МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Черкаси
ЧДТУ
2023

УДК 517(075.8)
М34

Затверджено
вченою радою Черкаського державного
технологічного університету,
протокол № 9 від 20.03.2023.

Автори:
Щерба А. І., *канд. фіз.-мат. наук, доцент*
Нестеренко А. М., *канд. пед. наук, доцент*
Мірошкіна І. В., *канд. техн. наук, доцент*
Щерба В. О., *старший викладач*

Рецензенти:

Н. А. Тарасенкова, д-р пед. наук, професор, завідувач кафедри математики та методики навчання математики Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького;

І. А. Акуленко, д-р пед. наук, професор, професор кафедри автоматизації та комп’ютерно-інтегрованих технологій Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького.

Математичний аналіз : навч. посіб. [Електронний ресурс] / А. І. Щерба,
М34 А. М. Нестеренко, І. В. Мірошкіна; В. О. Щерба; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2023. – 513 с.

Матеріал навчального посібника систематизований відповідно до навчальної програми дисциплін «Математичний аналіз» та «Вища математика» для інженерно-технічних спеціальностей закладів вищої освіти. Кожен із 8 розділів містить теми, які є базовими для опанування курсу. Матеріал структуровано таким чином: теоретичні відомості, контрольні питання та завдання, приклади розв’язування задач, завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів. Навчальний посібник дає змогу сформувати у студентів сучасне бачення математичного аналізу та відкриває можливості ефективного пошуку нестандартних варіантів вирішення поставлених проблем.

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник відповідає програмі дисциплін «Математичний аналіз» та «Вища математика» для інженерно-технічних спеціальностей вузів. Мета його – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичних курсів з математичного аналізу, сприяти формуванню практичних вмінь та навичок у застосуванні методів і прийомів з математичного аналізу в самостійній навчально-пізнавальній, а також в майбутній професійній діяльності.

Викладення матеріалу ведеться на рівні, доступному широкому колу студентів. Викладаються як традиційні класичні методи математичного аналізу, так і сучасні, які виникли протягом останніх десятиріч. Значну увагу приділено розв’язуванню задач, які ґрунтуються на викладених теоретичних відомостях та мають прикладний характер.

Навчальний посібник складається з восьми глав, що логічно і послідовно розкривають особливості навчальної дисципліни в різних сферах пізнавальної діяльності студентів. Кожна глава містить параграфи наступної структури:

- основні поняття та теореми, де подано рекомендації до практичного застосування матеріалу;
- запитання і завдання для організації самоперевірки знань з теоретичного матеріалу;
- приклади розв’язування типових задач;
- завдання для роботи в аудиторії, які за обсягом є достатніми як для повного самостійного засвоєння курсу, так і для проведення аудиторних занять;
- індивідуальні завдання для самостійної роботи.

Теоретичний матеріал, викладений в посібнику, дає змогу сформувати у студентів сучасне бачення математичного моделювання та відкриває можливості ефективного пошуку нестандартних варіантів вирішення поставлених проблем, зокрема щодо забезпечення переходу до інноваційних технологій навчання, створення умов для їх впровадження, інтеграції у світовий ринковий простір.

Особливістю посібника є використання сучасних напрямів самостійної пізнавальної діяльності студентів технічного університету, пов’язаних зі змінами у глобальному світовому середовищі, зокрема: урізноманітнення форм навчання, які відповідають вимогам навчального процесу в сучасних умовах.

ВСТУП

При вивченні явищ природи і суспільства часто зустрічаються процеси і події, границь між двома різними станами яких не існує. Тобто, різниця між двома станами однієї і тієї самої події безмежно мала. Математична теорія, яка вивчає явища такого типу, одержала назву математичного аналізу. Поняття змінної величини є основним в математичному аналізі. Величина, яка при дослідженні даного явища набуває тільки одного значення, називається сталою. Змінною називають величину, що набуває різних числових значень. Взаємозв'язок між змінними називається функціональною залежністю.

Математичний аналіз вивчає функціональну залежність і є основою майже для кожної математичної дисципліни. Двома його головними розділами є диференціальне та інтегральне числення. Історично першими виникли задачі інтегрального числення, «квадратури». Стародавні греки (Антіфон, близько 430 р. до н.е.) для знаходження площі круга користувалися «методом вичерпування» площі між описаними та вписаними многокутниками. Використовуючи цей метод, Архімед зміг обчислити площі сегмента параболи, сектора спіралі, об'єми деяких тіл і підійшов до створення інтегрального числення. Дослідження Архімеда набули продовження лише через дві тисячі років. Другу з основних задач аналізу нескінченно малих – задачу знаходження дотичних до кривих – було вперше поставлено Паппом Александрійським у Єгипті близько 300 р. н.е.

Термін «функція» (від лат. functio – виконання, здійснення) вперше з'явився в 1692 р. у Г. Лейбніца. У близькому до сучасного розумінні цей термін використав у листі до Г. Лейбніца від 1698 р. І. Бернуллі. Сьогодні для загального означення функції використовують поняття відповідності. Відповідністю f між множинами X і Y називають множину впорядкованих пар $(x;y)$, де $x \in X$, $y \in Y$. Запис $(x;y) \in f$ означає, що x пов'язане з y відповідністю f. Множину X перших елементів x упорядкованих пар $(x;y)$ називають областю визначення відповідності f, а множину Y других елементів y цих пар називають областю значень f. Відповідність f називається функцією X в Y або відображенням із X в Y, якщо для довільного $x \in X$ існує і притому єдиний елемент $y \in Y$, який знаходиться з x в указаній відповідності. Якщо f – функція, то замість запису $\left(x;y\right) \in f$ використовують символічні записи $x \xrightarrow{f} y$ або $f: X \to Y$ або $y = f\left(x\right)$, де $f\left(x\right)$ називається значенням функції f на елементі x або образом елемента x при відображенні f.

Аналіз функцій однієї змінної спочатку будується для функцій, заданих на проміжках (відрізках, інтервалах, напівінтервалах). При переході до функцій багатьох змінних відбувається подальшій розвиток і поглиблення основних понять.

Створення в середині XX століття електронно-обчислювальних машин значно розширило можливості вчених при аналізі, моделюванні та прогнозуванні складних явищ механіки, фізики, астрономії, хімії, біології, соціології, медицини, лінгвістики та ін. Проте цей процес взаємопроникний і поширюється також у зворотному напрямі. Так, наприклад, при організації обчислювального процесу нині широко застосовуються генетичні математичні методи. Вченікібернетики успішно впроваджують в життя так звані нейрокомп'ютери. Підґрунтям для моделювання роботи нейрона мозку людини слугує відома теорема теорії функцій багатьох змінних.

Функції багатьох змінних є одним із основних понять, яке використовується при побудові сучасних багатофакторних моделей у природознавстві і техніці. Поняття функції багатьох змінних виникає при спробі встановлення залежності між декількома змінними величинами – кількісними характеристиками явища, коли значення однієї змінної повністю визначається значеннями інших.

Наприклад, розглядаючи фізичні характеристики навколишнього середовища: температуру, густину неоднорідного середовища, атмосферний тиск чи поля потенціалів електричних зарядів, – нам доведеться враховувати зміну цих характеристик при переході від однієї точки до іншої. Кожна точка просторового об'єму визначається трьома декартовими координатами x, y та z, тому названі вище характеристики є функціями трьох змінних. В той же час, вказані характеристики навколишнього середовища можуть змінюватися в часі, а тому їх можна розглядати як функції чотирьох змінних – координат x, y, z та часу t.

При розгляді питань економіки та соціології, як правило, зустрічаємо залежності від ще більшої кількості факторів. Так, наприклад, на обсяг випуску сільськогосподарської продукції за загальних рівних умов довготривалий вирішальний вплив чинять такі фактори: площа та якість сільгоспугідь, середньорічна температура, опади за рік, кількість працюючих, основні виробничі фонди, дороги, мінеральні добрива, закупівельні концентровані корми та ін.

Для вивчення такого роду залежностей і служить диференціальне числення функцій багатьох змінних. Апаратом для дослідження таких функцій є методи, які було створено для функцій однієї змінної. Такий підхід дає змогу більш повно з'ясувати геометричний характер багатовимірного аналізу і допомагає краще засвоїти як одновимірну, так і багатовимірну теорії.

В усіх галузях сучасної науки і техніки, де потрібні точні методи дослідження, використовуються похідні та інтеграли.

Інтеграл (від латинського integer – цілий) – одне з найважливіших понять математики. Воно виникло в зв'язку з потребою, з одного боку, знаходити функції за їх похідними, а з другого – вимірювати площі, об'єми, довжини дуг, роботу змінної сили і т. ін. Відповідно до цього розрізняють невизначений і визначений інтеграли, обчислення яких і становить задачу інтегрального числення.

Слово «інтеграл» вперше в друкованому варіанті застосував Я. Бернуллі в 1690 р. За однією із версій, Бернуллі вивів цей термін від латинського integer – приводити до попереднього стану, відновлювати.

Майже одночасно І. Ньютон та Г. Лейбніц створили найважливіші розділи математики – диференціальне та інтегральне числення.

У Ньютона інтеграл (флюєнта) виступав передусім як невизначений інтеграл, як первісна (термін Ж. Лагранжа). Вже в 1666 р. він встановив, що похідна (флюксія) від $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ дорівнює x^n, і отримав інтеграл x^n у вигляді $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$. І. Ньютон застосував метод розкладання підінтегральної функції в степеневий ряд з подальшим почленним інтегруванням. Він виражав інтеграли через нескінченні степеневі ряди, інтегрування в кінцевому вигляді займало в його дослідженнях другорядну роль. Коли Ньютон відкрив свою знамениту формулу інтегрального числення, точно не відомо, скоріше за все, це було зроблено між 1666 та 1669 роками, але у будь-якому випадку, це було значно раніше перших відкриттів Г. Лейбніца.

В перших двох частинах своєї фундаментальної праці «Математичні начала натуральної філософії» І. Ньютон фактично проводив розрахунки, рівносильні обчисленню деяких подвійних і потрійних інтегралів.

У Лейбніца поняття інтеграла виступало у вигляді визначеного інтеграла. Введення поняття інтеграла і його позначення відноситься до осені 1675 р. Саме Лейбніц став записувати інтеграл формулою $\int y$, де $\int$ – подовжена літера S (перша літера слова Summa). В 1686 р. Лейбніц остаточно зупинився на записі $\int y \,\mathrm{d}x$, оскільки підсумовуються не лінії $y = y(x)$, а диференціали площ $y\,\mathrm{d}x$.

В 1694 р. Лейбніц друкує свою знамениту основну формулу інтегрального числення. Серед застосовуваних ним спеціальних методів інтегрування були: заміна змінної, інтегрування частинами, інтегрування раціональної функції за допомогою розкладання на найпростіші дроби (1702 – 1703).

На відміну від геніального методу флюксій і флюєнт Ньютона, ідеї робіт Лейбніца виявилися досить ясними, чіткими та загальнодоступними для французьких та англійських математиків того часу.

Величезна заслуга Ньютона і Лейбніца у формуванні і майбутньому розвитку математичної науки полягає в побудові алгоритму скінченного подання результату нескінченної операції.

В кінці XVII ст. Ньютон і Лейбніц незалежно один від одного встановили взаємозв’язок між інтегралом і похідною – найважливішими поняттями математичного аналізу. Нині це твердження називається основною теоремою інтегрального числення або формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Тут $f(x)$ – довільна неперервна функція, $F(x)$ – деяка диференційовна на $[a;b]$ функція така, що $F'(x) \equiv f(x)$, $x \in [a;b]$.

Визначений інтеграл та ідеї інтегрального числення виявилися надзвичайно плідними в їх застосуванні для розв’язування цілого ряду задач природознавства.

Першими прикладами використання методів інтегрального числення вважаються дослідження давньогрецьких вчених Евдока Кнідського (IV ст. до н.е.) та Архімеда з Сіракуз (III ст. до н.е.) по визначенню площ, об’ємів і центрів мас. Визначений інтеграл існував більше 2000 років без застосування через складність обчислення інтегральних сум. Своє широке застосування він отримав лише в кінці XVIII ст., коли Ньютон та Лейбніц відкрили його тісний взаємозв’язок з невизначеним інтегралом. Перше означення інтеграла як границі інтегральних сум, яке й дотепер є загальноприйнятим, дав у 1821 р. Коші О. Л. Подальший розвиток поняття інтеграла (кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та ін.) від функції загальної будови пов’язують з іменами Рімана, Лебега та Рісса.

Одні з багатьох досліджень в області звичайних диференціальних рівнянь, спричинені, зокрема, питаннями динаміки й такі, що відносяться до особливих розв’язків, до розв’язування систем диференціальних рівнянь тощо, належать Лагранжу, Даламберу та іншим математикам того часу. Теорія диференціальних рівнянь стала міцним знаряддям дослідження в механіці й диференціальній геометрії. В наш час теорія диференціальних рівнянь пов’язана з глибокими дослідженнями в області аеродинаміки, гідродинаміки, теорії стійкостій, пружності та інших розділів математичного природознавства й техніки.

Інтегральне числення функцій багатьох змінних базується на формулі Ньютона–Лейбніца та серії означень таких понять, як гладка крива, область, поверхня, край поверхні і їх орієнтація.

При викладанні теорії криволінійних, кратних і поверхневих інтегралів підкреслюється однотипність означень введених понять як границь відповідних сум та пояснюється їх фізичний зміст.

Інтегральне числення функцій багатьох змінних, в особливості – векторний аналіз, уже давно застосовується у гідромеханіці, теорії пружності, електротехніці та інших галузях. Сама теоретична база технічних наук потребує від сучасного інженера вільно володіти цим апаратом числення.

Слід відзначити, що формули Гріна, Гаусса–Остроградського і Стокса є частинними випадками загальної формули Стокса для гладких диференціальних форм. Зміст загальної формули Стокса для поверхонь n-вимірного простору вперше запропонував Пуанкаре, хоча для областей у просторі R^n цю формулу знав уже Остроградський.

Цікавим є те, що класична формула Стокса була вперше опублікована ним у 1854 році як одне із питань конкурсного екзамену на кращого студента математика Кембріджського університету. Сучасниками професора Стокса було дано принаймні три доведення його теореми, одне з яких, наприклад, запропоноване Максвеллом у «Електриці і магнетизмі».

Таким чином, загальну формулу Стокса не випадково називають формулою Ньютона–Лейбніца–Гріна–Гаусса–Остроградського–Стокса–Пуанкаре. Отже, незважаючи на значну відмінність понять і тверджень у наведеному далі матеріалі, його пронизує насправді принципова єдність.

Основна небезпека при вивченні теорії рядів – це спрощена уява про ряд як про «суму нескінченного числа доданків». У звичайній алгебрі мають справу лише з діями над кінечним числом компонент і, зокрема, сумами кінечного числа доданків.

Насправді мова тут піде не про звичайну суму, а про щось таке, що ще потребує вірного тлумачення та усвідомлення. З цієї причини ми не можемо беззастережно користуватися такими звичними і зручними законами дій, як переставний (комутативний) або сполучний (асоціативний) закони. Більш того, некритичне застосування цих правил може призвести до зовсім неправильних відповідей. Тим більш обережно слід ставитися до перенесення на ряди відомих простих теорем про диференціювання і інтегрування сум, складених зі скінченного числа доданків.

Слово «математика» означає науку про істину. Багатогранність навколишнього світу, бурхливий розвиток суспільства, технологій та техніки на сучасному етапі потребують від математичної підготовки студентів вищих закладів освіти багатовимірного сприйняття. Наведені факти наочно показують загальну єдність оточуючого нас всесвіту та ще раз підкреслюють важливість фундаментальної підготовки фахівців.

ГЛАВА І. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Основні поняття та теореми

Числову величину називають змінною, якщо вона набуває різних значень. Областю зміни змінної величини називають множину всіх числових значень, що набуваються нею. Під функціональною залежністю розуміють взаємозв'язок між змінними величинами.

Означення функції. Якщо кожному значенню однієї змінної x, із областю значень D, поставлено у відповідність єдиним чином значення іншої змінної y, то говорять, що y є функція змінної x, і записують $y=y(x)$ або $y=f(x), x\in D$.

Множину D називають областю визначення функції $y=f(x)$, змінну x незалежною змінною або аргументом, а змінну y – залежною змінною або функцією.

Множиною значень функції $f(x)$ називають множину E всіх чисел y таких, що $E=\{y: y=f(x), x\in D\}$.

Якщо змінні x та y дійснозначні (тобто $x\in R$, $y\in R$), то $y=f(x)$ називають функцією дійсної змінної.

Найпростіші властивості функцій дійсної змінної.

1. Функцію $y=f(x), x\in D,$ називають обмеженою зверху (обмеженою знизу), якщо існує така стала M, що для кожною $x\in D$ виконується нерівність $f(x)\le M$ (відповідно $f(x)\ge M$).
2. Функція $f(x)$ називається обмеженою на множині D, якщо вона обмежена на цій множині як зверху, так і знизу. Тобто, існує таке додатне число $M>0$, що $|f(x)|\le M$ для кожного $x\in D$.
3. Говорять, що числова функція $y=f(x), x\in D$ набуває в точці $x_0\in D$ найбільшого або максимального значення (відповідно найменшого або мінімального), якщо $f(x)\le f(x_0)$(відповідно $f(x)\ge f(x_0)$) для кожної точки $x\in D$ і записують $f(x_0)=\max\limits_D f(x)$ (відповідно $f(x_0)=\min\limits_D f(x)$).
4. Максимальні та мінімальні значення називаються екстремальними.
5. Функції, значення яких не змінюються при зміні величини аргументу, називаються сталими або константами, пишуть $f(x)=const$.
6. Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини при умові $x_1<x_2$ маємо:
   - а) $f(x_1)<f(x_2)$, то функція є зростаючою;
   - б) $f(x_1)>f(x_2)$, то функція є спадною;
   - в) $f(x_1)\le f(x_2)$, то функція є неспадною;
   - г) $f(x_1)\ge f(x_2)$, то функція є незростаючою;

7. Функція $f(x)$ називається монотонною на множині D, якщо вона є на цій множині або зростаючою, або спадною, або незростаючою, або неспадною.
8. Функція $f(x)$ називається:
   а) парною, якщо для кожного $x \in D$ число $-x \in D$ і $f(-x)=f(x)$;
   б) непарною, якщо для кожного $x \in D$ число $-x \in D$ і $f(-x)=-f(x)$;
9. Функція $f(x)$ називається періодичною, якщо існує число $T \neq 0$ таке, що $f(x+T)=f(x)$ для кожного $x \in D$. Число T називається періодом функції, а найменше із додатних чисел T є основним періодом функції.

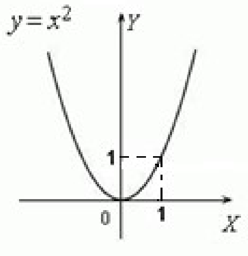
Основні способи задання функції: аналітичний, графічний і табличний.

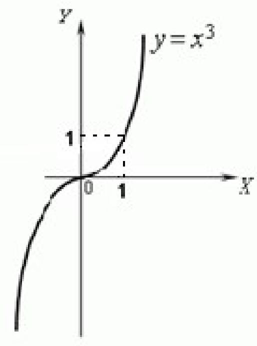
1. При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом). Під областю існування функції розуміють множину всіх дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст.
2. Графіком функції $y=f(x)$, $x \in D$ називають множину F точок на площині xOy з координатами $(x;f(x))$, а саме $F=\{(x;f(x)): x \in D\}$. При графічному способі задання функцій $y=f(x)$ відповідність між змінними x і y задається графіком – множиною точок $(x;y)$ площини.
3. Табличний спосіб задання функції $y=f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці

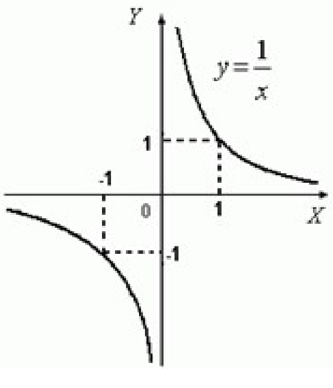
x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	y_3	...	y_n

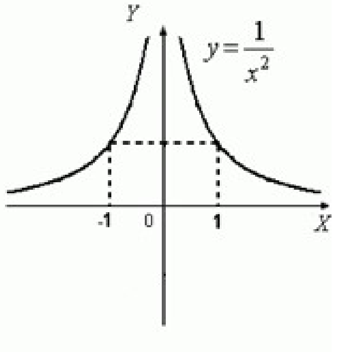
Елементарні функції та їх класифікація. Основними елементарними функціями називаються функції: стала $y=c$, c-константа; степенева $y=x^{\lambda}$; показникова $y=a^{x}$, $a>0$; логарифмічна $y=\log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$; тригонометричні $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$; обернені тригонометричні $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc}tgx$, $y=\operatorname{arc}ctgx$.

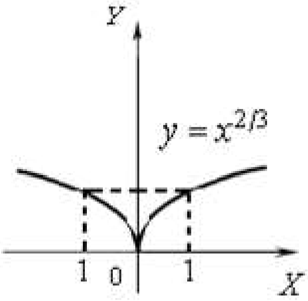
Наведемо ескізи графіків основних елементарних функцій.

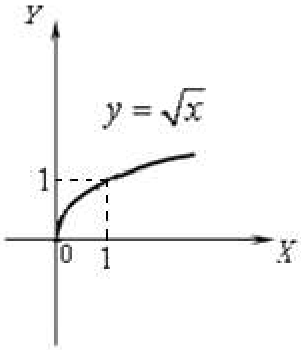


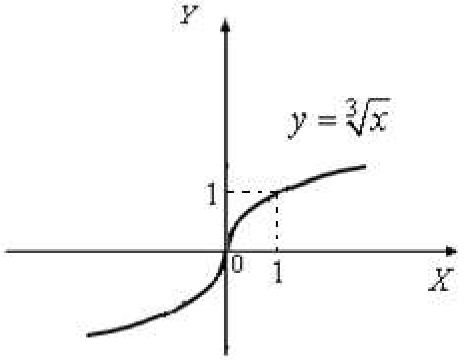


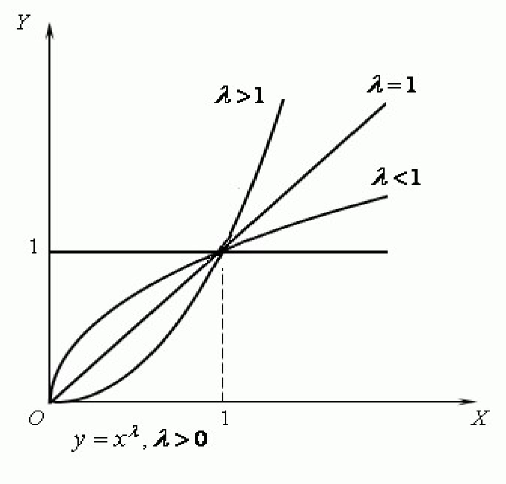


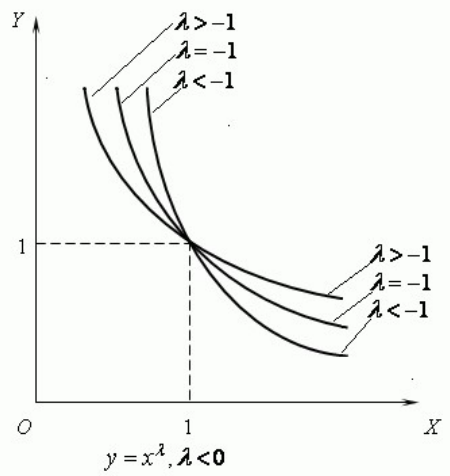


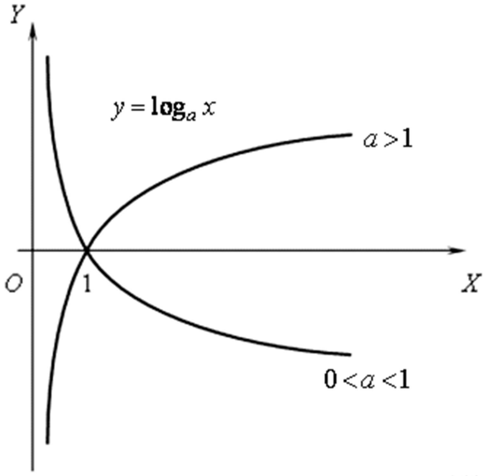

Y
$y = x^{2/3}$
1
0
1
X

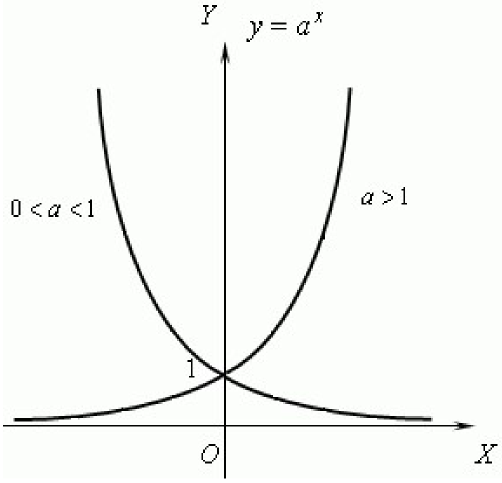

Y
$y = \sqrt{x}$
1
0
1
X

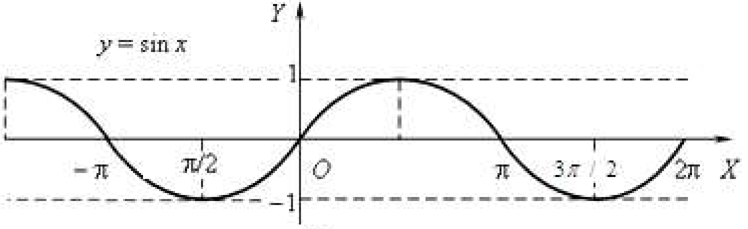

Y
$y = \sqrt[3]{x}$
1
0
1
X

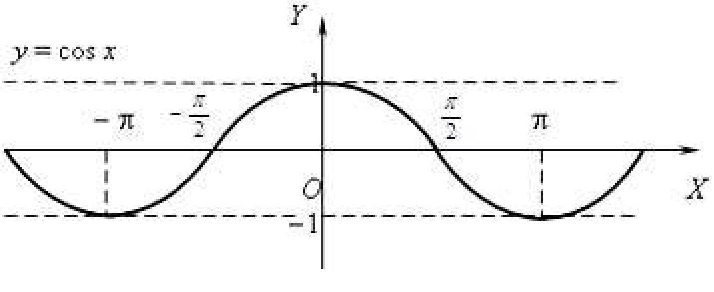

Y
$\lambda > 1$
$\lambda = 1$
$\lambda < 1$
1
O
1
X
$y = x^{\lambda}, \lambda > 0$

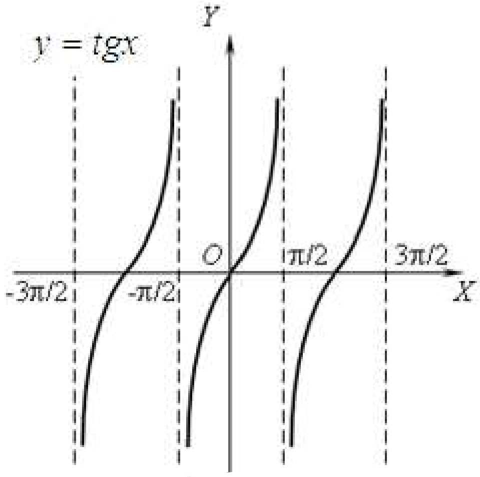

Y
$\lambda > -1$
$\lambda = -1$
$\lambda < -1$
1
$\lambda > -1$
$\lambda = -1$
$\lambda < -1$
O
1
X
$y = x^{\lambda}, \lambda < 0$

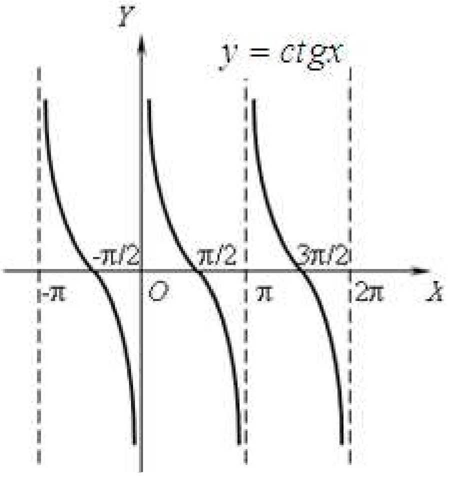

Y
$y = \log_a x$
$a > 1$
O
1
X
$0 < a < 1$

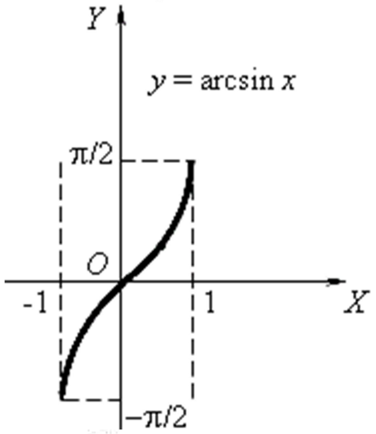

Y
$y = a^x$
$0 < a < 1$
$a > 1$
1
O
X

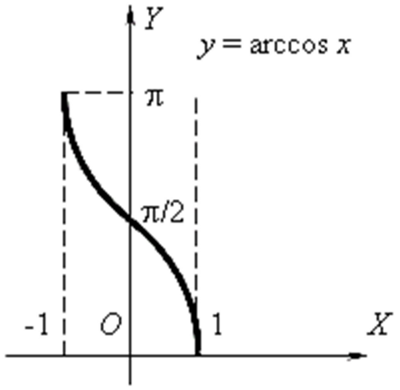

Y
$y = \sin x$
1
$-\pi$
$\pi/2$
O
π
$3\pi/2$
2π
X
-1

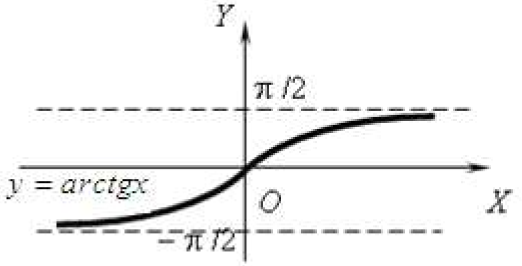

Y
$y = \cos x$
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
O
X
-1

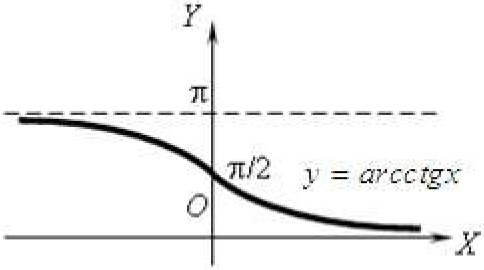












Сумою, різницею, добутком та часткою функцій $f=f(x)$ і $g=g(x)$ називають функцію, що визначається відповідно рівностям:

$$f \pm g=f(x) \pm g(x), \qquad f \cdot g=f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f}{g}=\frac{f(x)}{g(x)} \ (g(x) \neq 0).$$

Наприклад, функція $f+g$ – як функція, що набуває в кожній точці x значення $f(x) \pm g(x)$, а область визначення функції суми $f+g$ є перерізом областей визначення функцій f і g: $D_{f+g}=D_f \bigcap D_g$.

Нехай задано дві функції $y=f(z)$ і $z=g(x)$, причому область визначення функції f містить область значень функції g : $D_f \supset E_g$. Тоді кожному x із області визначення g природнім чином відповідає y таке, що $y=f(z)$, де $z=g(x)$. Ця функція записується формулою $y=f(g(x))$, $x \in D_g$, і називається складеною функцією від x, або суперпозицією функції f і g, або функцією від функції. Змінну $z=g(x)$ функції $y=f(z)$ називають проміжним аргументом або внутрішньою функцією, а змінну $y=f(z)$ – зовнішньою функцією.

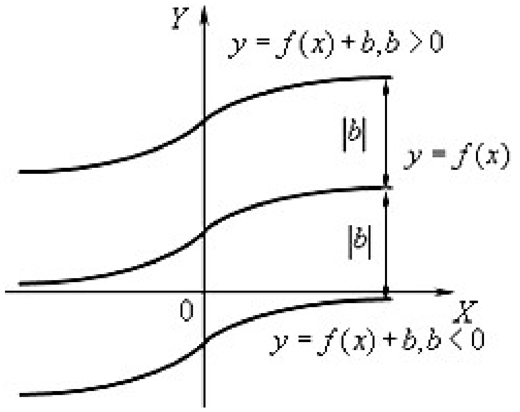
Означення. Елементарною функцією називають таку функцію, яку можна задати явним чином за допомогою формули, що містить лише скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій основних елементарних функцій.

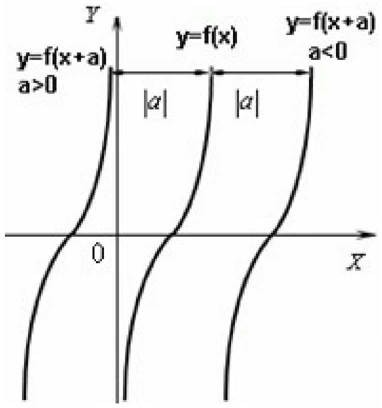
Класи елементарних функцій.

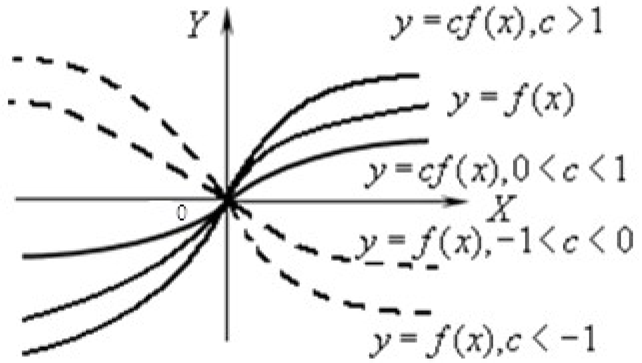
1. *Многочлени* (поліноми): $y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
2. *Раціональні функції* (раціональні дроби): $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени.
3. *Ірраціональні функції.* Функція називається ірраціональною, якщо вона утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною.
4. *Трансцендентні функції.* Елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною називається трансцендентною.

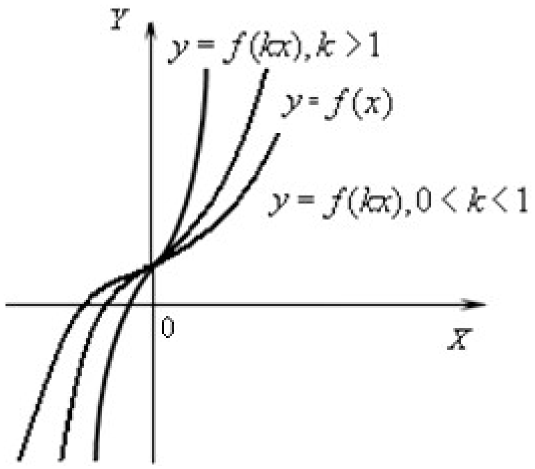
Перетворення графіків функцій. Розглянемо як за допомогою відомого графіка функції $y=f(x)$ будується графік функції з лінійно зміненим аргументом і значенням функції: $y=k \cdot f(ax+b)+c$, де a, c, b, k – сталі величини.

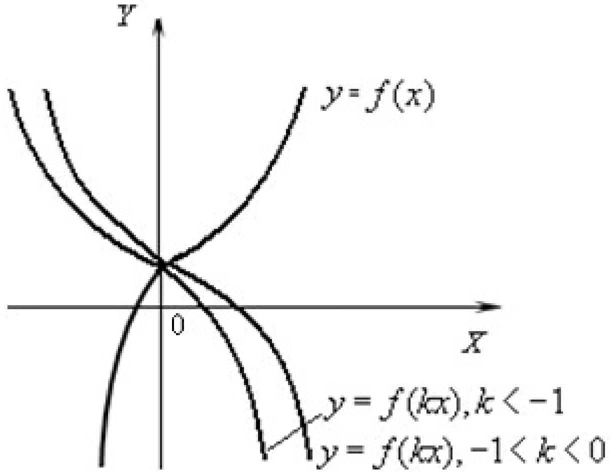
1. Графік функції $y=f(x)+b$ отримуємо з графіка $y=f(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy на величину b.
2. Графік функції $y=f(x+a)$ отримуємо з графіка $y=f(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Ox на величину a.
3. Графік функції $y=c \cdot f(x)$, $c>0$, отримуємо з графіка $y=f(x)$ за допомогою розтягування в c разів його ординат. Якщо $c<0$, то графік $y=c \cdot f(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y=-c \cdot f(x)$ відносно осі Ox.
4. Графік функції $y=f(k \cdot x)$, $k>0$, отримуємо з графіка $y=f(x)$ за допомогою стискання в k разів абсцис його точок. Якщо $k<0$, то графік $y=f(k \cdot x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y=f(-kx)$ відносно осі Oy.











Зауваження. Для скорочення записів використовується логічна символіка та наступні позначення:

$\forall$ (кожен, для будь-якого);

] (нехай, припустимо);

$\exists$ (існує, є);

$\Rightarrow$ (випливає, якщо ... то);

$\Leftrightarrow$ (тоді і тільки тоді, необхідно і достатньо);

$\exists!$ (існує єдиний, знайдеться єдиний);

: (таких, що; тих, кожен з яких);

:= (дорівнює за означенням, надається значення);

$\equiv$ (дорівнює тотожно);

$(\cdot)$ точка;

f(x)$\uparrow$ (функція зростаюча);

f(x)$\downarrow$ (функція спадна).

Контрольні питання та завдання

1. Яку множину називають об’єднанням множин *A* і *B*?
2. Яку множину називають перерізом множин *A* і *B*?
3. Яку множину називають різницею множин *A* і *B*?

4. Записати у вигляді подвійної нерівності наступні підмножини дійсних чисел: відрізок *[a;b]*, піввідрізок *[a;b)*, інтервал *(a;b)*, півінтервал *(a;b]*.
5. Модуль (абсолютну величину) дійсного числа x визначають рівністю

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

   а) дайте геометричне пояснення для модуля числа x;

   б) доведіть рівність для модуля добутку та частки чисел x та y:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

   в) доведіть подвійну нерівність трикутника :

$$\big||x| - |y|\big| \le |x + y| \le |x| + |y|$$

6. Прочитайте запис “$\exists$ M>0: $|f(x)| \le M$, $\forall x \in D$.”
7. Наведіть символьний запис означення найменшого значення функції *f(x)* на множині *D*.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Показати, що $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy})$, якщо $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$.

*Розв’язання.*Знайдемо $f(y)$ і $f(\frac{x+y}{1+xy})$, так $f(y) = \lg\frac{1+y}{1-y}$;

$$f(\frac{x+y}{1+xy}) = \lg\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}} = \lg\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y} = \lg\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}.$$

Знайдемо *f(x)+f(y):*

$$f(x) + f(y) = \lg\frac{1+x}{1-x} + \lg\frac{1+y}{1-y} = \lg\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}.$$

Порівнюючи вирази $f(x)+f(y)$ і $f(\frac{x+y}{1+xy})$, бачимо, що вони рівні.

Приклад 2. Дано: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$. Знайти всі корені рівняння

$$f(x) = f(-2).$$

*Розв’язання.*Обчислимо

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 23(-2) = -16 - 20 + 46 = 10.$$

Розв’яжемо рівняння: $f(x) = f(-2)$:

$$2x^3 - 5x^2 - 23x = 10; \; 2x^3 - 5x^2 - 23x - 10 = 0.$$

Оскільки $f(x) - f(-2) = 0$, то $x = -2$ є коренем даного рівняння. Знайдемо інші корені, за схемою Горнера:

	2	-5	-23	-10
-2	2	-9	-5	0

Одержали рівняння: $2x^2-9x-5=0$, коренями якого є : $x_{1,2}=\dfrac{9\pm 11}{4}=\left[\begin{array}{l}5\\-1/2\end{array}\right.$.

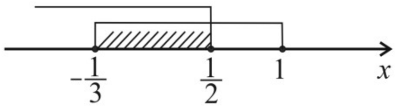
Отже, рівняння $f(x)=f(-2)$ має три дійсні корені: $x=-2; x=-\dfrac{1}{2}; x=5$.

Приклад 3. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}.$$

Розв'язання. Область визначення знаходимо з умов існування функції:

$$\begin{cases}1-2x\ge 0;\\ -1\le\dfrac{3x-1}{2}\le 1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 1/2;\\ -\dfrac{1}{3}\le x\le 1;\end{cases}$$



$x\in[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$

Отже, $D(y)=[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$.

Приклад 4. Знайти основні періоди функцій:

а) $f(x)=\sin 5x$; **б)** $f(x)=tg3x+\cos 4x$.

Розв'язання.

а) Оскільки основний період функції $\sin x$ є 2π, то $\sin 5x=\sin(5x+2\pi)=$ $=\sin 5\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)$. Основний період для $\sin 5x$ є $\dfrac{2\pi}{5}$.

б) Функція $tg3x$ має період $\dfrac{\pi}{3}$, а $\cos 4x$ має період $\dfrac{\pi}{2}$, тоді основний період даної функції є найменше спільне кратне $\dfrac{\pi}{2}$ і $\dfrac{\pi}{3}$. Для знаходження НСК $\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\}$ зведемо періоди $\dfrac{\pi}{2}$ і $\dfrac{\pi}{3}$ до спільного знаменника: $\dfrac{3\pi}{6}$ і $\dfrac{2\pi}{6}$, або $3\dfrac{\pi}{6}$ і $2\dfrac{\pi}{6}$. Найменше спільне кратне коефіцієнтів 3 і 2 рівне 6, значить $T=6\cdot\dfrac{\pi}{6}=\pi$.

Приклад 5. Дослідити функцію на парність та непарність:

а) $f(x)=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$; **б)** $f(x)=\ln\dfrac{x+3}{x-3}$; **в)** $f(x)=\cos x+|x|$.

Розв'язання.

а) Областю визначення функції $f(x)=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$ є множина всіх дійсних чисел: x є $(-\infty;\infty)$, тому вона симетрична відносно нуля.

Знайдемо

$$f(-x)=(-x)^2\sqrt[3]{-x}+2\sin(-x)=-x^2\sqrt[3]{x}-2\sin x=-(x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x)=-f(x).$$

Оскільки $f(-x)=-f(x)$, то функція є непарна.

б) Область визначення функції $f(x)=\lg\frac{x+3}{x-5}$ знайдемо з умови: $\frac{x+3}{x-5}>0$, звідки x є $(-\infty;-3)\cup(5;\infty)$ і видно, що область визначення не є симетричною відносно нуля. Тому дана функція не є ні парною, ні непарною.

в) Область визначення функції $f(x)=\cos x+|x|$ є множина $(-\infty;\infty)$, тому вона симетрична відносно нуля.

Знайдемо $f(-x)=\cos(-x)+|-x|=\cos x+|x|=f(x)$, оскільки $f(-x)=f(x)$, то дана функція парна.

Приклад 6. Побудувати графік функції

а) $y=|x+2|-|x-2|$; **б)** $y=-3x^2+7x-4$.

Розв'язання.

а) Функція визначена на всій множині дійсних чисел. Розкриваємо модулі: нулі модулів $x=\pm 2$.

При $x<-2: y=-x-2+x-2=-4$

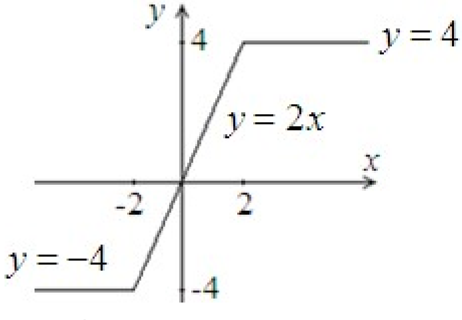
При $-2\le x\le 2: y=x+2+x-2=2x$.

При $x>2: y=x+2-x+2=4$.

Отже, дана функція $y=|x+2|-|x-2|$ набула виду:

$$y=\begin{cases}-4,\ x<-2,\\ 2x,\ -2\le x\le 2,\\ 4,\ x>2.\end{cases}$$

Графік функції на певних проміжках аргумента x визначають три різні аналітичні вирази.



б) Функція $y=-3x^2+7x-4$ є квадратичною, її графік – парабола. Так як коефіцієнт $a=-3<0$, то вітки параболи напрямлені донизу.

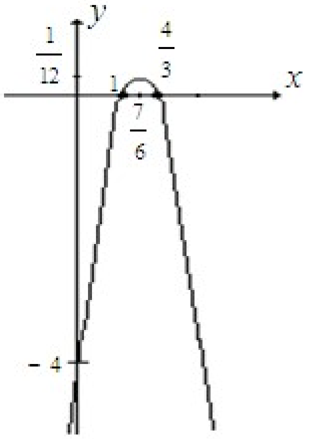
Вершина параболи: $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{6}$, $y_0=f(\frac{7}{6})=\frac{1}{12}$.

Точки перетину з осями координат:

з Ox: $y=0$, $3x^2-7x+4=0$, $x_{1,2}=\frac{7\pm 1}{6}=\left[\begin{matrix}\frac{4}{3}\\ 1\end{matrix}\right.\Rightarrow(1;0);(\frac{4}{3};0)$,

з Oy: $x=0, y=-4\Rightarrow(0;-4)$.

Функція $y=-3x^2+7x-4$ визначена на множині всіх дійсних чисел, а множиною значень y є $\left(-\infty;\frac{1}{12}\right]$. Графік симетричний відносно прямої $x=\frac{7}{6}$.



Приклад 7. Побудувати графіки функцій за допомогою елементарних перетворень.

а) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$; **б)** $y=2\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12})+1$.

Розв'язання.

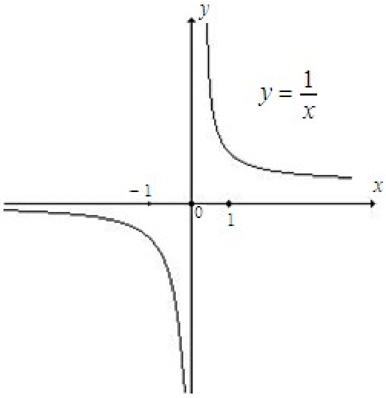
а) Зведемо функцію до виду $y=A\cdot f(kx+m)+n$ і застосуємо перетворення графіка функції $y=f(x)$:

- A - стиснення $(A<1)$ або розтягнення $(A>1)$ відносно вісі Oy,
- m - зміщення по вісі Ox: вліво $(+m)$, вправо $(-m)$,
- n - зміщення по вісі Oy: вгору $(+n)$, вниз $(-n)$,
- $к$ - стиснення $(к>1)$ або розтяг $(к<1)$ відносно вісі Ox.

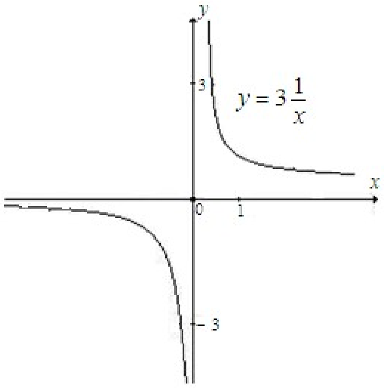
Виконаємо перетворення:

$$\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}:A=-3;m=-1;n=2.$$

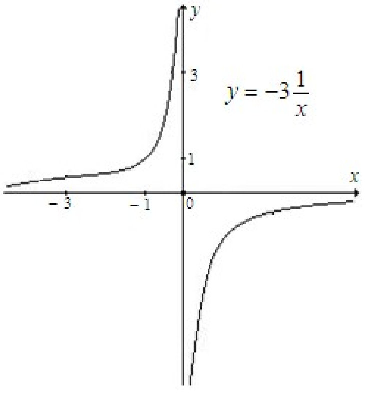
Побудову графіка функції $y=\dfrac{2x-1}{x+1}=2-\dfrac{3}{x+1}$ можна виконати за схемою:



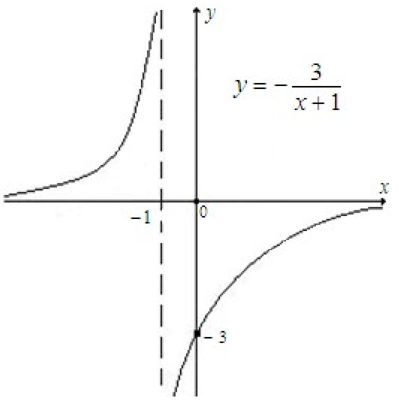
а) →



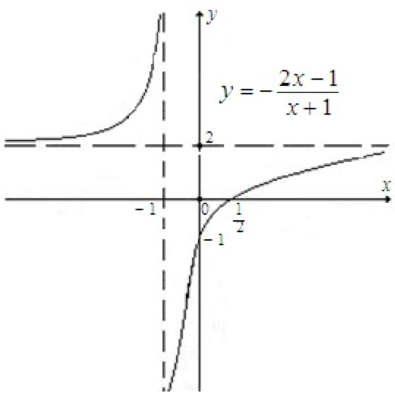
б) →



в) →



г) →

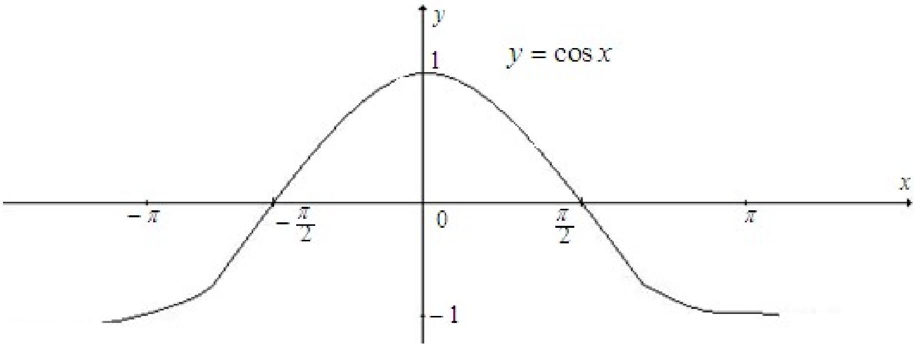


д)

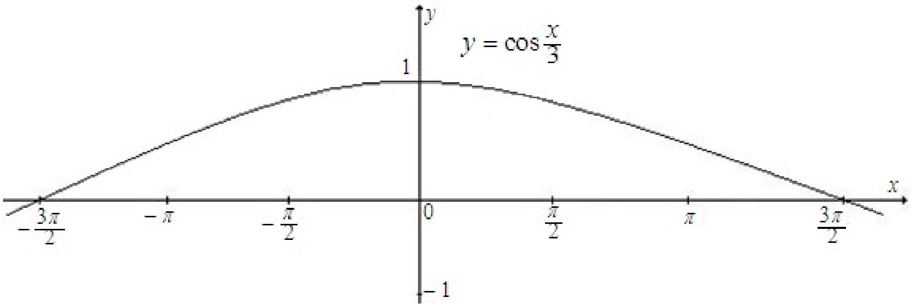
Зауважимо, що побудову можна спростити, якщо вважати, що $y=\frac{1}{x}; x=0$ і $y=0$ переходять відповідно в асимптоти графіка функції $y=\frac{2x-1}{x+1}: x=-1; y=2$. Тоді достатньо відносно нової системи координат з вісями $x=-1; y=2$ і початком координат $(-1;2)$ побудувати одну вітку гіперболи, а інша – симетрична відносно точки $(-1;2)$ перетину асимптот.

б) $y=2\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12})+1=2\cos\frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{4})+1$.

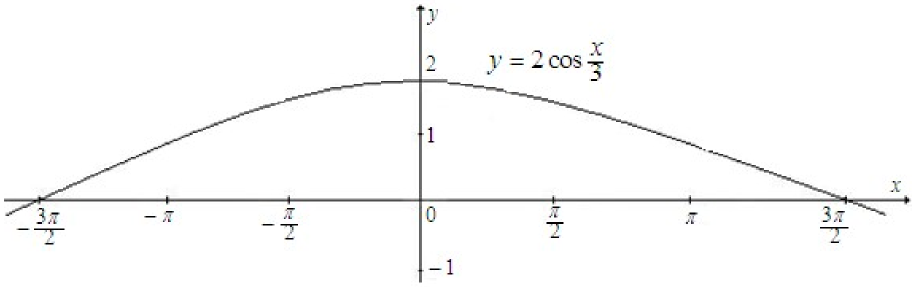
Графік функції $y=2\cos\frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{4})+1$ отримаємо з графіка функції $y=\cos x$ за схемою: $\cos x \to \cos\frac{1}{3}x \to 2\cos\frac{1}{3}x \to 2\cos\frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{4}) \to 2\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12})+1$.



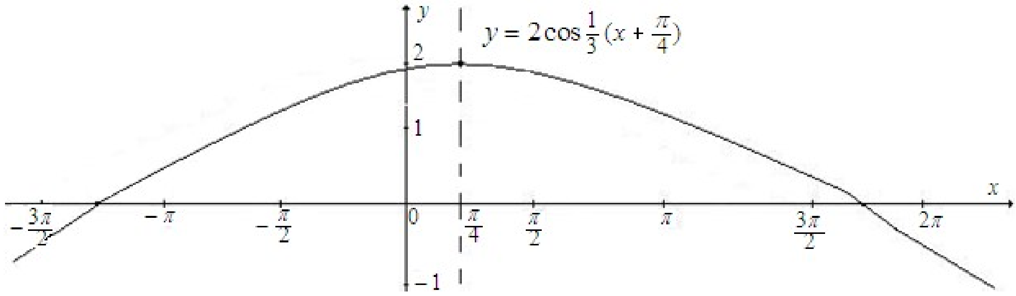
а)→



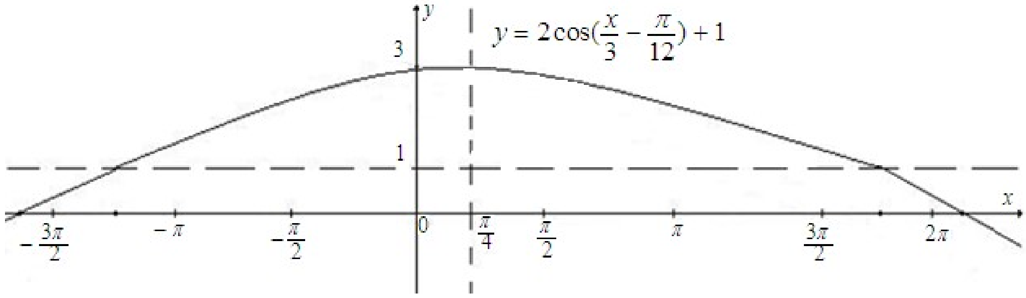
б) →



в) →



г) →



д)

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1.

1. Дано $\Phi(t) = 3t^2 + \frac{3}{t^2} - 2t - \frac{2}{t}$. Довести, що $\Phi(t) = \Phi(\frac{1}{t})$.

2. Знайти $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, якщо $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$.

3. Знайти всі корені рівняння $f(x) = f(\frac{x+8}{x-1})$, якщо $f(x) = x^2 - 12x + 3$.

4. Розв’язати рівняння $|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$, якщо $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$.

Завдання 1.2. Які із зазначених функцій є парними, непарними, не є ні парними, ні непарними.

1. $f(x) = \cos x + |x|$.
2. $f(x) = x^5 + \frac{x^3}{3} - x$.
3. $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$.
4. $f(x) = \sin x - \cos x$.
5. $f(x) = 2x^3 \sin x$.
6. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$.

Завдання 1.3. Знайти область визначення функцій.

1. $y=\sqrt[4]{2+x-x^2}$.
2. $y=2^{\frac{1}{1-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$.
3. $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.
4. $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$.
5. $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$.
6. $y=\dfrac{1}{\lg\sqrt{1-x}}$.
7. $y=\dfrac{1}{x^2-16x}+\sqrt{x^2-2x-3}$.
8. $y=2^{\arccos(1-x)}$.
9. $y=\lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}+\sqrt[3]{x+5}$.
10. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\dfrac{1}{|x+1|}$.

Завдання 1.4. З'ясувати які із зазначених функцій є періодичними і знайти їхній найменший період T?

1. $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.
2. $f(x)=3tg\dfrac{x}{2}+2tg\dfrac{x}{3}$.
3. $f(x)=2\sin x-3\sin 2x+4\sin 3x$.
4. $f(x)=\cos\sqrt{x}$.

Завдання 1.5. Побудувати графіки функцій, використовуючи елементарні перетворення.

1. $y=3-2|x|$.
2. $y=|4x+2|+|4x-2|$.
3. а) $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$.
   б) $y=-2x^2$.
   в) $y=(x+1)^2$.
4. а) $y=\log_2(x-1)$.
   б) $y=\log_{\frac{1}{2}}x-2$.
   в) $y=-\log|x|$.
5. $y=x^2+2x-8$.
6. $y=\left|x^2+4x-5\right|$.
7. $y=2^{x-1}+1$.
8. $y=-\cos 2x$.
9. $y=\dfrac{1}{2}\sin|x|$.
10. $y=\arcsin x+1$.

Завдання 1.6. Побудувати графіки функцій, використовуючи елементарні перетворення.

1. $y=\left|3x^2-5x-2\right|$.
2. $y=-(x+1)^3+2$.
3. $y=\dfrac{1}{2}-5^{2x+1}$.
4. $y=\log_{\frac{1}{3}}|x+1|-1$.
5. $y=\sin(3x-2)+1$.
6. $y=-2\cos(2x+1)$.
7. $y=1+\arccos(x-3)$.
8. $y=1-\arcsin\dfrac{x}{2}$.
9. $y=2+3\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
10. $y=1+2\cos\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$.
11. $y=\dfrac{2x+1}{3x+4}$.
12. $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$.

Завдання 1.7. Побудувати фігуру, обмежену лініями. За графіком наближено знайти координати точок перетину цих ліній.

1. $y = 2^x, y = \frac{1+x}{x}, x = 3$.
2. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1, y = x + 3$.
3. $y = \frac{2}{x}, y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.
4. $y = \sin\frac{\pi x}{2}, y = x^3$.
5. $y = \frac{\left|4 - x^2\right|}{4}, y = 7 - |x|$.
6. $y = \frac{6}{|x+1|}, y = 3 - |3 - x|$.

§2. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Основні поняття та теореми

Числовою послідовністю називають функцію, визначену на множині натуральних чисел і позначають: $a_n = f(n),\ \forall n \in N$.

Окреме число a_n називають елементом або членом послідовності, число n – його номер. Послідовність з елементами a_n записують формульно як $\{a_n\}$ або $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Для послідовності справедливі усі твердження, сформульовані для функцій. Так, наприклад, запис $a_n \uparrow (a_n \downarrow)$ означає, що послідовність $\{a_n\}$ зростає (спадає), тобто $a_n \le a_{n+1},\ \forall n \in N$ (відповідно $a_n \ge a_{n+1}$). Послідовність $\{a_n\}$ – обмежена, якщо $\exists M > 0, \forall n \in N: |a_n| \le M$.

Означення границі послідовності. Послідовність $\{a_n\}$ називають збіжною до числа a і записують $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ або $a_n \to a$ при $n \to \infty$, якщо для довільного додатного числа ε можна вказати такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$. У символьній формі:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Будь-який інтервал виду $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називають ε-околом точки a на числовій прямій.

Геометричний зміст границі. Послідовність $\{a_n\}$ має своєю границею число a, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, якщо в довільний (як завгодно малий) ε-окіл точки a потрапляють всі члени $\{a_n\}$, за винятком скінченного їх числа.

Найпростіші властивості границі послідовності.

1. Єдиність границі. Кожна послідовність може мати не більше однієї границі.

2. Якщо $\{a_n\}$ – стаціонарна послідовність, тобто $a_n = c, \forall n \in N,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.
3. Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.
4. Відграниченість від нуля. Якщо $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0,$ то знайдеться номер n_0 такий, що $a_n > \frac{a}{2}$ при $n > n_0$.
5. Перехід до границі в нерівностях. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ і $a_n \le b_n$, $\forall n \in N$, то $a \le b$.
6. Про три послідовності. Якщо $a_n \le c_n \le b_n$, $\forall n \in N$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, то й $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.
7. Перехід до границі під знаком модуля. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Нескінченно мала та нескінченно велика величина. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називають нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Послідовність $\{\beta_n\}$ називають нескінченно великою, якщо $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |\beta_n| > M$. При цьому пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$ або $\beta_n \to \infty$ і говорять, що β_n прямує до нескінченності.

8. Зв'язок збіжної послідовності з нескінченно малою. Послідовність $a_n \to a$ при $n \to \infty \Leftrightarrow (a_n - a) = \alpha_n$ є нескінченно малою.
9. Сума $\{\alpha_n + \beta_n\}$ і різниця $\{\alpha_n - \beta_n\}$ двох нескінченно малих величин $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ є нескінченно мала величина.
10. Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу є нескінченно малою послідовністю, тобто, якщо $|\beta_n| \le M$, $\forall n \in N$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \cdot \alpha_n = 0$.
11. Зв'язок між нескінченно малою та нескінченно великою.

    1) Якщо $\{\beta_n\}$ – нескінченно велика: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$, то $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n}$ є нескінченно малою: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_n} = 0$ (символьно записують $\left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$).

    2) Якщо $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала відмінна від нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ є нескінченно великою величиною: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$ (символьно записують $\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$).

12. Арифметичні операції зі збіжними послідовностями.

Нехай $a_n \to a$ і $b_n \to b$. Тоді при $n \to \infty$ маємо:

1) $a_n \pm b_n \to a \pm b$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{b_n}) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Зауваження. При розв'язуванні задач важливо пам'ятати наступні два приклади нескінченно малих величин:

(1). $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(2). Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Невизначені вирази типів $\left[\dfrac{0}{0}\right], \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty]$. Якщо $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, то вираз $\dfrac{a_n}{b_n}$ є невизначеністю типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, що позначають наступним чином $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Якщо $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, то вираз $\dfrac{a_n}{b_n}$ є невизначеністю типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, що позначають записом $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Якщо $a_n \to 0, b_n \to \infty$, то для виразу $a_n \cdot b_n$ маємо невизначеність $[0 \cdot \infty]$.

Якщо $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, то для виразу $a_n - b_n$ маємо невизначеність $[\infty - \infty]$.

<u>Розкрити відповідну невизначеність</u> означає знайти границю (якщо вона існує) відповідного виразу

Монотонні послідовності. *Теорема.* Якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має границю.

За допомогою цієї теореми обчислюють, наприклад, границі наступних <u>важливих послідовностей</u>.

(3). $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = e$, де *e=2,718281828...*– називається числом Непера-Ейлера і є основою натурального логарифма.

(4). $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Принцип вкладених відрізків. Нехай задано послідовність відрізків $[a_n; b_n]$ вкладених один в одного, тобто таких, що

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}] \supset \ldots$$

з довжинами $\alpha_n = b_n - a_n$, що прямують до нуля: $\alpha_n \to 0$.

Тоді існує і притому єдина точка c, яка одночасно належить всім відрізкам: $c \in [a_n; b_n], \forall n \in N$.

Критерій Коші збіжності послідовності. Послідовність $\{ a_n \}$ збіжна, тобто $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0(\varepsilon)$ і $\forall m \in N \Rightarrow |a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$.

Контрольні питання та завдання

1. Що називають числовою послідовністю і як її можна задати? Навести приклади.
2. Що називають границею числової послідовності? Який геометричний зміст границі?
3. Дати означення обмеженої зверху послідовності та записати її символьно.
4. Яка величина називається нескінченною величиною? Що означають записи $\beta_n \to +\infty$ та $\beta_n \to -\infty$?
5. Розкрити невизначеність $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \left[\frac{0}{0} \right]$, якщо:
   1) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$;
   2) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$;
   3) $a_n = \frac{5}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$;
   4) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.
6. Довести, що добуток двох нескінченно малих є нескінченно мала величина.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Записати числову послідовність за її загальним членом:

а) $x_n = \frac{n}{n+2}$; **б)** $y_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$.

Розв’язання.

а) Надамо n значення 1, 2, 3,…, n і обчислимо значення дробу $\frac{n}{n+2}$ при цих значеннях. Одержимо послідовність: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{2}{4}$; $x_3 = \frac{3}{5}$;…; $x_n = \frac{n}{n+2}$; … .

б) Обчислимо значення дробу $y_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ при n= 1,2,3,… . Одержимо послідовність: $0; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{4}{5}; \ldots; \frac{n + (-1)^n}{n}; \ldots$

Приклад 2. Записати формулу загального члена послідовності за її першими членами:

а) $\frac{6}{7};\frac{9}{10};\frac{14}{15};\frac{21}{22};\frac{30}{31};\ldots$ **б)** $1;-\frac{1}{3};\frac{1}{5};-\frac{1}{7};\frac{1}{9};-\frac{1}{11};\frac{1}{13};\ldots$

Розв'язання.

а) Задані члени послідовності складені за одним законом відповідності між натуральними числами і членами послідовності. Неважко замітити, що чисельник кожного дробу дорівнює квадрату номера плюс п'ять, тобто n^2+5, а знаменники відповідно більші за чисельник на одиницю, тобто n^2+6. Тоді загальний член послідовності можна записати $x_n=\frac{n^2+5}{n^2+6}$.

б) Розглянемо абсолютні величини членів даної послідовності:

$$\left.\begin{array}{l} |x_1|=|1|=\frac{1}{1+2\cdot 0} \\ |x_2|=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2\cdot 1} \\ |x_3|=\left|\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}=\frac{1}{1+2\cdot 2} \\ |x_4|=\left|-\frac{1}{7}\right|=\frac{1}{7}=\frac{1}{1+2\cdot 3} \end{array}\right\}\Rightarrow |x_n|=\frac{1}{1+2(n-1)}=\frac{1}{2n-1}.$$

За умовою знаки членів послідовності чергуються,тому загальний член запишеться так: $x_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Приклад 3.

а) Довести, що послідовність із загальним членом $x_n=\frac{n}{2n+1}$ монотонно зростає.

Розв'язання. Знайдемо різницю $x_{n+1}-x_n$, якщо $x_{n+1}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}=\frac{n+1}{2n+3}$.

$$x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}=\frac{(n+1)\cdot(2n+1)-n\cdot(2n+3)}{(2n+3)\cdot(2n+1)}=\frac{2n^2+3n+1-2n^2-3n}{(2n+3)\cdot(2n+1)}=$$
$$=\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}>0.$$

Отже, для довільного n виконується нерівність $x_{n+1}>x_n$, тому дана послідовність є монотонно зростаючою.

б) Дослідити послідовність $x_n=\frac{2^n}{(n+3)!}$ на монотонність.

Розв'язання. Складемо $x_{n+1}=2^{n+1}/((n+1)+3)!=2^{n+1}/(n+4)!$.

Розглянемо частку: $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+4)!}\cdot\frac{(n+3)!}{2^n}=\frac{2}{n+4}<1$. Тоді $x_{n+1}<x_n$, тому дана послідовність є спадною.

Приклад 4. Довести, що послідовність із загальним членом $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ є обмеженою.

Розв'язання. Так як $a_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1$, тобто $a_n < 1 \;\; \forall n \in N$. Тому послідовність $\{a_n\}$ обмежена з верху. Розглянемо різницю $a_n - a_{n+1}$, якщо

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-2}{(n+1)+1} = \frac{n-1}{n+2}.$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{-3}{(n+1)(n+1)} < 0,$$

тобто $\forall n \in N$ виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$, тому $a_1 = -\frac{1}{2}$ – найменший член послідовності. Отже, $\forall n \in N$, виконується нерівність $a_n \geq -\frac{1}{2}$, тобто послідовність $\{a_n\}$ обмежена знизу.

Одержали, що послідовність $\{a_n\}$ обмежена знизу і зверху, тобто $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$.

Приклад 5. Довести що послідовність із загальним членом $a_n = \frac{4n}{2n+1}$ має границю, яка дорівнює 2.

Розв'язання. Виберемо довільне додатне число ε і покажемо, що для нього можна підібрати таке число *N*, що для всіх значень номера $n > N$ буде виконуватись нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

В цій нерівності візьмемо $a = 2, a_n = \frac{4n}{2n+1}$, тобто повинна виконуватись нерівність: $\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Оскільки $\left|\frac{4n-4n-2}{2n+1}\right| = \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1}$, то

$$\frac{2}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Отже, якщо $n \geq \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, то нерівність $\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$ буде виконуватись.

За *N* приймемо цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}$, тобто $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$. Таким чином для довільного $\varepsilon > 0$ визначено таке натуральне *N*, що виконується нерівність $\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$ для всіх номерів $n > N$. Цим доведено, що число 2 є границею даної послідовності.

Розглянемо числовий приклад. Нехай $\varepsilon = 0{,}03$, тоді $N = [\frac{1}{0{,}03}] = [33\frac{1}{3}] = 33$. Отже, для всіх номерів n, більших за 33 при $\varepsilon = 0{,}03$, буде виконуватись нерівність $\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Починаючи з 34-го, всі члени послідовності будуть знаходитись в проміжку $(2 - 0{,}03; 2 + 0{,}03)$, тобто (1,97; 2,03).

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1}=2$.

Приклад 6. Нехай задано послідовність

$$y_1=0{,}9;\ y_2=0{,}99;\ ...,\ y_n=\underbrace{0{,}99...9}_{n};....$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$. Яким має бути n для того, щоб $|y_n-1|<0{,}001$.

Розв'язання. За означенням границі послідовності для довільного $\varepsilon>0$ має існувати такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх натуральних $n>N(\varepsilon)$ буде виконуватись нерівність $|y_n-1|<\varepsilon$.

Розглянемо $|y_n-1|=|1-\underbrace{0{,}99...9}_{n}|=\underbrace{0{,}00...01}_{n}=10^{-n}<\varepsilon$. З умови $10^{-n}<\varepsilon$ дістанемо: $10^n>\frac{1}{\varepsilon}$, а після логарифмування $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}=-\lg\varepsilon$.

Якщо $N(\varepsilon)=\max\{1;[-\lg\varepsilon]\}$, то нерівність $|y_n-1|<\varepsilon$ буде виконуватись для $n>N(\varepsilon)$, що й показує $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$.

Якщо $\varepsilon=0{,}001$, тоді $\lg\varepsilon=-3$, а $N(\varepsilon)=3$. Отже, $|y_n-1|<0{,}001$, або $1-y_n<0{,}001$, звідки $y_n>0{,}999$ при $n>3$. Так, при $n>3$ величина y_n матиме значення 0,9999, 0,99999, … .

Приклад 7. Довести, що послідовність $\{(-1)^n n\}$ є нескінченно великою.

*Розв'язання.*Візьмемо довільне додатне число A і покладемо $N=[A]+1$. Тоді для довільного $n>N$ виконується нерівність $|a_n|=|(-1)^n n|=|n|>[A]+1>A$, тобто $|a_n|>A$, *а* це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, тобто послідовність $\{(-1)^n n\}$ є нескінченно великою.

Приклад 8. Довести що послідовність $\{a_n\}=\left\{\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt[3]{n}+1}\right\}$ нескінченно мала. Визначити номер,починаючи з якого всі члени послідовності будуть міститися в інтервалі $(-0{,}1;0{,}1)$.

Розв'язання. Задамо довільне число $\varepsilon>0$. Оскільки

$$|a_n|=\frac{2}{5\sqrt[3]{n}+1}<\frac{2}{5\sqrt[3]{n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

то очевидно, що $|a_n|<\varepsilon$ при $n>N$, де $N=\max\left\{1;\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right]\right\}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

З нерівності $\frac{2}{5\sqrt[3]{n}+1}<0{,}1$ знаходимо, що $n>\left(\frac{19}{5}\right)^3=54{,}872$. Таким чином, $N(\varepsilon)=54$ і всі члени послідовності, починаючи з номера $n=55$, будуть міститися в інтервалі $(-0{,}1;\ 0{,}1)$.

Приклад 9. Знайти границі послідовностей.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+3}{15n-4}=[\frac{\infty}{\infty}]$.

Розв'язання. Оскільки чисельник і знаменник нескінченно великі послідовності, то відразу не можна застосувати теорему про границю частки. Поділимо одночасно чисельник і знаменник на найбільший степінь *n*, від чого значення дробу не зміниться. Тоді до чисельника і знаменника можна застосувати теореми про границю суми (різниці). Одержимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{15n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{15-\frac{4}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}15-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}}=\frac{5+0}{15-0}=\frac{1}{3}.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^3-3n-1}-\frac{2n^2}{2n-1}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Виконаємо віднімання дробів:

$$\frac{n^4(2n-1)-2n^2(n^3-3n-1)}{(n^3-3n-1)\left(2n-1\right)}=\frac{2n^5-n^4-2n^5+6n^3+2n^2}{(n^3-3n-1)(2n-1)}=\frac{-n^4+6n^3+2n^2}{(n^3-3n-1)(2n-1)}.$$

В чисельнику та знаменнику винесемо за дужки найбільший степінь n^4, після чого скоротимо дріб на n^4. Одержимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(-1+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)\cdot n\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{6}{n}^{\nearrow 0}+\frac{2}{n^2}^{\nearrow 0}}{\left(1-\frac{3}{n^2}_{\searrow 0}-\frac{1}{n^3}_{\searrow 0}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}_{\searrow 0}\right)}=\frac{-1}{1\cdot 2}=\frac{-1}{2}.$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

Розв'язання. Розкладемо $(n+1)!=n!(n+1)$, тоді $\frac{n!}{n!(n+1)-n!}=\frac{1}{n}$ звідки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2}-n)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання. Помножимо і поділимо одночасно вираз $n(\sqrt{n^2+2}-n)$ на спряжений до виразу в дужках $(\sqrt{n^2+2}+n)$ і застосуємо до чисельника формулу скороченого множення $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$:

$$\frac{n(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{n(n^2+2-n^2)}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}.$$

Одержали $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\underbrace{\dfrac{2}{n^2}}_{\searrow 0}}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{1+1}}=1.$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^{n+1}+5^{n-1}}{3^n+5^{n+1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Розв'язання. Розділимо почленно чисельник і знаменник на найбільший степінь 5^n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+3\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{5}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}=\frac{0+0+\frac{1}{5}}{0+5}=\frac{1}{25}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 2.1. Записати перші п'ять членів послідовності.

1. $x_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$.
2. $x_n=(-1)^n\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\pi n.$
3. $x_n=\dfrac{3n+5}{2n-3}$.
4. $x_n=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$.
5. $x_n=\dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}$.
6. $x_n=\dfrac{\frac{1}{2}\sin\pi n}{n}$.

Завдання 2.2. Записати формулу загального члена послідовності за її першими членами.

1. $2;\ \frac{4}{3};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{7};\ ...$
2. 0 ; 2 ; 0 ; 2; …
3. $-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{5};...$
4. 1; 0; -3; 0; 5; 0; -7; 0;…
5. $\frac{1}{3\cdot4};\ \frac{1}{5\cdot6};\ \frac{1}{7\cdot8};\ \frac{1}{9\cdot10};\ ...$
6. $\frac{3}{5};\ \frac{12}{17};\ \frac{27}{37};\ \frac{48}{65};\ \frac{75}{101};\ ...$

Завдання 2.3. Дослідити послідовність на монотонність.

1. $a_n=\dfrac{n-1}{n}$.
2. $a_n=n^2+1.$
3. $a_n=\dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$.
4. $a_n=\dfrac{2n+3}{3n-2}$.
5. $a_n=\dfrac{1}{n^2+2n+4}$.
6. $a_n=\dfrac{2^n}{2n+1}$.

Завдання 2.4. Дослідити послідовність на обмеженість.

1. $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{n^2+4n}$.
2. $a_n=\dfrac{n+2}{2^n}$.
3. $a_n=\dfrac{n+4}{n+3}$.
4. $a_n=\dfrac{n^2+n}{n^2+3}$.
5. $a_n=n+2-\dfrac{n+1}{2n+3}$.
6. $a_n=n^2-n-11.$

Завдання 2.5. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Починаючи з якого n виконується $|a_n - a| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 0{,}01$?

1. $a_n = \dfrac{n+1}{2n}, a = \dfrac{1}{2}$.
2. $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n^2}{3}$, $a = 0$.
3. $a_n = \dfrac{n^2+3}{2n^2-1}$, $a = \dfrac{1}{2}$.
4. $a_n = \dfrac{3}{n^2}$, $a = 0$.

Згідно з означенням границі послідовності довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{7n+3} = \dfrac{1}{7}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-n^2}{3+2n^2} = -\dfrac{1}{2}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}} = \dfrac{1}{2}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = 0$

Завдання 2.6. Довести, що послідовність $\{x_n\}$: **а)** нескінченно мала; **б)** нескінченно велика.

1. а) $x_n = \dfrac{n-1}{n^2}$;
   б) $x_n = 3^{\sqrt{n}}$.
2. а) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sin\dfrac{\pi n}{2}$;
   б) $x_n = \dfrac{2n^2}{n+4}$.
3. а) $x_n = \dfrac{3}{n!}$;
   б) $x_n = n^n$.
4. а) $x_n = \sqrt{n+1} - n$;
   б) $x_n = \lg^2 n$.

Завдання 2.7. Знайти границі.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n}{n^3-n+1}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2}{100n^3+15n}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+1}{3n+7}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n-3}{n^3-8n+5}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-7n+3}{5n^2+8}$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)^3+(n-1)^3}$.
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$.
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n+1}-\dfrac{6n^3}{4n^2-1}\right)$.
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{8n^3+3n^2-1}}{5n+1}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^2+1}}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{5n^2+9}-\sqrt{3n^3-8}}{\sqrt[3]{1-2n^3}+\sqrt[4]{7n^4+2}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3})$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+5^{n+2}}{3^{n+3}+5^{n}}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n+7^{n-1}}{3^n-4^{n+1}-7^n}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots\frac{1}{5^n}}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

§3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

Основні поняття та теореми

Нехай змінна величина x набуває всіх числових значень з деякого проміжку $(a;b)$. Запис $x\to x_0$ означає, що число x_0 є границею змінної величини x, і розуміємо це як границю довільної послідовності значень, набутих цією змінною: $x\to x_0 \Leftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\to x_0, n\to\infty$.

Перше означення границі функції (за Гейне). Число A називається границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, $x_n\neq x_0$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A. Символьно записують:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\neq x_0\}: x_n\to x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

Зауваження. В означенні $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ функція $f(x)$ повинна бути визначена в деякому δ - околі точки x_0, крім, можливо самої точки x_0, а саме $|x-x_0|<\delta, x\neq x_0$.

З геометричним змістом границі функції пов'язане друге означення границі (за Коші або на "мові ε і δ"). Число A називається границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ можна знайти $\delta>0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівностям $|x-x_0|<\delta, x\neq x_0$, виконується нерівність $|f(x)$ - $A|<\varepsilon$. Символьно:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема. Означення границі функції за Гейне і за Коші є еквівалентними.

Ліву і праву границі функції називають односторонніми границями і позначають так :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f_-(x_0) = A; \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f_+(x_0) = B.$$

Умова $f_-(x_0) = f_+(x_0)$ є *необхідною і достатньою для існування границі функції* *y=f(x) в точці* $x = x_0$*:*

$$\exists\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A.$$

Аналогічно дають означення границі функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Основні властивості границь функцій.

1. Єдиність границі. Кожна функція *f(x)* може мати не більше ніж одну границю в точці x_0.
2. Границя сталої функції. Якщо *f(x)≡C*, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = C.$
3. Обмеженість функції, що має границю. Якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, то існує δ-окіл точки $x, 0 < |x - x_0| < \delta,$ в якому функція *f(x)* обмежена.
4. Перехід до границі у нерівностях. Якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ і $f(x) \le g(x),$ то $A \le B$.
5. Про три функції. Якщо $f(x) \le \varphi(x) \le g(x),$ $0 < |x - x_0| < \delta,$ і
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A, \text{ то } \exists\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A.$$
6. Границя монотонної функції. Якщо функція *f(x)* монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f_-(x_0)$ або її права границя $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f_+(x_0)$.

Практичне обчислення границь базується на наступних властивостях.

7. Границя суми, різниці, добутку та частки. Нехай існують $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ і $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, тоді

(1) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$, при $B\neq 0$.

8. Правило заміни змінної для границь функцій. Нехай існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$ і $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$, крім того $g(x)\neq y_0$ при $x\neq x_0$, тоді при $x\to x_0$ існує границя складної функції $F(x)=f(g(x))$ і

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\begin{bmatrix}\text{заміна змінної}\\ y=g(x)\\ x\to x_0, y\to y_0\end{bmatrix}=\lim_{y\to y_0} f(y)=A.$$

Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то функцію $\alpha(x)$ називають нескінченно малою в точці x_0. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$, то функцію $\beta(x)$ називають нескінченно великою в точці x_0.

Зауваження. Нескінченно малі (великі) функції мають ті ж самі властивості, що нескінченно малі (великі) послідовності, а саме:

(I). Якщо $f(x)$ і $g(x)$ нескінченно великі величини в точці x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=[\tfrac{1}{\infty}]=0;\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=[\tfrac{\infty}{\infty}];\ \lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=[\infty\pm\infty].$$

(II). Якщо $f(x)$ і $g(x)$ нескінченно малі величини в точці x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=[\tfrac{1}{0}]=\infty;\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Обчислення границь у випадках $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ і $[\infty-\infty]$ називають розкриттям невизначеностей.

Границя відношення многочленів.

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}^{\nearrow 0}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}^{\nearrow 0})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}_{\searrow 0}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}_{\searrow 0})}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, n=m;\\ 0, m>n;\\ \infty, m<n.\end{cases}$$

$$2)\ \lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=[\tfrac{0}{0}]=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)P_{n-1}(x)}{(x-x_0)Q_{m-1}(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Якщо маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то потрібно чисельник і знаменник розкласти на множники, явно виділити дужку $(x-x_0)$ і скоротити на неї, після цього перейти до обчислення границі відношення многочленів зі степенями меншими на одиницю, ніж у початкових. Вказана процедура продовжується, доки не вдається позбутися невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Границі ірраціональностей, що мають особливість типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Під знаком границі застосовують алгебраїчні перетворення, що дозволяють ліквідувати особливість. Так, наприклад, за допомогою формул скороченого множення $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ і $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$, переходять від невизначеності відношення ірраціональностей до невизначеності відношення їх підкореневих виразів.

Контрольні питання та завдання

1. Дати означення границі функції в точці на "мові послідовностей " і на "мові ε і δ ".
2. Що називається правою (лівою) границею функції в точці ?
3. Що називається границею функції при $x\to\infty$?
4. Що називається нескінченно великою функцією в точці x_0?
5. Сформулюйте теорему про взаємозв’язок між нескінченно малою і нескінченно великою функціями при $x\to x_0$.
6. Сформулюйте теорему про арифметичні властивості границі функцій.
7. Сформулюйте теорему Безу для многочленів.
8. Дайте означення кореня многочлена $P_n(x)$.
9. Доведіть, що число x_0- корінь многочлена $P_n(x)\Leftrightarrow P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x)$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1.

а) Довести, виходячи з означення границі функції, що $\lim\limits_{x\to 2}(7x-3)=11$.

Доведення. Вважаємо, що задано будь-яке $\varepsilon>0$. Знайдемо $\delta>0$таке, що для всіх $x\neq 2$, які задовольняють умову $0<|x-2|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-11|<\varepsilon$.

Якщо нерівність виконується, то

$$|f(x)-11|=|7x-3-11|=|7x-14|=7|x-2|<\varepsilon\Rightarrow|x-2|<\frac{\varepsilon}{7}.$$

Для будь-якого $\varepsilon>0$ візьмемо $\delta=\frac{\varepsilon}{7}$, тоді при$x\in(2-\delta;2+\delta)$ виконується нерівність$|(7x-3)-11|<\varepsilon$, а значить $\lim\limits_{x\to 2}(7x-3)=11$.

б) Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$.

Доведення. Нехай задано довільне $\varepsilon>0$. Покажемо, що існує таке число $M>0,$ що для всіх $x,$ які задовольняють нерівність $|x|>M$, виконується нерівність $|f(x)-1|<\varepsilon$. Дійсно, $\left|\dfrac{x-1}{x+2}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\dfrac{x-1}{x+2}-1\right|=\left|\dfrac{-3}{x+2}\right|=\dfrac{3}{|x+2|}<\varepsilon$, та $\dfrac{3}{\varepsilon}<|x+2|$. Оскільки $|x|=|(x+2)-2|\le|x+2|+2$, то при $\dfrac{3}{\varepsilon}<|x|-2$ виконана подвійна нерівність $\dfrac{3}{\varepsilon}<|x|-2\le|x+2|$. Виберемо $M=\dfrac{3}{\varepsilon}+2$, тоді для $|x|>M$ маємо $\dfrac{3}{\varepsilon}<|x|-2\Rightarrow|x+2|>\dfrac{3}{\varepsilon}\Rightarrow\varepsilon>\dfrac{3}{|x+2|}\Rightarrow\left|\dfrac{x-1}{x+2}-1\right|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1.$

Приклад 2. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

Розв'язання. На підставі теореми про арифметичні дії над границями, знайдемо границі чисельника і знаменника, підставивши замість x значення x=2.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+4x-5)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-1)}=\frac{4+8-5}{4-1}=\frac{7}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$.

Розв'язання. Обчисленням границь чисельника і знаменника одержимо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Оскільки $x=1$ є коренем чисельника і знаменника, тоді множник $(x-1)$ має міститись і в чисельнику, і в знаменнику. Розкладемо вирази на множники і, при умові, що $x\neq1$, скоротимо чисельник і знаменник на $(x-1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(2x+3)}{\lim\limits_{x\to1}(x+2}=\frac{5}{3}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{x^3+3x^2+1}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник нескінченно великі, тобто має місце невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для її розкриття розділимо чисельник і знаменник даного дробу на найбільший степінь x^3 і застосуємо теорему про арифметичні дії над границями.

Одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-5}{x^3+3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3})}=\frac{3+0-0}{1+0+0}=3.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Домноживши й розділивши на вираз, спряжений до даного, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(\sqrt{x^2-1})^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\left[\frac{2}{+\infty++\infty}\right]=\left[\frac{2}{+\infty}\right]=0.$$

д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

Розв'язання. При $x\to 2$ знаменник кожного дробу $\frac{1}{x-2}$ і $\frac{12}{x^3-8}$ є нескінченно малою величиною і $\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$, тому маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Для розкриття цієї невизначеності виконаємо віднімання дробів, звівши їх до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-12}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\textit{дивись}\\ \textit{приклад}\\ \textbf{в)}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{6}{4+4+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

е) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Підставивши $x=-8$ у дробовий вираз бачимо, що чисельник і знаменник набувають нульових значень, тому маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Щоб розкрити цю невизначеність, домножимо одночасно чисельник і знаменник на вирази, спряжені відповідно до чисельника і знаменника, а саме: до чисельника спряженим є вираз $(\sqrt{1-x}+3)$ і працює формула скороченого множення – різниця квадратів; тобто

$$(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)=(\sqrt{1-x})^2-3^2=1-x-9=-(x+8).$$

До знаменника спряженим є вираз $(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$ і працює формула скороченого множення-сума кубів, тобто

$$(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=2^3+\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=8+x.$$

Отже, розв’язання запишеться так:

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=[\tfrac{0}{0}]=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x}+3)(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)}=-\lim_{x\to-8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 3.1. Довести за допомогою означення границі функції, що виконуються рівності.

1. $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=1.$
2. $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+3)=7.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{2x}=\dfrac{3}{2}.$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3-2x^2}=-1.$
5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}=-4.$
6. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2+4x+1}{x+\frac{1}{2}}=0.$

Завдання 3.2. Обчислити границі раціональних функцій.

1. $\lim\limits_{x\to4}(3x^3+2x-5).$
2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}.$
3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+2}.$
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3-8}{x-4}+2\right).$
5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}.$
6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}.$
7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-1}.$
9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}.$
10. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right).$
11. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right).$
12. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}.$
13. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}.$
14. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}.$
15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}.$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}.$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{5x^2+6x+4}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+5}{0,01x^2-6x}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-1}{(2x^2+1)(3x^2-7)}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x^4}{3x^3+1}-2x\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{4x^2-3}-\frac{2x^2}{4x+3}\right)$.

Завдання 3.3. Обчислити границі функцій, які містять ірраціональності.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^3+3x^2+1}+x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}-x}{\sqrt{x^2-2}-x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt[3]{x^2+8x-1}}{\sqrt{4x^3-3}-\sqrt[5]{x^9+x^8+1}}$.

5. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$.

6. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$.

7. $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

8. $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{\sqrt[3]{x-6}+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x}}$.

13. $\lim\limits_{y\to1}\frac{\sqrt[4]{y}-1}{\sqrt[3]{y}-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^4+12x^2-7}-3x^2)$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+\sqrt[3]{3-8x^2})$.

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{9x^3+2}-\sqrt{9x-2})$.

§4. ПЕРША ЧУДОВА ГРАНИЦЯ. ЕКВІВАЛЕНТНІ НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ВЕЛИЧИНИ

Основні поняття та теореми

Дослідження властивостей тригонометричних функцій ґрунтується на першій чудовій (визначній) границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Геометричний зміст першої чудової границі: при малих значеннях абсциси x, $x\approx 0$, графік функції $y=\sin x$ рисують як відрізок прямої $y=x$. Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними в точці x_0, якщо їх відношення при $x\to x_0$ має границю рівну одиниці:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Еквівалентні нескінченно малі функції коротко позначають таким чином: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$.

Аналогічно для нескінченно великих величин $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$, якщо відношення $\alpha(x)/\beta(x)\to 1$.

При обчисленні границі частки двох функцій корисне таке твердження .

Теорема про заміну на еквівалентну. Якщо $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ і $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Таблиця еквівалентностей, яка випливає з першої чудової границі

1. $\sin\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$.
2. $\mathrm{tg}\,\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$.
3. $\arcsin\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$.
4. $\mathrm{arctg}\,\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$.
5. $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$, $\alpha\to 0$.

Наведемо геометричне пояснення, наприклад, п'ятої формули таблиці: графік функції $y=\cos x$ при малих значеннях аргументу x, $x\approx 0$, з великою точністю задається параболою $y=1-\dfrac{1}{2}x^2$.

Контрольні питання та завдання

1. Які нескінченно великі величини називаються еквівалентними ?
2. Показати, що із $\alpha(x)\sim\beta(x)$ і $\beta(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to x_0$ слідує $\alpha(x)\sim\gamma(x)$, $x\to x_0$.

3. Обґрунтувати рівність $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.
4. Обчислити границі: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$.
5. Наведіть геометричний зміст формул 2-4 із таблиці еквівалентностей до першої чудової границі.
6. Нехай $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі величини в точці x_0 і $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $x\to x_0$. Навести приклад, коли $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha_1(x)+\beta(x)}\neq 1$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{xtg2x}$.

*Розв'язання.*Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, оскільки при $x\to 0$ чисельник і знаменник дробу прямують до 0. Застосуємо таблицю еквівалентностей: $\text{tg}\alpha\sim\alpha$, $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$, $\alpha\to 0$. Тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\text{tg}2x}=\left|\begin{array}{l}\text{якщо } x\to 0,\text{ то}\\ \text{tg}(2x)\sim 2x\\ 1-\cos(5x)\sim\frac{1}{2}(5x)^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(5x)^2}{x\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{4x^2}=\frac{25}{4}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\text{tg}\,x$.

Розв'язання. При $x\to\frac{\pi}{2}$: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})=0$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\text{tg}x=\infty$, тоді маємо невизначеність $[0\cdot\infty]$. Виконаємо заміну: $\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{2}=y,\text{ де } y\to 0\\ x=\frac{\pi}{2}+y\end{array}\right]$, тоді одержимо границю: $\lim\limits_{y\to 0}y\cdot\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=\lim\limits_{y\to 0}y\cdot(-\text{ctg}\,y)=-\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\text{tg}\,y}=\left|\begin{array}{l}y\to 0\\ \text{tg}\,y\sim y\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{-y}=-1.$

Приклад 3. Порівняти нескінченно малі α і β:

а) При $t\to 0$: $\alpha(t)=5t^2+2t^5$; $\beta(t)=3t^2+2t^3$.

*Розв'язання.*Знайдемо границю відношення нескінченно малих α і β:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{t\to 0}\frac{5t^2+2t^5}{3t^2+2t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(5+2t^3)}{t^2(3+2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{5+2t^3}{3+2t}=\frac{5}{3}.$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}=\frac{5}{3}\neq 0$, то $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ – нескінченно малі одного й того ж порядку.

б) При $x \to 0$: $\alpha(x) = x \cdot \sin^2 x$; $\beta(x) = 2x \cdot \sin x$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin^2 x}{2x\sin x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ – нескінченно мала вищого порядку в порівнянні з $\beta(x)$.

в) При $x \to 0$: $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$; $\beta(x) = \frac{x}{2}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = [\tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – еквівалентні нескінченно малі, тоді пишуть: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, тобто $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$.

Приклад 4. Довести, що при $x \to 0$ нескінченно малі величини $(1-\cos x)$ і $x(\sqrt{1+x}-1)$ будуть еквівалентними.

Доведення: Знайдемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)} = \left|\begin{matrix} x\to 0 \\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x(\sqrt{1+x}-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x)-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1) = \frac{1}{2}\cdot(1+1) = 1.$$

Отже, $(1-\cos x) \sim x(\sqrt{1+x}-1)$.

Приклад 5. Користуючись основними еквівалентностями, обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sin 8x - \sin 4x}$.

Розв'язання. При $x \to 0$ чисельник і знаменник є нескінченно малі величини, тобто маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для того, щоб у знаменнику застосувати еквівалентність, перетворимо різницю в добуток за формулою тригонометрії:

$$\sin 8x - \sin 4x = 2\cos 6x \sin 2x.$$

Тоді до множників, які містять $\sin\alpha$, застосуємо еквівалентність $\sin\alpha \sim \alpha$. Обчислення границі запишеться так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sin 8x - \sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2\cos 6x \sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos 6x \cdot 2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 6x} = \frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x-5\mathrm{arctg}3x}{5\arcsin x-3\sin 6x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ кожен доданок чисельника і знаменника є нескінченно малою величиною.

Так як чисельник і знаменник не можливо розкласти на множники, то поділимо почленно чисельник і знаменник на x. Одночасно застосуємо теорему про арифметичні дії над границями і відомі формули $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=1;$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\alpha}{\alpha}=1,\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1,\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Знаходження границі запишеться так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x-5\mathrm{arctg}3x}{5\arcsin x-3\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{\mathrm{tg}2x}{2x}-5\cdot 3\cdot\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{3x}}{5\cdot\dfrac{\arcsin x}{x}-3\cdot 6\cdot\dfrac{\sin 6x}{6x}}=$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{2x}-15\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}-18\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}}=\frac{2-15}{5-18}=\frac{-13}{-13}=1.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{4x\cdot\mathrm{arctg}^2x}$.

Розв'язання. Розкладемо чисельник на множники винесенням $\mathrm{tg}2x$ за дужки: $\mathrm{tg}2x-\sin 2x=\mathrm{tg}2x(1-\cos 2x)$. Застосуємо еквівалентності: $\mathrm{tg}\alpha\sim\alpha$, $\mathrm{arctg}\alpha\sim\alpha$, $1–\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$, при $\alpha\to 0$.

Обчислення границі відбудеться так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{4x\cdot\mathrm{arctg}^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x\left(1-\cos 2x\right)}{4x\cdot\mathrm{arctg}^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\dfrac{4x^2}{2}}{4x\cdot x^2}=\frac{4}{4}=1.$$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\mathrm{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

Розв'язання. При $x\to\dfrac{\pi}{2}$ кожен доданок у дужках є нескінченно великим, тоді маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Щоб розкрити цю невизначеність, зведемо до спільного знаменника і зробимо заміну: $\left[\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{2}=y\to 0\\ x=\dfrac{\pi}{2}+y\end{array}\right]$.

Границя запишеться так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x\mathrm{tg}x-\frac{\pi}{\cos x})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{2(\frac{\pi}{2}+y)\sin(\frac{\pi}{2}+y)-\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}+y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(\pi+2y)\cdot\cos y-\pi}{-\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{(\pi\cdot\cos y-\pi)+2y\cdot\cos y}{-\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\pi(1-\cos y)}{-\sin y}-$$

$$-2\lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{\sin y}=\pi\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}y^2}{y}-2\lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{y}=\pi\cdot 0-2\lim_{y\to 0}\cos y=-2\cdot 1=-2.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 4.1. Знайти границі за допомогою першої визначної границі.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin\frac{x}{2}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}6x}{\sin 3x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\mathrm{tg}6x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\mathrm{tg}^2x}{x\sin x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$.
7. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\mathrm{tg}^3x-\sin^3 x}$.
9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.
10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)^2}{1-\sin 2x}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}^2\pi x}{1+\cos\pi x}$.
12. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{x-a}$.

Завдання 4.2. Визначити порядок малості однієї функції відносно іншої. Які з них є еквівалентними?

1. $y=\frac{4-x}{4+x}$ і $y=\sqrt{x}-2$ при $x\to 4$.
2. $y=x^2+2x-3$ і $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}$ при $x\to -3$.
3. $y=\frac{(3x-1)x}{x^3+1}$ і $y=\frac{8x^7}{x^{10}+2x^5+1}$ при $x\to 0$.
4. $y=2+x-x^2$ і $y=x^3+1$ при $x\to -1$.
5. $\alpha(t)=t^2\sin t$ і $\beta(t)=t\cdot\mathrm{tg}t$ при $t\to 0$.

Завдання 4.3. Користуючись основними еквівалентностями, обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\mathrm{tg}10x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cdot\cos 10x}{\arcsin 5x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\mathrm{tg}^2 x}{x\sin x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin 3x}{\mathrm{arctg}3x-\sin x}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 5x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 7x-\sin 6x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{3x+\mathrm{arctg}2x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x-\cos 1}{x-1}$.
12. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.
13. $\lim\limits_{x\to \pi}(x-\pi)\mathrm{ctg}x$.
14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$.
15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$.
16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}\pi x}$.
17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x^2-3x+3}-1}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+\sin x}-\sqrt{9-\sin x}}{\arcsin 3x}$.
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$.
20. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(a+2h)-2\cos(a+h)+\cos a}{h^2}$.
21. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}(a+2h)-2\mathrm{ctg}(a+h)+\mathrm{ctg}a}{h^2}$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin 4x}-1}{\mathrm{arctg}2x}$.
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{tg}x-x^4+x^2}{\mathrm{acrtg}3x}$.
24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^4 x}{3x^2+5x^4}$.

§5. ДРУГА ЧУДОВА ГРАНИЦЯ

Основні поняття та теореми

Дослідження функцій, що містять змінну величину в основі і в показнику степеня або під знаком логарифма, базується на другій чудовій (визначній) границі:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

При обчисленні границь показниково-степеневих функцій корисно застосовувати наступні твердження.

Теорема. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=a^b$.

Теорема. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, тоді

1) при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ границя $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=[a^{+\infty}]=+\infty$;

2) при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ границя $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=[a^{-\infty}]=0$.

Невизначеності типу $[1^{\infty}]$, $[\infty^0]$ і $[0^0]$. Якщо $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз $(f(x))^{g(x)}$ є невизначеністю типу $[1^{\infty}]$, символьно записують $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=[1^{\infty}]$.

Якщо $f(x)\to\infty$, $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз f^g- невизначеність типу $[\infty^0]$, символьно записують $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=[\infty^0]$.

Якщо $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то степенево-показниковий вираз f^g є невизначеністю типу $[0^0]$, символьно записують $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=[0^0]$.

Для розкриття невизначеностей в цих випадках є зручною така теорема.

Теорема. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

Таблиця еквівалентностей, яка випливає з другої чудової границі.

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=[1^{\infty}]=e$.
2. $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, $\alpha\to 0$.
3. $e^{\alpha}-1\sim\alpha$, $\alpha\to 0$.
4. $\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\frac{1}{n}\cdot\alpha$, $\alpha\to 0$.

Наведемо геометричний зміст, наприклад, третьої формули таблиці еквівалентостей до другої чудової границі: графік функції $y=e^x$ при малих значення аргумета x, $x\approx 0$, рисують як відрізок прямої $y=1+x$.

Контрольні питання та завдання

1. Вказати тип невизначеності в другій чудовій границі.

2. Використовуючи таблицю еквівалентностей показати, що:

   1) $\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\ln a} \cdot x,\ x \to 0$.

   2) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a,\ x \to 0$.

   3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$.

3. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ і $0 < a < 1$. Показати, що :

   1) при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ маємо $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = 0$;

   2) при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ границя $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = +\infty$.

4. Нехай число $k \in R$, довести, що $\left(1+\alpha\right)^k - 1 \sim k\alpha$, $\alpha \to 0$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити границі показниково-степеневих функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x^2+25}\right)^{\frac{2}{x-4}}$.

Розв’язання. Знайдемо окремо границю основи і границю показника степеня даної функції:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x^2+25} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+25)} = \frac{4}{25};\quad \lim_{x\to 0}\frac{2}{x-4} = \frac{2}{\lim\limits_{x\to 0}(x-4)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Тоді, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x^2+25}\right)^{\frac{2}{x-4}} = \left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x^2+25}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x-4}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{2x}-e^2}{x-1}\right)^{x+1}$.

Розв’язання. Знаходимо границі основи і показника степеня даної функції, застосуємо формулу $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$, $\alpha \to 0$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^2}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{e^2(e^{2x-2}-1)}{x-1} = \left|\begin{array}{l} x\to 1 \\ (2x-2)\to 0 \\ e^{2x-2}-1 \sim (2x-2) \end{array}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{e^2(2x-2)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} e^2\frac{2(x-1)}{x-1} = 2e^2, \quad \text{та} \quad \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Тоді маємо: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{2x}-e^2}{x-1}\right)^{x+1} = (2e^2)^2 = 4e^4$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x$.

Розв'язання. Якщо знайти границю основи і показника степеня, то при $x\to\infty$ маємо невизначеність $[1^\infty]$, яка розкривається за допомогою другої визначної границі $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Зробимо заміну: $\left[\begin{array}{l}\frac{k}{x}=t,\ \text{де}\ t\to 0\ \text{при}\ x\to\infty\\ x=\frac{k}{t}\end{array}\right]$.

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{k}{t}}=\left(\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^k=e^k$.

Приклад 2. Обчислити границю показниково-степеневої функції за допомогою другої визначної границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{1+x}{2}}$.

Розв'язання: При $x\to\infty$ маємо невизначеність $[1^\infty]$. Тому можемо скористатися формулою $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\cdot g(x)}$, де $f(x)=\frac{2x-1}{2x+3}$, $g(x)=\frac{1+x}{2}$. Тоді маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{1+x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)\frac{1+x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{2x+3}\cdot\frac{1+x}{2}}=$

$$=e^{-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+3}}=e^{-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(1+1/x)}{x(2+3/x)}}=e^{-2\frac{1+0}{2+0}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Приклад 3. Обчислити границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x+6}{x^2-2x+6}\right)^{\mathrm{ctg}x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ маємо невизначеність $[1^\infty]$, тому для розкриття цієї невизначеності застосуємо формулу $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\cdot g(x)}$, де $f(x)=\frac{x^2+x+6}{x^2-2x+6}$, $g(x)=\mathrm{ctg}x$. Тоді маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x+6}{x^2-2x+6}\right)^{\mathrm{ctg}x}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x+6}{x^2-2x+6}-1\right)\cdot\mathrm{ctg}x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x^2-2x+6}\cdot\frac{1}{tgx}}=\left|\begin{array}{l}x\to 0\\ \mathrm{tg}\,x\sim x\end{array}\right|=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x^2-2x+6}\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=e^{\frac{3}{6}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)[\ln(2x+7)-\ln(2x-3)]$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ в квадратних дужках маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Для її розкриття перетворимо вираз функції і застосуємо еквівалентність $\ln(1+\alpha)\sim\alpha,\ \alpha\to 0$:

$$\lim_{x\to\infty}(x+4)[\ln(2x+7)-\ln(2x-3)]=\lim_{x\to\infty}(x+4)\ln\frac{2x+7}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}(x+4)\ln(1+\frac{10}{2x-3})=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to\infty \\ \dfrac{10}{2x-3}\to 0 \\ \ln(1+\dfrac{10}{2x-3})\sim\dfrac{10}{2x-3} \end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}(x+4)\frac{10}{2x-3}=10\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{4}{x})}{x(2-\frac{3}{x})}=10\cdot\frac{1}{2}=5.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-e^{x}}{\ln(1-4x)}$.

Розв'язання. Оскільки при $x\to 0$ вирази в чисельнику і знаменнику є нескінченно малі функції, то можна застосувати відомі еквівалентності: при $\alpha\to 0$, $e^{\alpha}-1\sim\alpha$ та $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$. Спочатку в чисельнику винесемо e^{x}за дужки: $e^{\sin 3x}-e^{x}=e^{x}(e^{\sin 3x-x}-1)$, тоді границя запишеться так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-e^{x}}{\ln(1-4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(e^{\sin 3x-x}-1)}{\ln(1+(-4x))}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(\sin 3x-x)}{-4x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}-\frac{x}{x}\right)}{-4\frac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{x}\cdot\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}-1}{-4}=-\frac{1}{4}\cdot(3-1)=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^{3}+2x^{4}}}{\ln(1+2x)}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ функції в чисельнику і знаменнику є нескінченно малі. Застосуємо еквівалентності: $\ln(1+2x)\sim 2x$ і $x^{3}+2x^{4}=x^{3}(1+2x)\sim x^{3}$.

Отже, дана границя обчислюється так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^{3}+2x^{4}}}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^{3}}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\frac{1}{2}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1. Обчислити границі показниково-степеневих функцій.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{3x-1}{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)^{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{4+3x}\right)^{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^{2}-4}{7x^{2}+x+1}\right)^{x^{2}+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^{2}-9}{x-3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{x^3+1}\right)^{\frac{5x}{x+2}}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4x+9}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{\sin 2x}}.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}.$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}.$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}.$

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}.$

Завдання 5.2. Знайти границі функцій.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-5}\right)^{3x-1}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{4}}.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+8}{x^2-2x-7}\right)^{x}.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln x].$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(2x+1)-\ln 2x].$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+3)[\ln(2-4x)-\ln(1-4x)].$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x-2)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)].$

9. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{x}{x-1}}.$

10. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}.$

11. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}.$

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}.$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3+x)-\ln 3}{4x}.$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^{3x^2}-1}.$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x^2}-\cos 2x}{\ln(1+x\sin x)}.$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 4x}{\ln\cos 2x}.$

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{e^{x^2}-e^4}.$

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{a^{x+1}-1}{\sqrt{1-\cos(x+1)}}.$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{32x^5-x^8}}{e^{5x}-1}.$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)-\sin^2 x}{\arcsin x}.$

Завдання 5.3. Знайти границі.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg^2x)^{ctg^2x}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}.$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}.$

4. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{x+1}{2x-7}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}.$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos 2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x-2}}.$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$

7. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{1}{tgx\sin 2x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(ctg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{2x-1}{x-1}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}(3e^{x-2}-2)^{\frac{x-3}{x-2}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-1}{x+3}\right)^{\frac{\ln(x+3)}{\ln(2x-3)}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(4-3e^{x})^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}}$.

§6. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Основні поняття та теореми

Функція *y=f(x)* називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 і існує границя функції *f(x)* при $x\to x_0$, яка дорівнює її значенню в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Точка $x=x_0$ називається *точкою неперервності функції*.

При обчисленні границі неперервної функції *f(x)* можна переходити до границі під знаком функції:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)=f(x_0).$$

Величина $\Delta x=x-x_0$ називається *приростом аргументу*, а величина $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ називається *приростом функції в точці* x_0. Еквівалентне означення неперервності функції: функція *f(x)* неперервна в точці x_0, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції. Символьно: $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу (відрізка), то вона називається неперервною на цьому інтервалі (відрізку).

Описово геометричний зміст неперервності функції на відрізку полягає в тому, що графік неперервної функції можна нарисувати одним рухом олівця без відриву від паперу.

Найпростіші властивості неперервних функцій.

1. Неперервність суми, різниці, добутку та частки: якщо функції *f(x)* і *g(x)* неперервні в точці x_0, то *f(x)* ± *g(x)*, *f(x)·g(x)* та *f(x)/g(x)* (у випадку g(x_0) ≠ 0) також неперервні в точці x_0.
2. Неперервність складної функції: якщо функція *z= g(x)* неперервна в точці x_0 і значення *z₀= g(*x_0*)*, а функція *f(z)* неперервна в точці z_0, то складна функція *f(g(x))* неперервна в точці x_0.

Наслідок: правило заміни змінної для границь неперервних функцій

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=\begin{bmatrix} y=g(x) \\ x\to x_0 \\ y\to y_0 \end{bmatrix}=\lim_{y\to y_0} f(y).$$

3. Усі основні елементарні функції (x^n , $\cos x$, $\sin x$, $\mathrm{tg}x$, a^x , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$) неперервні в кожній точці своєї області визначення.
4. Кожна елементарна функція неперервна в своїй області визначення.

Точки розриву та їх класифікація. Точка x_0 називається точкою розриву функції *f(x)*, якщо функція *f(x)* є невизначеною в точці x_0, або якщо вона задана в цій точці, але не є в ній неперервною.

Функція *f(x)* називається неперервною зліва (відповідно справа) в точці x_0, якщо $f_-(x_0)=f(x_0)$ (відповідно $f_+(x_0)=f(x_0)$).

Теорема. Для неперервності дійсної функції *f(x)* в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною і зліва, і справа у цій точці.

Символьно: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f_+(x_0)=f_-(x_0)=f(x_0)$.

Точку x_0 називають точкою усувного (ліквідовного) розриву функції *f(x)*, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, але *f(x)* невизначена в точці x_0 або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Точку x_0 називають точкою розриву першого роду функції *f(x)*, якщо існують скінченні однобічні границі функції $f_+(x_0)$ і $f_-(x_0)$, але вони не рівні між собою: $f_+(x_0)\neq f_-(x_0)$. Різницю однобічних границь $f_+(x_0)-f_-(x_0)\equiv h(x_0)$ називають стрибком функції *f(x)* в точці x_0.

Якщо хоча б одна з однобічних границь не існує, або дорівнює $\pm\infty$, то розрив в цій точці називають розривом другого роду.

Властивості функцій, неперервних на відрізку.

1. Перша теорема Вейєрштрасса. Неперервна на відрізку [*a;b*] функція *f(x)* є обмеженою на цьому відрізку.
2. Друга теорема Вейєрштрасса. Неперервна на відрізку [*a;b*] функція *f(x)* досягає на [*a;b*] свого найменшого та найбільшого значень, тобто існують точки $x_1,x_2 є[a;b]$ такі, що $f(x_1)=\min\limits_{[a;b]} f(x)$, $f(x_2)=\max\limits_{[a;b]} f(x)$.
3. Перша теорема Больцано-Коші. Якщо неперервна на відрізку [*a;b*] функція *f(x)* набуває на кінцях відрізка значень різних знаків $f(a)\cdot f(b)<0$, то існує точка $c\in(a;b)$, в якій значення функції *f(c)=0*.
4. Друга теорема Больцано-Коші. Нехай функція *f(x)* неперервна на відрізку [*a;b*] , причому *f(a)=A*, *f(b)=B*. Тоді для будь-якого *C*, що міститься між *A* і *B*, знайдеться точка $c\in(a;b)$, в якій значення *f(c)=C*.

Наслідок (теорема про обернену функцію). Нехай функція *y=f(x)* є зростаючою (спадною) і неперервною на відрізку $[a;b]$, тоді існує обернена функція $x=f^{-1}(y)$, яка є зростаючою (спадною) і неперервною на відрізку з кінцями в точках $f(a)$ і $f(b)$.

При побудові ескізу графіка корисно з'ясувати, чи має функція *y=f(x)* вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти.

Якщо для деякої точки розриву другого роду x_0 функції *f(x)*

$$f_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}f(x)=\infty \text{ або } f_+(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,$$

то пряму $x = x_0$ називають вертикальною асимптотою графіка функції *f(x)*.

Пряму *y=kx+b* називають асимптотою графіка функції *y=f(x)* при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, ($\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$).

Якщо $k\neq0$, то асимптоту називають похилою, при $k=0$ асимптоту *y=b* називають горизонтальною. Для того, щоб пряма *y=kx+b* була асимптотою графіка функції *y=f(x)* необхідно і достатньо, щоб

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення неперервності функції в точці:
    а) через односторонні границі;
    б) через прирости аргумента і функції.
2. Який розрив називається:
    а) розривом першого роду;
    б) розривом другого роду.
3. Який розрив називається усувним. Навести приклади ліквідовних та неліквідовних розривів.
4. Яка функція називається неперервною на відрізку?
5. Сформулюйте теореми про властивості функцій, неперервних на відрізку. Який геометричний зміст цих теорем?
6. Чи правильні дані твердження:
    а) якщо функція *f(x)* неперервна на інтервалі *(a;b)*, то вона обмежена на цьому інтервалі;
    б) якщо функція *f(x)* монотонно зростає і неперервна на відрізку $[a;b]$, то її множиною значень буде відрізок $[f(a);f(b)]$.
7. Довести що рівняння мають корінь на відповідних відрізках:
    а) $x^5-3x-1=0$ на [1; 2];
    б) $2\cos^4 x-4\cos x+1=0$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Довести, що функція $f(x)=5x^2+5$ неперервна при $x\in(-\infty;+\infty)$.

Доведення. Для встановлення неперервності функції $f(x)=5x^2+5$ зручно користуватися еквівалентним означенням неперервності, тобто: $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Знайдемо $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=[5(x+\Delta x)^2+5]-[5x^2+5]=$

$$=5[(x+\Delta x)^2-x^2]=5\cdot\Delta x\cdot(2x+\Delta x).$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}5\cdot\Delta x\cdot(2x+\Delta x)=5\cdot 0\cdot(2x+0)=0$, то задана функція неперервна в кожній точці $x\in R$.

Приклад 2. Довести, виходячи з означення, що функція $y=x-5x$ неперервна на всій її області визначення.

Розв'язання. Згідно означення функція $y=f(x)$ неперервна, якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел. Надамо аргументу x довільного приросту Δx і знайдемо значення функції в точці $x+\Delta x$: $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)$.

Тоді приріст функції:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)-(x^3-5x)=$$
$$=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-x^3+5x=(\Delta x)^3+3x(\Delta x)^2+(3x^2-5)\Delta x.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}((\Delta x)^3+3x(\Delta x)^2+(3x^2-5)\Delta x)=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot((\Delta x)^2+3x\cdot\Delta x+3x^2-5)=0\cdot(3x^2-5)=0.$$

Дана функція є неперервною на всій її області визначення.

Приклад 3. Знайти в точці $x=x_0$ однобічні границі функції:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x+4, x>1;\\ 7x^2+1, x\le 1.\end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо в точці $x_0=1$ ліву і праву границі функції. Для значень $x\le 1$ функція визначається формулою $f(x)=7x^2+1$, а для $x>1$ – формулою $f(x)=x^2+3x+4$, тому $\lim\limits_{x\to 1-0}(7x^2+1)=7+1=8.$

$\lim\limits_{x\to 1+0}(x^2+3x+4)=1+3+4=8$. Отже, $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=f(1)=8$.

б) $f(x)=\dfrac{8}{2-x}, x_0=2$.

Розв'язання. При $x\to 2-0$, вираз $(2-x)\to +0$ тоді обернена величина

$\frac{1}{2-x} \to +\infty$. Отже, $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{8}{2-x} = +\infty$. При $x \to 2+0$, вираз $(2-x) \to -0$, тоді $\frac{1}{2-x} \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2+0}\frac{8}{2-x} = -\infty$.

в) $f(x) = \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$, $x_0 = 3$.

Розв'язання. При $x \to 3-0$ різниця $(x-3) \to -0$, тоді $\frac{1}{x-3} \to -\infty$, а $2^{\frac{1}{x-3}} \to 2^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$. Отже, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$.

При $x \to 3+0$ різниця $(x-3) \to +0$, тоді $\frac{1}{x-3} \to +\infty$, а $2^{\frac{1}{x-3}} \to 2^{+\infty} = +\infty$. Отже $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \frac{1}{3+\infty} = 0$.

Приклад 4. Знайти такі значення a і b, при яких функція $f(x)$ неперервна на всій її області визначення, якщо $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \le 0; \\ ax+b, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & x \ge 1. \end{cases}$

Побудувати графік цієї функції.

*Розв'язання***.** Елементарні функції неперервні у всіх точках, де вони визначені, тому функції: $f_1(x) = (x-1)^2, x \in (-\infty; 0)$; $f_2(x) = ax+b, x \in (0;1)$; $f_3(x) = \sqrt{x}, x \in (1; +\infty)$ є неперервними. Таким чином задана функція $y = f(x)$ може мати розриви лише в точках $x_1 = 0$ і $x_1 = 1$. Згідно означення функція $y = f(x)$ є неперервна в точці x_0, якщо виконується рівність:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Знайдемо однобічні границі даної функції в точках $x_0 = 0$ і $x_0 = 1$.

При $x_1 = 0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}(x-1)^2 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0+0}(ax+b) = b$.

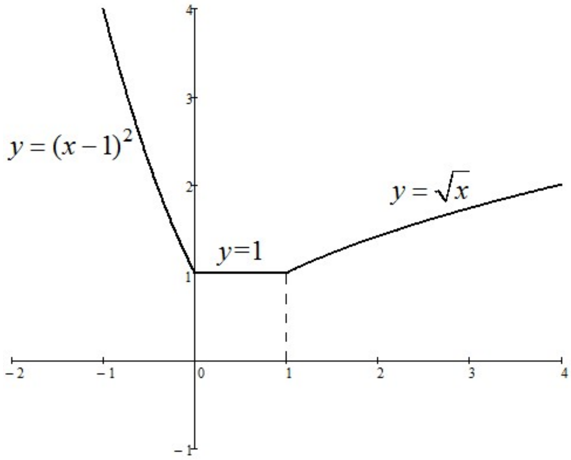
Тоді з умови неперервності: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ слідує, що $b = 1$.

При $x_2 = 1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}(ax+b) = a+b$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{x} = 1$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) \Rightarrow \left.\begin{matrix} a+b=1 \\ b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 0$.

Отже, при $a = 0$ і $b = 1$ функція $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \le 0; \\ 1, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & x \ge 1; \end{cases}$ є неперервна на всій її області визначення.

Графік функції:



Приклад 5. Дослідити функції на неперервність, встановити характер точок розриву. Зробити схематичний рисунок.

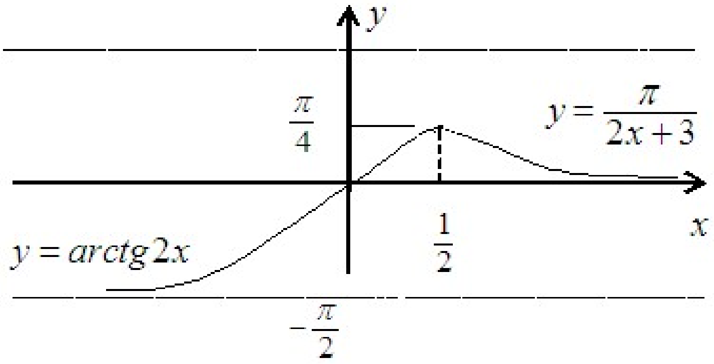
а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}2x,\ x<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\pi}{2x+3},\ x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Розв'язання. Елементарні функції $f_1(x)=\operatorname{arctg}2x,\ x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ та $f_2(x)=\dfrac{\pi}{2x+3},\ x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ є неперервними в областях їх визначення. Щоб дослідити функцію на неперервність, знайдемо її однобічні границі в точці $x_0=\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\operatorname{arctg}2x=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4};\ \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{\pi}{2x+3}=\frac{\pi}{4}.$$

Так як $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-0}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+0}f(x)=\dfrac{\pi}{4}$, але $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ не існує, то $x_0=\dfrac{1}{2}$ є точка усувного розриву. Якщо покласти $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, тоді функція $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}2x,\ x<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\pi}{2x+3},\ x>\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\pi}{4},\quad x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

буде неперервною в точці $x_0=\dfrac{1}{2}$.



б) $f(x) = \dfrac{5}{2 + 3^{\frac{1}{2-x}}}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення даної функції.

$D(y): \begin{cases} 2 + 3^{\frac{1}{2-x}} \neq 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases}$. Так як $3^{\frac{1}{2-x}} > 0$, то $2 + 3^{\frac{1}{2-x}} > 0$, тоді $x \neq 2$.

Отже: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. Тому $x = 2$ є точка розриву. Щоб дослідити характер точки розриву, знайдемо однобічні границі. При $x \to 2 - 0$ різниця $(2 - x) \to +0$, тоді $\dfrac{1}{2-x} \to +\infty$ і $2 + 3^{\frac{1}{2-x}} \to +\infty \Rightarrow \dfrac{5}{\infty} = 0$. Отже, $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{5}{2 + 3^{\frac{1}{2-x}}} = 0.$

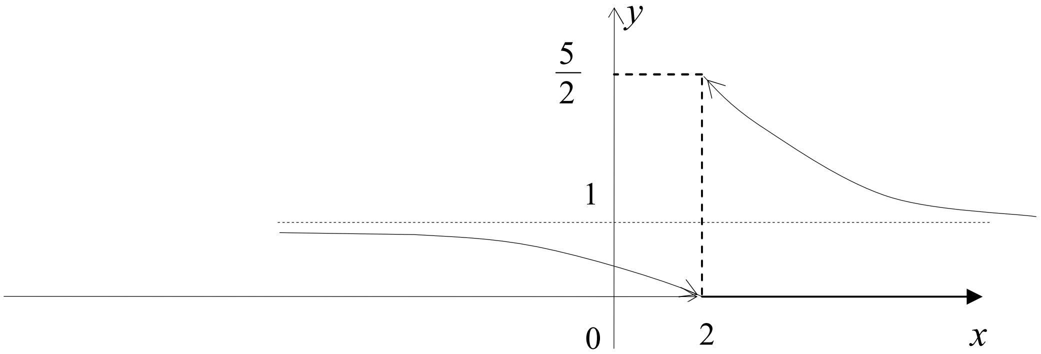
При $x \to 2 + 0$:

$$(2 - x) \to -0 \Rightarrow \frac{1}{2-x} \to -\infty \Rightarrow 3^{\frac{1}{2-x}} \to 3^{-\infty} = 0 \Rightarrow 2 + 3^{\frac{1}{2-x}} \to 2 \Rightarrow \lim_{x \to 2+0} \frac{5}{2 + 3^{\frac{1}{2-x}}} = \frac{5}{2}.$$

Одержимо, що однобічні границі існують, але не рівні між собою. Тому, точка $x = 2$ є точкою розриву I роду, а сам розрив – стрибкоподібний I роду.

Знайдемо стрибок: $h = \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) - \lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \dfrac{5}{2} - 0 = \dfrac{5}{2}$.

Графік даної функції:



в) $f(x) = 5^{\frac{1}{x+3}}$.

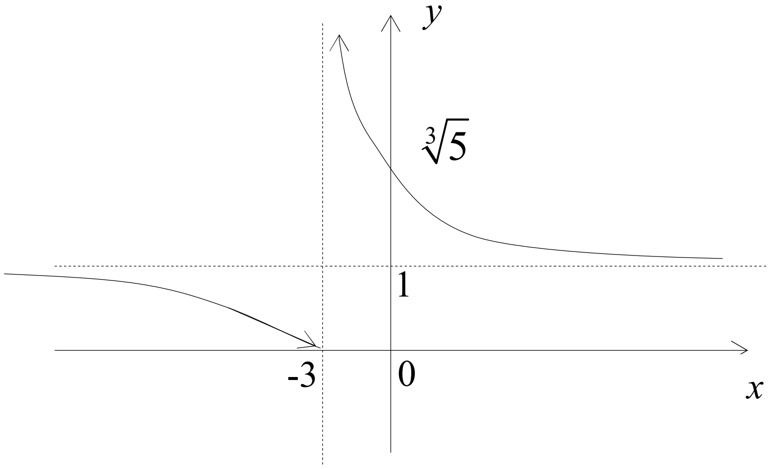
Розв'язання. Область визначення функції: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$. Так як $x + 3 \neq 0$, то $x = -3$ – точка розриву. Знайдемо однобічні границі.

