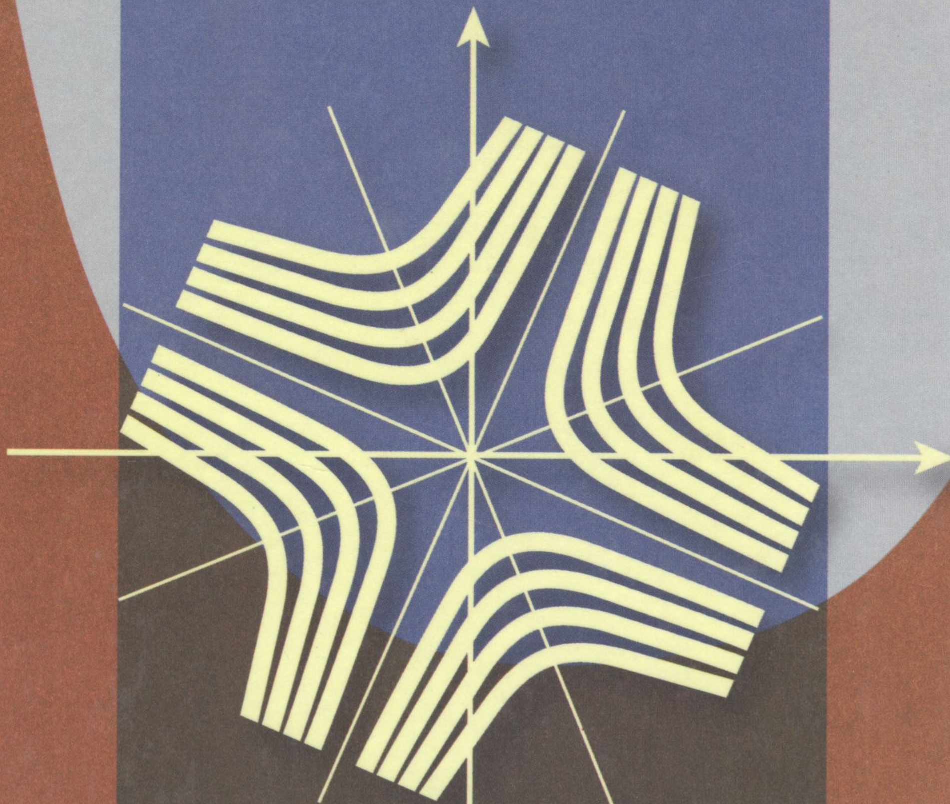
М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ



М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів

Київ
«Техніка»
2003

ББК 22.161.1я73
Ш66
УДК 517.9(075.8)

*Гриф надано Міністерством освіти
і науки України,
лист № 14/18.2-1389 від 02.07.2002 р.*

Рецензенти: М. О. Перестюк, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України; В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Яковець, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Шкіль М. І.

Ш66 Диференціальні рівняння: Навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл./ М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.

ISBN 966-575-140-9

У посібнику викладено основний матеріал з курсу диференціальних рівнянь. Значна увага приділяється методам інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем. Крім того, розглянуто основи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

ББК 22.161.1я73

ISBN 966-575-140-9

ПЕРЕДМОВА

В умовах реалізації ступеневої освіти та забезпечення освітніх рівнів бакалавра, спеціаліста і магістра виникає потреба у зближенні навчальних програм педагогічних та класичних університетів з фундаментальних дисциплін. У навчальних планах педагогічних університетів "Диференціальні рівняння" виділено як окрему дисципліну з курсу математичного аналізу. Це зумовлює необхідність створення навчального посібника для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів з теорії та застосування диференціальних рівнянь, який би містив інваріантною частиною питання програми педагогічних університетів, а також розділи, які доповнюють її до програми класичних університетів.

Диференціальні рівняння – розділ математики, який найповніше розкриває її гносеологічне значення. Адже коло задач, математичні моделі яких потребують дослідження властивостей розв'язків диференціальних рівнянь, надзвичайно широке. До них належать задачі геометрії, економіки, біології, гідромеханіки, електродинаміки, теорії коливань, теплопровідності тощо. При цьому виявляється, що одне й те саме рівняння може описувати абсолютно різні за своєю природою явища і процеси.

Саме тому автори поставили собі за мету створити посібник, який буде охоплювати основні питання теорії диференціальних рівнянь, що розглядаються в педагогічних університетах, сприятиме майбутньому вчителеві математики усвідомити роль методу математичного моделювання у науковому пізнанні та практиці, а магістрам отримати ґрунтовну підготовку з теорії диференціальних рівнянь. Даний посібник також буде корисним студентам технічних вузів України.

Автори висловлюють вдячність рецензентам члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору М. О. Перестюку, доктору фізико-математичних наук, професору В. Г. Самойленку та доктору фізико-математичних наук, професору В. П. Яковцю за цінні зауваження при рецензуванні рукопису.

Розділ 1
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Поняття диференціального рівняння і його розв'язку

При розв'язуванні різноманітних практичних задач часто отримують співвідношення, в яких невідомою величиною є функція однієї або кількох змінних, причому невідома функція міститься в даному співвідношенні разом із своїми похідними.

Рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називають диференціальними. Наприклад, диференціальними рівняннями є такі рівняння:

$$1)\ y' = x^3 + 5xy, \qquad 2)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$3)\ \frac{d^2y}{dx^2} + y + e^x = 0, \qquad 4)\ (x-1)^2\,dy + y^3\,dx = 0.$$

Якщо в диференціальному рівнянні невідома функція є функцією однієї змінної, то таке диференціальне рівняння називають звичайним. Якщо ж невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, є функцією багатьох змінних, то таке диференціальне рівняння називають рівнянням з частинними похідними.

Так, рівняння 1), 3) і 4) є звичайними диференціальними рівняннями, а рівняння 2) — рівнянням з частинними похідними.

Порядком диференціального рівняння називають максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить у нього.

Рівняння 1) і 4), про які йшла мова вище, є рівняннями першого порядку, а рівняння 2) і 3) — другого.

Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку в загальному випадку можна записати у вигляді

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

де x — незалежна змінна, а $y = y(x)$ — шукана функція.

При цьому вважають, що похідна n-го порядку функції $y(x)$ обов'язково входить в явному вигляді в рівняння (1). Наявність же в явному вигляді незалежної змінної x, функції $y(x)$ та її похідних до $(n-1)$-го порядку включно необов'язкова. Наприклад, $y'' = 0$ є диференціальним рівнянням другого порядку, хоча в ньому в явному вигляді й відсутні x, y і y'.

Розв'язком диференціального рівняння (1) називають n разів диференційовну функцію $y = \varphi(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ (a і b можуть бути і невласними числами), яка при підстановці в це рівняння перетворює його на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ в тотожність

$$F\left(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

Зауважимо, що коли проміжок $\langle a;\ b\rangle$ є відрізком або піввідрізком, то під похідною функції $\varphi(x)$ в кінцевих точках розуміють односторонню похідну. Наприклад, функція $\varphi(x) = \sin x$ є розв'язком рівняння

$$y'' + y = 0,$$

оскільки для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$ вона перетворює це рівняння в тотожність.

Справді, знайшовши похідні $\varphi'(x) = \cos x$, $\varphi''(x) = -\sin x$ і підставивши функцію $\varphi(x)$ та її похідні в рівняння, дістанемо тотожність

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = -\sin x + \sin x \equiv 0,$$

правильну для всіх $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Розв'язати диференціальне рівняння — означає знайти всі його розв'язки. При цьому, як правило, виникає необхідність обчислення невизначених інтегралів. Тому процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням цього рівняння. Досить часто шуканий розв'язок можна записати як інтеграл від елементарних функцій. При цьому кажуть, що розв'язок даного рівняння знайдено в квадратурах (диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах), а самі такі розв'язки називають квадратурами.

Приклади задач, при розв'язуванні яких отримують диференціальні рівняння

1. Швидкість розпаду радію пропорційна його наявній кількості. Знайти закон, який виражає зміну кількості радію протягом часу t, коли відомо, що через 1600 років залишиться половина початкової кількості радію.

Розв'язання. Позначимо через x кількість радію в даний момент часу t (t відраховується в роках). Отже, для розв'язання даної задачі потрібно знайти залежність між x і t, тобто виразити x як функцію від t, $x = x(t)$. Згідно з умовою задачі, швидкість розпаду $\frac{dx}{dt}$ прямо пропорційна наявній кількості радію. Тому

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t), \tag{2}$$

де k — коефіцієнт пропорційності.

Отже, маємо диференціальне рівняння першого порядку. Розв'яжемо це рівняння. Для цього запишемо його у вигляді

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = k\,dt,$$

або

$$d(\ln x(t)) = d(kt).$$

Якщо диференціали функцій дорівнюють один одному, то самі функції відрізняються на сталу величину. Позначимо її через $\ln C$. Тоді

$$\ln x(t) = kt + \ln C,$$

або

$$x(t) = Ce^{kt}. \qquad (3)$$

Формула (3) виражає залежність величини кількості радію від часу t. Проте в цю формулу входить стала інтегрування C. Щоб її визначити, скористаємося умовою задачі. Нехай у початковий момент часу $t = 0$ кількість радію дорівнює x_0, тобто

$$x(0) = x_0.$$

Підставивши в рівність (3) значенння $t = 0$ і $x(0) = x_0$, знайдемо

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Коефіцієнт пропорційності k визначимо з умови, що при $t = 1600$

$$\frac{x(t)}{x_0} = \frac{1}{2},$$

тобто

$$e^{1600k} = \frac{1}{2}, \text{ або } 1600k = \ln\frac{1}{2},$$

звідки

$$k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{1600}.$$

Остаточно маємо

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t}{1600}\ln\frac{1}{2}},$$

або

$$x(t) = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

Задачу розв'язано.

2. Нехай вода витікає через отвір у дні циліндричної посудини (рис. 1). Знайти закон зниження рівня води в посудині протягом часу, коли відомо, що швидкість v витікання води з посудини залежить від висоти h рідини, що міститься над отвором, таким чином:

$$v = 0,6\sqrt{2gh},$$

де g — прискорення вільного падіння.

Розв'язання. Введемо позначення: H — висота циліндричної посудини; S — площа її основи; h — висота стовпця рідини над отвором у момент часу t; s — площа отвору. Розглянемо проміжок часу Δt, протягом якого вода виливається через отвір. За час Δt рівень води в посудині знизиться з висоти h до висоти $h + \Delta h$ ($\Delta h < 0$). За цей час з посудини витече об'єм рідини $-S\Delta h$. Таким самим буде об'єм потоку води, що витікає за цей же час з отвору. Він дорівнює добутку sl, де l — довжина шляху, що проходить частинка рідини за час Δt. Позначимо через v_c середню швидкість, з якою рухається частинка рідини, проходячи через отвір. Тоді

$$l = v_c \Delta t.$$

Згідно з умовою задачі, v_c можна записати так:

$$v_c = 0,6\sqrt{2g(h + \theta\Delta h)},\ \ 0 < \theta < 1.$$

Тоді, прирівнюючи обидва об'єми рідини, маємо

$$-S\Delta h = 0,6\sqrt{2g(h + \theta\Delta h)}\Delta t s,$$

звідки

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k\sqrt{h + \theta\Delta h},\ \ k = 0,6\frac{s}{S}\sqrt{2g}.$$

Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, матимемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}. \tag{4}$$

Диференціальне рівняння (4) розв'яжемо тим самим способом, що й рівняння (2). Дістанемо

$$2\sqrt{h(t)} = -kt + C,$$

де C — довільна стала. Для її знаходження скористаємося умовою: при $t = 0$ $h(0) = H$.

Отже, $C = 2\sqrt{H}$.

Тоді

$$t = \frac{2\left(\sqrt{H} - \sqrt{h(t)}\right)}{k}.$$

Поклавши, зокрема, тут $h(t) = 0$, знайдемо час, за який вся рідина витече з посудини: $t = \dfrac{2\sqrt{H}}{k}$.

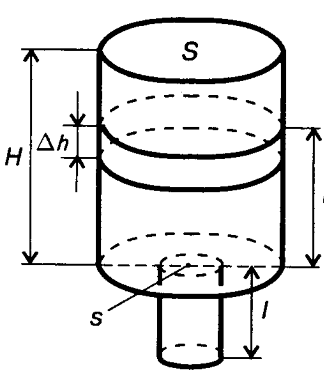


Рис. 1

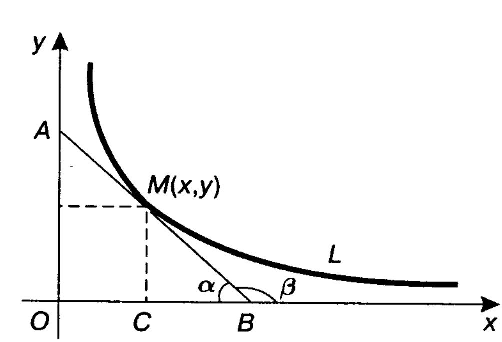


Рис. 2

3. Знайти криві, в яких відрізок дотичної, що лежить між координатними осями, в точці дотику поділяється навпіл.

Розв'язання. Нехай шукана крива L має вигляд, який показано на рис. 2. Візьмемо на кривій L довільну точку $M(x, y)$ і в цій точці проведемо дотичну AB. Згідно з умовою задачі, відрізок $|CB| = x$. Тому з прямокутного трикутника MBC маємо

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg}\beta.$$

Враховуючи, що

$$\operatorname{tg}\beta = y',$$

дістанемо диференціальне рівняння

$$y' = -\frac{y}{x}. \qquad (5)$$

Це рівняння можна записати так:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

або

$$d(\ln y) = d(-\ln x).$$

Тоді

$$\ln y = -\ln x + \ln|C| \ (C \neq 0).$$

Звідси

$$y = \frac{C}{x}. \qquad (6)$$

Отже, шуканими кривими є сім'я гіпербол, що залежить від одного параметра C.

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Теорема про існування та єдиність розв'язку

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, згідно із сказаним вище, називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Вважатимемо, що рівняння (1) розв'язане відносно похідної y', тобто

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Окремим випадком рівняння (2) є рівняння вигляду

$$y' = f(x). \qquad (3)$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, то з інтегрального числення відомо, що розв'язком рівняння (3) є функція

$$y = \int f(x)\,dx + C, \qquad (4)$$

де C — довільна стала (символом невизначеного інтегралу позначатимемо певну первісну відповідної функції). В інтегральному численні було доведено, що формула (4) містить всі розв'язки рівняння (3). Таким чином, рівняння (3) має нескінченну множину розв'язків. Розв'язуючи задачу 3, ми дістали диференціальне рівняння

$$y' = -\frac{y}{x},$$

розв'язком якого виявилась множина функцій

$$y = \frac{C}{x}, \tag{5}$$

де C — довільна стала.

І взагалі довільне диференціальне рівняння вигляду (2) при деяких умовах, накладених на функцію $f(x, y)$, матиме нескінченну множину розв'язків

$$y = \varphi(x, C). \tag{6}$$

При цьому розв'язок (6), тобто розв'язок, який містить довільну сталу C, називають загальним розв'язком диференціального рівняння (2), а розв'язок, який утворюється із загального при деякому значенні $C \in (-\infty; +\infty)$, називають частинним (далі буде більш строго сформульовано означення загального та частинного розв'язків).

Графік розв'язку диференціального рівняння (2) називають інтегральною кривою цього диференціального рівняння. Тоді рівність (6) можна розглядати як рівняння сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння (2).

На практиці часто доводиться знаходити розв'язок, який задовольняє певні додаткові умови. Однією з таких задач є задача Коші*. Для диференціального рівняння (2) задача Коші формулюється так: серед усіх розв'язків диференціального рівняння (2) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ дорівнює заданому значенню y_0, тобто

$$y(x_0) = y_0. \tag{7}$$

При цьому числа x_0, y_0 називають початковими даними, а умову (7) — початковою умовою. З геометричної точки зору знайти розв'язок рівняння (2), що задовольняє початкову умову (7), означає знайти інтегральну криву цього рівняння, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

*Луї Коші (1789—1857) — французький математик.

Приклад

1. З усіх розв'язків диференціального рівняння

$$y' = -\frac{y}{x}$$

знайти розв'язок, який задовольняє початкову умову

$$y(1) = 2. \tag{8}$$

Розв'язання. Усі розв'язки заданого диференціального рівняння містяться у формулі (5). Отже, й розв'язок, який відповідає початковим даним $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, якщо він існує, також міститься у цій формулі. Тому, підставляючи в

$$y = \frac{C}{x}$$

початкові дані, матимемо рівність

$$C = 2.$$

Таким чином, розв'язком задачі Коші $y' = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 2$ є функція

$$y = \frac{2}{x}.$$

Задача Коші не завжди є розв'язною. Може бути так, що не існує жодної функції $y = y(x)$, яка б на даному проміжку $\langle a;\, b\rangle$ задовольняла диференціальне рівняння (2) і початкову умову (7). У цьому випадку кажуть, що задача Коші не має розв'язку.

Однак для широкого класу функцій $f(x, y)$ відповідна задача Коші має розв'язки. Перше доведення існування розв'язку диференціального рівняння (2), який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, належить Пеано*.

Теорема 1 (Пеано). *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D площини xOy, то існує неперервна разом із своєю похідною першого порядку функція $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, де $(x_0, y_0) \in D$.*

На геометричній мові теорему Пеано можна сформулювати так. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D площини xOy, то через кожну точку цієї області проходить принаймні одна інтегральна крива диференціального рівняння (2).

Однак для розв'язання багатьох теоретичних і практичних задач важливо знати не лише факт існування розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову, але і єдиність

---

*Джузепе Пеано (1858–1932) – італійський математик.

такого розв'язку. Виявилось, що умова неперервності функції $f(x, y)$ не гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші. Більше того, М. О. Лаврентьєв побудував функцію $f(x, y)$, неперервну в області D і таку, що через кожну точку цієї області проходять принаймні дві різні інтегральні криві диференціального рівняння (2).

Для того щоб через кожну точку області D проходила лише одна інтегральна крива, потрібно накласти на функцію $f(x, y)$ деякі додаткові вимоги.

Теорема 2 (Коші). *Нехай функція $f(x, y)$ задовольняє умови:*
1) *$f(x, y)$ неперервна в замкненому прямокутнику*

$$\overline{R} = \left\{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b\right\},$$

а отже, є обмеженою в прямокутнику $\overline{R}$, тобто існує число $M > 0$ таке, що для всіх точок $(x, y) \in \overline{R}$

$$|f(x, y)| \leqslant M; \tag{9}$$

2) *$f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшіца* у прямокутнику $\overline{R}$ за змінною y*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \tag{10}$$

де L — стала Ліпшіца, а (x, y_1), (x, y_2) — довільні точки з прямокутника $\overline{R}$.

Тоді на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, де $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (2), який при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ не виходить з прямокутника $\overline{R}$ і задовольняє початкову умову (7), тобто $y(x_0) = y_0$.

Доведення. Доводитимемо теорему методом Пікара**. Побудуємо рівняння виду

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{11}$$

Рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтеграла, називають інтегральним. Легко показати, що коли рівняння (11) має неперервний розв'язок $y = y(x)$ (неперервну функцію, яка задовольняє це рівняння) на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, то цей розв'язок є розв'язком також диференціального рівняння (2), що задовольняє початкову умову (7).

---

*Рудольф Ліпшіц (1832—1903) — німецький математик.

**Еміль Пікар (1856—1941) — французький математик.

Справді, диференціюючи за змінною x ліву і праву частини тотожності (11), маємо

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Отже, функція $y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (2). Підставивши в ліву і праву частини (11) значення $x = x_0$, дістанемо $y(x_0) = y_0$, тобто функція $y = y(x)$ задовольняє й початкову умову (7).

Правильним є і обернене твердження: якщо функція $y = y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ є розв'язком диференціального рівняння (2) і $y(x_0) = y_0$, то функція $y = y(x)$ на цьому ж відрізку є розв'язком інтегрального рівняння (11).

Справді, якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння (2), то при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ виконуються тотожність

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \tag{12}$$

і рівність

$$y(x_0) = y_0. \tag{13}$$

Зінтегрувавши обидві частини тотожності (12) у межах від x_0 до x і врахувавши (13), матимемо

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt,$$

або

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt,$$

що й треба було довести.

Отже, інтегральне рівняння (11) еквівалентне диференціальному рівнянню (2) з початковою умовою (7). Тому далі будемо доводити існування і єдиність розв'язку інтегрального рівняння (11).

Для цього застосуємо метод послідовних наближень.

Побудуємо послідовність функцій $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots,$ де $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$, таким чином:

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt,$$

$$y_2(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt, \tag{14}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Відносно цих функцій можна стверджувати, що:

1) кожна функція $y_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n, \dots$, є визначеною при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ і не виходить з прямокутника $\overline{R}$. Справді, з (14) маємо

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

Отже, функція $y_1(x)$ не виходить за межі прямокутника $\overline{R}$. Далі знаходимо

$$|y_2(x) - y_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t))|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b, \dots$$

$$|y_n(x) - y_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b, \dots$$

Використовуючи метод математичної індукції, переконуємось у правильності даного твердження;

2) при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ вони є неперервними. Справді, оскільки за умовою функція $f(x, y(x))$ у прямокутнику $\overline{R}$ неперервна, то й інтеграл $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$, будучи функцією верхньої змінної межі, є неперервною функцією;

3) кожна з функцій $y_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n, \dots$, задовольняє початкову умову $y_k(x_0) = y_0$. Це випливає безпосередньо з формул (14).

Доведемо, що послідовність наближень (функцій) (14) збігається рівномірно для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$. Для цього розглянемо функціональний ряд

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \cdots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \cdots \tag{15}$$

Оскільки k-та частинна сума ряду (15) дорівнює k-му члену послідовності функцій (14), то з рівномірної збіжності ряду (15) випливає рівномірна збіжність послідовності наближень (14). Оцінимо за модулем кожен член ряду (15), починаючи з другого:

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant M|x - x_0|,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t)))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))|\, dt \right|.$$

Застосувавши до $|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))|$ умову Ліпшіца і врахувавши оцінку попереднього члена ряду, дістанемо

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant L \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_0(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant LM \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt = LM \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Аналогічно знаходимо

$$|y_3(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))|\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \int_{x_0}^{x} |y_2(t) - y_1(t)|\, dt \leqslant L^2 M \int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^2}{2!}\, dt = \frac{L^2 M}{3!} |x - x_0|^3.$$

Застосувавши метод математичної індукції, можна довести правильність такої оцінки:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{L^{n-1}M}{n!}|x - x_0|^n. \tag{16}$$

Оскільки $|x - x_0| \leqslant h$, то

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant Mh,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant ML\frac{h^2}{2!},$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant ML^2\frac{h^3}{3!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant ML^{n-1}\frac{h^n}{n!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Отже, члени функціонального ряду (15) не перевищують за модулем відповідні члени ряду

$$y_0 + Mh + ML\frac{h^2}{2!} + ML^2\frac{h^3}{3!} + \dots + ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} + \dots \tag{17}$$

Застосуємо до останнього ряду ознаку Д'Аламбера*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ML^{n-1}h^n(n-1)!}{ML^{n-2}h^{n-1}n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{Lh}{n} = 0 < 1.$$

Отже, числовий ряд (17) збігається. Тому за ознакою Вейєрштрасса** функціональний ряд (15) на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ рівномірно збігається.

Нехай

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = Y(x).$$

Згідно з доведеним, функція $Y(x)$ на відрізку $[x_0 - h;\ x_0 + h]$ є неперервною.

Доведемо, що $Y(x)$ задовольняє початкову умову

$$Y(x_0) = y_0$$

і не виходить з прямокутника $\overline{R}$.

Справді,

$$Y(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_0 = y_0.$$

---

*Жан Д'Аламбер (1717–1783) – французький математик і механік.

**Карл Вейєрштрасс (1815–1897) – німецький математик.

Перейшовши при $n \to \infty$ до границі в нерівності $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$, дістаємо $|Y(x) - y_0| \leqslant b$. Доведемо тепер, що $Y(x)$ є розв'язком рівняння (11).

Оскільки послідовність функцій $y_n(x)$ рівномірно збігається до $Y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що при $n > N$ і всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ виконуватиметься нерівність

$$|y_n(x) - Y(x)| < \frac{\varepsilon}{Lh}.$$

Тому, використавши умову Ліпшіца, матимемо

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, Y(t))|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_n(t) - Y(t)|\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{h}|x - x_0| \leqslant \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt$$

для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$.

Перейшовши при $n \to \infty$ до границі в співвідношенні

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt,$$

дістанемо

$$Y(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt,$$

тобто функція $y = Y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ є розв'язком інтегрального рівняння (11), а отже, і розв'язком диференціального рівняння (2), який задовольняє початкову умову (7).

Доведемо єдиність розв'язку $y = Y(x)$. Нехай на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, крім розв'язку $Y(x)$, існує й інший розв'язок $\Phi(x)$ такий, що $\Phi(x_0) = y_0$. Розглянемо досить малий відрізок $[x_0; x_0 + \eta]$, $\eta \leqslant h$, на якому $\Phi(x) \not\equiv Y(x)$. Оскільки функція $\theta(x) = |\Phi(x) - Y(x)| \not\equiv 0$ і є неперервною на відрізку $[x_0;\ x_0+\eta]$, то $\theta(x)$ досягає в деякій точці x_1, $x_0 < x_1 \leqslant x_0 + \eta$ свого найбільшого значення $m > 0$.

Тоді

$$m = |\Phi(x_1) - Y(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, \Phi(t))\, dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t, Y(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x_1} |f(t, \Phi(t)) - f(t, Y(t))|\, dt \right| \leqslant L \int_{x_0}^{x_1} |\Phi(t) - Y(t)|\, dt.$$

Виконавши інтегрування на всьому відрізку $[x_0;\ x_0+\eta]$, матимемо

$$m \leqslant L \int_{x_0}^{x_0+\eta} |\Phi(t) - Y(t)|\, dt < Lm\eta,$$

звідки $1 < L\eta$. А це неможливо, осільки число η може бути вибраним як завгодно малим. Тому на відрізку $[x_0;\ x_0+\eta]$

$$\Phi(x) \equiv Y(x).$$

Так само можна довести, що й на відрізку $[x_0-\eta;\ x_0]$ ці функції збігаються. Теорему доведено.

Приклад

2. Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$ та $y_2(x)$ до розв'язку диференціального рівняння

$$y' = x^2 + y^2$$

з початковою умовою $y(0) = 1$.

Розв'язання. Використаємо формули (14), поклавши в них $n = 0, 1, 2$. Нульовим наближенням $y_0(x)$ є стала функція $y_0(x) = 1$. Побудуємо перше і друге наближення:

$$y_1(x) = y_0(x) + \int_0^x f(t, y_0(t))\, dt = 1 + \int_0^x (t^2+1)\, dt = 1 + \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = 1 + x + \frac{1}{3}x^3;$$

$$y_2(x) = y_0(x) + \int_0^x f(t, y_1(t))\, dt = 1 + \int_0^x \left(t^2 + \left(1 + t + \frac{1}{3}t^3\right)^2\right) dt = 1+$$

$$+\left(\frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7 + t^2 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{2}{15}t^5\right)\Big|_0^x =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7.$$

Теорема Коші носить локальний характер. Вона гарантує існування розв'язку диференціального рівняння (2) лише на відрізку

$$I: \ x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h.$$

Але, якщо при цьому ми не вийшли за межі області D, в якій функція $f(x, y)$ задовольняє умови теореми Коші, то знайдений розв'язок можна продовжити. Справді, нехай $y_0^{(1)}$ — значення знайденого розв'язку при $x = x_0 + h$. Вважатимемо також, що точка з координатами $x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_0^{(1)}$ належить області D. Тоді існує прямокутник

$$\overline{R}_1 = \left\{(x, y) : |x - x_0^{(1)}| \leqslant a_1, \ |y - y_0^{(1)}| \leqslant b_1\right\},$$

який цілком міститься в області D. Позначимо через M_1 максимум $|f(x, y)|$ в прямокутнику $\overline{R}_1$. За теоремою Коші на відрізку

$$I_1: \ x_0^{(1)} - h_1 \leqslant x \leqslant x_0^{(1)} + h_1,$$

де $h_1 = \min\left\{a_1, \frac{b_1}{M_1}\right\}$ існує розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (2) такий, що

$$\varphi\left(x_0^{(1)}\right) = y_0^{(1)}.$$

Середина відрізка I_1 збігається з правим кінцем відрізка I. У цій точці обидва побудовані розв'язки набувають одного й того самого значення $y_0^{(1)}$. Отже, внаслідок властивості єдиності, обидва розв'язки збігаються в спільній частині I та I_1. Але половина $\left[x_0^{(1)}; \ x_0^{(1)} + h_1\right]$ відрізка I_1 лежить зовні I. Кажуть, що знайдений розв'язок у цій половині є продовженням раніше знайденого розв'язку на відрізку I. Якщо точка з координатами $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + h_1$, $y_0^{(2)}$, де $y_0^{(2)}$ — значення розв'язку при $x = x_0^{(1)} + h_1$, належить області D, то можна за початковими даними $\left(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}\right)$ побудувати розв'язок на відрізку I_2, який однією своєю половиною накладається на I_1, і в цій спільній частині новий розв'язок збігається з попереднім, а в другій половині відрізка I_2 отримати продовження розглядуваного розв'язку. Аналогічна побудова може бути проведена і ліворуч від точки (x_0, y_0). За допомогою такого продовження можна дістати розв'язок $y = \varphi(x)$, $\varphi(x_0) = y_0$, графік якого як завгодно близько підходить до межі області D [20].

Розглянемо ще питання про загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння (2).

Як вже зазначалося, при інтегруванні диференціального рівняння (2) дістаємо всі розв'язки у вигляді загального розв'язку (6)

$$y = \varphi(x, C).$$

Якщо для диференціального рівняння (2) є довільні початкові дані x_0 і y_0, то за теоремою Коші із загального розв'язку можна дістати єдиний розв'язок, що задовольняє задану початкову умову. При цьому потрібно знайти значення C, що відповідає початковим даним.

Отже, співвідношення (6) має допускати розв'язання відносно C, і знайдене значення C має гарантувати єдиність розв'язку задачі Коші. Враховуючи це, можна дати таке означення загального розв'язку диференціального рівняння (2).

Нехай область $D \subset \mathbf{R}^2$ є тією областю, у кожній точці якої диференціальне рівняння (2) має єдиний розв'язок. Тоді функцію (6)

$$y = \varphi(x, C),$$

яка визначена в деякій області зміни змінних x, C і має в цій області неперервну частинну похідну за змінною x, називають загальним розв'язком рівняння (2) в області D [8], якщо:

1) співвідношення (6) розв'язне відносно C при всіх значеннях x та y із області D, тобто

$$C = \Psi(x, y), \tag{18}$$

2) для всіх значень x та y із області D формула (18) дає таке значення C (включаючи $\pm\infty$), при якому функція (6) є розв'язком диференціального рівняння (2).

Якщо відомо загальний розв'язок (6) диференціального рівняння (2), то маючи початкові дані з області D, можна знайти розв'язок задачі Коші, що визначається цими початковими даними.

Розв'язок диференціального рівняння (2), в кожній точці графіка якого виконується умова єдиності (через точку проходить лише одна інтегральна крива), називають частинним розв'язком. З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються із загального при конкретному значенні сталої C, включаючи $\pm\infty$, є частинними розв'язками.

Отже, якщо задача Коші для диференціального рівняння (2) в області D має єдиний розв'язок, то через кожну точку області D проходить тільки одна інтегральна крива даного диференціального рівняння.

Зазначимо, що на практиці умову Ліпшіца в теоремі Коші перевірити досить складно. Тому користуються достатньою ознакою виконання умови Ліпшіца, яку сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3. *Якщо функція $f(x, y)$ у прямокутнику $\overline{R}$ має обмежену частинну похідну за змінною у*

$$|f'_y(x, y)| \leqslant N,$$

то умова Ліпшіца для такої функції виконується.

Доведення. За теоремою Лагранжа про скінченний приріст маємо

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2),$$

$$0 < \theta < 1,$$

для будь-яких (x, y_1) і (x, y_2) з прямокутника $\overline{R}$. Тому

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що обернене твердження неправильне. Так, функція $f(x, y) = |y|$ умову Ліпшіца задовольняє:

$$||y_1| - |y_2|| \leqslant |y_1 - y_2|.$$

Тут стала Ліпшіца $L = 1$, але в точках, де $y = 0$, задана функція не має навіть похідної.

Приклади

3. Знайти область існування та єдиності розв'язків диференціального рівняння

$$y' = y\sin x + e^x.$$

Розв'язання. Оскільки права частина заданого рівняння є неперервною функцією в усій дійсній площині, а $|f'_y| = |\sin x| \leqslant 1$, то в будь-якому прямокутнику площини xOy виконуються умови теореми Коші. Тому через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива розглядуваного рівняння.

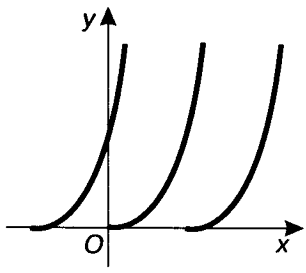


Рис. 3

4. Знайти область єдиності розв'язку рівняння

$$y' = \sqrt{y}. \tag{19}$$

Розв'язання. Права частина заданого рівняння визначена і неперервна при $y \geqslant 0$, тобто у верхній частині площини xOy.

Оскільки частинна похідна

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

стає необмеженою при $y \to 0$, $y > 0$, то в точках прямої $y = 0$ умова Ліпшіца може не виконуватися. Отже, через ці точки може проходити більше, ніж один розв'язок (одна інтегральна крива). Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що функція $y = 0$ є розв'язком рівняння (19). Можна довести, що функція

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2, \ x \geqslant -C, \tag{20}$$

в області

$$D = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, \ y > 0\}$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (19). Таким чином, через кожну точку осі Ox проходять два розв'язки (дві інтегральні криві), а саме вісь Ox, тобто розв'язок $y = 0$, і одна крива з сім'ї інтегральних кривих (20). Отже, у точках осі Ox порушується умова єдиності. У решті точок верхньої півплощини виконуються обидві умови теореми Коші. Тому через кожну таку точку проходить лише один розв'язок (інтегральна крива) диференціального рівняння (19) (рис. 3).

Розв'язок диференціального рівняння, у кожній точці графіка якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають особливим розв'язком. У прикладі 4 особливим розв'язком рівняння (19) є функція $y = 0$.

Іноді при інтегруванні диференціального рівняння не можна знайти загальний розв'язок у явному вигляді, але можна записати його в неявному вигляді, тобто

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{21}$$

Співвідношення (21) називають загальним інтегралом рівняння (2) в області D, якщо воно неявним чином визначає загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C)$$

даного диференціального рівняння (2) в області D.

Розв'язок у параметричній формі, який залежить від однієї довільної сталої

$$x = \varphi(t, C), \ y = \psi(t, C),$$

називатимемо загальним розв'язком у параметричній формі.

Диференціальному рівнянню (1) можна дати механічне тлумачення. Якщо незалежну змінну позначити через t, а функцію через x, то диференціальне рівняння

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

виражає співвідношення між шляхом x і швидкістю $\frac{dx}{dt}$ тіла, що рухається прямолінійно, у довільний момент часу t. Загальний розв'язок

$$x = x(t, C)$$

є законом руху тіла, а початкова умова $x(t_0) = x_0$ вказує на положення тіла, що рухається, у початковий момент часу $t = t_0$.

1.3. Поле напрямків. Ізокліни. Ламані Ейлера

Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Вважатимемо, що функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області $D \subset \mathbf{R}^2$.

Область D називають областю визначення диференціального рівняння (1).

Якщо $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) є необмеженою,

$$\lim_{D \ni (x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \infty,$$

то розглядатимемо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{2}$$

Множину цих точок, а також точки, в яких функція $f(x, y)$ не визначена, але може бути доозначена за неперервністю (існує границя функції), приєднують до області визначення диференціального рівняння (1).

Отже, нехай $D \subset \mathbf{R}^2$ є областю визначення диференціального рівняння (1). За теоремою Пеано існує розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1) такий, що задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, де (x_0, y_0) — довільна точка області D. Оскільки функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком (1), то справджується тотожність

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

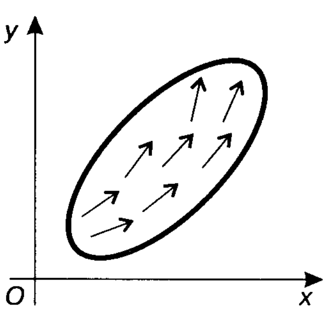


Рис. 4

зокрема,

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0). \tag{3}$$

Таким чином, точці $(x_0, y_0) \in D$ за допомогою диференціального рівняння (1) поставимо у відповідність певне число, а саме — значення похідної (3). Якщо через точку (x_0, y_0) проходить інтегральна крива $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (1), то $\varphi'(x)$, як відомо, дорівнює $\operatorname{tg} \alpha_0$, де α_0 — кут, утворений дотичною, проведеною до інтегральної кривої в точці (x_0, y_0), з додатним напрямком осі Ox, тобто

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \varphi'(x_0) = \operatorname{arctg} f(x_0, y_0). \tag{4}$$

Таким чином, за допомогою диференціального рівняння (1) точці $(x_0, y_0) \in D$ можна поставити у відповідність певний напрямок (кут), що визначається формулою (4).

Тоді точці $(x_1, y_1) \in D$ буде відповідати напрямок

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} f(x_1, y_1)$$

і т.д. Отже, кожній точці $(x, y) \in D$ за допомогою диференціального рівняння (1) можна поставити у відповідність напрямок

$$\alpha = \operatorname{arctg} f(x, y). \tag{5}$$

Вимагаючи, щоб в кожній точці (x, y) області D була правильною рівність $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$, ми тим самим виключаємо напрямок, паралельний осі Oy, оскільки при цьому $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, а функція $f(x, y)$ в кожній точці області D має скінченне значення. Тому разом з рівнянням (1) будемо розглядати диференціальне рівняння (2), використовуючи останнє в околі тих точок, в яких границя функції $f(x, y)$ дорівнює нескінченності.

Таким чином, диференціальне рівняння (1) можна геометрично інтерпретувати як таке, що задає в області D поле напрямків. На рис. 4 це поле зображено стрілками. Напрямок кожної стрілки визначається формулою (5).

Як уже зазначалося, графіком розв'язку диференціального рівняння (1) є крива, яку називають інтегральною.

Отже, інтегральна крива, що проходить через точку $(x, y) \in D$, відрізняється від усіх інших кривих, які проходять через цю точку, тим, що напрямок дотичної в даній точці до інтегральної кривої збігається з напрямком поля, що його задає диференціальне рівняння.

Тому геометрично задачу інтегрування диференціального рівняння можна сформулювати так: знайти такі криві, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямком поля в цій точці. На рисунку криву треба проводити так, щоб стрілки визначали в кожній точці напрямок дотичної до даної кривої.

Знаючи поле напрямків, задане диференціальним рівнянням, можна будувати криві, які нагадують інтегральні криві даного диференціального рівняння. Щоб побудувати поле напрямків, використовують метод ізоклін.

Ізокліною називають криву на площині xOy, в кожній точці якої поле має той самий напрямок.

Таким чином, усі інтегральні криві, які перетинають дану ізокліну, в точках перетину нахилені до осі Ox під одним і тим самим кутом.

Маючи диференціальне рівняння, можна написати рівняння ізокліни. Так, для диференціального рівняння (1) рівняння ізоклін має вигляд

$$f(x, y) = a, \tag{6}$$

де a — довільний параметр. Надаючи a різних значень, щоразу діставатимемо на площині xOy рівняння ізокліни. При цьому напрямок поля кожної ізокліни визначається формулою

$$\alpha = \operatorname{arctg} a. \tag{7}$$

Приклади

1. Побудувати за допомогою ізоклін поле напрямків, яке задає диференціальне рівняння

$$y' = x^2 + y^2. \tag{8}$$

Розв'язання. Складаємо рівняння сім'ї ізоклін:

$$x^2 + y^2 = a.$$

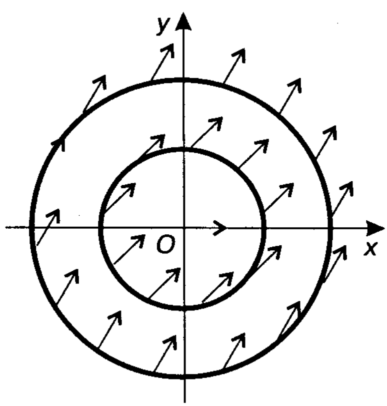


Рис. 5

Отже, ізоклінами тут є кола з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{a}$. Якщо $a = 0$, то матимемо точку $(0, 0)$, напрямок поля в якій, згідно з формулою (7), дорівнює нулю (напрямок стрілки збігається з додатним напрямком осі Ox). При $a = 1$ дістаємо ізокліну

$$x^2 + y^2 = 1,$$

в кожній точці якої напрямок поля дорівнює $\frac{\pi}{4}$. При $a = \frac{1}{2}$ маємо

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

тобто коло з центром у початку координат і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. У кожній точці цього кола напрямок поля дорівнює

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Поле напрямків, задане диференціальним рівнянням (8), показано на рис. 5.

2. Побудувати поле напрямків, задане диференціальним рівнянням

$$y' = x. \tag{9}$$

Розв'язання. Складаємо рівняння сім'ї ізоклін:

$$x = a.$$

Отже, ізоклінами диференціального рівняння (9) є прямі, паралельні осі Oy (рис. 6). Поклавши $a = 0$, дістанемо ізокліну $x = 0$, тобто вісь Oy, в кожній точці якої напрямок поля паралельний осі Ox. При $a = 1$ матимемо пряму $x = 1$, напрямок поля в кожній точці якої дорівнює $\frac{\pi}{4}$; при $a = 2$ — ізокліну $x = 2$, напрямок поля в кожній точці якої — $\alpha = \operatorname{arctg} 2$; при $a = -1$ — ізокліну $x = -1$, напрямок поля в кожній точці якої дорівнює $-\frac{\pi}{4}$ і т.д.

Якщо задати яку-небудь точку (початкову умову), наприклад (0, 1), то можна побудувати наближено інтегральну криву, що проходить через цю точку. Для цього потрібно криву проводити так, щоб у точках її перетину з ізоклінами напрямок дотичної збігався з напрямком поля. При цьому інтегральна крива нагадує параболу. Це не випадково, оскільки загальний розв'язок диференціального рівняння (9) має вигляд

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

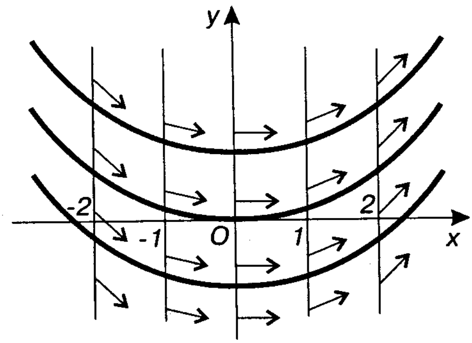


Рис. 6

Тоді, скориставшись початковою умовою $y(0) = 1$, знаходимо параболу

$$y = \frac{x^2}{2} + 1,$$

яка проходить через точку (0, 1).

Розглянемо ще один наближений метод знаходження інтегральних кривих диференціального рівняння (1), а саме — метод Ейлера*.

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння (1) з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \tag{10}$$

Припустимо, що права частина рівняння (1) задовольняє умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку. Тоді на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, $h > 0$, існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкову умову (10). Відрізок $[x_0; x_0 + h]$ розіб'ємо на n частин (не обов'язково таких, що дорівнюють одна одній) точками

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x_0 + h.$$

Через точки поділу проведемо прямі, паралельні осі Oy (рис. 7), а з точки $M_0(x_0, y_0)$ — відрізок прямої, нахиленої до осі Ox під кутом, що дорівнює напрямку поля в точці $M_0(x_0, y_0)$, до перетину з прямою $x = x_1$.

---

*Леонард Ейлер (1707–1783) — швейцарський математик і механік.

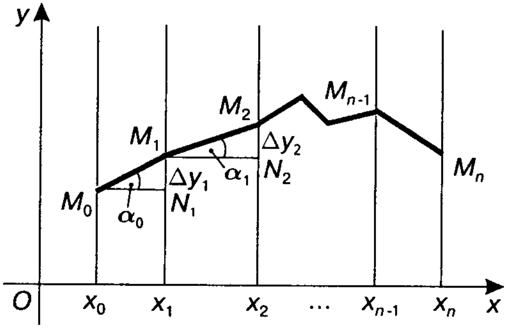


Рис. 7

Дістанемо точку $M_1(x_1, y_1)$ з ординатою

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1.$$

З прямокутного трикутника $M_0M_1N_1$ знайдемо

$$\Delta y_1 = (x_1 - x_0)\operatorname{tg}\alpha_0 = \\ = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Отже, ординатою точки $M_1(x_1, y_1)$ є

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

З точки $M_1(x_1, y_1)$ проведемо відрізок прямої, нахиленої до осі Ox під кутом, що дорівнює напрямку поля в цій точці, до перетину з прямою $x = x_2$, матимемо точку $M_2(x_2, y_2)$. Аналогічно знаходимо ординату точки M_2:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

і т.д. За методом індукції можна довести, що ордината точки $M_n(x_n, y_n)$ дорівнює

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \tag{11}$$

Внаслідок такої побудови дістанемо ламану, яку називають ламаною Ейлера, а метод її побудови — методом Ейлера.

Кожна ламана Ейлера дає уявлення про розміщення на площині інтегральної кривої, що проходить через точку.

Природно вважати, що при зменшенні довжин ланок ламана Ейлера наближається до інтегральної кривої, якщо остання існує. В теорії диференціальних рівнянь доведено, що при виконанні умов теореми Коші можна вибрати таку послідовність ламаних Ейлера, яка наближається до інтегральної кривої.

Процес побудови ламаної Ейлера розглянуто тільки в один бік — праворуч від точки M_0. Аналогічно будується ламана Ейлера і ліворуч від точки M_0.

На практиці, як правило, відрізок $[x_0; x_0 + h]$ розбивають на рівні частини так, що довжина кожного відрізка $[x_k; x_{k+1}]$ дорівнює $\frac{h}{n}$. Тоді формула (11) набуває вигляду

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\frac{h}{n}. \tag{12}$$

Приклад

3. Методом Ейлера побудувати наближено інтегральну криву диференціального рівняння $y' = x + y$, яка проходить через точку $(1, 1)$ на відрізку $[1; 1,5]$, та обчислити наближено $y(1, 5)$.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[1; 1,5]$, наприклад, на п'ять рівних частин. Довжина кожного отриманого відрізка дорівнює

$$\frac{0,5}{5} = 0,1,$$

а кожна точка x_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, збігається з точками $x_0 = 1$; $x_1 = 1,1$; $x_2 = 1,2$; $x_3 = 1,3$; $x_4 = 1,4$; $x_5 = 1,5$. Скориставшись формулою (12) і вважаючи, що

$$f(x, y) = x + y,$$

складаємо таблицю.

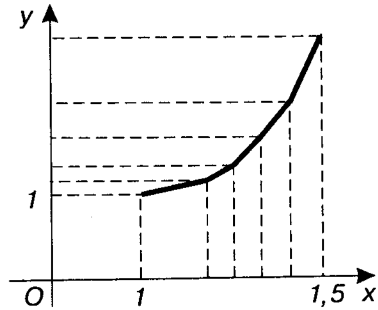


Рис. 8

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)\frac{h}{n}$	y_{k+1}
0	1	1	0,2	0,2
1	1,1	1,2	0,23	1,43
2	1,2	1,43	0,263	1,693
3	1,3	1,693	0,2993	1,9923
4	1,4	1,9923	0,33923	2,33153
5	1,5	2,33153		

Побудувавши на площині xOy точки $(1; 1)$, $(1, 1; 1, 2)$, $(1, 2; 1, 43)$, $(1, 3; 1, 693)$, $(1, 4; 1, 9923)$, $(1, 5; 2, 33153)$ і сполучивши їх відрізками прямих, матимемо ламану Ейлера (рис. 8), яку беремо за наближений вигляд шуканої інтегральної кривої. При цьому $y(1, 5) = 2, 33153$.

1.4. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,\psi(y) \qquad (1)$$

називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Будемо припускати, що функції $\varphi(x)$ та $\psi(y)$ неперервні в інтервалах $(a;\ b)$ та $(c;\ d)$ відповідно.

Якщо $\psi(y) \neq 0$ для всіх $y \in (c;\ d)$, то з (1) маємо

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx. \qquad (2)$$

Диференціальне рівняння, в якому коефіцієнт при dx є функцією, залежною тільки від x, а коефіцієнт при dy є функцією, залежною тільки від y, називають диференціальним рівнянням з відокремленими змінними. Отже, (2) є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

З неперервності функцій $\frac{1}{\psi(y)}$ та $\varphi(x)$ на відповідних інтервалах випливає на цих інтервалах існування первісних

$$\Psi(y) = \int \frac{dy}{\psi(y)} \text{ і } \Phi(x) = \int \varphi(x)\, dx.$$

Тому рівняння (2) матиме вигляд

$$d\Psi(y) = d\Phi(x).$$

Вважатимемо, що нам відома функція $y = y(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння (1). Оскільки диференціали двох функцій тотожно рівні в інтервалі $(a; b)$, то самі функції на цьому інтервалі відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\Psi(y) = \Phi(x) + C \tag{3}$$

або

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\, dx + C. \tag{4}$$

Співвідношення (3) і (4) є загальним інтегралом диференціального рівняння (1). Справді, покажемо, що вони задають розв'язки рівняння (1) в неявному вигляді. Отже, нехай функція $y = y(x)$, неперервна разом із своєю похідною, перетворює (4) у тотожність при певному значенні $C = C_0$, тобто

$$\int \frac{y'(x)\, dx}{\psi(y(x))} \equiv \int \varphi(x)\, dx + C_0. \tag{5}$$

Диференціюючи тотожність (5), матимемо

$$\frac{y'(x)\, dx}{\psi(y(x))} \equiv \varphi(x)\, dx,$$

або

$$y'(x) \equiv \psi(y(x))\, \varphi(x). \tag{6}$$

Тому $y = y(x)$ — розв'язок диференціального рівняння (1). Нехай тепер для деякої функції $y = y(x)$ справджується тотожність (6). Тоді при відповідному значенні $C = C_0$ матиме місце і тотожність (5).

Покажемо, що співвідношення (3) визначає розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (1) такий, що

$$y(x_0) = y_0, \tag{7}$$

де (x_0, y_0) — довільна точка області

$$D = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

Нехай

$$F(x, y) \equiv \Phi(x) - \Psi(y) + C = 0. \tag{8}$$

Функція $F(x, y)$ задовольняє умови теореми про існування неявної функції. Справді:
1) частинні похідні

$$F'_x = \varphi(x) \text{ і } F'_y = -\frac{1}{\psi(y)}$$

як функції двох незалежних змінних x і y неперервні в області D;
2) $F'_y \neq 0$ в цій області;
3) якщо точка (x_0, y_0) належить області D, то константу C можна вибрати так, щоб

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Для цього достатньо покласти

$$C = -\Phi(x_0) + \Psi(y_0).$$

Тоді за теоремою про існування та диференційовність неявної функції рівняння (8) у деякому околі точки x_0 визначає єдину функцію $y = y(x)$ таку, що $y(x_0) = y_0$, причому

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \varphi(x)\,\psi(y),$$

тобто знайдена функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (1). Отже, при зроблених вище припущеннях відносно функцій $\varphi(x)$ та $\psi(y)$, диференціальне рівняння (1) має єдиний розв'язок, що задовольняє наперед задану початкову умову (7), тобто через кожну $(x_0, y_0) \in D$ проходить єдина інтегральна крива диференціального рівняння (1).

Приклади

1. Знайти розв'язки диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = y - 1. \tag{9}$$

Розв'язання. При $y \neq 1$ задане рівняння допускає відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{y-1} = dx.$$

Звідси

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int dx + \ln|C|.$$

Знайшовши інтеграли, маємо

$$\ln|y-1| = x + \ln|C|,$$

тобто

$$y = 1 + Ce^x. \tag{10}$$

Дістали загальний розв'язок диференціального рівняння (9). Функція

$$\psi(y) = y - 1$$

при $y = 1$ дорівнює нулю. Отже, $y \equiv 1$ також є розв'язком диференціального рівняння (9). Оскільки через кожну точку графіка функції $y \equiv 1$ проходить одна інтегральна крива ($y = 1$), то розв'язок $y \equiv 1$ є частинним розв'язком диференціального рівняння (9).

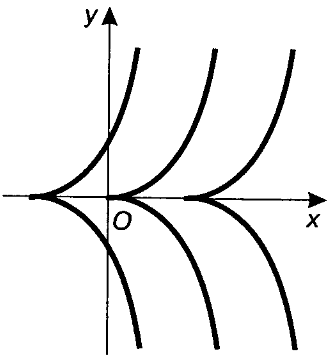


Рис. 9

2. Зінтегрувати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}.$$

Розв'язання. Нехай $y \neq 0$. Тоді

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx.$$

Отже,

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} + C = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} + C.$$

Звідси знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{(x-C)^3}}, \ x > C. \tag{11}$$

На площині xOy співвідношення (11) визначає сім'ю парабол. Проте права частина рівняння $\psi(y) = \sqrt[3]{y}$ при $y = 0$ дорівнює нулю. Тому, крім розв'язків (11), розв'язком буде також функція $y \equiv 0$. Через кожну точку осі Ox проходять дві інтегральні криві: одна — із сім'ї (11), а інша — вісь Ox. Тому розв'язок $y \equiv 0$ є особливим.

Вище ми припускали, що функція $\psi(y)$ не перетворюється в нуль в інтервалі $(c; d)$. Нехай тепер функція $\psi(y)$ у деякій точці $y_0 \in (c; d)$ дорівнює нулю, тобто $\psi(y_0) = 0$. Підставивши в рівняння (1) функцію $y \equiv y_0$, переконуємось у тому, що вона є розв'язком цього рівняння.

Цей розв'язок може бути особливим, а може і не бути ним. У прикладі 1, розглянутому вище, розв'язок $y \equiv 1$ не є особливим, а в прикладі 2 розв'язок $y \equiv 0$ — особливий.

Рівняння (1) є окремим випадком диференціального рівняння

$$P_1(x)\,Q_1(y)\,dx + P_2(x)\,Q_2(y)\,dy = 0. \tag{12}$$

Для відокремлення змінних у диференціальному рівнянні (12) достатньо помножити обидві його частини на функцію $\dfrac{1}{Q_1(y)\,P_2(x)}$ (припускаємо, що $Q_1(y) \neq 0,\ P_2(x) \neq 0$). Матимемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = 0. \tag{13}$$

Загальним інтегралом рівняння (13), а тому рівняння (12) буде

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = C. \tag{14}$$

Як і в попередньому випадку, тут потрібно окремо дослідити ті значення x і y, при яких функції $Q_1(y) = 0$ і $P_2(x) = 0$. Корені рівнянь

$$Q_1(y) = 0,\ \ P_2(x) = 0$$

також є розв'язками диференціального рівняння (12).

До рівняння з відокремлюваними змінними можна звести рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \tag{15}$$

де a, b і c — задані сталі величини. Для цього покладемо

$$u(x) = ax + by + c.$$

Враховуючи, що

$$y = \frac{1}{b}\,(u - ax - c),\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right),$$

дістаємо рівняння

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u),$$

яке допускає відокремлення змінних.

Справді, якщо

$$a + bf(u) \neq 0,$$

то

$$\frac{du}{a+bf(u)} = dx.$$

Загальний інтеграл останнього рівняння має вигляд

$$\int \frac{du}{a+bf(u)} = x + C.$$

Якщо $\Phi(u)$ — первісна для $\dfrac{1}{a+bf(u)}$, то

$$\Phi(u) = x + C,$$

тобто приходимо до загального інтегралу вигляду

$$\Phi(ax+by+c) - x = C.$$

Якщо $a + bf(u) = 0$, то рівняння (15) матиме ще розв'язки вигляду

$$ax + by + c = \text{const}.$$

1.5. Однорідні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Функцію $f(x, y)$ називають однорідною функцією виміру m, якщо для довільних x, y і $t \neq 0$ справджується тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Наприклад, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ — однорідна функція виміру 1, оскільки

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3} = t\sqrt[3]{x^3 + y^3} = tf(x, y),$$

а

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}; \; f(x, y) = \frac{x^3 + y^3 - 2xy^2}{x^2y - xy^2 + 2x^3 - y^3}$$

є однорідними функціями нульового виміру ($m = 0$).

Диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

називають однорідним, якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

За означенням

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Взявши $t = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, дістанемо

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Тому рівняння (1) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Таким чином, в однорідному рівнянні (1) права частина фактично залежить від змінної $\frac{y}{x}$. Покладемо $u(x) = \frac{y}{x}$, тобто $y = u(x)\,x$.

Тоді $y' = u'x + u$, і однорідне рівняння (1) матиме вигляд

$$u'x + u = f(1, u),$$

або

$$u'x = f(1, u) - u. \tag{2}$$

Диференціальне рівняння (2) допускає відокремлення змінних. Справді, якщо

$$f(1, u) - u \neq 0, \tag{3}$$

то матимемо

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Звідси

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C.$$

Якщо $F(u)$ — деяка первісна підінтегральної функції, то

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C \tag{4}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (1).

Приклад

1. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + 1.$$

Розв'язання. Застосовуючи підстановку $u = \frac{y}{x}$, матимемо

$$u'x + u = u + 1,$$

або

$$u' = \frac{1}{x}.$$

Звідси

$$u = \ln|x| + C,$$

або остаточно

$$y = x\ln|x| + Cx.$$

Ми знайшли загальний інтеграл диференціального рівняння (1) при виконанні умови (3).

Нехай умова (3) не виконується. Припустимо спочатку, що умова (3) не виконується тотожно:

$$f(1, u) - u \equiv 0,$$

тобто

$$f(1, u) \equiv u = \frac{y}{x}.$$

Тоді диференціальне рівняння (1) матиме вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Загальним розв'язком отриманого рівняння є сім'я півпрямих $y = Cx$, $x \neq 0$, до яких потрібно приєднати півпрямі $x = 0$, $y \neq 0$.

Нехай тепер умова (3) порушується при окремих значеннях u, наприклад, при $u = u_0$. Тоді, крім загального інтеграла (4), диференціальне рівняння (1) має ще розв'язок $u = u_0$ або $y = u_0 x$, тобто інтегральною кривою є пряма, що проходить через початок координат.

Приклад

2. Розв'язати рівняння

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Розв'язання. Після підстановки $y = u(x)x$ матимемо

$$xu' = u^2 - u.$$

Звідси

$$\frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln|Cx|,$$

або

$$\frac{u-1}{u} = Cx, \quad u = \frac{1}{1 - Cx}.$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$y = \frac{x}{1 - Cx}.$$

Відокремлюючи змінні, ми припустили, що $u^2 - u \neq 0$. Нехай тепер

$$u^2 - u = 0,$$

тобто $u = 0$, $u = 1$. Тоді

$$y = 0 \text{ або } y = x.$$

Розв'язок $y = x$ можна отримати із загального розв'язку при $C = 0$. Функція $y = 0$ також є розв'язком даного рівняння.

До однорідного диференціального рівняння можна звести диференціальне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{5}$$

в якому a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — дійсні числа, причому

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

а f — довільна неперервна функція в заданій області. Справді, введемо нові змінні x_1 і y_1:

$$x = x_1 + h,\ y = y_1 + k, \tag{6}$$

де h і k — невідомі сталі. Підставляючи в диференціальне рівняння (5) значення (6) та враховуючи, що $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$, дістаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + a_1h + b_1k + c_1}{a_2x + b_2y + a_2h + b_2k + c_2}\right).$$

Сталі h і k виберемо так, щоб

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Система алгебраїчних рівнянь (7) має єдиний розв'язок. Таким чином, матимемо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}\right). \tag{8}$$

У рівнянні (8) функція f є однорідною функцією нульового виміру.

Якщо ж умова

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

не виконується, тобто

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda, \tag{9}$$

то, враховуючи, що $a_1 = a_2\lambda$, $b_1 = b_2\lambda$, диференціальне рівняння (5) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda a_2x + \lambda b_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Застосовуючи підстановку

$$z(x) = a_2 x + b_2 y,$$

дістанемо

$$\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right),$$

або

$$\frac{dz}{dx} = b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2.$$

Останнє диференціальне рівняння допускає відокремлення змінних. Знайшовши його загальний інтеграл і підставивши a_2x+b_2y замість $z(x)$, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (5) за умови (9).

Рівняння

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{10}$$

буде однорідним, якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ — однорідні одного й того самого виміру m.

Якщо ж коефіцієнти рівняння (10) задовольняють умови

$$M(tx, t^k y) = t^m M(x, y),\ \ N(tx, t^k y) = t^{m-k+1} N(x, y),$$

то його називають узагальнено-однорідним рівнянням. Інакше кажучи, якщо існує таке число k, що при підстановці в рівняння (10) замість x, y і dy відповідно tx, $t^k y$ і $t^{k-1}\,dy$ дістанемо те саме рівняння, то диференціальне рівняння (10) називають узагальнено-однорідним.

Покажемо, що узагальнено-однорідне диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах. Для цього покладемо $t = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тоді

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x^k}\right),\ \ N(x, y) = x^{m-k+1} N\left(1, \frac{y}{x^k}\right).$$

Отже, рівняння (10) матиме вигляд

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x^k}\right) dx + x^{m-k+1} N\left(1, \frac{y}{x^k}\right) dy = 0.$$

Поклавши $y = z^k$, $dy = kz^{k-1}\,dz$ і скоротивши на x^m, дістанемо

$$M\left(1, \frac{z^k}{x^k}\right) dx + k\frac{x^{1-k}}{z^{1-k}} N\left(1, \frac{z^k}{x^k}\right) dz = 0. \tag{11}$$

Рівняння (11) не зміниться, якщо в ньому x і z замінити відповідно на tx і tz. Отже, це рівняння однорідне.

Таким чином, узагальнено-однорідне рівняння підстановкою

$$y = z^k$$

зводиться до однорідного.

Приклад

3. Розв'язати рівняння.

$$4xy\,dx + (y - x^2)\,dy = 0. \tag{12}$$

Розв'язання. Замість x, y і dy підставимо в рівняння (12) відповідно tx, $t^k y$, і $t^{k-1}\,dy$:

$$4txt^k y\,dx + (t^k y - t^2 x^2)t^{k-1}\,dy = 0,$$

або

$$4t^{k+1}xy\,dx + (t^{2k-1}y - t^{k+1}x^2)\,dy = 0.$$

При цьому, щоб рівняння не змінилося, число k потрібно взяти таким, яке задовольняло б рівність

$$k + 1 = 2k - 1 = k + 1,$$

звідки

$$k = 2.$$

Отже, маємо узагальнено-однорідне рівняння і $k = 2$. За допомогою підстановки $y = z^2$ диференціальне рівняння (12) можна звести до однорідного диференціального рівняння.

1.6. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають диференціальне рівняння виду

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x), \tag{1}$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — неперервні функції на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$, причому вважають, що для будь-якого $x \in \langle a;\ b\rangle$ $a(x) \neq 0$.

Таке припущення дає змогу записати лінійне рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{2}$$

де $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}$.

Легко довести, що в будь-якому прямокутнику

$$\overline{R} = \{(x, y) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ -k \leqslant y \leqslant k\},$$

де $a_1 > a$, $b_1 < b$, k — довільне додатне число, для рівняння (2) виконуються умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку. Справді, тут права частина $f(x, y) = q(x) - p(x)y$ є неперервною функцією в прямокутнику $\overline{R}$. Частинна похідна $f'_y(x, y) = -p(x)$ є обмеженою в прямокутнику $\overline{R}$. Тому виконується умова Ліпшіца.

Отже, через кожну точку (x_0, y_0) смуги

$$D = \{(x, y) : a < x < b, \ -\infty < y < +\infty\}$$

проходить одна інтегральна крива диференціального рівняння (2). Зокрема, якщо $p(x)$, $q(x)$ — неперервні функції в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, то через кожну точку площини xOy проходить одна і тільки одна інтегральна крива даного рівняння. У цьому випадку диференціальне рівняння (2) особливих розв'язків не має.

Розглянемо випадок, коли в диференціальному рівнянні (2) права частина

$$q(x) \equiv 0$$

на розглядуваному проміжку $\langle a; b\rangle$. Диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \qquad (3)$$

Рівняння (3) називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням.

Зрозуміло, що інтегральні криві однорідного рівняння (3) не можуть перетинати вісь Ox. Справді, якщо графік розв'язку однорідного диференціального рівняння (3) перетинає вісь абсцис, то, враховуючи, що функція $y \equiv 0$ $(a < x < b)$ є розв'язком рівняння (3), приходимо до висновку: через точку перетину проходять дві інтегральні криві. Тобто, диференціальне рівняння (3) має особливі розв'язки. А це неможливо. Звідси випливає, що коли який-небудь розв'язок лінійного однорідного рівняння перетворюється в нуль хоча б в одній точці інтервалу $(a; b)$, то він тотожно дорівнює нулю на всьому цьому інтервалі, коли ж він відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу $(a; b)$, то він не перетворюється в нуль в жодній точці цього інтервалу.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння (3) допускає відокремлення змінних. Справді, при $y \neq 0$ дане рівняння можна записати так:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx.$$

Звідси знаходимо

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \tag{4}$$

де C — довільна стала.

Формула (4) містить усі розв'язки диференціального рівняння (3). Справді, відокремлюючи змінні, ми могли втратити лише тривіальний розв'язок $y \equiv 0$, але і він може бути одержаний за формулою (4) при $C = 0$. Покажемо, що функція (4) є загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (3) в області D. Для цього зазначимо, що співвідношення (4) розв'язне відносно C в області D:

$$C = ye^{\int p(x)\,dx}, \tag{5}$$

де $ye^{\int p(x)\,dx}$ — функція, визначена в області D. Крім того, за побудовою функція (4) є розв'язком рівняння (3) в інтервалі $(a; b)$ для всіх значень довільної сталої C. А це означає, що функція (4) — загальний розв'язок рівняння (3) в області D.

Якщо як первісну $\int p(x)\,dx$ взяти функцію $\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx$, то формула (4) набуває вигляду

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}.$$

Звідси

$$y(x_0) = C.$$

Тому розв'язок рівняння (3), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

можна записати у вигляді

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}.$$

Таким чином, знову бачимо, що коли початкове значення y_0 розв'язку $y = y(x)$ лінійного однорідного рівняння (3) дорівнює нулю, то $y(x) \equiv 0$ $(a < x < b)$. Якщо ж $y_0 \neq 0$, то розв'язок $y = y(x)$ не перетворюється в нуль у жодній точці інтервалу $(a; b)$.

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y\sin x = 0.$$

Розв'язання. Згідно з формулою (4), загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = Ce^{-\int \sin x\,dx} = Ce^{\cos x}.$$

Якщо в диференціальному рівнянні функція $q(x) \not\equiv 0$ на розглядуваному проміжку $\langle a; b\rangle$, то таке диференціальне рівняння називають лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння знаходять методом варіації довільної сталої (метод запропонував Лагранж*). Розглянемо суть цього методу.

Розв'язок диференціального рівняння (2) шукатимемо у вигляді (4), тобто

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \tag{6}$$

припустивши, що C не стала, а деяка неперервна разом із своєю похідною першого порядку функція від x:

$$C = C(x).$$

Підставляючи функцію (6) у диференціальне рівняння (2), матимемо

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} = q(x),$$

звідки

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

Таким чином,

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C, \tag{7}$$

де C — довільна стала. Підставляючи знайдене значення $C(x)$ у формулу (6), дістанемо загальний розв'язок диференціального рівняння (2)

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx. \tag{8}$$

Аналізуючи форму запису загального розв'язку, помічаємо, що перший доданок є загальним розв'язком однорідного рівняння (3), а другий доданок є частинним розв'язком (він утворюється з останньої формули при $C = 0$) неоднорідного рівняння (2). Тому можна зробити такий висновок: загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння і частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння.

---

*Жозеф Луї Лагранж (1736–1813) — французький математик і механік.

З формули (8) випливає також, що загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд

$$y = A(x)C + B(x),\ C \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

де $A(x)$ та $B(x)$ — раніше визначені функції.

Приклад

2. Розв'язати рівняння

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}. \tag{10}$$

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = 0. \tag{11}$$

Відокремлюючи змінні

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{1-x^2},$$

отримуємо

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C,$$

або

$$y = C\sqrt{1-x^2}. \tag{12}$$

Дістали загальний розв'язок рівняння (11). Підставимо тепер функцію (12) у рівняння (10), вважаючи, що C є функцією від x. Матимемо

$$\frac{dC}{dx} = \frac{ax}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

звідки

$$C(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Підставивши знайдене значення $C(x)$ у формулу (12), знайдемо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = a + C\sqrt{1-x^2}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2) можна знайти використовуючи метод Ейлера.

Помноживши обидві частини рівняння (2) на функцію

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}, \tag{13}$$

матимемо

$$\frac{dy}{dx}e^{\int p(x)\,dx} + p(x)ye^{\int p(x)\,dx} = q(x)e^{\int p(x)\,dx},$$

або

$$\left(ye^{\int p(x)\,dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

Звідси

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C$$

і, остаточно,

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right).$$

Приклад

3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x. \tag{14}$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини лінійного рівняння (14) на функцію

$$\mu(x) = e^{-\int 2x\,dx} \equiv e^{-x^2}.$$

Матимемо

$$e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2}y = 2xe^{-x^2},$$

тобто

$$\left(ye^{-x^2}\right)' = 2xe^{-x^2}.$$

Звідси знаходимо

$$ye^{-x^2} = -e^{-x^2} + C.$$

Отже, загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд

$$y = -1 + Ce^{x^2}.$$

Розглянемо ще один метод розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (2), а саме метод Бернуллі*. Згідно з методом Бернуллі розв'язок рівняння (2) шукають у вигляді

$$y(x) = u(x)\,\upsilon(x), \tag{15}$$

де $u(x)$ і $\upsilon(x)$ — дві невідомі функції. Надалі припускатимемо, що функції $u(x)$ та $\upsilon(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку в інтервалі $(a;\, b)$. Знаходячи

$$y'(x) = u'(x)\,\upsilon(x) + u(x)\,\upsilon'(x)$$

і підставляючи це значення і функцію $y(x)$ в рівняння (2), дістаємо таку рівність:

$$\frac{du}{dx}\upsilon + u\left(\frac{d\upsilon}{dx} + p(x)\upsilon\right) = q(x). \tag{16}$$

---

*Якоб Бернуллі (1654–1705), Йоганн Бернуллі (1667–1748) — швейцарські математики.

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0.$$

Оскільки останнє рівняння є лінійним однорідним, то

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}$$

(вважаємо, що стала $C = 0$). При такому значенні $v(x)$ рівняння (16) набуває вигляду

$$\frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

Звідси

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C.$$

Підставляючи знайдене значення функцій $u(x)$ та $v(x)$ у формулу (15), дістаємо загальний розв'язок рівняння (2):

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right).$$

Приклад

4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Розв'язання. Розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді добутку двох функцій

$$y(x) = u(x)\,v(x).$$

Тоді

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + uv\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

або

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\cos x\right) = \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{17}$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб

$$\frac{dv}{dx} + v\cos x = 0.$$

Звідси

$$\frac{dv}{v} = -\cos x\,dx.$$

Отже,

$$\ln|v| = -\sin x,\ \ v = e^{-\sin x}.$$

Функцію $u(x)$ знаходимо з рівняння (17), підставивши значення $v(x)$. Таким чином,

$$e^{-\sin x}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

або

$$du = e^{\sin x}\sin x \cos x\, dx.$$

Зінтегрувавши останній вираз, дістанемо

$$u = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Оскільки

$$y(x) = u(x)\,v(x),$$

то загальним розв'язком заданого диференціального рівняння є функція

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

До рівнянь, які зводяться до лінійного диференціального рівняння, належить так зване рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \tag{18}$$

Рівняння (18) розглянув у 1695 р. Якоб Бернуллі, а через два роки Йоганн Бернуллі запропонував метод розв'язання цього рівняння.

У рівнянні (18) $p(x)$ і $q(x)$ неперервні на проміжку $\langle a;\, b\rangle$, а n – деяке дійсне число.

При $n = 0$ або $n = 1$ рівняння (18) є лінійним рівнянням, загальний розв'язок якого був знайдений вище. Тому надалі припускатимемо, що $n \neq 0$, $n \neq 1$ і $y \neq 0$. Помноживши обидві частини рівняння (18) на y^{-n}, дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x). \tag{19}$$

Введемо нову функцію z, поклавши

$$z = y^{1-n}. \tag{20}$$

Звідси

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Помноживши обидві частини диференціального рівняння (19) на $(1-n)$, матимемо лінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Визначивши з цього рівняння функцію z і підставивши її в (20), знайдемо шукану функцію y:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}.$$

Приклад

5. Розв'язати рівняння

$$y' + 2y = y^3.$$

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння є рівнянням Бернуллі ($n = 3$). Поділивши обидві частини цього рівняння на y^{-3} і застосувавши підстановку

$$z = y^{-2},$$

матимемо диференціальне рівняння

$$z' - 4z = -2.$$

Це лінійне рівняння із загальним розв'язком

$$z = Ce^{4x} + \frac{1}{2}.$$

Тоді загальним розв'язком заданого рівняння буде функція

$$y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{4x} + \frac{1}{2}}}.$$

Ми знайшли загальний розв'язок рівняння Бернуллі (18) припустивши, що $y \neq 0$. Функція $y \equiv 0$ також є розв'язком рівняння (18), у чому можна переконатись безпосередньою перевіркою. Цей розв'язок може бути як особливим розв'язком рівняння Бернуллі (18), так і неособливим. Наприклад, для рівняння $y' = y^4$ розв'язок $y \equiv 0$ $(-\infty < x < +\infty)$ є неособливим, а для рівняння $y' = \sqrt[4]{y}$ розв'язок $y \equiv 0$ $(-\infty < x < +\infty)$ є особливим.

До лінійного диференціального рівняння іноді можна звести так зване рівняння Ріккаті*

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{21}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — неперервні функції на проміжку $\langle a; b \rangle$. Зрозуміло, якщо $p(x) \equiv 0$ або $r(x) \equiv 0$, то рівняння Ріккаті є відповідно лінійним рівнянням або рівнянням Бернуллі.

Покажемо, що в загальному випадку рівняння Ріккаті може бути зведене до лінійного диференціального рівняння, якщо відомий його частинний розв'язок $y = y_1(x)$.

Справді, виконавши заміну

$$y = y_1 + z,$$

де $z = z(x)$ — нова невідома функція, дістанемо

---

*Джакопо Ріккаті (1676–1754) — італійський математик.

$$y_1' + z' = p(x)y_1^2 + 2p(x)y_1 z + p(x)z^2 + q(x)y_1 + q(x)z + r(x). \qquad (22)$$

Оскільки

$$y_1' \equiv p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x),$$

то рівняння (22) перетворюється в рівняння Бернуллі

$$z' - (2p(x)y_1 + q(x))z = p(x)z^2,$$

яке, як показано вище, може бути зведене до лінійного диференціального рівняння.

1.7. Рівняння в повних диференціалах

Будь-яке рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

можна записати у диференціальній формі

$$dy - f(x, y)\,dx = 0,$$

або, помноживши обидві частини на деяку функцію $Q(x, y)$, в більш симетричному вигляді

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) називають диференціальним рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто

$$du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Тоді загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах матиме вигляд

$$u(x, y) = C.$$

Так, диференціальне рівняння

$$y\,dx + x\,dy = 0 \qquad (2)$$

можна записати у вигляді

$$d(xy) = 0.$$

Ліва частина рівняння (2) є повним диференціалом функції $u(x, y) = xy$. Тому диференціальне рівняння (2) є рівнянням у повних диференціалах, і його загальний інтеграл дорівнює

$$xy = C.$$

Доведемо ознаку, за допомогою якої з'ясовують, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах.

Теорема 1. *Нехай функції* $P(x, y)$ *і* $Q(x, y)$ *та їх частинні похідні* $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *неперервні в однозв'язній області* $D \subset \mathbf{R}^2$. *Для того щоб диференціальне рівняння* (1) *було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб в області* D *виконувалася умова*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай вираз

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

в області D є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy, \tag{4}$$

де $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — довільні прирости незалежних змінних x та y такі, що точка $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ разом з точкою (x, y) належить області D.

