

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

В.С. Маляр

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

Навчальний посібник

*Рекомендувало Міністерство освіти і науки,
молоді та спорту України*

Львів
Видавництво Львівської політехніки
2012

УДК 6.21.3(075.8)
ББК 31.2я73
М 219

Рецензенти:

Глухівський Л.Й., заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, Український інститут промислової власності;

Василів К.М., завідувач кафедри електротехнічних систем, доктор технічних наук, Львівський національний аграрний університет;

Мандзій Б.А., професор кафедри теоретичної радіотехніки та радіовимірювань, доктор технічних наук, професор, Національний університет “Львівська політехніка”

*Рекомендувало Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(Лист № 1/11-17552 від 12.11.2012 р.)*

Маляр В.С.

М 219 Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола: навч. посібник / В.С. Маляр. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 312 с.

ISBN 978-617-607-270-6

Викладено основні поняття і закони електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами. Висвітлені основи теорії та методи аналізу ustalених режимів лінійних електричних кіл постійного, однофазного синусоїдного і несинусоїдного та трифазного струму, електричних кіл із розподіленими параметрами, а також методи розрахунку перехідних процесів. Розглянуто основні властивості та методи аналізу нелінійних електричних кіл. Основні теоретичні положення проілюстровано прикладами розв'язування типових задач, наведено контрольні та екзаменаційні питання.

Буде корисним студентам різних форм навчання електротехнічних та електро-механічних спеціальностей вищих навчальних закладів для самостійної роботи під час вивчення навчальних дисциплін “Теоретичні основи електротехніки” та “Теорія електричних кіл”, а також широкому загалу наукових та інженерних працівників.

УДК 65.012.12 (075.8)
ББК 65.9(2)30-2

© Маляр В.С., 2012
© Національний університет
“Львівська політехніка”, 2012

ISBN 978-617-607-270-6

ЗМІСТ

Передмова	7
Вступ	9
Розділ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКони ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	
1.1. Основні поняття електромагнітного поля	11
1.2. Електричний струм, напруга, електрорушійна сила, потужність	15
1.3. Електричне коло, його елементи та заступна схема.....	19
1.4. Джерела електричної енергії	21
1.5. Пасивні елементи електричних кіл та їх рівняння	23
1.6. Закони Кірхгофа	26
1.7. Електрична енергія та потужність	28
1.8. Дуальність електричних кіл	29
1.9. Питання та завдання для самостійної роботи	31
Розділ 2. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	
2.1. Аналіз електричних кіл на основі законів Кірхгофа	33
2.2. Метод контурних струмів	35
2.3. Метод вузлових напруг	37
2.4. Метод еквівалентного генератора	42
2.5. Метод накладання	44
2.6. Еквівалентні перетворення схем електричних кіл	45
2.7. Баланс потужностей в електричному колі постійного струму	47
2.8. Питання та завдання для самостійної роботи	49
Розділ 3. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	
3.1. Основні поняття та визначення	53
3.2. Діючі значення синусоїдного струму, ЕРС, напруги	55
3.3. Зображення синусоїдної величини на комплексній площині.....	57
3.4. Пасивні елементи в електричному колі синусоїдного струму	60
3.5. Комплексний опір і комплексна провідність. Закон Ома в комплексній формі.....	65
3.6. Потужності та баланс потужностей у колі синусоїдного струму.....	68
3.7. Символічний метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму	72
3.7.1. Суть символічного методу	72
3.7.2. Закони Кірхгофа в комплексній формі	72

3.8. Резонансні явища в електричному колі синусоїдного струму	74
3.8.1. Резонанс напруг	75
3.8.2. Резонанс струмів	78
3.9. Електричні кола із взаєміндуктивними зв'язками	80
3.10. Приклади розв'язування задач	84
3.11. Питання та завдання для самостійної роботи	92
Розділ 4. Трифазні кола	
4.1. Основні поняття та визначення	99
4.2. Способи з'єднання фаз у трифазних колах	103
4.3. Розрахунок трифазних кіл	106
4.3.1. З'єднання "зірка – зірка"	106
4.3.2. З'єднання "трикутник – трикутник"	110
4.4. Потужності у трифазних колах	112
4.5. Вимірювання потужності у трифазних колах	114
4.6. Метод симетричних складових	116
4.6.1. Основні поняття та визначення	116
4.6.2. Опори елементів трифазних кіл для струмів різних послідовностей	118
4.6.3. Розрахунок трифазних кіл методом симетричних складових	119
4.6.4. Потужності трифазних кіл, виражені через симетричні складові	123
4.7. Приклади розв'язування задач	123
4.8. Питання та завдання для самостійної роботи	131
Розділ 5. Електричні кола періодичного несинусоїдного струму	
5.1. Основні поняття та визначення	137
5.2. Діюче та середнє значення періодичного несинусоїдного струму. Коефіцієнти форми кривих	144
5.3. Потужності в колі періодичного несинусоїдного струму	146
5.4. Аналіз електричних кіл несинусоїдного струму	148
5.5. Резонансні явища в електричних колах несинусоїдного струму	150
5.6. Приклади розв'язування задач	151
5.7. Питання та завдання для самостійної роботи	156
Розділ 6. Чотириполосники	
6.1. Загальна характеристика чотириполосників	161
6.2. Рівняння прохідних пасивних чотириполосників	164
6.3. Визначення коефіцієнтів чотириполосника	169
6.4. Характеристичні параметри чотириполосника	171
6.5. Заступні схеми взаємних чотириполосників	175
6.6. Рівняння симетричного чотириполосника у гіперболічній формі	177
6.7. Способи з'єднання чотириполосників	178
6.8. Рівняння активних автономних чотириполосників	183
6.9. Приклади розв'язування задач	185
6.10. Питання та завдання для самостійної роботи	192

Розділ 7. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1. Основні поняття та визначення	195
7.2. Закони комутації	197
7.3. Початкові умови	198
7.4. Класичний метод розрахунку перехідних процесів	199
7.4.1. Суть класичного методу	199
7.4.2. Характеристичне рівняння	201
7.4.3. Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом	202
7.5. Перехідні процеси в простих електричних колах	209
7.5.1. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними резистором і котушкою індуктивності	209
7.5.2. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними резистором і конденсатором	213
7.5.3. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними конденсатором і котушкою індуктивності	217
7.6. Приклади розв'язування задач класичним методом	220
7.7. Операторний метод розрахунку перехідних процесів	228
7.7.1. Суть операторного методу	228
7.7.2. Основні властивості перетворення Лапласа	230
7.7.3. Операторні заступні схеми	233
7.7.4. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі	234
7.7.5. Перехід від зображень до оригіналу. Теорема розкладу	237
7.8. Приклади розв'язування задач операторним методом	239
7.9. Перехідні процеси під час вмикання лінійного електричного кола на напругу довільної форми	241
7.9.1. Вступні зауваження	241
7.9.2. Перехідні функції	241
7.9.3. Інтеграл Дюамеля	242
7.10. Питання та завдання для самостійної роботи	246

Розділ 8. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1. Первинні параметри та диференціальні рівняння однорідної лінії	253
8.2. Рівняння однорідної лінії в комплексній формі. Вторинні параметри	256
8.3. Лінія як чотириполюсник	260
8.4. Вхідний опір однорідної лінії	261
8.5. Біжучі хвилі в лінії та коефіцієнт відбиття хвилі	262
8.6. Довжина хвилі в лінії та фазова швидкість	265
8.7. Однорідна лінія в режимі узгодженого навантаження	267
8.8. Лінія без спотворень та лінія без втрат	270
8.9. Стоячі хвилі в лінії	272
8.10. Вмикання лінії на постійну напругу	274

8.11. Приклади розв'язування задач.....	276
8.12. Питання та завдання для самостійної роботи.....	278
Розділ 9. НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА	
9.1. Основні поняття та визначення	281
9.2. Характеристики та параметри нелінійних елементів.....	284
9.3. Методи аналізу нелінійних електричних кіл.....	289
9.4. Аналіз нелінійних електричних кіл постійного струму	
графічним методом.....	291
9.4.1. Послідовне з'єднання нелінійних елементів	291
9.4.2. Паралельне з'єднання нелінійних елементів	292
9.4.3. Змішане з'єднання нелінійних елементів	293
9.4.4. Метод еквівалентного генератора.....	293
9.4.5. Метод двох вузлів	294
9.5. Аналіз нелінійних електричних кіл за дії синусоїдних джерел	296
9.5.1. Аналіз процесів у колі з вентилем за дії синусоїдної ЕРС.....	296
9.5.2. Електромагнітні процеси в нелінійній котушці	
індуктивності за дії синусоїдної ЕРС.....	298
9.6. Числові методи розрахунку нелінійних електричних кіл.....	300
9.7. Апроксимація нелінійних характеристик	302
9.8. Питання та завдання для самостійної роботи.....	303
Список літератури	305
Предметний покажчик	307

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Теоретичні основи електротехніки” є базовою для багатьох спеціальностей електротехнічного профілю, оскільки забезпечує фундаментальну підготовку для вивчення спеціальних дисциплін, вона є визначальною у формуванні фахового рівня спеціалістів у сфері електроенергетики, електромеханіки, автоматики, інформаційно-вимірювальної та обчислювальної техніки. Навчальний посібник відповідає програмі підготовки фахівців електротехнічних та електромеханічних спеціальностей з дисциплін “Теоретичні основи електротехніки” та “Теорія електричних кіл”. Посібник містить такі розділи: “Основні поняття та закони електричних кіл”, “Лінійні електричні кола постійного струму”, “Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму”, “Трифазні кола”, “Електричні кола періодичного несинусоїдного струму”, “Чотириполюсники”, “Перехідні процеси в лінійних електричних колах”, “Електричні кола з розподіленими параметрами”, “Нелінійні електричні кола”. Теоретичний матеріал викладено по можливості в короткій, але достатній для засвоєння і доступній для розуміння формі. Особливістю посібника є обширна ілюстрація теоретичного матеріалу прикладами розв’язання типових задач, наявність контрольних і екзаменаційних питань, а також задач для самостійного опрацювання, що зумовлено скороченням у навчальному процесі частки аудиторних занять і збільшенням обсягу самостійної роботи. З цього погляду він є самодостатнім, що особливо важливо для студентів з дистанційною формою навчання, яка стає все більше поширеною.

Основну увагу приділено понятійним та методологічним основам дисципліни, що передусім необхідно для розуміння процесів і явищ, які відбуваються в електротехнічних пристроях.

Очевидно, що це є основою для обґрунтованого коректного застосування формалізованих методів аналізу, які ґрунтуються на застосуванні дискретної математики і комп'ютерної техніки. Викладення математичних аспектів теорії не наведено, оскільки вважається, що студент обізнаний з відповідними розділами математики, зокрема: теорією комплексної змінної, лінійних диференціальних рівнянь, як звичайних, так і в частинних похідних, векторного аналізу, матричної алгебри, рядів Фур'є тощо.

Висвітлено лише основні, мінімально необхідні аспекти теорії та методів аналізу електричних кіл, що дає змогу зосередитись на основному матеріалі, після засвоєння якого студент може розширити й доповнити свої знання, використавши наведену наприкінці підручника навчальну літературу. До списку літератури увійшли підручники та навчальні посібники, які видані як в Україні, так і за кордоном за останні десятиліття. Однак студенти можуть використовувати навчальну літературу будь-яких років видання, оскільки дисципліна "Теоретичні основи електротехніки" є класичною і в своїй основі залишається незмінною.

Посібник є авторським опрацюванням теоретичного матеріалу, в якому розвинено концепції Львівської електротехнічної школи, засади якої мають давні традиції, а витoki сягають поза минулого століття. Літерні позначення фізичних величин прийняті відповідно до вимог Держстандартів України.

Автор глибоко вдячний рецензентам за зроблені під час рецензування зауваження та рекомендації щодо покращення змісту посібника.

Виявлені недоліки, а також зауваження щодо викладення матеріалу та форми його подання просимо надсилати за адресою: 79013, м. Львів, вул. С. Бандери 12, Національний університет "Львівська політехніка", кафедра теоретичної та загальної електротехніки.

ВСТУП

Сучасне суспільство неможливо уявити без використання електричної енергії. Практично всі матеріальні та духовні потреби людина задовольняє за допомогою електричної енергії. Електротехніка як галузь техніки виконує енергетичну, технологічну та інформаційну функції. Вона ґрунтується на використанні електричних та магнітних явищ, які відбуваються в різноманітних електротехнічних пристроях. На вивчення якісного та кількісного аспектів цих явищ спрямована дисципліна “Теоретичні основи електротехніки” (ТОЕ). Вона є теоретичною базою для вивчення всіх електротехнічних дисциплін, а тому має визначальне значення у фаховій підготовці спеціалістів електротехнічного профілю. Основне завдання дисципліни ТОЕ – навчити студентів застосовувати основні закони електротехніки під час розв’язування практичних задач. Метою підручника є надання допомоги студентам різних форм навчання спеціальностей вищих навчальних закладів електротехнічного спрямування в їхній самостійній роботі з вивчення дисципліни ТОЕ.

У дисципліні ТОЕ електромагнітні явища розглядаються з двох позицій: на основі теорії кіл та на основі теорії електромагнітного поля. Однак таке розмежування є дещо умовним, оскільки деякі процеси доцільно досліджувати на основі поєднання теорії кіл та теорії поля. Вибір того чи іншого підходу до аналізу електромагнітних процесів залежить від умов конкретної задачі.

Теорія кіл ґрунтується на наближеній заміні електротехнічного пристрою заступною схемою, в якій реальні елементи замінені ідеалізованими. Під час аналізу кіл використовуються інтегральні величини, як-то струм, напруга, опір тощо. Електричні кола переважно розглядають як такі, що мають зосереджені

параметри. Проте є низка практично важливих задач, де необхідно враховувати розподіл параметрів (індуктивностей, ємностей, провідностей). Теорія електричних кіл зі зосередженими параметрами дає змогу розв'язати переважну більшість задач аналізу процесів у електротехнічних пристроях. До них належать електричні кола промислової частоти, за винятком довгих ліній пересилання електроенергії та ліній зв'язку. Необхідно мати на увазі, що одне і те саме електричне коло може по-різному поводитись за різних частот джерел живлення. Наприклад, у разі низької частоти можна знехтувати ємністю між витками котушки, однак за високих частот таке припущення може призвести до істотних помилок, оскільки струми зміщення в діелектрику навколо витків котушки можуть бути сумірні зі струмами у витках. Під час пересилання електроенергії на далекі відстані, а також інформації спостерігається залежність струмів і напруг як від часу, так і від відстані. Це означає, що у цьому разі лінію пересилання не можна подати зосередженими параметрами. Такі кола характеризуються погонними значеннями параметрів, тобто такими, що припадають на одиницю довжини лінії. Крім того, ці параметри можуть мати нерівномірний розподіл. Враховуючи наведене, розрізняють електричні кола зі зосередженими та розподіленими параметрами.

Теорія електромагнітного поля ґрунтується на використанні диференціальних величин (напруженості, індукції тощо) і дає змогу визначати електричні та магнітні величини в кожній точці простору в будь-який момент часу. Вона слугує теоретичною основою для визначення основних понять та меж застосування теорії кіл.

Дисципліна ТОЕ ґрунтується на відповідних розділах фізики та вищої математики. Вона, як правило, складається з трьох частин. Розподіл навчального матеріалу по частинах відображається в робочій програмі і в різних навчальних закладах може відрізнитись.

Розділ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

1.1. Основні поняття електромагнітного поля

В основі електротехніки як науки є вчення про електромагнітні явища та їхнє практичне застосування. Згідно зі сучасними поглядами на електромагнітні явища між електричними та магнітними явищами існує нерозривний зв'язок. Будь-яке електромагнітне явище має два аспекти – електричний та магнітний, і розглядати їх необхідно у взаємозв'язку. Інакше кажучи, електричне і магнітне поля – це дві складові єдиного електромагнітного поля. В той же час за певних умов у деякій частині простору можуть проявлятися лише електричні або лише магнітні явища. Наприклад, поза нерухомими зарядженими провідними тілами проявляється тільки електричне поле. Аналогічно навколо нерухомого магніту проявляється лише магнітне поле. Одним із завдань теоретичної електротехніки є вивчення зв'язків між електричними і магнітними явищами. Електричне поле створюється електричними зарядами, а також змінним магнітним полем. Магнітне поле створюється рухомими зарядженими частинками, а також змінним електричним полем.

Об'єктивно існує єдине електромагнітне поле, яке не залежить від системи координат (умов спостереження), а поділ його на електричну та магнітну складові пов'язаний з умовами спостереження (системою координат). Зокрема, навколо нерухомого стосовно нас зарядженого тіла за допомогою пробного

точкового заряду ми виявляємо електричне поле, а в просторі навколо нерухомого стосовно нас постійного магніту – магнітне поле. Можливість реалізувати такі умови, за яких у деякій ділянці простору проявляється лише один аспект єдиного електромагнітного процесу, дає змогу вивчати й досліджувати їх окремо. Однак потрібно пам'ятати, що в загальному випадку електричні та магнітні явища зв'язані між собою.

Електромагнітне поле існує в просторі та часі. Будь-яке середовище, в якому відбуваються електромагнітні процеси, характеризується **діелектричною** ϵ та **магнітною** μ проникностями, значення яких для вакууму називають діелектричною $\epsilon_0 = 1,0 / (4\pi c_0^2 \cdot 10^{-7}) \cong 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ та магнітною $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Гн/м}$ сталими, відповідно. Швидкість поширення світла у вакуумі $c_0 = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cong 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

У теорії електромагнітного поля використовуються диференціальні величини (напруженості електричного та магнітного полів, магнітна індукція, густина струму тощо), які стосуються окремих точок середовища і можуть бути як постійними, так і змінними в часі. Їх математичний опис здійснюється на основі рівнянь Максвелла. Поряд з тим більшість електротехнічних задач можна розв'язати, користуючись інтегральними поняттями (напруга, електрорушійна сила (ЕРС), струм, магнітний потік, потужність тощо). Застосування останніх значно спрощує розрахунки. Крім того, їх простіше визначати експериментально. Аналіз електромагнітних процесів в електротехнічних об'єктах на основі теорії кіл дає змогу обмежитись законами **Ома** та **Кірхгофа**. Однак деякі електротехнічні задачі, неможливо розв'язати на основі теорії кіл і потребують застосування математичного апарата теорії електромагнітного поля.

Для кількісної характеристики електричного поля слугує фізична величина \vec{E} , яку називають напруженістю електричного поля. Ця величина є векторною і за напрямком збігається з вектором \vec{F} механічної сили, яка діє на позитивно заряджений точковий заряд q . Величина напруженості \vec{E} електричного поля чисельно дорівнює границі, до якої прямує відношення сили, з

якою електричне поле діє на нерухоме заряджене точкове тіло, до величини його заряду, коли останній прямує до нуля,

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.1)$$

Визначивши напруженість поля в усіх точках певної ділянки, можемо провести силові лінії напруженості електричного поля, які проводять так, щоб дотичні до них збігалися з вектором напруженості поля у кожній точці (рис. 1.1).

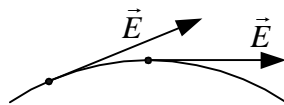


Рис. 1.1

Вектори напруженості \vec{E} електричного поля та електричного зміщення \vec{D} пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Потік вектора електричного зміщення \vec{D} крізь замкнену поверхню s дорівнює вільному зарядові, який охоплений цією поверхнею

$$\oint \vec{D} d\vec{s} = q. \quad (1.2)$$

Навколо провідника зі струмом існує магнітне поле. Зв'язок між електричним струмом і напруженістю зумовленого ним магнітного поля визначається законом повного струму

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum i, \quad (1.3)$$

згідно з яким лінійний інтеграл вектора \vec{H} напруженості магнітного поля уздовж замкненого контуру дорівнює повному струмові, який охоплюється цим контуром. Рівняння (1.3) називають **першим** рівнянням Максвелла в інтегральній формі.

Друге рівняння Максвелла є узагальненням закону електромагнітної індукції. Суть явища електромагнітної індукції полягає в тому, що у разі зміни в часі магнітного поля виникає у тому ж просторі пов'язане з ним електричне поле. Друге рівняння Максвелла визначає зв'язок між ЕРС, яка виникає в контурі під час зміни магнітного потоку Φ , який охоплений цим контуром, і швидкістю зміни цього потоку. Інтегральна форма рівняння має вигляд

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.4)$$

Як і в електростатичному полі, у стаціонарному магнітному полі можна провести безліч ліній, розташованих так, щоб у кожній точці цих ліній дотичні збігалися з векторами напруженості \vec{H} магнітного поля. Густина цих ліній називають магнітною **індукцією**, яку прийнято позначати літерою B . Одиниця вимірювання індукції – тесла (скорочено – Тл). Магнітна індукція – це векторна величина, якою визначається сила, що діє на рухоми заряджену частинку з боку магнітного поля. На відміну від силових ліній електричного поля, які починаються на додатному заряді і закінчуються на від'ємному, силові лінії магнітного поля неперервні, тобто не мають ні початку, ні кінця. Тому, якщо взяти замкнену поверхню, то магнітний потік, який входить у цю поверхню, дорівнює магнітному потокові, який виходить з неї. Математично закон неперервності ліній магнітної індукції можна записати у вигляді

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0, \quad (1.5)$$

де \vec{B} – вектор магнітної індукції, а $d\vec{s}$ – вектор, нормальний до поверхні ds .

Як зазначалось, математичний опис процесу пересилання та перетворення енергії в електротехнічних пристроях на основі рівнянь електромагнітного поля є доволі складним, оскільки потребує розгляду процесів у просторі та часі. Теорія електричних та магнітних кіл набула широкого розвитку завдяки тому, що вона дає змогу значно спростити розрахунки електромагнітних процесів без істотного зниження точності розрахунків. Однак теорія кіл ґрунтується на спрощеннях і припущеннях, оцінити які можна лише на основі теоретичних знань фізичних явищ, які повною мірою можна описати за допомогою рівнянь електромагнітного поля.

Основні положення. Дослідження електромагнітних процесів в електротехнічних пристроях можна здійснити на основі теорії поля або теорії кіл.

У методах теорії електромагнітного поля процеси розглядають у просторі та часі на основі диференціальних величин.

У теорії електричних і магнітних кіл розглядають процеси тільки в часі. Для цього використовують заступні схеми реальних об'єктів, які є ідеалізованими моделями.

Застосування теорії кіл дає змогу значно спростити аналіз процесів у багатьох електротехнічних пристроях і одночасно забезпечує достатню для практики точність розрахунків.

1.2. Електричний струм, напруга, електрорушійна сила, потужність

Електричним струмом називається спрямований рух носіїв електричних зарядів. До поняття електричного струму згідно з теорією Максвелла входить також явище, пов'язане зі зміною в часі електричного поля, так званий, струм зміщення. У зв'язку з чим розрізняють струми провідності, перенесення та зміщення.

Струм провідності – це впорядкований рух заряджених частинок у провідному середовищі під дією електричного поля. Цими частинками у металах є вільні електрони, а в електролітах – іони. Струм перенесення – це явище перенесення електричних зарядів зарядженими частинками або тілами, що рухаються у вільному просторі. Прикладом може бути рух у вакуумі елементарних частинок, які мають заряд, або струм у газах. Струм зміщення може виникати лише в діелектриках у разі змінного електричного поля.

Для кількісної характеристики електричного струму вводять поняття **сили струму**, якою називають фізичну величину, що дорівнює кількості електричних зарядів, які проходять через поперечний переріз провідника за одиницю часу. Одиницею сили струму слугує **ампер** (скорочено – А). Струм в один ампер – це такий струм, за якого за одну секунду через поперечний переріз провідника проходить електричний заряд величиною один кулон.

Обмежуючись явищем спрямованого руху заряджених частинок, можемо визначити силу електричного струму як границю, до якої прямує відношення кількості електричних зарядів Δq , які переносять заряджені частинки через поверхню Δs за час Δt , якщо останній прямує до нуля, тобто

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (1.6)$$

Умовою тривалого існування електричного струму є наявність електричного поля, яке б діяло на заряджені елементарні частинки. Інакше кажучи, необхідно мати джерело електричної енергії, яке б створювало різницю потенціалів. Другою умовою є наявність замкненого контуру, тобто шляху, по якому переміщувались би електричні заряди.

Під час вмикання електричного кола струм поширюється по провіднику зі швидкістю поширення електромагнітної хвилі у відповідному середовищі. Але це не означає, що рух носіїв заряду в провіднику відбувається з такою швидкістю. Рух електронів у провіднику відбувається зі швидкістю кількох міліметрів за секунду. Тому необхідно розрізнити швидкості руху носіїв заряду і поширення струму. Остання – це по суті швидкість поширення електричного поля.

Електричний струм характеризується напрямком, який умовно вважають напрямком руху позитивних зарядів. Тому напрямок струму в металах протилежний до напрямку руху електронів. Сила струму – це величина інтегральна, а значить є скалярною. Однак у різних точках поперечного перерізу провідника інтенсивність руху зарядів може бути різною. У зв'язку з цим вводять поняття густини струму, яку визначають як границю, до якої прямує відношення елементарного струму Δi крізь елемент поверхні Δs , перпендикулярний до напрямку руху заряджених частинок, до величини площі цього елемента, коли остання прямує до нуля, тобто

$$\delta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \frac{di}{ds}. \quad (1.7)$$

Густина струму $\vec{\delta}$ є векторною величиною. Напрямок цього вектора збігається з напрямком руху позитивних зарядів. Густина струму числово дорівнює зарядові, що проходить за одиницю часу через одиницю поверхні, перпендикулярної до лінії струму.

Знаючи густину струму, можемо визначити силу струму i через поверхню Δs за формулою

$$i = \int_{\Delta s} \vec{\delta} \cdot d\vec{s}. \quad (1.8)$$

Електричний струм у провідному середовищі є результатом дії електричного поля, а густина струму $\vec{\delta}$ пропорційна до його

напруженості \vec{E} . В ізотропному середовищі вектори $\vec{\delta}$ і \vec{E} збігаються за напрямком, а лінії струму збігаються з лініями напруженості електричного поля, тому

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \quad (1.9)$$

де γ – питома електрична провідність речовини.

Лінії електричного струму неперервні, тобто вони не мають ні початку, ні кінця. Математично принцип неперервності електричного струму можна записати у вигляді

$$i = \oint_s \vec{\delta} ds = 0, \quad (1.10)$$

де інтеграл, взятий по замкненій поверхні s .

Інакше кажучи, сумарний електричний струм через замкнену поверхню дорівнює нулю. Як впливає з рівнянь Максвелла, струм, який витікає з поверхні вважається додатним, а той, що входить – від'ємним.

В усталеному режимі струм може бути постійним або змінним. **Постійним** називають струм, напрям і величина якого в усталеному режимі не змінюються з часом. Якщо напрям і величина струму змінюються з часом, то його називають **змінним**. Отже, змінний струм є функцією часу $i = i(t)$. Найпоширенішими у промисловості є струми, які змінюються за синусоїдним законом, однак у багатьох електротехнічних об'єктах у стаціонарних режимах роботи струми можуть бути **несинусоїдними** періодичними.

Сили електричного поля, переміщуючи заряд q в електричному полі уздовж деякого шляху l_{ab} від точки a до точки b , виконують роботу, яку можна визначити за формулою

$$A = qu_{ab}, \quad (1.11)$$

де u_{ab} – напруга між точками a та b . Отже, **електрична напруга** – це скалярна величина, яка характеризує електричне поле уздовж заданого шляху. Вона дорівнює лінійному інтегралові від напруженості електричного поля уздовж цього шляху, тобто

$$u_{ab} = \int_a^b \vec{E} dl. \quad (1.12)$$

Напруга між двома точками у потенціальному електричному полі не залежить від шляху, по якому переміщався заряд з однієї точки в іншу, і числово дорівнює різниці потенціалів між цими точками

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (1.13)$$

Якщо лінійний інтеграл від напруженості електричного поля уздовж замкненого контуру не дорівнює нулю, то вважають, що в контурі діє ЕРС, отже,

$$e = \oint \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.14)$$

ЕРС є сторонньою силою, що зумовлює рух зарядів. Джерелом ЕРС можуть бути: гальванічний елемент, акумуляторна батарея, електричний генератор, термоелемент тощо. ЕРС та напругу вимірюють у вольтах (скорочено – В). ЕРС числово дорівнює роботі сторонніх (неелектричних) сил, яку необхідно затратити на переміщення одиничного позитивного заряду всередині джерела від затискача з меншим потенціалом до затискача з більшим потенціалом. Прикладом сторонніх сил може бути хімічна реакція в гальванічному елементі. ЕРС джерела дорівнює різниці потенціалів на його затискачах за умови відсутності електричного струму (розімкненості зовнішнього кола).

Основні положення. Явище спрямованого переміщення електричних зарядів під дією електричного поля називається електричним струмом. До поняття електричного струму входять також явища, пов'язані зі зміною електричного поля в часі – струм зміщення, який можливий лише в діелектриках.

Умовами протікання електричного струму є наявність замкненого контуру і джерела електричної енергії.

Напруга між двома точками – це скалярна величина, яка дорівнює лінійному інтегралові від напруженості електричного поля уздовж вибраного шляху інтегрування від однієї точки до іншої. У потенціальному електричному полі вона не залежить від шляху інтегрування і числово дорівнює різниці потенціалів між цими точками.

ЕРС – це скалярна величина, яка числово дорівнює різниці потенціалів між затискачами (полюсами) джерела за відсутності у ньому електричного струму. Її можна визначити як

роботу сторонніх (неелектричних) сил, яку необхідно затратити на переміщення одиничного позитивного заряду всередині джерела від затискача з меншим потенціалом до затискача з більшим потенціалом.

1.3. Електричне коло, його елементи та заступна схема

Електричне коло – це сукупність електротехнічних пристроїв, з'єднаних між собою провідниками. Окремі пристрої, що входять до електричного кола, називають його елементами.

З метою аналізу процесів в електричному колі, його замінюють заступною схемою, яка слугує розрахунковою моделлю реального електричного кола. Під час складання заступної схеми вдаються до деякої ідеалізації. Це пов'язано з тим, що явища, які існують у реальних електричних колах, достатньо складні, однак для багатьох практично важливих задач враховувати їх усіх немає необхідності. Тому враховують основні чинники і нехтують другорядними, які не мають істотного впливу на перебіг процесів. Отже, **заступна схема** – це умовне графічне зображення електричного кола за допомогою ідеальних елементів, параметри яких відповідають параметрам заміщуваних реальних елементів.

Електричне коло складається з віток. **Вітка** – це частина електричного кола, в якій елементи з'єднані послідовно (протікає один і той же струм). Вітку своїми кінцями (полюсами) під'єднують до вузлів. **Вузол** – це точка електричного кола, в якій з'єднані не менше ніж три вітки. За складністю електричні кола поділяють на нерозгалужені, які є одноконтурні, тобто не мають вузлів, й розгалужені, які мають не менше ніж два вузли. На заступній схемі електричного кола вказують додатні напрямки ЕРС, струмів та напруг. ЕРС на схемі позначається кружечком зі стрілкою, спрямованою до вищого потенціалу. Додатні напрямки струмів в електричних колах вибирають умовно (довільно). І якщо в результаті розрахунку одержимо від'ємне значення струму у деякій вітці, це означає, що дійсний його напрямок протилежний до вибраного.

Елементи електричного кола поділяються на активні та пасивні. Активними елементами є джерела електричної енергії, а пасивними – резистори, котушки індуктивності та конденсатори. Крім того, всі елементи поділяють на лінійні та нелінійні. Відзначимо, що на практиці параметри елементів електричного кола, як правило, залежать від струму або напруги. Однак, якщо зміни параметрів елементів неістотні, то їх можна вважати незмінними. **Лінійні** елементи мають лінійні характеристики (вольт-амперні, кулон-вольтні, вебер-амперні). Якщо характеристика елемента нелінійна, він називається **нелінійним**. Електричне коло, яке складається винятково з лінійних елементів, називається лінійним. Якщо до електричного кола входить хоча б один нелінійний елемент, то воно нелінійне. Способи і методи розрахунку лінійних і нелінійних електричних кіл відрізняються.

Частина електричного кола довільної конфігурації з двома виділеними затискачами, які називають **полюсами**, називається **двополюсником**. Кожна вітка має два затискачі (полюси) і її можна розглядати як двополюсник. Найпростіший двополюсник складається з одного елемента. Однак існують і багатополісні елементи (наприклад, транзистор, трансформатор тощо), які мають три і більше полюсів. Двополюсники, до яких входять джерела електричної енергії, називаються **активними**, а ті, до яких вони не входять, – **пасивними**.

Електричне коло можна скласти з двополюсних (двополюсників) та багатополісних (багатополісників) елементів. Електричні кола поділяють на прості, в яких двополюсники з'єднані послідовно, і складні, які є розгалуженими. Залежно від виду струмів, які протікають в електричних колах, їх поділяють на кола постійного струму і змінного. Крім того, розрізняють кола із **зосередженими** параметрами і **розподіленими**.

Процеси в електричних колах можуть бути усталеними або перехідними. В усталених режимах струми в колі є незмінними (електричні кола постійного струму) або змінюються за періодичним законом (електричні кола змінного струму). Перехідні процеси виникають внаслідок вмикання джерел енергії або різних перемикачів.