При $x \to -3 + 0$: вираз $(x + 3) \to +0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+3} \to +\infty \Rightarrow 5^{\frac{1}{x+3}} \to 5^{+\infty} = +\infty$.

Отже, $\lim\limits_{x \to 3+0} 5^{\frac{1}{x+3}} = +\infty$. При $x \to -3 - 0$: вираз $x + 3 \to -0 \Rightarrow 5^{\frac{1}{x+3}} \to 5^{-\infty} = 0$.

Якщо хоча б одна з однобічних границь нескінченна, то функція має розрив II роду, тому $x = -3$ – точка розриву II роду.

Схематичний графік:



Приклад 6. Переконатись, що рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ на відрізку $[1;2]$ має корінь x_0 і знайти його з точністю до 10^{-2}.

*Розв'язання.*Очевидно, що функція $f(x) = x^3 - 3x + 1$ неперервна на відрізку $[1;2]$ і $f(1) = -1$, $f(2) = 3$. Отже, на інтервалі $(1;2)$ рівняння має хоча б один корінь x_0.

Серединою відрізка [1; 2] є точка $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ і $f\left(\frac{3}{2}\right) = -0{,}125 < 0$.

Серединою відрізка $\left[\frac{3}{2};\ 2\right]$ є точка $x_2 = 1{,}75$ і $f(1{,}75) = 1{,}109375 > 0$.

Серединою відрізка [1,5; 1,75] є точка $x_3 = 1{,}625$ і $f(1{,}625) \approx 0{,}4160 > 0$.

Аналогічно одержимо точки: $x_4 = 1{,}5625$ і $f(1{,}5625) \approx 0{,}1271 > 0$;

$x_5 = 1{,}53125$ і $f(1{,}53125) \approx -0{,}0033 < 0$;

$x_6 = 1{,}546075$ і $f(1{,}546075) \approx 0{,}0593 > 0$;

$x_7 = 1{,}5386625$.

Тоді $|x_0 - x_7| \le \frac{1}{2}|x_6 - x_5| < \frac{1}{2} \cdot 0{,}0149 < 0{,}01$.

Отже, за наближене значення кореня x_0 даного рівняння можна взяти число $x_7 = 1{,}5386625$. Похибка такого наближення не перевищує 0,01.

Приклад 7. Знайти рівняння асимптот кривих і побудувати схематично графік функції:

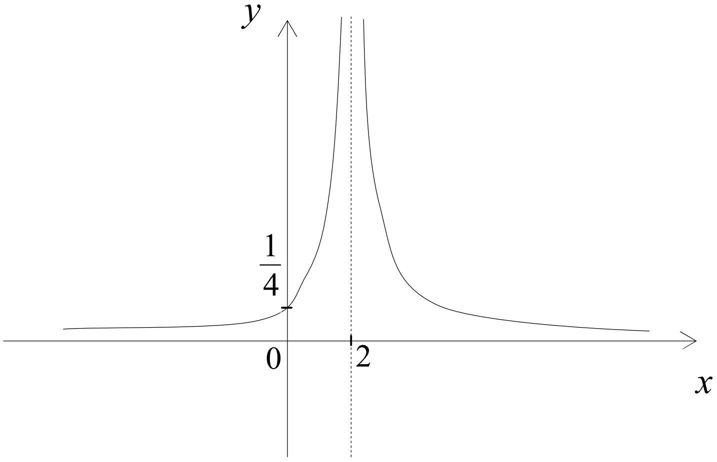
а) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in R \setminus \{2\}$, тому $x_0 = 2$ – точка розриву даної функції. Знайдемо однобічні границі, які будуть рівні між собою.

$$\lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{+0}\right] = +\infty.$$

Отже, $x = 2$ – вертикальна асимптота.

Якщо $x \to \pm\infty$, то $\frac{1}{(x-2)^2} \to 0$, тому $y = 0$ – горизонтальна асимптота.



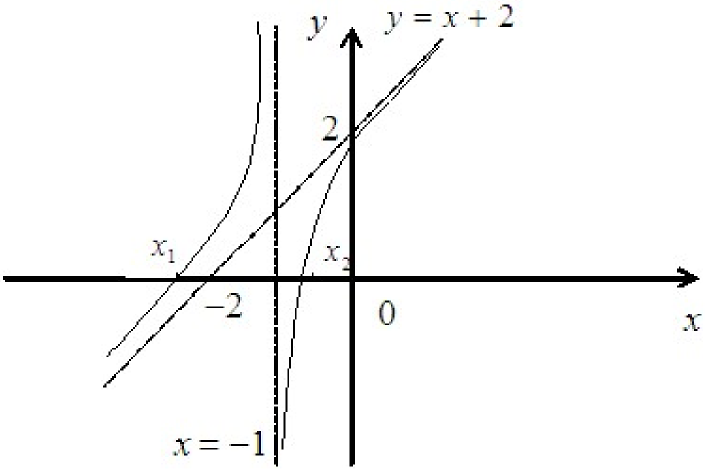
б) $y = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$.

Розв'язання. Область визначення функції: $x \in R \setminus \{-1\}$, $x = -1$ – точка розриву другого роду, оскільки $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \left[\frac{-1}{-0}\right] = +\infty$ і $\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \left[\frac{-1}{+0}\right] = -\infty$.

Отже, $x = -1$ – вертикальна асимптота. Дослідимо функцію при $x \to \pm\infty$, тобто знайдемо похилу асимптоту виду $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+3x+1}{x(x+1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2(1+\frac{1}{x})} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x+1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = 2.$$



Отже, пряма $y = x + 2$ є похилою асимптотою.

При $y = 0, x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, x_1 \approx -2,35, x_2 \approx -0,65$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 6.1. Виходячи з означення, довести неперервність функції $f(x)$ при $x \in R$.

1. $f(x) = 2x^2 + 8$.
2. $f(x) = 3x^2 + 7$.
3. $f(x) = -5x^2 - 9$.
4. $f(x) = 4x^2 - 1$.
5. $f(x) = 3x^2 - 3$.
6. $f(x) = -5x^2 - 7$.

Завдання 6.2. Довести, що функція $y = f(x)$ неперервна на всій її області визначення.

1. $y = e^{-x^2}, x \in R$.
2. $y = \ln(\operatorname{arctg} x), x \in (0; \infty)$.
3. $y = 4 - x^3, x \in R$.
4. $y = \cos 3x$.
5. $y = \sin(\cos 2x)$.
6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

Завдання 6.3. Знайти однобічні границі функції.

1. $\lim\limits_{x \to 3 \pm 0} \dfrac{2}{x - 3}$.
2. $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$.
3. $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} 2^{\frac{1}{(x-2)^2}}$.
4. $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} 3^{\frac{1}{x-2}}$.
5. $\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.
6. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4} \pm 0} 2^{\operatorname{tg} 2x}$.
7. $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 - x}$.
8. $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} \dfrac{2 + x}{4 - x^2}$.
9. $\lim\limits_{x \to \pm 0} (2 + x)^{\frac{1}{x}}$.
10. $\lim\limits_{x \to 5 \pm 0} \dfrac{2}{1 + 7^{\frac{1}{x-5}}}$.

Завдання 6.4. Знайти такі числа a і b, щоб функція $f(x)$ була неперервною. Побудувати її графік.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, 0 \le x \le 1, \\ 2 + bx, 1 < x \le 2. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, x \le 0, \\ (ax + b), 0 < x < 1. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x, |x| \le 1, \\ x^2 + ax + b, |x| > 1. \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} ax + 1, x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x + b, x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} x + 3, x \le 0, \\ A\cos x + B, 0 < x \le \pi, \\ (x - \pi)^2 + 1, x > \pi. \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} A - 4x, x \le -\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{B}{x}, x \ge \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Завдання 6.5. Знайти точки розриву функцій і визначити тип розриву. Зробити схематичний рисунок.

1. $y=\begin{cases}-x,\, x\le 0,\\ x^2,\, 0<x\le 2,\\ x+1,\, x>2.\end{cases}$

2. $y=\begin{cases}x-3,\, x<0,\\ x+1,\, 0\le x\le 4,\\ 3+\sqrt{x},\, x>4.\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}\cos x,\, x\le \frac{\pi}{2},\\ 0,\, \frac{\pi}{2}<x<\pi\\ \frac{\pi}{2},\, x\ge \pi.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}0,\, x\le 0,\\ tgx,\, 0<x<\frac{\pi}{2},\\ x,\, x\ge \frac{\pi}{2}.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x},\, x\ne 0,\\ 2,\, x=0.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases}\frac{\sin(x-5)}{x-5},\, x\ne 5.\\ 0,\, x=5\end{cases}$

7. $y=\frac{x^3-8}{x^2-4}$.

8. $y=\frac{|x-1|}{x^2-x^3}$.

9. $y=\frac{1}{x^2-9}$.

10. $y=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

11. $y=e^{-\frac{1}{|x+1|}}$.

12. $y=2^{\frac{1}{\sin \pi x}}$.

Завдання 6.6. Дослідити функцію на неперервність. Зробити схематичний рисунок.

1. $f(x)=\frac{3}{|x-2|}-\frac{1}{2}$.

2. $f(x)=2+\frac{1}{1-x}$.

3. $f(x)=2^{\frac{1}{3x+2}}-1$.

4. $f(x)=\frac{1}{3}-4^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

5. $f(x)=7^{\frac{1}{2x-1}}$.

6. $f(x)=\frac{3}{7^{\frac{1}{x+1}}+3}$.

7. $f(x)=\frac{1}{2-5^{\frac{1}{x+2}}}$.

8. $f(x)=\frac{1}{3^{\frac{x}{x-5}}-1}$.

9. $f(x)=\begin{cases}x, x\le 3,\\ \log_5(x-3), 3<x<4,\\ \sqrt{2x}, x\ge 4.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}4\cos(x-\frac{\pi}{3}), x<\frac{\pi}{3},\\ 4, x\ge \frac{\pi}{3}.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}\cos x, x<0,\\ x^2, 0<x\le 1,\\ \frac{1}{x-3}, x>1.\end{cases}$

Завдання 6.7. Довести, що рівняння мають корінь на відрізку $[a;b]$.

1. $x^3-2x-2=0;[1;2]$.

2. $x^5-3x-1=0;[1;2]$.

3. $x^3-3x^2+3=0;[-1;0]$.

4. $7^x-3\cdot 2^x+1=0;[0;2]$.

Завдання 6.8. Знайти асимптоти функцій. Зробити схематичний рисунок.

1. $y=x+\frac{1}{x}$.

2. $y=\frac{x^2}{(x+1)^2}$.

3. $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$.

4. $y=\frac{2x^2+3}{x^2-9}$.

5. $y=\frac{2x^3}{x^2-2x-3}$.

6. $y=\frac{x^2+2}{x+1}$.

7. $y=x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

8. $y=(x+1)e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}$.

9. $y=x\cdot \text{arctg}\, x$.

10. $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.   11. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 9}$.   12. $y = \dfrac{2x+1}{16 + x^2}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Обчислити границі раціональних функцій.

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^3 - 2x - 1)(x+1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$.
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$.
3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x - x + 2}$.
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.
5. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$.
6. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$.
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5}$.
8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$.
9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$.
10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$.
11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
13. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$.
14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$.
15. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$.
16. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$.
17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$.
18. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$.
19. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$.
20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$.
21. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$.
22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
23. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$.
24. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.
25. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.
26. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$.
27. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$.
28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5}$.
29. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.
30. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$.

Завдання 2. Обчислити границі функцій, які містять ірраціональність.

1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$

2. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}.$

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$

5. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$

6. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$

7. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}.$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}.$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}.$

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}.$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$

13. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}.$

14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}.$

15. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}.$

16. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}.$

17. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}.$

18. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}.$

19. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}}-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}.$

20. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{9}}-\dfrac{1}{3}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}.$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{16}}-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}.$

22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}.$

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}.$

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}.$

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(x+1)}{\sqrt[3]{x}}.$

26. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

27. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}.$

28. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}.$

29. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}.$

30. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}.$

Завдання 3. Обчислити границі функцій.

1\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

2\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

3\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

4\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

5\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg(\pi(2+x))}$.

6\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\mathrm{tg}[2\pi(x+\frac{1}{2})]}$.

7\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

8\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

9\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

10\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg} 2x}{\sin[2\pi(x+10)]}$.

11\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

12\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+\frac{5\pi}{2})tgx}{\arcsin 2x^2}$.

13\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}$.

14\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\frac{\pi(x+1)}{2}]}$.

15\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

16\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$.

17\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

18\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

19\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.

20\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{-3x}-1}\ln 2$.

21\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

22\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

23\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin[\pi(\frac{x}{2}+1)]}$.

24\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$.

25\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$.

26\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

27\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

28\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

29\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(\pi(1+\frac{x}{2}))}{\ln(x+1)}$.

30\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$.

Завдання 4. Обчислити границі функцій.

1\. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

2\. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

3\. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

4\. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

5\. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$.

6\. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}$.

7\. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{(x-\pi)^4}$.

8\. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg\pi x}$.

9\. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

10\. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

11\. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

12\. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

13\. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$.

14\. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.

15\. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\pi x}$.

16\. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$.

17\. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}$.

18\. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{\cos 2x}$.

19. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{t}g\pi x}{x+2}$.

24. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

30. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{tg3x}$.

Завдання 5. Обчислити границі функцій.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

2. $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{\sin x}{\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{x-\alpha}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{\frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{4}-x)}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2x-1}{x})^{\frac{1}{\sqrt[5]{x}-1}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\alpha}(2-\dfrac{x}{\alpha})^{tg\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{ctg2x}{\sin 3x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{tg\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 4\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{ctgx}{\sin 4x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3-2x\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 4\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{5}{tg5x\sin 2x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$.

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{6tgxtg3x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{x}{x-1}}$.

18. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\sec x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$.

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(ctg\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\ln(2-x)}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$.

28. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\sin x\right)^{\frac{18\sin x}{ctgx}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

30. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctg\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$.

ГЛАВА II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§1. ПОХІДНА. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Основні поняття та теореми

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в кожній точці x деякого інтервалу $(a;b)$. Надамо аргументу x довільний приріст $\Delta x\neq 0$ такий, щоб точка $x+\Delta x$ також знаходилася в інтервалі $(a;b)$. Функція дістане при цьому приріст

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції в цій точці до відповідного приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. Записують це так:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\text{ або }f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Загально прийнято похідну позначати одним із символів:

$$y',\ y'_x,\ f'(x),\ (f(x))',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}$$

Якщо функція в даній точці має похідну, то вона називається диференційованою в цій точці, а знаходження похідної – диференціюванням функції. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого інтервалу, то її називають диференційованою в цьому інтервалі.

Похідна – це швидкість зміни функції в точці x.

Механічний зміст похідної. Якщо тіло рухається на прямій за законом $S=f(t)$, де S – шлях, а t – час, то похідна $f'(t)=v(t)$ є величиною миттєвої швидкості руху.

Геометричний зміст похідної. Похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту $k=\operatorname{tg}\alpha$ дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці з абсцисою $x=x_0$.

Необхідна умова існування похідної. Якщо функція в деякій точці має похідну, то вона в цій точці неперервна.

Формули диференціювання основних функцій.

1. $(C)'=0$.
2. $(x^{\alpha})=a\cdot x^{\alpha-1}$.
3. $(e^x)'=e^x$.
4. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$.
5. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
6. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$.
7. $(\sin x)'=\cos x$.
8. $(\cos x)'=-\sin x$.
9. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
10. $(\operatorname{ctg} x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$.
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

15. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$.

16. $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$.

17. $\left(\operatorname{th} x\right)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18. $\left(\operatorname{cth} x\right)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Основні правила диференціювання. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ такі, що мають похідні. Тоді:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
4. $\left(C \cdot u\right)' = C \cdot u'$, де $C - const$.

Наслідок (про похідну лінійної комбінації). Якщо α і β – довільні сталі величини, то: $(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)' = \alpha \cdot u' + \beta \cdot v'$.

1. **Правило диференціювання складної функції:** нехай функція $y = f(u)$ диференційована в точці *u*, а $u = u(x)$ – диференційована в точці *x*, тоді складна функція $y = f(u(x))$ диференційована в точці x і $y'_x = [f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$.
2. **Диференційованість оберненої функції:** нехай функція $y = y(x)$ строго монотонна і диференційована на проміжку $(a;\, b)$, причому $y'(x) \neq 0$, тоді обернена до $y(x)$ функція $x = x(y)$ диференційована і її похідна $x'_y = \dfrac{1}{y'(x)}$.

Контрольні питання та завдання

1. Дати означення похідної заданої функції.
2. Що означають символи: $f'(x_0)$, $f'(x)\big|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$?
3. Який геометричний, механічний і фізичний зміст похідної ?
4. Довести наступні тотожності:
   а) $1 + sh^2 x = ch^2 x$;
   б) $1 + ch2x = 2ch^2 x$;
   в) $ch2x - 1 = 2sh^2 x$.

5. Лівою (правою) похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називають границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$ (відповідно $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$). Довести, що $\exists f'(x_0)\Leftrightarrow \exists f'_\mp(x_0):\ f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.
6. Нехай $y=|x|$, обчислити $y'_-(0)$ і $y'_+(0)$. Чи існує похідна $y'(0)$?
7. Чи правильні дані твердження:
   а) якщо функція диференційована в точці, то вона неперервна в цій точці;
   б) якщо функція неперервна в точці, то вона диференційована в цій точці.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідну функції $y(x)=(x^2+4x+5)e^{-2x}$.

Розв'язання. За правилом похідної добутку маємо:

$$y'(x)=[(x^2+4x+5)e^{-2x}]'=(x^2+4x+5)'e^{-2x}+(x^2+4x+5)(e^{-2x})'=$$
$$=(2x+4)e^{-2x}+(x^2+4x+5)(-2e^{-2x})=2e^{-2x}(x+2-x^2-4x-5)=$$
$$=-2e^{-2x}(x^2+3x+3).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Розв'язання. За правилом диференціювання частки запишемо

$$y'(x)=\frac{\left((x-2)^2\right)'x^{\frac{1}{4}}-(x-2)^2(x^{\frac{1}{4}})'}{(x^{\frac{1}{4}})^2}=\frac{2(x-2)x^{\frac{1}{4}}-(x-2)^2\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\frac{(x-2)(2x^{\frac{1}{4}}-(x-2)\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}})}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x-2)(2x-\frac{1}{4}(x-2))}{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{4}}}=\frac{(x-2)(\frac{7}{4}x+\frac{1}{2})}{x^{\frac{5}{4}}}.$$

Приклад 3. Знайти похідну mфункції $y(x)=\lg(\ln^5 4x)$.

Розв'язання. Застосовуючи правило диференціювання складеної функції та таблицю похідних основних елементарних функцій, маємо:

$$y'(x)=\frac{1}{\ln^5(4x)\ln 10}\cdot 5\ln^4(4x)\cdot\frac{1}{4x}\cdot 4=\frac{5\ln^4(4x)}{x\ln^5(4x)\ln 10}=\frac{5}{x\ln(4x)\ln 10}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y(x)=\sqrt[5]{(1-x^2)^2\cdot(1+x)^3}$.

Розв'язання. Перетворимо дану функцію $y(x)=(1-x^2)^{\frac{2}{5}}\cdot(1+x)^{\frac{3}{5}}$ і продиференціюємо добуток:

$$y'(x)=((1-x^2)^{\frac{2}{5}})'(1+x)^{\frac{3}{5}}+(1-x^2)^{\frac{2}{5}}\cdot((1+x)^{\frac{3}{5}})'=\frac{2}{5}(1-x^2)^{-\frac{3}{5}}\cdot(-2x)(1+x)^{\frac{3}{5}}+$$

$$+\frac{3}{5}(1+x)^{-\frac{2}{5}}\cdot(1-x^2)^{\frac{2}{5}}=\frac{-4x(1+x)^{\frac{3}{5}}}{5(1-x^2)^{\frac{3}{5}}}+\frac{3(1-x^2)^{\frac{2}{5}}}{5(1+x)^{\frac{2}{5}}}=\frac{-4x\,\cancel{(1+x)^{\frac{3}{5}}}}{5\,\cancel{(1+x)^{\frac{3}{5}}}\,(1-x)^{\frac{3}{5}}}+$$

$$+\frac{3(1-x)^{\frac{2}{5}}\,\cancel{(1+x)^{\frac{2}{5}}}}{5\,\cancel{(1+x)^{\frac{2}{5}}}}=\frac{-4x}{5(1-x)^{\frac{3}{5}}}+\frac{3(1-x)^{\frac{2}{5}}}{5}=\frac{-4x+3(1-x)}{5(1-x)^{\frac{3}{5}}}=\frac{3-7x}{5(1-x)^{\frac{3}{5}}}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1. Знайти похідні заданих функцій.

1. $y(x)=\ln\dfrac{x^2+1}{x^3}.$
2. $y(x)=3^{x-1}\cdot(x+1).$
3. $y(x)=\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\cos\pi/3}+2\sqrt{x}-4.$
4. $y(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x+1}{x}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}.$
5. $y(x)=e^{-4x}\cdot\sin 2x.$
6. $y(x)=\ln x^5+\dfrac{50}{x}-\dfrac{125}{2x^2}.$
7. $y(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}.$
8. $y(x)=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,.$
9. $y(x)=\ln\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}.$
10. $y(x)=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\,.$
11. $y(x)=\ln(e^x\cos x+e^{-x}\sin x)\,.$
12. $y(x)=e^x\sin x\cos^3 x\,.$

Завдання 1.2. Знайти похідні, попередньо спростивши функції.

1. $y(x)=\left(\sin\dfrac{x}{4}-\cos\dfrac{x}{4}\right)^2.$
2. $y(x)=\ln\dfrac{x+2}{2x-3}-\ln\dfrac{x+5}{4x-6}.$
3. $y(x)=\dfrac{\sin^2 x}{4\cos^2\dfrac{x}{2}}.$
4. $y(x)=7^{\log_7(x^3+8x^2+4x+9)}.$
5. $y(x)=\dfrac{(x+1)^3.(x^2-4)}{(x+2)x}.$
6. $y(x)=\sqrt{x^2+2x+1}\cdot\ln(x+1).$
7. $y(x)=\dfrac{(x+2)(x+1)^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{3}{7}}}.$
8. $y(x)=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}\,.$

§2. ПОХІДНА ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ ЗАДАНИХ НЕЯВНО ТА ПАРАМЕТРИЧНО

Основні поняття та теореми

Диференціювання показниково-степеневої функції. Для знаходження похідної функції $y=(u(x))^{v(x)}$, де $u(x)>0$, доцільно скористатися одним із двох методів:

1. записати функцію у вигляді $y=(u(x))^{v(x)}=(e^{\ln u(x)})^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$, а потім продиференціювати її як складну функцію;
2. спосіб логарифмічного диференціювання – заданий вираз попередньо логарифмують, $\ln y(x)=v(x)\cdot\ln u(x)$, а потім шляхом диференціювання цієї рівності одержують: $\frac{1}{y}\cdot y'(x)=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}$ та $y'=y\cdot\left(v'\cdot\ln u+\frac{v\cdot u'}{u}\right)$.

Диференціювання неявної функції. Якщо функція задана аналітично рівнянням $y=f(x)$, $x\in(a;b)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то говорять, що функція задана явно. Функція y від змінної x може бути заданою неявно за допомогою рівняння $F(x;y)=0$, не розв'язаного відносно залежної змінної. Функція $y=f(x), x\in(a;b),$ для якої виконується тотожність $F(x;f(x))\equiv 0$, $x\in(a;b)$, називається неявно заданою за допомогою рівняння $F(x;y)=0$.

Нехай рівняння $F(x;y)=0$ одночасно визначає y, як неявну диференційовану функцію $y(x)$. Продиференціювавши по x обидві частини рівняння $F(x;y(x))=0$, отримуємо рівняння першого степеня відносно $y'(x)$. Із цього рівняння виражаємо $y'(x)$ через незалежну змінну x і саму функцію y.

Диференціювання функцій, заданих параметрично. Нехай задано дві неперервні функції $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha;\beta]$, однієї незалежної змінної t. Функціональна залежність між x і y, яку задано у вигляді системи із двох функцій від допоміжної змінної (параметра) t називають параметричним заданням функції. Якщо функція $x=\varphi(t)$ строго монотонна, то вона має обернену функцію $t=\phi(x)$ і можна записати явну форму залежності змінної y від $x: y=\psi(\phi(x))$. Похідну функції, заданої параметрично, знаходять за формулою $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Контрольні питання та завдання

1. У чому суть логарифмічного диференціювання?
2. Методом логарифмічного диференціювання довести, що $(a^x)'=a^x\ln a$.

3. Продиференціювати функцію $y=\log_u v$, де $u=u(x)$, $v=v(x)$.
4. Як диференціювати неявно задану функцію?
5. Вивести правило диференціювання параметрично заданої функції.
6. Які криві на площині xoy задають наступні параметричні рівняння:

$$1)\begin{cases} x=2\cdot\cos t, \\ y=2\cdot\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

$$2)\begin{cases} x=3\cdot\cos t, \\ y=2\cdot\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

7. Астроїдою називають криву, задану наступними параметричними рівняннями $\begin{cases} x=a\cdot\cos^3 t, \\ y=a\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$. Перевірити правильність залежності між x і y: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідну показниково-степеневої функції

$$y(x)=(x^3+5)^{\cos x}.$$

Розв'язання. Прологарифмуємо функцію $y(x)=(x^3+5)^{\cos x}$ і отримаємо:

$$\ln y=\ln(x^3+5)^{\cos x}$$

$$\ln y=\cos x\ln(x^3+5).$$

А тепер знайдемо похідну:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\cos x)'\ln(x^3+5)+\cos x\cdot(\ln(x^3+5))';$$

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln(x^3+5)+\cos x\cdot\frac{1}{x^3+5}\cdot 3x^2;$$

$$y'=y(-\sin x\cdot\ln(x^3+5)+\frac{\cos x\cdot 3x^2}{x^3+5});$$

$$y'=(x^3+5)^{\cos x}\cdot(-\sin x\cdot\ln(x^3+5)+\frac{\cos x\cdot 3x^2}{x^3+5}).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y(x)=x^{x^x}$.

Розв'язання. Зобразимо функцію у вигляді:

$$y(x)=e^{\ln x^{x^x}};\quad y(x)=e^{\ln x\cdot e^{\ln x^x}};\quad y(x)=e^{\ln x\cdot e^{x\ln x}}.$$

Знайдемо похідну:

$$y'(x)=e^{\ln x\cdot e^{x\ln x}}\cdot(\ln x\cdot e^{x\ln x})'=e^{\ln x\cdot e^{x\ln x}}\cdot(\frac{1}{x}\cdot e^{x\ln x}+\ln x\cdot e^{x\ln x}\cdot(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})).$$

Тобто $y'(x)=e^{\ln x\cdot e^{x\ln x}}\cdot(\frac{e^{x\ln x}}{x}+\ln^2 x\cdot e^{x\ln x}+\ln x\cdot e^{x\ln x});$

$$y'(x) = e^{\ln x \cdot e^{x\ln x}} \cdot e^{x\ln x}(\frac{1}{x} + \ln^2 x + \ln x) = x^{x^x} \cdot x^x(\frac{1}{x} + \ln^2 x + \ln x).$$

Приклад 3. Обчислити похідну параметрично заданої функції:

$$\begin{cases} x = \lg(2 + t^3); \\ y = \text{arcctg}\, t - 2t. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо $x'_t = \frac{1}{(2 + t^3)\ln 10} \cdot 3t^2$ і

$$y'_t = -\frac{1}{1+t^2} - 2 = \frac{-1-2-2t^2}{1+t^2} = \frac{-3-2t^2}{1+t^2}.$$

А тепер скористаємося формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$;

$$y'_x = \frac{-3-2t^2}{1+t^2} : \frac{3t^2}{(2+t^3)\ln 10} = \frac{(-3-2t^2)(2+t^3)\ln 10}{(1+t^2)3t^2}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції, яку задано неявно $y^2 - 2xy + 4 = 0$.

Розв'язання: $(y^2 - 2xy + 4)' = (0)'$;

$$2y \cdot y' - 2y - 2xy' = 0; \quad 2y \cdot y' - 2xy' = 2y; \quad y'(y - x) = y; \quad y' = \frac{y}{y - x}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 2.1. Знайти похідні показниково-степеневих функцій.

1. $y = (\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}$.
2. $y = (\lg x)^{\frac{5}{2x}}$.
3. $y = (\cos x)^{\arcsin x}$.
4. $y = x^{2x^{3x}}$.
5. $y = (5x + 4)^{\frac{x}{x+1}}$.
6. $y = (\lg x)^{4x}$.
7. $y = (\ln x)^{e^x}$.
8. $y = (\sin x)^{tgx}$.
9. $y = (x + 1)^{\arccos x}$.
10. $y = (shx)^{e^x}$.

Завдання 2.2. Обчислити похідні функцій, заданих параметрично.

1. $\begin{cases} x = 3\sin 2t - \sin 3t; \\ y = 3\cos 2t + \cos 3t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = e^{2t}\sin 3t; \\ y = e^{2t}\cos 3t. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = te^{-t}; \\ y = \frac{2}{3 - 5t}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = 2^{\cos^2 t^2}; \\ y = t \cdot arctg\frac{3}{1 - 2\sqrt{t}}. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos\sqrt{t}}; \\ y = t \cdot ctgt. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = \arccos t^2; \\ y = t\sin\sqrt{t}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{t}}{\cos t}; \\ y = t\ln t. \end{cases}$

Завдання 2.3. Знайти похідні функцій *y*, заданих неявно.

1. $y^3+x^3=3xy.$
2. $x^3-x^2y+y^3=25.$
3. $3^x+3^y=3^{x+y}.$
4. $x^2-y=arctg(y).$
5. $xy=\arcsin(x+y).$
6. $x^2y=arctg(2x+y).$
7. $\sin(5x-2y)=e^{\pi xy}.$

§3. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ

Основні поняття та теореми

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована на інтервалі $(a;b)$. Похідну $f'(x)$ як функцію від x називають першою похідною або похідною першого порядку. Похідна від першої похідної $f'(x)$ називається другою похідною або похідною другого порядку функції $f(x)$ і позначається символом $f''(x)$. Таким чином,

$$f''(x)=[f'(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

Для запису другої похідної використовують й інші позначення:

$$f^{(2)}(x),\ y'',\ \frac{d^2f(x)}{dx^2},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ y^{(2)},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Механічний зміст другої похідної. Якщо $S=S(t)$ – закон прямолінійного руху точки, то $S''(t)$ – прискорення цієї точки в момент часу t.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають третьою похідною або похідною третього порядку і позначають $f'''(x)=\left[f''(x)\right]'$.

Якщо на інтервалі $(a;b)$ існує похідна *(n-1)*-го порядку функції $f(x)$, то її похідна називається похідною *n*-го порядку функції $f(x)$, тобто $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$. Використовують також позначення:

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})',\ y^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),\ \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Функція що має похідну порядку *n* на інтервалі $(a;b)$, називається *n*-разів диференційованою на цьому інтервалі.

Зауваження. Знаходження похідних вищих порядків ґрунтується на обчисленні похідних першого порядку, тому що послідовне застосування формули

$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$ передбачає лише вміння багатократного обчислення перших похідних.

Похідні порядку *n* основних елементарних функцій.

1. $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot ... \cdot (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha - n}$;
2. $(e^x)^{(n)} = e^x$;
3. $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$;
4. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! x^{-n}$;
5. $(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! x^{-n} \cdot \ln a$;
6. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$;
7. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$;
8. $(\mathrm{arc}tgx)^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sin[n(\mathrm{arc}tgx + \frac{\pi}{2})]$.

Похідні вищих порядків параметрично заданої функції. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in (\alpha; \beta)$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ двічі диференційовані і $x'(t) \neq 0$ при $t \in (\alpha; \beta)$.

Відомо, що $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Повторно диференціюючи по x останню формулу, матимемо $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$.

Аналогічно знаходять похідну будь-якого порядку $n > 2$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'(t)} \text{ або } y^{(n)}(x) = \frac{(y^{(n-1)}(x))'_t}{x'_t}.$$

Правила Бернуллі - Лопіталя.

(І). *Розкриття невизначеностей типу* $[\frac{0}{0}]$ і $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому $g'(x) \neq 0$. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0}]$ (або $=[\frac{\infty}{\infty}]$) і існує $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження 1. Правила Лопіталя діють також при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ і у випадках однобічних границь.

Зауваження 2. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є n разів диференційованими в околі точки x_0, частки $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,…, $\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ мають невизначеність типу $[\frac{0}{0}]$ або $[\frac{\infty}{\infty}]$ та існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, тоді існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

(II). *Розкриття невизначеностей типу* $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^{\infty}]$, $[0^0]$,$[\infty^0]$.

Вказані невизначеності зводять до невизначеностей типу $[\frac{0}{0}]$ або $[\frac{\infty}{\infty}]$ за допомогою таких перетворень:

1. $[0\cdot\infty]$: $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=[\frac{0}{0}]$.
2. $[\infty-\infty]$: $f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}}=[\frac{0}{0}]$.
3. $[1^{\infty}]$: $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}=[e^{0\cdot\infty}]$.
4. $[0^0]$: $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}=[e^{0\cdot\infty}]$.
5. $[\infty^0]$: $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}=[e^{0\cdot\infty}]$.

Контрольні питання та завдання

1. У чому сутність правил Лопіталя?
2. Як розкриваються невизначеності $[0\cdot\infty]$ та $[\infty-\infty]$ за допомогою правил Лопіталя?
3. Як розкриваються невизначеності $[0^0]$, $[\infty^0]$ і $[1^{\infty}]$ за допомогою правил Лопіталя?
4. Чи правильні дані твердження:
   а) якщо $f(x)$ і $g(x)$нескінченно малі в точці x_0 та існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

   б) якщо $f(x)$і $g(x)$ нескінченно малі в точці x_0 та існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
5. Як обчислити другу похідну функції $y=y(x)$, заданої неявно рівністю $F(x;y)=0$?
6. Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ є n разів диференційовані, показати, що:

а) $(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)^{(n)} = \alpha \cdot u^{(n)} + \beta \cdot v^{(n)}$, де α і β - сталі величини;

б) $(u \cdot v)'' = u'' + 2u' \cdot v' + v''$, $(u \cdot v)''' = u''' + 3u'' \cdot v' + 3u' \cdot v'' + v'''$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти $y'(x)$ та $y''(x)$, якщо $y(x) = \frac{1}{3}(3x\sin 2x + 2\cos 3x)$.

Розв'язання. $y'(x) = \frac{1}{3}[(3x)' \sin 2x + 3x \cdot (\sin 2x)' + 2 \cdot (\cos 3x)']$;

$$y'(x) = \frac{1}{3}[3 \cdot \sin 2x + 3x \cdot 2\cos 2x - 2 \cdot 3\sin 3x];$$
$$y'(x) = \sin 2x + 2x\cos 2x - 2\sin 3x;$$

Тоді: $y''(x) = 2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x - 6\cos 3x$;

$$y''(x) = 4\cos 2x - 4x\sin 2x - 6\cos 3x.$$

Приклад 2. Знайти $y'(x)$ та $y''(x)$, якщо функція задана параметрично

$$\begin{cases} x = \arccos t; \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо $\begin{cases} x'_t = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}; \\ y'_t = \dfrac{1}{1-t^2} \cdot (-2t) = -\dfrac{2t}{1-t^2}. \end{cases}$

Застосуємо формулу: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{2t}{1-t^2} \cdot (-\sqrt{1-t^2}) = \dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Так як $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, то знайдемо $(y'_x)'_t = \dfrac{(2t)'\sqrt{1-t^2} - 2t(\sqrt{1-t^2})'}{1-t^2} =$

$$= \frac{2\sqrt{1-t^2} - 2t(\sqrt{1-t^2})'}{1-t^2} = \frac{2\sqrt{1-t^2} - 2t \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t)}{1-t^2} = \frac{2\sqrt{1-t^2} + \dfrac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} =$$
$$= \frac{2(1-t^2) + 2t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}.$$

Тоді $y''_{xx} = \dfrac{2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} : \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \dfrac{-2\sqrt{1-t^2}}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{-2}{(1-t^2)} = \dfrac{2}{t^2-1}$.

Приклад 3. Знайти $y''(x)$, коли функція задано неявно рівнянням

$$\ln(x + y) = x - y.$$

Розв'язання. Диференціюємо ліву та праву частину рівняння, маючи на увазі, що y є функція від x: $\dfrac{1}{x+y} \cdot (1 + y') = 1 - y'$;

$$\begin{aligned}
&\frac{1+y'}{x+y}=1-y';\\
&1+y'=(x+y)(1-y');\\
&1+y'=x+y-y'x-y'y;\\
&y'+y'x+y'y=x+y-1;\\
&y'=\frac{x+y-1}{x+y+1}.
\end{aligned}$$

Тоді: $y''=\dfrac{(x+y-1)'(x+y+1)-(x+y-1)(x+y+1)'}{(x+y+1)^2};$

$$\begin{aligned}
&y''=\frac{(1+y')(x+y+1)-(x+y-1)(1+y')}{(x+y+1)^2};\\
&y''=\frac{(1+y')(x+y+1-x-y+1)}{(x+y+1)^2};\\
&y''=\frac{2(1+y')}{(x+y+1)^2}.
\end{aligned}$$

Підставляючи замість y' відповідний вираз, знаходимо:

$$y''=\frac{2\left(1+\dfrac{x+y-1}{x+y+1}\right)}{\left(x+y+1\right)^2}=\frac{2(2x+2y)}{\left(x+y+1\right)^3}=\frac{4(x+y)}{\left(x+y+1\right)^3}.$$

Приклад 4. Знайти границю, користуючись правилом Лопіталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}=[\tfrac{0}{0}]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)'}{(\arcsin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}\cdot\sqrt{1-4x^2}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 5. Знайти границю за правилом Лопіталя.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\begin{bmatrix} t=x-\dfrac{\pi}{2}\\ x=t+\dfrac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\left(tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-ctgt-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-t\cos t-\sin t}{t\sin t}\right)=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t+\sin t}{t\sin t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-t\sin t+\cos t}{\sin t+t\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\cos t+t\sin t}{\sin t+t\cos t}=\frac{-2}{0}=\infty.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 3.1. Знайти похідні другого порядку функцій.

1. $y=\log_5\sqrt[3]{x^2}.$
2. $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$
3. $y=e^{2x}\ln(x+1).$
4. $y=\ln tgx.$
5. $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x}.$
6. $y=x^{2\sqrt{x}}.$

Завдання 3.2. Знайти похідні $y'_x; y''_{xx}$ функцій, заданих параметрично.

1. $x = \sin^2 3t; y = 6t - \sin 6t.$
2. $x = \mathrm{tg} t; y = \dfrac{1}{\cos t}.$
3. $x = a\sin^3 t; y = a\cos^3 t.$
4. $x = \sin 2t; y = e^{t^2-1}.$
5. $x = \mathrm{arcctg} t; y = t - \sin t.$
6. $x = \mathrm{arcctg} t; y = \ln(2 + t^2).$

Завдання 3.3. Знайти похідні другого порядку функцій, заданих неявно.

1. $y = 1 + xe^y.$
2. $y = \mathrm{ctg}(x + y).$
3. $y = \cos(x + y).$
4. $y^2 = 3ax.$
5. $2^{x-y} = x + y.$
6. $2\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2).$

Завдання 3.4. Знайти границі функції, користуючись правилом Лопіталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4}.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1 + 2x)}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x - 2^x}{5^x - 4^x}.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} + 2x^3 - \cos 2x}{x^2 - \sin^3 x}.$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x^2}{\ln\sin x^2}.$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg} 2x \cdot \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - x).$
7. $\lim\limits_{x\to 2}(4 - x^2)\mathrm{ctg}\pi x.$
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)\mathrm{tg} x.$

§4. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ДОТИЧНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

Основні поняття та теореми

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ – фіксована точка на графіку функції $y = f(x)$. Січною M_0M_1 графіка називають пряму, що проходить через точку M_0 і іншу точку $M_1(x_1; y_1)$ цього графіка. *Дотичною до графіка функцій* $y = f(x)$ в точці M_0 називають пряму M_0T, що є граничним положенням січної M_0M_1 при наближенні точки M_1 до M_0: $M_0M_1 \to M_0T$, $x_1 \to x_0$.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то графік функції має в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ дотичну з кутовим коефіцієнтом $k = f'(x_0)$. Рівняння дотичної в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ записується у вигляді:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ називають перпендикуляр до дотичної графіка в цій точці.

Рівняння нормалі має вигляд: $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ в точці їхнього перетину $M_0(x_0; y_0)$ називається кут між дотичними до цих кривих в точці M_0. Цей кут знаходять за формулою $tg\varphi = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} \right|, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Швидкість перебігу фізичних, хімічних, біологічних процесів виражається за допомогою похідної. Якщо точка рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$, то швидкість руху в момент часу t_0 є першою похідною: $v = S'(t_0)$, а друга похідна шляху $S(t)$ по часу t є прискоренням цього руху: $W = S''(t_0)$.

Диференціалом першого порядку функції $y = f(x)$ називають головну частину її приросту, яка є лінійною відносно приросту аргумента. Диференціалом аргумента називають приріст аргумента: $dx = \Delta x$.

Диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0 символічно записують $dy(x_0)$ або $df(x_0)$. Диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал аргументу: $df(x) = f'(x)dx$.

Геометричний зміст диференціала. Диференціал $df(x_0)$ є приростом ординати дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; f(x_0))$, якщо незалежна змінна x дістає приріст Δx.

Диференціал функції має властивості, аналогічні властивостям похідних. Окремо виділимо властивість інваріантності форми першого диференціала:

формула $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ зберігається і у випадку, коли x є незалежною змінною, і коли $x = x(t)$ - диференційована по t функція, де $x_0 = x(t_0)$.

Застосування диференціалу в наближених обчисленнях. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то приріст $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$, де $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, при малих приростах аргументу Δx приріст функції $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0)$. Тому для обчислення значення функції в точці $x = x_0 + \Delta x$ можна користуватися формулою $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, де $\Delta x = x - x_0$.

Диференціали вищих порядків. Диференціал функції $df(x) = f'(x) \cdot dx$ є деякою функцією від x, але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$. Другий множник (dx) є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить.

Диференціал від диференціала функції називається другим диференціалом або диференціалом другого порядку функції $y = f(x)$ і позначається через d^2y: $d^2y \equiv d(dy)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього порядку: $d^3y = d(d^2y)$.

Взагалі, *n-им диференціалом* $d^n y$ або *диференціалом n-го порядку* називають диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку: $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Якщо $y=f(x)$ і x – незалежна змінна, то диференціали вищих порядків обчислюються за формулами:

$$d^2y=f''(x)\cdot dx^2,\ d^3y=f'''(x)\cdot dx^3,\ldots,\ d^ny=f^{(n)}(x)\cdot dx^n.$$

Зауваження. Диференціали вищих порядків не володіють властивістю інваріантності форми запису.

Контрольні питання та завдання

1. Що називається диференціалом функції $y=f(x)$?
2. Який геометричний зміст першого диференціалу функції?
3. Наведіть необхідну і достатню умову існування диференціалу функції $y=f(x)$в точці x_0.
4. Що називається диференціалом n-го порядку даної функції?
5. Як знайти d^ny, якщо $y=f(x)$ і x– незалежна змінна?
6. Чи мають диференціали вищих порядків інваріантну властивість?
7. Довести формулу $d^2y=f''(x)\cdot dx^2+f'(x)\cdot d^2x$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y=\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$.

Розв’язання. $dy=\left(\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)'dx;$

$$dy=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dx;\quad dy=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dx;\quad dy=\frac{1}{\sqrt{2-x^2-2x}}dx.$$

Приклад 2. Знайти диференціал першого і другого порядків функції:

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+16}).$$

Розв’язання. $$dy=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)\right)'dx;$$

$$dy=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+16}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\right)dx;$$

$$dy=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+16}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+16}+x}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx;$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx;$$

Тоді $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, а значить: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}\right)$;

$$d^2y = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2+16)^3}} \cdot 2xdx^2 = -\frac{xdx^2}{\sqrt{(x^2+16)^3}}.$$

Приклад 3. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції $y = e^{1-x^2}$ в точці x=1,03.

Розв'язання. Маємо формулу: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$

Покладемо $x_0 = 1$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}03$. Знайдемо $f(x_0) = f(1) = e^0 = 1$,

$$y'(x) = -2xe^{1-x^2}; \quad y'(1) = -2e^0 = -2.$$

Отже, $f(x) \approx 1 - 2 \cdot 0{,}03 \approx 0{,}94$.

Приклад 4. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, яка паралельна прямій $2x + y + 5 = 0$.

Розв'язання. Загальний вигляд рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Знайдемо абсцису точки дотику x_0. Так як шукана дотична паралельна заданій прямій $y = -2x - 5$, то їх кутові коефіцієнти рівні і дорівнюють -2. За геометричним змістом похідної $f'(x_0) = k$, отже $y' = 3x^2 - 6x + 1 = -2$.

Знаходимо x:

$$3x^2 - 6x + 3 = 0; \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ і } x = 1 \text{ – абсциса точки дотику.}$$

Тоді $f(1) = 1 - 3 + 1 + 1 = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$, а $f'(1) = -2$.

Рівняння дотичної має вигляд:

$y = 0 - 2(x - 1); \quad y = -2x + 2$.

Приклад 5. Скласти рівняння нормалі до кривої $y = \ln x$ у точці перетину з віссю *OX*.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину кривої $y = \ln x$ з віссю *OX*, розв'язавши рівняння $\ln x = 0$, $x = 1$ – абсциса точки дотику.

Рівняння нормалі

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Тоді $f(x_0) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(1) = 1$.

Підставимо значення в рівняння нормалі: $y = 0 - 1(x - 1); \quad y = 1 - x.$

Приклад 6. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої, яка задана параметрично $x = 2\cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Обчислимо координати точки $M_0(x_0; y_0)$ на кривій, що відповідають $t_0 = \frac{\pi}{4}$: $x_0 = 2\cos^3\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0 = \sin^3\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Знайдемо значення похідної $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2 t\cdot\cos t}{2\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{2\cos t} = -\frac{1}{2}\mathrm{tg}t$.

Тому $y'_x(x_0) = -\frac{1}{2}\mathrm{tg}t_0 = -\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$.

Рівняння дотичної має вигляд $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2}\cdot(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$, відповідно нормаль до кривої $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\cdot(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Приклад 7. Визначити під якими кутами перетинаються лінії

$$y = 4x^2 + 2x - 8 \text{ та } y = x^3 - x + 10.$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину ліній:

$$4x^2 + 2x - 8 = x^3 - x + 10,\ \Rightarrow\ x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0.$$

Розв'язуючи рівняння знаходимо $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, відповідно $y_1 = 4$, $y_2 = 34$.

Обчислимо кутові коефіцієнти до заданих кривих у знайдених точках:

$$f_1'(x) = 8x + 2,\quad f_1'(-2) = -14,\quad f_1'(3) = 26;$$
$$f_2'(x) = 3x^2 - 1,\quad f_2'(-2) = 11,\quad f_2'(3) = 26.$$

За формулою $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}\right|$ маємо:

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \left|\frac{11 - (-14)}{1 + (-14)\cdot 11}\right| = \frac{25}{153} \text{ і } \mathrm{tg}\varphi_2 = \left|\frac{26 - 26}{1 + 26^2}\right| = 0.$$

Таким чином $\varphi_1 = \mathrm{arctg}\frac{25}{153}$ і $\varphi_2 = 0$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 4.1. Знайти диференціали другого порядку функцій.

1. $y = x^2 e^{-5x}$.
2. $y = 2x^5 + x\sqrt[3]{x}$.
3. $y = 5^{-x}$.
4. $y = \frac{\cos x}{x}$.
5. $y = 4x\sin\frac{x}{2}$.

Завдання 4.2. $y=3^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Обчислити dy при $x=1$ і $dx=0,2$.

Завдання 4.3. Обчислити значення диференціала функції $y=\frac{1}{(tgx+1)^2}$ при зміні незалежної змінної від $x=\frac{\pi}{6}$ до $x=\frac{61\pi}{360}$.

Завдання 4.4. Виразити d^2y через: 1) *x* і *dx*, 2) *t* і *dt*.

1. $\begin{cases} y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}, \\ x=tgt. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y=x+\ln\cos x, \\ x=3t^2-t^4. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y=\sin(2x^2+1), \\ x=\arccos t. \end{cases}$
4. $\begin{cases} y=(2-e^{-x})^3, \\ x=3e^{-t}. \end{cases}$

Завдання 4.5. Обчислити наближено за допомогою диференціалу.

1. $y=\sqrt[3]{x^3+7x},\ x=1{,}012$.
2. $y=\frac{1}{\sqrt{2x+1}},\ x=1{,}58$.
3. $y=\arccos x,\ x=0{,}02$.
4. $y=\sqrt[3]{x},\ x=8{,}07$.
5. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\ x=0{,}01$.
6. $\mathrm{arctg}1{,}02$.
7. $\mathrm{arctg}0{,}97$.
8. $\sqrt{\frac{2{,}037^2-3}{2{,}037^2+5}}$.
9. $\arcsin 0{,}4983$.
10. $\sin 60^\circ 3'$.
11. $\sin 60^\circ 18'$.

Завдання 4.6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих у точках.

1. $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$ у точці перетину з віссю *OX;*
2. $y=tg2x$ у початку координат;
3. $y=\arccos 3x$ у точці перетину з віссю *OY*.
4. $\begin{cases} x=2(t-\sin t); \\ y=2(1-\cos t), \text{ в точці } t=\frac{\pi}{2}. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t); \\ y=3(\sin t-t\cos t), \text{ в точці } t=\pi. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=5(2\cos t-\cos 2t); \\ y=5(2\sin t-\sin 2t), \text{ в точці } t=\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Завдання 4.7. Знайти кути між кривими в точках перетину.

1. $y^2-x,\quad x^2=y$.
2. $x^2+y^2=5,\quad y^2=4x$.

3. $x^2+y^2=8, \quad x^2-y^2=4$. 5. $y=e^x, \quad y=2e^{2x}$.

4. $y=\sin x, \quad y=\cos x$. 6. $y=\frac{1}{x}, \quad y=\sqrt{x}$.

§5. МОНОТОННІСТЬ ТА ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Основні поняття та теореми

Функція $f(x)$ називається *зростаючою в точці* x_0, якщо існує окіл точки x_0, в межах якого виконуються нерівності:

$$\begin{cases} f(x)<f(x_0) \text{ при } x<x_0; \\ f(x)>f(x_0) \text{ при } x>x_0. \end{cases}$$

Функція $f(x)$ називається спадною в точці x_0, якщо існує окіл точки x_0, в межах якого виконуються нерівності:

$$\begin{cases} f(x)>f(x_0) \text{ при } x<x_0; \\ f(x)<f(x_0) \text{ при } x>x_0. \end{cases}$$

Точка x_0 називається точкою локального максимуму (локального мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує окіл точки x_0, для всіх точок якого виконується нерівність: $f(x)\le f(x_0)$ (відповідно $f(x)\ge f(x_0)$). Умовно записують $f_{\max}=f(x_0)=\max f(x)$ ($f_{\min}=f(x_0)=\min f(x)$). Точки максимуму і мінімуму називаються точками локального екстремуму.

Достатні умові зростання і спадання функції в точці. Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в точці x_0 і її похідна в цій точці додатна $f'(x_0)>0$ (від'ємна $f'(x_0)<0$), то функція $f(x)$ зростає (спадає) в точці x_0.

Необхідна умова локального екстремуму диференційованої функції.

Теорема Ферма. Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0 і досягає в цій точці локального екстремуму, то $f'(x_0)=0$.

Точка x_0 називається *стаціонарною точкою функції* $y=f(x)$, якщо $f'(x_0)=0$. Точки, в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує, називаються критичними точками.

Зауваження. Точки екстремуму функції знаходяться серед критичних точок, але не кожна критична точка є точкою екстремуму.

Достатні умови екстремуму. *Правило 1.* Нехай функція $f(x)$ диференційована в деякому околі критичної точки x_0 (окрім, можливо, самої точки x_0) і неперервна в точці x_0. Тоді:

1) якщо при переході аргументу x зліва направо через точку x_0 похідна змінює знак з плюса на мінус: $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при} \quad x < x_0, \\ f'(x) < 0 & \text{при} \quad x > x_0, \end{cases}$ то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

2) якщо при переході аргументу x зліва направо через точку x_0 похідна змінює знак з мінуса на плюс: $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{при} \quad x < x_0, \\ f'(x) > 0 & \text{при} \quad x > x_0, \end{cases}$ то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Правило 2. Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована в точці стаціонару x_0 $(f'(x_0) = 0)$, тоді:

1) якщо $f''(x) < 0$, то x_0 – точка максимуму функції $f(x)$;

2) якщо $f''(x) > 0$, то x_0 – точка мінімуму функції $f(x)$.

Найбільше (найменше) значення функції на відрізку $[a;b]$ називають глобальним максимумом (глобальним мінімумом) функції. Для знаходження глобального максимуму (мінімуму) потрібно із значень функції в критичних точках відрізка та значень на кінцях цього відрізка вибрати найбільше (найменше).

Теореми про середнє для диференційованих функцій.

Теорема Ролля. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях однакових значень: $f(a) = f(b)$. Якщо $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a;b)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a;b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Наслідок. Між двома нулями диференційованої функції завжди лежить нуль її похідної.

Теорема Лагранжа (про скінченний приріст). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що: $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Наслідок 1. (про сталість функції). Диференційована функція на інтервалі $(a;b)$ є сталою: $f(x) \equiv C$, якщо всюди на цьому інтервалі її похідна дорівнює нулю: $f'(x) \equiv 0$, $x \in (a;b)$.

Наслідок 2. (умова монотонності на інтервалі). Для того щоб диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ була неспадною (незростаючою), необхідно і достатньо, щоб похідна цієї функції була невід’ємною (недодатною) всюди на цьому інтервалі.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$неперервні на відрізку $[a;b]$ і диференційовані в інтервалі $(a;b)$, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a;b)$. Тоді

існує $c \in (a;b)$ така, що $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Формула Тейлора. Функція $f(x)$, яка диференційована $(n+1)$-раз в деякому інтервалі точки a, може бути подана у вигляді суми многочлена n-ого степеня і залишкового члена R_n:

$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\left(x-a\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n$, де залишок $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ і точка c - лежить між точками a і x.

Формула Маклорена.

$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, де точка c знаходиться між 0 і x.

Формула Тейлора широко застосовується для дослідження поведінки функції в околі заданої точки $x=a$ та в наближених обчисленнях.

Контрольні питання та завдання

1. Які точки називаються стаціонарними?
2. Сформулювати умови строгої монотонності функції.
3. Навести приклад монотонної на інтервалі функції, що має на цьому інтервалі точку стаціонару.
4. У чому полягає правило знаходження інтервалів монотонності?
5. Що називається точкою локального мінімуму та локального максимуму функції?
6. Що називається локальним екстремумом і чим він відрізняється від глобального екстремуму функції?
7. Записати формули Маклорена для функцій e^x, $\sin x$ і $\cos x$.

Приклади розв’язування задач

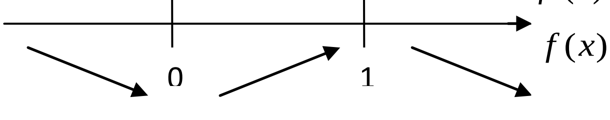
Приклад 1. Знайти екстремум та інтервали монотонності функції

$$y=x^2e^{-2x}.$$

Розв’язання. Знайдемо похідну функції:

$y'=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2x}=2xe^{-2x}(1-x)$ та її критичні точки: $2xe^{-2x}(1-x)=0$ $x_1=0,\quad x_2=1$.

Дослідимо як змінює знак похідна на кожному інтервалі:



Отже, при $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ функція спадає, а при $x\in(0;1)$ – зростає. x=0 – точка мінімуму, а x=1 – точка максимуму.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x + \frac{4}{x^2}$, $x \in [1;3]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну: $y = 1 - \frac{8}{x^3}$.

Знайдемо критичні точки, розв'язавши рівняння $y'(x) = 0$:

$1 - \frac{8}{x^3} = 0; x = 2$. Точка належить заданому відрізку.

Визначимо значення функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізку:

$$y(2) = 2 + 1 = 3; \quad y(1) = 1 + 4 = 5; \quad y(3) = 3 + \frac{4}{9} = 3\frac{4}{9}.$$

Із знайдених значень вибираємо найменше і найбільше:

$$\max_{[1;3]} y(x) = y(1) = 5; \quad \min_{[1;3]} y(x) = y(2) = 3.$$

Приклад 3. Показати, що функція $y = e^x - x$ зростає при x>0.

Розв'язання. Відомо, що функція на інтервалі зростає, якщо похідна додатна. Знайдемо $y' = e^x - 1$ і розв'яжемо нерівність $e^x - 1 > 0; e^x > 1$.

Отже, $x > 0$.

Приклад 4. Довести нерівність $\ln(1+x) > \frac{\text{arctg}x}{1+x}, x > 0.$

Розв'язання. Складемо функцію $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\text{arctg}x}{1+x}$ і обчислимо похідну: $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x) - \text{arctg}x}{(1+x)^2} =$

$$= \frac{(1+x)(1+x^2) - (1+x) + \text{arctg}x \cdot (1+x^2)}{(1+x)^2 \cdot (1+x^2)} = \frac{x^2(1+x) + \text{arctg}x \cdot (1+x^2)}{(1+x)^2 \cdot (1+x^2)}.$$

Отже, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, тому функція $f(x)\uparrow$, значить $f(x) > f(0)$. Таким чином $\ln(1+x) - \frac{\text{arctg}x}{1+x} > 0, x > 0$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції.

1. $y = x - \ln(x+2)$.
2. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$.
3. $y = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$.
4. $y = \ln x - 2\frac{x-1}{x+2}$.
5. $y = x \cdot e^{x^2-3x}$.
6. $y = \frac{x}{4} - \sqrt[4]{x}$.

Завдання 5.2. Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному відрізку.

1. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, $[0;2]$.
2. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2+2x+5}$, $[-1;3]$.
3. $y=\sqrt{21+4x-x^2}$, $[-1;7]$.
4. $y=\sin 2x-x$, $\left[-\dfrac{1}{\pi};\dfrac{1}{\pi}\right]$.
5. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0;1]$.
6. $y=x^2e^{-2x}$, $[0;2]$.

Завдання 5.3. Показати, що функція $y=\dfrac{4}{x}-2x$ спадає на будь-якому інтервалі, який не містить точки $x=0$.

Завдання 5.4. Показати, що функція $y=x-\operatorname{arctg}x$ скрізь зростає.

Завдання 5.5. Довести нерівності.

1. $e^x>1+x$ $(x\neq 0)$.
2. $x>\ln(1+x)$ $(x>0)$.
3. $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ $(x>0)$.
4. $2x\cdot\operatorname{arctg}x\geq\ln(1+x^2)$.

Завдання 5.6. Знайти екстремуми функцій за допомогою другої похідної.

1. $y=x^2(a-x)^2$.
2. $y=x+\sqrt{1-x}$.
3. $y=x\sqrt{2-x^2}$.
4. $y=x^2e^{-x}$.

§6. ОПУКЛІСТЬ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Основні поняття та теореми

Функція $y=f(x)$ називається опуклою вниз (вгору) на відрізку $[a;b]$, якщо довільна дуга її графіка з кінцями в точках $M_1(x_1;f(x_1))$ і $M_2(x_2;f(x_2))$, $a\leq x_1\leq x_2\leq b$, розташована не вище (не нижче) хорди M_1M_2.

Теорема. Опукла на відрізку функція є неперервною на ньому.

Опуклість диференційованої функції. Графік диференційованої функції $y=f(x)$ є опуклим вниз (вгору) на інтервалі $(a;b)$, якщо відповідна дуга графіка знаходиться над (під) дотичною, проведеною в довільній точці цієї дуги.

Кожний інтервал, на якому функція опукла вниз (вгору), називається інтервалом опуклості вниз (вгору) цієї функції.

Точку, при переході через яку крива змінює напрямок опуклості, називають точкою перегину.

Критерій опуклості функції. Якщо функція $y = f(x)$ двічі диференційована на інтервалі $(a;b)$, то вона є опуклою вниз (вгору) на $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \geq 0$ (відповідно $f''(x) \leq 0$) на $(a;b)$.

Необхідна умова перегину графіка двічі диференційованої функції. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 другу похідну і графік цієї функції має перегин в точці $M_0(x_0; f(x_0))$, то $f''(x_0) = 0$.

Достатня умова точки перегину. Якщо $f''(x_0) = 0$ і друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході аргументу x через точку x_0, то графік функції $y = f(x)$ має перегин в точці $M_0(x_0; f(x_0))$.

Дослідження функції та побудова графіка. Повне дослідження функції з наступною побудовою її графіка проводять за такою схемою (алгоритмом):

1. Знайти область визначення функції;
2. Знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з осями координат;
3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4. Знайти інтервали неперервності та дослідити точки розриву;
5. Знайти асимптоти графіка функції та нарисувати їх;
6. Знайти інтервали монотонності,точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
7. Знайти інтервали опуклості, точки перегину та значення функції в цих точках;
8. Побудувати графік функції.

Контрольні питання та завдання

1. Яка крива називається опуклою вниз (вгору) на інтервалі?
2. Що називають точкою перегину?
3. Сформулюйте достатню умову опуклості вниз (вгору) функції $y = f(x)$.
4. Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості та точок перегину.
5. Наведіть приклад опуклої вниз функції, у якої друга похідна в деякій точці x_0 інтервалу опуклості дорівнює нулю: $f''(x_0) = 0$.
6. Нехай задано функцію $y = f(x)$, $x \in [a;b]$. Відомо, що для довільних значень аргументів x_1 і x_2: $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ виконується нерівність:
$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$
Охарактеризувати графік функції $y = f(x)$.
7. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$опуклі вниз на інтервалі $(a;b)$. Показати, що $y = f(x) + g(x)$ також опукла вниз на $(a;b)$.
8. Нехай функція $f(x)$ опукла вниз на відрізку $[a;b]$. Довести, що глобальний максимум $\max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b)\}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Показати, що графік функції $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ скрізь опуклий вниз.

Розв'язання. Знайдемо y''.

$$y'=((x+2)^{-2})'=-2(x+2)^{-3}$$
$$y''=-2\cdot(-3)\cdot(x+2)^{-4}=\frac{6}{(x+2)^4}.$$

Друга похідна додатна на всій області визначення заданої функції, а це означає, що графік функції $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ скрізь опуклий вниз.

Приклад 2. Знайти точки перегину та інтервали опуклості графіка функції

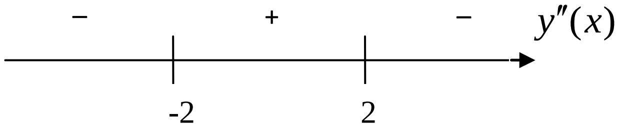
$$y=\ln(4+x^2).$$

Розв'язання. Знайдемо другу похідну:

$$y'=\frac{2x}{4+x^2};$$
$$y''=\frac{2(4+x^2)-2x\cdot 2x}{(4+x^2)^2}=\frac{8+2x^2-4x^2}{(4+x^2)^2}=\frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}=\frac{2(4-x^2)}{(4+x^2)^2}$$

$x=\pm 2$ – нулі другої похідної.

Перевіримо знак другої похідної:



Отже, якщо $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ – $y''(x)<0$ – крива опукла вгору. Якщо $x\in(-2;2); y''(x)>0$ – крива опукла вниз.

Приклад 3. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.
2. Нулі функції: $x^2-9=0, x=\pm 3\Rightarrow$ точки перетину з $Ox:(3;0);(-3;0)$; при $x=0,\quad y=\dfrac{9}{4}\Rightarrow$ з $OY:\left(0;\ \dfrac{9}{4}\right)$.
3. $y(-x)=\dfrac{(-x)^2-9}{(-x)^2-4}=y(x)$, отже функція парна, графік симетричний відносно осі Oy. Функція неперіодична.
4. Функція має точки розриву $x=\pm 2$.

5. Існують $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{x^2-4}=\infty;\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-9}{x^2-4}=\infty,$ а значить $x=\pm 2$ – вертикальні асимптоти. Знайдемо похилу асимптоту: $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{9}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1}=0,\text{ а }\ b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=1.$$

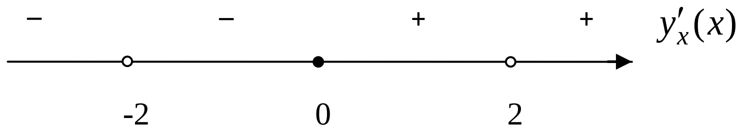
Отже, $y=1$ – горизонтальна асимптота.

6. Знаходимо похідну функції, її критичні точки та інтервали монотонності:

$$y'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-9)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x(x^2-4-x^2+9)}{(x^2-4)^2}=\frac{10x}{(x^2-4)^2}.$$

Розв’язком рівняння $y'=\dfrac{10x}{(x^2-4)^2}=0$ є $x=0$ – критична точка.

Знайдемо знаки y' на проміжках:



Отже, $x=0$ – точка мінімуму, а $y_{\min}=\dfrac{9}{4}$.

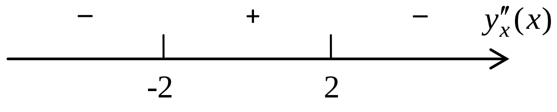
При $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)$ – функція спадає, а при $x\in(0;2)\cup(2;\infty)$ – зростає.

7. Знайдемо y'':

$$y''(x)=\left(\frac{10x}{(x^2-4)^2}\right)'=\frac{10(x^2-4)^2-10x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

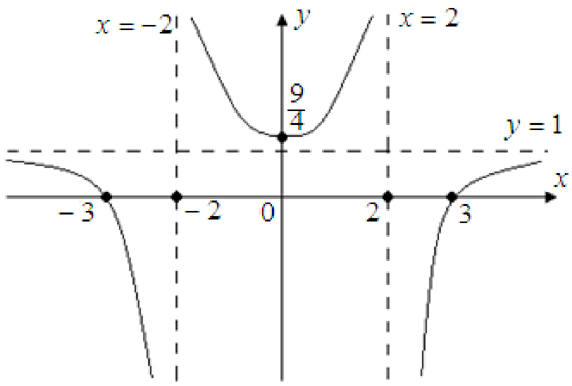
$$=\frac{(x^2-4)(10x^2-40-40x^2)}{(x^2-4)^4}=\frac{-40-30x^2}{(x^2-4)^3}.$$

Дослідимо $y''(x)$ на знак:



Отже, якщо $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ – функція опукла вгору, а при $x\in(-2;2)$ – опукла вниз.

8. Враховуючи проведені дослідження, будуємо графік функції:



Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 6.1. Знайти інтервали опуклості функції.

1. $y = x^2$.
2. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$.
3. $y = \dfrac{1}{x-4}$.
4. $y = (1 - x^2)e^x$.
5. $y = x^2 \ln x$.

Завдання 6.2. Знайти точки перегину графіка.

1. $y = \sin x$.
2. $y = xe^x$.
3. $y = \ln x + 2x^2$.
4. $y = e^{\frac{1}{1-x}}$.
5. $y = 5 + \sqrt[3]{(x-5)^5}$.

Завдання 6.3. Побудувати графіки функцій.

1. $y = x^3 - 12x$.
2. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. $y = x(x-2)^3$.
4. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$.
5. $y = 1 + \dfrac{4x+1}{x^2}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Скласти рівняння нормалі (в варіантах 1-12) або рівняння дотичної (в варіантах 13-30) до даної кривої в точці з абсцисою x_0.

1. $y = \dfrac{(4x - x^2)}{4}$, $x_0 = 2$.
2. $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$.
3. $y = x - x^3$, $x_0 = -1$.
4. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$, $x_0 = 4$.
5. $y = x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$.
6. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20$, $x_0 = -8$.
7. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.
8. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$, $x_0 = 16$.
9. $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$.
10. $y = \dfrac{(x^2 - 3x + 6)}{x^2}$, $x_0 = 3$.
11. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$.
12. $y = \dfrac{(x^3 + 2)}{(x^3 - 2)}$, $x_0 = 2$.
13. $y = 2x^2 + 3$, $x_0 = -1$.
14. $y = \dfrac{x^{20} + 6}{x^4 + 1}$, $x_0 = 1$.
15. $y = 2x + \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$.
16. $y = -\dfrac{2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}$, $x_0 = 1$.

17. $y=\frac{x^5+1}{x^4+1},\ x_0=1.$

18. $y=\frac{x^{16}+9}{1-5x^2},\ x_0=1.$

19. $y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}),\ x_0=1.$

20. $y=\frac{1}{3x+2},\ x_0=2.$

21. $y=\frac{x}{x^2+1},\ x_0=-2.$

22. $y=\frac{x^2-3x+3}{3},\ x_0=3.$

23. $y=\frac{2x}{x^2+1},\ x_0=1.$

24. $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right),\ x_0=1.$

25. $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2},\ x_0=1.$

26. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2,\ x_0=1.$

27. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x},\ x_0=1.$

28. $y=\frac{3x-2x^3}{3},\ x_0=1.$

29. $y=\frac{x^2}{10+x},\ x_0=2.$

30. $y=\frac{x^2-2x-3}{4},\ x_0=4.$

Завдання 2. Знайти диференціал *dy* функцій.

1. $y=arcsin\frac{1}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|,\ x>0.$

2. $y=tg(2arccos\sqrt{1-2x^2}),\ x<0.$

3. $y=\sqrt{1+2x}-\ln(x+\sqrt{1+2x}).$

4. $y=x^2arctg\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}.$

5. $y=arccos\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}},\ x>0.$

6. $y=x\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|-\sqrt{x^2+3}.$

7. $y=arctg(sh\,x)+(sh\,x)\ln ch x.$

8. $y=\arccos\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}.$

9. $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}).$

10. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}arctgx.$

11. $y=\frac{\ln|x|}{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}.$

12. $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}.$

13. $y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}.$

14. $y=\ln tg\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}.$

15. $y=2x+\ln\left|\sin x+2\cos x\right|.$

16. $y=\sqrt{ctgx}-\frac{\sqrt{tgx^3}}{3}.$

17. $y=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}\right|.$

18. $y=\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}.$

19. $y=arctg\frac{x^2-1}{x}.$

20. $y=\ln\left|x^2-1\right|-\frac{1}{x^2-1}.$

21. $y=arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right).$

22. $y=\ln\left|2x+2\sqrt{x^2+x}+1\right|.$

23. $y=\ln\left|\cos\sqrt{x}\right|+\sqrt{x}tg\sqrt{x}.$

24. $y=e^x(\cos 2x+2\sin 2x).$

25. $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x).$

26. $y=(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2})e^{2\sqrt{x-1}}.$

27. $y=\cos x\ln tgx-\ln tg\frac{x}{2}.$

28. $y=\sqrt{3+x^2}-x\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|.$

29. $y=\sqrt{x}-\left(1+x\right)arctg\sqrt{x}.$

30. $y=xarctgx-\ln\sqrt{1+x^2}.$

Завдання 3. Обчислити наближено за допомогою диференціала.

1. $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=7,76.$
2. $y=\sqrt[3]{x^3+7x},\ \ x=1,012.$
3. $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2},\ \ x=0,98.$
4. $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=27,54.$
5. $y=\arcsin x,\ \ x=0,08.$
6. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5},\ \ x=0,97.$
7. $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=26,46.$
8. $y=\sqrt{x^2+x+3},\ \ x=1,97.$
9. $y=x^{11},\ \ x=1,021.$
10. $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=1,21.$
11. $y=x^{21},\ \ x=0,998.$
12. $y=\sqrt[3]{x^2}\ ,\ \ x=1,03.$
13. $y=x^6,\ \ x=2,01.$
14. $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=8,24.$
15. $y=x^7,\ \ x=1,996.$
16. $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=7,64.$
17. $y=\sqrt{4x-1},\ \ x=2,56.$
18. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}},\ \ x=1,016.$
19. $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=8,36.$
20. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ \ x=4,16.$
21. $y=x^7,\ \ x=2,002.$
22. $y=\sqrt{4x+3},\ \ \ \ x=1,78.$
23. $y=\sqrt{x^3},\ \ x=0,98.$
24. $y=x^5,\ \ x=2,997.$
25. $y=\sqrt[5]{x^2}\ ,\ x=1,03.$
26. $y=x^4,\ \ x=9,998.$
27. $y=\sqrt{1+x+\sin x},\ \ \ x=0,01.$
28. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\ \ x=0,01.$
29. $y=\sqrt[4]{2x-\sin\dfrac{\pi x}{2}}\ ,\ \ x=1,02.$
30. $y=\sqrt{x^2+5},\ \ x=1,97.$

Завдання 4. Знайти похідні обернених тригонометричних функцій.

1. $y=arctg\dfrac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}.$
2. $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x}}.$
3. $y=\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\dfrac{9}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{3}.$
4. $y=arctg\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$
5. $y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}.$
6. $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}arctg\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}.$
7. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}arctgx.$
8. $y=(x-4)\dfrac{\sqrt{8x-x^2-7}}{2}-9\arccos\dfrac{\sqrt{x-1}}{6}.$
9. $y=\dfrac{\left(1+x\right)arctg\sqrt{x}}{x^2}+\dfrac{1}{3x\sqrt{x}}.$
10. $y=\dfrac{x^3}{3}\arccos x-\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}.$
11. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1+x}{2x}arctg\sqrt{x}.$
12. $y=\dfrac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)}+3\arccos\sqrt{\dfrac{x}{2}}.$

13. $y=\frac{4+x^4}{x^3}arctg\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x}.$

14. $y=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+arctg\sqrt{x}.$

15. $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{\arccos x}{2x^2}.$

16. $y=6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}.$

17. $y=\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}-1}.$

18. $y=\frac{(1+x)arctg\sqrt{x}}{x}-\sqrt{x}.$

19. $y=\frac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$

20. $y=\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}.$

21. $y=arctgx+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}.$

22. $y=\arcsin\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}.$

23. $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}.$

24. $y=arctg\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$

25. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{3}arctg\sqrt{x}-\frac{8}{3}arctg\frac{\sqrt{x}}{2}.$

26. $y=(2x^2+6x+5)arctg\frac{x+1}{x+2}-x.$

27. $y=\frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\frac{1}{8}\ln(1-4x^2).$

28. $y=(2x^2-x+\frac{1}{2})arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{x^3}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x.$

29. $y=(x+2\sqrt{x}+2)arctg\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\sqrt{x}.$

30. $y=\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x}-\sqrt{2}\ln(1+x).$

Завдання 5. Знайти похідні показниково-степеневих функцій.

1. $y=(arctgx)^{\frac{1}{2}\ln arctgx}.$
2. $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}.$
3. $y=(\sin x)^{5e^x}.$
4. $y=(\arcsin x)^{e^x}.$
5. $y=(\ln x)^{3^x}.$
6. $y=x^{\arcsin x}.$
7. $y=(ctg3x)^{2e^x}.$
8. $y=x^{e^{tgx}}.$
9. $y=(tgx)^{4e^x}.$
10. $y=(\cos 5x)^{e^x}.$
11. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}.$
12. $y=(x-5)^{chx}.$
13. $y=(x^3+4)^{tgx}.$
14. $y=x^{\sin x^3}.$
15. $y=(x^2-1)^{shx}.$
16. $y=(x^4+5)^{ctgx}.$
17. $y=(\sin x)^{5^{\frac{x}{2}}}.$
18. $y=(x^2+1)^{\cos x}.$
19. $y=19^{x^{19}}x^{19}.$
20. $y=x^{3^x}2^x.$
21. $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}.$
22. $y=x^{e^{ctgx}}.$
23. $y=x^{e^{\cos x}}.$
24. $y=x^{2^x}5^x.$
25. $y=x^{e^{\sin x}}.$
26. $y=\left(\mathrm{tg}x\right)^{\frac{\ln\mathrm{tg}x}{4}}.$
27. $y=x^{e^{arctgx}}.$
28. $y=(x^8+1)^{thx}.$
29. $y=x^{29^x}29^x.$
30. $y=\left(\cos 2x\right)^{\frac{\ln\cos 2x}{4}}.$

Завдання 6. Знайти похідну y'_x параметрично заданої функції.

1. $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin(\dfrac{t^3}{3}+t). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2,} \\ y = tg\sqrt{1+t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \ln(t+\sqrt{t^2+1}), \\ y = t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = ctg(2e^t), \\ y = \ln tge^t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \ln ctgt, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = arctge^{\frac{t}{2}}, \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \ln\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin(\sqrt{1-t^2}), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \ln\dfrac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln t}, \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1,} \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = \ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = arctg\dfrac{t+1}{t-1}, \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y = \dfrac{1}{2}tg^2 t+\ln\cos t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt{t-t^2}-arctg\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{t}-\sqrt{1-t}\arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \ln tgt, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2\ln t}{1-t^2}+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t,} \\ y = tgt\ln\cos t+tgt-t. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2.}} \end{cases}$

Завдання 7. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданих відрізках.

1. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16,\ [1;4].$
2. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2},\ [1;4].$
3. $y = \sqrt[2]{2(x-2)^2(8-x)} - 1,\ [0;6].$
4. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5},\ [-3;3].$
5. $y = 2\sqrt{x} - x,\ [0;4]\ .$
6. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)},\ [-1;5].$
7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5,\ [1;9].$
8. $y = \frac{10x}{1+x^2},\ [0;3].$
9. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2,\ [-3;3].$
10. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59,\ [2;4].$
11. $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2},\ [-1;2].$
12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)},\ [-1;6].$
13. $y = \frac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2},\ [1;4].$
14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8,\ [1;7].$
15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)},\ [1;5].$
16. $y = \frac{4x}{4+x^2},\ [-4;2].$
17. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8,\ [-4;1].$
18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)},\ [-2;4]\ .$
19. $y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5},\ [-2;1].$
20. $y = -\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5},\ [-5;1].$
21. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)},\ [0;4].$
22. $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13,\ [2;5].$
23. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2,\ [1;5].$
24. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)},\ [3;4].$
25. $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5,\ [-2;1].$
26. $y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15,\ [\frac{1}{2};2].$
27. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3,\ [4;2].$
28. $y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2} - 9,\ [-1;2].$
29. $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15,\ [-2;-\frac{1}{2}].$
30. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)},\ [-2;5].$

ГЛАВА III. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§1. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Основні поняття та теореми

Множина точок M евклідової площини, які задовольняють нерівності $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| < \varepsilon$, утворює відкритий круг радіуса ε з центром в точці M_0:

$$K_\varepsilon(M_0) = \left\{M \in R^2 : \left|\overrightarrow{M_0M}\right| < \varepsilon\right\}.$$

Круг $K_\varepsilon(M_0)$ називають ε-*околом точки* M_0.

Внутрішньою точкою множини $D \in R^2$ називається точка M_0, яка входить до цієї множини з деяким своїм ε-околом. Точка M_0 називається *граничною точкою* множини D, якщо в кожному її ε-околі є точки, що належать множині D, і такі, що їй не належать.

Всі граничні точки множини D утворюють її границю. Множина D називається *обмеженою*, якщо вона повністю знаходиться в деякому крузі.

Неперервною лінією L на евклідовій площині R^2 називається множина точок

$$L = \left\{M(x;y) : x = x(t), y = y(t);\ \alpha \le t \le \beta\right\},$$

де $x(t), y(t)$ – неперервні функції змінної t на $[\alpha;\beta]$. Точка $A(x(\alpha); y(\alpha))$ – початок, а $B(x(\beta);\ y(\beta))$ – кінець лінії L. Якщо початок і кінець лінії співпадають, то вона є замкненою.

Множина D, границя якої складається із декількох неперервних ліній, називається *областю.*

Точка $M_0 = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ – границя послідовності точок $\{M_n\}$ із R^2, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\overrightarrow{M_0M_n}\right| = 0$. *Послідовність* $\{M_n\}$ називають *збіжною* до точки M_0 і записують ще так:

$$M_n \to M_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема про координатну збіжність. Послідовність $M_n(x_n;y_n) \to M_0(x_0;y_0)$ при $n \to \infty$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases} \text{при } \ n \to \infty.$$

Якщо кожній точці $M(x;y)$ області D поставлено у відповідність деяке число z, то говорять, що в області D визначена функція двох змінних і коротко записують:

$$z = f(M) \text{ або } z = f(x;y),\ M(x;y) \in D.$$

Множина D_f називається *областю визначення* функції $f(M)$, а сукупність $f(D)=\{z=f(M): M\in D\}$ – множиною значень цієї функції.

Числові змінні x, y називаються незалежними змінними або аргументами функції $z=f(x;y)$.

Означення функції трьох або більшої кількості змінних наводиться аналогічно випадку функції двох змінних.

Графіком функції $z=f(x;y)$, $(x;y)\in D_f$ називається геометричне місце точок $F(x;y;z)$ простору R^3 таке, що

$$\left\{F\left(x;y;f\left(x;y\right)\right):\left(x;y\right)\in D_f\right\}.$$

Таким чином, рівняння $z=f(x;y)$ задає у просторі поверхню, що одночасно проектується вздовж осі аплікат Oz на координатну площину xOy в область D_f. Зауважимо, що графічне зображення у просторі функції трьох і більшої кількості змінних не можливе.

Лінією рівня функції $f(x;y)$ називається лінія L, в точках якої функція зберігає стале значення $z=c$:

$$f(x;y)\equiv c,\ \ M(x;y)\in L.$$

Число a називається *границею функції* $f(M)$ в точці M_0, якщо для кожної послідовності $\{M_n\}\neq\{M_0\}: M_n\to M_0$ при $n\to\infty$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=a.$$

Загально прийнято записувати це так:

$$\lim_{M_n\to M_0} f(M)=a, \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=a, \text{ або } f(M)\to a\ \ (M\to M_0).$$

Наведене означення границі функції належить Гейне.

Коші належить еквівалентне означення границі функції "на мові ε і δ":

$$a=\lim_{M\to M_0} f(M)\Leftrightarrow \text{якщо } \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ таке, що} \forall M\in D:$$

$$0<\left|\overrightarrow{M_0M}\right|<\delta\Rightarrow\left|f(M)-a\right|<\varepsilon.$$

Відповідно до теорем про основні властивості границі функції однієї змінної формулюються аналогічні теореми для функції багатьох змінних. Функція $z=f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо вона визначена в цій точці і $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

Повним приростом функції $z=f(M)$ в точці $M_0\in D_f$ називається вираз $\Delta z(M_0)=f(M)-f(M_0)$.

Нехай $z=f(x;y)$ і координати точок $M_0(x_0;y_0)$, $M(x;y)$. Якщо ввести поняття приросту аргументів

$$\Delta x=x-x_0 \text{ і } \Delta y=y-y_{0,}$$

то $\Delta z(x_0;y_0)=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y_0)-f(x_0;y_0)$.

Еквівалентне означення неперервності функції $f(M)$ в точці M_0 можна подати у такому вигляді:

$$\lim_{M\to M_0}\Delta z(M_0)=0 \text{ або } \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z(x_0;y_0)=0.$$

Частинним приростом функції $z=f\ (x;y)$ *по змінній* x називається

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0),$$

відповідно

$$\Delta_y z=f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$$

– частинний приріст функції $z=f(x;y)$ по змінній y.

Теорема про неперервність по окремій змінній. Якщо функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і неперервна в цій точці, то вона неперервна в цій точці по кожній із змінних при фіксованій іншій.

Теорема про арифметичні операції над неперервними функціями. Якщо функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені в області D і неперервні в точці $M_0\in D$, то функції $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$ і $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (за умови $g(M_0)\neq 0$) неперервні в точці M_0.

Теорема про неперервність складеної функції. Нехай функції $\begin{cases}x=x(u;v),\\ y=y(u;v),\end{cases}$ $N(u;v)\in D$, неперервні в точці $N_0(u_0;v_0)\in D$, а функція $z=f(x;y)$ неперервна в точці $M_0(x_0;y_0)$, де $x_0=x(u_0;v_0)$ і $y_0=y(u_0;v_0)$. Тоді складена функція $F(u;v)=f(x(u;v);y(u;v))$ неперервна в точці $N_0(u_0;v_0)$.

Функція $z=f(M)$ називається неперервною на множині E, якщо вона неперервна в кожній точці M_0 із E. Область $\overline{D}$, яка містить свою границю, називається *замкненою.*

Теорема Вейєрштрасса. Неперервна на обмеженій замкненій області $\overline{D}$ функція набуває свого найбільшого та найменшого значення, тобто існують точки M_1 та M_2 в області $\overline{D}$ такі, що

$$f(M_1)=\max_{M\in D}f(M),\ f(M_2)=\min_{M\in D}f(M).$$

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення функції трьох змінних.
2. Дайте означення поверхні рівня функції $u=f(x;y;z)$.
3. Доведіть теорему про координатну збіжність, спираючись на той факт, що катет менший за гіпотенузу, а гіпотенуза коротша за суму катетів.
4. Сформулюйте теорему про арифметичні властивості границі.
5. Дайте означення неперервної функції трьох змінних у точці.

6. Виразіть приріст функції $z = xy$ в точці $M_0(1;2)$ через прирости Δx і Δy її аргументів.
7. Які точки називаються точками розриву функції $z = f(x;y)$? Наведіть приклади.
8. Запишіть частинні прирости функції $z = xy$ в точці $M_0(1;2)$.

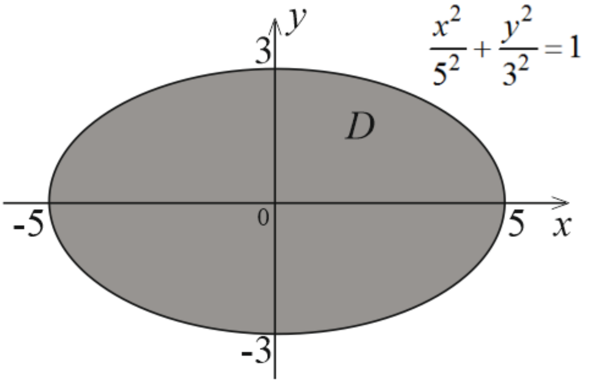
Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти та зобразити області визначення функції двох змінних

а) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}}$;   **б)** $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

Розв'язання. **а)** Задана складена функція означена в точках $(x;y)$, де $1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} \geq 0$ або $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1$.

Таким чином, область D визначення функції $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}}$ обмежена еліпсом $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.



б) Область визначення функції

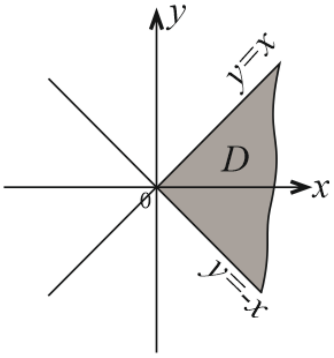
$$z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$$

визначається системою обмежень

$$\begin{cases} x + y \geq 0, \\ x - y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x, \\ y \leq x. \end{cases}$$

Таким чином, область

$$D = \{(x;y);\ -x \leq y \leq x;\ 0 \leq x\}.$$



Приклад 2. Знайти точки розриву функції $z = \frac{y^2 + 2x}{x^2 - y}$.

Розв'язання. Чисельник $y^2 + 2x$ заданої раціональної функції є неперервна функція як сума неперервних функцій y^2 і x. Знаменник $(x^2 - y)$ також неперервна функція двох змінних. Раціональна функція невизначена в тих точках $M(x;y)$ площини, де знаменник дорівнює нулю: $x^2 - y = 0$, тобто функція z не визначена на параболі $y = x^2$.

В інших точках площини функція визначена і неперервна. В силу теореми про операції над неперервними функціями, множиною точок розриву функції $z = \frac{y^2 + 2x}{x^2 - y}$ є парабола $y = x^2$.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію $z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Умова $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ тому єдина можлива точка розриву функції знаходиться в початку координат. Розглянемо значення функції z вздовж прямої $y = kx,\ x \neq 0,$ де k – кутовий коефіцієнт:

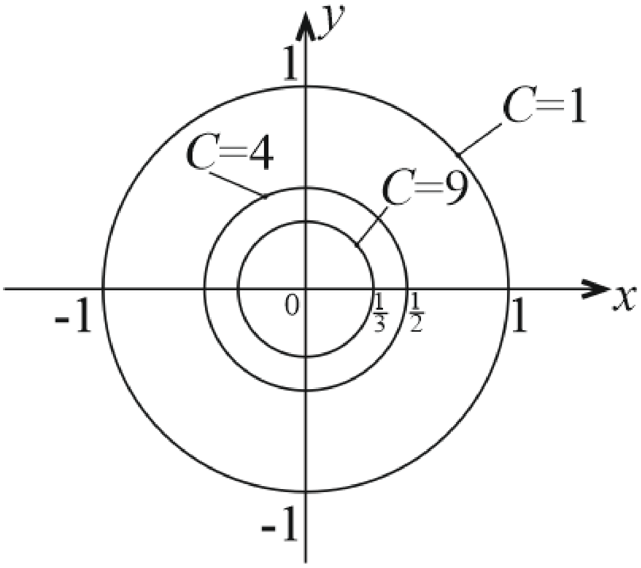
$$z(x;kx) = \frac{x \cdot (kx)}{x^2 + (kx)^2} = \frac{k \cdot x^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Таким чином, рухаючись до початку координат вздовж прямих з різними коефіцієнтами k, отримуємо різні значення границі: $\lim\limits_{x \to 0} z(x;y) = \dfrac{k}{1 + k^2}$. Тому функція має розрив у початку координат по сукупності змінних, але вона є неперервною окремо по кожній із координат :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2 + 0} = 0.$$

Приклад 4. Побудувати лінії рівня функції $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, якщо $C = 1;4;9$.

Розв'язання. Розглянемо рівняння $\dfrac{1}{x^2 + y^2} = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{1}{C} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$ при $C > 0$. Зобразимо на площині кола з радіусами $r = \dfrac{1}{\sqrt{C}}$: $r_1 = 1,\ r_2 = \dfrac{1}{2},\ r_3 = \dfrac{1}{3}$.



Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1. Знайти значення функції.

а) $z=\dfrac{5x+y}{x-2y}$ при $x=1,\ y=2;$ при $x=2\ ;y=-1.$

б) $f(x;y)=\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ при $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}.$

в) $f(x;y)=\sin\dfrac{y}{x},\ f(1;0)=?,\ f\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)=?,\ f(4;\pi)=?$

Завдання 1.2. Скласти таблицю значень функції $z=2x-3y+1$, надаючи незалежним змінним значення від 0 до 5 через одиницю.

Завдання 1.3. Із рівняння еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ визначити z як явну функцію змінних x і y. Чи буде ця функція однозначною?

Завдання 1.4. Знайти області визначення функцій

1. $z=\ln(y^2-4x+8).$
2. $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}.$
3. $z=(R^2-x^2-y^2)^{-2}.$
4. $z=\ln(xy).$
5. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}.$
6. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}\ .$
7. $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}.$
8. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x-y^2}}.$

Завдання 1.5. Дослідити на неперервність функції

1. $z=\dfrac{x^2+y^2}{y-2x}.$
2. $z=2^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}.$
3. $z=\dfrac{1}{1-e^{x+y}}.$
4. $z=\ln^{-2}(x^2+y^2).$
5. $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}.$
6. $z=\dfrac{1}{\sin\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi y}.$

Завдання 1.6. Побудувати лінії рівня функцій.

1. $z=x^2+y^2$, якщо $z=1;2;3;4$.
2. $z=y(x^2+1)$, якщо z набуває значень від -5 до 5 через одиницю.
3. $z=x^2y+x.$
4. $z=\dfrac{xy-1}{x^2}.$

5. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

Завдання 1.7. Дослідити методом перерізів графіки функцій та з’ясувати, що являють собою перерізи поверхонь площинами $x=const, y=const, z=const$.

1. $z=x^2+y^2$.
2. $z=x^2-y^2$.
3. $z=xy$.
4. $z^2=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}$.

Завдання 1.8. Знайти поверхні рівня таких функцій.

1. $u=x+2y+3z$.
2. $u=x^2+y^2+z^2$.
3. $u=x^2-y^2-z^2$.
4. $u=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}$.

Завдання 1.9. Знайти $f(x;y)$, якщо:

1. $f\left(x+y;\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.
2. $f(x-y;x+y)=-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Завдання 1.10. Показати, що не існує границя по сукупності змінних :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.

Завдання 1.11. Знайти границі функцій

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-\sqrt{1-xy}}{\sin xy}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{tg\left(x^2+y^2\right)}{\arcsin\left(x^2+y^2\right)}$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(x+y)^2}{\left(x^2+y^4\right)^2}$.

Завдання 1.12. З’ясувати питання обмеженості функції на вказаній множині.

1. $z=x^2-y^2$ в $D=\{(x;y): x^2+y^2\le 25\}$.
2. $z=x^2-y^2$ в $D=\{(x;y): x^2+y^2\ge 25\}$.
3. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ при $x^2+y^2\ne 0$.
4. $z=\dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$ в $D=\{(x;y): 0<x^2+y^2\le 9\}$.
5. $z=xye^{-xy}$ в $D=\{(x;y): x\ge 0, y\ge 0\}$.

§2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Основні поняття та теореми

Частинною похідною по x функції $z = f(x;y)$ в точці $(x_0;y_0)$ називається похідна по x функції $(f(x;y_0))_x'$, яка обчислена за умови фіксації (незмінності) аргументу $y = y_0$ під знаком функції $f(x;y)$.

Частинну похідну по x функції $z = f(x;y)$ позначають одним із таких символів: z_x', $f_x'(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Таким чином,

$$z_x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Частинною похідною по y функції $f(x;y)$ називається

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \equiv z_y' = f_y'(x;y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Аналогічно визначається поняття $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k = 1,2,\dots,n)$– частинних похідних по x_k функції багатьох змінних $u = f(x_1,\dots,x_n)$.

Обчислення частинних похідних виконується за тими ж правилами, що і обчислення похідних функції однієї змінної.

Фізичне тлумачення частинних похідних. $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$ – це швидкість зміни функції в точці $M\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ за напрямом осі Ox_k.

Геометричне тлумачення частинних похідних. Наведемо для випадку функції двох змінних. Частинні похідні чисельно дорівнюють $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0) = tg\alpha, \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0) = tg\beta, \end{cases}$

де α – кут нахилу до осі Ox дотичної перерізу поверхні $z = f(x;y)$ площиною $y = y_0$; $tg\beta$– тангенс кута нахилу дотичної до кривої, що отримана в результаті перерізу поверхні $z = f(x;y)$ площиною $x = x_0$.

Частинні похідні першого порядку $z_x' = f_x{}'(x;y)$ і $z_y' = f_y{}'(x;y)$ можна розглядати як функції змінних x і y. Частинними похідними другого порядку функції $z = f(x;y)$ називаються їх частинні похідні від частинних похідних першого порядку.

Частинні похідні вищих порядків визначаються рекурентно: частинна похідна $(n+1)$-го порядку є першою похідною від похідної n-го порядку. Частинні похідні вищих порядків позначають відповідно до послідовності їх обчислення. Наприклад, похідних 2-го порядку – чотири, і їх записують так:

$$\left(z'_x\right)'_x \equiv z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x;y);$$

$$\left(z'_x\right)'_y \equiv z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x;y);$$

$$\left(z'_y\right)'_y \equiv z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}''(x;y)$$

$$\left(z'_y\right)'_x \equiv z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x;y).$$

Якщо у формулі частинної похідної для запису індексу використовують декілька змінних, то такі частинні похідні називають *мішаними*.

Теорема про рівність мішаних похідних. Якщо в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ функція $z=f(x;y)$ має неперервні мішані похідні другого порядку, то вони рівні в цій точці:

$$f_{xy}''(x_0;y_0) = f_{yx}''(x_0;y_0).$$

Із наведеної теореми слідує такий ***наслідок***: якщо всі мішані частинні похідні n-го порядку функції $z=f(x;y)$ існують в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і неперервні в цій точці, то вони не залежать в точці M_0 від порядку їх обчислення:

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{\partial^{n+m} f}{\partial y^m \partial x^n}.$$

Наприклад, запис $\dfrac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m}$ означає похідну $(n+m)$-го порядку функції $z=f(x;y)$, де спочатку від функції z знаходять похідну n-го порядку по x, а потім похідну m-го порядку по y. Аналогічні твердження мають місце і для функцій довільної кількості змінних.

Символ $\dfrac{\partial}{\partial x}$ називають оператором частинної похідної по змінній x. При дії цього оператора на функцію $z=f(x;y)$ отримуємо нову функцію – частинну похідну $f_x'(x;y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Аналогічно визначають оператор $\dfrac{\partial}{\partial y}$ частинної похідної по y. Степінь і добутки степенів операторів $\dfrac{\partial}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial}{\partial y}$ визначають таким чином:

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – оператор другої частинної похідної по x;

$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ – оператор мішаної похідної другого порядку;

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \times \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}$ – оператор мішаної похідної $(n+m)$-го порядку n раз по x і m раз по y.

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення частинної похідної функції $u = f(x_1;...;x_n)$ по аргументу x_k. Який фізичний зміст частинної похідної?
2. Користуючись означенням частинної похідної, знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = x^2 y$.
3. В якому випадку частинна похідна другого порядку називається мішаною?
4. Для функції $z = f(x;y)$ запишіть всі можливі частинні похідні 3-го порядку. Які з них рівні між собою?
5. Спираючись на теорему про рівність мішаних частинних похідних другого порядку, доведіть, що $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$.
6. Спробуйте довести, що мішана похідна $f_{xy}''(x;y)$ співпадає із значенням границі $f_{xy}''(x;y) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y) - f(x+\Delta x; y) + f(x;y)}{\Delta x \Delta y}$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$: $z = \frac{1}{arctg\,\frac{y}{x}}$.

Розв’язання. Запишемо $z = arctg^{-1}\frac{y}{x}$, тоді

$$z_x' = \left(\mathrm{arctg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)_x' = -\mathrm{arctg}^{-2}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)_x' = \frac{-1}{\mathrm{arctg}^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x' =$$

$$= \frac{-1}{\mathrm{arctg}^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{arctg}^2\frac{y}{x}}.$$

Обчислимо:

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_y = -\operatorname{arctg}^{-2}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{-1}{\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{-x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}}.$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого порядку по кожній незалежній змінній від функції $u = x^{yz^2}$.

Розв'язання. $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^{yz^2}\right)'_x = yz^2 x^{yz^2-1}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^{yz^2}\right)'_y = x^{yz^2}\times\ln x\times\left(yz^2\right)'_y = z^2 x^{yz^2}\ln x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^{yz^2}\right)'_z = x^{yz^2}\times\ln x\times\left(yz^2\right)'_z = 2yzx^{yz^2}\ln x.$$

Приклад 3. Під яким кутом перетинаються плоскі лінії, які утворюються при перетині поверхонь $z = x^2 + \frac{y^2}{6}$ і $z = \frac{x^2+y^2}{3}$ вертикальною площиною $y = 2$?

Розв'язання. Лінії, про які йде мова в задачі, розташовані в площині y=2. Кут між плоскими лініями визначається як кут між дотичними в точці перетину:

$$\begin{cases} y = 2, \\ z = x^2 + \frac{y^2}{6}, \\ z = \frac{x^2+y^2}{3}, \end{cases} \begin{cases} y = 2, \\ z = x^2 + \frac{2}{3}, \\ z = \frac{x^2+4}{3}, \end{cases} \begin{cases} y = 2, \\ z = x^2 + \frac{2}{3}, \\ x^2 + \frac{2}{3} = \frac{x^2+4}{3} \end{cases} \begin{cases} z = x^2 + \frac{2}{3}, \\ y = 2, \\ x^2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 2, \\ z = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ми отримали дві точки перетину, які розташовані симетрично відносно осі Oz. Парність по змінній x функцій $z = x^2 + \frac{y^2}{6}$ і $z = \frac{x^2+y^2}{3}$ забезпечує, крім того, рівність кутів перетину плоских ліній в точках $\left(\pm 1;\ 2;\ 1\frac{2}{3}\right)$. Тому достатньо визначити шуканий кут в точці $M_0\left(1;\ 2;\ 1\frac{2}{3}\right)$. Використаємо геометричне тлумачення частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x} = tg\alpha$ – тангенс кута нахилу дотичної до осі Ox.

Тоді $\begin{cases} k_1 = tg\alpha_1 = \left(\dfrac{x^2+y^2}{3}\right)_x' = \dfrac{2}{3}x, \\ k_2 = tg\alpha_2 = \left(x^2 + \dfrac{y^2}{6}\right)_x' = 2x, \end{cases}$ $\Rightarrow$ В точці $M_0\left(1;2;1\frac{2}{3}\right)$, $k_1 = \frac{2}{3}$ і $k_2 = 2$.

Кут φ між двома прямими на площині знаходимо через кутові коефіцієнти цих прямих: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \dfrac{2 - \frac{2}{3}}{1 + 2\cdot\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{7}$.

Приклад 4. Дана функція $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$. Показати, що вона задовольняє диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z_x' = \left(\ln\left(e^x + e^y\right)\right)_x' = \frac{1}{e^x + e^y}\left(e^x + e^y\right)_x' = \frac{e^x}{e^x + e^y};$$

$$z_y' = \left(\ln\left(e^x + e^y\right)\right)_y' = \frac{e^y}{e^x + e^y}.$$

Потім знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z_x'\right)_x' = \left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)_x' = \frac{e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^{2z}}{\partial x \partial y} = \left(z_x'\right)_y' = \left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)_y' = -\frac{e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z_y'\right)_y' = \left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right)_y' = \frac{e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2}.$$

Остаточно дістанемо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \left[\frac{e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2}\right]^2 - \left[-\frac{e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2}\right]^2 \equiv 0.$$

Приклад 5. Знайти $\dfrac{\partial^{10} z}{\partial x^2 \partial y^8} = ?$, якщо $z = e^{xy}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо:

$$\frac{\partial^8 z}{\partial y^8} = \frac{\partial^7}{\partial y^7}\left(\left(e^{xy}\right)_y'\right) = \frac{\partial^7}{\partial y^7}\left(xe^{xy}\right) = x\frac{\partial^7}{\partial y^7}\left(e^{xy}\right) = x^8 e^{xy}.$$

Далі обчислимо:

$$\frac{\partial^9 z}{\partial x \partial y^8} = \left(x^8 e^{xy}\right)'_x = 8x^7 e^{xy} + x^8 y e^{xy} = \left(8x^7 + x^8 y\right)e^{xy},$$

$$\frac{\partial^{10} z}{\partial x^2 \partial y^8} = \left(\left(8x^7 + x^8 y\right)e^{xy}\right)'_x = \left(56x^6 + 8x^7 y\right)e^{xy} + \left(8x^7 + x^8 y\right)y e^{xy} =$$

$$= e^{xy}\left(56x^6 + 16x^7 y + x^8 y^2\right).$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 2.1. Знайти частинні похідні.

1. $z = x^3 y - y^3 x.$
2. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}.$
3. $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$
4. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$
5. $z = x^{4y} - y^2 + 5.$
6. $z = e^{-\frac{x}{y}}.$
7. $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$
8. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}.$
9. $z = \operatorname{arctg}\frac{y + x}{x - y}.$
10. $z = 3^{\frac{y}{x}}\cos\left(x^2 + y\right).$

Завдання 2.2. Який кут утворює з додатним напрямом осі абсцис дотична до лінії $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$, $y = 4$ у точці $(2;4;5)$?

Завдання 2.3. Який кут утворює з додатним напрямом осі ординат дотична до лінії $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = 1$ у точці $\left(1;1;\sqrt{3}\right)$?

Завдання 2.4. Який кут утворює з додатним напрямом осі абсцис дотична до лінії $z = x^3 y - y^3 x$, $y = 2$ у точці $(1;2;-3)$?

Завдання 2.5. Який кут утворює з додатним напрямом осі ординат дотична до лінії $z = \sin(xy)$, $x = \frac{\pi}{4}$ у точці $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};1\right)$?

Завдання 2.6. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ від заданих функцій.

1. $z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}.$
2. $z = \sin^2(4x + 3y).$
3. $z = e^{xy^2}.$
4. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$
5. $z = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}.$
6. $z = \arcsin(xy).$
7. $z = \cos\left(xe^y\right).$
8. $z = \ln\sin(x + y).$

Завдання 2.7. Для заданої функції $z = f(x;y)$ перевірити, що виконується тотожність $F = (x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}) \equiv 0$.

1. $z = \frac{y}{x} + x\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$, $F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
2. $z = xe^{-\frac{y}{x}}$, $F = xz''_{xy} + 2z'_x + 2z'_y - yz''_{yy}$.
3. $z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. $z = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $F = z''_{xx} + z''_{yy}$.
5. $z = \frac{y}{y^2 - a^2x^2}$, $F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
6. $z = e^{xy}$, $F = x^2z''_{xx} - 2xyz''_{xy} + y^2z''_{yy} + 2xyz$.
7. $z = \cos y + (y - x)\sin y$, $F = (x - y)z''_{xy} - z'_y$.
8. $z = \frac{y^2}{3x} + \mathrm{arctg}(xy)$, $F = x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2$.

Завдання 2.8. Температура T точки нагрітого стержня, що охолоджується, є функцією $T = T(x;t)$ двох змінних – відстані x точки від початку координат і часу t. Вказати фізичний зміст похідних $\frac{\partial T}{\partial x}$ і $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Завдання 2.9. Температура T повітря у деякій точці земної поверхні є функцією трьох змінних: довготи α, її широти β і часу t. Вказати фізичний зміст частинних похідних $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial T}{\partial \beta}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Завдання 2.10. Знайти частинні похідні вказаного порядку.

1. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ і $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, якщо $u = \sin xy$.
2. $\frac{\partial^8 z}{\partial x^4 \partial y^4}$, якщо $z = x^4\cos y + y^4\cos x$.
3. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{xyz}$.
4. $\frac{\partial^{10} z}{\partial x^4 \partial y^6}$, якщо $z = \sin x\cos 2y$.
5. $\frac{\partial^{10} z}{\partial x \partial y^9}$, якщо $z = (x^2 + y)^{10}\,\mathrm{tg}\,x$.

§3. ПОХІДНІ СКЛАДЕНИХ ФУНКЦІЙ

Основні поняття та теореми

Нехай задано функції $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;y) \end{cases}$, які мають неперервні частинні похідні в деякому околі точки $N_0(u_0;v_0)$, а функція $z = f(x;y)$ має неперервні частинні похідні в точці $M_0(x_0;y_0)$, де $x_0 = x(u_0;v_0)$ і $y_0 = y(u_0;v_0)$. Тоді складена функція

$$z = f(x(u;v);y(u;v)) = F(u;v)$$

має в деякому околі точки $N_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні по змінних u і v, причому

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Зокрема, якщо $x = x(t), y = y(t)$, то складена функція $z = F(t)$ залежить тільки від однієї змінної t, тому

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'_t + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'_t.$$

У випадку більшої кількості змінних формули для обчислення частинних похідних складеної функції узагальнюються відповідним чином. Наприклад, для функції

$$w = f(x(u,v);y(u,v);z(u,v)) = F(u;v)$$

вони мають такий вигляд:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Крім того, якщо $y = y(x)$ і $z = z(x)$, то складена функція $w = F(x)$ залежить від однієї змінної x і обчислюється за формулою

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} y'_x + \frac{\partial w}{\partial z} z'_x.$$

Розглянемо випадок неявного задання функції за допомогою рівняння $F(x;y) = 0$.

Припустимо, що для кожного значення x із деякої множини $E \subset R^1$ це рівняння має розв'язок. Тоді говорять, що на множині E неявним чином задана функція $y = y(x)$.

Теорема про похідну неявно заданої функції. Нехай функція $F(x;y)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і $F(x_0;y_0)=0$, $F'_y(x_0;y_0)\neq 0$. Тоді в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ рівняння $F(x;y)=0$ задає неявно єдину функцію $y=y(x)$. При цьому $y(x_0)=y_0$ і функція $y(x)$ має похідну в околі точки x_0, яка обчислюється за формулою

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}.$$

Ця теорема має важливе значення при обґрунтуванні існування розв'язків диференціальних рівнянь. Вона може бути узагальнена на випадок довільної кількості змінних.

Функція $u=f(x;y;z)$ називається *однорідною функцією степеня* p, якщо виконується тотожність $f(tx;ty;tz)\equiv t^p\cdot f(x;y;z)$ для довільного $t\neq 0$.

Теорема Ейлера для однорідних функцій. Якщо $u=f(x;y;z)$ – однорідна функція степеня p і має неперервні частинні похідні, то виконується рівність

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=p\cdot u(x;y;z).$$

Контрольні питання та завдання

1. Як знайти похідну z'_t складеної функції $z=f(x(t);y(t);z(t))$?
2. Що називається повною похідною?
3. Написати формулу для знаходження похідних f'_u, f'_v, f'_w, якщо $f=f(x;y;z)$, де $x=x(u;v;w)$, $y=y(u;v;w)$, $z=(u;v;w)$.
4. Знайти частинні похідні таких складених функцій:
   а) $z=f(x+y;x^2+y^2)$;
   б) $z=f\left(\frac{x}{y};xy\right)$.
5. Скільки неперервних неявних функцій виду $y=f(x)$ задає рівняння $x^2-y^2=0$ в околі точок $O(0;0)$?
6. Спробуйте вивести формулу для обчислення похідної функції, виконавши диференціювання по x тотожності $F(x;f(x))=0$.
7. Застосувавши теорему Ейлера, знайдіть:
   а) $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=?$, якщо $z=x^3y+y^3x-x^4$;
   б) $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=?$, якщо $z=x^2y-xy^2+2$.

Приклади розв’язування задач

Приклад1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$: $z = xe^{\frac{y}{x}}$, де $x = u^2 + v^2$, $y = uv$.

Розв’язання. Застосуємо розрахункові формули

$$\begin{cases} z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u, \\ z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v. \end{cases}$$

Тоді

$$z'_x = \left(xe^{\frac{y}{x}} \right)'_x = e^{\frac{y}{x}} + xe^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x} \right)'_x = e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} = e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x} \right),$$

$$z'_y = \left(xe^{\frac{y}{x}} \right)'_y = xe^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x} \right)'_y = e^{\frac{y}{x}},$$

$$x'_u = 2u,\ x'_v = 2v,\ y'_u = v,\ y'_v = u.$$

Звідки

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(1 - \frac{y}{x} \right) e^{\frac{y}{x}} \cdot 2u + e^{\frac{y}{x}} \cdot v = e^{\frac{uv}{u^2+v^2}} \left[2u \left(1 - \frac{uv}{u^2+v^2} \right) + v \right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(1 - \frac{y}{x} \right) e^{\frac{y}{x}} \cdot 2v + e^{\frac{y}{x}} \cdot u = e^{\frac{uv}{u^2+v^2}} \left[2v \left(1 - \frac{uv}{u^2+v^2} \right) + u \right].$$

Приклад 2. Знайти z'_t: $z = x^y$, де $x = \ln t$, $y = \sin t$.

Розв’язання. В силу формули $z'_t = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'_t + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'_t$. Знайдемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^y \right)'_x = yx^{y-1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^y \right)'_y = x^y \ln x,\ x'_t = \frac{1}{t},\ y'_t = \cos t,$$

а тоді $\frac{dz}{dt} = yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ln x \cdot \cos t = x^y \left[\frac{y}{xt} + \ln x \cdot \cos t \right] = (\ln t)^{\sin t} \left[\frac{\sin t}{t \ln t} + \cos t \cdot \ln(\ln t) \right].$

Приклад 3. Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, де $y = a \sin x$, $z = \cos x$, $a - const$.

Розв’язання. Оскільки $u = f(x; y(x); z(x))$, то $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'_x + \frac{\partial u}{\partial z} z'_x$. Обчислимо похідні, що входять до правої частини формули:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y-x}{a^2+1} \left(e^{ax} \right)'_x = \frac{y-z}{a^2+1} e^{ax} a = \frac{a}{a^2+1} (y-z) e^{ax};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (y-z)'_y = \frac{e^{ax}}{a^2+1},\ y'_x = (a \sin x)'_x = a \cos x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(y-z)'_z=-\frac{e^{ax}}{a^2+1},\ z'_x=(\cos x)'_x=-\sin x.$$

Звідси слідує, що

$$\frac{du}{dx}=\frac{a(y-z)}{a^2+1}e^{ax}+\frac{a}{a^2+1}e^{ax}\cos x+\frac{1}{a^2+1}e^{ax}\sin x=$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+1}\left[a(y-z)+a\cos x+\sin x\right]=$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+1}\left[a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x\right]=e^{ax}\sin x.$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні складеної функції

$$z=f\left(x-y^2;y-x^2;xy\right).$$

Розв'язання. Нехай $z=f(u;v;w)$, де $u=x-y^2$, $v=y-x^2$, $w=xy$, тоді:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot\left(x-y^2\right)'_x+f'_v\cdot\left(y-x^2\right)'_x+f'_w\cdot(xy)'_x=f'_u-2x\cdot f'_v+y\cdot f'_w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_u\cdot\left(x-y^2\right)'_y+f'_v\cdot\left(y-x^2\right)'_y+f'_w\cdot(xy)'_y=-2y\cdot f'_u+f'_v+x\cdot f'_w,$$

де у всі частинні похідні f'_u, f'_v, f'_w, після обчислення їх значень, підставлено координати точки $\left(x-y^2;y-x^2;xy\right)$.

Приклад 5. Нехай $f(u;v)$ – довільна функція, що має неперервні частинні похідні. Довести, що функція $u=\frac{xy}{z}\ln x+x\cdot f\left(\frac{y}{x};\frac{z}{x}\right)$ задовольняє диференціальне рівняння $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$.

Розв'язання. Скористаємось теоремою Ейлера для однорідної функції $v=v(x;y;z)$ степеня один:

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}=1\cdot v(x;y;z).$$

Виберемо за $v=x\cdot f\left(\frac{y}{x};\frac{z}{x}\right)$, дійсно: $(tx)f\left(\frac{ty}{tx};\frac{tz}{tx}\right)=tx\cdot f\left(\frac{y}{x};\frac{z}{x}\right)$. Нехай $g=\frac{xy}{z}\ln x$, тоді $g'_x=\left(\frac{xy}{z}\right)'_x\ln x+\frac{xy}{z}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y}{z}\ln x+\frac{y}{z}$; $g'_y=\frac{x}{z}\ln x$; $g'_z=-\frac{xy}{z^2}\ln x$, а значить $x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}+z\frac{\partial g}{\partial z}=x\left(\frac{y}{z}\ln x+\frac{y}{z}\right)+y\cdot\frac{x}{z}\ln x-z\cdot\frac{xy}{z^2}\ln x=\frac{xy}{z}\ln x+\frac{xy}{z}$.

Тому, для функції $u=v+g$ виконується таке:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\left[x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}\right]+\left[x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}+z\frac{\partial g}{\partial z}\right]=v+\frac{xy}{z}\ln x+\frac{xy}{z}=$$

$$=(v+g)+\frac{xy}{z}=u+\frac{xy}{z}.$$

Твердження задачі доведено.

Приклад 6. Функція $y(x)$ задана рівнянням $1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)=0$. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Розв'язання. У даному випадку $F(x;y)=1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)$, тому

$$F'_x=y-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\cdot\left(e^{xy}-e^{-xy}\right)\cdot y=\frac{y\left(e^{xy}+e^{-xy}-e^{xy}+e^{-xy}\right)}{e^{xy}+e^{-xy}}=\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}.$$

Аналогічно $F'_x=x-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\cdot\left(e^{xy}-e^{-xy}\right)\cdot x=\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}$.

Тоді за формулою $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}$ дістанемо $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}=-\frac{y}{x}$.

Вважаючи в цьому виразі y функцією від x і диференціюючи його, знайдемо другу похідну неявної функції

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x\frac{dy}{dx}-y\cdot 1}{x^2}=-\frac{x\left(-\frac{y}{x}\right)-y}{x^2}=\frac{2y}{x^2}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 3.1. Показати, що функція $z=\mathrm{acrtg}\frac{x}{y}$, де $x=u+v$, $y=u-v$, задовольняє співвідношення $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u+v}{u^2+v^2}$.

Завдання 3.2.Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ та $\frac{\partial z}{\partial v}$ складених функцій.

1. $z=x^2\ln y$, де $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$.
2. $z=\mathrm{actg}\frac{x}{y}$, де $x=u\sin v$, $y=u\cos v$.
3. $z=x^2y^2$, де $x=ue^v$, $y=ve^u$.

4. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, де $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$.

5. $z=x^2+y^2$, де $x=\sqrt{uv}$, $y=e^{u+v}$.

6. $z=x^2y-y^2x$, де $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.

Завдання 3.3. Знайти z_t'.

1. $z=\arcsin(x-y)$, якщо $x=3t$, $y=4t^3$.

2. $z=e^{x-2y}$, де $x=\sin t$, $y=t^3$.

3. $z=e^x+y^2$, якщо $x=\ln t$, $y=\sin t$

4. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, якщо $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.

5. $z=\ln(x+y)$, якщо $x=e^t$, $y=e^{-t}$.

6. $z=x^2-xy+y^2$, якщо $x=e^{-3t}$, $y=\cos 2t$.

Завдання 3.4. Знайти $\frac{du}{dx}$.

1. $u=\ln\left(e^x+e^y\right)$, де $y=x^3$.

2. $u=\operatorname{arctg}(x\cdot y)$, де $y=e^x$.

3. $u=\arcsin\frac{x}{z}$, де $z=\sqrt{x^2+1}$.

4. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{y}{z}$, де $y=\operatorname{tg}^2x$, $z=\operatorname{ctg}^2x$.

5. $u=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, $y=3x+1$.

Завдання 3.5. Знайти частинні похідні складеної функції.

1. $z=f\left(x^2-y^2;e^{xy}\right)$.

2. $z=f\left(\sin x,2x^2+y^3,e^{3x-y}\right)$.

3. $z=f\left(\cos(xy),x^5-7y\right)$.

4. $z=f\left(\sin\frac{x}{y};\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$

Завдання 3.6. Нехай $u=f(x;y)$ – довільна функція, що має неперервні частинні похідні. Довести, що вона задовольняє відповідне рівняння.

1. $u=f\left(x^2+y^2\right)$, $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

2. $u=y\cdot f\left(x^2-y^2\right)$, $y^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=xu$.

3. $u=\frac{y^2}{3x}+f(x\cdot y)$, $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$.

4. $u=\frac{xy}{z}\ln x+x\cdot f\left(\frac{y}{x};\frac{z}{x}\right)$, $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$.

Завдання 3.7. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно.

1. $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.
2. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$.
3. $y \cdot x^2 = e^y$.
4. $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$.
5. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.
6. $y^x = x^y$.

Завдання 3.8. Знайти y'_x при $x = 6$, $y = 2$ і при $x = 6$, $y = 8$ та дати геометричне тлумачення отриманих результатів, якщо функція задана неявно: $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$.

§4. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Основні поняття та теореми

Функція $z = f(x;y)$ називається диференційованою в точці $M_0(x_0;y_0)$, якщо її повний приріст в даній точці для кожної пари приростів аргументів Δx і Δy можна подати у вигляді

$$\Delta z(x_0;y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A та B – дійсні числа, які не залежать від Δx і Δy, а $\alpha = \alpha(\Delta x;\Delta y)$ та $\beta = \beta(\Delta x;\Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ функції такі, що $\alpha(0;0) = \beta(0;0) = 0$.

Умову диференційованості функції записують ще у такій формі:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\rho)\rho \ ,$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – відстань між точками $M(x;y)$ та $M(x + \Delta x; y + \Delta y)$, а $\varepsilon(\rho) \to 0$, при $\rho \to 0$.

Диференціалом $dz(x_0;y_0)$ диференційованої в точці $M_0(x_0;y_0)$ функції $z = f(x;y)$ називається головна, лінійна відносно приростів аргументів частина повного приросту цієї функції:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Якщо коефіцієнти A і B дорівнюють нулю, то диференціал dz функції в точці $M_0(x_0;y_0)$ вважається таким, що дорівнює нулю. Диференціалами незалежних змінних будемо називати прирости цих змінних: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Теорема про необхідні умови диференційованості. Якщо функція $z = f(x;y)$ диференційована в точці $M(x;y)$, то в цій точці у неї існують частинні похідні, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \text{ і } \frac{\partial z}{\partial y} = B,$$

а диференціал dz записується у такому вигляді:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,.$$

Теорема про достатні умови диференційованості. Якщо функція $z = f(x;y)$ має неперервні частинні похідні z'_x та z'_y в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$, то вказана функція диференційована в точці $M_0(x_0;y_0)$.

Властивості інваріантності форм першого диференціала. Нехай аргументи диференційованої в точці $M_0(x_0;y_0)$ функції $z = f(x;y)$ подано, в свою чергу, як диференційовані в точці $N_0(u_0;v_o)$ функції: $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$.

Виявляється, що формула обчислення диференціала

$$dz(x_0;y_o) = z'_x(x_0;y_0)dx + z'_y(x_0;y_0)dy\,,$$

є універсальною і справедлива також для обчислення диференціала складеної функції z в нових змінних u та v:

$$dz(u_0;v_0) = z'_u(u_0;v_0)du + z'_v(u_0;v_0)dv = dz(x_0;y_0)\,,$$

де dx, dy – відповідають приростам du, dv.

На основі властивості інваріантності форми першого диференціала встановлено такі правила диференціювання:

1. $d(cu) = cdu$, $(c = konst)$;
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3. $d(uv) = udv + vdu$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Аналогічно визначають диференціал du функції трьох змінних $u = f(x;y;z)$, для якого виконуються відповідні наведені вище властивості, наприклад:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\,.$$

Геометричний зміст першого диференціала функції. Дотичною площиною до поверхні в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ називається граничне положення площин $(M_0M_1M_2)$, що проходять через три різні точки поверхні, коли точки M_1 та M_2 наближаються до фіксованої точки M_0 по поверхні. Точки поверхні, в яких існує дотична площина, називаються *регулярними*. Поверхні, які мають дотичну площину в кожній своїй точці, називаються *гладкими*.

На графіку диференційованої функції $z = f(x;y)$ зафіксуємо точку $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$. Нехай просторова крива L проходить через точку M_0 і лежить на поверхні $z = f(x;y)$. Дотичний вектор до кривої L в точці M_0 називається дотичним вектором до поверхні графіка в точці, $M_0(x_0;y_0;f(x_o;y_0))$.

Площина називається *дотичною до поверхні* $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$, якщо ця площина проходить через точку M_0 і довільний дотичний вектор до поверхні в цій точці належить площині.

Площина однозначно визначається двома прямими, які їй належать і перетинаються. Тому має місце така теорема.

Теорема про дотичну. Якщо функція $z = f(x;y)$ диференційована в точці $M_0(x_0;y_0)$, то в точці $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ існує дотична площина до поверхні графіка цієї функції, причому рівняння дотичної площини має вигляд

$$z - f(x_0;y_0) = z'_x(x_0;y_0)\times(x - x_0) + z'_y(x_0;y_0)\times(y - y_0).$$

Зауваження. Якщо у формулі для диференціала

$$dz = z'_x(x_0;y_0)dx + z'_y(x_0;y_0)dy$$

замінити символи dz, dx, dy на величини $z - z_0$, $x - x_0$, $y - y_0$, то отримаємо рівняння дотичної площини. Таким чином, диференціал функції двох змінних відповідає приросту дотичної площини до графіка функції $z = f(x;y)$.

Для наближеного обчислення значення функції двох змінних використовують наближену рівність

$$z(x_0 + \Delta x;y_0 + \Delta y) - z(x_0;y_0) \approx dz(x_0;y_0),$$

тобто

$$z(x_0 + \Delta x;y_0 + \Delta y) \approx z(x_0;y_0) + z'_x(x_0;y_0)\Delta x + z'_y(x_0;y_0)\Delta y.$$

Розглянемо *поняття диференціала вищого порядку*.

Нехай функція $z = f(x;y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку в околі точки $M_0(x_0;y_0)$.

Перший диференціал $dz(x;y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x;y)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x;y)dy$ можна розглядати як функцію змінних x та y, а величини dx та dy вважати сталими.

