Лекции по дискретной математике: функциональные системы с операциями

Е.А. Фоминых

Оглавление

Глава 1

Алгебра логики

1. Функции алгебры логики

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots\}$ — исходный алфавит переменных (аргументов) и $E_2 = \{0, 1\}$.

Определение. Функция $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$, где $u_{i_s} \neq u_{i_t}$ при $s \neq t$, аргументы и значение которой определены на множестве E_2, называется *функцией алгебры логики* или *булевой функцией.*

Замечание. Чтобы избежать сложных обозначений для индексов переменных, мы будем употреблять в качестве произвольных символов алфавита U символы $x, y, z, \ldots$, а также эти символы с индексами $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$

Опишем два способа задания функций алгебры логики.

1.1. Таблица. Для задания функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно указать, какое значение функции соответствует каждому из наборов значений аргументов, т.е. выписать таблицу.

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
0	$\ldots$	1	0	$f(0, \ldots, 1, 0)$
0	$\ldots$	1	1	$f(0, \ldots, 1, 1)$
	$\ldots$			$\ldots$
1	$\ldots$	1	1	$f(1, \ldots, 1, 1)$

Таблица 1. Таблица функции $f(x_1, \ldots, x_n)$

Обозначим через P_2 систему всех функций алгебры логики над алфавитом U, содержащую также константы 0 и 1.

Лемма 1.1. *Число всех функций из P_2, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равно 2^{2^n}.*

Доказательство. Легко видеть, что n переменных принимают 2^n различных значений. Поэтому таблица функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержит 2^n строк (наборов). Наборы принято располагать в соответствии с естественным порядком следования двоичных записей чисел $0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Поскольку на каждом наборе функция принимает одно из двух значений (0 или 1), то число различных функций равно 2 в степени "количество наборов", т.е. 2^{2^n}. $\square$

Следовательно, уже при сравнительно небольших значениях n перебор функций становится практически невозможным, даже с использованием компьютера.

Рассмотрим примеры функций алгебры логики. Данные функции часто употребляются в математической логике и кибернетике и играют такую же роль, как, например, x^n или $\sin x$ в анализе, поэтому их называют *элементарными.*

x	константа 0	константа 1	тождественная x	отрицание $\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 2. Элементарные функции одной переменной

x_1	x_2	конъюнкция $x_1 \wedge x_2$	дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	импликация $x_1 \to x_2$	сложение по mod 2 $x_1 + x_2$	эквивалентность $x_1 \sim x_2$	штрих Шеффера $x_1 \vert x_2$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	0

Таблица 3. Элементарные функции двух переменных

Замечание. Часто вместо $x_1 \wedge x_2$ пишут $x_1 x_2$. Также заметим, что

$$x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, \; x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$$

1.2. Формулы. Как и в анализе, исходя из элементарных функций, можно строить формулы.

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое (не обязательно конечное) подмножество функций из P_2.

а) *Базис индукции.* Каждая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{F}$ называется формулой над $\mathcal{F}$.

б) *Индуктивный переход.* Пусть $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $\mathcal{F}$ и $A_1, \ldots, A_n$ — выражения, являющиеся либо формулами над $\mathcal{F}$, либо символами переменных из алфавита U. Тогда выражение $f_0(A_1, \ldots, A_n)$ называется формулой над $\mathcal{F}$.

Замечание. В дальнейшем будем обозначать формулы заглавными готическими буквами ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$), а системы функций — заглавными каллиграфическими буквами ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$).

Пример 1.1. Пусть $\mathcal{F}$ — множество элементарных функций. Следующие выражения являются формулами над $\mathcal{F}$:

1) $((x_1 x_2) + x_1) \to x_2$;
2) $\overline{x_1}(x_2 \vee x_3)$;
3) $\overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$.

Сопоставим теперь каждой формуле $\mathfrak{M}$ над $\mathcal{F}$ функцию из P_2, опираясь на индуктивное определение формул.

а) *Базис индукции.* Если $\mathfrak{M} = f(x_1, \ldots, x_n)$, где $f \in \mathcal{F}$, то формуле $\mathfrak{M}$ сопоставим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

б) *Индуктивный переход.* Пусть $\mathfrak{M} = f_0(A_1, \ldots, A_n)$, где $A_1, \ldots, A_n$ — выражения, являющиеся либо формулами над $\mathcal{F}$, либо символами переменных из алфавита U. Тогда по предположению индукции каждому A_i сопоставлена либо функция f_i из P_2, либо тождественная функция $f_i = x_s$. Сопоставим формуле $\mathfrak{M}$ функцию $f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1, \ldots, f_n)$.

Пример 1.2. Формула $((x_1x_2) + x_1) \to x_2$ строится за три шага. Мы имеем следующие подформулы:

$$x_1x_2,\ (x_1x_2) + x_1,\ ((x_1x_2) + x_1) \to x_2.$$

x_1	x_2	x_1x_2	$(x_1x_2) + x_1$	$((x_1x_2) + x_1) \to x_2$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1

Таблица 4. Построение таблицы функции, заданной формулой $((x_1x_2) + x_1) \to x_2$

2. Равенство функций и эквивалентность формул

Введенное понятие функции не позволяет рассматривать функции от меньшего числа аргументов как функции от большего числа аргументов.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ из P_2 *существенно* зависит от переменной x_i, если существуют такие значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

В этом случае переменная x_i называется *существенной.* Если x_i не является существенной переменной, то она называется *фиктивной.*

Пусть для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ переменная x_i является фиктивной. По таблице функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ построим новую таблицу, вычеркивая все строки вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и вычеркивая столбец переменной x_i. Полученная таблица определяет некоторую функцию $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Будем говорить, что функция g получена из f путем удаления фиктивной переменной x_i, а также, что функция f получается из g путем введения фиктивной переменной x_i.

Определение. Функции f_1 и f_2 называются *равными*, если функцию f_2 можно получить из f_1 путем введения и удаления фиктивных переменных.

Напомним, что каждой формуле над $\mathcal{F}$ соответствует функция алгебры логики, причем различным формулам могут соответствовать равные функции.

Определение. Формулы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ над $\mathcal{F}$ называются *эквивалентными*, если соответствующие им функции равны. Запись $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ будет означать, что формулы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ эквивалентны.

Пример 1.3. $x\overline{x} = 0$

Приведем список основных эквивалентностей, характеризующих некоторые свойства элементарных функций. Обозначим через $x_1 \circ x_2$ любую из функций $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$.

1. *Ассоциативность*. $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$.
2. *Коммутативность*. $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$.
3. *Дистрибутивность*.

$$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3),$$

$$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3),$$

$$x_1 \wedge (x_2 + x_3) = (x_1 \wedge x_2) + (x_1 \wedge x_3).$$

4. *Правила де Моргана*.

$$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2,$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2.$$

5.

$$0 = x \wedge \overline{x} = x \wedge 0 = x + x,$$

$$1 = x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \sim x,$$

$$x = \overline{\overline{x}} = x \wedge x = x \vee x = x \wedge 1 = x \vee 0,$$

$$\overline{x} = x + 1,\ x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 + x_2},$$

$$x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2.$$

Замечание. С целью упрощения записи формул мы условимся, что конъюнкция сильнее других элементарных функций. Более того, знак конъюнкции можно не писать. Например, запись $x_1x_2 \vee x_3$ означает $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$.

Замечание. Очевидно, что если $\mathfrak{M}'$ — подформула формулы $\mathfrak{M}$ и если заменить любое из ее вхождений на эквивалентную формулу $\mathfrak{N}$, то формула $\mathfrak{M}$ перейдет в формулу $\mathfrak{N}'$, которая будет эквивалентна $\mathfrak{M}$.

Пример 1.4. $x_1 \vee x_1x_2 = x_1 \wedge 1 \vee x_1x_2 = x_1(1 \vee x_2) = x_1 \wedge 1 = x_1$.

3. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Всякая ли функция алгебры логики может быть выражена в виде формулы над некоторым семейством элементарных функций?

Пусть $\sigma \in E_2$. Введем обозначение

$$x^\sigma = \begin{cases} \overline{x}, & \text{при } \sigma = 0, \\ x, & \text{при } \sigma = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $x^\sigma = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.

