}$; ② $\operatorname{grad}(Cu)=C\operatorname{grad}u, C=\text{const}$; ③ $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$;	④ $\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$; ⑤ $\operatorname{grad}\dfrac{u}{v}=\dfrac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}$; ⑥ $\operatorname{grad}f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u$
❺ ***Похідна*** скалярного поля $u=f(M)$ ***за напрямом*** $\bar{l}$ у точці M_0	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(\bar{r}_0+t\bar{l}^{\,0})-f(\bar{r}_0)}{t}$, де $\bar{l}^{\,0}$ — орт вектора $\bar{l}$, $\bar{r}_0=\overline{OM_0}$
$u=u(x,y,z), \bar{l}^{\,0}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}$	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+$ $+\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$
❻ ***Зв'язок*** між похідною за напрямом і градієнтом функції	$\dfrac{\partial u}{\partial l}=(\operatorname{grad}u,\bar{l}^{\,0})=\operatorname{pr}_{\bar{l}^{\,0}}\operatorname{grad}u$
❼ ***Властивості градієнта:*** ①градієнт напрямлений у бік найшвидшої зміни скалярного поля; ②довжина градієнта функції в точці дорівнює найбільшій швидкості зростання поля: $\lvert\operatorname{grad}u(M_0)\rvert=$ $=\max\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\left.\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}\right\rvert_{\bar{l}=\operatorname{grad}u}$; ③градієнт напрямлений уздовж нормалі до поверхні рівня в заданій точці.	❽ ***Властивості похідної за напрямом:*** ① $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ характеризує швидкість зміни поля $u(M)$ у напрямі $\bar{l}$; ②якщо $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}>0$, то поле $u=u(M)$ зростає в напрямі $\bar{l}$; ③якщо $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}<0$, то поле $u=u(M)$ спадає в напрямі $\bar{l}$.

11.2. Характеристики векторних полів

❶ ***Векторне поле***	$\overline{a}(M) =$ $= P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k},$ $M \in G \subset \mathbb{R}^3$
❷ ***Векторна (силова) лінія.*** *Векторною лінією* поля $\overline{a}$ називають криву, у кожній точці M якої дотична збігається з напрямом поля $\overline{a}$	$\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$
❸ ***Дивергенція*** векторного поля	$\operatorname{div}\overline{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$
❹ ***Правила обчислення дивергенції:*** ① $\operatorname{div}\overline{C} = 0, \overline{C} = \overline{\text{const}};$ ② $\operatorname{div}(C\overline{a}) = C\operatorname{div}\overline{a}, C = \text{const};$	③ $\operatorname{div}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \operatorname{div}\overline{a}_1 + \operatorname{div}\overline{a}_2;$ ④ $\operatorname{div}(u\overline{a}) = u\operatorname{div}\overline{a} + (\overline{a}, \operatorname{grad} u)$
❺ ***Фізичний зміст дивергенції:*** ① якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) > 0$, то в полі $\overline{a}$ в точці M є джерела;	② якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) < 0$, то в полі $\overline{a}$ в точці M є стоки; ③ якщо $\operatorname{div}\overline{a}(M) = 0$, то в точці M немає ані джерел, ані стоків.
❻ ***Ротор*** векторного поля	$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
❼ ***Правила обчислення ротора:*** ① $\operatorname{rot}\overline{C} = \overline{0}, \overline{C} = \overline{\text{const}};$ ② $\operatorname{rot}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \operatorname{rot}\overline{a}_1 + \operatorname{rot}\overline{a}_2;$	③ $\operatorname{rot}(u\overline{a}) = u\operatorname{rot}\overline{a} + [\operatorname{grad} u, \overline{a}]$
❽ ***Фізичний зміст ротора:*** ① Ротор векторного поля характеризує обертальну здатність поля в даній точці: вона найбільша в точці M_0 у площині, перпендикулярній до ротора;	② найбільша густина циркуляції векторного поля $\overline{a}$ в точці M_0 дорівнює довжині ротора поля в цій точці.
❾ ***Потік*** векторного поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ через вибраний бік поверхні Ω	$\Phi_\Omega(\overline{a}) = \iint\limits_\Omega (\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma =$ $= \iint\limits_\Omega Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$
❿ ***Циркуляція*** векторного поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ вздовж замкненого контуру L	$C_L(\overline{a}) = \oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) =$ $= \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$

11.3. Формули Остроградського — Ґауса та Стокса

❶ ***Формула Остроградського — Ґауса**** (область G обмежена поверхнею Ω, для якої вибрано зовнішній бік)	$\oiint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$
❷ ***Теорема Остроградського — Ґауса* (векторна форма).** Потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішній бік замкненої поверхні Ω, дорівнює потрійному інтегралу за областю G, обмеженою цією поверхнею, від дивергенції векторного поля.	$\Phi_{\Omega}(\overline{a}) = \oiint\limits_{\Omega} (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \overline{a} dxdydz$
❸ ***Теорема Стокса.*** Якщо функції $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ та $R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними 1-го порядку в області G, яка містить гладку поверхню Ω, що напнута на кусково-гладку криву L, то правдива *формула Стокса*	$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$ де орієнтація нормалі до поверхні Ω узгоджена з орієнтацією контуру L так, що, коли дивитися з кінця вектора нормалі, то обхід контуру відбувається проти годинникової стрілки.
❹ ***Теорема Стокса* (векторна форма).** Циркуляція векторного поля $\overline{a}$ вздовж замкненого контуру L дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot} \overline{a}$ через відповідний бік поверхні Ω, напнутої на контур L.	$C_L(\overline{a}) = \oint\limits_{L} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_{\Omega} (\operatorname{rot} \overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma$

* Теорема Остроградського — Ґауса [10.10.7].

11.4. Символічний запис дій над полями

❶ ***Оператор Гамільтона (набла)***	$\nabla = \overline{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$
	$\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$
❷ ***Оператор Лапласа***	$\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$
	$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Диференціальні операції 1-го порядку	
❸ ***Градієнт***	$\operatorname{grad} u = \nabla u$
❹ ***Дивергенція***	$\operatorname{div} \overline{a} = (\nabla, \overline{a})$
❺ ***Ротор***	$\operatorname{rot} \overline{a} = [\nabla, \overline{a}]$
Диференціальні операції 2-го порядку	
❻ $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left[\nabla, \nabla u\right] = \overline{0}$	❼ $\operatorname{div}\operatorname{rot} \overline{a} = (\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = 0$
❽ $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \Delta u$	❾ $\operatorname{grad}\operatorname{div} \overline{a} = \nabla(\nabla, \overline{a})$
❿ $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \overline{a} = [\nabla, [\nabla, \overline{a}]]$	

11.5. Спеціальні векторні поля

❶ ***Потенціальне поле***	$\operatorname{rot} \overline{a} = \overline{0}$
❷ ***Потенціал*** u потенціального поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$, $\exists U : \overline{a}(M) = \operatorname{grad} U(M)$	$u(x,y,z) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C$
❸ ***Соленоїдальне поле***	$\operatorname{div} \overline{a} = 0$
❹ ***Гармонічне поле***	$\operatorname{rot} \overline{a} = \overline{0}, \operatorname{div} \overline{a} = 0$

Практикум 11.1. Характеристики векторних полів

Навчальні задачі

11.1.1. Обчислити $\operatorname{div}\overline{a}$, якщо $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$.

Розв'язання. [11.2.3.]

Дивергенцію векторного поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ знаходять за формулою

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[11.2.3]}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

$$P(x,y,z) = x^2, Q(x,y,z) = y^2, R(x,y,z) = z^2;$$

$$\operatorname{div}\overline{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z.$$

11.1.2.1. Знайти ротор векторного поля $\overline{a}$, якщо $\overline{a} = \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Розв'язання. [11.2.6.]

Ротор векторного поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ знаходять за формулою

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[11.2.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{①}{=}$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(x)\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right) =$$
$$= \overline{i}(0-0) - \overline{j}(0-0) + \overline{k}(0-0) = \overline{0}.$$

Коментар. ① Визначник розкладають за 1-м рядком. Добуток оператора частинного диференціювання на функцію означає знаходження відповідної похідної.

11.1.2.2. Знайти ротор векторного поля

$$\overline{a} = xy\overline{i} + (2x + 3y - z)\overline{j} + (z^2 + x^2)\overline{k}$$

і найбільшу густину циркуляції цього поля в точці $M_0(1;2;-1)$.

Розв'язання. [11.2.6, 11.2.8.]

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[11.2.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2x+3y-z & x^2+z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(0+1) - \overline{j}(2x-0) + \overline{k}(2-x) = \overline{i} - 2x\overline{j} + (2-x)\overline{k}.$$

Найбільша густина циркуляції — це довжина ротора [11.2.8]:

$$\max j(M_0) = \left|\operatorname{rot}\overline{a}(M_0)\right|.$$

$$\operatorname{rot}\overline{a}(M_0) = \overline{i} - 2x\overline{j} + (2-x)\overline{k}\Big|_{M_0(1;2;-1)} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k};$$

$$\max j(M_0) = \left|\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

11.1.3.1. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через зовнішній бік частини циліндричної поверхні $\Omega : x^2 + y^2 = a^2$ $(0 < z < a)$.

Розв'язання. [11.2.9.]

Потік векторного поля знаходять за формулою

$$\Phi_\Omega(\overline{a}) \overset{[11.2.9]}{=} \iint\limits_{\Omega} (\overline{a}(M), \overline{n}^0)d\sigma = \iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

[*Зображуємо поверхню.*]

[*З'ясовуємо замкнена чи незамкнена поверхня.*]

Поверхня Ω не замкнена.

[*З'ясовуємо чи проєктується поверхня однозначно на вибрану координатну площину.*]

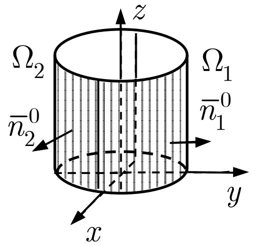


Рис. 1 до 11.1.3

Оскільки поверхня Ω на площину Oxz проєктується неоднозначно, то розбиваємо її на частини $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ та $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Тоді

$$\Phi_\Omega = \Phi_{\Omega_1} + \Phi_{\Omega_2}.$$

Поверхні Ω_1 та Ω_2 проєктуються на прямокутник D_{xz}.

[*Зображуємо проєкцію.*]

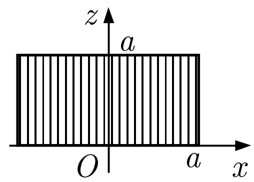


Рис. 2 до 10.6.2

$$\left[\begin{aligned} &\Phi_{\Omega_{1,2}}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega_1} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \left|\begin{aligned}&\Omega_{1,2} : y = y(x,z)\\ &(x;z) \in D_{xz}\end{aligned}\right| = \\ &= \pm\iint\limits_{D_{xz}} \left[P(x,y(x,z),z)(-y'_x) + Q(x,y(x,z),z) + R(x,y(x,z),z)(-y'_z)\right]dxdz \end{aligned}\right]$$

[*Знаходимо* Φ_{Ω_1}.]

$$\Phi_{\Omega_1}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega_1} xdydz + ydxdz + zdxdy = \left|\begin{aligned}&\Omega_1 : y = \sqrt{a^2 - x^2}\\ &y'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, y'_z = 0\end{aligned}\right| \overset{①}{=}$$

$$= +\iint\limits_{D_{xz}} \left[x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} + z \cdot 0 \right] dxdz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xz}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dxdz = a^2 \int\limits_0^a dz \int\limits_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \cdot a \cdot \arcsin \frac{x}{a} \bigg|_{-a}^a = \pi a^3.$$

[*Знаходимо* Π_{Ω_2}.]

$$\Phi_{\Omega_2}(\overline{a}) = \iint\limits_{\Omega_2} xdydz + ydxdz + zdxdy = \left| \begin{matrix} \Omega_1 : y = -\sqrt{a^2 - x^2} \\ y'_x = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, y'_z = 0 \end{matrix} \right| \overset{②}{=}$$

$$= -\iint\limits_{D_{xz}} \left[x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) + \left(-\sqrt{a^2 - x^2} \right) + z \cdot 0 \right] dxdz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xz}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dxdz = \pi a^3.$$

Отже,

$$\Phi_\Omega = \Phi_{\Omega_1} + \Phi_{\Omega_2} = \pi a^3 + \pi a^3 = 2\pi a^3.$$

Коментар. ① Для Ω_1 нормаль утворює гострий кут з віссю Oy.

② Для Ω_2 нормаль утворює тупий кут з віссю Oy.

11.1.3.2. Знайти потік векторного поля $\overline{a} = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} - z\overline{k}$ через зовнішній бік замкненої поверхні $\Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z \le H)$.

Розв'язання. [11.2.9, 11.3.2.]

Потік векторного поля знаходять за формулою:

$$\Phi_\Omega(\overline{a}) \overset{[11.2.9]}{=} \iint\limits_\Omega (\overline{a}, \overline{n}^0) d\sigma.$$

[*Зображуємо поверхню.*]

[*З'ясовуємо замкнена чи незамкнена поверхня.*]

Поверхня $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ замкнена, де Ω'' — частина конічної поверхні, Ω' — частина площини $z = H$.

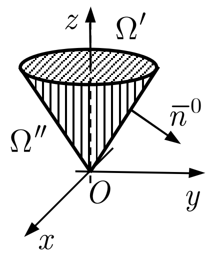


Рис. до 11.1.2

[*Поверхневий інтеграл 2-го роду за замкненою поверхнею обчислюють за формулою Остроградського — Ґауса. Перевіряємо виконання умов її застосовності.*]

$$\Phi_\Omega(\bar{a}) = \left[\iint\limits_\Omega (\bar{a}, \bar{n}^0) d\sigma \overset{[11.3.2]}{=} \iiint\limits_G \operatorname{div} \bar{a} dx dy dz \right] =$$

$$= \left| \operatorname{div} \bar{a} \overset{[11.2.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 3 \right| = \iiint\limits_V 3 dx dy dz =$$

$$= 3 \iiint\limits_V dx dy dz \overset{[10.5.1]}{=} 3V_{\text{кон.}} \overset{①}{=} 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi H^2 \cdot H = \pi H^3.$$

Коментар. ① Об'єм конуса обчислюють за формулою

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

11.1.3.3. Знайти потік векторного поля $\bar{a} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$ через внутрішній бік частини конічної поверхні $\Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z < H)$.

Розв'язання. [11.2.9, 11.3.2.] ①

Потік векторного поля знаходять за формулою

$$\Phi_\Omega(\bar{a}) \overset{[11.2.9]}{=} \iint\limits_\Omega (\bar{a}, \bar{n}^0) d\sigma.$$

[*Зображуємо поверхню.*]

Поверхня Ω не замкнена. Замикаємо поверхню Ω частиною поверхні $\Omega' : z = H$. Тоді $\Omega^* = \Omega \cup \Omega'$.

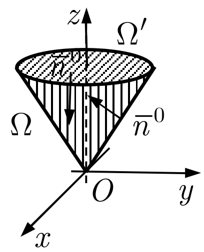


Рис. до 11.1.3

[*Знаходимо потік через замкнену поверхню.*]

$$\Phi_{\Omega^*}(\bar{a}) = \iint\limits_\Omega (\bar{a}, \bar{n}^0) d\sigma \underset{②}{\overset{[11.3.2]}{=}} - \iiint\limits_G \operatorname{div} \bar{a} dx dy dz =$$

$$= \left| \operatorname{div} \bar{a} = 3 \right| = -3 \iiint\limits_G dx dy dz = -\pi H^3.$$

[*Знаходимо потік, обчислюючи поверхневий інтеграл безпосередньо.*]

$$\Phi_{\Omega'}(\bar{a}) \overset{[11.2.9]}{=} \iint\limits_{\Omega'} (\bar{a}, \bar{n}^0) d\sigma = \left| \begin{array}{l} \bar{n} = -\bar{k}, \\ (\bar{a}, \bar{n}^0) = z \end{array} \right| = \iint\limits_{\Omega'} z d\sigma \overset{③}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{c} z = H, z'_x = z'_y = 0. \\ d\sigma = dx dy \end{array} \right| = H \iint\limits_{D_{xy}} dx dy \overset{[10.3.1]}{=} H \cdot S(D) = \pi H^3.$$

[*Знаходимо шуканий потік.*]

Оскільки

$$\Phi_{\Omega^*} = \Phi_{\Omega} + \Phi_{\Omega'},$$

то

$$\Phi_{\Omega} = \Phi_{\Omega^*} - \Phi_{\Omega'} = -\pi H^3 - \pi H^3 = -2\pi H^3.$$

Коментар. ① Задача відрізняється від **11.1.3.2** тим, що задана поверхня **незамкнена**, на що вказує слово «частина» та нестрога нерівність в умові задачі. Один із способів обчислення потоку в цьому разі, полягає в замиканні поверхні й обчисленні потоку через замкнену поверхню за допомогою формули Остроградського — Ґауса.
② Знак «$-$» у формулі Остроградського — Ґауса вказує на внутрішній бік замкненої поверхні.
③ Частина поверхні Ω' проєктується у круг $D_{xy} : x^2 + y^2 \le H^2$.

11.1.4. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{a} = x^2y^3\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ вздовж кола L, утвореного перетином колового циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ та площини $z = H$, яке орієнтовано проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz.

Розв'язання. [11.2.10, 11.3.4]

Циркуляцію векторного поля $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ вздовж кривої L знаходять за формулою

$$C_L(\overline{a}) \overset{[11.2.10]}{=} \oint_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

1-й спосіб (обчислення за формулою Стокса).

[*Зображуємо криву.*]

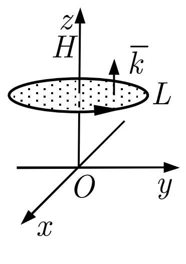


Рис. 1 до 11.1.4

[*Перевіряємо умови застосовності формули Стокса.*]

Циркуляцію можна обчислити за формулою Стокса

$$C_L(\overline{a}) = \oint_L (\overline{a}, d\overline{r}) \overset{[11.3.4]}{=} \iint_{\Omega} (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)d\sigma.$$

[*Вибираємо поверхню Ω, яку напинаємо на контур L і нормаль до вибраної поверхні.*]

За поверхню, напнуту на контур, вибираємо частину площини $z = H$, обмеженої контуром L, орієнтовану вектором $\overline{n}^0 = \overline{k}$.

[*Знаходимо* $\operatorname{rot}\overline{a}$ *та* $(\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}^0)$.]

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[11.2.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \overline{i}\cdot 0 - \overline{j}\cdot 0 + \overline{k}\cdot(-3x^2y^2) = -3x^2y^2\overline{k}.$$

$$(\operatorname{rot}\overline{a},\overline{n}^0) = (0;0;-3x^2y^2)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -3x^2y^2.$$

Отже,

$$C_L(\overline{a}) = \left[\iint\limits_{\Omega}(\operatorname{rot}\overline{a},\overline{n}^0)d\sigma\right] = \iint\limits_{\Omega}(-3x^2y^2)d\sigma.$$

Поверхня Ω проєктується на площину Oxy у круг $D_{xy}: x^2+y^2 \le R^2$.

[*Зображуємо проєкцію.***]**

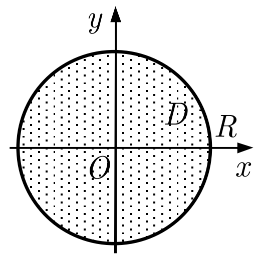


Рис. 2 до 11.1.4

$$C_L(\overline{a}) = -3\iint\limits_{\Omega}x^2y^2d\sigma \overset{[10.9.4]}{=} \left|\begin{matrix} z = H, z'_x = z'_y = 0. \\ d\sigma = dxdy \end{matrix}\right| =$$

$$= -3\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2dxdy \overset{[10.2.5.2]}{=} \left|\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, & x^2+y^2 = \rho^2, \\ y = \rho\sin\varphi, & |J| = \rho \end{matrix}\right| =$$

$$= -3\iint\limits_{\tilde{D}_{xy}}\rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi d\rho = \left|\begin{matrix} -\pi \le \varphi \le \pi, \\ 0 \le \rho \le R \end{matrix}\right| =$$

$$= -3\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_{0}^{R}\rho^5d\rho = -\frac{R^6}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi\right) \overset{[9.9.7]}{=}$$

$$= -2R^6\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

Коментар. ① Це забезпечує заданий обхід контуру.

2-й спосіб (безпосереднє обчислення криволінійного інтеграла).

Параметризуємо рівняння кола L:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. ^{①} \\ z = H, \end{cases}$$

$$C_L(\overline{a}) = \left[\oint\limits_{L}Pdx + Qdy + Rdz\right] = \oint\limits_{L}x^2y^3dx + dy + zdz \overset{[10.7.6]}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = R\cos t, y = R\sin t, z = H, 0 \le t \le 2\pi, \\ dx = -R\sin t dt, dy = R\cos t dt, dz = 0. \\ P = x^2y^3, Q = 1, R = z \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t \cdot R^3 \sin^3 t(-R\sin t) + R\cos t + 0)dt =$$

$$= R^6 \int\limits_0^{2\pi} \sin^6 t dt - R^6 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4 t dt + R\sin t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4R^6 \left(\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 t dt - \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t dt \right) \overset{[9.9.7]}{=} 4R^6 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \right) = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

Коментар. ① Змінювання параметра t від 0 до 2π відповідає напряму обходу контуру, заданого в умові задачі.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

11.1.5. Нехай $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, r = |\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Знайдіть $\operatorname{grad} u$, якщо:

1) $u = r^2$; 2) $u = \dfrac{1}{r}$.

11.1.6. Знайдіть дивергенцію векторного поля:

1) $\overline{a} = xyz\overline{i} + (2x + 3y + z)\overline{j} + (x^2 + z^2)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (x + y + z)\overline{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\overline{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\overline{k}$;

3) $\overline{a} = \dfrac{\overline{r}}{|\overline{r}|}$, де $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$; 4) $\overline{a} = |\overline{r}|\overline{r}$;

5) $\overline{a} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$; 6) $\overline{a} = \operatorname{grad}(x^3 + y^3 + z^3)$.

11.1.7. Знайдіть ротор векторного поля:

1) $\overline{a} = \dfrac{y}{z}\overline{i} + \dfrac{z}{x}\overline{j} + \dfrac{x}{y}\overline{k}$ в точці $M_0(1;2;-2)$;

2) $\overline{a} = y^2\overline{i} - x^2\overline{j} + z^2\overline{k}$;

3) $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}$; 4) $\dfrac{q}{\left|\overline{r}\right|^3}\overline{r}$, де $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

11.1.8. Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через орієнтовану поверхню Ω, якщо:

1) $\overline{a} = (x-2z)\overline{i} + (x+3y+z)\overline{j} + (5x+y)\overline{k}$, де Ω — протилежний початку координат бік трикутника з вершинами $(1;0;0)$, $(0;1;0),(0;0;1)$;

2) $\overline{a} = y^2\overline{i} + x^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, де Ω — частина зовнішнього боку колового циліндра $x^2+y^2=a^2$, розташованого в 1-му октанті між площинами $z=0$ і $z=a, a>0$;

3) $\overline{a} = 3x\overline{i} - y\overline{j} - z\overline{k}$, де Ω — частина зовнішнього боку параболоїда обертання $x^2+y^2=9-z$, розташована в 1-му октанті;

4) $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, де Ω — частина зовнішнього боку параболоїда обертання $x^2+y^2=\dfrac{R^2}{H}z$ $(0 \le z < H)$;

5) $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + zx\overline{k}$, де Ω — частина зовнішнього боку сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розташована в 1-му октанті;

6) $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + \sqrt{x^2+y^2-1}\overline{k}$, де Ω — частина зовнішнього боку поверхні однопорожнинного гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=1$, що міститься між площинами $z=0$ і $z=\sqrt{3}$.

11.1.9. Знайдіть потік векторного поля $\overline{a}$ через поверхню Ω, якщо:

1) $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні піраміди, обмеженої площинами $x+y+z=1, x=0,\ y=0, z=0$;

2) $\overline{a} = y^2z\overline{i} - yz^2\overline{j} + x(y^2+z^2)\overline{k}$, де Ω — повна зовнішня поверхня колового циліндра $y^2+z^2 \le a^2, 0 \le x \le a$;

3) $\overline{a} = y^2\overline{j} + z\overline{k}$, де Ω — частина внутрішнього боку параболоїда $z=x^2+y^2$, відтятої площиною $z=2$;

4) $\overline{a} = 2x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}$, де Ω — частина внутрішнього боку параболоїда $y^2+z^2=Rx$, яку відтинає площина $x=R$;

5) $\overline{a} = (2x+y)\overline{i} + (x+2y)\overline{j} - (z+x^2y^2)\overline{k}$, де Ω — повна внутрішня поверхня конуса $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le H$;

6) $\overline{a} = x^2y\overline{i} + xy^2\overline{j} + xyz\overline{k}$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$;

7) $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$;

8) $\overline{a} = (x - z^3y)\overline{i} + xz\overline{j} + (z+xy)\overline{k}$, де Ω — зовнішній бік повної поверхні $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6}$.

