МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

О.Ю. Дюженкова, М.Є. Дудкін, І.В. Степахно

Вища математика. Практикум

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за інженерними спеціальностями

Київ
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
2021

УДК 517

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 09.12.2021 р.) за поданням Вченої ради Фізико - математичного факультету (протокол № 01 від 23.09.2021 р.).

Рецензенти: **Головач Іван Володимирович,**
доктор тех. наук, професор Національного університету біоресурсів і природокористування

Томащук Олексій Петрович,
кандидат пед. наук, доцент Національного авіаційного університету

Відповідальний редактор: **Волков Андрій Вікторович,**
кандидат фіз.– мат. наук, доцент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О.Ю. Дюженкова, М.Є. Дудкін, І.В. Степахно. – К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. – Бібліогр.: 409 с. – електронне видання.

Навчальний посібник містить матеріал, необхідний для вивчення всіх основних розділів вищої математики, велику кількість розв'язаних прикладів, завдання для самостійної та розрахункових робіт.

Практикум призначений для студентів інженерних спеціальностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» і може бути використаний на практичних заняттях, для виконання домашніх робіт, а також для самостійного вивчення студентами дисципліни «Вища математика».

Передмова

Вища математика є фундаментальним курсом для студентів інженерних спеціальностей. Математичні методи використовуються в усіх областях людської діяльності, тому вивчення математики має не тільки важливе загальноосвітнє значення, але і створює необхідну базу для професійної підготовки майбутніх фахівців. Оволодіння основами сучасного математичного апарату дає можливість аналізувати та досліджувати певні процеси, сприяє формуванню у студентів навичок математичного моделювання та використання математичних методів при розв'язуванні прикладних задач.

Навчальний посібник призначений для студентів інженерних спеціальностей і має на меті допомогти студентам опанувати курс вищої математики, передбачений програмою. Викладений матеріал охоплює основні розділи вищої математики, а саме:

I. Елементи лінійної та векторної алгебри.

II. Елементи аналітичної геометрії.

III. Вступ до математичного аналізу.

IV. Диференціальне числення функції однієї змінної.

V. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

VI. Інтегральне числення функції однієї змінної.

VII. Диференціальні рівняння.

VIII. Кратні та криволінійні інтеграли.

IX. Ряди.

У кожному розділі розглянуто матеріал, необхідний для розв'язування типових задач, наведено велику кількість прикладів різного рівня складності, а також завдання для самостійної роботи. Запропонований практикум містить завдання на опрацювання всіх основних математичних понять та алгоритмів, необхідних для глибокого засвоєння матеріалу, які можна використовувати для виконання розрахункових робіт.

Навчальний посібник зручно застосовувати на практичних заняттях, для виконання домашніх робіт, а також для самостійного опрацювання матеріалу, зокрема студентами заочної та дистанційної форм навчання. Для кращого вивчення вищої математики наприкінці посібника наведено список рекомендованої літератури.

Практикум складено на основі тривалого досвіду викладання вищої математики студентам інженерних спеціальностей і містить важливі методичні рекомендації для кращого засвоєння матеріалу.

Розділ I. Елементи лінійної та векторної алгебри

Тема 1. Матриці. Дії над матрицями

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти матрицю $C = 2A - 3B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Розв'язання</u>. Оскільки задані матриці однакової розмірності, то

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 0\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\cdot 3 & 2\cdot 3 & 5\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & -7\cdot 3 & 4\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ обчислити $A^T + B^T$.

<u>Розв'язання</u>. Транспонувавши матриці A і B, дістанемо:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Для заданих матриць обчислити добутки AB і BA, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

<u>Розв’язання</u>. а) Кількість стовпчиків матриці A дорівнює 3 і кількість рядків матриці B дорівнює 3. Тому добуток $C=A\cdot B$ можна знайти, причому $A_{2\times3}\cdot B_{3\times2}=C_{2\times2}$, тобто матриця C матиме розмірність 2×2.

Помноживши елементи першого рядка матриці A на відповідні елементи першого стовпчика матриці B і додавши одержані добутки, знайдемо елемент c_{11} матриці C:

$$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}=1\cdot2+0\cdot1+(-1)\cdot5=-3.$$

Аналогічно знайдемо інші елементи матриці C:

$$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}=2\cdot2+3\cdot1+(-2)\cdot5=-3;$$

$$c_{12}=a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}=1\cdot(-3)+0\cdot0+(-1)\cdot(-2)=-1;$$

$$c_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}=2\cdot(-3)+3\cdot0+(-2)\cdot(-2)=-2.$$

Отже, $C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добуток BA:

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+(-3)\cdot2 & 2\cdot0+(-3)\cdot3 & 2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2) \\ 1\cdot1+0\cdot2 & 1\cdot0+0\cdot3 & 1\cdot(-1)+0\cdot(-2) \\ 5\cdot1+(-2)\cdot2 & 5\cdot0+(-2)\cdot3 & 5\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -9 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Оскільки задано матриці однакової розмірності, то можна визначити як добуток AB, так і BA. Отже,

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1+(-5)\cdot(-1) & 3\cdot4+(-5)\cdot2\\ 1\cdot1+2\cdot(-1) & 1\cdot4+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -1 & 8\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+4\cdot1 & 1\cdot(-5)+4\cdot2\\ -1\cdot3+2\cdot1 & -1\cdot(-5)+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 9\end{pmatrix}.$$

в) Оскільки матриці $A_{2\times2}$ і $B_{3\times2}$, то кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B, тому добуток AB не існує. Але можна знайти добуток BA.

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-2) & -3+4\\ 3+(-4) & -9+8\\ 5+(-6) & -15+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Для матриць $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ знайти $A+C,\ 2A-B^T,\ A\cdot B,\ B\cdot A,\ A^2$.

Розв‘язання. Матриці A і C можна додавати, так як вони мають однакову розмірність 3×2. Додавши відповідні елементи матриць, дістанемо

$$A+C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 8 & 3\\ 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця B має розмірність 2×3, то транспонована матриця B^T матиме розмірність 3×2, тому

$$2A-B^T=2\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}10 & 2\\ 6 & -2\\ 4 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 4 & -1\\ 1 & -12\end{pmatrix}.$$

Матриці A і B можна перемножити, оскільки A має розмірність 3×2, а B – розмірність 2×3. Тоді добуток матриць $A\cdot B$ має розмірність 3×3, а добуток $B\cdot A$ – розмірність 2×2. Отже, за означенням добутку матриць:

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 1\\ \hline 3 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|cc}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}5\cdot1+1\cdot0 & 5\cdot2+1\cdot(-1) & 5\cdot3+1\cdot4\\ 3\cdot1+(-1)\cdot0 & 3\cdot2+(-1)\cdot(-1) & 3\cdot3+(-1)\cdot4\\ 2\cdot1+(-4)\cdot0 & 2\cdot2+(-4)\cdot(-1) & 2\cdot3+(-4)\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 19\\ 3 & 7 & 5\\ 2 & 8 & -10\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \hline 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot3+3\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot(-4)\\ 0\cdot5+(-1)\cdot3+4\cdot2 & 0\cdot1+(-1)\cdot(-1)+4\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -13\\ 5 & -15\end{pmatrix}.$$

Матрицю A^2 обчислити неможливо, так як матриця A не є квадратною.

Приклад 5. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо матричне рівняння $A\cdot B+2X=C$, звідки знайдемо невідому матрицю $X=\dfrac{1}{2}(C-A\cdot B)$. Спочатку обчислимо добуток матриць

$$AB=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot(-3)\\ 1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot(-3)\\ -3\cdot2 & -3\cdot0 & -3\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -3\\ -6 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Тоді
$$X=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -3\\ -6 & 0 & 9\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2-2 & 3-0 & 5-(-3)\\ 0-2 & 1-0 & -4-(-3)\\ 3-(-6) & 2-0 & 0-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3/2 & 4\\ -1 & 1/2 & -1/2\\ 9/2 & 1 & -9/2\end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки задано квадратну матрицю, то можна знайти її степінь $A^3=A\cdot A\cdot A$. Маємо

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -20 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}.$$

Отже, $A^3 = \begin{pmatrix} -23 & -20 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}$.

Приклад 7. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Розв'язання.</u> Значення матричного многочлена $f(A)$ визначається рівністю $f(A) = -2A^2 + 5A - 3E$. Знайдемо A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\quad f(A) = -2 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Отже, значення матричного многочлена $f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ знайти $A + B,\ A - 3B,\ A^T + B^T + E.$

2. Виконати вказані дії для матриць (якщо це можливо):

а) $A - B,\ 3A + 2B,\ A^T - B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $2A + B,\ A - 3B,\ A^T + 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A-B,\ A+2C^T,\ A^T+B^T-C$, якщо $A=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\\4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$;

г) $A+B,\ A^T-B,\ A+2B^T$, якщо $A=\begin{pmatrix}9 & -2\\-3 & 1\\5 & -6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 8\\2 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

3. Визначити $A+B,\ 2A-B,\ A+3C-2E,\ A^T+5B-C^T$, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\0 & 1 & 2\\-1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\1 & 3 & 0\\-2 & 4 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\4 & 5 & -2\\1 & -3 & 6\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\3 & 5 & -4\\2 & -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\3 & 2 & 1\\-1 & 3 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\6 & 9 & -1\\4 & -2 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\2 & 0 & 3\\-4 & 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\-1 & 4 & 6\\3 & -2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\4 & 2 & -1\\3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

4. Знайти добутки AB і BA для матриць (якщо це можливо):

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 4\\3 & -1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\4 & -2\\5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\4 & 6 & -8\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 4\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\2 & -1 & 4\\0 & 6 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\0 & 2 & 6\\-3 & 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\-2 & 5 & 0\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, е) $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\4 & 5 & 6\\1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

є) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\2 & 5 & 1\\3 & 4 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 4\\4 & 1 & -6\\2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, ж) $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\1 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\3 & 4 & 2\\6 & -3 & -1\end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; і) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \ A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти добутки $(AB)C$ і $(BA)C$, якщо:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти значення матричного многочлена $P(A)$, якщо

а) $P(x)=2x^2+3x-2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $P(x)=3x^2-x+5$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Визначники

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. За означенням маємо: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$=1·5–(–3)·2=5+6=11.

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\sin^2\alpha$.

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. За означенням визначника (правилом трикутників) маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot1+0\cdot5\cdot3+(-1)\cdot4\cdot(-2)-(-2)\cdot1\cdot3-5\cdot4\cdot2-0\cdot(-1)\cdot1=$$

$$=2+0+8+6-40-0=16-40=-24.$$

Приклад 4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Користуючись правилом трикутників, знаходимо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+(-2)\cdot2\cdot3+(-1)\cdot2\cdot1-1\cdot3\cdot3-2\cdot2\cdot2-(-2)\cdot(-1)\cdot5=$$

$$=30-12-2-9-8-10=-11.$$

Приклад 5. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{12} визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку запишемо мінор елемента a_{12} даного визначника, для цього викреслимо із цього визначника перший рядок і другий стовпчик. Дістанемо мінор $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Тоді алгебраїчне доповнення цього елемента

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1.$$

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 18 & 3 \\ 10 & 15 & 10 \end{vmatrix}$, скориставшись його властивостями.

Розв'язання. Винесемо спільний множник елементів кожного із рядків, після чого винесемо спільний множник елементів першого і другого стовпців за знак визначника, скориставшись властивістю 4. Дістанемо

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 18 & 3 \\ 10 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30\cdot2\cdot3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30\cdot6\cdot(4+1+1-2-2-1) = 180\cdot$$

Приклад 7. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв’язання.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 24 - 2(-6-18) + 5(-8-3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

Приклад 8. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, попередньо спростивши, тобто утворивши якомога більше нулів.

Розв’язання. Оскільки в першому рядку на першому місці стоїть 1, то візьмемо цей рядок за основний і утворимо нулі в першому стовпчику. Для цього перший рядок помножимо на (–2) і додамо його до другого рядка, а потім перший рядок додамо до третього рядка. В результаті дістанемо визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Отриманий визначник розкладемо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ (-2)\cdot1+2 & (-2)\cdot3+8 & (-2)\cdot2+1 \\ 1+(-1) & 3+1 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 8 - (-12) = 20.$$

Приклад 9. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

<u>Розв'язання.</u> Обчислимо визначник четвертого порядку, розклавши його за елементами рядка або стовпця. Спочатку розкладемо визначник за елементами третього рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot 13 + 1\cdot 3 = 55.$$

А тепер розкладемо визначник за елементами третього стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 3\cdot(-1-12) = 55.$$

Приклад 10. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки в другому стовпчику є два нулі, то розкладемо визначник за елементами цього стовпчика, тобто

$$\Delta = a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32} + a_{42}\cdot A_{42} = 0\cdot A_{12} + 3\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32} + (-6)\cdot A_{42} = 3A_{22} - 6A_{42}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{22} і A_{42}:

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12-12+0-12-27-0 = -39;$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}\cdot M_{42} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -5 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0-9-60-0-60+4 = -125.$$

Отже, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-39) - 6\cdot(-125) = 633.$

Приклад 11. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Маємо визначник четвертого порядку. Можна помітити, що перший і третій рядки містять три однакових елементи, тому утворимо якомога більше нулів у третьому рядку. Для цього помножимо перший рядок на (–1) і додамо до третього рядка, а потім застосуємо властивість 8, розклавши визначник за елементами третього рядка. Одержаний визначник третього порядку обчислимо за означенням (правилом трикутників).

$$\Delta = \begin{array}{r} (-1)\cdot \\ \downarrow + \\ \mapsto \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -(16 - 0 - 45 + 30 - 0 - 36) = 35.$$

Приклад 12. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник, розклавши його за елементами рядка або стовпця. Виберемо перший рядок і подамо визначник у вигляді суми добутків елементів цього рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = 5\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Потрібно обчислити три визначники третього порядку, оскільки третій доданок дорівнює нулю (відповідний визначник обчислювати не треба). Зрозуміло, що чим більше нулів є в рядку (стовпці), за елементами якого розкладають визначник, тим менше визначників потрібно обчислювати. Якщо нулі утворюють в стовпці, то виконують перетворення над елементами рядка, а якщо нулі утворюють в рядку, то над елементами стовпця.

Утворимо в одному із рядків або стовпців визначника якомога більше нулів, наприклад в третьому стовпці, в якому вже є нуль. Виберемо елемент –1, який стоїть в третьому рядку і розглянемо цей рядок за основний.

У новому визначнику елементи третього рядка перепишемо без змін. Помножимо елементи третього рядка на 2 і додамо до відповідних елементів другого рядка, а потім додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

Після цих перетворень розкладемо визначник за елементами третього стовпця, дістанемо

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 10 & 7 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, обчислення визначника четвертого порядку звелось до обчислення визначника третього порядку, який можна знайти за означенням або знову утворити нулі.

На перетині першого рядка і другого стовпця стоїть елемент –1, тому утворимо нулі в першому рядку, а другий стовпчик візьмемо за основний. Помножимо елементи цього стовпця на 5 і додамо до елементів першого стовпця, після чого помножимо елементи другого стовпця на 3 і додамо до елементів третього стовпця. Розкладемо визначник за елементами першого рядка, після чого винесемо спільний множник із першого стовпця, а потім – із першого рядка. Дістанемо:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 10 & 7 & 3\\ 8 & 5 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 45 & 7 & 24\\ 33 & 5 & 19\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}45 & 24\\ 33 & 19\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}15 & 24\\ 11 & 19\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot 3\begin{vmatrix}5 & 8\\ 11 & 19\end{vmatrix}=-9(5\cdot 19-8\cdot 11)=-9\cdot 7=-63.$$

Приклад 13. Обчислити визначник, попередньо його спростивши

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ -5 & -3 & 0 & -6\\ -3 & 0 & 4 & 3\\ 6 & 1 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

<u>Розв’язання.</u> Застосовуючи властивості визначників, утворимо якомога більше нулів у третьому стовпчику, оскільки там уже є нуль. Для цього помножимо елементи першого рядка на (–4) і додамо до відповідних елементів третього рядка, а потім елементи першого рядка додамо до елементів четвертого рядка. Дістанемо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ -5 & -3 & 0 & -6\\ -3 & 0 & 4 & 3\\ 6 & 1 & -1 & 2\end{vmatrix}\to\begin{bmatrix}I\cdot(-4)+III\\ I+IV\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ -5 & -3 & 0 & -6\\ -7 & -12 & 0 & -1\\ 7 & 4 & 0 & 3\end{vmatrix}.$$

Розкладемо останній визначник за елементами третього стовпчика:

$$\Delta=a_{13}A_{13}=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-5 & -3 & -6\\ -7 & -12 & -1\\ 7 & 4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & -3 & -6\\ -7 & -12 & -1\\ 7 & 4 & 3\end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник третього порядку обчислимо, утворивши нулі в третьому стовпчику. Для цього елементи другого рядка помножимо на (–6) і додамо до відповідних елементів першого, а елементи другого рядка помножимо на 3 і додамо до відповідних елементів третього. Після цього розкладемо визначник за елементами третього стовпчика, дістанемо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -5 & -3 & -6 \\ -7 & -12 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to \begin{bmatrix} II\cdot(-6)+I \\ \\ II\cdot 3+III \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 37 & 69 & 0 \\ -7 & -12 & -1 \\ -14 & -32 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot\left(-1\right)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 37 & 69 \\ -14 & -32 \end{vmatrix} = 37\cdot\left(-32\right)-69\cdot\left(-14\right)=-218\,.$$

Приклад 14. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Розв’язання.</u> Розкладемо визначник за елементами першого стовпчика, для цього утворимо в ньому нулі. Для цього зробимо такі перетворення: елементи першого рядка помножимо на (–3) і додамо до відповідних елементів другого рядка; елементи першого рядка помножимо на (–4) і додамо до відповідних елементів третього рядка; елементи першого рядка додамо до відповідних елементів четвертого рядка. Дістанемо визначник, який розкладемо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{bmatrix} I\cdot(-3)+II \\ I\cdot(-4)+III \\ I+IV \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -10 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки в одержаному визначнику є одиниця на перетині третього рядка і третього стовпця, то третій стовпчик візьмемо за основний і утворимо нулі в третьому рядку. Для цього елементи третього стовпчика помножимо на 5 і додамо до елементів першого стовпчика, потім елементи третього стовпчика помножимо на (–3) і додамо до елементів другого стовпчика. Одержаний визначник розкладемо за елементами третього рядка, дістанемо

$$\begin{vmatrix} 11 & -10 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{bmatrix} III\cdot 5+I \\ III\cdot(-3)+II \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & -16 & 2 \\ 27 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 21 & -16 \\ 27 & -16 \end{vmatrix} = 3\cdot(-16)\cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -48\cdot(7-9) = 96.$$

Приклад 15. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$, звівши його до трикутного вигляду.

Розв’язання. Зведемо визначник до трикутного вигляду, тобто утворимо нулі під головною діагоналлю. Для цього зробимо такі перетворення. Додамо перший рядок до другого і четвертого, після чого додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього і четвертого рядків. Потім третій рядок помножимо на (–1) і додамо до четвертого рядка. Оскільки під головною діагоналлю визначника утворились всі нулі, то за теоремою маємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \cdot$$

$$= 15\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 15\cdot(-1)\cdot 2\cdot 1\cdot 3 = -90\cdot$$

Приклад 16. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} < -2$.

Розв'язання. Обчисливши визначник, дістанемо нерівність

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} < -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 0 - 2 + 2x - 0 < -2, \quad x^2 + 8x < 0.$$

Розв’язавши нерівність $x(x+8) < 0$ методом інтервалів, дістанемо розв’язок $x \in (-8;0)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити визначники, користуючись їх властивостями:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} x & 2x & -3x \\ x & -2x & 3x \\ x & x & 2x \end{vmatrix}$.

4. Знайти алгебраїчні доповнення для вказаних елементів визначників:

а) для елемента a_{12} визначника $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$;

б) для елемента a_{21} визначника $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;

в) для елемента a_{32} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix}$;

г) для елемента a_{23} визначника $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & -3 & 8 & 4 \\ -4 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити визначники третього порядку, розклавши за елементами деякого рядка або стовпця:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 15 \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 8 & 10 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & 9 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

6. Обчислити визначники четвертого порядку, розклавши за елементами деякого рядка або стовпця (утворивши перед цим якомога більше нулів):

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} a-2 & a^2-9 \\ 1 & a-3 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 3x \\ -\cos 2x & \sin 3x \end{vmatrix} = 0$.

8. Розв’язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 4 \\ x & -2 \end{vmatrix} < 0$; б) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} > 0$; в) $\begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 4 & 2 & 0 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} < 0$.

Тема 3. Обернена матриця. Ранг матриці

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, і перевірити, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

<u>Розв’язання.</u> Знайдемо визначник матриці $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$.

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то обернена матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебричні доповнення елементів матриці:

$$A_{11} = 3, \qquad A_{12} = -1, \qquad A_{21} = -2, \qquad A_{22} = -1.$$

Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже, $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Приклад 2. Розв'язати матричне рівняння $AX=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розв'язок даного рівняння знайдемо за формулою

$$X=A^{-1}B.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Для цього обчислимо визначник і визначимо алгебраїчні доповнення елементів. Оскільки

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=1,\; A_{11}=3,\; A_{12}=-4,\; A_{21}=-2,\; A_{22}=3, \text{ то } A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Тоді $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 11\\ 13 & -13\end{pmatrix}.$

Отже, шукана матриця $X=\begin{pmatrix}-9 & 11\\ 13 & -13\end{pmatrix}.$

Приклад 3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}.$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5.$$

Оскільки $|A|\neq 0$, то існує обернена матриця. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\; A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\; A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Запишемо транспоновану матрицю з алгебраїчних доповнень

$$\tilde{A}^T=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$A^{-1}A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Розв‘язання. Використовуючи метод елементарних перетворень, знайдемо ранг матриці. Спочатку поміняємо місцями перший і другий рядки. А потім, помноживши одержаний перший рядок на (–2) і на (–1), додамо його до другого і третього рядків відповідно. Після чого другий рядок помножимо на (–2) і додамо до третього. В останній матриці відкидаємо рядок, всі елементи якого нулі. Дістаємо:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2)\cdot(-1)\\ \swarrow + \swarrow\\ \swarrow\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & -6 & -2 & -8\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2)\\ \swarrow\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & 4\end{pmatrix}=B.$$

В результаті елементарних перетворень над матрицею A дістали еквівалентну матрицю B, для якої існує мінор другого порядку, відмінний від нуля. Зокрема, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3\neq 0$. Отже, ранг даної матриці $r(A)=r(B)=2$.

Приклад 5. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

<u>Розв’язання.</u> Виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці, які не змінюють її рангу. Поміняємо місцями перший і четвертий рядки, щоб елемент $a_{11}=1$, а потім утворимо нулі в першому і другому стовпцях. Дістанемо:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}I\leftrightarrow IV\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -5 & -6\\ -3 & 1 & -4 & -7\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}I+II\\ I\cdot 3+III\\ I\cdot(-2)+IV\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 6 & -6 & -6\\ 0 & 7 & -7 & -7\\ 0 & -3 & 3 & 3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}II\cdot 1/6\\ II\cdot 1/7\\ III\cdot(-1/3)\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}II\cdot(-1)+III\\ II\cdot(-1)+IV\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Отримали еквівалентну матрицю, для якої існує мінор другого порядку, що не дорівнює нулю $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, тому ранг матриці $r(A)=2$.

Приклад 6. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 3 & -4\\ -1 & 7 & -11 & 23\end{pmatrix}$.

Розв’язання. Виберемо за основний перший рядок матриці і за допомогою елементарних перетворень утворимо нулі в першому стовпчику, а потім в другому стовпчику. Відкинувши нульовий рядок, дістанемо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 7 & -11 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-1)+III \\ I+IV \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 9 & -12 & 26 \end{pmatrix} \sim$$

$$\to \begin{bmatrix} II\cdot(-1)+III \\ II\cdot 3+IV \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

В результаті елементарних перетворень дістали еквівалентну матрицю ступінчастого виду, для якої існує мінор третього порядку, відмінний від нуля. Якщо взяти перший, другий і третій стовпчики, дістанемо

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)\cdot 5=-15\neq 0.$$

Отже, ранг даної матриці $r(A)=3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти обернену матрицю для матриці A і зробити перевірку:

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,

д) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, е) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, є) $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти, при яких значеннях a матриця $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ має обернену.

3. Розв’язати матричне рівняння $AX=B$, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння $XA=B$ при $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 6\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

5. Розв'язати матричне рівняння $AXB=C$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

6 Знайти ранг матриці:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 2 & 4 & -6 & 8\\ -3 & -6 & 9 & -12\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 7 & 11\\ 5 & 1 & 6 & 11\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$,

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, д) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}$, е) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 2 & -2 & 0 & -3 & 5\\ 4 & -2 & 2 & -9 & 9\end{pmatrix}$.

Тема 4. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розв‘язати систему $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=-2,\\ 5x_1-x_2-x_3=10,\\ x_1-x_2+5x_3=-12\end{cases}$ методом Крамера.

<u>Розв‘язання</u>. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=3\cdot(-1)\cdot 5+5\cdot(-1)\cdot 1+1\cdot(-1)\cdot 1-$$

$$-1\cdot(-1)\cdot 1-(-1)\cdot(-1)\cdot 3-5\cdot 1\cdot 5=-15-5-1+1-3-25=-48\neq 0.$$

Замінивши перший, другий і третій стовпчики відповідно стовпчиком вільних членів, обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 10 + 12 - 12 + 2 - 50 = -48;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 150 - 60 + 2 - 10 - 36 + 50 = 96;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 36 + 10 + 10 - 2 + 30 + 60 = 144.$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-48}{-48} = 1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{96}{-48} = -2; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{144}{-48} = -3.$$

Отже, шуканий розв'язок системи: $(1;-2;-3)$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

<u>Розв'язання.</u> Розв'яжемо систему методом Крамера. Обчислимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -30-10+3-4+9+25=-7 \neq 0.$$

Оскільки визначник системи не дорівнює нулю, то вона має єдиний розв'язок. Знайдемо його.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 30-4+3-4-9+10=26,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -30+10-9-4-9-75=-117,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-6-15-2-6-6+5=-30.$$

Тоді за формулами Крамера дістаємо розв'язок

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{26}{7}; \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{117}{7}; \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{30}{7}.$$

Приклад 3. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4 = 8, \\ x_1-3x_2 \quad - \quad 6x_4 = 9, \\ \qquad 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4 = 0 \end{cases}.$$

<u>Розв'язання.</u> Обчислимо визначники

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108, \; \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27, \; \Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27.$$

Тоді за формулами Крамера маємо

$$x_1=\frac{81}{27}=3; \quad x_2=-\frac{108}{27}=-4; \quad x_3=-\frac{27}{27}=-1, \quad x_4=\frac{27}{27}=1.$$

Отже, розв'язок системи $(3;-4;-1;1)$.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6x_3=17, \\ 3x_1+4x_2-x_3=-3, \\ x_1-5x_2+2x_3=10 \end{cases}$ матричним методом (методом оберненої матриці).

<u>Розв'язання</u>. Запишемо систему рівнянь у матричній формі:

$$A\cdot X=B,$$

де $$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6\\ 3 & 4 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}17\\ -3\\ 10\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця A квадратна (система має однакову кількість рівнянь і невідомих), то матрицю X визначимо, розв’язавши матричне рівняння $AX=B$, тобто $X=A^{-1}B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}, для цього обчислимо визначник:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 6\\ 3 & 4 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=16-90+3-24-10+18=-87.$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, то матриця A має обернену. Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=3,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 6\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-24,\ A_{31}=+\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-21,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,\ A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & -1\end{vmatrix}=20,$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-19,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{vmatrix}=7,\ A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=17.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}3 & -24 & -21\\ -7 & -2 & 20\\ -19 & 7 & 17\end{pmatrix}$$

Скориставшись рівністю $X=A^{-1}B$, знаходимо розв’язок системи

$$X=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}3 & -24 & -21\\ -7 & -2 & 20\\ -19 & 7 & 17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\ -3\\ 10\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}3\cdot 17-24\cdot(-3)-21\cdot 10\\ -7\cdot 17-2\cdot(-3)+20\cdot 10\\ -19\cdot 17+7\cdot(-3)+17\cdot 10\end{pmatrix}=-\frac{1}{87}\begin{pmatrix}-87\\ 87\\ -174\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$ – шуканий розв’язок системи.

Приклад 5. Розв’язати матричним методом систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$

<u>Розв’язання.</u> Запишемо систему в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести позначення $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, то $A \cdot X = B$.

Визначимо матрицю X із рівності $X = A^{-1}B$, для цього знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Обчислимо визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10+8-6-12+5-8=-3.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Запишемо транспоновану матрицю з алгебраїчних доповнень

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -13 & -2 & 7 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -13 & -2 & 7 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв’язок системи із рівності $X = A^{-1}B$, маємо

$$X = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -13 & -2 & 7 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 1\cdot 3 - 1\cdot 7 \\ -13\cdot 4 - 2\cdot 3 + 7\cdot 7 \\ -6\cdot 4 + 0\cdot 3 + 3\cdot 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв’язок системи $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1.$

Приклад 6. Розв‘язати систему $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$ методом Гауса.

<u>Розв‘язання</u>. Застосуємо метод Гауса до розширеної матриці даної системи і шляхом елементарних перетворень зведемо її до трикутного виду.

Спочатку поміняємо місцями перший і третій рядки для того, щоб на першому місці була одиниця. Перший рядок вибираємо за основний, тому помноживши його на (–2), додаємо до другого рядка, а помноживши на (–5), додаємо до третього. Утворивши нулі у першому стовпчику (виключивши невідому x_1 із другого і третього рівняння), перейдемо до другого рядка. Помноживши другий рядок на (–2), додамо до третього рядка, після чого третій рядок поділимо на (–1). Дістанемо:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 3 \end{array}\right) \left[I \leftrightarrow III\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{bmatrix} I\cdot(-2) + II \\ I\cdot(-5) + III \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -5 \\ 0 & 14 & 31 & -11 \end{array}\right) \left[II\cdot(-2) + III\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає системі $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 3, \\ \quad 7x_2 + 16x_3 = -5, \\ \qquad\quad x_3 = 1, \end{cases}$ яка має єдиний розв’язок. З третього рівняння маємо $x_3 = 1$. Підставляючи це значення в друге рівняння, дістаємо $x_2 = -3$, після чого з першого рівняння знаходимо $x_1 = 0$. Отже, шуканий розв'язок системи: $(0; -3; 1)$.

Приклад 7. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Запишемо розширену матрицю заданої системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Щоб спростити обчислення, утворимо в першому рядку на першому місці елемент 1. Для цього третій рядок домножимо на (–2) і додамо до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \left[III \cdot (-2) + I \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Проведемо елементарні перетворення над рядками матриці, щоб звести її до трикутного виду, дістанемо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} I \cdot (-2) + II \\ I \cdot (-3) + III \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & 7 & -5 & 29 \\ 0 & 8 & -10 & 46 \end{array}\right) \left[III \cdot (-1) + II \right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & 5 & -17 \\ 0 & 8 & -10 & 46 \end{array}\right) \left[II \cdot 8 + III \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 30 & -90 \end{array}\right).$$

Запишемо і розв'яжемо систему рівнянь, яка відповідає останній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -14, \\ \qquad - x_2 + 5x_3 = -17, \\ \qquad\qquad 30x_3 = -90, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -14; \\ - x_2 + 5 \cdot (-3) = -17, \\ \qquad x_3 = -3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2\cdot 2 + 3\cdot(-3) = -14, \\ \quad x_2 = 2, \\ \qquad x_3 = -3, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = \ 2; \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Дістали розв'язок системи (–1; 2;–3).

Приклад 8. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ 2x_1 \qquad + \ x_3 - \ x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - \ x_3 + 2x_4 = 6, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця даної системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \end{array}\right).$$

За допомогою елементарних перетворень зведемо її до трикутного вигляду. Дістанемо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -10 & 11 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ \quad 2x_2 - \ x_3 \ + \ x_4 = -1, \\ \qquad -2x_3 + \ 3x_4 = 5, \\ \qquad\qquad 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Звідси послідовно знаходимо $x_4 = 3,\ x_3 = 2,\ x_2 = -1,\ x_1 = 1.$

Отже, шуканий розв'язок системи (1;–1; 2; 3).

Приклад 9. Дослідити систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$ на сумісність і знайти її розв'язок, якщо це можливо.

Розв'язання. Оскільки система містить менше рівнянь, ніж невідомих, то вона або сумісна і невизначена, або несумісна. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень над рядками зведемо її до ступінчастого виду. Дістанемо

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -6 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -4 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ \quad -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

За теоремою Кронекера – Капеллі система рівнянь сумісна і невизначена, оскільки ранг системи $r = r(A) = r(\overline{A}) = 2$, а кількість змінних $n = 5$, тобто $r < n$. Отже, дана система має безліч розв'язків, знайдемо її загальний розв'язок. Оскільки визначник, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2: $M_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, то розглядаємо ці змінні як базисні. Виразимо базисні змінні x_1, x_2 через вільні змінні x_3, x_4, x_5. З другого рівняння знаходимо $x_2 = -1 + 2x_3 + 2x_4$ і підставляємо цей вираз у перше рівняння, звідки визначаємо $x_1 = 1 - (-1 + 2x_3 + 2x_4) + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 - x_4 - x_5$.

Отже, загальний розв'язок заданої системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 - x_5, \\ x_2 = -1 + 2x_3 + 2x_4, \end{cases}$$ де x_3, x_4, x_5 – довільні дійсні числа.

Приклад 10. Дослідити систему рівнянь $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5, \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1, \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12 \end{cases}$ на сумісність і знайти її розв’язок, якщо це можливо.

<u>Розв‘язання</u>. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень над рядками зведемо її до ступінчастого виду. Спочатку перший рядок помножимо на (–2) і додамо до другого, помножимо на (–1) і додамо до третього, на (–5) і додамо до четвертого рядка. Утворивши нулі в першому стовпчику, візьмемо другий рядок за основний. Помножимо його на (–2) і додамо до третього рядка, а потім на (–3) і додамо до четвертого рядка. Дістанемо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ \qquad x_2-7x_3+5x_4=-1. \end{cases}$$

Оскільки ця система рівнянь має безліч розв’язків ($r<n$, див. випадок 2 у дослідженні методом Гауса), то знайдемо її загальний розв’язок. Оскільки визначник, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, відмінний від нуля, то ці змінні розглядаємо як базисні. Виразимо базисні змінні x_1, x_2 через вільні змінні x_3, x_4. З другого рівняння знаходимо $x_2=-1+7x_3-5x_4$ і підставляємо цей вираз у перше рівняння, звідки визначаємо $x_1=6-26x_3+17x_4$. Отже, загальний розв’язок заданої системи має вигляд:

$x_1=6-26x_3+17x_4$, $x_2=-1+7x_3-5x_4$, x_3, x_4 – довільні дійсні числа.

Приклад 11. Дослідити на сумісність систему $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

<u>Розв‘язання</u>. Проведемо перетворення над розширеною матрицею системи і дістанемо еквівалентну матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Оскільки для матриці A всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, а $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг $r(A) = 2$. Але для розширеної матриці існує мінор третього порядку $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, тому ранг $r(\overline{A}) = 3$.

Оскільки $r(A) \neq r(\overline{A})$, то за теоремою Кронекера – Капеллі система не має розв’язків (несумісна).

Приклад 12. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

<u>Розв‘язання</u>. Запишемо розширену матрицю системи і проведемо елементарні перетворення над її рядками, дістанемо

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останньої матриці випливає, що $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 5 = n$, тому задана система сумісна і невизначена. Знайдемо загальний розв’язок системи. Оскільки визначник, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2:

$M_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, то розглядаємо ці змінні як базисні. Виразимо базисні змінні x_1, x_2 через вільні змінні x_3, x_4, x_5.

В результаті перетворень дістали матрицю, яка відповідає системі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ \quad -4x_2 + 7x_3 + 7x_4 \quad = 1. \end{cases}.$$

З другого рівняння знайдемо $x_2 = \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}$ і підставимо цей вираз у перше рівняння, звідки маємо

$$x_1 = -\left(\frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}\right) + 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 + \frac{5}{4}.$$

Отже, загальний розв’язок заданої системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 + \frac{5}{4}, \\ x_2 = \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}, \end{cases} \quad x_3, x_4, x_5 \in R..$$

Для того, щоб із загального знайти частинний розв’язок, потрібно надати вільним змінним x_3, x_4, x_5 деяких числових значень. Зокрема, при x_3=0, x_4=0, x_5=0, маємо розв’язок $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0\right)$.

Приклад 13. Розв’язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 \quad + \quad 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

<u>Розв‘язання</u>. Складемо основну матрицю системи і знайдемо ранг матриці методом елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -10 & 8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $M_r = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг матриці $r = 2 < 4 = n$, тому система має безліч розв'язків. Останній матриці відповідає система, яка має ті самі розв'язки, що й задана. Оскільки визначник M_r, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, відмінний від нуля, то ці змінні вважаємо базисними. Тоді змінні x_3, x_4 є вільними. Виразимо базисні змінні через вільні, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ \quad -5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 - 2x_4, \\ \quad -5x_2 = -4x_3 + 3x_4. \end{cases}$$

Знайдемо загальний розв'язок системи методом Крамера, обчислимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 - 2x_4 & 2 \\ -4x_3 + 3x_4 & -5 \end{vmatrix} = 3x_3 + 4x_4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 - 2x_4 \\ 0 & -4x_3 + 3x_4 \end{vmatrix} = -4x_3 + 3x_4.$$

Тоді загальний розв'язок системи має вигляд

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4, \; x_3, x_4 \in R.$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

<u>Розв'язання</u>. Складемо основну матрицю системи і знайдемо ранг матриці методом елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 1 & -8 & 7 & -25 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $M_r = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг матриці $r = 2 < 5 = n$, тому система має безліч розв'язків. Останній матриці відповідає система, яка має ті самі розв'язки, що й задана. Оскільки визначник M_r, складений із коефіцієнтів при змінних x_1, x_2, відмінний від нуля, то ці змінні вважаємо базисними. Тоді змінні x_3, x_4, x_5 є вільними. Виразимо базисні змінні через вільні, для чого перенесемо доданки з вільними змінними в праву частину системи, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5x_3 - 9x_4 + x_5, \\ \quad -8x_2 = -7x_3 + 25x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Знайдемо загальний розв'язок системи методом Крамера, обчислимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5x_3 - 9x_4 + x_5 & 3 \\ -7x_3 + 25x_4 - 4x_5 & -8 \end{vmatrix} = -19x_3 - 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5x_3 + 9x_4 + x_5 \\ 0 & -7x_3 + 25x_4 - 4x_5 \end{vmatrix} = -7x_3 + 25x_4 - 4x_5.$$

Тоді загальний розв'язок системи має вигляд

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5, \; x_3, x_4, x_5 \in R.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гауса:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 - 11x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -2x + 3y = 11, \\ -3x + y + z = 9, \\ 2x - 3y + 2z = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y + z = -7, \\ 2x - y - 3z = 5, \\ x - 3y - z = 1. \end{cases}$

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -2, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + y + z = 3, \\ 3x - 5y = 9, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ -x - 2y = -4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$

3. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -2, \\ 4x - y - z = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 3y + 6z = 6, \\ 2x - y - 3z = 8, \\ -9y + z = -10. \end{cases}$

4. Визначити, при яких значеннях параметрів a і b система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 2x + y + az = -1, \\ 5x - 8y + 9z = 3 \end{cases}$$

має один розв'язок; має безліч розв'язків; не має жодного розв'язку.

5. Дослідити на сумісність системи рівнянь і знайти їх розв'язки у випадку сумісності:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + x_2 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 16x_5 = -1. \end{cases}$

6. Розв'язати однорідні системи рівнянь

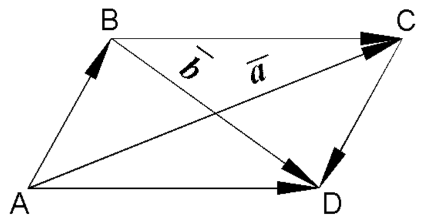
а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Тема 5. Вектори та операції над ними. Скалярний добуток векторів. Векторний та мішаний добутки векторів

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Нехай вектори $\overline{AC} = \overline{a}$, $\overline{BD} = \overline{b}$ співпадають з діагоналями паралелограма *ABCD*. Записати вектори $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ і $\overline{DA}$ через $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Розв'язання. Побудуємо паралелограм.



Очевидно, що $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{b}, \overline{BC} + \overline{AB} = \overline{BC} - \overline{CD} = \overline{a}$. Додавши ці рівності, дістанемо $\overline{BC} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2}$. Крім того, $\overline{CD} = \overline{b} - \overline{BC} = \overline{b} - \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2}$; $\overline{AB} = -\overline{CD} = \frac{\overline{a} - \overline{b}}{2}$, $\overline{DA} = -\overline{BC} = -\frac{\overline{a} + \overline{b}}{2}$.

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Знайти довжину вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 1$.

Розв'язання. Оскільки $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}}$, то знайдемо скалярний квадрат вектора $\vec{c}$

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c}^{\,2} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a}^{\,2} + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^{\,2} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 4|\vec{b}|^2 =$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 4 \cdot 1^2 = 2 + 1 + 4 = 7.$$

Отже, довжина вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ дорівнює $|\vec{c}| = \sqrt{7}$.

Приклад 3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$.

<u>Розв'язання</u>. Запишемо вектори, які визначають діагоналі паралелограма:

$$\vec{d}_1 = \vec{p} + \vec{q} = (2\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{a} + 3\vec{b}) = 3\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\vec{d}_2 = \vec{p} - \vec{q} = (2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} - 4\vec{b}.$$

Скориставшись властивостями скалярного добутку, дістанемо

$$\vec{d}_1^{\,2} = (3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 4|\vec{b}|^2 =$$

$$= 9\cdot 4 + 12\cdot 2\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{3} + 4\cdot 1 = 36 + 12 + 4 = 52, \quad |\vec{d}_1| = \sqrt{\vec{d}_1^{\,2}} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

$$\vec{d}_2^{\,2} = (\vec{a} - 4\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 8\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 8|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 16|\vec{b}|^2 =$$

$$= 4 - 8\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + 16 = 4 - 8 + 16 = 12, \quad |\vec{d}_2| = \sqrt{\vec{d}_2^{\,2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Отже, довжини діагоналей паралелограма $d_1 = 2\sqrt{13}, d_2 = 2\sqrt{3}$.

Приклад 4. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{a}$, а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k}$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки вектор $\overline{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ має координати $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z) = (1;0;-1)$, то його довжина $|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Тоді його напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, вектор $\overline{a}$ утворює з осями координат такі кути:

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \qquad \beta = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}; \qquad \gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Приклад 5. Для векторів $\vec{a}=(2;-1;3)$ і $\vec{b}=(1;3;-2)$ знайти суму $\vec{a}+\vec{b}$, різницю $\vec{a}-\vec{b}$, вектор $2\vec{a}-\vec{b}$ та його дожину, скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$, кут $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$, проекцію $np_{\vec{b}}\vec{a}$.

<u>Розв'язання</u>. Користуючись операціями додавання, віднімання множення вектора на число для векторів у координатній формі, маємо:

$$\vec{a}+\vec{b}=(2;-1;3)+(1;3;-2)=(3;2;1), \qquad \vec{a}-\vec{b}=(2;-1;3)-(1;3;-2)=(1;-4;5),$$

$$2\vec{a}-\vec{b}=(4;-2;6)-(1;3;-2)=(3;-5;8), \quad \left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2+8^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}.$$

За означенням скалярного добутку маємо

$$\vec{a}\vec{b}=(2;-1;3)\cdot(1;3;-2)=2\cdot 1-1\cdot 3+3\cdot(-2)=-7.$$

Тоді кут $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходимо так:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-7}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{-7}{14}=-\frac{1}{2},$$

звідки $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-7}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{-7}{\sqrt{14}}=-\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Приклад 6. Знайти кут $\angle BAC$ у трикутнику, заданому вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$, $C(2;1;2)$.

<u>Розв'язання</u>. Знайдемо кут $\angle BAC$ як кут між векторами $\overrightarrow{AB}=(1;1;0)$ і $\overrightarrow{AC}=(1;0;1)$, на яких побудовано трикутник. Застосувавши скалярний добуток векторів, маємо:

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, кут $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$.

Приклад 7. Дано трикутник з вершинами $A(1;0), B(-1;1), C(3;4).$ Довести, що кут при вершині A в трикутнику ABC – прямий, та визначити інші кути цього трикутника.

Розв'язання. Для доведення того, що кут $\angle BAC$ – прямий, достатньо показати перпендикулярність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AB} = (-2;1), \overrightarrow{AC} = (2;4).$ Оскільки скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 0,$ то вони є перпендикулярними, а значить, кут $\angle BAC$ – прямий.

Для визначення інших кутів трикутника розглянемо вектори

$\overrightarrow{BA} = (2;-1), \overrightarrow{BC} = (4;3), \overrightarrow{CA} = (-2;-4), \overrightarrow{CB} = (-4;-3)$,

тоді

$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\angle ACB = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-2) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}} = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отже, $\angle ABC = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \angle ACB = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}.$

Приклад 8. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (5;2;7)$ і $\vec{b} = (1;2;4)$.

Розв'язання. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює довжині векторного добутку цих векторів. Знайдемо векторний добуток заданих векторів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Тоді площа паралелограма дорівнює

$$S = |\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 8^2} = 2\sqrt{74}.$$

Приклад 9. Знайти площу трикутника з вершинами $A(2;2;2)$, $B(1;3;3), C(3;4;2)$.

<u>Розв'язання</u>. Розглянемо вектори $\vec{AB}=(-1;1;1),\ \vec{AC}=(1;2;0)$. За означенням векторного добутку площа трикутника побудованого на цих векторах, обчислюється за формулою

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|.$$

Обчислимо векторний добуток $\vec{AB}\times\vec{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}==\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

Отже, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$ (кв. од.)

Приклад 10. У просторі задано чотири точки *A* (1, 1, 1), *B* (4, 4, 4), *C*(3,5,5), *D* (2, 4, 7). Знайти об'єм тетраедра *ABCD*.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки об'єм тетраедра *ABCD* дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$, то для його визначення обчислимо мішаний добуток цих векторів. Оскільки

$$\vec{AB}=(3,\ 3,\ 3),\ \vec{AC}=(2,\ 4,\ 4),\ \vec{AD}=(1,\ 3,\ 6),\ \text{то}$$

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=3\ \text{(куб. од.)}$$

Приклад 11. Задано координати вершин піраміди $ABCD$: $A(2;2;2)$, $B(1;3;3), C(3;4;2), D(5;8;-4)$. Знайти: 1) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 2)проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) площу грані ABC; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв’язання. Для заданих точок A, B, C розглянемо відповідні вектори $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1),\ \overrightarrow{AC}=(1;2;0)$.

1) Кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ визначаємо за допомогою скалярного добутку цих векторів, тобто

$$\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-1\cdot1+1\cdot2+1\cdot0}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}},$$

$$\angle A=\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

2) Записавши вектор $\overrightarrow{AD}=(3;6;-6)$, знайдемо проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$np_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{-1\cdot3+1\cdot6+1\cdot(-6)}{\sqrt{3}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

3) Площу грані ABC знайдемо як площу трикутника з вершинами $A(2;2;2),\ B(1;3;3), C(3;4;2)$. Застосовуючи векторний добуток, маємо:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|.$$

Обчисливши векторний добуток $\vec{AB}\times\vec{AC}$, дістанемо

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

Таким чином, $\vec{AB}\times\vec{AC}=(-2;1;-3)$, тоді

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

4) Об’єм піраміди $ABCD$, побудованої на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, обчислимо за допомогою мішаного добутку цих векторів. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1),\ \overrightarrow{AC}=(1;2;0),\ \overrightarrow{AD}=(3;6;-6)$, то

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 6 & -6\end{vmatrix}=12+6-6+6=18,$$

Тоді об’єм піраміди:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot 18=3.$$

Приклад 12. Показати, що вектори $\vec{a}$ =(1;–2;3), $\vec{b}$ =(3;–1;2), $\vec{c}$ =(–2;1;–3) утворюють базис тривимірного векторного простору. Знайти орієнтацію трійки векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Розв’язання. Розглянемо мішаний добуток цих векторів. Оскільки

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=3+9+8-6-2-18=-6\neq 0,$$

то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – некомпланарні, тобто утворюють базис тривимірного векторного простору.

Оскільки мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то ці вектори утворюють ліву трійку.

Приклад 13. Показати, що вектори $\vec{a}$ =(5;4;3), $\vec{b}$ =(–3;–1;2), $\vec{c}$ =(–3;1;3) утворюють базис тривимірного векторного простору та розкласти вектор $\vec{d}$ =(12;9;10) за цим базисом.

Розв’язання. Спочатку покажемо, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є лінійно незалежними, для цього складемо визначник із координат цих векторів. Так як визначник при транспонуванні не змінюється, то для зручності координати векторів запишемо по стовпцях. Оскільки

$$\begin{vmatrix}5 & -3 & -3\\ 4 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=–15–9–24–(9–36+10)=–31\neq 0,$$

то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис тривимірного векторного простору. Вектор $\vec{d}$ також належить цьому простору, тому його можна розкласти за цим базисом, тобто $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Запишемо розклад вектора у координатній формі:

$$\begin{pmatrix}12\\9\\10\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix},$$

звідки дістаємо систему рівнянь $\begin{cases}5\alpha-3\beta-3\gamma=12;\\4\alpha-\beta+\gamma=9;\\3\alpha_1+2\beta+3\gamma=10.\end{cases}$

яку розв'яжемо методом Крамера.

Оскільки визначник $\Delta=\begin{vmatrix}5&-3&-3\\4&-1&1\\3&2&3\end{vmatrix}=-31\neq0$, то система має єдиний розв'язок. Обчисливши визначники Δ_1, Δ_2 і Δ_3, дістанемо

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}12&-3&-3\\9&-1&1\\10&2&3\end{vmatrix}=-93,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}5&12&-3\\4&9&1\\3&10&3\end{vmatrix}=-62,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}5&-3&12\\4&-1&9\\3&2&10\end{vmatrix}=31,$$

$$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-93}{-31}=3;\qquad \beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-62}{-31}=2;\qquad \gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{31}{-31}=-1.$$

Отже, $\vec{d}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, де (3, 2, –1) – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>$.

Завдання для самостійної роботи

1. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE і CF. Показати, що $\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0}.$
2. Задано правильний шестикутник $ABCDEF$, в якому $\vec{AB}=\vec{a}, \vec{AE}=\vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ всі вектори, що збігаються з іншими сторонами та діагоналями шестикутника.

3. На векторах $\vec{AB}=\vec{b},\ \vec{AC}=\vec{c},\ \overrightarrow{AA_1}=\vec{d}$ побудовано паралелепіпед $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$. Через задані вектори виразити вектори, що співпадають з ребрами, діагоналями та діагоналями граней цього паралелепіпеда.
4. Знаючи, що $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=\sqrt{3},\ \angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$, знайти скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, скалярний добуток $(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$ та довжину вектора $|\vec{a}-2\vec{b}|$.
5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\dfrac{2\pi}{3}$, причому $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$. Обчислити: скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, скалярні квадрати $\vec{a}^2$ і $\vec{b}^2$, скалярний добуток $(3\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$ та довжини векторів $|\vec{a}-\vec{b}|,\ |\vec{a}+\vec{b}|$.
6. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=1,\ |\vec{n}|=2,\ \angle(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.
7. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}|=2\sqrt{2}, |\vec{q}|=3, \angle(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.
8. Задано вектори $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j},\ \vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}$. Знайти скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}$ та проекцію вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$.
9. Для векторів $\vec{a}=(1;7), \vec{b}=(-3;4)$ визначити $5\vec{a}-\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}$, напрямні косинуси та орт вектора $\vec{b}$, скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}-\vec{b}$ і проекцію вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$.
10. Для векторів $\vec{a}=(6;-8), \vec{b}=(2;1)$ визначити довжину вектора $\vec{a}$, орт вектора $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$ та довжину вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$.
11. Знайти довжини, напрямні косинуси, орти векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та кут між ними, якщо A(-2;1), B(5;2) і C(1;-3).
12. У трикутнику ABC задано вершини A(3;2) , B(5;-2) і C(1;0). Знайти внутрішні кути цього трикутника та довжину медіани AM.
13. Вершинами трикутника є точки A(5;0) , B(0;1) і C(3;3) . Визначити внутрішні кути та довжини сторін цього трикутника.

14. Показати, що трикутник з вершинами A(-1;6) , B(-5;-2) , C(1;0) є прямокутним. Знайти його гострі кути та довжини катетів.
15. Дано вершини чотирикутника A(1;-2) , B(1;3) і C(-3;1) і D(-5;-5). Показати, що його діагоналі взаємно-перпендикулярні.
16. Дано три вершини A(4;2) , B(5;7) і C(-3;4) паралелограма $ABCD$. Знайти четверту вершину D і гострий кут паралелограма.
17. Дано точки A(1;3) , B(4;7) , C(2;8) і D(-1;4) . Показати, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. Знайти кут між діагоналями.
18. Для векторів $\vec{a}=(3;-4;1), \vec{b}=(-1;2;6)$ визначити довжину вектора $\vec{a}$, напрямні косинуси вектора $\vec{b}$, скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, довжину вектора $3\vec{a}-4\vec{b}$, проекцію вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ і векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$.
19. Для векторів $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{b}=6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ визначити скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$,$\vec{b}$, довжину вектора $\vec{a}-5\vec{b}$, проекцію вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$ і векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$.
20. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$.
21. Знайти координати вектора $\overrightarrow{MN}$, його довжину та напрямні косинуси, якщо $M(-5;9;2),\ N(5;4;12)$. Знайти скалярний та векторний добутки векторів $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$.
22. Задано точки A(-2;3;-4) , B(3;2;5) , C(1;-1;2) і D(3;2;-4). Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ та знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$.
23. Знайти внутрішні кути трикутника з вершинами A(5;2;-4), B(9;-8;-3) і C(16;-6;-11).
24. Показати, що чотирикутник з вершинами A(5;2;6) , B(6;4;4) , C(4;3;2) і D(3;1;4) є квадратом. Знайти довжину його діагоналі та обчислити площу.
25. Обчислити площу трикутника з вершинами A(2;3;5), B(4;1;8) і C(6;3;-1).

26. Показати, що вектори $\vec{a} = (1;2;-3)$, $\vec{b} = (2;-1;5)$, $\vec{c} = (3;1;2)$ – компланарні.

27. Перевірити, чи лежать точки A(1;2;-3) , B(2;4;-1) , C(3;2;5) і D(-1;3;2) в одній площині. Якщо точки не лежать в одній площині, то знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

28. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тривимірного векторного простору та розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо:

а) $\vec{a}$=(1;2;-1), $\vec{b}$=(3;6;1), $\vec{c}$=(3;9;3), $\vec{d}$=(2;7;0);

б) $\vec{a}$=(2;1;3), $\vec{b}$=(2;-3;1), $\vec{c}$=(1;2;1), $\vec{d}$=(0;11;3).

29. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами A(2;-1;1) , B(5;5;4) , C(3;2;-1) і D(4;1;3).

30. Дано вершини тетраедра A(2;3;1) , B(4;1;-2), C(6;3;7) і D(-5;-4;8). Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

Розділ II. Елементи аналітичної геометрії

Тема 6. Системи координат. Прямокутна і полярна системи координат

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано точки $A(7;2;-3)$, $B(-5;0;4)$. Відрізок AB ділиться точкою M у відношенні $\lambda = AM : MB = 1:5$. Знайти координати точки M.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M за формулами поділу відрізка в заданому відношенні $\lambda = \frac{1}{5}$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{1}{5}(-5)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)} = 5; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}} = \frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3};$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{1}{5}\cdot 4}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)}=-\frac{11}{6}.$$

Отже, точка M має координати $M\left(5;\ \frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

Приклад 2. Відрізок з кінцями $A(-2;4;0)$ і $B(6;12;-4)$ ділиться точкою M навпіл. Знайти довжину відрізка MK, де $K(0;10;6)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M як середини відрізка AB:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+6}{2}=2; \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4+12}{2}=8;$$

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{0-4}{2}=-2; \qquad M(2;8;-2).$$

Тоді довжина відрізка MK дорівнює відстані від точки M до точки K:

$$MK=\sqrt{(0-2)^2+(10-8)^2+(6-(-2))^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}.$$

Приклад 3. У паралелограмі $ABCD$ задано три вершини $A(-3;4;1)$, $B(-5;3;2)$, $C(-1;2;-3)$. Знайти четверту вершину D.

Розв'язання. Діагоналі паралелограма AC і BD перетинаються в точці $K(x,y,z)$, яка ділить їх навпіл. Знайдемо координати точки K

$$x=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-3-1}{2}=-2, \quad y=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{4+2}{2}=3, \quad z=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1-3}{2}=-1.$$

Оскільки точка $K(-2;3;-1)$ є серединою діагоналей паралелограма, то

$$x=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{-5+x_D}{2}=-2 \quad\Rightarrow\quad x_D=1,$$

$$y=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{3+y_D}{2}=3 \quad\Rightarrow\quad y_D=3,$$

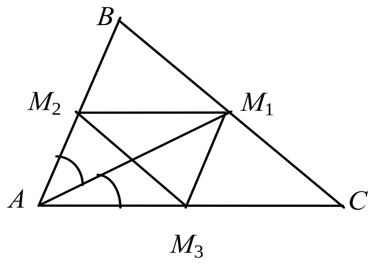
$$z=\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{2+z_D}{2}=-1 \quad\Rightarrow\quad z_D=-4.$$

Отже, четверта вершина паралелограма $D(1;3;-4)$.

Зазначимо, що цю задачу можна було розв'язати іншим способом, а саме за допомогою векторів. Нехай $D(x_D; y_D; z_D)$, тоді з умови випливає, що $\overrightarrow{BC} = (4;-1;-5)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D + 3; y_D - 4; z_D - 1)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ рівні, то їх координати рівні $x_D + 3 = 4, \quad y_D - 4 = -1, \quad z_D - 1 = -5$, звідки дістаємо $x_D = 1, y_D = 3, z_D = -4$, тобто $D(1; 3; -4)$.

Приклад 4. Дано трикутник A (4; 1), B (7;5), C (–4; 7). Знайти точку M_1 перетину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A зі стороною BC. Обчислити площу трикутника $M_1M_2M_3$, де M_2 і M_3 – середини сторін AB і AC відповідно.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC і проведемо бісектрису AM_1.



Відомо, що бісектриса в трикутнику ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам кута, тобто

$$\frac{BM_1}{M_1C} = \frac{AB}{AC}.$$

Знайдемо довжини відрізків AB і AC, скориставшись формулою відстані між точками:

$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5, \quad AC = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2} = 10.$$

Тоді

$$\frac{BM_1}{M_1C} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \lambda.$$

Скориставшись формулами поділу відрізка у заданому відношенні, знайдемо координати точки M_1 (x_1; y_1)

$$x_1=\frac{7+\frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{10}{3},\quad y_1=\frac{5+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}}=\frac{17}{3},\quad M_1\left(\frac{10}{3};\frac{17}{3}\right).$$

Визначимо координати точок M_2 (x_2; y_2) і M_3 (x_3; y_3), які є серединами сторін AB і AC, дістанемо

$$x_2=\frac{4+7}{2}=\frac{11}{2},\quad y_2=\frac{1+5}{2}=3,\quad M_2\left(\frac{11}{2};\,3\right);$$

$$x_3=\frac{4-4}{2}=0,\quad y_3=\frac{1+7}{2}=4,\quad M_3\left(0;4\right).$$

Площу трикутника $M_1M_2M_3$ можна обчислити за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{vmatrix},$$

де значення визначника береться по модулю. Маємо

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\frac{11}{2}-\frac{10}{3} & 0-\frac{10}{3}\\ 3-\frac{17}{3} & 4-\frac{17}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\frac{13}{6} & -\frac{10}{3}\\ -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{3}\begin{vmatrix}13 & 2\\ -16 & 1\end{vmatrix}=\frac{225}{36}.$$

Приклад 5. Знайти полярні координати точки $A(-2;2)$.

Розв‘язання. За формулами переходу від декартових до полярних координат маємо $\rho=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $tg\varphi=-\frac{2}{2}=-1$. Згідно з останньою рівністю $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, оскільки точка $A(-2,2)$ лежить у другій чверті. Отже, в полярних координатах точка $A\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$.

Приклад 6. Визначити відстань між точками $M\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$ і $N\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$, заданими в полярній системі координат.

Розв‘язання. Розглянемо трикутник OMN, дві вершини M і N якого задані , а третя співпадає з полюсом O. За теоремою косинусів можна знайти довжину сторони MN, а саме

$$MN^2=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cdot\cos\angle MON.$$

Оскільки за означенням полярних координат

$$OM = 4,\ ON = 3,\ \angle MON = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

то шукана відстань

$$MN = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{16+9-12} = \sqrt{13}.$$

Зауважимо, що спочатку можна знайти декартові координати точок M і N, а потім обчислити відстань між ними. Скориставшись формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, дістанемо

$$x_M = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},\quad y_M = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \quad\Rightarrow\quad M\left(2\sqrt{3};2\right),$$

$$x_N = 3\cos\frac{\pi}{2} = 3\cdot 0 = 0,\quad y_N = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3\cdot 1 = 3 \quad\Rightarrow\quad N\left(0;3\right).$$

Тоді $$MN = \sqrt{(0-2\sqrt{3})^2 + (3-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. У трикутнику з вершинами A(1;-3) , B(3;-5) і C(-5;7) знайти середини його сторін і довжину медіани AM.
2. Визначити довжини медіан трикутника, знаючи координати його вершин A(3;-2) , B(5;2) і C(-1;4).
3. Відрізок AB поділено на три рівні частини. Визначити координати точок поділу відрізка, якщо A(2;1) і B(-4;3).
4. Знайти площу квадрата, якщо його суміжні вершини A(2;-1) і B(-1;3).
5. Задано трикутник з вершинами A(1;-1) , B(6;4) і C(2;6). Знайти центр мас (точку перетину медіан) цього трикутника.
6. Знайти точку перетину медіан трикутника, знаючи координати його вершин A(1;4) , B(-5;0) і C(2;-1) . Визначити довжину медіани CK.
7. Дано вершини трикутника A(7;2) , B(1;9) , C(-8;-11) . Знайти відстань від точки перетину медіан до вершини A.

8. У трикутнику ABC відомо дві вершини A(3;0) і B(-5;7) і точка перетину його медіан M(1;14). Знайти координати третьої вершини C трикутника.
9. У трикутнику з вершинами A(-2;0) , B(6;6) , C(1;-4) проведено бісектрису AK. Знайти її довжину.
10. Дано трикутник з вершинами A(4;1) , B(7;5) і C(-4;7). Знайти точку перетину бісектриси внутрішнього кута A з протилежною стороною BC.
11. Дано трикутник з вершинами A(3;-5) , B(-3;3) і C(-1;-2). Визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.
12. У паралелограмі $ABCD$ задано вершини A(11;4) , B(-1;1) , C(5;7). Знайти координати вершини D та довжину діагоналі BD.
13. Дано три вершини A(3;-7) , B(5;-7) і C(-2;5) паралелограма $ABCD$. Знайти довжини діагоналей цього паралелограма.
14. Дано точки A(1;-2) і B(2;4) , які є вершинами паралелограма $ABCD$. Знайти дві інші вершини паралелограма, якщо його діагоналі перетинаються в точці M(3;1).
15. Визначити координати кінців відрізка AB, розділеного на три рівних частини точками M(3;1;3) і K(6;-1;1).
16. Довести, що трикутник з вершинами A(3;-1;2) , B(0;-4;2) , C(-3;2;1) рівнобедрений.
17. У трикутнику з вершинами A(3;-1;5) , B(4;2;-5) , C(-4;0;3) обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A. Знайти центр мас трикутника.
18. Дано дві вершини A(1;-2;-4) , B(-2;2;1) паралелограма $ABCD$ і точка перетину діагоналей O(3;-2;6). Знайти дві інші вершини паралелограма та обчислити довжини його діагоналей.
19. Знайти полярні координати точок $A(-2;0), B(\sqrt{3};1), C(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.
20. Знайти декартові координати точок, заданих в полярній системі координат $K\left(3;\frac{\pi}{2}\right), M(1;0), N\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$.

21. В полярній системі координат дано дві точки $A\left(8,\frac{11\pi}{12}\right), B\left(5,-\frac{3\pi}{4}\right)$ – вершини паралелограма $ABCD$, точка перетину діагоналей якого співпадає з полюсом. Визначити дві інші вершини цього паралелограма та відстань між ними.

22. В полярній системі координат задано трикутник OAB, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають координати $A\left(5,\frac{\pi}{6}\right), B\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$. Обчислити площу цього трикутника та довжину сторони AB.

Тема 7. Рівняння лінії на площині. Пряма на площині

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок $A(-2;4)$ і $B(6;8)$.

Розв'язання. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка даної множини, тоді $AM = BM$ за умовою. Знайдемо відстані між точками

$$AM = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}, \quad BM = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Таким чином, рівняння даного геометричного місця точок має вигляд:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Для спрощення рівняння піднесемо до квадрату обидві його частини та розкриємо дужки, дістанемо

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64.$$

Звідки одержуємо рівняння прямої

$$2x + y - 10 = 0.$$

Дійсно, геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних точок A і B, є пряма, яка перпендикулярна до відрізку AB і проходить через його середину.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3)$ паралельно до вектора $\bar{l}=(2;-2)$.

Розв'язання. Використовуючи канонічне рівняння прямої, маємо

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}.$$

Зведемо рівняння до загального вигляду:

$$-2(x-2)=2(y+3); \qquad -x+2=y+3; \qquad x+y+1=0.$$

Отже, шукане рівняння прямої: $x+y+1=0$.