Теорема 1.1 (о разложении функции в с.д.н.ф.). *Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры логики, отличную от константы* 0, *можно представить в следующей форме:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_2^n \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Доказательство. Функцию $x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ будем называть *элементарной конъюнкцией* переменных $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно, что элементарная конъюнкция принимает значение 1 ровно на одном наборе значений аргументов: $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$. Причем различные элементарные конъюнкции принимают значение 1 на различных наборах значений аргументов. Наконец, в правой части доказываемого равенства стоит дизъюнктивное объединение элементарных конъюнкций, которые принимают значение 1 только на тех наборах, на которых значение функции f равно 1. □

Данная теорема носит конструктивный характер, так как она позволяет для каждой функции f построить формулу (с.д.н.ф.), ее реализующую:

(1) в таблице функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ($f \not\equiv 0$) отмечаем все строки $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, в которых $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$;
(2) каждой такой строке сопоставляем элементарную конъюнкцию $x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$;
(3) все полученные элементарные конъюнкции соединяем знаками дизъюнкции.

Пример 1.5. $x_1 \to x_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$.

Следствие 1.1. *Каждая функция алгебры логики может быть представлена формулой над системой трех элементарных функций: отрицание, конъюнкция и дизъюнкция.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$. Тогда, очевидно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1\overline{x}_1.$$

2) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$. Тогда представим ее в с.д.н.ф. □

Совершенная д.н.ф. есть дизъюнктивное объединение элементарных конъюнкций. Оказывается, функции алгебры логики можно представлять в виде конъюнктивного произведения элементарных дизъюнкций.

Теорема 1.2 (о разложении функции в с.к.н.ф.). *Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры логики, отличную от константы* 1, *можно представить в следующей форме:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_2^n \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0}} x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}.$$

4. Операция замыкания

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое подмножество функций из P_2. *Замыканием* множества $\mathcal{A}$ называется множество $[\mathcal{A}]$ всех функций алгебры логики, представимых в виде формул над множеством $\mathcal{A}$.

Отметим три свойства замыкания:

(1) $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]$;
(2) $[[\mathcal{A}]] = [\mathcal{A}]$;
(3) если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, то $[\mathcal{A}] \subseteq [\mathcal{B}]$.

Определение. Класс (множество) $\mathcal{A}$ называется (функционально) замкнутым, если $[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$.

Пример 1.6.
1) Пусть $\mathcal{A} = P_2$. Очевидно, что $[\mathcal{A}] = P_2$, т.е. класс $\mathcal{A}$ является замкнутым.
2) Класс $\mathcal{A} = \{1, x_1 + x_2\}$ не замкнут, так как $[\mathcal{A}]$ содержит константу $0 = 1 + 1$.

5. Полнота

Определение. Система функций $\mathcal{A}$ называется (функционально) *полной*, если любая функция алгебры логики может быть записана в виде формулы над $\mathcal{A}$, т.е. если $[\mathcal{A}] = P_2$.

Пример 1.7.
1) Система P_2 является полной.
2) Система $\{\overline{x}, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ полна в силу следствия 1.1.
3) Система $\{0, 1\}$, очевидно, не полна.

Следующая теорема позволяет сводить вопрос о полноте одних систем к вопросу о полноте других систем.

Теорема 1.3 (сведение к заведомо полной системе). *Пусть даны две системы $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ функций из P_2, относительно которых известно, что система $\mathcal{A}$ полна и каждая ее функция представима в виде формулы над $\mathcal{B}$. Тогда система $\mathcal{B}$ является полной.*

Доказательство. По условию теоремы $[\mathcal{A}] = P_2$ и $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{B}]$. Тогда в силу свойства (3) операции замыкания мы имеем

$$P_2 = [\mathcal{A}] \subseteq [[\mathcal{B}]].$$

Применив свойство (2), получим

$$P_2 \subseteq [\mathcal{B}].$$

С другой стороны, очевидно, что

$$P_2 \supseteq [\mathcal{B}],$$

Следовательно, имеет место равенство $[\mathcal{B}] = P_2$, т.е. система $\mathcal{B}$ является полной. □

Опираясь на эту теорему установим полноту еще ряда систем.

Теорема 1.4. *Следующие системы функций алгебры логики являются полными:*

(1) $\{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$;
(2) $\{\overline{x}, x_1 \vee x_2\}$;
(3) $\{x_1|x_2\}$;
(4) $\{1, x_1x_2, x_1 + x_2\}$.

Доказательство. (1) Нам известно, что система $\mathcal{A} = \{\overline{x}, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ является полной. Пусть $\mathcal{B} = \{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$. Опираясь на правила де Моргана, получим тождество

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}.$$

Следовательно, $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{B}]$ и по теореме 1.3 система $\mathcal{B}$ является полной.

(2) Доказательство аналогично (1).

(3) В силу пункта (1) система $\mathcal{A} = \{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$ является полной. Пусть $\mathcal{B} = \{x_1|x_2\}$. Легко видеть, что

$$\overline{x} = x|x,$$

$$x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1|x_2} = (x_1|x_2)|(x_1|x_2).$$

(4) Пусть $\mathcal{A} = \{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$ и $\mathcal{B} = \{1, x_1x_2, x_1 + x_2\}$. Мы имеем

$$\overline{x} = x + 1.$$

□

Определение. Формула вида

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{\{i_1,\ldots,i_s\}} a_{i_1\ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s} + a,$$

где множество $\{i_1, \ldots, i_s\}$ пробегает все возможные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$ и $a_{i_1\ldots i_s}, a \in E_2$, называется *полиномом Жегалкина*.

Пример 1.8 (полинома Жегалкина). $x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2 + 1$.

Теорема 1.5. *Каждая функция из P_2 может быть выражена при помощи полинома Жегалкина, причем единственным образом.*

Доказательство. В силу пункта (4) теоремы 1.4 каждая функция из P_2 может быть выражена через функции системы $\{1, x_1x_2, x_1 + x_2\}$. После раскрытия скобок (дистрибутивность конъюнкции относительно сложения) и приведения подобных слагаемых, мы получим полином Жегалкина.

Подсчитаем число полиномов Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Число слагаемых полинома $\sum_{s=1}^{n} \sum_{\{i_1,\ldots,i_s\}} a_{i_1\ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s} + a$ равно количеству различных подмножеств множества из n чисел, т.е. 2^n. Поскольку $a_{i_1\ldots i_s}$ и a равны 0 или 1, искомое число полиномов равно 2^{2^n}, т.е. числу всех функций алгебры логики от тех же переменных. Отсюда получаем единственность представления функций посредством полинома Жегалкина. □

Пример 1.9. Выразим $x_1 \vee x_2$ в виде полинома Жегалкина методом неопределенных коэффициентов:

$$x_1 \vee x_2 = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d.$$

Подставляя в обе части этого равенства различные значения переменных x_1, x_2, мы получим систему 4 уравнений (одно уравнение для каждой строки таблицы функции $x_1 \vee x_2$):

$$\begin{cases} 0 = d, \\ 1 = c + d \\ 1 = b + d \\ 1 = a + b + c + d. \end{cases}$$

Решив систему, получаем $d = 0$, $c = 1$, $b = 1$, $a = 1$, т.е.

$$x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 + x_1 + x_2.$$

6. Важнейшие замкнутые классы

6.1. Класс T_0.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2 сохраняет константу 0, если

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Обозначим через T_0 класс всех функций алгебры логики, сохраняющих константу 0.

Пример 1.10. Легко видеть, что

$$0,\ x,\ x_1 \wedge x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 + x_2 \in T_0,$$

$$1,\ \overline{x},\ x_1 \to x_2,\ x_1 \sim x_2,\ x_1 | x_2 \notin T_0.$$

Упражнение 1.1. *Докажите, что свойство функции принадлежать классу T_0 инвариантно относительно операций введения и удаления фиктивных переменных.*

Теорема 1.6. *Класс T_0 замкнут*

Доказательство. Так как T_0 содержит тождественную функцию, то по определению формулы нам достаточно показать, что функция

$$\Phi = f(f_1, \ldots, f_n)$$

принадлежит T_0, если функции $f, f_1, \ldots, f_n$ принадлежат классу T_0. Последнее вытекает из цепочки равенств

$$\Phi(0, \ldots, 0) = f(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_n(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0.$$

□

6.2. Класс T_1.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2 сохраняет константу 1, если

$$f(1, \ldots, 1) = 1.$$

Обозначим через T_1 класс всех функций алгебры логики, сохраняющих константу 1.