11.1.10. Знайдіть модуль циркуляції векторного поля $\overline{a}$ вздовж контуру L, якщо:

1) $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}, L: \{x+y+z=3, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$;

2) $\overline{a} = y\overline{i} + z\overline{j} + x\overline{k}, L: \{x^2+y^2+z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$;

3) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}, L: \{x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 = z^2, z > 0\}$;

4) $\overline{a} = z\overline{i} - x\overline{j} + y\overline{k}, L: \{z = x^2+y^2-10, z = -1\}$.

11.1.11. Обчисліть за Стоксовою теоремою циркуляцію векторного поля $\overline{a}$ вздовж контуру L, орієнтованого за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат, якщо:

1) $\overline{a} = (y+z)\overline{i} + (z+x)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$,
$L: \{4(x^2+y^2) = z^2, x+y+z = 1\}$;

2) $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}, L: \{z = x^2+y^2, z+y = 2\}$;

3) $\overline{a} = z^2\overline{j} + x^2\overline{k}, L: \{y^2+z^2 = 9, 3z+4x = 5\}$;

4) $\overline{a} = zx\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}, L: \{y^2+z^2 = 1, x+y+z = 1\}$;

5) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}, L: \{x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 = z^2, z > 0\}$;

6)* $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}, L: \{x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 1\}$.

Відповіді

11.1.5. 1) $\operatorname{grad} r^2 = 2\overline{r}$; 2) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\overline{r}}{r^3}$.

11.1.6. 1) $yz + 3 + 2z$; 2) $1 + 2y + 3z^2$; 3) $\dfrac{2}{|\overline{r}|}$; 4) $4|\overline{r}|$; 5) 6; 6) $6x + 6y + 6z$.

11.1.7. 1) $-\dfrac{5}{4}\overline{i} - \overline{j} + \dfrac{5}{2}\overline{k}$; 2) $-2(x+y)\overline{k}$; 3) $-y^2\overline{i} - z^2\overline{j} - x^2\overline{k}$; 4) $\overline{0}$.

11.1.8. 1) $\dfrac{5}{3}$; 2) $\dfrac{2a^4}{3}$; 3) $\dfrac{81\pi}{8}$; 4) $\dfrac{\pi R^2H^2}{3}$; 4) $\dfrac{3\pi}{16}$; 5) $2\sqrt{3}\pi$.

11.1.9. 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $-\dfrac{\pi a^5}{4}$; 3) -2π; 4) πR^3; 5) $-\pi H^3$; 6) $\dfrac{R^5}{3}$; 7) 40; 8) $\dfrac{11}{3}$.

11.1.10. 1) 27; 2) $\dfrac{3}{4}\pi R^2$; 3) 4π; 4) 9π.

11.1.11. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) π; 5) -4π; 6) $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.

Практикум 11.2. Спеціальні типи векторних полів

Навчальні задачі

11.2.1. Перевірити потенціальність поля

$$\overline{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\overline{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\overline{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\overline{k}$$

і знайти його потенціал.

Розв'язання. [11.5.1, 11.5.2.]

[*Перевіряємо умову потенціальності поля* $\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0}$.]

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[11.2.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) - \overline{j}\left(-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right) + \overline{k}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \overline{0}.$$

Поле $\overline{a}$ потенціальне.

Потенціал векторного поля $\overline{a}$ знаходять за формулою[1]:

$$u(x,y,z) \overset{[11.4.2]}{=} \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C.$$

Вибираємо за початкову точку $M_0(1;1;1)$.

$$u(x,y,z) = \int\limits_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int\limits_1^y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int\limits_1^z \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{t^2}\right)dt + C =$$

$$= \left(t + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^x + \left(\frac{t}{x} + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^y + \left(\frac{t}{y} + \frac{x}{t}\right)\Bigg|_1^z + C =$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x} - 1 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1 + \frac{z}{y} - \frac{1}{y} + \frac{x}{z} - x + C =$$

$$= \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \tilde{C}.$$

Коментар. ① За означенням $\overline{a} = \operatorname{grad} u$.

11.2.2. З'ясувати, чи є векторне поле $\overline{a} = 2xy\overline{i} - y^2z\overline{j} + (z^2y - 2yz)\overline{k}$ соленоїдальним?

Розв'язання. [11.5.3.]

[*Перевіряємо умову соленоїдальності поля* $\operatorname{div}\overline{a} = 0.$]

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[11.2.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2y - 2yz) =$$
$$= 2y - 2yz + 2zy - 2y = 0.$$

Поле $\overline{a}$ — соленоїдальне.

11.2.3. Показати, що векторне поле $\overline{a} = (y+z)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$ гармонічне.

Розв'язання. [11.5.4.]

[*Перевіряємо умову гармонічності векторного поля* $\operatorname{rot}\overline{a} = \overline{0},\ \operatorname{div}\overline{a} = 0.$]

$$\operatorname{div}\overline{a} \overset{[11.2.3]}{=} \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(x+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0.$$

$$\operatorname{rot}\overline{a} \overset{[11.2.6]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\overline{i} - (1-1)\overline{j} + (1-1)\overline{k} = \overline{0}.$$

Векторне поле $\overline{a}$ гармонічне.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

11.2.4. Перевірте потенціальність і знайдіть потенціал векторного поля:

1) $\overline{a} = (y+z)\overline{i} + (z+x)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = \dfrac{yz\overline{i} + zx\overline{j} + xy\overline{k}}{1 + x^2y^2z^2}$;

3) $\overline{a} = y\overline{i} + x\overline{j} + e^z\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \dfrac{1}{x}\overline{i} + \dfrac{1}{y}\overline{j} + \dfrac{1}{z}\overline{k}$;

5) $\overline{a} = (yz - xy)\overline{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\overline{j} + (xy + y^2z)\overline{k}$;

6) $\overline{a} = (6xy - 2x)\overline{i} + (3x^2 - 2z)\overline{j} + (1 - 2y)\overline{k}$.

11.2.5. З'ясуйте, чи є векторне поле $\overline{a}(M)$ соленоїдальним, якщо:

1) $\overline{a} = x(z^2 - y^2)\overline{i} + y(x^2 - z^2)\overline{j} + z(y^2 + x^2)\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (1 + 2xy)\overline{i} - y^2z\overline{j} + (z^2y - 2yz + 1)\overline{k}$;

3) $\overline{a} = x^2yz\overline{i} + xy^2z\overline{j} - xyz^2\overline{k}$; 4) $\overline{a} = \dfrac{-y\overline{i} + x\overline{j}}{x^2 + y^2} + xy\overline{k}$;

5) $\overline{a} = \ln(x^2 + y^2)\overline{i} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\overline{j} + 3\overline{k}$.

11.2.6. З'ясуйте, чи є векторне поле $\overline{a}(M)$ гармонічним, якщо:

1) $\overline{a} = 6x^2\overline{i} + 3\cos(3x + 2z)\overline{j} + \cos 6yz\overline{k}$;

2) $\overline{a} = (yz - 2x)\overline{i} + (xz + 2y)\overline{j} + xy\overline{k}$;

3) $\overline{a} = (3x^2 - 3y^2)\overline{i} + (2 - 6xy)\overline{j}$;

4) $\overline{a} = (2x\cos y - 2y)\overline{i} + (x^2 - 2\sin y)\overline{j}$.

Відповіді

11.2.4. 1) $xy + yz + zx + C$; 2) $\operatorname{arctg}(xyz) + C$; 3) $xy + e^z + C$; 4) $\ln(xyz) + C$; 5) $xyz - \dfrac{x^2y}{2} + \dfrac{y^2z^2}{2} + C$; 6) $3x^2y - 2yz - x^2 + z + C$.

11.2.5. 1) ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так. **11.2.6.** 1) ні; 2) так; 3) так; 4) ні.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Скалярне поле. **2.** Векторне поле. **3.** Лінії (поверхні) рівня скалярного поля. **4.** Похідна за напрямом скалярного поля. **5.** Градієнт скалярного поля. **6.** Силові лінії векторного поля.	**7.** Дивергенція векторного поля. **8.** Ротор векторного поля. **9.** Потік векторного поля. **10.** Циркуляція векторного поля. **11.** Соленоїдальне поле. **12.** Потенціальне поле. **13.** Гармонічне поле. **14.** Оператор Гамільтона (набла).
Теореми	
1. Векторна форма теореми Остроградського — Ґауса.	**2.** Векторна форма теореми Стокса.
Основні задачі	
Для скалярного поля: **1)** знаходити рівняння ліній (поверхонь) рівня; **2)** обчислювати похідну за напрямом; **3)** знаходити градієнт.	Для векторного поля: **4)** знаходити рівняння силових ліній; **5)** обчислювати дивергенцію; **6)** знаходити ротор; **7)** обчислювати потік: **8)** обчислювати циркуляцію; **9)** знаходити потенціал потенціального поля.

РОЗДІЛ 12. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Розв'язуючи різноманітні задачі математики, фізики, хімії та інших наук часто використовують математичні моделі, записані за допомогою диференціальних рівнянь, що зв'язують незалежну змінну, шукану функцію та її похідні.

У розділі розвинуто методи розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

Поданий матеріал використовується в розділах:

— *Теорія рядів;*

— *Інтегральні перетворення.*

Ключові поняття:

— *диференціальне рівняння;*

— *початкова умова;*

— *загальний розв'язок диференціального рівняння;*

— *частинний розв'язок диференціального рівняння;*

— *нормальна система диференціальних рівнянь.*

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— *знаходити загальний і частинний розв'язок диференціального рівняння;*

— *знаходити загальний і частинний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь;*

— *моделювати за допомогою диференціальних рівнянь задачі природознавства й техніки.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Диференціальне числення функцій однієї змінної;*

— *Інтегральне числення функцій однієї змінної;*

— *Лінійна алгебра.*

12.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У задачах науки й техніки досить часто не вдається відразу визначити функцію, що характеризує деякий процес. Натомість, процес можна описати співвідношенням між аргументом, цією функцією та її похідною чи похідними. Так одержують диференціальні рівняння.

12.1.1. Основні поняття

1. Рівняння, які зв'язують невідому функцію, її похідні та, можливо, незалежні змінні, називають *диференціальними*. Диференціальне рівняння називають *звичайним*, якщо невідома функція залежить лише від однієї незалежної змінної (у цьому розділі розглядатимемо лише звичайні диференціальні рівняння). Якщо ж диференціальне рівняння містить функцію кількох змінних та її частинні похідні, то таке диференціальне рівняння називають *диференціальним рівнянням з частинними похідними*.

2. Найвищий порядок похідної, яка входить у диференціальне рівняння, називають *порядком* диференціального рівняння.

Приміром, $y'' + y' - xy^5 = 0$ — диференціальне рівняння 2-го порядку.

3. Розгляньмо диференціальне рівняння 1-го порядку

$$\boxed{F(x, y, y') = 0.}$$

Якщо в цьому рівнянні вдається виразити похідну y' через x та y, то дістаємо диференціальне рівняння

$$\boxed{y' = f(x, y),}$$

розв'язане щодо похідної (*диференціальне рівняння в нормальній формі*).

Підставляючи

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

і розглядаючи символ похідної як відношення диференціалів, дістаємо диференціальне рівняння *в диференціальній формі*

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.}$$

А саме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Leftrightarrow dy = f(x,y)dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow dy - f(x,y)dx = 0.$$

12.1.2. Розв'язки диференціального рівняння

1. *Розв'язком* диференціального рівняння

$$\boxed{F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0}$$

називають функцію $y = y(x)$, яка після підставлення її в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність. Якщо функцію, яка справджує диференціальне рівняння, задано неявно співвідношенням $\Phi(x,y) = 0$, то кажуть про *інтеграл* диференціального рівняння.

Процес розв'язання диференціального рівняння називають його *інтегруванням*, а графік розв'язку диференціального рівняння — *інтегральною кривою*.

2. Приміром, одним з розв'язків найпростішого диференціального рівняння

$$y' = f(x)$$

є функція $y = F(x)$ — первісна для функції $f(x)$.

3. Геометричний зміст диференціального рівняння. Розгляньмо диференціальне рівняння 1-го порядку

$$y' = f(x,y),$$

де функція $f(x,y)$ означена й неперервна в області D площини Oxy. Нехай $y = \varphi(x)$ є розв'язком цього рівняння в інтервалі $(a;b)$.

Оскільки функція $\varphi(x)$ має в кожній точці інтервалу $(a;b)$ похідну, то графік функції $y = \varphi(x)$ має в кожній точці дотичну з кутом нахилу α. У кожній точці $M(x;y)$ інтегральної кривої виконано співвідношення

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = f(x,y).}$$

Це співвідношення у кожній точці $M(x;y)$ визначає одиничний вектор

$$\boxed{\bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\sin\alpha.}$$

Множина таких векторів утворює *поле напрямів* диференціального рівняння (рис. 12.1).

Криву $f(x,y) = C$, у точках якої поле напрямків стале, називають *ізокліною*.

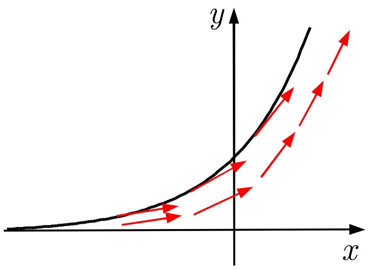


Рис. 12.1. Поле напрямів диференціального рівняння

Отже, диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ виражає залежність між координатами кожної точки M інтегральної кривої і кутовим коефіцієнтом її дотичної в цій точці.

Будь-яка інтегральна крива (графік розв'язку диференціального рівняння) має таку властивість: напрям її дотичної в певній точці збігається з напрямом поля в цій точці.

4. Множина розв'язків диференціального рівняння зазвичай нескінченна.

Приміром, диференціальне рівняння

$$y' = 2x$$

має розв'язком будь-яку функцію $y = x^2 + C$, де C — довільна стала.

Але диференціальне рівняння $y'^2 + x^2 + y^2 = -1$ не має жодного розв'язку, а диференціальне рівняння $y'^2 + (y-1)^2 = 0$ має єдиний розв'язок $y = 1$.

5. Задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку. Щоб з нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння виокремити певний розв'язок, на цей розв'язок накладають ту чи іншу умову. Зазвичай такою умовою є *початкова умова*

$$\boxed{y(x_0) = y_0.}$$

Задачу відшукання розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$\boxed{y' = f(x,y),}$$

який справджує початкову умову

$$\boxed{y(x_0) = y_0,}$$

називають *задачею Коші* (*початковою задачею*) для диференціального рівняння.

Геометрично задача Коші для диференціального рівняння означає наступне: треба із множини інтегральних кривих диференціального рівняння виокремити ту, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$.

Теорема 12.1 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Якщо в диференціальному рівнянні
$$y' = f(x,y)$$
функція $f(x,y)$ та її частинна похідна $f'_y(x,y)$ неперервні в деякій області D, яка містить точку $M_0(x_0;y_0)$, то знайдеться інтервал $(x_0-\delta;x_0+\delta), \delta>0$, у якому існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ цього рівняння, що справджує початкову умову
$$y(x_0)=y_0.$$

Геометрично це означає, що через точку $M_0(x_0;y_0)$ проходить одна й лише одна інтегральна крива рівняння.

Зауважмо, що теорема 12.1 має локальний характер: вона гарантує існування єдиного розв'язку диференціального рівняння лише в досить малому околі точки x_0.

6. Доведімо, що будь-яка задача Коші для диференціального рівняння $y'=x+y$ має єдиний розв'язок.

Функція $f(x,y)=x+y$ означена й неперервна в усіх точках площини Oxy і має скрізь $\dfrac{\partial f}{\partial y}=1$. На підставі теореми 12.1 через кожну точку $(x_0;y_0)$ площини Oxy проходить єдина інтегральна крива цього рівняння.

7. Означення 12.1 (загального розв'язку диференціального рівняння).

Сукупність функцій
$$y=\varphi(x,C),$$
де C — довільна стала, називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння
$$y'=f(x,y),$$
якщо:

1) функції $y=\varphi(x,C)$ є розв'язками цього диференціального рівняння для будь-якого значення C;

2) для будь-якої початкової умови $y(x_0)=y_0$ існує єдине значення $C=C_0$ таке, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ справджує цю початкову умову.

Загальний розв'язок, який заданий неявно співвідношенням
$$\Phi(x, y, C) = 0$$
називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ називають розв'язок, який дістають із загального розв'язку за певного значення довільної сталої C.

Частинний розв'язок, який заданий неявно співвідношенням
$$\Phi(x, y) = 0,$$
називають *частинним інтегралом*.

Геометрично загальний розв'язок зображує сукупність інтегральних кривих, залежних від одного параметра. Графік частинного розв'язку є однією із кривих цієї сукупності, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 12.2).

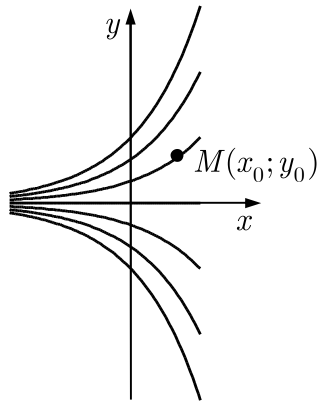


Рис. 12.2. Графіки загального та частинного розв'язків

8. Розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який не можна одержати із загального розв'язку за жодного значення довільної сталої, уключаючи $\pm\infty$, називають *особливим*.

У кожній точці його інтегральної кривої порушено властивість єдиності, тобто через кожну точку інтегральної кривої особливого розв'язку проходить інша інтегральна крива.

12.1.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

1. Диференціальне рівняння вигляду
$$\boxed{f_1(y)dy = f_2(x)dx}$$
називають диференціальним рівнянням *з відокремленими змінними*. Тут $f_1(y), f_2(x)$ — відомі неперервні функції.

Розв'яжімо це рівняння. Нехай $F_1(y)$ та $F_2(x)$ — первісні функцій $f_1(y)$ та $f_2(x)$ відповідно. Інтегруючи обидві частини рівняння, одержуємо його загальний інтеграл:
$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx \Leftrightarrow F_1(y) = F_2(x) + C;$$
$$F_1(y) - F_2(x) = C,$$
де C — довільна стала.

2. Приміром, зінтегруймо диференціальне рівняння $xdx + ydy = 0$.

$$ydy = -xdx; \ \int ydy = -\int xdx;$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2};$$
$$x^2 + y^2 = C, \ C = \text{const}.$$

Інтегральними кривими диференціального рівняння для $C \geq 0$ є кола з центром у початку координат радіусом $\sqrt{C}$.

3. Два диференціальних рівняння

$$F_1(x, y, y') = 0, F_2(x, y, y') = 0$$

називають *еквівалентними* в деякій області D змінювання величин x, y та y', якщо будь-який розв'язок $y(x) \in D$ одного з цих рівнянь є розв'язком другого рівняння і навпаки. Перетворюючи диференціальне рівняння, треба стежити за тим, щоб перетворене рівняння було еквівалентне початковому.

4. Рівняння вигляду

$$\boxed{y' = f(x)g(y)}$$

або

$$\boxed{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,}$$

називають диференціальним рівнянням *з відокремлюваними змінними.*

Розв'яжімо ці рівняння.

Підставляючи

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

відокремлюємо змінні в першому рівнянні й інтегруємо його:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y);$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad g(y) \neq 0,$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Ділення на $g(y)$ може призвести до втрати розв'язків вигляду

$$y = \beta,$$

де $g(\beta) = 0$.

Ділячи обидві частини диференціального рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

на $g_1(y)f_2(x) \neq 0$, відокремлюємо в ньому змінні й інтегруємо його:

$$\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx, \quad f_2(x)g_1(y) \neq 0,$$

$$\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Ділення на $g_1(y)f_2(x)$ може призвести до втрати розв'язків вигляду

$$x = \alpha, y = \beta,$$

де $f_2(\alpha) = 0, g_1(\beta) = 0.$

5. Задача про динаміку популяції. Диференціальне рівняння

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky,}$$

де $y = y(t)$, описує найрізноманітніші фізичні, хімічні чи біологічні процеси, зокрема:

1) для $k < 0$ описує процес радіоактивного розпаду;

2) для $k > 0$ описує лавиноподібний процес розмноження, приміром, «розмноження» нейтронів у ланцюгових ядерних реакціях або розмноження бактерій у припущенні, що швидкість їхнього розмноження пропорційна наявній кількості бактерій.

Розв'яжімо це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt;$$

$$\int \frac{dy}{y} = k\int dt; \ \ln\left|y\right| = kt + \ln\left|C\right|, C \neq 0 \Rightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

Але обмеження на C можна зняти, оскільки $y \equiv 0$ є розв'язком. Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y(t) = Ce^{kt}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Частинний розв'язок, який справджує початкову умову $y(t_0) = y_0$ має вигляд

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}.}$$

6. Логістичне рівняння. У диференціальному рівнянні динаміки популяцій

$$k = m - n,$$

де m — коефіцієнт відносної швидкості народжуваності, а n — коефіцієнт відносної швидкості вмирання. Але сталі коефіцієнти не можливі для великих популяцій. Справді, велика кількість членів популяції призводить до зменшення відповідних ресурсів, що знижує швидкість народжуваності та збільшує швидкість умирання.

Узагальненням рівняння динаміки популяції є *логістичне рівняння*

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \alpha(A - y)y,}$$

де $\alpha, A = \mathrm{const}$, яке є фундаментальним у демографії та математичній теорії екології, і математично описує, приміром, поширення чуток, хвороб тощо.

Загальний розв'язок цього рівняння

$$y = \frac{A\,Ce^{A\alpha t}}{1 + Ce^{A\alpha t}}.$$

Частинний розв'язок, який справджує початкову умову $y(0) = y_0$:

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{1 + \left(\dfrac{A}{y_0} - 1\right)e^{-A\alpha t}}.}$$

7. Деякі рівняння за допомогою заміни змінної можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Приміром, диференціальне рівняння вигляду

$$\boxed{y' = f(ax + by + c),}$$

де $a, b \neq 0, c = \mathrm{const}$, підстановкою

$$\boxed{z = ax + by + c}$$

можна перетворити на диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

12.1.4. Однорідні диференціальні рівняння

1. Функцію $f(x, y)$ називають *однорідною функцією* порядку α щодо змінних x та y, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконано тотожність

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y).$$

Приміром, функція $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ є однорідною функцією 2-го порядку, оскільки

$$f(tx,ty) = t^2x^2 - t^2xy + t^2y^2 = t^2(x^2 - xy + y^2) = t^2 f(x,y).$$

2. Диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового порядку.

Однорідне диференціальне рівняння можна також записати як

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right).}$$

Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

буде однорідним тоді й лише тоді, коли функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними функціями однакового порядку.

3. Змінні в однорідному рівнянні відокремлюють, запроваджуючи нову функцію

$$\boxed{u(x) = \frac{y}{x}} \Leftrightarrow \boxed{y = u(x)x, \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.}$$

Справді,

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Отже, дістали рівняння з відокремленими змінними, яке можна зінтегрувати:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C.$$

4. Диференціальне рівняння, звідне до однорідного. До однорідного диференціального рівняння зводиться рівняння вигляду

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1},}$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 — сталі.

А. Якщо $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ то запроваджують заміну

$$\boxed{x = t + \alpha, y = s + \beta,}$$

де t, s — нові змінні, а сталі α, β визначають із системи

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \end{cases}$$

яка за умови, що $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, має єдиний розв'язок.

Б. Якщо $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то запроваджують нову функцію

$$\boxed{z = ax + by.}$$

12.1.5. Лінійні диференціальні рівняння

1. *Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку* називають диференціальне рівняння вигляду

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x),}$$

де $p(x)$ та $f(x)$ — задані на відрізку $[a;b]$ функції.

Якщо $f(x) \equiv 0$ на цьому відрізку, то диференціальне рівняння

$$y' + p(x)y = 0$$

називають *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням. Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то диференціальне рівняння називають *лінійним неоднорідним*.