Із принципу неперервності електричного струму витікають такі наслідки:

а) значення струму в будь-якому перерізі провідника нерозгалуженого електричного кола однакове (вітка характеризується одним струмом);

б) алгебрична сума струмів полюсів будь-якого багатоплюсника дорівнює нулю.

Основні положення. *Електричне коло складається з елементів, які поділяються на активні і пасивні. Активні елементи – це джерела електричної енергії, а пасивними є резистори, котушки індуктивності та конденсатори.*

Заступна схема (схема заміщення) електричного кола – це розрахункова модель реального електричного кола, в якій реальні елементи замінені ідеальними. Електричне коло складається з віток.

Вітка – це частина електричного кола, в якій елементи з'єднані послідовно. У кожному елементі вітки протікає один і той самий струм. Вітку своїми кінцями під'єднують до вузлів.

Вузол – це точка, в якій з'єднані не менше ніж три вітки. Будь-який замкнений шлях, утворений вітками електричного кола, називається контуром.

Частина електричного кола з двома виділеними затискачами (полюсами) називається двополюсником. Окремі елементи електричного кола можна розглядати як елементарні двополюсники.

1.4. Джерела електричної енергії

Джерело електричної енергії на заступній схемі можна подати як джерело ЕРС або як джерело струму (ДС).

Джерелами ЕРС, як правило, зображають на заступній схемі джерела електричної енергії, які мають малі порівняно з опором навантаження внутрішні опори. У цьому разі заступна схема джерела складається з ідеального джерела ЕРС і послідовно з'єданого резистора, який має опір, що дорівнює внутрішньому опорі джерела. Якщо внутрішнім опором джерела енер-

гії можна знехтувати, його подають у вигляді ідеального джерела ЕРС. Заступні схеми та вольт-амперні характеристики реального (а, б) та ідеального (в, з) джерел ЕРС наведені на рис. 1.2.

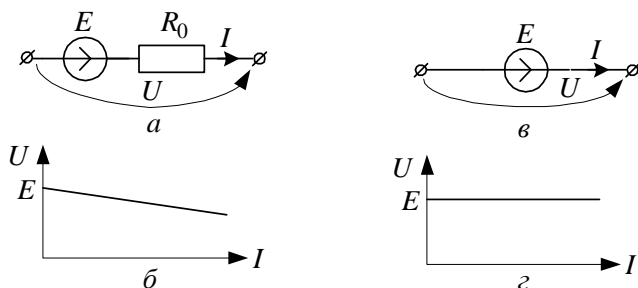


Рис. 1.2

Напруга на затискачах реального джерела відрізняється від його ЕРС на величину спаду напруги всередині джерела.

$$U = E - R_0 I, \quad (1.15)$$

де R_0 – внутрішній опір джерела. Для ідеального ($R_0 = 0$) джерела $U = E$.

Джерелами струму, як правило, зображають на заступній схемі такі джерела електричної енергії, які мають великий порівняно з опором навантаження внутрішній опір, а струм практично не залежить від величини опору навантаження. Реальне ДС зображають заступною схемою, до якої входить ідеальне ДС з паралельно увімкненим резистивним елементом (рис. 1.3, а). Ідеальне ДС має внутрішній опір $R_0 = \infty$. Надалі струм ДС позначатимемо J .

Реальне джерело ЕРС можна замінити реальним ДС і навпаки. Зокрема, розділивши рівняння (1.15) на R_0 , отримаємо

$$\frac{E}{R_0} = \frac{U}{R_0} + I = G_0 U + I \quad (1.16a)$$

або

$$J = \frac{E}{R_0} = G_0 U + I. \quad (1.16b)$$

Рівнянню (1.16 б) відповідає заступна схема реального джерела струму, зображена на рис. 1.3, а, а його вольт-амперна характе-

ристка – на рис. 1.3, б. Заступна схема ідеального ДС наведена на рис. 1.3, в, а його вольт-амперна характеристика – на рис. 1.3, г.

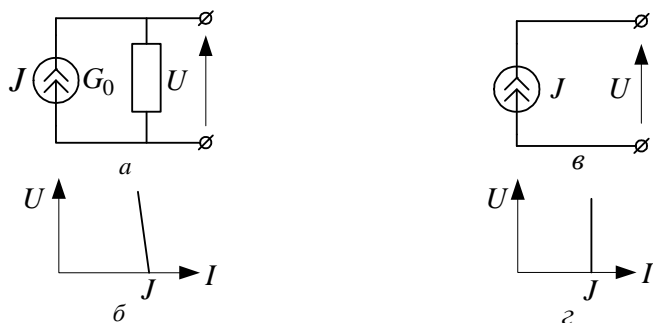


Рис. 1.3

Формули (1.16) дають змогу замінити реальне джерело ЕРС реальним ДС і навпаки. Прикладом ДС може бути електронний підсилювач, внутрішній опір якого значно більший від опору навантаження, вимірювальний трансформатор струму тощо.

Основні положення. Джерело електричної енергії на заступній схемі можна подати джерелом ЕРС або джерелом струму (ДС). Джерело ЕРС (струму) характеризується величиною ЕРС (струму) і внутрішнім опором (провідністю). Реальне джерело ЕРС можна замінити джерелом струму і навпаки.

1.5. Пасивні елементи електричних кіл та їх рівняння

Пасивними елементами електричного кола є резистивні, індуктивні та ємнісні елементи. У резисторі відбувається перетворення електромагнітної енергії в теплову. Він характеризується параметром R , який називають **активним опором**. Зв'язок між напругою u_R та струмом i резистора (рис. 1.4) визначається законом Ома

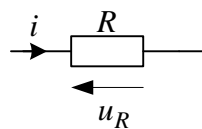


Рис. 1.4

$$u_R = Ri. \quad (1.17)$$

Величину опору R можна обчислити аналітично або визначити експериментально.

Котушка індуктивності характеризується двома параметрами: активним опором R та індуктивністю L . Величина індуктивності котушки залежить від конструктивного виконання і магнітної проникності середовища, по якому замикається магнітний потік. Одиниця вимірювання індуктивності – **генрі** (скорочено – Гн), який виражається через інші величини наступним чином

$$[\text{Гн}] = \left[\frac{B\delta}{A} \right] = \left[\frac{B \cdot c}{A} \right] = [\text{Ом} \cdot \text{с}].$$

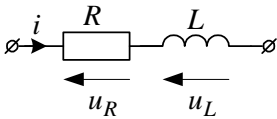


Рис. 1.5

Заступна схема котушки складається з двох послідовно з'єднаних елементів (рис. 1.5), тому напругу на ній можна розглядати як суму напруг u_R та u_L , перша з яких визначається рівнянням (1.17). Отже, залишається розглянути індуктивний елемент з параметром L .

Згідно із законом електромагнітної індукції під час протікання по котушці струму i в ній індукується ЕРС самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (1.18)$$

де ψ – потокозчеплення котушки.

Вебер-амперна характеристика котушки індуктивністю L без феромагнітного осердя – лінійна

$$\psi = \psi(i) = Li. \quad (1.19)$$

Враховуючи, що $u_L = -e$, з рівнянь (1.18), (1.19) визначаємо напругу на ідеальній ($R=0$) котушці індуктивності

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (1.20)$$

Ємнісний елемент характеризується параметром C , яким позначають величину ємності конденсатора. Величина ємності конденсатора залежить від геометричних розмірів і діелектричної

проникності середовища. Одиниця вимірювання ємності – **фарада** (скорочено – Φ), яку можна виразити через інші величини

$$[\Phi] = \left[\frac{Kл}{B} \right] = \left[\frac{A \cdot c}{B} \right] = \left[\frac{c}{Ом} \right] = [Cм \cdot c].$$

Зазначимо, що в реальних конденсаторах через недосконалість ізоляційного матеріалу завжди протікають струми витoku, наявність яких можна врахувати вмиканням паралельно до C резистивного опору з провідністю G (рис. 1.6), однак цей струм здебільшого настільки малий, що ним можна знехтувати і вважати конденсатор ідеальним елементом.

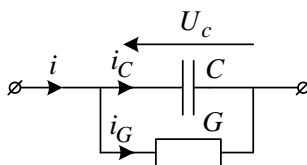


Рис. 1.6

У разі змінної в часі напруги на обкладинках конденсатора в ньому наявний струм зміщення. Рівняння ідеального конденсатора ємністю C запишемо, на підставі формули (1.6),

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.21)$$

Звідси одержимо рівняння ідеального конденсатора у вигляді

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt. \quad (1.22)$$

Як видно з формул (1.20), (1.21), в електричному колі постійного струму ($i = \text{const}$; $u_C = \text{const}$) напруга на котушці $u_L = 0$, а в конденсаторі струм $i = 0$.

Основні положення. Електричне коло складається з елементів, які поділяють на активні і пасивні. Активні елементи – це джерела електричної енергії. Пасивними елементами є резистори, котушки індуктивності та конденсатори.

Резистор характеризується одним параметром – активним опором R , котушка індуктивності – активним опором R і індуктивністю L , конденсатор – ємністю C і провідністю G .

1.6. Закони Кірхгофа

Співвідношення між струмами, напругами та ЕРС у складному електричному колі визначаються двома законами Кірхгофа, які дають змогу розрахувати і проаналізувати електричне коло будь-якої складності. Закони Кірхгофа універсальні: за їх допомогою можна здійснювати розрахунок як електричних кіл постійного, так і змінного струмів, причому закон зміни останнього може бути будь-яким.

Перший закон Кірхгофа витікає з принципу неперервності електричного струму і відображає той факт, що всі заряди, які приходять до вузла складного електричного кола, виходять з нього. Тому згідно з першим законом Кірхгофа *алгебрична сума струмів віток, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю*. Інакше кажучи, сума струмів, спрямованих до вузла, дорівнює сумі струмів, спрямованих від вузла. Математичний запис першого закону Кірхгофа має вигляд

$$\sum_k i_k = 0, \quad (1.23)$$

де i_k – струм k -ї вітки, зокрема і струм ДС. Згідно з виразом (1.10), який відображає закон неперервності ліній електричного струму, спрямовані до вузла струми вважають від'ємними, а від вузла – додатними. Однак, як відомо, знаки у рівнянні можна змінити на протилежні. Наприклад, для зображеного на рис. 1.7 вузла перший закон Кірхгофа має вигляд

$$-i_1 + i_2 + i_3 - J = 0.$$

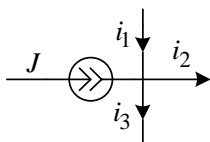


Рис. 1.7

Оскільки під час розрахунку складних електричних кіл дійсні напрямки струмів у вітках здебільшого не відомі, то для складання рівнянь Кірхгофа необхідно задатись (довільно) додатними напрямками струмів у вітках, позначивши їх на схемі стрілками.

Другий закон Кірхгофа стосується електричного контуру, під яким розуміють будь-який замкнений шлях, утворений вітками складного кола. Його формулюють так: *у замкненому контурі алгебрична сума спадів напруг на всіх пасивних елементах дорівнює алгебричній сумі ЕРС джерел*. Інакше кажучи, у замкненому контурі алгебрична сума напруг і ЕРС

дорівнює нулю. Ці два формулювання можна відобразити математично у вигляді рівнянь

$$\sum_k u_k = \sum_k e_k \quad \text{або} \quad \sum_k u_k, e_k = 0. \quad (1.24a, б)$$

Під час складання рівнянь за другим законом Кірхгофа необхідно правильно визначити знаки спадів напруг та ЕРС. Напрями обходу контурів вибирають довільно. Користуючись формою (1.24а) запису рівнянь за другим законом Кірхгофа, перед спадом напруги u_k ставимо знак плюс, якщо напрямок обходу контуру збігається з вибраним додатним напрямком струму в цьому елементі, і – мінус, якщо ці напрямки протилежні. Під час використання форми (1.24б) запису рівнянь за другим законом Кірхгофа доцільно попередньо на кожному елементі позначити стрілкою додатні напрямки спадів напруг, які рекомендується вибирати протилежними до вибраного додатного спрямування струму, як показано на рис. 1.4–1.6.

Зазначимо, що у деяких підручниках застосовують і інше додатне спрямування спаду напруги, яке збігається з умовним додатним напрямком струму. Від цього система рівнянь, складених за законами Кірхгофа, не залежить, а інший підхід до вибору додатного спрямування спаду напруги на елементах зумовлює відмінний від описаного вище підхід до правил визначення знаків у складених за другим законом Кірхгофа рівняннях.

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, необхідно стежити за тим, щоб вибрані контури були *незалежними*. Контури будуть незалежними, якщо до кожного утвореного нового контуру входить хоча б одна вітка, яка не увійшла до вже утворених контурів. Цю вимогу задовольняє найпростіша система утворення контурів, що відповідають коміркам графа електричного кола, які називають натуральними. Відзначимо, що вітки з ДС контурів не утворюють. Це означає, що під час утворення незалежних контурів необхідно вважати ці вітки розімкненими.

У загальному випадку задача розрахунку складного електричного кола полягає у визначенні невідомих струмів у вітках за заданих величин ЕРС та ДС. Отже, кількість рівнянь, складених за законами Кірхгофа, повинна дорівнювати кількості віток, крім віток з ДС, струми яких відомі. Із них за першим законом складають

$$n_1 = q - 1 \quad (1.25a)$$

рівнянь, де q – кількість вузлів схеми. Решту рівнянь складають за другим законом Кірхгофа. Якщо до електричного кола входить p віток (до p не входять вітки з ДС), то кількість рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа,

$$n_2 = p - n_1 = p - q + 1. \quad (1.25б)$$

Загальна кількість рівнянь

$$n = n_1 + n_2 = p. \quad (1.26)$$

Основні положення. Електричне коло будь-якої складності можна розрахувати на підставі двох законів Кірхгофа. Перший закон Кірхгофа стосується вузла електричного кола, а другий – замкнутого контуру. Вони формулюються так:

перший закон – алгебрична сума струмів віток, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю;

другий закон – алгебрична сума ЕРС і спадів напруг у замкнутому контурі дорівнює нулю.

Для складання рівнянь Кірхгофа необхідно:

а) задатись (довільно) додатними напрямками струмів у вітках;

б) утворити (вибрати) незалежні контури;

в) задатись (довільно) напрямками обходу вибраних контурів.

1.7. Електрична енергія та потужність

Процес пересилання енергії визначається загалом потоком вектора Пойтінга, однак визначати її інтегруванням цього вектора немає необхідності, оскільки у разі стаціонарних явищ в електричних колах значення енергії можна одержати, користуючись поняттями напруги та струму.

Енергію, яка пересилається від джерела до двополюсника, обчислюють за формулою

$$W = \int p dt, \quad (1.27)$$

де p – миттєве значення потужності, яка в кожний момент часу t пропорційна до миттєвих значень напруги $u(t)$ та струму $i(t)$

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (1.28)$$

Миттєву потужність можна розглядати як швидкість зміни електромагнітної енергії в часі. Отже, опускаючи аргумент t , одержимо

$$p = dW/dt = ui. \quad (1.29)$$

Миттєва потужність p додатна в момент часу, коли u та i мають однакові знаки, і від'ємна, коли ці знаки різні. Якщо для деякого споживача $p > 0$, енергія надходить до нього, а якщо $p < 0$, вона повертається до джерела.

Електрична енергія, яку споживає резистор з опором R , визначається за формулою

$$W_R = \int_0^t Ri^2 dt.$$

Індуктивний та ємнісний елементи енергії не споживають, а лише її накопичують у вигляді енергії магнітного та електричного полів. Тому котушку індуктивності та конденсатор називають **реактивними** елементами. Енергію ідеальної котушки індуктивності з параметром L , по якій протікає струм i , та конденсатора ємністю C , до якого прикладена напруга u , можна визначити відповідно за формулами

$$W_L = \frac{Li^2}{2}; \quad W_C = \frac{Cu^2}{2}.$$

Основні положення. Миттєве значення електричної потужності визначається як добуток миттєвого значення напруги на миттєве значення струму. У загальному випадку миттєва потужність є функцією часу і може приймати як додатне, так і від'ємне значення.

У резисторі енергія перетворюється в інші види енергії, а індуктивний та ємнісний елементи можуть лише запасати її та віддавати. Тому, на відміну від резистора, ці елементи називають реактивними.

1.8. Дуальність електричних кіл

Порівнюючи математичний запис рівнянь елементів електричного кола (наприклад, (1.20) і (1.21)), можемо зауважити, що за формою вони подібні. Елементи, для яких основні співвідно-

шення мають однакову структуру і їх можна одержати одне з іншого через відповідні заміни, називають *дуальними*. Ці заміни мають вигляд: $i \leftrightarrow u$, $L \leftrightarrow C$, $R \leftrightarrow G$, $e \leftrightarrow J$. Кількісні співвідношення, які пов'язують напруги і струми деякого електричного кола, справедливі для дуальних величин дуального електричного кола. Дуальними є елементи, зображені на рис. 1.8, *а* і 1.8, *б*.

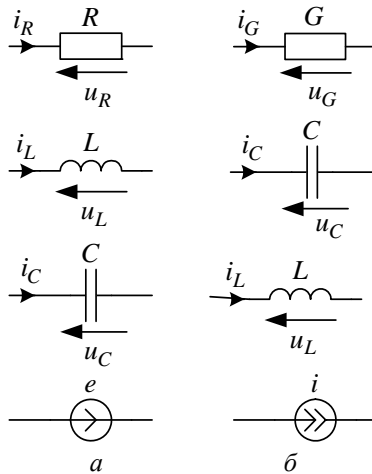


Рис. 1.8

Залежності між напругами і струмами дуальних елементів мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_R &= R i_R \quad \leftrightarrow \quad i_G = G u_G; \\
 u_L &= L \frac{d i_L}{d t} \quad \leftrightarrow \quad i_C = C \frac{d u_C}{d t}; \\
 u_C &= \frac{1}{C} \int i_C d t \quad \leftrightarrow \quad i_L = \frac{1}{L} \int u_L d t.
 \end{aligned}$$

У разі послідовного з'єднання елементів додають напруги на них, а при паралельному – струми, тому послідовному з'єднанню елементів відповідає паралельне з'єднання їх дуальних аналогів, а паралельному – послідовне з'єднання дуальних аналогів. Наприклад, дуальними є електричні кола, зображені на рис. 1.9, *а* і 1.9, *б*, яким відповідають рівняння

$$e(t) = R i + L \frac{d i}{d t} + \frac{1}{C} \int i d t; \quad i(t) = G u + C' \frac{d u}{d t} + \frac{1}{L'} \int u d t.$$

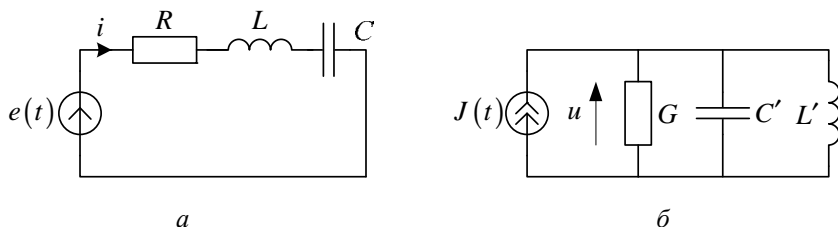


Рис. 1.9

Властивості дуальності електричних кіл можна використати для спрощення розрахунків. Зокрема, для дуальних електричних кіл закон зміни контурних струмів в одному з них подібний до закону зміни вузлових потенціалів в іншому. У цьому разі комплексні значення контурних струмів, загальних опорів та контурних ЕРС одного кола ідентичні відповідно вузловим потенціалам, загальним провідностям і вузловим струмам другого кола, тобто

$$\underline{I}_{kj} \leftrightarrow \underline{U}_{kj}; \quad \underline{Z}_{kj} \leftrightarrow \underline{Y}_{kj}; \quad \underline{E}_{kj} \leftrightarrow \underline{J}_{kj},$$

де k – індекс k -го контуру, а i – індекс i -ї вітки. Для дуальних електричних кіл закон зміни контурних струмів подібний за формою до закону зміни вузлових напруг.

1.9. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

1. Які електричні та магнітні величини використовують у теорії електромагнітного поля, а які в теорії кіл?
2. У чому полягає суть явища електромагнітної індукції?
3. Чим відрізняється реальне електричне коло від його заступної схеми?
4. Які елементи електричного кола називаються лінійними, а які нелінійними?
5. Чим відрізняються лінійні елементи електричного кола від нелінійних?
6. Які електричні кола називають лінійними, а які нелінійними?
7. Що називається електричним струмом?
8. Які існують види електричного струму?
9. Як визначається густина струму?
10. Який вид струму існує в металевих провідниках?
11. Який вид струму існує в конденсаторах?
12. У чому полягає суть принципу неперервності електричного струму?
13. Які умови тривалого існування електричного струму?
14. Який електричний струм називається постійним, а який змінним?

15. Що називається електричною напругою? Спадом напруги?
16. Яка відмінність між напруженістю електричного поля і напругою в електричному колі?
17. Чим відрізняється напруга джерела від його ЕРС?
18. Як виміряти ЕРС джерела?
19. Чи може акумуляторна батарея споживати електричну енергію?
20. Чому напруга на затискачах джерела за наявності струму у ньому не дорівнює ЕРС?
21. Як на заступній схемі зображають джерела електричної енергії?
22. Як замінити заступну схему реального джерела ЕРС на заступну схему джерела струму і навпаки?
23. Як можна визначити опір провідника?
24. Які елементи електричного кола називаються активними, а які пасивними?
25. Який вигляд мають рівняння для резистора, котушки індуктивності, конденсатора?
26. Яка відмінність енергетичних процесів у резисторі, конденсаторі та індуктивній котушці?
27. Як вибирають на схемі додатний напрям струму та напруги?
28. Що називається вузлом електричного кола? Віткою?
29. Що називається двополюсником? Чотириполюсником?
30. Як формулюється перший закон Кірхгофа?
31. Як формулюється другий закон Кірхгофа?
32. Яку кількість рівнянь необхідно скласти за першим і яку за другим законами Кірхгофа для однозначного описування процесів у колі?
33. Як визначається миттєва потужність електричного кола?
34. Які елементи електричного кола називаються дуальними?
35. Які електричні кола називаються дуальними?
36. До якого різновиду струму належать явища:
 - а) руху електронів у провідному тілі під дією електричного поля;
 - б) руху електронів між електродами електронної лампи;
 - в) руху заряджених частинок у неідеальному діелектрику під дією статичного електричного поля;
 - г) руху заряджених частинок в ідеальному діелектрику під дією змінного в часі електричного поля?

Екзаменаційні питання

1. Електричний струм та густина струму.
2. Закон неперервності електричного струму.
3. Потенціал, різниця потенціалів, ЕРС, напруга.
4. Електричне коло та його елементи. Лінійні та нелінійні електричні кола.
5. Вольт-амперні характеристики елементів електричного кола.
6. ЕРС та напруга джерела електричної енергії.
7. Рівняння пасивних елементів електричного кола.
8. Миттєва потужність та енергія в електричному колі.
9. Закони Ома та Кірхгофа для електричних кіл.
10. Поняття про дуальність електричних кіл.

Розділ 2

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

2.1. Аналіз електричних кіл на основі законів Кірхгофа

Режим роботи електричного кола будь-якої складності повністю описується системою рівнянь, складених на підставі першого (1.23) та другого (1.24) законів Кірхгофа. Математичний запис цих рівнянь для електричного кола постійного струму має вигляд

$$\sum_k I_k, J_k = 0; \quad (2.1a)$$

$$\sum_k R_k I_k = \sum_k E_k. \quad (2.1б)$$

Для складання рівнянь Кірхгофа рекомендується дотримуватись такої послідовності:

а) задатись (довільно) додатними напрямками струмів у всіх вітках;

б) вибрати незалежні контури, утворюючи замкнені шляхи з віток електричного кола так, щоб кожен наступний контур відрізнявся від попереднього хоча б однією віткою;

в) задатись (довільно) напрямком обходу кожного незалежного контуру.

Відзначимо, що до утворених незалежних контурів не можуть входити вітки з ДС. Незалежні контури, які відповідають “коміркам” схеми електричного кола, називають натуральними.

Другий закон Кірхгофа можна застосовувати для визначення напруги між будь-якими двома точками схеми. У цьому разі необхідно ввести до правої частини рівняння (2.1б) напругу між цими точками як таку, що доповнює незамкнений контур до замкнутого.

Приклад 2.1. Розглянемо зображене на рис. 2.1 електричне коло, яке має чотири вузли і сім віток, з яких одна із ДС, тобто $p = 6$, $q = 4$. Отже, для цієї схеми необхідно скласти $n_1 = q - 1 = 3$ рівняння за першим законом Кірхгофа та $n_2 = p - q + 1 = 3$ рівняння – за другим. Зауважимо, що струм у вітці з ДС відомий.

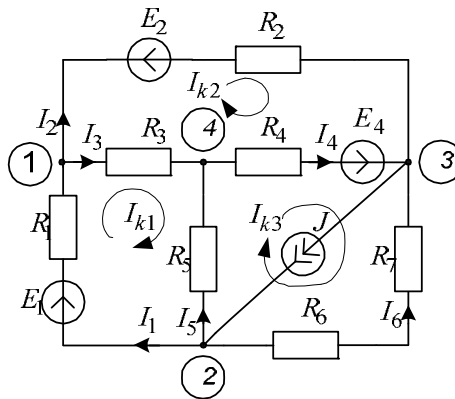


Рис. 2.1

Повна система рівнянь, складених за першим та другим законами Кірхгофа за зображених на рисунку додатних напрямків струмів має вигляд

$$\begin{aligned}
 I_2 + I_3 - I_1 &= 0; \\
 I_1 + I_5 + I_6 - J &= 0; \\
 -I_2 - I_4 - I_6 + J &= 0; \\
 R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_5 &= E_1; \\
 R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_3 I_3 &= -E_2 - E_4; \\
 R_4 I_4 - (R_6 + R_7) I_6 + R_5 I_5 &= E_4.
 \end{aligned}$$

Основні положення. Для розрахунку електричного кола на основі законів Кірхгофа необхідно скласти систему рівнянь, загальна кількість яких дорівнює кількості віток, за винятком віток з джерелами струму.

Кількість рівнянь, яку необхідно скласти за першим законом Кірхгофа, на одиницю менша від кількості вузлів, а решту рівнянь складають за другим законом для незалежних контурів.

2.2. Метод контурних струмів

Розрахунок струмів у колі, яке має p віток, на підставі рівнянь Кірхгофа потребує розв'язування систем рівнянь $n = (n_1 + n_2)$ -го порядку. Очевидно, що з використанням обчислювальної техніки це виконати для більшості задач не складно. Проте існують задачі, для яких безпосередньо застосовувати закони Кірхгофа не доцільно з різних причин, і передусім з причини обсягу обчислень. Одним із методів, що дають змогу зменшити обсяг обчислень під час розв'язування задачі розрахунку струмів у вітках кола, є **метод контурних струмів**, який ґрунтується на другому законі Кірхгофа і принципі суперпозиції. Згідно з цим методом вважають, що у кожному контурі протікає свій контурний струм, напрям якого вибирають довільно. **Контурні струми** – це розрахункові величини, через які можна визначити реальні струми у вітках. Система рівнянь, у якій невідомими є контурні струми, складається для незалежних контурів, а отже, має порядок $n = n_2$, тобто такий, як за другим законом Кірхгофа.

Складаючи рівняння за методом контурних струмів, необхідно застосовувати під час обходу контуру ті самі правила вибору знаків спадів напруг, що і під час складання рівнянь за другим законом Кірхгофа. Система складених за методом контурних струмів рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} R_{11}I_{k1} - R_{12}I_{k2} - \dots - R_{1n}I_{kn} &= E_{11}; \\ &\vdots \\ -R_{n1}I_{k1} - R_{n2}I_{k2} - \dots + R_{nn}I_{kn} &= E_{kk}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

де позначено:

R_{kk} – сума опорів усіх елементів, що входять до k -контурну, яку називають власним опором k -контурну;

$R_{km} = R_{mk}$ – сума опорів елементів, що є спільними для k -го і m -го контурів, яку називають взаємними опорами цих контурів;

E_{kk} – алгебрична сума всіх ЕРС контурну, які беруть зі знаком плюс, якщо вони збігаються з напрямком обходу контурну, і зі знаком мінус, якщо протилежні до нього.

Якщо напрямки усіх контурних струмів вибрані однотипно (за годинниковою стрілкою або проти), в системі рівнянь (2.2) перед власними опорами ставимо знак “плюс”, а перед взаємними – “мінус”. Якщо цього правила не дотримуватись, то необхідно ставити знак “+”, якщо в даній вітці напрямок контурного струму суміжного контурну збігається з напрямком власного контурного струму, і “–”, якщо він протилежний до нього. Струм ДС розглядається як відомий контурний струм, для якого необхідно вибрати замкнений шлях (через будь-які вітки).

Для визначення реальних струмів у вітках необхідно задатись (довільно, як і під час складання рівнянь за законами Кірхгофа) додатними їх напрямками. Реальний струм у вітці схеми знаходять як алгебричну суму контурних струмів, які протікають через дану вітку, враховуючи струм ДС. Якщо напрямок контурного струму збігається з додатним напрямком струму у вітці, то перед ним ставиться знак плюс, а якщо протилежний до нього, то – мінус.

Приклад 2.2. Розглянемо те саме електричне коло (рис. 2.1), для якого вище були складені рівняння за законами Кірхгофа. Для цього вважатимемо, що в кожному з вибраних під час записування рівнянь за другим законом Кірхгофа контурі протікає свій контурний струм, а струм ДС замикається через вітку з резисторами R_6 та R_7 . Зауважимо, що для замикання струму ДС можна було обрати і інший шлях, наприклад, через R_4 та R_5 . Додатні напрямки контурних струмів приймемо такі, як показано на рисунку, тобто за

годинниковою стрілкою. Система рівнянь, складена за методом контурних струмів для схеми рис. 2.1, має вигляд

$$\begin{aligned}(R_1 + R_3 + R_5)I_{k1} - R_3I_{k2} - R_5I_{k3} &= E_1; \\ (R_2 + R_3 + R_4)I_{k2} - R_3I_{k1} - R_4I_{k3} &= -E_2 - E_4; \\ (R_4 + R_5 + R_6 + R_7)I_{k3} - R_5I_{k1} - R_4I_{k2} &= E_4 + (R_6 + R_7)J.\end{aligned}\tag{2.3}$$

З системи лінійних рівнянь (2.3), знаходимо контурні струми I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} . Струми у вітках виражаємо через контурні струми, враховуючи і струм ДС, за формулами

$$\begin{aligned}I_1 &= I_{k1}; \quad I_2 = I_{k2}; \quad I_3 = I_{k1} - I_{k2}; \\ I_4 &= -I_{k2} + I_{k3}; \quad I_5 = I_{k1} - I_{k3}; \\ I_6 &= -I_{k3} + J.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Основні положення. Метод контурних струмів дає змогу зменшити порядок системи рівнянь, яку необхідно розв'язувати для визначення струмів у вітках. Згідно з цим методом вважають, що в кожному контурі протікає окремий контурний струм.

Контурні струми – це розрахункові величини, через які можна обчислити реальні струми у вітках. Реальні струми у вітках електричного кола визначають як алгебричну суму контурних струмів.

Кількість рівнянь, які необхідно скласти за методом контурних струмів, така, як за другим законом Кірхгофа, оскільки рівняння складаються для незалежних контурів.

2.3. Метод вузлових напруг

Струм у вітці кола визначається різницею потенціалів між вузлами, до яких вона під'єднана, і не залежить від абсолютного значення потенціалів вузлів. Тому для визначення різниць потенціалів між вузлами схеми можна задатись (довільно) значенням потенціалу одного вузла і за цієї умови знайти потенціали решти вузлів. Як правило вважають, що потенціал одного вузла дорівнює нулю. Цей вузол називають **базовим**. Його прийнято позначати індексом "0". Напруги між рештою $q-1$ вузлів електрич-

ного кола і базовим називають **вузловими**. Для їх знаходження необхідно скласти систему рівнянь, порядок якої буде на одиницю менший від кількості вузлів. Метод розрахунку електричних кіл, у якому за невідомі приймають вузлові напруги, називають **методом вузлових напруг**. Відзначимо, що напруга між k -м вузлом схеми і базовим дорівнює різниці потенціалів між ними, тобто

$$U_{k0} = \varphi_k - \varphi_0 = \varphi_k - 0 = \varphi_k. \quad (2.5)$$

Метод вузлових напруг, як і метод контурних струмів, дає змогу значно скоротити порядок системи рівнянь, яку необхідно розв'язати для визначення струмів віток, і тим самим зменшити обсяг обчислень. Кількість невідомих, а отже і кількість незалежних рівнянь у методі вузлових напруг дорівнює кількості рівнянь, які необхідно скласти для розглядуваної схеми за першим законом Кірхгофа, тобто $n = n_1 = q - 1$.

Напругу на будь-якій вітці електричного кола можна визначити на основі вузлових напруг, що дає змогу знайти струм у ній шляхом розрахунку простого (нерозгалуженого) кола.

Приклад 2.3. Суть методу вузлових напруг розглянемо на прикладі електричного кола, схема якого зображена на рис. 2.1.