Упражнение 1.2. *Докажите, что свойство функции принадлежать классу T_1 инвариантно относительно операций введения и удаления фиктивных переменных.*

Теорема 1.7. *Класс T_1 замкнут.*

Упражнение 1.3. *Докажите теорему 1.7.*

6.3. Класс S.

Определение. Функция

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$$

называется *двойственной* функцией к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что таблица для двойственной функции получается из таблицы для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ инвертированием (т.е. заменой 0 на 1 и 1 на 0) столбца функции и его переворачиванием.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f^*(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1

Таблица 5. Построение двойственной функции

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2 называется *самодвойственной*, если $f^* = f$.

Обозначим через S класс всех самодвойственных функций алгебры логики.

Пример 1.11. Легко видеть, что

$$x,\ \overline{x} \in S,$$

$$x_1 \wedge x_2 \notin S, \text{так как } (x_1 \wedge x_2)^* = x_1 \vee x_2.$$

Замечание. Для самодвойственной функции имеет место тождество

$$\overline{f}(x_1, \ldots, x_m) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m);$$

иначе говоря, на наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m)$, которые мы будем называть *противоположными*, самодвойственная функция принимает противоположные значения.

Упражнение 1.4. *Докажите, что свойство функции принадлежать классу S инвариантно относительно операций введения и удаления фиктивных переменных.*

Теорема 1.8. *Класс S замкнут.*

Доказательство. Так как S содержит тождественную функцию, то по определению формулы нам достаточно показать, что функция

$$\Phi = f(f_1, \ldots, f_n)$$

является самодвойственной, если функции $f, f_1, \ldots, f_n$ самодвойственны. Последнее устанавливается непосредственно

$$\begin{aligned}\Phi^*(x_1, \ldots, x_m) = \overline{\Phi}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m) = \\ \overline{f}(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m), \ldots, f_n(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)) = \\ f(\overline{f}_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m), \ldots, \overline{f}_n(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)) = \\ f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = \Phi(x_1, \ldots, x_m).\end{aligned}$$

□

6.4. Класс M**.** Здесь мы будем употреблять векторную запись наборов:

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

и вместо $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ употреблять запись $f(\tilde{\alpha})$.

Определение. Будем говорить, что набор $\tilde{\alpha}$ *предшествует* набору $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$), если

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n.$$

Пример 1.12. Очевидно, что $(0,1,0,1) \preccurlyeq (1,1,0,1)$. Тогда как ни один из двух наборов $(0,1)$ и $(1,0)$ не предшествует другому.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2 называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, имеет место неравенство

$$f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta}).$$

Обозначим через M класс всех монотонных функций алгебры логики.

Пример 1.13. Легко видеть, что

$$0,\ 1,\ x,\ x_1 \wedge x_2,\ x_1 \vee x_2 \in M,$$

$$\overline{x},\ x_1 \to x_2 \notin M.$$

Упражнение 1.5. *Докажите, что свойство функции принадлежать классу M инвариантно относительно операций введения и удаления фиктивных переменных.*

Теорема 1.9. *Класс M замкнут*

Доказательство. Так как M содержит тождественную функцию, то по определению формулы нам достаточно показать, что функция

$$\Phi = f(f_1, \ldots, f_n)$$

принадлежит M, если функции $f, f_1, \ldots, f_n$ принадлежат классу M. Пусть набор $\tilde{\alpha}$ предшествует набору $\tilde{\beta}$. В силу монотонности функций $f_1, \ldots, f_n$

$$f_1(\tilde{\alpha}) \leqslant f_1(\tilde{\beta}), \ldots, f_n(\tilde{\alpha}) \leqslant f_n(\tilde{\beta}).$$

Поэтому

$$(f_1(\tilde{\alpha}), \ldots, f_n(\tilde{\alpha})) \preccurlyeq (f_1(\tilde{\beta}), \ldots, f_n(\tilde{\beta})),$$

и в силу монотонности f имеем

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f(f_1(\tilde{\alpha}), \ldots, f_n(\tilde{\alpha})) \leqslant f(f_1(\tilde{\beta}), \ldots, f_n(\tilde{\beta})) = \Phi(\tilde{\beta}).$$

□

6.5. Класс L.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2 называется *линейной*, если ее можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n.$$

Обозначим через L класс всех линейных функций алгебры логики.

Теорема 1.10. *Класс L замкнут*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из тождества

$$L = [\{1, x_1 + x_2\}]$$

и свойства (2) операции замыкания. □

В заключение заметим, что замкнутые классы T_0, T_1, S, M и L попарно различны, что видно из следующей таблицы, в которой знак "+"означает принадлежность функции классу, а знак "−"обозначает противоположную ситуацию.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$\overline{x}$	−	−	+	−	+

Таблица 6. Замкнутые классы T_0, T_1, S, M и L попарно различны

7. Критерий полноты

Теперь мы можем перейти к рассмотрению одного из основных вопросов алгебры логики — вопроса о необходимых и достаточных условиях полноты.

Теорема 1.11 (критерий полноты). *Для того, чтобы система функций $\mathcal{A}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.*

7.1. Три леммы.

Лемма 1.2. *Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin S$, то $[\{f, \overline{x}\}]$ содержит обе константы.*

Доказательство. Так как $f(x_1, \dots, x_n) \notin S$, то найдется такой набор $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, что

$$f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n).$$

Заметим, что функция $\varphi(x) = f(x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_n})$ принадлежит $[\{f, \overline{x}\}]$, поскольку по определению x^{σ_i} есть либо x, либо $\overline{x}$. Кроме того,

$$\varphi(0) = f(0^{\sigma_1}, \dots, 0^{\sigma_n}) = f(\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n) = \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(1^{\sigma_1}, \dots, 1^{\sigma_n}) = \varphi(1).$$

Это означает, что функция $\varphi(x)$ является константой. Поскольку мы располагаем $\overline{x}$, то находим и вторую константу. □

Лемма 1.3. *Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin M$, то $\overline{x} \in [\{f, 0, 1\}]$.*

Доказательство. Сначала покажем, что найдется пара соседних (отличающихся одной координатой) наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$ и

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

Действительно, так как $f \notin M$, то существуют наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ таких, что $\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\beta}^1$ и $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$. Если наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ — соседние, то наша цель достигнута. В противном случае набор $\tilde{\beta}^1$ отличается от набора $\tilde{\alpha}^1$ в t координатах, где $t > 1$, причем в силу $\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\beta}^1$ эти t координат в наборе $\tilde{\alpha}^1$ имеют значение 0, а в наборе $\tilde{\beta}^1$ — значение 1. Следовательно, между $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ можно вставить $t-1$ промежуточных наборов $\tilde{\alpha}^2, \dots, \tilde{\alpha}^t$ таких, что

$$\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\alpha}^2 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq \tilde{\alpha}^t \preccurlyeq \tilde{\beta}^1$$

и наборы, стоящие в этой цепочке рядом, будут соседними. Так как $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$, то по крайней мере на одной из этих пар соседних наборов — обозначим их через $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$) — будет $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Предположим, что данные наборы различаются i-той координатой и, следовательно,

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n).$$

Очевидно, что функция

$$\varphi(x) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n).$$

принадлежит $[\{f, 0, 1\}]$. Мы имеем

$$\varphi(0) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) = f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}) = \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) = \varphi(1).$$

Последнее означает, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(1) = 0$, т.е. $\varphi(x) = \overline{x}$. □

Лемма 1.4. *Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$, то $x_1 \wedge x_2 \in [\{f, \overline{x}, 0, 1\}]$.*

Доказательство. Так как функция $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$, то в ее полиноме Жегалкина найдется слагаемое, содержащее не менее двух множителей. Можно считать, что среди этих множителей присутствуют x_1 и x_2. Тогда функцию f можно преобразовать следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 f_1(x_3, \dots, x_n) + x_1 f_2(x_3, \dots, x_n) + \\ + x_2 f_3(x_3, \dots, x_n) + f_4(x_3, \dots, x_n),$$

где $f_1(x_3, \dots, x_n) \not\equiv 0$.

