МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА, ТРАНСПОРТУ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра вищої математики та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Частина II

Індивідуальні завдання та приклади їх розв’язання

КРОПИВНИЦЬКИЙ 2023

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА, ТРАНСПОРТУ ТА
ЕНЕРГЕТИКИ

Кафедра вищої математики та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Частина II

Індивідуальні завдання та приклади їх розв'язання

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол № 11 від 20.06.2023 р.

КРОПИВНИЦЬКИЙ 2023

Вища математика для студентів технічних спеціальностей. Частина II. Індивідуальні завдання та приклади їх розв’язання / Укл.: Гуцул В.І. – Кропивницький : ЦНТУ, 2023. – 140 с.

Методичні вказівки містять індивідуальні завдання та приклади їх розв’язання з наступних розділів курсу «Вища математика»: «Інтегральне числення функції однієї змінної», «Диференціальне числення функції декількох змінних», «Диференціальні рівняння», «Кратні та криволінійні інтеграли», «Ряди». Призначені для студентів технічних та комп’ютерних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Зміст

Індивідуальні завдання
I. Інтегральне числення функції однієї змінної

***Завдання* 1.** Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування.

1. а) $\int\left(\frac{3}{cos^2 x}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+5^x\right)dx$; б) $\int\left(x^5-\frac{3}{x^4}-4x\sqrt{x}\right)dx$;

в) $\int(sin(3x+1)+2e^{5x})dx$; г) $\int\left(\frac{2}{4+9x^2}-(1-3x)^5\right)dx$;

д) $\int 3x^2e^{x^3}dx$; е) $\int\frac{sin\,x dx}{cos^2 x}$.

2. а) $\int\left(\frac{4}{x^2-16}+\frac{3}{sin^2 x}-3^x\right)dx$; б) $\int\left(\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{ctg^6 x}{sin^2 x}\right)dx$;

в) $\int(cos(1-2x)+(5x+1)^9)dx$; г) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}+3e^{2x+1}\right)dx$;

д) $\int 4x^3\, sin\, x^4\, dx$; е) $\int\left(x^2e^{x^3+1}+\frac{ln^2 x}{x}\right)dx$.

3. а) $\int\left(\frac{2}{x^2+3}-\frac{5}{sin^2 x}+sin\,x\right)dx$; б) $\int\left(\left(2+\sqrt{x}\right)^3+\frac{1}{x^4}\right)dx$;

в) $\int(cos(1-3x)+2^{5x})dx$; г) $\int(5x^4(3+x^5)^7)dx$;

д) $\int 5x^4\, sin\, x^5\, dx$; е) $\int\left(x(5x^2+2)^8-\frac{tg^5 x}{cos^2 x}\right)dx$.

4. а) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{2}{sin^2 x}+7^x\right)dx$; б) $\int\left(3x^2-x\sqrt[4]{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$;

в) $\int\left(e^{4x+1}+\frac{3}{cos^2 3x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{2-9x^2}}+sin(\,1-5x)\right)dx$;

д) $\int 7x^6(3+x^7)^5dx$; е) $\int\left(x^2\, cos\, x^3+\frac{3}{x\, ln^5 x}\right)dx$.

5. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{3}{cos^2 x}+e^x\right)dx$; б) $\int\left(\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^2+\frac{2}{x^5}\right)dx$;

в) $\int((3+5x)^9-4^{1-2x})dx$; г) $\int\left(\frac{2}{1+9x^2}-\frac{3}{2-4x}\right)dx$;

д) $\int 6x^5\, sin(x^6+5)\, dx$; е) $\int\left(\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{ctg^6 x}{sin^2 x}\right)dx$.

6. а) $\int\left(\frac{2}{x}-3\sin x+2*5^x\right)dx$; б) $\int\left(x^3-\sqrt{x^3}+\frac{4}{x^9}\right)dx$;

в) $\int\left(e^{3x-1}+\frac{3}{\sin^2(1-2x)}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{5+16x^2}-\cos(5x+3)\right)dx$;

д) $\int 3x^2e^{x^3}dx$; е) $\int\left(\frac{x}{5x^2-4}+\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$.

7. а) $\int\left(2\cos x-\frac{2}{\sin^2 x}+4e^x\right)dx$; б) $\int\left(\left(3-\sqrt{x}\right)^3+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{3x+2}-\sin(1-4x)\right)dx$; г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9x^2+5}}-4^{1-3x}\right)dx$;

д) $\int(5x^4(3+x^5)^7)dx$; е) $\int\left(\frac{3}{x\ln^5 x}+\frac{x^2}{\cos^2 x^3}\right)dx$.

8. а) $\int\left(\frac{1}{4+x^2}-3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$; б) $\int\left((2x^2+1)^3-\frac{4}{x^5}\right)dx$;

в) $\int(\sin(3x+1)-3(1-4x)^8)dx$; г) $\int\left(\frac{5}{4x^2-9}-3^{2-5x}\right)dx$;

д) $\int 7x^6\cos x^7\,dx$; е) $\int\left(\frac{x^4}{\sin^2(1+2x^5)}-\frac{tg^3 x}{\cos^2 x}\right)dx$.

9. а) $\int\left(3\sin x+4^x-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2dx$;

в) $\int\left(\frac{2}{\cos^2(4x+1)}-\frac{3}{1-5x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-25x^2}}+(3+4x)^4\right)dx$;

д) $\int\frac{5x^4}{3+x^5}dx$; е) $\int\left(x^3\cos(1-2x^4)+\frac{ctg^4 x}{\sin^2 x}\right)dx$.

10. а) $\int\left(5\cdot 3^x-2\cos x+\frac{4}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^3dx$;

в) $\int\left(e^{2x+3}-\frac{3}{\sin^2(1-2x)}\right)dx$; г) $\int\left(3\sin x+4^x-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$;

д) $\int 9x^8(1+x^9)^5dx$; е) $\int\left(\frac{2^x}{3+2^x}+\frac{x^3}{\cos^2(x^4+1)}\right)dx$.

11. а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\sin^2 x}-4^x\right)dx$; б) $\int\left(\frac{5}{x^3}-x^6+2x^2\cdot\sqrt{x}\right)dx$;

в) $\int(\cos(4x-3)+3e^{3x})dx$; г) $\int\left(\frac{5}{4x^2+9}+(5x-3)^4\right)dx$;

д) $\int 4x^3e^xdx$; е) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.

12. а) $\int\left(5^x-\frac{2}{x^4-4}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(x\cdot\sqrt{x}+2x^4+\frac{3}{x^6}\right)dx$;

в) $\int((2-7x)^5+3\,sin(3+4x))dx$; г) $\int\left(e^{2+5x}-\frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx$;

д) $\int 5x^4\cos x^5\,dx$; е) $\int\left(x^3e^{x^4}-\frac{2}{x\ln^4 x}\right)dx$.

13. а) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{4}{5+x^2}-5\sin x\right)dx$; б) $\int\left(\left(3-\sqrt[3]{x}\right)^2-\frac{3}{x^2}\right)dx$;

в) $\int(5^{2x}-3\sin(2-5x))dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sin^2 4x}+\frac{7}{4+9x^2}\right)dx$;

д) $\int 6x^5\cos x^6\,dx$; е) $\int\left(\frac{2\,tg^2 x}{\cos^2 x}+x^2(3x^3+5)^9\right)dx$.

14. а) $\int\left(5^x+\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{6}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$; б) $\int\left(x\sqrt[5]{x}+5x^3-\frac{3}{x^7}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{\sin^2 2x}-5e^{2-3x}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3-4x^2}}+3\cos 6x\right)dx$;

д) $\int 8x^7(5+x^8)^5dx$; е) $\int\left(\frac{2}{x\ln^3 x}+3x^3\sin x^4\right)dx$.

15. а) $\int\left(3e^x+\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{5}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{x^6}-\left(1+\sqrt{x}\right)^3\right)dx$;

в) $\int(5^{2-3x}+(2-x)^7)dx$; г) $\int\left(\frac{5}{3-5x}+\frac{4}{1+16x^2}\right)dx$;

д) $\int 7x^6\cos(3+x^7)\,dx$; е) $\int\left(\frac{2\,ctg^5 x}{\sin^2 x}-\frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}}\right)dx$.

16. а) $\int\left(5\cos x+\frac{3}{x}-5\cdot 2^x\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+3x^4-\frac{2}{x^7}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{2}{\cos^2(3-4x)}+e^{2+5x}\right)dx$; г) $\int\left(2\sin(3-8x)+\frac{5}{3+9x^2}\right)dx$;

д) $\int 5x^3e^{x^4}dx$; е) $\int\left(\frac{x^4}{3x^5+1}+\frac{e^x}{e^{2x}-4}\right)dx$.

17. а) $\int\left(5e^x-3\sin x+\frac{6}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\left(2-\sqrt[6]{x}\right)^2\right)dx$;

в) $\int\left(2\cos(3-5x)+\frac{5}{3+4x}\right)dx$; г) $\int\left(5^{6x-5}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}}\right)dx$;

д) $\int 6x^5(2+x^6)^9dx$; е) $\int\left(\frac{x^3}{\sin^2 x^4}-\frac{5}{x\ln^3 x}\right)dx$.

18. а) $\int\left(\frac{3}{x}+2e^x-\frac{5}{9+x^2}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{5}{x^6}-(3x^3-2)^2\right)dx$;

в) $\int((2+3x)^9+\cos(1-5x))dx$; г) $\int\left(5^{5-2x}+\frac{3}{9x^2-25}\right)dx$;

д) $\int 8x^7(5+x^8)^5dx$; е) $\int \left(\frac{2\,tg^2 x}{cos^2 x} - \frac{x^5}{cos^2(3-2x^6)}\right)dx.$

19. а) $\int \left(5^x - 4\cos x + \frac{6}{x^2+4}\right)dx$; б) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3}\right)^2 dx$;

в) $\int \left(\frac{5}{2-3x} + \frac{4}{sin^2(2+5x)}\right)dx$; г) $\int \left((4-9x)^4 + \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx$;

д) $\int \frac{6x^5}{4+x^6}dx$; е) $\int \left(\frac{5\,ctg^3 x}{sin^2 x} - 2x^4 \sin x^5\right)dx.$

20. а) $\int \left(3\sin x + \frac{5}{\sqrt{4-x^2}} + 3\cdot 6^x\right)dx$; б) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{x}\right)^3 dx$;

в) $\int \left(\frac{2}{cos^2(3+4x)} + e^{2-5x}\right)dx$; г) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{2+9x}} - \frac{5}{\sqrt{16x^2+11}}\right)dx$;

д) $\int 10x^9(3+x^{10})^4dx$; е) $\int \left(\frac{x^4}{sin^2(x^5+3)} - \frac{5\cdot 3^x}{3^{2x}+1}\right)dx.$

21. а) $\int \left(2^x + \frac{3}{9+x^2} - \frac{2}{cos^2 x}\right)dx$; б) $\int \left(\frac{5}{x^6} - x\sqrt[4]{x} + 2x^3\right)dx$;

в) $\int \left(\frac{3}{2+5x} - 2\sin(1-6x)\right)dx$; г) $\int \left((2-7x)^7 + \frac{3}{9-16x^2}\right)dx$;

д) $\int 5x^4 3^x dx$; е) $\int (x^3(1+x^4)^5 - cos^5 x \sin x)dx.$

22. а) $\int \left(\frac{5}{x^2+36} - 4^x + \frac{5}{sin^2 x}\right)dx$; б) $\int \left(\frac{3}{x^2} - x\sqrt[3]{x} + 2x^4\right)dx$;

в) $\int ((3-5x)^8 + 2\cos 3x)dx$; г) $\int \left(x^4\cdot 5^{x^5} + \frac{6x^3}{2+x^4}\right)dx$;

д) $\int 7x^6 \sin x^7\, dx$; е) $\int \left(x^7 e^{x^8+2} - \frac{2}{x\, ln^7 x}\right)dx.$

23. а) $\int \left(3\sin x + \frac{5}{x^2+4} - \frac{3}{sin^2 x}\right)dx$; б) $\int \left(\frac{3}{x^9} - \left(4-\sqrt[3]{x}\right)^2\right)dx$;

в) $\int (3^{6x} - 2\cos(2-5x))dx$; г) $\int \left(\frac{3}{cos^2 4x} + \frac{5}{4x^2-25}\right)dx$;

д) $\int 8x^7 \sin x^8\, dx$; е) $\int \left(4x^5 e^{1+x^6} - \frac{3}{tg^5 x\, cos^2 x}\right)dx.$

24. а) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}} + 5^x + \frac{3}{sin^2 x}\right)dx$; б) $\int \left(\frac{1}{x^6} - x\sqrt[5]{x} + 5x^4\right)dx$;

в) $\int \left(\frac{3}{cos^2 5x} - 2^{3x+2}\right)dx$; г) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{4x^2+11}} - 3\sin 2x\right)dx$;

д) $\int 9x^8(5-2x^9)^4dx$; е) $\int \left(x^6\cos(2x^7-3) + \frac{5\, ln^5 x}{x}\right)dx.$

25. а) $\int\left(3e^x+\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{2}{x^2-9}\right)dx$;   б) $\int\left(\frac{3}{x^4}+\left(3-\sqrt[5]{x}\right)^2\right)dx$;

в) $\int\left(2^{3-5x}+5(2+3x)^5\right)dx$;   г) $\int\left(\frac{3}{4x^2-1}+\frac{2}{5+6x}\right)dx$;

д) $\int 8x^7\sin(3-x^8)\,dx$;   е) $\int\left(\frac{x^5}{\sqrt{5+3x^6}}-\frac{3\,tg^5 x}{\sin^2 x}\right)dx$.

26. а) $\int\left(3\cdot 4^x-5\sin x+\frac{3}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$;   б) $\int\left(\sqrt[4]{x}+2x^3-\frac{5}{x^5}\right)dx$;

в) $\int\left(3^{2x+1}-\frac{5}{\sin^2(3x-2)}\right)dx$;   г) $\int\left(2\cos(5+2x)-\frac{4}{3+4x^2}\right)dx$;

д) $\int 5x^4e^{x^5}dx$;   е) $\int\left(\frac{4^x}{2+4^{2x}}-\frac{5x^3}{2x^4-7}\right)dx$.

27. а) $\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}+3\cdot 6^x-4\cos x\right)dx$;   б) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}}-\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^3\right)dx$;

в) $\int\left(2\sin(5x+1)-\frac{5}{3x+2}\right)dx$;   г) $\int\left(5^{2x-3}-\frac{4}{\sqrt{25x^2+3}}\right)dx$;

д) $\int 8x^7(x^8-2)^5dx$;   е) $\int\left(\frac{2x^4}{\cos^2 x^5}-\frac{5\ln^3 x}{x}\right)dx$.

28. а) $\int\left(\frac{3}{x}-5\cdot 3^x+\frac{4}{x^2+16}\right)dx$;   б) $\int\left(\frac{3}{x^8}-2(x^4+2)^3\right)dx$;

в) $\int\left(2(5-3x)^7-5\sin(1-5x)\right)dx$;   г) $\int\left(5^{4x-7}+\frac{3}{16x^2+9}\right)dx$;

д) $\int 10x^9\cos x^{10}\,dx$;   е) $\int\left(\frac{3}{tg^5 x\cos^2 x}-\frac{2x^6}{\sin^2 x^7}\right)dx$.

29. а) $\int\left(5^x-\frac{3}{x^2-36}-5\sin x\right)dx$;   б) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x^2}\right)^2dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{3x+5}-\frac{3}{\cos^2(7x-1)}\right)dx$;   г) $\int\left((1-5x)^4+\frac{2}{\sqrt{36x^2+5}}\right)dx$;

д) $\int\frac{9x^8}{2+x^9}dx$;   е) $\int\left(\frac{3\,tg^7 x}{\sin^2 x}-2x^5\cos x^6\right)dx$.

30. а) $\int\left(5\cos x-4\cdot 8^x+\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$;   б) $\int\left(\frac{2}{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2dx$;

в) $\int\left(\frac{5}{\sin^2(3x+1)}-5^{6x+1}\right)dx$;   г) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{2-9x}}+\frac{3}{\sqrt{4+25x^2}}\right)dx$;

д) $\int 4x^3(2-3x^4)^7dx$;   е) $\int\left(\frac{x^5}{\cos^2 x^6}+\frac{3^x}{3^{2x}-49}\right)dx$.

***Завдання* 2.** Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами.

1. а) $\int xe^{2x}dx$; б) $\int (x^2+1)\cos x\,dx$; в) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$.
2. а) $\int x\sin 3x\,dx$; б) $\int x^2e^{2x}dx$; в) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.
3. а) $\int (2x+1)\cos x\,dx$; б) $\int x^2\cdot 3^x dx$; в) $\int e^{2x}\sin 3\,xdx$.
4. а) $\int x\cdot 2^x dx$; б) $\int x^2\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.
5. а) $\int (1-3x)\cdot 4^x\,dx$; б) $\int x^2\cos 2x\,dx$; в) $\int x\,arctg\,x\,dx$.
6. а) $\int x^3\ln 2x\,dx$; б) $\int (1+x^2)e^x dx$; в) $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.
7. а) $\int x^2\log_3 x\,dx$; б) $\int (2-x^2)\sin x\,dx$; в) $\int e^{\arccos x}dx$.
8. а) $\int x^5\ln 3x\,dx$; б) $\int (4+x^2)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.
9. а) $\int x\cdot 5^{2x}dx$; б) $\int x^2\sin 5x\,dx$; в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.
10. а) $\int (1+3x)\cos 2x\,dx$; б) $\int x^2e^{1-4x}\,dx$; в) $\int \cos(\ln x)dx$.
11. а) $\int (2-5x)\sin x\,dx$; б) $\int (2+3x^2)e^x dx$; в) $\int \sqrt{1-x^2}dx$.
12. а) $\int xe^{5x}dx$; б) $\int (1-2x^2)\cos 2x\,dx$; в) $\int arcctg\sqrt{x}\,dx$.
13. а) $\int (2+3x)\sin 2x\,dx$; б) $\int (5-x^2)e^{3x}dx$; в) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.
14. а) $\int (1-2x)\cos 4x\,dx$; б) $\int x^2\cdot 4^x dx$; в) $\int e^{4x}\sin x\,dx$.
15. а) $\int x\cdot 7^x dx$; б) $\int (5+x^2)\sin 4x\,dx$; в) $\int e^{3x}\cos x\,dx$.
16. а) $\int (2+5x)\cdot 3^x dx$; б) $\int x^2\cos 5x\,dx$; в) $\int x\,arcctg\,x\,dx$.
17. а) $\int x^2\ln 3x\,dx$; б) $\int (x^2+5)e^{3x}dx$; в) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.
18. а) $\int x^6\log_4 2x\,dx$; б) $\int (3+x^2)\sin 2x\,dx$; в) $\int e^{\arcsin x}dx$.
19. а) $\int x^6\ln 2x\,dx$; б) $\int x^2\cos 6x\,dx$; в) $\int lg(x+\sqrt{1+x^2})dx$.
20. а) $\int x\cdot 7^{2x}\,dx$; б) $\int x^2\sin 7x\,dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.
21. а) $\int (2+4x)\cos 3x\,dx$; б) $\int (1-4x^2)e^x dx$; в) $\int \sin(\ln x)dx$.
22. а) $\int (2-3x)\sin 5x\,dx$; б) $\int (1+4x^2)e^{2x}dx$; в) $\int \sqrt{4+x^2}dx$.

23. а) $\int (5+2x)\cdot 6^x dx$; б) $\int (2+x^2)\, sin\, 3x\, dx$; в) $\int arctg\, x.$

24. а) $\int (3-2x)\, cos\, 4x\, dx$; б) $\int (1+2x^2)e^{4x}dx$; в) $\int arcctg\, x.$

25. а) $\int (2+x)\, sin\, 4x\, dx$; б) $\int x^2\cdot 5^x dx$; в) $\int e^{5x}\, cos\, x\, dx.$

26. а) $\int x\cdot 9^x dx$; б) $\int (1-7x^2)\, cos\, 2x\, dx$; в) $\int e^x\, sin\, 5x\, dx.$

27. а) $\int (3+4x)\cdot 5^x dx$; б) $\int (2+3x^2)\, sin\, 2x\, dx$; в) $\int e^{2x}\, sin\, 3x\, dx.$

28. а) $\int x^{10}\, ln\, 2x\, dx$; б) $\int (x^2+3)e^{4x}dx$; в) $\int \sqrt{9-x^2}dx.$

29. а) $\int x^2\, lg\, x\, dx$; б) $\int (4-5x^2)\, cos\, 3x\, dx$; в) $\int arcsin\, x\, dx.$

30. а) $\int x^7\, ln\, 5x\, dx$; б) $\int x^2\, sin\, 6x\, dx$; в) $\int arccos\, x\, dx.$

***Завдання* 3.** Знайти інтеграли від функцій, які вміщують квадратний тричлен.

1. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int \frac{2x-3}{3x^2+5x+2}dx$; в) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-2x-4}}dx.$

2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+20}}$; б) $\int \frac{4x+3}{x^2-3x+4}dx$; в) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$

3. а) $\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$; б) $\int \frac{5x-1}{2x^2+6x-3}dx$; в) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{4x^2-12x+10}}dx.$

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2-10x+26}dx$; в) $\int \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2-16x+20}}dx.$

5. а) $\int \frac{dx}{5x^2+10x+1}$; б) $\int \frac{4x+5}{x^2-6x+13}dx$; в) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx.$

6. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+27}}$; б) $\int \frac{5x-4}{2x^2-12x+20}dx$; в) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+4x+2}}dx.$

7. а) $\int \frac{dx}{x^2+5x+2}$; б) $\int \frac{6x+5}{3x^2-6x+2}dx$; в) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+8x+32}}dx.$

8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+5}}$; б) $\int \frac{3x-2}{4x^2+24x-3}dx$; в) $\int \frac{7x+1}{\sqrt{x^2-16x+17}}dx.$

9. а) $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$; б) $\int \frac{4x-9}{5x^2+20x-2}dx$; в) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{x^2-10x+34}}dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}$; б) $\int \frac{9x+1}{3x^2-6x+2}dx$; в) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-4x+20}}dx.$

11. а) $\int \frac{dx}{5x^2-10x+3}$; б) $\int \frac{8x-3}{x^2+12x+40}dx$; в) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

12. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14x+40}}$; б) $\int \frac{5x+2}{2x^2-12x+3}dx$; в) $\int \frac{7x+1}{\sqrt{-x^2+2x+4}}dx.$

13. а) $\int \frac{dx}{3x^2+42x+1}$; б) $\int \frac{6x-5}{x^2+4x+5}dx$; в) $\int \frac{5x-4}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx$.

14. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+32}}$; б) $\int \frac{4x+1}{4x^2+16x+3}dx$; в) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-16x+65}}dx$.

15. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; б) $\int \frac{3x+2}{2x^2-2x+1}dx$; в) $\int \frac{9x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

16. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+24x+1}}$; б) $\int \frac{7x-4}{x^2-5x+2}dx$; в) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{x^2-4x-12}}dx$.

17. а) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$; б) $\int \frac{2x+5}{3x^2+5x-3}dx$; в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+4}}dx$.

18. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+16}}$; б) $\int \frac{3x+4}{x^2+3x-4}dx$; в) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$.

19. а) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+1}$; б) $\int \frac{x-5}{2x^2+6x-2}dx$; в) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{4x^2+12x+8}}dx$.

20. а) $\int \frac{dx}{5x^2-10x-1}$; б) $\int \frac{5x+4}{x^2-6x+10}dx$; в) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{-6x-x^2-5}}dx$.

21. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+2}}$; б) $\int \frac{4x-5}{2x^2+12x+10}dx$; в) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+12x+27}}dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+1}$; б) $\int \frac{5x+6}{3x^2+6x+1}dx$; в) $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2-8x+32}}dx$.

23. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+17}}$; б) $\int \frac{2x-3}{4x^2-24x-2}dx$; в) $\int \frac{x+7}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$.

24. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+3}$; б) $\int \frac{9x-4}{5x^2-20x+1}dx$; в) $\int \frac{5x-6}{\sqrt{x^2+10x+34}}dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$; б) $\int \frac{9x-2}{3x^2-18x-1}dx$; в) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx$.

26. а) $\int \frac{dx}{5x^2+10x+2}$; б) $\int \frac{3x-8}{x^2-12x+40}dx$; в) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$.

27. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$; б) $\int \frac{2x+5}{2x^2+12x+1}dx$; в) $\int \frac{6x+1}{\sqrt{x^2-14x+40}}dx$.

28. а) $\int \frac{dx}{3x^2-42x-1}$; б) $\int \frac{5x-6}{x^2-4x+3}dx$; в) $\int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$.

29. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+65}}$; б) $\int \frac{x+4}{4x^2-16x+1}dx$; в) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2-12x+32}}dx$.

30. а) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$; б) $\int \frac{2x+3}{2x^2+2x-1}dx$; в) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-18x+80}}dx$.

Завдання 4. Знайти інтеграли від раціональних дробів.

1. а) $\int \frac{x^4+x+2}{x^2-9}dx$; б) $\int \frac{4x^2+5x}{(x-1)(x+2)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2-25x+56}{(x-3)(x^2-4x+10)}dx$.

2. а) $\int \frac{x^3+5}{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{11x-3}{(x+2)(2x-1)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2+24x+28}{(x-4)(x^2+6x+12)}dx$.

3. а) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^2-1}dx$; б) $\int \frac{3x^2-6x-58}{(x-3)(x+4)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2-25x+51}{(x+1)(x^2-8x+17)}dx$.

4. а) $\int \frac{x^3-3}{x^2+9}dx$; б) $\int \frac{x^2+7x-6}{(3x-1)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2-13x-28}{(x-2)(x^2+10x+26)}dx$.

5. а) $\int \frac{x^4+x^3+2}{x^2-4}dx$; б) $\int \frac{15x^2+28x+3}{(4x+1)(x+2)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2+7x+39}{(x-3)(x^2+2x+8)}dx$.

6. а) $\int \frac{3x^3+5}{x^2+16}dx$; б) $\int \frac{2x^2+8x-5}{(2x+3)(x+4)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2-5x+9}{(x-1)(x^2-4x+9)}dx$.

7. а) $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-3}dx$; б) $\int \frac{9x^2+28x-57}{(3x+1)(x+5)^2}dx$; в) $\int \frac{9x^2-14x+16}{(x-2)(x^2-x+2)}dx$.

8. а) $\int \frac{x^4+4}{x^2+5}dx$; б) $\int \frac{7x^2+14x-37}{(4x-3)(x+4)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-9x+32}{(x+4)(x^2-2x+5)}dx$.

9. а) $\int \frac{x^3+x^2+6}{x^2-16}dx$; б) $\int \frac{9x^2+x-12}{(3x-1)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{4x^2-14x+9}{(x-5)(x^2-3x+3)}dx$.

10. а) $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2+7}dx$; б) $\int \frac{10x^2+x-22}{(4x-1)(x+3)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-7x+6}{(x-1)(x^2-4x+5)}dx$.

11. а) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-7}dx$; б) $\int \frac{5x^2-27x-38}{(3x+1)(x-5)^2}dx$; в) $\int \frac{7x^2+25x+27}{(x+3)(x^2+4x+6)}dx$.

12. а) $\int \frac{x^4+5}{x^2+8}dx$; б) $\int \frac{10x^2+13x+6}{(4x+1)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{7x^2-23x+30}{(x-2)(x^2-3x+5)}dx$.

13. а) $\int \frac{x^2+2x}{x^2-4}dx$; б) $\int \frac{4x^2-15x+13}{(2x-3)(x-2)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2+15x+16}{(x+2)(x^2+3x+4)}dx$.

14. а) $\int \frac{2x^3-x+1}{x^2+9}dx$; б) $\int \frac{5x^2-12x+15}{(x+3)(x-1)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2-3x+17}{(x+3)(x^2-2x+5)}dx$.

15. а) $\int \frac{x^4+5}{x^2-9}dx$; б) $\int \frac{8x^2+23x+9}{(x+4)(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2+x-10}{(x+1)(x^2-x+3)}dx$.

16. а) $\int \frac{4x^2+3}{x^2+2}dx$; б) $\int \frac{3x^2+x-34}{(3x-1)(x+3)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2+17x}{(x+4)(x^2+x+2)}dx$.

17. а) $\int \frac{2x^4+x+3}{x^2+9}dx$; б) $\int \frac{3x^2-20x+13}{(x+1)(x-2)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2-15x+30}{(x+3)(x^2-3x+10)}dx$.

18. а) $\int \frac{3x^3+4}{x^2-4}dx$; б) $\int \frac{10x^2+4x+2}{(x-2)(2x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-13x+30}{(x-3)(x^2-5x+12)}dx$.

19. а) $\int \frac{3x^2-x+2}{x^2+1}dx$; б)$\int \frac{2x^2-11x-2}{(x+3)(x-4)^2}dx$; в)$\int \frac{x^2+2x-14}{(x-1)(x^2-7x+17)}dx$.

20. а) $\int \frac{2x^5-x^2+2}{x^2-9}dx$; б)$\int \frac{2x^2+5x-11}{(3x+1)(x-1)^2}dx$; в)$\int \frac{2x^2+x-17}{(x+2)(x^2+9x+25)}dx$.

21. а) $\int \frac{3x^4+2x^3+1}{x^2+4}dx$; б)$\int \frac{2x^2+7x-8}{(4x-1)(x-2)^2}dx$; в)$\int \frac{5x^2+2x+21}{(x+3)(x^2-x+8)}dx$.

22. а) $\int \frac{2x^3+7}{x^2-16}dx$; б) $\int \frac{5x^2-18x+22}{(2x-3)(x-4)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2+2x+15}{(x+1)(x^2+3x+9)}dx$.

23. а) $\int \frac{3x^2+x-1}{x^2+3}dx$; б) $\int \frac{2x^2-22}{(3x-1)(x-5)^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2+7x+10}{(x+2)(x^2+x+2)}dx$.

24. а) $\int \frac{2x^4-3}{x^2-5}dx$; б) $\int \frac{6x^2-37x+14}{(4x+3)(x-4)^2}dx$; в) $\int \frac{5x^2+x+16}{(x-4)(x^2+x+5)}dx$.

25. а) $\int \frac{3x^3+x^2-5}{x^2+16}dx$; б)$\int \frac{6x^2+6x-7}{(3x+1)(x+2)^2}dx$; в)$\int \frac{5x^2+10x-3}{(x+5)(x^2+2x+3)}dx$.

26. а) $\int \frac{x^2+x+3}{x^2-7}dx$; б) $\int \frac{6x^2-14x-25}{(4x+1)(x-3)^2}dx$; в) $\int \frac{7x^2-8x+30}{(x-3)(x^2+3x+5)}dx$.

27. а)$\int \frac{2x^3-1}{x^2+7}dx$; б) $\int \frac{4x^2+21x+21}{(3x-1)(x+5)^2}dx$; в) $\int \frac{x^2-x+6}{(x-3)(x^2-3x+6)}dx$.

28. а) $\int \frac{5x^4+1}{x^2-8}dx$; б) $\int \frac{3x^2-12x}{(4x-1)(x-1)^2}dx$; в) $\int \frac{2x^2-3}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx$.

29. а) $\int \frac{2x^2+1}{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{x^2-6x-12}{(2x+3)(x+2)^2}dx$; в) $\int \frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x^2-3x+4)}dx$.

30. а) $\int \frac{3x^3+2x+4}{x^2-9}dx$; б) $\int \frac{7x^2+5x+2}{(x-3)(x+1)^2}dx$; в)$\int \frac{x-8}{(x+1)(x^2+2x+10)}dx$.

***Завдання* 5.** Знайти інтеграли від ірраціональних функцій.

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

2. а) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}+2\sqrt[4]{(3x-1)^3}}$.

3. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt{4x+3}+\sqrt[3]{4x+3}}$.

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{3\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{(2x-3)^2}}$.

5. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x-2}+3\sqrt[4]{(x-2)^3}}$.

6. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[4]{(3x-1)^3}+\sqrt[6]{(3x-1)^5}}$.

7. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(4x-3)^5}+2\sqrt[8]{(4x-3)^7}}$.

8. а) $\int \frac{dx}{2\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[9]{x^7}}$; б) $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{2x+5}-\sqrt[8]{(2x+5)^3}}$.

9. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(3x+1)^3}+2\sqrt[4]{3x+1}}$.

10. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(4x+5)^5}-3\sqrt[9]{(4x+5)^2}}$.

11. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+5}+4\sqrt[6]{x+5}}$.

12. а) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}+3\sqrt[3]{3x+4}}$.

13. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt[3]{(2x+5)^2}-\sqrt[4]{(2x+5)^3}}$.

14. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}-\sqrt[4]{3x-4}}$.

15. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt{3x+2}+\sqrt[4]{3x+2}}$.

16. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}-3\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt{2x-1}-3\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$.

17. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(2x+7)^5}-2\sqrt[4]{(2x+7)^3}}$.

18. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt[6]{(3x-4)^5}+\sqrt[8]{(3x-4)^7}}$.

19. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(4x-5)^3}+4\sqrt[8]{(4x-5)^5}}$.

20. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{5\sqrt[8]{(x-6)^7}-\sqrt[4]{(x-6)^3}}$.

21. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[6]{(x-6)^5}-\sqrt[4]{(x-6)^3}}$.

22. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{9\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt[6]{(2x+1)^5}}$.

23. а) $\int \frac{dx}{6\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{5\sqrt{3x+7}+\sqrt[3]{(3x+7)^2}}$.

24. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{(1-2x)^3}}$.

25. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{6\sqrt{3-x}+\sqrt[4]{3-x}}$.

26. а) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}+2\sqrt[3]{(4x-1)^2}}$.

27. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[6]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{3\sqrt{3-2x}-\sqrt[4]{(3-2x)^3}}$.

28. а) $\int \frac{dx}{6\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3-4x)^3}+5\sqrt[6]{(3-4x)^5}}$.

29. а) $\int \frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[8]{x^5}}$; б) $\int \frac{dx}{4\sqrt[6]{(4-x)^5}-\sqrt[8]{(4-x)^7}}$.

30. а) $\int \frac{dx}{4\sqrt[6]{x^5}+9\sqrt[9]{x^8}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3x-7)^3}+4\sqrt[8]{(3x-7)^5}}$.

Завдання 6. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

1. а) $\int \frac{dx}{3-2\sin x}$; б) $\int \sin^5 x \cos^3 x\, dx$; в) $\int \sin^4 2x\, dx$.
2. а) $\int \frac{dx}{1+4\cos x}$; б) $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$; в) $\int \cos^4 4x\, dx$.
3. а) $\int \frac{dx}{4-\sin x}$; б) $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$; в) $\int \cos x \sin^2 2x\, dx$.
4. а) $\int \frac{dx}{2+5\cos x}$; б) $\int \cos^6 x \sin^5 x\, dx$; в) $\int \sin^3 x \cos^2 2x\, dx$.
5. а) $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; в) $\int \cos 3x \sin 2x\, dx$.
6. а) $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; в) $\int \cos 4x \cos 2x\, dx$.
7. а) $\int \frac{dx}{2\sin x+5\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$; в) $\int \sin x \sin 5x\, dx$.
8. а) $\int \frac{dx}{\cos x-2\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx$; в) $\int \frac{tg^3 x+1}{\cos^2 x} dx$.
9. а) $\int \frac{dx}{4+3\sin x}$; б) $\int \frac{\sin x dx}{4-\cos^2 x}$; в) $\int \sin 2x \cos^2 4x\, dx$.
10. а) $\int \frac{dx}{1-2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{9-\sin^2 x}} dx$; в) $\int \sin 3x \sin^2 6x\, dx$.
11. а) $\int \frac{dx}{6+5\sin x}$; б) $\int \frac{ctg^4 x-5}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \sin^6 2x\, dx$.
12. а) $\int \frac{dx}{3-\cos x}$; б) $\int \frac{\sin x}{9-\sin^2 x} dx$; в) $\int \cos^6 2x\, dx$.