Прийемо потенціал вузла 4 таким, що дорівнює нулю, тобто $\varphi_4 = 0$, тоді невідомими будуть потенціали φ_1 , φ_2 , φ_3 інших трьох вузлів. Враховуючи (2.5), замість потенціалів вузлів користуватимемось вузловими напругами U_{14} , U_{24} , U_{34} . Для складання системи рівнянь за методом вузлових напруг скористаємось записаними вище за першим законом Кірхгофа рівняннями. Струми у вітках схеми виразимо через вузлові напруги

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1(E_1 - U_{12}); \\ I_2 &= G_2(-E_2 + U_{13}); \\ I_3 &= G_3U_{14}; \\ I_4 &= -G_4U_{34}; \\ I_5 &= G_5U_{24}; \\ I_6 &= G_6U_{23}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де

$$G_1 = \frac{1}{R_1}; G_2 = \frac{1}{R_2}; G_3 = \frac{1}{R_3}; G_4 = \frac{1}{R_4}; G_5 = \frac{1}{R_5}; G_{67} = \frac{1}{R_6 + R_7}.$$

Підставивши одержані вирази у складені за першим законом Кірхгофа рівняння та врахувавши, що $U_{12} = U_{14} - U_{24}$, $U_{13} = U_{14} - U_{34}$, $U_{23} = U_{24} - U_{34}$, одержуємо

$$\begin{aligned} G_{11}U_{14} - G_{12}U_{24} - G_{13}U_{34} &= I_{кз1}; \\ -G_{21}U_{14} + G_{22}U_{24} - G_{23}U_{34} &= I_{кз2}; \\ -G_{31}U_{14} - G_{32}U_{24} + G_{33}U_{34} &= I_{кз3}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}; G_{22} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6 + R_7}; G_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6 + R_7}; \\ G_{12} = G_{21} &= \frac{1}{R_1}; G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_2}; G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_6 + R_7}; \\ I_{кз1} &= E_1 \frac{1}{R_1} + E_2 \frac{1}{R_2}; I_{кз2} = -E_1 \frac{1}{R_1} + J; I_{кз3} = -E_2 \frac{1}{R_2} + E_4 \frac{1}{R_4} - J. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.7), знаходимо вузлові напруги U_{14} , U_{24} , U_{34} , а на їх підставі за формулами (2.6) обчислюємо струми віток.

Загальний вигляд системи рівнянь, складених за методом вузлових напруг, за умови, що базовий вузол має нульовий номер, можна записати так:

$$\begin{aligned} G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - \dots - G_{1m}U_{m0} &= I_{кз1}; \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$-G_{m1}U_{10} - G_{m2}U_{20} - \dots + G_{mm}U_{m0} = I_{кзм},$$

де діагональні елементи G_{kk} – це арифметичні суми провідностей, приєднаних до k -го вузла віток, а $G_{jk} = G_{kj}$ – арифметичні суми провідностей віток, які з'єднують вузли j та k . Права частина ($I_{кзj}$) кожного j -го рівняння – це алгебрична сума струмів короткого замикання під'єднаних до j -го вузла віток. Для їх визначення необхідно умовно закорочувати кожен віток і обчислювати струм короткого замикання за формулою

$$I_{кзj} = \sum_k G_k E_k + \sum_k J_k. \quad (2.10)$$

Добуток $G_k E_k$ беруть зі знаком “плюс”, якщо ЕРС E_k спрямована до вузла, і “мінус” – у протилежному випадку. Аналогічне правило для знаків струмів J_k .

Основні положення. У рівняннях, складених за методом вузлових напруг, невідомими є напруги між вузлом, який прийнятий за базовий, і рештою вузлів. Кількість рівнянь у цьому разі така, яку необхідно скласти за першим законом Кірхгофа, тобто на одиницю менша від кількості вузлів.

Напругу на будь-якій вітці електричного кола визначають на основі вузлових напруг, що дає змогу знайти струм у ній шляхом розрахунку простого (нерозгалуженого) кола.

Приклад 2.4. З метою кращого засвоєння особливостей викладених вище методів розрахунку електричних кіл наведемо приклад їх застосування до одного і того ж електричного кола, зображеного на рис. 2.2.

Запишемо рівняння, які необхідні для визначення струмів віток за законами Кірхгофа, методом контурних струмів та методом вузлових напруг.

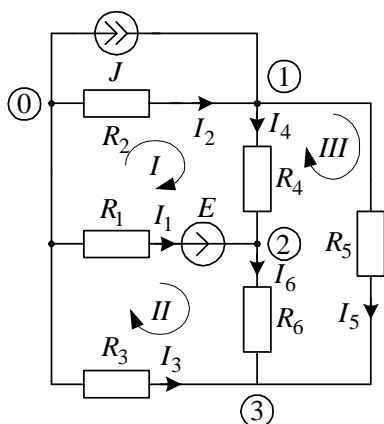


Рис. 2.2

Рівняння Кірхгофа. Зображене на рис. 2.2 електричне коло має $p = 7$ сім віток, в одній з яких струм відомий (струм J джерела струму), і $q = 4$ чотири вузли. Необхідно знайти шість невідомих струмів. Отже, за першим законом Кірхгофа необхідно скласти $n_1 = q - 1 = 3$ рівняння, а за другим $n_2 = p - q + 1 - n_1 = 3$, де n_J – кількість віток з ДС.

Задавшись додатними напрямками струмів та вибравши незалежні контури (*I*, *II*, *III*) і напрям їх обходу, як показано на рис. 2.2, запишемо рівняння Кірхгофа

$$\begin{aligned} \text{вузол 1:} & \quad J + I_2 - I_4 - I_5 = 0; \\ \text{вузол 2:} & \quad I_4 + I_1 - I_6 = 0; \\ \text{вузол 3:} & \quad I_6 + I_3 + I_5 = 0; \\ \text{контур I:} & \quad R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_1 I_1 = -E; \\ \text{контур II:} & \quad R_1 I_1 + R_6 I_6 - R_3 I_3 = E; \\ \text{контур III:} & \quad -R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0. \end{aligned}$$

Метод контурних струмів. Для вибраних, як показано на рис. 2.2, трьох незалежних контурів запишемо рівняння за методом контурних струмів, спрямувавши I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} за годинниковою стрілкою. Крім того, вважатимемо, що відомий струм J джерела струму замикається через резистор R_2 .

$$\begin{aligned} \text{Контур I:} & \quad (R_1 + R_2 + R_4) I_{k1} - R_1 I_{k2} - R_4 I_{k3} = R_2 J - E; \\ \text{контур II:} & \quad (R_1 + R_3 + R_6) I_{k2} - R_1 I_{k1} - R_6 I_{k3} = E; \\ \text{контур III:} & \quad (R_4 + R_5 + R_6) I_{k3} - R_6 I_{k2} - R_4 I_{k1} = 0. \end{aligned}$$

Струми у вітках обчислюємо на підставі контурних струмів за формулами

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{k2} - I_{k1}; & I_2 &= I_{k1} - J; \\ I_3 &= -I_{k2}; & I_4 &= I_{k1} - I_{k3}; \\ I_5 &= I_{k3}; & I_6 &= I_{k2} - I_{k3}. \end{aligned}$$

Метод вузлових напруг. Прийемо потенціал вузла 0 таким, що дорівнює нулю, тоді невідомими будуть вузлові напруги U_{10} , U_{20} , U_{30} . Складемо систему рівнянь

$$\text{вузол 1: } U_{10} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - U_{20} \frac{1}{R_4} - U_{30} \frac{1}{R_5} = J;$$

$$\text{вузол 2: } U_{20} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - U_{10} \frac{1}{R_4} - U_{30} \frac{1}{R_6} = E \frac{1}{R_1};$$

$$\text{вузол 3: } U_{30} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - U_{10} \frac{1}{R_5} - U_{20} \frac{1}{R_6} = 0.$$

Струми у вітках схеми визначаються за формулами

$$I_1 = \frac{E - U_{20}}{R_1}; \quad I_2 = -\frac{U_{10}}{R_2}; \quad I_3 = -\frac{U_{30}}{R_3};$$

$$I_4 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_4}; \quad I_5 = \frac{-U_{30} + U_{10}}{R_5}; \quad I_6 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_6}.$$

2.4. Метод еквівалентного генератора

Під час розрахунку електричних кіл може виникнути необхідність визначити струми не всіх віток, а лише однієї, або дослідити поведінку електричного кола у разі зміни параметрів однієї вітки. На розв'язання цієї задачі спрямований метод *еквівалентного генератора*, згідно з яким все електричне коло, за винятком вітки, в якій необхідно визначити величину струму, замінюється еквівалентним генератором з ЕРС E_r , і внутрішнім опором R_r . Інакше кажучи, вся схема, за винятком згаданої вітки, замінюється активним двополюсником, а згідно з теоремою Гельмгольца-Тевенена будь-який активний двополюсник може бути заміщений еквівалентним генератором. Параметри еквівалентного генератора можна визначити як на основі розрахунку, так і експериментально.

Для визначення E_r розрахунково необхідно будь-яким методом розрахувати електричне коло за умови, що вітка, у якій необхідно знайти струм, розімкнена, і знайти напругу між вузлами, до яких під'єднана ця вітка. Це і буде ЕРС E_r . Внутрішній опір еквівалентного генератора R_r визначають шляхом

еквівалентних перетворень електричного кола стосовно вузлів, до яких під'єднана вітка з шуканим струмом, за умови, що всі джерела ЕРС закорочені, а всі ДС розімкнені. Отже, необхідно знайти вхідний опір схеми стосовно вузлів, до яких під'єднана вітка, в якій необхідно визначити струм. Обчисливши E_r та R_r , під'єднуємо цю вітку до затискачів еквівалентного генератора і розраховуємо просте електричне коло.

Експериментальний спосіб визначення ЕРС еквівалентного генератора полягає у вимірюванні напруги $U_0 = E_r$ між вузлами, до яких під'єднана вітка, за умови, що вона розімкнена (так званий неробочий режим). Для визначення опору R_r еквівалентного генератора необхідно виміряти струм короткого замикання I_k , увімкнувши між зазначеними вузлами амперметр. Значення опору R_r визначаємо за формулою $R_r = U_0 / I_k$.

Приклад 2.5. Для зображеної на рис. 2.1 схеми знайти методом еквівалентного генератора струм I_1 вітки, яка під'єднана до вузлів "0" та "1". Перетворена до еквівалентного генератора схема зображена на рис. 2.3, в якій E_r , R_r – ЕРС і внутрішній опір еквівалентного генератора, яким замінена вся схема, крім вітки зі струмом I_1 .

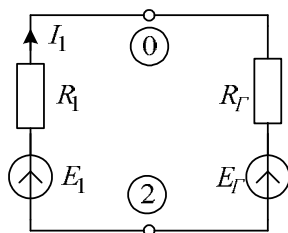


Рис. 2.3

Як видно зі схеми рис. 2.3, невідомий струм I_1 визначається за формулою

$$I_1 = \frac{E_1 - E_r}{R_1 + R_r}.$$

Основні положення. *Метод еквівалентного генератора застосовують для визначення струму в одній вітці. Вся схема, крім цієї вітки, замінюється еквівалентним генератором, ЕРС якого визначається як напруга між вузлами, до яких приєднана вітка, за умови що вона розімкнена, а внутрішній опір дорівнює еквівалентному вхідному опоріві стосовно цієї вітки.*

Параметри еквівалентного генератора можна визначити розрахунково або експериментально.

2.5. Метод накладання

Принцип накладання впливає з лінійності причинно-наслідкових зв'язків у лінійних електричних колах, оскільки в них параметри не залежать від значень струмів та напруг. Отже, його можна застосовувати для аналізу лише лінійних електричних кіл. Суть методу накладання полягає у тому, що струм будь-якої вітки електричного кола визначається як сума струмів, зумовлених дією кожного джерела окремо, тобто накладанням (суперпозицією). Принцип накладання справедливий для будь-яких лінійних взаємозв'язків, однак його не можна використовувати для рівнянь балансу потужностей, оскільки тут причинно-наслідкові зв'язки квадратичні.

Принцип накладання дає змогу звести розв'язування задачі розрахунку електричного кола з m джерелами енергії до розрахунку m простих кіл, у кожному з яких діє лише одне джерело, а всі решта вилучені. Решта джерел ЕРС повинні бути замкнені накоротко із збереженням у вітках їх внутрішніх опорів, а джерела струму – розімкнені із збереженням паралельно увімкнених до них внутрішніх провідностей.

Відзначимо, що найефективнішим методом розрахунку електричних кіл з одним джерелом енергії є метод еквівалентних перетворень. Звідси впливає, що метод накладання доцільно використовувати разом з методом еквівалентних перетворень.

Основні положення. *Метод накладання застосовують лише для лінійних електричних кіл. Його суть полягає в тому, що струм (напруга) кожної вітки визначається як сума струмів (напруг), зумовлених дією кожного джерела електричної енергії, зокрема.*

Принцип накладання неправомірно застосовувати для квадратичних форм, якими є вирази для потужностей.

2.6. Еквівалентні перетворення схем електричних кіл

У багатьох випадках розрахунок і аналіз складних електричних кіл можна істотно спростити за допомогою перетворення (трансфігурації), суть якого полягає у зміні їхньої структури. Еквівалентним називається перетворення схеми електричного кола, за якого зміна структури перетворюваної частини схеми не впливає на зміну струмів та напруг у неперетвореній частині електричної схеми. Можна здійснювати перетворення не тільки пасивних ділянок електричного кола, але й з джерелами електричної енергії. Одним із прикладів є перетворення джерела ЕРС у ДС і навпаки. Однак найчастіше виникає необхідність перетворювати пасивні електричні кола. Розглянемо їх.

Розгалужене електричне коло з одним джерелом енергії можна еквівалентними перетвореннями звести до простого з одним еквівалентним пасивним елементом. Для цього необхідно користуватись правилами заміни не тільки послідовно та паралельно з'єднаних пасивних елементів одним еквівалентним, але й перетворенням з'єднання зіркою в еквівалентний трикутник і навпаки.

Послідовно з'єднані пасивні елементарні двополюсники можна замінити одним еквівалентним, опір якого дорівнює сумі опорів окремих двополюсників. Наприклад, для зображеного на рис. 2.4 електричного кола

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I = R_e I. \quad (2.11)$$

Отже, у разі послідовного з'єднання n елементів еквівалентний опір визначають за формулою

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (2.12)$$

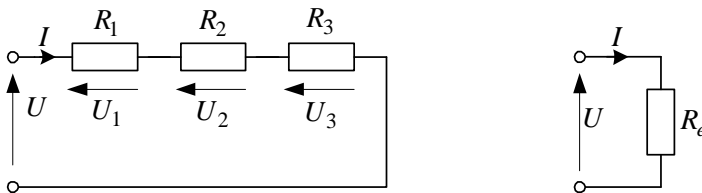


Рис. 2.4

Розглянемо паралельне з'єднання пасивних двополюсників (рис. 2.5). У цьому разі всі двополюсники перебувають під однаковою напругою, а струм k -го двополюсника визначається за законом Ома

$$I_k = G_k U, \quad (2.13)$$

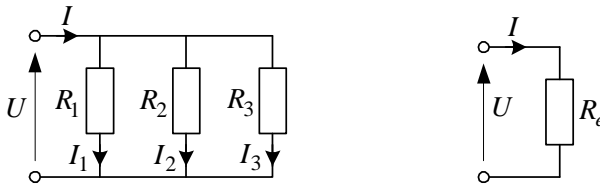


Рис. 2.5

За першим законом Кірхгофа

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 = G_1 U + G_2 U + G_3 U = \\ &= (G_1 + G_2 + G_3) U = G_e U \end{aligned}, \quad (2.14)$$

де G_e – еквівалентна провідність, яка у разі паралельного з'єднання n елементів двополюсників визначається за формулою

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k, \quad (2.15)$$

що дає змогу перейти до еквівалентного опору як оберненої величини.

У складних колах можуть бути з'єднання двополюсників, які не можна зарахувати ні до послідовного, ні до паралельного. Це з'єднання зіркою та трикутником (рис. 2.6).

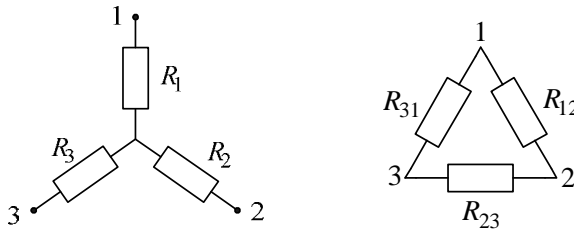


Рис. 2.6

Не заглиблюючись у теоретичне обґрунтування та дотримуючись наведених на рис. 2.6 позначень, наводимо формули, які дають змогу перетворити з'єднані у трипроменеву зірку резистивні елементи в еквівалентний трикутник і навпаки.

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2};$$

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

(2.16)

Оскільки послідовно з'єднані пасивні елементи можливі лише в межах вітки, то перетворення кола необхідно починати з їх заміни одним еквівалентним.

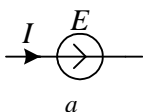
Основні положення. Суть еквівалентного перетворення електричної схеми полягає у зміні структури електричного кола з метою спрощення розрахунків. Під час еквівалентних перетворень струми у неперетвореній частині електричного кола не змінюються.

До найуживаніших еквівалентних перетворень належать: заміна послідовного та паралельного з'єднань елементів одним, а також перетворення з'єднання зіркою на з'єднання трикутником і навпаки.

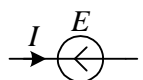
2.7. Баланс потужностей в електричному колі постійного струму

Для повного аналізу електричного стану складного кола необхідно визначити не тільки струми та напруги на його елементах, але й потужності джерел та споживачів енергії. Згідно із законом збереження енергії в електричному колі як у замкненій системі електрична енергія, яка генерується джерелами, дорівнює енергії, яку споживають приймачі. Звідси, як наслідок, витікає, що в будь-якому електричному колі існує баланс потужностей. Рівняння балансу потужностей має вигляд

$$\sum P_{дж} = \sum P_{сп} \quad (2.17)$$



a



б

Рис. 2.7

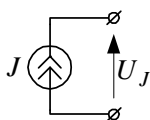


Рис. 2.8

Для складання рівняння балансу потужностей в електричному колі постійного струму необхідно вміти обчислювати потужності джерел енергії та споживачів. Спочатку розглянемо джерело ЕРС. Якщо напрямок струму, який протікає через джерело, збігається з напрямком ЕРС, то $P_{дж} = EI$ (рис. 2.7 а), а якщо ці напрямки протилежні (рис. 2.7, б), то $P_{дж} = -EI$.

Потужність, яку розвиває ДС, визначається як добуток струму J джерела на напругу U_J на затискачах ДС, тобто $P_{дж} = JU_J$ (рис. 2.8).

Очевидно, що як джерело ЕРС, так і ДС можуть не тільки генерувати електричну енергію, але й споживати її. Наприклад, під час заряджання акумуляторної батареї енергія споживається джерелом. Це означає, що потужність $P_{дж}$

джерела може мати як додатне, так і від'ємне значення, однак потужність резистивного споживача завжди додатна. Вона визначається за формулами: $P_{cn} = I^2 R$ або $P_{cn} = U^2 / R$.

Зауважимо, що в наведених вище формулах для обчислення потужностей струми необхідно брати з тими знаками, які одержані в результаті їхнього розрахунку.

Потужність в електричному колі постійного струму можна обчислити за показами вольтметра і амперметра або виміряти ватметром, який вмикають як показано на рис. 2.9.

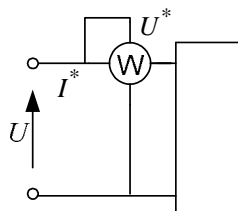


Рис. 2.9

Основні положення. Для електричного кола постійного струму як замкненої системи виконується баланс потужностей, який є наслідком закону збереження енергії.

Згідно з рівнянням балансу потужностей сума потужностей джерел електричної енергії дорівнює сумі потужностей споживачів.

Потужність джерела може бути як додатною, так і від'ємною, а потужності споживачів завжди додатні.

2.8. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

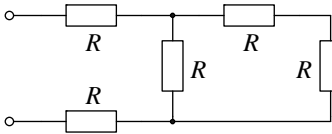
1. Як скласти рівняння за законами Кірхгофа для електричного кола постійного струму?
2. У чому полягає суть розрахунку електричного кола за методом контурних струмів?
3. У чому полягає суть розрахунку електричного кола за методом накладання?
4. Чи можна застосувати метод накладання для визначення потужності в лінійних електричних колах?
5. Як скласти систему рівнянь за методом контурних струмів?
6. Як визначають струми віток у методі контурних струмів?
7. У чому полягає перевага методу контурних струмів порівняно з методом законів Кірхгофа?
8. У чому полягає суть методу розрахунку електричного кола за методом вузлових напруг?
9. Який вузол називають базовим у методі вузлових напруг?
10. Які напруги називають вузловими в методі вузлових напруг?
11. Як скласти систему рівнянь за методом вузлових напруг?
12. Як визначаються струми віток у методі вузлових напруг?
13. У чому полягає перевага методу вузлових напруг порівняно з методом законів Кірхгофа?
14. У якому разі доцільно використовувати для аналізу електричних кіл метод контурних струмів, а в якому метод вузлових напруг?
15. У чому полягає суть методу еквівалентного генератора?
16. Як визначається ЕРС еквівалентного генератора?
17. Як визначити внутрішній опір еквівалентного генератора?
18. До яких електричних кіл можна застосовувати метод накладання (суперпозиції) і в чому полягає його суть?
19. У чому полягає суть еквівалентних перетворень електричного кола?
20. Як визначається потужність джерела ЕРС, джерела струму, резистивного елемента?
21. Як скласти рівняння балансу потужностей для електричного кола постійного струму?

Екзаменаційні питання

1. Закони Ома та Кірхгофа для електричних кіл постійного струму та їх застосування до розрахунку розгалужених електричних кіл.
2. Розрахунок розгалужених електричних кіл за методом контурних струмів.
3. Розрахунок розгалужених електричних кіл за методом вузлових напруг.
4. Метод еквівалентного генератора. Теорема компенсації.
5. Передача енергії від активного двополюсника до пасивного. Узгоджене навантаження.

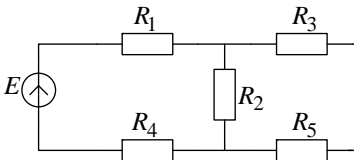
6. Теорема про еквівалентний генератор і її застосування до розрахунку електричних кіл.
7. Розрахунок електричного кола методом накладання.
8. Потужність у колі постійного струму. Баланс потужностей. Вимірювання потужності.

Завдання для самостійної роботи



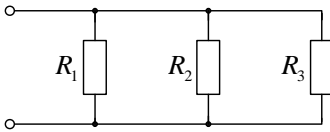
Задача 2.1. Визначити еквівалентний вхідний опір схеми.

Відповідь: $R_e = 8R/3$ Ом.



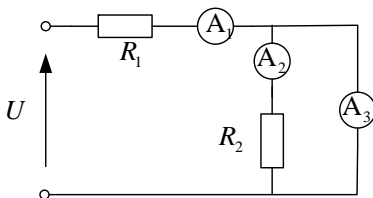
Задача 2.2. Визначити вхідний опір стосовно затискачів джерела, якщо $R_1 = R_4 = 5$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = R_5 = 5$ Ом.

Відповідь: $R_e = 15$ Ом.



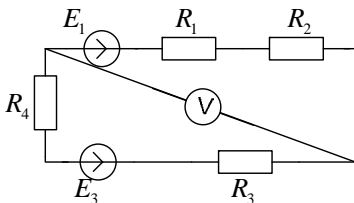
Задача 2.3. Визначити еквівалентну провідність, якщо $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 10$ Ом.

Відповідь: $G_e = 0,4$ См.



Задача 2.4. Визначити покази ідеальних ($R = 0$) амперметрів, якщо $U = 50$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 20$ Ом.

Відповідь: $I_{A1} = 10$ А; $I_{A2} = 0$; $I_{A3} = 10$ А.



Задача 2.5. Визначити покази вольтметра, якщо $E_1 = 50$ В, $E_3 = 100$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5$ Ом.

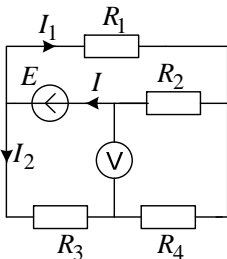
Відповідь: 75 В.

Задача 2.6. В умовах попередньої задачі визначити, яка ЕРС генерує енергію, а яка споживає.

Відповідь: E_3 – генерує; E_1 – споживає.

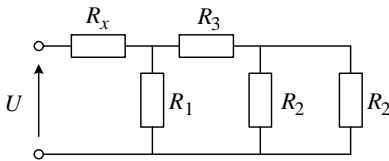
Задача 2.7. Два приймачі номінальною напругою $U_n = 220 \text{ В}$ та номінальними потужностями $P_{1н} = 100 \text{ Вт}$ і $P_{2н} = 40 \text{ Вт}$ увімкнені послідовно в мережу з напругою 220 В . Визначити напругу та споживану потужність кожного приймача.

Відповідь: $U_1 = 62,857 \text{ В}$; $U_2 = 157,43 \text{ В}$; $P_1 = 8,16 \text{ Вт}$; $P_2 = 20,41 \text{ Вт}$.



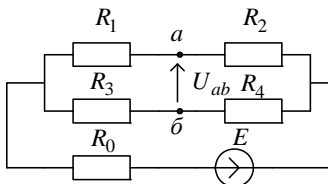
Задача 2.8. Визначити струми віток, показ вольтметра та скласти рівняння балансу потужностей, якщо: $E = 60 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $R_3 = 7,5 \text{ Ом}$; $R_4 = 2,5 \text{ Ом}$.

Відповідь: $I_1 = 3 \text{ А}$; $I_2 = 3 \text{ А}$; $I = 6 \text{ А}$; $U_v = 37,5 \text{ В}$.



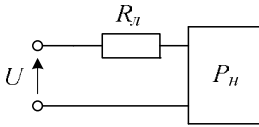
Задача 2.9. Параметри елементів електричного кола $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 50 \text{ Ом}$. Визначити значення опору R_x , якщо прикладена напруга $U = 200 \text{ В}$, а споживана потужність $P = 400 \text{ Вт}$.

Відповідь: $R_x = 50 \text{ Ом}$.



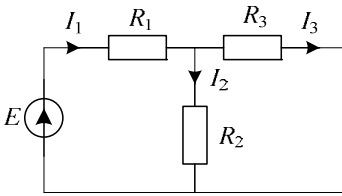
Задача 2.10. Визначити напругу U_{ab} , якщо $E = 60 \text{ В}$; $R_1 = 8 \text{ Ом}$; $R_2 = 2 \text{ Ом}$; $R_3 = 6 \text{ Ом}$; $R_4 = 4 \text{ Ом}$; $R_0 = 1 \text{ Ом}$.

Відповідь: $U_{ab} = 10 \text{ В}$.



Задача 2.11. Нагрівальний елемент за допомогою з'єднувальних проводів, опір яких $R_{\text{л}} = 2 \text{ Ом}$, живиться від мережі з напругою $U = 220 \text{ В}$ і споживає потужність $P_{\text{н}} = 1800 \text{ Вт}$. Визначити ККД установки.

Відповідь: $\eta = 0,92$.



Задача 2.12. В електричному колі постійного струму відомо: $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$; $E = 240 \text{ В}$; $I_1 = 24 \text{ А}$. Визначити: I_3 , I_2 , R_3 .

Відповідь: $I_2 = 16 \text{ А}$, $I_3 = 8 \text{ А}$, $R_3 = 6 \text{ Ом}$.

Розділ 3

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

3.1. Основні поняття та визначення

Струм, який змінюється в часі за величиною та напрямком, називається змінним. Один із напрямків змінного струму вважають додатним, а протилежний – від’ємним. Значення струму в конкретний момент часу називають *миттєвим* значенням, яке є функцією часу. Воно визначається функціональною залежністю $i = i(t)$, яка може бути в загальному випадку довільною. Зауважимо, що постійний струм у перехідному режимі під час переходу від одного енергетичного стану до іншого також може змінюватися, однак його не можна зарахувати до змінних струмів. В електротехніці прийнято класифікувати струми, напруги та ЕРС за їх поведінкою в ustalених режимах. У цьому розділі розглядаються винятково ustalені режими.

Змінний струм, миттєве значення якого повторюється через однакові проміжки часу, називається періодичним, а найменший проміжок часу, через який відбувається повторення, називається *періодом* змінного струму. Серед періодично-змінних струмів найбільше поширений гармонічний струм, тобто такий, що є синусоїдною функцією часу. Закон зміни такого струму можна подати функцією

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi), \quad (3.1)$$

де I_m – *амплітуда*; $\omega = 2\pi f$ – *кутова частота*, яка вимірюється в радіанах за секунду (c^{-1}); ψ – *початкова фаза*.

Амплітуда – це найбільше за абсолютною величиною значення синусоїдного струму. Виражена в герцах ($\Gamma\text{ц}$) частота f зв'язана з періодом T залежністю $f = 1/T$. Отже, синусоїдний струм (напруга, ЕРС) характеризується трьома величинами: амплітудою I_m , частотою ω і початковою фазою ψ_i . Постійний струм можна розглядати як частковий випадок змінного струму (частота $f = 0$, а період $T = \infty$). Діапазон частот змінних струмів, які використовують у техніці, становить від часток герц до мегагерц. Промислова частота становить $50 \Gamma\text{ц}$ (Україна, країни Європи, Росія і ін.) та $60 \Gamma\text{ц}$ (США, Японія і ін.). Аналогічно до струму синусоїдними функціями є напруга та ЕРС. Надалі, говорячи про змінний струм, у цьому розділі матимемо на увазі синусоїдний струм.

Аргумент $(\omega t + \psi)$ синусоїдної електричної величини (3.1) називають фазою, а значення фази при $t = 0$ – початковою фазою. Якщо дві синусоїдні величини (наприклад, напруга та струм) мають різні початкові фази, (рис. 3.1), то кажуть, що між ними існує **зсув фаз**. Зокрема, якщо

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

то зсув фаз між напругою та струмом визначають за формулою

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (3.2)$$

Аналогічно визначається зсув фаз між будь-якими двома синусоїдними величинами.

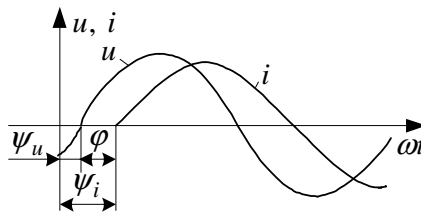


Рис. 3.1

Основні положення. Синусоїдно-змінний струм (напруга, ЕРС) характеризується трьома величинами: амплітудою, частотою і початковою фазою.

Миттєве значення синусоїдного струму – це значення струму в конкретний момент часу.

Аргумент $(\omega t + \psi)$ електричної величини, яка змінюється за синусоїдним законом, називається фазою, а його значення при $t = 0$ – початковою фазою.

Зсув фаз – це різниця між фазами двох синусоїдних величин.

3.2. Діюче значення синусоїдного струму, ЕРС, напруги

Синусоїдний струм є наслідком дії синусоїдних ЕРС, які виробляють електромашинні генератори. Для змінного струму, як і для ЕРС, вводиться поняття **діючого** значення, яке використовується під час багатьох розрахунків. В основу визначення діючого значення змінного струму покладено тепловий еквівалент. Зокрема, якщо змінний струм протікає через резистивний елемент з опором R , то під його дією виділяється тепло. Якщо за проміжок часу Δt , кратний періоду T , під час протікання змінного струму i виділиться така ж кількість тепла, як під час протікання постійного струму I , то величину такого постійного струму приймають за діюче значення змінного струму. Інакше кажучи, діюче значення змінного струму дорівнює такому постійному струмові, який за один період T виділяє в тому ж резистивному елементі таку ж кількість тепла, як і змінний струм. Отже, визначити діюче значення синусоїдного струму можна на основі рівності енергії, яка вділяється в резисторі з опором R за період T .

Енергія, яка виділяється постійним струмом I за час T , дорівнює

$$W = I^2 RT, \quad (3.3)$$

а змінним

$$W = \int_0^T i^2 R dt. \quad (3.4)$$

Прирівнявши вирази (3.3) і (3.4) та враховуючи, що $i = I_m \sin \omega t$, знаходимо діюче значення синусоїдного струму

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.5)$$

Діюче значення називають ще ефективним. Ним визначається не тільки теплова дія, але й силова. Зауважимо, що вимірювальні аналогові прилади електромагнітної, електродинамічної та феродинамічної систем вимірюють діюче значення.

Діючі значення напруги та ЕРС визначають аналогічно

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.6)$$

Відзначимо, що діючі значення можна визначити, як середньоквадратичні

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}. \quad (3.7)$$

Середнє за період значення синусоїдного змінного струму дорівнює нулю. На практиці часто використовують середнє за модулем значення, яке визначається за формулою

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (3.8)$$

Відношення діючого значення струму до середнього за модулем називають коефіцієнтом форми, який для синусоїдного струму дорівнює

$$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = 1,11. \quad (3.9)$$

Основні положення. Для визначення енергетичної дії електричного струму користуються поняттям діючого значення, яке в $\sqrt{2}$ разів менше від амплітудного. Аналогічно визначаються діючі значення синусоїдних ЕРС та напруг. Інша назва діючого значення – ефективне.

Середнє значення синусоїдного струму (напруги, ЕРС) за період дорівнює нулю, тому має сенс лише середнє за модулем значення, яке менше від діючого в 1,11 раза.