Поклавши в рівності (4) $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, дістанемо

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \tag{5}$$

якщо ж $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$, то

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \tag{6}$$

Диференціюючи обидві частини рівності (5) за змінною y, а рівність (6) за змінною x, маємо

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{7}$$

Оскільки за умовою теореми $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ — неперервні функції в області D, то й функції $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ — також неперервні. Отже, за теоремою про рівність мішаних похідних

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Таким чином, в області D праві частини рівностей (7) тотожно рівні:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Достатність. Нехай в області D виконується умова (3). Тоді криволінійний інтеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{8}$$

не залежить від форми шляху інтегрування і визначається лише заданням початкової точки A та кінцевої точки B кривої, вздовж якої здійснюється інтегрування. Тому в подальшому криволінійний інтеграл позначатимемо так:

$$\int_A^B P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{9}$$

Нехай початкова точка A є фіксованою з координатами (x_0, y_0), а кінцева точка B шляху інтегрування є змінною точкою з координатами (x, y).

Тоді криволінійний інтеграл (9) в області D є функцією від x і y. Запишемо цю функцію у вигляді

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{10}$$

Доведемо, що в області D функція $u(x, y)$ має частинні похідні, які дорівнюють відповідно

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \tag{11}$$

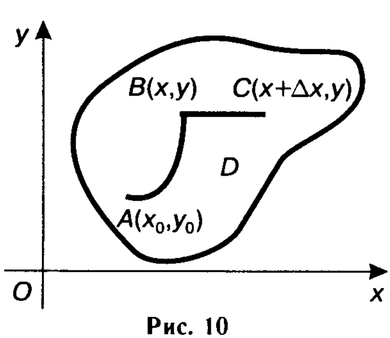


Рис. 10

Для цього візьмемо в області D дві точки: (x, y) і $(x + \Delta x, y)$ та побудуємо частинний приріст функції $u(x, y)$ за змінною x у точці (x, y):

$$\Delta_x u(x, y) = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Оскільки інтеграли в правій частині останньої рівності не залежать від шляху інтегрування, то шлях від точки $A(x_0, y_0)$ до точки $C(x + \Delta x, y)$ можна провести через точку

$B(x, y)$, сполучивши точки B і C відрізком прямої BC (рис. 10). Тоді матимемо

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Отже,

$$\Delta_x u(x, y) = \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Оскільки вздовж відрізка BC $y = \text{const}$, то $dy = 0$. Тому

$$\Delta_x u(x, y) = \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx. \tag{12}$$

Звівши криволінійний інтеграл (12) до визначеного інтеграла і скориставшись теоремою про середнє, знаходимо

$$\Delta_x u(x, y) = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x,\ \ 0 < \theta < 1.$$

Звідси

$$\frac{\Delta_x u(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y).$$

Враховуючи, що функція $P(x, y)$ є неперервною в будь-якій точці області D, і переходячи в попередній рівності до границі при $\Delta x \to 0$, дістаємо

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x u(x, y)}{\Delta x} = P(x, y).$$

Отже, функція $u(x, y)$ в точці (x, y) має частинну похідну

$$\frac{\partial u(x, y)}{dx} = P(x, y). \tag{13}$$

Аналогічно можна довести, що функція $u(x, y)$ в будь-якій точці області D має частинну похідну за змінною y і

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \tag{14}$$

Оскільки в області D функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні, то із співвідношень (13), (14) випливає, що й частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ в цій області неперервні. Отже, функція $u(x, y)$, яка задана формулою (10), в області D є диференційовною і її повний диференціал

$$du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{15}$$

Теорему доведено.

Таким чином, при виконанні умови (3) загальний інтеграл рівняння (1) може бути записаним у вигляді

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = C,$$

де інтегрування здійснюється по будь-якій кусково-гладкій кривій, яка цілком лежить у D і з'єднує точки $(x_0, y_0) \in D$ і $(x, y) \in D$.

Покажемо, якщо область D має вигляд

$$D = \{(x;y) : a < x < b,\ \ c < y < d\}, \tag{16}$$

то функція $u(x, y)$ може бути знайдена і без використання криволінійного інтеграла (10) [4].

Справді, оскільки криволінійний інтеграл (8) за умовою (3) не залежить від форми шляху інтегрування, то нехай крива $\overset{\frown}{AB}$ є ламаною AMB, що складається з двох ланок AM і MB, причому $AM \parallel Oy$, а $MB \parallel Ox$, тобто точка M матиме координати x_0 і y. Тоді

$$u(x,y) = \int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\overset{\frown}{AM}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\overset{\frown}{MB}} P\,dx + Q\,dy.$$

Враховуючи, що

$$\int_{\overset{\frown}{AM}} P(x,y)\,dx = 0, \quad \int_{\overset{\frown}{MB}} Q(x,y)\,dy = 0,$$

$$\int_{\overset{\frown}{AM}} Q(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy, \quad \int_{\overset{\frown}{MB}} P(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx,$$

то

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy.$$

Тому загальний інтеграл рівняння (1) може бути записаний у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C. \tag{17}$$

Якщо ж за криву $\overset{\frown}{AB}$ взяти ламану ANB (рис. 11), що складається з двох ланок AN і NB, причому $AN \parallel Ox$, $NB \parallel Oy$, то загальний інтеграл рівняння (1) матиме вигляд

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C. \quad (18)$$

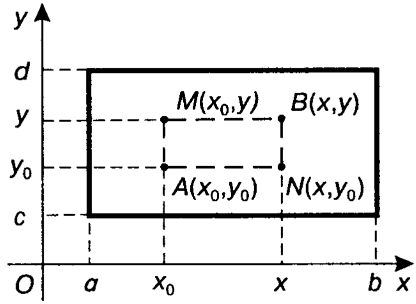


Рис. 11

Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах у випадку, коли область D має вигляд (16), можна знайти не використовуючи формул (17) і (18). Справді, враховуючи, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{і} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \qquad (19)$$

з першого рівняння знаходимо

$$u(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y), \qquad (20)$$

або

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \varphi(y),$$

де

$$\Phi(x, y) = \int P(x, y)\,dx -$$

деяка первісна функції $P(x, y)$, в якій змінна y фігурує як параметр. Функцію $\varphi(y)$ підберемо так, щоб задовольнити друге з рівнянь (19), тобто

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)\,dx + \varphi(y)\right) = Q(x, y),$$

або

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Звідси знаходимо

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}. \qquad (21)$$

Права частина рівності (21) не залежить від x. Справді, покажемо, що

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x, y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Оскільки
$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = P(x,y),$$
то
$$\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$
Враховуючи неперервність функції $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ в області D, за теоремою про рівність мішаних похідних матимемо
$$\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y}.$$
Тому
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y \partial x} =$$
$$= \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Таким чином, за умови (3) з рівності (21) завжди можна знайти функцію $\varphi(y)$. Підставляючи знайдене значення $\varphi(y)$ у формулу (20), дістанемо $u(x, y)$, а тому і загальний інтеграл диференціального рівняння в повних диференціалах (1).

Приклад

1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння
$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0. \tag{22}$$

Розв'язання. Оскільки
$$P(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^2,$$
$$Q(x,y) = y^2 - 4xy - 2x^2,$$
то
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4x - 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4y - 4x.$$
Отже,
$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тому рівняння (22) є рівнянням у повних диференціалах. Визначимо функцію $u(x, y)$ за формулою
$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int (x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \varphi(y).$$

Враховуючи, що
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2x^2 - 4xy + \varphi'(y)$$

і

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = y^2 - 4xy - 2x^2,$$

для визначення функції $\varphi(y)$ матимемо диференціальне рівняння

$$-2x^2 - 4xy + \varphi'(y) = y^2 - 4xy - 2x^2,$$

або

$$\varphi'(y) = y^2,$$

звідки

$$\varphi(y) = \frac{y^3}{3} + C_1.$$

Таким чином, шукана функція $u(x, y)$ має вигляд

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \frac{y^3}{3} + C_1,$$

а тому

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \frac{y^3}{3} = C$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (22).

Іноді диференціальне рівняння першого порядку, яке не є рівнянням у повних диференціалах (не виконується умова (3)), можна за допомогою множення на деяку функцію $\mu = \mu(x, y)$ звести до рівняння в повних диференціалах.

Так, рівняння

$$y\,dx - x\,dy = 0 \tag{23}$$

не є рівнянням у повних диференціалах. Тут

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Отже,

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Якщо ж обидві частини рівняння (23) помножити на функцію $\mu = \frac{1}{y^2}$, то дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0$$

у повних диференціалах. Справді,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}.$$

Функцію $\mu = \mu(x, y)$, після множення на яку обох частин диференціального рівняння останнє зводиться до диференціального рівняння в повних диференціалах, називають інтегрувальним множником.

Отже, для диференціального рівняння (23) функція $\mu = \frac{1}{y^2}$ є інтегрувальним множником.

Покажемо, що для будь-якого диференціального рівняння (1) з неперервними коефіцієнтами існує інтегрувальний множник.

Для цього припустимо, що співвідношення

$$u(x, y) = C \qquad (24)$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (1) і функція $u(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Тоді вважаючи, що

$$y = y(x, C)$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (1), знайдемо повні диференціали обох частин тотожності (24):

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = 0.$$

Оскільки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

то

$$-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}.$$

Звідси

$$\frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{P(x, y)} = \frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{Q(x, y)}.$$

Якщо спільну частину останніх співвідношень позначити через $\mu(x, y)$, то, остаточно, матимемо

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \mu(x, y) P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \mu(x, y) Q(x, y).$$

Покажемо, що знайдена таким чином функція $\mu(x, y)$ і є інтегрувальним множником рівняння (1). Справді, помноживши обидві частини початкового рівняння (1) на $\mu(x, y)$, дістанемо

$$\mu(P\, dx + Q\, dy) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du(x, y).$$

Нехай у рівнянні (1)

$$\frac{\partial P}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Припустимо, що $\mu(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (1). Тоді для рівняння

$$\mu(x, y)\, P(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, Q(x, y)\, dy = 0$$

виконуватиметься умова

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(\mu(x, y)\, P(x, y)) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\,(\mu(x, y)\, Q(x, y)).$$

Таким чином, функція $\mu(x, y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}. \tag{25}$$

Отже, кожен розв'язок рівняння (25) буде інтегрувальним множником рівняння (1).

Взагалі кажучи, розв'язати рівняння з частинними похідними (25) значно складніше, ніж звичайне диференціальне рівняння (1). Проте іноді інтегрувальний множник вдається знайти.

Припустимо, що рівняння (1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від x, тобто $\mu = \mu(x)$. Тоді, враховуючи, що $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, з рівняння (25) матимемо

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{d\mu}{dx},$$

звідки

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\, dx, \quad Q(x, y) \neq 0. \tag{26}$$

Якщо функція в правій частині рівняння (26) залежить тільки від x, тобто

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x), \tag{27}$$

то

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\, dx} \tag{28}$$

(вважаємо, що стала інтегрування дорівнює 1). Таким чином, умова (27) є необхідною умовою того, щоб рівняння (1) мало інтегрувальний множник, який залежить тільки від x.

Покажемо, що умова (27) є і достатньою. Справді, в цьому випадку диференціальне рівняння (26) можна записати у вигляді

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)\,\varphi(x).$$

Підставивши сюди значення $\mu(x)$, дістанемо

$$e^{\int \varphi(x)\,dx}\varphi(x) \equiv e^{\int \varphi(x)\,dx}\varphi(x).$$

Отримана тотожність доводить, що функція (28) є розв'язком рівняння (26).

Приклад

2. Перевірити, чи є диференціальне рівняння

$$\left(1 + \frac{5y^2}{x^2}\right)dx = \frac{2y}{x}\,dy$$

рівнянням у повних диференціалах. Якщо ні, то знайти інтегрувальний множник.
Розв'язання. Оскільки

$$P(x, y) = \frac{1 + 5y^2}{x^2}, \quad Q(x, y) = -\frac{2y}{x},$$

то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{10y}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^2}.$$

Отже,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Знайдемо функцію

$$\varphi(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \left(\frac{10y}{x^2} - \frac{2y}{x^2}\right)\left(-\frac{x}{2y}\right) = -\frac{4}{x}.$$

Тому інтегрувальний множник має вигляд

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx} = e^{-4\int \frac{dx}{x}} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{x^4}.$$

Нехай тепер рівняння (1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від y, тобто $\mu = \mu(y)$. Тоді аналогічно можна показати, що умова

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \varphi(y)$$

є необхідною та достатньою умовою того, що дане рівняння має інтегрувальний множник, який залежить тільки від y. Знайти його можна за формулою

$$\mu(y) = e^{\int \varphi(y)\,dy}.$$

Розглянемо більш загальний випадок. А саме, нехай інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$ є функцією від деякої відомої функції $\omega = \omega(x, y)$. Тоді, враховуючи, що

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

рівняння (25) матиме вигляд

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(Q\frac{\partial\omega}{\partial x} - P\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega},$$

або

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\omega}{\partial x} - P\frac{\partial\omega}{\partial y}}\,d\omega. \tag{29}$$

З останнього рівняння можна знайти функцію $\mu(\omega)$, якщо

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\omega}{\partial x} - P\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \varphi(\omega). \tag{30}$$

При цьому

$$\mu(\omega) = e^{\int\varphi(\omega)d\omega}. \tag{31}$$

Можна довести, що умова (30) є необхідною і достатньою умовою існування для даного диференціального рівняння інтегрувального множника, який залежить від відомої функції $\omega = \omega(x, y)$.

Приклад

3. З'ясувати, чи має рівняння

$$xy^2\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$$

інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$, $\omega = xy$.

Розв'язання. Якщо $\omega = xy$, то $\frac{\partial\omega}{\partial x} = y$, $\frac{\partial\omega}{\partial y} = x$ і умова (30) матиме вигляд

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Qy - Px} = \varphi(\omega),$$

або

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Qy - Px} = \frac{2xy - 2xy + 1}{x^2y^2 - xy - x^2y^2} = -\frac{1}{xy} = -\frac{1}{\omega} = \varphi(\omega).$$

Таким чином, інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$, $\omega = xy$ для даного рівняння існує. Знайдемо його за формулою (31)

$$\mu(\omega) = e^{-\int\frac{d\omega}{\omega}},$$

тобто

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\omega},$$

або, остаточно,

$$\mu(xy) = \frac{1}{xy}.$$

1.8. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної. Основні поняття й означення

У попередніх параграфах були розглянуті диференціальні рівняння першого порядку, які розв'язані відносно похідної, тобто рівняння виду

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Такі рівняння є окремим випадком більш загального диференціального рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

де через $F(x, y, y')$ позначено функцію трьох змінних x, y, $y' = \frac{dy}{dx}$.

Диференціальне рівняння (2) називають диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної.

Розв'язком диференціального рівняння (2) на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, як і у випадку рівняння (1), називають будь-яку функцію $y = y(x)$, яка на цьому проміжку має неперервну похідну і перетворює рівняння (2) в тотожність

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, \ x \in \langle a; b\rangle.$$

При цьому кажуть, що функція $y(x)$ задовольняє рівняння (2).

Процес знаходження розв'язків рівняння (2), як і рівняння, розв'язаного відносно похідної, називають інтегруванням цього рівняння.

Якщо диференціальні рівняння, розв'язані відносно похідної, інтегрувались у явному вигляді лише в найпростіших випадках, то диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної, інтегруються ще рідше. Тому розв'язки таких рівнянь часто записують у неявному вигляді або навіть у параметричній формі. При цьому під розв'язком рівняння (2) у неявному вигляді, як і для рівняння (1), розуміють розв'язок $y(x)$, заданий співвідношенням

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{3}$$

що визначає y як неявну функцію від x.

Так, наприклад, диференціальне рівняння

$$y^5 y' + x^5 = 0 \tag{4}$$

має розв'язок, визначений в інтервалі $(-1; 1)$ і заданий у неявному вигляді

$$y^6 + x^6 - 1 = 0. \tag{5}$$

Справді, візьмемо точку $M_0(0, 1)$. У цій точці

$$\Phi(x, y) \equiv y^6 + x^6 - 1 = 0,$$

тоді як $\Phi'_y(0, 1) \neq 0$. Крім того, $\Phi(x, y)$ та її частинні похідні $\Phi'_x(x, y)$, $\Phi'_y(x, y)$ — неперервні функції в будь-якому околі точки $M_0(0, 1)$. Тому існує окіл точки $x_0 = 0$, в якому рівняння (5) визначає функцію $y = y(x)$, що має неперервну похідну, причому $y(0) = 1$. У даному випадку цей окіл точки $x_0 = 0$ можна знайти, розв'язавши рівняння (5) відносно y :

$$y = \sqrt[6]{1 - x^6}. \tag{6}$$

Звідси випливає, що функція (6) в інтервалі $(-1; 1)$ має неперервну похідну.

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що (6) є розв'язком диференціального рівняння (4).

Функцію, задану параметрично,

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t \in \langle \alpha; \beta \rangle, \tag{7}$$

називають розв'язком диференціального рівняння (2) на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$, якщо для всіх $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ виконується тотожність

$$F\left(x(t), y(t), \frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \equiv 0, \tag{8}$$

причому

$$x'(t) \neq 0,\ \ t \in \langle \alpha; \beta \rangle.$$

Так, диференціальне рівняння

$$y\sqrt{1 + y'^2} - 1 = 0$$

має розв'язок виду

$$x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ t \neq k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$$

у кожному з інтервалів $(2k\pi; (2k + 1)\pi)$.

Таким чином, як і для диференціального рівняння (1), для диференціального рівняння (2) розв'язок можна записати в одному з трьох видів:

$$y = y(x);\ \Phi(x, y) = 0;\ x = x(t),\ y = y(t).$$

Кожному з цих випадків, як відомо, відповідає крива на площині xOy. Цю криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння (2).

Припустимо тепер, що рівняння (2) в кожній точці (x, y) деякої області D площини xOy визначає одне або кілька значень y'. Тоді за допомогою диференціального рівняння (2) точці $(x, y) \in D$ можна поставити у відповідність певний напрямок (кут), що визначається відповідним значенням y'. Тобто рівняння (2) в області D задає деяке поле напрямків.

Отже, з геометричної точки зору інтегрування рівняння (2), як і рівняння (1), зводиться до знаходження серед усіх можливих кривих на площині xOy такої кривої, дотична до якої в кожній її точці мала б напрямок поля, заданий диференціальним рівнянням (2) у цій точці.

Приклади

Розв'язати диференціальні рівняння.

1.

$$y'^2 - 1 = 0. \tag{9}$$

Розв'язання. Оскільки з рівняння (9) випливає, що $y' = \pm 1$, то через кожну точку площини xOy проходять дві інтегральні криві заданого рівняння, дотичні до яких утворюють з додатним напрямком осі Ox відповідно кути $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3}{4}\pi$. Інтегральними кривими в даному випадку є дві ортогональні (перпендикулярні) сім'ї прямих $y = x+C$ та $y = -x+C$, де C — довільна стала (рис. 12).

2.

$$y'^2 + (x + y)y' + xy = 0. \tag{10}$$

Розв'язання. Розв'язуючи рівняння (10) відносно y', матимемо два диференціальні рівняння, ров'язані відносно похідної:

$$y' = -x,\ y' = -y. \tag{11}$$

Інтегруючи рівняння (11), дістаємо

$$y = -\frac{x^2}{2} + C,\ y = Ce^{-x}, \tag{12}$$

де C — довільна стала.

Отже, через кожну точку $M(x, y)$ площини xOy проходять дві інтегральні криві з сім'ї (12). При цьому в кожній точці інтегральної кривої з сім'ї $y = -\frac{x^2}{2} + C$ кутовий коефіцієнт дотичної MT дорівнює абсцисі цієї точки, взятої з протилежним знаком, а в кожній точці інтегральної кривої з сім'ї $y = Ce^{-x}$ кутовий коефіцієнт дотичної MT' дорівнює ординаті точки, взятої з протилежним знаком (рис. 13).

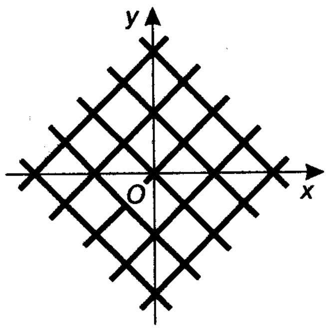


Рис. 12

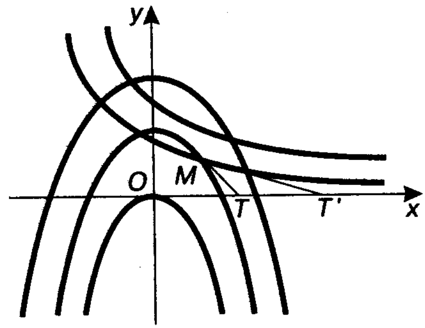


Рис. 13

Розглянемо тепер задачу Коші для диференціального рівняння (2): знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (2) такий, що

$$y(x_0) = y_0. \tag{13}$$

З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші (2), (13) означає: серед інтегральних кривих рівняння (2) знайти ту криву, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Припустимо, що рівняння (2) може бути розв'язаним відносно похідної. Тоді в деякому околі точки (x_0, y_0) матимемо для y' в загальному випадку кілька дійсних значень:

$$y' = f_k(x, y), \; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{14}$$

При цьому, якщо кожна з функцій $f_k(x, y)$ задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку, то через точку (x_0, y_0) буде проходити m інтегральних кривих рівняння (2). Якщо кожна інтегральна крива має нахил дотичної, який не збігається з нахилом дотичних інших інтегральних кривих, то кажуть, що задача Коші має єдиний розв'язок.

Розглянемо тепер такі поняття, як загальний, частинний та особливий розв'язки диференціального рівняння (2).

Для цього припустимо, що рівняння (2) в околі точки (x_0, y_0) може бути розв'язане відносно похідної, тобто розпадається на сукупність рівнянь (14). І нехай кожне з цих рівнянь має загальний розв'язок

$$y = \varphi_k(x, C), \; k = 1, 2, \ldots, m, \tag{15}$$

або загальний інтеграл

$$\Phi_k(x, y) = C, \; k = 1, 2, \ldots, m, \tag{16}$$

де C — довільна стала.

Тоді сукупність загальних розв'язків (15) або сукупність загальних інтегралів (16) називають загальним інтегралом рівняння (2)(це означення загального інтеграла можна використовувати і в тому випадку, коли рівняння (2) відносно y' має нескінченну кількість розв'язків).

Приклад

3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$y'^3 - x^2y' = 0. \tag{17}$$

Розв'язання. Розв'язуючи рівняння (17) відносно y', дістаємо три диференціальні рівняння

$$y' = 0,\ y' = x,\ y' = -x, \tag{18}$$

які відповідно мають загальні розв'язки

$$y = C,\ y = \frac{x^2}{2} + C,\ y = -\frac{x^2}{2} + C. \tag{19}$$

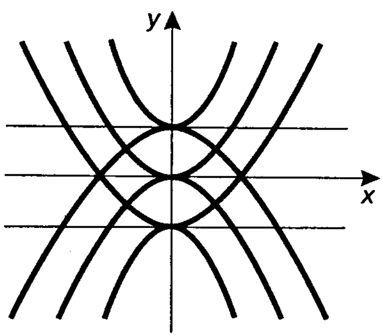


Рис. 14

Сукупність загальних розв'язків (19) і є загальним інтегралом диференціального рівняння (17). Причому розв'язок задачі Коші у кожній точці площини xOy, що не належить осі Oy, — єдиний. Справді, через кожну точку (x_0, y_0), $x_0 \neq 0$, проходять три інтегральні криві:

$$y = y_0,\ y = \frac{x^2 - x_0^2}{2} + y_0,$$

$$y = \frac{x_0^2 - x^2}{2} + y_0,$$

дотичні до яких у цій точці утворюють з додатним напрямком осі Ox відповідно кути 0, $\operatorname{arctg} x_0$ та $-\operatorname{arctg} x_0$.

Щодо точок, які лежать на осі Oy, то хоч через кожну таку точку проходять три інтегральні криві із сім'ї (19), в цих точках задача Коші має не єдиний розв'язок (у точках осі Oy напрямок полів збігається).

Розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (2), в кожній точці графіка якого виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають частинним розв'язком цього рівняння.

Так, у наведеному вище прикладі, функції (19) при $x \neq 0$ і деякому конкретному значенні C є частинними розв'язками рівняння (17).

Особливим розв'язком диференціального рівняння (2) називають розв'язок, у кожній точці графіка якого порушується властивість єдиності, тобто через кожну точку якого проходить не менше двох інтегральних кривих, що мають однаковий напрямок дотичної.

Зазначимо, що оскільки для рівняння (17) вісь Oy ($x=0$) не є інтегральною кривою, а для решти точок площини задача Коші має єдиний розв'язок, то рівняння (17) не має особливих розв'язків.

Теорема 1. *Нехай у рівнянні* (2) *функція* $F(x, y, y')$ *має такі властивості*:

а) $F(x, y, y')$ *у деякому замкненому околі точки* (x_0, y_0, y_0'), *де* y_0' — *один з дійсних коренів рівняння*

$$F(x_0, y_0, y') = 0, \tag{20}$$

неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку;

б) *частинна похідна* $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$.

Тоді в інтервалі $(x_0 - h;\ x_0 + h)$, *де* h — *достатньо мале число, існує єдиний розв'язок* $y = y(x)$ *рівняння* (2), *що задовольняє умову* $y(x_0) = y_0$ *і для якого*

$$y'(x_0) = y_0'.$$

Доведення. Функція $F(x, y, y')$ задовольняє умови теореми про існування неявної функції двох змінних. Тому рівняння (2) у деякому замкненому околі $\overline{D}$ точки (x_0, y_0, y_0') визначає y' як однозначну функцію

$$y' = f(x, y), \tag{21}$$

причому функція $f(x, y)$ — неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку і така, що

$$f(x_0, y_0) = y_0'.$$

Отже, $f(x, y)$ — неперервна функція в $\overline{D}$ і в цій замкненій області задовольняє умову Ліпшіца. Тоді права частина рівняння (21) задовольняє умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку. Тому в інтервалі $(x_0 - h;\ x_0 + h)$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (21), а отже, і рівняння (2) такий, що

$$y(x_0) = y_0.$$

Покажемо тепер, що $y'(x_0) = y_0'$. Справді, оскільки $y(x)$ — розв'язок рівняння (21) і $y(x_0) = y_0$, то в інтервалі $(x_0 - h; x_0 + h)$ матимемо тотожність

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Якщо в ній покласти $x = x_0$, то одержимо

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = y_0',$$

тобто

$$y'(x_0) = y'_0.$$

Теорему доведено.

1.9. Найпростіші типи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро

У даному параграфі розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, для яких можна вказати способи знаходження розв'язків.

1. До таких рівнянь перш за все належать рівняння виду

$$a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0, \qquad (1)$$

де $a_i(x, y)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, — функції, неперервні в деякій області D площини xOy. Рівняння виду (1) називають рівнянням першого порядку степеня n.

Припустимо, що в області D функція $a_0(x, y) \neq 0$. Тоді, згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (1) визначає n значень для y'. Відкидаючи уявні значення, матимемо m, $m \leqslant n$, диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної

$$y' = f_k(x, y), \ k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2)$$

Кожне з рівнянь (2) задає в деякій області D_1 площини xOy своє поле напрямків. Отже, якщо функції

$$f_k(x, y), \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

в області D_1 задовольняють умови теореми Коші, то через кожну точку області D_1 проходить m інтегральних кривих диференціального рівняння (1).

Щоб знайти ці криві, потрібно зінтегрувати кожне з рівнянь (2). Сукупність здобутих таким чином загальних розв'язків

$$y_k = \varphi_k(x, C)$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_k(x, y) = C,$$

де C — довільна стала, і є загальним інтегралом рівняння (1).

Так, розглянуте рівняння (17) в попередньому параграфі є рівнянням типу (1), загальний інтеграл якого має вигляд (19).

Приклад

1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0. \tag{3}$$

Розв'язання. Припускаючи, що $x \neq 0$, з (3) дістанемо

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}. \tag{4}$$

Рівняння (4) є однорідними диференціальними рівняннями першого порядку. Тому загальний інтеграл рівняння (3) має вигляд

$$y = \frac{1}{2}Cx^2 - \frac{1}{2C}, \quad y = -\frac{1}{2}Cx^2 - \frac{1}{2C},$$

де C — довільна стала.

2. Припустимо, що функція $F(x, y, y')$ у рівнянні

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

залежить тільки від y', тобто задане диференціальне рівняння матиме вигляд

$$F(y') = 0. \tag{6}$$

Нехай рівняння (6) має деяке (скінченне або нескінченне) число дійсних коренів

$$y' = k_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

де $k_i = \text{const}$, які не заповнюють суцільно деякий інтервал. Тоді з (7) знаходимо

$$y = k_i x + C,$$

або

$$k_i = \frac{y - C}{x}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння (6) має загальний інтеграл виду

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{8}$$

Приклад

2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$y'^4 - 2y'^2 + 1 = 0.$$

Розв'язання. Розв'язуючи задане рівняння відносно y', знаходимо

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^4 - 2\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Зазначимо, що якщо корені (7) заповнюють суцільно деякий інтервал, то диференціальне рівняння (6) може мати розв'язки, відмінні від (8).

Приклад

3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + |y'| = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння має корені $y' = k$, де $-\infty < k \leqslant 0$, які суцільно заповнюють інтервал $(-\infty; 0]$. Тоді, крім інтегральних кривих

$$y = kx + C, \ -\infty < k \leqslant 0, \tag{9}$$

розв'язком даного рівняння буде також функція

$$y = -x^n, \ 0 \leqslant x < +\infty,$$

яка при $n > 1$ не належить до сім'ї інтегральних кривих (9).

3. Розглянемо диференціальне рівняння

$$F(x, y') = 0, \tag{10}$$

яке явно не містить y. Якщо дане рівняння можна розв'язати відносно y', то матимемо диференціальні рівняння

$$y' = f_k(x), \ k = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

де $f_k(x)$ за припущенням — дійсні неперервні функції на деякому проміжку. Інтегруючи рівняння (11), знаходимо відповідно їх загальні розв'язки:

$$y = \int f_k(x)\,dx + C, \ k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Сукупність отриманих таким чином загальних розв'язків і є загальним інтегралом диференціального рівняння (10).

Припустимо тепер, що рівняння (10) можна розв'язати відносно x:

$$x = \varphi(y'), \tag{13}$$

де $\varphi(y')$ — диференційовна функція в деякій області зміни y'. Тоді для інтегрування рівняння (13) застосуємо наступний спосіб. Позначимо $y' = p$. З рівняння (13) маємо

$$x = \varphi(p). \tag{14}$$

Запишемо шукану функцію y через p.

Для цього скористаємося тотожністю

$$dy = y'\,dx. \tag{15}$$

Звідси на підставі (14) дістаємо

$$dy = p\varphi'(p)\,dp.$$

Тому

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + C. \tag{16}$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (10) в параметричній формі має вигляд

$$x = \varphi(p),\ \ y = \int p\varphi'(p)\,dp + C. \tag{17}$$

Якщо із системи рівнянь (17) удається виключити параметр p, то матимемо загальний розв'язок $y = \psi(x, C)$ або загальний інтеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

рівняння (10).

Зазначимо, що не завжди доцільно як параметр вибирати y', іноді зручніше покласти $p = \omega(y')$.

Припустимо тепер, що рівняння (10) можна записати в параметричній формі

$$x = \varphi(t),\ \ y' = \psi(t),\ \ t \in \langle\alpha; \beta\rangle, \tag{18}$$

так, що для всіх $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$ виконується тотожність

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0. \tag{19}$$

Тоді з рівностей (18) дістаємо

$$dy = y'\,dx = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Тому загальний розв'язок рівняння (18) у параметричній формі матиме вигляд

$$x = \varphi(t),\ \ y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C. \tag{20}$$

Приклади

Розв'язати диференціальні рівняння.

4.

$$y' \sin y' - x = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння можна розв'язати відносно x:

$$x = y' \sin y'.$$

Тоді, поклавши $y' = p$ і скориставшись формулами (17), матимемо

$$x = p \sin p, \ \ y = (p^2 - 1)\sin p + p\cos p + C.$$

5.

$$x - ay' - b\sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Розв'язання. Покладаючи $y' = \operatorname{tg} p$ і враховуючи, що $dy = y'\,dx$, дістаємо

$$x = a\operatorname{tg} p + b\sec p, \ \ y = \frac{a}{3}\operatorname{tg}^3 p - \frac{b\sin p}{\cos^2 p} + \frac{b}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{p}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

6.

$$x^3y' - (1 - y')^3 = 0.$$

Розв'язання. Нехай

$$y' = 1 - tx.$$

Тоді

$$x = \frac{1 - t^3}{t}.$$

Отже, дане диференціальне рівняння можна записати у параметричній формі

$$x = \frac{1 - t^3}{t}, \ \ y' = t^3.$$

Тоді, згідно з формулами (20), загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$x = \frac{1 - t^3}{t}, \ \ y = -\frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2 + C,$$

де C — довільна стала.

4. Нехай диференціальне рівняння (5) явно не містить x, тобто

$$F(y, y') = 0. \tag{21}$$

Для рівняння (21) можливі ті самі випадки, що й для рівняння (10). Зокрема, рівняння (21) може бути розв'язаним відносно y' :

$$y' = f_k(y), \ \ k = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

де $f_k(y)$ — дійсний корінь рівняння (21). Припускаючи, що $f_k(y) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, із (22) знаходимо

$$x = \int \frac{dy}{f_k(y)} + C, \ \ k = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Зрозуміло, що в даному випадку розв'язками рівняння (22) є також функції $y = b_m$, $m = 1, 2, \ldots$, де b_m — корені рівняння $f_k(y) = 0$. Ці розв'язки можуть бути як частинними, так і особливими розв'язками диференціального рівняння (21).

Якщо ж рівняння (21) можна записати у вигляді

$$y = \varphi(y'), \tag{24}$$

то ввівши позначення $y' = p$ і скориставшись тотожністю $dy = y'\,dx$, матимемо

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{p}.$$

Тоді, якщо $p \neq 0$, то загальний розв'язок диференціального рівняння (21) можна записати у параметричній формі

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C, \ \ y = \varphi(p). \tag{25}$$

Зауважимо, що припускаючи $p \neq 0$, можна втратити розв'язки $y = \alpha_i$, де α_i — дійсний корінь рівняння

$$F(y, 0) = 0.$$

Тому цей випадок слід розглядати окремо. Якщо рівняння

$$F(y, 0) = 0$$

має дійсні корені $y = \alpha_i$, то функції $y = \alpha_i$ будуть, безперечно, розв'язками рівняння (21). Ці розв'язки можуть бути як частинними, так і особливими розв'язками диференціального рівняння (21).

Приклад

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = y'^2 + \ln y'.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = p^2 + \ln p.$$

Враховуючи, що $dy = p\,dx$, матимемо

$$dx = \frac{dy}{p} = \left(2 + \frac{1}{p^2}\right)dp.$$

Отже, остаточно

$$x = 2p - \frac{1}{p} + C, \ \ y = p^2 + \ln p,$$

де C — довільна стала.

5. Розглянемо загальний випадок. У рівнянні (5) змінні x, y, y' вважатимемо координатами деякої точки простору $\mathbf{R}^3$. Тоді, як відомо, рівняння (5) визначає деяку поверхню [20]. Рівняння поверхні іноді вдається записати параметрично:

$$x = \varphi(u, v), \;\; y = \psi(u, v), \;\; y' = \omega(u, v),$$

де u та v — параметри, причому

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) \equiv 0.$$

Припускаючи, що функції $\varphi(u, v)$ та $\psi(u, v)$ в області зміни параметрів u, v диференційовні, отримуємо

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \;\; dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv,$$

звідки, враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \omega(u, v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right). \tag{26}$$

Вважаючи v незалежною змінною, а u шуканою функцією і припускаючи, що

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\varphi}{\partial u} \neq 0,$$

дістаємо рівняння, розв'язане відносно похідної

$$\frac{du}{dv} = \frac{\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial u} - \omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} \tag{27}$$

з неперервною правою частиною. Нехай $u = u(v, C)$ — загальний розв'язок рівняння (27). Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (5) у параметричній формі матиме вигляд

$$x = \varphi(u(v, C), v), \;\; y = \psi(u(v, C), v)$$

(тут v — параметр; C — довільна стала).

Даний спосіб інтегрування, як правило, застосовують у випадку, коли диференціальне рівняння (5) можна розв'язати відносно x або y. Тоді як параметри u та v природно взяти y та y' або x та y'.

Справді, нехай рівняння (5) розв'язане відносно y:

$$y = f(x, p), \;\; p = y'. \tag{28}$$

Із співвідношення

$$dy = p\,dx$$

матимемо

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = p\,dx,$$

або

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}=p. \tag{29}$$

Останнє рівняння можна розв'язати відносно $\frac{dp}{dx}$. Нехай $p=\varphi(x,C)$— загальний розв'язок диференціального рівняння (29). Тоді загальний розв'язок початкового рівняння (5) матиме вигляд

$$y=f(x,\varphi(x,C)).$$

Зауважимо, що рівняння (29) можна отримати з рівняння (28) диференціюванням обох його частин за змінною x, вважаючи p функцією x, тобто $p=p(x)$.

Розглянемо тепер рівняння

$$x=f(y,p),\ \ p=y'. \tag{30}$$

Здиференціюємо обидві його частини за змінною y, вважаючи, що $p=p(y)$:

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}. \tag{31}$$

Отримали диференціальне рівняння, яке можна розв'язати відносно $\frac{dp}{dy}$. Нехай $p=\psi(y,C)$ — загальний розв'язок рівняння (31). Тоді загальний розв'язок диференціального рявняння (5) матиме вигляд

$$x=f(y,\psi(y,C)).$$

Приклад

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'^3-4xyy'+8y^2=0.$$

Розв'язання. Дане рівняння можна розв'язати відносно x:

$$x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p},\ \ y'=p. \tag{32}$$

Здиференціюємо обидві частини (32) за змінною y, вважаючи, що $p=p(y)$. Дістанемо

$$\frac{1}{p}=\left(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{4y^2}+\frac{2}{p},$$

або

$$\frac{dp}{dy}\,\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}.$$

Припускаючи, що $p^3 - 4y^2 \neq 0$, матимемо

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}.$$

Отже,

$$p = C\sqrt{y}.$$

З рівності (32) знаходимо

$$C^3 y^{\frac{3}{2}} - 4Cxy^{\frac{3}{2}} + 8y^2 = 0,$$

або

$$64y = (4Cx - C^3)^2, \ y \neq 0.$$

Нехай, нарешті, $C_1 = \dfrac{C^2}{4}$, тоді

$$y = C_1(x - C_1)^2.$$

Розв'язок $y = 0$ можна отримати із загального розв'яку при $C_1 = 0$.

Нехай тепер $p^3 - 4y^2 = 0$. Тоді $p = \sqrt[3]{4y^2}$. Розв'язуючи (32) відносно y і враховуючи знайдене значення p, матимемо ще один розв'язок заданого рівняння

$$y = \frac{4}{27}x^3.$$

6. Рівняння Лагранжа та Клеро*. Розглянемо диференціальне рівняння:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{33}$$

де φ та ψ — функції, які мають неперервні похідні на деякому проміжку зміни y'. Рівняння (33) називають рівнянням Лагранжа. Покажемо, що це рівняння інтегрується в квадратурах. Для цього покладемо $y' = p$. Тоді рівняння (33) набуде вигляду

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{34}$$

Здиференціюємо ліву і праву частини рівняння (34) за змінною x:

$$p = \varphi(p) + (x\varphi'(p) + \psi'(p))p',$$

або

$$(x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = p - \varphi(p).$$

Нехай

$$p - \varphi(p) \neq 0. \tag{35}$$

Тоді матимемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку з неперервними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dp} + x\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

*Алексі Клеро (1713–1765)– французький математик.

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$x = A(p)C + B(p),$$

де $A(p)$, $B(p)$ — відомі функції, а C — довільна стала.

Отже, загальний розв'язок рівняння Лагранжа можна записати у параметричній формі

$$x = A(p)C + B(p), \quad y = A_1(p)C + B_1(p).$$

Нехай тепер умова (35) порушується, тобто

$$p - \varphi(p) = 0, \tag{36}$$

при деяких значеннях $p = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, або

$$p - \varphi(p) \equiv 0. \tag{37}$$

Якщо має місце (36), то функції

$$y = xp_i + \psi(p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{38}$$

є розв'язками рівняння Лагранжа. Причому розв'язки (38) можуть бути як частинними, так і особливими.

Приклад

9. Знайти розв'язки диференціального рівняння

$$y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{4}{y'}\right).$$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Лагранжа. Тому поклавши $y' = p$, матимемо

$$y = \frac{1}{2}x\left(p + \frac{4}{p}\right).$$

Диференціюючи обидві частини останньої рівності за змінною x, дістаємо

$$p = \frac{p}{2} + \frac{2}{p} + \frac{x}{2}p' - \frac{2x}{p^2}p'.$$

Звідси

$$\frac{p^2 - 4}{2p} = \frac{(p^2 - 4)x}{2p^2}p'.$$

Нехай $p^2 - 4 \neq 0$. Тоді матимемо

$$p = xp'.$$

Тому загальний розв'язок заданого рівняння у параметричній формі має вигляд

$$x = Cp, \quad y = \frac{1}{2}x\left(p + \frac{4}{p}\right).$$

Вилучивши параметр p, дістаємо

$$y = \frac{x^2}{2C} + 2C. \tag{39}$$

Якщо ж $p^2 - 4 = 0$, то $p = \pm 2$. Таким чином,

$$y = \pm 2x.$$

Перевіримо, чи порушується умова єдиності в кожній точці прямої $y = 2x$. Криві $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$ дотикаються в точці з абсцисою $x = x_0$, якщо

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) \text{ і } \varphi'(x_0) = \psi'(x_0).$$

Нехай $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2C} + 2C$, а $\psi(x) = 2x$. Тоді в нашому випадку матимемо

$$\begin{cases} \dfrac{{x_0}^2}{2C} + 2C = 2x_0, \\ \dfrac{x_0}{C} = 2. \end{cases}$$

З другого рівняння системи знаходимо

$$C = \frac{x_0}{2}.$$

Підставивши знайдене значення C в перше рівняння, матимемо тотожність. Отже, для кожного x_0 пряма $y = 2x$ дотикається до деякої кривої з сім'ї (39), а саме до тієї кривої, для якої $C = \dfrac{x_0}{2}$, тобто $y = 2x$ – особливий розв'язок заданого диференціального рівняння. Аналогічно можна показати правильність останнього твердження і для функції $y = -2x$.

Нехай тепер

$$p - \varphi(p) \equiv 0.$$

При цьому $\varphi(p) = y'$. Тобто рівняння Лагранжа набуде вигляду

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{40}$$

Диференціальне рівняння (40) називають рівнянням Клеро.

Рівняння Клеро будемо розв'язувати тим самим методом, що й рівняння Лагранжа. Для цього запишемо його у вигляді

$$y = xp + \psi(p),$$

де $p = y'$. Тоді, диференціюючи обидві частини за змінною x, дістаємо рівність

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \psi'(p)\right) = 0.$$

Звідси

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ або } x + \psi'(p) = 0. \tag{41}$$

Перша з рівностей (41) дає $p = C = \text{const}$. Тобто загальний розв'язок рівняння Клеро має вигляд

$$y = xC + \psi(C), \tag{42}$$

де C — довільна стала. Таким чином, щоб дістати загальний розв'язок рівняння Клеро, потрібно в це рівняння замість y' підставити C.

Розглянемо тепер друге з рівнянь (41). Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно p, для чого досить, щоб функція $\psi''(p) \neq 0$ і була неперервною. Тоді, розв'язавши його відносно p, матимемо

$$p = \omega(x).$$

Таким чином,

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{43}$$

Покажемо, що функція (43) є розв'язком рівняння Клеро.

Справді, згідно з другим рівнянням (41), знаходимо

$$y' = \omega(x).$$

Тоді

$$xy' + \psi(y') = x\omega(x) + \psi(\omega(x)) = y,$$

що й доводить наше твердження.

Покажемо, що розв'язок (43) не можна отримати із загального розв'язку ні при якому значенні сталої C. Для цього зазначимо, що загальний розв'язок (42) є сім'єю прямих, залежних від одного параметра C. Припустимо, що розв'язок (43) належить до цієї сім'ї. Тоді $x\omega(x) + \psi(\omega(x))$ є лінійною функцією, тобто

$$x\omega(x) + \psi(\omega(x)) \equiv ax + b.$$

Здиференціювавши дану тотожність, приходимо до висновку, що

$$a = \omega(x).$$

Остання рівність суперечить рівнянню, що визначає $\omega(x)$. У наступному параграфі буде показано, що цей розв'язок є особливим.

Приклад

10. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y = xy' - y'^2. \tag{44}$$

Розв'язання. Поклавши $y' = p$, матимемо

$$y = xp - p^2. \tag{45}$$

Здиференціюємо обидві частини останньої рівності за змінною x:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx},$$

або

$$\frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0.$$

Тому

$$\frac{dp}{dx} = 0, \ x - 2p = 0. \tag{46}$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (44) має вигляд

$$y = Cx - C^2.$$

З другого рівняння (46) знаходимо

$$p = \frac{x}{2}.$$

Підставивши знайдене значення p у рівність (45), матимемо особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

1.10. Особливі розв'язки. Обвідна сім'ї кривих

Особливі точки. Припустимо, що диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

в околі деякої точки (x_0, y_0) розв'язане відносно похідної, тобто

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Якщо функція $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) задовольняє умови теореми Коші, то через точку (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна крива рівняння (2).

Нехай тепер $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) не є неперервною, тобто не виконується перша умова теореми Коші. Тоді може трапитись, що

1) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a, \ |a| < \infty$;

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \infty$;

3) $f(x, y)$ не має ні скінченної, ні нескінченної границі в точці (x_0, y_0).

Якщо функція $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) має границю, то можна скористатись теоремою Коші. Справді, в першому випадку функцію $f(x, y)$ можна довизначити до неперервної в точці (x_0, y_0). Для цього достатньо покласти $f(x_0, y_0) = a$. У другому – разом з рівнянням (2) розглядатимемо рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{3}$$

Поклавши тут $\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$, з теореми Коші отримуємо, що рівняння (3) має єдиний розв'язок $x = \varphi(y)$, графік якого в точці (x_0, y_0) має вертикальну дотичну.

У третьому ж випадку функція $f(x, y)$, а отже, і $\frac{1}{f(x, y)}$ в точці (x_0, y_0) не мають границі. Тоді точку (x_0, y_0) називають ізольованою особливою точкою диференціального рівняння (2).

Так, наприклад, диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

особливих точок не має, оскільки функція $f(x, y) \equiv x$ в правій частині рівняння

$$\frac{dx}{dy} = x$$

неперервна в $\mathbf{R}^2$.

Приклад

1. Дослідити в околі точки (0, 0) поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}. \tag{4}$$

Розв'язання. Функції $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ і $\frac{1}{f(x, y)} = \frac{x}{2y}$ в точці (0, 0) не мають границі. Тому точка (0, 0) є ізольованою особливою точкою диференціального рівняння (4). Оскільки рівняння (4) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, то його загальний розв'язок матиме вигляд

$$y = Cx^2,$$

де C — довільна стала. Тобто інтегральними кривими заданого диференціального рівняння є сім'я парабол (рис. 15), які проходять через точку (0, 0). Цю точку потрібно вилучити з графіка кожної параболи, оскільки в точці (0, 0) обидві функції $f(x, y)$ і $\frac{1}{f(x, y)}$ не мають границі. Крім того, до знайдених інтегральних кривих слід ще додати вісь Oy, з якої вилучена точка (0, 0).

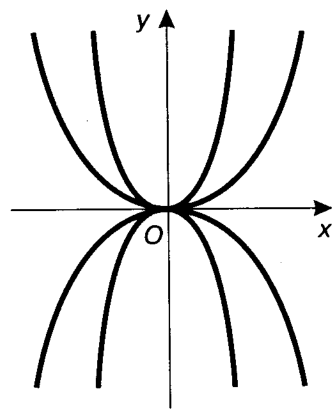


Рис. 15

Особливі розв'язки. Як вже зазначалося, диференціальні рівняння першого порядку можуть мати особливі розв'язки — розв'язки, в кожній точці графіків яких порушується властивість єдиності.

Виділимо клас диференціальних рівнянь, для яких можна вивчити наступні питання:

1) чи має дане рівняння особливий розв'язок;

2) якщо рівняння має особливий розв'язок, то як його знайти.

Поставлені питання найбільш просто розв'язуються для диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної.

Справді, нехай маємо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{5}$$

Припустимо, що функція $f(x, y)$ в розглядуваній області D площини xOy неперервна. Тоді, якщо $f(x, y)$ в цій області має обмежену частинну похідну за змінною y

$$|f'(x, y)| \leqslant M < +\infty,$$

то через кожну точку області D, за теоремою Коші, пройде лише одна інтегральна крива диференціального рівняння (5). Отже, в цьому випадку рівняння (5) особливих розв'язків не має. Наприклад, якщо в диференціальному рівнянні

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)$$

коефіцієнти $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ — неперервні функції на відрізку $[a; b]$, то дане рівняння в будь-якому замкненому прямокутнику

$$\overline{R} = \{(x, y) : \ a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d\}$$

особливих розв'язків не має.

Звідси, зокрема, випливає, що лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

з неперервними коефіцієнтами особливих розв'язків не має.

Таким чином, особливі розв'язки рівняння (5) можуть існувати лише в тих точках, в яких не виконуються умови теореми Коші. Зокрема, якщо $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) неперервна, що припускатимемо в даному пункті, то інтегральні криві, які відповідають особливим розв'язкам, можуть проходити лише через ті точки області D, в яких не виконується умова Ліпшіца. Умова Ліпшіца, напевне, виконується, якщо $f(x, y)$ в області D має обмежену частинну похідну за змінною y. Тому особливі розв'язки рівняння (5) можуть існувати лише в тих точках, в околі яких $f'_y(x, y)$ стає необмеженою.

Звідси дістаємо наступне правило знаходження особливого розв'язку рівняння (5) з неперервною правою частиною:

1) знайти геометричне місце точок області D, в околі яких частинна похідна $f'_y(x, y)$ необмежена. Нехай цією множиною точок є крива, задана рівнянням $\varphi(x, y) = 0$;

2) безпосередньою підстановкою в рівняння перевірити, чи буде знайдена множина точок розв'язком диференціального рівняння (5);

3) перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній точці знайдених таким чином розв'язків.

Якщо всі три умови виконуються, то співвідношення $\varphi(x, y) = 0$ визначає особливий розв'язок диференціального рівняння (5).

Приклади

Знайти особливі розв'язки диференціальних рівнянь.

2.

$$\frac{dy}{dx} = xe^y. \tag{6}$$

Розв'язання. Функція $f(x, y) = xe^y$ — неперервна в будь-якій замкненій області D площини xOy і $f'_y(x, y) = xe^y$ обмежена в D.

Тому задане диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

3.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}. \tag{7}$$

Розв'язання. Тут функція $f(x, y) = \sqrt{y}$ є неперервною в будь-якій замкненій області верхньої півплощини, тобто там, де $y \geqslant 0$.

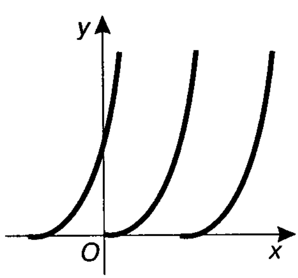


Рис. 16

Частинна похідна $f'_y(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ стає необмеженою при $y \to 0$ і $y > 0$. Тому лінія $y = 0$ може бути особливим розв'язком даного рівняння. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $y = 0$ справді є розв'язком рівняння (7). Інтегруючи задане рівняння, знаходимо

$$y = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2, \quad x \geqslant -C, \tag{8}$$

де C — стала інтегрування. Таким чином, через кожну точку прямої $y = 0$ проходять дві інтегральні криві рівняння (7), а саме: пряма $y = 0$ і деяка крива з сім'ї (8) (рис. 16).

Отже, функція $y = 0$ є особливим розв'язком рівняння (7).

4.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + 1. \tag{9}$$

Розв'язання. Тут також функція $f'_y(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ необмежена при $y \to 0$. Але $y = 0$ не є розв'язком рівняння (9). Оскільки в інших точках верхньої півплощини xOy права частина $f(x, y) = \sqrt{y} + 1$ задовольняє умови теореми Коші, то рівняння (9) особливих розв'язків не має.

5.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{x}. \tag{10}$$

Розв'язання. У даному рівнянні права частина $f(x,y)=\dfrac{y\ln y}{x}$ – неперервна функція в будь-якій замкненій області, де $x\neq 0$, $y\geqslant 0$ (при $y=0$, вважатимемо, що $f(x,0)=$ $=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\ln y}{x}=0$). Оскільки

$$f_y'(x,y)=\frac{\ln y+1}{x},$$

то $\lim\limits_{y\to 0}f_y'(x,y)=-\infty$.

Таким чином, геометричне місце точок $y=0$ (вісь Ox) може бути особливим розв'язком рівняння (10).

Легко бачити, що функція $y=0$ є розв'язком заданого рівняння. Перевіримо тепер, чи порушується властивість єдиності в кожній точці прямої $y=0$. Для цього знайдемо загальний розв'язок рівняння (10)

$$y=e^{Cx}. \tag{11}$$

Припустимо, що в точці $(x_0,0)$ деяка крива з сім'ї (11) дотикається до осі абсцис, тобто

$$0=e^{Cx_0}.$$

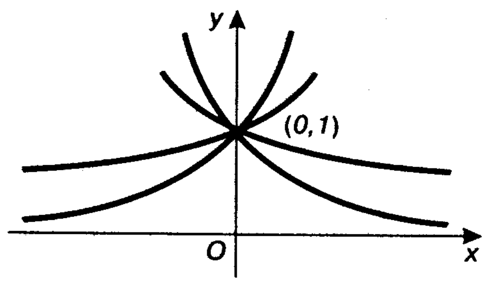


Рис. 17

Оскільки остання рівність неможлива ($-\infty<C<+\infty$), то через кожну точку осі Ox проходить єдина інтегральна крива $y=0$. Тому диференціальне рівняння (10) особливих розв'язків не має. Дослідимо тепер поведінку інтегральних кривих рівняння (10) при $x\to 0$. Зауважимо, що в точці $x=0$ осі Oy права частина диференціального рівняння (10) не визначена. Однак, підставляючи $x=0$ у загальний розв'язок (11), дістанемо

$$y=e^{C\cdot 0}=1.$$

Ця рівність справджується при будь-якому значенні сталої C. Отже, всі інтегральні криві, крім інтегральної кривої $y=0$ $(x\neq 0)$, прилягають до точки (0, 1) (рис. 17).

Розглянемо тепер питання про існування особливих розв'язків для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної (1)

$$F(x,y,y')=0.$$

Якщо функція $F(x,y,y')$ в деякій області тривимірного простору задовольняє умови теореми про існування та диференційовність неявної функції, то у відповідній області площини xOy через кожну точку

(x_0, y_0) за даним напрямком проходить лише одна інтегральна крива рівняння (1). Таким чином, особливі розв'язки диференціального рівняння (1) можуть існувати лише в тих точках, в яких порушуються умови зазначеної теореми.

Зокрема, якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки слід шукати серед тих точок, координати яких одночасно задовольняють рівняння

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \quad p = y'. \end{cases} \tag{12}$$

Якщо система (12) сумісна, то виключаючи параметр p, дістанемо деяку множину точок

$$\varphi(x, y) = 0,$$

яка може бути особливим розв'язком рівняння (1).

Геометричне місце точок $\varphi(x, y) = 0$, отримане шляхом виключення параметра p із системи рівнянь (12), називають дискримінантною кривою рівняння (1).

Таким чином, дискримінантні криві рівняння (1), якщо вони існують, можуть бути особливими розв'язками даного рівняння.

Звідси випливає один із способів знаходження особливих розв'язків диференціального рівняння (1). Для цього потрібно:

1) знайти дискримінантні криві рівняння;

2) перевірити, чи будуть дискримінантні криві інтегральними кривими заданого рівняння;

3) перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній з точок цих інтегральних кривих.

Якщо всі три умови виконуються, то знайдені таким чином розв'язки диференціального рівняння (1) є особливими.

Приклад

6. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y - xy' + e^{y'} = 0. \tag{13}$$

Розв'язання. Складемо систему рівнянь (12)

$$\begin{cases} y - xp + e^p = 0, \\ -x + e^p = 0. \end{cases}$$

Звідси знайдемо дискримінантну криву

$$y = x\ln x - x. \tag{14}$$

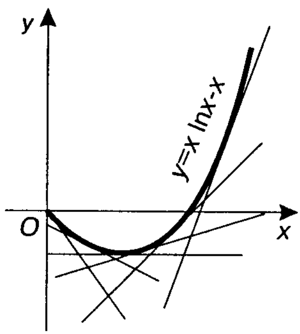


Рис. 18

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що функція (14) є розв'язком заданого диференціального рівняння. Оскільки рівняння (13) є рівнянням Клеро, то його загальним розв'язком є сім'я прямих

$$y = Cx - e^C. \tag{15}$$

Покажемо, що в кожній своїй точці крива $y = x\ln x - x$ має дотичну, яка належить сім'ї $y = Cx - e^C$. Справді, якщо деяка пряма із сім'ї (15) є дотичною до кривої (14) в точці (x_0, y_0), то

$$x_0 \ln x_0 - x_0 = Cx_0 - e^C \tag{16}$$

і

$$\ln x_0 + 1 - 1 = C,$$

тобто

$$C = \ln x_0. \tag{17}$$

Підставивши знайдене значення C в (16), дістанемо тотожність. Таким чином, дотичною до кривої (14) в точці (x_0, y_0) буде та пряма із сім'ї (15), для якої $C = \ln x_0$ (рис. 18). Тому через кожну точку інтегральної кривої (14) проходять дві інтегральні криві: сама крива (14) і деяка пряма із сім'ї (15). Отже, розв'язок (14) є особливим розв'язком диференціального рівняння (13).

Крім розглянутого способу знаходження особливого розв'язку диференціального рівняння (1), існує інший спосіб, що грунтується на понятті обвідної однопараметричної сім'ї кривих.

Нехай маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{18}$$

де C — параметр, який набуває значень, наприклад, з деякого проміжку $\langle\alpha; \beta\rangle$.

Криву l називають обвідною сім'ї кривих (18), якщо вона в кожній своїй точці дотикається до деякої кривої із сім'ї кривих (18) і ні на якій ділянці не збігається з жодною кривою з даної сім'ї (рис. 19).

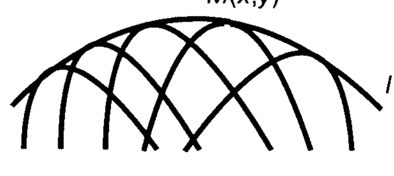


Рис. 19

Припустимо, що сім'я кривих (18) є загальним інтегралом рівняння (1). Тоді, якщо ця сім'я має обвідну, то остання є особливим розв'язком даного диференціального рівняння.

Справді, візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на обвідній. У цій точці, яка одночасно лежить і на одній з інтегральних кривих, напрямок дотичної до обвідної збігається з напрямком поля, заданого диференціальним рівнянням (1). Отже, крива l є інтегральною кривою даного рівняння. А оскільки через кожну її точку проходять дві інтегральні криві — крива l і одна з кривих сім'ї (18), то l є особливим розв'язком.

Встановимо, як знаючи сім'ю кривих (18) знайти обвідну цієї сім'ї, якщо, безперечно, відповідна обвідна існує. Зазначимо, що не кожна однопараметрична сім'я кривих має обвідну. Наприклад, сім'я прямих $y = Cx$, сім'я концентричних кіл $x^2 + y^2 = C^2$ обвідної не мають, тоді як сім'я парабол $y = (x + C)^2$ має обвідну $y = 0$ (рис. 20).

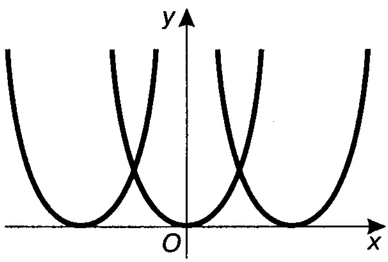


Рис. 20

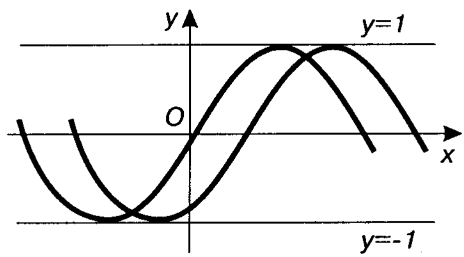


Рис. 21

Сім'я синусоїд $y = \sin(x+C)$ має дві обвідні $y = 1$ і $y = -1$ (рис. 21).

Виведемо необхідні умови існування обвідної. Отже, нехай сім'я кривих (18) має обвідну, рівняння якої запишемо в параметричній формі

$$x = x(t), \ \ y = y(t), \tag{19}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — диференційовні функції на деякому проміжку $\langle\alpha; \beta\rangle$. Оскільки обвідна при різних t дотикається до різних кривих із сім'ї (18), то величину C у (18) можна розглядати як функцію t, тобто

$$C = C(t).$$

Припустимо, що $C'(t) \neq 0, \ \ t \in \langle\alpha; \beta\rangle$, оскільки інакше обвідна в кожній своїй точці буде дотикатися до однієї й тієї самої інтегральної кривої з сім'ї (18), а тому вона збігатиметься з цією кривою.

Тоді, підставляючи (19) у (18), дістанемо тотожність

$$\Phi(x(t), y(t), C(t)) \equiv 0.$$

Нехай $\Phi(x, y, C)$ має неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) + \Phi'_C C'(t) = 0. \tag{20}$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт k дотичної до кривої із сім'ї (18) при умові, що $\Phi'_y \neq 0$:

$$k = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}.$$

Кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до обвідної

$$k_1 = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Але оскільки $k = k_1$, то

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

Тоді з (20) матимемо

$$\Phi'_C(x(t), y(t), C(t)) = 0.$$

Отже, якщо сім'я кривих (18) має обвідну і в кожній точці кривих з цієї сім'ї $\Phi'_y(x, y, C) \neq 0$ або $\Phi'_x(x, y, C) \neq 0$, то координати обвідної одночасно задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} \Phi(x(t), y(t), C(t)) = 0, \\ \Phi'_C(x(t), y(t), C(t)) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Таким чином, умови (21) є необхідними умовами того, щоб крива (19) була обвідною сім'ї (18).

Криву, координати якої задовольняють систему рівнянь (21), називають дискримінантною кривою сім'ї кривих (18).

Покажемо, що умови (21) у випадку, коли в кожній точці кривої (19) Φ'_x і Φ'_y одночасно не дорівнюють нулю, є і достатніми для того, щоб ця крива була обвідною для сім'ї кривих (18).

Справді, нехай

$$\Phi'_y(x(t), y(t), C(t)) \neq 0,$$

тоді, диференціюючи першу тотожність системи (21) за змінною t, матимемо

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) + \Phi'_C C'(t) = 0.$$

Звідси, згідно з другим рівнянням (21),

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

Отже,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}.$$

Остання рівність і доводить наше твердження. Таким чином, для знаходження обвідної однопараметричної сім'ї кривих дістали таке правило:

1) із системи рівнянь (21) за допомогою виключення параметра C знаходимо дискримінантну криву даної сім'ї кривих;

2) з отриманої таким чином дискримінантної кривої усуваємо точки, де Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють нулю. Решта дискримінантної кривої і буде обвідною даної сім'ї кривих.

Приклад

7. Знайти особливий розв'язок рівняння Клеро

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{22}$$

Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння Клеро є сім'я прямих

$$y = Cx + \psi(C), \tag{23}$$

де C – довільна стала.

Побудувавши для заданого рівняння систему (21), дістанемо

$$\begin{cases} y - Cx - \psi(C) = 0, \\ x + \psi'(C) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Припустимо, що друге рівняння системи розв'язне відносно C:

$$C = \omega(x).$$

Підставимо знайдене значенння C у перше рівняння системи (24). Тоді

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{25}$$

Оскільки $\Phi'_y = 1 \neq 0$, то отримана дискримінантна крива (25) є обвідною сім'ї прямих (23).

Отже, розв'язок (25) є особливим розв'язком диференціального рівняння Клеро.

Зауважимо, що інколи особливий розв'язок можна отримати із загального при деякому значенні довільної сталої. Справді, запишемо систему (21) для диференціального рівняння з прикладу 8 попереднього параграфа (його загальний розв'язок має вигляд $y = C(x - C)^2$):

$$\begin{cases} y - C(x - C)^2 = 0, \\ -(x - C)^2 + 2C(x - C) = 0. \end{cases}$$

Тоді з другого рівняння системи матимемо $C = x$ або $C = \frac{x}{3}$. Підставимо знайдені значення C в перше рівняння:

$$y = 0, \ y = \frac{4}{27}x^3. \tag{26}$$

Оскільки $\Phi'_y = 1 \neq 0$, то дискримінантні криві (26) є обвідними сім'ї парабол $y = C(x - C)^2$, а тому функції (26) є особливими розв'язками відповідного диференціального рівняння. Особливий розв'язок $y = 0$ можна отримати із загального при $C = 0$.

1.11. Задача на траєкторії

Нехай на площині xOy задана однопараметрична сім'я кривих

$$F(x, y, a) = 0. \tag{1}$$

Криву, яка перетинає всі криві сім'ї (1) під одним і тим самим кутом α, називають ізогональною траєкторією цієї сім'ї [4]. Якщо, зокрема, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то ізогональну траєкторію називають ортогональною. За заданою сім'єю кривих (1) знайдемо її ізогональні траєкторії. Нехай $M(x_1, y_1)$ — довільна точка ізогональної траєкторії, φ та φ_1 — кути, які утворюють з віссю Ox дотичні до деякої кривої сім'ї (1) в точці M та до ізогональної траєкторії в цій самій точці відповідно (рис. 22). Тоді

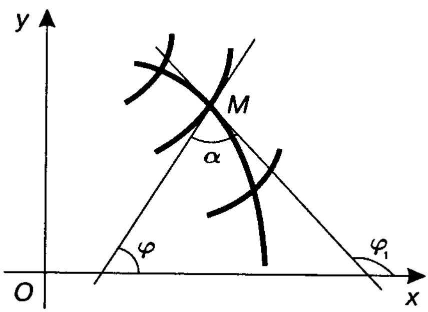


Рис. 22

$$\varphi_1 - \varphi = \alpha.$$

Вважатимемо спочатку, що $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Враховуючи, що

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{dy_1}{dx_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx},$$

матимемо

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k, \quad \text{або} \quad \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy}{dx}} = k, \quad k = \operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

Відомо, що похідна функції $y = y(x)$, неявно заданої співвідношенням (1), в точці $M(x_1, y_1)$ визначається за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x_1, y_1, a)}{F'_y(x_1, y_1, a)}.$$

Підставляючи знайдене значення $\frac{dy}{dx}$ у рівність (2), дістаємо

$$\frac{F'_y(x_1, y_1, a)\dfrac{dy_1}{dx_1} + F'_x(x_1, y_1, a)}{F'_y(x_1, y_1, a) - F'_x(x_1, y_1, a)\dfrac{dy_1}{dx_1}} = k. \tag{3}$$

У рівняння (3) входить параметр a, що, змінюючись від точки до точки траєкторії, характеризує ту криву сім'ї (1), яку траєкторія перетинає в даній точці $M(x_1, y_1)$. Його значення для точки $M(x_1, y_1)$ визначимо з рівняння (1) при $x = x_1$, $y = y_1$:

$$F(x_1, y_1, a) = 0. \tag{4}$$

Виключивши параметр a з системи рівнянь (4) і (3), отримаємо співвідношення вигляду

$$\Phi\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}\right) = 0, \tag{5}$$

яке пов'язує координати довільної точки M траєкторії та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї траєкторії в цій же точці. Отже, рівняння (5) є диференціальним рівнянням ізогональних траєкторій сім'ї (1). Загальний інтеграл диференціального рівняння (5):

$$\Psi(x_1, y_1, C) = 0$$

дає сім'ю ізогональних траєкторій, залежних від одного параметра C.

Нехай тепер $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тоді матимемо

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = -\operatorname{ctg}\varphi, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

Отже, замість рівності (3) отримуємо

$$\frac{dy_1}{dx_1} F'_x(x_1, y_1, a) - F'_y(x_1, y_1, a) = 0. \tag{6}$$

Диференціальне рівняння ортогональних траєкторій дістанемо виключенням параметра a із системи рівнянь (4) та (6).

Припустимо, що початкова сім'я кривих задана диференціальним рівнянням

$$\Phi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{7}$$

За допомогою рівняння (7) кожній точці (x, y) можна поставити у відповідність одне або кілька значень $\frac{dy}{dx}$, що визначають поле напрямків даної сім'ї кривих. Напрямок поля ізогональних траєкторій пов'язаний з напрямком поля даної сім'ї співвідношенням (3). Розв'язуючи його відносно $\frac{dy}{dx}$, маємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\frac{dy_1}{dx_1}+1}.$$

Тоді з рівності (7) при $x = x_1$, $y = y_1$ дістаємо диференціальне рівняння ізогональних траєкторій

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\frac{dy_1}{dx_1}+1}\right)=0. \tag{8}$$

Якщо траєкторії є ортогональними, то $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{dy_1}{dx_1}$ пов'язані співвідношенням

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}.$$

Тому диференціальне рівняння ортогональних траєкторій матиме вигляд

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right)=0. \tag{9}$$

Приклад

1. Знайти ізогональні траєкторії сім'ї прямих, які проходять через початок координат: $y = ax$.

Розв'язання. Нехай ізогональна траєкторія перетинає криві із заданої сім'ї під кутом $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\frac{dy}{dx}=a, \quad \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy}{dx}}=k, \quad k=\operatorname{tg}\alpha.$$

Згідно з рівнянням сім'ї $y_1 = ax_1$, маємо (опускаючи індекси)

$$\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}}=k,$$

або

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+kx}{x-ky},$$

тобто

$$x\,dy-y\,dx=k(x\,dy+y\,dx).$$

Помноживши обидві частини останнього рівняння на $\frac{1}{x^2+y^2}$, дістанемо диференціальне рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{k}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Тому

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln C,$$

тобто

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Перейшовши до полярної системи координат, остаточно матимемо: $r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$. Отже, шуканими ізогональними траєкторіями є сім'я логарифмічних спіралей.

Нехай тепер $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{a}=-\frac{1}{\frac{y_1}{x_1}},$$

або, опускаючи індекси,

$$x\,dx+y\,dy=0,$$

звідки $x^2+y^2=C^2$. Тобто ортогональними траєкторіями є сім'я кіл.

Вправи

1. Скласти диференціальне рівняння парабол, вісь яких паралельна осі Oy і дотикається до прямих $y=0$, $y=x$.

2. Знайти криві, які мають таку властивість: якщо через будь-яку точку кривої провести прямі, паралельні координатним осям, до зустрічі з цими осями, то площа утворюваного при цьому прямокутника ділиться кривою у співвідношенні $1:4$.

3. Знайти криву, знаючи, що трикутник, утворений нормаллю до неї і осями координат, рівновеликий трикутнику, утвореному віссю Ox, дотичною та нормаллю до цієї ж кривої.

4. Посудина об'ємом 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину за 1 с надходить 0,1 л азоту, який неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. За який час в посудині буде 99% азоту?

5. У посудині знаходиться 100 л розчину, що містить 10 кг солів і неперервно подається вода (5 л за хвилину), яка перемішується з розчином. Суміш витікає з тією ж швидкістю. Скільки солі залишиться в посудині через годину?

6. Температура витягнутого з печі хліба протягом 20 хв знизилась від 100°C до 60°C. Температура повітря дорівнює 25°C. За який час від моменту початку охолодження температура хліба знизиться до 30°C?

7. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, що пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, швидкість його через 4 с — 1 м/с. За який час швидкість зменшиться до 1 м/с? Який шлях пройде човен до зупинки?

8. Воронка має форму конуса радіусом 6 см і заввишки 10 см, повернутого вершиною вниз. За який час витіче вся вода з воронки крізь круглий отвір діаметром 0, 5 см, зроблений у вершині конуса?

Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$ та $y_2(x)$ розв'язку задачі Коші.

9. $y' = x - y^2,\ y(0) = 0.$

10. $y' = y^2 - 3x^2 - 1,\ y(0) = 1.$

Не розв'язуючи рівнянь, побудувати наближено їх інтегральні криві.

11. $y' = y - x^2.$

12. $xy' + y = 0.$

13. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1.$

14. $y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}.$

Знайти розв'язки рівнянь.

15. $xy\,dx + (x + 1)\,dy = 0.$

16. $\sqrt{1 - x^2}y' + \sqrt{1 - y^2} = 0.$

17. $xy' + y = y^2,\ y(1) = \frac{1}{2}.$

18. $y' = \cos(y - x).$

19. $(x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$

20. $\left(x^2 - y^2\right)dy - 2xy\,dx = 0.$

21. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0.$

22. $xy' - y\ln\frac{y}{x} = 0.$

23. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0.$

24. $\left(6 - x^2y^2\right)dx + x^2\,dy = 0.$

25. $9y\,dy + (4x^3 - 18xy)\,dx = 0.$

26. $xy' - 2y = 2x^4.$

27. $x(y' - y) = e^x.$

28. $\left(2e^y - x\right)y' = 1.$

29. $y' = \frac{y}{3x - y^2}.$

30. $y' + xy = xy^3.$

31. $2y\,dy = \left(x + y^2\right)dx.$

32. $y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1.$

33. $\left(x^2 + y\right)dx + (x - 2y)\,dy = 0.$

34. $\left(2y - xe^y\right)y' = e^y.$

35. $\left(x^2 - \sin^2 y\right)dx + x\sin 2y\,dy = 0.$

36. $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0.$

37. $y^2\,dx + (xy + \operatorname{tg} xy)\,dy = 0.$

38. $y'^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0.$

39. $yy'^2 - 2xy' + y = 0.$

40. $x = \sin y' + \ln y'.$

41. $y = y'^2 + 2\ln y'.$

42. $4y = x^2 + y'^2.$

43. $e^x = \frac{y^2 + y'^2}{2y'}.$

44. $y = xy'^2 - y'.$

45. $y = xy' + y'^2.$

46. $y = (1 + y')x + y'^2.$

Знайти ізогональні траєкторії даних сімей кривих.

47. $x^2 = y + ax,\ \alpha = \frac{\pi}{2}.$

48. $x^2 + y^2 = a^2,\ \alpha = \frac{\pi}{4}.$

Знайти обвідні заданих сімей кривих.

49. $(x - C)^2 + y^2 = \frac{C^2}{2}.$

50. $y^2 = C(x - C).$

Розділ 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Основні означення й поняття. Теорема існування

Як уже зазначалось, диференціальним рівнянням n-го порядку називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

де x — незалежна змінна, $y = y(x)$ — шукана функція, а $y', \ldots, y^{(n)}$ — відповідні похідні функції y. При цьому функція $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ має залежати принаймні від $y^{(n)}$. Припустимо, що рівняння (1) може бути розв'язане відносно $y^{(n)}$, тобто

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

Рівняння (2) називають диференціальним рівнянням n-го порядку, розв'язаним відносно похідної n-го порядку. Надалі вивчатимемо рівняння вигляду (2).

Розв'язком диференціального рівняння (2) називають n разів диференційовну функцію $y = \varphi(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ (a і b можуть бути і невласними числами), яка при підстановці в це рівняння перетворює його на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ у тотожність

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right).$$

Графік функції $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком рівняння (2), називають інтегральною кривою цього рівняння.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння (2) називають інтегруванням даного рівняння.

Для диференціального рівняння n-го порядку вигляду (2), як і для диференціального рівняння першого порядку, розглядають задачу Коші (задачу з початковими умовами), яка ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння (2) потрібно знайти той розв'язок $y = y(x)$, який при $x = x_0$ (x_0 — довільна точка проміжку $\langle a;\ b\rangle$) задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

де $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ — довільні наперед задані дійсні числа.

Числа $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ називають початковими даними розв'язку

$y = y(x)$, а число x_0 — початковим значенням незалежної змінної x. Сукупність чисел $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ називають початковими даними рівняння (2), а умови (3) — початковими умовами диференціального рівняння (2). Так, для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{4}$$

задача Коші полягає в знаходженні розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0'. \tag{5}$$

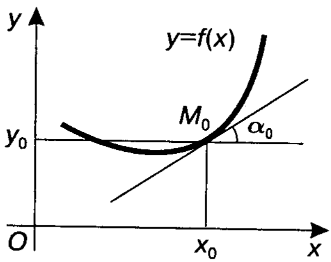


Рис. 23

З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші (4), (5) означає серед усіх інтегральних кривих рівняння (4) знайти ту інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$ і має в цій точці заданий напрямок дотичної, тобто $\operatorname{tg} \alpha_0 = y_0'$ (рис. 23).

Дамо механічне трактування задачі Коші. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{6}$$

яке описує рух точки вздовж прямої під дією сили $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$.

Задача Коші для диференціального рівняння (6) полягає в тому, що з усіх рухів (розв'язки диференціального рівняння (6) називають у механіці рухами), що визначаються рівнянням (6), знайти рух $x = x(t)$, який задовольняє початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \ x'(t_0) = v_0, \tag{7}$$

тобто знайти такий рух, в якому рухома точка в заданий момент часу t_0 була б у положенні x_0 і мала б задану початкову швидкість v_0.