Диференціал другого порядку $d^2z(x_0;y_0)$ функції $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ визначається як диференціал в точці M_0 від першого диференціала $dz(x;y)$, тобто за формулою $d^2z = d(dz)$.

При обчисленні другого диференціала d^2z прирости незалежних змінних x та y слід знову взяти такими, що дорівнюють dx та dy. Тоді

$$= dx\left(z''_{xx}dx + z''_{xy}dy\right) + dy\left(z''_{yx}dx + z''_{yy}dy\right) = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2.$$

$$d^2z = d(dz) = d\left(z'_xdx + z'_ydy\right) = [dxd(z'_x) + dyd\left(z'_y\right)] + [z'_x\underbrace{d(dx)}_{=0} + z'_y\underbrace{d(dy)}_{=0}] = .$$

Таким чином, $d^2z(x_0;y_0) = z''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2z''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + z''_{yy}(x_0;y_0)dy^2$.

Диференціал d^nz будь-якого n-го порядку функції $z = f(x;y)$ визначається за рекурентною формулою $d^nz = d\left(d^{n-1}z\right)$.

Символ $d=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$ називають оператором диференціала. При дії його на функцію $z(x;y)$ дістанемо $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Обчислимо n-ий степінь оператора диференціала як n-ий степінь двочлена $\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$:

$$d^n=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n.$$

У випадку $n=2$ отримуємо

$$d^2=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2,$$

при дії оператора d^2 на функцію z отримуємо диференціал другого порядку $d^2z(x;y)$ функції z. Зауважимо, що *форма диференціала вищого порядку є неінваріантною.*

Контрольні питання та завдання

1. Покажіть, що диференційована в точці $M(x;y)$ функція $z=f(x;y)$ неперервна в цій точці.
2. Наведіть приклад неперервної функції $z=f(x;y)$, яка недиференційована в заданій точці $M_0(x_0;y_0)$.
3. Запишіть координати вектора нормалі до поверхні графіка функції $z=f(x;y)$, яка диференційована в точці $M_0(x_0;y_0)$. Запишіть рівняння прямої, що перпендикулярна до поверхні $z=f(x;y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$.
4. Що таке диференціал функції $z=f(x;y)$ в заданій точці $M_0(x_0;y_0)$? Від яких аргументів він залежить?
5. Що розуміють під інваріантністю форми першого диференціала? Доведіть інваріантність форми першого диференціала, користуючись правилом обчислення частинних похідних складеної функції.
6. Дайте означення диференціала другого порядку функції $z=f(x;y)$ в заданій точці $M_0(x_0;y_0)$.
7. Нехай задано диференційовану складену функцію $z=f(x;y)$, де $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$. Покажіть, що
$$d^2z=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\right]+\left(\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y\right).$$

8. Запишіть вираз для диференціала другого порядку функції $u = f(x; y; z)$ незалежних змінних x; y; z. Запишіть операторну формулу для диференціала 2-го порядку в цьому випадку.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти частинні диференціали по кожній із незалежних змінних від функції $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = \frac{\pi}{2}$, $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = -0{,}02$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні по кожній із незалежних змінних:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x} + \sqrt{x}\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{\sin\frac{y}{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{y\cos\frac{y}{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sin\frac{y}{x} - 2y\cos\frac{y}{x}}{2x\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x}\cos\frac{y}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}.$$

За формулами частинних диференціалів дістанемо

$$d_x z = \frac{x\sin\frac{y}{x} - 2y\cos\frac{y}{x}}{2x\sqrt{x}}dx \text{ і } d_y z = \frac{\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}dy.$$

Враховуючи, що $\Delta x = dx = 0{,}03$, $\Delta y = dy = -0{,}02$, $x = 2$, $y = \frac{\pi}{2}$, дістанемо

$$d_x z = \frac{2\sin\frac{\pi}{4} - \pi \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}} \cdot 0{,}03 = \frac{\sqrt{2} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3(2-\pi)}{800};$$

$$d_y z = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}(-0.02) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{100} = -0{,}01.$$

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні, потім частинні диференціали і повний диференціал даної функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$dz = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \left(1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)dx + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - y\right)dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Підставляючи $x = 3$, $y = 4$, $dx = \Delta x = 0{,}1$, $dy = \Delta y = 0{,}2$, дістанемо

$$dz = \frac{\left(\sqrt{9+16} - 3\right)\cdot 0{,}1 + \left(\sqrt{9+16} - 4\right)\cdot 0{,}2}{\sqrt{9+16}} = \frac{0{,}2 + 0{,}2}{5} = 0{,}08.$$

Приклад 3. Обчислити наближено значення $\sqrt{3{,}95^2+3{,}15^2}$.

Розв'язання. Якщо потрібно обчислити значення функції $f(x;y)$ у точці $M(x_1;y_1)$, і якщо обчислити значення цієї функції та її частинних похідних у точці $M_0(x_0;y_0)$, то при достатньо малих, за абсолютною величиною, значеннях різниць $x_1-x_0=dx$, $y_1-y_0=dy$ можна замінити повний приріст функції її повним диференціалом і знайти наближене значення шуканої величини за формулою

$$f(M_1)\approx f(M_0)+f_x'(M_0)dx+f_y'(M_0)dy.$$

Розглянемо $\sqrt{3{,}95^2+3{,}15^2}$ як значення функції $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ у точці $M_1(3{,}95;3{,}15)$, за M_0 візьмемо точку $M_0(4;3)$, тоді

$$dx=3{,}95-4=-0{,}05,\ dy=3{,}15-3=0{,}15.$$

Обчислимо значення функції $f(x;y)$ та її частинних похідних у точці M_0.

$$f(M_0)=\sqrt{16+9}=5,\quad f_x'(M_0)=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(4;3)}=\frac{4}{5};\quad f_y'(M_0)=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(4;3)}=\frac{3}{5}.$$

Тоді з початкової формули дістанемо:

$$\sqrt{3{,}95^2+3{,}15^2}\approx 5+\frac{4}{5}\cdot(-0{,}05)+\frac{3}{5}\cdot 0{,}15=5-0{,}04+0{,}09=5{,}05.$$

Приклад 4. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=2x^2-4y^2$ у точці $M_0(2;1)$.

Розв'язання. Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x;y)$ і точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ належить цій поверхні, то рівняння дотичної площини і нормалі у точці M_0 відповідно визначаються рівняннями:

$$z_x'(M_0)\cdot(x-x_0)+z_y'(M_0)\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0 \text{ і } \frac{x-x_0}{z_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{z_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці $M_0(2;1)$:

$$z_x'(M_0)=4x|_{(2;1)}=8;\ z_y'(M_0)=-8y|_{(2;1)}=-8;\ z_0=f(M_0)=4.$$

Підставимо значення похідних у формули рівнянь, дістанемо рівняння дотичної площини: $8(x-2)-8(y-1)-(z-4)=0$; та рівняння нормалі:

$$\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}.$$

Приклад 5. Знайти другий диференціал функції $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу другого диференціала

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Знайдемо всі частинні похідні, які входять у формулу

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2};$$

аналогічно дістанемо $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Підставимо їх у формулу

$$d^2z=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx^2-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy+\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy^2,\text{ або}$$

$$d^2z=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(\left(y^2-x^2\right)dx^2-4xydxdy+\left(x^2-y^2\right)dy^2\right).$$

Приклад 6. Знайти другий диференціал складеної функції $z=f(u;v)$, де $u=x^2+y^2, v=xy$.

Розв'язання. У нашому випадку u і v є проміжними змінними, тому застосуємо формулу

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}d^2v.$$

Знайдемо частинні похідні і диференціали першого порядку для функцій u і v:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y;du=2xdx+2ydy;\ \frac{\partial v}{\partial x}=y;\ \frac{\partial v}{\partial y}=x;\ dv=ydx+xdy.$$

Потім знайдемо частинні похідні і диференціали другого порядку для функцій u і v:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2;\ d^2u=2dx^2+2dy^2;$$

$$du^2=(2xdx+2ydy)^2=4\left(x^2dx^2+2xydxdy+y^2dy^2\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=1;\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0;\ d^2v=2dxdy;\ dv^2=y^2dx^2+2xydxdy+x^2dy^2.$$

Підставимо одержані результати у формулу, дістанемо:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\times 4\left(x^2dx^2+2xydxdy+y^2dy^2\right)+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\times 2(xdx+ydy)(ydx+xdy)+$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(y^2dx^2+2xydxdy+x^2dy^2\right)+\frac{\partial z}{\partial u}\times 2\left(dx^2+dy^2\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\times 2dxdy.$$

Перегрупуємо доданки відносно множників dx^2; $dxdy$; dy^2.

$$d^2z = \left(4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial u} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)dx^2 +$$

$$+2\left(4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)dxdy +$$

$$+\left(4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial u} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)dy^2$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 4.1. Знайти частинні диференціали по кожній із незалежних змінних.

1. $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$.
2. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.
3. $z = \sqrt{\ln xy}$.
4. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
5. $z = \left(1 + x^3\right)^y$, при $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.04$.
6. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, при $x = -2$, $y = 1$, $\Delta x = 0.15$, $\Delta y = 0.01$.
7. $z = 2^{x^2 - y}$, при $x = 3$, $y = 5$, $\Delta x = -0.02$, $\Delta y = -0.045$.
8. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$, при $x = 2$, $y = 5$, $\Delta x = -0.015$, $\Delta y = 0.35$.

Завдання 4.2. Знайти повні диференціали функцій.

1. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$
2. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$.
3. $z = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$.
4. $z = \sin(xy)$.
5. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, при $x = 1$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}5$, $\Delta y = 0{,}5$.
6. $z = arctg\dfrac{x + y}{x - y}$, при $x = 0$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}4$, $\Delta y = 0{,}02$.
7. $z = \ln\left(tg\dfrac{y}{x}\right)$, при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}2$.
8. $z = e^x\left(\cos x + x\sin y\right)$, при $x = 2$, $y = \dfrac{\pi}{2}$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0.03$.

Завдання 4.3. Обчислити наближено:

1. $\ln\left(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1\right)$.
2. $\sqrt{1.02^{1.99}+\ln 1.02}$.
3. $1{,}12^3\cdot 0{,}98^2$.
4. $1{,}04^{2{,}02}$.
5. $0{,}98^{3{,}03}$.
6. $\sin 29°\times \mathrm{tg}46°$.

Завдання 4.4. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=f(x;y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$.

1. $z=x^2+2y^2$, $M_0(1;1)$.
2. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0(1;1)$.
3. $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, $M_0(3;4)$.
4. $z=\sin x\cdot\cos y$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$.
5. $z=2+(x-1)^2+(y-2)^2$, $M_0(2;3)$.
6. $z=\dfrac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$, $M_0(a;a;-a)$.

Завдання 4.5. Знайти повний диференціал другого порядку функції $z=f(x;y)$.

1. $z=x^4+3x^2y^2+y^4$.
2. $z=x\ln\dfrac{y}{x}$.
3. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.
4. $z=e^{xy}$
5. $z=\dfrac{2x+3y}{x-y}$.
6. $z=\dfrac{y^2}{x^2}$.

Завдання 4.6. Знайти диференціал другого порядку для функції $z=f(x;y)$, де $u=u(x;y)$, $v=v(x;y)$.

1. $z=f(x-y;x+y)$.
2. $z=f\left(x^2-y^2;y^2+x^2\right)$.
3. $z=f\left(x-y^2;y-x^2\right)$.
4. $z=f\left(xy;\dfrac{x}{y}\right)$.
5. $z=f(\sin x+\sin y;\cos x-\cos y)$.

6 . $z=f\left(x^2y;y^2x\right)$.

§5. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

Основні поняття та теореми

Нехай функція $u=f(x;y;z)$ задана в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Один із методів дослідження функції u полягає у вивченні поведінки цієї функції вздовж прямих ліній, що проходять через точку M_0. Кожному одиничному напрямному вектору $\vec{S}(S_1;S_2;S_3)$, $|\vec{S}|=1$, відповідає пряма, параметричне рівняння якої записується у такому вигляді

$$\begin{cases} x = x_0 + S_1 t, \\ y = y_0 + S_2 t, \ -\infty < t < \infty. \\ z = z_0 + S_3 t, \end{cases}$$

На фіксованому напрямі $\vec{S}$ функція $u = f(x;y;z)$ є фактично функцією одного аргументу t, тобто

$$F(t) = f(M_0 + \vec{S}t) = f(x_0 + S_1 t; y_0 + S_2 t; z_0 + S_3 t).$$

Функція $u = f(x;y;z)$ називається диференційованою в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ за напрямом вектора $\vec{S}$, якщо функція $F(t)$ диференційована по t при $t = 0$. Величину $F'(0)$ називають <u>*похідною функції* u *в точці* M_0 *за напрямом*</u> $\vec{S}$ *і позначають символом* $\frac{\partial u}{\partial \vec{S}} \equiv F'(0)$.

Зауважимо, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом, а саме:

1) якщо $\vec{S} = \vec{i}(1;0;0)$, то $\frac{\partial u}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}$;

2) якщо $\vec{S} = \vec{j}(0;1;0)$, то $\frac{\partial u}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial u}{\partial y}$;

3) якщо $\vec{S} = \vec{k}(0;0;1)$, то $\frac{\partial u}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

В силу означення похідної $F'(0)$ виконується

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{S}} = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(M_0 + \vec{S}t) - f(M_0)}{t}.$$

Таким чином, похідна $\frac{\partial u}{\partial \vec{S}}$ характеризує швидкість зміни значень функції $u = f(x;y;z)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ за напрямом $\vec{S}(S_1;S_2;S_3)$. Оскільки $\vec{S}$ – одиничний вектор $\left(|\vec{S}| = 1\right)$, то координати вектора $\vec{S}$ визначають його напрямні косинуси, тобто $\vec{S}(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$. Поняття похідної за напрямом узагальнюється таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}, \text{ де } \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \text{ – орт вектора } \vec{n}.$$

Теорема про похідну за напрямом. Нехай функція $u = f(x;y;z)$ диференційована в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ як функція трьох змінних, і орт вектора $\vec{n}$ подано через напрямні косинуси $\vec{n}^0(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M_0) = \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + \cos\beta \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) + \cos\gamma \frac{\partial u}{\partial z}(M_0).$$

Наслідок. Якщо $\vec{p} = -\vec{S}$, то $\frac{\partial u}{\partial \vec{p}} = -\frac{\partial u}{\partial \vec{S}}$. Якщо задана функція залежить від двох змінних $z = f(x;y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

де орт-вектор $\vec{n}^0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$.

Функцію трьох змінних $u = f(x;y;z)$, що задана в області D тривимірного простору, прийнято ще називати скалярним полем $u(M)$ в області D, $M \in D$. На практиці, наприклад, широко вживають такі терміни: поле температури твердого тіла; поле атмосферного тиску; поле густини або поле щільності зарядів неоднорідного середовища.

Градієнтом скалярного поля $u(M)$, $M \in D$, називається векторозначна функція

$$\overrightarrow{\text{grad } u(M)} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

координатами якої є значення частинних похідних функції $u = f(x;y;z)$ в точці $M(x;y;z)$.

На основі теореми про похідну за напрямом:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M) = \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{\text{grad } u(M)},$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M) = np_{\vec{n}}\overrightarrow{\text{grad } u(M)}.$$

Градієнт скалярного поля $u(M)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0) \in D$ характеризує напрямок та величину максимального зростання цього поля в точці M_0.

Дійсно, нехай φ – кут між векторами $\vec{n}$ та $\overrightarrow{\text{grad } u}$ в точці M, тоді $(|\vec{n}_0| = 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M) = \left|\overrightarrow{\text{grad } u(M)}\right| \cdot |\vec{n}_0| \cdot \cos\varphi.$$

Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ досягає свого найбільшого значення при $\varphi = 0$, тобто в напрямі вектора $\overrightarrow{\text{grad } u(M)}$.

Виділимо такі найпоширеніші *властивості градієнта:*

1. Вектор $\overrightarrow{\text{grad } u(M)}$ вказує напрям найбільшого (найшвидшого) зростання функції $u = f(x;y;z)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$, а його величина $\left|\overrightarrow{\text{grad } u(M_0)}\right|$ – є швидкістю зростання функції в цьому напрямі.

2. Модуль і напрям вектора $\overrightarrow{\text{grad } u}$ в кожній точці визначається самою функцією $u(M)$, тобто $\overrightarrow{\text{grad } u(M)}$ є інваріантом відносно вибору системи координат в області D.
3. $\min\limits_{\vec{n}}\left\{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M_0)\right\} = -\left|\overrightarrow{\text{grad } u(M_0)}\right| = \frac{\partial u}{\partial \vec{p}}(M_0)$, де вектор $\vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad } u(M_0)}$ – анті-градієнт.
4. Похідна за напрямом вектора $\vec{n}$, що перпендикулярний до градієнта, $\left(\vec{n} \perp \overrightarrow{\text{grad } u(M)}\right)$, дорівнює нулю: $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$.
5. *Геометричний зміст вектора градієнта.* Нехай $d\vec{r} = (dx; dy; dz)$ – вектор приросту змінних функцій $u = f(x; y; z)$ по поверхні рівня $f(x; y; z) = c$. Тоді
$$0 = dc = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \left(\overrightarrow{\text{grad } u} \cdot d\vec{r}\right).$$
Вектор $\overrightarrow{\text{grad } u(M_0)}$ перпендикулярний до поверхні рівня $f(x; y; z) = c$ в будь-якій точці M_0 цієї поверхні.
6. Рівняння дотичної площини до поверхні рівня $u(x; y; z) = c$ в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ цієї поверхні можна записати у такому вигляді:
$$u'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + u'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + u'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0$$
7. Справедливі рівності:
$$\text{grad } (u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v;$$
$$\text{grad } (cu) = c \cdot \text{grad } u;$$
$$\text{grad } (u \cdot v) = u \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{grad } u;$$
$$\text{grad } \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \text{grad } u - u \cdot \text{grad } v}{v^2};$$
$$\text{grad } f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \text{grad } u.$$

Векторне поле $\vec{F}(x; y; z) = \vec{i} \cdot P(x; y; z) + \vec{j} \cdot Q(x; y; z) + \vec{k} \cdot R(x; y; z)$ називається *потенціальним* в області D, якщо його можна подати в цій області як градієнт деякого скалярного поля $u(M)$: $\vec{F}(M) = \overrightarrow{\text{grad}\, u(M)}$, $M \in D$.

Функція $u(M)$ називається *скалярним потенціалом* векторного поля $\vec{F}(M)$. Таким чином, для $\vec{F} = (P; Q; R)$:
$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Наприклад, скалярна функція $u(M)=\gamma\dfrac{m}{r}$ – ньютонівський потенціал векторного поля

$$\vec{F}(M)=-\gamma\frac{m}{r^3}\cdot\vec{r},$$

тяжіння точкової маси m, яка розміщена в початку координат. Тут γ – гравітаційна стала, $\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}=(x;y;z)$ – радіус-вектор точки $M, r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Легко впевнитись, що

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-\gamma\frac{mx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3},$$

а значить $\mathrm{grad}\left(\gamma\dfrac{m}{r}\right)=-\gamma\dfrac{m}{r^3}\cdot\vec{r}$.

На практиці для пошуку екстремумів функцій багатьох змінних широко застосовують так званий "градієнтний метод". Ідея цього методу базується на тому, що вектор антиградієнта – $\overrightarrow{\mathrm{grad}\ u(M)}$ в кожній точці $M\in D$ направлений в сторону найбільшого спадання функції $u=f(M)$. Для спрощення сприйняття розглянемо опуклу функцію $z=f(x;y)$, тобто таку, довільна хорда графіка якої знаходиться над поверхнею цього графіка. Тоді, якщо, виходячи із деякого нульового наближення $M_0(x_0;y_0)$, ми побудуємо k-те наближення $M_k(x_k;y_k)$ за рекурентною формулою

$$M_{k+1}=M_k-\alpha\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}\ u(M_k)},$$

то при достатньо малому додатному α послідовність точок $\{M_k\}$ збігається до точки мінімуму функції $z=f(M)$

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення скалярного і векторних полів та наведіть приклади фізичних полів.
2. Дайте означення похідної за напрямом. Як зв’язана похідна за напрямом із частинними похідними?
3. Дайте означення градієнта скалярного поля. Обґрунтуйте властивість інваріантності вектора градієнта відносно вибору системи координат.
4. Яке векторне поле називається потенціальним? Що таке скалярний потенціал векторного поля?
5. Нехай $\vec{E}(M)=k\dfrac{e}{r^3}\cdot\vec{r}$ – вектор напруги електричного поля точкового заряду e, розташованого в початку координат. Тут $\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$, $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, де k – стала. Покажіть, що функція $u(M)=\dfrac{ke}{r}$ є потенціалом електричного поля точкового заряду e.

6. Запишіть рівняння сім'ї поверхонь рівня електричного поля (еквіпотенціальних поверхонь) точкового заряду, розташованого в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$.
7. Спробуйте самостійно довести теорему про похідну за напрямом.
8. Нехай $f(x;y)=\begin{cases}0 & x\neq y^2;\\ 1 \text{ при } & x=y^2\neq 0;\\ 0 & x=y=0.\end{cases}$

   а) Покажіть, що в точці $O(0;0)$ існує похідна функції $f(x;y)$ за довільним напрямом $\vec{n}$ і $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=0$.

   б) Покажіть, що функція $f(x;y)$ не диференційована в точці $O(0;0)$ як функція двох змінних.

   в) З'ясуйте питання про неперервність функції $f(x;y)$ в точці $O(0;0)$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти градієнт функції $u=y^2z-2xyz+z^2$ в точці $(3;1;1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні у точці $M_0(3;1;1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(3;1;1)}=-2yz\big|_{(3;1;1)}=-2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3;1;1)}=(2yz-2xz)\big|_{(3;1;1)}=-4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(3;1;1)}=\left(y^2-2xy+2z\right)\big|_{(3;1;1)}=-3.$$

За формулою $\overrightarrow{\text{grad } u}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ дістанемо

$$\overrightarrow{\text{grad }\ u(M_0)}=-2\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}=-(2;4;3).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $u=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $M(1;\ 1;\ 1)$ за напрямом вектора $\overline{MN}$, де $N(3;2;3)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}$ і його напрямні косинуси:

$$\overrightarrow{MN}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k};\quad \left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{4+1+4}=3;$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{3};\ \cos\beta=\frac{1}{3};\ \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці $M(1;\ 1;\ 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}}\cdot\left(-\frac{z\cdot 2x}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\right)=\frac{-x\cdot z}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2-z^2}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;1;1)}=-\frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M}=-\left.\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\right|_{(1;1;1)}=-\frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M}=\left.\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\right|_{(1;1;1)}=1.$$

За формулою $\frac{\partial u}{\partial \vec{S}}(M)=\frac{\partial u}{\partial x}(M)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M)\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M)\cdot\cos\gamma$ дістанемо $\frac{\partial u}{d\vec{S}}(M)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

Приклад 3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ у точці $(1;\ 2;-1)$.

Розв'язання. Поверхня задана рівнянням $F(x;y;z)=0$. Для неявного задання поверхні рівняння дотичної площини і нормалі у точці M мають вигляд:

$$F_x'(M)\cdot(x-x_0)+F_y'(M)\cdot(y-y_0)+F_z'(M)\cdot(z-z_0)=0$$

і

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M)}.$$

Обчислимо частинні похідні у точці $(1;2;-1)$:

$$F_x'(M)=\left(3x^2+yz\right)\Big|_{(1;2;-1)}=1;$$

$$F_y'(M)=\left(3y^2+xz\right)\Big|_{(1;2;-1)}=1;$$

$$F_z'(M)=\left(3z^2+xy\right)\Big|_{(1;2;-1)}=5.$$

Рівняння дотичної площини згідно з формулами має вигляд

$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+5\cdot(z+1)=0$ або $x+y+5z+2=0$.

Рівняння нормалі

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{5}.$$

Приклад 4. До поверхні $x^2-y^2-3z=0$ провести дотичну площину, яка проходить через точку $A(0;0;-1)$ паралельно до прямої $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

Розв'язання. Поверхня задана рівнянням $F(x;y;z)=0$. Знайдемо частинні похідні: $F_x'=2x$; $F_y'=-2y$; $F_z'=-3$.

З умови паралельності прямої і площини

$$F_x'(M_0)\cdot m + F_y'(M_0)\cdot n + F_z'(M_0)\cdot p = 0,$$

де $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка дотику площини до поверхні F, $\vec{S}=(m;n;p)=(2;1;2)$ – напрямний вектор прямої, дістанемо:

$$4x_0 - 2y_0 - 6 = 0 \text{ або } 2x_0 - y_0 - 3 = 0.$$

На дотичній площині будь-який вектор буде паралельний даній прямій (за умовою), тому вектор, що проходить через точку $A(0;0;-1)$ і точку дотику $M_0(x_0;y_0;z_0)$, має координати $\overrightarrow{AM_0}=(x_0;y_0;z_0+1)$.

З умови паралельності двох прямих (векторів) маємо:

$$\frac{x_0}{2}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0+1}{2}.$$

Точка дотику площини задовольняє рівняння поверхні, тому

$$x_0^2 - y_0^2 - 3z_0 = 0.$$

Отже, дістали систему трьох рівнянь (умов), з якої визначимо координати точки дотику $M_0(2;\ 1;\ 1)$:

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 - 3 = 0; \\ \dfrac{x_0}{2}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z_0+1}{2}; \\ x_0^2 - y_0^2 - 3z_0 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = 2x_0 - 3; \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2}; \\ z_0 = \dfrac{x_0^2 - y_0^2}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 1, \\ z_0 = 1. \end{cases}$$

Обчислимо частинні похідні у точці M_0:

$$F_x'(M_0)=4;\ F_y'(M_0)=-2;\ F_z'(M_0)=-3,$$

тоді маємо рівняння дотичної площини:

$$4(x-2)-2(y-1)-3(z-1)=0 \text{ або } 4x-2y-3z-3=0.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1.Знайти $\overrightarrow{\text{grad}\,z}$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ в 5.1–5.4, і $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ в 5.5–5.8.

1. $z=x^2-2xy+3y-1,\ M_0(1;2)$.

2. $z=x^2+y^2,\ M_0(3;2)$.3. $z=\sqrt{4+x^2+y^2},\ M_0(2;1)$.

4. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+6}},\ M_0(3;1)$.

5. $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z,\ M_0(2;0;1)$.

6. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1;2;2)$.

7. $u=\dfrac{yz^2}{x^2}$, $M_0\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

8. $u=xyz$, $M_0(2;1;1)$.

Завдання 5.2. Знайти похідну функції $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ в точці $M(3;\ 1)$ за напрямом від цієї точки до точки $(6;\ 5)$.

Завдання 5.3. Знайти похідну функції $z=x\sqrt{x}-\sqrt{y}$ у точці $M(3;\ 1)$ за напрямом l, що утворює кут $\alpha=30°$ з додатним напрямом осі Ox.

Завдання 5.4. Знайти похідну функції $z=\operatorname{arctg} xy$ в точці $M(1;\ 1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

Завдання 5.5. Знайти похідну функції $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ у точці $(2;\ 1)$ за напрямом від цієї точки до початку координат.

Завдання 5.6. Знайти похідну функції $u=y\cdot\ln\left(1+x^2\right)+\operatorname{arctg} z$ у точці $M(0;\ 1;\ 1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(-1;-1;3)$.

Завдання 5.7. Знайти похідну функції $u=\dfrac{\sqrt{x}}{y}+\dfrac{8y}{2+\sqrt{z}}$ у точці $M(4;\ 1;\ 4)$ за напрямом $\overrightarrow{MN}$, де $N(7;-3;4)$.

Завдання 5.8. Знайти похідну функції $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $M(1;1;1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(3;2;3)$.

Завдання 5.9. Знайти похідну функції $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{r}=2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}$.

Завдання 5.10. Знайти рівняння дотичних площин і нормалі до поверхонь у заданих точках.

1. $x^2+y^2+z^2=4$, $M_0\left(0;1;\sqrt{3}\right)$.

2. $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$, $M(1;\ 1;\ 1)$.

3. $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$, в точці $(1;\ 1;\ 2)$.

4. $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=11$, в точці $(2;\ 3;\ 6)$.

Завдання 5.11. До еліпсоїда $x^2+2y^2+z^2=1$ провести дотичну площину, паралельну площині $x-y+2z=0$.

Завдання 5.12. До еліпсоїда $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{1}=1$ провести дотичну площину, яка відтинає на додатних півосях координат рівні відрізки.

Завдання 5.13. Показати, що поверхні $x+2y-\ln z+4=0$ і $x^2-xy-8x+z+5=0$ дотикаються одна до одної (тобто мають спільну дотичну площину) в точці $(2;-3;1)$.

Завдання 5.14. Для поверхні $z=xy$ написати рівняння дотичної площини, перпендикулярної до прямої $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$.

§6. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ

Основні поняття та теореми

Нехай задано $(n+1)$-разів диференційовану функцію $F=F(t)$ однієї змінної t в деякому околі точки $t=t_0$.

Многочлен $P_n(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{F''(t_o)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ називається многочленом Тейлора n-го порядку для функції $F(t)$.

Основна інтерполяційна властивість цього многочлена в тому, що його значення та значення похідних до n-го порядку включно в точці $t=t_0$ співпадають зі значеннями відповідних похідних "породжуючої" функції:

$$P_n(t_0)=F(t_0), P_n'(t_0)=F'(t_0), P_n''(t_0)=F''(t_0),\ldots, P_n^{(n)}(t_0)=F^{(n)}(t_0).$$

Серед множини многочленів степеня n тільки многочлен Тейлора має вказану інтерполяційну властивість.

Різниця

$$F(t)-P_n(t)\equiv R_n(t)$$

називається залишком, а його спеціальний запис у вигляді

$$R_n(t)=\frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}(t-t_0)^{n+1},\ t_0<c<t,$$

називається записом у формі Лагранжа.

Має місце формула Тейлора для функції $F(t)$ з центром розкладу в точці t_0 і записом залишку у формі Лагранжа:

$$F(t)=F(t_0)+\frac{F'(t_0)}{1!}(t-t_0)^1+\frac{F''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n+\frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}(t-t_0)^{n+1},$$

$$t_0<c<t.$$

Розглянемо $(n+1)$-раз диференційовану функцію двох змінних $z = f(x;y)$, визначену в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$.

Через $d^k z(M) = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^k \cdot z$ позначимо k-тий диференціал функції $z = f(x;y)$.

В кожній точці M_t відрізка $[M_0M]$: $M_t = M_0 + t \cdot \overrightarrow{M_0M}$, $0 \le t \le 1$, задана функція однієї змінної

$$F(t) = f(M_t) = f\left(M_0 + t \cdot \overrightarrow{M_0M}\right).$$

Застосовуючи до цієї функції формулу Тейлора з центром розкладу $t_0 = 0$, отримуємо

$$f(M) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(c),$$

$$0 < c < 1.$$

Не важко впевнитися в тому, що

$$F^{(k)}(0) = d^k z(M_0).$$

Таким чином, для функції двох змінних $z = f(M)$ маємо формулу Тейлора з центром розкладу в точці M_0 і з залишком у формі Лагранжа:

$$z(M) = z(M_0) + dz(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 z(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n z(M_0) + \frac{1}{(n+1)\,!}d^{n+1}z(N),$$

де точка N належить відрізку $[M_0M]$.

При $M_0(x_0;y_0), M(x;y)$ і $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ в координатній формі формула Тейлора матиме вигляд:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) \cdot \Delta y\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0) \cdot \Delta x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}(x_0;y_0) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0) \cdot \Delta y^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0;y_0) \cdot \Delta x^3 + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \cdot \partial y}(x_0;y_0) \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta y + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \cdot \partial y^2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0;y_0) \cdot \Delta y^3\right] + \ldots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_o;y_0) \cdot \Delta x^n + n \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \cdot \partial y}(x_0;y_0) \cdot \Delta x^{n-1} \cdot \Delta y + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0;y_0) \cdot \Delta y^n\right] + R_{n+1}(\Delta x;\Delta y),$$

де залишок записується у формі Лагранжа

$$R_{n+1}(\Delta x;\Delta y)=\frac{1}{(n+1)\,!}\left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}(\xi;\eta)\cdot\Delta x^{n+1}+(n+1)\cdot\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n}\cdot\partial y}(\xi;\eta)\cdot\Delta x^{n}\cdot\Delta y+...+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1}}(\xi;\eta)\cdot\Delta y^{n+1}\right],$$

числа $\xi=x_0+c\cdot\Delta x;\ \eta=y_0+c\cdot\Delta y$ при деякому значенні c: $0<c<1$.

Найбільш поширена формула Тейлора при $n=2$:

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+\left[f'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0;y_0)\cdot\Delta x^2+2\cdot f''_{xy}(x_0;y_0)\cdot\Delta x\cdot\Delta y+f''_{yy}(x_0;y_0)\cdot\Delta y^2\right]+r(\xi;\eta)\cdot\Delta\rho^3,$$

де $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – довжина відрізка $[M_0M]$ і залишок

$$R_3(\Delta x;\,\Delta y)=r(\xi;\,\eta)\cdot\Delta\rho^3.$$

Із формули Тейлора при $n=0$ отримуємо широко вживану в наближеному численні формулу Лагранжа скінченних приростів для функції двох змінних:

$$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi;\eta)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi;\eta)\cdot\Delta y.$$

Функція $z=f(x;y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ локальний максимум (мінімум), якщо існує окіл точки M_0, в якому при $M(x;y)\neq M_0(x_0;y_0)$ виконується нерівність $f(x;y)<f(x_0;y_0)$ (відповідно $f(M)>F(M_0)$).

Точка M_0 називається точкою локального екстремуму функції $z=f(M)$, якщо в точці M_0 функція z має локальний мінімум або максимум.

Теорема (необхідна умова екстремуму).

Якщо функція $z=f(x;y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ локальний екстремум і в цій точці існують частинні похідні функції по аргументах x і y, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0)=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0)=0.$$

Точки, в яких перетворюються в нуль всі частинні похідні першого порядку функції $z=f(x;y)$, називаються *стаціонарними точками* цієї функції.

Назва "стаціонарна точка" запозичена з механіки і вказує на той факт, що при безінерційному прокочуванні кульки малого радіуса по поверхні $z=f(x;y)$ вектор її швидкості $\vec{V}=\operatorname{grad}z$ в стаціонарних точках набуває нульового значення: $(z'_x;z'_y)=\vec{0}$.

Наслідок з теореми. Якщо функція $z=f(x;y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ локальний екстремум і диференційована в цій точці, то

$$dz(M_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot dy\equiv 0$$

при довільних диференціалах dx, dy незалежних змінних.

Зауваження. Стаціонарні точки функції $z = f(M)$ є лише точками можливого локального екстремуму. Встановити наявність екстремуму можна тільки за допомогою достатніх умов локального екстремуму.

Відзначимо, що в околі стаціонарної точки $M_0(x_0; y_0)$ функції $z = f(x; y)$ її приріст визначається доданками, що становлять другий диференціал $d^2z(M_0)$, а саме:

$$f(x;y) - f(x_0;y_0) = \frac{1}{2} \cdot \left[f''_{xx}(x_0;y_0) \cdot \Delta x^2 + 2 \cdot f''_{xy}(x_0;y_0) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(x_0;y_0) \cdot \Delta y^2 \right] +$$
$$+ r(\xi;\eta) \cdot \Delta\rho^3.$$

Таким чином, дослідження стаціонарної точки $M_0(x_0; y_0)$ функції $z = f(x; y)$ на екстремум зводиться до вивчення поведінки квадратичної форми

$$F(\Delta x; \Delta y) = f''_{xx}(M_0) \cdot \Delta x^2 + 2 \cdot f''_{xy}(M_0) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(M_0) \cdot \Delta y^2.$$

Теорема (достатні умови екстремуму). Нехай функція $z = f(x; y)$ диференційована в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і двічі диференційована в самій точці M_0, причому $M_0(x_0; y_0)$ – стаціонарна точка функції $f(x; y)$, тобто

$$f'_x(x_0; y_0) = 0, \ f'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Тоді при $x = x_0$, $y = y_0$:

1) $f(x; y)$ має максимум, якщо
$$f''_{xx}(x_0;y_0) \cdot f''_{yy}(x_0;y_0) - \left[f''_{xy}(x_0;y_0) \right]^2 > 0 \text{ і } f''_{xx}(x_0;y_0) < 0;$$

2) $f(x; y)$ має мінімум, якщо
$$f''_{xx}(x_0;y_0) \cdot f''_{yy}(x_0;y_0) - \left[f''_{xy}(x_0;y_0) \right]^2 > 0 \text{ і } f''_{xx}(x_0;y_0) > 0;$$

3) $f(x; y)$ не має ні максимуму, ні мінімуму, якщо
$$f''_{xx}(x_0;y_0) \cdot f''_{yy}(x_0;y_0) - \left[f''_{xy}(x_0;y_0) \right]^2 < 0;$$

4) якщо
$$f''_{xx}(x_0;y_0) \cdot f''_{yy}(x_0;y_0) - \left[f''_{xy}(x_0;y_0) \right]^2 = 0,$$

то екстремум може бути і може і не бути (в цьому випадку потрібно проводити додаткові дослідження).

Зауваження. Формула Тейлора для функції двох змінних, теореми про необхідні та достатні умови екстремуму відповідним чином узагальнюються на випадок функцій більшої кількості змінних.

Контрольні питання та завдання

1. Що таке многочлен Тейлора? Які властивості він має? (Розгляньте випадки функції однієї та двох змінних).
2. Сформулюйте теорему про формулу Тейлора і запишіть формулу Тейлора через диференціали та через частинні похідні для функції двох змінних.

3. Як виглядає формула для залишку в формі Пеано?
4. Що таке квадратична форма? Які квадратичні форми називають знакоозначеними, а які квазізнакоозначеними?
5. Сформулюйте критерій Сильвестра знакоозначеності квадратичної форми.
6. Наведіть приклади додатноозначеної, від'ємноозначеної та знакозмінної квадратичних форм.
7. Сформулюйте теореми про необхідні та достатні умови екстремуму функції трьох змінних.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти стаціонарні точки функції

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 .$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y .$$

Прирівняємо їх до нуля і розв'яжемо систему:

$$\left\{\begin{array}{l} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ xy + y = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ y(x+1) = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ x = -1; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ x(3x+5) = 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ y^2 = 4; \end{array}\right. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -5/3, \\ y = 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ y = 2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ y = -2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отже, функція має чотири стаціонарні точки: $(-1;-2)$, $(-1;2)$, $\left(-\frac{5}{3};0\right)$, $(0;0)$.

Приклад 2. Дослідити функцію $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ на екстремум.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y .$$

Визначимо стаціонарні точки із системи:

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 0, \\ y^3 + x - y = 0, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 0 \\ y^3 + x - y \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-y,\\ y^3+x-y=0,\end{cases}\\ \begin{cases} x^2-xy+y^2=0,\\ y^3+x-y=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-y,\\ y^3-2y=0,\end{cases}\\ \begin{cases} x(x-y)+y^2=0,\\ x-y=-y^3;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-y,\\ \left[\begin{array}{l} y=0,\\ y=\pm\sqrt{2},\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} -xy^3+y^2=0,\\ x-y=y^3;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0,\\ y=0,\end{cases}\\ \begin{cases} x=\sqrt{2},\\ y=-\sqrt{2},\end{cases}\\ \begin{cases} x=-\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Дістали три стаціонарні точки: $M_1(0;0)$, $M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $M_3\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Перевіримо ці точки на екстремум за допомогою достатніх умов. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-4,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-4.$$

Обчислимо величину $\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ у кожній стаціонарній точці.

Для цього визначимо частинні похідні другого порядку в цих точках:

1) для $M_1(0;0)$: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4$, тому $\Delta=16-16=0$;

2) для $M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20$, тому

$$\Delta=400-16=384>0;$$

3) для $M_3\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20$, тому

$$\Delta=400-16=384>0.$$

У точках $M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ та $M_3\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $\Delta>0$, а $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$, тому це є точки мінімуму, для яких

$$z_{\min}=4+4-2\cdot 2+4(-2)-2\cdot 2=-8.$$

У точці $M_1(0;0)$, $\Delta=0$ потрібні додаткові дослідження. В точці $(0;0)$ функція z не має екстремуму, тому що $z=0$, а в будь-якому околі точки $(0;0)$ знайдуться точки, в яких значення z можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Наприклад, вздовж осі Ox (при $y=0$): $z=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0$, а вздовж прямої $y=x$: $z=x^4+x^4-2x^2+4x^2-2x^2=2x^4>0$.

Приклад 3. Розкласти в ряд Тейлора функцію $z=e^x\sin y$ в околі точки $(0;0)$ до третього порядку включно.

Розв'язання. Застосуємо формулу

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+df(x_0;y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0;y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^{(n)}f(x_0;y_0)+R_{n+1};$$

$$dx = x,\ dy = y.$$

Обчислимо значення функції та її диференціалів у точці $(0;0)$ включно до третього порядку:

$f(0;0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = e^x \sin y\big|_{(0;0)} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = e^x \cos y\big|_{(0;0)} = 1$, $df(0;0) = 0\cdot x + 1\cdot y = y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0) = e^x \sin y\big|_{(0;0)} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0) = e^x \cos y\big|_{(0;0)} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;0) = -e^x \sin y\big|_{(0;0)} = 0$,

$d^2 f(0;0) = 0\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y + 0\cdot y^2 = 2xy$;

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2}(0;0) = e^x \sin y\big|_{(0;0)} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}(0;0) = e^x \cos y\big|_{(0;0)} = 1$,

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0;0) = -e^x \sin y\big|_{(0;0)} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0;0) = -e^x \cos y\big|_{(0;0)} = -1$,

$d^3 f = 0\cdot x^3 + 3x^2\cdot y + 0\cdot 3\cdot xy^2 - y^3 = 3x^2 y - y^3$.

Отже, розклад в ряд Тейлора має вигляд

$f(x;y) = y + xy + \frac{1}{6}\left(3x^2 y - y^3\right) + R_4$ або $f(x;y) = y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3 + R_4$.

Приклад 4. Обчислити приріст функції $z = 2x^2 - xy - y^2 + x$ при переході від точки $(0;1)$ до точки $(0{,}1;1{,}02)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Тейлора у вигляді

$$\Delta f(x_0;y_0) = df(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0;y_0) + R_{n+1}.$$

Для заданої функції $f(x;y)$ залишковий член $R_{n+1} = 0$, $n \geq 2$, тому формула має вигляд

$$\Delta f(0;1) = df(0;1) + \frac{1}{2!}d^2 f(0;1).$$

Обчислимо частинні похідні, диференціали першого і другого порядку у точці $(0;1)$; $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}02$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0;1) = (4x - y + 1)\big|_{(0;1)} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0;1) = (-x - 2y)\big|_{(0;1)} = -2$, $df(0;1) = -0{,}04$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$, $d^2 f(0;1) = 0{,}04 - 2\cdot 0{,}002 - 0{,}0008 = 0{,}0352$.

Отже, $\Delta f(0;1) = -0{,}04 + 0{,}0176 = -0{,}0224$.

Приклад 5. Обчислити наближено значення функції $f(x;y) = e^{\frac{x}{y}}$ у точці $(0{,}03;1{,}95)$.

Розв'язання. Використаємо формулу Тейлора при $n = 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$:

$$f(x;y) = f(0;2) + df(0;2) + \frac{1}{2!}d^2 f(0;2) + R_3,\ dx = \Delta x = x,\ dy = \Delta y = y - 2.$$

Обчислимо значення функції та її диференціалів 1-го і 2-го порядків у точці $(0;2)$:

$$f(0;2)=1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0;2)=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\Big|_{(0;2)}=\frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(0;2)=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\Big|_{(0;2)}=0,$$

$$df(0;2)=\frac{1}{2}\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\frac{1}{2}\Delta x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;2)=\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\Big|_{(0;2)}=\frac{1}{4},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0;2)=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)\Big|_{(0;2)}=-\frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;2)=\frac{x}{y^3}e^{\frac{x}{y}}\left(2+\frac{x}{y}\right)\Big|_{(0;2)}=0,$$

$$d^2 f(0;2)=\frac{1}{4}\cdot\Delta x^2+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\Delta x\Delta y+0\cdot\Delta y^2=\frac{1}{4}\Delta x^2-\frac{1}{2}\Delta x\Delta y+R_3.$$

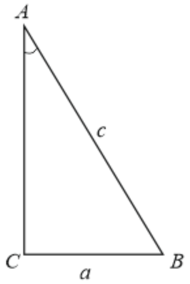
Отже, маємо розклад $e^{\frac{x}{y}}\cong 1+\frac{1}{2}\Delta x+\frac{1}{8}\Delta x^2-\frac{1}{4}\Delta x\Delta y$. У нашому випадку $\Delta x=x-x_0=0,03$, $\Delta y=y-y_0=-0,05$, тому

$$e^{\frac{x}{y}}\Big|_{(0,03;1,95)}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0,03+\frac{1}{8}\cdot 0,0009+\frac{1}{4}\cdot 0,03\cdot 0,05\approx 1,0155.$$

Приклад 6. Гіпотенуза c і катет a прямокутного трикутника ABC, які визначаються з максимальними абсолютними похибками $\left|\Delta^* c\right|=0,2$, $\left|\Delta^* a\right|=0,1$, відповідно дорівнюють c=75, a=32. Визначити кут A за формулою $\sin A=\frac{a}{c}$; максимальну абсолютну похибку $\left|\overline{\Delta A}\right|$ при обчисленні кута A.

Розв'язання. $\sin A=\frac{a}{c}$, $A=\arcsin\frac{a}{c}$. Знайдемо

$$\frac{\partial A}{\partial a}=\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}};\ \frac{\partial A}{\partial c}=-\frac{a}{c\sqrt{c^2-a^2}}.$$



За формулою $\left|\Delta * u\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot\left|\Delta * x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot\left|\Delta * y\right|+...+\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\cdot\left|\Delta * t\right|$ дістанемо:

$$\left|\overline{\Delta A}\right|=\frac{1}{\sqrt{75^2-32^2}}\cdot 0,1+\frac{32}{75\sqrt{75^2-32^2}}\cdot 0,2=0,00273\text{рад}=9'24''.$$

Отже, $A=\arcsin\frac{32}{75}\pm 9'24''$.

Приклад 7. Період коливань маятника дорівнює $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, де l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння. Яку відносну похибку при визначенні T ми допускаємо за цією формулою, якщо $\pi \approx 3{,}14$ (з точністю до 0,005), $l = 1$ м (з точністю до 0,01м), $g = 9{,}8$ м/с ^{2} (з точністю до 0,02 м/с ^{2})?

Розв'язання. За формулою $\left|\delta * u\right| = \left|\Delta * \ln|t|\right|$ максимальна відносна похибка буде дорівнювати $\left|\delta * T\right| = \left|\Delta * \ln|T|\right|$. Але $\ln T = \ln 2 + \ln\pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g$.

Обчислимо $\left|\delta * \ln T\right|$. Враховуючи, що $\pi = 3{,}14$, $\Delta * \pi = 0{,}005$, $l = 1$ м, $\Delta * l = 0{,}01$, якщо $g = 9{,}8$ м/с ^{2}, $\Delta * g = 0{,}02$ м/с ^{2}, дістанемо:

$$\Delta * \ln T = \frac{\Delta * \pi}{\pi} + \frac{\Delta * l}{2l} + \frac{\Delta * g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}0076.$$

Отже, максимальна відносна похибка дорівнює $\delta * T = 0{,}0076 = 0{,}76\%$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 6.1. Знайти стаціонарні точки функцій.

1. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5y - 3x + 20.$
2. $z = xy(5 - x - y).$
3. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}.$
4. $z = \left(12x - x^2\right)\cdot\left(4y - y^2\right).$
5. $z = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right).$
6. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y).$
7. $z = \dfrac{1 + 2x + 3y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$
8. $z = 4 - \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{2}{3}}.$

Завдання 6.2. Знайти точки екстремуму функцій.

1. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$
2. $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$
3. $z = x^3 + y^3 - 9xy.$
4. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ (x > 0, y > 0).$
5. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$
6. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y + 3.$
7. $z = x^3y^2(2 - x - y).$
8. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$

Завдання 6.3. Розкласти в ряд Тейлора при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ задані функції.

1. $z = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}.$
2. $z = \sin\left(x^2 + y^2\right).$
3. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$
4. $z = \ln(1 - x)\cdot\ln(1 - y).$
5. $z = e^x \cdot \cos y.$
6. $z = \sin x \cdot \operatorname{sh} y.$

Завдання 6.4. Розкласти функцію $z=\sin x\cdot\sin y$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$ і $y-\frac{\pi}{4}$. Знайти члени першого і другого порядків включно.

Завдання 6.5. Функцію $z=x^y$ розкласти за степенями $x-1$, $y-1$ до третього порядку включно.

Завдання 6.6. Обчислити приріст функції $f(x;y)=2x^2y-3y^2+x-y$ при переході від точки $(1;2)$ до точки $(1{,}01;1{,}97)$.

Завдання 6.7. Обчислити приріст функції

$$f(x;y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$$

при переході від точки $(-2;1)$ до точки $(-2{,}03;1{,}05)$.

Завдання 6.8. Знайти значення функції $f(x;y)=x\cdot e^y$ в точці $(-2.95;0.01)$.

Завдання 6.9. Знайти значення функції $f(x;y)=\sin xy$ в точці $(1.02;0.52)$.

Завдання 6.10. Одна сторона прямокутника $a=6$см, а друга – $b=8$см. Як зміниться діагональ прямокутника, якщо сторону a збільшити на 4 мм, а сторону b зменшити на 1мм?

Завдання 6.11. Радіус основи конуса дорівнює $10{,}2\pm0{,}1$см, твірна дорівнює $44{,}6\pm0{,}1$см. Знайти об'єм конуса і вказати похибку підрахунку.

Завдання 6.12. Тіло важить у повітрі $(4{,}1\pm0{,}1)$ г, а у воді $(1{,}8\pm0{,}2)$ г. Знайти питому вагу тіла і вказати абсолютну похибку підрахунку.

Завдання 6.13. Вимірювання півосей еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ дали такі результати: $a=4$м $\pm0{,}2$м, $b=2$мм. З якою абсолютною та відносною похибками буде обчислений момент інерції $I=\frac{\pi\cdot a^3b}{4}$ плоскої фігури, обмеженої еліпсом, відносно осі Oy.

§7. НАЙБІЛЬШІ ТА НАЙМЕНЬШІ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Основні поняття та теореми

Нехай область D площини R^2 обмежена неперервною замкненою кривою $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$. Відомо, що неперервно диференційована в області D функція $z=f(x;y)$ досягає найбільшого і найменшого значень у внутрішніх стаціонарних точках або ж в граничних точках цієї області. *Для знаходження найбільшого (найменшого) значення* функцій необхідно:

1) визначити всі стаціонарні точки в середині області;

2) обчислити значення функції в цих точках;

3) знайти найбільше (найменше) значення функції z на граничній дузі L:

$$z = f(\varphi(t);\ \psi(t)) = F(t),\ \alpha \le t \le \beta;$$

4) порівняти значення функції $z = f(x;y)$ в стаціонарних точках зі значеннями на границі області D.

Нехай в деякій області D простору R^3 задана функція $u = f(x;y;z)$. Будемо розглядати значення функції u не у всіх точках області D, а лише в точках $M(x;y;z) \in D$, координати яких задовольняють рівняння зв'язку

$$E: \begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = 0, \\ \varphi_2(x;y;z) = 0. \end{cases}$$

Множину точок E, координати яких задовольняють рівняння зв'язку, називають множиною зв'язку. В найпростіших випадках геометричний образ в R^3 множини зв'язку E – поверхня або лінія.

Задача полягає в тому, щоб на множині зв'язку E знайти таку точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, в якій значення функції $u = f(M)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках $M \in E$. Такі точки $M_0 \in E$ називають точками умовного екстремуму функції $u = f(M)$. Функція $u = f(M)$ має в точці $M_0 \in E$ умовний локальний мінімум(максимум) на множині зв'язку E, якщо існує такий окіл точки M_0, що для кожної точки $M \ne M_0$ цього околу виконується нерівність

$$f(M) > f(M_0)\ \ (f(M) < f(M_0)) \text{ при } M \in E.$$

Метод виключення змінних. Якщо із системи рівнянь зв'язку вдається виразити деякі змінні через інші, то задача про знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі про знаходження безумовного(звичайного) екстремуму.

Наприклад, нехай система зв'язку для функції $u = f(x;y;z)$ така, що:

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = 0, \\ \varphi_2(x;y;z) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g_1(x), \\ z = g_2(x), \end{cases} \quad a \le x \le b.$$

Тоді

$$u = f(x; g_1(x); g_2(x)) = F(x).$$

Таким чином, для розв'язання задачі на умовний екстремум достатньо дослідити на безумовний екстремум функцію $F = F(x),\ a \le x \le b$.

Метод невизначених коефіцієнтів Лагранжа. Нехай гладка лінія

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \text{при } t = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$$

проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ умовного екстремуму функції $u = f(x;y;z)$ і $L \subset E$. Тоді для функції однієї змінної $F(t) = f(x(t);\ y(t);\ z(t))$ при $t = 0$ має-мо локальний екстремум, а значить

$$0=F_t'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'(0)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(0)+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot z'(0)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M_0)\cdot\big(x'(0)\ ;y'(0)\ ;z'(0)\big).$$

Тобто, якщо в множині зв'язку E розглянути вектор переміщення

$$d\vec{r}_0=(dx;dy;dz)_0=\big(x'(0)dt\ ;y'(0)dt\ ;z'(0)dt\big)=\big(x'(0)\ ;y'(0)\ ;z'(0)\big)dt,$$

то цей вектор $d\vec{r}_0\perp\overrightarrow{grad}\,f(M_0)$.

Нагадаємо, що вектор градієнта скалярної функції є перпендикуляром до поверхні рівня цієї функції, тоді

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_1(M_0)\perp \text{ до поверхні } \varphi_1(x;y;z)=0,\\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_2(M_0)\perp \text{ до поверхні } \varphi_2(x;y;z)=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_1(M_0)\perp E,\\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_2(M_0)\perp E.\end{cases}$$

Тому і вектори $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_1(M_0)\perp d\vec{r}_0$ та $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_2(M_0)\perp d\vec{r}_0$. Останнє означає компланарність трьох векторів:

$$\left\{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M_0),\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_1(M_0),\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_2(M_0)\right\}.$$

Оскільки три компланарні вектори завжди лінійно залежні, то існують два числа λ_1 і λ_2 такі, що

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M_0)+\lambda_1\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_1(M_0)+\lambda_2\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_2(M_0)=\vec{0},$$

або

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}[f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2](M_0)=\vec{0}.$$

Задача про пошук умовного екстремуму функції $u=f(M)$ за умов зв'язку $\{\varphi_1(M)=0,\varphi_2(M)=0\}$ еквівалентна задачі про безумовний екстремум функції Лагранжа

$$\Phi(x;y;z;\lambda_1;\lambda_2)=f(x;y;z)+\lambda_1\cdot\varphi_1(x;y;z)+\lambda_2\cdot\varphi_2(x;y;z).$$

Теорема Лагранжа про необхідні умови умовного екстремуму. Нехай функція $u=f(x;y;z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і має в цій точці умовний екстремум за умов зв'язку

$$\varphi_1(x;y;z)=0 \text{ і } \varphi_2(x;y;z)=0.$$

Тоді існують числа λ_1,λ_2 такі, що всі частинні похідні першого порядку функції Лагранжа $\Phi(x;y;z;\lambda_1;\lambda_2)$ дорівнюють нулю в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

$$\begin{cases}\varphi_1(x;y;z)=0,\\ \varphi_2(x;y;z)=0,\\ \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=0.\end{cases}$$

Зауваження. Достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала $d^2\Phi$.

Контрольні питання та завдання

1. Дати означення і описати спосіб знаходження умовного екстремуму функції двох змінних.
2. У якому випадку задачу на умовний екстремум можна звести до задачі на звичайний екстремум?
3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в крузі $x^2 + y^2 \le 4$.
4. Знайти умовний екстремум функції $z = xy$, якщо $y + x^2 = 4$. Розв'язати задачу двома способами:
   1) за допомогою методу виключення змінних;
   2) за допомогою функції Лагранжа.
5. На прикладі функції $f(x; y) = y$ та рівняння зв'язку $\varphi(x; y) = x^3 - y = 0$ показати, що необхідні умови Лагранжа умовного екстремуму не є достатніми.
6. Нехай функція Лагранжа $\Phi(x; y; z; \lambda_1; \lambda_2)$ – двічі неперервно диференційовна функція багатьох змінних. Пакажіть справедливість *достатньої ознаки умовного екстремуму* функції $u = f(x; y; z)$:
   1) якщо другий диференціал $d^2\Phi(M_0) > 0$, то точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка строгого локального умовного мінімуму;
   2) якщо $d^2\Phi(M_0) < 0$, то точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка строгого локального умовного максимуму функції $u = f(x; y; z)$;
   3) якщо $d^2\Phi(M_0)$ – не означена за знаком як квадратична форма, то точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ не буде точкою умовного екстремуму функції $u = f(x; y; z)$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції

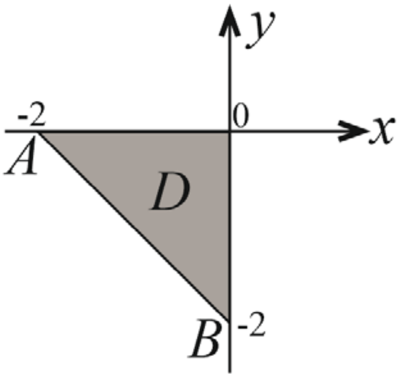
$$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$$

в замкненій області D, що задається системою нерівностей: $\begin{cases} x \le 0, \\ y \le 0, \\ x + y + 2 \ge 0. \end{cases}$

Розв'язання.

Побудуємо область *D*: це є трикутник АОВ.

Знайдемо стаціонарні точки функції із системи



$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Дістанемо: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y + 4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y$,

тоді $\begin{cases} x + y + 2 = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y, \\ 2y = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$

Маємо стаціонарну точку $M_1(-1;-1)$, яка належить межі області D, обчислимо значення функції в цій точці: $z(M_1) = -2$.

Дослідимо тепер дану функцію на екстремум на межі області D, тобто на кожній із сторін ΔABC.

На стороні AO, яка має рівняння $y = 0$, функція $z(x;y)$ набуває вигляду $z(x) = x^2 + 4x$, $-2 \le x \le 0$. Стаціонарні точки знаходимо із рівняння $z'(x) = 0$: $2x + 4 = 0$, $x = -2$. Дістанемо точку $M_2(-2;0)$, яка належить межі області D, тоді обчислимо $z(M_2) = -4$.

На стороні OB, яка має рівняння $x = 0$, функція $z(x;y)$ набуває вигляду $z(y) = -y^2$, $-2 \le y \le 0$;

$$z'(y) = 0, \ -2y = 0, \ y = 0.$$

Дістали точку $M_3(0;0)$, яка належить межі області D, тоді обчислимо $z(M_3) = 0$.

На стороні AB, яка має рівняння $y = -x - 2$, функція $z(x;y)$ набуває вигляду

$$z(x) = x^2 - 2x(x+2) - (x+2)^2 + 4x = x^2 - 2x^2 - 4x - x^2 - 4x - 4 + 4x =$$
$$= -2x^2 - 4x - 4 = -2(x^2 + 2x + 2).$$

Розв’яжемо рівняння $z'(x) = 0$: $-2(2x + 2) = 0$, $x = -1$.

При $x = -1$ дістанемо $y = -1$. Це точка $M_1(-1;-1)$, в якій вже досліджено функцію $z(x;y)$.

Дослідимо функцію $z(x;y)$ у вершинах ΔAOB. Зауважимо, що $A(-2;0) = M_2$, а $O(0;0) = M_3$, тому знайдемо значення функції у точці $B(0;-2)$: $z(B) = -4$.

Отже, із всіх отриманих значень функції $z(x;y)$:

$$z(M_1) = -2, \ z(M_2) = z(A) = -4, \ z(M_3) = z(O) = 0, \ z(B) = -4$$

виберемо найменше:

$$\min_D z(x;y) = z(A) = z(B) = -4$$

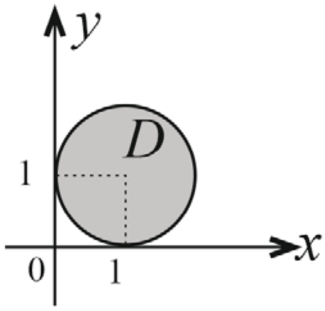
і найбільше:

$$\max_D z(x;y)=z(0)=0\,.$$

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=f(x;y)$ в замкненій та обмеженій області D, якщо

$$z=1-x^2-y^2\,;\;\; D:\;(x-1)^2+(y-1)^2\le 1.$$

Розв'язання. Областю D є круг з центром в точці (1; 1) і $r=1$.



Знайдемо стаціонарні точки функції. Маємо $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$. Із системи $\begin{cases}-2x=0\\ -2y=0\end{cases}$ дістаємо одну стаціонарну точку $(0;0)$, яка лежить за межами даної області. Тому, всередині круга функції екстремумів не має.

Дослідимо тепер функцію на екстремум на межі області – на колі $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. Запишемо рівняння цього кола в параметричному вигляді: $\begin{cases}x=\cos t+1,\\ y=\sin t+1,\end{cases}$ $t\in[0;2\pi]$. Підставивши значення x і y у вираз для функції z, дістанемо:

$$z(t)=1-(\cos t+1)^2-(\sin t+1)^2=-2(\cos t+\sin t+1),$$

$$z'_t=-2(-\sin t+\cos t);$$

$z'_t=0\Leftrightarrow \cos t-\sin t=0$, звідки $\operatorname{tg}t=1$, якщо $t=\dfrac{\pi}{4}$ і $t=\dfrac{5\pi}{4}$. Обчислюємо значення функції $z(t)$ на кінцях проміжку і в $t=\dfrac{\pi}{4}$ та $t=\dfrac{5\pi}{4}$:

$$z\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=-2\sqrt{2}-2\,;\;\; z(0)=-4\,;$$

$$z\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right]=2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Отже, найбільшим значенням є $z\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right)$, а найменшим $z\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}-2\,.$

Приклад 3. На параболі $y^2=4x$ знайти точку, найменш віддалену від прямої $x-y+4=0$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа виду

$$u=f(x,y)+\lambda\cdot\phi(x,y)\,.$$

Для цього знайдемо функцію $f(x,y)$ як відстань від точки $M(x_0;y_0)$, що лежить на параболі, до прямої $x-y+4=0$:

$$f(x,y)=d(M;l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},\ A=1,\ B=-1,\ C=4,$$

$$f(x;y)=\frac{x-y+4}{\sqrt{2}},\ \varphi(x;y)=y^2-4x.$$

Тоді, $u=\dfrac{x-y+4}{\sqrt{2}}+\lambda\left(y^2-4x\right)$.

Знайдемо частинні похідні, щоб скласти систему:

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}=-4;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=2y.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} y^2-4x=0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-4\lambda=0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\lambda y=0; \end{cases} \begin{cases} y^2=4x, \\ \lambda=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \\ y=\dfrac{1}{2\lambda\sqrt{2}}; \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{y^2}{4}, \\ y=2, \\ \lambda=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Розв’язок системи $(1;2)$ визначає єдину стаціонарну точку M, яка за змістом і є шуканою.

Приклад 4. Знайти умовний екстремум функції $z=xy$, якщо

$$y+x^2-3=0.$$

Розв’язання. Складемо функцію Лагранжа

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(y+x^2-3\right).$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=1.$$

Складемо систему, з якої визначимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} x^2+y-3=0, \\ y+2\lambda x=0, \\ x+\lambda=0; \end{cases} \begin{cases} x^2+y-3=0, \\ y=-2\lambda x, \\ \lambda=-x; \end{cases} \begin{cases} x^2+2x^2-3=0, \\ y=2x^2, \\ \lambda=-x; \end{cases} \begin{cases} x^2=1, \\ y=2, \\ \lambda=-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ \lambda=-1; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ \lambda=1. \end{cases}.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1(1;2)$, $M_2(-1;2)$. Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа за формулою

$$d^2F(x;y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2,$$

тоді $d^2F=2\lambda\cdot dx^2+2dxdy+0\cdot dy^2=2\lambda dx^2+2dxdy$.

Розглянемо рівняння зв'язку $y+x^2-3=0$ як рівняння лінії нульового рівня функції $\varphi(x;y)=y+x^2-3$. На множині зв'язку – лінії рівня $\varphi(x;y)$ – виконується тотожність

$$0\equiv d\varphi(x;y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy.$$

Значить, на множині зв'язку

$$0=2xdx+1\cdot dy,$$

звідки $dy=-2xdx$.

Тоді d^2F на параболі $y+x^2-3=0$ записується так:

$$d^2F=2\lambda\cdot dx^2+2(-2x)dx^2=2[\lambda-2x]dx^2.$$

Маємо:

1) якщо $\lambda=-1$, то

$$d^2F(-1;2)=2[-1-2]dx^2=-6dx^2<0,$$

тоді точка $M_1(1;2)$ є точкою умовного максимуму і $z_{\max}=2$;

2) якщо $\lambda=1$, то

$$d^2F=2[1+2]dx^2=6dx^2>0,$$

то точка $M_2(-1;2)$ є точкою умовного мінімуму, $z_{\min}=2$.

Приклад 5. Знайти екстремум функції $u=x+y+z^2$ за умов зв'язку $z-x=1$ та $y-xz=1$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(x;y;z;\lambda_1;\lambda_2)=f(x;y;z)+\lambda_1\cdot\varphi_1(x;y;z)+\lambda_2\cdot\varphi_2(x;y;z),$$

де $f(x;y;z)=x+y+z^2$, $\varphi_1(x;y;z)=z-x-1=0$, $\varphi_2(x;y;z)=y-xy-1=0$.

Дістанемо $\Phi=x+y+z^2+\lambda_1(z-x-1)+\lambda_2(y-xz-1)$.

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ \varphi_1 = z - x - 1 = 0, \\ \varphi_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} \lambda_2 = -1, \\ 1 - \lambda_1 + z = 0, \\ 2z + \lambda_1 + x = 0, \\ z = x + 1, \\ y = xz + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = -1, \\ 1 - \lambda_1 + x + 1 = 0, \\ 2x + 2 + \lambda_1 + x = 0, \\ z = x + 1, \\ y = xz + 1; \end{cases} \quad (2)+(3) \begin{cases} \lambda_2 = -1, \\ 4x + 4 = 0, \\ \lambda_1 = x + 2, \\ z = x + 1, \\ y = xz + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = -1, \\ \lambda_1 = 1, \\ x = -1, \\ z = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Дістали єдину точку можливого екстремуму $M_0(-1;1;0)$.

Достатні умови існування умовного екстремуму в точці M_0 визначимо за знаком диференціала $d^2\Phi$. Для цього продиференціюємо умови зв'язку, дістанемо:

$dz - dx = 0$ та $dy - xdz - zdx = 0$, звідки $dz = dx$ та $dy = (x + z)dx$.

Обчислимо другий диференціал $d^2\Phi$:

$$d^2\Phi = 2(dz)^2 - 2\lambda_2 dxdz.$$

Підставивши $\lambda_2 = -1$ і $dz = dx$, дістанемо $d^2\Phi = 4(dx)^2 > 0$. Отже, задана функція $u(-1;1;0) = 0$ за умов зв'язку $\varphi_1(x;y;z) = 0$ та $\varphi_2(x;y;z) = 0$ має в точці $M_0(-1;1;0)$ умовний мінімум.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 7.1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій та обмеженій області D.

1. $z = x^2 - y^2$, D: $x^2 + y^2 \le 4$.
2. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, D: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.
3. $z = xy + x + y$, D: $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.
4. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 3 = 0$.
5. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, D: $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.
6. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D: $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

7. $z = x^2 y(2 - x - y)$, D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

8. $z = 10 + 2xy - x^2$, D: $0 \le y \le 4 - x^2$.

Завдання 7.2. Дослідити функцію на умовний екстремум.

1. $z = x^3 + y^3$ при $x + y = 2$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.
2. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 4$.
3. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{9}$.
4. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.
5. $z = \cos^2 x + 2\cos^2 y$ при $y - x = \frac{\pi}{4}$.
6. $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Завдання 7.3. З усіх прямокутних трикутників даної площі S знайти той, гіпотенуза якого має найменше значення.

Завдання 7.4. У півкулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

Завдання 7.5. Знайти умовний екстремум функції $u = f(x, y, z)$ за умов зв'язку $\phi_1(x, y, z) = 0$ та $\phi_2(x, y, z) = 0$.

1. $u = xyz$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ та $x + y + z = 0$.
2. $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ та $xy + yz + xz = 4$.
3. $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ та $y - 2xz = 3$.
4. $u = xy^2 z^3$ при $x + 2y + 3x = 12$ та $2z - xy = 1$.
5. $u = xyz$ при $x + y + z = 4$, та $xy + yz + zx = 5$.

§8. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Основні поняття та теореми

На практиці при математичній обробці результатів експериментів досить часто користуються так званими емпіричними формулами.

Нехай залежність між змінними величинами x і y виражена у вигляді таблиці

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Встановлення взаємозв'язку між x і y проводиться через знаходження аналітичної залежності величини y від змінної x: $y=\varphi(x)$. Як правило, ця залежність лише наближено відображає існуючі закономірності і надалі перевіряється дослідом.

Вид функції $y=\varphi(x)$ встановлюється із гіпотетичних посилок або на основі взаємного розташування експериментальних точок $M_k(x_k;y_k)$ на координатній площині xOy. Звичайно, вибрана функція $\varphi(x)$ визначається декількома параметрами $a,b,c,...$: $y=\varphi(x;a,b,c,...)$.

Задача полягає далі у підборі визначаючих параметрів функції $y=\varphi(x;a,b,c,...)$ таким чином, щоб вказана залежність якнайкраще описувала досліджуване явище. Найбільш застосовуваний метод розв'язування цієї задачі – *метод найменших квадратів.*

Він полягає у дослідженні сукупного відхилення значень $y=\varphi(x_k;a,b,c,...)$ від експериментальних даних y_k за допомогою функції

$$F(a;b;c)=\sum_{k=1}^{n}[y_k-\varphi(x_k;a,b,c)]^2 .$$

Параметри a,b,c вибирають так, щоб сума мала найменше значення:

$$F(a;b;c)=\sum_{k=1}^{n}[y_k-\varphi(x_k;a,b,c)]^2=\min .$$

Таким чином, сформульована вище задача зведена до дослідження функції трьох змінних $F=F(a;b;c)$ на екстремум. Значить, оптимальний набір параметрів $(a_0;b_0;c_0)$ знаходимо із системи рівнянь для координат стаціонарних точок F:

$$\frac{\partial F}{\partial a}=0,\ \frac{\partial F}{\partial b}=0,\ \frac{\partial F}{\partial c}=0 .$$

Лінійна регресія *y* на *x*. Припустимо, що між x і y існує лінійна залежність $y=ax+b$. Тоді

$$F(a;b)=\sum_{k=1}^{n}[y_k-(ax_k+b)]^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a}=-2\sum_{k=1}^{n}[y_k-(ax_k+b)]\cdot x_k=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=-2\sum_{k=1}^{n}[y_k-(ax_k+b)]=0. \end{cases}$$

Таким чином, оптимальні параметри лінійної регресії $y=ax+b$ визначаються із системи

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+b\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n}x_k+bn=\sum_{k=1}^{n}y_k. \end{cases}$$

Квадратична регресія. Якщо за апроксимуючу функцію взято квадратичний тричлен $y=ax^2+bx+c$, то $F(a,b,c)=\sum_{k=1}^{n}\left[y_k-\left(ax_k^2+bx_k+c\right)\right]^2$.

Визначаюча система для отримання оптимальних параметрів a,b,c має такий вигляд:

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n}x_k^4+b\sum_{k=1}^{n}x_k^3+c\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n}x_k^3+b\sum_{k=1}^{n}x_k^2+c\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \\ a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+b\sum_{k=1}^{n}x_k+cn=\sum_{k=1}^{n}y_k. \end{cases}$$

Контрольні питання та завдання

1. Запишіть у розгорнутому вигляді систему рівнянь для визначення стаціонарних точок функції $F(a;b)=\sum_{k=1}^{n}\left[y_k-\varphi(x_k;a,b)\right]^2$.
2. Обґрунтуйте наявність розв'язків систем для знаходження оптимальних параметрів лінійної і квадратичної регресії. Чому у точках із координатами, що співпадають із оптимальним набором параметрів, досліджувана функція F набуває найменшого значення?
3. Запишіть визначаючу систему для параметрів a і b функціональної залежності $y=ae^{bx}$.
4. Покажіть, що у випадку припущення між x і y лінійної залежності $y=ax$ число a знаходиться за формулою
$$a=\frac{\left[\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right]}{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$
5. Покажіть, що у випадку припущення між x і y квадратичної залежності $y=ax^2+b$ числа a і b знаходяться із системи
$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n}x_k^4+b\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+bn=\sum_{k=1}^{n}y_k. \end{cases}$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Результати вимірювань величин x і y подано у таблиці:

x	1	2	3	5
y	2	4	2,5	0,5

Способом найменших квадратів знайти параметри емпіричної функції, заданої у вигляді лінійної залежності між x та y: $y = ax + b$.

Розв’язання. Шукані числа a і b будемо знаходити із системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} y_k = a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + bn. \end{cases}$$

Для цього обчислимо $\sum\limits_{k=1}^{4} x_k = 11$; $\sum\limits_{k=1}^{4} y_k = 10$; $\sum\limits_{k=1}^{4} x_k^2 = 39$; $\sum\limits_{k=1}^{4} x_k y_k = 21$.

Система матиме вигляд $\begin{cases} 39a + 11b = 21, \\ 11a + 4b = 10 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times(-4) \\ \times 11 \end{array} \right. +$

Розв’яжемо її: $-156a + 121a = -84 + 110$, $-35a = 26$, $a = -\dfrac{26}{35}$;

$$b = \frac{10 - 11a}{4} = \frac{5}{2} - \frac{11}{4}\left(-\frac{26}{35}\right) = \frac{5}{2} + \frac{143}{70} = \frac{318}{70} = \frac{159}{35}.$$

Отже, $y = -\dfrac{26}{35}x + \dfrac{159}{35}$.

Приклад 2. Результати вимірювань величин x і y подано у таблиці:

x	1	2	3	4	5
y	1	6	13	24	37

Способом найменших квадратів знайти параметри емпіричної функції, заданої у вигляді квадратичної залежності між x та y: $y = ax^2 + bx + c$.

Розв’язання. Шукані числа знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^4 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 y_k, \\ a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + cn = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k. \end{cases}$$

Для цього обчислимо

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 15,\ \sum_{k=1}^{5} y_k = 81,\ \sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 333,\ \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 55,$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^4 = 979,\ \sum_{k=1}^{5} x_k^3 = 225,\ \sum_{k=1}^{5} x_k^2 y_k = 1451.$$

Система матиме вигляд $\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 1451, \\ 225a + 55b + 15c = 333, \\ 55a + 15b + 5c = 81. \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему методом Гаусса:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 979 & 225 & 55 & 1451 \\ 225 & 55 & 15 & 333 \\ 55 & 15 & 5 & 81 \end{array}\right) \end{array} \times\frac{1}{5} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & b & a & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 81/5 \\ 15 & 55 & 225 & 333 \\ 55 & 225 & 979 & 151 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c|c} \times(-15) & \times(-55) \\ \hookleftarrow + & | \\ & \hookleftarrow + \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 81/5 \\ 0 & 10 & 60 & 90 \\ 0 & 60 & 374 & -560 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times 1/10 \\ \times 1/2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 81/5 \\ 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 30 & 187 & -280 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-30) \\ \hookleftarrow + \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 81/5 \\ 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -550 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 7a = -550, \\ 6a + b = 9, \\ 11a + 3b + c = 81/5; \end{cases}$$

$$a = -\frac{550}{7},$$

$$b = 9 - 6\left(-\frac{550}{7}\right) = \frac{3363}{7},$$

$$c = \frac{81}{5} - 11\left(-\frac{550}{7}\right) - 3\cdot\frac{3363}{7} = \frac{81}{5} + \frac{6050 - 10089}{7} = \frac{81}{5} - \frac{4039}{7} = \frac{81}{5} - 577 =$$

$$= \frac{81 - 2885}{5} = -\frac{2804}{5}.$$

Отже, $y = -\frac{550}{7}x^2 + \frac{3363}{7}x - \frac{2804}{5}$, або $y = -78\frac{4}{5}x^2 + 480\frac{3}{7}x - 560\frac{4}{5}$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 8.1. Експериментально отримані значення функції $y = f(x)$, які записано в таблиці для відповідних значень аргументів. Знайти апроксимуючу функцію **а)** $y = ax + b$ і **б)** $y = ax^2 + bx + c$. Зробити малюнок в ПДСК.

1. **а)**

x	1	2	3	4	5
y	15	10	4	0	-6

б)

x	-3	-1	0	2	4	5
y	0,5	1	1,5	2	5	6,5

2. **а)**

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	1,5	1,4	1,2	1	0,9	0,7

б)

x	1	2	3	4	5	6
y	1,1	2,6	3,5	5,1	6,2	8,3

3. **а)**

x	-20	-10	0	10	30
y	42	20,5	2	-20	-57,4

б)

x	1	2	3	4	5
y	2,7	2,1	1,4	-0,1	-2,1

4. **а)**

x	1	2	3	4	5
y	2,3	5,7	8,2	11,8	15

б)

x	1	2	3	4	5
y	2	8	24	43	68

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Перевірити, що функція $z = \sin(x - ay) + \cos(x - ay)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
2. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ неявно заданої функції $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$.
3. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ у точці $M(1;1;1)$.
4. Знайти величину і напрям градієнта функції
$$u = \mathrm{tg}x - 3\sin y + \sin^3 y + z + \mathrm{ctg}z \text{ в точці } M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right).$$
5. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2y^2 + 1$ в замкненій області D, що задається системою нерівностей $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$. Зробити малюнок.

Варіант 2

1. Перевірити, що функція $z = 2\cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ задовольняє рівняння $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

2. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ неявно заданої функції $\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}=a$.
3. Обчислити наближено $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$.
4. Знайти похідну функції $u=\frac{\sqrt{x}}{y}+\frac{8\mathrm{y}}{2+\sqrt{\mathrm{z}}}$ в точці $M(4;1;4)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(7;-3;4)$.
5. Дослідити функцію $z=xy$ на умовний екстремум за умови зв'язку $2x+3y-5=0$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=3-2x^2-xy-y^2$ в замкненій області D, що задається системою нерівностей $x\le 0$, $y\ge 0$, $y\le x$. Зробити малюнок.

Варіант 3

1. Перевірити, що функція $z=xe^{x+y}+y\ln(x+y)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
2. Знайти $\frac{dy}{dx}$: $3\sin\frac{\sqrt{x}}{y}-2\cos\frac{\sqrt{x}}{y}+1=0$.
3. Обчислити значення функції $z=x^y$ в точці $B(1{,}04;\ 2{,}02)$, виходячи із значень z_0 функції у точці $A(1;2)$ і замінивши приріст функції при переході від точки *A* до точки *B* диференціалом.
4. Знайти похідну функції $u=y\cdot\ln(1+x^2)+\mathrm{arctgz}$ у точці $M(0;1;1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(-1;-1;3)$.
5. Знайти екстремум функції $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2+3y^2+x-y$ в замкненій області D, що задається системою нерівностей: $x\ge 1$, $y\ge 1$, $x+y\le 1$.

Варіант 4

1. Перевірити, що функція $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.
2. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функції, заданої неявно $\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ у точці $(3;4;-7)$.
4. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u=xyz$ та $v=x^2+9y^2+6z^2$ у точці $M\left(1;\frac{1}{3};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
5. Знайти умовний екстремум функції $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при $x+y=2$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=5x^2-3xy+y^2+4$ в області D: $x\geq -1$, $y\geq -1$, $x+y\leq 1$.

Варіант 5

1. Перевірити, що функція $z=\frac{\cos y^2}{x}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0$.
2. $xyz=a^3$. Показати, що $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2z$.
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2-2y^2-4z^2=5$ у точці $M_0(1;2;1)$.
4. Знайти величину та напрям градієнта поля

$$u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z \text{ у точці } A(2;0;1).$$

5. Знайти екстремум функції $z=4-\left(x^2+y^2\right)^{\frac{2}{3}}$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2+xy-2$ в замкненій області D, що задається системою нерівностей $4x^2-4\leq y\leq 0$.

Варіант 6

1. Перевірити, що функція $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{u}$.
2. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ складеної функції $u=e^{z-2y}$, якщо $z=\sin x$, $y=x^3$.
3. Обчислити значення повного диференціала функції $z=\frac{x}{x-y}$ при $x=2$, $y=1$, $dx=-\frac{1}{3}$, $dy=\frac{1}{2}$.

4. Знайти похідну функції $u = y^2z - 2xyz + z^2$ в точці $(3;1;1)$ за напрямом вектора, який утворює з координатними осями кути $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.
5. Знайти умовний екстремум функції $z = x + 2y$ за умови, що $x^2 + y^2 = 5$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в області D, що обмежена осями координат і прямою $x + y + 5 = 0$.

Варіант 7

1. Перевірити, що функція $u = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) = 0$.
2. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ складеної функції $z = e^{2x^2 - 2y^2}$, якщо $x = \cos t$, $y = \sin t$.
3. Знайти наближене значення $2{,}68^{\sin 0{,}05}$, виходячи із значення функції $z = x^{\sin y}$ в точці $M(e;0)$.
4. Знайти кут між градієнтами скалярного поля $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M(1;2;2)$ і $N(-3;1;0)$.
5. Дослідити функцію $z = x^3 + y^3 - 15xy$ на екстремум.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy(x + y + 1)$ в замкненій області, що обмежена лініями $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$.

Варіант 8

1. Перевірити, що функція $z = e^{xy}$ задовольняє рівняння $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ функції $p = u^2 \ln v$, якщо $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.
3. Знайти рівняння дотичних площин до параболоїда $4z = x^2 + y^2$ у точках перетину його з прямою $x = y = z$.
4. Обчислити за допомогою градієнта похідну поля $u(M) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ в точці $M(1;1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{j} - \vec{k}$.
5. Знайти умовний екстремум функції $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x+y)$ в області $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

Варіант 9

1. Перевірити, що функція $z = \sin^2(x - ay)$ задовольняє рівняння $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданої функції
$$3xyz - z^3 + 1 = 0.$$
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + y^2 - x + 2y + 4z - 13 = 0$ в точці $(2;1;2)$.
4. Знайти похідну поля $u(M) = xyz$ за напрямом градієнта поля $u(M) = 2x^2\text{-}3xz + z^2 + yz$ в точці $M(1;1;1)$.
5. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в трикутнику, що обмежений лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Варіант 10

1. Перевірити, що функція $z = \ln\left(x^2 + (y-1)^2\right)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
2. Знайти похідну $\frac{dz}{dx}$ складеної функції $z = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$ при $u = \mathrm{tg}^2 x$, $v = \mathrm{ctg}^2 x$.
3. Обчислити наближено $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$, виходячи із значення функції $z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.
4. Показати, що функція $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ задовольняє співвідношення $u = 2\ln 2 - \ln(\mathrm{grad}\,u)^2$, де $(\mathrm{grad}\,u)^2$– скалярний квадрат.
5. Знайти умовний екстремум функції $z = xy$, якщо $y = 3 - x^2$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2$ в області, де $|x| + |y| \le 1$.

Варіант 11

1. Перевірити, що функція $z = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

2. Знайти $\frac{dy}{dx}$ неявно заданої функції $z = x + \operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.
3. Обчислити значення повного диференціала функції $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ при переміщенні точки $M(x;y;z)$ із положення $M_0(10;-10;5)$ у положення $M_1(9{,}8;-10{,}03;5{,}1)$.
4. Знайти похідну скалярного поля $u(x;y;z) = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$ у точці $M(1;1;1)$за напрямом нормалі до поверхні S: $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, що утворює гострий кут з додатним напрямом Oz.
5. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ $(x > 0, y > 0)$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в області, яка визначена умовами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Варіант 12

1. Перевірити, що функція $z = \frac{x^2y^2}{x+y}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial x}$.
2. Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \operatorname{tg}(4x + 5y)$, $x = \sin 3t$, $y = \cos 4t$.
3. Перевірити, що поверхні $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ і $4 + x + 2y = \ln z$ дотикаються одна одної, тобто мають спільну дотичну площину в точці $(2;-3;1)$.
4. Знайти кут θ між градієнтами скалярних полів, $u(M) = x^2 + y^2 - z^2$ та $v(M) = \arcsin\frac{x}{x+y}$ в точці $M(1;1;\sqrt{7})$.
5. Дослідити функцію на екстремум $z = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 3xy$ в області, яка визначається умовами $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

Варіант 13

1. Перевірити, що функція $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо функція задана неявно $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

3. Обчислити повний диференціал функції $u = p - \frac{qr}{p} + \sqrt{p+q+r}$ при $p = 1$, $q = 3$, $r = 5$, $\Delta p = 0{,}01$, $\Delta q = 0{,}2$, $\Delta r = -0{,}01$.
4. З якою найбільшою швидкістю може зростати функція $u = \ln\left(x^2 - y^2 + z^2\right)$ при переході точки $M(x, y, z)$ через точку $M(1;1;1)$?
5. Дослідити функцію $z = \left(2x^2 + y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ на екстремум.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy(6 - x - y)$ в області, яка визначена умовами $x \geq 1$, $y \geq 1$, $x + y \leq 8$.

Варіант 14

1. Перевірити, що функція $z = x\sqrt{x+y} + \frac{y}{\sqrt{x+y}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
2. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \ln\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.
3. Обчислити наближено зміну функції $z = \frac{x+3y}{y-3x}$ при переході від точки $M_0(2;4)$ до точки $M(2{,}5;3{,}5)$.
4. Знайти похідну скалярного поля $u = x\sqrt{y} - yz^2$ у точці $M(2;1;-1)$ за напрямом нормалі до поверхні $S:\ x^2 + y^2 = 4z$.
5. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ в крузі $x^2 + y^2 \leq 1$.

Варіант 15

1. Перевірити, що функція $z = x^2 \ln\frac{y}{x} + xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2z$.
2. Знайти $\frac{dy}{dx}$ – для функції, що задана неявно $x^2 + y^2 + \ln\left(x^2 + y^2\right) = a^2$.
3. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точці $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{b\sqrt{3}}{3}; \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

4. Знайти величину та напрям градієнта поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ у точці $A(2;0;1)$ і знайти точку, в якій градієнт дорівнює нулю.
5. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x - 2y + 5$ в області $x \le 0$, $y \ge 0$, $y - x \le 1$.

Варіант 16

1. Перевірити, що функція $z = \arcsin(x + \ln y)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
2. Обчислити $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції, що задана неявно
$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1.$$
3. Знайти повний деференціал функції $z = e^{xy^2}$ другого порядку.
4. Знайти похідну скалярного поля $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$ у точці $M(1;-2;4)$ за напрямом нормалі до поверхні S: $4x^2 - y^2 + z^2 = 16$, що утворює гострий кут з додатним напрямом Oz.
5. Знайти умовний екстремум функції $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy^2$ в області, $x^2 + y^2 \le 1$.

Варіант 17

1. Довести, що функція $u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ задовольняє рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
2. Знайти $\frac{du}{dv}$ для функції, що задана неявно $uv = -\ln(uv)$.
3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ у точці $(2;2;1)$.
4. Знайти похідну функції $z = \ln(x + y)$ у точці $(1;2)$, що належить параболі $y^2 = 4z$ за напрямом цієї параболи.
5. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y + 1$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = y - x$ в крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

Варіант 18

1. Довести, що функція $u = e^{xyz}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + u$.
2. Нехай $z = u + v^2$, де $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$. Показати, що $z'_x - z'_y = 2x - \cos y$.
3. Обчислити наближено $\sqrt{5e^{0,02} + 2{,}03^2}$.
4. Знайти кут між градієнтами функцій $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ у точці $(3;4)$.
5. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + y^2$за умови $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 3xy + 5$ у прямокутнику $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$.

Варіант 19

1. Показати, що функція $z = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \cos(x + y))$ задовольняє рівняння $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
2. Нехай $u = \frac{e^{2x}(y - z)}{5}$, де $y = 2\sin x$, $z = \cos x$. Знайти повну похідну $\frac{du}{dx}$.
3. Знайти повний диференціал функції $z = 2xy + 3y^2 - 5x$ при переході від точки $A(3;4)$ до точки $B(3{,}04;3{,}95)$.
4. Знайти похідну функції $z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ у точці $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, що належить колу $x^2 + y^2 - 2x = 0$ за напрямом цього кола.
5. Знайти екстремум функції $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = e^{-x^2 - y^2}(2x + 3y^2)$ в крузі $x^2 + y^2 \le 4$.

Варіант 20

1. Довести, що функція $z = xe^y + ye^x$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

2. Довести, що частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявної функції $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ задовольняють умову $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$.
3. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.
4. Знайти найбільшу крутизну підйому поверхні $z = x^y$ в точці $(2;2;4)$.
5. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$.
6. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = \sin x + \sin y + \cos(x + y) \text{ в області } 0 \le x \le \frac{3\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{3\pi}{2}.$$

ГЛАВА IV. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТАБЛИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Основні поняття та теореми

Функція $F(x)$ називається *первісною* для $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо $F(x)$ має похідну і виконується рівність $F'(x)=f(x)$ для всіх значень x з інтервалу $(a;b)$.

Зауважимо, що первісна для $f(x)$ визначається неоднозначно. Наприклад, для $f(x)=2x$ на $x\in(-\infty;+\infty)$ первісними будуть функції $F(x)=x^2$ і $\Phi(x)=x^2+5$.

Основна теорема про первісну. *Якщо* $F(x)$ *та* $\Phi(x)$ *– довільні первісні для функцій* $f(x)$ *на інтервалі* $(a;b)$*, то всюди на цьому інтервалі* $F(x)-\Phi(x)\equiv C$*, де* C *– деяка стала.*

Сукупність всіх первісних для $f(x)$ на $(a;b)$ називається *невизначеним інтегралом* від $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Знак $\int$ називається *інтегралом*, $f(x)\mathrm{d}x$ – *підінтегральним виразом*, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*. Операція знаходження первісної (або невизначеного інтеграла) функції $f(x)$ називається *інтегруванням функції* $f(x)$. Таким чином, якщо $F(x)$ – одна з первісних для $f(x)$, то $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$. Наприклад, $\int(2x)\,\mathrm{d}x=x^2+C$.

Виділимо основні властивості невизначеного інтеграла:

1) $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)\,\mathrm{d}x$;
2) $\int \mathrm{d}\varphi(x)=\varphi(x)+C$;
3) $\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $(k=const,\ k\neq 0)$;
4) $\int[f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Запишемо таблицю найпростіших інтегралів:

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad (n\neq -1).$
2. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C,\qquad (x\neq 0).$
3. $\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C.$

4. $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0 \;\; a \neq 1).$

5. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C.$

7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$

8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C.$

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C, \quad (|x| \neq 1).$

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$

13. $\int \mathrm{sh}\, x \, \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C.$

14. $\int \mathrm{ch}\, x \, \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C.$

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C.$

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C.$

18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.$

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C.$

Контрольні питання та завдання

1. Користуючись формулами диференціального числення, перевірити формули (11) і (12) таблиці найпростіших інтегралів.

2. Спираючись на основні властивості невизначеного інтеграла, показати його лінійність, а саме:
$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)+\beta\int g(x)\mathrm{d}x,\text{ де } \alpha,\beta-const.$$
3. Нехай $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. Доведіть, що
$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,\text{ де } a,b,C-const.$$
4. Чи має первісну функція $\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0?\end{cases}$
5. Наведіть означення основних елементарних та елементарних функцій.

В інтегральному численні широко вживають первісні, які не можна подати через скінчене число арифметичних операцій і суперпозицій елементарних функцій, а саме:

1) інтеграл Пуассона $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;
2) інтеграли Френеля $\int\cos x^2\,\mathrm{d}x$ і $\int\sin x^2\,\mathrm{d}x$;
3) інтегральний синус $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$;
4) інтегральний косинус $\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$;
5) інтегральний логарифм $\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$;
6) еліптичні інтеграли Лежандра $(0<k<1)$: $\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ і $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$.

Для всіх перерахованих нових функцій складено таблиці і графіки.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли методом безпосереднього інтегрування. Результат перевірити диференціюванням.

а) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x=\int(\sqrt{x^3}+1)\mathrm{d}x=\int x^{3/2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x=$
$$=\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1}+x+C=\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C.$$
Перевірка:
$$\left(\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C\right)'=\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{3/2}+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^{3/2}+1\right)\mathrm{d}x=(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x,$$
що дорівнює підінтегральному виразу.

б) $$\int\frac{x^{1/3}+x^{2/5}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^{1/3}+x^{2/5}}{x^{1/2}}\mathrm{d}x=\int(x^{1/3-1/2}+x^{2/5-1/2})\mathrm{d}x=$$
$$=\int(x^{1/6}+x^{-1/10})\mathrm{d}x=\frac{x^{-1/6+1}}{-1/6+1}+\frac{x^{-1/10+1}}{-1/10+1}+=\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{10}{9}x^{9/10}+C.$$

Перевірка:
$$\mathrm{d}\left(\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{10}{9}x^{9/10}+C\right)=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}x^{-1/6}+\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}x^{-1/10}=\frac{(x^{-1/6}+x^{-1/10})\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{x^{1/3}+x^{2/5}}{\sqrt{x}},$$
що дорівнює підінтегральному виразу.

в) $$\int 5^x e^x dx=\int(5e)^x dx=\frac{(5e)^x}{\ln 5e}+c=\frac{5^x e^x}{1+\ln 5}+C.$$

Перевірка: $$\left(\frac{5^x e^x}{1+\ln 5}+C\right)'=\frac{1}{1+\ln 5}(5^x\ln 5e^x+5^x e^x)=\frac{5^x e^x(1+\ln 5)}{1+\ln 5}=5^x e^x,$$
що дорівнює підінтегральному виразу.

г) $$\int\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}-\int\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\,x-x+C.$$

Перевірка: $$\mathrm{d}(\mathrm{tg}\,x-x+C)=(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\mathrm{d}x=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x,$$
що дорівнює підінтегральному виразу.

д) $$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}-\int\frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}=$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x+C.$$

Перевірка:
$$\mathrm{d}(-\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x+C)=\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$
що дорівнює підінтегральному виразу.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1. Обчислити інтеграли.

1. $\int(3x^2+6x+8)\mathrm{d}x$.
2. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.
3. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\mathrm{d}x$.
4. $\int(2x^{-1{,}2}+3x^{-0{,}8}-5x^{-0{,}38})\mathrm{d}x$.

5. $\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x.$

6. $\int\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{3x}}\mathrm{d}x.$

7. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

8. $\int\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x.$

9. $\int(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{x^2})^3\,\mathrm{d}x.$

10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+7}.$

11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-10}.$

12. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}.$

13. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8-x^2}}.$

14. $\int\mathrm{ctg}^2\,x\,\mathrm{d}x.$

15. $\int\mathrm{th}^2\,x\,\mathrm{d}x.$

16. $\int\mathrm{cth}^2\,x\,\mathrm{d}x.$

17. $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\mathrm{d}x.$

18. $\int x(x+1)(x+2)\,\mathrm{d}x.$

19. $\int\left(3+\frac{1}{2}x^3\right)^2\mathrm{d}x.$

20. $\int(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)^2\,\mathrm{d}x.$

21. $\int\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin 2x}\mathrm{d}x.$

22. $\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\cos x\right)\mathrm{d}x.$

23. $\int\frac{\sin^2 x+2\sin x-5}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

24. $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x.$

25. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x-\cos 2x}.$

§ 2. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ВВЕДЕННЯ НОВОГО АРГУМЕНТУ

Основні поняття та теореми

Цей метод інтегрування називають ще підведенням під знак диференціала. Ґрунтується він на інваріантності формули інтегрування.

Нехай $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$, тоді $\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$, де змінна u може бути залежною: $u=\varphi(x)$. Таким чином, інтегрування виразів $\int f(\varphi)\,\mathrm{d}[\varphi(x)]$ можна провести за такою схемою:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}[\varphi(x)]=F(\varphi(x))+C.$$

В підінтегральному виразі виділяють множник і підводять його під знак диференціала. Керуються тим, щоб у функції, яка залишається під інтегралом, і у диференціала був однаковий новий аргумент. Після введення нового аргументу, для прикладів цього розділу, подальше інтегрування стає табличним.

Контрольні питання та завдання

1. Нехай $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Знайдіть $\mathrm{d}\big[F(\varphi(x))\big] = ?$
2. Нехай $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Користуючись методом підведення під знак диференціала, покажіть, що:
   - а) $\int f(x+b)\,\mathrm{d}x = F(x+b) + C$;
   - б) $\int f(ax)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}F(ax) + C$;
   - в) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.
3. Який взаємозв'язок між методом введення нового аргументу та інтегруванням заміною змінної?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграли за допомогою введення нового аргументу.

а) $\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(3-x^2) \right| = \dfrac{1}{2}\int (3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(3-x^2) =$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(3-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Перевірка: $\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{3}\left(3-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C \right) = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}(-2x)\,\mathrm{d}x = x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x$ – отримали підінтегральний вираз.

б) $\int \dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{8+x^3} = \left| \mathrm{d}(8+x^3) = 3x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(8+x^3) \right| =$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(8+x^3)}{8+x^3} = \frac{1}{3}\ln\left|8+x^3\right| + C.$$

в) $\int \dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)} = \int \dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)}{\cos^2(x^3)} = \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}\,x^3 + C$.

г) $\int \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \left|\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(1-\cos x)\right| = \int \dfrac{\mathrm{d}(1-\cos x)}{1-\cos x} = \ln\left|1-\cos x\right| + C$.

д) $$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-e^x}} = \left|\mathrm{d}(1-e^x) = -e^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow e^x\,\mathrm{d}x = -d(1-e^x)\right| =$$

$$= -\int (1-e^x)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(1-e^x) = -\frac{(1-e^x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2}(1-e^x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

е) $$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\operatorname{arctg} x)\right| = \int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

ж) $$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\frac{\mathrm{d}x}{x} = d(\ln x)\right| = \int (\ln x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{(\ln x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(\ln x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

з) $$\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \left|\mathrm{d}(1-\operatorname{tg} x) = -\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\mathrm{d}(1-\operatorname{tg} x)\right| =$$

$$= \int -(1-\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}(1-\operatorname{tg} x) = -\frac{1}{2}(1-\operatorname{tg} x)^2 + C.$$

і) $$\int \frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix}\mathrm{d}(3+\cos^2 x) = -2\cos x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = -\sin 2x\,\mathrm{d}x, \\ \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(3+\cos^2 x)\end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{-\mathrm{d}(3+\cos^2 x)}{3+\cos^2 x} = -\ln\left|3+\cos^2 x\right| + C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 2.1. Обчислити інтеграли.

1. $\int (x+9)^{13}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-2)^7}$.
3. $\int (1+x^2)^7 x\,\mathrm{d}x$.
4. $\int x\sqrt{5x^2+2}\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x^5}}$.
7. $\int 2e^{-3x}\,\mathrm{d}x$.
8. $\int e^{2-x^3} x^2\,\mathrm{d}x$.
9. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
10. $\int \cos(2x-3)\,\mathrm{d}x$.
11. $\int e^x \sin(e^x)\,\mathrm{d}x$.
12. $\int e^{\cos x} \sin x\,\mathrm{d}x$.
13. $\int \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x$.
14. $\int \cos(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

15. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

16. $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

17. $\int \cos^3 x \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

18. $\int \left(\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-2}\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}$.

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{-x}+1}$.

23. $\int \frac{\ln x-1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$.

24. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\arccos 3x\cdot\sqrt{1-9x^2}}$.

25. $\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+25}$.

26. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+4}$.

27. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^6+9}$.

28. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{25+\cos^2 x}$.

29. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^4}}$.

30. $\int \frac{3^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9^x}}$.

31. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

32. $\int \frac{e^{\arccos x}+x+2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

33. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-9\ln^2 x}}$.

34. $\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$.

35. $\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^4 x+4}}$.

36. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

37. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

38. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}$.

39. $\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2+25}$.

40. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+25x^2}$.

§ 3. НАЙПРОСТІШІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Основні поняття та теореми

До найпростіших прийомів інтегрування віднесемо такі:

А) Метод розкладання.

Нехай $f(x)=f_1(x)+f(x)$, тоді $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\int f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Цим методом ми вже користувались в попередніх розділах. Зараз наводимо його для повноти викладення та з метою відзначення його важливості.

B) Метод виділення цілої частини підінтегрального дробу.

Інтеграли $\int \frac{Mx+N}{ax+b}\mathrm{d}x$ і $\int \frac{Mx^2+Nx+K}{ax^2+b}\mathrm{d}x$, $(a \neq 0)$, зводяться до табличних після виділення цілої частини підінтегрального дробу. Наприклад, нехай $f(x)=\frac{Mx+N}{ax+b}$, тоді

$$\frac{Mx+N}{ax+b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{Mx+N}{x+\frac{b}{a}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{M\left(x+\frac{b}{a}\right)-M\frac{b}{a}+N}{x+\frac{b}{a}}=\frac{1}{a}\cdot\left[M-\frac{N-M\frac{b}{a}}{x+\frac{b}{a}}\right]=$$

$$=\frac{M}{a}-\frac{N-M\frac{b}{a}}{a}\cdot\frac{1}{x+\frac{b}{a}}.$$

Значить, $\int \frac{Mx+N}{ax+b}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{M}{a}-\frac{Na-Mb}{a^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{b}{a}}\right]\mathrm{d}x=$

$$=\frac{M}{a}x-\frac{Na-Mb}{a^2}\cdot\int\frac{d\left(x+\frac{b}{a}\right)}{x+\frac{b}{a}}=\frac{M}{a}x-\frac{Na-Mb}{a^2}\cdot\ln\left|x+\frac{b}{a}\right|+C.$$

C) Метод виділення повного квадрату.

Інтеграли виду $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ і $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ зводяться до табличних за допомогою виділення повного квадрату в квадратному тричлені $(a \neq 0)$:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Контрольні питання та завдання

1. Виділіть цілі частини дробів:

а) $\frac{x}{x+5}$. б) $\frac{x+5}{x-5}$. в) $\frac{3x+1}{2x-1}$. г) $\frac{x^4}{x^2+1}$.

2. Розкладіть в суму дроби:

а) $\frac{2x+1}{x(x+1)}$. б) $\frac{1}{x(x+1)}$. в) $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$. г) $\frac{1}{x^2-7x+10}$.

3. Виділіть цілу частину і потім зінтегруйте:

$$\int\frac{Mx^2+Nx+K}{ax^2+b}\mathrm{d}x, \qquad (a\neq 0).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли шляхом виділення цілої частини.

а) $\int\frac{x}{x+4}\mathrm{d}x=\int\frac{(x+4)-4}{x+4}\mathrm{d}x=\int(1-\frac{4}{x+4})\mathrm{d}x=x-4\ln|x+4|+C.$

б) $\int\frac{x}{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)+C.$$

в) $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x}\mathrm{d}x=\int\left(e^x-e^{-x}\right)\mathrm{d}x=e^x+e^{-x}+C.$

г) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)-2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=x-2\,\mathrm{arctg}x+C.$

д) $\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{1-x}=-\int\frac{(x^4-1)+1}{x-1}\mathrm{d}x=-\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x-1}\mathrm{d}x=$

$$=-\int\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=-\int(x^3+x^2+x+1)\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=$$

$$=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}+x+\ln|x-1|+C\right).$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли, які містять квадратний тричлен.

а) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x-5}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-4-5}=\int\frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+2-3}{x+2+3}\right|+C=$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C.$$

б) $$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x-3)}=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)(x-3)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=\ln|x-3|-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-3}=\ln|x-3|-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2-1-3}=\ln|x-3|-\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2-4}=$$

$$=\ln|x-3|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$

в) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8+6x-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}\right)}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{8}{9}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x-1/3)}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\left(x-\frac{1}{3}\right)+C.$$

г) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C=\ln|x|-\ln|x+1|+C.$$

д) $$\int\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}=\int\frac{\mathrm{d}(e^x)}{\sqrt{(e^x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1}}=\int\frac{\mathrm{d}(e^x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(e^x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=\ln\left|e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{(e^x+\frac{1}{2})^2\,\frac{3}{4}}\right|+C=\ln\left|e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right|+C.$$

е) $$\int\frac{(3x-9)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=3\int\frac{(x-3)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\left|\mathrm{d}(x^2-4x+5)=(2x-4)\,\mathrm{d}x\right|=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-6)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4-2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}-$$

$$-3\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-4x+5)}{\sqrt{x^2-4x+5}}-3\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}}=2\sqrt{x^2-4x+5}-$$

$$-3\ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right|+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 3.1. Обчислити інтеграли

1. $\int \frac{5x}{2+3x}\mathrm{d}x.$

2. $\int \frac{3+x}{3-x}\mathrm{d}x.$

3. $\int \frac{2x-1}{x-2}\mathrm{d}x.$

4. $\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

5. $\int \frac{2x+3}{2x+1}\mathrm{d}x.$

6. $\int \frac{3x+1}{5x+6}\mathrm{d}x.$

7. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\mathrm{d}x.$

8. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\mathrm{d}x.$

9. $\int \frac{3^{2x}-1}{\sqrt{3^x}}\mathrm{d}x.$

10. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x-5}.$

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x}.$

13. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^2+6}.$

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10x-x^2}}.$

15. $\int \frac{(4x-3)\mathrm{d}x}{x^2-2x+6}.$

16. $\int \frac{(x+4)\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x-x^2}}.$

17. $\int \frac{(2x+5)\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+6x+2}}.$

18. $\int \frac{(2-5x)\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

19. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}.$

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2-6x+2}}.$

21. $\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$

22. $\int \frac{(3x+5)\mathrm{d}x}{(x+1)(2x-3)}.$

23. $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\mathrm{d}x.$

24. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)(b-x)}.$

25. $\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}.$

26. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\mathrm{d}x.$

§ 4. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Основні поняття та теореми

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – деякі диференційовані функції, тоді

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Останній вираз називають *формулою інтегрування частинами* і коротко записують у такому вигляді:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u\,.$$

Формула інтегрування частинами зводить питання про обчислення інтеграла $\int u\,\mathrm{d}v$ до обчислення інтеграла $\int v\,\mathrm{d}u = \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ (таким чином похідна "переводиться" з функції $v(x)$ на $u(x)$). В ряді конкретних випадків цей перехід спрощує підінтегральний вираз настільки, що новий інтеграл обчислити вже не важко.

Як показує практика, більша частина інтегралів, що обчислюється частинами, може бути розбита на такі три групи:

A. $\int P_n(x)\left\{\begin{matrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{matrix}\right\}\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = P_n(x); \mathrm{d}u = P_n{}'(x)\,\mathrm{d}x = P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{matrix}\right\}\mathrm{d}x; \quad v = \dfrac{1}{k}\left\{\begin{matrix} e^{kx} \\ -\cos kx \\ \sin kx \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right|$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; k – дійсне число $(k \neq 0)$.

B. $\int\left\{\begin{matrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg}\,x \end{matrix}\right\}P_n(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = \left\{\begin{matrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg}\,x \end{matrix}\right\}; \ \mathrm{d}u = \left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{1}{1+x^2} \end{matrix}\right\}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = P_n(x)\,\mathrm{d}x; \ v = \int P_n(x)\,\mathrm{d}x = P_{n+1}(x) \end{matrix}\right|.$

C. Інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\left\{\begin{matrix} \cos\beta x \\ \sin\beta x \end{matrix}\right\}\mathrm{d}x$, $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Позначаючи кожен із інтегралів цієї групи через I і проводячи двократне інтегрування частинами, ми складемо для I рівняння першого порядку.

Можна навести *приклади невизначених інтегралів*

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x},\ \int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x},\ \int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2},$$

які дозволяють обчислення за методом інтегрування частинами, але не належать до жодної з вказаних груп. Тому наведена вище класифікація досить умовна.

Контрольні питання та завдання

1. Доведіть формулу інтегрування частинами.
2. За допомогою двократного інтегрування частинами покажіть рівність

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x} + C\,.$$

3. Нехай $K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$, де $n \in N$, $a \neq 0$.

При $n \geq 2$:

$$K_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left[(x^2+a^2)-x^2\right]}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = K_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}.$$

Застосуйте до останнього інтегралу формулу інтегрування частинами, поклавши $u = x$, $\mathrm{d}v = (x^2 + a^2)^{-n} \cdot 2x\,\mathrm{d}x$ і отримайте рекурентну формулу

$$K_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \cdot K_{n-1}.$$

4. Використовуючи результат попередньої задачі, покажіть, що

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

5. За допомогою двократного інтегрування частинами отримайте рівності:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$;

б) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами.

а) $$\int (2x+3)\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 2x+3 = u \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x; \\ \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \end{array}\right| =$$

$$= -(2x+3)\cos x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x = -(2x+3)\cos x + 2\sin x + C.$$

б) $$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \mathrm{arctg}\,x = u \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}; \\ x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right| = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C.$$

в) $\int x^2 \arcsin x\, dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = u \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\ x^2\, dx = dv \Rightarrow v = \int x^2\, dx = \dfrac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \dfrac{1}{3}x^3 \arcsin x -$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}\left| \begin{array}{l} x^2 = u \Rightarrow du = 2x\, dx; \\ \dfrac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}(-x^2\sqrt{1-x^2} + \int 2x\sqrt{1-x^2}\, dx) = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x +$$

$$+ \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

г) $\int \sqrt{x^2+16}\, dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+16} = u \Rightarrow du = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}dx = \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x^2+16}}; \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| =$

$$= x\sqrt{x^2+16} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+16}} = x\sqrt{x^2+16} - \int \frac{(x^2+16)-16}{\sqrt{x^2+16}}dx = x\sqrt{x^2+16} -$$

$$- \int \frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx + \int \frac{16dx}{\sqrt{x^2+16}} = x\sqrt{x^2+16} - \int \sqrt{x^2+16}\, dx +$$

$$+ 16\ln\left|x + \sqrt{x^2+16}\right| + C \Rightarrow \int \sqrt{x^2+16}\, dx = x\sqrt{x^2+16} + 16\ln\left|x + \sqrt{x^2+16}\right| -$$

$$- \int \sqrt{x^2+16}\, dx + C.$$

Розв’яжемо це рівняння відносно $\int \sqrt{x^2+16}\, dx$:

$$2\int \sqrt{x^2+16} = x\sqrt{x^2+16} + 16\ln\left|x + \sqrt{x^2+16}\right| + C;$$

$$\int x^2 + 16 = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} + 8\ln\left|x + \sqrt{x^2+16}\right| + C.$$

д) $\int e^{2x}\cos 3x\, dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x}; \\ \cos 3x\, dx = dv \Rightarrow v = \int \cos 3x\, dx = \dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = \dfrac{1}{3}e^{2x}\sin 3x -$

$$- \frac{2}{3}\int \sin 3x \cdot e^{2x}\, dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x}; \\ \sin 3x\, dx = dv \Rightarrow v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}e^{2x} \cdot \sin 3x -$$

$$- \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x} \cdot \cos 3x\, dx \right) = \frac{1}{3}e^{2x} \cdot \sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x} \cdot \cos 3x -$$

$$-\frac{2^2}{3^2}\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x.$$

Маємо рівність

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cdot\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x,$$

з якої визначаємо шуканий інтеграл:

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\cdot e^{2x}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C\Rightarrow\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{e^{2x}}{13}\cdot(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$$

е) $$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l}\arcsin\sqrt{x}=u\Rightarrow\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}};\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}=\mathrm{d}v\Rightarrow v=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}=\int\frac{-\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\end{array}\right|=$$

$$=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}-\int\frac{-2\sqrt{1-x}\cdot\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}}=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 4.1. Обчислити інтеграли.

1. $\int(3x+2)\cos 5x\,\mathrm{d}x$.
2. $\int(2x-1)e^{3x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\int x\cdot\sin 7x\,\mathrm{d}x$.
4. $\int\ln x\,\mathrm{d}x$.
5. $\int\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$.
6. $\int\arcsin x\,\mathrm{d}x$.
7. $\int x\arccos x\,\mathrm{d}x$.
8. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
9. $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{e^x}$.
10. $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.
11. $\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.
12. $\int(x^2-2x+5)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
13. $\int(x^2+5x+6)\cos x\,\mathrm{d}x$.
14. $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$.
15. $\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.
16. $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.
17. $\int\sin\ln x\,\mathrm{d}x$.
18. $\int\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.
19. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.
20. $\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.
21. $\int\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$.
22. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.
23. $\int\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.
24. $\int e^{\arccos x}\,\mathrm{d}x$.

§ 5. МЕТОД ПІДСТАНОВКИ (ЗАМІНИ ЗМІННОЇ)

Основні поняття та теореми

Важливу роль в інтегральному численні відіграє формула заміни змінної:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

де $f(x)$ – неперервна відносно x функція, а $x = \varphi(t)$ має неперервну відносно t похідну $\varphi'(t)$.

В даному випадку шляхом заміни змінної ми "виводимо" функцію $x = \varphi(t)$ з-під знака диференціала $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Якщо формулу заміни прочитати справа наліво, то отримуємо відомий нам метод інтегрування через "введення" функції під знак диференціала. Саме тому, для стислості викладення матеріалу, в багатьох підручниках окремо не виділяють інтегрування методом введення нового аргументу, а подають його під заголовком теореми про заміну змінної.

Звичайно, цей прийом можна застосувати не до кожного інтеграла. Крім того, слід підкреслити, що вибір правильної підстановки значною мірою визначається мистецтвом розв'язуючого. В наступних розділах ми дамо загальні рекомендації щодо вибору заміни відповідно до вигляду підінтегрального виразу.

Контрольні питання та завдання

1. Доведіть формулу заміни змінної.
2. Обчисліть інтеграли, користуючись методом підстановки:

   а) $\int (3x-2)^{15}\,\mathrm{d}x$; б) $\int \sqrt[5]{(7-2x)^4}\,\mathrm{d}x$; в) $\int \cos(5x-4)\,\mathrm{d}x$.
3. За допомогою заміни $x = a \cdot t$ покажіть, що

   а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

   б) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$;

   в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.
4. Доведіть, що за допомогою підстановки $t = x + \frac{b}{2a}$ інтеграли $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ і $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ зводяться до табличних.
5. Розглянемо такі неелементарні спеціальні функції:

   1) $\mathrm{Ei}(x) = \int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральна експонента;

2) $\mathrm{Si}(x)=\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний синус;

3) $\mathrm{Ci}(x)=\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний косинус;

4) $\mathrm{Shi}(x)=\int\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний гіперболічний синус;

5) $\mathrm{Chi}(x)=\int\frac{\mathrm{ch}\,x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний гіперболічний косинус;

6) $\left.\begin{aligned}\mathrm{S}(x)&=\int\sin x^2\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{C}(x)&=\int\cos x^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}\right\}$ – інтеграли Френеля;

7) $\Phi(x)=\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ – інтеграл Пуассона–Лапласа;

8) $\mathrm{Li}(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ – інтегральний логарифм.

Нехай $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Перевірте з точністю до сталої справедливість таких рівностей:

1) $\mathrm{Ei}(x)=\mathrm{Li}(e^x)$;

2) $\mathrm{Chi}(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{Ei}(x)+\mathrm{Ei}(-x))$;

3) $\mathrm{Shi}(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{Ei}(x)-\mathrm{Ei}(-x))$;

4) $\mathrm{Ei}(ix)=\mathrm{Ci}(x)+i\cdot\mathrm{Si}(x)$;

5) $\Phi\left(x\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\mathrm{C}(x)+i\cdot\mathrm{S}(x)$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Заміна змінної.

а) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+3}=\left|\begin{aligned}&\sqrt{x+2}=t\\&x+2=t^2\\&x=t^2-2\\&\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{aligned}\right|=\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t+3}=2\int\frac{t+3-3}{t+3}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=2\int\mathrm{d}t-6\int\frac{\mathrm{d}(t+3)}{t+3}=2t-6\ln|t+3|+C.$$

б) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}$.

I спосіб.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{2}{\cos t};\quad \mathrm{d}x=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{x^2-2^2}=\sqrt{\frac{2^2}{\cos^2 t}-2^2}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{2\sin t}{\cos t} \end{array}\right|=$$

$$=\int \frac{2\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t\cdot\frac{2}{\cos t}\cdot\frac{2\sin t}{\cos t}}=\int \frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

II спосіб.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{2}{t}; \\ \mathrm{d}x=-\frac{a}{t^2}\mathrm{d}t \end{array}\right|=\int \frac{-\frac{2}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{2}{t}\sqrt{\frac{2^2}{t^2}-2^2}}=\int \frac{-\frac{2}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{2}{t}\cdot 2\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}=\int -\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\arccos t+C=\left|t=\frac{2}{x}\right|=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

в) $$\int \frac{e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{e^x-1}}=\left|\begin{array}{l} \sqrt{e^x-1}=t \\ e^x-1=t^2 \\ e^x=t^2+1 \\ x=\ln(t^2+1) \\ \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t \end{array}\right|=2\int \frac{\sqrt{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}=2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{e^x+1}\right)+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1. Обчислити інтеграли

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}$ (підстановка $x+1=z^2$).
2. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.
3. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$.

5. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$.

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b+m}}$.

11. $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (підстановка $x = z^6$).

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$.

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

15. $\int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (підстановка $e^x + 1 = z^4$).

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$.

17. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

18. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x \cos 2x\,\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x$.

20. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^3-x^3}}$.

21. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{(x^2-4)^2}$.

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

23. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,\mathrm{d}x$.

24. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

27. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$.

29. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

30. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

§ 6. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Основні поняття та теореми

1. Раціональним дробом або *раціональною функцією* називається відношення двох алгебраїчних многочленів

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $P_m(x) = b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} \cdot x + b_m$, $b_0 \neq 0$,

$Q_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$, $a_0 \neq 0$.

Раціональний дріб $R(x)$ називається *правильним*, якщо степінь чисельника m строго менша степені знаменника n : $m < n$.

Питання про інтегрування раціональної функції вирішується шляхом розкладання підінтегрального виразу в суму більш простих доданків.

Поділити многочлен $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ при $m \geq n$ значить знайти многочлен (частку)

$$S_{m-n}(x) = c_0 \cdot x^{m-n} + c_1 \cdot x^{m-n-1} + ... + c_{m-n},\ c_0 \neq 0,$$

і многочлен (залишок) $r_k(x)$ степені k, $k < n$, для яких виконується рівність:

$$P_m(x) = Q_n(x) \cdot S_{m-n}(x) + r_k(x).$$

Многочлени $S_{m-n}(x)$ і $r_k(x)$ визначаються однозначно, наприклад, за допомогою процесу ділення кутом (алгоритму ділення Евкліда). Процес знаходження частки S_{m-n} і r_k аналогічний до процесу ділення (з "остачею") многозначного числа на многозначне. Роль цифр в записі відповідних розрядів відіграють коефіцієнти полінома біля відповідних степенів головної змінної. Для порівняння, поряд подано ділення чисел і многочленів:

A) $418 = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$,
$15 = 1 \cdot 10^1 + 5$. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r}418\\ \underline{30}\end{array} & \begin{array}{|l}15\\ \hline 27\end{array}\\
-\begin{array}{r}118\\ \underline{105}\end{array} & \\
\boxed{13} & \text{– "остача".}
\end{array}$$

Тут $P = 417$, $Q = 15$, $S = 27$, $r = 13$;
$417 = 15 \cdot 27 + 13$.

B) $P_3(x) = 8 \cdot x^3 + 16 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4$,
$Q_2(x) = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r}8x^3 + 16x^2 - 2x + 4\\ \underline{8x^3 - 4x^2 + 2x\phantom{{}+4}}\end{array} & \begin{array}{|l}4x^2 - 2x + 1\\ \hline 2x + 5\end{array}\\
-\begin{array}{r}20x^2 - 4x + 4\\ \underline{20x^2 - 10x + 5}\end{array} & \\
\boxed{6x - 1} & \text{– "остача".}
\end{array}$$

Тут $S_1(x) = 2x + 5$,
$r_1(x) = x - 1$.

Значить:

$$8 \cdot x^3 + 16 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4 = (4x^2 - 2 \cdot x + 1)(2x + 5) + 6x - 1.$$

Таким чином, кожний неправильний раціональний дріб завжди за допомогою ділення "кутом" можна представити у вигляді суми алгебраїчного многочлена S_{m-n} і правильного раціонального дробу:

$$R(x) = S_{m-n}(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)},\ 0 \leq k < n \leq m.$$

2. Нагадаємо, що невизначений інтеграл від многочлена є знову многочлен степені, на одиницю більшої від попередньої. Залишається навчитися інтегрувати правильний раціональний дріб ($m < n$).

Найпростішими дробами чотирьох типів називають, відповідно, такі раціональні функції:

I. $\dfrac{A}{x-a}$, II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$,

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}$, де k, s – натуральні числа, більші 1;

A, M, N, a, p, q – дійсні числа, причому $p^2-4q<0$.

Як відомо з алгебри, довільний правильний раціональний дріб можна єдиним чином розкласти в суму найпростіших дробів чотирьох типів:

$$\frac{r_k(x)}{Q_n(x)}=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_{ij}}{(x-a_j)^k}\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{jk}\cdot x+N_{jk}}{(x^2+p_j\cdot x+q_j)^k}\right),$$

де знаменник $Q_n(x)$ попередньо розкладено в добуток найпростіших множників

$$Q_n(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_l)^{k_l}\cdot(x^2+p_1\cdot x+q_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_s\cdot x+q_s)^{m_s}.$$

Для конкретного визначення сталих A, M та N у розкладі дробу $r_k(x)/Q_n(x)$ в суму найпростіших, слід привести названу рівність до спільного знаменника і після цього прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках.

Крім методу невизначених коефіцієнтів, який приводить до мети завжди, широко вживаний *"Метод викреслювання"*.

Цей метод особливо ефективний у застосуванні до раціональних дробів, знаменник яких $Q_n(x)$ має лише прості (однократні) дійсні корені. Нехай

$$Q_n(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)\cdot\ldots\cdot(x-a_n),$$

тоді $\dfrac{r_k}{Q_n}=\dfrac{A_1}{x-a_1}+\dfrac{A}{x-a_2}+\ldots+\dfrac{A_n}{x-a_n}$,

і значить

$$r_k(x)=A_1(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)+A_2(x-a_1)\cdot(x-a_3)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)+\ldots$$
$$\ldots+A_n\cdot(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}).$$

Після підстановки в останню формулу значення $x=a_j$ всі доданки правої частини, окрім j-го, перетворюються на нуль:

$$\begin{array}{l|l}
x=a_1 & r_k(a_1)=A_1\cdot(a_1-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_1-a_n),\Rightarrow A_1=\dfrac{r_k(a_1)}{(a_1-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_1-a_n)}; \\
\ldots. & \ldots..\quad\ldots\ldots..\quad\ldots\ldots...\quad\ldots\ldots\ldots.. \\
x=a_n & r_k(a_n)=A_n\cdot(a_n-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_{n-1}),\Rightarrow A_n=\dfrac{r_k(a_n)}{(a_n-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_{n-1})}.
\end{array}$$

3. Кожен із чотирьох вище означених найпростіших дробів інтегрується в елементарних функціях.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\cdot\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\cdot\int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$, $k\geq 2$.

III. В знаменнику дробу третього типу ($p^2-4q<0$) виділяємо новий квадрат і проводимо заміну: $t = x+\frac{p}{2}$, $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{2t\cdot\mathrm{d}t}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\ln\left|t^2+a^2\right|+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

IV. Як і в попередньому випадку, за допомогою заміни

$t = x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, $n\geq 2$, запишемо

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{2t\cdot\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}=$$

$$=-\frac{M}{2(n-1)}\cdot\left(t^2+a^2\right)^{1-n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)K_n(t),$$

де $K_n(t)=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$ – обчислюється за рекурентною формулою (див. контрольне завдання 4 з розділу 4):

$$K_n(t)=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\cdot K_{n-1},\ n\geq 2,$$

$$K_1(t)=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Таким чином, довільна раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

Додаток. Метод Остроградського виділення раціональної частини інтеграла від раціонального дробу.