3.3. Зображення синусоїдної величини на комплексній площині

Під час розрахунку процесів в електричних колах змінного струму необхідно виконувати арифметичні операції над синусоїдними величинами. Наприклад, необхідно знайти суму кількох струмів тощо. Безпосереднє додавання гармонічних функцій часу пов'язане з трудомісткими перетвореннями. Істотне спрощення розрахунків досягається, якщо перейти від синусоїдних функцій часу до їх зображень за допомогою комплексних чисел. Пояснимо, як це можна здійснити на прикладі синусоїдної напруги

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.10)$$

Згідно з формулою Ейлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha. \quad (3.11)$$

Нехай $\alpha = \omega t + \psi_u$, тоді, домноживши (3.11) на U_m , одержуємо

$$U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m \cos(\omega t + \psi_u) + j U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.12)$$

Відкладемо на комплексній площині по осі абсцис дійсну частину комплексного числа (3.12), а по осі ординат – уявну. Тоді вектор довжиною U_m , спрямований під кутом $(\omega t + \psi_u)$ до осі абсцис (рис. 3.2), буде символічним відображенням синусоїдної напруги (3.10). Це пояснюється тим, що між

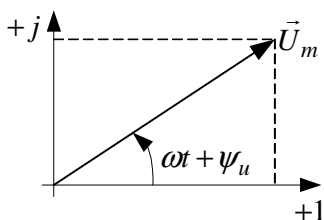


Рис. 3.2

миттєвим значенням напруги u і вектором \vec{U}_m існує однозначний зв'язок: у кожний момент часу значення напруги визначається проекцією вектора \vec{U}_m на уявну вісь. Застосування математичного апарата комплексного числення дає змогу замінити операції диференціювання та інтегрування арифметичними діями, а операції над синусоїдними функціями – операціями над комплексними числами.

Встановимо зв'язок між комплексним числом, яке зображує синусоїдну функцію часу, і тим, що зображує її похідну та інтеграл. Зокрема, якщо синусоїдну напругу (3.10) зобразити комплексним числом

$$U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}, \quad (3.13)$$

де $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ – комплексна амплітуда, то, враховуючи, що

$$\frac{du}{dt} = \omega U_m \sin(\omega t + \psi_u + \pi/2), \quad (3.14)$$

похідна du/dt зображується також комплексним числом

$$j\omega U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = j\omega \underline{U}_m e^{j\omega t}, \quad (3.15)$$

оскільки згідно з (3.11) $e^{\pi/2} = j$.

Аналогічно

$$\int u dt = \frac{U_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi_u - \pi/2) \quad (3.16)$$

зображується комплексним числом

$$\frac{U_m}{j\omega} e^{j(\omega t + \psi_u)} = \frac{\underline{U}_m}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad (3.17)$$

Отже, операція диференціювання зводиться до **множення**, а інтегрування – до **ділення** комплексного числа, яке зображує функцію, на $j\omega$. Комплексне число, яке зображує суму кількох синусоїдних функцій однакової частоти, дорівнює алгебричній сумі комплексних чисел, які зображують ці функції.

Нехай необхідно знайти суму двох струмів однакової частоти $i = i_1 + i_2$ де $i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$, $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)$.

Подамо їх на комплексній площині векторами \vec{I}_{m1} та \vec{I}_{m2} (рис. 3.3). Ці вектори обертаються з постійною кутовою швидкістю ω , тому їх взаємне розташування в будь-який момент часу незмінне. Це означає, що вектор $\vec{I}_m = \vec{I}_{m1} + \vec{I}_{m2}$ буде

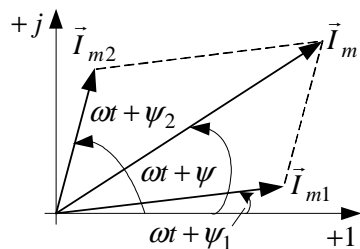


Рис. 3.3

незмінним за величиною і обертатися з тією ж частотою ω , а його проекція на вертикальну вісь дорівнює шуканій синусоїдній функції

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

У здійсненому на рис. 3.3 графічному додаванні векторів присутнє поточне значення кута ωt . Однак, оскільки взаємне розташування векторів не залежить від цього кута, то можна здійснити додавання за будь-якого його значення, зокрема й $\omega t = 0$. Крім того, здебільшого зручно прийняти довжини векторів, що зображують синусоїдні функції, такими, що дорівнюють не амплітудним, а діючим значенням. Отже, надалі будемо користуватись не **комплексними амплітудами** \underline{I}_m , а **комплексними діючими значеннями** \underline{I} , які в $\sqrt{2}$ раз менші, тобто

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = I e^{j\psi}. \quad (3.18)$$

де $I = I_m / \sqrt{2}$ – діюче значення струму.

Отже, для переходу від синусоїдної функції часу (оригіналу) до зображуючої її комплексної величини (символічного зображення), необхідно модуль комплексного числа вибрати таким, що дорівнює діючому значенню, а аргумент – значенню аргументу синусоїдної функції в момент часу $t = 0$.

Наприклад,

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = U e^{j\psi_u};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = I e^{j\psi_i}.$$

Для зворотного переходу від комплексного числа, яке зображує синусоїдну функцію, до самої функції, тобто до оригіналу, необхідно взяти його проекцію на уявну вісь, домножити її на $\sqrt{2}$ і додати до аргументу ωt .

Як зазначалось, у деяких підручниках використовують комплексні амплітуди. У такому разі замість діючого значення необхідно користуватись амплітудним. Якщо використовувати комплексні амплітуди, то домножувати на $\sqrt{2}$ під час зворотного переходу не потрібно.

***Основні положення.** Для розрахунку електричних кіл змінного струму використовують не миттєві значення напруг, ЕРС та струмів, які є функціями часу, а їх символічні (комплексні) відображення. У цьому разі кожен синусоїдну величину зображають у вигляді комплексного числа, модуль якого дорівнює діючому значенню цієї величини, а аргумент – початковій фазі.*

На комплексній площині комплексну напругу (струм, ЕРС) можна зобразити вектором, модуль якого дорівнює діючому значенню, спрямованому під кутом до дійсної осі, що дорівнює початковій фазі.

Застосування математичного апарата комплексної змінної дає можливість перейти від операцій над синусоїдними функціями часу до алгебричних операцій над комплексними числами. У цьому разі операція диференціювання зводиться до множення, а інтегрування – до ділення комплексного числа, яке зображує дану функцію, на $j\omega$.

3.4. Пасивні елементи в електричному колі синусоїдного струму

Для аналізу процесів в електричному колі синусоїдного струму використовують його заступну схему, яку одержують на підставі принципової схеми шляхом зображення електротехнічних пристроїв ідеалізованими елементами. Пасивними елементами заступної схеми електричного кола синусоїдного струму є **резистивні, індуктивні і ємнісні** елементи. Відзначимо, що ми розглядаємо лінійні пасивні елементи, параметри яких не залежать від прикладених до них напруг або струмів, які по них протікають. Розглянемо процеси, які відбуваються в кожному з перерахованих вище пасивних елементів.

Резистивні елементи було розглянено вище, де заступні схеми електричного кола складались із джерел енергії та резистивних елементів. Зауважимо, що опір провідника змінному струмові більший, ніж постійному внаслідок витіснення струму до поверхні провідника. Однак для промислової частоти це збільшення опору незначне і ним можна знехтувати, а опір провідника визначати за тією ж формулою, що і для постійного струму.

У резистивних елементах електрична енергія перетворюється у теплову. Потужність, яка виділяється в резистивному елементі з параметром R , визначають за формулою

$$P = I^2 R, \quad (3.19)$$

де I – діюче значення змінного струму. Отже, резистор в електричному колі змінного струму, характеризується величиною його опору R , який називатимемо **активним**. Заступна схема резистивного елемента має вигляд (рис. 3.4).

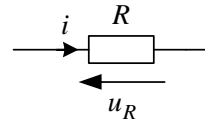


Рис. 3.4

Згідно із законом Ома, який справедливий для будь-якого закону зміни струму та моменту часу, напруга на резисторі, зумовлена протіканням змінного струму $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, визначається за формулою

$$u = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi_i) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (3.20)$$

де $U_m = RI_m$ – амплітуда, а $\psi_u = \psi_i$ – початкова фаза напруги. Як видно з (3.20), напруга і струм мають однакові початкові фази. Часові залежності напруги на резисторі і струму мають вигляд, зображений на рис. 3.5.

У комплексній формі $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$. Відповідно $\underline{U}_R = RI = RIe^{j\psi_i} = Ue^{j\psi_u}$. Векторне відображення напруги та струму для резистивного елемента наведено на рис. 3.6.

Висновок: струм, який протікає через резистивний елемент, збігається за фазою з напругою на ньому.

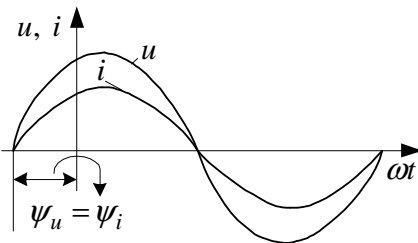


Рис. 3.5

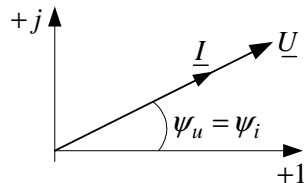


Рис. 3.6

Розглянемо процеси в лінійній (без сталевго осердя) котушці у разі протікання в ній синусоїдного струму. Як відомо, навколо провідника зі струмом існує магнітне поле. Якщо котушка має w витків і кожен з них пронизується магнітним потоком Φ , то її потокозчеплення ψ , визначається за формулою

$$\psi = w\Phi, \quad (3.21)$$

а, відношення потокозчеплення котушки до величини струму, що в ній протікає, називається власною індуктивністю, тобто (див. 1.19)

$$L = \frac{\psi}{i}. \quad (3.22)$$

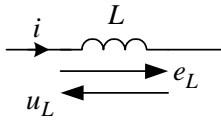


Рис. 3.7

Як зазначалось в п. 1.5, заступну схему котушки можна подати у вигляді послідовно з'єднаних резистивного елемента з параметром R та ідеального індуктивного елемента з параметром L (рис. 1.5).

А оскільки процеси в резисторі уже розглянуті, то аналізуватимемо ідеалізовану котушку, яка характеризується лише параметром L (рис. 3.7).

Під час зміни струму в котушці змінюється її потокозчеплення, і згідно із законом електромагнітної індукції в ній наводиться ЕРС самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (3.23)$$

Додатний напрямок ЕРС самоіндукції збігається з додатним напрямком струму (рис. 3.7), тому напругу на котушці під час протікання по ній синусоїдного струму обчислимо за формулою

$$\begin{aligned} u_L = -e_L &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_m \sin(\omega t + \psi_i)) = \\ &= \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) = \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$= X_L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) = U_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2),$$

де величина $X_L = \omega L$ має розмірність Ом і називається **індуктивним опором** котушки.

Висновок: *напруга на ідеальному індуктивному елементі випереджує за фазою струм на кут $\varphi = \pi/2$.*

Приклад залежності від часу напруги на котушці та струму в ній наведено на рис. 3.8.

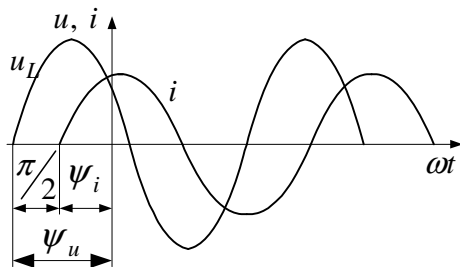


Рис. 3.8

Запишемо струм та напругу на котушці індуктивності в комплексній формі

$$\begin{aligned} \underline{I} &= I e^{j\psi_i}; \\ \underline{U}_L &= U_L \cdot e^{j(\psi_i + \pi/2)} = X_L I e^{j\psi_i} e^{j\pi/2} = X_L \underline{I} e^{j\pi/2} = jX_L \underline{I} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Векторне зображення напруги на індуктивному елементі та струму, який через нього протікає, наведено на рис. 3.9.

Розглянемо конденсатор у колі синусоїдного струму.

Електричний заряд q на електродах конденсатора ємністю C пропорційний до прикладеної напруги

$$q = Cu. \quad (3.26)$$

Якщо напруга на конденсаторі змінюється, то змінюється і величина заряду на обкладинках конденсатора. У провідниках, які з'єднують конденсатор з джерелом, зміна заряду зумовлює електричний струм, який визначається згідно з (1.21). Отже, якщо напруга на конденсаторі постійна, то струм дорівнює нулю.

У реальному конденсаторі, крім струму зміщення, існує струм провідності, оскільки ідеальних діелектриків не існує. Його заступна схема наведена на рис. 1.6. Оскільки цей струм

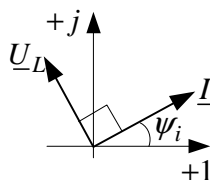


Рис. 3.9

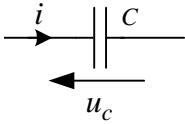


Рис. 3.10

порівняно малий, ним можна знехтувати і вважати конденсатор ідеальним елементом ($R = \infty$). За необхідності паралельно з'єднаний резистор можна розглянути окремо.

Заступна схема ідеального конденсатора має вигляд (рис. 3.10).

З формули (1.21) для синусоїдного струму знаходимо

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt =$$

$$= \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2) = \quad (3.27)$$

$$= X_c I_m \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2) = U_{cm} \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2),$$

де величина $X_c = 1/\omega C$ – називається **ємнісним опором**.

Висновок: **Напруга на конденсаторі відстає від струму на кут $\varphi = \pi/2$.**

У комплексній формі

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_c = U_c e^{j(\psi_i - \pi/2)} = X_c I e^{j\psi_i} \cdot e^{-j\pi/2} = -j X_c \underline{I}. \quad (3.28)$$

Часові залежності напруги і струму наведені на рис. 3.11, а, а векторне відображення – на рис. 3.11, б.

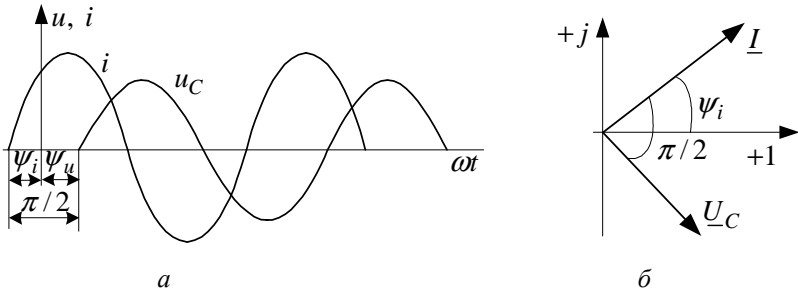


Рис. 3.11

Під час визначення кута зсуву фаз між напругою та струмом на окремих елементах доцільно розглядати положення вектора струму стосовно напруги на елементі, що краще відповідає причинно-наслідковим зв'язкам.

Основні положення. Струм, який протікає через резистор, і напруга на ньому збігаються за фазою.

Струм, який протікає через ідеальну котушку індуктивності, відстає за фазою від напруги на ній на кут $\pi/2$.

Струм ідеального конденсатора випереджає за фазою напругу на ньому на кут $\pi/2$.

Резистор характеризується активним опором R , ідеальна котушка – індуктивним опором $X_L = \omega L$, а ідеальний конденсатор – ємнісним опором $X_C = 1/\omega C$. Індуктивний і ємнісний опори називаються реактивними.

3.5. Комплексний опір та комплексна провідність. Закон Ома в комплексній формі

Розглянемо просте електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, які живляться від джерела синусоїдної напруги (рис. 3.12).

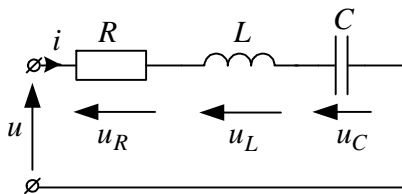


Рис. 3.12

Згідно з другим законом Кірхгофа прикладена напруга зрівноважується спадом напруг на окремих елементах електричного кола

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (3.29)$$

Подамо всі напруги, що входять до рівняння (3.29), у комплексній формі

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C. \quad (3.30)$$

Враховуючи, що

$$\underline{U}_R = R\underline{I}; \quad \underline{U}_L = jX_L\underline{I}; \quad \underline{U}_C = -jX_C\underline{I},$$

одержуємо

$$\underline{U} = (R + jX_L - jX_C)\underline{I} = (R + jX)\underline{I},$$

де $X = X_L - X_C$, або в скороченій формі

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}. \quad (3.31)$$

Комплексна величина

$$\underline{Z} = R + jX$$

називається **комплексним опором** двополюсника. Його компонентами є активний R і реактивний X опори.

Співвідношення (3.31) між комплексними напругою та струмом – це **закон Ома в комплексній формі** для пасивної ділянки електричного кола. Зокрема, якщо $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$ і $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$, то

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ze^{j\varphi} = R + jX, \quad (3.32)$$

де

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \text{arctg}(X / R).$$

Зсув фаз $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ між напругою та струмом двополюсника, визначається співвідношенням активного і реактивного опорів.

Комплексний опір \underline{Z} має геометричну інтерпретацію (рис. 3.13, а). Активний, реактивний та повний опір двополюсника співвідносяться між собою як сторони прямокутного трикутника, який називають **трикутником опорів** (рис. 3.13, б).

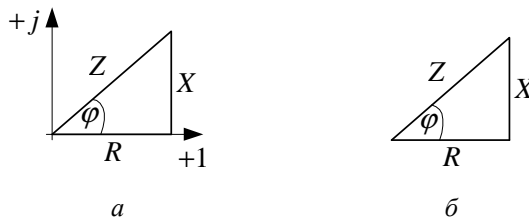


Рис. 3.13

Величина, обернена до комплексного опору, називається **комплексною провідністю**, яку, як і комплексний опір, можна подати в алгебричній або показниковій формі

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB$$

або

$$\underline{Y} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = G - jB,$$

де

$$G = Y \cos \varphi = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} \text{ – активна провідність;}$$

$$B = Y \sin \varphi = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2} \text{ – реактивна провідність;}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad \varphi = \text{arctg}(B/G) = \text{arctg}(X/R).$$

На комплексній площині провідності \underline{Y} відповідає прямокутний трикутник (рис. 3.14, а), який називають **трикутником провідностей** (рис. 3.14, б).

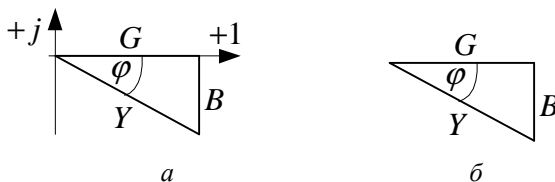


Рис. 3.14

Основні положення. Для розрахунку електричних кіл змінного струму символічним методом використовують поняття комплексного опору, який складається з активного опору (дійсна частина) і реактивного (уявна частина).

Реактивний опір буває двох видів: індуктивний X_L і ємнісний X_C . У разі їх послідовного з'єднання загальний реактивний опір визначається як їх різниця, тобто $X = X_L - X_C$.

Активний, реактивний і повний опори (провідності) співвідносяться між собою як сторони прямокутного трикутника, тобто їм відповідає трикутник опорів (провідностей).

3.6. Потужності та баланс потужностей у колі синусоїдного струму

У загальному випадку напруга та струм на вході пасивного двополюсника зсунені за фазою на кут $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Якщо прийняти початкову фазу напруги $\psi_u = 0$, то початкова фаза струму $\psi_i = -\varphi$. За таких умов миттєві значення напруги і струму можна подати у вигляді

$$u = U_m \sin \omega t; \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (3.33)$$

Миттєве значення потужності є функцією часу (див. (1.28))

$$p = ui. \quad (3.34)$$

Підставивши (3.33) в (3.34), одержуємо

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi), \quad (3.35)$$

де U, I – діючі значення напруги та струму, φ – кут зсуву фаз між ними.

Зауважимо, що у разі активно-індуктивного характеру опору двополюсника струм відстає від напруги (рис. 3.15, а), а для активно-ємнісного – випереджує її (рис. 3.15, б).



Рис. 3.15

Як видно з (3.35), миттєва потужність має постійну складову $UI \cos \varphi$ і гармонічну $UI \cos(2\omega t - \varphi)$, кутова частота якої у два рази більша від частоти напруги та струму. Миттєва потужність двополюсника додатна для проміжків часу, коли напруга і струм мають однакові знаки і від’ємна, – коли ці знаки протилежні (рис. 3.16).

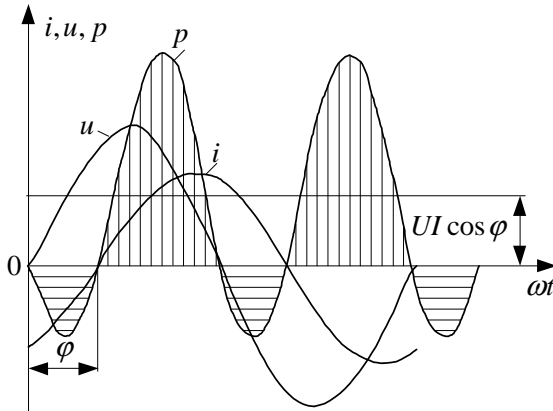


Рис. 3.16

Для проміжків часу, в які миттєва потужність від'ємна, енергія повертається від споживача до джерела. Це можливо завдяки наявності реактивних елементів, у яких енергія періодично запасується в їх електричних і магнітних полях. Якщо двополюсник складається винятково з резистивних елементів, то енергія в ньому накопичуватись не може. Кут φ у цьому разі дорівнює нулю, напруга та струм завжди мають однакові знаки і немає моментів часу, коли потік енергії спрямований від споживача до джерела.

Середнє значення миттєвої потужності за період називають **активною** потужністю

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi. \quad (3.36)$$

Активна потужність залежить від діючих значень напруги U та струму I і кута φ зсуву фаз між ними. Множник $\cos \varphi$ для синусоїдних напруги та струму називається **коефіцієнтом потужності**. Оскільки для пасивного двополюсника $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, активна потужність не може бути від'ємною. Активна потужність резистивного елемента числово дорівнює енергії, яка виділяється в ньому за секунду.

Поряд з активною потужністю використовується поняття **реактивної** потужності, яку визначають за формулою

$$Q = UI \sin \varphi, \quad (3.37)$$

та **повної** потужності

$$S = UI. \quad (3.38)$$

Активна, реактивна та повна потужності в електричному колі синусоїдного струму пов'язані залежністю

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (3.39)$$

якій відповідає **трикутник потужностей** (рис. 3.17).

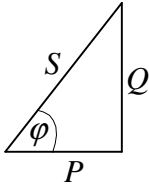


Рис. 3.17

На відміну від активної потужності, яка завжди додатна, реактивна може бути від'ємною. Зокрема, якщо $\varphi < 0$, то $Q < 0$.

Активна потужність пов'язана з незворотними процесами перетворення електричної енергії в інші види енергії, наприклад, у теплову чи механічну. Реактивна потужність пов'язана зі зворотними процесами обміну електричною енергією між індуктивними та ємнісними елементами (або між реактивними споживачами і генераторами).

Активна потужність вимірюється у **ватах** (скорочено – Вт), реактивна – у **вольт-амперах реактивних** (скорочено – **вар**), а повна – у **вольт-амперах** (скорочено – ВА).

Реактивну потужність ідеального конденсатора ємністю C , до якого прикладена напруга, діюче значення якої дорівнює U , можна визначити за формулою

$$Q = \omega C U^2.$$

Аналогічно для ідеальної котушки індуктивністю L одержимо формулу

$$Q = U^2 / (\omega L).$$

Повну потужність можна записати у вигляді комплексного числа

$$\underline{S} = P + jQ = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi. \quad (3.40)$$

Її можна обчислити, використовуючи комплексні значення напруги $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$ та струму $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$. Для цього використо-

ується комплексне спряжене значення струму $\underline{I}^* = Ie^{-j\psi_i}$, в якому знак перед аргументом ψ_i змінений на протилежний. Комплексне значення повної потужності

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \quad (3.41)$$

Баланс потужностей витікає із закону збереження енергії. У комплексній формі його можна записати у вигляді рівняння

$$\sum \underline{S}_{\text{спож}} = \sum \underline{S}_{\text{дж}}, \quad (3.42)$$

яке розпадається на два: для дійсних (активних потужностей) і уявних (реактивних потужностей) частин. Отже, в електричному колі синусоїдного струму існує **баланс активних** потужностей і **баланс реактивних** потужностей.

Як і в колі постійного струму, активну потужність вимірюють ватметром. Зокрема, якщо комплексні значення напруги та струму на затискачах ватметра відповідно \underline{U} , \underline{I} , то покази ватметра визначаються як дійсна частина добутку

$$P = \operatorname{Re}(\underline{U} \underline{I}^*).$$

Основні положення. Для синусоїдних напруг та струмів використовують поняття миттєвої, активної, реактивної та повної потужностей.

Миттєва потужність синусоїдного струму є функцією часу, яка загалом має дві складові: постійну і гармонічну подвійної частоти.

Активна потужність дорівнює середньому за період значенню миттєвої потужності

Активна, реактивна та повна потужності співвідносяться між собою як сторони прямокутного трикутника.

Активна потужність визначає перетворення електричної енергії в інші види енергії.

Реактивна потужність характеризує обмін енергією між реактивними елементами або джерелом і споживачем. Для індуктивного елемента вона додатна, а для ємнісного – від’ємна, тому компенсувати реактивну потужність індуктивного характеру можна вмиканням конденсаторів.

В електричному колі синусоїдного струму існує баланс активних і баланс реактивних потужностей, тобто для нього можна скласти два рівняння балансу потужностей.

3.7. Символічний метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму

3.7.1. Суть символічного методу. Метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму, в основу якого покладено зображення синусоїдних функцій часу комплексними числами називається комплексним, або символічним. Суть символічного методу розрахунку полягає в тому, що здійснюється перехід від миттєвих значень напруг, струмів та ЕРС (оригіналів) до їхніх символічних зображень, що дає змогу замінити інтегро-диференціальні рівняння для миттєвих значень струмів до алгебричних рівнянь у комплексній формі. Після виконання розрахунків здійснюється перехід від комплексних до миттєвих значень. Застосування математичного апарата комплексної змінної істотно спрощує розрахунок ustalених режимів в електричних колах синусоїдного струму, оскільки не потрібно розв'язувати диференціальні рівняння. Символічний метод іноді називають **комплексним**.

Для розрахунку лінійних електричних кіл синусоїдного струму можна застосовувати ті самі методи, що і для кіл постійного струму, якщо скористатись комплексними значеннями напруг, струмів, ЕРС та комплексними опорами чи провідностями. У разі використання комплексної заступної схеми, складені для неї комплексні рівняння будуть за формою аналогічні до рівнянь кіл постійного струму.

3.7.2. Закони Кірхгофа в комплексній формі. Рівняння законів Кірхгофа в комплексній формі мають вигляд, аналогічний до рівнянь для електричних кіл постійного струму. Їх можна записати у вигляді, який не потребує додаткових пояснень

$$\sum_k \underline{I}_k = 0; \tag{3.43}$$

$$\sum_k \underline{U}_k, \underline{E}_k = 0 \quad \text{або} \quad \sum_k \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum_k \underline{E}_k .$$

Очевидно, що для будь-якого кола рівняння законів Кірхгофа у комплексній формі можна одержати з рівнянь для миттєвих значень, замінивши миттєві значення на комплексні згідно з викладеним в п. 3.3. Однак простіше використати заступну комплексну схему, визначивши попередньо комплексні опори віток кола.

Для прикладу запишемо рівняння Кірхгофа для миттєвих значень та у комплексній формі для електричного кола, зображеного на рис. 3.18, *а*.

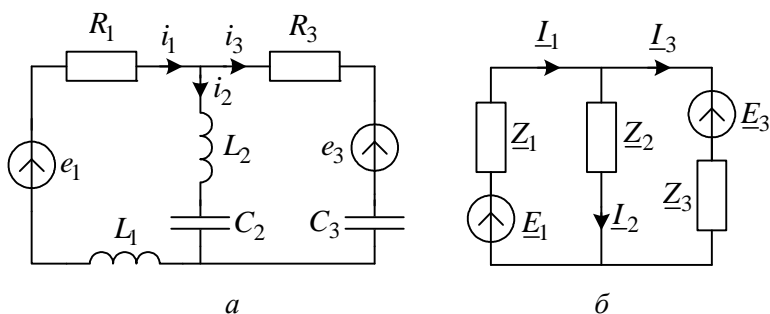


Рис. 3.18

Рівняння, складені за законами Кірхгофа для миттєвих значень, мають вигляд

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_1;$$

$$R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt - L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = -e_3.$$

Щоб записати ці рівняння у комплексній формі, визначаємо комплексні опори віток

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = Z_1 e^{j\varphi_1} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = j(X_{L2} - X_{C2}) = Z_2 e^{j\varphi_2} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = Z_3 e^{j\varphi_3} \text{ Ом}.$$

Складена з використанням цих опорів комплексна заступна схема наведена на рис. 3.18, б. Користуючись нею, запишемо рівняння Кірхгофа у комплексній формі.

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0; \\ \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 &= \underline{E}_1; \\ \underline{Z}_3 \underline{I}_3 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 &= -\underline{E}_3.\end{aligned}$$

Рівняння, складені за **методом контурних струмів** у комплексній формі для електричного кола рис. 3.18, б, мають вигляд

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} \underline{I}_{1k} - \underline{Z}_2 \underline{I}_{2k} &= \underline{E}_1; \\ -\underline{Z}_2 \underline{I}_{1k} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{2k} &= -\underline{E}_3,\end{aligned}$$

де $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$; $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$; \underline{I}_{1k} , \underline{I}_{2k} – невідомі контурні струми, які спрямовані за годинниковою стрілкою.

Основні положення. *Метод, в основу якого покладено зображення синусоїдних функцій часу комплексними числами, називається комплексним, або символічним.*

Суть символічного (комплексного) методу розрахунку електричних кіл змінного струму полягає в переході від синусоїдних функцій часу до їх символічних (комплексних) відображень.

До рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень, входять похідні та інтеграли. У разі синусоїдних напруг та струмів перехід від синусоїдних функцій часу до їх символічних відображень дає змогу замінити інтегро-диференціальні рівняння алгебричними з комплексним коефіцієнтами, оскільки символ диференціювання замінюють множенням на $j\omega$, а інтегрування – діленням на $j\omega$.

Розглянуті під час розрахунку електричних кіл постійного струму методи можна застосовувати і до кіл синусоїдного струму, якщо рівняння складати у комплексній формі.

3.8. Резонансні явища в електричному колі синусоїдного струму

Як відомо, у механічній системі виникає явище резонансу, якщо частота збудовальної сили дорівнює власній частоті системи. Під час резонансу механічної системи малі збурення можуть

спричиняти значні коливання системи, наприклад, коливання маятника з великою амплітудою.

У колах змінного струму, до складу яких входять котушки індуктивності та конденсатори, можуть виникати резонансні явища, які за своєю суттю аналогічні до резонансу в механічній системі. Якщо в механічній системі відбувається перехід кінетичної енергії в потенціальну і навпаки, то в електричному контурі відбувається періодичний перехід енергії електричного поля конденсатора в енергію магнітного поля котушки і навпаки. Під час резонансу в електричному колі мала напруга, прикладена до кола, може спричинити значні напруги або струми на деяких ділянках кола. Це пов'язано з тим, що ємнісні та індуктивні опори (провідності) мають різні знаки і можуть взаємно компенсувати один одного. У результаті, незважаючи на наявність у колі реактивних елементів, вхідний реактивний опір (провідність) дорівнює нулю. Такий режим називається *резонансним*.

У разі послідовного з'єднання індуктивного і ємнісного елементів може виникати *резонанс напруг*, а за паралельного – *резонанс струмів*. Розглянемо їх.

3.8.1. Резонанс напруг. Резонанс напруг розглянемо на прикладі зображеного на рис. 3.12 електричного кола. Як було відзначено, в резонансному режимі, струм і напруга на вході електричного кола збігаються за фазою, тобто $\varphi = 0$, а повний опір дорівнює його активному опоріві

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R,$$

що можливо, якщо $X_L = X_C$. Отже, умова резонансу напруг у послідовному контурі

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (3.44)$$

Як видно з (3.44), резонансу напруг можна досягнути зміною одного з трьох параметрів: L , C , ω , кожен з яких можна визначити відповідно за формулами

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C = \frac{1}{\omega^2 L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.45a, б, в)$$

Частоту ω_0 , за якої настає резонанс, називають *резонансною*.

Струм під час резонансу не залежить від величини опорів послідовно з'єднаних реактивних елементів, оскільки згідно із законом Ома визначається за формулою

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}. \quad (3.46)$$

Під час резонансу діюче значення напруги на індуктивному елементі дорівнює діючому значенню напруги на конденсаторі

$$U_L = X_L I = U_C = X_C I. \quad (3.47)$$

а напруга на резисторі дорівнює прикладеній до входу електричного кола напрузі

$$U_R = RI = U. \quad (3.48)$$

За умови резонансу напруги на котушці та конденсаторі можуть значно перевищувати напругу на вході кола. Це відбувається, якщо

$$R \ll \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (3.49)$$

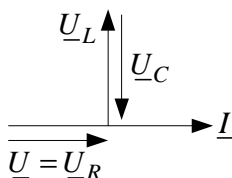


Рис. 3.19

Векторна діаграма для зображеного на рис. 3.12 електричного кола за умови наявності резонансу наведена на рис. 3.19.