Приклад 3. Обчислити кутовий коефіцієнт прямої $l:3x+2y+6=0$ і знайти рівняння паралельної прямої l_1, яка проходить через точку $M_0(1;-4)$.

Розв'язання. Виразимо з рівняння $3x+2y+6=0$ змінну y, дістанемо $y=-\frac{3}{2}x-3$, звідки $k=-\frac{3}{2}$. Паралельна пряма l_1 має той самий кутовий коефіцієнт $k_1=k$. Запишемо її рівняння у вигляді $y-y_0=k(x-x_0)$. Тоді рівняння шуканої прямої має вигляд:

$$y+4=-\frac{3}{2}(x-1), \qquad 2y+8+3x-3=0, \qquad 3x+2y+5=0.$$

Зазначимо, що рівняння прямої l_1 можна знайти інакше. Оскільки пряма l_1 паралельна l, то її рівняння має вигляд $3x+2y+C=0$, де невідомий коефіцієнт C можна знайти, підставивши в рівняння координати точки $M_0(1;-4)$. Дістанемо $3\cdot1+2\cdot(-4)+C=0$, звідки $C=5$, тоді $l_1:\ 3x+2y+5=0$.

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(-1;-4)$ і утворює з віссю Ox кут $\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання. Щоб скласти шукане рівняння прямої, треба знайти параметри k і b. Знайдемо кутовий коефіцієнт $k=tg\frac{3\pi}{4}=-1$.

Для визначення b підставимо в рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$ координати даної точки і значення k. Дістанемо $-4 = -1 \cdot (-1) + b$, звідки $b = -5$. Шукане рівняння має вигляд $y = -x - 5$.

Приклад 5. Трикутник задано вершинами: $A(2;5)$, $B(-6;-4)$ і $C(6;-3)$. Записати рівняння медіани BD.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо координати точки D – середини сторони AC:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4, \quad y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5-3}{2} = 1, \quad D(4;1).$$

Оскільки $B(-6;-4)$, то рівняння медіани BD має вигляд:

$$\frac{x-4}{-6-4} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad \frac{x-4}{-10} = \frac{y-1}{-5}, \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{1},$$

$$x - 4 = 2y - 2, \qquad x - 2y - 2 = 0.$$

Приклад 6. У трикутнику ABC з вершинами $A(1;-2), B(6;-4), C(2;3)$ знайти рівняння висоти AK.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки висота AK перпендикулярна до сторони BC, то вектор $\overrightarrow{BC}$ можна вважати її вектором нормалі. Тоді для висоти AK можна записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;-2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-4;7)$.

Оскільки рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n} = (A;B)$, має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, то рівняння висоти AK має вигляд

$$-4(x-1) + 7(y+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 7y - 18 = 0.$$

Приклад 7. У трикутнику ABC з вершинами $A(4;3), B(16;-6), C(20;16)$ знайти рівняння сторін AB, BC, кут при вершині B, рівняння висоти CD та її довжину.

<u>Розв'язання</u>. 1) Визначимо рівняння сторони AB як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(4;3), B(16;-6)$:

$$\frac{x-4}{16-4}=\frac{y-3}{-6-3}, \quad \frac{x-4}{12}=\frac{y-3}{-9}, \quad \frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3},$$

звідки маємо

$$-3x+12=4y-12, \quad 3x+4y-24=0.$$

Розв‘язавши це рівняння відносно y, знайдемо кутовий коефіцієнт прямої

$$y=-\frac{3}{4}x+6, \qquad \Rightarrow \qquad k_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Знайдемо тепер рівняння прямої BC, що проходить через дві точки $B(16;-6), C(20;16)$:

$$\frac{x-16}{20-16}=\frac{y+6}{16+6}, \quad \frac{x-16}{4}=\frac{y+6}{22}, \quad \frac{x-16}{2}=\frac{y+6}{11},$$

звідки маємо

$$11x-2y-188=0\,(BC), \quad \Rightarrow \quad y=\frac{11}{2}x-94, \quad \Rightarrow \quad k_{BC}=\frac{11}{2}.$$

2) Для знаходження величини кута $\angle B$ застосуємо формулу (1). Оскільки кут $\angle B$ утворено прямими AB і BC, для яких задано кутові коефіцієнти $k_{AB}=-\frac{3}{4}$ і $k_{BC}=\frac{11}{2}$, то

$$tg\angle B=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{11}{2}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{11}{2}}=\frac{-25}{4-16{,}5}=2\,.$$

Отже, $\angle B=arctg2=63^{o}26'\approx 1{,}11$ рад.

Зауважимо, що кут $\angle B$ можна знайти як кут між векторами нормалі сторін AB і BC.

3) Оскільки висота CD перпендикулярна до сторони AB, то кутовий коефіцієнт прямої CD знаходимо з умови перпендикулярності прямих $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}$. Так як $k_{AB}=-\frac{3}{4}$, то $k_{CD}=\frac{4}{3}$.

Визначимо рівняння прямої CD, що проходить через точку $C(20;16)$ і має кутовий коефіцієнт $k_{CD} = \frac{4}{3}$. Тоді

$$y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20), \qquad \Rightarrow \qquad 4x - 3y - 32 = 0\,(CD).$$

Для знаходження довжини висоти CD обчислимо координати точки D як точки перетину прямих AB і CD, розв‘язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0, \\ 4x - 3y - 32 = 0, \end{cases} \qquad \text{звідки} \qquad x = 8, y = 0, \quad \Rightarrow \quad D(8;0).$$

За формулою відстані між двома точками знаходимо довжину CD:

$$CD = \sqrt{(20-8)^2 + (16-0)^2} = 20.$$

Зауважимо, що довжину CD можна знайти простіше, а саме як відстань від точки С до прямої AB за формулою (3).

Приклад 8. Знайти площу трикутника, обмеженого прямою $3x - 4y + 12 = 0$ та осями координат.

<u>Розв’язання</u>. Для зручності обчислення площі трикутника запишемо рівняння прямої у відрізках на осях, дістанемо

$$3x - 4y + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y = -12 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = 1.$$

Тоді $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ – рівняння заданої прямої у відрізках на осях, в якому $a = -4$, $b = 3$. Розглянемо точки $(-4;0)$ і $(0;3)$ і проведемо пряму.

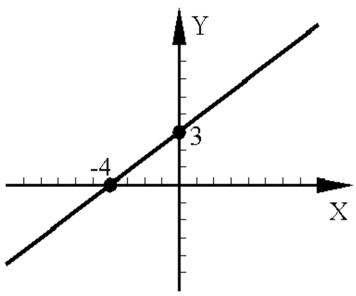


Рис. 3

Тоді шукана площа трикутника $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

Приклад 9. Знайти гострий кут між прямими:

а) $y = 5x - 1$ і $y = 2x + 7$; б) $3x - 2y - 12 = 0$ і $2x + 3y + 6 = 0$.

Розв’язання. а) Оскільки кутові коефіцієнти даних прямих дорівнюють $k_1 = 5$ і $k_2 = 2$, то кут між прямими знаходимо за формулою:

$$tg\varphi = \left|\frac{2-5}{1+2\cdot 5}\right| = \frac{3}{11} \approx 0{,}27 .$$

Тоді кут між прямими $\varphi \approx arctg 0,27 \approx 0,265$ (рад).

б) Кут між прямими знаходимо як кут між векторами, тому

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 2 - 2\cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0 .$$

Отже, кут $\varphi = \pi / 2$, тобто прямі перпендикулярні.

Приклад 10. Знайти відстань від точки $M(-2;4)$ до прямої $4x - 3y - 5 = 0$

.

Розв’язання. Використовуючи формулу для обчислення відстані від точки до прямої, дістанемо:

$$d = \frac{|4\cdot(-2) - 3\cdot 4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5 .$$

Приклад 11. Знайти відстань між двома прямими $3x + 2y - 6 = 0$ і $3x + 2y + 20 = 0$.

Розв’язання. Дані прямі є паралельними. Знайдемо відстань між прямими як відстань від довільної точки A першої прямої до другої. Нехай $y = 0$, тоді $3x - 6 = 0$, звідки $x = 2$. Отже, відстань від точки $A(2;0)$ до прямої $3x + 2y + 20 = 0$ дорівнює:

$$d = \frac{|3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 20|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13} .$$

Приклад 12. Знайти вершини трикутника, сторони якого задано рівняннями $3x - 4y + 11 = 0$, $4x - y - 7 = 0$, $y = -3x$.

Розв’язання. Щоб знайти координати вершин трикутника, треба розв’язати три системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x-4y+11=0 \\ 4x-y-7=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-y-7=0 \\ y=-3x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-4y+11=0 \\ y=-3x \end{cases}.$$

З першої системи рівнянь знаходимо координати вершини A:

$$\begin{cases} 3x-4(4x-7)+11=0 \\ y=4x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-16x+28+11=0 \\ y=4x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13x=-39 \\ y=4x-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4\cdot 3-7=5 \end{cases} \Rightarrow \qquad A(3;5).$$

З другої системи рівнянь знаходимо координати вершини B:

$$\begin{cases} 4x+3x-7=0 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x=7 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow \qquad B(1;-3).$$

Розв’язавши третю систему, дістанемо:

$$\begin{cases} 3x-4(-3x)+11=0 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x=-11 \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{15} \\ y=\dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \quad C\left(-\frac{11}{15};\frac{11}{5}\right).$$

Отже, вершинами трикутника є точки $A(3;5)$, $B(1;-3)$ і $C\left(-\frac{11}{15};\frac{11}{5}\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Записати рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких від точок A(-3;0) , B(3;0) дорівнює 50.
2. Записати рівняння геометричного місця точок, сума відстаней яких від точок A(-2;0) , B(2;0) дорівнює $2\sqrt{5}.$
3. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться вдвічі далі від точки A(4;0), ніж від точки B(1;0).
4. Скласти рівняння геометричного місця точок, які відстоять від точки A(3;0) вдвічі ближче, ніж від прямої $x=12.$

5. Дано дві точки M(5;2) і N(3;-1). Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{MN}$.
6. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки A(5;2) , B(3;-1). Визначити її напрямний вектор і вектор нормалі, кутовий коефіцієнт та відрізки, які відтинає пряма на осях.
7. Через точку A(1;3) провести пряму: а) паралельну, б) перпендикулярну до прямої BC, якщо B(2;4) , C(5;-1).
8. Визначити кут між прямими $3x - y - 3 = 0$, $2x + y - 7 = 0$ та знайти їх точку перетину.
9. Показати, що прямі $4x - 3y + 2 = 0$, $8x - 6y - 13 = 0$ паралельні та знайти відстань між ними.
10. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо A(1;-2) , B(-2;1), C(4;-3).
11. У трикутнику з вершинами A(2;2) , B(-2;-1) , C(-5;3) проведено медіани AK і CM. Скласти рівняння цих медіан та знайти кут між ними.
12. У трикутнику з вершинами A(2;-5), B(1;-3), C(4;1) скласти загальне рівняння висоти AK, канонічне рівняння медіани BM та знайти довжину висоти AK.
13. Дано вершини трикутника A(1;-2), B(5;4) і C(-2;0). Скласти рівняння медіани CM, висоти BN і бісектриси AK.
14. Дано вершини трикутника A(-12;-2), B(4;10) і C(-6;-10). Написати рівняння бісектриси внутрішнього кута A і знайти її довжину.
15. Написати рівняння висот трикутника, вершини якого знаходяться в точках A(2;5) , B(-4;3) , C(6;-2).
16. Обчислити площу трикутника, обмеженого прямою MN та осями координат, якщо M(-3;-4), N(6;2).
17. Знайти проекцію точки M(-6;4) на пряму $x - 5y + 3 = 0$.
18. Знайти точку, симетричну точці M(-2;-2) відносно прямої $x + y - 3 = 0$.
19. У паралелограмі ABCD задано вершини A(-3;-1), B(2;2) і точку перетину його діагоналей P(3;0). Скласти рівняння сторін паралелограма.

20. У паралелограмі ABCD задано рівняння двох його сторін $x-4y+1=0$, $3x+y-2=0$ і точка перетину діагоналей O(1;-3). Знайти рівняння двох інших сторін паралелограма.

21. У квадраті задано вершину A(2;-5) та рівняння однієї з його сторін $x-2y-7=0$. Знайти площу квадрата.

22. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$.

23. Дано пряму $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку M(2;1) під кутом 45^o до даної прямої.

24. Скласти нормальне рівняння для кожної з прямих:

а) $4x-3y-10=0$; б) $12x-5y+13=0$; в) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

Тема 8. Криві другого порядку

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння кола, якщо: *а*) його центр знаходиться в точці $C(3;\,1)$ і точка $M(5;\,2)$ лежить на колі; *б*) його центр співпадає з початком координат, а пряма $3x-4y-20=0$ є дотичною до кола.

Розв’язання. *а*) Координатами центра кола є координати точки *C*, а радіусом кола є відстань між точками *C* і *M*, тобто $R^2=(5-3)^2+(2-1)^2=5$. Отже рівняння кола матиме вигляд: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

б) Координатами центра кола є точка $(0;0)$, а радіусом кола є відстань від цієї точки до заданої прямої: $R=\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot 0-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{20}{5}=4$. Отже, рівняння кола матиме вигляд: $x^2+y^2=16$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі *Ox* симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{4}{5}$.

<u>Розв'язання.</u> Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою маємо $2c=8$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$. Отже, $c=4$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \Rightarrow a=\frac{c}{\varepsilon}=\frac{5c}{4}=\frac{5\cdot 4}{4}=5$, $b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=25-16=9 \Rightarrow b=3$. Тоді канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Схематичне зображення еліпса подано на рис.4.

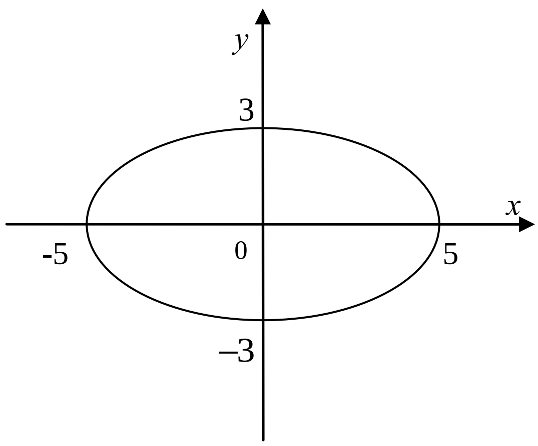


Рис.4

Приклад 3. Записати канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$, а відстань між директрисами дорівнює 32.

<u>Розв'язання</u>. Для визначення канонічного рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, знайдемо параметри a і b. Оскільки рівняння директрис еліпса має вигляд $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, то відстань між директрисами $2d=2\frac{a}{\varepsilon}=32$. Звідси дістаємо: $a=16\cdot\varepsilon=16\cdot\frac{1}{2}=8$. Оскільки ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $c=\varepsilon\cdot a=\frac{1}{2}\cdot 8=4$. Тоді $b^2=a^2-c^2=8^2-4^2=64-16=48$.

Отже, шукане рівняння еліпса має вигляд $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1.$

Якщо фокуси еліпса лежать на осі ординат, тобто $F_1(0;-c), F_2(0;c)$, то відрізок $a=OA_1=OA_2$ називають малою піввіссю, а відрізок $b=OB_1=OB_2$ – великою піввіссю, тобто в рівнянні еліпса $a<b$. У цьому випадку еліпс розтягнутий вздовж осі *Oy*. Тоді ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{b}$, а директриси визначаються рівняннями $y=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$.

Приклад 4. Визначити півосі, фокуси, ексцентриситет та директриси еліпса $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$.

<u>Розв'язання</u>. Із рівняння еліпса випливає, що $a=6$, $b=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, тобто велика піввісь дорівнює 6, мала піввісь – $3\sqrt{3}$. Тоді фокальна піввісь $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-27}=3$, тобто фокусами еліпса є точки $F_1=(-3;0)$, $F_2=(3;0)$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$. Директрисами еліпса є прямі $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm\dfrac{6}{1/2}=\pm12$.

Приклад 5. Нехай фокуси гіперболи лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат. Записати рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами 6;

2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами – прямий;

3) гіпербола проходить через точку *A* (3; 2) і має асимптоти $y=\pm\dfrac{4}{3}x$;

4) відстань між фокусами – 10, а асимптоти задано рівняннями $y=\pm2x$.

<u>Розв'язання</u>. 1) Координати фокусів F_1 (–*c*; 0); F_2 (*c*; 0), тому з умови 2*c*=8; *c*=4. За умовою відстань між директрисами $\dfrac{2a}{\varepsilon}=6$, тобто $a=3\varepsilon$.

Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $a = 3\frac{c}{a}$, звідки $a^2 = 3c = 12$. Тоді $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 12 = 4$.

Отже, шукане рівняння гіперболи $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

2) Оскільки кут між асимптотами прямий, то $a = b$. Тоді $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, тобто $c = a\sqrt{2}$. Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, а з рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon} = 3\sqrt{2}$, то $a = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ і $b = 6$. Отже, рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3) Точка A (3; 2) належить гіперболі, тому її координати задовольняють рівняння гіперболи $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, тобто $b = \frac{4}{3}a$. Підставивши значення b у рівняння гіперболи, знайдемо a^2, дістанемо

$$\frac{9}{a^2} - \frac{4}{\frac{16}{9}a^2} = 1, \quad \frac{9 \cdot 16 - 4 \cdot 9}{16a^2} = 1, \quad 16a^2 = 108, \quad a^2 = \frac{27}{4}.$$

Тоді $b^2 = \frac{4^2}{3^2}a^2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{27}{4} = 12$. Отже, шукане рівняння $\frac{4x^2}{27} - \frac{y^2}{12} = 1$.

4) Із рівняння асимптот $y = \pm 2x$ гіперболи слідує, що $\frac{b}{a} = 2$, тобто $b = 2a$. Оскільки фокусна відстань (фокальна вісь) за умовою $2c = 10$, то $c = 5$. Тоді з рівностей $b^2 = c^2 - a^2$ і $b = 2a$ дістаємо $4a^2 = 25 - a^2$, звідки маємо додатне значення $a = \sqrt{5}$. Тоді $b = 2\sqrt{5}$. Отже, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Приклад 6. Визначити півосі, координати фокусів та асимптоти гіперболи, що визначається рівнянням $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Записати рівняння спряженої гіперболи та знайти її характеристики.

Розв’язання. Із рівняння гіперболи випливає, що $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, тобто дійсна піввісь $a = 4$, уявна піввісь $b = 3$. Фокальну піввісь c знайдемо з рівності $b^2 = c^2 - a^2$, звідки $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, тобто $c = 5$. Отже, фокуси гіперболи $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, асимптоти гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x$.

Рівняння спряженої до заданої гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$, для якої дійсна піввісь $b = 3$, уявна піввісь $a = 4$, фокальна піввісь $c = 5$, фокуси $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$. Спряжена гіпербола має ті самі асимптоти $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Приклад 7. Знайти координати фокуса та записати рівняння директриси параболи, заданої рівнянням *а*) $y^2 = 12x$, *б*) $x^2 = 8y$.

Розв’язання. *а*) Віссю симетрії параболи $y^2 = 12x$ є вісь Ox, $2p = 12$, $\frac{p}{2} = 3$. Отже фокус параболи $F(3;0)$, а директриса $x = -3$.

б) Віссю симетрії параболи $x^2 = 8y$ є вісь Oy, $2p = 8$, $\frac{p}{2} = 2$. Отже фокус параболи $F(0;2)$, а директриса $y = -2$.

Приклад 8. Обчислити фокальний радіус точки M, яка має абсцису $x = 7$ і лежить на параболі $y^2 = 20x$.

Розв’язання. Фокальний радіус точки M параболи обчислюють за формулою $r = x + \frac{p}{2}$. Оскільки $x = 7$, $2p = 20$, то $r = 7 + \frac{10}{2} = 12$.

Приклад 9. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

Розв’язання. Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв’язок:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Рівняння має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$D = \frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p\left(p - 2bk\right) = 0.$$

Оскільки $p \neq 0$, то $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

Приклад 10. Записати рівняння кривої в канонічному вигляді, визначити тип кривої та її основні характеристики, якщо $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

<u>Розв'язання</u>. У даному рівнянні виділимо для змінних x,y повні квадрати і зведемо його до канонічного вигляду:

$$(4x^2 - 40x) + (9y^2 + 36y) + 100 = 0,$$

$$4(x^2 - 10x + 25) - 4\cdot 25 + 9(y^2 + 4y + 4) - 9\cdot 4 + 100 = 0,$$

$$4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36, \qquad \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Перейдемо до нової системи координат з початком в точці $O'(5;-2)$, яка утворюється зі старої системи паралельним перенесенням осей за допомогою рівностей $x' = x - 5, y' = y + 2$. Дістанемо рівняння $\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$, яке визначає в новій системі координат еліпс з фокусами, що лежать на осі $O'x'$ (прямій $y = -2$) симетрично відносно точки $O'(5;-2)$. Враховуючи, що $a = 3, b = 2$, і скориставшись формулами $x = x' + 5, y = y' - 2$, знайдемо координати вершин в старій системі $A_1(-2;-2), A_2(8;-2), B_1(5;-4), B_2(5;0)$. Побудуємо еліпс (рис. 5).

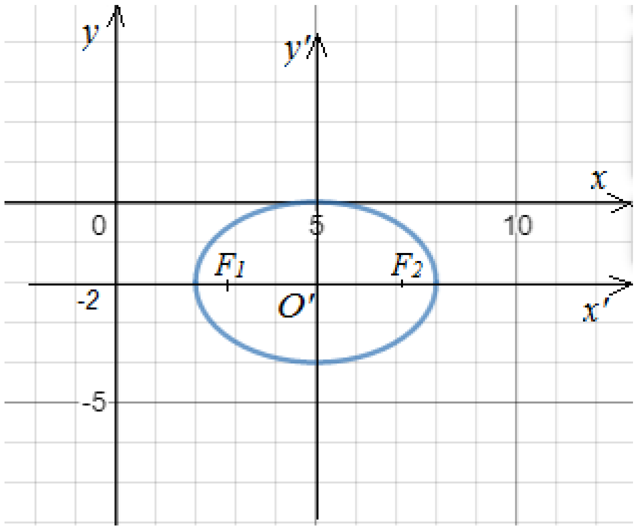


Рис.5

Оскільки $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, то фокуси еліпса в старій системі координат $F_1(-\sqrt{5}+5;-2), F_2(\sqrt{5}+5;-2)$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Директриси еліпса – прямі, рівняння яких в новій системі $x'=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm\dfrac{9}{\sqrt{5}}$, тоді в старій системі координат директриси мають вигляд $x=\dfrac{9}{\sqrt{5}}+5,\ x=-\dfrac{9}{\sqrt{5}}+5$.

Приклад 11. Звести рівняння до канонічного типу та побудувати лінію

а) $2x^2+y^2-20x+4y+4=0$, б) $5x^2-3y^2-30x+6y-18=0$,

в) $5x+2y^2-4y-8=0$.

Розв’язання. а) Згрупуємо доданки відносно змінних x, y та виділимо повний квадрат: $2x^2+y^2-20x+4y+4=0,\quad 2\left(x^2-10x\right)+y^2+4y+4=0,$

$$2\left(x^2-10x+25-25\right)+(y^2+4y+4)=0,\ 2\left(x-5\right)^2+\left(y+2\right)^2-50=0,$$

$$2\left(x-5\right)^2+\left(y+2\right)^2=50,\quad \frac{\left(x-5\right)^2}{25}+\frac{\left(y+2\right)^2}{50}=1.$$

Дістали канонічне рівняння еліпса з центром в точці $(5;-2)$. З рівняння маємо $a^2=25$, тобто $a=5$; $b^2=50$, тобто $b=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\approx 7{,}07$. Оскільки піввісь b більша за піввісь a, то еліпс розтягнутий вздовж прямої $x=5$, паралельної осі Oy. Вершинами еліпса є точки $A_1(0;-2), A_2(10;-2)$,

$B_1\left(5;-2-5\sqrt{2}\right), B_2\left(5;-2+5\sqrt{2}\right)$. Обчислимо координати фокусів із рівності $c^2=b^2-a^2=50-25=25$, тобто $c=5$. Оскільки фокуси розміщені на прямій $x=5$ і знаходяться на відстані $c=5$ від центра $(5;-2)$, то координати фокусів $F_1(5;\ -7), F_2(5;\ 3)$. Побудуємо еліпс (рис. 6).

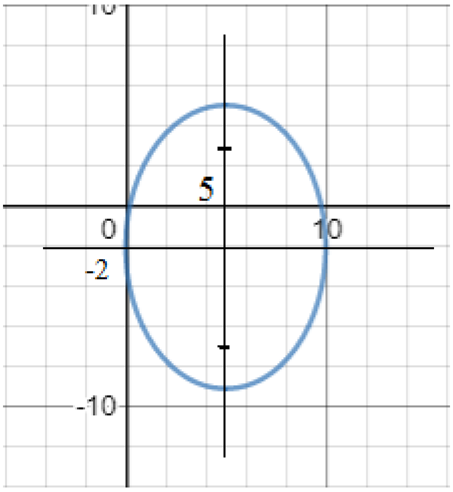


Рис.6

б) У рівнянні $5x^2-3y^2-30x+6y-18=0$ згрупуємо доданки і виділимо повні квадрати для змінних x, y, дістанемо: $5\left(x^2-6x\right)-3\left(y^2-2y\right)-18=0,$

$$5\left(x^2-6x+9-9\right)-3\left(y^2-2y+1-1\right)-18=0,$$

$$5\left(x^2-6x+9\right)-45-3\left(y^2-2y+1\right)+3-18=0,$$

$$5(x-3)^2-3(y-1)^2=60,$$

$$\frac{(x-3)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{20}=1.$$

Дістали рівняння, яке визначає гіперболу з центром в точці (3; 1), осями симетрії $x=3$ і $y=1$, дійсною піввіссю $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\approx3{,}5$ і уявною піввіссю $b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\approx4{,}5$. Дійсними вершинами гіперболи є точки $A_1\left(3-2\sqrt{3};1\right), A_2\left(3+2\sqrt{3};1\right)$, а уявними – точки $B_1\left(3;1-2\sqrt{5}\right), B_2\left(3;1+2\sqrt{5}\right)$. Знайдемо фокуси, скориставшись рівністю $c^2=a^2+b^2=12+20=32$, тобто $c=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\approx5{,}7$. Оскільки фокуси розміщені на прямій $y=1$ і знаходяться на відстані $c = 4\sqrt{2}$ від центра $(3;1)$, то координати фокусів $F_1\left(3-4\sqrt{2};1\right)$, $F_2\left(3+4\sqrt{2};1\right)$.

Асимптотами гіперболи є прямі $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, тобто $y - 1 \approx \pm 1{,}3(x-3)$. Побудову гіперболи завжди починають з її асимптот.

Спочатку будуємо основний прямокутник з центром в точці (3;1) і сторонами $2a$ і $2b$, діагоналями якого є асимптоти гіперболи. Гілки гіперболи розміщені вздовж дійсної осі і наближаються до асимптот на нескінченності (рис. 7).

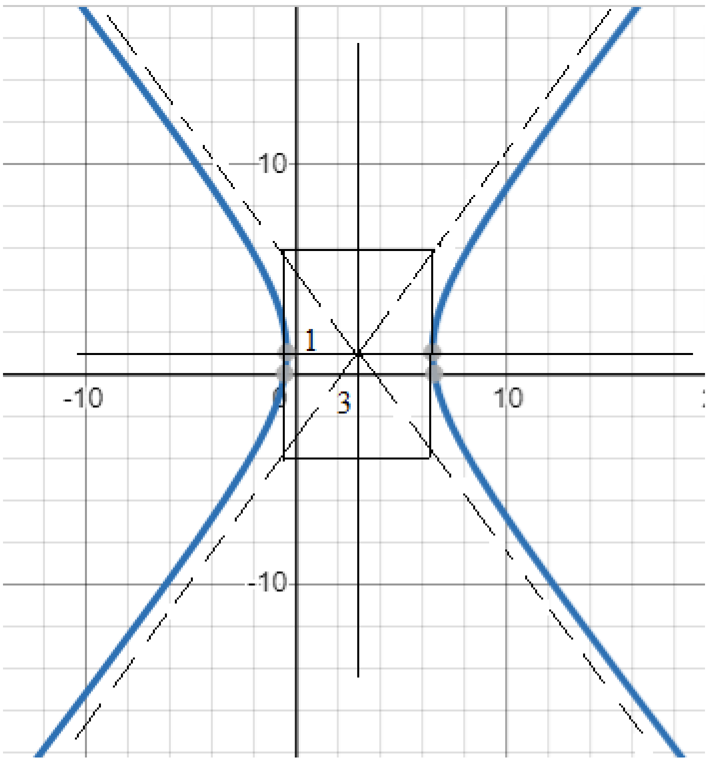


Рис.7

в) Виділимо повний квадрат у рівнянні $5x + 2y^2 - 4y - 8 = 0$, маємо

$$5x + 2(y^2 - 2y) - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 2(y^2 - 2y + 1) - 10 = 0,$$

$$2(y-1)^2 = -5x + 10 \quad \Rightarrow \quad 2(y-1)^2 = -5(x-2),$$

$$(y-1)^2 = -\frac{5}{2}(x-2).$$

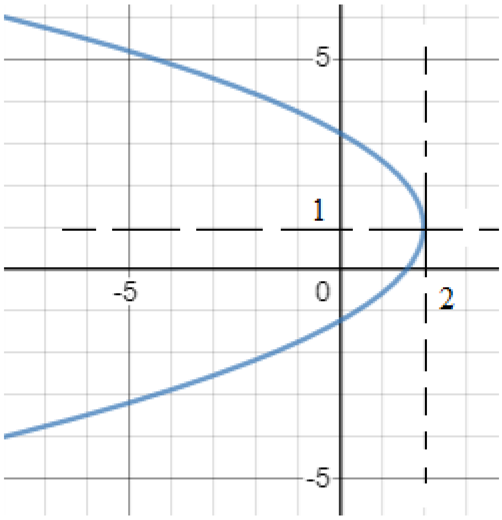


Рис. 8

Отже, дане рівняння визначає параболу виду $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$ з вершиною в точці (2;1), яка симетрична відносно прямої $y=1$, паралельної осі *Ox,* і напрямлена вліво. Оскільки $2p=\dfrac{5}{2}$, то $\dfrac{p}{2}=\dfrac{5}{8}$, тому фокус цієї параболи $F\left(2-\dfrac{5}{8};1\right)=F\left(\dfrac{11}{8};1\right)$, а директриса $x=2+\dfrac{5}{8}=\dfrac{21}{8}$. Графік параболи зображено на рис. 8.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, які криві задаються такими рівняннями, знайти їх основні параметри та побудувати, якщо:

   а) $9x^2+25y^2=225$; б) $3x^2-4y^2=12$; в) $x^2-8y=0$;

   г) $16x^2+9y^2=144$; д) $4y^2-9x^2=36$; е) $y^2+20x=0$.

2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ох симетрично відносно початку координат, якщо:

   а) велика вісь дорівнює 26, а відстань між фокусами – 10;

   б) відстань між фокусами дорівнює 6, а відстань між директрисами – 24;

   в) відстань між фокусами дорівнює 16, а ексцентриситет – 4/5;

   г) мала вісь дорівнює 4, а відстань між директрисами – 10.

3. Еліпс проходить через точку M(1;1) і має ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$. Скласти рівняння еліпса, якщо його фокуси лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат.
4. Скласти рівняння еліпса з центром в початку координат, якщо один із його фокусів знаходиться в точці (6;0), а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
5. Записати рівняння еліпса, якщо сума його півосей дорівнює $a + b = 10$, а відстань між фокусами, які лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат, дорівнює $4\sqrt{5}$.
6. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо:

   а) велика піввісь дорівнює 8, а відстань між фокусами – 14;

   б) відстань між фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет – 5/7;

   в) мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет – 3/5.
7. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:

   а) дійсна вісь дорівнює 6, а відстань між фокусами – 10;

   б) уявна вісь дорівнює 16, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$;

   в) відстань між директрисами дорівнює 8/3, а ексцентриситет – 3/2;

   г) відстань між фокусами дорівнює $10\sqrt{2}$, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$.
8. Скласти рівняння гіперболи з фокальною віссю Ox, якщо вона проходить через точку M(6;2), а її асимптоти мають рівняння $y = \pm\frac{2}{3}x$.
9. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$, а точка M(–5;3) лежить на цій гіперболі.

10. Сума півосей гіперболи $a+b=17$, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{13}{12}$. Записати рівняння гіперболи та знайти її фокуси, якщо вони розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат.

11. Асимптоти гіперболи $y=\pm\frac{3}{4}x$, задано рівняннями , а один із фокусів знаходиться в точці (-10;0). Записати рівняння гіперболи і знайти її ексцентриситет. Скласти рівняння спряженої гіперболи до даної.

12. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо:

а) дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами – 26;

б) відстань між фокусами дорівнює 16, а ексцентриситет – 8/5;

в) відстань між фокусами дорівнює 10, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$.

13. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом а) $F(6,0)$, б) $F(-2,0)$, в) $F(0,-8)$.

14. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо ця парабола проходить через точку A і має вказану вісь симетрії:

а) $A(-2;4),\ Ox$; б) $A(1;-2),\ Ox$; в) $A(6;2),\ Oy$.

15. На параболі $y^2=6x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 4,5. Знайти відстань від неї до вершини параболи.

16. Визначити, які криві задаються такими рівняннями, знайти їх характеристики та побудувати, якщо:

а) $x^2+4y^2+2x+16y+1=0$; б) $x^2+y^2+6x+10y-15=0$;

в) $2x^2-3y^2-12x+12y=0$; г) $2y^2+2y-x+2=0$;

д) $4y^2-25x^2+8y+100x-196=0$; е) $x^2-4x+4y+8=0$.

Тема 9. Площина і пряма у просторі

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Написати рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(2;2;1)$, $M_2(0;1;3)$, $M_3(4;1;1)$ та знайти відстань від точки $A(1;1;1)$ до цієї площини.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, яка проходить через три точки, скориставшись формулою $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$.

Для заданих точок $M_1(2;2;1)$, $M_2(0;1;3)$, $M_3(4;1;1)$ дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)+2(y-2)+2(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x+2y+2z-8=0.$$

Знайдемо відстань від точки $A(1;1;1)$ до площини

$$d = \frac{|1\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 1-8|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Приклад 2. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(1;-2;3)$ та а) перпендикулярна осям Ox, Oy, Oz; б) паралельна осі Oz і проходить через початок координат.

Розв'язання. а) Скористаємось неповними рівняннями площин. Якщо площина перпендикулярна осі Ox, то її рівняння має вигляд $x=a$. Оскільки площина проходить через точку $M(1;-2;3)$, то маємо $x-1=0$. Аналогічно рівняння $y+2=0$ визначає площину, яка проходить через точку $M(1;-2;3)$ перпендикулярно осі Oy, а рівняння $z-3=0$ – площину, яка проходить через точку $M(1;-2;3)$ перпендикулярно осі Oz.

б) Рівняння площини, паралельної осі Oz має вигляд $Ax+By+D=0$. Оскільки ця площина проходить через початок координат і точку $M(1;-2;3)$, то

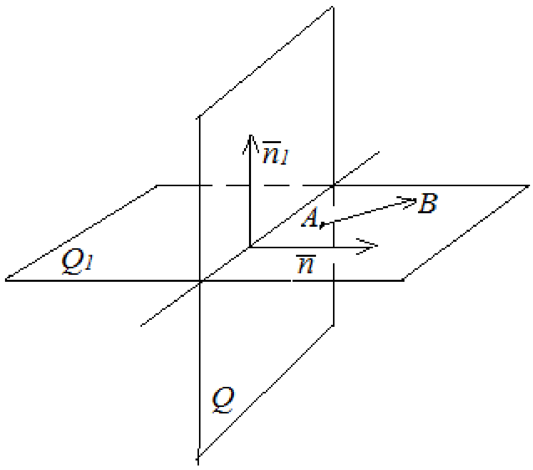
$D=0$ і $A-2B=0$. Розв'язком цього рівняння може бути $B=1$, $A=2$. Отже рівняння шуканої площини має вигляд $2x+y=0$.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1;4;-5)$, $B(4;2;-3)$ і перпендикулярна до площини $3x+5y-6z-8=0$.

Розв’язання. За вектор нормалі шуканої площини Q_1 візьмемо вектор $\vec{n}_1$, перпендикулярний до векторів $\vec{AB}=(3;-2;2)$ і $\vec{n}=(3;5;-6)$, де $\vec{n}$ – вектор нормалі заданої площини $Q: 3x+5y-6z-8=0$.

З означення векторного добутку випливає, що вектор $\vec{n}_1=\vec{AB}\times\vec{n}$ є перпендикулярним до векторів $\vec{AB}$ і $\vec{n}$. Отже,

$$\vec{n}_1=\vec{AB}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 2\\ 3 & 5 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 5 & -6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & -6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+24\vec{j}+21\vec{k}.$$



Оскільки шукана площина Q_1 проходить через точку $A(1;4;-5)$ і має вектор нормалі $\vec{n}_1=(2;\,24;\,21)$, то рівняння цієї площини має вигляд:

$$2(x-1)+24(y-4)+21(z+5)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+24y+21z+7=0.$$

Приклад 4. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(2;1;1)$, та знайти кут між нею та площиною $3x-y+2z+1=0$.

Розв’язання. Враховуючи задану точку і вектор нормалі, розглянемо рівняння площини виду (1), дістанемо

$$2(x-1)+(y-2)+z=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+y+z-4=0.$$

Оскільки вектор нормалі знайденої площини $\vec{n}=(2;1;1)$, а вектор нормалі заданої площини $\vec{n}_1=(3;-1;2)$, то кут між цими площинами знайдемо за формулою (4). Дістанемо

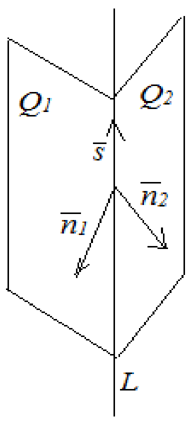
$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 2}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{9+1+4}}=\frac{7}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{6} \quad \Rightarrow \quad \varphi=\arccos\frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Приклад 5. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;1;-4)$ перпендикулярно до площини $2x+3y-7z+9=0$.

Розв'язання. Оскільки шукана пряма перпендикулярна до площини $2x+3y-7z+9=0$, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти вектор $\vec{n}_1=(2;3;-7)$. Оскільки пряма проходить через точку $M(5;1;-4)$, то її канонічне рівняння має вигляд $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+4}{-7}$.

Приклад 6. Знайти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 3x+2y+4z-11=0, \\ 2x+y-3z-1=0. \end{cases}$

Розв'язання. Очевидно, що задана пряма L лежить на перетині двох площин $Q_1: 3x+2y+4z-11=0$ і $Q_2: 2x+y-3z-1=0$.



Розглянемо довільну точку, яка належить прямій. Для цього візьмемо, наприклад, $z=1$ і підставимо в систему рівнянь заданих площин, дістанемо

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+8-4x=7 \\ y=4-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Отже, $x=1, y=2$, $z=1$, тобто точка $A(1;2;1)$ належить даній прямій. Координати напрямного вектора прямої знаходимо як векторний добуток векторів нормалі площин, на перетині яких лежить дана пряма. Оскільки $\vec{n}_1=(3;2;4)$ і $\vec{n}_2=(2;1;-3)$, то

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=(-10;\ 17;-1).$$

Отже, канонічне рівняння даної прямої має вигляд: $\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Приклад 7. Знайти кут між прямими

а) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$ та $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+4}{3}$;

б) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z-1}{8}$ та $x=-2+4t,\quad y=1+2t,\quad z=3-4t$.

Розв'язання. а) Рівняння прямих записані в канонічному вигляді. Перша пряма має напрямний вектор $\vec{s}_1=\left(-2,1,2\right)$, а друга – $\vec{s}_2=\left(4,5,3\right)$. Кут між прямими визначається як кут між цими векторами, тому

$$\cos\varphi=\frac{-8+5+6}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{16+25+9}}=\frac{3}{3\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

б) Перша пряма задана канонічним рівнянням і має напрямний вектор $\vec{s}_1=\left(1,-4,8\right)$. Друга пряма задана параметричним рівнянням, її напрямний вектор визначається коефіцієнтами при параметрі t, тобто $\vec{s}_2=\left(4,2,-4\right)$. Тоді кут між прямими визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{4-8-32}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{16+4+16}}=\frac{-36}{9\cdot 6}=-\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\arccos\frac{2}{3}.$$

Приклад 8. Визначити, чи перетинаються прямі в просторі

а) $\dfrac{x+5}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{4}$, $\quad\dfrac{x+6}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$;

б) $\dfrac{x-6}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$, $\quad\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+4}{1}$

Розв’язання. а) Перевіримо умову, чи перетинаються дві прямі в просторі. Задані прямі мають напрямні вектори $\vec{s}_1=\left(5,1,4\right)$, $\vec{s}_2=\left(4,1,2\right)$ і проходять відповідно через точки $M_1\left(-5;2;1\right)$, $M_2\left(-6,2,-1\right)$. Дістаємо

$$\begin{vmatrix} -6+5 & 2-2 & -1-1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-10+0+8+4-0=0 .$$

Отже, задані прямі перетинаються.

б) Задані прямі мають напрямні вектори $\vec{s}_1=\left(-2,2,3\right)$ і $\vec{s}_2=\left(3,-3,1\right)$ та проходять відповідно через точки $M_1\left(6;-3;1\right)$ і $M_2\left(3,3,-4\right)$. Тоді для цих прямих

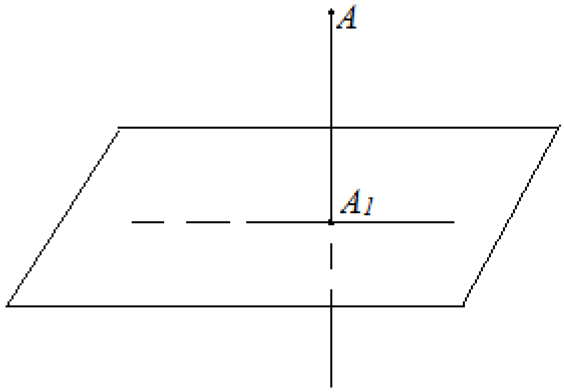
$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6-30+54+30-27+12=33\neq 0 .$$

Отже, задані прямі мимобіжні.

Приклад 9. Знайти проекцію точки $A(4;-3;1)$ на площину $x+2y-z-3=0$

Розв’язання. Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до заданої площини. Оскільки вектор $\vec{n}=(1;2;-1)$ перпендикулярний до цієї площини, то його можна взяти за напрямний вектор прямої. Тоді рівняння прямої має вигляд $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Очевидно, що проекцією точки A на площину є точка перетину знайденої прямої (перпендикуляра) та площини.

Знайдемо цю точку. Записавши рівняння параметричне прямої $x=4+t, y=-3+2t, z=1-t$, підставимо значення змінних у рівняння площини. Дістанемо $4+t+2(-3+2t)-(1-t)-3=0$, звідки визначаємо $t^*=1$. Підставивши знайдене значення t^* у параметричне рівняння, знаходимо координати проекції $x=4+1=5, y=-3+2=-1, z=1-1=0$, тобто $A_1(5;-1;0)$.



Приклад 10. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-3}$ і площини $3x+y+2z-4=0$ та визначити кут між ними.

Розв'язання. Параметричне рівняння прямої має вигляд $x=2+2t$, $y=-3+t$, $z=-3t$. Підставимо вирази для x, y, z у рівняння площини

$$3(2+2t)-3+t-6t-4=0 \quad \Rightarrow \quad t=1.$$

Отже координати точки перетину дорівнюють: $x=4, \quad y=-2, \quad z=-3$. Для визначення кута запишемо вектор нормалі для площини $\vec{n}=(3;1;2)$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}=(2;1;-3)$. Скориставшись формулою (7), дістанемо

$$\sin\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{6+1-6}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{14} \quad \Rightarrow \quad \varphi=\arcsin\frac{1}{14}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку А(1;2;3):
   а) перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(5,-1,4)$;
   б) перпендикулярно до прямої ВС, якщо В(2;0;1) і С(4;1;-2);
   в) паралельно до площини $3x-4y+z-7=0$.
2. Написати загальне рівняння площини, що проходить через три точки М(1;–1;2) , К(2;1;2) , Р(1;1;4).
3. Скласти рівняння площини, яка відтинає на координатних осях відрізки $a=3, b=5, c=1$, і знайти відстань до площини від початку координат.

4. Написати рівняння площини, що проходить через точку M(2;-1;3) і відтинає на осях координат рівні відрізки.
5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M(2;-1;1) перпендикулярно до площин $3x+2y-z+4=0$, $x+y+z-3=0$.
6. Обчислити кут між площинами $6x+3y-2z+1=0$ і $x+2y+6z-2=0$.
7. Знайти кут між площиною $11x-8y-7z+5=0$ та площиною, що проходить через точку A(2;1;2) перпендикулярно до вектора $\vec{AB}$, якщо B(9;3;-6).
8. Знайти відстань від точки M(2;5;3) до площини, яка проходить через точку A(1;3;5) паралельно до площини $4x+3y-5z+2=0$.
9. Дано тетраедр з вершинами A(1;-2;2) , B(2;-3;-6) , C(5;1;4) , D(0;-4;4) . Знайти довжину висоти, опущеної з вершини B.
10. Скласти нормальне рівняння площини $5x-4y+3z+10=0$.
11. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M(1;2;3):

    а) паралельно до вектора $\vec{u}=(4,-1,5)$;

    б) перпендикулярно до площини $2x-y+6z-8=0$.
12. Записати канонічне та параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки A(2;-3;1) і B(1;4;-2).
13. Дано вершини трикутника A(1;-2;-4) , B(3;1;-3) і C(5;1;-7). Скласти канонічне та параметричні рівняння медіани AM.
14. Записати в канонічному вигляді рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0. \end{cases}$
15. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку K(-4;3;0) паралельно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$
16. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A(2;3;1) на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.
17. Знайти проекцію точки A(1;2;8) на пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

18. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ та прямою, що проходить через дві точки A(0;3;-1) , B(2;12;5).

19. Обчислити кут між прямою та площиною:

а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{-2}$ і $x-3y+6z+7=0$;

б) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ і $6x-9y-6z+10=0$.

20. Знайти точку перетину прямої та площини:

а) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$ і $x-2y+z-15=0$;

б) $x=5+2t,\ y=2-t,\ z=-1+3t$ і $2x-y+3z+23=0$.

Розділ III. Вступ до математичного аналізу.

Тема 10. Множини. Комплексні числа.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Виконати дії над комплексними числами $z_1=3-4i,\quad z_2=4+3i$ в алгебраїчній формі. Знайти спряжене число до $z_1=3-4i$, обчислити їх добуток.

Розв'язання. Знайдемо суму, різницю, добуток і частку чисел $z_1=3-4i,\quad z_2=4+3i$. Дістанемо

$$z_1+z_2=(3-4i)+(4+3i)=7-i,\qquad z_1-z_2=(3-4i)-(4+3i)=-1-7i,$$

$$z_1\cdot z_2=(3-4i)\cdot(4+3i)=12-16i+9i-12i^2=12-7i-12\cdot(-1)=24-7i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{3\cdot 4+4(-3)}{4^2+3^2}=\frac{12-12}{25}+i\frac{-9-16}{25}=-i.$$

Оскільки $\overline{z}_1=3+4i$, то $z_1\cdot\overline{z}_1=(3-4i)\cdot(3+4i)=9+16=25=|z_1|^2$.

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot(-1)=1.$$

Приклад 2. Записати в алгебраїчній формі комплексне число

$$z=5i^{23}+2i^{18}-4i^{16}+3i^9.$$

Розв’язання. Оскільки $i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, то для будь-якого числа $k > 0$ можна записати

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Тоді задане комплексне число має вигляд

$$z = 5i^{20+3} + 2i^{16+2} - 4i^{16} + 3i^{8+1} = -5i - 2 - 4 + 3i = -6 - 2i.$$

Приклад 3. Знайти $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{15}$ і визначити дійсну і уявну частини цього числа.

Розв’язання. Спочатку запишемо число $\dfrac{1+i}{1-i}$, виконавши ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі. Маємо

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i.$$

Враховуючи формули (9), дістаємо

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15} = i^{15} = i^3 = -i.$$

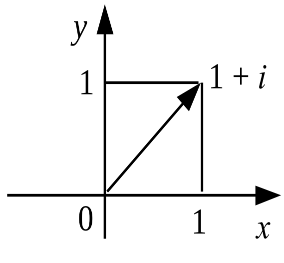
Тоді дійсна і уявна частини числа $z = 0 + (-1)i$ відповідно дорівнюють

$$\operatorname{Re} z = 0, \qquad \operatorname{Im} z = -1.$$

Приклад 4. Записати число $z = 1 + i$ в тригонометричній формі.

Розв’язання. Знайдемо модуль і аргумент числа $z = 1 + i$. Маємо:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$



Отже, задане число тригонометричній формі має вигляд:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Приклад 5. Записати число $z = -\sqrt{3} + i$ в тригонометричній та показниковій формі.

Розв'язання. Знайдемо модуль заданого числа:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

Оскільки $x = -\sqrt{3},\ y = 1$, то точка $M(x;\, y)$ лежить у ІІ чверті. Тому аргумент числа дорівнює

$$\varphi = arctg\,\frac{-1}{\sqrt{3}} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Отже, задане число в тригонометричній і показниковій формі має вигляд:

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \qquad z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

Приклад 6. Знайти добуток комплексних чисел у тригонометричній формі

$$z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right); \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right).$$

Розв'язання. Оскільки модулі комплексних чисел перемножаються , а їх аргументи додаються, то

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right)\right) = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Тоді в алгебраїчній формі добуток чисел має вигляд

$$z_1 \cdot z_2 = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 + 5\sqrt{3}i.$$

Приклад 7. Знайти частку чисел $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i,\ z_2 = 2 - 2i$ в тригонометричній формі.

Розв'язання. Запишемо комплексні числа в тригонометричній формі. За відповідними формулами знайдемо модуль і аргумент числа $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i$

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8, \quad \arg z_1 = arctg\,\frac{4\sqrt{3}}{4} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, число z_1 в тригонометричній формі має вигляд

$$z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Аналогічно знайдемо модуль і аргумент числа $z_2 = 2 - 2i$, маємо

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \qquad \arg z_2 = arctg\frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right).$$

Дістаємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Приклад 8. Знайти $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^5$.

Розв’язання. Запишемо комплексне число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі. Знайдемо його модуль і аргумент.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \ \arg z = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тоді комплексне число z в тригонометричній формі має вигляд

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right).$$

Дістаємо

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{-10\pi}{3} + i\sin\frac{-10\pi}{3}\right) = 2^5\left(\cos\left(-4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-4\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Тоді в алгебраїчній формі маємо

$$\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^5 = 32\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -16 + 16\sqrt{3}i.$$

Приклад 9. Розв’язати рівняння $z^2 + 1 = 0$.

Розв’язання. Оскільки із заданого рівняння випливає $z^2 = -1$, то потрібно знайти всі корені другого степеня ($n = 2$) із числа –1, тобто визначити $\sqrt{-1}$. Для цього число -1 запишемо в тригонометричній формі. Оскільки $r = |-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, $\varphi = arg(-1) = \pi$, то $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.

При $n = 2$ маємо два корені $\sqrt{-1}$. Оскільки $\sqrt{r} = \sqrt{1} = 1$, $\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\pi + 2\pi k}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то при $k = 0, 1$ дістанемо шукані корені рівняння

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i,$$

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot (-1) = -i.$$

Таким чином, маємо два корені другого степеня $\sqrt{-1} = \pm i$, тобто задане рівняння має два розв’язки $z_1 = i, z_2 = -i.$

Приклад 10. Розв’язати рівняння $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Розв’язання. Задане квадратне рівняння не має дійсних коренів, оскільки дискримінант $D = (-2)^2 - 4 \cdot 10 = -36 < 0$. У цьому випадку рівняння має два комплексних спряжених корені $x_1 = \alpha + i\beta, x_2 = \alpha - i\beta$, які знаходять за тією самою формулою, що й дійсні. Враховуючи, що $\sqrt{-1} = \pm i$, дістаємо

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 3i.$$

Зазначимо, що квадратне рівняння може бути записано за допомогою будь-якої змінної. В даному випадку комплексні корені позначають $x_1 = 1 + 3i,\ x_2 = 1 - 3i.$

Завдання для самостійної роботи

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами z_1 і z_2:

1) $z_1 = -i,\ z_2 = 1 + i$;

2) $z_1 = 4 - 3i,\ z_2 = 4 + 3i$;

3) $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = 4 - 2i$; 4) $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = -1 + 5i$;

5) $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 5 - 4i$; 6) $z_1 = -4 + i,\ z_2 = -2 + 3i$.

2. Знайти спряжене число до:

1) суми чисел $z_1 = 2 - i,\ z_2 = 3 + 4i$;

2) добутку чисел $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 4 + i$.

3. Записати в алгебраїчній формі числа:

1) $(2+2i)(2-i)$; 2) $\dfrac{2-i}{1+i}$; 3) $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$.

4. Визначити дійсну та уявну частини комплексного числа

а) $z = \dfrac{2-i}{2+i}$; б) $z = \dfrac{(1-i)^2}{1+i} + i^5$; в) $z = (2+3i)^3$; г) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^9$.

5. Зобразити комплексні числа на комплексній площині і записати їх в тригонометричній та показниковій формах:

1) $z = -4$; 2) $z = 1 - i$; 3) $z = i^5$; 4) $z = (1-i)^2$;

5) $z = -1 + \sqrt{3}i$; 6) $z = 4\sqrt{3} + 4i$; 7) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; 8) $z = \sqrt{3} - i$.

6. Знайти $z_1 z_2$ та $\dfrac{z_1}{z_2}$, якщо:

1) $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right),\ z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $z_1 = 4e^{\frac{\pi}{3}i},\ z_2 = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$.

7. Виконати дії множення і ділення над комплексними числами z_1 і z_2 у тригонометричній формі:

1) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = i$; 2) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i,\ z_2 = \sqrt{3} - i$;

3) $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 1 + \sqrt{3}i$; 4) $z_1 = -4 + 4\sqrt{3}i,\ z_2 = 1 + i$.

8. Обчислити, користуючись формулою Муавра:

1) $(1+i)^8$; 2) $(1-i)^{26}$; 3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{12}$; 4) $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^{16}$;

5) $\dfrac{4i}{(1+i)^6}$; 6) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}\cdot i^{103}$; 7) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$;

8) $\left(\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$; 9) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^5$; 10) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$.

9. Знайти всі значення кореня:

1) $\sqrt{5+12i}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-16}$;

4) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$; 5) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 6) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

10. Знайти корені рівняння

1) $z^2=-4$; 2) $z^3+1=0$; 3) $z^3-i=0$;

4) $z^4+i=0$; 5) $z^3+27i=0$; 6) $z^5-32i=0$.

11. Розв’язати рівняння на множині комплексних чисел

1) $x^2+2x+5=0$; 2) $4x^2-2x+1=0$; 3) $x^3-1=0$;

4) $x^2-8x+25=0$; 5) $2x^2+6x+7=0$; 5) $x^4-16=0$.

12. Зобразити множину точок комплексної площини, яка визначається такими умовами:

1) $\mathrm{Re}\,z<2$; 2) $-1\le \mathrm{Im}\,z\le 1$; 3) $|z|\le 4$; 4) $|z|>1$;

5) $|z-1|<3$; 6) $|z-2+i|\le 0$; 7) $1<|z-1-i|<3$; 8) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1$.

Тема 11. Функція однієї змінної та її властивості

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

а) $y=\sqrt{4-x^2}$; б) $y=\dfrac{x-5}{x^2+2x+1}$; в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$; г) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln(x+1)}$.

Розв’язання. а) Знайдемо область визначення функції $y=\sqrt{4-x^2}$. Оскільки підкореневий вираз повинен бути невід’ємний, то

$$4-x^2\ge 0 \;\Rightarrow\; x^2-4\le 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2)\le 0 \;\Rightarrow\; -2\le x\le 2.$$

Отже, $D(f)=[-2;2]$.

б) Оскільки знаменник дробу не дорівнює нулю, то для заданої функції $y=\dfrac{x-5}{x^2+2x+1}=\dfrac{x-5}{(x+1)^2}$ маємо $x+1\ne 0,\; x\ne -1$.

Тому $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

в) Для знаходження області визначення функції $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$ враховуємо умову існування дробу $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ та область визначення арксинуса, тобто

$$\begin{cases}\sqrt{x}\ne 0\\ x\ge 0\\ -1\le 2x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ x\ge 0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le \frac{1}{2}.$$

Отже, $D(f)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ — область визначення даної функції.

г) Область визначення функції $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln(x+1)}$ передбачає існування підкореневого виразу та область визначення логарифмічної функції. Тому

$$D(f)=\begin{cases}1-x\ge 0\\ x+1>0\\ \ln(x+1)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x>-1\\ x+1\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x\le 1\\ x\ne 0.\end{cases}$$

Отже, $D(f)=(-1;0)\cup(0;1]$ — область визначення даної функції.

Приклад 2. Дослідити функції на парність:

а) $f(x)=x^3+2\sin x$; б) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; в) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-1}$

Розв’язання. а) Оскільки $D(f)=(-\infty;+\infty)$ і $f(-x)=(-x)^3+2\sin(-x)=$ $=-x^3-2\sin x=-f(x)$, то функція непарна.

б) Маємо $D(f)=(-\infty;+\infty)$ і $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$, тому функція парна.

в) Область визначення даної функції $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ не є симетричною відносно нуля. Тому можна не перевіряти другу умову парності і визначати $f(-x)$. Отже, дана функція є ні парною, ні непарною (функція загального вигляду).

Приклад 3. Нехай функція $y=f(x)$ періодична з періодом T. Показати, що функція $y=f(ax+b),\ a\neq 0,$ має період $\dfrac{T}{a}$.

Розв’язання. Оскільки T є періодом функції $y=f(x)$, то

$$y=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+T+b)=f((ax+b)+T)=f(ax+b),$$

тому $\dfrac{T}{a}$ є періодом функції $y=f(ax+b)$.

Приклад 4. Знайти основний період функції:

а) $y=\cos 4x$; б) $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; в) $y=\sin^2 x$.

Розв’язання. а) Оскільки основний період функції $\cos x$ дорівнює 2π, то для функції $y=\cos 4x$ основним періодом є число $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

б) Основний період функції $y=\mathrm{tg}\,x$ дорівнює π, тому основним періодом функції $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ є число $T=\dfrac{\pi}{1/2}=2\pi$.

в) Врахуємо тригонометричну формулу $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ і властивість функції $y = f(ax+b)$, яка має період $\dfrac{T}{a}$. Оскільки основний період $\cos x$ дорівнює 2π, то функція $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ має період $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Приклад 5. Перевірити, чи є обмеженими функції:

а) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in R$; б) $y = \dfrac{1}{x^4}$, $x \in (0;1)$.

Розв'язання. а) Оскільки $x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$, крім того, $1+x^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, то $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1 \ \forall x \in R$. Отже, задана функція є обмеженою на всій області визначення.

б) Розглянемо функцію $y = \dfrac{1}{x^4}$ на проміжку $(0;1)$. Оскільки $x^4 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^4} > 0$, то функція обмежена знизу. Але знаменник може бути як завгодно маленьким числом, близьким до нуля, тому функція може бути як завгодно великою. Отже, задана функція є обмеженою знизу на проміжку $(0;1)$.

Приклад 6. Дослідити функції на монотонність:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$; в) $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

Розв'язання. а) Функція $f(x) = x^2$ визначена на всій числовій прямій. Якщо $x_1 < x_2$, то на проміжку $(-\infty;0)$ виконується нерівність $x_1^2 > x_2^2$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$, а на проміжку $(0;+\infty)$ – нерівність $x_1^2 < x_2^2$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Тому дана функція не є монотонною на своїй області визначення, вона є спадною при $x < 0$ і зростаючою при $x > 0$.

б) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Якщо $x_1 < x_2 < 0$, то $\dfrac{1}{x_1^3} > \dfrac{1}{x_2^3}$, тобто функція є спадною на проміжку $(-\infty;0)$. При

$0 < x_1 < x_2$ також виконується нерівність $\dfrac{1}{x_1^3} > \dfrac{1}{x_2^3}$, тобто функція теж є спадною на проміжку $(0;+\infty)$. Але задана функція не є монотонною на своїй області визначення, оскільки $\dfrac{1}{x_1^3} < \dfrac{1}{x_2^3}$ при $x_1 < 0 < x_2$.

в) Задана функція визначена на $(-\infty;+\infty)$. Для $x_1 < x_2 < 0$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2) > 1$, а для $0 \le x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Тоді для будь-яких $x_1 < x_2$ дістаємо $f(x_1) \ge f(x_2)$, тобто дана функція є незростаючою на своїй області визначення.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій:

1) $y=\sqrt{2x+3}$; 2) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$; 3) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$;

4) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; 5) $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$; 6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$;

7) $y=\dfrac{2-x}{\sqrt{8-2x-x^2}}$; 8) $y=\dfrac{x}{\sqrt{9x-x^3}}$; 9) $y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$;

10) $y=\log_3(x+2)$; 11) $y=\lg(x^2-x)$; 12) $y=\sqrt{\sin x}+1$;

12) $y=\log_2\dfrac{2x-1}{x+1}$; 13) $y=\arccos\dfrac{x-2}{x}$; 14) $y=\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{3}+\sqrt{1-x^2}}{\ln(1-x)}$.

2. Дано функцію $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$. Знайти $f(-2), f(0), f(a), f(x^2),\left(f(x)\right)^2$.

Чи існує $f(-1), f(1)$?

3. Знайти множину значень функцій:

1) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; 2) $y=-x^2-5x+6$; 3) $y=1-|x|$;

4) $y=\dfrac{2-x}{x+3}$; 5) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; 6) $y=\sqrt{\sin x-1}$.

4. Для заданих функцій знайти обернені:

1) $y=x$, 2) $y=x^2-2x$; 3) $y=3x+1$;

4) $y=x^2+1$; 5) $y=10^{x+1}$; 6) $y=e^{4x}$;

7) $y=\dfrac{1}{x+2}$; 8) $y=\log_x 2$; 9) $y=2+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$.

5. Дослідити функції на парність:

1) $y=4x^3-3x$; 2) $y=x^2+5x$; 3) $y=x^3+x$;

4) $y=3x^4-x^2+4$; 5) $y=|x+1|$; 6) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$;

7) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 8) $y=x\cos x$; 9) $y=|x|\sin 3x$;

10) $y=2^x+2^{-x}$; 11) $y=x5^{-x}$; 12) $y=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

13) $y=\sqrt[3]{x}+x$; 13) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$; 15) $y=\sqrt[3]{x^5}+\sin x$.

6. Знайти основний період функцій:

1) $y=\cos 3x$; 2) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$; 3) $y=\cos\dfrac{x}{2}$;

4) $y=\operatorname{ctg} 2x$; 5) $y=3\sin 5x$; 6) $y=\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$;

7) $y=3tg\dfrac{x}{2}+2tg\dfrac{x}{3}$; 8) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$; 9) $y=\cos\dfrac{1}{x}$.

7. Визначити, які з функцій є періодичними, і знайти їх період

1) $y=\dfrac{x-1}{|x-1|}$; 2) $y=\dfrac{2}{\cos x}$; 3) $y=tg\sqrt{x}$;

4) $y=\sin\dfrac{x}{3}+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$; 5) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; 6) $y=|\sin x|$;

7) $y=\lg(\cos^2 x)$; 8) $y=2^{\sin 2x}$; 9) $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{5x}{6}+1\right)$.

8. Перевірити, чи є обмеженими функції на вказаному проміжку

1) $y=\dfrac{1}{x^3}$, $x\in(0;1)$; 2) $y=-4^x$, $x\in R$; 3) $y=\dfrac{x^2}{1+x^4}$, $x\in R$.

9. Визначити, чи обмежена функція $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + \ln\dfrac{2}{x}$ на $[1;2]$.

10. Дослідити функції на монотонність:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^2 - 3x + 2$; 3) $y = \dfrac{1}{x-1}$;

4) $y = 3^{x+1}$; 5) $y = e^{-x}$; 6) $y = \sqrt{x+1}$.

Тема 12. Границя послідовності

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Записати три перші члени послідовності $(x_n) = \left(\dfrac{n^2+1}{3^n}\right)$.

Розв'язання. Поклавши $n = 1, 2, 3$ у формулі загального члена послідовності $x_n = \dfrac{n^2+1}{3^n}$, дістанемо $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = \dfrac{5}{9}$, $x_3 = \dfrac{10}{27}$.

Приклад 2. За даними трьома першими членами послідовності $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{5}{7}$ знайти формулу її загального члена.

Розв'язання. Оскільки $x_1 = \dfrac{1}{1}$, то помічаємо, що чисельники є непарними числами, а знаменники відрізняються на 3, крім того, знаки дробів чергуються. Тоді загальний член послідовності має вигляд $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{3n-2}$.

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

Розв'язання. Розглянемо послідовність із загальним членом $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Оскільки нерівність $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ виконується для всіх $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то в якості числа

N можна взяти цілу частину $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність (1), і за означенням маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Зокрема при $\varepsilon=0{,}1$ нерівність $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ виконується для всіх $n>10$, тобто всі члени послідовності, починаючи з $n=11$, попадають в ε–окіл нуля. Отже, послідовність $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ є збіжною до нуля.

Приклад 4. Користуючись означенням, довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{n+3}=2$.