Видатному російському вченому, талановитому учневі Коші, українцю за походженням, Михайлу Васильовичу Остроградському (1801 – 1861) належить дотепний метод інтегрування раціональних дробів. При інтегруванні дробів за цією методою не обов'язково попередньо розкладати заданий дріб в суму найпростіших. Особливо ефективний метод в тому випадку, коли корені знаменника в основному кратні або коли їх знаходження викликає ускладнення.

Остроградський М.В. встановив, що

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\mathrm{d}x,$$

де $P_1(x)/Q_1(x)$ та $P_2(x)/Q_2(x)$ – правильні раціональні дроби. Тут $Q_1(x)$ – найбільший спільний дільник знаменника $Q(x)$ і його похідної $Q'(x)$:

$$Q_1(x) = HCD\left\{Q(x);\ Q'(x)\right\}.$$

До речі, $Q_1(x)$ можна обчислити за відомим з алгебри алгоритмом Евкліда, многочлен $Q_2(x)$ – частка від ділення $Q(x)$ на $Q_1(x)$:

$$Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x).$$

Наприклад, якщо

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_l)^{k_l} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

то $Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot (x-a_l)^{k_l-1} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}$,

а $Q_2(x) = (x-a_1) \cdot \ldots \cdot (x-a_l) \cdot (x^2+p_1x+q_1) \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)$.

Як бачимо, за цією методою інтегрування раціональної функції загального виду зводиться до інтегрування правильних дробів з простими коренями знаменника.

Залишається обчислити многочлени $P_1(x)$ та $P_2(x)$, які задаються як многочлени з невизначеними коефіцієнтами, степені на 1 меншої $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ відповідно.

Для обчислення вказаних невизначених коефіцієнтів потрібно продиференціювати формулу Остроградського:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Потім привести отриманий результат до спільного знаменника і зіставити коефіцієнти біля однакових степенів x в чисельниках.

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення комплексного числа і поля комплексних чисел. Означте дію спряження комплексного числа, наведіть її властивості і геометричне тлумачення.
2. Сформулюйте і спробуйте самостійно довести теорему Безу.
3. Сформулюйте основну теорему алгебри.
4. Спираючись на основну теорему алгебри, покажіть, що алгебраїчний многочлен степені n над полем комплексних чисел має рівно n коренів.
5. Для алгебраїчних многочленів з дійсними коефіцієнтами сформулюйте теорему про спряжені корені.
6. Нехай задано правильний дріб

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n \cdot \varphi(x)},$$ де $\varphi(x)$ – многочлен такий, що $\varphi(a) \neq 0$.

Покажіть, що тоді має місце такий розклад в суму правильних дробів:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n \cdot \varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k} \cdot \varphi(x)},$$

де $\psi(x)$ – многочлен, k – натуральне число, стала $A = P(a)/\varphi(a)$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знаменник має дійсні різні корені.

$$I=\int\frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}\mathrm{d}x\,.$$

Розв’язання. Дріб під інтегралом неправильний, оскільки степінь чисельника вища степеня знаменника ($4>3$). Тому насамперед виділимо цілу частину. Для цього поділимо чисельник $2x^4-x^3+5$ на знаменник x^3-9x:

$$\begin{array}{l|l}
-\,2x^4-x^3+5 & x^3-9x \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{2x^4-18x^2\qquad} & 2x-1 \\
\quad -\,-x^3+18x^2+5 & \\
\qquad \underline{-x^3+9x\qquad\quad} & \\
\qquad\qquad 18x^2-9x+5 &
\end{array}$$

Тому $I=\int\left(2x-1+\dfrac{18x^2-9x+5}{x^3-9x}\right)\mathrm{d}x=x^2-x+\int\dfrac{18x^2-9x+5}{x^3-9x}\mathrm{d}x.$

Розкладемо знаменник підінтегрального дробу на множники

$$x^3-9x=x(x^2-9)=x(x-3)(x+3)\,.$$

Розглянемо дріб

$$\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x-3)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x+3)}\,.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B і C застосуємо метод "викреслювання":

$$\begin{array}{l|l}
x=0 & 5=A(-3)\cdot 3;\; A=-\dfrac{5}{9}; \\
x=3 & 18\cdot 9-9\cdot 3+5=B\cdot 3(3+3);\, 140=18B;\; B=\dfrac{70}{9}; \\
x=-3 & 8\cdot 9-9\cdot 3+5=C(-3)(-3-3);\, 194=18C;\; C=\dfrac{97}{9}.
\end{array}$$

Отже

$$I=x^2-x+\int\left(\frac{-\frac{5}{9}}{x}+\frac{\frac{70}{9}}{x-3}+\frac{\frac{97}{9}}{x+3}\right)\mathrm{d}x=x^2-x-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C\,.$$

Приклад 2. Знаменник має дійсні кратні корені.

$$I=\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}\mathrm{d}x\,.$$

Розв'язання. Даний дріб правильний і не скоротний, тому подамо його у вигляді

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)^2+C(x-1)^2(x+2)^2+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2)}{(x-1)^3(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(C+E)x^4+(B+2C+D-E)x^3+(A+3B-3C-3D-3E)x^2}{(x-1)^3(x+2)^2}+$$

$$+\frac{(4A-4C+3D+5E)x+4A-4B+4C-D-2E}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Скомбінуємо метод "викреслювання"

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 2+5-8=A(1+2)^2;\ -1=9A;\ A=-\dfrac{1}{9}; \\ x=-2 & 2\cdot4-5\cdot2-8=D(-2-1)^3;\ -10=-27D;\ D=\dfrac{10}{27}. \end{array}$$

з методом невизначених коефіцієнтів, відповідно до якого маємо систему

$$\begin{cases} C+E=0, \\ B+2C+D-E=0, \\ A+3B-3C-3D-3E=2, \\ 4A-4C+3D+5E=5, \\ 4A-4B+4C-D-2E=-8. \end{cases}$$

Підставивши в перші три рівняння знайдені значення $A=-\frac{1}{9}$ і $D=\frac{10}{27}$, отримаємо

$$\begin{cases} C+E=0, \\ B+2C+\dfrac{10}{27}-E=0, \\ -\dfrac{1}{9}+3B-3C-3\cdot\dfrac{10}{27}-3E=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C+E=0, \\ B+2C-E=-\dfrac{10}{27}, \\ B-C-E=\dfrac{29}{27}. \end{cases}$$

За методом Гаусса маємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -\dfrac{10}{27} \\ 1 & -1 & -1 & \dfrac{29}{27} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\dfrac{39}{27} \\ 1 & 0 & 0 & \dfrac{29}{27} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{29}{27} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{13}{27} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{29}{27} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{13}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{13}{27} \end{array}\right).$$

Звідси знайдемо, що $B=\frac{29}{27}$, $C=-\frac{13}{27}$ і $E=\frac{13}{27}$. Отже

$$I=\int\left(\frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{29}{27}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{13}{27}}{x-1}+\frac{\frac{10}{27}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{13}{27}}{x+2}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{9}\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{29}{27}\frac{1}{x-1}-\frac{13}{27}\ln|x-1|-\frac{10}{27}\frac{1}{x+2}+\frac{13}{27}\ln|x+2|+C=$$

$$=-\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)}+\frac{13}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C.$$

Приклад 3. Знаменник має комплексні корені.

$$I=\int\frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання. Дріб, що стоїть під інтегралом, – неправильний. Тому виділимо цілу частину.

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4+5x^3-7x^2+5 & x^3-x^2+5x-5 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^4-x^3+5x-5} & x+6 \\
- & 6x^3-12x^2+5x+5 & \\
 & \underline{6x^3-6x^2+30x-30} & \\
 & -6x^2-25x+35 &
\end{array}$$

Отримаємо $x+6-\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}$.

Розкладемо знаменник на множники

$x^3-x^2+5x-5=x^2(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x^2+5)$.

Розкладемо дріб $\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}$ на найпростіші.

$$\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}=\frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+(5A-C)}{(x-1)(x^2+5)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, відповідно до МНК, будемо мати

$$\begin{cases}A+B=6,\\-B+C=25,\\5A-C=-35.\end{cases}$$

Отже, за методом Гаусса маємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 5 & 0 & -1 & -35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & -5 & -1 & -65 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & -6 & -190 \end{array}\right)$$

$C = \dfrac{190}{6} = \dfrac{95}{3}$,

$B = C - 25 = \dfrac{95}{3} - 25 = \dfrac{20}{3}$,

$A = -B + 6 = -\dfrac{20}{3} + 6 = -\dfrac{2}{3}$.

Дістанемо $A = -\dfrac{2}{3}$; $B = \dfrac{20}{3}$; $C = \dfrac{95}{3}$.

Тоді $I = \displaystyle\int \left(x + 6 - \left(\frac{-\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{20}{3}x + \frac{95}{3}}{x^2+5} \right) \right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 6x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{20}{3}\int \frac{x}{x^2+5}\mathrm{d}x -$

$- \dfrac{95}{3}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5} = \frac{x^2}{2} + 6x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{10}{3}\ln(x^2+5) - \frac{95}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

Приклад 4. Знаменник має кратні комплексні корені.

$$I = \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб на найпростіші:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+4}.$$

Аналогічно до попередніх задач знайдемо:

$A = \dfrac{1}{25}$, $B = -\dfrac{4}{125}$, $C = \dfrac{18}{125}$, $D = -\dfrac{31}{125}$, $E = \dfrac{4}{125}$, $F = \dfrac{3}{125}$.

Тоді $I = \displaystyle\int \left(\frac{\frac{1}{25}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{4}{125}}{x-1} + \frac{\frac{18}{125}x - \frac{31}{125}}{(x^2+4)^2} + \frac{\frac{4}{125}x + \frac{3}{125}}{x^2+4} \right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{25(x-1)} -$

$- \dfrac{4}{125}\ln|x-1| + \dfrac{1}{125}\displaystyle\int \frac{18x-31}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x + \frac{4}{125}\int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x + \frac{3}{125}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = -\frac{1}{25(x-1)} -$

$- \dfrac{4}{125}\ln|x-1| + \dfrac{1}{125}\displaystyle\int \frac{18x-31}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x + \frac{2}{125}\ln(x^2+4) + \frac{3}{250}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$

Обчислимо останній у цьому виразі інтеграл окремо.

$$I_1=\int\frac{18x-31}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=18\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}-31\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}=-\frac{9}{x^2+4}-31\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}.$$

Під інтегралом $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$ міститься дріб 4-го виду, який віднайдемо за методом Ейлера:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\int x\frac{x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=x; & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v=\dfrac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}; & v=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+4)^{-1}}{-1}=-\dfrac{1}{2(x^2+4)} \end{array}\right|=\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2(x^2+4)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4}\right)=\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{x}{8(x^2+4)}+C.$$

Тоді $I_1=-\dfrac{9}{x^2+4}-31\left(\dfrac{1}{16}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{8(x^2+4)}\right)+C=-\dfrac{9}{x^2+4}-\dfrac{31}{16}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}-$

$$-\frac{31x}{8(x^2+4)}+C=-\frac{31x+72}{8(x^2+4)}-\frac{31}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Отже $I=-\dfrac{1}{25}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{125}\ln|x-1|+\dfrac{1}{125}\left(-\dfrac{31x+72}{8(x^2+4)}-\dfrac{31}{16}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{2}{125}\ln(x^2+4)+$

$$+\frac{3}{250}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{1}{25}\frac{40(x^2+4)+(31x+72)(x-1)}{40(x-1)(x^2+4)}-$$

$$-\frac{7}{2000}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{71x^2+41x+88}{1000(x-1)(x^2+4)}-\frac{7}{2000}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

В задачах 1 – 56 знайти інтеграли.

Завдання 6.1. Знаменник має тільки дійсні різні корені.

1. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}$.

2. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{2x^2-3x-2}$.

3. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\mathrm{d}x$.

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{6x^3-7x^2-3x}$.

5. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$.

6. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\mathrm{d}x$.

7. $\int \frac{32x\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.

8. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-3x^2+2}$.

9. $\int \frac{(2x^2-5)\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^2+6}$.

10. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\mathrm{d}x$.

Завдання 6.2. Знаменник має тільки дійсні корені; деякі корені – кратні.

11. $\int \frac{(x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+1)}$.

12. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

13. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+5x^2+8x+4}$.

14. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$.

15. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\mathrm{d}x$.

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2}$.

17. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

18. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \mathrm{d}x$.

20. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

21. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$.

22. $\int \frac{(7x^3-9)\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^3+6x^2}$.

23. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\mathrm{d}x$.

24. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\mathrm{d}x$.

Завдання 6.3. Знаменник має комплексні різні корені.

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$.

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

27. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

28. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-2x+5)}$.

29. $\int \frac{(x^4+1)\,\mathrm{d}x}{x^3-x^2+x-1}$.

30. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1-x^4}$.

31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

33. $\int \frac{(3x^2+x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

34. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x$.

35. $\int \frac{(x^3-6)\,\mathrm{d}x}{x^4+6x^2+8}$.

36. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$

Завдання 6.4. Знаменник має комплексні кратні корені.

37. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

38. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

39. $\int \frac{(5x^2-12)\,\mathrm{d}x}{(x^2-6x+13)^2}$.

40. $\int \frac{(x+1)^4\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^3}$.

41. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3}$.

42. $\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

43. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^4}$.

44. $\int \frac{x^9\,\mathrm{d}x}{(x^4-1)^2}$.

Завдання 6.5. Метод Остроградського.

45. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

46. $\int \frac{(4x^2-8x)\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

47. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,\mathrm{d}x$.

48. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

49. $\int \frac{(x^2-1)^2\,\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)^3}$.

50. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^3+1)^2}$.

51. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+10)^3}$.

52. $\int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^3}$.

53. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

54. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

55. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.

56. $\int \frac{9\,\mathrm{d}x}{5x^2(3-2x^2)^3}$.

§ 7. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Основні поняття та теореми

Нагадуємо, *одночленом* (*мономом*) називається алгебраїчний вираз, який містить тільки дії множення і піднесення до степеня чисел і букв. Числовий множник, що стоїть перед буквеними множниками, називається коефіцієнтом. Сума степенів буквених множників називається степенем монома. Наприклад, моном $\frac{4}{5}x^2 \cdot y^2 \cdot z$ має степінь 5.

Алгебраїчна сума кількох одночленів називається *многочленом* або *поліномом* (не обов'язково однієї змінної). Степінь многочлена визначається як старший степінь мономів, з яких складено цей многочлен.

Алгебраїчні вирази, складені із чисел і букв за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з натуральним показником, називаються раціональними алгебраїчними виразами.

Наприклад, раціональною функцією від двох аргументів x та y називається вираз виду

$$R(x;\, y) = \frac{P(x;\, y)}{Q(x;\, y)},$$

в якому через $P(x;\, y)$ і $Q(x;\, y)$ позначено довільні многочлени від двох аргументів x та y.

Виділимо таке просте твердження:
якщо $R(x;\, y)$ – раціональна функція двох змінних x і y, а $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ – три довільні раціональні функції від однієї змінної t, то вираз

$$R_4(t) = R\left[R_1(t),\, R_2(t)\right] \cdot R_3(t)$$

є *раціональною* функцією змінної t.

Заміна під знаком інтеграла, яка приводить початковий вираз до інтегрування раціонального дробу, називається *спеціальною раціоналізуючою підстановкою*.

Дробово-лінійною ірраціональністю будемо називати функцію виду

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

де a, b, c, d – деякі сталі, n – натуральне число.

Ірраціональність виду

$$R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right), \text{ де } \frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s} \text{ – раціональні числа,}$$

прийнято називати *найпростішою*.

Лінійною ірраціональністю називають вираз виду

$$R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}},...,(ax+b)^{\frac{r}{s}} \right),$$

де a, b – деякі сталі; m, n,..., r, s – натуральні числа.

Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}} \right)\mathrm{d}x$$

інтегруються в елементарних функціях за допомогою раціоналізуючої підстановки

$$t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{ або } t^k=\frac{ax+b}{cx+d},$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},...,\frac{r}{s}$.

Окремо розглянемо інтегрування біноміальних диференціалів. Вираз $x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, $(a\neq 0, b\neq 0)$ називається *біноміальним диференціалом*. Числа a, b, m, n, p – дійсні.

Одному із засновників сучасної московської школи математиків, видатному вченому Пафнутію Львовичу Чебишеву (1821 – 1894) належить така *теорема:*

Інтеграл від біноміального диференціала

$$\int x^m\cdot(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$$

може бути зінтегрований в елементарних функціях шляхом раціоналізуючої заміни тільки для раціональних m, n, p *і в одному з трьох випадків*:

1. *Нехай* p *– ціле. Тоді* $x=t^k$, *де* k *– спільний знаменник* m *і* n.

2. *Нехай* $\frac{m+1}{n}$ *– ціле. Тоді* $a+bx^n=t^k$, *де* k *– знаменник дробу* p.

3. *Нехай* $\frac{m+1}{n}+p$ *– ціле. Тоді* $ax^{-n}+b=t^k$, *де* k *– знаменник дробу* p.

Зауважимо, що вказані три випадки в теоремі Чебишева відповідають випадкам найпростішої, лінійної та дробово-лінійної ірраціональностей.

Контрольні питання та завдання

1. Запишіть загальний вигляд многочлена змінних x і y степені $n = 2; 3; 4$.
2. Покажіть, що заміна змінної $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ буде раціоналізуючою для ірраціональності $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$.
3. Запишіть раціоналізуючі підстановки для кожного з прикладів і виконайте заміну змінної:
$$\text{а) } \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+5}}; \quad \text{в) } \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$
4. Покажіть, що заміна $\dfrac{x-a}{x-b} = t^n$ є раціоналізуючою для ірраціональності
$$\int R\left(x, (x-a)^{\frac{p}{n}}, (x-b)^{\frac{q}{n}}\right) \mathrm{d}x,$$
де p, q, n, k – цілі числа такі, що $p + q = k \cdot n$.
5. Запишіть нижченаведені інтеграли у вигляді біноміальних диференціалів, спробуйте вказати відповідну заміну
$$\text{а) } \int \sqrt{x^3 + x^4}\,\mathrm{d}x; \text{ б) } \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} \mathrm{d}x; \text{ в) } \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Інтегрування найпростіших ірраціональностей.

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

Розв’язання. Подамо інтеграл у вигляді $\int \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}x$.

Найменшим спільним кратним дробів $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{2}$ є 6, тобто під інтегралом вираз, раціональний відносно $x^{\frac{1}{6}}$. Тому виконаємо заміну

$$I=\int\frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2}{\left(x^{\frac{2}{6}}\right)^4-\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l}x^{\frac{1}{6}}=y,\\ x=y^6,\\ \mathrm{d}x=6y^5\,\mathrm{d}y\end{array}\right|=\int\frac{y^2}{y^4-y^3}6y^5\,\mathrm{d}y=6\int\frac{y^7}{y^3(y-1)}\mathrm{d}y=$$

$$=6\int\frac{y^4}{y-1}\mathrm{d}y=\left|\begin{array}{c}\text{Виділимо цілу частину}\\ \begin{array}{rl} -\;y^4 & \Big|\,y-1\\ \underline{y^4-y^3} & \Big|\,\overline{y^3+y^2+y+1}\\ -\;y^3 & \\ \underline{y^3-y^2} & \\ -\;y^2 & \\ \underline{y^2-y} & \\ -\;y & \\ \underline{y-1} & \\ 1 & \end{array}\end{array}\right|=$$

$$=6\int\left(y^3+y^2+y+1+\frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y=6\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|\right)+C=$$

$$=\left|y=x^{\frac{1}{6}}\right|=6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C.$$

Приклад 2. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей.

$$I=\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\,\mathrm{d}x.$$

Розв'язання. Підстановка $\frac{5-3x}{4+7x}=y^2$. Визначимо звідси x та $\mathrm{d}x$.

$5-3x=4y^2+7xy^2$; $5-4y^2=3x+7xy^2$; $5-4y^2=(3+7y^2)x$;

$x=\frac{5-4y^2}{7y^2+3}$; $\mathrm{d}x=\frac{-8y(7y^2+3)-14y(5-4y^2)}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}x=\frac{-94y}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y$.

Тому $\quad I=\int y\frac{-94y}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y=-94\int\frac{y^2}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y=$

Проінтегруємо частинами

$$=\left|\begin{matrix} u=y; & \mathrm{d}u=\mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}v=\dfrac{y}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y; & v=-\dfrac{1}{14}\cdot\dfrac{1}{7y^2+3}\end{matrix}\right|=$$

$$=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{y}{7y^2+3}+\frac{1}{14}\int\frac{\mathrm{d}y}{7y^2+3}\right)=$$

$$=-94\left(-\frac{1}{14}\frac{y}{7y^2+3}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}y}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{47}{7}\cdot\frac{y}{7y^2+3}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}y+C=\left|y=\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right)+C.$$

Приклад 3. Інтегрування біноміальних диференціалів (другий випадок).

$$I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання. Запишемо підінтегральний вираз у вигляді біноміального диференціала

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\int x^m(ax^n+b)^p\,\mathrm{d}x.$$

Звідси $m=-\dfrac{1}{2}$; $n=\dfrac{1}{4}$; $p=\dfrac{1}{3}$.

Обчислимо: $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$ – ціле число.

Отже, ми маємо другий випадок інтегрованості біноміальних диференціалів за теоремою Чебишева. Підстановка запишеться так:

$$1+x^{\frac{1}{4}}=y^3;\ y=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}};\ x^{\frac{1}{4}}=y^3-1;\ x=(y^3-1)^4;$$

$$x^{-\frac{1}{2}}=\left((y^3-1)^4\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(y^3-1)^2};\ \mathrm{d}x=4(y^3-1)^3 3y^2\,\mathrm{d}y=12(y^3-1)^3y^2\,\mathrm{d}y.$$

Тому

$$I=\int\frac{1}{(y^3-1)^2}y\cdot 12(y^3-1)^3y^2\,\mathrm{d}y=12\int y^3(y^3-1)\,\mathrm{d}y=12\int(y^6-y^3)\,\mathrm{d}y=$$

$$=12\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^4}{4}\right)+C=12y^4\left(\frac{y^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C=\left|y=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}\right|=$$

$$=12\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Приклад 4. Інтегрування біноміальних диференціалів (третій випадок).

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2+3x^2)^3}}.$$

Розв'язання. Запишемо інтеграл у вигляді $I=\int(2+3x^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Тоді $m=0$; $n=2$; $p=-\frac{3}{2}$.

Обчислимо

$\frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\notin Z$;

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1\in Z$ – маємо третій випадок інтегрованості.

Підстановка виглядає так: $2x^{-2}+3=y^2$.

Звідси випливає, що $-2\cdot 2x^{-3}\,\mathrm{d}x=2y\,\mathrm{d}y$; $x^{-3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}y\,\mathrm{d}y$.

Перетворимо підінтегральний вираз

$$\left(2+3x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\left(x^2\left(\frac{2}{x^2}+3\right)\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=x^{-3}(2x^{-2}+3)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}y^{-2}\,\mathrm{d}y.$$

Тому

$$I=-\frac{1}{2}\int y^{-2}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\frac{y^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{2y}+C=\left|y=(2x^{-2}+3)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2+3x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2+3x^2}}+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

В задачах 1 – 22 проінтегрувати

Завдання 7.1. Функції виду $R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$.

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$.

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

3. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$.

4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

5. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

6. $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

7. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Завдання 7.2. Диференціальні біноми $x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$.

9. $\displaystyle\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,\mathrm{d}x$.

10. $\displaystyle\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}\mathrm{d}x$.

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

12. $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,\mathrm{d}x$.

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,\mathrm{d}x$.

16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,\mathrm{d}x$.

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

20. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

21. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x$.

22. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

§ 8. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Основні поняття та теореми

Інтеграл виду $\displaystyle\int R(\cos x,\ \sin x)\,\mathrm{d}x$,

де $R(u, v)$ – раціональна функція, завжди інтегрується в елементарних функціях за допомогою раціоналізуючої, і саме тому *універсальної підстановки* $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$:

$$\int R(\cos x,\ \sin x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2};\ x=2\operatorname{arctg}t; \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}; \\ \mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\,.$$

Слід відзначити, що в багатьох випадках універсальна тригонометрична підстановка зводить обчислення інтегралів до дуже громіздких раціональних функцій. Тому в ряді випадків слід користуватися іншими спеціальними тригонометричними підстановками. В цьому аспекті корисна така ***теорема:***

Нехай $R(u, v)$ – раціональна функція. Тоді:

1) Якщо $R(-u, v)\equiv R(u, v)$ парна по першому аргументу, то $R(u, v)\equiv R_1(u^2, v)$.

2) Якщо $R(-u, v)\equiv -R(u, v)$ непарна по першому аргументу, то $R(u, v)\equiv R_2(u^2, v)\cdot u$.

3) Якщо $R(-u,-v)\equiv R(u,v)$ парна по двох аргументах одночасно, то $R(u, v)\equiv R_3\left(\dfrac{u}{v}, v^2\right)$.

Наведемо деякі спеціальні *тригонометричні підстановки.*

A) У випадку виконання рівності $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$:

$\int R(\sin x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R_1(\cos x, \sin^2 x)\cdot \underline{\sin x}\,\mathrm{d}\underline{x}$ – раціоналізуюча підстановка $t = \cos x$.

B) У випадку виконання рівності $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x; \sin x)$:

$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R_1(\cos^2 x, \sin x)\cdot \underline{\cos x}\,\mathrm{d}\underline{x}$ – раціоналізуюча підстановка $t = \sin x$.

C) У випадку виконання рівності $R(-\cos x; -\sin x) = R(\cos x; \sin x)$:

$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R_1(\cos^2 x, \operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$ – раціоналізуюча підстановка $t = \operatorname{tg}x$ або $t = \operatorname{ctg}x$.

Зауваження 1. При обчисленні інтегралів виду

$\int \sin^m x\cdot\cos^n x\,\mathrm{d}x$, де m , n – цілі числа,

інколи зручно користуватися тригонометричними формулами зниження степеня $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ та $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Зауваження 2. Інтеграли виду

$$\int \sin ax \cdot \cos bx \, \mathrm{d}x, \ \int \sin ax \cdot \sin bx \, \mathrm{d}x, \ \int \cos ax \cdot \cos bx \, \mathrm{d}x$$

обчислюють за допомогою тригонометричних формул

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)].$$

Контрольні питання та завдання

1. Запишіть інтеграл $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, \mathrm{d}x$ у вигляді біноміального диференціала, виконавши заміну $t = \sin x$.
2. Зінтегруйте $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$, $\int \cos^3 x \, \mathrm{d}x$, $\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^m x \, \mathrm{d}x$.
3. Обчисліть $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ та $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.
4. Обґрунтуйте необхідність застосування універсальної підстановки і виконайте її: $\int \frac{\mathrm{d}x}{7 + 2\sin x + 3\cos x}$.
5. Обчисліть інтеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.
6. Доведіть, що

   $$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} \mathrm{d}x = Ax + B \ln\left|a \sin x + b \cos x\right| + C,$$

   де A, B, C – сталі, $x \neq \pi k - \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$ або $\cos x$.

$$I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} \mathrm{d}x.$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{(-\sin x)^5}{\cos^4 x} = -\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}$, то підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, отже проводимо заміну $z = \cos x$.

$$I = \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x} \underline{\sin x \, \mathrm{d}x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x} \mathrm{d}\cos x = \left|\cos x = z\right| = -\int \frac{(1-z^2)^2}{z^4} \mathrm{d}z =$$

$$= -\int \frac{1-2z^2+z^4}{z^4}\,\mathrm{d}z = -\int\left(\frac{1}{z^4}-\frac{2}{z^2}+1\right)\mathrm{d}z = -\left(-\frac{1}{3z^3}+\frac{2}{z}+z\right)+C = \left|z=\cos x\right| =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x + C.$$

Приклад 2. Підінтегральна функція парна одночасно по $\sin x$ і $\cos x$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{(-\sin x)^3(-\cos x)^5} = \frac{1}{(-\sin^3 x)(-\cos^5 x)} = \frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}$, то підінтегральна функція парна одночасно по $\sin x$ і $\cos x$. Рекомендована заміна $\mathrm{tg}\, x = z$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^3 x\cos^5 x} = \int \frac{1}{\mathrm{tg}^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^6 x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\mathrm{tg}^3 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3 \mathrm{d}\,\mathrm{tg}\, x =$$

$$= \int \frac{(\mathrm{tg}^2 x+1)^3}{\mathrm{tg}^3 x}\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\, x = \left|\mathrm{tg}\, x = z\right| = \int \frac{(z^2+1)^3}{z^3}\mathrm{d}z = \int \frac{z^6+3z^4+3z^2+1}{z^3}\mathrm{d}z =$$

$$= \int\left(z^3+3z+\frac{3}{z}+\frac{1}{z^3}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{4}z^4+\frac{3}{2}z^2+3\ln|z|-\frac{1}{2z^2}+C = \left|z=\mathrm{tg}\, x\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x+\frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x+3\ln|\mathrm{tg}\, x|-\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x}+C = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x+\frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x+3\ln|\mathrm{tg}\, x| -$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x + C.$$

Приклад 3. Підінтегральна функція парна одночасно по $\sin x$ і $\cos x$.

$$\int \mathrm{ctg}^5 x\,\mathrm{d}x.$$

Розв'язання.

$$\int \mathrm{ctg}^5 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l}\mathrm{ctg} = z;\\ \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\end{array}\right| = -\int\frac{z^5}{1+z^2}\mathrm{d}z = \left|\begin{array}{l}\text{Виділимо цілу частину}\\ \begin{array}{r|l} -\;z^5 & z^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{z^5+z^3} & z^3-z \\ -\;-z^3 & \\ \underline{-z^3-z} & \\ z & \end{array}\end{array}\right| =$$

$$= -\int\left(z^3-z+\frac{z}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z = -\frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(z^2+1)+C = \left|z=\mathrm{ctg}\, x\right| =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4}+\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{ctg}^2 x+1)+C = -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4}+\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sin^2 x}+C =$$

$$=-\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4}+\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}+\ln|\sin x|+C.$$

Приклад 4. Універсальна тригонометрична підстановка.

$$I=\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=z;\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2};\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2};\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

$$I=\int\frac{5+\frac{12z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(4+\frac{3(1-z^2)}{1+z^2}\right)}\cdot\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int\frac{5z^2+12z+5}{z(z^2+7)}\mathrm{d}z.$$

Розкладемо на найпростіші дріб, що стоїть під інтегралом:

$$\frac{5z^2+12z+5}{z(z^2+7)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{z^2+7}=\frac{A(z^2+7)+z(Bz+C)}{z(z^2+7)}.$$

Застосовуючи, наприклад, метод невизначених коефіцієнтів, знайдемо, що $A=\frac{5}{7}$; $B=\frac{30}{7}$; $C=12$. Тому

$$I=\int\left(\frac{\frac{5}{7}}{z}+\frac{\frac{30}{7}z+12}{z^2+7}\right)\mathrm{d}z=\frac{5}{7}\ln|z|+\frac{15}{7}\ln(z^2+7)+\frac{12}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\left|z=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|=\frac{5}{7}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{15}{7}\ln\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+7\right)+\frac{12}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Приклад 5. Застосуванням універсальної тригонометричної підстановки, обчислити інтеграл

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}.$$

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$z=\mathrm{tg}\frac{x}{2};\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2};\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

$$I=\int\frac{\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{(1+z^2)^3}}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+z^2)^2}{z^3}\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int\frac{z^4+2z^2+1}{z^3}\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int\left(z+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{2}\ln|z|-\frac{1}{8}z^{-2}+C=\left|z=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{8}\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 8.1. Обчислити інтеграли

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.
2. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin^3 x}$.
4. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x \sin^3 x}$.
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^4 x}$.
7. $\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{(1-\cos x)^2}$.
8. $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{(1-\cos x)^2}$.
9. $\int \cos^6 x \, \mathrm{d}x$.
10. $\int \mathrm{ctg}^4 x \, \mathrm{d}x$.
11. $\int \mathrm{tg}^5 x \, \mathrm{d}x$.
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{tg}^8 x}$.
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$.
14. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \mathrm{d}x$.
15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2}$.
16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$.
17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\cos x - 2\sin x}$.
18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{tg}\, x \cos 2x}$.
19. $\int \frac{\cos^2 x \, \mathrm{d}x}{\sin x \cos 3x}$.
20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{tg}\, x}$.
21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5 - 3\cos x}$.
22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5 + 4\sin x}$.
23. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} \mathrm{d}x$.
24. $\int \frac{\sin^2 x \, \mathrm{d}x}{1 - \mathrm{tg}\, x}$.
25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + \mathrm{tg}\, x + 4\,\mathrm{ctg}\, x}$.
26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + 2\sec x)^2}$.
27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.
28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.
29. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin^2 x}$.
30. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - \sin^4 x}$.
31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$.
32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x}$.
33. $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.
34. $\int \sqrt{1 + \sin x} \, \mathrm{d}x$.

35. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} \mathrm{d} x$.

36. $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x} \mathrm{d} x$.

37. $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

38. $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$.

39. $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}\, \mathrm{d} x$.

40. $\int \frac{(\cos 2x - 3) \mathrm{d} x}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}}$.

41. $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.

42. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, \mathrm{d} x$.

§ 9. ІНТЕГРУВАННЯ КВАДРАТИЧНИХ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ

Основні поняття та теореми

Функцію виду $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ називають *квадратичною ірраціональністю*. Відомо, що інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \mathrm{d} x$$

завжди раціоналізується однією із так званих підстановок Ейлера:

1) $b^2 - 4ac < 0$ і $a > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x \cdot \sqrt{a}$;

2) $b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1) \cdot (x - x_2)} = t(x - x_1)$.

Обчислення інтегралів за допомогою підстановки Ейлера звичайно призводить до громіздких виразів, тому ці підстановки слід застосовувати лише тоді, коли початковий інтеграл не вдається зінтегрувати іншим, більш коротким, шляхом.

Зауважимо, що $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$. Тому інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \mathrm{d} x$$

за допомогою підстановки $t = x + \frac{b}{2a}$, $c - \frac{b^2}{4a} = \pm m^2$ зводиться до одного з трьох інтегралів $\int R(t, \sqrt{m^2 - t^2}) \mathrm{d} t$, $\int R(t, \sqrt{t^2 - m^2}) \mathrm{d} t$, $\int R(t, \sqrt{t^2 + m^2}) \mathrm{d} t$.

Для обчислення отриманих інтегралів досить часто виявляється зручним застосування тригонометричних або гіперболічних підстановок ($\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1$):

A) $\int R(t,\sqrt{m^2-t^2})\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} t = m\cdot\sin\varphi, \\ \mathrm{d}t = m\cdot\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{matrix}\right| = m\cdot\int R(m\cdot\sin\varphi, m\cdot\cos\varphi)\cos\varphi\cdot\mathrm{d}\varphi$,

або $\int R(t,\sqrt{m^2-t^2})\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} t = m\cdot\mathrm{th}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t = \dfrac{m}{\mathrm{ch}^2\,\varphi}\mathrm{d}\varphi \end{matrix}\right| = m\cdot\int R\left(m\cdot\mathrm{th}\,\varphi, \dfrac{m}{\mathrm{ch}\,\varphi}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

B) $\int R(t,\sqrt{t^2-m^2})\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} t = \dfrac{m}{\cos\varphi}, \\ \mathrm{d}t = m\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \end{matrix}\right| = m\int R\left(\dfrac{m}{\cos\varphi}, m\cdot\mathrm{tg}\,\varphi\right)\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$,

або $\int R(t,\sqrt{t^2-m^2})\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} t = m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t = m\cdot\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{matrix}\right| = m\cdot\int R(m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi, m\cdot\mathrm{sh}\,\varphi)\cdot\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

C) $\int R(t,\sqrt{t^2+m^2})\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} t = m\cdot\mathrm{tg}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t = \dfrac{m}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \end{matrix}\right| = m\cdot\int R\left(m\cdot\mathrm{tg}\,\varphi, \dfrac{m}{\cos\varphi}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$,

або $\int R(t,\sqrt{t^2+m^2})\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} t = m\cdot\mathrm{sh}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t = m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{matrix}\right| = m\cdot\int R(m\cdot\mathrm{sh}\,\varphi, m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi)\cdot\mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

Контрольні питання та завдання

1. Покажіть, що підстановка Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$, де $a<0$, $c>0$ ($ax^2+bx+c \ge 0$) раціоналізує інтеграл
$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x.$$
2. Як зміниться ситуація, коли в квадратичній ірраціональності $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ в умовах першої підстановки Ейлера використати заміну $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}$?
3. Спробуйте довести, що інтеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ завжди можна звести до обчислення одного з трьох інтегралів такого виду:
$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}},$$
$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x.$$
4. Розглянемо інтеграли виду
$\int R(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\mathrm{d}x$ або $\int R(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\mathrm{d}x$.

Відзначимо, що в загальному випадку ці інтеграли не будуть елементарними функціями. Якщо вказані інтеграли не виражаються через елементарні функції, то їх прийнято називати еліптичними. В іншому випадку – псевдоеліптичними. Французький математик Жозеф Ліувілль (1809 – 1882) показав, що еліптичні інтеграли можна записати (шляхом відповідної підстановки) в одному з трьох стандартних виглядів

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \text{ або}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+h\cdot t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, (0<k<1).$$

В кожному з еліптичних інтегралів виконайте заміну $t=\sin\varphi$, запропоновану А.М. Лежандром. Ви повинні отримати:

1) $\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ – еліптичний інтеграл 1-го роду у формі Лежандра;

2) $\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ – еліптичний інтеграл 2-го роду, який пов’язаний з обчисленням довжини дуги еліпса;

3) $\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+h\cdot\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}}$ – еліптичний інтеграл 3-го роду.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Підінтегральний вираз зводиться до вигляду $R(y, \sqrt{a^2-y^2})$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x=\sin t, \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(\sin^2 t+4)\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(\sin^2 t+4)\cos t} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t+4} = \int \frac{1}{1+\frac{4}{\sin^2 t}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\int \frac{1}{1+4(1+\mathrm{ctg}^2\, t)} \mathrm{d}\,\mathrm{ctg}\, t = |\mathrm{ctg}\, t = z| =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}z}{5+4z^2} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2z}{\sqrt{5}} + C = |z=\mathrm{ctg}\, t| = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{ctg}\, t}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin t = x, \\ \mathrm{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{array} \right| = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5}x} + C.$$

Приклад 2. Підінтегральний вираз зводиться до вигляду $R(y, \sqrt{a^2+y^2})$.

$$I=\int\frac{(x+4)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{((x+1)+3)\,\mathrm{d}x}{((x^2+2x+1)+3)\sqrt{(x^2+2x+1)+4}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x+1=y,\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}y\end{matrix}\right|=\int\frac{(y+3)\,\mathrm{d}y}{(y^2+3)\sqrt{y^2+4}}=\left|\begin{matrix}y=2\operatorname{tg}t; \quad \mathrm{d}y=\dfrac{2\mathrm{d}t}{\cos^2 t};\\ \sqrt{y^2+4}=\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t+4}=\dfrac{2}{\cos t}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{2\operatorname{tg}t+3}{(4\operatorname{tg}^2 t+3)\dfrac{2}{\cos t}}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\int\frac{\left(2\dfrac{\sin t}{\cos t}+3\right)\dfrac{1}{\cos t}}{4\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+3}\mathrm{d}t=\int\frac{2\sin t+3\cos t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\mathrm{d}t=$$

$$=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4(1-\cos^2 t)+3\cos^2 t}+$$

$$+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3(1-\sin^2 t)}=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t+3}=2\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t-4}+$$

$$+3\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t+3}=2\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-2}{\cos t+2}\right|+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\left|\begin{matrix}y=2\operatorname{tg}t;\ \operatorname{tg}t=\dfrac{y}{2};\\ \sin t=\dfrac{y}{\sqrt{4+y^2}};\ \cos t=\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}}-2}{\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}}+2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+$$

$$+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{4+y^2}}{1+\sqrt{4+y^2}}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+C=|y=x+1|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+2x+5}}{1+\sqrt{x^2+2x+5}}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

Інший шлях розв’язання пов’язаний з використанням гіперболічної підстановки.

Визначимо $\displaystyle\int\frac{(y+3)\,\mathrm{d}y}{(y^2+3)\sqrt{y^2+4}}$.

$$I=\left|\begin{matrix}y=2\operatorname{sh}z;\\ \mathrm{d}y=2\operatorname{ch}z\,\mathrm{d}z\end{matrix}\right|=\int\frac{(2\operatorname{sh}z+3)2\operatorname{ch}z\,\mathrm{d}z}{(4\operatorname{sh}^2 z+3)\sqrt{4\operatorname{sh}^2 z+4}}=\int\frac{(2\operatorname{sh}z+3)2\operatorname{sh}z\,\mathrm{d}z}{(4\operatorname{sh}^2 z+3)2\operatorname{ch}z}=$$

$$=\int\frac{(2\operatorname{sh}z+3)\,\mathrm{d}z}{4\operatorname{sh}^2z+3}=\left|\begin{array}{ll}\operatorname{th}\dfrac{z}{2}=t; & \operatorname{sh}z=\dfrac{2t}{1-t^2};\\ \operatorname{ch}z=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}; & \mathrm{d}z=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{4t}{1-t^2}+3}{\dfrac{16t^2}{(1-t^2)^2}+3}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}=$$

$$=-2\int\frac{3t^2-4t-3}{3t^4+10t^2+3}\mathrm{d}t.$$

Розкладемо підінтегральний дріб на найпростіші, користуючись методом невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{3t^2-4t-3}{3t^4+10t^2+3}=\frac{3t^2-4t-3}{(3t^2+1)(t^2+3)}=\frac{At+B}{3t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+3}=$$

$$=\frac{(At+B)(t^2+3)+(Ct+D)(3t^2+1)}{(3t^2+1)(t^2+3)}=$$

$$=\frac{(A+3C)t^3+(B+3D)t^2+(3A+C)t+3B+D}{(3t^2+1)(t^2+3)}.$$

Маємо систему

$$\begin{cases}A+3C=0;\\ B+3D=3;\\ 3A+C=-4;\\ 3B+D=-3.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=-\dfrac{3}{2};\\ B=-\dfrac{3}{2};\\ C=\dfrac{1}{2};\\ D=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Тоді

$$I=-2\int\left(\frac{-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}}{3t^2+1}+\frac{\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}}{t^2+3}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{6t+6}{3t^2+1}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{2t+6}{t^2+3}\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3t^2+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2+3)+3\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+1}-3\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3t^2+1}{t^2+3}+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}t-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l}t=\operatorname{th}\dfrac{z}{2};\qquad \operatorname{sh}z=\dfrac{y}{2};\qquad y=x+1;\qquad \operatorname{sh}z=\dfrac{x+1}{2};\\ t=\operatorname{th}\dfrac{z}{2}=\dfrac{\operatorname{ch}z-1}{\operatorname{sh}z}=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2z+1}-1}{\operatorname{sh}z}=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{3\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}\right)+1}{\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}\right)^2+3}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}-$$

$$-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{3}(x+1)}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2x+7-3\sqrt{x^2+2x+5}}{x^2+2x+3-\sqrt{x^2+2x+5}}+$$

$$+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{3}(x+1)}+C.$$

Приклад 3. Підінтегральний вираз зводиться до вигляду $R(y,\sqrt{y^2-a})$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{5}}{\cos t};\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{5}\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ x^2-5=\frac{5}{\cos^2 t}-5=5\,\mathrm{tg}^2\,t \end{array}\right|=\int\frac{\frac{\sqrt{5}\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{5\,\mathrm{tg}^2\,t\sqrt{5}\,\mathrm{tg}\,t}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{1}{5}\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\frac{1}{5}\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{5}\frac{1}{\sin t}+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \frac{1}{\cos t}=\frac{x}{\sqrt{5}};\quad \cos t=\frac{\sqrt{5}}{x}; \\ \sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} \end{array}\right|=-\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C.$$

Інший варіант розв'язання цієї задачі полягає у використанні гіперболічної підстановки.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}=\left|\begin{array}{l} x=\sqrt{5}\,\mathrm{ch}\,z;\ \mathrm{d}x=\sqrt{5}\,\mathrm{sh}\,z\,\mathrm{d}z; \\ x^2-5=5\,\mathrm{ch}^2\,z-5=5\,\mathrm{sh}^2\,z. \end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{sh}\,z\,\mathrm{d}z}{5\,\mathrm{sh}^2\,z\sqrt{5}\,\mathrm{sh}\,z}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}z}{5sh^2z}=-\frac{1}{5}\mathrm{cth}\,z+C=-\frac{1}{5}\frac{\mathrm{ch}\,z}{\mathrm{sh}\,z}+C=-\frac{1}{5}\frac{\mathrm{ch}\,z}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\,z-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{\frac{x}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{x^2}{5}-1}}+C=-\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C.$$

Приклад 4. Підстановки Ейлера (перший випадок): $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Оскільки} \quad a>0, \quad \text{то} \\ \sqrt{x^2+x+1} = -x+t; \;\; t = x+\sqrt{x^2+x+1}; \\ x^2+x+1 = x^2-2xt+t^2; \; x+2xt = t^2-1; \\ x = \frac{t^2-1}{2t+1}; \; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t+1)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{4t^2+4t+1+3}{t(2t+1)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t(2t+1)^2} \right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Розкладемо дріб на найпростіші} \\ \frac{3}{t(2t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(2t+1)^2} + \frac{C}{2t+1} = \\ = \frac{A(2t+1)^2+Bt+Ct(2t+1)}{t(2t+1)^2} \\ \begin{array}{l|l} t=0 & A=3; \\ t=-\frac{1}{2} & 3=-\frac{1}{2}B; \; B=-6; \\ t=-1 & 3=A-B+C; \; 3=3+6+C; \; C=-6. \end{array} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \left(\frac{4}{t} + \frac{-\frac{1}{2}}{(2t+1)^2} + \frac{-6}{2t+1} \right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\ln|t| + \frac{1}{8}\frac{1}{2t+1} - 3\ln|2t+1| + C = \left| t = x+\sqrt{x^2+x+1} \right| =$$

$$= 2\ln\left| x+\sqrt{x^2+x+1} \right| + \frac{1}{8}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1} - 3\ln\left| 2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1 \right| + C.$$

Приклад 5. Підстановки Ейлера (другий випадок): $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Оскільки } a<0, \text{ а } c>0, \text{ то заміна (див. контрольні питання і завдання §1).} \\ \sqrt{1-2x-x^2} = 1-xt; \, 1-2x-x^2 = 1-2xt+x^2t^2; \quad 2xt-2x = x^2t^2+x^2; \\ 2(t-1) = (t^2+1)x; \; x = 2\frac{t-1}{t^2+1}; \; \mathrm{d}x = 2\frac{t^2+1-(t-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = 2\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = \\ = -2\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t; \; \sqrt{1-2x-x^2} = 1-2\frac{t-1}{t^2+1}t = \frac{t^2+1-2t^2+2t}{t^2+1} = \frac{-t^2+2t+1}{t^2+1} \end{array} \right| =$$

$$=-2\int\frac{\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t}{1+\frac{-t^2+2t+1}{t^2+1}}=-2\int\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)(t^2+1-t^2+2t+1)}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)(t+1)}\mathrm{d}t=$$

$$=-\int\frac{t^2+1-2(t+1)}{(t^2+1)(t+1)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{2}{t^2+1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2\,\mathrm{arctg}t-\ln|t+1|+C=$$

$$=\left|t=\frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right|=2\,\mathrm{arctg}\frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}-\ln\left|\frac{1+x-\sqrt{1-2x-x^2}}{x^2}\right|+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 9.1. Обчислити інтеграли.

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x+4}}$.
3. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.
4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.
5. $\int\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.
6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.
7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.
8. $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$.
9. $\int\sqrt{3x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$.
10. $\int\sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x$.
11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.
12. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$.
13. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.
14. $\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.
15. $\int\frac{(2x^2-3x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.
16. $\int\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x$.
17. $\int\frac{3x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.
18. $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x$.
19. $\int\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\mathrm{d}x$.
20. $\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.
21. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.
22. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\mathrm{d}x$.

23. $\int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

24. $\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

25. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

27. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

28. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

29. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

30. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (підстановка $x=a\sin z$).

31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (підстановка $x=\frac{1}{z}$, або $x=a\,\mathrm{tg}\,z$, або $x=a\,\mathrm{sh}\,z$).

32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (підстановка $x=\frac{1}{z}$, або $x=\frac{a}{\cos z}$, або $x=a\,\mathrm{ch}\,z$).

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Знайти інтеграли.

1. $\int \frac{(2x^3+x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.
2. $\int \mathrm{tg}\,x\cdot\ln\cos x\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{(x^3+x)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$.
4. $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.
7. $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$.
8. $\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.
9. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}\,\mathrm{d}x$.
10. $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.
11. $\int \frac{\mathrm{tg}^3(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,\mathrm{d}x$.
12. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.
13. $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.
14. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,\mathrm{d}x$.
15. $\int \frac{4\,\mathrm{arctg}\,x-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
16. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.
17. $\int \frac{8x-\mathrm{arctg}\,2x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$.
18. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
19. $\int \frac{x-(\mathrm{arctg}\,x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
20. $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.
21. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(3\,\mathrm{tg}\,x+1)}$.
23. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$.
24. $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.
25. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}$.

Завдання 2. Знайти інтеграл.

1. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{-x^2+x+3}}\mathrm{d}x$.
2. $\int\frac{4x+3}{\sqrt{x^2-5x+2}}\mathrm{d}x$.
3. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\mathrm{d}x$.
4. $\int\frac{x+1}{\sqrt{{}^2+5x-1}}\mathrm{d}x$.
5. $\int\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+5x-1}}\mathrm{d}x$.
6. $\int\frac{6x+11}{\sqrt{x^2-x+2}}\mathrm{d}x$.
7. $\int\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$.
8. $\int\frac{3x+12}{\sqrt{x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$.
9. $\int\frac{-5x+1}{\sqrt{x^2+5x}}\mathrm{d}x$.
10. $\int\frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\mathrm{d}x$.
11. $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+3x}}\mathrm{d}x$.
12. $\int\frac{x-4}{\sqrt{(x-2)(x+1)}}\mathrm{d}x$.
13. $\int\frac{3x+6}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}\mathrm{d}x$.
14. $\int\frac{3x+9}{\sqrt{x^2-x+4}}\mathrm{d}x$.
15. $\int\frac{2x+7}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}\mathrm{d}x$.
16. $\int\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+5x-6}}\mathrm{d}x$.
17. $\int\frac{4-2x}{\sqrt{-x^2+5x+6}}\mathrm{d}x$.
18. $\int\frac{7-2x}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}\mathrm{d}x$.
19. $\int\frac{x+5}{\sqrt{x^2-4x+7}}\mathrm{d}x$.
20. $\int\frac{5+2x}{\sqrt{-x^2-6x-3}}\mathrm{d}x$.
21. $\int\frac{3x+5}{\sqrt{(x-3)(4-x)}}\mathrm{d}x$.
22. $\int\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+7}}\mathrm{d}x$.
23. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{-x^2+x-8}}\mathrm{d}x$.
24. $\int\frac{7x+5}{\sqrt{4x^2+3x}}\mathrm{d}x$.
25. $\int\frac{2x+2}{\sqrt{7x^2-14x+5}}\mathrm{d}x$.

Завдання 3. Знайти інтеграли.

1. $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.
2. $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.
3. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.
4. $\int(\sqrt{2}-8x)\sin 5x\mathrm{d}x$.
5. $\int(7x-10)\cos 4x\mathrm{d}x$.
6. $\int(4x+3)\sin 5x\mathrm{d}x$.
7. $\int(2-3x)\sin 2x\mathrm{d}x$.
8. $\int(8-3x)\cos 5x\mathrm{d}x$.
9. $\int(4x+7)\cos 3x\mathrm{d}x$.
10. $\int\mathrm{arctg}\sqrt{5x-1}\mathrm{d}x$.
11. $\int\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}\mathrm{d}x$.
12. $\int e^{-2x}\cdot(4x-3)\mathrm{d}x$.
13. $\int(2-4x)\sin 2x\mathrm{d}x$.
14. $\int(x\sqrt{2}-3)\cos 2x\mathrm{d}x$.
15. $\int\mathrm{arctg}\sqrt{3x-1}\mathrm{d}x$.
16. $\int e^{-3x}(2-9x)\mathrm{d}x$.
17. $\int\ln(4x^2+1)\mathrm{d}x$.
18. $\int\ln(x^2+4)\mathrm{d}x$.
19. $\int(1-6x)e^{2x}\mathrm{d}x$.
20. $\int(5x-2)e^{3x}\mathrm{d}x$.
21. $\int\mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}\mathrm{d}x$.
22. $\int(4-3x)e^{-3x}\mathrm{d}x$.
23. $\int\mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}\mathrm{d}x$.
24. $\int(3x+4)e^{2x}\mathrm{d}x$.
25. $\int x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x$.

Завдання 4. Знайти інтеграли.

1. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2+3x}}$.

2. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$.

4. $\displaystyle\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.

5. $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt[4]{5-2x}}{\sqrt{5-2x}}\mathrm{d}x.$

6. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\mathrm{d}x$.

7. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$.

8. $\displaystyle\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x)^5}}$.

9. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-4}}{x}\mathrm{d}x$.

10. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-4x}}{x}\mathrm{d}x$.

11. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

12. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

13. $\displaystyle\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\mathrm{d}x$.

14. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[4]{x}+1)\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}+4)\cdot\sqrt[4]{x^3}}$.

15. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.

16. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

17. $\displaystyle\int(x+1)\sqrt{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$.

18. $\displaystyle\int(1+e^{3x})^2e^{3x}\,\mathrm{d}x$.

19. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x^{\frac{3}{2}}}$.

20. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

21. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3-\ln^2x}}$.

22. $\displaystyle\int\frac{(\mathrm{arctg}\,x)^5}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

23. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+4x}}$.

24. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}}$.

25. $\displaystyle\int x\sqrt{3+x}\,\mathrm{d}x$.

26. $\displaystyle\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

27. $\displaystyle\int\frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x(1-\ln^2x)}$.

28. $\displaystyle\int\frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\mathrm{d}x$.

29. $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

30. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{e^{\cos x}}\mathrm{d}x$.

Завдання 5. Знайти інтеграли.

1. **а)** $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^2-x}\mathrm{d}x$;

   б) $\displaystyle\int\frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   в) $\displaystyle\int\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

2. **а)** $\displaystyle\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$;

   б) $\displaystyle\int\frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   в) $\displaystyle\int\frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x$.

3. **а)** $\displaystyle\int\frac{2x^3-1}{x^2+x-6}\mathrm{d}x$;

   б) $\displaystyle\int\frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   в) $\displaystyle\int\frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\mathrm{d}x$.

4. **а)** $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x$;

   б) $\displaystyle\int\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   в) $\displaystyle\int\frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}\mathrm{d}x$.

5. **а)** $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x;$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}\,\mathrm{d}x;$

в) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$

6. **а)** $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}\,\mathrm{d}x;$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x;$

в) $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x.$

7. **а)** $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x.$

8. **а)** $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x.$

9. **а)** $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$

10. **а)** $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$

11. **а)** $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{3x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$

12. **а)** $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}\,\mathrm{d}x.$

13. **а)** $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x.$

14. **а)** $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$

15. **а)** $\int \frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

16. **а)** $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}\,\mathrm{d}x.$

17. **а)** $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

18. **а)** $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

19. **а)** $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,\mathrm{d}x.$

20. **а)** $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$

21. **а)** $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

22. **а)** $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

23. **а)** $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$

24. **а)** $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x.$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

в) $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}\,\mathrm{d}x.$

25. **а)** $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,\mathrm{d}x$.

26. **а)** $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$

27. **а)** $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

28. **а)** $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

29. **а)** $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

30. **а)** $\int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Завдання 6. Знайти інтеграли.

1. **а)** $\int \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

2. **а)** $\int \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3. **а)** $\int \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9\cdot\sqrt{x^8}}\,\mathrm{d}x$.

4. **а)** $\int e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\cdot\sqrt[9]{x}}\,\mathrm{d}x$.

5. **а)** $\int \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

6. **а)** $\int \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\cdot\sqrt[8]{x^7}}\,\mathrm{d}x$.

7. **а)** $\int \frac{(4\sqrt{x-1}-\sqrt{2x+1})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\cdot\sqrt[6]{x}}\,\mathrm{d}x.$

8. **а)** $\int \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

9. **а)** $\int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(x-2)^2}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\cdot\sqrt[10]{x^9}}\,\mathrm{d}x.$

10. **а)** $\int \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x}}\,\mathrm{d}x.$

11. **а)** $\int e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[25]{x^{11}}}\,\mathrm{d}x.$

12. **а)** $\int \frac{\sqrt{x+25}\,\mathrm{d}x}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x.$

13. **а)** $\int \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^4}}\,\mathrm{d}x.$

14. **а)** $\int \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}}\,\mathrm{d}x}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[9]{x^5}}\,\mathrm{d}x.$

15. **а)** $\int \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x.$

16. **а)** $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

17. **а)** $\int \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\cdot\sqrt[12]{x^7}}\,\mathrm{d}x.$

18. **а)** $\int e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$ **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\cdot\sqrt[8]{x}}\,\mathrm{d}x.$

19. **а)** $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\cdot\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x.$

20. **а)** $\int \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$ **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x\cdot\sqrt[5]{x^3}}\,\mathrm{d}x.$

21. **а)** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{2+\sqrt{2x+1}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\cdot\sqrt[20]{x^7}}\,\mathrm{d}x$.

22. **а)** $\int \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2})\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}$. **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x}}\,\mathrm{d}x$.

23. **а)** $\int \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[15]{x}}\,\mathrm{d}x$.

24. **а)** $\int e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

25. **а)** $\int \frac{(2+\sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

26. **а)** $\int \frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x})(x+1)^2}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

27. **а)** $\int \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}}\,\mathrm{d}x}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

28. **а)** $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

29. **а)** $\int \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

30. **а)** $\int \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{x-2})(x+2)^2}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

Завдання 7. Знайти інтеграли.

1. **а)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

б) $\int \frac{8+\mathrm{tg}\,x}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8\sin^8 x\,\mathrm{d}x$.

2. **а)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

б) $\int \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4\sin^6 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

3. **а)** $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{6\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x}{3\sin 2x+5\cos^2 x}$.

в) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

4. **а)** $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{4\,\mathrm{tg}\,x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \sin^2(x/4)\cos^6(x/4)\,\mathrm{d}x$.

5. **а)** $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{5+4\cos x}$.

б) $\int \frac{3\,\mathrm{tg}\, x+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \cos^8 (x/2)\, \mathrm{d}x$.

6. **а)** $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{1+\sin x-\cos x}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}\, x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8 \sin^8 x \, \mathrm{d}x$.

7. **а)** $\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$.

б) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3\,\mathrm{tg}\, x+5)\sin 2x}$.

в) $\int 2^8 \sin^6 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

8. **а)** $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$.

б) $\int \frac{2\,\mathrm{tg}^2 x-11\,\mathrm{tg}\, x-22}{4-\mathrm{tg}\, x}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \sin^4 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.

9. **а)** $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{1+\cos x-\sin x}$.

б) $\int \frac{3+2\,\mathrm{tg}\, x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\mathrm{d}x$.

в) $\int \sin^2 x \cos^6 x \, \mathrm{d}x$.

10. **а)** $\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{1+\mathrm{ctg}\, x}{(\sin x+2\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

в) $\int \cos^8 (x/4)\, \mathrm{d}x$.

11. **а)** $\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}\, x}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \sin^8 (x/2)\, \mathrm{d}x$.

12. **а)** $\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8 \sin^6 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

13. **а)** $\int \frac{\sin^2 x \, \mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{4+\mathrm{tg}\, x}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8 \sin^4 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.

14. **а)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)}$.

б) $\int \frac{12+\mathrm{tg}\, x}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \sin^2 x \cos^6 x \, \mathrm{d}x$.

15. **а)** $\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

б) $\int \frac{6+\mathrm{tg}\, x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

в) $\int \cos^8 x \, \mathrm{d}x$.

16. **а)** $\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{5+3\sin x}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x \, \mathrm{d}x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}$.

в) $\int \sin^8 (x/4)\, \mathrm{d}x$.

17. **а)** $\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

б) $\int\frac{7+3\,\mathrm{tg}\,x}{(\sin x+2\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4\sin^6(x/2)\cos^2(x/2)\,\mathrm{d}x$.

18. **а)** $\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)^3}$.

б) $\int\frac{2\,\mathrm{tg}\,x+5}{(5-\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8\sin^4 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

19. **а)** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1-\cos x)}$.

б) $\int\frac{3\,\mathrm{tg}^2 x-50}{2\,\mathrm{tg}\,x+7}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8\sin^2 x\cos^6 x\,\mathrm{d}x$.

20. **а)** $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x-\cos x)^2}$.

б) $\int\frac{5\,\mathrm{tg}\,x+2}{2\sin 2x+5}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4\cos^8 x\,\mathrm{d}x$.

21. **а)** $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$.

б) $\int\frac{4\,\mathrm{tg}\,x-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}\mathrm{d}x$.

в) $\int\sin^8 x\,\mathrm{d}x$.

22. **а)** $\int\frac{(1+\cos x)\,\mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$.

б) $\int\frac{6\sin^2 x}{4+3\cos 2x}\mathrm{d}x$.

в) $\int\sin^6(x/4)\cos^2(x/4)\,\mathrm{d}x$.

23. **а)** $\int\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

б) $\int\frac{11-3\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x+3}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4\sin^4(x/2)\cos^4(x/2)\,\mathrm{d}x$.

24. **а)** $\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

б) $\int\frac{2\,\mathrm{tg}\,x-5}{(4\cos x-\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8\sin^2 x\cos^6 x\,\mathrm{d}x$.

25. **а)** $\int\frac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos x(1+\cos x)}$.

б) $\int\frac{36\,\mathrm{d}x}{(6-\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}$.

в) $\int 2^8\cos^8 x\,\mathrm{d}x$.

26. **а)** $\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

б) $\int\frac{4-7\,\mathrm{tg}\,x}{2+3\,\mathrm{tg}\,x}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4\sin^8 x\,\mathrm{d}x$.

27. **а)** $\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

б) $\int\frac{2-\mathrm{tg}\,x}{(\sin x+3\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

в) $\int\sin^6 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

28. **а)** $\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

б) $\int\frac{8\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+8\sin^2 x-7}$.

в) $\int\sin^4(x/4)\cos^4(x/4)\,\mathrm{d}x$.

29. **а)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

б) $\int \frac{12\,\mathrm{d}x}{(6+5\,\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}$.

в) $\int 2^4 \sin^2(x/2)\cos^6(x/2)\,\mathrm{d}x$.

30. **а)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1+\cos x)}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{4+3\cos 2x}\mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8 \cos^8 x\,\mathrm{d}x$.

Завдання 8. Знайти інтеграли.

1. $\int \sqrt{256-x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(9+x^2)^{3/2}}$.
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.
6. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x$.
7. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.
9. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(2-x^2)^{3/2}}$.
10. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^2}}$.
11. $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(16+x^2)^{3/2}}$.
13. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.
14. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{25-x^2}}$.
15. $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x$.
16. $\int \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.
17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.
18. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\mathrm{d}x$.
19. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$.
20. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$.
21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.
22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.
23. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$.
24. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\mathrm{d}x$.
25. $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.
26. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\mathrm{d}x$.
27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.
28. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{3/2}}$.
29. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
30. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

ГЛАВА V. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ЯК ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СУМ. ОЦІНКА ТА ПОРІВНЯННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Основні поняття та теореми

Розглянемо функцію $f(x)$, яка визначена в кожній точці $x \in [a; b]$. *Розбиттям* $\{x_k\}$ відрізка $[a; b]$ називається скінченна система точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$ цього відрізка така, що $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Відрізки $[x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ називаються *частинними відрізками розбиття*. Довжину k-го частинного відрізка позначимо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Число

$$d = \max_k \Delta x_k$$

називають *діаметром розбиття* $\{x_k\}$. На кожному з частинних відрізків оберемо довільну точку $t_k \in [x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Набір цих точок $\{t_k\}$ називають *вибіркою розбиття* $\{x_k\}$. *Інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається сума виду

$$S(f; x_k; t_k) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k .$$

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називають границю інтегральних сум $S(f; x_k; t_k)$, коли діаметр d розбиття $\{x_k\}$ прямує до нуля і позначають символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким чином $\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k .$

Границя в цій формулі (фіксоване число) повинна існувати і не залежати від способу розбиття відрізка $[a; b]$ точками $\{x_k\}$ та від вибору точок $\{t_k\}$ на частинних відрізках $[x_{k-1}; x_k]$.

У випадку, коли інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує, функція $f(x)$ називається *інтегровною* на $[a; b]$.

Множина інтегровних функцій.

а) Необхідна умова інтегровності: інтегровна на $[a; b]$ функція $f(x)$ обмежена на цьому відрізку.

б) Кусово неперервна на $[a; b]$ функція $f(x)$ інтегровна на цьому відрізку.

в) Монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.

Приклад обмеженої на відрізку [a; b], але не інтегровної функції:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x \text{ раціональне};\\ 0, \text{ якщо } x \text{ ірраціональне.}\end{cases}$$

Властивості визначеного інтеграла.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(t)dt\,.$$

2. *Лінійність* інтеграла:
   якщо $f(x)$ і $g(x)$ – інтегровні на [a; b] функції, то їх лінійна комбінація $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ також інтегровна на [a; b] функція, причому

$$\int\limits_a^b \bigl(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\bigr)dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)dx+\beta\int\limits_a^b g(x)dx\,.$$

Наслідок. $\int\limits_a^b C\cdot dx=C\cdot(b-a)$, де C – стала величина.

3. *Адитивність* інтеграла:
   якщо $a<b<c$ і функція $f(x)$ інтегровна на [a; c], то $f(x)$ також інтегровна на відрізках [a; b] та [b; c], причому має місце рівність

$$\int\limits_a^c f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx\,.$$

Наслідок. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$.

Означення. $\int\limits_a^b f(x)dx\equiv-\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. *Монотонність* інтеграла:
   якщо $f(x)$, $g(x)$ інтегровні на [a; b] і $f(x)\le g(x)$, $x\in$ [a; b], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx\,.$$

Наслідок 1. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Наслідок 2. *Оцінка інтеграла*: якщо $f(x)$ інтегровна на [a; b] і сталі m, M такі, що $m\le f(x)\le M$, $x\in$ [a; b], то

$$m\cdot(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)\,.$$

5. Теорема про *середнє інтегральне* значення.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то існує точка $c \in [a; b]$ така, що

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

Формула Ньютона-Лейбніца.

Основна теорема інтегрального числення. Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Різницю $F(b) - F(a)$ значень функції $F(x)$ часто записують у вигляді символу $F(x)\Big|_a^b$. В цих позначеннях формула Ньютона-Лейбніца набуває вигляду

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$$

Ця формула встановлює взаємозв’язок між визначеним інтегралом та первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Контрольні питання та завдання

1. У визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ вкажіть загально прийняті назви для a, b, x, $f(x)$, $f(x)dx$.
2. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла.
3. У чому полягає фізичний зміст визначеного інтеграла.
4. Користуючись адитивністю інтеграла, спробуйте обґрунтувати наступне узагальнення властивості 3:
   якщо функція $f(x)$ інтегровна на більшому з відрізків $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то справедлива рівність $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$
5. Поясніть, чому функція Діріхле $f(x) = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } x \textit{ раціональне}; \\ 0, \textit{ якщо } x \textit{ ірраціональне}, \end{cases}$ не інтегровна на відрізку $[a; b]$.
6. Спробуйте довести наступне узагальнення теореми про середнє інтегральне значення: якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, а інтегровна на $[a; b]$ функція $g(x)$ невід’ємна, то існує точка $c \in [a; b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx\,.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца.

а) $$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1 = \left.\frac{2}{3}\cdot(1+x)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot\left((1+1)^{\frac{3}{2}}-(1+0)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right).$$

б) $$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{7}\frac{d(3x+4)}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3}\int_{-1}^{7}\frac{d(3x+4)}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\,\Big|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\sqrt{25}-\frac{2}{3}\sqrt{1} =$$

$$= \frac{10}{3}-\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

в) $$\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}})dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}\,dx = x\Big|_0^4 + 4\cdot e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = (4-0)+(4e-4\cdot 1) = 4e.$$

Приклад 2. Оцінити інтеграл $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+1}$.

Розв’язання.

Знайдемо найбільше та найменше значення підінтегральної функції $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ на відрізку [0; 2]. Область визначення цієї функції – вся множина дійсних чисел, тобто $x\in(-\infty;\infty)$.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2};$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -x^2+1=0,$$

або

$$x^2=1 \Rightarrow x_1=1; x_2=-1.$$

Отже функція $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ має дві критичні точки. Відрізку інтегрування $[0;2]$ належить лише одна точка $x=1$. Знайдемо значення підінтегральної функції на кінцях відрізка інтегрування та в точці $x=1$:

$$f(0)=\frac{0}{0+1}=0;\ f(2)=\frac{2}{4+1}=\frac{2}{5};\ f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Порівняємо значення функції в точках $x=0$, $x=1$, $x=2$. Маємо:

$f(0)=0$ – найменше значення;

$f(1)=\frac{1}{2}$ – найбільше значення;

$f(2)=\frac{2}{5}$.

Для функції $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ на відрізку $[0;2]$ виконується нерівність

$$0\le f(x)\le\frac{1}{2}.$$

Тоді за властивістю 4 (наслідок 2) маємо, що

$$0\cdot 2\le\int_0^2\frac{x}{x^2+1}dx\le\frac{1}{2}\cdot 2,$$

де довжина відрізка інтегрування $|b-a|=|2-0|=2$, тобто

$$0\le\int_0^2\frac{x}{x^2+1}dx\le 1.$$

Приклад 3. Оцінити інтеграл $\int_{1.5}^{2}\frac{xdx}{\ln x}$.

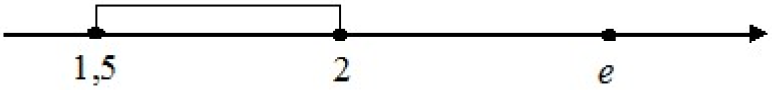
Розв'язання. Знайдемо найбільше і найменше значення підінтегральної функції $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ на відрізку $[1{,}5;2]$.

Для цього відшукаємо критичні точки функції $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

Тоді $f'(x)=0\Rightarrow\ln x-1=0\Rightarrow\ln x=1\Rightarrow x=e.$

Точка $x=e$ – критична. Вона лежить зовні відрізка інтегрування:



Значення функції на кінцях відрізка інтегрування відповідно дорівнюють

$f(1.5)=\frac{1.5}{\ln 1.5}=\frac{3}{2\ln\frac{3}{2}}\approx 3{,}699$ – найбільше значення;

$f(2)=\dfrac{2}{\ln 2}\approx 2{,}885$ – найменше значення.

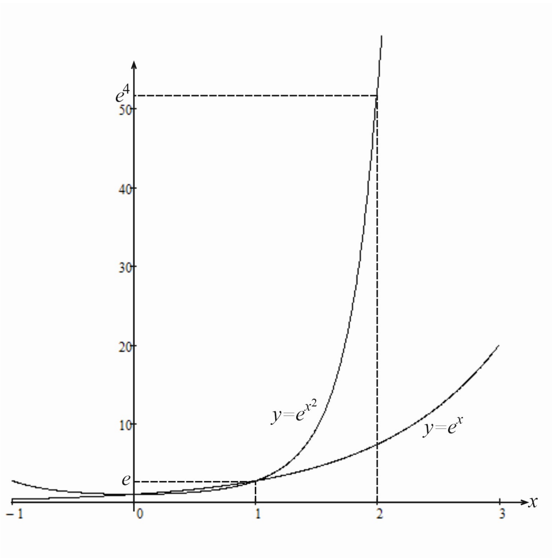
Тоді $\quad \dfrac{2}{\ln 2}\cdot\dfrac{1}{2}\le\int\limits_{1.5}^{2}\dfrac{x}{\ln x}dx\le\dfrac{3}{2\ln\dfrac{3}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}$, де $|b-a|=|2-1.5|=\dfrac{1}{2}$.

Або $\dfrac{1}{\ln 2}\le\int\limits_{1.5}^{2}\dfrac{x}{\ln x}dx\le\dfrac{3}{4\ln\dfrac{3}{2}}$.

Приклад 4. Не виконуючи обчислень встановити, який із інтегралів більший:

а) $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$ чи $\int\limits_0^1 e^x dx$;

б) $\int\limits_1^2 e^{x^2}\,dx$ чи $\int\limits_1^2 e^x dx$.



Розв'язання.

а) На проміжку $0\le x\le 1$ значення $e^{x^2}\le e^x$, тому $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx\le\int\limits_0^1 e^x dx$.

б) На проміжку $1\le x\le 2$ значення $e^{x^2}\ge e^x$, тому $\int\limits_1^2 e^{x^2}\,dx\ge\int\limits_1^2 e^x dx$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

1. $\int\limits_{-2}^{-1}\dfrac{dx}{(11+5x)^3}$.
2. $\int\limits_{0}^{16}\dfrac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.
3. $\int\limits_{0}^{1}(e^x-1)^4 e^x dx$.
4. $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.
5. $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$.
6. $\int\limits_{1}^{e^2}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.
7. $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{x^2+4x+5}$.
8. $\int\limits_{-1/2}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.
9. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{dx}{1+\cos x}$.
10. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.
11. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\mathrm{ctg}^4\phi\,d\phi$.

Завдання 1.2. Оцінити інтеграли:

12. $\int\limits_0^4 \frac{x-1}{x+1}dx$.

13. $\int\limits_1^4 (x+2\sqrt{x})dx$.

14. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

15. $\int\limits_0^1 x^x dx$.

16. $\int\limits_{1/e}^{e} x^2 e^{-x^2}dx$.

17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

18. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^2}$.

19. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}dx$.

20. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$.

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\mathrm{tg}\, x}dx.$

Завдання 1.3. Не обчислюючи встановити, який з інтегралів більший:

22. $\int\limits_1^3 5^{x^2}dx$ чи $\int\limits_1^3 5^{x^3}dx$.

23. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin x dx$ чи $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x dx$.

24. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ чи $\int\limits_0^1 x\, dx$.

25. $\int\limits_1^2 \ln x dx$ чи $\int\limits_1^2 \ln^2 x dx$.

26. $\int\limits_0^1 x^2 \sin^2 x\, dx$ чи $\int\limits_0^1 x \sin^2 x\, dx$.

27. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx$ чи $\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx$.

28. $\int\limits_1^e x \ln x\, dx$ чи $\int\limits_1^e x \ln^2 x dx$.

29. $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\, dx$ чи $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\, dx.$

§ 2. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Основні поняття та теореми

При обчисленні визначених інтегралів, аналогічно до знаходження первісних, досить часто застосовується правило заміни змінної під знаком визначеного інтеграла.

Теорема 11.1. Нехай задано інтеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$.

Введемо нову змінну t за формулою $x = \varphi(t)$.

Якщо

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$,

3) $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$,

то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt$.

Зауваження. При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної не потрібно повертатися до старої змінної. Натомість слід відповідним чином змінити межі інтегрування: нижня межа $t=\alpha$ знаходиться із рівняння $\varphi(t)=a$, верхня межа $t=\beta$ – із рівняння $\varphi(t)=b$.

При „підведенні" чи „виведенні" нової змінної з під знака диференціала у визначеному інтегралі прийнято оформляти ці дії так

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \left|\begin{array}{l} x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)\,dt \\ t=\alpha \Rightarrow \varphi(\alpha)=a \\ t=\beta \Rightarrow \varphi(\beta)=b \end{array}\right| = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Наведемо також наступне узагальнення теореми 2.1.

Основна теорема про заміну змінної у визначеному інтегралі.

Нехай $x=\varphi(t)$ – неперервно диференційовна строго монотонна на відрізку $[\alpha; \beta]$. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$, то

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Слід звернути увагу на те, що умови цієї теореми для функції $f(x)$ є більш загальні ніж в попередній, але на функцію $\varphi(t)$ накладено більш жорсткі вимоги – умова строгої монотонності.

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте теорему про заміну змінної під знаком невизначеного інтеграла.
2. Доведіть справедливість рівності для будь-якого a:
$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = \int\limits_0^a \big(f(x)+f(-x)\big)dx.$$
3. Покажіть, що для парної на відрізку $[-a; a]$ функції $f(x)$ справедлива рівність: $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$.

   Дайте геометричне тлумачення рівності.
4. Покажіть, що для непарної на відрізку $[-a; a]$ функції $f(x)$ справедлива рівність: $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

   Дайте геометричне тлумачення рівності.

5. Нехай $f(x)$ – неперервна на всій осі періодична з періодом T функція. Довести, що для будь-якого дійсного a справджується рівність:
$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx.$$
6. Нехай $f(x)$ – неперервна на всій осі періодична функція. Покажіть, що функція $F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ може бути подана у вигляді суми лінійної і періодичної функцій.
7. Нехай $f(x)$ – неперервна на всій осі періодична з періодом T функція. За яких умов функція
$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$$
також періодична з періодом T?
8. Довести рівність $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{0}^{b-a} f(b-x)dx$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл шляхом заміни змінної:
$$\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \textit{Нехай } \sqrt{x} = t, \textit{ тоді} \\ x = t^2,\ dx = 2tdt. \\ \textit{При } x_1 = 0:\ t_1 = \sqrt{0} = 0; \\ \textit{при } x_2 = 4:\ t_2 = \sqrt{4} = 2. \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{2} \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_{0}^{2} \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int\limits_{0}^{2}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2(t - \ln|t+1|)\Big|_0^2 = 2(2-\ln 3 - 0 + \ln 1) = 4 - 2\ln 3.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл:
$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\ dt, \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2|\cos t|, \\ x_1 = 0:\ t_1 = \arcsin\frac{x}{2} = \arcsin 0 = 0; \\ x_2 = 1:\ t_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} 2|\cos t| \cdot 2\cos t\ dt =$$
$$\left|\ \text{при}\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{6}\ \ \cos t > 0,\ \text{тому}\ |\cos t| = \cos t\ \right|$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t\,dt = \left|2\cos^2 t = 1+\cos 2t\right| = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt = 2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}-0-0\right) = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл:

$$\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+4}dx = \left|\begin{array}{l}\sqrt{e^x-1}=t \Rightarrow e^x-1=t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x=t^2+1 \Rightarrow x=\ln|t^2+1| \Rightarrow dx=\dfrac{2t}{t^2+1}dt. \\ x_1=0:\ t_1=\sqrt{e^0-1}=0; \\ x_2=\ln 5:\ t_2=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=\sqrt{5-1}=2.\end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{(t^2+1)\cdot t\cdot\dfrac{2t}{t^2+1}}{t^2+1+4}dt = \int\limits_0^2\frac{2t^2dt}{t^2+5} = 2\int\limits_0^2\frac{(t^2+5)-5}{t^2+5}dt = 2\int\limits_0^2\left(1-\frac{5}{t^2+5}\right)dt =$$

$$= 2\left(t-5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(2-\sqrt{5}\,\text{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{5}}-0+0\right) = 4-2\sqrt{5}\,\text{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 2.1. За допомогою заміни змінної обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_3^8\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$.
2. $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$.
3. $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$.
4. $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.
5. $\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.
6. $\int\limits_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.
7. $\int\limits_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}dx$.
8. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}$.
9. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$.
10. $\int\limits_0^{\pi}\text{tg}^3\frac{x}{3}dx.$

§ 3. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Основні поняття та теореми

Наступне твердження носить назву правила інтегрування частинами.

Теорема 12.1. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a; b]$, тоді

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx .$$

У стислій формі це правило записують таким чином

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .}$$

При застосуванні цієї формули, у виразі $u\cdot v\,\Big|_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a)$ доцільно провести необхідні обчислення та надалі подавати його як число.

Оскільки математичні моделі більшості технічних задач містять, так звані, кусково-неперервно диференційовні функції, то наведемо наступне узагальнення теореми 3.1.

Теорема 12.2. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ неперервні і кусково-неперервно диференційовні на відрізку $[a; b]$, тоді для них справедлива формула інтегрування частинами.

Наслідок 1. Формула Тейлора.

Нехай функція $f(x)$ має $(n+1)$ неперервну похідну на відрізку $[a; x]$, тоді за формулою Ньютона-лейбніца

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt .$$

Виконаємо інтегрування частинами

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt = \begin{vmatrix} u = f'(x), & du = f''(t)\,dt \\ dv = dt, & v = -(x-t) \end{vmatrix} = f'(a)\cdot(x-a) + \int_a^x f''(t)\cdot(x-t)\,dt .$$

Послідовно інтегруючи частинами n раз, отримуємо

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt.$$

Ця формула носить назву формули Тейлора із інтегральним залишком.

Наслідок 2. Формула Валліса.

Розглянемо інтеграл $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

Обчислимо його, застосовуючи правило інтегрування частинами:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, d(\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x\, dx =$$

$$= (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \sin^{n-2} x\, dx = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right).$$

Звідси, отримуємо рекурентну формулу: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \geq 2$.

Легко бачити, що $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ і $I_1 = 1$, тому

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

і $$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Беручи частку I_{2n} / I_{2n+1} останніх двох формул, отримуємо відому формулу Валліса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте правило інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
2. Нагадайте типи підінтегральних функцій, які рекомендовано до інтегрування частинами.
3. За допомогою теореми про середнє інтегральне значення та формули Тейлора із інтегральним залишком спробуйте отримати відому формулу Тейлора із залишком у формі Лагранжа.
4. Нехай $f(x)$ має обмежену похідну на $[a; b]$. Довести, що

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f(x) \sin nx\, dx = 0$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f(x) \cdot \sin^2 nx\, dx = \dfrac{1}{2} \int\limits_a^b f(x)\, dx$

5. Довести, що:

$$\text{а) }\left|\int_x^{x+a}\frac{\sin t}{t}dt\right| < \frac{3}{x},\ x>0,\ a>0; \quad \text{б) }\left|\int_x^{x+a}\sin t^3\ dt\right| < \frac{4}{3x^2},\ x>0,\ a>0.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2a}}(x+3)\sin ax\,dx$

Розв’язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du.$$

$$\left|\begin{array}{lll} u=x+3 & \Rightarrow & du=dx\\ dv=\sin axdx & \Rightarrow & v=-\frac{1}{a}\cos ax\end{array}\right| = -\frac{x+3}{a}\cos ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\cos axdx=$$

$$=-\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{3}{a}\cos 0+\frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} = 0+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^2}\sin\frac{\pi}{2}-0=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{1+3a}{a^2}.$$

$$\textbf{б) }\int_0^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2\, x\,dx = \left|\begin{array}{l} \int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du;\\ x=u\Rightarrow du=(x)'dx\Rightarrow du=dx\\ \mathrm{tg}^2\, x\,dx = dv\Rightarrow v=\int\mathrm{tg}^2\, x\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\\ \qquad =\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\mathrm{tg}\,x-x\end{array}\right| =$$

$$=(x(\mathrm{tg}\,x-x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(\mathrm{tg}\,x-x)dx = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}-\left(-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi^2}{32}+0+0\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\ln\sqrt{2}.$$

в) $$\int\limits_0^3 x\cdot \mathrm{arctg}\,x\,dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{arctg}\,x = u \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ x\,dx = dv \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\right)\Bigg|_0^3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x^2dx}{x^2+1} =$$

$$= \left(\frac{9}{2}\mathrm{arctg}\,3 - 0\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \frac{9}{2}\mathrm{arctg}\,3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\mathrm{arctg}3 - \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{arctg}x\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}\mathrm{arctg}3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}3 = 5\,\mathrm{arctg}3 - \frac{3}{2}.$$

г) $$\int\limits_1^e (1+\ln x)^2dx = \left| \begin{array}{l} (1+\ln x)^2 = u \Rightarrow du = 2(1+\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| =$$

$$= (x(1+\ln x)^2)\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\cdot 2(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = \left(e(1+1)^2 - (1+\ln 1)^2\right) - \int\limits_1^e 2(1+\ln x)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1+\ln x = u \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ 2dx = dv \Rightarrow v = 2x \end{array} \right| = 4e - 1 - \left((2x(1+\ln x))\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{2x\,dx}{x} \right) =$$

$$= 4e - 1 - (4e-2) + 2x\Big|_1^e = 4e - 1 - 4e + 2 + 2e - 2 = 2e - 1.$$

д) $$\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ \cos x\,dx = dv \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ \sin x\,dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = e^{\pi} - 2\left(-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx \right) =$$

$$= e^{\pi} - 2(-e^{\pi}\cdot 0 + e^0\cdot 1) - 4\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2 - 4\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx.$$

Маємо рівність:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2 - 4\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx \Rightarrow 5\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2.$$

З цієї рівності визначимо шуканий інтеграл:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}\left(e^{\pi} - 2\right).$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 3.1. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

1. $\int_0^1 xe^{-x}dx$.
2. $\int_0^{1/2} \arcsin x\, dx$.
3. $\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$.
4. $\int_0^1 x\arccos x\, dx$.
5. $\int_1^{e^2} x^2 \ln x\, dx$.
6. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$.
7. $\int_0^{a/\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$.
8. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.
9. $\int_1^{e} \sin(\ln x)dx$.
10. $\int_0^1 e^{2x}\cdot\sin 2x\, dx$.
11. $\int_0^1 e^{2x}\cdot\cos 2x\, dx$.

§ 4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ З НЕСКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ (1-ГО РОДУ)

Основні поняття та теореми

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на кожному відрізку $[a;\, b]$ множини дійсних чисел.

Вираз $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ називають *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ на промені $[a;\, +\infty)$. За означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b} f(x)\, dx.$$

Якщо границя в правій частині рівності існує, то невласний інтеграл називається *збіжним*. Якщо ж границя не існує, то інтеграл називається *розбіжним*. Таким чином, питання про збіжність невласного інтеграла рівносильне питанню означеності цього інтеграла. Аналогічно, вираз

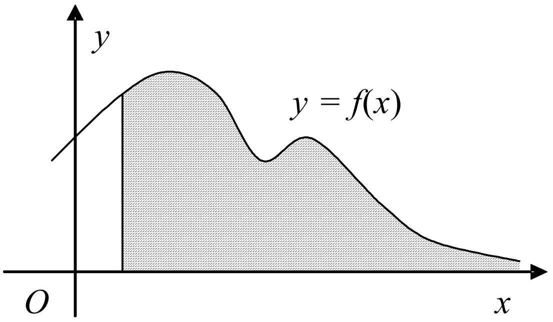
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)\, dx$$

задає невласний інтеграл від $f(x)$ на проміжку $(-\infty;\, b)$.

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

де c – довільним чином вибране число. Цей інтеграл називається збіжним лише тоді, коли збігається кожний із інтегралів правої частини рівності.



Геометричне тлумачення. Для додатної функції $f(x)$ вважають, що інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ виражає площу необмеженої фігури, яка знаходиться між графіком функції $y = f(x)$, $x \geq a$, та віссю абсцис.

Властивості невласного інтеграла першого роду.

А) Властивість лінійності. Якщо інтеграли $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються, то для довільних сталих α і β справедлива рівність

$$\int_{a}^{+\infty} \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)\,dx = \alpha \cdot \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \cdot \int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx.$$

В) Властивість адитивності. Якщо $a < c < +\infty$, то

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Зауваження. Методи інтегрування частинами та заміни змінної для невласних інтегралів узагальнюються при суттєвих обмеженнях на підінтегральні функції. Тому для уникнення можливих помилок названі методи краще застосовувати під знаком визначеного інтеграла у границі

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Достатні ознаки збіжності. Використовують у тих випадках, коли потрібно з’ясувати питання існування інтеграла.

1. Збіжність невласного інтеграла від невід’ємної функції записують наступним чином $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$, якщо інтеграл розбіжний, то пишуть $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

2. *Перша ознака порівняння.* Нехай на проміжку $a \le x < +\infty$ функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умові $0 \le f(x) \le g(x)$. Тоді:

   а) якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow$ існує $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$;

   б) якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$.

3. *Друга ознака порівняння.* Нехай задані функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умові

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty.$$

   Тоді інтеграли

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ і } \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

   збігаються або розбігаються одночасно.

4. *Частинна ознака порівняння.* Якщо існує

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \cdot f(x) = k \in (0; +\infty),$$

   то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \begin{cases} < +\infty, \textit{при } \alpha > 1; \\ = +\infty, \textit{при } \alpha \le 1. \end{cases}$$

5. *Теорема про абсолютну збіжність.* Якщо інтеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

   то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний і

$$\left| \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| < \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Збіжний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається *умовно збіжним*, якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбіжний.

Прикладом умовної збіжності може служити інтеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx,\ a > 0$$

Контрольні питання та завдання

1. Чому в означенні невласного інтеграла
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$
число c є довільним?
2. Покажіть, що $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \begin{cases} < +\infty, \textit{при } \alpha > 1; \\ = +\infty, \textit{при } \alpha \le 1. \end{cases}$
3. Обґрунтуйте властивості лінійності та адитивності для невласних інтегралів першого роду.
4. Чому для невід’ємних функцій запис $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ означає збіжність інтеграла?
5. Нехай $u(x)$, $v(x)$ – неперервно диференційовні при $x \ge a$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\cdot v(x) = 0$. Покажіть, що $\int\limits_a^{+\infty} u\,dv = -u(a)\cdot v(a) - \int\limits_a^{+\infty} v\,du$.
6. Нехай $|f(x)| \le g(x)$, $x \in [a; +\infty)$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$. Покажіть абсолютну інтегровність функції $f(x)$ на $[a; +\infty)$.
7. Обґрунтуйте збіжність інтегралу $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$, $a > 0$, використовуючи формулу $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\cos a}{a} - \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$.
8. Покажіть умовну збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$, $a > 0$, спираючись на нерівність $|\sin x| \ge \sin^2 x$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли з нескінченними межами або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}, a>1.$

Розв’язання.

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\ln x \,\Big|_{a}^{b} \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\ln b - \ln\ln a \right) = +\infty.$$

Тобто інтеграл розбіжний.

б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} x \,\Big|_{a}^{0} \right) = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = 0 + \frac{\pi}{2} =$

$= \frac{\pi}{2}$, тобто інтеграл збіжний.

в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \Bigg|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) =$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{3\pi^2}{32}$, тобто інтеграл збіжний.

Приклад 2. Встановити збіжність або розбіжність інтегралів:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx.$

Розв’язання. Так як $|\cos x| \le 1$, то $\left| \frac{\cos x}{x^3} \right| \le \left| \frac{1}{x^3} \right|$; оскільки $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ – збіжний, то за 1-ою ознакою збіжності невласних інтегралів 1-го роду даний інтеграл збігається.

б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx.$

Розв’язання. Так як $\ln x \ge 1$ при $x \in [e; +\infty)$, то $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; оскільки $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ – розбіжний, то за 1-ою ознакою збіжності невласних інтегралів 1-го роду заданий інтеграл розбіжний.

в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx.$

Розв'язання. По таблиці еквівалентності $\ln(1+\alpha)\sim\alpha, \alpha\to 0$, тому:

$$f(x)=\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}=\ln\frac{(x^2+1)+1}{x^2+1}=\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\sim\frac{1}{x^2+1}\sim\frac{1}{x^2}=g(x),$$

при $x\to\infty$.

Оскільки $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ збігається, то за 2-ою ознакою збіжності невласних інтегралів 1-го роду заданий інтеграл збігається.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 4.1. Обчислити інтеграли з нескінченними межами:

1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}.$

2. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+7}.$

3. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx.$

4. $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}.$

5. $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx.$

6. $\int\limits_{0}^{+\infty}x\cos x\,dx.$

7. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx.$

8. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx.$

9. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx.$

10. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx.$

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

Завдання 4.2. Дослідити на збіжність інтеграли з нескінченними межами:

14. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{5+2x^2+3x^4}.$

15. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^2+\sqrt[3]{x^5}+1}dx.$

16. $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx.$

17. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{5+\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

18. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$.

19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$.

20. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln(\ln x)}$.

21. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$.

22. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$.

23. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx$.

§ 5. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ (2-ГО РОДУ)

Основні поняття та теореми

В цьому параграфі розглядаємо узагальнення поняття інтеграла на випадок необмежених функцій. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; c)$ і інтегровна на кожному відрізку $[a; b]$, де $a < b < c$. Точка $x = c$ називається <u>*особливою*</u> для $f(x)$, якщо функція не обмежена на кожному інтервалі $(b; c)$.

Невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ з особливістю в точці c називають

$$\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx = \lim_{b \to c-0} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx .$$

Якщо границя в правій частині рівності існує, то інтеграл називають <u>*невласним збіжним інтегралом*</u>, в протилежному випадку інтеграл називають <u>*розбіжним*</u>.

Аналогічно, якщо точка $x = a$ особлива для $f(x)$, $x \in (a; c]$, то <u>*невласний інтеграл*</u> визначається так:

$$\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx = \lim_{b \to a+0} \int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx .$$

Якщо точки $x = a$ і $x = c$ особливі для функції $f(x)$, $x \in (a; c)$, то <u>*невласний інтеграл*</u> визначають рівністю

$$\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx ,$$

де $a < b < c$.

Інтеграл $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx$ називається <u>*збіжним*</u> лише за умови збіжності обох невласних інтегралів $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ і $\int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx$.

Нарешті, якщо функція $f(x)$ має особливість (розрив) у внутрішній точці $x = b$ відрізка $[a;\, c]$, то за означенням

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx .$$

Цей інтеграл є збіжним за умови збіжності кожного із інтегралів правої частини рівності.

Зауваження. Основні положення і теореми попереднього параграфа для невласних інтегралів першого роду без значних ускладнень можуть бути перенесені на випадок інтегралів другого роду. Нехай лише $x = c$ – особлива точка для $f(x)$ на $[a;\, c)$, виконаємо заміну змінної під інтегралом:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = c - \dfrac{1}{t}, \qquad dx = \dfrac{1}{t^2}dt \\ t = \dfrac{1}{c-x} \\ a \le x \le c \Rightarrow \dfrac{1}{c-a} \le t < +\infty \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{c-a}}^{+\infty} f\left(c - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} \cdot dt .$$

Як бачимо, із збіжності одного із інтегралів слідує збіжність іншого та рівність цих інтегралів. Але при розв’язуванні задач не раціонально кожного разу в невласних інтегралах другого роду проводити вказану заміну змінної.

Сформулюємо *ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду.*

1. *Перша ознака порівняння.* Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a;\, c)$ мають особливості в точці $x = c$ та задовольняють нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$. Тоді:

   а) якщо $\int_a^c g(x)\,dx$ збігається, то $\int_a^c f(x)\,dx$ також збігається;

   б) якщо $\int_a^c f(x)\,dx$ розбігається, то $\int_a^c g(x)\,dx$ розбігається.

2. *Друга ознака порівняння.* Нехай додатні функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a;\, c)$ мають особливості в точці $x = c$ та задовольняють умову

$$\lim_{x \to c-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \;\; 0 < k < +\infty .$$

   Тоді інтеграли $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_a^c g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

3. В якості *функції „еталонів”*, з якими зручно порівнювати задані в умові підінтегральні функції досить часто використовують функції $\dfrac{1}{(c-x)^{\alpha}}$.

   Важливим є такий факт, що

$$\int_a^c \frac{1}{(c-x)^{\alpha}}\,dx \begin{cases} \textit{збігається при } \alpha < 1; \\ \textit{розбігається при } \alpha \ge 1. \end{cases}$$

4. *Абсолютна збіжність*. Якщо $x = c$ – особлива точка функції $f(x)$ на $[a; c)$ і інтеграл $\int\limits_a^c |f(x)|\,dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ також збігається.

Головне значення невласного інтеграла. Крім розглянутого вище поняття невласного інтеграла в чисельних методах та математичній фізиці широко використовують поняття інтеграла за Коші в розумінні головного значення “Valuer principal”, яке надалі позначаємо символом $V.P.\int\limits_a^c f(x)\,dx$.

Означення. Нехай функція $f(x)$ має особливість у внутрішній точці $x = b$ відрізка $[a; c]$. Функція $f(x)$ *інтегровна за Коші*, якщо існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{b+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx\right) = V.P.\int\limits_a^c f(x)\,dx,$$

яка має назву *головного значення інтеграла*.

Приклад. Інтеграл

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x-1}$$

розбігається як невласний інтеграл другого роду, але існує як головне значення за Коші:

$$V.P.\int\limits_0^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x-1}\right) = \ln 2.$$

Контрольні питання та завдання

1. Покажіть, що $\int\limits_a^c \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx \begin{cases} \text{збігається при } \alpha < 1; \\ \text{розбігається при } \alpha \geq 1. \end{cases}$
2. Дайте означення невласного інтеграла від функції $f(x)$ з особливостями в точках $\{b_k\}$: $a < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < c$.
3. Дайте геометричне тлумачення невласного інтеграла другого роду.
4. Дайте означення абсолютної та умовної збіжності невласного інтеграла другого роду.
5. Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ на проміжку $[a; c)$ мають особливості в точці $x = c$ та задовольняють нерівності $|f(x)| \leq g(x)$. Покажіть, що коли інтеграл $\int\limits_a^c g(x)\,dx$ збіжний, то інтеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ також збіжний і

$$\left|\int\limits_a^c f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^c g(x)\,dx.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли від розривних функцій або встановити їх збіжність чи розбіжність:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв’язання. Функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ неперервна при $0 \le x < 1$ і має нескінченний розрив в точці $x=1$, тому маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

б) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\, dx$.

Розв’язання. Функція $f(x)=\operatorname{ctg} x$ не визначена в точці $x=0$, тому маємо

$$\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|\sin x|\Big|_\varepsilon^{\pi/4}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\varepsilon\right) = \infty,$$

тобто інтеграл розбіжний.

в) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Розв’язання. Функція $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ неперервна при $x\in(0;1)\cup(1;3)$ і має нескінченний розрив в точці $x=1$, тому за означенням маємо

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

оскільки перший доданок $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^1 = \infty - 1 = \infty$ є розбіжний інтеграл, то і заданий інтеграл розбіжний.

г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+5x^4}$.

Розв’язання. Функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+5x^4}$ має нескінченний розрив в точці $x=0$.

Для всіх $x \in (0;1)$ виконується нерівність

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x} + 5x^4} < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ і } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} < +\infty$$

– збігається, тому $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 5x^4} < +\infty$ – збігається також.

д) $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ має особливість в точці $x = 0$. По таблиці еквівалентності $\sin\alpha \sim \alpha, \alpha \to 0$. Тому $f(x) = \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x} = g(x)$, при $x \to 0$. Оскільки $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ – розбіжний, то заданий інтеграл також розбігається.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1. Обчислити інтеграли від розривних функцій або встановити їх розбіжність:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.
2. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x - 1}}$.
3. $\int_0^1 x \ln x\, dx$.
4. $\int_1^{1/e} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$.
5. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.
6. $\int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.
7. $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}$.
8. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x^2}}$.
9. $\int_{-1}^1 \frac{x + 1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$.
10. $\int_{-1}^1 \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.
11. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$.
12. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$.

Завдання 5.2. Дослідити збіжність інтегралів:

13. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

14. $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx.$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$

16. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}.$

17. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}dx.$

18. $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$

19. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$

20. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx.$

21. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

22. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$

§ 6. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ФІГУР

Основні поняття та теореми

Множина F точок площини називається *обмеженою*, якщо існує круг, який повністю містить всі точки множини F. Довільну обмежену множину точок площини називають плоскою фігурою. Фігуру називають *многокутною*, якщо вона складена із скінченного числа обмежених многокутників. Площу многокутної фігури можна обчислити, наприклад, як суму площ трикутників, що утворюються при „розрізанні” многокутника.

Надалі площу многокутної фігури F будемо позначати символом пл(F).

Нагадаємо *основні властивості площі:*

1. *Невід’ємність.* Площа многокутної фігури є невід’ємним числом: пл(F) ≥ 0.
2. *Інваріантність.* Якщо многокутні фігури F_1 і F_2 рівні, між собою, то пл(F_1) = пл(F_2).
3. *Адитивність.* Якщо F_1 і F_2 – дві многокутні фігури без спільних внутрішніх точок, то пл($F_1 \cup F_2$) = пл(F_1) + пл(F_2).
4. *Монотонність.* Якщо многокутна фігура F_1 міститься в многокутній фігурі F_2: $F_1 \subset F_2$, то пл(F_1) $\leq$ пл(F_2).

Перейдемо до означення площі довільної фігури Ф.

Розглянемо всі можливі многокутні фігури P, що повністю містяться в Ф, і многокутні фігури Q, що повністю містять фігуру Ф. Фігури P прийнято називати вписаними в Ф, а фігури Q – описаними.

Послідовність вписаних фігур $\{P_n\}$ називають вичерпуючою знизу фігуру *Φ*, якщо виконуються дві умови:

1) $P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \ldots \subset Ф$;

2) кожна точка фігури Ф належить всім P_n, починаючи з якогось номера $n_0 = n(M)$.

Площі α_n = пл(P_n) утворюють монотонно зростаючу послідовність чисел, крім того, α_n = пл(P_n) $\leq \pi R^2$, де R – радіус круга, що містить фігуру Ф. Тоді існує границя послідовності $\{\alpha_n\}$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} пл(P_n) \equiv пл_*(Ф),$$

яку прийнято називати <u>*нижньою площею*</u> фігури Ф.

Послідовність описаних фігур $\{Q_n\}$ називають вичерпуючою зверху фігуру Ф, якщо:

1) $Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n \supset Q_{n+1} \supset \ldots \supset Ф$;

2) кожна точка *N*, що не належить Ф не належить також і всім Q_n, починаючи з якогось номера $n_0 = n(N)$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} пл(Q_n) \equiv пл^*(Ф)$$

називається <u>*верхньою площею*</u> фігури Ф.

Очевидно, що $пл_*(Ф) \leq пл^*(Ф)$.

Означення. Плоска фігура Ф називається <u>*квадровною*</u> або такою, що <u>*має площу*</u>, якщо її верхня та нижня площі співпадають. При цьому число $пл_*(Ф) = пл^*(Ф) \equiv пл(Ф)$ називається <u>*площею*</u> фігури Ф.

Зауваження. Вперше приклад неквадровної фігури (такої, що не має площі) було наведено італійським математиком Пеано (1858–1932).

Означення. <u>*Криволінійною трапецією*</u> $Ф_a^b(f)$ називається фігура, обмежена графіком неперервної і невід'ємної функції *f*(*x*), перпендикулярними до осі *Ox* прямими *x* = *a* і *x* = *b* та відрізком осі *Ox* між точками *a* і *b*:

$$Ф_a^b(f) = \left\{ (x;y) \in R^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}.$$

Теорема. Криволінійна трапеція є квадровною фігурою, площа *S*, якої обчислюється за формулою $S = \int_a^b f(x)dx.$

Наслідок 1. Якщо функція *f*(*x*) на відрізку [*a*; *b*] змінює знак, то площа фігури, обмеженої графіком *y* = *f*(*x*) і віссю *Ox* обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Наслідок 2. Площа криволінійного прямокутника

$$\Pi_a^b(f_1;f_2)=\left\{(x;y)\in R^2 \middle| \begin{array}{l} a\le x\le b, \\ f_1(x)\le y\le f_2(x) \end{array}\right\},$$

обмеженого неперервними кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і вертикальними прямими $x=a$ та $x=b$ за умови, що $f_2(x)\ge f_1(x)$, обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

Наслідок 3. Якщо криволінійна трапеція обмежена параметрично заданою гладкою кривою $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)\ge 0, \end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$ і віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot|\varphi'(t)|\cdot dt.$$

Наслідок 4. Площа криволінійного сектора

$$\Phi_\alpha^\beta(\rho)=\left\{(\varphi;\rho) \middle| \begin{array}{l} \alpha\le\varphi\le\beta, \\ 0\le\rho\le\rho(\varphi) \end{array}\right\},$$

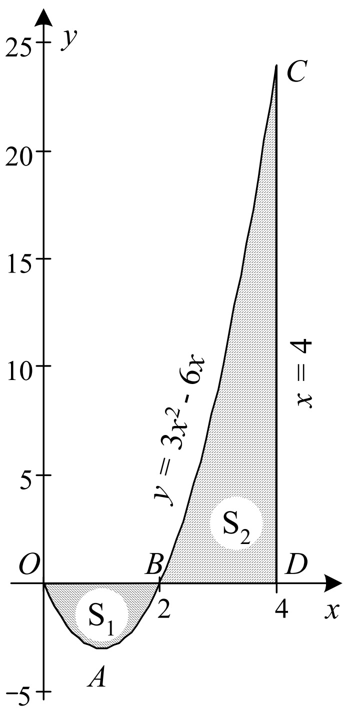
обмеженого неперервною кривою $\rho=\rho(\varphi)$ і променями $\varphi=\alpha$ та $\varphi=\beta$ в полярній системі координат, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Контрольні питання та завдання

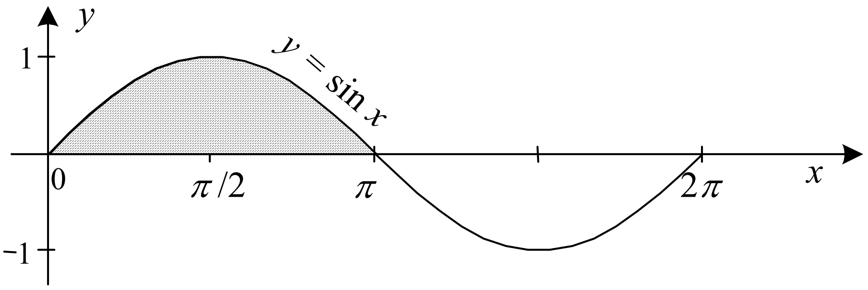
1. Які фігури називаються рівними між собою?
2. Доведіть властивість монотонності площі, виходячи із властивостей адитивності та невід’ємності.
3. Обґрунтуйте наявність верхньої площі у плоскої фігури.
4. Доведіть, що площа ламаної із скінченною кількістю ланок дорівнює нулю.
5. Доведіть, що перетин двох квадровних фігур є фігура квадровна.
6. Нехай функція $f(x)$ неперервна і недодатна на відрізку $[a; b]$, дайте геометричне тлумачення інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.
7. Поясніть наявність знаку модуля у формулі $S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot|\varphi'(t)|\cdot dt$ із наслідку 3.

Приклади розв’язування задач



Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої синусоїдою $y=\sin x$ на відрізку $[0;\pi]$ та віссю Ox.

Розв’язання.



На інтервалі $(0;\pi)$ функція $f(x)=\sin x$ зберігає знак, а тому за формулою $S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ одразу знаходимо

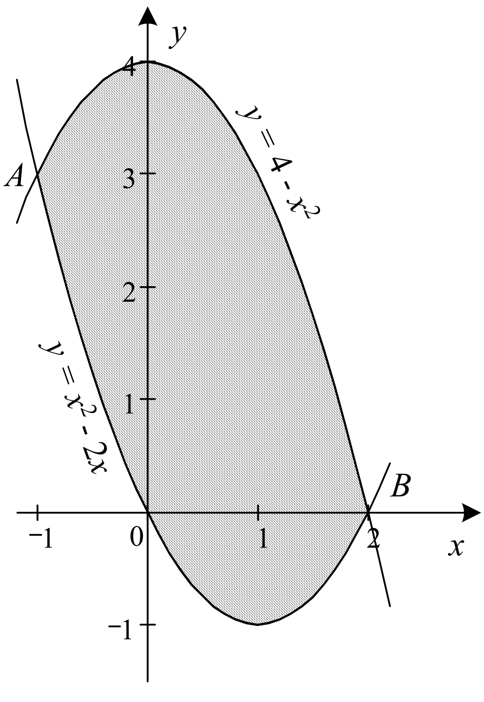
$$S=\int\limits_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\,\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2.$$

Приклад 2. Обчислити площу, обмежену прямою $x=4$, параболою $y=3x^2-6x$ на відрізку $[0;4]$ та віссю Ox.

Розв’язання. Трапеція OAB розташована під віссю, а трапеція BCD – над віссю Ox. Тому відрізок інтегрування $[0;4]$ має бути розділений на два: $[0;2]$ і $[2;4]$. Знайдемо

$$S=S_1+S_2=-\int\limits_0^2(3x^2-6x)dx+\int\limits_2^4(3x^2-6x)dx=$$

$$=-(x^3-3x^2)\Big|_0^2+(x^3-3x^2)\Big|_0^2=-(8-12)+(64-48-8+12)=4+20=24.$$



Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=4-x^2$ та $y=x^2-2x$.

Розв’язання.

Розв’язавши систему $\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=x^2-2x, \end{cases}$ визначимо точки перетину парабол $A(-1;3)$ B(2; 0). Парабола $y=4-x^2$ обмежує фігуру зверху, а парабола $y=x^2-2x$ – знизу. Тому за формулою

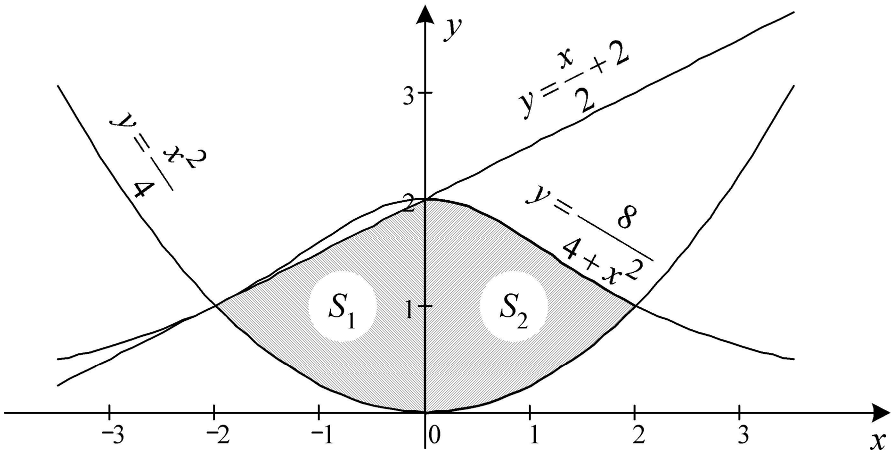
$S=\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx,\ f(x)\geq g(x),$ визначимо площу

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\Big((4-x^2)-(x^2-2x)\Big)dx=$$

$$\int\limits_{-1}^{2}\Big(4+2x-2x^2\Big)dx=\left(4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2}=9.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x}{2}+2$ і $y=\frac{x^2}{4}$ при $x\leq 0$ та лініями $y=\frac{8}{4+x^2}$ і $y=\frac{x^2}{4}$ при $x\geq 0$.

Розв'язання.



Знайдемо точки перетину прямої $y=\frac{x}{2}+2$, що обмежує фігуру зверху, і параболи $y=\frac{x^2}{4}$, яка обмежує фігуру знизу. Розв'язавши рівняння

$$\frac{x^2}{4}=\frac{x}{2}+2,\ x^2-2x-8=0,\ x_1=-2,\ x_2=4,$$

отримаємо, що в лівій півплощині знаходиться лише одна точка перетину $(-2;1)$. Тому за формулою $S=\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx,\ f(x)\geq g(x),$ площа S_1 визначиться за допомогою інтеграла $S_1=\int\limits_{-2}^{0}\left(\left(\frac{x}{2}+2\right)-\frac{x^2}{4}\right)dx.$

В правій частині площини фігуру обмежує зверху локон Аньєзі $y=\dfrac{8}{4+x^2}$, а знизу парабола $y=\dfrac{x^2}{4}$. Розв'яжемо рівняння

$$\frac{x^2}{4}=\frac{8}{4+x^2},\ \frac{x^4+4x^2-32}{4(4+x^2)}=0,\ x_1=-2,\ x_2=2.$$

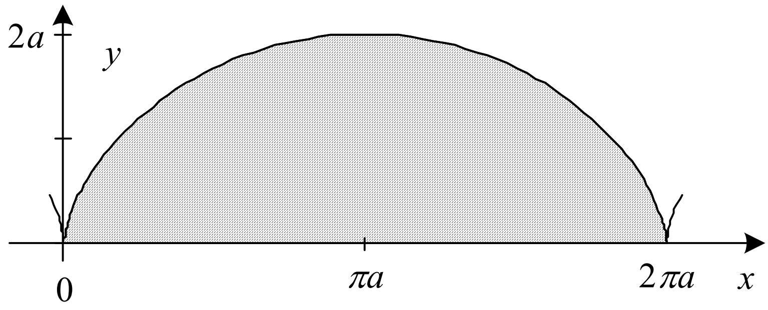
Отримаємо, що $S_2=\int\limits_0^2\left(\dfrac{8}{4+x^2}-\dfrac{x^2}{4}\right)dx.$ Отже загалом шукана площа дорівнює

$$S=S_1+S_2=\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int\limits_0^2\left(\frac{8}{4+x^2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+2x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^2=-\left(1-4+\frac{2}{3}\right)+\left(4\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)=\pi+\frac{5}{3}.$$

Приклад 5. Знайти площу фігури, обмеженої віссю Ox та однією аркою циклоїди $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi.$

Розв'язання.



У формулі

$$S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\cdot|\varphi'(t)|\,dt$$

необхідно взяти

$$\psi(t)=y=a(1-\cos t);$$

$\varphi'(t)$ знаходять з рівняння

$$\varphi(t)=x=a(t-\sin t).$$

Отримаємо $\varphi'(t)=a(1-\cos t)\ge 0$.

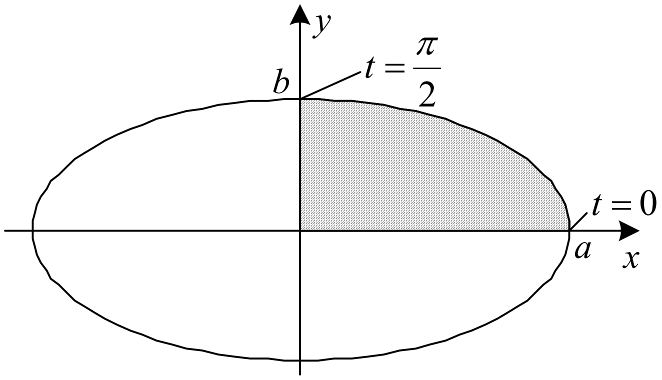
Межі інтегрування від 0 до 2π. Тому $|\varphi'(t)|=a(1-\cos t)$.

$$S=\int\limits_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Розв'язання.



Осі координат ділять даний еліпс на чотири однакові частини. Четверту частину шуканої площі S, розташовану в першій координатній чверті, знайдемо як площу криволінійної трапеції:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot |\varphi'(t)|\, dt.$$

Користуючись параметричними рівняннями еліпса, отримаємо

$$\psi(t) = b\sin t, \quad \varphi(t) = a\cos t \Rightarrow \varphi'(t) = -a\sin t.$$

Оскільки для точок першої чверті $0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin t \ge 0$, то $|\varphi'(t)| = a\sin t$.

Обчислимо $\frac{S}{4} = \int_0^{\pi/2} b\sin t \cdot a\sin t\, dt = ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt =$

$$= \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Отже $S = \pi ab$.

Приклад 7. Знайти площу, між віссю Ox та локоном Аньєзі, що визначається рівнянням $\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{a^3}{a^2 + t^2}. \end{cases}$

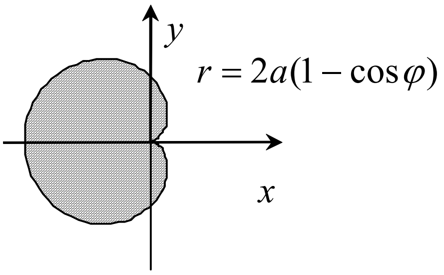
Розв'язання. Крива симетрична відносно осі Oy (див. рисунок задачі 1.3). На всій площині абсциса точки кривої змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, а так як $x = t$ (перше рівняння), то параметр t змінюється в тих же межах. Отже

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + t^2} dt = a^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = a^3 \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = a^2 (\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)) =$$

$$= a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi a^2.$$

Приклад 8. Знайти площу, обмежену кардіоїдою $r = 2a(1-\cos\varphi)$.

Розв'язання.



Оскільки $r = 2a(1-\cos\varphi) > 0$ при $0 < \varphi < 2\pi$, то за формулою площі сектора в полярній системі координат

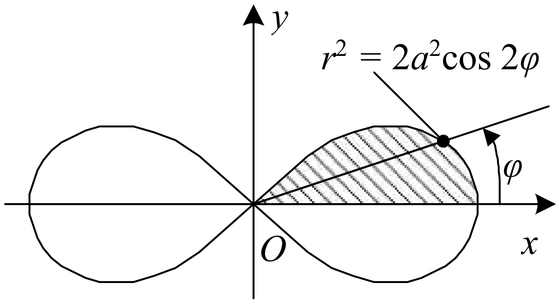
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

маємо

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 4a^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi = 2a^2\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = 2a^2\left(\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 6\pi a^2.$$

Приклад 9. Визначити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі, яка задана рівнянням $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.



Розв'язання.

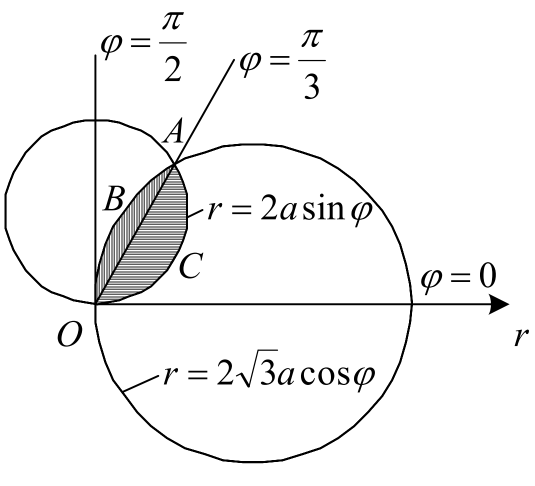
Так як $2a^2\cos 2\varphi = r^2 \geq 0$, то Лемніската означена для тих φ із $[0; 2\pi]$, де $\cos 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$.

В силу симетрії чверть площі заданої фігури знаходиться в першій координатній чверті, тому

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2},$$

а вся площа $S = 2a^2$.

Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої колами $r = 2\sqrt{3}a\cos\varphi$ та $r = 2a\sin\varphi$.



Розв'язання. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} r = 2\sqrt{3}a\cos\varphi, \\ r = 2a\sin\varphi, \end{cases}$$

знайдемо точку перетину кіл $A\left(\frac{\pi}{3}; a\sqrt{3}\right)$.

Шукана площа S дорівнює сумі площ криволінійних секторів OCA та ABO.

Дуга OCA описується кінцем полярного радіуса r меншого кола при зміні полярного кута φ від $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{3}$, тому

$$S_{OCA}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/3} r^2(\varphi)\,d\varphi=2a^2\int_{0}^{\pi/3}\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=a^2\int_{0}^{\pi/3}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi/3}=a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Дуга ABO описується кінцем полярного радіуса r більшого кола при зміні полярного кута φ від $\varphi=\frac{\pi}{3}$ до $\varphi=\frac{\pi}{2}$, тому

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} r^2(\varphi)\,d\varphi=6a^2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=3a^2\int_{\pi/3}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=3a^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2}=3a^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Отже, $S=S_{OCA}+S_{ABO}=a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 6.1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, рівняння яких $y^2=2x+1$ та $x-y-1=0$.

Завдання 6.2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$.

Завдання 6.3. Круг, обмежений колом $x^2+y^2=8$, розділено параболою $y=\frac{x^2}{2}$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

Завдання 6.4. Обчислити площі криволінійних фігур, утворених при перетині еліпса $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ та гіперболи $\frac{x^2}{2}-y^2=1$

Завдання 6.5. Обчислити площу, що описується полярним радіусом спіралі Архімеда $r=a\varphi$ при одному її оберті, якщо початку руху відповідає $\varphi=0$.

Завдання 6.6. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $r=a\sin 2\varphi$.

Завдання 6.7. Знайти площу фігури, обмеженої равликом Паскаля

$$r=2a(2+\cos\varphi).$$

Завдання 6.8. Знайти площу спільної частини фігур, обмежених лініями

$$r = 3 + \cos 4\varphi \text{ та } r = 2 - \cos 4\varphi.$$

Завдання 6.9. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Завдання 6.10. Знайти площу петлі лінії $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Завдання 6.11. Знайти площу петлі лінії $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

§ 7. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ

Основні поняття та теореми

1. *Довжина явно заданої дуги кривої.*

Нехай функція $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ неперервну похідну $f'(x)$. Тоді графік функції

$$L: \begin{cases} y = f(x), \\ a \le x \le b, \end{cases}$$

називається явно заданою гладкою кривою.

Розглянемо систему точок $M_k(x_k; y_k)$ на кривій L, де

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сполучивши послідовно точки $\{M_k\}$, отримаємо ламану $L_n = M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$ вписану в дугу L. Позначимо периметр цієї ламаної через $l_n = \text{дов}(L_n)$. Нехай $d = \max\limits_k \Delta x_k$ – діаметр поділу $\{x_k\}$ відрізка $[a; b]$.

Означення. Якщо існує

$$\lim_{d \to 0} \text{дов}(L_n) = l,$$

яка не залежить від способу вписування ламаних L_n, то дуга L називається *спрямлюваною* або такою, що *має довжину*. При цьому число $l \equiv \text{дов}(L)$ називається *довжиною* дуги L.

Геометричне тлумачення довжини дуги. Довжина нескінченно малої гладкої дуги вважається рівною довжині хорди, що стягує цю дугу, тобто

$$\Delta l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \ \Delta x_k \to 0.$$

Цей факт означає, що елементи довжини дуги можна записати наступним чином

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx .$$

Теорема 16.1. Довжина явно заданої гладкої дуги обчислюється за формулою

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx .$$

2. <u>*Довжина дуги, заданої параметрично.*</u>

Наступне означення є найбільш загальним поняттям гладкої дуги.

Якщо в рівнянні кривої заданої параметрично

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ мають неперервні похідні і $(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2 > 0$, то крива L називається гладкою.

Зауваження. Якщо $t \equiv x$, то параметричне задання кривої є явним: $y = \psi(x)$, $\alpha \le x \le \beta$.

Гладку криву L можна розглядати як траєкторію руху матеріальної точки в часі:

$$\vec{r}(t) = \varphi(t) \cdot \vec{i} + \psi(t) \cdot \vec{j}, \; t \in [\alpha; \beta].$$

Для вектора швидкості руху точки по дузі маємо вираз

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \varphi'(t) \cdot \vec{i} + \psi'(t) \cdot \vec{j}.$$

<u>Фізичне тлумачення довжини дуги.</u>

Елемент довжини дуги траєкторії руху точки дорівнює добутку величини вектора швидкості на елемент часу:

$$dl = |\vec{V}(t)|\, dt = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} \cdot dt.$$

Теорема 2. Довжина параметрично заданої гладкої дуги обчислюється за формулою

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\, dt.$$

Наслідок 1. Нехай гладка крива L задана у просторі системою рівнянь

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \; \alpha \le t \le \beta, \\ z = \eta(t), \end{cases}$$

тоді довжина дуги кривої

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2 + (\eta'_t)^2}\, dt.$$

Зауваження. Якщо розглянути полярну систему координат (φ; ρ), зв'язану з декартовою системою (x; y) рівняннями

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ і } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

то крива $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, в декартовій системі координат задається за допомогою параметра-кута $t \equiv \varphi$ таким чином:

$$L: \begin{cases} x = \rho(\varphi) \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi, \end{cases} \quad \alpha \le \varphi \le \beta.$$

Наслідок 2. Якщо в полярній системі координат гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Контрольні питання та завдання

1. Як називають криву, що має дотичну в кожній своїй точці?
2. Виходячи із формули $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ отримайте похідну від довжини дуги по абсцисі.
3. Який взаємозв'язок між формулами із теореми 1 і теореми 2?
4. Обґрунтуйте незалежність довжини дуги від закону параметризації кривої.
5. Нехай L просторова параметрично задана дуга. Дайте означення правильно вписаної ламаної в дугу L.
6. Доведіть, що площа спрямлюваної дуги дорівнює нулю.
7. Нехай $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервні і мають на відрізку [α; β] обмежені перші похідні. Покажіть, що крива $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, є спрямлюваною і її довжина $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\, dt.$

Приклади розв'язування задач

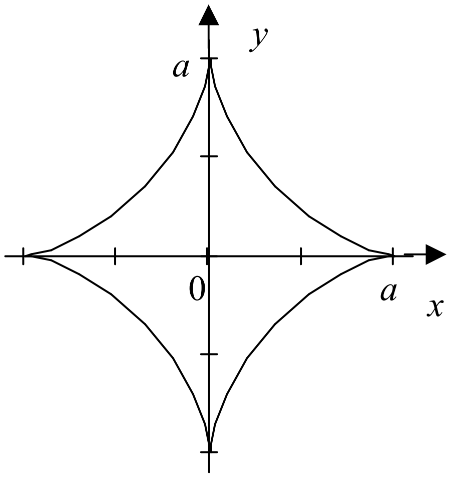
Приклад 1. Обчислити всю довжину астроїди, що визначається рівнянням

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Розв'язання.