Реактивна потужність усього кола під час резонансу дорівнює нулю, оскільки

$$Q = Q_L - Q_C = I^2 X_L - I^2 X_C = 0, \quad (3.50)$$

а повна потужність дорівнює активній

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P. \quad (3.51)$$

Відповідно коефіцієнт потужності ($\cos \varphi$) дорівнює одиниці

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} = 1,0. \quad (3.52)$$

Під час резонансу реактивна енергія циркулює від індуктивного елемента до ємнісного і навпаки. Обміну реактивною енергією між джерелом і електричним колом не відбувається. Величина струму в провідниках, які з'єднують джерело з рештою кола, визначається винятково активною потужністю.

Залежності параметрів X_L , X_C , діючих значень напруг U_L , U_C та струму I від частоти наведені на рис. 3.20. Як видно з рисунка, при $\omega = \omega_0$ струм у колі досягає максимального значення, а напруги U_L та U_C рівні між собою. Однак максимальних значень ці напруги досягають за відмінних від резонансних частот. Напряга U_C максимальна за частоти

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{(2L)^2}}, \quad (3.53)$$

тобто $\omega_C < \omega_0$, а напряга U_L максимальна за частоти

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{R^2 C} \sqrt{1 - \frac{R}{2L}}}, \quad (3.54)$$

тобто $\omega_L > \omega_0$. Як видно з (3.53), (3.54), ці частоти збігаються лише за умови $R = 0$.

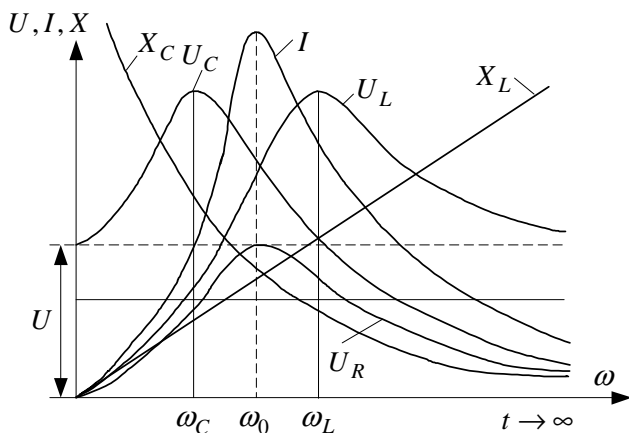


Рис. 3.20

Величина $\rho = \sqrt{L/C}$ називається **характеристичним** опором контуру, а величина

$$q = \frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} \quad (3.55)$$

– **добротністю** контуру. Вона визначає кратність перевищення напруги на індуктивному (смісному) елементі над напругою на вході кола в умовах резонансу. Величину $\rho = \sqrt{L/C}$, яка має розмірність опору, називають **хвильовим опором** контуру. Іншою величиною, яка характеризує резонансні властивості контуру, є величина $d = 1/q$, яка називається **згасанням**. Чим більша величина d , тим більше розходяться частоти ω_L та ω_C , а крива $I(\omega)$ має менше виражений максимум.

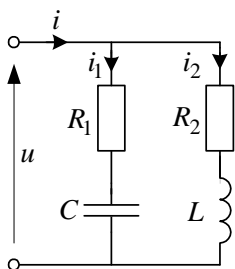


Рис. 3.21

3.8.2. Резонанс струмів. Розглянемо паралельне з'єднання віток з конденсатором та котушкою індуктивності, причому для загальності послідовно з конденсатором увімкнемо резистор (рис. 3.21).

За визначенням в умовах резонансу на вході кола струм i повинен збігатися за фазою з напругою u . Це можливо, якщо вхідна реактивна провідність кола дорівнює нулю. Якщо позначити провідність першої вітки $\underline{Y}_1 = G_1 + jB_1$, а другої – $\underline{Y}_2 = G_2 - jB_2$, то загальна провідність $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 + G_2 + j(B_1 - B_2)$. Отже, умовою резонансу струмів є рівність $B_1 = B_2$, або в розгорнутій формі

$$\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}. \quad (3.56)$$

Оскільки $X_L = \omega L$, а $X_C = 1/(\omega C)$, до рівняння (3.56) входять п'ять величин: R_1 , R_2 , L , C , ω . Звідси випливає, що теоретично резонансу можна досягнути зміною будь-якої з них. Однак перелічені змінні визначаються розв'язуванням рівняння другого порядку, і корені можуть бути уявними або мати уявну частину, що свідчить про неможливість досягнути резонансу зміною цієї величини. Крім того, параметри L та C можуть мати по два різних дійсних значення, які задовольняють рівняння (3.56). Зміною кожної з них можна досягнути двох резонансних режимів.

Резонансну частоту з рівняння (3.56) визначають за формулою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}. \quad (3.57)$$

Приклад векторної діаграми для зображеного на рис. 3.21 електричного кола за умови резонансу наведений на рис. 3.22, а, а частотної характеристики струму – на рис. 3.22, б.

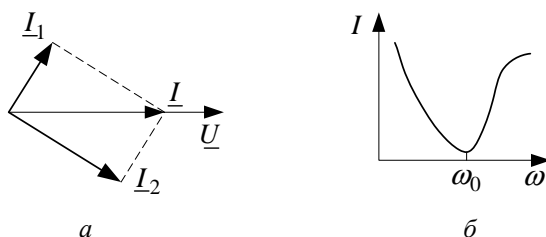


Рис. 3.22

Розглянемо частковий випадок: $R_1 = R_2 = 0$. За такої умови, як видно з (3.57), резонансна частота ω_0 визначається за тією самою формулою (3.45в), що і в послідовному контурі. У паралельному контурі без втрат ($R_1 = R_2 = 0$) струми i_1 та i_2 перебувають у протифазі, а струм i на вході кола дорівнює нулю. Енергія магнітного поля котушки упродовж чверті періоду зміни струму перетворюється в енергію електричного поля конденсатора, а в наступну чверть періоду повертається назад від конденсатора до котушки. Обміну енергією між електричним колом і джерелом не відбувається.

Основні положення. Явище резонансу може виникати лише в електричних колах з реактивними елементами.

Під час резонансу напруга і струм на вході електричного контуру збігаються за фазою. Це означає, що комплексна реактивна складова вхідного опору (провідності) дорівнює нулю.

Явище резонансу в разі послідовного з'єднання індуктивного і ємнісного елементів називається резонансом напруг, а у разі паралельного – резонансом струмів.

У лінійному електричному колі резонансу можна досягти зміною частоти або параметрів реактивних елементів. Частота ω_0 , за якої виникає резонанс, називається резонансною. Вона визначається параметрами електричного кола.

В умовах резонансу напруг реактивні опори котушки і конденсатора рівні між собою, тому загальний опір послідовного контуру мінімальний, а струм має максимальне значення.

В умовах резонансу струмів реактивні провідності паралельних віток рівні між собою, тому їх загальна провідність мінімальна, а загальний струм має мінімальне значення.

Залежності напруг та струмів від частоти називають частотними характеристиками.

В умовах резонансу напруга (струм) на окремих елементах можуть значно перевищувати напругу (струм) на вході схеми. Величина, що показує у скільки разів напруга на індуктивному (ємнісному) елементі перевищує напругу на вході кола, називається добротністю.

3.9. Електричні кола із взаємоіндуктивними зв'язками

Котушки індуктивності, які розміщені в одному або в різних електричних колах, можуть бути розташовані так, що магнітні силові лінії поля, створювані струмом однієї котушки, зчеплені з витками іншої котушки. У такому разі кажуть, що ці котушки індуктивно зв'язані, тобто між ними існує магнітний зв'язок, а потокозчеплення кожної котушки має дві складові, одна з яких зумовлена струмом цієї ж котушки, а друга – струмами інших котушок. Якщо дві котушки мають взаємоіндуктивний зв'язок, то струм другої (першої) котушки може створювати магнітний потік, який підсилює магнітне поле першої (другої) котушки або послаблює його. У першому випадку увімкнення котушок називається узгодженим, а в другому – зустрічним. На схемах для визначення

характеру індуктивного зв'язку користуються умовними позначеннями: одноіменні полюси (початки або кінці) котушок позначають крапками або зірочками.

Якщо струми в котушках спрямовані однаково стосовно одноіменних затискачів, то вони увімкнені узгоджено. У цьому разі власне і взаємне потокозчеплення кожної котушки додають. Наприклад, для двох індуктивно зв'язаних котушок

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12}; \quad \psi_2 = \psi_{22} + \psi_{21}, \quad (3.58)$$

де ψ_{11} , ψ_{22} – потокозчеплення, зумовлені власними струмами відповідно i_1 та i_2 ; ψ_{12} – потокозчеплення взаємоіндукції першої котушки, зумовлене струмом i_2 другої котушки; ψ_{21} – потокозчеплення взаємоіндукції другої котушки, зумовлене струмом i_1 першої котушки.

Якщо струми котушок спрямовані по-різному стосовно одноіменних затискачів, то вони увімкнені зустрічно, і тоді їх потокозчеплення визначають за формулами

$$\psi_1 = \psi_{11} - \psi_{12}; \quad \psi_2 = \psi_{22} - \psi_{21}. \quad (3.59)$$

Зауважимо, що індуктивно зв'язаними можуть бути не тільки дві, але й декілька котушок. Відповідно потокозчеплення взаємоіндукції котушки складатиметься з кількох складових, знаки яких необхідно брати залежно від їх увімкнення в електричне коло: узгоджене чи зустрічне. Для цього на схемі повинні бути позначені їх одноіменні затискачі та додатні напрямки струмів.

Відношення потокозчеплення ψ_{12} взаємоіндукції першої котушки до струму i_2 другої котушки називається взаємною індуктивністю (одиниця вимірювання – **генрі** (Gn)). Тобто

$$M_{12} = \psi_{12}/i_2. \quad (3.60a)$$

Аналогічно для другої котушки

$$M_{21} = \psi_{21}/i_1, \quad (3.60б)$$

причому $M_{12} = M_{21} = M$.

Взаємна індуктивність M у лінійних електричних колах не залежить від напрямків та значень струмів, а визначається тільки конструкціями котушок та їхній взаємним розташуванням. Для

оцінювання ступеня магнітного зв'язку між котушками застосовують поняття коефіцієнта зв'язку, який визначається за формулою

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} .$$

Цей коефіцієнт може приймати значення від $k=0$, у разі перпендикулярного розміщення осей котушок, до $k=1,0$ – у разі співосного розміщення, коли потік однієї котушки повністю зчеплюється з потоком іншої та навпаки.

Поділу потікозчеплення котушки на потікозчеплення самоіндукції і взаємоіндукції відповідає поділ ЕРС, яка наводиться в ній, на ЕРС само- і взаємоіндукції. Зокрема, у разі двох індуктивно зв'язаних котушок у першій з них наводиться ЕРС

$$e_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{d(\psi_{11} \pm \psi_{12})}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M_{12} \frac{di_2}{dt} . \quad (3.61a)$$

Аналогічно ЕРС другої котушки

$$e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d(\psi_{22} \pm \psi_{21})}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M_{21} \frac{di_1}{dt} . \quad (3.61б)$$

Отже, напруги на котушках, які мають взаємоіндуктивний зв'язок, визначають за формулами

$$\begin{aligned} u_1 = -e_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = -e_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (3.62)$$

які можна записати у комплексній формі

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M_{21} \underline{I}_1 . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Величина $X_M = \omega M$ має розмірність опору і називається індуктивним **опором взаємоіндукції**, а величина jX_M – комплексним опором взаємоіндукції.

Взаємоіндуктивні зв'язки можуть існувати не тільки між елементами одного кола, але й між електрично не зв'язаними індуктивними елементами.

Для прикладу, запишемо рівняння Кірхгофа для простого електричного кола із взаємоіндуктивними зв'язками, наведеного на рис. 3.23, в якому котушки індуктивності увімкнені зустрічно.

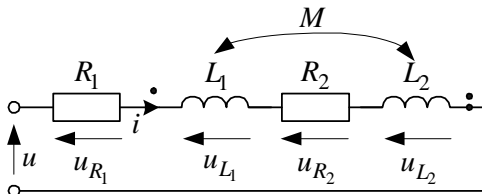


Рис. 3.23

За другим законом Кірхгофа

$$u = u_{R_1} + u_{L_1} + u_{R_2} + u_{L_2},$$

де напруги на окремих елементах визначають за формулами

$$\begin{aligned} u_{R_1} &= iR_1; & u_{R_2} &= iR_2; \\ u_{L_1} &= L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}; & u_{L_2} &= L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

У комплексній формі

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{I}(R_1 + R_2) + j(\omega L_1 - \omega M)\underline{I} + j(\omega L_2 - \omega M)\underline{I} = \\ &= \underline{I} \left[(R_1 + R_2) + j(X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M) \right]. \end{aligned}$$

Типовим прикладом електричного кола із взаємоіндуктивними зв'язками є трансформатор, електрична схема якого наведена на рис. 3.24. Як відомо, обмотки трансформатора мають взаємоіндуктивний зв'язок за рахунок єдиного магнітного потоку, який є спільним для обох обмоток. Крім того, витки кожної обмотки охоплюються потоками розсіювання.

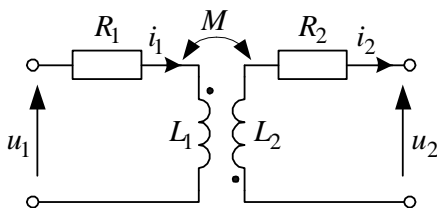


Рис. 3.24

Рівняння, складені за другим законом Кірхгофа для первинної і вторинної обмоток трансформатора, мають вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \\ -u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

де знак “+” перед M відповідає зображеному на рис. 3.24 узгодженому вмиканню первинної і вторинної обмоток.

Розрахунок електричних кіл із взаємоіндуктивними зв'язками можна здійснювати на основі законів Кірхгофа або за методом контурних струмів. Метод вузлових напруг потребує попередньої еквівалентної заміни індуктивних зв'язків або спеціального підходу.

Основні положення. *Явище взаємоіндукції існує, якщо витки однієї котушки пронизуються магнітними потоком, зумовленим струмом іншої котушки.*

Якщо котушки мають взаємоіндуктивний зв'язок, то в кожній з них наводиться, крім ЕРС самоіндукції, ЕРС взаємної індукції, яка може за напрямком збігатися з ЕРС самоіндукції або бути протилежною до неї.

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа або за методом контурних струмів у колах із взаємоіндуктивними зв'язками, необхідно враховувати ЕРС взаємоіндукції.

Взаємоіндуктивні зв'язки можуть бути як в електрично зв'язаних колах, так і в таких, що не мають електричного зв'язку.

3.10. Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. В електричному колі напруга $u_R = 100\sqrt{2} \sin \omega t$ В. Визначити комплексний опір \underline{Z} , миттєві значення струму i , напруги u на вході і на окремих елементах u_L , u_C , активну P , реактивну Q та повну S потужності, побудувати векторну діаграму та часові залежності напруги й струму на вході схеми, якщо $R = 10$ Ом; $X_L = 10$ Ом; $X_C = 20$ Ом.

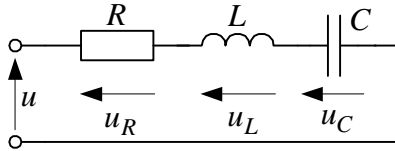


Рис. 3.25

Розв'язання. Струм у колі визначаємо за відомим значенням напруги на резисторі. Миттєве значення струму має вигляд

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Оскільки струм та напруга на резисторі збігаються за фазою ($\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$), то $\psi_i = 0$. Амплітуда струму

$$I_m = \frac{U_{Rm}}{R} = \frac{100\sqrt{2}}{10} = 14,1 \text{ А};$$

Отже, $i = 14,1 \sin \omega t \text{ А}$.

Реактивний опір $X = X_L - X_C = -10 \text{ Ом}$.

Комплексний опір кола $\underline{Z} = R + jX = 10 - j10 = 14,1e^{-j45^\circ} \text{ Ом}$.

Комплекс прикладеної напруги

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = 14,1e^{-j45^\circ} \cdot 10 = 141e^{-j45^\circ} \text{ В}.$$

Миттєве значення прикладеної напруги

$$u = 141\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ В}.$$

Активна, реактивна та повна потужності

$$P = UI \cos \varphi = 141 \cdot 10 \cos 45^\circ = 996 \text{ Вт};$$

$$Q = UI \sin \varphi = 141 \cdot 10 \sin(-45^\circ) = -996 \text{ вар};$$

$$\underline{S} = UI = 141 \cdot 10 = 1410 \text{ В} \cdot \text{А}$$

Напруга на індуктивній котушці

$$\underline{U}_L = jX_L \cdot \underline{I} = j10 \cdot 10 = 100e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$u_L = 141\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ В}.$$

Напруга на конденсаторі

$$\underline{U}_C = -jX_C \cdot \underline{I} = -j20 \cdot 10 = 200e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$u_C = 282\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В}.$$

Векторна діаграма напруг наведена на рис. 3.26, а, а часові діаграми вхідної напруги та струму – на рис. 3.26, б.

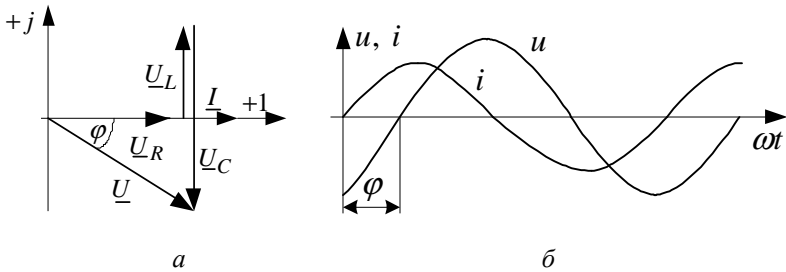


Рис. 3.26

Приклад 3.2. У зображеному на рис. 3.27 електричному колі $e = 282 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ В}$, $R = 6 \text{ Ом}$, $L = 0,016 \text{ Гн}$, $C = 245 \text{ мкФ}$, частота $f = 50 \text{ Гц}$. Визначити миттєве значення струму, покази амперметра електромагнітної системи та побудувати векторну діаграму

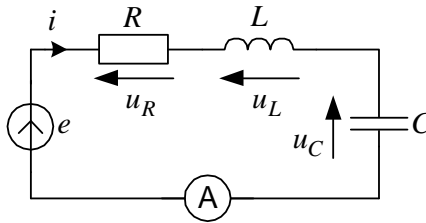


Рис. 3.27

Розв'язання. $\omega = 2\pi f = 314,1 \text{ с}^{-1}$; $X_L = \omega L = 5 \text{ Ом}$;
 $X_C = 1/(\omega C) = 13 \text{ Ом}$;

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 6 - j8 = 10e^{-j53^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{E} = 200e^{-j30^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{200e^{-j30^\circ}}{10e^{-j53^\circ}} = 20e^{j23^\circ} \text{ А}.$$

Миттєве значення струму $i = 20\sqrt{2} \sin(\omega t + 23^\circ) \text{ А}$.

Показ амперметра дорівнює діючому значенню струму $I = 20 \text{ A}$.

Для побудови векторної діаграми обчислимо комплексні напруги на окремих елементах електричного кола.

$$\underline{U}_R = R\underline{I} = 6 \cdot 20e^{j23^\circ} = 120e^{j23^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_L = jX_L\underline{I} = j5 \cdot 20e^{j23^\circ} = 5e^{j90^\circ} \cdot 20e^{j23^\circ} = 100e^{j113^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = -jX_C\underline{I} = -j13 \cdot 20e^{j23^\circ} = 13e^{-j90^\circ} \cdot 20e^{j23^\circ} = 260e^{j113^\circ} \text{ В}.$$

Векторна діаграма побудована на рис. 3.28.

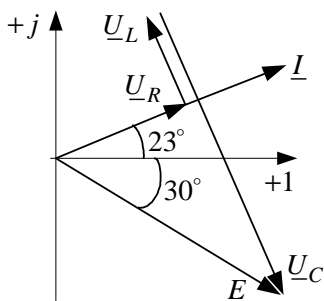


Рис. 3.28

Приклад 3.3. Для електричного кола, схема якого наведена на рис. 3.29, а, визначити миттєві значення струмів у вітках, напругу на паралельній ділянці кола, активну P , реактивну Q і комплексну \underline{S} потужності, якщо $U = 220 \text{ В}$; $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $R_2 = 3 \text{ Ом}$; $R_3 = 8 \text{ Ом}$; $X_{L1} = 6 \text{ Ом}$; $X_{L2} = 4 \text{ Ом}$; $X_{C3} = 6 \text{ Ом}$.

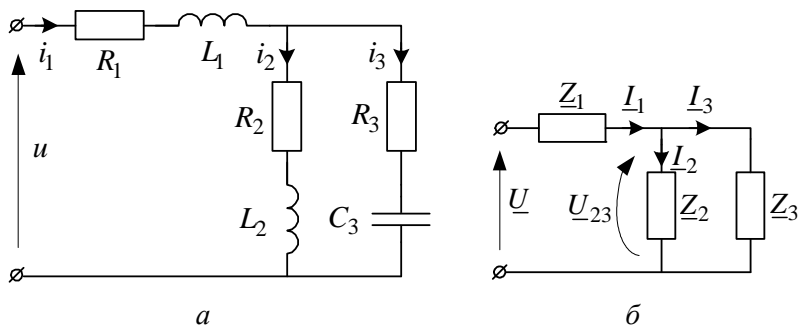


Рис. 3.29

Розв'язання. Визначаємо комплексні опори віток

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1} = 2 + j6 = 6,324e^{j71,67^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2} = 3 + j4 = 5e^{j53^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C_3} = 8 - j6 = 10e^{-j37^\circ} \text{ Ом}.$$

Обчисливши комплексні опори віток, можна скласти комплексну заступну схему у вигляді, зображеному на рис. 3.29, б. Зауважимо, що струми у вітках можуть бути знайдені будь-яким з розглянутих у розділі 2 методом. Застосуємо метод еквівалентних перетворень. Для цього обчислимо еквівалентний комплексний опір паралельних віток.

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{5e^{j53^\circ} \cdot 10e^{-j37^\circ}}{3 + j4 + 8 - j6} = 4,47e^{j26,33^\circ} = (4 + j2) \text{ Ом}.$$

Визначимо еквівалентний вхідний комплексний опір усього кола

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 2 + j6 + 4 + j2 = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \text{ Ом}.$$

Струм \underline{I}_1 на вході кола дорівнює

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{220e^{j0^\circ}}{10e^{j53^\circ}} = 22e^{-j53^\circ} = (13,2 - j17,6) \text{ А}.$$

Визначаємо напругу на паралельних вітках

$$\begin{aligned} \underline{U}_{23} &= \underline{I}_1 \underline{Z}_{23} = 22e^{-j53^\circ} \cdot 4,48e^{j26,66^\circ} = \\ &= 98,56e^{-j26,33^\circ} = (88,4 - j44,3) \text{ В}. \end{aligned}$$

Струми \underline{I}_2 та \underline{I}_3 знаходимо за законом Ома

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{98,56e^{-j26,66^\circ}}{5e^{j53^\circ}} = 19,7e^{-j79,1^\circ} = (3,5 - j19,9) \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{98,56e^{-j26,66^\circ}}{10e^{-j37^\circ}} = 9,86e^{j10,34^\circ} = (9,7 - j1,7) \text{ А}.$$

Здійснимо перевірку за першим законом Кірхгофа

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3,5 - j19,3 + 9,7 + j1,7 = (13,2 - j17,6) \text{ А}.$$

Комплексна потужність

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 220 \cdot 22e^{j53^\circ} = 4840e^{j53^\circ} = (2991 + j3865) \text{ ВА.}$$

Отже,

$$P = 2991 \text{ Вт}; \quad Q = 3865 \text{ вар}$$

Приклад 3.4. Визначити значення ємності C , за якого в колі (рис. 3.30) виникає резонанс напруг, та струми під час резонансу у всіх вітках, якщо діюче значення напруги $U = 30 \text{ В}$, $R_1 = 2,7 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $L = 0,286 \text{ мГн}$, а частота напруги живлення $f = 500 \text{ Гц}$.

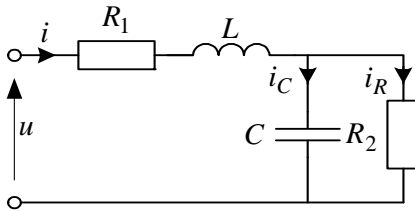


Рис. 3.30

Розв'язання. Запишемо вираз для еквівалентного вхідного опору

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R_1 + jX_L - j \frac{R_2 X_C}{R_2 - jX_C} = R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2} + j \left(X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} \right).$$

Резонанс напруг настає, якщо реактивна складова вхідного опору $\underline{Z}_{\text{вх}}$ кола дорівнює нулю. Отже, умова резонансу

$$X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0 \quad \text{або} \quad X_L X_C^2 - R_2^2 X_C + R_2^2 X_L = 0.$$

Підставимо числові значення

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 500 \cdot 0,286 \cdot 10^{-3} = 0,9 \text{ Ом};$$

$$0,9 X_C^2 - 9 X_C + 8,1 = 0.$$

Звідси знаходимо

$$X_{C1} = 9 \text{ Ом}; \quad X_{C2} = 1 \text{ Ом};$$

$$C_1 = 35,33 \text{ мкФ}; \quad C_2 = 318 \text{ мкФ}.$$

Струми визначимо для $X_C = 1 \text{ Ом}$.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2}} = \frac{30}{2,7 + \frac{3 \cdot 1}{9 + 1}} = 10 \text{ A};$$

$$i = 10\sqrt{2} \sin 3142t \text{ A};$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \frac{-jR_2 X_C}{R_2 - jX_C} = 10 \frac{3 \cdot e^{-j90^\circ}}{3 - j1} = \frac{30e^{-j90^\circ}}{3,16e^{-j18,44^\circ}} = 9,49e^{-j71,56^\circ} \text{ В.}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{I} \cdot R_2}{R_2 - jX_C} = \frac{30}{3,16e^{-j18,44^\circ}} = 9,49e^{j18,44^\circ} \text{ A};$$

$$i_C = 9,49\sqrt{2} \sin(3142t + 18,44^\circ) \text{ A};$$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{I} \cdot (-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \frac{10 \cdot e^{-j90^\circ}}{3,16e^{-j18,44^\circ}} = 3,16e^{-j71,56^\circ} \text{ A};$$

$$i_R = 3,16\sqrt{2} \sin(3142t - 71,56^\circ) \text{ A}.$$

Приклад 3.5. Котушка індуктивності, яка має параметри $R = 0,4 \text{ Ом}$, $L = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, і конденсатор ємністю $C = 100 \text{ мкФ}$ з'єднані послідовно. Визначити резонансну частоту $\omega_{\text{рез}}$ та добротність контуру, а також споживану потужність в режимі резонансу за діючого значення прикладеної напруги $U = 10 \text{ В}$.

Розв'язання. Резонансна частота визначається за формулою

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{40 \cdot 10^{-3} 100 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ с}^{-1}.$$

Добротність контуру

$$q = \frac{\omega_{\text{рез}} \cdot L}{R} = 50.$$

Струм у контурі в режимі резонансу

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{0,4} = 25 \text{ А}.$$

Активна потужність

$$P = UI = 10 \cdot 25 = 250 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність конденсатора

$$Q_c = -I^2 X_c = 25^2 \cdot \frac{1}{500 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 12500 \text{ вар.}$$

Приклад 3.6. Визначити резонансні частоти струмів та напруг, якщо: $L_1 = 80 \text{ мГн}$; $L_2 = 60 \text{ мГн}$; $C = 80 \text{ мкФ}$.

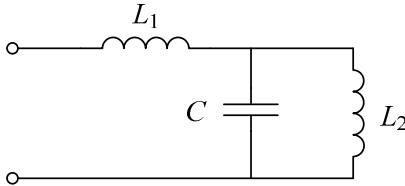


Рис. 3.31

Частота резонансу струмів

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = \frac{1}{\sqrt{60 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4,8 \cdot 10^{-6}}} = \frac{10^3}{2,19} = 0,456 \cdot 10^3 = 456 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Частота резонансу напруг визначається з умови

$$jX_{L1} + \frac{-jX_C jX_{L2}}{j(X_{L2} - X_C)} = 0,$$

звідси визначасмо

$$\begin{aligned} \omega_2^2 L_1 L_2 &= \frac{L_1 + L_2}{C}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = \sqrt{\frac{(80 + 60)10^{-3}}{80 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^{-6}}} = 604 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

3.11. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

1. Якими параметрами однозначно визначається синусоїдно змінна електрична величина?
2. У яких одиницях вимірюється кутова частота ω синусоїдної напруги?
3. Який зв'язок між частотою f змінного струму, вираженою в герцах, та кутовою частотою ω ?
4. Який зв'язок між кутовою частотою ω змінного струму та періодом T ?
5. Як визначити діюче значення синусоїдного струму?
6. Який фізичний зміст має діюче значення синусоїдного струму?
7. Яке співвідношення між діючим і амплітудним значеннями напруги?
8. Які елементи електричного кола називаються реактивними? Чому вони так називаються?
9. Як визначаються реактивні опори котушки та конденсатора?
10. Який зв'язок між напругою та струмом ідеальної котушки індуктивності?
11. Який зв'язок між напругою та струмом ідеального конденсатора?
12. Як визначити параметри заступної схеми котушки індуктивності?
13. Який кут зсуву фаз між напругою та струмом: а) резистора? б) котушки індуктивності? в) конденсатора?
14. У чому полягає суть символічного методу розрахунку електричних кіл синусоїдного струму?
15. У чому переваги подання синусоїдних електричних величин комплексними числами?
16. Чи справедливі закони Ома і Кірхгофа для діючих значень струмів та напруг?
17. Які є способи подання комплексної напруги та струму?
18. Як визначається повний комплексний опір двополюсника?
19. Як можна визначити кут φ зсуву фаз між напругою та струмом двополюсника?
20. Який характер може мати повний комплексний опір пасивного двополюсника?
21. Як визначити еквівалентну провідність двополюсника та її складові, якщо відомий комплексний опір?
22. Як обчислити енергію, яка виділяється у вигляді тепла у разі протікання струму через резистор з параметром R ?
23. За якою формулою визначається миттєва потужність двополюсника?
24. Які енергетичні процеси характеризує активна та реактивна потужності?
25. Як визначити активну, реактивну та повну потужності пасивного двополюсника?
26. Як визначити активну та реактивну складові струму пасивного двополюсника?
27. Як визначити активну, реактивну та повну потужності джерела електричної енергії?

28. Як скласти рівняння балансу потужностей в електричному колі синусоїдного струму?
29. Як визначити повну комплексну потужність пасивного двополюсника, якщо відомі комплексні значення струму та напруги?
30. Як обчислити покази ватметра, увімкненого в електричне коло синусоїдного струму?
31. Як і для чого прагнуть підвищувати коефіцієнт потужності ($\cos\varphi$) в електричних мережах змінного струму?
32. Який режим електричного кола змінного струму називається резонансним?
33. У якому електричному колі може виникати резонанс напруг, а в якому резонанс струмів?
34. Яка умова резонансу напруг?
35. Яка умова резонансу струмів?
36. Як визначається резонансна частота послідовного контуру?
37. За яких умов напруга на окремих елементах послідовного резонансного контуру перевищує напругу на вході кола?
38. Як визначається резонансна частота паралельного контуру?
39. Що називається характеристичним опором і як його визначають?
40. Що називається добротністю електричного контуру і як її визначають?
41. Як впливає активний опір на величину добротності послідовного контуру?
42. Чи змінюється добротність контуру у разі зміни частоти?
43. Який вигляд мають частотні характеристики струму в послідовному і паралельному контурах?
44. Яке співвідношення між активною і реактивною потужностями під час резонансу?
45. У чому полягає суть явища взаємоіндукції?
46. Чим відрізняється явище самоіндукції від явища взаємоіндукції?
47. Які затискачі називають одноіменними?
48. Що характеризує взаємна індуктивність двох котушок?
49. Як зміниться результуюча індуктивність двох котушок, якщо узгоджене з'єднання замінити на зустрічне?
50. За яких умов взаємна індуктивність між двома котушками дорівнюватиме нулю?

Екзаменаційні питання

1. Основні параметри, що характеризують електричні синусоїдні величини (ЕРС, напругу, струм).
2. Миттєві, середні та діючі значення синусоїдних струмів, напруг, ЕРС.
3. Відображення синусоїдних величин за допомогою комплексних чисел. Векторні діаграми.
4. Резистор у колі змінного струму.
5. Індуктивна котушка в колі змінного струму.
6. Конденсатор у колі змінного струму.
7. Закони Ома та Кірхгофа для електричних кіл змінного струму.
8. Активний, реактивний та повний опори двополюсника. Трикутник опорів.

9. Активна, реактивна та повна провідності двополюсника. Трикутник провідностей.
10. Символічний метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму.
11. Закони Ома та Кірхгофа для електричних кіл змінного струму в комплексній формі.
12. Заміна послідовної заступної схеми пасивного двополюсника паралельною і навпаки.
13. Комплексна заступна схема електричного кола.
14. Основні закони електричних кіл у комплексній формі.
15. Активна та реактивна складові напруги та струму двополюсника.
16. Активна, реактивна та повна потужності в колі змінного струму. Трикутник потужностей.
17. Вимірювання активної потужності. Покази ватметра. Комплексна потужність. Баланс потужностей.
18. Коефіцієнт потужності ($\cos \varphi$), його значення та способи покращення.
19. Явище та закон електромагнітної індукції. Власна та взаємна індуктивність. Коефіцієнт зв'язку.
20. Розрахунок електричних кіл з індуктивно-зв'язаними елементами.
21. Лінійний трансформатор. Принцип дії, рівняння, заступна схема.
22. Резонанс напруг. Характеристичний опір. Частотні характеристики. Добротність.
23. Резонанс струмів. Частотні характеристики.