13. а) $\int \frac{dx}{\sin x-3\cos x}$; б) $\int \sin^2 x\, tg\, x\, dx$; в) $\int tg^4 x\, dx$.

14. а) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$; б) $\int \cos^2 x\, ctg\, x\, dx$; в) $\int ctg^4 x\, dx$.

15. а) $\int \frac{dx}{2\cos x-3\sin x}$; б) $\int \sin^7 x\, dx$; в) $\int \frac{dx}{(4-tg^2 x)\cos^2 x}$.

16. а) $\int \frac{dx}{3\cos x+5\sin x}$; б) $\int \cos^7 x\, dx$; в) $\int \frac{dx}{(9+ctg^2 x)\sin^2 x} dx$.

17. а) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$; б) $\int \cos^5 x \sin^5 x\, dx$; в) $\int \sin^4 3x\, dx$.

18. а) $\int \frac{dx}{1+4\sin x}$; б) $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$; в) $\int \cos^4 5x\, dx$.

19. а) $\int \frac{dx}{4-\cos x}$; б) $\int \cos^2 x \sin^5 x\, dx$; в) $\int \sin x \cos^2 2x\, dx$.

20. а) $\int \frac{dx}{2+5\sin x}$; б) $\int \sin^6 x \cos^5 x\, dx$; в) $\int \cos^3 x \sin^2 2x\, dx$.

21. а) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; в) $\int \cos x \sin 7x\, dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \cos 2x \cos 8x\, dx$.

23. а) $\int \frac{dx}{2\cos x+5\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$; в) $\int \sin 3x \sin 9x\, dx$.

24. а) $\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$; в) $\int \frac{5\, tg^6 x+3}{\cos^2 x} dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$; б) $\int \frac{\cos 2x}{9-\sin^2 2x} dx$; в) $\int \sin 4x \cos^2 8x\, dx$.

26. а) $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$; б) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\cos^2 2x}} dx$; в) $\int \sin 5x \sin^2 10x\, dx$.

27. а) $\int \frac{dx}{6+5\cos x}$; б) $\int \frac{1-3\, ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \sin^6 4x\, dx$.

28. а) $\int \frac{dx}{3-\sin x}$; б) $\int \frac{\cos x}{4-\cos^2 x} dx$; в) $\int \cos^6 4x\, dx$.

29. а) $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$; б) $\int \sin x\, tg^2 x dx$; в) $\int tg^4 2x\, dx$.

30. а) $\int \frac{dx}{2\cos x+3\sin x}$; б) $\int \cos x\, ctg^2 x\, dx$; в) $\int ctg^4 2x\, dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли.

1. а) $\int_0^1 x^6(1+x^7)^5dx$; б) $\int_0^1 x\cdot 2^x dx$; в) $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}}$.
2. а) $\int_0^1\left(\frac{2}{1+9x^2}+\frac{3}{2-4x}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$.
3. а) $\int_0^1 x^2e^{x^3}\,dx$; б) $\int_1^2 x^3\ln 2x\,dx$; в) $\int_1^{2^8}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+4\sqrt[8]{x^5}}$.
4. а) $\int_0^1 x^4(x^5-1)\,dx$; б) $\int_0^{\pi/4}(2-x^2)\sin x\,dx$; в) $\int_1^{2^8}\frac{dx}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x^3}}$.
5. а) $\int_0^1 5^{2x+1}\,dx$; б) $\int_1^2 x^5\ln 3x\,dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{2\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[9]{x^8}}$.
6. а) $\int_0^1\frac{x^4}{3+x^5}dx$; б) $\int_0^1 x\cdot 5^{2x}\,dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[9]{x^7}}$.
7. а) $\int_0^1 x^8(1+x^9)^5dx$; б) $\int_0^1 x^2e^{2x}\,dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{4\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}$.
8. а) $\int_0^1 x^3e^x dx$; б) $\int_0^{\pi/3}(2-5x)\sin x\,dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.
9. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; б) $\int_0^1 xe^{5x}dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}$.
10. а) $\int_0^1\frac{dx}{1+2x}$; б) $\int_0^{\pi/4}(2+3x)\sin 2x\,dx$; в) $\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$.
11. а) $\int_0^1 x^7(1+x^8)^5dx$; б) $\int_0^1 x^2\cdot 4^x dx$; в) $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}}$.
12. а) $\int_0^1\frac{dx}{(3x+1)^2}$; б) $\int_0^{\pi/4} x\sin 4x\,dx$; в) $\int_1^{16}\frac{dx}{3\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$.
13. а) $\int_0^1 x^3e^{x^4}dx$; б) $\int_0^{\pi/5} x\cos 5x\,dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$.
14. а) $\int_0^1 x^5(x^6-1)^9dx$; б) $\int_1^2 x^2\ln 3x\,dx$; в) $\int_1^{2^{12}}\frac{dx}{5\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[6]{x^5}}$.
15. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2tg^2x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int_1^2 x^3\log_4 2x\,dx$; в) $\int_1^{2^8}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+4\sqrt[8]{x^5}}$.
16. а) $\int_0^1\frac{x^5}{4+x^6}dx$; б) $\int_0^{\pi/6} x\cos 6x\,dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[9]{x^7}}$.
17. а) $\int_0^1 x^9(2+x^{10})^4dx$; б) $\int_0^1 x\cdot 7^{2x}dx$; в) $\int_1^{2^{18}}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[9]{x^8}}$.

18. а) $\int_0^1 x^4 \cdot 3^{x^5} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (1+3x)\cos 3x\, dx$; в) $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$.

19. а) $\int_0^1 \sqrt{4+5x} dx$; б) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$; в) $\int_1^{64} \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

20. а) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (2+x)\sin 3x\, dx$; в) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[4]{x^3}}$.

21. а) $\int_0^1 x^8 (x^9-1)^7 dx$; б) $\int_0^1 (1+2x) e^{4x} dx$; в) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$.

22. а) $\int_0^1 \sqrt[4]{1-x} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (2+x)\sin 3x\, dx$; в) $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

23. а) $\int_0^1 x^4 \cdot e^{x^5} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (1-7x)\cos 2x\, dx$; в) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}}$.

24. а) $\int_0^1 x^7 (x^8-1)^5 dx$; б) $\int_0^1 (3+4x)\cdot 5^x dx$; в) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[6]{x^5}}$.

25. а) $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x\, dx$; б) $\int_1^2 x^9 \ln 2x\, dx$; в) $\int_1^{2^8} \frac{dx}{6\sqrt[4]{x^3}+5\sqrt[8]{x^7}}$.

26. а) $\int_0^1 \frac{x^8}{2+x^9} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} (4-5x)\cos 3x\, dx$; в) $\int_1^{2^8} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+4\sqrt[8]{x^5}}$.

27. а) $\int_0^1 x^3 (2-3x^4)^5 dx$; б) $\int_0^{\pi/6} x \sin 6x\, dx$; в) $\int_1^{2^{18}} \frac{dx}{2\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[9]{x^8}}$.

28. а) $\int_0^1 x^2 \cdot 2^{x^3} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} (2x+1)\cos x\, dx$; в) $\int_1^{2^{12}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[4]{x^3}}$.

29. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}}$; б) $\int_0^1 (1+3x) e^{2x} dx$; в) $\int_1^{16} \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}$.

30. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}}$; б) $\int_1^2 x^2 \ln 3x\, dx$; в) $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

***Завдання* 8.** Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

1. а) $y=\sqrt{x}, y=2-x, y=0$; б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$.
2. а) $y=\sqrt{x}, y=\sqrt{-x}, y=1$; б) $\rho = 2\cos\phi, \rho=\cos\phi$.
3. а) $y=e^x, y=1-x, x=1$; б) $\begin{cases} x = 4(t-\sin t), \\ y = 4(1-\cos t), \end{cases}$ $y=0,\ 0 \le t \le 2\pi$.

4. а) $y = ln\, x\,, y = 1 - x, y = 1;$ б) $\rho = 3\, sin\, 3\phi.$

5. а) $y = -\sqrt{x}, y = -\frac{1}{2}x;$ б) $\begin{cases} x = 4\, cos\, t \\ y = 2\, sin\, t \end{cases}.$

6. а) $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x;$ б) $\rho = 2(1 + cos\, \phi).$

7. а) $y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2;$ б) $\begin{cases} x = 4\, cos\, t \\ y = 4\, sin\, t \end{cases}.$

8. а) $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2;$ б) $\rho = 6\, cos\, \phi.$

9. а) $y = e^x, y = 1 - x, y = e;$ б) $\begin{cases} x = 4\, cos^3\, t \\ y = 4\, sin^3\, t \end{cases}.$

10. а) $y = x^3, y = 2 - x, y = 0;$ б) $\rho = 3(1 - cos\, \phi).$

11. а) $y = x^2, y = x + 2;$ б) $\begin{cases} x = t - sin\, t\,, \\ y = 1 - cos\, t\,, \end{cases} y = 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$

12. а) $y = x^2, y = x + 6;$ б) $\rho = 2\, sin\, \phi\,, \rho = sin\, \phi.$

13. а) $y = x^3, y = -x, y = 1;$ б) $\begin{cases} x = 2\, cos\, t \\ \ y = sin\, t \end{cases}.$

14. а) $y = x^2, y = x, x = 2;$ б) $\rho = 4\, cos\, 3\phi.$

15. а) $y = -x^2, y = x - 2;$ б) $\begin{cases} x = 2\, cos\, t \\ y = 2\, sin\, t \end{cases}.$

16. а) $y = -x^3, y = -x^2;$ б) $\rho = 4(1 + cos\, \phi).$

17. а) $y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0;$ б) $\begin{cases} x = 2\, cos^3\, t \\ y = 2\, sin^3\, t \end{cases}.$

18. а)$y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 2;$ б) $\rho = 6\, sin\, 4\phi.$

19. а) $y = x^3, y = -x, x = -1;$ б) $\begin{cases} x = 2(t - sin\, t), \\ y = 2(1 - cos\, t), \end{cases} y = 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$

20. а) $y = 3^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = 3;$ б) $\rho = 6(1 - cos\, \phi).$

21. а) $y = x^3, y = -x, y = -1;$ б) $\begin{cases} x = 5\, cos\, t \\ y = 3\, sin\, t \end{cases}.$

22. а) $y = \frac{1}{x^2}, y = x, y = 4;$ б) $\rho = 4\, cos\, \phi\,, \rho = 2\, cos\, \phi.$

23. а)и$y = -x^3, y = x, x = 1$; б) $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 9\sin t \end{cases}$.

24. а) $y = \frac{1}{x^2}, y = -x, y = 4$; б) $\rho = 4\sin 2\phi$.

25. а) $y = -x^3, y = x, x = -1$; б) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$.

26. а) $y = e^x, y = \left(\frac{1}{e}\right)^x, y = e$; б) $\rho = 8\cos 2\phi$.

27. а) $y = \frac{1}{x^3}, y = x, y = 8$; б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} y = 0,\ 0 \le t \le 2\pi$.

28. а) $y = -x^3, y = x, y = 1$; б) $\rho = 4(1 + \cos\phi)$.

29. а) $y = \frac{1}{x^3}, y = x, y = -8$; б) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

30. а) $y = -x^3, y = x, y = -1$; б) $\rho = 4\sin\phi, \rho = 2\sin\phi$.

***Завдання* 9**. Розв’язати геометричні задачі за допомогою визначених інтегралів.

1. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = (x+1)^3,\ 0 \le x \le 3$.

2. Обчислити довжину кардіоїди $\rho = 3(1 - \cos\phi)$.

3. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = e^{3x},\ y = 0,\ x = 0$ і $x = 1$.

4. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ 1 \le x \le e$.

5. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = tg\, x,\ y = 0$ і $x = \pi/4$.

6. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi$, навколо осі Ох.

7. Знайти довжину астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

8. Знайти площу поверхні тора, утвореного обертанням навколо осі Ох кола $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$.

9. Знайти довжину логарифмічної спіралі $\rho = e^{\phi}$, яка вирізається колом $\rho = e$.

10. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = ctgx,\ y = 0$ і $x = \pi/4$.

11. Знайти довжину дуги кривої у просторі

$x = 3\cos t\,,\ y = 3\sin t\,,\ z = 4t,\ 0 \le t \le 4$

12. Знайти довжину дуги кривої $x = 2(\cos t + t\sin t)$,

$y = 2(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le \pi.$

13. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = 3^{2x},\ y = 0,\ x = 0$ і $x = 1$.

14. Знайти довжину дуги кривої $y = ln\sin x\,,\ \pi/3 \le x \le \pi/2$.

15. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$.

16. Знайти довжину дуги лінії $y = t^3 - t,\ x = \sqrt{3}t^2 - 1,\ 0 \le t \le 2$.

17. Знайти довжину петлі лінії $x = t^2,\ y = t - \frac{1}{3}t^3,\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

18. Знайти довжину дуги просторової кривої $x = t - \sin t\,$,

$y = 1 - \cos t\,,\ z = 4\sin\frac{t}{2},\ 0 \le t \le \pi.$

19. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = (x-2)^2,\ y = x$.

20.Знайти довжину дуги кривої $x = \cos t + t\sin t\,$,

$y = \sin t - t\cos t\,,\ 0 \le t \le 2\pi.$

21. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y = x(4 - x),\ y = x$.

22. Знайти довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = x^3,\ 0 \le t \le 4$.

23. Обчислити довжину астроїди $x = 2\cos^3 t\,,\ y = 2\sin^3 t$.

24. Знайти довжину дуги кривої $\rho = 8\sin^3\frac{\phi}{3},\ 0 \le \phi \le \frac{2\pi}{3}$.

25. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки лінії $y = \sin x$ навколо осі Ох.

26. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x,\ y = x$.

27. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 8(1 - \cos\phi)$.

28. Знайти площу поверхні конуса, утвореного обертанням навколо осі Ох відрізка прямої $y = 2x,\ 0 \le x \le 2$.

29. Знайти довжину дуги цепної лінії $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ 0 \le x \le 1$.

30. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої параболами $y = -x^2 + 3,\ y = x^2 + 1$.

***Завдання* 10.** Розв'язати задачі фізики та механіки за допомогою визначених інтегралів.

1. Резервуар циліндричної форми заповнений водою до верхнього краю. Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо його висота дорівнює 5 м, а радіус основи – 3 м.

2. Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2x - 2$ і прямою $y = x - 1$.

3. Трикутна пластина опущена вертикально у воду так, що її основа паралельна поверхні води, а протилежна вершина знаходиться на поверхні води. Обчислити силу, з якою вода давить на цю пластину, якщо основа трикутника дорівнює 3 м, а висота – 8 м.

4. Стискання пружини пропорційне прикладеній силі. Обчислити роботу сили при стисканні пружини на 5 см, якщо сила, рівна 0,5 Н стискає її на 1 см.

5. Знайти статичний момент прямокутника зі сторонами a і b відносно його сторін.

6. Резервуар має форму півциліндра і заповнений водою до верхнього краю (резервуар розміщено так, що площина перерізу циліндра паралельна поверхні

землі). Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо радіус основи циліндра дорівнює 2 м, а висота – 6 м.

7. Передня частина дамби має форму параболи з вершиною внизу; основа дамби (верхній край) дорівнює 2 м, а висота – 1 м. Обчислити тиск води на дамбу, якщо вода доходить до верхнього краю дамби.

8. Знайти координати центру ваги однорідної фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі Ox від точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

9. Обчислити центр ваги однорідної фігури, обмеженої дугою косинусоїди $y = \cos x$ і відрізком осі Ox від точки $x = -\pi/2$ до точки $x = \pi/2$.

10. Резервуар має форму півкулі і заповнений водою до верхнього краю (резервуар розміщено так, що площина перерізу кулі паралельна поверхні землі). Обчислити роботу, яку необхідно затратити для того, щоб викачати воду з цього резервуару, якщо радіус кулі дорівнює 8 м.

11. Знайти координати центру ваги однорідної фігури, обмеженої лініями $y^2 = 8x$ і $x^2 = 8y$.

12. Розтяг пружини пропорційний прикладеній силі. Обчислити роботу сили при розтягуванні пружини на 6 см, якщо сила, рівна 2 Н розтягує її на 1 см.

13. Знайти момент інерції відносно осі Ox однорідної плоскої фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі Ox від точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

14. Знайти момент інерції відносно осі Ox однорідної плоскої фігури, обмеженої дугою косинусоїди $y = \cos x$ і відрізком осі Ox від точки $x = -\pi/2$ до точки $x = \pi/2$.

15. Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $x = t - \sin t\,,\ y = 1 - \cos t\ \ (0 \le t \le 2\pi)$ і віссю Ox.

16. Обчислити роботу, необхідну для викачування масла з вертикального

циліндричного резервуара, висота якого дорівнює 6 м і радіус основи – 2 м. Густина масла дорівнює 0,9 кг/м^3.

17. Знайти статичні моменти відносно осей Ох, Оу і координати центру ваги трикутника, утвореного прямими $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

18. Пластина у вигляді півкруга занурена вертикально у воду так, що верхній діаметр лежить на поверхні води. Знайти тиск на цю пластину, якщо радіус дорівнює 5 м.

19. Знайти координати центру ваги однорідного параболічного сегмента, обмеженого параболою $y^2 = 8x$ і прямою $x = 2$.

20. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $x^2 + 4y - 16 = 0$ і $y = 0$.

21. Знайти момент інерції відносно осі Оу плоскої фігури, обмеженої лініями $x = 2,\ y = x^2$ і $y = 0$.

22. Визначити тиск води на вертикальний півкруг, діаметр якого 2R розміщений на поверхні води.

23. Обчислити роботу, яку необхідно витратити на викачування води з ями у формі конуса (вершина на дні). Висота конуса дорівнює 2 м, а радіус основи – 0,5 м.

24. За який час вода витече з конічної лійки висотою $h = 40$см, радіусом нижньої основи $r = 0{,}3$см і верхньої $R = 6$см.

25. Знайти координати центру ваги дуги, однієї арки циклоїди $x = t - \sin t\,,\ y = 1 - \cos t\ \ (0 \le t \le 2\pi)$.

26. Знайти момент інерції відносно осі Оу плоскої фігури, обмеженої лініями $x = 1,\ y = x^3$ і $y = 0$.

27. Вертикальна гребля має форму трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо відомо, що верхня і нижня основи греблі відповідно дорівнюють 40 м і 30 м, а висота – 10 м.

28. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої

лініями $y = 4x - x^2$ і $y = x$.

29. Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ і $y = 0$.

30. Обчислити момент інерції відносно осі Ох плоскої фігури, обмеженої прямими $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = x + 2$.

Завдання 11. Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються).

1. а) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x-8}$.

2. а) $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^3+1}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

3. а) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-4x+8}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.

4. а) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+4}$; б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3-1}$.

5. а) $\int_0^\infty x^2e^{-x^3}dx$; б) $\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-4)^2}$.

6. а) $\int_{-\infty}^0 x^2e^{x^3}dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$.

7. а) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\sin x}$.

8. а) $\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{\ln x}dx}{x}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$.

9. а) $\int_0^\infty xe^{-2x}dx$; б) $\int_0^2 \frac{x^3dx}{x^4-16}$.

10. а) $\int_1^\infty x^{-3}\sin x^{-2}\,dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{x^5}dx$.

11. а) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln^5 x}}$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

12. а) $\int_0^\infty \frac{(3x^2+6x)dx}{x^3+3x^2+2}$; б) $\int_0^{\pi/2} tg\,x\,dx$.

13. а) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+6x+34}$; б) $\int_0^{\pi/2} ctg\,x\,dx$.

14. а) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2-8x+12}$; б) $\int_0^3 \frac{(x^2-1)dx}{x^3-3x-18}$.

15. а) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$; б) $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{(x^3-64)^2}$.

16. а) $\int_{-\infty}^{0} x^6 e^{x^7} dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+12}}$.

17. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+14}}$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\sin 2x}$.

18. а) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{\ln x}}{x} dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

19. а) $\int_0^{\infty} x e^{-4x} dx$; б) $\int_0^2 \frac{(x^3-1)dx}{x^4-4x-8}$.

20. а) $\int_1^{\infty} x^{-4} \cos x^{-3}\, dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^3+4x+1}{x^4} dx$.

21. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln^3 x}}$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+2x-24}$.

22. а) $\int_0^{\infty} \frac{(5x^4+1)dx}{x^5+x}$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x(1-tg\, x)}$.

23. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-10x+50}$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x(1-ctg\, x)}$.

24. а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2-6x+5}$; б) $\int_{-2}^{0} \frac{x^2 dx}{x^3+8}$.

25. а) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^5} dx$; б) $\int_{-3}^{0} \frac{x dx}{x^2-9}$.

26. а) $\int_{-\infty}^{0} x^4 e^{x^5} dx$; б) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

27. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+80}}$; б) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1-\sin 3x}$.

28. а) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x}}{x} dx$; б) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1-\cos 3x}$.

29. а) $\int_0^{\infty} x e^{-6x} dx$; б) $\int_0^3 \frac{(x^3-2x)dx}{x^4-4x^2-45}$.

30. а) $\int_1^{\infty} x^{-5} \sin x^{-4}\, dx$; б) $\int_{-2}^{0} \frac{x^4+3x^2+1}{x^5} dx$.

***Завдання* 12.** Обчислити наближено довжину дуги кривої $y = Ax^3 + Bx^2$, $0 \le x \le 2$ (розбити заданий проміжок на 10 частин і значення підінтегральної функції обчислювати з точністю до четвертого знаку після коми): а) за формулою трапецій; б) за формулою Сімпсона.

№ вар.	A	B	№ вар.	A	B	№ вар.	A	B
1	2	1	11	1	3	21	1	5
2	3	1	12	2	3	22	2	5
3	4	1	13	4	3	23	3	5
4	5	1	14	5	3	24	4	5
5	6	1	15	6	3	25	6	5
6	1	2	16	1	4	26	1	6
7	3	2	17	2	4	27	2	6
8	4	2	18	3	4	28	3	6
9	5	2	19	5	4	29	4	6
10	6	2	20	6	4	30	5	6

II. Диференціальне числення функції декількох змінних

Завдання 1. Для даних функцій вказати область визначення та побудувати її на координатній площині.

1) $z = x^2 - y + \frac{\ln x}{\sqrt{x+y-1}}$.

2) $z = 5^x - \ln(x^2 + y^2 - 16)$.

3) $z = \sqrt{2x - 3y} + \lg\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right)$.

4) $z = e^x - \log_x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} - 1\right)$.

5) $z = \sqrt{x} + y^3 + e^{\sqrt{2x+y+6}}$.

6) $z = \cos y - \lg(y - x^2 + 5x - 6)$.

7) $z = xy - \sqrt{x - 5y} + \frac{6}{\sqrt{4x+y-8}}$.

8) $z = 5 - x^2 + 3y^2 + \log_{x-3y+6} x$.

9) $z = 3x + \arcsin(2x + 5y - 9)$.

10) $z = e^{xy} - \arccos(x^2 + y^2)$.

11) $z=\sqrt{x}+\ln(y-1)-x^2$.

12) $z=\frac{\ln y}{\sqrt{2y+3x-6}} + \sqrt[3]{x}$.

13) $z = \lg x - \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1}$.

14) $z = 3y + \arcsin y - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

15) $z = e^x - \log_{x-5y-10} x$.

16) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} - \ln(x - y)$.

17) $z = y^5 - arccos\, x + \sqrt{y}$. 18) $z = xy - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-25}} + log_x\, y$.

19) $z = sin\, x - \frac{2}{\sqrt{4x^2-9y^2-36}}$. 20) $z = arcsin\, x - arcsin\, y$.

21) $z = y^2 + \sqrt{x - 3y - 9} - ln\, x$. 22) $z = 1 - \lg\left(x^2 + 5y^2 + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{y-1}}$.

23) $z = arcsin\, x - \sqrt{4x + 3y - 12}$. 24) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - log_x(y - 5)$.

25) $z = tg\, y + \sqrt[4]{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - 1}$. 26) $z = x^2 + \frac{\sqrt{x+y}}{lg(x^2+y^2-25)}$.

27) $z = y^3 + log_x(3x + 5y - 15)$. 28) $z = sin\, y + \sqrt[4]{x - 3y + 6} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

29) $z = e^{\sqrt{x}} + arcsin\, y$. 30) $z = tg\, x - \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2-4}}$.

Завдання 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, диференціал функції dz та похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо

1) $z = e^{x^3+y^2} + xy - \sqrt{x}$, $x = t^4 + cos^2\, t$, $y = arcsin^3(\,2t + 1)$.

2) $z = 3\, cos^3(3x + 2y) - ln\, x$, $x = \sqrt{t} + 2^t$, $y = sin^4(\,5x - 1) + e^t$.

3) $z = arcsin^2(x^2 + y^3) + 3^y$, $x = t\, ln\, t + \sqrt{t}$, $y = 3t - tg^2\, t$.

4) $z = \frac{xy}{x^2+y^2} - x^3 + \sqrt{y}$, $x = t^2 + lg\, t$, $y = t \cdot 3^t - cos^2\, t$.

5) $z = xe^{xy} + ln(3x + 4y)$, $x = 3t^2 + log_2\, t$, $y = \frac{t}{sin^2\, t} + \sqrt{t}$.

6) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - ctg(xy) + 2y$, $x = 5t - arcsin^2\, t$, $y = t^6 - lg\, t$.

7) $z = \sqrt{y} + tg(x + y) - x^3$, $x = ln\, t + t^5$, $y = cos^4(\,2t - 1) + t$.

8) $z = xe^{xy} + 3y^2 - \sqrt{\frac{x}{y}}$, $x = cos^2\, t + 2t$, $y = 2t - ln^2\, t$.

9) $z = 5x^2 + 3y^2 - ctg(x - y)$, $x = \sqrt[3]{t} + \frac{1}{t^2} + sin\, t$, $y = cos\, 2\, t - t^2$.

10) $z = \frac{x}{x^2+y^3} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{y^2}$, $x = t^4 - arccos\, t$, $y = \sqrt[3]{2t - 1} + 2^t$.

11) $z = arctg^2\, x + e^y - sin^3(xy)$, $x = 5t - t^2 + ln\, t$, $y = \frac{1}{t^4} - \sqrt{t^3} + t$.

12) $z = (x^2 + y^3)^5 - lg\, x + 5y$, $x = \sqrt[4]{t^3} + tg^2\, t$, $y = 4t^2 - ln^2\, t$.

13) $z = 5x - 3y^2 + cos^2(x^3 + y),\ x = 3t^5 - \sqrt{t}\, sin\, t,\ y = \sqrt[3]{t^2} - \cos t.$

14) $z = y^4 - 3^{x+y} - sin\frac{x}{y},\ \ x = 2t - tg^2 t,\ \ y = e^t + 3t - \sqrt{t}.$

15) $z = 5x^2 - 4y^5 + \frac{1}{tg(xy)},\ \ x = \frac{3}{t^4} + log_2 t,\ \ y = t^3 + \frac{1}{t^2} + \frac{5}{t}.$

16) $z = x^4 + cos^2 y - ln(x + y),\ \ x = sin\, t - \sqrt[4]{t^3},\ \ y = t^5 + 2\sqrt{t} - 7.$

17)$z = lg(x^2 - y) + \sqrt{x} + 5y^2,\ \ x = 6t^2 - ln(t + 1),\ \ y = 4t + ln\, t^2.$

18) $z = \sqrt[5]{y^4} + 3^x - (2x + 3y)^{10},\ \ x = \frac{1}{t^2} + tg\, t,\ \ y = \sqrt[3]{t} + 3t^4 + 5.$

19) $z = \sqrt{x^2 + y^3} - x^4 + e^{2y},\ \ x = ctg^2 t - 6t,\ \ y = t^5 - log_3(t - 1).$

20)$z = 2y - cos^2 x + \frac{1}{x+3y},\ \ x = t^4 - t^3 + 5,\ \ y = sin^5 t + \sqrt{t}.$

21) $z = arccos(x^2 - y^5) + 3y^4,\ \ x = \frac{1}{2+t} - t^4 + 2,\ \ \ y = e^t - \sqrt[3]{t}.$

22) $z = (y^2 + 5x)^6 - \frac{1}{x^3},\ \ x = ctg^3 \frac{1}{t^2-1} + 3t,\ \ y = 6t - ln^2 t.$

23) $z = \frac{1}{y} + x^4 - \sqrt[3]{4x - 3y},\ \ x = 5t^2 + 8t - \sqrt[4]{t},\ \ y = cos^5 t - t^5.$

24) $z = 6x^7 - \sqrt{y} + ln(x + y),\ \ x = 4^t - t^2,\ \ y = \sqrt{t} + lg\, t.$

25) $z = tg(xy) + 3x^3 + y^2,\ \ x = \frac{1}{t^2+1} - \sqrt[4]{t},\ \ y = sin^4 t + 3t^3.$

26) $z = x^5 + \sqrt[4]{y^3} - ln(x^2 - \sqrt{y}),\ \ x = (1 + 5t)^9 + \sqrt[3]{t},\ \ y = \frac{1}{t^4} + \sqrt{t}.$

27) $z = \sqrt[3]{x + 6y^2} + e^{x+y} - x,\ \ x = arctg\, t^2 - t,\ \ y = \frac{1}{t-1} + lg\, t.$

28) $z = 2x^4 - 5\sqrt[3]{y^2} + \frac{1}{\sqrt{x+y}},\ \ x = t^5 + 2^t,\ \ y = cos^3 t - \sqrt{t}.$

29) $z = 5x - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + sin^3(xy),\ \ x = 4t^2 - log_5 t,\ \ y = t^4 - t^3 + 9.$

30) $z = ln(x^2 + y^2) + \sqrt{x},\ \ x = tg^4 t - \frac{1}{t},\ \ y = 4^t - t^4.$

Завдання 3. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції z за вказаних значень аргументів *x* та *y*.

1) $z = \sqrt{x^3 + y^2};$ $\qquad x = 2{,}05;$ $\qquad y = 0{,}98.$

2) $z = \sqrt[3]{x^4 + y^3}$; $x = 0{,}07$; $y = 0{,}95$.

3) $z = x^{2y}$; $x = 1{,}04$; $y = 2{,}94$.

4)$z = arctg(x^2 + y^4)$; $x = 0{,}95$; $y = 0{,}08$.

5) $z = arcsin(x^3 + y^3 - 9)$; $x = 0{,}96$; $y = 2{,}03$.

6) $z = \sqrt[4]{x^2 + y^4 + 6}$; $x = 2{,}97$; $y = 1{,}05$.

7) $z = arccos(x^3 + y^2 - 17)$; $x = 2{,}07$; $y = 2{,}92$.

8) $z = \sqrt{x^3 + y^4 + 2}$; $x = 1{,}06$; $y = 0{,}91$.

9) $z = arcctg(3x + y^4 - 27)$; $x = 3{,}97$; $y = 2{,}03$.

10) $z = (x - 4)^{3y}$; $x = 4{,}95$; $y = 3{,}04$.

11) $z = \sqrt[3]{x^4 + y^5 - 21}$; $x = 2{,}05$; $y = 1{,}94$.

12) $z = arcsin(x^5 + y - 7)$; $x = 1{,}06$; $y = 5{,}98$.

13) $z = \sqrt[4]{4x + y^6 - 3}$; $x = 4{,}94$; $y = 2{,}03$.

14) $z = arctg(3x^2 - 2y^3 + 6)$; $x = 4{,}06$; $y = 2{,}98$.

15) $z = (4x - 11)^{y^2}$; $x = 2{,}93$; $y = 2{,}05$.

16) $z = arcctg\,\frac{x^2-15}{y^3+1}$; $x = 4{,}04$; $y = 0{,}07$.

17) $z = \sqrt{3y^3 - 4x^5}$; $x = 1{,}96$; $y = 4{,}02$.

18) $z = \sqrt[3]{4y + x^4 + 32}$; $x = 2{,}98$; $y = 3{,}04$.

19) $z = (3x - 5)^{y^3}$; $x = 2{,}05$; $y = 0{,}96$.

20) $z = arccos(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 3)$; $x = 1{,}03$; $y = 3{,}94$.

21) $z = arctg\,\frac{y^2-23}{x^3-25}$; $x = 2{,}97$; $y = 5{,}06$.

22) $z = \sqrt{\frac{x^3+2x-8}{y^2-3y+1}}$; $x = 2{,}02$; $y = 3{,}04$.

23) $z = (3x - 8)^{2y+3}$; $x = 3{,}05$; $y = 0{,}94$.

24) $z = ln(y^3 + x^3 - 8)$; $x = 0{,}98$; $y = 2{,}03$.

25) $z = \sqrt[4]{x^4 + y^4 - 1}$; $x = 1{,}05$; $y = 2{,}99$.

26) $z = arcsin(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + 1)$; $x = 0{,}96$; $y = 8{,}02$.

27) $z = arctg(18 - y^3 - x^2)$; $x = 3{,}03$; $y = 2{,}04$.

28) $z = (9 - 2x)^{1-3y}$; $x = 3{,}95$; $y = 1{,}03$.

29) $z = ln(x^5 - y^3 + 1)$; $x = 0{,}98$; $y = 1{,}04$.

30) $z = \sqrt[3]{2y^3 - x^4 + 17}$; $x = 1{,}97$; $y = 0{,}06$.

Завдання 4. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $M(x_0, y_0)$ й вектор $\vec{a}$. Знайти: 1) похідну в точці M за напрямом вектора $\vec{a}$; 2) градієнт функції z в точці M; 3) похідну за напрямом $grad\, z$ в точці M.

1) $z = 3x^3 - x^2y^2 + y^3 - 2x + y$, $M(2; -1)$, $\vec{a}(0; 3)$.

2) $z = 2x^4 + x^2y^3 + 2y^3 + xy$, $M(-1; 3)$, $\vec{a}(1; -2)$.

3) $z = 2x^3 + 3x^2y - 3y^3 - 4xy$, $M(0; 4)$, $\vec{a}(3; -3)$.

4) $z = x^3 - 2xy^2 - 4y^3 - y + x$, $M(1; 4)$, $\vec{a}(2; 0)$.

5) $z = -x^4 + x^3y^2 + 2y^3 - x^2y$, $M(2; -2)$, $\vec{a}(1; 3)$.

6) $z = x^4 - 2x^2y^3 + xy^2 - y^3$, $M(-3; 1)$, $\vec{a}(2; -2)$.

7) $z = -2x^3 + y^4 - x^2y^2 + y - x$, $M(3; -1)$, $\vec{a}(0; 2)$.