Скористаємося формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$



Знайдемо y з рівняння астроїди. $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$; піднесемо обидві частини цієї рівності до степеня $\frac{3}{2}$. Отримаємо

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad y' = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Тоді маємо $\frac{L}{4} = \int\limits_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx = a^{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a = \frac{3}{2}a;\ L = 6a.$

Приклад 2. Знайти довжину кардіоїди, що визначається рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Розв'язання.

Скористаємося формулою

$$L = \int\limits_\alpha^\beta |\vec{v}(t)|\,dt = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt, \text{ де } \vec{v}(t) = (x_t'; y_t').$$

Обчислимо похідні $x' = -2R\sin t + 2R\cos 2t,\ \ y' = 2R\cos t - 2R\cos 2t.$

Тоді

$$x'^2 + y'^2 = 4R^2\sin^2 t - 8R^2\sin t\sin 2t + 4R^2\sin^2 2t +$$

$$+4R^2\cos^2 t - 8R^2\cos t\cos 2t + 4R^2\cos^2 2t =$$

$$= 4R^2(1 - 2\sin t\sin 2t - 2\cos t\cos 2t + 1) =$$

$$= 8R^2\left(1 - 2\sin^2 t\cos t - \cos^3 t + \cos t\sin^2 t\right) = 8R^2(1-\cos t) = 16R^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

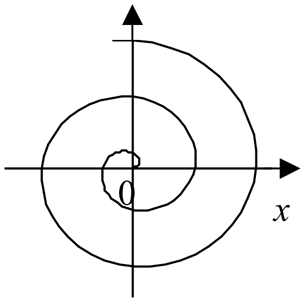
Отже отримаємо

$$L = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{16R^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 4R\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 4R\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -8R\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8R(-1-1) = 16R.$$

Приклад 3. Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $r = a\varphi$ від початку координат до довільної точки $P(r,\varphi)$.

Розв'язання.



Скористаємося формулою $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\phi$.

Обчислимо $\sqrt{r^2 + (r')^2}$. З того, що $r = a\varphi$ слідує, що

$$r' = a;\;\; r^2 + r'^2 = a^2\varphi^2 + a^2 = a^2(1+\varphi^2);$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = a\sqrt{1+\phi^2}.$$

Тому

$$L = a\int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\,)\right)\Bigg|_0^{\varphi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\,)\right).$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 7.1. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y = a\,\text{ch}\frac{x}{2}$ (від $x_1 = 0$ до $x_2 = b$).

Завдання 7.2. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln x$ (від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$).

Завдання 7.3. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln(1 - x^2)$ (від $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$).

Завдання 7.4. Знайти довжину лінії $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

Завдання 7.5. На циклоїді $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ знайти точку, яка ділить першу арку циклоїди по довжині у відношенні $1:3$.

Завдання 7.6. Знайти довжину лінії $\begin{cases} x = a\cos^5 t, \\ y = a\sin^5 t. \end{cases}$.

Завдання 7.7. Знайти довжину дуги трактриси $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \text{tg}\frac{t}{2}\right), \\ y = a\sin t \end{cases}$ від її точки $(0, a)$ до її точки (x, y).

Завдання 7.8. Знайти довжину дуги евольвенти кола $\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t), \\ y = R(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

Завдання 7.9. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $r\varphi = 1$ (від $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ до $\varphi_2 = \frac{4}{3}$).

Завдання 7.10. Знайти довжину логарифмічної спіралі $r = a^{\varphi}$ ($a > 0, a \neq 1$) між точками (r_0, φ_0) і (r_1, φ_1).

Завдання 7.11. Знайти довжину дуги цисоїди Діоклеса $r = 2a\sin^2\varphi / \cos\varphi$ від точки (r_0, φ_0) до точки (r_1, φ_1).

§ 8. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМУ І ПОВЕРХНІ ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Основні поняття та теореми

Обмежену множину точок простору називають *тілом*. Вважаємо відомими зі школи поняття многогранного тіла та його об'єму. Відзначимо, що цей об'єм володіє властивостями адитивності, інваріантності та монотонності.

Розглянемо довільне тіло *T*, а також всі можливі многогранні тіла $P \subset T$ розташовані в ньому та всі многогранні тіла $Q \supset T$, що містять його.

Нижнім об'ємом тіла *T* називають число $V_* = \sup\limits_{P \subset T} \text{об}(P)$.

Верхнім об'ємом тіла *T* називають число $V^* = \inf\limits_{Q \supset T} \text{об}(Q)$.

Означення. Тіло *T* називається *кубовним* або таким, що *має об'єм*, якщо $V_* = V^*$. При цьому число $V_* = V^* = \text{об}(T)$ називається об'ємом тіла *T*.

Просторове тіло *T* будемо називати *циліндричним*, якщо воно обмежене циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами, перпендикулярними до поверхні циліндра.

Твердження. Якщо основа циліндричного тіла *T* має площу $S_{\text{осн}}$, то саме тіло має об'єм, який обчислюється за формулою об(T) = $S_{\text{осн}} \cdot H$, де H – висота циліндра.

Східчастим тілом називають об'єднання скінченного числа циліндричних тіл $\{T_k\}$ розташованих так, що верхня основа кожного попереднього із цих циліндрів знаходиться в одній площині з нижньою основою наступного.

Об'єм східчастого тіла *T* існує, причому

$$\text{об}(T) = \sum_{k=1}^{n} \text{об}(T_k).$$

За допомогою методу наближення східчастими тілами формулу обчислення об’єму можна поширити на тіла довільної структури.

Як приклад, розглянемо тіла, правильні вздовж деякої осі.

Означення. Тіло T називається *правильним вздовж осі* Ox, якщо виконано наступні три умови:

1) пр$_{Ox}(T) = [a; b]$ – проекція тіла T на вісь Ox є відрізок $[a; b]$;
2) перерізи цього тіла площинами, перпендикулярними до осі Ox є квадровні фігури з площами $S(x)$, $a \le x \le b$;
3) функція $S = S(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$.

Теорема 1. Тіло T правильне вздовж осі Ox має об’єм, який можна обчислити за площами паралельних перерізів

$$V = \int_a^b S(x)\, dx .$$

Наслідок 1. Тіло, що утворене при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції неперервної функції $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, має об’єм, який обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Наслідок 2. Нехай $y = f(x)$ монотонна функція на відрізку $[a; b]$, а $x = g(y)$ обернена до неї на $y \in [c; d]$. Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції $\{0 \le x \le g(y),\ c \le y \le d\}$ обчислюється за формулами

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy = \pi \int_a^b x^2 \cdot |\, f'(x)\,|\, dx.$$

Теорема 2. Якщо поверхня утворена при обертанні навколо осі Ox гладкої дуги графіка $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, то площа цієї поверхні обертання обчислюється за формулою

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Теорема 3. Якщо поверхня утворена при обертанні навколо осі Ox параметрично заданої гладкої дуги: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то площа поверхні обертання

$$Q = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt,$$

а об’єм тіла обертання

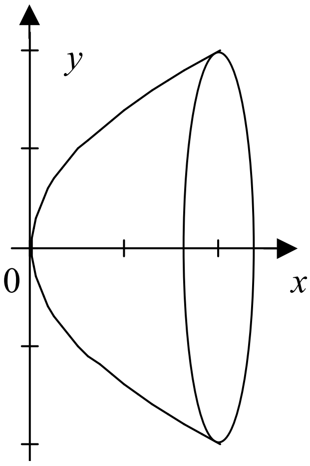
$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \cdot |\, \varphi'(t)\,|\, dt.$$

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення sup G – точної верхньої межі множини G та inf G – точної нижньої межі множини G із R^1.
2. Яку фігуру називають основою циліндричного тіла? Що таке висота циліндричного тіла?
3. Доведіть властивості адитивності та монотонності для об'єму довільного просторового тіла.
4. Доведіть, що тіло T має об'єм тоді і тільки тоді, коли його межа має нульовий об'єм: об$(\partial T) = 0$.
5. Доведіть формулу для об'єму тіла обертання із наслідку 2.
6. Нехай r і R – радіуси основ зрізаного кругового конуса, а l – довжина твірної. Доведіть, що площа бічної поверхні зрізаного конуса обчислюється за формулою $S_{\text{біч}} = \pi(r + R)\cdot l$.
7. Доведіть, що площа поверхні утвореної при обертанні навколо полярної осі гладкої дуги $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, обчислюється за формулою
$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \cdot \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi .$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти об'єм та бічну поверхню параболоїда, утвореного обертанням параболи $y^2 = 2px$ навколо осі Ox та обмеженого площиною $x = H$.



Розв'язання.

Об'єм тіла обчислимо за формулою:
$$V = \pi \int_0^H y^2 dx = \pi \int_0^H 2px\, dx = 2p\pi \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H = \pi p H^2 .$$

Бічна поверхня визначається за формулою
$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx .$$

Знайдемо спочатку корінь $\sqrt{1 + (y')^2}$, що входить в цю формулу. Якщо $y^2 = 2px$, то $y' = \frac{p}{y}$, $(y')^2 = \frac{p^2}{y^2} = \frac{p^2}{2px} = \frac{p}{2x}$; $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}$.

Так як $y^2 = 2px$, то $y = \sqrt{2px}$.

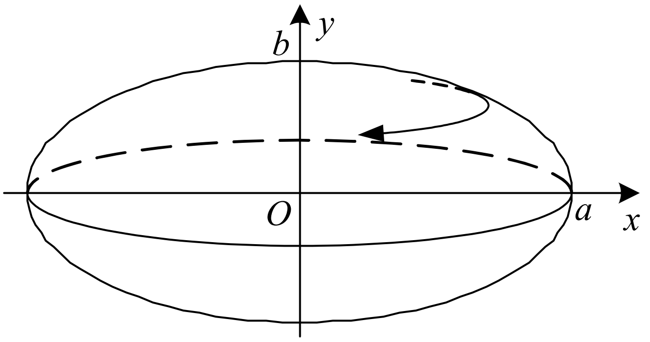
Отже знаходимо

$$S=2\pi\int\limits_0^H\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx=2\pi\int\limits_0^H\sqrt{2px+p^2}\,dx=\frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^H=$$

$$=\frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(\left(H+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Приклад 2. Знайти об'єм і поверхню тіла, що утворюється при обертанні еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ навколо осі Oy.

Розв'язання.



Для $x\geq 0$ з рівняння еліпса маємо $x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$. Обчислимо об'єм цього тіла (еліпсоїд обертання) за формулою

$$V=\pi\int\limits_c^d x^2dy\,.$$

Враховуючи симетрію еліпса відносно осі Ox маємо

$$V=2\pi a^2\int\limits_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

Поверхню тіла обертання обчислимо за формулою

$$S=2\pi\int\limits_a^b x(y)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy.$$

Оскільки $x'(y)=\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)'=a\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\cdot\left(-\frac{2y}{b^2}\right)=-\frac{a}{b}\cdot\frac{y/b}{\sqrt{1-(y/b)^2}}$, то

$$S=2\cdot 2\pi\int\limits_0^b a\sqrt{1-(y/b)^2}\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\cdot\frac{y/b}{\sqrt{1-(y/b)^2}}\right)^2}\,dy=$$

$$=4\pi ab\int\limits_0^b\sqrt{1-(y/b)^2+\frac{a^2}{b^2}\cdot(y/b)^2}\;d\frac{y}{b}.$$

Введемо заміну $\frac{y}{b}=z$, $d\frac{y}{b}=dz$, $z_1=0$, $z_2=1$.

$$S=4\pi ab\int_0^1\sqrt{1-z^2+\frac{a^2}{b^2}\cdot z^2}dz=4\pi ab\frac{1}{b}\int_0^1\sqrt{b^2-b^2z^2+a^2z^2}dz=$$

$$=4\pi a\sqrt{a^2-b^2}\int_0^1\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}+z^2}dz=$$

$$=2\pi a\sqrt{a^2-b^2}\left(z\sqrt{z^2+\frac{b^2}{a^2-b^2}}+\frac{b^2}{a^2-b^2}\ln\left(z+\sqrt{z^2+\frac{b^2}{a^2-b^2}}\right)\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2\pi a\sqrt{a^2-b^2}\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2-b^2}}+\frac{b^2}{a^2-b^2}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2-b^2}}\right)-\ln\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}}\right)=$$

$$=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}.$$

Приклад 3. Знайти об'єм і поверхню тіла, що утворюється при обертанні однієї арки циклоїди $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ навколо осі Ox.

Розв'язання. У випадку, коли крива задана параметричними рівняннями об'єм тіла обертання визначається за формулою

$$V=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\cdot x'(t)dt.$$

Тому $V=\pi\int_0^{2\pi}\left(a(1-\cos t)\right)^2\left(a(t-\sin t)\right)'dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-\frac{1}{4}(\cos t+\cos 3t)\right)dt=\pi a^3\cdot 5\pi=5\pi^2a^3.$$

Поверхню тіла обертання знайдемо за формулою

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt.$$

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(t-\sin t)'^2 + a^2(1-\cos t)'^2}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{3t}{2}\right)dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 8.1. Еліпс, велика вісь якого дорівнює $2a$, мала – $2b$, обертається: 1) навколо великої осі, 2) навколо малої осі. Знайти об'єм еліпсоїдів обертання, що утворилися. В частинному випадку отримати об'єм кулі.

Завдання 8.2. Симетричний параболічний сегмент, основа якого a, а висота h, обертається навколо основи. Обчислити об'єм тіла обертання, яке при цьому утворюється ("лимон" Кавальєрі).

Завдання 8.3. Фігура, обмежена гіперболою $x^2 - y^2 = a^2$ та прямою $x = a + h\,(h > 0)$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

Завдання 8.4. Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y = xe^x$ та прямими $x = 1$ і $y = 0$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

Завдання 8.5. Фігура, обмежена дугами парабол $y = x^2$ та $y^2 = x$, обертається навколо осі ординат. Обчислити об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

Завдання 8.6. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі ординат.

Завдання 8.7. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 4ax$ навколо осі абсцис від вершини до точки з абсцисою $x = 3a$.

Завдання 8.8. Обчислити площу катеноїда – поверхні, утвореною обертанням ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ навколо осі абсцис (від $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

Завдання 8.9. Обчислити площу поверхні веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням однієї арки синусоїди $y = \sin x$ навколо осі абсцис.

Завдання 8.10. Дуга кола $x^2+y^2=a^2$, що лежить в першому квадранті, обертається навколо хорди, що її стягує. Обчислити площу поверхні, що при цьому утворюється.

Завдання 8.11. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис дуги лінії $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$.

Завдання 8.12. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ навколо осі абсцис.

§ 9. ОБЧИСЛЕННЯ МОМЕНТІВ, КООРДИНАТ ЦЕНТРА ВАГИ, ТЕОРЕМИ ГУЛЬДІНА

Основні поняття та теореми

Нехай $P(x;y)$ – матеріальна точка маси m на координатній площині Oxy. Добутки $m\cdot y$ і $m\cdot x$ називаються <u>*статичними моментами маси*</u> m відносно осей Ox і Oy.

Координати P_c – центра мас системи матеріальних точок $P_k(x_k;y_k)$ з масами m_k, $k=\overline{1,n}$ визначаються за формулами

$$x_c=\frac{x_1\cdot m_1+...+x_n\cdot m_n}{m_1+...+m_n},\ y_c=\frac{y_1\cdot m_1+...+y_n\cdot m_n}{m_1+...+m_n}.$$

<u>Центр мас плоскої лінії.</u>

Нехай L однорідна спрямлювана крива, тобто крива L має масу, яка прямо пропорційна довжині дуги:

$$dm=\gamma\cdot dl,$$

де dm – маса елемента дуги dl, а γ – деяка стала лінійна густина кривої L.

Координати центра мас явно заданої гладкої дуги L: $y=f(x)$, $a\le x\le b$, обчислюються за формулами:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b x\cdot\gamma\cdot dl}{\gamma\int\limits_a^b dl}=\frac{\int\limits_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx},$$

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\gamma\cdot dl}{\gamma\int\limits_a^b dl} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}.$$

Нагадаємо, що площа поверхні утвореної при обертанні графіка $y = f(x)$, $a \le x \le b$, навколо осі Ox дорівнює

$$Q = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Із формули для ординати y_c центра мас виводимо

$$y_c = \frac{Q}{2\pi l} \text{ або } Q = l\cdot 2\pi y_c.$$

Остання рівність і становить, по суті першу теорему швейцарського математика Гульдіна П. (1577–1643).

Перша теорема Гульдіна. Площа поверхні обертання плоскої кривої навколо осі, що не перетинає криву і лежить в її площині, дорівнює добутку довжини кривої і довжини кола, яке описує при обертанні центр мас кривої.

Центр мас плоскої фігури.

Нехай задано матеріальну плоску фігуру з постійною поверхневою густиною, тобто маса одиниці площі її поверхні стала величина γ для всіх частин фігури.

Якщо фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, то координати центра мас обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}{\int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx}{\int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}.$$

Корисним при розв’язуванні задач є такий факт.

Твердження. Якщо фігура (крива) має вісь симетрії, то центр ваги лежить на цій осі.

Розглянемо криволінійний прямокутник

$$\Pi = \left\{ (x;y) \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x), \\ a \le x \le b \end{matrix} \right\},$$

його площа $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$, а об’єм тіла обертання навколо осі Ox прямокутника П дорівнює

$$V = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x) \right) dx .$$

Із формули для ординати центра мас плоскої фігури маємо

$$2\pi \cdot y_C \cdot S = V.$$

Друга теорема Гульдіна. Об’єм тіла обертання плоскої фігури навколо осі, що не перетинає фігуру і лежить в її площині, дорівнює добутку площі цієї фігури та довжини кола, яке описує при обертанні центр мас фігури.

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте основну властивість центра мас системи матеріальних точок.
2. Нехай на явно заданій дузі L: $y = f(x)$, $a \le x \le b$, задана змінна лінійна густина $\gamma = \gamma(x)$. Покажіть, що координати центра мас дуги виражаються формулами:

$$x_C = \frac{\int_a^b x \cdot \gamma(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx}{\int_a^b \gamma(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx}, \quad y_C = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \gamma(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx}{\int_a^b \gamma(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx}.$$

3. Нехай однорідна матеріальна дуга задана параметрично

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

Покажіть, що її центр мас можна знайти за формулами

$$x_C = \frac{\int_\alpha^\beta \varphi(t) \cdot \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt}, \quad y_C = \frac{\int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt}.$$

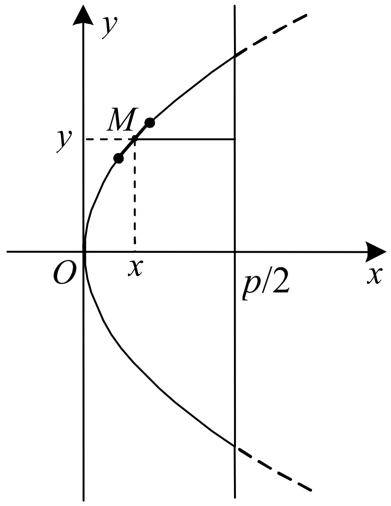
4. Покажіть, що момент інерції явно заданої однорідної гладкої дуги графіка $y = f(x)$, $a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$I_0 = \gamma \cdot \int_a^b \left(x^2 + f^2(x) \right) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx .$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти статичний момент дуги параболи $y^2 = 2px$ $\left(0 \le x \le \frac{p}{2}\right)$ відносно прямої $x = \frac{p}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $y = \pm\sqrt{2p} \cdot \sqrt{x}$, то



$$y' = \pm\sqrt{2p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \pm\sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Нехай x – абсциса точки $M(x,y)$, що лежить на дузі $\overset{\cup}{dl}$; тоді (з точністю до нескінченно малої більш високого порядку малості, ніж dx)

$$dM_{\frac{p}{2}} = \left(\frac{p}{2} - x\right)dl = \left(\frac{p}{2} - x\right)\sqrt{1 + y'^2}\,dx =$$

$$= \left(\frac{p}{2} - x\right)\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx.$$

Враховуючи симетрію кривої відносно осі Ox, маємо

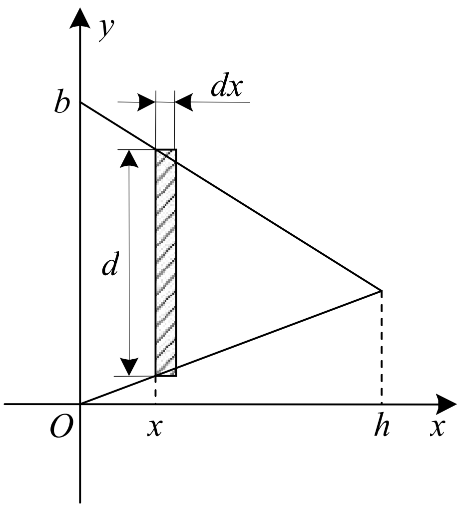
$$M_{\frac{p}{2}} = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2} - x\right)\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx = \int_0^{\frac{p}{2}} (p - (\sqrt{2x})^2)\sqrt{p + (\sqrt{2x})^2}\,d(\sqrt{2x}) =$$

$$= \int_0^{\sqrt{p}} (p - z^2)\sqrt{p + z^2}\,dz =$$

$$= \left(\frac{z}{4}\sqrt{p + z^2}\left(\frac{5p}{2} - (p + z^2)\right) + \frac{5}{8}p^2 \ln(z + \sqrt{p + z^2})\right)\Bigg|_0^{\sqrt{p}} = \frac{p^2}{8}(\sqrt{2} + 5\ln(1 + \sqrt{2})).$$

Приклад 2. Знайти статичний момент і момент інерції однорідної трикутної пластинки з основою b і висотою h відносно основи.

Розв'язання. Відрізок, кінці якого лежать на бічних сторонах трикутника, паралельних основі, що проходить на відстані x $(0 < x < h)$ від нього, має довжину $d = b\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Розглянемо тепер горизонтальну смужку шириною dx, паралельну основі трикутника, прийнявши її наближено за прямокутник зі сторонами довжини d та dx. З точністю до нескінченно малих більш високого порядку ніж dx, отримаємо, що площа смужки дорівнює величині $b\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx$, а статич-



ний момент і момент інерції смужки відносно основи трикутника дорівнюють, відповідно,

$$dM = bx\left(1-\frac{x}{h}\right)dx;\ dI = bx^2\left(1-\frac{x}{h}\right)dx.$$

Отримуємо

$$M = b\int_0^h x\left(1-\frac{x}{h}\right)dx = b\int_0^h\left(x-\frac{x^2}{h}\right)dx =$$

$$= b\int_0^h\left(x-\frac{x^2}{h}\right)dx = b\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3h}\right)\Bigg|_0^h = b\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3h}\right) = \frac{bh^2}{6},$$

$$I = b\int_0^h x^2\left(1-\frac{x}{h}\right)dx = b\int_0^h\left(x^2-\frac{x^3}{h}\right)dx = b\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h = b\left(\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4h}\right) = \frac{bh^3}{12}.$$

Приклад 3. Визначити координати центра мас кругової дуги $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \end{cases}$ $-\alpha \le \varphi \le \alpha$, де $0 < \alpha < \pi$.

Розв'язання. Дуга симетрична відносно осі Ox, тому центр мас дуги знаходиться на цій осі. Обчислимо довжину кривої та статичний момент відносно осі Oy.

Оскільки $\begin{cases} dL = ad\varphi, \\ dM_y = a\cos\varphi \cdot ad\varphi, \end{cases}$ то

$$L = a\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi;\ M_y = a^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\, d\varphi = 2a^2\sin\alpha.$$

Знайдемо координату x_C центра ваги: $x_C = \dfrac{M_y}{L} = a\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$. Таким чином, $C(x_C, y_C) = \left(a\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$.

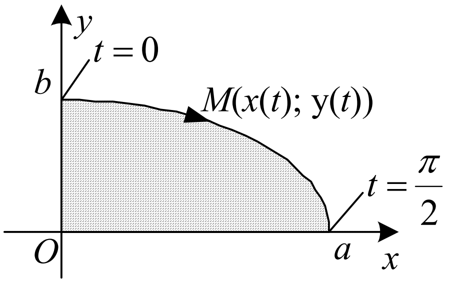
Приклад 4. Визначити координати центра мас фігури

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\ \ (0 \le x \le a, 0 \le y \le b).$$

Розв'язання. Рівняння четвертої частини еліпса запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t, \end{cases}\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Тоді



$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t)\,dx(t) = \frac{ab^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,d\sin t =$$

$$= \frac{ab^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\,d\sin t =$$

$$= \frac{ab^2}{2}\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab^2}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{ab^2}{3};$$

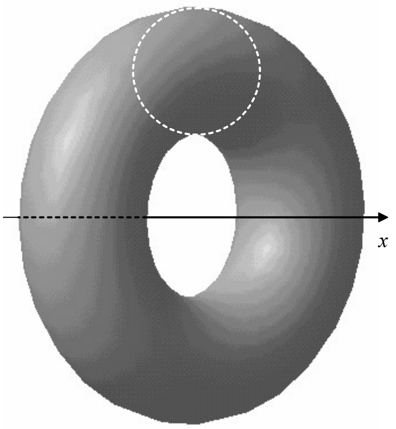
$$M_y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y(t)\,dx(t) = a^2b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,dt = -a^2b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,d\cos t =$$

$$= -a^2b\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2b}{3}.$$

Оскільки $S = \frac{\pi ab}{4}$, то $x_C = \frac{M_y}{S} = \frac{4a}{3\pi}$, $y_C = \frac{M_x}{S} = \frac{4b}{3\pi}$.

Приклад 5. Знайти площу поверхні тора, що утворюється обертанням навколо осі Ox кола $x^2 + (y-d)^2 = R^2$, $d > R$.

Розв'язання.



Скористаємось першою теоремою Гульдіна. Площа S поверхні тора, утвореного обертанням навколо осі Ox кола

$$x^2 + (y-d)^2 = R^2 \quad (d > R)$$

радіуса R, дорівнює добутку довжини кола (яка дорівнює $2\pi R$) на довжину шляху, що при цьому обертанні описує центр мас цього кола (і який дорівнює $2\pi d$), тобто

$$S = 2\pi R\cdot 2\pi d = 4\pi^2 Rd.$$

Приклад 6. Знайти об'єм тора, утвореного обертанням круга $x^2 + (y-d)^2 = R^2$ $(d > R)$ радіуса R навколо осі Ox.

Розв'язання. Оскільки центр мас круга збігається з його геометричним центром, то за другою теоремою Гульдіна маємо

$$V = \pi R^2\cdot 2\pi d = 2\pi^2 R^2 d.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 9.1. Знайти центр мас симетричного параболічного сегмента з основою, рівною a, і висотою h.

Завдання 9.2. Знайти координати центра мас півкола $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

Завдання 9.3. Знайти координати центра мас півкруга, обмеженого віссю абсцис та півколом $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

Завдання 9.4. Знайти координати центра мас фігури, обмеженої дугою синусоїди $y=\sin x$ і відрізком осі абсцис (від $x_1=0$ до $x_2=\pi$).

Завдання 9.5. Знайти координати центра мас першої арки циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

Завдання 9.6. Знайти момент інерції дуги лінії $y=e^x$ $\left(0\le x\le \frac{1}{2}\right)$ відносно осі абсцис.

Завдання 9.7. Обчислити момент інерції однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ відносно обох осей координат.

Завдання 9.8. Знайти момент інерції прямокутника з сторонами a і b відносно сторони a.

Завдання 9.9. Знайти момент інерції круга радіуса R відносно його центра.

Завдання 9.10. Правильний шестикутник зі стороною a обертається навколо однієї із сторін. Знайти об’єм тіла, яке утворюється при цьому.

Завдання 9.11. Еліпс з осями $A_1A_2=2a$ і $B_1B_2=2b$ обертається навколо прямої, паралельної осі A_1A_2, що віддалена від неї на відстані $3b$. Знайти об’єм тіла, яке при цьому утворюється.

Завдання 9.12. Астроїда обертається навколо прямої, що проходить через дві сусідніх вершини. Знайти об’єм і поверхню тіла, яке при цьому утворюється.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. За допомогою заміни змінної обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.
2. $\int\limits_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}dx$.
3. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}$.
4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\cdot\sin 2x\,dx$.
5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.
6. $\int\limits_0^a \sqrt{ax-x^2}dx$.

7. $\int\limits_{1}^{4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+x)^2}\,dx.$

8. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

9. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

10. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$

11. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

13. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}.$

14. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$

15. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx.$

16. $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx.$

17. $\int\limits_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$

18. $\int\limits_{2}^{9} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

19. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$

20. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{dx}{2+\sqrt{2x+1}}.$

21. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

22. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

23. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+2}.$

24. $\int\limits_{a}^{\pi/4} \mathrm{ctg}^4\,\varphi\,d\varphi.$

25. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}.$

Завдання 2. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

1. $\int\limits_{-2}^{0} (x^2-5x+6)\cos 2x\,dx.$

2. $\int\limits_{-2}^{0} (x^2-4)\cos 3x\,dx.$

3. $\int\limits_{-1}^{0} (x^2+4x+3)\cos x\,dx.$

4. $\int\limits_{-2}^{0} (x+2)^2\cos 3x\,dx.$

5. $\int\limits_{-4}^{0} (x^2+7x+12)\cos x\,dx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi} (2x^2+4x+7)\cos 2x dx.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi} (9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx.$

8. $\int\limits_{0}^{\pi} (8x^2+16x+17)\cos 4x\,dx.$

9. $\int\limits_{0}^{2\pi} (3x^2+5)\cos 2x\,dx.$

10. $\int\limits_{0}^{2\pi} (2x^2-15)\cos 3x\,dx.$

11. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (1-5x^2)\sin x\,dx.$

12. $\int\limits_{0}^{2\pi} (1-8x^2)\cos 4x\,dx.$

13. $\int\limits_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\sin 3x\,dx.$

14. $\int\limits_{0}^{3} (x^2-3x)\sin 2x\,dx.$

15. $\int\limits_{0}^{\pi}(x^2-3x+2)\sin x\,dx$.

16. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(x^2-5x+6)\sin 3x\,dx$.

17. $\int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2x\,dx$.

18. $\int\limits_{0}^{\pi/4}(x^2+17.5)\sin 2x\,dx$.

19. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-5x^2)\sin x\,dx$.

20. $\int\limits_{\pi/4}^{0}(3x-x^2)\sin 2x\,dx$.

21. $\int\limits_{0}^{1}(x+1)\ln^2(x+1)\,dx$.

22. $\int\limits_{0}^{2}(x+1)^2\ln^2(x+1)\,dx$.

23. $\int\limits_{0}^{1}x^2e^{3x}\,dx$.

24. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

25. $\int\limits_{1}^{2}x\ln^2 x\,dx$

Завдання 3. Обчислити площі фігур, обмежених графіками функцій.

1. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$

2. $y=x\sqrt{9-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 3).$

3. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$

4. $y=\sin x\cos^2 x,\ y=0\ \ (0\le x\le \pi/2).$

5. $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1.$

6. $y=x^2\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ (0\le x\le 2).$

7. $y=\cos x\sin^2 x,\ y=0\,(0\le x\le \pi/2).$

8. $y=\sqrt{e^x-1},\ y=0, x=\ln 2.$

9. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\ y=0,\ x=1,\ x=e^3.$

10. $y=\arccos x,\ y=0,\ x=0.$

11. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1.$

12. $y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3.$

13. $y=x\sqrt{36-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 6).$

14. $x=\arccos y,\ x=0,\ y=0.$

15. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x,\ y=0,\ x=\sqrt{3}.$

16. $y=x^2\sqrt{8-x^2},\ y=0\,(0\le x\le 2\sqrt{2}).$

17. $x=\sqrt{e^y-1},\ x=0,\ y=\ln 2.$

18. $y=x\sqrt{4-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 2).$

19. $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}},\ y=0,\ x=1.$

20. $y=\dfrac{1}{1+\cos x},\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ x=-\dfrac{\pi}{2}.$

21. $x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$

22. $y=\cos^5 x\sin 2x, y=0\,(0\le x\le \pi/2).$

23. $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2},\ y=0,\ x=1.$

24. $x=4-y^2,\ x=y^2-2y.$

25. $x=\dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}},\ x=0,\ y=1,\ y=e^3.$

Завдання 4. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями.

1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2 \ (x \geq 2).$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 2 \ (y \geq 2).$

3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 4 \ (0 < x < 8\pi, y \geq 4).$

4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2 \ (x \geq 2).$

5. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$
$y = 3 \ (y \geq 3).$

6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3 \ (0 < x < 4\pi, y \geq 3).$

7. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 6\sqrt{3} \ (x \geq 6\sqrt{3}).$

8. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$
$y = \sqrt{3} \ (y \geq \sqrt{3}).$

9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3 \ (0 < x < 6\pi, y \geq 3).$

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4 \ (x \geq 4).$

11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 3 \ (y \geq 3).$

12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 9 \ (0 < x < 12\pi, y \geq 9).$

13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4 \ (x \geq 4).$

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4 \ (y \geq 4).$

15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6 \ (0 < x < 12\pi, y \geq 6).$

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3} \ (x \geq 3\sqrt{3}).$

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2\sqrt{3} \ (y \geq 2\sqrt{3}).$

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 15 \ (0 < x < 20\pi, y \geq 15).$

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 \ (x \geq 1).$

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 4 \ (y \geq 4).$

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$
$y = 1 \ (0 < x < 2\pi, y \geq 1).$

22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1 \ (x \geq 1).$

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2 \ (y \geq 2).$

24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 12 \ (0 < x < 16\pi, y \geq 12).$

25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 9\sqrt{3} \ (x \geq 9\sqrt{3}).$

Завдання 5. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями в полярних координатах.

1. $r = 4\cos 3\varphi,\ r = 2 \ (r \geq 2).$
2. $r = \cos 2\varphi.$
3. $r = \sqrt{3}\cos\varphi,\ r = \sin\varphi \ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$
4. $r = 4\sin 3\varphi,\ r = 2 \ (r \geq 2).$
5. $r = 2\cos\varphi,\ r = 2\sqrt{3}\sin\varphi \ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$
6. $r = \sin 3\varphi.$
7. $r = 6\sin 3\varphi,\ r = 3 \ (r \geq 3).$
8. $r = \cos 3\varphi.$
9. $r = \cos\varphi,\ r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4) \ (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$
10. $r = \sin\varphi,\ r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4) \ (0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$
11. $r = 6\cos 3\varphi,\ r = 3 \ (r \geq 3).$
12. $r = 1/2 + \sin\varphi.$
13. $r = \cos\varphi,\ r = \sin\varphi \ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$
14. $r = \cos\varphi + \sin\varphi.$
15. $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4),\ r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4) \ (\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$
16. $r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi.$
17. $r = \sin\varphi,\ r = 2\sin\varphi.$
18. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$
19. $r = 1/2 + \cos\varphi.$

20. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi.$

21. $r=(5/2)\sin\varphi,\ r=(3/2)\sin\varphi.$

22. $r=(3/2)\cos\varphi,\ r=(5/2)\cos\varphi.$

23. $r=4\cos 4\varphi.$

24. $r=\sin 6\varphi.$

25. $r=2\cos\varphi,\ r=3\cos\varphi.$

Завдання 6. Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в прямокутній системі координат.

1. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}.$

2. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\ 1\le x\le 2.$

3. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\le x\le 7/9.$

4. $y=\ln\dfrac{5}{2x},\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

5. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le\dfrac{15}{16}.$

6. $y=e^x+6,\ \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}.$

7. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},1/4\le x\le 1.$

8. $y=\ln(x^2-1),\ 2\le x\le 3.$

9. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\ 0\le x\le 8/9.$

10. $y=\ln(1-x^2),\ 0\le x\le 1/4.$

11. $y=2+\operatorname{ch}x,\ 0\le x\le 1.$

12. $y=1-\ln\cos x,\ 0\le x\le\pi/6.$

13. $y=e^x+13,\ \ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}.$

14. $y=\ln\cos x+2,\ 0\le x\le\pi/6.$

15. $y=2-e^x,\ \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}.$

16. $y=-\ln\cos x,\ 0\le x\le\pi/6.$

17. $y=1-\ln\sin x,\ \pi/3\le x\le\pi/2.$

18. $y=1-\ln(x^2-1),\ 3\le x\le 4.$

19. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},0\le x\le 1/4.$

20. $y=\operatorname{ch}x+3,\ 0\le x\le 1.$

21. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5,\ 1/9\le x\le 1.$

22. $y=\ln\sin x,\ \pi/3\le x\le\pi/2.$

23. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+1,\ 0\le x\le 9/16.$

24. $y=\ln 7-\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

25. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 3/4.$

Завдання 7. Обчислити довжини дуг кривих, заданих параметричними рівняннями.

1. $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

2. $\begin{cases}x=3(2\cos t-\cos 2t),\\ y=3(2\sin t-\sin 2t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi.$

3. $\begin{cases}x=4(\cos t+t\sin t),\\ y=4(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2.$

4. $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

5. $\begin{cases}x=10\cos^3 t,\\ y=10\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le\pi/2.$

6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi.$

8. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$

$\pi / 2 \le t \le 2\pi / 3.$

9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/3.$

10. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/3.$

11. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/3.$

12. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$\pi/2 \le t \le \pi.$

13. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$

$\pi/2 \le t \le \pi.$

14. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/2.$

15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/2.$

17. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/6.$

18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi.$

19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$

$\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/3.$

21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/4.$

22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi.$

23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$

$\pi/6 \le t \le \pi/4.$

24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$0 \le t \le 3\pi/2.$

25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/2.$

Завдання 8. Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в полярних координатах.

1. $r=3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
2. $r=2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
3. $r=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
4. $r=5e^{5\varphi/12}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
5. $r=6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
6. $r=3e^{3\varphi/4}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.
7. $r=4e^{4\varphi/3}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.
8. $r=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.
9. $r=5e^{5\varphi/12}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.
10. $r=12e^{12\varphi/5}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.
11. $r=1-\sin\varphi$, $-\pi/2\le\varphi\le-\pi/6$.
12. $r=2(1-\cos\varphi)$, $-\pi\le\varphi\le-\pi/2$.
13. $r=3(1+\sin\varphi)$, $-\pi/6\le\varphi\le 0$.
14. $r=4(1-\sin\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi/6$.
15. $r=5(1-\cos\varphi)$, $-\pi/3\le\varphi\le 0$.
16. $r=6(1+\sin\varphi)$, $-\pi/2\le\varphi\le 0$.
17. $r=7(1-\sin\varphi)$, $-\pi/6\le\varphi\le\pi/6$.
18. $r=8(1-\cos\varphi)$, $-2\pi/3\le\varphi\le 0$.
19. $r=2\varphi$, $0\le\varphi\le 3/4$.
20. $r=2\varphi$, $0\le\varphi\le 4/3$.
21. $r=2\varphi$, $0\le\varphi\le 5/12$.
22. $r=2\varphi$, $0\le\varphi\le 12/5$.
23. $r=4\varphi$, $0\le\varphi\le 3/4$.
24. $r=3\varphi$, $0\le\varphi\le 4/3$.
25. $r=5\varphi$, $0\le\varphi\le 12/5$.

Завдання 9. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, обмежених графіками функцій. У варіантах 1-13 вісь обертання Ox, у варіантах 14-25 вісь обертання Oy.

1. $y=-x^2+5x-6$, $y=0$.
2. $2x-x^2-y=0$, $2x^2-4x+y=0$.
3. $y=3\sin x$, $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.
4. $y=5\cos x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x\ge 0$.
5. $y=\sin^2 x$, $x=\pi/2$, $y=0$.
6. $x=\sqrt[3]{y-2}$, $x=1$, $y=1$.
7. $y=xe^x$, $y=0$, $x=1$.
8. $y=2x-x^2$, $y=-x+2$, $x=0$.
9. $y=2x-x^2$, $y=-x+2$.
10. $y=e^{1-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.
11. $y=x^2$, $y^2-x=0$.
12. $x^2+(y-2)^2=1$.
13. $y=1-x^2$, $x=0, x=\sqrt{y-2}$, $x=1$.
14. $y=\arccos(x/3)$, $y=\arccos x$, $y=0$.
15. $y=\arcsin(x/5)$, $y=\arcsin x$, $y=\pi/2$.
16. $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.
17. $y=x^2+1$, $y=x$, $x=0$, $x=1$.
18. $y=\sqrt{x-1}$, $y=0$, $y=1$, $x=0{,}5$.
19. $y=\ln x$, $x=2$, $y=0$.
20. $y=(x-1)^2$, $y=1$.
21. $y^2=x-2$, $y=0$, $y=x^3$, $y=1$.
22. $y=x^3$, $y=x^2$.
23. $y=\arccos\frac{x}{5}$, $y=\arccos\frac{x}{3}$, $y=0$.
24. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.
25. $y=x^2-2x+1$, $x=2$, $y=0$.

ГЛАВА VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Основні поняття та теореми

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідні або диференціали різних порядків.

Диференціальне рівняння, що має вигляд:

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{1.1}$$

називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Це рівняння інтегрується способом відокремлення змінних: обидві частини рівняння (1.1) поділимо на $g(y) \neq 0$ і помножимо на dx. Тоді $y = y_0$, корені $g(y_0)$– особливі розв'язки (1.1). Далі: $\dfrac{y'(x)dx}{g(y)} = f(x)dx,$ або $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$

В результаті інтегрування знаходимо загальний інтеграл $\int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$

Рівняння у диференціалах виду $M(x)dx = N(y)dy$ називається рівнянням з відокремленими змінними.

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати у наступній симетричній за x та y формі:

$$M(x)N(y)dx + M_1(x)N_1(y)dy = 0. \tag{1.2}$$

На практиці його розв'язування проводиться таким чином: спочатку обидві частини рівняння ділять на $N(y)M_1(x)$ (відокремлюють змінні), а потім одержану рівність інтегрують:

$$\int \frac{M(x)}{M_1(x)}dx = -\int \frac{N_1(y)}{N(y)}dy\,. \tag{1.3}$$

Особливі розв'язки $y = y_0$: $N(y_0) = 0.$

Задачі геометричного характеру. Щоб розв'язати геометричні задачі, потрібно:

1) намалювати рисунок, позначити шукану криву через $y = y(x)$;
2) записати формулу, що зв'язує вказані в задачі геометричні величини;
3) виразити всі згадувані в задачі величини через x, y, y'.

Для зручності оформлення розв'язку задачі використовуйте таку форму запису рівняння дотичної у точці $M(x,y)$ до кривої $y = y(x)$: $Y - y = y'(x)(X - x),$ де (X, Y) – поточні координати точки дотичної. Тоді дане в умові задачі співвідношення перетворюється в диференціальне рівняння, з якого можна знайти шукану функцію $y(x)$.

Контрольні питання та завдання

1. Запишіть формулою загальний вигляд „звичайного” диференціального рівняння n-го порядку відносно функції $y = y(x)$.
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Що називається частинним розв’язком (частинним інтегралом) диференціального рівняння 1-го порядку?
4. Сформулюйте теорему Пікара-Коші про існування і єдиність розв’язку диференціального рівняння 1-го порядку.
5. Дайте означення загального розв’язку (загального інтегралу) диференціального рівняння 1-го порядку.
6. Розв’язуючи рівняння (1.2), ми прийшли до рівності (1.3), де перший доданок зінтегрований за змінною x, а другий доданок – за змінною y. Обґрунтуйте перехід у другому доданку від інтегрування за x до інтегрування за y.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Розв’язати рівняння: $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$.

Розв’язання: Розділимо обидві частини рівняння на $y\sqrt{1-x^2} \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Інтегруючи, знаходимо: $-\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dy}{y}$, $\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = \ln|y|$,

$$\ln|y| = C + \sqrt{1-x^2}, \quad |y| = e^{\mathbf{C+\sqrt{1-x^2}}},$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{\sqrt{1-x^2}} = C_1 \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}, \text{ де } C_1 = \pm e^C.$$

Відповідь: $y = C \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

Приклад 2. Знайти частинний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{yy'}{x} + e^y = 0,$$

що задовольняє початкову умову $y(1) = 0$.

Розв’язання: Запишемо дане рівняння у вигляді: $\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = -e^y$. Помножимо обидві частини на xdx і розділимо на e^y. Дістанемо рівняння виду: $\frac{ydy}{e^y} = -xdx$. Інтегруючи, знаходимо: $\int ye^{-y}dy = -\int xdx + C$.

Ліву частину останнього рівняння інтегруємо по частинах:

$$\left[\begin{array}{l||l} u=y & du=dy \\ dv=e^{-y}dy & v=-e^{-y} \end{array}\right] \Rightarrow \int ye^{-y}dy=-ye^{-y}+\int e^{-y}dy=-ye^{-y}-e^{-y}=e^{-y}(y+1).$$

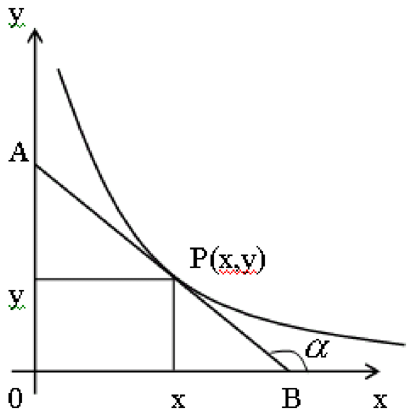
Отже, $C=\frac{x^2}{2}-e^{-y}(y+1)$ – загальний інтеграл.

Підставимо в загальний інтеграл початкову умову: $y=0$ при $x=1$.

$C=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$, звідки $\frac{x^2}{2}-\frac{y+1}{e^y}=-\frac{1}{2}$.

Приклад 3. Визначити криву, що проходить через точку (2;3) так, що відрізок будь-якої з її дотичних між координатними осями ділиться в точці дотику на рівні частини.

Розв'язання: Нехай точка $P(x;y)$ є точкою дотику. Згідно з умовою $OA=2y,\ \ OB=2x$.



Кутовий коефіцієнт дотичної $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$.

З ΔAOB: $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=\frac{OA}{OB}=\frac{2y}{2x}$, звідки $-\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$, або $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{y}{x}$.

Отже, маємо рівняння: $y'=-\frac{y}{x}$.

Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x};\ \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x};\ \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+\ln|C|;$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|;\ \ y=\frac{C}{x},\text{ або } C=xy.$$

Відповідну довільну сталу визначимо з умови, що крива проходить через точку (2;3).

Підставимо замість поточних координат координати заданої точки, тоді $C=2\cdot 3$. Отже, рівняння шуканої кривої $xy=6$. Це гіпербола, асимптотами якої є осі координат.

Приклад 4. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості. Знайти залежність активності радію від часу, якщо відомо, що за 4 дні кількість його зменшилась вдвічі.

Розв'язання: Позначимо початкову кількість радію V_0, а його кількість через t днів $V(t)$. Тоді швидкість його зменшення дорівнює $-\frac{dV}{dt}$, і за умовою задачі $V=-k\frac{dV}{dt}$. Відокремлюючи змінні, маємо: $\frac{dV}{V}=-\frac{1}{k}dt$; а потім інтегруємо:

$$-\frac{1}{k}t=\ln V-\ln C;\ \frac{V}{C}=e^{-\frac{t}{k}}\Rightarrow V(t)=C\cdot e^{-\frac{t}{k}}.$$

При $t=0$: $V(0)=C$. У даному випадку $C=V_0$, отже, $V=V_0e^{-\frac{t}{k}}$.

Для знаходження k використаємо умову: $t=4$, $V=\frac{1}{2}V_0$, тобто $\frac{1}{2}V_0=V_0e^{-\frac{4}{k}}$; $\frac{1}{2}=e^{-\frac{4}{k}}\Rightarrow\frac{4}{k}=\ln 2$, $k=\frac{4}{\ln 2}$. Отже, остаточно $V=V_0e^{-\frac{\ln 2}{4}\cdot t}$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1. Розв’язати диференціальні рівняння.

1. $(1+x^2)dy-xydx=0$.
2. $\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x+\sin x$.
3. $\operatorname{tg} x\sin^2 ydx-\cos^2 x\operatorname{ctg} ydy=0$.
4. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$.
5. $2x^2yy'+y^2=2$.
6. $yy'=-2\sec y$.
7. $5e^x\operatorname{tg} ydx+(1-e^x)\sec^2 ydy=0$.
8. $\ln\cos y+y'x\operatorname{tg} y=0$.

Завдання 1.2. Розв’язати задачі Коші.

1. $x^2(y^2+5)dx+(x^2+5)y^2dy=0,\quad y(0)=1$.
2. $\frac{yy'}{x}+e^y=0,\quad y(0)=1$.
3. $\operatorname{tg} ydx-x\ln xdy=0,\quad x(\frac{\pi}{2})=e$.
4. $(1+e^x)yy'=e^x,\quad y(1)=1$.

Завдання 1.3. Знайти лінію, яка проходить через точку (2;0) та має властивість: відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину, що дорівнює 2.

Завдання 1.4. Знайти лінію, яка проходить через точку (a;1) і має піддотичну сталої довжини *a*.

Завдання 1.5. Матеріальна точка масою 1 кг рухається прямолінійно під дією сили, яка прямо пропорційна часу з початком відліку $t=0$ і обернено пропорційна швидкості руху точки. В момент $t=10$ с швидкість дорівнювала 0,5 м/с, а сила – $4\cdot10^{-5}$ Н. Якою буде швидкість через хвилину від початку руху?

Завдання 1.6. Відомо, що швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Знайти залежність температури тіла T від часу t, якщо за 10 хвилин температура тіла понизилась від 100° до 60°C, а температура повітря була сталою і дорівнювала 20°C.

§2. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ОДНОРІДНИХ

Основні поняття та теореми

Функція $f(x,y)$ *називається однорідною за x та y,* якщо при множенні аргументів на довільний параметр λ значення функції не змінюється, тобто $f(x,y)=f(\lambda x;\lambda y)$.

Однією з основних властивостей однорідної функції є те, що $f(x,y)$ залежить тільки від відношення аргументів і тому може бути записана так: $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Рівняння $y'(x)=f(x,y)$ *називається однорідним відносно x та y,* якщо функція $f(x,y)$ – однорідна. Однорідне диференціальне рівняння можна записати у вигляді $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Таке рівняння підстановкою $z(x)=\frac{y(x)}{x}$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'(x)=z'(x)x+z(x) \text{ та } z'(x)=\frac{\varphi(z)-z}{x}.$$

Диференціальне рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, в якому $M(x,y)$, $N(x,y)$ – однорідні функції, також є однорідним.

Контрольні питання та завдання

1. Які з наведених нижче функцій є однорідними?

   а) $\frac{y^2-x^2}{7xy}$; б) $\frac{2(y+x)y}{x^2+y}$; с) $\frac{y^3+3x^2y+x^3}{3y^3-4x^3}$;

2. Доведіть, що сума, добуток і частка однорідних функцій – однорідна функція.
3. Покажіть, що довільна однорідна функція нульового порядку $f(x,y)$ може бути зображена у вигляді $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.
4. Впровадивши нові змінні *u і v* замість *x і y,* поклавши $x=u+\lambda$, $y=v+\beta$, підберіть сталі числа λ *і* β так, щоб функції стали однорідними:

   а) $f(x,y)=\frac{2y-x-5}{2x-y+4}$; б) $f(x,y)=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$; в) $f(x,y)=\frac{2(y+2)^2}{(x+y+1)^2}$.

5. Використовуючи те, що $dx=du,\ dy=dv$ (див. задачу 2.4.), довести, що диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ може бути зведено цією заміною до однорідного рівняння.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння: $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання: Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{(ty)^2}{(tx)^2}}$. Права частина $f(x;y)$ – однорідна функція, тому що $\dfrac{ty}{tx}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Це є однорідне рівняння. Виконаємо підстановку: $y=xz$, $\dfrac{dy}{dx}=y'=z+xz$. Рівняння набуде вигляду $x(z+x\dfrac{dz}{dx})-xz=\sqrt{x^2+x^2z^2}$; $x\dfrac{dz}{dx}=\sqrt{1+z^2}$.

Відокремлюємо змінні $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$. Звідси $\ln|x|=\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|+\ln|C|$, тобто $x=c(z+\sqrt{1+z^2})$. Повернувшись до змінної y, дістанемо: $x=c(\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}})$, звідки $c=\dfrac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}$ – загальний інтеграл диференціального рівняння.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$ за даними початковими умовами $y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання: Спочатку встановимо, що дане рівняння однорідне, тоді знайдемо загальний розв'язок, замінивши $y=xz$ і $y'=z+xz'$:

$$x\left(z+xz'\right)=xz\left(1+\ln\frac{xz}{x}\right),$$

звідси $x^2z'=xz\ln z$, або $xz'=z\ln z$.

Дістали рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.
$\int\dfrac{dz}{z\ln z}=\int\dfrac{dx}{x}$, звідси $\ln|\ln z|=\ln|x|+\ln|C|$, або $\ln|z|=C\cdot x$, значить $y=\pm\, x\cdot e^{Cx}$.

Застосуємо початкову умову, з якої дістанемо: $e^{-\frac{1}{2}}=e^{C}$, тоді $C=-\dfrac{1}{2}$.

Отже, дістали частинний розв'язок: $y=x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

Приклад 3. Знайти сукупність кривих, для яких довжина будь-якої дотичної дорівнює довжині відрізка, який відтинає ця дотична на осі Ox.

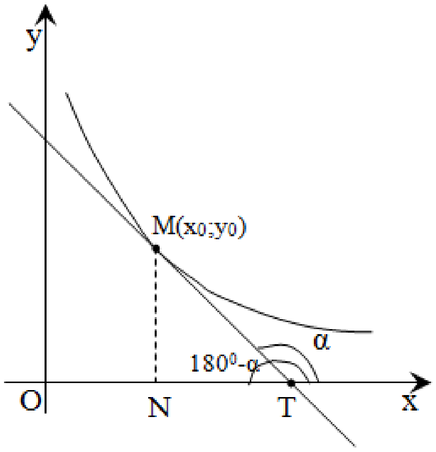
Розв'язання: За умовою $MT = OT$. З ΔMNT: $MT = \frac{MN}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{y_0}{\sin\alpha}$.

Відомо, що $\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$, де $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx}$, тоді

$$MT = \frac{y_0\sqrt{1+(y_0')^2}}{y_0'}. \qquad (2.1)$$

Рівняння дотичної: $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, тому дістанемо:

$$OT = ON + NT = x_0 + \frac{y_0}{\mathrm{tg}(180° - \alpha)}, \text{ або } OT = x_0 - \frac{y_0}{y_0'}. \qquad (2.2)$$



Прирівнюючи (2.1) і (2.2), дістанемо $\frac{y}{y'}\sqrt{1+(y')^2} = x - \frac{y}{y'}$. Підносимо обидві частини до квадрату: $\frac{y^2}{(y')^2}\left(1+\left(y'\right)^2\right) = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2$, звідки після перетворень дістанемо диференціальне рівняння $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Розв'яжемо його.

Це однорідне рівняння, тому що права частина є однорідною функцією нульового виміру, тобто, якщо замінити $x = x\lambda$ і $y = y\lambda$, то

$$f(x\lambda; y\lambda) = \frac{2x\lambda \cdot y\lambda}{(x\lambda)^2 - (y\lambda)^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x;y)$$

.

Замінивши $y = xz$ і $y' = xz' + z$, дістанемо:

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{2z}{1-z^2}, \text{ або } x\frac{dz}{dx} = \frac{z+z^3}{1-z^2}.$$

Відокремимо змінні: $\frac{1-z^2}{z+z^3}dz = \frac{dx}{x}$. Значить $\int\frac{1-z^2}{z(1+z^2)}dz = \int\frac{dx}{x}$.

Знайдемо інтеграл від лівої частини розкладанням на елементарні дроби:

$$\frac{1-z^2}{z(1+z^2)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+1}.$$

Для обчислення невідомих коефіцієнтів A, B, C складемо рівність:

$$1 - z^2 = A\left(z^2+1\right) + z\left(Bz + C\right),$$

тоді при $z = 0$ знайдемо $A = 1$;

$$\left.\begin{array}{l} z^2:\ -1=A+B\Rightarrow B=-2 \\ z:\ \ C=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1-z^2}{z(1+z^2)}=\frac{1}{z}-\frac{2z}{z^2+1}.$$

Отже, $\int\frac{dz}{z}-2\int\frac{zdz}{z^2+1}=\int\frac{dx}{x}$, звідки $\ln|z|-\ln\left(z^2+1\right)=\ln|x|+\ln|C|$, або $\frac{z}{z^2+1}=Cx$.

Повернемось до змінної y, дістанемо: $Cx=\frac{yx}{y^2+x^2}$, або $x^2+y^2-\frac{y}{C}=0$.

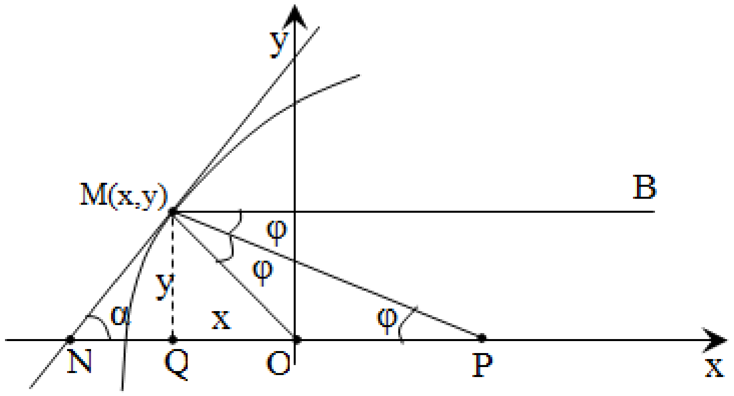
Виділивши повний квадрат, матимемо рівняння $x^2+\left(y-\frac{1}{2C}\right)^2=\frac{1}{4C^2}$, яке визначає сукупність кіл із центрами в точках $\left(0;\frac{1}{2C}\right)$ і радіусами $\frac{1}{2|C|}$.

Приклад 4. Знайти форму дзеркала, яке всі промені, що виходять з даної точки, відбиває у паралельно заданому напрямі.

Розв'язання: Перетнемо поверхню дзеркала площиною, яка проходить через задану точку паралельно заданому напряму. Припустимо, що задана точка міститься в початку координат. Тоді OM – падаючий промінь, MB– відбитий промінь, MN– дотична до шуканої кривої, MP– нормаль. Відомо, що кут падіння дорівнює куту відтворення, тому $\angle OMP=\angle PMB=\varphi$. За умовою

$$MB\|OX,$$

звідки $\angle OMP=\angle OPM$, отже ΔMOP– рівнобедрений, значить $OM=OP$.



$$OQ=-x, MQ=y\text{, а } OM=\sqrt{x^2+y^2}=OP,$$

З одного боку $QP=QO+OP=-x+\sqrt{x^2+y^2}$, а з іншого:

$$QP=MQ\cdot\operatorname{ctg}\varphi=y\cdot\operatorname{ctg}\left(90°-\alpha\right)=y\cdot\operatorname{tg}\alpha=y\cdot y'.$$

З останніх двох рівностей дістанемо диференціальне рівняння:

$$y\cdot y'=-x+\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

Зробимо заміну: $y=ux,\ y'=u'x+u$, тоді матимемо рівняння з відокремлюваними змінними: $ux\left(u'x+u\right)=-x+\sqrt{x^2+u^2x^2}$, або $ux\cdot u'+u^2=-1+\sqrt{1+u^2}$, $uxdu=\left(-\left(u^2+1\right)+\sqrt{1+u^2}\right)\cdot dx$.

Відокремимо змінні та проінтегруємо, тоді $\int\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}-\left(u^2+1\right)}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|$.

Покладемо: $\sqrt{1+u^2}=t$, $u^2=t^2-1$, $2udu=2tdt$, $udu=tdt$, звідки дістанемо:

$$\int\frac{tdt}{t(1-t)}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|,\text{ або }-\ln|1-t|=\ln|Cx|;\ Cx=\frac{1}{1-t}.$$

Враховуючи, що $t=\sqrt{1+u^2}$, а $u=\frac{y}{x}$, матимемо:

$$Cx=\frac{1}{1-\sqrt{1+u^2}},\text{ або }x-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{C}=C_1.$$

Після перетворень одержимо результат: $y^2=C_1^2-2C_1x$; $x=\frac{C_1^2-y^2}{2C_1}$ – це сім'я парабол, симетричних відносно вісі Ох із фокусом в заданій точці О.

Крива L буде однією з парабол цієї сім'ї, і так як вона розташована в довільній площині, яка проходить через вісь ОХ, то шукана поверхня дзеркала – це параболоїд $x=\frac{y^2+z^2-C^2}{2C}$, утворений обертанням кривої L навколо її осі.

Такі параболічні дзеркала, які перетворюють пучок променів, що розбігаються, в паралельний, застосовують для прожекторів.

Приклад 5. Проінтегрувати рівняння $(5x-4y-7)dx+(2x+3y-12)dy=0$.

Розв'язання: Це рівняння з лінійними коефіцієнтами, що зводиться до однорідного. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases}5\alpha-4\beta-7=0\\2\alpha+3\beta-12=0\end{cases};\ \begin{cases}-10\alpha+8\beta=-14\\10\alpha+15\beta=60\end{cases};\ \begin{cases}23\beta=46\\\alpha=\frac{7+4\beta}{5}\end{cases}\Rightarrow\alpha=3,\ \beta=2.$$

Зробимо заміну: $x=u+3,\ y=v+2$, тоді рівняння зводиться до однорідного і набуває виду: $(5u-4v)du+(2u+3v)dv=0$, або $u'=\frac{2u+3v}{5u-4v}$; $f(u;v)=f(\lambda u;\lambda v)$.

Покладемо $v=ut,\ v'=ut'+t$, тоді $ut'+t=\frac{2u+3ut}{5u-4ut}$, або $udt=\left(\frac{2+3t}{5-4t}-t\right)du$.

Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$\frac{5-4t}{2-2t+4t^2}dt=\frac{du}{u},\text{ звідки }\frac{1}{4}\int\frac{5-4t}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}dt=\int\frac{du}{u}+C.$$

Замінивши $t-\frac{1}{4}=z,\ \ t=z+\frac{1}{4},\ \ dt=dz$, дістанемо:

$$\frac{1}{4}\int\frac{5-4\left(z+\frac{1}{4}\right)}{z^2+\frac{7}{16}}dz=\ln|u|+C,\text{ або}$$

$$\int\frac{dz}{z^2+\frac{7}{16}}-\int\frac{zdz}{z^2+\frac{7}{16}}=\ln|u|+C;\ \frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4z}{\sqrt{7}}-\frac{1}{2}\ln\left(z^2+\frac{7}{16}\right)=\ln|u|+C.$$

Повернемось до змінної t: $\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{17}}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=\ln|u|+C$.

Від t перейдемо до змінної v: $\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4v-u}{u\sqrt{17}}-\ln\sqrt{v^2-\frac{1}{2}uv+\frac{1}{2}u^2}=C$, або $\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4v-u}{u\sqrt{7}}-\ln\sqrt{2v^2-uv+u^2}=C$, де $C=:C-\frac{1}{2}\ln 2$.

Підставивши сюди $u=3-x,\ \ v=2-y$, дістанемо загальний інтеграл:

$$\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x-4y+5}{(3-x)\sqrt{7}}-\ln\sqrt{x^2-xy+2y^2-4x-5y+11}=C\ .$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 2.1. Знайти загальний розв’язок рівняння.

1. $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$.
2. $y'=\frac{x+y}{x-y}$.
3. $xdy-ydx=ydy$.
4. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$.
5. $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$.
6. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.
7. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$.
8. $\left(3y^2+3xy+x^2\right)dx=\left(x^2+2xy\right)dy$.

Завдання 2.2. Знайти частинні розв’язки диференціальних рівнянь, що задовольняють початковим умовам.

1. $(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x;\ \ y\big|_{x=1}=0$.
2. $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0;\ \ y\big|_{x=0}=1$.
3. $y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2};\ \ y\big|_{x=1}=1$.
4. $y\cdot\left(y'\right)^2+2xy'-y=0;\ \ y\big|_{x=0}=\sqrt{5}$.

Завдання 2.3. Проінтегрувати рівняння:

1. $(x+y-1)dx=(3-2x-2y)dy$.
2. $(x+2y+1)dx+ydy=0$.
3. $(x+y)dx+(x+y-3)(dx+dy)=0$.
4. $y'=\frac{2y-x-5}{2x-y+4}$

Завдання 2.4. Знайти сукупність кривих, для яких піднормаль до кожної точки дорівнює середньому арифметичному абсциси та ординати.

Завдання 2.5. Крива проходить через точку (1;1). Відстань будь-якої дотичної до цієї кривої від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику. Знайти рівняння кривої.

Завдання 2.6. Знайти форму поверхні, всі точки якої однаково освітлені одним джерелом світла (освітлення пропорційне косинусу кута падіння і обернено пропорційне квадрату відстані). Застосувати полярну систему координат і формулу $\operatorname{tg}\theta=\frac{\rho d\varphi}{d\rho}$, де θ – кут між полярним радіусом і дотичною.

(Відповідь: сфера, яка утворена обертанням кола ρ = *C* навколо діаметра).

§3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Основні поняття та теореми

Рівняння $y' + a(x)y = b(x)$ (3.1) називається *лінійним диференціальним рівнянням.*

Якщо права частина рівняння $b(x) = 0$, то рівняння (3.1) називається *лінійним однорідним*, в противному разі – *неоднорідним*. Невідома функція та її похідна входять до лівої частини рівняння лінійно.

Приведемо схему *метода Бернуллі* розв'язку неоднорідного рівняння (способом підстановки).

Розв'язок рівняння (3.1) шукають у вигляді $y(x) = u(x)v(x, C)$.

1). Виконується підстановка: $y = uv$, $y' = u'v + v'u$.

2). Диференціальне рівняння записують у наступному вигляді:

$$v[u' + a(x)u] + v' \cdot u = b(x).$$

3). Знаходять хоча б одну функцію $u = u(x)$, таку, що $\dfrac{du}{dx} + a(x)u = 0$.

4). Функцію $v = v(x, C)$ знаходять із рівняння $\dfrac{dv}{dx}u = b(x)$ з відокремлюваними змінними.

Щоб розв'язати рівняння Бернуллі $y' + a(x)y = b(x)y^n$ $(n \neq 1)$, необхідно обидві частини рівняння розділити на y^n і зробити заміну $z(x) = \dfrac{1}{y^{n-1}(x)}$. Після заміни одержимо лінійне рівняння.

Зауваження: Метод підстановки Бернуллі застосовується також для розв'язування однойменних диференціальних рівнянь.

Контрольні питання та завдання

1. Як розв'язати однорідні рівняння 1-го порядку?
2. Як розв'язати рівняння Бернуллі, якщо $n = 1$?
3. Сформулюйте теорему про існування розв'язку лінійного диференціального рівняння.
4. Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ два різних розв'язки рівняння $y' + a(x)y = b(x)$.

   а) Довести, що $y = y_1 + c(y_2 - y_1)$ є загальним розв'язком того ж рівняння (c-стала).

   б) При якому співвідношенні між сталими λ і β лінійна комбінація $\lambda y_1 + \beta y_2$ буде розв'язком даного рівняння?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'+\frac{xy}{1+x^2}=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$$

Розв'язання: Це лінійне рівняння, тому що y і y' входять у першому степені, а функції $P(x)$ та $Q(x)$ мають вигляд: $P(x)=\frac{x}{1+x^2}$ *і* $Q(x)=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$.

Загальний розв'язок будемо шукати у вигляді $y=u(x)\cdot v(x,c)$, де u і v – невідомі функції. Покладемо: $y=u\cdot v$, $y'=u'v+uv'$, підставимо в задане рівняння. Дістанемо: $u'v+uv'+\frac{x}{1+x^2}\cdot uv=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$, звідки $v\left(u'+\frac{ux}{1+x^2}\right)+uv'=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$.

Покладемо, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, при умові, що $v\neq 0$.

Матимемо систему двох рівнянь $\begin{cases} u'+\frac{ux}{1+x^2}=0, \quad v\neq 0; \\ uv'=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}. \end{cases}$

З першого рівняння визначимо невідому функцію $u(x)$, розв'язавши його як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{dx}=-\frac{ux}{1+x^2}\Rightarrow\frac{du}{u}=-\frac{xdx}{1+x^2}\Rightarrow\int\frac{du}{u}=-\int\frac{xdx}{1+x^2}+C.$$

Якщо покласти $C=0$, то дістанемо частинний розв'язок $\ln u=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, звідки $u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Підставимо знайдену функцію в друге рівняння системи, звідки знайдемо другу невідому функцію $v(x,c)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}v'=\frac{1}{x(1+x^2)},\text{ або }\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow v=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$v=\int\frac{dx\!\!\diagup_{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}};\quad v=-\int\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}};\quad v=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C.$$

Отже, загальний розв'язок: $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+c\right)$.

Приклад 2. Проінтегрувати диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+a\sin 2y}.$$

Розв'язання: Це рівняння не є лінійним відносно y, тому що $y(x)$ знаходиться під знаком синуса і косинуса. Проте, в результаті елементарних перетворень його легко звести до рівняння, яке буде лінійним відносно $x(y)$ і $x'(y)$, а саме:

$$\frac{dx}{dy}=x\cos y+a\sin 2y,\ \text{або}\ x'-\cos y\cdot x=a\sin 2y,$$

де $P(y)=-\cos y$ і $Q(y)=a\sin 2y$.

Покладемо:

$$x=u\cdot v;\ x'=u'v+uv',$$

тоді матимемо $u'v+uv'-\cos y\cdot uv=a\sin 2y$, або $v\left(u'-u\cos y\right)+uv'=a\sin 2y$,

звідки запишемо систему: $\begin{cases} u'-u\cdot\cos y=0, & v\neq 0; \\ uv'=a\sin 2y. \end{cases}$

З першого рівняння системи знайдемо функцію $u(y)$ як частинний розв'язок $(C=0)$: $\frac{du}{dy}=u\cos y\Rightarrow\int\frac{du}{u}=\int\cos y\cdot dy\Rightarrow\ln|u|=\sin y$, $u=e^{\sin y}$.

Підставимо знайдену функцію в друге рівняння системи, звідки знайдемо другу невідому функцію $v(y,C)$: $e^{\sin y}\cdot v'=a\sin 2y\Rightarrow v=a\int e^{-\sin y}\cdot\sin 2ydy+C$.

Знайдемо цей інтеграл по частинах, поклавши $\sin y=t$, тоді дістанемо:

$$v=2a\int e^{-\sin y}\cdot\sin yd\left(\sin y\right)+C;$$

$$v=2a\int e^{-t}\cdot tdt+C\qquad\left[\begin{array}{l||l} u_1=t & du_1=dt \\ dv_1=e^{-t}dt & v_1=-e^{-t}\end{array}\right]$$

$v=-2ate^{-t}+2a\int e^{-t}dt+C$; або остаточно $v=-2ae^{-\sin y}\left(\sin y+1\right)+C$.

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$x=e^{\sin y}\left(C-2ae^{-\sin y}\left(\sin y+1\right)\right),\ \text{або}\ x=-2a\left(\sin y+1\right)+Ce^{-\sin y}.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння $y'+y\operatorname{tg}x=\cos^2 x$, що задовольняє початковій умові $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Розв'язання: Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння аналогічно розглянутим вище прикладам. Покладемо:

$$y=u\cdot v,\quad y'=u'v+uv',$$

тоді $u'v+uv'+uv\cdot\operatorname{tg}x=\cos^2 x$, або $v\left(u'+u\operatorname{tg}x\right)+uv'=\cos^2 x$,

звідки $\begin{cases} u'+u\operatorname{tg}x=0, & v\neq 0, \\ uv'=\cos^2 x \end{cases}.$

Розв’яжемо кожне рівняння системи як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$1)\qquad \frac{du}{dx}=-u\operatorname{tg}x\Rightarrow\int\frac{du}{u}=-\int\operatorname{tg}x\,dx\Rightarrow\ln|u|=\ln|\cos x|\Rightarrow u=\cos x;$$

$$2)\qquad \cos x\cdot v'=\cos^2 x\Rightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ v'=\cos x;\quad v=\sin x+C.\end{cases}$$

Отже, загальний розв’язок: $y=\cos x(\sin x+C)$.

Підставимо в загальний розв’язок значення змінних з початкової умови: $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{1}{2}$, тоді $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}+C\right)$, або $\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+C\right)$, звідки $C=0$.

Частинний розв’язок має вигляд: $y=\cos x\cdot\sin x$, або $y=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Приклад 4. Розв’язати диференціальне рівняння $x^2y^2y'+xy^3=1$.

Розв’язання: Поділимо обидві частини рівняння на x^2y^2:

$$y'+\frac{y}{x}=y^{-2}\cdot\frac{1}{x^2},\ x\neq 0, y\neq 0.$$

Це рівняння Бернуллі, для якого $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=\frac{1}{x^2}$. Права частина містить степінь змінної y: $n=-2$. Розв’яжемо це рівняння розглянутим вище способом підстановки Бернуллі.

Замінимо: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, тоді $u'v+uv'+\frac{uv}{x}=u^{-2}\cdot v^{-2}\cdot\frac{1}{x^2}$, або $u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{u^2v^2x^2}$, звідки дістанемо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$1)\ v'+\frac{v}{x}=0\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln v=-\ln x\Rightarrow v=\frac{1}{x};$$

$$2)\ u'v=\frac{1}{u^2v^2x^2}.$$

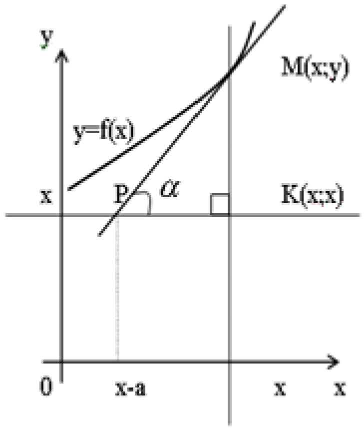
Враховуючи, що $v=\frac{1}{x}$, з другого рівняння дістанемо:

$$u'=\frac{x}{u^2}\Rightarrow\int u^2du=\int xdx+C\Rightarrow\frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+C\Rightarrow u=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+3C}\text{, де C = : 3C.}$$

Отже, загальний розв’язок має вигляд: $y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+C}$, або $y=\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}$.

Приклад 5. У кожній точці $M(x;y)$ кривої $y=f(x)$ дотична до кривої і ордината точки M відтинають відрізок сталої довжини a на прямій, паралельній осі Ox на відстані x (абсциса т. M) від неї. Знайти цю криву.

Розв'язання:



Згідно рисунка з трикутника *MKP*: $KP = a = KM \cdot c\,\text{tg}\,\alpha$, або $y - x = a\,\text{tg}\,\alpha \Leftrightarrow y - x = ay'$.

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку: $y' - \frac{y}{a} = -\frac{x}{a}$. Розв'яжемо його, поклавши $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

Рівняння набуде виду: $u'v + uv' - \frac{uv}{a} = -\frac{x}{a}$, або $v\left(u' - \frac{u}{a}\right) + uv' = -\frac{x}{a}$, звідки дістанемо:

$$1)\ u' = \frac{u}{a};\ \int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}\int dx \Rightarrow \ln u = \frac{x}{a}; u = e^{\frac{x}{a}};$$

$$2)\ uv' = -\frac{x}{a};\ e^{\frac{x}{a}}v' = -\frac{x}{a} \Rightarrow v' = -\frac{x}{a}e^{-\frac{x}{a}};$$

$$v = -\frac{1}{a}\int xe^{-\frac{x}{a}}dx + C \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 = x & \Bigg\| & du_1 = dx \\ dv_1 = e^{-\frac{x}{a}} & \Bigg\| & v_1 = -e^{-\frac{x}{a}} \end{bmatrix} \Rightarrow v = -\frac{1}{a}\left(axe^{-\frac{x}{a}} + a\int e^{-\frac{x}{a}}dx\right) + C;$$

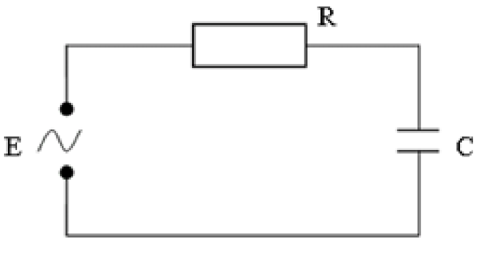
$$v = xe^{-\frac{x}{a}} + ae^{-\frac{x}{a}} + C;\ v = e^{-\frac{x}{a}}(x + a) + C.$$

Отже, загальний розв'язок матиме вигляд:

$y = e^{\frac{x}{a}}\left(e^{-\frac{x}{a}}(x + a) + C\right)$, або $y = a + x + Ce^{\frac{x}{a}}$.

Приклад 6. Конденсатор з ємністю С включається в електричне коло з напругою Е і опором R. Визначити заряд q конденсатора в момент t після включення.

Розв'язання:



У момент t заряд конденсатора дорівнює *q*, а сила струму $I = \frac{dq}{dt}$. У колі діє електрорушійна сила v, яка дорівнює різниці між напругою електричного кола Е і напругою конденсатора $\frac{q}{C}$, тобто $V = E - \frac{q}{C}$.

За законом Ома сила струму $I = \frac{V}{R}$, або $\frac{dq}{dt} = \frac{E - {}^{q}\!/\!{}_{C}}{R}$. Отже, диференціальне рівняння процесу має вигляд: $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{CR} = -\frac{E}{R}$ і це рівняння є лінійним.

Поклавши $q=uv$, $q'=u'v+uv'$, дістанемо:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{CR}=-\frac{E}{R}, \text{ або } v\left(u'+\frac{u}{CR}\right)+uv'=-\frac{E}{R},$$

звідки:

$$1)\ u'+\frac{u}{CR}=0\Rightarrow\int\frac{du}{u}=-\int\frac{dt}{CR}\Rightarrow\ln u=-\frac{t}{CR}\Rightarrow u=e^{-\frac{t}{CR}};$$

$$2)\ uv'=-\frac{E}{R}\Rightarrow v'=-\frac{E}{R}e^{\frac{t}{CR}}\Rightarrow v=-\frac{E}{R}\int e^{\frac{t}{CR}}dt+C_1, \text{ або } v=-CEe^{\frac{t}{CR}}+C_1.$$

Загальний розв’язок рівняння:

$$q(t)=e^{-\frac{t}{CR}}\left(C_1-CEe^{\frac{t}{CR}}\right),$$

або

$$q(t)=C_1e^{-\frac{t}{CR}}-CE,$$

де C, E, R — параметри, C_1 — довільна стала. Згідно початкових умов при $t=0$, $q=0$, будемо мати $CE-C_1e^{\frac{0}{CR}}=0$, звідки $C_1=C\cdot E$. Отже, закон шуканого процесу описується формулою $q=CE\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 3.1. Проінтегрувати рівняння.

1. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.
2. $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$.
3. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.
4. $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$.
5. $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$.
6. $y'+\operatorname{tg} y=\dfrac{x}{\cos y}$.
7. $y'\cos^2 x+y=\operatorname{tg} x$.
8. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$.

Завдання 3.2. Розв’язати задачу Коші.

1. $y'+y\cos x=\sin\cos x,\quad y(0)=1$.
2. $y'=2y+e^x-x,\quad y(0)=\dfrac{1}{4}$.
3. $y'+y\cos x=e^{-\sin x},\quad y(0)=-1$.
4. $xy'+y-e^x=0,\quad y(a)=b$

Завдання 3.3. Розв’язати рівняння Бернуллі.

1. $y'+2xy=2x^3y^3$.
2. $xy'+y=y^2\ln x$.
3. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
4. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$.

Завдання 3.4. Знайти лінію, у якої початкова ордината будь-якої дотичної на дві одиниці масштабу менше абсциси точки дотику.

Завдання 3.5. Знайти лінію, у якої площа прямокутника, що побудований на абсцисі будь-якої точки і початковій ординаті дотичної в цій точці, є величина стала ($=a^2$).

Завдання 3.6. До шпулі з опором *R* та коефіцієнтом самоіндукції *L* прикладено електрорушійну силу *E*. Знайти формулу для визначення струму *I*.

Завдання 3.7. У кімнаті, де температура повітря 20°C, деяке тіло охололо за 20 хв. від 100 °C до 60°C. Знайти закон охолодження тіла. Через скільки хвилин воно охолоне до 30 °C?

§4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

Основні поняття та теореми

Означення 1. Диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{4.1}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $F(x,y)$, тобто:

$$dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Загальний інтеграл рівняння (4.1) записується формулою $F(x,y)=C$, де C – довільна стала.

Оскільки мішані похідні функції $F(x,y)$ рівні між собою, то рівняння (4.1) буде в повних диференціалах лише за умови

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Загальна схема розв’язування рівнянь у повних диференціалах. Виходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=P(x,y),\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y).\end{cases} \tag{4.3}$$

1) Інтегруємо перше рівняння системи по змінній *x*, отримуємо:

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx=p(x,y)+g(y), \tag{4.4}$$

де $g(y)$ – стала по *x*, але якась функція від *y*.

2) Диференціюємо (4.4) по *y* та враховуємо другу рівність системи (4.3):

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}+g'(y).$$

3) Записуємо

$$g'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial p(x,y)}{\partial y}. \tag{4.5}$$

Так як вихідне рівняння (4.1) − в повних диференціалах, то права частина (4.5) є функцією тільки від y.

4) Отримуємо рівняння для визначення функції $g(y)$: $g'(y) = G(y)$, звідки

$$F(x,y) = p(x,y) + \int G(y)dy.$$

Функція $\mu(x,y)$ називається інтегрувальним множником рівняння (4.1), якщо після того, як помножити на неї обидві частини рівняння, то воно перетворюється на рівняння в повних диференціалах. Таким чином, буде виконана рівність $\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot Q)$, звідки маємо $\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$. Ключовою формулою пошуку μ є рівність:

$$Q\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4.6}$$

1) Якщо початкове рівняння (4.1) має інтегрувальний множник, що залежить лише від x і не залежить від y, то: $(\ln \mu(x))' = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

2) Якщо вираз $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \varPhi(y)$ залежить лише від y і не залежить від x, то інтегрувальний множник є функцією однієї змінної y і знаходиться із рівняння: $(\ln \mu(y))' = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Контрольні питання та завдання

1. Наведіть означення диференційовної функції двох змінних.
2. Наведіть означення диференціалу dz функції $z = f(x,y)$.
3. Сформулюйте теорему Шварца про рівність змішаних похідних.
4. Наведіть означення загального інтегралу диференціального рівняння; поясніть, у яких випадках цей термін має переваги над поняттям загального розв'язку.
5. Нехай інтегруючий множник залежить від деякої відомої функції $\omega(x,y)$, тобто $\mu(x,y) = \mu(\omega(x,y)) = \mu(\omega)$, тоді

$$(\ln \mu(\omega))'_{\omega} = \frac{\left(P'_y - Q'_x\right)}{\left(Q \cdot \omega'_x - P \cdot \omega'_y\right)}.$$

Наслідок: якщо $\omega(x,y) = x \pm y$, то $(\ln \mu(\omega))'_{\omega} = \pm\frac{P'_y - Q'_x}{\left(Q \mp P\right)}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння.

$$\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0.$$

Розв'язання: В цьому рівнянні:

$$P(x,y)=x^2-4xy-2y^2,\quad Q(x,y)=y^2-4xy-2x^2.$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial P}{\partial y}=-4x-4y$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}=-4y-4x$, звідки бачимо, що $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. А це означає, що ліва частина рівняння є повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто $\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-4xy-2y^2$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-4xy-2x^2$.

За даною частинною похідною $\frac{\partial u}{\partial x}$ знайдемо значення $u(x,y)$ з точністю до довільної функції $f_1(y)$:

$$u(x,y)=\int\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+f_1(y)=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+f_1(y).$$

Продиференціюємо знайдену функцію $u(x,y)$ по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2x^2-4yx+f_1'(y)$$

і прирівняємо до відомого нам виразу $\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-4xy-2x^2$, тобто: $-2x^2-4yx+f_1'(y)=y^2-4xy-2x^2$, звідки $f_1'(y)=y^2$, тоді $f_1(y)=\frac{y^3}{3}+C$.

Підставимо знайдену функцію $f_1(y)$ у вираз для функції $u(x,y)=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+f_1(y)$, тоді $u(x,y)=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}+C_1$.

Отже, загальним інтегралом рівняння буде $\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}+C_1=0$, або якщо $C=C_1$, то $C=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}$.

Приклад 2. Серед сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння $2x\cos^2 ydx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0$ виділити ту, що проходить через початок координат.

Розв'язання: У даному рівнянні функції $P(x,y)=2x\cos^2 y$ і $Q(x,y)=2y-x^2\sin 2y$. Від цих функцій частинні похідні мають вигляд

$\frac{\partial P}{\partial y}=-4x\cos y\sin y=-2x\sin 2y$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x\sin 2y$, звідки бачимо, що $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, тобто це є рівняння в повних диференціалах. Отже, існує така функція $u(x,y)$, для якої $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos^2 y$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x^2\sin 2y$.

Знайдемо функцію $u(x,y)$ з другої рівності, проінтегрувавши її з точністю до довільної функції $f_2(x)$: $u(x,y)=\int\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy+f_2(x)$, або $u(x,y)=y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+f_2(x)$. Для визначення $f_2(x)$ продиференціюємо знайдену функцію $u(x,y)$ по x. Дістанемо: $\frac{\partial u}{\partial x}=x\cos 2y+f_2'(x)$.

Враховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos^2 y$ і прирівнюючи праві частини, одержимо:

$$x\cos 2y+f_2'(x)=2x\cos^2 y,$$

$$x\left(2\cos^2 y-1\right)+f_2'(x)=2x\cos^2 y,$$

$$2x\cos^2 y+f_2'(x)=2x\cos^2 y+x,$$

звідки визначимо, що $f_2'(x)=x$. У результаті інтегрування знайдемо $f_2(x)=\frac{x^2}{2}+C_1$, тоді $u(x,y)=y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+\frac{x^2}{2}+C_1$.

Отже, сім'я інтегральних кривих визначається як $y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+\frac{x^2}{2}=C$. Підставляючи значення $x=0$, $y=0$, знайдемо: $C=0$. Тоді рівняння кривої, що проходить через початок координат, має вигляд $2y^2+x^2\cos 2y+x^2=0$.

Приклад 3. Знайти інтегруючий множник і загальний розв'язок рівняння

$$\left(2xy^2-y\right)dx+\left(y^2+x+y\right)dy=0.$$

Розв'язання: В даному рівнянні $P(x,y)=2xy^2-y$, і $Q(x,y)=y^2+x+y$, для яких $\frac{\partial P}{\partial y}=4xy-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, тобто це не є рівняння в повних диференціалах. Для того, щоб привести його до рівняння в повних диференціалах, знайдемо інтегруючий множник, який залежить від y, за формулою: $\mu=\exp\left\{\int\psi(y)dy\right\}$.

Функцію $\psi(y)$ знаходимо за формулою:

$$\psi=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),\quad \psi(y)=\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{-P(x,y)}.$$

Тоді дістанемо: $\psi(y)=\frac{4xy-1-1}{-\left(2xy^2-y\right)}=-\frac{2(2xy-1)}{y(2xy-1)}=-\frac{2}{y}$.

Знаходимо: $\mu(y)=e^{-2\int\frac{dy}{y}}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}$ – це і є інтегруючий множник, на який множимо обидві частини рівняння в повних диференціалах:

$$\left(2x-\frac{1}{y}\right)dx+\left(1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

Дійсно, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, звідки $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Знайдемо загальний інтеграл здобутого рівняння. Для цього визначимо функцію $u(x,y)$, для якої $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-\frac{1}{y}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}$. Тоді $u(x,y)=\int P(x,y)dx+f_1(y)=\int\left(2x-\frac{1}{y}\right)dx+f_1(y)$, або

$$u(x,y)=x^2-\frac{x}{y}+f_1(y).$$

Знайдемо частинну похідну $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{x}{y^2}+f_1'(y)$ і прирівняємо її до відомої $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}=1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}$, звідки визначаємо, що $f_1'(y)=1+\frac{1}{y}$. Інтегруючи, знаходимо: $f_1(y)=\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy+C_1=y+\ln|y|+C_1$. Тоді $u(x,y)=x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|+C_1$.

Отже, шуканий інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|=C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 4.1. Знайти загальні розв’язки рівнянь.

1. $\left(2x^3-xy^2\right)dx+\left(2y^3-x^2y\right)dy=0$.
2. $\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$.
3. $e^y dx+\left(xe^y-2y\right)dy=0$.4.
4. $\frac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\frac{x}{\cos^2(xy)}dy+\sin ydy=0$.

5. $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0$.

6. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$.

Завдання 4.2. Знайти частинні інтеграли диференціальних рівнянь, що задовольняють початковим умовам $y(x_0)=y_0$.

1. $3x^2e^ydx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$; $y(0)=1$.

2. $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(y^2+2xy-x^2\right)dy=0$; $y(1)=-1$.

Завдання 4.3. Знайти інтегруючий множник і розв'язати рівняння.

1. $\frac{y}{x}dx+\left(y^3\ln x\right)dy=0$.

2. $\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+\left(x\sin y+y\cos y\right)dx=0$.

3. $\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2ydy=0$.

4. $\left(7xy^3+y-5x\right)y'+y^4-5y=0$.

Завдання 4.4. Впевнитись, що інтегруючим множником лінійного рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$ служить функція $\exp\{\int P(x)dx\}$. Знайти інтегруючий множник рівняння Бернуллі.

§5. ДЕЯКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ПОНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Основні поняття та теореми

1. Рівняння виду $y^{(n)}=f(x)$ легко розв'язується у квадратурах. При цьому n-разів інтегрується рівність $y^{(n)}=f(x)$:

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+c_1,\quad y^{(n-2)}=\int dx\int f(x)dx+c_1x+c_2,\ldots$$

$$y=\underbrace{\int dx\int dx\ldots}_{n\ разів}\int f(x)dx+c_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+c_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+c_n.$$

2. Диференціальне рівняння 2-го порядку, що *не містить явно невідомої функції* $F(x,y',y'')=0$, заміною $y'(x)=p(x)$ зводиться до рівняння 1-го порядку $F(x,p,p')=0$. Зінтегрувавши одержане рівняння, знайдемо функцію $p(x)$, а далі повернемося до функції $y(x)$: $y'(x)=p(x)$.

3. Диференціальне рівняння 2-го порядку, що *не містить явно* x: $F(y,y',y'')=0$, допускає пониження порядку. Для цього вводять нову невідому

функцію $z(y)$, аргументом якої є нова незалежна змінна *y*, так, щоб $y'(x) = z(y)$. Тоді $y''(x) = z'(y)z(y)$. Початкове рівняння набуває вигляду:

$$F(y, z, zz') = 0.$$

Контрольні питання та завдання

1. Нехай задано рівняння $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$. Запропонуйте заміну, що допускає максимальне зниження порядку.
2. Запропонуйте заміну, що знижує порядок рівняння:
   а) $F(y, y', y'', y''') = 0$, б) $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.
3. До якого порядку можливе зниження порядку рівнянь?
   а) $3y'y''^2 = (1 + y^2)y'''$; б) $F(y, y'', y''') = 0$; с) $F(y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.
4. Сформулюйте теорему Коші про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння *n*-го порядку.
5. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння *n*-го порядку.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' \sin^4 x = \sin 2x.$$

Розв'язання: Розв'язок рівняння шукаємо шляхом трикратного послідовного інтегрування. Запишемо рівняння у вигляді: $y''' = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x}$ або $y''' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$. Тоді:

$$y'' = 2\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx + c_1 = 2\int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} + c_1 = -\frac{1}{\sin^2 x} + c_1;$$

$$y' = \int (c_1 - \frac{1}{\sin^2 x}) dx + c_2 = c_1 x + \operatorname{ctg} x + c_2;$$

$$y = \int (c_1 x + \operatorname{ctg} x + c_2) dx + c_3 = c_1 \frac{x^2}{2} + \ln|\sin x| + c_2 x + c_3.$$

Приклад 2. Проінтегрувати диференціальне рівняння другого порядку

$$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

Розв'язання: Дане рівняння не містить *y*. Покладемо $y' = p$, $y'' = p'$, дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними: $(1 + x^2)p' + p^2 + 1 = 0$, або

$(1+x^2)dp=-(p^2+1)dx,$ звідки $\dfrac{dp}{p^2+1}=-\dfrac{dx}{1+x^2}$. Інтегруючи в квадратурах, маємо $\int\dfrac{dp}{p^2+1}=-\int\dfrac{dx}{1+x^2}+c;$ $\operatorname{arctg}p=c-\operatorname{arctg}x$, звідки $p=\operatorname{tg}(c_1-\operatorname{arctg}x),$ або $p=\dfrac{\operatorname{tg}c_1-x}{1+\operatorname{tg}c_1x}=\dfrac{c_1-x}{1+c_1x},$ де $c_1=\operatorname{arctg}c.$

Повертаючись до вихідної функції, дістанемо: $y'=\dfrac{c_1}{1+c_1x}-\dfrac{x}{1+c_1x},$ звідки

$$y=c_1\int\frac{dx}{1+c_1x}-\int\frac{xdx}{1+c_1x}=\int\frac{d(1+c_1x)}{1+c_1x}-\frac{1}{c_1}\int\frac{(1+c_1x)-1}{1+c_1x}=$$

$$=\ln|1+c_1x|-\frac{1}{c_1}\int dx+\frac{1}{c_1^2}\int\frac{d(1+c_1x)}{1+c_1x}=$$

$$=\ln|1+c_1x|-\frac{1}{c_1}x+\frac{1}{c_1^2}\ln|1+c_1x|+c_2=\frac{1+c_1^2}{c_1^2}\ln|1+c_1x|-\frac{x}{c_1}+c_2.$$

Приклад 3. Знайти розв’язок задачі Коші.:

$$y''=2\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2},\quad y'(1)=1.$$

Розв’язання: Дане рівняння не містить незалежної змінної x, тому виконаємо підстановку: $y'(x)=z(y),\ y''(x)=z'(y)z(y).$ Дістанемо рівняння $z'z=2\sin^3 y\cos y,$ звідки $z\dfrac{dz}{dy}=2\sin^3 y\cos y;$ $zdz=2\sin^3 y\cos ydy.$

Інтегруємо обидві частини: $\dfrac{z^2}{2}=2\int\sin^3 yd(\sin y)+c_1;$ $\dfrac{z^2}{2}=\dfrac{\sin^4 y}{2}+c_1.$

Застосовуємо початкові умови $z=y'=1$ та $y=\dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+c_1,$ звідки $c_1=0.$ Тому $\dfrac{z^2}{2}=\dfrac{\sin^4 y}{2},$ $|z|=\sin^2 y$ *і* $z=\pm\sin^2 y.$ Разом з умовою $z=1>0$ маємо $z=+\sin^2 y$ або $\dfrac{dy}{dx}=\sin^2 y$, $\dfrac{dy}{\sin^2 y}=dx,$ звідки отримаємо: $\int\dfrac{dy}{\sin^2 y}=x+c_2,$ або $-\operatorname{ctg}y=x+c_2.$

Застосовуємо початкові умови $y=\dfrac{\pi}{2},$ $x=1$: $-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}=1+c_2,$ $c_2=-1.$ Остаточно: $\operatorname{ctg}y=-x+1,$ або $y=arc\operatorname{ctg}(1-x).$

Приклад 4. Крива задовольняє рівняння $y'' = x + 3$. Знайти її рівняння, якщо відомо, що вона проходить через точку (2;4) і має в цій точці кутовий коефіцієнт дотичної, рівний 3.

Розв'язання: Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння:

$$y' = \int (x+3)dx + c_1 = \frac{x^2}{2} + 3x + c_1;$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + 3x + c_1 \right) dx + c_2 = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + c_1 x + c_2.$$

Застосуємо початкові умови: $y(2) = 4$ та $y'(2) = 3$, звідки дістанемо систему:

$$\begin{cases} 3 = 8 + c_1 \\ 4 = \frac{4}{3} + 6 + 2c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -5 \\ c_2 = \frac{20}{3} \end{cases};$$

Отже, рівняння шуканої кривої: $y = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{20}{3}$.

Приклад 5. Локомотив рухається по горизонтальній ділянці шляху зі швидкістю 72 км/год. За який час і на якій відстані він зупиниться в результаті гальмування, якщо опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 його ваги.

Розв'язання: За другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху локомотива матиме вигляд: $m\frac{d^2S}{dt^2} = -0,2mg$, де $S = S(t)$ – шлях, пройдений локомотивом за час t, m – маса локомотива, g – прискорення сили тяжіння. Запишемо рівняння у вигляді: $mS'' = -0,2mg$, або $S'' = -0,2g$, звідки дістанемо:

$$S' = -0,2g\int dt + c_1 = -0,2gt + c_1, \quad S = -0,2g\int tdt + c_1\int dt + c_2 = -0,1gt^2 + c_1 t + c_2.$$

Застосуємо початкові умови $t = 0, \quad S = 0$: $S' = 72\text{км/год} = 20\text{м/с}.$

$$20 = -0,2g \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 20 \Rightarrow \quad c_2 = 0.$$

Отже, рівняння руху локомотива: $S' = v = 20 - 0,2gt$, $S = 20t - 0,1gt^2$.

При $v = 0$: $t = \frac{20}{0,2g} \approx \frac{100}{9,8} \approx 10,2(c)$ – час гальмування. Поклавши $t \approx 10,2\ c$, знайдемо гальмівний шлях: $S \approx 20 \cdot 10,2 - 0,1 \cdot 9,8 \cdot (10,2)^2 \approx 102\text{м}.$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y''' = 2\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$.
2. $\sqrt{1+x^2}\,y'' - 1 = 0$.
3. $y'' = \arcsin x$.
4. $y''' = 27e^{3x} + 120x^3$.
5. $y'' = x + \sin x$.
6. $y'' = \operatorname{arctg} x$.

Завдання 5.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $x^2 y''' = (y'')^2$.
2. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.
3. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2x^3$.
4. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.
5. $y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.
6. $y''' = 2(y'' - 1)$.

Завдання 5.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y^3 y'' + 1 = 0$.
2. $(y-1)y'' = 2\left(y'\right)^2$.
3. $(2y + y')y'' = (y')^2$.
4. $yy'' + y - (y')^2 = 0$.
5. $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.
6. $y'y'' - \sqrt{1+(y')^2} = 0$.

Завдання 5.4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

1. $y''(x^2+1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$.
2. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1$.
3. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4$.
4. $2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$.
5. $y^3 y'' = -1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.
6. $y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}$.
7. $y'' = 4\cos 2x, y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.
8. $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = 1$.
9. $(y''x - y')y' = x^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.
10. $2y(y')^3 + y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$.

Завдання 5.5. Якщо тіло повільно занурюється в воду, то його швидкість v і прискорення ω наближено пов'язані рівнянням $\omega = g - kv$, де g і k – сталі. Встановити залежність між пройденим шляхом S і часом t, якщо $t=0$, $S=v=0$.

Завдання 5.6. Знайти інтегральну криву рівняння $yy'' + (y')^2 - 1 = 0$, яка проходить через точку $M_0(0;1)$ і дотикається в цій точці до прямої $x + y = 1$.

§6. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Основні поняття та теореми

Лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку називається рівняння виду

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=f(x), \qquad (6.1)$$

де $a_0(x)\neq 0,\ a_1(x),\ a_2(x)$ − задані функції від x або константи. Якщо $f(x)=0$, то рівняння (6.1) називається однорідним, в противному випадку – неоднорідним.

Функції $y_1, y_2, ..., y_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо жодна з них не є лінійною комбінацією останніх.

Дві функції y_1, y_2 є лінійно незалежні, якщо їхнє відношення на всьому відрізку $[a,b]$ не є постійним, тобто $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq c, c=const.$

Теорема 6.1. Лінійна комбінація з довільними сталими коефіцієнтами двох лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння 2-го порядку являє собою загальний розв'язок цього рівняння.

Рівняння (6.1) називається лінійним диференціальним рівнянням із сталими коефіцієнтами, якщо a_0, a_1, a_2 – сталі.

Характеристичним рівнянням однорідного диференціального рівняння:

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (6.2)$$

називається квадратне рівняння $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$.

Далі через λ_1, λ_2 позначатимемо розв'язки характеристичного рівняння.

Розрізняють три випадки.

1. Розв'язки характеристичного рівняння дійсні і різні $(\lambda_1\neq\lambda_2)$. Тоді незалежними частинними розв'язками рівняння (6.2) будуть $y_1(x)=e^{\lambda_1 x},\ \ y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$, а загальний розв'язок в силу теореми 6.1 має вигляд:

$$y_{одн}=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}.$$

2. Розв'язки характеристичного рівняння дійсні і рівні. Незалежні частинні розв'язки $y_1(x)=e^{\lambda x},\ \ y_2(x)=xe^{\lambda x}$, і загальний розв'язок:

$$y_{одн}=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}=e^{\lambda x}(c_1+c_2x).$$

3. Розв'язки характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$. Незалежні частинні розв'язки рівняння (6.2) мають вигляд $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x,$ а загальний розв'язок:

$$y_{одн}=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте теорему про існування розв'язку лінійного диференціального рівняння на відрізку.
2. Показати, що коли ніяка лінійна комбінація функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ не є тотожним нулем, то така система функцій лінійно незалежна.
3. Запишіть визначники Вронського (або вронскіани) системи функцій $\{y_1, y_2\}$ і $\{y_1, y_2, y_3\}$.
4. Сформулюйте необхідні і достатні умови рівності нулю вронскіана системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння.
5. Дослідити, чи є дані функції лінійно незалежними:
   1) $\{x+2; x-2\}$;
   2) $\{1; x; x^2\}$;
   3) $\{\sin x; \cos x\}$;
   4) $\{\sin x; \cos x; \sin 2x\}$;
   5) $\{\operatorname{arctg} x^2; \operatorname{arctg} x; 1\}$;
   6) $\{x; e^x; xe^x\}$?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $y'' + 3y' + 2y = 0$; **б)** $y'' - 12y' + 36y = 0$; **в)** $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання:

а) Складемо характеристичне рівняння, замінивши y'' на k^2, y' – на *к*, а *у* – на 1. Дістанемо: $k^2 + 3k + 2 = 0$. Розв'язавши це квадратне рівняння, знаходимо, що $k_1 = -2$; $k_2 = -1$. Обидва корені – дійсні числа, тому частинні розв'язки рівняння – це функції $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-x}$, які лінійно незалежні $\left(\frac{y_2}{y_1} = e^x \neq c, c = \mathrm{co}nst\right)$. Тоді маємо загальний розв'язок $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$.

б) Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 12k + 36 = 0$, або $(k-6)^2 = 0$, звідки $k_{1,2} = 6$ – кратні корені. Частинними розв'язками є функції $y_1 = e^{6x}$, $y_2 = xe^{6x}$, тоді загальний розв'язок: $y = c_1 e^{6x} + c_2 xe^{6x}$ або $y = e^{6x}(c_1 + c_2 x)$.

в) Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2+4k+13=0$. Знайдемо його корені. $\dfrac{D}{4}=4-13=-9=(3i)^2$. $D<0$, тому рівняння має комплексно-спряжені корені: $k_{1,2}=-2\pm3i$, звідки частинними розв'язками будуть функції $y_1=e^{-2x}\cos3x$, $y_2=e^{-2x}\sin3x$. Тоді загальний розв'язок:

$$y=c_1e^{-2x}\cos3x+c_2e^{-2x}\sin3x \text{ або } y=e^{-2x}(c_1\cos3x+c_2\sin3x).$$

Приклад 2. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння, яке задовольняє вказаним початковим умовам:

$$y'''+3y''+3y'+y=0; \qquad y(0)=-1, \qquad y'(0)=2, \qquad y''(0)=3.$$

Розв'язання: Складемо характеристичне рівняння $k^3+3k^2+3k+1=0$, звідки $(k+1)^3=0$. Рівняння має кратний дійсний корінь $k_1=k_2=k_3=-1$. Загальний розв'язок: $y=e^{-x}(c_1+c_2x+c_3x^2)$. Продиференціюємо останнє рівняння двічі:

$$y'=e^{-x}(c_2-c_1+(2c_3-c_2)x-c_3x^2);$$

$$y''=e^{-x}(c_1-2c_2+2c_3+(c_2-4c_3)x-c_3x^2).$$

Підставимо у вирази для y, y' *і* y'' задані початкові умови, звідки дістанемо систему трьох рівнянь відносно сталих c_1, c_2, c_3.

$$\begin{cases}-1=c_1,\\ 2=c_2-c_1,\\ 3=c_1-2c_2+2c_3;\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}c_1=-1,\\ c_2=1,\\ c_3=3.\end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд: $y=e^{-x}(3x^2+x-1)$.

Приклад 3. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $y''+2y'+2y=0$, яка проходить через точку (0;1) і дотикається в цій точці прямої $y=x+1$.

Розв'язання: Складаємо характеристичне рівняння $k^2+2k+2=0$, корені якого є комплексно-спряжені числа $k_{1,2}=-1\pm i$ $(D<0)$. Загальний розв'язок $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ – це рівняння сім'ї інтегральних кривих даного диференціального рівняння. Щоб знайти рівняння шуканої інтегральної кривої, підставимо в рівності

$$y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x) \text{ і } y'=e^{-x}((c_2-c_1)\cos x-(c_2+c_1)\sin x)$$

значення ординати $y=1$ і кутового коефіцієнта дотичної $y'=1$ в точці $x=1$. Дістанемо систему рівнянь: $\begin{cases}c_1=1,\\ c_2-c_1=1,\end{cases}$ звідки $\begin{cases}c_1=1,\\ c_2=2\end{cases}$. Отже, шукана інтегральна крива має рівняння: $y=e^{-x}(\cos x+2\sin x)$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 6.1. Розв’язати рівняння.

1. $y''-5y'+6y=0.$	6. $y''+9y=0.$
2. $y'''-4y''+3y'=0$.	7. $y''-2ay'+a^2y=0.$
3. $y'''+6y''+25y'=0.$	8. $4y''-20y'+25y=0.$
4. $y''-6y'+34y=0.$	9. $3x''-2x'-8x=0.$
5. $y''-4y=0.$	10. $y^{IV}-8y''-9y=0.$

Завдання 6.2. Знайти частинні розв’язки диференціального рівняння.

1. $y''-4y'+3y=0; \quad y(0)=6, \quad y'(0)=10.$
2. $y''+4y'+29y=0; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=15.$
3. $4y''+4y'+y=0; \quad y(0)=2, \quad y'(0)=0.$
4. $y''-2y'+2y=0; \quad y(\pi)=-2, \quad y'(\pi)=-3.$
5. $y'''-y'=0; \quad y(0)=3, \quad y'(0)=-1, \quad y''(0)=1.$
6. $y^{IV}+4y=0; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y(\pi)=0, \quad y'(\pi)=a.$

Завдання 6.3. Знайти інтегральну криву рівняння $y''+9y=0,$ яка проходить через точку $M(\pi;\text{-}1)$ і дотикається в цій точці прямої $y+1=x-\pi.$

Завдання 6.4. Знайти частинний розв’язок рівняння $y''+\omega^2y=0,$ яке задовольняє початковим умовам $y(0)=a, y'(0)=v_0.$

Вказівка: Це рівняння вільних гармонійних коливань. Відповідь: $y=a\cos\omega x+\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega x.$ Якщо замінити $a=A\sin\varphi,$ $\dfrac{v_0}{\omega}=A\cos\varphi,$ тоді дістанемо $y=A(\cos\omega x\sin\varphi+\sin\omega x\cos\varphi)$ або $y=A\sin(\omega x+\varphi)$, де $A=\sqrt{a^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$ – амплітуда коливань; ω – частота коливань; φ – початкова фаза, для якої $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{a\omega}{v_0}.$

§7. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. МЕТОД ЛАГРАНЖА (МЕТОД ВАРІАЦІЇ ДОВІЛЬНИХ СТАЛИХ)

Основні поняття та теореми

У попередньому розділі нами повністю вивчені однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Теорема 7.1. Якщо $y_ч(x)$ є частинним розв’язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння, $y_{одн}(x)$ – загальний розв’язок відповідно лінійного однорідного рівняння, то $y_{заг} = y_{одн} + y_{ч}$ буде загальним розв’язком неоднорідного диференціального рівняння.

Наведемо загальний метод знаходження частинного розв’язку лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Метод варіації сталих. Будемо знаходити частинний розв’язок рівняння

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{7.1}$$

у вигляді $y_ч(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, де y_1, y_2 – лінійно незалежні розв’язки рівняння, а $c_1(x)$, $c_2(x)$ – невідомі функції від x. Відомо, що коли c_1 *і* c_2 задовольняють систему

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{7.2}$$

то $y_ч = c_1 y_1 + c_2 y_2$ буде частинним розв’язком.

Контрольні питання та завдання

1. Чому система (7.2) має єдиний розв’язок $c_1'(x)$, $c_2'(x)$?
2. Запишіть формули для розрахунку $c_1(x)$, $c_2(x)$, використовуючи правило Крамера.
3. Який вигляд має система (7.2) для лінійного диференціального рівняння 1-го порядку $y' + p(x)y = f(x)$?
4. Знайдіть загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння 1-го порядку за методом варіації сталих:
   а) $y' = y\,\mathrm{tg}\,x + 2x\sec x$; б) $y' = y\,\mathrm{ctg}\,x + \sin x$; в) $y' + p(x)y = f(x)$.
5. Розв’язуючи систему (7.2), функції $c_1(x)$ і $c_2(x)$ визначаємо з точністю до сталої інтегрування $\overline{c_1}$ і $\overline{c_2}$ відповідно. Чи можна покласти $\overline{c_1} = \overline{c_2} = 0$?

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння $y'' + y = \mathrm{tg}^2\, x$.

Розв’язання: За теоремою про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y_{заг} = y_{одн} + y_ч$. Знайдемо спочатку загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння, що відповідає даному неоднорідному, у вигляді: $y_{одн} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Складемо характеристичне рівняння для лінійного однорідного диференціального рівняння: $k^2 + 1 = 0$, звідки $k_{1,2} = \pm i$ – комплексні корені. Тоді $y_{одн} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Частинний розв’язок будемо шукати у вигляді: $y_ч = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$, де $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ *і* $y_1' = -\sin x$, $y_2' = \cos x$.

Для знаходження $c_1(x)$ *і* $c_2(x)$ складемо і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \operatorname{tg}^2 x. \end{cases}$$

За формулами Крамера дістанемо:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg}^2 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}; \quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg}^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$c_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)d(\cos x)}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} - \int d(\cos x) = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + \bar{c}_1;$$

$$c_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \int \frac{dx}{\cos x} - \int \cos x dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + \bar{c}_2.$$

Приймаючи до уваги, що ми знаходимо частинний розв'язок, можемо покласти, що $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0$. Отже, загальний розв'язок даного рівняння набуде виду: $y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)\cos x + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x\right)\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x,$ або після перетворень $y = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\sin x - 2 + c_1\cos x + c_2\sin x.$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}, \text{ якщо } y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

Розв'язання: Загальний розв'язок за своєю структурою має вигляд: $y_{заг} = y_{одн} + y_ч$. Для знаходження $y_{одн}$ складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння, що відповідає даному неоднорідному диференціальному рівнянню: $k^2 - k = 0$, звідки $k_1 = 0,\ k_2 = 1$ – корені різні, дійсні, тому $y_{одн} = c_1 + c_2 e^x$.

Частинний розв'язок знайдемо у вигляді $y_ч = c_1(x) + c_2(x)e^x$, для якого невідомі $c_1(x)$ *і* $c_2(x)$ шукаємо із системи: $\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$

Так, як $y_1(x) = 1, y_2(x) = e^x$, а $y_1'(x) = 0, y_2'(x) = e^x$, дістанемо систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)+c_2'(x)e^x=0, \\ c_2'(x)e^x=\dfrac{1}{1+e^x}, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} c_1'(x)=-\dfrac{1}{1+e^x}, \\ c_2'(x)=\dfrac{1}{e^x(1+e^x)}. \end{cases}$$

Інтегруючи кожне рівняння системи, знайдемо функції $c_1(x)$ *і* $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1(x)=-\int\dfrac{dx}{1+e^x}=-\int\dfrac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx=-\int\left(1-\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)dx=-x+\ln(1+e^x)+\overline{c_1}, \\ c_2(x)=\int\dfrac{dx}{e^x(1+e^x)}=\int\dfrac{(1+e^x)-e^x}{e^x(1+e^x)}dx=\int\left(e^{-x}-\dfrac{1}{1+e^x}\right)dx=-e^{-x}-x+\ln(1+e^x)+\overline{c_2} \end{cases}.$$

Для частинного розв’язку покладемо $\overline{c_1}=\overline{c_2}=0$, тоді:

$y_ч=-x+\ln(1+e^x)+e^x(-e^{-x}-x+\ln(1+e^x))$ або

$y_ч=-x-e^x x+(1+e^x)\ln(1+e^x)-1=(e^x+1)(\ln(1+e^x)-x)-1.$

Отже, загальний розв’язок даного рівняння матиме вигляд:

$y_{заг}=c_1+c_2e^x+(e^x+1)(\ln(1+e^x)-x)-1.$

Для знаходження частинного розв’язку, що відповідає початковим умовам, знайдемо похідну:

$$y'_{заг}=c_2e^x+e^x(\ln(1+e^x)-x)+(e^x+1)\left(\frac{e^x}{1+e^x}-1\right)=(c_2+\ln(1+e^x)-x)e^x-1.$$

Підставимо в $y_{заг}$ і $y'_{заг}$ значення $x=0, y=1,\ y'=2$, дістанемо систему:

$$\begin{cases} c_1+c_2+2\ln 2-1=1 \\ c_2+\ln 2-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=2-2\ln 2 \\ c_2=3-\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-1-\ln 2 \\ c_2=3-\ln 2 \end{cases}.$$

Шуканий частинний розв’язок набуде вигляду:

$$y=-1-\ln 2+(3-\ln 2)e^x+(e^x+1)(\ln(1+e^x)-x)-1,$$

або $\quad y=(3-\ln 2)e^x+(e^x+1)(\ln(1+e^x)-x)-2-\ln 2.$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 7.1. Проінтегрувати диференціальні рівняння.

1. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}.$
2. $y''-2y=\dfrac{2}{x^3}(x^2-1).$
3. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x.$
4. $y''-y'=e^{2x}\cos e^x.$
5. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$
6. $y'''+y'=\operatorname{tg} x.$
7. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
8. $y''+3y'+2y=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}.$

Завдання 7.2. Знайти частинний інтеграл рівняння.

1. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$
3. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

§8. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І СПЕЦІАЛЬНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Основні поняття та теореми

Таблиця 8.1. *Випадки частинних розв'язків відповідно до виду правої частини.*

№		Вигляд правої частини	Розв'язки характеристичного рівняння	Вигляд частинного розв'язку
1		2	3	4
1	А	$P_n(x)$	Число 0 є розв'язком характеристичного рівняння	$M_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + A_{n-1}x + A_n$
	Б		Число 0 є розв'язком кратності k характеристичного рівняння	$x^k M_n(x)$
2	А	$P_n(x)e^{\alpha x}$ (α -дійсне)	Число α – розв'язок кратності k характеристичного рівняння	$x^k M_n(x)e^{ax}$
	Б		Число α не є розв'язком характеристичного рівняння	$M_n(x)e^{\alpha x}$
3	А	$M_S \cos\beta x + N_S \sin\beta x$ $S = \max(n;m)$	Число γ=±βi не є розв'язком характеристичного рівняння	$M_S \cos\beta x + N_S \sin\beta x$
	Б		Число γ=±bi – корінь кратності k характеристичного рівняння	$M_S \cos\beta x + N_S \sin\beta x$
4	А	$P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ $S = \max(n;m)$	Число γ=α±βi не є розв'язком характеристичного рівняння	$e^{\alpha x}(M_S \cos\beta x + N_S \sin\beta x)$
	Б		Число γ=α±βi – корінь кратності k характеристичного рівняння	$x^k e^{\alpha x}(M_S \cos\beta x + N_S \sin\beta x)$

Диференціальне рівняння виду $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, де

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{8.1}$$

називається *рівнянням зі спеціальною правою частиною*. В цьому випадку при відшуканні частинного розв'язку рівняння можна обійтись без методу варіації сталих, пов'язаного з досить громіздким проведенням квадратур. Для цього використовують таку схему:

1) за виглядом правої частини записують загальний вид частинного розв'язку;

2) підставивши у диференціальне рівняння $y_ч(x)$, за методом невизначених коефіцієнтів визначають точні значення параметрів, що входять у його запис.

Задачі фізичного змісту. Серед диференціальних рівнянь найбільш простими є диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, до яких зводяться багато задач з фізики і техніки. Наочним прикладом може служити рівняння, що описує вимушені коливання гармонічного осцилятора з урахуванням опору середовища:

$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)=f(t), \tag{8.2}$$

де $F(t)=m\ddot{x}(t)$ − рівнодійна прикладених до матеріальної точки сил (другий закон Ньютона $F=ma$); $P(t)=-cx(t)$ − відновлююча сила (закон Гука); $R(\dot{x})=-b\dot{x}(t)$ − сила опору, яка залежить від швидкості; $f(t)$ − збурююча сила, що прикладена до матеріальної точки і є заданою функцією від часу.

Рівняння (8.2) безпосередньо слідує із закону незалежності дії сил у теоретичній механіці: $F=P+R+f$.

Контрольні питання та завдання

1. Нехай $f(x)$ права частина рівняння (8.1) має вигляд: а) $f(x)=ae^{\alpha x}$, α не є розв'язком характеристичного рівняння; б) $f(x)=ae^{\alpha x}$, α − розв'язок характеристичного рівняння кратності *k*. У якому вигляді треба шукати частинний розв'язок рівняння?
2. Нехай права частина рівняння (8.1) має такий вигляд:
   а) $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$, причому числа $\pm i\beta$ не є розв'язками характеристичного рівняння;
   б) $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$, причому числа $\pm i\beta$ − розв'язки характеристичного рівняння кратності *k*.
   В якому вигляді треба шукати частинний розв'язок рівняння?
3. Нехай y_1 і y_2 − частинні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь $y''+a_1y'+a_2y=f_1(x)$ і $y''+a_1y'+a_2y=f_2(x)$. Довести, що $y_ч=y_1+y_2$ буде частинним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y''+a_1y'+a_2=f_1(x)+f_2(x)$.
4. Для кожного із даних рівнянь написати його частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (числові значення коефіцієнтів не знаходити):
   а) $y''+2y'+2y=e^x+x\cos x$;
   в) $y''-6y'+8y=5xe^{2x}+2e^{4x}\sin x$;
   б) $y''-2y'+5y=2xe^x+e^x\sin 2x$;
   г) $y''-2y'+y=x^2+e^x+\cos 3x$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2.$

Розв’язання: Загальний розв’язок даного рівняння будемо шукати у вигляді $y = y_{одн} + y_ч.$

Знайдемо загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння, що відповідає даному неоднорідному диференціальному рівнянню і має вигляд: $y'' + 6y' + 5y = 0.$ Складемо для нього характеристичне рівняння $k^2 + 6k + 5 = 0,$ звідки $k_1 = -5,\ \ k_2 = -1.$ Отже, $y_{одн} = c_1e^{-5x} + c_2e^{-x}.$

Для знаходження частинного розв’язку $y_ч$ проаналізуємо праву спеціальну частину даного рівняння, звідки дістанемо: $f(x) = 25x^2 - 2,$ або в загальному вигляді $f(x) = P_n(x),$ де $n = 2$ – степінь многочлена. Частинний розв’язок будемо шукати у вигляді: $y_ч = x^r M_n(x)e^{\alpha x},$ де $\alpha = 0$ і $\alpha \neq k_{1,2},$ тому $r = 0.$ $M_n(x) = Ax^2 + Bx + C,\ \ де\ \ A, B, C\ -$ невизначені коефіцієнти. Таким чином:

$$y_ч = Ax^2 + Bx + C,$$

$$y'_ч = 2Ax + B,$$

$$y''_ч = 2A.$$

Підставимо $y_ч, y'_ч, y''_ч$ у вихідне рівняння з урахуванням усіх коефіцієнтів:

$$2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 - 2, \text{ або}$$

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 + 0 \cdot x - 2.$$

Порівнюючи коефіцієнти, що стоять біля відповідно однакових степенів, дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 : 5A = 25, \\ x^1 : 12A + 5B = 0, \\ x^0 : 2A + 6B + 5C = -2, \end{array}\right| \begin{array}{l} A = 5 \\ B = -12 \\ C = 12. \end{array}$$

Отже, $y_ч = 5x^2 - 12x + 12,$ а $y_{заг} = c_1e^{-5x} + c_2e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12.$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x.$

Розв’язання: Спочатку знайдемо розв’язок однорідного диференціального рівняння, що відповідає даному неоднорідному. Для цього складемо характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 10 = 0.$ Це рівняння має корені: $k_{1,2} = 1 \pm 3i,$ які є комплексно-спряженими, тому $y_0 = e^x(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x),$ $(1 \pm 3i = \alpha \pm \beta i).$

Тепер способом підбору знайдемо частинний розв’язок даного диференціального рівняння, який відповідатиме спеціальній правій частині цього рівняння:

$f(x) = 37\cos 3x$ або в загальному вигляді $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, звідки видно, що $\alpha \pm \beta i \;= 0 \pm 3i \neq k_{1,2} = 1 \pm 3i.$

Отже, складемо частинний розв'язок:

$y_ч = M\cos 3x + N\sin 3x, \quad де \quad M, N - const$ − невизначені коефіцієнти.

Для їх обчислення знайдемо першу і другу похідну від утвореного $y_ч$ і підставимо в задане рівняння.

$$y'_ч = -3M\sin 3x + 3N\cos 3x,$$

$$y''_ч = -9M\cos 3x - 9N\sin 3x.$$

Після підстановки дістанемо:

$-9M\cos 3x - 9N\sin 3x + 6M\sin 3x - 6N\cos 3x + 10M\cos 3x + 10N\sin 3x = 37\cos 3x,$ або $(M - 6N)\cos 3x + (6M + N)\sin 3x = 37\cos 3x + 0\cdot\sin 3x,$ звідки:

$$\begin{cases} M - 6N = 37 \\ 6M + N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = -6M \\ 37M = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ N = -6 \end{cases}.$$

Отже, $y_ч = \cos 3x - 6\sin 3x.$

Загальний розв'язок даного диференціального рівняння знайдемо як суму однорідного і частинного розв'язків.

$$y_{заг} = e^x(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) + \cos 3x - 6\sin 3x.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = y'(0) = 0.$

Розв'язання: Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = -1$. Загальний розв'язок відповідно однорідного рівняння:

$$y_0 = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} \text{ або } y_0 = e^{-x}(c_1 + c_2x).$$

Частинний розв'язок даного рівняння будемо шукати у вигляді $y_ч = x^rM_n(x)e^{-x}$, де $\alpha = -1$ *і* $k_{1,2} = -1$, тому $r = 2$, $n = 1$, тому $M(x) = Ax + B$.

Отже, $y_ч = e^{-x}x^2(Ax + B)$, або $y_ч = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2)$.