Завдання для самостійної роботи

Задача 3.1. Визначити комплексний опір \underline{Z} , комплексну провідність \underline{Y} , зсув фаз між напругою та струмом, активну і реактивну складові струму пасивного двополюсника, якщо відомі комплексні значення напруги і струму на його затискачах: $\underline{U} = (80 + j60)$ В, $\underline{I} = (24 - j7)$ А.

Відповідь: $\underline{Z} = (2,4 + j3,2)$ Ом, $\underline{Y} = (0,15 - j0,2)$ См, $\varphi = 53^\circ$, $I_a = 15$ А, $I_p = 20$ А.

Задача 3.2. Котушка індуктивності, яка живиться від джерела напруги $u = 120 \sin 1000t$ В, споживає струм $i = 8 \sin(1000t - 53^\circ)$. Визначити параметри котушки (R , L), а також визначити миттєве значення струму за вдвічі меншої частоти прикладеної напруги.

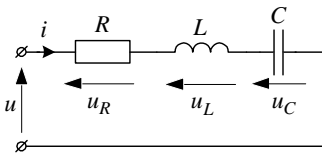
Відповідь: $R = 9$ Ом; $L = 12$ мГн; $i = 11,1 \sin(500t - 33,67^\circ)$.

Задача 3.3. Покази приладів, увімкнених на вході котушки індуктивності, яка живиться від джерела синусоїдної напруги з частотою 50 Гц , становлять: ватметра $P = 540 \text{ Вт}$; вольтметра $U = 150 \text{ В}$; амперметра $I = 6 \text{ А}$. Визначити параметри котушки (R, L).

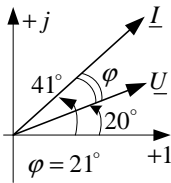
Відповідь: $R = 15 \text{ Ом}; L = 63,7 \text{ мГн}$.

Задача 3.4. Струм котушки індуктивності, яка живиться від джерела постійної напруги $U = 200 \text{ В}$, становить $I = 5 \text{ А}$, а у разі живлення від джерела змінної напруги з діючим значенням $U = 200 \text{ В}$ – $I = 4 \text{ А}$. Визначити параметри котушки (R, L), якщо частота змінної напруги 50 Гц .

Відповідь: $R = 40 \text{ Ом}; L = 95,5 \text{ мГн}$.



а

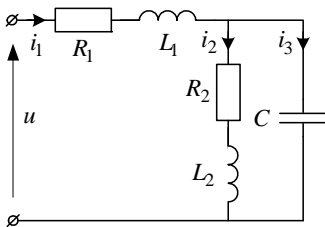


б

Задача 3.5. Визначити миттєве значення струму, активну, реактивну і повну потужності та зобразити на комплексній площині вектори напруги і струму, якщо: $u = 141 \sin(\omega t + 20^\circ) \text{ В}$; $R = 5 \text{ Ом}$; $L = 0,0191 \text{ Гн}$; $C = 398 \text{ мкФ}$; $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$

Відповідь: $i = 26,2 \sin(314t + 41^\circ) \text{ А}$;
 $P = 1727,94 \text{ Вт}$; $Q = -691,18 \text{ вар}$;
 $S = 1859,26 \text{ В}\cdot\text{А}$.

Векторну діаграму наведено на рис. б.

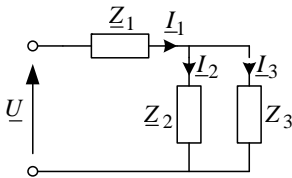


Задача 3.6. Визначити струми i_1, i_2, i_3 та активну потужності, яку споживає електричне коло, якщо: $u = 141 \sin \omega t \text{ В}$. $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$; $X_{L_1} = 5 \text{ Ом}$; $X_{L_2} = 2 \text{ Ом}$; $X_C = 2 \text{ Ом}$.

Відповідь: $P = 1600 \text{ Вт}$;
 $i_1 = 28,2 \sin(\omega t - 37^\circ) \text{ А}$;
 $i_2 = 28,2 \sin(\omega t - 127^\circ) \text{ А}$;
 $i_3 = 39,8 \sin(\omega t + 8^\circ) \text{ А}$.

Задача 3.7. Втрати в лінійній котушці індуктивності становлять $P = 0,625 \text{ Вт}$ за напруги $U = 12,75 \text{ В}$ і діючого значення струму $I = 0,25 \text{ А}$. Визначити добротність q котушки та величину ємності C конденсатора, який необхідно увімкнути послідовно до котушки індуктивності, щоб у разі частоти 50 Гц в колі виник резонанс напруг.

Відповідь: $C_1 = 63,7 \cdot 10^{-6}$; $q = 5$.



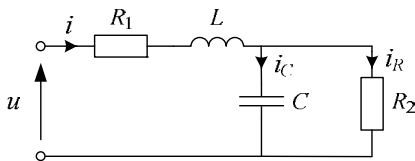
Задача 3.8. Визначити комплексні струми, активну і реактивну потужності, якщо: $Z_1 = (10 + j6) \text{ Ом}$; $Z_2 = (24 - j7) \text{ Ом}$; $Z_3 = (15 + j20) \text{ Ом}$; $U = 120 \text{ В}$.

Відповідь: $I_1 = 4,5e^{-j23^\circ 55'}$ А;

$I_2 = 2,74e^{j10^\circ 45'}$ А; $I_3 = 2,74e^{-j58^\circ 35'}$ А;

$P_1 = 202 \text{ Вт}$; $P_2 = 180 \text{ Вт}$; $P_3 = 112 \text{ Вт}$;

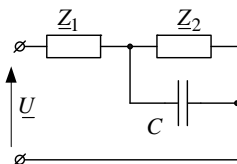
$Q_1 = 122 \text{ вар}$; $Q_2 = -52,5 \text{ вар}$; $Q_3 = 150 \text{ вар}$.



Задача 3.9. Визначити значення ємності C , за якого в колі виникає резонанс напруг, якщо $R_1 = 2,7 \text{ Ом}$; $R_2 = 3 \text{ Ом}$; $L = 0,286 \text{ мГн}$, $f = 500 \text{ Гц}$

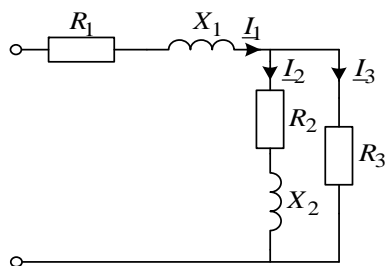
Відповідь: $C_1 = 35,33 \text{ мкФ}$;

$C_2 = 318 \text{ мкФ}$.



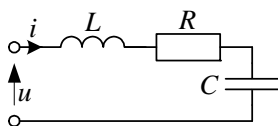
Задача 3.10. Електричне коло, яке складається з двох послідовно з'єднаних комплексних опорів $Z_1 = (3 + j13) \text{ Ом}$ і $Z_2 = (10 + j40) \text{ Ом}$ живиться від джерела синусоїдної напруги з частотою 50 Гц . Визначити значення ємності конденсатора, який необхідно увімкнути паралельно до Z_2 , щоб струм у нерозгалуженій частині кола збігався за фазою з прикладеною напругою.

Відповідь: $C = 318,5 \text{ мкФ}$.



Задача 3.11. Яким повинно бути значення активного опору R_3 , увімкненого паралельно до вітки з опором $Z_2 = (20 + j10) \text{ Ом}$, щоб струм, який протікає через нього, відставав від прикладеної до електричного кола напруги на кут $\pi/4$, якщо $Z_1 = (3 + j9) \text{ Ом}$.

Відповідь: $R_3 = 10 \text{ Ом}$.



Задача 3.12. Визначити резонансну частоту $\omega_{рез}$, добротність, вхідний опір, струм, напруги на резисторі, котушці та конденсаторі, а також споживану активну потужність і реактивну потужність конденсатора в режимі резонансу, якщо $R = 0,4 \text{ Ом}$, $L = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, а діюче значення напруги $U = 10 \text{ В}$.

Відповідь: $\omega_{рез} = 500 \text{ с}^{-1}$; добротність $q = 50$; $Z_{вх} = 0,4 \text{ Ом}$. $I = 25 \text{ А}$;

$U_R = 10e^{j0^\circ} \text{ В}$; $U_L = 500e^{j90^\circ} \text{ В}$; $U_C = 500e^{-j90^\circ} \text{ В}$; $P = 250 \text{ Вт}$;
 $Q_C = 12,5 \text{ Квар}$.

Задача 3.13. Індуктивність котушки $L = 4,2 \text{ мГн}$, повний опір $Z = 100 \text{ Ом}$ за частоти напруги живлення $f = 2,5 \text{ кГц}$. Визначити величину ємності C конденсатора, який необхідно під'єднати паралельно до котушки для того, щоб у колі виник резонанс струмів. Знайти діюче значення струмів у вітках та повну потужність, якщо $U = 150 \text{ В}$.

Відповідь: $C = 0,42 \text{ мкФ}$; $I = 1,128 \text{ А}$; $1,5$; $0,99 \text{ А}$; $S = 169,2 \text{ В}\cdot\text{А}$.

Задача 3.14. Електричне коло складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивності та конденсатора і живиться від джерела синусоїдної напруги $U = 120 \text{ В}$ промислової частоти. Визначити резо-

напругу частоту струм і напруги на окремих елементах заступної схеми, якщо частота напруги живлення дорівнює резонансній, а, $X_L = 20 \text{ Ом}$; $X_C = 500 \text{ Ом}$; $R = 10 \text{ Ом}$.

Відповідь: $f_{рез} = 248,5 \text{ Гц}$; $I = 12 \text{ А}$; $U_R = 120 \text{ В}$; $U_L = U_C = 1200 \text{ В}$.

Задача 3.15. Котушка індуктивності за діючих значень напруги $U = 200 \text{ В}$ і струму $I = 0,25 \text{ А}$ споживає потужність $P = 20 \text{ Вт}$. Визначити величину ємності C конденсатора, який необхідно увімкнути послідовно до котушки індуктивності, щоб за частоти 50 Гц у колі виник резонанс напруг.

Відповідь: $C = 4,34 \text{ мкФ}$.

Розділ 4

ТРИФАЗНІ КОЛА

4.1. Основні поняття та визначення

Сукупність кількох однофазних кіл, у яких діють зсунені за фазою одна щодо іншої ЕРС однакової частоти, які створені одним джерелом енергії, називають багатофазним електричним колом. Окремі частини цього кола називають **фазами**. Отже, поняття фази в електротехніці має подвійне значення: аргумент $(\omega t + \psi)$ синусоїдно змінної величини (див. п. 3.1) і частина багатофазної системи електричного кола. Зсув фаз між ЕРС, напругами та струмами m -фазної системи становить $2\pi/m$. Багатофазну систему називають незв'язаною, якщо окремі фази не мають між собою електричного зв'язку (рис. 4.1).

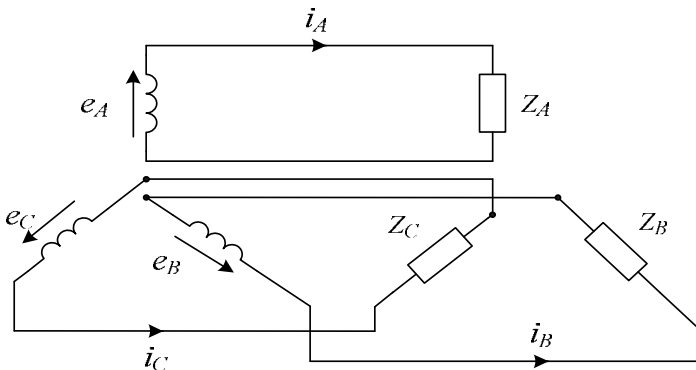


Рис. 4.1

З'єднання кожної фази зі споживачем за допомогою двох окремих проводів економічно недоцільно. З метою зменшення кількості з'єднувальних проводів застосовують зв'язані багатофазні системи, в яких фази з'єднані між собою відповідним способом в одне багатофазне електричне коло. Економія провідникових матеріалів є однією з переваг багатофазних систем.

Розрізняють симетричні і несиметричні багатофазні електричні кола. Коло симетричне, якщо симетрична система ЕРС (напруг) і симетричне навантаження, тобто однакові комплексні опори фаз. Іншою важливою ознакою класифікації багатофазних систем є зрівноваженість. Якщо миттєве значення потужності багатофазної системи не залежить від часу, її називають зрівноваженою, а якщо є функцією часу, то незрівноваженою. Ця властивість є важливою, оскільки момент на валу багатофазного двигуна як елемента зрівноваженої багатофазної системи не змінюється під час обертання його ротора. Зокрема, в однофазному генераторі миттєве значення потужності змінюється з частотою 2ω . Теоретично зрівноважені системи можливі за кількості фаз $m > 2$, однак можна довести, що несиметрична система ЕРС зі зсувом фаз $\pi/2$ зрівноважена за рівномірного навантаження фаз.

В електроенергетиці широкого застосування набули трифазні кола (трифазні електричні машини, трифазні лінії електропередавання тощо). Майже всю електричну енергію виробляють за допомогою трифазних генераторів і передають до споживачів за допомогою трифазних електричних мереж. Від трифазної мережі живляться не тільки трифазні, але й однофазні споживачі. Характерною ознакою трифазного кола є наявність у ньому трифазного джерела, в якому діють синусоїдні ЕРС однакової частоти, які зсунені між собою за фазою на незмінний у часі кут. Сукупність ЕРС, які діють у трифазному електричному колі, називають **трифазною системою** ЕРС, а сукупність струмів і напруг у її фазах – трифазною системою відповідно струмів і напруг. Трифазна система синусоїдних ЕРС (струмів) називається **симетричною**, якщо вони мають однакові амплітуди і зсунені між собою за фазою на однаковий кут $\alpha = 2\pi/3$.

Трифазне коло складається з трьох основних частин: джерела трифазної системи ЕРС, лінії передавання та одного або

кількох трифазних приймачів. Джерелом енергії у трифазному колі слугує трифазний генератор, який має три обмотки на статорі, початки яких позначимо літерами A , B , C , а кінці – X , Y , Z . Оскільки осі обмоток статора зсунені в просторі на кут $2\pi/3$, то під час обертання ротора, який є електромагнітом, у них індукуються ЕРС, що мають однакові амплітуди і зсунені в часі за фазою на кут $2\pi/3$.

Трифазну систему ЕРС генератора можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} e_A &= E_{m_A} \sin \omega t; & e_B &= E_{m_B} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \\ e_C &= E_{m_C} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Часові діаграми для симетричної ($E_{m_A} = E_{m_B} = E_{m_C} = E_m$) трифазної системи ЕРС зображені на рис. 4.2, *а*, а відповідна векторна діаграма – на рис. 4.2, *б*.

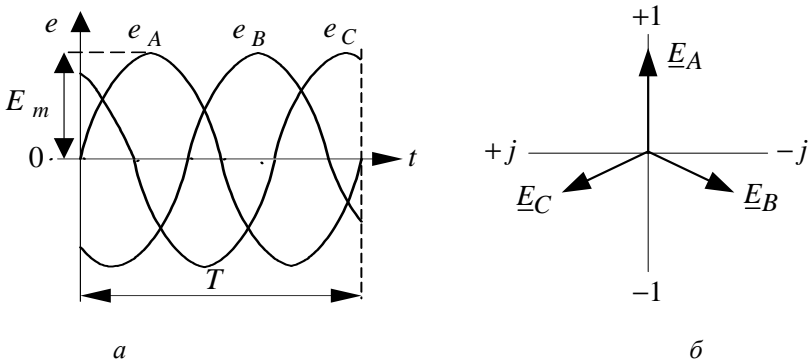


Рис. 4.2

Для скорочення математичного запису комплексних значень напруг та струмів у трифазних колах застосовують комплексну величину

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (4.2)$$

яку називають оператором трифазної системи. Множення вектора на \underline{a} рівноцінно його повороту на кут $2\pi/3$ проти годинникової стрілки без зміни його модуля. Очевидно, що

$$\underline{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0.$$

Користуючись оператором \underline{a} , можна виразити ЕРС фаз B та C через ЕРС фази A

$$\underline{E}_B = \underline{a}^2 \underline{E}_A; \quad \underline{E}_C = \underline{a} \underline{E}_A. \quad (4.3)$$

Для трифазної системи важливо, в якій послідовності ЕРС фаз набувають однакових значень, наприклад, додатних максимумів. Цю послідовність називають порядком чергування фаз, або, просто, послідовністю фаз. Послідовність $ABCA\dots$ має назву **прямой послідовності**. Послідовність $ACBA\dots$ має протилежний порядок чергування фаз і називається **зворотною послідовністю**.

У симетричній трифазній системі ЕРС фаз можна зобразити як такі, що рівні за амплітудою і відстають за фазою одна щодо іншої на кути, які дорівнюють $2\pi k/3$, де $k=0, 1, 2$. При $k=1$ одержуємо симетричну систему прямої послідовності, в якій ЕРС досягають максимумів в порядку ABC , тобто

$$\underline{E}_{A1} = \underline{E}; \quad \underline{E}_{B1} = \underline{a}^2 \underline{E}_{A1}; \quad \underline{E}_{C1} = \underline{a} \underline{E}_{A1}. \quad (4.4a)$$

При $k=2$ одержимо симетричну систему зворотної послідовності

$$\underline{E}_{A2} = \underline{E}; \quad \underline{E}_{B2} = \underline{a} \underline{E}_{A2}; \quad \underline{E}_{C2} = \underline{a}^2 \underline{E}_{A2}, \quad (4.4b)$$

в якій ЕРС фаз досягають максимумів у зворотному порядку.

При $k=0$ одержимо систему **нульової** послідовності, в якій ЕРС усіх трьох фаз досягають максимумів одночасно. Її можна записати у вигляді

$$\underline{E}_{A0} = \underline{E}_{B0} = \underline{E}_{C0} = \underline{E}_0. \quad (4.4b)$$

Усе наведене стосовно ЕРС стосується також трифазних систем напруг та струмів. Відзначимо, що для симетричних систем прямої та зворотної послідовностей сума ЕРС усіх фаз дорівнює нулю, а для нульової послідовності – $3\underline{E}$, оскільки вони мають однакові початкові фази.

Режим роботи трифазного кола називається *симетричним*, якщо в ньому симетричні усі трифазні навантаження і діє симетрична система ЕРС. У цьому разі струми і напруги утворюють також симетричні системи.

Основні положення. Багатофазна система складається з однофазних кіл, у яких діють синусоїдні ЕРС однакової частоти, зсунені між собою за фазою, які створені одним багатофазним джерелом енергії.

Найпоширенішою у промисловості є трифазна електрична мережа, яка дає змогу зменшити кількість проводів у разі пересилання електричної енергії, а отже, є найекономічнішою. Крім того, вона дає змогу використовувати трифазні двигуни змінного струму.

Трифазні електричні кола можуть бути симетричними і несиметричними, зрівноваженими і незрівноваженими. У зрівноважених трифазних електричних колах миттєве значення потужності є сталою величиною, тобто не залежить від часу.

Трифазна система ЕРС (напруг, струмів) характеризується послідовністю чергування фаз. Розрізняють **пряму, зворотну і нульову послідовності**.

4.2. Способи з'єднання фаз у трифазних колах

Загальноприйнято на електричній схемі трифазний генератор зображувати у вигляді трьох обмоток, розміщених під кутом 120° одна щодо іншої (рис. 4.3). Додатні напрямки ЕРС фаз генератора прийнято спрямовувати від кінців фаз (X , Y , Z) до їх початків (A , B , C), струмів у лінійних проводах – від джерела щодо приймача, а в нейтральному проводі – від нейтральної точки приймача до нейтральної точки джерела.

Відомо два основних способи з'єднання обмоток генератора, трансформатора та приймачів у трифазних колах: **зіркою і трикутником**, які дають змогу зменшити кількість проводів, що необхідні для з'єднання генератора з навантаженням у незв'язаній трифазній системі, з шести до трьох або чотирьох. Вітки зірки та трикутника називаються **фазами**. Відповідно струми,

напруги, потужності окремих фаз називають фазними величинами (I_ϕ , U_ϕ , E_ϕ , P_ϕ , Q_ϕ , S_ϕ).

З'єднання зіркою передбачає, що кінці фаз генератора (споживача) об'єднують в один вузол N , який називається *нейтральною* точкою або, просто, **нейтраллю**. Провід, що з'єднує нейтральні точки генератора (N) та приймача (N'), називається нейтральним (нульовим) проводом. Решта три проводи, які з'єднують генератор з приймачем, називають *лінійними*. Напруга між початком і кінцем однієї фази називається **фазною**, а між кінцями різних фаз – *лінійною*. Напруги між лінійними проводами і струми в цих проводах називають відповідно лінійними напругами та струмами (U_Δ , I_Δ). У разі з'єднання зіркою (рис. 4.3) лінійні напруги (ЕРС) визначаються як різниці фазних напруг

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A, \quad (4.5)$$

а їхні додатні напрямки (як різниця двох векторів) спрямовані від другого індекса до першого.

Трифазну лінію з нейтральним проводом називають **чотирипровідною**, а без нього – **трипровідною**. Зображену на рис. 4.3 схему електричного кола, в якій фази генератора та приймача з'єднані зіркою, називають “**зірка–зірка**” з нульовим проводом. Особливістю чотирипровідної лінії є те, що зміна навантаження в одній фазі не впливає на роботу інших фаз, тому що нейтральний провід забезпечує незмінність напруг на них.

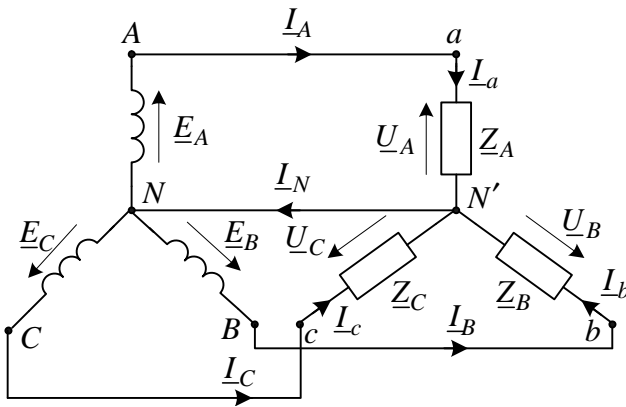


Рис. 4.3

З'єднання обмоток генератора трикутником передбачає, що кінець першої обмотки з'єднується з початком другої, кінець другої – з початком третьої, а кінець третьої – з початком першої. В результаті три фази утворюють замкнений трикутник. За такою ознакою формується з'єднання трикутником і приймача. Спільні точки кожної пари фаз з'єднуються з навантаженням за допомогою лінійних проводів (рис. 4.4). Таке з'єднання називають “трикутник-трикутник”. Додатний напрямок струмів у вітках трикутника приймача вибиратимемо у напрямі $abca$. Отже, на відміну від зірки, струм у трикутнику позначають літерою з двома індексами, які вказують на умовно додатні напрямки струму. Наприклад, позначення \underline{I}_{ab} означає, що додатний напрямок струму від точки “a” до точки “b”.

Зауважимо, що з'єднання обмоток генератора трикутником не є коротким замиканням, оскільки за симетричної системи ЕРС їх сума в контурі дорівнює нулю, тому, якщо до вершин ABC трикутника не під'єднане навантаження, то по обмотках генератора струм не протікає.

Способи з'єднання фаз джерел і приймачів не залежать один від одного. В одному і тому самому колі джерела живлення та приймачі можуть бути з'єднані різними способами. Якщо з генератором з'єднане лише одне трифазне навантаження, можуть існувати з'єднання, які називаються: “зірка – трикутник”, “трикутник – зірка”, “зірка – зірка”, “трикутник – трикутник”, причому з'єднання “зірка – зірка” може бути як з нейтральним проводом, так і без нього.

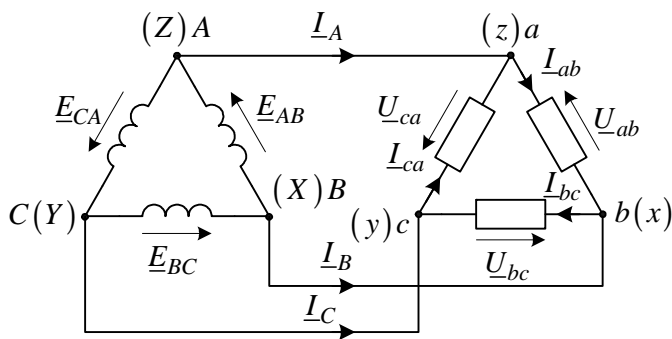


Рис. 4.4

Основні положення. Є два способи з'єднання фаз генератора та навантаження у трифазних колах: зіркою і трикутником.

У трифазному колі розрізняють фазні та лінійні ЕРС, напруги та струми. Співвідношення між ними визначається способом з'єднання. Спосіб з'єднання фаз приймача не залежить від способу з'єднання фаз генератора.

Фазна напруга – це напруга між початком і кінцем однієї фази, а лінійна – між початками (кінцями) різних фаз. Фазні струми – це струми у фазах навантаження чи генератора, а лінійні – це струми у лінійних проводах.

У разі з'єднання зіркою трифазна мережа може бути три- або чотирипровідною. Особливістю чотирипровідної лінії є те, що зміна навантаження в одній фазі не впливає на роботу інших фаз, тому що нейтральний провід забезпечує незмінність напруг на них.

4.3. Розрахунок трифазних кіл

4.3.1. З'єднання “зірка – зірка”. Трифазні кола формально нічим не відрізняються від складних однофазних. Для їх аналізу придатні всі методи розрахунку складних електричних кіл. Проте, враховуючи особливість процесів, що відбуваються в окремих частинах трифазних кіл, можна істотно зменшити обсяг розрахунків і спростити їх аналіз.

Розглянемо трифазне коло, в якому фази генератора і приймача з'єднані зіркою з нульовим проводом (рис. 4.3). Зазвичай опори проводів значно менші від опорів фаз приймача, тому їх можна здебільшого не враховувати. У цьому разі фазні напруги споживача дорівнюватимуть відповідним фазним напругам джерела (генератора чи вторинної обмотки трансформатора), тобто $\underline{U}_a = \underline{U}_A$, $\underline{U}_b = \underline{U}_B$, $\underline{U}_c = \underline{U}_C$. Якщо комплексні опори фаз приймача відповідно дорівнюють \underline{Z}_a , \underline{Z}_b , \underline{Z}_c , то, прийнявши таким, що дорівнює нулю опір нейтрального проводу, одержуємо

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}. \quad (4.6)$$

У симетричному трифазному колі ($\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$) у разі з'єднання фаз генератора зіркою лінійні напруги ($\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$) за модулем в $\sqrt{3}$ разів більші від фазних ($\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$), а діючі значення лінійних струмів (I_A, I_B, I_C) дорівнюють діючим значенням фазних струмів, тобто

$$U_l = \sqrt{3}U_\phi, \quad I_l = I_\phi.$$

За першим законом Кірхгофа струм у нульовому провіднику дорівнює сумі струмів фаз

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

Якщо трифазне коло симетричне, то струми $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ будуть однакові за діючим значенням і відставати за фазою від відповідних напруг на однаковий кут φ (рис. 4.5), величина якого визначається комплексним опором навантаження \underline{Z} . Отже, їх сума дорівнює нулю ($I_N = 0$), звідки випливає, що у разі симетричного навантаження струм у нульовому провіднику не протікає, а отже, він не потрібний. У цьому разі достатньо знайти струм в одній фазі, оскільки решта струмів будуть такими самими за величиною, і зсунені за фазою на кут $2\pi/3$. Тому їх можна визначити на підставі струму фази А за формулами $\underline{I}_B = \underline{a}^2 \underline{I}_A$;

$$\underline{I}_C = \underline{a} \underline{I}_A.$$

Векторна діаграма напруг та струмів зображена на рис. 4.5.

Розглянемо особливості розрахунку несиметричних трифазних кіл за з'єднання джерела та приймача зіркою (рис. 4.6). Такий спосіб з'єднання у трифазних мережах є найпоширенішим, тому таку схему можна розглядати як базову.

На рис. 4.6 позначено: $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$ – система фазних ЕРС джерела; $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}, \underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ – системи лінійних

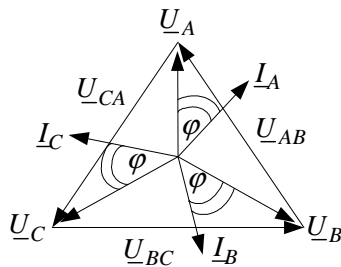


Рис. 4.5

напруг джерела та приймача відповідно; $\underline{Z}_{\Gamma A}$, $\underline{Z}_{\Gamma B}$, $\underline{Z}_{\Gamma C}$, $\underline{Z}_{\lambda A}$, $\underline{Z}_{\lambda B}$, $\underline{Z}_{\lambda C}$, \underline{Z}_a , \underline{Z}_b , \underline{Z}_c , \underline{Z}_N – комплексні опори фаз відповідно генератора, лінії, навантаження та нейтрального проводу; \underline{U}_a , \underline{U}_b , \underline{U}_c , \underline{I}_a , \underline{I}_b , \underline{I}_c – системи фазних напруг та струмів приймача; \underline{I}_N – струм нейтрального проводу; $\underline{U}_{N'N}$ – напруга між нейтральними точками приймача та генератора.

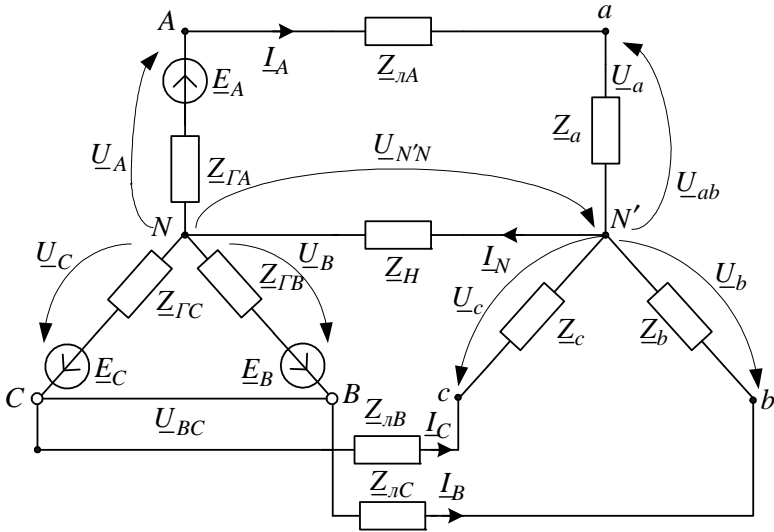


Рис. 4.6

Для розрахунку, зображеного на рис. 4.6 трифазного кола, доцільно скористатись методом вузлових напруг, згідно з яким напругу між нульовими точками генератора та приймача визначають за формулою

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}_A \underline{E}_A + \underline{Y}_B \underline{E}_B + \underline{Y}_C \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (4.7)$$

де

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma A} + \underline{Z}_{\lambda A} + \underline{Z}_a}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma B} + \underline{Z}_{\lambda B} + \underline{Z}_b}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma C} + \underline{Z}_{\lambda C} + \underline{Z}_c}$$

– комплексні провідності фаз; \underline{Y}_N – комплексна провідність нейтрального проводу.

Якщо нейтральний провід відсутній, то у формулі (4.7) необхідно прийняти $\underline{Y}_N = 0$.

Струми генератора, лінії та приймача визначають за формулами

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_a = \underline{Y}_A (\underline{E}_A - \underline{U}_{N'N}); \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_b = \underline{Y}_B (\underline{E}_B - \underline{U}_{N'N}); \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_c = \underline{Y}_C (\underline{E}_C - \underline{U}_{N'N}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Як впливає з формули (4.7), у разі симетричного навантаження ($\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C$) напруга $\underline{U}_{N'N}$ дорівнює нулю і формули (4.8) збігаються з формулами (4.6).

З урахуванням того, що опори фаз генератора \underline{Z}_G і лінії \underline{Z}_l значно менші від опорів навантаження, а системи фазних та лінійних напруг генератора симетричні, на рис. 4.7 побудована векторна діаграма напруг для зображеної на рис. 4.6 схеми. З метою спрощення під час побудови діаграми прийнято, що $\underline{Z}_G \cong 0$, $\underline{Z}_l \cong 0$, отже, точки $A - a$, $B - b$, $C - c$ на векторній діаграмі збігаються.