<u>Розв'язання.</u> За означенням границі число 2 є границею послідовності $\left(\dfrac{2n+5}{n+3}\right)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число N, що для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність

$$\left|x_n-a\right|=\left|\frac{2n+5}{n+3}-2\right|=\left|\frac{2n+5-2n-6}{n+3}\right|=\left|\frac{-1}{n+3}\right|=\frac{1}{n+3}<\varepsilon .$$

З нерівності $\dfrac{1}{n+3}<\varepsilon$ знаходимо $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-3$. Отже, для всіх номерів, для яких виконується умова $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-3$, відповідні члени послідовності задовольняють нерівність $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$. Тому за означенням $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{n+3}=2$.

Приклад 5. Показати, що послідовність $\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{7},\dfrac{7}{10},\ldots,\dfrac{2n+1}{3n+1},\ldots$ має границю число $\dfrac{2}{3}$.

<u>Розв'язання.</u> Загальний член послідовності $x_n=\dfrac{2n+1}{3n+1}$. Тому

$$x_n-\frac{2}{3}=\frac{2n+1}{3n+1}-\frac{2}{3}=\frac{3(2n+1)-2(3n+1)}{3(3n+1)}=\frac{1}{3(3n+1)}.$$

Розглянемо додатне число $\varepsilon > 0$. Розглянемо нерівність $\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$, тобто $\frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$. Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{3n+1}{\varepsilon}$, дістанемо $\frac{1}{3\varepsilon} < 3n+1$, звідки $n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right)$.

Якщо в означенні границі взяти число $N = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right) \right]$, де $[x]$ – ціла частина числа *x*, то для всіх $n > N$ буде виконуватись умова $\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$.

Приклад 6. Обчислити границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}$.

Розв’язання. Скориставшись теоремою 3, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{3n}$.

Розв’язання. Оскільки послідовності у чисельнику і знаменнику не є збіжними, то для застосування теореми 3 спочатку потрібно провести перетворення, поділивши чисельник і знаменник на n (найвищий степінь n в чисельнику і знаменнику). Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{4}{n}}{\frac{3n}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 4\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 8. Знайти границі а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right)$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sin n$.

Розв’язання. а) Оскільки $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$ при $n \to \infty$, а сума двох нескінченно малих послідовностей теж є нескінченно малою, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0.$$

б) Оскільки $|\sin n| \le 1$, то маємо добуток нескінченно малої послідовності $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ на обмежену $(\sin n)$. Тоді послідовність $\left(\frac{1}{n^2}\sin n\right)$ теж є нескінченно малою, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sin n = 0$.

Приклад 9. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right)$.

Розв’язання. Маємо границю добутку двох послідовностей, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n^2}\right)=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}3-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)=(1+0)\cdot(3-0)=3.$$

Приклад 10. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{n-2n^2}$.

Розв’язання. Спочатку поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, тобто на n^2. Оскільки $\frac{3}{n}\to 0, \frac{5}{n^2}\to 0, \frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{n-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}-2}=\frac{1+0-0}{0-2}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-1}{n^3-2n^2+3}$.

Розв’язання. Для обчислення границі поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, тобто на n^3. У чисельнику ми дістанемо суму нескінченно малих послідовностей, а в знаменнику – суму одиниці та нескінченно малих послідовностей. Оскільки $\frac{4}{n}\to 0, \frac{1}{n^2}\to 0, \frac{1}{n^3}\to 0, \frac{2}{n}\to 0, \frac{3}{n^3}\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-1}{n^3-2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^3-2n+1}{5n^3-4n^2+2}$.

Розв’язання. Для обчислення границі поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, тобто на n^4. У чисельнику ми дістаємо 1, а в знаменнику – нескінченно малу послідовність. Оскільки обернена до нескінченно малої послідовності є нескінченно великою, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^3-2n+1}{5n^3-4n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^4}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

Розв’язання. У чисельнику та знаменнику маємо нескінченно великі послідовності, тому поділимо чисельник і знаменник на степінь з найбільшою основою 3^n. Оскільки геометрична прогресія із знаменником $q=\frac{2}{3}<1$ є нескінченно малою послідовністю, то $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$. Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+3^n}{3^n}}{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=\frac{0+1}{2\cdot 0+3}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 14. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Розв'язання. Для обчислення границі подамо кожний дріб у вигляді різниці двох дробів, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

Приклад 15. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

Розв'язання. Під знаком границі помножимо і поділимо вираз на спряжений до нього і скористаємось формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

Приклад 16. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$.

Розв'язання. Скориставшись границею $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot e\cdot 1=e^2.$$

Приклад 17. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n-1}$.

Розв'язання. Скористаємось відомою границею $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{e^3}{1}=e^3.$$

Приклад 18. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+4}$.

<u>Розв'язання</u>. Проведемо перетворення у виразі, а потім скористаємось границею $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$. Враховуючи, що $\dfrac{n+1}{2}\to\infty$ при $n\to\infty$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+2}{n+1}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot 2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3}=e^2\cdot 1^3=e^2.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Написати перші чотири члени послідовності, якщо:

а) $x_n=\dfrac{1}{1+n^2}$; б) $x_n=\dfrac{3^n}{n!}$; в) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n n}{n}$;

г) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2+1}$; д) $x_n=(-1)^n\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

2. Написати формулу загального члена послідовності:

а) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{7}{8},\ldots$. б) $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{6}{27},\ \dfrac{8}{81},\ldots$

в) $\dfrac{2}{3\cdot 1},\ \dfrac{3}{4\cdot 2},\ \dfrac{4}{5\cdot 3},\ \dfrac{5}{6\cdot 4},\ldots$ г) $\dfrac{2}{3!},\ \dfrac{8}{5!},\ \dfrac{32}{7!},\ \dfrac{128}{9!},\ldots$

3. Довести за означенням, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-5}{n+3}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

4. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n+1)}{n^2+2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n^2-5n+4}$;

є) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^3-n^2+4}$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3+5n^2}{0{,}1n^4-10n^3+1}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-6n^2+5}{7n^2+3n}$; і) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

5. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+n}-\sqrt{2+n})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-1}-\sqrt{4n^2+1})$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

є) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^n}{2^n+3^n}$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$; і) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

6. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n+2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{3n+3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$.

Тема 13. Границя функції

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Довести, що границя функції $f(x)=2x+1$ у точці $x=1$ дорівнює 3.

<u>Розв'язання</u>. Доведемо, що для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що при всіх $x\neq 1$, які задовольняють нерівність $|x-1|<\delta$, виконується нерівність $|(2x+1)-3|<\varepsilon$, тобто $|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon$.

Якщо взяти $\delta=\varepsilon/2$, то для всіх x, які задовольняють умову $|x-1|<\delta=\varepsilon/2$, виконується нерівність $|2(x-1)|<\varepsilon$, тобто $|(2x+1)-3|<\varepsilon$. Тоді за означенням границі маємо $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Приклад 2. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}$.

<u>Розв’язання.</u> Розклавши многочлени у чисельнику і знаменнику на множники, скоротимо дріб на спільний множник $(x-1)$, оскільки під знаком границі $x-1\neq 0$. Дістанемо величину, обернену до нескінченно малої:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x-1}=\left[\frac{6}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 3. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+3x-6}{x^2-4}$.

<u>Розв’язання.</u> Розклавши многочлени у чисельнику і знаменнику на множники, скоротимо дріб на спільний множник $(x-2)$, оскільки під знаком границі $x-2\neq 0$. Дістанемо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)+3(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x+2}=\frac{4+3}{2+2}=\frac{7}{4}.$$

Приклад 4. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)^2}$.

Розв’язання. а) Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ позбавимось від ірраціональності, помноживши чисельник і знаменник на «спряжений вираз» до чисельника. Після скорочення дробу на однаковий вираз, дістанемо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}.$$

б) Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої позбавимось від ірраціональності, домноживши чисельник і знаменник на «спряжений вираз» до чисельника. Після скорочення дробу на спільний множник $(x-3)$, дістанемо у знаменнику нескінченно малу величину. Отже,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)^2(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)^2(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)^2(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 5. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+6}{4+3x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2-5}{3x^4-5x^3+2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2-x}{x^2-3x+7}$.

Розв’язання. а) При $x\to\infty$ чисельник і знаменник дробу прямують до нескінченності, тому маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, для розкриття якої поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на x^2. Скориставшись теоремами про границі, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+6}{4+3x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}-2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}2}=\frac{4-0+0}{0+0-2}=-2.$$

б) Маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Поділивши чисельник і знаменник дробу на x^4 (на x у найвищому степені у даному дробі), маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2-5}{3x^4-5x^3+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\frac{0+0-0}{3-0+0-0}=0.$$

в) Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ поділимо чисельник і знаменник на x^3. Дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2-x}{x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=2$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)=0$, то маємо величину, обернену до нескінченно малої. Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2-x}{x^2-3x+7}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^3+x}-2x}$.

<u>Розв’язання.</u> При $x\to\infty$ чисельник і знаменник дробу прямують до нескінченності, тому маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на $x^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{x}$. Дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^3+x}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{4\sqrt{x^3+x}-2x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{4\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо невизначеність $[\infty-\infty]$, для розкриття якої позбавимось від ірраціональності, помноживши і поділивши вираз на «спряжений». Дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки $x\to 0$, то $4x\to 0$ і $\sin 5x\to 0$, то маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скориставшись першою важливою границею, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{4}\cdot 1=\frac{5}{4}.$$

Приклад 9. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{9x^2}$.

<u>Розв'язання.</u> а) Скориставшись першою важливою границею, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7}{x}=\left[\frac{7}{0}\right]=\infty.$$

б) Розкриємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ за допомогою першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{3x}{4x}\cdot\cos 4x\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\frac{3}{4}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{4}.$$

в) Оскільки при $x\to 0$ функції в чисельнику та знаменнику прямують до нуля, то маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої використаємо першу важливу границю. Скориставшись формулою $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{9x^2}=\frac{2}{9}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\cdot 4=\frac{2}{9}\cdot 1\cdot 4=\frac{8}{9}.$$

Зауважимо, що можна спростити обчислення границь у наведеному прикладі, скориставшись еквівалентністю нескінченно малих величин. Зокрема,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}=\left|\begin{matrix}\sin 3x\sim 3x\\ \operatorname{tg} 4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Приклад 10. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$.

<u>Розв’язання.</u> Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, яку розкриємо за допомогою першої важливої границі. Скориставшись тригонометричною формулою $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 3x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=-6.$$

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

<u>Розв’язання.</u> Застосуємо другу важливу границю, зробивши заміну $u=\frac{x}{2}$. Оскільки $x\to\infty\Rightarrow u\to\infty$, то маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{2\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e\cdot e=e^2.$$

Приклад 12. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{5x}$.

Розв'язання. Для розкриття невизначеності $[1^{\infty}]$ використаємо другу важливу границю, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)+3}{x-1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{x-1}{3}\cdot\frac{3}{x-1}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{15x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x}{x-1}}=e^{15}.$$

Приклад 13. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{4x-3}$.

Розв'язання. При обчисленні границі маємо невизначеність вигляду $[1^{\infty}]$, оскільки при $x\to\infty$ функція $\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{2-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\to 1$, а $4x-3\to\infty$. Для розкриття цієї невизначеності використаємо другу важливу границю, перетворивши вираз $\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{4x-3}$ до вигляду $\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}$, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+1)-2}{2x+1}\right)^{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{4x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}\cdot\frac{-2}{2x+1}\cdot(4x-3)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{-8x+6}{2x+1}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}=e$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8x+6}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8+\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}=-4$ то скориставшись другою важливою границею, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{-8x+6}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x+6}{2x+1}}=e^{-4}.$$

Приклад 14. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2x-7\right)^{\frac{3}{x-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. а) Оскільки при $x\to 4$ вираз $2x-7\to 1$, а вираз $\dfrac{3}{x-4}\to\infty$, то маємо невизначеність виду $[1^{\infty}]$, для розкриття якої скористаємось другою важливою границею у вигляді (3). Оскільки при $x\to 4$ вираз $x-4\to 0$, то зробимо заміну $t=x-4$. Тоді $x=t+4$, звідки $2x-7=2t+1$. Дістанемо

$$\lim_{x\to 4}\left(2x-7\right)^{\frac{3}{x-4}}=\lim_{t\to 0}\left(1+2t\right)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+2t\right)^{\frac{1}{2t}\cdot 6}=\lim_{t\to 0}\left(\left(1+2t\right)^{\frac{1}{2t}}\right)^{6}=e^{6}.$$

б) Для розкриття невизначеності виду $[1^{\infty}]$, скористаємось другою важливою границею у вигляді (3) та першою важливою границею. Дістанемо

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}=e^{2}.$$

Приклад 15. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\ln(1+4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\mathrm{tg}(3x^{2})}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}+2x-3}{\arcsin(x-1)}$.

Розв'язання. а) Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ замінимо функції в чисельнику і знаменнику еквівалентними нескінченно малими функціями, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(e^{2x}-1)}{\ln(1+4x)}=\left|\begin{array}{l}e^{2x}-1\sim 2x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

б) Скориставшись відомими еквівалентностями нескінченно малих величин, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\mathrm{tg}(3x^2)}=\left|\begin{array}{l}\ln(1+\sin x)\sim\sin x\\ \mathrm{tg}(3x^2)\sim 3x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

в) Використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій $\arcsin(x-1)$ і $x-1$ при $x\to 1$, дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{\arcsin(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+3)=4.$$

Приклад 16. Порівняти порядок функцій $\alpha(x)=\sin x$ і $\beta(x)=x^2$ при $x\to 0.$

Розв’язання. Обидві функції є нескінченно малими при $x\to 0.$ Скориставшись першою важливою границею, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty,$$

тобто $\alpha(x)=\sin x$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\beta(x)=x^2$.

Приклад 17. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)=1-\cos x$ відносно $\beta(x)=e^{2x}-e^{x}$ при $x\to 0$.

Розв’язання. Розглянемо границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^p\beta(x)}$ і визначимо порядок малості p з умови $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x^p\beta(x)}=C,\ C\neq 0.$ Враховуючи еквівалентність нескінченно малих величин, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^p\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^p(e^{2x}-e^{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^pe^{x}(e^{x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^p\cdot 1\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^p\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^p}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^{p-1}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ p-1=0,\ p=1.$$

Отже, нескінченно мала $\alpha(x)=1-\cos x$ має порядок малості $p=1$ відносно нескінченно малої $\beta(x)=e^{2x}-e^{x}$ при $x\to 0$.

Приклад 18. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0:

а) $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$, $x_0=1$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}$, $x_0=2$.

Розв'язання. а) Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі функції $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$ у точці $x_0=1$. Якщо $x\to 1$ зліва, то $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{5}{x-1}=\left[\dfrac{5}{-0}\right]=-\infty$; а при $x\to 1$ справа маємо $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{5}{x-1}=\left[\dfrac{5}{+0}\right]=+\infty$.

б) Розглянемо односторонні границі функції $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}$ у точці $x_0=2$. Якщо $x\to 2-0$, то $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty \Rightarrow 3^{\frac{1}{x-2}}\to 3^{-\infty}\Rightarrow$ $3^{\frac{1}{x-2}}\to\dfrac{1}{3^{+\infty}}\Rightarrow$ $3^{\frac{1}{x-2}}\to\dfrac{1}{+\infty}\Rightarrow$ $3^{\frac{1}{x-2}}\to 0$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}=\dfrac{1}{2+0}=\dfrac{1}{2}$. При $x\to 2+0$ маємо $\dfrac{1}{x-2}\to+\infty \Rightarrow 3^{\frac{1}{x-2}}\to+\infty$, звідки дістаємо $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{x-2}}}=\left[\dfrac{1}{+\infty}\right]=0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{3x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8x^2+1}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3-9x}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{1-5x}}{7x+x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x+2}}$;

є) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x}}$.

3. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-2x^3+1}{2-3x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^3-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+x^2-x^3}{2x^4+3}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^5+3x^2-1}{x^3-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-4x+1}{2x^3-x^2+8}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2}{\sqrt{x^8-2x+1}}$;

є) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})$; ж) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{2x^2+8}-\sqrt{x^2-4})$.

4. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{tg3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg8x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg5x}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos 2x}$.

5. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x-3}{4}}$; в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{4}}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{4/x}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{x}{3-x}}$.

6. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0:

1) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, $x_0=3$; 2) $f(x)=\dfrac{3}{x+5}$, $x_0=-5$;

3) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$, $x_0=2$; 4) $f(x)=5^{\frac{1}{(x-3)^2}}$, $x_0=3$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0=1$; 6) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0=1$.

Тема 14. Неперервність функції

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y=\sin x$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(f)=R$. Візьмемо довільне $x\in D(f)$, надамо йому приросту Δx, тоді приріст функції Δy дорівнює

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо $\Delta x\to 0$, тоді Δx – нескінченно мала величина. За першою важливою границею, маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\Delta x\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=0.$$

При обчисленні границі ми скористались тим, що добуток нескінченно малої величини Δx на обмежену величину $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ є нескінченно малою величиною. Таким чином, із умови $\Delta x \to 0$ випливає $\Delta y \to 0$. Тому функція $y = \sin x$ неперервна $\forall x \in R,$ тобто на всій області визначення.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

<u>Розв’язання.</u> Область визначення функції $D(f) = (-\infty;4) \cup (4;+\infty)$. Знайдемо односторонні границі $\lim\limits_{x\to 4-0} \frac{x+2}{x-4} = \left[\frac{6}{-0}\right] = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0} \frac{x+2}{x-4} = \left[\frac{6}{+0}\right] = +\infty$.

Оскільки в точці $x = 4$ існують нескінченні односторонні границі функції, то це точка розриву II роду. Отже, функція неперервна у всіх точках області визначення, а в точці $x = 4$ має розрив другого роду.

Приклад 3. Дослідити функцію $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ на неперервність.

<u>Розв’язання.</u> Задана функція є неперервною в усіх точках області визначення. Оскільки знаменник $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$ при $x = 1$, $x = 2$, то область визначення функції: $D(f) = (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$. Дослідимо функцію у точках $x = 1$ і $x = 2$, знайшовши односторонні границі в цих точках. Оскільки

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{+0}\right] = +\infty,$$

то точка $x = 1$ є точкою розриву II роду.

Якщо $x = 2$, то $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1$.

Отже, в цій точці функція має границю, але невизначена. Тому точка $x = 2$ є точкою усувного розриву I роду.

Зокрема, цей розрив можна усунути, побудувавши функцію

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2} & при \quad x\neq 2,\\ 1 & при \;\; x=2.\end{cases}$$

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}$.

<u>Розв'язання.</u> Розглянемо значення x, в яких знаменник перетворюється в нуль. Оскільки $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, то $x=-3$ і $x=1$ є точками розриву функції. Областю визначення функції є $D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;+\infty)$.

У точці $x=-3$ знаходимо односторонні границі

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to -3-0}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to -3-0}\frac{x+5}{x+3}=\left[\frac{2}{-0}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to -3+0}\frac{x+5}{x+3}=\left[\frac{2}{+0}\right]=+\infty.$$

Оскільки в точці $x=-3$ існують нескінченні односторонні границі функції, то це точка розриву II роду.

У точці $x=1$ знаходимо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x+3}=1{,}5.$$

Отже, в точці $x=1$ існує скінченна границя, але функція невизначена. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$, то $x=1$ є точкою розриву I роду (усувного).

Приклад 5. Дослідити на неперервність функції $y=7^{\frac{1}{2-x}}$.

<u>Розв'язання.</u> Область визначення функції $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. У точці $x=2$ функція невизначена, тобто не виконується перша умова неперервності, тому в цій точці функція має розрив. Щоб визначити характер точки розриву, знайдемо односторонні границі функції в цій точці, дістанемо

$$\lim_{x\to 2-0}7^{\frac{1}{2-x}}=\left[7^{\frac{1}{+0}}\right]=\left[7^{+\infty}\right]=+\infty,\qquad \lim_{x\to 2+0}7^{\frac{1}{2-x}}=\left[7^{\frac{1}{-0}}\right]=\left[7^{-\infty}\right]=\left[\frac{1}{7^{+\infty}}\right]=0.$$

Оскільки лівостороння границі функції нескінченна, то $x=2$ є точкою розриву другого роду.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ і з'ясувати характер точок розриву.

<u>Розв'язання.</u> Функція $f(x)$ визначена у всіх точках $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Розрив можливий тільки в точці $x=0$, тому знайдемо односторонні границі

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0,\quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=\infty.$$

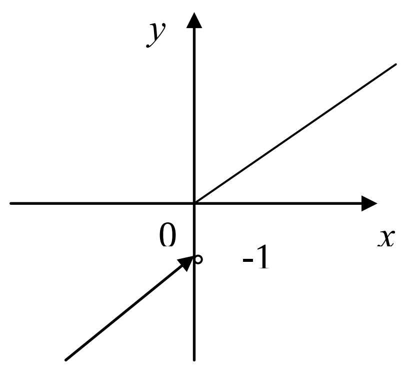
Отже, функція $f(x)$ в точці $x=0$ має розрив другого роду.

Приклад 7. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} x-1, & \text{при } x<0, \\ x, & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$.

<u>Розв'язання.</u> Областю визначення функції є $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Задана функція є неперервною в усіх точках, крім, можливо, точки $x=0$, оскільки в цій точці змінюється аналітичний вираз функції.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$, то в точці $x=0$ існують односторонні границі функції, не рівні між собою. Тому функція не є неперервною в точці $x=0$, причому ця точка є точкою стрибкового розриву І роду (стрибок $h=|0-(-1)|=1$).

Зробимо схематичний рисунок графіка функції.



Приклад 8. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік,

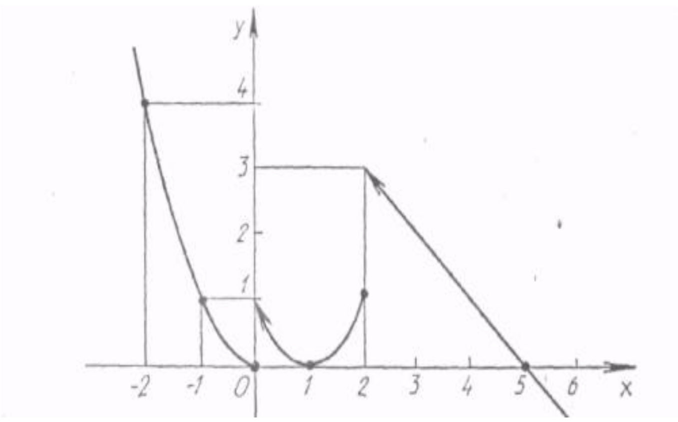
якщо $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x\le 2, \\ 5-x, & x>2. \end{cases}$

Розв'язання. Функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжках $(-\infty,0)$, $(0,2)$ і $(2,+\infty)$, де вона задана неперервними елементарними функціями. Отже, розрив можливий тільки в точках $x=0$ і $x=2$.

Оскільки при $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x-1)^2=1$, $f(0)=0^2=0$, то функція $f(x)$ в точці $x=0$ має розрив I роду (стрибковий).

При $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)^2=1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(5-x)=3$, $f(2)=(2-1)^2=1$, тому $x=2$ теж є точкою розриву I роду (стрибкового).

Графік даної функції зображено на рисунку.



Приклад 9. Показати, що рівняння $x^3-3x+1=0$ на відрізку $[1;2]$ має дійсний корінь, і знайти його значення з точністю до $0{,}1$.

Розв'язання. Оцінимо значення функції $f(x)=x^3-3x+1$ на кінцях заданого проміжку $f(1)<0$, $f(2)>0$. Оскільки на відрізку $[1;2]$ функція $f(x)=x^3-3x+1$ неперервна і на його кінцях набуває значень різних знаків, то за першою теоремою Больцано-Коші всередині цього проміжку існує хоча б одна точка, в якій функція перетворюється в нуль. Ця точка і буде дійсним коренем заданого рівняння. Для знаходження кореня із заданою точністю відрізок $[1;2]$ розділимо точками $1{,}1;\ \ 1{,}2;\ \ \ldots,\ \ 1{,}9$, і в кожній з них визначимо знак функції $f(x)=x^3-3x+1$. Дістанемо $f(1{,}1)<0$, $f(1{,}2)<0$, $f(1{,}3)<0$, $f(1{,}4)<0$, $f(1{,}5)<0$, $f(1{,}6)>0$, $f(1{,}7)>0$, $f(1{,}8)>0$, $f(1{,}9)>0$. Оскільки $f(1{,}5)<0$, а $f(1{,}6)>0$, то з точністю до $0{,}1$ дійсний корінь даного рівняння міститься між $1{,}5$ і $1{,}6$, тобто $1{,}5<x<1{,}6$.

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись означенням, довести неперервність функцій в області їх визначення:

1) $f(x)=3x^2+2x+1$; 2) $f(x)=\cos x$.

2. Дослідити функції на неперервність і визначити точки розриву.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$; 2) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-16}$; 3) $y=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$;

4) $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{x^2-5x+4}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$.

3. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}$.

4. Довести, що при $x=5$ функція $y=\dfrac{x}{5-x}$ має розрив.

5. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ і з’ясувати характер точок розриву.

6. З’ясувати характер розриву функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$.

7. Дослідити функцію $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ на неперервність.

8. Дослідити функції на неперервність і визначити точки розриву.

1) $f(x)=5^{\frac{1}{x+3}}$; 2) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{1-4^{\frac{1}{x+1}}}$.

9. З’ясувати характер розриву функції $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{1-x}}}$ при $x=1$.

10. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$ та дослідити їх характер.

11. Дослідити функції на неперервність та побудувати їх графіки.

1) $f\left(x\right)=\begin{cases} x-1, & \text{якщо } x<2, \\ 2-x, & \text{якщо } x\geq 2. \end{cases}$ 2) $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x<0, \\ x^2, & \text{якщо } x\geq 0. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x\leq 0, \\ \ln x, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x<0, \\ \sin x, \text{ якщо } x\geq 0. \end{cases}$

5) $f\left(x\right)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad x\leq -1, \\ \left(x+1\right)^2 & \text{при} \quad -1<x<1, \\ 4 & \text{при} \quad x\geq 1. \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x<0, \\ 2 \text{ при } x=0, \\ x+2 \text{ при } x>2. \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } x\leq -1, \\ 2x^2-1, \text{ якщо } -1<x<1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\geq 1. \end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{якщо} \quad x<0, \\ x^2+1, & \text{якщо } 0\leq x\leq 1, \\ x, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$

12. Чи має рівняння $x^3+3x^2-2x-6=0$ хоча б один корінь на відрізку [0;2]?

Розділ IV. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Тема 15. Похідна функції.

Основні правила та формули диференціювання

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Для функції $y = x^2$ знайти похідну за означенням в точці x=3.

Розв’язання. Надамо аргументу x приросту Δx, тоді приріст функції

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 .$$

Розглянемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$. Тоді похідна функції в точці x=3 дорівнює $f'(3) = 2\cdot 3 = 6$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Розв’язання. Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому за правилами диференціювання маємо:

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)' .$$

Користуючись таблицею похідних, дістаємо:

$$y' = 3\cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x} .$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 2^x + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

Розв’язання. Скористаємось правилом похідної суми і таблицею похідних, дістаємо

$$y' = \left(2^x\right)' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' - \left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)' = 2^x\ln 2 + \left(x^{-2}\right)' - \left(4x^{-1/2}\right)' =$$

$$= 2^x\ln 2 - 2x^{-3} - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = 2^x\ln 2 - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} .$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = x^2\cos x$.

Розв’язання. Скориставшись правилом похідної добутку і таблицею похідних, дістанемо

$$y' = \left(x^2\cos x\right)' = \left(x^2\right)'\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x .$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = x\sqrt{x}\arcsin x$.

Розв’язання. Скориставшись тим, що $x\sqrt{x} = x^{3/2}$, маємо

$$y' = \left(x\sqrt{x}\arcsin x\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\arcsin x\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\arcsin x + x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\arcsin x + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2}{2-x}$.

Розв’язання. За правилом диференціювання частки маємо

$$y' = \left(\frac{x^2}{2-x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'\cdot(2-x) - x^2\cdot(2-x)'}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = (2x^3+4)^6$.

Розв’язання. Позначимо $t = 2x^3 + 4$, тоді $y = t^6$. За правилом диференціювання складної функції маємо $y' = y'_t \cdot t'_x$, тому

$$y' = 6t^5\cdot(2x^3+4)' = 6(2x^3+4)^5\cdot 6x^2 = 36x^2(2x^3+4)^5.$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = \mathrm{tg}^2 x$.

Розв’язання. Скориставшись правилом похідної складної функції, дістаємо

$$y' = \left(\mathrm{tg}^2 x\right)' = 2\,\mathrm{tg}\,x\left(\mathrm{tg}\,x\right)' = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}.$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = \sin(3x+2)$.

Розв’язання. За правилом диференціювання складної функції маємо

$$y' = \left(\sin(3x+2)\right)' = \cos(3x+2)\cdot(3x+2)' = 3\cos(3x+2);$$

Приклад 10. Знайти похідну функції $y = \mathrm{ctg}(\ln x)$.

Розв’язання. Скориставшись правилом похідної складної функції, дістаємо

$$y'=\left(\operatorname{ctg}(\ln x)\right)'=\frac{-1}{\sin^2(\ln x)}\cdot(\ln x)'=\frac{-1}{\sin^2(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-1}{x\cdot\sin^2(\ln x)};$$

Приклад 11. Знайти похідну функції $y=\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)$.

<u>Розв’язання.</u> За правилом диференціювання складної функції маємо

$$y'=\left(\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right)'=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

Приклад 12. Обчислити похідну функції $y=\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^5$.

<u>Розв’язання</u>. Застосуємо правила диференціювання складної функції та частки

$$\left(\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^5\right)'=5\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^4\cdot\frac{(1+2x)'\cdot(x-1)-(1+2x)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=5\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^4\cdot\frac{2\cdot(x-1)-(1+2x)\cdot1}{(x-1)^2}=5\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^4\cdot\frac{-3}{(x-1)^2}=-\frac{15(1+2x)^4}{(x-1)^6}.$$

Приклад 13. Знайти похідну функції $y=\ln^2(3x)\sin x^3$.

<u>Розв’язання.</u> Дана функція є добутком двох складених функцій. За правилами та формулами диференціювання дістанемо

$$y'=(\ln^2(3x))'\cdot\sin x^3+\ln^2(3x)\cdot(\sin x^3)'=2\cdot\ln(3x)\cdot(\ln(3x))'\cdot\sin x^3+$$

$$+\ln^2(3x)\cdot\cos x^3\cdot(x^3)'=2\ln(3x)\cdot\frac{1}{3x}\cdot3\sin x^3+\ln^2(3x)\cdot\cos x^3\cdot3x^2=$$

$$=\frac{2\ln(3x)\cdot\sin x^3}{x}+\ln^2(3x)\cdot\cos x^3\cdot3x^2.$$

Приклад 14. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=x^2-2x+3$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

<u>Розв’язання.</u> Знайдемо значення функції $y=x^2-2x+3$ в точці $x_0=2$.

$$f(x_0)=f(2)=2^2-2\cdot2+3=3.$$

Знайдемо похідну функції: $f'(x)=\left(x^2-2x+3\right)'=2x-2$, тоді

$$f'(x_0) = f'(2) = 2\cdot 2 - 2 = 2.$$

Підставимо значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ у рівняння дотичної $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Дістанемо

$$y - 3 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 1.$$

Підставимо значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ у рівняння нормалі $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Дістанемо

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Приклад 15. Нехай $s = \frac{1}{2}gt^2$ – рівняння вільного руху тіла, g – прискорення вільного падіння. Знайти миттєву швидкість тіла в момент часу t=2с.

<u>Розв’язання.</u> Враховуючи фізичний зміст похідної, маємо

$$v = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)' = \frac{1}{2}g\cdot 2t = gt.$$

Зокрема, при t=2, дістаємо $v(2) = g\cdot 2 = 9{,}8\cdot 2 = 19{,}6$ м/с.

Приклад 16. Знайти похідну неявно заданої функції $x^2 + \sin y - e^{xy} = 0$.

<u>Розв’язання</u>. Продиференціюємо обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x. Дістанемо

$$2x + \cos y\cdot y' - e^{xy}(y + xy') = 0,\ 2x + \cos\ y\cdot y' - ye^{xy} - xy'e^{xy} = 0,$$

$$y'(\cos y - xe^{xy}) = ye^{xy} - 2x,\ y' = \frac{ye^{xy} - 2x}{\cos y - xe^{xy}}.$$

Приклад 17. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = t^3 + 2t^2 - 1, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$

<u>Розв’язання.</u> Скориставшись формулою для диференціювання параметрично заданої функції, дістанемо

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2+t+1)'}{(t^3+2t^2-1)'} = \frac{2t+1}{3t^2+4t}.$$

Приклад 18. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

Розв’язання. Знайдемо похідну y'_x від параметрично заданої функції

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Приклад 19. Знайти похідну y' для функції $y = (\sin x)^x$.

Розв’язання. Логарифмуємо функцію та диференціюємо одержаний вираз $\ln y = \ln(\sin x)^x = x\ln(\sin x)$, тоді $(\ln y)' = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}$. Оскільки $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, то $y' = y(\ln y)' = (\sin x)^x(\ln(\sin x) + x\operatorname{ctg}x)$.

Приклад 20. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}$ за допомогою логарифмічного диференціювання.

Розв’язання. Маємо степенево-показникову функцію виду $y = (u(x))^{v(x)}$. Прологарифмуємо її та знайдемо $\ln y$, після чого визначимо похідну $(\ln y)'$. Оскільки $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, то похідна функції дорівнює $y' = y\cdot(\ln y)'$.

Для даної функції маємо

$$\ln y = \ln\left((\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}\right) = \sin 4x \cdot \ln \operatorname{tg}3x,$$

$$(\ln y)' = 4\cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg}3x + \sin 4x \cdot \frac{1}{tg3x}\cdot\frac{3}{\cos^2 3x} = 4\cos 4x\cdot \ln \operatorname{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\operatorname{tg}3x\cdot\cos^2 3x},$$

$$y' = y\cdot(\ln y)' = (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}\cdot\left(4\cos 4x\cdot\ln\operatorname{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\operatorname{tg}3x\cdot\cos^2 3x}\right).$$

Похідну від $y = (\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}$ можна знайти іншим способом, продиференціювавши спочатку як показникову, а потім як степеневу функцію:

$$\left(\left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x}\right)' = \left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x}\ln\left(\mathrm{tg}3x\right)\cdot 4\cos 4x + \sin 4x\left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x - 1}\cdot\frac{3}{\cos^2 3x} =$$

$$= \left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x}\cdot\left(4\cos 4x\cdot\ln\mathrm{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\mathrm{tg}3x\cdot\cos^2 3x}\right).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідну функції:

1) $y = 3x^2 - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x}{2};$; 2) $y = x^2 - \dfrac{4}{x^3} + \sqrt{x}$;

3) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{2}$; 4) $y = 2x + \dfrac{6}{\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x\sqrt{x}}$;

5) $y = \sqrt{x}\cdot\ln x$; 6) $y = x^3\sin x$;

7) $y = (x^2+1)\mathrm{arctg}x$; 8) $y = 3^x\mathrm{tg}x$;

9) $y = \dfrac{5x}{2-x^2}$; 10) $y = \dfrac{x^2}{2-x}$;

11) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$; 12) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

13) $y = \dfrac{e^x}{tgx+1}$; 14) $y = \dfrac{3^x}{\ln x - 2}$;

15) $y = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$; 16) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

2. Знайти похідну функції:

1) $y = (2+3x)^4$; 2) $y = (x^3 - 4x)^6$; 3) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 1}$;

4) $y = \cos(4x-2)$; 5) $y = \sin^3 x$; 6) $y = \sin\sqrt[5]{x}$;

7) $y = \ln(1-x^5)$; 8) $y = \ln^5 x$; 9) $y = \ln\cos x$;

10) $y = \mathrm{arcctg}\dfrac{x}{2}$; 11) $y = \sqrt{\mathrm{arctg}\,x}$; 12) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$;

13) $y = e^{-2x+3}$; 14) $y = 3^{\sqrt{x}+1}$; 15) $y = 4^{\mathrm{tg}x}$;

16) $y=\mathrm{ctg}^2\dfrac{x}{2}$; 17) $y=\sin^5(\ln x)$; 18) $y=\ln\sin\sqrt{x}$;

19) $y=\mathrm{tg}^2\sqrt{1+x}$; 20) $y=\ln\mathrm{tg}\dfrac{2x+1}{4}$; 21) $y=\sin 2x\cos\dfrac{x}{2}$;

22) $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$; 23) $y=\dfrac{2\mathrm{arctg}x}{\sqrt{x^2+1}}$; 24) $y=\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

3. Знайти значення похідної функції $f\left(x\right)$ в точці x_0:

1) $f\left(x\right)=2^{\sin x}, x_0=\pi$; 2) $f\left(x\right)=\arcsin 3x, x_0=\dfrac{1}{5}$;

3) $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}, x_0=0$; 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+1}, x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої, заданої функцією, в точці з абсцисою x_0:

1) $y=x^2-2x+3,\ x_0=2$; 2) $y=x^2-3x+1,\ x_0=2$;

3) $y=x^3-4x^2+8x-6,\ x_0=1$; 4) $y=\dfrac{8}{4+x^2},\ x_0=2$.

5. Визначити, в якій точці дотична до кривої $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+8x+4$ паралельна прямій $2x+2y-5=0$.

6 Визначити, в якій точці дотична до кривої $y=4x^2-6x+3$ перпендикулярна прямій $y=\dfrac{x}{4}$.

7 Тіло рухається прямолінійно за законом $s=2t^2-t+4$. Знайти швидкість руху тіла у момент часу $t_0=3$.

8 Знайти швидкість руху тіла у момент часу $t=2$, якщо закон руху задано формулою $s=4t^2-3$.

9. Знайти похідні від неявно заданої функції $y=f(x)$:

1) $x^3+x^2y+y^2=8$; 2) $x^5-3xy^2=3$;

3) $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$; 4) $tg(x+y) = xy$;

5) $x + y = e^{x-y}$; 6) $\ln y + \dfrac{x}{y} = 2$.

10. Знайти похідну функції логарифмічним диференціюванням:

1) $y = (arctgx)^{2x}$; 2) $y = \left(\cos 2x\right)^{tgx}$;

3) $y = \left(\sin 3x\right)^{\cos 5x}$; 4) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

5) $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$; 6) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

11. Знайти похідну y'_x параметрично заданої функції $y = f(x)$:

1) $\begin{cases} x = 3t + t^2 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1} \\ y = \sqrt[3]{t+1} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x = t + \ln \sin t \\ y = t + \ln \cos t \end{cases}$.

Тема 16. Диференціал функції.
Похідні та диференціали вищих порядків. Правило Лопіталя.
Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = x^3 + 5x^2 - 1$.

Розв’язання. Знайдемо диференціал функції за формулою $dy = y'dx$, тобто

$$dy = \left(x^3 + 5x^2 - 1\right)' \cdot dx = \left(3x^2 + 10x\right)dx.$$

Приклад 2. Знайти диференціал функції $y = \dfrac{x-2}{x+4}$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо похідну функції

$$y' = \left(\frac{x-2}{x+4}\right)' = \frac{\left(x-2\right)' \cdot \left(x+4\right) - \left(x-2\right) \cdot \left(x+4\right)'}{\left(x+4\right)^2} =$$

$$=\frac{1\cdot(x+4)-(x-2)\cdot 1}{(x+4)^2}=\frac{x+4-x+2}{(x+4)^2}=\frac{6}{(x+4)^2}.$$

Звідси випливає, що $dy=\frac{6}{(x+4)^2}dx$.

Приклад 3. Обчислити наближено $\operatorname{arctg}1,05$.

Розв’язання. Для наближеного обчислення $\operatorname{arctg}1,05$ використаємо попередню формулу, в якій $f(x)=\operatorname{arctg}x,\ x_0=1,\ \Delta x=0,05$. Оскільки $f(x_0)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},\ f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2},\ f'(x_0)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{arctg}1,05\approx\frac{\pi}{4}+\frac{0,05}{2}\approx 0,785+0,025=0,811.$$

Приклад 4. Обчислити наближене значення $\sin(31^\circ)$.

Розв’язання. Для обчислення наближеного значення функції $f(x)=\sin x$ використаємо наближену рівність

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

Оскільки $x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6},\ \Delta x=1^\circ=\frac{\pi}{180},\ f'(x)=(\sin x)'=\cos x$, то

$$\sin(31^\circ)=\sin(30^\circ+1^\circ)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx$$

$$\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0,5+0,866\cdot 0,0175\approx 0,515.$$

Приклад 5. Знайти похідну другого порядку для функції $y=x\sqrt{x}$.

Розв’язання. Скористаємося тим, що $x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$. Тоді

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},\quad y''=(y')'=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

Приклад 6. Знайти похідну n-го порядку для функції $y=e^{kx}$.

Розв’язання. Знаходимо кілька перших похідних і помічаємо закономірність. Маємо

$$y' = \left(e^{kx}\right)' = ke^{kx},\ y'' = \left(ke^{kx}\right)' = k^2 e^{kx},\quad y''' = \left(k^2 e^{kx}\right)' = k^3 e^{kx}, \ldots,\quad y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Приклад 7. Знайти другу похідну y''_x для функції $\begin{cases} x = t^3 + 3t, \\ y = 3t^5 + 5t^3. \end{cases}$

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо першу похідну параметрично заданої функції за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Маємо

$$x'_t = 3t^2 + 3 = 3\left(t^2 + 1\right),\ y'_t = 15t^2\left(t^2 + 1\right),\quad y'_x = \frac{15t^2\left(t^2 + 1\right)}{3\left(t^2 + 1\right)} = 5t^2.$$

Тоді друга похідна функції визначається так $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. Отже,

$$y''_x = \frac{(5t^2)'}{3\left(t^2 + 1\right)} = \frac{10t}{3\left(t^2 + 1\right)}.$$

Приклад 8. Знайти y''_{xx} якщо $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

<u>Розв'язання</u>. Спочатку знайдемо першу похідну

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2 + 1)'}{(\sin 2t)'} = \frac{2t}{2\cos 2t} = \frac{t}{\cos 2t},$$

а потім другу похідну

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{t}{\cos 2t}\right)'_t}{(\sin 2t)'} = \frac{\dfrac{\cos 2t + 2t\sin 2t}{\cos^2 2t}}{2\cos 2t} = \frac{\cos 2t + 2t\sin 2t}{2\cos^3 2t} = \frac{1 + 2t \cdot \mathrm{tg} 2t}{2\cos^2 2t}.$$

Приклад 9. Знайти диференціал другого порядку для $y = \mathrm{arctg} x$.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо диференціал другого порядку за формулою $d^2 y = y'' dx^2$. Оскільки $y' = \left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, то

$$y'' = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)' = \left((1 + x^2)^{-1}\right)' = -(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2},$$

$$d^2 y = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} dx^2.$$

Приклад 10. За допомогою правила Лопіталя обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\ln(2x-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{3^x+1}$.

Розв’язання. а) Оскільки вирази в чисельнику і знаменнику дробу $\dfrac{x-2}{\ln(2x-3)}$ прямують до 0 при $x\to 2$, то маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скористаємось правилом Лопіталя, перейдемо під знаком границі до похідних функцій в чисельнику і знаменнику. Маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\ln(2x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)'}{(\ln(2x-3))'}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\dfrac{2}{2x-3}}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{2}=\frac{1}{2}.$$

б) Маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для обчислення границі $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{3^x+1}$ застосуємо правило Лопіталя двічі. Дістанемо

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{3^x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{3^x\ln 3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{3^x\ln^2 3}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

Приклад 11. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}\cdot$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

Розв’язання. а) Чисельник і знаменник дробу $\dfrac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}$ прямують до нуля при $x\to 1$, маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скористаємось правилом Лопіталя (теоремою 1), тобто знайдемо відношення похідних заданих функцій:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

б) Використаємо правило Лопіталя (теорему 2) і першу важливу границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{\sin x}{x}}{2x\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}=2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

<u>Розв'язання.</u> При обчисленні границі маємо невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, дістанемо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ і застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^x$.

<u>Розв'язання.</u> При обчисленні границі маємо невизначеністю виду $\left[\infty^0\right]$. Перед застосуванням правила Лопіталя прологарифмуємо задану функцію. Оскільки $\ln\left((\operatorname{ctg}x)^x\right)=x\ln\operatorname{ctg}x$, то $\left(\operatorname{ctg}x\right)^x=e^{x\ln ctgx}$, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln ctgx}$. Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\ln\left((\operatorname{ctg}x)^x\right)=\lim_{x\to 0}x\ln\operatorname{ctg}x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\dfrac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{0}{1}\cdot 1=0,$$

звідки дістаємо $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^x=e^0=1.$

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{3x}$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$. Позначимо функцію, яка стоїть під знаком границі, через $y=\left(\sin x\right)^{3x}$. Прологарифмувавши, дістанемо

$$\ln y = \ln\left((\sin x)^{3x}\right) = 3x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{(3x)^{-1}}.$$

Обчислимо границю від логарифма даної функції, застосувавши правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{(3x)^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x\left(-3x^{-2}\right)} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = 0.$$

Тоді границя функції $\lim_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{3x} = e^0 = 1$.

Приклад 15. Знайти границю $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв’язання. При $x \to 1$ маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$. Прологарифмуємо функцію та знайдемо границю

$$y = x^{\frac{1}{x-1}}, \quad \ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1}\cdot \ln x = \frac{\ln x}{x-1},$$

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси маємо $\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Приклад 16. Обчислити границю $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\ln x}$.

Розв’язання. Маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$. Логарифмуючи функцію $y = \left(1+x\right)^{\ln x}$ та використовуючи правило Лопіталя тричі, дістаємо

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln\left(\left(1+x\right)^{\ln x}\right) = \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \ln\left(1+x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x\right)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x\ln^2 x}{x+1} = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Таким чином, $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\ln x} = e^0 = 1$.

Приклад 17. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Зведемо дроби до спільного знаменника і дістанемо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої двічі застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 18. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Звівши до спільного знаменника, дістаємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої двічі застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти диференціал функції $y=f(x)$:

1) $y=\frac{x^2+2x}{x-3}$; 2) $y=\frac{(x-1)^2}{x+4}$; 3) $y=\ln\frac{x-6}{x+6}$;

4) $y=\sin\frac{1}{x^2}$; 5) $y=\ln\sqrt{\cos x}$; 6) $y=x^3e^{3x+2}$.

2. Обчислити наближено значення функції:

1) $\ln 1,02$; 2) $\sqrt{27}$; 3) $\arcsin 0,51$;

4) $\cos 59^0$; 5) $\sqrt[4]{17}$; 6) $\mathrm{arctg}\, 0,98$.

3. Знайти похідну другого порядку для функції $y=f(x)$:

1) $y=\sin x^2$; 2) $y=x^2\ln x$; 3) $y=\cos^2 x$;

4) $y=\dfrac{x}{x+1}$; 5) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$; 9) $y=\sqrt{1+x^2}$.

4. Знайти похідну вказаного порядку для функції $y=f(x)$:

1) $y=x^2+5x-6$, $y'''-?$ 2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y'''-?$

3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$, $y^{(4)}-?$ 4) $y=3^x+3^{-x}$, $y^{(5)}-?$.

5. Знайти похідну другого порядку для параметрично заданої функції

1) $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x=2\sqrt{t}+1 \\ y=\ln t \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\ln\sin 2t \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$.

6. Знайти диференціал вказаного порядку функції $y=f(x)$:

1) $y=\ln x+2x,\ d^2y-?$ 2) $y=\dfrac{3}{x+1},\ d^2y-?$

3) $y=\cos\ln x,\ d^2y-?$ 4) $y=e^{2x}(x-2),\ d^2y-?$

7. Знайти границю функції за правилом Лопіталя

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

8. Обчислити границю функції, користуючись правилом Лопіталя

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{\ln x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}+x}{\sqrt{x}+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^2+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$.

9. Знайти границю функції за правилом Лопіталя

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{ctg}4x$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x\cdot e^{-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)\dfrac{1}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}\,x-\dfrac{1}{x}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Тема 17. Застосування похідної.
Повне дослідження функції та побудова графіка
Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $y=2x^3-3x^2-12x+1$.

Розв’язання. Область визначення функції $(-\infty;+\infty)$. Обчислимо похідну функції $y'=6x^2-6x-12=6\left(x^2-x-2\right)$.

Прирівнявши похідну до нуля, розв’яжемо рівняння $x^2-x-2=0$. Критичними точками є $x_1=2,\ x_2=-1$. Використаємо другу достатню умову існування екстремуму, для чого знайдемо другу похідну $y''=12x-6$ та обчислимо її значення в критичних точках:

$$y''(2)=12\cdot 2-6=18>0,\quad y''(-1)=12\cdot(-1)-6=-18<0.$$

За другою достатньою умовою існування екстремуму маємо $x = 2$ – точка мінімуму, а $x = -1$– точка максимуму функції. Знайдемо значення функції в точках мінімуму і максимуму відповідно, маємо:

$$y_{\max} = y(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 1 = 8,$$

$$y_{\min} = y(2) = 2 \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot 2 + 1 = -19 .$$

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

<u>Розв’язання</u>. Використаємо алгоритм дослідження функції за першою достатньою умовою існування екстремуму.

1. Область визначення функції $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$.

2. Знаходимо похідну функції $y' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

3. Знаходимо критичні точки функції. З умови $y' = 0$ випливає, що $x = 1, x = 3$ - критичні точки. Оскільки похідна існує в усіх точках області визначення, то інших критичних точок немає.

4. Наносимо на числовій прямій критичні точку і дістаємо три проміжки $(-\infty,\ 1)$, (1, 3), $(3,\ +\infty)$. Виберемо на кожному проміжку одну точку і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1),\ \ y'(0) = 3 > 0;$$

$$x = 2 \in (1, 3),\ \ y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$

$$x = 4 \in (3, +\infty),\ \ y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0.$$

Знак похідної на кожному проміжку співпадає зі знаком похідної в обраній точці відповідного проміжку. Отримані результати вносимо в таблицю.

X	$(-\infty,\ 1)$	1	(1, 3)	3	$(3,\ +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

5. З таблиці видно, що при переході (зліва направо) через точку $x = 1$ похідна змінює знак з «+» на «–». Тому точка $x = 1$ є точкою максимуму. А при переході через точку $x = 3$ похідна змінює знак з «–» на «+». Тому $x = 3$ є точкою мінімуму.

6. Обчислимо максимум і мінімум функції в знайдених точках:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}, \qquad y_{\min}(3) = \frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 = 1.$$

Приклад 3. Знайти екстремум функції $y = e^{-x^2}$.

Розв’язання**.** Область визначення функції $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$. Знаходимо першу похідну $y'(x) = -2xe^{-x^2}$ і прирівнюємо її до нуля, тобто $-2xe^{-x^2} = 0$**.** Одержуємо критичну точку $x = 0$ – точку можливого екстремуму. Для перевірки точки застосуємо другу достатню умову існування екстремуму. Знайдемо похідну другого порядку $y''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

Оскільки $y''(0) < 0$, то в точці $x = 0$ функція має максимум, тобто

$$y_{\max} = y(0) = 1.$$

Приклад 4. Знайти проміжки зростання, спадання та екстремум функції $f(x) = \dfrac{4x}{(x-2)^2}$.

Розв’язання. Область визначення функції: $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = \left(\frac{4x}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(4x)'\cdot(x-2)^2 - 4x\left((x-2)^2\right)'}{\left((x-2)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{4(x-2)^2 - 4x\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2)((x-2)-2x)}{(x-2)^4} = \frac{-4(x+2)}{(x-2)^3}.$$

Знайдемо критичні точки функції, тобто такі точки з області визначення, в яких $f'(x)$=0 або $f'(x)$ не існує.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-4(x+2)}{(x-2)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Отже, $f'(x)=0$ у точці $x=-2$. Оскільки ця точка належить області визначення функції, то вона є критичною точкою. Похідна не існує в точці $x=2$, але ця точка не належить $D(f)$, тому не є критичною точкою функції. Отже, функція f має одну критичну точку $x=-2$. На координатній прямій позначимо критичну точку і точку, яка не належить області визначення. Дістанемо проміжки $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;+\infty)$, на кожному з яких похідна зберігає сталий знак. Визначимо знак похідної на кожному з утворених проміжків. Для цього необхідно обчислити значення $f'(x)$ у будь-якій одній точці з кожного проміжку.

На інтервалі $(-\infty;-2)$ виберемо довільну точку, наприклад, $x=-3$, і обчислимо значення $f'(x)$ у цій точці:

$$f'(-3)=\frac{-4\cdot(-1)}{(-3-2)^3}=\frac{4}{-125}<0.$$

Отже, $f'(x)<0$ для всіх $x\in(-\infty;-2)$. Аналогічно визначимо знак $f'(x)$ на інтервалах $(-2;2)$ і $(2;+\infty)$:

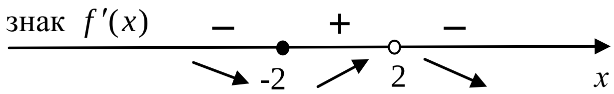
$$x=0\in(-2;2),\quad f'(0)=\frac{-4\cdot 2}{(0-2)^3}=1>0.$$

Отже, $f'(x)>0$ для всіх $x\in(-2;2)$.

$$x=3\in(2;+\infty),\quad f'(3)=\frac{-4(3+2)}{(3-2)^3}=-20<0.$$

Отже, $f'(x)<0$ для всіх $x\in(2;+\infty)$.

Зобразимо проведені дослідження на координатній прямій.



Таким чином, $f'(x)<0$ на проміжках $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$, тому $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ – проміжки спадання функції. Оскільки $f'(x)>0$ на проміжку $(-2;2)$, то $(-2;2)$ – проміжок зростання функції.

Знайдемо точки екстремуму функції f. При переході через критичну точку $x=-2$ похідна $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+", тому ця точка є точкою мінімуму функції, тобто $x_{min}= -2$. Точка $x=2$ не є критичною точкою функції, тому не є точкою екстремуму функції, хоча при переході через неї $f'(x)$ змінює знак. Точок максимуму функція не має.

Знайдемо екстремум функції, обчисливши значення функції $f(x)$ у знайденій точці екстремуму. Оскільки $x_{min}= -2$, то маємо мінімум функції

$$f_{min}=f(-2)=\frac{-8}{(-4)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 5. Знайти проміжки монотонності та екстремум функції $y = x\sqrt{1-x^2}$.

<u>Розв'язання</u>. Функція визначена при $-1 \le x \le 1$. Знайдемо похідну та критичні точки функції. Маємо

$$y' = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{1(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y' = 0, \qquad 1-2x^2 = 0, \qquad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Маємо дві критичні точки $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, оскільки похідна y' не існує при $x = \pm 1$, тобто на кінцях відрізка $[-1;1]$ – області визначення функції. Розглянемо проміжки, на які розбито область визначення функції $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$. На кожному з них визначимо знак похідної.

$$y'\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-1/8}{\sqrt{7/16}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}} < 0, \quad y'(0) = 1 > 0, \quad y'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{7}} < 0.$$

Оскільки на проміжках $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$ похідна $y' < 0$, то функція спадає, а на проміжку $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ похідна $y' > 0$, тому функція зростає.

Так як похідна змінює знак при переході через точки $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, то в точці $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ функція має мінімум $y_{min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$, а в точці $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ функція має максимум $y_{max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на відрізку $x \in [-2;1]$.

Розв’язання. Область визначення функції $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$, тому заданий відрізок їй належить. Знаходимо критичні точки функції на відрізку:

$$y'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1),$$

$$y'(x) = 0 \text{ при } x_1 = 0 \in [-2;1] \text{ і при } x_2 = -1 \in [-2;1].$$

Обчислюємо значення функції у критичних точках та на кінцях відрізка

$$y(0) = 1, \quad y(-1) = 0, \quad y(-2) = 17, \quad y(1) = 8.$$

Вибираємо найбільше і найменше значення функції на відрізку $[-2,\ 1]$

$$\min_{[-2;\,1]} y = y(-1) = 0, \qquad \max_{[-2;\,1]} y = y(-2) = 17.$$

Приклад 7. Визначити на відрізку $[-3;1/2]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

Розв’язання. 1. Область визначення функції $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$, тому заданий відрізок їй належить.

2. Знаходимо критичні точки функції на відрізку:

$y' = 3x^2 - 3,3x - 3 = 0, \ x_1 = -1, \ x_2 = 1.$

Оскільки точка $x_2 = 1$ не належить відрізку $[-3,\ 1/2]$, то надалі її не розглядаємо. Таким чином, маємо одну критичну точку $x_1 = -1$.

3. Обчислюємо значення функції у точці $x_1 = -1$ та на кінцях відрізка:

$$y(-1) = 5, \quad y(-3) = -15, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8}.$$

4. Вибираємо найбільше і найменше значення функції на відрізку $\left[-3;1/2\right]$. Отже,

$$\min_{[-3;1/2]} y = y(-3) = -15, \qquad \max_{[-3;1/2]} y = y(-1) = 5.$$

Приклад 8. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Розв’язання. Область визначення функції $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$. Для дослідження на опуклість графіка функції знайдемо похідну другого порядку

$$y' = 3x^2 - 12x + 9, \qquad y'' = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Друга похідна дорівнює нулю в точці x=2. Визначимо знак другої похідної на інтервалах (–∞;2) та (2;+∞), дістанемо

$$y''(1) = 6(1-2) = -6 < 0, \qquad y''(3) = 6(3-2) = 6 > 0.$$

Результати досліджень внесемо в таблицю.

x	(–∞;2)	2	(2;+∞).
y''	–	0	+
$y=f(x)$	опукла вгору	точка перегину	опукла вниз

Отже, графік функції є опуклим вгору на проміжку (–∞; 2) і опуклим вниз на проміжку (2; +∞). Оскільки друга похідна змінює знак при переході через точку x=2, причому $y(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 = 2$, то точка (2; 2) є точкою перегину графіка функції.

Приклад 9. Знайти інтервали опуклості та точки перегину кривої $f(x) = x^5 - x + 2$.

Розв’язання**.** Область визначення заданої функції: $(-\infty,+\infty)$. Оскільки $f''(x) = 20x^3$, то з умови $f''(x) = 0$ маємо, що $x = 0$ – критична точка другого роду. Інших критичних точок немає, бо $f''(x)$ існує на $(-\infty,+\infty)$.

Якщо $x \in (-\infty, 0)$, то $f''(x) < 0$ і крива опукла вгору на $(-\infty, 0)$; якщо ж $x \in (0, +\infty)$, то $f''(x) > 0$ і крива опукла вниз на $(0, +\infty)$. Отже, $(0,2)$ – точка перегину даної кривої.

Приклад 10. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = e^{-x^2}$.

<u>Розв'язання</u>**.** Область визначення функції $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$. Знайдемо першу, а потім другу похідну функції $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ звідки } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки друга похідна y'' існує в усіх точках, то маємо дві критичні точки другого роду x_1 і x_2. При переході через ці точки друга похідна змінює свій знак. Результати досліджень внесемо в таблицю.

x	$\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Точка перегину	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

З таблиці видно, що графік функції на проміжках $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ опуклий вниз, а на проміжку $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий вгору. Отже, точки $M_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Приклад 11. Визначити асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

<u>Розв'язання</u>. Область визначення функції $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm0} y = \lim_{x\to\pm0} \frac{x^2+2x-1}{x} = \lim_{x\to\pm0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right) = \mp\infty,$$

то x=0 є точкою розриву другого роду, тому пряма x=0 (вісь Oy) є вертикальною асимптотою.

Нехай похила асимптота має рівняння $y = kx + b$, тоді

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to}\left(y-kx\right) = \lim_{x\to}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right) = \lim_{x\to}\frac{2x-1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ – похила асимптота для графіка функції. Оскільки $k \neq 0$, то горизонтальних асимптот немає.

Приклад 12. Знайти асимптоти графіка функції $f\left(x\right) = xe^x$.

Розв’язання. Область визначення заданої функції $D(f) = \left(-\infty, +\infty\right)$. Графік функції не має вертикальних асимптот, тому що функція не має точок розриву другого роду. Перевіримо, чи має графік функції похилу асимптоту. Оскільки $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x} = e^{+\infty} = +\infty$, то при $x \to +\infty$ графік функції не має ні похилої, ні горизонтальної асимптоти. Обчисливши границі при $x \to -\infty$, дістанемо

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Таким чином, при $x \to -\infty$ графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ (як окремий випадок похилої асимптоти). Отже, задана функція має тільки ліву горизонтальну асимптоту (при $x \to -\infty$).

Приклад 13. Дослідити функцію $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв’язання. Проведемо повне дослідження функції за наведеною схемою.

1. Знайдемо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x=1$. Отже, область визначення $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат:

з віссю *Ox*: $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0$, $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$;

з віссю *Oy*: $x = 0$, $y=\frac{-1}{1}=-1$, $(0;\ -1)$.

Оскільки область визначення функції несиметрична відносно початку координат, то функція ні парна, ні непарна. Функція неперіодична.

Для даної функції легко знайти проміжки знакосталості. Так як вираз у знаменнику $(x-1)^2$ завжди додатній, то знак функції залежить від виразу в чисельнику $2x-1$. Тому функція набуває додатніх значень при $x>1/2$ і від’ємних значень при $x<1/2$. Отже $f(x)>0, x>1/2$, $f(x)<0, x<1/2$.

2. Функція неперервна на своїй області визначення. Точка $x=1$ є точкою розриву другого роду, оскільки

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2}=+\infty .$$

Обчисливши границю функції в точці $x=1$, бачимо, що графік функції при $x\to 1$ (і зліва, і справа) прямує вгору.

3. Оскільки $x=1$ – точка розриву другого роду, то пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Таким чином, похилої асимптоти немає, а є горизонтальна – пряма $y=0$ (вісь *Ox*).

4. Знайдемо проміжки зростання і спадання та точки екстремуму. Визначимо першу похідну

$$y' = \left(\frac{2x-1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

З умови $y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ – критична точка. При $x = 1$ похідна не існує, але в цій точці функція невизначена, тому $x = 1$ не є критичною точкою. Визначимо знак похідної на одержаних проміжках.

$$y'(-1) = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0; \qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0, \qquad y'(2) = \frac{-4}{1} = -4 < 0.$$

Результати досліджень заносимо у таблицю.

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	не існує	–
y	↘	$y_{\min}(-1)$	↗	не існує	↘

За результатами досліджень маємо: функція спадає на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(1; +\infty)$, функція зростає на проміжку $(0,1)$.

Проходячи через критичну точку $x = 0$ зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», тому в цій точці функція має мінімум:

$$y_{\min} = y(0) = \frac{-1}{1} = -1.$$

При переході через точку $x = 1$ похідна теж змінює свій знак, але функція в цій точці невизначена.

5. Точки перегину та інтервали опуклості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \left(-\frac{2x}{(x-1)^3} \right)' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

З умови $y'' = 0 \Rightarrow 2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ – критична точка другого роду. При $x = 1$ друга похідна y'' не існує, але в цій точці функція невизначена.

Визначимо проміжки опуклості вгору і вниз

$$y''(-1)=\frac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\frac{1}{8}<0, \qquad y''(0)=\frac{2}{1}=2>0\ , \qquad y''(2)=\frac{2\cdot 5}{1}=10>0\ .$$

Отже, графік функції опуклий вгору на проміжку $(-\infty;\,-1/2)$ і опуклий вниз на проміжках $(-1/2;\,1)$, $(1;+\infty)$.

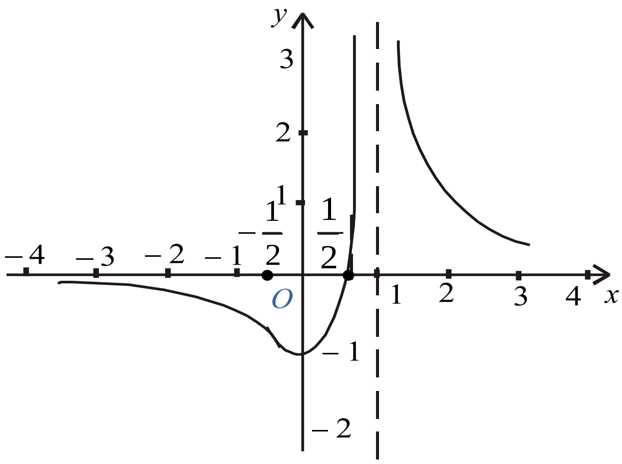
Проходячи через $x=-\dfrac{1}{2}$, друга похідна y'' змінює знак. Оскільки

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx -0{,}9, \qquad \text{то } \left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right) \text{ - точка перегину.}$$

Результати досліджень заносимо у таблицю.

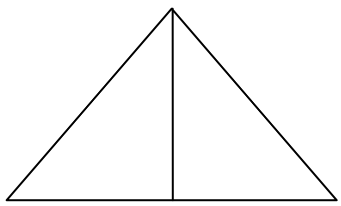
x	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
y''	–	0	+	не існує	+
y	$\cap$	точка перегину	$\cup$	не існує	$\cup$

За результатами досліджень будуємо графік функції. Для більш точної побудови візьмемо кілька допоміжних точок.



Приклад 14. Знайти максимальну площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого рівна 6 см.

<u>Розв’язання.</u> Розглянемо ΔABC, в якому $AB=BC=6$.



Нехай $BK = x$, тоді $AC = 2\sqrt{36 - x^2}$ і площа ΔABC: $S = x\sqrt{36 - x^2}$. Тепер знайдемо найбільше значення функції $S(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ на відрізку $[0;6]$. Визначимо похідну функції та критичні точки

$$S'(x) = \sqrt{36 - x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{36 - x^2}} = \frac{36 - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$S'(x) = 0$ при $x = \pm 3\sqrt{2}$, $S'(x)$ не існує при $x = \pm 6$.