Обчислимо коефіцієнти *A і B.*

$$y'_ч = -e^{-x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{-x}(3Ax^2 + 2Bx) = e^{-x}(-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx)$$

$$y''_ч = e^{-x}(-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx) + e^{-x}(-3Ax^2 + 2(3A - B)x + 2B) =$$

$$= e^x(-Ax^3 + (-6A + B)x^2 + (-4B + 6A)x + 2B).$$

Після підстановки в задане рівняння і скорочення на e^{-x}, дістанемо:

$-Ax^3 + (-6A + B)x^2 + (-4B + 6A)x + 2B - 2Ax^3 + (6A - 2B)x^2 + 4Bx + Ax^3 + Bx^2 = x,$ або

$$6Ax + 2B = 1\cdot x + 0\cdot x^0, \text{ звідки } \begin{cases} 6A = 1, \quad A = \dfrac{1}{6} \\ 2B = 0, \quad B = 0 \end{cases}, \text{ а } y_ч = \frac{1}{6}e^{-x}x^3.$$

Отже, загальний розв’язок даного рівняння має вигляд:

$$y_{заг} = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{6}e^{-x}x^2.$$

Для знаходження частинного розв’язку візьмемо похідну від $y_{заг}$:

$$y'_{заг} = -e^{-x}(c_1 + c_2 x) + c_2 e^{-x} - \frac{1}{6}e^{-x}x^3 + \frac{1}{2}e^{-x}x^2 = -e^{-x}(c_1 + c_2 x - c_2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2).$$

Підставимо в $y_{заг}$ і $y'_{заг}$ початкові умови, звідки дістанемо систему:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \text{ Тому } y = -e^{-x}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right).$$

Приклад 4. Знайти закон руху точки, на яку діють дві сили: 1) сила притягання до нерухомого центру, яка пропорційна відстані точки від цього центру $P = -k^2 mx,$ і 2) періодична сила, яка визначається формулою $F = Am\cos pt.$

Розв’язання: Нехай $x = x(t)$ − закон руху матеріальної точки. Диференціальне рівняння руху матиме вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 mx + Am\cos pt. \qquad (*)$$

Скоротимо на m і запишемо рівняння так: $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = A\cos pt$ − це лінійне неоднорідне рівняння зі спеціальною правою частиною. В механіці його називають рівнянням вимушених коливань, коли відсутня сила опору. Силу $F = Am\cos pt$ називають такою, що збурює.

Розглянемо випадки:

1) $p \neq k$.

Знайдемо загальний розв’язок, що відповідає складеному рівнянню (*): $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0.$ Останнє диференціальне рівняння називають рівнянням вільних гармонійних коливань. Його характеристичне рівняння

$$r^2 + k^2 = 0 \qquad (1)$$

має корені $r_{1,2} = \pm ki.$ Тоді загальний розв’язок (вільні коливання) однорідного рівняння (1) матиме вигляд:

$$x_0 = c_1\cos kt + c_2\sin kt. \qquad (2)$$

Частинний розв’язок рівняння (*) будемо шукати у вигляді

$$x_ч = B\cos pt + C\sin pt,$$

тоді $x'_ч = -Bp\sin pt + Cp\cos pt;\quad x''_ч = -Bp^2\cos pt + Cp^2\sin pt.$

Після підстановки $x_ч$ та $x''_ч$ у рівняння (*) дістанемо:

$$(Bk^2 - Bp^2)\cos pt + (Ck^2 - Cp^2)\sin pt = A\cos pt, \text{ звідки } \begin{cases} Bk^2 - Bp^2 = A \\ Ck^2 - Cp^2 = 0 \end{cases};$$

або $\begin{cases} C = 0 \\ B = \dfrac{A}{k^2 - p^2} \end{cases}$, тоді $x_ч = \dfrac{A}{k^2 - p^2}\cos pt,$ а загальний розв'язок рівняння (*) матиме вигляд:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{A}{k^2 - p^2}\cos pt \qquad (3).$$

2) $p = k$.

Як і у випадку 1) коренем характеристичного рівняння $r^2 + k^2 = 0$ є число $0 + pi = ki.$ Тому частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y = t^l \cdot e^{0\cdot t}[P(t)\cos pt + Q(t)\sin pt \quad],$$

де t − незалежна змінна, а l − кратність числа pi відносно характеристичного многочлена. Права частина заданого рівняння дорівнюватиме $A\cos kt$ (p замінили на k). Отже, частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x = t(C\cos kt + D\sin kt);$$

$$x' = C\cos kt + D\sin kt + t(-Ck\sin kt + Dk\cos kt);$$

$$x'' = 2(-Ck\sin kt + Dk\cos kt) + t(-Ck^2\cos kt - Dk^2\sin kt).$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\cos kt$ і $\sin kt$ у рівності

$A\cos kt = -2Ck\sin kt + 2Dk\cos kt,$ дістанемо: $D = \dfrac{A}{2k}$; $C = 0.$ Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння $x = t\dfrac{A\sin kt}{2k}$, а загальний розв'язок рівняння вимушених коливань (*) при $p = k$ запишеться так:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + t\frac{A\sin kt}{2k}.$$

Розглянутий другий випадок особливо цікавий завдяки наглядному фізичному поясненню: наявність множника t в останньому доданку вказує на те, що із зростанням часу t абсциса точки x (тобто її розмах) необмежено збільшується і може досягти достатньо великого значення. Це явище називають резонансом. Воно виникає тоді, коли частота сили, що збурює, дорівнює частоті вільних коливань системи ($p = k$). Розглянутий розв'язок (3) показує, що коли частоти вільних і вимушених коливань (числа p i k) мало відрізняються одна від одної, то знаменник $k^2 - p^2$ досить малий, а сам дріб стає досить великим.

Тому, під час проектування споруд, суден, машин, фундаментів тощо потрібно уникати явищ резонансу, що можливо шляхом збільшення різниці між частотами *p і k.*

Приклад 5. Моторний човен рухається у стоячій воді зі швидкістю υ = 10 км/год. На повному ходу його двигун було вимкнуто і через t = 20 с швидкість човна зменшилась до υ = 6 км/год. Враховуючи, що сила опору води пропорційна її швидкості, знайти швидкість човна через 2 хвилини після зупинки двигуна; знайти відстань, що пройшов човен протягом однієї хвилини після зупинки двигуна.

Розв'язання: Спочатку складемо диференціальне рівняння, що відповідає даній задачі. Вважаємо, що на човен (як на матеріальну точку) діє тільки сила реакції R опору середовища. Тоді за другим законом Ньютона $F = ma = -R$. Знак мінус у правій частині пояснюється тим, що реакція $\vec{R}$ протилежна за напрямком до напрямку руху. Оскільки $\upsilon(t) = \dot{x}(t)$ – швидкість, а $a = \ddot{x}(t)$ – прискорення і $R(t) = kv(t)$, то $m\ddot{x}(t) = -k\dot{x}(t)$. Диференціальне рівняння запишемо:

$$\upsilon(t)\ \ (\dot{\upsilon}(t) = \ddot{x}(t)):\ m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon \Rightarrow \ln\upsilon = -\frac{k}{m}t + c,\ \text{або}\ \upsilon(t) = ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Для того, щоб визначити швидкість човна через 2 хвилини після зупинки двигуна, скористаємося такими початковими умовами:

- $\upsilon(0)$ = 10 км/год – початкова швидкість;
- $\upsilon(20c)$ = 6 км/год – час відліку після зупинки двигуна.

Зведемо розмірність у початкових даних:

$$\upsilon(0) = \frac{1}{6}\text{км/хв};\ \upsilon(\frac{1}{3}\text{хв}) = 0{,}1\text{км/хв}.$$

Тоді 1) $\frac{1}{6} = e^{-\frac{k}{m}0}c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{6}$, 2) 0,1= $e^{-\frac{k}{m}\frac{1}{3}}\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{k}{m} = -3\ln(0{,}6)$.

Тому $\upsilon(t) = e^{3\ln 0{,}6t}\frac{1}{6}$(км/хв).

Якщо t = 2хв, то $\upsilon(2) = \frac{1}{6}0{,}6^6\ (км/хв)$.

Шлях, пройдений моторним човном, обчислюється за формулою:

$$x(t) = \int_0^1 \upsilon(t)dt = \frac{1}{6}\int_0^1 e^{3\ln 0{,}6t}dt = \frac{1}{18\ln 0{,}6}e^{3\ln 0{,}6t}\Big|_0^1 = \frac{1}{18\ln 0{,}6}(0{,}6^3 - 1)\,(\text{км}).$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 8.1. Знайти загальний розв’язок рівняння.

1. $y''+2y'-3y=4e^{-x}$.
2. $y''-7y'+12y=5e^{3x}$.
3. $y''+4y'+4y=5e^{-2x}$.
4. $y''-8y'+7y=3x^2+7x+8$.
5. $y''-2y'=x^3+2x-1$.
6. $y''-2y'+4y=(x+2)e^{3x}$.
7. $y''+y=5\sin 2x$.
8. $y''+2y'+5y=4\sin x+22\cos x$.
9. $y''-2y'+2y=4e^{x}\cos x$.
10. $y''-4y=e^{2x}(11\cos x-7\sin x)$.

Завдання 8.2. Знайти частинний розв’язок диференціальних рівнянь, що задовольняють початковим умовам.

1. $4y''+16y'+15y=4e^{-\frac{3x}{2}}$; $y(0)=2,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=1$.
2. $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$; $y(0)=1,\quad y'(0)=3{,}2$.
3. $y''+y+\sin 2x=0$; $y(\pi)=2,\quad y'(\pi)=1$.

Завдання 8.3. Знайти загальний розв’язок рівняння.

1. $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$.
2. $y'''-3y''+2y=e^{-x}(4x^2+4x-10)$.
3. $y^{IV}8y''+16y=\cos x$.
4. $y'''+y''-y'+15y=\sin 2x$.

Завдання 8.4. Розв’язати задачу Коші.

1. $y'''+2y''+y'=-2e^{-2x}$; $y(0)=2,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=1$.
2. $y'''-3y'=3(2-x^2)$; $y(0)=1,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=1$.
3. $y'''-2y''+y'=4(\sin x+\cos x)$; $y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-1$.

Завдання 8.5. Знайти загальний розв’язок рівняння.

1. $y'''-4y''=xe^{2x}+\sin x+x^2$.
2. $y^{IV}-y=xe^{x}+\cos x$.
3. $5y''-6y'+5y=e^{2x}+2x^3-x+2$.
4. $4y''-3y'+2y=2e^{x}-e^{-2x}$.

§9. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Основні поняття та теореми

Системою звичайних диференціальних рівнянь (СДР) називається система, рівняння якої зв’язують незалежну змінну, декілька невідомих функцій цієї змінної та їх похідні.

Порядком диференціального рівняння системи називається максимальний порядок похідної, що входить до нього.

Порядок СДР визначається як сума порядків диференціальних рівнянь системи.

Система диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв’язаних відносно похідних шуканих функцій, називається нормальною системою (НСДР).

Запишемо НСДР n-го порядку:
$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \qquad (9.1)$$
де $y_i(t)$ – шукані функції; $f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ – відомі функції, задані на деякій множині точок $(n+1)$-мірного простору.

Розв'язком системи (9.1) на інтервалі $a < t < b$ називається сукупність функцій $y_1 = \varphi_1(t),\ y_2 = \varphi_2(t), ..., y_n = \varphi_n(t)$, неперервно диференційовних на $(a;b)$ і перетворюючих рівняння системи (9.1) в тотожності.

Частинним розв'язком системи (9.1) називається розв'язок, що задовольняє початковим умовам
$$y_1(t_0) = y_{10},\ \ y_2(t_0) = y_{20}, ..., y_n(t_0) = y_{n0}, \qquad (9.2)$$
де $(y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ – задана точка n-мірного простору. Сім'я всіх частинних розв'язків системи називається загальним розв'язком СДР.

Теорема Коші. Нехай функції $f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ неперервно диференційовні в області $G = \{(t, y_1, y_2, ..., y_n) : |t - t_0| \le a,\ \ |y_i - y_{i0}| \le b,\ \ i = \overline{1, n}\}$. Тоді система (9.1) з початковими умовами (9.2) має і при тому єдиний розв'язок в деякому ε-околі точки t_0: $\left|t - t_0\right| < \varepsilon < a.$

Теорема 9.2. Нормальна система з n диференціальних рівнянь 1-го порядку еквівалентна одному диференціальному рівнянню порядку n.

Остання теорема дає змогу на практиці переходити від розв'язання СДР до розв'язання звичайного диференціального рівняння однієї змінної.

Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь (ЛОСДР) зі сталими коефіцієнтами. НСДР називається лінійною, якщо функції $f_i,\ \ i = \overline{1, n}$ лінійні відносно шуканих функцій.

Лінійна система диференціальних рівнянь (ЛСДР) має вигляд:
$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + ... + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + ... + a_{2n}(t)y_n + b_2(t), \\ .... \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + ... + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{cases}$$
де коефіцієнти a_{ij} та вільні члени b_i є довільними функціями змінної t.

Система називається лінійною однорідною із сталими коефіцієнтами (ЛОСДР), якщо $a_{ij} = const;\ \ b_i = 0.$

Таким чином, ЛОСДР має вигляд:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n, \\ .... \\ y_n' = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n. \end{cases} \qquad (9.3)$$

Для скорочення запису системи вводять векторно-матричний запис. Розглянемо матрицю A коефіцієнтів системи і вектор-стовпчик $\vec{y}(t)$, координатами якого є невідомі функції $y''y^3 + 36 = 0;\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2.$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},\ \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ ... \\ y_n(t) \end{pmatrix},\ \vec{y'}(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ ... \\ y_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді за правилом множення матриць, система (9.3) запишеться таким чином:

$$\vec{y'}(t) = A \cdot \vec{y}(t). \qquad (9.4)$$

Ненульовий розв’язок цієї системи знаходять у наступному вигляді: $\vec{y} = \vec{\alpha}e^{\lambda t}$, де число λ і вектор-стовпчик сталих $\vec{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ підлягають означенню.

Після підставлення в (9.4) будемо мати: $\lambda\vec{\alpha}e^{\lambda t} = A\vec{\alpha}e^{\lambda t}$. Звідси:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}.,\ \text{або}\ (A - \lambda E)\vec{\alpha} = \vec{0}. \qquad (9.5)$$

Останнє рівняння відоме з курсу лінійної алгебри як співвідношення для визначення власних значень λ і власних векторів $\vec{\alpha}$ матриці A.

Рівняння $|A - \lambda E| = 0$ називається *характеристичним рівнянням системи* (9.4).

Розв’язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.6)$$

степеня n, ми знаходимо n значень λ (з урахуванням кратності), за яких система (9.5) має нетривіальний розв’язок $\vec{\alpha}$.

Випадок 1. Усі корені характеристичного рівняння (9.6) дійсні і різні: $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}$. Тоді загальний розв’язок системи записується в такому вигляді:

$$\vec{y}_{одн}(t) = c_1\vec{\alpha_1}e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{\alpha_2}e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\vec{\alpha_n}e^{\lambda_n t},$$

де коефіцієнти c_i – довільні сталі, а $\vec{\alpha_i}$ – власні вектори матриці A, що відповідають власним значенням λ_i.

<u>Випадок 2.</u> Корені характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні.

Нехай серед коренів є комплексний корінь $\lambda_1 = \mu + i\eta$, тоді число $\lambda_2 = \mu - i\eta$ також корінь характеристичного рівняння ($\overline{\lambda_1} = \lambda_2$ – комплексно-спряжені корені). Цим кореням відповідають наступні два розв'язки:

$$\vec{y}_1 = \overrightarrow{\alpha_1} \exp(\mu + i\eta)t \text{ та } \vec{y}_2 = \vec{a}_2 \exp(\mu - i\eta)t.$$

При цьому вектори $\vec{\alpha}_1$ та $\vec{\alpha}_2$ в загальному випадку мають комплексні координати і комплексно-спряжені між собою. Останнє означає, що при $\vec{\alpha}_1 = \vec{u} + i\vec{v}$ $(\vec{u} = \operatorname{Re}\overrightarrow{\alpha_1}, \vec{v} = \operatorname{Im}\overrightarrow{\alpha_1})$, $\vec{\alpha}_2 = \vec{u} - i\vec{v}$.

Враховуючи формули Ейлера, одержуємо:

$$\begin{cases} \overrightarrow{y_1} = e^{\mu t}(\vec{u}\cos\eta t - \vec{v}\sin\eta t) + ie^{\mu t}(\vec{u}\sin\eta t + \vec{v}\cos\eta t), \\ \overrightarrow{y_2} = e^{\mu t}(\vec{u}\cos\eta t - \vec{v}\sin\eta t) - ie^{\mu t}(\vec{u}\sin\eta t + \vec{v}\cos\eta t). \end{cases}$$

Оскільки дійсна і уявна частини комплексного розв'язку також є розв'язками, то одержуємо два лінійно незалежні дійсні розв'язки:

$$\overrightarrow{y_1} =: e^{\mu t}(\vec{u}\cos\eta t - \vec{v}\sin\eta t),$$

$$\overrightarrow{y_2} =: e^{\mu t}(\vec{u}\cos\eta t + \vec{v}\sin\eta t).$$

Загальний розв'язок системи (9.4) задається у вигляді лінійної комбінації:

$$\vec{y}_{одн} = c_1\overrightarrow{y_1} + c_2\overrightarrow{y_2} + \ldots + c_n\overrightarrow{y_n}.$$

<u>Випадок 3.</u> Серед коренів характеристичного рівняння є корінь λ кратності r і йому відповідає r лінійно незалежних власних векторів $\overrightarrow{\alpha_\lambda}^{(1)}$, $\overrightarrow{\alpha_\lambda}^{(2)}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_\lambda}^{(r)}$.

Вказана тут ситуація можлива, наприклад, у випадку симетричної матриці A: $a_{ij} = a_{ji}$.

Запис загального розв'язку аналогічний випадку 1.

<u>Випадок 4.</u> Серед коренів характеристичного рівняння є корінь λ кратності r (загальний випадок).

Будемо шукати розв'язок у вигляді $\vec{y}(t) = \overrightarrow{P_{r-1}}(t)e^{\lambda t}$, де

$$\overrightarrow{P_k}(t) = \begin{pmatrix} b_{01}+ & b_{11}t+ & \ldots & +b_{k1}t^k \\ b_{02}+ & b_{12}t+ & \ldots & +b_{k2}t^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{0n}+ & b_{1n}t+ & \ldots & +b_{kn}t^k \end{pmatrix} \text{ – вектор-многочлен степеня } k.$$

Для визначення коефіцієнтів вектора-многочлена підставимо $\vec{y}(t)=\overrightarrow{P_{r-1}}(t)e^{\lambda t}$ в систему (9.4) і порівняємо коефіцієнти при однакових степенях t. Міркуючи подібним чином, знаходимо всі розв'язки $\overrightarrow{y_i}(t)$, які відповідають власним значенням λ_i із кратностями $r_i(\sum_i r_i = n)$. Загальний розв'язок системи (9.4) знову подамо у вигляді: $\overrightarrow{y_{одн}}=\sum_i c_i\overrightarrow{y_i}$.

Контрольні питання та завдання

1. Запишіть формулою загальний вигляд СДР *n*-го порядку.
2. Дайте фізичне тлумачення задачі Коші для НСДР.
3. Який детермінант називається вронскіаном або детермінантом Вронського системи вектор-функцій $\overrightarrow{y_1}(t),\overrightarrow{y_2}(t),...,\overrightarrow{y_n}(t)$?
4. Наведіть необхідні і достатні умови, за яких вронскіан системи вектор-функцій дорівнює нулю.
5. Дайте означення фундаментальної системи розв'язків ЛСДР.
6. Сформулюйте теорему про побудову розв'язку ЛОСДР.
7. Сформулюйте теорему про властивості власних векторів симетричного лінійного оператора.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом виключення змінних

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y.\end{cases}$$

Розв'язання: Маємо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Диференціюючи обидві частини першого із даних рівнянь, дістанемо: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}$.

Із першого рівняння системи виразимо змінну *y*: $y=\dfrac{dx}{dt}-2x$ і підставимо у друге рівняння системи. Будемо мати: $\dfrac{dy}{dt}=3x+4\left(\dfrac{dx}{dt}-2x\right)$, або $\dfrac{dy}{dt}=4\dfrac{dx}{dt}-5x$.

Підставимо цей вираз у продиференційоване перше рівняння. Дістанемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 5x, \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Це лінійне однорідне рівняння із сталими коефіцієнтами. Для його розв'язання складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 5 = 0$, звідки $k_1 = 5, k_2 = 1$. Отже, $x = c_1e^{5t} + c_2e^t$.

Із першого рівняння системи знаходимо:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = 5c_1e^{5t} + c_2e^t - 2c_1e^{5t} - 2c_2e^t, \text{ або } y = 3c_1e^{5t} - c_2e^t.$$

Дістали відповідь: $\begin{cases} y(t) = 3c_1e^{5t} - c_2e^t, \\ x(t) = c_1e^{5t} + c_2e^t. \end{cases}$

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь векторно матричним способом. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Розв'язання: Напишемо матрицю системи $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$, або $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, звідки $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$ – характеристичні числа матриці.

Для кожного кореня складемо відповідну систему однорідних лінійних рівнянь і розв'яжемо її.

Для кореня $\lambda_1 = 1$ складемо систему: $\begin{cases} (2-1)\lambda_{11} + 2\lambda_{21} = 0, \\ \lambda_{11} + (3-1)\lambda_{21} = 0; \end{cases}$ або

$\begin{cases} \lambda_{11} + 2\lambda_{21} = 0, \\ \lambda_{11} + 2\lambda_{21} = 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} \lambda_{11} = \lambda_{11}, \\ \lambda_{21} = -\dfrac{1}{2}\lambda_{11}. \end{cases}$ Приймемо $\lambda_{11} = 1$, тоді $\lambda_{21} = -\dfrac{1}{2}$.

Для кореня $\lambda_2 = 4$ дістанемо систему: $\begin{cases} (2-4)\lambda_{12} + 2\lambda_{22} = 0, \\ \lambda_{12} + (3-4)\lambda_{22} = 0; \end{cases}$ або

$\begin{cases} -2\lambda_{12} + 2\lambda_{22} = 0, \\ \lambda_{12} - \lambda_{22} = 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} \lambda_{12} = \lambda_{22}, \\ \lambda_{22} = \lambda_{12}. \end{cases}$ Приймемо λ_{12}=1, тоді $\lambda_{22} = 1$.

Розв'язок кожної однорідної системи визначає певний вектор:

- для $\lambda_1 = 1$, вектор (1; −1/2);
- для $\lambda_2 = 4$, вектор (1;1).

Розв'язок даної системи диференціальних рівнянь у векторній формі матиме вигляд: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{Y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$, або у координатній формі:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{4t} \\ y = -\dfrac{1}{2} c_1 e^t + c_2 e^{4t} \end{cases}.$$

Приклад 3. Знайти розв'язки неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + e^{3t}. \end{cases}$$

Розв'язання: Знаходимо розв'язок однорідної системи. Складемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$, звідки $1-\lambda = \pm 2$, або $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ – характеристичні числа матриці.

Для числа $\lambda_1 = 3$ дістанемо систему: $\begin{cases} -2\lambda_{11} + 2\lambda_{21} = 0, \\ 2\lambda_{11} - 2\lambda_{21} = 0; \end{cases}$ або $\begin{cases} \lambda_{11} = \lambda_{11}, \\ \lambda_{21} = \lambda_{11}. \end{cases}$ Покладемо $\lambda_{11} = 1$, тоді $\lambda_{21} = 1$.

Для числа $\lambda_2 = -1$: $\begin{cases} 2\lambda_{12} + 2\lambda_{22} = 0, \\ 2\lambda_{12} + 2\lambda_{22} = 0; \end{cases}$ звідки $\begin{cases} \lambda_{12} = \lambda_{12}, \\ \lambda_{22} = -\lambda_{12}. \end{cases}$

Покладемо $\lambda_{12} = 1$, тоді $\lambda_{22} = -1$.

Отже, загальний розв'язок однорідної системи – це функція $\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ y = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} \end{cases}$.

Вільним членам системи $f_1 = e^t, f_2 = e^{3t}$ відповідають числа 1 і 3, причому 1 не є коренем характеристичного рівняння, а 3 – корінь першої кратності.

Тому за аналогією, як і для однорідного рівняння, дістанемо: $x_{част} = Ae^t + (B + Ct)e^{3t}$; $y_{част} = De^t + (E + Ft)e^{3t}$;

Знайдемо похідні від цих функцій:

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{t} + Ce^{3t} + 3(B + Ct)e^{3t} = Ae^{t} + (3B + C + 3Ct)e^{3t},$$

$$\frac{dy}{dt} = De^{t} + Fe^{3t} + 3(E + Ft)e^{3t} = De^{t} + (3E + F + 3Ft)e^{3t}.$$

Підставимо ці функції та їхні похідні у задану систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ae^{t} + (3B + C + 3Ct)e^{3t} = Ae^{t} + (B + Ct)e^{3t} + 2De^{t} + (2E + 2Ft)e^{3t} + e^{t}, \\ De^{t} + (3E + F + 3Ft)e^{3t} = 2Ae^{t} + (2B + 2Ct)e^{3t} + De^{t} + (E + Ft)e^{3t} + e^{3t}. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} Ae^{t} + (3B + C + 3Ct)e^{3t} = (A + 2D + 1)e^{t} + (B + 2E + (C + 2F)t)e^{3t}, \\ De^{t} + (3E + F + 3Ft)e^{3t} = (2A + D)e^{t} + (2B + E + 1 + (2C + F)t)e^{3t}. \end{cases}$$

Прирівнюємо відповідні вирази, що стоять біля e^{t} i e^{3t}:

$e^{3t}: 3B + C + 3Ct = B + 2E + (C + 2F)t$ і $3E + F + 3Ft = 2B + E + 1 + (2C + F)t.$

$e^{t}: A = A + 2D + 1 \quad i \quad D = 2A + D$

Звідси дістанемо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 2D + 1 = 0, \\ A = 0, \\ 3B + C = B + 2E, \\ 3C = C + 2F, \\ 3E + F = 2B + E + 1, \\ 3F = 2C + F. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо:

$$A = 0, B = 0, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}, E = \frac{1}{4}, F = \frac{1}{2}.$$

Отже, загальний розв’язок неоднорідної системи має вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{3t} \\ y(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^{t} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} t \right) e^{3t}. \end{cases}$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 9.1. Знайти загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь методом виключення змінних.

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

Завдання 9.2. Методом виключення знайти частинний розв’язок, що відповідає початковим умовам.

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$x\big|_{t=0} = 0, y\big|_{t=0} = 1.$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - y \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}, \quad x\big|_{t=0} = 1, y\big|_{t=0} = 0, z\big|_{t=0} = 0.$$

Завдання 9.3. Розв’язати систему однорідних диференціальних рівнянь матричним способом.

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x + 18y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 10y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

Завдання 9.4. Розв’язати систему неоднорідних диференціальних рівнянь.

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 3y + 2t. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - t. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - z + 2t, \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + t. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = z - e^t \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases}, \quad x\Big|_{t=0} = -4, y\Big|_{t=0} = 1, z\Big|_{t=0} = 8.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння (відповідь записати у вигляді $f(x,y) = C$).

1. $xy^2 + x + (y - x^2y)y' = 0$.
2. $(1+x^2)y^3 + (1-y^2)xy' = 0$.
3. $e^y\sqrt{1+x^2}dy + dx = 0$.
4. $\sqrt{1-x^2y'} + \sqrt{1-y^2} = 0$.
5. $\operatorname{tg} y \cdot \sec^2 x dx + \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 y dy = 0$.
6. $\sin x \cdot \cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$.
7. $(2+y)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+y^2} \cdot y'$.
8. $e^y\left(y'+1\right) = 1$.
9. $xdy - ydx = \sqrt{1+x^2}dy + \sqrt{1+y^2}dx$.
10. $x\left(1+y^2\right)dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$.
11. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.
12. $2x^2yy' + y^2 = 2$.
13. $y' - xy^2 = 2xy$.
14. $xydx + \left(x+1\right)dy = 0$.
15. $\left(e^{2x}+5\right)dy + ye^{2x}dx = 0$.
16. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.
17. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$.
18. $y(1+\ln y) + xy' = 0$.
19. $\left(3+e^x\right)yy' = e^x$.
20. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.
21. $y\ln y + xy' = 0$.
22. $\left(e^x+8\right)dy - ye^xdx = 0$.
23. $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$.
24. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
25. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
26. $y\left(4+e^x\right)dy - e^xdx = 0$.
27. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$.
28. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

29. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.

30. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.

Завдання 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$.
2. $xy' = 2\sqrt{3x^2+y^2} + y$.
3. $y' = \frac{x^2+xy+3y^2}{x^2-4xy}$.
4. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$.
5. $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$.
6. $xy' = \frac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$.
7. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$.
8. $y' = \frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$.
9. $xy' = \frac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$.
10. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y$.
11. $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dx = x^2e^{\frac{x}{y}}dy$.
12. $\left(x^2-y^2\right)dy - 2xydx = 0$.
13. $\left(x-\sqrt{xy}-y\right)dx + \sqrt{xy}dy = 0$.
14. $xy' - y\ln\frac{y}{x} = 0$.
15. $\left(x^2+y^2\right)y' = 2xy$.
16. $xy' = y - xe^{\frac{x}{y}}$.
17. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$.
18. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.
19. $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx + xdy = 0$.
20. $(x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2 = xyy'$.
21. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$.
22. $2x^3y' = y\left(2x^2-y^2\right)$.
23. $xy' = \frac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$.
24. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$.
25. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$.
26. $xy' = \frac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}$.
27. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.
28. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.
29. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$.
30. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$.

Завдання 3. Знайти розв’язок задачі Коші.

1. $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}\,x; \quad y(0) = 0$.
2. $y' + y\cos x = \sin x\cos x; \quad y(0) = 1$.
3. $y' = 2y + e^x - x; \quad y(0) = \frac{1}{4}$.
4. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}; \quad y(0) = -1$.
5. $\sin x\frac{dy}{dx} - y = 2\sin\frac{2x}{2}; \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$.
6. $y' - \frac{y}{x\ln x} = \ln x; \quad y(e) = \frac{e^2}{2}$.
7. $y'\sin x - y\cos x = 1; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
8. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x; \quad y(0) = 0$.
9. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x; \quad y(-1) = \frac{3}{2}$.

10. $y'+\dfrac{y}{x+1}=e^{x}\left(x+1\right);\quad y(0)=1.$

11. $y'+y\operatorname{tg}x=\cos^{2}x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}.$

12. $y'-y\operatorname{ctg}x=2x\sin x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

13. $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x;\quad y\left(\pi\right)=\dfrac{1}{\pi}.$

14. $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

15. $y'+\dfrac{2x}{1+x^{2}}y=\dfrac{2x^{2}}{1+x^{2}};\quad y(0)=\dfrac{2}{3}.$

16. $y'-\dfrac{2x-5}{x^{2}}y=5;\quad y(2)=4.$

17. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}e^{x};\quad y(1)=e.$

18. $y'-\dfrac{y}{x}=-2\dfrac{\ln x}{x};\quad y(1)=1.$

19. $y'-\dfrac{y}{x}=-2\dfrac{\ln x}{x};\quad y(1)=1.$

20. $y'+\dfrac{1-2x}{x^{2}}y=1;\quad y(1)=1.$

21. $y'+xy=-x^{3};\quad y(0)=3.$

22. $y'+2xy=-2x^{3};\quad y(1)=\dfrac{1}{e}.$

23. $y'+2xy=xe^{-x^{2}}\sin x;\quad y(0)=1.$

24. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=\left(x+1\right)^{3};\quad y(0)=\dfrac{1}{2}.$

25. $y'+\dfrac{xy}{2\left(1-x^{2}\right)}=\dfrac{x}{2};\quad y(0)=\dfrac{2}{3}.$

26. $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x^{3}};\quad y(1)=1.$

27. $y'+\dfrac{y}{2x}=x^{2};\quad y(1)=1.$

28. $y'-\dfrac{y}{x}=x^{2};\quad y(1)=0.$

29. $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{12}{x^{3}};\quad y(1)=4.$

30. $y'-y\cos x=\sin 2x;\quad y(0)=1.$

Завдання 4. Знайти розв’язок задачі Коші.

1. $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y};\quad y\left(0\right)=\dfrac{9}{4}.$

2. $y'+\dfrac{3x^{2}y}{x^{3}+1}=y^{2}\left(x^{3}+1\right)\sin x;\quad y(0)=1.$

3. $y'+\dfrac{y}{x}=y^{4}\left(1-x^{2}\right);\quad y(1)=1.$

4. $y'-y=xy^{2};\quad y(0)=1.$

5. $2y'-3y\cos x=e^{-2x}\left(2+3\cos x\right)y^{-1};$
$y(0)=1.$

6. $y'+xy=\left(x-1\right)e^{x}y^{2};\quad y(0)=1.$

7. $2\left(y'+y\right)=xy^{2};\quad y(0)=2.$

8. $4y'+x^{3}y=\left(x^{3}+8\right)e^{-2x}y^{2};\quad y(0)=1.$

9. $2y'+3y\cos x=\left(8+12\cos x\right)e^{2x}y^{-1};$
$y(0)=2.$

10. $\left(y'+y^{2}\right)\left(x+1\right)=-y;\quad y(0)=1.$

11. $y'+2xy=2x^{3}y^{3};\quad y(0)=\sqrt{2}.$

12. $2xy'-3y=-\left(20x^{2}+12\right)y^{3};\ y(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

13. $y'-y=2xy^{2};\quad y(0)=\dfrac{1}{2}.$

14. $2y'-3y=-\left(20x^{2}+12\right)y^{3};\ y(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

15. $xy'+y=xy^{2}=xy^{2};\quad y(1)=3.$

16. $3xy'+5y=\left(4x-5\right)y^{4};\quad y(1)=1.$

17. $2xy'-3y=-\left(5x^{2}+3\right)y^{3};\quad y(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

18. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^{2}};\quad y(0)=-1.$

19. $y'+4x^{3}y=4y^{2}e^{4x}\left(1-x^{3}\right);\ y(0)=-1.$

20. $3\left(xy'+y\right)=y^{2}\ln x;\quad y(1)=3.$

21. $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x\left(1+\sin x\right);$
$y(0)=1.$

22. $xy'-y=-y^{2}\left(\ln x+2\right)\ln x;\quad y(1)=1.$

23. $2\left(y'+xy\right)=\left(1+x\right)e^{-x}y^{2};\quad y\left(0\right)=2.$

24. $y'+4x^3y=4\left(x^3+1\right)e^{-4x}y^2;\ y(0)=1.$

25. $2\left(xy'+y\right)=xy^2;\quad y(1)=2.$

26. $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2;\quad y(0)=1.$

27. $xy'+y=2y^2\ln x;\quad y(1)=\dfrac{1}{2}.$

28. $xy'+y=\dfrac{1}{2}xy^2;\quad y(1)=2.$

29. $5\left(xy'+y\right)=y^2\ln x;\quad y(1)=3.$

30. $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=-\dfrac{2}{3}y^4\sin x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2.$

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

1. $xy''=y'\ln\dfrac{y}{x}.$
2. $(1-x^2)y''-xy'=2.$
3. $2xy'''y''=(y'')^2-a^2.$
4. $(1+x^2)y''+1+(y')^2=0.$
5. $xy''+xy'=1$
6. $xy''+y'=x^2+1.$
7. $-xy'''+2y''=\dfrac{2}{x^2}.$
8. $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3.$
9. $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}y'=2x.$
10. $xy'''+y''=\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$
11. $(1+\sin)y'''=\cos y''.$
12. $(x+1)y'''+y''=x+1.$
13. $x^3y'''+x^2y''=\sqrt{x}.$
14. $y''\,\mathrm{tg}\,5x=5y''.$
15. $y'''\,\mathrm{tg}\,x=y''+1.$
16. $x^5y'''+x^4y''=1.$
17. $xy'''-y''+\dfrac{1}{x}=0.$
18. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3.$
19. $x^4y''+x^3y'=1.$
20. $\mathrm{tg}\,xy'''=2y''.$
21. $xy'''+y''=1.$
22. $y'''\,\mathrm{ctg}\,2x+2y''=0.$
23. $y'''x\ln x=y''.$
24. $\mathrm{tg}\,xy''-y'+\dfrac{1}{\sin x}=0.$
25. $y''-2y'\,\mathrm{ctg}\,2x=2\,\mathrm{ctg}\,2x.$
26. $xy''-y'=x^2e^x.$
27. $y'''=2(y''-1)\,\mathrm{ctg}\,x.$
28. $xy'''+y''-x-1=0.$
29. $x^3y''+x^2y'-1=0.$
30. $(1-e^x)y'''+y''=0.$

Завдання 6. Знайти розв’язок задачі Коші.

1. $yy'+(y')^2-1=0;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$
2. $2yy''+y^2-(y')^2=0;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$
3. $yy''-(y')^2=y^2;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$
4. $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{2yy'}{1+y^2};\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$
5. $y''\cos y+(y')^2\sin y-y'=0;\quad y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\quad y'(-1)=2.$
6. $y''=e^{2y};\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$
7. $y''+50\sin y\cos^3 y=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=5.$

8. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1); \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

9. $y'''y^3 = -9; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

10. $y'' = 18y^3; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

11. $y'' = 50\sin^3 y \cos y; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 5.$

12. $4y^3 y'' = y^4 - 1; \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

13. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

14. $y'' = 98y^3; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

15. $y''y^3 + 49 = 0; \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = 1.$

16. $y'' = 18\sin^3 y \cos y; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 3.$

17. $4y^3 y'' = y^4 - 16; \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

18. $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0; \quad y(1) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(1) = 2.$

19. $y''y^3 + 16 = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$

20. $y'' = 8\sin^3 y \cos y; \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = 2.$

21. $y'' = 72y^3; \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$

22. $y'' + 4\sin y \cos^3 y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

23. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

24. $y'' = 50y^3; \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$

25. $y''y^3 = -64; \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$

26. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1; \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

27. $y''y^3 + 36 = 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

28. $y''y^3 + 25 = 0; \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$

29. $y'' = 2\sin^3 \cos y; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 1.$

30. $y'' - 3e^{6y} = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Завдання 7. Розв’язати рівняння способом варіації сталих.

1. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}.$

2. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}.$

3. $y''+3y'+2y=\frac{e^{-x}}{2+e^{x}}.$
4. $y''-3y'+2y=\frac{1}{2+e^{-x}}.$
5. $y''+\frac{7}{4}=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$
6. $y''-2y'=\frac{4}{e^{2x}(1+e^{-2x})}.$
7. $y''+3y'+2y=\frac{1}{e^{x}+1}.$
8. $y''+4y=\frac{1}{\sin^{x}y}.$
9. $y''-2y'+y=\frac{e^{-x}}{\sqrt{4-x^{2}}}.$
10. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x.$
11. $y''+16y=\frac{16}{\cos 4x}.$
12. $y''+9y=\frac{9}{\sin 3x}.$
13. $y''-6y'+8y=\frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}.$
14. $y''-3y'+2y=\frac{1}{3+e^{-x}}.$
15. $y''+16y=\frac{16}{\sin 4x}.$
16. $y''-y'=\frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}.$
17. $y''+6y'+8y=\frac{4e^{-2x}}{3+e^{2x}}.$
18. $y''-3y'=\frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}.$
19. $y''-y=4\operatorname{ctg}x$
20. $y''+9y=\frac{9}{\cos 3x}.$
21. $y''+\frac{1}{\pi^{2}}y=\frac{1}{\pi^{2}\cos\frac{x}{\pi}}.$
22. $y''+\pi^{2}y=\frac{\pi^{2}}{\sin\pi x}.$
23. $y''-9y'+18y=\frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}.$
24. $y''-6y'+8y=\frac{4}{1+e^{-2x}}.$
25. $y''+4y=8\operatorname{ctg}2x.$
26. $y''+3y'=\frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}.$
27. $y''+\pi^{2}y=\frac{\pi^{2}}{\cos\pi x}.$
28. $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^{x}}.$
29. $y''-2y'+y=\frac{e^{x}}{x}.$
30. $y''+2y'2y=3e^{-x}\sqrt{x+1}.$

Завдання 8. Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють початковим умовам $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0$.

1. $y''+169y=\sin 13x+\cos 13x;\quad y(\frac{\pi}{2})=0,\quad y'(\frac{\pi}{2})=0.$
2. $y''-6y'+9y=14xe^{x};\quad y(1)=3,\quad y'(1)=0.$
3. $y''+y=2\cos 4x+3\sin 4x;\quad y(\frac{\pi}{2})=0,\quad y'(\frac{\pi}{2})=0.$
4. $y''+13y'+12y=8x^{2}-39x;\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3.$
5. $y''+225y=2\sin 15x+3\cos 15x;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=3.$

6. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(12x + 16); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

7. $y'' + y = \cos 3x; \quad y(\frac{\pi}{2}) = 4, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1.$

8. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

9. $y'' - 2y' + y = 4(\sin x + \cos x); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

10. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

11. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

12. $y'' - 3y' = 3(2 - x^2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

13. $y'' + 4y'12y = 8\sin 2x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

14. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^{x}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$

15. $y'' + 6y' + 9y = \cos 10x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

16. $y'' - 4y' + 13y = 16x + 5; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

17. $y'' - 2y' = e^{x}(x^2 + x - 3); \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

18. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$

19. $y'' + 64y = 2\sin 8x + \cos 8x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

20. $y'' - 10y' + 25y = 10e^{5x}; \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1.$

21. $y'' + 2y' + y = -2\sin x; \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

22. $y'' - 4y' = 32 - 384x^2; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$

23. $y'' - 3y' - 4y = 17\cos x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

24. $y'' - 2y' = 2e^{x}; \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0.$

25. $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x; \quad y(\pi) = \pi e^{\pi}, \quad y'(\pi) = e^{\pi}.$

26. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

27. $y'' - 4y' + 8y = 61e^{2x}\sin x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

28. $y'' + 9y' = 15\sin 2x; \quad y(0) = -7, \quad y'() = 0.$

29. $y'' - 3y' = 3x + x^2; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{70}{27}.$

30. $y'' + y' = 2x^2 e^{x}; \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$

Завдання 9. Розв'язати задачу Коші.

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 8e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 7, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y - 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 3y - 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y + 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 9. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 15e^{-3t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^{t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 7, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + 18t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 6. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y - 8, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y + 45, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 10, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y - 9e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y + 6e^{2t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -3, \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 10, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y - 16e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 14, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y + 5e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$21.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+8e^{-3t},\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=-2,\\ y(0)=7.\end{cases}$$

$$22.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+2y+9,\\ \dfrac{dy}{dt}=-5x+y,\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=4,\\ y(0)=5.\end{cases}$$

$$23.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-3x+4y+20e^{-3t},\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=5,\\ y(0)=-4.\end{cases}$$

$$24.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-2y+8e^{3t},\\ \dfrac{dy}{dt}=6x+3y,\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=-2,\\ y(0)=1.\end{cases}$$

$$25.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y+3,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y,\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=7.\end{cases}$$

$$26.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y-6e^{-t},\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=4,\\ y(0)=2.\end{cases}$$

$$27.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y-15e^{-2t},\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y,\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=4,\\ y(0)=7.\end{cases}$$

$$28.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y-4,\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=-1.\end{cases}$$

$$29.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-3y+6e^{4t},\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y,\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=4,\\ y(0)=0.\end{cases}$$

$$30.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+6y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-4y-2e^{-2t},\end{cases}\quad \begin{cases}x(0)=-3,\\ y(0)=2.\end{cases}$$

ГЛАВА VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§1. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ (ПО ДОВЖИНІ ДУГИ)

Основні поняття та теореми

Нехай у площині XOY задано спрямлювану криву $\mathit{\Gamma}$,

$$\mathit{\Gamma}=\{M(x;y):x=x(l),\quad y=y(l),\ 0\le l\le L\},$$

де параметр l – довжина дуги, яка з'єднує початкову точку $A(x(0);y(0))$ дуги $\mathit{\Gamma}$ із змінною точкою $M(x(l);y(l))$, L – довжина кривої $\mathit{\Gamma}$. Якщо $B(x(L);y(L))-$ кінцева точка дуги $\mathit{\Gamma}$, то записують $\mathit{\Gamma}=\overset{\frown}{AB}$.

Нехай на кривій $\mathit{\Gamma}$ задано функцію $f(x(l);\ y(l))=F(l),\quad 0\le l\le L$. *Фізичним тлумаченням* цього може бути наступне: на матеріальну точку $M(x(l);y(l))$, траєкторією руху якої є неперервна крива $\mathit{\Gamma}$, діє сила величини $F(l)$.

Криволінійним інтегралом першого роду від функції $f(x;y)$ по кривій $\overset{\frown}{AB}$ називають вираз $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dl$, що визначається за формулою

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl=\int\limits_{0}^{L} f(x(l);y(l))dl.$$

Цей інтеграл позначається $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x(l);y(l))dl$, або $\int\limits_{\Gamma} f(x;y)dl$, або коротко $\int\limits_{\Gamma} fdl$.

Основні властивості криволінійного інтеграла по довжині дуги.

1. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dl$=дов.($\overset{\frown}{AB}$)=L.
2. *Теорема існування.* Якщо функція $F(l)=f(x(l);y(l))$ неперервна в точках кривої $\mathit{\Gamma}$ як функція параметра l, то інтеграл $\int\limits_{\Gamma} fdl$ існує.
3. Криволінійний інтеграл першого роду *не залежить від орієнтації кривої:*
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl=\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x;y)dl.$$
4. Розіб'ємо дугу $\overset{\frown}{AB}$ довільним чином на n елементарних дуг точками $A=A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n=B$; нехай Δl_k – довжина дуги $A_{k-1}A_k$. На кожній еле-

ментарній дузі виберемо довільну точку $M_k(\xi_k;\eta_k)$ і помножимо значення функції $f(\xi_k;\eta_k)$ в цій точці на довжину Δl_k відповідної дуги. Тоді

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl = \lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\cdot \Delta l_k .$$

Криву $\overset{\frown}{AB}$ називають контуром інтегрування, а dl – диференціалом дуги.

5. *Фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду.*
   Заряд q матеріальної кривої AB, що має щільність заряду $\rho(x;y)$, дорівнює криволінійному інтегралу від $\rho(x;y)$ по кривій $\overset{\frown}{AB}$, тобто
   $$q = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x;y)dl .$$
6. *Адитивність.* Якщо дуга AB складена із двох дуг AC і CB і для $f(x;y)$ існує $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} fdl$, то існують інтеграли $\int\limits_{\overset{\frown}{AC}} fdl$ і $\int\limits_{\overset{\frown}{CB}} fdl$, причому
   $$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(x;y)dl + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(x;y)dl .$$
7. *Лінійність.* Якщо для функцій $f(x;y)$ та $g(x;y)$ існують криволінійні інтеграли по дузі $\overset{\frown}{AB}$, то для функції $\alpha\cdot f(x;y)+\beta\cdot g(x;y)$ також існує криволінійний інтеграл по дузі $\overset{\frown}{AB}$, причому
   $$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [\alpha\cdot f(x;y)+\beta\cdot g(x;y)]dl = \alpha\cdot \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl + \beta\cdot \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} g(x;y)dl,$$

   де α і β – довільні дійсні числа.
8. *Оцінка абсолютної величини інтеграла.*
   $$|\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl| \le \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} |f(x;y)|\,dl \le L\cdot \max_{\overset{\frown}{AB}} |f(x;y)|, \quad \text{де } L = дов.(\overset{\frown}{AB}).$$

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду. Нехай *параметричні рівняння плоскої гладкої кривої* $\overset{\frown}{AB}$ мають вид: $x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b,$ причому існують неперервні похідні $x'(t),\ y'(t)$.

Тоді $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$, а криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl = \int_a^b f(x(t);y(t))\cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

У випадку _явного задання гладкої дуги_ $\overset{\frown}{AB}$ рівнянням $y = y(x),\ a \le x \le b$, інтеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl = \int\limits_a^b f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+[y'_x]^2}\,dx.$$

Випадок просторової кривої. Нехай параметричне рівняння гладкої кривої $\overset{\frown}{AB}$ має вид: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b,$ причому існують неперервні похідні $x'(t),\ y'(t).,\ z'(t)$. Тоді:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y;z)dl = \int\limits_a^b f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення гладкої просторової кривої.
2. Нехай спрямлювана крива $\overset{\frown}{AB}$ має точки самоперерізів. За яких умов функцію $F(l) = f(x(l);y(l)),\ 0 \le l \le L$, можна вважати такою, що задається як однозначна функція двох незалежних змінних x і y.
3. Дайте означення криволінійних інтегральних сум першого роду для функції $f(x;y;z)$, що відповідають поділу $\{M_k\}$ кривої $\overset{\frown}{AB}$ з визначеними точками $M_k(\xi_k,\ \eta_k,\ \upsilon_k),\ k = 1,2,\ldots,n.$
4. Доведіть _теорему про середнє значення_: якщо функція $f(x;y;z)$ неперервна вздовж дуги $\overset{\frown}{AB}$, то на цій дузі знайдеться така точка Q, що

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y;z)dl = f(Q) \cdot L,$$

де L – довжина дуги $\overset{\frown}{AB}$.

5. Нехай _крива_ Γ _задана в полярній системі координат_ рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta,$ причому існує неперервна похідна $\rho'(\varphi)$. Показати, що тоді

$$dl = \sqrt{\rho^2 + [\rho'_\varphi]^2}\,d\varphi \text{ і}$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi;\rho(\varphi)\sin\varphi) = \sqrt{\rho^2 + [\rho'_\varphi]^2}\,d\varphi.$$

6. _Геометричне тлумачення_ криволінійного інтеграла по дузі. Показати, що площу S циліндричної поверхні Π, заданої як

$$\Pi = \{(x;y;z):\ 0 \le z \le f(x;y),\ M(x;y) \in \overset{\frown}{AB}\},$$

можна знайти за формулою $S=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x;y)dl$.

7. Дайте фізичне тлумачення властивостей адитивності та лінійності криволінійного інтеграла першого роду.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0;0)$ і $A(1;2)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої $L: y=2x$.

Для заданої лінії $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx$

$$y'(x)=2, \text{ тоді } dl=\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}dx.$$

При переході від O до A x змінюється від 0 до 1.

З формули $\int\limits_L f(x;y)dl=\int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}dx$ маємо:

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}}=\ln|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}|\Big|_0^1=$$

$$=\ln|1+\frac{3}{\sqrt{5}}|-\ln|\frac{2}{\sqrt{5}}|=\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

Приклад 1.2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xdS$, де L – дуга еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ від точки (3;0) до точки (0;2).

Розв'язання. Запишемо рівняння кривої L у параметричному вигляді: $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

Тоді $x'(t)=-3\sin t, y'(t)=2\cos t$.

Запишемо $dl=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt$, звідки

$$dl=\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}dt=\sqrt{5\sin^2 t+4}dt.$$

Отже, $\int\limits_L xdl=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{5\sin^2 t+4}dt=3\sqrt{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\frac{4}{5}}d(\sin t)$.

Далі застосуємо табличний інтеграл:

$$\int\sqrt{U^2+A}dU=\frac{U}{2}\sqrt{U^2+A}+\frac{A}{2}\ln|U+\sqrt{U^2+A}|+C.$$

Таким чином,

$$\int\limits_L xdS = 3\sqrt{5}\Big(\frac{\sin t}{2}\sqrt{\sin^2 t + \frac{4}{5}} + \frac{2}{5}\ln|\sin t + \sqrt{\sin^2 t + \frac{4}{5}}|\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\Big(\frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big).$$

Приклад 1.3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dS$, де L – дуга кривої $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ \ z = t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

Розв'язання. Застосуємо формулу

$$\int\limits_L f(x;y;z)dS = \int\limits_a^b f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.$$

Для цього знайдемо $x_t' = \cos t - t\sin t$

$y_t' = \sin t + t\cos t$

$z_t' = 1$.

і виразимо

$$dl = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1}dt = \sqrt{2 + t^2}\,dt.$$

Отже,

$$\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl = \int\limits_0^{2\pi} (2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t})\sqrt{2 + t^2}dt = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}d(2 + t^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(2 + t^2)^3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(\sqrt{(2 + 4\pi^2)^3} - 2\sqrt{2}).$$

Приклад 1.4. Знайти масу дуги $\overset{\frown}{AB}$ астроїди $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \qquad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

якщо лінійна густина в кожній точці кривої дорівнює сумі її координат.

Розв'язання. Скористаємось формулою: $m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x;y)dl.$

За умовою $\rho(x;y) = x + y$, тому, якщо $m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x + y)dl.$

Знайдемо $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$ і $y_t' = 3a\sin^2 t\cos t$, звідки

$$dl = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = 3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt =$$

$$= 3a\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2t}dt = \frac{3}{2}a\sin 2t dt.$$

Отже,

$$m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos^3 t+a\sin^3 t)\cdot\frac{3}{2}a\sin 2tdt=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 t+\sin^3 t)\cdot 2\sin t\cos tdt=$$

$$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t\sin t+\sin^4 t\cos t)dt=-3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 td(\cos t)+3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 td(\sin t)=$$

$$=-3a^2\cdot\frac{\cos^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+3a^2\cdot\frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3a^2}{5}\cdot(0-1)+\frac{3a^2}{5}(1-0)=\frac{6a^2}{5}$$

Приклад 1.5. Знайти довжину дуги кривої $y^2=x^3$ від точки x=0 до x=1 $(y\geq 0)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою: дов.*(L)*= $\int\limits_L dl=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$.

Знайдемо $y'=(\sqrt{x^3})'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, тоді

$$\text{дов.(L)}=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{4}{9}\int_0^1(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{1}{2}}d(1+\frac{9}{4}x)=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{8}{27}((\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-1)=$$

$$=\frac{8}{27}(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1).$$

Приклад 1.6. Обчислити площу бічної поверхні кругового циліндра $x^2+y^2=4$, що знаходиться між площиною *XOY* і гіперболічним параболоїдом $z=\frac{1}{4}xy$.

Розв'язання. Згідно геометричного змісту криволінійного інтеграла 1-го роду, S=$\int\limits_L f(x;y)dl$, де $f(x;y)=\frac{1}{4}xy$, а L – контур кола $x^2+y^2=4$,

$$y=\pm\sqrt{4-x^2},\qquad y'=\mp\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$1+(y')^2=\frac{4}{4-x^2},\text{ тому } dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$S=8\int_0^2\frac{1}{4}x\cdot\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=8.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду.

1. $\int\limits_L \frac{dS}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$, розташований між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

2. $\int\limits_L xydS$, де L – контур прямокутника з вершинами $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$ і $D(0;2)$.

3. $\int\limits_L \frac{ydS}{\sqrt{x}}$, де L – дуга напівкубічної параболи $y^2=\frac{4}{9}x^3$ від точки $A(3;2\sqrt{3})$ до $B(8;\frac{32\sqrt{2}}{3})$.

4. $\int\limits_L \sqrt{2y}dS$, де L – перша арка циклоїди $x=a(t-sint)$, $y=a(1-cost)$.

5. $\int\limits_L (x-y)dS$, де L – коло $x^2+y^2=ax$.

6. $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}dS$, де L – лінія, що задається рівнянням $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\,(x\geq 0)$ – половина лемніскати.

7. $\int\limits_L xydS$, де L – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який лежить в першому квадранті.

8. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y})dS$, де L – дуга астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, яка лежить між точками $(-1;0)$ з $(0;1)$.

9. $\int\limits_L \frac{ydS}{x+3z}$, де L – дуга лінії $x=t$, $y=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{t^3}{3}$ від $O(0;0;0)$ до $B(\sqrt{2};\sqrt{2};\frac{2\sqrt{2}}{3})$.

10. $\int\limits_L (x+y)dS$, де L – менша частина кола $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ y=x, \end{cases}$ яка лежить між точками $A(0;0;R)$ і $B(\frac{R}{2};\frac{R}{2};\frac{R}{\sqrt{2}})$.

Вказівка: записати рівняння частини кола в параметричному вигляді

$$x=t, y=t,\ z=\sqrt{R^2-2t^2},\ 0\leq t\leq\frac{R}{2}.$$

Завдання 1.2. Знайти масу матеріальної кривої.

1. Крива *l* задана рівнянням $y = lnx,$ де $1 \le x \le l,$ якщо лінійна густина її у кожній точці пропорційна квадрату абсцис (коефіцієнт пропорційності *k*).
2. Конічна гвинтова лінія задається рівняннями $x = ae^t \cos t,\quad y = ae^t \sin t,$ $z = ae^t$, а густина від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(a;0;a)$ в кожній її точці виражається формулою $\rho = ke^t$ (де $k > 0 -$ коефіцієнт пропорційності).
3. Крива *L* – чверть еліпса $x = \cos t, z = 2\sin t,$ розташованого в першому квадранті площини *XOZ*, якщо лінійна густина маси $\rho = z$.

Завдання 1.3. Обчислити довжину дуги кривої.

1. $x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 3t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$
2. $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le x \le 2,\ y \ge 0.$

Завдання 1.4.

1. Знайти координати центра мас першого витка гвинтової лінії $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t,$ вважаючи густину сталою.
2. Знайти координати центра ваги однорідної дуги кривої $y = chx$ $(0 \le x \le \ln 2)$.

Завдання 1.5. Обчислити площі частин циліндричних поверхонь, розташованих між площиною *Oxy* і вказаними поверхнями.

1. $x^2 + y^2 = R^2,\ z = R + \dfrac{x^2}{R}.$
2. $x^2 + y^2 = R^2,\ 2Rz = xy.$

§2. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ (ПО КООРДИНАТАХ)

Основні поняття та теореми

Нехай $\Gamma = \overset{\cap}{AB}$ – гладка зорієнтована крива на площині *XOY* довжини *L*. Через l позначаємо змінну довжину дуги, $0 \le l \le L$, що відраховується від початкової точки A. У точці $M(x(l);y(l))$ кривої Γ одиничний дотичний вектор $\bar{\tau} = \bar{\tau}(l)$ задається напрямними косинусами: $\bar{\tau} = (\cos\alpha;\cos\beta)$, де кути $\alpha = \alpha(l) = \overset{\wedge}{\tau_i}$, $\beta = \beta(l) = \overset{\wedge}{\tau_j}$.

Нехай на кривій $\tilde{A}$ задана неперервна функція $F = F(x;y)$.

<u>*Криволінійним інтегралом по абсцисі x*</u> від функції $F(x;y)$ вздовж кривої $\overset{\cap}{AB}$ називають

$$\int\limits_{\overset{\cap}{AB}} F(x;y)dx = \int\limits_{\overset{\cap}{AB}} F(x;y)\cdot\cos\alpha\cdot dl.$$

Криволінійним інтегралом по ординаті у від функції $F(x;y)$ вздовж кривої $\overset{\frown}{AB}$ називають

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)\cdot\cos\beta\cdot dl .$$

Інтеграли $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)dx$ і $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)dy$ називають, також, *криволінійними інтегралами другого роду від функції F по кривій* $\overset{\frown}{AB}$. Зауважимо, що праві частини рівностей, які їх визначають, є інтегралами першого роду. В застосуванні часто використовують інтеграли виду

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y)dx + Q(x;y)dy \equiv \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y)dx + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x;y)dy ,$$

розуміючи під лівою частиною формули суму інтегралів правої частини.

Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду.

1. Якщо крива Γ гладка, а функція $F = F(x;y)$ неперервна в точках цієї кривої, то існують криволінійні інтеграли $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)dx$ і $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)dy$.
2. Криволінійний інтеграл другого роду змінює знак при зміні орієнтації кривої, тобто $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y)dx$.
3. Нехай крива $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ задається неперервно диференційованими функціями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ a \le t \le b,\ \ A(x(a);y(a)),\ \ B(x(b),y(b))$. Якщо функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ неперервні в точках кривої Γ, то справедлива *формула обчислення криволінійного інтеграла:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b [P(x(t);y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t);y(t))\cdot y'(t)]dt$$

4. Формула обчислення криволінійного інтеграла другого роду у випадку явного задання контуру інтегрування.

   Нехай крива $\overset{\frown}{AB}$ є графіком функції $y = y(t),\ \ a \le x \le b,\ \ A(a;y(a)),$ $B(b,y(b))$ і існує похідна $y'(x)$ на відрізку $[a;b]$, тоді

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b [P(x;y(x)) + Q(x;y(x))\cdot y'(x)]dx$$

5. Фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду.

   Нехай на кривій Γ задано поле неперервного вектора

$$\overline{F} = (P;Q) = P(x;y)\cdot\overline{i} + Q(x;y)\cdot\overline{j} ,$$

де $P = P(x;y), Q = Q(x;y)$ – неперервні функції на Γ.

Будемо розглядати криву Γ як неперервну траєкторію руху матеріальної точки *M*, елементарне переміщення $d\bar{l}$ якої в координатному записі $d\bar{l} = (dx;dy) = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j}$. За допомогою одиничного дотичного вектора $\bar{\tau} = \bar{\tau}(l)$ та $dl = |d\bar{l}|$ – елемента довжини дуги Γ можемо записати: $d\bar{l} = \bar{\tau} \cdot dl = (\cos\alpha;\cos\beta) \cdot dl$. Тоді елемент роботи сили $\bar{F} = (P;Q)$ вздовж траєкторії Γ визначається за формулою: $da = \bar{F} \cdot d\bar{l} = (\bar{F} \cdot \bar{\tau})dl = P \cdot dx + Q \cdot dy$.

Отже, повна робота *A* сили $\bar{F}$ вздовж всього орієнтованого шляху Γ визначається за допомогою криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\bar{F} \cdot \bar{\tau})dl = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy.$$

Всі наведені вище записи криволінійного інтеграла другого роду є загальноприйнятими.

6. Поняття криволінійного інтеграла другого роду поширюється на <u>просторові криві.</u>

   Нехай крива $\overset{\frown}{AB}$ задана рівняннями: $x = x(t),\ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ a \le t \le b$, де функції $x(t), y(t), z(t)$ – неперервно диференційовані. Якщо функції $P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z)$ – неперервні на кривій $\overset{\frown}{AB}$, то існує криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$$

   і справджується *<u>формула для його обчислення:</u>*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] \cdot dt.$$

Зауваження. Криволінійний інтеграл другого роду володіє всіма властивостями криволінійного інтеграла першого роду, за виключенням однієї: при зміні напрямку обходу кривої інтеграл змінює знак.

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення криволінійного інтеграла другого роду по координаті *x* та *y*.
2. В якому випадку роботу сили по контуру називають циркуляцією?

3. Нехай область D площина XOY обмежена кусково гладкою замкненою лінією $Г$ (без самоперерізів). Довести, що площина S області обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{Г} xdy - ydx.$$

4. Показати, що коли крива $\overset{\frown}{AB}$ лежить у площині $x = const$, то $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x;y;z)dx = 0.$

5. Нехай $\overline{\tau} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ – одиничний дотичний вектор до гладкої кривої $\overset{\frown}{AB}$ в точці $M(x(l);y(l);z(l))$. Обґрунтуйте формулу

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma)dl.$$

6. Нехай плоска крива $\overset{\frown}{AB}$ є графіком неперервно диференційованої функції $x = x(y)$, $c \le y \le d$, на площині XOY, причому $A(x(c);c)$. Тоді,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{c}^{d} [P(x(y);y)\cdot x'(y) + Q(x(y);y)]\cdot dy.$$

7. Покажіть, що коли просторова крива $\overset{\frown}{AB}$ може бути задана формулами: $y = y(t),\ \ z = z(x)$, $a \le x \le b$, де $y(x)$ і $z(x)$ – неперервно диференційовані, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} [P(x,y(x),z(x)) + Q(x,y(x),z(x))\cdot y'(x) + R(x,y(x),z(x))\cdot z'(x)]\cdot dx.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. Обчислити криволінійний інтеграл

$\int\limits_{L}(x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$, що пробігається від точки A(–1;1) до точки B(1;1).

Розв'язання. Використовуємо формулу

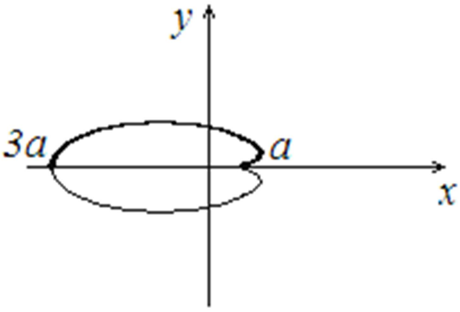
$$\int\limits_{L} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x;y(x)) + Q(x;y(x))\cdot y^{'}(x)]dx$$

Для $y(x) = x^2$, $dy = 2x\cdot dx$, $-1 \le x \le 1$, тому

$$I=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+\left(x^4-2x^3\right)2x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{3}-\frac{8}{5}=-\frac{14}{15}$$

Приклад 2.2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x+y)dx,$ де L – дуга кардіоїди $\begin{cases} x=2a\cos t-a\cos 2t, \\ y=2a\sin t-a\sin 2t, \quad t\in[0;\pi]. \end{cases}$



Розв'язання. За формулою

$$\int\limits_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy=$$

$$=\int_a^b[P(x(t);y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t);y(t))\cdot y'(t)]dt$$

дістанемо:

$$\int\limits_L (x+y)dx=\int_0^\pi(2a\cos t-a\cos 2t+2a\sin t-a\sin 2t)\cdot(-2a\sin t+2a\sin 2t)dt=$$

$$=2a^2\int_0^\pi(2\cos t-\cos 2t+2\sin t-\sin 2t)(\sin 2t-\sin t)dt=$$

$$=2a^2\int_0^\pi 2\cos t\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 4t+2\sin t\sin 2t-\sin^2 2t-\sin 2t+\cos 2t\sin t-2\sin^2 t+$$

$$+\sin 2t\sin t)dt=2a^2\int_0^\pi(\sin t+\sin 3t-\frac{1}{2}\sin 4t+\cos t-\cos 3t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t-\sin 2t+$$

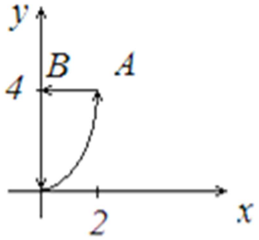
$$+\frac{1}{2}\sin 3t-\frac{1}{2}\sin t-1+\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos 3t)dt=2a^2\int_0^\pi(\frac{1}{2}\sin t+\frac{3}{2}\sin 3t-\frac{1}{2}\sin 4t+$$

$$+\frac{3}{2}\cos t-\frac{3}{2}\cos 3t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t-\sin 2t+\cos 2t)dt=2a^2(-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos 3t+$$

$$+\frac{1}{8}\cos 4t+\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}\sin 3t-\frac{3}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^\pi=2a^2(-\frac{1}{2}(-1-1)-$$

$$-\frac{1}{2}(-1-1)+(-\frac{3}{2}\pi))=2a^2(2-\frac{3}{2}\pi)=a^2(4-3\pi).$$

Приклад 2.3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydx-y^2dy,$ де L – замкнений контур, утворений кривими $y=x^2$, $y=4,\ x=0$.



Розв'язання. За властивістю криволінійного інтеграла другого роду

$$\int\limits_{L} = \int\limits_{\overset{\frown}{OA}} + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} + \int\limits_{\overset{\frown}{BO}} .$$

Тоді маємо:

1) $\overset{\smile}{OA}: \ y = x^2, \ dy = 2x \cdot dx$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} xydx - y^2dy = \int\limits_0^2 x^3dx - x^4 \cdot 2xdx = \int\limits_0^2 (x^3 - 2x^5)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{3})\Big|_0^2 = 4 - \frac{64}{3} = -\frac{52}{3}.$$

2) $\overset{\smile}{AB}: y = 4, \ dy = 0dx$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xydx - y^2dy = \int\limits_2^0 4xdx = 2x^2 \Big|_2^0 = -8.$$

3) $\overset{\smile}{BO}: x = 0, \ dx = 0$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BO}} xydx - y^2dy = -\int\limits_4^0 y^2dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{64}{3}.$$

Отже, $\int\limits_{L} xydx - y^2dy = -\frac{52}{3} - 8 + \frac{64}{3} = -4.$

Приклад 2.4. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{L} xydx + yzdy + xzdz,$ де $L-$ чверть кола $x = \cos t, y = \sin t, z = 1,$ обхід якого відбувається в напрямі зростання параметра t.

Розв'язання. За формулою $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz =$

$$= \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] \cdot dt$$

і враховуючи, що $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, дістанемо:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t \cdot (-\cos t)dt + \sin t \cdot \cos t dt + x \cdot 1 \cdot 0 \cdot dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}\sin 2t - \cos^2 t \sin t)dt = -\frac{1}{4}\cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 td(\cos t) =$$

$$=-\frac{1}{4}(-1-1)+\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 2.5. Поле створене силою $\overline{F}(x;y)=(x-xy+y)\bar{i}+(x^2-y^2)\bar{j}.$ Обчислити роботу сили по переміщенню матеріальної точки по кривій від точки $A(1;\ 1)$ до $B(4;2)$.

Розв'язання. Згідно фізичного змісту криволінійного інтеграла другого роду робота силового поля по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої L визначається формулою: $A=\int\limits_L \overline{F}\cdot d\bar{l}=\int\limits_L Pdx+Qdy$, $P=x-xy+y$, $Q=x^2-y^2$.

Знайдемо рівняння прямої, вздовж якої переміщується матеріальна точка

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-1}{2-1}\Rightarrow x-1=3y-3,\ x-3y+2=0\Rightarrow y=\frac{x+2}{3}, dy=\frac{1}{3}dx.$$

Отже, $A=\int\limits_1^4(x-x\cdot\frac{x+2}{3}+\frac{x+2}{3})dx+(x^2-\frac{(x+2)^2}{9})\cdot\frac{1}{3}dx=$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_1^4(3x-x^2-2x+x+2+x^2-\frac{(x+2)^2}{9})dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^4(2x+2-\frac{(x+2)^2}{9})dx=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+2x-\frac{(x+2)^3}{27})\Big|_1^4=\frac{1}{3}(15+8-2-8+1)=\frac{14}{3}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 2.1. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду.

1. $\int\limits_L xdy$, де L – контур трикутника, утвореного вісями координат і прямою $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, в додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки).
2. $\int\limits_L (x^2+y^2)dy$, де L – контур чотирикутника з вершинами (вказаними в порядку обходу) в точках $A(0;0), B(2;0), C(4;4), D(0;4)$.
3. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x\cos ydx+y\sin xdy$ вздовж відрізка AB, де $A(0,0), B=(\pi;2\pi)$.
4. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xdx+(y-x)dy$ вздовж лінії 1) $y=x;$ 2) $y=x^2$; 3) $y^2=x$; 4) $y=x^3$.

5. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy$ вздовж лінії 1) $y = x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^3$; 4) $y^2 = x$.

6. $\int\limits_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2}$, де L – чверть кола $x = a\cos t, y = a\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

7. $\int\limits_L ydx - xdy$, де L – еліпс $x = a\cos t, y = b\sin t$, обхід якого відбувається в додатному напрямі.

8. $\int\limits_L (2a - y)dx - (a - y)dy$, де L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

9. $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$, де L – чверть астроїди $x = R\cos^3 t, y = R\sin^3 t$ від точки $(R;0)$ до точки $(0;R)$.

10. $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ де L – відрізок прямої від точки $(1;1;1)$ до точки $(2;3;4)$.

11. $\int\limits_L yzdx + zxdy + xydz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = R\cos t, y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z = 0$ до точки її перетину з площиною $z = a$.

12. $\int\limits_L xydx + x^2zdy + xyzdz$, де L: $x = e^t, y = e^{-t}, z = t^2, 0 \le t \le 1$.

Завдання 2.2. Обчислити роботу силового поля $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої L.

1. $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$, L – верхня половина еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ з точки $(a;0)$ в точку $(-a;0)$.

2. $\overline{F} = 2xy\overline{i} - x^2\overline{j}$, L – відрізок прямої, що з’єднує точки $O(0;0)$, $A(2;1)$.

3. $\overline{F} = \cos ydx - \sin xdy$, L – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(2;-2)$ і $B(-2;2)$.

4. $\overline{F} = \frac{x}{y}\overline{i} - \frac{1}{y-1}\overline{j}$, L – циклоїда $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$.

§3. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ПРАВИЛА ЙОГО ОБЧИСЛЕННЯ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Основні поняття та теореми

Нехай функція $f(x;y)$ задана в області D, межа ∂D якої є замкненою кусково-гладкою кривою $Г = \partial D$. *Діаметром* області називається найбільша із відстаней між двома точками межі цієї області: $d_0 = diam\ D$. *Розбиттям* $\{D_k\}$ області D називається така сукупність квадрованих областей D_k, що їх об'єднання складає область D і ніякі дві різні області D_k не мають спільних внутрішніх точок. Найбільший із діаметрів d_k областей D_k називається *діаметром розбиття* $\{D_k\}$ і позначається через $d = \max\limits_k d_k$. У кожній елементарній області D_k візьмемо довільну точку $M_k(x_k;y_k)$ і помножимо значення функції $f(x_k;y_k)$ M_k у точці на площу $\Delta S_k = пл.\ D_k$.

Інтегральною сумою для функції $f(x;y)$ *в області* D називається сума виду

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k)\cdot\Delta S_k = f(x_1;y_1)\cdot\Delta S_1 + f(x_2;y_2)\cdot\Delta S_k + ... + f(x_k;y_k)\cdot\Delta S_k .$$

Якщо діаметр d розбиття $\{D_k\}$ прямує до нуля: $d \to 0$, то області D_k стягуються в точки M_k.

Означення. Границя інтегральних сум при $d \to 0$, називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x;y)$ *в області* D і позначається

$$\iint\limits_D f(x;y)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x;y)\cdot\Delta S_k ,$$

причому, ця границя не повинна залежати ні від способу розбиття D на елементарні області D_k, ні від вибору точок M_k в кожній з них. У формулі $\iint\limits_D f(x;y)dS$ змінні x, y прийнято називати змінними інтегрування; функцію $f(x;y)$ – підінтегральною; $f(x;y)dS$ – підінтегральним виразом; D – областю інтегрування.

Зауваження. Досить корисним є так зване *прямокутне розбиття* $\{D_{ij}\}$ області D, яке утворюють за допомогою прямих, що паралельні осям координат OX і OY. В цьому випадку області D_{ij} (за винятком тих, що примикають до межі dD) будуть прямокутниками, довжини сторін яких дорівнюють Δx_i та Δy_j, а значить, $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

Щоб підкреслити, що розбиття є прямокутним, в позначенні інтеграла пишуть $dS = dxdy$, тоді:

$$\iint\limits_D f(x;y)dS = \iint\limits_D f(x;y)dxdy = \lim_{d\to 0} \sum_{i,j}^{n} f(x_i;y_j)\cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j ,$$

де точка $M_{ij}(x_i;y_j) \in D_{ij}$, а сума виконується по всіх i та j.

Основні властивості подвійного інтеграла.

1. $\iint\limits_D dxdy = пл.D = S$.
2. <u>*Достатня умова інтегрованості функції.*</u> Функція $f(x;y)$, що неперервна в області D, за виключенням скінченних розривів(стрибків) на скінченному числі гладких кривих, інтегрована на D.
3. <u>*Лінійність.*</u> Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровані на D, то для довільних сталих α та β функція $\alpha\cdot f(x;y)+\beta\cdot g(x;y)$ також інтегрована на D, причому
$$\iint\limits_D [\alpha\cdot f(x;y)+\beta\cdot g(x;y)]dS = \alpha\cdot\iint\limits_D f(x;y)dS + \beta\cdot\iint\limits_D g(x;y)dS .$$
4. <u>*Адитивність.*</u> Нехай області D_1 і D_2 є розбиттям області D, $D = D_1 + D_2$. Якщо функція $f(x;y)$ інтегрована на D, то вона інтегрована на кожній з областей D_1 та D_2, причому
$$\iint\limits_D f(x;y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dS .$$
5. <u>*Монотонність.*</u> Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровані на D і всюди в цій області $f(x;y) \le g(x;y)$, то
$$\iint\limits_D f(x;y)dS \le \iint\limits_D g(x;y)dS .$$
6. <u>*Оцінка подвійного інтеграла.*</u> Якщо в області D площі $S = пл.D$ для інтегрованої функції $f(x;y)$ виконуються нерівності: $m \le f(x;y) \le M$, де m і M сталі величини, то
$$m.S \le \iint\limits_D f(x;y)dS \le M\cdot S .$$
7. <u>*Оцінка абсолютної величини інтеграла.*</u> Якщо функція $f(x;y)$ інтегрована на D, то і функція $|f(x;y)|$ інтегрована на D, причому
$$\left|\iint\limits_D f(x;y)dS\right| \le \iint\limits_D |f(x;y)|\,dS .$$
8. <u>*Фізичний зміст подвійного інтеграла.*</u> Нехай на площині XOY розташовано неоднорідну матеріальну пластину форми D, що має густину $\rho(x;y)$ як неперервну функцію від $(x;y)$ в області D. Тоді маса m матеріальної пластини обчислюється за формулою
$$m = \iint\limits_D \rho(x;y)dS .$$

9. *<u>Геометричний зміст подвійного інтеграла.</u>* Циліндроїдом T називають тривимірне тіло, що задається так

$$T=\{(x;y;z):0\le z\le f(x;y),\ \text{де}\ (x;y)\in D\}.$$

Тобто, тіло T обмежене зверху поверхнею $z=f(x;y)$, знизу – площиною $z=0$, збоку – циліндричною поверхнею, напрямною якої слугує гладка межа $L=\partial D$, а твірними – прямі паралельні осі OZ.

10. <u>Об'єм V циліндроїда</u> T обчислюється за формулою

$$V=\iint\limits_D f(x;y)dS.$$

Правила обчислення подвійних інтегралів. Розрізняють два основні види області інтегрування.

I. *<u>Область інтегрування D правильна в напрямі осі OY.</u>*

В цьому випадку область D можна задати так:

$$D=\{(x;y):\phi_1(x)\le y\le \phi_2(x), a\le x\le b\}.$$

Тобто D – це область, що обмежена зліва і справа прямими $x=a$ і $x=b$, а знизу і зверху – неперервними кривими $y=\phi_1(x)$ і $y=\phi_2(x)$. Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)dy,$$

причому спочатку обчислюють внутрішній інтеграл $I(x)=\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)dy$, в якому змінну x вважають сталою(фіксованою).

II. *<u>Область інтегрування D правильна в напрямі осі OX.</u>*

$$D=\{(x;y):\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y), c\le y\le d\},$$

де $x=\psi_1(y)$ і $x=\psi_2(y)$ неперервні криві.

Тоді

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx,$$

причому спочатку обчислюють внутрішній інтеграл $I(y)=\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx$, в якому змінну y вважають сталою (незмінною).

Праві частини формул обчислення подвійних інтегралів називають *<u>повторними інтегралами.</u>*

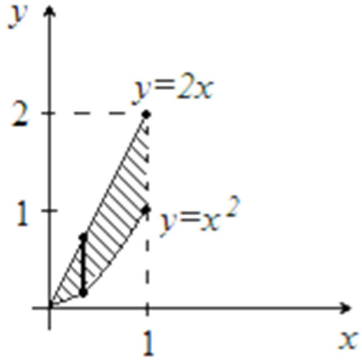
Зауваження. У загальному випадку область інтегрування розбивають на частини, які правильні в напрямі однієї з осей координат. Обчислення інтеграла в кожній правильній частині проводять за одним із двох наведених правил, а початковий інтеграл знаходять за властивістю адитивності.

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення інтегральної суми подвійного інтеграла для функції $f(x;y)$ у області D.
2. Яка функція $f(x;y)$ називається інтегрованою на області D?
3. Нехай область D правильна в напрямі вісі OY. Дайте:
    а) геометричне тлумачення формули зведення обчислення подвійного інтеграла до повторного:
    $$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)dy;$$
    б) фізичне тлумачення формули зведення обчислення подвійного інтеграла до повторного.
4. Покажіть, що для невід'ємної інтегрованої функції $f(x;y) \geq 0$ в області D справедлива нерівність: $\iint_D f(x;y)dxdy \geq 0$.
5. Доведіть <u>*теорему про середнє значення:*</u> якщо функція $f(x;y)$ неперервна в області D, то в цій області знайдеться така точка $M_0(x_0;y_0) \in D$, що
    $$\iint_D f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0) \cdot S,$$
    де S – площа області D.

Приклади розв’язування задач

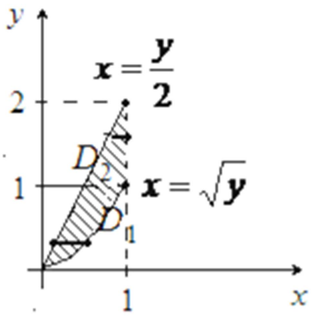
Приклад 3.1. Звести подвійний інтеграл $\iint_D f(x;y)dxdy$ до повторного двома способами, якщо D – область, обмежена кривими $x=1$, $y=x^2$, $y=2x$ $(x \leq 1)$.



Розв’язання. **І спосіб.** Зобразимо область D і застосуємо формулу:
$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy.$$
Ця формула визначає перехід до повторного інтеграла, якщо область є правильною в напрямі осі OY

Для кожного значення x з відрізку [0;1] невідома y змінюється від x^2 (ордината входу) до $2x$ (ордината виходу), тобто область D можна подати у вигляді: $D = \{(x;y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x\}$.

Тоді одержимо: $\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2x} f(x;y)dy$.



II спосіб. Застосуємо формулу

$$\iint\limits_{G} f(x;y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx,$$

яка визначає обчислення подвійного інтеграла у випадку, якщо область D є правильною в напрямі осі OX.

У нашому випадку в напрямі вісі OX верхня межа $x = x_2(y)$ області D задається двома різними аналітичними формулами, тому її потрібно розбити на дві підобласті D_1 і D_2.

В області G_1 невідома y змінюється від 0 до 1, а для кожного з $y \in [0;1]$ невідома x змінюється від $\frac{y}{2}$ (абсциса входу, значення якої належить прямій $y = 2x$) до $\sqrt{y}$ (абсциса виходу, значення якої лежить на параболі $y = x^2$).

Отже, $\iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$.

В області G_2 невідома y змінюється від 1 до 2, а для кожного y з $[1;2]$ невідома x змінюється від $\frac{y}{2}$ до 1. Отже, $\iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy = \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{1} f(x;y)dx$.

За властивістю подвійного інтеграла

$$\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy,$$

тому остаточно дістанемо

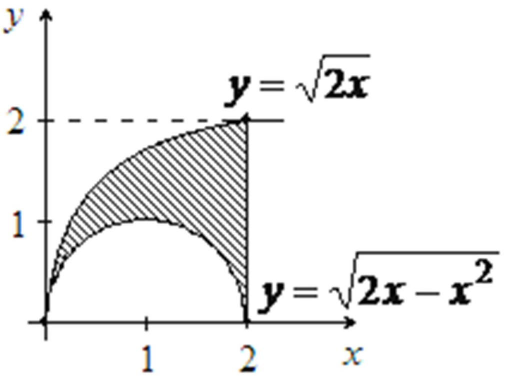
$$\iint\limits_{D} f(x;y)dS = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{1} f(x;y)dx.$$

Приклад 3.2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$I = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x;y)dy.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу:

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx.$$



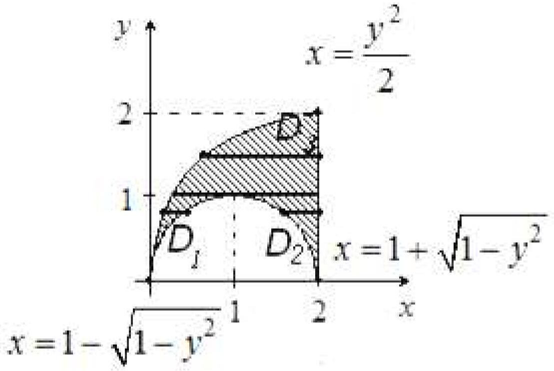
З умови бачимо, що область D обмежена кривими $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{y}=\sqrt{2\mathrm{x}}$ і відрізком прямої $x=2$, тобто

$$D=\{(x;y)\,|\,0\le x\le 2, \sqrt{2x-2x^2}\le y\le\sqrt{2x}\}.$$

Зобразимо область D. Крива $y=\sqrt{2x-x^2}$ є верхньою частиною кола

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Розв’язавши це рівняння відносно x, одержимо два розв'язки: $x=1\pm\sqrt{1-y^2}$. З рівняння кривої $y=\sqrt{2x}$ визначимо змінну $x=\dfrac{y^2}{2}$.



Відносно даного повторного інтеграла область D є правильною в напрямі вісі OY. Однак в напрямі вісі OX область D є неправильна, тому її треба розбити на три частини: D_1, D_2 і D_3.

В областях D_1 і D_2 невідома y змінюється від 0 до 1, а для кожного y з [0; 1] невідома x змінюється в області D_1 від $\dfrac{y^2}{2}$ (значення x на кривій $\mathrm{y}=\sqrt{2\mathrm{x}}$) до $1-\sqrt{1-y^2}$ (значення x на колі), а в області D_2 – від $1+\sqrt{1-y^2}$ до 2.

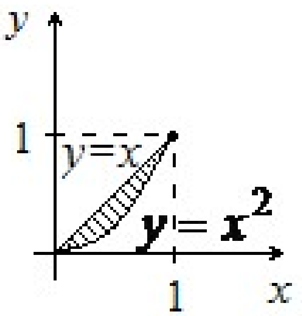
В області D_3 невідома y змінюється від 1 до 2, а для кожного y з $[1;2]$ невідома x змінюється від $\dfrac{y^2}{2}$ до 2.

Отже, при зміні порядку інтегрування, даний повторний інтеграл дорівнює, сумі трьох повторних інтегралів по кожній правильній області D_1, D_2, D_3:

$$I=\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx+\int_0^1 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x;y)dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x;y)dx.$$

Приклад 3.3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y^2)dxdy$ по області D, що обмежена кривими $y=x$ і $y=x^2$.

Розв’язання. Зобразимо область D. Ця область є правильною як в напрямі OX, так і в напрямі OY.



Зведемо подвійний інтеграл до повторного, коли область *D* є правильною в напрямі *OY*.

$$D_{OY} = \{(x;y) \,|\, 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}.$$

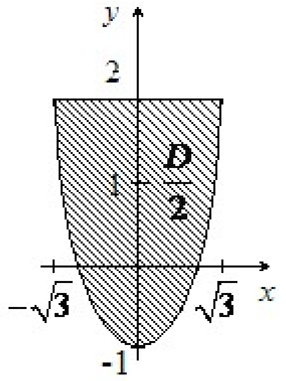
Обчислення почнемо з внутрішнього інтеграла, вважаючи змінною інтегрування *y,* а сталою – змінну *x*.

При цьому користуємось формулою Ньютона-Лейбніца.

$$\iint_D (x+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y^2)dy = \int_0^1 dx(xy+\frac{y^3}{3})\Big|_{x^2}^{x} = \int_0^1 (x^2+\frac{1}{2}x^3-x^3-\frac{1}{3}x^6)dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^6)dx = (\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{21}x^7)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{21} = \frac{5}{42}$$

Приклад 3.4. Знайти площу плоскої області, обмеженої прямою $y = 2$ і параболою $y = x^2$.



Розв'язання. Застосуємо формулу: $S = \iint_D dxdy$.

Зобразимо область *D*, яка буде симетричною відносно вісі *OY* і є правильною відносно кожної вісі координат. Оберемо напрям інтегрування відносно *OY.*

Достатньо обчислити площу правої половини області і результат подвоїти.

Щоб визначити як змінюється *x*, розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Отже, для правої частини області, одержимо:

$$D_{OY} = \{(x;y) \,|\, 0 \le x \le \sqrt{3}, x^2 - 1 \le y \le 2\}.$$

В результаті:

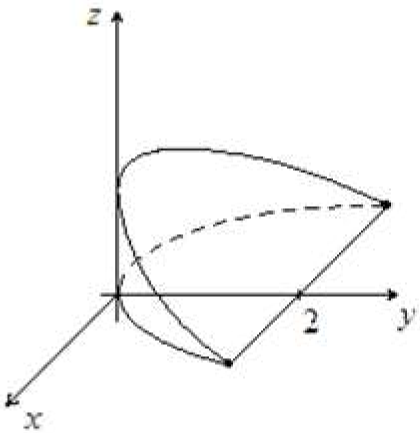
$$\frac{S}{2} = \iint_D dxdy = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2-1}^{2} dy = \int_0^{\sqrt{3}} (2-x^2+1)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (3-x^2)dx = (3x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 3\sqrt{3} - \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

звідки $S = 4\sqrt{3}$ (кв. од.).

Приклад 3.5. Обчислити об'єм циліндричного тіла обмеженого площинами $z = 0, y + z = 2$ і циліндром $y = x^2$.

Розв'язання. Застосуємо формулу: об'єм циліндричного тіла обмеженого зверху поверхнею $z = f(x;y)$, а знизу – областю *D*, обчислюється так:

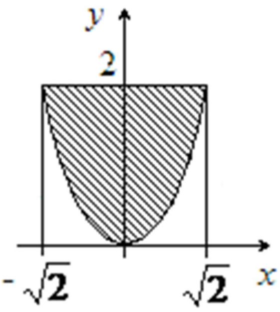


$$V=\iint\limits_D f(x;y)dxdy.$$

Дане тіло обмежене зверху площиною $y+z=2$, звідки $z=2-y$, тоді

$$V=\iint\limits_D (2-y)dxdy.$$

Область D – це параболічний сегмент в площині XOY, що обмежений прямою $y=2$ і параболою $y=x^2$.



Область D симетрична відносно вісі OY, тому і тіло симетричне відносно площини YOZ. Отже,

$$\frac{\mathrm{V}}{2}=\int\limits_0^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{x^2}^{2}\left(2-y\right)dy=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(4-2-2x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2-2x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=$$

$$=\left(2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{16\sqrt{2}}{15}\ .$$

Звідки $\mathrm{V}=\dfrac{32\sqrt{2}}{15}$ куб. од.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 3. 1. Обчислити повторні інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 (x-y)dy.$
2. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 (x^2+2y)dx.$
3. $\int\limits_2^3 dx\int\limits_1^2 \sqrt{x-y}dy.$
4. $\int\limits_2^4 dy\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+y^2}dx.$
5. $\int\limits_3^4 dx\int\limits_1^2 \dfrac{dy}{(x+y)^2}.$
6. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \dfrac{ydx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$
7. $\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(x+y)dy.$
8. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 x^2\cdot y\cdot e^{xy}dx.$
9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\int\limits_1^5 \dfrac{\rho d\rho}{\sqrt{24+\rho^2}}.$

10. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \sin^2 \varphi d\rho$.

12. $\int\limits_0^{2\pi} dy \int\limits_0^{2+\sin y} \frac{x}{2} dx.$

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} (3x+2y)dy.$

Завдання 3.2. Обчислити подвійні інтеграли, якщо область D – прямокутник.

1. $\iint\limits_D (x+y)dxdy;\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2.$
2. $\iint\limits_D xy(x-y)dxdy;\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b.$
3. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+2y)^2};\ 2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 3.$
4. $\iint\limits_D y\cos^2 xdxdy;\ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le a.$

Завдання 3.3. Для зазначених областей D записати подвійні інтеграли від функції *f(x;y)* у вигляді повторних, взятих у різних напрямах.

1. D – трикутник зі сторонами $x=0,\ y=0,\ x+y=3$.
2. D – трикутник з вершинами $(2;1),\ (5;2),\ (3;7)$.
3. D – паралелограм зі сторонами $y=2+x,\ y=x+4,\ y=-2x+1,\ y=-2x+6.$
4. D – область, обмежена кривими $y=3x^2, y=6-3x.$
5. D – фігура, що міститься в першому квадранті і обмежена лініями $y=x,\ x^2+y^2=2,\ y=0.$

Завдання 3.4. Змінити порядок інтегрування.

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x;y)dx.$
2. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x;y)dy.$
3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x;y)dx.$
4. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x;y)dy.$
5. $\int\limits_{-6}^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x;y)dx.$

6. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x;y)dy.$

7. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx + \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx.$

8. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x;y)dy.$

9. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x;y)dx.$

10. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x;y)dx.$

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2+2}^{4-x} f(x;y)dy.$

12. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x;y)dy. + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x;y)dy.$

13. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x;y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)dx.$

14. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^1 f(x;y)dy. + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x;y)dy.$

Завдання 3.5. Обчислити подвійні інтеграли.

1. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де $D: x=0,\ y=0,\ x+y=2.$

2. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, де $D: y=0,\ y=x,\ x+y=2.$

3. $\iint\limits_D xydxdy$, де $D: y^2=2x,\ y^2=x,\ x=2.$

4. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, де $D: x=y^2,\ x=0,\ y=1.$

5. $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}dxdy$, де D – трапеція з вершинами $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(10;2)$, $E(2;2)$.

6. $\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy$, де D: $y = x^2$, $y = -x^2 + 1$.

7. $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, де D: $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

8. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, де $D: x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

9. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, де D – паралелограм зі сторонами $y = x, y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$.

10. $\iint\limits_D (\cos 2x + \sin y)dxdy$, де $D: x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y - \pi = 0$.

§4. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основні поняття і теореми

Означення потрійного інтеграла аналогічне означенню подвійного інтеграла. Нехай функція $f(x;y)$ означена в обмеженій просторовій області G, межа ∂G якої задана скінченним числом гладких поверхонь. Розглянемо розбиття $\{G_k\}$ області $G \subset R^3$ з діаметрами $d_k = diam G_k$ і з об'ємами $\Delta V_k = об.G_k$. Найбільший із діаметрів d_k називають *діаметром розбиття* $\{G_k\}$ і позначають через $d = \max\limits_k d_k$. В кожній елементарній області G_k візьмемо довільну точку $M(x_k;y_k;z_k)$ і помножимо значення функції $f(x_k;y_k;z_k)$ в точці M_k на об'єм ΔV_k цієї області. *Тривимірною інтегральною сумою* функції $f(x;y;z)$ в області G, що відповідає розбиттю $\{G_k\}$ з відзначеними точками M_k, називають суму виду

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k;z_k) \cdot \Delta V_k .$$

Границя інтегральних сум при $d \to 0$ називається *потрійним інтегралом функції f(x;y;z) по області G* і позначається наступним чином:

$$\iiint\limits_G f(x;y;z)dV = \iiint\limits_G f(x;y;z)dxdydz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k;z_k) \cdot \Delta V_k .$$

Зауваження. Границя в правій частині формули не повинна залежати від способу розбиття *G* на елементарні області G_k та від вибору точок M_k в цих областях.

В цьому випадку функція $f(x;y;z)$ називається інтегрованою в області *G*; змінні x, y, z – змінними інтегрування; $f(x;y;z)$ – підінтегральною функцією; dV (або $dxdydz$) – елементом об'єму (в декартових координатах); *G* – областю інтегрування.

Властивості потрійного інтеграла.

1. Основні властивості потрійних інтегралів аналогічні властивостям подвійних інтегралів.
2. *Необхідна ознака.* Якщо функція $f(x;y;z)$ інтегрована на *G*, то вона обмежена на *G*.
3. *Достатня ознака.* Якщо функція $f(x;y;z)$ неперервна в області $G \subset R^3$ з кусково-гладкою межею ∂G, то $f(x;y;z)$ інтегрована на *G*.
4. *Фізичний зміст потрійного інтеграла.* Потрійний інтеграл по області *G* від густини *ρ(x;y;z)* матеріального тіла *G* дорівнює масі *m* цього тіла, тобто
$$m = \iiint\limits_G \rho(x;y;z)dxdydz.$$
5. *Геометричний зміст потрійного інтеграла.* Потрійний інтеграл від одиничної функції по області *G* дорівнює об'єму *V* цієї області, тобто
$$V = \iiint\limits_G dxdydz.$$

Обчислення потрійних інтегралів в декартових координатах.

Нехай *область інтегрування G правильна вздовж вісі OZ.* Тоді:

1) вона проектується на площину *XOY* у плоску область D_{xy};

2) область *G* в R^3 обмежена знизу і зверху відповідно кусково гладкими поверхнями $z = \phi_1(x;y)$ і $z = \phi_2(x;y)$ при $(x;y) \in D_{xy}$.

Тобто
$$G = \{M(x;y;z) : \phi_1(x;y) \le z \le \phi_2(x;y),\ (x;y) \in D_{xy}\}, -$$
при фіксованих значеннях $(x;y) \in D_{xy}$ відповідні аплікати *z* точок області *G* змінюються на відрізку $[z_1(x;y); z_2(x;y)]$ вісі *OZ*.

Для такої області потрійний *інтеграл обчислюється за формулою:*
$$\iiint\limits_G f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\phi_1(x;y)}^{\phi_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Інтеграл в правій частині цієї рівності називається *повторним інтегралом*; інтеграл $\int\limits_{\phi_1(x;y)}^{\phi_2(x;y)} f(x;y;z)dz = F(x;y)$ називається внутрішнім інтегралом, де

z – змінна інтегрування, а x і y вважаються фіксованими. Результатом обчислення внутрішнього інтеграла буде деяка функція $F(x;y)$ двох змінних x і y. Таким чином, обчислення потрійного інтеграла за допомогою повторного зводять до обчислення подвійного:

$$\iiint\limits_G f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \{ \int\limits_{\phi_1(x;y)}^{\phi_2(x;y)} f(x;y;z)dz\}dxdy.$$

Якщо плоска область D_{xy} правильна вздовж вісі OY і обмежена кривими $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$, $a \le x \le b$, то переходячи від подвійного інтеграла $\iint\limits_{D_{xy}} F(x;y)dxdy$ до повторного, дістаємо формулу:

$$\iiint\limits_G f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\phi_1(x;y)}^{\phi_2(x;y)} f(x;y;z)dz.$$

Якщо область інтегрування - паралелепіпед:

$$G = \{(x;y;z) : a \le x \le b, c \le y \le d, n \le z \le m\},$$

то $\iiint\limits_G f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_n^m f(x;y;z)dz$.

У випадках правильності області G у напрямі вісі OX або OY обчислення потрійного інтеграла виконують зведенням до повторного по аналогії з розглянутим вище випадком.

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте властивості адитивності, лінійності і монотонності для інтегрованих функцій у просторовій області G.
2. Дайте означення області G правильної вздовж вісі OZ.
3. Нехай область G правильна у напрямі вісі OX:
   $$G = \{(x;y;z) : \psi_1(y;z) \le x \le \psi_2(y;z), x_1(y) \le z \le x_2(y), c \le y \le d \}.$$
4. Покажіть, що тоді
   $$\iiint\limits_G f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int\limits_{\psi_1(x;y)}^{\psi_2(x;y)} f(x;y;z)dx.$$
5. Запишіть формулу переходу від потрійного інтеграла до трикратного у випадку, коли область інтегрування G правильна вздовж вісі OY.
6. У просторовому тілі, яке займає в R^3 область G, розподілено заряд густиною $q = q(x;y;z)$. Запишіть формулу для обчислення повного заряду Q, що зосереджено в матеріальному тілі G.
7. Поясніть фізичний зміст властивостей адитивності та лінійності потрійного інтеграла.

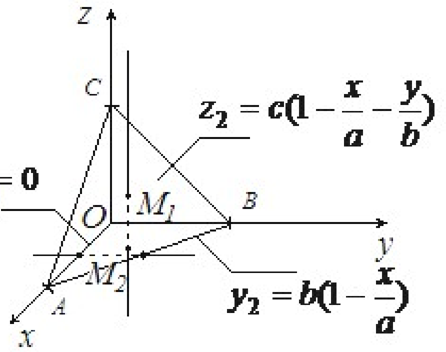
8. Поясніть фізичний та геометричний зміст формули зведення обчислення потрійного до подвійного через повторний інтеграл.

Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Розставити межі інтегрування, якщо інтегрувати в послідовності: **а)** x, y, z; **б)** y, z, x; **в)** z, x, y.

$$\iiint_G f(x;y;z)dxdydz,$$

область G обмежена площинами $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0 (a>0, b>0, c>0)$.



Розв'язання: Зобразимо область G – це піраміда.

а) Спроектуємо піраміду на площину XOY – це ΔAOB, де $z=0$.

Тоді для області D на площині XOY невідома x змінюється від $x_1=0$ до $x_2=a$. Якщо через довільну точку $x\in[0;a]$ провести пряму паралельно вісі OY, то ця пряма перетне межу області D в двох точках, які належать сторонам ΔAOB з рівняннями: $OA: y=0$ і $AB: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, звідки $y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$.

Отже, невідома y змінюється від $y_1=0$ до $y_2=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$. Візьмемо в області D довільну внутрішню точку M_1 і проведемо через неї пряму паралельно вісі OZ. Ця пряма перетне піраміду в двох точках, які належать поверхням з рівняннями $z_1=0$ і $z_2=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$.

Отже для області G межі інтегрування визначаються нерівностями:

$$\begin{cases} 0\le x\le a, \\ 0\le y\le b\left(1-\frac{x}{a}\right), \\ 0\le z\le c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Тому потрійний інтеграл зводиться до повторного:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}f(x,y,z)dz.$$

б) Якщо спроектувати піраміду на площину YOZ ($x=0$) і провести аналогічне міркування для ΔBOC, то межі інтегрування для області G визначаються нерівностями: $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c(1-\frac{y}{b})$, $0 \le x \le a(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c})$.

Отже, $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^b dy \int\limits_0^{c(1-\frac{y}{b})} dz \int\limits_0^{a(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c})} f(x,y,z)dx$.

в) Спроектуємо піраміду на площину *XOZ* (*y=0)*, одержимо ΔAOC. Міркуючи аналогічно випадку а) дістанемо, що $0 \le x \le a$, $0 \le z \le c(1-\frac{x}{a})$, $0 \le y \le b(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c})$. Тому $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{c(1-\frac{x}{a})} dz \int\limits_0^{b(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c})} f(x,y,z)dy$.

Приклад 4.2. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyzdz$.

Розв'язання. Обчислення починаємо з внутрішнього інтеграла по змінній *z*, при цьому x і y вважаємо сталими для внутрішнього інтеграла. Згідно з властивості визначеного інтеграла "сталі" x і y можна винести за знак внутрішнього інтеграла(під знак середнього інтеграла), тоді дістанемо:

$$I = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x xydy \int\limits_0^y zdz.$$

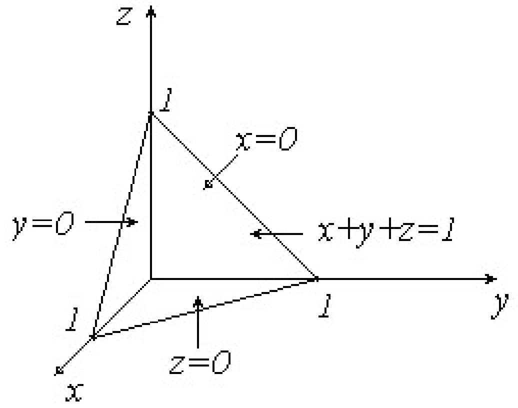
Знайдемо первісну для $\int\limits_0^y zdz$ і запишемо її під знаком середнього інтеграла. Застосовуємо для цієї первісної формулу Ньютона – Лейбніца, звідки перейдемо до знаходження, первісної для середнього інтеграла по змінній *y*. Змінну *x,* як "сталу" винесемо одночасно під знак зовнішнього інтеграла.

$$I = \int\limits_0^a xdx \int\limits_0^x y \cdot (\frac{z^2}{2}\Big|_0^y)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^a xdx \int\limits_0^x y^3 dy$$

Аналогічно знаходимо первісну і переходимо до зовнішнього інтеграла:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^a x \cdot (\frac{y^4}{4}\Big|_0^x)dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^a x^5 dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^6}{6}\Big|_0^a = \frac{a^6}{48}.$$

Приклад 4.3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_G \frac{1}{(1+x+y+z)^5} dxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x+y+z=1$, $x=0, y=0$, $z=0$.



Розв'язання. Зобразимо область обмежену координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і площиною $x+y+z=1$, яка відтинає на вісях координат відрізки довжиною 1.

Обчислимо даний інтеграл за формулою переходу до повторного інтеграла. Для цього визначимо межі інтегрування за прикладом 1.

$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1-x,\quad 0\le z\le 1-x-y.$$

Отже, $I=\iiint\limits_G\frac{1}{(1+x+y+z)^5}dxdydz=\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^5}dz$.

Обчислення повторного інтеграла виконуємо з внутрішнього інтеграла по змінній z, вважаючи x і y "сталими".

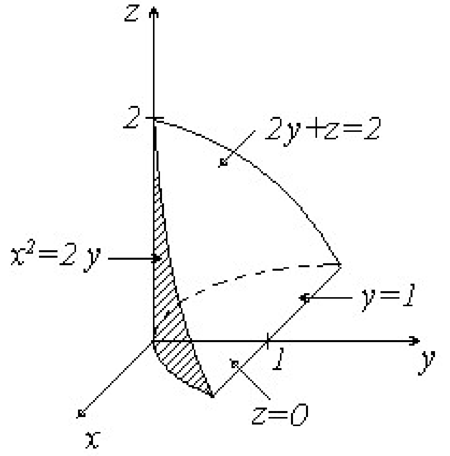
$$I=-\frac{1}{4}\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y+z)^4}\Big|_0^{1-x-y}\right)dy=-\frac{1}{4}\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{(1+x+y)^4}\right)dy=$$

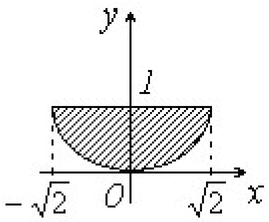
$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{16}y+\frac{1}{3\cdot(1+x+y)^3}\right)\Big|_0^{1-x}=-\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{16}(1-x)+\frac{1}{24}-\frac{1}{3(1+x)^3}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{16}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{24}x\Big|_0^1+\frac{1}{6(1+x)^2}\Big|_0^1\right)=-\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{32}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}-\frac{1}{6}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{3-8}{96}=\frac{5}{384}.$$

Приклад 4.4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G ydxdydz$ по області G, обмеженій циліндричною поверхнею $x^2=2y$ і площинами $2y+z=2$, $z=0$.





Розв'язання. Зобразимо область G, обмежену заданими поверхнями.

Область G є правильного в напрямі вісі Oz, тому межі інтегрування визначаємо наступні. На площині XOY проекцією області G є параболічний сегмент.

Отже, одержимо:

$$G_{oz}:\{-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2};\frac{x^2}{2}\le y\le 1;0\le z\le 2-2y\}.$$

Обчислюємо даний потрійний інтеграл за допомогою повторного інтеграла.

$$I=\iiint\limits_G ydxdydz=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{1}ydy\int\limits_{0}^{2-2y}dz=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{1}y(z\Big|_{0}^{2-2y})dy=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{1}y(2-2y)dy=$$

$$=2\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{2}}(y-y^2)dy=2\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3})\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{1}dx=4\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{24})dx=$$

$$=4(\frac{1}{6}x-\frac{x^5}{40}+\frac{x^7}{168})\Big|_{0}^{\sqrt{2}}=4(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{(\sqrt{2})^5}{40}+\frac{(\sqrt{2})^7}{168})=4\sqrt{2}(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{21})=$$

$$=4\sqrt{2}\,\frac{35-21+10}{210}=4\sqrt{2}\,\frac{8}{70}=\frac{16\sqrt{2}}{35}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 4.1. Обчислити повторні інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (x+y+z)dz$.
2. $\int\limits_0^0 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyzdz$.
3. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$.
4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\int\limits_0^a zdz$.
5. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\tau d\tau\int\limits_0^{\cos\tau}\rho^3 d\rho$.
6. $\int\limits_0^{e-1} dx\int\limits_0^{e-x-1} dy\int\limits_e^{x+y+e}\frac{\ln(z-y-x)}{(x-e)(x+y-e)}dz$.

Завдання 4.2. Розставити межі інтегрування, якщо інтегрувати в послідовності: **а)** x,y,z; **б)** y,z,x; **в)** z,x,y.

1. $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, де область G обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
2. $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $x^2+y^2=1, z=0, z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0$.
3. $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $z=x^2+y^2, z=1,$ $x=0,\ y=0,\ z=0.$

Завдання 4.3. Обчислити потрійні інтеграли.

1. $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz$, $G{:}\ x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

2. $\iiint\limits_G y\cdot\cos(x+z)dxdydz$, G: $y=\sqrt{x}$ $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

3. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz$, G – куб, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

4. $\iiint\limits_G xdxdydz$, G: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=3$.

5. $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, G: $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$.

6. $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, G: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

7. $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz$, G: $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

8. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(4+x+y+z)^3}$, G: $x+y+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\iiint\limits_G (x+y+1)dxdydz$, G: $x=0$, $y=0$, $z=1$, $z=x^2+y^2$.

10. $\iiint\limits_G zdxdydz$, G: $0\le x\le\frac{1}{2}$, $x\le y\le 2x$, $0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

§5. ЗАМІНА ЗМІННИХ ПІД ЗНАКОМ КРАТНОГО ІНТЕГРАЛА

Основні поняття та теореми

Нехай область D' лежить у площині uOv, а область D – у площині XOY. Задамо взаємно-однозначне і неперервно диференційоване відображення F області D' на D парою функцій

$$F:\begin{cases}x=x(u;v),\\ y=y(u;v),\end{cases}\quad (u;v)\in D',\quad F(D')\ =D.$$

Означення. *Визначником Якобі* або, скорочено, *якобіаном* відображення F називають функціональний визначник, складений із частинних похідних функцій $x(u;v)$ і $y(u;v)$, а саме:

$$I(u;v)=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}.$$

Якщо якобіан $I(u;v)\ne 0$ у всіх точках області D', то відображення F називається *регулярним*.

Відзначимо наступні властивості регулярних відображень. Якщо Γ' – гладка крива в області D', то і її образ $\Gamma = F(\Gamma')$ при регулярному відображенні F також буде гладкою кривою.

1. При регулярному відображені $F: D' \to D,$ довільна квадрована множина D_0' із D' відображається на квадровану множину $D_0 = F(D_0')$.
2. Нехай $M_0(u_0; v_0)$ – фіксована точка у множині D', а $d = diam(D')$. Тоді

$$\lim_{d \to 0} \frac{\text{пл.}D}{\text{пл.}D'} = |I(u_0; v_0)|,$$

де $|I(u_0; v_0)|$ – модуль якобіана регулярного відображення F області D' на D.

Формула заміни змінних у подвійному інтегралі.

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u; v); y(u; v)) \cdot |I(u; v)| \cdot dudv,$$

У цій формулі $f(x; y)$ – неперервна функція в D; $|I(u; v)|$ – модуль якобіана регулярного відображення області D' на D, заданого функціями $x = x(u; v)$ і $y = y(u; v)$.

<u>*У випадку полярних координат*</u>$(\rho; \varphi)$, формули переходу: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, якобіан цього відображення $I(\rho; \varphi) = \rho$. Тому

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \iint_{D'} f(\rho\cos\phi; \rho\sin\phi) \cdot \rho \cdot d\rho d\phi.$$

Якщо область D' в полярних координатах задана нерівностями $\alpha \le \phi \le \beta$, $\rho_1(\phi) \le \rho(\phi) \le \rho_2(\phi)$, то обчислення подвійного інтеграла зводять до повторного

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\phi \int_{\rho_1(\phi)}^{\rho_2(\phi)} f(\rho\cos\phi; \rho\sin\phi) \cdot \rho \cdot d\rho.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі. Нехай при обчисленні потрійного інтеграла $\iiint_G f(x; y; z)dxdydz$ потрібно перейти від змінних $(x; y; z)$ до нових змінних $(u; v; w)$, які зв'язані формулами

$$x = x(u; v; w), \ \ y = y(u; v; w), \ \ z = z(u; v; w), \ \ (u; v; w) \in G'.$$

Якщо формули переходу від змінних $(x; y; z)$ до $(u; v; w)$ встановлюють взаємно-однозначне неперервно диференційоване відображення, з не виродженим якобіаном області G' на G:

$$I(u; v; w) = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' & x_w' \\ y_u' & y_v' & y_w' \\ z_u' & z_v' & z_w' \end{vmatrix} \ne 0, \quad (u; v; w) \in G',$$

то <u>*користуються формулою:*</u>

$$\iiint_G f(x; y; z)dxdydz = \iiint_{G'} f(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w)) \cdot |I(u; v; w)| \cdot dudvdw.$$

<u>*У випадку циліндричних координат*</u> $(\rho;\varphi;\mathrm{z})$, формули переходу:

$$x=\rho\cdot\cos\phi,\;\; y=\rho\cdot\sin\phi,\;\; z=z,$$ якобіан $I(\rho;\phi;z)=\rho$, тому:

$$\underset{G}{\iiint} f(x;y;z)dxdydz=\underset{G'}{\iiint} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;z)\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi dz.$$

<u>*У сферичних координатах*</u> $(\rho;\varphi;\theta)$, формули переходу:

$x=\rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\quad y=\rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\quad z=\rho\cdot\cos\theta,$ якобіан $I(\rho;\varphi;\theta)=\rho^2\cdot\sin\theta$, тому:

$$\underset{G}{\iiint} f(x;y;z)dxdydz=\underset{G'}{\iiint} f(\rho\sin\theta\cdot\cos\varphi;\rho\sin\theta\cdot\sin\varphi;\rho\cos\theta)\cdot\rho^2\cdot\sin\theta\cdot d\rho d\varphi d\theta.$$

Зауваження. Обчислення потрійних інтегралів у циліндричних і сферичних системах координат виконується шляхом переходу до відповідних трикратних інтегралів. Межі інтегрування встановлюються у відповідності до форми області *G* у просторі *OXYZ* та геометричного змісту циліндричних і сферичних координат.

Контрольні питання і завдання

1. Дайте означення взаємно-однозначного відображення області D на D'.
2. Дайте означення неперервно диференційованого відображення плоскої області D'_{uv} на плоску область D_{xy}.
3. Дайте означення визначника Якобі регулярного відображення F області D' площини *uOv* на область D площини *XOY*.
4. Покажіть, що якобіан I переходу від декартової системи до полярної системи координат у випадку, коли: $x=\rho\cdot\cos\phi,\;\; y=\rho\cdot\sin\phi,$ дорівнює ρ, тобто $I(\rho;\varphi)=\rho$.
5. Показати, що у випадку переходу від декартової системи координат до циліндричної якобіан обчислюється за формулою: $I(\rho;\varphi;z)=\rho$.
6. Показати, що у випадку переходу від декартової системи координат до сферичної якобіан обчислюється за формулою: $I(\rho;\varphi;\theta)=\rho^2\cdot\sin\theta$.
7. Нехай область D задано в координатах *XOY*, записати цю область в полярній системі координат:
   а) $D=\{(x;y):x^2+y^2\le 9\}$;
   б) $D=\{(x;y):4\le x^2+y^2\le 25\}$;
   в) $D=\{(x;y):x^2+y^2\le 16, x\ge 0, y\ge 0\}$;
   г) $D=\{(x;y):1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$.
8. Області G_i в R^3задано формулами:
   $G_1=\{(x;y;z):x^2+y^2\le 1,\; 0\le z\le 3\}$,
   $G_2=\{(x;y;z):x^2+y^2\le 4,\; y\ge 0,\; -2\le z\le 1\}$,

$$G_3=\{(x;y;z):4\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ -1\le z\le 2\}.$$

Записати співвідношення, які задають ці області в циліндричній системі координат.

9. Області G_i в R^3 задано формулами:

$$G_1=\{(x;y;z):x^2+y^2+z^2\le 9,\ z\ge 0\},$$

$$G_2=\{(x;y;z):x^2+y^2+z^2\le 16,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\},$$

$$G_3=\{(x;y;z):4\le x^2+y^2+z^2\le 25,\ x\ge 0,\ y\le 0,\ z\le 0\}.$$

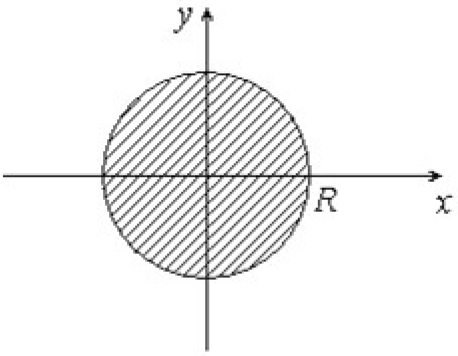
Записати співвідношення, які задають ці області в сферичній системі координат.

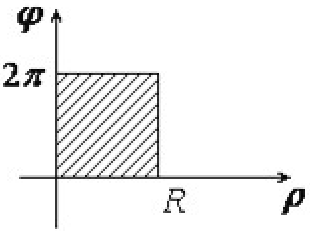
Приклади розв’язування задач

Приклад 5.1. У подвійному інтегралі перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування $I=\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, де область D – круг $x^2+y^2\le R^2$.

Розв’язання. За формулою переходу до полярних координат одержимо:

$$I=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\cdot\rho d\rho d\varphi$$





Побудуємо область D: її образом у координатній площині $O'\rho\varphi$ буде прямокутник, для якого $0\le\rho\le R$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

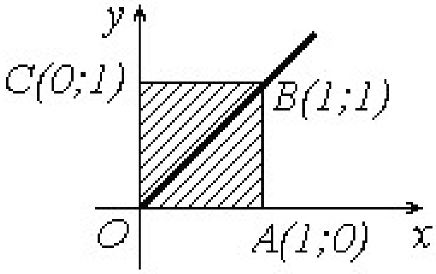
Отже:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Приклад 5.2. В подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ розставити межі інтегрування в полярних координатах, якщо область D – квадрат з вершинами в точках $O(0;0),A(1;0),B(1;1),C(0;1)$.

Розв’язання. Рівняння сторін області D: у декартових координатах:

OA: $y=0$.



$AB:\ x=1.$

$BC:\ y=1.$

$OC:\ x=0,$

а в полярних координатах:

$$OA: \rho\sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0.$$

$$AB: \rho\cos\varphi=1 \Rightarrow \rho=\frac{1}{\cos\varphi}.$$

$$BC: \rho\sin\varphi=1 \Rightarrow \rho=\frac{1}{\sin\varphi}.$$

$$OC: \rho\cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, (квадрат знаходиться в I чверті).

Якщо $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, то $0\le\rho\le\frac{1}{\cos\varphi}$ (сторона *AB*).

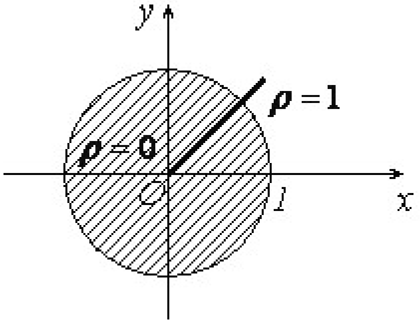
Якщо $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, то $0\le\rho\le\frac{1}{\sin\varphi}$ (сторона *BC*).

Тому,

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Приклад 5.3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D\sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy$, якщо область *D* обмежена колом $x^2+y^2=1$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція і рівняння межі області інтегрування містять x^2+y^2, то для обчислення даного інтеграла доцільно перейти до полярних координат. Область D – це круг з центром у початку координат і радіусом 1.



Згідно полярних координат $x^2+y^2=\rho^2$– рівняння кола набуде виду $\rho=1$.

Область D містить в собі початок координат, тому кут φ змінюється від 0 до 2π.

Отже:

$$D'=\{0\le\varphi\le2\pi,\ 0\le\rho\le1\},$$

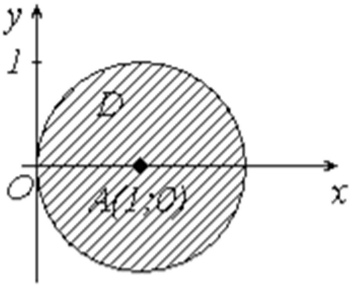
а підінтегральний вираз:

$$\sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy=\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\phi.$$

$$I=\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}d(1-\rho^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1)d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$

Приклад 5.4. У подвійному інтегралі $I=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$, де D – круг, обмежений колом $x^2+y^2=2x$, перейти до полярних координат і обчислити одержаний інтеграл.



Розв'язання. Зобразимо круг D :

$$x^2+y^2=2x.$$

Рівняння кола $x^2+y^2=2x$ запишемо $(x-1)^2+y^2=1$, звідки видно центр кола – точка $A(1;0)$ і радіус $R=1$.

Згідно рівнянь, що пов'язують $(x;y)$ і полярні координати $(\rho;\varphi)$:

$$x=\rho\cdot\cos\varphi,\ \ y=\rho\cdot\sin\varphi,$$

рівняння кола набуде вигляду: $\rho^2=2\rho\cos\phi\Rightarrow\rho=2\cos\phi$.

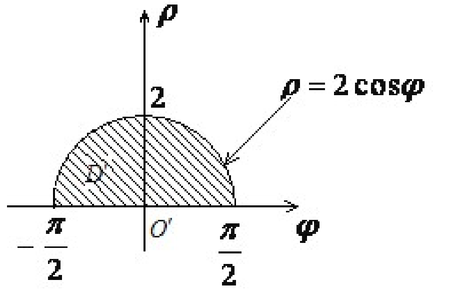
За формулою переходу до полярних координат підінтегральний вираз $(x^2+y^2)dxdy$ набуде виду:

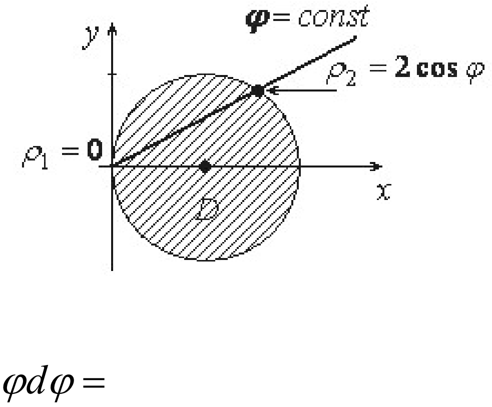
$$\rho^2\cdot\rho d\rho d\varphi=\rho^3 d\rho d\varphi.$$

Отже, даний подвійний інтеграл можна записати так: $I=\iint\limits_{D'}\rho^3 d\rho d\varphi$, а межі інтегрування D' згідно міркувань визначаються нерівностями:

$$D'=\{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2};\ 0\le\rho\le 2\cos\varphi\}.$$

При обчислені подвійного інтеграла по області D' переходимо до повторного інтеграла.





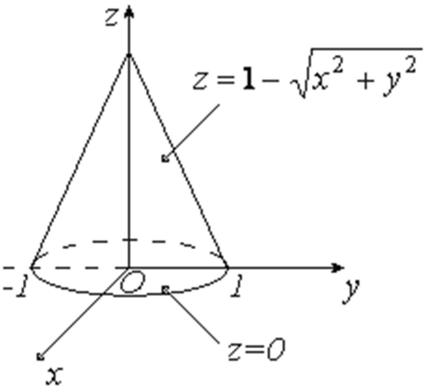
$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^3 d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi})=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\varphi)^2 d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi)d\varphi=$$

$$=(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\pi.$$

Приклад 5.5. Перейти до циліндричних координат і обчислити потрійний інтеграл. $I=\iiint\limits_G((x+y)^2-z)dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями $z=0$ і $(z-1)^2=x^2+y^2$.