Як для диференціального рівняння першого порядку, так і для диференціального рівняння n-го порядку природним є питання: які умови має задовольняти права частина рівняння (2), щоб задача Коші для даного рівняння мала розв'язок і притому єдиний?

Для доведення відповідної теореми доцільно замінити рівняння (2) системою n диференціальних рівнянь першого порядку з n невідомими функціями. Для цього покладемо

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ \ldots, \ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}. \tag{8}$$

Із співвідношень (8) випливає, що функція y_k є k-ю похідною функції y, тобто

$$y_k = \frac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тому $y^{(n)} = \frac{dy_{n-1}}{dx}$, і рівняння (2) набуде вигляду

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}). \tag{9}$$

На співвідношення (8) та (9) будемо дивитись як на систему n диференціальних рівнянь першого порядку з n невідомими функціями $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$. У лівих частинах рівнянь системи містяться похідні від шуканих функцій, праві ж частини – не залежать від похідних. Систему такого вигляду називають системою n диференціальних рівнянь нормальної форми.

Враховуючи, що системи диференціальних рівнянь будуть самостійним об'єктом нашого вивчення, доведемо теорему існування та єдиності для системи n диференціальних рівнянь першого порядку нормальної форми в найбільш загальному вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{10}$$

При цьому для зручності невідомі функції $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ позначимо через

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n.$$

Вважатимемо, що для системи (10) задана система початкових даних

$$x_0, \ y_1^{(0)}, \ \ldots, y_n^{(0)}.$$

Теорема 1 (Коші). *Нехай виконуються такі умови:*
1) *функції* $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *неперервні за сукупністю своїх аргументів, а тому і обмежені* ($|f_i| \leqslant M$), *в замкненій області*

$$\overline{D} = \left\{(x, y_1, \ldots, y_n) : \ |x - x_0| \leqslant a, \ |y_i - y_i^{(0)}| \leqslant b, \ i = 1, 2, \ldots, n\right\};$$

2) *в області $\overline{D}$ ці функції задовольняють умову Ліпшица відносно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, тобто для всіх $(x, y_1, \ldots, y_n)$ і $\left(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\right)$ з $\overline{D}$ виконується нерівність*

$$\left|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i\left(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\right)\right| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} |y_k - \overline{y}_k|, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де L — стала Ліпшица.

Тоді на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, де $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, існує єдина система розв'язків

$$y_1 = y_1(x), \; y_2 = y_2(x), \; \ldots, \; y_n = y_n(x)$$

системи рівнянь (10) *така, що*

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \; y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \; \ldots, \; y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{11}$$

Доведення. Як і для одного диференціального рівняння, можна показати, що система диференціальних рівнянь (10) з початковими умовами (11) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = y_n^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt. \end{cases} \tag{12}$$

Тому далі будемо доводити існування та єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь (12). Для цього застосуємо метод послідовних наближень (метод Пікара).

Визначатимемо послідовні наближення одночасно для всіх шуканих функцій. За наближення нульового порядку візьмемо сталі $y_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді наближення першого порядку матимуть вигляд

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(x) = y_1^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1\left(t, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(1)}(x) = y_n^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n\left(t, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) dt. \end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, що побудовані таким чином функції є неперервними. Покажемо, що перші наближення при $|x - x_0| \leqslant h$ не виходять з області $\overline{D}$. Справді,

$$\left|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) dt\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Крім того, функції $y_i^{(1)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, за побудовою задовольняють початкові умови (11).

І взагалі, m-ті наближення визначаються через наближення $(m - 1)$-го порядку за допомогою формул:

$$\begin{cases} y_1^{(m)}(x) = y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1\left(t, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m)}(x) = y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n\left(t, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) dt. \end{cases} \tag{14}$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що m-ті наближення є неперервними функціями, графіки яких при $|x-x_0| \leqslant h$ не виходять з області $\overline{D}$. Справді, зробивши відповідне припущення щодо $(m - 1)$-х наближень, матимемо:

1) функції $y_i^{(m)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — неперервні на відрізку $[x_0 - h;\ x_0 + h]$, оскільки інтеграл $\int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) dt$, $i = 1, 2, \ldots, n$ з верхньою змінною межею — неперервна функція;

2)

$$\left|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) dt\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

Враховуючи, що відповідна нерівність доведена і для $m = 1$, вона буде правильною для будь-якого натурального m. Таким чином, послідовні наближення (14) належать області $\overline{D}$, коли $x \in [x_0 - h;\ x_0 + h]$. Крім того, згідно з побудовою, функції $y_i^{(m)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задовольняють початкові умови (11).

Доведемо, що послідовність наближень (функцій) (14) збігається при $m \to \infty$ рівномірно для всіх $x \in [x_0 - h;\ x_0 + h]$.

Для цього, як і у разі одного диференціального рівняння першого порядку, розглянемо ряди:

$$y_i^{(0)} + (y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}) + (y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)) + \ldots +$$
$$+(y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)) + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Зрозуміло, що k-та частинна сума ряду (15) дорівнює k-му члену послідовності функцій (14). Оцінимо за модулем члени цих рядів, починаючи з другого. Враховуючи оцінку

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) dt\right| \leqslant M|x - x_0|$$

та використовуючи умову Ліпшіца, матимемо

$$\left|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \left(f_i\left(t, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\right) - f_i\left(t, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)\right) dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} \left|f_i\left(t, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\right) - f_i\left(t, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)\right| dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L\left(\left|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}\right| + \ldots + \left|y_n^{(1)} - y_n^{(0)}\right|\right) dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} MnL|t - t_0|\, dt\right| = MnL\frac{|x - x_0|^2}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можна довести правильність наступної оцінки:

$$\left|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)\right| \leqslant M(nL)^{m-1}\frac{|x - x_0|^m}{m!}. \tag{17}$$

Оскільки $|x - x_0| \leqslant h$, то всі члени рядів (15), починаючи з другого, не перевищують за модулем відповідні члени ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nL)^{m-1}\frac{h^m}{m!}. \tag{18}$$

Легко перевірити, що за ознакою Д'Аламбера ряд (18) збігається. Тоді згідно з ознакою Вейєрштрасса ряди (15) збігаються рівномірно на відрізку $[x_0 - h;\, x_0 + h]$. Нехай

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x) = Y_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Враховуючи, що члени рядів (15) — неперервні функції, то й суми $Y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, цих рядів також будуть неперервними функціями на відрізку $[x_0 - h;\ x_0 + h]$.

Доведемо, що система функцій $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\ldots$, $Y_n(x)$ і є шуканою системою розв'язків системи диференціальних рівнянь (10).

Функції $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\ldots$, $Y_n(x)$ задовольняють початкові умови (11)

$$Y_i(x_0) = \lim_{m\to\infty} \overset{(m)}{y_i}(x_0) = \overset{(0)}{y_i}$$

і не виходять за межі області $\overline{D}$. Справді, перейшовши до границі при $m \to \infty$ в нерівностях

$$\left|\overset{(m)}{y_i} - \overset{(0)}{y_i}\right| \leqslant b,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

дістаємо

$$\left|Y_i(x) - \overset{(0)}{y_i}\right| \leqslant b,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажемо тепер, що ці функції задовольняють систему (10). Для цього співвідношення (14) запишемо так:

$$\overset{(m)}{y_i}(x) = \overset{(0)}{y_i} + \int_{x_0}^{x} \left(f_i\left(t, \overset{(m-1)}{y_1}(t), \ldots, \overset{(m-1)}{y_n}(t)\right) - \right.$$

$$\left. - f_i\left(t, Y_1(t), \ldots, Y_n(t)\right)\right) dt + \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, Y_1(t), \ldots, Y_n(t)\right) dt, \tag{19}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Оцінимо за модулем перший інтеграл:

$$\left|\int_{x_0}^{x} \left(f_i\left(t, \overset{(m-1)}{y_1}, \ldots, \overset{(m-1)}{y_n}\right) - f_i\left(t, Y_1, \ldots, Y_n\right)\right) dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} \left|f_i\left(t, \overset{(m-1)}{y_1}, \ldots, \overset{(m-1)}{y_n}\right) - f_i\left(t, Y_1, \ldots, Y_n\right)\right| dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} \left(\left|\overset{(m-1)}{y_1} - Y_1\right| + \ldots + \left|\overset{(m-1)}{y_n} - Y_n\right|\right) dt\right|. \tag{20}$$

Оскільки послідовність функцій $\overset{(m-1)}{y_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ рівномірно збігається до $Y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ на відрізку $[x_0-h;\ x_0+h]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для $m - 1 > N(\varepsilon)$

і всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ виконуватимуться нерівності

$$\left|y_i^{(m-1)}(x) - Y_i(x)\right| < \frac{\varepsilon}{Lhn}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді з формули (20) матимемо

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left(f_i\left(t, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) - f_i(t, Y_1, \ldots, Y_n)\right)dt\right| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{m\to\infty}\int_{x_0}^{x}\left(f_i\left(t, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) - f_i(t, Y_1, \ldots, Y_n)\right)dt = 0$$

для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$.

Перейшовши до границі при $m \to \infty$ у співвідношеннях (19), дістанемо

$$Y_i(x) = y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, Y_1, \ldots, Y_n)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отже, система функцій $y_1(x) = Y_1(x)$, $y_2(x) = Y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x) = Y_n(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ є розв'язком інтегральної системи рівнянь (12), а отже, і розв'язком системи диференціальних рівнянь (10), який задовольняє початкові умови (11).

Доведемо єдиність системи розв'язків $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\ldots$, $Y_n(x)$. Нехай на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, крім системи розв'язків $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\ldots$, $Y_n(x)$, існує ще одна система розв'язків $Z_1(x)$, $Z_2(x)$, $\ldots$, $Z_n(x)$ така, що

$$Z_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причому не всі $Z_i(x)$ тотожно дорівнюють $Y_i(x)$. Не обмежуючи загальність, можна вважати, що функція

$$\Phi(x) \equiv |Y_1(x) - Z_1(x)| + |Y_2(x) - Z_2(x)| + \ldots + |Y_n(x) - Z_n(x)| \tag{21}$$

не дорівнює тотожно нулю на досить малому відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$, $\eta \leqslant h$. Оскільки функція $\Phi(x) \not\equiv 0$ і є неперервною на відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$, то вона досягає в деякій точці x_1, $x_0 < x_1 \leqslant x_0 + \eta$ свого найбільшого значення $K > 0$. Тоді, враховуючи, що

$$|Y_i(x) - Z_i(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}(f_i(t, Y_1, \ldots, Y_n) - f_i(t, Z_1, \ldots, Z_n))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} L\left(|Y_1(t) - Z_1(t)| + \ldots + |Y_n(t) - Z_n(t)|\right) dt <$$

$$< \int\limits_{x_0}^{x} LK\, dt = LK|x - x_0|, \quad x \in [x_0;\, x_0 + \eta], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

матимемо

$$|Y_1(x) - Z_1(x)| + \ldots + |Y_n(x) - Z_n(x)| < nLK|x - x_0| \leqslant nLK\eta. \tag{22}$$

Зокрема, якщо $x = x_1$, то ліва частина нерівності (22) буде дорівнювати K, і ми отримуємо остаточно

$$K < nLK\eta,$$

тоді

$$1 < nL\eta,$$

що неможливо, оскільки число η може бути вибрано як завгодно малим. Маємо суперечність. Тому на відрізку $[x_0;\, x_0 + \eta]$

$$Y_i(x) \equiv Z_i(x), \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так само можна довести, що й на відрізку $[x_0 - \eta;\, x_0]$ ці функції збігаються. Теорему доведено.

Зауважимо, що умова Ліпшіца буде виконуватись, якщо функції f_i мають в області $\overline{D}$ обмежені частинні похідні за змінними y_k, тобто, якщо

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_k} f_i\,(x, y_1, \ldots, y_n)\right| \leqslant M, \quad i,\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Як і у випадку одного диференціального рівняння, знайдений таким чином розв'язок $Y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна продовжити як завгодно близько до межі області $\overline{D}$.

Оскільки диференціальне рівняння n-го порядку (2)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

можна звести до системи (10), в якій

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \;\ldots,\; \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

то дістаємо теорему існування та єдиності розв'язку для рівняння (2).

Теорема 2. *Диференціальне рівняння n-го порядку* (2), *права частина якого неперервна за сукупністю своїх аргументів і задовольняє умову Ліпшица відносно y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ має єдиний розв'язок $y = y(x)$ такий, що*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Слід звернути увагу на те, що єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння (2), на відміну від диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної, не означає, що через задану точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива заданого рівняння. Так, для диференціального рівняння другого порядку (4) єдиність розв'язку задачі Коші з початковими умовами (5) означає, що через точку (x_0, y_0) проходить одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (4), дотична до якої в цій точці утворює з додатним напрямком осі Ox кут α_0 такий, що $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$. Проте через цю точку можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної.

Нехай D — область, в кожній точці якої задача Коші має єдиний розв'язок. Тоді функцію

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{23}$$

яка визначена в деякій області зміни змінних x, C_1, C_2, ..., C_n і має неперервні частинні похідні за змінною x до n-го порядку включно, називають загальним розв'язком диференціального рівняння (2) в області D [12], якщо:

1) система рівнянь

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases} \tag{24}$$

розв'язна відносно довільних сталих C_1, C_2, ..., C_n в області D, тобто

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \\ C_2 = \psi_2\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \psi_n\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right); \end{cases} \tag{25}$$

2) для всіх значень $\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ з області D формули (25) дають

такі значення $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (включаючи $\pm\infty$), при яких функція (23) є розв'язком диференціального рівняння (2).

Знаючи загальний розв'язок (23), можна розв'язати будь-яку задачу Коші для диференціального рівняння (2) в області D, тобто знайти розв'язок рівняння (2), що визначається початковими даними $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, причому $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ – довільна точка з D.

Для знаходження цього розв'язку підставимо в систему (24) замість $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ початкові дані $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \tag{26}$$

З означення загального розв'язку випливає, що система (26) розв'язна відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, тобто:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \equiv C_1^{(0)}, \\ C_2 = \psi_2\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \equiv C_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \psi_n\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \equiv C_n^{(0)}. \end{cases} \tag{27}$$

Підставивши знайдені значення $C_1, C_2, \ldots, C_n$ у формулу загального розв'язку (23), дістанемо шуканий розв'язок задачі Коші

$$y = \varphi\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right). \tag{28}$$

Як правило, інтегруючи диференціальне рівняння (2), отримуємо загальний розв'язок у неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{29}$$

Співвідношення (29) називають загальним інтегралом рівняння (2) в області D, якщо воно визначає загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

диференціального рівняння (2) в області D.

Іноді загальний розв'язок рівняння (2) можна знайти в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \tag{30}$$

Якщо з системи (30) вдається виключити параметр t, то дістають загальний розв'язок у неявному або навіть у явному вигляді.

Розв'язок диференціального рівняння (2), в кожній точці графіка якого виконується умова єдиності, називають частинним розв'язком. З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються із загального при конкретних значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, включаючи $\pm\infty$, є частинними розв'язками.

Розв'язок, у кожній точці графіка якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають особливим розв'язком.

Особливий розв'язок диференціального рівняння (2) може містити не більше $(n-1)$-ї довільної сталої.

Приклад

1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' = 2\sqrt{y'}. \tag{31}$$

Розв'язання. Покладемо $y' = z(x)$, де $z(x)$ – нова невідома функція. Тоді рівняння (31) набуде вигляду

$$z' = 2\sqrt{z}. \tag{32}$$

Функція

$$z = (x + C_1)^2, \; x \geqslant -C_1$$

є загальним розв'язком останнього диференціального рівняння. Враховуючи, що $z = y'$, матимемо

$$y' = (x + C_1)^2.$$

Інтегруючи дане рівняння, знаходимо його загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2, \; x \geqslant -C_1. \tag{33}$$

Диференціальне рівняння (32) має особливий розв'язок $z = 0$. Оскільки $z = y'$, то $y = C$. Покажемо, що в кожній точці (x_0, y_0) прямої $y = C$ порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші. Для цього задамо початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = 0 \tag{34}$$

і запишемо систему (26)

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{3}(x_0 + C_1)^3 + C_2, \\ 0 = (x_0 + C_1)^2. \end{cases} \tag{35}$$

Система (35) розв'язна відносно C_1 і C_2:

$$C_1 = -x_0, \; C_2 = y_0.$$

Тому початкові умови (34) задовольняють два розв'язки:

$$y(x) = \frac{1}{3}(x - x_0)^3 + y_0 \text{ та } y(x) = y_0.$$

Таким чином, функція $y = C$ є особливим розв'язком заданого диференціального рівняння.

2.2. Окремі класи диференціальних рівнянь вищих порядків, що інтегруються в квадратурах або допускають зниження порядку

У даному параграфі ми розглянемо ті класи (типи) диференціальних рівнянь вищих порядків, які інтегруються в квадратурах або допускають зниження порядку.

1. Диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{1}$$

де $f(x)$ — неперервна функція на відрізку $[a; b]$, інтегрується в квадратурах. Справді, запишемо його у вигляді

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x),$$

або

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = f(x)\,dx.$$

Тоді

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1, \tag{2}$$

де C_1 — стала інтегрування.

Отже, диференціальне рівняння (1) n-го порядку зводиться до диференціального рівняння $(n-1)$-го порядку.

Записавши рівняння (2) у вигляді

$$d\left(y^{(n-2)}\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1\,dx$$

і зінтегрувавши обидві частини останньої рівності, матимемо

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2,$$

де C_2 — стала інтегрування.

Якщо $n > 2$, то аналогічно отримуємо

$$y^{(n-3)} = \int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)dx + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

де C_3 — стала інтегрування і т.д. Через n кроків дістанемо функцію

$$y(x) = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(x)\,\underbrace{dx\,dx\ldots dx}_{n} + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} +$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

яка і є загальним розв'язком диференціального рівняння (1).

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = \sin x. \tag{3}$$

Розв'язання. Запишемо рівняння (3) у вигляді

$$d(y') = \sin x\, dx,$$

звідки

$$y' = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_1. \tag{4}$$

Як відомо, функція

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

є загальним розв'язком рівняння (4), а тому і заданого рівняння (3).

2. Якщо диференціальне рівняння

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 \tag{5}$$

допускає розв'язання відносно $y^{(n)}$, то маємо перший випадок.

Нехай тепер рівняння (5) розв'язане відносно x:

$$x = \varphi\left(y^{(n)}\right). \tag{6}$$

Поклавши $y^{(n)} = t$, запишемо рівняння (6) так:

$$x = \varphi(t).$$

Скористаємося тотожністю

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}\, dx.$$

Підставляючи сюди значення $y^{(n)} = t$ і $dx = \varphi'(t)\, dt$, матимемо

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = t\varphi'(t)\, dt,$$

або

$$y^{(n-1)} = \int t\varphi'(t)\, dt + C_1, \tag{7}$$

де C_1 — стала інтегрування.

Зінтегруємо диференціальне рівняння (7). Для цього зазначимо, що

$$d\left(y^{(n-2)}\right) = y^{(n-1)}\, dx,$$

тобто

$$d\left(y^{(n-2)}\right) = \left(\int t\varphi'(t)\, dt + C_1\right)\varphi'(t)\, dt.$$

Отже,

$$y^{(n-2)} = \int \left(\left(\int t\varphi'(t)\,dt + C_1 \right) \varphi'(t)\,dt \right) dt + C_2$$

і т.д.

Таким чином, розв'язок диференціального рівняння (6) у параметричній формі матиме вигляд

$$x = \varphi(t), \;\; y = \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Приклад

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''^3 - 2y'' - x = 0. \tag{8}$$

Розв'язання. Це рівняння допускає розв'язання відносно x:

$$x = y''^3 - 2y''.$$

Покладемо $y'' = t$. Тоді

$$x = t^3 - 2t.$$

Скориставшись співвідношенням (7), матимемо

$$y' = \int t(3t^2 - 2)\,dt + C_1 = \int (3t^3 - 2t)\,dt + C_1 = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1.$$

Тому

$$y = \int \left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1 \right) (3t^2 - 2)\,dt + C_2 = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \frac{2 + 3C_1}{3}t^3 - 2C_1 t + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (8) у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 - 2t,$$
$$y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \frac{2 + 3C_1}{3}t^3 - 2C_1 t + C_2.$$

Може трапитися, що диференціальне рівняння (5) не допускає розв'язання ні відносно $y^{(n)}$, ні відносно x. Однак його можна подати у параметричній формі

$$x = \varphi(t), \;\; y^{(n)} = \psi(t), \;\; t \in \langle \alpha; \beta \rangle, \tag{9}$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ такі, що при $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ справджується тотожність

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Скористаємося рівністю

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}\,dx.$$

Тоді

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}\,dx + C_1 = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_1.$$

Таким чином, функція $y(x)$ може бути знайдена за допомогою квадратур, аналогічно до випадку, розглянутого вище.

3. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0. \tag{10}$$

Якщо це рівняння може бути розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right),$$

то, ввівши нову невідому функцію $z(x) = y^{n-1}$, дістанемо

$$z' = f(z). \tag{11}$$

Рівняння (11) при $f(z) \neq 0$ допускає відокремлення змінних

$$\frac{dz}{f(z)} = dx.$$

Тому

$$\int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1. \tag{12}$$

Припустимо, що із співвідношення (12) можна знайти z:

$$z = \psi(x, C_1).$$

Тоді матимемо диференціальне рівняння

$$y^{(n-1)} = \psi(x, C_1) \tag{13}$$

виду 1.

Якщо рівняння (10) можна подати в параметричній формі

$$y^{(n)} = \varphi(t), \;\; y^{(n-1)} = \psi(t),$$

то із співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$ дістанемо

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}.$$

Тому

$$x = \int \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_1. \tag{14}$$

Далі знаходимо послідовно:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_2, \ldots \tag{15}$$

Система (14), (15) задає загальний інтеграл рівняння (10) у параметричній формі.

4. Диференціальне рівняння виду

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0 \tag{16}$$

за допомогою підстановки

$$z(x) = y^{(n-2)} \tag{17}$$

можна звести до диференціального рівняння другого порядку

$$F\left(z, z''\right) = 0. \tag{18}$$

Припустимо, що рівняння (18) розв'язне відносно z'':

$$z'' = f(z). \tag{19}$$

Помноживши обидві частини (19) на $2z'\,dx$, матимемо

$$d\left(z'^2\right) = 2f(z)\,dz,$$

звідки

$$(z')^2 = 2\int f(z)\,dz + C_1,$$

тобто

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)\,dz + C_1}, \tag{20}$$

де C_1 − стала інтегрування.

Диференціальне рівняння (20) допускає відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)\,dz + C_1}} = dx.$$

Отже,

$$\int \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)\,dz + C_1}} = x + C_2, \tag{21}$$

де C_2 − стала інтегрування.

Припустимо, що із співвідношення (21) можна знайти

$$z = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Підставивши сюди значення $z = y^{(n-2)}$, дістанемо диференціальне рівняння $(n-2)$-го порядку

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, C_1, C_2)$$

виду 1.

Якщо рівняння (16) можна подати в параметричній формі

$$y^{(n)} = \varphi(t), \;\; y^{(n-2)} = \psi(t),$$

то із співвідношень

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx, \;\; dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx$$

дістаємо

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt.$$

Звідси

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt + C_1} \equiv \xi(t, C_1).$$

Маючи параметричне подання $y^{(n-1)}$ і $y^{(n)}$

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t), \\ y^{(n-1)} = \xi(t, C_1), \end{cases}$$

ми звели задану задачу до вже розглянутої в пункті 3.

5. Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції y та її перших $m-1$ похідних

$$F\left(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad 1 \leqslant m < n, \tag{22}$$

за допомогою заміни $y^{(m)} = z(x)$, де $z(x)$ — нова невідома функція, можна звести до рівняння $(n-m)$-го порядку

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-m)}\right) = 0. \tag{23}$$

Отже, порядок диференціального рівняння знизився на m одиниць. Припустимо, що рівняння (23) зінтегровано, тобто знайдено його загальний розв'язок

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}), \tag{24}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$ — довільні сталі. Повертаючись до функції y, дістанемо диференціальне рівняння виду 1:

$$y^{(m)} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-m}).$$

Приклад

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = 3\sqrt{1-(y')^2}.$$

Розв'язання. Нехай $y' = z(x)$. Тоді $y'' = z'$. Отже, дістали рівняння першого порядку

$$z' = 3\sqrt{1-z^2},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$z = \sin(3x + C_1),\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi - \frac{C_1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi - \frac{C_1}{3},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Оскільки $y' = z$, то загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = -\frac{1}{3}\cos(3x + C_1) + C_2,\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi - \frac{C_1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi - \frac{C_1}{3},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

6. Диференціальне рівняння n-го порядку, яке не містить явно незалежної змінної,

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{25}$$

за допомогою заміни

$$y' = z(y), \tag{26}$$

де $z(y)$ — нова невідома функція, а y — нова незалежна змінна, допускає зниження порядку на одиницю.

Справді, оскільки

$$\left.\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = zz', \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\,\frac{dy}{dx} = (zz'' + (z')^2)\,z, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= g\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right), \\ (z^{(k)} &= \frac{d^k z}{dy^k},\ k = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned}\right. \tag{27}$$

то внаслідок підстановки (26), (27) у (25) дістанемо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку відносно нової невідомої функції z:

$$F\left(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0. \tag{28}$$

Приклад

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$yy'' = (y')^2.$$

Розв'язання. Нехай $y' = z(y)$. Тоді $y'' = zz'$. Отже,

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2.$$

Отримане рівняння допускає відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}.$$

Звідси

$$z = C_1 y.$$

Враховуючи, що $y' = z$, матимемо

$$y' = C_1 y.$$

Тому, остаточно,

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

7. Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{29}$$

в якому функція $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ — однорідна відносно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, тобто для будь-якого $t \neq 0$ справджується тотожність

$$F\left(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right),$$

де m — показник однорідності.

За допомогою підстановки

$$y' = yz(x), \text{ або } y = e^{\int z(x)\, dx}, \tag{30}$$

де $z(x)$ — нова невідома функція, порядок рівняння (29) знижується на одиницю. Справді, враховуючи, що

$$\begin{aligned} &y' = yz, \\ &y'' = y(z^2 + z'), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(n)} = y\, g\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right), \end{aligned} \tag{31}$$

матимемо

$$y^m F\left(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, g\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Скоротивши на y^m, $y \neq 0$, дістанемо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку відносно функції z:

$$F\left(x, 1, z, z^2 + z', \dots, g\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0. \tag{32}$$

Якщо знайдено загальний розв'язок

$$z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

рівняння (32), то, скориставшись співвідношенням (30), дістанемо загальний розв'язок рівняння (29):

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\, dx}, \tag{33}$$

де $C_1, \dots, C_n$ — довільні сталі.

Інтегруючи рівняння (29), ми припустили, що $y \neq 0$. Якщо функція $y = 0$ є розв'язком цього рівняння, то її можна отримати з формули (33) при $C_n = 0$.

Приклад

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y y'' - (y - xy')^2 = 0.$$

Розв'язання. Це однорідне рівняння другого степеня відносно y, y', y''. Виконавши заміну (30), дістанемо рівняння першого порядку

$$x^2(z' + z^2) - (1 - xz)^2 = 0, \quad \text{або} \quad z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}.$$

Звідси

$$z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

і тому

$$y = e^{\int z\, dx} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

8. Диференціальне рівняння (29) називають узагальнено-однорідним, якщо існують числа k і m такі, що

$$F\left(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \dots, e^{(k-n)t} y^{(n)}\right) = e^{mt} F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right).$$

Тоді за допомогою підстановки

$$x = e^t, \; y = z e^{kt}, \tag{34}$$

де t — нова незалежна змінна, а $z = z(t)$ — нова невідома функція, рівняння (29) можна звести до диференціального рівняння, яке не містить незалежної змінної t і, отже, допускає зниження порядку на одиницю (при $x < 0$ покладають $x = -e^t$).

Справді, знайшовши похідні

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt}e^{kt} + kze^{kt}\right)e^{-t} = (z' + kz)e^{(k-1)t},$$
$$y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = (z'' + (2k-1)z' + k(k-1)z)e^{(k-2)t}, \tag{35}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = g\left(z, z', \dots, z^{(n)}\right)e^{(k-n)t},$$

і підставивши їх у рівняння (29), дістанемо

$$e^{mt}F_1\left(z, z', \dots, z^{(n)}\right) = 0,$$

тобто

$$F_1\left(z, z', \dots, z^{(n)}\right) = 0.$$

9. Розглянемо, нарешті, диференціальне рівняння (29), в якому ліва частина є точною похідною від деякої функції $\Phi\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$, тобто

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{36}$$

Такі рівняння називають рівняннями в точних похідних. Згідно з (36) маємо

$$\Phi\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = C_1,$$

тобто рівняння (29) при цьому допускає зниження порядку на одиницю.

Якщо рівняння (29) не є рівнянням у точних похідних, то іноді його можна перетворити так, щоб ліва частина в новому рівнянні була точною похідною.

Приклад

6. Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$yy'' - (y')^2 = y'.$$

Розв'язання. Розв'язком заданого рівняння є функція $y = 0$. Поділимо ліву і праву частини рівняння на y^2, $y \neq 0$:

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2}.$$

Тоді

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{1}{y}\right)' = 0, \quad \text{або} \quad \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y}\right)' = 0.$$

Таким чином, задане диференціальне рівняння зведено до рівняння в точних похідних. Отже,

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1,$$

тобто

$$y' - C_1 y = -1.$$

Звідси при $C_1 = 0$ отримуємо $y = -x + C$. Якщо ж $C_1 \neq 0$, то

$$y = e^{C_1 x}\left(C_2 - \int e^{-C_1 x}\,dx\right) = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}.$$

2.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Основні означення й поняття

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ \ldots\ + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Це рівняння лінійне відносно шуканої функції y та її похідних. Задані функції $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, (коефіцієнти рівняння (1)) та $f(x)$ (вільний член) вважають неперервними в деякому інтервалі $(a;\, b)$. Якщо $f(x) \equiv$ $\equiv 0$, то матимемо однорідне рівняння відносно $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ \ldots\ + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку, а рівняння (1) — лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Зазначимо, що умова Ліпшіца відносно змінних $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$ для рівняння (1) виконується в довільній замкненій області

$$\overline{D} = \left\{\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right):\ a < \alpha \leqslant x \leqslant \beta < b,\ -\infty < y < +\infty,\right.$$
$$\left. -\infty < y' < +\infty, \ldots, -\infty < y^{(n-1)} < +\infty\right\}.$$

Справді, розв'язавши рівняння (1) відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = -a_1(x)y^{(n-1)} - a_2(x)y^{(n-2)} - \ \ldots\ - a_n(x)y + f(x) \equiv F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

матимемо

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -a_n(x), \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = -a_{n-i}(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Оскільки на відрізку $[\alpha;\, \beta]$ неперервні функції $a_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, є обмеженими, то в замкненій області $\overline{D}$ справджується умова Ліпшіца. Крім того, враховуючи, що в області

$$D = \{(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) : \ a < x < b, \ -\infty < y < +\infty,$$
$$-\infty < y' < +\infty, \ldots, -\infty < y^{(n-1)} < +\infty\}$$

функція $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ неперервна, то, згідно з теоремою Коші, існує єдиний розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння (1), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

де $\left(x_0, \ y_0, \ y_0', \ \ldots, \ y_0^{(n-1)}\right)$ – довільна точка області D.

У третьому розділі буде доведено, що знайдений таким чином розв'язок визначений на всьому інтервалі $(a; b)$.

2.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{1}$$

Через $L(y)$ позначимо результат застосування до функції y сукупності операцій (диференціювання, множення на функції $a_i(x)$ і додавання), вказаних у лівій частині рівняння (1). При цьому $L(y)$ називають лінійним диференціальним оператором [20]. Властивості лінійного оператора $L(y)$:

1)

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), \tag{2}$$

де y_1 та y_2 – будь-які n разів диференційовні функції. Справді,

$$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' +$$
$$+ a_n(x)(y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_n(x)y_1) +$$
$$+ (y_2^{(n)} + a_1(x)y_2^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_n(x)y_2) = L(y_1) + L(y_2),$$

тобто оператор суми дорівнює сумі операторів. Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що дана властивість має місце для будь-якої скінченної кількості доданків;

2)

$$L(Cy) = CL(y), \tag{3}$$

де y — будь-яка n разів диференційовна функція, а C — деяка стала, тобто сталий множник можна винести за знак лінійного оператора. Доведення другої властивості аналогічне попередньому.

З'ясуємо тепер деякі властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння (1).

Теорема 1. *Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками рівняння* (1), *то й функція $y_1(x)+y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння.*

Доведення. Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (1), то враховуючи, що $L(y_1)\equiv 0$ і $L(y_2)\equiv 0$, матимемо

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)\equiv 0,$$

тобто функція $y_1(x)+y_2(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (1). Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо функція $y_1(x)$ є розв'язком рівняння* (1), *то й функція $Cy_1(x)$ також є розв'язком цього рівняння.*

Доведення. Враховуючи, що $L(Cy_1)=CL(y_1)$ і $L(y_1)\equiv 0$, матимемо $L(Cy_1)\equiv 0$. Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння* (1), *то й функція*

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x), \tag{4}$$

де C_i, $i=1,2,\ldots,n$ — довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння.

Оскільки формула (4) містить n довільних сталих, то природньо виникає питання про те, які умови мають задовольняти функції $y_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, щоб функція $y(x)$ була загальним розв'язком рівняння (1).

Для розв'язання цього питання розглянемо спочатку поняття лінійної залежності функцій. Функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, що визначені в інтервалі $(a;\,b)$, називають лінійно залежними в цьому інтервалі, якщо існують сталі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які не всі дорівнюють нулю, такі, що справджується тотожність:

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0,\ x\in(a;\,b). \tag{5}$$

Якщо ж тотожність (5) справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0,$$

то функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ в інтервалі $(a;\,b)$ називають лінійно незалежними. При цьому числа a і b можуть бути і невласними.

Зрозуміло, якщо одна з функцій, наприклад $\varphi_1(x)$, дорівнює нулю в даному інтервалі, то функції $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ лінійно залежні, бо матиме місце тотожність

$$1\cdot\varphi_1(x)+0\cdot\varphi_2(x)+\ldots+0\cdot\varphi_n(x)\equiv 0,\ x\in(a;\ b).$$

Приклади

Дослідити на лінійну залежність системи функцій.

1.

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n.$$

Розв'язання. Функції

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$$

лінійно незалежні в будь-якому інтервалі $(a;\ b)$, де a і b можуть бути і невласними числами. Справді, співвідношення

$$\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n=0,$$

в якому не всі α_i, $i=0,1,\ldots,n$, дорівнюють нулю, не може виконуватися тотожно в інтервалі $(a;\ b)$, оскільки воно є алгебраїчним рівнянням n-го порядку, яке, як відомо, не може мати більше, аніж n коренів.

2.

$$\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1.$$

Розв'язання. Функції $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, 1 лінійно залежні в будь-якому інтервалі $(a;\ b)$. Справді, це випливає з тотожності

$$\sin^2 x+\cos^2 x-1=0,\ x\in(a;\ b),$$

тобто $\alpha_1=\alpha_2=1,\ \alpha_3=-1$.

Нехай функції

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

в інтервалі $(a;\ b)$ мають похідні до $(n-1)$-го порядку включно. Тоді визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

називають визначником Вронського* (вронскіаном) цих функцій.

Теорема 3. *Якщо функції* $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ *в інтервалі* $(a;\ b)$ *лінійно залежні, то їх визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.*

---

*Юзеф Вронський (1776–1853) – польський математик і механік.

Доведення. Нехай функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ в інтервалі $(a;\ b)$ лінійно залежні, тобто справджується тотожність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, x \in (a;\ b), \tag{7}$$

в якій не всі α_i дорівнюють нулю. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\alpha_1 \neq 0$ (інакше ми змінили б нумерацію функцій). Розв'язуючи співвідношення (7) відносно y_1, отримуємо тотожність

$$y_1 = \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + \ldots + \beta_n y_n, \tag{8}$$

де

$$\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1},\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Тоді для похідних функції $y_1(x)$ правильні рівності

$$\begin{cases} y_1' = \beta_2 y_2' + \beta_3 y_3' + \ldots + \beta_n y_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} = \beta_2 y_2^{(n-1)} + \beta_3 y_3^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{9}$$

Перший стовпець визначника Вронського $W(x)$ є лінійною комбінацією інших стовпців, а тому $W(x) \equiv 0$ для всіх $x \in (a;\ b)$. Теорему доведено.

Нехай тепер функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння (1). Тоді має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ диференціального рівняння (1) лінійно незалежні в інтервалі $(a;\ b)$, то їх визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці цього інтервалу.*

Доведення. Скористаємось методом доведення від супротивного. Отже, нехай в деякій точці $x_0 \in (a;\ b)$ $W(x_0) = 0$. Складемо систему лініних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Визначник цієї системи $W(x_0) = 0$, а тому система (10) відносно C_1, C_2, $\ldots$, C_n має ненульовий розв'язок

$$C_1 = \overline{C}_1,\ C_2 = \overline{C}_2,\ \ldots,\ C_n = \overline{C}_n.$$

З наслідку теорем 1 та 2 випливає, що функція

$$y(x) = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x) + \ldots + \overline{C}_n y_n(x) \tag{11}$$

є розв'язком диференціального рівняння (1). Крім того, враховуючи співвідношення системи (10), матимемо

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{12}$$

Початкові умови (12), згідно з теоремою існування, визначають єдиний розв'язок рівняння (1). Але таким розв'язком, очевидно, є тривіальний розв'язок $y \equiv 0$. Тому справджується тотожність

$$\overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x) + \ldots + \overline{C}_n y_n(x) = 0,\ x \in (a;\ b).$$

Оскільки за побудовою не всі коефіцієнти $\overline{C}_i$ дорівнюють нулю, то функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ лінійно залежні в інтервалі $(a;\ b)$. А це суперечить умові теореми. Отримане протиріччя і доводить теорему.

З теорем 3 та 4 випливає критерій лінійної незалежності розв'язків диференціального рівняння (1).

Теорема 5. *Для того щоб розв'язки* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ *диференціального рівняння* (1) *були лінійно незалежними в інтервалі* $(a;\ b)$, *необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського* (6) *не дорівнював нулю хоча б в одній точці цього інтервалу.*

Будь-яку систему з n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння (1) називають фундаментальною системою розв'язків даного рівняння.

Теорема 6. *Будь-яке лінійне однорідне диференціальне рівняння має фундаментальну систему розв'язків.*

Доведення. Згідно з теоремою існування початкові умови

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

визначають єдиний розв'язок $y_1(x)$, $x \in (a;\ b)$ лінійного рівняння (1). За тією ж теоремою існують єдині розв'язки $y_2(x)$, $y_3(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ рівняння (1), які визначаються відповідно початковими умовами

$$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ y_2''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$y_3(x_0) = 0,\ y_3'(x_0) = 0,\ y_3''(x_0) = 1,\ \ldots,\ y_3^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ y_n''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

Визначник Вронського знайдених таким чином розв'язків у точці $x = x_0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

А тому за теоремою 5 функції

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x) \tag{13}$$

лінійно незалежні в інтервалі $(a;\ b)$. Тобто система функцій (13) є фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння (1). Теорему доведено.

Теорема 7. *Якщо розв'язки* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *лінійного однорідного рівняння* (1) *утворюють фундаментальну систему розв'язків в інтервалі* $(a;\ b)$, *то загальний розв'язок цього рівняння в області*

$$D = \left\{\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) :\ a < x < b,\ -\infty < y < +\infty,\right.$$
$$\left. -\infty < y' < +\infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < +\infty\right\}$$

матиме вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \tag{14}$$

де $C_i,\ i = 1, 2, \dots, n,$ *— довільні сталі.*

Доведення. Справді, оскільки визначник системи

$$\begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \\ y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{15}$$

є визначником Вронського фундаментальної системи розв'язків

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x),$$

то лінійна система (15) в області D розв'язна відносно $C_i,\ i = 1, 2, \dots, n$.

Крім того, з наслідку теорем 1 та 2 випливає, що функція (14) є розв'язком лінійного рівняння (1) в області D. Теорему доведено.

Покажемо, що, використовуючи формулу (14), можна знайти розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (1), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ – довільна точка області D.

Справді, враховуючи таким чином задані початкові умови, з системи (15) дістанемо

$$\begin{cases} y_0 = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0), \\ y_0' = C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \tag{16}$$

Оскільки визначник лінійної системи (16) є визначником Вронського в точці $x = x_0$, то він не дорівнює нулю. Тоді, як відомо, система (16), відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, має єдиний розв'язок:

$$C_1 = \overline{C}_1,\ C_2 = \overline{C}_2,\ \ldots,\ C_n = \overline{C}_n.$$

Отже, функція

$$y(x) = \overline{C}_1y_1(x) + \overline{C}_2y_2(x) + \ldots + \overline{C}_ny_n(x)$$

і буде розв'язком відповідної задачі Коші.

2.5. Формула Остроградського – Ліувілля

Нехай функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ в інтервалі $(a; b)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{1}$$

Знайдемо похідну від відповідного визначника Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Похідна визначника дорівнює сумі n визначників, побудованих за певним правилом. А саме, i-й визначник суми ($i = 1, 2, \ldots, n$) утворюється із заданого визначника заміною i-го рядка функцій їх похідними. Застосовуючи це правило диференціювання до визначника Вронського, дістанемо $n-1$ перших визначників, що мають два однакові рядки. Тому вони дорівнюють нулю. Отже,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Помножимо елементи перших $n-1$ рядків $W'(x)$ відповідно на $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_2(x)$ і додамо їх до елементів останнього рядка. Оскільки функції $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ є розв'язками диференціального рівняння (1), то

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -a_1 y_1^{(n-1)} & -a_1 y_2^{(n-1)} & \dots & -a_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

тобто

$$W'(x) = -a_1(x)W(x).$$

Звідси

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}, \tag{2}$$

або

$$W(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx}. \tag{3}$$

Якщо у формулі (3) покласти $x = x_0$, то $C = W(x_0)$. Тому, остаточно,

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx}. \tag{4}$$

Рівність (4) називають формулою Остроградського* – Ліувілля**.

Формулу Остроградського – Ліувілля можна використати для знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{5}$$

в якому відомо один частинний розв'язок $y_1(x) \neq 0$.

---

*Михайло Остроградський (1801–1862) – український математик та механік.

**Жозеф Ліувілль (1809–1882) – французький математик.

Для того щоб знайти загальний розв'язок рівняння (5), потрібно знайти фундаментальну систему розв'язків даного рівняння. Тому нехай $y_2(x)$ — розв'язок лінійного рівняння (5) такий, що функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тоді за формулою (2) матимемо

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)\,dx},\ C = 1,$$

або

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-\int a_1(x)\,dx}. \tag{6}$$

Розв'яжемо лінійне рівняння першого порядку (6). Для цього поділимо обидві частини (6) на y_1^2. Дістанемо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int a_1(x)\,dx}.$$

Тому

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx. \tag{7}$$

Оскільки функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ за побудовою утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (4), то його загальний розв'язок матиме вигляд

$$y(x) = y_1(x)\left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx\right).$$

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Функція $y_1(x) = x$ є розв'язком заданого рівняння. Враховуючи, що

$$a_1(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1},$$

за формулою (7) знаходимо

$$y_2(x) = x \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{x^2}\, dx = x^2 - 1.$$

Тому функція

$$y(x) = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$$

і буде загальним розв'язком даного диференціального рівняння.

2.6. Зниження порядку лінійного однорідного рівняння

Оскільки лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

є однорідним відносно $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$, то за допомогою підстановки $y = e^{\int z(x)\,dx}$ його можна звести до диференціального рівняння $(n-1)$-го порядку. Однак, в результаті, як правило, отримуємо нелінійне рівняння, що значно ускладнює подальше інтегрування.

У даному параграфі наведемо підстановки, за допомогою яких можна знизити порядок заданого рівняння (1), не порушуючи його лінійність [20].

Отже, нехай $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (1), причому $y_1(x) \neq 0,\ x \in (a; b)$. Введемо нову невідому функцію $z(x)$ за формулою

$$y = y_1 z. \qquad (2)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
y' &= y_1 z' + y_1' z,\\
y'' &= y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)} &= y_1 z^{(n)} + C_n^1 y_1' z^{(n-1)} + C_n^2 y_1'' z^{(n-2)} + \ldots + C_n^{(n-1)} y_1^{(n-1)} z' + y_1^{(n)} z,
\end{aligned}$$

і лінійне рівняння (1) набуває вигляду

$$y_1 z^{(n)} + \left(C_n^1 y_1' + a_1 y_1\right) z^{(n-1)} + \ldots + \left(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1\right) z = 0.$$

Оскільки $y_1(x)$ – розв'язок рівняння (1), то коефіцієнт при z дорівнює нулю, а тому, зробивши заміну $z' = u(x)$, матимемо лінійне диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку

$$u^{(n-1)} + b_1(x)u^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(x)u = 0. \qquad (3)$$

При цьому

$$u = z' = \left(\frac{y}{y_1}\right)',$$

тобто

$$y = y_1 \int u\,dx.$$

Якщо

$$u_2(x),\ u_3(x),\ \ldots,\ u_n(x) -$$

фундаментальна система розв'язків рівняння (3), то функції

$$y_1,\ y_2 = y_1 \int u_1\,dx,\ y_3 = y_1 \int u_2\,dx,\ \ldots,\ y_n = y_1 \int u_{n-1}\,dx \tag{4}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного рівняння (1).

Справді, за побудовою функції (4) є розв'язками початкового рівняння (1). Припустимо, що вони лінійно залежні в інтервалі $(a;\ b)$. Тоді матимемо тотожність

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0,$$

або

$$C_1 + C_2 \int u_1\,dx + C_3 \int u_2\,dx + \ldots + C_n \int u_{n-1}\,dx = 0,$$

в якій не всі C_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, дорівнюють нулю, бо інакше й $C_1 = 0$, $(y_1 \neq 0)$. Здиференціювавши останню тотожність, дістанемо

$$C_2 u_1 + C_3 u_2 + \ldots + C_n u_{n-1} = 0,$$

тобто розв'язки $u_2(x)$, $u_3(x)$, $\ldots$, $u_{n-1}(x)$ диференціального рівняння (3) лінійно залежні, що суперечить припущенню. Отже,

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0,$$

і функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1).

Отже, знаючи частинний розв'язок рівняння (1), інтегрування цього рівняння зводиться до інтегрування лінійного однорідного рівняння $(n-1)$-го порядку.

І взагалі, якщо відомо k лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (1):

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_k(x),$$

то порядок цього рівняння можна знизити на k одиниць. При цьому отримане рівняння $(n-k)$-го порядку залишається лінійним і однорідним. Справді, виконуючи підстановку $u = \left(\dfrac{y}{y_1}\right)'$, знову дістанемо рівняння (3), для якого відомо $k-1$ частинних розв'язків:

$$u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)',\ u_2 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)',\ u_{k-1} = \left(\frac{y_k}{y_1}\right)'.$$

Знайдені розв'язки лінійно незалежні, бо в противному разі мали б тотожність

$$C_2 u_1 + C_3 u_2 + \ldots + C_k u_{k-1} = 0,$$

в якій не всі C_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, дорівнюють нулю. Інтегруючи останню тотожність, дістали б

$$C_1 + C_2\frac{y_2}{y_1} + C_3\frac{y_3}{y_1} + \ldots + C_k\frac{y_k}{y_1} = 0,$$

тобто

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k = 0,$$

що суперечить припущенню про лінійну незалежність функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_k(x)$.

Тепер введемо нову функцію $\upsilon(x)$:

$$u = u_2\int \upsilon\, dx, \quad \text{або} \quad \upsilon = \left(\frac{u}{u_2}\right)'.$$

Тоді для $\upsilon(x)$ дістанемо рівняння $(n-2)$-го порядку, для якого відомо $k-2$ лінійно незалежних розв'язків:

$$\upsilon_3 = \left(\frac{u_3}{u_2}\right)', \ \ldots, \ \upsilon_k = \left(\frac{u_k}{u_2}\right)'.$$

Продовжуючи так і далі, отримаємо лінійне однорідне рівняння $(n-k)$-го порядку.

Отже, якщо відомо $n-1$ лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (1), то внаслідок зниження порядку дістанемо лінійне однорідне рівняння 1-го порядку, тобто при цьому рівняння (1) можна зінтегрувати в квадратурах.

2.7. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{1}$$

де $f(x) \not\equiv 0$, $x \in (a;\, b)$.

Лінійне однорідне рівняння з тими ж коефіцієнтами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \tag{2}$$

називають однорідним рівнянням, що відповідає неоднорідному рівнянню (1).

Аналогічно до відповідних тверджень § 2.4, можна показати:

1) коли $y_{\text{н}}(x)$ — який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), а

$$y_0(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) -$$

загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2), то функція

$$y(x) = y_{\text{н}}(x) + y_{\text{о}}(x) \tag{3}$$

є загальним розв'язком неоднорідного рівняння (1);

2) використовуючи формулу (3), можна знайти розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1), що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $\left(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}\right)$ – довільна точка області D.

Теорема 1. *Якщо $y_{\text{н}1}(x)$ та $y_{\text{н}2}(x)$ – частинні розв'язки відповідно рівнянь $L(y) = f_1(x)$ та $L(y) = f_2(x)$, то функція*

$$y_{\text{н}1}(x) + y_{\text{н}2}(x)$$

є частинним розв'язком рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \tag{4}$$

Доведення. Справді, оскільки

$$L(y_{\text{н}1} + y_{\text{н}2}) = L(y_{\text{н}1}) + L(y_{\text{н}2}),$$

та враховуючи, що $L(y_{\text{н}1}) \equiv f_1(x)$, $L(y_{\text{н}2}) \equiv f_2(x)$, дістанемо

$$L(y_{\text{н}1} + y_{\text{н}2}) \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Теорему доведено.

Знайдемо, наприклад, частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = x + e^x. \tag{5}$$

Легко бачити, що функції $y_{\text{н}1}(x) = x$ та $y_{\text{н}2}(x) = \frac{1}{2}e^x$ є частинними розв'язками відповідно рівнянь

$$y'' + y = x$$

та

$$y'' + y = e^x.$$

Тому частинний розв'язок диференціального рівняння (5) має вигляд

$$y_{\text{н}}(x) = x + \frac{1}{2}e^x.$$

Як і у випадку лінійного однорідного рівняння можна показати, що знаючи k лінійно незалежних частинних розв'язків відповідного однорідного рівняння (2), порядок неоднорідного рівняння (1) можна знизити на k одиниць. При цьому отримане рівняння $(n-k)$-го порядку залишається лінійним і неоднорідним.

Нехай тепер відомо m частинних розв'язків неоднорідного рівняння (1) $y_{\text{н}1}(x)$, $y_{\text{н}2}(x)$, $\ldots$, $y_{\text{н}m}(x)$. Покладемо

$$y(x) = y_{\text{н}1}(x) + z(x),$$

де $z(x)$ — нова шукана функція. Тоді, враховуючи, що

$$L(y_{\text{н}1}) \equiv f(x),$$

неоднорідне рівняння (1) перетворюється у відповідне однорідне

$$L(z) = 0,$$

$m-1$ частинних розв'язки якого мають вигляд

$$y_{\text{н}i}(x) - y_{\text{н}1}(x), \; i = 2, 3, \ldots, m-1.$$

Справді,

$$L(y_{\text{н}i} - y_{\text{н}1}) = L(y_{\text{н}i}) - L(y_{\text{н}1}) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0, \; i = 2, 3, \ldots, m-1.$$

Якщо знайдені таким чином розв'язки лінійно незалежні, то порядок однорідного рівняння, а тому і неоднорідного можна знизити на $m-1$ одиниць.

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x^2-1)y'' + (1-x)y' + y = 1. \tag{6}$$

Розв'язання. Як легко перевірити, задане диференціальне рівняння має два частинних розв'язки:

$$y_{\text{н}1}(x) = 1 \text{ та } y_{\text{н}2}(x) = x.$$

Тому функція $y_1(x) = x - 1$ буде розв'язком відповідного однорідного рівняння. Покладемо

$$y(x) = y_{\text{н}1}(x) + (y_{\text{н}2}(x) - y_{\text{н}1}(x))z(x) \equiv 1 + (x-1)z,$$

де $z(x)$ — нова шукана функція. Тоді

$$y' = (x-1)z' + z \text{ і } y'' = (x-1)z'' + 2z'.$$

Підставляючи значення функції $y(x)$ та її похідних у задане рівняння, дістанемо

$$(x^2-1)z'' + (3-x)z' = 0. \tag{7}$$

Нехай $z' = u(x)$. Тоді рівняння (7) перетворюється в рівняння з відокремлюваними змінними

$$(x^2-1)u' + (3-x)u = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$u = C_1\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2,$$

тобто

$$z = C_1\left(x + 4\ln|x-1| - \frac{4}{x-1}\right) + C_2.$$

Таким чином, остаточно матимемо

$$y = 1 + C_1\,(x(x-1) + 4(x-1)\ln|x-1| - 4) + C_2(x-1).$$

Як відомо, для побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння достатньо знати фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння та частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Теорема 2. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння* (1) *можна знайти за допомогою квадратур, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння* (2).

Доведення. Знайдемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння, скориставшись так званим методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа).

Отже, якщо нам відома фундаментальна система розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ відповідного однорідного рівняння (2), то функція

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), \tag{8}$$

де C_1, C_2, ..., C_n — довільні сталі, буде загальним розв'язком рівняння (2).

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{н}}(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) + \ldots + C_n(x)\,y_n(x), \tag{9}$$

де $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — невідомі функції, що мають неперервні похідні.

Здиференціювавши рівність (9), дістанемо

$$y'_{\text{н}} = C_1y'_1 + C_2y'_2 + \ldots + C_ny'_n + y_1C'_1 + y_2C'_2 + \ldots + y_nC'_n.$$

Нехай

$$y_1C'_1 + y_2C'_2 + \ldots + y_nC'_n = 0. \tag{10}$$

Тоді

$$y'_{\text{н}} = C_1y'_1 + C_2y'_2 + \ldots + C_ny'_n. \tag{11}$$

Для знаходження $y''_{\text{н}}$ здиференціюємо рівність (11) і прирівняємо до нуля суму членів, що містять похідні функцій $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$y_1'C_1' + y_2'C_2' + \ldots + y_n'C_n' = 0. \quad (12)$$

Тоді

$$y_{\text{н}}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n''. \quad (13)$$

Продовжуючи таким чином на $(n-1)$-му кроці, матимемо

$$y_1^{(n-2)}C_1' + y_2^{(n-2)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-2)}C_n' = 0, \quad (14)$$

і

$$y_{\text{н}}^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}. \quad (15)$$

Обчислимо, нарешті, $y_{\text{н}}^{(n)}$:

$$y_{\text{н}}^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n'. \quad (16)$$

Підставляючи функцію $y_{\text{н}}(x)$ та її похідні в рівняння (1), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y_i' + a_n y_i) +$$
$$+ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n' = f(x).$$

Оскільки $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — розв'язки рівняння (2), то

$$L(y_i) \equiv 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тому остаточно матимемо

$$y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n' = f(x). \quad (17)$$

Для визначення функцій $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ми побудували систему n лінійних рівнянь з n невідомими $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' + \ldots + y_nC_n' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + \ldots + y_n'C_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)}C_1' + y_2^{(n-2)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-2)}C_n' = 0, \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n' = f(x), \end{cases} \quad (18)$$

визначник якої є визначником Вронського $W(x)$ фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного рівняння. Тому $W(x) \neq 0$ в жодній точці розглядуваного інтервалу. Отже, система (18) відносно $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ має єдиний розв'язок

$$C_i'(x) = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

звідки

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx$$

(сталі інтегрування дорівнюють нулю).

Підставляючи знайдені значення $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ у формулу (9) і враховуючи структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, дістаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1)

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)\,dx,$$

де C_1, C_2, …, C_n — довільні сталі. Теорему доведено.

Приклад

2. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$y'' - y' = x. \tag{19}$$

Розв'язання. У відповідному однорідному рівнянні

$$y'' - y' = 0 \tag{20}$$

покладемо $y' = z(x)$. Тоді рівняння (20) можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' - z = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$z = C_1 e^x.$$

Тому

$$y = C_1 e^x + C_2,$$

тобто функції e^x та 1 утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння (20). Частинний розв'язок заданого диференціального рівняння (19) шукатимемо у вигляді

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x).$$

Тоді для визначення $C_1(x)$ та $C_2(x)$ матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} e^x C_1' + 1 \cdot C_2' = 0, \\ e^x C_1' + 0 \cdot C_2' = x. \end{cases}$$

Отже,

$$C_1'(x) = xe^{-x},\ C_2'(x) = -x.$$

Тому

$$C_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x},\ C_2(x) = -\frac{x^2}{2}$$

і функція

$$y = C_1 e^x + C_2 - x - 1 - \frac{x^2}{2},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі, є загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (19).

2.8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами, тобто рівняння виду

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — дійсні числа. У даному параграфі покажемо, що інтегрування рівняння (1) можна звести навіть не до квадратур, а до алгебраїчних операцій.

Оскільки рівняння (1) є лінійним однорідним, то для побудови його загального розв'язку достатньо знайти n лінійно незалежних частинних розв'язків (фундаментальну систему).

Розв'язки рівняння (1) шукатимемо у вигляді (метод Ейлера)

$$y(x) = e^{\lambda x}, \qquad (2)$$

де λ — деяка стала. Знайшовши похідні

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x},\ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}, \qquad (3)$$

і підставивши їх разом з функцією (2) в рівняння (1), дістанемо

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n),$$

або

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} P(\lambda), \qquad (4)$$

де

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Звідси випливає, що функція (2) є розв'язком диференціального рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли многочлен $P(\lambda)$ набуває нульового значення, тобто

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (5)$$

Многочлен $P(\lambda)$ називають характеристичним многочленом диференціального рівняння (1), а рівняння (5) характеристичним рівнянням диференціального рівняння (1).

Отже, якщо λ_1 — корінь характеристичного рівняння (5), то

$$L(e^{\lambda x}) \equiv 0,$$

а тому функція

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}$$

є розв'язком диференціального рівняння (1).

Оскільки характеристичне рівняння є алгебраїчним рівнянням n-го степеня, то воно має n коренів.

Припустимо, спочатку, що корені λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, характеристичного рівняння дійсні і прості , тобто

$$\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді функції

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x},\ \dots,\ y_n(x) = e^{\lambda_n x} \tag{6}$$

є частинними розв'язками рівняння (1).

Покажемо, що в розглядуваному інтервалі $(a; b)$ вони утворюють фундаментальну систему. Для цього обчислимо відповідний визначник Вронського:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Останній визначник, будучи визначником Вандермонда*, дорівнює

$$\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Отже,

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

---

*Шарль Вандермонд (1735—1796) — французький математик.

Таким чином, система розв'язків (6) є фундаментальною і тому функція

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}, \tag{7}$$

де C_1, C_2, ..., C_n — довільні сталі, буде загальним розв'язком диференціального рівняння (1).

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' = 0.$$

Розв'язання. Оскільки корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

прості:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1,$$

то функція

$$y = C_1 + C_2 e^{-x}$$

є загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Нехай серед простих коренів характеристичного рівняння (5) є комплексні. Тоді, як і в попередньому випадку, загальний розв'язок диференціального рівняння (1) можна знайти за формулою (7). Але тепер функція $y(x)$ буде комплекснозначною. Покажемо, як побудувати дійсний загальний розв'язок диференціального рівняння (1) [20].

Відомо, що коли алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, то воно має і спряжений з ним корінь $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Кореням λ_1 та λ_2 відповідають наступні розв'язки диференціального рівняння (1):

$$y_1(x) = e^{(\alpha + i\beta)x}, \ y_2(x) = e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{8}$$

Тоді за формулами Ейлера знаходимо

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \ y_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Теорема 1. *Якщо функція*

$$z(x) = u(x) + iv(x)$$

є розв'язком лінійного диференціального рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$L(z) = 0, \tag{9}$$

то кожна з функцій $u(x)$ та $v(x)$ також є розв'язком рівняння (9).

Доведення. Оскільки

$$L(z(x)) \equiv 0$$

і

$$L(z(x)) = L(u(x)) + iL(v(x)),$$

то враховуючи, що вирази $L(u(x))$ та $L(v(x))$ — дійсні функції, матимемо

$$L(u(x)) \equiv 0, \ L(v(x)) \equiv 0.$$

Теорему доведено.

Отже, за теоремою 1, корінь $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ породжує два дійсних розв'язки

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \ \text{ та } \ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{10}$$

Зауважимо, що спряжений корінь $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ нових лінійно незалежних розв'язків не дає. Таким чином, парі спряжених комплексних коренів характеристичного рівняння (5) відповідають два дійсних частинних розв'язки диференціального рівняння (1).

Приклад

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Оскільки корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

комплексно спряжені:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

то функція

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

є загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Нехай тепер характеристичне рівняння (5) має кратні корені. При цьому розв'язків диференціального рівняння виду (6) існує менше, ніж n, тобто їх кількість недостатня для побудови фундаментальної системи, а тому і загального розв'язку. Знайдемо решту частинних розв'язків лінійного диференціального рівняння (1).

Розв'язки рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y(x) = e^{\lambda x}u(x), \tag{11}$$

де λ — деяка стала, а $u(x)$ — невідома функція, яку потрібно визначити так, щоб

$$L(e^{\lambda x}u(x)) \equiv 0.$$

За формулою Лейбніца знаходимо

$$y' = e^{\lambda x}\left(\lambda u + u'\right),$$

$$y'' = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 u + 2\lambda u' + u''\right),$$

$$y''' = e^{\lambda x}\left(\lambda^3 u + 3\lambda^2 u' + 3\lambda u'' + u'''\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)} = e^{\lambda x}\left(\lambda^{n-1}u + C_{n-1}^1\lambda^{n-2}u' + C_{n-1}^2\lambda^{n-3}u'' + \ldots + C_{n-1}^{n-2}\lambda u^{(n-2)} + u^{(n-1)}\right),$$

$$y^{(n)} = e^{\lambda x}\left(\lambda^n u + C_n^1\lambda^{n-1}u' + C_n^2\lambda^{n-2}u'' + \ldots + C_n^{n-1}\lambda u^{(n-1)} + u^{(n)}\right).$$

Підставляючи функцію $y(x)$ та її похідні в диференціальне рівняння (1), матимемо

$$L(e^{\lambda x}u) = e^{\lambda x}\Big(P(\lambda)u + P'(\lambda)u' + \frac{P''(\lambda)}{1\cdot 2}u'' + \\ + \ldots + \frac{P^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}u^{(n-1)} + u^{(n)}\Big). \tag{12}$$

Якщо λ_1 — корінь характеристичного рівняння (5) кратності m_1, то, як відомо,

$$P(\lambda_1) = 0,\ P'(\lambda_1) = 0, \ldots,\ P^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0,\ P^{(m_1)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Тому з формули (12) дістанемо

$$L(e^{\lambda_1 x}u) = e^{\lambda_1 x}\left(\frac{P^{(m_1)}(\lambda_1)}{m_1!}u^{(m_1)} + \frac{P^{(m_1+1)}(\lambda_1)}{(m_1+1)!}u^{(m_1+1)} + \ldots + u^{(n)}\right).$$

Отже, функція

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}u(x)$$

буде розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$e^{\lambda_1 x}\left(\frac{P^{(m_1)}(\lambda_1)}{m_1!}u^{(m_1)} + \frac{P^{(m_1+1)}(\lambda_1)}{(m_1+1)!}u^{(m_1+1)} + \ldots + u^{(n)}\right) = 0.$$

Останнє співвідношення тотожно дорівнюватиме нулю, якщо, наприклад,

$$u(x) = x^j,\ j = 1, 2, \ldots, m_1 - 1. \tag{13}$$

Тоді функції

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ x^2 e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \tag{14}$$

будуть частинними розв'язками рівняння (1), породженими коренем λ_1.

І взагалі, корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, кратності яких відповідно дорівнюють $m_1, m_2, \ldots, m_p$, причому

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n, \; m_i \geqslant 1, \; i = 1, 2, \ldots, p,$$

породжують систему n частинних розв'язків диференціального рівняння (1):

$$\begin{array}{l} e^{\lambda_1 x}, \; xe^{\lambda_1 x}, \; \ldots, \; x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, \; xe^{\lambda_2 x}, \; \ldots, \; x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_p x}, \; xe^{\lambda_p x}, \; \ldots, \; x^{m_p-1}e^{\lambda_p x}. \end{array} \tag{15}$$

Покажемо, що розв'язки (15) утворюють фундаментальну систему. Для цього скористаємось методом доведення від супротивного.

Отже, нехай функції (15) лінійно залежні в розглядуваному інтервалі $(a; b)$. Тоді існують сталі $\overset{(i)}{\alpha_j}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, m_i - 1$, які не всі дорівнюють нулю, такі, що

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\overset{(i)}{\alpha_0} + \overset{(i)}{\alpha_1} x + \ldots + \overset{(i)}{\alpha}_{m_i-1} x^{m_i-1} \right) e^{\lambda_i x} \equiv 0, \; x \in (a; b),$$

або

$$\sum_{i=1}^{p} F_i(x)\, e^{\lambda_i x} \equiv 0, \; x \in (a; b). \tag{16}$$

Не обмежуючи загальність, можна вважати, що многочлен $F_p(x) \not\equiv 0$, $x \in (a; b)$. Поділимо обидві частини тотожності (16) на $e^{\lambda_1 x}$:

$$F_1(x) + \sum_{i=2}^{p} F_i(x)\, e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0.$$

Оскільки $F_1(x)$ — многочлен, степінь якого не перевищує $m_1 - 1$, то, диференціюючи останню тотожність m_1 раз, дістанемо

$$\sum_{i=2}^{p} G_i(x)\, e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0, \tag{17}$$

причому $G_p(x) \not\equiv 0$, $x \in (a; b)$. Тотожність (17) містить вже $p-1$ доданків. Продовжуючи описаний вище процес, приходимо до тотожності

$$H_p(x)\, e^{(\lambda_p - \lambda_{p-1})x} = 0,$$

в якій $H_p(x) \not\equiv 0$, $x \in (a; b)$. А це неможливо. Тому припущення про лінійну залежність функцій (15) неправильне. Отже, розв'язки (15) лінійно незалежні, а тому вони утворюють фундаментальну систему.

Таким чином, функція

$$y(x) = \sum_{i=1}^{p} R_i(x)\, e^{\lambda_i x}, \qquad (18)$$

де $R_i(x)$ — многочлен степеня $m_i - 1$ з довільними коефіцієнтами, є загальним розв'язком диференціального рівняння (1) у випадку кратних коренів характеристичного рівняння, причому кількість довільних сталих у формулі (18)

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$$

дорівнює порядку рівняння (1).

Нехай тепер серед кратних коренів характеристичного рівняння (5) є комплексні. Якщо $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ — комплексний корінь кратності m, то спряжений корінь $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ має ту саму кратність. Корінь λ_1 породжує m частинних розв'язків рівняння (1):

$$e^{(\alpha+\beta i)x},\ xe^{(\alpha+\beta i)x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{(\alpha+\beta i)x}. \qquad (19)$$

Тому за теоремою 1 парі спряжених комплексних коренів кратності m відповідають $2m$ дійсних частинних розв'язків диференціального рівняння (1):

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Аналогічні розв'язки можуть бути побудовані і для решти коренів характеристичного рівняння.

Отже, у загальному випадку, можна знайти n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами (1), що дає можливість побудувати його загальний розв'язок.

Приклад

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(VII)} + 3y^{(VI)} + 5y^{(V)} + 7y^{(IV)} + 7y''' + 5y'' + 3y' + y = 0. \qquad (20)$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^7 + 3\lambda^6 + 5\lambda^5 + 7\lambda^4 + 7\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2,3} = -1, \ \lambda_{4,5} = i, \ \lambda_{6,7} = -i.$$

Тому функція

$$y(x) = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^{-x} + (C_4 + C_5x)\cos x + (C_6 + C_7x)\sin x$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (20).

Відповідні формули значно спрощуються, якщо задане диференціальне рівняння (1) є рівнянням другого порядку, тобто

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0. \tag{21}$$

Справді, нехай λ_1 та λ_2 — корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (21) матиме вигляд

1) $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, якщо $\lambda_1, \ \lambda_2$ — дійсні, різні;

2) $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_1 x}$, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$;

3) $y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \ \beta \neq 0$.

2.9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Як відомо, для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \tag{1}$$

достатньо знати фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння та деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Використовуючи метод варіації довільних сталих (теорема 2 § 1.7), частинний розв'язок рівняння (1) можна знайти в квадратурах. У даному параграфі розглянемо ті випадки, коли частинний розв'язок диференціального рівняння (1) знаходиться без квадратур.

Отже, нехай права частина неоднорідного рівняння (1) має вигляд

$$f(x) = P_m(x)\,e^{\alpha x},$$

де $P_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m$ — многочлен степеня $m \geqslant 0$, а α — деяке число, тобто

$$L(y) = P_m(x)\,e^{\alpha x}. \tag{2}$$

Частинний розв'язок рівняння (2) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{н}}(x) = Q(x)\,e^{\alpha x}, \tag{3}$$

де $Q(x)$ — многочлен з невизначеними коефіцієнтами. Щоб знайти коефіцієнти і степінь многочлена $Q(x)$, підставимо $y_{\text{н}}(x)$ у диференціальне рівняння (2). Для цього спочатку у формулі (12) § 2.8 покладемо

$$u(x) = Q(x),\ \lambda = \alpha.$$

Тоді матимемо

$$e^{\alpha x}\Big(Q(x)P(\alpha) + \frac{Q'(x)}{1!}P'(\alpha) + \ldots +$$
$$+\frac{Q^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}P^{(n-1)}(\alpha) + \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}P^{(n)}(\alpha)\Big) = e^{\alpha x}P_m(x), \tag{4}$$

звідки

$$Q(x)P(\alpha) + \frac{Q'(x)}{1!}P'(\alpha) + \ldots +$$
$$+\frac{Q^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}P^{(n-1)}(\alpha) + \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}P^{(n)}(\alpha) = P_m(x), \tag{5}$$

де $P(\alpha)$ — значення характеристичного многочлена при $\lambda = \alpha$.

Припустимо, що α не є коренем характеристичного рівняння, тобто

$$P(\alpha) \neq 0. \tag{6}$$

Многочлен $Q(x)$ підберемо так, щоб виконувалася тотожність (5). Для цього, враховуючи (6), достатньо покласти

$$Q(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m.$$

Для визначення $q_0, q_1, \ldots, q_m$ підставимо многочлен $Q(x)$ з поки ще невизначеними коефіцієнтами в співвідношення (5) і, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x, дістанемо систему з $m + 1$ лінійних рівнянь відносно $q_0, q_1, \ldots, q_m$. Оскільки $P(\alpha) \neq 0$, то отримана система має єдиний розв'язок.

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 12y = xe^{2x}. \tag{7}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0,$$

звідки

$$\lambda_1 = -4, \; \lambda_2 = 3.$$

Тому функція

$$y_0 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$$

є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Оскільки число $\alpha = 2$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{н}} = (q_0 x + q_1)e^{2x}.$$

Підставивши значення $y_{\text{н}}$ у рівняння (7), дістанемо

$$-6(q_0 x + q_1)e^{2x} + 5q_0 e^{2x} = xe^{2x},$$

або

$$-6q_0 x - 6q_1 + 5q_0 = x.$$

Отже, коефіцієнти q_0 та q_1 визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} -6q_0 = 1, \\ 5q_0 - 6q_1 = 0, \end{cases}$$

тобто

$$q_0 = -\frac{1}{6}, \; q_1 = -\frac{5}{36}$$

і

$$y_{\text{н}} = \left(-\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right)e^{2x}.$$

Тоді функція

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}\right)e^{2x}$$

буде загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Нехай тепер α є коренем характеристичного рівняння кратності $r \geqslant 1$. Тоді

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0, \; P^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Отже, з формули (5) дістанемо

$$\frac{Q^{(r)}(x)}{r!}P^{(r)}(\alpha) + \frac{Q^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}P^{(r+1)}(\alpha) + \ldots + \\ + \frac{Q^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}P^{(n-1)}(\alpha) + \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}P^{(n)}(\alpha) = P_m(x). \tag{8}$$

Аби виконувалася тотожність (8), необхідно, щоб многочлен $Q(x)$ мав степінь $m + r$, тобто

$$Q(x) = q_0 x^{m+r} + q_1 x^{m+r-1} + \ldots + q_m x^r + q_{m+1} x^{r-1} + \ldots + q_{m+r}. \tag{9}$$

Причому, оскільки ліва частина рівності (8) містить похідні, починаючи з r-ї, то можна вважати, що

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \ldots = q_{m+r} = 0.$$

Тоді

$$Q(x) = q_0 x^{m+r} + q_1 x^{m+r-1} + \ldots + q_m x^r,$$

або

$$Q(x) = x^r \left(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m\right). \tag{10}$$

Отже, якщо α — корінь характеристичного рівняння кратності $r \geqslant 0$, то частинний розв'язок $y_{\text{н}}(x)$ рівняння (1) можна знайти у вигляді

$$y_{\text{н}}(x) = x^r Q(x)\, e^{\alpha x}, \tag{11}$$

де $Q(x)$ — многочлен того ж степеня, що й $P_m(x)$.

Для того щоб знайти коефіцієнти многочлена $Q(x)$, достатньо підставити його в рівність (8) і прирівняти коефіцієнти при відповідних степенях x. Оскільки $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$, то отримана таким чином система лінійних рівнянь відносно $q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_m$ матиме єдиний розв'язок.

На практиці частинний розв'язок $y_{\text{н}}(x)$ шукають у вигляді (11), причому коефіцієнти многочлена $Q(x)$ вважають невизначеними. Підставляючи $y_{\text{н}}(x)$ у задане рівняння, скорочуючи на $e^{\alpha x}$ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримують систему лінійних рівнянь, з якої і знаходять $Q(x)$.

Приклад

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 12y = e^{3x}. \tag{12}$$

Розв'язання. Як показано у прикладі 1, функція

$$y_{\text{о}} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$$

є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Оскільки число $\alpha = 3$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{н}} = qxe^{3x}.$$

Підставимо значення функції $y_{\text{н}}$ та її похідних у рівняння (12). Після скорочення на e^{3x} матимемо

$$6q + 9qx + q + 3qx - 12qx = 1,$$

тобто

$$q = \frac{1}{7}.$$

Таким чином, функція

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{7} x e^{3x}$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (12).

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, можна також знайти частинний розв'язок диференціального рівняння (1), в якому

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\, e^{\alpha_i x},$$

де $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — деякі многочлени. При цьому використовують теорему 1 § 1.7.

Приклад

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 12y = xe^{2x} + e^{3x}.$$

Розв'язання. Оскільки в попередніх прикладах було знайдено загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' + y' - 12y = 0$$

та частинні розв'язки рівнянь

$$y'' + y' - 12y = xe^{2x}$$

і

$$y'' + y' - 12y = e^{3x},$$

то функція

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}\right)e^{2x} + \frac{1}{7} x e^{3x}$$

буде загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Нехай тепер

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{m_1}(x)\cos\beta x + P_{m_2}(x)\sin\beta x\right),$$

де α і β — дійсні числа, а $P_{m_1}(x)$ і $P_{m_2}(x)$ — многочлени, степені яких відповідно дорівнюють m_1 та m_2. За формулами Ейлера дістанемо

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{(\alpha+i\beta)x}\left(P_{m_1}(x) - iP_{m_2}(x)\right) + \frac{1}{2} e^{(\alpha-i\beta)x}\left(P_{m_1}(x) + iP_{m_2}(x)\right).$$

Тому, якщо $\alpha \pm i\beta$ — корінь кратності $r \geqslant 0$, то, згідно з вищевикладеним, частинний розв'язок диференціального рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$x^r\left(e^{(\alpha+i\beta)x} Q_m^{(1)}(x) + e^{(\alpha-i\beta)x} Q_m^{(2)}(x)\right), \qquad (13)$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ та $Q_m^{(2)}(x)$ — многочлени з невизначеними коефіцієнтами, степінь яких дорівнює $m = \max\{m_1, m_2\}$. Легко бачити, що з тотожностей (5), (8) для визначення коефіцієнтів многочлена $Q_m^{(1)}(x)$ відповідні тотожності для $Q_m^{(2)}(x)$ можна отримати заміною коефіцієнтів співвідношень (5), (8) на комплексно спряжені [20]. Тому коефіцієнти многочлена $Q_m^{(2)}(x)$ будуть комплексно спряженими відповідним коефіцієнтам многочлена $Q_m^{(1)}(x)$, тобто

$$Q_m^{(1)}(x) = Q_m^*(x) + iQ_m^{**}(x), \ Q_m^{(2)}(x) = Q_m^*(x) - iQ_m^{**}(x). \qquad (14)$$

Враховуючи (14) і знову використовуючи формули Ейлера, із співвідношення (13) знаходимо шукану форму частинного розв'язку диференціального рівняння (1)

$$y_{\text{Н}}(x) = x^r e^{\alpha x}\left(2Q_m^*(x)\cos\beta x - 2Q_m^{**}(x)\sin\beta x\right), \qquad (15)$$

причому $y_{\text{Н}}(x)$ — функція дійсної змінної.