Розглянемо тільки точку $x = 3\sqrt{2}$, так як точки $x = -6$ і $x = -3\sqrt{2}$ не належать відрізку $[0;6]$, а точка $x = 6$ співпадає з правим кінцем відрізка. Визначимо знак похідної на проміжках $(0;3\sqrt{2})$ і $(3\sqrt{2};6)$. Оскільки $S'(3) = \frac{18}{\sqrt{27}} = 2\sqrt{3} > 0$, $S'(3\sqrt{3}) = \frac{36 - 54}{\sqrt{36 - 27}} = -6 < 0$, то $x = 3\sqrt{2}$ – точка максимуму. Тоді найбільша площа $S_{\max} = S(3\sqrt{2}) = 18$.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити проміжки зростання і спадання функції

1) $y = -x^2 - 4x + 3$; 2) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

3) $y = 2 - 3x + x^3$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 4$;

5) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$; 6) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;

7) $y = x\sqrt{2 - x^2}$; 8) $y = \sqrt{(x^2 - 1)^3}$;

9) $y = x(1+\sqrt{x})$; 10) $y = xe^{-x}$;

11) $y = x^2 e^{-x}$; 12) $y = \ln(1-x^2)$;

13) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 14) $y = 2x^2 - \ln x$.

2. Дослідити функцію на екстремум:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$; 2) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$;

3) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$; 4) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$;

5) $y = x\sqrt{1-x^2}$; 6) $y = x + \sqrt{1-x}$;

7) $y = x - \ln(1+x)$; 8) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції на вказаному відрізку

1) $y = 2x^2 - 3x + 1,\ [-1;\ 2]$; 2) $y = x^4 - 2x^3 + 3,\ [-3; 2]$;

3) $y = x^4 - 2x^2 + 5,\ \ [-2;\ \ 2]$; 4) $y = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 5,\ [-4; 1]$;

5) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ \ [0; 4]$; 6) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5},\ [-1;\ 3]$.

4. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції

1) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$; 2) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$;

3) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$; 4) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

5) $y = a - \sqrt[3]{x-b}$; 6) $y = (x+1)^4 + e^x$;

7) $y = x + \dfrac{4}{x+2}$; 8) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$;

9) $y = xe^{-2x}$; 10) $y = \ln(1 + x^2)$.

5. Знайти асимптоти кривих

1) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 5}$; 2) $y = \dfrac{5x}{x^2 + 2}$;

3) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$; 4) $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x-3}$;

5) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; 6) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+4}$;

7) $y=\sqrt{x^2-1}$; 8) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

9) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 10) $y=xe^x$.

6. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

1) $y=x^2-5x+6$; 2) $y=x^4-4x^3+3$; 3) $y=2x^4-x^2+1$;

4) $y=x\sqrt{1-x^2}$; 5) $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2}\left(x^2-4\right)$;

7) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; 8) $y=\dfrac{x^2+4}{x}$; 9) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

10) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$; 11) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$; 12) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

13) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$; 14) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$; 15) $y=\dfrac{1+2x}{3-x}$;

16) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$; 17) $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$; 18) $y=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$.

7. Відкритий басейн з об'ємом 32 м^3 має квадратне дно. Якими повинні бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

8. Знайти розміри циліндра з найбільшим об’ємом, якщо він вписаний в кулю радіуса *R*.

9. Які повинні бути розміри прямокутника найбільшої площі, вписаного в коло радіуса 6 см?

Розділ V. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

Тема 18. Поняття функції багатьох змінних.

Границя та неперервність функції двох змінних.

Частинні похідні функції двох змінних

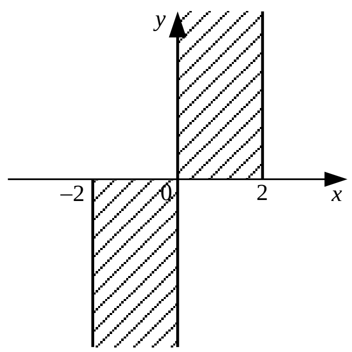
Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти область визначення функцій

а) $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, б) $z = \arcsin \dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

<u>Розв'язання.</u> а) Функція $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ має значення, якщо підкореневий вираз у знаменнику $1 - x^2 - y^2 > 0$ або $x^2 + y^2 < 1$. Останню нерівність задовольняють точки круга з центром у початку координат і радіусом 1 (виключаючи точки кола).

б) В аналітичному виразі функції $z = \arcsin \dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$ перший доданок визначений при $-1 \le \dfrac{x}{2} \le 1$ або $-2 \le x \le 2$. Другий доданок має значення, якщо $xy \ge 0$, тобто при $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$. Зобразимо область визначення функції на рисунку.



Приклад 2. Знайти та зобразити область визначення функції $z = \dfrac{\ln\left(4 - x^2 - y^2\right)}{\sqrt{4x - y}}$.

<u>Розв’язання</u>. З умов існування логарифмічної функції та квадратного кореня (в знаменнику) маємо дві нерівності $4 - x^2 - y^2 > 0,\ \ 4x - y > 0$. Тому область визначення функції можна записати у вигляді

$$D = \left\{ (x;y) \in R^2 \middle|\ x^2 + y^2 < 4, \quad y < 4x \right\}.$$

Замінивши знайдені нерівності відповідними рівностями, будуємо лінії, що їм відповідають на координатній площині, тобто коло $x^2 + y^2 = 4$ і пряму $y = 4x$. За допомогою довільної точки визначаємо розміщення області D на площині. Підставивши координати точки $M(1;1)$ в нерівність $x^2 + y^2 < 4$, дістанемо $1^2 + 1^2 < 4$. Оскільки точка задовольняє цю нерівність, то маємо внутрішність кола $x^2 + y^2 = 4$, в якій лежить ця точка. Аналогічно підставимо координати точки $M(1;1)$ в нерівність $y < 4x$, маємо $1 < 4$. Отже, ця нерівність визначає праву півплощину (під прямою $y = 4x$), якій належить точка $M(1;1)$. Заштрихуємо спільну частину цих множин, яка і буде областю визначення даної функції.

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} \dfrac{x^2 + y^3}{2x - 3y}$.

<u>Розв’язання.</u> Враховуючи, що $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} x = 2$, $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} y = 1$, за теоремою 1 про арифметичні дії під знаком границі, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(2;1)} \frac{x^2 + y^3}{2x - 3y} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} \left(x^2 + y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} (2x - 3y)} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} x^2 + \lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} y^3}{\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} 2x - 3 \cdot \lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} y} = \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} = 5.$$

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1 + 2xy)}{\sin 3xy}$.

Розв’язання. Зробимо заміну $t = xy$. Оскільки $(x;y) \to (0;0)$, то $t \to 0$, тоді задану границю можна переписати у вигляді $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+2t)}{\sin 3t}$. При $t \to 0$ маємо $\ln(1+2t) \sim 2t$; $\sin 3t \sim 3t$, тобто $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+2t)}{\sin 3t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{2t}{3t} = \frac{2}{3}$. Таким чином,

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{(1+2xy)}{\sin 3xy} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 5. Показати, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Розв’язання. Будемо наближатися до точки (0;0) по прямій $y = kx$, тоді

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Отже, значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, вздовж якої наближаємось до точки (0;0). Зокрема, при $k=1$ границя дорівнює 1, а при $k=2$ границя дорівнює $4/5$. Таким чином, границя $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію двох змінних:

1) $f(x;y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 2) $f(x;y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2=0. \end{cases}$

Розв’язання. 1) Функція $f(x;y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ неперервна в усіх точках площини, крім точки (0;0). Вона має розрив у точці (0;0), бо в цій точці не існує границя функції $f(x;y)$ (див. попередній приклад).

2) Функція $f(x;y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ неперервна в усіх точках площини, включаючи точку (0;0). Дійсно, границя функції в точці (0,0) дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left| \begin{matrix} t = x^2+y^2, \\ t \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 = f(0,0).$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні функції $z = x^2 y + xy^2$.

Розв’язання. Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$, маємо $z'_x = 2xy + y^2$.

При обчисленні z'_y вважаємо $x = \text{const}$, тому $z'_y = x^2 + 2xy$.

Приклад8. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \ln y$.

Розв’язання. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x = 3x^2 y + 2x\cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right).$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y} = x^3 + \frac{\cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні для функцій

а) $z = 3x^2 y + x^2 - y^2 + 5$; б) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Розв’язання. а) Знайдемо частинні похідні функції $z = 3x^2 y + x^2 - y^2 + 5$.

Вважаючи y сталою, знаходимо частинну похідну за змінною x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y \cdot \left(x^2\right)'_x + \left(x^2\right)'_x - \left(y^2\right)'_x + \left(5\right)'_x = 3y \cdot 2x + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо частинну похідну за змінною y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot \left(y\right)'_y + \left(x^2\right)'_y - \left(y^2\right)'_y + \left(5\right)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 = 3x^2 - 2y.$$

б) Для функції $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ знайдемо частинні похідні, враховуючи правило диференціювання складної функції. Дістанемо.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(x^2 - y^2\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Приклад 8. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)_x'=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)_x'=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_x'=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1=\frac{1}{\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}}=\frac{2}{y\cdot\sin\frac{2x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)_y'=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)_y'=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y'=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{-x}{y^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{-x}{y^2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}}=\frac{-2x}{y^2\cdot\sin\frac{2x}{y}}.$$

Приклад 9. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)_x'=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)_x'=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x'=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)_x'=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-y\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)_y'=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)_y'=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_y'=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot(y)_y'=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x}.$$

Приклад 10. Знайти частинні похідні першого порядку функції трьох змінних $u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$.

<u>Розв’язання.</u> Знайдемо частинні похідні для заданої функції трьох змінних. Вважаючи y та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5\right)_x' = y^2z\left(x^3\right)_x' + \left(2x\right)_x' - \left(3y\right)_x' + \left(z\right)_x' + \left(5\right)_x' =$$

$$= y^2z \cdot 3x^2 + 2 - 0 + 0 + 0 = 3x^2y^2z + 2.$$

Вважаючи x та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5\right)_y' = x^3z\left(y^2\right)_y' + \left(2x\right)_y' - \left(3y\right)_y' + \left(z\right)_y' + \left(5\right)_y' =$$

$$= x^3 \cdot z \cdot 2y + 0 - 3 + 0 + 0 = 2x^3yz - 3.$$

Вважаючи x та y сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5\right)_z' = x^3y^2\left(z\right)_z' + \left(2x\right)_z' - \left(3y\right)_z' + \left(z\right)_z' + \left(5\right)_y' =$$

$$= x^3y^2 \cdot 1 + 0 - 0 + 1 + 0 = x^3y^2 + 1.$$

Приклад 11. Для функції $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ показати, що $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

<u>Розв’язання.</u> Знайдемо частинні похідні для функції $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)_x' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)_x' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(x\right)_x' =$$

$$= \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{y}{y^2 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)_y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)_y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)_y'$$

$$= \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2 + x^2}.$$

Отже, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xy}{y^2+x^2}-\dfrac{xy}{y^2+x^2}=0$.

Приклад 12. Знайти повний диференціал функцій:

а) $z=x^2y^3$; б) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

Розв'язання. а) Знайдемо частинні похідні та повний диференціал функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2y^3\right)_x'=2xy^3,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y^3\right)_y'=x^2\cdot 3y^2=3x^2y^2,$$

$$dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy.$$

б) Аналогічно для функції $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_x'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_y'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y,$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

Приклад 13. Знайти повний диференціал функції $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні та повний диференціал функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_x'=2\sin x\cdot\left(\sin x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_y'=2\cos y\cdot\left(\cos y\right)'=-2\cos y\cdot\sin y=-\sin 2y;$$

$$dz=\sin 2x\,dx+\left(-\sin 2y\right)dy.$$

Приклад 14. Знайти повний диференціал функції $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $P\left(3;4\right)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні та повний диференціал функції, а потім його значення в точці $P\left(3;4\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x'=\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_x'=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y'=\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_y'=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$df\left(3,4\right)=\frac{-3}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dx-\frac{4}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dy=-\frac{3}{125}dx-\frac{4}{125}dy=$$

$$=-\frac{1}{125}(3dx+4dy).$$

Приклад 15 Обчислити наближено $1{,}02^{3{,}01}$.

<u>Розв’язання.</u> Розглянемо функцію $f(x;y)=x^y$. Покладемо $x_0=1,\ y_0=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$. Для обчислення наближеного значення функції використаємо формулу

$$f\left(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0;y_0\right)+f_x'\left(x_0;y_0\right)\Delta x+f_y'\left(x_0;y_0\right)\Delta y.$$

Значення функції в точці $\left(x_0;y_0\right)$ дорівнює $f\left(1;3\right)=1^3=1$. Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці $\left(x_0;y_0\right)$, дістанемо

$$f_x'=y\cdot x^{y-1},\ f_y'=x^y\ln x\quad\Rightarrow\quad f_x'(1;3)=3\cdot 1^2=3,\ f_y'(1;3)=1^3\ln 1=0.$$

Тоді при наближене значення функції

$$1{,}02^{3{,}01}\approx 1+3\cdot 0{,}02+0\cdot 0{,}01=1{,}06.$$

Приклад 16. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=\frac{x}{y}$, де $x=e^t$, $y=\ln t$.

<u>Розв’язання.</u> Знайдемо похідну складної функції $z=f(x(t),y(t))$ за формулою $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Для цього знайдемо відповідні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)'_y=-\frac{x}{y^2},\qquad \frac{dx}{dt}=\left(e^t\right)'=e^t,\quad \frac{dy}{dt}=\left(\ln t\right)'=\frac{1}{t}.$$

Дістаємо $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{1}{y}\cdot e^t-\dfrac{x}{y^2}\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{\ln t}\cdot e^t-\dfrac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{e^t}{\ln t}\left(1-\dfrac{1}{t\ln^2 t}\right).$

Приклад 17. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=x^2y$, де $x=u\cdot v,\ y=\dfrac{u}{v}$.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні та використаємо формули

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy=2uv\cdot\frac{u}{v}=2u^2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2=(uv)^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=v,\qquad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{v},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=u,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{u}{v^2},\ \text{то}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2u^2v+u^2v^2\frac{1}{v}=3u^2v,\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=2u^2u+u^2v^2\left(-\frac{u}{v^2}\right)=2u^3-u^3=u^3.$$

Приклад 18. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$ в точці $\left(2;-1\right)$.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці $M\left(2;-1\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=2.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі знайдемо за формулами

$$z-z_0=f_x'\left(x_0,\,y_0\right)\left(x-x_0\right)+f_y'\left(x_0,\,y_0\right)\left(y-y_0\right),$$

$$\frac{x-x_0}{f_x'\left(x_0,\,y_0\right)}=\frac{y-y_0}{f_y'\left(x_0,\,y_0\right)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Отже, рівняння дотичної площини таке

$z-1=2\left(x-2\right)+2\left(y+1\right)\ \Rightarrow\ 2x+2y-z-1=0,$

а рівняння нормалі до заданої поверхні має вигляд

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Приклад 19. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до еліпсоїда $2x^2+y^2+z^2=15$ у точці $M_0(1;2;3)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, заданої в неявному вигляді, знайдемо за формулами

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}.$$

Задана поверхня (еліпсоїд) визначається рівнянням $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-15$. Частинні похідні цієї функції мають вигляд: $F_x'=4x$, $F_y'=2y$, $F_z'=2z$. Знайдемо їх значення у точці $M_0(1;2;3)$, маємо $F_x'(M_0)=4\cdot 1=4$, $F_y'(M_0)=2\cdot 2=4$, $F_z'(M_0)=2\cdot 3=6$.

Підставивши ці значення у відповідні формули, дістанемо рівняння дотичної площини та нормалі

$$4(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0 \quad \text{або} \quad 2x+2y+3z-15=0,$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

Приклад 20. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2+y^2-z^2+4=0$ в точці (1; 2; 3).

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції $F=x^2+y^2-z^2+1$ в точці (1; 2; 3). Оскільки $F_x'=2x$, $F_y'=2y$, $F_z'=-2z$, то

$$F_x'(1;2;3)=2,\ \ F_y'(1;2;3)=4,\ \ F_z'(1;2;3)=-6.$$

Тоді рівняння дотичної площини в точці (1; 2; 3) має вигляд

$$2(x-2)+4(y-2)-6(z-3)=0,$$

звідки маємо $$x+2y-3z+3=0.$$

Рівняння нормалі до заданої поверхні в точці (1; 2; 3) знайдемо за формулою (5), тобто

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-6} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти та зобразити область визначення заданої функції:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$; б) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$;

в) $z=\ln(y^2-4x+8)$; г) $z=\frac{xy}{\ln(x-y)}$;

д) $z=\frac{x}{y}+\frac{\sin y}{\sqrt{x}}$; е) $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$.

2. Знайти частинні похідні даної функції:

а) $z=x^3y-y^3x+2y^2-3x+4$; б) $z=x^2+x^2y-9y+5$;

в) $z=\sin(x^2y+e^{-x})$; г) $z=tg^3(xy+1)$;

д) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; е) $z=\ln\frac{x+y}{\sqrt{x}}$.

3. Показати, що для заданої функції виконується умова: $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $z=\ln(x^2+y^2)$.

4. Знайти повний диференціал функції:

а) $z=(x^3y+xy^2-y+x)^5$; б) $z=(xy+x^3y^2+2x)^3$;

в) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$; г) $z=\ln\frac{1+xy}{x^2}$.

5. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=f(x,y)$ в точці M.

а) $z=x^2+\frac{y^2}{2}$; $M(1;-2;3)$, б) $z=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}$, $M(2;-2;1)$.

Тема 19. Похідна функції за напрямом. Градієнт функції. Частинні похідні вищих порядків. Екстремум функції двох змінних

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідну функції $z = x^2 + y^2 x$ в точці $A(1;2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;0)$.

Розв'язання. Спочатку визначимо координати та довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(3–1;\ 0–2)=(2;\ –2), \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Обчислимо напрямні косинуси вектора, поділивши відповідну координату на довжину $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, тобто

$$\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\beta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Знайдемо частинні похідні функції та обчислимо їх значення в точці (1; 2)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = 6,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)} = 4.$$

Тоді за формулою (1) маємо похідну за напрямом

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $z = 2x^2 - 3y^2$ у точці $P(1;-1)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, який утворює з віссю Ox кут 120°.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення в точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = 6.$$

Визначимо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді за формулою $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_P \cdot \cos\alpha + \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_P \cdot \cos\beta$ маємо

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -2 + 3\sqrt{3}$.

Приклад 3. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1;1)$.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні та їх значення в заданій точці.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = 1^2 = 1.$$

Отже,
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z(P) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P \vec{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P \vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

Приклад 4. Знайти градієнт функції $z = 2 - x^2 - 2y^2 - xy$ в точці (1; 2).

Розв’язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці (1; 2):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = (-2x - y)\Big|_{(1;2)} = -4, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;\,2)} = (-4y - x)\Big|_{(1;\,2)} = -9.$$

Тоді $\overrightarrow{\text{grad}}\, z(1;2) = -4\vec{i} - 9\vec{j}$.

Приклад 5. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(3;1)$ за напрямом від цієї точки до точки $N(6;5)$. Знайти градієнт функції цій у точці.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 12;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \cdot 1 = -9.$$

Тоді градієнт даної функції в точці $P(3;1)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z(P) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P \vec{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P \vec{j} = 12\vec{i} - 9\vec{j}.$$

Визначимо координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{PN}$, тобто $\vec{l} = (6-3; 5-1) = (3;4)$. Оскільки довжина вектора $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5$, то координати його орта $\vec{l}_0 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Отже, напрямні косинуси вектора $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

Тоді похідна функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ за напрямом $\vec{l} = \overrightarrow{PN}$ дорівнює

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 12 \cdot \frac{3}{5} + (-9) \cdot \frac{4}{5} = 0.$$

Приклад 6. Для функції $z = x^3 - 3x^2y^2 + 2xy^3 - 3x + 2y$ знайти частинні похідні другого порядку.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку z'_x, z'_y

$$z'_x = 3x^2 - 6xy^2 + 2y^3 - 3, \qquad z'_y = -6x^2y + 6xy^2 + 2,$$

тоді частинні похідні другого порядку визначають так

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 - 6xy^2 + 2y^3 - 3)'_x = 6x - 6y^2,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 - 6xy^2 + 2y^3 - 3)'_y = -12xy + 6y^2 = z''_{yx},$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-6x^2y + 6xy^2 + 2)'_y = -6x^2 + 12xy.$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні другого порядку для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2+y^2\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2+y^2\right),$$

тоді похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2+y^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2+y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2+y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Зауважимо, що для даної функції $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад 8. Знайти частинні похідні другого порядку для функції $z = \cos(xy)$. Показати, що для функції z виконується умова $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\cos(xy)\right)_x' = -\sin(xy) \cdot (xy)_x' = -y\sin(xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\cos(xy)\right)_y' = -\sin(xy) \cdot (xy)_y' = -x\sin(xy),$$

тоді частинні похідні другого порядку мають вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-y\sin(xy)\right)_x' = -y \cdot \cos(xy) \cdot (xy)_x' = -y^2 \cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x\sin(xy)\right)_y' = -x \cdot \cos(xy) \cdot (xy)_y' = -x^2 \cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-y\sin(xy)\right)_y' = -\left((y)_y' \cdot \sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)_y' \cdot y\right) =$$

$$= -\left(\sin(xy) + \cos(xy) \cdot (xy)_y' \cdot y\right) = -\left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-x\sin(xy)\right)_x' = -\left((x)_x' \cdot \sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)_x' \cdot x\right) =$$

$$= -\left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right).$$

Перевіримо виконання заданої умови. Враховуючи знайдені частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, дістанемо

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 y^2 \cos(xy) + y^2 x^2 \cos(xy) = 0.$$

Приклад 9. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого і другого порядків

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y.$$

Тоді диференціал другого порядку має вигляд

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y\, dx dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Приклад 10. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

Розв’язання. Область визначення даної функції – це множина всіх точок координатної площини. Знайдемо частинні похідні $f_x' = 2x + y - 2$, $f_y' = 2y + x - 1$. З необхідної умови існування екстремуму $f_x'(x, y) = 0$, $f_y'(x, y) = 0$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, дістанемо стаціонарну точку $M(1;0)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку $f''_{xx}(x, y) = 2,\quad f''_{xy}(x, y) = 1,\quad f''_{yy}(x, y) = 2,$ перевіримо виконання достатньої умови існування екстремуму в стаціонарній точці. Для стаціонарної точки маємо $A = f''_{xx}(1,0) = 2$, $B = f''_{xy}(1,0) = 1$, $C = f''_{yy}(1,0) = 2$, $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$. Оскільки Δ>0 і А>0, то в точці $M(1;0)$ маємо локальний мінімум. Отже, мінімальне значення функції дорівнює $z_{\min} = z(1,0) = 1^2 + 0^2 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 = -1$.

Приклад 11. Знайти екстремум функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Розв’язання. Для знаходження стаціонарних точок даної функції знайдемо частинні похідні $f_x' = 4\left(x^3 - x + y\right)$, $f_y' = 4\left(y^3 + x - y\right)$ і прирівняємо їх до нуля. Дістанемо

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0; \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Додаючи рівняння цієї системи, знаходимо, що $x^3+y^3=0$, звідки $y=-x$. Підставляючи $y=-x$ у перше рівняння системи, знаходимо, що $x^3-2x=0$, тобто $x\left(x^2-2\right)=0$. Звідси знаходимо стаціонарні точки: $x_1=y_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $y_2=-x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$, $y_3=-x_3=\sqrt{2}$.

Отже, функція має три стаціонарні точки: $\mathrm{O}(0,0)$, $M_1\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Для кожної з цих точок знайдемо величини $A=f''_{xx}=12x^2-4$, $B=f''_{xy}=4$, $C=f''_{yy}=12y^2-4$, $\Delta=AC-B^2$.

Для стаціонарної точки $\mathrm{O}(0,0)$ маємо $A=-4=C$, $B=4$, $\Delta=0$. Оскільки $\Delta=0$, то у цій точці достатню умову застосувати не можна. Переконаємось, що у цій точці екстремум відсутній. Нехай $y=0$, тоді $f(x,y)=x^4-2x^2=x^2\left(x^2-2\right)$ і в околі точки $f(x,y)<0$. Тепер візьмемо $y=x$, $f(x,y)=2x^4>0$. Отримали, що $f(0;0)=0$, а в околі цієї точки функція має різні знаки, тому екстремум у точці $\mathrm{O}(0,0)$ відсутній.

У точках $M_1\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ знаходимо значення коефіцієнтів $A=12\cdot2-4=20$, $B=4$, $C=12\cdot2-4=20$, $\Delta=20\cdot20-4^2=384>0$. У цих точках є екстремум. Оскільки для кожної з цих точок коефіцієнт A додатний, то $M_1\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ є точками мінімуму, при цьому $f_{min}=f(M_1)=f(M_2)=-8$.

Приклад 12. Дослідити функцію $z=3\left(x^2+y^2\right)-x^3+4y$ на екстремум.

Розв’язання. Областю визначення функції є всі точки координатної площини. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$f'_x=6x-3x^2,\qquad f'_y=6y+4.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0, \\ 6y + 4 = 0, \end{cases}$ знайдемо критичні точки $M_1(0;-2/3)$ і $M_2(2;-2/3)$. Визначимо частинні похідні другого порядку:

$$f''_{xx}(x,y) = 6 - 6x, \quad f''_{xy}(x;y) = 0, \quad f''_{yy}(x;y) = 6.$$

У точці $M_1(0;-2/3)$ обчислимо $A = f''_{xx}(0,-2/3) = 6$, $B = f''_{xy}(0,-2/3) = 0$, $C = f''_{yy}(0,-2/3) = 6$. Оскільки $\Delta = 6 \cdot 6 - 0^2 = 36 > 0$, то $M_1(0;-2/3)$ є точкою мінімуму.

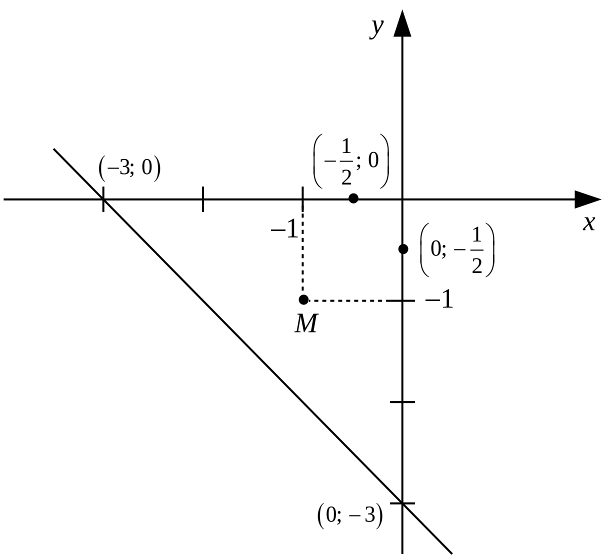
Для точки $M_2(2;-2/3)$ дістаємо $A = f''_{xx}(2,-2/3) = 6 - 12 = -6$, $B = f''_{xy}(0,-2/3) = 0$, $C = f''_{yy}(0,-2/3) = 6$. Оскільки $\Delta = -6 \cdot 6 - 0^2 = -36 < 0$, то в точці $M_2(2;-2/3)$ екстремуму немає.

Обчислимо значення функції в точці мінімуму:

$$z_{\min} = z\left(0;-\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{9} - 0 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Приклад 13. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq -3$.

<u>Розв'язання.</u> Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить заданій області. У точці M значення функції $z(M) = -1$.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції $z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знайдемо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6, \quad z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$. Маємо

$$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1, \quad z' = 0: \quad 2x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} \in [-3, 0],$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6, \quad z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $x + y = -3$, тобто $y = -3 - x$, маємо на відрізку $-3 \le x \le 0$ функцію

$$z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6.$$

Дослідження функції проведемо аналогічно попередньому.

$$z' = \left(3x^2 + 9x + 6\right)' = 6x + 9, \quad z' = 0: \quad 6x + 9 = 0, \quad x = -\frac{3}{2} \in [-3, 0],$$

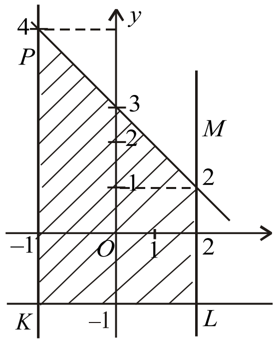
$$z\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4},$$

$$z(-3) = 3\cdot(-3)^2 + 9\cdot(-3) + 6 = 6, \qquad z(0) = 0 + 0 + 6 = 6.$$

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб}} = 6$ у точках $(0;\,-3)$ і $(-3;\,0)$; $z_{\text{найм}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1;\,-1)$.

Приклад 14. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$.

<u>Розв'язання</u>. Побудуємо множину, обмежену заданими лініями.



Областю визначення заданої функції є вся координатна площина. Дослідимо поведінку функції всередині області *KLMP*. Знайдемо частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$, дістанемо $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$. Прирівнявши їх до нуля, дістанемо критичні точки $O(0;\,0)$ та $E(1;\,1)$.

Дослідимо поведінку функції на межі області. Відрізок KL задано рівнянням $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\,2]$. Оскільки $z' = 3x^2 + 3 > 0$, то функція зростає і тому досягає найменшого і найбільшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\,-1)$ і $L(2;\,-1)$.

Відрізок LM задано рівнянням $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію від змінної *y*: $z = 8 + y^3 - 6y$. Оскільки $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\,1]$, то функція z є спадною і досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\,-1)$ і $M(2;\,1)$.

Відрізок PM задано рівнянням $y=3-x$, $-1\le x\le 2$. Підставивши $y=3-x$ у задану функцію, дістанемо: $z=x^3+(3-x)^3-3x(x-3)$, тобто $z=27-36x+12x^2$. Маємо $z'=24x-36$, звідки $z'=0$ при $x=\frac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $N\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP задано рівнянням $x=-1$, $-1\le y\le 4$. Підставивши $x=-1$ у задану функцію, дістанемо $z=-1+y^3+3y$. Маємо $z'=3y^2+3>0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, задана функція може досягти свого найбільшого і найменшого значень тільки в точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;-1)$, $M(2;1)$, $P(-1;4)$, $N\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Обчислимо значення функції в цих точках $f(0;0)=0$, $f(1;1)=-1$, $f(-1;-1)=-5$, $f(2;-1)=13$, $f(2;1)=3$, $f(-1;4)=75$, $f\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=0$. Отже, функція набуває свого найменшого і найбільшого значення на заданій множині в точках $K(-1;-1)$ і $P(-1;4)$, тобто

$$z_{\min}=z(-1;-1)=-5,\qquad z_{\max}=z(-1;4)=75.$$

Найменше та найбільше значення функції часто доводиться шукати у прикладних задачах. Розглянемо одну з них.

Приклад 15. Відкритий прямокутний басейн повинен мати об'єм V. Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

Розв'язання. Нехай x – довжина, y – ширина, z – глибина басейну. Оскільки басейн має форму паралелепіпеда, то його об'єм $V=xyz$, звідки виразимо змінну $z=\dfrac{V}{xy}$. Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну, визначається площею поверхні паралелепіпеда (площа нижньої та бічних граней). Цю площу можна знайти за формулою

$$S = xy + 2yz + 2xz \quad \text{або} \quad S = S(x,y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\ x>0,\ y>0.$$

З умови задачі випливає, що потрібно знайти мінімум функції $S(x,y)$. Знайдемо частинні похідні функції

$$S'_x = y-\frac{2V}{x^2},\quad S'_y = x-\frac{2V}{y^2}.$$

Визначимо стаціонарні точки функції S, прирівнявши частинні похідні до нуля, дістанемо систему

$$\begin{cases} y-\dfrac{2V}{x^2}=0, \\ x-\dfrac{2V}{y^2}=0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $x=y=\sqrt[3]{2V}$. Отже, функція $S(x,y)$ має стаціонарну точку $\left(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V}\right)$. Перевіривши достатні умови існування екстремуму, переконуємось, що в цій точці функція досягає мінімуму, при цьому глибина басейну $z=\dfrac{V}{xy}=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

Таким чином, мінімальна кількість матеріалу буде витрачена при розмірах басейну $x=y=\sqrt[3]{2V}$, $z=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$, коли площа поверхні басейну $S_{\min}=3\sqrt[3]{4V^2}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідну функції z за напрямом вектора $\vec{l}$ в точці P і градієнт функції в цій точці:

а) $z = x^2 - xy + y^2$; $P(1;1)$, $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$;

б) $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$; $P(-2;-1)$, $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j}$;

в) $z = 3x^2 + 4y^2 + x - 2y + 1$, $P(-1;\ 2)$, $\vec{l} = 3\vec{i} - \vec{j}$;

г) $z = \ln\left(x^2 + 2y^2\right)$; $P(1;1)$; $\vec{l} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$.

2. Для функції z знайти частинні похідні другого порядку:

а) $z = x^3y - y^3x + 2y^2 - 3x + 4$; б) $z = x^2 + x^2y - 9y + 5$;

в) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$; г) $z = \arcsin(xy)$;

д) $z = \sqrt{2xy + y^2}$; е) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Показати, що для функції z виконується вказана умова:

а) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$, $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

б) $z = \sin^2(x + 2y)$, $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. Знайти частинні похідні $f_x'(1,\ 2,\ 0)$, $f_y'(1,\ 2,\ 0)$, $f_z'(1,\ 2,\ 0)$ та повний диференціал функції $f(x,\ y,\ z) = \ln(xy + z)$.

5. Дослідити на екстремум функцію:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; б) $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 8y + 1$;

в) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$; г) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

д) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$; е) $z = x^3 + y^3 + 9xy$;

є) $z = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$; ж) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

Розділ VI. Інтегральне числення функції однієї змінної.
Тема 20. Невизначений інтеграл, властивості та методи інтегрування

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\left(x^2+\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл дорівнює сумі табличних інтегралів:

$$\int\left(x^2+\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int(x^2+x^{3/4}-2x^{-2})dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}-\frac{2x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{2}{x}+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\left(4^x+2\sin x-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$.

Розв'язання. Використаємо властивості невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\int\left(4^x+\sin x-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx=\int 4^x dx+\int\sin x dx-3\int\frac{dx}{\cos^2 x}=4^x\ln 4-\cos x-3\mathrm{tg}x+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли а) $\int\left(3-x^2\right)^2 dx$, б) $\int\frac{x^2dx}{x^2+3}$.

Розв'язання. а) Спочатку перетворимо підінтегральну функцію, а потім використаємо властивості невизначеного інтеграла і таблицю інтегралів. Дістанемо

$$\int\left(3-x^2\right)^2 dx=\int\left(9-6x^2+x^4\right)dx=9\int dx-6\int x^2dx+\int x^4dx=$$

$$=9x-6\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+C=9x-2x^3+\frac{1}{5}x^5+C.$$

б) Оскільки чисельник і знаменник підінтегральної функції відрізняються тільки сталим доданком, то після перетворень зведемо даний інтеграл до двох табличних інтегралів:

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+3} = \int \frac{(x^2+3)-3}{x^2+3}dx = \int 1\cdot dx - 3\int \frac{dx}{x^2+3} = \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= x - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C = x - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

Розв'язання. Скориставшись тригонометричною формулою, перетворимо підінтегральну функцію і зведемо даний інтеграл до двох табличних інтегралів

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg} x dx$.

Розв'язання. Перетворивши підінтегральний вираз, маємо функцію та її похідну під знаком інтеграла. Зробивши заміну змінної, маємо

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left|\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt = d(\cos x) = -\sin x dx \end{array}\right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{5+3x}$.

Розв'язання. Внесемо під знак диференціала відповідну функцію, дістанемо

$$\int \frac{dx}{5+3x} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{5+3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(5+3x)}{5+3x} = \frac{1}{3}\ln|5+3x| + C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int (4-5x)^9 dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної і зведемо інтеграл до табличного.

$$\int (4-5x)^9 dx = \left|\begin{array}{l} t = 4-5x \\ dt = -5dx \\ dx = -\frac{1}{5}dt \end{array}\right| = -\frac{1}{5}\int t^9 dt = -\frac{t^{10}}{5\cdot 10} + C = -\frac{(4-5x)^{10}}{50}.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

Розв’язання. Під інтегралом є складна функція, замінимо її внутрішню функцію і дістанемо табличний інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \int (1-2x)^{-\frac{2}{3}}dx = \begin{vmatrix} t = 1-2x \\ dt = -2dx \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{3t^{\frac{1}{3}}}{2} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-2x} + C.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Розв’язання. Враховуючи, що $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+4)$, внесемо x під знак диференціала. Маємо

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C.$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \frac{2xdx}{1+x^4}$.

Розв’язання. Застосуємо метод заміни змінної і зведемо інтеграл до табличного. Оскільки під знаком інтеграла є похідна для функції x^2, то зробимо заміну $t = x^2$, дістанемо

$$\int \frac{2xdx}{1+x^4} = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = d(x^2) \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctgx^2 + C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}$.

Розв’язання. Застосуємо метод заміни змінної і зведемо інтеграл до табличного. Оскільки під знаком інтеграла є функція $1+x^4$, для якої є похідна з точністю до сталої, то виконаємо підстановку $t = 1+x^4$

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^4} = \left| \begin{matrix} t = 1 + x^4 \\ dt = 4x^3dx \\ x^3dx = \dfrac{1}{4}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right) + C.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

<u>Розв'язання.</u> Оскільки $d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$ то внесемо функцію під знак диференціала, маємо

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \cos\sqrt{x}\,d\left(\sqrt{x}\right) = 2\sin\sqrt{x} + C.$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int x\sqrt{x-5}dx.$

<u>Розв'язання.</u> Використаємо метод заміни змінної, дістанемо

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x-5} \\ x = t^2 + 5 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int (t^2+5)\cdot t \cdot 2tdt = 2\int t^2(t^2+5)dt =$$

$$= 2\int t^4dt + 10\int t^2dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3} + C.$$

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int x^2e^{x^3}dx$.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки під інтегралом є складна функція та існує похідна (з точністю до сталої) для її внутрішньої функції, то зробимо заміну і дістанемо табличний інтеграл

$$\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}dx = \left| \begin{matrix} t = x^3 \\ dt = d\left(x^3\right) = 3x^2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int e^tdt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C .$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки під інтегралом є функція та її похідна, то замінимо цю функцію новою змінною, дістанемо

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \int \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{dx}{(1+x^2)} = \int \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = \ln\left|\operatorname{arctg} x\right| + C.$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \sin x \cos^5 x dx$.

Розв’язання. Оскільки під інтегралом є функція та її похідна, то використавши метод заміни змінної, маємо

$$\int \sin x \cos^5 x dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{vmatrix} = -\int t^5 dt = -\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

Приклад 17. Знайти інтеграл $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$.

Розв’язання. Застосуємо метод заміни змінної і зробимо підстановку $t = \sin 2x$, тоді $dt = 2\cos 2x dx$, $\cos 2x = \frac{1}{2}dt$. Дістанемо

$$\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{\sin 2x} + C.$$

Приклад 18. Знайти інтеграл $\int \frac{\left(2\ln x + 3\right)^3 dx}{x}$.

Розв’язання. Оскільки під інтегралом є функція та її похідна, то замінимо цю функцію новою змінною, дістанемо

$$\int \frac{\left(2\ln x + 3\right)^3 dx}{x} = \int \left(2\ln x + 3\right)^3 \frac{dx}{x} = \begin{vmatrix} t = 2\ln x + 3 \\ dt = \dfrac{2dx}{x} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}\left(2\ln x + 3\right)^4 + C.$$

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int \frac{x + e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Розв’язання. Для обчислення даного інтеграла розкладемо підінтегральну функцію в суму функцій. Маємо

$$\frac{x + e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Враховуючи, що $d(1-x^2)=-2xdx$, тобто $xdx=-\frac{1}{2}d\left(1-x^2\right)$, і зробивши заміну $u=\arcsin x$, $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, дістанемо

$$\int\frac{x+e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)+\int e^u du=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1/2}+e^u+C=$$

$$=-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+e^{\arcsin x}+C=-\sqrt{1-x^2}+e^{\arcsin x}+C.$$

Приклад 20. Знайти інтеграли а) $\int x\sin xdx$, б) $\int x\ln xdx$.

Розв’язання. Для обчислення даних інтегралів використаємо метод інтегрування частинами.

а) За функцію $u(x)$ візьмемо степеневу функцію, оскільки вона спрощується при диференціюванні. При цьому вираз $dv=\sin xdx$ легко інтегрується. Отже, за формулою $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu$ дістаємо

$$\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{l}u=x,\ du=dx,\\ dv=\sin xdx,\\ v=\int dv=\int\sin xdx=\\ =-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

б) В якості функції $u(x)$ не треба брати степеневу функцію x, оскільки вираз $dv=\ln xdx$ не можна легко проінтегрувати. Тому візьмемо $u(x)=\ln x$, $dv=xdx$. За формулою (4) дістаємо

$$\int x\ln xdx=\left|\begin{array}{ll}u=\ln x & dv=xdx\\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{2\cdot 2}+C=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

Приклад 21. Обчислити інтеграл $\int(x+2)\cos xdx$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є добуток двох різнотипних функцій (степеневої і тригонометричної), то застосуємо метод інтегрування частинами, тобто формулу $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v du$. Покладемо $u = x+2, dv = \cos x dx.$ Тоді $du = dx,\ v = \int \cos x dx = \sin x, C = 0.$ Дістаємо

$$\int (x+2)\cos x dx = (x+2)\sin x - \int \sin x dx = (x+2)\sin x + \cos x + C.$$

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int x\cdot 7^x dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є добутком степеневої та показникової функцій, тому для обчислення інтеграла використаємо метод інтегрування частинами. За функцію u візьмемо степеневу функцію , оскільки вона спрощується при диференціюванні. При цьому вираз $dv = 7^x dx$ легко інтегрується. Дістаємо

$$\int x\cdot 7^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = 7^x dx \\ du = dx & v = \int 7^x dx = \dfrac{7^x}{\ln 7} \end{matrix} \right| = \frac{x\cdot 7^x}{\ln 7} - \int \frac{7^x}{\ln 7} dx =$$

$$= \frac{x\cdot 7^x}{\ln 7} - \frac{7^x}{\ln^2 7} + C = \frac{7^x}{\ln^2 7}\left(x\ln 7 - 1\right) + C .$$

Приклад 23. Знайти інтеграл $\int x^2 e^{5x} dx$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу інтегрування частинами двічі, знаходимо:

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2,\ du = 2xdx, \\ dv = e^{5x}dx, v = \dfrac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\int x e^{5x} dx = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx, \\ dv = e^{5x}dx, v = \dfrac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{5}e^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx\right) = e^{5x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2}{25}x + \frac{2}{125}\right) + C.$$

Приклад 24. Обчислити інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл містить добуток степеневої на логарифмічну функцію, тому застосовуємо формулу інтегрування частинами. Дістанемо

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x^3 dx, \\ v = \int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$$

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int \mathrm{arcctg} 2x dx$.

Розв’язання. Оскільки під знаком інтеграла є тільки одна функція (обернена тригонометрична), то її позначають через $u(x)$, тоді $dv = dx$. Використаємо спочатку метод інтегрування частинами, а потім метод заміни змінної. Дістанемо

$$\int \mathrm{arcctg} 2x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arcctg} 2x & dv = dx \\ du = -\dfrac{2dx}{1+4x^2} & v = x \end{array} \right| = x\mathrm{arcctg} 2x - \int \left(-\frac{2x}{1+4x^2} \right) dx =$$

$$= x\mathrm{arcctg} 2x + \frac{1}{4}\int \frac{8xdx}{1+4x^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1+4x^2 \\ dt = 8xdx \end{array} \right| = x\mathrm{arcctg} 2x + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= x\mathrm{arcctg} 2x + \frac{1}{4}\ln|t| + C = x\mathrm{arcctg} 2x + \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C.$$

Приклад 26. Обчислити інтеграл $\int \ln(2x+1)dx$.

Розв’язання. Для інтегрування логарифмічної функції застосовуємо формулу інтегрування частинами. Дістанемо

$$\int \ln(2x+1)dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(2x+1),\ du = \dfrac{2dx}{2x+1}, \\ dv = dx,\ v = \int dx = x \end{array} \right| = x\ln(2x+1) - \int \frac{2xdx}{2x+1} =$$

$$= x\ln(2x+1) - \int \frac{(2x+1)-1}{2x+1}dx = x\ln(2x+1) - \int dx + \int \frac{dx}{2x+1} =$$

$$= x\ln(2x+1) - x + \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x\ln(2x+1) - x + \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2x+1)(2x+1) - x + C.$$

Приклад 27. Знайти інтеграл $\int \arcsin x dx$

Розв'язання. Для обчислення інтеграла від оберненої тригонометричної функції використаємо формулу інтегрування частинами. Маємо

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \\ dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ v = \int dx = x. \end{array} \right| = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Приклад 28. Обчислити інтеграл $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C.$$

Приклад 29. Знайти інтеграл $\int e^x \cos x dx$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є добуток показникової на тригонометричну функцію, то для його обчислення двічі застосуємо метод інтегрування частинами. Маємо

$$I = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x, & du = -\sin x dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x, \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + \int \sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x, & du = \cos x dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x, \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \left(\cos x + \sin x\right) - I.$$

Дістали рівняння, з якого знаходимо заданий інтеграл. Оскільки

$I = e^x(\cos x + \sin x) - I$, $\qquad 2I = e^x(\cos x + \sin x)$,

то даний інтеграл дорівнює

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтеграли:

а) $\int (9x^2 - 4x + 5)dx$; б $\int \frac{x-3}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

г) $\int \frac{(2x-7)^2}{\sqrt{x}}dx$; д) $\int (2^{3x} + (3x)^2)dx$; е) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$;

є) $\int \frac{5 - 4ctg^2 x}{cos^2 x}dx$; ж) $\int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$.

2. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{6x-5}$; б) $\int \frac{dx}{cos^2 4x}$; в) $\int \sin 3x dx$;

г) $\int \sqrt[3]{(8-5x)^2}dx$; д) $\int e^{7x}dx$; е) $\int \frac{dx}{16x^2 - 1}$;

є) $\int \frac{dx}{(3x-2)^5}$; ж) $\int \cos\frac{x}{4}dx$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

3. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin(5x+3)dx$; б) $\int (2-4x)^3 dx$; в) $\int \frac{x^3 dx}{1+x^4}$;

г) $\int \frac{dx}{x(2-\ln^2 x)}$; д) $\int \frac{e^x dx}{3+e^{2x}}$; е) $\int \frac{\sqrt{1+3tgx}\cdot dx}{\cos^2 x}$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$; з) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$.

4. Обчислити інтеграли:

а) $\int x\sin 3x dx$; б) $\int x\cos 5x dx$; в) $\int \ln(x+1)dx$; г) $\int x\ln x dx$;

д) $\int x^2\cos 2x dx$; е) $\int x^2 e^{3x}dx$; є) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; ж) $\int arctg 3x dx$;

з) $\int x arctg x dx$; і) $\int x arc\sin x dx$; к) $\int e^{2x}\sin x dx$.

Тема 21. Інтегрування раціональних функцій

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від дробово-раціональної функції. Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на елементарні дроби, дістанемо

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1=A(x-3)+B(x+1).$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A і B розглянемо окремі значення змінної $x=-1, x=3$, дістанемо

$$\left.\begin{array}{r|l} x=-1 & 1=-4A \\ x=3 & 1=4B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-2x-3}=-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-3)}.$$

Отже, даний інтеграл дорівнює

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3}=-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3}=-\frac{1}{4}\int \frac{d(x+1)}{x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Для обчислення визначеного інтеграла потрібно спочатку знайти первісну, для цього розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби

$$\frac{2x+8}{x^3-4x}=\frac{2x+8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Прирівняємо чисельники першого і останнього дробів, дістанемо

$$2x+8=A\left(x^2-4\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-2\right),$$

$$0\cdot x^2+2\,x+8=x^2\left(A+B+C\right)+x\left(2B-2C\right)-4A.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+B+C \\ x^1 & 2=2B-2C \\ x^0 & 8=-4A \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B+C=2 \\ B-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3/2 \\ C=1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{2x+8}{x^3-4x}=-\frac{2}{x}+\frac{3}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}.$$

Дістаємо

$$\int\frac{2x+8}{x^3-4x}dx=-2\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=-2\ln|x|+\frac{3}{2}\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(+2)x}{x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|x-2|^3+\ln|x+2|\right)-\ln x^2+C=\ln\frac{\sqrt{|x-2|^3|x+2|}}{x^2}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$.

<u>Розв’язання.</u> Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на елементарні дроби, дістанемо

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2}=\frac{x+2}{x^2\left(x-2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{Ax\left(x-2\right)+B\left(x-2\right)+Cx^2}{x^2\left(x-2\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x+2=x^2\left(A+C\right)+x\left(B-2A\right)-2B,$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+C \\ x^1 & 1=B-2A \\ x^0 & 2=-2B \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=-1 \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow \left.\frac{x+2}{x^3-2x^2}=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right|, \text{ тоді}$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx = \int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx = -\int\frac{dx}{x} - \int x^{-2}dx + \int\frac{d(x-2)}{x-2} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-2| + C = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^3+x}$.

<u>Розв’язання.</u> Оскільки під знаком інтеграла маємо правильний раціональний дріб, то його можна розкласти на елементарні дроби. Маємо

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+A}{x^3+x},$$

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C. Оскільки

$$0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1 = (A+B)x^2 + Cx + A,$$

то маємо $A+B=0$, $C=0$, $A=1$, звідки $B=-1$. Дістанемо $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, тоді

$$\int\frac{dx}{x^3+x} = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{xdx}{x^4-16}$.

<u>Розв’язання.</u> Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} =$$

$$= \frac{A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)}.$$

Прирівняємо чисельники першого і останнього дробів, знайдемо невідомі коефіцієнти, взявши конкретні значення x, зокрема дійсні корені знаменника дробу, дістанемо

$$x = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4),$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x=2 & 2=A(2+2)(4+4)=32A \\ x=-2 & -2=B(-2-2)(4+4)=-32B \\ x=0 & 0=8A-8B-4D \\ x=1 & 1=15A-5B-3C-3D \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=B=\dfrac{1}{16} \\ D=0 \\ C=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x^4-16}=\frac{1}{16(x-2)}+\frac{1}{16(x+2)}-\frac{x}{8(x^2+4)}.$$

Дістанемо

$$\int\frac{xdx}{x^4-16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{8}\int\frac{xdx}{x^2+4}=\frac{1}{16}\ln|x-2|+\frac{1}{16}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{16}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}+C=\frac{1}{16}\ln\left|x^2-4\right|-\frac{1}{16}\ln\left|x^2+4\right|+C=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right|+C.$$

Приклад 6. Знайти $\int\frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx$.

<u>Розв’язання.</u> Многочлен у знаменнику не має дійсних коренів ($D<0$), тому підінтегральну функція є елементарним дробом III типу. У знаменнику виділимо повний квадрат, дістанемо

$$x^2-4x+8=(x^2-4x+4)+4=(x-2)^2+4.$$

Виконаємо заміну змінної, після чого даний інтеграл розкладемо в суму двох інтегралів

$$\int\frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{2x-2}{(x-2)^2+4}dx=\begin{vmatrix} t=x-2 \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{vmatrix}=\int\frac{2(t+2)-2}{t^2+4}dt=$$

$$=\int\frac{2t+2}{t^2+4}dt=\int\frac{2t}{t^2+4}dt+\int\frac{2}{t^2+2^2}dt=\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+2\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=$$

$$=\ln\left|t^2+4\right|+arctg\frac{t}{2}+C=\ln\left|x^2-4x+8\right|+arctg\frac{x-2}{2}+C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$.

<u>Розв’язання.</u> Виділивши повний квадрат у знаменнику дробу і зробивши заміну, дістанемо суму двох табличних інтегралів

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx=\int \frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx=\frac{1}{4}\int \frac{3x-1}{\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}dx=\left|\begin{array}{l} t=x-\frac{1}{2} \\ dt=dx \\ x=t+\frac{1}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int \frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt=\frac{3}{4}\int \frac{tdt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{3}{8}\int \frac{2tdt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{1}{8\cdot 2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+\frac{3}{8}\ln 4+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+\left(C-\frac{3}{8}\ln 4\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C_1.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$.

Розв’язання. Оскільки підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, то поділимо многочлен в чисельнику на многочлен в знаменнику, дістанемо суму многочлена і правильного раціонального дробу

$$\frac{x^4+2x}{x^3+8}=\frac{(x^4+8x)-6x}{x^3+8}=\frac{x(x^3+8)-6x}{x^3+8}=x-\frac{6x}{x^3+8}.$$

Розкладемо одержаний правильний дріб на елементарні дроби і визначимо невідомі коефіцієнти комбінованим методом

$$\frac{6x}{x^3+8}=\frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)}{x^3+8}\Rightarrow 6x=A\left(x^2-2x+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)\Rightarrow$$

$$0\cdot x^2+6x+0\cdot x=x^2\left(A+B\right)+x\left(-2A+2B+C\right)+(4A+2C),$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l|l}
x^2 & 0 = A + B \\
x^1 & 6 = -2A + 2B + C \\
x^0 & 0 = 4A + 2C
\end{array}\right\} \\
x = -2 \Rightarrow -12 = 12A
\end{array}\right\} \Rightarrow A = -1,\ B = 1,\ C = 2.
$$

Звідси дістаємо $\quad \dfrac{6x}{x^3+8} = -\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x^2-2x+4}$.

Тоді заданий інтеграл дорівнює:

$$
\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx = \int\left(x - \frac{6x}{x^3+8}\right)dx = \int\left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx =
$$

$$
= \int xdx + \int \frac{d\left(x+2\right)}{x+2} - \int \frac{\left(x+2\right)dx}{\left(x-1\right)^2+3} = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} + \ln\left|x+2\right| - \int \frac{t+3}{t^2+3}dt =
$$

$$
= \frac{x^2}{2} + \ln\left|x+2\right| - \int \frac{tdt}{t^2+3} - \int \frac{3dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln\left|x+2\right| - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+3)}{t^2+3} - 3\int \frac{dt}{t^2+3} =
$$

$$
= \frac{x^2}{2} + \ln\left|x+2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+3\right| - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =
$$

$$
= \frac{x^2}{2} + \ln\left|x+2\right| - \ln\sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.
$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$; в) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$; е) $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2(x-2)}dx$; б) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-1}{(x+2)(x-1)^2}dx$; в) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$;

г) $\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2}dx$; д) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$; е) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

3. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; б) $\int \frac{dx}{x^3-8}$; в) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$;

г) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$; д) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$; е) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

4. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$; в) $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2-2x+6}$.

Тема 22. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити $\int \frac{dx}{\sin x+1}$.

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sin x+1} = \left| \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \\ x = 2arctg\, t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)} = 2\int \frac{dt}{\left(t+1\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+1} + C = C - \frac{2}{tg\frac{x}{2}+1}.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

Розв'язання. Обчислимо даний інтеграл за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, тоді

$$x = 2arctg\, t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x} = \int \frac{1}{5+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{1+t^2}{5+5t^2+2t+3-3t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2+2t+8} = \int \frac{dt}{t^2+t+4} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{4}+4} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \begin{vmatrix} t+\frac{1}{2}=u \\ dt = du \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{15}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{15}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}} + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \sin^5 x \cos x dx$.

Розв’язання. Підінтегральна функція є непарною відносно обох тригонометричних функцій, але функція $\sin x$ входить у п’ятому степені, тому її і треба замінити. Зробимо це усно, для чого внесемо функцію $\cos x$ під знак диференціала і дістанемо табличний інтеграл відносно $\sin x$:

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Приклад 4. Обчислити $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx.$

Розв’язання. Оскільки під інтегралом функція $\cos x$ в непарному степені, то використаємо підстановку $t = \sin x$. Для цього перетворимо підінтегральну функцію так, щоб відокремити $\cos x$ і утворити похідну від $\sin x$. Маємо

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx =$$

$$=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x\cos x dx=\left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{matrix}\right|=\int\left(1-t^2\right)t^2dt=$$

$$=\int\left(t^2-t^4\right)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграли: а) $\int\sin^3 xdx$; б) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.

Розв’язання. а) Перетворимо підінтегральну функцію і усно зробимо заміну змінної. Для цього внесемо функцію $\cos x$ під знак диференціала:

$$\int\sin^3 dx=\int\sin^2 x\sin xdx=-\int(1-\cos^2 x)d(\cos x)=\int(\cos^2 x-1)d(\cos x)=$$

$$=\int(\cos^2 x-1)d(\cos x)=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C.$$

б) Перетворимо підінтегральну функцію так, щоб використати підстановку $t=\cos x$, дістанемо

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx=\left|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin xdx \\ \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{1-t^2}{t^2}\left(-dt\right)=\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграли:

а) $\int\sin^4 xdx$, б) $\int\sin^2 x\cos^2 xdx$, в) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

Розв’язання. а) Підінтегральна функція містить $\sin x$ у парному степені, тому перетворимо її так, щоб використати формули пониження степеня (2):

$$\int\sin^4 xdx=\int(\sin^2 x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x-\int\cos 2xd(2x)+\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx\right)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{4}\int\cos 4xd(4x)\right)=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

б) Оскільки під інтегралом обидві тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ мають парний степінь, то застосуємо формули пониження степеня (2):

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4x dx\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x)\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

в) Оскільки під інтегралом функції $\sin x$ і $\cos x$ мають парні від'ємні степені, то використовуємо підстановку $t = tgx$, дістаємо

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\, x,\ \ x = \mathrm{arctg} t,\ \ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2 \left(1+t^2\right) dt}{t^4 \left(1+t^2\right)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \mathrm{tg} x - \frac{1}{3\mathrm{tg}^3 x} - 2\mathrm{ctg} x + C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграли а) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx$.

Розв'язання. а) Виконавши перетворення над тригонометричними функціями, застосуємо підстановку $t = \cos x$, дістанемо

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \sin x dx = -\int \frac{\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)^2} d(\cos x) = -\int \frac{t^2}{(1-t)^2 (1+t)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt = \frac{1}{4}\left(-\ln|1-t| - \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{1-\cos x} + \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + C.$$

б) Оскільки обидві тригонометричні функції у парному степені, то застосуємо підстановку $t = \mathrm{tg}\, x$, провівши попередньо перетворення

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int tg^2x(1+tg^2x)^2 d(tgx)=\int(t^2+2t^4+t^6)dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{1}{3}tg^3x+\frac{2}{5}tg^5x+\frac{1}{7}tg^7x+C.$$

Приклад 8. Знайти $\int\sin^2 x\cdot\cos^4 x\cdot dx$.

Розв’язання. Застосуємо тригонометричні формули пониження степеня $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$. Дістанемо

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^4 x\cdot dx=\int\left(\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)\cdot\cos^2 xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cdot\cos^2 x\cdot dx=\frac{1}{4\cdot 4}\int\left(1-\cos 4x\right)\cdot\left(1+\cos 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 4x\cdot\cos 2x\right)dx.$$

Оскільки $\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)x+\cos\left(a+b\right)x\right)$, то

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^4 x\cdot dx=\frac{1}{16}\left(\int dx+\int\cos 2xdx-\int\cos 4xdx-\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 6x)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{2\cdot 2}\int\cos 2xd(2x)-\frac{1}{4}\int\cos 4xd(4x)-\frac{1}{2\cdot 6}\int\cos 6xd(6x)\right)=$$

$$=\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+C.$$

Приклад 9. Знайти $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

Розв’язання. Оскільки обидві тригонометричні функції у парному степені, причому містяться в знаменнику, то застосуємо підстановку $t=\mathrm{tg}\,x$, тоді

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ \ x=arctgt,\ \ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Дістанемо

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{1}{\frac{3}{1+t^2} + \frac{4t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{3+4t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 2}{4\cdot\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{2\cdot t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{2\cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$, $a > 0, b > 0$.

Розв’язання. Перетворимо підінтегральний вираз так, щоб використати підстановку $t = tgx$. Дістаємо

$$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a + b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{a + b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{a + b\operatorname{tg}^2 x} = \left| t = \operatorname{tg}x \right| = \int \frac{dt}{a + bt^2}.$$

Таким чином, даний інтеграл від тригонометричної функції звели до інтеграла від раціональної функції, який легко обчислюється. Маємо

$$\int \frac{dt}{a+bt^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t^2 + a/b} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{a/b})^2} = \frac{1}{b\sqrt{a/b}}\, arctg\, \frac{t}{\sqrt{a/b}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}\, arctg \sqrt{\frac{b}{a}}\, t + C = \frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}\, arctg \sqrt{\frac{b}{a}}\, tg\, x + C.$$

Приклад 11. Знайти $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}\,dx$.

Розв’язання. Застосуємо формулу добутку тригонометричних функцій $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a-b\right)x + \sin\left(a+b\right)x\right)$, дістанемо

$$\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{12}\,dx + \frac{1}{2}\int \sin\frac{7x}{12}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 12\int \sin\frac{x}{12}\cdot d\left(\frac{x}{12}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}\int \sin\frac{7x}{12}\cdot d\left(\frac{7x}{12}\right) = -6\cos\frac{x}{12} - \frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12} + C.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

<u>Розв'язання.</u> Заданий інтеграл містить ірраціональні вирази. Враховуючи $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, то застосуємо заміну змінної, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{c} \frac{m}{n}=\frac{1}{2},\ \frac{p}{q}=\frac{1}{3}, \\ k=6,\ t=\sqrt[6]{x}, \\ x=t^6,\, dx=6t^5dt \\ \begin{array}{c|c|c|} x & 1 & 64 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \end{array}\right|=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int \frac{t^2\cdot t^3}{t^2(t+1)}dt=6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt=$$

$$=6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-\int \frac{dt}{t+1}=6\int (t^2-t+1)dt-6\int \frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$.

<u>Розв'язання</u>. Під інтегралом є тільки один ірраціональний вираз $\sqrt{x-1}$, тому виконаємо підстановку $t=\sqrt{x-1}$, тоді $t^2=x-1$, звідки $x=t^2+1, dx=2tdt$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{\left(t^2+1\right)^2 2tdt}{t}=2\int \left(t^4+2t^2+1\right)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{4}{3}t^3+2t+C=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{(x-1)}+C.$$

Приклад 14. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

<u>Розв'язання.</u> а) Застосовуючи відповідну дробово-лінійну підстановку, дістаємо:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)3t^2dt}{t^2} = 3\int (t^3-1)dt =$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - 3t + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C.$$

б) Оскільки підінтегральна функція містить ірраціональності $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, то використаємо дробово-лінійну підстановку $x = t^s$, де число $s = 12$ є спільним знаменником дробів $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$. Маємо

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12},\ 12 = НСК(2,3,4) \\ dx = 12t^{11}dt,\ t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} =$$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} = 12\int \frac{t^4(t^{10}-1+1)dt}{t^5-1} = 12\int \left(t^4(t^5+1) + \frac{t^4}{t^5-1} \right) dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left| t^5 - 1 \right| \right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left| \sqrt[12]{x^5} - 1 \right| + C.$$

Приклад 15. Знайти $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція містить ірраціональний вираз $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, то застосуємо підстановку $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, тобто $t^3 = \frac{1-x}{1+x}$. Дістанемо

$$x = \frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = \frac{-6t^2}{(1+t^3)^2}dt, \quad 1+x = \frac{2}{1+t^3}.$$

Тому даний інтеграл дорівнює

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2} = -\int \frac{t \cdot 6t^2 (1+t^3)^2}{(1+t^3)^2 \cdot 2^2}dt = -\frac{3}{2}\int t^3 dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = -\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділивши повний квадрат і зробивши заміну, маємо:

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}}dt = 4\int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= -4\int \frac{d\left(6-t^2\right)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад 17. Знайти $\int \frac{\left(4x+7\right)\cdot dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Розв’язання. Помічаючи, що $d\left(3-2x-x^2\right) = \left(-2x-2\right)dx$, виконаємо перетворення і дістанемо

$$\int \frac{\left(4x+7\right)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -2\int \frac{\left(-2x-2\right)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} + \int \frac{3dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$$

$$= -2\int (3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(3-2x-x^2) + 3\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$$

$$= -2\cdot 2\sqrt{3-2x-x^2} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

Для знаходження $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ застосуємо підстановку $t = x+1$, тоді $x = t-1,\ dx = dt$. Отже, маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{3-2\left(t-1\right)-\left(t-1\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

Остаточно дістаємо

$$\int \frac{\left(4x+7\right)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -4\sqrt{3-2x-x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

Приклад 18. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки підінтегральна функція містить ірраціональний вираз $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{2^2-x^2}$, то застосуємо тригонометричну підстановку $x=2\sin t$, тоді $dx=2\cos tdt$. Дістанемо

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$$

Підставивши одержані вирази в інтеграл, дістанемо:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int \frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos tdt}{2\cos t}=4\int \sin^2 tdt=2\int (1-\cos 2t)dt=$$

$$=2\int dt-2\int \cos 2tdt=2t-\sin 2t+C\,.$$

Оскільки $x=2\sin t$, то $\sin t=\frac{x}{2}$, тобто $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Тоді

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\,.$$

Отже, остаточно маємо

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

Приклад 19. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$

<u>Розв'язання.</u> Цей інтеграл містить вираз вигляду $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{9+x^2}$, тому застосуємо підстановку $x=3\operatorname{tg}t$. Враховуючи формулу $1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, маємо

$$I=\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}=\left|\begin{array}{c} x=3\operatorname{tg}t,\ dx=\dfrac{3dt}{\cos^2 t}, \\ 9+x^2=9(1+\operatorname{tg}^2 t)=\dfrac{9}{\cos^2 t} \\ \sqrt{9+x^2}=\dfrac{3}{\cos t} \end{array}\right|=\int \frac{\frac{3dt}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\frac{3}{\cos t}}=$$

$$=\frac{1}{9}\int \cos tdt=\frac{1}{9}\sin t+C\,.$$

Повернемося до змінної x. Із підстановки $x = 3\operatorname{tg} t$ маємо $\operatorname{tg} t = \frac{x}{3}$, тоді $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{3}$. Оскільки $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, то

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t},\ \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t},$$

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Отже, шуканий інтеграл

$$\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{9}\sin t + C = \frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} + C.$$

Приклад 20. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$.