Пусть $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ таковы, что $f_1(\alpha_3, \dots, \alpha_n) = 1$. Тогда функция

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma,$$

где α, β, γ — константы, принадлежит $[\{f, \overline{x}, 0, 1\}]$. Рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2)$, получаемую из $\varphi(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma.$$

Так как $x + 1 = \overline{x}$, то функция $\psi(x_1, x_2)$ принадлежит $[\{f, \overline{x}, 0, 1\}]$. Более того

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1 x_2.$$

□

7.2. Доказательство критерия полноты.

Доказательство теоремы 1.11. *Необходимость.* Пусть система $\mathcal{A}$ полна, т.е. $[\mathcal{A}] = P_2$. Рассуждая от противного, предположим, что $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — один из указанных классов. Тогда в силу свойства (3) операции замыкания и замкнутости класса $\mathcal{B}$ имеем

$$P_2 = [\mathcal{A}] \subseteq [\mathcal{B}] = \mathcal{B}.$$

Это противоречит тому, что $P_2 \neq \mathcal{B}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ целиком не содержится ни в одном из пяти указанных классов. Выберем в $\mathcal{A}$ функции f_0, f_1, f_S, f_M, f_L, которые не принадлежат соответственно классам T_0, T_1, S, M и L. Будем доказывать полноту системы $\mathcal{A}$ сведением к заведомо полной системе $\{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$.

Построим при помощи функций f_0, f_1, f_S константы 0 и 1. Так как $f_0 \notin T_0$, то $f_0(0, \dots, 0) = 1$. Возможны два случая.

а) $f_0(1, \dots, 1) = 1$. Тогда константы получаются так:

$$1 = f_0(x, \dots, x),$$

$$0 = f_1(1, \dots, 1) = f_1(f_0(x, \dots, x), \dots, f_0(x, \dots, x)).$$

б) $f_0(1, \dots, 1) = 0$. Тогда

$$\overline{x} = f_0(x, \dots, x)$$

и с помощью функции $f_S \notin S$ по лемме 1.2 мы строим обе константы.

Далее при помощи констант и функции $f_M \notin M$ по лемме 1.3 мы получаем функцию $\overline{x}$. Наконец, при помощи констант, функций $\overline{x}$ и $f_L \notin L$ мы строим функцию $x_1 \wedge x_2$.

Таким образом, $\{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\} \subseteq [\mathcal{A}]$, что доказывает полноту системы $\mathcal{A}$. □

Следствие 1.2. *Всякий замкнуты класс* $\mathcal{A}$ *функций из* P_2*, такой, что* $\mathcal{A} \neq P_2$*, содержится по крайней мере в одном из пяти замкнутых классов* T_0*,* T_1*,* S*,* M *и* L*.*

Определение. Класс $\mathcal{A}$ функций из P_2 называется *предполным* (или максимальным), если:

(1) $\mathcal{A}$ неполный;
(2) для любой функции $f \in P_2 \setminus \mathcal{A}$ класс $\mathcal{A} \cup \{f\}$ — полный.

Следствие 1.3. *В алгебре логики существует только пять предполных классов, а именно:* T_0*,* T_1*,* S*,* M *и* L*.*

Глава 2

k-значная логика

Конечнозначные логики вводятся как обобщения двузначной логики. Особое внимание обратим на два обстоятельства:

(1) В k-значных логиках сохраняются многие свойства и результаты, которые имели место в двузначной логике. В силу этого некоторые аналогичные определения и доказательства в тексте опущены.

(2) В k-значных логиках наблюдаются явления, обнаруживающие их принципиальное отличие от алгебры логики. В связи с этим некоторые задачи не имеют такого исчерпывающего решения как в алгебре логики, а другие вовсе не решены.

1. Функции k-значной логики. Аналог с.д.н.ф.

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots\}$ — исходный алфавит переменных (аргументов) и $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, где $k \geqslant 3$.

Определение. Функция $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$, где $u_{i_s} \neq u_{i_t}$ при $s \neq t$, аргументы и значение которой определены на множестве E_k, называется *функцией k-значной логики.*

Легко видеть, что данное определение получается из определения функции алгебры логики заменой множества E_2 на множество E_k.

Обозначим через P_k систему всех функций k-значной логики над алфавитом U, содержащую также константы $0, 1, \ldots, k-1$.

Лемма 2.1. *Число всех функций из P_k, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равно k^{k^n}.*

Доказательство. Для задания функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ достаточно указать, какое значение функции соответствует каждому из наборов значений аргументов, т.е. выписать таблицу. Легко видеть, что n переменных принимают k^n различных значений. Поэтому таблица функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит k^n строк (наборов). На каждом из k^n наборов значений аргументов функция может принимать k различных значений, что влечет искомое число функций. $\square$

Рассмотрим примеры функций k-значной логики, которые можно считать *"элементарными"* функциями.

(1) $\overline{x} = x + 1 (\mod k)$ — циклический сдвиг;

(2) $\sim x = k - 1 - x$ — отрицание Лукашевича;

(3) $I_s(x) = \begin{cases} k-1, & \text{при } x = s, \\ 0, & \text{при } x \neq s \end{cases} \quad (s = 0, 1, \ldots, k-1);$

(4) $j_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = s, \\ 0, & \text{при } x \neq s \end{cases} \quad (s = 0, 1, \ldots, k-1);$

(5) $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$ — обобщение конъюнкции;

(6) $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ — обобщение дизъюнкции;

(7) $x_1 x_2 (\mod k)$;

(8) $x_1 + x_2 (\mod k)$;

(9) $x_1 \dot{-} x_2 = \begin{cases} x_1 - x_2, & \text{при } x_1 \geqslant x_2, \\ 0, & \text{при } x_1 < x_2 \end{cases}$ — усеченная разность;

(10) $V_k(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 + 1 (\mod k)$ — функция Вебба.

Анализ элементарных функций показывает, что не для всех обобщений булевых функций сохраняются соответствующие свойства. Поясним это на примерах.

Пример 2.1.

(1) $\sim (\sim x) = x$, но
$\overline{\overline{x}} \neq x$ при $k \geqslant 3$.

(2) $x_1 \wedge x_2 = \sim ((\sim x_1) \vee (\sim x_2))$, но
$x_1 \wedge x_2 \neq \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ из P_k *существенно* зависит от переменной x_i, если существуют такие значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и значения β_1, β_2 переменной x_i, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_2, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

В этом случае переменная x_i называется *существенной*. Если x_i не является существенной переменной, то она называется *фиктивной*.

Упражнение 2.1. *Дайте определение фиктивной переменной, не используя понятие существенной переменной.*

Упражнение 2.2. *Опираясь на аналогичные определения алгебры логики дать следующие определения для k-значной логики:*

а) *формула;*
б) *равенство функций;*
в) *эквивалентность формул.*

Теорема 2.1 (о разложении функции в аналог с.д.н.ф.). *Каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики можно представить в следующей форме:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} I_{\sigma_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge I_{\sigma_n}(x_n) \wedge f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Упражнение 2.3. *Докажите теорему 2.1.*

2. Операция замыкания и полнота

Упражнение 2.4. *Опираясь на аналогичные определения алгебры логики дать следующие определения для k-значной логики:*

а) *операция замыкания;*
б) *замкнутый класс функций;*

в) *полная система функций.*

2.1. Примеры полных систем. Рассмотрим несколько примеров полных систем. Для обоснования полноты мы будем использовать принцип сведения задачи о полноте одних систем к задаче о полноте других (Теорема о сведении к заведомо полной системе).

Пример 2.2.

(1) Система P_k является полной.

(2) Система $\{0, 1, \ldots, k-1, I_0(x), \ldots, I_{k-1}(x), x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ полна.