З теореми 12.1 випливає твердження:

якщо функції $p(x)$ та $f(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, то лінійне диференціальне рівняння

$$y' + p(x)y = f(x)$$

завжди має єдиний розв'язок, який справджує початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

де точка $(x_0; y_0)$ належить смузі $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$.

2. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

інтегрують:

1) *методом варіації довільної сталої* (*методом Лаґранжа*);

2) *методом Бернуллі* (Якоба).

3. Метод варіації довільної сталої (метод Лаґранжа). Лінійному неоднорідному диференціальному рівнянню

$$y' + p(x)y = f(x)$$

відповідає лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$\boxed{y' + p(x)y = 0,}$$

у якому можна відокремити змінні:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx; \ \ln\left|y\right| = -\int p(x)dx + \ln\left|C\right|, C \neq 0;$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C \neq 0.$$

Під час ділення на y, був утрачений розв'язок $y = 0$, який відповідає нульовому значенню сталої C.

Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння

$$\boxed{y_{\text{заг. одн.}} = Ce^{-\int p(x)dx},}$$

де $C = \text{const}$.

Згідно з гіпотезою Лаґранжа, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = C(x)e^{-\int p(x)dx},}$$

де $C(x)$ — невідома функція («варіюють довільну сталу»).

Справді,

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)).$$

Отже,

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x); \quad \frac{dC(x)}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx};$$

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + \tilde{C}.$$

Остаточно маємо

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + \tilde{C}\right).}$$

4. З формули загального розв'язку випливає така теорема.

Теорема 12.2 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР).

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР дорівнює сумі загального розв'язку відповідного лінійного однорідного ДР і частинного розв'язку лінійного неоднорідного ДР:

$$y_{\text{заг. неодн.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}.$$

5. Метод Бернуллі полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукають у вигляді

$$\boxed{y = u(x)v(x),}$$

де $u(x), v(x)$ — невідомі функції, одну з яких можна вибирати довільно.

Підставляючи співвідношення

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

у диференціальне рівняння, дістаємо

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = f(x);$$

$$u'(x)v(x) + \underbrace{u(x)(v'(x) + p(x)v(x))}_{\substack{\text{вибираємо } v(x) \text{ так, щоб вираз у дужках} \\ \text{став рівним нулю}}} = f(x) \Rightarrow \begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = 0, \\ u'(x)v(x) = f(x). \end{cases}$$

Отже, щоб розв'язати лінійне диференціальне рівняння треба розв'язати два диференціальних рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v(x) = e^{-\int p(x)dx}, \\ u(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C. \end{cases}$$

6. Приміром, розв'яжімо методом Бернуллі диференціальне рівняння

$$y' - 2xy = e^{x^2} \cos x.$$

❍Підставляємо співвідношення

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

у диференціальне рівняння:

$$u'v + \underbrace{uv' - 2xvu}_{\text{групуємо}} = e^{x^2} \cos x;$$

$$u'v + u(v' - 2xv) = e^{x^2} \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} v' - 2xv = 0, \\ u'v = e^{x^2} \cos x. \end{cases}$$

Знаходимо поступово функції v та u:

$$v' - 2xv = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = 2xv; \ \frac{dv}{v} = 2xdx; \ \int \frac{dv}{v} = \int 2xdx;$$
$$\ln v = x^2; \qquad v = e^{x^2}.$$

$$u'e^{x^2} = e^{x^2}\cos x \Leftrightarrow u' = \cos x; \ u = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Отже, маємо шуканий загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = e^{x^2}(\sin x + C). \bullet$$

12.1.6. Диференціальні рівняння Бернуллі

1. *Диференціальним рівнянням Бернуллі* (Якоба) називають диференціальне рівняння вигляду

$$\boxed{y' + p(x) = f(x)y^{\alpha},}$$

де $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

2. Для $\alpha = 1$ диференціальне рівняння

$$y' + p(x) = f(x)y$$

є однорідним лінійним диференціальним рівнянням

$$y' + [p(x) - f(x)]y = 0,$$

а для $\alpha = 0$ диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням.

3. Рівняння Бернуллі можна розв'язати методом Лаґранжа або методом Бернуллі.

Заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі можна звести до лінійного диференціального рівняння.

12.1.7. Диференціальні рівняння в повних диференціалах

1. Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

називають *диференціальним рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння в повних диференціалах має вигляд

$$\boxed{u(x,y) = C.}$$

2. Диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах тоді й лише тоді, коли

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.}$$

Якщо для ДР подана умова виконана, то функція $u(x,y)$ справджує рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y); & \text{(I)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). & \text{(II)} \end{cases}$$

Інтегруючи рівність (I) за змінною x, визначаємо функцію $u(x,y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = F(x,y) + \varphi(y),$$

де $F(x,y)$ — первісна функції $P(x,y)$ за змінною x. Диференціюючи одержану рівність за змінною y і враховуючи (II), дістаємо рівняння для знаходження $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x,y) \Leftrightarrow \varphi(y) = \int (Q(x,y) - F'_y)dy.$$

3. Задача розв'язання диференціального рівняння в повних диференціалах еквівалентна задачі відновлення функції за її повним диференціалом.

Отже, загальний інтеграл диференціального рівняння в повних диференціалах можна також знайти за формулою:

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C,$$

де точка $M(x_0;y_0)$ є довільною точкою неперервності функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$.

12.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Найзагальнішою формою диференціального рівняння n-го порядку є співвідношення з $n+2$ змінними

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0.$$

Відсутність загального методу розв'язання навіть диференціальних рівнянь 1-го порядку змушує розглядати лише окремі типи диференціальних рівнянь, у яких можна понизити порядок.

12.2.1. Задача Коші

1. Розгляньмо диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане щодо старшої похідної

$$\boxed{y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}).}$$

Означення 12.2 (загального розв'язку).

Сукупність функцій

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n),$$

де C — довільна стала, називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}),$$

якщо:

1) функції $y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ є розв'язками цього ДР для будь-яких значень сталих $C_1,C_2,\ldots,C_n$;

2) для будь-яких *початкових умов*

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

існує єдиний набір значень $C_1=C_1^0,C_2=C_2^0,\ldots,C_n=C_n^0$, такий, що функція $y=y(x,C_1^0,\ldots,C_n^0)$ справджує ці початкові умові.

2. *Задача Коші* для диференціального рівняння n-го порядку полягає у знаходженні розв'язку диференціального рівняння, який справджує n початкових умов. Приміром, геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку

$$y'' = f(x, y, y'),$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

полягає в тому, що із множини інтегральних кривих, які проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$, треба вибрати криву, що має заданий кутовий коефіцієнт дотичної в точці M_0, рівний y'_0.

3. Теорема 12.3 (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші).

Якщо в задачі Коші для диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

функція $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ та її частинні похідні $f'_y, f'_{y'}, \ldots, f'_{y^{(n-1)}}$ неперервні в деякій області D, то знайдеться інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta), \delta > 0$, у якому існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, що справджує ці початкові умови.

12.2.2. Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку

1. Рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)} = f(x),}$$

де $f(x)$ — відома неперервна функція.

Ураховуючи, що

$$y^{(k)} = (y^{(k-1)})', \ \int y^{(k)} dx = y^{(k-1)} + C,$$

диференціальне рівняння можна розв'язати n-кратним інтегруванням:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1;$$
$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

....

$$y(x) = \int\Big[\int\Big(...\int f(x)dx...\Big)dx\Big]dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n.$$

2. Виведімо закон прямолінійного руху матеріальної точки, що рухається зі сталим прискоренням a, якщо в початковий момент t_0 вона має відхилення $s(t_0) = s_0$ і швидкість $v(t_0) = v_0$.

❍Треба знайти формулу $s = s(t)$, що виражає пройдений шлях як функцію часу. За умовою (і 2-м законом Ньютона) маємо

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a$$

— диференціальне рівняння 2-го порядку. Послідовно знаходимо

$$\int\frac{d^2s}{dt^2}dt = \int adt, \qquad \frac{ds}{dt} = at + C_1;$$

$$\int\frac{ds}{dt}dt = \int(at + C_1)dt, \quad s(t) = \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Визначаючи довільні сталі з початкових умов і підставляючи їх у загальний розв'язок, дістаємо відомий закон рівноприскореного руху:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2}.\bullet$$

3. Якщо рівняння не містить шуканої функції та її похідних до порядку $(k - 1)$ уключно, тобто

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0,}$$

то порядок рівняння можна понизити до порядку $(n - k)$ заміною

$$\boxed{y^{(k)} = p(x).}$$

Після такої заміни рівняння набуде вигляду

$$F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0.$$

4. Приміром, заміна $p(x) = y''$ понизить порядок ДР $y^{(4)} + xy'' = 0$ до 2-го порядку:

$$y'' = p(x);\ y^{(4)} = p''(x).$$

$$p'' + xp = 0.$$

5. Якщо диференціальне рівняння не містить явно незалежної змінної x, тобто має вигляд

$$\boxed{F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0,}$$

то його порядок можна понизити до $(n - 1)$-го підстановкою

$$\boxed{y' = p(y),}$$

де $p(y)$ розглядають як нову невідому функцію, а y беруть тимчасово за незалежну змінну. У цьому разі всі похідні $\dfrac{d^k y}{dx^k}, k = \overline{1,n}$, треба виразити через похідні від функції p за y:

$$\frac{dy}{dx} = p(y),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dy}(p(y))\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy};$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2},\ldots$$

Зауважмо, що розв'язуючи задачу Коші для диференціального рівняння цього типу, доцільно визначати значення сталих під час розв'язання, а не після знаходження загального розв'язку рівняння.

12.2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку

1. *Лінійним диференціальним рівнянням* n-го порядку називають рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),}$$

де $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ та $f(x)$ — задані на відрізку $[a;b]$ функції.

Якщо $f(x) \equiv 0$ на цьому відрізку, то диференціальне рівняння називають *лінійним однорідним* (*ЛОДР*). Якщо $f(x)\not\equiv 0$, то диференціальне рівняння називають *лінійним неоднорідним* (*ЛНДР*).

З теореми 12.3 випливає твердження:

> якщо коефіцієнти $p_k(x), k = \overline{1,n}$, і права частина $f(x)$ диференціального рівняння
>
> $$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$
>
> неперервні на $[a;b]$, то для довільних початкових умов
>
> $$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
> $$x_0 \in (a;b), \left|y_0^{(k)}\right| < +\infty, k = \overline{0, n-1},$$
>
> існує єдиний розв'язок диференціального рівняння, який справджує ці початкові умови.

2. Запишімо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

у вигляді

$$\boxed{L[y] = 0,}$$

де

$$\boxed{L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y.}$$

Оператор L означено на лінійному просторі функцій $y(x)$, неперервних в інтервалі $(a;b)$, разом зі своїми похідними до n-го порядку включно. Доведімо лінійність оператора, тобто

1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$;

2) $L[Cy] = CL[y], C = \text{const}$.

Доведення. Обмежмося випадком $n = 2$. Маємо

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)'' + p_1(x)(y_1 + y_2)' + p_2(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 + y_2'' + p_1(x)y_2'' + p_2(x)y_2 = L[y_1] + L[y_2].$$
$$L[Cy] = (Cy)'' + p_1(x)(Cy)' + p_2(x)(Cy) =$$
$$= Cy'' + Cp_1(x)y' + Cp_2(x)y = C(y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y) = CL[y]. \blacksquare$$

12.2.4. Властивості лінійного однорідного ДР

1. Якщо функція $y_0(x)$ є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння $L[y] = 0$, то функція $Cy_0(x), C = \text{const}$, також є розв'язком цього рівняння.

2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння $L[y] = 0$, то функція $y_1(x) + y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

3. Лінійна комбінація з довільними сталими коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння $L[y] = 0$ є розв'язком цього ж рівняння.

4. Якщо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$L[y] = 0$$

з дійсними коефіцієнтами $p_k(x), k = \overline{1,n}$, має комплексний розв'язок

$$y(x) = u(x) + iv(x),$$

то дійсна частина цього розв'язку $u(x)$ та його уявна частина $v(x)$ окремо є розв'язками цього ж однорідного лінійного диференціального рівняння:

$$L[u]=0,\ \ L[v]=0.$$

12.2.5. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи функцій

1. Нехай маємо систему функцій $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$, означених в інтервалі $(a;b)$.

Означення 12.3 (лінійно залежної та лінійно незалежної системи функцій).

Систему функцій $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ називають *лінійно незалежною* в інтервалі $(a;b)$, якщо з тотожності

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0,$$

випливає, що

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0.$$

Систему функцій $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ називають *лінійно залежною* в інтервалі $(a;b)$, якщо існують такі сталі $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, які не дорівнюють одночасно нулю, що в цьому інтервалі виконано тотожність за змінною x:

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0$$
$$\left(\left|\alpha_1\right|+\left|\alpha_2\right|+\ldots+\left|\alpha_n\right|\neq 0\right).$$

Лінійна залежність пари функцій $\{y_1(x),y_2(x)\}$ в інтервалі $(a;b)$ означає, що одна з функцій є добутком сталої на іншу функцію:

$$y_1(x)=\alpha y_2(x),\ \ x\in(a;b).$$

2. *Визначником Вронського* або *вронськіаном* системи функцій

$$\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$$

називають визначник

$$\boxed{W[y_1,y_2,\ldots,y_n]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}.}$$

3. Вронськіан дозволяє досліджувати лінійну залежність (незалежність) системи функцій.

Теорема 12.4 (критерій лінійної незалежності розв'язків). Система розв'язків $\{y_1(x),\dots,y_n(x)\}$ лінійного однорідного диференціального рівняння
$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=0$$
з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами, є лінійно незалежною в інтервалі $(a;b)$ тоді й лише тоді, коли вронськіан $W[y_1,y_2,\dots,y_n]$ цієї системи розв'язків відмінний від нуля в інтервалі $(a;b)$.

Умова, що функції $y_1(x),\dots,y_n(x)$ є розв'язками диференціального рівняння є суттєвою. Якщо вронськіан деякої системи функцій відмінний від нуля, то така система є лінійно незалежною, а обернене твердження вже є неправильним, адже існують лінійно незалежні системи функцій з нульовим вронськіаном.

4. Доведімо лінійну незалежність систем функцій:

1) $\{1,x\}$; 2) $\{e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x}\},\lambda_1\neq\lambda_2$; 3) $\{e^{\lambda x},xe^{\lambda x}\}$.

Доведення. 1. $\begin{vmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow\{1,x\}$ — система лінійно незалежна.

2. $\begin{vmatrix}e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix}=\lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}-\lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\neq 0.$

3. $\begin{vmatrix}e^{\lambda x} & xe^{\lambda x}\\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}+x\lambda e^{\lambda x}\end{vmatrix}=e^{2\lambda x}+x\lambda e^{2\lambda x}-x\lambda e^{2\lambda x}=e^{2\lambda x}\neq 0.$ ■

12.2.6. Загальний розв'язок лінійного однорідного ДР

1. Розгляньмо лінійне однорідне диференціальне рівняння
$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=0$$
з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами $p_k(x),k=\overline{1,n}$.

Означення 12.4 (фундаментальної системи розв'язків). Сукупність будь-яких n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$, лінійного однорідного ДР n-го порядку називають його *фундаментальною системою розв'язків*
$$\{y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)\}.$$

Для будь-якого лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку існує фундаментальна система розв'язків $\{y_1(x),\dots,y_n(x)\}$.

Доведення. Доведімо твердження для $n = 2$.

Задаємо два пари початкових умов вигляду

$$y(x_0) = 1, y'(x_0) = 0,$$
$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1.$$

Кожній парі умов відповідає єдиний частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1. \end{cases}$$

Ці два розв'язки утворюють незалежну систему функцій в інтервалі $(a;b)$, оскільки

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, x_0 \in (a;b).$$

Отже, диференціальне рівняння 2-го порядку завжди має фундаментальну системи розв'язків $\{y_1(x), y_2(x)\}$. ■

2. Теорема 12.5 (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного ДР).

Якщо $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ є ФСР лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку, то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

де $C_i = \text{const}, i = \overline{1, n}$.

Доведення. Доведімо теорему для $n = 2$.

Із властивостей лінійного однорідного ДР випливає, що, якщо $\{y_1(x), y_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків ДР, то будь-яка лінійна комбінація

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі, також є розв'язком ДР.

Доведімо, що це $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ буде загальним розв'язком. Тобто існує єдиний частинний розв'язок $y = y(x)$, який справджує початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', x_0 \in (a;b).$$

Підставляючи початкові умови в розв'язок

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0), \end{cases}$$

з невідомими C_1 та C_2.

Визначником цієї системи є вронськіан

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Оскільки розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему в $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$, то $W[y_1, y_2] \neq 0$.

Отже, система щодо C_1 та C_2 завжди має єдиний розв'язок і

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

є загальним розв'язком лінійного однорідного ДР 2-го порядку.■

3. Теорема 12.6 (про тотожність лінійних однорідних ДР).

Якщо два лінійних однорідних диференціальних рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0,$$
$$y^{(n)} + \tilde{p}_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + \tilde{p}_n(x) y = 0,$$

де функції $p_i(x)$ та $\tilde{p}_i(x), i = \overline{1, n}$, — неперервні на відрізку $[a;b]$, мають спільну фундаментальну систему розв'язків $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$, то ці рівняння збігаються, тобто $p_i(x) \equiv \tilde{p}_i(x), x \in [a;b]$.

Це означає, що фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння повністю визначає це рівняння.

4. Побудуймо однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку з ФСР $\{y_1(x), y_2(x)\}$.

$$❍\ y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & y_3''(x) & y''(x) \end{vmatrix} = 0. \bullet$$

12.3. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійні однорідні диференціальні рівняння часто виникають у задачах моделювання процесів, які перебігають без дії зовнішніх сил.

Загального методу розв'язання таких рівнянь зі змінними коефіцієнтами не існує, а розв'язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами можна звести до розв'язання алгебричних рівнянь.

12.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку

1. Розгляньмо лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку

$$\boxed{y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,}$$

де p_1, p_2 — дійсні числа. Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння, треба знайти будь-які два його лінійно незалежні розв'язки. Згідно з *методом Ойлера*, шукатимемо їх у вигляді

$$\boxed{y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}.}$$

Звідси

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставляючи вирази для y, y' та y'' в диференціальне рівняння, дістаємо

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то повинна виконуватись рівність

$$\boxed{\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0,}$$

яку називають *характеристичним рівнянням* для лінійного однорідного диференціального рівняння, а його ліву частину

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

називають *характеристичним многочленом*.

2. Корені квадратного характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 можуть бути:

1) дійсними різними;

2) дійсними рівними;

3) комплексними.

1-й випадок. Якщо корені λ_1, λ_2 характеристичного многочлена дійсні й різні, то частинними розв'язками диференціального рівняння є функції:

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.}$$

Ці розв'язки лінійно незалежні $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ і, отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння. Загальний розв'язок має вигляд

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.}$$

2-й випадок. Нехай тепер корені λ_1, λ_2 характеристичного многочлена дійсні й рівні: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Один частинний розв'язок

$$\boxed{y_1 = e^{\lambda x}}$$

дістаємо відразу. Другий частинний розв'язок, лінійно незалежний з першим, шукатимемо у вигляді

$$y_2(x) = e^{\lambda x} u(x),$$

де $u(x)$ — нова невідома функція. Диференціюючи, дістаємо

$$y_2' = \lambda e^{\lambda x} u + e^{\lambda x} u',$$

$$y_2'' = \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} u' + e^{\lambda x} u''.$$

Підставляючи одержані вирази в диференціальне рівняння, маємо

$$e^{\lambda x}[u'' + (2\lambda + p_1)u' + (\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)u] = 0.$$

Оскільки λ — двократний корінь характеристичного рівняння, то

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0,\ 2\lambda + p_1 = 0.$$

Отже,

$$u'' = 0 \Rightarrow u = Ax + B, \quad A, B = \mathrm{const}.$$

Зокрема, можна покласти: $A = 1, B = 0$; тоді

$$\boxed{u = x.}$$

За частинний розв'язок рівняння, лінійно незалежний з y_1, можна взяти

$$\boxed{y_2 = xe^{\lambda x}.}$$

Справді, цей розв'язок лінійно незалежний з першим, оскільки

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x \neq \mathrm{const}.$$

Розв'язки $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння. Загальний розв'язок у цьому разі має вигляд

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).}$$

3-й випадок. Нехай корені λ_1 та λ_2 характеристичного многочлена комплексні. Оскільки коефіцієнти p_1 та p_2 характеристичного многочлена дійсні, то комплексні корені є комплексно спряженими. Покладаємо

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \beta > 0.$$

Частинні розв'язки диференціального рівняння можна записати як

$$\boxed{\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha + i\beta)x}, \tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha - i\beta)x}.}$$

Це комплекснозначні функції дійсного аргументу x, а нас цікавлять дійсні розв'язки. За допомогою Ойлерової формули

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$

частинний розв'язок $\tilde{y}_1$ диференціального рівняння можна записати як

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Із властивостей лінійного однорідного ДР випливає, що частинними розв'язками диференціального рівняння будуть також окремо дійсна та уявна частина

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \operatorname{tg}\beta x \ne \mathrm{const}$$

і, отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння. Загальний розв'язок у цьому разі має вигляд

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).}$$

3. Знайдімо загальні розв'язки диференціальних рівнянь:
1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' - 2y' + 2y = 0$; 3) $y'' - 2y' + y = 0$.

❍1. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x} \Leftrightarrow \boxed{y = C_1e^x + C_2e^{2x}.}$$

2. $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = -1$; $\lambda_{1,2} = 1 \pm i, \alpha = 1, \beta = 1$.

$$y = e^x\cos x, y_2 = e^x\sin x \Leftrightarrow \boxed{y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).}$$

3. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$; $\lambda_{1,2} = 1$.

$$\boxed{y_1 = e^x, y_2 = xe^x \Leftrightarrow y = e^x(C_1 + C_2x).}$$ ●

12.3.2. Рівняння вільних механічних коливань

Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами виникають у задачах про механічні та електричні коливання. Розгляньмо *рівняння вільних механічних коливань*

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2} + h\frac{dy}{dt} + ky = 0,}$$

де y — відхилення точки, що коливається, від точки рівноваги, t — час, m — маса точки, h — коефіцієнт тертя (уважають, що сила тертя пропорційна швидкості), $k > 0$ — коефіцієнт пружності, відновлюваної сили (уважаймо, що ця сила пропорційна відхиленню). Характеристичне рівняння для рівняння коливань

$$m\lambda^2 + h\lambda + k = 0$$

має корені

$$\lambda_{1,2} = -\frac{h}{2m} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

1. Якщо тертя досить велике, $h^2 > 4mk$, то ці корені дійсні й від'ємні. Загальний розв'язок рівняння в цьому разі матиме вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Оскільки $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то з останньої рівності випливає, що за великого тертя відхилення точки від положення рівноваги з часом (тобто, коли $t \to \infty$) прямує до нуля, не коливаючись (рис. 12.3).

2. Якщо тертя мале, $h^2 < 4mk$, то характеристичне рівняння має комплексно спряжені корені

$$-\alpha \pm i\beta,\ \alpha = \frac{h}{2m} > 0, \beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}.$$

Загальний розв'язок рівняння у цьому разі

$$y = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t + \delta)\ \ (\alpha > 0).$$

У разі малого тертя точка коливатиметься згасально (рис. 12.4).

3. Якщо тертя немає, тобто $h = 0$, то характеристичне рівняння має суто уявні корені

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Загальний розв'язок у цьому разі має вигляд

$$y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t = A\sin(\omega t + \delta),$$

де $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, тобто в цьому разі точка коливається гармонічно незгасально з певною частотою, довільними амплітудою та початковою фазою (рис. 12.5).