8) $z = x^4 + 3xy^3 - 2x^2y + 2y^2$, $M(2; -2)$, $\vec{a}(3; 1)$.

9) $z = y^3 + x^2y - x^4 + y$, $M(-2; 1)$, $\vec{a}(1; 0)$.

10) $z = 2y^3 - 3x^2y + x^3 - xy$, $M(1; -3)$, $\vec{a}(2; -1)$.

11) $z = -y^3 + 2x^3y^2 - x^2 + xy^2$, $M(-3; 2)$, $\vec{a}(1; 1)$.

12) $z = -2y^3 - 4xy + x^3 + 2xy^2$, $M(4; 4)$, $\vec{a}(2; -2)$.

13) $z = y^4 + x^4 - x^2y + xy^2$, $M(1; 1)$, $\vec{a}(3; 1)$.

14) $z = -y^4 + 2x^3 + x^2y^2 - xy$, $M(2; 3)$, $\vec{a}(4; -2)$.

15) $z = 3y^4 + 3x^3 - xy + x - y$, $M(1; 0)$, $\vec{a}(2; -2)$.

16) $z = 3y^3 - x^4 + x^2y - x + 3y$, $M(2; -1)$, $\vec{a}(1; -1)$.

17) $z = 2y^3 + x^3 + x^2y^2 - xy - x$, $M(3; 2)$, $\vec{a}(1; 4)$.

18) $z = -2x^3 + y^2 + x^2y - y + x$, $M(0; 3)$, $\vec{a}(2; 3)$.

19) $z = 3x^2 + 2y^3 + x^2y - x,\qquad M(2;-2),\qquad \vec{a}(1;3).$

20) $z = 5x^2 + y^4 - xy^3 + y,\qquad M(1;-1),\qquad \vec{a}(4;2).$

21) $z = 4x^3 + 2y^3 + x^2y - x,\qquad M(1;3),\qquad \vec{a}(3;4).$

22) $z = x^2y^3 + x^4 - y^2 + xy,\qquad M(2;-2),\qquad \vec{a}(2;-4).$

23) $z = xy^3 + x^2y - x^3 + y,\qquad M(1;3),\qquad \vec{a}(3;5).$

24) $z = x^2y^2 + x^3 + 2y^3 - 3x,\qquad M(3;0),\qquad \vec{a}(2;-1).$

25) $z = x^3y - 3x^2 + 2y^2 - xy + 4x,\quad M(0;-3),\qquad \vec{a}(4;-5).$

26) $z = 2y^3 + 3y^2 - xy + x - y,\qquad M(-2;1),\qquad \vec{a}(3;-1).$

27) $z = -x^2y + y^3 - xy + x^2 + 2y, M(3;2),\qquad \vec{a}(1;4).$

28) $z = -xy^2 + x^3 + 2xy - y^2 + x, M(1;4),\qquad \vec{a}(-2;0).$

29) $z = 3x^2y^2 + 2yx^2 - 3xy - 4y,\quad M(2;-3),\qquad \vec{a}(3;5).$

30) $z = x^4 + x^3y - xy^2 - 2y^2 + x,\quad M(-2;1),\qquad \vec{a}(3;1).$

Завдання 5. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, якщо:

1) $u = -\ln x + \frac{1}{2}x^2e^y + x;\quad v = \frac{1}{2}xy^2 - xe^y;\quad w = -\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{6}y^3.$

2) $u = x\ln x + \frac{1}{6}x^3\sin y;\quad v = -\frac{x}{y} - y\ln x + x;\quad w = x\sin y + \ln y.$

3) $u = \frac{1}{2}x^2\,tg\,y - \frac{1}{4}e^{2x};\ v = -\frac{y}{x} + x\ln\cos y + 6y;\ w = \frac{1}{2}y^2e^{2x} - \frac{y^2}{2x^2}.$

4) $u = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{9}\cos 3x;\ v = \frac{1}{3}y\sin 3x + x\ln y;\ w = -\frac{1}{12}y^4 - y\ln y.$

5) $u = \frac{1}{9}e^{3x} + y\cos x;\quad v = -\frac{1}{3}ye^{3x} + \frac{x}{2y^2};\quad w = \frac{1}{6}y^3\cos x + \frac{1}{2y} + 6y.$

6) $u = -\frac{1}{6}x^3\,tg\,y + \frac{y}{6x^2};\quad v = xe^y - \frac{1}{2}x^2\ln\cos y;\quad w = x^3 - \frac{y^3}{6x^4} - e^y.$

7) $u = \frac{4}{15}\sqrt{(x+y)^5} - ye^x;\quad v = \frac{1}{2}y^2e^x + \frac{x}{3y^3};\quad w = \frac{1}{6y^2} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+y)^5}.$

8) $u = -\sin x + \frac{1}{2}x^2\cos y;\quad v = y\cos x + \frac{1}{3}xe^{3y};\quad w = \cos y - \frac{1}{9}e^{3y}.$

9) $u = \ln\sin x - x^2y^3;\quad v = \frac{1}{2}xy^4 - \frac{1}{2}yx^4;\quad w = x^3y^2 - \frac{y}{2\cos x} + \frac{y^2}{2\sin^2 x}.$

10) $u = sin^2(x+y) - \frac{x^2}{2y}$; $v = x\,ln\,y + y\,ln\,x$; $w = cos^2(x+y) - \frac{y^2}{2x} + tg\,x$.

11) $u = arcsin\,3x - \frac{1}{2}yx^2$; $v = \frac{1}{2}x^2 2^y\,ln\,2 - \frac{3y}{\sqrt{1-9x^2}}$; $w = \frac{1}{6}y^3 - x2^y$.

12) $u = ctg\,2x + arctg\,x$; $v = \frac{2y}{sin^2 2x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$; $w = \frac{y^2 x}{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{y}$.

13) $u = \frac{1}{30}x^6 + y^2\,ln\,x$; $v = -\frac{y^3}{3x} + x\,cos\,y$; $w = -sin\,y - \frac{1}{2}x^4y^2 + tg^3\,x^2$.

14) $u = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} - \frac{3}{2}e^{2y}x^2$; $v = \frac{3}{2}e^{2y}x - \frac{1}{20}x^5y^4$; $w = \frac{1}{20}x^4y^5 - \frac{1}{2}y^2\sqrt{x}$.

15) $u = -arctg\,x - \frac{1}{2}x^2\,sin\,y$; $v = \frac{y}{1+x^2} + \frac{1}{12}y^4x^3$; $w = -\frac{1}{20}y^5x^2 - sin\,y$.

16) $u = 2\,arcsin\,x + y^2e^x$; $v = -\frac{2y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3}y^3e^x$; $w = y\,ln^2\,x - \frac{1}{6}y^4e^x$.

17) $u = \frac{9}{28}\sqrt[3]{x^7} + \frac{e^{xy}}{y^2}$; $v = -\frac{1}{2}x\,cos^2\,y$; $w = \frac{1}{4}sin\,2y - \frac{1}{2}y^2\sqrt[3]{x} - \frac{e^{xy}}{x^2}$.

18) $u = \frac{1}{x} + \frac{cos\,xy}{y^2}$; $v = -\frac{cos\,8y}{8y} - 4xy^5$; $w = \frac{2}{3}y^6 - \frac{y^2}{x^3} + tgx - \frac{cos\,xy}{x^2}$.

19) $u = -\frac{ln\,x}{y} - \frac{1}{4}e^{2x}$; $v = \frac{ln\,y}{x} - x\,tg\,y - ln\,x$; $w = \frac{1}{2}y^2e^{2x} - lncos\,y$.

20) $u = -lnsin\,x + \frac{4}{15}\sqrt{x^5y}$; $v = y\,ctg\,x + \frac{1}{3}xe^{3y}$; $w = -\frac{4}{15}\sqrt{xy^5} - \frac{1}{9}e^{3y}$.

21)$u = \frac{ln\,x}{y^2} - arctg\,x - 2^y$; $v = 6y^5x + \frac{y}{1+x^2}$; $w = cos\,x - \frac{ln\,y}{x^2} - y^6$.

22) $u = arcsin\,x + \frac{1}{6}x^3y$; $v = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + 5\sqrt{y}$; $w = \frac{1}{y} - \frac{1}{6}xy^3 + 3$.

23) $u = tgx + \frac{x^3}{6y^2} - x\,tg\,y$; $v = e^y\,ln\,x - \frac{y}{cos^2\,x}$; $w = x\,ln\,y - \frac{e^y}{x} + 2y$.

24) $u = ctg\,x - \frac{x^4}{6y^3} + y^3$; $v = \frac{y}{sin^2\,x} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x$; $w = \frac{x^2}{y} - arccos\,y$.

25) $u = \frac{1}{6}x^3 - y\,sin\,x$; $v = \frac{1}{2}y^2\,cos\,x - \frac{x}{1+y^2}$; $w = y - \frac{1}{2}xy^2 - arcctg\,y$.

26) $u = \frac{1}{6}x^3\sqrt{y} - lncos\,x$; $v = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{y^3} + e^{x+y}$; $w = -e^{x+y} - \frac{y^2}{2\,cos^2\,x}$.

27) $u = -y^2x^2$; $v = \frac{2}{3}x\sqrt{(2y+1)^3}$; $w = \frac{1}{6}y^4 - \frac{2}{15}\sqrt{(2y+1)^5} + y\,ln\,x$.

28) $u = \frac{y^2}{3x^2} - \frac{1}{15}\sqrt{(2x+y)^5}$; $v = \frac{2}{15}\sqrt{(2x+y)^5} - y$; $w = -\frac{y^4}{6x^4}$.

29) $u = y^2 \ln x - 4e^{\frac{x}{2}}$; $v = 2ye^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{\cos^2 y} + 3x$; $w = tg\, y + \frac{y^4}{12x^2} - y \lg x$.

30) $u = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} \sin y - \frac{1}{30}x^6$; $v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cos y$; $w = \frac{1}{2}y^2x^4$.

Завдання 6. Дослідити функції на екстремум:

1) $z = \frac{3}{2}x^2 - 5xy + y^2 - 8x + 7y$.

2) $z = 2x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 + 3x - 9y$.

3) $z = \frac{5}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 - 9x + 3y$.

4) $z = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{11}{2}y^2 - 2x + 3y$.

5) $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{9}{2}y^2 + 3x + 2y$.

6) $z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2 - 16x - y$.

7) $z = \frac{3}{2}x^2 + 5xy - \frac{1}{2}y^2 - x + 17y$.

8) $z = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x + 7y$.

9) $z = x^2 + 7xy - \frac{11}{2}y^2 - 17x - 24y$.

10) $z = 3x^2 - 5xy + 2y^2 - 18x + 15y$.

11) $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 16x + 22y$.

12) $z = 4x^2 + xy + y^2 + 13x + 9y$.

13) $z = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 3y^2 + 6x + 14y$.

14) $z = 2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 2x + 5y$.

15) $z = 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 18y$.

16) $z = 6x^2 + xy - y^2 + 6x - 12y$.

17) $z = 2x^2 - xy - y^2 - 28x + 7y$.

18) $z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x - 2y$.

19) $z = x^2 + xy + y^2 + x - 4y$.

20) $z = \frac{3}{2}x^2 - 10xy - 5y^2 - 7x + 1$.

21) $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x + 6y$.

22) $z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x - 4y$.

23) $z = x^2 + 3xy + 5y^2 + 5x + 2y$.

24) $z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 16x - 2y$.

25) $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + x$.

26) $z = 4x^2 - xy + 2y^2 + 17x - 6y$.

27) $z = \frac{1}{2}x^2 + xy - y^2 + 4x - 11y$.

28) $z = 5x^2 + 4xy + y^2 + 6x$.

29) $z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 8y^2 - 2x - 4y$.

30) $z = x^2 - 3xy + 5y^2 - 14x + 21y$.

Завдання *7*. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D, яка обмежена осями координат та вказаною прямою.

1) $z = x^2 - 3xy - 12x + 18y$; $y = 14 - 2x$.

2) $z = 2x^2 + 3xy + 2x - 3y$; $y = 2x - 6$.

3) $z = x^2 + 3xy - x + 3y$; $y = x + 2$.

4) $z = 3x^2 + 2xy - 10x - 4y$; $y = x - 3$.

5) $z = x^2 - 3xy + 2x + 6y$; $y = 4 - x$.

6) $z = x^2 - xy + 3x$; $y = 4 - 2x$.

7) $z = 3x^2 - 2xy - 16x + 6y$; $y = 10 - 2x$.

8) $z = x^2 + 3xy + x + 6y$; $y = 2x - 8$.

9) $z = 2x^2 - 2xy - 2y$; $y = -2x - 8$.

10) $z = x^2 3xy - x - 3y$; $y = -x - 2$.

11) $z = 3x^2 - 4xy + 4x + 8y$; $y = -2x - 6$.

12) $z = 4x^2 - 2xy - 2x + 2y;$ $\qquad y = 6 - 2x.$

13) $z = 2x^2 - xy - 2x + y;$ $\qquad y = 4 - 2x.$

14) $z = x^2 + xy + x + 2y;$ $\qquad y = 2x + 8.$

15) $z = x^2 + 3xy + 2x - 6y;$ $\qquad y = x - 4.$

16) $z = 2x^2 + 5xy - 2x + 10y;$ $\qquad y = x + 5.$

17) $z = x^2 + 2xy + 2x - 2y;$ $\qquad y = x - 4.$

18) $z = 3x^2 - 3xy - 3x + 6y;$ $\qquad y = 6 - x.$

19) $z = 2x^2 - xy - 11x + 3y;$ $\qquad y = 5 - x.$

20) $z = x^2 - 3xy - x - 3y;$ $\qquad y = -2x - 4.$

21) $z = 2x^2 + 2xy - 6x - 4y;$ $\qquad y = 2x - 6.$

22) $z = x^2 + 3xy + 10x + 6y;$ $\qquad y = -x - 5.$

23) $z = x^2 - 2xy + 2x - 6y;$ $\qquad y = -6 - x.$

24) $z = 3x^2 + 4xy - 2x - 4y;$ $\qquad y = 2x - 3.$

25) $z = x^2 - 3xy - 5x + 12y;$ $\qquad y = 10 - 2x.$

26) $z = 2xy + y^2 + 2x - 2y;$ $\qquad y = x - 4.$

27) $z = xy + 2y^2 - 3y;$ $\qquad y = 4 - 2x.$

28) $z = 3xy - 4y^2 - 3x - y;$ $\qquad y = 5 - x.$

29) $z = 2xy + 3y^2 - 2x - 2y;$ $\qquad y = x + 5.$

30) $z = x^2 - 4xy - 2x + 20y - 10;$ $y = 8 - x.$

Завдання 8. З досліду між величинами *x* та *y* була встановлена залежність, яка наведена в таблиці. За допомогою методу найменших квадратів визначити лінійну функцію *y=ax+b*. На координатній площині *Oxy* відмітити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму.

№ вар.	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5
1	1	4	-1	3	0	-1	-2	-1	-3	-1
2	-4	-2	-2	-3	-3	-4	2	-4	1	-5
3	4	4	2	3	1	1	3	1	0	-2
4	-2	4	-1	2	0	1	1	1	2	-1
5	7	4	5	3	4	1	1	-1	2	-3
6	2	4	3	2	5	1	6	-2	8	-3
7	4	4	3	2	1	2	0	-1	-2	-2
8	6	5	5	3	4	2	5	0	3	-1
9	-6	4	-4	3	-5	1	-3	1	-1	-2
10	-4	5	-3	2	-1	2	0	0	1	0
11	8	4	9	3	7	1	6	-2	4	-3
12	5	4	6	2	8	1	7	-1	10	-3
13	-7	4	-6	3	-4	1	-2	2	-1	0
14	-7	1	-6	-2	-3	-4	-5	-5	-2	-6
15	0	0	2	-2	3	-4	5	-3	6	-5
16	-2	-2	0	-3	-1	-4	1	-4	3	-6
17	-6	2	-5	0	-3	-2	-4	-3	-2	-4
18	6	7	1	6	-2	6	-1	4	-3	4
19	2	5	0	3	-2	1	-2	-1	-4	-2
20	-3	5	-1	4	2	4	3	2	4	2
21	1	1	-2	0	-3	-2	-5	-3	-4	-4
22	-2	3	-1	1	0	-3	1	-1	2	-3
23	6	2	4	0	3	-2	5	-3	2	-4

24	-6	6	-7	4	-9	2	-8	1	-10	0
25	1	2	-1	0	-2	-2	-3	-3	-5	-4
26	-3	-3	-2	-3	-1	-1	0	1	2	3
27	1	-2	2	-1	3	1	4	3	5	5
28	-6	-3	-4	-1	-3	2	-2	3	-1	5
29	-2	-1	-1	1	0	3	2	6	3	7
30	5	-1	4	1	3	4	1	5	0	7

III. Диференціальні рівняння

Завдання 1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку.

1. а) $\frac{x}{\sin y}dx - y(1+x^2)dy = 0$; б) $y' = \frac{3^x}{(3y^2+1)(y^3+y)^4}$;

в) $y' = \frac{y^2-xy+4x^2}{x^2}$; г) $y' = \frac{x+y+3}{2x+2y-1}$;

д) $y' = \frac{4x-5y-1}{x+4y-16}$; е) $y' - \frac{y}{x} = x\sin x\cos^5 x$.

2. а) $x\ln y\,dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y}dy = 0$; б) $y' = \frac{\cos x\cos^5 y}{\sin^3 x\sin y}$;

в) $y' = \frac{x}{y}\sec\frac{3y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{2-x-y}{3x+3y-1}$;

д) $y' = \frac{5x-y+17}{3x+5y-1}$; е) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.

3. а) $\frac{x}{\cos y}dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}dy = 0$; б) $y' = \frac{x^2\cos x^3}{y\sin 3y}$;

в) $y' = \frac{x}{y}\operatorname{cosec}\frac{2y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{4x+4y+1}{3-x-y}$;

д) $y' = \frac{2x-y+7}{x+2y-4}$; е) $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{tg\,x}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. а) $x(y^2+4y+5)\ln x\,dx - dy = 0$; б) $y' = \frac{y^2+4y+20}{(x+1)\ln(x+1)}$;

в) $y' = \frac{x}{y}e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{2x+2y-5}{7-x-y}$;

д) $y' = \frac{7x-11y-24}{2x+7y-17}$; е) $xy' - y = \frac{x^2(4x+3)}{x^2+8x+25}$.

5. а) $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{1+y^2}}dx = \frac{y}{x^3}dy$; б) $y' = \frac{y^5+3y^2}{(5y^4+6y)\cos^2 7x}$;

в) $y' = \frac{2x+y}{x-y}$; г) $y' = \frac{x+y+10}{5x+5y-1}$;

д) $y' = \frac{-5x+4y+15}{6x-5y-18}$; е) $y' + y\, tg\, x = \cos x \sin^2 4x$.

6. а) $(y^2+3y)dx + \frac{(2y+3)}{x^2 \ln x}dy = 0$; б) $y' = \frac{\cos^2 2x}{y(y^3+2)}$;

в) $y' = cosec\frac{y}{x}\cos^3\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{4x+4y+1}{x+y-3}$;

д) $y' = \frac{-3x+4y+22}{2x-3y-16}$; е) $y' - y\, ctg\, x = \sin x \cos^2 3x$.

7. а) $dx - xye^y \ln^2 x\, dy = 0$; б) $y' = \frac{x^3(3+x^2)}{\sin^2 6y}$;

в) $y' = sec^2\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{6x+6y-5}{3-2x-2y}$;

д) $y' = \frac{x+2y+9}{8x+y+13}$; е) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2(6x-1)}{x^2-10x+21}$.

8. а) $\frac{\sin x dx}{3y^2+2} = (\cos^2 x + 1)e^{y^3+2y}dy$; б) $y' = \frac{x^4 \ln x}{3y^2 e^{y^3}}$;

в) $y' = cosec^2\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3x+3y-9}{7-x-y}$;

д) $y' = \frac{2x-3y+7}{5x+4y+6}$; е) $xy' - 2y = x^4 e^{2x}$.

9. а) $\frac{\cos x}{y}dx = 5^y(\sin^2 x + 1)dy$; б) $y' = \frac{x^5(1+x^3)}{5y^4 \sin y^5}$;

в) $y' = \frac{2y^2-5xy+2x^2}{xy}$; г) $y' = \frac{3+x-y}{2-x+y}$;

д) $y' = \frac{x+y+5}{4x+y+2}$; е) $y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x\, e^{\cos x}$.

10. а) $\frac{\sin x dx}{y^2+y} = (\cos^2 x - 9)\ln y\, dy$; б) $y' = \frac{\sqrt{x}(3+x^2)}{7y^6 \cos y^7}$;

в) $y' = \frac{x^2}{y^2+2xy+13x^2} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{7x-7y-1}{x-y+4}$;

д) $y' = \frac{x-2y+9}{5x-y}$; е) $y' \cos x + y \sin x = \cos^2 x\, e^{\sin x}$.

11. а) $\frac{3x^2+1}{3^y}dx + \frac{1}{(x^3+x)^4}dy = 0$; б) $y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y}(2+y^3)}$;

в) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3-2x+2y}{8x-8y+1}$;

д) $y' = \frac{x-2y-12}{12x+y+6}$; е) $y' - \frac{y}{x} = x^2 \cos x$.

12. а) $\frac{\cos x}{\ln y}dx = (y^3 + y^2)\sin^2 x\, dy$; б) $y' = \frac{\sqrt[4]{x}(x^3+3)}{\cos y \sin^5 y}$;

в) $x^2y' = y^2 - 3xy - 5x^2$; г) $y' = \frac{3x+3y-4}{1-9x-9y}$;

д) $y' = \frac{-x-2y+7}{4x-y-28}$; е) $y' + \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{ctg\, x}{1+x^2}$.

13. а) $\sin x \sin^3 y\, dx = \cos^5 x \cos y\, dy$; б) $y' = xe^{3x}\sqrt{4-9y^2}$;

в) $xyy' = x^2 \sec\frac{5y}{x} + y^2$; г) $y' = \frac{2x+2y-1}{3-6x-6y}$;

д) $y' = \frac{2x+3y-1}{x+4y+6}$; е) $y' - \frac{2x+3}{x^2+3x}y = \frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}$.

14. а) $\frac{x}{\cos y^3}dx - \frac{y^2}{\sin 3x}dy = 0$; б) $y' = \frac{1}{ye^{5y}(1+4x^2)}$;

в) $xyy' = x^2 \operatorname{cosec}\frac{7y}{x} + y^2$; г) $y' = \frac{4x+4y+5}{1-12x-12y}$;

д) $y' = \frac{x+2y-4}{2x+y+1}$; е) $y' - \frac{3x^2-1}{x^3-x}y = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+6x+34}}$.

15. а) $(y+1)dx = \frac{x^2+4x+20}{\ln(y+1)}dy$; б) $y' = \frac{x(\sqrt{x}-3)\cos^2 y^5}{5y^4}$;

в) $xyy' = x^2e^{-\frac{3y}{x}} + y^2$; г) $y' = \frac{5x+5y+4}{15x+15y-8}$;

д) $y' = \frac{5x-14y-11}{3x-10y-5}$; е) $y' - \frac{4y}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{2x+1}\cos^2 x$.

16. а) $\cos^2 4\, y dx = \frac{x^5+3x^2}{5x^4+6x}dy$; б) $y' = \frac{x(x^2+2)\sin^2 y^4}{4y^3}$;

в) $xy' = 3x \sec\frac{y}{x}\sin^4\frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{x+y+8}{3x+3y+1}$;

д) $y' = \frac{-3x+4y+6}{2x-3y-3}$; е) $y' + 3x^2y = e^{-x^3}\sin^2 4x$.

17. а) $\frac{x}{\cos^2 2y}dx + \frac{1}{x^2+3}dy = 0$; б) $y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2+2)(y^3-1)}$;

в) $xy' = 5x\,cosec\,\frac{y}{x}\,cos^2\frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{2x-2y-5}{3-x+y}$;

д) $y' = \frac{x+2y-1}{x+4y+3}$; е) $y' - 5x^4y = e^{x^5}\sin x \cos^3 x$.

18. а) $\frac{1}{y^2}dx - \frac{2+y^3}{\sin^2 4x}dy = 0$; б) $y' = \frac{3x^2e^{x^3}}{y^2(\sqrt{y}+7)}$;

в) $xy' = 4x\,sec^2\frac{4y}{x} + y$; г) $y' = \frac{3x+3y+2}{x+y-9}$;

д) $y' = \frac{3x+10y+2}{2x+3y+5}$; е) $y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{ctgx}\cos^3 x$.

19. а) $\frac{3e^{x^3}}{\ln y}dx - \frac{y^4}{x^2}dy = 0$; б) $y' = \frac{xe^{3x}\sin^2 y^5}{5y^4}$;

в) $xy' = 5x\,cosec^2\frac{2y}{x} + y$; г) $y' = \frac{x+y-3}{5x+5y-1}$;

д) $y' = \frac{x+2y-1}{3x+y-8}$; е) $y' - \frac{y}{\cos^2 x} = e^{tgx}x\sin 2x$.

20. а) $\frac{5\sin x^5}{y^3}dx + \frac{1+y^5}{x^4}dy = 0$; б) $y' = \frac{x(1+y^2)\sin x}{y}$;

в) $xyy' = 2y^2 + 4xy + x^2$; г) $y' = \frac{2x-2y+3}{10x-10y-2}$;

д) $y' = \frac{3x+2y}{4x+3y+1}$; е) $y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x}\sin^3 x$.

21. а) $\frac{7\cos x^7}{\sqrt{y}}dx - \frac{2+y}{x^6}dy = 0$; б) $y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{xy\ln x}$;

в) $xy' = \frac{x^3}{y^2+6xy+25} + y$; г) $y' = \frac{3x+3y-7}{5-9x-9y}$;

д) $y' = \frac{-x+4y-6}{8x-y+17}$; е) $y' - \frac{y}{1+x^2} = e^{arctg\,x}x\ln x$.

22. а) $\frac{\sqrt{x}}{\sin y}dx - \frac{\cos^2 y}{3+x^2}dy = 0$; б) $y' = \frac{x\cos x}{y\sqrt{1+y^2}}$;

в) $xy' = y\ln^2\frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{4x-4y+3}{7+x-y}$;

д) $y' = \frac{x-2y-11}{x+y+4}$; е) $y' - \frac{3\sin x}{\cos^4 x}y = x^3e^{\cos^{-3}x}\ln x$.

23. а) $\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{y}}dx + \frac{y^4+7}{\cos x}dy = 0$; б) $y' = \frac{1}{y(x^2+4x+5)\ln y}$;

в) $xy' = \frac{y^2-5xy+25x^2}{x}$; г) $y' = \frac{y-x+5}{3x-3y+2}$;

д) $y' = \frac{2x+y}{5x+2y+3}$; е) $y' - 3x^2 y \cos x^3 = e^{\sin x^3} 5^{4x}$.

24. а) $\frac{1}{y} dx = \sqrt{4 - 9x^2} e^{5y} dy$; б) $y' = \frac{x\sqrt[3]{1+x^2}}{y^3 \ln y}$;

в) $2yy' = x \sec \frac{7y}{x} + \frac{2y^2}{x}$; г) $y' = \frac{y+3x-1}{5-2y-6x}$;

д) $y' = \frac{x+y+2}{x+4y-1}$; е) $y' + \frac{5x^4+1}{x^5+x} y = \frac{\sin^2 4x}{x^5+x}$.

25. а) $xe^{3x}(1 + 4y^2)dx = dy$; б) $y' = \frac{2x+3}{y^2(x^2+3x+1)\ln y}$;

в) $3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}$; г) $y' = \frac{2x-y+5}{4x-2y+3}$;

д) $y' = \frac{-3x+10y+21}{2x-3y-14}$; е) $y' + 2y \sin 2x = \frac{e^{\cos 2x}}{x^2+8x}$.

26. а) $\frac{5x^4}{y} dx = (\sqrt{y} + 4) \cos^2 x^5 \, dy$; б) $y' = xye^x \ln^2 y$;

в) $4yy' = xe^{-\frac{y}{x}} + \frac{4y^2}{x}$; г) $y' = \frac{x+4y-1}{3-x-4y}$;

д) $y' = \frac{-5x+2y+7}{3x-5y-8}$; е) $y' - 4y \cos 4x = xe^{\sin 4x} \cos 3x$.

27. а) $\frac{4x^3}{y+1} dx = (y^2 + 2) \sin x^4 \, dy$; б) $y' = \frac{3x^2(\cos^2 y+1)e^{x^3}}{\sin y}$;

в) $5y' = 2 \sec \frac{y}{x} \sin^6 \frac{y}{x} + 5\frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{5-x+3y}{2x-6y+1}$;

д) $y' = \frac{-x+3y-9}{4x-y+3}$; е) $y' + \frac{7x^6+2x}{x^7+x^2} y = \frac{tg^2 x}{x^7+x^2}$.

28. а) $\frac{x^2+2}{\ln y} dx - \frac{y^3}{x^3+1} dy = 0$; б) $y' = \frac{x5^x(\sin^2 y+4)}{\cos y}$;

в) $2y' = 3 \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2\frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{x+2y-1}{3x+6y+5}$;

д) $y' = \frac{-x-y+3}{5x-y-9}$; е) $y' - \frac{9x^8-4x^3}{x^9-x^4} y = \frac{x^9-x^4}{x^2-4x}$.

29. а) $\frac{x^3}{y^2} dx + \frac{3e^{y^3}}{\sqrt{x}+5} dy = 0$; б) $y' = \frac{x^5(\cos^2 y-9)\ln x}{\sin y}$;

в) $5y' = 6 \sec^2 \frac{8y}{x} + 5\frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3x-y+4}{2-3x+y}$;

д) $y' = \frac{2x+11y+3}{x+2y-2}$; е) $y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} y = e^{-\cos^{-1} x} \sin 5x$.

30. а) $\frac{5}{y\,sin^2 x^5}dx = \frac{e^{3y}}{x^4}dy$; б) $y' = \frac{x^9(sin^2 y-4)\,ln\,x}{cos\,y}$;

в) $7y' = 5\,cosec^2\frac{y}{x} + 7\frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3+2x-5y}{5y-2x+4}$;

д) $y' = \frac{2x-9y+2}{3x+2y+3}$; е) $y' - 4y\,sin^3 x\,cos\,x = e^{sin^4 x}$

Завдання 2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків за допомогою зниження порядку.

1. а) $y''' = 6x + xe^{2x}$; б) $y'' + y'\,tg\,x = sec\,x$.
2. а) $y^{IV} = 8\,cos\,2x + 3x^2$; б) $(x^3 + x^2)y'' - (3x^2 + 2x)y' = 0$.
3. а) $y''' = \sqrt{x} + 9x\,cos\,3x$; б) $y'' + 2y'^2\,tg\,y = 0$.
4. а) $y^{IV} = 12\,sin\,3x + 2^x$; б) $(1 - y^2)y'' + yy'^2 = 0$.
5. а) $y''' = (2x + 1)^{-3} - xe^{3x}$; б) $y'' = \sqrt{1 - y^2}$.
6. а) $y^{IV} = 4^x + 5x^{-4}$; б) $y'' - 2y'^2\,ctg\,y = 0$.
7. а) $y''' = x\,ln\,x + 12\,sin\,3x$; б) $y'' - y'\,ctg\,x = -\,cosec\,x$.
8. а) $y^{IV} = 3x^{-5} - 8\,cos\,2x$; б) $(x^2 + 4x + 5)y'' = -(2x + 4)y'$.
9. а) $y''' = x\,sin\,2x - 5x^{-3}$; б) $(1 + y^2)y'' - 2yy'^2 = 0$.
10. а) $y^{IV} = 2 \cdot 3^x - 27(2 - 3x)^{-4}$; б) $y''\,sin\,2x + 2y' = 0$.
11. а) $y''' = x^2\,ln\,x + 4e^{2x}$; б) $y'' - \frac{2}{x}y' = \frac{3}{x}$.
12. а) $y^{IV} = 3 \cdot 4^x - 25\,sin\,5x$; б) $(y^2 + 3)y'' - yy'^2 = 0$.
13. а) $y''' = 6x^{-4} - 12x^2\,ln\,x$; б) $y'' = 1 + y'^2$.
14. а) $y^{IV} = 24x^{-5} - 81 \cdot 5^{3x}$; б) $(y^3 - y^2)y'' = (2y - 3y^2)y'^2$.
15. а) $y''' = x - 16x\,sin\,4x$; б) $y''\,sin\,2x - 2y' = 0$.
16. а) $y^{IV} = 60x^{-6} - 32e^{-2x}$; б) $y'' - y'^2\,ctg\,y = 0$.
17. а) $y''' = \frac{1}{8}x\,sin\frac{1}{2}x - 6$; б) $(x^2 - 4x + 3)y'' = (4 - 2x)y'$.
18. а) $y^{IV} = (\frac{1}{2}x + 5)^{-4} - 9^{2x}$; б) $(y^2 + 8y + 17)y'' = (y + 4)y'^2$.
19. а) $y''' = \frac{1}{4}x\,cos\frac{1}{2}x + 12$; б) $y'' + y'\,tg\,x = 0$.

20. а) $y^{IV} = (4 - \frac{1}{2}x)^{-5} + 9 \cdot 10^{3x}$; б) $(y^5 - 2y^2)y'' = (4y - 5y^4)y'^2$.

21. а) $y''' = 2\cos^2 x - 3e^{-x}$; б) $y'' - 2y' tg\, x = 0$.

22. а) $y^{IV} = 120x^{-7} + 2\sin^2 x$; б) $y'' \sin 2y = 2(1 - 3\cos^2 y)y'^2$.

23. а) $y''' = \sin^2 x \cos x$; б) $(x^5 + x^3)y'' = (5x^4 + 3x^2)y'$.

24. а) $y^{IV} = xe^{-2x}$; б) $y'' \sin 2y = 2(3\sin^2 y - 1)y'^2$.

25. а) $y''' = \cos^2 x \sin x$; б) $xy'' - 3y' = 4$.

26. а) $y^{IV} = x\sin(1 - 2x)$; б) $y'' + y'^2 tg\, y = 0$.

27. а) $y''' = \cos^3 x$; б) $y'' + 2y' ctg\, x = 0$.

28. а) $y^{IV} = x\cos(3 + 2x)$; б) $(y^2 + 4y + 5)y'' = (2y + 4)y'^2$.

29. а) $y''' = \sin^3 x$; б) $y'' = y' ctg\, x$.

30. а) $y^{IV} = xe^{3+2x}$; б) $(y^2 - 6y + 8)y'' = (2y - 6)y'^2$.