Отже, остаточно: частинний розв'язок лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною вигляду

$$e^{\alpha x}\left(P_{m_1}(x)\cos\beta x + P_{m_2}(x)\sin\beta x\right)$$

можна знайти у формі

$$x^r e^{\alpha x}\left(Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right),$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ та $Q_m^{(2)}(x)$ — многочлени степеня $m = \max\{m_1, m_2\}$, а $r \geqslant 0$ — кратність кореня $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння.

На практиці многочлени $Q_m^{(1)}(x)$ та $Q_m^{(2)}(x)$ записують з невизначеними коефіцієнтами, підставляють у рівняння (1) і прирівнюють коефіцієнти при виразах вигляду $x^j\cos\beta x$ та $x^j\sin\beta x$ ($j = r,\ r+1,\ \ldots,\ r+m$).

Приклад

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x. \qquad (16)$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

звідки

$$\lambda_1 = 1 - i,\ \lambda_2 = 1 + i.$$

Тому функція

$$y_0 = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Оскільки число $\alpha+i\beta = 1+i$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (16) шукатимемо у вигляді

$$y_н = xe^x(q_1\cos x + q_2\sin x).$$

Підставляючи значення функції $y_н$ та її похідних у рівняння (16), матимемо

$$-2q_1\sin x + 2q_2\cos x = \cos x.$$

Прирівнюючи члени при $\sin x$ і $\cos x$, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2q_1 = 0, \\ 2q_2 = 1, \end{cases}$$

звідки

$$q_1 = 0,\ q_2 = \frac{1}{2}.$$

Тому функція

$$y_н = \frac{1}{2}xe^x\sin x$$

є частинним розв'язком рівняння (16). Отже, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}xe^x\sin x.$$

2.10. Вільні і вимушені коливання. Резонанс

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами застосовують при вивченні коливальних процесів.

Отже, нехай матеріальна точка M масою m рухається вздовж прямої Ox у деякому середовищі. Припустимо, що на цю точку діють такі сили: сила $f_1 = -bx$, що притягує точку до початку координат, сила опору середовища $f_2 = -a\frac{dx}{dt}$, зовнішня сила $f_3 = f(t)$, напрям якої збігається з напрямом осі Ox.

Знайдемо закон $x = x(t)$, за яким рухається точка. Застосовуючи другий закон Ньютона, отримуємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dx}{dt} - bx + f(t), \tag{1}$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = F(t), \tag{2}$$

де

$$2h = \frac{a}{m},\ k^2 = \frac{b}{m},\ F(t) = \frac{f(t)}{m}. \tag{3}$$

Рівняння (2) — неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його називають рівнянням вимушених коливань.

Припустимо, спочатку, що зовнішня сила $F(t) = 0$. Тоді рівняння (2) вироджується в однорідне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \qquad (4)$$

Диференціальне рівняння (4) називають рівнянням вільних коливань.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (4) складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0. \qquad (5)$$

Коренями цього рівняння є числа

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \qquad (6)$$

При цьому можуть бути такі два випадки.

1. Точка M рухається в середовищі без опору. Тоді $h = 0$ і корені (6) мають вигляд

$$\lambda_{1,2} = \pm ik.$$

У цьому разі загальний розв'язок диференціального рівняння (4) запишеться так:

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

або

$$x(t) = A \sin(kt + \varphi), \qquad (7)$$

де

$$C_1 = A \sin\varphi, \ C_2 = A\cos\varphi. \qquad (8)$$

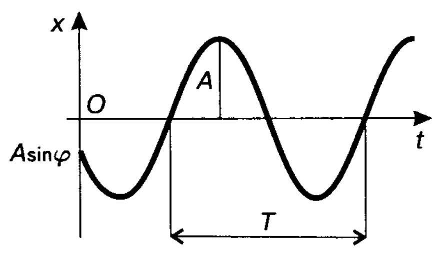


Рис. 24

Рух, що здійснюється за законом (7), називають чисто гармонічними коливаннями. При цьому число A називають амплітудою (максимальне зміщення точки від положення рівноваги), k — частотою (кількість коливань за одиницю часу), $T = \frac{2\pi}{k}$ — періодом і φ — початковою фазою коливання (фаза гармонічного коливання — значення аргументу функції sin). Іноді частоту k називають частотою власних коливань. Таким чином, положення матеріальної точки в початковий момент часу визначається двома параметрами, а саме — амплітудою та початковою фазою коливання (рис. 24).

Щоб знайти амплітуду A і початкову фазу φ, потрібно задати початкові умови

$$x(0) = x_0, \ x'(0) = x'_0. \tag{9}$$

Підставляючи ці значення у функцію (7) і її похідну

$$x'(t) = Ak\cos(kt + \varphi), \tag{10}$$

матимемо для знаходження A і φ таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} A\sin\varphi = x_0, \\ Ak\cos\varphi = x_0. \end{cases} \tag{11}$$

Звідси

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}}, \ \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{x'_0}. \tag{12}$$

Отже, у разі чисто гармонічних коливань з початковими умовами (9) закон руху задається формулою

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}}\,\sin\left(kt + \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{x'_0}\right). \tag{13}$$

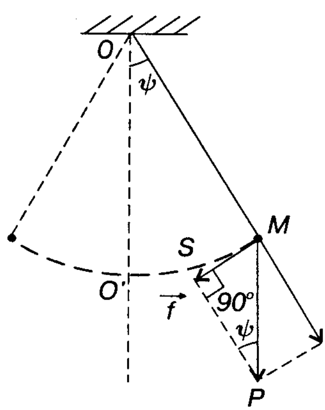


Рис. 25

Зауважимо, що формула (13) описує також малі коливання математичного маятника.

Справді, нехай математичний маятник, довжина якого l і вага $P = mg$, виведений з вертикального положення на деякий кут ψ (рис. 25). Припустимо, що коливання маятника відбувається в середовищі без опору. Маятник коливається під дією сили $\vec{f}$

$$f = mg\sin\psi. \tag{14}$$

Нехай за час t точка M пройшла по дузі кола з центром в точці O і радіусом l шлях S. Тоді

$$S = l\psi. \tag{15}$$

Згідно з формулами (14) та (15), диференціальне рівняння, що описує рух даного маятника, має вигляд

$$lm\frac{d^2\psi}{dt^2} + mg\sin\psi = 0. \tag{16}$$

Нехай величина кута ψ досить мала. Тоді $\sin\psi \approx \psi$. Отже, рівняння (16) набуває вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k^2\psi = 0, \tag{17}$$

де $k^2 = \frac{g}{l}$.

Таким чином, при зроблених припущеннях коливання маятника відбувається за законом

$$\psi(t) = A\sin(kt + \varphi), \tag{18}$$

де

$$\begin{gathered} k = \sqrt{\frac{g}{l}},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \\ A = \sqrt{x_0^2 + \frac{{x_0'}^2 l}{g}},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_0}{x_0'}\sqrt{\frac{g}{l}}. \end{gathered} \tag{19}$$

2. Нехай рух точки M відбувається в середовищі з опором, тобто $h \neq 0$. Тоді можуть бути такі три випадки.

1. $h^2 - k^2 > 0$. Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$x(t) = C_1 e^{(-h+\sqrt{h^2-k^2})t} + C_2 e^{(-h-\sqrt{h^2-k^2})t}, \tag{20}$$

а рух при цьому називають аперіодичним.

З формули (20) випливає, що при $t \to +\infty$ будь-який розв'язок наближається до нульового розв'язку $x \equiv 0$.

2. $h^2 - k^2 < 0$. Тоді корені (6) є комплексними:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2},$$

а загальний розв'язок рівняння (4) можна записати так:

$$x(t) = Ae^{-ht}\sin(\sqrt{k^2 - h^2}t + \varphi). \tag{21}$$

При цьому рух називають згасаючим гармонічним коливанням з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}},$$

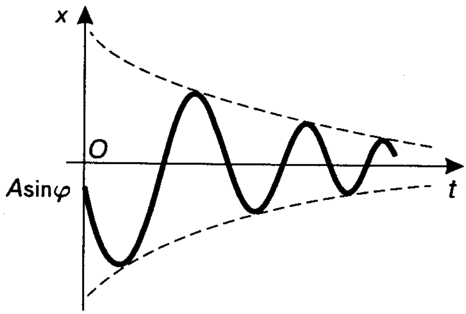


Рис. 26

частотою

$$\omega = \sqrt{k^2 - h^2},$$

амплітудою Ae^{-ht} і початковою фазою φ (рис. 26). На відміну від чисто гармонічних коливань у згасаючих коливаннях амплітуда не є сталою, а дорівнює Ae^{-ht}, і при $t \to +\infty$ вона наближається до нуля, тобто коливання згасають.

3. $h^2 - k^2 = 0$. Тоді

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -h.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4) є функція

$$x(t) = e^{-ht}(C_1 + C_2 t). \tag{22}$$

При цьому рух також називають аперіодичним. Кожен розв'язок $x = x(t)$ рівняння (4) при $t \to +\infty$ прямує до нуля.

Нехай тепер зовнішня сила $F(t) \neq 0$. Тоді рух точки описуватиметься неоднорідним диференціальним рівнянням (2). Зокрема, якщо рух відбувається в середовищі без опору, то рівняння вимушених коливань набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = F(t). \tag{23}$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна знайти методом варіації довільних сталих.

На практиці зовнішня сила $F(t)$ часто є синусоїдальною

$$F(t) = H\sin\omega t, \tag{24}$$

де H — амплітуда, а ω — частота зовнішньої сили.

Загальний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = H\sin\omega t \tag{25}$$

можна знайти без квадратур, додавши до загального розв'язку

$$A\sin(kt + \varphi)$$

відповідного однорідного рівняння частинний розв'язок $x_н$ неоднорідного рівняння. Розв'язок $x_{\text{н}}$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Для цього слід окремо розглянути два випадки.

Нерезонансний випадок. Частота зовнішньої сили не дорівнює частоті власних коливань, тобто

$$\omega \neq k.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння (25) шукатимемо у вигляді

$$x_{\text{н}}(t) = B\sin\omega t + C\cos\omega t. \tag{26}$$

Звідси

$$\begin{aligned} x'_{\text{н}} &= B\omega\cos\omega t - C\omega\sin\omega t,\\ x''_{\text{н}} &= -B\omega^2\sin\omega t - C\omega^2\cos\omega t. \end{aligned} \tag{27}$$

Підставляючи $x_{\text{н}}$ і $x''_{\text{н}}$ у рівняння (25), дістаємо тотожність

$$-B\omega^2\sin\omega t - C\omega^2\cos\omega t + k^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t) = H\sin\omega t.$$

Прирівнюючи у цій тотожності коефіцієнти при $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$, отримуємо наступну систему рівнянь для знаходження невідомих чисел B і C:

$$\begin{cases} B(k^2 - \omega^2) = H,\\ C(k^2 - \omega^2) = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$B = \frac{H}{k^2 - \omega^2}, \qquad C = 0.$$

Тоді

$$x_{\text{н}}(t) = \frac{H}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

і загальний розв'язок має вигляд

$$x(t) = A\sin(kt + \varphi) + \frac{H}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t. \tag{28}$$

Резонансний випадок. Нехай частота зовнішньої сили ω збігається з частотою власних коливань k, тобто

$$\omega = k.$$

У даному випадку число $\alpha + i\beta = i\omega = ik$ є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок рівняння (25) слід шукати у вигляді

$$x_{\text{н}}(t) = t(B\sin\omega t + C\cos\omega t). \tag{29}$$

Тоді

$$x_{\text{н}}' = B\sin\omega t + C\cos\omega t + t\omega(B\cos\omega t - C\sin\omega t),$$
$$x_{\text{н}}'' = B\omega\cos\omega t - C\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t-$$
$$-C\omega\sin\omega t - t\omega^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t).$$

Підставивши $x_{\text{н}}$ і $x_{\text{н}}''$ у рівняння (25), матимемо тотожність

$$2B\omega\cos\omega t - 2C\omega\sin\omega t - t\omega^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t)+$$
$$+t\omega^2(B\sin\omega t + C\cos\omega t) = H\sin\omega t.$$

Прирівнюючи тут коефіцієнти при $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$, дістаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2C\omega = H, \\ 2B\omega = 0. \end{cases}$$

Звідси $C = -\frac{H}{2\omega}$, $B = 0$. Отже,

$$x_{\text{н}}(t) = -\frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t$$

і загальний розв'язок рівняння (25) у резонансному випадку матиме вигляд

$$x(t) = A\sin(kt + \varphi) - \frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t. \tag{30}$$

Із формули (30) випливає, що у випадку $\omega = k$, починаючи з деякого моменту, відбуватимуться коливання, амплітуда яких може бути значно більшою від амплітуди H синусоїдальної сили, що спричинює саме коливання системи. Це явище різкого зростання амплітуди під впливом порівняно малих зовнішніх сил називають резонансом між власними коливаннями матеріальної точки і зовнішньою силою.

Аналогічно можна побудувати загальний розв'язок рівняння (2), що описує рух точки в середовищі з опором.

2.11. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Якщо не можна знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

одним з розглянутих вище способів, то досить часто шукають розв'язок рівняння (1) у вигляді степеневого ряду.

Розглянемо цей метод інтегрування диференціальних рівнянь на прикладі лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{2}$$

Функцію $a(x)$ називають аналітичною в околі точки x_0, якщо її можна зобразити у вигляді степеневого ряду

$$a(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(x - x_0)^s,$$

що збігається в даному околі.

Має місце наступна теорема [18].

Теорема 1. *Якщо в рівнянні* (2) *функції* $a_0(x)$, $a_1(x)$ *та* $a_2(x)$ *– аналітичні в околі точки* x_0 *і* $a_0^{(0)} \neq 0$, *то будь-який розв'язок цього рівняння є аналітичною функцією в даному околі, тобто може бути записаний у вигляді степеневого ряду*

$$y(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(x - x_0)^s.$$

Приклади

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - xy = 0. \tag{3}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок рівняння (3) у вигляді степеневого ряду

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots \tag{4}$$

Двічі здиференціювавши вираз (4), підставимо значення y та y'' у рівняння (3):

$$2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3x + \ldots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \ldots -$$
$$-x(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots) = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо систему рівнянь для визначення c_k :

$$2\cdot 1\cdot c_2 = 0,\ 3\cdot 2\cdot c_3 - c_0 = 0,$$
$$4\cdot 3\cdot c_4 - c_1 = 0,\ \ldots,\ n(n-1)c_n - c_{n-3} = 0,\ \ldots$$

Тому

$$c_2 = 0,\ c_3 = \frac{c_0}{2\cdot 3},\ c_4 = \frac{c_1}{3\cdot 4},\ c_5 = \frac{c_2}{4\cdot 5} = 0,$$
$$c_6 = \frac{c_3}{5\cdot 6} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},\ c_7 = \frac{c_4}{6\cdot 7} = \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}, \ldots$$

і, взагалі,

$$c_{3k-1} = 0,\ c_{3k} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\cdot 3k},\ c_{3k+1} = \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3k\cdot(3k+1)}, \ldots$$

Коефіцієнти c_0 і c_1 залишаються довільними. Тому нехай

$$c_0 = C_1, \; c_1 = C_2.$$

Тоді функція

$$y = C_1\left(1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\cdot 3k} + \ldots\right) +$$
$$+C_2\left(x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3k\cdot(3k+1)} + \ldots\right) \equiv C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \qquad (5)$$

є загальним розв'язком заданого диференціального рівняння. Справді, за допомогою ознаки Д'Аламбера можна показати, що ряд (5) збігається для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Крім того, враховуючи, що ряди $y_1(x)$ та $y_2(x)$ можна почленно диференціювати, визначник Вронського

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому за теоремою 5 §2.4 функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно незалежні на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = xy' - y^2, \qquad (6)$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 1, \; y'(0) = 2. \qquad (7)$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок рівняння (6) у вигляді степеневого ряду

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

З початкових умов (7) випливає, що

$$c_0 = 1, \; c_1 = 2.$$

Підставивши значення y та y'' у рівняння (6), дістанемо

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots = \left(2x + 2c_2x^2 + 3c_3x^3 + \ldots\right) - \left(1 + 2x + c_2x^2 + \ldots\right)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, визначаємо c_k :

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = -\frac{1}{3}, \; \ldots$$

Тому шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Нехай тепер $a_0^{(0)} = 0$. Тоді розв'язки диференціального рівняння (2) іноді можна знайти у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{s=0}^{\infty} c_s(x - x_0)^s, \qquad (8)$$

де числа $r, \; c_0, \; c_1, \; \ldots$ підлягають визначенню.

Приклад

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' + 2y' + xy = 0. \tag{9}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок рівняння (9) у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^r \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots\right). \tag{10}$$

Тоді

$$y' = rc_0 x^{r-1} + (r+1)c_1 x^r + (r+2)c_2 x^{r+1} + \ldots + (r+n)c_n x^{r+n-1} + \ldots$$

і

$$y'' = (r-1)rc_0 x^{r-2} + r(r+1)c_1 x^{r-1} + (r+1)(r+2)c_2 x^r + \ldots +$$
$$+(r+n-1)(r+n)c_n x^{r+n-2} + \ldots$$

Підставивши знайдені значення функції y та її похідних у рівняння (9), матимемо

$$(r-1)rc_0 x^{r-1} + r(r+1)c_1 x^r + (r+1)(r+2)c_2 x^{r+1} + \ldots +$$
$$+(r+n-1)(r+n)c_n x^{r+n-1} + \ldots + 2\left(rc_0 x^{r-1} + (r+1)c_1 x^r +\right.$$
$$\left.+(r+2)c_2 x^{r+1} + \ldots + (r+n)c_n x^{r+n-1} + \ldots\right) +$$
$$+c_0 x^{r+1} + c_1 x^{r+2} + c_2 x^{r+3} + \ldots + c_n x^{r+n+1} + \ldots = 0. \tag{11}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при найменшому степеню x, отримуємо рівняння для визначення r:

$$(r-1)rc_0 + 2rc_0 = 0.$$

Якщо $c_0 \neq 0$, то

$$r = 0 \text{ або } r = -1.$$

Отже, нехай спочатку $r = 0$. Тоді із співвідношення (11) дістанемо

$$2c_2 x + 6c_3 x^2 + 12c_4 x^3 + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-1} + \ldots +$$
$$+2\left(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots\right) +$$
$$+c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \ldots + c_n x^{n+1} + \ldots = 0.$$

Якщо покласти $c_0 = 1$, то

$$c_1 = 0,\ c_2 = -\frac{1}{3!},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{5!},\ \ldots,\ c_{2k-1} = 0,\ c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!},\ \ldots$$

Таким чином функція

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \frac{\sin x}{x}$$

є розв'язком рівняння (9).

Нехай тепер $r = -1$. Тоді, вважаючи

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,$$

з тотожності (11) знаходимо

$$c_2 = -\frac{1}{2!},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{4!},\ \ldots,\ c_{2k-1} = 0,\ c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!},\ \ldots,$$

тобто функція

$$y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \ldots = \frac{\cos x}{x}$$

також є розв'язком рівняння (9).

Оскільки визначник Вронського функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ не дорівнює нулю для всіх $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$, то загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Рівняння Бесселя. Диференціальне рівняння

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \ \nu \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

називають рівнянням Бесселя*.

Покажемо, що при $\nu = \frac{1}{2}$ рівняння Бесселя можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами. Для цього в рівнянні

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \tag{13}$$

зробимо заміну

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} z = x^{-\frac{1}{2}} z,$$

де $z = z(x)$ — нова невідома функція. Підставивши значення функції $y(x)$ та її похідних у рівняння (13), матимемо

$$z'' + z = 0.$$

Отже, функції

$$z_1 = \cos x, \ z_2 = \sin x$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків останнього диференціального рівняння. Повертаючись до змінної y, знаходимо

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \ y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Тому функція

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

є загальним розв'язком рівняння (13).

У загальному випадку розв'язок рівняння Бесселя (12) шукатимемо у вигляді

$$y = x^r \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s. \tag{14}$$

---

*Фрідріх Бессель (1784–1846) – німецький астроном і математик.

Підставляючи функцію (14) в рівняння Бесселя, дістаємо

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s x^{s+r}\left((s+r)^2 + x^2 - \nu^2\right) = 0,$$

або

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s x^{s}\left((s+r)^2 + x^2 - \nu^2\right) = 0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{aligned}
&(r^2-\nu^2)c_0 = 0,\\
&\left((r+1)^2-\nu^2\right)c_1 = 0,\\
&\left((r+2)^2-\nu^2\right)c_2 + c_0 = 0,\\
&\left((r+3)^2-\nu^2\right)c_3 + c_1 = 0,\\
&\left((r+4)^2-\nu^2\right)c_4 + c_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\left((r+s)^2-\nu^2\right)c_s + c_{s-2} = 0.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Коефіцієнт c_0 вважатимемо довільним відмінним від нуля. Тоді з першого рівняння знаходимо

$$r = \pm\nu, \quad \text{тобто} \quad r_1 = \nu,\ r_2 = -\nu.$$

Нехай спочатку $r = \nu \geqslant 0$. Тоді з другого рівняння маємо

$$\left((\nu+1)^2-\nu^2\right)c_1 = 0,$$

тобто

$$c_1 = 0.$$

З третього рівняння дістаємо

$$c_2 = -\frac{c_0}{(\nu+2)^2-\nu^2} = -\frac{c_0}{2^2(\nu+1)}.$$

З четвертого рівняння —

$$c_3 = 0,$$

а з п'ятого —

$$c_4 = -\frac{c_2}{(\nu+4)^2-\nu^2} = \frac{c_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\cdot 1\cdot 2}.$$

Таким чином,

$$c_{2s-1} = 0,\ c_{2s} = \frac{(-1)^s c_0}{2^{2s}(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+s)s!},\quad s = 1, 2, \dots$$

Для зручності вважатимемо, що

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

де $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція, тобто

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \ \ \alpha > 0.$$

Інтегруючи частинами

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\, dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx,$$

дістаємо

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\, \Gamma(\alpha). \tag{15}$$

Таким чином, для довільного натурального n матиме місце рівність

$$\Gamma(\alpha + n) = (\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2)\ldots(\alpha + 1)\, \alpha\, \Gamma(\alpha). \tag{16}$$

Отже, покладаючи $\alpha = 1$ і враховуючи, що

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1,$$

знаходимо

$$\Gamma(n + 1) = n!,$$

тобто гамма-функцію

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\, dx$$

можна вважати природним продовженням $n!$ з множини натуральних чисел на множину дійсних чисел $(-1;\ +\infty)$.

Нехай тепер $\alpha < 0$ і $\alpha \notin \mathbf{Z}$. Тоді існуватиме натуральне число n таке, що

$$-n < \alpha < -(n - 1).$$

За означенням, враховуючи (16), покладемо

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{(\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2)\ldots(\alpha + 1)\alpha},$$

або

$$\Gamma(\beta - n) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta)}{(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-\beta)},$$

де $\beta = \alpha + n,\ 0 < \beta < 1$.

Тоді

$$c_{2s} = \frac{(-1)^s}{2^{2s}(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s)s!2^\nu\Gamma(\nu+1)} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+\nu}s!\Gamma(\nu+s+1)}.$$

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, можна показати, що степеневий ряд (14) з визначеними таким чином коефіцієнтами збігається для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, частинний розв'язок рівняння Бесселя, який позначимо через $I_\nu(x)$, матиме вигляд

$$I_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(\nu+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}. \tag{17}$$

Функцію $I_\nu(x)$ називають функцією Бесселя першого роду ν-го порядку.

Нехай тепер $r = -\nu$. Тоді аналогічно знаходимо

$$c_{2s-1} = 0,\ c_{2s} = \frac{(-1)^s c_0}{2^{2s}(-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+s)s!}.$$

Покладемо

$$c_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}.$$

Враховуючи (15), дістаємо

$$I_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(-\nu+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu} \tag{18}$$

(за ознакою Д'Аламбера ряд у правій частині рівності (18) збігається для всіх $x \neq 0$).

Якщо $\nu \notin \mathbf{Z}$, то функції $I_\nu(x)$ та $I_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні, оскільки одна з них перетворюється в нуль для $x = 0$, а інша прямує до нескінченності, коли $x \to 0$.

Тоді загальний розв'язок рівняння Бесселя (12) матиме вигляд

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x).$$

Зауважимо, що при $\nu = n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbf{Z}$, функцію $I_{\nu+\frac{1}{2}}(x)$ можна виразити через елементарні функції [14]. Наприклад, при $\nu = \frac{1}{2}$ матимемо

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{s!\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right) 2^{2s+\frac{1}{2}}}.$$

Тому

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{s!\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+s\right)2^{2s}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Отже,

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Аналогічно знаходимо

$$I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Таким чином, функції $I_{\frac{1}{2}}(x)$ та $I_{-\frac{1}{2}}(x)$ з точністю до сталої є раніше знайденими розв'язками рівняння Бесселя при $\nu = \dfrac{1}{2}$.

2.12. Диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

У даному параграфі розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, які за допомогою заміни незалежної змінної можна звести до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Отже, в лінійному однорідному диференціальному рівнянні

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \;\; a_n(x) \neq 0 \qquad (1)$$

зробимо підстановку

$$t = \psi(x).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{d\psi}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2\psi}{dx^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^ny}{dt^n}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^n + \ldots + \frac{dy}{dt}\frac{d^n\psi}{dx^n}$$

і рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{d^n y}{dt^n}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^n + \ldots + a_n(x)y = 0.$$

Розділивши на $(\psi'(x))^n$, остаточно дістанемо

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + \frac{a_n(x)}{(\psi'(x))^n}\, y = 0.$$

Оскільки, згідно з припущенням, рівняння (1) підстановкою

$$t = \psi(x)$$

можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами, то коефіцієнт при y є сталим, тобто

$$\frac{a_n(x)}{(\psi'(x))^n} = \frac{\pm 1}{C^n},$$

де C — деяка фіксована стала, а знак чисельника правої частини останнього виразу визначається знаком функції $a_n(x)$. Тоді, вважаючи, що $a_n(x) > 0$,

$$\psi'(x) = C\sqrt[n]{a_n(x)}.$$

Отже,

$$\psi(x) = C\int \sqrt[n]{a_n(x)}\, dx.$$

Таким чином, якщо рівняння (1) можна звести до рівняння із сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної, то

$$t = C\int \sqrt[n]{a_n(x)}\, dx.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли $a_n(x) < 0$.

Рівняння Ейлера. Диференціальне рівняння

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0, \tag{2}$$

де $a_1, \ldots, a_n$ — сталі величини, називають рівнянням Ейлера.

Порівнюючи рівняння (1) і (2), знаходимо

$$a_n(x) = \frac{a_n}{x^n}.$$

Тому

$$t = C\int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}}\, dx.$$

Взявши тут $C = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ і вибравши сталу інтегрування такою, що дорівнює нулеві, отримуємо шукану підстановку

$$t = \ln x, \text{ або } x = e^t. \tag{3}$$

Формула (3) виконується для $x > 0$. Якщо ж $x < 0$, то в ній потрібно замінити x на $|x|$. Отже,

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t},\\
y'' &= \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t},\\
y''' &= \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(y'')}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)} &= \left(\frac{d^ny}{dt^n} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{dy}{dt}\right)e^{-nt}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Замінивши в рівнянні (2) незалежну змінну за формулою (3) і підставивши знайдені значення похідних функції $y(x)$, дістанемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{5}$$

Розв'язання. Оскільки задане диференціальне рівняння є рівнянням Ейлера, то покладемо

$$x = e^t.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

і рівняння (5) набуває вигляду

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} - 2e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} + 2y = 0,$$

або

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0. \tag{6}$$

Як відомо, функція

$$y = C_1e^t + C_2e^{2t}$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (6).

Тому, враховуючи, що

$$t = \ln x,$$

загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = C_1 x + C_2 x^2.$$

Зауваження. Диференціальне рівняння

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \ldots + (ax+b) a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

де a, b, a_1, ..., a_n – сталі величини, підстановкою

$$ax + b = \tau$$

можна звести до рівняння Ейлера.

Рівняння Чебишова. Диференціальне рівняння

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \ n \in \mathbf{N}, \tag{7}$$

називають рівнянням Чебишова*.

Побудуємо загальний розв'язок цього рівняння в інтервалі $(-1;\ 1)$. Для цього застосуємо підстановку

$$t = -\frac{1}{n}\int\sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}\,dx.$$

Тоді, взявши сталу інтегрування такою, що дорівнює нулеві, дістанемо

$$t = \arccos x, \ \text{або} \ x = \cos t.$$

Тому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\sin t}$$

і

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 t}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\,\frac{dy}{dt}.$$

Таким чином, рівняння Чебишова набуває вигляду

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Загальним розв'язком останнього диференціального рівняння є функція

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt.$$

Отже, повертаючись до початкової змінної x, остаточно матимемо

$$y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$

Оскільки при цілому n, $\cos n\varphi$ можна записати як многочлен від $\cos\varphi$, то частинний розв'язок рівняння Чебишова

---

*Пафнутій Чебишов (1821–1894) – російський математик.

$$y_1 = \cos(n \arccos x)$$

є многочленом n-го степеня.

Справді, прирівнюючи дійсні частини у відомій формулі Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

отримуємо

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots +$$

$$+(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\sin^{2k}\varphi + \ldots +$$

$$+\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi, \ n = 2p, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi, \ n = 2p+1, \ p \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Тому $\cos(n\arccos x)$ ($\varphi = \arccos x$) є многочленом n-го степеня відносно x.

Цей многочлен називають многочленом Чебишова і позначають

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x).$$

Многочлени Чебишова використовують для наближення функцій.

Зауваження. Аналогічно можна зінтегрувати диференціальне рівняння (7) і коли $n \in \mathbf{R}$.

Вправи

Розв'язати рівняння.

1. $y''' = x\sin x$.

2. $x^2y'' = y'^2$.

3. $y^3y'' = 1$.

4. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

5. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.

6. $y'''y'^2 = y''^3$.

7. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

8. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

9. $y'' = xy' + y + 1$.

10. $xy'' - y' = x^2yy'$.

Використовуючи формулу Остроградського—Ліувілля, знайти загальні розв'язки рівнянь.

11. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$.

12. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

13. $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

14. $y'' + y' - 2y = 0$.

15. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

16. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

17. $y''' - y'' - y' + y = 0.$

18. $y'' - 2y' + y = 4e^x.$

19. $y'' + 4y = \sin 2x.$

20. $y'' - y = 2e^x - x^2.$

21. $y'' + y = \cos x + \cos 2x.$

22. $y'' + y = \operatorname{tg} x.$

23. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$

24. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}.$

25. $y'' - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}.$

Знайти розв'язок задачі Коші.

26. $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0.$

27. $y'' + 4y = \sin 2x,\ y(0) = y'(0) = 0.$

28. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^x},\ y(0) = y'(0) = 0.$

29. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

Знайти у вигляді степеневого ряду розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (обчислити три перших ненульових члени).

30. $y' = y^2 + x^3,\ y(0) = \dfrac{1}{2}.$

31. $xy'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

32. $y'' + \dfrac{2}{x} + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

33. $y'' + \dfrac{1}{x}y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Розв'язати рівняння Ейлера.

34. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x.$

35. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2.$

36. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$

37. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$

38. Знайти криві, кривизна яких у кожній точці постійна і дорівнює

$$\frac{1}{R} > 0.$$

39. Ланцюг завдовжки 4 м сповзає з гладкого горизонтального столу. У початковий момент руху зі столу звисала частина ланцюга завдовжки 0,5м. Нехтуючи тертям, знайти час, за який ланцюг сповзе зі столу.

40. Знайти форму, якої набуває під дією власної ваги довгий канат, закріплений своїми кінцями у заданих точках.

Розділ 3
СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Системи диференціальних рівнянь. Основні означення й поняття

У даному розділі ми розглядатимемо системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k)}\right) = 0, \\ F_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k)}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k)}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де x — незалежна змінна, а кількість шуканих функцій $y_1, y_2, \ldots, y_k$ дорівнює кількості рівнянь системи. Припустимо, що систему (1) можна розв'язати відносно старших похідних всіх функцій, що містяться в ній, тобто відносно $y_1^{(m_1)}, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_k^{(m_k)}$. Тоді

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ y_2^{(m_2)} = f_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k^{(m_k)} = f_k\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Систему вигляду (2) називають канонічною.

Сукупність функцій

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_k = y_k(x),$$

які на проміжку $\langle a;\, b\rangle$ мають похідні відповідно $m_1, m_2, \ldots, m_k$-го порядку, називають розв'язком канонічної системи (2) на цьому проміжку, якщо вона перетворює всі рівняння системи (2) на тотожності:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} \equiv f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ y_2^{(m_2)} \equiv f_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k^{(m_k)} \equiv f_k\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \quad x \in \langle a;\, b\rangle. \end{cases}$$

Дві системи диференціальних рівнянь називають еквівалентними, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки.

Замінимо канонічну систему з k рівнянь вищих порядків еквівалентною їй системою, що містить $n = m_1 + m_2 \ldots + m_k$ рівнянь першого порядку [20]. Для цього введемо нову систему шуканих функцій:

$$
\begin{aligned}
&y_1 = y_{10},\ y_1' = y_{11},\ y_1'' = y_{12},\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)} = y_{1,\,m_1-1},\\
&y_2 = y_{20},\ y_2' = y_{21},\ y_2'' = y_{22},\ \ldots,\ y_2^{(m_2-1)} = y_{2,\,m_2-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_k = y_{k0},\ y_k' = y_{k1},\ y_k'' = y_{k2},\ \ldots,\ y_k^{(m_k-1)} = y_{k,\,m_k-1}.
\end{aligned}
$$

Тоді система (2) буде еквівалентна системі

$$
\begin{cases}
y_{10}' = y_{11},\ y_{11}' = y_{12},\ldots, y_{1,m_1-2}' = y_{1,m_1-1},\\
y_{1,m_1-1}' = f_1\left(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,m_k-1}\right),\\
y_{20}' = y_{21},\ y_{21}' = y_{22},\ldots, y_{2,m_2-2}' = y_{2,m_2-1},\\
y_{2,m_2-1}' = f_2\left(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,m_k-1}\right),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{k0}' = y_{k1},\ y_{k1}' = y_{k2},\ldots, y_{k,m_k-2}' = y_{k,m_k-1},\\
y_{k,m_k-1}' = f_k\left(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,m_k-1}\right).
\end{cases}
\tag{3}
$$

Позначивши функції

$$y_{10},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1,m_1-1},\ \ldots,\ y_{k0},\ y_{k1},\ \ldots,\ y_{k,m_k-1}$$

через

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,$$

тобто

$$y_{10} = y_1,\ y_{12} = y_2,\ \ldots,\ y_{k,m_k-1} = y_n,$$

помічаємо, що система (3) є частинним випадком наступної системи диференціальних рівнянь нормальної форми:

$$
\begin{cases}
y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{cases}
\tag{4}
$$

Систему (4) називають також нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь.

Якщо праві частини системи (4) залежать лінійно від шуканих функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, тобто якщо система (4) має вигляд

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{5}$$

де $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, і $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – задані функції, то її називають лінійною системою диференціальних рівнянь.

Якщо праві частини системи (4) не залежать явно від незалежної змінної x, тобто

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{6}$$

то її називають автономною або стаціонарною системою.

Означення розв'язку системи (4) можна отримати з відповідного означення для системи (2). А саме сукупність диференційовних на проміжку $\langle a;\, b\rangle$ функцій

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x) \tag{7}$$

називають розв'язком системи (4) на цьому проміжку, якщо вона перетворює всі рівняння системи (4) на тотожності:

$$\begin{cases} y_1'(x) \equiv f_1(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ y_2'(x) \equiv f_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) \equiv f_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)),\ x \in \langle a;\, b\rangle. \end{cases}$$

Частинним випадком канонічної системи (2) є одне диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Справді, дане рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{n-2}' = y_{n-1}, \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}). \end{cases} \tag{8}$$

Виявляється, що й навпаки нормальна система n рівнянь першого порядку (4), як правило, еквівалентна одному диференціальному рівнянню n-го порядку. Для того щоб показати це, здиференціюємо перше з рівнянь (4) за змінною x:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' .$$

Замінивши y_i' на $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, матимемо

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n,$$

тобто

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{9}$$

Отримане рівняння (9) знову здиференціюємо за змінною x. Аналогічно дістаємо

$$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n,$$

або

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{10}$$

Продовжуючи цей процес і далі, знаходимо

$$y_1^{(IV)} = F_4(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{11}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{12}$$

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{13}$$

Припустимо, що якобіан

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)}$$

системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{14}$$

не дорівнює нулю для розглядуваних значень $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Тоді система (14) розв'язна відносно $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Підставивши знайдені значення y_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, у формулу (13), дістанемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$y_1^{(n)} = \Phi\left(x, y, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{15}$$

З його побудови випливає, якщо

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x) -$$

розв'язок системи (4), то $y_1(x)$ є розв'язком рівняння (15).

Навпаки, нехай функція $y_1(x)$ – розв'язок рівняння (15). Тоді, підставивши $y_1(x)$ та її похідні в систему (14), знаходимо

$$y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots,\ y_n(x). \tag{16}$$

Покажемо, що функції (16) задовольняють систему (4). Оскільки

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

знайдені з системи (14), то вони перетворюють всі рівняння цієї системи на тотожності. Зокрема,

$$y_1' \equiv f_1\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Диференціюючи останню тотожність за змінною x

$$y_1'' \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n'$$

і віднімаючи звідси другу тотожність (14)

$$y_1'' \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n,$$

матимемо

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\left(y_1' - f_1\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\left(y_2' - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\left(y_n' - f_n\right) \equiv 0.$$

Диференціюючи тотожність (9) за змінною x і віднімаючи від отриманого результату тотожність (10), дістанемо

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\left(y_1' - f_1\right) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\left(y_2' - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\left(y_n' - f_n\right) \equiv 0.$$

І взагалі,

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}\left(y_1' - f_1\right) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}\left(y_2' - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\left(y_n' - f_n\right) \equiv 0.$$

Оскільки

$$y_1' \equiv f_1\,(x, y_1, \ldots, y_n),$$

то, остаточно, отримуємо

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\left(y_2' - f_2\right) + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_3}\left(y_3' - f_3\right) + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}\left(y_n' - f_n\right) \equiv 0, \\
\dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\left(y_2' - f_2\right) + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_3}\left(y_3' - f_3\right) + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}\left(y_n' - f_n\right) \equiv 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}\left(y_2' - f_2\right) + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_3}\left(y_3' - f_3\right) + \ldots + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\left(y_n' - f_n\right) \equiv 0.
\end{cases} \tag{17}
$$

Вважатимемо (17) системою $n - 1$ рівнянь з $n - 1$ невідомими

$$y_i' - f_i, \ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Її визначник

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)}$$

за припущенням не дорівнює нулю, а отже,

$$y_i' \equiv f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Таким чином, при зроблених припущеннях інтегруваня одного диференціального рівняння n-го порядку (15) дає можливість знайти розв'язок системи (4). Цей метод інтегрування нормальних систем називають методом виключення.

Якщо умова

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)} \neq 0$$

не виконується, то, взагалі кажучи, наведені викладки не приводять до одного диференціального рівняння вищого порядку, еквівалентного системі. Наприклад, систему

$$
\begin{cases}
y_1' = f_1(x, y_1), \\
y_2' = f_2(x, y_1, y_2)
\end{cases}
$$

не можна замінити еквівалентним їй рівнянням другого порядку відносно y_1.

Якщо нормальна система (4) є лінійною, тобто системою вигляду (5), то й рівняння (15) також буде лінійним. Розглянемо приклад. Зведемо систему

$$
\begin{cases}
y_1' = y_1 + y_2 + x, \\
y_2' = -4y_1 - 3y_2 + 2x
\end{cases}
$$

до одного рівняння другого порядку.

Здиференціюємо перше рівняння:

$$y_1'' = y_1' + y_2' + 1.$$

Підставивши значення y_2' з другого рівняння системи, матимемо

$$y_1'' = y_1' - 4y_1 - 3y_2 + 1 + 2x.$$

Тоді, враховуючи, що

$$y_2 = y_1' - y_1 - x,$$

дістаємо

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 5x + 1.$$

3.2. Геометричне і механічне тлумачення нормальної системи

Нехай x, y_1, ..., y_n — координати точки в $(n + 1)$-вимірному просторі $(x, y_1, \ldots, y_n)$. Тоді розв'язку

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x),\ x \in (a;\ b) \tag{1}$$

нормальної системи

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{2}$$

відповідатиме деяка крива в цьому просторі, задана рівностями (1). Цю криву називають інтегральною кривою системи (2).

З'ясуємо геометричний зміст інтегральних кривих. Нехай функції в правих частинах системи (2) визначені в області D зміни змінних x, y_1, ..., y_n. Побудуємо в кожній точці області D вектор, напрямні косинуси якого пропорційні одиниці і значенням правих частин системи (2) в цій точці. Множину таких векторів називають полем напрямків.

Тоді в кожній точці довільної інтегральної кривої системи (2) напрямок дотичної збігається з напрямком поля, визначеного системою (2) в даній точці [7, 12].

Якщо в точці $\left(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$ всі праві частини системи (2) або деякі з них перетворюються на невизначеність виду $\frac{0}{0}$, то в цій точці поле не визначене. Будемо вважати, що через таку точку не проходить жодна інтегральна крива системи (2).

Якщо

$$y_1(x) \to y_1^{(0)},\ y_2(x) \to y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n(x) \to y_n^{(0)} \quad \text{при } x \to x_0,$$

то кажуть, що інтегральна крива

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$$

прилягає до точки $\left(x_0,\ y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)$.

Дамо механічну інтерпретацію нормальної системи (2). Для цього запишемо систему (2) у вигляді

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{3}$$

де t — незалежна змінна, а $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — шукані функції.

Розв'язок

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t) \tag{4}$$

системи (3) називають рухом. Розглядатимемо рух в n-вимірному просторі $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Цей простір називають фазовим простором (при $n = 2$ — фазовою площиною), а криву, яку описує в ньому рухома точка, — траєкторією руху. Зв'язок між траєкторією і рухом полягає в тому, що траєкторія є проекцією руху (розташованого у просторі $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$) у простір $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тому рівняння (4) є параметричними рівняннями траєкторії руху.

Система (3) визначає в момент часу t у даній точці фазового простору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ компоненти швидкості $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ рухомої точки. Якщо, зокрема, система (3) автономна, тобто

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{5}$$

то швидкість у кожній точці фазового простору не змінюється з плином часу.

Так, система

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 3y \end{cases}$$

визначає сім'ю рухів:

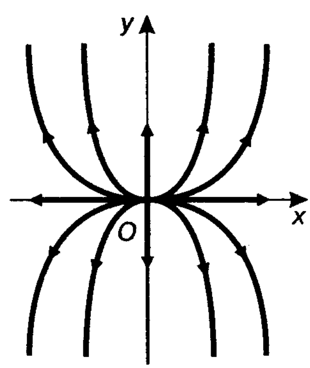


Рис. 27

$$x = C_1e^t, \qquad y = C_2e^{3t},$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. Траєкторіями цих рухів є криві

$$y = Cx^3,\ x \neq 0,$$

$C = \frac{C_2}{C_1^3}$, півосі координат і початок координат. Вони зображені схематично на рис. 27, де стрілки вказують напрямок рухів при зростанні часу t.

Припустимо, що всі функції $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, є сталими, тобто

$$x_1(t) \equiv x_1^{(0)},\ x_2(t) \equiv x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n(t) \equiv x_n^{(0)}. \tag{6}$$

Тоді рух (4) вироджується в стан спокою:

$$x_1 \equiv x_1^{(0)},\ x_2 \equiv x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n \equiv x_n^{(0)}, \tag{7}$$

а його траєкторія в точку $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$. Такі траєкторії називають точками спокою або положеннями рівноваги системи (3).

Очевидно, що даний випадок можливий тоді і тільки тоді, коли для всіх значень часу t

$$\begin{cases} f_1\left(t,\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \equiv 0, \\ f_2\left(t,\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\left(t,\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \equiv 0, \end{cases} \tag{8}$$

тобто швидкість руху в точці $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ дорівнює нулю.

У випадку автономної системи (5) будь-якому розв'язку системи

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

відповідає рух, що вироджується в стан спокою.

3.3. Задача Коші. Загальний, частинний та особливий розв'язки нормальної системи

Як відомо, задача Коші для нормальної системи

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1}$$

ставиться наступним чином: серед усіх розв'язків системи (1) знайти розв'язок

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x),$$

для якого

$$y_1(x_0) = \overset{(0)}{y_1},\ y_2(x_0) = \overset{(0)}{y_2},\ \dots,\ y_n(x_0) = \overset{(0)}{y_n}, \tag{2}$$

де x_0 — довільна точка проміжку $\langle a;\, b\rangle$, а $\overset{(0)}{y_1}, \overset{(0)}{y_2}, \dots, \overset{(0)}{y_n}$ — довільні наперед задані дійсні числа.

Числа $\overset{(0)}{y_1}, \overset{(0)}{y_2}, \dots, \overset{(0)}{y_n}$ називають початковими даними розв'язку

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x),$$

а число x_0 — початковим значенням незалежної змінної x. Сукупність чисел $x_0, \overset{(0)}{y_1}, \overset{(0)}{y_2}, \dots, \overset{(0)}{y_n}$ називають початковими даними системи (1), а умови (2) — початковими умовами нормальної системи (1).

З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші (1), (2) означає серед усіх інтегральних кривих системи (1) знайти ту інтегральну криву, яка проходить через задану точку $\left(x_0, \overset{(0)}{y_1}, \overset{(0)}{y_2}, \dots, \overset{(0)}{y_n}\right)$.

Записавши нормальну систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \tag{3}$$

дамо механічне тлумачення задачі Коші: з усіх рухів, що визначаються системою (3), знайти такий рух

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \dots,\ x_n = x_n(t),$$

в якому рухома точка в заданий момент часу t_0 знаходилася б у заданій точці $(\overset{(0)}{x_1}, \overset{(0)}{x_2}, \dots, \overset{(0)}{x_n})$ фазового простору.

Приклад

1. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y, \end{cases} \tag{4}$$

$$x(0) = 1,\ y(0) = 1. \tag{5}$$

Розв'язання. Система (4) визначає сім'ю рухів

$$x(t) = C_1e^t,\ y(t) = C_2e^{3t},$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. Враховуючи початкові умови (5), дістаємо

$$x(t) = e^t, \ y(t) = e^{3t}. \qquad (6)$$

Траєкторією знайденого руху (6) є частина кубічної параболи $y = x^3$, $x > 0$.

У § 2.1 було з'ясовано, які умови мають задовольняти функції в правих частинах системи (1), щоб відповідна задача Коші мала єдиний розв'язок.

Отже, нехай D — область простору $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, в кожній точці якої задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок.

Сукупність функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{cases} \qquad (7)$$

які визначені в деякій області зміни змінних x, C_1, C_2, ..., C_n і мають неперервні частинні похідні за змінною x, називають загальним розв'язком системи (1) в області D [12], якщо:

1) система (7) розв'язна відносно довільних сталих C_1, C_2, ..., C_n в області D, тобто

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \end{cases} \qquad (8)$$

2) для всіх значень $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ з області D формули (8) дають такі значення C_1, C_2, ..., C_n (включаючи $\pm\infty$), при яких сукупність функцій (7) є розв'язком системи (1).

Знаючи загальний розв'язок (7), можна розв'язати будь-яку задачу Коші для нормальної системи (1) в області D, тобто знайти розв'язок системи (1), що визначається початковими даними x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$, де $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$ — довільна точка з D.

Для знаходження цього розв'язку підставимо в систему (7) замість x, y_1, y_2, ..., y_n початкові дані x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$:

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2^{(0)} = \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(0)} = \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \qquad (9)$$

З означення загального розв'язку випливає, що система (9) розв'язна відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, тобто:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) \equiv C_1^{(0)}, \\ C_2 = \psi_2\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) \equiv C_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \psi_n\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) \equiv C_n^{(0)}. \end{cases} \tag{10}$$

Підставивши знайдені значення $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ у формули загального розв'язку (7), дістанемо шуканий розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right), \\ y_2 = \varphi_2\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Розв'язок системи (1), в кожній точці графіка якого виконується умова єдиності, називають частинним розв'язком. З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються із загального при конкретних значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, включаючи $\pm\infty$, є частинними розв'язками.

Розв'язок, у кожній точці графіка якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають особливим розв'язком.

Приклад

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = x + y - \sqrt{z}, \\ z' = 2\sqrt{z}. \end{cases} \tag{12}$$

Розв'язання. Інтегруючи друге рівняння системи, знаходимо

$$z = (x + C_1)^2, \quad x \geqslant C_1.$$

Підставимо знайдене значення z у перше рівняння:

$$y' = y - C_1.$$

Тоді

$$y = C_1 + C_2 e^x, \quad x \geqslant C_1. \tag{13}$$

Отже, система (12) має загальний розв'язок

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^x, \\ z = (x + C_1)^2, \; x \geqslant -C_1. \end{cases} \tag{14}$$

У § 2.1 було показано, що функція $z = 0$ є особливим розв'язком другого рівняння системи (12). Підставляючи її у перше рівняння, дістаємо

$$y' = x + y, \tag{15}$$

звідки

$$y = Ce^x - x - 1. \tag{16}$$

Таким чином, система (12), крім загального розв'язку (14), має ще й сім'ю особливих розв'язків

$$\begin{cases} y = Ce^x - x - 1, \\ z = 0. \end{cases} \tag{17}$$

3.4. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{1}$$

в якій функції $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, та $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — неперервні в деякому інтервалі $(a; b)$.

Якщо

$$f_i(x) \equiv 0, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

то система (1) набуде вигляду

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n. \end{cases} \tag{2}$$

Систему (2) називають лінійною однорідною системою, а систему (1) — неоднорідною. Якщо системи (1) і (2) мають одні й ті самі коефіцієнти $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то однорідну систему (2) називають відповідною неоднорідній системі (1).

Оскільки частинні похідні за змінною y_i функцій у правих частинах системи (1) дорівнюють неперервним коефіцієнтам $a_{ij}(x)$, то умова Ліпшіца відносно змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$ для системи (1) виконується в довільній замкненій області

$$\begin{gathered} \overline{D} = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : \; a < \alpha \leqslant x \leqslant \beta < b, \; -\infty < y_1 < +\infty, \\ -\infty < y_2 < +\infty, \ldots, -\infty < y_n < +\infty\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Тому за теоремою Коші існує єдиний розв'язок

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x) \tag{4}$$

системи (1), для якого

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},\ y_2(x_0) = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^{(0)}, \tag{5}$$

де $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$ — довільна точка області $\overline{D}$. Причому розв'язок (4) визначений на деякому відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, що міститься в інтервалі $(a; b)$.

Покажемо, що для лінійних систем знайдений таким чином розв'язок визначений на всьому інтервалі $(a; b)$ [20]. Нехай

$$\left|a_{ij}(x)\right| \leqslant K,\ |f_i(x)| \leqslant K,\ x \in [\alpha; \beta],\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

і

$$\left|y_i^{(0)}\right| \leqslant L,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Послідовні наближення визначимо так, як у другому розділі, тобто

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(m-1)} + a_{i2}y_2^{(m-1)} + \ldots + a_{in}y_n^{(m-1)} + f_i)\, dt, \tag{6}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$; $m \in \mathbf{N}$. Звідси для $m = 1$ матимемо

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(0)} + a_{i2}y_2^{(0)} + \ldots + a_{in}y_n^{(0)} + f_i)\, dt.$$

Тому

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}\right| \leqslant K(nL + 1)|x - x_0|,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Далі, враховуючи, що

$$y_i^{(2)} = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(1)} + a_{i2}y_2^{(1)} + \ldots + a_{in}y_n^{(1)} + f_i)\, dt,$$

знаходимо

$$\left|y_i^{(2)} - y_i^{(1)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \left(a_{i1}(y_1^{(1)} - y_1^{(0)}) + \ldots + a_{in}(y_n^{(1)} - y_n^{(0)})\right) dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} \left(|a_{i1}| \cdot |y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| + \ldots + |a_{in}| \cdot |y_n^{(1)} - y_n^{(0)}|\right) dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant nK^2(nL+1)\left|\int\limits_{x_0}^{x} |t-x_0|\,dt\right| = nK^2(Ln+1)\frac{|x-x_0|^2}{1\cdot 2},$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що

$$\left|y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}\right| \leqslant (nK)^{m-1}K(nL+1)\frac{|x-x_0|^m}{m!}.$$

Отже, всі члени рядів

$$y_i^{(0)} + (y_i^{(1)} - y_i^{(0)}) + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}) + \ldots + (y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}) + \ldots, \qquad (7)$$

$i = 1, 2, \ldots, n,$ починаючи з другого, не перевищують за модулем відповідні члени збіжного ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(nL+1)}{nK}\frac{(nK(\beta-\alpha))^m}{m!}.$$

Таким чином, ряди (7) збігаються рівномірно на відрізку $[\alpha; \beta]$, а їх суми $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ є неперервними функціями на цьому відрізку.

Аналогічно до проведеного доведення в другому розділі можна показати, що сукупність функцій

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

задовольняє лінійну систему (1) і є єдиним розв'язком цієї системи.

Якщо функції $a_{ij}(x),\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$ та $f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n,$ неперервні в інтервалі $(a; b)$ (де a і b можуть бути і невласними числами), то, спираючись на проведені міркування, можна довести існування і єдиність розв'язку системи (1) на будь-якому відрізку $[\alpha; \beta]$, що міститься в інтервалі $(a; b)$. Нехай

$$[\alpha_1; \beta_1],\ [\alpha_2; \beta_2],\ \ldots,\ [\alpha_n; \beta_n],\ \ldots -$$

послідовність відрізків, кожний наступний з яких містить попередній, причому

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = b.$$

На кожному з відрізків $[\alpha_n; \beta_n]$ побудуємо розв'язок лінійної системи (1). Оскільки побудований розв'язок єдиний, то таким чином можна визначити розв'язок в інтервалі $(a; b)$.

Враховуючи, що лінійне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (8)$$

еквівалентне лінійній системі вигляду

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-2}' = y_{n-1}, \\ y_{n-1}' = y_{n-1} + a_1(x)y_{n-1} + a_2(x)y_{n-2} + \dots + a_{n-1}(x)y_1 + a_n(x)y + f(x), \end{cases}$$

воно має єдиний розв'язок, визначений в інтервалі неперервності коефіцієнтів $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, і вільного члена $f(x)$.

3.5. Елементи матричного числення

Надалі при вивченні систем диференціальних рівнянь користуватимемося векторно-матричною формою запису. Тому в цьому параграфі спинимося на деяких питаннях з теорії матриць, необхідних для подальшого викладу теорії інтегрування лінійних систем диференціальних рівнянь.

Як відомо, матрицею із m рядків і n стовпців називають прямокутну таблицю

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

де a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — дійсні або комплексні числа.

Якщо при цьому кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m = n$, то матрицю називають квадратною n-го порядку. Якщо ж $m \neq n$, то — прямокутною розмірів $m \times n$. Числа a_{ij}, з яких побудована матриця, називають її елементами.

Крім позначення матриці (1), використовують й інші позначення. Зокрема

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Надалі позначатимемо матриці однією літерою A, B тощо. Так, якщо матриця (1) — квадратна n-го порядку, то записуватимемо

$$A = \|a_{ij}\|_1^n.$$

Визначник квадратної матриці A позначатимемо через $\det A$.

Квадратну матрицю, для якої $\det A = 0$, називають особливою, при інших значеннях визначника — неособливою.

Матрицю, яка складається тільки з одного стовпця, називають одностовпцевою, або вектором-стовпцем і записують так:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Надалі одностовпцеву матрицю називатимемо n-вимірним вектором.

Аналогічно матрицю, що складається з одного рядка, називають однорядковою, або вектором-рядком і позначають

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Квадратну матрицю n-го порядку, всі елементи якої, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називають діагональною. Її записують у вигляді

$$\left\| \begin{matrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{matrix} \right\|,$$

або

$$\{d_1, \ d_2, \ \ldots, \ d_n\}.$$

Діагональну матрицю, в якій елементи $d_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, називають одиничною. Надалі одиничну матрицю позначатимемо літерою E.

Якщо в матриці всі елементи дорівнюють нулю, то її називають нульовою і позначають

$$0 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Іноді доводиться розглядати матриці

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} \end{matrix} \right\| = \|A_{pq}\|,$$

$p = 1, 2, \ldots, m$; $q = 1, 2, \ldots, n$, елементи яких a_{ij} об'єднані в блоки A_{pq}. Такі матриці називають блоковими. Зокрема, якщо всі блоки A_{pq}, що не стоять на головній діагоналі, дорівнюють нульовій матриці, то матрицю

A називають квазідіагональною і записують

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mn} \end{Vmatrix} = \{A_{11},\ A_{22},\ \dots,\ A_{mn}\}.$$

Дві прямокутні матриці $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ розмірів $m \times n$ дорівнюють одна одній, якщо

$$a_{ij} = b_{ij},\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$$

При цьому записують $A = B$.

Нехай маємо дві прямокутні матриці $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ однакових розмірів $m \times n$. Тоді сумою (різницею) цих матриць називають матрицю $C = \|c_{ij}\|$, елементи якої c_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, відповідно дорівнюють

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}).$$

При цьому записують $C = A+B$ $(C = A-B)$. Операцію знаходження суми (різниці) матриць називають додаванням (відніманням) матриць. Легко помітити, що для операції додавання матриць справджуються переставний і сполучний закони:

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Нехай маємо прямокутну матрицю $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, і деяке число α. Тоді під добутком матриці A на число α розуміють матрицю $C = \|c_{ij}\|$ і записують

$$C = \alpha A,$$

якщо

$$c_{ij} = \alpha a_{ij},\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Операцію знаходження добутку матриці на число називають множенням матриці на число. Легко помітити, якщо A і B — прямокутні матриці однакових розмірів, а α і β — деякі числа, то справджуються рівності

$$\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B,$$
$$(\alpha \pm \beta)\, A = \alpha A \pm \beta A,$$
$$(\alpha\beta)\, A = \alpha\, (\beta A).$$

Розглянемо дві прямокутні матриці $A = \|a_{ij}\|$ розмірів $m \times n$ і

$B = \|b_{ij}\|$ розмірів $p \times q$, причому $n = p$. Тоді під добутком матриць A та B розуміють прямокутну матрицю $C = \|c_{ij}\|$ розмірів $m \times q$ таку, що

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, q,$$

і записують

$$C = AB.$$

Аналогічно, якщо $q = m$, то під добутком матриць B та A розуміють прямокутну матрицю $D = \|d_{ij}\|$ розмірів $p \times n$ таку, що

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj}, \; i = 1, 2, \ldots, p; \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

і записують

$$D = BA.$$

Операцію знаходження добутку матриць називають множенням матриць.

Зауважимо, що операція множення двох прямокутних матриць можлива тільки тоді, коли кількість стовпців у першому множнику дорівнює кількості рядків другого множника. Зокрема, ця операція завжди можлива, якщо обидві матриці квадратні одного й того самого порядку. Але навіть для квадратних матриць однакових порядків не завжди $AB = BA$. Так, наприклад,

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називають комутативними. Зокрема, одинична і нульова матриці n-го порядку комутують з будь-якою квадратною матрицею цього самого порядку.

Будь-які діагональні матриці однакового порядку комутують між собою.

Нехай A, B, C — прямокутні матриці відповідних розмірів і α — деяке число. Тоді легко довести рівності

$$(A \pm B)C = AC \pm BC,$$

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Якщо A і B — блокові матриці:

$$A = \|A_{pq}\|, \; B = \|B_{pq}\|,$$

які мають однакове розбивання на блоки, то можна показати, що

$$A \pm B = \|A_{pq} \pm B_{pq}\|.$$

Якщо блоки A_{pr} і B_{rq} можна перемножити для будь-яких p, r, q, то

$$AB = \left\| \sum_r A_{pr}B_{rq} \right\|.$$

Зокрема, якщо A і B — квазідіагональні матриці, блоки яких мають однаковий порядок, то

$$A \pm B = \{A_{11} \pm B_{11}, \; \ldots, \; A_{mn} \pm B_{mn}\},$$
$$AB = \{A_{11}B_{11}, \; \ldots, \; A_{mn}B_{mn}\}.$$

Приклад

1. Показати, що при множенні зліва будь-якої прямокутної матриці A розмірів $m \times n$ на квадратну матрицю

$$J = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (2)$$

m-го порядку всі рядки матриці A піднімаються на один рядок вгору, перший рядок матриці A зникає, а останній рядок добутку заповнюється нулями.

Розв'язання. Згідно з (2) елементи матриці J можна записати у вигляді

$$j_{ik} = \begin{cases} 1, & k = i + 1, \; i = 1, 2, \ldots, m - 1, \\ 0, & k \neq i + 1, \; i, k = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Тоді елементи матриці

$$C = JA$$

дорівнюють

$$c_{ik} = \sum_{p=1}^{m} j_{ip}a_{pk} = a_{i+1, k}, \; i = 1, 2, \ldots, m - 1; \; k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$c_{mk} = 0, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — прямокутна матриця розмірів $m \times n$.

Тоді прямокутну матрицю $\|a_{ji}\|$ розмірів $n \times m$ називають транспонованою відносно матриці A і позначають

$$A' = \|a_{ji}\|.$$

Якщо $A = A'$, то матрицю A називають симетричною, якщо ж $A = -A'$, то кососиметричною.

Матрицю

$$\bar{A} = \|\bar{a}_{ij}\|$$

($\bar{a}_{ij}$ — комплексно-спряжене число з числом a_{ij}) називають комплексно-спряженою з матрицею A, матрицю

$$A^* = \bar{A}' = \|\bar{a}_{ji}\| -$$

ермітово-спряженою або спряженою з матрицею A.

Якщо $A^* = A$, то матрицю A називають ермітовою або самоспряженою. Так, всяка дійсна симетрична матриця є ермітовою.

Справджуються наступні рівності:

$$(A^*)^* = A;$$
$$(A \pm B)^* = A^* \pm B^*;$$
$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Нехай маємо квадратну матрицю A. Тоді матрицю A^{-1} називають оберненою матрицею до матриці A, якщо справджуються рівності

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Покажемо, що довільна квадратна матриця може мати тільки одну обернену матрицю. Справді, якщо для A, крім оберненої матриці A^{-1}, існує ще одна обернена матриця B, то

$$BA = E.$$

Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, дістанемо

$$B = A^{-1}.$$

Теорема 1. *Будь-яка неособлива матриця має обернену.*

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — неособлива квадратна матриця. Розглянемо так звану союзну матрицю з матрицею A

$$B = \|A_{ji}\|, \tag{3}$$

де A_{ji} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A. Побудуємо матрицю

$$C = \frac{B}{\det A}.$$

Тоді за теоремою Лапласа* [11]

*П'єр Лаплас (1749–1827) – французький математик і фізик.

$$AC = \frac{1}{\det A}\left\| \sum_k a_{ik}A_{jk} \right\| = \frac{1}{\det A}(\delta_{ij}\det A) = E,$$

де δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Аналогічно

$$CA = \frac{1}{\det A}\left\| \sum_k a_{ki}A_{kj} \right\| = \frac{1}{\det A}(\delta_{ij}\det A) = E.$$

Отже,

$$A^{-1} = C = \frac{\|A_{ji}\|}{\det A}. \tag{4}$$

Теорему доведено.

Приклад

2. Записати в матричній формі розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

визначник якої відмінний від нуля.
Розв'язання. Введемо позначення:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді за правилом множення матриць систему (5) можна записати так:

$$Ax = b. \tag{6}$$

За умовою задачі матриця A – неособлива. Отже, вона має обернену матрицю A^{-1}. Тому, помноживши зліва обидві частини (6) на A^{-1}, дістанемо

$$x = A^{-1}b.$$

Нехай маємо квадратну матрицю A. Тоді під A^p (p – натуральне число) розуміють

$$A^p = \overbrace{A \cdot A \ldots A}^{p\ \text{разів}}.$$

При цьому покладають $A^0 = E$.

Безпосередньо з означення випливає, що для будь-яких цілих $p \geqslant 0$ і $q \geqslant 0$ справджується рівність $A^pA^q = A^{p+q}$.

Якщо деякий степінь матриці A дорівнює нульовій матриці, то матрицю A називають нільпотентною. Найменший із показників, при якому степінь матриці дорівнює нульовій матриці, називають індексом нільпотентності цієї матриці.

Приклад

3. Показати, що матриця (2) нільпотентна, індекс нільпотентності якої дорівнює m.
Розв'язання. Легко бачити, що для будь-якого натурального k

$$(7)\; J^k = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{l}\overbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad \dots \quad 1}}^{k+1}\end{array} \\
\begin{array}{r} m-k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \end{array} &
\left\|\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right\|
\end{array}.$$

Справді, при $k=1$ рівність (7) справджується. Тоді, припустивши, що рівність (7) має місце для $k = s$, і застосувавши правило множення матриць, знаходимо

$$J^{s+1} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{l}\overbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad \dots \quad 1}}^{s+2}\end{array} & \\
\left\|\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right\| &
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-s-1 \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}.$$

Отже, згідно з методом математичної індукції, рівність (7) справджується для будь-якого $k \geqslant 1$. Поклавши в ній $k = m$, дістаємо

$$J^m = 0.$$

Іноді доводиться розглядати степінь неособливої матриці A з від'ємним показником. При цьому за означенням покладають

$$A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p, \ p > 0.$$

Нехай маємо прямокутну матрицю A розмірів $m \times n$.

Нормою матриці $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, називають невід'ємне число $\|A\|$, яке задовольняє умови (аксіоми):

1) $\|0\| = 0$ і навпаки, якщо $\|A\| = 0$, то $A = 0$, де 0 — нульова матриця;

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, де α — будь-яке комплексне число;

3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, де A і B — будь-які матриці, над якими можна проводити операцію додавання матриць;

4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$, де A і B — будь-які матриці, над якими можна проводити операцію множення матриць.

Надалі під нормою матриці A будемо розуміти одне з трьох чисел

$$\|A\|_I = \max_j \sum_k |a_{jk}|,$$

$$\|A\|_{II} = \max_k \sum_j |a_{jk}|,$$

$$\|A\|_{III} = \sqrt{\sum_j \sum_k |a_{jk}|^2}.$$

Легко помітити, що кожне з наведених чисел задовольняє попередні чотири аксіоми.

Побудуємо для квадратної матриці

$$A = \|a_{ij}\|_1^n$$

n-го порядку визначник

$$D(\lambda) = \det \|A - \lambda E\|,$$

де λ — деякий параметр. Очевидно, що $D(\lambda)$ є многочленом n-го степеня від параметра λ. Цей многочлен називають характеристичним многочленом матриці A, а рівняння

$$D(\lambda) = 0,$$

або

$$\det \|A - \lambda E\| = 0 \tag{8}$$

називають характеристичним рівнянням матриці A. Корені рівняння (8), які надалі позначатимемо через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, називають характеристичними числами, або власними значеннями матриці A.

Введемо позначення $D_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, $D_k(\lambda)$ — найбільший спільний дільник всіх мінорів k-го порядку матриці $A - \lambda E$. Зрозуміло, що $D_k(\lambda)$ ділиться на $D_{k-1}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ($D_0(\lambda) \equiv 1$). Відповідні частки позначимо через

$$i_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \; i_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \; \ldots, \; i_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}.$$

Многочлени $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$, ..., $i_n(\lambda)$ називають інваріантними многочленами матриці A. Розкладемо інваріантні многочлени $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$, ..., $i_n(\lambda)$ на незвідні в полі C множники

$$\begin{aligned} i_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{c_1} (\lambda - \lambda_2)^{c_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{c_s}, \\ i_2(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{d_1} (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{d_s}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_n(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}, \end{aligned} \tag{9}$$

причому $\lambda_i \neq \lambda_j$, коли $i \neq j$.

Можна показати [2], що

$$c_k \geqslant d_k \geqslant \ldots \geqslant l_k \geqslant 0, \; k = 1, 2, \ldots, s,$$

і

$$\sum_{k=1}^{s}(c_k + d_k + \ldots + l_k) = n.$$

Відмінні від одиниці біноми $(\lambda - \lambda_1)^{c_1}$, ..., $(\lambda - \lambda_s)^{l_s}$ у формулах (9) називають елементарними дільниками матриці A.

Теорема 2. *Нехай A_1 та A_2 — квадратні матриці. Тоді сукупність елементарних дільників матриці*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

можна отримати об'єднанням елементарних дільників матриці A_1 з елементарними дільниками матриці A_2 [2].

Перейдемо тепер до питання про канонічну форму матриці. Це питання тісно пов'язане з поняттям подібності матриць.

Отже, нехай маємо дві квадратні матриці A і T однакового порядку, причому матриця T неособлива.

Тоді матрицю

$$W = T^{-1}AT \tag{10}$$

називають подібною до матриці A, а матрицю T при цьому — матрицею перетворення подібності. Наведемо деякі властивості подібних матриць.

1. Визначники подібних матриць дорівнюють один одному.

Дана властивість випливає з рівності

$$\det W = \det T^{-1} \det A \det T = \det A.$$

2. Подібні матриці мають однакові власні значення.

Доведення. Позначимо характеристичний многочлен матриці W через $\overline{D}(\lambda)$. Тоді, враховуючи (10), отримуємо

$$\overline{D}(\lambda) = \det\left(T^{-1}AT - \lambda E\right) = \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T,$$

звідки і випливає правильність властивості 2.

Теорема 3. *Для того щоб матриці A та W були подібні, необхідно і достатньо, щоб вони мали одні й ті самі інваріантні многочлени, або, що те саме, одні й ті самі елементарні дільники* [2].

Нехай елементарні дільники матриці A мають вигляд

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{p_2},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda_s)^{p_s}, \tag{11}$$

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = n.$

Розглянемо один з таких елементарних дільників

$$(\lambda - \lambda_0)^p.$$

Легко помітити, що квадратна матриця p-го порядку

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{Vmatrix} = \lambda_0 E_p + J_p, \tag{12}$$

де E_p — відповідна одинична матриця, а J_p — матриця вигляду (2), має тільки один елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$. Матрицю (12) називають жордановою* клітиною, що відповідає елементарному дільнику $(\lambda-\lambda_0)^p$.

Жорданові клітини, що відповідають елементарним дільникам (11), позначимо через

$$\lambda_1 E_1 + J_1,\ \lambda_2 E_2 + J_2,\ \ldots,\ \lambda_s E_s + J_s.$$

Тоді за теоремою 2 біноми (11) будуть елементарними дільниками квазідіагональної матриці

$$W = \{\lambda_1 E_1 + J_1,\ \lambda_2 E_2 + J_2,\ \ldots,\ \lambda_s E_s + J_s\}.$$

Оскільки матриці A і W мають одні й ті самі елементарні дільники,

*Марі Жордан (1838–1922) – французький математик.

то за теоремою 3 вони подібні, тобто існує така неособлива матриця T, що

$$W = T^{-1}AT.$$

Матрицю W називають жордановою нормальною формою або жордановою формою матриці A.

Нехай, наприклад, біноми

$$\lambda - \lambda_1,\ \lambda - \lambda_1,\ (\lambda - \lambda_1)^3,\ \lambda - \lambda_2,\ (\lambda - \lambda_2)^2$$

є елементарними дільниками матриці A. Тоді відповідна жорданова форма має вигляд

$$W = \left\| \begin{array}{cc|ccc|c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right\|.$$

Легко бачити, якщо степені всіх елементарних дільників матриці A дорівнюють одиниці, то її жорданова форма є діагональною матрицею.

Побудуємо перетворювальну матрицю T. Для цього рівність

$$W = T^{-1}AT$$

запишемо у вигляді

$$TW - AT = 0.$$

Останнє матричне рівняння відносно T рівносильне системі n^2 (n — порядок A) лінійних однорідних рівнянь відносно n^2 невідомих коефіцієнтів матриці T. Таким чином, визначення перетворювальної матриці зводиться до розв'язання системи з n^2 рівнянь. При цьому з множини розв'язків необхідно взяти такий, для якого $\det T \neq 0$. Зазначений розв'язок існує, тому що A та W подібні.

Даний спосіб визначення матриці T громіздкий, оскільки виникає необхідність розв'язування n^2 рівнянь. Тому розглянемо більш ефективний спосіб знаходження перетворювальної матриці.

Нехай

$$W = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n\}.$$

Матрицю $W(A)$ при цьому називають ще матрицею простої структури.

Розглянемо матричне рівняння

$$AT = T\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n\}, \tag{13}$$

в якому невідомими є елементи матриці T. Позначимо i-й стовпець ($i = 1, 2, \dots, n$) матриці T через t_i. Тоді з матричного рівняння (13) матимемо

$$At_i = \lambda_i t_i,\ \ i = 1, 2, \dots, n, \tag{14}$$

або

$$(A - \lambda_i E)t_i = 0.$$

Оскільки λ_i — власне значення матриці A, то

$$\det(A - \lambda_i E) = 0,\ \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Тому рівняння (14) розв'язне відносно вектора t_i (вектор t_i називають власним вектором матриці A, що відповідає власному значенню λ_i). Нехай λ_i — власне значення матриці A кратності $k_i \geqslant 1$, якому відповідають k_i простих елементарних дільників

$$\lambda - \lambda_i,\ \dots,\ \lambda - \lambda_i.$$

Тоді ранг матриці $A - \lambda_i E$ дорівнює $n - k_i$. Тому система алгебраїчних рівнянь (14) для кожного власного значення λ_i має k_i нетривіальних лінійно незалежних розв'язків.

Нехай тепер λ_0 — власне значення матриці A кратності $k \geqslant 1$, якому відповідає один елементарний дільник цієї ж кратності. Тоді згідно з [2] кореню λ_0 відповідає k стовпців (жордановий ланцюжок векторів), які можна взяти за стовпці перетворювальної матриці. Ці стовпці мають вигляд

$$c_r(\lambda_0),\ \frac{1}{1!}\,c'_r(\lambda_0),\ \dots,\ \frac{1}{(k-1)!}\,c_r^{(k-1)}(\lambda_0), \tag{15}$$

де $c_r(\lambda_0)$ — один із ненульових стовпців матриці

$$C(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{d(\lambda)},$$

де $B(\lambda)$ — союзна матриця з матрицею $A - \lambda E$, а $d(\lambda)$ — найбільший спільний дільник усіх мінорів $(n-1)$-го порядку матриці $A - \lambda E$.

Зведемо, наприклад, матрицю

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

до жорданової форми. Для цього розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння

$$D_3(\lambda) \equiv -\lambda^2 - 3\lambda^2 + 4 = 0,$$

звідки

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \lambda_3 = -2.$$

Тому матриця A має простий елементарний дільник $\lambda - 1$.

Знайдемо елементарні дільники, які відповідають кратному кореню

$$\lambda_{2,3} = -2.$$

Для цього обчислимо спочатку мінори 2-го порядку матриці $A - \lambda E$:

$$D_{11}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda, \ D_{12}(\lambda) = -(\lambda + 2), \ D_{13}(\lambda) = \lambda + 2,$$

$$D_{21}(\lambda) = -(\lambda + 2), \ D_{22}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda, \ D_{23}(\lambda) = -(\lambda + 2),$$

$$D_{31}(\lambda) = \lambda + 2, \ D_{32}(\lambda) = -(\lambda + 2), \ D_{33}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda.$$

Бачимо, що всі мінори другого порядку діляться на $\lambda + 2$. Тому

$$D_2(\lambda) = \lambda + 2.$$

Отже,

$$i_1(\lambda) = \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = -\lambda^2 - \lambda + 2 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

$$i_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = D_2(\lambda) = \lambda + 2 \ (D_1(\lambda) = 1).$$

Таким чином, матриця A має три прості елементарні дільники

$$\lambda - 1, \ \lambda + 2, \ \lambda + 2.$$

Тоді відповідна жорданова форма матиме вигляд

$$W = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Знайдемо перетворювальну матрицю T. Для цього розглянемо рівняння

$$AT = TW,$$

або

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$$

З перших двох рівнянь

$$\begin{cases} -2t_{11} + t_{21} + t_{31} = 0, \\ t_{11} - 2t_{21} + t_{31} = 0 \end{cases}$$

знаходимо

$$t_{11} = t_{31} = 1, \; t_{21} = 1.$$

Отже,

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо другий стовпець матриці T. Для цього розглянемо систему

$$\begin{cases} t_{12} + t_{22} + t_{32} = 0, \\ t_{12} + t_{22} + t_{32} = 0, \\ t_{12} + t_{22} + t_{32} = 0. \end{cases}$$

Її ранг дорівнює 1. Тому, поклавши

$$t_{22} = 1, \; t_{32} = 0,$$

матимемо

$$t_{12} = -t_{22} - t_{32} = -1.$$

Отже,

$$t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, покладаючи в системі

$$\begin{cases} t_{13} + t_{23} + t_{33} = 0, \\ t_{13} + t_{23} + t_{33} = 0, \\ t_{13} + t_{23} + t_{33} = 0, \end{cases}$$

$t_{23} = 0$, $t_{33} = 1$, знаходимо $t_{13} = 1$ і

$$t_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

причому $\det T = 3 \neq 0$.