Теорема 2.2. *Следующие системы функций k-значной логики являются полными:*

(1) $\{\overline{x}, x_1 \vee x_2\}$;

(2) $\{V_k(x_1, x_2)\}$.

Доказательство. (1) Нам известно, что система $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, k-1, I_0(x), \ldots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$ является полной. Пусть $\mathcal{B} = \{\overline{x}, \max(x_1, x_2)\}$. Докажем, что $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{B}]$. Разобьем доказательство на несколько этапов.

а) Построение констант. Из функции $\overline{x} = x + 1$ при помощи суперпозиции получаем функции

$$\begin{aligned} &x + 2 = (x + 1) + 1, \\ &\ldots \\ &x + k - 1 = (x + k - 2) + 1, \\ &x = (x + k - 1) + 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$k - 1 = \max(x, x + 1, \ldots, x + k - 1).$$

Отсюда при помощи $\overline{x}$ получаем другие константы. Таким образом,

$$\{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteq [\mathcal{B}].$$

б) Легко видеть, что

$$I_s(x) = 1 + \max_{\substack{\alpha = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \alpha \neq k-1-s}} (x + \alpha), \; s = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Поэтому

$$\{I_0(x), I_1(x), \ldots, I_{k-1}(x)\} \subseteq [\mathcal{B}].$$

в) Построение функций одной переменной. Рассмотрим функции

$$f_{s,i}(x) = \begin{cases} s, & \text{при } x = i, \\ 0, & \text{при } x \neq i \end{cases} \qquad (s, i = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Легко видеть, что

$$f_{s,i}(x) = s + 1 + \max(I_i(x), k - 1 - s).$$

Таким образом,

$$f_{s,i}(x) \in [\mathcal{B}].$$

Если $g(x)$ — произвольная функция одной переменной из P_k, то

$$g(x) = \max(f_{g(0),0}(x), f_{g(1),1}(x), \ldots, f_{g(k-1),k-1}(x)).$$

Итак, из функций системы $\mathcal{B}$ мы получаем любую функцию одной переменной из P_k. В частности,

$$\sim x \in [\mathcal{B}].$$

г) Наконец,

$$\min(x_1, x_2) = \sim \max(\sim x_1, \sim x_2) \in [\mathcal{B}].$$

Следовательно, $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{B}]$ и по теореме 1.3 система $\mathcal{B}$ является полной.

(2) Нам известно, что система $\mathcal{A} = \{\overline{x}, \max(x_1, x_2)\}$ полна. Докажем, что $\mathcal{A} \subseteq [V_k(x_1, x_2)]$. Действительно,

$$\overline{x} = V_k(x, x),$$

$$\max(x_1, x_2) = V_k(x_1, x_2) + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-1}.$$

□

2.2. Примеры замкнутых классов в P_k.

Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольное подмножество E_k. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k сохраняет множество $\mathcal{E}$, если для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{E}$ имеет место $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{E}$.

Обозначим через $T_{\mathcal{E}}$ класс всех функций k-значной логики, сохраняющих множество $\mathcal{E}$. Следующая теорема очевидна

Теорема 2.3. *Класс $T_{\mathcal{E}}$ замкнут.*

Пример 2.3. Докажем, что система $\mathcal{A} = \{\sim x, \max(x_1, x_2)\}$ не является полной в P_k. Пусть $\mathcal{E} = \{0, k-1\}$. Так как обе функции системы $\mathcal{A}$ сохраняют $\mathcal{E}$, то

$$[\mathcal{A}] \subseteq [T_{\mathcal{E}}] = T_{\mathcal{E}}.$$

Поскольку $T_{\mathcal{E}}$ не содержит константу 1, то $T_{\mathcal{E}} \neq P_k$. Значит, при $k \geqslant 3$ $\mathcal{A}$ не будет полной системой.

3. Алгоритм распознавания полноты

Вопрос о существовании алгоритма, позволяющего для каждой конечной системы $\mathfrak{M} = \{f_1, \ldots, f_s\}$ функций из P_k выяснять, будет она полной или нет, является ключевым вопросом k-значных логик.

Теорема 2.4. *Существует алгоритм распознавания полноты конечной системы $\mathfrak{M} = \{f_1, \ldots, f_s\}$ функций из P_k.*

Определение. Обозначим через $[\mathfrak{M}]_{x_1 x_2}$ множество всех функций из $[\mathfrak{M}]$, зависящих от переменных x_1, x_2.

Ключевым моментом доказательства теоремы служит следующая лемма.

Лемма 2.2. *Существует алгоритм построения множества $[\mathfrak{M}]_{x_1 x_2}$.*

Доказательство. Построим по индукции последовательность множеств

$$\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_p, \ldots$$

функций от двух переменных x_1, x_2.

Базис индукции. Положим $\mathfrak{R}_0 = \emptyset$.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_p$. Множество $\mathfrak{R}_{p+1}$ определяется так: для каждого $j = 1, \ldots, s$ рассмотрим всевозможные функции вида

$$f_j(H_1(x_1, x_2), \ldots, H_n(x_1, x_2)),$$

где $H_l(x_1, x_2)$ есть либо функция из $\mathfrak{R}_p$, либо переменная x_1 или x_2. Добавив все такие функции к множеству $\mathfrak{R}_p$, мы получим $\mathfrak{R}_{p+1}$.

Из построения ясно, что:

(1) если $\mathfrak{R}_{p+1} = \mathfrak{R}_p$, то $\mathfrak{R}_{p+2} = \mathfrak{R}_{p+1}$ и т.д., т.е. построенная цепочка множеств стабилизируется;
(2) стабилизация обязательно наступает, поскольку число различных функций от двух переменных x_1, x_2 не превосходит k^{k^2};

Обозначим через t минимальный номер множества цепочки, начиная с которого наступает стабилизация. Непосредственно из определения формулы над $\mathfrak{M}$ следует, что

$$[\mathfrak{M}]_{x_1x_2} = \mathfrak{R}_t.$$

□

Доказательство теоремы 2.4. На первом шаге при помощи леммы 2.2 мы строим классы $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$, …, $\mathfrak{R}_t$ до момента стабилизации, т.е строим множество $[\mathfrak{M}]_{x_1x_2} = \mathfrak{R}_t$.

На втором шаге по тому, содержится или нет функция Вебба в $[\mathfrak{M}]_{x_1x_2}$, определяем, имеет ли место полнота для системы $\mathfrak{M}$.

(1) Если $V_k(x_1, x_2) \in [\mathfrak{M}]_{x_1x_2}$, то $V_k(x_1, x_2) \in [\mathfrak{M}]$ и, в силу теоремы 1.3, система $\mathfrak{M}$ является полной.
(2) Если же $V_k(x_1, x_2) \notin [\mathfrak{M}]_{x_1x_2}$, то $V_k(x_1, x_2) \notin [\mathfrak{M}]$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ не полна.

□

Следующая теорема показывает, что существенно бесконечных полных систем не бывает. Тем самым введенное выше ограничение на конечность системы $\mathfrak{M}$ является не столь сильным.

Теорема 2.5. *Из всякой полной в P_k системы $\mathfrak{M}$ можно выделить конечную подсистему, также являющуюся полной.*

Доказательство. В силу полноты системы $\mathfrak{M}$ функция $V_k(x_1, x_2)$ может быть выражена в виде формулы через конечный набор $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\}$ функций из $\mathfrak{M}$. Поскольку функция Вебба есть полная система (см. теорему 2.2), то в силу теоремы 1.3 система $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\}$ полна. □

4. Теорема Кузнецова о полноте

Второй подход в решении вопроса о полноте связан с проверкой некоторых свойств класса $\mathfrak{M}$.

Теорема 2.6 (Кузнецова о функциональной полноте). *Можно построить такую систему замкнутых классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$ в P_k, что:*

(1) *каждый из этих классов целиком не содержит ни одного из остальных классов;*

(2) *произвольная система $\mathfrak{M}$ функций из P_k полна тогда и только тогда, когда она полностью не содержится ни в одном из классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$.*

Вначале мы введем одно понятие и докажем относительно него две леммы. Пусть $\mathfrak{R}$ — класс функций из P_k, зависящих только от переменных x_1 и x_2. Предположим, что он содержит функции $g_1(x_1, x_2) = x_1$ и $g_2(x_1, x_2) = x_2$.