Завдання 3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. а) $y'' - 4y' + 13y = 13x^2 + 10$; б) $y'' + 2y' - 8y = 2e^x \sin 2x$.
2. а) $y'' + 2y' + 5y + 8xe^x$; б) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x} \cos 3x$.
3. а) $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 9$; б) $y'' + 3y' - 10y = 8e^{2x} \sin x$.
4. а) $y'' - 4y' + 29y = 6xe^{-x}$; б) $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-3x} \cos x$.
5. а) $y'' + 4y' + 20y = 4x - 20x^2$; б) $y'' - 5y' + 4y = 6e^{-x} \sin 2x$.
6. а) $y'' - 6y' + 10y = 4xe^{-2x}$; б) $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x} \cos x$.
7. а) $y'' + 9y = 9x^2 - 8$; б) $y'' + y' - 6y = 8e^x \sin 3x$.
8. а) $y'' - 4y' + 5y = 10xe^{3x}$; б) $y'' - 6y' + 5y = 12e^{-3x} \cos x$.
9. а) $y'' - 2y' - 3y = 4xe^{-x}$; б) $y'' - 8y' + 17y = 9e^{-x} \sin 2x$.
10. а) $y'' + 6y' + 13y = 5x - 26x^2$; б) $y'' - 4y' - 5y = 4e^x \cos 3x$.
11. а) $y'' + 2y' + 17y = 4xe^{2x}$; б) $y'' - y' - 12y = 5e^{-x} \sin x$.
12. а) $y'' - 4y' + 40y = 6xe^{-x}$; б) $y'' - y' - 6y = 7e^{-3x} \cos x$.
13. а) $y'' - 2y' - 15y = 9 - 15x^2$; б) $y'' + 4y = 8\sin 2x$.

14. а) $y'' - 10y' + 26y = 5xe^{x}$; б) $y'' + 5y' - 6y = 12e^{2x}\cos 2x$.

15. а) $y'' + 8y' + 17y = 34x^2 + 10x$; б) $y'' + 4y' - 5y = 9e^{-2x}\cos 3x$.

16. а) $y'' - 6y' - 7y = 14xe^{-3x}$; б) $y'' + 16y = 32\cos 4x$.

17. а) $y'' - 8y' + 20y = 6 - 40x^2$; б) $y'' + y' - 12y = 9e^{-2x}\cos 3x$.

18. а) $y'' + 4y' + 40y = 10xe^{4x}$; б) $y'' + 2y' - 3y = 6e^{3x}\sin 2x$.

19. а) $y'' - 2y' + 50y = 50x^2 + 14x$; б) $y'' + y' - 20y = 24e^{4x}\cos 3x$.

20. а) $y'' - 2y' - 8y = 16xe^{-2x}$; б) $y'' + 4y' + 29y = 20e^{x}\sin 4x$.

21. а) $y'' + 2y' + 37y = 74x^2 - 21$; б) $y'' - 2y' - 24y = 15e^{-3x}\cos x$.

22. а) $y'' - 2y' - 35y = 25xe^{-5x}$; б) $y'' + 25y = 12e^{4x}\cos 3x$.

23. а) $y'' - 12y' + 40y = 30x - 40x^2$; б) $y'' - y' - 42y = 16e^{-4x}\sin 2x$.

24. а) $y'' - 10y' + 29y = 36xe^{3x}$; б) $y'' + 2y' - 35y = 30e^{5x}\cos x$.

25. а) $y'' - 8y' + 16y = 8xe^{-2x}$; б) $y'' + 4y' + 8y = 16e^{-2x}\sin 2x$.

26. а) $y'' + 8y' + 20y = 18 - 20x^2$; б) $y'' - 12y' + 36y = 15e^{-3x}\cos x$.

27. а) $y'' + 3y' - 18y = 10xe^{2x}$; б) $y'' + 25y = 10\cos 5x + 5\sin 5x$.

28. а) $y'' - 8y' + 25y = 20xe^{4x}$; б) $y'' + 7y' - 8y = 16e^{-2x}\sin 4x$.

29. а) $y'' - 16y' + 65y = 32xe^{-2x}$; б) $y'' - 6y' - 16y = 40e^{x}\cos 4x$.

30. а) $y'' + y' - 42y = 48xe^{-4x}$; б) $y'' + 36y = 12\cos 6x + 6\sin 6x$.

Завдання 4. Розв'язати задачу Коші.

1. а) $y' - y\,ctg\,x = \sin x\cos^2 3x, \quad y(\pi/4) = 8$;

   б) $y'' - 2y' - 3y = 4xe^{-x}, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -3$.

2. а) $y' = sec^2\frac{y}{x} + \frac{y}{x}, \quad y(6) = \pi$;

   б) $y'' - 4y' - 5y = 4e^{x}\cos 3x, \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = -4$.

3. а) $\frac{\sin x dx}{3y^2+2} = (\cos^2 x + 1)e^{y^3+2y}dy, \quad y(0) = 0$;

   б) $y'' + 2y' + 17y = 4xe^{2x}, \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = -2$.

4. а) $y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x\, e^{\cos x}, \quad y(\pi/6) = 2$;

б) $y'' - y' - 6y = 7e^{-3x}\cos x\,, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = -5.$

5. а) $y' = \frac{x^2}{y^2+2xy+13x^2} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1;$

б) $y'' - 2y' - 15y = 9 - 15x^2, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = -3.$

6. а) $y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y}(2+y^3)}, \quad y(0) = 1;$

б) $y'' + 5y' - 6y = 12e^{2x}\cos 2x, \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = 5.$

7. а) $y' = \frac{3x+3y-4}{1-9x-9y}, \quad y(0) = 1;$

б) $y'' + 8y' + 17y = 34x^2 + 10x, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 4.$

8. а) $xyy' = x^2 \sec\frac{5y}{x} + y^2, \quad y(5) = \pi;$

б) $y'' + 16y = 32\cos 4x, \quad y'(0) = -3, \quad y(0) = 3.$

9. а) $\frac{x}{\cos y^3}dx - \frac{y^2}{\sin 3x}dy = 0, \quad y(\pi/6) = 0;$

б) $y'' - 8y' + 20y = 6 - 40x^2, \quad y'(0) = -4, \quad y(0) = 2.$

10. а) $y' - \frac{4y}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{2x+1}\cos^2 x, \quad y(0) = 2;$

б) $y'' + 2y' - 3y = 6e^{3x}\sin 2x, \quad y'(0) = -5, \quad y(0) = 1.$

11. а) $xy' = 3x \sec\frac{y}{x}\sin^4\frac{y}{x} + y, \quad y(6) = \pi;$

б) $y'' - 2y' + 50y = 50x^2 + 14x, \quad y'(0) = -6, \quad y(0) = 0.$

12. а) $y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2+2)(y^3-1)}, \quad y(1) = 0;$

б) $y'' + 4y' + 29y = 20e^x \sin 4x, \quad y'(0) = 6, \quad y(0) = 1.$

13. а) $y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{ctgx}\cos^3 x, \quad y(\pi/2) = 4;$

б) $y'' + 2y' + 37y = 74x^2 - 21, \quad y'(0) = 5, \quad y(0) = 2.$

14. а) $y' = \frac{x+y-3}{5x+5y-1}, \quad y(0) = 2;$

б) $y'' + 25y = 12e^{4x}\cos 3x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 3.$

15. а) $yy' = x(1+y^2)\sin x, \quad y(0) = 0;$

б) $y'' - 12y' + 40y = 30x - 40x^2, \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 4.$

16. а) $y' - \frac{y}{1+x^2} = e^{arctg\, x} x \ln x, \quad y(1) = 5;$

б) $y'' + 2y' - 35y = 30e^{5x} \cos x, \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 5.$

17. а) $xy' = y \ln^2 \frac{y}{x} + y, \quad y(1) = e;$

б) $y'' - 8y' + 16y = 8xe^{-2x}, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 6.$

18. а) $y' = \frac{1}{y(x^2+4x+5)\ln y}, \quad y(1) = e;$

б) $y'' - 12y' + 36y = 15e^{-3x} \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 7.$

19. а) $y' = \frac{y+3x-1}{5-2y-6x}, \quad y(0) = 2;$

б) $y'' + 3y' - 18y = 10xe^{2x}, \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = -7.$

20. а) $3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}, \quad y(15) = \pi;$

б) $y'' + 7y' - 8y = 16e^{-2x} \sin 4x, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = -6.$

21. а) $y' = xye^x \ln^2 y, \quad y(0) = e;$

б) $y'' - 16y' + 65y = 32xe^{-2x}, \quad y'(0) = -3, \quad y(0) = -5.$

22. а) $y' = \frac{5-x+3y}{2x-6y+1}, \quad y(0) = 1;$

б) $y'' + 36y = 12 \cos 6x + 6 \sin 6x, \quad y'(0) = -4, \quad y(0) = -4.$

23. а) $2y' = 3 \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2\frac{y}{x}, \quad y(6) = \pi;$

б) $y'' - 4y' + 13y = 13x^2 + 10, \quad y'(0) = -5, \quad y(0) = -3.$

24. а) $y' = \frac{x^5(\cos^2 y - 9)\ln x}{\sin y}, \quad y(1) = \pi/2;$

б) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x} \cos 3x, \quad y'(0) = -6, \quad y(0) = -2.$

25. а) $y' - 4y \sin^3 x \cos x = e^{\sin^4 x} 9^{3x}, \quad y(0) = 2;$

б) $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 9, \quad y'(0) = -7, \quad y(0) = -1.$

26. а) $y' = \frac{y^2 - xy + 4x^2}{x^2}, \quad y(1) = 2;$

б) $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-3x} \cos x, \quad y'(0) = 8, \quad y(0) = 0.$

27. а) $x \ln y\, dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} dy = 0, \quad y(0) = e;$

б) $y'' + 4y' + 20y = 4x - 20x^2, \quad y'(0) = 7, \quad y(0) = -1.$

28. а) $y' = \frac{4x+4y+1}{3-x-y}, \quad y(0) = 1;$

б) $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x}\cos x, \quad y'(0) = 6, \quad y(0) = -2.$

29. а) $y' = \frac{x}{y}e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(4) = -1;$

б) $y'' + 9y = 9x^2 - 8, \quad y'(0) = 5, \quad y(0) = -3.$

30. а) $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{1+y^2}}dx = \frac{y}{x^3}dy, \quad y(1) = 0;$

б) $y'' - 6y' + 5y = 12e^{-3x}\cos x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -2.$

Завдання 5. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{6}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 4y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{1}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{1}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 10y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 7y. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 10y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{37}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 4y. \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - \frac{1}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 5y. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{27}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 8y. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 25y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{8}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 6y. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{5}{4}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 4y. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - \frac{65}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 3y. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{61}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 8y. \end{cases}$

15) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 52y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5y. \end{cases}$ 16) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{29}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 2y. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - \frac{29}{4}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 11y. \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - \frac{13}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 8y. \end{cases}$

19) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - \frac{1}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$ 20) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \frac{8}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 5y. \end{cases}$ 22) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{5}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 9y. \end{cases}$

23) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - \frac{50}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 15y. \end{cases}$ 24) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 36y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 27y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 7y. \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{29}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$

27) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 6y. \end{cases}$ 28) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{25}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

29) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$ 30) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

Завдання 6. Розв'язати задачу.

1) Знайти криву, яка проходить через точку $(0; -2)$ і має наступну властивість: кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій її точці $(x; y)$ дорівнює $3y$.

2) Знайти криву, у якої точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

3) Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла й середовища. Тіло охолонуло за 10 хвилин від 90°C до 60°C. Температура навколишнього повітря не змінюється й дорівнює 20°C. Якою буде температура тіла через 30 хвилин?

4) Знайти криві, які мають таку властивість, що відрізок , який дотична у будь-якій точці кривої відтинає від осі Oy, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

5) Човен уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с. Через 4 с човен рухається зі швидкістю 1 м/с. Якою буде швидкість через 10 с?

6) Знайти криві, для яких площа трикутника, що утворений дотичною, віссю абсцис і перпендикуляром, який проведений з точки дотику до осі абсцис, є сталою величиною і дорівнює a^2.

7) Знайти криву, яка має таку властивість, що величина перпендикуляра, який опущений з початку координат до дотичної, дорівнює абсцисі точки дотику.

8) Швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна кількості цієї речовини у даний момент. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Скільки відсотків речовини залишиться через 100 днів?

9) Трапеція утворена осями координат, дотичною до деякої кривої й перпендикуляром, який опущений з точки дотику до осі абсцис. Знайти криві, у яких площа вказаної трапеції є сталою величиною і дорівнює $3a^2$.

10) Швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна кількості цієї речовини у даний момент. Експериментальні дослідження показали, що на

протязі року з кожного грама радія розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина деякої відомої кількості радія?

11) Трикутник утворений дотичною до деякої кривої, віссю абсцис і перпендикуляром, який проведений з точки дотику до осі абсцис. Знайти криві, для яких сума катетів указаного трикутника є сталою величиною і дорівнює b.

12) Знайти криву, у якої відстань будь-якої дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

13) Футбольний м'яч вагою 0,4 кГ кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,48 Н при швидкості 1 м/с. Обчислити час підйому м'яча і найбільшу висоту підйому.

14) Знайти криву, у якої відрізок, що відтинається дотичною на осі ординат, дорівнює напівсумі координат точки дотику.

15) За який час витече вода з циліндричного бака з діаметром $2R = 1{,}8$м і висотою $H = 2{,}45$м через отвір у дні діаметром $2r = 6$см? Вісь циліндра вертикальна (див. §2.8, зад.3).

16) Знайти криві, які мають наступну властивість: відрізок осі абсцис, що відтинається дотичною і нормаллю, проведеними з довільної точки кривої, дорівнює $2a$.

17) Визначити криву, у якої відношення відрізка, що відтинається дотичною на осі Oy, до відстані між початком координат і точкою дотику залишається сталою величиною і дорівнює a.

18) Циліндричний бак поставлений вертикально і має отвір у дні. Половина води з повного бака витікає за 5 хвилин. За який час витече уся вода (див. §2.8, зад.3)?

19) Знайти криві, у яких площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є сталою величиною і дорівнює a^2.

20) Матеріальна точка масою 1 г рухається прямолінійно під дією сили, яка прямо пропорційна часу, що відраховується від моменту $t = 0$, і обернено пропорційна швидкості руху точки. В момент $t = 10$с швидкість дорівнювала 50 см/с, а сила – 4 дін. Якою буде швидкість через хвилину після початку руху?

21) Довести, що крива, яка має таку властивість, що усі її нормалі проходять через сталу точку, є коло.

22) Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю *Ox* має абсцису, яка удвічі менша за абсцису точки дотику.

23) Корабель уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості корабля. Початкова швидкість корабля 10 м/с, а швидкість через 5 с – 8 м/с. Якою буде швидкість через 15 с?

24) Знайти криву, для якої довжина відрізка, що відтинається на осі ординат нормаллю, яка проведена у будь-якій точці кривої, дорівнює відстані цієї точки від початку координат.

25) За законом Ньютона швидкість охолодження тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою T тіла й температурою повітря T_0. Якщо температура повітря дорівнює 20°С і тіло на протязі 20 хвилин охолонуло від 100°С до 60°С, то через скільки часу його температура знизиться до 30°С?

26) Довести, що крива, кутовий коефіцієнт дотичної якої у будь-якій точці пропорційний абсцисі точки дотику, є парабола.

27) Знайти криву, для якої добуток абсциси будь-якої її точки на величину відрізка, що відтинається нормаллю на осі *Oy*, дорівнює подвоєному квадрату відстані від цієї точки до початку координат.

28) Визначити шлях S, який проходить тіло за час t, якщо його швидкість пропорційна пройденому шляху і якщо тіло проходить 100 м за 10 с, а 200 м – за 15 с.

29) Знайти криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій точці в n раз більше кутового коефіцієнта прямої, яка з'єднує цю ж точку з початком координат.

30) Точка маси m рухається прямолінійно. На неї дії сила пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності k_1). Крім того, на точку дії сила опору середовища, яка пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності k_2). Знайти залежність швидкості від часу, вважаючи, що у початковий момент швидкість дорівнює нулю.

IV. Кратні та криволінійні інтеграли

Завдання 1. Обчислити подвійний інтеграл двома способами:

а) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній y, а зовнішній - по x; б) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній x, а зовнішній - по y.

1. $\iint_G (1+2xy)dxdy$; G: $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ x=0.$
2. $\iint_G (3x+2y)dxdy$; G: $y=x^2,\ x+y=2,\ x\geq 0.$
3. $\iint_G (2+4x^2y)dxdy$; G: $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$
4. $\iint_G (3x+4y^2)dxdy$; G: $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ x=2.$
5. $\iint_G (x^2+y+10)dxdy$; G: $y=2\sqrt{x},\ y=3-x,\ x=0.$
6. $\iint_G (x+y+1)dxdy$; G: $y=x^2,\ x+y=2,\ y=0.$
7. $\iint_G (3+5xy)dxdy$; G: $y=2x^2,\ x+y=3,\ y=0.$
8. $\iint_G (x-3y)dxdy$; G: $y=\frac{2}{x},\ y=2x^2,\ y=\frac{1}{2}.$
9. $\iint_G (x+3y)dxdy$; G: $y=2\sqrt{x},\ x+y=3,\ y=0.$
10. $\iint_G (7x+8y^2)dxdy$; G: $y=x,\ y=-x,\ y=1.$
11. $\iint_G (2xy+7)dxdy$; G: $y=x^3,\ x+y=2,\ x=0.$

12. $\iint_G (xy+3)dxdy$;   G: $y = 3x^2,\ x + y = 4,\ y = 0.$

13. $\iint_G (x-5y)dxdy$;   G: $y = x,\ x + y = 0,\ y = 2.$

14. $\iint_G (2x+3y+1)dxdy$;   G: $y = x^2,\ x + y = 2,\ y = 0.$

15. $\iint_G (x+y^2)dxdy$;   G: $y = -x^2,\ y = x^2,\ x = 2.$

16. $\iint_G \left(x+\frac{y}{2}\right)dxdy$;   G: $y = 3x^2,\ x + y = 4,\ x \geq 0.$

17. $\iint_G \left(9y-\frac{5x^2}{7}\right)dxdy$;   G: $y = (x+1)^2,\ y = (x-1)^2,\ y = 0.$

18. $\iint_G (2xy+5)dxdy$;   G: $y = x^2,\ x + y = 2,\ y = 0.$

19. $\iint_G \left(\frac{x}{2}+y\right)dxdy$;   G: $x - y = 3,\ x + y = 3, y = 2.$

20. $\iint_G (x^2-y)dxdy$;   G: $y = x^3,\ x + y = 0,\ y = 1.$

21. $\iint_G (2+3xy)dxdy$;   G: $y = x - 1,\ x + y = 2,\ y = 0.$

22. $\iint_G (2y+1)dxdy$;   G: $y = x,\ x + y = 3,\ y = 0.$

23. $\iint_G 7x^2dxdy$;   G: $y = -x^3,\ x - y = 0,\ y = 1.$

24. $\iint_G (9xy-8)dxdy$;   G: $y = x^2,\ x + y = 2.$

25. $\iint_G (4-3x)dxdy$;   G: $y = (x-2)^2,\ y = (x+2)^2,\ y = 0.$

26. $\iint_G (2xy^2-3x)dxdy$;   G: $y = -x,\ x - y = 2,\ y = 0.$

27. $\iint_G (5x-y^3)dxdy$;   G: $y = x,\ x + y = 3,\ x = 0.$

28. $\iint_G (y+1)dxdy$;   G: $y = x^2,\ x + y = 2,$.

29. $\iint_G (7y-3x^2y^3)dxdy$;   G: $y = -x,\ x - y = 3,\ x = 0.$

30. $\iint_G (5x+7y+1)dxdy$;   G: $y = x^3,\ x + y = 2,\ y = 0.$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат.

1. $\iint_G \left(\sqrt[3]{x^2+y^2}+1\right)dxdy$;   G: $x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \geq 0.$

2. $\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$;   G: $x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \geq 0.$

3. $\iint_G ln(x^2+y^2)\,dxdy$; G: $x^2+y^2=e^2,\ x^2+y^2=e^4, x\ge 0, y\ge 0$.

4. $\iint_G \sqrt[4]{2+x^2+y^2}\,dxdy$; G: $x^2+y^2\ge 4,\ x^2+y^2\le 16$.

5. $\iint_G (x^2+y^2)\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 2x,\ y\le 0$.

6. $\iint_G (x+y)\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2\ge 1$.

7. $\iint_G \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 1$.

8. $\iint_G e^{x^2+y^2}\,dxdy$; G: $1\le x^2+y^2\le 49,\ x\le 0,\ y\ge 0$.

9. $\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; G: $x^2+y^2\le 1,\ x\le 0,\ y\ge 0$.

10. $\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$; G: $y=0, y=x, x=1$.

11. $\iint_G y\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le x$.

12. $\iint_G xy\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 4$.

13. $\iint_G x\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le x$.

14. $\iint_G x^2\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 9,\ x\le 0,\ y\ge 0$.

15. $\iint_G y^2\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 25$.

16. $\iint_G x^2y\,dxdy$; G: $x^2+y^2=1,\ y=x, y=-x, y\ge 0$.

17. $\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$; G: $x=\sqrt{3}y, x=-\sqrt{3}y, x=2$.

18. $\iint_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$; G: $x^2+y^2=2x$.

19. $\iint_G \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 36,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

20. $\iint_G ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

21. $\iint_G arctg\,\frac{y}{x}\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 9,\ x^2+y^2\ge 1$.

22. $\iint_G (5-3x-4y)\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 4x$.

23. $\iint_G \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le 3x,\ x\le 0,\ y\ge 0$.

24. $\iint_G \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$; G: $x^2+y^2\le 9,\ x\le 0,\ y\ge 0$.

25. $\iint_G cos(x^2+y^2)\,dxdy$; G: $x^2+y^2\le \frac{\pi^2}{4}$.

26. $\iint_G \left(\sqrt{x^2+y^2}+3\right)dxdy$; G: $x^2+y^2 \le 16, \quad y \ge 0.$

27. $\iint_G arcctg\,\frac{x}{y}\,dxdy$; G: $x=y, x=-y, x=1.$

28. $\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt[3]{3+x^2+y^2}}$; G: $x^2+y^2 \le 25,\ x \le 0,\ y \ge 0.$

29. $\iint_G \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy$; G: $y=x, y=-x, x=1.$

30. $\iint_G sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$; G: $x^2+y^2 \le \pi^2.$

Завдання 3. Обчислити потрійний інтеграл.

1. $\iiint_T (3+4xz)dxdydz$; T: $z=4x^2+9y^2,\ z=0,\ x=0,\ x=1,$
$y=0,\ y=2.$

2. $\iiint_T (x+y+z)dxdydz$; T: $x+y+z=1,\ z=0,\ x=0,\ y=0.$

3. $\iiint_T ze^x dxdydz$; T: $x=1, x=2, y^2+z^2=1,\ z \ge 0.$

4. $\iiint_T (2x+y)dxdydz$; T: $x+2y+3z=6,\ z=0,\ x=0,\ y=0.$

5. $\iiint_T xdxdydz$; T: $z=x^2+y^2,\ z=4,\ x \ge 0, y \ge 0.$

6. $\iiint_T (2+3xy)dxdydz$; T: $z=2x^2+3y^2,\ z=0,\ x=0,\ x=1,$
$y=0,\ y=2.$

7. $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dxdydz$; T: $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c.$

8. $\iiint_T (2x+3y-z)dxdydz$; T: $z=3,\ z=0,\ x=0,\ \ y=0,\ x+y=2.$

9. $\iiint_T (x+y)dxdydz$; T: $x^2+z^2=1,\ y=0,\ y=1,\ z \ge 0.$

10. $\iiint_T xdxdydz$; T: $z=0,\ x=0,\ y=0,\ y=3, x+z=2.$

11. $\iiint_T (4+z)dxdydz$; T: $y=x^2,\ z=0,\ y=1,\ z=2.$

12. $\iiint_T \frac{dxdydz}{1-x-y}$; T: $x=0,\ x=1,\ y=2,\ y=5, z=2, z=4.$

13. $\iiint_T \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}$; T: $x+z=3, y=2,\ x=1,\ y=0,\ z=0.$

14. $\iiint_T xyzdxdydz$; T: $x+y=1, x+y=2,\ y=0,\ y=1, z=0, z=3.$

15. $\iiint_T (1+x^2)dxdydz$;   T: $x=1,\ y=1,\ z=1, x=0, y=0, z=0.$

16. $\iiint_T (x+y+z)dxdydz$; T: $z=0, z=1,\ x=0,\ x=2,\ y=1,\ y=2.$

17. $\iiint_T xy^2z^3dxdydz$;   T: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1, z=0, z=1.$

18. $\iiint_T 2xdxdydz$;   T: $z=4,\ z=x^2+y^2,\ y\geq 0, x\leq 0.$

19. $\iiint_T \frac{dxdydz}{2-x-y}$;   T: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

20. $\iiint_T xydxdydz$;   T: $x+y+z=4, x=0, x=1,\ y=0,\ y=1.$

21. $\iiint_T \frac{dxdydz}{(x+y+z-2)^3}$;   T: $x+y+z=1,\ z=0,\ x=0,\ y=0.$

22. $\iiint_T xyzdxdydz$;   T: $y=x,\ y=0,\ x=2, z=0, z=2.$

23. $\iiint_T (2z-1)dxdydz$;   T: $y=x^2,\ y=4, z=0,\ z=1.$

24. $\iiint_T xyz^2dxdydz$;   T: $x+y=2,\ x+y=3,\ z=0,\ z=2,$
$y=0,\ y=1.$

25. $\iiint_T (x+y+z^2)dxdydz$;   T: $0\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq 2,\ 0\leq z\leq 2.$

26. $\iiint_T ydxdydz$;   T: $x+z=3,\ z=0,\ x=0,\ y=0, y=2.$

27. $\iiint_T \frac{dxdydz}{8-x-y}$;   T: $x=0, x=3, y=1, y=3,\ z=1,\ z=2.$

28. $\iiint_T (1-xz)dxdydz$; T: $z=3x^2+2y^2,\ z=0,\ x=0,\ x=1,$
$y=0,\ y=2.$

29. $\iiint_T zdxdydz$;   T: $y+z=2,\ z=0,\ x=0,\ y=0, x=1.$

30. $\iiint_T (x-y+3z)dxdydz$;   T: $z=2,\ z=0,\ x=0,\ y=0,\ x+y=3.$

Завдання 4. Обчислити потрійний інтеграл, перейшовши до циліндричних або сферичних координат.

1. $\iiint_T \left(z+\sqrt[5]{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\leq 25,\ x\geq 0,$
$y\geq 0,\ z\leq 0.$

2. $\iiint_T \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; T: $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$

3. $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; T: $x^2+y^2=z^2,\ z=1$.

4. $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\le 25,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0$.

5. $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$; T: $y^2=3x-x^2, z=0, z=2$.

6. $\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; T: $z=1-x^2-y^2,\ x^2+y^2=1, z=1$.

7. $\iiint_T xydxdydz$; T: $z=x^2+y^2, x^2+y^2=1, z=0$.

8. $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\le 9$.

9. $\iiint_T xzdxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\le 25,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0$.

10. $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)^3dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\le 25,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

11. $\iiint_T \left(z+\sqrt[5]{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\le 25,\ x\ge 0,$
$y\ge 0,\ z\le 0$.

12. $\iiint_T yzdxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

13. $\iiint_T (5x-3y)dxdydz$; T: $x^2+y^2=1,\ 2x+z=2,\ z=10$.

14. $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$; T: $x^2+y^2=2z,\ z=1$.

15. $\iiint_T zdxdydz$; T: $x^2+y^2=z^2,\ z=2$.

16. $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2=z$.

17. $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$; T: $9\le x^2+y^2+z^2\le 25,\ z\ge 0$.

18. $\iiint_T z^2dxdydz$; T: $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2=4$.

19. $\iiint_T xydxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2=9,\ z=-\sqrt{x^2+y^2}$.

20. $\iiint_T x\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2\le \frac{1}{4}$.

21. $\iiint_T xydxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\le 25,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0$.

22. $\iiint_T x^2dxdydz$; T: $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=4$.

23. $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$; T: $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1,\ x\ge 0$.

24. $\iiint_T zdxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z$.

25. $\iiint_T zdxdydz$; T: $x^2+y^2=25,\ x^2+y^2=z,\ z=0.$

26. $\iiint_T z^2dxdydz$; T: $x^2+y^2=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=3.$

27. $\iiint_T z(x^2+y^2)dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1,\ z\geq 0.$

28. $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\leq 25,\quad z\leq 0.$

29. $\iiint_T x^2dxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\leq 25,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\leq 0.$

30. $\iiint_T zdxdydz$; T: $x^2+y^2+z^2\leq 4,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

Завдання 5. Знайти об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями (застосувати подвійний інтеграл).

1. $z=x^2,\ z=0,\ 2x+3y=6,\ y=0.$
2. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1},\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2,\ z=0.$
3. $z=4x^2+2y^2+1,\ x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$
4. $y=x^2+z^2,\ y=4.$
5. $z=4-x^2,\ y=5,\ z=0,\quad y=0.$
6. $3x+y=6,\ 3x+2y=12,\ x+y+z=6,\ z=0,\ y=0.$
7. $z^2=x^2+y^2,\ z=4.$
8. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$
9. $z=x^2,\ z=0,\ 2x+3y=6,\ y=0.$
10. $3x+2y+z=6,\ x=0,\ z=0,\ y=0.$
11. $x^2+y^2=1,\ z=0,\ x+y+z=2.$
12. $z=x^2,\ z=0,\ x+y=2,\ y=0.$
13. $x=2y^2,\ z=0,\ x+2y+z=4,\ y=0.$
14. $x^2+y^2=1,\ z=0,\ x+y+z=3,\ y\geq 0.$
15. $x+y+\frac{z}{2}=1,\ z=0,\ x=0,\ y=0.$
16. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$
17. $z=x^2+y^2+1,\ x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

18. $z = 3x^2 + 2,\ y = \sqrt{9 - x^2},\ y = 0,\ z = 0.$

19. $x^2 + y^2 = 1,\ z = 2 - x - y,\ z = 0.$

20. $z = x^2 + y^2,\ y = x,\ y = 2x,\ z = 0,\ x = 2.$

21. $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ x + y + z = 3.$

22. $z = x^2 + 3y^2 + 2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

23. $z = 8 - x^2 - y^2,\ z = 0,\ x + y = 2,\ x = 0,\ y = 0.$

24. $z = y^2 + 2,\ z = 0,\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 2.$

25. $z = y^2,\ z = 0,\ x + y = 2,\ x = 0.$

26. $z = 16 - x^2 - y^2,\ z = 0,\ x + y = 3,\ x = 0,\ y = 0.$

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ x^2 + y^2 = 9.$

28. $z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0.$

29. $z = 1 - x^2 - y^2,\ z = 0.$

30. $z = x^2 + y^2,\ z = 1.$

Завдання 6. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене вказаними поверхнями.

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 1.$
2. $2x = z^2 + y^2,\ x = 2.$
3. $z = x^2 + y^2,\ z = 9.$
4. $x = y^2 + z^2,\ x = 25.$
5. $x^2 + y^2 = z,\ z = 9.$
6. $x^2 = y^2 + z^2,\ x = 4.$
7. $z^2 = x^2 + y^2,\ z = 2.$
8. $z = x^2 + y^2,\ z = 9.$
9. $4 - z = x^2 + y^2,\ z = 0.$
10. $z = x^2 + y^2,\ z = 25.$
11. $z^2 = x^2 + y^2,\ z = 4.$
12. $z = x^2 + y^2,\ z = 1.$
13. $4x = z^2 + y^2,\ x = 4.$
14. $3z = x^2 + y^2,\ z = 3.$
15. $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ z \geq 3.$
16. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0.$
17. $y^2 = x^2 + z^2,\ y = 3.$
18. $x^2 + z^2 = -2y,\ y = -2.$
19. $x^2 + y^2 + 3z = 0,\ z = -3.$
20. $z^2 + y^2 = -4x,\ x = -4.$
21. $z^2 + x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0.$
22. $z^2 + x^2 + 8y = 0,\ y = -2.$

23. $z^2 = x^2 + y^2,\ z = -2.$

24. $z^2 + x^2 + y^2 = 9,\ z \le 0.$

25. $z^2 + x^2 + y^2 = 25,\ x \ge 4.$

26. $y^2 = x^2 + z^2,\ y = -2.$

27. $x^2 = y^2 + z^2,\ x = -1.$

28. $z^2 + x^2 + y^2 = 25,\ y \ge 3.$

29. $x^2 + y^2 + 5z = 0,\ z = -5.$

30. $z^2 + x^2 + y^2 = 9,\ y \le 0.$

Завдання *7*. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду.

1. $\int_K (2x + 3y^2)dl$, де К - дуга кола $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2. $\int_K \frac{z^2}{x^2+y^2} dl$, де К - перший виток гвинтової лінії $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t,\ z = 2;\ 0 \le t \le 2\pi$.

3. $\int_K xydl$, де К - чверть кола $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2\sqrt{2};\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

4. $\int_K (x + y)dl$, де К - контур трикутника з вершинами в точках $A(1;0), B(0;1), C(0;0)$.

5. $\int_K \frac{1}{x-y} dl$, де К - відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

6. $\int_K xydl$, де К - контур прямокутника з вершинами в точках $A(0;0), B(4;0), C(4;2), D(0;2)$.

7. $\int_K xdl$, де К - дуга параболи $y = 2x^2$ між точками $A(-2;8)$ і$B(2;8)$.

8. $\int_K (x^2 + y^2)dl$, де К - дуга кола $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

9. $\int_K \sqrt{2y}dl$, де К - перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t);\ 0 \le t \le 2\pi$.

10. $\int_K (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, де К - перший виток конічної гвинтової лінії $x = 2t\cos t,\ y = 2t\sin t,\ z = 2t;\ 0 \le t \le 2\pi$.

11. $\int_K (x - y)dl$, де К - дуга кола $\rho = 2\cos\phi;\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.

12. $\int_K \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+2}}$, де К - відрізок прямої між точками $A(0;0)$ і$B(1;1)$.

13. $\int_K y^2 dl$, де К - перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$,

$y = 2(1 - \cos t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

14. $\int_K (x^2 + y^2 + z^2) dl$, де К - перший виток гвинтової лінії

$x = 2\cos t\,,\ y = 2\sin t\,,\ z = 2t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

15. $\int_K x^2 y dl$, де К - перша чверть кола $x^2 + y^2 = 4$.

16. $\int_K (y - x) dl$, де К - дуга кубічної параболи $y = x^3$від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$.

17. $\int_K (x - y) dl$, де К - відрізок прямої між точками $A(0;0)$ і$B(4;3)$.

18. $\int_K \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де К - перший виток гвинтової лінії$x = 2\cos t\,,$

$y = 2\sin t\,,\ z = 2t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

19. $\int_K x^2 dl$, де К - дуга кривої$y = \ln x\,,\ 1 \leq x \leq 3$.

20. $\int_K y dl$, де К - перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$,

$y = 2(1 - \cos t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

21. $\int_K x dl$, де К - відрізок прямої між точками $A(0;0)$ і$B(1;2)$.

22. $\int_K \frac{dl}{x+y} dl$, де К - відрізок прямої $y = 2x + 3$ між точками $A(1;5)$ і $B(2;7)$.

23. $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де К - частина лемніскати $\rho = 2\sqrt{\cos 2\phi}$; $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$.

24. $\int_K x dl$, де К - дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos\phi)$; $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

25. $\int_K (x + 1) dl$, де К - дуга астроїди $x = \cos^3 t\,,\ y = \sin^3 t\,;\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

26. $\int_K \frac{y}{x} dl$, де К - дуга кола $x^2 + y^2 = 2x$, розташована в першій чверті.