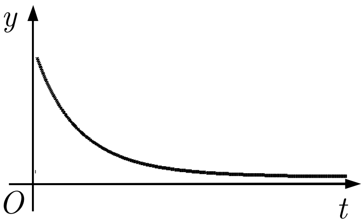


Рис. 12.3. Випадок великого тертя

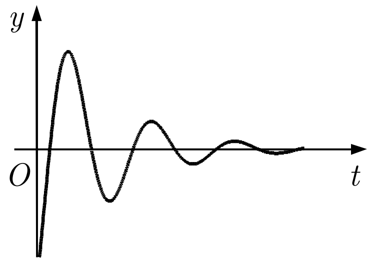


Рис. 12.4. Випадок малого тертя

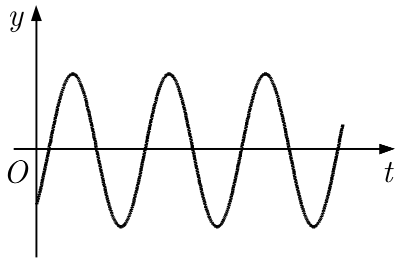


Рис. 12.5. Випадок коливання без тертя

12.3.3. Лінійні однорідні ДР n-го порядку

Розгляньмо лінійне однорідне диференціальне рівняння довільного порядку $n \geq 1$ зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{L[u] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0,}$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — дійсні числа. Розв'язуємо це рівняння так само як і рівняння 2-го порядку за методом Ойлера.

1. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\boxed{y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}.}$$

Підставляючи замість y функцію $e^{\lambda x}$ у диференціальне рівняння

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n) = 0,$$

дістаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

2. Знаходьмо корені характеристичного рівняння.

3. Виписуємо частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння, керуючись тим, що:

а) кожному дійсному однократному кореню λ характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$e^{\lambda x};$$

б) кожній парі однократних комплексно-спряжених коренів

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

відповідає пара лінійно незалежних частинних розв'язків

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \ e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

в) кожному дійсному кореню λ кратності r відповідає r лінійно незалежних частинних розв'язків

$$e^{\lambda x}, \ x e^{\lambda x}, \ \ldots, \ x^{r-1} e^{\lambda x};$$

г) кожній парі комплексно-спряжених коренів

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \text{ кратності } \mu$$

відповідає 2μ частинних розв'язків

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\; xe^{\alpha x}\cos\beta x,\; \ldots,\; x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\; xe^{\alpha x}\sin\beta x,\; \ldots,\; x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

4. Маючи n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ — фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння, дістаємо загальний розв'язок цього рівняння

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),}$$

де $C_1,\ldots,C_n$ довільні сталі.

Схема розв'язання ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ЛОДР} \to \text{ХР} \to \text{корені ХР} \to \text{ФСР ЛОДР} \to \\ \to \text{загальний розв'язок ЛОДР}\end{array}}$$

5. Розв'яжімо методом Ойлера диференціальне рівняння $y^{(6)} - y'' = 0$.

❍Записуємо й розв'язуємо характеристичне рівняння:

$\lambda^6 - \lambda^2 = 0; \lambda^2(\lambda^4 - 1) = 0; \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0;$

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1, \lambda_{5,6} = \pm i.$$

Знаходимо 6 лінійно незалежних розв'язків ЛОДР:

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^x, y_4 = e^{-x}, y_5 = \cos x, y_6 = \sin x.$$

Записуємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + C_5\cos x + C_6 \sin x. \bullet$$

12.4. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння можуть описувати різноманітні процеси із зовнішнім збуренням.

Ключовим питанням розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь є відшукання частинного розв'язку.

12.4.1. Властивості розв'язків лінійного неоднорідного ДР

1. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння можна записати як

$$\boxed{L[u] = f(x),}$$

де $L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y$.

Цьому лінійному неоднорідному ДР відповідає лінійне однорідне ДР

$$L[y] = 0.$$

Теорема 12.7 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР).

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$L[y] = f(x)$$

дорівнює сумі загального розв'язку $y_{\text{заг. одн.}}(x)$ відповідного лінійного однорідного й будь-якого частинного розв'язку $y_{\text{част. неодн.}}(x)$ неоднорідного ДР, тобто

$$y_{\text{заг. неодн.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}.$$

2. Теорема 12.8 (принцип суперпозиції).

Якщо функція $y_1(x)$ є розв'язком рівняння

$$L[y] = f_1(x),$$

а $y_2(x)$ є розв'язком рівняння

$$L[y] = f_2(x),$$

то функція $y_1(x) + y_2(x)$ є розв'язком рівняння

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x).$$

3. Якщо диференціальне рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$L[y] = U(x) + iV(x),$$

де функції $U(x)$ та $V(x)$ — дійсні, має розв'язок

$$y(x) = u(x) + iv(x),$$

то дійсна частина цього розв'язку $u(x)$ та його уявна частина $v(x)$ окремо є розв'язками рівнянь

$$L[u] = U(x), \; L[v] = V(x).$$

12.4.2. Інтегрування лінійного неоднорідного ДР методом варіювання довільних сталих

Розгляньмо детально випадок лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x),}$$

де $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функція f неперервна на $[a;b]$.

Для інтегрування лінійного неоднорідного ДР застосуймо *метод Лаґранжа* (*варіації довільних сталих*).

1. Знаходимо загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$

у вигляді

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2. Згідно з гіпотезою Лаґранжа загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР шукаємо у вигляді

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),}$$

де $C_1(x), C_2(x)$ — нові невідомі функції.

3. Щоб знайти функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$, потрібно одержати два співвідношення для них.

Знаходимо вирази для $y'(x)$ та $y''(x)$.

$$y'(x) = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Для того щоб у вираз для $y''(x)$ не входили похідні 2-го порядку $C_1''(x)$ та $C_2''(x)$, накладаємо на функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ умову

$$\boxed{C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.}$$

Отже,

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

$$y''(x) = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Щоб знайти ще одне співвідношення, підставляємо в диференціальне рівняння замість $y(x), y'(x)$ та $y''(x)$ відповідні вирази:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) +$$
$$+p_1[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + p_2[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = f(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C_1(x)\underbrace{[y_1''(x) + p_1y_1'(x) + p_2y_1(x)]}_{\text{вираз у дужках дорівнює нулю}} + C_2(x)\underbrace{[y_2''(x) + p_1y_2'(x) + p_2y_2(x)]}_{\text{вираз у дужках дорівнює нулю}} +$$
$$+C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).}$$

Для знаходження функцій $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ дістаємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}}$$

Визначником цієї системи є вронськіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки система розв'язків $\{y_1(x), y_2(x)\}$ є фундаментальною.

4. Інтегруючи $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$, знаходимо шукані функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

5. Записуємо загальний розв'язок ЛНДР, підставляючи знайдені функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ у вираз для $y_{\text{заг. неодн.}}$.

6. Так само розв'язок неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + ... + p_ny = f(x),$$

де $p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbb{R}$, функція f неперервна на $[a;b]$, за методом Лаґранжа шукають у вигляді

$$\boxed{y_{\text{заг. неодн.}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x),}$$

де $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ — невідомі функції, $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ — ФСР відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

Значення $C_1'(x), C_2'(x), ..., C_n'(x)$ знаходять, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + ... + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + ... + C_n'y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + ... + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + ... + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

12.4.3. Лінійні неоднорідні ДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

1. Функцію вигляду

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)}$$

називають *функцією спеціального вигляду*.

2. Розгляньмо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі спеціальною правою частиною

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

де $p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbb{R}$; $P_l(x)$ та $Q_m(x)$ — многочлени порядку l та m.

За теоремою про структуру загального розв'язку ЛНДР, загальний розв'язок цього рівняння є сумою загального розв'язку $y_{\text{заг. одн.}}$ відповідного ЛОДР

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0$$

і частинного розв'язку $y_{\text{част. неодн.}}$ ЛНДР:

$$y_{\text{заг. неодн.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}.$$

Для знаходження частинного розв'язку ЛНДР зі спеціальною правою частиною можна скористатись *методом невизначених коефіцієнтів* підбирання частинного розв'язку.

3. Розгляньмо окремі випадки правих частин спеціального вигляду.

1-й випадок $(\alpha = \beta = 0)$. $f(x) = P_l(x) = a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + ... + a_l$.

А. Якщо $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = \overline{P}_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + ... + A_l,}$$

де $A_i, i = \overline{0, l}$, — невизначені коефіцієнти.

Б. Якщо $\lambda = 0$ є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР кратності r (є «резонанс» порядку r), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = x^r \overline{P}_l(x) = x^r(A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + ... + A_l),}$$

де $A_i, i = \overline{0, l}$, — невизначені коефіцієнти.

Доведення. Без утрати загальності розгляньмо випадок $n = 2$.

1. Нехай $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 \neq 0.$$

Отже,

$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = y_* = \overline{P}_l(x),}\ y_*' = \overline{P}_l'(x), y_*'' = \overline{P}_l''(x).$$

Після підставлення функції y_* та її похідних у диференціальне рівняння

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = P_m(x)$$

дістаємо

$$\overline{P}_l''(x) + p_1\overline{P}_l'(x) + p_2\overline{P}_l(x) = P_l(x).$$

Зліва — многочлен степеня l з невизначеними коефіцієнтами, справа — многочлен степеня l з відомими коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x дістаємо систему $(l+1)$ алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів $A_0, A_1, ..., A_l$.

2. Нехай $\lambda = 0$ є коренем кратності $r = 1$ характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0.$$

Звідки $p_2 = 0$.

У цьому разі шукати розв'язок у вигляді $y_* = \overline{P}_l(x)$ вже не можна, оскільки після підставляння дістаємо рівність

$$\overline{P}_l''(x) + p_1\overline{P}_l'(x) = P_l(x).$$

У лівій частині — многочлен степеня $(l-1)$, у правій частині — многочлен степеня l.

Щоб одержати тотожність многочленів у розв'язку y_* треба мати многочлен степеня $(l+1)$. Тому частинний розв'язок шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = x\overline{P}_l(x).}$$

3. Якщо $\lambda = 0$ є коренем кратності $r = 2$ характеристичного многочлена, то так само з'ясовуємо, що частинний розв'язок треба шукати вже у вигляді

$$\boxed{y_* = x^2\overline{P}_l(x).}\ \blacksquare$$

2-й випадок $(\beta = 0)$. $f(x) = e^{ax}P_l(x)$.

А. Якщо $\lambda = a$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = e^{\alpha x}\overline{P}_l(x) = e^{\alpha x}(A_0x^l + A_1x^{l-1} + ... + A_l),}$$

де $A_i, i = \overline{0,l}$, — невизначені коефіцієнти.

Б. Якщо $\lambda = a$ є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР кратності r (є «резонанс» порядку r), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = x^r e^{\alpha x}\overline{P}_l(x) = x^r e^{\alpha x}(A_0x^l + A_1x^{l-1} + ... + A_l),}$$

де $A_i, i = \overline{0,l}$, — невизначені коефіцієнти.

3-й випадок ($\alpha = 0, l = 0, m = 0$). $f(x) = a\cos\beta + b\sin\beta x, \beta > 0$.

А. Якщо $\lambda = \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = A\cos\beta x + B\sin\beta x,}$$

де A та B — невизначені коефіцієнти.

Б. Якщо $\lambda = \beta i$ є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР кратності r (є «резонанс» порядку r), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x),}$$

де A та B — невизначені коефіцієнти.

Загальний випадок. $f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$.

А. Якщо $\lambda = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = e^{\alpha x}(\overline{P}_s(x)\cos\beta x + \overline{Q}_s(x)\sin\beta x),}$$

де $\overline{P}_s(x)$ та $\overline{Q}_s(x)$ — многочлени порядку $s = \max\{l, m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

Б. Якщо $\lambda = \alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння кратності r відповідного ЛОДР (є «резонанс» порядку r), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$\boxed{y_* = x^r e^{\alpha x}(\overline{P}_s(x)\cos\beta x + \overline{Q}_s(x)\sin\beta x),}$$

де $\overline{P}_s(x)$ та $\overline{Q}_s(x)$ — многочлени порядку $s = \max\{l, m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

4. Щоб знайти невизначені коефіцієнти многочленів, треба підставити функцію y_* в ЛНДР і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівняння. При цьому треба прирівнювати окремо відповідні коефіцієнти тих многочленів, що стоять при $\cos\beta x$, і окремо — коефіцієнти многочленів при $\sin\beta x$.

5. Якщо права частина ЛНДР є сумою функцій спеціального вигляду, то для застосування методу невизначених коефіцієнтів використовують принцип суперпозиції.

6. Запишімо частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (шаблон для частинного розв'язку) ЛНДР $y'' + 2y' = x^2 + \sin 2x$.

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0; \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2.$$

Функція $f(x) = x^2 + \sin 2x$ є суперпозицією функцій $f_1(x) = x^2$ та $f_2(x) = \sin 2x$. Число $k_1 = 0$ є коренем кратності $r_1 = 1$ характеристичного рівняння, а число $k_2 = 2i$ не є коренем характеристичного многочлена.

Отже, частинний розв'язок ЛНДР шукатимемо у вигляді

$$y_* = \underbrace{x(A_0x^2 + A_1x + A_2)}_{\text{відповідає } x^2} + \underbrace{B\cos 2x + C\sin 2x}_{\text{відповідає } \sin 2x}.$$

12.4.4. Вимушені коливання. Резонанс

Розгляньмо випадок, коли коливний рух відбувається в середовищі без опору та на коливальну систему діє періодична зовнішня сила

$$\varphi(t) = H\sin\omega_1 t.$$

Тоді рух точки описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням

$$y'' + \omega^2 y = H\sin\omega_1 t.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є сума загального розв'язку однорідного рівняння

$$y_{\text{з.о.}} = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Розгляньмо два випадки.

1. *Нерезонансний випадок.* Припустімо, що $\omega_1 \neq \omega$, тобто частота зовнішньої сили відмінна від частоти вільних коливань. Отже, частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t.$$

Підставляючи цю функцію у ЛНДР, маємо

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2}\sin\omega_1 t;$$

$$y_{\text{з.н.}} = A\sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2}\sin\omega_1 t.$$

У разі, якщо ω та ω_1 близькі за величиною, матеріальна точка коливається з великою сталою амплітудою (рис. 12.6).

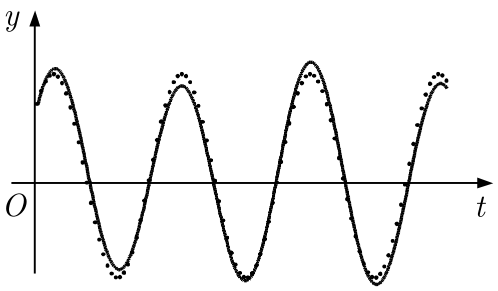


Рис. 12.6. Нерезонансний випадок коливань

2. *Резонансний випадок.* Нехай тепер $\omega = \omega_1$, тобто частота зовнішньої сили дорівнює частоті вільних коливань. Частинний розв'язок ЛНДР треба шукати у вигляді

$$y_{\text{ч.н.}} = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Підставляючи в ДР, маємо

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t;$$

$$y_{\text{з.н.}} = A\sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t.$$

Амплітуда коливань із плином часу необмежено зростає (рис. 12.7).

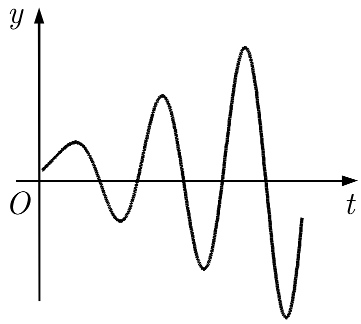


Рис. 12.7. Резонансний випадок коливань

12.5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для розв'язання багатьох задач математики, фізики й техніки часто потрібно розглядати декілька невідомих функцій. Знаходження цих функцій може привести до кількох ДР, які утворюють систему.

12.5.1. Задача Лотки — Вольтерри (система хижак-жертва)

Розгляньмо співіснування двох видів, приміром, риб. Позначимо кількість особин 1-го виду $x(t)$, 2-го виду — $y(t)$. Припускаємо:

1) 1-й вид харчується продуктами середовища, яких завжди вдосталь;

2) якби 1-й вид існував окремо, то кількість його особин неперервно б збільшувалась зі швидкістю пропорційною наявній кількості особин: $x' = k_1 x$, $k_1 > 0$.

3) особини 2-го виду харчуються лише особинами 1-го виду;

4) якби 2-й вид існував окремо, то він би поступово вимирав: $y' = -k_2 y$, $k_2 > 0$.

Розгляньмо тепер випадок, коли види співіснують. Припускаємо також, що коефіцієнт k_1 зменшується на величину пропорційну y. Так само, що коефіцієнт k_2 завдяки наявності 1-го виду (харчів) змінюється на величину пропорційну x. За цих припущень маємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = (k_1 - k_3 y)x, \\ y' = -(k_2 - k_4 x)y, \end{cases}$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 — додатні числа.

12.5.2. Основні поняття

1. *Нормальною системою* n диференціальних рівнянь 1-го порядку з невідомими функціями $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ називають систему вигляду

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

де функції $f_i, i = \overline{1, n}$, означені в деякій $(n+1)$-вимірній області D змінних $t, x_1, \dots, x_n$.

Розв'язком системи ДР в інтервалі $(a;b)$ називають сукупність n функцій $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, неперервно диференційовних в $(a;b)$, які справджують систему.

Задачу Коші для системи ДР формулюють так: знайти розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ цієї системи, який справджує *початкові умови*:

$$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}.$$

Можна також сформулювати теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для нормальної системи аналогічну теоремі 12.1 і означення загального та частинного розв'язку системи ДР.

2. Перехід від диференціального рівняння до системи ДР. Диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

можна звести до нормальної системи ДР, покладаючи

$$\begin{cases} x = t, \\ y = x_1, \\ y' = x_1' = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = x_{n-1}' = x_n. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x, \\ x_1 = y, \\ x_2 = y', \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Одержуємо нормальну систему з n диференціальних рівнянь 1-го порядку, еквівалентну одному диференціальному рівнянню n-го порядку:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

3. І, навпаки, нормальну систему з n рівнянь 1-го порядку за певних умов можна звести до одного диференціального рівняння n-го порядку. Такий метод розв'язання системи називають *методом виключення*.

Приміром, зведімо нормальну систему ДР

$$\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x \end{cases}$$

до диференціального рівняння 2-го порядку:

$$\begin{cases} y = x' - t, y' = x'' - 1, \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow x'' - 1 = x; \;\; x'' - x = 1.$$

Отже, теорію диференціальних рівнянь можна звести до теорії нормальних систем диференціальних рівнянь і навпаки.

12.5.3. Лінійні системи диференціальних рівнянь

1. Обмежмося розглядом лінійних нормальних систем із двох ДР:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t). \end{cases}$$

Цю систему можна записати в матричному вигляді

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f},$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, або

$$L[\vec{x}(t)] = \vec{f}(t),$$

де $L = \dfrac{d}{dt} - A.$

Якщо стовпець $\vec{f} \equiv \vec{0}$, то лінійну систему ДР називають *однорідною*, якщо $\vec{f} \not\equiv \vec{0}$, то систему називають *неоднорідною*.

2. Якщо стовпці $\vec{x}_1(t)$ та $\vec{x}_2(t)$ є розв'язками лінійної однорідної системи $L[\vec{x}] = \vec{0}$, то для довільних сталих C_1 та C_2 стовпець $C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$ також є розв'язком цієї системи.

Теорема 12.9 (про структуру загального розв'язку лінійної однорідної системи).

Загальним розв'язком нормальної лінійної однорідної системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами $a_{ij}(t), i, j = 1,2$, є лінійна комбінація двох лінійно незалежних в інтервалі $(a;b)$ розв'язків $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ системи

$$\vec{x}_{\text{заг.одн.}} = C_1\vec{x}_1(t) + C_1\vec{x}_2(t),$$

де $C_1, C_2 = \text{const}$.

12.5.4. Метод Ойлера розв'язання однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розгляньмо нормальну лінійну однорідну систему із двох ДР зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

1. Шукаємо розв'язок однорідної системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

у вигляді

$$\boxed{\vec{x} = \vec{\gamma} e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 e^{\lambda t} \\ \gamma_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}.}$$

2. Підставляючи цей розв'язок у систему і перетворюючи її, дістаємо

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

3. Ця система має ненульовий розв'язок тоді й лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Це рівняння називають *характеристичним рівнянням* для системи.

1-й випадок. Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 дійсні різні, то знаходять відповідні їм нетривіальні розв'язки $\vec{\gamma}_1$ та $\vec{\gamma}_2$ алгебричної системи і записують загальний розв'язок однорідної системи ДР у вигляді

$$\boxed{\vec{x}_{\text{заг. одн.}} = C_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 t}, C_1, C_2 = \text{const}.}$$

2-й випадок. Якщо корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння дійсні й рівні, то загальний розв'язок системи шукають у вигляді

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{\lambda t}, A, B, C, D = \text{const}.$$

3-й випадок. Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 комплексно спряжені:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

то знаходять нетривіальний розв'язок алгебричної системи $\vec{\gamma}$, який відповідає $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тоді

$$\vec{x}_1(t) = \operatorname{Re}(\vec{\gamma} e^{\alpha + i\beta}), \ \vec{x}_2(t) = \operatorname{Im}(\vec{\gamma} e^{\alpha + i\beta}) \Rightarrow$$
$$\vec{x}_{\text{заг. одн.}}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t), C_1, C_2 = \text{const}.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

12.1.1. Визначте порядок диференціального рівняння:

1) $x^5y' = 1$; 2) $(y'')^3 + x = 1$; 3) $y''' + x^4y' = 2$; 4) $\sin y^{(4)} + x^5 = y^6$.

12.1.2. Доведіть, що функція $y = e^{x^2}$ є розв'язком задачі Коші: $y' = 2xy,\ y(0) = 1$.

12.1.3. Подайте приклад диференціального рівняння, яке:

1) не має жодного дійсного розв'язку;

2) має лише єдиний розв'язок $y = 0$.

12.1.4. Чи може мати диференціальне рівняння $y' = f(x)$, де функція f є неперервною в $(a;b)$, особливі розв'язки?

12.1.5. Визначте тип диференціального рівняння (якщо ДР належить до кількох типів, укажіть усі):

1) $y' + \dfrac{y}{x} = 0$; 2) $y' + x^2y = y^3$; 3) $y' = y\operatorname{tg} x + 2$; 4) $y' = \ln y - \ln x$; 5) $ydx + xdy = 0$.

12.1.6. Запишіть рівняння геометричного місця точок $(x;y)$, які є точками максимуму чи мінімуму розв'язків диференціального рівняння $y' = f(x,y)$. Як відрізнити точку максимуму від точки мінімуму?

12.1.7. Запишіть рівняння геометричного місця точок перегину графіків функцій рівняння:

1) $y' = y - x^2$; 2) $y' = f(x,y)$.

12.1.8. Складіть диференціальне рівняння сукупності ліній $y = e^{Cx}, C = \text{const}$.

12.1.9. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння $y' + 2x = xy$, який обмежений, коли $x \to +\infty$.

12.1.10. Знайдіть загальний інтеграл диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)}.$$

12.1.11. Для яких α та β диференціальне рівняння $y' = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ зводиться до однорідного за допомогою заміни вигляду $y = z^m$?

12.1.12. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + p(x)y = 0$, де $p(x)$ неперервна в інтервалі $(a;b)$, якщо відомий ненульовий частинний розв'язок $y_1(x)$ цього рівняння.

12.1.13. Знайдіть такі функції $p(x)$ та $f(x)$, щоб розв'язками диференціального рівняння $y' + p(x)y = f(x)$ були функції $y = 1$ та $y = x^3 + 1$.

12.1.14. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y' + p(x)y = f(x)$, якщо відомі два його частинних лінійно незалежних розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$.

12.1.15. Нехай y_1 та y_2 два розв'язки рівняння $y' + p(x)y = f(x)$, $f(x) \neq 0$. Для якого співвідношення між сталими C_1 та C_2 функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ є розв'язком заданого рівняння?

12.1.16. Диференціюванням зведіть інтегральне рівняння $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$ до диференціального, і знайдіть його (єдиний) розв'язок.

12.1.17. Підберіть розв'язок диференціального рівняння Ріккаті $y' + \dfrac{y}{x} + y^2 = \dfrac{4}{x^2}$ у вигляді $y = \dfrac{a}{x}$.

12.1.18. Розгляньте диференціальне рівняння $y' = e^{-x^2}$.

1. Поясніть чому розв'язок диференціального рівняння повинен бути зростаючою функцією на будь-якому проміжку.

2. Чому дорівнює $\lim\limits_{x \to +\infty} y'$? Чи має графік розв'язку асимптоту?

3. Визначте інтервал, у якому графік розв'язку опуклий донизу і в якому опуклий догори?

4. Зобразіть ескіз графіка розв'язку диференціального рівняння, виходячи з досліджень п. 1—3.