<u>Розв’язання.</u> Розглянувши випадок III, дістанемо

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = \left| \begin{array}{l} x = 4\operatorname{tgt}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right), \quad t \neq 0, \\ dx = \frac{4dt}{\cos^2 t}, \quad t = \operatorname{arctg}\frac{x}{4}, \\ \sqrt{x^2+16} = 4\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{4}{\cos t} \end{array} \right| = \int \frac{\cos t \cdot 4dt}{4 \cdot 16 \operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{16}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{16\sin t} + C = -\frac{1}{16\sin\left(arctg\,\frac{x}{4}\right)} + C.$$

Враховуючи тригонометричну формулу $\sin^2 t = \frac{tg^2 t}{1+tg^2 t}$, знайдемо

$$\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} \Rightarrow \sin\left(arctg\,\frac{x}{4}\right) = \frac{tg\left(arctg\,\frac{x}{4}\right)}{\sqrt{1+tg^2\left(arctg\,\frac{x}{4}\right)}} = \frac{\frac{x}{4}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{16}}} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}.$$

Отже, даний інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = -\frac{1}{16\sin\left(arctg\,\frac{x}{4}\right)} + C = -\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x} + C\,.$$

Приклад 21. Знайти $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

<u>Розв’язання</u>. Оскільки підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2-a^2}$, то застосуємо тригонометричну підстановку $x = \frac{1}{\sin t}$, тоді $dx = -\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$.

Дістанемо

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{\sin t}\,.$$

Тоді

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{\sin^2 t \cdot \sin t}{\cos t} \cdot \frac{-\cos t dt}{\sin^2 t} = -\int \sin t dt = \cos t + C =$$

$$= \cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) + C = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)} + C = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

<u>Розв’язання.</u> Використавши першу з підстановок Ейлера, дістанемо інтеграл від дробово-раціональної функції та розкладемо її на елементарні дроби. Маємо

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} = t - x, \\ x = \frac{t^2-1}{2t-1}\ ,\ dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt \\ t = x + \sqrt{x^2-x+1} \end{array} \right| = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt =$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2(2t-1)} + \frac{3}{2(2t-1)^2} \right) dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| - \frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1)} + C\,.$$

Приклад 23. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

<u>Розв'язання.</u> Підінтегральна функція є диференціальним біномом. Оскільки маємо 3 випадок, то для інтегрування застосуємо підстановку $a+bx^n = t^s x^n$, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 \cdot \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} m=0, \quad n=4, \quad p=-\frac{1}{4}, \quad a=b=1, \\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{0+1}{4}-\frac{1}{4}=0 \in Z \Rightarrow \\ \Rightarrow 1+x^4=t^4x^4, \quad x^4=\frac{1}{t^4-1}, \\ x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad dx=-t^3\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt, \\ \sqrt[4]{1+x^4}=tx=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt}{t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1}.$$

За допомогою підстановки дістали інтеграл від раціональної функції. Розкладемо її на елементарні дроби

$$\frac{t^2}{t^4-1} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1) \Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=0, D=\frac{1}{2}.$$

Тоді даний інтеграл дорівнює

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Оскільки $t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, то остаточно маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} + C.$$

Приклад 24. Знайти $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{4-x^3}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл містить диференціальний біном, тобто маємо інтеграл виду $\int x^m \cdot \left(a+bx^n\right)^p dx$. У нашому випадку $m=-3, n=3, p=-\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=-1$ – ціле число, тому робимо підстановку $a+bx^n = x^n \cdot t^s$, де s – знаменник дробу p, тобто $4-x^3 = x^3 \cdot t^3$, звідки $t = \frac{\sqrt[3]{4-x^3}}{x}$. Дістанемо

$$x^3 = \frac{4}{\left(1+t^3\right)},\ x = \sqrt[3]{4}\left(1+t^3\right)^{-\frac{1}{3}},\ dx = \sqrt[3]{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1+t^3\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot 3t^2dt = -\frac{\sqrt[3]{4}t^2dt}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4}},$$

$$4-x^3 = x^3\cdot t^3 \ \Rightarrow\ \sqrt[3]{4-x^3} = x\cdot t = \sqrt[3]{4}\left(1+t^3\right)^{-\frac{1}{3}} t = \frac{\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{1+t^3}},$$

$$x^3\cdot\sqrt[3]{4-x^3} = \frac{4}{\left(1+t^3\right)}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4}}.$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{4-x^3}} = -\int \frac{\sqrt[3]{4}t^2dt}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4}\cdot\frac{4\sqrt[3]{4}t}{\sqrt[3]{\left(1+t^3\right)^4}}} = -\frac{1}{4}\int tdt = -\frac{t^2}{8}+C = -\frac{\sqrt[3]{\left(4-x^3\right)^2}}{8x^2}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int \sin^4 x\cos xdx$; б) $\int \cos^2 xdx$; в) $\int \sin^2 x\cos^2 xdx$;

г) $\int ctg^3 xdx$; д) $\int \cos 5x\cos 4xdx$; е) $\int \sin 3x\cos 5xdx$;

є) $\int tg^4 xdx$; ж) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; з) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{3+5cosx}$; б) $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$; в) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3cosx}$;

г) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7cosx}$; д) $\int \frac{dx}{1+3cos^2 x}$; е) $\int \frac{dx}{4-3cos^2 x+5\sin^2 x}$.

3. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; д) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$; е) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4}$; ж) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$; з) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}}{x\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}dx$.

4. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; в) $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

5. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$;

г) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}}$; д) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; е) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$.

Тема 23. Визначений інтеграл та його властивості. Методи інтегрування у визначеному інтегралі

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_1^2\left(4x^3-3x^2+5\right)dx$.

Розв'язання. Для заданого визначеного інтеграла застосуємо формулу Ньютона – Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, дістанемо

$$\int_1^2 \left(4x^3-3x^2+5\right)\,dx=\left(x^4-x^3+5x\right)\Big|_1^2=\left(2^4-2^3+5\cdot 2\right)-\left(1^4-1^3+5\cdot 1\right)=$$

$$=(16-8+10)-(1-1+5)=18-5=13.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)dx$**.**

<u>Розв’язання.</u> Знайдемо первісну підінтегральної функції і використаємо формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)dx=\left(e^x-x\right)\Big|_0^{\ln 2}=\left(e^{\ln 2}-\ln 2\right)-\left(e^0-0\right)=2-\ln 2-1=1-\ln 2.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\limits_{\pi/9}^{\pi/6}\sin 3x dx$.

<u>Розв’язання</u>. Під інтегралом можна зробити заміну змінної, але простіше внести функцію під знак диференціала, дістанемо

$$\int\limits_{\pi/9}^{\pi/6}\sin 3x dx=\frac{1}{3}\int\limits_{\pi/9}^{\pi/6}\sin 3x d(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx$.

<u>Розв’язання</u>. Внесемо функцію під знак диференціала, маємо

$$\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx=\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right)=\frac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Big|_0^{\ln 2}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2}-1\right)^5-\left(e^0-1\right)^5\right)=\frac{1}{5}\left((2-1)^5-(1-1)^5\right)=\frac{1}{5}.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

<u>Розв’язання.</u> Зробимо заміну змінної, поклавши $t=\sin x$. Тоді $dt=\cos x dx$, при $x=\frac{\pi}{6}$: $t=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, а при $x=\frac{\pi}{2}$: $t=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Отже,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\ \ x\ d\ \ x}{\sin^3 x}=\left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \\ x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1 \end{array}\right|=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d\ \ t}{t^3}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}t^{-3}dt=\left.\frac{t^{-2}}{-2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\left.\frac{1}{2t^2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{1}{2}+2=1{,}5.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

<u>Розв’язання.</u> Зробивши заміну змінної, дістанемо

$$\int\limits_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{c} t=\sqrt{x},\ x=t^2 \\ dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int\limits_2^3\frac{t+1-1}{t+1}\ dt=$$

$$=2\int\limits_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(t-\ln|\ t+1|\right)\Big|_2^3=2\left(3-\ln 4-\left(2-\ln 3\right)\right)=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

<u>Розв’язання</u>. Зробимо заміну змінної $t=\sqrt[3]{x+1},\ x+1=t^3,\ dx=3t^2dt$. Змінимо межі інтегрування: для нижньої межі $x=-1$ змінна $t=0$, а для верхньої межі $x=0$ змінна $t=1$. Маємо

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=3\int\limits_0^1\frac{t^2}{1+t}dt=3\int\limits_0^1\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt=3\int\limits_0^1(t-1)d(t-1)+3\int\limits_0^1\frac{d(t+1)}{1+t}=$$

$$=3\left(\frac{(t-1)^2}{2}+\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1=3\ln 2-\frac{3}{2}.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x dx$.

<u>Розв’язання.</u> Застосувавши формулу (5), дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos 2x dx, \\ v = \int \cos 2x dx = \\ \quad = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right| = \frac{1}{2}x\sin 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x d(2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi - 0\cdot\sin 0\right) + \frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{1}{4}\left(-1-1\right) = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$.

<u>Розв’язання</u>. Оскільки під інтегралом є добуток різнотипних функцій, то для його обчислення потрібно застосувати метод інтегрування частинами. Поклавши $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, маємо $du = dx$, $v = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d\left(-x\right) = -e^{-x}$.

Скориставшись формулою $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, дістанемо

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - \left(e^{-1} - e^0\right) = 1 - \frac{2}{e}.$$

Приклад 10. Обчислити $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x dx.$

<u>Розв’язання</u>. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x dx = \left|\begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\,x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Приклад 11. Знайти $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод заміни змінної, а потім метод інтегрування частинами, дістанемо

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\arcsin x \\ x=\sin t \\ dx=\cos t dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin t\cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t\, dt = \int_0^{\pi/6} t\sin t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u=t,\, du=dt \\ dv=\sin t dt \\ v=\int \sin t dt=-\cos t \end{array} \right| = -t\cos t\Big|_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6}\cos t dt = -\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}+\sin t\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}=\frac{6-\pi\sqrt{3}}{12}.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int_3^4 \frac{2x+8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Для обчислення визначеного інтеграла потрібно спочатку знайти первісну, для цього розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{2x+8}{x^3-4x}=\frac{2x+8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-4\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(x+2\right)}.$$

Прирівняємо чисельники першого і останнього дробів, дістанемо

$$2x+8=A\left(x^2-4\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-2\right),$$

$$0\cdot x^2+2x+8=x^2\left(A+B+C\right)+x\left(2B-2C\right)-4A.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+B+C \\ x^1 & 2=2B-2C \\ x^0 & 8=-4A \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}0\\0\\0\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B+C=2 \\ B-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3/2 \\ C=1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{2x+8}{x^3-4x}=-\frac{2}{x}+\frac{3}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}.$$

Дістаємо

$$\int_3^4 \frac{x+4}{x^3-4x}dx=-2\int_3^4 \frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int_3^4 \frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int_3^4 \frac{dx}{x+2}=$$

$$=-2\ln|x|\Big|_3^4+\frac{3}{2}\ln|x-2|\Big|_3^4+\frac{1}{2}\ln|x+2|\Big|_3^4=2\ln\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}=$$

$$=2\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 8+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}=2\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{48}{5}.$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int_{-2}^{-1} \frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx$.

Розв’язання. Підінтегральна функція є елементарним дробом IV типу. Виділимо повний квадрат в знаменнику дробу: $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ і зробимо заміну $t=x+2$, $x=t-2$, $dx=dt$, $0\le t\le 1$. Дістанемо

$$\int_{-2}^{-1} \frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx=\int_0^1 \frac{3x-4}{(x+2)^2+1}dx=\int_0^1 \frac{3(t-2)-4}{t^2+1}dt=$$

$$=3\int_0^1 \frac{tdt}{t^2+1}-10\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-10\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(t^2+1)\Big|_0^1-10\operatorname{arctg}t\Big|_0^1=\frac{3}{2}\ln 2-10\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{5\pi}{2}.$$

Приклад 14. Обчислити $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Розв’язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x=2arctgt, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \quad \begin{array}{c|c|c|} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2+2t+1-t^2}=\int_0^1 \frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|\Big\|_0^1=\ln 2.$$

Приклад 15. Знайдемо інтеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція містить тригонометричну функцію в парному степені, то для обчислення інтеграла доцільно застосувати підстановку $t=tgx$. Дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c} t=\operatorname{tg}x,\ x=\operatorname{arctg}t \\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \frac{x}{t}\Big|\frac{0}{0}\Big|\frac{\pi/3}{\sqrt{3}} \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+2t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{6}.$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Заданий інтеграл містить ірраціональні вирази. Враховуючи $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, то застосуємо заміну змінної, дістанемо

$$\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{c} \frac{m}{n}=\frac{1}{2},\ \frac{p}{q}=\frac{1}{3}, \\ k=6,\ t=\sqrt[6]{x}, \\ x=t^6,\ dx=6t^5dt \\ \frac{x}{t}\Big|\frac{1}{1}\Big|\frac{64}{2}\Big| \end{array}\right|=\int_1^2 \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int_1^2 \frac{t^2\cdot t^3}{t^2(t+1)}dt=6\int_1^2 \frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt=$$

$$=6\int_1^2 \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-\int_1^2 \frac{d(t+1)}{t+1}=6\int_1^2 (t^2-t+1)dt-6\ln|t+1|\Big\|_1^2=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_1^2-6\ln\frac{3}{2}=6\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+2-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-1\right)-6\ln\frac{3}{2}=11-6\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 15. Знайдемо інтеграл $\int\limits_0^5 \sqrt{25-x^2}dx$.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{a^2-x^2}$, то зробимо тригонометричну підстановку $x = a\sin t = 2\sin t$, тоді

$$\int\limits_0^5 \sqrt{25-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = 5\sin t, \quad dx = 5\cos t dt \\ \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = \\ = \sqrt{25\cos^2 t} = 5\cos t \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} 5\cos t \cdot 5\cos t dt =$$

$$= 25\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{25}{5}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt - \frac{25}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{25\pi}{4}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^4} - 3^x\right)dx$; б) $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} + 5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; в) $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$; д) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; е) $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_e^{e^2} x^2 \ln x dx$; б) $\int\limits_0^1 xe^{3x}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$;

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}dx$; д) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} arctgx dx$; е) $\int\limits_0^1 x\arcsin x dx$.

3. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$; в) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} ctg^3 x dx$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos 4x dx$.

4. Знайти інтеграли:

а) $\int\limits_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)} dx$; б) $\int\limits_2^3 \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$; в) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+6}$; д) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{2x^2-4x+5}$; е) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-8}$.

5. Знайти інтеграли:

а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$; в) $\int\limits_2^5 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$;

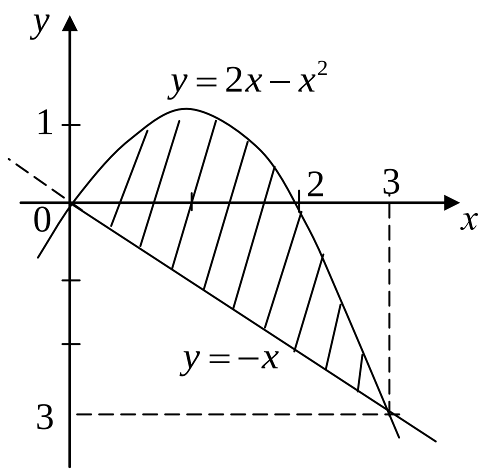
г) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$; д) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}-1}$; е) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

Тема 24. Застосування визначеного інтеграла

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2$ та $x+y=0$.

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо на площині фігуру, обмежену заданими лініями. Знайдемо межі інтегрування – точки перетину параболи $y=2x-x^2$ та прямої $y=-x$. Дістанемо $2x-x^2=-x \;\Rightarrow\; x^2-3x=0 \;\Rightarrow\; x_1=0, x_2=3$.



Оскільки графік функції $y = 2x - x^2$ лежить вище прямої $y = -x$, то площу фігури знаходимо за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \int_0^4 \left(2x - x^2 - (-x) \right) dx = \int_0^4 \left(3x - x^2 \right) dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 3 \cdot \frac{9}{2} - 9 = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (кв.од.)}$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$.

<u>Розв'язання.</u> Графіком функції $y = x^2 - 2x$ є парабола, гілки якої напрямлені вгору. Щоб побудувати параболу, знайдемо вершину параболи та точки перетину з осями координат. Абсцису вершини параболи знайдемо за формулою $x = -\frac{b}{2a}$, де b – коефіцієнт при x, a – коефіцієнти при x2. Отже, $x = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$. Підставивши x=1 у функцію $y = x^2 - 2x$, знайдемо ординату вершини параболи: y=12–2·1=–1. Отже, A(1;–1) – вершина параболи. Точки перетину параболи $y = x^2 - 2x$ з осями координат B(0;0) і C(2;0).

Позначимо знайдені точки і побудуємо параболу $y = x^2 - 2x$.

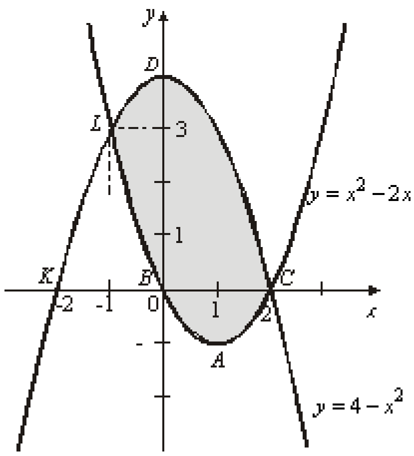
Графіком функції $y = 4 - x^2$ також є парабола. Її гілки напрямлені вниз, бо коефіцієнт при x2 дорівнює –1, тобто від'ємний. Знайдемо вершину цієї параболи, маємо $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$, y=4–02=4. Отже, D(0;4) – вершина параболи $y = 4 - x^2$. Точки перетину параболи з віссю абсцис: K(–2;0) C(2;0). Побудуємо параболу $y = 4 - x^2$.

Знайдемо точки перетину заданих ліній, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = x^2 - 2x; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 = 0; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = 2; \end{array} \right. \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1; \\ y = 4 - (-1)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2; \\ y = 4 - 2^2; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1; \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2; \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, $L(-1;3)$ і $C(2;0)$ – точки перетину заданих ліній. Отже, $ACDLB$ – фігура, обмежена заданими лініями: $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$. Знайдемо її площу S.



$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - (x^2 - 2x))dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - x^2 + 2x)dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx =$$

$$= \left(-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \left(-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \right) =$$

$$= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = -\frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 15 = -6 + 15 = 9 \text{ (кв.од.)}.$$

Приклад 3. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y=\sqrt{x^3}$ від точки $A(1,\,1)$ до точки $B(4,\,8)$.

Розв’язання. Оскільки крива задана в явному вигляді, то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

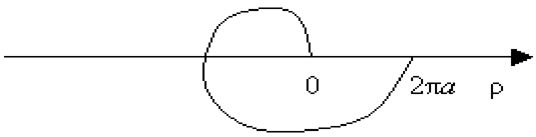
Для заданої кривої маємо $y=\sqrt{x^3},\ y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, тому

$$l=\int_1^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot dx=\frac{4}{9}\int_1^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_1^4=\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_1^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-\frac{13}{8}\sqrt{13}\right).$$

Приклад 4 Знайти довжину першого витка спіралі Архімеда $\rho=a\varphi.$

Розв’язання. Перший виток спіралі відповідає зміні кута φ от 0 до 2π.



Оскільки крива задана в полярній системі координат, то застосуємо формулу

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi,$$

де $\rho=a\varphi,\ \ \rho'=a,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$.

Знайдемо довжину дуги кривої, обчисливши інтеграл

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\left|\begin{array}{cc} \varphi=\mathrm{ctg}t & t=arcctg\varphi \\ d\varphi=-\dfrac{dt}{\sin^2 t} & \begin{array}{c|c|c} \varphi & 0 & 2\pi \\ t & \dfrac{\pi}{2} & arcctg2\pi \end{array} \end{array}\right|=$$

$$=-a\int\limits_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\sqrt{ctg^2t+1}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-a\int\limits_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\sin^2 t}}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-a\int\limits_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\frac{dt}{\sin^3 t}.$$

Знайдемо первісну підінтегральної функції, тобто обчислимо невизначений інтеграл за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\int\frac{dt}{\sin^3 t}=\left|\begin{array}{l} u=\operatorname{tg}\dfrac{t}{2},\ \ t=2arctgu \\ dt=\dfrac{2du}{1+u^2},\sin t=\dfrac{2u}{1+u^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+u^2)^3\cdot 2du}{8u^3(1+u^2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(1+u^2)^2}{u^3}du=\frac{1}{4}\int\frac{1+2u^2+u^4}{u^3}du=\frac{1}{4}\left(\int\frac{du}{u^3}+2\int\frac{du}{u}+\int udu\right)=$$

$$=-\frac{1}{8u^2}+\frac{1}{2}\ln|u|+\frac{1}{8}u^2+C=-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+C.$$

Враховуючи знайдену первісну, дістаємо

$$l=-a\int\limits_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\frac{dt}{\sin^3 t}=-a\left(-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}=$$

$$=a\left(\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}=\frac{a}{8}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}-4\ln\frac{1}{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}=$$

$$=\frac{a}{8}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}}+4\ln\operatorname{ctg}\left|\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}\right|-1+1+0\right).$$

Оскільки $ctg\dfrac{t}{2}=\dfrac{1+\cos t}{\sin t}=\dfrac{1}{\sin t}+ctgt=\dfrac{\sqrt{1+tg^2t}}{tgt}+ctgt=\sqrt{ctg^2t+1}+ctgt$,

то $ctg\dfrac{arcctg2\pi}{2}=\sqrt{ctg^2(arcctg2\pi)+1}+ctg(arcctg2\pi)=\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi$.

Отже, шукана довжина дуги кривої дорівнює

$$l=\frac{a}{8}\left(\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^2-\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^2}-4\ln\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)\right)=$$

$$=a\left(\frac{\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^4-1}{8\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)^2}-\ln\sqrt{\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi}\right).$$

При обчисленні довжини дуги кривої інтеграл можна знайти іншим способом. Маємо

$$l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\left|\begin{array}{ll}\varphi=\mathrm{tg}t & t=arctg\varphi\\ d\varphi=\dfrac{dt}{\cos^2 t} & \begin{array}{c|c|c}\varphi & 0 & 2\pi\\ \hline t & 0 & arctg2\pi\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=a\int_0^{\mathrm{arctg}2\pi}\sqrt{tg^2t+1}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=a\int_0^{\mathrm{arctg}2\pi}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=a\int_0^{\mathrm{arctg}2\pi}\frac{dt}{\cos^3 t}=$$

$$=a\int_0^{arctg2\pi}\frac{\cos t dt}{\cos^4 t}=a\int_0^{arctg2\pi}\frac{d\sin t}{(1-\sin t)^2(1+\sin t)^2}=a\int_0^{arctg2\pi}\frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

Враховуючи тригонометричну формулу $\sin^2 t=\dfrac{tg^2 t}{1+tg^2 t}$, маємо

$$\sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}\quad\Rightarrow,\qquad \sin(arctg2\pi)=\frac{tg(arctg2\pi)}{\sqrt{1+tg^2(arctg2\pi)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}.$$

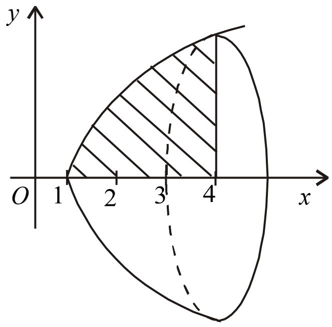
Зробивши підстановку $u=\sin t$, розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби, дістанемо

$$l=\left|\begin{array}{c}u=\sin t\\ \begin{array}{c|c|c}t & 0 & arctg2\pi\\ \hline u & 0 & \dfrac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}\end{array}\end{array}\right|=a\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}}\frac{du}{(1+u)^2(1-u)^2}=$$

$$=\frac{1}{4a}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{4a}\left(\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}}=a\left(\ln\sqrt{2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}}+\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right)$$

Приклад 5. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2=3x-3,\ x=4$.



Розв'язання. Побудувавши фігуру, обмежену параболою $y^2=3(x-1)$ та прямою $x=4$, визначимо об’єм тіла обертання цієї фігури навколо осі $0x$. Скориставшись формулою $V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, дістанемо

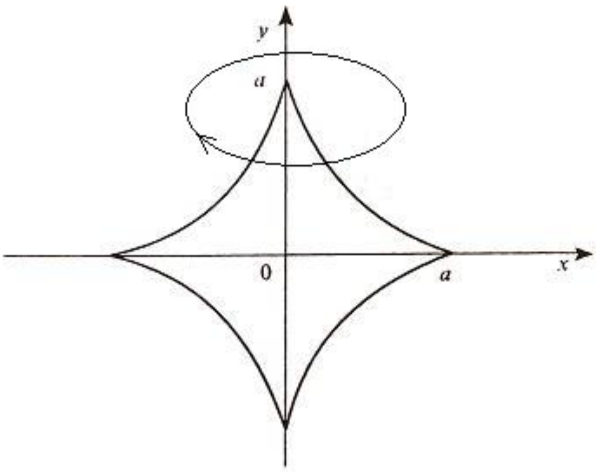
$$V=\pi\int\limits_1^4 y^2dx=3\pi\int\limits_1^4(x-1)\,dx=3\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^4=3\pi\left(8-4-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{27}{2}\pi \text{ (куб. од.)}$$

Приклад 6. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Оy астроїди $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

Розв’язання. Оскільки криву задано в параметричному вигляді, то використаємо формулу $V_y=\pi\int\limits_\alpha^\beta x^2(t)\,y'(t)\,dt$ для обчислення об’єму тіла обертання навколо осі Оy. Враховуючи, що $x^2=a^2\cos^6 t$, $y'=3a\sin^2 t\cos t$, $t_1=-\frac{\pi}{2}$, $t_2=\frac{\pi}{2}$, дістаємо

$$V=\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}a^2\cos^6 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t\,dt=3\pi a^3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^3\sin^2 t\cdot d(\sin t)=$$

$$=3\pi a^3\left(\frac{\sin^3 t}{3}-\frac{3\sin^5 t}{5}+\frac{3\sin^7 t}{7}-\frac{\sin^9 t}{9}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$



Приклад 7. Обчислити площу поверхні, яка утворюється обертанням навколо осі абсцис частини кривої $y=\sqrt{x}$ від x=0 до x=1.

Розв’язання. Для обчислення площі поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої, заданої функцією $y=f\left(x\right),\ a\le x\le b$, скористаємось формулою $P=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$, дістанемо

$$P=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{x+\frac{1}{4}}dx=\frac{4\pi}{3}(x+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}.$$

Приклад 8. Визначити величину роботи, яку потрібно виконати при переміщенні матеріальної точки від 1 метра до 3 метрів під дією сили $F(x)=2x+1$(Н).

Розв’язання. Робота по переміщенню матеріальної точки під дією сили $F(x)$ вздовж відрізка [1; 3] визначається за формулою

$$A=\int\limits_1^3(2x+1)\,dx=\left(x^2+x\right)\Big|_1^3=(3^2+3)-(1+1)=10\ \text{(Дж)}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

а) $y=x^2+2x,\ y=x+2$;   б) $y=2x-x^2,\ y=-x$;

в) $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$;   г) $y=\sqrt{x},\ y=-x+2,\ y=0$;

д) Астроїдою $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$;

е) Однією аркою циклоїди $x = a(t - sint), y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox;

є) Кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos\varphi)$;

ж) Кривою $\rho = 5\sin 3\varphi$.

2. Обчислити довжину дуги кривої:

а) $y = 2\sqrt{x}$ від точки *O(0; 0)* до *A(1; 2)*;

б) $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$;

в) Астроїди $x = 5\cos^3 t, y = 5\sin^3 t$;

г) Однієї арки циклоїди $x = a(t - sint), y = a(1 - \cos t)$;

д) Кардіоїди $\rho = a(1 - \cos\varphi)$;

е) Кривої $\rho = 2\sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

а) $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ навколо осі Ox;

б) $2y = x^2,\ \ 2x + 2y - 3 = 0$ навколо осі Ox;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2,\ \ y = 2$ навколо осі *Oy;*

г) $y^2 = 4 - x,\ \ x = 0$ навколо осі Oy;

д) Астроїдою $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ навколо осі Oy;

е) Однією аркою циклоїди $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t)$ навколо осі Ox.

Тема 25. Невласні інтеграли

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ або обчислити його, якщо це можливо.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл І роду з нескінченною верхньою межею інтегрування. За означенням дістанемо

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, даний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ або дослідити його на збіжність.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось означенням невласного інтеграла I роду з нескінченною верхньою межею інтегрування, дістанемо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^b=2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-1\right)=+\infty.$$

Таким чином, даний інтеграл є розбіжним.

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}dx$.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось означенням невласного інтеграла I роду з нескінченною верхньою межею інтегрування, маємо

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-2b}+1\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^{2b}}+1\right)=1.$$

Отже, даний невласний інтеграл збігається.

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}x\cdot e^x dx$ або дослідити його на збіжність.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось означенням невласного інтеграла I роду з нескінченною нижньою межею інтегрування, обчислимо його методом інтегрування частинами

$$\int_{-\infty}^{0}x\cdot e^x dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\cdot e^x dx=\begin{vmatrix}u=x, & du=dx\\ dv=e^x dx, & v=e^x\end{vmatrix}=\lim_{a\to-\infty}\left(x\cdot e^x\Big|_a^0-\int_a^0 e^x dx\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(x\cdot e^x-e^x)\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(0-a\cdot e^a-e^0+e^a)=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{a}{e^{-a}}-1+\frac{1}{e^{-a}}\right)=$$

$$=-1-\lim_{a\to-\infty}\frac{a'}{\left(e^{-a}\right)'}+\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{e^{-a}}=-1-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{-e^{-a}}+0=-1.$$

При обчисленні границі скористались правилом Лопіталя.

Отже, даний невласний інтеграл збігається.

Приклад 5. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$ або встановити його розбіжність.

Розв’язання. Маємо невласний інтеграл I роду з нескінченними межами інтегрування, тому розкладемо його в суму двох невласних інтегралів. Візьмемо для зручності проміжну точку $c=-1$, в якій перетворюється в нуль вираз $x+1$, отриманий після виділення повного квадрату. За означенням дістанемо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{-1}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-1}^{b}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Big|_a^{-1}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Big|_{-1}^{b}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(arctg0-arctg\frac{a+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(arctg\frac{b+1}{2}-arctg0\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+3)^4}}$.

Розв’язання. Оцінимо підінтегральну функцію при $x\to+\infty$, дістанемо

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^4}}<\frac{x}{\sqrt{x^8}}=\frac{x}{x^4}=\frac{1}{x^3},\quad 1\le x<+\infty.$$

Інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ збігається як інтеграл Діріхле при $p=3>1$. Тому за ознакою порівняння даний невласний інтеграл теж є збіжним.

Приклад 7. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{3x-2}{x^3+4x^2+5}dx$.

<u>Розв'язання.</u> Дослідимо даний інтеграл за граничною ознакою порівняння. Оскільки $f(x)=\frac{3x-2}{x^3+4x^2+5}\underset{x\to\infty}{\approx}\frac{3x}{x^3}=\frac{3}{x^2}$, то для порівняння розглянемо функцію $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Маємо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-2}{x^3+4x^2+5}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x^2}{x^3+4x^2+5}=3.$$

Відомо, що інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ збіжний (як інтеграл Діріхле при $p=2>1$), тому даний інтеграл теж збіжний.

Приклад 8. Дослідити на збіжність інтеграли

1. $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx\ \ (a>0)$; 2. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}\cos x dx\ \ (a>0)$.

<u>Розв'язання.</u> 1. Скористаємось ознакою Діріхле, розглянувши $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Умови ознаки виконуються, оскільки $\left|\int\limits_{a}^{b}\sin x dx\right|=|\cos a-\cos b|\le 2$ і функція $\frac{1}{x^2}$ монотонно спадає, прямуючи до 0 при $x\to+\infty$. Тому даний інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ збіжний.

2. Дослідимо інтеграл за ознакою Абеля, взявши $f(x)=e^{-ax}$, $g(x)=\cos x$. Оскільки інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx$ збіжний, а функція $g(x)$ обмежена: $|\cos x|\le 1$, то даний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}\cos x dx\ \ (a>0)$ збіжний.

Приклад 9. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x-1}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл II роду від необмеженої функції , оскільки функція $f(x)=\frac{1}{x-1}$ має нескінченний розрив у точці $x=1$ (нижня межа інтегрування). За означенням дістанемо

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x-1|\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1-\ln|\varepsilon|\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\varepsilon|=+\infty,$$

тобто даний інтеграл є розбіжним.

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ або дослідити його на збіжність.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл II роду від необмеженої функції в точці $x=1$. За означенням маємо

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1-\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1-\varepsilon}^e (\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(\ln x)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{\ln x}\Big|_{1-\varepsilon}^e=2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\ln e}-\sqrt{\ln(1-\varepsilon)}\right)=2(1-0)=2.$$

Отже, даний інтеграл збігається і дорівнює 2.

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^4}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)=\frac{1}{x^4}$ має розрив II роду в точці $x=0$, то маємо невласний інтеграл II роду (від необмеженої функції). За означенням маємо

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x^3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^3}-\frac{1}{3}=+\infty.$$

Отже, даний інтеграл розбігається.

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ або встановити його розбіжність.

Розв’язання. Маємо невласний інтеграл II роду від необмеженої функції в точці $x=2$ (верхня межа). За означенням дістанемо

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_1^{2-\varepsilon} (2-x)^{-\frac{1}{3}} d(2-x) =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(2-x)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^{2-\varepsilon} = -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt[3]{(2-x)^2}\Big|_1^{2-\varepsilon} = -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt[3]{\varepsilon^2}-1) = \frac{3}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Приклад 13. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Розв’язання. Оскільки функція $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ має нескінченний розрив у точці $x=1$, яка належить проміжку інтегрування $[0;3]$, то маємо невласний інтеграл II роду. За означенням дістанемо

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty+\infty = +\infty.$$

Отже, даний інтеграл є розбіжним.

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2-6x+8}$ або встановити його розбіжність.

Розв’язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2-6x+8}=\frac{1}{(x-2)(x-4)}$ має нескінченний розрив у точці $x=2\in[1;3]$, тому маємо невласний інтеграл II роду. Даний інтеграл розкладається в суму двох невласних інтегралів і є збіжним тільки тоді, коли збігаються обидва інтеграли. Дістанемо

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)(x-4)} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)(x-4)} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)(x-4)} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-2)(x-4)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2}\right) dx + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\Bigg|_0^{2-\varepsilon} + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon}^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{-\varepsilon-2}{-\varepsilon}\right| - \ln\left|\frac{-4}{-2}\right|\right) + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{-1}{1}\right| - \ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|1+\frac{2}{\varepsilon}\right| - \ln 2\right) + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1 - \ln\left|1-\frac{2}{\varepsilon}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{\searrow +\infty} - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)}_{\searrow +\infty}.$$

Обидва невласні інтеграли, на які було розкладено даний інтеграл, є розбіжними (оскільки відповідні границі нескінченні). Тому даний інтеграл теж є розбіжним.

Приклад 15. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx$.

Розв’язання. Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}$ має нескінченний розрив у точці $x=0$, то маємо невласний інтеграл II роду. Дослідимо його за ознакою порівняння, розглянувши функцію $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки $\frac{1}{x^3+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, а інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ є збіжним ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), то даний інтеграл також є збіжним.

Приклад 16. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x}} dx$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція неперервна в усіх точках проміжку (0;1], а в точці $x=0$ має нескінченний розрив. Тому маємо невласний інтеграл II роду, для якого спочатку знайдемо первісну, тобто розглянемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int\frac{(2x+\cos x)dx}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\int(x^2+\sin x)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+\sin x)=\begin{vmatrix}t=x^2+\sin x\\dt=2x+\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x^2+\sin x}+C\,.$$

Даний невласний інтеграл II роду знайдемо за означенням, дістанемо

$$\int_0^1\frac{(2x+\cos x)}{\sqrt{x^2+\sin x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{(2x+\cos x)}{\sqrt{x^2+\sin x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}2\sqrt{x^2+\sin x}\Big|_\varepsilon^1=$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sqrt{1+\sin1}-\sqrt{\varepsilon^2+\sin\varepsilon}\right)=2\sqrt{1+\sin1}\,.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 17. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\ln x}$.

Розв'язання. Функція $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ має точку розриву II роду x = 1, тому даний інтеграл є невласним інтегралом другого роду. Оскільки $\frac{\ln x}{x-1}\to1$ при $x\to$ 1, то функція $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ є нескінченно великою порядку $\lambda=1$.

Отже, інтеграл розбіжний за ознакою Коші.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити невласні інтеграли або установити їх розбіжність

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$, 2) $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$, 3) $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-\frac{x}{2}}dx$,

4) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\left(2x+1\right)^3}$, 5) $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3x}$, 6) $\int\limits_5^{\infty}\frac{dx}{x^2-4}$,

7) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6}$, 8) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\left(x+1\right)dx}{x^2+2x+10}$, 9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+5}$.

2. Обчислити невласні інтеграли або установити їх розбіжність

1) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$, 2) $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{(x-2)^3}$, 3) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(2x-1)^2}$,

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{\cos^2 x}dx$, 5) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg} xdx$, 6) $\int\limits_{0}^{2}\frac{\ln^4(2-x)dx}{2-x}$,

7) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, 8) $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{x^2-5x+6}$, 9) $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-x-2}$.

3. Дослідити на збіжність інтеграли

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$, 2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos^2 xdx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 3) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

Розділ VII. Диференціальні рівняння.
Тема 26. Диференціальні рівняння першого порядку

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(1+y^2)dx + xydy = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними виду $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$, де $P_1(x)=1,$ $P_2(y)=1+y^2,$ $Q_1(x)=x,$ $Q_2(y)=y$. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$xydy = -(1+y^2)dx.$$

Для розв'язання цього рівняння потрібно зробити так, щоб при dy була функція, яка залежить тільки від y, а при dx – функція від x. Поділимо обидві частини рівняння на $x(1+y^2), x\neq 0,$ дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{ydy}{1+y^2}=-\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини цього рівняння

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=-\int\frac{dx}{x},\quad \frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=-\ln|x|+\ln|C_1|,\quad \frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|,$$

де довільну сталу для зручності записали у вигляді $\ln|C|$. Звідси маємо

$$\ln\left(1+y^2\right)=2\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|,\qquad \ln\left(1+y^2\right)=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|,\qquad 1+y^2=\frac{C}{x^2}.$$

Тоді загальний розв'язок (загальний інтеграл) даного рівняння має вигляд

$$x^2\left(1+y^2\right)=C.$$

Враховуючи, що $y^2=\dfrac{C-x^2}{x^2}$, дістанемо $y=\pm\dfrac{\sqrt{C-x^2}}{x}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x\left(y^2-5\right)dx+ydy=0$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Для його розв'язання залишимо зліва вираз, який залежить тільки від y, а справа – вираз, який залежить тільки від x:

$$ydy=-x\left(y^2-5\right)dx.$$

Розділивши обидві частини рівняння на $y^2-5\neq 0$, дістанемо

$$\frac{ydy}{y^2-5}=-xdx.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівняння, знаходимо

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-5\right|=-\frac{x^2}{2}+C_1,\ \ln\left|y^2-5\right|=-x^2+\ln|C|,$$

$$y^2-5=Ce^{-x^2}.$$

Загальний розв'язок даного рівняння можна записати у вигляді

$$y=\pm\sqrt{Ce^{-x^2}+5}.$$

При розв'язанні рівняння ми припускали, що $y^2-5\neq 0$. Переконуємось, що ми не втратили при цьому розв'язків. Значення $y=\pm\sqrt{5}$ є розв'язками даного рівняння, які можна отримати із загального розв'язку при $C=0$.

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$$

Розв'язання. Покажемо, що дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, маємо

$$(x^2y+y)dy=\sqrt{4+y^2}dx, \qquad y(x^2+1)dy=\sqrt{4+y^2}dx.$$

Помноживши рівняння на функцію $\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{4+y^2}}$, дістанемо

$$\frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}}=\frac{dx}{x^2+1}.$$

Оскільки в лівій частині останнього рівняння вираз залежить тільки від y, а справа – тільки від x, то це рівняння можна проінтегрувати. Маємо

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}}=\int\frac{dx}{x^2+1}, \qquad \int\frac{d(4+y^2)}{2\sqrt{4+y^2}}=\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Тоді загальний розв'язок (інтеграл) даного рівняння має вигляд

$$\sqrt{4+y^2}=arctgx+C \quad \text{або} \quad y=\pm\sqrt{(arctgx+C)^2-4}.$$

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$y^2dx+x^2dy=x^2ydy-xy^2dx.$$

Розв'язання. Провівши перетворення, дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$(x^2-x^2y)dy=(-y^2-xy^2)dx, \qquad x^2(1-y)dy=-y^2(1+x)dx.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на вираз x^2y^2, припускаючи, що $x,y\neq 0$. Маємо

$$\frac{y-1}{y^2}dy=\frac{x+1}{x^2}dx.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо

$$\int \frac{y-1}{y^2}dy = \int \frac{x+1}{x^2}dx, \qquad \int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx,$$

звідки маємо загальний розв'язок (інтеграл)

$$\ln|y| + \frac{1}{y} = \ln|x| - \frac{1}{x} + C, \text{ або } \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{x+y}{xy} = C.$$

У процесі розв'язання ми припустили, що $x, y \neq 0$. Виявляється, що $x = 0$ і $y = 0$ є розв'язками рівняння, які не можна отримати із загального інтеграла при жодному значенні C. Отже, розв'язки $x = 0$ і $y = 0$ є особливими розв'язками даного рівняння.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x + xy^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$.

<u>Розв'язання</u>. У даному рівнянні можна відокремити змінні, винісши за дужки спільні множники. Дістанемо

$$x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де

$$P(x,y) = P_1(x)P_2(y) = x(1+y^2), \;\; Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y) = (1+x^2)y.$$

Запишемо це рівняння у вигляді $y(1+x^2)dy = x(1+y^2)dx$ і поділимо обидві частини рівняння на $(1+x^2)(1+y^2)$, при цьому $1+x^2 \neq 0, 1+y^2 \neq 0$. Дістанемо

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{1+x^2},$$

звідки маємо

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{2ydy}{1+y^2} = \int \frac{2xdx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2},$$

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln C, C > 0, \qquad 1+y^2 = C(1+x^2).$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = \pm\sqrt{C(1+x^2)-1}.$$

Приклад 6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = (2x+1)e^{-y}$ за умови, що $y(1) = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинний розв'язок рівняння, тобто розв'яжемо задачу Коші. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними виду $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, в якому $f_1(x) = 2x+1,\ \ f_2(y) = e^{-y}$

Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{e^y}$. Відокремлюємо змінні та інтегруємо одержане рівняння $e^y dy = (2x+1)dx$, дістаємо

$$\int e^y dy = \int (2x+1)dx, \qquad e^y = x^2 + x + C,$$

звідки $y = \ln(x^2 + x + C)$ – загальний розв'язок рівняння.

Використовуючи початкову умову $y(1) = 0$, знаходимо сталу *C*:

$$0 = \ln(1+1+C), \quad \ln(2+C) = 0, \quad 2+C = 1, \quad C = -1.$$

Дістаємо частинний розв'язок рівняння $y = \ln(x^2 + x - 1)$.

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $dy + y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0$ за умови, що $y(\pi) = 2$.

Розв'язання. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними, для якого розв'яжемо задачу Коші. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння, дістанемо

$$dy + y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0, \qquad dy = -y\,\mathrm{tg}\,x\,dx, \qquad \frac{dy}{y} = -\,\mathrm{tg}x\,dx,\ y \neq 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad \ln|y| = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \qquad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|,$$

звідки $y = C \cdot \cos x$ – загальний розв'язок рівняння.

Використовуючи початкову умову $y(\pi) = 2$, знаходимо сталу *C*:

$$2 = C \cdot \cos\pi = -C, \qquad C = -2.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = -2\cos x$.

Приклад 8. . Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$, права частина якого $f(x, y) = \frac{y^2 + xy}{x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, тому що

$$f(tx, ty) = \frac{(ty)^2 + tx \cdot ty}{(tx)^2} = \frac{t^2(y^2 + xy)}{t^2 x^2} = \frac{y^2 + xy}{x^2} = f(x, y) = t^0 f(x, y).$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Використаємо підстановку $z = \frac{y}{x}$, тоді $y = zx,\, y' = z'x + z$, після чого задане диференціальне рівняння зведеться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дістанемо

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}, \qquad z'x + z = z^2 + z, \qquad z'x = z^2,$$

$$x\frac{dz}{dx} = z^2, \qquad xdz = z^2 dx \left| \cdot \frac{1}{xz^2}, x \neq 0, z \neq 0, \right. \qquad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}, \qquad -\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln|C|, C \neq 0, z = -\frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Зробивши заміну $z = \frac{y}{x}$, дістанемо $\frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln|Cx|}$, звідки маємо загальний розв'язок рівняння $y = -\frac{x}{\ln|Cx|}$.

Зауважимо, що $x \neq 0$ за умовою задачі. Оскільки в процесі розв'язання ми припускали, що $z \neq 0$, тобто $y \neq 0$, то могли загубити розв'язок. Підставивши $y = 0$ в задане рівняння, переконуємось, що $y = 0$ – особливий розв'язок рівняння, оскільки його не можна отримати із загального розв'язку.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$.

Розв’язання. Функції $M(x,y)=x^2+y^2$, $N(x,y)=xy$ є однорідними функціями виміру $k=2$, оскільки

$$M(tx,ty)=t^2x^2+t^2y^2=t^2(x^2+y^2)=t^2M(x,y),$$

$$N(tx,ty)=tx\cdot ty=t^2xy=t^2N(x,y).$$

Отже, задане диференціальне рівняння є однорідним.

Використаємо підстановку $z=\frac{y}{x}$, звідки $y=zx,\ dy=zdx+xdz$, тоді дане диференціальне рівняння зведеться до рівняння з відокремлюваними змінними

$$(x^2+z^2x^2)dx+x\cdot zx(zdx+xdz)=0,$$

$$x^2(1+z^2)dx+x^2(z^2dx+xzdz)=0,\qquad dx+z^2dx+z^2dx+xzdz=0,$$

$$xzdz=-(1+2z^2)dx,\qquad \frac{zdz}{1+2z^2}=-\frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши рівняння, дістанемо

$$\int\frac{zdz}{1+2z^2}=-\int\frac{dx}{x},\qquad \frac{1}{4}\int\frac{d(1+2z^2)}{1+2z^2}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln(1+2z^2)=-\ln|x|+\ln|C_1|,\qquad \ln(1+2z^2)=4\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|,$$

$$1+2z^2=\frac{C}{x^4}\qquad z^2=\frac{C-x^4}{2x^4}.$$

Зробивши заміну $z=\frac{y}{x}$, дістанемо $y^2=\frac{C-x^4}{2x^2}$, звідки маємо загальний розв’язок рівняння $y=\pm\sqrt{\frac{C-x^4}{2x^2}}$.

Приклад 10. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

Розв’язання. Маємо однорідне диференціальне рівняння вигляду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Зробимо заміну $z=\frac{y}{x}$, тоді $y=zx,\ y'=z'x+z$. Тоді задане рівняння набуває вигляду

$$z'x+z=\frac{1}{z}+z,\qquad z'x=\frac{1}{z}.$$

Відокремимо змінні та розв'яжемо останнє рівняння, дістанемо

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{1}{z}, \quad zdz=\frac{dx}{x}, \quad \int zdz=\int\frac{dx}{x}, \quad \frac{z^2}{2}=\ln|x|+\ln|C|, \;\; z^2=2\ln|Cx|.$$

Повернемося до змінної y, використавши заміну $z=\frac{y}{x}$. Дістанемо загальний розв'язок даного рівняння

$$y^2=2x^2\ln|Cx| \quad \text{або} \quad y=\pm\sqrt{2x^2\ln|Cx|}, C\neq 0.$$

Приклад 11. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$ за умови, що $y(3)=4$.

Розв'язання. Розв'яжемо задане рівняння відносно похідної:

$$y'=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \quad y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y}{x}}.$$

Дістали однорідне рівняння диференціальне вигляду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Зробимо заміну $z=\frac{y}{x}$, тоді $y=zx,\ y'=z'x+z$. Тоді задане рівняння набуває вигляду

$$z'x+z=z+\sqrt{z^2+1},$$

звідки дістаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z'x=\sqrt{z^2+1}, \qquad \frac{dz}{dx}x=\sqrt{z^2+1}, \quad \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}=\frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши рівняння, дістанемо

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}=\int\frac{dx}{x}, \quad \ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|=\ln|x|+\ln|C|, \;\; z+\sqrt{z^2+1}=Cx.$$

Повернемося до змінної y, використавши заміну $z=\frac{y}{x}$. Дістанемо

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=Cx.$$

Тоді загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$$

Використаємо початкову умову $y(3)=4$. Оскільки $4+\sqrt{9+16}=9C$, то $9C=9$, звідки маємо $C=1$. Отже, частинний розв'язок, який задовольняє задану початкову умову має вигляд

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2.$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'+\dfrac{y}{x}=x$.

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння є лінійним рівнянням виду $y'+p(x)y=q(x)$. Розв'яжемо його методом Бернуллі, тобто розв'язок подамо у вигляді функції $y=u\cdot v$, де $u=u(x), v=v(x)$, тоді $y'=u'v+uv'$. Підставимо вирази y та y' в дане рівняння, дістанемо

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=x \quad \Rightarrow \quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=x.$$

Прирівнявши до нуля вираз в дужках $v'+\dfrac{v}{x}=0$, з останнього рівняння дістанемо $u'v=x$. Розв'яжемо перше з двох одержаних рівнянь, дістанемо

$$v'+\frac{v}{x}=0, \qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x} \qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=-\ln|x|, \qquad \ln|v|=\ln\left|\frac{1}{x}\right| \qquad v=\frac{1}{x} \text{ (C=0).}$$

Підставимо функцію v в друге рівняння і розв'яжемо його:

$$u'v=x, \qquad \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=x, \quad du=x^2dx, \quad u=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння

$$y=uv=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)\frac{1}{x}=\frac{x^2}{3}+\frac{C}{x}.$$

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos x}{x}$.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку, де $p(x)=\dfrac{1}{x}$, $q(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. Розв'яжемо його методом Бернуллі, для цього розв'язок подамо у вигляді функції $y = u \cdot v$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставивши вирази y та y' в рівняння, дістанемо

$$u'v + uv' + \frac{1}{x} \cdot uv = \frac{\cos x}{x}, \qquad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\cos x}{x}.$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз в дужках $v' + \frac{v}{x} = 0$, тоді останнє рівняння набуває вигляду $u'v = \frac{\cos x}{x}$. Таким чином, дістали два рівняння з відокремленими змінними $v' + \frac{v}{x} = 0$ і $u'v = \frac{\cos x}{x}$. Розв'яжемо перше рівняння

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Зазначимо, що при знаходженні функції v вважаємо сталу $C = 0$. Підставимо $v = \frac{1}{x}$ в друге рівняння, дістанемо

$$u'v = \frac{\cos x}{x}, \quad u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x}, \quad u' = \cos x, \quad u = \sin x + C.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння $y = uv = (\sin x + C)\frac{1}{x} = \frac{\sin x + C}{x}$.

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}y = x\left(x^2+1\right)$.

Розв'язання. Розділивши обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x^2+1}$, який стоїть при y', дістанемо лінійне рівняння $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$ і розв'яжемо його методом Бернуллі. Зробимо підстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ і підставимо вирази y та y' в дане рівняння, дістанемо

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = x\sqrt{x^2+1}.$$

Поклавши в останньому рівнянні $v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0$, дістанемо $u'v = x\sqrt{x^2+1}$.

Розв'яжемо перше з двох одержаних рівнянь, дістанемо

$$v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{x^2+1}, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2xdx}{x^2+1},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \qquad \ln|v| = \ln(x^2+1), \qquad v = x^2+1.$$

Підставимо функцію v в друге рівняння і розв'яжемо його:

$$u'v = x\sqrt{x^2+1}, \qquad (x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}, \qquad du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$u = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння $y = uv = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1)$.

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'\cos^2 x + y = tgx$.

Розв'язання. Розділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 x$, дістанемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\cos^2 x}.$$

Розв'яжемо рівняння методом Бернуллі, тобто розв'язок подамо у вигляді функції $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Дістанемо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\cos^2 x}, \qquad u'v + u\left(v' + \frac{v}{\cos^2 x}\right) = \frac{tgx}{\cos^2 x}.$$

В останньому рівнянні вираз в дужках прирівнюємо до нуля, в результаті чого дістаємо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{\cos^2 x} = 0, \\ u'v = \dfrac{tgx}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо перше з цих рівнянь, маємо

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{\cos^2 x},\quad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{\cos^2 x},\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{\cos^2 x},\quad \ln|v|=-\operatorname{tg}x,\quad v=e^{-\operatorname{tg}x}.$$

Підставивши функцію $v=e^{-\operatorname{tg}x}$ в друге рівняння, знайдемо функцію u:

$$u'e^{-\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x},\qquad u'=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}e^{\operatorname{tg}x},\qquad du=\frac{\operatorname{tg}x\cdot e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx,$$

$$u=\int\frac{\operatorname{tg}x\cdot e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{array}\right|=\int t\cdot e^t dt=\left|\begin{array}{ll} u=t & du=dt \\ dv=e^t dt & v=e^t\end{array}\right|=te^t-\int e^t dt=$$

$$=e^t(t-1)+C=e^{\operatorname{tg}x}(\operatorname{tg}x-1)+C.$$

Таким чином, загальний розв’язок даного рівняння має вигляд

$$y=uv=\left(e^{\operatorname{tg}x}(\operatorname{tg}x-1)+C\right)e^{-\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}x-1+Ce^{-\operatorname{tg}x}.$$

Приклад 16. Розв’язати задачу Коші для рівняння $y'+y\cos x=\sin x\cos x$ за умови, що $y(0)=-1$.

<u>Розв’язання.</u> Задане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням виду. Розв’язок шукаємо методом Бернуллі, тобто у вигляді $y=uv$. Тоді $y'=u'v+uv'$. Дістанемо

$$u'v+uv'+\cos x\cdot uv=\sin x\cos x,\quad u'v+u(v'+\cos x\cdot v)=\sin x\cos x.$$

Визначаємо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тоді з даного рівняння дістаємо два диференціальних рівняння з відокремлюваними змінними

$$v'+v\cos x=0,\qquad u'v=\sin x\cos x.$$

Розв’яжемо перше рівняння

$$\frac{dv}{dx}=-v\cos x,\quad \frac{dv}{v}=-\cos x dx,\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\cos x dx,\quad \ln|v|=-\sin x+C.$$

Оскільки $C=0$, то $v=e^{-\sin x}$. Підставимо функцію $v(x)$ в друге рівняння і розв’яжемо його:

$$u'v=\sin x\cos x,\quad u'e^{-\sin x}=\sin x\cos x,\quad \frac{du}{dx}=\sin x\cos x e^{\sin x},$$

$$du=\sin x\cos x e^{\sin x}dx,\quad u=\int\sin x\cos x\, e^{\sin x}dx.$$

Нехай $\sin x = z, \quad dz = \cos x dx.$ Тоді дістанемо інтеграл, який знаходимо методом інтегрування частинами:

$$\int ze^z dz = \begin{vmatrix} u_1 = z, & du_1 = dz, \\ dv_1 = e^z dz, & v_1 = e^z \end{vmatrix} = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + C.$$

Отже, $$u = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

Оскільки $y = uv$, то маємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \left(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right)e^{-\sin x}, \quad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Використаємо початкову умову для знаходження сталої C. Маємо: $-1 = \sin 0 - 1 + Ce^{\sin 0}, \quad C = 0.$ Таким чином, розв'язок задачі Коші для заданого рівняння має вигляд

$$y = \sin x - 1.$$

Приклад 17. Розв'язати задачу Коші за умови $y(0) = \ln 2$ для рівняння $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння, виділивши похідну шуканої функції, дістанемо

$$(1-x)dy = (xy - y + e^{-x})dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1) + e^{-x}}{1-x}, \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1-x}{1-x}y = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$, розв'язок якого знайдемо методом Бернуллі, тобто у вигляді $y = uv$. Оскільки $y' = u'v + uv',$ то

$$u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x}, \qquad u'v + u(v' + v) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Знайдемо функцію $v(x)$ з умови $v' + v = 0$, маємо

$$\frac{dv}{dx} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int dx, \quad \ln|v| = -x, \quad v = e^{-x}.$$

Підставимо функцію $v(x)$ у рівняння $u'v = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$, знайдемо $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x}, \quad du = \frac{dx}{1-x}, \quad \int du = \int \frac{dx}{1-x},$$

$$u=-\ln|1-x|+\ln C,\quad u=\ln\frac{C}{|1-x|},\, C>0.$$

Тоді $y=uv=e^{-x}\ln\dfrac{C}{|1-x|}$ є загальним розв'язком даного рівняння. Враховуючи початкову умову $y(0)=\ln 2$, знайдемо сталу C, маємо

$$\ln 2=1\cdot\ln C,\; C=2.$$

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y=e^{-x}\ln\dfrac{2}{|1-x|}$.

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(2x-y)y'=1$.

Розв'язання. Задане рівняння не є лінійним по y тому, що воно містить добуток yy'. Воно не є ні однорідним, ні рівнянням з відокремлюваними змінними. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y'=\frac{1}{2x-y},\quad 2x-y\neq 0.$$

В останньому рівнянні розглянемо функцію $x=x(y)$. Оскільки $x'=\dfrac{1}{y'}$, то дане рівняння має вигляд $x'=2x-y$, звідки дістаємо лінійне диференціальне рівняння відносно x:

$$x'-2x=-y.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно змінної y методом Бернуллі, тобто розв'язок подамо у вигляді функції $x=u\cdot v$, де $u=u(y), v=v(y)$. Тоді $x'=u'v+uv'=\dfrac{du}{dy}v+\dfrac{dv}{dy}u$. Дістанемо

$$u'v+uv'-2uv=-y\;,\qquad u'v+u(v'-2v)=-y.$$

Вибираємо функцію $v(y)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто $v'-2v=0$. Тоді задане рівняння матиме вигляд $u'v=-y$. Розв'язавши рівняння $v'-2v=0$, дістанемо функцію $v=v(y)$

$$\frac{dv}{dy}=2v\ ,\qquad \frac{dv}{v}=2dy,\qquad \int\frac{dv}{v}=2\int dy,\qquad \ln|v|=2y\ ,\qquad v=e^{2y}.$$

Підставимо знайдену функцію $v(y)$ в отримане рівняння $u'v=-y$. Маємо

$$u'e^{2y}=-y\ ,\ \ \frac{du}{dy}=-ye^{-2y}\ ,\qquad du=-ye^{-2y}dy\ ,\qquad u=-\int ye^{-2y}dy\ .$$

Обчислимо останній інтеграл методом інтегрування частинами

$$u=-\int ye^{-2y}dy=\left|\begin{matrix} u_1=y,\ dv_1=e^{-2y}dy, \\ du_1=dy, v_1=-\frac{1}{2}e^{-2y} \end{matrix}\right|=\frac{y}{2}e^{-2y}-\frac{1}{2}\int e^{-2y}dy=$$

$$=\frac{y}{2}e^{-2y}+\frac{1}{4}e^{-2y}+C=\frac{1}{4}e^{-2y}(2y+1)+C.$$

Підставивши знайдені функції $u=u(y),v=v(y)$ функцію $x=x(y)$, маємо

$$x=\left(\frac{1}{4}e^{-2y}(2y+1)+C\right)e^{2y}.$$

Отже, загальним розв’язком заданого рівняння є функція

$$x=\frac{1}{4}(2y+1)+Ce^{2y}.$$

Приклад 19. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'+\frac{y}{x}=e^{x^2}$ методом Лагранжа. Розв’язати задачу Коші за умови, що $y(1)=e$.

Розв’язання. Задане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням виду $y'+p(x)y=q(x)$, оскільки $q(x)\not\equiv 0$. Розв’яжемо це рівняння методом Лагранжа (варіації довільної сталої), для цього спочатку знайдемо розв’язок відповідного однорідного рівняння $y'+p(x)y=0$. Маємо

$$y'+\frac{y}{x}=0\ ,\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},\qquad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\ ,$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}\ ,\qquad \ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|.$$

Тоді загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $y = \dfrac{C}{x}$. Розв’язок даного неоднорідного рівняння знайдемо, вважаючи, що $C = C(x)$ є функцією від x, тобто $y = \dfrac{C(x)}{x}$. Знайдемо похідну

$$y' = \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Підставивши вирази y та y' в задане рівняння, дістанемо

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = e^{x^2}, \qquad C'(x) = xe^{x^2},$$

звідки маємо

$$C(x) = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{e^{x^2}}{2} + C_1 .$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у розв’язок неоднорідного рівняння $y = \dfrac{C(x)}{x}$, дістанемо загальний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{C_1}{x}.$$

Використаємо початкову умову $y(1) = e$ для знаходження сталої. Оскільки $e = \dfrac{e}{2} + C_1$, то $C_1 = \dfrac{e}{2}$. Таким чином, частинний розв’язок заданого рівняння має вигляд

$$y = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e}{2x} = \frac{e^{x^2} + e}{2x}.$$

Приклад 20. Знайти загальний розв’язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = xy^4$.

<u>Розв’язання.</u> Маємо рівняння Бернуллі, яке розв’яжемо методом Бернуллі. Зробимо підстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ і підставимо вирази y та y' в дане рівняння, дістанемо

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=xu^4v^4,\qquad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=xu^4v^4.$$

Поклавши в останньому рівнянні $v'+\frac{v}{x}=0$, дістанемо $u'v=xu^4v^4$. Розв'яжемо перше з двох одержаних рівнянь, дістанемо

$$v'+\frac{v}{x}=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}=0\Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln v=-\ln x\Rightarrow v=\frac{1}{x}.$$

Підставимо знайдену функцію v у друге рівняння, маємо

$$u'v=xu^4v^4\Rightarrow u'\frac{1}{x}=x\frac{u^4}{x^4}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{u^4}{x^2}\Rightarrow\frac{du}{u^4}=\frac{dx}{x^2}\ ,$$

$$-\frac{1}{3u^3}=-\frac{1}{x}+C\Rightarrow\frac{1}{u^3}=\frac{3(1-Cx)}{x}\Rightarrow u=\sqrt[3]{\frac{x}{3(1-Cx)}}.$$

Отже, розв'язок даного рівняння $y=uv=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{3(1-Cx)}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3x^2(1-Cx)}}$.

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння $xy'-2y-x^2\sqrt{y}=0$.

Розв'язання. Поділивши рівняння на $x\neq 0$, дістанемо рівняння $y'-\frac{2}{x}y=x\sqrt{y}.$ Це рівняння Бернуллі ($k=1/2$). Розв'яжемо його методом Бернуллі, тобто розв'язок шукаємо у вигляді $y=uv$, тоді $y'=u'v+uv'$. Маємо

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=x\sqrt{uv},\quad u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=x\sqrt{uv}.$$

Покладемо $v'-\frac{2}{x}v=0$, тоді останнє рівняння має вигляд $u'v=x\sqrt{uv}$.

Розв'яжемо перше рівняння:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v=0,\quad\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},\quad\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},\quad\ln|v|=2\ln|x|+C.$$

Оскільки $C=0$, то $v=x^2$. Тоді друге рівняння набуває вигляду $u'x^2=x\sqrt{ux^2}$. Розв'язавши це рівняння

$$\frac{du}{dx}=\sqrt{u},\ \frac{du}{\sqrt{u}}=dx,\quad\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int dx,\quad 2\sqrt{u}=x+C,\quad u=\left(\frac{x+C}{2}\right)^2,$$

дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння $y = u \cdot v = \dfrac{x^2(x+C)^2}{4}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $ydx + xdy = xydy - xydx$. б) $\sqrt{x}dx + xdy = xy^2dy - \sqrt{x}ydx$.

в) $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$. г) $\sqrt{5+y^2}dx + 4\left(x^2y + y\right)dy = 0$.

д) $x\sqrt{3+y^2}dx - y\sqrt{2+x^2}dy = 0$. е) $\left(2xy + 3y\right)y' = 1 - y^2$.

є) $\left(y + xy\right)y' + (x - xy) = 0$. ж) $\left(y^2 + xy^2\right)y' + x^2 - yx^2 = 0$.

2. Розв'язати задачу Коші:

а) $\sqrt{xy}dx + x^2ydy = 0,\ y(1) = 1$. б) $(1+e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1$.

в) $\dfrac{y}{x}y' + e^y = 0,\ y(1) = 0$. г) $y'\operatorname{tg} x = y + 1,\ y(\pi/2) = 1$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $xdy - ydx = ydy$. б) $xy' = 2\left(y - \sqrt{xy}\right)$.

в) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. г) $xy' = y - y\ln\dfrac{x}{y}$.

д) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$. е) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{2y}{x}$.

4. Розв'язати задачу Коші:

а) $2y'\left(x^2 + y^2\right) = \left(y^2 + 2x^2\right),\ y(1) = 1$. б) $y' = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{y}{x}\right),\ y(1) = 1$.

в) $y - 2x + y'\left(x + 2y\right) = 0.\ y(1) = 2$ г) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x},\ y(1) = -1$.

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь (методом Бернуллі)

а) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. б) $xy' + y = e^x$.

в) $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$. г) $y' = y\operatorname{tg} x + \cos x$.

д) $xy' - (x+1)y = x^2(1-x)$. е) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$.

6. Розв'язати задачу Коші:

а) $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$. б) $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1$.

7. Розв'язати диференціальні рівняння методом Лагранжа:

а) $xy' + y = x\sin x$. б) $2xy' - y = 3x^2$.

8. Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі

а) $y' + 2xy = 2x^3y^3$. б) $y' + y = x\sqrt{y}$.