27. $\int_K x dl$, де К - дуга кола $x^2 + y^2 = 4$, розташована в першій чверті.

28. $\int_K (x^2 + y^2) dl$, де К - дуга кола $x = \cos t\,,\ y = \sin t\,;\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

29. $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де К – перший виток спіралі Архімеда $\rho = 2\phi$;

$0 \leq \phi \leq 2\pi$.

30. $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} y dl$, де К - дуга кардіоїди $\rho = 3(1 + \cos\phi)$; $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Завдання 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

1. $\int_{AB} 2xydx + 3x^2dy$, де AB - дуга кривої $y = x^3$ від A(1;1) до B(2;8).

2. $\int_{AB}(2-y)dx + xdy$, де AB – арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ від $t = 0$ до $t = 2\pi$.

3. $\int_{AB} ydx + xdy + (x - y - 1)dz$, де AB – відрізок прямої від A(1;1;1) до B(2;3;4).

4. $\int_{AB}(x+y)dx - xdy$, де AB – відрізок прямої від A(4;2) до B(2;0).

5. $\int_{AB}(x^2 - y^2)dx$, де AB - дуга параболи $y = x^2$ від A(0;0) до B(2;4).

6. $\int_{AB}(x^2 + y^2)dy$, де AB - дуга кривої $y = x^3$ від A(1;1) до B(2;8).

7. $\int_{AB} 2xydx + 3x^2dy$, де AB - дуга кривої $y = x^3$ від A(1;1) до B(2;8).

8. $\int_{AB} xydx + (y - x)dy$, де AB – відрізок прямої $y = x$ від A(0;0) до B(2;2).

9. $\int_{AB} 2xydx + x^2dy$, де AB - дуга кривої $y = x^2$ від A(0;0) до B(2;4).

10. $\int_{AB} ydx - xdy$, де AB - дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ від $t = 0$ до $t = \pi$.

11. $\int_{AB}(x+y)dx + xydy$, де AB - дуга кривої $y = x^2$ від A(1;1) до B(2;4).

12. $\int_{AB} x^2ydx + 2xy^2dy$, де AB - дуга кривої $y = x^3$ від A(1;1) до B(2;8).

13. $\int_{AB}(x^2 + y^2)dx$, де AB - дуга кривої $y = 2x^2$ від A(2;8) до B(3;27).

14. $\int_{AB}(x^2 - y^2)dy$, де AB - дуга кривої $y = 2x^3$ від A(0;0) до B(2;16).

15. $\int_{AB}(x-y)dx + (x+y)dy$, де AB – відрізок прямої від A(2;3) до B(3;5).

16. $\int_{AB}(2y - 6xy^3)dx + (2x - 9x^2y^2)dy$, де AB – відрізок прямої $y = x$ від A(0;0) до B(2;2).

17. $\int_{AB} 6x^2ydx + 10xy^2dy$, де AB - дуга кривої $y = x^3$ від A(1;1) до B(2;8).

18. $\int_{AB} y^2dx + 2xydy$, де AB - дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$ від $t = \frac{\pi}{2}$ до $t = 0$.

19. $\int_{AB} yzdx + xzdy + xydz$, де AB - дуга гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$ від $t = 0$ до $t = 2\pi$.

20. $\int_{AB}(xy-1)dx+x^2ydy$, де AB - відрізок прямої $y=2-2x$ від A(1;0) до B(0;2).

21. $\int_{AB}(2x+y)dx+4xydy$, де AB - дуга кривої $y=1-x^2$ від A(1;0) до B(2;-3).

22. $\int_{AB}2xdx-(x+2y)dy$, де AB – відрізок прямої $y=2x+2$ від A(0;2) до B(2;6).

23. $\int_{AB}y(x-y)dx+xdy$, де AB – відрізок прямої $y=2x$ від A(1;2) до B(2;4).

24. $\int_{AB}(x^2-y)dx$, де AB - дуга кривої $y=2x^2$ від A(0;0) до B(2;8).

25. $\int_{AB}2x(y-1)dx+x^2dy$, де AB - дуга кривої $y=x^2$ від A(1;1) до B(2;4).

26. $\int_{AB}(x^2-y^2)dx+xydy$, де AB – відрізок прямої від A(1;1) до B(3;4).

27. $\int_{AB}(x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, де AB – відрізок прямої від A(0;0) до B(2;0).

28. $\int_{AB}xydx+yzdy+xzdz$, де AB - дуга кривої $x=\cos t$,
$y=\sin t, z=1$від $t=0$ до $t=\pi$.

29. $\int_{AB}x^2ydx+x^3dy$, де AB - дуга кривої $y=x^2$ від A(1;1) до B(3;9).

30. $\int_{AB}2xdy-3ydx$, де AB - дуга кривої $y=x^3$ від A(1;1) до B(2;8).

Завдання 9. Показати, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, та обчислити його для заданих точок A(1;1), B(2;3) і C(2;1) по двом контурам інтегрування: а) по відрізку прямої AB; б) по ламаній ACB.

1. $\int_K(2x+3y)dx+(3x+3y^2)dy$.

2. $\int_K(6xy+4y^2+5y)dx+(3x^2+8xy+5x)dy$.

3. $\int_K(6xy^2+4x^3)dx+(6x^2y+3y^2)dy$.

4. $\int_K(2xy-5y^3)dx+(x^2-15xy^2+6y)dy$.

5. $\int_K 2xydx+x^2dy$.

6. $\int_K(3x^2y+1)dx+(x^3-1)dy$.

7. $\int_K (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy.$

8. $\int_K (x + 3y)dx + (3x + y)dy.$

9. $\int_K (4x^3y^3 - 3y^2 + 8)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 1)dy.$

10. $\int_K (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy.$

11. $\int_K (2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy.$

12. $\int_K (x + y)dx + (x - y)dy.$

13. $\int_K (4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy.$

14. $\int_K (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$

15. $\int_K (2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy.$

16. $\int_K (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy.$

17. $\int_K (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy.$

18. $\int_K (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy.$

19. $\int_K (x + y)dx + (x + 2y)dy.$

20. $\int_K (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^3)dy.$

21. $\int_K (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy.$

22. $\int_K (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy.$

23. $\int_K (x^2 + y)dx + (x - 2y)dy.$

24. $\int_K (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy.$

25. $\int_K ydx - (y^3 - x)dy.$

26. $\int_K (6xy^2 + 4x^3)dx + (6x^2y + 3y^2)dy.$

27. $\int_K (x^2 + y^2)dx + (2xy + x)dy.$

28. $\int_K (x - 2y)dx + (y - 2x + 1)dy.$

29. $\int_K (3x - 7y - 3)dx + (3y - 7x + 7)dy.$

30. $\int_K 6x^5ydx - (y^4 - x^6)dy.$

Завдання 10. Показати, що заданий вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом для деякої функції $U(x,y)$ та знайти цю функцію.

1. $(4 + y\,cos(\,xy))dx + (x\,cos(\,xy) + 2y)dy$.
2. $(y + ln(x + 1))dx + (x + 1 - e^y)dy$.
3. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$.
4. $(4x^3y^3 - 3y^2 + 8)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 1)dy$.
5. $(2e^{2x} + y + sin\,y)dx + (e^{3y} + x + x\,cos\,y)dy$.
6. $(e^{x+y} + cos(\,x - y))dx + (e^{x+y} - cos(\,x - y) + 2)dy$.
7. $(1 - e^{x-y} + cos\,y)dx + (e^{x-y} + cos\,y)dy$.
8. $(x^2 - 3xy^2 + 3)dx + (y^2 - 3x^2y + 2y)dy$.
9. $(arcsin\,x + x\,ln\,y)dx + \left(arcsin\,y + \frac{x^2}{2y}\right)dy$.
10. $(2xye^{x^2} + ln\,y)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y} + e^y\right)dy$.
11. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$.
12. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$.
13. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy$.
14. $(x^2 - 3xy^2 + 2)dx + (y^2 - 3x^2y)dy$.
15. $(x + y)dx + (x + 2y)dy$.
16. $(2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy$.
17. $(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$.
18. $(4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy$.
19. $(2xy - cos\,x)dx + (x^2 - 1)dy$.
20. $\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy$.
21. $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$.
22. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy$.

23. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy.$

24. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy.$

25. $(3x^2 - tg\, y)dx - \frac{x}{cos^2 y}dy.$

26. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy.$

27. $(y^2 - xy^2)dx + (y^2 - x^2y)dy.$

28. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy.$

29. $(x^2 + y^2 - 2x)dx + 2xydy.$

30. $(3x^2 + y^2 + 2xy)dx + (2xy + x^2)dy.$

V. Ряди

Завдання 1. Дослідити на збіжність числові ряди:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; б)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln\,n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4n^2+n+3}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}arcsin^n\,\frac{1}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln\,n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n^2+2n}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty\Sigma}\frac{1}{n\,ln^3\,n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty\Sigma}\frac{1}{ln^n(n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^4+n^2+1}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty\Sigma}sin\,\frac{\pi}{5^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$.

10.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 10^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

11. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln\,n}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(6n-5)}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty\sum} sin\frac{\pi}{3^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+2}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+1}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+3)^{\frac{5}{3}}}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n}{2}}\left(arcsin\frac{1}{n}\right)^n$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\, ln^2 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt[4]{n^9+1}}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|sin\, n\cdot\alpha|}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n+1)}{(n+1)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-cos\frac{3}{n}\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln\, n}{n\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+2}$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+1}$.

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{ln\, n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+n}$.

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln^n n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

25 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln\, n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$.

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{\sqrt{(n+3)3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4+n+3}}$.

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\, ln^3(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+4)}$.

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+2n)}$.

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\, sin\frac{\pi}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{1+n^2}$.

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} \cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}}$.

Завдання 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)} \frac{1}{ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt[4]{2n+3}}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, tg\,\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{3n}$;

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\,ln(2n)}$;

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^2}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$;

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n+5)}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}{\sqrt[6]{n}+2\sqrt{n^3}}$;

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$;

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+n}{3+n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{5^n n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{n^3+2n+8}$;

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^{\frac{n}{2}}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$;

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{n}{5^n}$;

13. а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{ln\,n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt[4]{n^4+n^2+1}}$;

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{\frac{n}{100n^2+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{10}{(n+1)!}$;

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(3n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$;

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{(ln\,n)^n}$;

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{e^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{n}+\sqrt{n^3}}$;

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3 \, arctg^n \frac{\pi}{3n}$;

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$;

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^{n-1}e^{-n}$;

21. а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n+5}{n(n^2+1)}$;

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$;

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\cdot 2^n}{3^n}$;

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt[3]{n^4+2n}}$;

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \, tg\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{3n^3+n+3}$;

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)2^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+3)(n+2)}$;

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+3}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3n+2}$;

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$;

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{n}{2n+1})^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}+1}$;

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3}+3n}$.

Завдання 3. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2n-1}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(x-2)^n}{n!}$;

3. а) $\sum_{т=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}n}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$;

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$;

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+x)^n}{5^n}$;

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!}{2n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$;

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n\sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$;

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n-1)!(2n-1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(2+x)^n}{n!}$;

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(1+n)}$;

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$;

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(n+1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(1+n)^n}$;

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}(x+1)^n}{(1+n)}$;

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$;

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+1)^n} x^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot \ln n}$;

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n+1} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$;

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n(n+2)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$;

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{5^n\sqrt{n-1}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{1+2n}$;

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^{n-1}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n \cdot \sqrt[3]{n+2}}{n+1}$;

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2n \cdot 4^n}$;

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(1+4n)5^n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(x+1)^n}{2^n}$;

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n\sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$;

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n+7}$;

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3n}$;

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 9^n}$;

26 а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n \sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n \cdot ln\, n}$;

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 5^n}$;

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n (2n+1)^n}{(3n-2)^n}$;

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} x^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot ln\, n}$;

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n (n+1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-5)^n}{n!}$.

Завдання 4. Виконати розклад даної функції в ряд:

1. $f(x) = 2^x \sin x$ за степенями x.
2. $f(x) = x\, ln(1 + x^2)$ за степенями x.
3. $f(x) = sin \frac{x}{2}$ за степенями x.
4. $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ за степенями x.
5. $f(x) = ln(1 - 2x)$ за степенями x.
6. $f(x) = cos^2 x$ за степенями x.
7. $f(x) = ln(1 - \frac{x}{3})$ за степенями x.
8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ за степенями x.
9. $f(x) = sin^2 x$ за степенями x.
10. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ за степенями x.
11. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ за степенями x.
12. $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ за степенями x.
13. $f(x) = x^3 \, ln\, x$ за степенями x.

14. $f(x) = e^{\sin x}$ за степенями x.

15. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ за степенями x.

16. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ за степенями x.

17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9+x^3}}$ за степенями x.

18. $f(x) = \ln(x+2)$ за степенями $x-1$.

19. $f(x) = \ln x$ за степенями $x-1$.

20. $f(x) = \sqrt{x}$ за степенями $x-4$.

21. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ за степенями $x-1$.

22. $f(x) = e^{3x}$ за степенями $x-1$.

23. $f(x) = \frac{1}{x+4}$ за степенями $x+2$.

24. $f(x) = \frac{1}{x}$ за степенями $x-3$.

25. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ за степенями $x-1$.

26. $f(x) = \sqrt{x}$ за степенями $x-1$.

27. $f(x) = x^6$ за степенями $x+2$.

28. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ за степенями $x+1$.

29. $f(x) = e^{x^2-4x+1}$ за степенями $x-2$.

30. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ за степенями $x+4$.

Завдання 5. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001.

1. $\sqrt{1,004}$;	2. $\sqrt{0,992}$;	3. $\sqrt{90}$;
4. $\sqrt[3]{1,006}$;	5. $\sqrt[3]{0,991}$;	6. $\sqrt[3]{130}$;
7. $\sin 1 2°$;	8. $\ln 2$;	9. $\ln 3$;
10. $\ln 4$;	11. $\sqrt{1,005}$;	12. $\sqrt{110}$;
13. $\sqrt[3]{70}$;	14. $\cos 1 2°$;	15. $\sqrt[4]{0.98}$;

16. $cos\,1\,8°$; 17. $ln\,1\,,2$; 18. $sin\,1\,0°$;

19. $\sqrt{e}$; 20. $\frac{1}{e}$; 21. $\sqrt[3]{250}$;

22. e^2; 23. $sin\,1\,°$; 24. $cos\,1\,°$;

25. $cos\,1\,0°$; 26. $\sqrt[5]{30}$; 27. $\sqrt[3]{500}$;

28. $\sqrt[3]{1.015}$; 29. $\sqrt[3]{129}$; 30. $\frac{1}{e^2}$.

Завдання 6. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розкладаючи в ряд підінтегральну функцію:

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$;
2. $\int_0^1 x^2\, sin^2 \frac{x}{2} dx$;
3. $\int_0^1 x^3\, sin\, x\, dx$;
4. $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$;
5. $\int_0^{0,5} x\, arctg\, x\, dx$;
6. $\int_{0,5}^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$;
7. $\int_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} dx$;
8. $\int_0^1 xe^{-\sqrt{x}}\, dx$;
9. $\int_0^{0,5} arctg\, x^2\, dx$;
10. $\int_0^1 cos\,\sqrt{x}\, dx$;
11. $\int_0^{0,5} x^2\, ln(\,1+x^2)dx$;
12. $\int_0^{0,5} xe^{-x}\, dx$;
13. $\int_0^1 \sin x^2\, dx$;
14. $\int_0^1 x^2\, sin\, x^2\, dx$;
15. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\, dx$;
16. $\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\, dx$;
17. $\int_0^{0,25} \sqrt{x}\, sin\, 4\, xdx$;
18. $\int_0^1 x\, cos\,\sqrt{x}\, dx$;
19. $\int_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx$;
20. $\int_0^1 \sqrt{x}\, e^{-x^2} dx$;
21. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$;
22. $\int_0^{0,5} x\, cos\,\sqrt{2x}\, dx$;
23. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$;
24. $\int_0^{0,5} x \cdot arctg\, x\, dx$;
25. $\int_0^{0,25} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$;
26. $\int_0^1 x\sqrt{x}\, sin\,\sqrt{x}\, dx$;
27. $\int_0^1 x^2\, cos\,\sqrt{x}\, dx$;
28. $\int_0^1 e^{-0,1\cdot x^3}\, dx$;

29. $\int_0^{0,5} x\, arctg\, x^2\, dx$; 30. $\int_0^1 cos\, x^2\, dx$.

Завдання 7. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння:

1. $y' = \frac{xy}{2}; y(0) = 1;$
2. $y' = x^2y^2 - 1;\ y(0) = 1;$
3. $y' = y^2 + x^3;\ y(0) = \frac{1}{2};$
4. $y' = y^2 - x;\ y(0) = 1;$
5. $y' = y + xe^y;\ y(0) = 0;$
6. $y' = x + \frac{1}{y};\ y(0) = 1;$
7. $y' = x^2 + y^3; y(1) = 1;$
8. $y' = e^x + xy;\ y(0) = 0;$
9. $y' = x^2 + y^2;\ y(0) = 1;$
10. $y' = x^2y + e^y + x;\ y(0) = 0;$
11. $y' = e^{-2x} + y^2;\ y(0) = 0;$
12. $y' = cos\, x + e^y + x;\ y(0) = 0;$
13. $y' = 2x^3 - y^2 - 2x;\ y(0) = 1;$
14. $y' = x^2 + sin\, y + 1;\ y(0) = 0;$
15. $y' = xe^{-x} + ln\, y\, ;\ y(0) = 1;$
16. $y' = e^{xy} + y;\ y(0) = 1;$
17. $y' = cos\, x + y^2;\ y(0) = 1;$
18. $y' = y + y^2;\ y(0) = 3;$
19. $y' = 2e^y - xy;\ y(0) = 0;$
20. $y' = sin\, x + y^2;\ y(0) = 1;$
21. $y' = e^x + y;\ y(0) = 4;$
22. $y' = x + x^2 + y^2; y(0) = 3;$

23. $y'' = x^2 y;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1;$

24. $xy'' + xy = -y';\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$

25. $y'' + xy = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$

26. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$

27. $y'' - xy' - y = 0; y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$

28. $y'' = yy' - x^2;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1;$

29. $y'' = x \sin y';\ y(1) = 0;\ y'(1) = \frac{\pi}{2};$

30. $y'' = xy' - y + 1;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0.$

Завдання 8. Виконати розклад функції в ряд Фур\`є з періодом $2l$:

1. $f(x) = x$ при $-2 \le x \le 2;\quad l = 2;$

2. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -2 \le x < 0; \\ x & \text{при } 0 \le x \le 2; \end{cases} \quad l = 2;$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -3 \le x \le 0; \\ -2 & \text{при } 0 < x \le 3; \end{cases} \quad l = 3;$

4. $f(x) = x - 1$ при $0 \le x \le 2;\quad l = 2;$

5. $f(x) = 4 - 2x$ при $0 \le x \le 2;\quad l = 2;$

6. $f(x) = 2 - x$ при $0 \le x \le 2;\quad l = 2;$

7. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } -1 \le x < 0; \\ 1 & \text{при } 0 \le x \le 1; \end{cases} \quad l = 1;$

8. $f(x) = 1 - x$ при $0 \le x \le 2;\quad l = 2;$

9. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{при } -2 \le x \le 0; \\ -1 & \text{при } 0 < x \le 2; \end{cases} \quad l = 2;$

10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 \le x < 0; \\ x & \text{при } 0 \le x \le 2; \end{cases} \quad l = 2;$

Виконати розклад в ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$, заданої на інтервалі.

11. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -1 < x < 0; \\ -1 & \text{при } 0 \le x \le 1; \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } -1 < x < 0; \\ 0 & \text{при } 0 \le x < 1; \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi < x \le 0; \\ \pi & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \end{cases}$

14. $f(x) = 4 - |x|$ при $-2 < x \le 2;$

15. $f(x) = x^2$ при $-1 \le x < 1;$

16. $f(x) = \begin{cases} -(x+2) & \text{при} \quad -\pi < x \le 0; \\ -(x-2) & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0; \\ 2x & \text{при} \quad \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \end{cases}$

18. $f(x) = |x|$ при $-2 \le x < 2;$

19. $f(x) = 2 - x$ при $-2 \le x < 2;$

20. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -3 < x \le 0; \\ 5 & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 < x \le 0; \\ \frac{\pi}{2}x & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -1 < x \le 0; \\ 0 & \text{при} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$

Функцію $f(x)$ розкласти в ряд косинусів в заданому інтервалі.

23. $f(x) = x^2;$ $(0, \pi);$

24. $f(x) = 2 - x;$ $(0,2);$

25. $f(x) = 2x - 1;$ $(0,1);$

26. $f(x) = \pi - x;$ $(0, \pi).$

Функцію $f(x)$ розвкласти в ряд синусів в заданому інтервалі

27. $f(x) = x - 1;$ $(0,1);$

28. $f(x) = \pi - x;$ $(0, \pi);$

29. $f(x) = 2 - x;$ $(0,1);$

30. $f(x) = x + 1;$ $(0,1).$

Приклади розв'язання індивідуальних завдань

I. Інтегральне числення функції однієї змінної

***Завдання* 1.** Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування.

а) $\int\left(5\cos 2x-\frac{2}{x^2-9}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{x}-\sqrt[4]{x}\right)^2 dx$;

в) $\int\left(\frac{3}{\sin^2(5x+1)}-2^{6x+1}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{2+3x}}+\frac{3}{\sqrt{9+25x^2}}\right)dx$;

д) $\int 15x^4(2+3x^5)^7dx$; е) $\int\left(\frac{x^6}{\cos^2 x^7}+\frac{4^x}{4^{2x}-49}\right)dx$.

Розв'язання.

Використовуємо таблицю та основні властивості інтегралів:

$$a)\ \int\left(5\cos 2x-\frac{2}{x^2-9}\right)dx=5\int\cos 2x\,dx-2\int\frac{dx}{x^2-9}=$$

$=\frac{5}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$;

б) $\int\left(\frac{1}{x}-\sqrt[4]{x}\right)^2 dx=\int\left(x^{-1}-x^{\frac{1}{4}}\right)^2 dx=\int\left(x^{-2}-2x^{-\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=$

$=\frac{x^{-1}}{-1}-8x^{\frac{1}{4}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$;

в) $\int\left(\frac{3}{\sin^2(5x+1)}-2^{6x+1}\right)dx=3\int\frac{dx}{\sin^2(5x+1)}-\int 2^{6x+1}dx=$

$=-\frac{3}{5}\cot(5x+1)-\frac{1}{6}\cdot\frac{2^{6x+1}}{\ln 2}+C$;

г) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{2+3x}}+\frac{3}{\sqrt{9+25x^2}}\right)dx=4\int(2+3x)^{-\frac{1}{2}}dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{9+(5x)^2}}=$

$=8(2+3x)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{5}\ln\left|5x+\sqrt{9+(5x)^2}\right|+C$.

В наступних двох прикладах застосовуємо прийом підведення функції під знак диференціалу.

д) $\int 15x^4(2+3x^5)^7dx=\int(2+3x^5)^7d(2+3x^5)=\frac{\left(2+3x^5\right)^8}{8}+C$;

е) $\int\left(\frac{x^6}{cos^2 x^7}+\frac{4^x}{4^{2x}-49}\right)dx=\frac{1}{7}\int\frac{dx^7}{cos^2 x^7}+\frac{1}{ln4}\int\frac{d4^x}{(4^x)^2-49}=$

$=\frac{1}{7}\tan x^7+\frac{1}{14ln4}ln\left|\frac{4^x-7}{4^x+7}\right|+C.$

***Завдання* 2.** Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами.

а) $\int x^9\, ln\, 4x\, dx$; б) $\int x^2\, sin\, 8x\, dx$; в) $\int arccos\, 2x\, dx$.

Розв'язання.

а) Застосовуємо формулу інтегрування частинами $\int udv=uv-\int vdu$.

$$\int x^9\, ln\, 4x\, dx=\begin{vmatrix} u=\ln 4x\,, & dv=x^9dx \\ du=\frac{1}{x}dx, & v=\frac{1}{10}x^{10}\end{vmatrix}=\ln 4x\cdot\frac{1}{10}x^{10}-$$

$$-\int\frac{1}{10}x^{10}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{10}x^{10}\ln 4x-\frac{1}{10}\int x^9dx=\frac{1}{10}x^{10}\ln 4x-\frac{1}{100}x^{10}.$$

б Застосовуємо формулу інтегрування частинами два рази.

$$\int x^2\, sin\, 8x\, dx=\begin{vmatrix} u=x^2, & dv=sin\, 8x\, dx \\ du=2xdx, & v=-\frac{1}{8}\cos 8x\end{vmatrix}=-\frac{1}{8}x^2\cos 8x+$$

$$+\frac{1}{4}\int x\cos 8x\, dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=\cos 8x\, dx \\ du=dx, & v=\frac{1}{8}sin\, 8x\end{vmatrix}=-\frac{1}{8}x^2\cos 8x+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}x\, sin\, 8x+\frac{1}{64}\cos 8x\right)+C.$$

в) Даний інтеграл не відноситься до стандартних, але він також інтегрується методом інтегрування частинами.

$$\int arccos\, 2x\, dx=\begin{vmatrix} u=\arccos 2x\,, & dv=dx \\ du=-\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}, & v=x\end{vmatrix}=x\arccos 2x+2\int\frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Знайдемо окремо отриманий інтеграл:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}=-\frac{1}{8}\int(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-4x^2)=|t=1-4x^2|=-\frac{1}{8}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}t^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{4}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

Маємо

$\int arccos\,2x\,dx = x\arccos 2x - \frac{1}{2}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

***Завдання* 3.** Знайти інтеграли від функцій, які вміщують квадратний тричлен.

а) $\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$; б) $\int \frac{5x-3}{2x^2+8x+7}dx$; в) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{-x^2+12x-32}}dx$.

Розв'язання.

а) Виділяємо в знаменнику повний квадрат і інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+34} = \int \frac{dx}{(x^2+2\cdot5\cdot x+25)-25+34} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+9} = \frac{1}{3}arctg\,\frac{x+5}{3} + C.$$

б) З початку в чисельнику виділяємо похідну квадратного тричлена знаменника.

$$\int \frac{5x-3}{2x^2+8x+7}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-10-3}{2x^2+8x+7}dx = \frac{5}{4}\int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+7} - 13\int \frac{dx}{2x^2+8x+7}.$$

Знайдемо кожен з отриманих інтегралів окремо.

$$\int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+7} = \int \frac{d(2x^2+8x+7)}{2x^2+8x+7} = |t = 2x^2+8x+7| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln|2x^2+8x+7| + C;$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-0{,}5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{0{,}5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{0{,}5}}{x+2+\sqrt{0{,}5}}\right| + C.$$

Можемо записати

$$\int \frac{5x-3}{2x^2+8x+7}dx = \frac{5}{4}\ln|2x^2+8x+7| - \frac{13}{4\sqrt{0{,}5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{0{,}5}}{x+2+\sqrt{0{,}5}}\right| + C.$$

в) Розв'язуємо подібно попередньому.

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{-x^2+12x-32}}dx = \int \frac{\frac{3}{-2}(-2x+12)+20}{\sqrt{-x^2+12x-32}}dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{(-2x+12)dx}{\sqrt{-x^2+12x-32}} + 20\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+12x-32}};$$

$$\int \frac{(-2x+12)dx}{\sqrt{-x^2+12x-32}} = \int \frac{d\left(-x^2+12x-32\right)}{\sqrt{-x^2+12x-32}} = |t = -x^2+12x-32| = \int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{-x^2+12x-32} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+12x-32}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-12x+32)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-6)^2-4)]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-6)^2}} =$$

$= \arcsin\frac{x-6}{2} + C;$

$\int \frac{3x+2}{\sqrt{-x^2+12x-32}}dx = -3\sqrt{-x^2+12x-32} + 20\arcsin\frac{x-6}{2} + C.$

***Завдання* 4.** Знайти інтеграли від раціональних дробів.

а) $\int \frac{2x^4+3}{x^2-5}dx$; б) $\int \frac{x-12}{(2x+1)(x-3)^2}dx$; в) $\int \frac{5x^2+18x-1}{(x+5)(x^2+2x+2)}dx$.

Розв'язання.

а) Під знаком інтегралу неправильний дріб. Виділяємо цілу частину (ділимо чисельник на знаменник). Для зручності чисельник і знаменник представляємо у вигляді повних многочленів.

Можемо записати

$\int \frac{2x^4+3}{x^2-5}dx = \int \left(2x^2 + 10 + \frac{53}{x^2-5}\right)dx = \frac{2}{3}x^3 + 10x + \frac{53}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C$.

б) Під знаком інтегралу правильний дріб. Розкладаємо його на суму елементарних:

$\frac{x-12}{(2x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2+B(2x+1)(x-3)+C(2x+1)}{(2x+1)(x-3)^2}.$

Прирівнюємо чисельники крайнього правого і крайнього лівого дробів:

$A(x-3)^2 + B(2x+1)(x-3) + C(2x+1) = x - 12.$

Надаємо величині x певні значення. Число значень співпадає з числом невідомих. Складаємо систему та розв'язуємо її:

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -0{,}5 \\ x = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} 7C = -9 \\ 12{,}25A = -12{,}5 \\ 9A - 3B + C = -12, \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} C = -9/7 \\ A = -50/49 \\ B = 25/49\,. \end{cases}$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{x-12}{(2x+1)(x-3)^2}dx = \int \left(-\frac{50}{49(2x+1)} + \frac{25}{49(x-3)} - \frac{9}{7(x-3)^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{25}{49}\ln|2x+1| + \frac{25}{49}\ln|x-3| + \frac{9}{7(x-3)} + C.$$

в) Розкладаємо правильний дріб на суму елементарних.

$$\frac{5x^2+18x-1}{(x+5)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+5)}{(x+5)(x^2+2x+2)},$$

$$A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x+5) = 5x^2+18x-1.$$

Систему складемо дещо іншим способом. В лівій частині останньої рівності розкриваємо дужки та зводимо подібні.

$$(A+B)x^2 + (2A+5B+C)x + 2A + 5C = 5x^2 + 18x - 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частин та розв’язуємо отриману систему.

$$\begin{cases} x^2 \\ x \\ x^0 \end{cases}\!\!\left|\begin{array}{c} A+B=5 \\ 2A+5B+C=18 \\ 2A+5C=-1, \end{array}\right. \quad \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-1. \end{cases}$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{5x^2+18x-1}{(x+5)(x^2+2x+2)}dx = \int \left(\frac{2}{x+5} + \frac{3x-1}{x^2+2x+2}\right)dx = 2\int \frac{dx}{x+5}dx + \int \frac{3x-1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} - 4\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} -$$

$$-4\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+2| - 4arctg\,(x+1) + C.$$

Завдання **5.** Знайти інтеграли від ірраціональних функцій.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{x^7}+5\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[6]{(5-x)^5}-\sqrt[4]{(5-x)^3}}$.

Розв’язання.

а) Підінтегральна функція містить $x^{\frac{7}{8}}$ і $x^{\frac{3}{4}}$. Найменше спільне кратне чисел 8 і 4 дорівнює 8, отже зробимо підстановку $x = t^8$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{x^7}+5\sqrt[4]{x^3}} = |x = t^8,\ \ dx = 8t^7dt| = \int \frac{8t^7dt}{t^7+5t^6} = 8\int \frac{tdt}{t+5} =$$

$$= 8\int \frac{(t+5)-5}{t+5}dt = 8\int dt - 40\int \frac{dt}{t+5} = 8t - 40\ln|t+5| + C =$$

$$= \left|t = \sqrt[8]{x}\right| = 8\sqrt[8]{x} - 40\ln\left|\sqrt[8]{x}+5\right| + C.$$

б) Розв’язуємо аналогічно попередньому:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt[6]{(5-x)^5}-\sqrt[4]{(5-x)^3}} = |5 - x = t^{12},\ \ dx = -12t^{11}dt| = \int \frac{-12t^{11}dt}{2t^{10}-t^9} =$$

$$= -12\int \frac{t^2dt}{2t-1} = -12\int \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2t-1)}\right)dt =$$

$$= -3t^2 - 3t - \frac{3}{2}\ln|2t-1| + C =$$

$$= \left|\ t = \sqrt[12]{5-x}\right| = -3\sqrt[6]{5-x} - 3\sqrt[12]{5-x} - \frac{3}{2}\ln\left|2\sqrt[12]{5-x} - 1\right| + C.$$

***Завдання* 6.** Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

а) $\int \frac{dx}{\cos x - 8\sin x}$; б) $\int \frac{\cos 2x}{9-\cos^2 2x}dx$; в) $\int \sin^6 2x\,dx$.

Розв’язання.

б) Застосовуємо універсальну тригонометричну підстановку.

$$\int \frac{dx}{\cos x - 8\sin x} = \begin{vmatrix} tg\,\frac{x}{2} = t,\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 8\frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2+16t-1} = -2\int \frac{dt}{(t+8)^2-65} = \frac{1}{\sqrt{65}}\ln\left|\frac{t+8-\sqrt{65}}{t+8+\sqrt{65}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{65}}\ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+8-\sqrt{65}}{tg\,\frac{x}{2}+8+\sqrt{65}}\right| + C.$$

б) Маємо інтеграл типу $\int R((\sin x)^{2n}, (\cos x)^{2m})\cos x\,dx$. Інтегруємо:

$$\int \frac{\cos 2x}{9-\cos^2 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\sin 2x}{9-(1-\sin^2 2x)} = |\sin 2x = t| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+8} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\ \frac{t}{2\sqrt{2}} + C = \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\ \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}} + C.$$

в) В цьому прикладі застосуємо тригонометричні формули

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\ \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Інтегруємо:

$$= \int sin^6 2x\,dx = \int (sin^2 2x)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3\cos 4x + 3\cos^2 4x - \cos^3 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{3}{4}\sin 4x\right) + \frac{3}{16}\int (1+\cos 8x)dx - \frac{1}{32}\int (1-\sin^2 4x)d(\sin 4x) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{3}{4}\sin 4x\right) + \frac{3}{16}\left(x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) - \frac{1}{32}\left(\sin 4x - \frac{1}{3}\sin^3 4x\right) + C =$$

$$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{3}{128}\sin 8x + \frac{1}{96}\sin^3 4x + C.$$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли.

а) $\int_0^2 x^4 \cdot 2^{x^5} dx$; б) $\int_0^1 (1+2x)e^{3x} dx$; $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

Розв'язання.