12.1.19. Знайдіть таке значення k, щоб диференціальне рівняння $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$ було рівнянням у повних диференціалах.

12.2.1. Складіть лінійне однорідне диференціальне рівняння (найнижчого можливого порядку), яке має частинні розв'язки: $1, \cos x$.

12.2.2. Перевірте, що функції $y_1 = x^4$ та $y_2 = x^3$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0, x \in (0;+\infty).$$

Знайдіть загальний розв'язок рівняння.

12.2.3. Нехай $y_1 = e^x$ та $y_2 = e^{-x}$ є розв'язками однорідного лінійного диференціального рівняння. Поясніть, чому функції $y_3 = \operatorname{ch} x$ та $y_4 = \operatorname{sh} x$ також є розв'язками диференціального рівняння.

12.3.1. Складіть лінійне однорідне диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (найнижчого можливого порядку), яке має частинний розв'язок:

1) $y = 2$; 2) $y = e^{3x}$; 3) $\sin 2x$; 4) $e^{3x}\cos 2x$;

5) $y = 3x$; 6) $y = xe^{2x}$; 7) $x\cos 3x$.

12.3.2. Для яких значень q існують ненульові розв'язки диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$, які прямують до нуля, коли $x \to +\infty$?

12.3.3. Для яких значень p та q всі розв'язки диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$ прямують до нуля, коли $x \to +\infty$?

12.3.4. Для яких значень p та q всі розв'язки диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$ обмежені:

1) на всій числовій осі; 2) для всіх $x \geq 0$?

12.3.5. Для яких значень p та q всі розв'язки диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$:

1) є періодичними функціями від x;

2) мають нескінченну кількість нулів на числовій осі.

12.3.6. Розв'яжіть рівняння Ойлера $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, шукаючи розв'язок у вигляді $y = x^r$.

12.3.7. Запишіть однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, якщо його характеристичне рівняння має розв'язки:

1) $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1$; 2) $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$.

12.4.1. Знайдіть коефіцієнти в диференціальному рівнянні $y'' + py' + qy = a\sin 2x + b\cos 2x$, якщо відомий частинний розв'язок $y = e^x - 1 + \sin 2x$.

12.4.2. Для яких k та ω рівняння $y'' + k^2 y = \sin\omega t$ має хоча б один періодичний розв'язок?

12.4.3. Подайте приклад правої частини спеціального вигляду $f(x)$, якщо частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ треба шукати за шаблоном:

1) $y_* = A + (Bx + C)e^{3x}$;

2) $y_* = Axe^x + B\sin 2x + C\cos 2x$.

12.4.4. Подайте приклад правої частини спеціального вигляду $f(x)$, якщо частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 4y = f(x)$ треба шукати за шаблоном:

1) $y_* = Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^{2x}$;

2) $y_* = (Ax + B)\sin 2x + (Cx + D)\cos 2x$.

12.4.5. Подайте приклад правої частини спеціального вигляду $f(x)$, якщо частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = f(x)$ треба шукати за шаблоном:

1) $y_* = (Ax + B)e^{2x} + Cx + D + E\sin 3x + F\cos 3x$;

2) $y_* = e^{-x}(A\sin 2x + B\cos 2x) + x(C\sin 2x + D\cos 2x)$.

12.5.1. Запишіть характеристичне рівняння системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = 6x + 4y \end{cases}$$

і диференціальне рівняння щодо функції y, до якого зводиться система.

12.5.2. Перейдіть від диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 1$ до еквівалентної нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь.

Відповіді

12.1.1. 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

12.1.3. 1) $y'^2 + y^2 = -1$; 2) $y'^2 + y^2 = 0$.

12.1.4. Ні, не може.

12.1.5. 1) ДР з відокремлюваними змінними, однорідне, лінійне однорідне 1-го порядку; 2) ДР Бернуллі; 3) лінійне неоднорідне ДР 1-го порядку; 4) однорідне ДР;
5) ДР з відокремлюваними змінними, у повних диференціалах, лінійне однорідне 1-го порядку, однорідне ДР.
12.1.6. $f(x,y)=0$; $f'_x<0-\max, f'_x>0-\min$.
12.1.7. 1) $y=x^2+2x$; 2) $f'_x+f\cdot f'_y=0$.
12.1.8. $y'=\dfrac{y\ln y}{x}$.
12.1.9. $y=2$.
12.1.10. $\dfrac{1}{x}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)=C$.
12.1.11. $\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}=1$.
12.1.12. $Cy_1(x),\ C\in\mathbb{R}$.
12.1.13. $p(x)=f(x)=-\dfrac{3}{x}$.
12.1.14. $y=y_1+C(y_2-y_1)$.
12.1.15. $C_1+C_2=1$.
12.1.16. $y=2e^x-1$.
12.1.17. $y=\pm\dfrac{2}{x}$.
12.1.18. 1) оскільки $y'>0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y'=0$, має горизонтальну асимптоту; 3) для $x\in(-\infty;0)$ опуклий донизу, для $x\in(0;+\infty)$ опуклий догори.
12.1.19. $k=10$.
12.2.1. $y''\sin x-y'\cos x=0$.
12.2.2. $y=C_1x^3+C_2x^4,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
12.2.3. Оскільки $y_3=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_2,\ y_4=\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2$.
12.3.1. 1) $y'=0$; 2) $y'-3y=0$; 3) $y''+4y=0$; 4) $y''-6y'+14y=0$; 5) $y''=0$;
6) $y''-4y'+4y=0$; 7) $y^{(4)}+6y''+9y=0$.
12.3.2. $q<0$ або $p>0, q\geq 0$.
12.3.3. $p>0, q>0$.
12.3.4. 1) $p=0, q>0$; 2) $p>0, q>0$ або $p=0, q>0$.
12.3.5. 1) $p=0, q>0$; 2) $p^2<4q$.
12.3.6. $y=C_1x+C_2x^2$.
12.3.7. 1) $y'''-2y''+y'=0$; 2) $y''-4y'+13y=0$.
12.4.1. $p=-1, q=0, a=-4, b=-2$.

12.4.2. $\omega \neq \pm k$ або $\omega = k = 0$.

12.4.3. 1) $f(x) = 1 - xe^{3x}$; 2) $f(x) = 2e^{x} - \cos 2x$.

12.4.4. 1) $f(x) = x^2 - 5 + 2e^{2x}$; 2) $f(x) = x \sin 2x - \cos 2x$.

12.4.5. 1) $f(x) = -3xe^{2x} + 2x - 5 - \cos 3x$;

2) $f(x) = 3e^{-x} \sin 2x - e^{-x} \cos 2x + 4 \sin 2x$.

12.5.1. $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$, $y'' - 11y' + 10y = 0$.

12.5.2. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 1, \\ y' = x. \end{cases}$

Формули, твердження, алгоритми

12.1. Диференціальні рівняння 1-го порядку

❶ ***Диференціальне рівняння (ДР) 1-го порядку.*** $$y' = f(x,y), \quad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$ $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$	❷ ***Задача Коші для ДР 1-го порядку.*** Задачу знаходження розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x,y)$, який справджує *початкову умову* $$y(x_0) = y\,\big|_{x=x_0} = y_0,$$ називають *задачею Коші.*
❸ ***Загальний, частинний і особливий розв'язки ДР.*** Сукупність функцій $y = \varphi(x,C)$, де C — довільна стала, називають *загальним розв'язком* ДР $y' = f(x,y)$, якщо: 1) функції $y = \varphi(x,C)$ є розв'язками цього ДР для будь-якого значення C; 2) для будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$ таке, що функція $y = \varphi(x,C_0)$ справджує цю умову.	Загальний розв'язок у неявному вигляді $\Phi(x,y,C) = 0$ називають *загальним інтегралом* ДР. *Частинним розв'язком* ДР $y' = f(x,y)$ називають розв'язок, який дістають із загального розв'язку за певного значення довільної сталої C. Розв'язок ДР, який не можна одержати із загального розв'язку, за жодного значення довільної сталої, включаючи $\pm\infty$, називають *особливим.*
❹ ***Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.*** Якщо у ДР $y' = f(x,y)$ функція $f(x,y)$ і її похідна $f'_y(x,y)$ неперервні в деякій області D, яка містить точку $M_0(x_0;y_0)$,	то знайдеться інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, у якому існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ цього рівняння, що справджує початкову умову $$y(x_0) = y_0.$$

12.2. Деякі типи диференціальних рівнянь 1-го порядку

Тип диференціального рівняння	*Метод розв'язання*
❶ ***Диференціальне рівняння з відокремленими змінними.*** $f_1(y)dy = f_2(x)dx$	$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx$
❷ ***Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.*** $y' = f(x)g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ або $g(y) = 0$
$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$	$\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$ або $f_2(x) = 0$ чи $g_1(y) = 0$
❸ $y' = f(ax + by + c)$	Заміна $z = ax + by + c$
❹ ***Однорідне ДР.*** $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Заміна $y = u(x)x$ $y' = \frac{du}{dx}x + u$
❺ ***ДР, звідне до однорідного.*** $y' = \left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ $a, b, c, a_1, b_1, c_1 = \text{const}$	1) Заміна $\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = s + \beta, \end{cases}$ якщо $\Delta \neq 0$; 2) заміна $z = ax + by + c$, якщо $\Delta = 0$
❻ ***Лінійне однорідне ДР.*** $y' + p(x)y = 0$	$y = Ce^{-\int p(x)dx}$
❼ ***Лінійне неоднорідне ДР.*** $y' + p(x)y = f(x)$	**1.** ***Метод Лаґранжа.*** Шукаємо розв'язок у вигляді $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.
❽ ***ДР Бернуллі.*** $y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$	**2.** ***Метод Бернуллі.*** Шукаємо розв'язок у вигляді $y = u(x)v(x)$

❾ ***Диференціальне рівняння в повних диференціалах.*** $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$ $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$	$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C$$

12.3. ДР вищих порядків, які допускають пониження порядку

Тип диференціального рівняння	***Метод розв'язання***
❶ $y^{(n)} = f(x)$	Безпосереднє n-кратне інтегрування
❷ $F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0$	Заміна $y^{(k)} = p(x)$
	$y^{(k+1)} = p'(x), ..., y^{(n)} = p^{(n-k)}$
❸ $F(y, y', ..., y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0$	Заміна $y' = p(y)$
	$y'' = p'p, y''' = p''p^2 + p'^2 p, ...$

12.4. Лінійні диференціальні рівняння

❶ ***Лінійний диференціальний оператор***	$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y$
❷ ***Лінійне однорідне*** диференціальне рівняння *(ЛОДР)*	$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0;$ $L[y] = 0$
❸ ***Лінійна залежність і незалежність функцій.*** Систему функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називають *лінійно незалежною в інтервалі* $(a;b)$, якщо з тотожності $$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$$ випливає, що $$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$	Систему функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називають *лінійно залежною в інтервалі* $(a;b)$, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не рівні одночасно нулю, що $$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0,$$ $$\lvert\alpha_1\rvert + \lvert\alpha_2\rvert + ... + \lvert\alpha_n\rvert \neq 0.$$
❹ ***Вронськіан системи функцій*** $y_1, y_2, ..., y_n$	$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

❺ ***Критерій лінійної незалежності розв'язків.*** Система розв'язків $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ лінійного однорідного ДР $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=0$ з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами, є лінійно незалежною в інтервалі $(a;b)$ тоді й лише тоді,	коли вронськіан цієї системи розв'язків $$W[y_1,...,y_n](x)\neq 0,\ x\in(a;b).$$
❻ ***Фундаментальна система розв'язків.*** Сукупність будь-яких n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$, лінійного однорідного ДР n-го порядку називають його	*фундаментальною системою розв'язків* (ФСР): $$\{y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\}.$$ Для будь-якого лінійного однорідного ДР існує його фундаментальна система розв'язків.
❼ ***Структура загального розв'язку ЛОДР*** ($\{y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\}$ — ФСР ЛОДР)	$y_{\text{заг. одн.}}=$ $=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)$
❽ ***Лінійне неоднорідне ДР***	$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+....+p_n(x)y=f(x);$ $L[y]=f(x)$
❾ ***Структура загального розв'язку ЛНДР***	$y_{\text{заг. неод.}}=y_{\text{заг. одн.}}+y_{\text{част. неодн.}}$
❿ ***Принцип суперпозиції***	Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки відповідно ЛНДР $L[y]=f_1(x)$ та $L[y]=f_2(x)$, то $y_1(x)+y_2(x)$ є розв'язком ЛНДР $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$.

12.5. Лінійні однорідні ДР зі сталими коефіцієнтами

❶ ***ЛОДР зі сталими коефіцієнтами***	$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0$
❷ ***Метод Ойлера***	Шукаємо розв'язок у вигляді $y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$
❸ ***Характеристичне рівняння***	$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$
❹ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР***	
① λ — дійсний корінь кратності 1	$y = e^{\lambda x}$
② λ — дійсний корінь кратності r	$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, ..., y_r = x^{r-1} e^{\lambda x}$
③ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — пара комплексно спряжених коренів	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
ЛОДР 2-го порядку	
❺ ***Диференціальне рівняння***	$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$
❻ ***Характеристичне рівняння***	$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0$
❼ ***Лінійно незалежні розв'язки ДР (ФСР)***	
① Дійсні різні корені λ_1, λ_2	$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$
② Дійсний кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$
③ Пара комплексно спряжених $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
❽ ***Загальний розв'язок***	$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
❾ ***Схема методу Ойлера.*** ① Записують характеристичне рівняння для ЛОДР. ② Розв'язують характеристичне рівняння.	③ Знаходять лінійно незалежні розв'язки ЛНДР для кожного кореня характеристичного рівняння (ФСР). ④ Записують загальний розв'язок ЛОДР.

12.6. Лінійні неоднорідні ДР зі сталими коефіцієнтами

❶ ***ЛНДР зі сталими коефіцієнтами***	$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=f(x)$, де $f(x)$ — неперервна функція
Відповідне ЛОДР	$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0$
❷ ***Метод Лаґранжа (варіації довільних сталих)*** $(n=2)$ для рівняння $y''+p_1y'+p_2y=f(x)$ ① Знаходять загальний розв'язок відповідного ЛОДР. $y''+p_1y'+p_2y=0;$ $y_{\text{заг. одн.}}=C_1y_1+C_2y_2.$ ② Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді $y_{\text{заг. неодн.}}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2.$	③ Знаходять $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ розв'язуючи систему $\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0,\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).\end{cases}$ ④ Інтегруванням знаходять функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$. ⑤ Записують загальний розв'язок ЛНДР, підставляючи знайдені функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ у вираз для $y_{\text{заг. неодн.}}$.
❸ ***Функція спеціального вигляду (квазімногочлен)***	$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_l(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right)$ *її власне число* $k=\alpha+\beta i\leftrightarrow f(x)$
Окремі випадки	
$f(x)=P_l(x)$	$k=0$
$f(x)=e^{\alpha x}$	$k=\alpha$
$f(x)=\cos\beta x$ або $f(x)=\sin\beta x$	$k=\beta i$
$f_1(x)\leftrightarrow k_1, f_2(x)\leftrightarrow k_2$	$f_1(x)f_2(x)\leftrightarrow k_1+k_2$
❹ ***Схема методу невизначених коефіцієнтів*** підбирання частинного розв'язку ЛНДР із правою частиною спеціального вигляду. ① Записують теорему про структуру розв'язку ЛНДР. $y_{\text{заг. неод.}}=y_{\text{заг. одн.}}+y_{\text{част. неодн.}}$ ② Знаходять загальний розв'язок відповідного ЛОДР.	③ Записують частинний розв'язок ЛНДР з невизначеними коефіцієнтами. ④ Визначають коефіцієнти, підставляючи частинний розв'язок у ЛНДР. Записують частинний розв'язок ЛНДР. ⑤ Записують загальний розв'язок ЛНДР.

12.7. Шаблони для частинних розв'язків ЛНДР із правою частиною спеціального вигляду

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+....+p_ny=e^{\alpha x}\left(P_l(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

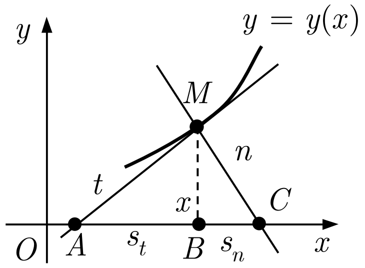
ХР — характеристичне рівняння $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n=0$ відповідного ЛОДР

Права частина спеціального вигляду	***Шаблон для частинного розв'язку***
❶ $P_l(x)=a_0x^l+a_1x^{l-1}+\ldots+a_l \leftrightarrow k=0$	
$k=0$ не є коренем ХР	$\overline{P}_l(x)=A_0x^l+A_1x^{l-1}+\ldots+A_l$
$k=0$ корінь кратності r ХР	$x^r\overline{P}_l(x)$
❷ $P_l(x)e^{\alpha x} \leftrightarrow k=\alpha$	
$k=\alpha$ не є коренем ХР	$\overline{P}_l(x)e^{\alpha x}$
$k=\alpha$ корінь кратності r ХР	$x^r\overline{P}_l(x)e^{\alpha x}$
❸ $e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)\leftrightarrow$ $\leftrightarrow k=\alpha+i\beta$	$s=\max(l,m)$
$k=\alpha+i\beta$ не є коренем ХР	$e^{\alpha x}(\overline{P}_s(x)\cos\beta x+\overline{Q}_s\sin\beta x)$
$k=\alpha+i\beta$ корінь кратності r ХР	$x^re^{\alpha x}(\overline{P}_s(x)\cos\beta x+\overline{Q}_s\sin\beta x)$
Окремі випадки	
❹ $ae^{\alpha x} \leftrightarrow k=\alpha$	
$k=\alpha$ не є коренем ХР	$Ae^{\alpha x}$
$k=\alpha$ корінь кратності r ХР	$Ax^re^{\alpha x}$
❺ $a\cos\beta x+b\sin\beta x \leftrightarrow k=i\beta$	
$k=i\beta$ не є коренем ХР	$A\cos\beta x+B\sin\beta x$
$k=i\beta$ корінь кратності r ХР	$x^r(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
❻ $e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)\leftrightarrow k=\alpha+i\beta$	
$k=\alpha+i\beta$ не є коренем ХР	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
$k=\alpha+i\beta$ корінь кратності r ХР	$x^re^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

12.8. Лінійні системи ДР зі сталими коефіцієнтами

❶ ***Лінійна однорідна система ДР зі сталими коефіцієнтами***	$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$
❷ ***Матричний запис системи ДР***	$\vec{x}' = A\vec{x}$, де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
❸ ***Метод Ойлера***	Шукають розв'язок у вигляді $\vec{x} = \vec{\gamma} e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$
❹ ***Характеристичне рівняння***	$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$
❺ ***Лінійно незалежні розв'язки системи (ФСР)***	
① Дійсні різні корені λ_1, λ_2	$\vec{x}_1(t) = \vec{A}_1 e^{\lambda_1 t}, \vec{x}_2(t) = \vec{A}_2 e^{\lambda_2 t}$
② Дійсний кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{\lambda t}$
③ Пара комплексно спряжених $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$\vec{x}_1(t) = \mathrm{Re}\left(\vec{A} e^{(\alpha+\beta i)t}\right)$, $\vec{x}_2(t) = \mathrm{Im}\left(\vec{A} e^{(\alpha+\beta i)t}\right)$
❻ ***Загальний розв'язок***	$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$
❼ ***Лінійна неоднорідна система ДР зі сталими коефіцієнтами***	$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t). \end{cases}$
❽ ***Метод виключення***	Систему із двох рівнянь 1-го порядку зводять до одного диференціального рівняння 2-го порядку (можна виключати x_2 з 1-го рівняння або x_1 з 2-го рівняння).

12.9. Застосування диференціальних рівнянь

❶ ***Динаміка популяції.*** Швидкість розпаду (розмноження) пропорційна кількості $x(t)$ речовини, що залишилась.	$x'(t) = kx(t), k > 0$ $k < 0$ — розпад; $k > 0$ — розмноження
❷ ***Другий закон Ньютона***	$mv'(t) = F(v,t) \Leftrightarrow ms''(t) = F(v,t)$
❸ ***Закон Ньютона.*** Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла $T(t)$ і температурою середовища T_c охолодження тіла	$T'(t) = k(T - T_c)$
❹ ***Електричне коло з самоіндукцією.*** $i(t)$ — струм; $E(t)$ — ЕРС; R — опір; L — коефіцієнт самоіндукції	$i'(t) + \dfrac{R}{L}i(t) = \dfrac{E(t)}{L}$
❺ ***Розчинення речовини.*** Швидкість розчинення речовини в рідині пропорційна кількості цієї речовини, яка ще може розчинитись до повного насичення.	$x'(t) = k(P - x(t)),$ де $x(t)$ — кількість речовини; P — максимальна кількість розчиненої речовини.
❻ ***Концентрація розчину.*** Речовина розчинена в об'ємі V рідини. Надходить об'єм V_1 рідини і витікає V_2 рідини $(V_2 \le V_1)$.	$x'(t) = -\dfrac{V_2 x}{V + (V_1 - V_2)t}$
❼ ***Геометричні застосування.*** 	$t = \left\lvert \dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} \right\rvert$ — *дотична* $n = \left\lvert y\sqrt{1 + y'^2} \right\rvert$ — *нормаль* s_t — *піддотична*; s_n — *піднормаль*

Практикум 12.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Навчальні задачі

12.1.1.1. Зінтегрувати диференціальне рівняння $x(y^2+1)dx + e^{x^2}ydy = 0$.

Розв'язання. [12.2.2.]

[*Визначаємо тип диференціального рівняння.*]

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\left[M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0\right]$$

[*Відокремлюючи змінні, дістаємо ДР з відокремленими змінними.*]

$$e^{x^2}ydy = -x(y^2+1)dx \qquad \left[:\left(e^{x^2}(y^2+1)\right)\right]^{①}$$

$$\frac{ydy}{y^2+1} = -xe^{-x^2}dx.$$

[*Інтегруємо обидві частини рівняння і перетворюємо його.*]

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = -\int xe^{-x^2}dx; \ \ \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1} = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2);$$

$$\ln(y^2+1) = e^{-x^2} + C.$$

[*Записуємо відповідь.*]

Загальний інтеграл ДР: $\ln(y^2+1) - e^{-x^2} = C, C \in \mathbb{R}$.

Коментар. ① Ділення на $e^{x^2}(y^2+1) \neq 0$ не приводить до втрати розв'язків.

12.1.1.2. Зінтегрувати диференціальне рівняння $xy' = y\ln y$.

Розв'язання. [12.2.2.]

[*Перетворюємо диференціальне рівняння.*]

$$y' = \frac{y\ln y}{x}.$$

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\left[y' = f(x)g(y).\right]$$

[*Підставляємо* $y' = \dfrac{dy}{dx}$ *в диференціальне рівняння і відокремлюємо змінні.*]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{x} \qquad \left[\cdot dx; \ \ : y\ln y\right]$$

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x} \quad (y\ln y \neq 0).$$

[*Інтегруючи, дістаємо загальний розв'язок ДР.*] ①

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{x}; \ \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{x}.$$
$$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|, \ C \neq 0;$$
$$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|Cx\right|; \quad \ln y = Cx;$$
$$y = e^{Cx}, C \neq 0.$$

[*Перевіряємо, чи не втратили розв'язки, ділячи на* $y\ln y$.]

$$y\ln y = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = 1.$$

[*Перевіряємо, чи є функція* $y = 1$ *розв'язком ДР.*]

$$x \cdot 0 = 1 \cdot \ln 1 = 0.$$

Отже, функція $y = 1$ є розв'язком ДР. Його можна одержати із загальної формули для $C = 0$. ②

[*Записуємо відповідь.*]

Загальний розв'язок ДР: $y = e^{Cx}, C \in \mathbb{R}$.

Коментар. ① Сталу беруть у вигляді, зручному для подальших перетворень. ② Може трапитись, що розв'язок не можна одержати із загальної формули для жодного значення сталої. Тоді його записують у відповідь окремо.

12.1.1.3. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, y(0) = 1$.

Розв'язання. [12.1.2, 12.2.2.]