Определение. Функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ из P_k сохраняет класс $\mathfrak{R}$, если для любых функций $h_1(x_1, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2)$ из $\mathfrak{R}$ имеет место

$$f(h_1(x_1, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2)) \in \mathfrak{R}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех функций k-значной логики, сохраняющих множество $\mathfrak{R}$.

Лемма 2.3. *Класс $\mathfrak{M}$ всех функций, сохраняющих $\mathfrak{R}$, является замкнутым.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{M}$ очевидно содержит тождественную функцию, то по определению формулы нам достаточно показать, что функция

$$\Phi = f(f_1, \ldots, f_n)$$

принадлежит $\mathfrak{M}$, если функции $f, f_1, \ldots, f_n$ принадлежат классу $\mathfrak{M}$. Пусть Φ зависит от r переменных. Возьмем произвольные функции $h_1, \ldots, h_r$ из класса $\mathfrak{R}$. Тогда

$$\Phi(h_1, \ldots, h_r) = f(f_1(h_1, \ldots, h_r), \ldots, f_n(h_1, \ldots, h_r)) = f(H_1, \ldots, H_n),$$

где функции $H_1, \ldots, H_n$ принадлежат классу $\mathfrak{R}$ поскольку $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{M}$. Поэтому и $f(H_1, \ldots, H_n)$ принадлежит $\mathfrak{R}$. □

Лемма 2.4. *Если класс $\mathfrak{R}$ таков, что $[\mathfrak{R}]_{x_1x_2} = \mathfrak{R}$, то для класса $\mathfrak{M}$, сохраняющего $\mathfrak{R}$, имеет место равенство*

$$\mathfrak{M}_{x_1x_2} = \mathfrak{R}.$$

Доказательство. Докажем, что каждая функция $h(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}$ сохраняет класс $\mathfrak{R}$. Действительно, для произвольных функции $h_1(x_1, x_2)$, $h_2(x_1, x_2)$ из класса $\mathfrak{R}$ выполнено

$$h(h_1, h_2) \in [\mathfrak{R}]_{x_1x_2} = \mathfrak{R},$$

т.е. $h(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}_{x_1x_2}$. Итак, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}_{x_1x_2}$.

Обратное включение $\mathfrak{M}_{x_1x_2} \subseteq \mathfrak{R}$ справедливо без дополнительного условия леммы. Действительно, если $f(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}_{x_1x_2}$, то подставляя вместо x_1, x_2 функции g_1, g_2 из $\mathfrak{R}$ мы с одной стороны получим $f(g_1, g_2) \in \mathfrak{R}$, а с другой стороны — $f(x_1, x_2) = f(g_1, g_2)$. □

Доказательство теоремы 2.6. Вначале построим систему классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$.

Пусть $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_l$ — система всех различных собственных подмножеств функций из P_k, зависящих от переменных x_1, x_2, которые удовлетворяют двум условиям ($i = 1, \ldots, l$):

(1) $\mathfrak{R}_i$ содержит обе функции $g_1(x_1, x_2) = x_1$, $g_2(x_1, x_2) = x_2$;
(2) $[\mathfrak{R}_i]_{x_1 x_2} = \mathfrak{R}_i$.

Указанные подмножества строятся путем перебора всех $2^{k^{k^2}} - 2$ собственных подмножеств функций из P_k, зависящих от переменных x_1, x_2. При этом оставляются те подмножества, которые содержат обе функции g_1 и g_2. Далее, для каждого оставшегося подмножества так же, как в теореме 2.4, строим множество $[\mathfrak{R}]_{x_1 x_2}$ и проверяем условие $[\mathfrak{R}]_{x_1 x_2} = \mathfrak{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}'_i$ класс всех функций из P_k, сохраняющих множество $\mathfrak{R}_i$ ($i = 1, \ldots, l$). Удаляя те классы $\mathfrak{M}'_i$, которые содержатся в каком-либо из остальных классов, мы получим искомую систему $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$.

Нам осталось показать, что произвольная система $\mathfrak{M}$ функций из P_k полна тогда и только тогда, когда она полностью не содержится ни в одном из классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — полная система функций из P_k. В силу леммы 2.3 каждый класс $\mathfrak{M}_j$ ($j = 1, \ldots, s$) замкнут, причем по лемме 2.4

$$(\mathfrak{M}_j)_{x_1 x_2} = \mathfrak{R}_j.$$

Поскольку по построению класс $\mathfrak{R}_j$ не содержит всех функций, зависящих от переменных x_1 и x_2, класс $\mathfrak{M}_j$ не является полным. Если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_j$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant s$, то по свойству 3 операции замыкания имеем

$$[\mathfrak{M}] \subseteq \mathfrak{M}_j \neq P_2,$$

что противоречит полноте системы $\mathfrak{M}$. Поэтому произвольная полная система $\mathfrak{M}$ функций из P_k полностью не содержится ни в одном из классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$.

Достаточность. Пусть произвольная система $\mathfrak{M}$ функций из P_k полностью не содержится ни в одном из классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$. Рассуждая от противного, предположим, что система $\mathfrak{M}$ не полна. Тогда функция Вебба $V_k(x_1, x_2)$ не содержится в $[\mathfrak{M}]$, иначе $\mathfrak{M}$ полна по теореме 1.3. Пусть

$$\mathfrak{M}' = [\mathfrak{M} \cup \{g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)\}].$$

Так как $V_k(x_1, x_2) \notin [\mathfrak{M}]$, то $V_k(x_1, x_2) \notin \mathfrak{M}'$. Пусть

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{M}'_{x_1 x_2}.$$

Заметим, что:

(1) $\mathfrak{R}$ содержит обе функции $g_1(x_1, x_2) = x_1$ и $g_2(x_1, x_2) = x_2$;
(2) $[\mathfrak{R}]_{x_1 x_2} = \mathfrak{R}$.

Поскольку класс $\mathfrak{R}$ является собственным подмножеством функций из P_k, зависящих от переменных x_1 и x_2 ($g_1 \in \mathfrak{R}$ и $V_k(x_1, x_2) \notin \mathfrak{R}$), найдется такое i, $1 \leqslant i \leqslant l$, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i$. Ключевой момент доказательства: класс $\mathfrak{M}'$ в силу замкнутости сохраняет класс $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} = \mathfrak{M}'_{x_1 x_2}$. Поэтому $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}'_i$. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$, то $\mathfrak{M}$ полностью содержится в одном из классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$, что противоречит условию. Теорема доказана. □

5. Критерий Слупецкого

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k называется *существенной*, если она имеет не менее чем две существенные переменные.

Теорема 2.7 (обобщенный критерий Слупецкого). *Пусть система $\mathfrak{M}$ функций из P_k $(k \geqslant 3)$ содержит все функции одной переменной, принимающие менее k значений. Тогда для полноты системы $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}$ содержала существенную функцию, принимающую все k значений.*

Докажем три леммы

Лемма 2.5. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная функция, принимающая $l \geqslant 3$ значений. Пусть x_1 — ее существенная переменная. Тогда найдутся три различных набора*

$$(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$
$$(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$
$$(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n),$$

на которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает три различных значения.

Доказательство. Так как x_1 — существенная переменная функции f, то найдутся такие значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что функция $g(x_1) = f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ принимает не менее двух различных значений. Возможны два случая.

1) Функция $g(x_1)$ принимает все l значений. Из существенности функции f вытекает, что найдется такое α, что

$$f(\alpha, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv \mathrm{const}$$

(иначе бы f имела бы ровно одну существенную переменную — x_1). Отсюда следует, что найдутся такие значения $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, что

$$f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \neq f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = g(\alpha).$$

Так как функция $g(x_1)$ принимает $l \geqslant 3$ значений, то существует такое β, что $g(\beta) \neq g(\alpha)$, т.е.

$$f(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

и

$$g(\beta) = f(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n).$$

2) Функция $g(x_1)$ принимает меньше чем l значений. Поскольку функция f принимает все l значений, найдется набор $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ такой, что $f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ отлично от значений функции $g(x_1)$. В частности,

$$f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \neq f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = g(\alpha).$$

Так как функция $g(x_1)$ принимает не менее двух различных значений значений, то найдется такое β, что $g(\beta) \neq g(\alpha)$.