Тема 27. Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння, що допускають пониження порядку

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = e^{3x}.$$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку вигляду $y'' = f(x)$, тому

$$\frac{dy'}{dx} = e^{3x}, \quad dy' = e^{3x}dx, \quad \int dy' = \int e^{3x}dx, \quad y' = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1, \quad dy = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + C_1\right)dx, \quad \int dy = \frac{1}{3}\int e^{3x}dx + C_1\int dx.$$

Отже, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = \frac{1}{9}e^{3x} + C_1x + C_2.$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y''' = 24x$ при заданих початкових умовах $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$.

Розв'язання. Проінтегруємо задане рівняння послідовно

$$y'' = 24\int x dx = 12x^2 + C_1.$$

Використовуючи умову $y''(0) = 2$, з останнього рівняння дістаємо $C_1 = 2$, звідки маємо $y'' = 12x^2 + 2$. Тоді

$$y' = 12\int x^2 dx + 2\int dx = 4x^3 + 2x + C_2.$$

Використовуючи умову $y'(0) = 1$, з цього рівняння маємо $C_2 = 1$, тобто

$$y' = 4x^3 + 2x + 1.$$

Звідси дістаємо

$$y = 4\int x^3 dx + 2\int x dx + \int dx = x^4 + x^2 + x + C_3.$$

Використовуємо умову $y(0) = 0$, маємо $C_3 = 0$. Таким чином, розв'язком задачі Коші для даного рівняння при заданих початкових умовах є функція

$$y = x^4 + x^2 + x.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''' = \sin^2 x \cos x$ при заданих початкових умовах $y(0) = 1,\ y'(0) = 1/9,\ y''(0) = 0.$

Розв'язання. Задано диференціальне рівняння третього порядку, яке не містить функції y та її похідних y', y''. Понизимо порядок рівняння, маємо

$$\frac{dy''}{dx} = \sin^2 x \cos x, \quad dy'' = \sin^2 x \cos x dx, \quad y'' = \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C_1.$$

Враховуючи початкову умову $y''(0) = 0$, знаходимо

$$0 = \frac{\sin^3 0}{3} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{\sin^3 x}{3}.$$

Отримали диференціальне рівняння другого порядку, маємо

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\sin^3 x}{3} \quad \Rightarrow \quad y' = \int \frac{\sin^3 x}{3} dx = \frac{1}{3}\int \sin^2 x \sin x dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x\right) + C_2 = \frac{1}{9}\left(\cos^3 x - 3\cos x\right) + C_2.$$

Оскільки $y'(0) = \dfrac{1}{9}$, то

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\left(\cos^3 0-3\cos 0\right)+C_2 \quad\Rightarrow\quad 1=-2+9C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=1/3.$$

Отримали диференціальне рівняння першого порядку

$$y'=\frac{1}{9}\left(\cos^3 x-3\cos x\right)+\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$y=\frac{1}{9}\int\cos^2 x\cos x dx-\frac{1}{3}\int\cos x dx+\frac{1}{3}\int dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}x+C_3=$$

$$=\frac{1}{9}\sin x-\frac{\sin^3 x}{27}-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}x+C_3==-\frac{2}{9}\sin x-\frac{1}{27}\sin^3 x+\frac{1}{3}x+C_3.$$

Враховуючи початкову умову $y(0)=1$, маємо

$$1=-\frac{2}{9}\sin 0-\frac{1}{27}\sin^3 0+0+C_3 \quad\Rightarrow\quad C_3=1.$$

Отже, частинний розв’язок даного диференціального рівняння, який задовольняє дані початкові умови, має вигляд

$$y=-\frac{2}{9}\sin x-\frac{1}{27}\sin^3 x+\frac{1}{3}x+1.$$

Приклад 4. Розв’язати диференціальне рівняння $y''=\dfrac{y'}{1+x}$.

Розв’язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить y, тобто вигляду $F(x,y',y'')=0$. Зробимо заміну:

$$y'=p(x), \quad y''=p'(x).$$

Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$p'=\frac{p}{1+x}, \quad \frac{dp}{p}=\frac{dx}{1+x} \qquad \ln|p|=\ln|1+x|+\ln C_1,$$

$$p=C_1\left(1+x\right), \quad y'=C_1\left(1+x\right), \quad y=\int C_1\left(1+x\right)dx.$$

Знайдемо загальний розв’язок ДР другого порядку:

$$y=C_1\left(x+\frac{x^2}{2}\right)+C_2.$$

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Коші диференціального рівняння $y''x\ln x = y'$, що задовольняє початкові умови $y(e)=2, \quad y'(e)=3$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить y, тобто рівняння вигляду $F(x,y',y'')=0$. Зробимо заміну $y'=p,$ де $p=p(x),$ тоді $y''=p'$. Задане рівняння набуває вигляду

$$p'x\ln x = p, \quad \frac{dp}{dx}x\ln x = p.$$

Розв'яжемо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x\ln x}, \ p\neq 0, x\neq 0, x\neq 1, \quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x\ln x}, \quad \ln|p|=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x},$$

$$\ln|p|=\ln|\ln x|+\ln|C_1|, C_1\neq 0, \qquad p=C_1\ln x.$$

Оскільки $p=y'$, то маємо рівняння $y'=C_1\ln x$. Використавши другу початкову умову $y'(e)=3$, дістанемо $3=C_1\ln e$, звідки $C_1=3$.

Розв'яжемо рівняння $y'=3\ln x$. Отже, $dy=3\ln x dx$, $\quad y=3\int\ln x dx$.

Інтеграл знаходимо методом інтегрування частинами. Нехай

$$u=\ln x, dv=dx, du=\frac{dx}{x}, v=x.$$

Тоді маємо

$$y=3\left(x\ln x-\int x\frac{dx}{x}\right)=3\left(x\ln x-x\right)+C_2.$$

Використовуємо першу початкову умову $y(e)=2$. Дістанемо

$$2=3(e\ln e-e)+C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2=2.$$

Отже, маємо частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє дані початкові умови

$$y=3(x\ln x-x)+2.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''tgy=2(y')^2$.

Розв’язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно змінної x, тобто рівняння виду $F\left(y, y', y''\right) = 0$. Зробимо заміну $y' = p(y)$, тоді $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p$. Задане рівняння набуває вигляду

$$\frac{dp}{dy} p tgy = 2p^2, \qquad p\left(\frac{dp}{dy} tgy - 2p\right) = 0.$$

Дістаємо два диференціальні рівняння:

$$p = 0, \qquad \frac{dp}{dy} tgy - 2p = 0.$$

З першого рівняння дістаємо $y' = 0$, звідки $y = C$.

Друге рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, маємо.

$$\frac{dp}{dy} tgy - 2p = 0, \quad dp\, tgy = 2p dy, \quad \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{tgy}, \ y \neq \pi n, n \in Z,$$

$$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{tgy}, \quad \ln|p| = 2\int \frac{\cos y dy}{\sin y},$$

$$\ln|p| = 2\int \frac{d(\sin y)}{\sin y}, \quad \ln|p| = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1|, \quad p = C_1 \sin^2 y.$$

Оскільки $p = y'$, то маємо диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = C_1 \sin^2 y$.

Дістаємо $\qquad \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx, \quad -\int \frac{dy}{\sin^2 y} = -C_1 \int dx.$

Отже, загальний інтеграл даного диференціального рівняння

$$\operatorname{ctg} y = -C_1 x + C_2.$$

Зауважимо, що $y = \pi n, n \in Z$ теж є розв’язком даного рівняння, який не отримується із загального розв’язку.

Приклад 7. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $2yy'' - (y')^2 - 1 = 0$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить змінної x, тобто вигляду $F\left(y, y', y''\right)=0$. Зробивши заміну $y'=p(y)$, дістанемо $y''=p'\cdot p$. Отже, задане рівняння набуває вигляду

$$2y\,p'p-p^2-1=0, \qquad 2yp\frac{dp}{dy}=p^2+1, \qquad 2y\,pdp=(p^2+1)dy.$$

Розв'яжемо одержане рівняння з відокремлюваними змінними, маємо

$$\frac{2pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}, \quad \int\frac{2pdp}{p^2+1}=\int\frac{dy}{y}, \quad \ln\left|p^2+1\right|=\ln|y|+\ln|C_1|, \quad p^2+1=C_1y.$$

$$p=\pm\sqrt{C_1y-1}.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=\pm dx, \quad \int\frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=\pm\int dx,$$

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=\pm x+C_2, \quad \sqrt{C_1\,y-1}=\frac{C_1}{2}\left(C_2\pm x\right).$$

Отже, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y=\frac{C_1}{4}\left(C_2\pm x\right)^2+\frac{1}{C_1}.$$

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші $yy''+(y')^2=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=1.$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння, що не містить змінної x. Поклавши $y'=p(y)$, дістанемо $y''=p'\cdot p$, тоді задане рівняння має вигляд

$$yp'p+p^2=0, \qquad p(yp'+p)=0.$$

Це рівняння зводиться до двох рівнянь $p=0,\ yp'+p=0$.

З першого рівняння маємо $y'=0$, звідки $y=C$. У другому рівнянні відокремимо змінні:

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{p}{y}\Rightarrow\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln|p|=-\ln|y|+\ln|C_1|\Rightarrow py=C_1.$$

Оскільки $p=y'$, то $y'y=C_1$, $y\dfrac{dy}{dx}=C_1\Rightarrow ydy=C_1dx\Rightarrow\dfrac{y^2}{2}=C_1x+C_2$.

Отже, загальний розв'язок (інтеграл) заданого рівняння має вигляд

$$\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2.$$

Зауважимо, що розв'язок $y=C$, отриманий з першого рівняння, можна отримати із загального розв'язку.

Враховуючи знайдене рівняння $y'y=C_1$, загальний розв'язок $\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2$ та початкові умови $y(0)=4,\ y'(0)=1$, знаходимо значення сталих $C_1,\ C_2$. Дістаємо

$$1\cdot 4=C_1,\ \frac{4^2}{2}=C_1\cdot 0+C_2, \text{ звідки } C_1=4,\ C_2=8.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y^2=8x+16.$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

1) $y''=\cos 2x+2.$ 2) $y'''=e^{3x}-6x+\frac{1}{x^3}$;

3) $y''=arctgx$; 4) $y''=xe^{2x}$;

5) $xy''+y'+x=0$; 6) $xy''+y'=x^2+1$;

7) $y'^2+2yy''=0$; 8) $y''(1+y)=(y')^2+y'.$

2. Розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь

1) $y'''=6/x^3,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=5,\quad y''(1)=1.$

2) $y'''=\cos 4x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=15/16,\quad y''(0)=0.$

3) $y''=x\sin x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

4) $y''=y'e^y,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

5) $2yy''=y'^2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

6) $y''tgy=2y'^2,\quad y(1)=\pi/2,\quad y'(1)=2.$

Тема 28. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' - 6y = 0$.

Розв'язання. Для даного лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами складемо характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ і знайдемо його корені (за теоремою Вієта). Маємо два дійсних різних кореня $k_1 = -2, k_2 = 3$ (випадок $D > 0$). Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його

$$k^2 - 3k = 0, \quad k(k-3) = 0, \quad k_1 = 0, \; k_2 = 3.$$

Маємо два дійсних різних кореня (випадок $D > 0$). Тоді шуканий розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \; e^{0 \cdot x} + C_2 e^{3x} \quad \text{або} \quad y = C_1 \; + C_2 e^{3x}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 6k + 9 = 0, \quad (k+3)^2 = 0, \quad k_1 = k_2 = -3.$$

Маємо два однакових кореня, тобто один корінь кратності 2 (випадок $D = 0$). Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 \; e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$ і розв'яжемо його. Оскільки $D = 4 - 40 = -36 < 0$, то рівняння має комплексні корені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, де $i = \sqrt{-1}$.

Розв'яжемо характеристичне рівняння, дістанемо

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i,$$

де $\alpha=-1,\ \beta=3$.

У цьому випадку ($D<0$) загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y''-2y'+5y=0$ за умови, що $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

<u>Розв'язання.</u> Для даного лінійного однорідного рівняння спочатку знайдемо загальний розв'язок. Складемо відповідне характеристичне рівняння $k^2-2k+5=0$. Оскільки $D=4-20=-16<0$, то рівняння має комплексні корені

$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4\sqrt{-1}}{2}=1\pm 2i,$$

де $\alpha=1, \beta=2$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Для знаходження частинного розв'язку рівняння визначимо сталі C_1, C_2, використавши початкові умови. Знайдемо похідну від функції y:

$$y'=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x).$$

Враховуючи початкові умови $y(0)=1,\ y'(0)=1$, маємо

$$1=e^{0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0),\ \ C_1=1,$$
$$1=e^{0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0-2C_1\sin 0+2C_2\cos 0), 1=1+2C_2,\quad C_2=0.$$

Підставляємо знайдені сталі у загальний розв'язок. Дістаємо частинний розв'язок даного рівняння при заданих початкових умовах

$$y=e^{x}\cos 2x.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння $y'''-5y''+8y'-4y=0$.

Розв’язання. Для даного лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку складемо характеристичне рівняння

$$k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0.$$

Розв’язавши його, дістанемо

$$k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = k^3 - k^2 - 4k^2 + 4k + 4k - 4 =$$

$$= k^2(k-1) - 4k(k-1) + 4(k-1) = (k-1)(k-2)^2.$$

Звідки маємо один простий корінь і корінь кратності 2, тобто $k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = 2$. Отже, загальний розв’язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) e^{2x}.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв’язок диференціальне рівняння $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння для даного однорідного рівняння має вигляд $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 = 0$, звідки маємо $k = -1$ – корінь кратності 3. Тоді загальний розв’язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x}.$$

Приклад 8. Розв’язати диференціальне рівняння $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

Розв’язання. Для заданого лінійного однорідного диференціального рівняння четвертого порядку складемо характеристичне рівняння $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$ і запишемо його у вигляді

$$k^4 + 8k^2 + 16 = (k^2 + 4)^2 = \big((k - 2i)(k + 2i)\big)^2 = (k - 2i)^2 (k + 2i)^2.$$

Маємо два кореня $k_1 = k_2 = 2i, \quad k_3 = k_4 = -2i$ кратності 2. Отже, задане рівняння має загальний розв’язок

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 x \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \sin 2x,$$

$$y = \big(C_1 + C_2 x\big)\cos 2x + \big(C_3 + C_4 x\big)\sin 2x.$$

Приклад 9. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' + 2y' = 6x^2$.

Розв’язання. Загальний розв’язок даного неоднорідного рівняння знаходимо у вигляді $y = y_0 + y_ч$, де y_0 – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, а $y_ч$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

Запишемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 2y' = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 + 2k = 0$, корені якого є дійсні, різні $k_1 = 0, k_2 = -2$. Тоді розв’язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Права частина даного неоднорідного рівняння має вигляд $f(x) = P_2(x) = 6x^2$. Оскільки число $a = 0$ є коренем характеристичного рівняння, а $6x^2$ – многочлен другого степеня, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння знаходимо у вигляді

$$y_ч = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Обчисливши похідні від частинного розв’язку

$$y_ч' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y_ч'' = 6Ax + 2B,$$

підставимо вирази $y_ч, y_ч', y_ч''$ в задане рівняння і зведемо подібні, маємо

$$6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 6x^2,$$

$$6Ax^2 + (6A + 4B)x + (2B + 2C) = 6x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

Для обчислення A, B, C застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в многочленах, які стоять в лівій і правій частині рівності, дістанемо

$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 6A + 4B = 0, \\ 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Розв’язавши систему рівнянь, дістанемо

$$A = 1, B = -\frac{3}{2}, C = \frac{3}{2},$$

звідки маємо частинний розв’язок даного рівняння

$$y_ч = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1 + C_2 e^{-2x} + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

Приклад 10. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння при заданих початкових умовах $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 12$.

Розв'язання. Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку $y_ч$ неоднорідного рівняння.

Для однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ запишемо характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$, яке має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Тому $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння.

Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $f(x) = P_0(x)e^{ax} = 8e^{3x}$, причому $a = 3$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_ч = Ae^{3x}$, де A – невідомий коефіцієнт. Знайдемо похідні $y'_ч = 3Ae^{3x}, y''_ч = 9Ae^{3x}$ і підставимо їх разом із функцією $y_ч = Ae^{3x}$ в рівняння; дістанемо

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 8e^{3x}, \qquad 2Ae^{3x} = 8e^{3x}, \qquad A = 4.$$

Тоді $y_ч = 4e^{3x}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Отже, загальний розв'язок даного рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 4e^{3x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(0) = -1$, $y'(0) = 12$.

Використавши першу умову $y(0) = -1$, маємо

$$-1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 4e^0 = C_1 + C_2 + 4.$$

Знайдемо похідну від загального розв'язку і використаємо другу умову $y'(0) = 12$. Оскільки $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 12e^{3x}$, то

$$12 = C_1e^0 + 2C_2e^0 + 12e^0 = C_1 + 2C_2 + 12.$$

Значення сталих $C_1,\ C_2$ визначаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = -1, \\ C_1 + 2C_2 + 12 = 12; \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -10, \\ C_2 = 5. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = -10e^x + 5e^{2x} + 4e^{3x}.$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок задачі Коші диференціального рівняння $y'' - y = xe^x$.

<u>Розв'язання.</u> Записуємо відповідне однорідне рівняння $y'' - y = 0.$ Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$, корені якого є дійсні, різні $k_1 = -1,\ k_2 = 1.$ Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Запишемо праву частину заданого неоднорідного рівняння $f(x) = xe^x$, тобто маємо праву частину спеціального вигляду, де $f(x) = e^{ax}P_n(x) = e^x x,$ причому число $a = 1$ є одним із коренів характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_ч = xe^x(A_1x + A_2) = (A_1x^2 + A_2x)e^x.$$

Знайдемо похідні

$$y_ч' = (A_1x^2 + 2A_1x + A_2x + A_2)e^x, \quad y_ч'' = (A_1x^2 + 4A_1x + A_2x + 2A_1 + 2A_2)e^x.$$

Підставивши вирази $y_ч,\ y_ч''$ в задане рівняння, дістанемо

$$(A_1x^2 + 4A_1x + A_2x + 2A_1 + 2A_2)e^x - (A_1x^2 + A_2x)e^x = xe^x.$$

Розкривши дужки і скоротивши на $e^x \neq 0,$ маємо

$$4A_1x + (2A_1 + 2A_2) = x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при x^1 та x^0. Дістаємо

$$4A_1 = 1, \quad 2A_1 + 2A_2 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{4}.$$

Тому частинний розв'язок має вигляд $y_ч = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$.

Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

Приклад 12. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = -1,\ y'(0) = 5.$

<u>Розв'язання.</u> Для заданого неоднорідного диференціального рівняння відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' + 16y = 0$, тоді характеристичне рівняння $k^2 + 16 = 0$ має комплексні корені $k_{1,2} = \pm 4i,\ \alpha = 0, \beta = 4$. Загальний розв'язок однорідного рівняння знайдемо за формулою (15)

$$y_0 = e^{0\cdot x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Частинний розв'язок даного неоднорідного диференціального рівняння визначається правою частиною $f(x) = (34x + 13)e^{-x} = P_n(x)e^{ax}$. Оскільки $a = -1$ не є коренем характеристичного рівняння, то $y_ч = (Ax + B)e^{-x}$ (випадок II,a). Знайдемо $y'_ч = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x},\ y''_ч = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}$ і підставимо вирази $y_ч, y''_ч$ в задане рівняння. Дістанемо

$$-2A + Ax + B + 16Ax + 16B = 34x + 13 \quad \Rightarrow \quad A=2,\ B=1.$$

Тоді частинний розв'язок даного рівняння $y_ч = (2x + 1)e^{-x}$. Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (2x + 1)e^{-x}.$$

Враховуючи задані початкові умови $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 5.$ складаємо систему рівнянь для визначення C_1 і C_2. Оскільки

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + 2xe^{-x} + e^{-x},\ y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - 2xe^{-x} + e^{-x},$$

то
$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 1 = -1, \\ y'(0) = 4C_2 + 1 = 5, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -2, C_2 = 1.$$

Підставивши знайдені значення C_1 і C_2 в загальний розв’язок, дістаємо шуканий частинний розв’язок даного рівняння

$$y = \sin 4x - 2\cos 4x + (2x+1)e^{-x}.$$

Приклад 13. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 74\sin x.$$

Розв’язання. Запишемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 - 7k + 6 = 0.$$

Знаходимо корені цього рівняння $k_1 = 1, k_2 = 6$. Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Оскільки права частина даного неоднорідного рівняння $f(x) = 74\sin x$, то $f(x) = P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx = 0\cdot\cos x + 74\sin x$. Маємо функцію $f(x)$ спеціального вигляду, де $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = 74$, $b = 1$, причому $bi = i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв’язок шукаємо у вигляді $y_ч = A\cos x + B\sin x$.

Знайдемо похідні $y_ч' = -A\sin x + B\cos x$, $y_ч'' = -A\cos x - B\sin x$ і підставимо їх в задане рівняння, дістанемо

$$-A\cos x - B\sin x + 7A\sin x - 7B\cos x + 6A\cos x + 6B\sin x = 74\sin x,$$

$$(5A - 7B)\cos x + (7A + 5B)\sin x = 0\cdot\cos x + 74\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$, маємо

$$5A - 7B = 0,\ 7A + 5B = 74 \quad\Rightarrow\quad B = \frac{5}{7}A,\ 7A + \frac{25}{7}A = \frac{49+25}{7}A = 74 \quad\Rightarrow$$

$$A = 7, B = 5.$$

Тоді частинний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y_ч = 7\cos x + 5\sin x.$$

Отже, загальний розв’язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + 7\cos x + 5\sin x.$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 9y = 4\cos x + 8\sin x$.

Розв'язання. Запишемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 9y = 0$, для якого характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 9 = 0$. Знаходимо корені цього рівняння $k_{1,2} = \pm 3i$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Права частина даного рівняння має вигляд:

$$f(x) = P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx = 4\cos x + 8\sin x,$$

де $b = 1$. Оскільки $bi = i$ не є коренем характеристичного рівняння, а многочлени $P_n(x) = 4,\ Q_m(x) = 8$ є многочленами нульового степеня, то частинний розв'язок знаходимо у вигляді

$$y_ч = A\cos x + B\sin x.$$

Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо A і B, маємо

$$y'_ч = -A\sin x + B\cos x, \quad y''_ч = -A\cos x - B\sin x.$$

Підставивши $y_ч,\ y''_ч$ в задане рівняння і зведемо подібні, дістанемо

$$-A\cos x - B\sin x + 9A\cos x + 9B\sin x = 4\cos x + 8\sin x,$$

$$8A\cos x + 8B\sin x = 4\cos x + 8\sin x.$$

Для обчислення коефіцієнтів A, B прирівняємо коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, маємо

$$8A = 4 \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \qquad 8B = 8 \Rightarrow B = 1.$$

Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_ч = \frac{1}{2}\cos x + \sin x.$$

Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{2}\cos x + \sin x.$$

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Розв'язання. У заданому рівнянні права частина не є функцією спеціального вигляду, тому для його розв'язання скористаємось методом Лагранжа. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' - 2y' + y = 0$, характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корінь $k_{1,2} = 1$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Вважаючи сталі функціями, знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y_ч = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Знайдемо похідну частинного розв'язку, маємо

$$y'_ч = C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x + C_2(x)(e^x + xe^x).$$

Згідно з методом Лагранжа маємо умову

$$C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0,$$

тоді похідна $y'_ч$ набуває вигляду

$$y'_ч = C_1(x)e^x + C_2(x)(e^x + xe^x).$$

Знайдемо похідну другого порядку

$$y''_ч = C'_1(x)e^x + C_1(x)e^x + C'_2(x)(e^x + xe^x) + C_2(x)(2e^x + xe^x).$$

Підставивши $y_ч$, $y'_ч$ і $y''_ч$ у задане рівняння, дістанемо

$$C'_1(x)e^x + C'_2(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}.$$

Згідно з методом Лагранжа складемо систему

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0, \\ C'_1(x)e^x + C'_2(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, віднявши перше рівняння від другого і скоротивши обидва рівняння на $e^x \neq 0$, дістанемо

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ e^x C_2'(x) = \dfrac{e^x}{x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -1, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x, \\ C_2(x) = \ln|x|. \end{cases}$$

Отримали частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_ч = -xe^x + \ln|x|xe^x = xe^x(\ln|x| - 1).$$

Тоді загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1e^x + C_2xe^x + xe^x(\ln|x| - 1).$$

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Розв'язання. Розв'яжемо задане неоднорідне рівняння методом Лагранжа. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' + y = 0$, для якого характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_1 = i, k_2 = -i$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0 = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_ч = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x.$$

Функції $C_1(x), C_2(x)$ знаходимо із системи (6)

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Оскільки $W(x) = -1 \neq 0$, то за формулами Крамера маємо

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ 1/\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{-1} = 1, \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & 1/\cos x \end{vmatrix}}{-1} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$C_1(x) = \int dx = x + C_3, \quad C_2(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \ln|\cos x| + C_4.$$

Покладаючи $C_3 = C_4 = 0$, дістаємо $C_1(x) = x, \quad C_2(x) = \ln|\cos x|$.

Таким чином, частинним розв'язком неоднорідного рівняння є функція

$$y_ч = x \cdot \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|.$$

Приклад 17. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$ методом Лагранжа.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, права частина якого не є функцією спеціального вигляду. Розв'яжемо його методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих).

Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y'' + y = 0$, характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_1 = i, k_2 = -i$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння такий

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_ч = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Знайдемо похідну

$$y'_ч = C'_1(x)\cos x - C_1(x)\sin x + C'_2(x)\sin x + C_2(x)\cos x =$$
$$= C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x - C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x.$$

За методом Лагранжа накладемо умову

$$C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0,$$

тоді похідна $y'_ч$ набуває вигляду

$$y'_ч = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x.$$

Знайдемо похідну другого порядку

$$y''_ч = -C'_1(x)\sin x - C_1(x)\cos x + C'_2(x)\cos x - C_2(x)\sin x.$$

Підставивши $y_ч$ і $y''_ч$ у задане рівняння, дістанемо

$$-C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \operatorname{tg} x.$$

Враховуючи одержані рівняння, складемо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо значення $C_1'(x)$, $C_2'(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot\sin x \\ \cdot\cos x \end{matrix} \right\rangle +$$

$$C_2'(x) = \operatorname{tg} x \cos x = \sin x, \qquad C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Проінтегрувавши останні рівності, знайдемо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$.

$$C_2(x) = -\cos x + C_4,$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - 1}d(\sin x) =$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = \int dt + \int \frac{dt}{t^2-1} = t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C_3 =$$

$$= \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C_3.$$

Поклавши $C_3 = C_4 = 0$, маємо частинний розв'язок даного рівняння

$$y_ч = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x =$$

$$= \sin x\cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\cos x - \cos x \sin x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\cos x.$$

Тоді загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\cos x.$$

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-x} - 4x^2.$$

Розв'язання. Права частина даного неоднорідного рівняння є сумою двох функцій, тому загальний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді суми розв'язків рівнянь $y'' + 4y' + 4y = e^{-x}$ і $y'' + 4y' + 4y = -4x^2$.

Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y''+4y'+4y=0$. Характеристичне рівняння $k^2+4k+4=(k+2)^2=0$ має корінь $k_{1,2}=-2$ кратності 2, тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_0=e^{-2x}(C_1+C_2x).$$

Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння знайдемо як суму частинних розв'язків рівнянь із правими частинами $f_1(x)=e^{-x}, f_2(x)=-4x^2$, дістанемо

$$y_ч=Ae^{-x}+(Bx^2+Cx+D), \quad y'_ч=-Ae^{-x}+2Bx+C, \quad y''_ч=Ae^{-x}+2B.$$

Підставивши $y_ч$, $y'_ч$ і $y''_ч$ у задане рівняння, дістанемо

$$Ae^{-x}+2B-4Ae^{-x}+8Bx+4C+4Ae^{-x}+4Bx^2+4Cx+4D=e^{-x}-4x^2,$$

$$Ae^{-x}+4Bx^2+(8B+4C)x+(2B+4C+4D)=e^{-x}-4x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при функції e^{-x} та при однакових степенях x в обох частинах рівняння, дістанемо

$$\begin{cases} A=1 \\ 4B=-4 \\ 8B+4C=0 \\ 2B+4C+4D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \\ D=-3/2 \end{cases}$$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y=y_0+y_ч=e^{-2x}(C_1+C_2x)+e^{-x}-x^2+2x-\frac{3}{2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y''-5y'+6y=0$. б) $y''+4y'=0$.

в) $y''-4y'+4y=0$. г) $y''+9y=0$.

д) $y''-2y'+10y=0$. е) $y''+4y'+5y=0$.

є) $y'''-y'=0$. ж) $y'''-6y''-9y'=0$.

з) $y^{IV}+3y'''-4y''=0$. і) $y^{IV}+3y''-4y=0$.

2. Розв’язати задачу Коші для однорідних диференціальних рівнянь:

а) $2y'' - y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

б) $y'' - 2y' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

в) $y'' + y = 0, \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4, \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

г) $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 9.$

3. Розв’язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною:

а) $y'' - 8y' + 16y = 2x - 4.$ б) $y'' - 2y' = 2xe^{-x}.$

в) $y'' - 4y' + 5y = x^2 + 2.$ г) $y'' + 4y' + 3y = xe^{2x}.$

д) $y'' + 16y = x^2.$ е) $y'' - 2y' - 3y = xe^{4x}.$

є) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$ ж) $y'' + 4y = -\sin 2x.$

з) $y'' + y = -\cos x.$ і) $y'' + 9y = 5\cos 3x.$

4. Розв’язати задачу Коші для неоднорідних диференціальних рівнянь:

а) $y'' + 9y = 3x^2, y(0) = 2, y'(0) = 1.$

б) $y'' - y = 4e^x, \ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

в) $y'' - y' - 2y = 2xe^{4x}, y(0) = y'(0) = 1.$

г) $y'' + 4y' = -\sin 2x, y(0) = y'(0) = 1.$

5. Розв’язати неоднорідні диференціальні рівняння методом Лагранжа

а) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}..$ б) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}.$

Розділ VIII. Кратні та криволінійні інтеграли

Тема 29. Подвійний інтеграл та його застосування

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 2x^2y^3dxdy$, де D – прямокутник з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$.

Розв'язання. Область D є прямокутником і визначається нерівностями $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ (рис. 1), тому межі інтегрування за змінною x і за змінною y є сталими.

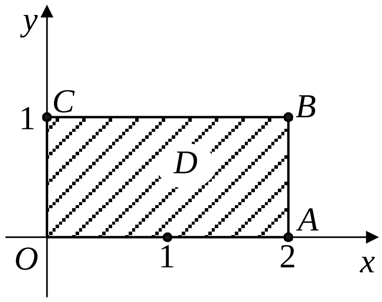


Рис. 1

Зведемо подвійний інтеграл до повторного за формулою і обчислимо його. За формулою $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ маємо

$$\iint\limits_D 2x^2y^3dxdy = 2\int\limits_0^2 x^2dx\int\limits_0^1 y^3dy = 2\int\limits_0^2 x^2\left(\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, де D – трикутник з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$.

Розв'язання. Область D визначається нерівностями $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$. Побудуємо область інтегрування (рис. 2).

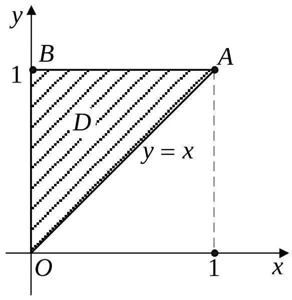


Рис. 2

Область D проектується на вісь Ox у відрізок [0;1], тому зовнішні межі інтегрування $0 \le x \le 1$. Пряма, паралельна осі Oy, перетинає область знизу по прямій $y = x$, а зверху – по прямій $y = 1$, тому внутрішні межі інтегрування $x \le y \le 1$. За формулою $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ дістанемо

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 xdx\int\limits_x^1 dy = \int\limits_0^1 x\left(y\Big|_x^1\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x(1-x)dx = \int\limits_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(3x^2y + 6xy^2\right)dxdy$, якщо $D = \left\{(x;y)\middle| 1 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\right\}$.

<u>Розв'язання.</u> Область D є прямокутником, тому межі інтегрування за змінною x і за змінною y є сталими. Зведемо подвійний інтеграл до повторного, причому внутрішній інтеграл візьмемо за змінною y, тоді змінна x вважається сталою. Дістанемо

$$\iint\limits_D \left(3x^2y + 6xy^2\right)dxdy = \int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_1^2 \left(3x^2y + 6xy^2\right)dx = \int\limits_{-1}^1 \left(x^3y + 3x^2y^2\right)\Big|_1^2 dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 \left(8y + 3\cdot 4y^2 - y - 3y^2\right)dy = \int\limits_{-1}^1 \left(9y^2 + 7y\right)dy =$$

$$= \left(3y^3 + \frac{7}{2}y^2\right)\Bigg|_{-1}^1 = 3\cdot 1 + \frac{7}{2}\cdot 1 - 3\cdot(-1) - \frac{7}{2}\cdot 1 = 6.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, якщо область D обмежена прямими $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

<u>Розв'язання.</u> Зобразимо область D на рис. 3.

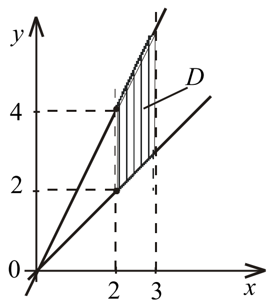


Рис. 3

Спроектуємо область D на вісь Ox у відрізок $[2;3]$. Будь-яка пряма, паралельна осі Oy, заходить в область через пряму $y = x$, а виходить через пряму $y = 2x$, тому область D є правильною вздовж осі Oy. Зазначимо, що область не є правильною вздовж осі Ox, тому зовнішній інтеграл візьмемо за змінною x, дістанемо

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y)dy = \int_2^3 \left(xy + y^2\right)\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \int_2^3 \left(2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2\right)dx = 4\int_2^3 x^2 dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = 36 - \frac{32}{3} = \frac{76}{3}.$$

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $I = \iint_D \sqrt{x}ydxdy$, якщо область D обмежена кривими $y = x^2,\ y = 2 - x^2,\ x = 0$.

Розв’язання. Зобразимо область інтегрування, обмежену заданими кривими та віссю Oy (рис. 4).

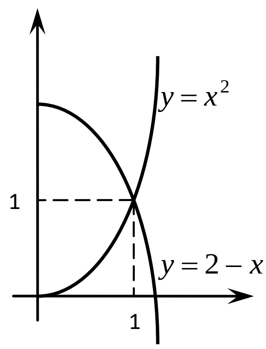


Рис. 4

Спроектуємо область на вісь Оx у відрізок $[0;1]$, дістанемо

$$\iint_D \sqrt{x}ydxdy = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx \int_{x^2}^{2-x^2} ydy = \int_0^1 \sqrt{x}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2}\left(\left(2-x^2\right)^2 - x^4\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\sqrt{x}\right)dx = 2\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{7}x^{7/2}\right)\Bigg|_0^1 = 4\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = 4\cdot\frac{7-3}{21} = \frac{16}{21}.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\iint_D xydxdy$, якщо область D обмежена прямими $y = 2,\ y = x,\ y = \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 4).

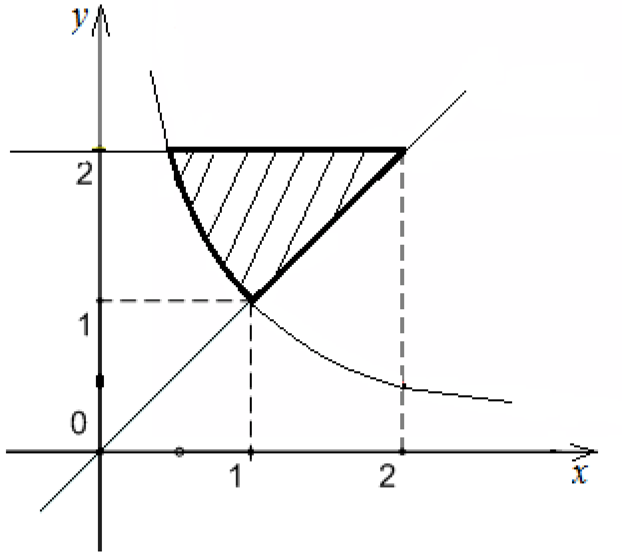


Рис. 5.

Зазначимо, що область D не є правильною вздовж осі Oy, але є правильною вздовж осі Ox, тому зовнішній інтеграл візьмемо за змінною y. Спроектувавши область D на вісь Oy, дістанемо $1 \le y \le 2$. Будь-яка пряма, паралельна осі Ox, заходить в область через криву $x = \dfrac{1}{y}$, а виходить через пряму $x = y$.

Застосуємо формулу $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$. Отже,

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 ydy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} xdx = \int\limits_1^2 ydy \left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{y} \right) = \int\limits_1^2 y\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^2} \right)dy =$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{y^3}{2}dy - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{1}{y}dy = \frac{y^4}{8}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\ln|y|\Bigg|_1^2 = 2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{15}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Приклад 7. Змінити порядок інтегрування в інтегралі $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D. Враховуючи межі інтегрування в повторному інтегралі, знайдемо рівняння ліній, що обмежують цю область. Спочатку побудуємо лінії, які визначаються внутрішніми межами інтегрування $y = x^2$, $y = 4$. Оскільки парабола і пряма перетинаються в точках

$A(-2;\,4)$, $B(2;4)$, то дістаємо область OAB, в якій $x=-2,\ x=2$ є зовнішніми межами інтегрування.

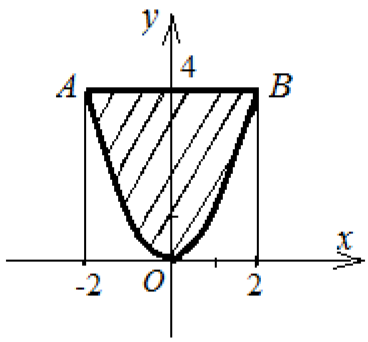


Рис. 6

Змінимо порядок інтегрування в інтегралі, розглянувши зовнішній інтеграл за змінною y, а внутрішній – за змінною x. Спроектувавши область OAB на вісь Oy у відрізок [0;4], дістанемо межі зовнішнього інтеграла $y=0$, $y=4$. Межі внутрішнього інтеграла знайдемо, провівши пряму, паралельну осі Ox, яка входить в область через ліву гілку параболи, а виходить – через праву. Розв’язавши рівняння $y=x^2$ відносно x, маємо $x=-\sqrt{y}$, $x=\sqrt{y}$. Отже,

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

Приклад 8. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $I=\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x^2-2y)\,dy$ та обчислити його.

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо область інтегрування $D=\left\{-3\le x\le 1,\ 2x-1\le y\le 2-x^2\right\}$, яка обмежена прямими $x=-3,\ x=1,\ y=2x-1$ і параболою $y=2-x^2$ (рис. 7).

Змінимо порядок інтегрування, тобто перейдемо до повторного інтеграла, в якому внутрішнє інтегрування проводиться за змінною x, а зовнішнє – за змінною y.

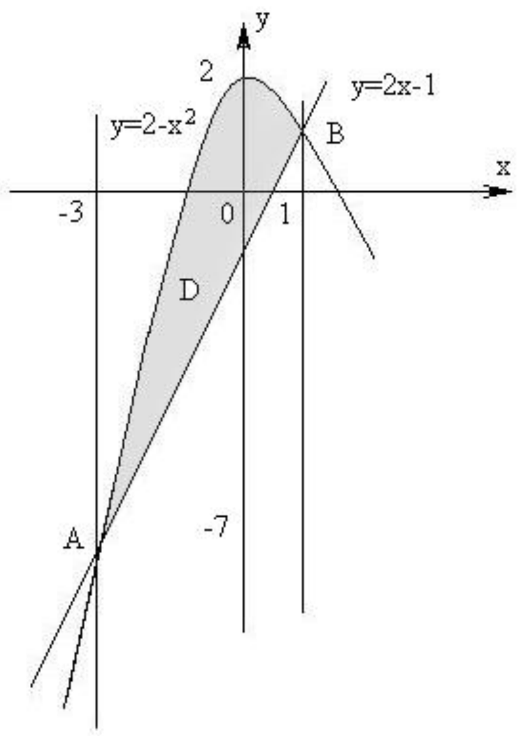


Рис. 7

Область D необхідно розбити на дві частини D_1 і D_2, оскільки пряма, паралельна осі Ox, виходить з області через лінію, яка задається двома різними функціями. Маємо

$$D_1 = \left\{ -7 \le y \le 1,\ -\sqrt{2-y} \le x \le \frac{y+1}{2} \right\},\ D_2 = \left\{ 1 \le y \le 2,\ -\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y} \right\}.$$

Змінивши порядок інтегрування в даному інтегралі, дістанемо

$$\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x^2 - 2y)dy = \int_{-7}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{y+1}{2}} (x^2 - 2y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} (x^2 - 2y)dx .$$

Очевидно, що обчислювати даний інтеграл простіше в початковому вигляді. Спочатку знайдемо внутрішній інтеграл за змінною y, при цьому x вважаємо сталою, маємо

$$\int_{2x-1}^{2-x^2} (x^2 - 2y)dy = (x^2 y - y^2)\Big|_{2x-1}^{2-x^2} = x^2(2-x^2) - (2-x^2)^2 - x^2(2x-1) + (2x-1)^2 =$$

$$= -2x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 4x - 3 .$$

Тоді заданий інтеграл дорівнює

$$I=\int_{-3}^{1}dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x^2-2y)dy=\int_{-3}^{1}(-2x^4-2x^3+11x^2-4x-3)dx=$$

$$=\left(-\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3-2x^2-3x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{11}{3}-5-\frac{486}{5}+\frac{81}{2}+108=49\frac{1}{15}.$$

Приклад 9. Змінити порядок інтегрування і обчислити повторний інтеграл $I=\int_0^1 dx\int_0^{2x}\left(x^2+y\right)dy+\int_1^3 dx\int_0^{3-x}\left(x^2+y\right)dy$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D, яка обмежена лініями $y=2x,\ y=3-x$ та віссю Ox.

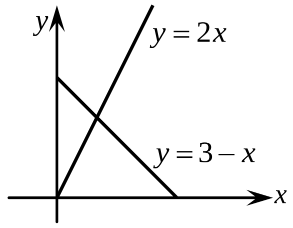


Рис. 8

Спроектуємо область D на вісь Oy у відрізок $[0;2]$, при цьому змінна x змінюється від $x=\frac{y}{2}$ до $x=3-y$. Дістанемо

$$I=\int_0^2 dy\int_{y/2}^{3-y}\left(x^2+y\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}+yx\right)\Bigg|_{y/2}^{3-y}dy=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{(3-y)^3}{3}+y(3-y)-\frac{y^3}{24}-\frac{y^2}{2}\right)dy=\int_0^2\left(-\frac{(y-3)^3}{3}+3y-\frac{y^3}{24}-\frac{3y^2}{2}\right)dy=$$

$$=\left(-\frac{(y-3)^4}{12}+\frac{3}{2}y^2-\frac{y^4}{96}-\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^2=-\frac{1}{12}+6-\frac{1}{6}-4+\frac{81}{12}=\frac{17}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D\frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}$, де область D обмежена параболою $y=\frac{x^2}{2}$ і прямою $y=x$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування, яка визначається нерівностями $0 \le x \le 2,\ \frac{x^2}{2} \le y \le x$ (рис. 9).

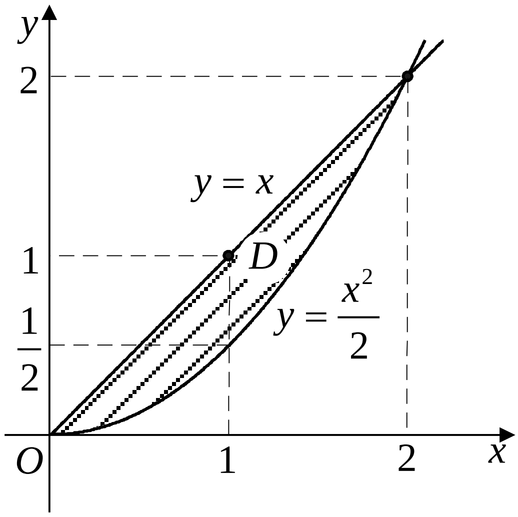


Рис. 9

Обчислимо подвійний інтеграл, звівши його до повторного, маємо

$$\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2 x\left(\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^2 dx - \int\limits_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx = \frac{\pi}{4}x\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx = \frac{\pi}{2} - I .$$

Обчислимо інтеграл $I = \int\limits_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$ методом інтегрування частинами.

Поклавши $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ dv = dx$, маємо $du = \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\,dx}{4+x^2},\ v = x$. Тоді

$$I = x \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{2x\,dx}{4+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 - \ln\left(4+x^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \left(\ln 8 - \ln 4\right) = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Отже, даний інтеграл

$$\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \ln 2 = \ln 2 .$$

Приклад 11. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де область D визначається нерівностями $x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0$.

<u>Розв'язання.</u> Область інтегрування D зобразимо на рис. 10.

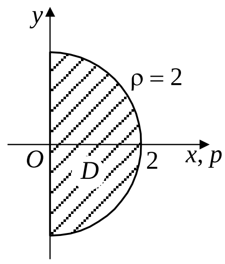


Рис. 10

Оскільки область є правою половиною круга радіуса $R=2$ з центром у початку координат, то перейдемо до полярних координат. Тоді область D визначається нерівностями $0\le\rho\le 2, -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Застосувавши формулу $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi$, маємо

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint\limits_{D^*}\rho^2\rho\, d\rho d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\, d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2=$$

$$=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=4\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=4\pi.$$

Приклад 12. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,$ де $D=\left\{(x;y)\in R^2 \,\middle|\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$.

<u>Розв'язання.</u> Зобразимо область інтегрування D на рис. 11.

Оскільки область інтегрування є чвертю круга $x^2+y^2\le 1$, а підінтегральна функція містить вираз $1-x^2-y^2$, то для обчислення даного інтеграла перейдемо до полярних координат.

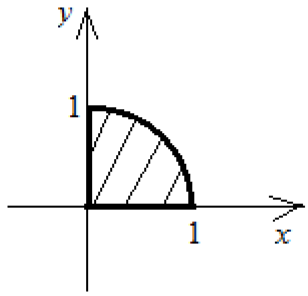


Рис. 11

Враховуючи, що $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$, застосуємо формулу

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi .$$

Оскільки $x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le1$, то

$$\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{D^*}\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\left(-2\rho d\rho\right)\right)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(1-\rho^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{2}{3}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}(0-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Приклад 13. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $x=0$, $y=\frac{3}{2}x,\ y=4-\left(x-1\right)^2$.

Розв'язання. Побудуємо задану фігуру (рис. 12). Спроектувавши її на вісь Ox, дістанемо відрізок [0,2].

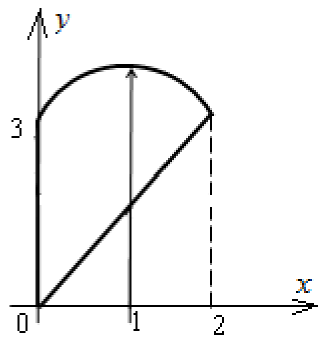


Рис. 12

Площу фігури обчислимо за формулою $S_D = \iint\limits_D dxdy$. Тоді

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} dy = \int\limits_0^2 \left(y \Big|_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} \right) dx = \int\limits_0^2 \left(4-(x-1)^2 - \frac{3}{2}x \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_0^2 = 6 - \frac{8}{3} + 1 = \frac{13}{3}.$$

Приклад 14. Знайти об’єм зрізаної призми, обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ x = 2,\ y = 3,\ x + y + z = 6,\ z = 0$.

Розв’язання. Спроектувавши тіло на площину Oxy, дістанемо область $D = \{(x;y) |\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$. Обчислимо об’єм тіла, обмеженого зверху площиною $z = 6 - x - y$, а знизу – областю D, дістанемо

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D (6 - x - y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 (6 - x - y)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^3 dy = \int\limits_0^2 \left(18 - 3x - \frac{9}{2} \right) dx = \left(18x - \frac{3x^2}{2} - \frac{9x}{2} \right) \Bigg|_0^2 = 36 - 6 - 9 = 21.$$

Приклад 15. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

Розв'язання. Дане тіло обмежене наступними поверхнями: $z = x^2 + y^2$ – параболоїд обертання; $y = x^2$ – параболічний циліндр, твірні якого паралельні осі Oz; площинами $y = 1$ і $z = 0$ (рис. 13).

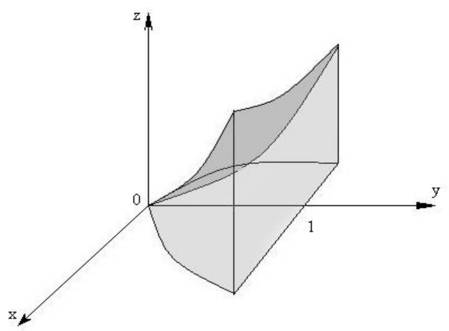


Рис. 13.

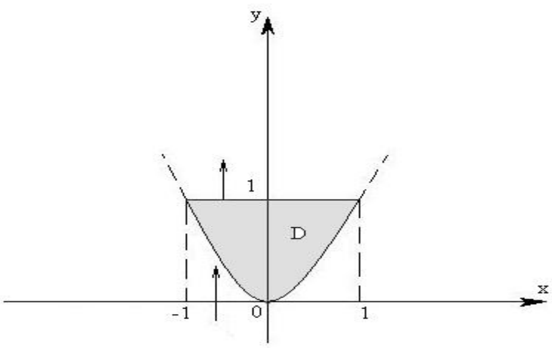


Рис. 14

Проекцією цього тіла на площину Oxy буде область $D=\left\{-1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\right\}$ (рис. 14). Обчислимо об’єм тіла:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=\int_{-1}^{1}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3})dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{88}{105}.$$

Приклад 16. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z=6-x^2-y^2$ і $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Дане тіло обмежене параболоїдом обертання $z=6-x^2-y^2$ і конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Визначимо перетин цих поверхонь, дістанемо

$$6-x^2-y^2=\sqrt{x^2-y^2},\qquad \left(x^2+y^2\right)+\sqrt{x^2+y^2}-6=0,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=2,\qquad x^2+y^2=4.$$

Зобразимо утворене тіло (рис. 15) і спроектуємо його на площину Oxy. Область D є кругом з центром у початку координат і радіусом $R=2$.

Об’єм даного тіла знаходимо за допомогою подвійного інтеграла

$$V=\iint\limits_D\left(f_2(x,y)-f_1(x,y)\right)dxdy=\iint\limits_D\left(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

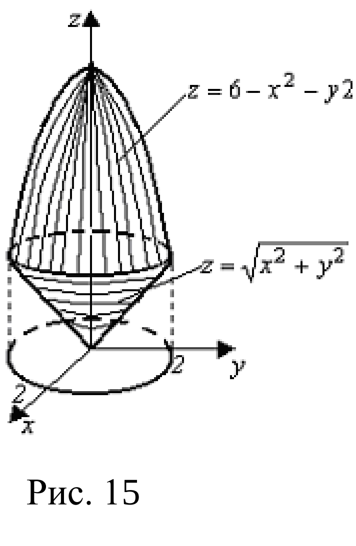


Рис. 15

Оскільки підінтегральна функція містить вираз x^2+y^2, а область D є кругом, то для обчислення інтеграла перейдемо до полярних координат, скориставшись формулою $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$.

Область $D=\{0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$. Оскільки $x^2+y^2=\rho^2$, то

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(6-\rho^2-\rho\right)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(6\rho-\rho^3-\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{32}{3}\pi\ .$$

Приклад 76. Знайти масу пластини D, обмеженої лініями: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0, y\ge 0)$, якщо густина пластини в кожній точці $(x;y)$ дорівнює $\gamma(x,y)=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Область D – частина кільця, обмеженого двома колами $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25$ радіусів відповідно $r=2,\ R=5$ з центром в точці $O(0,0)$ і координатними осями $x=0,\ y=0$ (рис. 16).

Маса пластини обчислюється за формулою $m=\iint\limits_D\gamma(x,y)dxdy$. Перейдемо в подвійному інтегралі до полярних координат; знаходимо

$$m=\iint\limits_D\gamma(x,y)dxdy=\iint\limits_D\frac{2x+3y}{x^2+y^2}dxdy$$

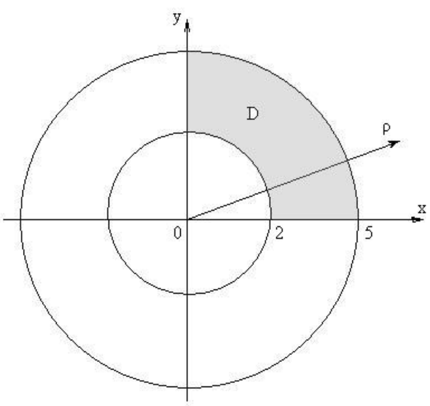


Рис. 16.

$$m=\iint_D \frac{2\rho\cos\varphi+3\rho\sin\varphi}{\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int_0^{\pi/2}(2\cos\varphi+3\sin\varphi)d\varphi\int_2^5 d\rho=\left(2\sin\varphi-3\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}\rho\Big|_2^5=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{2}-3\cos\frac{\pi}{2}-2\sin 0+3\cos 0\right)(5-2)=5\cdot 3=15.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити подвійні інтеграли в області D, обмеженій лініями:

а) $\iint\limits_D (x+y)dxdy;\quad 0\le x\le 1,\quad 1\le y\le 2.$

б) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy;\quad x=2,\quad y=x,\quad xy=1.$

2. Змінити порядок інтегрування в інтегралах:

а) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x;\ y)dy.$ б) $\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x;\ y)dy.$

3. Обчислити подвійні інтеграли в області D, обмеженій лініями, перейшовши до полярних координат:

а) $\iint\limits_D xydxdy,\ D=\left\{(x;y)\in R^2:\ x^2+y^2\le 4\right\}.$

б) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D=\left\{(x;y)\in R^2:\ x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0\right\}.$

в) $\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy,$ де область D – верхнє півкільце між колами з радіусами e та e^2 і центром в початку координат.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x=y^2-2y;\quad x+y=0.$

5. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z=0,\ z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого площинами

$2x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

7. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями

$z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

8. Знайти масу кільця, обмеженого колами $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4$, якщо в кожній його точці густина $\gamma(x, y)$ обернено пропорційна квадрату відстані до центра кільця (k – коефіцієнт пропорційності).

9. Знайти координати центра маси однорідної пластини ($\gamma(x, y) = 1$), обмеженої лініями $y = x^2 + 1, x - y + 3 = 0$.

Тема 30. Потрійний інтеграл та його застосування

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x + y + z)dxdydz$, де $G = \left\{ (x; y; z) \middle|\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3 \right\}$.

Розв'язання. Областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, тому за формулою $\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^p f(x, y, z)dz$ дістанемо

$$\iiint\limits_G (x + y + z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 (x + y + z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^3 dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(3x + 3y + \frac{9}{2} \right) dy = \int\limits_0^1 \left(3xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{2}y \right) \Bigg|_0^2 dx = \int\limits_0^1 (6x + 6 + 9)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (6x + 15)dx = \left(3x^2 + 15x\right)\Big|_0^1 = 3 + 15 = 18.$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x - y)dxdydz$, де тіло G обмежене поверхнями: $y = x^2,\ x + y + z - 2 = 0,\ y = 1,\ z = 0$.

Розв'язання. Маємо циліндричне тіло G, обмежене зверху площиною $z = 2 - x - y$, знизу площиною $z = 0$, а збоку – параболічним циліндром $y = x^2$ і площиною $y = 1$ (рис.1). Отже, $G = \left\{ -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2 - x - y \right\}$.

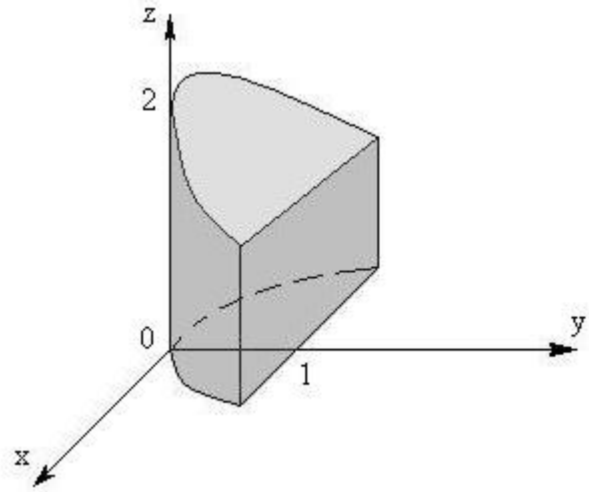


Рис. 1.

Обчислимо потрійний інтеграл, користуючись формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Дістанемо

$$\iiint\limits_G (x-y)dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_{0}^{2-x-y} (x-y)dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x-y)z \Bigg|_0^{2-x-y} dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (2x-2y-x^2+y^2)dy == \int\limits_{-1}^{1} \left(2xy - y^2 - x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(2x - \frac{2}{3} - x^2 - 2x^3 + 2x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{2}{5}x^5 - \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{136}{105}.$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

Розв'язання. Область інтегрування G обмежена конусом $x^2+y^2=z^2$, симетричним відносно осі Oz, і площиною $z=1$. Перетином цих поверхонь є коло $x^2+y^2=1$, тому проекцією тіла G на площину Oxy буде область D, обмежена колом $x^2+y^2=1$.

Перейдемо до циліндричних координат (ρ,φ,z) у потрійному інтегралі. Враховуючи, що $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$, скористаємось формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1}^{z_2} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)dz.$$

Оскільки в циліндричній системі координат $x^2+y^2=\rho^2$, то рівняння конуса і кола матимуть вигляд $z=\rho$ і $\rho=1$. Тоді область інтегрування $G^*=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ \rho\le z\le 1\}$. Обчислимо потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iiint\limits_{G^*} z\sqrt{\rho^2}\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_\rho^1 zdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \left.\frac{z^2}{2}\right|_\rho^1 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho^2-\rho^4)d\rho = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} \left.\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right)\right|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}.$$

Приклад 4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де область G обмежена поверхнею $x^2+y^2+z^2=2z$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки рівняння $x^2+y^2+z^2=2z$ визначає сферу $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, то областю інтегрування G є куля з центром у точці $C(0;0;1)$ і радіусом $R=1$ (рис. 2).

Перейдемо до сферичних координат (ρ,φ,θ) Враховуючи, що $x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta$, скористаємось формулою

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho.$$

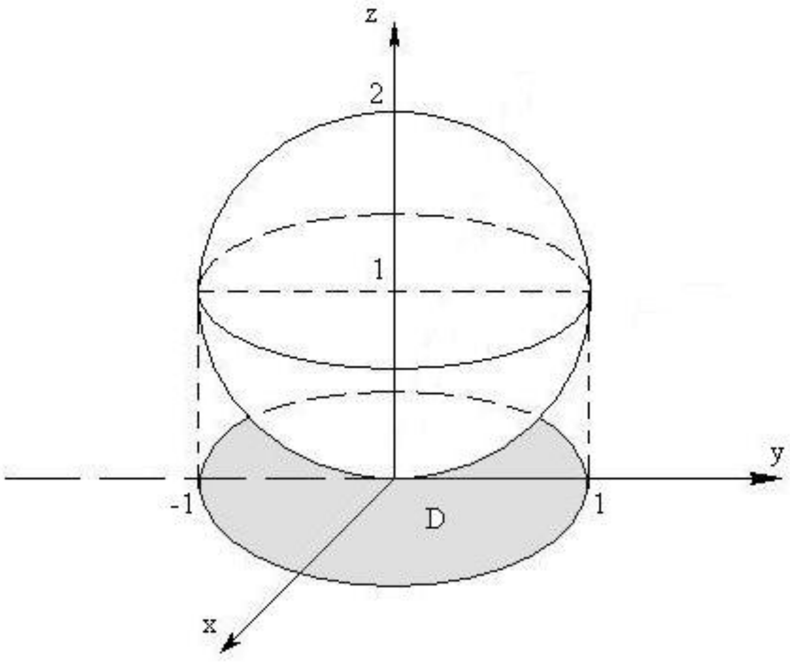


Рис. 2.

Оскільки

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=$$

$$=\rho^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2,$$

то рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=2z$ матиме вигляд $\rho=2\cos\theta$, тоді область інтегрування $G^*=\left\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2\cos\theta\right\}$.

Обчислимо потрійний інтеграл, перейшовши до сферичних координат,

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{G^*}\rho\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\cos\theta}\right)d\theta=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta d\theta=-4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d(\cos\theta)=-4\varphi\Big|_0^{2\pi}\left.\frac{\cos^5\theta}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\pi}{5}.$$

Приклад 5. Знайти об’єм тіла, обмеженого площинами $x+y+z=4$, $2x+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо задане тіло (рис. 3) і знайдемо його об’єм за

допомогою потрійного інтеграла, для чого визначимо межі інтегрування.

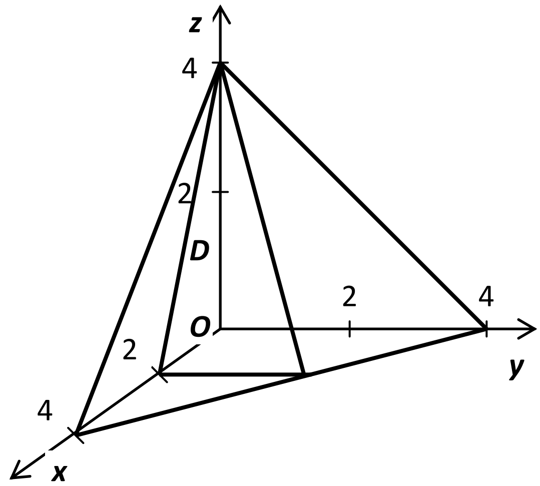


Рис. 3

Можна помітити, що краще спроектувати тіло на площину Oxz, при цьому дістанемо трикутник, обмежений прямими $x=0,\ z=0,\ 2x+z=4$. Тоді $G=\{0\le x\le 2,\ 0\le z\le 4-2x,\ 0\le y\le 4-x-z\}$, тобто внутрішній інтеграл візьмемо за змінною z. Обчислимо об'єм тіла

$$V=\iiint\limits_G dxdydz=\int_0^2 dx\int_0^{4-2x} dz\int_0^{4-x-z} dy=\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}\left(y\Big|_0^{4-x-z}\right)dz=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}(4-x-z)dz=\int_0^2\left((4-x)z-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{4-2x}dx=\int_0^2\left((4-x)(4-2x)-\frac{(4-2x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(16-4x-8x+2x^2-8+8x-2x^2\right)dx==\left(8x-2x^2\right)\Big|_0^2=16-8=8.$$

Приклад 6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $2z=x^2+y^2$.

Розв'язання. Рівняння $2z=x^2+y^2$ визначає параболоїд обертання, інші поверхні є площинами. Знайдемо його об'єм тіла за допомогою потрійного інтеграла, для чого визначимо межі інтегрування. Спроектувавши тіло G на площину Oxy, дістанемо трикутник, обмежений прямими $x=0,\ y=0,\ x+y=2$.

При цьому змінна z змінюється від площини $z=0$ до параболоїда $z=\frac{x^2+y^2}{2}$, тобто внутрішній інтеграл візьмемо за змінною z Таким чином, тіло визначається нерівностями $G=\left\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x,\ 0\le z\le \frac{x^2+y^2}{2}\right\}$.

Дістанемо

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{(x^2+y^2)/2}dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} z\Big|_0^{(x^2+y^2)/2}dy=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(x^2+y^2)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2(x^2(2-x)+\frac{1}{3}(2-x)^3)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{12}(2-x)^4)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Приклад 7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$, якщо густина в кожній точці тіла дорівнює $\gamma(x,y,z)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Оскільки рівняння поверхонь містять квадрати змінних x^2, y^2, то масу тіла доцільно обчислювати в циліндричних координатах

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z.$$

Тоді рівняння поверхонь і густини набувають вигляду

$$z=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\rho,$$

$$z=2-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi=2-\rho^2,$$

$$\gamma(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)=\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\cos^2\varphi.$$

Масу тіла обчислюємо, перейшовши до циліндричних координат:

$$m=\iiint\limits_G\gamma(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G^*}\gamma(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho\int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)}\gamma dz.$$

Задане тіло обмежене поверхнями $z=\rho,\ z=2-\rho^2$ (конусом і параболоїдом). Спробуємо визначити межі інтегрування без побудови тіла. Для цього розв'яжемо рівняння $\rho=2-\rho^2$, звідки знаходимо $\rho_1=-2,\ \rho_2=1$. Оскільки $\rho\ge 0$, то вибираємо $\rho=1$, тобто лінією перетину поверхонь є коло радіуса $r=1$. Отже, змінна ρ задовольняє нерівність $0\le\rho\le 1$. У цьому випадку $2-\rho^2\ge 1\ge\rho$, тобто $\rho\le 2-\rho^2$, тоді для змінної z має місце нерівність $\rho\le z\le 2-\rho^2$. Таким чином, $G^*=\left\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ \rho\le z\le 2-\rho^2\right\}$. Обчислимо масу тіла

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^{2-\rho^2}\cos^2\varphi dz=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^{2-\rho^2}dz=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho d\rho\cdot z\Big|_\rho^{2-\rho^2}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho)d\rho=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1(2\rho-\rho^3-\rho^2)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^1=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\cos^2\varphi d\varphi=\frac{5}{12}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{5}{24}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{5}{24}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{5}{24}\cdot 2\pi=\frac{5\pi}{12}$$

Отже, маса шуканого тіла дорівнює $m=\dfrac{5\pi}{12}$.

Приклад. Обчислити масу тіла *m*, обмежену координатними площинами і площинами $x+y+z=2, x=1, y=1,$ якщо його густина $\gamma(x,y,z)=x+2z$ (рис. 4).

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо тіло, обмежене вказаними площинами.