а) Застосовуємо метод заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_0^2 x^4 \cdot 2^{x^5} dx = \frac{1}{5}\int_0^2 2^{x^5} dx^5 =$$

$$= |t = x^5,\ x = 0 \Rightarrow t = 0,\ \ x = 2 \Rightarrow t = 32| =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{32} 2^t dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{2^t}{\ln 2}\Big|_0^{32} = \frac{1}{5\ln 2}(2^{32}-1).$$

б) Застосовуємо метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_0^1 (1+2x)e^{3x} dx = \begin{vmatrix} u = 1+2x, & dv = e^{3x}dx \\ du = 2dx, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}(1+2x)e^{3x}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 e^{3x}dx = e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{7}{9}e^3 - \frac{1}{9}.$$

в) Зробимо підстановку у відповідності з правилами інтегрування ірраціональної функції:

$$\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}\right)} = \begin{vmatrix} x = t^6,\ \ dx = 6t^5dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 1,\ \ x = 64 \Rightarrow t = 2 \end{vmatrix} = \int_1^2 \frac{6t^5dt}{t^2(t^3+2t^4)} =$$

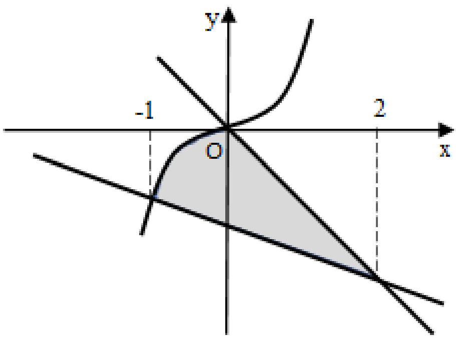
$$= 6\int_1^2 \frac{dt}{2t+1} = \frac{6}{2}\ln|2t+1|\Big|_1^2 = 3(\ln 5 - \ln 3).$$

***Завдання* 8.** Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

а) $y = x^3, \ \ y = -x; \ \ \ y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3};$ б) $\rho = 6\,sin\,3\varphi.$

Розв'язання.

а) Будуємо графіки заданих ліній і визначаємо фігуру, площу якої потрібно знайти. Знайдемо точки перетину ліній. Одна з цих точок є очевидною, це точка O(0;0). Знайдемо дві інші:



$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, \end{cases}$$

$3x^3 + x + 4 = 0,$

$3x^3 + 3 + x + 1 = 0,$

$3(x+1)(x^2 - x + 1) + x + 1 = 0,$

$(x+1)(3x^2 - 3x + 4) = 0,$

$x + 1 = 0, \ \ x_1 = -1,$

$y_1 = -1, 3x^2 - 3x + 4 = 0, \ \ x \in \emptyset;$

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, \end{cases} \ \ -3x + x + 4 = 0, \ \ x = 2, \ \ y = -2.$$

Площу знайдемо за допомогою формули $S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$. Так як зверху фігуру обмежують дві лінії, то розіб'ємо її на дві частині віссю Оу. Обчислюємо площу:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{0}\left(x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx + \int_0^2\left(-x + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)\Big|_0^2 = \frac{11}{12} + \frac{4}{3} = \frac{27}{12}.$$

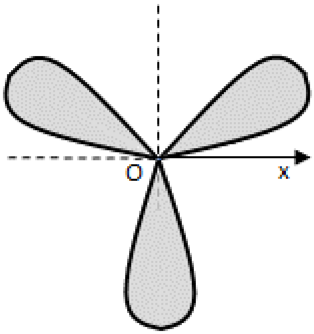
б) Лінія задана в полярних координатах. Так як $\rho \geq 0$, то $sin\,3\varphi \geq 0$. Отже $2k\pi \leq 3\varphi \leq \pi + 2k\pi, \ \ k \in Z; \ \ \frac{2k\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \ \ k \in Z.$ На відрізок $[0; 2\pi]$

попадають наступні інтервали $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$, $\left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$. Знайдемо опорні точки на першому з вказаних інтервалів.

Φ	0	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/18$	$\pi/3$
ρ	0	3	$3\sqrt{2}$	6	$3\sqrt{2}$	3	0

На двох інших інтервалах аналогічно можна знайти потрібну кількість точок. Будуємо криву.

Зауваження. Лінії $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$ складаються з k замкнених кривих.



Враховуючи симетрію можна знайти площу однієї пелюстки і помножити її на 3. Застосовуємо формулу $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$. Маємо (формулу застосовуємо для пелюстки, яка розміщена у перший чверті)

$$S = 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(6\,sin\,3\varphi)^2 d\varphi =$$

$= 27\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)d\varphi = 27\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Big|_0^{\pi/3} = 9\pi.$

Завдання 9. Розв'язати геометричні задачі за допомогою визначених інтегралів.

Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ох дуги кривої $y = 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$.

Розв'язання.

Застосовуємо формулу $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. Можемо записати

$S = 2\pi\int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\left(1/\sqrt{x}\right)^2}dx = 4\pi\int_0^1\sqrt{x}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx =$

$$= 4\pi \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8\pi}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}.$$

***Завдання* 10.** Розв'язати задачі фізики та механіки за допомогою визначених інтегралів.

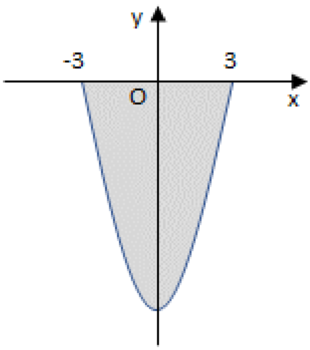
Знайти координати центру ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 9$ і $y = 0$.

Розв'язання.

Будуємо фігуру. Легко бачити, що парабола перетинає вісь Ox в точках $x = -3,\ x = 3$. Так як фігура симетрична відносно осі Oy, то абсциса центру ваги дорівнює нулю. Ординату знайдемо за формулами

$$\tilde{y} = \frac{M_x}{S},\ S = \int_a^b f(x)dx,\ \ M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx,$$

де M_x – статичний момент відносно осі Ox. Знайдемо потрібні величини:



$$S = \int_{-3}^{3}(x^2-9)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 9x\right)\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= -36;$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(x^2-9)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(x^4 - 18x^2 + 81)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - 18\cdot\frac{x^3}{3} + 81x\right)\Big|_{-3}^{3} = 129{,}6;$$

$$\tilde{y} = \frac{129{,}6}{-36} = -3{,}6.$$

***Завдання* 11.** Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються).

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+41}}$; б) $\int_0^{\pi/8} \frac{dx}{1-\cos 4x}$.

Розв'язання.

а) Маємо невласний інтеграл з нескінченими границями (невласний інтеграл першого роду). Можемо записати

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+41}}=\lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+41}}=\lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2+16}}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left(\ln\left|x-5+\sqrt{(x-5)^2+16}\right|\right)\Big|_0^{\beta}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left(\ln\left|\beta-5+\sqrt{(\beta-5)^2+16}\right|-\ln\left|\sqrt{41}-5\right|\right)=\infty.$$

Інтеграл розбігається.

б) В точці $x=0$ знаменник підінтегральної функції також дорівнює нулю. Маємо невласний інтеграли від функції, яка має точки розриву (невласний інтеграл другого роду). Застосувавши відповідну формулу, отримуємо

$$\int_0^{\pi/8}\frac{dx}{1-\cos 4x}=\lim_{\alpha\to 0+0}\int_{\alpha}^{\pi/8}\frac{dx}{1-\cos 4x}=\lim_{\alpha\to 0+0}\int_{\alpha}^{\pi/8}\frac{dx}{2\sin^2 2x}=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0+0}(\cot 2x)\big|_{\alpha}^{\pi/8}=-\frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0+0}(\cot(\pi/4)-\cot 2\alpha)=\infty.$$

Інтеграл розбігається.

***Завдання* 12.** Обчислити наближено довжину дуги кривої $y=Ax^3+Bx^2$, $0\le x\le 2$ (розбити заданий проміжок на 10 частин і значення підінтегральної функції обчислювати з точністю до четвертого знаку після коми): а) за формулою трапецій; б) за формулою Сімпсона.

$A=2,\ \ B=7.$

Розв'язання.

а) Застосовуємо формулу $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. У нашому випадку

$f(x)=2x^3+7x^2;\ \ l=\int_2^7\sqrt{1+(6x^2+14x)^2}dx$. Формула трапецій має вигляд $\int_a^b f(x)dx\approx h\left(\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$, де

$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\dots,y_n=f(x_n);\ \ h=(b-a)/n.$ Знайдемо потрібні величини: $h=(7-2)/10=0{,}5;$

x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	52,0096	72,5069	96,0052	122,5041	152,0033	184,5027

x_i	5	5,5	6	6,5	7
y_i	220,0023	258,5019	300,0017	344,5015	392,0013

Можемо записати

$l = \int_2^7 \sqrt{1+(6x^2+14x)^2}dx \approx 05 \cdot (0{,}5 \cdot (52{,}0096 + 392{,}0013) +$

$+72{,}5069 + 96{,}0052 + 122{,}5041 + 152{,}0033 + 184{,}5027 +$

$+220{,}0023 + 258{,}5019 + 300{,}0017 + 344{,}5015) = 986{,}2685.$

б) Обчислюємо вказаний вище інтеграл за Формулою Сімпсона

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})).$

Використовуючи отримані в підпункті а) значення підінтегральної функції, маємо

$l = \int_2^7 \sqrt{1+(6x^2+14x)^2}dx \approx \frac{1}{6}(52{,}0096 + 392{,}0013 +$

$+4(72{,}5069 + 122{,}5041 + 184{,}5027 + 258{,}5019 + 344{,}5015) +$

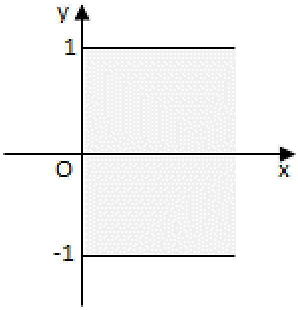
$+2(96{,}0052 + 152{,}0033 + 220{,}0023 + 300{,}0017) = 985{,}0181.$

ІІ. Диференціальне числення функції декількох змінних

Завдання 1. Для даних функцій вказати область визначення та побудувати її на координатній площині.

$z = e^{\sqrt{x}} + arcsin\, y.$

Розв'язання.



Область визначення задається наступною системою

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ |y| \leq 1. \end{cases}$$

На площині Oxy будуємо область, точки якої задовольняють вказаній системі (будуємо прямі $x = 0,\ y = -1,\ y = 1;$ розв'язуємо систему графічним методом).

Завдання 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, диференціал функції dz та похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$z = 2x^4 - 5\sqrt[3]{y^2} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}, \quad x = t^5 + 2^t, \quad y = cos^3\, t - \sqrt{t}.$$

Розв'язання.

Шукаємо похідну по x (вважаємо, що величина x змінна, а y стала):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x^3 - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}}.$$

Шукаємо похідну по y (вважаємо, що величина y змінна, а x стала):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{10}{3}y^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}}.$$

Диференціал функції визначаємо за формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Маємо

$$dz = \left(8x^3 - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}}\right)dx + \left(\frac{10}{3}y^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}}\right)dy.$$

Звичайну похідну $\frac{dz}{dt}$ знаходимо за допомогою формули $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = \left(8x^3 - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}}\right)(5t^4 + 2^t \ln 2) +$$

$$+\left(\frac{10}{3}y^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(-3\, cos^2\, t \sin t - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right).$$

Завдання 3. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції z за вказаних значень аргументів x та y.

$z = arctg(\,18 - y^3 - x^2);$ $\qquad x = 3{,}03;$ $\qquad y = 2{,}04.$

Розв'язання.

Застосовуємо формулу

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Нехай $x_0 = 3,\ y_0 = 2$. Тоді

$\Delta x = x - x_0 = 3{,}03 - 3 = 0{,}03;\ \ \Delta y = y - y_0 = 2{,}04 - 2 = 0{,}04.$

Обчислюємо потрібні величини:

$f(x_0, y_0) = f(3; 2) = arctg(\,18 - 2^3 - 3^2) = arctg\,1 = \pi/4;$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{-2x}{1+(18-y^3-x^2)^2},\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(3;2)}{\partial x} = -3;$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-3y^2}{1+(18-y^3-x^2)^2},\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(3;2)}{\partial x} = -6.$

Можемо записати

$f(3{,}03; 2{,}04) \approx \frac{\pi}{4} - 3\cdot 0{,}03 - 6\cdot 0{,}04 = \frac{\pi}{4} - 0{,}33.$

Завдання 4. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $M(x_0, y_0)$ й вектор $\vec{a}$. Знайти: 1) похідну в точці M за напрямом вектора $\vec{a}$; 2) градієнт функції z в точці M; 3) похідну за напрямом $grad\,z$ в точці M.

$z = 2y^3 + 3y^2 - xy + x - y,$ $\qquad M(-2; 1),$ $\qquad \vec{a}(3; -1).$

Розв'язання.

а) Похідна функції $z = f(x, y)$ в точці М у напрямі вектора $\vec{a}$ визначається за формулою

$$\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M cos\,\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M cos\,\beta,$$

де $cos\,\alpha, cos\,\beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$. Знайдемо потрібні величини:

$\frac{\partial z}{\partial x} = -y + 1;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 + 6y - x - 1;\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 0;\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 13;$

$cos\,\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{10}};\ \ cos\,\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{-1}{\sqrt{10}}.$

Знаходимо шукану похідну:

$\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_M = 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 13 \cdot \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{13}{\sqrt{10}}.$

б) Градієнт функції двох змінних визначається рівністю $grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{\jmath}.$

У нашому випадку маємо

$grad\, z = (-y+1)\vec{\imath} + (6y^2 + 6y - x - 1)\vec{\jmath};\ \ (grad\, z)_{\text{M}} = 13\vec{\jmath}.$

в) Якщо $\vec{l} = grad\, z$, то $\frac{\partial z}{\partial l} = |grad\, z|$. Можемо записати

$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M = (|grad\, z|)_M = 13.$

Завдання 5. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, якщо:

$$u = \frac{1}{6}x^3 - y\sin x\,; v = \frac{1}{2}y^2\cos x - \frac{x}{1+y^2}; w = y - \frac{1}{2}xy^2 - arcctg\, y.$$

Розв'язання.

Знайдемо потрібні похідні:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2 - y\cos x,\ \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{1+y^2},\ \frac{\partial w}{\partial y} = 1 - xy + \frac{1}{1+y^2};$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + y\sin x;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -y\sin x + \frac{2y}{(1+y^2)^2};\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -x - \frac{2y}{(1+y^2)^2}.$

Можемо записати

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x + y\sin x - y\sin x + \frac{2y}{(1+y^2)^2} - x - \frac{2y}{(1+y^2)^2} = 0.$

Завдання 6. Дослідити функції на екстремум:

$z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 16x - 2y.$

Розв'язання.

Знаходимо критичні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 2y - 16 = 0, \\ 2x + 4y - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y - 8 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$$

Перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму у знайденій точці:

$f''_{xx}(x,y) = 6,\ \ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2,\ \ f''_{yy}(x,y) = 4;$

$f''_{xx}(3;-1) = 6,\ \ f''_{xy}(3;-1) = f''_{yx}(3;-1) = 2,\ \ f''_{yy}(3;-1) = 4;$

$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20.$

Так як $\Delta > 0$ і $f''_{xx}(3;-1) > 0$, то в точці $M(3;-1)$ задана функція має локальний мінімум.

Завдання *7*. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x,y)$ в області D, яка обмежена осями координат та вказаною прямою.

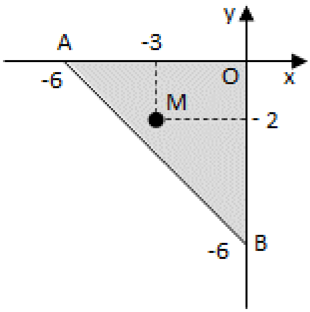
$z = x^2 - 2xy + 2x - 6y;$ $\qquad\qquad y = -6 - x.$

Розв'язання.

Функція набуває найбільшого та найменшого значення в критичних точках, які належать області або на межі цієї області. Знаходимо критичні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 2y + 2 = 0, \\ -2x - 6 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Точка M(-3;-2) належить області D. Обчислюємо значення функції у цій точці $f(-3;-2) = 9 - 12 - 6 + 12 = 3$. Досліджуємо далі функцію на межі області, тобто на відрізках AO, OB і AB (див. рис.).



Розглянемо спочатку відрізок AO:

$y = 0, \ \ -6 \le x \le 0;$

$f_1(x) = x^2 - 2x \cdot 0 + 2x - 6 \cdot 0 = x^2 + 2x.$

Знаходимо критичні точки функції однієї змінної $f_1(x)$ та обчислюємо її значення в критичних точках, які попали на відрізок [-6;0] і на кінцях відрізку:

$f_1'(x) = 2x + 2,\ \ 2x + 2 = 0,\ \ x = -1;\ \ f_1(-1) = f(-1;0) = -1,$

$f_1(-6) = f(-6;0) = 24,\ \ f_1(0) = f(0;0) = 0.$

Відрізок OB:

$x = 0, \quad -6 \leq y \leq 0;\;\; f_2(y) = 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot y + 2 \cdot 0 - 6y = -6y;$

$f_2'(y) = -6 \neq 0;\;\; f_2(-6) = f(0; -6) = 36.$

Відрізок AB:

$y = -6 - x,\;\; -6 \leq x \leq 0;\;\; f_3(x) = x^2 - 2x(-6 - x) + 2x - 6(-6 - x) =$

$= 3x^2 + 20x + 36;\;\;\; f_3'(x) = 6x + 20,\;\; 6x + 20 = 0,\;\; x = -10/3\,;$

$f_3\left(-\frac{10}{3}\right) = f\left(-\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}.$

Визначаємо найбільше та найменше значення функції: $z_{\text{найм}} = -1,\;\; z_{\text{нйб}} = 36.$

Завдання 8. З досліду між величинами *x* та *y* була встановлена залежність, яка наведена в таблиці. За допомогою методу найменших квадратів визначити лінійну функцію *y=ax+b*. На координатній площині *Oxy* відмітити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму.

№ вар.	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5
-	-2	3	-1	1	1	-3	1	-1	2	-3

Розв'язання.

Система для визначення невідомих параметрів *a* і *b* має вигляд

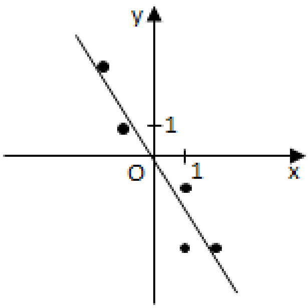
$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Знайдемо потрібні величини:

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 11,$

$\sum_{i=1}^{5} x_i = -2 - 1 + 1 + 1 + 2 = 1,$

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = -2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -17,$



$\sum_{i=1}^{5} y_i = 3 + 1 - 3 - 1 - 3 = -3.$

Записуємо систему та розв'язуємо її:

$\begin{cases} 11a + b = -17, \\ a + 5b = -3, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -41/27 \approx -1{,}52 \\ b = -8/27 \approx -0{,}3. \end{cases}$

Шукана пряма має вигляд $y = -1{,}52x - 0{,}3.$ Будуємо знайдену пряму та відмічаємо задані точки.

III. Диференціальні рівняння

Завдання 1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку.

а) $(y+1)dx = \frac{x^2+4x+20}{ln(y+1)}dy$;

б) $y' = \frac{x(\sqrt{x}-3)\,cos^2\,y^5}{5y^4}$;

в) $xy' = 3x\,sec\,\frac{y}{x}\,sin^4\frac{y}{x} + y$;

г) $y' = \frac{x+y+8}{3x+3y+1}$;

д) $y' = \frac{x+2y-1}{x+4y+3}$;

е) $y' - 5x^4y = e^{x^5}\,sin\,x\,cos^3\,x.$

Розв'язання.

а) Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Ділимо його на добуток $(y+1)(x^2+4x+20)$ і інтегруємо:

$\frac{dx}{x^2+4x+20} = \frac{dy}{(y+1)\,ln(y+1)}$, $\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dy}{(y+1)\,ln(y+1)}$;

$\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+16} = \frac{1}{4} arctg\,\frac{x+2}{4} + C,$

$\int \frac{dy}{(y+1)\,ln(y+1)} = \int \frac{d\,ln(y+1)}{ln(y+1)} = \ln|ln(y+1)| + C.$

Записуємо розв'язок (загальний інтеграл)

$\frac{1}{4} arctg\,\frac{x+2}{4} = \ln|ln(y+1)| + C.$

б) Замінюємо y' на $\frac{dy}{dx}$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x(\sqrt{x}-3)\,cos^2\,y^5}{5y^4}.$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Примножуємо його на дріб $\frac{5y^4dx}{cos^2 y^5}$ та інтегруємо:

$\frac{5y^4dy}{cos^2 y^5} = x(\sqrt{x} - 3)dx, \quad \int \frac{5y^4dy}{cos^2 y^5} = \int x(\sqrt{x} - 3)dx;$

$\int \frac{5y^4dy}{cos^2 y^5} = \int \frac{dy^5}{cos^2 y^5} = |y^5 = t| = \int \frac{dt}{cos^2 t} = \tan t + C = \tan y^5 + C,$

$\int x(\sqrt{x} - 3)dx = \int x\left(x^{\frac{1}{2}} - 3\right)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^2 + C.$

Отримуємо

$\tan y^5 = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^2 + C.$

в) Розв'язуємо рівняння відносно y' (ділимо на x):

$y' = 3\,sec\frac{y}{x}sin^4\frac{y}{x} + \frac{y}{x}.$

Покажемо, що дане рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку:

$f(x, y) = 3\,sec\frac{y}{x}sin^4\frac{y}{x} + \frac{y}{x}; \quad f(\lambda x, \lambda y) = 3\,sec\frac{\lambda y}{\lambda x}sin^4\frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{\lambda y}{\lambda x} =$

$= 3\,sec\frac{y}{x}sin^4\frac{y}{x} + \frac{y}{x} = f(x, y).$

Зробимо підстановку $y = ux,\ y' = u'x + u$. Отримуємо

$u'x + u = 3\,sec\frac{ux}{x}sin^4\frac{ux}{x} + \frac{ux}{x}, \quad \frac{du}{dx} = 3\,sec\,u\,sin^4 u.$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо (нагадаємо, що $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$):

$\int \frac{\cos u du}{\sin^4 u} = \int dx\,, \ \int \frac{d\sin u}{\sin^4 u} = \int dx\,, \ -\frac{1}{3}\sin^{-3} u = x + C, \ -\frac{1}{3}\sin^{-3}\frac{y}{x} = x + C.$

г) Так як коефіцієнти при x і y чисельника і знаменника дробу правої частини пропорційні, то зробимо підстановку $z = x + y,\ z' = 1 + y',\ y' = 1 - z'$:

$1 - z' = \frac{z+8}{3z+1},\ z' = 1 - \frac{z+8}{3z+1}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z-7}{3z+1}\ .$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$\int \frac{3z+1}{2z-7}dz = \int dx, \quad \int \left(\frac{3}{2} + \frac{23}{2(2z-7)}\right)dz = \int dx, \quad \frac{3}{2}z + \frac{23}{4}\ln|2z - 7| = x + C,$

$\frac{3}{2}(x + y) + \frac{23}{4}\ln|2(x + y) - 7| = x + C.$

д) Коефіцієнти при x і y чисельника і знаменника дробу правої частини не пропорційні. Маємо рівняння, яке зводиться до однорідного за допомогою підстановки $x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k$. Складаємо систему для визначення величин h І k та розв'язуємо її:

$$\begin{cases} h + 2k - 1 = 0, \\ h + 4k + 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} k = -2, \\ h = 5. \end{cases}$$

Робимо підстановку $x = x_1 + 5,\ y = y_1 - 2,\ y' = y_1' = dy_1/dx_1$ та інтегруємо отримане однорідне диференціальне рівняння:

$$y_1' = \frac{x_1+5+2(y_1-2)-1}{x_1+5+4(y_1-2)+3},\ y_1' = \frac{x_1+2y_1}{x_1+4y_1};$$

$$y_1 = ux_1,\ y_1' = u'x_1 + u; \quad u'x_1 + u = \frac{x_1+2ux_1}{x_1+4ux_1}, \quad x_1\frac{du}{dx_1} = -\frac{4u^2-u-1}{4u+1},$$

$$-\frac{4u+1}{4u^2-u-1}du = \frac{dx_1}{x_1}; \quad \int \frac{4u+1}{4u^2-u-1}du = \int \frac{\frac{1}{2}(8u-1)+\frac{1}{2}+1}{4u^2-u-1}du = \frac{1}{2}\int \frac{(8u-1)}{4u^2-u-1}du +$$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{du}{4u^2-u-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(4u^2-u-1)}{4u^2-u-1} + \frac{3}{8}\int \frac{du}{\left(u-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|4u^2 - u - 1| + \frac{3}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{8u-1-\sqrt{17}}{8u-1+\sqrt{17}}\right| + C;$$

$$-\frac{1}{2}\ln|4u^2 - u - 1| - \frac{3}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{8u-1-\sqrt{17}}{8u-1+\sqrt{17}}\right| = \ln|x_1| + C,$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|4\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - \frac{y_1}{x_1} - 1\right| - \frac{3}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{8\frac{y_1}{x_1}-1-\sqrt{17}}{8\frac{y_1}{x_1}-1+\sqrt{17}}\right| = \ln|x_1| + C,$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|4\left(\frac{y+2}{x-5}\right)^2 - \frac{y+2}{x-5} - 1\right| - \frac{3}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{8\frac{y+2}{x-5}-1-\sqrt{17}}{8\frac{y+2}{x-5}-1+\sqrt{17}}\right| = \ln|x - 5| + C.$$

е) Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке записане в стандартній формі $y' + P(x)y = Q(x)$. У нашому випадку $P(x) = -5x^4$, $Q(x) = e^{x^5} sin\, x\, cos^3\, x$. Розв'язок шукаємо за формулою

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Знайдемо потрібні інтеграли:

$$\int P(x)dx = \int -5x^4dx = -x^5 + C;$$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int e^{x^5} sin\, x\, cos^3 x \cdot e^{-x^5}dx =$

$= -\int cos^3 x\, d\cos x = -\frac{1}{4}cos^4 x + C.$

Отримали наступний розв'язок

$y = e^{x^5}\left(-\frac{1}{4}cos^4 x + C\right).$

Завдання 2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків за допомогою зниження порядку.

а) $y''' = \frac{1}{4}x\, cos\frac{1}{2}x + 12$; б) $(y^5 - 2y^2)y'' = (4y - 5y^4)y'^2$.

Розв'язання.

а) Маємо рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$. Інтегруємо:

$y'' = \int\left(\frac{1}{4}x\, cos\frac{1}{2}x + 12\right)dx = \frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x + C_1,$

$y' = \int\left(\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x + C_1\right)dx = -x\cos\frac{1}{2}x + 4\sin\frac{1}{2}x + C_1x + C_2,$

$y = \int\left(-x\cos\frac{1}{2}x + 4\sin\frac{1}{2}x + C_1x + C_2\right)dx =$

$= -2x\sin\frac{1}{2}x - 12\cos\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$

б) Маємо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно змінну *x*. Зробимо підстановку $y' = p,\ \ p = p(y),\ \ y'' = p\frac{dp}{dy}$ та інтегруємо:

$(y^5 - 2y^2)p\frac{dp}{dy} = (4y - 5y^4)p^2,\ \ \int\frac{dp}{p} = \int\frac{(4y-5y^4)dy}{y^5-2y^2},\ \ \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{d(y^5-2y^2)}{y^5-2y^2},$

$\ln|p| = -\ln|y^5 - 2y^2| + \ln|C_1|,\ \ p = \frac{C_1}{y^5-2y^2},\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y^5-2y^2},$

$\int(y^5 - 2y^2)\,dy = \int C_1dx,\ \ \frac{1}{6}y^6 - \frac{2}{3}y^3 = C_1x + C_2.$

Завдання 3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

а) $y'' - 2y' - 35y = 25xe^{-5x}$; б) $y'' - y' - 42y = 16e^{-4x} sin\, 2\, x.$

Розв'язання.

а) Маємо лінійне неоднорідне диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = \tilde{y} + y^*$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\tilde{y}$:

$y'' - 2y' - 35y = 0;\ \ k^2 - 2k - 35 = 0,\ k_1 = -5,\ k_2 = 7;$

$\tilde{y} = C_1e^{-5x} + C_2e^{7x}.$

Шукаємо далі частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння Права частина має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$. У нашому випадку $n = 1$,

$P_1(x) = 25x,\ \alpha = -5.$ Частинний розв'язок шукаємо у формі $y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}$ Так як число $\alpha = -5$ є однократним коренем характеристичного рівняння, то $r = 1$. Отже $y^* = x(Ax + B)e^{-5x} = (Ax^2 + Bx)e^{-5x}$. Знаходимо похідні $y^{*\prime},\ y^{*\prime\prime}$ і підставляємо $y^*,\ y^{*\prime},\ y^{*\prime\prime}$ в задане неоднорідне рівняння:

$y^{*\prime} = (-5Ax^2 + 2ax - 5Bx + B)e^{-5x},$

$y^{*\prime\prime} = (25Ax^2 - 20Ax + 25Bx + 2A - 10B)e^{-5x};$

$(25Ax^2 - 20Ax + 25Bx + 2A - 10B)e^{-5x} -$

$-2(-5Ax^2 + 2ax - 5Bx + B)e^{-5x} - 35(Ax^2 + Bx)e^{-5x} = 25xe^{-5x},$

$-24Ax + 2A - 12B = 25x.$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях *x* правої і лівої частин та визначаємо шукані коефіцієнти *A* і *B*:

$$\begin{cases} x \\ x^0 \end{cases}\!\!\left|\begin{array}{l} -24A = 25, \\ 2A - 12B = 0, \end{array}\right. \quad \begin{cases} A = -25/24 \\ B = -25/144. \end{cases}$$

Записуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y^* = x\left(-\frac{25}{24}x - \frac{25}{144}\right)e^{-5x}.$$

Записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_1e^{-5x} + C_2e^{7x} - x\left(\frac{25}{24}x + \frac{25}{144}\right)e^{-5x}.$$

б) Аналогічно попередньому розв'язок шукаємо у вигляді $y = \tilde{y} + y^*$. Шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$y'' - y' - 42y = 0; \quad k^2 - k - 42 = 0, \; k_1 = -6, \; k_2 = 7;$

$\tilde{y} = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{7x}.$

Права частина заданого неоднорідного рівняння має вигляд

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$, при чому $\alpha = -4, \; \beta = 2,$

$P_0(x) = 0, \; Q_0(x) = 16$ Частинний розв'язок y^* шукаємо у формі

$y^* = x^r e^{\alpha x}(U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x)$. Так як комплексі числа

$\alpha \pm \beta i = -4 \pm 2i$ не є коренями характеристичного рівняння то $r = 0$.

Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$y^* = e^{-4x}(A \sin 2x + B \cos 2x),$

$y^{*\prime} = e^{-4x}((-4A - 2B) \sin 2x + (2A - 4B) \cos 2x),$

$y^{*\prime\prime} = e^{-4x}((12A + 16B) \sin 2x + (-16A + 12B) \cos 2x);$

$e^{-4x}\big((12A + 16B) \sin 2x + (-16A + 12B) \cos 2x\big) -$

$-e^{-4x}\big((-4A - 2B) \sin 2x + (2A - 4B) \cos 2x\big) -$

$-42e^{-4x}(A \sin 2x + B \cos 2x) = 16e^{-4x} \sin 2x,$

$(-26A + 18B) \sin 2x + (-18A - 26B)B \cos 2x = 16 \sin 2x,$

$\begin{cases} -26A + 18B = 16, \\ -18A - 26B = 0, \end{cases} \begin{cases} -13A + 9B = 8, \\ 9A + 13B = 0, \end{cases} \begin{cases} A = -52/125, \\ B = 36/125; \end{cases}$

$y^* = e^{-4x}\left(-\frac{52}{125} \sin 2x + \frac{36}{125} \cos 2x\right).$

Записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{7x} + e^{-4x}\left(-\frac{52}{125} \sin 2x + \frac{36}{125} \cos 2x\right).$

$$y = \tilde{y} + y^*$$

Завдання 4. Розв'язати задачу Коші.

а) $y' = \frac{x^5(\cos^2 y - 9) \ln x}{\sin y}, \quad y(1) = \pi/2;$

б) $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 9, \quad y'(0) = -7, \quad y(0) = -1.$

Розв'язання.

а) Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^5(cos^2 y-9)\,ln\,x}{sin\,y}$, $\int \frac{sin\,y dy}{cos^2 y-9} = \int x^5\,ln\,x\,dx$;

$\int \frac{sin\,y dy}{cos^2 y-9} = -\int \frac{d\cos y}{cos^2 y-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\cos y-3}{\cos y+3}\right| + C$,

$\int x^5\,ln\,x\,dx = \begin{vmatrix} u = ln\,x, & dv = x^5 dx \\ du = dx/x, & v = x^6/6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}x^6\,ln\,x - \frac{1}{36}x^6 + C$,

$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\cos y-3}{\cos y+3}\right| = \frac{1}{6}x^6\,ln\,x - \frac{1}{36}x^6 + C.$

Використовуючи початкові умови визначаємо значення довільної сталої С та записуємо частинний розв'язок:

$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\cos\pi/2-3}{\cos\pi/2+3}\right| = \frac{1}{6}1^6\,ln\,1 - \frac{1}{36}1^6 + C$, $C = \frac{1}{36}$,

$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\cos y-3}{\cos y+3}\right| = \frac{1}{6}x^6\,ln\,x - \frac{1}{36}x^6 + \frac{1}{36}.$

б) Маємо лінійне неоднорідне диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Розв'язуємо за стандартною схемою (див. завд. 3):

$y = \tilde{y} + y^*$, $y'' - 2y' + 10y = 0$, $k^2 - 2k + 10 = 0$,

$k_{1,2} = 1 \pm 3i$, $\tilde{y} = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$;

$y^* = Ax^2 + Bx + C$, $y^{*\prime} = 2Ax + B$, $y^{*\prime\prime} = 2A$;

$2A - 2(2Ax + B) + 10(Ax^2 + Bx + C) = 20x^2 + 9$,

$10Ax^2 + (-4A + 10B)x + 2A - 2B + 10C = 20x^2 + 9$,

$$\left\{\begin{array}{c|c} x^2 & 10A = 20, \\ x & -4A + 10B = 0, \\ x^0 & 2A - 2B + 10C = 9, \end{array}\right. \quad \begin{cases} A = 2, \\ B = 4/5, \\ C = 33/50; \end{cases}$$

$y^* = 2x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{33}{50}$; $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + 2x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{33}{50}.$

Використовуючи початкові умови визначаємо значення довільних сталих C_1, C_2 (попередньо потрібно знайти похідну) та записуємо частинний розв'язок:

$y' = e^x\big((C_1 + 3C_2)\cos 3x + (-3C_1 + C_2)\sin 3x\big) + 4x + \frac{4}{5}$,

$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 + 4/5 = -7, \\ C_1 + 33/50 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -83/50, \\ C_2 = -307/150; \end{cases}$$

$y = e^x\left(-\frac{83}{50}\cos 3x - \frac{307}{150}\sin 3x\right) + 2x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{33}{50}.$

Завдання 5. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{61}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 8y. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо дану систему до одного диференціального рівняння другого порядку. Диференціюємо перше рівняння: $\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - \frac{61}{2}\frac{dy}{dt}$. Похідну $\frac{dy}{dt}$ замінюємо правою частиною другого рівняння системи: $\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - \frac{61}{2}(2x - 8y)$. Розв'язуємо перше рівняння системи відносно y і підставляємо його в попереднє рівняння:

$$y = \frac{8}{61}x - \frac{2}{61}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - \frac{61}{2}\left(2x - 8\left(\frac{8}{61}x - \frac{2}{61}\frac{dx}{dt}\right)\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 29x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язуємо його:

$$k^2 + 4k + 29 = 0, \quad k_{1,2} = -2 \pm 5i; \quad x = e^{-2t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t).$$

Визначаємо функцію y:

$$y = \frac{8}{61}x - \frac{2}{61}\frac{dx}{dt} = \frac{8}{61}e^{-2t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t) -$$

$$-\frac{2}{61}e^{-2t}((-2C_1 + 5C_2)\cos 5t - (5C_1 + 2C_2)\sin 5t) =$$

$$= \frac{2}{61}e^{-2t}((6C_1 - 5C_2)\cos 5t + (5C_1 + 6C_2)\sin 5t).$$

Отримали наступний розв'язок

$$\begin{cases} x = e^{-2t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t), \\ y = \frac{2}{61}e^{-2t}((6C_1 - 5C_2)\cos 5t + (5C_1 + 6C_2)\sin 5t). \end{cases}$$

Завдання 6. Розв'язати задачу.