Нехай задана послідовність прямокутних матриць $\{A^{(p)}\}$

$$A^{(p)} = \|a_{ij}^{(p)}\|, \ p = 1, 2, \ldots,$$

і нехай існує

$$\lim_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij}.$$

Тоді матрицю

$$A = \|a_{ij}\|$$

називають границею послідовності матриць $\{A^{(p)}\}$ і позначають

$$A = \lim_{p\to\infty} A^{(p)}.$$

Вираз вигляду

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \tag{16}$$

де U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ – матриці, над якими можна проводити операції додавання матриць, називають матричним рядом.

Розглянемо послідовність частинних сум

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Якщо існує

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то матричний ряд (16) називають збіжним. Матрицю S при цьому називають сумою ряду (16) і записують

$$S = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

Матричний ряд (16) називають абсолютно збіжним, якщо збігається числовий ряд

$$\|U_1\| + \|U_2\| + \ldots + \|U_n\| + \ldots \tag{17}$$

Легко помітити, якщо ряд (17) збігається, то матричний ряд (16) є збіжним, тобто будь-який абсолютно збіжний матричний ряд є збіжним.

Розглянемо матричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, \tag{18}$$

де a_k — дійсні або комплексні числа, а X — квадратна матриця порядку n.

Матричний ряд (18) називають степеневим матричним рядом.

Нехай у ряді (18) числа

$$a_k = \frac{1}{k!},$$

тоді степеневий матричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \tag{19}$$

є збіжним, бо збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = e^{\|X\|}.$$

Суму матричного ряду (19) називають експонентою матриці X і позначають

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{20}$$

Можна довести основну властивість експоненти матриці, а саме: якщо X і Y — комутативні квадратні матриці порядку n, то

$$e^X \cdot e^Y = e^{X+Y}. \tag{21}$$

Звідси, зокрема, випливає

$$(e^X)^{-1} = e^{-X}. \tag{22}$$

Нехай X та X_1 — подібні матриці, тобто

$$X_1 = T^{-1}XT, \ \det T \neq 0.$$

Тоді

$$e^{X_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(T^{-1}XT\right)^k = T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k\right)T = T^{-1}e^X T.$$

Отже,

$$e^{T^{-1}XT} = T^{-1}e^X T. \tag{23}$$

Знайдемо тепер жорданову форму експоненти матриці Ax, де x — деякий параметр. Для цього припустимо, що біноми (11) є елементарними дільниками матриці A. Тоді $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — порядки відповідних клітин Жордана

$$\lambda_1 E_1 + J_1,\ \lambda_2 E_2 + J_2,\ \ldots,\ \lambda_s E_s + J_s,$$

тобто

$$A = TWT^{-1},$$

де

$$W = \{\lambda_1 E_1 + J_1,\ \lambda_2 E_2 + J_2,\ \ldots,\ \lambda_s E_s + J_s\}.$$

Таким чином, за формулою (23) дістаємо

$$e^{Ax} = e^{TWT^{-1}x} = Te^{Wx}T^{-1} =$$

$$= T\left\{e^{(\lambda_1 E_1 + J_1)x},\ e^{(\lambda_2 E_2 + J_2)x},\ \ldots,\ e^{(\lambda_s E_s + J_s)x}\right\}T^{-1}.$$

Оскільки матриці $\lambda_i E_i$ та J_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, комутують, то

$$e^{(\lambda_i E_i + J_i)x} = e^{\lambda_i E_i x}\, e^{J_i x} = e^{\lambda_i x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_i x)^k}{k!}.$$

Як відомо, $J_i^k = 0$ при $k \geqslant p_i$. Тому

$$e^{(\lambda_i E_i + J_i)x} = e^{\lambda_i x} \sum_{k=0}^{p_i - 1} \frac{J_i^k}{k!} x^k,\ J_i^0 = E. \tag{24}$$

Знайдена матриця e^{Wx} і є шуканою.

Приклад

4. Знайти жорданову форму матриці e^{Ax}, де

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки матриця A у даному випадку є клітиною Жордана, то за формулою (23) знаходимо

$$e^{Ax} = e^{3x}\left(E + \frac{x}{1!}J + \frac{x^2}{2!}J^2\right) = e^{3x}\begin{Vmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 1 & \frac{x}{1!} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Покажемо, що $\det e^{Ax} \neq 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Справді, оскільки

$$\det e^{Ax} = \det T \det e^{(\lambda_1 E_1 + J_1)x} \dots \det e^{(\lambda_s E_s + J_s)x} \det T^{-1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \det e^{(\lambda_i E_i + J_i)x},$$

то враховуючи, що

$$\det e^{(\lambda_i E_i + J_i)x} = e^{p_i \lambda_i x}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

дістаємо

$$\det e^{Ax} = e^{\left(x \sum\limits_{i=1}^{s} p_i \lambda_i\right)}, \tag{25}$$

де $p_1 + p_2 + \dots + p_s = n$. Отже, $\det e^{Ax} \neq 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Нехай

$$F(x) = \|f_{ij}(x)\| -$$

прямокутна матриця розмірів $m \times n$, елементи якої $f_{ij}(x)$ – диференційовні функції в інтервалі $(a; b)$. Тоді матрицю

$$F'(x) = \left\|\frac{df_{ij}(x)}{dx}\right\|$$

називають похідною від матриці $F(x)$. При цьому використовують також позначення $\dfrac{dF(x)}{dx}$.

Можна довести наступні рівності:

$$(F(x) \pm \Phi(x))' = F'(x) \pm \Phi'(x),$$

$$(CF(x))' = CF'(x) \ (C \text{ – стала матриця}),$$

$$(F(x)\Phi(x))' = F'(x)\Phi(x) + F(x)\Phi'(x),$$

якщо припустити, що похідні $F'(x)$ та $\Phi'(x)$ існують.

Нехай тепер $f_{ij}(x)$ – інтегровні функції на відрізку $[a; b]$. Тоді інтегралом від матриці $F(x)$ називають матрицю

$$\left\|\int_{x_0}^{x} f_{ij}(u)\,du\right\|, \quad x_0 \in [a; b]$$

і позначають

$$\int_{x_0}^{x} F(u)\,du = \left\| \int_{x_0}^{x} f_{ij}(u)\,du \right\|, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Запишемо лінійну систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

у векторній формі. Для цього покладемо

$$A(x) = \left\| \begin{matrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{matrix} \right\|,$$

$$y(x) = \text{colon}\,(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \quad f(x) = \text{colon}\,(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x). \qquad (26)$$

У попередньому параграфі було доведено, що система (26) в області

$$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n): \ a < x < b, \ -\infty < y_1 < +\infty, \\ -\infty < y_2 < +\infty, \ldots, -\infty < y_n < +\infty\}$$

має єдиний розв'язок такий, що

$$y(x_0) = y_0, \qquad (27)$$

де x_0 — довільна точка інтервалу $(a;\ b)$, а y_0 — довільний заданий сталий вектор

$$y_0 = \text{colon}\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right), \qquad (28)$$

тобто, задача Коші (26), (27) має єдиний розв'язок.

3.6. Лінійні однорідні системи

Розв'язки лінійної однорідної системи рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \qquad (1)$$

мають ті самі основні властивості, що й розв'язки лінійного однорідного рівняння вищого порядку. Справді, запишемо систему (1) у вигляді

$$L(y) \equiv \frac{dy}{dx} - A(x)y = 0,$$

де $L = \frac{d}{dx} - A$ — лінійний диференціальний оператор. Зрозуміло, що:
1) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$,
2) $L(Cy) = CL(y)$, де y, y_1 та y_2 — диференційовні вектор-функції, а C — деяка стала.
Тоді справджується така теорема.

Теорема 1. *Якщо вектор-функції* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ *є розв'язками системи* (1), *то й вектор-функція*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), \tag{2}$$

де C_1, C_2, ..., C_n *— довільні сталі, також є розв'язком цієї системи.*

Доведення. Оскільки

$$L(y_i) \equiv 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

то, враховуючи властивості 1), 2), дістаємо

$$L(y) \equiv 0.$$

Теорему доведено.

Вектор-функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, що визначені в інтервалі $(a; b)$, називають лінійно залежними в цьому інтервалі, якщо існують сталі α_1, α_2, ..., α_n, які не всі дорівнюють нулю, такі, що справджується тотожність:

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0, \ \ x \in (a; b). \tag{3}$$

Якщо ж тотожність (3) справджується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то вектор-функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ в інтервалі $(a; b)$ називають лінійно незалежними.

Наприклад, вектори

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \ \text{і} \ \ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

є лінійно незалежними на довільному інтервалі $(a; b)$.

Будь-який набір з n лінійно незалежних розв'язків

$$y_1(x), \ y_2(x), \ \ldots, \ y_n(x)$$

системи (1) називають фундаментальною системою розв'язків лінійної системи (1).

Теорема 2. *Лінійна система* (1) *має фундаментальну систему розв'язків.*

Доведення. Згідно з теоремою існування початкові умови

$$y_i(x_0) = y_{0i}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

де y_{0i} — довільні наперед задані лінійно незалежні сталі вектори, визначають єдину систему розв'язків

$$y_1(x), \ y_2(x), \ \ldots, \ y_n(x) \tag{5}$$

системи (1).

Покажемо, що знайдені таким чином вектор-функції (5) лінійно незалежні в інтервалі $(a; b)$. Справді, припускаючи лінійну залежність вектор-функцій (5) у деякій точці $x_1 \in (a; b)$, $x_1 \neq x_0$, матимемо тотожність

$$C_1 y_1(x_1) + C_2 y_2(x_1) + \ldots + C_n y_n(x_1) = 0,$$

в якій коефіцієнти C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, не всі дорівнюють нулю.

З теореми 1 випливає, що вектор-функція

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

є розв'язком системи (1). Крім того,

$$y(x_1) = 0. \tag{6}$$

Початкові умови (6), за теоремою існування, визначають єдиний розв'язок системи (1). Але таким розв'язком, очевидно, є тривіальний розв'язок $y \equiv 0$. Тому справджується тотожність

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0, \ x \in (a; b).$$

Оскільки за побудовою не всі коефіцієнти C_i дорівнюють нулю, то функції

$$y_1(x), \ y_2(x), \ \ldots, \ y_n(x)$$

лінійно залежні в інтервалі $(a; b)$, а тому і в точці x_0, а це суперечить вибору векторів y_{i0}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отже, вектор-функції (5) лінійно незалежні в інтервалі $(a; b)$, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (1). Теорему доведено.

Теорема 3. *Якщо вектор-функції*

$$y_1(x), \ y_2(x), \ \ldots, \ y_n(x)$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійної системи (1), *то її загальний розв'язок в області*

$$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : \ a < x < b, \ -\infty < y_1 < +\infty,$$
$$-\infty < y_2 < +\infty, \ldots, -\infty < y_n < +\infty\}$$

матиме вигляд

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{7}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *— довільні сталі.*

Доведення. З теореми 1 випливає, що вектор-функція (7) є розв'язком системи (1). Вважатимемо вираз (7) системою лінійних рівнянь відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Оскільки її визначник не дорівнює нулю в інтервалі $(a; b)$, то система (7) в області D розв'язна відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Теорему доведено.

Покажемо тепер, що використовуючи формулу (7), можна знайти розв'язок лінійної однорідної системи (1), що задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \ y_0 = \text{colon}\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right),$$

де $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$ — довільна точка області D.

Справді, враховуючи таким чином задану початкову умову і вважаючи, що

$$y_i(x) = \text{colon}\,(y_{1i}(x), y_{2i}(x), \ldots, y_{ni}(x)), \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

з системи (7) дістанемо

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0), \\ y_2^{(0)} = C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(0)} = C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0). \end{cases} \tag{8}$$

Оскільки вектор-функції

$$y_1(x), \ y_2(x), \ \ldots, \ y_n(x)$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків, то вони лінійно незалежні в інтервалі $(a; b)$. Тому визначник системи (8) не дорівнює нулю. Тоді, як відомо, система (8) відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ має єдиний розв'язок

$$C_1 = \overline{C}_1, \ C_2 = \overline{C}_2, \ \ldots, \ C_n = \overline{C}_n.$$

Отже, вектор-функція

$$y(x) = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x) + \ldots + \overline{C}_n y_n(x)$$

і буде розв'язком відповідної задачі Коші.

3.7. Визначник Вронського. Формула Якобі

Нехай стовпцями матриці $Y(x)$ є розв'язки

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x) \tag{1}$$

лінійної однорідної системи рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \tag{2}$$

тобто

$$Y(x) = \begin{Vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Визначник

$$\det Y(x) = W(x) \tag{4}$$

називають визначником Вронського (вронскіаном) системи вектор-функцій (1).

Зрозуміло, якщо система вектор-функцій (1) лінійно залежна в інтервалі $(a;\ b)$, то її визначник Вронського $W(x) \equiv 0$. Якщо ж система вектор-функцій (1) лінійно незалежна в розглядуваному інтервалі, то з теореми 2 § 3.6 випливає, що вронскіан $W(x)$ не дорівнює нулю в жодній точці вказаного інтервалу.

В останньому випадку матрицю $Y(x)$ називають фундаментальною матрицею системи (2) [8].

Оскільки стовпці фундаментальної матриці $Y(x)$ задовольняють систему (2), то

$$\frac{dy_i(x)}{dx} \equiv A(x)\,y_i(x),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

або в координатній формі

$$y'_{ij}(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\,y_{kj}(x),\ \ i,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Як відомо, похідна визначника матриці $Y(x)$ дорівнює сумі n визначників:

$$(\det Y(x))' \equiv W'(x) = I_1 + I_2 + \ldots + I_n, \tag{6}$$

де

$$I_1 = \det\begin{Vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \dots & y'_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{Vmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$I_n = \det\begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \dots & y'_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи тотожність (5), для визначника I_1 матимемо

$$I_1 = \det\begin{Vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}\, y_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}\, y_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}\, y_{kn} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Віднімаючи від першого рядка в останньому визначнику другий рядок, помножений на a_{12}, третій рядок, помножений на a_{13}, і, нарешті, n-й рядок, помножений на a_{1n}, остаточно дістанемо

$$I_1 = \det\begin{Vmatrix} a_{11}\, y_{11} & a_{11}\, y_{12} & \dots & a_{11}\, y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{Vmatrix} = a_{11} W(x).$$

Аналогічно знаходимо

$$I_i = a_{ii} W(x), \;\; i = 2, 3, \dots, n.$$

Таким чином, рівність (6) є диференціальним рівнянням

$$\frac{dW(x)}{dx} = \operatorname{tr} A(x)\, W(x), \tag{7}$$

в якому

$$\operatorname{tr} A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) -$$

слід матриці $A(x)$. Звідси

$$W(x) = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(x)\, dx}. \tag{8}$$

Якщо у формулі (8) $x = x_0$, то

$$C = W(x_0).$$

Тому остаточно

$$W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(x)\,dx}. \tag{9}$$

Рівність (9) називають формулою Якобі*.

Теорема 1. *Для того щоб матриця* $Y(x)$ *була фундаментальною матрицею лінійної системи* (2), *необхідно і достатньо, щоб*

$$\det Y(x) = W(x) \neq 0, \ x \in (a;\ b).$$

Доведення. *Достатність.* Припустимо, що $\det Y(x) \neq 0$. Тоді стовпці $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матриці $Y(x)$ в інтервалі $(a;\ b)$ лінійно незалежні, тобто $Y(x)$ — фундаментальна матриця системи (2).

Необхідність. Припустимо, що матриця $Y(x)$ є фундаментальною матрицею системи (2).

У попередньому параграфі було показано, що задача Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \ \ y(x_0) = y_0 \neq 0$$

має єдиний розв'язок

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x),$$

причому сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, визначаються з системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x_0) = y_0.$$

Оскільки остання алгебраїчна система має єдиний розв'язок відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то її визначник $\det Y(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a;\ b)$. Теорему доведено.

Зазначимо, що фундаментальна матриця $Y(x)$ лінійної системи (2) визначається з точністю до деякої неособливої сталої матриці C. Справді, за теоремою 1 матриця $Y(x)C$ — фундаментальна.

Навпаки, нехай $Y_1(x)$ і $Y_2(x)$ — дві фундаментальні матриці системи (2). Покладемо

$$\Psi(x) = Y_1^{-1}(x)\, Y_2(x).$$

---

*Карл Якобі (1804–1851) — німецький математик і механік.

Тоді

$$Y_2(x) = Y_1(x)\Psi(x).$$

Диференціюючи останню рівність, дістаємо

$$Y_2'(x) = Y_1'(x)\Psi(x) + Y_1(x)\Psi'(x),$$

тобто

$$A(x)Y_2(x) = A(x)Y_1(x)\Psi(x) + Y_1(x)\Psi'(x).$$

Звідси

$$Y_1(x)\Psi'(x) = 0,$$

або

$$\Psi'(x) = 0.$$

Таким чином,

$$\Psi(x) = C \equiv \text{const}.$$

Знаючи фундаментальну матрицю $Y(x)$ системи (2), її загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$y(x) = Y(x)c, \tag{10}$$

де c — довільний сталий n-вимірний вектор. Справді, вектор-функція (10) є розв'язком системи (2). Крім того, враховуючи, що

$$\det Y(x) \neq 0, \quad x \in (a;\, b),$$

дістанемо

$$c = Y^{-1}(x)\,y(x).$$

Зауважимо, що теорема 1 виконується не для довільної системи лінійно незалежних вектор-функцій. Справді, визначник Вронського двох лінійно незалежних векторів

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

дорівнює нулю:

$$\left(W = \det\begin{Vmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{Vmatrix} \equiv 0\right),$$

тобто дані вектор-функції не можуть бути розв'язками однієї і тієї самої однорідної системи лінійних рівнянь з неперервними коефіцієнтами.

3.8. Лінійні неоднорідні системи

Лінійна неоднорідна система

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \ x \in (a; b) \tag{1}$$

має таку саму структуру загального розв'язку, що й лінійне неоднорідне диференціальне рівняння вищого порядку. А саме, загальний розв'язок системи (1) можна записати у вигляді суми загального розв'язку відповідної однорідної системи

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \tag{2}$$

та деякого частинного розв'язку неоднорідної системи.

Теорема 1. *Якщо* $y_{\text{н}}(x)$ *— який-небудь частинний розв'язок неоднорідної системи* (1), *а* $y_{\text{o}}(x) = Y(x)c$ *— загальний розв'язок відповідної однорідної системи* (2), *то вектор-функція*

$$y(x) = y_{\text{o}}(x) + y_{\text{н}}(x) \tag{3}$$

в області

$$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : \ a < x < b, \ -\infty < y_1 < +\infty,$$
$$-\infty < y_2 < +\infty, \ldots, -\infty < y_n < +\infty\}$$

є загальним розв'язком неоднорідної системи (1).

Доведення. Запишемо рівність (3) наступним чином:

$$y(x) = Y(x)c + y_{\text{н}}(x). \tag{4}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $y(x)$ є розв'язком системи (1) для будь-якого сталого вектора c. Крім того, оскільки матриця $Y(x)$ фундаментальна, то її визначник відмінний від нуля для всіх $x \in (a; b)$. Тому

$$c = Y^{-1}(x)(y(x) - y_{\text{н}}(x)).$$

Теорему доведено.

Використовуючи формулу (4), можна знайти розв'язок неоднорідної системи (1), що задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \ y_0 = \text{colon}\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right),$$

де $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$ — довільна точка області D. Для цього розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$y_0 = Y(x_0)c + y_{\text{н}}(x_0)$$

відносно вектора c. Оскільки

$$\det Y(x) \neq 0, \ x \in (a;\ b),$$

то

$$c = Y^{-1}(x_0)(y(x_0) - y_{\text{н}}(x_0)).$$

Таким чином, розв'язок відповідної задачі Коші матиме вигляд

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)(y(x_0) - y_{\text{н}}(x_0)) + y_{\text{н}}(x).$$

Як і у разі лінійного неоднорідного диференціального рівняння, частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи (1) можна знайти використовуючи метод варіації довільних сталих.

Отже, нехай

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x) -$$

фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи (2). Тоді згідно з теоремою 3 § 3.6, вектор-функція

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x),$$

де $C_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ — довільні сталі, є її загальним розв'язком. Шукатимемо частинний розв'язок неоднорідної системи (1) у вигляді

$$y_{\text{н}}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x). \tag{5}$$

При цьому припускатимемо, що невідомі функції $C_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n,$ мають неперервні похідні в розглядуваному інтервалі. Підставляючи вектор-функцію (5) у систему (1), дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'(x) = A(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x) + f(x).$$

Оскільки

$$y_i'(x) \equiv A(x)\, y_i(x),\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

то остаточно матимемо

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x) = f(x),$$

або

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_{1i}(x) = f_1(x), \\
\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_{2i}(x) = f_2(x), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_{ni}(x) = f_n(x).
\end{gathered} \tag{6}$$

Визначник алгебраїчної системи рівнянь (6) відносно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, …, $C_n'(x)$ є визначником Вронського відповідної фундаментальної системи розв'язків. Тому він не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу $(a;\, b)$. Отже, система (6) має єдиний розв'язок

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

звідки

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx \tag{7}$$

(сталі інтегрування дорівнюють нулю). Підставляючи знайдені значення $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, у формулу (5), дістаємо частинний розв'язок

$$y_{\text{н}}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)\, dx \tag{8}$$

неоднорідної системи (1).

Зауваження. Іноді зручніше використовувати векторно-матричну форму запису. Отже, припустимо, що фундаментальна матриця $Y(x)$ однорідної системи (2) відома. Тоді загальний розв'язок цієї системи матиме вигляд

$$y(x) = Y(x)c,$$

де c — довільний сталий n-вимірний вектор.

Частинний розв'язок неоднорідної системи (1) шукатимемо у вигляді

$$y(x) = Y(x)\, c(x). \tag{9}$$

Причому, компоненти вектора $c(x)$ вважатимемо функціями, що мають неперервні похідні в розглядуваному інтервалі. Підставляючи $y(x)$ у систему (1), отримуємо

$$Y'(x)\, c(x) + Y(x)\, c'(x) = A(x)\, Y(x)\, c(x) + f(x).$$

Отже,

$$Y(x)\,c'(x) = f(x).$$

Враховуючи, що $\det Y(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a;\, b)$, знаходимо

$$c'(x) = Y^{-1}(x)\,f(x),$$

звідки

$$c(x) = \int Y^{-1}(x)\,f(x)\,dx,$$

тобто приходимо до формул (7).

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2 + e^x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язання. Легко перевірити, що загальним розв'язком відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

буде система функцій

$$y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x},\ \ y_2 = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x}.$$

Тому шукатимемо частинний розв'язок неоднорідної системи (10) у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\,e^{3x} + C_2(x)\,e^{-x}, \\ y_2 = C_1(x)\,e^{3x} - C_2(x)\,e^{-x}. \end{cases} \tag{11}$$

Підставляючи (11) у задану систему (10), дістаємо

$$\begin{cases} C_1'(x)\,e^{3x} + C_2'(x)\,e^{-x} = e^x, \\ C_1'(x)\,e^{3x} - C_2'(x)\,e^{-x} = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\,e^{-2x},\ \ C_2'(x) = \frac{1}{2}\,e^{2x}.$$

Отже,

$$C_1(x) = -\frac{1}{4}\,e^{-2x},\ \ C_2(x) = \frac{1}{4}\,e^{2x}.$$

Тому система функцій

$$y_1(x) = 0,\ \ y_2(x) = -\frac{1}{2}\,e^x$$

буде частинним розв'язком неоднорідної системи (10).

Таким чином загальний розв'язок системи (10) матиме вигляд

$$y_1(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x},\ y_2(x) = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x.$$

У векторній формі загальний розв'язок можна записати так:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} e^x \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} \\ C_2 e^{-x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} e^x \end{pmatrix}.$$

3.9. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами

Як відомо, для побудови загального розв'язку лінійної однорідної системи

$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{1}$$

достатньо знайти її фундаментальну матрицю.

Розглянемо матричний метод розв'язування систем зі сталими коефіцієнтами (1).

Теорема 1. *Фундаментальна матриця системи* (1) *має вигляд*

$$Y(x) = e^{Ax}. \tag{2}$$

Доведення. Здиференціювавши почленно ряд

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x^k,$$

дістанемо

$$\frac{de^{Ax}}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} x^{k-1} = Ae^{Ax}.$$

Отже, стовпці матриці $Y(x)$ є розв'язками системи (1). Крім того, в § 3.5 показано, що

$$\det e^{Ax} \neq 0,\ x \in (a;\ b)$$

(числа a і b можуть бути і невласними). Теорему доведено.

Покажемо, що структура фундаментальної матриці системи (1) визначається структурою елементарних дільників матриці A.

Припустимо спочатку, що матриця A має прості елементарні дільники

$$\lambda - \lambda_1,\ \lambda - \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda - \lambda_n, \tag{3}$$

причому серед її власних значень $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ можуть бути однаковими.

Тоді матриця A подібна діагональній матриці

$$W = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n\},$$

тобто

$$A = TWT^{-1}.$$

Звідси

$$Y_1(x) = e^{Ax} = e^{TWxT^{-1}} = Te^{Wx}T^{-1}. \tag{4}$$

Помноживши рівність (4) справа на T, дістанемо

$$Y(x) = Te^{Wx}.$$

Легко бачити, що $Y(x)$ є фундаментальною матрицею системи (1).

Нехай

$$T = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$Y(x) = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n x} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} t_{11}e^{\lambda_1 x} & t_{12}e^{\lambda_2 x} & \ldots & t_{1n}e^{\lambda_n x} \\ t_{21}e^{\lambda_1 x} & t_{22}e^{\lambda_2 x} & \ldots & t_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1}e^{\lambda_1 x} & t_{n2}e^{\lambda_2 x} & \ldots & t_{nn}e^{\lambda_n x} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Таким чином, у разі простих елементарних дільників фундаментальна матриця системи (1) має вигляд (5). При цьому, якщо $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ — корінь характеристичного рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$\det \| A - \lambda E \| = 0, \tag{6}$$

то число $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ також буде коренем рівняння (6). Оскільки відшукання перетворювальної матриці T можна звести до розв'язання алгебраїчної системи рівнянь, то з властивостей оператора $L = \dfrac{d}{dx} - A$ випливає, що дійсна та уявна частини комплексного розв'язку системи (1) є розв'язками цієї системи. Отже, при цьому можна побудувати n дійсних лінійно незалежних розв'язків системи (1).

Нехай тепер матриця A має $s \leqslant n$ елементарних дільників

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \ (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \ \dots, \ (\lambda - \lambda_s)^{p_s}, \tag{7}$$

$p_1 + p_2 + \dots + p_s = n, \ 1 \leqslant p_k \leqslant n$, причому серед її власних значень

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots, \ \lambda_s$$

можуть бути однаковими.

Тоді матрицю A за допомогою перетворення подібності можна звести до квазідіагональної матриці

$$W = \{\lambda_1 E_1 + J_1, \ \lambda_2 E_2 + J_2, \ \dots, \ \lambda_s E_s + J_s\},$$

тобто

$$A = TWT^{-1},$$

де $\lambda_i E_i + J_i, \ i = 1, 2, \dots, s,$ — жорданова клітина порядку p_i.

Звідси

$$Y_1(x) = e^{Ax} = e^{TWxT^{-1}} = Te^{Wx}T^{-1}.$$

Помноживши останню рівність справа на T, знаходимо фундаментальну матрицю системи (1)

$$Y(x) = T\left\{e^{(\lambda_1 E_1 + J_1)x}, \ e^{(\lambda_2 E_2 + J_2)x}, \ \dots, \ e^{(\lambda_s E_s + J_s)x}\right\}, \tag{8}$$

де

$$e^{(\lambda_i E_i + J_i)x} = e^{\lambda_i x} e^{J_i x} =$$

$$= e^{\lambda_i x} \begin{Vmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{p_i-2}}{(p_i-2)!} & \frac{x^{p_i-1}}{(p_i-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \dots & \frac{x^{p_i-3}}{(p_i-3)!} & \frac{x^{p_i-2}}{(p_i-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{x}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$i = 1, 2, \dots, s.$

Зауважимо, що перші $n - 1$ стовпців матриці $e^{J_i x}$ можна отримати із останнього послідовним диференціюванням.

Фундаментальна матриця (8) складається з s груп стовпців, які відповідають клітинам квазідіагональної матриці W.

Причому i-та група

$$Q_{1,i}^{(p_i-1)}(x)\,e^{\lambda_i x},\ Q_{1,i}^{(p_i-2)}(x)\,e^{\lambda_i x},\ \ldots,\ Q'_{1,i}(x)\,e^{\lambda_i x},\ Q_{1,i}(x)\,e^{\lambda_i x},$$
$$Q_{2,i}^{(p_i-1)}(x)\,e^{\lambda_i x},\ Q_{2,i}^{(p_i-2)}(x)\,e^{\lambda_i x},\ \ldots,\ Q'_{2,i}(x)\,e^{\lambda_i x},\ Q_{2,i}(x)\,e^{\lambda_i x},\qquad (9)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_{n,i}^{(p_i-1)}(x)\,e^{\lambda_i x},\ Q_{n,i}^{(p_i-2)}(x)\,e^{\lambda_i x},\ \ldots,\ Q'_{n,i}(x)\,e^{\lambda_i x},\ Q_{n,i}(x)\,e^{\lambda_i x}$$

містить p_i розв'язків системи (1).

З будови матриці $e^{J_i x}$ випливає, що степінь принаймні одного многочлена $Q_{k,\,i}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, дорівнює $p_i - 1$.

Таким чином, елементарному дільнику

$$(\lambda - \lambda_i)^{p_i},\ i = 1, 2, \ldots, s,$$

відповідає p_i лінійно незалежних розв'язків (9).

Приклади

Знайти загальний розв'язок систем диференціальних рівнянь.

1.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2. \end{cases} \qquad (10)$$

Розв'язання. Нехай

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix},\ y(x) = \text{colon}\,(y_1(x), y_2(x)).$$

Тоді характеристичне рівняння

$$\det \|A - \lambda E\| \equiv \det \begin{Vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{Vmatrix} \equiv \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

має прості корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Тому елементарні дільники матриці A також прості. Отже, матриця A подібна діагональній матриці

$$W = \{1, 4\},$$

тобто

$$A = TWT^{-1}.$$

Перетворювальну матрицю T знайдемо із системи

$$AT = TW,$$

або

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Звідси, наприклад,

$$T = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Таким чином, фундаментальна матриця системи (10) матиме вигляд

$$Y(x) = Te^{Wx} \equiv \begin{Vmatrix} -2e^x & e^{4x} \\ e^x & e^{4x} \end{Vmatrix}.$$

Тому вектор-функція

$$y(x) = Y(x)c,$$

де c — довільний сталий двовимірний вектор, є загальним розв'язком системи (10).

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 2y_3 - y_2. \end{cases} \tag{11}$$

Розв'язання. Тут

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad y(x) = \text{colon}\,(y_1(x), y_2(x), y_3(x)).$$

Як легко показати, числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$ є коренями відповідного характеристичного рівняння. Оскільки найбільший спільний дільник мінорів другого порядку матриці $A - \lambda E$ дорівнює 1, то матриця A має два елементарні дільники $\lambda - 2$ та $(\lambda - 1)^2$. Тому

$$W = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрицю перетворення подібності T знайдемо тим самим способом, що й у прикладі 1:

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тоді фундаментальна матриця заданої системи рівнянь матиме вигляд

$$A = Te^{Wx} \equiv \begin{Vmatrix} e^{2x} & e^x & e^x(1+x) \\ 0 & e^x & e^x(x-1) \\ e^{2x} & e^x & xe^x \end{Vmatrix}.$$

Отже, вектор-функція

$$y(x) = Y(x)c,$$

де c — довільний сталий тривимірний вектор, є загальним розв'язком системи (11).

Використовуючи теорію елементарних дільників, лінійну систему (1) можна зінтегрувати і не застосовуючи поняття експоненти матриці.

Справді, нехай біноми (7) є елементарними дільниками матриці A. Тоді матриця A подібна до квазідіагональної матриці

$$W = \{\lambda_1 E_1 + J_1,\ \lambda_2 E_2 + J_2,\ \ldots,\ \lambda_s E_s + J_s\}.$$

Зробивши в системі (1) заміну

$$y(x) = Tz(x),$$

де $z(x)$ — нова невідома функція, а T — матриця перетворення подібності, дістанемо

$$\frac{dz}{dx} = T^{-1}ATz,$$

або

$$\frac{dz}{dx} = Wz. \qquad (12)$$

Запишемо систему (12) в координатній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + z_2, \\ \dfrac{dz_2}{dx} = \lambda_1 z_2 + z_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_{p_1-1}}{dx} = \lambda_1 z_{p_1-1} + z_{p_1}, \\ \dfrac{dz_{p_1}}{dx} = \lambda_1 z_{p_1}, \\ \dfrac{dz_{p_1+1}}{dx} = \lambda_2 z_{p_1+1} + z_{p_1+2}, \\ \dfrac{dz_{p_1+2}}{dx} = \lambda_2 z_{p_1+2} + z_{p_1+3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_{p_1+p_2-1}}{dx} = \lambda_2 z_{p_1+p_2-1} + z_{p_1+p_2}, \\ \dfrac{dz_{p_1+p_2}}{dx} = \lambda_2 z_{p_1+p_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_{n-p_s+1}}{dx} = \lambda_s z_{n-p_s+1} + z_{n-p_s+2}, \\ \dfrac{dz_{n-p_s+2}}{dx} = \lambda_s z_{n-p_s+2} + z_{n-p_s+3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dx} = \lambda_s z_{n-1} + z_n, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = \lambda_s z_n, \end{cases} \qquad (13)$$

$z(x) = \text{colon}\ (z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))$. Система (13) складається з n лінії-них рівнянь першого порядку. Тому, починаючи з останнього рівняння, її можна зінтегрувати в елементарних функціях.

Зауважимо, що у разі простих елементарних дільників матриця W — діагональна:

$$W = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n\}.$$

Тому система (12) в координатній формі матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1, \\ \dfrac{dz_2}{dx} = \lambda_2 z_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = \lambda_n z_n. \end{cases}$$

Як приклад дослідимо поведінку інтегральних кривих системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = cx + ky, \\ \dfrac{dy}{dt} = ax + by, \end{cases} \tag{14}$$

де $a,\ b,\ c,\ k$ — дійсні числа, $ak - bc \neq 0$ в околі точки спокою $x = 0,\ y = 0$.

Зрозуміло, якщо $cx + ky \neq 0$, то система (14) еквівалентна диференціальному рівнянню першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ky} \tag{15}$$

у тому розумінні, що кожний розв'язок рівняння (15) є траєкторією системи (14) на фазовій площині і, навпаки, будь-яка траєкторія системи (14) на фазовій площині, відмінна від точки спокою $x = 0,\ y = 0$, є інтегральною кривою рівняння (15). Якщо ж $ax + by \neq 0$, то система (14) еквівалентна рівнянню

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx + ky}{ax + by}. \tag{16}$$

Очевидно, що точка (0, 0) для рівняння (15) є ізольованою особливою. Оскільки права частина рівняння (15) або права частина рівняння (16) у довільному замкненому околі точки (x_0, y_0), $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, є неперервною функцією і задовольняє за змінною y або змінною x умову Ліпшіца, то через кожну точку цього околу проходитиме одна інтегральна крива рівняння (15) або (16). Дослідимо поведінку цих кривих поблизу особливої точки (0, 0).

Для цього запишемо систему (14) у векторній формі

$$\frac{dz}{dt} = Az, \tag{17}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} c & k \\ a & b \end{pmatrix},$$

а $z(t) = \text{colon}\,(x(t), y(t))$. Розв'язуючи характеристичне рівняння (6), знаходимо

$$\lambda_{1,2} = \frac{b+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b-c)^2 + 4ak}. \tag{18}$$

Тоді залежно від значень коренів λ_1 і λ_2 можливі два випадки: 1) λ_1 і λ_2 — різні; 2) λ_1 і λ_2 — однакові.

1. У разі простих коренів характеристичного рівняння існує неособлива матриця T така, що

$$W = T^{-1}AT,$$

причому

$$W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

У системі (17) покладемо

$$z(t) = Tq(t),$$

де

$$q(t) = \text{colon}\,(q_1(t),\ q_2(t)).$$

Тоді

$$\frac{dq}{dt} = T^{-1}ATq,$$

або

$$\frac{dq}{dt} = Wq. \tag{19}$$

Система (19) розпадається на два скалярних диференціальних рівняння

$$\frac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1,\quad \frac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2. \tag{20}$$

Надалі розглядатимемо два випадки: а) λ_1 і λ_2 — дійсні; б) λ_1 і λ_2 — комплексні.

а) якщо λ_1 і λ_2 — дійсні, то можна вважати, що $\lambda_2 \neq 0$.

Тоді з рівнянь (20) отримуємо

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{q_1}{q_2}. \tag{21}$$

Звідси

$$q_1 = C|q_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \qquad (22)$$

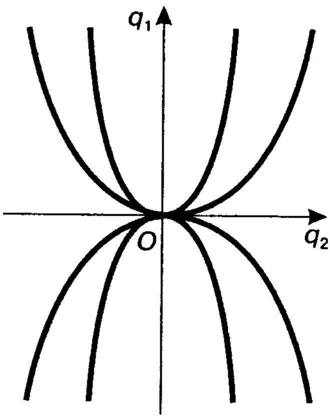


Рис. 28

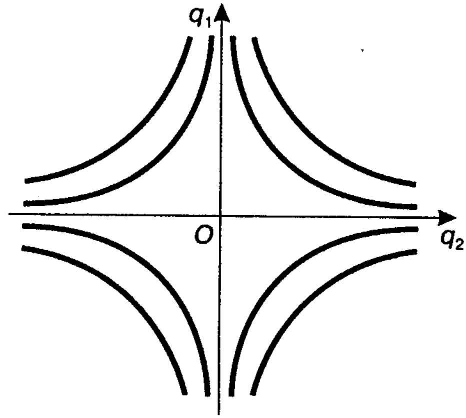


Рис. 29

Припустимо, що λ_1 і λ_2 мають однакові знаки і $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тоді $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$, а отже, всі інтегральні криві (22) є параболами, які мають спільну точку $q_1 = q_2 = 0$ і дотикаються в ній до осі Oq_2 (рис. 28). Зазначимо, що крім інтегральних кривих (22) існує ще одна інтегральна крива, яка відповідає розв'язку $q_2 = 0$, $q_1 \neq 0$. Точку (0, 0) при цьому називають вузлом.

Нехай тепер λ_1 і λ_2 мають різні знаки. Тоді розв'язок (22) можна записати так:

$$q_1 = C|q_2|^{-\gamma}, \ \gamma = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Отже, при цьому лише чотири інтегральні криві $q_1 = 0$ ($q_2 \neq 0$), $q_2 = 0$ ($q_1 \neq 0$) прилягають до особливої точки (0, 0), решта інтегральних кривих має вигляд, зображений на рис. 29. Особливу точку (0, 0) тут називають сідлом;

б) нехай λ_1 і λ_2 — комплексні. Оскільки коефіцієнти характеристичного рівняння (6) дійсні, то λ_1 і λ_2 комплексно-спряжені, тобто

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \ \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Тоді матриця перетворення T також є комплексною. Покажемо, що враховуючи довільність елементів першого стовпця матриці T, їх можна підібрати так, щоб величини q_1 і q_2 були комплексно-спряженими:

$$q_1 = u + wi, \; q_2 = u - wi. \tag{23}$$

Елементи t_{ik}, $i, k = 1, 2$, матриці T визначаються двома системами рівнянь

$$\begin{cases} t_{11}(c - \lambda_1) + t_{12}a = 0, \\ t_{11}k + t_{12}(b - \lambda_1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t_{21}(c - \lambda_2) + t_{22}a = 0, \\ t_{21}k + t_{22}(b - \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник кожної з систем дорівнює нулю, то ці системи мають ненульові розв'язки:

$$t_{12} = \frac{k}{\lambda_1 - b} t_{11}, \quad t_{22} = \frac{k}{\lambda_2 - b} t_{21},$$

де $t_{11} \neq 0$, $t_{21} \neq 0$ (знаменники в останніх формулах відмінні від нуля). Тоді, покладаючи

$$t_{21} = \bar{t}_{11},$$

де $\bar{t}_{11}$ — число, спряжене з t_{11}, маємо

$$t_{22} = \bar{t}_{12}.$$

Крім того,

$$q_1 = t_{11}z_1 + t_{12}z_2, \; q_2 = t_{21}z_1 + t_{22}z_2.$$

Тому, якщо

$$u = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad w = \frac{q_1 - q_2}{2i}, \tag{24}$$

то остаточно дістанемо

$$q_1 = u + wi, \; q_2 = u - wi,$$

причому величини u та w, згідно з (24), при дійсних значеннях z_1, z_2 набувають також дійсних значень.

Підставивши в рівняння (21) знайдені значення q_1, q_2, λ_1, λ_2, матимемо

$$\frac{du + i\,dw}{du - i\,dw} = \frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i}\,\frac{u + wi}{u - wi},$$

або

$$(du + i\,dw)((\alpha u - \beta w) - i(\alpha w + \beta u)) = (du - i\,dw)((\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u)),$$

а це є рівність типу $z = \bar{z}$. Прирівнюючи в останній рівності уявні частини до нуля, отримуємо

$$\frac{du}{dw} = \frac{\alpha u - \beta w}{\beta u + \alpha w},$$

$$\frac{\beta(u\,du + w\,dw)}{u^2 + w^2} = \frac{\alpha(u\,dw - w\,du)}{u^2 - w^2},$$

або

$$\frac{1}{2}\,d\ln(u^2 + w^2) + \frac{\alpha}{\beta}\,d\,\mathrm{arctg}\,\frac{w}{u} = 0.$$

Звідси

$$\sqrt{u^2 + w^2} = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{w}{u}}.$$

Нарешті, покладаючи $u = r\cos\varphi$, $w = r\sin\varphi$, матимемо

$$r = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}. \tag{25}$$

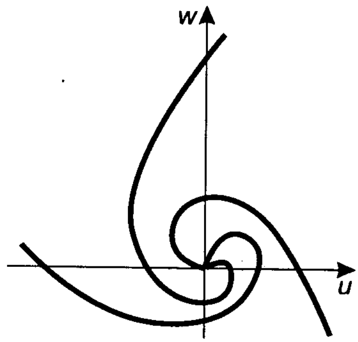


Рис. 30

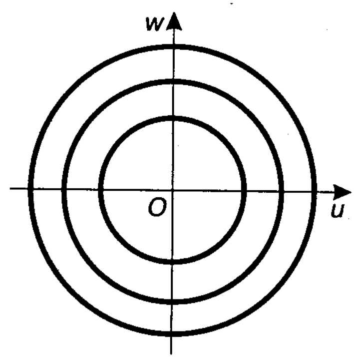


Рис. 31

Рівняння (25) задає сім'ю логарифмічних спіралей в площині uOw з асимптотичною точкою в полюсі. При цьому всі криві (25) прилягають до початку координат і роблять нескінченне число обертів навколо точки $u = 0$, $w = 0$ (рис. 30). Таку саму якісну картину матимемо і в околі особливої точки $x = 0$, $y = 0$ диференціального рівняння (15). Особливу точку $x = 0$, $y = 0$ при цьому називають фокусом.

Якщо λ_1 і λ_2 суто уявні, тобто $\alpha = 0$, то криві (25) у площині uOw утворюють сім'ю концентричних кіл (рис. 31). Особливу точку при цьому називають центром.

2. Корені характеристичного рівняння дорівнюють один одному: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тоді

$$\lambda = \frac{b + c}{2}.$$

При цьому вигляд матриці W залежить від кратності елементарного дільника, що відповідає кореню λ. Можливі два випадки:

а) кореню λ відповідає два простих елементарних дільники;

б) кореню λ відповідає один елементарний дільник кратності два.

Випадок а) можливий тоді і тільки тоді, коли ранг системи рівнянь

$$\begin{cases} (c-\lambda)t_{11} + kt_{12} = 0, \\ at_{11} + (b-\lambda)t_{12} = 0, \end{cases} \tag{26}$$

з якої визначаються елементи матриці T, дорівнює нулю. Тоді мають виконуватися рівності

$$a = k = 0;\ \ b = c = \lambda.$$

Отже, рівняння (15) матиме вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Інтегральні криві цього рівняння визначаються за формулами

$$y = Cx,\ \ x \neq 0;$$
$$x = 0,\ \ y \neq 0.$$

Таким чином, маємо сім'ю півпрямих, що прилягають до точки (0, 0) кожна із своїм напрямком (рис. 32). Особливу точку (0, 0) при цьому також називають вузлом (дикритичним вузлом).

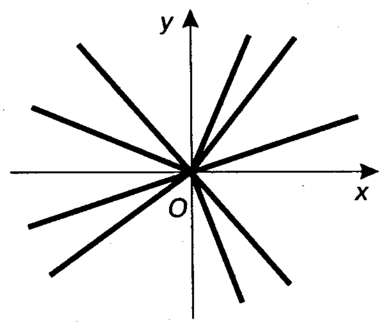


Рис. 32

Розглянемо тепер випадок б). Він можливий тоді, коли ранг системи (26) дорівнює одиниці, тобто матриця W є клітиною Жордана:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Отже, система (19) набуде вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \lambda q_1 + q_2, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \lambda q_2. \end{cases}$$

Звідси дістанемо лінійне рівняння

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{q_1}{q_2} + \frac{1}{\lambda},$$

загальним розв'язком якого є функція

$$q_1 = \frac{1}{\lambda} q_2 \ln|q_2| + Cq_2,\ \ q_2 \neq 0. \tag{27}$$

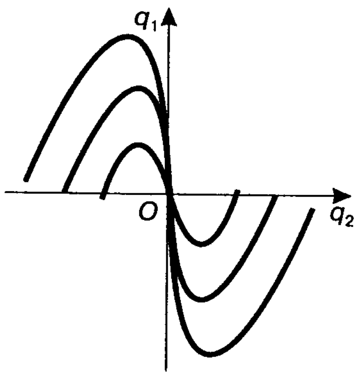


Рис. 33

Таким чином, інтегральні криві прилягають до точки (0, 0), кутовий коефіцієнт дотичних до яких дорівнює $\pm\infty$ (рис. 33). Крім того, обидві частини осі Oq_2 :

$$q_2 = 0, \; q_1 \neq 0$$

також є інтегральними кривими рівняння (27). Особливу точку (0, 0) при цьому називають виродженим вузлом.

Розглянемо ще один метод розв'язування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами, а саме метод Ейлера. Для цього запишемо систему (1) у координатній формі

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{28}$$

Згідно з методом Ейлера, розв'язок системи (28) шукатимемо у вигляді

$$y_1(x) = \gamma_1 e^{\lambda x}, \; y_2(x) = \gamma_2 e^{\lambda x}, \; \ldots, \; y_n(x) = \gamma_n e^{\lambda x}, \tag{29}$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ і λ – деякі сталі.

Підставляючи функції $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, та їх похідні в систему (28) і скорочуючи на $e^{\lambda x}$, дістаємо

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0, \end{cases} \tag{30}$$

або в матричній формі

$$(A - \lambda E)\gamma = 0, \tag{31}$$

де

$$\gamma = \text{colon}\,(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n).$$

Для того щоб система (30) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто

$$D(\lambda) \equiv \det \begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{Vmatrix} = 0. \tag{32}$$

Припустимо спочатку, що корені характеристичного рівняння (32) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – прості. При цьому для кожного λ_i із системи (31) можна знайти ненульовий вектор

$$\gamma_i = \mathrm{colon}\,(\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \dots, \gamma_{ni}).$$

Таким чином, матимемо n розв'язків системи (28):

$$\begin{aligned} &y_{11}(x) = \gamma_{11}e^{\lambda_1 x},\ y_{12}(x) = \gamma_{12}e^{\lambda_2 x},\ \dots,\ y_{1n}(x) = \gamma_{1n}e^{\lambda_n x}, \\ &y_{21}(x) = \gamma_{21}e^{\lambda_1 x},\ y_{22}(x) = \gamma_{22}e^{\lambda_2 x},\ \dots,\ y_{2n}(x) = \gamma_{2n}e^{\lambda_n x}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y_{n1}(x) = \gamma_{n1}e^{\lambda_1 x},\ y_{n2}(x) = \gamma_{n2}e^{\lambda_2 x},\ \dots,\ y_{nn}(x) = \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}, \end{aligned} \tag{33}$$

лінійно незалежних в інтервалі $(a;\, b)$.

Справді, припускаючи лінійну залежність розв'язків (33), дістаємо тотожності

$$\alpha_1\gamma_{i1}e^{\lambda_1 x} + \alpha_2\gamma_{i2}e^{\lambda_2 x} + \dots + \alpha_n\gamma_{in}e^{\lambda_n x} \equiv 0,\ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

в яких не всі α_i дорівнюють нулю. Нехай для визначеності $\alpha_1 \neq 0$. Тоді, за побудовою, хоча б один із добутків $\alpha_1\gamma_{i1}$ відмінний від нуля. Отже, функції

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \dots,\ e^{\lambda_n x}$$

лінійно залежні в інтервалі $(a;\, b)$, а це неможливо (див. § 2.8).

Таким чином, функції (33) утворюють фундаментальну систему розв'язків. А тому загальний розв'язок лінійної системи (28) має вигляд

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{12}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\gamma_{1n}e^{\lambda_n x}, \\ y_2(x) = C_1\gamma_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\gamma_{2n}e^{\lambda_n x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = C_1\gamma_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{n2}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases} \tag{34}$$

При цьому, якщо $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ – корінь характеристичного рівняння, то число $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ також буде коренем рівняння (32). Кореню λ_1 відповідає наступний розв'язок системи (28):

$$y_1(x) = \gamma_1 e^{(\alpha+i\beta)x},\ y_2(x) = \gamma_2 e^{(\alpha+i\beta)x},\ \dots,\ y_n(x) = \gamma_n e^{(\alpha+i\beta)x},$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — комплексні числа. Нехай

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{12}, \; \gamma_2 = \gamma_{21} + i\gamma_{22}, \; \ldots, \; \gamma_n = \gamma_{n1} + i\gamma_{n2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (\gamma_{11} + i\gamma_{12})e^{(\alpha+i\beta)x}, \\ y_2(x) &= (\gamma_{21} + i\gamma_{22})e^{(\alpha+i\beta)x}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) &= (\gamma_{n1} + i\gamma_{n2})e^{(\alpha+i\beta)x}. \end{aligned} \tag{35}$$

Відділяючи в комплексному розв'язку (35) дійсні та уявні частини, дістаємо два розв'язки:

$$\begin{aligned} y_{11}(x) &= e^{\alpha x}(\gamma_{11}\cos\beta x - \gamma_{12}\sin\beta x), \\ y_{21}(x) &= e^{\alpha x}(\gamma_{21}\cos\beta x - \gamma_{22}\sin\beta x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}(x) &= e^{\alpha x}(\gamma_{n1}\cos\beta x - \gamma_{n2}\sin\beta x) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} y_{12}(x) &= e^{\alpha x}(\gamma_{11}\sin\beta x + \gamma_{12}\cos\beta x), \\ y_{22}(x) &= e^{\alpha x}(\gamma_{21}\sin\beta x + \gamma_{22}\cos\beta x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n2}(x) &= e^{\alpha x}(\gamma_{n1}\sin\beta x + \gamma_{n2}\cos\beta x), \end{aligned}$$

лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Неважко переконатися, що спряжений корінь λ_2 не породжує нових дійсних лінійно незалежних розв'язків.

Отже, і в цьому разі можна побудувати n дійсних лінійно незалежних розв'язків системи (1).

Приклади

Знайти загальний розв'язок систем диференціальних рівнянь.

1.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2. \end{cases} \tag{36}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0,$$

тобто

$$(\lambda - 1)^2 - 4 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1.$$

Тому розв'язок, породжений коренем λ_1, шукатимемо у вигляді

$$y_1(x) = \gamma_1 e^{3x},\ y_2(x) = \gamma_2 e^{3x}.$$

Підставляючи функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ в систему (36) і скорочуючи на e^{3x}, дістаємо

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\gamma_2 = 1$, тоді $\gamma_1 = 1$.

Таким чином, шуканий розв'язок матиме вигляд

$$y_1(x) = e^{3x},\ y_2(x) = e^{3x}.$$

Знайдемо тепер розв'язок, який відповідає кореню λ_2. Аналогічно підставляючи функції

$$y_1(x) = \gamma_1 e^{-x},\ y_2(x) = \gamma_2 e^{-x}$$

у систему (36), отримуємо

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Тому, якщо $\gamma_2 = 1$, то $\gamma_1 = -1$.

Таким чином, корінь λ_2 породжує розв'язок вигляду

$$y_1(x) = -e^{-x},\ y_2(x) = e^{-x}.$$

Отже, загальний розв'язок системи (36) матиме вигляд

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 + y_2. \end{cases} \tag{37}$$

Розв'язання. Як легко переконатись, числа

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$$

є коренями відповідного характеристичного рівняння. Тому розв'язок, що відповідає кореню $\lambda_1 = 1 + 3i$, шукатимемо у вигляді

$$y_1(x) = \gamma_1 e^{(1+3i)x},\ y_2(x) = \gamma_2 e^{(1+3i)x}.$$

Підставляючи функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ у систему (37), дістаємо

$$\begin{cases} (1+3i)\gamma_1 = \gamma_1 - 3\gamma_2, \\ (1+3i)\gamma_2 = 3\gamma_1 + \gamma_2, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} i\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ i\gamma_2 + \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\gamma_1 = 1$, тоді $\gamma_2 = -i$.

Таким чином, шуканий розв'язок матиме вигляд

$$y_1(x) = e^{(1+3i)x}, \; y_2(x) = -ie^{(1+3i)x}.$$

Відокремлюючи в знайденому комплексному розв'язку дійсні та уявні частини, отримаємо два дійсних розв'язки:

$$y_{11}(x) = e^x \cos 3x, \; y_{12}(x) = e^x \sin 3x,$$

$$y_{21}(x) = e^x \sin 3x, \; y_{22}(x) = -e^x \cos 3x.$$

Тому загальний розв'язок системи (37) матиме вигляд

$$\begin{cases} y_1(x) = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x), \\ y_2(x) = e^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x). \end{cases}$$

Нехай тепер λ_i — корінь характеристичного рівняння (32) кратності k_i. Тоді, використовуючи формули (9), можна побудувати k_i лінійно незалежних розв'язків, що відповідають цьому характеристичному числу. Утворивши лінійну комбінацію знайдених таким чином розв'язків з k_i довільними сталими $C_1, C_2, \ldots, C_{k_i}$, дістанемо розв'язок системи (28) вигляду

$$y_1(x) = P_1(x)\,e^{\lambda_i x}, \; y_2(x) = P_2(x)\,e^{\lambda_i x}, \; \ldots, \; y_n(x) = P_n(x)\,e^{\lambda_i x}, \tag{38}$$

де $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ — многочлени, степені яких не перевищують $k_i - 1$ і які мають у сукупності k_i довільних коефіцієнтів.

На практиці розв'язок, породжений коренем λ_i характеристичного рівняння кратності k_i, записують у вигляді (38), вважаючи $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ — многочленами $(k_i - 1)$-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, підставляють у систему (28) і прирівнюють коефіцієнти біля відповідних степенів x.

Приклад

3. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2. \end{cases} \tag{39}$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{Vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Тому розв'язок, породжений коренем λ_1, шукатимемо у вигляді

$$y_1(x) = (a_1 + a_2x)e^{2x}, \; y_2(x) = (b_1 + b_2x)e^{2x}.$$

Підставляючи функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ в систему (39), дістаємо

$$\begin{cases} a_2 + 2a_1 + 2a_2x = a_1 + a_2x - b_1 - b_2x, \\ b_2 + 2b_1 + 2b_2x = a_1 + a_2x + 3(b_1 + b_2x). \end{cases}$$

В останній системі прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{cases} a_2 + 2a_1 = a_1 - b_1, \\ b_2 + 2b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_2 = a_2 - b_2, \\ 2b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases} \qquad (40)$$

Із системи (40) знаходимо

$$a_2 = -b_2.$$

Тому

$$a_1 = -b_1 + b_2.$$

Покладаючи $b_1 = C_1$ і $b_2 = C_2$, запишемо знайдений загальний розв'язок системи (39)

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2x)e^{x}, \\ y_2 = -(C_1 - C_2 + C_2x)e^{2x}. \end{cases}$$

Якщо $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ — комплексний k-кратний корінь характеристичного рівняння, то число $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ також буде коренем рівняння (32) тієї ж кратності.

Побудувавши k лінійно незалежних комплексних розв'язків, що відповідають характеристичному числу λ_1, і виділивши в них дійсні та уявні частини, дістанемо $2k$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Отже, в загальному випадку кожному простому дійсному характеристичному числу відповідає один частинний розв'язок, кожній парі простих спряжених комплексних характеристичних чисел — два дійсних лінійно незалежних розв'язки, дійсному характеристичному числу кратності k — k дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків, а кожній парі спряжених комплексних характеристичних чисел кратності k — $2k$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Таким чином, побудовано n дійсних розв'язків, лінійно незалежних в розглядуваному інтервалі, тобто фундаментальну систему розв'язків лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами (28).

Вправи

Розв'язати дані системи диференціальних рівнянь.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + z. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z - x + y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

Визначити тип особливої точки вказаних рівнянь. Побудувати інтегральні криві на площині xOy.

13. $y' = \dfrac{2x + y}{3x + 4y}$.

14. $y' = \dfrac{x - 4y}{2y - 3x}$.

15. $y' = \dfrac{y - 2x}{y}$.

16. $y' = \dfrac{2x - y}{x - y}$.

17. $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - 3x}$.

18. $y' = \dfrac{4x - y}{3x - 2y}$.

Розділ 4
СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Стійкість і нестійкість розв'язків. Основні означення й поняття

При дослідженні реальних процесів і явищ, описуваних системами диференціальних рівнянь, виникає необхідність не тільки відшукання їх розв'язку, але й виявлення різноманітних властивостей цих розв'язків. Оскільки проблема відшукання розв'язків у загальному випадку нерозв'язна, то постає питання про вивчення тих або інших властивостей розв'язків диференціальних рівнянь за непрямими їх ознаками і властивостями.

Отже, нехай деяке явище описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \tag{1}$$

де $x(t)$ та $F(t, x)$ — n-вимірні вектор-функції, з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Стосовно компонент $F_i(t, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вектора $F(t, x)$ припускатимемо, що вони задовольняють умови теореми Коші в області

$$\Omega = \{(t, x) : \ t \in (-\infty; +\infty), \ x \in G \subset \mathbf{R^n}\}.$$

На практиці початкові дані неможливо визначити абсолютно точно. Якщо малі зміни початкових умов (2) зумовлюють значні відхилення розв'язків, то такі розв'язки навіть наближено не описують розглядуване явище. Тому важливо знати умови, при яких малі зміни початкових даних призводять до малих відхилень розв'язків системи (1).

Якщо систему (1) розглядати на скінченному проміжку, то відповідь на поставлене питання можна отримати, використовуючи теорему Коші.

Теорема 1. *Якщо компоненти $F_i(t, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вектора $F(t, x)$ у деякому замкненому прямокутнику $D_1 \subset \mathbf{R^{n+1}}$ задовольняють обидві умови теореми Коші, то розв'язок $x = x(t, t_0, x_0)$ системи* (1), *що визначається початковою умовою* (2), *у деякій області $D_2 \subset D_1$ неперервно залежить від початкових даних.*

Якщо ж $t \in [a; +\infty)$, то питання залежності розв'язків від початкових даних вивчає теорія стійкості.

Розв'язок $x = \varphi(t)$, $a \leqslant t < +\infty$, системи (1) називають стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geqslant a$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що для довільного розв'язку $x = \psi(t)$, $t_0 \leqslant t < +\infty$, цієї самої системи, який задовольняє умову

$$\|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta, \tag{3}$$

справджується нерівність

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon, \ t \geqslant t_0. \tag{4}$$

Розв'язок $x = \varphi(t)$ називають асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він стійкий і, крім того, для кожного $t_0 \geqslant a$ існує $\delta_0 = \delta_0(t_0)$ таке, що для довільного розв'язку $\psi(t)$ системи (1)

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$$

як тільки

$$\|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta_0.$$

Розв'язок $x = \varphi(t)$ називають нестійким, якщо він не є стійким. Таким чином, для нестійкості розв'язку достатньо, щоб існували $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geqslant a$ такі, що для будь-якого як завгодно малого $\delta > 0$ знайшовся б розв'язок системи (1), для якого виконувалася б нерівність (3) і для якого в деякий момент часу $t_\delta > t_0$ нерівність (4) перетворилася б на рівність.

Наведемо геометричну інтерпретацію введених понять [8] (рис. 34).

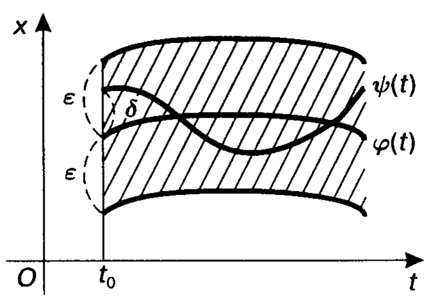


Рис. 34

Розв'язок $x = \psi(t)$:

1) стійкий, якщо будь-яка інтегральна крива $x = \psi(t)$ системи (1), яка проходить при $t = t_0$ через точку, достатньо близьку до $(t_0, \varphi(t_0))$, цілком належить як завгодно вузькій ε-трубці, побудованій навколо кривої $x = \varphi(t)$ (під ε-трубкою будемо розуміти множину точок $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ простору $\mathbf{R^n}$, для якої

$$\rho(y, \varphi(t)) < \varepsilon,$$

де $\rho(y, \varphi(t))$ — відстань від точки y до кривої $x = \varphi(t)$);

*Олександр Ляпунов (1857–1918) — російський математик і механік.

2) асимптотично стійкий, якщо крива $x = \psi(t)$ наближається до кривої $x = \varphi(t)$ при $t \to \infty$;

3) нестійкий, якщо знайдеться інтегральна крива $x = \psi(t)$ системи (1), яка проходить при $t = t_0$ через точку, достатньо близьку до $(t_0, \varphi(t_0))$, і яка при деякому $t_\delta > t_0$ потрапляє на межу як завгодно малої ε-трубки, побудованої навколо кривої $x = \varphi(t)$.

Приклад

1. Дослідити на стійкість розв'язки системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2. \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язання. Легко бачити, що розв'язком заданої системи є сукупність функцій

$$x_1(t) = C_1, \ x_2(t) = C_2 e^{-t},$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. Дослідимо на стійкість довільний фіксований розв'язок

$$\bar{x}_1(t) = \overline{C}_1, \ \bar{x}_2(t) = \overline{C}_2 e^{-t}$$

заданої системи. Нехай

$$x(t) = \text{colon}\,(x_1(t), x_2(t))$$

і

$$\bar{x}(t) = \text{colon}\,(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)).$$

Тоді

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| = |x_1(t) - \bar{x}_1(t)| + |x_2(t) - \bar{x}_2(t)| =$$

$$= |C_1 - \overline{C}_1| + e^{-t}|C_2 - \overline{C}_2|.$$

Отже, якщо

$$\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta = \varepsilon,$$

то

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \ t \geqslant t_0.$$

Таким чином, довільний розв'язок системи (5) стійкий за Ляпуновим.

Дослідження на стійкість за Ляпуновим довільного розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального (тотожно рівного нулю) розв'язку деякої іншої системи. Для цього в системі (1) покладемо

$$y = x - \varphi(t).$$

Оскільки

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\varphi(t)}{dt} = F(t, x) - F(t, \varphi(t)) = F(t, y + \varphi(t)) - F(t, \varphi(t)),$$

то система (1) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y), \tag{6}$$

де

$$Y(t, y) = F(t, y + \varphi(t)) - F(t, \varphi(t)), \text{ причому } Y(t, 0) \equiv 0.$$

За побудовою вектор-функція $y(t) \equiv 0$ є розв'язком системи (6).

Отже, задача про стійкість розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (1) зводиться до задачі про стійкість тривіального розв'язку системи (6).

4.2. Стійкість розв'язків лінійної системи

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

з неперервними на проміжку $[a; +\infty)$ коефіцієнтами. Оскільки стійкість будь-якого розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (1) еквівалентна стійкості тривіального розв'язку цієї самої системи, то розв'язки лінійної системи (1) або всі одночасно стійкі (асимптотично стійкі), або нестійкі.

Лінійну систему (1) називають стійкою, асимптотично стійкою або нестійкою залежно від того, чи є її розв'язки стійкими, асимптотично стійкими або нестійкими.

Надалі досліджуватимемо на стійкість тривіальний розв'язок системи (1).

Нехай $X(t)$ — довільна фіксована фундаментальна матриця системи (1).

Тоді розв'язок $x = x(t)$ заданої системи, для якого $x(t_0) = x_0$ можна записати наступним чином:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0,$$

а різницю будь-яких двох таких розв'язків — у вигляді

$$x(t) - y(t) = X(t)X^{-1}(t_0)(x_0 - y_0). \tag{2}$$

Зауважимо, що матриця

$$X(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

є фундаментальною матрицею лінійної системи (1), причому

$$X(t_0, t_0) = E.$$

Нехай:

1) матриця $X(t)$ — обмежена на проміжку $[a;\ +\infty)$, тобто існує додатне число M таке, що

$$\|X(t)\| \leqslant M \text{ при } t \geqslant a.$$

При цьому для довільного розв'язку $x = x(t)$ системи (1) справджується нерівність

$$\|x(t)\| \leqslant \|X(t, t_0)\|\,\|x_0\| \leqslant M_1\|x_0\|,\ \ t \geqslant a,$$

де

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant M_1.$$

Отже,

$$\|x(t) - 0\| < \varepsilon,\ \ t \geqslant t_0, \tag{3}$$

якщо лише

$$\|x(t_0) - 0\| = \|x_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{M_1}. \tag{4}$$

Тому тривіальний розв'язок системи (1) стійкий за Ляпуновим;
2) $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$. При цьому елементи матриці $X(t)$ обмежені при $t \geqslant a$ і, отже, розв'язок $x \equiv 0$ є стійким. Крім того, з рівності (2) для будь-якого розв'язку $x = x(t)$ дістаємо

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - 0\| = 0.$$

Тому розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) асимптотично стійкий за Ляпуновим;
3) матриця $X(t)$ — необмежена на проміжку $[a;\ +\infty)$. Тоді серед її стовпців знайдеться стовпець $x_i(t)$ з необмеженою нормою, тобто існуватиме послідовність $t_k \to \infty,\ k \to \infty$, така, що

$$\lim_{k\to\infty} \|x_i(t_k)\| = \infty.$$

Доведемо, що у цьому разі тривіальний розв'язок системи (1) нестійкий. Для цього достатньо для $\varepsilon = 1$ і для довільного як завгодно малого $\delta > 0$ побудувати розв'язок $x = x(t)$ такий, що

$$\|x(t_0)\| < \delta$$

і водночас для деякого $t = t_\delta > t_0$

$$\|x(t_\delta)\| \geqslant 1.$$

Нехай

$$x_0 = \frac{\delta}{2\|X(t_0)\|} X(t_0)e_i,$$

де e_i — n-вимірний вектор, i-та компонента якого дорівнює одиниці, решта — нулю. Тоді, враховуючи, що початкова умова $x(t_0) = x_0$ визначає єдиний розв'язок системи (1), дістаємо

$$x(t) = \frac{\delta}{2\|X(t_0)\|} X(t)e_i = \frac{\delta}{2\|X(t_0)\|} x_i(t)$$

і

$$\|x(t_0)\| \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Оскільки

$$\|x_i(t)\| \to \infty, \ k \to \infty,$$

то існуватиме число $t_\delta > t_0$ таке, що

$$\|x_i(t_\delta)\| \geqslant \frac{2\|X(t_0)\|}{\delta}.$$

Тому для $t \geqslant t_\delta$ остаточно матимемо

$$\|x(t)\| \geqslant 1.$$

Таким чином ми показали, що обмеженість матриці $X(t)$ на проміжку $[a; +\infty)$ є достатньою умовою стійкості, рівність $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$ — достатньою умовою асимптотичної стійкості, а необмеженість матриці $X(t)$ на вказаному проміжку — достатньою умовою нестійкості тривіального, а тому і довільного розв'язку системи (1).

Покажемо тепер, що наведені вище умови є не тільки достатніми, але й необхідними умовами відповідно стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості довільного розв'язку лінійної системи (1). Для цього достатньо довести дане твердження для тривіального розв'язку заданої системи. Отже, нехай розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) стійкий за Ляпуновим. Припустимо, що її фундаментальна матриця (фундаментальна матриця визначається з точністю до неособливої сталої матриці) необмежена при $t \geqslant a$. Тоді за доведеним вище тривіальний розв'язок системи (1) нестійкий. А це суперечить умові.

Аналогічно можна довести, що з нестійкості розв'язку $x \equiv 0$ випливає необмеженість фундаментальної матриці системи (1).

Нехай тепер тривіальний розв'язок заданої системи асимптотично стійкий. Тоді для довільного розв'язку $x_i = x_i(t)$ системи (1)

$$\lim_{t\to\infty} \|x_i(t) - 0\| = 0.$$

Отже, і

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Таким чином, справджується наступна теорема.

Теорема 1. *Розв'язок* $x \equiv 0$ *лінійної системи* (1) *стійкий тоді і тільки тоді, коли її фундаментальна матриця* $X(t)$ *обмежена на проміжку* $[a; +\infty)$, *асимптотично стійкий — коли ця матриця задовольняє умову*

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0,$$

нестійкий — коли матриця $X(t)$ *необмежена на вказаному проміжку.*

4.3. Стійкість лінійної системи зі сталими коефіцієнтами. Критерій Рауса — Гурвіца

У попередньому параграфі було знайдено умови стійкості розв'язків лінійної системи. При цьому її фундаментальна матриця вважалась відомою. Для систем зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

така матриця матиме вигляд

$$X(t) = e^{At}.$$

Тоді розв'язок $x = x(t)$ системи (1), для якого $x(t_0) = x_0$, можна записати так:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Нехай

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{p_2},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda_s)^{p_s} -$$

елементарні дільники матриці A, яким відповідають наступні жорданові клітини:

$$\lambda_1 E_1 + J_1,\ \lambda_2 E_2 + J_2,\ \ldots,\ \lambda_s E_s + J_s,$$

$p_1 + p_2 + \ldots + p_s = n$. Тоді існує неособлива матриця T така, що

$$A = TWT^{-1},$$

де

$$W = \{\lambda_1 E_1 + J_1,\ \lambda_2 E_2 + J_2,\ \ldots,\ \lambda_s E_s + J_s\}.$$

Отже,

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} = Te^{W(t-t_0)}T^{-1} =$$

$$= T\left\{e^{(\lambda_1 E_1+J_1)(t-t_0)},\ e^{(\lambda_2 E_2+J_2)(t-t_0)},\ \ldots,\ e^{(\lambda_s E_s+J_s)(t-t_0)}\right\}T^{-1}. \qquad (2)$$

Нехай:

1) $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, s,$ причому власним значенням матриці A з нульовою дійсною частиною відповідають прості елементарні дільники (відповідні клітини Жордана будуть одновимірними). Тоді за побудовою фундаментальна матриця $X(t)$ обмежена на проміжку $[a;\ +\infty)$. Отже, за теоремою 1 § 4.2 система (1) стійка;

2) $\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1, 2, \ldots, s.$ Тоді з формули (2) випливає, що система (1) асимптотично стійка;

3) хоча б одному власному значенню з нульовою дійсною частиною відповідає неодновимірна клітина Жордана або дійсна частина принаймні одного власного значення матриці A додатна. Тоді фундаментальна матриця $X(t)$ необмежена на проміжку $[a;\ +\infty)$. Отже, система (1) нестійка.

Легко бачити, що наведені вище умови є не лише достатніми, але й необхідними умовами відповідно стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості системи (1).

Справді, нехай система (1), наприклад, стійка. Якщо припустити існування номера j такого, що $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то знайдеться принаймні один необмежений елемент матриці $X(t)$ на проміжку $[a;\ +\infty)$. Тоді і сама фундаментальна матриця $X(t)$ буде необмеженою на цьому проміжку. Отже, система (1) – нестійка, що суперечить умові. Аналогічно можна показати нестійкість системи (1) і тоді, коли нульовому власному значенню відповідає кратний елементарний дільник (неодновимірна клітина Жордана).

Покажемо тепер, що з нестійкості системи (1) випливає умова 3). Справді, припустивши правильність умови 1), приходимо до висновку про стійкість заданої системи. Тому умова 1) не виконується, а отже, має місце умова 3).

Нехай, нарешті, лінійна система (1) асимптотично стійка, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Припустимо, що існує власне значення λ_j матриці A таке, що

$$\operatorname{Re}\lambda_j \geqslant 0.$$

Тоді, враховуючи, що

$$e^{W(t-t_0)} = T^{-1}X(t)T,$$

дістаємо

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{W(t-t_0)}\| = 0,$$

що суперечить припущенню.

Таким чином, справджується теорема.

Теорема 1. *Для того щоб система* (1) *була стійкою необхідно і достатньо, щоб дійсні частини власних значень матриці A були недодатними, причому власним значенням з нульовою дійсною частиною відповідали б прості елементарні дільники. Для асимптотичної стійкості системи* (1) *необхідно і достатньо, щоб дійсні частини власних значень матриці A були від'ємними. Для нестійкості системи* (1) *необхідно і достатньо, щоб хоча б одному власному значенню з нульовою дійсною частиною відповідав кратний елементарний дільник або дійсна частина принаймні одного власного значення матриці A була додатною.*

Наприклад, розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = px_1 - x_2 \end{cases}$$

стійкі при $p = 0$, асимптотично стійкі при $p < 0$ і нестійкі при $p > 0$, бо власні значення λ_1 і λ_2 матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ p & -1 \end{Vmatrix}$$

дорівнюють:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + p}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + p}.$$

У першому випадку знайдені власні значення — недодатні і прості, у другому — мають від'ємні дійсні частини, у третьому — одне з них додатне.

Отже, для систем зі сталими коефіцієнтами при розв'язуванні задачі на стійкість важливо з'ясувати знак дійсної частини коренів відповідного характеристичного рівняння.

Умови, при виконанні яких дійсні частини власних значень матриці A від'ємні, містить наступна теорема [6].

Теорема 2 (Рауса* – Гурвіца).** *Дійсні частини коренів рівняння*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

---

*Едуард Раус (1831–1907) – англійський фізик і математик.

**Адольф Гурвіц (1859–1919) – німецький математик.

від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатними є визначники

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix} \equiv a_n\Delta_{n-1},$$

де $a_i = 0$, *якщо* $i > n$.

Приклад

1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{IV} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0.$$

Тут

$$a_0 = 1,\ a_1 = 5,\ a_2 = 13,\ a_3 = 19,\ a_4 = 10.$$

Отже,

$$\Delta_1 = 5 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0.$$

Тому тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ заданого рівняння асимптотично стійкий.

4.4. Стійкість за першим наближенням

Дослідимо на стійкість тривіальний розв'язок нелінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x),\ t \geqslant t_0 \tag{1}$$

$(F(t, 0) \equiv 0)$. Нехай

$$F(t, x) = A(t)x + F_1(t, x), \tag{2}$$

де $A(t)$ — деяка матриця, а $F_1(t, x)$ — вектор-функція, що задовольняє нерівність

$$\|F_1(t, x)\| \leqslant \alpha\|x\|, \ t \geqslant t_0, \tag{3}$$

причому стала величина $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ — достатньо мала в околі нуля ($\|x\| < \varepsilon$). Вважатимемо, що

$$\alpha(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Тоді система (1) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F_1(t, x). \tag{4}$$

Систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{5}$$

називають системою першого (лінійного) наближення.

З'ясуємо, як пов'язана стійкість розв'язків системи першого наближення (5) із стійкістю розв'язків заданої системи (1).