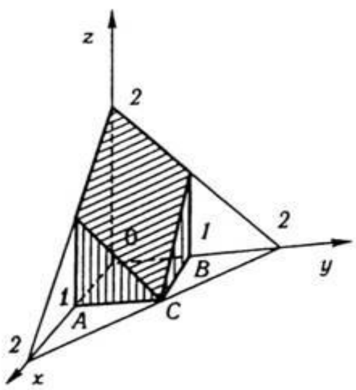


Рис. 4

Застосовуючи формулу $m=\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz$, отримаємо

$$m=\iiint\limits_G (x+2z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{2-x-y}(x+2z)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 (xz+z^2)\Bigg|_0^{2-x-y} dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 (y^2+xy-4y-2x+4)dy==\int\limits_0^1\left(-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3}\right)dx=\frac{19}{12}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G \left(x+y+z^2\right)dxdydz$, якщо $G=\left\{\left(x;y;z\right):-1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 2\le z\le 3\right\}$.

2. Знайти потрійний інтеграл $\iiint\limits_G \dfrac{dxdydz}{\left(1+x+y+z\right)^3}$, де тіло G обмежене поверхнями: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

3. Знайти потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \left(8y+12z\right)dxdydz$, де тіло G обмежене поверхнями $x=1,\ y=x,\ z=3x^2+2y^2,\ y=0,\ z=0$.

4. Обчислити об’єм тіла, обмеженого параболоїдом $x^2+y^2-z=1$ і площиною $z=0$.

5. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1,\quad z=2-x-y,\quad z\ge 0.$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad x+y=2,\quad z=x^2+y^2.$

7. Знайти масу кулі $x^2+y^2+z^2\le 6z$ із заданою густиною $\gamma\left(x,y,z\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Тема 31. Криволінійні інтеграли першого і другого роду.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{x}{y}dl$, де L – дуга кривої $y=\sqrt{x}$ між точками $A(1;\ 1)$ та $B(4;\ 2)$.

<u>Розв'язання.</u> Обчислимо даний інтеграл за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx.$$

Знайдемо диференціал дуги dl для кривої $y=\sqrt{x}$, маємо

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx.$$

Дістаємо

$$\int\limits_L \frac{x}{y}dl=\int\limits_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=\int\limits_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{4x+1}dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(4x+1\right)^{3/2}\Big|_1^4=$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{(4x+1)^3}\Big|_1^4=\frac{(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})}{12}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ між точками A(0; –2) та B(4; 0).

<u>Розв'язання.</u> Крива L задана в явному вигляді, тому застосуємо формулу $\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$. Оскільки $y=\frac{1}{2}x-2$, $y'=\frac{1}{2}$, то

$$\int\limits_L \frac{dl}{x-y}=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^4 \frac{dx}{\frac{1}{2}x+2}=\sqrt{5}\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+4}=$$

$$=\sqrt{5}\ln|x+4|\Big|_0^4=\sqrt{5}\left(\ln 8-\ln 4\right)=\sqrt{5}\ln 2.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, де L – відрізок прямої, яка сполучає точки $O(0;0)$ і $A(1;3)$.

Розв’язання. Рівняння прямої, яка проходить через точки $O(0;0)$ і $A(1;3)$, знайдемо за формулою $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де (x_1,y_1), (x_2,y_2) – задані точки. Пряма OA має вигляд $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}$, або $y=3x$. Звідси $y'=3$, $dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{10}dx$.

За формулою $\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+(y')^2}dx$ маємо

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10x^2+1}}dx=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}}=\ln\left|\, x+\sqrt{x^2+\frac{1}{10}}\right|\Bigg|_0^1=$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{\frac{11}{10}}\right)-\ln\frac{1}{\sqrt{10}}=\ln(\sqrt{10}+\sqrt{11}).$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, де L – дуга циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ при $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Розв’язання. Оскільки криву задано параметрично, то застосуємо формулу

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+y'(t))^2}dt.$$

Знайдемо похідні та диференціал дуги кривої: $x'_t=a(1-\cos t)$, $y'_t=a\sin t$, $dl=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt.$ Тоді

$$\int\limits_L \sqrt{2y}dl=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{2a(1-\cos t)}\cdot a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2a\sqrt{a}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos t)dt=$$

$$=2a\sqrt{a}(t-\sin t)\Big|_0^{\pi/2}=a\sqrt{a}(\pi-2).$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{l} xydl$, де l – чверть кола $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$, яка лежить у першому октанті.

Розв'язання. Запишемо рівняння даної частини кола у параметричному вигляді. Оскільки $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$, то $z^2=a^2-(x^2+y^2)=a^2-\dfrac{a^2}{4}$, звідки дістаємо

$$x=\frac{a}{2}\cos t,\ y=\frac{a}{2}\sin t,\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Тоді диференціал дуги кривої

$$dl=\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2+\left(z'\right)^2}dt=\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t+\frac{a^2}{4}\cos^2 t}dt=\frac{a}{2}dt.$$

Знайдемо інтеграл за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$$

Маємо

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{a}{2}\cos t\cdot\frac{a}{2}\sin t\cdot\frac{a}{2}dt=\frac{a^3}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\sin td\left(\sin t\right)=\frac{a^3}{8}\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^3}{16}.$$

Приклад 6. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L\left(x-y\right)dl$, де L – коло $x^2+y^2=2x$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$. Рівняння кола набуває вигляду $\rho=2\cos\varphi$, де $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Для обчислення інтеграла застосуємо формулу

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Оскільки $\rho=2\cos\varphi$, то $\rho'=-2\sin\varphi$, $x=2\cos^2\varphi,\quad y=2\sin\varphi\cos\varphi$. Тоді

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi=\sqrt{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}d\varphi=2d\varphi,$$

$$\int\limits_L (x-y)dl = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right)\cdot 2d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \ d\varphi + 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \ d\left(\cos\varphi\right) =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2\varphi\right) \ d\varphi + 4\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

Приклад 7. Знайти масу кривої L: $y = x^2+1$, $0 \le x \le 1$, якщо густина в кожній точці цієї кривої дорівнює $\gamma(x,y) = x$.

Розв’язання. Оскільки криву задано в явному вигляді $y = y\left(x\right)$, то масу кривої знайдемо за формулою

$$m = \int\limits_a^b \gamma(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx .$$

За умовою $0 \le x \le 1$, $y = x^2+1$, тому $y' = 2x$. Дістаємо

$$m = \int\limits_0^{12} x\sqrt{1+(2x)^2}dx = \int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2) =$$

$$= \frac{2(1+4x^2)^{3/2}}{8\cdot 3}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{(1+4x^2)^3}}{12}\Bigg|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

Приклад 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (8x+4y)dx + (8y+2)dy$, де L – відрізок прямої між точками O(0; 0) і A(3; 6).

Розв’язання. Знаходимо рівняння прямої, що проходить через дві точки O(0; 0) і A(3; 6), дістанемо $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}$, тобто $y = 2x, \quad x \in [0,3]$, звідки $dy = 2dx$. Тоді за формулою

$$\int\limits_{AB} P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big)dx$$

маємо

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_0^3 \Big[\big(8x+4\cdot 2x\big) + \big(8\cdot 2x+2\big)\cdot 2\Big]dx =$$

$$=\int_0^3[48x+4]dx=\left(24x^2+4x\right)\Big|_0^3=228.$$

Приклад 9. Знайти криволінійний інтеграл $\int\limits_L y(x-y)dx+xdy$, де L – дуга параболи $y=2x^2$, яка обмежена точками $A(0;0)$ та $B(1;2)$.

Розв'язання. Оскільки $y=2x^2,\ dy=4xdx,\ 0\le x\le 1,$, то за формулою

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\Big(P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\Big)dx,$$

маємо

$$\int\limits_{\text{L}}y(x-y)dx+xdy=\int_0^1\left(2x^2\left(x-2x^2\right)+x\cdot 4x\right)dx=\int_0^1\left(2x^3-4x^4+4x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}-4\frac{x^5}{5}+4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{31}{30}.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int\limits_L(x+y)dx-xdy$ вздовж ламаної OAB, де $O(0;0),\ A(2;0)$ і $B(4;2)$.

Розв'язання. Вздовж ламаної OAB на ділянці OA маємо $y=0$ і $dy=0$, а на ділянці AB: $y=x-2,\ dy=dx$. Тому

$$\int\limits_L(x+y)dx-xdy=\int\limits_{OA}(x+y)dx-xdy+\int\limits_{AB}(x+y)dx-xdy=$$

$$=\int_0^2 xdx+\int_2^4(x+x-2-x)dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_2^4=2+2=4.$$

Приклад 11. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xdy-ydx$, де L – дуга циклоїди $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ від точки $A(2\pi a;0)$ до точки $B(0;0)$.

Розв'язання. Оскільки $x'_t=a(1-\cos t),\ y'_t=a\sin t$, то за формулою

$$\int\limits_L(P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy)=\int_\alpha^\beta(P(x(t),y(t))x_t'+Q(x(t),y(t))y_t')dt$$

маємо

$$\int\limits_L xdy - ydx = \int\limits_{2\pi}^{0} \left(a^2 (t - \sin t)\sin t - a^2 (1 - \cos t)^2 \right) dt =$$

$$= a^2 \int\limits_{2\pi}^{0} \left(t\sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t \right) dt =$$

$$= a^2 \left(\int\limits_{2\pi}^{0} t\sin t dt - 2\int\limits_{2\pi}^{0} (1 - \cos t) \right) dt = \left| \begin{matrix} u = t,\ du = dt, \\ dv = \sin t dt, \\ v = \int \sin t dt = -\cos t \end{matrix} \right| =$$

$$= a^2 \left((-t\cos t)\Big|_{2\pi}^{0} + \int\limits_{2\pi}^{0} \cos t dt - 2(t - \sin t)\Big|_{2\pi}^{0} \right) = a^2 \left(2\pi + \sin t\Big|_{2\pi}^{0} + 2\cdot 2\pi \right) = 6a^2\pi.$$

Приклад 12. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L \left(1 - x^2\right) ydx + \left(1 + y^2\right) xdy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2.$

Розв’язання. Оскільки криволінійний інтеграл береться по замкненому контуру L, то скористаємось формулою Гріна

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Оскільки $P(x, y) = (1 - x^2)y,\ Q(x, y) = (1 + y^2)x,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2,$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$, то $\oint\limits_L \left(1 - x^2\right) ydx + \left(1 + y^2\right) xdy = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$

де область D – круг, обмежений колом L: $x^2 + y^2 = R^2.$

Перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ у подвійному інтегралі, дістанемо

$$\oint\limits_L \left(1 - x^2\right) ydx + \left(1 + y^2\right) xdy = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;2)} \left(x^2 + 3xy\right) dx + \left(\dfrac{3}{2} x^2 + y \right) dy$.

Розв'язання. Для функцій $P = x^2 + 3xy,\ Q = \frac{3}{2}x^2 + y$ знаходимо частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x$. Оскільки виконується рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Для зручності розглянемо ламану OAB, яка з'єднує точки $O(0;0)$ і $B(1;2)$, причому точку $A(1;0)$ вибираємо так, щоб ділянки були паралельні осям. Тоді на ділянці $OA: y = 0, dy = 0, 0 \le x \le 1$, а на ділянці $AB: x = 1, dx = 0, 0 \le y \le 2$. Отже,

$$\int_{(0;0)}^{(1;2)} \left(x^2 + 3xy\right)dx + \left(\frac{3}{2}x^2 + y\right)dy = \int_{OA} + \int_{AB} = \int_0^1 (x^2 + 3x \cdot 0)dx + \int_0^2 (\frac{3}{2} \cdot 1^2 + y)dy =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^2 (\frac{3}{2} + y)dy = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \left(\frac{3}{2}y + \frac{y^2}{2}\right)\bigg|_0^2 = \frac{1}{3} + 3 + 2 = \frac{16}{3}.$$

Приклад 14. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t,$ $y = b\sin t.$

Розв’язання. Знайдемо площу фігури за формулою $\mathrm{S} = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$.

Оскільки $x_t' = -a\sin t,\ y_t' = b\cos t$, то

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t\right)dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Приклад 15. Визначити роботу сили $\vec{F} = \left(2y + x\right)\vec{i} + \left(y + x^2\right)\vec{j},$ яка переміщує тіло з точки $O(0;0)$ в точку $B(2;10)$ вздовж дуги кривої $y = x^2 + 3x.$

Розв’язання. Робота по переміщенню тіла визначається за формулою $A = \int_L P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy$. Оскільки $y = x^2 + 3x, dy = (2x + 3)dx, 0 \le x \le 2$, то

$$A = \int_L \left(2y + x\right)dx + \left(y + x^2\right)dy = \int_0^2 \left(\left(2x^2 + 7x\right) + \left(2x^2 + 3x\right)\left(2x + 3\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(4x^3 + 14x^2 + 16x\right)dx = \left(x^4 + \frac{14}{3}x^3 + 8x^2\right)\bigg|_0^2 = \frac{256}{3}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

а) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}},\ L-$ *відрізок прямої* $AB; A(0;-2),\ B(4;0)$.

б) $\int\limits_L xydl,$ де L – чверть кола $x=\cos t,\ y=\sin t,\ (x\geq 0, y\geq 0)$.

2. Знайти довжину дуги кривої $y=1-\ln\cos x, 0\leq x\leq \pi/4$.

3. Знайти масу дуги кривої $x=\cos t, y=\sin t, 0\leq t\leq \pi/2$, якщо задана густина $\gamma(x,y)=y$.

1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

а) $\int\limits_L \left(x+y^2\right)dx+ydy$, де L – відрізок прямої $y=x-1$ від точки *A(1; 0)* до точки *B(–1; –2)*.

б) $\oint\limits_L xdy$, де L – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $3x+2y-6=0.$

в) $\int\limits_{(1;1)}^{(2;3)} (x+3y)dx+(3x+y)dy$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $y=a\cos^3 t$ $y=a\sin^3 t, 0\leq t\leq 2\pi$.

3. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=(2xy+y)\vec{i}+(3x^2-1)\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки із положення $B(1;4)$ в точку $C(2;\ 14)$ вздовж дуги параболи $y=3x^2+x$.

Розділ IX. Ряди

Тема 32. Числові ряди. Знакододатні і знакозмінні ряди

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ і знайти його суму.

Розв’язання. Загальний член ряду можна записати так:

$$u_n = \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Тому даний ряд можна записати у вигляді суми двох збіжних геометричних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Оскільки сума геометричного ряду (нескінченої геометричної прогресії) $S = \frac{b_1}{1-q}$, то ці ряди мають відповідно суми $S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ і $S_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. Отже, даний ряд збігається, і його сума S дорівнює: $S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2}$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots$.

Розв’язання. Чисельник кожного члена ряду дорівнює одиниці, а знаменник є добутком двох послідовних непарних натуральних чисел. Оскільки $u_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{1\cdot 3}, u_2 = \frac{1}{3\cdot 5}, u_3 = \frac{1}{5\cdot 7}, \ldots$ то $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Загальний член ряду можна розкласти на дроби методом невизначених коефіцієнтів, тобто

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} - \frac{B}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Тоді частинна сума ряду S_n має вигляд

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Отже, ряд збігається, і його сума $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{6}$.

Приклад 3. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$ на збіжність.

Розв’язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{2n+1}{3n-2}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0 \cdot$$

Оскільки необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n}$.

Розв’язання. Дослідимо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n}$ на збіжність за ознакою порівняння. Розглянемо узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, який збігається при $\alpha = 3 > 1$. Оскільки $\frac{1}{n^3+n} < \frac{1}{n^3}$ $\forall n \in N$, то за першою ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n}$ збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$.

Розв’язання. Розглянемо загальний член ряду $u_n = \frac{n}{n^2+2}$. Для дослідження даного знакододатнього ряду на збіжність потрібно знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, щоб використати ознаку порівняння.

Оскільки при $n \to \infty$ можна відкинути 2 у загальному члені даного ряду, тобто $u_n = \frac{n}{n^2+2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = v_n$, то для порівняння розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Дістанемо $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} = 1 \neq 0.$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним, то за граничною ознакою порівняння даний ряд теж є розбіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$, тоді $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Маємо

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже, за ознакою Даламбера даний ряд збігається.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Оскільки загальний член ряду має вигляд $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, то для дослідження ряду на збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші. Враховуючи другу важливу границю, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1.$$

Отже, даний ряд розбігається.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \dfrac{1}{4\ln 4} + \ldots$.

Розв'язання. Загальний член даного ряду має вигляд $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, яка є додатною і спадною при $x > 0$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл, дістанемо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^{\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Оскільки цей інтеграл розбігається, то даний ряд теж є розбіжним.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Розв'язання. Даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16} + \ldots$ є знакопочережним, дослідимо його на збіжність за ознакою Лейбніца. Перевіримо умови (2) і (3).

Члени знакозмінного ряду спадають за абсолютною величиною

$$1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} > \ldots$$

Границя загального члена ряду $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Оскільки умови ознаки Лейбніца виконуються, то даний ряд є збіжним.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{2}$.

Розв’язання. Оскільки в залежності від n члени ряду можуть бути як додатними, так і від’ємними, то даний ряд є знакозмінним. Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності ряду. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n}{2}$ не існує, то необхідна умова не виконується, тому даний ряд розбіжний.

Приклад 11. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.

Розв’язання. Даний ряд є знакопочережним. Для дослідження даного ряду на збіжність розглянемо ряд із абсолютних величин членів цього ряду, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Дослідимо одержаний знакододатний ряд на збіжність за допомогою ознаки Даламбера. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду, збігається. Отже, даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$ збігається абсолютно.

Приклад 12. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$.

Розв’язання. Даний ряд є знакозмінним, оскільки загальний член ряду $u_n = \frac{\sin n}{n^3}$ може бути як додатним, так і від’ємним залежно від n. Побудуємо ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3}$. Цей ряд є знакододатнім, оскільки $\left|u_n\right|=\frac{\left|\sin n\right|}{n^3}>0$, тому для його дослідження можна використати ознаки збіжності знакододатніх рядів.

Скористаємось ознакою порівняння для рядів. Оскільки $\left|u_n\right|=\frac{\left|\sin n\right|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}=v_n$, то за еталонний ряд візьмемо ряд $v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, який збігається як узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha=3>1$. Тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin n\right|}{n^3}$ теж збігається. Отже, даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$ збігається абсолютно.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Розв’язання. Маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}u_n$, в якому $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, є розбіжним як узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha=\frac{1}{2}<1$.

Для дослідження даного знакопочережного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ застосуємо ознаку Лейбніца. Оскільки $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, тобто умови виконуються, то даний ряд збігається. Але ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду, розбігається. Тому заданий ряд є умовно збіжним.

Приклад 14. Знайти суму ряду $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+...$ з точністю до 0,001.

Розв’язання. Маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}n}{10^n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. Дійсно, виконуються обидві умови ознаки

$$u_{n+1}=\frac{n+1}{10^{n+1}}\le\frac{2n}{10\cdot 10^n}=\frac{n}{5\cdot 10^n}<\frac{n}{10^n}=u_n,\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n\ln 10}=0.$$

Похибка при наближеному обчисленні суми збіжного знакопочережного ряду не перевищує абсолютного значення першого відкинутого члена ряду. Оскільки $u_1=\frac{1}{10}=0{,}1>0{,}001$, $u_2=\frac{2}{10^2}=0{,}02>0{,}001$, $u_3=\frac{3}{10^3}=0{,}003>0{,}001$, $u_4=\frac{4}{10^4}=0{,}0004<0{,}001$, то $|R_3|=|S-S_3|<u_4<0{,}001$, тому при наближеному обчисленні суми обмежимось трьома членами ряду. Тоді сума ряду $S\approx\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}=0{,}983$ знайдена з точністю до 0,001.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти суму ряду

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$.

2. Дослідити ряд на збіжність

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+4n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$. в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n^5+4n^3+3n}}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}$. д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{6^n}$. е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n}$.

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

3. Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$. г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{4^n}$. е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(n+1)^{2n}}$.

4. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{3^n}$ з точністю до 0,01. Скільки членів цього ряду треба залишити, щоб обчислити його суму із вказаною точністю?

Тема 33. Функціональні ряди. Степеневі ряди та їх застосування

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти область збіжності та суму функціонального ряду $1+x+x^2+...+x^n+...$

Розв’язання. При будь-якому значенні x заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ є числовим геометричним рядом із знаменником $q=x$. Цей ряд збігається на проміжку $(-1;1)$, оскільки $|q|=|x|<1$. При цьому сума ряду $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$.

Зазначимо, що при $|x|\geq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ є розбіжним.

Приклад 2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$.

Розв’язання. Знайдемо радіус збіжності даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=3.$$

Отже, $(-3;3)$ – інтервал збіжності даного степеневого ряду.

При $x=-3$ маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца. Отже, $x=-3$ – точка збіжності ряду.

При $x=3$ маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Отже, $x=3$ є точкою розбіжності степеневого ряду.

Отже, $[-3;3)$ – область збіжності степеневого ряду.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}x^n$.

Розв’язання. Для обчислення радіуса збіжності ряду застосуємо формулу

$R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$. Враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, маємо

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{4^n}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки радіус збіжності $R = \dfrac{1}{4}$, то ряд збіжний при $|x| < \dfrac{1}{4}$ і розбіжний при $|x| > \dfrac{1}{4}$. Дослідимо ряд на збіжність у точках $x = -\dfrac{1}{4}$, $x = \dfrac{1}{4}$.

При $x = -\dfrac{1}{4}$ маємо знакопочережний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца. Якщо $x = \dfrac{1}{4}$, то маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду є проміжок $\left[-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{4}\right)$.

Приклад 4. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n}$.

<u>Розв’язання.</u> Скористаємось узагальненою ознакою Даламбера, маємо

$$|u_n(x)| = \frac{|x+3|^n}{n},\ |u_{n+1}(x)| = \frac{|x+3|^{n+1}}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|^{n+1}n}{|x+3|^n(n+1)} = |x+3|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x+3|.$$

За ознакою ряд є абсолютно збіжним, якщо $|x+3| < 1$ або $-4 < x < -2$. Таким чином, маємо інтервал збіжності $(-4;-2)$ і радіус збіжності $R = 1$. Дослідимо цей ряд на збіжність на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = -4$ дістанемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-4+3)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x=-2$ маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+3)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Отже, областю збіжності заданого ряду є проміжок $[-4;-2)$.

Приклад 5. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$.

<u>Розв'язання</u>. Використаємо відомий розклад

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ x\in R$ і замінимо x на $\frac{3x}{2}$.

$$\sin\left(\frac{3x}{2}\right)=\frac{3x}{2}-\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=1{,}5x+\frac{(1{,}5)^3}{3!}x^3+$$

$$+\frac{(1{,}5)^5}{5!}x^5-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(1{,}5)^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1}+\ldots.$$

За допомогою ознаки Даламбера можна показати, що областю збіжності цього ряду є $(-\infty;+\infty)$, тобто знайдений розклад має місце при $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 6. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x)=\ln(3+2x)$ за степенями $(x+1)$.

<u>Розв'язання.</u> Подамо функцію $f(x)$ у вигляді

$$\ln(3+2x)=\ln(1+(2+2x))=\ln(1+2(x+1)),$$

скористаємося відомим розкладом

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ -1<x\le 1$$

і замінимо x на $2(x+1)$. Дістанемо:

$$2(x+1)-\frac{(2(x+1))^2}{2}+\frac{(2(x+1))^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2(x+1))^n}{n}+\ldots=$$

$$=2(x+1)-\frac{2^2}{2}(x+1)^2+\frac{2^3}{3}(x+1)^3-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n}{n}\cdot(x+1)^n+\ldots.$$

Область збіжності цього ряду можна знайти, застосовуючи ознаку Даламбера для одержаного степеневого ряду. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x+1)^{n+1}n}{(n+1)2^n(x+1)^n}\right|=2|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=2|x+1|<1,$$

звідки дістаємо $-\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$.

При $x=-\frac{3}{2}$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним, а при $x=-\frac{1}{2}$ знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є збіжним за ознакою Лейбніца. Отже, область збіжності ряду $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$.

Отже, при $x\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$ функція $f(x)=\ln(3+2x)$ розкладається в ряд

$$\ln(3+2x)=2(x+1)-\frac{2^2}{2}(x+1)^2+\frac{2^3}{3}(x+1)^3-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n}{n}(x+1)^n+\ldots,$$

Приклад 7. За допомогою степеневого ряду наближено обчислити $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ з точністю до 0,00001.

Розв’язання. Для обчислення наближеного значення скористаємося розкладом функції $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$. Тоді при $x=-\frac{1}{5}$ маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot 5^n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. При цьому похибка наближеного обчислення суми ряду за абсолютною величиною не перевищує першого відкинутого члена ряду. Оскільки $\frac{1}{5!\cdot 5^5}<0{,}00001$, то

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}-\frac{1}{3!\cdot 5^3}+\frac{1}{4!\cdot 5^4}\ldots\approx 0{,}81873.$$

Приклад 8. За допомогою степеневого ряду обчислити наближено $\sin 17^\circ$ з точністю до 0,0001

Розв’язання. Для обчислення наближеного значення $\sin 17^\circ$ скористаємося розкладом в ряд Маклорена функції $\sin x$:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки $17^0 = \frac{17\pi}{180}$ (радіан), то, підставивши це значення в ряд Маклорена, дістанемо

$$\sin 17^0 = \sin\frac{17\pi}{180} = \frac{17\pi}{180} - \left(\frac{17\pi}{180}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \left(\frac{17\pi}{180}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} - \dots$$

Одержаний числовий ряд є збіжним знакопочережним рядом, тому похибка при наближеному обчисленні суми збіжного знакопочережного ряду не перевищує абсолютного значення першого відкинутого члена ряду. Оскільки $\left(\frac{17\pi}{180}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} \approx 0{,}000019 < 0{,}0001$, то для обчислення із заданою точністю можна обмежитись двома членами ряду. Дістанемо

$$\sin 17^0 \approx 0{,}2967 - 0{,}00435 \approx 0{,}2924.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

<u>Розв’язання.</u> Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена і проінтегруємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{2430} - \dots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{26}{81} \approx 0{,}321,$$

оскільки $\frac{1}{3} > 0{,}001$, $\frac{1}{81} > 0{,}001$, $\frac{1}{2430} < 0{,}001$.

Приклад 10. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в ряд розв’язку рівняння $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = -1$.

<u>Розв’язання.</u> Розв’язок диференціального рівняння можна одержати наближено за допомогою розкладу функції в ряд Тейлора.

Запишемо розв’язок рівняння у вигляді ряду

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots.$$

Оскільки $y(1) = -1$, то для диференціального рівняння $y' = x^2 + y^3$ маємо

$$y'(1)=1^2+(-1)^3=0,$$

$$y''=2x+3y^2y', \qquad y''(1)=2\cdot 1+3\cdot(-1)^2\cdot 0=2,$$

$$y'''=2+6y(y')^2+3y^2y'', \qquad y'''(1)=8.$$

Отже, для розв'язку даного диференціального рівняння маємо три перших члени (відмінних від нуля) розкладу в ряд

$$y(x)=-1+\frac{0}{1!}(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{8}{3!}(x-1)^3\approx -1+(x-1)^2+\frac{4}{3}(x-1)^3.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$. г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3x)^{n-1}}{n!}$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n^2}$. ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{n\,5^n}$.

2. Розкласти функцію в ряд Тейлора (Маклорена) в околі точки x=0, користуючись відомими розкладами функцій

а) $y=\sin^2 x$. б) $y=\sqrt{x^2+1}$. в) $y=x\ln(x+1)$.

3. За допомогою степеневого ряду наближено обчислити $\dfrac{1}{e^2}$ з точністю до 0,0001.

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x^2dx$ з точністю до 0,001.

5. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=y^2+xe^y$, $y(0)=0$.

Типові завдання для розрахункової роботи

Завдання 1. Обчислити визначник

1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -5 & -4 \\ 4 & 2 & -2 & -10 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$,.

17. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -10 & -9 & -7 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -8 & -7 & 2 \\ 0 & 5 & 14 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & -5 & -1 & -2 \\ 10 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 & 2 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 10 & -5 & 5 & 15 \\ 8 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ -4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 4 & -8 \end{vmatrix}$.

Завдання 2. Для заданих матриць A і B знайти $2A-3B$, A^T+B^T, AB, BA.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 8\\ 5 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 7\\ 1 & 3 & 7\\ 7 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 0\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ 5 & 6 & 0\\ 1 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix}1 & 6 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 0\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 5 & -3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -3 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю A^{-1}до даної матриці A і зробити перевірку, обчисливши добуток матриць A та A^{-1}.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & -3 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ -5 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 4 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$ 30. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Завдання 4. Розв'язати матричне рівняння і зробити перевірку.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

7. $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -4 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$

9. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$

11. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$

13. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & -1\\ 5 & -4 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}.$

15. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

16. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}5 & -1 & -3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix}-3 & -1 & -4\end{pmatrix}-X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot X=2\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}-X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}-2X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

24. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

25. $2\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

27. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

28. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

29. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

30. $4\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Завдання 5. Розв’язати систему рівнянь методом Гауса.

1. $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ x+5y-4z=-5, \\ 4x+y-3z=-4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y+3z=3, \\ x-3y+z=2, \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x-y+3z=-4, \\ 3x+5y+z=4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+4y+z=-2, \\ 2x+y+3z=5, \\ x-2y+z=14 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+2y+z=8, \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x+y+z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x+2y-z=3, \\ x-y+2z=-4, \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-3y-z=1, \\ 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+4y+z=4, \\ 3x+6y+2z=4, \\ 4x-y-3z=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x-y-3z=13, \\ 3x-2y+4z=-15. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-3y+z=3, \\ x+y-2z=4, \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x-y-z=0, \\ x+2y+3z=14, \\ 4x+3y+2z=16. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -4, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - 4y - 2z = -3, \\ 3x + y + z = 5, \\ 3x - 5y - 6z = -9. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ 3x + y + 2z = 6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x - 3y + z = -4, \\ x + 2y + z = -1, \\ 2x + 4y + 3z = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x+5y+2z=-1, \\ 2x-y-6z=5, \\ -x+y+3z=-4. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x+3y+z=-1, \\ 3x-y+3z=-2, \\ x-5y+2z=2. \end{cases}$

Завдання 6. Дослідити систему рівнянь і знайти її розв’язок (у випадку сумісності)

1. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ 4x_1+x_3-7x_4=3, \\ 2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7, \\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8, \\ x_2-x_3-x_4=-1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1, \\ 6x_1+9x_2-8x_3+7x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ 3x_2+x_3-5x_4=-8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+5x_2-x_4=-1, \\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 8x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-x_4=7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-4, \\ 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-5, \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -8, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -10. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -10, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 9. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

Завдання 7. Показати, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис тривимірного векторного простору, та розкласти вектор $\vec{b}$ за цим базисом (при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь використати метод Крамера).

1. $\vec{a}_1 = (3; -1; -5)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; -8)$, $\vec{a}_3 = (0; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 1; 2)$.

2. $\vec{a}_1 = (1; -5; 2)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 0)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (3; 5; 1)$.

3. $\vec{a}_1 = (3; 0; 1)$, $\vec{a}_2 = (-2; 5; 2)$, $\vec{a}_3 = (-8; -2; 3)$, $\vec{b} = (-9; 15; 5)$.

4. $\vec{a}_1 = (2; 1; 1)$, $\vec{a}_2 = (1; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 1)$, $\vec{b} = (3; -4; 2)$.

5. $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (2; 2; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 1)$, $\vec{b} = (5; 7; 10)$.

6. $\vec{a}_1 = (2; 4; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; -3; 3)$, $\vec{a}_3 = (-1; 2; 0)$, $\vec{b} = (-5; 1; -15)$.

7. $\vec{a}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; 2; 1)$, $\vec{b} = (4; 3; 6)$.

8. $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (0; 5; -2)$, $\vec{a}_3 = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 9; 15)$.

9. $\vec{a}_1 = (-2; 3; 7)$, $\vec{a}_2 = (1; -4; 0)$, $\vec{a}_3 = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (-6; 1; 1)$.

10. $\vec{a}_1 = (-1; 4; -3)$, $\vec{a}_2 = (-2; -1; 2)$, $\vec{a}_3 = (3; 0; 7)$, $\vec{b} = (7; 2; 3)$.

11. $\vec{a}_1 = (0; 1; 2)$, $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; 2; 4)$, $\vec{b} = (-2; 4; 7)$.

12. $\vec{a}_1 = (1;\,3;\,0)$, $\vec{a}_2 = (2;\,-1;\,1)$, $\vec{a}_3 = (0;\,-1;\,2)$, $\vec{b} = (6;\,12;\,-1)$.

13. $\vec{a}_1 = (2;\,1;\,-1)$, $\vec{a}_2 = (0;\,3;\,2)$, $\vec{a}_3 = (1;\,-1;\,1)$, $\vec{b} = (1;\,-4;\,4)$.

14. $\vec{a}_1 = (4;\,1;\,1)$, $\vec{a}_2 = (2;\,0;\,-3)$, $\vec{a}_3 = (-1;\,2;\,1)$, $\vec{b} = (-9;\,5;\,5)$.

15. $\vec{a}_1 = (-2;\,0;\,1)$, $\vec{a}_2 = (1;\,3;\,-1)$, $\vec{a}_3 = (0;\,4;\,1)$, $\vec{b} = (-5;\,-5;\,5)$.

16. $\vec{a}_1 = (5;\,1;\,0)$, $\vec{a}_2 = (2;\,-1;\,3)$, $\vec{a}_3 = (1;\,0;\,-1)$, $\vec{b} = (13;\,2;\,7)$.

17. $\vec{a}_1 = (0;\,1;\,1)$, $\vec{a}_2 = (-2;\,0;\,1)$, $\vec{a}_3 = (3;\,1;\,0)$, $\vec{b} = (-19;\,-1;\,7)$.

18. $\vec{a}_1 = (1;\,0;\,2)$, $\vec{a}_2 = (0;\,1;\,1)$, $\vec{a}_3 = (2;\,-1;\,4)$, $\vec{b} = (3;\,-3;\,4)$.

19. $\vec{a}_1 = (3;\,1;\,0)$, $\vec{a}_2 = (-1;\,2;\,1)$, $\vec{a}_3 = (-1;\,0;\,2)$, $\vec{b} = (3;\,3;\,-1)$.

20. $\vec{a}_1 = (-1;\,2;\,1)$, $\vec{a}_2 = (2;\,0;\,3)$, $\vec{a}_3 = (1;\,1;\,-1)$, $\vec{b} = (-1;\,7;\,-4)$.

21. $\vec{a}_1 = (1;\,1;\,4)$, $\vec{a}_2 = (0;\,-3;\,2)$, $\vec{a}_3 = (2;\,1;\,-1)$, $\vec{b} = (6;\,5;\,-14)$.

22. $\vec{a}_1 = (1;\,-2;\,0)$, $\vec{a}_2 = (-1;\,1;\,3)$, $\vec{a}_3 = (1;\,0;\,4)$, $\vec{b} = (6;\,-1;\,7)$.

23. $\vec{a}_1 = (1;\,0;\,5)$, $\vec{a}_2 = (-1;\,3;\,2)$, $\vec{a}_3 = (0;\,-1;\,1)$, $\vec{b} = (5;\,15;\,0)$.

24. $\vec{a}_1 = (1;\,1;\,0)$, $\vec{a}_2 = (0;\,1;\,-2)$, $\vec{a}_3 = (1;\,0;\,3)$, $\vec{b} = (2;\,-1;\,11)$.

25. $\vec{a}_1 = (1;\,0;\,2)$, $\vec{a}_2 = (-1;\,0;\,1)$, $\vec{a}_3 = (2;\,5;\,-3)$, $\vec{b} = (11;\,5;\,-3)$.

26. $\vec{a}_1 = (2;\,0;\,1)$, $\vec{a}_2 = (1;\,1;\,0)$, $\vec{a}_3 = (4;\,1;\,2)$, $\vec{b} = (8;\,0;\,5)$.

27. $\vec{a}_1 = (0;\,1;\,3)$, $\vec{a}_2 = (1;\,2;\,-1)$, $\vec{a}_3 = (2;\,0;\,-1)$, $\vec{b} = (3;\,1;\,8)$.

28. $\vec{a}_1 = (1;\,2;\,-1)$, $\vec{a}_2 = (3;\,0;\,2)$, $\vec{a}_3 = (-1;\,1;\,1)$, $\vec{b} = (8;\,1;\,12)$.

29. $\vec{a}_1 = (1;\,4;\,1)$, $\vec{a}_2 = (-3;\,2;\,0)$, $\vec{a}_3 = (1;\,-1;\,-1)$, $\vec{b} = (-9;-8;-3)$.

30. $\vec{a}_1 = (0;\,1;\,-2)$, $\vec{a}_2 = (3;\,-1;\,1)$, $\vec{a}_3 = (4;\,1;\,0)$, $\vec{b} = (-5;\,9;-13)$.

Завдання 8. Задано координати вершин трикутника ABC. Знайти:
1) довжину сторони BC; 2) рівняння сторін AB і BC та їх кутові коефіцієнти; 3) кут B в радіанах (з точністю до 0,01); 4) рівняння висоти AD та її довжину; 5) рівняння медіани BM; 6) рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно до сторони AB.

1. $A(-8;-3), B(4;\,-12), C(8;\,10)$.

2. $A(-5;7), B(7;-2), C(11;\ 20)$.

3. $A(-12;-1), B(0;-10), C(4;12)$.

4. $A(-10;9), B(2;0), C(6;\ 22)$.

5. $A(0;\ 2), B(12;-7), C(16;15)$.

6. $A(-9;\ 6), B(3;-3), C(7;\ 19)$.

7. $A(1;\ 0), B(13;-9), C(17;\ 13)$.

8. $A(-4;10), B(8;1), C(12;\ 23)$.

9. $A(2;\ 5), B(14;-4), C(18;\ 18)$.

10. $A(-1;4), B(11;-5), C(15;17)$.

11. $A(-2;7), B(10;-2), C(8;12)$.

12. $A(-6;8), B(6;-1), C(4;13)$.

13. $A(3;\ 6), B(15;-3), C(13;11)$.

14. $A(-10;5), B(2;-4), C(0;10)$.

15. $A(-4;12), B(8;3), C(6;17)$.

16. $A(-3;10), B(9;1), C(7;\ 15)$.

17. $A(4;1), B(16;-8), C(14;6)$.

18. $A(-7;4), B(5;-5), C(3;9)$.

19. $A(0;3), B(12;-6), C(10;8)$.

20. $A(-5;9), B(7;0), C(5;14)$.

21. $A(2;-4), B(-2;1), C(17;1)$.

22. $A(4;-2), B(16;17), C(-10;4)$.

23. $A(14;10), B(-1;1), C(3;8)$.

24. $A(15;1), B(1;-5), C(8;9)$.

25. $A(-3;4), B(-2;0), C(5;8)$.

26. $A(4;-2), B(1;0), C(-2;5)$.

27. $A(5;1), B(1;-2), C(-4;10)$.

28. $A(3;-8), B(0;-2), C(6;0)$.

29. $A(12;4), B(6;4), C(8;-2)$.

30. $A(10;-2), B(5;5), C(12;9)$.

Завдання 9. Задано координати вершин піраміди $ABCD$. Знайти:
1) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 2) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
3) площу грані ABC; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

1. $A(2;-3;1), B(6;1;-1), C(4;8;-9), D(2;-1;2)$.

2. $A(5;-1;-4), B(9;3;-6), C(7;10;-14), D(5;1;-3)$.

3. $A(1;-4;0), B(5;0;-2), C(3;7;-10), D(1;-2;1)$.

4. $A(-3;-6;2), B(1;-2;0), C(-1;5;-8), D(-3;-4;3)$.

5. $A(-1;1;-5), B(3;5;-7), C(1;12;-15), D(-1;3;-4)$.

6. $A(-4;2;-1), B(0;6;-3), C(-2;13;-11), D(-4;4;0)$.

7. $A(0;4;3), B(4;8;1), C(2;15;-7), D(0;6;4)$.

8. $A(-2;0;-2), B(2;4;-4), C(0;11;-12), D(-2;2;-1)$.

9. $A(3;3;-3), B(7;7;-5), C(5;14;-13), D(3;5;-2)$.

10. $A(4;-2;5), B(8;2;3), C(6;9;-5), D(4;0;6)$.

11. $A(-5;0;1), B(-4;-2;3), C(6;2;11), D(3;4;9)$.

12. $A(1;-4;0), B(2;-6;2), C(12;-2;10), D(9;0;8)$.

13. $A(-1;-2;-8), B(0;-4;-6), C(10;0;2), D(7;2;0)$.

14. $A(0;2;-10), B(1;0;-8), C(11;4;0), D(8;6;-2)$.

15. $A(3;1;-2), B(4;-1;0), C(14;3;8), D(11;5;6)$.

16. $A(-8;3;-1), B(-7;1;1), C(3;5;9), D(0;7;7)$.

17. $A(2;-1;-4), B(3;-3;-2), C(13;1;6), D(10;3;4)$.

18. $A(-4;5;-5), B(-3;3;-3), C(7;7;5), D(4;9;3)$.

19. $A(-2;-3;2), B(-1;-5;4), C(9;-1;12), D(6;1;10)$.

20. $A(-3;4;-3), B(-2;2;-1), C(8;6;7), D(5;8;5)$.

21. $A(4;2;5), B(0;7;2), C(0;2;7), D(1;5;0)$.

22. $A(4;4;10), B(4;10;2), C(2;8;4), D(9;6;4)$.

23. $A(4;6;5), B(6;9;4), C(2;10;10), D(7;5;9)$.

24. $A(3;5;4), B(8;7;4), C(5;10;4), D(4;7;8)$.

25. $A(10;6;6), B(-2;8;2), C(6;8;9), D(7;10;3)$.

26. $A(1;8;2), B(5;2;6), C(5;7;4), D(4;10;9)$.

27. $A(6;6;5), B(4;9;5), C(4;6;11), D(6;9;3)$.

28. $A(7;2;2), B(5;7;7), C(5;3;1), D(2;3;7)$.

29. $A(8;6;4), B(10;5;5), C(5;6;8), D(8;10;7)$.

30. $A(7;7;3), B(6;5;8), C(3;5;8), D(8;4;1)$.

Завдання 10. Записати рівняння кривої в канонічному вигляді, визначити тип кривої та її основні характеристики. Побудувати криву.

1. $4x^2 + 25y^2 + 24x - 150y + 161 = 0$.

2. $9x^2 - 36y^2 - 54x + 72y - 279 = 0$.

3. $9x^2 - 25y^2 - 36x + 100y - 289 = 0$.

4. $16x^2 - 9y^2 - 96x - 54y - 81 = 0$.

5. $9x^2 + 36y^2 + 18x + 144y - 153 = 0$.

6. $16x^2 + 9y^2 - 64x + 72y + 64 = 0$.

7. $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$.

8. $4x^2 - 25y^2 + 50x + 8y - 121 = 0$.

9. $16x^2 + 4y^2 - 64x - 8y + 4 = 0$.

10. $9x^2 + 4y^2 - 72x - 16y + 124 = 0$.

11. $4y^2 - 16x^2 - 32x + 48y + 64 = 0$.

12. $25x^2 + 4y^2 - 100x + 8y + 4 = 0$.

13. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$.

14. $9x^2 - 25y^2 + 36x + 50y - 214 = 0$.

15. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y - 89 = 0$.

16. $25x^2 + 4y^2 + 50x + 40y + 25 = 0$.

17. $16x^2 - 4y^2 + 96x + 16y - 16 = 0$.

18. $9x^2 + 4y^2 + 18x + 16y - 11 = 0$.

19. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 72y - 116 = 0$.

20. $16x^2 + 4y^2 + 96x + 16y + 64 = 0$.

21. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 54y - 53 = 0$.

22. $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 139 = 0$.

23. $25x^2 - 4y^2 + 50x + 24y - 36 = 0$.

24. $9x^2 + 4y^2 + 54x + 24y + 81 = 0$.

25. $9y^2 - 16x^2 - 32x - 72y - 16 = 0$.

26. $16x^2 + 4y^2 + 48x + 32y + 96 = 0$.

27. $4x^2 + 25y^2 + 8x - 50y - 7 = 0$.

28. $4x^2 - 9y^2 - 8x - 54y - 113 = 0$.

29. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$.

30. $9x^2 - 4y^2 - 72x + 16y + 92 = 0$.

Завдання 11.

1. Написати рівняння площини, що проходить через точку M(-1;-1;2) перпендикулярно до площин $x - 2y + z - 4 = 0$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

2. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M(-4;-7;1) паралельно до прямої $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x + 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$

3. Знайти рівняння площини, що проходить через точки A(2;0;-1), B(1;-1;3) перпендикулярно до площини $3x + 2y - z + 5 = 0$.

4. Точки A(-4;3;7) , B(2;-1;5) , C(-2;-6;11) є вершинами паралелограма ABCD. Скласти рівняння сторін AD і CD.

5. Задано точки A(1;2;-1) , B(3;8;4) , C(7;5;6) . Знайти кут між площиною, що проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{AB}$, і площиною, що проходить через точку B перпендикулярно до $\vec{BC}$.

6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M(-4;3;-8) перпендикулярно до двох прямих $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-4}$, $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-1}{5}$.

7. Записати рівняння площини, що проходить через початок координат і через точки A(4;-2;1) і B(2;4;-3). Знайти відстань від точки C(1;1;1) до цієї площини.

8. Скласти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M(3;4;-5) паралельно до векторів $\vec{a}=(3,1,-1), \vec{b}=(1,-2,1)$.

10. Дано вершини трикутника A(3;6;-7) , B(-5;2;3) і C(4;-7;2). Скласти параметричне рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

11. Знайти рівняння площини, що проходить через точку M(10;-1;5) паралельно до площини $15x-10y+6z+5=0$. Обчислити відстань від початку координат до цієї площини.

12. Дано точки A(1;1;1) , B(2;3;3) , C(3;3;2). Скласти рівняння прямої, що проходить через точку A перпендикулярно до векторів $\vec{AB}, \vec{AC}$.

13. Записати рівняння площини, знаючи, що точка P(3;-6;2) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину. Обчислити відстань від початку координат до цієї площини.

14. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A(2;3;1) на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

15. Обчислити висоту піраміди з вершинами A(3;5;3) , B(-2;11;-5) , C(1;-1;4), D(0;6;4), опущеної з вершини D.

16. Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

17. Скласти рівняння площини, що проходить через точки К(1;-1;2) і М(3;1;2) перпендикулярно до площини $4x-5y+3z-2=0$.

18. У паралелограмі $ABCD$ задано три вершини $A(-2;8;-4)$, $B(9;-5;6)$, $C(-6;-2;10)$. Скласти рівняння діагоналей AC і BD.

19. Записати рівняння площини, що проходить через початок координат і точки А(2;2;1) , В(-4;-4;-2). Знайти кут між цією площиною та площиною $x+4y-10z-5=0$.

20. Скласти параметричні рівняння прямої $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

21. Дано точки А(2;-1;3) , В(1;-3;5) ,С(6;2;5). Знайти відстань від точки $D(3;-2;-5)$ до площини, яка проходить через задані точки.

22. Знайти кут між прямою $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$ та прямою, що проходить через дві точки А(0;3;-1) , В(2;12;5).

23. Скласти рівняння площини, що проходить через точку М(1;5;2) паралельно до площини, що проходить через три точки А(4;-3;1) , В(3;4;0), С(-1;-1;5) .

24. Дано точки А(-1;3;-4) , В(0;2;-7) , С(4;-3;6) . Скласти рівняння прямої, що проходить через точку А перпендикулярно до векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

25. Скласти рівняння площини, що проходить через точку М(2;1;-3) перпендикулярно до двох площин $2x-3y+z-5=0$, $x+4y-2z+3=0$.

26. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку М(-1;3;0) перпендикулярно до площини АВС, якщо А(-3;-2;-4), В(-4;2;-7) і С(5;0;3).

27. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку С(4;-2;1) перпендикулярно до прямої АВ, якщо А(3;-1;5) , В(7;1;1).

28. Скласти рівняння сторін трикутника з вершинами $A(7;2;-6)$, $B(11;-3;5)$, $C(-3;4;-2)$ та знайти рівняння його медіани, проведеної з вершини В.

29. Знайти точку перетину площини, яка проходить через точку С(0;1;-1) перпендикулярно до прямої АВ, де А(-1;2;3) , В(3;4;-1), із прямою AB.

30. Знайти проекцію точки M(1;-1;-2) на пряму $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$. Обчислити відстань від цієї точки до прямої.

Завдання 12. Знайти точку, симетричну точці M відносно площини π, якщо

1. $M(2;-1;1)$, $\pi: x-y+2z-2=0$.
2. $M(-1;0;1)$, $\pi: 2x+4y-3=0.$
3. $M(1;1;1)$, $\pi: x+4y-3z-5=0.$
4. $M(1;0;1)$, $\pi: 4x+6y+4z-25=0.$
5. $M(-1;0;2)$, $\pi: 2x+6y-2z+11=0.$
6. $M(0;2;1)$, $\pi: 2x+4y-3=0.$
7. $M(3;-3;1)$, $\pi: 2x-4y-4z-13=0.$
8. $M(2;1;0)$, $\pi: y+z+2=0.$
9. $M(1;0;1)$, $\pi: 4x-5y-z-7=0.$
10. $M(1;2;3)$, $\pi: 2x+10y+10z-1=0.$
11. $M(-2;0;3)$, $\pi: 2x-2y-10z-1=0.$
12. $M(0;-3;-2)$, $\pi: 2x-20y+10z+1=0.$
13. $M(1;0;-1)$, $\pi: 2y+4z-1=0.$
14. $M(3;3;3)$, $\pi: 8x+6y+8z-25=0.$
15. $M(2;-2;-3)$, $\pi: y+z+2=0.$
16. $M(1;-1;2)$, $\pi: 2x-y+z-2=0.$
17. $M(1;0;-1)$, $\pi: 4y+2z-3=0.$
18. $M(1;1;1)$, $\pi: 4x+y-3z-5=0.$
19. $M(0;1;1)$, $\pi: 6x+4y+4z-25=0.$
20. $M(0;-1;2)$, $\pi: 6x+2y-2z+11=0.$
21. $M(2;0;1)$, $\pi: 4x+2y-3=0.$

22. $M(-3;3;1),\quad \pi: 4x-2y+4z+13=0.$

23. $M(1;2;0),\quad \pi: x+z+2=0.$

24. $M(-1;0;2),\quad \pi: 4x-y-5z-7=0.$

25. $M(3;2;1),\quad \pi: 10x+10y+2z-1=0.$

26. $M(0;-2;3),\quad \pi: 2x-2y+10z+1=0.$

27. $M(-2;-3;0),\quad \pi: 10x-20y+2z+1=0.$

28. $M(1;-1;0),\quad \pi: 4y+2z-1=0.$

29. $M(3;3;3),\quad \pi: 8x+8y+6z-25=0.$

30. $M(-2;2;-3),\quad \pi: x+z+2=0.$

Завдання 13. Обчислити границі функцій

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-2}{x^2+2x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{7x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x^3}{2+x+x^2+8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^3+12}{2x^5+9}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 3x}{10x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+1}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x^2-7x}{1-3x-5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\cos 2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^3}{1+4x^2+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 9x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x+1}{3x^3-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5}{7x^3+x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{2}{3x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+5}{2x^3-3x+21}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$; в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 4x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{2x-x^3}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 2x}{x\sin3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{-3x^2-x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+6}{x^2-2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{2x\cos3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,tg4x}{\sin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+2}{4-x-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x\cdot tg3x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to0}\ (1+2x)^{4/x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{tg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x+3}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+1}{-x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-3x^2+x}{x^2-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\cos5x}{\sin6x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1+4x)^{\frac{3}{2x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot tg\,4x}{\sin^2 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{1-x}\right)^{3x-1}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+6}{-x^2-x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x\cdot tg\,4x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin8x}{xtg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{x/(x^2-4)}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-4}{-x^2+4x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{16x^2-13x-3}{2x^2+3x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x\cos7x}{\sin2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{5x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3-9x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\sin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{1/(3x-2)}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{-x^2-x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ 3x\cdot tg\ \ 2x}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{2x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x-8}{2x^2+5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 6x}{tg^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-8x\right)^{2/(x-4)}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x-1}{-x^2+5x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot\cos 8x}{\sin 10x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{x+5}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-2x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+x-6}{x^2-3x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot tg\,4x}{\sin^2 6x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{x-6}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-6}{-x^2+5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{12+x}-3}{1-\sqrt{x+4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot tg 3x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x-3}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x+7}{3x^2-x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{4x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x-4}{-x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+8}{2x^2+5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{2-\sqrt{x^2+4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x\cdot\cos5x}{\sin8x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2x^3}}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+2x-24}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x\cdot tg\,2x}{\sin^2 4x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-10}{-x^2+7x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x\cdot tg\,2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Завдання 14. Дослідити функцію на неперервність. Визначити характер точок розриву.

1. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$.

2. а) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x-2}{x^2+x-2}$; б) $f(x)=3^{\frac{1}{x-8}}$.

3. а) $f(x)=\dfrac{5x^2-x-4}{x^2+2x-3}$; б) $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}$.

4. а) $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+4x-5}$; б) $f(x)=10^{\frac{1}{x-5}}$.

5. а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+x-3}$; б) $f(x)=12^{\frac{1}{x-4}}$.

6. а) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+5x-7}$; б) $f(x)=8^{\frac{1}{6-x}}$.

7. а) $f\left(x\right)=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$; б) $f(x)=5^{\frac{1}{x-7}}$.

8. а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+3x-4}$; б) $f(x)=11^{\frac{1}{4+x}}$.

9. а) $f\left(x\right)=\dfrac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x-5}$; б) $f(x)=13^{\frac{1}{9-x}}$.

10. а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-3x+2}$; б) $f(x)=7^{\frac{1}{2-x}}$.

11. а) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2-7x+4}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=2^{\frac{1}{x+10}}$.

12. а) $f\left(x\right)=\dfrac{4x^2-7x+3}{x^2-5x+4}$; б) $f(x)=15^{\frac{1}{1-x}}$.

13. а) $f\left(x\right)=\dfrac{5x^2-7x+2}{x^2-6x+5}$; б) $f(x)=6^{\frac{1}{x-9}}$.

14. а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-9x+7}{x^2-7x+6}$; б) $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$.

15. а) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+3x-4}$; б) $f\left(x\right)=14^{\frac{1}{x-7}}$.

16. а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-x-2}$; б) $f\left(x\right)=3^{\frac{1}{9-x}}$.

17. а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-7x-9}{x^2-3x-4}$; б) $f\left(x\right)=11^{\frac{1}{5-x}}$.

18. а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-5x-7}{x^2-4x-5}$; б) $f\left(x\right)=8^{\frac{1}{x+2}}$.

19. а) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2-4x-7}{x^2-2x-3}$; б) $f\left(x\right)=13^{\frac{1}{7-x}}$.

20. а) $f\left(x\right)=\dfrac{4x^2-x-5}{x^2-4x-5}$; б) $f\left(x\right)=5^{\frac{1}{8+x}}$.

21. а) $f\left(x\right)=\dfrac{5x^2-x-6}{x^2-5x-6}$; б) $f\left(x\right)=14^{\frac{1}{3-x}}$.

22. а) $f\left(x\right)=\dfrac{6x^2-x-7}{x^2-5x-6}$; б) $f\left(x\right)=10^{\frac{1}{2-x}}$.

23. а) $f\left(x\right)=\dfrac{4x^2-3x-7}{x^2-6x-7}$; б) $f\left(x\right)=4^{\frac{1}{x-6}}$.

24. а) $f\left(x\right)=\dfrac{4x^2-5x-9}{x^2-7x-8}$; б) $f\left(x\right)=15^{\frac{1}{3+x}}$.

25. а) $f\left(x\right)=\dfrac{6x^2-x-7}{x^2-x-2}$; б) $f(x)=9^{\frac{1}{x+4}}$.

26. а) $f\left(x\right)=\dfrac{7x^2-x-8}{x^2-7x-8}$; б) $f(x)=6^{\frac{1}{3-x}}$.

27. а) $f\left(x\right)=\dfrac{4x^2-7x-11}{x^2-3x-4}$; б) $f(x)=8^{\frac{1}{x+7}}$.

28. а) $f\left(x\right)=\dfrac{4x^2+x-3}{x^2+4x+3}$; б) $f(x)=12^{\frac{1}{1+x}}$.

29. а) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+x-2}{x^2+3x+2}$; б) $f(x)=7^{\frac{1}{9-x}}$.

30. а) $f\left(x\right)=\dfrac{5x^2+x-4}{x^2+5x+4}$; б) $f(x)=13^{\frac{1}{8-x}}$.

Завдання 15. Дослідити функцію на неперервність і знайти точки розриву. Побудувати графік функції.

1. $f(x)=\begin{cases} x+4, \ x<-1; \\ x^2+2, \ -1\le x<1; \\ 2x, \ x\ge 1. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2, \quad x\le 0; \\ \cos x, \ 0<x<\pi; \\ -1, \quad x\ge \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} -x, \quad x\le 0; \\ \sin x, \ 0<x\le \pi; \\ x-2, \ x>\pi. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} x+2, \quad x\le -2; \\ 4-x^2, \ -2<x\le 1; \\ 3-2x, \quad x>1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x+2, \ x\le -1; \\ x^2+1, \ -1<x\le 1; \\ -x+3, \ x\ge 1. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x+1, \ x\le 0; \\ \cos x, \ 0<x<\pi/2; \\ 2, \quad x\ge \pi/2. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), \ x\le -1; \\ (x+1)^2, \ -1<x\le 0; \\ x, \qquad x>0. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} -3x, \ x\le 1; \\ x^2-4, \ 1<x<3; \\ 2x-5, \ x\ge 3. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} -x, \qquad x\le 0; \\ -(x-1)^2, \ 0<x<2; \\ x-3, \quad x\ge 2. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 2-x, \ \ x\le 0; \\ \sin x, \ 0<x<\pi; \\ x-\pi, \ x\ge \pi. \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} -x^2, \ x\le 0; \\ tgx, \ 0<x\le \pi/4; \\ 2, \ \ x>\pi/4. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \ x<-1; \\ x^2, \ -1\le x<2; \\ 6-x, \ x\ge 2. \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} \cos x, \ x\le 0; \\ x^2+1, \ 0<x<1; \\ x, \quad x\ge 1. \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} -3-x, \ x<-2; \\ x^2-5, \ -2\le x<3; \\ 7-2x, \ x\ge 3. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} -2x, \ \ x\le 0; \\ x^2+1, \ 0<x\le 1; \\ 2, \ \ x>1. \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 2x, \ \ x<0; \\ \sin x, \ 0\le x\le \pi; \\ -3, \ x>\pi. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} -x, \ x\le 0; \\ x^2, \ 0<x<2; \\ x+1, \ x\ge 2. \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} -2x, \quad x<-1; \\ x^2+1, \ -1\le x<2; \\ x-1, \quad x\ge 2. \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} -2x, \ x\le 0; \\ \sqrt{x}, \ 0<x<4; \\ 1, \ \ x\ge 4. \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, \ \ x<0; \\ \cos x, \ \ 0\le x\le \pi/2; \\ x-\pi/2, \ x\ge \pi/2. \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0; \\ (x-1)^2, & 0<x\le 2; \\ 5-x, & x>2. \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1; \\ 2x^2-1, & -1<x<1; \\ 1/x, & x\ge 1. \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x<\pi/2; \\ 2, & x\ge \pi/2. \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\le 0; \\ tgx+1, & 0<x<\pi/4; \\ 3, & x\ge \pi/4. \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\le 1; \\ x^2-1, & 1<x\le 2; \\ 5-x, & x\ge 2. \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le -1; \\ x+2, & -1<x<0; \\ \cos x, & x\ge 0. \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x\le -1; \\ 2+x, & -1<x\le 2; \\ x^2, & x>2. \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le -2; \\ x^2-2, & -2<x<1; \\ 3x-2, & x\ge 1. \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0; \\ (x-1)^2, & 0<x<2; \\ 3-x, & x\ge 2. \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\le 0; \\ \cos x, & 0<x<\pi/2; \\ x-\pi/2, & x\ge \pi/2. \end{cases}$

Завдання 16. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функцій.