[*Шукаємо загальний розв'язок або інтеграл ДР.*]

$$\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

[*Відокремлюємо змінні.*]

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1, y \neq \pm 1.$$

[*Інтегруємо обидві частини рівняння.*]

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$\arcsin y = C - \arcsin x; \ \arcsin x + \arcsin y = C.$$

Функції $x = \pm 1, y = \pm 1$ є розв'язками ДР, але ці розв'язки не можна отримати для жодного значення сталої C. ①

[*Знаходимо частинний інтеграл ДР, справджуючи початкову умову.*]

$$y(0) = 1 \quad \left[y(x_0) = y_0\right].$$

[*Підставляючи в загальний інтеграл ДР* $x = x_0$ *та* $y = y_0$, *визначаємо значення сталої* C.]

$$\arcsin 0 + \arcsin 1 = C; \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

[*Підставляючи одержане значення сталої, дістаємо розв'язок задачі Коші як частинний інтеграл (розв'язок) ДР, що справджує початкову умову.*]

$$\arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{2}; \ \arcsin y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$
$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Розв'язок задачі Коші: $y = \sqrt{1 - x^2}$, особливий розв'язок $y = 1$.

Коментар. ① Такі розв'язки називають *особливими*.

12.1.2. Зінтегрувати диференціальне рівняння $y' = \cos(x + y)$.

Розв'язання. [12.2.3.]

Маємо диференціальне рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$.

[*Виконуємо підстановку* $z = x + y$.]

$$\boxed{z(x) = x + y(x), \ z' = 1 + y'; \ y' = z' - 1.}$$

Дістаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$z' - 1 = \cos z;$$
$$\frac{dz}{dx} = 1 + \cos z; \quad \frac{dz}{1 + \cos z} = dx, \quad (1 + \cos z \neq 0).$$
$$\int \frac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = \int dx; \quad \operatorname{tg}\frac{z}{2} = x + C.$$
$$1 + \cos z = 0 \Leftrightarrow \cos z = -1 \Leftrightarrow z = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Функції $z = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, є розв'язками ДР, які не можна одержати для жодного значення C.

[*Вертаючись до функції* y, *записуємо відповідь.*]

Загальний інтеграл ДР $\operatorname{tg}\dfrac{x + y}{2} - x = C, C \in \mathbb{R}$, особливі розв'язки $y = -x + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

12.1.3. Розв'язати задачу Коші: $y' = -\dfrac{x + y}{x}, y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. [12.1.2, 12.2.4.]

[*Шукаємо загальний розв'язок ДР.*]

$$y' = -1 - \frac{y}{x}.$$

Маємо однорідне диференціальне рівняння.

$$\left[y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

[*Шукаємо розв'язок рівняння як $y = u(x)x$.*]

$$\boxed{y = u(x)x, y' = \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.}$$

Дістаємо ДР з відокремлюваними змінними.

$$x\frac{du}{dx} + u = -1 - u;$$

$$\frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x} \; (2u+1 \neq 0); \; \int \frac{du}{1+2u} = -\int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln|1+2u| = \ln|C| - 2\ln|x| \; (C \neq 0); \; \ln|1+2u| = \ln\left|\frac{C}{x^2}\right|$$

$$1 + 2u = \frac{C}{x^2}; \quad u(x) = -\frac{1}{2} + \frac{C}{2x^2}.$$

[*Знаходимо загальний розв'язок рівняння.*]

$$y = [ux] = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x} \; (C = 2C_1).$$

Функція $y = -\dfrac{x}{2} \left(u = -\dfrac{1}{2}\right)$ є розв'язком ДР, коли $C_1 = 0$.

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}, C_1 \in \mathbb{R}.$$

[*Знаходимо частинний розв'язок ДР, справджуючи початкову умову.*]

$$\frac{1}{2} = y(1) = -\frac{1}{2} + C_1; \; C_1 = 1.$$

Розв'язок задачі Коші: $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.

12.1.4. Зінтегрувати диференціальне рівняння $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

Розв'язання. [12.2.5.]

Маємо диференціальне рівняння, що зводиться до однорідного.

$$\left[y' = \left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), a, b, c, a_1, b_1, c_1 = \text{const.} \right]$$

Оскільки

$$\Delta = \left[\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то

$$\boxed{z = x + y + 1,\ z' = 1 + y';\ y' = z' - 1;}$$

$$z' - 1 = \frac{4 - 3z}{z};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4 - 2z}{z};$$

$$\left(-\frac{2}{z-2} - 1\right)dz = 2dx \quad (z \neq 2);$$

$$\int\left(-\frac{2}{z-2} - 1\right)dz = \int 2dx;$$

$$-2\ln\left|z - 2\right| - z + C = 2x.$$

Функція $z = 2$ є розв'язком ДР, який одержимо із загального розв'язку, коли $C = -\infty$.

[*Знаходимо загальний інтеграл ДР, підставляючи* $z = x + y + 1$.]

$$-2\ln\left|x + y - 1\right| - x - y - 1 + C = 2x.$$

Загальний інтеграл ДР: $3x + y + 2\ln\left|x + y - 1\right| = C_1, C_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

12.1.5.1. Зінтегрувати диференціальне рівняння $y' - \dfrac{y}{x} = x$.

Розв'язання. [12.2.7.]

[*Шукаємо загальний розв'язок ДР.*]

$$y' - \frac{y}{x} = x.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння щодо $y(x)$.

$$\left[y' + p(x)y = q(x).\right]$$

1-й метод. ***Метод Бернуллі.***

[*Шукаємо розв'язок ДР* $y(x)$ *як добуток двох функцій* $u(x)v(x)$.]

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'v + uv'.}$$

$$u'v + \underbrace{uv' - \frac{uv}{x}}_{\text{групуємо}} = x; \qquad \underbrace{u\left(v' - \frac{v}{x}\right)}_{\substack{\text{вибираємо функцію} \\ v(x)\text{ так, щоб у дужках} \\ \text{був нульовий вираз}}} + vu' = x;$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0,^{①} \\ vu' = x.^{②} \end{cases}$$

[*Шукаємо частинний розв'язок 1-го рівняння системи.*]

$$v' - \frac{v}{x} = 0; \quad \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0;$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x};$$
$$\ln v = \ln x; \quad v = x.$$

[*Шукаємо загальний розв'язок 2-го рівняння системи.*]

$$vu' = x; \qquad x\frac{du}{dx} = x;$$
$$\frac{du}{dx} = 1; \quad u(x) = x + C.$$

[*Записуємо загальний розв'язок ДР.*]

$$y = \left[u(x)v(x)\right] = (x + C)x = x^2 + Cx, C \in \mathbb{R}.$$

2-й метод. ***Метод Лаґранжа (варіації довільної сталої).***

[*Записуємо лінійне однорідне рівняння і розв'язуємо його як ДР з відокремлюваними змінними.*]

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x};$$
$$\ln\left|y\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|; \quad \ln\left|y\right| = \ln\left|Cx\right|.$$
$$y = Cx, C \in \mathbb{R}.$$

[*Варіюємо сталу — шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді* $y = C(x)x$.]

$$\boxed{y = C(x)x, \quad y' = C'(x)x + C(x).}$$

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x;$$
$$C'(x)x = x; \; C'(x) = 1; \; C(x) = \int dx = x + C.$$

[*Підставляємо знайдену функцію* $C(x)$.]

$$y(x) = \left[C(x)x\right] = (x + C)x = x^2 + Cx.$$

Загальний розв'язок ДР: $y = x^2 + Cx, x \in \mathbb{R}$.

Коментар. ① Функцію $v(x)$ вибираємо так, щоб якомога більше спростити диференціальне рівняння. Вона є частинним розв'язком ДР з відокремлюваними змінними $(C = 0)$.

② Функцію $u(x)$ знаходимо з умови, щоб функція $u(x)v(x)$ була розв'язком вихідного ДР. Функція $u(x)$ є загальним розв'язком ДР з відокремлюваними змінними.

12.1.5.2. Розв'язати задачу Коші: $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}, y(2) = 1.$

Розв'язання. [12.2.7.]

Диференціальне рівняння щодо функції y

$$y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$$

не належить жодному розглянутому типу.

[*Перетворюємо диференціальне рівняння, ураховуючи що* $\dfrac{1}{y'_x} = x'_y$.]

$$\frac{1}{y'} = \frac{2y\ln y + y - x}{y};$$

$$x' + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння щодо $x(y)$.

$$\left[x' + p(y)x = q(y).\right]$$

[*Розв'язуємо ДР методом Лаґранжа, користуючись формулою для розв'язку однорідного ДР.*]

$$x' + p(y)x = 0 \Leftrightarrow x = Ce^{-\int p(y)dy}, C \in \mathbb{R}.$$

$$p(y) = \frac{1}{y}; \quad x(y) = Ce^{-\int \frac{dy}{y}} = Ce^{-\ln y} = \frac{C}{y}.$$

$$\boxed{x(y) = \frac{C(y)}{y}, \quad x'(y) = \frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2}.}$$

$$\frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2} + \frac{C(y)}{y^2} = 2\ln y + 1;$$

$$dC(y) = (2\ln y + 1)ydy.$$

$$C(y) = \int (2\ln y + 1)ydy = y^2\ln y + C,$$

Загальний розв'язок ДР:

$$x(y) = \left[\frac{C(y)}{y}\right] = y\ln y + \frac{C}{y}, C \in \mathbb{R}.$$

[*Переписуємо початкову умово щодо функції* $x(y)$.]

$$x(1) = 2.$$

[*Справджуємо початкову умову.*]

$$2 = x(1) = C \Rightarrow 2 = C.$$

Розв'язок задачі Коші: $x = y\ln y + \dfrac{2}{y}$.

12.1.6. Зінтегрувати диференціальне рівняння $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

***Розв'язання.* [12.2.8.]**

Маємо диференціальне рівняння Бернуллі.

$$\left[y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}.\right]$$

[*Розв'язуємо ДР методом Бернуллі.*]

$$\boxed{y = u(x)v(x), y' = u'v + uv'.}$$

$$u(v' + 2vx) + vu' = 2x^3u^3v^3 \Leftrightarrow \begin{cases} v' + 2vx = 0, \\ vu' = 2x^3u^3v^3. \end{cases}$$

[*Шукаємо частинний розв'язок 1-го ДР системи.*]

$$v' + 2vx = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -2xv = 0; \; \frac{dv}{v} = -2xdx.$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int (-2x)dx;$$

$$\ln v = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}.$$

[*Шукаємо загальний розв'язок 2-го рівняння системи.*]

$$e^{-x^2}u' = 2x^3u^3e^{-3x^2};$$

$$\frac{du}{dx} = 2x^3u^3e^{-2x^2}; \quad \frac{du}{u^3} = 2x^3e^{-2x^2}dx.$$

$$\int \frac{du}{u^3} = \int 2x^3e^{-2x^2}dx;$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}\int x^2de^{-2x^2} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4}e^{-2x^2} + C,$$

$$\frac{1}{u^2} = x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C_1, \; C_1 = -2C.$$

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C_1}}.$$

Розв'язок ДР $u = 0$ можна одержати, коли $C_1 = \infty$.

[*Знаходимо загальний розв'язок ДР.*]

$$y = \left[u(x)v(x)\right] = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C_1}}e^{-x^2}.$$

Загальний розв'язок ДР:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}}, C_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

12.1.7. Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$$

Розв'язання. [12.2.9.]

[*Перевіряємо, чи є диференціальне рівняння*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

рівнянням у повних диференціалах.]

$$P(x,y) = x + y,\ Q(x,y) = x + 2y;$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right] \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Маємо диференціальне рівняння в повних диференціалах.

[*Знаходимо загальний інтеграл диференціального рівняння за формулою* [*12.2.9*].]

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C.$$

Нехай $x_0 = y_0 = 0$.

$$\int\limits_0^x tdt + \int\limits_0^y (x + 2t)dt = C.$$

Загальний інтеграл ДР: $\dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 = C, C \in \mathbb{R}$.

12.1.8.1. Матеріальна точка маси m рухається прямолінійно під дією сили F, прямо пропорційної часу від початку руху й обернено пропорційної швидкості руху v. Встановити залежність між швидкістю і часом, якщо $v\,|_{t=0}= 0$.

Розв'язання. [12.1.2, 12.2.2.]

[*Використовуємо фізичний зміст задачі.*]

Згідно із другим законом Ньютона

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

Для знаходження $v(t)$ маємо задачу Коші:

$$m\frac{dv}{dt} = k\frac{t}{v}, v(0) = 0.$$

[*Розв'язуємо її.*]

$$vdv = \frac{k}{m}tdt; \int vdv = \frac{k}{m}\int tdt;$$
$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + C;$$
$$0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Розв'язок задачі Коші: $v(t) = \sqrt{\dfrac{k}{m}}t.$

12.1.8.2. Знайти криву, яка проходить через точку $A(1;1)$, якщо довжина відрізка осі Ox, відтятого довільною дотичною, дорівнює довжині цієї дотичної.

Розв'язання.

Нехай рівняння шуканої кривої $y = y(x)$, а $M_0(x_0;y_0)$ — точка дотику. Тоді рівняння дотичної до кривої має вигляд

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0),\ (y_0' = y'(x_0)).$$

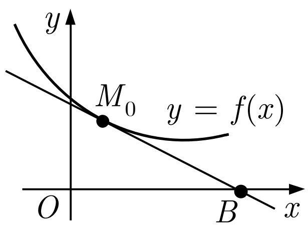


Рис. 1 до 12.1.8.2

Знаходимо точку перетину дотичної з віссю Ox:

$$0 = y_0 + y_0'(x - x_0),$$

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y_0'}.$$

Оскільки $\left|OB\right|$ — довжина відрізка, відтятого дотичною від осі Ox, а $\left|M_0B\right|$ — довжина відрізка дотичної, то за умовою задачі $\left|OB\right| = \left|M_0B\right|$. Звідки

$$\left|x_0 - \frac{y_0}{y_0'}\right| = \sqrt{\left(\frac{y_0}{y_0'}\right)^2 + y_0^2}.$$

Оскільки одержана умова виконана для довільної точки $M(x,y)$ кривої, то

$$\left|x-\frac{y}{y'}\right|=\sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2};\quad x^2-\frac{2xy}{y'}+\frac{y^2}{y'^2}=\frac{y^2}{y'^2}+y^2.$$

[*Розв'язуємо ДР, яке задає криву.*]

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2},\ y'=\frac{2\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y^2}{x^2}};$$

Маємо однорідне диференціальне рівняння.

$$\boxed{y=u(x)x, y'=x\frac{du}{dx}+u.}$$

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{2u}{1-u^2};\ \frac{(1-u^2)du}{u(u^2+1)}=\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{(1-u^2)du}{u(u^2+1)}=\frac{dx}{x}.$$

$$\frac{u}{1+u^2}=Cx;\ \frac{yx}{x^2+y^2}=Cx;\ \frac{y}{x^2+y^2}=C.$$

[*Визначаємо значення сталої, підставляючи в рівняння кривої координати точки* $A(1;1)$.]①

$$\frac{1}{2}=C.$$

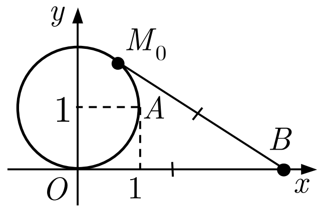


Рис. 2 до 12.1.8.3

Шукана крива є колом:

$$2y=x^2+y^2\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1.$$

Коментар. ① Розв'язуємо задачу Коші, вибираючи із загального розв'язку частинний розв'язок, який справджує початкову умову $y(1)=1$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

12.1.9. Зінтегруйте диференціальне рівняння:

1) $(x+1)dx+(y-1)dy=0$; 2) $4(x-1)dx+(y+1)dy=0$;

3) $(y-1)dx+(x+1)dy=0$; 4) $4(y+1)dx+(x-1)dy=0$;

5) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$;

6) $\operatorname{tg}x\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\operatorname{ctg}y\,dy=0$;

7) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$;

8) $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$;

9) $y' \operatorname{tg} x - y = a$; 10) $y' = 10^{x+y}$;

11) $2x\sqrt{1 - y^2} = y'(1 + x^2)$; 12) $e^{-y}(1 + y') = 1$;

13) $y' = \sin(x - y)$; 14) $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

12.1.10. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y' = 8\sqrt{y}, y(0) = 4$; 2) $y' = \dfrac{1 + y^2}{\sqrt{1 - x^2}}, y(0) = 1$;

3) $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0, y(1) = 0$;

4) $(xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0, y(1) = 1$;

5) $y' \sin x = y \ln y, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$; 6) $y' \sin x - y \cos x = 0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

12.1.11. Зінтегруйте однорідне (звідне до однорідного) диференціальне рівняння:

1) $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$; 2) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

3) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, x \geq 0$; 4) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$;

5) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$; 6) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

7) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$;

8) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx = (4y^2 + 3xy + x^2)dy$;

9) $y' = \dfrac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$; 10) $y' = \dfrac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}$;

11) $(x + y + 1)dx = (2x + 2y - 1)dy$;

12) $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$.

12.1.12. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x, y(1) = 0;$

2) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1;$

3) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, y(1) = 1;$

4) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, y(1) = 0;$

5) $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = -1.$

12.1.13. Зінтегруйте лінійне диференціальне рівняння:

1) $y' + 2xy = xe^{-x^2};$

2) $y' + 2xy = e^{-x^2} x \sin x;$

3) $y' - \dfrac{3y}{x} = x^3 \sin x;$

4) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2;$

5) $xy' = y + x^2 \cos x;$

6) $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1;$

7) $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x};$

8) $y' + y\cos x = \sin x \cos x;$

9)* $y' + ay = e^{mx};$

10)* $y' - \dfrac{2}{x} y = \dfrac{e^x(x-2)}{x};$

11) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2};$

12) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + a\sin 2y};$

13) $y' = \dfrac{1}{\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y};$

14) $(e^{-y^2/2} - xy)dy - dx = 0.$

12.1.14. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}, y(0) = 0;$

2) $y' + y\cos x = \cos x, y(0) = 1;$

3) $xy' + y = e^x, y(a) = b;$

4) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, y(1) = 0;$

5) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}, y(0) = -1;$

6) $x\ln xy' + y = 2\ln x, y(e) = 0;$

7) $t(1+t^2)dx = (x+xt^2-t^2)dt, x(1) = -\dfrac{\pi}{4}$;

8) $yx' + x = 4y^3 + 3y^2, y(2) = 1$.

12.1.15. Зінтегруйте диференціальне рівняння Бернуллі:

1) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -y^2$; 2) $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln x$;

3) $y' - y \operatorname{ctg} x = \dfrac{y^3}{\sin x}$; 4) $y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x$;

5) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; 6) $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$;

7) $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$; 8) $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$.

12.1.16. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)y^{2/3}, y(0) = 0$;

2) $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$;

3) $y' + xy = y^2(\sin x + x \cos x), y(0) = 1$;

4) $3dy = -(1+3y^3)y \sin x dx, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

5) $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0, y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

12.1.17. Зінтегруйте диференціальне рівняння в повних диференціалах:

1) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$;

2) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$;

3) $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx - \dfrac{xdy}{x^2+y^2} = 0$; 4) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$.

12.1.18. 1. Знайдіть лінію, що проходить через точку $(2;3)$, кожен відрізок дотичної якої, що міститься між координатними осями, поділяється навпіл точкою дотику.

2. Знайдіть усі лінії, у яких відрізок дотичної між точкою дотику й віссю абсцис поділяється навпіл точкою перетину його з віссю ординат.

3. Знайдіть лінію, у якої довжина нормалі дорівнює $a = \mathrm{const}$.

4. Матеріальна точка масою 1 г рухається прямолінійно під дією сили, що прямо пропорційна часу від моменту $t = 0$, й обернено пропорційна швидкості руху точки. У момент $t = 10$ с швидкість дорівнювала $0{,}5$ м/с, а сила — $4 \cdot 10^{-5}$ Н. Якою буде швидкість за хвилину після початку руху?

5. Моторний човен рухається у спокійній воді зі швидкістю $v = 10$ км/год. На повному ходу його двигун вимкнули, і через $t = 20$ с швидкість човна зменшилась до $v_1 = 6$ км/год. Ураховуючи, що сила опору води рухові човна пропорційна його швидкості, знайдіть швидкість човна через 2 хв після вимкнення двигуна; знайдіть також віддаль, яку пройшов човен протягом 1 хв після зупинки двигуна.

6. Згідно з Ньютоновим законом швидкість охолодження будь-якого тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою T тіла та температурою повітря T_0. Якщо температура повітря дорівнює 20°C і тіло протягом 20 хв охолоджується із 100 до 60°, то за скільки часу його температура знизиться до 30°?

7. Знайдіть лінію, у якої квадрат довжини відрізка, який відтинає будь-яка дотична від осі ординат, дорівнює добуткові координат точок дотику.

8. Знайдіть лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної дорівнює відповідній піднормалі.

9. Знайдіть лінію, у якої будь-яка дотична перетинає вісь ординат у точці, однаково віддаленій від точки дотику і від початку координат.

10. Знайдіть лінію, у якої площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою довільної точки та дотичною в цій точці, дорівнює половині квадрата абсциси.

11. Знайдіть лінію, для якої площа фігури, обмеженої віссю абсцис, двома ординатами та дугою MM' цієї лінії, пропорційна дузі MM'.

12. Точка масою $m = 6$ г рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності $k_1 = 4$). Крім того, на точку діє опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності $k_2 = 2$). Знайдіть залежність швидкості від часу, уважаючи, що в початковий момент швидкість дорівнює нулю.

Відповіді

12.1.9. 1) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = C$; 2) $4(x-1)^2 + (y+1)^2 = C$; 3) $y = \dfrac{C}{x+1} + 1$;
4) $y = \dfrac{C}{(x-1)^4} - 1$; 5) $\dfrac{1-x^2}{1+y^2} = C$; 6) $\operatorname{ctg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x = C$; 7) $\dfrac{e^y+1}{x^2+1} = C$;
8) $y = C\sqrt{e^{2x}+1}$; 9) $y = C\sin x - a$; 10) $10^x + 10^{-y} = C$;
11) $\arcsin y - \ln(1+x^2) = C, y = \pm 1$; 12) $e^x = C(1 - e^{-y})$;
13) $x + C = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$; 14) $8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}(4x + C)$.

12.1.10. 1) $y = (4x+2)^2$; 2) $\operatorname{arctg} y = \arcsin x + \dfrac{\pi}{4}$; 3) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1, x = 1\ |y| < 1$;
4) $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2) + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = 1$; 5) $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. 6) $y = \sin x$.

12.1.11. 1) $e^{-y/x} + \ln|x| = C$; 2) $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$; 3) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2, y = x$;
4) $y = 2x(\operatorname{arctg} Cx + \pi k), y = k\pi x, k \in \mathbb{Z}$; 5) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = C$; 6) $y = xe^{1+Cx}$;
7) $e^{\frac{x}{x+y}}(x+y)^2 x^{-3} = C$; 8) $(x^2+y^2)^3(x+y)^2 = C$; 9) $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$;
10) $(x+y-1)^5(x-y-1)^2 = C$; 11) $x - 2y + \ln|x+y| = C$; 12) $x + 3y - \ln|x-2y| = C$.

12.1.12. 1) $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 2) $y^3 = y^2 - x^2$; 3) $\ln|y| + 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2$; 4) $y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$;
5) $y = -x$.

12.1.13. 1) $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$; 2) $y = (x+C)(1+x^2)$; 3) $y = C_1x^3 - x^3\cos x$;
4) $y = (C + e^x)(1+x)^2$; 5) $y = Cx + x\sin x$; 6) $y = \dfrac{C}{x} + x\ln x$; 7) $y = C\cos x + \sin x$;

8) $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$; 9) $y = Ce^{-ax} + \dfrac{e^{mx}}{a+m}, m \neq -a, y = Ce^{-ax} + xe^{-ax}, m = -a$;

10) $y = Cx^2 + e^x$; 11) $x = Ce^{2y} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4}$; 12) $x = -2a(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}$;

13) $x = (C - \cos y)\sin y$; 14) $x = (C + y)e^{-y^2/2}$.

12.1.14. 1) $y = \dfrac{x}{\cos x}$; 2) $y = 1$; 3) $y = \dfrac{ab - e^a + e^x}{x}$; 4) $y = \dfrac{x(x + \ln x - 1)}{x+1}$;

5) $y(x) = (x-1)e^{-\sin x}$; 6) $y = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$; 7) $x = -t \operatorname{arctg} t$; 8) $x = y^2 + y^3$.