Розв'язання. Область G являє собою конус, який обмежений конічною поверхнею $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ і площиною $z=0$ $(z\geq 0)$, тобто

$$G=\{(x;y;z):\ (x;y)\in D,\ 0\leq z\leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\},$$

де D – круг радіусом 1 з центром у початку координат. Тому даний потрійний інтеграл можна звести до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів у прямокутних координатах:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}}((x+y)^2-z)dz.$$

Однак, доцільно перейти до циліндричних координат

$$x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ z=z.$$

Прообразом круга D є прямокутник $\{(\rho;\phi):\ 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\phi\leq 2\pi\}$, а прообразом конічної поверхні – площина $z=1-\rho$. Тому

$$G^{'}=\{(\phi;\rho;z):\ 0\leq\phi\leq 2\pi;\ 0\leq\rho\leq 1;\ 0\leq z\leq 1-\rho\},$$

а підінтегральний вираз $((x+y)^2-z)dxdydz$ набуде виду

$$(\rho^2+2\rho^2\sin\phi\cos\phi-z)\rho d\rho d\phi dz=(\rho^2(1+\sin 2\phi)-z)\rho d\rho d\phi dz.$$

Отже, у циліндричних координатах даний потрійний інтеграл обчислюється так:

$$I=\iiint\limits_{G'}(\rho^2(1+\sin 2\phi)-z)\rho d\rho d\phi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{1-\rho}[\rho^2(1+\sin 2\phi)-z]\rho dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^1\rho[\rho^2(1+\sin 2\phi)z-\frac{z^2}{2}]\Big|_0^{1-\rho}d\rho=$$

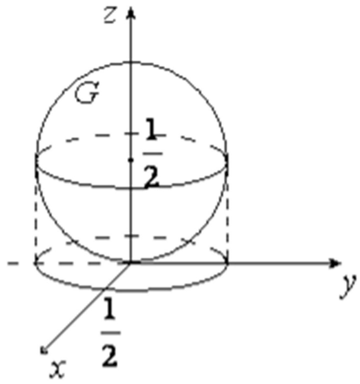
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^1\rho(\rho^2(1+\sin 2\phi)(1-\rho)-\frac{(1-\rho)^2}{2})d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^1(\rho^3(1+\sin 2\phi)-\rho^4(1+\sin 2\phi)-\frac{\rho(1-\rho)^2}{2})d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}((1+\sin 2\phi)\frac{\rho^4}{4}-(1+\sin 2\phi)\frac{\rho^5}{5}-\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{8})\Big|_0^1 d\phi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{20}(1+\sin 2\phi)-\frac{1}{24})d\phi=\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{20}\sin 2\phi+\frac{1}{120})d\phi=\frac{1}{20}(-\frac{1}{2}\cos 2\phi+\frac{1}{6}\phi)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{60}.$$

Приклад 5.6. Перейти до сферичних координат і обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де G – область обмежена поверхнею $x^2+y^2+z^2=z$.



Розв'язання. Область G являє собою кулю, обмежену сферою з рівнянням $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

Перейдемо для зручності обчислення до сферичних координат $(r;\theta;\phi)$.

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,$$
$$z=r\cos\theta.$$

В даному випадку ϕ змінюється від 0 до 2π, а при кожному значенні ϕ θ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Рівняння сфери в сферичних координатах набуде виду:

$$r^2=r\cos\theta\Rightarrow r=\cos\theta.$$

Отже, прообразом області G є область

$$G'=\{(r;\varphi;\theta):\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\cos\theta\}.$$

Якобіан відображення дорівнює $r^2\sin\theta$, тому підінтегральний вираз запишеться так:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = r\cdot r^2\sin\theta d\phi d\theta dr = r^3\sin\theta d\phi d\theta dr.$$

Отже,

$$I=\iiint\limits_{G'} r^3\sin\theta d\phi d\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int\limits_0^{\cos\theta} r^3\sin\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{r^4}{4}\sin\theta \Big|_0^{\cos\theta})d\theta =$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta d\theta = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d(\cos\theta) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})d\phi =$$

$$=\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{20}\cdot\phi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{10}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1. Перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування.

1. $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, D – кільце $r^2 \le x^2+y^2 \le R^2$.
2. $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, D – обмежена колами $x^2+y^2=4x$ і $x^2+y^2=8x$.
3. $\iint\limits_D f(\frac{x}{y})dxdy$, D – трикутник обмежений прямими $y=x$, $y=-x$, $y=1$.
4. $\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy$, D – обмежена лемніскатою Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Завдання 5.2. Перейти до полярних координат і обчислити інтеграли.

1. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$, D – верхнє півкільце між колами з радіусами e і e^2 і центром у початку координат.
2. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, D – круг $x^2+y^2\le 1$.
3. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D – круг $x^2+y^2\le 2ax$.
4. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D – круг $x^2+(y+2)^2\le 4$.

5. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, D – частина кільця $1 \le x^2 + y^2 \le 2$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}$.

6. $\iint\limits_D x(x^2 + y^2)dxdy$, D – пелюстка лемніскати $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \ge 0)$.

Завдання 5.3. Обчислити інтеграли перейшовши до циліндричних координат.

1. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2 + z}dxdydz$, G – обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, $z = 2$.

2. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2} \cdot zdxdydz$, G – обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = z$, $z = 1$.

3. $\iiint\limits_G xdxdydz$, G – обмежена конусом $x^2 = \frac{h^2}{R^2}(z^2 + y^2)$ і площиною $x = h$.

4. $\iiint\limits_G x^2y^2dxdydz$, G – задана нерівностями $x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le z \le x^2 + y^2$.

5. $\iiint\limits_G zdxdydz$, G – обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$.

6. $\iiint\limits_G (x^2 + z^2)dxdydz$, G – обмежена площиною $y = 2$ і параболоїдом $x^2 + z^2 = 2y$.

Завдання 5.4. Перейти до сферичних координат і обчислити інтеграли.

1. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, G – обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

2. $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz$, G – обмежена поверхнями $z \ge 0$, $r^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

3. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$, G – обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, G – обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

§6. ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ І ПЛОЩ, ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

Основні поняття та теореми

І. *Подвійні інтеграли* застосовують для обчислення площ плоских фігур і поверхонь, об'ємів просторових тіл, механічних величин, пов'язаних із неперервним розподілом маси у плоскій області та для розв'язання багатьох інших задач.

1. Площа S плоскої фігури D обчислюється за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

2. Об'єм V циліндроїда G обчислюється за формулою

$$V = \iint\limits_D \varphi(x;y)dxdy,$$

де D – нижня основа циліндроїда, $z = \varphi(x;y)$ – рівняння поверхні, що обмежує циліндроїд зверху.

3. Об'єм V просторового тіла $T = \{\varphi_1(x;y) \le z \le \varphi_2(x;y);\ (x;y) \in D\}$:

$$V = \iint\limits_D [\varphi_2(x;y) - \varphi_1(x;y)]dxdy,$$

де D – проекція тіла T на площину XOY, $z = \varphi_1(x;y)$ і $z = \varphi_2(x;y)$ – відповідно нижня і верхня обмежуючі поверхні для тіла T.

4. Нехай гладка поверхня Π у просторі R^3 задана рівнянням $z = z(x;y)$, тобто: $\Pi = \{(x;y;z) : z = z(x;y);\ (x;y) \in D\}$, де D – проекція заданої поверхні на площину XOY. Площа такої явно заданої поверхні обчислюється за формулою:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2}\, dxdy.$$

Якщо поверхня задана явно рівнянням $x = x(y;z), (y;z) \in D$, то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + [x'_y]^2 + [x'_z]^2}\, dydz;$$

якщо рівняння поверхні має вид $y = y(x;z),\ (x;z) \in D$, то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + [y'_x]^2 + [y'_z]^2}\, dxdz.$$

5. Нехай відома густина $\rho = \rho(x;y)$ розподілу маси плоскої фігури D. Маса m фігури D обчислюється за формулою

$$m = \iint\limits_D \rho(x;y)dxdy.$$

Статичні моменти фігур *D* відносно вісей *OX* і *OY* визначають за формулами

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x;y)dxdy, \text{ і } M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho(x;y)dxdy.$$

Координати центра мас $M_c(x_c;y_c)$ фігури *D*:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \; y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Моменти інерції фігури *D* відносно вісей *OX* і *OY*:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \rho(x;y)dxdy, \; I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \rho(x;y)dxdy,$$

а моменти інерції відносно початку координат:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \cdot \rho(x;y)dxdy = I_x + I_y.$$

II. ***Потрійні інтеграли*** застосовуються для обчислення об'ємів тіл і механічних величин, пов'язаних із неперервним розподілом маси у просторовій області, а також для розв'язання багатьох інших задач.

1. Об'єми *V* просторового тіла *G* обчислюється за формулою
$$V = \iiint\limits_G dxdydz.$$
2. Якщо розподіл маси у тілі *G* задано неперервною функцією густини $\rho = \rho(x;y;z)$, то маса *m* тіла обчислюється за формулою
$$m = \iiint\limits_G \rho(x;y;z)dxdydz.$$

Координати центра мас тіла визначаються із формул

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_G x \cdot \rho(x;y;z)dxdydz, \; y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_G y \cdot \rho(x;y;z)dxdydz,$$

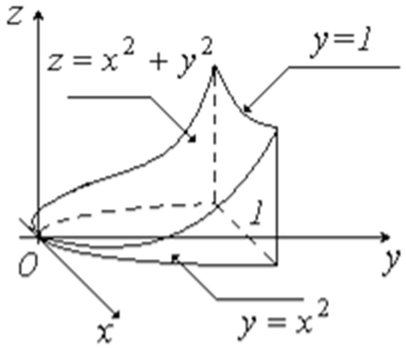
$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_G z \cdot \rho(x;y;z)dxdydz.$$

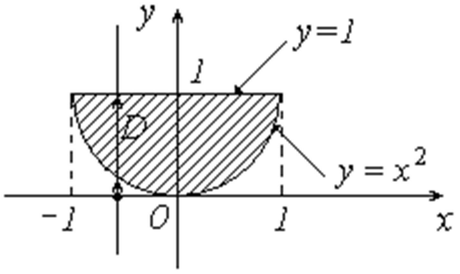
Контрольні питання і завдання

1. Яке просторове тіло називають циліндром?
2. Дайте означення площі гладкої поверхні.
3. Запишіть рівняння дотичної площини до явно заданої гладкої поверхні $z = z(x;y)$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ поверхні.
4. Запишіть формулу для елемента площі dS гладкої поверхні Π, заданої рівнянням $z = z(x;y)$.
5. Запишіть формули для обчислення моментів інерції $I_x, \; I_y, \; I_z$ відносно координатних вісей та моменти інерції $I_{xy}, \; I_{yz}, \; I_{xz}$ відносно координатних площин просторового тіла *G* через функцію $\rho(x;y;z)$ розподілу маси.

Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $y = x^2$ і площинами $y = 1$ та $z = 0$.





Розв'язання. Спочатку виконаємо рисунок до задачі, зобразимо просторове тіло *T* та його проекцію на площину *XOY*.

Задане в задачі тіло є циліндром, тому його об'єм *V* обчислюємо за формулою

$$V = \iint\limits_D z(x;y)dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} [(x^2 y + \frac{1}{3} y^3) \Big|_{x^2}^{1}]dx = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{1}{3} x^6)dx =$$

$$= (\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7) \Big|_{-1}^{1} = \frac{88}{105}.$$

Приклад 6.2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

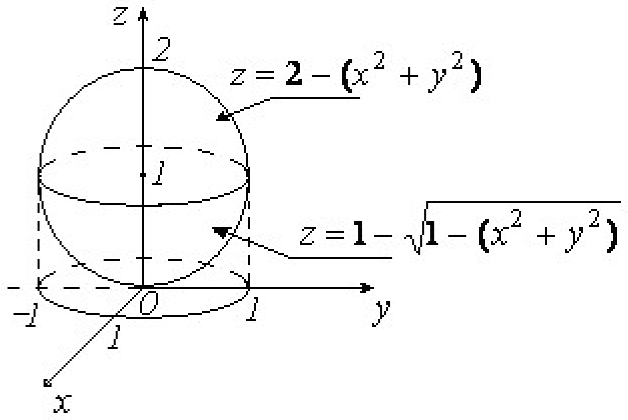
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \text{ і } x^2 + y^2 = 2 - z.$$

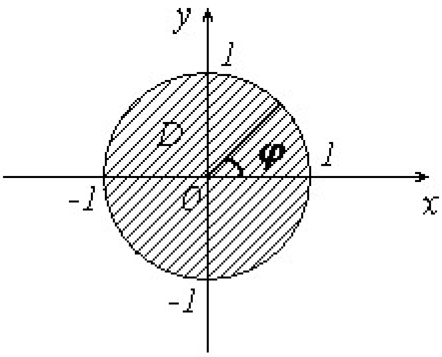
Розв'язання. Рівняння першої поверхні запишемо у вигляді $x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1$, або $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1^2$. Це рівняння сфери радіуса $R = 1$ з центром в точці $M_0(0;0;1)$. Друге рівняння задає параболоїд обертання $z = 2 - (x^2 + y^2)$, "чаша" якого направлена вниз, а вершина піднята в точку $M_1(0;0;2)$. Знайдемо лінію перетину поверхонь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 - z. \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 - 3z + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 - z. \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1 \quad \text{або} \quad z = 2, \\ x^2 + y^2 = 2 - z. \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Таким чином: $z = 2 - (x^2 + y^2) = \phi_2(x;y)$ – рівняння верхньої обмежуючої поверхні; $(z-1)^2 = 1 - (x^2 + y^2)$ або $z = 1 \pm \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, а значить $z = 1 - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = \phi_1(x;y)$ – рівняння нижньої обмежуючої поверхні.

Виконаємо рисунки до задачі:





Обчислення об'єму виконуємо за формулою

$$V = \iint\limits_D [\varphi_2(x;y) - \varphi_1(x;y)]dxdy = \iint\limits_D [2 - (x^2 + y^2) - 1 + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}]dxdy =$$

$$= \iint\limits_D [1 - (x^2 + y^2) + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}]dxdy$$

Оскільки область D круг, то зручно перейти до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \le \rho \le 1, \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = \rho^2, \quad dxdy = \rho d\varphi d\rho.$$

Тоді

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 [1 - \rho^2 + \sqrt{1 - \rho^2}]\rho d\rho = 2\pi \int\limits_0^1 [\rho - \rho^3 + (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho]d\rho =$$

$$= 2\pi(\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4)\Big|_0^1 + 2\pi \int\limits_0^1 (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(1 - \rho^2)}{-2} = \pi(1 - \frac{1}{2}) - \pi\frac{(1 - \rho^2)}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{6}\pi.$$

Приклад 6.3. Знайти площу поверхні, що вирізається на верхній півсфері $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2,\ z \ge 0$, циліндром $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

Розв'язання. Рівняння циліндра перетворюємо до виду $x^2 + (y - 2)^2 = 2^2$.

Розрахункова формула $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2}\,dxdy.$

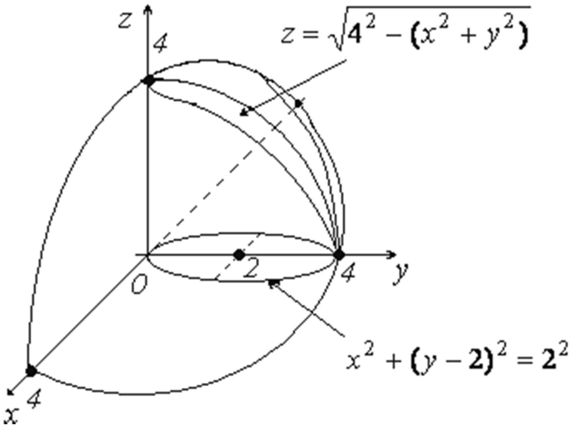
Рівняння верхньої частини запишемо через змінну z,

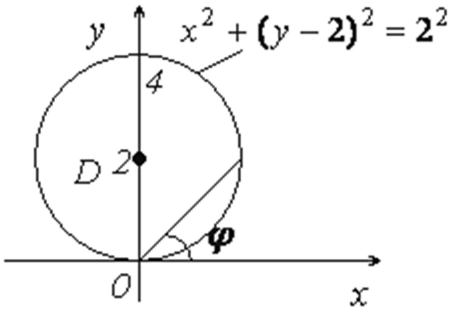
$$z = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)},\ z'_x = \frac{-x}{\sqrt{16 - (x^2 + y^2)}},\ z'_y = \frac{-y}{\sqrt{16 - (x^2 + y^2)}}.$$

Тоді

$$\sqrt{1+[z'_x]^2+[z'_y]^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{16-(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{16-(x^2+y^2)}}=\sqrt{\frac{16}{16-(x^2+y^2)}}.$$

Значить $S=\iint\limits_D \frac{4}{\sqrt{16-(x^2+y^2)}}dxdy.$





Область інтегрування D – круг, тому переходимо до полярної системи координат

$$D:\ x=\rho\cos\phi,\ x^2+y^2-4y=0,\ x^2+y^2=\rho^2,\ dxdy=\rho d\varphi d\rho,$$

$$y=\rho\sin\phi,\ \rho^2-4\rho\sin\phi=0,\Rightarrow\ \rho=4\sin\phi,\ 0\le\phi\le\pi.$$

Отже,

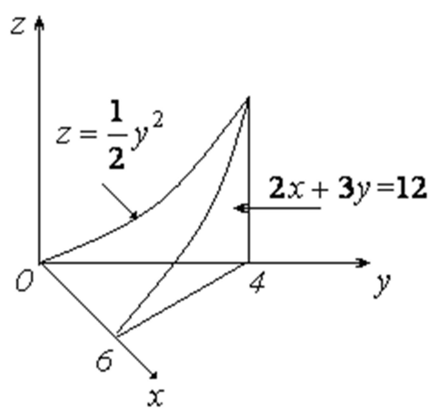
$$S=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{4\sin\varphi}\frac{4}{\sqrt{16-\rho^2}}\cdot\rho\cdot d\rho=4\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{4\sin\varphi}(16-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d(16-\rho^2)}{-2}=$$

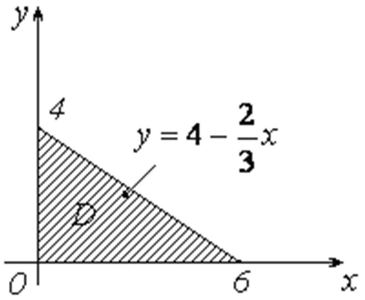
$$=-4\int_0^{\pi}\left(\sqrt{16-\rho^2}\,\Big|_0^{4\sin\varphi}\right)d\varphi=-4\int_0^{\pi}(4|\cos\varphi|-4)d\varphi=16\int_0^{\pi}(1-|\cos\varphi|)d\varphi=$$

$$=32\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\varphi)d\varphi=32\cdot(\varphi-\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=32\cdot(\frac{\pi}{2}-1)=16(\pi-2).$$

Приклад 6.4. Тіло обмежене площинами $2x+3y-12=0$, x=0, y=0, z=0 і циліндричною поверхнею $z=\frac{1}{2}y^2$, густина в кожній його точці дорівнює аплікаті цієї точки. Знайти масу неоднорідного тіла.

Розв'язання. Запишемо рівняння першої площини у відрізках: $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$. За умовою задачі $\rho=\rho(x;y;z)=z$ – формула густини.





Тоді

$$m = \iiint\limits_G \rho(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_G z \cdot dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{\frac{1}{2}y^2} zdz = \iint\limits_D (\frac{1}{2}z^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}y^2})dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \frac{1}{2}(\frac{1}{2}y^2)^2 dxdy = \frac{1}{8}\iint\limits_D y^4 dxdy = \frac{1}{8}\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} y^4 dy = \frac{1}{40}\int\limits_0^6 (y^5 \Big|_0^{4-\frac{2}{3}x})dx =$$

$$= \frac{1}{40}\int\limits_0^6 (4 - \frac{2}{3}x)^5 \cdot \frac{d(4 - \frac{2}{3}x)}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{80} \cdot \frac{(4 - \frac{2}{3}x)^6}{6}\Bigg|_0^6 = \frac{3}{80} \cdot \frac{4^6}{6} = 25{,}6.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 6.1. Обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

1. $x + y + z = 6,\ x + 2y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
2. $x + y + z = 5,\ 3x + y = 5,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
3. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 6,\ y = 2x,\ y = 1,\ z = 0$.
4. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 7,\ x = 1,\ y = 2,\ z = 0$.
5. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + y = 6,\ z = 0$.
6. $2z = y^2,\ 2x + 3y = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
7. $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$.
8. $x^2 + y^2 = 4,\ z = y,\ z = 0$.
9. $x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + z^2 = 9$.
10. $z = xy,\ y = \sqrt{x},\ x + y = 2,\ y = 0,\ z = 0$.
11. $z = x^2 + y^2,\ z = x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = 2x,\ x = 1$.

12. $z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2),\ y = x,\ y = x^2$.

13. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = x^2 + y^2$.

14. $z = (x-1)^2 + y^2,\ 2x + z = 2$.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 2x$.

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Завдання 6.2. Знайти площі заданих поверхонь.

1. Частини поверхні $z^2 = 2xy$ при $z > 0,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 3$.
2. Частини поверхні циліндра $2z = x^2$, вирізаної площинами $2y = x, y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.
3. Частини поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$, вирізаної циліндром $\rho = z$
4. Частини поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, вирізаної циліндром $z^2 = 6y$.
5. Частини поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, обмеженої площинами $z = 1$ і $z = 2$.
6. Частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, розміщеної всередині конуса $z^2 = x^2 + y^2$.
7. Частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, розміщеної між площинами $z = -8$ і $z = 6$.

Завдання 6.3. Обчислити масу неоднорідного тіла та координати центра мас.

1. Куб $0 \le x, y, z \le 1$, густина $\rho(x; y; z) = x + y + z$.
2. Тіло обмежене конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і площиною $z = 3$, густина $\rho = z$.
3. Циліндр радіуса $R = 2$ і висота $H = 5$, густина $\rho = 3z$.
4. Шар між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, густина $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
5. Куля $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, густина в кожній її точці дорівнює відстані цієї точки від початку координат.

§7. ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ

Основні поняття та теореми

Неперервною поверхнею П називається множина точок тривимірного простору R^3, яку можна задати за допомогою трьох неперервних функцій $x = x(u;v), y = y(u;v), z = z(u;v)$: $(u;v) \in D$, де D – плоска область площини UOV.

Коротко, *неперервна поверхня П* – це неперервний образ плоскої області D у тривимірному просторі R^3.

Поверхня *П* називається *неперервно диференційованою*, якщо відображення $\bar{r}(u;v) = x(u;v)\cdot\bar{i} + y(u;v)\cdot\bar{j} + z(u;v)\cdot\bar{k}$, $(u;v) \in D$, має неперервні частинні похідні в D.

Означення. Неперервно диференційована поверхня *П* називається *гладкою поверхнею*, якщо в кожній точці цієї поверхні існує дотична площина.

Властивості поверхонь.

1. Достатні умови гладкості поверхні. Якщо в кожній точці $(u;v) \in D$ існують неперервні вектори
$$\begin{cases} \bar{r}_u' = (x_u'; y_u'; z_u'), \\ \bar{r}_v' = (x_v'; y_v'; z_v'), \end{cases}$$
які не паралельні між собою, то поверхня *П* – гладка.

2. Гладка поверхня *П* має площу *S*, причому, елемент площі dS цієї поверхні обчислюється за формулою:
$$dS = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|\, dudv.$$

3. У випадку явного задання гладкої поверхні *П* рівнянням
$$z = z(x;y),\ (x;y) \in D,$$
елемент площі $dS = \sqrt{1 + [z_x']^2 + [z_y']^2}\,dxdy.$

Означення поверхневого інтеграла першого роду. Нехай на гладкій поверхні *П* задана функція $f(x;y;z)$ точки $M(x;y;z) \in П$. Розглянемо розбиття $\{\Pi_k\}$ поверхні *П* на елементарні частини Π_k з площинами $\Delta S_k = пл.(\Pi_к)$ і діаметрами $d_k = diam(\Pi_k)$. При цьому різні Π_k не мають спільних внутрішніх точок, а через $d = \max\limits_k d_k$ позначаємо діаметр розбиття. У кожній елементарній частині Π_k виберемо довільну точку $M_k(x_k; y_k; z_k)$ і складемо суму парних добутків $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k; y_k; z_k)\cdot\Delta S_k$, яку називають *інтегральними сумами першого роду* для функції $f(x;y;z)$ по поверхні *П.*

Поверхневим інтегралом першого роду від функції $f(x;y;z)$ по поверхні *П* називають границю інтегральних сум при $d \to 0$ і позначають

$$\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k;z_k)\cdot \Delta S_k.$$

Границя в правій частині цієї формули повинна існувати в незалежності від виконання розбиття $\{\Pi_k\}$ та вибору точок $\{M_k\}$; функція $f(x;y;z)$ при цьому називається інтегрованою по поверхні *П.*

Зауваження. Означення поверхневого інтеграла першого роду аналогічне означенням подвійного інтеграла і криволінійного інтеграла першого роду. Тому поверхневий інтеграл першого роду володіє основними властивостями вказаних інтегралів.

1. $\iint_{\Pi} dS = S = пл.(\Pi).$

2. Адитивність. Якщо $f(x;y;z)$ інтегрована на *П*, а поверхня *П* розбита на дві частини Π_1 та Π_2, то

$$\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS = \iint_{\Pi_1} f(x;y;z)dS + \iint_{\Pi_2} f(x;y;z)dS.$$

3. Лінійність. Якщо функції $f(x;y;z)$ і $g(x;y;z)$ інтегровані на *П*, то для довільних сталих α і β функція $[\alpha\cdot f(x;y;z)+\beta\cdot g(x;y;z)]$ інтегрована на *П* і

$$\iint_{\Pi}[\alpha\cdot f(x;y;z)+\beta\cdot g(x;y;z)]dS = \alpha\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS + \beta\iint_{\Pi} g(x;y;z)dS.$$

4. Монотонність. Якщо на поверхні *П* виконана нерівність $f(x;y;z)\le g(x;y;z)$, то

$$\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS \le \iint_{\Pi} g(x;y;z)dS.$$

5. Формула обчислення поверхневого інтеграла у загальному випадку.

Нехай гладка поверхня *П* задана параметрично

$$\bar{r}(u;v) = (x(u;v);\, y(u;v);\, z(u;v)),\ (u;v)\in D,$$

а функція $f(x;y;z)$ неперервна на *П*, тоді

$$\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS = \iint_{D} f(x(u;v);y(u;v);z(u;v))\cdot|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|\cdot dvdu.$$

6. Обчислення поверхневого інтеграл по явно заданій поверхні.

Якщо гладка поверхня *П* однозначно проектується на координатну площину *XOY* в область *D*, то її можна задати рівняннями виду $z=z(x;y)$, $(x;y)\in D$, де $z(x;y)$ – неперервно диференційована функція. Тоді

$$\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS = \iint_{D} f(x;y;z(x;y))\cdot\sqrt{1+[z'_x]^2+[z'_y]^2}\cdot dxdy.$$

7. Якщо гладка поверхня *П* задана рівнянням *x=x(y;z)* або *y=y(x;z)*, то

$$\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS = \iint_{D} f(x(y;z);y;z)\cdot\sqrt{1+[x'_y]^2+[x'_z]^2}\cdot dydz,$$

$$\iint_{\Pi} f(x;y;z)dS = \iint_{D} f(x;y(x;z);z)\cdot\sqrt{1+[y'_x]^2+[y'_z]^2}\cdot dxdz.$$

8. Якщо поверхня *П* проектується на координатні площини неоднозначно, то цю поверхню слід розбити на частини: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + ... + \Pi_n$ так, щоб кожна з них задавалася явно. Після цього скористатися властивістю адитивності інтеграла.

9. Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду.

Якщо на гладкій поверхні *П* розподілено масу з поверхневою густиною $\rho = \rho(x;y;z)$, то маса m матеріальної поверхні

$$m = \iint_{\Pi} \rho(x;y;z)dS.$$

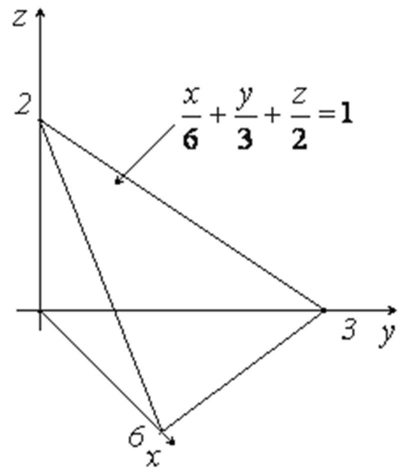
Контрольні питання і завдання

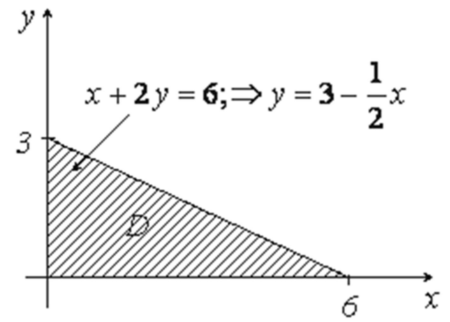
1. Дайте означення гладкої поверхні у просторі R^3.
2. Коли гладку поверхню називають заданою явно?
3. Дайте означення поверхневого інтеграла першого роду від функції *f(x;y;z)* по гладкій поверхні *П.*
4. Що означає запис $\oiint_{\Pi} f(x;y;z)dS$?
5. Поясніть фізичний зміст властивостей адитивності, лінійності та монотонності поверхневого інтеграла першого роду.
6. Нехай гладка поверхня *П* задана параметрично
$$\bar{r}(u;v) = x(u;v)\cdot\bar{i} + y(u;v)\cdot\bar{j} + z(u;v)\cdot\bar{k}.$$
7. Поясніть геометричний зміст модуля векторного добутку $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$.
8. Записати формули для обчислення статистичних моментів, координат центра маси та моментів інерції матеріальної поверхні.

Приклади розв'язування задач

Приклад 7.1. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\Pi}(6x+4y+5z)dS$ по частині площини $x+2y+3z=6$, що розташована в першому октанті.

Розв'язання. Поверхня *П* задана рівнянням $z = \frac{1}{3}(6-x-2y)$ і однозначно проектується на площину *XOY.* Виконаємо рисунки до задачі:





Застосуємо розрахункову формулу:

$$\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)dS = \iint\limits_{D} f(x;y;z(x;y))\cdot\sqrt{1+[z'_x]^2+[z'_y]^2}\cdot dxdy.$$

По умові $z(x;y)=\frac{1}{3}(6-x-2y)$, тому $z'_x=-\frac{1}{3}$, $z'_y=-\frac{2}{3}$ і

$$\iint\limits_{\Pi}(6x+4y+5z)dS=\iint\limits_{D}[6x+4y+5\cdot\frac{1}{3}(6-x-2y)]\cdot\sqrt{1+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D}[\frac{13}{3}x+\frac{2}{3}y+10]\cdot\frac{\sqrt{14}}{3}dxdy=\frac{\sqrt{14}}{9}\iint\limits_{D}(13x+2y+30)dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{9}\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{3-\frac{1}{2}x}(13x+2y+30)dy=\frac{\sqrt{14}}{9}\int\limits_0^6[(13xy+y^2+30y)\Big|_0^{3-\frac{1}{2}x}]dx=$$

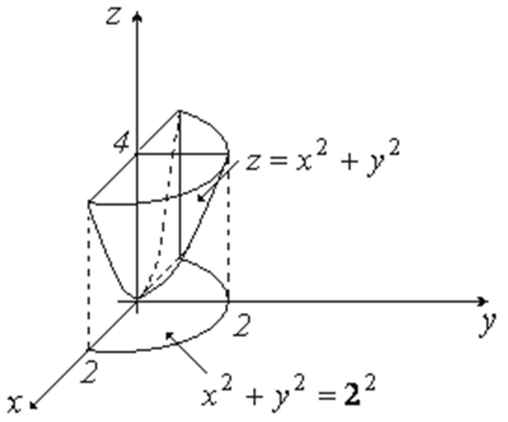
$$=\frac{\sqrt{14}}{9}\int\limits_0^6(-\frac{25}{4}x^2+21x+99)dx=\frac{\sqrt{14}}{9}\cdot(-\frac{25}{4}\cdot\frac{x^3}{3}+21\cdot\frac{x^2}{2}+99x)\Big|_0^6=58\cdot\sqrt{14}$$

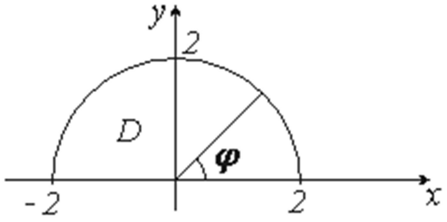
Приклад 7.2. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)dS$, де S – частина параболоїда $z=x^2+y^2$, $z\le 4$, $y\ge 0$.

Розв'язання. Поверхня задана явно: $z(x;y)=x^2+y^2$, $\Rightarrow$ $z'_x=2x$, $z'_y=2y$. Тому $dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$, перейдемо до подвійного інтеграла

$$\iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy.$$

Визначимо область D – проекцію поверхні Π на площину XOY:





$$\begin{cases}0\le\varphi\le\pi,\\0\le\rho\le 2.\end{cases}$$

Перейдемо до полярної системи : $x^2+y^2=\rho^2$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$:

$$\iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)dS=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho=\pi\int\limits_0^2\frac{1}{4}(4\rho^2+1-1)\cdot(1+4\rho^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d\rho^2}{2}=$$

$$=\frac{\pi}{32}\int\limits_0^2[(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(1+4\rho^2)^{\frac{1}{2}}]\cdot d(1+4\rho^2)=\frac{\pi}{32}\int\limits_1^{17}(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=\frac{\pi}{240}(3\cdot\sqrt{17^5}-5\cdot\sqrt{17^3}).$$

Приклад 7.3. Знайти масу верхньої половини сфери радіуса *R=3* з центром у початку координат, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні $\rho(x;y;z)=(x^2+y^2)\cdot z$.

Розв'язання. Маса поверхні обчислюється за допомогою інтеграла першого типу:

$$m=\iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)\cdot z\cdot dS.$$

Верхня половина сфери задається рівнянням $z=\sqrt{3^2-x^2-y^2}$, тому

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{3^2-(x^2+y^2)}},\quad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{3^2-(x^2+y^2)}},$$

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{3^2-(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{3^2-(x^2+y^2)}}dxdy=\sqrt{\frac{3^2}{3^2-(x^2+y^2)}}dxdy.$$

Так як проекція верхньої півсфери *П*: $x^2+y^2+z^2=3$, $z\ge 0$, на площину *XOY* є круг *D*: $x^2+y^2\le 3^2$, то

$$m=\iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)\cdot z\cdot dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{3^2-x^2-y^2}\cdot\frac{3}{\sqrt{3^2-(x^2+y^2)}}dxdy=$$

$$=3\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy.$$

Перейдемо до полярної системи координат:

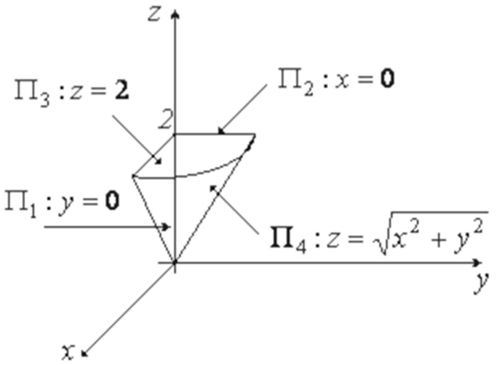
$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 3$.

Тоді

$$m = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 \cdot \rho d\rho = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2} \cdot 3^5 = \frac{243}{2}\pi .$$

Приклад 7.4. Знайти поверхневий інтеграл $\iint_{\Pi} xzdS$, де *П* – повна поверхня просторового тіла, обмеженого площиною $z = 2$ і конічною поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в першому октанті.

Розв'язання. Тут поверхня *П* складена із частин. Нехай: Π_1 – трикутник у площині *XOZ*, обмежений прямими $z = 2$ і $z = x$; $x = 0$;



Π_2 – трикутник у площині *YOZ*, обмежений прямими $z = 2$ і $z = y$; $y = 0$;

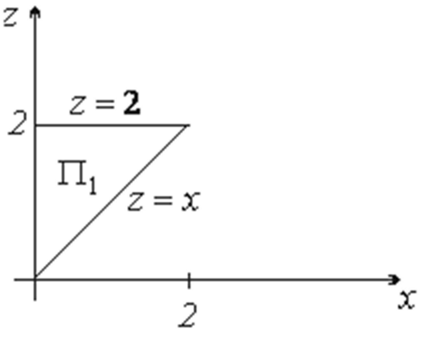
Π_3 – чверть круга $x^2 + y^2 \le 2^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ на площині $z = 2$;

Π_4 – частина конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $z \le 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

За властивістю адитивності поверхневого інтеграла першого типу

$$\iint_{\Pi} xzdS = \iint_{\Pi_1} xzdS + \iint_{\Pi_2} xzdS + \iint_{\Pi_3} xzdS + \iint_{\Pi_4} xzdS .$$

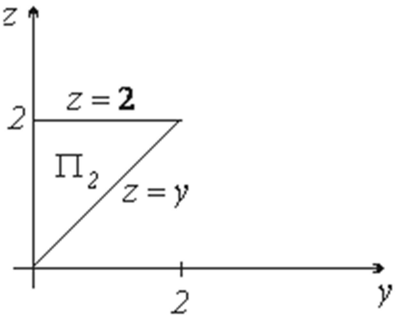
Перейдемо до окремого обчислення кожного з доданків.



1) На поверхні $\Pi_1 \subset XOZ$ елемент площі $dS = dxdz$,

$$\iint_{\Pi_1} xzdS = \iint_{\Pi_2} xzdxdz = \int_0^2 dx \int_x^2 xzdz = \int_0^2 \Big(\frac{1}{2}xz^2\Big|_x^2\Big)dx =$$

$$= \int_0^2 (2x - \frac{1}{2}x^3)dx = (x^2 - \frac{1}{8}x^4)\Big|_0^2 = 2.$$



2) На поверхні $\Pi_2 \subset YOZ$ елемент площі $dS = dydz$, а значення $x \equiv 0$, тому

$$\iint_{\Pi_2} xzdS = \iint_{\Pi_2} 0 \cdot z \cdot dydz = 0.$$

3) На поверхні $П_3 : z = 2$, $dS = dxdy$, а проекція на площину XOY буде чвертю круга $D_3 : x^2 + y^2 \le 2^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Отже

$$\iint\limits_{П_3} xzdS = \iint\limits_{D_3} x \cdot 2 \cdot dxdy = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho \cdot \cos\varphi \cdot \rho d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^3}{2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

4) На поверхні $П_4 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $(x; y) \in D_3$,

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

Звідси

$$\iint\limits_{П_4} xzdS = \iint\limits_{D_3} x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} dxdy = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, & y = \rho\sin\varphi \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, & dxdy = \rho d\rho d\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, & 0 \le \rho \le 2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 \cdot \cos\varphi \cdot d\rho = \sqrt{2} \cdot \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = 4\sqrt{2}.$$

Остаточно

$$\iint\limits_{П} xzdS = 2 + 0 + \frac{16}{3} + 4\sqrt{2} = 7\frac{1}{3} + 4\sqrt{2}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 7.1. Обчислити поверхневі інтеграли першого роду.

1. $\iint\limits_{П} (3x + y + 2z - 1)dS$, де S – частина площини $3x + y + z = 2$, розміщена у першому октанті.
2. $\iint\limits_{П} (z + 2x + \frac{4}{3}y)dS$, де S – частина площини $6x + 4y + 3z = 12$, розміщена у першому октанті.
3. $\iint\limits_{П} \frac{dS}{(1 + 2x + z)^2}$, де $П$ – трикутник на площині $6x - 2y + 3z = 1$, який вирізано координатними площинами.

4. $\iint\limits_{П} x^2yz \cdot dS$, де *П* – трикутник на площині $3x+6y-2z=1$, який вирізано координатними площинами.

5. $\iint\limits_{П} (x^2+y^2)dS,$ де *П* – частина конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, розміщена між площинами z=1 і z=4.

6. $\iint\limits_{П} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS,$ де *П* – частина конуса $z^2=x^2+y^2$, розміщена між площинами z=0 і z=3.

7. $\iint\limits_{П} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}dS,$ де *П* – частина параболоїда $z=x^2+y^2$, обмежена площиною z=2.

8. $\iint\limits_{П} xyz \cdot dS$, де *П* – частина параболоїда $z=x^2+y^2$, обмежена площиною z=3.

9. $\iint\limits_{П} (x \cdot y) \cdot dS$, де *П* – півсфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

10. $\iint\limits_{П} x \cdot dS$, де *П* – частина сфери $x^2+y^2+z^2=4$, розміщена у першому октані.

11. $\iint\limits_{П} \frac{dS}{r^2},$ де *П* – частина циліндричної поверхні $x^2+y^2=9$, обмежена площинами z=0 і z=5, а r – відстань від точки поверхні до початку координат.

12. $\iint\limits_{П} \frac{dS}{r},$ де *П* – частина гіперболічного параболоїда $z=xy$, що відтинається циліндром $x^2+y^2=4$, а r – відстань від точки поверхні до вісі *OZ*.

13. Знайти масу поверхні куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, якщо в точці *M(x;y;z)* поверхнева густина $\rho(x;y;z)=xyz$.

14. Знайти масу поверхні сфери і статичні моменти верхньої півсфери, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до вертикального діаметра.

15. Знайти масу сфери $x^2+y^2+z^2=5^2$, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює квадрату відстані від цієї точки до вертикального діаметра.

16. Знайти поверхневий інтеграл $\iint\limits_{П} z^2dS$, де S – повна поверхня тетраедра, що відтинається від першого октанта площиною $x+y+z=1$.

17.Знайти поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\Pi} x^2 dS$, де S – повна поверхня тетраедра, що відтинається від першого октанта площиною $3x+6y+2z=1$.

§8. ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ

Основні поняття та теореми

Нехай *П* – гладка поверхня у просторі R^3. Через $\overline{n}=\overline{n}(M)$ будемо позначати одиничний нормальний вектор до поверхні *П*, побудований у точці $M(x;y;z)$ цієї поверхні. Для вибору напрямку вектора $\overline{n}$ існують дві можливості: якщо один із напрямків обрано як додатній, то протилежний до нього – від'ємний. Виразимо одиничний вектор $\overline{n}$ через його напрямні косинуси:

$$\overline{n}=\cos\alpha\cdot\overline{i}+\cos\beta\cdot\overline{j}+\cos\gamma\cdot\overline{k}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma),$$

де $\alpha=\alpha(M)$, $\beta=\beta(M)$, $\gamma=\gamma(M)$ функції точки $M\in\Pi$.

<u>Гладка поверхня П називається двосторонньою</u> (або орієнтованою), якщо на всій поверхні *П* можна задати неперервну векторну функцію одиничних нормалей $\overline{n}=\overline{n}(M)$, $M\in\Pi$.

Прикладом двосторонньої поверхні є площина, сфера, параболоїд. Для двосторонньої поверхні сукупність усіх точок з обраними в них векторами нормалей називають стороною поверхні.

Вибір однієї із сторін поверхні називається орієнтацією поверхні. Якщо орієнтацію поверхні обрано, то поверхня називається зорієнтованою.

У випадку параметричного задання гладкої поверхні *П* рівнянням

$$\overline{r}=\overline{r}(u;v)=x(u;v)\cdot\overline{i}+y(u;v)\cdot\overline{j}+z(u;v)\cdot\overline{k},\ (u;v)\in D,$$

одиничний вектор нормалі в точці $M\in\Pi$ визначається формулою

$$\overline{n}(M)=\pm\frac{\overline{r}_u'\times\overline{r}_v'}{|\overline{r}_u'\times\overline{r}_v'|}.$$

Якщо поверхня *П* явно задана, наприклад, рівнянням $z=z(x;y)$, $(x;y)\in D$, то напрямні косинуси нормалі $\overline{n}$ цієї поверхні визначаються за формулами:

$$\cos\alpha(M)=\frac{z_x'}{\pm\sqrt{1+[z_x']^2+[z_y']^2}},\ \cos\beta(M)=\frac{z_y'}{\pm\sqrt{1+[z_x']^2+[z_y']^2}},$$

$$\cos\gamma(M)=\frac{-1}{\pm\sqrt{1+[z_x']^2+[z_y']^2}},$$

де знак перед радикалом повинен узгоджуватися з обраною стороною поверхні.

<u>*Гладка поверхня П називається односторонньою*</u>, якщо на всій поверхні *П* не можна задати однозначно неперервну векторну функцію нормалей $\overline{n}=\overline{n}(M)$, (.) $M\in\Pi$.

Прикладом односторонньої поверхні може служити так званий лист Мебіуса. Ця поверхня може бути утворена із прямокутника *ABCD* за допомогою склеювання сторін *AB* і *CD* так, щоби при цьому співпадали точки *C* і *A*, *B* і *D*.

Фізичне тлумачення односторонньої та двосторонньої поверхонь.

Поверхня називається <u>*односторонньою*</u>, якщо її можна пофарбувати, не відриваючи пензля, одним кольором.

Поверхня <u>*двостороння*</u>, якщо її можна розфарбувати в два кольори.

Означення поверхневого інтеграла другого роду. Нехай на гладкій зорієнтованій поверхні *П* задана функція $f(M)=f(x;y;z)$ точки $M(x;y;z)$ цієї поверхні, а одиничний вектор нормалі до *П* задано напрямними косинусами: $\overline{n}(M)=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

<u>*Поверхневими інтегралами другого роду*</u> від функції $f(M)$ по поверхні *П* називають інтеграли $\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)dxdy$, $\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)dxdz$, $\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)dydz$, які визначаються за відповідними формулами:

$$\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)dxdy=\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)\cdot\cos\gamma(x;y;z)dS=\iint\limits_{\Pi} f(M)\cdot\cos\gamma\cdot dS; \qquad (1)$$

$$\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)dxdz=\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)\cdot\cos\beta(x;y;z)dS=\iint\limits_{\Pi} f(M)\cdot\cos\beta\cdot dS; \qquad (2)$$

$$\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)dydz=\iint\limits_{\Pi} f(x;y;z)\cdot\cos\alpha(x;y;z)dS=\iint\limits_{\Pi} f(M)\cdot\cos\alpha\cdot dS; \qquad (3)$$

А) Відзначимо, що <u>поверхневі інтеграли (1), (2), (3) залежать від вибору декартової системи координат</u> у просторі R^3, так як при зміні системи координат змінюються напрямні косинуси вектора нормалі.

В) <u>Поверхневі інтеграли другого роду залежать</u> від вибору сторони поверхні.

Через *П+* будемо позначати поверхню *П*, на якій обрано одиничну нормаль $\overline{n}$, а через *П –* будемо позначати поверхню *П*, на якій обрано нормаль – $\overline{n}$. Тоді

$$\iint\limits_{\Pi-} f(x;y;z)dydz=-\iint\limits_{\Pi+} f(x;y;z)dydz,$$

аналогічні рівності виконуються і для інтегралів (1) і (2).

<u>*Загальним поверхневим інтегралом другого роду*</u> називають суму трьох поверхневих інтегралів другого роду такого виду:

$$\iint\limits_{\Pi} P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dxdz+R(x;y;z)dxdy\equiv$$

$$\equiv\iint\limits_{\Pi}(P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma)dS.$$

Фізичний зміст загального поверхневого інтеграла другого роду. Нехай на гладкій зорієнтованій поверхні *П* з одиничним вектором нормалі $\overline{n}(M)=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ задано неперервну векторну функцію $\overline{F}(M)=P(M)\cdot\overline{i}+Q(M)\cdot\overline{j}+R(M)\cdot\overline{k}=(P;Q;R)$, (.) $M(x;y;z)\in\Pi$.

Скалярний добуток векторів $\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)=\overline{F}\cdot\overline{n}$ є неперервною скалярною функцією, означеною на *П*, і тому не залежить від вибору координатної системи в R^3. Значить, поверхневий інтеграл другого роду

$$\iint\limits_{\Pi}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)dS=\iint\limits_{\Pi}(P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma)dS$$

також не залежить від вибору систем координат.

Поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\Pi}\overline{F}\cdot\overline{n}dS$ називають потоком векторного поля $\overline{F}$ через поверхню *П*.

В гідродинамічній моделі це виглядає так: якщо вектор $\overline{F}(M)$ задає швидкість рідини, що протікає через поверхню *П* в точці *M*, то добуток $\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)dS$ дорівнює кількості рідини, що протікає через елемент площі dS за одиницю часу за напрямом вектора $\overline{n}(M)$.

Таким чином, інтеграл $\iint\limits_{\Pi}\overline{F}\cdot\overline{n}dS$ задає кількість рідини, що протікає через всю поверхню *П* за одиницю часу в напрямі заданої орієнтації поверхні.

Зауваження. Поверхневий інтеграл другого роду володіє всіма властивостями поверхневого інтеграла першого роду, окрім наступної: при зміні сторони поверхні поверхневий інтеграл другого роду змінює знак на протилежний.

Обчислення поверхневих інтегралів другого роду. Нехай гладка поверхня *П* така, що кожна пряма, яка паралельна вісі *OZ*, перетинає її в одній точці. Через D_{xy} позначимо проекцію поверхні *П* на площину *XOY*. Така поверхня може бути задана явно рівняннями *z=z(x;y)*, $(x;y)\in D_{xy}$. Якщо дана гладка поверхня *П* зорієнтована таким чином, що одиничний вектор нормалі $\overline{n}(M)$ утворює з віссю *OZ* гострий кут, тобто $\cos\gamma>0$, то

$$\iint\limits_{\Pi}R(x;y;z)dxdy=\iint\limits_{\Pi}R(M)\cos\gamma dS=\iint\limits_{D_{xy}}R(x;y;z(x;y))dxdy.$$

Якщо гладка поверхня *П* задана явно рівнянням *z=z(x;y)*, $(x;y)\in D_{xy}$, і зорієнтована так, що вектор нормалі $\overline{n}(M)$ утворює з віссю *OZ* тупий кут: $\cos\gamma<0$, то

$$\iint\limits_{\Pi}R(x;y;z)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}R(x;y;z(x;y))dxdy.$$

Аналогічно отримаємо наступні формули

$$\iint\limits_{\Pi} P(x;y;z)dydz = \iint\limits_{\Pi} P(M)\cos\alpha dS = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y;z);y;z)dydz,$$

$$\iint\limits_{\Pi} Q(x;y;z)dxdz = \iint\limits_{\Pi} Q(M)\cos\beta dS = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x;y(x;z);z)dxdz,$$

де D_{yz} і D_{xz} – проекції *П* відповідно на *YOZ* і *XOZ*.

При цьому перед подвійним інтегралом беруть знак плюс, якщо напрямний косинус невід'ємний $\cos\beta \geq 0$ ($\cos\alpha \geq 0$), і знак мінус, якщо $\cos\beta < 0$ ($\cos\alpha < 0$).

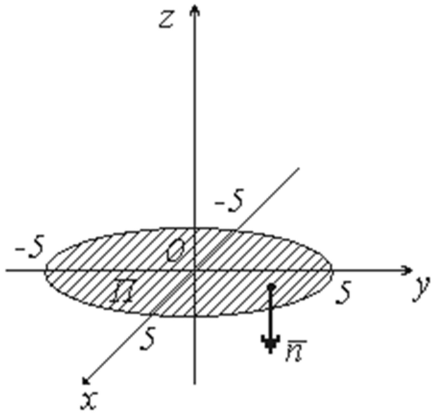
Зауваження. Якщо гладка поверхня *П* проектується на координатні площини неоднозначно, то її розбивають на частини, які можна проектувати однозначно, і обчислюють інтеграл по кожній частині окремо.

Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення двосторонньої поверхні. Що називають стороною поверхні?
2. Наведіть фізичний зміст односторонньої поверхні.
3. Запишіть координати одиничного вектора нормалі $\overline{n}(M)$, що складає із віссю *OZ* гострий кут для гладкої поверхні, заданої рівнянням $z = z(x;y)$.
4. Дайте означення поверхневих інтегралів другого роду та загального поверхневого інтеграла другого роду.
5. Що називають потоком векторного поля $\overline{F}$ через поверхню *П*?
6. На скільки частин потрібно розбити сферу, щоб обчислити заданий на ній поверхневий інтеграл другого роду (загальний поверхневий інтеграл)?

Приклади розв'язування задач

Приклад 8.1. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\Pi} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ по нижній стороні круга $x^2+y^2 \leq 5^2$.



Розв'язання. Для наочності виконаємо рисунок. В даній задачі поверхня *П* співпадає із своєю проекцією на площину *XOY*:

$$D_{xy} = П - \text{круг } x^2+y^2 \leq 5^2.$$

Оскільки одиничний вектор нормалі $\overline{n}$ направлено вниз, то $\overline{n} = -\overline{k}$. Значить, кут $\gamma = \pi$, тому $\cos\gamma = \cos\pi = -1 < 0$. За формулою переходу від поверхневого інтеграла другого роду до подвійного, маємо:

$$\iint_{П}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=-\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\left|\begin{matrix} x=\rho\cdot\cos\varphi, & y=\rho\cdot\sin\varphi, & \sqrt{x^2+y^2}=\rho,\\ 0\le\varphi\le2\pi, & 0\le\rho\le5, & dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{matrix}\right|=$$

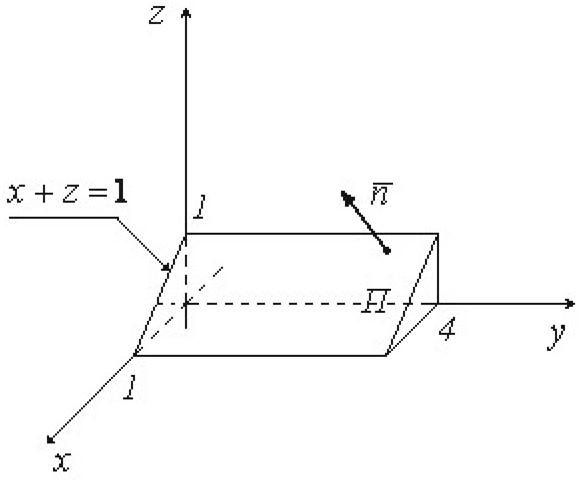
$$=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^5\rho^2d\rho=-\int_0^{2\pi}[\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^5]d\varphi=-\frac{125}{3}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{250}{3}\pi.$$

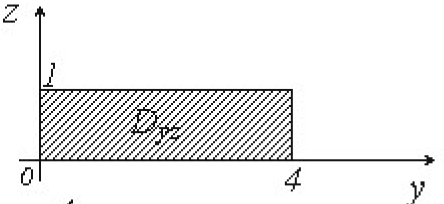
Приклад 8.2. Обчислити поверхневий інтеграл

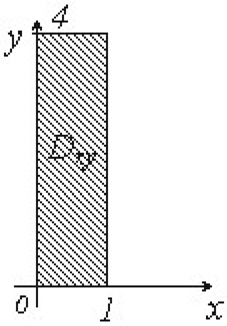
$$\iint_{П}(2x+y-z)dydz+ydxdz+2zdxdy,$$

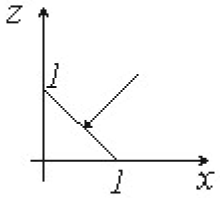
де *П* – верхня сторона частини площини $x+z-1=0$, вирізана площинами $y=0$ і $y=4$ у першому октанті.

Розв'язання. Спочатку виконаємо рисунок.









І спосіб. За означенням поверхневого інтеграла другого роду маємо

$$\iint_{П}(2x+y-z)dydz+ydxdz+2zdxdy=\pm\iint_{D_{yz}}(2x+y-z)dydz\pm\iint_{D_{xz}}ydxdz\pm\iint_{D_{xy}}2zdxdy=$$

$$=\left\|\begin{matrix} x+z=1,\Rightarrow & \perp\overline{N}=(1;0;1), & |\overline{N}|=\sqrt{2}\Rightarrow & \overline{n}=(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})\\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}>0, & \cos\beta=0, & \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}>0 & \end{matrix}\right|=$$

$$=\iint_{D_{yz}}(2x+y-z)dydz+\iint_{D_{xz}}ydxdz+\iint_{D_{xy}}2zdxdy.$$

Так як площина $x+z=1$ паралельна осі *OY*, то її проекцією D_{xz} буде відрізок, а значить $\iint_{D_{xz}}ydxdz=0$ (пл. $D_{xz}=0$). Обчислимо два інші доданки:

$$\iint_{Dyz}(2x+y-z)dydz=|\,x=1-z\,|=\iint_{Dyz}(2(1-z)+y-z)dydz=\int_0^4dy\int_0^1(2+y-3z)dz=$$

$$=\int\limits_0^4[(2z+yz-\frac{3}{2}z^2)\Big|_0^1]dy=\int\limits_0^4(\frac{1}{2}+y)dy=(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^4=10.$$

$$\iint\limits_{D_{xy}}2zdxdy=|\,z=1-x\,|=2\iint\limits_{D_{xy}}(1-x)dxdy=2\int\limits_0^1dx\int\limits_0^4(1-x)dy=8\int\limits_0^1(1-x)dx=$$

$$=8(x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=4.$$

Отже, $\iint\limits_{\Pi}(2x+y-z)dydz+ydxdz+2zdxdy=10+0+4=14.$

II спосіб. Загальний поверхневий інтеграл другого роду обчислимо за допомогою поверхневого інтеграла першого роду. Введемо у розгляд векторну функцію $\overline{F}=(2x+y-z)\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+2z\cdot\overline{k}$ на площині $x+y=1$. Запишемо одиничний нормальний вектор $\overline{n}$ до площини, який складає з віссю OZ гострий кут: $x+z=1,\Rightarrow\perp\overline{N}=(1;0;1),|\overline{N}|=\sqrt{2}$, тому $\overline{n}=\frac{\pm\overline{N}}{|\overline{N}|}=\pm(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Так як $\cos\gamma>0$ по умові, то виберемо у формулі для $\overline{n}$ знак плюс: $\overline{n}=(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})$. Заданий інтеграл подамо, як потік векторного поля $\overline{F}=(2x+y-z)\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+2z\cdot\overline{k}$ через поверхню Π у напрямі вектора $\overline{n}$:

$$\iint\limits_{\Pi}(2x+y-z)dydz+ydxdz+2zdxdy=\iint\limits_{\Pi}(\overline{F}\cdot\overline{n})dS=$$

$$=\iint\limits_{\Pi}[\frac{1}{\sqrt{2}}(2x+y-z)+0\cdot y+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2z]dS=\iint\limits_{\Pi}\frac{2x+y-z}{\sqrt{2}}dS=$$

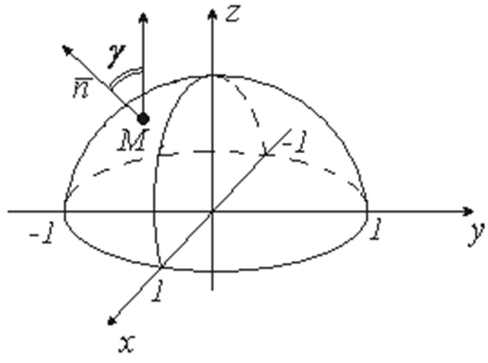
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2x+y-z}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+[z'_x]^2+[z'_y]^2}dxdy=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} z=1-x,\Rightarrow & z'_x=-1,\quad z'_y=0\Rightarrow \\ \sqrt{1+[z'_x]^2+[z'_y]^2}=\sqrt{2} & \end{array}\right|=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[2x+y-(1-x)]dxdy=\int\limits_0^1dx\int\limits_0^4(3x+y-1)dy=$$

$$=\int\limits_0^1[(3x+\frac{1}{2}y^2-y)\Big|_0^4]dx=\int\limits_0^1(12x+8)dx=14.$$

Приклад 8.3. Обчислити $\iint\limits_{П} z \cdot \cos\gamma \cdot dS$, де $П$ – верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що розташована над площиною *XOY*.



Розв'язання. За умовою $\cos\gamma > 0$ рівняння верхньої півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Проекцією $П$ на площину *XOY* є круг $D_{xy} : x^2 + y^2 \le 1$, тому

$$\iint\limits_{П} z \cdot \cos\gamma dS = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot dxdy =$$

$$= \begin{vmatrix} x = \rho\cos\phi, & y = \rho\sin\phi, \\ x^2 + y^2 = \rho^2, & dxdy = \rho d\rho d\phi \end{vmatrix} =$$

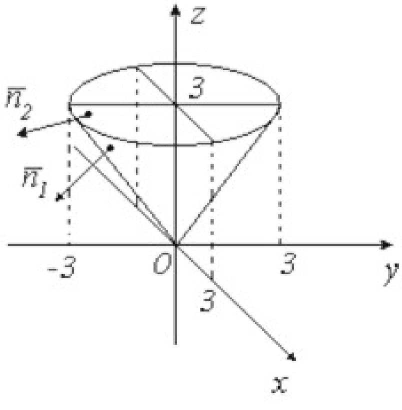
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} [-\frac{(1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}] \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

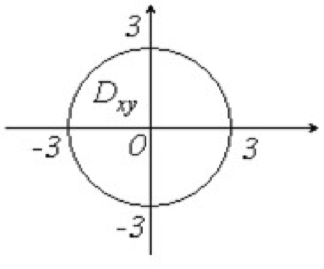
Приклад 8.4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{П} x^2 dydz + \frac{x^2 y^2}{z^2} dxdy$, де $П$ – нижня сторона поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, обмежена площиною $z=3$.

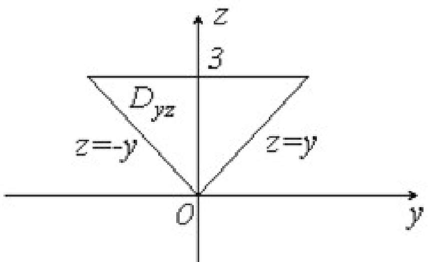
Розв'язання. За означенням:

$$\iint\limits_{П} x^2 dydz + \frac{x^2 y^2}{z^2} dxdy = \iint\limits_{П} x^2 dydz + \iint\limits_{П} \frac{x^2 y^2}{z^2} dxdy.$$

Поверхня $П$ однозначно проектується на площину *XOY*, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а вектор одиничної нормалі утворює з віссю *OZ* тупий кут γ, $\cos\gamma < 0$.







Тому

$$\iint\limits_{П} \frac{x^2 y^2}{z^2} dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \frac{x^2 y^2}{z^2} dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} dxdy =$$

$$=\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi, & y=\rho\sin\varphi, & x^2+y^2=\rho^2, \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi, & 0\le\rho\le 3 \end{matrix}\right|=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 \frac{(\rho\cos\varphi)^2\cdot(\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2}\cdot\rho d\rho=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^3\rho^3 d\rho=-\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{2}\sin 2\varphi)^2 d\varphi\cdot[\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3]=$$

$$=-\frac{3^4}{16}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi=-\frac{81}{16}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=-\frac{81}{32}(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{81}{16}\pi.$$

Поверхня *П* проектується неоднозначно на площину *YOZ* в трикутник D_{yz}.

Розіб'ємо поверхню $\Pi=\Pi_1+\Pi_2$ на дві частини у відповідності до того, як невідома *x* виражається через змінні y і z на поверхні:

$$z^2=x^2+y^2\Rightarrow x^2=-y^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{z^2-y^2}.$$

Візьмемо: $\begin{cases}\Pi_1: x=\sqrt{z^2-y^2}\Rightarrow\cos\alpha>0;\\ \Pi_2: x=-\sqrt{z^2-y^2}\Rightarrow\cos\alpha<0.\end{cases}$

Тоді $\iint\limits_{\Pi}x^2dydz=\iint\limits_{\Pi_1}x^2dydz+\iint\limits_{\Pi_2}x^2dydz=+\iint\limits_{D_{yz}}x^2dydz-\iint\limits_{D_{yz}}x^2dydz=0.$

Остаточно, $\iint\limits_{\Pi}x^2dydz+\frac{x^2y^2}{z^2}dxdy=0-\frac{81}{16}\pi=-\frac{81}{16}\pi.$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 8.1. Обчислити поверхневі інтеграли другого роду.

1. $\iint\limits_{\Pi}-xdydz+zdzdx+(5+2x-3z)dxdy$ по верхній стороні частини площини $2x+3y+z=6$, що лежить у першому октанті.
2. $\iint\limits_{\Pi}(x-y+\frac{3}{2}z)dydz+3xdzdx-(z+1)dxdy$ по зовнішній стороні трикутника, утвореного перетином площин $2x-2y+z-2=0$ з координатними площинами.
3. $\iint\limits_{\Pi}xz^2dxdy$, де *П* – зовнішня частина сфери $x^2+y^2+z^2=4$, розміщена в першому октанті.

4. $\iint\limits_{\Pi} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, де Π – внутрішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, що лежить у першому октанті.

5. $\iint\limits_{\Pi} 2xdydz - ydzdx + (x + 2y - 3z)dxdy$, де Π – зовнішня сторона частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

6. $\iint\limits_{\Pi} (y^2 + z^2)dxdy$, де Π – верхня сторона циліндричної поверхні $z^2 + x^2 = 1$, $0 \le y \le 1$.

7. $\iint\limits_{\Pi} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$, де Π – зовнішня сторона конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$.

8. $\iint\limits_{\Pi} 2xdydz + z^2dxdy$, де Π – нижня сторона частини конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le 1$.

9. $\iint\limits_{\Pi} x^2y^2zdxdy$, де Π – верхня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

10. $\iint\limits_{\Pi} xdydz + x^2z^2dxdy$, де Π – верхня сторона верхньої півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

11. $\iint\limits_{\Pi} xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, де Π – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами: $x + y + z = 2$, $x = 0, y = 0, z = 0$.

12. $\iint\limits_{\Pi} 2x^2dxdy + 3xzdydz - 2yzdxdz$, де Π – внутрішня сторона піраміди, обмеженої площинами: $2x + 3y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.

13. Знайти потік вектора $\overline{F} = x^2 \cdot \overline{i} + x \cdot \overline{j} + x \cdot y \cdot \overline{k}$ через частину поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$, що відтинається площинами $x = 0, y = 0, z = 1$ і орієнтована в напрямі зовнішньої нормалі.

14. Знайти потік вектора $\overline{F} = 2x\overline{i} - y \cdot \overline{j}$ через частину циліндра $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 5$, в напрямі зовнішньої нормалі.

15. Знайти потік вектора $\overline{F} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$ через верхню сторону частини гіперболоїда $z = 2(x^2 - y^2)$, що відтинається площинами: $z = 0, x = 0$, $x = 2$.

§9. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

Основні поняття та теореми

Дослідження скалярних та векторних полів за допомогою диференціального і інтегрального числення функцій багатьох змінних умовно називають векторним аналізом.

Найважливішою формулою математичного аналізу є формула Ньютона-Лейбніца. В цьому параграфі розглянемо формули Гріна, Гаусса-Остроградського і Стокса, які, з однієї сторони, є розвитком формули Ньютона-Лейбніца, а з іншої, в сукупності утворюють найбільш вживану частину векторного аналізу.

Формула Гріна встановлює зв’язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D і криволінійним інтегралом по межі $\Gamma = \partial D$ цієї області.

Межа Γ плоскої області D називається додатно зорієнтованою, якщо її обхід відбувається так, що область залишається зліва.

<u>Формула Гріна</u>. Нехай область D площини XOY обмежена кусково гладкими кривими, а функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ – неперервно диференційовані в D. Якщо межа Γ області D додатно зорієнтована, то має місце співвідношення:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy\,.$$

Наступні теореми узагальнюють формулу Гріна на просторовий випадок. Теорема Остроградського дає вираз інтеграла по об’єму через інтеграл по поверхні, що обмежує цей об’єм.

<u>Формула Гаусса-Остроградського</u>. Якщо функції $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ неперервно диференційовані в просторовій області G, обмеженій кусково гладкими поверхнями Π і зорієнтованими у напрямі зовнішньої нормалі, то

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_\Pi Pdydz + Qdxdz + Rdxdy\,.$$

<u>Теорема Стокса</u> дає вираз поверхневого інтеграла по поверхні П через криволінійний інтеграл по границі $\Gamma = \partial\Pi$ цієї поверхні. Говорять, що контур *Г* обмежує поверхню П, або що <u>поверхня П натягнута на замкнений контур *Г*.</u> Нехай гладка двостороння поверхня *П* натягнута на контур *Г* і зорієнтована в напрямі вектора нормалі $\bar{n}$. <u>Додатній обхід контура *Г*</u> обирається таким чином, щоб поверхня *П* залишалася завжди зліва від спостерігача, який обходить контур так, що вектор нормалі $\bar{n}$ направлений від його ніг до голови спостерігача.

<u>Формула Стокса</u>. Якщо функції $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ неперервно диференційовані на двосторонній поверхні П, обмеженій додатно зорієнтованим контуром *Г*, то

$$\iint\limits_{П}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{Г}Pdx+Qdy+Rdz\,.$$

Означимо основні терміни векторного аналізу.

Векторними лініями поля $\overline{F}$ називають криві, в кожній точці М яких дотична має напрямок вектора $\overline{F}(M)$.

Градієнтом скалярного поля $U=U(x;y;z)$ в точці $M(x;y;z)$ називається вектор $\overline{grad}U(M)=\frac{\partial U}{\partial x}(M)\cdot\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}(M)\cdot\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}(M)\cdot\bar{k}=(U'_x;U'_y;U'_z)_M$.

Позначення $grad$ від латинського слова $gradient$, що означає “схил”. Скалярна функція $U(M)$ називається потенціалом векторного поля $\overline{F}$, якщо в кожній точці М області визначення векторного поля виконується рівність

$$\overline{grad}U(M)=\overline{F}(M)\,.$$

Дивергенцією векторного поля

$$\overline{F}(M)=P(M)\cdot\bar{i}+Q(M)\cdot\bar{j}+R(M)\cdot\bar{k}=(P;Q;R)_M$$

називається скаляр

$$div\overline{F}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)+\frac{\partial Q}{\partial y}(M)+\frac{\partial R}{\partial z}(M)=P'_x(M)+Q'_y(M)+R'_z(M)\,.$$

Позначення div від латинського $divergentia$, що означає “розбіжність”. Вихором (ротором) векторного поля $\overline{F}(M)=P(M)\cdot\bar{i}+Q(M)\cdot\bar{j}+R(M)\cdot\bar{k}$ називається вектор

$$rot\overline{F}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{dx} & \frac{\partial}{dy} & \frac{\partial}{dz}\\ P & R & Q\end{vmatrix}.$$

Позначення rot від латинського $rotare$, що означає "обертати", "повертати".

Формула Гаусса-Остроградського у векторній формі має вид

$$\iiint\limits_{G}div\overline{F}\cdot dxdydz=\oiint\limits_{П}\overline{F}\cdot\bar{n}\cdot dS,$$

тобто, потрійний інтеграл від дивергенції векторного поля $\overline{F}$ по тілу G дорівнює потоку вектора через межу П цього тіла у напрямі зовнішньої нормалі.

Фізичний зміст теореми Остроградського та дивергенції. Нехай $\overline{F}=P\cdot\bar{i}+Q\cdot\bar{j}+R\cdot\bar{k}$ – вектор швидкості рідини, що протікає через тіло G. Під потужністю джерела (стоку) розуміють кількість рідини, яка викидається (забирається) за одиницю часу джерелом (стоком). Рівність нулю потоку поля швидкості рідини через замкнену поверхню означає або відсутність всередині тіла, обмеженого нею, джерел і стоків, або наявність джерел і стоків рівної потужності.

Інваріантне означення дивергенції (не пов'язане з вибором системи координат простору).

Дивергенцією векторного поля $\overline{F}$ в точці M називається границя відношення потоку поля через малу замкнену поверхню Π, що оточує точку M, до об'єму V тіла, обмеженого цією поверхнею, коли діаметр тіла прямує до нуля

$$div\overline{F}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\!\oint_{\Pi}\overline{F}\cdot\overline{n}dS.$$

Векторне поле $\overline{F}(M)$ називається соленоїдним (трубчастим) в області G, якщо його дивергенція дорівнює нулю в кожній точці області, тобто: $div\overline{F}(M)=0$, (.) $\mathrm{M}\in G$.

Якщо в точці M значення $div\overline{F}(M)>0$ ($div\overline{F}(M)<0$), то точку називають джерелом (стоком), а величину $div\overline{F}(M)$ його потужністю.

Векторною трубкою поля $\overline{F}$ називається поверхня, яка утворена векторними лініями, що проходять через деякий замкнений контур.

Характерна властивість соленоїдного векторного поля:

потік соленоїдного поля через поперечні перерізи векторної трубки є величина стала вздовж всієї трубки.

Значення цього потоку називають інтенсивністю (або напругою) векторної трубки.

Формула Стокса у векторній формі має вид

$$\iint_{\Pi}\overline{n}\cdot rot\overline{F}\cdot dS=\oint_{\Gamma}\overline{F}d\overline{l},$$

тобто, потік вихору $rot\overline{F}$ векторного поля $\overline{F}$ через зорієнтовану поверхню Π, натягнуту на контур Γ, дорівнює циркуляції вектора $\overline{F}$ вздовж додатно зорієнтованого контура Γ.

Інваріантне означення ротора поля (не пов'язане з вибором системи координат простору).

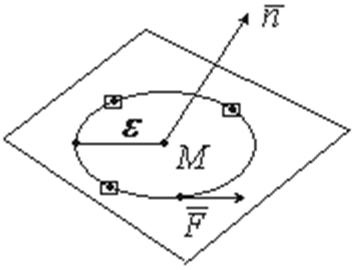
Нехай $\overline{n}$ – довільний фіксований одиничний вектор, D – плоска фігура з межею Γ, що містить точку M і перпендикулярна до $\overline{n}$.

Проекція вихору $rot\overline{F}$ векторного поля $\overline{F}$ на який-небудь напрямок $\overline{n}$ в кожній точці M поля дорівнює відношенню циркуляції по межі Γ плоскої фігури D, яка проходить через точку M перпендикулярно вектору $\overline{n}$, до площі S цієї фігури, коли межа фігури стягується у вказану точку:

$$\overline{n}\cdot rot\overline{F}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{S}\oint_{\Gamma}\overline{F}\cdot d\overline{l}.$$

Оскільки права частина цієї форми не залежить від вибору системи координат, то і проекція $rot\overline{F}(M)$ на довільний напрямок $\overline{n}$ не залежить від вибору вісей. Тоді і сам вектор вихору $rot\overline{F}$ не залежить від обраної системи координат.

Фізичний зміст поняття ротора векторного поля. Нехай D – круг із центром у точці M радіуса ε.



Тоді

$$\overline{n}\cdot rot\overline{F}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\cdot\oint_{\Gamma}\overline{F}\cdot d\overline{l}=$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2\pi\varepsilon}\cdot\oint_{\Gamma}\overline{F}\cdot d\overline{l}=2\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot F_{cep}=2\cdot\omega_n.$$

Отже, кутова швидкість обертання кругового обода з центром у точці M радіуса ε, на який насаджено невагомі крильця, у векторному полі швидкості рідини визначається за формулою:

$$\omega_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{n}\cdot rot\overline{F}(M),$$

де $\overline{n}$ вектор одиничної нормалі до площини круга.

А) кутова швидкість ω_n найбільша тоді, коли $\overline{n}$ співпадає із напрямом вектора $rot\overline{F}(M)$;

В) найбільше значення кутової швидкості ω_n дорівнює половині модуля вектора $rot\overline{F}(M)$.

С) якщо $\overline{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості руху рідини через точку М, то $rot\overline{F}(M)=2\cdot\overline{\omega}$.

Точки векторного поля $\overline{F}$, в яких вихор не дорівнює нулю: $rot\overline{F}(M)\neq 0$, називаються вихровими. Векторне поле $\overline{F}$ в області G називається безвихровим, якщо $rot\overline{F}(M)=0$, $M\in G$.

Умови потенціальності векторного поля. Просторова область G називається однозв'язною, якщо на довільну замкнену кусково-гладку криву Γ із області G можна натягнути поверхню, що повністю знаходиться в G (тобто, в множині G знаходиться поверхня, що має цю криву своєю границею).

Теорема. Для того, щоб поле вектора $\overline{F}(M)$, заданого в однозв'язній області G простору, мало потенціал, необхідно і достаньо виконання однієї з наступних трьох умов:

1. Векторне поле $\overline{F}=\overline{F}(M)$ є безвихровим у області G, тобто $rot\overline{F}(M)=0$.
2. Циркуляція векторного поля $\overline{F}$ по довільному кусково-гладкому контуру Γ в області G дорівнює нулю $\oint_{\Gamma}\overline{F}\cdot d\overline{l}=0$.
3. Інтеграл по довільному кусково-гладкому контуру Γ із G, що з'єднує довільні дві точки області G, не залежить від контуру інтегрування.

У цьому випадку різниця $U(B)-U(A)$ потенціальної функції *U(M)* векторного поля $\overline{F}(M)$ дорівнює роботі сили $\overline{F}$ вздовж довільного контуру $\overset{\cup}{AB}$, що з'єднує точки *A* і *B*:

$$\int_A^B \overline{F}d\bar{l} = U(B)-U(A).$$

Основна теорема векторного аналізу. Довільне неперервно диференційоване векторне поле $\overline{F}(M)$ в однозв'язній області *G* може бути єдиним чином (з точністю до векторної сталої) представлено у вигляді суми потенціального $\overline{F}_1(M)$ і соленоїдного $\overline{F}_2(M)$ полів, тобто $\overline{F}=\overline{F}_1(M)+\overline{F}_2(M)$, де $rot\overline{F}_1=\overline{0}$, $div\overline{F}_2=0$.

Контрольні питання і завдання

1. Дайте означення однозв'язної просторової області *G*. Наведіть приклад неоднозв'язної області.
2. Наведіть означення градієнта, дивергенції та ротора.
3. Сформулюйте у векторній формі теореми Гаусса-Остроградського та Стокса.
4. Запишіть у векторній формі теорему Гріна.
5. Поясніть фізичний зміст формул системи рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі:

   а) $div\overline{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$; б) $div\overline{B}=0$;

   в) $rot\overline{E}=-\dfrac{\partial\overline{B}}{\partial t}$; г) $rot\overline{B}=\dfrac{\bar{j}}{\varepsilon_0\cdot C^2}+\dfrac{1}{C^2}\cdot\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial t}$.

   Тут $\rho(M;t)$ – густина електричного заряду, $\bar{j}(M;t)$ – вектор густини електричного струму, $\overline{E}(M;t)$ і $\overline{B}(M;t)$ – вектори напруги електричного і магнітного поля відповідно, ε_0 і *C* – розмірні сталі (при цьому *C* – швидкість світла у вакуумі).

   1. Закон Фарадея стверджує

   $$\oint_{\Gamma}\overline{E}\cdot d\bar{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Pi}\overline{B}\cdot dS,$$

   а саме : електрорушійна сила, що виникає в замкненому провіднику *Г*, який знаходиться у змінному магнітному полі $\overline{B}$, пропорційна швидкості зміни потоку магнітного поля через обмежену контуром *Г* поверхню *П*. Встановіть взаємозв'язок між законом Фарадея та третім рівнянням Максвелла.

2. Закон Ампера стверджує

$$\oint\limits_{Г} \overline{B} \cdot d\overline{l} = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot C^2} \iint\limits_{П} \overline{j} \cdot \overline{n} \cdot dS,$$

а саме: циркуляція напруги, породженої електричним струмом магнітного поля вздовж контуру *Г*, пропорційна силі струму, що протікає через обмежену контуром *Г* поверхню *П*.

Установіть взаємозв'язок закону Ампера з рівнянням Максвелла.

Приклади розв'язування задач

Приклад 9.1. Закон Архімеда. Обчислити результуючу силу тиску однорідної рідини на занурене в неї тіло *G*.

Розв'язання. Декартові координати x, y, z в R^3 оберемо так, щоб площина *XOY* співпала з поверхнею рідини, а вісь *OZ* направимо в бік виходу з рідини. На елемент площі dS поверхні *П* тіла *G*, що знаходиться на глибині z, діє сила тиску $\overline{p} = \rho \cdot g \cdot z \cdot \overline{n} \cdot dS$, де ρ – густина рідини, g – прискорення сили тяжіння, $\overline{n}$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні *П* у точці на елементі dS. Таким чином результуюча сила $\overline{a}$ обчислюється інтегралом

$$\overline{a} = \oiint\limits_{П} \rho \cdot g \cdot z \cdot \overline{n} dS.$$

Нехай $\overline{n}(M) = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = \cos\alpha(M) \cdot \overline{i} + \cos\beta(M) \cdot \overline{j} + \cos\gamma(M) \cdot \overline{k}$, де точка $M(x; y; z) \in П$.

Тоді

$$\overline{a} = \rho g \oiint\limits_{П} (\overline{i} \cdot z \cdot \cos\alpha + \overline{j} \cdot z \cdot \cos\beta + \overline{k} \cdot z \cdot \cos\gamma) dS =$$

$$= \overline{i} \cdot \rho g \oiint\limits_{П} z dy dz + \overline{j} \cdot \rho g \oiint\limits_{П} z dx dz + \overline{k} \cdot \rho g \oiint\limits_{П} z dx dy.$$

Якщо $\overline{F}_1(M) = z \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + 0 \cdot \overline{k} = (z; 0; 0)$, то $div\overline{F}_1(M) = 0$;

$\overline{F}_2(M) = 0 \cdot \overline{i} + z \cdot \overline{j} + 0 \cdot \overline{k} = (0; z; 0)$, то $div\overline{F}_2(M) = 0$;

$\overline{F}_3(M) = 0 \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k} = (0; 0; z)$, то $div\overline{F}_3(M) = 1$.

За теоремою Гаусса-Остроградського

$$\overline{a} = \overline{i} \cdot \rho g \cdot \iiint\limits_{G} 0 \cdot dx dy dz + \overline{j} \cdot \rho g \cdot \iiint\limits_{G} 0 \cdot dx dy dz + \overline{k} \cdot \rho g \cdot \iiint\limits_{G} 1 \cdot dx dy dz = \rho g \cdot V \cdot \overline{k},$$

де V – об'єм тіла *G*; $\rho \cdot V \cdot g = P$ – вага рідини в об'ємі, зайнятому тілом.

Прийшли до закону Архімеда: $\overline{a} = P \cdot \overline{k}$.

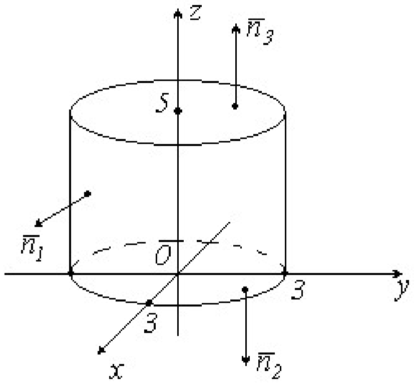
Приклад 9.2. Обчислити потік векторного поля

$$\overline{F} = 4x^3 \cdot \overline{i} + 4y^3 \cdot \overline{j} - 6 \cdot z^4 \cdot \overline{k}$$

через зовнішню сторону повної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 5$.

Розв'язання. Розрахункова формула з теореми Остроградського

$$\oiint\limits_{\Pi} \overline{F} \cdot \overline{n} dS = \iiint\limits_{G} div\overline{F} \cdot dxdydz.$$



Маємо $P(x;y;z) = 4x^3, \Rightarrow P'_x = 12x^2$;

$Q(x;y;z) = 4y^3, \Rightarrow Q'_y = 12y^2$;

$R(x;y;z) = -6z^4, \Rightarrow R'_z = -24z^3$,

тому $div\overline{F} = 12x^2 + 12y^2 - 24z^3$.

Звідси,

$$\oiint\limits_{\Pi} 4x^3 dydz + 4y^3 dxdz - 6z^4 dxdy =$$

$$= 12\iiint\limits_{G} (x^2 + y^2 - 2z^3) dxdydz = 12 \iint\limits_{x^2+y^2 \le 3} dxdy \int_0^5 (x^2 + y^2 - 2z^3) dz =$$

$$= 12 \iint\limits_{x^2+y^2 \le 3} [(x^2 + y^2)z - \frac{1}{2}z^4]\Big|_0^5 dxdy = 12 \iint\limits_{x^2+y^2 \le 3} [5(x^2 + y^2) - \frac{625}{2}] dxdy =$$

$$= \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi, & y = \rho\sin\varphi, \\ x^2 + y^2 = \rho^2, & dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} = 60 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (\rho^2 - \frac{125}{2}) \rho d\rho =$$

$$= 120\pi \cdot (\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{4} \cdot 125\rho^2)\Big|_0^3 = 30\pi \cdot \rho^2(\rho^2 - 125)\Big|_0^3 = -31320\pi.$$

Приклад 9.3. За допомогою формули Остроградського обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\Pi} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, де *П* – зовнішня поверхня конуса

$$z^2 = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}, \ 0 \le z \le 1.$$

Розв'язання. Розглянемо повну поверхню конуса $z = \sqrt{\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}}$, $z = 1$ і зорієнтуємо її в напрямі зовнішньої нормалі.

Вектор нормалі $\overline{n}_1$ направлений зовні до конічної поверхні, а вектор $\overline{n}_2(0;0;1)$ – перпендикуляр до площини $z = 1$.

За теоремою Остроградського

$$\iiint\limits_{G} div\overline{F} dxdydz = \iint\limits_{\Pi} \overline{F} \cdot \overline{n}_1 dS + \iint\limits_{\Pi_2} \overline{F} \cdot \overline{n}_2 dS.$$

Так як $\overline{F} = x^2 \cdot \overline{i} + y^2 \cdot \overline{j} + z^2 \cdot \overline{k}$, то $div\overline{F} = 2x + 2y + 2z$ і

$$\overline{F} \cdot \overline{n}_2 = (x^2; y^2; z^2) \cdot (0;0;1) = z^2 .$$

Отже $\iint\limits_{П} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = 2\iiint\limits_{G} (x + y + z) dxdydz - \iint\limits_{П_2} z^2 \cdot dS$.

Із міркувань симетрії

$$\iiint\limits_{G} x \cdot dxdydz = \iiint\limits_{G} y \cdot dxdydz = 0,$$

$$\iiint\limits_{G} z \cdot dxdydz = \iint\limits_{\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\le 1} dxdy \int\limits_{\sqrt{\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}}}^{1} zdz = \frac{1}{2} \iint\limits_{\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\le 1} (z^2 \Big|_{\sqrt{\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}}}^{1}) dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\le 1} [1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2}] dxdy.$$

Перейдемо до узагальненої полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \rho \cos\varphi, & \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = \rho^2, \quad dxdy = 6 \cdot \rho d\rho d\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ y = 3 \cdot \rho \cdot \sin\varphi, & \qquad I(\rho;\varphi) = \rho, \qquad\qquad 0 \le \rho \le 1. \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{G} zdxdydz = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} (1 - \rho^2) \cdot 6 \cdot \rho d\rho = 6\pi (\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}) \Big|_{0}^{1} = \frac{3}{2}\pi.$$

Поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{П_2} z^2 dS = \iint\limits_{П_2} 1 \cdot dS = \text{пл.}\{\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \le 1\} = 2 \cdot 3 \cdot \pi = 6\pi.$$

Остаточно, $\iint\limits_{П} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = 2 \cdot \frac{3}{2}\pi - 6\pi = -3\pi$.

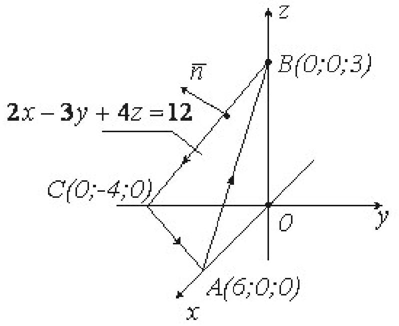
Приклад 9.4. Обчислити циркуляцію *Ц* векторного поля

$$\overline{F} = xy \cdot \overline{i} + yz \cdot \overline{j} + xz \cdot \overline{k}$$

вздовж лінії перетину площини *П*: $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ з координатними площинами, обхід якої узгоджений з верхньою стороною *П*.

Розв'язання. Розглянемо верхню сторону площини *П*, а також відповідний цій стороні додатній напрям обходу замкненої лінії *ABCA*.

Маємо $P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$, тому



$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz \end{vmatrix} +$$

$$+ \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xy & yz \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot (\frac{\partial xz}{\partial y} - \frac{\partial yz}{\partial z}) - \overline{j} \cdot (\frac{\partial xz}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial z}) + \overline{k} \cdot (\frac{\partial yz}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial y}) = -y \cdot \overline{i} - z \cdot \overline{j} - x \cdot \overline{k},$$

вихор $rot\overline{F}$ векторного поля $\overline{F}$ має координати $rot\overline{F} = (-y; -z; -x)$.

Застосувавши формулу Стокса, отримуємо

$$Ц = + \iint\limits_{\Delta BCO} -ydydz - \iint\limits_{\Delta BAO} -zdxdz + \iint\limits_{\Delta AOC} -xdxdy,$$

Знаходимо

$$- \iint\limits_{\Delta BCO} ydydz = -\int_{-4}^{0} dy \int_{0}^{3+\frac{3}{4}y} ydz = -\int_{-4}^{0} (yz \Big|_{0}^{3+\frac{3}{4}y})dy = -\int_{-4}^{0} (3y + \frac{3}{4}y^2)dy =$$

$$= -(\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^3) \Big|_{-4}^{0} = 8,$$

$$\iint\limits_{\Delta BAO} zdxdz = \int_{0}^{6} dx \int_{0}^{3-\frac{1}{2}x} zdz = \frac{1}{2}\int_{0}^{6} (3 - \frac{1}{2}x)^2 dx = -\frac{1}{3}(3 - \frac{1}{2}x)^3 \Big|_{0}^{6} = 9,$$

$$- \iint\limits_{\Delta AOC} xdxdy = -\int_{0}^{6} dx \int_{\frac{2}{3}x-4}^{0} xdy = \int_{0}^{6} x(\frac{2}{3}x - 4)dx = (\frac{2}{9}x^3 - 2x^2)\Big|_{0}^{6} = -24.$$

Значить, $Ц = 8 + 9 - 24 = -7$.

Приклад 9.5. Користуючись формулою Стокса, обчислити циркуляцію *Ц* векторного поля $\overline{F} = x \cdot \overline{i} + xz \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$ по контуру *Г*, утвореному перетином поверхні *П*: $z^2 = 4 - x - y$ з площинами координат (обхід контуру *Г* узгоджено з верхньою стороною поверхні *П*).

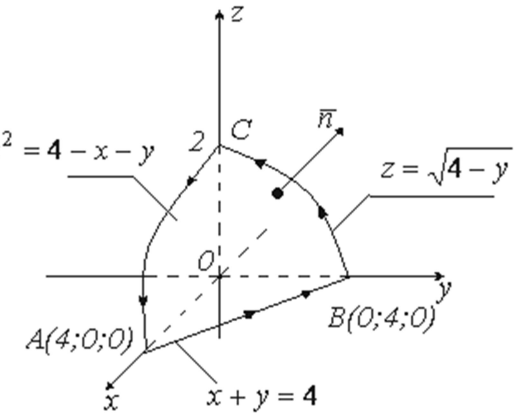
Розв'язання. Спочатку знайдемо вихровий вектор даного поля $\overline{F} = (x; y; z)$:

$$rot\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & xz & z\end{vmatrix}=-x\cdot\overline{i}+z\cdot\overline{k},\Rightarrow rot\overline{F}=(-x;0;z).$$

Підставимо у формулу Стокса:

$$Ц=\oint\limits_{A\breve{B}C}xdx+xzdy+zdz=\oint\limits_{Г}xdx+xzdy+zdz=$$

$$=\iint\limits_{П}-xdydz+zdxdy=\iint\limits_{П}z\cdot dxdy-\iint\limits_{П}xdydz.$$



Обчислимо поверхні інтеграли через подвійні інтеграли по проекціях П на координатні площини ($\cos\alpha>0,\cos\beta>0,\cos\gamma>0$):

$$\iint\limits_{П}zdxdy=+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{4-x-y}dxdy=\int\limits_0^4dx\int\limits_0^{4-x}(4-x-y)^{\frac{1}{2}}dy=-\frac{2}{3}\int\limits_0^4[(4-x-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{4-x}]dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^4(4-x)^{\frac{3}{2}}dx=-\frac{4}{15}(4-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\frac{128}{15}.$$

$$\iint\limits_{П}xdydz=+\iint\limits_{D_{yz}}(4-y-z^2)dydz=\int\limits_0^4dy\int\limits_0^{\sqrt{4-y}}(4-y-z^2)dz=$$

$$=\int\limits_0^4[(4-y)z-\frac{z^3}{3}]\Big|_0^{\sqrt{4-y}}dy=\frac{2}{3}\int\limits_0^4(4-y)^{\frac{3}{2}}dy=-\frac{4}{15}(4-y)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\frac{128}{15}.$$

Значить, циркуляція $Ц=\frac{128}{15}-\frac{128}{15}=0$.

Приклад 9.6. Покажіть потенційність векторного поля $\overline{F}=(x^2-2xy)\cdot\bar{i}+(y^2-2xz)\cdot\bar{j}+(z^2-2xy)\cdot\bar{k}$ і знайдіть його потенціал.

Розв'язання. Так як $P=x^2-2yz,\quad Q=y^2-2xz,\quad r=z^2-2xy,$ то вектор вихору

$$rot\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (x^2-2xy) & (y^2-2xz) & (z^2-2xy)\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(-2x+2x)-\bar{j}\cdot(-2y+2y)+\bar{k}\cdot(-2z+2z)=\bar{0}.$$

Таким чином задане векторне поле є потенційним. Оскільки робота потенційного поля $\overline{F}$ не залежить від конуру, вздовж якого вона виконується і визначається лише приростом потенційної функції $U(x;y;z)$ в кінечних точках A і B цього шляху, то контур $\overset{\cup}{AB}$ можна обирати довільним чином. Зазвичай в якості такого контуру береться ламана *ABCD*, ланки якої *AC, CD* і *DC* паралельні вісям координат. У цьому випадку формула обчислення потенціалу має вид:

$$U(x;y;z)=\int_A^B Pdx+Qdy+Rdz=\int_{x_0}^{x}P(x;y_0;z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x;y;z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x;y;z)dz,$$

де $\overline{AC}(x-x_0;0;0)$, $\overline{CD}(0;y-y_0;0)$, $\overline{DB}(0;0;z-z_0)$.

Застосуємо цю формулу в нашій задачі:

$$U(x;y;z)=\int_{x_0}^{x}(x^2-2y_0\cdot z_0)dx+\int_{y_0}^{y}(y^2-2x\cdot z_0)dy+\int_{z_0}^{z}(z^2-2xy)dz=$$

$$=(\frac{1}{3}x^3-2xy_0z_0)\Big|_{x_0}^{x}+(\frac{1}{3}y^3-2xyz_0)\Big|_{y_0}^{y}+(\frac{1}{3}z^3-2xyz)\Big|_{z_0}^{z}=$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz-[\frac{1}{3}(x_0{}^3+y_0{}^3+z_0{}^3)-2x_0y_0z_0].$$

Позначимо через C_0 сталу величину $-\frac{1}{3}(x_0{}^3+y_0{}^3+z_0{}^3)+2x_0y_0z_0=C_0$.

Отже потенціал векторного поля $\overline{F}$ дорівнює

$$U(x;y;z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C_0.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 9.1. Обчислити інтеграли за допомогою формули Гаусса-Остроградського.

1. $\oiint\limits_{П} xzdydz+xydxdz+xzdxdy$, де *П* – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y+4z=12$.

2. $\oiint\limits_{П} 2x(z-1)dydz - 5xdxdz + 3yzdxdy$, де $П$ – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 3x-2y+z=6$.

3. $\oiint\limits_{П} (3x+2)dydz + (4-y)dxdz + (2z-1)dxdy$, де $П$ – повна зовнішня поверхня циліндра $x^2+y^2=4$, $-3 \le z \le 5$.

4. $\oiint\limits_{П} (2x-1)dydz + (3y+2)dxdz + (5-z)dxdy$, де $П$ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

5. $\oiint\limits_{П} x^2dydz + y^2dxdz + (3z^2-5)dxdy$, де $П$ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=4$.

6. $\oiint\limits_{П} yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, де $П$ – зовнішня сторона поверхні, розміщеної в першому октанті і обмеженої циліндром $x^2+y^2=4$ і площинами $z=0,\ z=3,\ y=0,\ x=0$.

7. $\oiint\limits_{П} y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$, де $П$ – зовнішня сторона поверхні, розміщеної в першому октанті і обмеженої параболоїдом $z=x^2+y^2$, циліндром $x^2+y^2=1$ і координатними площинами.

8. $\iint\limits_{П} (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$, де $П$ – зовнішня сторона конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, де $0 \le z \le 3$.

9. $\iint\limits_{П} (x^2+1)dydz - 2y^2dxdz + (2z^2-3)dxdy$, де $П$ – зовнішня сторона верхньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

Завдання 9.2. Застосовуючи формулу Стокса обчислити інтеграли.

1. $\oint\limits_{Г} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, де $Г$ – контур ΔABC з вершинами $A(3;0;0)$, $B(0;4;0),\ C(0;0;2)$.

2. $\oint\limits_{Г} (z^2+y)dx + zdy + (x^2-y)dz$, де $Г$ – контур ΔABC з вершинами $A(-2;0;0),\ B(0;3;0),\ C(0;0;6)$.

3. $\oint\limits_{Г} x^2y^3dx + dy + zdz$, де $Г$ – коло $x^2+y^2=5^2$, $z=0$.

4. $\oint\limits_{Г} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, де $Г$ – коло $x^2+y^2+z^2=4$, $x+y+z=0$.

Завдання 9.3. Обчислити циркуляцію вектора $\overline{F}$ вздовж Γ за формулою Стокса.

1. $\overline{F} = yz \cdot \overline{i} + xz \cdot \overline{j} + xy \cdot \overline{k}$, $\Gamma: \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$.
2. $\overline{F} = (z - x) \cdot \overline{i} + (x - z) \cdot \overline{j} + (y - x) \cdot \overline{k}$, $\Gamma: \{x^2 + y^2 = 4,\ y = 1\}$.
3. $\overline{F} = (z^2 - x^2) \cdot \overline{i} + (x^2 - y^2) \cdot \overline{j} + (y^2 - z^2) \cdot \overline{k}$, $\Gamma: \{x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2\}$.
4. $\overline{F} = xy \cdot \overline{i} + yz \cdot \overline{j} + zx \cdot \overline{k}$, $\Gamma: \{x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$.
5. $\overline{F} = z \cdot \overline{i} + x \cdot \overline{j} + y \cdot \overline{k}$, $\Gamma: \{x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x + y + z = 3\}$.

Завдання 9.4. Встановіть потенційність та соленоїдність векторного поля $\overline{F}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $U(x;y;z)$.

1. $\overline{F} = (-2x - yz) \cdot \overline{i} + (-2y - xz) \cdot \overline{j} + (-2z - xy) \cdot \overline{k}$.
2. $\overline{F} = (2x + 5yz) \cdot \overline{i} + (2y + 5xz) \cdot \overline{j} + (2z + 5xy) \cdot \overline{k}$.
3. $\overline{F} = \dfrac{-zy}{(x - yz)^2} \cdot \overline{i} + \dfrac{zx}{(x - yz)^2} \cdot \overline{j} + \dfrac{xy}{(x - yz)^2} \cdot \overline{k}$.
4. $\overline{F} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \overline{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \overline{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \overline{k}.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Обчислити криволінійні інтеграли 1-го роду.

1. $\int\limits_L (x^{4/3} + y^{4/3})dl$, де L – астроїда $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$
2. $\int\limits_L kx^2 dl$, L: $y = \ln x,\ 1 \le x \le e$.
3. $\int\limits_L xyds$, L: чверть кола $x^2 + y^2 = 1$, що лежить в першому квадранті.
4. $\int\limits_L (x + y)dl$, L: $x = t,\quad y = t,\quad z = \sqrt{R^2 - 2t^2},\quad 0 \le t \le \dfrac{R}{2}.$
5. $\int\limits_L (x + y)dl$, L: $\Delta AOB : A(1;0),\ B(0;1)$.
6. $\int\limits_L y^2 dl$, L – арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$
7. $\int\limits_L x^2 yds$, L: $x = 4\cos t,\quad y = \sin 2t,\quad x \ge 0,\ y \ge 0$.

8. $\int\limits_L (4x^2 - y^2)ds$, L: $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t$.

9. $\int\limits_L xyds$, L: $x = t - \sin t,\quad y = 1 - \cos t,\quad t \in [0; 2\pi]$.

10. $\int\limits_L zdl$, L – конічна гвинтова лінія $x = t\cos t,\quad y = t\sin t,\quad z = t,\quad 0 \le t \le t_0$.

11. $\int\limits_L xdl$, L – дуга параболи $y = x^2$ від $A(0;0)$ до $B(1;1)$.

12. $\int\limits_L (2x - z^2 y)ds$, L: $x = \dfrac{t^2}{2},\quad y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}},\quad z = t,\quad 0 \le t \le 1$.

13. $\int\limits_L xdl$, L – ланцюгова лінія $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\quad 0 \le x \le \ln 2$.

14. $\int\limits_L \dfrac{dl}{x - y}$, L – відрізок прямої $y = \dfrac{x}{2} - 2$ між точками $A(0;-2),\ B(4;0)$.

15. $\int\limits_L \dfrac{y}{\sqrt{x}}dl$, L – дуга напівкубічної параболи $y^2 = \dfrac{4}{9}x^3,\quad x_A = 3,\quad x_B = 8$.

16. $\int\limits_L \dfrac{x\ln x}{\sqrt{1 + x^2}}dl$, L : $y = \ln x,\quad x_1 = 1,\quad x_2 = \sqrt{2}$.

17. $\int\limits_L \dfrac{2x(1 + x^2)e^{x^2}}{\sqrt{1 + (1 + x^2)^2}}dl$, L: $y = arctgx,\quad A(0;0),\quad \mathrm{B}(1;\dfrac{\pi}{4})$.

18. $\int\limits_L \dfrac{xe^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}dl$, L: $y = e^{-x},\quad 0 \le x \le \ln 2$.

19. $\int\limits_L \dfrac{y}{x}dl$, L: $y = \dfrac{x^2}{2},\quad 1 \le x \le 2$.

20. $\int\limits_L (1 + x^2)dl$, L: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases},\quad 0 \le t \le 2\pi$.

21. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dl$, L – перший виток гвинтової лінії $x = 3\cos t,\quad y = 3\sin t,\quad z = 4t,\quad 0 \le t \le 2\pi$.

22. $\int\limits_L \dfrac{dl}{x - y}$, L – відрізок прямої $y = \dfrac{1}{3}x - 3$ між точками $A(0;-3),\quad B(9;0)$.

23. $\int\limits_L \dfrac{kdl}{y}$, L: $y = chx,\quad 0 \le x \le 2$.

24. $\int\limits_L \frac{dl}{(x^2-y^2)^2}$, L – частина кола $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $0\le t\le \frac{\pi}{6}$.

25. $\int\limits_L xyzdl$, L – дуга кривої $\begin{cases} x=t, \quad y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3} \\ z=\frac{1}{2}t^2, \quad 0\le t\le 1. \end{cases}$

Завдання 2. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду.

1. $\int\limits_L (x^2-y)dx-(x-y^2)dy$, вздовж дуги L кола $x=5\cos t, \quad y=5\sin t$, обхід відбувається проти годинникової стрілки від точки $A(5;0)$ до точки $B(0;5)$.

2. $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, де L – верхня половина еліпса $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, що пробігається проти годинникової стрілки.

3. $\int\limits_L ydx+\frac{x}{y}dy$, де L – дуга кривої $y=e^{-x}$ від точки $(0;1)$ до точки $(-1;e)$.

4. $\int\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy$ вздовж ламаної $L= OAB$, де $O(0;0), A(2;0), B(4;5)$.

5. $\int\limits_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, де L – дуга астроїди $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t$ від точки $A(a;0)$ до точки $B(0;a)$.

6. $\int\limits_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ вздовж межі L трикутника ABC, обхід відбувається проти годинникової стрілки, якщо $A(1;0), B(1;1), C(0;1)$.

7. $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$, де L – дуга першої арки циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, що проходить в напрямі зростання параметра t.

8. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ вздовж дуги L параболи $y=x^2$ від $A(-1;1)$ точки $B(1;1)$ до точки.

9. $\int\limits_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ взятий вздовж кола $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ проти годинникової стрілки.

10. $\int\limits_L (x^2+y)dx-(y^2+x)dy$ вздовж ламаної $L=ABC$, де $A(1;2), B(1;5), C(3;5)$.

11. $\int\limits_L (x^2y-3x)dx+(y^2x+2y)dy$ вздовж верхньої половини еліпса $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, $0\le t\le \pi$.

12. $\int\limits_L xydx$, L – синусоїда $y=\sin x$ між точками $A(\pi;0), B(0;0)$.

13. $\int\limits_L (e^x+xy)dx+(e^y-x)dy$, де L – відрізок прямої AB від точки $A(2;1)$ до точки $B(0;0)$.

14. $\int\limits_L (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, де L – крива $x=t, y=t^2, z=t^3, 0\le t\le 1$, що пробігається в напрямі зростання параметра t.

15. $\int\limits_L \frac{ydx-xdy}{x^2}$ вздовж відрізка прямої від точки $A(2;1)$ до точки $B(1;2)$.

16. $\int\limits_L (xy-y^2)dx+xdy$ вздовж дуги параболи $y=2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.

17. $\int\limits_L xydx+yzdy+z^2xdz$, де L: $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t, \; 0\le t\le \frac{\pi}{2}. \\ z=2 \end{cases}$

18. $\int\limits_L \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вздовж прямої від точки $A(1;0)$ до точки $B(6;8)$.

19. $\int\limits_L xydx+yzdy+zxdz$, де L: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t, \quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}. \\ z=1 \end{cases}$

20. $\int\limits_L \frac{y^2+1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$ вздовж відрізка прямої від точки $A(1;2)$ до точки $B(2;4)$.

21. $\int\limits_L (x+3y)dx+(y+3x)dy$, де L – дуга параболи $x=\frac{1}{2}y^2$ від точки $A(1;\sqrt{2})$ до точки $B(2;2)$.

22. $\int\limits_L ydx+zdy+xdz$, де L – виток гвинтової лінії $x=\cos t,\; y=\sin t,\; z=t,\; 0\le t\le 2\pi$.

23. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx+xdy$ вздовж дуги L кривої $y=\ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;1)$.

24. $\int\limits_L -xydx+\frac{y^2}{2}dy$, де L – частина кривої $y=x^4$ від точки $(-1;1)$ до точки $(1;1)$.

25. $\int\limits_L ydx - xdy$ вздовж кола $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, обхід відбувається по ходу годинникової стрілки від точки $A(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$ до точки $B(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Завдання 3. Знайти роботу сили *F* при переміщенні вздовж лінії *L* від точки *M* до точки *N*.

1. $\overline{F} = (x^2 - 2y)\overline{i} + (y^2 - 2x)\overline{j},\ L: M(-4;0),\ \ N(0;2)$.
2. $\overline{F} = (x^2 + 2y)\overline{i} + (y^2 + 2x)\overline{j},\ L: M(-4;0),\ \ N(0;2)$.
3. $\overline{F} = (x^2 + 2y)\overline{i} + (y^2 + 2x)\overline{j},\ L: 2 - \frac{x^2}{8} = y,\ M(-4;0), N(0;2)$.
4. $\overline{F} = (x + y)\overline{i} + 2x\overline{j},\ L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ M(2;0),\ \ N(-2;0)$.
5. $\overline{F} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j},\ L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2},\ M(2;0),\ \ N(0;2)$.
6. $\overline{F} = (x + y)\overline{i} + (x - y)\overline{j},\ L: y = x^2,\ M(-1;1),\ \ N(1;1)$.
7. $\overline{F} = x^2 y\overline{i} - y\overline{j},\ L: M(-1;0),\ \ N(0;1)$.
8. $\overline{F} = (2xy - y)\overline{i} + (x^2 + x)\overline{j},\ L: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ M(3;0),\ \ N(-3;0)$.
9. $\overline{F} = (x + y)\overline{i} + (x - y)\overline{j},\ L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2},\ M(1;0),\ \ N(0;3)$.
10. $\overline{F} = y\overline{i} + x\overline{j},\ L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ M(1;0),\ \ N(-1;0)$.
11. $\overline{F} = (x^2 + y^2)\overline{i} + (x^2 - y^2)\overline{j},\ L: y = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, 1 \le x \le 2 \end{cases},\ M(2;0),\ \ N(0;0)$.
12. $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j},\ L: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi\ \ , M(\sqrt{2};0),\ \ N(-\sqrt{2};0)$.
13. $\overline{F} = xy\overline{i} + 2y\overline{j},\ L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ M(1;0),\ \ N(0;1)$.
14. $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j},\ L: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ M(\frac{1}{\sqrt{2}};0),\ \ N(-\frac{1}{\sqrt{2}};0)$.
15. $\overline{F} = (x^2 + y^2)(\overline{i} + 2\overline{j}),\ L: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ M(R;0),\ \ N(-R;0)$.
16. $\overline{F} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\overline{i} + (x - y\sqrt{x^2 + y^2})\overline{j}, L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le \pi, M(1;0), N(-1;0)$.
17. $\overline{F} = x^2 y\overline{i} - xy^2\overline{j},\ L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ M(2;0),\ \ N(0;2)$.

18. $\overline{F}=(x+y\sqrt{x^2+y^2})\overline{i}+(x-y\sqrt{x^2+y^2})\overline{j},\ L:\begin{cases}x=4\cos t\\ y=4\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\ M(4;0),\ N(0;4)$.

19. $\overline{F}=y^2\overline{i}-x^2\overline{j},\ L:\begin{cases}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\ M(3;0),\ N(0;3)$.

20. $\overline{F}=(x^2+y^2)\overline{i}-(x^2+y^2)\overline{j},\ L:M(1;0),\ N(0;1)$.

21. $\overline{F}=(x^2+y^2)\overline{i}+y^2\overline{j},\ L:M(2;0),\ N(0;2)$.

22. $\overline{F}=x^2\overline{j},\ L:\begin{cases}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\ M(3;0),\ N(0;3)$.

23. $\overline{F}=(y^2-y)\overline{i}+(2xy+x)\overline{j},\ L:\begin{cases}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\pi,\ M(3;0),\ N(-3;0)$.

24. $\overline{F}=xy\overline{j},\ L:y=\sin x,\ M(\pi;0),\ N(0;0)$.

25. $\overline{F}=(xy-y^2)\overline{i}+x\overline{j}, L:y=2x^2, M(0;0), N(1;2)$.

Завдання 4. Змінити порядок інтегрування.

1. $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}fdx$.

2. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0}fdx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0}fdx$.

3. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{y}fdx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}}fdx$.

4. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}fdx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}}fdx$.

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0}fdy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{x}^{0}fdy$.

6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}}dy\int\limits_{0}^{\arcsin y}fdx+\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1}dy\int\limits_{0}^{\arccos y}fdx.$

7. $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{-y}}fdx$.

8. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0}fdx+\int\limits_{1}^{e}dy\int\limits_{-1}^{-\ln y}fdx$.

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}}fdy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{x^2}fdy$.

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}fdy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}fdy.$

11. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{1-x^2}^{1}fdy+\int\limits_{1}^{e}dx\int\limits_{\ln x}^{1}fdy$.

12. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}}fdx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{0}^{2-y}fdx$.

13. $\int\limits_{0}^{\pi/4}dy\int\limits_{0}^{\sin y}fdx+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}dy\int\limits_{0}^{\cos y}fdx$.

14. $\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-(2+x)}^{0}fdy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0}fdy$.

15. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}fdx+\int\limits_{1}^{e}dy\int\limits_{\ln y}^{1}fdx$.

16. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0}fdx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0}fdx$.

17. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^0 fdx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 fdx$.

18. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} fdx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} fdx$.

19. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 fdy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^0 fdy$.

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^0 fdx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^0 fdx$.

21. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y fdx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 fdx$.

22. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} fdy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} fdy$.

23. $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} fdy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} fdy$.

24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 fdx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_y^0 fdx$.

25. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} fdy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} fdy$.

Завдання 5. Обчислити подвійний інтеграл.

1. $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.

2. $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2$.

3. $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3$.

4. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}$.

5. $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.

6. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2$.

7. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}$.

8. $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3$.

9. $\iint\limits_D (4xy + 3x^2y^2)dxdy; \quad D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.

10. $\iint\limits_D (12xy + 9x^2y^2)dxdy; \quad D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2$.

11. $\iint\limits_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy; \quad D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3$.

12. $\iint\limits_D (24xy+18x^2y^2)dxdy; \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

13. $\iint\limits_D (12xy+27x^2y^2)dxdy; \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

14. $\iint\limits_D (8xy+18x^2y^2)dxdy; \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2$.

15. $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2)dxdy; \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

16. $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy+9x^2y^2)dxdy; \quad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3$.

17. $\iint\limits_D (24xy-48x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

18. $\iint\limits_D (6xy+24x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$.

19. $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3$.

20. $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=x^6, y=-\sqrt[3]{x}$.

21. $\iint\limits_D (44xy+16x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

22. $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2$.

23. $\iint\limits_D (xy-4x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

24. $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)dxdy; \quad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3$.

25. $\iint\limits_D (6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4)dxdy; \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл.

1. $\iiint\limits_V xdxdydz; \quad V: y=10x, y=0, x=1, z=xy, z=0$.

2. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8})^4}; \quad V: \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1, x=0, y=0, z=0$.

3. $\iiint\limits_V 15(x^2+z^2)dxdydz; \quad V: z=x+y, x+y=1, x=0, y=0, z=0$.

4. $\iiint\limits_V (3x+4y)dxdydz; \quad V: y=x, y=0, x=1, z=5(x^2+y^2), z=0$.

5. $\iiint\limits_V (1+2x^3)dxdydz; \quad V: y=9x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0.$

6. $\iiint\limits_V (27+54y^3)dxdydz; \quad V: y=x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0.$

7. $\iiint\limits_V ydxdydz; \quad V: y=15x, y=0, x=1, z=xy, z=0.$

8. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3})^5}; \quad V: \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1, x=0, y=0, z=0.$

9. $\iiint\limits_V (3x^2+y^2)dxdydz; \quad V: z=10y, x+y=1, x=0, y=0, z=0.$

10. $\iiint\limits_V (15x+30z)dxdydz; \quad V: z=x^2+3y^2, z=0, y=x, y=0, x=1.$

11. $\iiint\limits_V (4+8z^3)dxdydz; \quad V: y=x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0.$

12. $\iiint\limits_V (1+2x^3)dxdydz; \quad V: y=36x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0.$

13. $\iiint\limits_V 21xzdxdydz; \quad V: y=x, y=0, x=2, z=xy, z=0.$

14. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3})^6}; \quad V: \frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1, x=0, y=0, z=0.$

15. $\iiint\limits_V (x^2+3y^2)dxdydz; \quad V: z=10y, x+y=1, x=0, y=0, z=0.$

16. $\iiint\limits_V (60y+90z)dxdydz; \quad V: y=x, y=0, x=1, z=x^2+y^2, z=0.$

17. $\iiint\limits_V (\frac{10}{3}x+\frac{5}{3})dxdydz; \quad V: y=9x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0.$

18. $\iiint\limits_V (9+18z)dxdydz; \quad V: y=4x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0.$

19. $\iiint\limits_V 3y^2dxdydz; \quad V: y=2x, y=0, x=2, z=xy, z=0.$

20. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6})^4}; \quad V: \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1, x=0, y=0, z=0.$

21. $\iiint\limits_V x^2 dxdydz; \quad V: z=10(x+3y), x+y=1, x=0, y=0, z=0.$

22. $\iiint\limits_V (8y+12z)dxdydz; \quad V: y=x, y=0, x=1, z=3x^2+2y^2, z=0.$

23. $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})dxdydz$; $V: y=x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0$.

24. $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz$; $V: y=x, y=0, x=1, z=30x^2+60y^2, z=0$.

25. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16})^5}$; $V: \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1, x=0, y=0, z=0$.

Завдання 7. Знайти об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями.

1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \frac{9}{2}z=x^2+y^2$.

2. $z=15\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}, z=\frac{17}{2}-x^2-y^2$.

3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{255}}$.

4. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, z=1, x^2+y^2=1$.

5. $z=\sqrt{\frac{16}{9}-x^2-y^2}, 2z=x^2+y^2$.

6. $z=3\sqrt{x^2+y^2}, z=10-x^2-y^2$.

7. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$.

8. $z=\sqrt{100-x^2-y^2}, z=6, x^2+y^2=51$.

9. $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, z=\frac{23}{2}-x^2-y^2$.

10. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}, 6z=x^2+y^2$.

11. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{80}}$.

12. $z=\sqrt{81-x^2-y^2}, z=5, x^2+y^2=45$.

13. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \frac{3}{2}z=x^2+y^2$.

14. $z=6\sqrt{x^2+y^2}, z=16-x^2-y^2$.

15. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$.

16. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, z=4, x^2+y^2=39$.

17. $z=\sqrt{144-x^2-y^2}, 18z=x^2+y^2$.

18. $z=3\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, z=\frac{5}{2}-x^2-y^2$.

19. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}$.

20. $z=\sqrt{49-x^2-y^2}, z=3, x^2+y^2=33$.

21. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, 9z=x^2+y^2$.

22. $z=9\sqrt{x^2+y^2}, z=22-x^2-y^2$.

23. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{55}}$.

24. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, z=2, x^2+y^2=27$.

25. $z=\sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2}, z=x^2+y^2$.

Завдання 8. Обчислити поверхневі інтеграли 1-го роду.

1. $\iint\limits_S \frac{ds}{(1+x+y)^2}$, де S – частина площини $x+y+z=1$, розташованої в першому октанті.

2. $\iint\limits_S yds$, де S – на півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3. $\iint\limits_S x^2y^2ds$, де S – чверть сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, розташованої в 1-му октанті.

4. $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, де S – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

5. $\iint\limits_S \frac{ds}{r^2}$, де S – циліндр $x^2+y^2=a^2$, обмежений площинами $z=0, z=h$, а r – відстань від точки до початку координат.

6. $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, де S: $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

7. $\iint\limits_S xyzds$, де S – частина поверхні $z^2=x^2+y^2$ при $z\le 1$.

8. $\iint\limits_S zds$, де S – частина поверхні $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ при $z\le 1$.

9. $\iint\limits_S \frac{z}{a}ds$, де S – на півсфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ при $z\ge 0$.

10. $\iint\limits_S zds$, де S – на півсфера $x^2+y^2+z^2=9, z\ge 0$.

11. $\iint\limits_S (x-2z)ds$, де S – частина площини $x+y+z=1$, розміщеної в 1-му октанті.

12. $\iint\limits_S (xy+15(x+y))ds$, де S – частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вирізаної циліндром $x^2+y^2=2x$.

13. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}ds$, де S – бічна поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0, 0\le z\le b$.

14. $\iint\limits_S zds$, де S – частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}, 1\le z\le 2$.

15. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)ds$, де S – поверхня конуса $x^2+y^2=z^2$, вирізана циліндром $x^2+y^2=1$.

16. $\iint\limits_S (6x+4y+3z)ds$, де S – частина площини $x+2y+3z=6$, розташованої в першому октанті.

17. $\iint\limits_S (y+z+\sqrt{a^2-x^2})ds$, де S – поверхня циліндра, заключного між площинами $z=0, z=h$.

18. $\iint\limits_S (x-y+z)ds$, де S – частина площини $2x+y+8z=4$, розташованої в першому октанті.

19. $\iint\limits_S (x2+y2+z)ds$, де S – поверхня, обмежена частиною параболоїда $2z=x2+y2$ та площиною $z=3$.

20. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}ds$, де S – бічна поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=0, 0\le z\le b$.

21. $\iint\limits_S (2x+\frac{4}{3}y+z)ds$, де S – частина площини $6x+4y+3z=12$, яка лежить у першому октанті.

22. $\iint\limits_S yzds$, де S – частина поверхні $3z=x^2+y^2$, розташованої між площинами $z=0, z=3$.

23. $\iint\limits_S xy^2ds$, де S – верхня частина сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

24. $\iint\limits_S (2x-3y+4z)ds$, де S – частина площини $2x-3y+z=6$, розташованої в четвертому октанті.

25. $\iint\limits_S xyzds$, де S – бічна поверхня конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площиною $z=5$.

Завдання 9. Обчислити поверхневий інтеграл 2-го роду по зовнішній стороні поверхні *S*.

1. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+zdxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=2$.

2. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz-zdxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=4$.

3. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+2zdxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=3$.

4. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+z^3dxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=1$.

5. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+xyzdxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=5$.

6. $\iint\limits_\sigma (x-y)dydz+(x+y)dxdz+z^2dxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=2$.

7. $\iint\limits_\sigma (x+y)dydz-(x-y)dxdz+xyzdxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=2$.

8. $\iint\limits_\sigma (x^3+xy^2)dydz+(y^3+x^2y)dxdz+z^2dxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=3$.

9. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+\sin zdxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=5$.

10. $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+dxdy, S: x^2+y^2=1, z=0, z=1$.

11. $\iint\limits_\sigma (x+xy^2)dydz+(y-yx^2)dxdz+(z-3)dxdy, S: x^2+y^2=z^2 (z\geq 0), z=1$.

12. $\iint\limits_\sigma ydydz-xdxdz+dxdy, S: x^2+y^2=z^2 (z\geq 0), z=4$.

13. $\iint\limits_\sigma xydydz-x^2dxdz+3dxdy, S: x^2+y^2=z^2 (z\geq 0), z=1$.

14. $\iint\limits_\sigma xzdydz+yzdxdz+(z^2-1)dxdy, S: x^2+y^2=z^2 (z\geq 0), z=4$.

15. $\iint\limits_\sigma y^2xdydz-yx^2)dxdz+dxdy, S: x^2+y^2=z^2 (z\geq 0), z=5$.

16. $\iint\limits_{\sigma}(xz+y)dydz+(yz-x)dxdz+(z^2-2)dxdy,\ S: x^2+y^2=z^2(z\geq 0),\ z=3$.

17. $\iint\limits_{\sigma}xyzdydz-x^2z)dxdz+3dxdy,\ S: x^2+y^2=z^2(z\geq 0),\ z=2$.

18. $\iint\limits_{\sigma}(x+xy)dydz+(y-x^2)dxdz+(z-1)dxdy,\ S: x^2+y^2=z^2(z\geq 0),\ z=3$.

19. $\iint\limits_{\sigma}(x+y)dydz+(y-x)dxdz+(z-2)dxdy,\ S: x^2+y^2=z^2(z\geq 0),\ z=2$.

20. $\iint\limits_{\sigma}xdydz+ydxdz+(z-2)dxdy,\ S: x^2+y^2=z^2(z\geq 0),\ z=1$.

21. $\iint\limits_{\sigma}(x+xz)dydz+ydxdz+(z-x^2)dxdy,\ S: x^2+y^2+z^2=4(z\geq 0),\ z=0$.

22. $\iint\limits_{\sigma}xdydz+(y+yz^2)dxdz+(z-zy^2)dxdy,\ S: x^2+y^2+z^2=4,\ z=0(z\geq 0)$.

23. $\iint\limits_{\sigma}(x+z)dydz+(y+z)dxdz+(z-x-y)dxdy,\ S: x^2+y^2+z^2=4,\ z=0(z\geq 0)$.

24. $\iint\limits_{\sigma}(x+xy)dydz+(y-x^2)dxdz+zdxdy,\ S: x^2+y^2+z^2=1,\ z=0(z\geq 0)$.

25. $\iint\limits_{\sigma}(x+z)dydz+ydxdz+(z-x)dxdy,\ S: x^2+y^2+z^2=1,\ z=0(z\geq 0)$.

Завдання 10. Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через частину площини P, розташованої в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю OZ).

1. $\bar{a}=7x\bar{i}+(5\pi y+2)\bar{j}+4\pi z\bar{k},\ P: x+\dfrac{y}{2}+4z=1$.

2. $\bar{a}=2\pi x\bar{i}+(7y+2)\bar{j}+7\pi z\bar{k},\ P: x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

3. $\bar{a}=9\pi x\bar{i}+\bar{j}-3z\bar{k},\ P: \dfrac{x}{3}+y+z=1$.

4. $\bar{a}=(2x+1)\bar{i}-y\bar{j}+3\pi z\bar{k},\ P: \dfrac{x}{3}+y+2z=1$.

5. $\bar{a}=7x\bar{i}+9\pi y\bar{j}+\bar{k},\ P: x+\dfrac{y}{3}+z=1$.

6. $\bar{a}=\bar{i}+5y\bar{j}+11\pi z\bar{k},\ P: x+y+\dfrac{z}{3}=1$.

7. $\bar{a}=x\bar{i}+(\pi z-1)\bar{k},\ P: 2x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

8. $\bar{a}=5\pi x\bar{i}+(9y+1)\bar{j}+4\pi z\bar{k},\ P: \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1$.