1. а) $y=6\sqrt[3]{x^2-3x^5+\dfrac{1}{x^2}}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $y=\cos x^3\cdot e^{\sin^2 x}$;

г) $y=(tg2x)^{\ln 4x}$; д) $\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)-3xy^2=0$; е) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-arctgt. \end{cases}$

2. а) $y=\left(2x-3\sqrt[3]{x}+\dfrac{4}{x}\right)^5$; б) $y=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{2^x+x^2}$; в) $y=2^{3x+1}\cdot tg(1-x^2)$;

г) $y=\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$; д) $x-y^2+\arcsin 2y=0$; е) $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln\sin t. \end{cases}$

3. а) $y=8\sqrt[4]{2x^4-4x^2+\dfrac{6}{x}}$; б) $y=\dfrac{tg(3x+2)}{3x^2+e^x}$; в) $y=(4-x^2)\arccos\sqrt{x^2-3}$;

г) $y=(\ln 4x)^{\cos x}$; д) $y\sin x-x^2\cos y=0$; е) $\begin{cases} x=e^{2t}+2, \\ y=t(e^t+1). \end{cases}$

4. а) $y=\left(3x^2-\dfrac{4}{x^2}+5\sqrt{x}\right)^3$; б) $y=\dfrac{ctg 4x}{\sqrt{2x^2-1}}$; в) $y=e^{\sin 2x}\cdot\ln(\cos 2x)$;

г) $y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; д) $\dfrac{y}{x}-\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$; е) $\begin{cases} x=3\cos^2 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

5. а) $y=5\sqrt[5]{3x^4+2x^3-\dfrac{4}{x}}$; б) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^3+5^x}$; в) $y=2^{ctg\, x}\cdot\sin^2 3x$;

г) $y=(\arcsin 5x)^{2x}$; д) $\left(e^{xy}-1\right)\ln x-y=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

6. а) $y=\left(2x^5-\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{3}{x^4}\right)^5$; б) $y=\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $y=e^{x^2+1}\cdot\arccos^5 4x$;

г) $y=\dfrac{(3x+1)^2\sqrt[4]{(x-1)^3}}{\sqrt{x-2}}$; д) $\ln(x^2y)-\dfrac{y}{x}=0$; е) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\mathrm{ctg}^2 t. \end{cases}$

7. а) $y=4\sqrt[4]{x^3+3x-\dfrac{4}{x^3}}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$; в) $y=\sqrt{\ln x}\cdot\sin^3(2x+1)$;

г) $y=(\cos 4x)^{\ln 3x}$; д) $x^3y+y^2-2^y=0$; е) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{t}{1+t^2}. \end{cases}$

8. а) $y=\left(2x^4-4\sqrt[4]{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^3$; б) $y=\dfrac{\cos^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}}$; в) $y=3^{\ln 2x}\cdot\arcsin x^3$;

г) $y=\dfrac{(x-3)^4\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt{2x-1}}$; д) $x^2-y^3+\ \sin xy=0$; е) $\begin{cases} x=2+\cos^2 t, \\ y=2-\sin^2 t. \end{cases}$

9. а) $y=3\sqrt[3]{5x^4+6x^2-\dfrac{2}{x^2}}$; б) $y=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{4x^2+1}}$; в) $y=e^{tg5x}\cos(x-1)^2$;

г) $y=(\ln 5x)^{\sin 3x}$; д) $\ln y-arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$; е) $\begin{cases} x=2\ln t-t^2, \\ y=arctg\, t. \end{cases}$

10. а) $y=\left(5x^3-8\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{3}{x^2}\right)^4$; б) $y=\dfrac{\sqrt{1-\ln x}}{3^x+x^3}$; в) $y=4^{\cos x}\cdot\arcsin^3 2x$;

г) $y=\dfrac{(x+1)^5\sqrt{x-3}}{(3x-1)^2}$; д) $xy^2+e^y tgx=0$; е) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

11. а) $y=8\sqrt[4]{2x^3+5x^2-\dfrac{4}{x^3}}$; б) $y=\dfrac{\ln(3x+2)}{tg^3 x}$; в) $y=e^{\sin x}arctg^3\sqrt{x+2}$;

г) $y=(ctg3x)^{\ln 5x}$; д) $2xy+\ln(x^3y)=0$; е) $\begin{cases} x=\arcsin 2t, \\ y=\sqrt{1-4t^2}. \end{cases}$

12. а) $y=\left(4x^5-5\sqrt[5]{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)^6$; б) $y=\dfrac{\cos 3x^2}{\sqrt{1-9x^2}}$; в) $y=4^{\ln 2x}\cdot ctg(x^3-3x)$;

г) $y=\dfrac{(3x-1)^3\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x^2+1}}$; д) $x^2y-\arcsin(xy)=0$; е) $\begin{cases} x=1+\sin 3t, \\ y=t+\cos 3t. \end{cases}$

13. а) $y=10\sqrt[5]{3x^4+5x^2-\dfrac{4}{x^4}}$; б) $y=\dfrac{(x-\sin x)^4}{2^x+x^2}$; в) $y=e^{ctg\,2x}\cos^2(3x-4)$;

г) $y=(\arcsin 2x)^{3x^2}$; д) $\ln(xy)+e^x y^2=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt{t+2}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t+2}}. \end{cases}$

14. а) $y=\left(3x^4-2\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{4}{x^2}\right)^8$; б) $y=\dfrac{\sqrt{3x^2+x}}{\cos(2x+1)}$; в) $y=5^{\sin 5x}tg\sqrt{x+x^2}$;

г) $y=\dfrac{(x+5)^2\sqrt[4]{x-3}}{\sqrt{3x+1}}$; д) $3^{xy}-\arccos(x^2y)=0$; е) $\begin{cases} x=1-ctgt, \\ y=1+\cos^3 t. \end{cases}$

15. а) $y=4\sqrt{3x^3+2x^2-\dfrac{6}{x}}$; б) $y=\dfrac{tg4x-x^2}{\sin^2 x}$; в) $y=3^{\arcsin x}\ln^3(2x+1)$;

г) $y=(\cos 6x)^{ctg\,3x}$; д) $x^2y^3+e^{x+y^2}=0$; е) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

16. а) $y=\left(\dfrac{1}{x^3}-2x^3-3\sqrt[5]{x^4}\right)^2$; б) $y=\dfrac{x^3+tgx}{\sqrt{3x^2+4}}$; в) $y=2^{\sin x}\cdot\arccos 2x$;

г) $y=\dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{x-3}}{(2x+4)^3}$; д) $x^3y+\ln\left(\dfrac{y}{x^2}\right)=0$; е) $\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\ln\sin 3t. \end{cases}$

17. а) $y=15\sqrt[5]{x^4-2x^3-\dfrac{3}{x^2}}$; б) $y=\dfrac{x^3+3^x}{\sqrt{\sin 3x}}$; в) $y=e^{\arcsin x}\cdot\ln^4(2x-1)$;

г) $y=(\cos 3x)^{x^2+4}$; д) $\sqrt{x-y^2}+tg(xy)=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt{t-2}, \\ y=\ln(t-2). \end{cases}$

18. а) $y=\left(x^3-6\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{x^2}\right)^4$; б) $y=\dfrac{\sqrt{2-3x^5}}{\cos 2x}$; в) $y=4^{arctg\,x}\cdot\sin^2 4x$;

г) $y=\dfrac{(2x+1)^3\sqrt[4]{x-3}}{(x^2+1)^2}$; д) $xy^3+\sqrt{x^2+y^2}=0$; е) $\begin{cases} x=e^t\sin 2t, \\ y=e^t\cos 2t. \end{cases}$

19. а) $y=9\sqrt[3]{2x^3-5x+\dfrac{4}{x^3}}$; б) $y=\dfrac{\cos^3 x-x}{2x^3+2^x}$; в) $y=e^{x^3}\cdot\arcsin\sqrt{x+1}$;

г) $y=(tg3x)^{\ln 5x+1}$; д) $y^2-\ln(y+\sqrt{x})=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{2t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

20. а) $y=\left(\dfrac{2}{x}+4x^3-6\sqrt[3]{x^2}\right)^4$; б) $y=\dfrac{3^x+tg2x}{\sqrt{4+3x^2}}$; в) $y=\ln^3 2x\cdot\arccos x^3$;

г) $y=\dfrac{(x+4)^5\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-2}}$; д) $y^2x+\sin\dfrac{y}{x}=0$; е) $\begin{cases} x=1-\sin 2t, \\ y=t-\cos 2t. \end{cases}$

21. а) $y=12\sqrt[4]{6x^3-4x^2+\dfrac{3}{x^2}}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{1-5x^4}}{\sin^5 x}$; в) $y=4^{tg\,x}\cdot\ln^5(3x+2)$;

г) $y=(2x+x^2)^{\arcsin x}$; д) $\cos(xy)+x^2y^2=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t+1}, \\ y=\ln(t+1). \end{cases}$

22. а) $y=\left(4x^2-\dfrac{5}{x^3}+3\sqrt[3]{x^2}\right)^4$; б) $y=\dfrac{x^2-tg^2x}{\sqrt{3x^2+1}}$; в) $y=e^{\sin x}\cdot\arccos x^3$;

г) $y=\dfrac{(3x-1)^5\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+1}}$; д) $xy^2+ctg(x^2y)=0$; е) $\begin{cases} x=e^t\sin t+t, \\ y=e^t\cos t-t. \end{cases}$

23. а) $y=6\sqrt{x^5-3x^3+\dfrac{4}{x^4}}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{\cos^3 2x}$; в) $y=3^{x^2+1}\cdot arctg3x$;

г) $y=(\sin 5x)^{\ln 2x}$; д) $e^{\sqrt{xy}}-\ln(x+y^2)=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\sqrt[3]{t}+1. \end{cases}$

24. а) $y=\left(\frac{3}{x^2}+2x^4-4\sqrt[4]{x^3}\right)^5$; б) $y=\frac{\sin^2(1-x)}{\sqrt{x^3+2}}$; в) $y=e^{\arcsin 2x}\cdot\ln^4 2x$;

г) $y=\frac{(x-1)^2\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+2}}$; д) $tg(xy)+3^x y^3=0$; е) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

25. а) $y=5\sqrt[5]{x^4-2x^2+\frac{3}{x^3}}$; б) $y=\frac{2-\ln^3 x}{e^x+x^3}$; в) $y=5^{arctg\ x}\cdot\sin(x+5)^2$;

г) $y=(x+\sqrt{x})^{\cos 4x}$; д) $\cos(x^2y)+\sqrt{xy}=0$; е) $\begin{cases} x=e^t+t, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

26. а) $y=\left(x^2-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x}\right)^6$; б) $y=\frac{x-\cos^3 x}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $y=e^{\sin 2x}\cdot arctg\, x^2$;

г) $y=\frac{(2x-3)^2\sqrt[3]{x+3}}{(x+1)^4}$; д) $xy^3+\ln\frac{y}{x}=0$; е) $\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\ln\cos 2t. \end{cases}$

27. а) $y=6\sqrt[3]{4x^2-5x+\frac{3}{x^4}}$; б) $y=\frac{\arcsin 2x}{1-4x^2}$; в) $y=3^{\ln 2x}\cdot ctg^3(2x-1)$;

г) $y=(\sin 5x)^{x^3-3x}$; д) $\cos(y^2x)+\frac{y}{x^2}=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

28. а) $y=\left(\frac{1}{x^5}+3x^5-6\sqrt[3]{x^2}\right)^4$; б) $y=\frac{\sin(x^4+2)}{\sqrt{2x+4}}$; в) $y=\cos^5(1-x)\cdot\ln 5^x$;

г) $y=\frac{(x+3)^5\sqrt[4]{x+1}}{(2x-4)^3}$; д) $\mathrm{arctg}(xy)+xe^y=0$; е) $\begin{cases} x=t\sin t+\cos t, \\ y=\sin t-\cos t. \end{cases}$

29. а) $y=8\sqrt[4]{5x^3-4x^2-\frac{2}{x^3}}$; б) $y=\frac{x^2+3^x}{\cos^3 2x}$; в) $y=e^{ctg 2x}\cdot\sin^2(3x-4)$;

г) $y=(arctg\,2x)^{\ln 4x+1}$; д) $\sqrt{x+y^2}+\ln y=0$; е) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t+1}, \\ y=\sqrt[3]{1-t}. \end{cases}$

30. а) $y=\left(4x^3-\dfrac{3}{x^2}-2\sqrt[4]{x^3}\right)^5$; б) $y=\dfrac{tg^3(x+1)}{\sqrt{3x^2+2}}$; в) $y=3^{\arccos x}\cdot\ln^4(1-2x)$;

г) $y=\dfrac{(2x+1)^3\sqrt{x-3}}{(x+5)^2}$; д) $\sin\dfrac{x}{y}-x^2y^2=0$; е) $\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\cos 2t. \end{cases}$

Завдання 17. Знайти похідну другого порядку y'' для функцій.

1) а) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{3-4x^2}}$; б) $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$; в) $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$.

2. а) $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $x^5-3xy^2=3$; в) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$.

3. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$; б) $x-y+e^y\mathrm{arctg}\,x=0$; в) $\begin{cases} x=2\sqrt{t}+1 \\ y=\ln t \end{cases}$.

4. а) $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+4}}$; б) $y\sin x=\cos(x-y)$; в) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

5. а) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+x}}$; б) $\ln(x+y)=\mathrm{arctg}\,y$; в) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\dfrac{t+1}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$.

6. а) $y=\dfrac{(1+x)^2}{\sqrt{x-2}}$; б) $tg\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x+1$; в) $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

7. а) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^4 x + 1}$; б) $y = 1 + xe^y$; в) $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$.

8. а) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x + 1}$; б) $\ln y + \dfrac{x}{y} = 2$; в) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \arcsin t \end{cases}$.

9. а) $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$; б) $x^3 + x^2 y + y^2 = 8$; в) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

10. а) $y = \dfrac{tg(x^3 + 1)}{e^{2x+1}}$; б) $y^3 - 3y + 2x^3 = 0$; в) $\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = 1 + \cos^2 t \end{cases}$.

11. а) $y = \dfrac{x \arccos 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}$; б) $\left(e^x - 1\right)\left(e^y - 1\right) = 1$; в) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \ln \sin 2t \end{cases}$.

12. а) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2x + 1}}$; б) $tg(x + y) = xy$; в) $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t \\ y = \ln\left(1 + t^2\right) \end{cases}$.

13. а) $y = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{3x^2 + 2}}$; б) $y^2 x - e^{\frac{y}{x}} = 0$; в) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$.

14. а) $y = \dfrac{tgx - x}{\sqrt{x^2 - 4}}$; б) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$; в) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$.

15. а) $y = \dfrac{\mathrm{arctg}^2 x}{\sqrt{1 + x^2}}$; б) $x^2 + \sin y - e^{xy} = 0$; в) $\begin{cases} x = t + \ln \sin t \\ y = t + \ln \cos t \end{cases}$.

16. а) $y = \dfrac{\sqrt{1 - 4x}}{2^x + x^2}$; б) $\dfrac{y}{x} = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$; в) $\begin{cases} x = e^{2t} + t^2, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

17. а) $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$; б) $x + y = e^{x - y}$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1}, \\ y = \ln(t - 1). \end{cases}$

18. а) $\dfrac{\sqrt{1-2x^3}}{e^x-\cos x}$; б) $\ln(y^2x)+\dfrac{y}{x^2}=0$; в) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\ln\sin 2t. \end{cases}$

19. а) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $\sin(xy)=\cos\left(x^2y\right)$; в) $\begin{cases} x=1-\cos 2t, \\ y=1+\sin t. \end{cases}$

20. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $x^2y+\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$; в) $\begin{cases} x=\sin^2 t+2, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$

21. а) $y=\ln\dfrac{x^2}{2x-1}$; б) $\sin x^2-e^{x+y^2}=0$; в) $\begin{cases} x=\ln(1-t^2), \\ y=\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

22. а) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $\cos(xy)+\sqrt{xy}=0$; в) $\begin{cases} x=t^2+\sin t, \\ y=1+\ln\cos t. \end{cases}$

23. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}$; б) $\operatorname{arctg} y+xe^y=0$; в) $\begin{cases} x=e^{2t}+2t, \\ y=te^t+2. \end{cases}$

24. а) $y=\arccos\dfrac{x}{1+x}$; б) $\sin\dfrac{x}{y}-x^2y=0$; в) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=t+\sin^2 t. \end{cases}$

25. а) $y=\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; б) $\sqrt{x+y}+\ln(xy)=0$; в) $\begin{cases} x=\sqrt{t-2}, \\ y=\sqrt[3]{t+2}. \end{cases}$

26. а) $y=\cos\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; б) $\operatorname{tg} y+2^x y^2=0$; в) $\begin{cases} x=1+\ln t, \\ y=\ln^2 t+t. \end{cases}$

27. а) $y=\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; б) $e^{\sqrt{xy}}-\ln(xy)=0$; в) $\begin{cases} x=\sqrt{t}-1, \\ y=\sqrt[3]{t}+1. \end{cases}$

28. а) $y=\sqrt{\dfrac{2+x^2}{2-x^2}}$; б) $xy^2+\operatorname{ctg} y=0$; в) $\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=t\cos t-t. \end{cases}$

29. а) $y=\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}\right);$ б) $\sqrt{x+y}+tg(xy)=0;$ в) $\begin{cases} x=\sqrt{t+1}, \\ y=\ln\left(t^2+1\right). \end{cases}$

30. а) $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right);$ д) $xy+\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=0;$ в) $\begin{cases} x=\ln\sin 2t, \\ y=\cos 2t. \end{cases}$

Завдання 18. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l:

1. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}-1,$ $x_0=8,$ $l:\ x+y-11=0.$

2. $y=\dfrac{3x-1}{x-3},$ $x_0=5,$ $l:\ x-2y+9=0;$

3. $y=x^2-8\sqrt{x}-2,$ $x_0=4,$ $l:\ x+6y+8=0;$

4. $y=\dfrac{x}{x^2-x-1},$ $x_0=2,$ $l:\ x-5y+8=0;$

5. $y=2x-\ln(x+2),$ $x_0=-1,$ $l:\ x+y+3=0;$

6. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2},$ $x_0=1,$ $l:\ x-9y+35=0;$

7. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+2x,$ $x_0=1,$ $l:\ 2x+3y-2=0;$

8. $y=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2},$ $x_0=3,$ $l:\ x-3y+12=0;$

9. $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{7-x},$ $x_0=-1,$ $l:\ x+2y+1=0;$

10. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2},$ $x_0=2,$ $l:\ 9x-12y+2=0;$

11. $y=3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+3x$, $x_0=1$, $l:\ x+3y-13=0$;

12. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0=1$, $l:\ 2x+y-3=0$;

13. $y=x+\sqrt[3]{(3x-2)^2}$, $x_0=1$, $l:\ x+3y-7=0$;

14. $y=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$, $x_0=-1$, $l:\ 2x-3y+5=0$;

15. $y=\dfrac{2}{x}\cdot\ln 2x$, $x_0=\dfrac{1}{2}$, $l:\ 2x+16y-1=0$;

16. $y=\dfrac{x^2-3}{2x}$, $x_0=1$, $l:\ x+2y+1=0$;

17. $y=\sqrt[3]{6x-5}+2x$, $x_0=1$, $l:\ x+4y-13=0$;

18. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x_0=-1$, $l:\ 2x+2y+3=0$;

19. $y=(x+3)\cdot\sqrt[3]{5-x}$, $x_0=-3$, $l:\ x+2y+3=0$;

20. $y=\dfrac{1-2x}{3-x}$, $x_0=2$, $l:\ x-5y-17=0$;

21. $y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}+2x$, $x_0=1$, $l:\ x+2y-9=0$;

22. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$, $x_0=1$, $l:\ x-8y-33=0$;

23. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+3$, $x_0=1$, $l:\ x+2y-5=0$;

24. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0=-1$, $l:\ x-y+2=0$;

25. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$, $x_0=1$, $l:\ 2x+y-2=0$;

26. $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x-2}}$, $x_0=3$, $l:\ x-2y+9=0$;

27. $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, $x_0=4$, $l:\ 2x-y-5=0$;

28. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$, $x_0=-1$, $l:\ 3x+2y+3=0$;

29. $y=3\sqrt[4]{x}-2\sqrt{x}+x$, $x_0=1$, $l:\ 4x+3y-10=0$;

30. $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-3}}$, $x_0=4$, $l:\ 2x-5y+37=0$.

Завдання 19. Обчислити границі функцій, скориставшись правилом Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{\cos x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{\ln\left(1-x^2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{3}}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{3x}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln\left(1+x^2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tgx}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctgx}{x(1-\cos x)}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{4}{1-x^4}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}-x^2}{\ln\left(1+x^2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+7\sqrt{x+1}\right)^{\frac{3}{\sqrt{x}}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{ctgx^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-e^{\frac{-1}{x}}}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1+x^2}{x}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\frac{\pi}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-tgx\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{tgx}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}-x}{\sin x^2+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin x\right)^{ctgx}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{(\cos x-1)}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{x^3+\ln\left(1+x^2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+2tgx\right)^{3ctgx}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\pi x-1}{x^2}+\dfrac{\pi}{e^{2\pi x}-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^x$.

15. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-2\sin\dfrac{\pi x}{6}}{1-tg\,\dfrac{\pi x}{4}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\sin 2x\right)^{\frac{1}{\sin 3x^2}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x+\sin x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$; в) $\left(1+5\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-tg^2\dfrac{\pi}{4}x}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{4}{1-x^4}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{e^{-x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$.

20. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x-1\right)^2}{\left(x^5-1\right)\sin\left(x-1\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\left(2x\right)^2}-\dfrac{1}{\cos x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{3}{x}\right)^{4x^2}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x^2}{1-\cos 4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{\left(x-1\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln\left(1+x\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}}{x^5}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{1-x^5}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{2}{x^2}\right)^{x^2}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2ax}-e^{ax}}{x^2\sin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ctg}x}-\dfrac{1}{\cos x}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2tgx}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x(1-\cos x)}$;   б) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{\sin(x-4)}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{1-2\ln x}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\dfrac{x^2}{2}}{\sin^2 x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{\ln(1-x^2)}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{3}}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x)$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

Завдання 20. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік.

1. а) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$;   б) $y=x\sqrt{1-x^2}$.

2. $y=\dfrac{3x^2}{x^2+5}$;   б) $y=xe^{-x^2}$.

3. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$;   б) $y=x-\ln(x+1)$.

4. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=x+e^{-x}$.

5. а) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$; б) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$.

6. а) $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$; б) $y=x+\sin x$.

7. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; б) $y=x\ln x$.

8. а) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

9. а) $y=\dfrac{8x}{(x-2)^2}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2-x}$.

10. а) $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}-x$.

11. а) $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$; б) $y=x^2\ln x$.

12. а) $y=\dfrac{4-x^2}{x^2+4}$; б) $y=\ln\sin x$.

13. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$.

14. а) $y=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$; б) $y=\ln(x^2+1)$.

15. а) $y=\dfrac{1+2x}{3-x}$; б) $y=xe^x$.

16. а) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=x\sin x$.

17. а) $y=\frac{3x-2}{x^3}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}(x^2-4)$.

18. а) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$; б) $y=\cos x+\sin x$.

19. а) $y=\frac{2x}{1+x^2}$; б) $y=x^3e^{-x}$.

20. а) $y=\frac{8x}{x^2+4}$; б) $y=\cos x-x$.

21. а) $y=\frac{1}{x}+4x^2$. б) $y=\ln^2 x$.

22. а) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

23. а) $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$; б) $y=\ln(x^2-1)$.

24. а) $y=\frac{2}{x^2+2x}$; б) $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$.

25. а) $y=\frac{x}{9-x^2}$; б) $y=\ln\cos x$.

26. а) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; б) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

27. а) $y=\frac{x^2}{1+x}$; б) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

28. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

29. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y=\cos x-\ln\cos x$.

30. а) $y=\dfrac{x^2}{x^2+5}$; б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Завдання 21. Знайти частинні похідні першого і другого порядку для заданої функції $z=f\left(x,y\right)$.

1. $z=3\sin\left(x^3+y^2\right)-5x^3y-7$.

2. $z=e^x y-x^4y+y^2-x^3-2$.

3. $z=8\ln\left(xy^2\right)+10xy^2-8x$.

4. $z=4x^3\cos y-3xy+2y^2-6x$.

5. $z=2e^{3x+y^2}-2x^2y^2+9y$.

6. $z=2\ln y+x^3y+xy^2-2\cos x$.

7. $z=8\cos xy-3x-6x^4y+2$.

8. $z=5x^3-3xy+y^2-2\operatorname{tg} y+1$.

9. $z=3\sqrt{x^2+y^2}-5xy^3+8y$.

10. $z=e^{xy}-2x^3y^2+y^3-xy-1$.

11. $z=x\sin xy+5x^2y^2-7x$.

12. $z = 3e^x y^3 - 2xy^2 + 4y - xy + 5$.

13. $z = \ln\left(x^3 + y^2\right) - 9x^3 y + 2x$.

14. $z = 2y\sin x - 4x^3 y^2 + 3x^2 - 2$.

15. $z = \sqrt{x + 2y} + 3x^4 y - 8x - 2$.

16. $z = x^3 y + y^2 \cos x + 2x^3 - 3y$.

17. $z = 8e^{x+y^3} - 3xy^3 + 7x - 3$.

18. $z = 2x^3 \cos y + 3x^4 y^3 - x^2 + y$.

19. $z = 8\ln\left(x^2 + y^2\right) - 6x^2 y^3 + 8x + 2$.

20. $z = 4x^3 - 3xy^2 - xy + \ln y + 2$.

21. $z = 5x^3 y^2 - 4xy + y^2 + \dfrac{2x}{y^3} - 3$.

22. $z = 3\ln x - x^2 y^4 + 4xy^3 + 2x + 1$.

23. $z = 3x^5 y^2 + \ln y - 2x^3 + e^x + y$.

24. $z = 3e^x y^3 + x^3 y + y^2 - 2e^y - 4$.

25. $z = 2\ln x - 3\ln y + x^2 y^3 + y^2 - x$.

26. $z = 4x^2 y^3 + 3y^2 - e^y + \ln xy + 2$.

27. $z = 2x^2 y - \ln xy + 3y^2 + \dfrac{4}{x^2} - 1$.

28. $z = 5x^3 - 3xy^2 + 2y^3 + \ln x - 6$.

29. $z = x^3y^2 - 3xy^4 + \sin y - \dfrac{2}{y} + 1$.

30. $z = e^y y^2 - 2x^3 y + y^5 + \ln y - 3x$.

Завдання 22. Перевірити, чи задовольняє функція $z = f\left(x, y\right)$ задану умову.

1. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$

2. $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; $\quad x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

3. $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$; $\quad \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y}.$

4. $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2y + 1\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

5. $z = \sin^2\left(y - x\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial x^2}.$

6. $z = \dfrac{y}{x}$; $\quad x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

7. $z = e^{xy}$; $\quad x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0.$

8. $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\quad z^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

9. $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$; $\quad x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2.$

10. $z=e^{-\cos(x+y)}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

11. $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$; $\quad x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{2}.$

12. $z=arctg\,\dfrac{x}{2y}$; $\quad x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

13. $z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; $\quad x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}.$

14. $z=e^{\frac{x}{y^2}}$; $\quad 2x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

15. $z=\dfrac{x}{y}$; $\quad x\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

16. $z=\sin^2\left(y-3x\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=9\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

17. $z=xe^{\frac{y}{x}}$; $\quad x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z.$

18. $z=\sin\left(x+y\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

19. $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin\left(xy\right)$; $\quad x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0.$

20. $z=\cos^3\left(2x-y\right)$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

21. $z=\cos y+x\sin y$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$

22. $z=\dfrac{x^2}{y}$; $\quad x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z.$

23. $z=\ln\left(x^2+y^2+2y+1\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

24. $z=\sin^2\left(y-2x\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

25. $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

26. $z=arctg\,\dfrac{x}{y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

27. $z=e^{-\cos(3x+y)}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=9\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

28. $z=\dfrac{\sin\,\left(x-y\right)}{x}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{z}{x}=0.$

29. $z=\dfrac{y}{x}$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

30. $z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$; $\quad \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}.$

Завдання 23. Знайти градієнт функції в точці M та похідну у напрямку вектора $\vec{l}$.

1. $z=x^2+xy+y^2,\ M\left(1;1\right),\ \vec{l}\left(2;-1\right).$

2. $z=2x^2+3xy+y^2,\ M\left(2;1\right),\ \vec{l}\left(3;-4\right).$

3. $z=\ln\left(5x^2+3y^2\right),\ M\left(1;1\right),\ \vec{l}\left(3;2\right).$

4. $z = arctg\left(xy^2\right),\ M\left(2;3\right),\ \vec{l}\left(4;-3\right)$.

5. $z = 5x^2 + 6xy,\ M\left(2;1\right),\ \vec{l}\left(1;2\right)$.

6. $z = \ln\left(5x^2 + 4y^2\right),\ M\left(1;1\right),\ \vec{l}\left(2;-1\right)$.

7. $z = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right),\ M\left(1;2\right),\ \vec{l}\left(5;-12\right)$.

8. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2,\ M\left(1;1\right),\ \vec{l}\left(2;-1\right)$.

9. $z = \ln\left(3x^2 + 4y^2\right),\ M\left(1;3\right),\ \vec{l}\left(2;-1\right)$.

10. $z = 3x^4 + 2x^2y^3,\ M\left(-1;2\right),\ \vec{l}\left(4;-3\right)$.

11. $z = 2\cos(x+y) + 2x,\ M\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right),\ \vec{l}\left(3;2\right)$.

12. $z = tgx + x - 2\sin y,\ M\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right),\ \vec{l}\,(1;-2)$.

13. $z = 3x^2y + \sqrt{xy},\ M(2;2),\ \vec{l}\left(1;-2\right)$.

14. $z = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}xy^3,\ M(1;-1),\ \vec{l}\left(2;-3\right)$.

15. $z = x\sin(x+y) - 1,\ M\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right),\ \vec{l}\left(4;3\right)$.

16. $z = \ln(x^2 + y^2),\ M(3;4),\ \vec{l}\left(2;-1\right)$.

17. $z = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^4}{4},\ M(1;-2),\ \vec{l}\left(5;-12\right)$.

18. $z = xtgy + \cos x,\ M\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right),\ \vec{l}\left(3;-4\right).$

19. $z = \ln(x+2y) - xy,\ M(1;1),\ \vec{l}\left(1;-2\right).$

20. $z = e^{x^2-y^2},\ M(2;2),\ \vec{l}\left(4;3\right).$

21. $z = \frac{2x}{y} + \frac{y}{2x},\ M(2;2),\ \vec{l}\left(3;-4\right).$

22. $z = \arcsin\sqrt{xy},\ M(1;4),\ \vec{l}\left(-1;2\right).$

23. $z = \frac{2x-y}{x+y},\ M(4;3),\ \vec{l}\left(5;-12\right).$

24. $z = \ln(3x^2 + 2y^3),\ M(-1;2),\ \vec{l}\left(4;3\right).$

25. $z = arctg\frac{x}{y},\ M(-2;4),\ \vec{l}\left(-3;4\right).$

26. $z = 5x^2 + 3xy - 4y^2 + x,\ M(1;3),\ \vec{l}\left(2;-1\right).$

27. $z = x\sin y + y - 1,\ M\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right),\ \vec{l}\left(2;1\right).$

28. $z = 2x^2 - 4xy + 6y,\ M(3;-2),\ \vec{l}\left(6;8\right).$

29. $z = \ln(x^2 + 3y^2),\ M(2;1),\ \vec{l}\left(5;12\right).$

30. $z = y\cos(x+y) - x,\ M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right),\ \vec{l}\left(4;-3\right).$

Завдання 24. Знайти екстремум функції $z = f\left(x,y\right)$.

1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$

3. $z = x^3 + y^3 - 12xy.$

4. $z = x^3 + xy^2 + 6xy.$

5. $z = 2x^2 + 2xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 4y.$

6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

7. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

8. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1.$

9. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

10. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$

11. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2.$

12. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4.$

13. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27.$

14. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$

15. $z = x^2 + 3xy^2 + x - y.$

16. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x.$

17. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

18. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$

19. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 3x + 5.$

20. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y.$

21. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x.$

22. $z = x^2 + xy - 3x - y.$

23. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2.$

24. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1.$

25. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3.$

26. $z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y + 2.$

27. $z = x^2 - 3xy - y^2 - 4x + 6y + 1.$

28. $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 9.$

29. $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 2.$

30. $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1.$

Завдання 25. Знайти невизначені інтеграли.

1. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^3 + 4\sqrt{x}}{x^2} dx$; б) $\int \frac{e^{\sqrt{4x+1}} dx}{\sqrt{4x+1}}$; в) $\int (3x^2 - 2x) \ln x dx$.

2. а) $\int (\sqrt{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}) dx$; б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin x + 5}}$; в) $\int (x-2) 3^x dx$.

3. а) $\int \sqrt[3]{x^2} (3x^2 - 2x) dx$; б) $\int \frac{2x^3 - 3x}{x^4 - 3x^2 + 7} dx$ в) $\int (6 - 5x) \cos 2x dx$.

4. а) $\int \frac{x^3-\sqrt{x^3}+3}{\sqrt[4]{x^5}}dx$; б) $\int \frac{xdx}{(x^2+9)^6}$; в) $\int (6x+7)e^{7x}dx$.

5. а) $\int (2x-\sqrt[6]{x})^2 \cdot xdx$; б) $\int 5^{3x^2-6x+5}(x-1)dx$; в) $\int acrtg\sqrt{2x+9}dx$.

6. а) $\int (5x+2)^2\sqrt{x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{ctg3x+2}}{\sin^2 3x}dx$; в) $\int (x+8)2^x dx$.

7. а) $\int \sqrt[3]{x}(\sqrt[7]{x}-3)dx$; б) $\int \frac{\cos(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}dx$; в) $\int (4x-1)\sin 2xdx$.

8. а) $\int \sqrt[7]{x}(x^2-3x)dx$; б) $\int \frac{e^{tg2x}dx}{\cos^2 2x}$; в) $\int x^4 \ln 4xdx$.

9. а) $\int (x^2-3)\cdot(\sqrt[3]{x}+2)dx$; б) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x)^5}$; в) $\int \arccos\sqrt{1-3x^2}dx$.

10. а) $\int \frac{2}{x}(3-\sqrt[5]{x})^2 dx$; б) $\int \frac{(\arcsin 3x+1)^3}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; в) $\int (2-7x)\cos 7xdx$.

11. а) $\int (3-x)(\frac{1}{x}+2\sqrt{x})dx$; б) $\int e^{4x^2-3x+2}(8x-3)dx$; в) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx$.

12. а) $\int (\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x})\cdot(4-x)dx$; б) $\int \frac{\ln x+5}{x}dx$; в) $\int (5x+1)e^{5x}dx$.

13. а) $\int \frac{(x^3+3)^2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt[3]{e^{4x}-4}}$; в) $\int (6x^2+5)\ln xdx$.

14. а) $\int \frac{\sqrt{x^3}+5-x^4}{x^2}dx$; б) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^4 x}$; в) $\int (1-4x)e^x dx$.

15. а) $\int (3x-6)^2\sqrt{x^3}dx$; б) $\int \frac{tgx-1}{\cos^2 x}dx$; в) $\int (2x-3)\cos 2xdx$.

16. а) $\int \sqrt{x^5}(x^3-7x)dx$; б) $\int \frac{arctg^2 3x}{1+9x^2}dx$; в) $\int x\ln(6x-1)dx$.

17. а) $\int \sqrt[3]{x}(16-x^3+\frac{1}{x^2})dx$; б) $\int \frac{2^x dx}{(2^x+7)^3}$; в) $\int (3x-x^2)\cos xdx$.

18. а) $\int 5\sqrt{x}\cdot(\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-5x^2)dx$; б) $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; в) $\int \arcsin\sqrt{1-5x^2}dx$.

19. а) $\int \frac{e^{2x}-x^3e^x-1}{e^x}dx$; б) $\int \frac{6x+2}{(3x^2+2x-1)^8}dx$; в) $\int (3x-4)\sin 3xdx$.

20. а) $\int \frac{2^x-5^x}{10^x}dx$; б) $\int \frac{\arccos^9 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; в) $\int \frac{\ln 3x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

21. а) $\int \sqrt{x}(3x-\sqrt[4]{x})^2 dx$; б) $\int \frac{e^{\sqrt{1-2x}}dx}{\sqrt{1-2x}}$; в) $\int (3x+2)\ln xdx$.

22. а) $\int \sqrt[3]{x}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos x+2}}$; в) $\int (2x+1)5^x dx$.

23. а) $\int \sqrt[5]{x^4}\left(\frac{3}{\sqrt[5]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int \frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+1}dx$ в) $\int (1-3x)\cos 3xdx$.

24. а) $\int \frac{x-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \frac{xdx}{(x^2-5)^9}$; в) $\int (2x+5)e^{4x}dx$.

25. а) $\int \sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-2)^2dx$; б) $\int 3^{x^2-2x+4}(x-1)dx$; в) $\int acrtg\sqrt{2x-1}dx$.

26. а) $\int \sqrt[5]{x}(x^2-4x+2)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{tg2x+4}}{\cos^2 2x}dx$; в) $\int (2x-4)3^x dx$.

27. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x+3\sqrt{x}}{x^2}dx$; б) $\int \frac{\sin(2\sqrt{x}-3)}{2\sqrt{x}}dx$; в) $\int (4x+3)\cos 5xdx$.

28. а) $\int \sqrt[4]{x^3}(4x+3)^2dx$; б) $\int \frac{e^{\arcsin\sqrt{2x}}dx}{\sqrt{1-2x}}$; в) $\int (x^3+1)\ln 3xdx$.

29. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x^2-3}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2-2x+3)^7}$; в) $\int \arcsin\sqrt{2-x^2}dx$.

30. а) $\int \frac{(2-\sqrt[4]{x})^2}{x}dx$; б) $\int \frac{(2+\arcsin 2x)^5}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; в) $\int (4-2x)e^{3x}dx$.

Завдання 26. Знайти невизначені інтеграли.

1. а) $\int \frac{x^2-8x-12}{x^3-2x^2+4x-8}dx$; б) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$.

2. а) $\int \frac{10x-9x^2-9}{(x^2+1)(x^2-9)}dx$; б) $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$.

3. а) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2}dx$; б) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$.

4. а) $\int \frac{x-13}{x^2-13x+42}dx$; б) $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$.

5. а) $\int \frac{x-6}{x^2-2x}dx$; б) $\int \frac{3x-11}{x^2-8x+20}dx$.

6. а) $\int \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+2}dx$; б) $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$.

7. а) $\int \frac{4x-5}{x^2+5x}dx$; б) $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$.

8. а) $\int \frac{2x+3}{x^2-6x+9}dx$; б) $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$.

9. а) $\int \frac{50-9x}{x(x-5)^2}dx$; б) $\int \frac{3x+7}{x^2-8x+17}dx$.

10. а) $\int \frac{4x-3}{4x^2+4x+1}dx$; б) $\int \frac{8x-7}{x^2+10x+29}dx$.

11. а) $\int \frac{5x+18}{2x^2+6x}dx$; б) $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$.

12. а) $\int \frac{7-x}{x^2-2x-3}dx$; б) $\int \frac{10x-7}{x^2-8x+20}dx$.

13. а) $\int \frac{9x-3x^2-2}{2x^2-x^3}dx$; б) $\int \frac{12x-7}{x^2+16x+65}dx$.

14. а) $\int \frac{3x^2-x+15}{x^3+5x}dx$; б) $\int \frac{5x+16}{x^2+2x+17}dx$.

15. а) $\int \frac{5-x}{x^2+2x-3}dx$; б) $\int \frac{17x-3}{x^2+8x+32}dx$.

16. а) $\int \frac{4x^2-11x+4}{x(x-2)^2}dx$; б) $\int \frac{8x-7}{x^2-2x+17}dx$.

17. а) $\int \frac{x^2-3}{x^3+3x}dx$; б) $\int \frac{11x-3}{x^2+6x+13}dx$.

18. а) $\int \frac{x^2+12x-4}{x^3-4x}dx$; б) $\int \frac{3x+11}{x^2-16x+68}dx$.

19. а) $\int \frac{x-1}{4x^3+x}dx$; б) $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$.

20. а) $\int \frac{9x-2x^2+14}{x^2(x+7)}dx$; б) $\int \frac{17x+5}{x^2-12x+40}dx$.

21. а) $\int \frac{6x}{x^3+2x^2-x-2}dx$; б) $\int \frac{3x+1}{x^2+6x+10}dx$.

22. а) $\int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$; б) $\int \frac{4x+7}{x^2-2x+5}dx$.

23. а) $\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)}dx$; б) $\int \frac{8x+5}{x^2+4x+8}dx$.

24. а) $\int \frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)}dx$; б) $\int \frac{3x-2}{x^2+8x+32}dx$.

25. а) $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx$; б) $\int \frac{5x-4}{x^2-10x+29}dx$.

26. а) $\int \frac{2x^2-26}{(x+5)(x^2+4x+3)}dx$; б) $\int \frac{7x-2}{x^2-4x+13}dx$.

27. а) $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$; б) $\int \frac{4x-6}{x^2-6x+18}dx$.

28. а) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; б) $\int \frac{2x-5}{x^2-12x+45}dx$.

29. а) $\int \frac{x^3-3}{(x^2-1)(x-1)}dx$; б) $\int \frac{5x+9}{x^2-8x+25}dx$.

30. а) $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$; б) $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+40}dx$.

Завдання 27. Знайти невизначені інтеграли.

1. а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[5]{1+x}}$.

2. а) $\int \sin^4 \frac{x}{2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$.

3. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

4. а) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$; б) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{2+3\sin x-2\cos x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$.

6. а) $\int \cos^3 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[4]{x})}$.

7. а) $\int \frac{dx}{10\sin x+5\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

8. а) $\int \sqrt{\cos 2x}\sin 2x dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x+1})}dx$.

9. а) $\int \frac{dx}{3-\sin x+2\cos x}$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

10. а) $\int \cos^3 x\sin^2 x dx$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}dx$.

11. а) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$.

12. а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}$; б) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$.

13. а) $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

14. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-4}}$.

15. а) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt[3]{2x+1}}$.

16. а) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.

17. а) $\int \frac{dx}{3+5\cos 2x}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{x(1+\sqrt[6]{x})}$.

18. а) $\int \sin^3 \frac{x}{5}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{x+2}\,dx}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x+2}}$.

19. а) $\int \frac{dx}{3+3\cos x-5\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$.

20. а) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$.

21. а) $\int \cos^4 2x\,dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

22. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$; б) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$.

23. а) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

24. а) $\int \frac{dx}{1-\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x+6}}$.

25. а) $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}$.

26. а) $\int \frac{dx}{3+2\sin x-5\cos x}$; б) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

27. а) $\int \sin^5 2x\cos 2x\,dx$; б) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\,dx$.

28. а) $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$.

29. а) $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$; б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$.

30. а) $\int \frac{dx}{5+4\sin x+6\cos x}$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x^2}+x}{(1+\sqrt[3]{x})x}dx$.

Завдання 28. Обчислити визначені інтеграли.

1. а) $\int\limits_1^e \frac{(1+\ln x)^3}{x}dx$; б) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/2}(x+3)\sin 2x dx$; в) $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$.

2. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$; б) $\int\limits_0^2 (4x-9)3^x dx$; в) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(x-1\right)}$.

3. а) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; б) $\int\limits_0^{3/2} \arccos\frac{x}{3}dx$; в) $\int\limits_{-8}^0 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}dx$.

4. а) $\int\limits_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}dx$; в) $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{4+x}$.

5. а) $\int\limits_1^e \frac{\sin^2(\ln x)}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{e-1} x^2\ln(x+1)dx$; в) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$.

6. а) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos 3x dx$; в) $\int\limits_0^3 \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$.

7. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^3 x\cos x dx$; б) $\int\limits_0^{1/2} \mathrm{arctg} 2x dx$; в) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$.

8. а) $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; б) $\int\limits_1^2 (3x+5)e^{3x}dx$; в) $\int\limits_9^{25} \frac{\sqrt{x}dx}{x-4}$.

9. а) $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/9} \frac{\operatorname{tg} 3x+2}{\cos^2 3x} dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x \sin\frac{x}{2} dx$; в) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

10. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_1^e x^3 \ln x dx$; в) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} dx$.

11. а) $\int\limits_1^e \frac{(\ln x+5)^3}{x} dx$; б) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} (x-4)\cos 2x dx$; в) $\int\limits_4^9 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} dx$.

12. а) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{(4+1/x)dx}{x^2}$; б) $\int\limits_{-1}^{2} (2x-5)e^{-x} dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{3x^4+1}}$.

13. а) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} 4x \operatorname{arctg} x dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

14. а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln 4x}{4x} dx$; б) $\int\limits_0^3 (x-5)2^x dx$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$.

15. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^5 x dx$; б) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} (x+2)\sin\frac{x}{2} dx$; в) $\int\limits_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. а) $\int\limits_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; б) $\int\limits_1^3 (5x+2)\ln x dx$; в) $\int\limits_2^5 \frac{x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$.

17. а) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$; б) $\int\limits_{1/2}^{1} \arccos x dx$; в) $\int\limits_1^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

18. а) $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int\limits_0^{\pi} (3x+4)\cos\frac{x}{2} dx$; в) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{25+3x^2}}$.

19. а) $\int\limits_0^1 (1+e^{3x})^5 e^{3x} dx$; б) $\int\limits_{-7}^1 \ln(x+8)dx$; в) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

20. а) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{(1-\sin 3x)^5}$; б) $\int\limits_0^1 (2x-3)e^x dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2 dx}{\sqrt{6-2x^3}}$.

21. а) $\int\limits_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$; б) $\int\limits_{1/4}^{1/2} \arcsin 2x dx$; в) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{2x+1}}$.

22. а) $\int\limits_0^2 \frac{\ln^3(2x+1)dx}{2x+1}$; б) $\int\limits_0^{\pi} (\pi - x)\sin x dx$; в) $\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

23. а) $\int\limits_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}+2}dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\ln x dx$; в) $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

24. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x dx$; б) $\int\limits_1^3 (2x+5)e^x dx$; в) $\int\limits_9^{16} \frac{dx}{x-2\sqrt{x}}$.

25. а) $\int\limits_1^e \frac{2\ln x+3}{x}dx$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (x-1)\cos x dx$; в) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx$.

26. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(\operatorname{ctg} x+1)^2}{\sin^2 x}dx$; б) $\int\limits_1^2 \ln(2x-1)dx$; в) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}$.

27. а) $\int\limits_2^8 \frac{\sin\sqrt{2x}-2}{\sqrt{2x}}dx$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x dx$; в) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

28. а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$; б) $\int\limits_{1/2}^1 (5x+4)e^{2x}dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

29. а) $\int_0^2 \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$; б) $\int_2^4 x\ln(x-1)dx$; в) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$.

30. а) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x}+1}{x^2+1}dx$; б) $\int_{\pi/3}^{\pi} (3x-2)\sin x dx$; в) $\int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

Завдання 29. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

1. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{16x^4+1}$; б) $\int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{tg} x dx$.

2. а) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; б) $\int_2^4 \frac{dx}{(x-4)^2}$.

3. а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int_{-3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$.

4. а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

5. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3}$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

6. а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

7. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 x dx}{x^2+1}$; б) $\int_1^2 \frac{xdx}{x-1}$.

8. а) $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{4x^2-1}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$.

9. а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

10. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{2+2x+x^2}$; б) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$.

11. а) $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-9}$; б) $\int\limits_{1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

12. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$.

13. а) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}$; б) $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{dx}{3x\ln 3x}$.

14. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}^2 3xdx}{(1+9x^2)}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

15. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+10}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^5}}$.

16. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^2}}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$.

17. а) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

18. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; б) $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{(x-2)^3}$.

19. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[4]{(4-x)^3}}$.

20. а) $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; б) $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{(x+2)^6}$.

21. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+17}$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

22. а) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{xdx}{9+x^2}$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$.

23. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\arcsin^2 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

24. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

25. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos 2xdx}{\sqrt[3]{1-\sin 2x}}$.

26. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

27. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2-4x}$; б) $\int\limits_{5}^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}$.

28. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg} 2xdx}{1+4x^2}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1-x^2}$.

29. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$.

30. а) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^5)^3}}$.

Завдання 30. Знайти площу фігури, обмеженої даними лініями.

1. $y = x^2 - 2x - 4;$ $\quad y = -x^2 - x + 2.$

2. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1;$ $\quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6.$

3. $y = 3 + 2x - x^2;$ $\quad y = 3x^2 - 6x - 9.$

4. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 7;$ $\quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 2.$

5. $y = 2x^2 + 6x - 3;$ $\quad y = -x^2 + x + 5.$

6. $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2;$ $\quad y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4.$

7. $y = 3x^2 - 5x - 1;$ $\quad y = -x^2 + 2x + 1.$

8. $y = x^2 + 2x + 1;$ $\quad y^2 = x + 1.$

9. $y = x^2 - 3x - 1;$ $\quad y = -x^2 - 2x + 5.$

10. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 2;$ $\quad y = -\frac{2}{3}x^2 - x + 4.$

11. $y = 2x^2 - 6x + 1;$ $\quad y = -x^2 + x - 1.$

12. $y = x^2 - 2x - 5;$ $\quad y = -x^2 - x + 1.$

13. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2;$ $\quad y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3.$

14. $y = x^2 - 5x - 3;$ $\quad y = -3x^2 + 2x - 1.$

15. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5;$ $\quad y = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1.$

16. $y=x^2-3x-4$; $y=-x^2-x+8$.

17. $y=2x^2-6x+3$; $y=-2x^2+x+5$.

18. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-1$; $y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$.

19. $y=2x^2+4x-7$; $y=-x^2-x+1$.

20. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-2$; $y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$.

21. $y=2x^2+3x+1$; $y=-x^2-2x+9$.

22. $y=x^2+x+1$; $y=-x^2+4$.

23. $y=2x^2-6x-2$; $y=-x^2+x-4$.

24. $y=6x-x^2+3$; $y=x^2+3$.

25. $y=\frac{1}{3+x^2}$; $y=\frac{x^2}{4}$.

26. $y=4-x^2$; $y=x^2-2x$.

27. $y=\sqrt[3]{x}+2$; $y=\frac{x}{2}+2$.

28. $y=1-2x^2$; $y=-2x-3$.

29. $y=3x^2-1$; $y=4x+3$.

30. $y=(x-1)^2$; $y^2=x-1$.

Завдання 30. Знайти загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння першого порядку.

1. $x^2 y' - y^2 = x^2$.

2. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$.

3. $xy \cdot y' = 2x^2 + y^2$.

4. $x^2 y' = y^2 + xy + x^2$.

5. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

6. $(x - 2y)y' = x + y$.

7. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}$.

8. $xy' = y + 3x\sin\dfrac{y}{x}$.

9. $xy' = y + y\ln\dfrac{y}{x}$.

10. $(3x + y)y' = x + 3y$.

11. $y' = \dfrac{x + 8y}{8x + y}$.

12. $(2x + y)y' = x + 2y$.

13. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

14. $xy' + xtg\frac{y}{x} = y$.

15. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$.

16. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$.

17. $xy \cdot y' = x^2 - y^2$.

18. $(x - y)y' = 2x + y$.

19. $xy' + y\ln^2\frac{y}{x} = 0$.

20. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$.

21. $xy' = y + 2xctg\frac{y}{x}$.

22. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$.

23. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$.

24. $x\cos\frac{y}{x}y' + 4x = y\cos\frac{y}{x}$.

25. $(5xy - x^2)y' - 5y^2 = 0$.

26. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$.

27. $y' = \dfrac{x^3}{x^3 + y^3} + \dfrac{y}{x}$.

28. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0.$

29. $xy + y^2 = y'(2x^2 + xy)$.

30. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

Завдання 31. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку.

1. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

2. $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0$, $y(1) = 1$.

3. $y' + 2xy = x\ln x e^{-x^2}$, $y(1) = 0$.

4. $y'\sin x - y\cos x = 1,$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

5. $xy' - y = x^2 \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

6. $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, $y(0) = -1$.

7. $y' = y\operatorname{tg} x + \cos x,$ $y(0) = \pi.$

8. $y'x\ln x + y = 2\ln x,$ $y(e) = 0$.

9. $y' + 3x^2 y = x^3 e^{-x^3}$, $y(0) = 0$.

10. $xy' - y = x^2 \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

11. $y' \sin^2 x + y = \operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

12. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = 3$.

13. $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = \operatorname{arctg}^2 x$, $y(0) = 0$.

14. $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x$, $y(0) = \frac{1}{3}$.

15. $xy' + y - e^x = 0$, $y(1) = e$.

16. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(0) = 1$.

17. $y' \cos x + y \sin x = 2x \cos^2 x$, $y(0) = 0$.

18. $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$.

19. $y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = -1$.

20. $xy' - y + 2 \ln x = 0$, $y(1) = 1$.

21. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \cos x$, $y(0) = 0$.

22. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

23. $y' = 2y + e^x - x, \ \ y(0) = \dfrac{1}{4}.$

24. $y' = y\,\mathrm{tg}\,x + \cos x, \ \ y(0) = \pi.$

25. $(1 + x^2)y' + y = \mathrm{arctg}\,x$, $y(0) = 1$.

26. $y' + 2y\,\mathrm{tg}\,2x = \sin 4x, \ \ y(0) = 0$.

27. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}, \ \ y(0) = 0.$

28. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$, $y(0) = 1$.

29. $y' - y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = 0$.

30. $y' - y\mathrm{tg}x = 2\cos^2 x$, $y(0) = 0$.

Завдання 32. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, який задовольняє заданим початковим умовам.

1. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9.$

2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$

3. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \dfrac{4}{3}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{27}.$

4. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5.$

5. $y'' - 6y' + 5y = 5x + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

6. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1..$

7. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

8. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

9. $y'' - 4y' + 3y = x + 1, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9.$

10. $y'' + 9y' = 6e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

11. $y'' - 5y' + 4y = 8x - 2, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$

12. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

13. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

14. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

15. $y'' + y' = 3\cos x - \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

16. $y'' + 9y' = 2x - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

17. $y'' + 16y = 32e^{4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

18. $y'' - 4y' + 4y = 8x^2 - 10, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$

19. $y'' - 8y' + 16y = xe^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

20. $y'' + 4y = 3\cos x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$

21. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

22. $y'' - 3y' - 4y = 4x^2 + 3/2, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 3/2.$

23. $y'' + y' - 2y = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

24. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

25. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 5.$

26. $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

27. $y'' - 2y' = 2x + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

28. $y'' - 4y = 4\sin 2x + 3\cos 2x, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 7.$

29. $y'' - 3y' = 3e^{3x}, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 4.$

30. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$

Завдання 33. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 4y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$.

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

Завдання 34. Побудувати область інтегрування та змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$

2. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

3. $\int\limits_{1/2}^1 dx \int\limits_{\sqrt{x^3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

4. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx.$

5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{2} f(x,y)dy.$

6. $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

7. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1/x^2}^{x^2} f(x,y)dy.$

8. $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x^3}} f(x,y)dy.$

9. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy.$

10. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x^2} f(x,y)dy.$

11. $\int\limits_{1/4}^{1/2} dx \int\limits_{2x}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy.$

12. $\int\limits_{-4}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{9+y^2}}^{3-y} f(x,y)dx.$

13. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f\left(x,y\right)dx.$ 14. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f\left(x,y\right)dy.$

15. $\int\limits_{1/2}^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f\left(x,y\right)dy.$ 16. $\int\limits_2^3 dx\int\limits_1^{x^2} f\left(x,y\right)dy.$

17. $\int\limits_1^8 dx\int\limits_{\sqrt[3]{x^2}}^{x} f\left(x,y\right)dy.$ 18. $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{2x^2}^{3+x} f\left(x,y\right)dy.$

19. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f\left(x,y\right)dy.$ 20. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{(1-x)/2}^{1-x^2} f\left(x,y\right)dy.$

21. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x,y\right)dy.$ 22. $\int\limits_{1/2}^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f\left(x,y\right)dy.$

23. $\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\frac{3}{4}y}^{\sqrt{25-y^2}} f\left(x,y\right)dx.$ 24. $\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_{x^3}^{x} f\left(x,y\right)dy.$

25. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f\left(x,y\right)dx.$ 26. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x^2}^{3-x} f\left(x,y\right)dy.$

27. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f\left(x,y\right)dy.$ 28. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y^2}^{3-y} f\left(x,y\right)dx.$

29. $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{2x^2}^{3+x} f\left(x,y\right)dy.$ 30. $\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f\left(x,y\right)dx.$

Завдання 35. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*.

1. $\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy,\ D: y=x^3, y=8, y=0, x=3.$

2. $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy,\ D: y=1-x^2,\ y\geq 0.$

3. $\iint\limits_D y(1-x)dxdy,\ D: x=y^3, y=x.$

4. $\iint\limits_D xy^3dxdy,\ D: y^2=1-x,\ \ x\geq 0.$

5. $\iint\limits_D x(5+y)dxdy,\ D: y=x+5, x+y+5=0, x\leq 0.$

6. $\iint\limits_D (x-y)dxdy,\ D: y=x^2-1, y=3.$

7. $\iint\limits_D (x+y)y^2dxdy,\ D: y=3x^2, y=3.$

8. $\iint\limits_D xy^2dxdy,\ D: y=x,\ y=0,\ x=1.$

9. $\iint\limits_D (x^3+y)dxdy,\ D: x+y=1,\ x+y=2,\ x\leq 1, x\geq 0.$

10. $\iint\limits_D xy^3dxdy,\ D: y=x^3, y\geq 0,\ y=4x.$

11. $\iint\limits_D (x^3+3y)dxdy,\ D: y=x^2-1,\ \ x+y=1, x\geq 0.$

12. $\iint\limits_D xydxdy,\ D: y=\sqrt{x}, y=0,\ x+y=2.$

13. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy,\ D: y=x, y=2, x\ y=1.$

14. $\iint\limits_D y(1+x^2)dxdy,\ D: y=x^3, y=3x.$

15. $\iint\limits_D (2x+1)y^2dxdy,\ D: x=2-y^2,\ x=0.$

16. $\iint\limits_D e^y dxdy,\ D: y=\ln x,\ y=0,\ x=2.$

17. $\iint\limits_D \left(y+x^2\right)dxdy,\ D: y=x^2,\ x=y^2.$

18. $\iint\limits_D xy^2dxdy,\ D: y=x^2,\ y=2x.$

19. $\iint\limits_D (y+x)dxdy,\ D: y=x,\ x=y^2.$

20. $\iint\limits_D \left(x^3-2y\right)dxdy,\ D: y=x^2-1,\ y\le 0, x\ge 0.$

21. $\iint\limits_D (y-x)dxdy,\ D: y=x,\ y=x^2.$

22. $\iint\limits_D (y+1)dxdy,\ D: 5y=x,\ x=y^2.$

23. $\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ D: y=x^2-1,\ y=-x^2+1.$

24. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy,\ D: y=x,\ y=5x,\ x=3.$

25. $\iint\limits_D (x-2)dxdy,\ D: y=x,\ y=\frac{1}{2}x,\ x=2.$

26. $\iint\limits_D xydxdy,\quad D: x+3y=0,\ y^2=4+x.$

27. $\iint\limits_D (2x-y)dxdy, D: y=2x,\ y=4x,\ y=4.$

28. $\iint\limits_D ydxdy,\ D: y=\sqrt{x},\ y=-x,\ x-y=2.$

29. $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy,\ D: y=x,\ y=9x,\ y=1/x.$

30. $\iint\limits_D x(1-y^2)dxdy,\ D: y=4,\ x=y^2, y=x/4.$

Завдання 36. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду від функції $z=f(x,y)$ вздовж заданої лінії L.

1. $\int\limits_L xdl,$ де L – дуга кривої $y=\dfrac{x^2}{2}$ між точками $A(0;0),\ B\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

2. $\int\limits_L \dfrac{dl}{x-y},$ де L – відрізок прямої між точками $A(0;-2),\ B(4;0)$.

3. $\int\limits_L \sin^4 x\cos xdl,$ де L – дуга кривої $y=\ln\sin x,\quad \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{3}$.

4. $\int\limits_L \sin^2 x\cos^3 xdl,$ де L – дуга кривої $y=\ln\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$.

5. $\int\limits_L \dfrac{x^3}{y^2}dl,$ де L – дуга кривої $y=\dfrac{1}{x}$ між точками $A(1;1),\ B\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

6. $\int\limits_L (x-y)dl,$ де L – відрізок прямої між точками $A(0;0),\ B(4;3)$.

7. $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}},$ де L – відрізок прямої між точками $A(0;0),\ B(1;2)$.

8. $\int\limits_L xdl,$ де L – дуга кривої $y=x^2$ між точками $A(2;4),\ B(1;1)$.

9. $\int\limits_L \dfrac{dl}{x+y},$ де L – відрізок прямої між точками $A(2;4),\ B(1;3)$.

10. $\int\limits_L x^2 dl,$ де L – верхнє півколо $x^2+y^2=9$ між точками $A(3;0), B(-3;0)$.

11. $\int\limits_L x^2 y^2 dl,$ де L – відрізок прямої між точками $A(0;2), B(1;3)$.

12. $\int\limits_L (x^2+y^2)dl,$ де L – відрізок прямої між точками $A(1;2), B(2;5)$.

13. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+8}},$ де L – відрізок прямої між точками $A(0;0), B(-3;2)$.

14. $\int\limits_L x^2 dl,$ де L – верхнє півколо $x^2+y^2=1$ між точками $A(1;0), B(-1;0)$.

15. $\int\limits_L (x-y)dl,$ де L – відрізок прямої між точками $A\left(1;\frac{3}{4}\right), B(4;3)$.

16. $\int\limits_L \sqrt{1+x^6}dl,$ де L – дуга кривої $y=\frac{x^4}{4}$ між точками $A\left(1;\frac{1}{4}\right), B(2;4)$.

17. $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}dl,$ де L – дуга кривої $xy=1$ між точками $A\left(2;\frac{1}{2}\right), B\left(3;\frac{1}{3}\right)$.

18. $\int\limits_L xdl,$ де L – дуга кривої $y=x^2$ між точками $A(0;0), B(1;1)$.

19. $\int\limits_L \frac{dl}{x+2y},$ де L – відрізок прямої між точками $A(2;3), B(1;2)$.

20. $\int\limits_L (x+y)dl,$ де L – відрізок прямої між точками $A(1;6), B(2;12)$.

21. $\int\limits_L xydl,$ де L – прямокутник, що з’єднує точки $O(0;0), A(0;2), B(2;2), C(2;0)$.

22. $\int\limits_L (x+y)dl,$ де $L=OAB$ – ламана, що з’єднує точки $O(0;0), A(2;0), B(2;1)$.

23. $\int\limits_L x^2 dl,$ де L – верхнє півколо $x^2+y^2=16$ між точками $A(4;0),\ B(-4;0)$.

24. $\int\limits_L (x-4y)dl,$ де L – відрізок прямої між точками $A\left(1;\dfrac{3}{4}\right),\ B(4;3)$.

25. $\int\limits_L \dfrac{x^3}{y^2}dl,$ де L – дуга кривої $y=\dfrac{4}{x}$ між точками $A(2;2),\ B\left(3;\dfrac{4}{3}\right)$.

26. $\int\limits_L (x+3y)dl,$ де $L=OAB$ – ламана, що з'єднує точки $O(0;0),\ A(2;0),\ B(2;1)$.

27. $\int\limits_L \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x+1}}dl,$ де L – дуга кривої $y=\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

28. $\int\limits_L xdl,$ де L – дуга кривої $y=x^2$ між точками $A(0;0),\ B(2;4)$.

29. $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, де L – відрізок прямої між точками $A(-1;0),\ B(0;1)$.

30. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl,$ де L – арка циклоїди $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$.

Завдання 37. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду вздовж заданої лінії L.

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, де L – дуга кривої $y=x^2$ між точками $A(-1;1)$, $B(1;1)$.

2. $\int\limits_L (x+2y)dx+(x-y)dy$, де L – верхнє півколо $x=2\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le\pi$.

3. $\int\limits_L (xy-1)dx+y^2dy$, де L – дуга кривої $y^2=4-4x$ між точками $A(1;0),\ B(0;2)$.

4. $\int\limits_L (x+y)dx+(x^2-y^2)dy$, де L – дуга кривої $x=2\cos t, y=3\sin t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$.

5. $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$, де $L=OAB$ – ламана, що з'єднує точки $O(0;0), A(2;0), B(2;1)$.

6. $\int\limits_L (x^2+y)dx+xydy$, де L – верхнє півколо $x^2+y^2=1, y\ge 0$.

7. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+2xydy$, де L – дуга кривої $y=x^3$ між точками $A(0;0)$, $B(1;1)$.

8. $\int\limits_L xdy-ydx$ де L – арка циклоїди $x=t-\sin t, y=1-\cos t, \quad 0\le t\le 2\pi$.

9. $\int\limits_L xydx+(2y-x)dy$, де L – дуга кривої $y=x^3$ між точками $A(0;0)$, $B(2;8)$.

10. $\int\limits_L (x^2y-3x)dx+ydy$, де L – дуга кривої $x=3\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le \pi$.

11. $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$, де L – відрізок прямої між точками $A(1;0), B(0;2)$.

12. $\int\limits_L xy^2dy-x^2ydx$, де L – чверть кола $x^2+y^2=9, x\ge 0, y\ge 0$.

13. $\int\limits_L (2-y)dx+xdy$ де L – арка циклоїди $x=t-\sin t, y=1-\cos t, \quad 0\le t\le 2\pi$.

14. $\int\limits_L \dfrac{y}{x}dx+xdy$, де L – дуга кривої $y=\ln x$ між точками $A(1;0), B(e;1)$.

15. $\int\limits_L (2x^2-y)dx+xydy$, де L – дуга кривої $x=3\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le \pi/2$.

16. $\int\limits_L 2xydx+x^2dy$, де L – дуга кривої $x=2y^2$ між точками $A(0;0)$, $B(2;1)$.

17. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+2xydy$, де L – дуга кривої $y=x^3$ між точками $A(0;0)$, $B(1;1)$.

18. $\int\limits_L (4-y)dx+xdy$ де L – арка циклоїди $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

19. $\int\limits_L (2y-x)dx+xydy$, де L – дуга кривої $y=\sqrt{x}$ між точками $A(1;1)$, $B(4;2)$.

20. $\int\limits_L (x^2y-x-3)dx+ydy$, де L – дуга кривої $x=\cos t, y=4\sin t, 0\le t\le \pi$.

21. $\int\limits_L (x^2+y)dx-(y^2+x)dy$, де $L=ABC$ – ламана, що з'єднує точки $A(1;2)$, $B(1;5)$, $C(3;5)$.

22. $\int\limits_L (2x-y^2)dx+xdy$, де L – дуга кривої $x=2y^2$ між точками $A(0;0)$, $B(2;1)$.

23. $\int\limits_L 2ydx-(y-x^2)dy$, де L – дуга кривої $y=x-x^2$ між точками $A(0;0)$, $B(1;0)$.

24. $\int\limits_L (x^2-y)dx+(y^2-x)dy$, де L – відрізок прямої між точками $A(1;1)$, $B(2;4)$.

25. $\int\limits_L (2x^2-y)dx+3xydy$, де L – дуга кривої $x=\cos t, y=4\sin t, 0\le t\le \pi/2$.

26. $\int\limits_L (2y-x)dx+5xydy$, де L – дуга кривої $y=\sqrt{x}$ між точками $A(1;1)$, $B(9;3)$.

27. $\int\limits_L 2xydx-3(x-1)^2dy$, де $L=OAB$ – ламана, що з'єднує точки $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(1;2)$.

28. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x-y^2)dy$, де L – дуга кривої $y=3x^2$ між точками $A(0;0)$, $B(1;3)$.

29. $\int\limits_L (x+y)dx+(x^2-y^2)dy$, де L – дуга кривої $x=3\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le \pi/2$.

30. $\int\limits_L (4-y)dx+4xdy$ де L – арка циклоїди $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ 0\le t\le \pi.$

Завдання 38. Дослідити на збіжність додатні числові ряди а), б) та дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакозмінний ряд в).

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+2}{n(2n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^3+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 5^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!+10}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+4n-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{n^3}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{5n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^5+n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+3}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4}{n(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^2+2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)!}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{1-n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{6^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-2}{2n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{8^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+1}$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+2}{n(2n^3-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+2)!}$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^4+1}$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n^3+3n-4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+3}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2n+3)}{n^2+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^4-n^2+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n+1}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n-4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$.

Завдання 39. Знайти область збіжності степеневого ряду.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5^n} x^n$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+2n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} x^n$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n x^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}} x^n$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^3}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n} x^n$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3+1} x^n$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2n-1} x^n$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n (n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n x^n$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{6^n} x^n$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} x^n$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^{2n}} x^n$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2} x^n$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{8^n} x^n$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2n+1}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3} x^n$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n x^n$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} x^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3+1}}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)^3}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{6^n(3n-1)}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n^4+1}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n 4^n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} x^n$.

Завдання 40. Наближено обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, попередньо розклавши підінтегральну функцію у степеневий ряд.

1. $\int_0^1 \sin x^2 dx.$

2. $\int_0^{1/2} x \cos\sqrt{x} dx.$

3. $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}.$

4. $\int_0^1 x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$

5. $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx.$

6. $\int_0^{1/3} \frac{\sin x}{x} dx.$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$

8. $\int_0^{1/9} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx.$

9. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

10. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$

11. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$

12. $\int\limits_0^{1/2} \frac{1-e^{-x/2}}{x}dx.$

13. $\int\limits_0^{1/2} \cos 4x^2 dx.$

14. $\int\limits_0^{1/4} xe^{-\frac{1}{2}x^3} dx.$

15. $\int\limits_0^{1/4} x^2 \ln(1+x)dx.$

16. $\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x}\cos 2x dx.$

17. $\int\limits_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$

18. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}dx.$

19. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx.$

20. $\int\limits_0^{1/3} x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$

21. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$

22. $\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}}dx.$

23. $\int\limits_0^{1/5} x^3 e^{-x^3} dx.$

24. $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\cos\frac{x}{3}dx.$

25. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$

26. $\int\limits_0^{1/4} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$

27. $\int\limits_0^{1/4} x^2 e^{-\sqrt{x}} dx.$

28. $\int\limits_0^{1/2} x\ln\left(1+x^2\right)dx.$

29. $\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

30. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}e^{-x^3} dx.$

Рекомендована література

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3 ч.– Ч. 1 –. К.: Вища школа, 1990. – 383 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3 ч. – Ч. 2 – К.: Вища школа, 1991. – 366 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч.1. - М.: Высш. школа, 1986. – 304 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. Ч.2. – М.: Высшая школа, 1986. – 415 с.
6. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навч. посібник: У 4 ч. – Ч.2: – К: Книжк. вид–во Нац. авіац. ун–ту, 2005. – 276 с.
7. Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навч. посібник: У 4 ч. – Ч.3: – К: Книжк. вид–во Нац. авіац. ун–ту, 2005. – 444 с.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Збірник задач: Навч.посібн. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.
10. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. Посібник.–К.: Видав. центр «Академія», 2003. – 624 с.
11. Дюженкова О.Ю. Методичні вказівки з вищої математики для студентів інженерних спеціальностей. – К: Компринт, 2017. – 192 с.
12. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 464 с.
13. Овчинников П. Ф., Лисицын Б. М., Михайленко В. М. Высшая математика. – К.: Вища шк., 1989. – 679 с.
14. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис–пресс, 2007. – 608 с.
15. Сборник задач по математике для втузов / под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П.. – М.: Наука, 1981. – 464 с.