12.1.15. 1) $y = \dfrac{1}{(x+1)(C + \ln(x+1))}$; 2) $y = \dfrac{2}{x(C - \ln^2 x)}$; 3) $y = \pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{C + 2\cos x}}$;

4) $y = \dfrac{1}{(x+C)\cos x}$; 5) $\sqrt{y} = \operatorname{tg} x + \dfrac{\ln|\cos x| + C}{x}$; 6) $2\sqrt{y} = x^2 \ln x + Cx^2$;

7) $x^3 e^{-y} = C + y$; 8) $x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$.

12.1.16. 1) $y = \left(\dfrac{2}{9}e^{x^3} - \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{2}{9}\right)^3, y = 0$; 2) $y = \dfrac{1}{\ln x + 1}$;

3) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; 4) $y = \sqrt[3]{\dfrac{e^{\cos x}}{3 - 2e^{\cos x}}}$; 5) $x^2 = \dfrac{1}{y + 3y^2}$.

12.1.17. 1) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$; 2) $x^y = C$; 3) $x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$; 4) $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = C$.

12.1.18. 1) гіпербола, $xy = 6$; 2) параболи $y^2 = Cx$; 3) $(x - C)^2 + y^2 = a^2$; 4) $\approx 2{,}7$ м/с;

5) $\approx 0{,}467$ км/ч; $85{,}2$ м; 6) $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_0), T = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/20}$, $t = 60$ хв;

7) $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$; 8) $x = y\ln|Cy|$; 9) $x^2 + y^2 = Cx$; 10) $y = x + Cx^2$;

11) ланцюгова лінія; 12) $m\dfrac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v, v(0) = 0, v(t) = 2\left(t - 3 + 3e^{-t/3}\right)$.

Практикум 12.2. Диференціальні рівняння вищих порядків

Навчальні задачі

12.2.1. Розв'язати задачу Коші: $y''' = \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$.

Розв'язання. [12.3.1.]

Маємо ДР 3-го порядку вигляду

$$y^{(n)} = f(x).$$

[*Розв'язуємо ДР безпосереднім інтегруванням, поступово визначаючи значення сталих.*]

$$y'' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1;$$
$$0 = y''(0) = 0 + C_1;\ \ C_1 = 0.$$
$$y'' = \frac{1}{2}\sin 2x.$$
$$y' = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2;$$
$$0 = y'(0) = -\frac{1}{4} + C_2 = 0;\ C_2 = \frac{1}{4}.$$
$$y' = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}.$$
$$y = -\frac{1}{4}\int(\cos 2x - 1)dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + C_3;$$
$$1 = y(0) = 0 + C_3;\ \ C_3 = 1.$$

Розв'язок задачі Коші: $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + 1.$

12.2.2. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' = \dfrac{y'}{x} + x.$

Розв'язання. [12.3.2.]

Маємо диференціальне рівняння 2-го порядку, яке не містить невідомої функції в явному вигляді.

$$\left[F(x, y', y'') = 0.\right]$$

[*Запроваджуємо нову функцію.*]

$$\boxed{y' = p(x), y'' = p'(x).}$$

$$p' = \frac{p}{x} + x.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку.

[*Розв'язуємо його методом Бернуллі* [*12.2.8*].]

$$\boxed{p = u(x)v(x), p' = u'v + uv';}$$

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + uv' = x \Rightarrow \begin{cases} u' - \dfrac{u}{x} = 0, \\ uv' = x. \end{cases}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}; \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}; u(x) = x.$$
$$xv' = x; v' = 1; v(x) = x + C_1;$$
$$p(x) = [u(x)v(x)] = x(x + C_1) = x^2 + C_1 x.$$

[*Вертаємось до функції y.*]

$$y' = C_1x + x^2.$$

$$y = \int (C_1x + x^2)dx = \frac{C_1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Загальний розв'язок рівняння: $y = \dfrac{C_1}{2}x^2 + \dfrac{x^3}{3} + C_2.$

12.2.3. Розв'язати задачу Коші: $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Розв'язання. [12.3.3.]

Це задача Коші для ДР 2-го порядку, яке не містить аргументу функції в явному вигляді.

$$\left[F(y, y', y'') = 0.\right]$$

[*Запроваджуємо нову функцію.*]

$$\boxed{y' = p(y);\; y''_{xx} = p\frac{dp}{dy}.}$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \ln y;$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = \frac{y \ln y}{p}.$$

Маємо диференціальне рівняння Бернуллі.

[*Розв'язуємо його методом Бернуллі.*]

$$\boxed{p = uv, p' = u'v + uv'.}$$

$$v\left[u' - \frac{u}{y}\right] + uv' = \frac{y \ln y}{uv} \Rightarrow \begin{cases} u' - \dfrac{u}{y} = 0, \\ uv' = \dfrac{y \ln y}{uv}. \end{cases}$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0; \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}; u = y.$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\ln y}{yv}; vdv = \frac{\ln y dy}{y}; \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 y + \frac{1}{2}C_1.$$

$$p(y) = [u(y)v(y)] = \pm y\sqrt{\ln^2 y + C_1}.$$

[*Визначимо сталу C_1 з початкової умови.*]

$$p(y(0)) = 1 \Rightarrow p(1) = 1.$$

$$p(1) = \pm\sqrt{C_1} = 1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = +y\sqrt{\ln^2 y + 1};\ \frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 1}} = dx;$$

$$x = \int \frac{d\ln y}{\sqrt{\ln^2 y + 1}} = \ln\left|\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1}\right| + C_2.$$

[*Визначаємо сталу* C_2 *з початкової умови* $y(0) = 1$.]

$$0 = 0 + C_2;\ C_2 = 0.$$

Розв'язок задачі Коші: $x = \ln\left|\ln y + \sqrt{1 + \ln^2 y}\right|$.

12.2.4. Переконатись, що функції $y_1 = x^2$ та $y_2 = x^3$ лінійно незалежні й утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння 2-го порядку. Записати це рівняння. Знайти розв'язок рівняння, який справджує початкові умови $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

Розв'язання. [12.4.3–12.4.6.]

[*Досліджуємо лінійну незалежність функцій за допомогою вронскіана.*]

$$\left[W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\right]$$

$$W[x^2, x^3] = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0,\ \text{коли}\ x \neq 0.$$

Отже, функції y_1, y_2 є лінійно незалежними й утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого ЛОДР 2-го порядку, коефіцієнти якого є неперервними функціями для $x \neq 0$.

[*Знаходимо диференціальне рівняння.*]

Якщо y є розв'язком шуканого ДР, то функції y, y_1 та y_2 є лінійно залежними і

$$W[y, y_1, y_2] = \left[\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} y & x^2 & x^3 \\ y' & 2x & 3x^2 \\ y'' & 2 & 6x \end{vmatrix} = 0;$$

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

[*Записуємо загальний розв'язок цього рівняння.*]

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

[*Знаходимо частинний розв'язок, який справджує початкові умови.*]

$$y' = C_1 \cdot 2x + C_2 \cdot 3x^2.$$

$$\begin{cases} 1 = y(1) = C_1 + C_2, \\ 0 = y'(1) = 2C_1 + 3C_2 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 3, C_2 = -2.$$

$$y = 3x^2 - 2x^3.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

12.2.5. Зінтегруйте диференціальне рівняння:

1) $y'' = x + \sin x$;
2) $y''' = \sin 2x$;
3) $xy'' = y'$;
4) $x^2 y'' = (y')^2$;
5) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$;
6) $xy'' = y' + x \sin \dfrac{y'}{x}$;
7) $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$;
8) $xy''' + y'' = 1 + x$;
9) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$;
10) $y'''^2 + y''^2 = 1$;
11) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$;
12) $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$.

12.2.6. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y'' = xe^x, y(0) = y'(0) = 0$;
2) $y'' = \dfrac{1}{(x+2)^5}, y(-1) = \dfrac{1}{12}, y'(-1) = -\dfrac{1}{4}$;
3) $y'' = \dfrac{2xy'}{x^2 + 1}, y(0) = 1, y'(0) = 3$;
4) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, y(2) = 0, y'(2) = 4$;
5) $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1, y'(-2) = -1$;
6) $y^3 y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0$;
7) $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$;
8) $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2yy'}{1 + y^2}, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

12.2.7. Переконайтесь, що функції y_1 та y_2 утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку, і запишіть це рівняння, якщо:

1) $y_1 = x^3, y_2 = x^4$; 2) $y_1 = e^x, y_2 = x^2e^x$.

Відповіді

12.2.5. 1) $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$; 2) $y = \dfrac{1}{8}\cos 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

3) $y = C_1x^2 + C_2$; 4) $y = \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{1}{C_1^2}\ln\left|C_1x+1\right| + \dfrac{C_2}{C_1^2}, y = \dfrac{x^2}{2} + C, y = C$;

5) $y = (C_1x - C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$; 6) $y = \left(x^2 + \dfrac{1}{C_1^2}\right)\operatorname{arctg} C_1x - \dfrac{x}{C_1} + C_2, y = \dfrac{\pi k}{2}x^2 + C, k \in \mathbb{Z}$;

7) $y = -\dfrac{\sin^3 x}{3} + C_1\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}\right) + C_2$; 8) $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{2} + C_1x\ln\left|x\right| + C_2x + C_3$;

9) $y\cos^2(x + C_1) = C_2$; 10) $y = \sin(C_1 + x) + C_2x + C_3$; 11) $(x + C_2)\ln y = x + C_1, y = C$;

12) $\ln y = C_1\operatorname{tg}(C_1x + C_2), \ln\left|\dfrac{\ln y - C_1}{\ln y + C_1}\right| = 2C_1x + C_2, (C - x)\ln y = 1, y = C$.

12.2.6. 1) $y = (x-2)e^x + x + 2$; 2) $y = \dfrac{1}{12(x+2)^3}$; 3) $y = x^3 + 3x + 1$;

4) $y = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \dfrac{16}{5}$; 5) $y = \dfrac{4}{(x+4)^2}$; 6) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

7) $y = -\ln\left|x-1\right|$; 8) $y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

12.2.7. 1) $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$; 2) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

Практикум 12.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Навчальні задачі

12.3.1.1. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язання. [12.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

[*Розв'язуємо його методом Ойлера, замінюючи*

$$y \leftrightarrow 1, y' \leftrightarrow \lambda, y'' \leftrightarrow \lambda^2.]$$

[*Записуємо характеристичне рівняння.*]

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

[*Розв'язуємо рівняння у множині комплексних чисел.*]

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$$

[*Виписуємо відповідні лінійно незалежні розв'язки ЛОДР.*]

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow y_1 = \left[e^{\lambda_1 x}\right] = e^x,$$
$$\lambda_2 = -2 \leftrightarrow y_2 = \left[e^{\lambda_2 x}\right] = e^{-2x}.$$

[*Записуємо ФСР диференціального рівняння* [*12.5.6*] $\{y_1, y_2\}$.]

ФСР диференціального рівняння: $\{e^x, e^{-2x}\}$.

[*Записуємо загальний розв'язок ДР* [*12.5.7*] $y = C_1 y_1 + C_2 y_2, C_{1,2} \in \mathbb{R}$.]

Загальний розв'язок ДР: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

12.3.1.2. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + 26y = 0$.

Розв'язання. [12.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

[*Записуємо характеристичне рівняння.*]

$$\lambda^2 + 2\lambda + 26 = 0;$$
$$D = -100 = 100i^2;$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 10i}{2} = -1 \pm 5i.$$
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 5i = \left[\begin{matrix} \alpha \pm \beta i, \\ \beta > 0 \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} \alpha = -1, \\ \beta = 5 \end{matrix}\right] \leftrightarrow \left[\begin{matrix} y_1 = \left[e^{\alpha x} \cos \beta x\right] = e^{-x} \cos 5x, \\ y_2 = \left[e^{\alpha x} \sin \beta x\right] = e^{-x} \sin 5x. \end{matrix}\right.$$

ФСР рівняння: $\{e^{-x} \cos 5x, e^{-x} \sin 5x\}$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-x} \cos 5x + C_2 e^{-x} \sin 5x$.

12.3.1.3. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ДР $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. [12.5.]

Маємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0;$$
$$(\lambda - 3)^2 = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = 3.$$
$$\lambda_{1,2} = 3 \leftrightarrow \left[\begin{matrix} y_1 = \left[e^{\lambda_1 x}\right] = e^{3x}, \\ y_2 = \left[x e^{\lambda_1 x}\right] = x e^{3x} \end{matrix}\right. .$$

ФСР рівняння: $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$.

Загальний розв'язок: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

12.3.2. Розв'язати задачу Коші:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 4.$$

Розв'язання. [12.5.]

Маємо задачу Коші для ЛОДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow y_1 = e^x;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow y_2 = e^{2x};\ \lambda_3 = 3 \leftrightarrow y_2 = e^{3x}.$$

ФСР рівняння: $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

[*Щоб урахувати початкові умови, знаходимо відповідні похідні.*]

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x};$$

$$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}.$$

[*Використовуючи початкові умови, одержуємо систему щодо* C_1, C_2, C_3.]

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -4, \\ C_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші: $y = 2e^x - 4e^{2x} + 2e^{3x}$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

12.3.3. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$;
2) $y'' - 9y = 0$;
3) $y'' - 4y' = 0$;
4) $y'' + 9y' = 0$;
5) $y'' - 2y' + y = 0$;
6) $4\dfrac{d^2x}{dt^2} - 20\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$;
7) $y'' + 4y = 0$;
8) $y'' + y = 0$;
9) $y'' + 6y' + 13y = 0$;
10) $4y'' - 8y' + 5y = 0$;
11) $y''' + 9y' = 0$;
12) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$;
13) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$;
14) $y^{(4)} - 16y = 0$.

12.3.4. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10;$

2) $y'' + 4y' = 0, y(0) = 7, y'(0) = 8;$

3) $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0;$

4) $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2;$

5) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2;$

6) $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15.$

12.3.5. Складіть ЛОДР, знаючи їхні характеристичні рівняння:

1) $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0;$ 2) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0;$

3) $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0;$ 4) $(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$

12.3.6. Складіть ЛОДР, якщо відомі корені характеристичних рівнянь, і запишіть їхні загальні розв'язки:

1) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2;$ 2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1;$

3) $\lambda_1 = 3 - 2i, \lambda_2 = 3 + 2i;$ 4) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.$

Відповіді

12.3.3. 1) $y = C_1e^x + C_2e^{-4x};$ 2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x};$ 3) $y = C_1e^{4x} + C_2;$
4) $y = C_1e^{-9x} + C_2;$ 5) $y = e^x(C_1 + C_2x);$ 6) $x = (C_1 + C_2t)e^{5t/2};$
7) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x;$ 8) $y = C_1\cos x + C_2\sin x;$ 9) $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x);$
10) $y = e^x\left(C_1\cos\dfrac{x}{2} + C_2\sin\dfrac{x}{2}\right);$ 11) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3;$
12) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x};$ 13) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x};$
14) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x.$

12.3.4. 1) $y = 4e^x + 2e^{3x};$ 2) $y = 9 - 2e^{-4x};$ 3) $y = e^{-x/2}(2 + x);$
4) $y = 2e^{-3x}x;$ 5) $y = \sin 2x;$ 6) $y = 3e^{-2x}\sin 5x.$

12.3.5. 1) $9y'' - 6y' + y = 0;$ 2) $y'' + 3y' + 2y = 0;$ 3) $y''' + 3y'' + 2y' = 0;$
4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

12.3.6. 1) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y = C_1e^x + C_2e^{2x};$ 2) $y'' - 2y' + y = 0,\ y = (C_1x + C_2)e^x;$
3) $y'' - 6y' + 13y = 0,\ y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x);$
4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2).$

Практикум 12.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Навчальні задачі

12.4.1. Знайти загальний розв'язок ЛНДР $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ методом Лаґранжа.

Розв'язання. [12.6.1, 12.6.2.]

Маємо ЛНДР 2-го порядку із правою частиною загального вигляду.

[***Крок 1.*** *Розв'язуємо відповідне ЛОДР методом Ойлера.*]

$$y'' + y = 0.$$

$$\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm i \leftrightarrow \left[\begin{aligned} y_1 &= \cos x, \\ y_2 &= \sin x. \end{aligned}\right.$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

[***Крок 2.*** *Записуємо вигляд, у якому шукатимемо загальний розв'язок ЛНДР, варіюючи сталі.*]

$$\boxed{y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.}$$

[***Крок 3.*** *Функції $C_1'(x), C_2'(x)$ знаходимо з алгебричної системи*

$$\left\{\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}\right]$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x}. \end{cases}$$

[*Розв'язуємо систему щодо C_1' та C_2' методом Крамера.*]

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}; \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

[***Крок 4.*** *Знаходимо $C_1(x), C_2(x)$.*]

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2\cos^2 x} + A_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + A_2.$$

[***Крок 5.*** *Підставляючи знайдені* $C_1(x), C_2(x)$, *знаходимо загальний розв'язок ЛНДР.*]

Загальний розв'язок ЛНДР:

$$y = \left(A_1 - \frac{1}{2\cos^2 x} \right) \cos x + \left(\operatorname{tg} x + A_2 \right) \sin x.$$

Або,

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{2\cos x}.$$

12.4.2.1. Записати вигляд частинного розв'язку ЛНДР $y''' - 5y'' = x^2 - 1$ (з невизначеними коефіцієнтами).

Розв'язання. [12.6.4, 12.7.]

Маємо ЛНДР 3-го порядку зі спеціальною правою частиною.

$$[f(x) = e^{\alpha x} \left(P_l(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right) \leftrightarrow k = \alpha + i\beta]$$

[*Розв'язуємо характеристичне рівняння для відповідного ЛОДР.*]

$$y''' - 5y'' = 0;$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 5.$$

[*Аналізуємо праву частину диференціального рівняння.*]

Права частина ЛНДР $f(x) = x^2 - 1$ є функцією спеціального вигляду $ax^2 + bx + c$, якій відповідає число $k = 0$ [12.7.1].

[*Перевіряємо чи є число k коренем характеристичного рівняння і якої кратності.*]

Оскільки $\lambda_{1,2} = k$, то число $k = 0$ є коренем ХР кратності $r = 2.$①

[*Записуємо шаблон для частинного розв'язку ЛНДР.*]

$$y_* = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

Коментар. ① Ще кажуть, що наявний «резонанс» 2-го порядку.

12.4.2.2. Записати вигляд частинного розв'язку ЛНДР $y'' - 3y' = 2xe^{3x} - \sin 3x$ (з невизначеними коефіцієнтами).

Розв'язання. [12.7.]

Маємо ЛНДР 2-го порядку із правою частиною , яка є суперпозицією функцій спеціального вигляду.

[*Розв'язуємо характеристичне рівняння для відповідного ЛОДР.*]

$$y'' - 3y' = 0;$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3.$$

[*Аналізуємо праву частину диференціального рівняння.*]

Права частина ЛНДР $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

$f_1(x) = 2xe^{3x}$ є функцією спеціального вигляду $(ax + b)e^{3x}$; їй відповідає число $k_1 = 3$, яке є коренем ХР кратності $r_1 = 1$.

Відповідний частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{*1} = x(A_1 x + B_1)e^{3x}.$$

$f_2(x) = -\sin 3x$ є функцією спеціального вигляду $a\cos 3x + b\sin 3x$; її відповідає число $k_2 = 3i$, яке не є коренем ХР.

Відповідний частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{*2} = A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x.$$

Частинний розв'язок ЛНДР із правою частиною $f(x)$ шукаємо у вигляді:

$$y_* = y_{*1} + y_{*2} = x(A_1 x + B_1)e^{3x} + A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x.$$

12.4.3.1. Знайти загальний розв'язок ДР $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$.
Розв'язання. [12.6.4, 12.7.]

Маємо ЛНДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною.

Щоб знайти частинний розв'язок ЛНДР, використаємо метод невизначених коефіцієнтів.

[***Крок 1.*** *Записуємо теорему про структуру розв'язку ЛНДР.*]

$$\boxed{y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}}$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР методом Ойлера.*]

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0;$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0;$$

$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow y_1 = 1;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow y_2 = e^{2x};\ \lambda_3 = 3 \leftrightarrow y_3 = e^{3x}.$$

ФСР рівняння: $\{1, e^{2x}, e^{3x}\}$.

$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

[***Крок 3.*** *Записуємо частинний розв'язок ЛНДР з невизначеними коефіцієнтами — «шаблон» для частинного розв'язку.*]

$f(x) = 6x^2 + 2x - 5$ є функцією спеціального вигляду $ax^2 + bx + c$; їй відповідає число $k = 0$, яке є коренем ХР кратності $r = 1$.

Отже, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\boxed{y_* = x\Big(Ax^2 + Bx + C\Big) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.}$$

[***Крок 4.*** *Визначаємо коефіцієнти, підставляючи частинний розв'язок у ЛНДР.*]

$$y_*' = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$
$$y_*'' = 6Ax + 2B;$$
$$y_*''' = 6A.$$

$$6A - 5\Big(6Ax + 2B\Big) + 6\Big(3Ax^2 + 2Bx + C\Big) = 6x^2 + 2x - 5.$$
$$18Ax^2 + (12B - 30A)x + (6A - 10B + 6C) \equiv 6x^2 + 2x - 5.$$

[*Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x.*]

$$\begin{array}{r|c} x^2 & 18A = 6, \\ x & 12B - 30A = 2, \\ 1 & 6A - 10B + 6C = -5. \end{array} \qquad \begin{cases} 18A = 6, \\ 12B - 30A = 2, \\ 6A - 10B + 6C = -5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ B = 1, \\ C = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

[*Підставляючи знайдені коефіцієнти в «шаблон», знаходимо частинний розв'язок ЛНДР.*]

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{част. неодн.}} = x\left(\frac{x^2}{3} + x + \frac{1}{2}\right).$$

[***Крок 5.*** *Записуємо загальний розв'язок ЛНДР.*]

$$y_{\text{заг. неодн.}} = \underbrace{C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}}_{\text{заг. одн.}} + \underbrace{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x}_{\text{част. неодн.}}.$$

12.4.3.2. Знайти загальний розв'язок ДР $y''' + y'' - 6y' = (6x + 7)e^{-x}$.

Розв'язання. [12.6.4, 12.7.]

Маємо ЛНДР 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною.

$$\boxed{y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}}$$

$$y''' + y'' - 6y' = 0;$$
$$\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = 0;$$
$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow y_1 = 1;\ \lambda_2 = 2 \leftrightarrow y_2 = e^{2x};\ \lambda_3 = -3 \leftrightarrow y_3 = e^{-3x}.$$
$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}.$$

Права частина ЛНДР $f(x) = (6x+7)e^{-x}$ є функцією спеціального вигляду $(ax+b)e^{-x}$; їй відповідає число $k=-1$, яке не є коренем ХР.

Отже, частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$\boxed{y_* = (Ax+B)e^{-x}.}$$

$$y_*' = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} = e^{-x}(A - B - Ax);$$
$$y_*'' = -e^{-x}\Big(A - B - Ax\Big) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax + B - 2A);$$
$$y_*''' = -e^{-x}(Ax + B - 2A) + Ae^{-x} = e^{-x}\Big(3A - B - Ax\Big).$$
$$e^{-x}\Big(3A - B - Ax\Big) + e^{-x}(Ax + B - 2A) - 6e^{-x}(A - B - Ax) =$$
$$= (6x+7)e^{-x}.$$

[*Зводимо подібні і скорочуємо на* e^{-x}.]

$$6Ax - 5A + 6B \equiv 6x + 7.$$

$$\begin{array}{c|c} x & 6A = 6, \\ 1 & -5A + 6B = 7. \end{array} \qquad \begin{cases} 6A = 6, \\ 6B - 5A = 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 2. \end{cases}$$

$$y_{\text{част. неодн.}} = (2x+4)e^{-x}.$$
$$y_{\text{заг. неодн.}} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} + (x+2)e^{-x}.$$

12.4.4. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = \sin 2x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

Розв'язання. [12.6.4, 12.7.]

Маємо задачу Коші для ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.

$$\boxed{y_{\text{заг. неод.}} = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част. неодн.}}}$$
$$y'' + 4y = 0;$$
$$\lambda^2 + 4 = 0;\ \ \lambda_{1,2} = \pm 2i \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \cos 2x, \\ y_2 = \sin 2x. \end{array}\right.$$
$$y_{\text{заг. одн.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Права частина ЛНДР $f(x) = \sin 2x$ є функцією спеціального вигляду $a\cos 2x + b\sin 2x$; їй відповідає число $k = 2i$, яке є коренем ХР кратності $r = 1$.
Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$\boxed{y_* = x\big(A\cos 2x + B\sin 2x\big).}$$

Звідси:

$$y_*' = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x);$$
$$y_*'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x).$$

[*Підставляємо ці вирази в ЛНДР.*]

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) +$$
$$+4x(A\cos 2x + B\sin 2x) \equiv \sin 2x;$$
$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x \equiv \sin 2x.$$

[*Прирівнюємо коефіцієнти при* $\sin 2x$ *та* $\cos 2x$.]