Искомые наборы построены. □

Определение. Декартово произведение $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ подмножеств множества E_k называется *кубом*.

Обозначим через $|G_i|$ число элементов в множестве G_i.

Лемма 2.6. *Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — существенная функция, принимающая $l \geqslant 3$ значений. Тогда найдется куб $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ такой, что*

$$1 \leqslant |G_1|,\dots,|G_n| \leqslant l-1,$$

на наборах которого функция $f(x_1,\dots,x_n)$ принимает все l различных значений.

Доказательство. Можно считать, что x_1 — существенная переменная функции f. По лемме 2.5 найдутся три набора, на которых функция f принимает три различных значения. Добавим к ним $l-3$ набора, на которых f принимает оставшиеся $l-3$ значения. Тогда

$$\begin{aligned}
&G_1 = \{\alpha, \beta, \text{1-ые координаты добавленных } l-3 \text{ наборов}\},\\
&G_2 = \{\alpha_1, \beta_1, \text{2-ые координаты добавленных наборов,}\}\\
&\dots,\\
&G_n = \{\alpha_n, \beta_n, \text{n-ые координаты добавленных наборов.}\}
\end{aligned}$$

Искомый куб построен. □

Определение. Система, состоящая из четырех наборов вида

$$\begin{gathered}
(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\ \alpha_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\ \alpha_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1},\dots,\alpha_n),\\
(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\ \alpha_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\ \beta_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1},\dots,\alpha_n),\\
(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\ \beta_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\ \alpha_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1},\dots,\alpha_n),\\
(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\ \beta_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1},\dots,\alpha_{j-1},\ \beta_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1},\dots,\alpha_n),
\end{gathered}$$

называется *квадратом*, если $\alpha_i \neq \beta_i$ и $\alpha_j \neq \beta_j$. Каждый из наборов, образующих квадрат, называется его *вершиной.*

Лемма 2.7. *Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — существенная функция, принимающая $l \geqslant 3$ значений. Тогда найдется квадрат, на котором f принимает не менее двух значений, причем одно из них только в одной его вершине.*

Доказательство. Можно считать, что x_1 — существенная переменная функции f. По лемме 2.5 найдутся три набора

$$\begin{gathered}
(\alpha,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\\
(\beta,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\\
(\alpha,\gamma_2,\dots,\gamma_n),
\end{gathered}$$

на которых функция f принимает три различных значения — пусть A, B и C, соответственно. Запишем в таблицу две последовательности наборов:

$$\begin{matrix}
(\alpha,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n) & (\alpha,\gamma_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n) & (\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\dots,\alpha_n) & \dots & (\alpha,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\\
(\beta,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n) & (\beta,\gamma_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n) & (\beta,\gamma_2,\gamma_3,\dots,\alpha_n) & \dots & (\beta,\gamma_2,\dots,\gamma_n).
\end{matrix}$$

Заметим, что любые два соседних столбца построенной таблицы либо совпадают, либо образуют квадрат. Вычеркивая одинаковые столбцы, обозначим оставшиеся столбцы через $R_1,\dots,R_s$. Поскольку в столбце R_1 функция f принимает значения A и B, а в столбце R_s функция f не принимает по крайней мере одно из этих значений, найдется такое i $(1 \leqslant i < s)$, что в столбце R_i функция f принимает значения A и B, а в столбце R_{i+1} функция f не принимает по крайней мере одно из них. Квадрат, образованный столбцами R_i и R_{i+1}, является искомым. □

Доказательство теоремы 2.7. *Необходимость.* Пусть система $\mathfrak{M}$ полна. Рассуждая от противного, предположим, что $\mathfrak{M}$ не содержит существенных функций, принимающих все k значений. Тогда $[\mathfrak{M}]$ также не содержит существенных функций, принимающих все k значений, что противоречит полноте системы $\mathfrak{M}$.

Достаточность. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная функция в $\mathfrak{M}$, принимающая k значений. Индукцией по $l = 2, 3, \ldots, k$ докажем, что $[\mathfrak{M}]$ содержит все функции из P_k, принимающие ровно l значений.

Базис индукции. $l = 2$.

а) Нам достаточно показать, что $[\mathfrak{M}]$ содержит все функции из P_k, принимающие ровно два значения: 0 и 1. Действительно, для каждой функции $g(x_1, \ldots, x_m) \in P_k$, принимающей значения η_0, η_1 определим функцию $g'(x_1, \ldots, x_m)$ из P_k следующим образом: если $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = \eta_0$, то полагаем $g'(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = 0$; если же $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = \eta_1$, то полагаем $g'(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = 1$. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} \eta_0, & \text{при } x = 0, \\ \eta_1, & \text{при } x \neq 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что

$$g(x_1, \ldots, x_m) = \theta(g'(x_1, \ldots, x_m)).$$

Так как $\theta(x) \in \mathfrak{M}$, то из условия $g'(x_1, \ldots, x_m) \in [\mathfrak{M}]$ следует $g(x_1, \ldots, x_m) \in [\mathfrak{M}]$.

б) Построим вспомогательные функций $x_1 \vee_{01} x_2, x_1 \wedge_{01} x_2 \in [\mathfrak{M}]$.

В силу леммы 2.7 найдется квадрат

$$\begin{array}{l}
(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1},\ \alpha_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1},\ \alpha_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n), \\
(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1},\ \alpha_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1},\ \beta_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n), \\
(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1},\ \beta_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1},\ \alpha_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n), \\
(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1},\ \beta_{\mathbf{i}},\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1},\ \beta_{\mathbf{j}},\ \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n),
\end{array}$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ и $\alpha_j \neq \beta_j$, на котором f принимает не менее двух значений, причем одно из них, η, — ровно в одной вершине. Определим функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = \eta, \\ 1, & \text{при } x \neq \eta \end{cases}.$$

По условию теоремы $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$ как функция одной переменной, принимающая менее k значений.

Пусть

$$h(x_1, x_2) = \varphi(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1},\ \mathbf{x_1},\ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1},\ \mathbf{x_2},\ \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)).$$

Так как все константы, f и φ содержатся в $\mathfrak{M}$, то $h(x_1, x_2) \in [\mathfrak{M}]$.

Функция $h(x_1, x_2)$ принимает ровно два значения: 0 и 1. В частности, на квадрате

$$\{(\alpha_i, \alpha_j), (\alpha_i, \beta_j), (\beta_i, \alpha_j), (\beta_i, \beta_j)\}$$

функция $h(x_1, x_2)$ принимает значение 0 ровно в одной вершине (α, β), где $\alpha \in \{\alpha_i, \beta_i\}$ и $\beta \in \{\alpha_j, \beta_j\}$.

Выберем из функций системы $\mathfrak{M}$ любые две функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\psi_1(0) = \alpha, \quad \psi_1(1) \in \{\alpha_i, \beta_i\} \backslash \alpha,$$
$$\psi_2(0) = \beta, \quad \psi_2(1) \in \{\alpha_j, \beta_j\} \backslash \beta.$$

Тогда функция

$$x_1 \vee_{01} x_2 = h(\psi_1(x_1), \psi_2(x_2))$$

принадлежит $[\mathfrak{M}]$ и реализует на множестве $\{0,1\} \times \{0,1\}$ дизъюнкцию. Так как $j_0(x) \in \mathfrak{M}$, то функция

$$x_1 \wedge_{01} x_2 = j_0(j_0(x_1) \vee_{01} j_0(x_2))$$

принадлежит $[\mathfrak{M}]$ и реализует на множестве $\{0,1\} \times \{0,1\}$ конъюнкцию.