Теорема 1. *Якщо для вектор-функції $F_1(t, x)$ у системі* (4) *виконується умова* (3) *і фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ ($X(t_0, t_0) = E$) системи першого наближення задовольняє нерівність*

$$\|X(t, \tau)\| \leqslant Me^{-\gamma(t-\tau)}, \ t_0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{6}$$

де M та γ — деякі додатні константи, причому

$$\gamma - M\alpha > 0,$$

то тривіальний розв'язок системи (4) *асимптотично стійкий за Ляпуновим.*

Доведення. Легко бачити, що система диференціальних рівнянь (4) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ еквівалентна наступній системі інтегральних рівнянь

$$x(t) = X(t, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)\, F_1(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{7}$$

Нехай $x = x(t)$ — розв'язок системи (4), для якого

$$\|x(t)\| < \varepsilon \tag{8}$$

при $t_0 \leqslant t < T < \infty$. Тоді з нерівностей (3) та (6) дістаємо

$$\|x(t)\| \leqslant Me^{-\gamma(t-t_0)}\|x(t_0)\| + M\alpha \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-\tau)}\|x(\tau)\|\, d\tau, \tag{9}$$

або

$$e^{\gamma(t-t_0)}\|x(t)\| \leqslant M\|x(t_0)\| + M\alpha\int_{t_0}^{t} e^{\gamma(\tau-t_0)}\|x(\tau)\|\,d\tau \tag{10}$$

для всіх $t_0 \leqslant t < T$. Покладемо

$$y(t) = e^{\gamma(t-t_0)}\|x(t)\|$$

і запишемо (10) у вигляді

$$y(t) \leqslant M\|x(t_0)\| + M\alpha\int_{t_0}^{t} y(\tau)\,d\tau.$$

Звідси

$$y(t) \leqslant M\|x(t_0)\| + M\alpha\int_{t_0}^{t}\left(M\|x(t_0)\| + M\alpha\int_{t_0}^{t}(M\|x(t_0)\| + \ldots\right)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M\|x(t_0)\|\left(1 + \frac{M\alpha(t-t_0)}{1!} + \frac{(M\alpha(t-t_0))^2}{2!} + \ldots\right) = M\|x(t_0)\|\,e^{M\alpha(t-t_0)}.$$

Отже, для всіх $t_0 \leqslant t < T$

$$\|x(t)\| \leqslant e^{-(\gamma-M\alpha)(t-t_0)}M\|x(t_0)\| < \varepsilon \tag{11}$$

за умови, що

$$\|x(t_0)\| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}. \tag{12}$$

Покажемо, якщо початкові дані довільного розв'язку $x = x(t)$ задовольняють умову (12), то для самого розв'язку на проміжку $[t_0; +\infty)$ справджуватиметься нерівність (11). Справді, припустивши існування $T > t_0$ такого, що $\|x(T)\| = \varepsilon$, дістаємо

$$\|x(t)\| < \varepsilon,\ \ t_0 \leqslant t < T.$$

Тоді з нерівності (11) отримуємо протиріччя

$$\varepsilon = \|x(T)\| \leqslant e^{-(\gamma-M\alpha)(T-t_0)}M\|x(t_0)\| < \varepsilon.$$

Крім того, з (11) знаходимо

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0.$$

Таким чином, тривіальний розв'язок системи (4) асимптотично стійкий за Ляпуновим. Теорему доведено.

Нехай тепер матриця $A(t)$ — стала, тобто $A(t) = A$. Тоді

$$X(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}, \ t_0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Отже,

$$\|X(t, \tau)\| \leqslant \|T\| \max_{1\leqslant i\leqslant s} \|e^{(t-\tau)(\lambda_i E_i + J_i)}\| \, \|T^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant C \max_{1\leqslant i\leqslant s} \left| e^{\lambda_i(t-\tau)} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{(t-\tau)^k}{k!} \right| \leqslant Ce^{\beta u} P(u),$$

де

$$u = t - \tau, \ \beta = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \operatorname{Re} \lambda_i,$$

а $P(u)$ — деякий многочлен степеня

$$q = \max_{1\leqslant i\leqslant s} (p_i - 1).$$

Оскільки для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{P(u)}{e^{\varepsilon u}} = 0,$$

то

$$\|X(t, \tau)\| \leqslant Me^{\rho(t-\tau)}, \ t_0 \leqslant \tau \leqslant t,$$

де $M = M(\varepsilon)$ — деяка стала, а $\rho = \beta + \varepsilon$. Припустимо, що дійсні частини власних значень матриці A від'ємні. Тоді

$$\gamma = -\rho$$

і справджується теорема 2.

Теорема 2. *Якщо для вектор-функції* $F_1(t, x)$ *у системі*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F_1(t, x) \tag{13}$$

виконується умова (3) *і дійсні частини власних значень матриці* A *від'ємні, то тривіальний розв'язок системи* (13) *асимптотично стійкий за Ляпуновим.*

4.5. Функції Ляпунова

У попередньому параграфі було досліджено на стійкість розв'язки нелінійної системи диференціальних рівнянь. При цьому використовувалась відповідна система першого наближення. Але може виявитись, що при дослідженні лише першого наближення тривіальний розв'язок буде стійким, хоча насправді він нестійкий, і навпаки. Розглянемо, наприклад, наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2^2 + x_3^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Її загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = C_3 + (C_1^2 + C_2^2)t, \\ x_2 = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ x_3 = C_2 \cos t - C_1 \sin t, \end{cases}$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. Отже, за означенням тривіальний розв'язок системи (1) нестійкий, а у першому наближенні

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \ \frac{dy_2}{dt} = y_3, \ \frac{dy_3}{dt} = -y_2,$$

тобто тривіальний розв'язок стійкий.

Таким чином, у даному випадку за першим наближенням не можна зробити висновок про стійкість тривіального розв'язку системи (1). Для дослідження стійкості розв'язків систем, аналогічних до (1), Ляпунов запропонував метод, в якому використовуються допоміжні функції з певними властивостями.

Нехай функція $V(t, x)$ неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку на множині

$$D = [t_0; +\infty) \times K_r, \ K_r = \left\{x \in \mathbf{R}^\mathbf{n} : \|x\| < r, \ r > 0\right\}, \ t_0 > 0,$$

причому $V(t, 0) = 0$ для всіх $t \geqslant t_0$.

Функцію $V(t, x)$ назвемо знакозмінною на множині D, якщо вона набуває на цій множині як додатних, так і від'ємних значень. Знакозмінними на множині D будуть, наприклад, функції

$$V(t, x) = \cos t(x_1^2 + x_2^3 + x_3^2), \ V(t, x) = x_1^2 - tx_2^2.$$

Функцію $V(t, x)$ будемо називати знакосталою на множині D, якщо вона на цій множині не змінює знак. Зокрема, якщо $V(t, x) \geqslant 0$, то $V(t, x)$ — додатна, якщо ж $V(t, x) \leqslant 0$, то $V(t, x)$ — від'ємна на множині D. Наприклад, функції

$$V(t, x) = t^2 x_1^2, \ V(t, x) = -e^t(x_1^2 + x_2^2)$$

є знакосталими на будь-якій множині D, причому перша — додатна, а друга — від'ємна.

Функцію $W(x)$ назвемо додатно визначеною в області K_r, якщо для всіх $x \in K_r \setminus \{0\}$ справджується нерівність $W(x) > 0$. Якщо ж виконується нерівність $W(x) < 0$, то функцію $W(x)$ будемо називати від'ємно визначеною.

Функцію $V(t, x)$ називають додатно визначеною на множині D, якщо вона на цій множині задовольняє нерівність

$$V(t, x) \geqslant W(x),$$

де $W(x)$ — додатно визначена в області K_r функція. Аналогічно, функцію $V(t, x)$ називають від'ємно визначеною на множині D, якщо вона на цій множині задовольняє нерівність

$$V(t, x) \leqslant -W(x).$$

Додатно і від'ємно визначені функції називають знаковизначеними.

Знаковизначеними на будь-якій множині D будуть, наприклад, функції

$$V(t, x) = (2 + \cos t)x_2^2, \;\; V(t, x) = (-2 + \cos t)\left(x_1^2 + x_3^2\right).$$

Кажуть, що функція $V(t, x)$ має нескінченно малу вищу границю, якщо

$$\lim_{\|x\| \to 0} V(t, x) = 0$$

рівномірно відносно $t \geqslant t_0$. Наприклад, функція

$$V(t, x) = (x_1 + x_2)\sin t$$

має нескінченно малу вищу границю, а функція

$$V(t, x) = e^t x_1^2$$

такої границі не має.

У теорії стійкості досліджується поведінка функцій $V(t, x)$ вздовж траєкторій розглядуваної системи диференціальних рівнянь для того, щоб за таким дослідженням зробити висновок про стійкість або нестійкість траєкторій. При цьому самі функції $V(t, x)$ називають, як правило, функціями Ляпунова.

Теорема 1. *Якщо для системи рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \;\; F(t, 0) \equiv 0, \tag{2}$$

на множині D існує знаковизначена функція $V(t, x)$, похідна якої за часом складена згідно з системою (2), *тобто*

$$V_f' = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} F_s, \tag{3}$$

є знакосталою функцією зі знаком, протилежним знаку функції $V(t,x)$, то тривіальний розв'язок системи (2) *стійкий за Ляпуновим* [8].

Приклад

1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1^5, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2^3. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язання. Функція

$$V = x_1^2 + x_2^2$$

задовольняє умови теореми 1. Справді,

$$V > 0, \ x = \operatorname{colon}(x_1, x_2) \in K_r \setminus \{0\}.$$

Крім того, її похідна за часом

$$V_f' = 2\left(x_1 x_2' + x_2 x_2'\right),$$

згідно із заданою системою,

$$V_f' = 2\left(x_1(x_2 - x_1^5) + x_2(-x_1 - x_2^3)\right) = -2\left(x_1^6 + x_2^4\right) \leqslant 0.$$

Тому тривіальний розв'язок системи (4) стійкий за Ляпуновим.

Теорема 2. *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2) *на множині D існує знаковизначена функція $V(t,x)$, що має нескінченно малу вищу границю, похідна якої за часом складена згідно з системою* (2) *також є знаковизначеною функцією зі знаком, протилежним знаку $V(t,x)$, то тривіальний розв'язок системи* (2) *асимптотично стійкий за Ляпуновим* [8].

Приклад

2. Довести, що система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1^3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3 \end{cases} \tag{5}$$

має асимптотично стійкий розв'язок

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0.$$

Розв'язання. Справді, оскільки функція

$$V = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

в області $K_r \setminus \{0\}$, а її похідна

$$V_f' = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = -2\left(x_1^4 + x_2^4\right) < 0,$$

то за теоремою 2 тривіальний розв'язок системи (5) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Наведемо тепер теореми, які містять достатні умови нестійкості розв'язків.

Теорема 3. *Якщо на множині D існує функція $V(t, x)$, що має нескінченно малу вищу границю, похідна якої за часом складена згідно з системою* (2) *є знаковизначеною в D, а сама функція $V(t, x)$ у будь-якій області з множини D не є знакосталою знака протилежного з $V_f'(t, x)$, то тривіальний розв'язок системи* (2) *нестійкий за Ляпуновим* [8].

З теореми 3 випливає теорема про нестійкість за першим наближенням.

Теорема 4. *Якщо для вектор-функції $F_1(t, x)$ в системі*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F_1(t, x) \qquad (6)$$

виконується умова (3) §4.4 *і серед власних значень матриці A знайдеться хоча б одне з додатною дійсною частиною, то тривіальний розв'язок системи* (6) *нестійкий за Ляпуновим.*

Приклад

3. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - 5x_2^5, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2}x_2^3. \end{cases} \qquad (7)$$

Розв'язання. Нелінійні члени заданої системи задовольняють умову (3). Розглянемо систему першого наближення

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 3y_1 + y_2. \end{cases} \qquad (8)$$

Оскільки корені характеристичного рівняння

$$\det\begin{Vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$$

дорівнюють

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \ \ \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2},$$

то за теоремою 4 тривіальний розв'язок системи нестійкий.

Вправи

1. Використовуючи означення стійкості за Ляпуновим, дослідити на стійкість розв'язки рівняння

$$x' = x\left(x^2 - 1\right)$$

із вказаними початковими умовами:

а) $x(0) = 0$; б) $x(0) = -1$.

Використовуючи теорему про стійкість за першим наближенням, дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy - x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{4+8x} - 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

Дослідити на стійкість положення рівноваги заданих систем.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x-1)(y-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5 - x^2 - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2 - x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln\left(x^2 - y\right). \end{cases}$

Використовуючи функції Ляпунова, дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем.

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y^3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

Розділ 5
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

5.1. Задачі, при розв'язуванні яких отримують диференціальні рівняння з частинними похідними

У попередніх розділах розглядались диференціальні рівняння, в яких невідома функція залежала лише від однієї незалежної змінної, тобто звичайні диференціальні рівняння.

Якщо ж шукана функція залежить від двох або більшої кількості незалежних змінних, то відповідне диференціальне рівняння називають диференціальним рівнянням з частинними похідними.

Зазначимо, що переважну більшість фізичних законів природи можна записати, використовуючи диференціальні рівняння з частинними похідними. Як приклади наведемо рівняння руху та закон теплообміну Ньютона, рівняння Максвелла в електродинаміці, рівняння Шредінгера у квантовій фізиці, рівняння Нав'є — Стокса у гідромеханіці тощо. При цьому у всіх цих рівняннях фізичні явища описуються за допомогою похідних за просторовими координатами та за часом.

Розглянемо деякі задачі, при розв'язуванні яких отримують диференціальні рівняння з частинними похідними.

1. Рівняння поверхонь.

а) знайти рівняння поверхні $z = z(x, y)$, всі нормалі якої перетинають вісь Oz.

Розв'язання. Нехай $M(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ — довільна точка шуканої поверхні. Радіус-вектор точки M, орт осі Oz і вектор нормалі до поверхні, побудований у точці M, належать одній площині, бо за умовою нормаль до поверхні в цій точці перетинає вісь Oz. Умову компланарності заданих векторів запишемо у вигляді

$$\det\left\| \begin{matrix} x_0 & y_0 & z(x_0, y_0) \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} & -1 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Обчислюючи визначник, знаходимо

$$-x_0 \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} + y_0 \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0.$$

Оскільки M є довільною точкою, то диференціальне рівняння шуканої поверхні має вигляд

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

б) знайти рівняння поверхні з такою властивістю: відстань від довільної точки $M(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ поверхні до осі Oz дорівнює довжині відрізка, що його відтинає на цій осі площина, дотична до поверхні $z = z(x, y)$ в точці M.

Розв'язання. Як відомо, рівняння дотичної площини до заданої поверхні в точці M має вигляд

$$z = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + z(x_0, y_0),$$

а довжина відрізка, що його відтинає на осі Oz ця площина, дорівнює

$$\rho_1 = \left| -\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}x_0 - \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}y_0 + z(x_0, y_0) \right|.$$

Нехай ρ_2 — відстань від довільної точки M поверхні до осі Oz. Тоді

$$\rho_2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

За умовою $\rho_1 = \rho_2$, тобто

$$\left| -\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}x_0 - \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}y_0 + z(x_0, y_0) \right| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Отже, диференціальне рівняння шуканої поверхні має вигляд

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

2. Рівняння Хопфа*.

Розглянемо одновимірне середовище, яке складається з частинок, що рухаються за інерцією. Позначимо через $u(x, t)$ швидкість частинки, яка в момент часу t міститься в точці x. Зауважимо, що при фіксованому $t = t_0$ рівність $u = u(x, t_0)$ визначає функцію розподілу швидкостей в момент t_0.

Оскільки закон руху частинки за інерцією описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

то

---

*Еберхард Хопф (1902–1983) — американський математик.

$$\frac{d}{dt}u(t,x) = 0,$$

або

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0,$$

звідки остаточно маємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ (рівняння Хопфа).} \tag{3}$$

3. Рівняння теплопровідності.

Розглянемо задачу про поширення тепла у тонкому однорідному стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею. За основну величину, що характеризує цей процес, виберемо температуру $u = u(x,t)$, де x– координата поперечного перерізу в момент часу t. Стрижень тонкий, тобто температура в усіх точках в кожному поперечному перерізі стала.

За законом Фур'є [17], кількість тепла, яке проходить за час Δt через поперечний переріз x стрижня, дорівнює

$$\Delta Q_x = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t,$$

де k — коефіцієнт теплопровідності, який вважатимемо сталим; S — площа поперечного перерізу; знак мінус означає, що поширення тепла відбувається від частин стрижня з більшою температурою до частин стрижня з меншою температурою.

За тим же законом через переріз $x + \Delta x$ за час Δt проходить наступна кількість тепла:

$$\Delta Q_{x+\Delta x} = -k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t.$$

Тоді приріст кількості тепла в елементі об'єму $\Delta V = S\Delta x$ за час Δt дорівнює

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_x - \Delta Q_{x+\Delta x} = k\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)S\Delta t =$$

$$= k\frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial x^2}S\Delta t\,\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Кількість тепла ΔQ_2, яке необхідно витратити на зміну температури об'єму $\Delta V = S\Delta x$ за час Δt, визначається співвідношенням

$$\Delta Q_2 = c\rho\,(u(x,t+\Delta t) - u(x,t))\,S\Delta x = c\rho\frac{\partial u(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial t}S\Delta x\,\Delta t,$$

де c — питома теплоємність, а ρ — лінійна щільність стрижня, $0 < \theta_2 < 1$.

За припущенням все тепло, яке надходить в елемент об'єму стрижня ΔV, витрачається на зміну його температури. Тому згідно із законом збереження кількості тепла маємо

$$k\frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x, t)}{\partial x^2} = c\rho\frac{\partial u(x, t+\theta_2\Delta t)}{\partial t}.$$

Перейшовши в останньому співвідношенні до границі при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, дістанемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

де $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ — коефіцієнт температуропровідності.

Рівняння теплопровідності (4) легко узагальнити на випадок, коли всередині стрижня може виникати або поглинатися тепло. Таке виділення тепла характеризують функцією густини теплових джерел $F(x, t)$. При цьому припускають, що внаслідок дії цих джерел в елементарному об'ємі $\Delta V = S\Delta x$ стрижня за малий проміжок часу Δt виділяється наступна кількість тепла:

$$\Delta Q_3 = F(x, t)S\Delta x\,\Delta t.$$

При наявності теплових джерел замість (4) матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \tag{5}$$

де $g(x, t) = \dfrac{1}{c\rho}F(x, t)$.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли бічна поверхня стрижня не є теплоізольованою. Припустимо, що величина теплового потоку через бічну поверхню стрижня пропорційна різниці між температурою стрижня і температурою навколишнього середовища (нехай остання дорівнює нулю). Тоді за законом збереження кількості тепла одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + g(x, t), \tag{6}$$

де b — коефіцієнт пропорційності для потоку через бічну поверхню.

4. Рівняння Пуассона* і Лапласа.

У загальному (тривимірному) випадку, вивчаючи розповсюдження тепла у нерівномірно нагрітому твердому тілі, можна отримати тривимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - g(x, y, z, t). \tag{7}$$

*Сімеон Пуассон (1781–1840) — французький математик і механік.

Якщо процес є стаціонарним, то встановлюється розподіл температури $u = (x, y, z)$, який не змінюється з плином часу. Оскільки при цьому $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, то рівняння (7) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\rho, \tag{8}$$

де $\rho = \frac{g(x, y, z)}{a^2}$.

Якщо всередині тіла відсутні джерела тепла, то функція густини теплових джерел $F(x, y, z, t) = 0$, а отже, і $g(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{c\rho} = 0$. Тому рівняння (8) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

Рівняння (8) називають рівнянням Пуассона, а (9) – Лапласа.

Коли температура залежить лише від x, y і t, що наприклад, має місце при розповсюдженні тепла в тонкій однорідній пластинці з теплоізольованою поверхнею, рівняння (7) перетворюється в рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t). \tag{10}$$

З рівняння (10) аналогічно отримуємо двовимірні рівняння Пуассона і Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{11}$$

Рівняння Пуассона і Лапласа, крім даної задачі, отримують при розв'язуванні багатьох задач з фізики, механіки, хімії, біології та інших розділів природознавства.

5. Рівняння коливання струни.

Розглянемо малі коливання струни із закріпленими кінцями. Припустимо, що струна є абсолютно гнучкою (не опирається згину), пружною (можна застосувати закон Гука) та однорідною.

Нехай також її коливання – плоскі і поперечні. Термін малі коливання означає, що відхилення точок струни від положення рівноваги малі порівняно з її довжиною, а нахил струни (тангенс кута нахилу) малий порівняно з одиницею. За положення рівноваги виберемо вісь Ox. Будемо позначати через u відхилення від положення рівноваги точки струни з абсцисою x у довільний момент часу t (рис. 35).

Отже, задача полягає в тому, щоб знайти явний вигляд функції $u = u(x, t)$. Виділимо довільну ділянку струни M_1M_2 ($M_1(x, u(x, t))$, $M_2(x + \Delta x, u(x + \Delta x, t))$), яка в початковий момент мала довжину Δx. Тоді видовження цієї ділянки дорівнюватиме

$$|M_1M_2| = \int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int\limits_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x,$$

оскільки при малих коливаннях можна знехтувати величиною $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1\right)$.

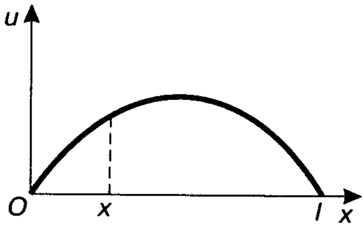


Рис. 35

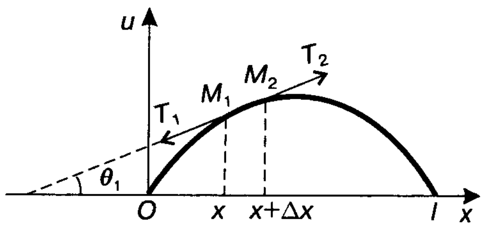


Рис. 36

Отже, при зроблених припущеннях видовження струни під час її малих коливань не відбувається. Тому за законом Гука величина натягу T в кожній точці струни не залежить від часу. Доведемо, що вона не залежить також і від координати x. Справді, через те, що всі точки струни рухаються перпендикулярно до осі Ox, сума проекцій сил натягу, що діють на ділянку M_1M_2, на вісь Ox має дорівнювати нулю (рис. 36):

$$-T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = 0,$$

але

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1,$$

а тому $T_1 = T_2$ $(\cos\theta_1 \approx 1,\ \cos\theta_2 \approx 1)$. Таким чином, можна вважати, що $T(x, t) = T$, де T — деяка стала величина.

Застосуємо тепер для ділянки струни M_1M_2 другий закон Ньютона: добуток маси $\Delta m = \rho\Delta x$ (ρ — лінійна густина) на прискорення $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ дорівнює сумі всіх сил, що діють на ділянку (вагою ділянки нехтуємо).

Таким чином, враховуючи лише силу натягу $\vec{T}$, отримуємо

$$\rho\,\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(\sin\theta_2 - \sin\theta_1).$$

Оскільки

$$\sin\theta = \frac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

то

$$\rho\,\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = T\frac{\partial^2 u(x+\theta_3\Delta x, t)}{\partial x^2}\,\Delta x,$$

$0 < \theta_3 < 1$, а тому

$$\rho\,\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u(x+\theta_3\Delta x, t)}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Скоротивши останнє співвідношення на Δx і виконавши граничний перехід при $\Delta x \to 0$, дістанемо рівняння вільних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{12}$$

де $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$.

6. Телеграфне рівняння.

У загальному випадку на струну в площині коливання можуть діяти і інші сили, паралельні осі Ou : зовнішня сила $F_1 = F(x,t)$; сила опору середовища $F_2 = -b_1\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$; сила, яка повертає струну до положення рівноваги, $F_3 = -c_1 u(x,t)$. Якщо ці сили розподілені неперервно вздовж струни, то сила на елементі $(x, x+\Delta x)$ дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{3} F_i\Delta x$ і за другим законом Ньютона дістаємо співвідношення

$$\rho\,\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u(x+\theta_3\Delta x, t)}{\partial x^2}\,\Delta x + F(x,t)\,\Delta x - b_1\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,\Delta x - c_1 u(x,t)\,\Delta x,$$

$0 < \theta_3 < 1$.

Перейшовши тут до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо рівняння, яке називають телеграфним:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} - cu + f(x,t), \tag{13}$$

де $b = \dfrac{b_1}{\rho}$, $c = \dfrac{c_1}{\rho}$, $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$.

Якщо $b_1 = c_1 = 0$, то матимемо рівняння вимушених коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{14}$$

7. Хвильове рівняння.

У загальному випадку, вивчаючи різноманітні хвильові процеси, можна одержати тривимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t). \tag{15}$$

Так, рівняння (15) отримують при розв'язуванні задач про малі пружні коливання твердих тіл, коливання газу (звукові коливання), електромагнітні коливання тощо.

Окремим випадком рівняння (15) є рівняння (14), а також рівняння коливання мембрани, або двовимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t). \tag{16}$$

Рівняння (16) одержують при розв'язуванні задач про коливання двовимірних тіл, зокрема задачі про малі коливання мембрани — пружної плівки, яка може вільно згинатися.

5.2. Основні означення і поняття

Як уже зазначалось, диференціальним рівнянням з частинними похідними називають диференціальне рівняння, в якому невідома функція є функцією кількох змінних. При цьому, як і для звичайних диференціальних рівнянь найвищий порядок похідної або диференціала, що входить у диференціальне рівняння, називають порядком диференціального рівняння з частинними похідними. Для частинних похідних використовують також скорочені позначення:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

де u — шукана функція; x, y — незалежні змінні.

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називають функцію, яка при підстановці в це рівняння перетворює його в деякій області на тотожність за незалежними змінними.

Приклад

1. Довести, що функція

$$u(x, y) = x + y + e^{xy}$$

є розв'язком диференціального рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y. \tag{1}$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + ye^{xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + xe^{xy},$$

то

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x(1 + ye^{xy}) - y(1 + xe^{xy}) = x - y + xye^{xy} - xye^{xy}.$$

Таким чином,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} \equiv x - y.$$

Отже, функція $u(x, y) = x + y + e^{xy}$ є розв'язком рівняння (1) на всій площині xOy.

Іноді розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними не можна знайти в явному вигляді, але можна записати його в неявному вигляді, тобто у вигляді співвідношення, яке пов'язує шукану функцію та незалежні змінні. Таке співвідношення називають інтегралом диференціального рівняння з частинними похідними.

Приклад

2. Довести, що співвідношення

$$\left(\frac{\sin x}{\sin u}\right)^3 + e^{\frac{\sin y}{\sin u}} = 0 \tag{2}$$

є інтегралом рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x}\operatorname{tg} x + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} u. \tag{3}$$

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$z(x, y, u) \equiv z(\varphi, \psi) = \varphi^3 + \psi,$$

де $\varphi = \dfrac{\sin x}{\sin u}$, а $\psi = e^{\frac{\sin y}{\sin u}}$.

Оскільки $z(x, y, u) \equiv 0$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial u}du = 0.$$

Знайдемо частинні похідні функції $z(\varphi, \psi)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 3\varphi^2\frac{\cos x}{\sin u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{\psi}\frac{\cos y}{\sin u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{3\varphi^2 \sin x \cos u}{\sin^2 u} - \frac{e^{\psi}\sin y \cos u}{\sin^2 u} = -(3\varphi^2 \sin x + e^{\psi}\sin y)\frac{\cos u}{\sin^2 u}.$$

Враховуючи, що $u = u(x, y)$, а тому $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$, дістаємо

$$\left(3\varphi^2\frac{\cos x}{\sin u} - \left(3\varphi^2 \sin x + e^{\psi}\sin y\right)\frac{\cos u}{\sin^2 u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx +$$

$$+\left(e^{\psi}\frac{\cos y}{\sin u} - \left(3\varphi^2 \sin x + e^{\psi}\sin y\right)\frac{\cos u}{\sin^2 u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = 0. \tag{4}$$

В останньому співвідношенні значення обох диференціалів dx та dy є довільним, бо x та y — незалежні змінні. Тому для того, щоб вираз, який міститься в лівій частині співвідношення (4), дорівнював нулю, необхідно, щоб виконувались одночасно такі рівності:

$$\begin{cases} 3\varphi^2 \dfrac{\cos x}{\sin u} - \left(3\varphi^2 \sin x + e^{\psi} \sin y\right) \dfrac{\cos u}{\sin^2 u} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ e^{\psi} \dfrac{\cos y}{\sin u} - \left(3\varphi^2 \sin x + e^{\psi} \sin y\right) \dfrac{\cos u}{\sin^2 u} \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

З рівностей (5) визначимо $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, тобто:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3\varphi^2 \cos x \operatorname{tg} u}{3\varphi^2 \sin x + e^{\psi} \sin y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^{\psi} \cos y \operatorname{tg} u}{3\varphi^2 \sin x + e^{\psi} \sin y}. \tag{6}$$

Підставивши (6) в (3), отримаємо в лівій частині $\operatorname{tg} u$, тобто рівняння (3) перетвориться на тотожність, а це і означає, що співвідношення (2) є інтегралом рівняння (3).

Процес відшукання розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними називають інтегруванням цього рівняння.

Кожне рівняння з частинними похідними при деяких умовах, накладених на нього, має нескінченну множину розв'язків. Таким чином, будь-яке диференціальне рівняння (як звичайне, так і з частинними похідними) визначає, взагалі кажучи, деякий клас функцій, що задовольняють це рівняння. Сукупність таких функцій утворює так званий загальний інтеграл (загальний розв'язок).

Як відомо, загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння n-го порядку

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

записують у вигляді деякої сукупності функцій

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

які залежать від n довільних сталих (параметрів). При цьому в області виконання умов теореми Коші будь-який частинний розв'язок можна отримати із загального, якщо параметрам C_1, C_2, …, C_n надати певні значення. А тепер з'ясуємо, від чого залежить сукупність розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними. Для цього розглянемо наступні приклади.

Приклад

3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y), \tag{7}$$

в якому $f(y)$ — відома функція, а шукана функція $u = u(x, y)$ залежить від двох змінних.
Розв'язання. Інтегруючи рівняння (7) за змінною y, дістаємо

$$u = \int f(y)\,dy + C_1,$$

де C_1 — довільна величина, яка не залежить від y.

Проте C_1 може залежати від x, оскільки шукана функція u за умовою залежить від двох змінних x та y.

Отже,

$$u(x, y) = \int f(y)\,dy + C_1(x), \tag{8}$$

де $C_1(x)$ — довільна функція.

Якщо розглянути відповідне до рівняння (7) звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{du}{dy} = f(y),$$

де $u = u(y)$, то його загальний розв'язок має вигляд

$$u(y) = \int f(y)\,dy + C_1,$$

тобто містить лише довільну сталу C_1.

Приклади

4. Зінтегрувати рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + y. \tag{9}$$

Розв'язання. Покладемо $\dfrac{\partial u}{\partial x} = v$. Тоді

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x + y.$$

Розв'язок останнього диференціального рівняння матиме вигляд

$$v = \frac{x^2}{2} + yx + C_1(y),$$

де $C_1(y)$ — довільна функція від y.

Інтегруючи отриману рівність, дістаємо

$$u(x, y) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + C_1(y)x + C_2,$$

де C_2 — величина, яка не залежить від x. Враховуючи залежність u від x та y, бачимо, що величина C_2 може бути функцією від y. Таким чином, розв'язок рівняння (9)

$$u(x, y) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + C_1(y)x + C_2(y) \tag{10}$$

містить дві довільні функції, що залежать від y.

5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0. \tag{11}$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Покладаючи $\frac{\partial u}{\partial y} = v$, матимемо $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Звідси $v = f(y)$, а тому

$$u(x, y) = \int f(y)\, dy + \varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ — довільна функція змінної x.

Оскільки $f(y)$ — довільна функція змінної y, то й інтеграл від неї також є довільною функцією від y.

Позначивши її через $\psi(y)$, остаточно отримаємо

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \tag{12}$$

де $\varphi(x)$ та $\psi(y)$ — довільні двічі диференційовані функції.

У наведених прикладах 3 — 5 було розглянуто найпростіші диференціальні рівняння з частинними похідними, розв'язки яких є майже очевидними. Але ці приклади дають змогу зрозуміти істотну відмінність сукупності розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними від загального розв'язку звичайних диференціальних рівнянь. Вона полягає в тому, що сукупність розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними залежить не від довільних сталих, а від довільних функцій, кількість яких дорівнює порядку рівняння.

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними, які розв'язані відносно однієї із своїх старших похідних, ставиться задача Коші: побудувати такий розв'язок заданого рівняння, який при фіксованому значенні однієї з незалежних змінних перетворюється разом із своїми похідними за цією змінною (максимальний порядок похідних на одиницю менший за порядок рівняння) в наперед задані функції решти незалежних змінних.

Приклади

6. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(y), \tag{13}$$

в якому $f(y)$ — відома функція, а $u = u(x, y)$ — шукана, що задовольняє початкову умову

$$u(x_0, y) = \varphi(y), \tag{14}$$

де $\varphi(y)$ — наперед задана функція від y.

Розв'язання. Інтегруючи рівняння (13), знаходимо

$$u(x, y) = xf(y) + C_1(y),$$

де $C_1(y)$ — довільна функція змінної y.

Спробуємо підібрати функцію $C_1(y)$ так, щоб задовольнити початкову умову (14).

Для цього покладемо

$$u(x_0, y) \equiv x_0 f(y) + C_1(y) = \varphi(y),$$

звідси

$$C_1(y) = -x_0 f(y) + \varphi(y).$$

Отже, шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$u(x, y) = (x - x_0) f(y) + \varphi(y).$$

7. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(y),$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} = \varphi_2(y),$$

де $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — наперед задані функції від y.

Розв'язання. Легко переконатися, що шуканий розв'язок має вигляд

$$u(x, y) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f(y) + (x - x_0)\varphi_2(y) + \varphi_1(y).$$

У загальному випадку рівняння k-го порядку з частинними похідними записують у вигляді

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \tag{15}$$

де F — задана функція; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — незалежні змінні, а $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — шукана функція.

Припустимо, що рівняння (15) розв'язне відносно деякої із своїх старших похідних, тобто нехай, наприклад,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u}{\partial x_r^k} = f\Bigg(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \\ \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{r-1}^k}, \frac{\partial^k u}{\partial x_{r-1}^{k-1}\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{r+1}^k}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\Bigg). \end{aligned} \tag{16}$$

Для рівняння (16) задача Коші формулюється наступним чином: побудувати такий розв'язок заданого рівняння, який при фіксованому значенні незалежної змінної x_r перетворюється разом із своїми похідними до $(k-1)$-го порядку за цією змінною в наперед задані функції решти незалежних змінних. Це означає, що шукана функція $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_r = x_r^{(0)}$ має задовольняти початкові умови

$$u\big|_{x_r = x_r^{(0)}} = \varphi_0(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_r}\right|_{x_r = x_r^{(0)}} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n), \ldots, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_r^{k-1}}\right|_{x_r=x_r^{(0)}} = \varphi_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

де φ_i — наперед задані функції.

Можна довести, що за певних умов загальний розв'язок рівняння (16) залежить від k довільних функцій, а розв'язок задачі Коші (16), (17) існує і єдиний. Слушною є фундаментальна в теорії рівнянь з частинними похідними теорема існування і єдиності С.В.Ковалевської*. Сформулюємо цю теорему для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \tag{18}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$.

Теорема 1 (Ковалевської). *Якщо функції* $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *та* $f(x_1, x_2 \ldots, x_n, u, p_2, \ldots, p_n)$ *— аналітичні відповідно в околі точок* $(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *та* $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \eta, p_2, p_3, \ldots, p_n)$, *де*

$$\eta = \varphi(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),\ \ p_i = \frac{\partial\varphi(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_i},\ \ i = 2, \ldots, n,$$

то рівняння (18) *в околі точки* $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *в класі аналітичних функцій має єдиний розв'язок* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *що задовольняє початкову умову*

$$u(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

5.3. Повний, особливий та загальний інтеграли диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку

Рівняння вигляду

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

де F — неперервна функція, частинні похідні якої за змінними $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ існують в деякій області $\overline{G} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{2n+1}}$, причому $\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \neq 0$ в $\overline{G}$, а $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — невідома функція, називають диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку.

---

*Софія Ковалевська (1850–1891) — російський математик і механік.

Функцію $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначену в деякій області $D \subset \mathbf{R^n}$, називають розв'язком рівняння (1), якщо виконуються умови:

1) функції u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — неперервні в області D;

2)

$$\left(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right) \in \overline{G}$$

для всіх $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$;

3)

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right) = 0$$

в області D.

Якщо $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — розв'язок рівняння (1), то поверхню $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у просторі змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають інтегральною поверхнею рівняння (1).

Співвідношення, що визначає розв'язок диференціального рівняння (1), який містить стільки довільних сталих, скільки є в цьому рівнянні незалежних змінних, називають повним інтегралом рівняння (1).

Приклади

1. Показати, що функція

$$z = C_1 e^{y + C_2(x-y)} \tag{2}$$

є повним інтегралом диференціального рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z. \tag{3}$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції $z = z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C_1 C_2 e^{y + C_2(x-y)} = C_2 z, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C_1(1 - C_2) e^{y + C_2(x-y)} = (1 - C_2) z.$$

Виключаючи сталу C_2 з останніх двох рівнянь, дістанемо співвідношення (3).

2. Знайти повні інтеграли наступних рівнянь:

а) $\frac{\partial u}{\partial y} = 3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$;

б) $u^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = 1$;

в) $\frac{\partial u}{\partial x} - 3x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - y$.

Розв'язання. а) покладемо $\frac{\partial u}{\partial x} = C_1$, тоді $\frac{\partial u}{\partial y} = 3C_1^2$. Оскільки

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = C_1\, dx + 3C_1^2\, dy,$$

то

$$u = C_1 x + 3C_1^2 y + C_2;$$

б) нехай $u = u(t)$, де $t = x + C_1 y$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = C_1\frac{du}{dt},$$

а тому дістанемо

$$u^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2(u^2 + C_1^2) = 1,$$

або

$$\frac{dt}{du} = \pm u\sqrt{u^2 + C_1^2}.$$

Звідси остаточно знаходимо

$$9(x + C_1 y + C_2)^2 = (u^2 + C_1^2)^3;$$

в) покладемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 3x^2 = C_1,$$

тоді

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - y = C_1.$$

Оскільки

$$du = (3x^2 + C_1)\,dx + \sqrt{y + C_1}\,dy,$$

то

$$u = x^3 + C_1 x + \frac{2}{3}\sqrt{(y + C_1)^3} + C_2 -$$

шуканий повний інтеграл.

Припустимо, що ми знайшли повний інтеграл рівняння (1)

$$\Phi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{4}$$

де u — шукана функція; x_1, x_2, …, x_n — незалежні змінні, а C_1, C_2, …, C_n — довільні сталі. Якщо здиференціювати співвідношення (4) спочатку за змінною x_1, потім за x_2, … , потім за x_n, то отримаємо n рівностей:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Тепер вважатимемо, що величини C_1, C_2, …, C_n також є функціями змінних x_1, x_2, …, x_n, u. Тоді, диференціюючи співвідношення (4), замість (5) матимемо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_i} + \frac{\partial C_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Якщо функції C_1, C_2, …, C_n визначити так, щоб виконувались рівності

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_i} + \frac{\partial C_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

то співвідношення (6) збігатимуться з (5).

Систему рівнянь (7) можна задовольнити такими трьома способами.

1. Нехай

$$\frac{\partial C_k}{\partial x_i} + \frac{\partial C_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Останні співвідношення матимуть місце, якщо, наприклад,

$$\frac{\partial C_k}{\partial x_1} = \frac{\partial C_k}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial C_k}{\partial x_n} = \frac{\partial C_k}{\partial u} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

тобто

$$C_1 = \text{const}, \; C_2 = \text{const}, \; \ldots, \; C_n = \text{const},$$

що відповідає повному інтегралу (4).

2. Якщо покласти

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} = 0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial \Phi}{\partial C_n} = 0, \tag{8}$$

то матимемо n рівнянь для визначення невідомих функцій

$$C_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \; \ldots, \; C_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \tag{9}$$

Підставивши (9) в (4), дістанемо співвідношення, яке не буде містити довільних сталих. Воно визначатиме деяку функцію, яка буде задовольняти диференціальне рівняння (1). При цьому співвідношення (4) називають особливим інтегралом рівняння (1).

Приклад

3. Знайти особливий інтеграл рівняння

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0. \tag{10}$$

Розв'язання. Легко переконатися, що співвідношення

$$\Phi \equiv C_1 x + C_2 y + C_1 C_2 - u = 0 \tag{11}$$

є повним інтегралом рівняння (10). Згідно з (8), отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial C_1} \equiv x + C_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C_2} \equiv y + C_1 = 0, \end{cases} \tag{12}$$

тому $C_1 = -y, \; C_2 = -x$.

Тоді з (11) матимемо

$$xy + u = 0. \tag{13}$$

Рівність (13) і є особливим інтегралом заданого рівняння. Легко бачити, що при жодному значенні сталих C_1, C_2 співвідношення (11) не перетвориться в (13).

Як відомо, загальний інтеграл рівняння Клеро $y = xy' + \varphi(y')$ має вигляд $y = Cx + \varphi(C)$ (сім'я прямих ліній), а функція

$$u = c_1 x + c_2 y + \varphi(c_1, c_2)$$

(сім'я площин) є повним інтегралом диференціального рівняння з частинними похідними

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{14}$$

Отже, рівняння (10) є диференціальним рівнянням з частинними похідними, аналогічним до рівняння Клеро. Відповідно до особливого розв'язку рівняння Клеро, який визначає обвідну сім'ї прямих, особливий інтеграл диференціального рівняння з частинними похідними (14) визначає обвідну сім'ї площин.

3. Нарешті систему n рівнянь (7), лінійних відносно невідомих $\frac{\partial \Phi}{\partial C_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial C_n}$, можна задовольнити ще й так. Нехай визначник системи (7) дорівнює нулю, тобто

$$\det \begin{Vmatrix} \frac{dC_1}{dx_1} & \cdots & \frac{dC_1}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dC_n}{dx_1} & \cdots & \frac{dC_n}{dx_n} \end{Vmatrix} = 0,$$

де $\frac{dC_k}{dx_i} = \frac{\partial C_k}{\partial x_i} + \frac{\partial C_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Це означає, що функції $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – залежні.

Припустимо, що має місце рівність $C_n = \varphi(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$. Диференціюючи її за змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$, дістаємо

$$\frac{\partial C_n}{\partial x_i} + \frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_i} + \frac{\partial C_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Підставимо у рівняння (7) знайдені значення $\frac{\partial C_n}{\partial x_1} + \frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial C_n}{\partial x_n} + \frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_n}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial C_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial C_n}\frac{\partial C_n}{\partial C_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_1} + \frac{\partial C_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial C_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial C_n}\frac{\partial C_n}{\partial C_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_n} + \frac{\partial C_k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Нехай лише одне з рівнянь системи (16) є наслідком решти $n-1$ рівнянь. Тоді з (16) отримуємо систему $n-1$ лінійних однорідних рівнянь, визначник якої не дорівнює нулю. Отже, нулю мають дорівнювати всі перші множники в лівих частинах рівнянь (16), а тому система (16) рівносильна наступній системі $n-1$ рівнянь:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \Phi}{\partial C_{n-1}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_{n-1}} = 0. \qquad (17)$$

Інтеграл, який визначається сукупністю рівнянь

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, \varphi(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

де через φ позначено довільну функцію від функцій $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, будемо називати загальним інтегралом рівняння (1).

Приклад

4. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u. \qquad (18)$$

Розв'язання. Повний інтеграл рівняння (18) можна записати у вигляді

$$\Phi(x, y, u, C_1, C_2) \equiv C_1 \ln x + (1 - C_1)\ln y + C_2 - \ln u = 0, \qquad (19)$$

у чому легко переконатися безпосередньо.

Відповідно до вищевикладеного покладемо $C_2 = \varphi(C_1)$, де $\varphi(C_1)$ — довільна функція від C_1.

Оскільки у даному разі маємо дві функції C_1 та C_2, то із системи (17) дістанемо лише одне рівняння:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_1} \equiv \ln x - \ln y + \varphi'(C_1) = 0,$$

звідки $\varphi'(C_1) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$. Це означає, що й сама величина C_1 також буде деякою функцією від частки $\frac{y}{x}$.

Запишемо рівність (19) у вигляді

$$u = \left(\frac{y}{x}\right)^{-C_1} y e^{\varphi(C_1)}.$$

Оскільки C_1 — функція від $\frac{y}{x}$, а $\varphi(C_1)$ — довільна функція цієї ж частки, то

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-C_1} e^{\varphi(C_1)} = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

де ψ — довільна функція від $\frac{y}{x}$.

Тоді

$$u(x, y) = y\psi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{20}$$

Це і є загальний інтеграл рівняння (18).

При довільному виборі функції ψ функція (20) задовольняє рівняння (18). Справді,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{-y}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

звідки

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = y\psi\left(\frac{y}{x}\right) = u(x, y).$$

5.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Рівняння вигляду

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots +$$
$$+ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

де $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — шукана функція, а $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – відомі функції незалежних змінних x_1, x_2, ..., x_n, називають лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку.

1. Двовимірний випадок.

Розглянемо рівняння вигляду

$$f_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

де $u(x, y)$ — шукана функція. Припускатимемо, що функції $f_1(x, y)$ та $f_2(x, y)$ неперервно диференційовні (мають неперервні частинні похідні першого порядку) і принаймні одна з них не дорівнює тотожно нулю.

Для відшукання розв'язку рівняння (2) розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{f_1(x, y)} = \frac{dy}{f_2(x, y)}. \tag{3}$$

Нехай співвідношення

$$\Phi(x, y) = C \tag{4}$$

є загальним інтегралом рівняння (3). Тоді функція $\Phi(x, y)$ перетворюється на сталу, якщо замість y підставити будь-який розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (3).

Таким чином, повний диференціал від $\Phi(x, y)$ буде тотожно дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \equiv 0. \tag{5}$$

Отже, якщо

$$dx = \lambda f_1(x, y), \quad dy = \lambda f_2(x, y),$$

де λ — коефіцієнт пропорційності, то остання тотожність набуде вигляду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f_2(x, y) \equiv 0. \tag{6}$$

Порівнюючи (6) і (2), помітимо, що рівняння (2) перетворюється у тотожність, якщо замість $u(x, y)$ підставити функцію $\Phi(x, y)$. Отже, функція $u = \Phi(x, y)$ є розв'язком рівняння (2).

Має місце і обернене твердження, а саме: якщо $u = \Phi(x, y)$ — будь-який розв'язок рівняння (2), то $\Phi(x, y) = C$ — загальний інтеграл рівняння (3).

Справді, повний диференціал функції $u = \Phi(x, y)$ за умови, що $y = \varphi(x)$ — розв'язок рівняння (3), матиме вигляд

$$d\Phi(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy. \tag{7}$$

Оскільки в Φ підставлено розв'язок рівняння (3), то $dx = \lambda f_1(x, y)$, $dy = \lambda f_2(x, y)$, а тому

$$d\Phi(x, y) = \lambda\left(f_1(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f_2(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right). \tag{8}$$

Але $u = \Phi(x, y)$, за припущенням, задовольняє рівняння (2), тобто

$$f_1(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f_2(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv 0,$$

звідки

$$d\Phi(x, y) \equiv 0.$$

Таким чином, щоб знайти розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними (2), потрібно скласти еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння (3) і знайти його загальний інтеграл $\Phi(x, y) = C$.

Нехай $u = \Phi(x, y)$ — розв'язок рівняння (2). Тоді, як легко переконатися, неперервно диференційовна функція $u = F(\Phi(x, y))$ також є розв'язком даного рівняння.

Отже, множину всіх розв'язків рівняння (2) можна описати формулою

$$u(x, y) = F(\Phi(x, y)), \tag{9}$$

де F — довільна неперервно диференційовна функція.

Приклад

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{10}$$

Розв'язання. Еквівалентне звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

є рівнянням з відокремлюваними змінними. Інтегруючи його, дістанемо загальний інтеграл $x^2+y^2 = C$. Тому розв'язком рівняння (10) є функція $u = x^2+y^2$. Отже, множину всіх розв'язків (загальний розв'язок рівняння (10)) можна описати формулою

$$u = F(x^2 + y^2),$$

яка визначає поверхню обертання з віссю обертання Ou. Таким чином, рівняння (10) є рівнянням всіх поверхонь обертання з віссю обертання Ou.

2. Багатовимірний випадок.

Розглянемо нормальну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \ f_i : G \to \mathbf{R}, \ G \subset \mathbf{R}^{n+1}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

в якій функції f_i — неперервно диференційовні в G.

Припустимо, що для довільних початкових даних $(t_0, x_0) \in G$, $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ існує розв'язок $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ рівняння (11) такий, що $x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \ldots, x_n(t_0) = x_n^{(0)}$.

Позначимо через $\Phi : G \to \mathbf{R}$ диференційовну функцію, яка не є сталою в будь-якій непорожній підобласті G.

Неперервно диференційовну функцію $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в деякій області $G_1 \subset G$ називають першим інтегралом системи (11), якщо вона зберігає стале значення вздовж довільного розв'язку системи (11), траєкторія якого належить G_1.

Теорема 1. *Для того, щоб неперервно диференційовна функція $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в області $G_1 \subset G$ була першим інтегралом системи* (11) *необхідно і достатньо, щоб виконувалась тотожність*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}f_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}f_n \equiv 0 \tag{12}$$

для всіх $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_1$.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — перший інтеграл системи (11). Нехай $\left(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ — точка області G_1, через яку проходить графік розв'язку $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ системи (1), що задовольняє початкові умови $x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \ldots, x_n(t_0) = x_n^{(0)}$.

Враховуючи, що Φ — перший інтеграл системи (11), то

$$\Phi(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = C$$

і

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv 0,$$

а тому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} f_1\,(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} f_n\,(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv 0,$$

тобто співвідношення (12) виконується вздовж розв'язку

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t)$$

і, зокрема, в точці $t = t_0$, $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, ..., $x_n = x_n^{(0)}$. Оскільки $\left(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ – довільна точка G_1, то рівність (12) правильна для всіх точок із G_1.

Навпаки, нехай виконується тотожність (12) і $x_1 = x_1(t), \ldots,$ $x_n = x_n(t)$ — довільний розв'язок системи (11).

Тоді з тотожності (12) випливає

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} f_1\,(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} f_n\,(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv 0.$$

Замінивши f_i на $\frac{dx_i}{dt}$, дістанемо

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \equiv 0,$$

звідки

$$\Phi(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv C.$$

Це і означає, що $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є першим інтегралом системи (11). Теорему доведено.

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь, в якій явно відсутня незалежна змінна

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Системи виду (13), як відомо, називають стаціонарними або автономними. Оскільки

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = dt,$$

то систему (13) можна записати в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \qquad (14)$$

Зауважимо, що система (11) теж може бути зведена до симетричної. Справді, оскільки

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad (15)$$

то, поклавши

$$t = x_{n+1},\ f_{n+1}(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n) = 1,\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{dx_j}{d\tau},$$

дістанемо рівносильну стаціонарну систему

$$\frac{dx_j}{d\tau} = f_j(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n),\ j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Повертаючись до розгляду рівняння (1), сформулюємо теорему.

Теорема 2. *Нехай функції* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *− неперервно диференційовні в деякій області* $G \subset \mathbf{R^n}$. *Для того, щоб функція* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *була розв'язком рівняння* (1), *необхідно і достатньо, щоб вона була першим інтегралом системи звичайних диференціальних рівнянь* (14).

Доведення. Якщо функція $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння (1), то правильна тотожність

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0. \qquad (16)$$

Тоді за теоремою 1 функція $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є першим інтегралом системи (14). Навпаки, якщо $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – перший інтеграл системи (14), то правильна тотожність (16), а це і означає, що $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – розв'язок рівняння (1). Теорему доведено.

Так, рівнянню

$$x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2x_3\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3, \qquad (17)$$

відповідає система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2x_3}. \qquad (18)$$

Інтегруючи рівняння

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1},$$

знайдемо перший інтеграл

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2.$$

З рівняння

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_3}{x_2 x_3}$$

матимемо ще один перший інтеграл

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - \ln x_3.$$

Отже, функції $u_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2$ та $u_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - \ln x_3$ є розв'язками рівняння (17), у чому легко переконатися безпосередньою перевіркою.

5.5. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними

У даному параграфі продовжимо вивчення властивостей розв'язків диференціального рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

Отже, нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ змінюються в деякій області G і нехай в цій області функції $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n,$ — неперервно диференційовні, причому

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0. \tag{2}$$

Вважатимемо відомими $n-1$ перших інтегралів $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, системи рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{3}$$

Крім того, нехай в області G якобіан системи функцій $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ за змінними $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

$$\det\left\|\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{matrix}\right\| \neq 0. \tag{4}$$

Це означає, що рівняння (1) має $n-1$ незалежних частинних розв'язків. У зв'язку з цим виникає питання: чи не можна за допомогою цих розв'язків побудувати загальний розв'язок рівняння (1)? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо функції* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *– неперервно диференційовні в області* G *і виконується умова* (2), *то загальний розв'язок рівняння* (1) *матиме вигляд*

$$u = \Phi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \qquad (5)$$

де Φ *– довільна неперервно диференційовна функція, а функції* $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *є першими інтегралами системи* (3), *що задовольняють умову* (4).

Доведення. Покажемо спочатку, що функція u, означена рівністю (5), є розв'язком заданого рівняння. Справді,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}\right) + \ldots +$$

$$+ f_n\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}\right) =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}}\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}.$$

Оскільки за умовою функції u_i – розв'язки рівняння (1), то

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Отже, матимемо тотожність

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \equiv 0,$$

що і доводить наше твердження.

Покажемо тепер, що розв'язок (5) є загальним розв'язком рівняння (1), тобто будь-який його частинний розв'язок можна подати у вигляді (5) при деякій конкретній функції Φ.

Нехай $u = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – довільний частинний розв'язок рівняння (1). Тоді маємо очевидну систему n тотожностей

$$\begin{cases} f_1\dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} + \ldots + f_n\dfrac{\partial u_0}{\partial x_n} = 0, \\ f_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + f_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + f_n\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Систему (6) можна розглядати як лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Оскільки виконується умова (2), то дана система має нетривіальний розв'язок. Це означає, що визначник цієї системи дорівнює нулю в кожній точці області G :

$$\det \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| = 0,$$

що свідчить про залежність функцій $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, тобто має місце співвідношення

$$F(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = 0. \tag{7}$$

Внаслідок умови (4) з рівності (7) можна дістати рівність (5). Теорему доведено.

Таким чином, задача про інтегрування рівняння з частинними похідними (1) зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (3). Систему (3) при цьому називають характеристичною для рівняння (1), за певних умов вона визначає $n-1$-параметричну сім'ю інтегральних кривих, які називають характеристиками рівняння (1). У зв'язку з цим систему (3) називають також системою характеристик заданого рівняння (1).

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язків рівняння (1). Розв'язок цього рівняння описує геометричне місце точок, що утворюють певну поверхню $n+1$-вимірного простору змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$. Цю поверхню називають інтегральною поверхнею рівняння (1). Згідно з (5), інтегральна поверхня описується за допомогою незалежних інтегралів системи (3). Розглянемо поверхні рівня $u = C$ розв'язків рівняння (1) в n-вимірному просторі змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Згідно з (5), рівняння цих поверхонь має вигляд

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = C. \tag{8}$$

Нехай співвідношення

$$u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n-1$$

є сукупністю незалежних перших інтегралів системи (3). Тоді при відповідному виборі сталих C_i і заданому C у (8) виконуватиметься рівність

$$\Phi(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = C,$$

яка означає, що поверхні рівня розв'язків рівняння (1) містять інтегральні криві системи (3). Більше того, ці поверхні утворені з інтегральних кривих. Зв'язок між характеристиками і інтегральними поверхнями є особливо простим для випадку двох незалежних змінних x_1, x_2 : перетин площини $u = C$ з інтегральною поверхнею $u = u(x_1, x_2)$ є характеристикою. Це випливає з того, що перший інтеграл зберігає стале значення вздовж характеристики.

У зв'язку з наведеною вище геометричною інтерпретацією розв'язків рівняння (1) метод побудови його загального розв'язку називають методом характеристик.

Приклади

Побудувати загальний розв'язок рівнянь.

1.

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \ x_i > 0, \ i = 1, 2, 3.$$

Розв'язання. Характеристична система даного рівняння має два перших інтеграли $u_1 = x_1^2 - x_2^2$ та $u_2 = x_1 - \ln x_3$. Тому загальний розв'язок заданого рівняння можна записати у вигляді $u = \Phi\left(x_1^2 - x_2^2, x_1 - \ln x_3\right)$, де Φ — довільна диференційовна функція.

2.

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання. Тут $f_1(x, y) = y$, а $f_2(x, y) = -x$. Запишемо систему (3)

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x},$$

звідки $d\left(x^2 + y^2\right) = 0$. Отже, характеристиками є кола $x^2 + y^2 = C$, перший інтеграл $u(x, y) = x^2 + y^2$, а тому, згідно з (5), загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$u = \Phi\left(x^2 + y^2\right).$$

Інтегральними поверхнями тут є поверхні обертання з віссю обертання Ou.

3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Розв'язання. Тут $f_1(x, t) = 1$, $f_2(x, t) = a$, а тому система (3) матиме вигляд

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a}.$$

Звідси $x = at + C$ (паралельні прямі), перший інтеграл: $u = x - at$, а загальний розв'язок $u = \Phi(x - at)$. Інтегральною поверхнею є циліндрична поверхня, твірні якої паралельні вектору $(1, a, 0)$.

Зазначимо, що систему (3) можна зінтегрувати методом інтегровних комбінацій. Інтегровною комбінацією характеристичної системи (3) називатимемо диференціальне рівняння, яке є наслідком цієї системи і таке, що легко інтегрується.

Для відшукання інтегровних комбінацій системи (3) використовують таку відому властивість пропорції: якщо

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_k}{f_k} = t,$$

то

$$\frac{m_1\,dx_1 + \ldots + m_k\,dx_k}{m_1 f_1 + \ldots + m_k f_k} = t.$$

Приклади

Побудувати загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

4.

$$(y - x)\,\frac{\partial u}{\partial x} + (x + y + z)\,\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y)\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Розв'язання. Запишемо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{x + y + z} = \frac{dz}{x - y}. \tag{10}$$

Дана система має два незалежних перших інтеграли. Справді, використовуючи вказану властивість пропорції, матимемо

$$\frac{dx + dz}{(y - x) + (x - y)} = \frac{d\,(x + z)}{0},$$

тобто

$$d\,(x + z) = 0.$$

Звідси

$$u_1\,(x, y, z) \equiv x + z = C_1.$$

Для знаходження ще одного першого інтеграла помножимо чисельник і знаменник першого та третього рівнянь системи (10) відповідно на -3 та на -1. Дістанемо

$$\frac{d\,(-3x)}{-3y + 3x} = \frac{dy}{x + y + z} = \frac{d\,(-z)}{-x + y}. \tag{11}$$

Тому

$$\frac{d\,(-3x + y - z)}{-y + 3x + z} = \frac{d\,(x + y + z)}{x + y + z}.$$

Отже,

$$u_2\,(x, y, z) \equiv (x + y + z)\,(y - 3x - z) = C_2.$$

Легко переконатися, що u_1 та u_2 незалежні. Тому, згідно з (5), формула

$$u = \Phi\,(x + z, (x + y + z)\,(y - 3x - z))$$

описує усі розв'язки рівняння (9).

5.

$$\left(x + y^2 + z^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Розв'язання. Тут відповідна система матиме вигляд

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Розв'язуючи рівняння $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, отримуємо $u_1\,(x, y, z) \equiv \frac{z}{y} = C_1$. Підставляючи знайдений перший інтеграл системи в рівняння $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y}$, будемо мати лінійне рівняння відносно $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = \left(1 + C_1^2\right)y.$$

Його загальний розв'язок

$$x = \left(1 + C_1^2\right)y^2 + C_2 y,$$

а тому

$$x = \left(1 + \frac{z^2}{y^2}\right)y^2 + C_2 y,$$

звідки

$$u_2(x, y, z) \equiv \frac{x - y^2 - z^2}{y} = C_2.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння матиме вигляд

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{z}{y}, \frac{x - y^2 - z^2}{y}\right).$$

5.6. Задача Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними

Розглянемо постановку і схему побудови розв'язку задачі Коші для рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

Для цього зафіксуємо яку-небудь із змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, наприклад, $x_1 = x_1^{(0)}$, і вимагатимемо, щоб для розв'язку $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рівняння (1) виконувалась умова

$$u\left(x_1^{(0)}, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{2}$$

де φ — задана неперервно диференційовна функція.

Тоді задачу Коші для рівняння (1) формулюють так: серед усіх розв'язків рівняння (1) знайти розв'язок $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що задовольняє умову (2). При цьому умову (2) називають початковою.

З геометричної точки зору задача Коші (1), (2) полягає в побудові частинного розв'язку рівняння (1), який при фіксованому значенні $x_1^{(0)}$ перетворюється в наперед задану функцію решти змінних, тобто потрібно побудувати таку інтегральну поверхню рівняння, яка на площині $x_1 = x_1^{(0)}$ має наперед заданий слід $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Зокрема, для рівняння

$$f_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку вказаного рівняння, що задовольняє початкову умову

$$u(x_0, y) = \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — задана неперервно диференційовна функція.

Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних поверхонь рівняння (3) потрібно знайти ту, яка проходить через задану криву $u = \varphi(y)$, що належить площині $x = x_0$.

Зауважимо, що на відміну від звичайних диференціальних рівнянь, для яких розв'язок задачі Коші будується за допомогою їх загального розв'язку, при розв'язуванні задачі Коші (1), (2) загальний розв'язок рівняння (1) не використовується явно.

Отже, розв'язок задачі Коші (1), (2) будуватимемо у припущенні, що існує $n - 1$ незалежних неперервно диференційовних перших інтегралів $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ характеристичної системи рівняння (1). Тоді загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$u = \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}).$$

Для виконання початкової умови (2) функцію Φ потрібно підібрати так, щоб виконувалась рівність

$$\Phi\left(u_1\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, u_{n-1}\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right)\right) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Систему перших інтегралів при фіксованому, згідно з початковою умовою (2), значенні змінної x_1

$$\begin{cases} u_1\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right) = C_{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

можна розглядати як систему рівнянь відносно $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Оскільки система перших інтегралів — незалежна, то за умови

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$$

в області G система (4) однозначно розв'язується відносно $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Тому існує єдиний розв'язок

$$x_i = \omega_i\left(x_1^{(0)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right), \; i = 2, 3, \ldots, n \tag{5}$$

системи (4). Покладемо тепер

$$\Phi(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \varphi\left(\omega_2\left(x_1^{(0)}, C_1, \ldots, C_{n-1}\right), \ldots, \omega_n\left(x_1^{(0)}, C_1, \ldots, C_{n-1}\right)\right). \quad (6)$$

Тоді за теоремою 1 § 5.5 функція

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi\left(\omega_2\left(x_1^{(0)}, u_1, \ldots, u_{n-1}\right), \ldots, \omega_n\left(x_1^{(0)}, u_1, \ldots, u_{n-1}\right)\right), \quad (7)$$

де

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1} = u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n),$$

буде розв'язком рівняння (1). Крім того, згідно з (5),

$$u\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right) = \varphi\left(\omega_2\left(x_1^{(0)}, u_1, \ldots, u_{n-1}\right), \ldots, \omega_n\left(x_1^{(0)}, u_1, \ldots, u_{n-1}\right)\right) =$$

$$= \varphi\left(\omega_2\left(x_1^{(0)}, C_1, \ldots, C_{n-1}\right), \ldots, \omega_n\left(x_1^{(0)}, C_1, \ldots, C_{n-1}\right)\right) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

$$u_1 = u_1\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, u_{n-1} = u_{n-1}\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right),$$

тобто функція (7) задовольняє початкову умову (2). Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо характеристична система рівняння* (1) *має* $n-1$ *незалежних неперервно диференційовних перших інтегралів* $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *система* (4) *— єдиний розв'язок, а функція* φ *з початкової умови* (2) *також неперервно диференційовна, то задача Коші* (1), (2) *має єдиний розв'язок.*

Зауважимо, що метод доведення теореми є одночасно методом побудови розв'язку задачі Коші для лінійного однорідного рівняння з частинними похідними, тобто побудову розв'язку задачі (1), (2) можна виконувати за наступною схемою:

1) записуємо відповідну характеристичну систему;

2) знаходимо $n-1$ незалежних перших інтегралів системи характеристик;

3) складаємо систему функціональних рівнянь (4). Розв'язуємо її відносно змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n$;

4) записуємо співвідношення (6);

5) замінивши в (6) $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ на $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, отримуємо шуканий розв'язок у вигляді (7).

Приклади

1. Знайти розв'язок рівняння

$$\left(1+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

що задовольняє початкову умову

$$u(0)=y^2\equiv\varphi(y).$$

Розв'язання. Використаємо наведену схему.

1) система характеристик матиме вигляд

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{xy};$$

2) інтегруючи отримане звичайне диференціальне рівняння, знаходимо перший (загальний) інтеграл

$$u_1(x,y)\equiv\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}=C;$$

3) покладемо $x=0$, тоді $y=C$;

4) $\Phi(C)=C^2$;

5) $u(x,y)=\left(\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2=\dfrac{y^2}{1+x^2}$.

Геометрично це означає, що знайдено інтегральну поверхню, яка проходить через криву $u=y^2$ на площині $x=0$.

2. Знайти розв'язок рівняння

$$\sqrt{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sqrt{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sqrt{x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}=0,$$

що задовольняє початкову умову $u_2(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}=C_2$.

Розв'язання. 1) характеристична система має вигляд

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1}}=\frac{dx_2}{\sqrt{x_2}}=\frac{dx_3}{\sqrt{x_3}};$$

2) розглядаючи інтегровні комбінації

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1}}=\frac{dx_2}{\sqrt{x_2}}\quad\text{та}\quad\frac{dx_2}{\sqrt{x_2}}=\frac{dx_3}{\sqrt{x_3}},$$

знаходимо два незалежних перших інтеграли

$$u_1(x_1,x_2,x_3)\equiv\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=C_1,\quad u_2(x_1,x_2,x_3)\equiv\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}=C_2;$$

3) складаємо систему (4):

$$\begin{cases}1-\sqrt{x_2}=C_1,\\ \sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}=C_2,\end{cases}$$

звідки

$$x_2=(1-C_1)^2,\ x_3=(1-C_1-C_2)^2;$$

4) підставляючи x_2 та x_3 у початкову умову, дістанемо співвідношення (6)

$$\Phi(C_1,C_2)\equiv x_2-x_3=(1-C_2)^2-(1-C_1-C_2)^2;$$

5) замінивши C_1 та C_2 на u_1 та u_2, остаточно знаходимо

$$u(x_1,x_2,x_3)\equiv\left(1-\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\right)^2-\left(1-\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)-\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}\right)\right)^2=$$

$$= \left(1 + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\,\right)^2 - \left(1 + \sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}\,\right)^2.$$

3. Розв'язати задачу Коші

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\ u(1) = x_2^2 + x_3^2.$$

Розв'язання. Тут $u_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2$, а $u_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - \ln x_3$. Тому

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = C_1, \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = C_2.$$

Отже,

$$\begin{cases} 1 - x_2^2 = C_1, \\ 1 - \ln x_3 = C_2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x_2^2 = 1 - C_1, \\ x_3 = e^{1 - C_2}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\Phi(C_1, C_2) = 1 - C_1 - e^{2(1 - C_2)},$$

а тому

$$u(x_1, x_2, x_3) \equiv 1 - \left(x_1^2 - x_2^2\right) + e^{2(1-(x_1 - \ln x_3))} = 1 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 e^{2(1-x_1)}.$$

Для рівняння (1), крім задачі Коші, можуть ставитись диференціальні задачі з додатковими умовами більш загального вигляду. Наприклад, замість початкової умови (2) може бути задана умова

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad u\Big|_{\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{8}$$

Схема побудови розв'язку задачі (1), (8) аналогічна схемі побудови розв'язку задачі (1), (2), а саме: записуємо систему $n - 1$ незалежних перших інтегралів характеристичної системи рівняння (1) і рівняння $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ як одну систему

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}, \\ \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Розв'язуємо систему (9), якщо це можливо, відносно змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_i = \omega_i(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Підставляючи знайдений розв'язок (10) у другу рівність (8), замінимо сталі C_i функціями u_i. Матимемо

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\omega_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \ldots, \omega_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})). \quad (11)$$

Аналогічно переконуємось в тому, що функція (11) є розв'язком задачі (1), (8).

Зауважимо, що задача (1), (8) стає невизначеною, якщо функція $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є інтегралом характеристичної системи рівняння (1), бо тоді вона залежатиме від функцій u_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, і, отже, систему (9) не можна буде однозначно розв'язати відносно змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Приклад

4. Побудувати розв'язок рівняння

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

що задовольняє умову:

а)

$$u\Big|_{\gamma=0} = x_2^2, \ \gamma = x_1^2 - x_2^2 - 1;$$

б)

$$u\Big|_{\gamma=0} = 1, \ \gamma = x_1^2 + x_2^2 - 4.$$

Розв'язання. У випадку а) складаємо систему характеристик

$$\frac{dx_1}{x_2} = -\frac{dx_2}{x_1}.$$

Знаходимо її перший (він і загальний) інтеграл

$$u_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 = C_1$$

і записуємо систему (9)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = C_1, \\ x_1^2 - x_2^2 = 1, \end{cases}$$

звідки

$$x_1^2 = \frac{1 + C_1}{2}, \ x_2^2 = \frac{C_1 - 1}{2}. \quad (12)$$

Підставивши другу рівність з (12) в додаткову умову (8) і замінивши C_1 на $u_1 = x_1^2 + x_2^2$, дістанемо шукану функцію

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{2}.$$

У випадку б) функція $\gamma = x_1^2 + x_2^2 - 4$ є інтегралом відповідної характеристичної системи. Тому задача стає невизначеною. З геометричної точки зору це означає, що інтегральними поверхнями заданого рівняння є всеможливі поверхні обертання $u = \Phi(x_1^2 + x_2^2)$, вісь обертання яких збігається з віссю Ou. Зрозуміло, що існує безліч поверхонь обертання, які проходять через коло $u = 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 4$. Наприклад, параболоїди обертання $u = x_1^2 + x_2^2 - 3$, $4u = x_1^2 + x_2^2$, $u = -x_1^2 - x_2^2 + 5$; сфера $x_1^2 + x_2^2 + u^2 = 5$ тощо.

5.7. Квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

Рівняння вигляду

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$
$$= g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \qquad (1)$$

називають квазілінійним.

Якщо у рівнянні (1) коефіцієнти f_i не залежать від u, тобто

$$f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

то дане рівняння називають напівлінійним і записують

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$
$$= g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \qquad (2)$$

При цьому, якщо в останньому рівнянні функція g — лінійна відносно u, то рівняння (2) перетворюється у лінійне, тобто

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$
$$= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)u + g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3)$$

Розглянемо спочатку питання про побудову загального розв'язку рівняння (1). Для цього припускатимемо, що функції f_i та g визначені в області $G \subset \mathbf{R^{n+1}}$.

Теорема 1. *Нехай функції* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *та* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *— неперервно диференційовні в області* $G \subset \mathbf{R^{n+1}}$ *і не перетворюються в нуль одночасно в кожній точці цієї області. Тоді в класі неперервно диференційовних функцій існує загальний розв'язок рівняння* (1)

$$\Phi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)) = 0, \qquad (4)$$

де Φ *— довільна неперервно диференційовна функція, а* $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *— незалежні перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)} = \frac{du}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)}. \qquad (5)$$

Доведення. Шукатимемо розв'язок рівняння (1) в неявному вигляді

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0. \tag{6}$$

При цьому вважатимемо, що функція V має неперервні частинні похідні за всіма аргументами і $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ у деякій області зміни змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$. Тоді

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^{-1}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Підставивши знайдені значення $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ у рівняння (1), отримаємо лінійне однорідне рівняння з частинними похідними

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} +$$
$$+ g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{7}$$

відносно невідомої функції V.

Навпаки, нехай функція $V = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ є розв'язком рівняння (7). Тоді функція $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка задовольняє функціональне рівняння (6), буде розв'язком рівняння (1).

Справді, підставляючи значення $\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в (7), дістанемо (1). Отже, для побудови загального розв'язку рівняння (1) досить побудувати загальний розв'язок допоміжного рівняння (7) і записати цей розв'язок у формі (6).

Нехай $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ — незалежні перші інтеграли системи (5). Тоді, як відомо, множину розв'язків рівняння (7) можна описати формулою

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \Phi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)), \tag{8}$$

де Φ — довільна неперервно диференційовна функція.

Згідно з теоремою 1 § 5.5 розв'язок (8) рівняння (7) є загальним. Записавши його у формі (6), дістанемо в неявному вигляді загальний розв'язок рівняння (1). Теорему доведено.

Приклади

Побудувати загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2(x - 3y).$$

Розв'язання. Запишемо відповідну характеристичну систему

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{du}{u^2(x-3y)}.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

має вигляд $xy = C_1$. Тому функція $u_1(x, y, u) \equiv xy$ є першим інтегралом характеристичної системи.

Інтегруючи рівняння

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2\left(x - 3\frac{C_1}{x}\right)},$$

знаходимо ще один перший інтеграл $u_2(x, y, u) \equiv u + \frac{x}{x^2+3xy} = C_2$.

Тому, згідно з (4), загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд

$$\Phi\left(xy, u + \frac{x}{x^2+3xy}\right) = 0.$$

2.
$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial u}{\partial x_3} = u. \tag{9}$$

Розв'язання. Складемо систему характеристик

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{du}{u}.$$

Її інтегровні комбінації очевидні:

$$\frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_1}{x_1}, \quad \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_2}{x_2}, \quad \frac{dx_3}{x_3} = \frac{du}{u}.$$

Отже, першими інтегралами будуть функції

$$u_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_3}, \quad u_3 = \frac{u}{x_3}.$$

Тому загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{u}{x_3}\right) = 0.$$

Розв'язок рівняння (9) можна отримати і в явній формі, якщо розв'язати останнє співвідношення відносно функції u:

$$u = x_3\,\varphi\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right),$$

де φ — довільна неперервно диференційовна функція.

Справді, позначивши $\frac{x_1}{x_3} = \omega_1$, $\frac{x_2}{x_3} = \omega_2$, матимемо

$$x_1x_3\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + x_2x_3\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} + x_3\varphi + x_3^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}\right) =$$

$$= x_1\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} + x_2\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} + x_3\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}x_1 - x_2\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} \equiv x_3\,\varphi\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = u.$$

3.
$$x_1u\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Розв'язання. Система характеристик має вигляд

$$\frac{dx_1}{x_1 u} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{0}.$$

Останнє відношення в цій системі є символічним і означає, що $du = 0$. Отже,

$$u_1(x_1, x_2, u) \equiv u = C_1,$$

а з інтегровної комбінації

$$\frac{dx_1}{C_1 x_1} = \frac{dx_2}{x_2}$$

знаходимо ще один перший інтеграл

$$u_2(x_1, x_2, u) \equiv u \ln x_2 - \ln x_1 = C_2.$$

Тому загальний розв'язок даного рівняння можна записати у вигляді

$$\Phi(u, u \ln x_2 - \ln x_1) = 0.$$

4.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 + \sqrt[3]{u - y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Розв'язання. Система (5) матиме вигляд

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1 + \sqrt[3]{u - y}} = \frac{du}{1}.$$

Її перші інтеграли можна знайти з інтегровних комбінацій

$$dx = du, \; dx = -\frac{d(u - y)}{\sqrt[3]{u - y}},$$

а саме:

$$u_1(x, y, u) \equiv u - x = C_1, \; u_2(x, y, u) \equiv 2x + 3(u - y)^{\frac{2}{3}} = C_2.$$

Тому загальний розв'язок рівняння в неявній формі має вигляд

$$\Phi\left(u - x, 2x + 3\sqrt[3]{(u - y)^2}\right) = 0.$$

Крім того, легко переконатися, що дане рівняння має розв'язок $u = y$, який не входить у множину щойно знайдених розв'язків. Такий розв'язок називають спеціальним. Він відповідає розв'язку $V \equiv 0$ рівняння (7). Справді, поклавши $V = u - y$ і підставивши значення V в рівняння (7) для нашого прикладу, дістанемо тотожність $-\left(1 + \sqrt[3]{V}\right) + 1 = \sqrt[3]{V} \equiv 0$, яка можлива лише при $V \equiv 0$.

Розглянемо тепер задачу Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними.

Не обмежуючи загальність міркувань, будемо вважати, що

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \neq 0,$$

а тому і початкову умову задаватимемо при фіксованому значенні змінної x_1. Тоді задача Коші для рівняння (1) полягає в тому, щоб знайти такий його розв'язок, який при $x_1 = x_1^{(0)}$ задовольняє початкову умову

$$u\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{10}$$

де φ — наперед задана неперервно диференційовна функція.