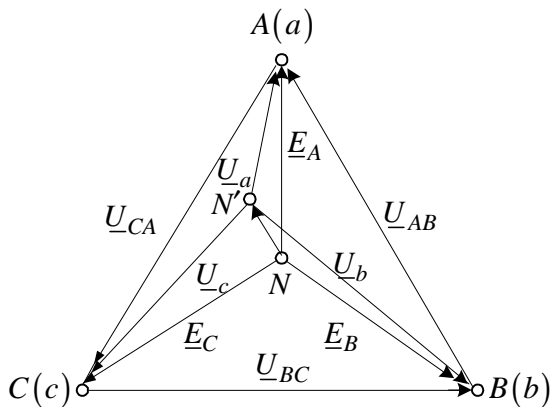


Рис. 4.7

Поза тим, як видно з рис. 4.7, у разі несиметричного навантаження фаз, не зважаючи на симетрію напруги живлення, система фазних напруг приймача стає несиметричною, а це зумовлює появу напруги між нейтральними точками приймача та

генератора, тобто $U_{N'N} \neq 0$. Таке явище називається *перекосом* напруг. За заданих значень опорів (провідностей) фаз приймача зменшення перекосу напруг можна досягти, як видно з (4.7), за рахунок збільшення провідності Y_N нейтрального проводу. Отже, призначення нейтрального проводу – *симетрувати* систему фазних напруг за довільних значень опорів приймача.

До чотирипровідних трифазних ліній часто під'єднують однофазні споживачі, кожен з яких вмикають між затискачами однієї з фаз і нейтральним проводом, завдяки чому кожен споживач перебуває під однаковою напругою. Це було б неможливим без наявності нульового проводу, оскільки у цьому разі зміщується нейтральна точка N' і, як наслідок, напруги на приймачах різних фаз були б різними. За наявності нейтрального проводу система фазних напруг приймача залишається практично симетричною, незалежно від опорів окремих фаз приймача, а зміна опорів приймача в одній фазі не впливає на роботу інших фаз приймача.

4.3.2. З'єднання “трикутник – трикутник”. Розглянемо особливості розрахунку трифазних кіл за з'єднання фаз джерела та приймача трикутником (рис. 4.8). У цьому разі фазна напруга дорівнює лінійній. Фазні струми приймача визначаються за формулами

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}. \quad (4.9)$$

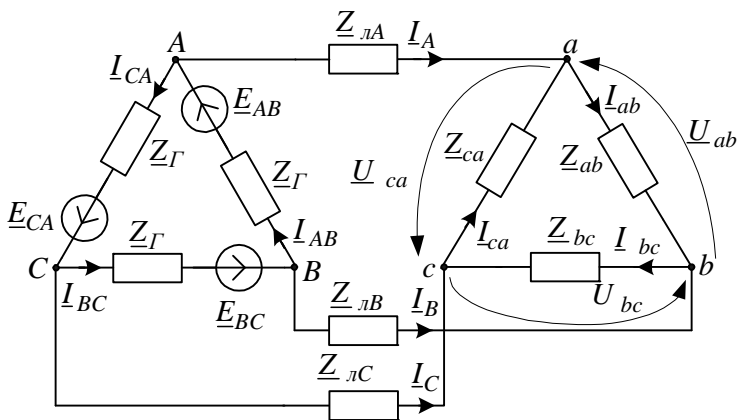


Рис. 4.8

Залежність між лінійними та фазними струмами при з'єднанні навантаження трикутником визначається за першим законом Кірхгофа для кожного вузла

$$\underline{I}_A = I_{ab} - I_{ca}; \quad \underline{I}_B = I_{bc} - I_{ab}; \quad \underline{I}_C = I_{ca} - I_{bc}. \quad (4.10)$$

У симетричному трифазному колі при з'єднанні приймача трикутником діючі значення струмів фаз навантаження можна знайти, поділивши на $\sqrt{3}$ діючі значення лінійних струмів, тобто $I_\phi = I_\ell / \sqrt{3}$.

Симетричну трифазну систему ЕРС генератора, незалежно від способу з'єднання його фаз, можна розглядати або як систему фазних, або як систему лінійних напруг. Здебільшого джерела живлення працюють у режимі заданих напруг, тобто лінійні напруги залишаються незмінними у разі зміни струмів навантаження. У разі роботи джерела в режимі заданої напруги немає потреби зображати схеми сполучення обмоток генератора, а достатньо задати систему лінійних (рис. 4.9) або фазних (рис. 4.10) напруг.

Визначивши лінійні струми \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C , відповідно до (4.9), (4.10), розраховуємо лінійні напруги приймача за формулами

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_a \underline{I}_A - \underline{Z}_b \underline{I}_B;$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{Z}_b \underline{I}_B - \underline{Z}_c \underline{I}_C;$$

$$\underline{U}_{ca} = \underline{Z}_c \underline{I}_C - \underline{Z}_a \underline{I}_A.$$

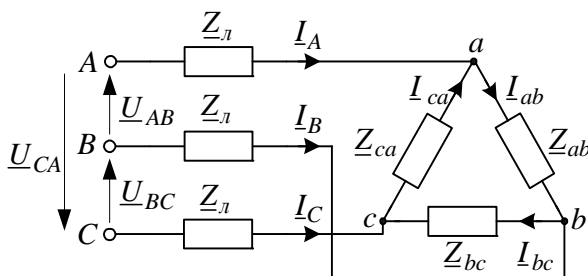


Рис. 4.9

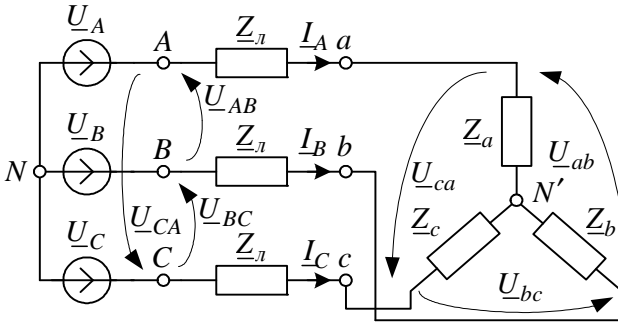


Рис. 4.10

Основні положення. У симетричних трифазних колах напруги між нейтральми дорівнюють нулю, тому для їх розрахунку достатньо визначити струм в одній фазі: струми в решті фаз будуть такими самими за діючим значенням, але зсунені за фазою на кут $2\pi/3$.

Якщо трифазне електричне коло несиметричне, то у разі з'єднання зіркою без нульового проводу напруга між нейтральними точками генератора і споживача не дорівнює нулю.

Напругу між нейтральми можна знайти за методом вузлових напруг, що дає змогу обчислити струми у фазах.

Якщо трифазне навантаження з'єднане трикутником, то його доцільно замінити еквівалентною зіркою.

4.4. Потужності у трифазних колах

Миттєва потужність трифазного кола дорівнює сумі миттєвих потужностей окремих фаз

$$P_{3\phi} = P_a + P_b + P_c = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c. \quad (4.11)$$

Для симетричного трифазного кола

$$\begin{aligned} P_a &= U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos(2\omega t - \varphi); \\ P_b &= U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right); \\ P_c &= U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Підставивши (4.12) у (4.11), одержуємо для миттєвої потужності вираз

$$P_{3\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi, \quad (4.13)$$

з якого випливає важливий висновок: *миттєве значення потужності у симетричному трифазному колі, не залежить від часу.* Цей факт є основою для створення трифазних асинхронних двигунів, оскільки утворюваний у них електромагнітний момент не залежить від кута повороту ротора.

Активна потужність трифазного приймача дорівнює сумі активних потужностей окремих фаз

$$P_{3\phi} = P_a + P_b + P_c = U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c. \quad (4.14)$$

Зокрема, для симетричного трифазного кола

$$U_a = U_b = U_c = U_{\phi}; \quad I_a = I_b = I_c = I_{\phi}; \quad \varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi.$$

Отже,

$$P_{3\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi. \quad (4.15)$$

На практиці прийнято потужність трифазного кола виражати через лінійні струми та напруги. Оскільки у разі з'єднання зіркою $I_{\phi} = I_l$, $U_{\phi} = U_l / \sqrt{3}$, а у разі сполучення трикутником навпаки: $U_{\phi} = U_l$, $I_{\phi} = I_l / \sqrt{3}$, то вираз (4.15) набуває вигляду

$$P_{3\phi} = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi. \quad (4.16)$$

Формула (4.16) справедлива для визначення потужності через лінійні струми та напруги незалежно від способу з'єднання фаз приймача.

Реактивна потужність трифазного приймача дорівнює алгебричній сумі реактивних потужностей окремих фаз

$$Q_{3\phi} = Q_a + Q_b + Q_c = U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c. \quad (4.17)$$

Для симетричного трифазного кола

$$Q_{3\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi. \quad (4.18)$$

Повна потужність симетричного трифазного кола визначається за формулою

$$S_{3\phi} = \sqrt{3}U_l I_l. \quad (4.19)$$

Основні положення. У симетричному трифазному колі сума миттєвих значень потужностей фаз – величина стала, що важливо для нормальної роботи трифазних двигунів.

Активна, реактивна та повна потужності у трифазному колі визначаються як сума активних, реактивних та повних потужностей окремих фаз.

4.5. Вимірювання потужності у трифазних колах

На рис. 4.11 наведено схему вимірювання активної потужності в несиметричному трифазному колі з нульовим проводом за допомогою трьох однофазних ватметрів, яка придатна як для симетричного, так і несиметричного навантаження.

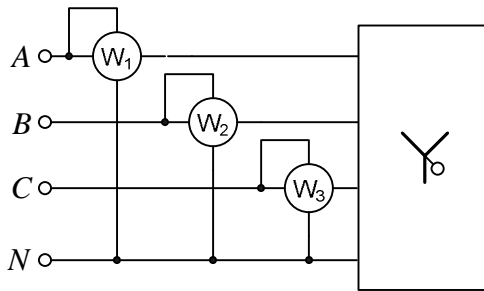


Рис. 4.11

Активна потужність трифазного кола дорівнює сумі показів трьох ватметрів

$$P_{\phi} = P_{W_1} + P_{W_2} + P_{W_3} . \quad (4.20)$$

Для симетричного кола покази ватметрів будуть однакові, тому достатньо виміряти потужність тільки в одній фазі.

У разі вимірювання потужності за схемою рис. 4.11 кожен ватметр вимірює потужність відповідної фази, оскільки до нього прикладена відповідна фазна напруга і протікає фазний струм.

У практиці експлуатації трифазних мереж нейтральний провід є не завжди. За відсутності доступу до нейтралі виміряти потужність можна за допомогою двох ватметрів, увімкнених

згідно з наведеною на рис. 4.12 схемою (схема Арона), яка придатна як для симетричних, так і несиметричних трипровідних кіл. Обґрунтуємо цей метод.

Відповідно до рис. 4.12 покази ватметрів визначають за формулами

$$P_{W1} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{AB} \underline{I}_A^*); \quad P_{W2} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{CB} \underline{I}_C^*). \quad (4.21)$$

Виразимо лінійні напруги через фазні $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B$; $\underline{U}_{CB} = \underline{U}_C - \underline{U}_B$ і обчислимо суму показів ватметрів з урахуванням того, що $\underline{I}_A - \underline{I}_C = \underline{I}_B$. У результаті одержимо

$$\begin{aligned} P_{W1} + P_{W2} &= \operatorname{Re}[(\underline{U}_A - \underline{U}_B) \underline{I}_A^* + (\underline{U}_C - \underline{U}_B) \underline{I}_C^*] = \\ &= \operatorname{Re}[\underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^*] = P_A + P_B + P_C. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отже, сума показів двох ватметрів дорівнює активній потужності трифазного приймача. До того ж, на відміну від схеми (4.11), у цьому разі покази окремого ватметра не є потужністю відповідної фази, а сенс має тільки алгебрична сума показів обох ватметрів

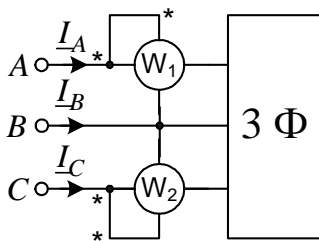


Рис. 4.12

Для симетричного кола формула (4.22) набуває вигляду

$$P_{3\phi} = P_{W1} + P_{W2} = U_{л} I_{л} \cos(\varphi - 30^\circ) + U_{л} I_{л} \cos(\varphi + 30^\circ). \quad (4.23)$$

звідки випливає, що при $|\varphi| > 60^\circ$, покази приладів матимуть протилежні знаки. Отже, активна потужність дорівнює **алгебричній сумі** показів двох ватметрів. Знак вимірюваної аналоговим ватметром потужності визначають так. Якщо стрілка одного з ватметрів прагне відхилитися в протилежний бік, незважаючи на правильне

його під'єднання, необхідно змінити на протилежну полярність вмикання однієї з обмоток ватметра і виміряну потужність вважати від'ємною.

Насамкінець відзначимо, що у промисловості застосовують трифазні ватметри, які дають змогу виміряти сумарну потужність усіх трьох фаз, незалежно від симетрії навантаження.

Основні положення. *Активну потужність трифазного споживача можна виміряти:*

а) за допомогою трьох однофазних ватметрів за наявності нейтрального проводу;

б) за допомогою двох ватметрів, якщо відсутній нейтральний провід.

У першому випадку покази кожного з трьох ватметрів – це потужності відповідних фаз. У другому – сенс має тільки алгебрична сума показів обох ватметрів, яка є сумарною потужністю трьох фаз.

За симетричного навантаження і наявності нейтрального проводу для вимірювання активної потужності достатньо одного однофазного ватметра, оскільки покази усіх трьох ватметрів однакові. У разі відсутності нейтрального проводу як для симетричного, так і несиметричного навантаження для вимірювання активної потужності використовують метод двох ватметрів.

У загальному випадку багатофазної системи для вимірювання активної потужності необхідно мати таку кількість однофазних ватметрів, яка на одиницю менша від кількості проводів лінії пересилання.

4.6. Метод симетричних складових

4.6.1. Основні поняття та визначення. Для розрахунку і аналізу роботи несиметричних трифазних кіл здебільшого застосовують метод **симетричних складових**. Суть його полягає в розкладанні несиметричної трифазної системи векторів (комплексних відображень ЕРС, ДС, напруг та струмів) на три симетричні трифазні системи: **прямої, зворотної та нульової** послідовностей. Їх називають симетричними складовими, а відріз-

няються вони **порядком чергування** фаз (див. п. 4.1). Несиметричну трифазну систему векторів ЕРС, напруг та струмів фаз одержують як суму векторів відповідних складових, тобто метод симетричних складових має в своїй основі принцип накладання, тому правомірний лише для лінійних трифазних кіл.

У системі прямої послідовності ЕРС (струми, напруги) набувають максимумів у фазі А, потім у В, потім у С, а в системі зворотної послідовності – після фази А максимум настає в фазі С, а потім у В. На відміну від прямої і зворотної послідовностей, у нульовій послідовності максимуми у всіх трьох фазах настають одночасно, тобто чергування відсутнє. Величини, які належать до систем прямої, зворотної та нульової послідовностей прийнято позначати відповідно індексами 1, 2, 0. На рис. 4.13 наведено приклад векторних діаграм ЕРС симетричних складових усіх трьох послідовностей.

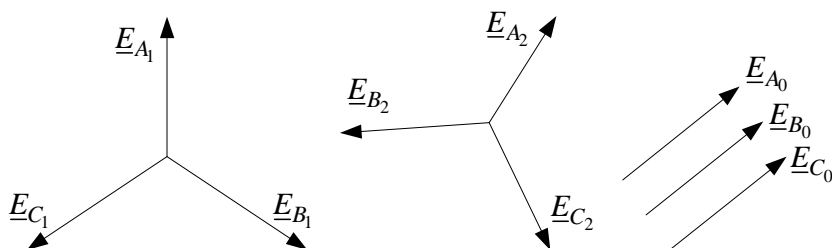


Рис. 4.13

Між реальними ЕРС, напругами та струмами фаз і їх симетричними складовими існує однозначний зв'язок. Для прикладу, запишемо формули переходу від векторів \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C струмів фаз до їх симетричних складових \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_0 , користуючись оператором \underline{a} (див. 4.2),

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{1}{3}(\underline{I}_A + \underline{a}\underline{I}_B + \underline{a}^2\underline{I}_C); \\ \underline{I}_2 &= \frac{1}{3}(\underline{I}_A + \underline{a}^2\underline{I}_B + \underline{a}\underline{I}_C); \\ \underline{I}_0 &= \frac{1}{3}(\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Обернені перетворення мають вигляд

$$\begin{aligned} I_A &= (I_0 + I_1 + I_2); \\ I_B &= (I_0 + \underline{a} I_1 + \underline{a} I_2); \\ I_C &= (I_0 + \underline{a} I_1 + \underline{a}^2 I_2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Аналогічні формули можна записати для несиметричних трифазних систем ЕРС та напруг і їхніх складових.

4.6.2. Опори елементів трифазних кіл для струмів різних послідовностей. Відношення фазних напруг (ЕРС) прямої, зворотної та нульової послідовностей до відповідних фазних послідовностей струму називають комплексними опорами відповідних послідовностей

$$\underline{Z}_1 = \frac{U_1}{I_1}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{U_2}{I_2}; \quad \underline{Z}_0 = \frac{U_0}{I_0}. \quad (4.26)$$

Зауважимо, опори прямої, зворотної та нульової послідовностей у загальному відрізняються. Для статичного навантаження (трансформатори, лінії) зміна порядку чергування фаз прикладеної симетричної системи напруг з прямого на зворотне зумовлює зміну порядку чергування струмів без зміни їх амплітуд. Тому опори фаз для прямої \underline{Z}_1 і зворотної \underline{Z}_2 послідовностей однакові, тобто $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

Для динамічного навантаження (електричні генератори, двигуни) – $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2$. Це пояснюється тим, що в трифазних електричних машинах магнітне поле, яке створюють струми прямої послідовності, обертається в одному напрямку з ротором, а створене струмами зворотної послідовності поле і ротор обертаються в протилежних напрямках.

Струми нульової послідовності не створюють обертового магнітного поля, а шляхи проходження створюваних ними потоків значно відрізняються від потоків, створених як струмами прямої, так і зворотної послідовностей. Тому опір нульової послідовності \underline{Z}_0 завжди відрізняється від опорів як прямої, так і зворотної послідовностей.

Опори різних послідовностей для різних електротехнічних об'єктів розраховують за відповідними методиками і наведені в довідниках.

4.6.3. Розрахунок трифазних кіл методом симетричних складових. Метод симетричних складових дає змогу звести задачу розрахунку несиметричного трифазного кола до простіших задач – розрахунку його симетричних режимів. Усі розрахунки симетричних складових здійснюють для однієї фази (як правило, фази *A*). Розрахунок проводять за методом *накладання*, тобто для кожної послідовності окремо. Зауважимо, що тільки в симетричному колі симетрична система напруг (ЕРС) утворює симетричну систему струмів. Якщо опори трифазного кола несиметричні, то система струмів буде також несиметричною, тобто міститиме інші симетричні складові.

У трифазних колах розрізняють два види несиметрії: поперечну (рис. 4.14) та поздовжню (рис. 4.15). З метою зведення задачі несиметричного трифазного кола до розрахунку його симетричних режимів несиметричну ділянку кола замінимо невідомою несиметричною системою напруг $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$, як показано на відповідних рисунках.

Невідомі напруги, що характеризують несиметричну ділянку, можна записати у вигляді

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_A I_A; \quad \underline{U}_B = \underline{Z}_B I_B; \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_C I_C; \quad \underline{U}_N = \underline{Z}_N I_N. \quad (4.27)$$

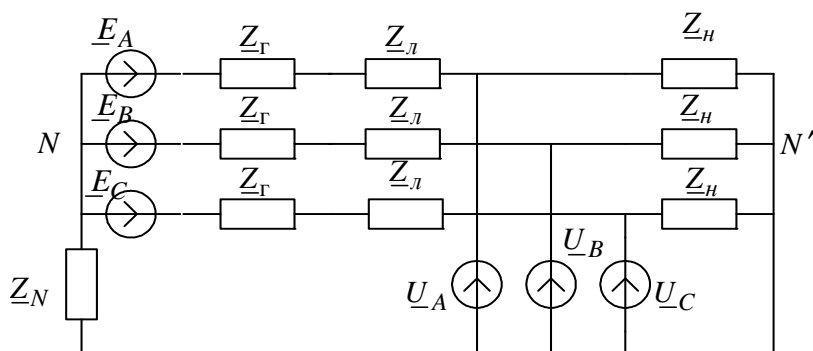


Рис. 4.14

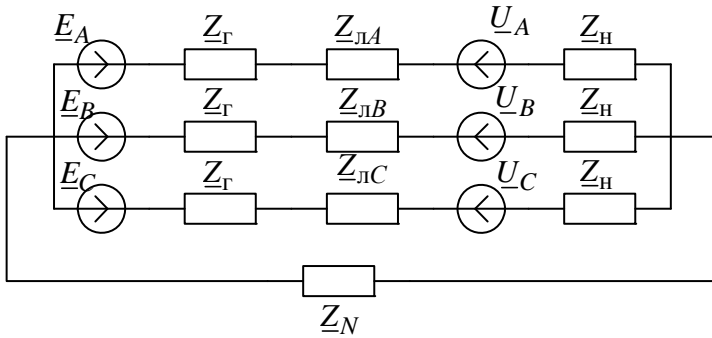


Рис. 4.15

Залежно від характеру несиметрії комплексні опори Z_A , Z_B , Z_C , Z_N можуть набувати значень від нуля до безмежності. Наприклад, за відсутності контакту проводу лінії з нейтральним проводом (землею) (рис. 4.15) $Z_N = \infty$, а $I_N = 0$; за наявності такого контакту $Z_N = 0$, тоді $U_N = 0$. У разі обриву лінійного проводу фази A $Z_A = \infty$, $I_A = 0$, а $Z_B = 0$ і $Z_C = 0$, відповідно $U_B = 0$ і $U_C = 0$.

Наступним кроком є розкладання на симетричні складові усіх ЕРС, струмів та напруг, зокрема і вищезазначених U_A , U_B , U_C , I_A , I_B , I_C за формулами (4.24). Зауважимо, що розкладанню ЕРС, напруги на симетричні складові відповідає послідовне з'єднання джерел напруг окремих послідовностей. Після заміни несиметричної ділянки невідомими напругами коло стало симетричним, і розрахунок здійснюють лише для однієї фази за кожною послідовністю окремо із врахуванням того, що опори віток кола для різних послідовностей можуть бути різними. Розрахунок виконуємо для кожної послідовності окремо. Відповідні розрахункові схеми наведені на рис. 4.16–4.21.

На рис. 4.16 наведено схему для розрахунку прямої послідовності для поперечної несиметрії, а на рис. 4.17 – для поздовжньої.

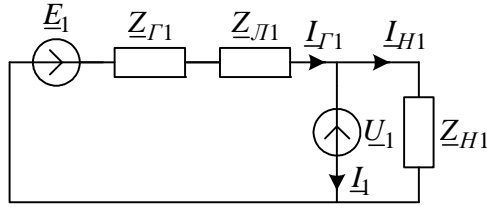


Рис. 4.16

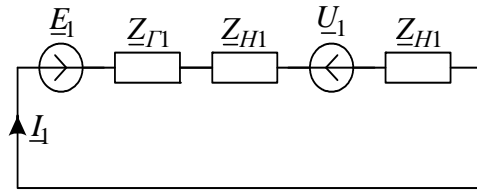


Рис. 4.17

Аналогічно будуються розрахункові схеми для зворотної послідовності. Однак, якщо система фазних ЕРС генератора симетрична, то в схемах для зворотної послідовності (рис. 4.18, 4.19) будуть відсутні ЕРС зворотної послідовності, тобто $\dot{E}_2 = 0$.

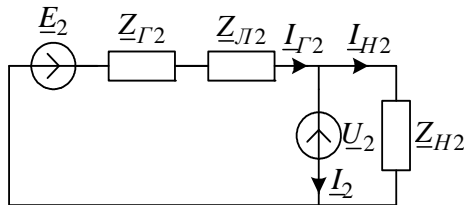


Рис. 4.18

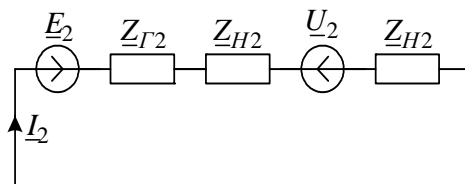


Рис. 4.19

Розрахункові схеми для нульової послідовності у разі поперечної несиметрії наведені на рис. 4.20, а у разі поздовжньої – на рис. 4.21, у яких до заступної схеми входить потроєне значення опору нейтрального проводу.

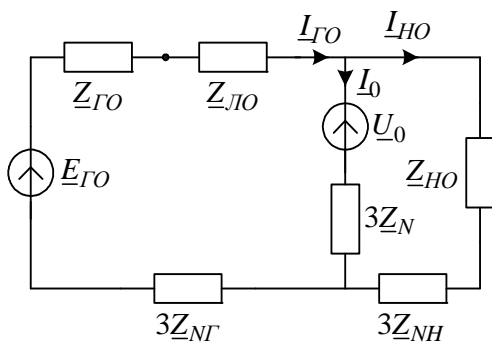


Рис. 4.20

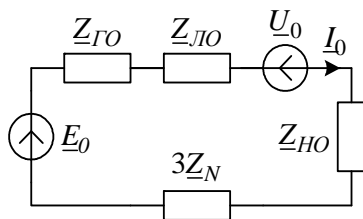


Рис. 4.21

Уведення до розрахункової схеми нульової послідовності опору $3\underline{Z}_N$ зумовлено тим, що струм, який протікає в нейтральному проводі, дорівнює потроєному значенню струму нульової послідовності $\underline{I}_{N0} = 3\underline{I}_0$, а відповідна напруга $\underline{U}_{N0} = 3\underline{Z}_N \underline{I}_0$, оскільки струми нульової послідовності не мають зсуву за фазою.

Рівняння, які описують відповідні схеми рис. 4.16–4.21 разом з рівняннями, які впливають з умов несиметрії, дають змогу визначити напруги та струми симетричних складових. Після обчислення симетричних складових усіх струмів та напруг реальні струми та напруги несиметричного трифазного кола розраховують за формулами (4.25).

4.6.4. Потужності трифазних кіл, виражені через симетричні складові. Комплексна потужність $S_{3\phi}$ трифазного кола визначається як сума комплексних потужностей фаз

$$\underline{S}_{3\phi} = \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^*. \quad (4.28)$$

Підставляючи в (4.28) значення відповідних напруг та струмів, виражені через симетричні складові

$\underline{I}_A = \underline{I}_0^* + \underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*$; $\underline{I}_B = \underline{I}_0^* + \underline{a}^2 \underline{I}_1^* + \underline{a} \underline{I}_2^*$; $\underline{I}_C = \underline{I}_0^* + \underline{a} \underline{I}_1^* + \underline{a}^2 \underline{I}_2^*$;
 $\underline{U}_A = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2$; $\underline{U}_B = \underline{U}_0 + \underline{a}^2 \underline{U}_1 + \underline{a} \underline{U}_2$; $\underline{U}_C = \underline{U}_0 + \underline{a} \underline{U}_1 + \underline{a}^2 \underline{U}_2$,
 одержимо формулу для визначення комплексної потужності трифазного кола на підставі симетричних складових

$$\underline{S}_{3\phi} = 3\underline{U}_1 \underline{I}_1^* + 3\underline{U}_2 \underline{I}_2^* + 3\underline{U}_0 \underline{I}_0^*. \quad (4.29)$$

Основні положення. Аналіз несиметричних трифазних кіл можна здійснити за методом симетричних складових.

Суть методу симетричних складових полягає в тому, що несиметричні системи ЕРС, напруг, струмів розкладають на три симетричні складові: прямої, зворотної і нульової послідовностей, і розрахунки виконуються для кожної складової окремо. Це дає змогу звести розрахунок несиметричного трифазного кола до розрахунку трьох симетричних кіл.

Розрізняють два види несиметрії: поздовжню і поперечну, яким відповідають заступні схеми, в яких невідомими є симетричні складові струмів.

Метод симетричних складових має в своїй основі принцип накладання, а отже його можна застосувати лише для лінійних трифазних кіл.

4.7. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Визначити параметри навантаження і струм у нульовому проводі (рис. 4.22), якщо $U_n = 380 \text{ В}$, $I_\phi = 2 \text{ А}$, $X_L = X_C = R$.

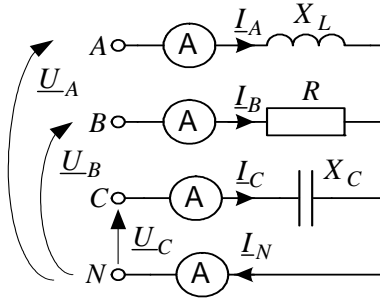


Рис. 4.22

Розв'язання

$$X_L = X_C = R = \frac{U_\phi}{I_\phi} = \frac{380}{\sqrt{3} \cdot 2} = 110 \text{ Ом.}$$

Прийнявши початкову фазу напруги фази А такою, що дорівнює нулю, визначаємо струми.

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{jX_L} = \frac{220e^{j0^\circ}}{j110} = -j2 = 2e^{-j90^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{R} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{110} = 2e^{-j120^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{jX_C} = \frac{220e^{j120^\circ}}{110e^{-j90^\circ}} = 2e^{-j150^\circ} \text{ А;}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 2e^{-j90^\circ} + 2e^{-j120^\circ} + 2e^{-j150^\circ} = \\ &= -2,73 - j4,73 = 5,46e^{-j120^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Приклад 4.2. Діючі значення струмів у фазах навантаження рівні між собою і дорівнюють $I_\phi = 10 \text{ А}$, напруга живлення симетрична, $U_\phi = 220 \text{ В}$ (рис. 4.23). Визначити покази ватметрів. Як зміняться ці покази у разі розривання лінійного проводу фази А?

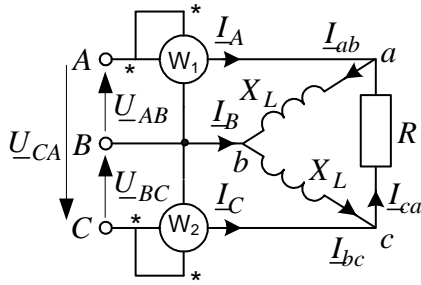


Рис. 4.23

Розв'язання

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\phi} = 10 \text{ A}; \quad R = X_L = \frac{U_{\phi}}{I_{\phi}} = 22 \text{ Ом.}$$

Запишемо комплексні лінійні напруги у вигляді

$$\underline{U}_{AB} = 220e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Комплексні фазні струми визначаємо за формулами (4.9).

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{220e^{j0^\circ}}{jX_L} = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{jX_L} = -10e^{-j120^\circ} e^{-j90^\circ} = 10e^{-j210^\circ} = 10e^{j150^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{R} = 10e^{j120^\circ} \text{ А.}$$

Для визначення показів ватметрів визначимо лінійні струми за формулами (4.10)

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = -j10 - 10e^{j120^\circ} = 5 - j18,65 = 19,3e^{-j75^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 10e^{j120^\circ} - 10e^{j150^\circ} = 3,65 + j3,65 = 5,16e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Покази ватметрів визначаємо за формулами (4.21) з урахуванням, що

$$\underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BC}e^{j180^\circ},$$

$$P_{W_1} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{AB}\underline{I}_A^*) = \operatorname{Re}(220 \cdot 19,3e^{j75^\circ}) = 1103 \text{ Вт};$$

$$P_{W_2} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{CB}\underline{I}_C^*) = \operatorname{Re}(220e^{j60^\circ} \cdot 5,16e^{-j45^\circ}) = 1096,5 \text{ Вт.}$$

У разі обриву лінійного проводу A струм $I_A = 0$. Отже, показ першого ватметра $P_{W_1} = 0$. Фази ca та ab будуть з'єднані послідовно, а тому

$$\underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{CB}}{\underline{Z}_{ca} + \underline{Z}_{ab}} = \frac{-220e^{-j120^\circ}}{R + jX_L} = \frac{220e^{j60^\circ}}{22 + j22} = \frac{220e^{j60^\circ}}{31,1e^{j45^\circ}} = 7,07e^{j15^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 7,09e^{j15^\circ} - 10e^{j150^\circ} = 15,7 + j4,817 = 16,42e^{j17^\circ} \text{ A};$$

$$P_{W_2} = \text{Re}(\underline{U}_{CB}\underline{I}_C^*) = \text{Re}(220e^{j60^\circ} \cdot 16,42e^{+j17^\circ}) = 816,6 \text{ Вт}.$$

Приклад 4.3. Обчислити покази ватметрів (рис. 4.24), якщо $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$, $R_{ab} = 8 \text{ Ом}$, $X_{ab} = 6 \text{ Ом}$, $R_{bc} = X_{ca} = 10 \text{ Ом}$.