в) Следующее тождество показывает, что любая функция $g'(x_1, \ldots, x_m)$ из P_k, принимающая только значения 0 и 1, содержится в $[\mathfrak{M}]$:

$$g'(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee\nolimits_{01 (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in E_k^m} j_{\sigma_1}(x_1) \wedge_{01} \ldots \wedge_{01} j_{\sigma_m}(x_m) \wedge_{01} g'(\sigma_1, \ldots, \sigma_m).$$

Индуктивный переход. Пусть $[\mathfrak{M}]$ содержит все функции из P_k, принимающие не более $l-1$ значений, $l-1 < k$. Покажем, что произвольная функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ из P_k, принимающая l значений (пусть, $\eta_0, \ldots, \eta_{l-1}$), также содержится в $[\mathfrak{M}]$.

Поскольку существенная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}$ принимает $k \geqslant l \geqslant 3$ значений, по лемме 2.6 найдется куб $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ такой, что $1 \leqslant |G_1|, \ldots, |G_n| \leqslant l-1$, на наборах которого функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значения $\eta_0, \ldots, \eta_{l-1}$.

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим функцию $\psi_i(x_1, \ldots, x_m)$ со значениями в G_i так, чтобы выполнялось тождество

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(\psi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Другими словами, $\psi_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ равно i-той координате набора из $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, на котором функция f принимает значение $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

Так как $|G_1|, \ldots, |G_n| \leqslant l-1$, то по предположению индукции функции $\psi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_m)$ принадлежат $[\mathfrak{M}]$. Это означает, что функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ также содержится в $[\mathfrak{M}]$.

Итак, индукцией по $l = 2, 3, \ldots, k$ мы доказали, что $[\mathfrak{M}]$ содержит все функции из P_k, принимающие ровно l значений. Поскольку по условию теоремы $\mathfrak{M}$ содержит все константы, "достаточность" доказана. □

Непосредственное использование критерия Слупецкого не всегда удобно, поскольку для этого предварительно нужно установить наличие в $\mathfrak{M}$ всех функций одной переменной, принимающих не более $k-1$ значений. Поэтому удобнее в формулировке теоремы потребовать, чтобы система $\mathfrak{M}$ порождала это множество функций одной переменной. Следующая теорема, приводимая без доказательства, обеспечивает примеры функций, порождающих множество функций одной переменной.

Теорема 2.8. *Все функции одной переменной из P_k порождаются каждой из следующих систем функций:*

(1) $\{f(x), g(x)h(x)\}$, *где* $f(x) = x - 1(\mod k)$,

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant k-3, \\ k-1, & \text{при } x = k-2, \\ k-2, & \text{при } x = k-1, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ x, & \text{при } x > 0 \end{cases};$$

(2) $\{f_1(x), \ldots, f_{k-1}(x), h(x)\}$, *где*

$$f_i(x) = \begin{cases} i, & \text{при } x = 0, \\ 0, & \text{при } x = i, \\ x, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, k-1).$$

6. Особенности k-значных логик

Предыдущий материал показывает, что в конечнозначных логиках сохраняются многие результаты, имеющие место в двузначной логике. Правда, рост значности все-таки приводит к некоторым усложнениям формулировок и доказательств. В настоящем параграфе мы остановимся на фактах, выявляющих существенное отличие P_k при $k \geqslant 3$ от P_2.

Определение. Система функций $\{f_1, f_2, \ldots\}$ из замкнутого класса $\mathfrak{M}$ называется *полной* в $\mathfrak{M}$, если ее замыкание совпадает с $\mathfrak{M}$.

Определение. Система функций $\{f_1, f_2, \ldots\}$ из замкнутого класса $\mathfrak{M}$ называется его *базисом*, если она полна в $\mathfrak{M}$, но всякая ее собственная подсистема не является полной в $\mathfrak{M}$.

Пример 2.4. Система функций $\{1, x_1 + x_2\}$ очевидно является базисом замкнутого класса всех линейных функций алгебры логики.

Следующая теорема Поста, которую мы приводим без доказательства, отвечает на вопрос о существовании базисов для случая двузначной логики.

Теорема 2.9. *Каждый замкнутый класс из P_2 имеет конечный базис.*

Для случая $k \geqslant 3$ соответствующий ответ дают теоеремы Янова и Мучника.

Теорема 2.10. *Для всякого $k \geqslant 3$ существует замкнутый в P_k класс, не имеющий базиса.*

Доказательство. Построим последовательность функций:

$$f_0 = 0,$$

$$f_i(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_1 = \ldots = x_i = 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим класс $\mathfrak{M} = [f_0, f_1, f_2, \ldots]$. Важное свойство класса $\mathfrak{M}$ заключается в том, что любая его функция получается из некоторой функции $f_i(x_1, \ldots, x_i)$ путем переименования переменных. Это легко следует из того, что

$$f_i(\ldots, f_j, \ldots) \equiv 0.$$

Рассуждая от противного, допустим, что класс $\mathfrak{M}$ имеет базис. Тогда в базисе найдется функция $\tilde{f}$, получающаяся из функции f_{n_0} путем переименования переменных, для которй число n_0 минимально. Возможны два случая.

1. Базис содержит как минимум еще одну функцию $\tilde{f}'$. Эта функция соответствует функции f_{n_1} и $n_1 \geqslant n_0$. Так как f_{n_0} может быть получена из f_{n_1} путем отождествления переменных, то $\tilde{f}$ выражается через $\tilde{f}'$, что противоречит определению базиса.

2. Базис состоит из единственной функции $\tilde{f}$. В этом случае никакая функция f_n при $n > n_0$ не может быть получена из $\tilde{f}$, поскольку $f_{n_0}(\ldots, f_{n_0}, \ldots) \equiv 0$, что также противоречит определению базиса.

Итак, оба случая привели к противоречию. Поэтому наше предположение неверно и класс $\mathfrak{M}$ не имеет базиса. □

Упражнение 2.5. *В каком месте доказательства используется условие $k \geqslant 3$?*

Теорема 2.11. *Для всякого $k \geqslant 3$ в P_k существует замкнутый класс со счетным базисом.*

Доказательство. Для каждого $i = 2, 3, \ldots$ определим функцию

$$f_i(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_i = 2, x_j = 1, \\ & \text{где } j = 1, \ldots, i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим замкнутый класс $\mathfrak{M} = [f_2, f_3, \ldots]$. Покажем, что система $\{f_2, f_3, \ldots\}$ является базисом в $\mathfrak{M}$.

Рассуждая от противного, предположим, что некоторая функция f_m может быть выражена в виде формулы через остальные функции этой системы. Другими словами,

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = f_s(A_1, \ldots, A_s),$$

где $A_1, \ldots, A_s$ — выражения, являющиеся либо формулами над системой $\{f_2, \ldots, f_{m-1}, f_{m+1}, \ldots\}$, либо символами переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Возможны три случая.

1. Среди выражений $A_1, \ldots, A_s$ по крайней мере два выражения (пусть, A_1, A_2) отличны от символов переменных. Тогда при любых значениях переменных $x_1, \ldots, x_m$ выражения A_1, A_2 могут принимать только значения 0 и 1 и поэтому правая часть $f_s(A_1, \ldots, A_s)$ тождественно равна нулю. Это противоречит тому, что $f_m \not\equiv 0$.

2. Среди выражений $A_1, \ldots, A_s$ ровно одно (пусть, A_1) отлично от символа переменной. Поскольку $s \geqslant 2$, найдется такое j, что $A_2 = x_j$. Рассмотрим набор $x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_i = 2$ и $x_j = 1$. На этом наборе выражение A_1 принимает значение 0 или 1. Следовательно, выражения A_1, A_2 принимают значения, отличные от 2. Поэтому правая часть принимает значение 0, тогда как левая часть на выбранном наборе равна 1. Мы пришли к противоречию.

3. Все выражения $A_1, \ldots, A_s$ — символы переменных. В этом случае $s > m$ и, следовательно, среди них встретятся по крайней мере два вхождения некоторой переменной x_j. Взяв набор $x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} =$

$\ldots = x_i = 2$ и $x_j = 1$, мы обратим левую часть в 1, а правую в 0. Следовательно, этот случай также невозможен.

Итак, все три случая привели к противоречию. Поэтому наше предположение неверно, и система $\{f_2, f_3, \ldots\}$ является базисом в $\mathfrak{M}$. $\square$

Литература

[1] *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[2] *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.