$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & -4A = 1, \\ \cos 2x & 4B = 0. \end{array} \qquad \begin{cases} -4A = 1, \\ 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4}, \\ B = 0. \end{cases}$$

$$y_{\text{чн. неодн.}} = y_* = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

$$y_{\text{заг. неод.}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

[*Справджуємо початкові умови.*]

$$y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1, \\ y'(0) = 2C_2 - \dfrac{1}{4} = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -\dfrac{7}{8}. \end{cases}$$

[*Знайдені значення сталих підставляємо в* $y_{\text{заг. неод.}}$.]

Розв'язок задачі Коші: $y = \cos 2x - \dfrac{7}{8}\sin 2x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x.$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

12.4.5. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 12e^{-x}$; 2) $f(x) = 3e^{2x}$;

3) $f(x) = 2x + 1$;
4) $f(x) = 4x^2 - 2x - 1$;
5) $f(x) = -2xe^x$;
6) $f(x) = e^{3x}(2x + 1)$;
7) $f(x) = 10\sin x$;
8) $f(x) = 20\cos 2x - 40\sin 2x$;
9) $f(x) = 4x - 12e^{-2x} + 4$;
10) $f(x) = 12\,\mathrm{sh}\, x$.

12.4.6. Складіть загальний розв'язок рівняння $2y'' + 5y' = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 15x^2 + 2x + 1$;
2) $f(x) = 29\cos x$;
3) $f(x) = 5e^{-2{,}5x} - 25\sin\dfrac{5x}{2}$;
4) $f(x) = 50\,\mathrm{ch}\dfrac{5x}{2}$.

12.4.7. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 4$;
2) $f(x) = 9e^{-x}$;
3) $f(x) = 6e^{2x}$;
4) $f(x) = 32\,\mathrm{sh}\, 2x$.

12.4.8. Складіть загальний розв'язок рівняння $y'' + y = f(x)$, підбираючи його частинний розв'язок, якщо:

1) $f(x) = 2x^3 - x + 2$;
2) $f(x) = -8\cos 3x$;
3) $f(x) = \cos x$;
4) $f(x) = 2\sin x - 2e^{-x}$.

12.4.9. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2}, y(0) = 3, y'(0) = -5{,}5$;

2) $y'' - y' = 2(1 - x), y(0) = 1, y'(0) = 1$;

3) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), y(0) = 2, y'(0) = 2$;

4) $y'' + y = -\sin 2x, y(\pi) = y'(\pi) = 1$;

5) $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3$;

6) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x), y(0) = -4, y'(0) = 5$;

7) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x, y(\pi) = \pi e^{\pi}, y'(\pi) = e^{\pi}$;

8) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}, y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1;$

9) $y''' - y' = 3(2 - x^2), y(0) = y'(0) = y''(0) = 1;$

10) $y^{(4)} - y = 8e^x, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4, y'''(0) = 6.$

12.4.10. Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

1) $y'' + 4y = -\operatorname{ctg}^2 2x;$

2) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}};$

3) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x};$

4) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}};$

5) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1};$

6) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{4 - x^2}};$

7) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x;$

8) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}.$

Відповіді

12.4.5. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y_{\text{ч.н.}}$, 1) $y_{\text{ч.н.}} = 2e^{-x}$; 2) $y_{\text{ч.н.}} = 3xe^{2x}$; 3) $y_{\text{ч.н.}} = x + 2$; 4) $y_{\text{ч.н.}} = 2x^2 + 5x + 5$; 5) $y_{\text{ч.н.}} = e^x(x^2 + 2x)$; 6) $y_{\text{ч.н.}} = e^{3x}(x - 1)$; 7) $y_{\text{ч.н.}} = \sin x + 3\cos x$; 8) $y_{\text{ч.н.}} = -\sin 2x - 7\cos 2x$; 9) $y_{\text{ч.н.}} = 2x + 5 - e^{-2x}$; 10) $y_{\text{ч.н.}} = -e^{-x} - 6xe^x$.

12.4.6. $y = C_1 + C_2 e^{-5x/2} + y_{\text{ч.н.}}$, 1) $y_{\text{ч.н.}} = x^3 - x^2 + x$; 2) $y_{\text{ч.н.}} = 5\sin x - 2\cos x$; 3) $y_{\text{ч.н.}} = \cos\dfrac{5x}{2} + \sin\dfrac{5x}{2} - xe^{-5x/2}$; 4) $y_{\text{ч.н.}} = e^{5x/2} - 5xe^{-5x/2}$.

12.4.7. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + y_{\text{ч.н.}}$, 1) $y_{\text{ч.н.}} = 1$; 2) $y_{\text{ч.н.}} = e^{-x}$; 3) $y_{\text{ч.н.}} = 3x^2 e^{2x}$; 4) $y_{\text{ч.н.}} = 8x^2 e^{2x} - e^{-2x}$.

12.4.8. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_{\text{ч.н.}}$, 1) $y_{\text{ч.н.}} = 2x^3 - 13x + 2$; 2) $y_{\text{ч.н.}} = \cos 3x$; 3) $y_{\text{ч.н.}} = \dfrac{x}{2}\sin x$; 4) $y_{\text{ч.н.}} = -x\cos x - e^{-x}$.

12.4.9. 1) $y = (1 + x)e^{-3x/2} + 2e^{-5x/2}$; 2) $y = e^x + x^2$; 3) $y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1)$; 4) $y = \dfrac{1}{3}\sin 2x - \dfrac{1}{3}\sin x - \cos x$; 5) $y = 2e^x - 5\sin x + 2\cos x$; 6) $y = 2e^x + (\sin x - 2\cos x)e^{-x} - 4$; 7) $y = -[\pi\cos x + (\pi + 1 - 2x)\sin x]e^x$; 8) $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$; 9) $y = e^x + x^3$; 10) $y = 2xe^x$.

12.4.10. 1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln\left|\operatorname{tg} x\right|$;

2) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{4}{3}\cos x\sqrt{\operatorname{ctg} x}$; 3) $y = e^x(x + C_1) - (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + C_2$;

4) $y = \dfrac{1}{2}e^x\left(\arcsin e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + C_1\right) + \dfrac{1}{3}\sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2$;

5) $y = e^x(C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{x^2 + 1} + x \operatorname{arctg} x)$;

6) $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin\dfrac{x}{2}\right)$;

7) $y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2$; 8) $y = (C_1 - x)e^{-x}\cos x + \left(C_2 + \ln\left|\sin x\right|\right)e^{-x}\sin x$.

Практикум 12.5 Системи лінійних диференціальних рівнянь

Навчальні задачі

12.5.1.1. Розв'язати систему ДР $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$ методом виключення.

Розв'язання. [12.8.]

Це лінійна однорідна система ДР. Зводимо її до одного лінійного ДР.①

[***Крок 1.*** *Виражаємо з 2-го рівняння x і підставляємо його в 1-ше рівняння. Дістаємо ЛОДР 2-го порядку щодо функції $y(t)$.*]

$$\begin{cases} x = \dfrac{y' - 3y}{3}, \\ x' = 5x + 8y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{y''}{3} - y', \\ \dfrac{y''}{3} - y' = 5\left(\dfrac{y' - 3y}{3}\right) + 8y. \end{cases}$$

$$y'' - 8y' - 9y = 0.$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0;$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9.$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо функцію $x(t)$.*]

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t};$$

$$x(t) = \frac{y' - 3y}{3} = \frac{-C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t} - 3C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{9t}}{3} =$$

$$= -\frac{4}{3}C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}.$$

[***Крок 3.*** *Записуємо загальний розв'язок системи.*]

Загальний розв'язок системи ДР: $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}C_1e^{-t} + 2C_2e^{9t}, \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{9t}, \end{cases} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Коментар. ① У системі x та y є функціями змінної t: $x = x(t), y = y(t)$.
З 1-го рівняння, яке містить x', можна виключити змінну y (або з 2-го рівняння, яке містить y', — змінну x).

12.5.1.2. Розв'язати систему ДР $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y + e^t \end{cases}$ методом виключення.

Розв'язання.

Це лінійна неоднорідна система ДР. Зводимо її до одного лінійного ДР.

[***Крок 1.*** *Виражаємо з 1-го рівняння функцію* y.]

$$\begin{cases} y = x - x', \\ y' = x + y + e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = x' - x'', \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$$

$$x' - x'' = x + (x - x') + e^t;$$

$$x'' - 2x' + 2x = -e^t.$$

Для функції $x(t)$ маємо ЛНДР 2-го порядку зі спеціальною правою частиною.

$$\boxed{x(t) = x_{\text{заг. одн.}}(t) + x_{\text{част. неодн.}}(t).}$$

$$x'' - 2x' + 2x = 0.$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0; \ \lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

$$x_{\text{заг. одн.}} = C_1e^t \cos t + C_2e^t \sin t.$$

$$f(t) = e^t \leftrightarrow k = 1 \neq \lambda_{1,2}.$$

$$\boxed{x_* = Ae^t.}$$

$$x_*' = Ae^t; x_*'' = Ae^t.$$

$$Ae^t - 2Ae^t + 2Ae^t = -e^t;$$

$$A = -1.$$

$$x_{\text{част. неод.}} = -e^t.$$

$$x = C_1e^t \cos t + C_2e^t \sin t - e^t.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо функцію* $y(t)$.]

$$x' = C_1e^t(\cos t - \sin t) + C_2e^t(\sin t + \cos t) - e^t;$$

$$y = x(t) - x'(t) = C_1e^t \sin t - C_2e^t \cos t.$$

[***Крок 3.*** *Записуємо загальний розв'язок системи.*]

Загальний розв'язок системи ДР: $\begin{cases} x = C_1 e^t \cos t + C_2 \sin t - e^t, \\ y = C_1 e^t \sin t - C_2 e^t \cos t, \end{cases} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

12.5.2. Розв'язати систему ДР $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$ методом Ойлера.

Розв'язання. [12.8.]

Це однорідна система лінійних ДР.

[***Крок 1.*** *Записуємо систему в матричному вигляді.*]

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$

[***Крок 2.*** *Записуємо характеристичне рівняння* $\det(A - \lambda E_2) = 0.$]

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

[***Крок 3.*** *Розв'язуємо характеристичне рівняння.*]

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= 9. \end{aligned} \right.$$

[***Крок 4.*** *Знаходимо власні вектори, які відповідають власним числам, розв'язуючи системи лінійних однорідних рівнянь вигляду*

$$(A - \lambda_i E_2)\vec{\alpha} = \vec{0}.]$$

$\lambda_1 = -1:$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{4}{3} C_1, \\ \alpha_2 = C_1 \end{cases}; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*Знаходимо частинний розв'язок системи.*]

$$\vec{x}_1 = \left[\vec{A}_1 e^{\lambda_1 t} \right] = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$\lambda_2 = 9:$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2C_1, \\ \alpha_2 = C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*Знаходимо частинний розв'язок системи.*]

$$\vec{x}_2 = \left[\vec{A}_2 e^{\lambda_2 t}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t}.$$

[***Крок 5.*** *Записуємо загальний розв'язок системи.*]

$$\left[\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)\right]$$

Загальний розв'язок системи ДР:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3}C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}, \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \end{cases} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

12.5.3. Знайдіть загальний розв'язок системи лінійних ДР:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + 40e^{t}, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + 10e^{-2t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

12.5.4. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 4;$ 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y, \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 1.$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases}$
$x(0) = -2, y(0) = 1.$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y, \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = 0.$

Відповіді

12.5.3. 1) $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = (2C_1t + 2C_2 + C_1)e^{-t}, \\ y = (C_1t + C_2)e^{-t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = \dfrac{1}{5}e^{-2t}((4C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + 4C_2)\sin 3t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + 7e^t + 2e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + e^t + 3e^{-2t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$

12.5.4. 1) $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3e^{2t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}, \\ y = e^{-t}\cos t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^{5t}(\cos 2t - \sin 2t), \\ y = 2e^{5t}\sin 2t. \end{cases}$

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Загальний розв'язок ДР. **2.** Частинний розв'язок ДР. **3.** Задача Коші для ДР. **4.** ДР з відокремлюваними змінними. **5.** Однорідне ДР. **6.** Лінійне ДР. **7.** ДР Бернуллі.	**8.** Лінійно незалежність і лінійно залежність системи функцій. **9.** Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного ДР. **10.** Характеристичне рівняння для лінійного однорідного ДР. **11.** Функція спеціального вигляду. **12.** Нормальна система ДР.
Теореми	
1. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ДР 1-го порядку. **2.** Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ДР n-го порядку. **3.** Критерій лінійної незалежності функцій.	**4.** Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного ДР. **5.** Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР. **6.** Теорема про суперпозицію.
Методи	
1. Метод Лаґранжа. **2.** Метод Бернуллі.	**3.** Метод Ойлера. **4.** Метод невизначених коефіцієнтів.
Основні задачі	
1. Класифікувати ДР 1-го порядку. **2.** Розв'язувати ДР 1-го порядку. **3.** Розв'язувати ДР n-го порядку, що дозволяють понижувати порядок. **4.** Розв'язувати лінійне однорідне ДР зі сталими коефіцієнтами методом Ойлера. **5.** Розв'язувати лінійне неоднорідне ДР методом Лаґранжа.	**6.** Розв'язувати лінійне неоднорідне ДР зі спеціальною правою частиною методом невизначених коефіцієнтів підбирання частинного розв'язку. **7.** Розв'язувати лінійну однорідну нормальну систему ДР матричним методом. **8.** Розв'язувати лінійну неоднорідну нормальну систему ДР метод виключення. **9.** Розв'язувати задачу Коші для ДР.

Додаток А. Походження деяких термінів та позначень

1. Походження деяких термінів

Адитивний — *лат.* additivus (доданий).

Вронскіан — на честь Й. Вронського [Мюїр (1881)].

Гармонічна функція — *гр.* harmonia (стрункий лад, зв'язок) [Томсон (1850)].

Дивергенція — *лат.* divergentio (розбіжність). [Кліфорд (1878)].

Ізокліна — *гр.* isos (рівний), klino (нахиляю) — рівнопохила [Й. І Бернуллі (1694)].

Інтеграл — *лат.* integer (повний, цілий) [Я. Бернуллі (1690)].

Інтеграл визначений [Валіс (1656)] (обчислення), [Лаплас (1782)] (термін).

Інтеграл подвійний [Ляйбніц (1692)] (обчислення).

Інтеграл потрійний [Лаґранж].

Інтеграл криволінійний [Клеро (1743)], термін [Нойман, Ерміт], шлях інтегрування [Пюїзо (1850)], напрям обходу [Мебіус].

Інтеграл невизначений [Ляйбніц (1694)] (знаходження), [Лакруа (1797–1800)] (термін).

Інтеграл невластивий [Роберваль (1642), Торрічеллі (1643)] (обчислення), — [Штуді (1901)] (термін).

Інтеграл поверхневий [Лаґранж (1788), Ґаус (1813)].

Інтегральне числення [Й. І Бернуллі (1696)]

Логістична функція [Верхюльст (1845)].

Межі інтегрування [Лаплас (1782)].

Метод невизначених коефіцієнтів [Декарт (1637), Ньютон, Ляйбніц].

Набла [Тет (1890)].

Поле вихрове, безвихрове [Томсон (1851)].

Первісна [Лакруа (1797–1800)].

Повторні інтеграли [Ойлер (1769)]

Потенціал — *лат.* potentia (сила) [Ґрін (1828), Ґаус (1840).]

Потік [Максвел (1873)].

Резонанс — *лат.* resono (відгук).

Ротор — *лат.* rotor (обертання) [Кліфорд], ротація [Максвел (1855)].

Соленоїдальне поле — *гр.* solen (трубка), eidos (вигляд) — трубчастий [Томсон].

Характеристичне рівняння — *гр.* kharakhter (риса, особливість) [Коші (1840)].

Циркуляція — *лат.* circulatio (обертання) [Томсон].

Якобіан — [Ойлер (1759)] (поняття), на честь К. Якобі [Келі, Сильвестр (1853)].

2. Походження деяких позначень

$\int$	[Ляйбніц (1675)]
$\int\limits_a^b$	[Фур'є (1822)]
$\Big\vert_a^b$	[Сарюс (1823)] (знак підстановки)
$\oint$	[Зомерфельд (1917)]
∇	[Тейт (1867), у формі $\lhd$ — Гамільтон (1837)]
Δ	[Мерфі (1823)] (оператор Лапласа)
div	[Кліфорд (1878)]
rot	[Ґанс (1905)]

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники та посібники

1. *Adams R. A.* Calculus : Complete course / R. A. Adams, C. Essex. — Toronto : Pearson Canada, 2010. — 1076 pp.

2. *Anton H.* Calculus: Early transcendentes / H. Anton, I. Bivens, S. Davis. — John Wiley & sons, Inc., 2012. — 1318 pp.

3. *Briggs W. L.* Calculus. Early transcendentals / W. L. Briggs, L. L. Cochran, B. Gillett, E. Schulz. — Pearson. — 1360 pp.

4. *Hughes-Hallett D.* Calculus. Single variables / D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, W. G. McCallum et al. — John Wiley & Sons, Inc., 2017. — 745 pp.

5. *Hughes-Hallett D.* Multivariable calculus / D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, W. G. McCallum et al. — John Wiley & Sons, Inc., 2017 — 642 pp.

6. *Edwards C. H.* Calculus. Early transcendentals / C. H. Edwards, D. E. Penney. Pearson, 2014. — 1250 pp.

7. *Larson R.* Calculus / R. Larson, B. Edwards. — Brooks/Cole, 2014. — 1280 pp.

8. *Meyer C. D.* Matrix analysis and applied linear algebra / C. D. Meyer. — SIAM, 2000. — 727 pp.

9. *Rogawski J.* Calculus / J. Rogawski. — New York : W. H. Freeman and Company, 2012. — 1050 pp.

10. *Rogawski J.* Calculus. Early transcendentals / J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa. New-York: W. H. Freeman, 2019. — 1120 pp.

11. *Stewart J.* Calculus : Early transcendentals / J. Stewart. — Cengage Learning, 2016. — 1368 pp.

12. *Tan S. T.* Calculus / S. T. Tan. — Brooks/Cole, 2010. — 1324 pp.

13. *Zill D. G.* Advanced engineering mathematics / D. G. Zill, W. S. Wright. — Burlington : Jones and Bartlett Learning, 2017. — 1004 pp.

14. *Zill D. G.* Calculus : Early transcendentes / D. G. Zill, W. S. Wright. — Sudbury : Jones and Bartlett publishers, 2011. — 994 pp.

15. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. — Київ : Центр учбової літератури, 2017. — 445 с.

16. Вся высшая математика / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — М. : Эдиториал УРСС, 2017. — Т. 2—4.

17. *Дубовик В. П.* Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. — Київ : Игнатекс-Україна, 2013. — 648 с.

18. *Жевняк Р. М.* Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн. : Вышэйшая школа, 1984—1988. — Ч. 2—4.

19. *Овчинников П. П.* Вища математика : У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — Київ : Техніка, 2004. — 792 с.

20. *Пискунов Н. с.* Дифференциальное и интегральное исчисления : В 2-х т. / Н. С. Пискунов. — М. : Интеграл-Пресс, 2010.

21. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике : Полный курс / Д. Письменный. — М. : Айрис-Пресс, 2014. — 608 с.

22. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики : Учебник для вузов / В. С. Шипачев. — М. : Оникс, 2009. — 608 с.

Задачники та практикуми

23. *Математика в технічному університеті :* Практикум : У 4-х ч. / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — Київ : НТУУ «КПІ», 2014. — 752 с.

24. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — СПб. : Лань, 2017. — 492 с.

25. *Вища* математика : Збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. — Київ : Ігнатекс-Україна, 2011. — 480 с.

26. *Герасимчук В. С.* Вища математика : Повний курс у прикладах і задачах : / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — Київ : Книги України ЛТД, 2009. — Т. 2—3.

27. *Клепко В. Ю.* Вища математика в прикладах і задачах / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. — Київ : Центр учбової літератури, 2017. — 594 с.

28. *Сборник* задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др. : Под ред. Г. И. Кручковича. — М. : Высш. шк., 1973. — 576 с.

29. *Сборник* задач по математике для втузов : В 4 ч. / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — М. : Физматлит, 2001—2003.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

* Посилання на підпункт теоретичної частини відповідного розділу.

** Посилання на номер задачі відповідного практикуму.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

1. Бароу Ісаак *I. Barrow* (1630–1677) — англійський математик, фізик та богослов. *9.7.1.1*

2. Бернуллі Якоб *J. Bernoulli* (1654—1705) — швейцарський математик. *12.1.5.2, 12.1.6.1*

3. Валіс (точніше Воліс) Джон *J. Wallis* (1616–1703) — англійський математик. *9.7.5.3*

4. Вольтерра Віто *V. Volterra* (1860–1940) — італійський математик та фізик. *12.5.1*

5. Вронський Юзеф *J. Hoene-Wroński* (1776–1853) — польський математик та філософ. *12.2.5.2*

6. Гамільтон Вільям *W. Hamilton* (1806–1865) — ірландський математик. *11.2.1.2*

7. Ґаус Карл *C. Gauss* (1777—1855) — німецький математик, астроном, геодезист та фізик. 10.7.5.2, 11.1.3.8

8. Ґрін Джордж *G. Green* (1793–1841) — англійський математик. *10.5.5.2*

9. Діріхле Петер Ґустав *P. G. Dirichlet* (1805–1859) — німецький математик французького походження. *9.6.3*

10. Коші Оґюстен-Луї *A.-L. Cauchy* (1789–1857) — французький математик. 9.8.1.7, 9.8.3.4, 12.1.2.5, 12.2.1.2

11. Лаґранж Жозеф-Луї *J.-L. Lagrange* (1736–1813) — французький математик та астроном італійського походження. *12.1.5.2, 12.1.6.3, 12.4.2.1*

12. Лаплас П'єр-Сімон Лапла́с *P.-S. Laplace* (1749–1827) — французький математик та астроном. *11.2.2.4, 11.3.3.2*


[1]


[2]


[3]


[4]


[5]


[6]


[7]


[9]


[10]


[11]


[12]

13. Лотка Альфред Джеймс *A. J. Lotka* (1880–1949) — американський статистик, математик та фізикохімік. *12.5.1*

14. Ляйбніц Ґотфрід Вільгельм *G. W. Leibniz* (1646—1716) — німецький математик, логік та філософ. *9.7.2.1*

15. Мебіус Август Фердинанд *A. F. Möbius* (1790–1868) — німецький геометр і астроном. *10.7.1.1*

16. Ньютон Ісаак *I. Newton* (1642—1727) — англійський фізик, математик, астроном, богослов, філософ. 9.7.2.1

17. Ойлер Леонард *L. Euler* (1707—1783) — швейцарський математик, фізик, астроном, логік та інженер. 12.3.1.1, 12.5.4

18. Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) — український математик, механік і фізик. *10.2.6.2, 10.5.5.2, 10.7.5.2, 11.1.3.8*

19. Стокс Джордж Ґабрієль *G. G. Stokes* (1819–1903) — британський математик і фізик ірландського походження. *10.7.6.1, 11.1.4.6*

20. Френель Огюстен Жан *A.-J. Fresnel* (1788–1827) — французький фізик. *9.7.1.3*

21. Чебишов Пафнутій Львович (1821–1894) — російський математик та механік. *9.5.3.1*

22. Якобі Карл *C. Jacobi* (1804–1851) — німецький математик єврейського походження. *10.2.6.2*


[13]


] [14]


[15

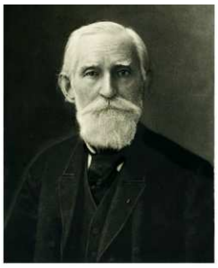

[16]


[17]


[18]


[19]


[20]


[21]


[22]

Зміст навчального комплексу

Навчальне видання

Алєксєєва *Ірина Віталіївна*
Гайдей *Віктор Олександрович*
Диховичний *Олександр Олександрович*
Федорова *Лідія Борисівна*

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

ПІДРУЧНИК

Том 3