Футбольний м'яч вагою 0,4 кГ кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,48 Н при швидкості 1 м/с. Обчислити час підйому м'яча і найбільшу висоту підйому.

Розв'язання. Застосовуємо другий закон Ньютона $F = ma$. Сила тяжіння $F_1 = -mg$ і сила опору повітря $F_2 = -kv^2$ напрямлені проти руху м'яча, отже маємо $ma = -mg - kv^2$ або $m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$. Використовуючи умови задачі визначаємо значення коефіцієнта k: $0{,}48 = k \cdot 1$; $k = 0{,}48$. Підставивши числові значення отримуємо наступне диференціальне рівняння $0{,}4\frac{dv}{dt} = -0{,}4 \cdot 9{,}8 - 0{,}48v^2$. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. можемо записати $0{,}833\frac{dv}{v^2+8{,}167} = -dt$. Інтегруємо та визначаємо значення довільної сталої (за умовою $v(0) = 20$):

$0{,}833\int\frac{dv}{v^2+8{,}167} = -\int dt$; $\frac{0{,}833}{\sqrt{8{,}167}}arctg\,\frac{v}{\sqrt{8{,}167}} = -t + C$;

$0{,}291arctg\ 0{,}35v = -t + C$; $C = 0{,}291arctg\ 7 = 0{,}416$;

$0{,}291arctg\ 0{,}35v = -t + 0{,}416$; $v = 2{,}857tg\ (1{,}43 - 3{,}436t)$.

Обчислюємо час підйому на найбільшу висоту (на найбільшій висоті швидкість дорівнює нулю):

$2{,}857tg\ (1{,}43 - 3{,}436t) = 0$, $1{,}43 - 3{,}436t = 0$; $t = 0{,}416\ (c)$.

Так як, $v = ds/dt$, то можемо записати

$\frac{ds}{dt} = 2{,}857tg\ (1{,}43 - 3{,}436t)$; $ds = 2{,}857tg\ (1{,}43 - 3{,}436t)dt$.

Інтегруємо та визначаємо довільну сталу ($s(0) = 0$):

$s = \frac{2{,}857}{3{,}436}\ln|\cos(1{,}43 - 3{,}436t)| + C$; $C = -0{,}831\ln|\cos 1{,}43|$;

$s = 0{,}831(\ln|\cos(1{,}43 - 3{,}436t)| - \ln|\cos 1{,}43|)$.

Обчислюємо найбільшу висоту підйому:

$s(0{,}416) = 0{,}831(\ln|\cos(1{,}43 - 3{,}436 \cdot 0{,}416)| - \ln|\cos 1{,}43|) = 1{,}632$ (м).

IV. Кратні та криволінійні інтеграли

Завдання 1. Обчислити подвійний інтеграл двома способами: а) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній y, а зовнішній - по x; б) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній x, а зовнішній - по y.

Приклад 1. $\iint_G (4xy - 3y^2)dxdy$; G:$y = x^2,\ y = -2x + 8,\ y = 0$.

Розв'язання. а) Будуємо спочатку область інтегрування, тобто область, яка обмежена заданими лініями (рис. 1). Знайдемо координати точки перетину прямої і параболи (координати точки M). Шукані координати є розв'язком системи

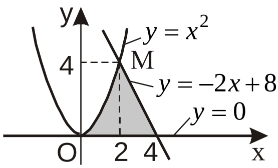


Рис. 1

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2x + 8. \end{cases}$$

Прирівнявши праві частини, отримуємо квадратне рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$. Нагадаємо, що корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ визначаються за формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

У нашому випадку $x_1 = 2,\ x_2 = -4$. Очевидно, що абсцисою точки M є перший корінь. Підставивши $x = 2$ в одне з рівнянь системи, дістаємо $y = 4$.

У відповідності з умовою потрібно застосувати формулу

$$\iint_G f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Оскільки область інтегрування G обмежена зверху двома лініями, то розбиваємо її на дві частині вертикальною прямою, яка проходить через точку перетину M. Ліву частину позначимо через G_1, а праву – через G_2. Можемо записати

$$\iint_G (4xy-3y^2)dxdy = \iint_{G_1}(4xy-3y^2)dxdy + \iint_{G_2}(4xy-3y^2)dxdy.$$

Обчислюємо спочатку інтеграл по G_1. Знизу і зверху вказану область відповідно обмежують вісь Ох (пряма $y = 0$) і парабола $y = x^2$, отже внутрішній інтеграл береться від 0 до x^2. Найменше і найбільше значення величини x в області G_1 визначають межі інтегрування у зовнішньому інтегралі.

Переходимо до двократного інтеграла і розставляємо межі інтегрування:

$$\iint_{G_1}(4xy-3y^2)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2}(4xy-3y^2)dy.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл (величина x вважається сталою):

$$\int_0^{x^2}(4xy-3y^2)dy = (2xy^2-y^3)\big|_0^{x^2} = 2x\cdot x^4 - x^6 = 2x^5 - x^6.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_0^2 (2x^5-x^6)dx = \left(2\cdot\frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{64}{21}.$$

Обчислюємо інтеграл по G_2:

$$\iint_{G_2}(4xy-3y^2)dxdy = \int_2^4 dx \int_0^{-2x+8}(4xy-3y^2)dy;$$

$$\int_0^{-2x+8}(4xy-3y^2)dy = (2xy^2-y^3)\big|_0^{-2x+8} = 2x(8-2x)^2 - (8-2x)^3 =$$

$$= 128x - 64x^2 + 8x^3 - (8-2x)^3;$$

$$\int_2^4 (128x - 64x^2 + 8x^3 - (8-2x)^3)dx =$$

$$= \left(64x^2 - \frac{64}{3}\cdot x^3 + 2x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(8-2x)^4}{4}\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= 1024 - \frac{4096}{3} + 512 - \left(256 - \frac{512}{3} + 32 + 32\right) = \frac{64}{3}.$$

Можемо записати

$$\iint_G (4xy-3y^2)dxdy = \frac{64}{21} + \frac{64}{3} = \frac{512}{21}.$$

б) Застосовуємо формулу

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Нижню і верхню межі інтегрування у внутрішньому інтегралі визначають лінії, які обмежують область G зліва і справа відповідно. Рівняння вказаних ліній необхідно представити у вигляді $x = \psi(y)$, тобто розв'язати їх відносно x. Межі інтегрування у зовнішньому інтегралі визначають найменше і найбільше значення величини y в області G.

Переходимо до двократного інтеграла і розставляємо межі інтегрування:

$$\iint_G (4xy - 3y^2)dxdy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} (4xy - 3y^2)dx.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл (величина y вважається сталою):

$$\int_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} (4xy - 3y^2)dx = (2yx^2 - 3y^2x)\Big|_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} = 2y(4 - \tfrac{1}{2}y)^2 - 3y^2(4 - \tfrac{1}{2}y) -$$

$$-(2y \cdot y - 3y^2\sqrt{y}) = 2y^3 - 22y^2 + 32y + 3y^{5/2}.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_0^4 (2y^3 - 22y^2 + 32y + 3y^{5/2})dy = \left(\frac{1}{2}y^4 - \frac{22}{3}y^3 + 16y^2 + \frac{6}{7}y^{7/20}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 128 - \frac{22}{3} \cdot 64 + 16 \cdot 16 + \frac{6}{7} \cdot 4^{7/2} = \frac{512}{21}.$$

Як бачимо, результати співпали.

Приклад 2. $\iint_G (2x^2y + x)dxdy$; G: $y = \frac{3}{x}$, $y = 3x$, $x = 3$.

Розв'язання. а) Будуємо область інтегрування G , (рис. 2). Для визначення координат точок перетину A, B, C складаємо відповідні системи:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ x = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, дістаємо: A(1;3), B(3;9), C(3;1).

Переходимо від подвійного до двократного інтеграла та розставляємо межі інтегрування:

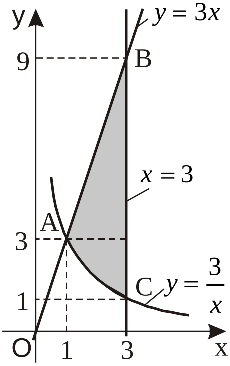


Рис. 2

$$\iint_G (2x^2y + x)dxdy = \int_1^3 dx \int_{3/x}^{3x} (2x^2y + x)dy.$$

Обчислюємо послідовно внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\int_{3/x}^{3x} (2x^2y + x)dy = (x^2y^2 + xy)\Big|_{\frac{3}{x}}^{3x} = 9x^4 + 3x^2 - 12;$$

$$\int_1^3 (9x^4 + 3x^2 - 12)dx = \left(\frac{9}{5}x^5 + x^3 - 12x\right)\Big|_1^3 =$$

$$= 1{,}8 \cdot 243 + 27 - 36 - (1{,}8 + 1 - 12) = 437{,}6.$$

б) Так як область G обмежена зліва двома лініями, то розбиваємо її на дві частині горизонтальною прямою, яка проходить через точку перетину А. Нижню частину позначимо через G_1, а верхню – через G_2. Можемо записати

$$\iint_G (2x^2y + x)dxdy = \iint_{G_1} (2x^2y + x)dxdy + \iint_{G_2} (2x^2y + x)dxdy.$$

Обчислюємо послідовно інтеграли правої частини:

$$\iint_{G_1} (2x^2y + x)dxdy = \int_1^3 dy \int_{3/y}^{3} (2x^2y + x)dx,$$

$$\int_{3/y}^{3} (2x^2y + x)dx = \left(\frac{2}{3}yx^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\frac{3}{y}}^{3} = \frac{2}{3} \cdot y \cdot 27 + \frac{1}{2} \cdot 9 -$$

$$-\left(\frac{2}{3} \cdot y \cdot \frac{27}{y^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{y^2}\right) = 18y - \frac{45}{2y^2} + \frac{9}{2},$$

$$\int_1^3 \left(18y - \frac{45}{2y^2} + \frac{9}{2}\right) dy = \left(9y^2 + \frac{45}{2y} + \frac{9}{2}y\right)\Big|_1^3 =$$

$$= 9 \cdot 9 + \frac{45}{2 \cdot 3} + \frac{9}{2} \cdot 3 - \left(9 + \frac{45}{2} + \frac{9}{2}\right) = 66;$$

$$\iint_{G_2} (2x^2y + x)dxdy = \int_3^9 dy \int_{y/3}^{3} (2x^2y + x)dx,$$

$$\int_{y/3}^{3} (2x^2y + x)dx = \left(\frac{2}{3}yx^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\frac{y}{3}}^{3} = 18y + \frac{9}{2} - \frac{2}{81}y^4 - \frac{1}{18}y^2,$$

$$\int_3^9 \left(18y + \frac{9}{2} - \frac{2}{81}y^4 - \frac{1}{18}y^2\right) dy = \left(9y^2 + \frac{9}{2}y - \frac{2}{81 \cdot 5}y^5 - \frac{1}{18 \cdot 3}y^3\right)\Big|_3^9 =$$

$= 729 + \frac{81}{2} - \frac{2}{9^2 \cdot 5} \cdot 9^5 - \frac{1}{6 \cdot 9} \cdot 9^3 - \left(81 + \frac{27}{2} - \frac{2}{3^4 \cdot 5} \cdot 3^5 - \frac{1}{2 \cdot 3^3} \cdot 3^3\right) = 371{,}6.$

У підсумку отримуємо

$\iint_G (2x^2y + x)dxdy = 66 + 371{,}6 = 437{,}6.$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат.

Приклад 1. $\iint_G \left(3\sqrt{x^2+y^2} + 4\right)dxdy; \quad G\colon\ x^2 + y^2 \le 4,\ y \le 0.$

Розв'язання. Будуємо лінії $x^2 + y^2 = 4,\ y = 0$ та визначаємо область інтегрування (рис. 3). Нагадаємо, що зв'язок між декартовими та полярними координатами задається співвідношеннями $x = \rho\cos\phi\,, \quad y = \rho\sin\phi.$

Запишемо рівняння заданого кола в полярних координатах:

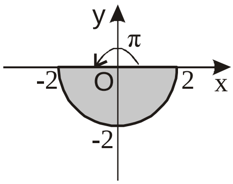


Рис. 3

$(\rho\cos\phi)^2 + (\rho\sin\phi)^2 = 4,$

$\rho^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 4, \quad \rho = 2.$

До полярної системи координат у подвійному інтегралі переходимо за формулою

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_{G^*} f(\rho\cos\phi\,, \rho\sin\phi)\rho\,d\rho d\phi.$$

З наведеного рисунка легко бачити, що $0 \le \rho \le 2,\ \pi \le \phi \le 2\pi.$ Можемо записати:

$\iint_G \left(3\sqrt{x^2+y^2} + 4\right)dxdy = \iint_{G^*}\left(3\sqrt{(\rho\cos\phi)^2 + (\rho\sin\phi)^2} + 4\right)\rho d\rho d\phi =$

$= \iint_{G^*}(3\rho + 4)\rho d\rho d\phi = \int_\pi^{2\pi} d\phi \int_0^2 (3\rho + 4)\rho d\rho.$

Обчислюємо внутрішній інтеграл:

$\int_0^2 (3\rho + 4)\rho d\rho = \int_0^2 (3\rho^2 + 4\rho)d\rho = (\rho^3 + 2\rho^2)|_0^2 = 8 + 8 = 16.$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$\int_\pi^{2\pi} 16 d\phi = 16\phi|_\pi^{2\pi} = 16\pi.$

Приклад 2. $\iint_G (y\sqrt{x^2+y^2})dxdy; \quad G\colon\ y = \sqrt{3}x,\ y = -x,\ x = 1.$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування G (рис.4). Використовуючи залежності $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$ запишемо рівняння потрібної нам півпрямої $y = \sqrt{3}x$ в полярній системі координат:

$\rho \sin\phi = \sqrt{3}\rho\cos\phi, \quad tg\,\phi = \sqrt{3}, \quad \phi = \pi/3.$

Рівняння $y = -x,\ x = 1$ в полярній системі координат відповідно приймають вигляд: $\phi = -\pi/4$ (знак мінус обумовлений тем, що кут відкладається за рухом годинникової стрілки), $\rho = 1/\cos\phi$.

Переходимо до полярної системи координат у подвійному інтегралі та розставляємо межі інтегрування:

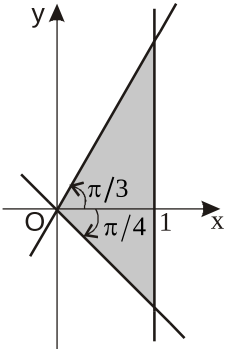


Рис. 4

$$\iint_G (y\sqrt{x^2+y^2})dxdy =$$
$$= \iint_{G^*} \rho\sin\phi\sqrt{\rho^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}\rho d\rho d\phi =$$
$$= \iint_{G^*} \rho^3 \sin\phi\, d\rho d\phi = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\phi \int_0^{1/\cos\phi} \rho^3 \sin\phi\, d\rho.$$

Обчислюємо внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\int_0^{1/\cos\phi} \rho^3 \sin\phi\, d\rho = \sin\phi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{1/\cos\phi} = \frac{\sin\phi}{4\cos^4\phi};$$
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin\phi}{4\cos^4\phi} d\phi = -\frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\cos\phi}{\cos^4\phi} =$$
$$= -\frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \cos^{-4}\phi\, d\cos\phi =$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^{-3}\phi}{-3}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\cos^3(\pi/3)} - \frac{1}{\cos^3(-\pi/4)}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}.$$

Завдання 3. Обчислити потрійний інтеграл.

Приклад 1. $\iiint_T (4xy + 2z)dxdydz;$

T: $z = 4 - x,\ y = x,\ y = 3x,\ z = 0.$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Oxy (рис. 5). Застосовуємо формулу

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Нагадаємо, що нижня і верхня межі інтегрування у внутрішньому інтегралі по змінній z визначаються відповідно поверхнями, які обмежують область знизу і зверху. Межі інтегрування у двох інших інтегралах (по змінним x і y) визначаються як межі інтегрування для подвійного інтеграла по області G.

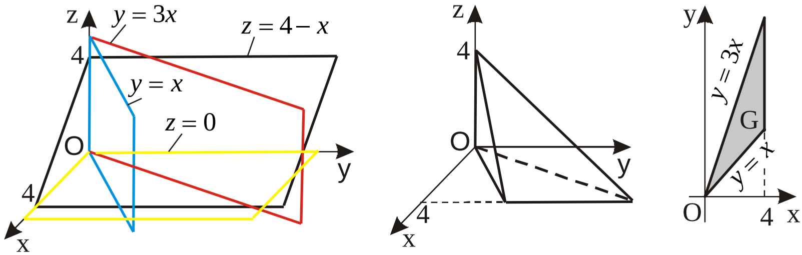


Рис. 5

Можемо записати

$\iiint_T (4xy+2z)dxdyd\,z = \int_0^4 dx \int_x^{3x} dy \int_0^{4-x} (4xy+2z)dz.$

Обчислюємо внутрішній інтеграл по z (x і y вважаються сталими):

$\int_0^{4-x} (4xy+2z)dz = (4xyz+z^2)|_0^{4-x} = 4xy(4-x)+(4-x)^2.$

Обчислюємо інтеграл по y (x вважається сталою):

$\int_x^{3x} (4xy(4-x)+(4-x)^2)dy = (2x(4-x)y^2+(4-x)^2y)|_x^{3x} =$

$= 2x(4-x)\cdot 8x^2 + (4-x)^2\cdot 2x = 66x^3-16x^4+32x-16x^2.$

Обчислюємо внутрішній інтеграл:

$\int_0^4 (66x^3-16x^4+32x-16x^2)dx =$

$= \left(\frac{33x^4}{2} - \frac{16x^5}{5} + 16x^2 - \frac{16x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 861{,}8(6).$

Приклад 2. $\iiint_T (6xz+3)dxdydz;$

$$T\colon y = x^2,\ z = x^2+y^2,\ y = 4,\ z = 0.$$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Oxy (рис. 6). Переходимо до трьохкратного інтеграла та розставляємо межі інтегрування:

$$\iiint_T (6xz+3)dxdydz = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy \int_0^{x^2+y^2} (6xz+3)dz.$$

Обчислюємо внутрішні інтеграли:

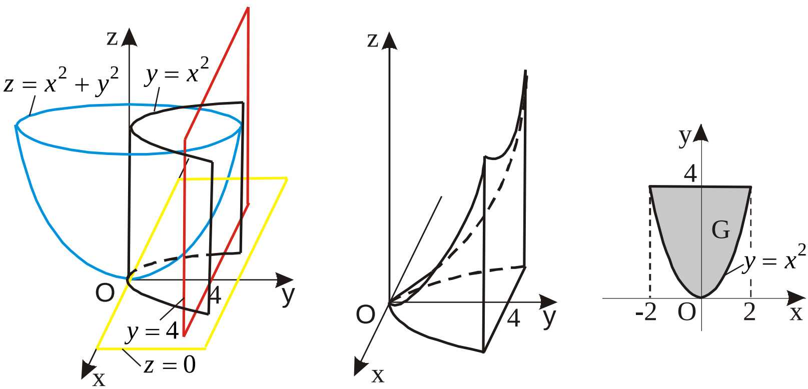


Рис. 6

$$\int_0^{x^2+y^2} (6xz+3)dz = (3xz^2+3z)\Big|_0^{x^2+y^2} = 3x(x^2+y^2)^2 + 3(x^2+y^2) =$$

$$= 3x^5 + 6x^3y^2 + 3xy^4 + 3x^2 + 3y^2;$$

$$\int_{x^2}^{4} (3x^5 + 6x^3y^2 + 3xy^4 + 3x^2 + 3y^2)dy =$$

$$= \left(3x^5y + 2x^3y^3 + \frac{3}{5}xy^5 + 3x^2y + y^3\right)\Big|_{x^2}^{4} =$$

$$= 12x^5 + 128x^3 + 614{,}4x + 12x^2 + 64 - 3x^7 - 2x^9 - 0{,}6x^{11} - 3x^4 - x^6.$$

Межі інтегрування у зовнішньому інтегралі симетричні відносно нуля. При його обчисленні зручно використовувати наступну властивість визначеного інтеграла:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ якщо } f(x) \text{ непарна}, \\ 2\int_0^a f(x), \text{ якщо } f(x) \text{ парна}. \end{cases}$$

Маємо:

$$\iiint_T (6xz+3)dxdydz = 2\int_0^2 (12x^2 + 64 - 3x^4 - x^6)dx =$$

$$= 2\left(4x^3 + 64x - \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^2 = \frac{8576}{35}.$$

Завдання 4. Обчислити потрійний інтеграл, перейшовши до циліндричних або сферичних координат.

Приклад 1. $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$;

T: $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \geq 0.$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Oxy (рис. 7). Система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

визначає лінію перетину поверхонь (сфери і конічної поверхні). Для знаходження проекції цієї лінії на площину Oxy виключаємо змінну z із записаної системи (додаємо рівняння):

$2x^2 + 2y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 9/2.$

Отже, проекцією області інтегрування на площину Oxy є круг, радіус якого дорівнює $3/\sqrt{2}$.

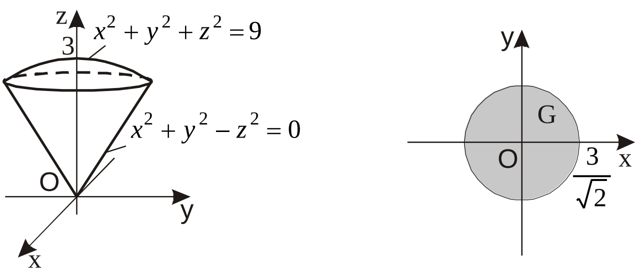


Рис. 7

Обчислюємо інтеграл, перейшовши до сферичних координат Запишемо рівняння заданої сфери та заданої конічної поверхні в сферичних координатах. Застосовуємо формули переходу:

$x = \rho \sin\theta \cos\phi\,, \quad y = \rho \sin\theta \sin\phi\,, \quad z = \rho\cos\theta.$

Рівняння сфери:

$(\rho \sin\theta \cos\phi)^2 + (\rho \sin\theta \sin\phi)^2 + (\rho\cos\theta)^2 = 9,$

$\rho^2 \sin^2\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \rho^2\cos^2\theta = 9,\ \rho^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 9,\ \rho = 3.$

Рівняння конічної поверхні:

$(\rho \sin\theta \cos\phi)^2 + (\rho \sin\theta \sin\phi)^2 - (\rho\cos\theta)^2 = 0,$

$\rho^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0,\ \cos 2\theta = 0,\ 2\theta = \pi/2\,,\ \theta = \pi/4.$

Перейдемо до сферичних координат у потрійному інтегралі за допомогою формули

$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$

$= \iiint_{V^*} f(\rho\sin\theta\cos\phi\,, \rho\sin\theta\sin\phi\,, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho d\phi d\theta.$

Маємо:

$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz =$

$= \iiint_{T^*} \sqrt{(\rho\sin\theta\cos\phi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\phi)^2 + (\rho\cos\theta)^2}\,\rho^2\sin\theta\, d\rho d\phi d\theta =$

$= \iiint_{T^*} \rho^3 \sin\theta\, d\rho d\phi d\theta.$

Розставляємо межі інтегрування та інтегруємо:

$\iiint_{T^*} \rho^3\sin\theta\, d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^3 \rho^3\sin\theta\, d\rho;$

$\int_0^3 \rho^3 \sin\theta\, d\rho = \sin\theta \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{81}{4}\sin\theta\,;$

$\int_0^{\pi/4} \frac{81}{4}\sin\theta\, d\theta = -\frac{81}{4}\cos\theta\Big|_0^{\pi/4} = \frac{81(2-\sqrt{2})}{8};$

$\int_0^{2\pi} \frac{81(2-\sqrt{2})}{8} d\phi = \frac{81(2-\sqrt{2})}{8}\phi|_0^{2\pi} = \frac{81(2-\sqrt{2})\pi}{4}.$

Приклад 2. $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz;$

$$T\colon x^2+y^2+z^2 = 25, x^2+y^2 = 16.$$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Оху (рис. 8). Перейдемо до циліндричних координат. Використовуючи формули переходу $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$, $z = z$, запишемо рівняння заданих поверхонь (сфери та кругового циліндра) в циліндричних координатах:

$(\rho\cos\phi)^2 + (\rho\sin\phi)^2 + z^2 = 25,\ z^2 = 25 - \rho^2,\ z = \pm\sqrt{25-\rho^2};$

$(\rho\cos\phi)^2 + (\rho\sin\phi)^2 = 16,\ \rho = 4.$

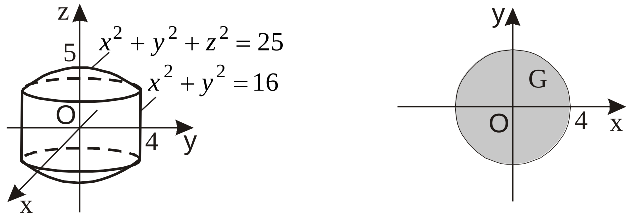


Рис. 8

До циліндричних координат у заданому інтегралі переходимо за формулою

$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)\rho d\rho d\phi dz.$

Можемо записати

$\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz = \iiint_{T^*}((\rho\sin\theta\cos\phi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\phi)^2)\rho d\rho d\phi dz =$

$= \iiint_{T^*}\rho^3 d\rho d\phi dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^4 d\rho \int_{-\sqrt{25-\rho 2}}^{\sqrt{25-\rho 2}} \rho^3 dz.$

Інтегруємо:

$\int_{-\sqrt{25-\rho 2}}^{\sqrt{25-\rho 2}} \rho^3 dz = \rho^3 z\Big|_{-\sqrt{25-\rho 2}}^{\sqrt{25-\rho 2}} = 2\rho^3\sqrt{25-\rho^2};$

$\int_0^4 2\rho^3\sqrt{25-\rho^2}d\rho = \int_0^4 \rho^2\sqrt{25-\rho^2}\cdot 2\rho d\rho = -\int_0^4 \rho^2\sqrt{25-\rho^2}d(25-\rho^2) =$

$= \left|\begin{matrix} 25-\rho^2 = t^2,\ \rho^2 = 25-t^2, \\ \rho = 0 \to t = 5,\ \rho = 4 \to t = 3 \end{matrix}\right| = -\int_5^3 (25-t^2)t dt = \int_5^3 (t^3 - 25t)dt =$

$= \left(\frac{t^4}{4} - 25\frac{t^2}{2}\right)\Big|_5^3 = 64; \quad \int_0^{2\pi} 64 d\phi = 64\phi|_0^{2\pi} = 128\pi.$

Завдання 5. Знайти об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями (застосувати подвійний інтеграл).

Приклад 1. $z = x^2,\ z = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 4.$

Будуємо тіло, об'єм якого потрібно знайти та його проекцію на площину Oxy (рис. 9).

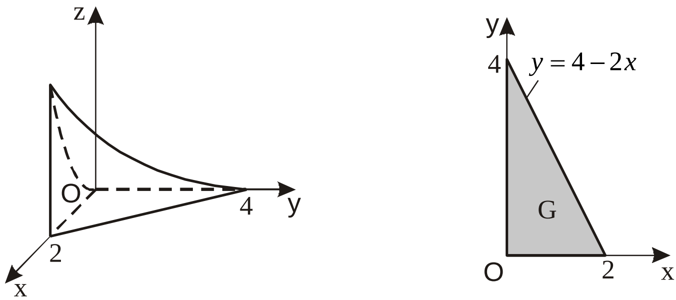


Рис. 9

Застосовуємо формулу $V = \iint_G f(x, y)dxdy$. Нагадаємо, що підінтегральна функція визначається з рівняння поверхні $z = f(x, y)$, яка обмежує тіло зверху. Задане тіло обмежене зверху параболічним циліндром $z = x^2$, отже $f(x, y) = x^2$. Маємо:

$$V = \iint_G x^2 dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} x^2 dy,$$

$\int_0^{4-2x} x^2 dy = x^2 y|_0^{4-2x} = x^2(4 - 2x) = 4x^2 - 2x^3,$

$V = \int_0^2 (4x^2 - 2x^3)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}.$

Приклад 2. $z = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3},\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 9.$

Розв'язання. Будуємо тіло та його проекцію на площину Oxy (рис. 10).

Рис. 10

У даному прикладі при обчислені подвійного інтеграла зручно перейти до полярної системи координат. Можемо записати:

$$V=\iint_G\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}\right)dxdy=\frac{1}{3}\iint_{G^*}\rho^2\cdot\rho d\rho d\phi=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^3\rho^3 d\rho;$$

$$\int_0^3\rho^3 d\rho=\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^3=\frac{81}{4},\ V=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{81}{4}d\phi=\frac{27}{4}\phi\Big|_0^{2\pi}=\frac{27\pi}{2}.$$

Завдання 6. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене вказаними поверхнями.

Приклад 1. $4z=-x^2-y^2,\quad z=-5$.

Розв'язання. Будуємо тіло, центр ваги якого потрібно знайти та його проекцію на площину Оxy (рис. 11).

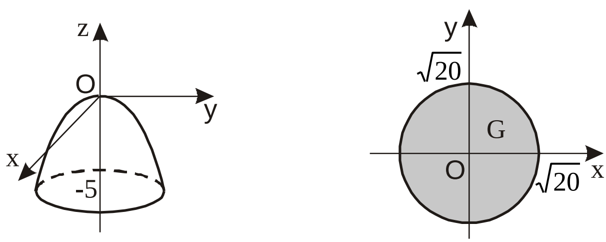


Рис. 11

Система рівнянь $4z=-x^2-y^2,\ z=-5$ визначає рівняння кола у просторі, по якому перетинаються задані параболоїд обертання і площина. Для знаходження проекції цієї лінії на площину Оxy виключаємо змінну z із вказаної системи:

$-x^2 - y^2 = -20,\ x^2 + y^2 = 20.$

Отже, проекцією заданого тіла на площину Oxy є круг з радіусом $\sqrt{20}$.

Застосовуємо формули

$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$

$m = \iiint_T \gamma(x,y,z)dxdydz\,, \quad M_{yz} = \iiint_T x\gamma(x,y,z)dxdydz,$

$M_{xz} = \iiint_T y\gamma(x,y,z)dxdydz\,, \quad M_{xy} = \iiint_T z\gamma(x,y,z)dxdydz,$

де m – маса тіла, M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти тіла відносно відповідних площин. Так як тіло однорідне, то $\gamma(x,y,z) = 1$. Крім того, задане тіло симетричне відносно вісі Oz, отже, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. При обчисленні потрійних інтегралів зручно перейти до циліндричної системи координат. Рівняння заданого параболоїда обертання приймає вигляд $z = -0{,}25\rho^2$, а рівняння площини $z = -5$ не змінюється. Обчислюємо спочатку масу:

$m = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T^*} \rho d\phi d\rho dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{20}} d\rho \int_{-5}^{-0{,}25\rho^2} \rho dz,$

$\int_{-5}^{-0{,}25\rho^2} \rho dz = \rho z|_{-5}^{-0{,}25\rho^2} = \rho(-0{,}25\rho^2 + 5) = 5\rho - 0{,}25\rho^3,$

$\int_0^{\sqrt{20}} (5\rho - 0{,}25\rho^3)d\rho = \left(\frac{5}{2}\rho^2 - \frac{0{,}25}{4}\rho^4\right)\Big|_0^{\sqrt{20}} = 25,$

$m = \int_0^{2\pi} 25d\phi = 25\phi|_0^{2\pi} = 50\pi.$

Обчислюємо статичний момент:

$M_{xy} = \iiint_T zdxdydz = \iiint_{T^*} z\rho d\phi d\rho dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{20}} d\rho \int_{-5}^{-0{,}25\rho^2} z\rho dz,$

$\int_{-5}^{-0{,}25\rho^2} z\rho dz = \frac{1}{2}\rho \cdot z^2|_{-5}^{-0{,}25\rho^2} = \frac{1}{32}\rho^5 - \frac{25}{2}\rho,$

$\int_0^{\sqrt{20}} \left(\frac{1}{32}\rho^5 - \frac{25}{2}\rho\right) d\rho = \left(\frac{1}{192}\rho^6 - \frac{25}{4}\rho^2\right)\Big|_0^{\sqrt{20}} = \frac{125}{3} - 125 = -\frac{250}{3},$

$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{250}{3}\right) d\phi = -\frac{250}{3}\phi\Big|_0^{2\pi} = -\frac{500\pi}{3}.$

Обчислюємо $\bar{z}$ (нагадаємо, що $\bar{x} = \bar{y} = 0$):

$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = -\frac{500\pi}{3 \cdot 50\pi} = -3,(3).$

Приклад 2. $y = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = \sqrt{36 - x^2 - z^2}.$

Розв'язання. Маємо рівняння півконуса і півсфери. Будуємо тіло у просторі та його проекцію на площину Oxz (рис. 12).