Для побудови розв'язку задачі Коші (1), (10) будемо діяти так само, як і у випадку лінійного рівняння (1) § 5.6. З цією метою запишемо n незалежних перших інтегралів системи (5) при $x_1 = x_1^{(0)}$:

$$\begin{cases} u_1\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n, u\right) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n, u\right) = C_n. \end{cases} \tag{11}$$

Розв'язуючи систему (11) відносно змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n, u$, матимемо

$$\begin{cases} x_2 = \omega_2(C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \omega_n(C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ u = \omega(C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \tag{12}$$

Розглянемо тепер функцію $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначену неявно співвідношенням

$$V(x_1, \ldots, x_n, u) \equiv \omega(u_1, \ldots, u_n) -$$

$$-\varphi(\omega_2(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \omega_n(u_1, \ldots, u_n)) = 0, \tag{13}$$

де

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n = u_n(x_1, \ldots, x_n, u).$$

Оскільки змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ входять до лівої частини співвідношення (13) через інтеграли $u_1, u_2, \ldots, u_n$ системи (5), то функція

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

визначена неявно за формулою (13), буде розв'язком рівняння (1). Крім того, вона задовольняє початкову умову (10). Справді, при $x_1 = x_1^{(0)}$ функції u_i обертаються в C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, (рівності (11)), а функції $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \omega$ від цих аргументів, згідно з (12), дадуть відповідно $x_2, x_3, \ldots, x_n, u$. Тому

$$u\left(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n\right) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Отже, формула (13) визначає розв'язок задачі Коші (1), (10).

Таким чином, можна запропонувати наступну схему розв'язування задачі Коші (1), (10):

1) складаємо відповідну характеристичну систему;

2) знаходимо n незалежних перших інтегралів системи характеристик;

3) складаємо систему функціональних рівнянь (11). Розв'язуємо її відносно змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n, u$:

$$x_i = \omega_i(C_1, C_2, \ldots, C_n),\ i = 2, 3, \ldots, n,\ u = \omega(C_1, C_2, \ldots, C_n);$$

4) записуємо функціональне рівняння (13)

$$\omega(C_1, C_2, \ldots, C_n) -$$
$$-\varphi(\omega_2(C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots, \omega_n(C_1, C_2, \ldots, C_n)) = 0; \qquad (14)$$

5) підставляючи в (14) замість C_i перші інтеграли $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, дістаємо

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0; \qquad (15)$$

6) розв'язуємо, якщо це можливо, рівняння (15) відносно функції $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Приклад

5. Розв'язати задачу Коші

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2,\ u(x, -2) = \varphi(x) \equiv x - x^2.$$

Розв'язання. Складемо систему характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - x^2 - y^2}.$$

Використовуючи метод інтегровних комбінацій, знаходимо два незалежних перших інтеграли:

а) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, звідки $u_1(x, y, u) \equiv \frac{y}{x} = C_1$;

б) оскільки

$$\frac{dx}{x} = \frac{2x\,dx}{2x^2} = \frac{2y\,dy}{2y^2} = \frac{du}{u - x^2 - y^2} = \frac{d\left(u + x^2 + y^2\right)}{u + x^2 + y^2},$$

то

$$u_2(x, y, u) \equiv \frac{u + y^2 + x^2}{x} = C_2.$$

Для нашого випадку запишемо систему (11)

$$\begin{cases} u_1(x, -2, u) \equiv -\dfrac{2}{x} = C_1, \\[2ex] u_2(x, -2, u) \equiv \dfrac{u + x^2 + 4}{x} = C_2, \end{cases}$$

звідки

$$x = -\frac{2}{C_1};\ u = -\frac{2C_2}{C_1} - \frac{4}{C_1^2} - 4.$$

Скориставшись формулою (13), матимемо

$$-\frac{2C_2}{C_1}-\frac{4}{C_1^2}-4=-\frac{2}{C_1}-\frac{4}{C_1^2},$$

або

$$C_2+2C_1=1.$$

А тому, підставляючи замість C_1 і C_2 перші інтеграли, дістаємо

$$\frac{u+x^2+y^2}{x}+\frac{2y}{x}-1=0.$$

Отже,

$$u=x-x^2-y^2-2y.$$

Як для лінійного однорідного рівняння, так і для квазілінійного, крім задачі Коші, ставляться задачі з більш загальними додатковими умовами. Так, наприклад, замість початкової умови (10) може бути задана умова типу

$$u\Big|_{\gamma=0}=\varphi(x)$$

або, що те саме,

$$\gamma(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ \ u=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{16}$$

де γ та φ — задані неперервно диференційовні функції.

Схема побудови розв'язку задачі (1), (16) аналогічна схемі розв'язування задачі Коші (1), (10). А саме, записуємо n незалежних перших інтегралів системи (5) і рівняння (16) у вигляді системи

$$\begin{cases} u_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=C_i,\ \ i=1,2,\ldots,n,\\ \gamma(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\\ u=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n),\end{cases} \tag{17}$$

яку розв'язуємо відносно змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u$ і, отже, знаходимо, згідно з (12), залежність вигляду

$$\begin{gathered} x_i=\omega_i(C_1,C_2,\ldots,C_n),\ \ i=1,2,\ldots,n,\\ u=\omega(C_1,C_2,\ldots,C_n).\end{gathered} \tag{18}$$

Підставивши (18) в останню рівність (17), дістанемо функціональне рівняння типу (13).

Замінивши C_i на u_i, отримаємо рівняння

$$\begin{gathered}\omega(u_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,u_n(x_1,\ldots,x_n,u))-\\ -\varphi(\omega_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,\omega_n(u_1,\ldots,u_n))=0,\end{gathered} \tag{19}$$

що визначає шуканий розв'язок. Зауважимо, що рівняння (19) іноді простіше отримати із системи (17), безпосередньо виключаючи з неї змінні $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u$.

Приклад

6. Знайти розв'язок рівняння з прикладу 5, для якого

$$\gamma(x, y) \equiv y - x^2 = 0, \ u = 2x.$$

Розв'язання. Тут система (17) матиме вигляд

$$u_1 = \frac{y}{x} = C_1, \ u_2 = \frac{u + x^2 + y^2}{x} = C_2, \ y = x^2, \ u = 2x.$$

Виключимо з неї змінні x, y та u. Дістанемо залежність між C_1 і C_2, а саме:

$$2 + C_1 + C_1^3 = C_2.$$

Замінивши в останньому співвідношенні C_1 та C_2 на u_1 та u_2, матимемо рівняння (19), звідки

$$u = 2x + y + \frac{y^3}{x^2} - x^2 - y^2.$$

5.8. Геометричне тлумачення розв'язків квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку

На відміну від лінійного рівняння, у квазілінійному характеристики містяться в $n+1$-вимірному просторі змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$. З'ясуємо зв'язок між характеристиками і інтегральною поверхнею рівняння (1) §5.7. Для спрощення розглядатимемо квазілінійне рівняння з двома незалежними змінними

$$f_1(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y, u). \tag{1}$$

Нехай $u = u(x, y)$ — розв'язок рівняння (1), визначений в деякій області $D \subset \mathbf{R}^2$, а

$$x = x(t), \ y = y(t) - \tag{2}$$

гладка крива, що належить D. Тоді на цій кривій $u(x(t), y(t)) = u(t)$ є функцією змінної t.

Виберемо криву (2) так, щоб її дотичний вектор $\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)$ у кожній точці збігався з вектором $(f_1(x(t), y(t), u(t)), \ f_2(x(t), y(t), u(t)))$.

Для цього мають виконуватися рівності

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x(t), y(t), u(t)), \ \frac{dy}{dt} = f_2(x(t), y(t), u(t)).$$

Диференціюючи функцію $u(t)$, і враховуючи, що $u(x, y)$ — розв'язок рівняння (1), дістаємо

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x} f_1(x(t), y(t), u(t)) +$$

$$+\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y} f_2(x(t), y(t), u(t)) = g(x(t), y(t), u(t)).$$

Отже, рівняння

$$x = x(t), \ \ y = y(t), \ \ u = u(t),$$

що визначають шукану криву, мають задовольняти систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, u), \ \ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, u), \ \ \frac{du}{dt} = g(x, y, u), \tag{3}$$

або в симетричній формі

$$\frac{dx}{f_1(x, y, u)} = \frac{dy}{f_2(x, y, u)} = \frac{du}{g(x, y, u)}. \tag{4}$$

Систему (3) також називають характеристичною системою рівняння (1), а її інтегральні криві у просторі змінних x, y, u — характеристиками цього рівняння.

Коефіцієнти рівняння (1) визначають у просторі $\mathbf{R}^3$ векторне поле

$$\vec{l}(P) = (f_1(P), f_2(P), g(P)); \ \ P = (x_0, y_0, u_0).$$

Якщо точка P належить інтегральній поверхні $S : u = u(x, y)$, то вектор

$$\vec{n}(P) = \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}, -1\right)$$

є ортогональним до поверхні $u = u(x, y)$ в точці $P(x_0, y_0, u_0)$, де $u_0 = u(x_0, y_0)$. Тоді рівняння (1) можна записати у вигляді скалярного добутку

$$\left(\vec{n}(P), \vec{l}(P)\right) = 0. \tag{5}$$

Таким чином, вектори $\vec{n}(P)$ та $\vec{l}(P)$ перпендикулярні.

Теорема 1. *Якщо поверхня $S : u = u(x, y)$ у кожній своїй точці $P(x_0, y_0, u_0)$ дотикається до характеристики рівняння* (1), *яка проходить через точку $P(x_0, y_0, u_0)$, то S є інтегральною поверхнею рівняння* (1).

Доведення. Нехай $P(x_0, y_0, u_0)$, $u_0 = u(x_0, y_0)$ — довільна точка поверхні S. Розглянемо інтегральну криву (характеристику)

$$x = x(t), \ \ y = y(t), \ \ u = u(t), \tag{6}$$

яка проходить через точку P, тобто нехай для деякого $t = t_0$

$$x_0 = x(t_0), \ \ y_0 = y(t_0), \ \ u_0 = u(t_0).$$

Запишемо рівняння дотичної площини до поверхні S у точці $P(x_0, y_0, u_0)$:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = u - u_0.$$

За умовою теореми характеристика дотикається до поверхні S у точці $P(x_0, y_0, u_0)$, а тому вектор $(x'(t_0), y'(t_0), u'(t_0))$, що дотикається до характеристики, перпендикулярний до вектора $\vec{n}(P)$, тобто

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}x'(t_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}y'(t_0) = u'(t_0). \qquad (7)$$

Оскільки функції (6) є розв'язком системи (3), то

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = f_1(x(t_0), y(t_0), u(t_0)), \quad \frac{dy(t_0)}{dt} = f_2(x(t_0), y(t_0), u(t_0)),$$

$$\frac{du(t_0)}{dt} = g(x(t_0), y(t_0), u(t_0)).$$

Тоді з рівності (7) дістанемо

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}f_1(x_0, y_0, u_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}f_2(x_0, y_0, u_0) = g(x_0, y_0, u_0).$$

Це і означає, що функція $u = u(x, y)$ задовольняє рівняння (1) при $x = x_0$, $y = y_0$. Враховуючи довільність точки $P(x_0, y_0, u_0)$ поверхні S, приходимо до висновку, що функція $u = u(x, y)$ є розв'язком рівняння (1). Теорему доведено.

Оскільки

$$(x'(t_0), y'(t_0), u'(t_0)) = (f_1(x_0, y_0, u_0), f_2(x_0, y_0, u_0), g(x_0, y_0, u_0)) =$$
$$= (f_1(P), f_2(P), g(P)) = \vec{l}(P),$$

то характеристика і інтегральна поверхня, які проходять через точку P, дотикаються до вектора $\vec{l}(P)$. Тому інтегральну поверхню можна "склеїти" з характеристик, а саме слушною є теорема 2.

Теорема 2. *Якщо інтегральна поверхня $S : u = u(x, y)$ містить точку $P(x_0, y_0, u_0)$, то через цю точку проходить характеристика, яка повністю належить поверхні S.*

Доведення. Для системи

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, u), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, u),$$

де $u = u(x, y)$, задамо початкові умови:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Нехай $(x(t), y(t))$ — розв'язок зазначеної задачі Коші. Крива

$$\Gamma: \; x = x(t), \; y = y(t), \; u = u(t) \equiv u\,(x(t), y(t))$$

належить інтегральній поверхні S. Покажемо, що Γ є характеристикою.

Справді, оскільки функція $u(x, y)$ є розв'язком рівняння (1), то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_1\,(x, y, u)\,\frac{\partial u}{\partial x} + f_2\,(x, y, u)\,\frac{\partial u}{\partial y} = g\,(x, y, u).$$

Теорему доведено.

Приклади

Знайти інтегральні поверхні диференціальних рівнянь.

1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Розв'язання. Тут характеристична система має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = 1, \; \frac{dy}{dt} = 1, \; \frac{du}{dt} = 1,$$

а тому характеристики

$$x = t + x_0, y = t + y_0, u = t + u_0 \tag{8}$$

утворюють сукупність прямих, паралельних вектору $\vec{l}\,(1, 1, 1)$. Отже, інтегральними поверхнями є циліндричні поверхні з твірними, паралельними вектору $\vec{l}$.

Перші інтеграли $u_1 \equiv x - y = C_1$ та $u_2 \equiv y - u = C_2$ визначають дві сукупності площин, що містять прямі (8). Загальний інтеграл $\Phi\,(x - u, y - u) = 0$ визначає поверхню, утворену лініями сукупності (8), які проходять через криву $\Phi\,(x, y) = 0, \; u = 0$.

Зокрема, якщо такою кривою є коло $x^2 + y^2 = 4, \; u = 0$, то відповідний інтеграл

$$(x - u)^2 + (y - u)^2 = 4$$

з геометричної точки зору є еліптичним циліндром, утвореним прямими (8), що перетинають дане коло.

2.

$$(u - y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + (x - u)\,\frac{\partial u}{\partial y} = y - x.$$

Розв'язання. Інтегровні комбінації відповідної характеристичної системи

$$\frac{dx}{u - y} = \frac{dy}{x - u} = \frac{du}{y - x}$$

мають вигляд $dx + dy + du = 0$ і $x\,dx + y\,dy + u\,du = 0$, а тому першими інтегралами є функції

$$u_1\,(x, y, u) \equiv x + y + u$$

та

$$u_2\,(x, y, u) \equiv x^2 + y^2 + u^2.$$

На характеристиці функції u_1 і u_2 — сталі. Перетином площини $u_1 = C_1$ і сфери $u_2 = C_2$ є коло, центр якого належить прямій $x = t, \; y = t, \; u = t$.

Отже, загальний розв'язок визначається неявно за допомогою рівності

$$\Phi\left(x + y + u, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0$$

(інтегральні поверхні є поверхнями обертання навколо прямої $x = t, \; y = t, \; u = t$).

3. Знайти поверхні, дотичні площини до яких відтинають відрізок сталої довжини m на осі Ou.

Розв'язання. Запишемо рівняння дотичної площини в точці (x, y, u):

$$U - u = \frac{\partial u}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y - y).$$

Покладемо $X = Y = 0$. Тоді

$$U = u - \frac{\partial u}{\partial x}x - \frac{\partial u}{\partial y}y \equiv m.$$

Першими інтегралами системи

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - m}$$

є функції $u_1 \equiv \frac{y}{x} = C_1$ та $u_2 \equiv \frac{u - m}{x} = C_2$, а тому загальний інтеграл матиме вигляд $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{u - m}{x}\right) = 0$ (інтегральні поверхні є конусами з вершинами в точці $(0, 0, m)$).

5.9. Рівняння Пфаффа

Диференціальне рівняння

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 + \ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n = 0, \tag{1}$$

де $f_i : (G \subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ — неперервно диференційовні функції, називають рівнянням Пфаффа*.

Нехай, спочатку, $n = 2$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Рівняння (2) є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, теорію інтегрування якого розглянуто раніше. Зокрема, для відшукання інтегрувального множника, взагалі кажучи, потрібно розв'язати лінійне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$Q(x, y)\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} - P(x, y)\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} = \mu(x, y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right), \tag{3}$$

тобто знайти незалежні перші інтеграли наступної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{Q} = \frac{dy}{-P} = \frac{d\mu}{\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}. \tag{4}$$

Надалі розглядатимемо випадок $n = 3$. Для спрощення введемо позначення $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ f_1 = P,\ f_2 = Q,\ f_3 = R$. Тоді рівняння (3) набуде вигляду

---

*Йоганн Пфафф (1765–1825) — німецький математик.

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0. \tag{5}$$

Інтегралом рівняння (5) назвемо таку залежність між змінними x, y та z, при якій рівність (5) перетворюється на тотожність в області G.

Якщо вказану залежність можна записати у вигляді $u(x, y, z) = 0$ (або в параметричній формі $x = x(t, \tau)$, $y = y(t, \tau)$, $z = z(t, \tau)$), то називатимемо її двовимірним інтегралом або інтегральною поверхнею рівняння (5).

Якщо ж інтеграл рівняння Пфаффа можна подати у вигляді системи співвідношень

$$u(x, y, z) = 0, \;\; \upsilon(x, y, z) = 0$$

(або $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), то таку залежність між x, y та z називатимемо одновимірним інтегралом або інтегральною кривою (лінією) рівняння (5).

Позначимо через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатні орти в просторі $\mathbf{R}^3$. Розглянемо в $\mathbf{R}^3$ векторне поле $\vec{F}$, визначене коефіцієнтами рівняння Пфаффа (5):

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}.$$

Нехай інтеграл рівняння (5) визначається векторною рівністю

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

тоді

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Отже, рівняння (5) рівносильне рівнянню

$$\vec{F}(x, y, z)\,d\vec{r}(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

Тому, якщо S є інтегральною поверхнею рівняння (5), то векторне поле $\vec{F}$ в кожній точці цієї поверхні ортогональне дотичній площині у даній точці.

Як відомо,

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

або у символічному записі

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \det\begin{Vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{Vmatrix}.$$

Якщо $P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0$, то рівняння (5) визначає одну із змінних $x,\ y,\ z$ як функцію решти двох (маємо одне рівняння, а змінних дві), тому для розв'язання цього рівняння потрібні додаткові умови, які роблять його цілком визначеним.

Нехай, наприклад, поле $\vec{F}$ є потенціальним, тобто $\vec{F} = \operatorname{grad} u$. Тоді

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}$$

і рівняння (5) матиме вигляд

$$du = 0.$$

Отже, шукані поверхні є поверхнями рівня $u(x, y, z) = C$ потенціальної функції u. При цьому ліва частина рівняння (5) є повним диференціалом функції u, яку знаходять за допомогою криволінійного інтегралу другого роду

$$u(x, y, z) \equiv \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = C, \tag{7}$$

причому інтеграл обчислюється по довільній кусково-гладкій кривій, що з'єднує точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.

Нагадаємо, що умова потенціальності поля має вигляд $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, тобто

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \equiv 0,\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \equiv 0,\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0. \tag{8}$$

Якщо виконується умова (8), то рівняння Пфаффа називають цілком інтегровним.

Приклади

1. Зінтегрувати рівняння

$$(6x + yz)\,dx + (xz - 2y)\,dy + (xy + 2z)\,dz = 0.$$

Розв'язання. У даному випадку

$$P = 6x + yz,\ Q = xz - 2y,\ R = xy + 2z,$$

тобто

$$\vec{F} = (6x + yz)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + (xy + 2z)\vec{k}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x,\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z,$$

то

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0.$$

Таким чином, інтегрування даного рівняння зводиться до відновлення функції за її диференціалом

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (6x + yz)\,dx + (xz - 2y)\,dy + (xy + 2z)\,dz.$$

Як шлях інтегрування виберемо ламану, ланки якої паралельні осям координат. Тоді

$$u(x, y, z) = \int\limits_0^x 6x\,dx + \int\limits_0^y (-2y)\,dy + \int\limits_0^z (xy + 2z)dz = 3x^2 - y^2 + z^2 + xyz.$$

Отже, шуканим інтегралом є

$$3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = C.$$

2. Розглянемо електростатичне поле, породжене точковим зарядом q, що міститься в початку координат тривимірного простору. Нехай вектор напруженості $\vec{E}$ електричного поля точкового заряду має вигляд

$$\vec{E} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

де

$$P(x, y, z) = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ Q(x, y, z) = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ R(x, y, z) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

ε_0 — електрична стала.

Оскільки поле потенціальне $\left(\mathrm{rot}\vec{E} = 0\right)$, то еквіпотенціальними поверхнями цього поля, тобто поверхнями, всі точки яких мають один і той самий потенціал u, є інтегральні поверхні рівняння Пфаффа

$$\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,dx + \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,dy + \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,dz = 0.$$

Потенціал електричного поля $\vec{E}$ точкового заряду знаходимо за допомогою криволінійного інтеграла

$$u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0) = -\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{q\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

При цьому знак "мінус" перед інтегралом вибрано тому, що $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,u$. Таким чином, еквіпотенціальними поверхнями електричного поля точкового заряду, розташованого в початку координат, є концентричні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = C$.

Якщо векторне поле $\vec{F}$ не є потенціальним, але після помноження вектора $\vec{F}$ на певну скалярну функцію μ воно стає потенціальним, то рівняння (5) буде цілком інтегровним.

При цьому функцію μ, як і у двовимірному випадку, називають інтегрувальним множником. Отже, умовою цілковитої інтегровності рівняння (5) є умова існування інтегрувального множника. У векторній формі вона матиме вигляд

$$\vec{F}\,\mathrm{rot}\vec{F} = 0. \tag{9}$$

Справді, нехай співвідношення $u(x, y, z) = 0$ задає інтегральну поверхню S рівняння (5) в області G. Оскільки вектор $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ є нормальним до поверхні S, то із співвідношення (6) випливає, що у будь-якій точці $(x, y, z) \in S$ вектори $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ і (P, Q, R) паралельні, тобто існує скалярна функція $\mu(x, y, z)$ така, що

$$P(x, y, z) = \mu(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x},\ \ Q(x, y, z) = \mu(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y},$$

$$R(x, y, z) = \mu(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}.$$

Отже, скалярний добуток $\vec{F}\,\mathrm{rot}\vec{F}$ можна записати у вигляді

$$\vec{F}\,\mathrm{rot}\vec{F} = \det\begin{Vmatrix} \mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\frac{\partial u}{\partial y} & \mu\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\frac{\partial u}{\partial y} & \mu\frac{\partial u}{\partial z} \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Розкриваючи отриманий визначник, з урахуванням рівності мішаних частинних похідних функції u, дістанемо умову (9). У координатній формі запису ця умова матиме вигляд

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{11}$$

Метод, який застосовують у цьому разі для інтегрування рівняння Пфаффа, полягає в тому, що одну із змінних, наприклад z, вважають сталою. Тоді отримуємо диференціальне рівняння

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy = 0, \tag{12}$$

в якому z є параметром, а тому інтеграл рівняння (12) має вигляд

$$u(x, y, z) = C(z).$$

Покажемо, що функцію $C(z)$ можна вибрати так, щоб задовольнити рівняння (5).

Диференціюючи останню тотожність, дістаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z)\right)dz = 0. \tag{13}$$

Коефіцієнти при диференціалах рівнянь (5) і (13) мають бути пропорційними, тобто

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z)}{R}. \tag{14}$$

Таким чином, функцію $C'(z)$ можна визначити з рівняння

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z)}{R}, \tag{15}$$

оскільки за умови (9) воно містить лише z, $C'(z)$ і $C(z) = u(x, y, z)$.

Приклад

3. Зінтегрувати рівняння

$$yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0. \tag{16}$$

Розв'язання. Тут

$$\vec{F} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k}, \ \operatorname{rot}\vec{F} = -x\vec{i} + z\vec{k}$$

і

$$\vec{F}\operatorname{rot}\vec{F} = 0.$$

Оскільки $R = xy \neq 0$, то, вважаючи z сталою, матимемо

$$y\,dx + 2x\,dy = 0,$$

звідки

$$xy^2 = C \equiv C(z).$$

Знаходячи диференціал, дістаємо

$$y^2\,dx + 2xy\,dy - C'(z)\,dz = 0. \tag{17}$$

Враховуючи пропорційність коефіцієнтів рівнянь (16) і (17), матимемо

$$\frac{y^2}{yz} = \frac{2xy}{2xz} = \frac{C'(z)}{xy}, \ z \neq 0,$$

звідки

$$\frac{y}{z} = \frac{-C'(z)}{xy}$$

або

$$xy^2 = -z\frac{dC}{dz},$$

тобто

$$C(z) = -\frac{dC}{dz}.$$

Функція $C(z) = \frac{A}{z}$, де A — довільна стала, є розв'язком останнього рівняння. Отже, перший інтеграл рівняння (16) має вигляд

$$xy^2z = A.$$

Якщо $\mu = \mu(x, y, z)$ — інтегрувальний множник диференціального рівняння (5), то вираз $\mu P\,dx + \mu Q\,dy + \mu R\,dz$ є повним диференціалом. При цьому криволінійний інтеграл

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mu P\,dx + \mu Q\,dy + \mu R\,dz$$

визначає розв'язок рівняння (5).

Зокрема, для рівняння (16) інтегрувальним множником, наприклад, є функція $\mu(x, y, z) = y$.

Помноживши обидві частини (16) на y, дістаємо

$$y^2z\,dx + 2xyz\,dy + xy^2\,dz = 0. \tag{18}$$

Ліва частина останнього рівняння є повним диференціалом функції xy^2z. Отже,

$$d(xy^2z) = 0,$$

звідки

$$xy^2z = A.$$

Якщо умова (9) не виконується, то рівняння (5) не є цілком інтегровним. При цьому розглянемо рівняння довільної поверхні

$$S^* : r = r(x, y).$$

Якщо інтегральна лінія l рівняння (5) розташована на S^*, то одночасно виконуються умови

$$z = z(x, y), \;\; P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \;\; dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\,dy,$$

тому

$$\left(P(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y))\,\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right)dx +$$
$$+ \left(Q(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y))\,\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)dy = 0. \tag{19}$$

Отже, якщо $\varphi(x, y) = 0$ — інтеграл рівняння (19), то лінія l, визначена співвідношеннями $\varphi(x, y) = 0$ і $z = z(x, y)$, є інтегральною для рівняння (5).

Приклад

4. Зінтегрувати рівняння

$$z\,dx + (x - y)\,dy + zy\,dz = 0. \tag{20}$$

Розв'язання. Тут

$$\vec{F} = z\vec{i} + (x - y)\,\vec{j} + yz\vec{k},\ \operatorname{rot}\vec{F} = z\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

і

$$\vec{F}\operatorname{rot}\vec{F} = z^2 + (x - y) + yz,$$

тобто умова (9) не виконується. Знайдемо інтегральні криві рівняння (20), які належать площині $z = 1$. З початкового рівняння матимемо

$$dx + (x - y)\,dy = 0.$$

Отже,

$$x = y - 1 + Ce^{-y},$$

де C — довільна стала.

Таким чином, система

$$\begin{cases} z = 1, \\ x = y - 1 + Ce^{-y} \end{cases}$$

визначає однопараметричну сім'ю інтегральних ліній рівняння (20), які належать площині $z = 1$.

Зауважимо, що запропонований алгоритм відшукання інтегральних ліній рівняння (5) можна використати і для побудови інтегральних поверхонь, які проходять через задану точку (x_0, y_0, z_0) області G, якщо виконується умова (9). Справді, нехай поверхнею S^* є площина $z = z_0$. Тоді співвідношення (19) набуває вигляду

$$P(x, y, z_0)\,dx + Q(x, y, z_0)\,dy = 0. \tag{21}$$

Позначимо через $y = y(x)$ розв'язок рівняння (21) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Побудуємо інтегральні лінії l рівняння (5), які розташовані в площині $x = a$ і проходять через точку $(a, y(a), z_0)$. Сукупність цих ліній і визначає шукану інтегральну поверхню рівняння (5).

Приклад

5. Побудувати інтегральну поверхню рівняння

$$\frac{dx}{yz} + \frac{dy}{xz} + \frac{dz}{xy} = 0, \tag{22}$$

що проходить через точку (1, 1, 1).

Розв'язання. Легко переконатися, що для рівняння (22) виконується умова (9). Покладаючи $z = 1$, матимемо наступну задачу Коші:

$$\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0,\ y(1) = 1.$$

Отже, $x^2 + y^2 = C_1 \equiv 2$. На площині $x = a$ виконується співвідношення

$$\frac{dy}{az} + \frac{dz}{ay} = 0,$$

звідки

$$y^2 + z^2 = C_2 \equiv 3 - a^2.$$

Таким чином, $x = a$ і $y^2 + z^2 = 3 - a^2$, тому шуканою інтегральною поверхнею є сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Зауважимо, що шукану інтегральну поверхню можна знайти безпосередньо, враховуючи, що функція $\mu(x, y, z) = xyz$ є інтегрувальним множником рівняння (22).

5.10. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в загальному випадку

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (1)$$

Методи розв'язання таких рівнянь визначаються виглядом квадратичної форми

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, t_i t_j \qquad (2)$$

у кожній точці $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ деякої області $G \subset \mathbf{R}^n$. Як відомо [11], за допомогою неособливого лінійного перетворення

$$t_i = \sum_{l=1}^{n} b_{li} q_l, \ \det\|b_{li}\| \neq 0, \qquad (3)$$

квадратичну форму (2) в точці M_0 можна звести до канонічного вигляду

$$\sum_{l=1}^{r} q_l^2 - \sum_{l=r+1}^{m} q_l^2, m \le n,$$

причому, згідно із законом інерції квадратичних форм, кількість додатних, від'ємних і таких, що дорівнюють нулю коефіцієнтів канонічного вигляду не залежить від способу перетворення (3).

Залежно від цього рівняння (1) в точці M_0 може належати до трьох різних типів.

Якщо $m = n$ і в точці M_0 всі n коефіцієнтів канонічного вигляду квадратичної форми мають однаковий знак, то рівняння (1) називають рівнянням еліптичного типу в точці $M_0 \in G$.

Якщо $m = n$ і в точці M_0 деякі коефіцієнти канонічного вигляду квадратичної форми набувають різних знаків, то рівняння (1) називають рівнянням гіперболічного типу в точці $M_0 \in G$.

Якщо ж в точці M_0 хоча б один з коефіцієнтів канонічного вигляду квадратичної форми дорівнює 0, то рівняння (1) називають рівнянням параболічного типу в точці M_0.

Для кожної точки $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ існує, взагалі кажучи, своє перетворення змінних, яке зводить рівняння (1) до найпростішого (канонічного) вигляду. Можна показати, що диференціальні рівняння, які мають більше двох незалежних змінних, у загальному випадку неможливо звести до канонічного вигляду навіть в як завгодно малій області.

Якщо ж рівняння (1) містить дві незалежні змінні, існує перетворення змінних, яке зводить задане рівняння до канонічного вигляду в деякій області, при досить загальних припущеннях відносно його коефіцієнтів. Тому надалі розглядатимемо квазілінійне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

$$a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (4)$$

в якому коефіцієнти a_{11}, a_{12} та a_{22} — функції, неперервні разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно, причому $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Рівнянню (4) відповідає квадратична форма

$$a_{11}t_1^2 + 2a_{12}t_1t_2 + a_{22}t_2^2.$$

Залежно від знаку дискримінанта $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ рівняння (4) належить до одного з трьох типів: гіперболічного, якщо в точці M_0 $\Delta < 0$; параболічного, якщо в точці M_0 $\Delta = 0$ та еліптичного, якщо в точці M_0 $\Delta > 0$.

Якщо в кожній точці області G дискримінант рівняння (4) додатний ($\Delta > 0$), то рівняння (4) називають рівнянням гіперболічного типу в області G (гіперболічним рівнянням в області G).

Якщо $\Delta = 0$ в кожній точці області G, то (4) називають рівнянням параболічного типу в області G (параболічним рівнянням в області G).

Якщо ж $\Delta < 0$ в кожній точці області G, то рівняння (4) називають рівнянням еліптичного типу в області G (еліптичним рівнянням в області G).

У різних точках області рівняння (4) може належати до різних типів. При цьому рівняння (4) називатимемо рівнянням мішаного типу в області G.

Приклад

1. Визначити тип наступних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку:

а) $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; г) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. У рівнянні а) $a_{11} = a^2$, $a_{12} = a_{22} = 0$, тобто $\Delta = 0 - 0 \cdot a^2 = 0$. Отже, одновимірне рівняння теплопровідності а) є рівнянням параболічного типу.

У рівнянні б) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $\Delta = -1 < 0$. Тому рівняння Лапласа б) є рівнянням еліптичного типу.

У рівнянні в) $a_{11} = -a^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $\Delta = a^2 > 0$. Отже, одновимірне хвильове рівняння в) є рівнянням гіперболічного типу.

Нарешті, у рівнянні г) $a_{11} = y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $\Delta = -y$. Тому, якщо $y > 0$, то $\Delta < 0$, тобто задане рівняння належить до еліптичного типу; якщо $y < 0$, то $\Delta > 0$, тобто рівняння належить до гіперболічного типу; якщо ж $y = 0$, то $\Delta = 0$, тобто рівняння належить до параболічного типу. Рівняння г) називають рівнянням Трікомі*. Отже, рівняння Трікомі в будь-якій області G, яка містить точки осі Ox є рівнянням мішаного типу; $y = 0$ — лінія параболічності.

Покажемо тепер, що рівняння (4) можна звести до канонічного вигляду заміною змінних

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{5}$$

де $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ — функції, неперервні разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно. Припускатимемо також, що якобіан перетворення (5) задовольняє умову

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \det\begin{Vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{Vmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

в області G (область, в якій розглядається рівняння).

З умови (6) випливає, що рівняння (5) можна однозначно розв'язати відносно змінних x та y, а отже, виразити функцію $u(x, y)$ через змінні ξ та η.

Тоді, використовуючи правило диференціювання складеної функції, дістаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi_x\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_y\frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi_y\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\varphi_x\psi_x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \varphi_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varphi_{xx}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi_{xx}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{7}$$

*Франческо Трікомі (1897—1978) — італійський математик.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\varphi_y \psi_y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \varphi_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varphi_{yy} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi_{yy} \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi_x \varphi_y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left(\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \psi_x \psi_y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varphi_{xy} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi_{xy} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Підставляючи знайдені похідні (7) у рівняння (4) і групуючи доданки з однаковими похідними, матимемо

$$\tilde{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\tilde{a}_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{a}_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f_1\left(u, \xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \tag{8}$$

де f_1 – деяка нова функція, а

$$\begin{gathered} \tilde{a}_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2, \\ \tilde{a}_{12} = a_{11}\varphi_x\psi_x + a_{12}(\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y) + a_{22}\varphi_y\psi_y, \\ \tilde{a}_{22} = a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Безпосередня перевірка показує, що

$$\tilde{a}_{12}^2 - \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x\right)^2. \tag{10}$$

Це означає, що при заміні незалежних змінних (5), за умови (6), тип рівняння не змінюється.

Розглянемо тепер зведення рівняння (4) до канонічного вигляду у кожному з трьох випадків: $\Delta > 0$, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$.

Нехай рівняння (4) є гіперболічним в деякій області G площини xOy. Тоді, згідно з (10), перетворене рівняння (8) також буде гіперболічним. Якщо $a_{11} = a_{22} = 0$ в розглядуваній області, то рівняння (4) за допомогою ділення на $2a_{12}$ відразу зводиться до канонічного вигляду. Тому вважатимемо, що хоча б один з цих двох коефіцієнтів відмінний від нуля. Нехай, наприклад, в усіх точках області G $a_{11} \neq 0$. При цьому як $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ у формулах (5) слід обрати функції, які перетворюють у нуль коефіцієнти $\tilde{a}_{11}$ та $\tilde{a}_{22}$ зведеного рівняння (8). Отже, з урахуванням (9) матимемо наступні диференціальні рівняння для визначення таких функцій:

$$\tilde{a}_{11} \equiv a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0, \tag{11}$$

$$\tilde{a}_{22} \equiv a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2 = 0. \tag{12}$$

Рівняння (11) і (12) – квадратні відносно $\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ та $\frac{\psi_x}{\psi_y}$, а тому

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}. \tag{13}$$

Кожне з отриманих рівнянь (13) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку вигляду

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_1(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_2(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{15}$$

де

$$\lambda_1(x, y) = \frac{-a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \ \lambda_2(x, y) = \frac{-a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}},$$

а $z = z(x, y)$ — шукана функція.

Для розв'язання рівнянь (14) та (15) побудуємо звичайні диференціальні рівняння

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_1(x, y)} \ \left(\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y)\right) \tag{16}$$

та

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_2(x, y)} \ \left(\frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y)\right). \tag{17}$$

Рівняння (16) і (17) — еквівалентні відповідно рівнянням (14) і (15).

З припущень щодо коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} випливає: функції $\lambda_1(x, y)$ та $\lambda_2(x, y)$ мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Тому існують загальні інтеграли $\varphi(x, y) = C_1$ та $\psi(x, y) = C_2$ рівнянь (14) та (15) відповідно. Тоді функція $z = \varphi(x, y)$ буде задовольняти рівняння (14), а отже, і рівняння (11). Аналогічно, функція $z = \psi(x, y)$ задовольнятиме рівняння (15), а отже, і рівняння (12).

Таким чином, заміна

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y)$$

обертає в нуль коефіцієнти $\tilde{a}_{11}$ і $\tilde{a}_{22}$ рівняння (8).

При цьому $\tilde{a}_{12}$ не дорівнює нулю в жодній точці області G, що безпосередньо випливає з тотожності (10). Поділивши перетворене рівняння (8) на $2\tilde{a}_{12}$, дістанемо шуканий канонічний вигляд рівняння (4) гіперболічного типу

$$u_{\xi\eta} + f_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{18}$$

Загальні інтеграли рівнянь (16), (17)

$$\varphi(x, y) = C_1, \ \psi(x, y) = C_2$$

утворюють дві сім'ї кривих, які називатимемо характеристиками рівняння (4). Зрозуміло, оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то ніякі дві характеристики з двох різних сімей не дотикаються одна одної.

Рівняння (16), (17) називають диференціальними рівняннями характеристик рівняння (4). У зв'язку з цим розглянутий метод зведення рівняння (4) до канонічного вигляду (18) називають перетворенням рівняння (4) до характеристик.

Канонічний тип гіперболічного рівняння часто подають і в іншій формі, відмінній від форми (18).

Для цього покладемо

$$\xi = t + \tau, \ \mu = t - \tau,$$

де $t, \ \tau$ — нові змінні.

Тоді друга похідна $u_{\xi\eta}$ в рівнянні (18) перетвориться в різницю $\frac{1}{4}(u_{tt} - u_{\tau\tau})$. Справді, якщо

$$t = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \ \tau = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$

то

$$u_\xi = u_t \frac{\partial t}{\partial \xi} + u_\tau \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(u_t + u_\tau), \ u_\tau = \frac{1}{2}(u_t - u_\tau)$$

і

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(u_t + u_\tau)_\eta = \frac{1}{2}\left((u_t + u_\tau)_t \frac{\partial t}{\partial \eta} + (u_t + u_\tau)_\tau \frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(u_{tt} + u_{\tau t}) - \frac{1}{4}(u_{t\tau} + u_{\tau\tau}) = \frac{1}{4}(u_{tt} - u_{\tau\tau}).$$

Отже, рівняння (18) можна записати ще й в такому вигляді:

$$u_{tt} - u_{\tau\tau} = f_2\left(t, \tau, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial \tau}\right), \tag{19}$$

де $f_2 = -\frac{1}{4} f_1$.

Приклад

2. Визначити тип та звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0. \tag{20}$$

Розв'язання. У цьому рівнянні $a_{11} = x^2, \ a_{12} = 0, \ a_{22} = -y^2$.

Оскільки $\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2$, то в довільній області G, яка не містить точок, що лежать на прямих $x = 0, \ y = 0$, рівняння (20) буде рівнянням гіперболічного типу.

Диференціальні рівняння характеристик, згідно з (15) і (16), мають вигляд

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

а тому співвідношення $xy = C_1$ та $\frac{y}{x} = C_2$ є характеристиками рівняння (20).

Покладаючи

$$\xi = xy, \ \eta = \frac{y}{x},$$

матимемо

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y + u_\eta \left(-\frac{y}{x^2}\right), \ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi x + u_\eta \frac{1}{x},$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} y^2 + u_{\xi\eta}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + u_{\eta\xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + u_{\eta\eta}\frac{y^2}{x^4} + 2u_\eta \frac{y}{x^3},$$

$$u_{yy} = x^2 u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} x\frac{1}{x} + u_{\eta\xi} x\frac{1}{x} + u_{\eta\eta}\frac{1}{x^2}.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у рівняння (20), дістанемо

$$x^2\left(u_{\xi\xi}y^2 - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\frac{y^2}{x^4} + \frac{2y}{x^3}u_\eta\right) - y^2\left(x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

тобто

$$-4y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta = 0.$$

Оскільки

$$xy = \xi,$$

то остаточно матимемо

$$u_{\xi\mu} = \frac{1}{2\xi}u_\eta.$$

Нехай рівняння (4) є еліптичним в деякій області G площини xOy. Оскільки

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = i\sqrt{-\Delta},$$

то диференціальні рівняння характеристик (16), (17) матимуть вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \quad \text{та} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}. \tag{21}$$

Їм відповідатимуть комплексно-спряжені перші інтеграли

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1 \quad \text{та} \quad \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2.$$

Отже, нові незалежні змінні при цьому також є комплексно-спряженими:

$$\xi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \ \eta = \varphi(x, y) - i\psi(x, y).$$

Для того щоб записати рівняння (4) в канонічному вигляді в дійсних змінних, покладемо

$$t = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \varphi(x, y), \ \tau = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = \psi(x, y). \tag{22}$$

Тоді остаточно матимемо

$$u_{tt} + u_{\tau\tau} + f_2\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0. \tag{23}$$

Приклад

3. Визначити тип та звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння

$$y^2u_{xx} + x^2u_{yy} - \frac{x^2}{y}u_y - \frac{x^2}{y}u_x = 0. \tag{24}$$

Розв'язання. Оскільки

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y^2x^2 < 0$$

в усіх точках, що не належать прямим $x = 0$ або $y = 0$, то в будь-якому відкритому квадранті рівняння (24) є рівнянням еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = -i\frac{x}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = i\frac{x}{y}$$

мають комплексно-спряжені загальні інтеграли

$$y^2 + ix^2 = C_1 \text{ та } y^2 - ix^2 = C_2.$$

Тому, покладаючи $\xi = x^2$, $\eta = y^2$, матимемо

$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\eta 2x, \quad u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi 2y,$$

$$u_{xx} = \left(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right)2x + u_\eta 2 = u_{\eta\eta}4x^2 + 2u_\eta,$$

$$u_{yy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y\right)2y + u_\xi 2 = u_{\xi\xi}4y^2 + 2u_\xi.$$

Підставивши знайдені похідні у рівняння (24), запишемо його канонічний вигляд

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0. \tag{25}$$

Якщо рівняння (4) є параболічним у деякій області G площини xOy, то в G існують функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ такі, що заміною змінних (5) рівняння (4) можна звести до канонічного вигляду

$$u_{\eta\eta} + f_1\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0. \tag{26}$$

Як $\varphi(x, y)$ виберемо функцію, що перетворює в нуль коефіцієнт $\tilde{a}_{11}$ рівняння (8), тобто функцію, яка є розв'язком рівняння

$$\tilde{a}_{11} \equiv a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0. \tag{27}$$

На відміну від попередніх випадків (диференціальних рівнянь гіперболічного та еліптичного типів) тут матимемо тільки одну сім'ю характеристик, диференціальне рівняння якої внаслідок умови $\Delta = 0$ набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \tag{28}$$

(вважаємо, як і раніше, що $a_{11} \neq 0$ в області G). Нехай $\varphi(x, y) = C$ – перший інтеграл останнього рівняння.

Якщо тепер за першу з двох нових незалежних змінних взяти функцію $\xi = \varphi(x, y)$, то не лише коефіцієнт $\tilde{a}_{11}$, але й коефіцієнт $\tilde{a}_{12}$ рівняння (8) дорівнює нулю (це випливає з умови $\Delta = 0$ і тотожності (10)).

Як другу незалежну змінну можна взяти $\eta = \psi(x, y)$, де $\psi(x, y)$ — довільна функція, неперервна разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно, яка разом з функцією $\varphi(x, y)$ задовольняє умову (6). Тоді $\tilde{a}_{22}$ не може перетворюватись в нуль одночасно з коефіцієнтами $\tilde{a}_{11}$ та $\tilde{a}_{12}$. Поділивши перетворене таким чином рівняння (8) на $\tilde{a}_{22}$, дістанемо рівняння шуканого канонічного вигляду.

Приклад

4. Визначити тип та звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = 0. \qquad (29)$$

Розв'язання. У даному випадку $a_{11} = 1$, $a_{12} = -x$, $a_{22} = x^2$, а тому

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-x)^2 - x^2 \cdot 1 = 0.$$

Отже, рівняння (29) є рівнянням параболічного типу.

Складаємо згідно з (28) диференціальне рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = -x,$$

перший інтеграл якого має вигляд

$$y + \frac{x^2}{2} = C.$$

Тому

$$\xi = y + \frac{x^2}{2}.$$

Нехай також

$$\eta = x.$$

Справді, за такого вибору η якобіан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \det \begin{Vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = -1 \neq 0$$

на всій площині xOy.

Крім того, функція

$$\eta = x$$

не перетворює в нуль коефіцієнт

$$\tilde{a}_{22} \equiv a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + \psi_y^2 = 1 \neq 0.$$

Тоді

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}x^2 + 2u_{\xi\eta}x + u_{\eta\eta} + u_\xi,$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}x + u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}, \;\; u_y = u_\xi.$$

Підставивши знайдені значення похідних у рівняння (29), дістанемо його канонічний вигляд

$$u_{\eta\eta} - u_\xi = 0.$$

5.11. Побудова загального розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку методом характеристик

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку

$$a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

де a_{11}, a_{12} та a_{22} — функції, неперервні разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно, іноді можна знайти безпосереднім інтегруванням його канонічної форми. Такий метод знаходження загального розв'язку називають методом характеристик. Згідно з ним за допомогою відповідної заміни незалежних змінних задане диференціальне рівняння з частинними похідними зводять до канонічного вигляду. Якщо отримане диференціальне рівняння можна безпосередньо зінтегрувати, тобто знайти $u = u(\xi, \eta)$, то для знаходження загального розв'язку початкового диференціального рівняння слід у розв'язку $u = u(\xi, \eta)$ повернутися до старих незалежних змінних.

Приклади

Знайти загальний розв'язок наступних рівнянь.

1.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}\cos^2 x - (u_x + u_y)\operatorname{ctg} x = 0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Рівняння (1) є рівнянням гіперболічного типу, бо

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x > 0.$$

Інтегруючи диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \sin x,$$

дістаємо

$$y - x + \cos x = C_1, \quad y - x - \cos x = C_2.$$

Покладемо

$$\xi = y - x + \cos x, \quad \eta = y - x - \cos x,$$

тоді

$$u_x = u_\xi(-1 - \sin x) + u_\eta(-1 + \sin x), \quad u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}(1 + \sin x)^2 + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}(\sin x - 1)^2 - u_\xi \cos x + u_\eta \cos x,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}(-1 - \sin x) + u_{\xi\eta}(-1 - \sin x + \sin x - 1) + u_{\eta\eta}(\sin x - 1).$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1), матимемо

$$2u_{\xi\eta} \sin^2 x = 0,$$

звідки

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{2}$$

Легко бачити, що співвідношення

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta), \tag{3}$$

де $\varphi(\xi)$ та $\psi(\eta)$ — довільні функції, що мають неперервні похідні другого порядку, є загальним розв'язком рівняння (2).

Повертаючись у формулі (3) до змінних x та y, дістанемо загальний розв'язок рівняння (1)

$$u(x, y) = \varphi(y - x + \cos x) + \psi(y - x - \cos x).$$

2.

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0. \tag{4}$$

Розв'язання. Рівняння (4) є рівнянням параболічного типу, оскільки

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 - x^2y^2 = 0,$$

тому маємо єдине диференціальне рівняння характеристик

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Його загальний інтеграл $xy = C$ дає змогу ввести нову незалежну змінну $\xi = xy$. Іншою змінною може бути довільна функція. Нехай, наприклад, $\eta = x$.

Тоді будемо мати

$$u_x = u_\xi y + u_\eta, \; u_y = xu_\xi, \; u_{xx} = u_{\xi\xi}y^2 + 2yu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}xy + u_\xi + u_{\xi\eta}x, \; u_{yy} = x^2 u_{\xi\xi}.$$

Підставивши знайдені похідні у рівняння (4), дістанемо

$$x^2 u_{\eta\eta} + xu_\eta = 0,$$

або

$$u_{\eta\eta} = -\frac{1}{\eta} u_\eta. \tag{5}$$

Позначимо $u_\eta = v$. Тоді рівняння (5) набуває вигляду

$$v_\eta = -\frac{v}{\eta}. \tag{6}$$

Розв'язуючи останнє диференціальне рівняння як звичайне (з невідомою функцією v і незалежною змінною η), отримуємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\eta}{\eta},$$

звідки

$$v = u_\eta = \frac{\varphi(\xi)}{\eta},$$

а тому

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi)\ln\eta + \psi(\xi), \tag{7}$$

де $\varphi(\xi)$ та $\psi(\xi)$ — довільні функції, що мають неперервні похідні другого порядку.

Повертаючись у формулі (7) до старих змінних, дістанемо загальний розв'язок рівняння (4)

$$u(x, y) = \varphi(xy)\ln x + \psi(xy).$$

3.

$$u_{xx} + yu_{yy} - \frac{1}{2}u_y = 0. \tag{8}$$

Розв'язання. Оскільки $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y$, то в півплощині $y > 0$ задане рівняння є рівнянням гіперболічного типу, а в півплощині $y < 0$ — рівнянням еліптичного типу. Розглянемо обидва випадки:

1) $y > 0$. Диференціальні рівняння характеристик мають вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{y},$$

звідки

$$x + 2\sqrt{y} = C_1, \quad x - 2\sqrt{y} = C_2.$$

Тому за допомогою заміни змінних

$$\xi = x + 2\sqrt{y}, \quad \eta = x - 2\sqrt{y}$$

рівняння (8) можна звести до канонічного вигляду

$$4u_{\xi\eta} = 0. \tag{9}$$

Отже, співвідношення

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta), \tag{10}$$

де $\varphi(\xi)$ та $\psi(\eta)$ — довільні функції, що мають неперервні похідні другого порядку, є загальним розв'язком рівняння (9).

Повертаючись в (10) до старих змінних, дістанемо загальний розв'язок рівняння (8) у півплощині $y > 0$:

$$u(x, y) = \varphi(x + 2\sqrt{y}) + \psi(x - 2\sqrt{y}).$$

2) $y < 0$. При цьому диференціальні рівняння характеристик матимуть вигляд

$$\frac{dy}{dx} = i\sqrt{-y}, \quad \frac{dy}{dx} = -i\sqrt{-y},$$

звідки

$$\frac{dy}{i\sqrt{-y}} - dx = 0, \quad \frac{dy}{i\sqrt{-y}} + dx = 0. \tag{11}$$

Отже,

$$x + i2\sqrt{-y} = C_1, \quad x - i2\sqrt{-y} = C_2. \tag{12}$$

Тому за нові незалежні змінні можна обрати дійсну та уявну частину перших інтегралів (12)

$$\xi = x, \quad \eta = 2\sqrt{-y}.$$

Тоді

$$u_{xx} = u_{\xi\xi},\ u_{yy} = -\frac{1}{y}u_{\eta\eta} + \frac{1}{2y\sqrt{-y}}u_{\eta},\ u_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}}u_{\eta}.$$

Підставляючи знайдені похідні у рівняння (8), дістанемо двовимірне рівняння Лапласа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \tag{13}$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$u(\xi, \eta) = \Gamma(\xi, \eta), \tag{14}$$

де $\Gamma(\xi, \eta)$ — довільна гармонічна функція двох змінних (наприклад, $\Gamma(\xi, \eta) = 2\xi + \eta$).

Повертаючись у формулі (14) до старих змінних, дістанемо загальний розв'язок рівняння (8) у півплощині $y < 0$:

$$u(x, y) = \Gamma(x, 2\sqrt{-y}).$$

4. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{yy} - 2u_{xy} + 4e^x = 0, \tag{15}$$

що задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = x^2,\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = e^x. \tag{16}$$

Розв'язання. Рівняння (15) є рівнянням гіперболічного типу на всій площині, бо

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-1)^2 - 0 \cdot 1 = 1 > 0.$$

Оскільки $a_{11} \equiv 0$, то характеристичні рівняння матимуть вигляд

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}},\ \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}$$

або

$$\frac{dx}{dy} = -2,\ dx = 0. \tag{17}$$

Перші інтеграли рівнянь (17)

$$x + 2y = C_1,\ x = C_2$$

дають змогу за нові незалежні змінні вибрати функції

$$\xi = x + 2y,\ \eta = x, \tag{18}$$

тоді

$$u_{yy} = 4u_{\xi\xi},\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння (15), матимемо

$$u_{\xi\eta} = e^{\eta}. \tag{19}$$

Далі послідовно знаходимо

$$u_{\xi} = \int e^{\eta}d\eta + \varphi_0(\xi),\ u(\xi, \eta) = \xi e^{\eta} + \int \varphi_0(\xi)d\xi + \psi(\eta),$$

$$u(\xi, \eta) = \xi e^{\eta} + \varphi(\xi) + \psi(\eta), \tag{20}$$

де $\varphi(\xi)$ та $\psi(\eta)$ – довільні функції, похідні другого порядку яких неперервні.

Отже, загальний розв'язок рівняння (15) має вигляд

$$u(x, y) = (x + 2y)e^x + \varphi(x + 2y) + \psi(x). \tag{21}$$

Враховуючи початкові умови (16), дістаємо

$$xe^x + \varphi(x) + \psi(x) = x^2,\ 2e^x + 2\varphi'(x) = e^x,$$

звідки

$$2\varphi'(x) = -e^x,$$

тобто

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}e^x,$$

а тому

$$\psi(x) = x^2 - xe^x + \frac{1}{2}e^x.$$

Таким чином, функція

$$u(x, y) = (x + 2y)e^x - \frac{1}{2}e^{x+2y} + x^2 - xe^x + \frac{1}{2}e^x$$

є розв'язком задачі Коші (15), (16).

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливання струни методом характеристик.

Розв'язання. Згідно з § 5.1 поперечні коливання нескінченної струни за відсутності дії на неї зовнішніх сил описуються рівнянням гіперболічного типу

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\ t > 0,\ -\infty < x < +\infty \tag{22}$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x),\ -\infty < x < +\infty, \tag{23}$$

де $\varphi(x)$ – початкове відхилення, а $\psi(x)$ – початкова швидкість.

Враховуючи, що диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dx}{dt} = -a,\ \frac{dx}{dt} = a$$

мають перші інтеграли

$$x + at = C_1,\ x - at = C_2,$$

застосуємо таку заміну незалежних змінних:

$$\xi = x + at,\ \eta = x - at, \tag{24}$$

звідки

$$u_{tt} = u_{\xi\xi}a^2 - 2a^2u_{\xi\eta} + a^2u_{\eta\eta},\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (22), зведемо його до канонічного вигляду

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{25}$$

Інтегруючи рівняння (25) і повертаючись до незалежних змінних x і t, дістанемо загальний розв'язок рівняння коливання струни (22)

$$u(x, t) = \Phi(x + at) + F(x - at), \tag{26}$$

де $\Phi(x)$ та $F(x)$ — довільні функції, що мають неперервні похідні другого порядку.

З фізичної точки зору загальний розв'язок (26) є суперпозицією двох хвиль, які поширюються в протилежних напрямках з однаковою швидкістю $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$.

Для того щоб визначити функції $\Phi(x)$ та $F(x)$ і тим самим знайти закон коливання даної струни, використаємо початкові умови (23):

$$\begin{cases} \Phi(x) + F(x) = \varphi(x), \\ a\Phi'(x) - aF'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Зінтегруємо друге рівняння системи:

$$\Phi(x) - F(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)\,dz + C, \tag{27}$$

тоді

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \tag{28}$$

Співвідношення (28) називають формулою Д'Аламбера.

5.12. Метод відокремлення змінних

У даному параграфі розглянемо один з найбільш поширених методів розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку — метод відокремлення змінних або, як його ще називають, метод Фур'є*. Ознайомимось з даним методом на прикладі задачі про коливання скінченної струни, закріпленої в точках $x = 0$ та $x = l$. Отже, побудуємо розв'язок рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{1}$$

який задовольняє початкові

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x),\ 0 < x < l, \tag{2}$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0,\ u(l, t) = 0. \tag{3}$$

На першому етапі розв'язання задачі методом Фур'є шукаємо розв'язки рівняння (1), які задовольняють умови (3), у вигляді

$$u(x, t) = X(x)\,T(t), \tag{4}$$

тобто у вигляді добутку функцій $X(x)$ та $T(t)$, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

---

*Жан Фур'є (1768—1830) — французький математик.

Підставляючи (4) в (1), дістаємо

$$X(x)\,T''(t) = a^2T(t)\,X''(x). \tag{5}$$

Для відокремлення змінних у цій рівності поділимо обидві її частини на $a^2X(x)\,T(t)$:

$$\frac{1}{a^2T(t)}\,T''(t) = \frac{1}{X(x)}\,X''(x). \tag{6}$$

Якщо зафіксувати певне значення x і змінювати t, то права частина (6) змінюватись не буде, і тому ліва частина теж зберігатиме стале значення. Навпаки, при фіксованому t і змінному x ліва частина не змінюється. Отже, ліва і права частини рівності (6) дорівнюють одній і тій самій сталій величині. Позначимо цю сталу через $-\lambda$:

$$\frac{1}{a^2T(t)}\,T''(t) = \frac{1}{X(x)}\,X''(x) = -\lambda.$$

Звідси для знаходження функцій $T(t)$ та $X(x)$ дістанемо два звичайних диференціальних рівняння:

$$T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0, \tag{7}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{8}$$

Відокремимо змінні й у крайових умовах (3). Для цього підставимо (4) в (3):

$$X(0)\,T(t) = 0,\ \ X(l)\,T(t) = 0.$$

Якщо другий множник дорівнює нулю ($T(t) \equiv 0$), то

$$u(x, t) = X(x)\,T(t) \equiv 0,$$

тобто струна нерухома. Цей випадок тривіальний і надалі нас не цікавитиме. Тому крайові умови (3) накладають обмеження лише на функцію $X(x)$:

$$X(0) = 0,\ \ X(l) = 0. \tag{9}$$

Таким чином, приходимо до задачі на власні значення: знайти всі значення параметра λ, для яких існують нетривіальні (ненульові) розв'язки рівняння (8), що задовольняють крайові умови (9).

Такі значення параметра λ називають власними значеннями, а розв'язки, що їм відповідають, — власними функціями крайової задачі (8), (9). Зауважимо, що задачу на власні значення називають задачею Штурма* — Ліувілля.

*Жан Штурм (1803—1855) — швейцарський математик.

Знайдемо власні значення і власні функції задачі Штурма – Ліувілля. Оскільки рівняння (8) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами, то йому відповідає характеристичне рівняння

$$k^2 + \lambda = 0. \tag{10}$$

Тому розглянемо окремо три випадки: 1) $\lambda < 0$; 2) $\lambda = 0$; 3) $\lambda > 0$.
1) нехай $\lambda < 0$. Тоді корені характеристичного рівняння (10) дійсні:

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda},$$

і загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі. Враховуючи крайові умови, дістаємо

$$C_1 + C_2 = 0,\ C_1 e^{k_1 l} + C_2 e^{k_2 l} = 0. \tag{11}$$

Легко бачити, що визначник отриманої системи відмінний від нуля, а тому $C_1 = C_2 = 0$. Отже, $X(x) \equiv 0$, тобто маємо лише тривіальний розв'язок;
2) якщо $\lambda = 0$, то також не існує нетривіальних розв'язків задачі (8), (9). Справді, при цьому обидва корені характеристичного рівняння (10) дорівнюють нулю:

$$k_1 = k_2 = 0,$$

а тому функція

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

є загальним розв'язком рівняння (8).

З крайових умов

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 + C_2 \cdot l = 0$$

випливає, що $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$;
3) нехай тепер $\lambda > 0$. Тоді корені характеристичного рівняння (10) уявні:

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda},$$

а тому загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{12}$$

Скористаємось крайовими умовами (9):

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

звідки

$$C_1 = 0,\ C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Нехай $C_2 \neq 0$ (інакше $X(x) \equiv 0$). Тоді

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

тобто

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l},\ n = \pm1, \pm2, \ldots (n \neq 0,\ \text{бо за умовою } \lambda > 0).$$

Отже, нетривіальні розв'язки задачі (8), (9) можливі лише при певних значеннях параметра λ, а саме:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n \in \mathbf{N}. \tag{13}$$

Власним значенням (13) відповідають власні функції

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{14}$$

які визначаються з точністю до сталого множника. Зауважимо, що додатним і від'ємним значенням n, однаковим за абсолютною величиною, відповідають однакові власні числа ($\lambda_{-n} = \lambda_n$), а власні функції відрізняються лише сталим множником. Тому можна вважати, що n набуває лише натуральних значень.

При $\lambda = \lambda_n$ рівняння (7) перетвориться на рівняння

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0,\ n \in \mathbf{N}, \tag{15}$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l}t, \tag{16}$$

де a_n і b_n – довільні сталі.

Підставляючи функції (14) і (16) у (4), знаходимо нескінченну множину розв'язків рівняння (1)

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},\ n \in \mathbf{N}, \tag{17}$$

що задовольняють крайові умови (3).

На цьому завершується перший етап розв'язання задачі (1) – (3). На другому етапі побудуємо розв'язок рівняння (1), який задовольняє як крайові умови (3), так і початкові (2).

Оскільки диференціальне рівняння (1) – лінійне однорідне, то сума його частинних розв'язків (17) також є розв'язком даного рівняння [22], а тому і загальний розв'язок задачі (1) – (3) можна шукати у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{18}$$

за умови, що ряд (18) рівномірно збігається і його можна двічі почленно диференціювати за змінними x і t. Враховуючи, що кожний доданок ряду (18) задовольняє крайові умови (3), то їх задовольнятиме і сума ряду (18), тобто функція $u(x,t)$.

Коефіцієнти a_n і b_n підберемо так, щоб виконувались початкові умови (2). Відповідно до першої з цих умов

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{19}$$

Здиференціюємо ряд (18) за змінною t :

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-a_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+b_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{20}$$

Покладаючи $t=0$ у (20) і використовуючи другу умову (2), дістаємо

$$u_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{21}$$

Формули (19) і (21) є розвиненням заданих функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ у ряд Фур'є за синусами в інтервалі $(0;\ l)$. Як відомо, коефіцієнти цих розвинень визначаються за формулами

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{22}$$

Таким чином, розв'язок задачі (1) – (3) побудовано у вигляді ряду (18), коефіцієнти якого визначаються за формулами (22). Насамкінець, з'ясуємо умови, за яких ряд (18) рівномірно збігається і дає змогу бути двічі здиференційованим за змінними x та t.

Теорема 1. *Нехай функція $\varphi(x)$, похідна другого порядку якої неперервна на відрізку $[0;\ l]$, має кусково-неперервну похідну третього порядку на цьому ж відрізку і задовольняє умови*

$$\varphi(0)=\varphi(l),\ \varphi''(0)=\varphi''(l), \tag{23}$$

а функція $\psi(x)$ на відрізку $[0;\ l]$ — *неперервно диференційовна, має кусково-неперервну похідну другого порядку і*

$$\psi(0) = \psi(l) = 0, \tag{24}$$

тоді: 1) *функція* $u(x, t)$, *подана у вигляді ряду* (18) *з коефіцієнтами* a_n *і* b_n, *що визначаються за формулами* (22), *має неперервні похідні другого порядку і є розв'язком задачі* (1) – (3);

2) *ряд* (18) *можна двічі почленно здиференціювати за змінними* x *і* t;

3) *отримані при диференціюванні ряди збігаються абсолютно і рівномірно при* $0 \le x \le l$ *і будь-якому* t.

Доведення. Інтегруючи за частинами (22) і використовуючи умови (23) та (24), дістаємо

$$a_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{b_n^{(3)}}{n^3}, \quad b_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{a_n^{(2)}}{n^3}, \tag{25}$$

де

$$b_n^{(3)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad a_n^{(2)} = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{1}{a}\psi''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{26}$$

Легко бачити, що ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|a_n^{(2)}\right|}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|b_n^{(3)}\right|}{n} \tag{27}$$

збігаються, оскільки

$$\frac{\left|a_n^{(2)}\right|}{n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \left|a_n^{(2)}\right|^2\right), \quad \frac{\left|b_n^{(3)}\right|}{n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \left|b_n^{(3)}\right|^2\right),$$

а ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(2)}\right|^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|b_n^{(3)}\right|^2$, згідно з нерівністю Бесселя [1], збіжні.

Підставляючи (25) у (18), дістаємо

$$u(x, t) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(b_n^{(3)}\cos\frac{n\pi a}{l}t + a_n^{(2)}\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{28}$$

Члени функціонального ряду (28) не перевищують за модулем відповідні члени додатного числового ряду

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\left|b_n^{(3)}\right| + \left|a_n^{(2)}\right|\right) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\left|b_n^{(3)}\right| + \left|a_n^{(2)}\right|}{n}\right), \tag{29}$$

що збігається як добуток двох збіжних додатних числових рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \text{і} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|b_n^{(3)}\right| + \left|a_n^{(2)}\right|}{n}.$$

Тоді за ознакою Вейєрштрасса ряд (18) збігається абсолютно і рівномірно. Оскільки ряди (27) збіжні, то звідси легко переконатися, що ряд (18) можна двічі почленно диференціювати за змінними x і t. Теорему доведено.

З'ясуємо фізичний зміст розв'язку (18). У попередньому параграфі було отримано розв'язок рівняння (1) на всій числовій прямій. Формула Д'Аламбера подає цей розв'язок у вигляді суми двох біжучих хвиль, які поширюються в протилежних напрямках. Для випадку, коли рівняння (1) розглядається на обмеженому проміжку $0 < x < l$, біжучих хвиль вже не буде, оскільки вони взаємодіятимуть з краями. При цьому виникають інші хвилі, які називають стоячими.

Кожний член ряду (18) можна подати ще й так:

$$u_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l} t + \beta_n\right) \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{30}$$

І саме у такому вигляді він описує стоячу хвилю або власне коливання: всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з власною циклічною частотою $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, амплітудою $A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ і однаковою початковою фазою β_n; вони одночасно (синфазно) досягають максимальних відхилень або положення рівноваги. При цьому найменша власна частота дорівнює $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, а всі інші частоти кратні ω_1. Найменшу власну частоту називають частотою основного тону, тони інших частот — гармоніками або обертонами, нерухомі точки струни — вузлами. Наприклад, для коливання u_n вузли розміщено в точках $x = 0, \frac{l}{n}, 2\frac{l}{n}, \ldots, n\frac{l}{n} = l$. Посередині між вузлами знаходяться максимально зміщені від положення рівноваги точки — пучності.

Якщо коливання струни вимушені, то задача зводиться до інтегрування неоднорідного диференціального рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{31}$$

з початковими (2) і крайовими умовами (3).

Як і при розв'язуванні звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь, розв'язок рівняння (31) шукатимемо у вигляді суми двох функ-

цій
$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + w(x,t),$$
де $\upsilon(x,t)$ задовольняє відповідне однорідне рівняння
$$\upsilon_{tt} = a^2\upsilon_{xx}$$
і задані умови
$$\upsilon(x,0) = \varphi(x),\ \ \upsilon_t(x,0) = \psi(x),$$
$$\upsilon(0,t) = 0,\ \ \upsilon(l,t) = 0,$$
а функція $w(x,t)$ задовольняє неоднорідне рівняння
$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t) \tag{32}$$
і однорідні умови
$$w(x,0) = 0,\ \ w_t(x,0) = 0; \tag{33}$$
$$w(0,t) = 0,\ \ w(l,t) = 0. \tag{34}$$

Функція $\upsilon(x,t)$ описує вільні коливання струни, зумовлені наявністю початкових відхилень та початкових швидкостей точок струни. Метод відшукання цієї функції вже розглянуто в даному параграфі на прикладі інтегрування рівняння (1).

Функція $w(x,t)$ описує вимушені коливання струни, зумовлені дією зовнішніх сил. Для її знаходження застосуємо метод Фур'є. А саме: шукатимемо функцію $w(x,t)$ у вигляді ряду за власними функціями $X_n = \sin\frac{n\pi x}{l}$ відповідної однорідної задачі, тобто нехай
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{35}$$
де функції $d_n(t)$ підлягають визначенню.

Очевидо, що $w(x,t)$ задовольняє крайові умови (34). Щоб задовольнити початкові умови (33), покладемо
$$d_n(0) = 0,\ \ d_n'(0) = 0,\ \ n \in \mathbf{N}. \tag{36}$$

Підставляючи (35) в (32), дістаємо
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(d_n''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}d_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = f(x,t).$$

Надалі припускатимемо, що функція $f(x,t)$ задовольняє умови розвинення в ряд Фур'є як функція однієї змінної x (t вважаємо параметром). Тоді

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

де

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \ n \in \mathbf{N}.$$

Таким чином, функція $w(x, t)$ буде розв'язком рівняння (32) якщо

$$d_n''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2} d_n(t) = f_n(t), \ n \in \mathbf{N}.$$

Звідси, враховуючи початкові умови (36), дістаємо

$$d_n(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\, d\tau. \tag{37}$$

Отже, розв'язок задачі (32) – (34) можна записати у вигляді (35), де функції $d_n(t)$ визначаються за формулами (37).

Можна показати [19, 22], що ряд (35) і ряди, отримані з нього почленним двократним диференціюванням за змінними x та t, є рівномірно збіжними, якщо вимагати, щоб неперервна функція $f(x, t)$ мала неперервні частинні похідні до другого порядку включно за змінною x і щоб для всіх значень t виконувалася умова

$$f(0,t) = 0, \ f(l,t) = 0.$$

Вправи

1. Перевірити, чи є функція $u = e^{x^2+y^2}(\sin x + \sin y)$ розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} + xyu = 0.$$

2. Перевірити, чи є функція $u = e^{x^2+y^2}(\varphi(x) + \psi(y))$, де $\varphi(x)$ та $\psi(y)$ – довільні двічі диференційовні функції, загальним розв'язком рівняння з першого завдання.

Знайти повні інтеграли таких рівнянь.

3. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1.$

4. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4.$

5. $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{\partial u}{\partial y}}.$

6. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 4u.$

Знайти особливі інтеграли рівнянь.

7. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \ln\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = u.$

8. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = u.$

Знайти загальні інтеграли рівнянь.

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + y.$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2 - xy.$

11. Знайти розв'язок рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y - xy$, який задовольняє умову $u(0, y) = y^2$.

Побудувати загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

12. $z\dfrac{\partial u}{\partial x} + xz\dfrac{\partial u}{\partial y} + y\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

13. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \left(xy - 2z^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} - xz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Розв'язати задачу Коші.

14. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \ u(0, y) = 1 + y^2.$

15. $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(3x^2y + y^3\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x^3u,\ \ u(1, y) = y^2.$

Побудувати розв'язки квазілінійних рівнянь, які задовольняють додаткові умови.

16. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2,\ \ y = 1,\ \ u = x^2.$

17. $\operatorname{tg} x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u,\ \ y = x,\ \ u = x^3.$

Зінтегрувати рівняння Пфаффа.

18. $\left(y + 3z^2\right)dx + (x + y)\,dy + 6xz\,dz = 0.$

19. $\left(y^2 + z^2\right)dx + \left(x^2 + z^2\right)dy + \left(x^2 + y^2\right)dz = 0.$

Визначити тип та звести до канонічного вигляду рівняння.

20. $u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} + 4u_x - 2u_y + 6u = 0.$

21. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0.$

22. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0.$

Розділ 6

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

6.1. Задачі, при розв'язуванні яких отримують диференціальні рівняння з повільно змінними коефіцієнтами

Дамо спочатку означення повільно змінної функції. Функцію $f(t)$, визначену в інтервалі $(a;\ b)$ (a, b — довільні дійсні числа), називають повільно змінною, якщо похідна від неї $\frac{df(t)}{dt}$ пропорційна деякому малому параметру $\varepsilon \in (0;\ \varepsilon_0]$, де ε_0 — досить мале дійсне число ($\varepsilon_0 \ll 1$).

Зрозуміло, що всяка диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$ функція є повільно змінною функцією t, якщо вона залежить від змінної $\tau = \varepsilon t$. Справді, при цьому маємо

$$\frac{df(t)}{dt} = \varepsilon \frac{df(\tau)}{d\tau}.$$

Змінну τ називають "повільний час".

Надалі розглядатимемо диференціальні рівняння, коефіцієнти яких залежать від τ. Наведемо кілька практичних задач.

1. Задача про динамічні зусилля в пружно-в'язкій нитці змінної довжини. Академік АН УРСР Г. М. Савін та його учні показали, що дана задача за певних умов зводиться до інтегрування диференціального рівняння

$$\frac{l}{g}\left(Q + \frac{1}{3}ql\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\alpha + \frac{1}{g}\left(Q + \frac{1}{2}ql\right)\right]\frac{d\varphi}{dt} + K\varphi = \frac{1}{g}\left(Q + \frac{1}{2}ql\right)\left(g - \frac{dv}{dt}\right), \quad (1)$$

де φ — відносне видовження нитки; q — вага метра нитки; α — коефіцієнт, який характеризує згасання динамічних зусиль у нитці; g — прискорення вільного падіння; v — лінійна швидкість точок обводу барабана, на який накручується нитка; $K = E\sigma$, E — модуль пружності нитки; σ — площа поперечного перерізу нитки.

Піднімання вантажу Q відбувається за трапецоїдною тахограмою (рис. 37), а саме по ділянках

1) рівномірно прискореного руху:

$$l = l_0 - \frac{at^2}{2}, \quad v = \frac{dl}{dt} = -at, \quad \frac{dv}{dt} = -a;$$

2) рівномірного руху:

$$l = l_1 - v_0 t, \quad v = \frac{dl}{dt} = -v_0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad l_1 = l_0 - \frac{at_1^2}{2}, \quad v_0 = at_1;$$

3) рівномірно сповільненого руху:

$$l = l_2 - v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad v = \frac{dl}{dt} = -v_0 + at, \quad \frac{dv}{dt} = a, \quad l_2 = l_1 - v_0(t_2 - t_1)$$

(t_1 — час піднімання вантажу на першій ділянці; t_2 — на другій ділянці).

Отже, диференціальне рівняння (1) потрібно зінтегрувати на кожній із ділянок.

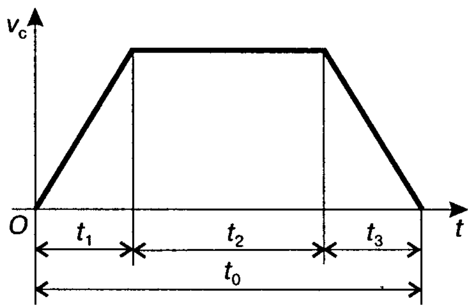


Рис. 37

Покажемо, що рівняння (1) можна звести до рівняння з повільно змінними коефіцієнтами. Для цього розглянемо, наприклад, першу ділянку піднімання вантажу. Введемо нову змінну

$$T = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{Q^2}{\alpha q l_0}.$$

Тоді рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\left[\left(\frac{Q}{l_0} + \frac{1}{3} q\right) - \varepsilon\left(\frac{Q}{2l_0} + \frac{1}{3} q\right)\tau^2 + \varepsilon^2 \frac{q\tau^4}{12}\right] \frac{d^2\varphi}{dT^2} +$$

$$+\varepsilon\left\{\frac{\alpha g}{l_0^2}\sqrt[3]{\frac{\alpha q l_0^2}{a Q^2}} - \varepsilon\left[\left(\frac{Q}{l_0} + \frac{1}{2} q\right)\tau - \frac{1}{4} q \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 q^2 a l_0}{Q^4}}\tau^3\right]\right\} \frac{d\varphi}{dT} +$$

$$+\frac{Kg\alpha^2 q^2}{Q^4}\varphi = \varepsilon\left[\left(\frac{Q}{l_0} + \frac{1}{2} q\right) - \varepsilon\frac{q\tau^2}{4}\right]\left(1 + \frac{a}{g}\right)\sqrt[3]{\frac{\alpha^4 q^4 a^2 l_0^2}{Q^8}},$$

де $\tau = \varepsilon T$, $\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{a}{\omega_0^2 l_0}}$, тобто ми прийшли до диференціального рівняння з повільно змінними коефіцієнтами (коефіцієнти — повільно змінні функції змінної T).