9. $\overline{a}=2\overline{i}-y\overline{j}+\frac{3\pi}{2}z\overline{k}, P:\frac{x}{3}+y+\frac{z}{4}=1.$

10. $\overline{a}=9\pi x\overline{i}+(5y+1)\overline{j}+2\pi z\overline{k}, P:3x+y+\frac{z}{9}=1.$

11. $\overline{a}=7\pi x\overline{i}+2\pi y\overline{j}+(7z+2)\overline{k}, P:x+y+\frac{z}{2}=1.$

12. $\overline{a}=\pi y\overline{j}+(4-2z)\overline{k}, P:2x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1.$

13. $\overline{a}=(3\pi-1)x\overline{i}+(9\pi y+1)\overline{j}+6\pi z\overline{k}, P:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{9}=1.$

14. $\overline{a}=\pi x\overline{i}+\frac{\pi}{2}y\overline{j}+(4-2z)\overline{k}, P:x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1.$

15. $\overline{a}=(5y+1)\overline{j}+11\pi z\overline{k}, P:x+\frac{y}{3}+4z=1.$

16. $\overline{a}=9\pi y\overline{j}+(7z+1)\overline{k}, P:x+y+z=1.$

17. $\overline{a}=\pi y\overline{j}+(1-2z)\overline{k}, P:\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+z=1.$

18. $\overline{a}=(21\pi-1)x\overline{i}+(34\pi y+3)\overline{j}+20\pi z\overline{k}, P:3x+\frac{y}{3}+z=1.$

19. $\overline{a}=\pi x\overline{i}+2\overline{j}+2\pi z\overline{k}, P:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1.$

20. $\overline{a}=4\pi x\overline{i}+7\pi y\overline{j}+(2z+1)\overline{k}, P:2x+\frac{y}{3}+2z=1.$

21. $\overline{a}=3\pi x\overline{i}+6\pi y\overline{j}+10\overline{k}, P:2x+y+\frac{z}{3}=1.$

22. $\overline{a}=\pi x\overline{i}-2y\overline{j}+\overline{k}, P:2x+\frac{y}{6}+z=1.$

23. $\overline{a}=(21\pi-1)x\overline{i}+62\pi y\overline{j}+(1-2\pi z)\overline{k}, P:8x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$

24. $\overline{a}=\pi x\overline{i}+2\pi y\overline{j}+2\overline{k}, P:\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1.$

25. $\overline{a}=9\pi x\overline{i}+2\pi y\overline{j}+8\overline{k}, P:2x+8y+\frac{z}{3}=1.$

Завдання 11. Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через замкнену поверхню S за формулою Остроградського-Гаусса (нормаль зовнішня).

1. $\overline{a}=7x\overline{i}+x\overline{j}+xz\overline{k}, S:\begin{cases} z=x^2+y^2, z=1 \\ x=0, y=0, \text{(1 октант)}. \end{cases}$

2. $\overline{a}=(x^2+y^2)\overline{i}+(y^2+x^2)\overline{j}+(y^2+z^2)\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0, z=1.\end{cases}$

3. $\overline{a}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\x^2+y^2=z^2(z\geq 0).\end{cases}$

4. $\overline{a}=x^2\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\z=0(z\geq 0)\end{cases}$

5. $\overline{a}=xz\overline{i}+z\overline{j}+y\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=1-z\\z=0\end{cases}$

6. $\overline{a}=3xz\overline{i}-2x\overline{j}+y\overline{k}, S:\begin{cases}x+y+z=2, x=1\\x=0, y=0, z=0\end{cases}$

7. $\overline{a}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\z=0(z\geq 0)\end{cases}$

8. $\overline{a}=x^3\overline{i}+y^3\overline{j}+z^3\overline{k}, S: x^2+y^2+z^2=1$

9. $\overline{a}=(zx+y)\overline{i}+(zy-x)\overline{j}-(x^2+y^2)\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\z=0(z\geq 0)\end{cases}$

10. $\overline{a}=y^2x\overline{i}+z^2y\overline{j}+x^2z\overline{k}, S: x^2+y^2+z^2=1$

11. $\overline{a}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x=0, y=0, z=0(\text{перший октант})\end{cases}$

12. $\overline{a}=x^2\overline{i}+y\overline{j}+3z\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\z=4\end{cases}$

13. $\overline{a}=(zx+y)\overline{i}+(xy-z)\overline{j}+(x^2+yz)\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=2\\z=0, z=1\end{cases}$

14. $\overline{a}=xy^2\overline{i}+x^2y\overline{j}+z\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=1, z=0, z=1\\x=0, y=0(\text{перший октант})\end{cases}$

15. $\overline{a}=xy\overline{i}+yz\overline{j}+zx\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=16\\x^2+y^2=z^2(z\geq 0)\end{cases}$

16. $\overline{a}=3x^2\overline{i}-2x^2y\overline{j}+(2x-1)z\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0, z=1\end{cases}$

17. $\overline{a}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+2z\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{4}\\z=0, z=2\end{cases}$

18. $\overline{a}=xy\overline{i}+yz\overline{j}+xz\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=0, z=1\end{cases}$

19. $\overline{a}=xy\overline{i}+yz\overline{j}+zx\overline{k}, S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x=0, y=0, z=0(\text{перший октант})\end{cases}$

20. $\overline{a} = z\overline{i} + yz\overline{j} - xy\overline{k},\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0, z = 1 \end{cases}$

21. $\overline{a} = (zx + y)\overline{i} - (2y - x)\overline{j} - (x^2 + y^2)\overline{k},\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0(z \ge 0) \end{cases}$

22. $\overline{a} = (x^2 + xy)\overline{i} + (y^2 + yz)\overline{j} + (z^2 + xz)\overline{k},\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2(z \ge 0) \end{cases}$

23. $\overline{a} = 3x^2\overline{i} - 2x^2 y\overline{j} + (1 - 2x)\overline{k},\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0, z = 1 \end{cases}$

24. $\overline{a} = x^2\,\overline{i},\ S:\begin{cases} z = 1 - x - y \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$

25. $\overline{a} = (y^2 + xz)\overline{i} + (yx - z)\overline{j} + (yz + x)\overline{k},\ S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0, z = \sqrt{2} \end{cases}$

Завдання 12. Перевірити, чи є векторне поле $\overline{F} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$ потенційним і соленоїдальним. У випадку потенційності поля $\overline{F}$ знайти його потенціал.

1. $\overline{F} = x^2\overline{i} - x\cos^2 y\overline{j} + z\overline{k}$.
2. $\overline{F} = (6x + 7yz)\overline{i} + (6y + 7xz)\overline{j} + (6z + 7xy)z\overline{k}$.
3. $\overline{F} = xy\overline{i} - yz\overline{j} + \ln z\overline{k}$.
4. $\overline{F} = (8x - 5yz)\overline{i} + (8y - 5xz)\overline{j} + (8z - 5xy)z\overline{k}$.
5. $\overline{F} = xy\overline{i} + y^2\overline{j} + xz\overline{k}$.
6. $\overline{F} = (10x - 3yz)\overline{i} + (10y - 3xz)\overline{j} + (10z - 3xy)z\overline{k}$.
7. $\overline{F} = (x - y)\overline{i} + xy\overline{j} - yz^2 z\overline{k}$.
8. $\overline{F} = (12x + yz)\overline{i} + (12y + xz)\overline{j} + (12z + xy)z\overline{k}$.
9. $\overline{F} = tgx\overline{i} - x^2 y\overline{j} + (x + z)z\overline{k}$.
10. $\overline{F} = (4x - 7yz)\overline{i} + (4y - 7xz)\overline{j} + (4z - 7xy)z\overline{k}$.
11. $\overline{F} = (x^2 + y^2)\overline{i} + x^2 y^2\overline{j} + z^2 z\overline{k}$.
12. $\overline{F} = (x + 2yz)\overline{i} + (y + 2xz)\overline{j} + (z + 2xy)z\overline{k}$.
13. $\overline{F} = (x + y)\overline{i} - x\overline{j} + yz\overline{k}$.
14. $\overline{F} = (5x + 4yz)\overline{i} + (5y + 4xz)\overline{j} + (5z + 4xy)z\overline{k}$.
15. $\overline{F} = x^2 y\overline{i} + z\overline{j} - y^2 z\overline{k}$.
16. $\overline{F} = (7x - 2yz)\overline{i} + (7y - 2xz)\overline{j} + (7z - 2xy)z\overline{k}$.
17. $\overline{F} = (x^2 - y^2)\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.
18. $\overline{F} = (3x - yz)\overline{i} + (3y - xz)\overline{j} + (3z - xy)z\overline{k}$.
19. $\overline{F} = x\overline{i} + xy\overline{j} - z^2 z\overline{k}$.

20. $\overline{F} = (9x + 5yz)\overline{i} + (9y + 5xz)\overline{j} + (9z + 5xy)z\overline{k}$.

21. $\overline{F} = (x^2 - 2yz)\overline{i} + (y^2 - 2xz)\overline{j} + (z^2 - 2xy)z\overline{k}$.

22. $\overline{F} = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})\overline{i} + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2})\overline{j} - \frac{xy}{z^2}\overline{k}$.

23. $\overline{F} = (yze^x + ze^y + ye^z)\overline{i} + (xze^y + ze^x + xe^z)\overline{j} + (xye^z + ye^x + xe^y)z\overline{k}$.

24. $\overline{F} = (2xyz + y^2z + yz^2)\overline{i} + (2xyz + x^2z + xz^2)\overline{j} + (2xyz + x^2y + xy^2)z\overline{k}$.

25. $\overline{F} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xyz\overline{k}$.

ГЛАВА VIII. РЯДИ

§1. СУМА РЯДУ. КРИТЕРІЙ КОШІ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ

Основні поняття та теореми

Числовий ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *збіжним***,** якщо існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (сума ряду), де

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \text{ – частинна сума ряду.}$$

Ряд $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ називається n–м *залишком* ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Має місце рівність $S = S_n + r_n$.

Теорема 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і його сума S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ також збігається, і його сума дорівнює $c \cdot S$.

Теорема 2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються і їх суми дорівнюють S_1 і S_2, то ряд, одержаний почленним додаванням, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається, і його сума $S = S_1 + S_2$

Теорема 3. Для того, щоб ряд $a_1 + a_2 + a_3 ... + a_n + ...$ був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ характеризувалась такою властивістю: яким би не було $\varepsilon > 0$, існує таке n, що при довільному $m \ge 0$

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$$

Теорема 4. (Еквівалентне формулювання критерія Коші). Для збіжності числового ряду необхідно і достатньо, щоб усі достатньо далеко розташовані відрізки цього ряду були як завгодно малі.

Звідси слідує *необхідна ознака збіжності ряду*: якщо ряд збіжний, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Контрольні питання та завдання

1. Збіжний ряд має скінченну суму. Що можна сказати про суму розбіжного ряду?

2. Використовуючи визначення суми ряду, дослідити, при яких значеннях q збігається геометрична прогресія: $a+aq+aq^2+...$
3. Дослідити на збіжність ряд, члени якого утворюють арифметичну прогресію.
4. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ збігається, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ розбігається. Що можна сказати про збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)$?
5. Чи змінюється збіжність (розбіжність) ряду, якщо в ньому змінити скінченне число членів?
6. Довести, що, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n = a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}$, $(p_1 = 1; p_1 < p_2 < ...)$, одержаний в результаті групування членів даного ряду, без порушення їх слідування, також збігається і має ту ж суму.
7. Використовуючи критерій Коші, на даному прикладі ряду показати, що необхідна ознака не є достатньою:
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+...+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...\frac{1}{n}}_{n\text{ раз}}...$$
8. Чи можна стверджувати, що послідовність $\{S_n\}$ частинних сум збіжного ряду обмежена?
9. Наведіть приклад розбіжного числового ряду з обмеженими частинними сумами.

Приклади розв'язування задач

У цьому пункті наведені приклади розв'язування задач про знаходження суми числового ряду, основані на визначенні суми ряду, як границі частинних сум. При даному розв'язанні важливо знайти «просту» формулу для S_n.

Приклад 1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член ряду $a_n = \dfrac{14}{49n^2-70n-24}$.

Оскільки $49n^2-70n-24=0$ при $n_1=-\frac{2}{7}$, $n_2=\frac{12}{7}$ то
$$49n^2-70n-24=49\left(n+\frac{2}{7}\right)\left(n-\frac{12}{7}\right)=(7n+2)(7n-12).$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів, запишемо a_n, як суму двох найпростіших дробів:

$$\frac{14}{(7n+2)(7n-12)}=\frac{M}{7n+2}+\frac{N}{7n-12}=\frac{M(7n-12)+N(7n+2)}{(7n+2)(7n-12)}$$

Звідси $14=(7M+7N)n+2N-12M$. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, маємо

$$\begin{array}{r|l} n^1 & 0=7M+7N \\ n^0 & 14=2N-12M \end{array} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} M+N=0; \\ -6M+N=7; \end{cases} \quad \Rightarrow \mathrm{M}=-1;\mathrm{N}=1.$$

Тому $a_n=\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}$, тобто

$$a_1=-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}, a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}, a_3=\frac{1}{9}-\frac{1}{23}, a_4=\frac{1}{16}-\frac{1}{30},\dots .$$

Далі запишемо формулу для частинних сум:

$$S_n=(-\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{23}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{30}\right)+\dots+\left(\frac{1}{7(n-1)-12}-\frac{1}{7(n-1)+2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}.$$

З цього маємо: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}\right)=\frac{3}{10}$.

Таким чином, ряд збігається і його сума дорівнює 0,3.

Приклад 2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+4}$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член ряду $a_n=\frac{1}{n^2+5n+4}$. Оскільки $n^2+5n+4=0$ при $n_1=-1$ і $n_2=-4$, то $n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$. Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів, зобразимо a_n як суму двох найпростіших дробів:

$$\frac{1}{(n+1)(n+4)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+4}=\frac{A(n+4)+B(n+1)}{(n+1)(n+4)}.$$

Звідси $1=A(n+4)+B(n+1)$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, маємо

$$\begin{array}{r|l} n^1 & A+B=0 \\ n^0 & 4A+B=1 \end{array} \;\rightarrow\; A=\frac{1}{3};\; B=-\frac{1}{3}.$$

Тому $a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+4}=\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+12}$.

Тоді частинну суму ряду можна записати так

$$\left.\begin{array}{rr:r:r:r:c:r:r:r:r} \frac{1}{3n+3}: & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{9} & +\frac{1}{12} & +\frac{1}{15} & +\dots+ & +\frac{1}{3n-6} & +\frac{1}{3n-3} & +\frac{1}{3n} & +\frac{1}{3n+3} \\ -\frac{1}{3n+12}: & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{24} & -\dots- & -\frac{1}{3n+3} & -\frac{1}{3n+6} & -\frac{1}{3n+9} & -\frac{1}{3n+12} \end{array}\right\} S_n$$

$$S_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+0+\ldots+0-\frac{1}{3n+6}-\frac{1}{3n+9}-\frac{1}{3n+12}.$$

В цій сумі всі доданки верхнього рядка мають свою "пару" з протилежним знаком у нижньому рядку і взаємно знищуються, окрім перших трьох і останніх трьох. Звідси

$$S_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3n+6}-\frac{1}{3n+9}-\frac{1}{3n+12}=\frac{13}{36}-\frac{1}{3n+6}-\frac{1}{3n+9}-\frac{1}{3n+12}, \text{ а}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13}{36}-\frac{1}{3n+6}-\frac{1}{3n+9}-\frac{1}{3n+12}\right)=\frac{13}{36}.$$

Приклад 3. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n(n^2-1)}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n=\frac{3n-5}{n(n^2-1)}=\frac{3n-5}{n(n-1)(n+1)}$ розкладемо на суму трьох найпростіших дробів, застосувавши метод невизначених коефіцієнтів: $\frac{3n-5}{n(n-1)(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n-1}+\frac{C}{n+1}$.

Звідси $3n-5=A(n^2-1)+Bn(n+1)+Cn(n-1)$

При

$$\begin{array}{ll} n=0 & -5=-A \\ n=-1 & -8=2C \\ n=1 & -2=2B \end{array} \rightarrow \text{A=5; B=-1;C=-4;}$$

Тому $\frac{3n-5}{n(n+1)(n-1)}=\frac{5}{n}-\frac{1}{n-1}-\frac{4}{n+1}$

Тоді частинну суму ряду S_n можна записати так $(n\geq 3)$

$$\left.\begin{array}{rl|c|c|c|c|c|c|c|c} \frac{5}{n}: & & +\frac{5}{3} & +\frac{5}{4} & +\frac{5}{5} & +\ldots+ & +\frac{5}{n-2} & +\frac{5}{n-1} & +\frac{5}{n} & \\ -\frac{1}{n-1}: & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & -\ldots- & -\frac{1}{n-2} & -\frac{1}{n-1} & & \\ -\frac{4}{n+1}: & & & -\frac{4}{4} & -\frac{4}{5} & -\ldots- & -\frac{4}{n-2} & -\frac{4}{n-1} & -\frac{4}{n} & -\frac{4}{n+1} \end{array}\right\}S_n$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+0+0+\ldots+0+0+\frac{1}{n}-\frac{4}{n+1}=S_n.$$

В цій сумі доданки, які розміщено у стовпчиках взаємно знищуються, окрім перших двох і останніх двох стовпчиків. Звідси $S_n=-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{n}-\frac{4}{n+1}=\frac{5}{6}+\frac{1}{n}-\frac{4}{n+1}$, а $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{n}-\frac{4}{n+1}\right)=\frac{5}{6}$.

При розв'язуванні прикладів студенти повинні вміти записати за першими членами ряду формулу загального члена, а також вільно переходити від короткої форми запису до розгорнутої і навпаки.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots$.

Розв'язання. Ряд складений із правильних дробів. Послідовні чисельники – це порядкові номери відповідних дробів. Послідовні знаменники утворюють арифметичну прогресію 2,5,8,11,…, n-ий член якої знаходиться за формулою $b_n = 2 + (n-1)\cdot 3$.

Тому тут $a_n = \dfrac{n}{2+(n-1)\cdot 3} = \dfrac{n}{3n-1}$.

Перевіримо необхідну ознаку:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Таким чином, даний ряд є розбіжним.

Приклад 5. Перевірити, чи виконується необхідна ознака для ряду

$$1+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21\cdot 31}{7!}+\ldots\,.$$

Розв'язання. Послідовні чисельники утворені як добуток членів арифметичної прогресії з різницею 10 і першим членом $a_0 = 1$: 1, 11, 21, 31, ...; n-ий чисельник послідовності знаходимо за формулою $a_0 = 1$, $a_1 = 1\cdot(1+10)$, $a_2 = 1\cdot(1+10)\cdot(1+2\cdot 10),\ldots,\ a_n = 1\cdot(1+10)\cdot(1+2\cdot 10)\ldots(1+n\cdot 10)$.

Послідовні знаменники 1!, 3!, 4!, 5!, ... без урахування знаку факторіала утворюють арифметичну прогресію 1, 3, 5, 7,…; n-ий член цієї прогресії $b_0 = 1, b_n = 2n+1$.

Таким чином, загальний член ряду $u_n = \dfrac{1\cdot 11\cdot 21\cdot\ldots\cdot(1+10n)}{(2n+1)!}$

Покажемо виконання необхідної ознаки. Для цього оцінимо зверху u_n:

$$u_n = \frac{1(1+10)\cdot(1+2\cdot 10)\ldots(1+10n)}{(2n+1)!} \le \frac{1(2\cdot 10)(2\cdot 2\cdot 10)(2\cdot 3\cdot 10)\ldots(2\cdot 10n)}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{20^n\cdot n!}{(2n+1)!} \le \frac{20^n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} \le \frac{20^n}{n^n} = (\frac{20}{n})^n.$$

Очевидно, що при $n \ge 40$ маємо $u_n \le 2^{-n}$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Необхідна ознака виконана. Для з'ясування питання про збіжність ряду необхідно провести додаткові дослідження.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.1. Знайти суму ряду:

1. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots;$
2. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\ldots;$

3. $(1-3^{-2})+(\frac{1}{5}-3^{-4})+\left(\frac{1}{5^2}-3^{-6}\right)+\left(\frac{1}{5^3}-3^{-8}\right)+\ldots;$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n\cdot 2^n}{6^n};$

5. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$

6. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+7n+6};$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n^2+8n-5};$

9. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4-6n}{(n^2-4)n};$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$

Завдання 1.2. Записати ряд у розгорнутому вигляді:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n};$ 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-2)\ln n};$ 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\ln n}.$

Завдання 1.3. Записати ряд, використовуючи знак суми:

1. $\frac{(1!)^2}{2^1}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\frac{(4!)^2}{2^{16}}\ldots;$

2. $\frac{1}{1}-\frac{1}{2^{\ln 2}}+\frac{1}{3^{\ln 2}}-\frac{1}{4^{\ln 2}}+\ldots;$

3. $\sin^3\frac{2\ln 3}{2-3}+\sin^4\frac{2\ln 4}{2-4}+\sin^5\frac{2\ln 5}{2-5}+\sin^6\frac{2\ln 6}{2-6}+\ldots;$

4. $\frac{(1!)^2}{2^1}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\frac{(4!)^2}{2^{16}}\ldots.$

Завдання 1.4. Перевірити виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

1. $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{2^{n-1}+1}{2}+\ldots;$

2. $\operatorname{tg}\frac{1}{1^2+1}+\operatorname{tg}\frac{2}{2^2+1}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{n}{n^2+1}+\ldots;$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n}-1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right)$.

Завдання 1.5. Показати, що для частинних сум гармонічного ряду мають місце нерівності $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2} \quad (n \geq 1)$.

Завдання 1.6. Використовуючи попередній приклад, довести розбіжність ряду

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots\ .$$

§2. ОЗНАКИ ПОРІВНЯННЯ ДЛЯ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Основні поняття та теореми

Перша ознака порівняння. Нехай крім ряду

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

маємо ряд

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (2)$$

Якщо при $n \geq n_0$ виконана нерівність $0 \leq a_n \leq b_n$, то

а) із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1);

б) із розбіжності ряду (1) слідує розбіжність ряду (2);

Друга ознака порівняння: якщо для рядів (1) і (2) відношення $\frac{a_n}{b_n}$ прямує до деякої додатної і скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k > 0 (a_n \sim b_n)$, то ряди (1) і (2) є збіжними або розбіжними одночасно.

Наслідок. Якщо $a_n \sim \frac{1}{n^p}$: а) при $p > 1$ ряд (1) збіжний; при $p \leq 1$ ряд (1) розбіжний.

Контрольні питання та завдання

1. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Чи можна стверджувати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний?

2. Довести, що коли $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.
3. Що означає запис $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ для рядів з $a_n \geq 0$?
4. Відомо, що для деякого ряду з невід'ємними членами частинні суми обмежені. Чи слідує звідси збіжність ряду?
5. Нехай $a_n \leq c_n \leq b_n (n = 1,2,3...)$. Чи слідує із збіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$? Вказівка. Розглянути нерівності $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$.
6. Навести приклад, що підкреслює необхідність умови $a_n \geq 0$ у формулюванні ознаки порівняння збіжності рядів.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n}$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член даного ряду $a_n = \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n}$. Оскільки при $n \to \infty$: $\sqrt{n^3+2} = \sqrt{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} \sim \sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}}$, то порядок зростання чисельника по n дорівнює $\frac{3}{2}$. В силу обмеженості $\sin n$ маємо $(n^2 \sin^2 n \leq n^2)$, а тому порядок знаменника по n не перевищує 2. Отже порядок a_n по n на нескінченності не менший ніж $-\frac{1}{2}$, так як $\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Так як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ розбіжний, то слід сподіватися розбіжності заданого ряду. Для строгого доведення цього наведемо оцінку знизу загального члена a_n через

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad a_n = \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n} > \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 \sin^2 n} > \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 \cdot 1} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи першу ознаку порівняння, звідси одержуємо, що ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{\frac{5}{2}}}$.

Розв'язання. Запишемо загальний член цього ряду. Дослідимо аргумент функції арксинуса. При $n \to \infty$ виконано: $(n^2+3)^{\frac{5}{2}} = n^5\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{5}{2}} \sim n^5$, значить порядок зростання знаменника по n дорівнює 5. Степінь чисельника n дорівнює 1, тому порядок дробу на нескінченності дорівнює $1-5=-4$. В силу першої визначної границі arcsin $x \sim x, x \to 0$. Таким чином,

$$a_n = \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{\frac{5}{2}}} \sim \frac{n}{(n^2+3)^{\frac{5}{2}}} \sim \frac{1}{n^4} = b_n .$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ збіжний $p=4>1$, то за другою ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також є збіжним.

Завдання для роботи в аудиторії

Дослідити на збіжність ряди:

1. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} + \ldots$.
2. $\frac{1}{3} + \frac{2}{11} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{2}{5n+1} + \ldots$.
3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} + \ldots$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(2+(-1)^n)}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc}tg 2(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n)+1}{2^n+1}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2}{n+1}}{\sqrt{n+2}}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg \frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{5n+1}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \ln n}{3^n + \cos n}$.

§3. ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА

Основні поняття та теореми

Теорема. Якщо $a_n > 0 (n = 1,2,3,...)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;

б) при $q > 1$ розбіжний.

Зауваження. При $q = 1$ потрібно провести додаткові дослідження.

Застосовуючи ознаку Даламбера, слід звернути увагу на той факт, що із виконання нерівностей $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ для всіх n, ще не можна робити висновок про збіжність ряду. Наприклад, для гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ маємо $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, але ряд є розбіжним. Зазвичай ознаку Даламбера зручно застосовувати до рядів, загальний член яких містить факторіали або добутки.

Зауваження: При дослідженні рядів, загальний член яких містить крім знаків факторіалу також степінь деякого виразу, інколи зручно застосовувати формулу Стірлінга $n! : \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, $n \to \infty$.

Контрольні питання та завдання

1. Що можна сказати про розбіжність числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$, якщо $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.
2. В даних прикладах знайти $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$:

   а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + ... + \frac{n}{n+1} + ...$;

   б) $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$;

   в) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$.

   Що можна сказати про збіжність ряду, якщо $q = 1$?
3. Чи можна застосувати ознаку Даламбера для загального числового ряду?

4. Нехай для членів ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q_1 < 1 (n \ge k)$. Довести, що для залишку ряду $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ має місце оцінка $r_n \le a_n \frac{q_1^{n+1-k}}{1-q_1}$.
5. Скільки потрібно взяти членів ряду, щоб знайти суму з точністю до 10^{-5}, якщо:
   - а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$;
   - б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n)!}$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$.

Розв’язання. Тут зручно застосовувати ознаку Даламбера. Оскільки

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!} \quad \text{і} \quad a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)(3n+1)}{2^{n+2} \cdot (n+1)!}.$$

То $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)(3n+1)}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1} n!}{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)} = \frac{3n+1}{2(n+1)}$, а границя останнього дробу знаходиться просто: $q = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+2} = \frac{3}{2} > 1$. Отже, ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{4^{3n+2}(n+3)!}$.

Розв’язання. За умовою задачі $a_n = \frac{(2n+1)^n}{4^{3n+2}(n+3)!}$, $\quad a_{n+1} = \frac{(2n+3)^{n+1}}{4^{3n+5}(n+4)!}$.

Звідси $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)^{n+1}}{(2n+1)^n} \cdot \frac{4^{3n+2}}{4^{3n+5}} \cdot \frac{(n+3)!}{(n+4)!} = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n \cdot \frac{2n+3}{n+4} \cdot \frac{1}{4^3}$.

Тоді $\quad q = \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4^3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^n \cdot \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = \frac{2}{4^3} \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} =$

$= \frac{2e}{4^3} < 1$, $\quad$ а значить ряд збіжний.

Завдання для роботи в аудиторії

Дослідити на збіжність ряди:

1. $\frac{1}{5!}+\frac{1}{8!}+...+\frac{n}{(3n+2)!}+...$.
2. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+...+\frac{2\cdot 5...(3n-1)}{1\cdot 5...(4n-3)}+...$.
3. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+...+\frac{1\cdot 3...(2n-1)}{3^n\cdot n!}+...$.
4. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+...+\frac{n^2}{3^n}+...$.
5. $tg\frac{1}{3}+4tg\frac{1}{9}+...+n^2\cdot tg\frac{1}{3^n}+...$.
6. $3\sin\frac{\pi}{4}+3^2\sin\frac{\pi}{4^2}+...+3^n\sin\frac{\pi}{4^n}+...$.
7. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+...+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+...$.
8. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+...+\frac{n!}{n^n}+...$.
9. $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+...+\frac{2^n\cdot n!}{n^n}+...$.
10. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+...+\frac{(n!)^2}{(2n)^2}+...$.

§4. РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ

Основні поняття та теореми

Теорема. Якщо $a_n \geq 0\ (n=1,2,3...)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.

а) $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний;

б) $q>1$ розбіжний.

Зауваження. При $q=1$ потрібно провести додаткові дослідження.

Радикальну ознаку Коші, як правило, зручно застосовувати до рядів, загальний член яких a_n є $n-$ним степенем якого-небудь виразу. Радикальна ознака Коші сильніше ознаки Даламбера у тому, що, якщо ознака Даламбера розв'язує питання про збіжність ряду, то ознака Коші *а)* також розв'язує це питання, а обернене твердження, взагалі кажучи, не є вірним. Наприклад, до числового ряду із загальним членом $a_n=\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ можна застосувати радикальну ознаку $q=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2^{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$, але границя відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n\to\infty$ не існує.

Контрольні питання та завдання

1. Що можна сказати про збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$, якщо

   а) $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$;

   б) $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 (n \ge n_0)$?

2. Для даних числових рядів знайти $q = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$:

   а) $2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \ldots$;

   б) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$;

   в) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$.

   Що можна сказати про збіжність ряду, якщо $q = 1$.

3. Чи можна застосувати ознаку Коші для загального числового ряду?

4. Нехай для членів ряду з додатними членами виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 (n \ge k)$. Показати, що для залишку ряду $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ виконується нерівність $r_n \le \frac{q^n}{1-q} (n \ge k)$.

5. Скільки потрібно взяти членів ряду, щоб знайти суму з точністю до 10^{-5}, якщо:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{1}{n}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}$.

Розв'язання. Маємо $a_n = n^4 arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}$. Тут зручно користуватися радикальною ознакою Коші. Для цього знайдемо

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} n^{\frac{4}{n}} arctg^2 \frac{\pi}{4n} = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{4}{n} \ln n} arctg^2 \frac{\pi}{4n} = e^{4 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln n} \lim_{n \to \infty} \left(arctg \frac{\pi}{4n}\right)^2 =$$

$= e^0 \cdot 0 = 0$. Так як $q = 0 < 1$, то ряд збіжний.

Приклад 2. Скільки потрібно взяти членів ряду, щоб підрахувати його суму з точністю до 10^{-6}: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Оскільки $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, то $\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. В силу другої визначної границі $q=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=e^{-1}<1$, таким чином, ряд збіжний.

Далі скористаємось формулою про оцінку залишку ряду: $r_n<\frac{q^n}{1-q}$. Послідовність $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно зростає, значить $\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\downarrow$. Перейдемо до розв'язання нерівності

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}<10^{-6}\Rightarrow n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^2<10^{-6}\Rightarrow \ln n+n^2\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-6\ln 10.$$

Оскільки $\ln(1+x)\le x$ при $x>-1$, то $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n}$ і значить виконані оцінки $\ln n+n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<\ln n-n<-\frac{n}{2}$. Звідси $-\frac{n}{2}<-6\ln 10\Rightarrow n>12\ln 10\approx 27{,}6$. Тому для досягнення заданої точності при обчисленні суми достатньо взяти 28 членів ряду.

Завдання для роботи в аудиторії

4.1. Дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}3^{-2n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot 3^{-n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot e^{-n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\,\frac{\pi\sqrt{n}}{4n+1}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(3n+2)}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

4.2. Знайти з точністю до 0,01 суму ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^{2n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{8n+5}\right)^{3n+1}$.

§5. ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ

Основні поняття та теореми

Теорема. Якщо функція $f(x)$ $(x \geq 1)$ – додатна, монотонно спадна і $a_n = f(n)$, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ одночасно або збіжні, або розбіжні. Функція $f(x)$, для якої виконуються рівності $f(n) = a_n$, називається інтерполюючою функцією для послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Звичайно в підручниках доведення цієї ознаки наводиться при додатковій умові, що інтерполююча функція $f(x)$ неперервна. Насправді, допущення про неперервність носить лише допоміжний характер і не обмежує загальності.

Контрольні питання та завдання

1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ в залежності від значення параметра p.
2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ в залежності від значення параметра p.
3. Навести приклад числового ряду, що показує необхідність умови додатності інтерполяційної функції (обмеженості її знизу) в інтегральній ознаці Коші.
4. Показати необхідність умови монотонності функції в інтегральній ознаці Коші. Розглянути приклад
$$1\left|\sin\left(\pi + \frac{1}{1^4}\right)\right| + 2\left|\sin\left(2\pi + \frac{1}{2^4}\right)\right| + 3\left|\sin\left(3\pi + \frac{1}{3^4}\right)\right| + ... + n\left|\sin\left(n\pi + \frac{1}{n^4}\right)\right| + ...$$
5. Довести, що коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ збіжний і $f(x) > 0$ монотонно спадна функція, то залишок $r_n = f(n+1) + f(n+2) + ...$ задовольняє нерівностям:
$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx < r_n < \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx .$$

6. Скільки послідовних членів ряду достатньо взяти, щоб знайти його суму з точністю до 10^{-5}, якщо:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}; \qquad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}.$$

Приклади розв'язування задач

Іноді зручно перед тим, як застосувати інтегральну ознаку Коші, оцінити загальний член ряду з метою застосування цієї ознаки до еквівалентного ряду. При дослідженні ряду інтегральну ознаку застосовують, як правило, у тих випадках, коли неможливо застосувати ознаку Даламбера чи радикальну ознаку Коші.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$.

Розв'язання. Ознака Даламбера і радикальна ознака Коші тут не дають відповіді на поставлене запитання. Запишемо загальний член ряду $a_n=\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$ порівняємо його з рядом $b_n=\frac{1}{n\ln(2n)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\cdot n\cdot\ln(2n)}{(n^2-2)\ln(2n)}=3<\infty.$$

Далі застосуємо інтегральну ознаку Коші до ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(2n)}$. Виберемо $f(x)=\frac{1}{x\ln(2x)}$ як інтерполюючу функцію. Легко помітити, що $f(x)>0$, і монотонно спадає при $x\geq 2$. Оскільки $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln(2x)}=\int_2^{\infty}\frac{d(2x)}{(2x)\ln(2x)}=\ln\ln(2x)\Big|_2^{\infty}=\infty$, то інтеграл розбіжний, тому є розбіжним і ряд із b_n. За ознакою порівняння заданий ряд теж розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2\ln 2(\ln\ln 2)^3}+\frac{1}{3\ln 3(\ln\ln 3)^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)[\ln\ln(n+1)]^3}.$$

Розв'язання. Запишемо загальний член ряду

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)[\ln\ln(n+1)]^3}.$$

Застосуємо інтегральну ознаку: $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)[\ln\ln(x+1)]^3}$;

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)[\ln\ln(x+1)]^3}=\int_2^{\infty}\frac{d\ln(x+1)}{\ln(x+1)[\ln\ln(x+1)]^3}=\int_1^{\infty}\frac{d\ln\ln(x+1)}{[\ln\ln(x+1)]^3}=$$
$$=-\frac{1}{2}[\ln\ln(x+1)]^{-2}\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{2}[\ln\ln 2]^{-2}<\infty.$$

Інтеграл збіжний, тому даний ряд теж збіжний.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 5.1. Дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n^2+4)\ln^2(3n)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. 6. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{5n\sqrt{\ln(n-1)}}$.

Завдання 5.2. Знайти суму ряду з точністю до 0,01:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}$. 2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n\ln^{10}n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^4+n^2+1}$.

§6. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. УМОВНА ТА АБСОЛЮТНА ЗБІЖНІСТЬ

Основні поняття та теореми

Числовий ряд $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд $|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|+...$ є збіжним.

Слід відзначити, що всякий абсолютно збіжний ряд є рядом збіжним. Для визначення абсолютної збіжності ряду достатньо застосувати до ряду із модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ відомі ознаки збіжності для додатних рядів.

Збіжний ряд називається *умовно (неабсолютно*) збіжним, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ розбіжний. Знакозмінний ряд називається *знакочергуючим*, якщо знак наступного члена ряду протилежний до знака попереднього члена, тобто $a_n\cdot a_{n+1}<0$.

Ознака Лейбніца. Знакочергуючий ряд $a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n+1}a_n+...(a\geq 0)$ є збіжним, якщо:

$1) a_n\geq a_{n+1}(n=1,2,3,...,n,...);$

$2) \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

Взагалі кажучи, цю ознаку застосовують до абсолютно розбіжних знакочергуючих рядів.

Контрольні запитання і завдання

1. Чи є важливою умова збіжності до нуля абсолютних величин доданків знакозмінного ряду?
2. Навести приклад неабсолютно збіжного ряду.
3. На прикладі $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+...$ показати, що в ознаці збіжності Лейбніца не можна відкинути умову чергування знаків.
4. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, де $b_n > 0$ і $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Чи випливає звідси, що цей ряд є збіжним. Розглянути приклад $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$.
5. Чи можна застосувати ознаку порівняння для незнакосталих рядів, тобто нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$. Чи можна стверджувати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжним? Розглянути приклад $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}]$.
6. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ задовольняє всім умовам теореми Лейбніца. Показати, що для *залишку ряду* $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + ...$, виконана нерівність
$$|r_n| \le a_{n+1}.$$

Приклади розв’язування задач

При дослідженні ряду на абсолютну й умовну збіжність розв’язок потрібно починати з перевірки абсолютної збіжності.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1} tg \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Розв’язання. Для перевірки абсолютної збіжності розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1} tg \frac{1}{\sqrt{n}}$. В силу першої визначної границі tg$\alpha \sim \alpha, \alpha \to 0$ і

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} tg \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n.$$

Тому із розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ випливає, що заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ не є збіжним абсолютно. Перевіримо умову звичайної збіжності. Для цього покажемо, що $a_n \to 0$. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}tg\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Для перевірки монотонності прямування до нуля a_n розглянемо інтерполюючу функцію $f(x)$ послідовності $\{a_n\}$: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}tg\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Функцію $f(x)$ дослідимо на монотонність за допомогою похідної:

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' tg\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x-1}{x+1}\left(tg\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' tg\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2(x^{-\frac{1}{2}})}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$=\frac{2\sqrt{x^3}\cdot 2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-(x^2-1)}{2\sqrt{x^3}(x+1)^2\cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}} \le \frac{2\sqrt{x^3}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}-x^2+1}{2\sqrt{x^3}(x+1)^2\cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{4x-x^2+1}{2\sqrt{x^3}(x+1)^2\cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

При $x>5$ чисельник останнього дробу від'ємний. Значить, функція спадає. Тому заданий ряд умовно збіжний за ознакою Лейбніца.

Приклад 2. Обчислити суму ряду з точністю $\alpha = 0.01$: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(n+1)!}$.

Розв'язання. Складемо ряд із абсолютних величин $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$. Одержаний ряд зручно дослідити за ознакою Даламбера:

$$a_n=\frac{n^2}{(n+1)!},\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)!} \text{ і } \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2(n+1)!}{(n+2)!n^2}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)\cdot n^2}.$$

Звідси $q=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=0<1$, ряд абсолютно збіжний. Відзначимо також, що вихідний ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца $(a_n \ge a_{n+1})$. Для обчислення суми ряду із заданою точністю скористаємось формулою із задачі 6 п.п: $|r_n| \le a_{n+1}$. Знайдемо послідовно числові значення $a_n(n=2,3,4,...)$. І порівняємо їх із точністю $\alpha = 0.01$:

$$a_2=\frac{2^2}{3!}=\frac{2}{3}>0.01;$$

$$a_3=\frac{3^2}{4!}=\frac{3}{8}>0.01;$$

$$a_4=\frac{4^2}{5!}=\frac{2}{15}>0.01;$$

$$a_5=\frac{5^2}{6!}=\frac{5}{144}>0.01;$$

$$a_6=\frac{6^2}{7!}=\frac{1}{140}<0.01.$$

Тому для розв'язку задачі достатньо знайти суму перших чотирьох членів ряду: $S = S_4 = \frac{2}{3} - \frac{3}{8} + \frac{2}{15} - \frac{5}{144} \approx 0{,}38$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 6.1. Дослідити збіжність знакозмінних рядів.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{2^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{(n+100)^2}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n-1}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(3n+1)}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^5}{5^n}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+10}$.

Завдання 6.2. Обчислити суму із заданою точністю α:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1+n^3)^2}, \alpha = 0.001$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}, \alpha = 0.01$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2^n}, \alpha = 0.01$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n-1}}{n+4}, \alpha = 0.1$.

§7. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ

Основні поняття та теореми

Розглянемо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$.

Його членами є функції $u_1(x), u_2(x), \ldots$, що залежать від однієї змінної x. Нехай ці функції мають загальну множину визначення. Для кожного $x = x_0$ із цієї множини функціональний ряд перетворюється у числовий, який може бути збіжним або розбіжним. Сукупність значень x, при яких функціональний ряд є збіжним, називається *областю його збіжності*.

Критерій Коші. Для того, щоб функціональний ряд був збіжним у деякій області, необхідно і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного x, що належить цій області, існувало $N = N(\varepsilon, x)$ таке, що

$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...+f_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$ для всіх номерів $n>N(\varepsilon,x)$ і натуральних чисел p.

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називається *абсолютно збіжним* у деякій області, якщо в цій області є збіжним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right|$.

Для знаходження області абсолютної збіжності функціонального ряду використовують відомі ознаки збіжності числових рядів з додатними членами. У багатьох випадках при дослідженні області збіжності функціонального ряду достатньо розглянути область абсолютної збіжності.

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називається *рівномірно збіжним* на множині D, якщо:

1) ряд збіжний на D: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$;

2) для довільного числа $\varepsilon>0$ можна вказати число $n=n_0(\varepsilon)$ таке, що при $n>n_0$ і $x\in D$: $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$. Тут $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ – часткова сума ряду.

Наступні *властивості функціональних рядів,* що наводяться нижче, аналогічні відомим теоремам про неперервність, диференційованість та інтегрованість суми скінченного числа функцій:

а) сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є функцією неперервною;

б) якщо члени збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ неперервно диференційовані при $a<x<b$, ряд із похідних $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ рівномірно збіжний на інтервалі (a,b), то $S'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ при $x\in(a,b)$;

в) якщо члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ неперервні і цей ряд рівномірно збіжний на скінченному сегменті $[a,b]$, то $\int\limits_a^b S(x)dx\equiv\int\limits_a^b\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx$.

Одна із достатніх ознак збіжності ряду – *ознака Вейєрштраса:* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжний абсолютно і рівномірно на множині D, якщо існує збіжний числовий ряд $c_1 + c_2 + ... + c_n + ...$ такий, що $|u_n(x)| \le c_n$ при $x \in D (n = 1, 2, ...)$.

У даному випадку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *мажорованим* рядом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – *мажорантним* рядом.

Контрольні питання та завдання

1. Навести приклади функціональних рядів.
2. Навести ознаки збіжності числових рядів.
3. Використовуючи поняття геометричної прогресії, визначити область збіжності ряду $1 + e^x + e^{2x} + ... + e^{nx} + ...$.
4. Чи може бути областю збіжності функціонального ряду вся числова вісь або тільки одна точка на ній? Навести приклад таких функціональних рядів.
5. Знайти інтервали збіжності функціональних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

   Як поводять себе ці ряди на кінцях інтервалів збіжності?
6. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно розбіжний за ознакою Даламбера (за радикальною ознакою Коші) у деякій області D. Показати, що у цьому випадку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ буде розбіжний у області D.
7. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – мажорантний ряд для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при $x \in [a, b]$. Показати, що для залишку функціонального ряду $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...$ виконується нерівність $|R_n(x)| \le r_n$, $x \in [a, b]$, де r_n – залишок числового ряду.
8. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ збіжний рівномірно на відрізку $[a, b]$. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ також збіжний рівномірно на цьому відрізку.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

Розв’язання. Члени заданого ряду, при довільному значенні x, за абсолютною величиною, менші відповідних членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. Оскільки одержаний числовий ряд є збіжним, то збіжним є і вихідний ряд при будь-якому значенні *x*. Значить, область збіжності вихідного ряду – вся числова вісь Ox.

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^n}$.

Розв’язання. Застосувавши ознаку Даламбера, одержуємо

$$q(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(2n-1)x^n\right|}{\left|(2n+1)x^{n+1}\right|}=\frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{|x|}.$$

Ряд є збіжним, якщо $\frac{1}{|x|}<1$, тобто при $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Ряд є розбіжним при $x\in(-1;1)$. Дослідимо ряд у точках $x=1$ і $x=-1$. У точці $x=1$одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$, який є розбіжним. У точці $x=-1$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$, який задовольняє умовам теореми Лейбніца, а значить є збіжним. Тоді областю збіжності є сукупність значень $x\in(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

Розв’язання. Будемо використовувати радикальну ознаку Коші. Розглянемо

$$q(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(x+n)}{n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+n}{n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}[\frac{|x|}{n}+1]=$$

$$=|x|\left[\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n}+1\right]=|x|.$$

Ряд є збіжним, якщо $|x|<1$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях одержаного інтервалу збіжності. При $x=1$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left((1+\frac{1}{n}\right)^n$, який є розбіжним, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. При $x=-1$ одержимо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, для якого також не виконується необхідна умова збіжності ряду: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Значить, ряд є розбіжним. Таким чином, областю збіжності є проміжок $(-1;1)$.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 7.1. Знайти область збіжності ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$.
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$.
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5x^{2n}}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{x^{n^n}}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^nx^n}\right)$.

§8. РОЗКЛАД ФУНКЦІЇ В СТЕПЕНЕВИЙ РЯД

Основні поняття та теореми

Сума збіжного степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ є функцією $S(x)$, визначеною в області збіжності D. Кажуть, що степеневий ряд збігається до функції $S(x)$, його позначають $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. Нехай $S_n(x)$ – n-на часткова сума, а $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ – n-ний частковий залишок.

Тоді суму ряду можна записати у вигляді $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$. Для збіжного ряду $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, а $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$ збіжний при $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x|<|x_1|$.

Якщо при $x = x_2$ вказаний ряд збіжний, то він розбіжний всюди, де $|x|>|x_2|$.

Областю збіжності степеневого ряду є інтервал $(-R;R)$, який називають інтервалом збіжності, а число R – радіусом збіжності.

Теорема. Нехай на інтервалі $(-R;R)$ задано збіжний степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nx^n$. Тоді похідна чи інтеграл суми цього ряду на $(-R;R)$ знаходиться за формулами $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nnx^{n-1}$ і $\int\limits_0^x S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

Слід відзначити, що дії почленного інтегрування і диференціювання можна проводити над степеневими рядами на інтервалі збіжності нескінченне число разів.

Якщо функція $f(x)$ – нескінченно диференційована в інтервалі $|x - x_0| < r$, то вона може бути розкладена в цьому інтервалі на збіжний до неї степеневий ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) + ...$$

при цьому для n-ого залишкового члена ряду $R_n(x)$ повинна виконуватися умова: $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

При $x_0 = 0$ одержимо *ряд Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Розклад функції в степеневий ряд можна виконати двома способами. *Першим способом* безпосередньо обчислюються похідні $f^{(n)}(x)$ в т. x_0 та підставляються їх значення у формулу для коефіцієнтів ряду Тейлора. В цьому випадку необхідно дослідити отриманий ряд на збіжність.

На практиці для елементарних функцій частіше використовують *другий спосіб,* що базується на використанні розкладання в ряд Тейлора основних елементарних функцій. Коефіцієнти степеневого ряду для функцій $f(x)$ при цьому отримують опосередковано.

Для розв'язування задач використовують такі *розклади основних елементарних функцій:*

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., x \in R.$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., x \in R.$

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., x \in R.$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + ..., |x| < 1.$

5. $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., |x| < 1.$

6. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ..., |x| < 1.$

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте умови розкладу функції в ряд Маклорена.
2. Розкладіть за степенями x такі елементарні функції: e^{2x}; $\sin(-x^2)$; $\cos(3x^4)$.
3. Запишіть розклад за степенями x бінома $(1+x)^m$ при $m = -1$ і $|x| < 1$.
4. Розкладіть в ряд за степенями $(x-1)$ функції $f(x) = 2^x$; $f(x) = \ln(x)$.
5. Чи зміниться радіус збіжності степеневого ряду при його по членному інтегруванні (диференціюванні)?
6. Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності R_1, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ – радіус збіжності R_2, то який радіус збіжності R мають ряди $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$?
7. Наведіть теорему про рівномірну збіжність степеневого ряду на інтервалі збіжності.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розкласти за степенями x функцію $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, запишемо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = \frac{1}{3}[\ln(1+2x) - \ln(1-x)]$.

Відомо, що $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}$.

Цей ряд збігається, якщо $|t|<1$.

Підставимо $t=2x$. Тоді $\ln(1+2x)=2x-\frac{2^2x^2}{2}+\frac{2^3x^3}{3}-\frac{2^4x^4}{4}+...+$

$$+(-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}x^n.$$

Ряд збігається, якщо $|2x|<1 \Leftrightarrow -1<2x<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, тобто $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Далі підставимо $t=-x$ і отримаємо

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, x\in(-1;\ 1).$$

Застосуємо знайдені розкладання до заданої функції

$$\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}2^n+1\right]\frac{x^n}{n},$$

де $x\in\left]-1;1\right[\cap\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Приклад 2. Розкласти за степенями x функцію $f(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{32+7x}}$.

Розв'язання. Оскільки

$$(1+t)^m=1+mt+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}t^n+...,|t|<1,$$

то дана функція запишеться у вигляді

$$f(x)=10(32+7x)^{\frac{-1}{5}}=10\left(32\left(1+\frac{7}{32}x\right)\right)^{\frac{-1}{5}}=\frac{10}{\sqrt[5]{32}}\left(1+\frac{7}{32}x\right)^{\frac{-1}{5}}=5\left(1+\frac{7}{32}x\right)^{\frac{-1}{5}}.$$

Підставивши $t=\frac{7}{32}x$ та $m=-\frac{1}{5}$, отримаємо

$$\left(1+\frac{7}{32}x\right)^{\frac{-1}{5}}=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{32}x+\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{7}{32}\right)^2x^2+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{7}{32}\right)^3x^3+...+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}-1\right)...\left(-\frac{1}{5}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{7}{32}\right)^nx^n+...=$$

$$=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{32}x+\frac{1\cdot 6}{5^2\cdot 2!}\cdot\left(\frac{7}{32}\right)^2x^2-\frac{1\cdot 6\cdot 11}{5^3\cdot 3!}\cdot\left(\frac{7}{32}\right)^3x^3+...+$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{5^n\cdot n!}\cdot\left(\frac{7}{32}\right)^n x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)\cdot 7^n}{5^n\cdot 2^{5n}\cdot n!}x^n, x\in\left(-\frac{32}{7};\frac{32}{7}\right)$$

Тому розклад заданої функції має вигляд

$$\frac{10}{\sqrt[5]{32+7x}}=5+5\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)\cdot 7^n}{5^n\cdot 2^{5n}\cdot n!}x^n, x\in\left(-\frac{32}{7};\frac{32}{7}\right).$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 8.1. Написати ряд Тейлора за степенями $(x-4)$ для функції $f(x)=\sqrt{x}$ і дослідити його на збіжність.

Завдання 8.2. Записати ряд Тейлора за степенями x для функцій та знайти радіус його збіжності.

1. $f(x)=\frac{x^{10}}{1-x}$;
2. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+3)}$;
3. $f(x)=\frac{1}{1-x+x^2}$;
4. $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$.

Завдання 8.3. У наведених нижче завданнях розкласти задані функції в ряди за степенями заданих різниць $x-\alpha$:

1. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ за степенями x;
2. $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$ за степенями x;
3. $f(x)=\frac{1}{x-1}$ за степенями $(x-2)$;
4. $f(x)=(x-tgx)\cos x$ за степенями x;
5. $f(x)=\frac{x+3}{(x+1)^2}$ за степенями $(x-3)$.

Завдання 8.4. Знайти похідні $f^{(n)}(0)$ від таких функцій:

1. $f(x)=e^{3x}$ при $n=77$;
2. $f(x)=arctgx$ при $n=9$;
3. $f(x)=e^x$ при $n=10$;
4. $f(x)=(1-x^2)arctgx$ при $n=21$.

§9. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Основні поняття та теореми

Нехай підінтегральна функція $f(t)$ розкладається в степеневий ряд. Тоді інтеграл $\int\limits_0^x f(t)dt$ можна подати у вигляді степеневого ряду по x. Це дає можливість знаходити первісні від функцій, невизначений інтеграл для яких не виражається через елементарні функції.

Наближене обчислення визначених інтегралів виконується у такому порядку:

- підінтегральна функція розкладається в степеневий ряд;
- отриманий степеневий ряд почленно інтегрується;
- наближено обчислюється сума ряду.

При цьому необхідно, щоб границі інтегрування знаходилися в області збіжності підінтегрального степеневого ряду.

Контрольні питання та завдання

1. Сформулювати теорему про диференціювання степеневих рядів.
2. Знайти суму степеневого ряду:
   а) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...$
   б) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...$
3. Сформулювати теорему про інтегрування степеневих рядів.
4. Знайти суму ряду:
   а) $1+2x+3x^2+4x^3+...$
   б) $x+2x^2+3x^3+4x^4+...$
5. Як наближено обчислити визначені інтеграли за допомогою степеневих рядів?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розкласти функцію $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ у степеневий ряд за степенями x.

Розв'язання. Скористаємося розкладом функції e^x у степеневий ряд за степенями x. Задана функція $e^{-t^2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}$ визначена на всій числовій осі.

Почленно інтегруючи, знаходимо

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ із точністю до $\alpha=0{,}001$.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд. Для цього скористаємося розкладом функції $\sin x$ у степеневий ряд:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in\left(-\infty;+\infty\right).$$

Отримаємо: $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{\frac{4n+1}{2}}$.

Почленно інтегруючи цей ряд, знаходимо

$$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{\frac{4n+1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{\frac{4n+1}{2}}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left.\frac{2x^{\frac{4n+3}{2}}}{4n+3}\right|_0^1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{2}{4n+3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{7\cdot 3!}+\frac{2}{11\cdot 5!}-\frac{2}{15\cdot 7!}+\ldots.$$

Отриманий ряд задовольняє умови теореми Лейбніца. Тому для забезпечення точності обчислень додамо усі ті члени, абсолютна величина яких перевищує задану точність:

$U_1=\frac{2}{3}\approx 0{,}6667$;

$U_2=\frac{2}{7\cdot 3!}\approx 0{,}0476$;

$U_3=\frac{2}{11\cdot 5!}\approx 0{,}0015$;

$U_4=\frac{2}{15\cdot 7!}\approx 0{,}000026<0{,}001$.

Для знаходження інтеграла із точністю до $0{,}001$ візьмемо перші три члени:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx\approx 0{,}6667-0{,}0476+0{,}0015=0{,}6206.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 9.1. Застосовуючи почленне інтегрування, обчислити суми рядів:

1. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$;
2. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$;
3. $\sum_{n=0}^{\infty}(9n+5)\cdot x^{n+1}$;
4. $\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)\cdot x^{n+2}$;
5. $\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+5n+4)\cdot x^{n+1}$;

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-n-2)\cdot x^n$.

Завдання 9.2. Розкласти задані функції у степеневі ряди за степенями x:

1. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$;
2. $\int\limits_0^x \frac{arctgt}{t}dt$;
3. $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$;
4. $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$.

Завдання 9.3. Обчислити такі визначені інтеграли із точністю до ε:

1. $\int\limits_0^{0,5} x\cdot\ln(1+x^2)dx, \varepsilon=10^{-3}$;
2. $\int\limits_0^{1/4} \sqrt{1+x^3}\cdot dx, \varepsilon=10^{-4}$;
3. $\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx, \varepsilon=10^{-4}$;
4. $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{x}\cdot\cos x\cdot dx, \varepsilon=10^{-3}$.

§10. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Основні поняття та теореми

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння $F(x,y',y'',...,y^{(n)})=0$ із початковими умовами $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$, $y''(x_0)=y_0'',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Важливим для застосування методу наближеного інтегрування диференціальних рівнянь є пошук їх розв’язку у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+...+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+... .$$

В цьому розкладі перші n коефіцієнтів $y_0, y_0', y_0'',...,y_0^{(n-1)}$ відомі з початкових умов, коефіцієнт $y_0^{(n)}$ обчислюється безпосередньо із диференціального рівняння при $x=x_0$. Коефіцієнти вищих порядків знаходять послідовним диференціюванням заданого рівняння або методом порівняння коефіцієнтів.

Теорема. Якщо функції $f(x), P_k(x)$ $[k=1,2,...,n]$ розкладаються у степеневі ряди при $|x|<k$, то розв’язок лінійного диференціального рівняння

$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x)y = f(x)$, що задовольняє початкові умови $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, також розкладається в степеневий ряд при $|x| < k$.

Контрольні питання та завдання

1. Сформулювати теорему Пікара про існування розв’язку диференціального рівняння першого порядку.
2. Знайдено частинний розв’язок диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду. Чи існують у цього рівняння частинні розв’язки, відмінні від знайденого?
3. У рівнянні $P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f(x)$ функції P_0, P_1, P_2 та $f(x)$ – многочлени. Знайти область існування загального розв’язку цього диференціального рівняння.
4. Нехай $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$. Знайти розклад у степеневий ряд для $y'(x)$ та $y''(x)$.
5. Нехай $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Знайти $y'(x)$ та $y''(x)$.
6. Задана задача Коші $y'' = xy; y(0) = 1; y'(0) = 0$. Знайти коефіцієнти ряду Тейлора a_0 та a_1 у розкладі розв’язку $y(x)$.

Приклади розв’язування задач

Метод послідовного диференціювання застосовується для наближеного розв’язування шляхом знаходження декількох перших членів розкладу у ряд Тейлора. При цьому на функцію $F(x, y', y'', ..., y^{(n)})$ накладається умова відшукання частинних похідних усіх порядків.

Приклад 1. Розв’язати наближено за допомогою ряду Тейлора задачу Коші для рівняння $y'(x) = x^4 + y^3(x)$ при початковій умові $y(2) = 1$. Взяти п’ять перших членів розкладу, відмінних від нуля.

Розв’язання. З даного рівняння і початкової умови знаходимо $y'(2) = 2^4 + 1^3 = 17$. Диференціюючи рівняння $y' = x^4 + y^3$, отримаємо значення трьох відмінних від нуля похідних при $x_0 = 2$:

$$y'' = (x^4 + y^3)' = 4x^3 + 3y^2y'; y''(2) = 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 17 = 83;$$

$$y''' = 12x^2 + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2y''; y'''(2) = 12 \cdot 2^2 + 6 \cdot 1 \cdot 17^2 + 3 \cdot 1^2 \cdot 83 = 2031;$$

$$y^{IV} = 24x + 6 \cdot (y')^3 + 18y \cdot y' \cdot y'' + 3y^2y''';$$

$$y^{IV}(2) = 48 + 6 \cdot 17^3 + 18 \cdot 1 \cdot 17 \cdot 83 + 3 \cdot 1 \cdot 2031 = 61017.$$

Знайдені значення похідних підставимо у ряд Тейлора. Отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$y = 1 + \frac{17}{1!}(x-2) + \frac{83}{2!}(x-2)^2 + \frac{2031}{3!}(x-2)^3 + \frac{61017}{4!}(x-2)^4 + \dots .$$

Метод порівняння коефіцієнтів застосовується для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з аналітичними коефіцієнтами. Розв'язок шукаємо у вигляді степеневого ряду:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \cdot$$

Для знаходження коефіцієнтів C_n підставимо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$ у дане рівняння і порівняємо коефіцієнти перед однаковими степенями у лівій та правій частинах отриманої рівності.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' + 9y' = 5x^2 + 2x + 4$ у вигляді степеневого ряду $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$.

Розв'язання. Диференціюючи ряд $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, знаходимо

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot n \cdot x^{n-1};$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2};$$

$$y''' = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) C_n x^{n-3},$$

або при $n = k+1$,

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k ,$$

при $n = k+3$,

$$y'''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)(k+1) C_{k+3} x^k .$$

Підставимо $y'(x)$ та $y''(x)$ в дане рівняння:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(k+3) C_{k+3} x^k + 9 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k = 5x^2 + 2x + 4,$$

або $$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+2)(k+3) C_{k+3} + 9(k+1) C_{k+1} \right] x^k = 5x^2 + 2x + 4 .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях у лівій та правій частинах отриманої рівності:

при $k=0$, $1\cdot2\cdot3\cdot C_3+9\cdot1\cdot C_1=4$, $C_3=\dfrac{4-9C_1}{1\cdot2\cdot3}$;

при $k=1$, $2\cdot3\cdot4\cdot C_4+9\cdot2\cdot C_2=2$, $C_4=\dfrac{1-9C_2}{3\cdot4}$;

при $k=2$, $3\cdot4\cdot5\cdot C_5+9\cdot3\cdot C_3=5$, $C_5=\dfrac{5-9\cdot3C_3}{3\cdot4\cdot5}$;

при $k=3$, $4\cdot5\cdot6\cdot C_6+9\cdot4\cdot C_4=0$, $C_6=\dfrac{-9C_4}{5\cdot6}$;

при $k=4$, $5\cdot6\cdot7\cdot C_7+9\cdot5\cdot C_5=0$, $C_7=\dfrac{-9C_5}{6\cdot7}$.

Для k-го степеня отримуємо:

$$(k+1)(k+2)(k+3)C_{k+3}+9(k+1)C_{k+1}=0\Rightarrow C_{k+3}=\frac{-9C_{k+1}}{(k+2)(k+3)}.$$

Нехай C_k при $k=0,1,2$ є довільним сталим інтегрування. Виразимо через них інші коефіцієнти C_k; при $k=3,4$ будемо мати:

при $k=2$, $C_5=\dfrac{5-9\cdot3\cdot\dfrac{4-9C_1}{1\cdot2\cdot3}}{3\cdot4\cdot5}=-\dfrac{26-81\cdot C_1}{5!}$;

при $k=3$, $C_6=\dfrac{-9\cdot\dfrac{2-9\cdot2\cdot C_2}{2\cdot3\cdot4}}{5\cdot6}=-\dfrac{9\cdot(2-9\cdot2\cdot C_2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=-\dfrac{9\cdot(2-9\cdot2\cdot C_2)}{6!}$;

при $k=4$, $C_7=\dfrac{-9\cdot\left(-\dfrac{26-81C_1}{5!}\right)}{6\cdot7}=\dfrac{9\cdot(26-81C_1)}{7!}$.

Скориставшись рекурентною формулою, отримуємо:

для парних коефіцієнтів C_k при $k=4,6,8,...$

$$C_{2n+2}=(-1)^{n+1}\frac{9^{n-1}(2-9\cdot2\cdot C_2)}{(2n+2)!};$$

для непарних коефіцієнтів C_k при $k=5,7,9,...$

$$C_{2n+3}=(-1)^{n}\frac{9^{n-1}(26-81C_1)}{(2n+3)!}\quad(n=1,2,3,...).$$

Для отримання шуканого розв’язку підставимо знайдені коефіцієнти:

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\frac{4-9C_1}{3!}x^3+2(1-9C_2)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{9^{n-1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}+$$

$$+(26-81C_1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{9^{n-1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$.

Розв'язання. Скориставшись формулами розкладу функцій $\sin x$ та *arctgx* за степенями x:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots; \qquad \mathrm{arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots .$$

Отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-x^5\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)+x^7\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)-\ldots}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-x^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)+x^4\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)-\ldots\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

Розв'язання. Розкладемо за степенями x функції e^x та $\sin x$. Отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\ldots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}-\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}}{\frac{1}{3!}}=2.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 10.1. Показати, що ряд задовольняє відповідне диференціальне рівняння:

1. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}, y^{(4)}=y$; 2. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}, xy''+y'-y=0$

Завдання 10.2. Знайти розв'язки рівняння, що задовольняють заданим умовам:

1. $y''=x^2y, y(0)=y'(0)=1$; 2. $y''=-x^2y'-2xy+1, y(0)=y'(0)=0$.

Завдання 10.3. Знайти перші п'ять членів розкладу розв'язку диференціального рівняння у степеневий ряд:

1. $y' = 2\cos x - xy^2, y(0) = 1$;
2. $y'' = -2xy, y(0) = y'(0) = 1$;
3. $y'' = y\cos x + x, y(0) = 1; y'(0) = 0$;
4. $y'' = y \cdot e^x + x^3$;
5. $y'' + xy' - x^2 y = 0$.

Завдання 10.4. Проінтегрувати такі диференціальні рівняння за допомогою степеневих рядів:

1. $y'' + xy' + y = 1, y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' - xy' + y = x, y(0) = y'(0) = 0$;
3. $y'' + xy' + y = x, y(0) = y'(0) = 1$;
4. $y'' - xy' + y = 1, y(0) = y'(0) = 0$.

§11. РЯД ФУР'Є ДЛЯ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ З ПЕРІОДОМ 2π НА ВІДРІЗКУ $[-\pi;\pi]$

Основні поняття та теореми

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ називається ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx):\ f(x)$, де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, (n = 1,2,3...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, (n = 1,2,3...).$$

Сума ряду Фур'є є періодична функція з періодом 2π, тобто $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема Діріхле. Нехай функція $f(x)$ на відрізку [-π;π] має скінчене число екстремумів і є неперервною за винятком скінченного числа точок розриву першого типу (тобто задовольняє умовам Діріхле). Тоді ряд Фур'є цієї функції збігається в кожній точці відрізку [-π;π] і сума $S(x)$ цього ряду:

1) $S(x) = f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$, що належать відрізку [-π;π];
2) $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$, де x_0 – точка розриву першого типу функції $f(x)$;

3) $S(x)=\frac{1}{2}(f(\pi+0)+f(-\pi+0))$ на кінцях проміжку, тобто при $x=\pm\pi$.

Використовуючи формули Ейлера $\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$ і $\sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$, запишемо ряд Фур'є функції $f(x)$ в комплексній формі:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}.$$

Числа $C_n=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_n-ib_n), n=1,2,3...\\ \frac{1}{2}(a_n+ib_n), n=-1,-2,-3..\end{cases}$

називаються комплексними коефіцієнтами розкладу функції $f(x)$ в ряд за комплексними гармоніками e^{inx}.

Контрольні питання та завдання

1. Яка функція називається періодичною?
2. Чому дорівнює період функції:
   а) $f(x)=-7\sin(5x+3)$;
   б) $f(x)=4tg(-6x+1)$;
   в) $f(ax+b)$,
   якщо $f(x+T)=f(x)$?
3. Визначити значення інтегралів при натуральних n та m:
   а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx$; $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx$;
   б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx\cdot dx$; $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\cdot dx$; $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\cdot dx$.
4. Сформулювати необхідну умову збіжності ряду Фур'є до своєї функції, достатню для обчислення коефіцієнтів цього ряду за формулами Фур'є.
5. Чому коефіцієнти ряду Фур'є визначаються однозначно?
6. Розкласти в ряд Фур'є такі функції на інтервалі [-π ;π]:
   а) $f(x)=-9\sin(x+12)$;
   б) $f(x)=7\sin(2x+1)+\cos\frac{25x}{2}$;
   в) $f(x)=15$;
   г) $f(x)=\sin^4 x$.
7. Визначити ряд Фур'є для тригонометричного многочлена

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\ x\in[-\pi;\pi].$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $\pi + x = f(x)$ з періодом 2π, задану на проміжку $[-\pi;\pi]$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції (рис. 11.1)

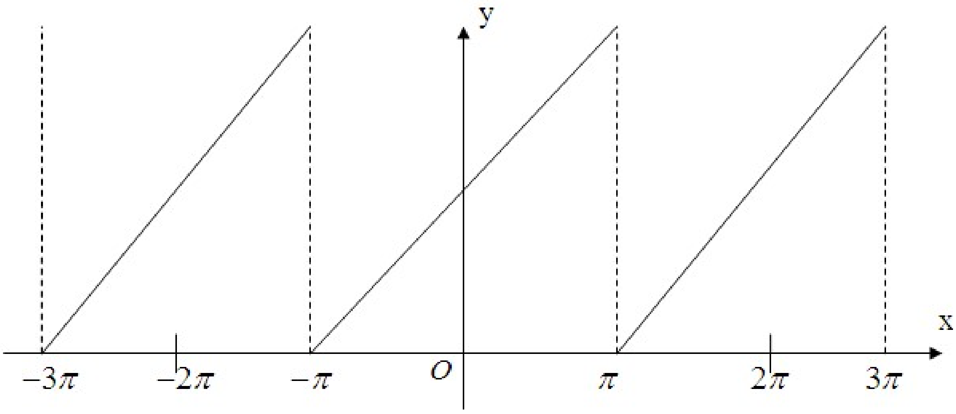


Рис. 11.1

Визначимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{x^2}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \pi + \pi + \frac{\pi^2}{2\pi} - \frac{\pi^2}{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos kxdx = \begin{vmatrix} \pi + x = u, du = dx \\ \cos kxdx = dv, v = -\frac{1}{k}\sin kx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi + x}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi + x}{k}\sin kx + \frac{1}{k^2}\cos kx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k}\sin \pi k + \frac{1}{k^2}\cos \pi k + \frac{\pi - \pi}{k}\sin(-\pi k) - \frac{1}{k^2}\cos(-\pi k)\right) = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\sin kxdx = \begin{vmatrix} \pi + x = u, du = dx \\ \sin kxdx = dv, v = -\frac{1}{k}\cos kx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi + x}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi + x}{k}\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi + \pi}{k}\cos \pi k + \frac{1}{k^2}\sin \pi k + \frac{\pi - \pi}{k}\cos(-\pi k) - \frac{1}{k^2}\sin(-\pi k)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1}\right) = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{k}.$$

Отже, розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є має вигляд

$$\pi + x = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = \pi + 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...\right), -\pi < x < \pi$$

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію з періодом 2π, означену так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо} -\pi \le x < 0, a < x < \pi \\ 1, \text{якщо } 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, \text{якщо } x = 0; x = a \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік функції (рис. 11.2)

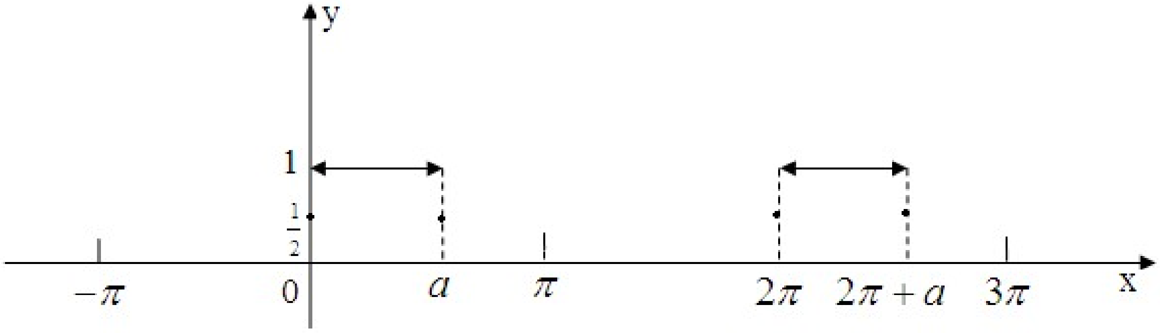


Рис. 11.2

Задана функція задовольняє умовам Діріхле про розкладання в ряд Фур'є. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{a} 1 \cdot dx + \int_{a}^{\pi} 0 \cdot dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} dx = \frac{a}{\pi};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} 1 \cdot \cos kxdx = \frac{\sin kx}{\pi k}\bigg|_{0}^{a} = \frac{\sin ka}{\pi k};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} 1 \cdot \sin kxdx = -\frac{\cos kx}{\pi k}\bigg|_{0}^{a} = \frac{1 - \cos ka}{\pi k};$$

Ряд Фур'є для даної функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ka \cdot \cos kx + (1 - \cos ka)\sin kx}{k}\right].$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 11.1. Розкласти в ряд Фур'є такі функції $f(x)$ з періодом 2π:

1. $f(x) = 2x - 3$ на $[-\pi; \pi]$;
2. $f(x) = 5x + 2$ на $[-\pi; \pi]$;
3. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ \sin x, \text{якщо } 0 \le x \le \pi; \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ x, \text{якщо } 0 \le x < \pi; \\ \frac{\pi}{2}, \text{якщо } x = \pi; \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} C_1, \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ C_2, \text{якщо } 0 \le x \le \pi; \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} ax, \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ bx, \text{якщо } 0 \le x \le \pi; \end{cases}$

7. $f(x)=\left|-11x+2\right|$ на $[-\pi;\pi]$;

8. $f(x)=\left|17x+2\right|$ на $[-\pi;\pi]$.

§12. РЯД ФУР'Є ДЛЯ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ З ПЕРІОДОМ 2*l* НА ВІДРІЗКУ [–*l*; *l*]

Основні поняття та теореми

Якщо функція $f(x)$ – періодична з періодом $2l$, то на відрізку $[-l;l]$ її можна розкласти в ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x+b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\right);$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx; \qquad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi k}{l}xdx; \qquad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx.$$

В комплексній формі ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x+b_k\sin\frac{\pi k}{l}x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{\pi k}{l}x}, \text{ де } \quad c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-i\frac{\pi k}{l}t}dt$$

$$(k=0;\pm1;\pm2;...).$$

Означення. Сукупності коефіцієнтів a_k, b_k $(k=0,1,2...)$ розкладу періодичної функції $f(x)$ в ряд Фур'є називаються частотними спектрами цієї функції , а числа $\frac{\pi k}{l}$ – хвильовими числами.

З формул для коефіцієнтів ряду Фур'є бачимо, що спектри – це функції, які залежать від номера гармоніки k як незалежної змінної:

$$a_k=a_k\left(\frac{\pi k}{l}\right); \qquad b_k=b_k\left(\frac{\pi k}{l}\right).$$

Графічно частотні спектри зручно зображувати у вигляді відрізка довжини a_k, b_k, проведених перпендикулярно осі, на яку нанесені значення $\frac{\pi k}{l}$. Оскільки $k=1,2,3...$, то очевидно , що частотні спектри мають дискретний (розривний) характер. Якщо період $f(x)$ дорівнює 2π, то відстань між лініями дорівнює одиниці, в загальному ж випадку вона дорівнює $\frac{\pi}{l}$.

Контрольні питання та завдання

1. Сформулювати умову розкладу періодичної функції в ряд Фур'є на відрізку $[-l;l]$.
2. Нехай функція $f(x)$ – нестала періодична функція з періодом $T>0$. Довести, що в цьому випадку знайдеться найменше значення $T_0>0$, для якого $f(x+T_0)=f(x)$.
3. Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[-2\pi;2\pi]$. Показати для неї розклад в ряд Фур'є на цьому відрізку:

   а) $f(x)=6\sin\left(\frac{x}{2}+3\right)$; б) $f(x)=-5\cos(3x+1)+\sin^2(x+2)$;

   в) $f(x)=\frac{1}{3}$; г) $f(x)=\cos^2 x-2\sin x\cos 3x$.
4. Записати хвильові числа для функції $f(x)$ на проміжку:

   а) $[-\pi;\pi]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; в) $[-3\pi;3\pi]$.
5. Як зв'язані комплексні коефіцієнти ряду Фур'є C_k із спектральними числами a_k, b_k? Вказати формулу переходу.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом $2l=4$ на відрізку $[-2;2]$, якщо $f(x)=x^2+2x+3$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції (рис. 12.1).

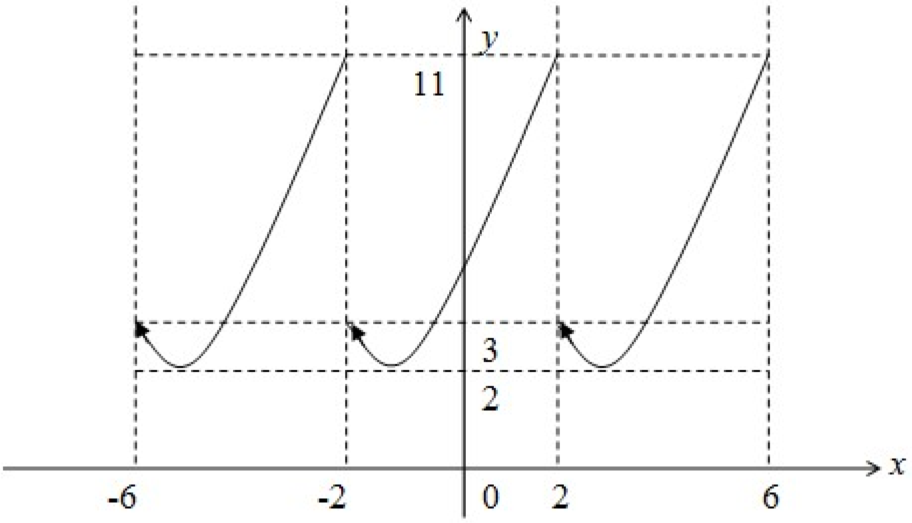


Рис. 12.1

Визначимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2+2x+3)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{26}{3};$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2+2x+3)\cos\frac{\pi k}{2}xdx\left|\begin{matrix}u=x^2+2x+3;du=(2x+2)dx\\ dv=\cos\frac{\pi k}{2}dx;v=\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2+2x+3)\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}x\Bigg|_{-2}^{2}-\frac{4}{\pi k}\int_{-2}^{2}(x+1)\sin\frac{\pi k}{2}xdx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\int_{-2}^{2}(x+1)\sin\frac{\pi k}{2}xdx=\left|\begin{matrix}u=x+1;du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi k}{2}dx;v=-\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\left[(x+1)\frac{-2}{\pi k}son\frac{\pi k}{2}x\Bigg|_{-2}^{2}++\frac{2}{\pi k}\int_{-2}^{2}\cos\frac{\pi kx}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{-2}{\pi k}\left[\frac{-6}{\pi k}\cos\pi k-\frac{2}{\pi k}\cos\pi k+\frac{2}{\pi k}\cdot\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\Bigg|_{-2}^{2}\right]=$$

$$=\frac{-2}{\pi k}\cdot\left(\frac{-8}{\pi k}\right)\cos\pi k=(-1)^k\frac{16}{\pi^2k^2};$$

$$b_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2+2x+3)\sin\frac{\pi kx}{2}dx\left|\begin{matrix}u=x^2+2x+3;du=(2x+2)dx\\ dv=\sin\frac{\pi kx}{2}dx;v=\frac{-2}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2+2x+3)\left(\frac{-2}{\pi k}\right)\cos\frac{\pi kx}{2}\Bigg|_{-2}^{2}+\frac{4}{\pi k}\int_{-2}^{2}(x+1)\cos\frac{\pi kx}{2}dx\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x+1;du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi kx}{2}dx;v=\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left\{-\frac{16}{\pi k}\cos\pi k+\frac{4}{\pi k}\left[(x+1)\frac{2}{\pi k}\cdot\sin\frac{\pi kx}{2}\Bigg|_{-2}^{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{\pi k}\int_{-2}^{2}\sin\frac{\pi kx}{2}dx\right]\right\}=-\frac{8}{\pi k}\cos\pi k=(-1)^{k+1}\frac{8}{\pi k}.$$

Після підстановки отриманих коефіцієнтів ряд Фур'є для даної функції матиме вигляд:

$$x^2+2x+3=\frac{13}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{16}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi k}{2}x+(-1)^{k+1}\frac{8}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}x=\frac{13}{3}+$$

$$+\frac{16}{\pi^2}\left(-\frac{\cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{x}}{1}+\frac{\cos\pi\boldsymbol{x}}{4}-\frac{\cos\frac{3\pi}{2}\boldsymbol{x}}{9}+...\right)+\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{x}}{1}-\frac{\sin\pi\boldsymbol{x}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\boldsymbol{x}}{3}-\frac{\sin2\pi\boldsymbol{x}}{4}+...\right),$$

$$-2<x<2.$$

В точках розриву функції $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному її границь зліва і справа. Візьмемо в отриманій рівності $x=2$, тоді $\frac{11+3}{2}=7=\frac{13}{3}+\frac{16}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...\right)$, звідки $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Завдання для роботи в аудиторії

Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом $2l$, якщо:

1. $f(x)=\begin{cases}3x-2; -3\le x\le 0;\\ 5x+2; 0\le x\le 3.\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}-3x+1; -5\le x\le 0;\\ -6x-1; 0\le x\le 5.\end{cases}$
3. $f(x)=|2x-1|$ на відрізку $[-3;3]$.
4. $f(x)=|-x+1|$ на відрізку $[-2;2]$.
5. $f(x)=x^2$ на відрізку $[-1;1]$.
6. $f(x)=x^3$ на відрізку $[-3;3]$.
7. $f(x)=\sin x$ на відрізку $[-1;1]$.

§13. РОЗКЛАД ТІЛЬКИ ЗА КОСИНУСАМИ АБО ТІЛЬКИ ЗА СИНУСАМИ

Основні поняття та теореми

Слід пам'ятати, що коли функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на відрізку $[0;l]$ (l>0), тоді її можливо розкласти в ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{l}x\right),\text{ де}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2\pi nx}{l}dx; \qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2\pi nx}{l}dx;$$

$$(n=0,1,2...) \qquad (n=1,2,...)$$

Обчислення коефіцієнтів Фур'є спрощується , якщо означення функції $f(x)$ доповнити на проміжку $[-l;0]$ парним або непарним числом. В першому випадку отримаємо розклад $f(x)$ тільки за косинусами, тобто $b_k=0$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx; \qquad n=0;1;2... .$$

В другому випадку $a_0 = 0$, $a_n = 0$, і розклад отримуємо тільки за синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}; \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}; \qquad n = 1;2;3\ldots .$$

При цьому зазначений розклад задає $2l$ - періодичну функцію на дійсній осі, яка збігається на проміжку $[0;l]$ з функцією $f(x)$.

Зауваження 1. Неперервна функція на проміжку $[-l;l]$ однозначно визначається своїми коефіцієнтами Фур'є тригонометричної системи

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{\pi n}{l}x, \sin\frac{\pi n}{l}x, \ldots .$$

Зауваження 2. Неперервна функція $f(x)$ на проміжку $[0,l]$ однозначно визначається своїми коефіцієнтами Фур'є в одній із тригонометричних систем:

$$1, \cos\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \text{ або } \sin\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

але тільки на проміжку $[0;l]$.

Контрольні питання та завдання

1. Чому дорівнює $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$ для функції $g(x)$, непарної на проміжку $[-\pi;\pi]$?
2. Чому дорівнює $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$ для функції $g(x)$, парної на проміжку $[-\pi;\pi]$?
3. Записати розклад в ряд Фур'є:
   а) парної функції з періодом 2;
   б) непарної функції з періодом 1;
4. Як зв'язані між собою коефіцієнти Фур'є a_n, b_n і α_n, β_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, якщо $\varphi(-x) = \psi(x)$?
5. Як зв'язані між собою коефіцієнти Фур'є a_n, b_n і α_n, β_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, якщо $\varphi(-x) = -\psi(x)$?
6. Використавши відомий розклад на відрізку $[0;\pi]$ для функції $f(x) = x$ в ряд Фур'є за синусами $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, і за косинусами $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, довести такі формули:

   а) $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$; б) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Розкласти функцію $f(x)=62x-11$ на відрізку $[0;7]$ в ряд за синусами.

Розв’язання. Доповнимо означення функції $f(x)$ на проміжку $[-7;0]$ непарним чином. В цьому випадку на відрізку $[-7;0]$ повинна виконуватись умова $f(-x)=-f(x)$, тобто $f(-x)=-(62x-11)=62(-x)+11$. Тоді при $x\in[-7;0]$ отримуємо $f(x)=62x+11$. Таким чином , функцію запишемо у вигляді

$$f(x)=\begin{cases}62x-11, 0\le x\le 7;\\ 62x+11, -7\le x<0.\end{cases}$$

Побудуємо графік функції (рис. 13.1).

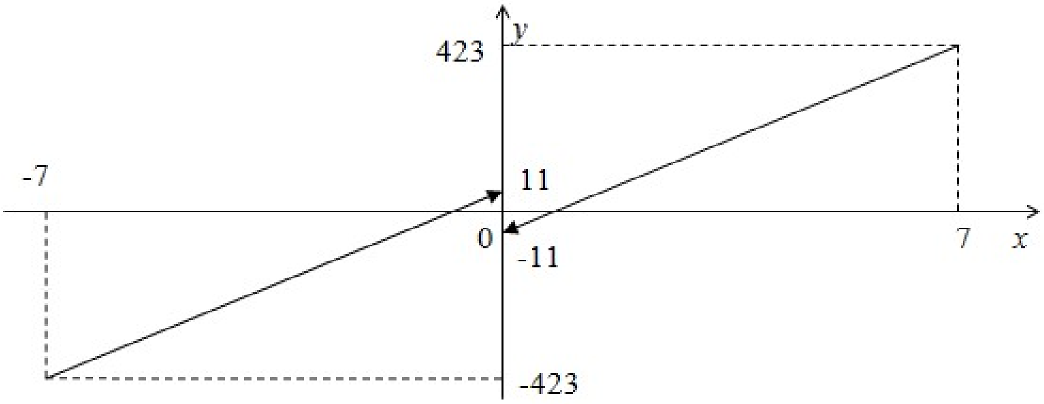


Рис 13.1

Функція $f(x)$ – непарна, тому $a_0=0$ і $a_k=0$. Тоді

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx=\frac{2}{7}\int_0^7(62x-11)\sin\frac{\pi kx}{7}dx=$$

$$\left|\begin{matrix}u=62x-11; du=62dx\\ dv=\sin\frac{\pi kx}{7}dx; v=-\frac{7}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{7}\end{matrix}\right|=\frac{2}{7}\left[(62x-11)\frac{-7}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{7}\Big|_0^7+\right.$$

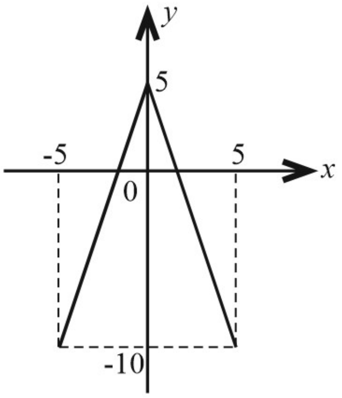
$$\left.+\frac{434}{\pi k}\int_0^7\cos\frac{\pi kx}{7}dx\right]=\frac{2}{7}\left[-\frac{423\cdot7}{\pi k}\cos\pi k-\frac{11\cdot7}{\pi k}\cos0+\frac{434\cdot7}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi kx}{7}\Big|_0^7\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}(423\cos\pi k+11)=\begin{cases}\frac{824}{\pi k}, k=1,3,5...\\ -\frac{868}{\pi k}, k=2,4,6...\end{cases}$$

На відрізку $[0;7]$ ряд Фур’є для функції $f(x)=62x-11$ має вигляд

$$62x-11=\frac{824}{\pi}\sin\frac{\pi x}{7}-\frac{868}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{7}x+\frac{824}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{7}x-\frac{868}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{7}x+...\ .$$

Приклад 2. Розкласти функцію $f(x) = -3x + 5$ на відрізку $[0;5]$ в ряд за косинусами.



Розв'язання. Продовжимо функцію $f(x)$ на проміжку$[-5;0]$ парним чином. Тоді на відрізку $[-5;5]$ повинна виконуватися умова $f(-x) = f(x)\,(x > 0),$ тобто $f(-x) = -3x + 5 = 3(-x) + 5.$ При $x \in [-5;0]$ отримуємо $f(x) = 3x + 5$. Таким чином, функція запишеться у вигляді $f(x) = \begin{cases} -3x + 5, 0 \le x \le 5; \\ 3x + 5, -5 \le x \le 0. \end{cases}$

В цьому випадку $b_k = 0;$ інші коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{5}\int_0^5 (-3x + 5)dx =$$
$$= \frac{2}{5}\left(-3\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_0^5 = -5,$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx = \frac{2}{5}\int_0^5 (-3x + 5)\cos\frac{\pi kx}{5}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = -3x + 5; du = -3dx \\ dv = \cos\frac{\pi kx}{5}dx; v = \frac{5}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\left[(-3x + 5)\frac{5}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{5}\Bigg|_0^5 + \frac{15}{\pi k}\int_0^5 \sin\frac{\pi kx}{5}dx\right] =$$

$$= \frac{6}{\pi k}\cdot\left(\frac{-5}{\pi k}\right)\cos\frac{\pi kx}{5}\Bigg|_0^5 = -\frac{30}{\pi^2 k^2}(\cos\pi k - \cos 0) = \begin{cases} \dfrac{60}{\pi^2 k^2}, k = 1,3,5... \\ 0, k = 2,4,6... \end{cases}$$

Ряд Фур'є для функції $f(x) = -3x + 5$ на відрізку $[0;5]$ запишемо у вигляді

$$-3x + 5 = -\frac{5}{2} + \frac{60}{\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{5}x}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi}{5}x}{3^2} + \frac{\cos\pi x}{5^2} + \frac{\cos\frac{7\pi}{5}}{7^2} + ...\right).$$

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 13.1. Розкласти в ряд за синусами функцію $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в інтервалі $(0;\pi)$.

Завдання 13.2. Розкласти функцію $y = x^2$:

а) в інтервалі $(-\pi;\pi)$ в ряд Фур'є;

б) в інтервалі $(0;\pi)$ в ряд синусів.

Завдання 13.3. Довизначивши необхідним чином задану на проміжку функцію до періодичної, отримати для неї ряд Фур'є за косинусами і за синусами:

а) $f(x)=e^x, x\in(0;\ln 2)$;

б) $f(x)=\begin{cases}1, 0<x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, \frac{\pi}{2}<x\le\pi;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}x, 0<x\le 1;\\ 2-x, 1<x\le 2;\end{cases}$

г) $f(x)=x\sin x, x\in(0;\pi)$.

Завдання 13.4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y=\mathrm{sh}3x$ в інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Завдання 13.5. Розкласти функцію $y=\mathrm{ch}x$ в інтервалі $(0;\pi)$ в ряд косинусів і в ряд синусів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Знайти суму ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$.
2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$.
9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{36n^2-24n-5}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$.
22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

Завдання 2. Знайти суму ряду.

1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+6}{(n+3)(n+2)n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.
4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-8}{n(n+1)(n+2)}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)(n+3)}$.
8. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(n^2-4)}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.
10. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.
11. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(n+2)(n+1)n}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.
14. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n+5}{(n+2)(n^2-1)}$.
15. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{8n-10}{(n-1)(n+1)(n-2)}$.
16. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{3n-1}{n(n^2-1)}$.
17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$.
19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{5n-2}{(n-1)(n+2)}$.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$.
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$.
24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n-2}{(n-1)n(n+1)}$.
25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n^2-1)}$.
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$.
27. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}$.
28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$.
29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{4}{n(n-1)(n-2)}$.
30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3-n}{(n+3)(n+1)n}$.

Завдання 3. Дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\dfrac{2+(-1)^n}{n^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)}{n(n+1)(n+2)}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{arctg((\dfrac{1+(-1)^n}{2})n)}{n^3+2}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(2+\cos\pi n)}{2n^2-1}$.
8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\arcsin\dfrac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^2+1}$.
10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.
11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\arccos\dfrac{(-1)^n+n}{n+1}}{n^2+2}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2+3}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^3\left(2+\sin\frac{\pi n}{2}\right)}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{2+(-1)^n}{6}\pi$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+1}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{3^n+2}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\cos\frac{\pi n}{2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\frac{\pi n}{4}}{n^2}ctg\frac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$.

23. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$.

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(\frac{3}{\pi})arctg\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{n(3+\sin\frac{\pi n}{4})}$.

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{3n}\right)}{\sqrt[4]{n^4-1}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(2+(-1)^n)}{\ln(1+n)}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg((-1)^n+n)}{\sqrt{n(2+n^2)}}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arc\sin^2\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)}{2^n+n}$.

Завдання 4. Дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}arctg\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}arctg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}arctg\frac{n+3}{n^2+5}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\,arctg\frac{1}{n^3}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3}{n^3+1}$.

19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}n^3 tg^5\frac{\pi}{n}$.

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(e^{\frac{\sqrt{n}}{(n^3-1)}}-1)$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi}{2n+1})}{\sqrt{n}}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}arctg\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{\sqrt[3]{n}+5}$.

Завдання 5. Дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{5}{n}}{n!}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n-1}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7...(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8...(3n-1)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7...(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11...(2n+5)}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2n+3}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n\cdot n^2}$.

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

Завдання 6. Дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n\cdot(n+1)^3$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+3}\right)^{n^2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{\pi}{4n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{5^n}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n\cdot(n-1)^2$.

14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 arctg^n\frac{\pi}{3n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\cdot e^{-n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$.

30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

Завдання 7. Дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln(2n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$.

11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$.

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

19. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

20. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\frac{n}{3})\ln^2(n+7)}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$.

24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

25. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(\frac{n}{3}-1)\ln^2(\frac{n}{2})}$.

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+5)\ln n}$.

27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.

28. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$.

29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{(\frac{3n^2}{2}+2)\ln(\frac{n}{2})}$.

30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Завдання 8. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{n}{2n+1})^n$.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2n^2}{n^4-n^2+1}$.

6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\cos\frac{\pi}{6n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.

12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln(2n)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\cdot\sqrt[3]{3n+\ln n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$.

22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n+4}}\right)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 3^n}{3^n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. 29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{1}{n}tg\frac{1}{n}$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Завдання 9. Обчислити суму ряду з точністю α.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2},\alpha=0{,}01$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!},\alpha=0{,}01$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3},\alpha=0{,}001$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)},\alpha=0{,}001$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)},\alpha=0{,}01$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!},\alpha=0{,}001$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n},\alpha=0{,}1$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{5^n},\alpha=0{,}1$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\alpha=0{,}001$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!},\alpha=0{,}0001$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!},\alpha=0{,}001$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n,\alpha=0{,}01$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n},\alpha=0{,}00001$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n,\alpha=0{,}1$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{7^n},\alpha=0{,}0001$.
16. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!},\alpha=0{,}01$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!},\alpha=0.001$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!n!},\alpha=0.001$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!},\alpha=0.001$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot n!},\alpha=0.001$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot n!},\alpha=0.00001$.
22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n(n+1)},\alpha=0.001$.
23. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)},\alpha=0.001$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^3},\alpha=0{,}01$.
25. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(n+1)^n},\alpha=0.001$.
26. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n},\alpha=0.001$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^3+1}, \alpha=0.01.$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}, \alpha=0.01.$

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{(n^3+1)^2}, \alpha=0.001.$

30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^3}, \alpha=0.01.$

Завдання 10. Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^3x^{2n}}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n+1)}.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)\cdot 4^n}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n tg\frac{1}{3^n}.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n(x-1)^{2n}}.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}\cdot x^{n^2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n n^2}{n^n}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(x+4)\ln(n+4)}.$

21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^{2n}}.$

22. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^2(x+2)^n}.$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{x^n}.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}.$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5(x+2)^{2n}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n(x+4)^n}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

Завдання 11. Розкласти за степенями x функцію $f(x)$.

1. $\frac{9}{20-x-x^2}$.
2. $\ln(1-x-6x^2)$.
3. $\frac{\sin 2x}{x}-2$.
4. $\frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.
5. $(x-1)\sin 5x$.
6. $\frac{6}{8+2x-x^2}$.
7. $\ln(1-x-12x^2)$.
8. $\ln(1-x-20x^2)$.
9. $\frac{\arcsin x}{x}-1$.
10. $x^2\sqrt{4-3x}$.
11. $2x\cdot\sin^2\frac{x}{2}-x$.
12. $\frac{5}{6+x-x^2}$.
13. $\ln(1+x-12x^2)$.
14. $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.
15. $\sqrt[4]{16-5x}$.
16. $(2-e^x)^2$.
17. $\frac{3}{2-x-x^2}$.
18. $(x-1)\cos x$.
19. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.
20. $2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x$.
21. $\frac{7}{12+x-x^2}$.
22. $\ln(1+x-6x^2)$.
23. $\frac{\cos 3x-1}{x^2}$.
24. $\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.
25. $(3+e^{-x})^2$.
26. $\frac{7}{12-x-x^2}$.
27. $\ln(1-2x-8x^2)$.
28. $(x-1)\cdot\sin x$.
29. $x\cdot\sqrt[3]{27-2x}$.
30. $\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$.

Завдання 12. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^a f(x)dx$ із точністю до $u=0{,}001$, якщо задані підінтегральна функція $f(x)$ та a.

1. $f(x)=e^{-6x^2}, a=0{,}1$.
2. $f(x)=e^{-2x^2}, a=0{,}3$.
3. $f(x)=\sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2, a=0{,}4$.
4. $f(x)=\cos x^2, a=1$.
5. $f(x)=\cos(25x^2), a=0{,}2$.
6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{81+x^4}}, a=1{,}5$.
7. $f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x}, a=1{,}5$.
8. $f(x)=\frac{1-e^{\frac{-x}{2}}}{x}, a=0{,}4$.
9. $f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+2x), a=0{,}1$.
10. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{27-x^3}}, a=1{,}5$.
11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{125+x^3}}, a=2{,}5$.
12. $f(x)=e^{\frac{-3x^2}{4}}, a=0{,}4$.
13. $f(x)=\sin(100x^2), a=0{,}1$.
14. $f(x)=\sin(4x^2), a=0{,}5$.
15. $f(x)=\cos\left(\frac{5x}{2}\right), a=0{,}4$.

16. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}, a=0{,}5$.

17. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{256+x^4}}, a=2$.

18. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}, a=0{,}5$.

19. $f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}, a=1$.

20. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{625+x^4}}, a=0{,}5$.

21. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}, a=1$.

22. $f(x)=e^{-3x^2}, a=0{,}2$.

23. $f(x)=e^{\frac{-3x^2}{4}}, a=0{,}5$.

24. $f(x)=\sin x^2, a=1$.

25. $f(x)=\sin(25x^2), a=0{,}2$.

26. $f(x)=\cos(100x^3), a=0{,}1$.

27. $f(x)=\frac{1-e^x}{x}, a=0{,}2$.

28. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}, a=1$.

29. $f(x)=\cos(4x^2), a=0{,}5$.

30. $f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}, a=0{,}4$.

Завдання 13. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду.

1. $y''=9y+2$.
2. $y''+2xy=6$.
3. $y''+xy'+2y=0$.
4. $y''+x^2y=1$.
5. $y''+xy'+xy=0$.
6. $y''-4xy'+2y=8$.
7. $y'+x^2y-x^3=0$.
8. $y''=xy'-9$.
9. $y''-xy'+3xy=0$.
10. $y'=x^2+y$.
11. $y'''=x^2y'$.
12. $y'''=x^2y'+y$.
13. $y''=y(x^2-2)$.
14. $y'''=xy'+1$.
15. $y^{IV}=x^2y'$.
16. $y^{IV}+x^4y=0$.
17. $y'''+xy=0$.
18. $y'+x^3y=2$.
19. $y''+3x^2y'+19y=0$.
20. $y''-2x^3y'-8y=0$.
21. $y^{IV}=8y''-16y$.
22. $y'''-18y'-12y=0$.
23. $y'''=y-1$.
24. $y'''+x^3y'-2y=0$.
25. $y^{IV}+y'''=5xy$.
26. $y^{IV}=y''-xy'$.
27. $y^{IV}+y=0$.
28. $y'''+2xy''=5$.
29. $y'''-(x^2+3x-1)y'+2=0$.
30. $y^{IV}-2y'+x^2y=0$.

Завдання 14. Знайти розклад в степеневий ряд (до вказаного степеня) розв`язку диференціального рівняння.

1. $y'=x^3+x+1+y^3,\ y(0)=1$ (до x^3).
2. $y'=x^4-x^2+y, y(0)=0$ (до x^5).
3. $y'''=e^xy^2, y(0)=y'(0)=0; y''(0)=1$ (до x^5).
4. $y'''+(x^2+1)y'-y^2=0, y(0)=y'(0)=0; y''(0)=1$ (до x^5).
5. $y'=xy+e^y, y(0)=0$ (до x^3).
6. $xy''+e^y-x^3=0, y(1)=0; y'(1)=1$ (до x^4).

7. $(1+x^2)y''+y'+y^2=0, y(0)=1; y'(0)=1$ (до x^4).

8. $(1+x)y'-xy-e^x=0, y(0)=1$ (до x^4).

9. $y''-x^2y'=y+1, y(0)=y'(0)=0$ (до x^5).

10. $y'=\cos x+\frac{1}{3}y^3, y(0)=1$ (до x^3).

11. $y''=xy'+y+x^2+1, y(0)=y'(0)=1$ (до x^5).

12. $y''=\frac{1}{2}(y')^2+x, y(0)=1; y'(0)=0$ (до x^4).

13. $y''=\cos y+\sin x, y(0)=\frac{\pi}{2}; y'(0)=0$ (до x^4).

14. $y''=\sin y-\cos x, y(0)=0; y(0)=1$ (до x^4).

15. $y''=7e^y+3x^2, y(0)=1; y'(0)=0$ (до x^4).

16. $y''=6xyy'+3x^2, y(0)=0; y(0)=1$ (до x^4).

17. $y''=(y')^2-3x-x^2, y(0)=0; y'(0)=1$ (до x^4).

18. $y'=\sin x+xy^3, y(0)=1$ (до x^3).

19. $y'=x^2-3y^2-18x, y(0)=5$ (до x^3).

20. $y^{IV}=y'+xy, y(0)=y'(0)=y''(0)=1; y'''(0)=0$ (до x^6).

21. $y'=y^6+5x^3+x-1, y(0)=2$ (до x^3).

22. $y'=y^4+7x^3+3x^2, y(0)=4$ (до x^3).

23. $y''=(y')^2-x^5, y(0)=0; y'(0)=1$ (до x^4).

24. $y'=\cos y'+e^x y, y(0)=y'(0)=0$ (до x^4).

25 $y^{IV}=e^{-2x}y'+y, y(0)=y'(0)=0; y''(0)=y'''(0)=1$ (до x^6).

26. $y'''=\sin x\cdot y, y(0)=y'(0)=0; y''(0)=1$ (до x^5).

27. $y'''=\cos x^2\cdot y-x, y(0)=y'(0)=0; y''(0)=1$ (до x^5).

28. $y'=tgx-y^2-x^2, y(0)=1$ (до x^3).

29. $y'=3\sin^2 x+2y^2, y(0)=0$ (до x^3).

30. $y''-3\frac{y'}{x}+7y=0, y(0)=1, y'(0)=0$ (до x^4).

Завдання 15. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$ з періодом 2π на відрізку $[-\pi;\pi]$.

1. $f(x)=|2x-3|$.
2. $f(x)=|x-1|$.
3. $f(x)=|x+1|$.
4. $f(x)=|-x-1|$.
5. $f(x)=|-x+1|$.
6. $f(x)=|-2x-3|$.
7. $f(x)=|5x-2|$.
8. $f(x)=|7x+3|$.
9. $f(x)=|5x+3|$.
10. $f(x)=|-5x-2|$.
11. $f(x)=|6x+5|$.
12. $f(x)=|-6x+5|$.

13. $f(x)=|8x-1|$.
14. $f(x)=|9x+5|$.
15. $f(x)=|-9x+5|$.
16. $f(x)=|-8x-1|$.
17. $f(x)=|-9x-5|$.
18. $f(x)=|9x-5|$.
19. $f(x)=|3x-7|$.
20. $f(x)=|3x+7|$.
21. $f(x)=|-3x+7|$.
22. $f(x)=|10x+7|$.
23. $f(x)=|-10x+7|$.
24. $f(x)=|-10x-7|$.
25. $f(x)=|11x+8|$.
26. $f(x)=|11x-8|$.
27. $f(x)=|-11x-8|$.
28. $f(x)=|3x+2|$.
29. $f(x)=|-3x-1|$.
30. $f(x)=|-3x+1|$.

Завдання 16. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$ з періодом $2l$ на відрізку $[-l;l]$.

1. $f(x)=-2x^2+3x+2 \quad [-2,2]$.
2. $f(x)=15x^2+3x-8 \quad [-20,20]$.
3. $f(x)=2x+3\,[-2,2]$.
4. $f(x)=-3x^2+5x+2\ [-2,2]$.
5. $f(x)=2x^2+3x-4\ [-3,3]$.
6. $f(x)=7x^2-9x+5\ [-5,5]$.
7. $f(x)=x^2-x-2\ [-2,2]$.
8. $f(x)=x^2-2x-3\ [-3,3]$.
9. $f(x)=12x^2-13x+5\ [-7,7]$.
10. $f(x)=|x+5|\ [-6,6]$.
11. $f(x)=x^2-4x-5\ [-4,4]$.
12. $f(x)=x^2+9x+25\ [-11,11]$.
13. $f(x)=21x^2+15x+9\ [-9,9]$.
14. $f(x)=|3x-2|\ [-2,2]$.
15. $f(x)=2x^2-3x-2\ [-2,2]$.
16. $f(x)=-2x^2-4x-3\ [-8,8]$.
17. $f(x)=32x^2-39x+15\ [-11,11]$.
18. $f(x)=|2x+1|\ [-1,1]$.
19. $f(x)=3x^2+4x-4\ [-2,2]$.
20. $f(x)=-3x^2+3x+5\ [-9,9]$.
21. $f(x)=-8x^2-9x+13\ [-6,6]$.
22. $f(x)=|5x+2|\ [-3,3]$.
23. $f(x)=x^2+2x-8\ [-3,3]$.
24. $f(x)=6x^2-7x-9\ [-15,15]$.
25. $f(x)=-19x^2+x-3\ [-4,4]$.
26. $f(x)=|3x-4|\ [-2,2]$.
27. $f(x))=-19x^2+x+3\ [-3,3]$.
28. $f(x)=17x^2-2x-11\ [-19,19]$.
29. $f(x)=|x-2|\ [-3,3]$.
30. $f(x)=|7x+4|\ [-1,1]$.

Завдання 17. Розкласти функцію $f(x)$ на відрізку $[0;l]$ в ряд по косинусах і синусах.

1. $f(x)=9x+3$, $[0;4]$.
2. $f(x)=-31x-21$, $[0;25]$.
3. $f(x)=-3x+7$, $[0;3]$.
4. $f(x)=-42x+19$, $[0;31]$.
5. $f(x)=-5x+2$, $[0;6]$.
6. $f(x)=29x-39$, $[0;27]$.
7. $f(x)=-8x+9$, $[0;2]$.
8. $f(x)=33x+31$, $[0;22]$.
9. $f(x)=13x-8$, $[0;7]$.
10. $f(x)=24x-37$, $[0;39]$.
11. $f(x)=17x+3$, $[0;8]$.
12. $f(x)=-39x-11$, $[0;18]$.
13. $f(x)=15x+7$, $[0;2]$.
14. $f(x)=41x+17$, $[0;21]$.

15. $f(x)=-12x-4$, $[0;3]$.
16. $f(x)=43x+32$, $[0;23]$.
17. $f(x)=12x-9$, $[0;4]$.
18. $f(x)=-45x-34$, $[0;13]$.
19. $f(x)=20x-1$, $[0;2]$.
20. $f(x)=-47x+39$, $[0;19]$.
21. $f(x)=-21x+3$, $[0;3]$.
22. $f(x)=49x-40$, $[0;21]$.
23. $f(x)=-16x+17$, $[0;9]$.
24. $f(x)=46x+6$, $[0;8]$.
25. $f(x)=11x-13$, $[0;6]$.
26. $f(x)=44x-17$, $[0;20]$.
27. $f(x)=-7x-19$, $[0;5]$.
28. $f(x)=14x+13$, $[0;11]$.
29. $f(x)=-42x-2$, $[0;30]$.
30. $f(x)=21x+25$, $[0;11]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: Збірник задач: у 2-х ч. / за заг. ред. П.П. Овчиннікова. Ч. 1. – К. : Техніка, 2004. – 379 с.
2. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навчальний посібник: У двох книгах. Книга 2 / І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанов, Є.Ю. Таран. – 2-е видання, зі змінами. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
3. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. – 3-є вид., випр. – К.: Техніка, 2007. – 600 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2011. – 648 с.
6. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х ч. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко [та ін.]. Ч. 1. – К.: Вища школа, 2003. – 462 с.
7. Інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля [Електронний ресурс] : навчальний посібник до вивчення теоретичного курсу з математичного аналізу для студентів 1 курсу технічних факультетів / НТУУ «КПІ» ; уклад. З.П. Ординська, Л.А. Репета. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 123 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/17494.
8. Кривуца В.Г. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / В.Г. Кривуца, В.В. Барковський, Н.В. Барковська – К.: Центр навч. л-ри, 2005. – 536 с.
9. Кулініч Г.Л. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : у 2-х кн. / Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й.; за ред. Кулініча Г. Л. Кн. 1. – К.: Либідь, 1994. – 312 с.
10. Математика в сучасному технічному університеті. Практикум. Частина 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний [та ін.]; – Київ: НТУУ «КПІ», 2015. – 188 с. – https://ela.kpi.ua/handle/123456789/16633
11. Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін. Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. – Львів: Видавництво Національного університету „Львівська політехніка”, 2001. – 244 с.

12. Самойленко А.М. та ін. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник / А.М. Самойленко, С.А. Кривошия, М.О. Перестюк. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
13. Стрижак Т.Г. Математичний аналіз. Приклади і задачі / Т.Г. Стрижак, Н.Р. Коновалова. – К.: Либідь, 1995. – 240 с.
14. Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 216 с.
15. Шкіль М.І., Колісник Т.В. Вища математика: Підручник: У 3 книгах: Книга 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.
16. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Підручник у 2-х ч., – 3-тє видання, переробл. і доповн. – К.: Вища шк., 2005. – 447 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 3
ВСТУП 4

ГЛАВА I. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ 9
§1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ 9
Основні поняття та теореми 9
Контрольні питання та завдання 14
Приклади розв’язування задач 15
Завдання для роботи в аудиторії 20
§2. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ 22
Основні поняття та теореми 22
Контрольні питання та завдання 25
Приклади розв’язування задач 25
Завдання для роботи в аудиторії 30
§3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ 32
Основні поняття та теореми 32
Контрольні питання та завдання 35
Приклади розв’язування задач 35
Завдання для роботи в аудиторії 38
§4. ПЕРША ЧУДОВА ГРАНИЦЯ. ЕКВІВАЛЕНТНІ НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ВЕЛИЧИНИ 40
Основні поняття та теореми 40
Контрольні питання та завдання 40
Приклади розв’язування задач 41
Завдання для роботи в аудиторії 44
§5. ДРУГА ЧУДОВА ГРАНИЦЯ 45
Основні поняття та теореми 45
Контрольні питання та завдання 46
Приклади розв’язування задач 47
Завдання для роботи в аудиторії 49
§6. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ 51
Основні поняття та теореми 51
Контрольні питання та завдання 53
Приклади розв’язування задач 54
Завдання для роботи в аудиторії 60
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 62

ГЛАВА II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ 66

§1. ПОХІДНА. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ 66
Основні поняття та теореми 66
Контрольні питання та завдання 67
Приклади розв’язування задач 68
Завдання для роботи в аудиторії 69
§2. ПОХІДНА ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ ЗАДАНИХ НЕЯВНО ТА ПАРАМЕТРИЧНО 70
Основні поняття та теореми 70
Контрольні питання та завдання 70
Приклади розв’язування задач 71
Завдання для роботи в аудиторії 72
§3. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ 73
Основні поняття та теореми 73
Контрольні питання та завдання 75
Приклади розв’язування задач 76
Завдання для роботи в аудиторії 77
§4. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ДОТИЧНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПЛОСКОЇ КРИВОЇ 78
Основні поняття та теореми 78
Контрольні питання та завдання 80
Приклади розв’язування задач 80
Завдання для роботи в аудиторії 82
§5. МОНОТОННІСТЬ ТА ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА 84
Основні поняття та теореми 84
Контрольні питання та завдання 86
Приклади розв’язування задач 86
Завдання для роботи в аудиторії 87
§6. ОПУКЛІСТЬ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА 88
Основні поняття та теореми 88
Контрольні питання та завдання 89
Приклади розв’язування задач 90
Завдання для роботи в аудиторії 92
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 92

ГЛАВА III. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 98

§1. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 98
Основні поняття та теореми 98
Контрольні питання та завдання 100

Приклади розв’язування задач 101
Завдання для роботи в аудиторії 103

§2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 105
Основні поняття та теореми 105
Контрольні питання та завдання 107
Приклади розв’язування задач 107
Завдання для роботи в аудиторії 110

§3. ПОХІДНІ СКЛАДЕНИХ ФУНКЦІЙ 112
Основні поняття та теореми 112
Контрольні питання та завдання 113
Приклади розв’язування задач 114
Завдання для роботи в аудиторії 116

§4. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 118
Основні поняття та теореми 118
Контрольні питання та завдання 121
Приклади розв’язування задач 122
Завдання для роботи в аудиторії 125

§5. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ 126
Основні поняття та теореми 126
Контрольні питання та завдання 130
Приклади розв’язування задач 131
Завдання для роботи в аудиторії 133

§6. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ 135
Основні поняття та теореми 135
Контрольні питання та завдання 138
Приклади розв’язування задач 139
Завдання для роботи в аудиторії 143

§7. НАЙБІЛЬШІ ТА НАЙМЕНЬШІ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ 144
Основні поняття та теореми 144
Контрольні питання та завдання 147
Приклади розв’язування задач 147
Завдання для роботи в аудиторії 152

§8. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ 153
Основні поняття та теореми 153
Контрольні питання та завдання 155
Приклади розв’язування задач 156
Завдання для роботи в аудиторії 157

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 158

ГЛАВА IV. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ 168

§1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТАБЛИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ 168
- Основні поняття та теореми 168
- Контрольні питання та завдання 169
- Приклади розв’язування задач 170
- Завдання для роботи в аудиторії 171

§ 2. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ВВЕДЕННЯ НОВОГО АРГУМЕНТУ 172
- Основні поняття та теореми 172
- Контрольні питання та завдання 173
- Приклади розв’язування задач 173
- Завдання для роботи в аудиторії 174

§ 3. НАЙПРОСТІШІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ 175
- Основні поняття та теореми 175
- Контрольні питання та завдання 176
- Приклади розв’язування задач 177
- Завдання для роботи в аудиторії 179

§ 4. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ 179
- Основні поняття та теореми 179
- Контрольні питання та завдання 180
- Приклади розв’язування задач 181
- Завдання для роботи в аудиторії 183

§ 5. МЕТОД ПІДСТАНОВКИ (ЗАМІНИ ЗМІННОЇ) 184
- Основні поняття та теореми 184
- Контрольні питання та завдання 184
- Приклади розв’язування задач 185
- Завдання для роботи в аудиторії 186

§ 6. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ 187
- Основні поняття та теореми 187
- Контрольні питання та завдання 191
- Приклади розв’язування задач 192
- Завдання для роботи в аудиторії 197

§ 7. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ 199
- Основні поняття та теореми 199
- Контрольні питання та завдання 201
- Приклади розв’язування задач 201
- Завдання для роботи в аудиторії 205

§ 8. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ 205
- Основні поняття та теореми 205
- Контрольні питання та завдання 207

Приклади розв’язування задач 207
Завдання для роботи в аудиторії 210
§ 9. ІНТЕГРУВАННЯ КВАДРАТИЧНИХ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ 211
Основні поняття та теореми 211
Контрольні питання та завдання 212
Приклади розв’язування задач 213
Завдання для роботи в аудиторії 218
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 219
ГЛАВА V. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ 230
§ 1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ЯК ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СУМ. ОЦІНКА ТА ПОРІВНЯННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ 230
Основні поняття та теореми 230
Контрольні питання та завдання 232
Приклади розв’язування задач 233
Завдання для роботи в аудиторії 235
§ 2. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ 236
Основні поняття та теореми 236
Контрольні питання та завдання 237
Приклади розв’язування задач 238
Завдання для роботи в аудиторії 239
§ 3. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ 240
Основні поняття та теореми 240
Контрольні питання та завдання 241
Приклади розв’язування задач 242
Завдання для роботи в аудиторії 244
§ 4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ З НЕСКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ (1-ГО РОДУ) 244
Основні поняття та теореми 244
Контрольні питання та завдання 247
Приклади розв’язування задач 248
Завдання для роботи в аудиторії 249
§ 5. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ (2-ГО РОДУ) 250
Основні поняття та теореми 250
Контрольні питання та завдання 252
Приклади розв’язування задач 253
Завдання для роботи в аудиторії 254
§ 6. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ФІГУР 255
Основні поняття та теореми 255
Контрольні питання та завдання 257
Приклади розв’язування задач 258
Завдання для роботи в аудиторії 263

§ 7. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ 264
  Основні поняття та теореми 264
  Контрольні питання та завдання 266
  Приклади розв’язування задач 266
  Завдання для роботи в аудиторії 268

§ 8. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМУ І ПОВЕРХНІ ТІЛА ОБЕРТАННЯ 269
  Основні поняття та теореми 269
  Контрольні питання та завдання 271
  Приклади розв’язування задач 271
  Завдання для роботи в аудиторії 274

§ 9. ОБЧИСЛЕННЯ МОМЕНТІВ, КООРДИНАТ ЦЕНТРА ВАГИ, ТЕОРЕМИ ГУЛЬДІНА 275
  Основні поняття та теореми 275
  Контрольні питання та завдання 277
  Приклади розв’язування задач 278
  Завдання для роботи в аудиторії 281

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 281

ГЛАВА VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 289

§1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ 289
  Основні поняття та теореми 289
  Контрольні питання та завдання 290
  Приклади розв’язування задач 290
  Завдання для роботи в аудиторії 292

§2. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ОДНОРІДНИХ 293
  Основні поняття та теореми 293
  Контрольні питання та завдання 293
  Приклади розв’язування задач 294
  Завдання для роботи в аудиторії 298

§3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ 299
  Основні поняття та теореми 299
  Контрольні питання та завдання 299
  Приклади розв’язування задач 300
  Завдання для роботи в аудиторії 304

§4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ 305
  Основні поняття та теореми 305
  Контрольні питання та завдання 306
  Приклади розв’язування задач 307
  Завдання для роботи в аудиторії 309

§5. ДЕЯКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ПОНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ 310
Основні поняття та теореми 310
Контрольні питання та завдання 311
Приклади розв’язування задач 311
Завдання для роботи в аудиторії 314

§6. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ 315
Основні поняття та теореми 315
Контрольні питання та завдання 316
Приклади розв’язування задач 316
Завдання для роботи в аудиторії 318

§7. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. МЕТОД ЛАГРАНЖА (МЕТОД ВАРІАЦІЇ ДОВІЛЬНИХ СТАЛИХ) 318
Основні поняття та теореми 318
Контрольні питання та завдання 319
Приклади розв’язування задач 319
Завдання для роботи в аудиторії 321

§8. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І СПЕЦІАЛЬНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ 322
Основні поняття та теореми 322
Контрольні питання та завдання 323
Приклади розв’язування задач 324
Завдання для роботи в аудиторії 329

§9. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 329
Основні поняття та теореми 329
Контрольні питання та завдання 333
Приклади розв’язування задач 333
Завдання для роботи в аудиторії 336

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 338

ГЛАВА VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 347

§1. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ (ПО ДОВЖИНІ ДУГИ) 347
Основні поняття та теореми 347
Контрольні питання та завдання 349
Приклади розв’язування задач 350
Завдання для роботи в аудиторії 353

§2. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ (ПО КООРДИНАТАХ) 354
Основні поняття та теореми 354
Контрольні питання та завдання 356

Приклади розв’язування задач 357
Завдання для роботи в аудиторії 360

§3. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ПРАВИЛА ЙОГО ОБЧИСЛЕННЯ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ 362
Основні поняття та теореми 362
Контрольні питання та завдання 365
Приклади розв’язування задач 365
Завдання для роботи в аудиторії 369

§4. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ 372
Основні поняття та теореми 372
Контрольні питання та завдання 374
Приклади розв’язування задач 375
Завдання для роботи в аудиторії 378

§5. ЗАМІНА ЗМІННИХ ПІД ЗНАКОМ КРАТНОГО ІНТЕГРАЛА 379
Основні поняття та теореми 379
Контрольні питання та завдання 381
Приклади розв’язування задач 382
Завдання для роботи в аудиторії 387

§6. ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМІВ І ПЛОЩ, ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ 389
Основні поняття та теореми 389
Контрольні питання та завдання 390
Приклади розв’язування задач 391
Завдання для роботи в аудиторії 394

§7. ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ 396
Основні поняття та теореми 396
Контрольні питання та завдання 398
Приклади розв’язування задач 398
Завдання для роботи в аудиторії 402

§8. ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ 404
Основні поняття та теореми 404
Контрольні питання та завдання 407
Приклади розв’язування задач 407
Завдання для роботи в аудиторії 411

§9. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ 413
Основні поняття та теореми 413
Контрольні питання та завдання 417
Приклади розв’язування задач 418
Завдання для роботи в аудиторії 423

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 425

ГЛАВА VIII. РЯДИ 443
§1. СУМА РЯДУ. КРИТЕРІЙ КОШІ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ 443
Основні поняття та теореми 443
Контрольні питання та завдання 443
Приклади розв’язування задач 444
Завдання для роботи в аудиторії 447
§2. ОЗНАКИ ПОРІВНЯННЯ ДЛЯ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ 449
Основні поняття та теореми 449
Контрольні питання та завдання 449
Приклади розв’язування задач 450
Завдання для роботи в аудиторії 451
§3. ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА 452
Основні поняття та теореми 452
Контрольні питання та завдання 452
Приклади розв’язування задач 453
Завдання для роботи в аудиторії 454
§4. РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ 454
Основні поняття та теореми 454
Контрольні питання та завдання 455
Приклади розв’язування задач 455
Завдання для роботи в аудиторії 456
§5. ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ 457
Основні поняття та теореми 457
Контрольні питання та завдання 457
Приклади розв’язування задач 458
Завдання для роботи в аудиторії 459
§6. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. УМОВНА ТА АБСОЛЮТНА ЗБІЖНІСТЬ 459
Основні поняття та теореми 459
Контрольні питання та завдання 460
Приклади розв’язування задач 460
Завдання для роботи в аудиторії 462
§7. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ 462
Основні поняття та теореми 462
Контрольні питання та завдання 464
Приклади розв’язування задач 465
Завдання для роботи в аудиторії 466
§8. РОЗКЛАД ФУНКЦІЇ В СТЕПЕНЕВИЙ РЯД 466
Основні поняття та теореми 466
Контрольні питання та завдання 468

Приклади розв'язування задач 468
Завдання для роботи в аудиторії 470

§9. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ 471
Основні поняття та теореми 471
Контрольні питання та завдання 471
Приклади розв'язування задач 471
Завдання для роботи в аудиторії 472

§10. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ 473
Основні поняття та теореми 473
Контрольні питання та завдання 474
Приклади розв'язування задач 474
Завдання для роботи в аудиторії 477

§11. РЯД ФУР'Є ДЛЯ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ З ПЕРІОДОМ 2π НА ВІДРІЗКУ $[-\pi;\pi]$ 478
Основні поняття та теореми 478
Контрольні питання та завдання 479
Приклади розв'язування задач 480
Завдання для роботи в аудиторії 481

§12. РЯД ФУР'Є ДЛЯ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ З ПЕРІОДОМ $2l$ НА ВІДРІЗКУ $[-l; l]$ 482
Основні поняття та теореми 482
Контрольні питання та завдання 483
Приклади розв'язування задач 483
Завдання для роботи в аудиторії 485

§13. РОЗКЛАД ТІЛЬКИ ЗА КОСИНУСАМИ АБО ТІЛЬКИ ЗА СИНУСАМИ 485
Основні поняття та теореми 485
Контрольні питання та завдання 486
Приклади розв'язування задач 487
Завдання для роботи в аудиторії 488

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 489

ЛІТЕРАТУРА 502

Навчальне електронне видання
комбінованого використовування

Щерба Анатолій Іванович,
Нестеренко Алла Миколаївна,
Мірошкіна Ірина Володимирівна,
Щерба Валентина Олександрівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В авторській редакції.

Технічний редактор К. В. Давиденко

Гарн. Times New Roman. Обл.-вид. арк. 35,8. Зам. 23-18.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002.
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.
Редакційно-видавничий відділ ЧДТУ
red_vidav@ chdtu.edu.ua