Для визначення границі проекції виключаємо змінну y з системи рівнянь $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = \sqrt{36 - x^2 - z^2}$. Маємо:

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{36 - x^2 - z^2}, \quad x^2 + z^2 = 36 - x^2 - z^2, \quad x^2 + z^2 = 18.$$

Проекцією заданого тіла на площину Oxz є круг з радіусом $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

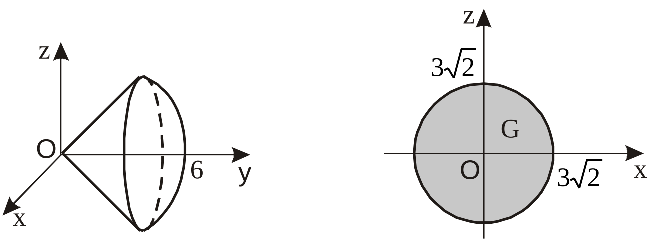


Рис. 12

Координати центру ваги обчислюємо за формулами, які наведені у попередньому прикладі. Так як тіло однорідне, то $\gamma(x, y, z) = 1$. Вісь Oy є віссю симетрії, отже, $\bar{x} = \bar{z} = 0$. Обчислюємо масу (у подвійному інтегралі переходимо до полярних координат):

$$m = \iiint_T dxdydz = \iint_G dxdz \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} dy,$$

$$\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} dy = y\Big|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} = \sqrt{36 - x^2 - z^2} - \sqrt{x^2 + z^2},$$

$$\iint_G \left(\sqrt{36 - x^2 - z^2} - \sqrt{x^2 + z^2}\right) dxdz = \iint_{G^*} \left(\sqrt{36 - \rho^2} - \rho\right) \rho d\phi d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36 - \rho^2} - \rho\right) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{3\sqrt{2}} \left(\rho\sqrt{36 - \rho^2} - \rho^2\right) d\rho,$$

$\int_0^{3\sqrt{2}}\left(\rho\sqrt{36-\rho^2}-\rho^2\right)d\rho=-\frac{1}{2}\int_0^{3\sqrt{2}}\sqrt{36-\rho^2}\,d(36-\rho^2)-\int_0^{3\sqrt{2}}\rho^2 d\rho=$

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(36-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{3\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^{3\sqrt{2}}=36(2-\sqrt{2}),$

$m=\int_0^{2\pi}36(2-\sqrt{2})d\phi=36(2-\sqrt{2})\phi\Big|_0^{2\pi}=72(2-\sqrt{2})\pi.$

Обчислюємо статичний момент:

$M_{xz}=\iiint_T ydxdydz=\iint_G dxdz\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}ydy,$

$\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}ydy=\frac{1}{2}y^2\Big|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}}=18-x^2-z^2,$

$\iint_G(18-x^2-z^2)dxdz=\iint_{G^*}(18-\rho^2)d\rho d\phi=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{3\sqrt{2}}(18-\rho^2)\rho d\rho,$

$\int_0^{3\sqrt{2}}(18-\rho^2)\rho d\rho=\left(9\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^{3\sqrt{2}}=162-81=81,$

$M_{xz}=\int_0^{2\pi}81d\phi=81\phi|_0^{2\pi}=162\pi.$

Обчислюємо $\bar{y}$:

$\bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{162\pi}{72(2-\sqrt{2})\pi}\approx 3{,}841.$

Завдання **7**. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду.

Приклад 1. $\int_K(y+1)dl$, де К – дуга астроїди $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$; $0\le t\le\pi/2$.

Розв'язання. Так як контур інтегрування заданий параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то застосовуємо формулу

$\int_{AB}f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$

Знайдемо спочатку диференціал дуги кривої:

$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt=\sqrt{((4\cos^3 t)')^2+((4\sin^3 t)')^2}dt=$

$=\sqrt{(-12\cos^2 t\sin t)^2+(12\sin^2 t\cos t)^2}dt=$

$=\sqrt{144\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt=12\cos t\sin t\,dt.$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int_K (y+1)dl = \int_0^{\pi/2} 12(4\sin^3 t + 1)\cos t \sin t\, dt = 48\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\, d\sin t +$$

$$+12\int_0^{\pi/2} \sin t\, d\sin t = \left(\frac{48}{5}\sin^5 t + 6\sin^2 t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{48}{5} + 6 = 15{,}6.$$

Приклад 2. $\int_K \frac{y}{x^2+1}dl$, де К – менша дуга кола $x^2 + y^2 = 6x$, яка відтинається прямою $y = -\sqrt{5}$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння заданої кривої:

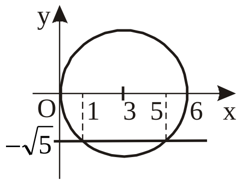


Рис. 13

$$(x^2 - 6x + 9) + y^2 = 9,\ (x-3)^2 + y^2 = 9.$$

Маємо рівняння кола з центром в точці (3;0) і радіусом $r = 3$ (рис. 13). Знайдемо точки перетину кола і прямої:

$$x^2 - 6x + 5 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 5.$$

Розв'язавши рівняння кола відносно y, отримуємо $y = -\sqrt{6x - x^2}$, $(1 \le x \le 5)$. Контур інтегрування заданий рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Застосовуємо формулу

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Обчислюємо диференціал дуги кривої:

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}\right)^2}\, dx = \frac{3dx}{\sqrt{6x-x^2}}.$$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int_K \frac{y}{x^2+1}dl = -\int_1^5 \frac{3\sqrt{6x-x^2}dx}{(x^2+1)\sqrt{6x-x^2}} = -3\int_1^5 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -3 arctg\, x|_1^5 = -3\, arctg\, 5 + \frac{3\pi}{4}.$$

Приклад 3. $\int_K x dl$, де К – дуга кардіоїди $\rho = 5(1 + \cos\phi)$, $0 \le \phi \le \pi$.

Розв'язання. Крива К задана рівнянням $\rho = \rho(\phi)$, $\alpha \le \phi \le \beta$ в полярних координатах. Обчислюємо криволінійний інтеграл за формулою

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(\phi)\cos\phi, \rho(\phi)\sin\phi)\sqrt{\rho(\phi)^2 + (\rho'(\phi))^2}d\phi.$$

Знаходимо диференціал дуги кривої:

$$dl = \sqrt{\rho(\phi)^2 + (\rho'(\phi))^2}d\phi = \sqrt{25(1+\cos\phi)^2 + 25(-\sin\phi)^2}d\phi =$$

$$= 5\sqrt{2(1+\cos\phi)}d\phi = 5\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\phi}{2}} = 10\cos\frac{\phi}{2}.$$

Перейдемо до визначеного інтегралу (замість x підставляємо $\rho(\phi)\cos\phi = 5(1+\cos\phi)\cos\phi$):

$$\int_K x dl = \int_0^{\pi} 50(1+\cos\phi)\cos\phi\cos\frac{\phi}{2}d\phi =$$

$$= 50\int_0^{\pi}\cos\phi\cos\frac{\phi}{2}d\phi + 50\int_0^{\pi}\cos^2\phi\cos\frac{\phi}{2}d\phi.$$

Кожен з інтегралів обчислюємо окремо. При обчислені застосована тригонометрична формула

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

Маємо:

$$\int_0^{\pi}\cos\phi\cos\frac{\phi}{2}d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{3\phi}{2} + \cos\frac{\phi}{2}\right)d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sin\frac{3\phi}{2} + 2\sin\frac{\phi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\phi\cos\frac{\phi}{2}d\phi = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\phi)\cos\frac{\phi}{2}d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{\phi}{2}d\phi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\phi\cos\frac{\phi}{2}d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{\phi}{2}d\phi + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{5\phi}{2} + \cos\frac{3\phi}{2}\right)d\phi =$$

$$= \left(\sin\frac{\phi}{2} + \frac{1}{10}\sin\frac{5\phi}{2} + \frac{1}{6}\sin\frac{3\phi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{6} = \frac{14}{15},$$

$$\int_K x dl = 50\left(\frac{2}{3} + \frac{14}{15}\right) = 80.$$

Приклад 4. $\int_K (x^2 y + yz)dl$, де К – дуга гвинтової лінії $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t, z = t, 0 \le t \le \pi$.

Розв'язання. Дуга просторової кривої задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t);\ \alpha \le t \le \beta$. Застосовуємо формулу

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Дістаємо:

$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt = \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + 1^2}dt =$

$= \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1}dt = \sqrt{17}dt,$

$\int_K (x^2y + yz)dl = \int_0^\pi (16\cos^2 t \cdot 4\sin t + 4\sin t \cdot t)\sqrt{17}dt =$

$= 64\sqrt{17}\int_0^\pi \cos^2 t \sin t\, dt + 4\sqrt{17}\int_0^\pi t \sin t\, dt,$

$\int_0^\pi \cos^2 t \sin t\, dt = -\int_0^\pi \cos^2 t\, d\cos t = -\frac{1}{3}\cos^3 t|_0^\pi = \frac{2}{3},$

$\int_0^\pi t\sin t\, dt = \begin{vmatrix} u = t, \ dv = \sin t\, dt \\ du = dt, \ v = -\cos t \end{vmatrix} = -t\cos t|_0^\pi + \sin t|_0^\pi = \pi,$

$\int_K (x^2y + yz)dl = 64\sqrt{17} \cdot \frac{2}{3} + 4\sqrt{17} \cdot \pi = \frac{4\sqrt{17}(32+3\pi)}{3}.$

Завдання 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

Приклад 1. $\int_{AB} xydx + (x+y)dy$, де АВ – дуга кривої $y = \sqrt[3]{x}$ від точки А$(8; 2)$ до $B(1; 1)$.

Розв'язання. Контур інтегрування АВ задається рівнянням $y = y(x)$. Обчислюємо інтеграл за формулою

$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx,$

де a, b – абсциси точок А і В відповідно. Маємо:

$\int_{AB} xydx + (x+y)dy = \int_8^1 \left(x\sqrt[3]{x} + (x + \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3}\right)dx =$

$= \int_8^1 \left(x^{4/3} + \frac{1}{3}x^{1/3} + \frac{1}{3}x^{-1/3}\right)dx = \left(\frac{3}{7}x^{7/3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{2/3}\right)\Big|_8^1 = -\frac{1671}{28}.$

Приклад 2. $\int_{AB} 2xydx + x^2dy$, де АВ – відрізок прямої від точки А(0;1) до В(3;7).

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої АВ. Використовуємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$

Маємо:

$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{7-1}, \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{6}, \quad y = 2x + 1.$

Обчислюємо криволінійний інтеграл за формулою, яка наведена у попередньому прикладі:

$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^3 (2x(2x+1) + x^2 \cdot 2)dx = \int_0^3 (6x^2 + 2x)dx =$

$= (2x^3 + x^2)|_0^3 = 54 + 9 = 63.$

Приклад 3. $\int_{AB} ydx + xdy$, де AB – дуга кола $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$ від $t = 0$ до $t = \pi/4$.

Розв'язання. Крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Обчислюємо інтеграл за формулою

$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt,$

де α, β – значення параметра *t* в точках A і B відповідно. Отримуємо:

$\int_{AB} ydx + xdy = \int_0^{\pi/4} (\sin t \cdot (-4\sin t) + 4\cos t \cdot \cos t)dt =$

$= 4\int_0^{\pi/4} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = 4\int_0^{\pi/4} \cos 2t dt = 4 \cdot \frac{1}{2}\sin 2t|_0^{\pi/4} = 2.$

Приклад 4. $\int_{AB} y^2zdx + z^2xdy + x^2ydz$, де AB – дуга кривої $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ від $t = 0$ до $t = 1$.

Розв'язання. Просторова крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Застосовуємо формулу (в точці A параметр *t* дорівнює α, а в точці B – *t* дорівнює β):

$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$

$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$

Дістаємо:

$\int_{AB} y^2zdx + z^2xdy + x^2ydz = \int_0^1 (t^4t^3 \cdot 1 + t^6t \cdot 2t + t^2t^2 \cdot 3t^2)dt =$

$= \int_0^1 (t^7 + 2t^8 + 3t^6)dt = \left(\frac{1}{8}t^8 + \frac{2}{9}t^9 + \frac{3}{7}t^7\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{3}{7} = \frac{391}{504}.$

Завдання 9. Показати, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, та обчислити його для заданих точок A(1;1), B(2;3) і C(2;1) по двом контурам інтегрування: а) по відрізку прямої AB; б) по ламаній ACB.

Приклад 1. $\int_K (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy$.

Розв'язання. Умовою незалежності криволінійного інтеграла $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ від шляху інтегрування є наступна тотожна рівність $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$.

У нашому випадку маємо:

$P(x,y) = 8xy + 6x,\ Q(x,y) = 4x^2 + 15y^2, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 8x,\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 8x$.

Умова виконана.

а) Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки,

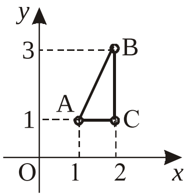


Рис. 14

записуємо рівняння прямої AB:

$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1}, \quad y = 2x - 1; \quad 1 \le x \le 2.$

Обчислюємо інтеграл по відрізку AB:

$\int_{AB} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy =$

$= \int_1^2 (8x(2x-1) + 6x + (4x^2 + 15(2x-1)^2) \cdot 2)dx =$

$= \int_1^2 (144x^2 - 122x + 30)dx = (48x^3 - 61x^2 + 30x)|_1^2 = 183$

б) Очевидно, що $\int_{\mathrm{ACB}} f(x)dx = \int_{\mathrm{AC}} f(x)dx + \int_{\mathrm{CB}} f(x)dx$. Відрізок AC описується співвідношеннями: $y = 1,\ 1 \le x \le 2;\ dy = 0$. Можемо записати:

$\int_{AC} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = \int_1^2 (8x \cdot 1 + 6x)dx = 7x^2|_1^2 = 21.$

Відрізок CB: $x = 2,\ 1 \le y \le 3;\ dx = 0$. Дістаємо:

$\int_{CB} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = \int_1^3 (4 \cdot 4 + 15y^2)dy =$

$= (16y + 5y^3)|_1^3 = 162,$

$\int_{ACB} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = 21 + 162 = 183.$

Завдання 10. Показати, що заданий вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом для деякої функції $U(x, y)$ та знайти цю функцію.

Приклад 1. $(4x^3y + 2)dx + (x^4 + 6y)dy$.

Розв'язання. Вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом в деякий області, якщо в кожній точці цієї області виконується рівність

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Перевіряємо виконання вказаної умови:

$$P(x, y) = 4x^3y + 2,\ Q(x, y) = x^4 + 6y, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 4x^3,\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 4x^3.$$

Умова виконується. Функцію $U(x, y)$ шукаємо за формулою

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C,$$

де x_0, y_0 – координати фіксованої точки (вибирається довільно), у який функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їхні частинні похідні неперервні. При інтегруванні у другому інтегралі по змінній *y* величина *x* вважається сталою. Нехай $x_0 = y_0 = 0$. Отримуємо:

$$U(x, y) = \int_0^x 2dx + \int_0^y (x^4 + 6y)dy + C = 2x|_0^x + (x^4y + 3y^2)|_0^y + C =$$
$$= 2x + x^4y + 3y^2 + C.$$

Приклад 2. $\left(-\frac{6}{x^3} + ye^{xy}\right)dx + \left(xe^{xy} - \frac{2}{y^2}\right)dy$.

Розв'язання. Застосовуємо формули, які наведені у попередньому прикладі. Перевіряємо умову:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}, \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^{xy} + yxe^{xy}.$$

Умова виконана. Відмітимо, що брати початок координат у якості фіксованої точки не можна, так як у цій точці функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ терплять розрив (нулі у знаменниках). Нехай $x_0 = y_0 = 1$. Дістаємо:

$$U(x, y) = \int_1^x \left(-\frac{6}{x^3} + e^x\right)dx + \left(xe^{xy} - \frac{2}{y^2}\right)dy + C =$$
$$= \left(\frac{3}{x^2} + e^x\right)\Big|_1^x + \left(e^{xy} + \frac{2}{y}\right)\Big|_1^y + C = \frac{3}{x^2} + e^x - 3 - e + e^{xy} + \frac{2}{y^y} - e^x - 2 + C =$$

$= \frac{3}{x^2} + e^{xy} + \frac{2}{y^y} + C_1,$

де C_1 – довільна стала ($C_1 = -3 - e - 2 + C$).

V. Ряди

Завдання 1. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{(n+3)3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+100}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{n}$.

Розв'язання. а) Застосуємо ознаку Д'аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+3)!}{\sqrt{(n+4)3^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{(n+3)3^n}}{(2n+1)!} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+1)! \cdot (2n+2)(2n+3)}{\sqrt{(n+4)3^n \cdot 3}} \cdot \frac{\sqrt{(n+3)3^n}}{(2n+1)!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+3)\sqrt{(n+3)}}{\sqrt{(n+4)\cdot 3}} = \infty.$$

Границя більше одиниці. Ряд розбігається.

б) Застосуємо граничну ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,5}}$ (показник ступеня знаменника цього ряду дорівнює різниці старших ступенів знаменника і чисельника заданого ряду). Взятий для порівняння ряд збігається. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+100} \cdot \frac{n^{1,5}}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+100} = 1.$$

Так як границя дорівнює кінцевому числу і взятий для порівняння ряд збігається, то і заданий числовий ряд збігається.

в) Застосуємо інтегральну ознаку:

$$\int_1^{\infty} \frac{ln\, x}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{ln\, x}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b ln\, x \, d\, ln\, x = \lim_{b\to\infty} \frac{\ln^2 x}{2} \bigg|_1^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} (\ln^2 b - \ln^2 1) = \infty.$$

Невласний інтеграл розбігається, отже і заданий ряд розбігається.

Завдання 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \cdot 2^{n+2}}{5^n}$.

Розв'язання. а) Маємо знакопереміжний ряд. Застосуємо теорему Лейбніца. Перевіряємо виконання умов цієї теореми:

1) $2 > \frac{8}{13} > \frac{18}{73} > \cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^4-n^2+1} = 0$.

Умови виконуються. Ряд збігається. Досліджуємо далі ряд на абсолютну збіжність. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$. Застосовуємо граничну ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збігається. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^4-n^2+1} \cdot \frac{n^2}{1} = 2.$$

Ряд, складений з абсолютних величин, збігається, отже заданий знакозмінний ряд збігається абсолютно.

б) Досліджуємо аналогічно попередньому. Перевіряємо умови теореми Лейбніца (при обчислені границі застосовано правило Лопіталя):

1) $\frac{8}{5} > \frac{32}{25} > \frac{96}{125} > \cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^{n+2}}{5^n} = 4\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2{,}5^n} = 4\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2{,}5^n \ln 2{,}5} = 0$.

Досліджуємо ряд, складений з абсолютних величин (застосовуємо ознаку Д’аламбера):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)2^{n+3}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n2^{n+2}}\right) = \frac{2}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{5} < 1.$$

Ряд, складений з абсолютних величин збігається. Заданий ряд збігається абсолютно.

Завдання 3.

Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(1+4n)5^n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2n\cdot 4^n}$.

Розв'язання. а) Знайдемо радіус збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{(1+4n)5^n}}\cdot\frac{\sqrt{(1+4(n+1))5^{n+1}}}{2^{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Заданий степеневий ряд абсолютно збігається на інтервалі $\left(-\sqrt{5}/2\,;\,\sqrt{5}/2\right)$.

Досліджуємо ряд на кінцях інтервалу збіжності. При $x=-\sqrt{5}/2$ отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{1+4n}}$. Маємо знакопереміжний ряд. Застосуємо теорему Лейбніца:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{9}}>\frac{1}{\sqrt{13}}>\cdots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4n}}=0.$

Умови виконуються. Ряд збігається. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин, а саме $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4n}}$. Застосуємо граничну ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{0,5}}$, який розбігається. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ряд, складений з абсолютних величин, розбігається. Заданий степеневий ряд точці $x=-\sqrt{5}/2$ збігається умовно.

При $x=\sqrt{5}/2$ отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4n}}$. Вище було показано, що цей ряд розбігається. Заданий степеневий ряд точці $x=\sqrt{5}/2$ розбігається.

б) Зробимо підстановку $X=x+5$. Отримуємо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{2n\cdot4^n}$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n\cdot4^n}\cdot\frac{2(n+1)\cdot4^{n+1}}{1}\right)=4.$$

Останній степеневий ряд абсолютно збігається на інтервалі $(-4;4)$. Заданий степеневий ряд абсолютно збігається на інтервалі $(-R-5;R-5)$, тобто на інтервалі $(-9;\,-1)$. При $x=-9$ дістаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$. Умови теореми Лейбніца для цього знакопереміжного ряду виконуються. Ряд збігається. Ряд, складений з абсолютних величин, має вигляд $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Отримали гармонічний ряд, який розбігається. В точці $x=-9$ заданий ряд збігається умовно.

При $x=-1$ також дістаємо гармонічний ряд $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається.

Завдання 4. Виконати розклад даної функції в ряд:

$f(x)=ln\,x$ за степенями $x-1$.

Розв'язання. У цьому прикладі можна застосувати стандартну формулу

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots .$$

Можемо записати

$$\ln x=\ln(1+(x-1))=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots .$$

Остання формула може застосовуватися при $-1<x-1\le 1$ або $0<x\le 2$.

Завдання 5. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001:

$sin\,10°$.

Розв'язання. Для функції $\sin x$ можемо записати

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

При $x=\pi/18$ (переводимо градуси в радіани) маємо

$$sin\,\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{18}-\frac{\pi^3}{18^3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{18^5\cdot 5!}+\cdots.$$

У правій частині останньої рівності отримали знакопереміжний ряд. У відповідності з теоремою Лейбніца похибка обчислень не перебільшує абсолютної величини першого відкинутого члену ряду. Так як

$$\frac{\pi^3}{18^3\cdot 3!}\approx 0{,}0009<0{,}001,$$

то достатньо залишити один член ряду. Маємо

$sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} \approx 0{,}1745.$

Завдання 6. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розкладаючи в ряд підінтегральну функцію:
$\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\, dx.$

Розв'язання. Використовуємо формулу

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Можемо записати:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots;$$

$$\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\, dx = \int_0^{0,5} \left(x^2 - x^4 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^8}{6} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{14} - \frac{x^9}{54} + \cdots\right)\Big|_0^{0,5} = \frac{1}{8\cdot 3} - \frac{1}{32\cdot 5} + \frac{1}{128\cdot 14} - \frac{1}{512\cdot 54} + \cdots.$$

Отримали знакопереміжний числовий ряд. Так як $\frac{1}{128\cdot 14} < 0{,}001,$ то у відповідності з теоремою Лейбніца достатньо залишити два перших члена ряду. Остаточно отримуємо

$$\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{8\cdot 3} - \frac{1}{32\cdot 5} \approx 0{,}0354.$$

Завдання 7. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння:

$$y' = x^2 + sin\, y + 1;\ y(0) = 0.$$

Розв'язання. Розв’язок шукаємо у вигляді

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots.$$

У відповідності з умовою $y(0) = 0,\ y'(0) = 0 + \sin 0 + 1 = 1.$ Диференціюючи задане рівняння, отримуємо:

$$y'' = 2x + \cos y \cdot y',\ y''(0) = 2\cdot 0 + \cos 0 \cdot 1 = 1;$$

$$y''' = 2 - \sin y \cdot y' + \cos y \cdot y'',\ y'''(0) = 2 - \sin 0 \cdot 1 + \cos 0 \cdot 1 = 1.$$

Записуємо шуканий розв'язок

$y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots.$

Завдання 8. Виконати розклад в ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$, заданої на інтервалі.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi < x \le 0; \\ \pi & \text{при} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Для функції з періодом 2π розвинення в ряд Фур'є виконується за наступними формулами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n = 1,2,3,\cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi dx = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0} + x|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x \sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\bigg|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ \quad 0, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x \cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0} - \left(\frac{1}{n}\cos nx\right)\bigg|_{0}^{\pi} = \frac{1}{n}.$$

Можемо записати

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots.$$

Довідковий матеріал

Таблиця похідних та основні властивості похідної

Таблиця похідних:

1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1};$
2. $(x)' = 1;$
3. $(c)' = 0,\ (c = const);$
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}};$
5. $(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a;$
6. $(e^{x})' = e^{x};$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a};$
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$
9. $(\sin x)' = \cos x;$
10. $(\cos x)' = -\sin x;$
11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$
12. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
15. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$
16. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Основні властивості похідної:

1. $(u \pm v) = u' \pm v';$
2. $(c \cdot u)' = c \cdot u';$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$

де c – стала; u, v – функції від x.

Таблиця інтегралів та основні властивості інтегралів

Таблиця інтегралів:

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$,   2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$,

3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$,   4. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$,

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$,   6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$,

7. $\int e^x\, dx = e^x + C$,   8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$,

9. $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C$,   10. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$,

11. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C$,   12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C$,

13. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ 14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$,

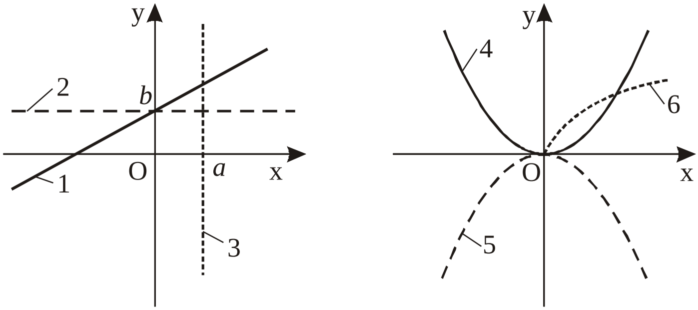
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

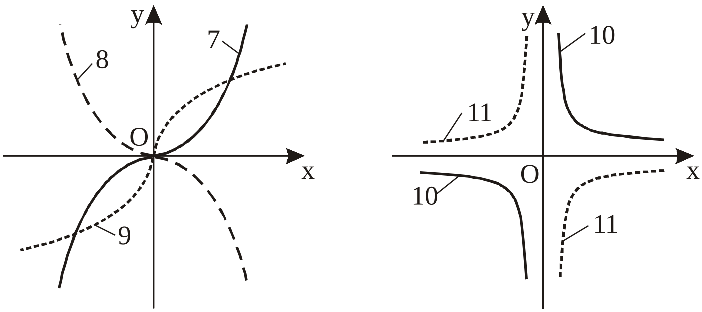
1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,   2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,

3. $\int dF(x) = F(x) + C$,   4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k – стала),

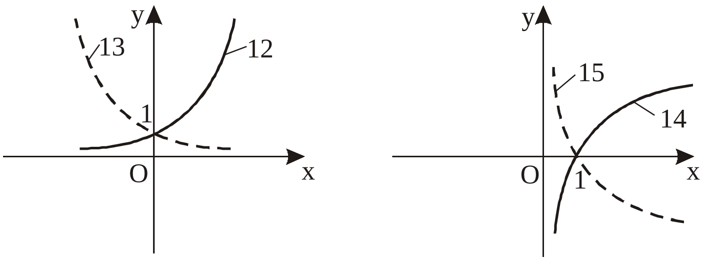
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.



1. $y = kx + b$; 2. $y = b$; 3. $x = a$; 4. $y = x^2$; 5. $y = -x^2$; 6. $y = \sqrt{x}$.

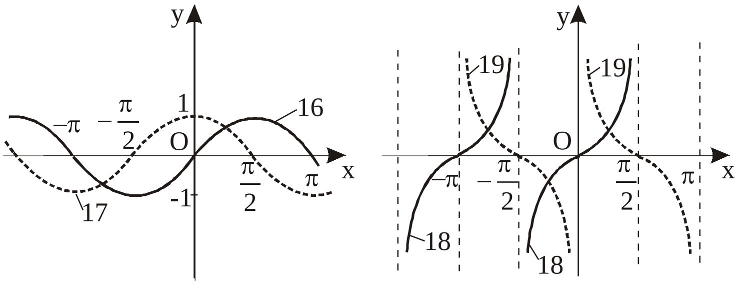


7. $y = x^3$; 8. $y = -x^3$; 9. $y = \sqrt[3]{x}$; 10. $y = \frac{1}{x}$; 11. $y = -\frac{1}{x}$.

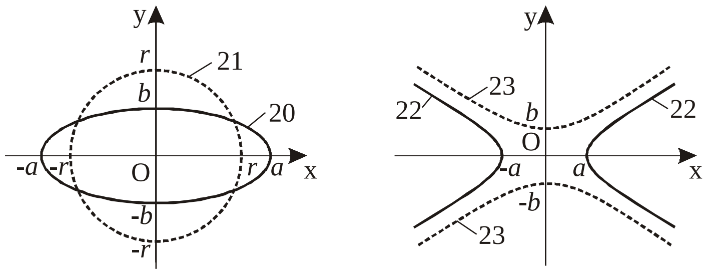


12. $y = a^x,\ a > 1$; 13. $y = a^x,\ 0 < a < 1$;

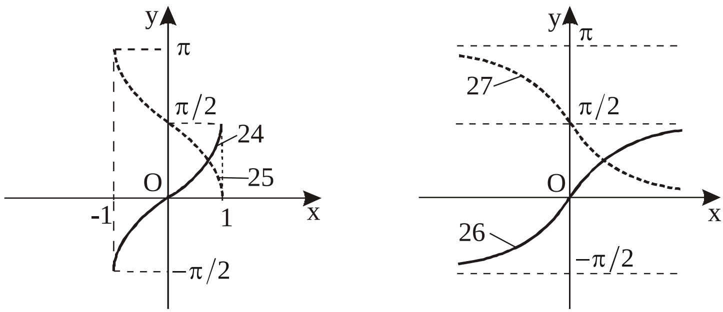
14. $y = log_a x,\ a > 1$; 15. $y = log_a x,\ 0 < a < 1$.



16. $y = sin\, x$; 17. $y = cos\, x$; 18. $y = tg\, x$ 19. $y = ctg\, x$.



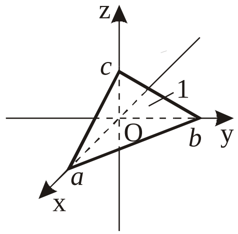
20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 21. $x^2 + y^2 = r^2$; 22. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 23. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

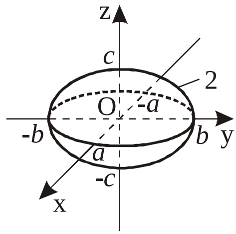


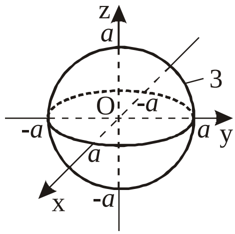
24. $y = arcsin\, x$; 25. $y = arccos\, x$; 26. $y = arctg\, x$;

27. $y = arcctg\, x$.

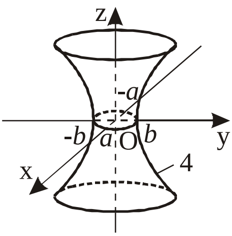
Поверхні у просторі

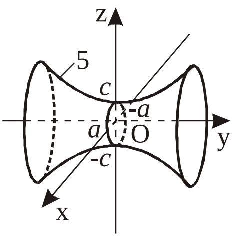


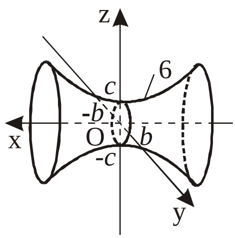




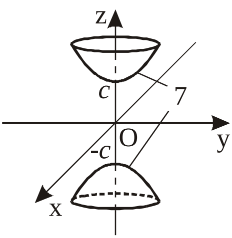
1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;$ 2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ 3. $x^2+y^2+z^2=a^2.$

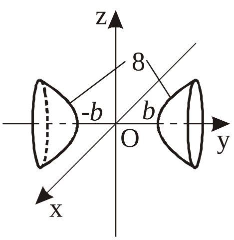


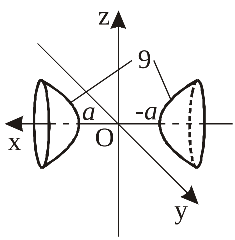




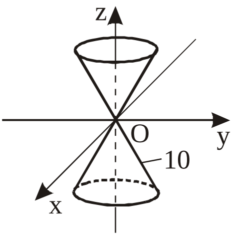
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1;$ 5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ 6. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

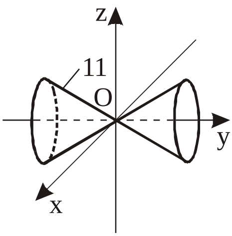


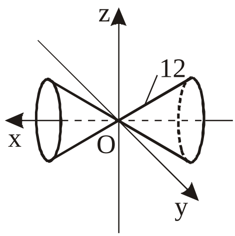




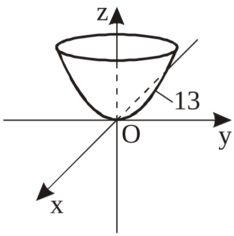
7. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ 8. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$ 9. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

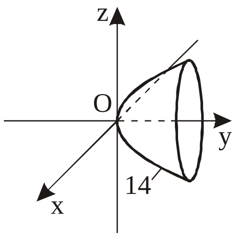


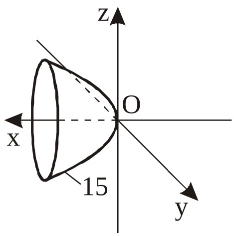




10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$; 11. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; 12. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$.

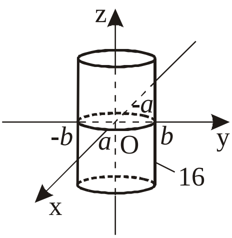


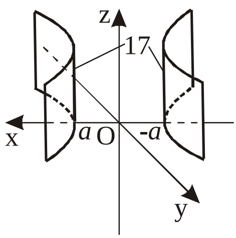


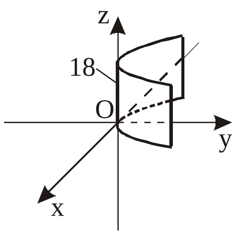


13. $z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$ $(p>0,\ q>0)$; 14. $y=\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}$ $(p>0,\ q>0)$;

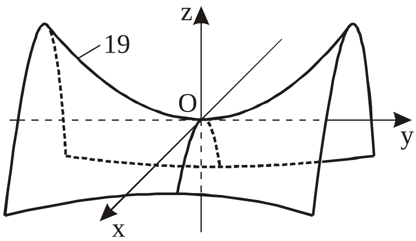
$$15.\ x=\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}\ \ (p>0,\ q>0).$$







16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 17. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 18. $x^2=2py$ $(p>0)$.



19. $z = -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \ (p > 0,\ q > 0).$

Література

1. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до матем. аналізу. Диф. та інтегр. числення П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П. П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. - 600 с.: іл..

2. Вища математика: Підручник.. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; За заг. ред. П. П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. - 792 с.: іл..

3. Кулініч Г.Л. та ін. Вища математика: Основні розділи: Підручник. Кн.1 − К.: Либідь, 2003 – 400 с.

4. Кулініч Г.Л. та ін. Вища математика: Спеціальні розділи: Підручник. Кн.2 − К.: Либідь, 2003 – 368 с.

5. Рудницький В.Б., Делей В.І. Вища математика. Навч. посібник. Хмельницький: “Поділля”. – 1999. – 310с.

6. Гаврильченко Х.І. та ін. Вища математика. Збірник задач. У 2 ч. Ч.1 – К., Техніка, 2004. – 279 с.

7. Овчинников П.П. та ін. Вища математика. Збірник задач. У 2 ч. Ч.2 – К., Техніка, 2004. – 376 с.

8. Рудницький В.Б., Кантемир І.І. Практичні заняття з курсу вищої математики. Частина 1. - Хмельницький: ТУП. 1999. – 437с.

9. Вища математика для студентів технічних спеціальностей : навч. посіб. Ч. 1 / [уклад. : В. І. Гуцул, С. М. Якименко] ; Центральноукраїн. нац. техн. ун-т. - Кропивницький: ЦНТУ, 2019 р. – 186 с.

10. Вища математика для студентів технічних спеціальностей. Частина ІІ.: навч. посіб. / Укл. В. І. Гуцул, І. І. Філімоніхіна, С. М. Якименко, Л. М. Кривоблоцька. – Кропивницький : ЦНТУ, 2022. – 181 с.
11. Інтегральне числення функції однієї змінної та деякі застосування визначених інтегралів : навч. посіб. / уклад. : С. М. Якименко, М. С. Якименко, В. І. Гуцул ; Центральноукраїн. нац. техн. ун-т, каф. вищої математики та фізики. - Кропивницький : ЦНТУ, 2020 р. - 174 с.