Можна показати, що й на інших ділянках піднімання вантажу Q за допомогою певних підстановок рівняння (1) зводиться до рівняння з повільно змінними коефіцієнтами.

2. Задача про знаходження кута відхилення при підніманні малого судна. Дана задача зводиться до розв'язування такого диференціального рівняння:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{P(l_0 - vt)}{I_c + m(l_0 - vt)^2}\theta = \left\{\left(1 - \frac{P(l_0 - vt)}{I_c + m(l_0 - vt)^2}\frac{h}{g}\right)\psi_m \lambda^2 - \right.$$

$$-\frac{P(l_0 - vt)}{I_c + m(l_0 - vt)^2}\,\psi_m\Bigg\}\sin\lambda t.$$

У це рівняння входять змінні коефіцієнти. Отже, воно не інтегрується в елементарних функціях. Але, якщо в ньому покласти

$$\tau = \varepsilon T,\ T = \omega t,\ \omega = \frac{pl_0^2}{I_c v},\quad \varepsilon = \frac{I_c v^2}{Pl_0^3},$$

то дістанемо диференціальне рівняння з повільно змінними коефіцієнтами

$$(a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2)\frac{d^2\theta}{dT^2} + \varepsilon(1-\tau)\theta = \varepsilon f(e^{i\lambda_1 T} - e^{-i\lambda_1 T}),$$

де

$$a_0 = 1 + \frac{Pt_0^2}{gI_c},\ a_1 = -\frac{2P^2 l_0^5}{I_c^2 g v^2}\tau,\ a_2 = \frac{P^3 l_0^8}{I_c^3 g v^4}\tau^2,$$

$$f = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{Pl_0}(I_c\lambda^2 + ml_0^2\lambda^2 - Pl_0 - ml_0\lambda^2 h)\psi_m + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{2l_0\lambda^2}{g} + \frac{h\lambda^2}{g}\right)\psi_m\tau + \frac{\psi_m\lambda^2 l_0\tau^2}{g}\right],\ \lambda_1 = \frac{I_c\lambda v}{Pl_0^2}.$$

3. Задача про коливання вільно підвішеного каната. Дана задача [10] зводиться до диференціального рівняння вигляду

$$\big(G + \rho g F(l - x)y'\big)' = -\rho F\omega^2 y. \tag{2}$$

У рівняння (2) входить змінний коефіцієнт $l - x$, тому це рівняння навіть при сталому ρF не може бути елементарно зінтегровано, але, якщо в ньому покласти

$$x = \tau = \varepsilon t,\ \varepsilon = \frac{1}{\omega},$$

то матимемо диференціальне рівняння з повільно змінними коефіцієнтами.

4. Диференціальні рівняння із малим параметром при старших похідних. У різних задачах, зокрема в задачах автоматичного регулювання, зустрічаються диференціальні рівняння, в яких при похідних більш високого порядку множниками є малі параметри (малі коефіцієнти). Так, наприклад, розглянемо диференціальне рівняння

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0, \tag{3}$$

де $p(x)$ та $g(x)$ — функції змінної $x \in (a;\, b)$, а ε — малий параметр. Якщо в даному рівнянні покласти $\varepsilon = 0$, то матимемо так зване вироджене рівняння

$$p(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0, \tag{4}$$

яке інтегрується в квадратурах.

Рівняння (3) при цьому називають невиродженим.

Природно поставити запитання: як пов'язані при малих значеннях параметра ε розв'язки невиродженого рівняння (3) з розв'язками виродженого рівняння (4)? Зокрема, чи буде, наприклад, розв'язок y_ε невиродженого рівняння при $\varepsilon \to 0$ наближатися до розв'язку y_0 виродженого рівняння? Дослідженням цих питань займалися багато математиків (А. М. Тихонов, І. С. Грандштейн, А. Б. Васильєва, В. М. Волосов, К. В. Задирака та інші). Виявляється, що лише за певних умов, накладених на коефіцієнти невиродженого рівняння та на відповідні початкові умови, $y_\varepsilon \to y_0$ при $\varepsilon \to 0$. І тому виникає потреба хоча б наближеного інтегрування невиродженого рівняння.

Покажемо, що рівняння (3) зводиться до рівняння з повільно змінними коефіцієнтами. Для цього покладемо

$$x = \tau = \varepsilon t.$$

Отримуємо рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(\tau)\frac{dy}{dx} + \varepsilon g(\tau)y = 0$$

з повільно змінними коефіцієнтами.

5. Задачі на власні значення. Як відомо, розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними (у випадку відокремлення змінних) зводиться до розв'язування одного або системи звичайних диференціальних рівнянь, які мають деякий параметр. При цьому, як правило, шуканий розв'язок має задовольняти певні крайові умови. Прикладом таких рівнянь може бути диференціальне рівняння Штурма — Ліувілля

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda g(x) - r(x))\, y = 0, \tag{5}$$

в якому $g(x)$ та $r(x)$ — задані функції, а λ — великий дійсний параметр. Разом з рівнянням (5) задають ще певні крайові умови. Ті значення λ, при яких дана крайова задача має нетривіальні розв'язки, називають власними значеннями крайової задачі, а самі розв'язки — власними (фундаментальними) функціями цієї задачі.

Покажемо, що рівняння (5) можна звести до рівняння з повільно змінними коефіцієнтами. Для цього покладемо

$$x = \tau = \varepsilon t,\ \ \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

тоді дістаємо рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon^2 (\lambda g(\tau) - r(\tau))\, y = 0$$

з повільно змінними коефіцієнтами.

6.2. Поняття про формальні розв'язки диференціальних рівнянь

Розглянемо вираз

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} c_s t^{-s}, \tag{1}$$

де c_s — дійсні чи комплексні числа; t — дійсна змінна.

Вираз (1) називають формальним степеневим рядом.

Тоді, якщо

$$g = \sum_{s=0}^{\infty} d_s t^{-s} -$$

інший формальний степеневий ряд, то за означенням ряд f дорівнює ряду g тоді і тільки тоді, коли $c_s = d_s,\ s = 0, 1, 2, \ldots$

Суму і добуток двох формальних рядів визначають за допомогою рівностей

$$f + g = \sum_{s=0}^{\infty} (c_s + d_s) t^{-s},$$

$$fg = \sum_{s=0}^{\infty} h_s t^{-s},\ h_s = \sum_{k=0}^{s} c_k d_{s-k}.$$

Похідною f' формального ряду f називають формальний ряд виду

$$f' = -\sum_{s=1}^{\infty} s c_s t^{-s-1}.$$

Тоді формальним розв'язком диференціального рівняння називатимемо такий формальний степеневий ряд, який, будучи підставлений у диференціальне рівняння, перетворює його в тотожність у розумінні рівності формальних степеневих рядів [9].

Як приклад розглянемо диференціальне рівняння

$$x'' + \left(1 - \frac{a}{t^2}\right) x = 0, \tag{2}$$

в якому a — дійсне чи комплексне число; t — дійсна змінна. При $t \to \infty$ дане рівняння вироджується в рівняння

$$x'' + x = 0,$$

один із розв'язків якого має вигляд e^{it}, $i = \sqrt{-1}$.

Тому природно розв'язок рівняння (2) при великих значеннях t шукати у вигляді

$$\psi(t) = e^{it}(1 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots + c_k t^{-k} + \ldots). \tag{3}$$

Для знаходження коефіцієнтів формального степеневого ряду підставимо (3) у рівняння (2). Для цього знайдемо спочатку $\psi'(t)$ та $\psi''(t)$:

$$\psi'(t) = ie^{it}(1 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots + c_k t^{-k} + \ldots) +$$
$$+ e^{it}(-c_1 t^{-2} - 2c_2 t^{-3} - \ldots - kc_k t^{-k-1} - \ldots),$$
$$\psi''(t) = -e^{it}(1 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots + c_k t^{-k} + \ldots) +$$
$$+ 2ie^{it}(-c_1 t^{-2} - 2c_2 t^{-3} - \ldots - kc_k t^{-k-1} - \ldots) +$$
$$+ e^{it}(2c_1 t^{-3} + 2 \cdot 3c_2 t^{-4} + \ldots + k(k+1)c_k t^{-k-2} + \ldots).$$

Тоді матимемо таку тотожність:

$$2i(-c_1 t^{-2} - 2c_2 t^{-3} - \ldots - kc_k t^{-k-1} - \ldots) +$$
$$+ 2c_1 t^{-3} + 2 \cdot 3c_2 t^{-4} + \ldots + k(k+1)c_k t^{-k-2} + \ldots -$$
$$- at^{-2}(1 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots + c_k t^{-k} + \ldots) = 0.$$

Зрівнюючи в цій тотожності коефіцієнти при t^{-k-2}, дістаємо

$$-2i(k+1)c_{k+1} + k(k+1)c_k - ac_k = 0,$$

звідки

$$c_{k+1} = i\frac{a - k(k+1)}{2(k+1)}c_k, \; k \geqslant 0, \; c_0 = 1, \tag{4}$$

тобто

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a}{2(k+1)} - k\right| = \infty.$$

Отже, степеневий ряд у формулі (3) розбігається. Але $\psi(t)$ формально задовольняє рівняння (2) у тому розумінні, що коли $\psi(t)$ підставити в рівняння (2), то коефіцієнти при однакових степенях t в обох частинах отриманої рівності дорівнюють один одному.

Виникає питання про зв'язок між точним розв'язком (розв'язком) диференціального рівняння і формальним розв'язком даного рівняння. Відповідь на це питання вперше дав А. Пуанкаре [30], показавши, що коли рівняння має формальний розв'язок, то він є асимптотичним зображенням точного розв'язку даного диференціального рівняння. Це означає, що точний розв'язок даного диференціального рівняння зображується у вигляді суми із n-ї частинної суми формального розв'язку і величини порядку $O(t^{-n-1})$. Нагадаємо означення символу O. Нехай S — довільна множина, а f та φ — дійсні чи комплексні функції, визначені на множині S. Тоді запис

$$f(s) = O(\varphi(s)),\ \ s \in S$$

означає, що існує стале число A таке, що для всіх $s \in S$ справджується нерівність $|f(s)| \leqslant A|\varphi(s)|$.

Формули, які містять символ O, називають асимптотичними.

Повернемося до попереднього прикладу. Методом варіації довільних сталих зведемо диференціальне рівняння (2) до інтегрального рівняння.

Для цього запишемо рівняння (2) у вигляді

$$x'' + x = f(t),\ \ f(t) = \frac{a}{t^2}x(t). \tag{5}$$

Покладемо

$$x = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it}, \tag{6}$$

де $c_1(t)$ та $c_2(t)$ — функції, які підлягають визначенню.

Тоді

$$x'(t) = c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} + ic_1(t)e^{it} - ic_2(t)e^{-it}.$$

Поклавши

$$c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} = 0, \tag{7}$$

дістанемо

$$x''(t) = ic_1'(t)e^{it} - ic_2'(t)e^{-it} - c_1(t)e^{it} - c_2(t)e^{-it}. \tag{8}$$

Підставивши (6), (8) у ліву частину рівняння (5), матимемо

$$ic_1'(t)e^{it} - ic_2'(t)e^{-it} = f(t). \tag{9}$$

Тоді із системи рівнянь (7), (9) знаходимо

$$c_1'(t) = \frac{f(t)e^{-it}}{2i},\ \ c_2'(t) = -\frac{f(t)e^{it}}{2i},$$

або

$$c_1(t) = \frac{1}{2i}\int\limits_{\infty}^{t} f(\tau)e^{-i\tau}\,d\tau + 1,\;\; c_2(t) = -\frac{1}{2i}\int\limits_{\infty}^{t} f(\tau)e^{i\tau}\,d\tau$$

(сталі інтегрування дорівнюють 1 і 0). Отже,

$$x(t) = e^{it} - a\int\limits_{t}^{\infty} \tau^{-2}x(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Таким чином, від диференціального рівняння (2) переходимо до еквівалентного йому сингулярного інтегрального рівняння.

Розв'яжемо рівняння (10) методом послідовних наближень, поклавши для цього

$$\begin{aligned} &x_0(t) = 0,\\ &x_{n+1}(t) = e^{it} - a\int\limits_{t}^{\infty} \tau^{-2}x_n(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau,\;\; n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Тоді

$$x_1(t) = e^{it}$$

і

$$|x_1(t) - x_0(t)| = 1.$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести нерівність

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \frac{|a|^n}{n!t^n},\;\; n \geqslant 0,\;\; 1 \leqslant t < \infty.$$

Отже,

$$|x_n(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}(t) - x_k(t))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a|^k}{k!t^k} < e^{\frac{|a|}{t}} \leqslant e^{|a|},\;\; 1 \leqslant t < \infty.$$

Звідси випливає, що послідовність функцій $\{x_n(t)\}$ рівномірно збігається для всіх $1 \leqslant t < \infty$. Тому існує

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \varphi(t).$$

Перейшовши до границі в рівності (11) при $n \to \infty$, дістаємо

$$\varphi(t) = e^{it} - a\int_t^\infty \tau^{-2}\varphi(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau.$$

Отже, інтегральне рівняння (10) має точний розв'язок, причому

$$|\varphi(t)| \leqslant e^{|a|}.$$

Тому

$$|\varphi(t) - e^{it}| \leqslant \frac{|a|e^{|a|}}{t} = O(t^{-1}), \tag{12}$$

тобто

$$\varphi(t) = e^{it} + O(t^{-1}).$$

Таким чином, перший член формального ряду (3) з точністю до $O(t^{-1})$ збігається з точним розв'язком інтегрального рівняння (10), або, що те саме, диференціального рівняння (2).

Покажемо, що сума перших двох членів формального розв'язку з точністю до $O(t^{-2})$ збігається з точним розв'язком диференціального рівняння (2). Для цього використаємо рівність

$$\varphi(t) - e^{it} + a\int_t^\infty \tau^{-2}e^{i\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau = a\int_t^\infty \tau^{-2}\left(e^{i\tau} - \varphi(\tau)\right)\sin(t-\tau)\,d\tau.$$

Скориставшись (12), маємо

$$\left|a\int_t^\infty \tau^{-2}\left(e^{i\tau} - \varphi(\tau)\right)\sin(t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant \frac{|a|^2e^{|a|}}{2t^2}.$$

Отже,

$$\varphi(t) = e^{it} - a\int_t^\infty \tau^{-2}e^{i\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau + O(t^{-2}). \tag{13}$$

Записавши $\sin(t-\tau)$ в експоненціальній формі, дістаємо

$$\int_t^\infty \tau^{-2}e^{i\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau = \frac{e^{it}}{2it} - \frac{e^{it}}{4t^2} + \frac{e^{-it}}{2}\int_t^\infty \tau^{-3}e^{2i\tau}\,d\tau.$$

Легко помітити, що

$$\int_t^\infty \tau^{-3}e^{2i\tau}\,d\tau = O(t^{-2}).$$

Тому, згідно з (13), остаточно маємо

$$\varphi(t) = e^{it}\left(1 + \frac{ai}{2t}\right) + O(t^{-2}). \qquad (14)$$

Підставляючи в (3) значення c_1 із (4), переконуємося, що сума перших двох членів формального розв'язку (3) збігається з першим членом точного розв'язку (14) диференціального рівняння (2).

Отже, з наведеного прикладу випливає, що частинні суми формального розв'язку диференціального рівняння асимптотично зображають точний розв'язок даного рівняння. Тому кажуть, що формальні розв'язки мають асимптотичний характер.

У цьому параграфі ми навели приклад формального степеневого ряду, в якому коефіцієнтами є числа, а сам ряд розташований за від'ємними степенями змінної t. У наступних параграфах використовуватимемо формальні степеневі ряди вигляду

$$f(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_s(\tau),$$

де ε — довільний малий параметр, а коефіцієнти $f_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots,$ — необмежено диференційовні функції на відрізку $0 \leqslant \tau \leqslant L < \infty$.

Зауважимо, що дії над такими рядами проводяться за тими самими правилами, що й над рядами (1).

6.3. Системи лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \qquad (1)$$

де x — шуканий n-вимірний вектор; $A(\tau, \varepsilon)$ — дійсна квадратна матриця порядку n, що зображається в загальному випадку степеневим рядом

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau),$$

ε — малий дійсний параметр.

Нехай $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$ — власні значення матриці $A_0(\tau)$.

Теорема 1. *Якщо матриці* $A_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots,$ *на відрізку* $[0; L]$ *необмежено диференційовні і власні значення матриці* $A_0(\tau)$ *на даному відрізку прості, тобто*

$$\lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau), \ i \neq j; \ i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

то система диференціальних рівнянь (1) *має формальну матри-*

цю-розв'язок вигляду

$$X(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) \exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau, \varepsilon)\, dt\right), \tag{3}$$

де $U(\tau, \varepsilon)$ *— матриця розмірів* $n \times n$, *а* $\Lambda(\tau, \varepsilon)$ *— діагональна матриця порядку* n, *що зображаються формальними рядами*

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau), \;\; \Lambda(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Lambda_s(\tau). \tag{4}$$

Доведення. Як відомо [9], формальною матрицею-розв'язком системи (1) називають таку матрицю, яка, будучи підставленою в цю систему, перетворює її в тотожність у розумінні рівності двох матричних формальних степеневих рядів. Тоді, підставляючи (3) у систему (1) і враховуючи, що

$$\exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau, \varepsilon)\, dt\right) \Lambda(\tau, \varepsilon) = \Lambda(\tau, \varepsilon) \exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau, \varepsilon)\, dt\right),$$

матимемо таку тотожність:

$$\varepsilon U'(\tau, \varepsilon) + U(\tau, \varepsilon)\, \Lambda(\tau, \varepsilon) = A(\tau, \varepsilon)\, U(\tau, \varepsilon). \tag{5}$$

Зрівнюючи тут коефіцієнти при однакових степенях параметра ε, дістаємо нескінченну алгебраїчну матричну систему рівнянь

$$U_0(\tau)\, \Lambda_0(\tau) - A_0(\tau)\, U_0(\tau) = 0, \tag{6}$$

$$U_s(\tau)\, \Lambda_0(\tau) - A_0(\tau)\, U_s(\tau) = H_s(\tau), \;\; s = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

де

$$H_s(\tau) = \sum_{j=1}^{s} A_j(\tau)\, U_{s-j}(\tau) - U'_{s-1}(\tau) - U_0(\tau)\, \Lambda_s(\tau) - \sum_{j=1}^{s-1} U_j(\tau)\, \Lambda_{s-j}(\tau).$$

Отже, якщо матриця (3) є формальною матрицею-розв'язком системи (1), то коефіцієнти формальних рядів (4) задовольняють алгебраїчні системи (6), (7).

Можна довести і обернене твердження. А саме: матриця (3), в якій коефіцієнти формальних рядів $U(\tau, \varepsilon)$ та $\Lambda(\tau, \varepsilon)$ визначаються системою рівнянь (6), (7), є формальною матрицею-розв'язком системи (1).

Справді, підставимо матрицю (3) у диференціальний вираз

$$L(X) = \frac{dX}{dt} - A(\tau, \varepsilon)X = \Big(U_0(\tau)\, \Lambda_0(\tau) - A_0(\tau)\, U_0(\tau) +$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\Bigg(U_s(\tau)\,\Lambda_0(\tau)-A_0(\tau)\,U_s(\tau)-$$

$$-\sum_{j=1}^{s}A_j(\tau)\,U_{s-j}(\tau)+U'_{s-1}(\tau)\Bigg)\Bigg)\exp\left(\int_0^t\Lambda(\tau,\varepsilon)\,dt\right),$$

звідки на підставі (6), (7) робимо висновок, що

$$L(X)=0.$$

Отже, для доведення теореми залишилося показати, що матрична система рівнянь (6), (7) має розв'язок.

Розглянемо матричне рівняння (6), у якому матрицю $A_0(\tau)$ згідно з (2) можна записати у такому вигляді:

$$A_0(\tau)=T(\tau)\,W(\tau)\,T^{-1}(\tau),$$

де $W(\tau)$ — діагональна матриця

$$W(\tau)=\{\lambda_1(\tau),\ \lambda_2(\tau),\ \ldots,\ \lambda_n(\tau)\},$$

а $T(\tau)$ — матриця перетворення подібності.

Тоді рівняння (6) матиме вигляд

$$U_0(\tau)\,\Lambda_0(\tau)-T(\tau)\,W(\tau)\,T^{-1}(\tau)\,U_0(\tau)=0. \tag{8}$$

Помножимо зліва обидві частини рівняння (8) на матрицю $T^{-1}(\tau)$. Дістанемо

$$Q_0(\tau)\,\Lambda_0(\tau)-W(\tau)\,Q_0(\tau)=0,$$

де

$$Q_0(\tau)=T^{-1}(\tau)\,U_0(\tau).$$

Вважатимемо, що для всіх $\tau\in[0;\,L]$

$$Q_0(\tau)=E,$$

або, що те саме,

$$U_0(\tau)=T(\tau),$$

тоді

$$\Lambda_0(\tau)=W(\tau). \tag{9}$$

Отже, матриці $U_0(\tau)$ та $\Lambda_0(\tau)$ визначені, причому вони на відрізку $[0;\,L]$ мають похідні всіх порядків [26].

Розглянемо тепер матричне рівняння (7), яке згідно з (9), можна записати так:

$$U_s(\tau)W(\tau) - T(\tau)W(\tau)T^{-1}(\tau)U_s(\tau) = -T(\tau)\Lambda_s(\tau) + \overline{H}_s(\tau), \ s = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

де

$$\overline{H}_s(\tau) = \sum_{j=1}^{s} A_j(\tau)U_{s-j}(\tau) - \sum_{j=1}^{s-1} U_j(\tau)\Lambda_{s-j}(\tau) - U'_{s-1}(\tau).$$

Тоді, помноживши обидві частини (10) зліва на матрицю $T^{-1}(\tau)$, дістаємо

$$Q_s(\tau)W(\tau) - W(\tau)Q_s(\tau) = \Lambda_s(\tau) + F_s(\tau), \ s = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

де

$$F_s(\tau) = T^{-1}(\tau)\overline{H}_s(\tau), \ Q_s(\tau) = T^{-1}(\tau)U_s(\tau).$$

Запишемо матриці $Q_s(\tau)$ та $F_s(\tau)$ у вигляді

$$Q_s(\tau) = Q_{1s}(\tau) + Q_{2s}(\tau), \ F_s(\tau) = F_{1s}(\tau) + F_{2s}(\tau),$$

де $Q_{1s}(\tau)$, $F_{1s}(\tau)$ — діагональні матриці, а $Q_{2s}(\tau)$, $F_{2s}(\tau)$ — квадратні матриці порядку n, діагональні елементи яких дорівнюють нулю.

Тоді із (11) дістаємо

$$Q_{1s}(\tau)W(\tau) - W(\tau)Q_{1s}(\tau) = \Lambda_s(\tau) + F_{1s}(\tau), \tag{12}$$

$$Q_{2s}(\tau)W(\tau) - W(\tau)Q_{2s}(\tau) = F_{2s}(\tau), \ s = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Оскільки матриці $Q_{1s}(\tau)$ та $W(\tau)$ — діагональні, то вони комутують між собою, а тому із (12) знаходимо

$$\Lambda_s(\tau) = -F_{1s}(\tau), \ s = 1, 2, \ldots$$

Діагональна матриця $Q_{1s}(\tau)$ при цьому залишається довільною. Вважатимемо, що

$$Q_{1s}(\tau) \equiv 0, \ s = 1, 2, \ldots$$

Переходячи в матричному рівнянні (13) до скалярної форми, дістаємо

$$\left(\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)\right) q_{sij}(\tau) = f_{sij}(\tau), \ i \neq j; \ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

звідки, враховуючи (2), знаходимо

$$q_{sij}(\tau) = \frac{f_{sij}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)}, \ i \neq j; \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким чином, матриця $Q_s(\tau)$ знайдена. Знаючи $Q_s(\tau)$, із (11) остаточно матимемо

$$U_s(\tau) = T(\tau)\,Q_s(\tau), \ s = 1, 2, \ldots$$

Отже, із системи рівнянь (6), (7) можна визначити матриці $U_s(\tau)$ та $\Lambda_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots$, причому ці матриці, як це випливає з попередніх формул, мають на відрізку $[0; L]$ похідні всіх порядків. Теорему доведено.

Приклад

1. Знайти формальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2(\tau)y = 0, \tag{14}$$

де $\omega^2(\tau) > 0$ для всіх $\tau \in [0; L]$.

Розв'язання. Дане рівняння заміною

$$y = x_1, \ \frac{dy}{dt} = x_2$$

можна звести до системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x,$$

в якій

$$A(\tau) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(\tau) & 0 \end{matrix} \right\|, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння матриці $A(\tau)$:

$$\det \|A_0(\tau) - \lambda E\| \equiv \lambda^2 + \omega^2(\tau) = 0.$$

Тоді

$$\lambda_1(\tau) = i\omega(\tau), \ \lambda_2(\tau) = -i\omega(\tau).$$

Отже, $\lambda_1(\tau) \neq \lambda_2(\tau)$. Тому, припускаючи, що функція $\omega(\tau)$ необмежено диференційовна на відрізку $[0; L]$, можна для диференціального рівняння (14) побудувати формальну матрицю-розв'язок.

6.4. Асимптотичний характер формального розв'язку

Теорема 1 дає можливість для системи (1) § 6.3 побудувати формальну матрицю-розв'язок. Легко помітити, що для досить малих значень $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ і для всіх $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ ця матриця є фундаментальною:

$$\det \|X(\tau, \varepsilon)\| \neq 0.$$

Тому формальний загальний вектор-розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x \tag{1}$$

можна записати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) \exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau, \varepsilon)\, dt\right) a, \qquad (2)$$

де a — сталий n-вимірний вектор, який не залежить від ε.

Покажемо, що формальний вектор-розв'язок (2) має асимптотичний характер.

Для цього побудуємо функцію

$$x_m(t, \varepsilon) = U_m(\tau, \varepsilon) \exp\left(\int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon)\, dt\right) a, \qquad (3)$$

де

$$U_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_s(\tau), \quad \Lambda_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(\tau),$$

m — натуральне число, яку надалі називатимемо m-м наближенням.

Лема 1. *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і для всіх* $\tau \in [0; L]$

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(\tau)) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4)$$

то m-те наближення задовольняє систему (1) *рівномірно відносно* $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ $(\varepsilon \in (0; \varepsilon_0])$ *з точністю до величин* $O(\varepsilon^{m+1})$.

Доведення. Підставимо вектор (3) у диференціальний вираз

$$L(x_m) = \frac{dx_m}{dt} - A(\tau, \varepsilon)x_m.$$

Матимемо

$$L(x_m) = \big(\varepsilon U'(\tau, \varepsilon) + U_m(\tau, \varepsilon)\Lambda_m(\tau, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon) U_m(\tau, \varepsilon)\big) \times$$
$$\times \exp\left(\int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon)\, dt\right) a. \qquad (5)$$

Матриця у квадратних дужках, згідно з формулою (5) § 6.3, має порядок $O(\varepsilon^{m+1})$. Тому для повного доведення леми залишилося оцінити за нормою матрицю $\exp\left(\int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon)\, dt\right)$. Для цього запишемо елементи $\lambda_{km}(\tau, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, діагональної матриці $\Lambda_m(\tau, \varepsilon)$ у вигляді

$$\lambda_{km}(\tau, \varepsilon) = \alpha_{km}(\tau, \varepsilon) + i\beta_{km}(\tau, \varepsilon),$$

де $\alpha_{km}(\tau, \varepsilon)$, $\beta_{km}(\tau, \varepsilon)$ — відповідно дійсна і уявна частина елементів $\lambda_{km}(\tau, \varepsilon)$.

Тоді, враховуючи (4), маємо

$$\left\|\exp\left(\int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon)\,dt\right)\right\| = \max_k e^{\int_0^t \alpha_{km}(\tau,\varepsilon)\,dt} \leqslant \max_k e^{\int_0^\tau \sum_{s=1}^m \varepsilon^{s-1}\alpha_{ks}(\tau)\,d\tau},$$

$k = 1, 2, \ldots, n.$

Оскільки функції $\alpha_{ks}(\tau)$, $s = 1, 2, \ldots, m,$ – диференційовні на відрізку $[0; L]$, то існує стала $M > 0$, яка не залежить від ε і така, що для всіх $\tau \in [0; L]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$

$$\left|\sum_{s=1}^m \varepsilon^{s-1}\alpha_{ks}(\tau)\right| \leqslant M, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тому

$$\left\|\exp\left(\int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon)\,dt\right)\right\| \leqslant e^{ML}. \tag{6}$$

Отже, із (5) і (6) дістаємо

$$\frac{dx_m(t, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\,x_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}).$$

Лему доведено.

Лема 2. *Якщо для всіх* $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ *справджується нерівність*

$$r(t) \leqslant c\int_0^t r(s)\,ds + f(t), \tag{7}$$

де $c > 0$ *– стала, а* $f(t)$ *– диференційовна функція на відрізку* $\left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$, *то на цьому відрізку*

$$r(t) \leqslant f(0)\,e^{ct} + \int_0^t f'(s)\,e^{c(t-s)}\,ds. \tag{8}$$

Доведення. Введемо позначення

$$R(t) = \int_0^t r(s)\,ds. \tag{9}$$

Тоді нерівність (8) можна записати у вигляді

$$\frac{dR(t)}{dt} - cR(t) \leqslant f(t). \tag{10}$$

Помножимо обидві частини нерівності (10) на e^{-ct}. Матимемо

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-ct}R(t)\right) \leqslant f(t)\,e^{-ct}.$$

Оскільки $R(0) = 0$, то, інтегруючи останню нерівність, дістаємо

$$R(t) \leqslant \int_0^t f(s)\,e^{c(t-s)}\,ds,$$

або

$$R(t) \leqslant -\frac{1}{c}\left[f(s)\,e^{c(t-s)}\right]_0^t + \frac{1}{c}\int_0^t f'(s)\,e^{c(t-s)}\,ds =$$

$$= \frac{1}{c}\,f(0)\,e^{ct} - \frac{1}{c}\,f(t) + \frac{1}{c}\int_0^t f'(s)\,e^{c(t-s)}\,ds.$$

Використовуючи нерівності (7) та (9), переконуємося в правильності нерівності (8).

Теорема 1. *Якщо виконуються умови теореми* 1 § 6.3, *умова* (4) *і в початковий момент часу функції* $x(t, \varepsilon)$ *та* $x_m(t, \varepsilon)$ *дорівнюють одна одній, тобто*

$$x(0, \varepsilon) = x_m(0, \varepsilon),$$

де $x(t, \varepsilon)$ *— точний розв'язок системи* (1), *то для будь-якого* $L > 0$ *існує стала* $c > 0$, *яка не залежить від* ε *і така, що для всіх* $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ *справджується нерівність*:

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^m c.$$

Доведення. Введемо вектор

$$y(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon).$$

За попередньою лемою даний вектор задовольнятиме систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = A(\tau, \varepsilon)y + O(\varepsilon^{m+1}), \tag{11}$$

причому $y(0, \varepsilon) = 0$.

У системі (11) зробимо заміну змінних

$$y(t, \varepsilon) = T(\tau)\,z(t, \varepsilon).$$

Матимемо

$$\frac{dz}{dt} = (W(\tau) + \varepsilon A_1(\tau, \varepsilon))\,z + O(\varepsilon^{m+1}),$$

де

$$A_1(\tau,\varepsilon) = T^{-1}(\tau)\left(\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^{s-1}A_s(\tau)\,T(\tau) - T'(\tau)\right).$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dz}{dt} = W(\tau)z.$$

Оскільки її фундаментальна матриця має вигляд

$$Z(t,\varepsilon) = \exp\left(\int_0^t W(\tau)\,dt\right),$$

то дану систему можна замінити еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$z(t,\varepsilon) = \varepsilon\int_0^t \exp\left(\int_{t_1}^t W(\tau)\,dt\right)A_1(\tau_1,\varepsilon)\,z(t_1,\varepsilon)\,dt_1 +$$

$$+\int_0^t \exp\left(\int_{t_1}^t W(\tau)\,dt\right)O(\varepsilon^{m+1})\,dt_1,$$

звідки дістаємо

$$\|z(t,\varepsilon)\| = \varepsilon\int_0^t \left\|\exp\left(\int_{t_1}^t W(\tau)\,dt\right)\right\|\|A_1(\tau_1,\varepsilon)\|\|z(t_1,\varepsilon)\|\,dt_1 +$$

$$+\int_0^t \left\|\exp\left(\int_{t_1}^t W(\tau)\,dt\right)\right\|\|O(\varepsilon^{m+1})\|\,dt_1. \qquad (12)$$

Згідно з (4),

$$\left\|\exp\left(\int_{t_1}^t W(\tau)\,dt\right)\right\| \leqslant 1.$$

Крім того, існують сталі $M_1 > 0$ та $M_2 > 0$, які не залежать від ε і такі, що для всіх $t \in \left[0;\ \frac{L}{\varepsilon}\right]$ і $\varepsilon \in (0;\ \varepsilon_0]$ виконуються нерівності:

$$\|A_1(\tau_1,\varepsilon)\| \leqslant M_1,\ \ \|O(\varepsilon^{m+1})\| \leqslant \varepsilon^{m+1}M_2.$$

Тому з (12) маємо

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon M_1\int_0^t \|z(t_1,\varepsilon)\|\,dt_1 + \varepsilon^m M_2 L.$$

Звідси за лемою 2

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^m M_2 L e^{M_1 L}. \tag{13}$$

Отже,

$$\|y(t,\varepsilon)\| = \|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \leqslant \|T(\tau)\| \cdot \|z(t,\varepsilon)\|. \tag{14}$$

Оскільки матриця $T(\tau)$ диференційовна на відрізку $[0; L]$, то для всіх $\tau \in [0; L]$ існує стала $M_3 > 0$, яка не залежить від ε і така, що

$$\|T(\tau)\| \leqslant M_3. \tag{15}$$

Нерівності (13), (14), (15) і доводять теорему.

6.5. Неоднорідні лінійні системи диференціальних рівнянь

Розглянемо питання про існування формальних розв'язків для системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x + f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{1}$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ та $f(\tau,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори; $A(\tau,\varepsilon)$ — дійсна квадратна матриця порядку n. Припускатимемо, що $A(\tau,\varepsilon)$ та $f(\tau,\varepsilon)$ розкладаються в степеневі ряди

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad f(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_s(\tau),$$

де $\tau = \varepsilon t$, ε — малий дійсний параметр.

Тоді залежно від значень функції $ik(\tau)$ $\left(k(\tau) = \dfrac{d\theta(t,\varepsilon)}{dt}\right)$ і коренів $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, …, $\lambda_n(\tau)$ характеристичного рівняння

$$\det\|A_0(\tau) - \lambda E\| = 0 \tag{2}$$

можливі два випадки:

1) "нерезонансний" — функція $ik(\tau)$ при жодному значенні $\tau \in [0; L]$ не дорівнює кореням характеристичного рівняння

$$ik(\tau) \neq \lambda_j(\tau), \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

2) "резонансний", коли функція $ik(\tau)$ при деяких значеннях $\tau \in [0; L]$ дорівнює одному із коренів рівняння (2), наприклад,

$$ik(\tau) = \lambda_1(\tau), \tag{3}$$

але для всіх $\tau \in [0; L]$

$$ik(\tau) \neq \lambda_r(\tau), \quad r = 2, 3, \ldots, n. \tag{4}$$

Розглянемо спочатку "нерезонансний" випадок. При цьому вважатимемо, що корені характеристичного рівняння (2) прості на відрізку $[0;\ L]$.

Теорема 1. *Якщо матриці $A_s(\tau)$, вектори $f_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots$, та функція $k(\tau)$ необмежено диференційовні на відрізку $[0;\ L]$, то в "нерезонансному" випадку система диференціальних рівнянь (1) має частинний формальний розв'язок вигляду*

$$x(t, \varepsilon) = p(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{5}$$

де $p(\tau, \varepsilon)$ — n-вимірний вектор, що зображується формальним степеневим рядом

$$p(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s p_s(\tau).$$

Доведення. Підставивши вектор (5) у систему (1), матимемо

$$(A(\tau, \varepsilon) - ik(\tau)E)\, p(\tau, \varepsilon) = \varepsilon p'(\tau, \varepsilon) - f(\tau, \varepsilon).$$

Зрівнюючи в цій тотожності коефіцієнти при ε^s, $s = 0, 1, \ldots$, дістанемо нескінченну алгебраїчну систему рівнянь

$$(A_0(\tau) - ik(\tau)E)\, p_s(\tau) = h_s(\tau), \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

де

$$h_s(\tau) = p'_{s-1}(\tau) - f_s(\tau) - \sum_{j=1}^{s} A_j(\tau)\, p_{s-j}(\tau).$$

У "нерезонансному" випадку $ik(\tau)$ при будь-якому $\tau \in [0;\ L]$ не дорівнює кореням характеристичного рівняння. Отже,

$$\det \|A_0(\tau) - ik(\tau)E\| \neq 0$$

для всіх $\tau \in [0;\ L]$. Тому із (6) знаходимо

$$p_s(\tau) = (A_0(\tau) - ik(\tau)E)^{-1} h_s(\tau), \quad s = 0, 1, \ldots$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що аналогічно до теореми 1 § 6.4 можна показати, що m-те наближення вектора (5) задовольняє наступну нерівність:

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^m c, \tag{7}$$

де $c > 0$ — стала, яка не залежить від параметра ε.

Перейдемо до "резонансного" випадку.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то система* (1) *має формальний розв'язок*

$$x(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon)\, h(t, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{8}$$

де $U(\tau, \varepsilon)$ — *квадратна матриця порядку* n, *причому*

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau),$$

а $h(t, \varepsilon)$ — n-*вимірний вектор, що визначається системою диференціальних рівнянь*

$$\frac{dh(t, \varepsilon)}{dt} = (\Lambda(\tau, \varepsilon) - ik(\tau)E)\, h(t, \varepsilon) + z(\tau, \varepsilon), \tag{9}$$

в якій $\Lambda(\tau, \varepsilon)$ — *діагональна матриця порядку* n *та* $z(\tau, \varepsilon)$ — n-*вимірний вектор зображуються формальними рядами*

$$\Lambda(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Lambda_s(\tau), \ \ z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s z_s(\tau).$$

Доведення. Підставляючи вектор (8) з урахуванням (9) в систему (1), дістанемо тотожність

$$\big(\varepsilon U'(\tau, \varepsilon) + U(\tau, \varepsilon)\, \Lambda(\tau, \varepsilon)\big)\, h(t, \varepsilon) + U(\tau, \varepsilon)\, z(\tau, \varepsilon) =$$
$$= A(\tau, \varepsilon)\, U(\tau, \varepsilon)\, h(t, \varepsilon) + f(\tau, \varepsilon).$$

Зрівнюючи в цій тотожності члени при $h(t, \varepsilon)$ і вільні члени, матимемо співвідношення (5) § 6.3 :

$$\varepsilon U'(\tau, \varepsilon) + U(\tau, \varepsilon)\, \Lambda(\tau, \varepsilon) = A(\tau, \varepsilon)\, U(\tau, \varepsilon)$$

та

$$U(\tau, \varepsilon)\, z(\tau, \varepsilon) = f(\tau, \varepsilon). \tag{10}$$

У формулі (10) зрівняємо коефіцієнти при ε^s, $s = 0, 1, \ldots$ Тоді

$$U_0(\tau)\, z_s(\tau) = f_s(\tau) - \sum_{j=1}^{s} U_j(\tau)\, z_{s-j}(\tau). \tag{11}$$

Оскільки $U_0(\tau) = T(\tau)$, то $\det \|U_0(\tau)\| \neq 0$ для всіх $\tau \in [0; L]$, а тому із (11) знаходимо

$$z_s(\tau) = U_0^{-1}(\tau) \left(f_s(\tau) - \sum_{j=1}^{s} U_j(\tau)\, z_{s-j}(\tau) \right), \ \ s = 0, 1, \ldots$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що теорема 2 залишається слушною і тоді, коли вектори $f_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots$, неперервні на відрізку $[0; L]$.

Побудувавши для вектора (8) m-те наближення і використовуючи ті самі міркування, що й в § 6.4, можна довести таку нерівність:

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{m-1} c,$$

де $c > 0$ — стала, яка не залежить від параметра ε.

Отже, бачимо, що асимптотична оцінка, порівнюючи з "нерезонансним" випадком, погіршується. Проте якщо припустити, що резонанс настає не в окремих точках, а на інтервалах, то можна показати, що система (1) має формальний розв'язок, для якого асимптотична оцінка (7) зберігається.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і функція* $ik(\tau)$ *дорівнює* $\lambda_1(\tau)$ *в деяких інтервалах, що належать відрізку* $[0; L]$, *то на цих інтервалах система* (1) *має формальний частинний розв'язок*

$$x(t, \varepsilon) = p(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{12}$$

де $p(\tau, \varepsilon)$ — n-*вимірний вектор, що зображується формальним рядом*

$$p(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=-1}^{\infty} \varepsilon^s p_s(\tau).$$

Доведення. Підставивши вектор (12) у систему (1), дістанемо тотожність

$$(A(\tau, \varepsilon) - ik(\tau)E)\, p(\tau, \varepsilon) = \varepsilon p'(\tau, \varepsilon) - f(\tau, \varepsilon). \tag{13}$$

Зрівняємо тут коефіцієнти при ε^{-1}:

$$(A_0(\tau) - ik(\tau)E)\, p_{-1}(\tau) = 0.$$

Враховуючи, що

$$A_0(\tau) = T(\tau)\, W(\tau)\, T^{-1}(\tau),$$

матимемо

$$(W(\tau) - ik(\tau)E)\, \varphi_{-1}(\tau) = 0, \tag{14}$$

де

$$\varphi_{-1}(\tau) = T^{-1}(\tau)\, p_{-1}(\tau).$$

Система рівнянь (14) розпадається на n рівнянь вигляду

$$\big(\lambda_j(\tau) - ik(\tau)\big)\varphi_{-1j}(\tau) = 0, \ \ j = 1, 2, \dots, n,$$

де $\varphi_{-1j}(\tau)$ — компоненти вектора $\varphi_{-1}(\tau)$.

Тоді згідно з (4)

$$\varphi_{-1j}(\tau) \equiv 0, \ \ r = 2, 3, \dots, n.$$

З рівності (3) випливає, що компонента $\varphi_{-11}(\tau)$ залишається довільною. Визначимо її з рівняння, яке дістанемо із (13) зрівнюванням коефіцієнтів при ε^0:

$$(A_0(\tau) - ik(\tau)E)\, p_0(\tau) = p'_{-1}(\tau) - A_1(\tau)\, p_{-1}(\tau) - f_0(\tau),$$

або

$$(W(\tau) - ik(\tau)E)\,\varphi_0(\tau) = \varphi'_{-1}(\tau) + C(\tau)\,\varphi_{-1}(\tau) + h_0(\tau), \tag{15}$$

де

$$\varphi_0(\tau) = T^{-1}(\tau)\, p_0(\tau), \ \ h_0(\tau) = -T^{-1}(\tau)\, f_0(\tau),$$
$$C(\tau) = T^{-1}(\tau)\big(T'(\tau) - A_1(\tau)\, T(\tau)\big).$$

Тоді, переходячи в рівнянні (15) до координатної форми, і враховуючи (3), дістаємо

$$\varphi'_{-11}(\tau) + c_{11}(\tau)\,\varphi_{-11}(\tau) + h_{01}(\tau) = 0, \tag{16}$$

$$(\lambda_r(\tau) - ik(\tau))\,\varphi_{0r}(\tau) = c_{r1}(\tau)\,\varphi_{-11}(\tau) + h_{0r}(\tau), \ \ r = 2, 3, \dots, n. \tag{17}$$

Інтегруючи лінійне диференціальне рівняння (16), знаходимо функцію $\varphi_{-11}(\tau)$. Підставивши її в праву частину (17), знайдемо компоненти вектора $\varphi_0(\tau)$:

$$\varphi_{0r}(\tau) = \frac{c_{r1}(\tau)\,\varphi_{-11}(\tau) + h_{0r}(\tau)}{\lambda_r(\tau) - ik(\tau)}, \ \ r = 2, 3, \dots, n.$$

Компонента $\varphi_{01}(\tau)$ залишається довільною. Вона визначається з рівняння, яке дістаємо із (13) зрівнюванням коефіцієнтів при ε. Теорему доведено.

6.6. Теорема С. Ф. Фещенка про асимптотичне розщеплення однорідних систем

У попередніх параграфах докладно було досліджено системи лінійних диференціальних рівнянь тоді, коли корені характеристичного рівняння залишалися простими на всьому відрізку $[0; L]$. Але розроблені методи побудови асимптотичного розв'язку вказаних систем не можуть бути застосовані, якщо характеристичне рівняння має кратні корені.

Виявляється, що випадок кратних коренів характеристичного рівняння простіше досліджувати, якщо характеристичне рівняння має тільки один кратний корінь. Тому доведемо теореми, за допомогою яких вихідну систему диференціальних рівнянь можна асимптотично розщепити на підсистеми диференціальних рівнянь нижчого порядку. При цьому характеристичне рівняння кожної отриманої системи має лише одну групу коренів, які за умови їх рівності вироджуються в один кратний корінь.

Отже, розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \tag{1}$$

де x — n-вимірний вектор; $A(\tau, \varepsilon)$ — квадратна матриця порядку n, що розкладається в степеневий ряд

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau).$$

Припускаємо надалі, що корені характеристичного рівняння

$$\det \|A_0(\tau) - \lambda E\| = 0 \tag{2}$$

можна поділити на дві групи $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_{r_1}(\tau)$, $1 \leqslant r_1 < n$, та $\lambda_{r_1+1}(\tau), \ldots, \lambda_{r_2}(\tau)$ так, що для будь-якого $\tau \in [0; L]$ корені однієї групи не дорівнюють кореням іншої групи, тобто

$$\lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau), \;\; i = 1, 2, \ldots, r_1; \;\; j = r_1 + 1, r_1 + 2, \ldots, r_2, \;\; r_2 = n - r_1. \tag{3}$$

Зауважимо, що в кожній групі корені можуть дорівнювати один одному.

Теорема 1. *Якщо матриці* $A_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots,$ *на відрізку* $[0; L]$ *необмежено диференційовні і на цьому відрізку корені характеристичного рівняння задовольняють умову* (3), *то система диференціальних рівнянь* (1) *має формальний вектор-розв'язок вигляду*

$$x(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon)\, h(t, \varepsilon), \tag{4}$$

де $U(\tau, \varepsilon)$ — *матриця розмірів* $n \times n$; $h(t, \varepsilon)$ — n*-вимірний вектор, що визначається системою диференціальних рівнянь*

$$\frac{dh(t, \varepsilon)}{dt} = W(\tau, \varepsilon)\, h(t, \varepsilon), \tag{5}$$

в якій $W(\tau, \varepsilon)$ — *квазідіагональна матриця:*

$$W(\tau, \varepsilon) = \left\| \begin{matrix} W_1(\tau, \varepsilon) & 0 \\ 0 & W_2(\tau, \varepsilon) \end{matrix} \right\|,$$

а $W_1(\tau, \varepsilon)$ та $W_2(\tau, \varepsilon)$ — квадратні матриці порядку r_1 та r_2 відповідно. При цьому матриці $U(\tau, \varepsilon)$ і $W(\tau, \varepsilon)$ зображуються формальними рядами

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau), \quad W(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s W_s(\tau).$$

Доведення. Підставивши вектор (4) у систему (1), матимемо

$$\left(\varepsilon U'(\tau, \varepsilon) + U(\tau, \varepsilon) W(\tau, \varepsilon)\right) h(t, \varepsilon) = A(\tau, \varepsilon) U(\tau, \varepsilon) h(t, \varepsilon).$$

Зрівняємо в отриманій тотожності члени при векторі $h(t, \varepsilon)$:

$$\varepsilon U'(\tau, \varepsilon) + U(\tau, \varepsilon) W(\tau, \varepsilon) = A(\tau, \varepsilon) U(\tau, \varepsilon). \tag{6}$$

Зрівнюватимемо в співвідношенні (6) коефіцієнти при однакових степенях параметра ε. Тоді матимемо таку нескінченну матричну систему рівнянь:

$$U_0(\tau) W_0(\tau) - A_0(\tau) U_0(\tau) = 0, \tag{7}$$

$$U_s(\tau) W_0(\tau) - A_0(\tau) U_s(\tau) = H_s(\tau) - U_0(\tau) W_s(\tau), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

де

$$H_s(\tau) = \sum_{j=1}^{s} A_j(\tau) U_{s-j}(\tau) - \sum_{j=1}^{s-1} U_j(\tau) W_{s-j}(\tau) - U'_{s-1}(\tau).$$

Відомо [23], що

$$A_0(\tau) = T(\tau) W(\tau) T^{-1}(\tau),$$

де $T(\tau)$ — матриця перетворення подібності; $W(\tau)$ — квазідіагональна матриця вигляду

$$W(\tau) = \left\| \begin{matrix} W_1(\tau) & 0 \\ 0 & W_2(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

$W_i(\tau)$ — квадратна матриця порядку r_i, $i = 1, 2$. При цьому за побудовою матриця $W_1(\tau)$ має своїми власними значеннями корені $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, ..., $\lambda_{r_1}(\tau)$, а матриця $W_2(\tau)$ — корені $\lambda_{r_1+1}(\tau)$, ..., $\lambda_{r_2}(\tau)$. Крім того, дані матриці, а також і матриця $T(\tau)$ необмежено диференційовні на відрізку $[0; L]$.

Тоді матричне рівняння (7) можна переписати у вигляді:

$$U_0(\tau) W_0(\tau) - T(\tau) W(\tau) T^{-1}(\tau) U_0(\tau) = 0,$$

або

$$Q_0(\tau)\, W_0(\tau) - W(\tau)\, Q_0(\tau) = 0, \tag{9}$$

де

$$Q_0(\tau) = T^{-1}(\tau)\, U_0(\tau).$$

Покладемо в матричному рівнянні (9)

$$Q_0(\tau) = E.$$

Дістанемо

$$W_0(\tau) = W(\tau),\ \ U_0(\tau) = T(\tau).$$

Розглянемо рівняння (8). Запишемо його так:

$$Q_s(\tau)\, W(\tau) - W(\tau)\, Q_s(\tau) = F_s(\tau) - W_s(\tau),\ \ s = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

де

$$Q_s(\tau) = T^{-1}(\tau)\, U_s(\tau),\ \ F_s(\tau) = T^{-1}(\tau)\, H_s(\tau).$$

Зобразимо відповідно до структури матриці $W(\tau)$ матриці $Q_s(\tau)$ та $F_s(\tau)$ у вигляді блокових матриць:

$$Q_s(\tau) = \left\| \begin{matrix} Q_{s11}(\tau) & Q_{s12}(\tau) \\ Q_{s21}(\tau) & Q_{s22}(\tau) \end{matrix} \right\|,\ F_s(\tau) = \left\| \begin{matrix} F_{s11}(\tau) & F_{s12}(\tau) \\ F_{s21}(\tau) & F_{s22}(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

де $Q_{sij}(\tau)$ та $F_{sij}(\tau)$ — матриці розмірів $r_i \times r_j,\ i, j = 1, 2.$

Тоді, використовуючи правило множення блокових матриць, рівняння (10) можна записати у такому вигляді:

$$Q_{sij}(\tau)\, W_j(\tau) - W_i(\tau)\, Q_{sij}(\tau) = F_{sij}(\tau) - \delta_{ij}\, W_{si}(\tau), \tag{11}$$

$s = 1, 2, \ldots;\ i, j = 1, 2;\ \delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Нехай $i = j$, тоді

$$Q_{sii}(\tau)\, W_i(\tau) - W_i(\tau)\, Q_{sii}(\tau) = F_{sii}(\tau) - W_{si}(\tau), \tag{12}$$

$s = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2.$ Покладемо

$$Q_{sii}(\tau) \equiv 0,\ \ s = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2. \tag{13}$$

Отже, із (12) випливає, що

$$W_{si}(\tau) = F_{sii}(\tau),\ \ s = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2.$$

Таким чином, матриці $W_{si}(\tau)$ визначені.

Розглянемо тепер матричне рівняння (11) при $i \neq j$. У цьому разі воно має вигляд

$$Q_{sij}(\tau)\, W_j(\tau) - W_i(\tau)\, Q_{sij}(\tau) = F_{sij}(\tau),\ \ i \neq j, \tag{14}$$

$s = 1, 2, \ldots;\ i, j = 1, 2.$

Оскільки матриці $W_j(\tau)$ та $W_i(\tau)$ при $i \neq j$ згідно з (3) мають різні власні значення, то система (14) має єдиний розв'язок [2]. Отже, розв'язавши рівняння (14) відносно матриць $Q_{sij}(\tau)$ і врахувавши (13), знайдемо невідомі матриці $Q_s(\tau)$, $s = 1, 2, \ldots$ Тоді

$$U_s(\tau) = T(\tau)\,Q_s(\tau),\ s = 1, 2, \ldots$$

Теорему доведено.

З теореми 1 випливає, що система (1) формально зводиться до системи (5), яка в свою чергу розпадається на дві системи:

$$\frac{dh_i}{dt} = W_i(\tau, \varepsilon)h_i,\ i = 1, 2, \tag{15}$$

де h_i — r_i-вимірний вектор.

Отже, теорема 1 дає змогу формально розщепити систему диференціальних рівнянь (1) на дві підсистеми (15), порядок яких відповідно дорівнює r_1 та r_2, $r_1 + r_2 = n$.

Покажемо тепер, що формальний розв'язок (4) має асимптотичний характер в тому розумінні, що норма різниці між точним розв'язком системи (1) і його m-наближенням для фіксованого $m \geqslant 1$ при $\varepsilon \to 0$ прямує до нуля для всіх $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Для цього доведемо спочатку таку лему.

Лема 1. *Якщо матриця*

$$A(\tau, \varepsilon) = A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau, \varepsilon),\ A_1(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} A_s(\tau)$$

задовольняє умову теореми 1 *і для всіх* $\tau \in [0; L]$

$$\operatorname{Re}\,(A_0(\tau)y, y) \leqslant 0, \tag{16}$$

де y — *будь-який* n-*вимірний вектор, то для розв'язку* $x(t, \varepsilon)$ *системи диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = (A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau, \varepsilon))\,x$$

з початковою умовою

$$x(0, \varepsilon) = x_0$$

для всіх $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ *і* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ *справджується оцінка*

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leqslant c\|x_0\|,$$

де $c > 0$ — *стала, яка не залежить від* ε.

Доведення. Нехай функція $\psi(t, \varepsilon)$ дорівнює скалярному добутку

$$\psi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon)).$$

Тоді

$$\frac{d\psi(t, \varepsilon)}{dt} = 2\mathrm{Re}\,(A_0(\tau)x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon)) +$$
$$+2\varepsilon\mathrm{Re}\,(A_1(\tau, \varepsilon)x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon\mathrm{Re}\,(A_1(\tau, \varepsilon)x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon)).$$

Звідси дістаємо

$$\frac{d\psi(t, \varepsilon)}{dt} \leqslant 2\varepsilon \sup_{\tau\in[0; L],\ \varepsilon\in(0; \varepsilon_0]} \|A_1(\tau, \varepsilon)\|\, \psi(t, \varepsilon).$$

Отже,

$$\psi(t, \varepsilon) \leqslant \psi(0, \varepsilon) + 2\varepsilon \sup_{\tau\in[0; L],\ \varepsilon\in(0; \varepsilon_0]} \|A_1(\tau, \varepsilon)\| \int_0^t \psi(t_1, \varepsilon)\, dt_1.$$

Тоді за лемою 2 § 6.4 отримуємо

$$\psi(t, \varepsilon) \leqslant \psi(0, \varepsilon)\, e^{2 \sup\limits_{\tau\in[0; L],\ \varepsilon\in(0; \varepsilon_0]} \|A_1(\tau, \varepsilon)\| L},$$

але

$$\psi(0, \varepsilon) = \|x(0, \varepsilon)\|^2 = \|x_0\|^2, \ \ \psi(t, \varepsilon) = \|x(t, \varepsilon)\|^2$$

(тут під нормою $\|a\|$ вектора a розуміємо число $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$). Отже,

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leqslant c\|x_0\|, \ \ c = e^{\sup\limits_{\tau\in[0; L],\ \varepsilon\in(0; \varepsilon_0]} \|A_1(\tau, \varepsilon)\| L}.$$

Лему доведено.

Побудуємо тепер вектор

$$x_m(t, \varepsilon) = U_m(\tau, \varepsilon)\, h_m(t, \varepsilon), \tag{17}$$

де

$$\frac{dh_m(t, \varepsilon)}{dt} = W_m(\tau, \varepsilon)\, h_m(t, \varepsilon),$$

$$U_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_s(\tau), \ \ W_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s W_s(\tau),$$

$m \geqslant 1$ — натуральне число.

Лема 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *а також умова* (16), *то вектор* $x_m(t, \varepsilon)$ *задовольняє систему диференціальних рівнянь* (1) *рівномірно відносно* $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ *з точністю до величин* $O(\varepsilon^{m+1})$.

Доведення. Підставимо вектор (17) у диференціальний вираз

$$L(x_m) = \frac{dx_m}{dt} - A(\tau, \varepsilon)x_m.$$

Матимемо

$$L(x_m) = \big(\varepsilon U_m'(\tau, \varepsilon) + U_m(\tau, \varepsilon)\, W_m(\tau, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)\, U_m(\tau, \varepsilon)\big)\, h_m(t, \varepsilon).$$

Матриця у квадратних дужках згідно з (7), (8) має порядок $O(\varepsilon^{m+1})$. Крім того, за лемою 2 для всіх $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ і досить малих значень $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$

$$\|h_m(t, \varepsilon)\| \leqslant c_1,$$

де $c_1 > 0$ — стала, яка не залежить від ε. Отже,

$$\frac{dx_m(t, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\, x_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}).$$

Лему доведено.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *умова* (16) *і в початковий момент часу функції* $x(t, \varepsilon)$ *та* $x_m(t, \varepsilon)$ *дорівнюють одна одній, тобто*

$$x(0, \varepsilon) = x_m(0, \varepsilon),$$

де $x(t, \varepsilon)$ — *точний розв'язок системи* (1), *то для будь-якого* $L > 0$ *існує стала* $c > 0$, *яка не залежить від* ε *і така, що для всіх* $t \in \left[0; \frac{L}{\varepsilon}\right]$ *справджується нерівність*

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^m c.$$

Доведення. Введемо вектор

$$y(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon).$$

Даний вектор задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = A(\tau, \varepsilon)y + O(\varepsilon^{m+1}),$$

причому

$$y(0, \varepsilon) = 0.$$

Розглянемо диференціальну систему

$$\frac{dy}{dt} = A(\tau, \varepsilon)y.$$

Позначимо фундаментальну матрицю розв'язків цієї системи через $Y(t, \varepsilon)$. Нехай

$$y(t, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon)\, z(t, \varepsilon).$$

Тоді матимемо

$$\frac{dz(t, \varepsilon)}{dt} = Y^{-1}(t, \varepsilon)\, O(\varepsilon^{m+1}),$$

або

$$z(t, \varepsilon) = \int_0^t Y^{-1}(t_1, \varepsilon)\, O(\varepsilon^{m+1})\, dt_1.$$

Отже,

$$y(t, \varepsilon) = \int_0^t Y(t, \varepsilon)\, Y^{-1}(t_1, \varepsilon)\, O(\varepsilon^{m+1})\, dt_1. \tag{18}$$

За лемою 2 існує стала $M > 0$, яка не залежить від ε і така, що для всіх $t,\ t_1 \in \left[0;\ \frac{L}{\varepsilon}\right]$, $\varepsilon \in (0;\ \varepsilon_0]$

$$\|Y(t, \varepsilon)\, Y^{-1}(t_1, \varepsilon)\| \leqslant M.$$

Нехай $M_1 > 0$ — стала така, що

$$\|O(\varepsilon^{m+1})\| \leqslant M_1 \varepsilon^{m+1}.$$

Тоді з (18)

$$\|y(t, \varepsilon)\| = \|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^m c,$$

де $c = MM_1L$. Теорему доведено.

Зауважимо, що теореми 1 і 2 можна легко узагальнити на той випадок, коли корені характеристичного рівняння (2) утворюють більше, ніж дві групи, наприклад, $p \geqslant 2$ груп. При цьому вихідну систему диференціальних рівнянь можна асимптотично розщепити на p диференціальних систем. Зокрема, якщо всі корені характеристичного рівняння прості ($p = n$, в кожній групі міститься один корінь), то систему (1) можна розщепити на n скалярних диференціальних рівнянь першого порядку, які інтегруються в квадратурах. Отже, при цьому теореми про асимптотичне розщеплення системи (1) дають можливість побудувати асимптотичний розв'язок даної системи.

6.7. Асимптотичне розщеплення неоднорідних диференціальних систем

Розглянемо питання про асимптотичне розщеплення системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x + f(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{1}$$

в якій x та $f(\tau, \varepsilon)$ — n-вимірні вектори; $A(\tau, \varepsilon)$ — квадратна матриця порядку n. Припускатимемо, що $A(\tau, \varepsilon)$ та $f(\tau, \varepsilon)$ розкладаються в степеневі ряди

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad f(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_s(\tau),$$

де $\tau = \varepsilon t$, ε — малий параметр.

Нехай, як і раніше, корені відповідного характеристичного рівняння утворюють дві ізольовані групи так, що корені першої групи $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \ldots, \lambda_{r_1}(\tau)$ при жодному значенні $\tau \in [0; L]$ не дорівнюють кореням другої групи $\lambda_{r_1+1}(\tau), \ldots, \lambda_{r_2}(\tau)$. Тоді можуть бути такі випадки: 1) "нерезонансний" — функція $ik(\tau)$ $\left(k(\tau) = \frac{d\theta(t, \varepsilon)}{dt}\right)$ при жодному $\tau \in [0; L]$ не дорівнює кореням характеристичного рівняння

$$ik(\tau) \neq \lambda_j(\tau), \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

2) "резонансний" — функція $ik(\tau)$ при окремих значеннях $\tau \in [0; L]$ дорівнює, наприклад, кореням першої групи

$$ik(\tau) = \lambda_p(\tau), \quad p = 1, 2, \ldots, r_1.$$

У "нерезонансному" випадку має місце теорема 1 § 6.5. Тому надалі розглядатимемо "резонансний" випадок.

Теорема 1. *Якщо матриці* $A_s(\tau)$, *вектори* $f_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots,$ *і функція* $k(\tau)$ *на відрізку* $[0; L]$ *мають похідні всіх порядків, то система диференціальних рівнянь* (1) *у "резонансному" випадку має формальний розв'язок вигляду*

$$x(t, \varepsilon) = (U(\tau, \varepsilon)\, h(t, \varepsilon) + p(\tau, \varepsilon))\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{2}$$

де $h(t, \varepsilon)$ — n*-вимірний вектор, що визначається системою диференціальних рівнянь*

$$\frac{dh(t, \varepsilon)}{dt} = (W(\tau, \varepsilon) - ik(\tau)E)\, h(t, \varepsilon) + z(\tau, \varepsilon), \tag{3}$$

в якій матриці $U(\tau, \varepsilon)$ *та* $W(\tau, \varepsilon)$ *такі само, що й у теоремі* 1 § 6.6, *а* $p(\tau, \varepsilon)$ *та* $z(\tau, \varepsilon)$ — n*-вимірні вектори, які зображуються формальними рядами*

$$p(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s p_s(\tau), \quad z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s z_s(\tau).$$

При цьому

$$z(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} g(\tau, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $g(\tau, \varepsilon)$ — r_1*-вимірний вектор, а* 0 — *нульовий* r_2*-вимірний вектор.*

Доведення. Як і раніше, підставимо вектор (2) з урахуванням (3) в систему (1). Матимемо

$$(A(\tau, \varepsilon) - ik(\tau)E)\, p(\tau, \varepsilon) - \varepsilon p'(\tau, \varepsilon) - U(\tau, \varepsilon)\, z(\tau, \varepsilon) + f(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ \big(A(\tau, \varepsilon)\, U(\tau, \varepsilon) - \varepsilon U'(\tau, \varepsilon) - U(\tau, \varepsilon)\, W(\tau, \varepsilon)\big)\, h(t, \varepsilon) = 0.$$

Зрівнюючи тут члени при векторі $h(t, \varepsilon)$ і вільні члени, дістанемо співвідношення (6) § 6.6 і

$$(A(\tau, \varepsilon) - ik(\tau)E)\, p(\tau, \varepsilon) = \varepsilon p'(\tau, \varepsilon) + U(\tau, \varepsilon)\, z(\tau, \varepsilon) - f(\tau, \varepsilon). \qquad (4)$$

Зрівнюючи коефіцієнти в тотожності (4) при однакових степенях параметра ε, маємо

$$(A_0(\tau) - ik(\tau)E)\, p_s(\tau) = U_0(\tau)\, z_s(\tau) + \varphi_s(\tau), \;\; s = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\varphi_s(\tau) = p'_{s-1}(\tau) - f_s(\tau) + \sum_{j=1}^{s} U_j(\tau)\, z_{s-j}(\tau) - \sum_{j=1}^{s} A_j(\tau)\, p_{s-j}(\tau),$$

або

$$(W(\tau) - ik(\tau)E)\, r_s(\tau) = z_s(\tau) + \overline{\varphi}_s(\tau), \qquad (5)$$

де

$$r_s(\tau) = T^{-1}(\tau)\, p_s(\tau), \;\; \overline{\varphi}_s(\tau) = T^{-1}(\tau)\, \varphi_s(\tau), \;\; s = 0, 1, \ldots \qquad (6)$$

Згідно зі структурою матриці $W(\tau)$, система (5) розпадається на дві системи вигляду

$$(W_1(\tau) - ik(\tau)E)\, r_{s1}(\tau) = g_s(\tau) + \overline{\varphi}_{s1}(\tau), \qquad (7)$$

та

$$(W_2(\tau) - ik(\tau)E)\, r_{s2}(\tau) = \overline{\varphi}_{s2}(\tau), \qquad (8)$$

де $r_{s1}(\tau)$, $\overline{\varphi}_{s1}(\tau)$ — r_1-вимірні вектори, а $r_{s2}(\tau)$, $\overline{\varphi}_{s2}(\tau)$ — r_2-вимірні вектори.

Оскільки в "резонансному" випадку

$$\det \|W_1(\tau) - ik(\tau)E\|$$

при окремих значеннях $\tau \in [0; L]$ може дорівнювати нулю, то для того, щоб система (7) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор $g_s(\tau) + \overline{\varphi}_{s1}(\tau)$ для кожного $\tau \in [0; L]$ був ортогональний до вектора-розв'язку відповідної однорідної союзної системи

$$(W_1(\tau) - ik(\tau)E)^* y = 0.$$

Ця умова напевне буде виконуватись, якщо

$$g_s(\tau) + \overline{\varphi}_{s1}(\tau) \equiv 0, \ \ s = 0, 1, \ldots,$$

або

$$g_s(\tau) = -\overline{\varphi}_{s1}(\tau).$$

При цьому можна покласти

$$r_{s1}(\tau) \equiv 0, \ \ s = 0, 1, \ldots$$

Функція $ik(\tau)$ за припущенням не дорівнює кореням другої групи. Отже, для всіх $\tau \in [0; L]$

$$\det \|W_2(\tau) - ik(\tau)E\| \neq 0.$$

Тоді із (8) знаходимо

$$r_{s2}(\tau) = (W_2(\tau) - ik(\tau)E)^{-1}\, \overline{\varphi}_{s2}(\tau), \ \ s = 0, 1, \ldots$$

Таким чином, вектори $z_s(\tau)$ та $r_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots$, знайдено. Знаючи вектор $r_s(\tau)$, із (6) остаточно дістаємо

$$p_s(\tau) = T(\tau)\, r_s(\tau).$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що аналогічно § 6.6 можна довести асимптотичну властивість формальних розв'язків у "нерезонансному" та "резонансному" випадках, а саме: для них відповідно правильні такі оцінки

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^m c,$$

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{m-1} c,$$

де $c > 0$ — стала, яка не залежить від ε.

6.8. Побудова асимптотичного розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь у загальному випадку

У цьому параграфі наведемо найбільш загальні результати щодо асимптотичного інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з повільно змінними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \; A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau). \tag{1}$$

Отже, нехай серед коренів характеристичного рівняння

$$\det \| A_0(\tau) - \lambda E \| = 0 \tag{2}$$

системи (1) є кратні корені, яким відповідають кратні елементарні дільники. При цьому спочатку припускатимемо, що кратному кореню відповідає лише один кратний елементарний дільник. Тоді, не зменшуючи загальності, можна вважати, що характеристичне рівняння (2) має тільки один корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$, кратність якого для всіх $\tau \in [0; L]$ дорівнює n (порядку системи (1)).

Згідно з нашими припущеннями, для матриці $A_0(\tau)$ існує матриця перетворення подібності $T(\tau)$ така, що матриця

$$W(\tau) = T^{-1}(\tau) A_0(\tau) T(\tau)$$

має форму жорданової клітини порядку n, тобто

$$W(\tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda_0(\tau) & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0(\tau) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0(\tau) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_0(\tau) \end{matrix} \right\|.$$

Побудуємо матрицю

$$C(\tau) = T^{-1}(\tau) \left(\frac{dT(\tau)}{d\tau} - A_1(\tau) T(\tau) \right). \tag{3}$$

Тоді справджується наступна теорема [26].

Теорема 1. *Нехай для системи диференціальних рівнянь* (1) *виконуються умови*:

1) *матриці* $A_s(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots,$ *необмежено диференційовні на відрізку* $[0; L]$;

2) *характеристичне рівняння* (2) *має один корінь кратності* n, *якому відповідає один елементарний дільник*;

3) *елемент* $c(\tau)_{n1}$ *матриці* (3) *для всіх* $\tau \in [0; L]$ *задовольняє умову*

$$c(\tau)_{n1} \neq 0. \tag{4}$$

Тоді система диференціальних рівнянь (1) *має формальний частинний розв'язок вигляду*

$$x = u(\tau, \mu) \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(\tau, \mu)\, dt \right), \tag{5}$$

де $u(\tau, \mu)$ — n-вимірний вектор та $\lambda(\tau, \mu)$ — скалярна функція зображуються формальними рядами

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau), \;\; \lambda(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau), \tag{6}$$

$\mu = \sqrt[n]{\varepsilon}.$

Приклад

1. Знайти формальний розв'язок диференціального рівняння

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + g(x) y = 0,$$

де ε — малий параметр; $g(x)$ — необмежено диференційовна функція на відрізку $0 \leqslant x \leqslant L$.

Розв'язання. Поклавши $x = \tau = \varepsilon t$, приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varepsilon g(\tau) y = 0 \tag{7}$$

з повільно змінними коефіцієнтами.

Запишемо рівняння (7) у вигляді системи. Для цього введемо нові змінні

$$y = x_1, \;\; \frac{dy}{dt} = x_2,$$

тоді

$$\frac{dx}{dt} = (A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau))\, x, \tag{8}$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; A_0(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \; A_1(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -g(\tau) & 0 \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

З (9) випливає, що відповідне характеристичне рівняння системи (8) має один нульовий корінь $\lambda_0 \equiv 0$ другої кратності, якому відповідає один елементарний дільник такої ж кратності.

Побудуємо тепер матрицю (3). Оскільки $A_0(\tau)$ вже має жорданову форму, то матриця перетворення $T(\tau) = E$, тому

$$C(\tau) = -A_1(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ g(\tau) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким чином, умова (4) теореми 1 набуває вигляду

$$c(\tau)_{21} = g(\tau) \neq 0 \tag{10}$$

для всіх $\tau \in [0; L]$.

Отже, якщо виконується умова (10), то за теоремою 1 система (8) має формальний розв'язок

$$x(t, \varepsilon) = u(\tau, \mu) \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(\tau, \mu)\, dt \right),$$

де вектор $u(\tau,\mu)$ і функція $\lambda(\tau,\mu)$ зображуються формальними рядами

$$u(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s u_s(\tau),\ \ \lambda(\tau,\mu)=\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s\lambda_s(\tau),$$

в яких

$$\mu=\sqrt{\varepsilon}.$$

Теорема 2. *Нехай матриці* $A_s(\tau)$, $s=0,1,\ldots,$ *необмежено диференційовні на відрізку* $[0;\,L]$ *і характеристичне рівняння* (2) *має один корінь кратності* n, *якому відповідають* r *елементарних дільників кратності* s. *Тоді, якщо всі корені* $\xi_i(\tau)$, $i=1,2,\ldots,r$, *рівняння*

$$\begin{vmatrix} c_{s1}(\tau)-\xi & c_{s,s+1}(\tau) & \ldots & c_{s,s(r-1)+1}(\tau) \\ c_{2s,1}(\tau) & c_{2s,s+1}(\tau)-\xi & \ldots & c_{2s,s(r-1)+1}(\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}(\tau) & c_{n,s+1}(\tau) & \ldots & c_{n,s(r-1)+1}(\tau)-\xi \end{vmatrix}=0$$

прості і відмінні від нуля на відрізку $[0;\,L]$, *то система* (1) *на цьому відрізку має* n *формальних частинних розв'язків вигляду* (5), (6), *де* $\mu=\sqrt[s]{\varepsilon}$.

Можна показати, що формальні розв'язки, про які йдеться в теоремах 1 і 2, за певних умов мають асимптотичний характер [2].

Вправи

Побудувати друге наближення для таких рівнянь і систем рівнянь.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\left(a_0^2(\tau)+\varepsilon a_1(\tau)\right)x,\ a_0(\tau)\neq 0,\ \tau\in[0;\,L].$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+a(\tau)x=e^{i\varepsilon t},\ a(\tau)\neq 0,\ \tau\in[0;\,L].$

3. $\dfrac{dx}{dt}=A(\tau,\varepsilon)x+f(\tau)e^{-i\varepsilon t^2};\ A(\tau,\varepsilon)=A_0(\tau)+\varepsilon A_1(\tau),$

$$A_0(\tau)=\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 2\tau & -2\tau\end{Vmatrix},\ A_1(\tau)=\begin{Vmatrix}1+\tau^2 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\ f(\tau)=\begin{pmatrix}1\\ \tau\end{pmatrix},\ \tau\in[0;\,1].$$

Зазначити умови, за яких побудовані розв'язки матимуть асимптотичний характер.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
3. **Головач Г.П.** Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь/Г.П. Головач, О.Ф. Калайда. – К.: Техніка, 1977. – 288 с.
4. **Давидов М.О.** Курс математичного аналізу. Ч. 2. – К.: Вища шк., 1978. – 392 с.
5. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. **Демидович Б.П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
7. **Диференціальні рівняння**/ І.І. Ляшко, О.К. Боярчук, Я.Г. Гай, О.Ф. Калайда.– К.: Вища шк., 1981. – 504 с.
8. **Еругин Н.П.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1974. – 472 с.
9. **Коддингтон Э.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений/ Э. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
10. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
11. **Мальцев А.И.** Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1975. – 400 с.
12. **Матвеев Н.М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1967. – 564 с.
13. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
14. **Олвер Ф.** Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978. – 376 с.
15. **Петровский И.Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 400 с.
16. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1965. – 331 с.
17. **Самойленко А.М.** Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи/А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.
18. **Самойленко А.М.** Диференціальні рівняння/А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – К.: Либідь, 1994. – 360 с.

19. **Смирнов М.М.** Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.

20. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 468 с.

21. **Тихонов А.Н.** Дифференциальные уравнения/А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

22. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики/А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

23. **Фещенко С.Ф.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений/С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Л.Д. Николенко. – К.: Наук. думка, 1966. – 252 с.

24. **Филлипов А.Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985. – 128 с.

25. **Шкиль Н.И.** О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – К., 1968. – 420 с.

26. **Шкіль М.І.** Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища шк., 1971. – 228 с.

27. **Шкіль М.І.** Математичний аналіз. Ч. 2. – К.: Вища шк., 1995. – 510 с.

28. **Шкіль М.І.** Вища математика. Ч. 2/М.І. Шкіль, Т.В. Колесник. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.

29. **Шкіль М.І.** Звичайні диференціальні рівняння/М.І. Шкіль, М.А. Сотніченко. – К.: Вища шк., 1992. – 303 с.

30. **Poincare H.** Sur les equations de la physique et mathematique. – Rend. Pal., 1894.– 10–11. – P. 57–156.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

Шкіль Микола Іванович,
Лейфура Валентин Миколайович,
Самусенко Петро Федорович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Редактор *О. К. Артеменко*
Оформлення художника *В. О. Гурлєва*
Художній редактор *С. В. Анненков*
Коректори *О. О. Куценко,*
Н. М. Мірошниченко,І. В. Іванюсь
Комп'ютерна верстка *П. Ф. Самусенка*

Підписано до друку 25.06.2003. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Папір офсетний. Гарнітура літературна.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 21,39.
Обл.-вид. арк. 20,34. Тираж 2000 прим. Зам. № 3-258.

Видавництво "Техніка". 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України
суб'єктів видавничої справи ДК № 357 від 12. 03. 2001 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
09117 Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4.