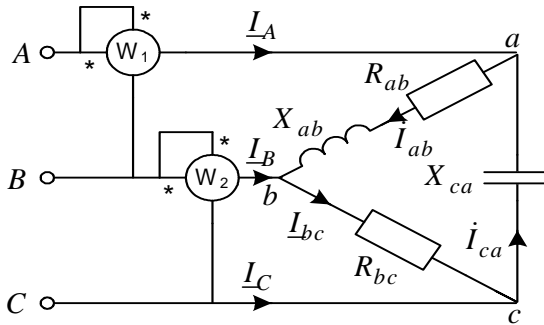


Рис. 4.24

Розв'язання. Вважаючи початкову фазу напруги \underline{U}_{ab} такою, що дорівнює нулю, запишемо

$$\underline{U}_{AB} = 220e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Струми у фазах навантаження визначаємо за формулами

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{220}{8 + j6} = \frac{220}{10e^{j36,87^\circ}} = 22e^{-j36,87^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{10} = 22e^{-j120^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 22e^{-j150^\circ} \text{ A}.$$

Для визначення показів ватметрів обчислимо лінійні струми \underline{I}_A та \underline{I}_B

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 22e^{-j36,87^\circ} - 22e^{-j150^\circ} = \\ &= (17,6 - j13,2) - (-19 - j11) = 36,6 - j2,2 = 36,67e^{-3,44^\circ} \text{ A}; \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = 22e^{-j120^\circ} - 22e^{-j36,87^\circ} = \\ &= (-11 - j19) - (17,6 - j13,2) = 28,6 - j5,8 = 29,18e^{-j168,5^\circ} \text{ A}.\end{aligned}$$

Покази ватметрів обчислюємо за формулами

$$\begin{aligned}P_{W_1} &= \operatorname{Re}(\underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^*) = \operatorname{Re}(220 \cdot 36,67e^{j3,44^\circ}) = 8052 \text{ Вт}; \\ P_{W_2} &= \operatorname{Re}(\underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_B^*) = \operatorname{Re}(220e^{-j120^\circ} \cdot 29,18e^{j168,5^\circ}) = 4248 \text{ Вт}.\end{aligned}$$

Приклад 4.4. У трифазному колі між лінійними проводами фаз A та B увімкнений комплексний опір \underline{Z}_{AB} , а між B і C – опір \underline{Z}_{BC} (рис. 4.25). За методом симетричних складових записати рівняння, що характеризують несиметричну ділянку.

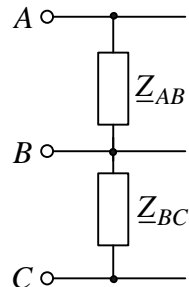


Рис. 4.25

Розв'язання. Наведену на рис. 4.25 схему зобразимо у вигляді (рис. 4.26), подібному до базової схеми (рис. 4.15).

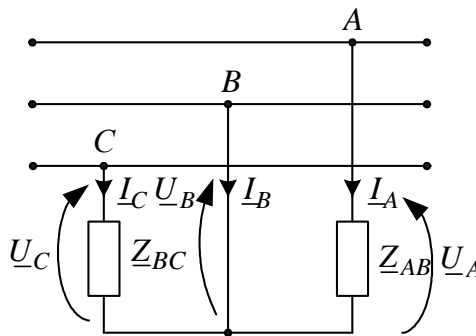


Рис. 4.26

У цій задачі рівняння 4.27, які характеризують несиметрію, набувають вигляду:

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_{AB} \underline{I}_A; \quad \underline{U}_B = 0; \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_{BC} \underline{I}_C; \quad \underline{I}_N = 0.$$

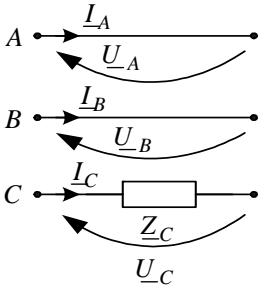


Рис. 4.27

Приклад 4.5. У трифазному колі у фазу C , увімкнено опір \underline{Z}_C (рис. 4.27). За методом симетричних складових записати рівняння, що характеризують несиметричну ділянку.

Розв'язання. Порівняння схеми (рис. 4.28) із базовою схемою (рис. 4.16) дає змогу записати такі рівняння: $\underline{U}_A = 0$, тому що $Z_A = 0$; $\underline{U}_B = 0$, тому що $Z_B = 0$; $\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I}_C$.

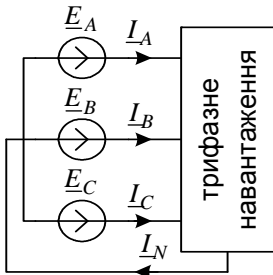


Рис. 4.28

Приклад 4.6. У трифазному колі (рис. 4.28) з несиметричною системою фазних ЕРС $\underline{E}_A = 100e^{j0}$ В; $\underline{E}_B = 100e^{-j90^\circ}$ В; $\underline{E}_C = 100e^{j60^\circ}$ відомі симетричні складові лінійних струмів $\underline{I}_1 = 10e^{j60^\circ}$ А, $\underline{I}_2 = 3e^{-j30^\circ}$ А, $\underline{I}_0 = 4e^{j0^\circ}$ А. Необхідно обчислити симетричні складові ЕРС \underline{E}_1 , \underline{E}_2 , \underline{E}_0 ,

лінійні струми \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C , струм нейтрального проводу \underline{I}_N та комплексну потужність джерела $\underline{S}_{3\phi}$.

Розв'язання. За формулами (4.24) визначаємо симетричні складові усіх послідовностей ЕРС.

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 &= \frac{1}{3} (\underline{E}_A + a \underline{E}_B + a^2 \underline{E}_C) = \\ &= \frac{1}{3} (100e^{j0^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 100e^{-j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 100e^{j60^\circ}) = 79,81e^{-j8,8^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\underline{E}_2 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a^2 \underline{E}_B + a \underline{E}_C) =$$

$$= \frac{1}{3}(100e^{j0^\circ} + e^{-j2\pi/3} \cdot 100e^{-j90^\circ} + e^{j2\pi/3} \cdot 100e^{j60^\circ}) = 33,33e^{j150^\circ} \text{ B};$$

$$\underline{E}_0 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C) =$$

$$= \frac{1}{3}(100e^{j0^\circ} + 100e^{-j90^\circ} + 100e^{j60^\circ}) = 50,2e^{-j5,1^\circ} \text{ B}.$$

Лінійні струми \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C визначаємо за формулами (4.25)

$$\underline{I}_A = (4e^{j0^\circ} + 10e^{j60^\circ} + 3e^{-j30^\circ}) = 11,6 + j7,16 = 13,63e^{j31,7^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = (4e^{j0^\circ} + e^{-j2\pi/3} \cdot 10e^{j60^\circ} + e^{j2\pi/3} \cdot 3e^{-j30^\circ}) =$$

$$= 9 - j5,66 = 10,63e^{j32,2^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = (4e^{j0^\circ} + e^{j2\pi/3} \cdot 10e^{j60^\circ} + e^{-j2\pi/3} \cdot 3e^{-j30^\circ}) =$$

$$= -8,6 - j1,5 = 8,73e^{-j170^\circ} \text{ A}.$$

Струм у нейтральному проводі дорівнює сумі лінійних струмів

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C =$$

$$= 11,6 + j7,16 + 9 - j5,66 - 8,6 - j1,5 \cong 12e^{j0^\circ} = 3\underline{I}_0 \text{ A}.$$

Сума симетричних складових лінійних струмів прямої та зворотної послідовностей дорівнює нулю, а струм нейтрального проводу дорівнює потроєному значенню симетричної складової струму нульової послідовності.

Комплексна повна потужність трифазного джерела обчислюється за формулою (4.28)

$$\underline{S}_{3\phi} = 3(79,81e^{-j8,8^\circ} \cdot 10e^{-j60^\circ} + 33,33e^{j150^\circ} \cdot 3e^{j30^\circ} + 50,2e^{-j5,1^\circ} \cdot 4e^{j0^\circ}) =$$

$$= (1166 - j2286) = 2,566e^{-j63^\circ} \text{ кВА}.$$

Активна потужність джерела $P_{\text{дж}} = 1,166 \text{ кВт}$.

Реактивна потужність джерела $Q_{\text{дж}} = -2,286 \text{ квар}$ має емнісний характер.

Приклад 4.7. Симетричне трифазне коло з нульовим проводом під'єднане до несиметричної системи фазних напруг (рис. 4.29). Відомі симетричні складові фазних напруг: $\underline{U}_1 = 70e^{j90^\circ} \text{ В}$, $\underline{U}_2 = 15e^{j30^\circ} \text{ В}$, $\underline{U}_0 = 26e^{j16^\circ} \text{ В}$ та опори приймача для прямої $\underline{Z}_1 = 7e^{j30^\circ} \text{ Ом}$, зворотної $\underline{Z}_2 = 5e^{j60^\circ} \text{ Ом}$ і нульової $\underline{Z}_0 = 5e^{j45^\circ} \text{ Ом}$ послідовностей, а також опір нульового проводу $\underline{Z}_N = 3e^{j0^\circ} \text{ Ом}$.

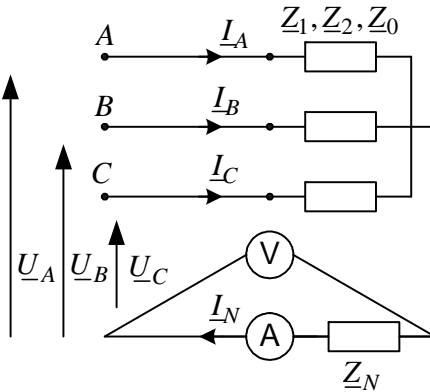


Рис. 4.29

Визначити симетричні складові лінійного струму (\underline{I}_A) та покази приладів, що вимірюють діючі значення.

Розв'язання. Розрахунок виконуємо для кожної послідовності окремо. Відповідні розрахункові схеми наведені на рис. 4.30, *а* – для прямої, на рис. 4.30, *б* – для зворотної і на рис. 4.30, *в* – для нульової послідовностей.

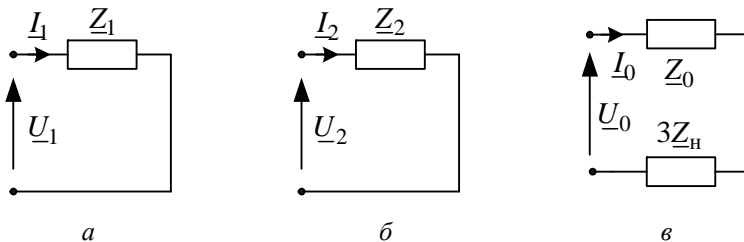


Рис. 4.30

Струм прямої послідовності (рис. 4.30, а)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{70e^{j90^\circ}}{7e^{j30^\circ}} = 10e^{j60^\circ} \text{ A.}$$

Струм зворотної послідовності (рис. 4.30, б)

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{15e^{j30^\circ}}{5e^{j60^\circ}} = 3e^{-j30^\circ} \text{ A.}$$

Рівняння для нульової послідовності напруги має вигляд

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 + 3\underline{Z}_N \underline{I}_0.$$

Струм нульової послідовності (рис. 4.30, в)

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N} = \frac{26e^{j16^\circ}}{5e^{j45^\circ} + 3 \cdot 3e^{j0^\circ}} = 2e^{j0^\circ} \text{ A.}$$

Струм у лінійному проводі

$$\underline{I}_N = 3\underline{I}_0 = 6e^{j0^\circ} \text{ A.}$$

Амперметр покаже 6 А, а напруга між нейтраліями

$$U_N = Z_N \cdot I_N = 3 \cdot 6 = 18 \text{ В.}$$

Показ вольтметра – 18 В.

4.8. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

1. Які переваги пересилання енергії за допомогою трифазної мережі порівняно з однофазною?
2. Які є способи подання трифазної системи ЕРС (струмів, напруг)?
3. Що означає термін “послідовність чергування фаз”?
4. Які багатозазні системи називають зрівноваженими?
5. Яке співвідношення між фазними та лінійними напругами (струмами) в симетричному трифазному колі у разі з'єднання споживача зіркою?
6. Яке співвідношення між фазними та лінійними напругами (струмами) в симетричному трифазному колі у разі з'єднання споживача трикутником?
7. Який зсув фаз між фазною напругою \underline{U}_A і лінійною напругою \underline{U}_{AB} з'єданого зіркою трифазного споживача?
8. Яке призначення нейтрального проводу і коли його використовувати недоцільно?
9. Який зсув фаз між фазними напругами з'єднаної зіркою шестифазної електричної системи?
10. Яке співвідношення між фазними і лінійними напругами з'єднаної зіркою симетричної шестифазної електричної системи?
11. Як можна визначити напругу між нейтраліями і коли вона дорівнює нулю?
12. У чому полягають переваги чотирипровідної трифазної мережі?

13. Чому в нейтральний провід не вмикають запобіжники?
14. Чому дорівнює миттєва потужність симетричного трифазного кола?
15. Як можна обчислити активну, реактивну та повну потужності симетричного трифазного споживача?
16. Як зміниться активна потужність з'єданого зіркою симетричного трифазного споживача, якщо його з'єднати трикутником?
17. Які є способи вимірювання активної потужності у трифазному електричному колі?
18. За яких умов під час вимірювання активної потужності за схемою двох ватметрів покази одного з них дорівнюють нулю?
19. За яких умов під час вимірювання активної потужності за схемою двох аналогових ватметрів стрілка одного з них прагне відхилитися в протилежний бік?
20. Чим відрізняється розрахунок несиметричного трифазного кола від симетричного?
21. Як за допомогою ватметрів виміряти реактивну потужність у симетричному трифазному колі?
22. У чому полягає суть розрахунку несиметричного трифазного кола методом симетричних складових?
23. Як розкласти несиметричну трифазну систему напруг (струму) на симетричні складові?
24. Як за відомими симетричними складовими напруг (струмів) визначити реальні напруги (струми) фаз трифазної системи?
25. Які є види несиметрії в трифазних лініях пересилання електричної енергії?
26. Скільки необхідно скласти рівнянь для розрахунку несиметричного трифазного кола методом симетричних складових?
27. Чи завжди у струмах фаз несиметричного трифазного кола присутні всі три складові: пряма, зворотна і нульова?
28. Чому у схемі заміщення нульової послідовності опір нульового проводу становить $3Z_N$?

Екзаменаційні питання

1. Генерування трифазної системи ЕРС. Способи подання ЕРС трифазних кіл. Фазні та лінійні величини. Способи з'єднання в трифазному колі, нульовий провід.
2. Симетричні та несиметричні трифазні кола. Співвідношення між лінійними та фазними електричними величинами симетричного трифазного кола.
3. З'єднання зіркою в трифазних колах.
4. З'єднання трикутником у трифазних колах.
5. Заміна симетричного трифазного джерела, з'єданого в трикутник, еквівалентним джерелом, з'єданим зіркою.
6. Розрахунок симетричного режиму трифазного кола.
7. Розрахунок несиметричних режимів трифазних кіл.
8. Розрахунок симетричних та несиметричних трифазних кіл змінного струму.
9. Миттєва потужність трифазного кола. Зрівноважені та незрівноважені багатофазні системи.
10. Активна, реактивна та повна потужності трифазного кола.
11. Обчислення та вимірювання активної потужності в трифазних колах.
12. Метод симетричних складових. Розклад несиметричної трифазної системи електричних величин на симетричні складові.

13. Опори симетричних трифазних пристроїв для струмів різних послідовностей.
14. Розрахункові схеми прямої, зворотної та нульової послідовностей.
15. Розрахунок трифазного кола методом симетричних складових у разі повздовжньої несиметрії.
16. Розрахунок трифазного кола методом симетричних складових у разі поперечної несиметрії.

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.1. Лінійні струми трифазного симетричного споживача, який живиться від мережі з лінійною напругою $U_n = 380 \text{ В}$, у разі з'єднаного зіркою становлять 10 А . Якими будуть ці струми у разі з'єднання навантаження трикутником?

Задача 4.2. Трифазний симетричний, споживачі фази якого з'єднані трикутником, живиться від трифазної мережі з лінійною напругою $U_n = 380 \text{ В}$. Опір кожної фази споживача $Z = 76 \text{ Ом}$. Визначити діючі значення лінійних струмів.

Задача 4.3. Трифазний симетричний споживач, фази якого з'єднані зіркою, живиться від трифазної мережі з лінійною напругою $U_n = 220 \text{ В}$. Кожна фаза споживача має опір $Z = 20 \text{ Ом}$. Визначити діючі значення лінійних струмів.

Задача 4.4. Симетричне навантаження, з'єднане зіркою, живиться від симетричної трифазної системи напруг і споживає активну потужність $P = 1000 \text{ Вт}$. Яку активну потужність споживатиме це навантаження, якщо його з'єднати трикутником.

Задача 4.5. Від трифазної мережі живляться два симетричні споживачі, перший з яких з'єднаний зіркою, а другий – трикутником, лінійні струми яких однакові. Який опір Z_2 другого споживача, якщо опір фази першого становить $Z_1 = 12 \text{ Ом}$.

Задача 4.6. Трифазний генератор з симетричною системою напруг $U_n = 380 \text{ В}$ живить два споживачі, один з яких з'єднаний зіркою, а інший трикутником. Визначити струм генератора, якщо обидва приймачі складені з однакових однофазних опорів $Z = 20 \text{ Ом}$.

Задача 4.7. Визначити струми фаз симетричного трифазного споживача, який з'єднаний зіркою і живиться від симетричної системи напруг, якщо $u_{AB} = 380\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$, а $Z = 10e^{j53^\circ}$.

Задача 4.8. З'єднаний зіркою симетричний трифазний споживач, у якому опір фази $\underline{Z} = (14 + j16) \text{ Ом}$, живиться від симетричної системи лінійних напруг $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$. Визначити фазні струми, активну та реактивну потужності.

Задача 4.9. З'єднаний трикутником симетричний трифазний споживач, в якому опір фази $\underline{Z} = (8 - j6) \text{ Ом}$, живиться від симетричної системи лінійних напруг $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$. Визначити фазні та лінійні струми, а також активну та реактивну потужності.

Задача 4.10. Три котушки індуктивності з параметрами $R = 34,2 \text{ Ом}$, $X_L = 23,5 \text{ Ом}$ з'єднані зіркою і живляться від трифазної мережі з симетричною системою напруг. Визначити діючі значення лінійної і фазної напруг та фазного струму, а також реактивну та повну потужності трифазного навантаження, якщо активна потужність фази становить $P_{\phi} = 1,6 \text{ кВт}$.

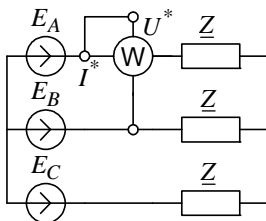
Відповідь: $U_{\text{л}} = 488 \text{ В}$; $U_{\phi} = 282 \text{ В}$; $I_{\phi} = 6,8 \text{ А}$; $S = 5,75 \text{ кВА}$; $Q = 3,25 \text{ квар}$.

Задача 4.11. Трифазний асинхронний двигун, обмотки якого з'єднані зіркою, живиться від трифазної мережі з лінійною напругою $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$. Діюче значення лінійного струму $I_{\text{л}} = 10,5 \text{ А}$, коефіцієнт потужності $\cos \varphi = 0,85$. Визначити активну, реактивну та повну потужності.

Відповідь: $P = 5,9 \text{ кВт}$, $Q = 3,6 \text{ квар}$; $S = 6,9 \text{ кВА}$.

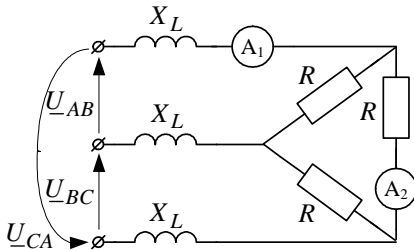
Задача 4.12. Від трифазної чотирипровідної лінії з лінійною напругою $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ живляться три групи ламп, опори фаз яких: $R_A = 48 \text{ Ом}$; $R_B = 85,7 \text{ Ом}$; $R_C = 250 \text{ Ом}$. Визначити напругу на навантаженні фази А і струми всіх фаз у разі обриву нейтрального проводу, якщо решта напруг фаз $U_B = 240 \text{ В}$; $U_C = 300 \text{ В}$.

Відповідь: $U_A = 144 \text{ В}$, $I_A = 3 \text{ А}$; $I_B = 2,8 \text{ А}$; $I_C = 1,2 \text{ А}$.



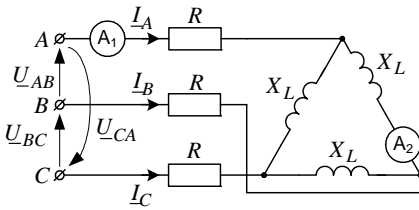
Задача 4.13. Від симетричної системи ЕРС, фазне діюче значення якої $E_{\phi} = 100 \text{ В}$ живиться симетричний трифазний споживач, опір фази якого $\underline{Z}_{\phi} = 6 + j8 \text{ Ом}$. Обчислити показ ватметра, спосіб увімкнення якого зображений на схемі.

Відповідь: $P_w = 208,1 \text{ Вт}$.



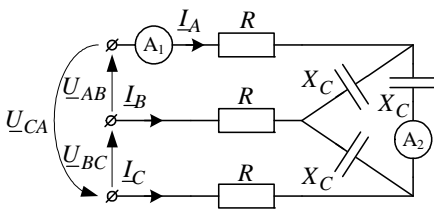
Задача 4.14. Від трифазної мережі з симетричною системою лінійних напруг живиться симетричний приймач: $R = 60 \text{ Ом}$, $X_L = 20 \text{ Ом}$. Покази першого амперметра $2,2 \text{ А}$. Визначити лінійні напруги \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} та покази другого амперметра.

Відповідь: $\underline{U}_{AB} = 107,8e^{j45^\circ} \text{ В}$; $\underline{U}_{BC} = 107,8e^{-j75^\circ} \text{ В}$; $\underline{U}_{CA} = 107,8e^{j165^\circ} \text{ В}$;
 $I_{A2} = 1,27 \text{ А}$.



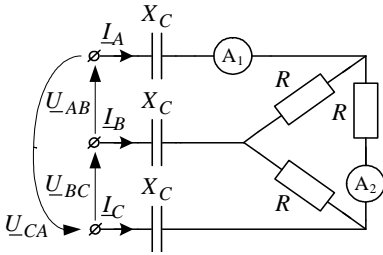
Задача 4.15. Від трифазної мережі з симетричною системою лінійних напруг $U_L = 380 \text{ В}$; живиться симетричний приймач: $R = 3 \text{ Ом}$; $X_L = 12 \text{ Ом}$. Визначити лінійні струми \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C та покази першого і другого амперметрів.

Відповідь: $\underline{I}_A = 44e^{-j53,13^\circ} \text{ А}$; $\underline{I}_B = 44e^{-j172,21^\circ} \text{ А}$; $\underline{I}_C = 44e^{j105,334^\circ} \text{ А}$;
 $I_{A1} = 44 \text{ А}$; $I_{A2} = 25,43 \text{ А}$;



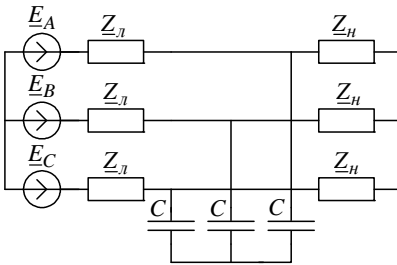
Задача 4.16. Від трифазної мережі з симетричною системою лінійних напруг $U_L = 380 \text{ В}$ живиться симетричний приймач. Визначити лінійні струми \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C та покази першого і другого амперметрів, якщо $R = 3 \text{ Ом}$, $X_C = 12 \text{ Ом}$.

Відповідь: $\underline{I}_A = 44e^{j53,13^\circ} \text{ А}$; $\underline{I}_B = 44e^{-j66,87^\circ} \text{ А}$; $\underline{I}_C = 44e^{j173,13^\circ} \text{ А}$;
 $I_{A1} = 44 \text{ А}$; $I_{A2} = 25,43 \text{ А}$.



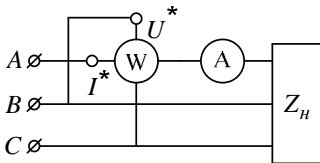
Задача 4.17. Від трифазної мережі з симетричною системою лінійних напруг $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ живиться симетричний приймач. Визначити лінійні струми I_A , I_B , I_C та покази першого і другого амперметрів, якщо: $R = 18 \text{ Ом}$, $X_C = 8 \text{ Ом}$.

Відповідь: $I_A = 12,7 e^{j53,13^\circ} \text{ А}$; $I_B = 12,7 e^{-j66,87^\circ} \text{ А}$; $I_C = 12,7 e^{j173,13^\circ} \text{ А}$;
 $I_{A1} = 12,7 \text{ А}$; $I_{A2} = 7,33 \text{ А}$.



Задача 4.18. Трифазний генератор промислової частоти, фазна напруга якого $U_{\phi} = 127 \text{ В}$, живить через лінію з опором фази $Z_L = 4 + j3 \text{ Ом}$ симетричний трифазний споживач $Z_H = 12 + j16 \text{ Ом}$. Для підвищення $\cos \varphi$ до одиниці під'єднали паралельно до споживача батарею конденсаторів. Визначити ємність C фази конденсаторів, а також фазну напругу на затискачах до під'єднання батареї конденсаторів та після.

Відповідь: $C = 127,3 \text{ мкФ}$. До під'єднання: $U = 102,25 \text{ В}$, після під'єднання: $U = 113 \text{ В}$.



Задача 4.19. Визначити активну, реактивну і повну потужності симетричного споживача, який живиться симетричною системою напруг, а також величину опорів фаз, за умови їх з'єднання: а) зіркою; б) трикутником, якщо ватметр показує 2600 Вт , амперметр – 20 А , $U = 380 \text{ В}$.

Відповідь: $P = 12,37 \text{ кВт}$; $Q = 4,502 \text{ квар}$; $S = 13,164 \text{ кВ·А}$;
 $Z_Y = 10,97 e^{j20^\circ} \text{ Ом}$; $Z_{\Delta} = 32,91 e^{j20^\circ} \text{ Ом}$.

Розділ 5

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

5.1. Основні поняття та визначення

У попередніх розділах розглянуто усталені режими в лінійних електричних колах, у яких ЕРС, напруги та струми були або постійними, або змінювались за синусоїдним законом. Проте на практиці в багатьох випадках в усталених режимах в електричних колах струми несинусоїдні.

Несинусоїдність електричних струмів, які протікають в електричних колах в усталених режимах, може виникати як у лінійних колах, так і в нелінійних. У нелінійних електричних колах причиною несинусоїдності струмів є як несинусоїдність відповідних кривих джерел живлення (ЕРС, напруг, струмів ДС), так і нелінійність його елементів, для яких причинно-наслідкові зв'язки нелінійні. У лінійних електричних колах причиною несинусоїдності струмів є винятково несинусоїдність джерел живлення.

Джерел з ідеально постійною чи синусоїдною ЕРС не існує, проте здебільшого під час аналізу електричних кіл незначні їх відхилення від синусоїдних можна не враховувати. Однак нерідко несинусоїдність напруги живлення істотно впливає на роботу електротехнічних пристроїв і її врахування стає необхідним. Синхронні генератори, які є основними джерелами електричної енергії, проектують так, що ЕРС, які в них індукуються, практично синусоїдні. Тут несинусоїдність є, як правило, результатом різних замикань чи інших відхилень від нормальної роботи. Однак у різноманітних пристроях автоматики, зв'язку, електроніки несину-

соїдність напруг та струмів є необхідною умовою їх нормального функціонування. Прикладами джерел несинусоїдної напруги є різноманітні випрямлячі, генератори лінійно-змінної напруги, генератори імпульсів тощо. Надалі у цьому розділі обмежимося розглядом періодичних процесів у лінійних електричних колах.

Несинусоїдними періодичними ЕРС, напругами, струмами називають такі, які змінюються за періодичним законом (рис. 5.1), тобто

$$e(t) = e(t+T), \quad u(t) = u(t+T), \quad i(t) = i(t+T), \quad (5.1)$$

де T – часовий період, у межах якого закон зміни функції може бути довільним.

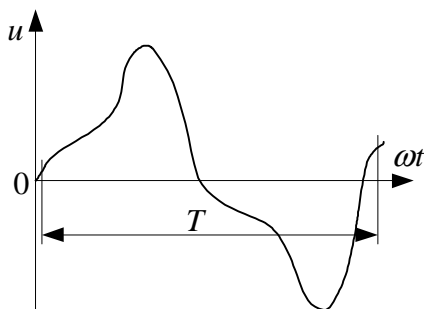


Рис. 5.1

Синусоїдну електричну величину (ЕРС, напругу, струм) можна задати трьома величинами: періодом, амплітудою та початковою фазою. Для несинусоїдної періодичної величини останні два поняття не мають сенсу, тому її можна задати аналітично, графіком миттєвих значень або таблицею чисел, що є незручним для аналізу процесів в електричних колах. Для розрахунку лінійних електричних кіл несинусоїдного струму використовують розклад періодичних функцій у тригонометричний ряд Фур'є.

Як відомо з математики, періодичну функцію, яка задовольняє умови Діріхле (функція має скінченну кількість розривів першого роду та максимумів і мінімумів на розглядуваному інтервалі), можна розкласти у ряд Фур'є. У реальних електричних

колах струми, напруги та ЕРС ці умови задовольняють, тому розклад їх у ряд можливий завжди, а тригонометричні ряди, які їх апроксимують, є швидкозбіжні.

Ряд Фур'є, який апроксимує періодичну функцію $f(t) = f(t+T)$, можна подати у вигляді

$$f(t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots = \sum_{k=0,1,2,\dots} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (5.2)$$

Він складається з постійної складової – A_0 і синусоїдних – $A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$, які називають **гармоніками**. Синусоїду найнижчої ($k=1$) частоти $\omega = 2\pi/T$ називають **основною** гармонікою, а всі інші ($k > 1$) – **вищими**. Постійну складову іноді називають **нульовою** гармонікою. Сукупність гармонічних складових несинусоїдної періодичної функції називається її дискретним частотним спектром: $A_{km}(\omega)$ – амплітудний спектр, $\psi_k(\omega)$ – фазовий спектр. Параметри ряду Фур'є A_{km} , ψ_k можна обчислити аналітично, якщо $f(t)$ задана аналітично, або числовими методами.

Ряд Фур'є теоретично є нескінченним, однак із збільшенням кількості членів швидко збігається, тому під час розкладу в ряд обмежуються певною кількістю n гармонік. Для прикладу, на рис. 5.2 наведено першу і третю гармоніки напруги та результат їх додавання.

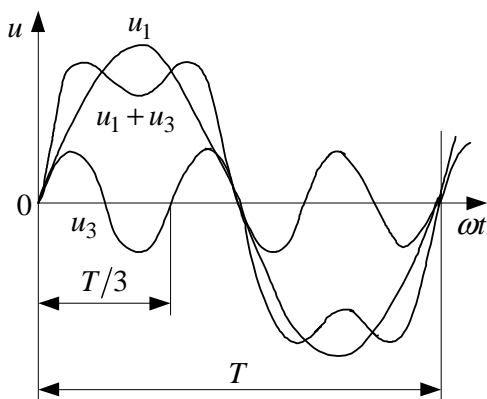


Рис. 5.2

Для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є його доцільно подати у вигляді *постійної* та *синусних* і *косинусних* складових

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n (B_{kms} \sin k\omega t + B_{kmc} \cos k\omega t). \quad (5.3)$$

Коефіцієнти A_0 , B_{kms} , B_{kmc} обчислюються за формулами

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt;$$

$$B_{kms} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin k\omega t dt;$$

$$B_{kmc} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k\omega t dt.$$

Перехід від коефіцієнтів ряду (5.3) до коефіцієнтів ряду (5.2) здійснюється за формулами

$$A_{km} = \sqrt{B_{kms}^2 + B_{kmc}^2}; \quad \psi_k = \arctg(B_{kmc} / B_{kms}).$$

Для типових кривих, які найчастіше трапляються в електротехніці, розклад у ряд можна знайти в довідниках з математики чи електротехніки. Частина таких функцій наведена в табл. 5.1.

Під час розкладання періодичних напруг, ЕРС та струмів у ряд Фур'є обсяг обчислень можна істотно скоротити, якщо скористатися властивостями функцій, що мають симетрію.

Одним із поширених видів симетрії кривих, які трапляються в електротехніці, є симетрія відносно осі абсцис. Такі функції задовольняють умову $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$, тобто від'ємна частина кривої є дзеркальним відображенням додатної частини, зсуненої уздовж осі абсцис на половину періоду. У цьому разі ряд не містить постійної складової та парних гармонік, тому що для них ця умова не задовольняється. Отже, ряд складається лише з непарних гармонік

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + A_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots \quad (5.4)$$

У схемах випрямлення змінного струму існують функції, симетричні відносно осі ординат (див. рис. 5.5), які задоволь-

няють умову $f(\omega t) = f(-\omega t)$. У цьому разі тригонометричний ряд не містить синусних складових

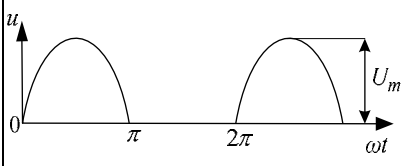
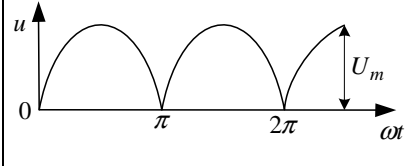
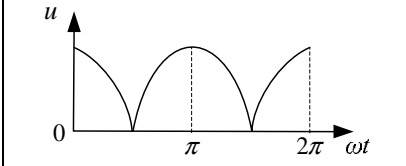
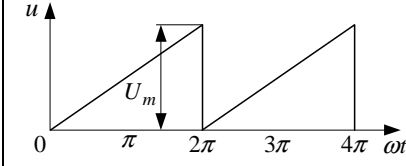
$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \cos \omega t + A_{2m} \cos 2\omega t + A_{3m} \cos 3\omega t + \dots \quad (5.5)$$

У схемах множення частоти є функції симетричні стосовно початку координат, які задовольняють умову $f(\omega t) = -f(-\omega t)$.

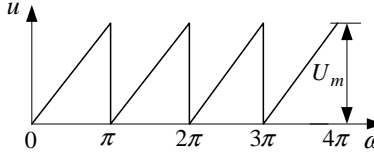
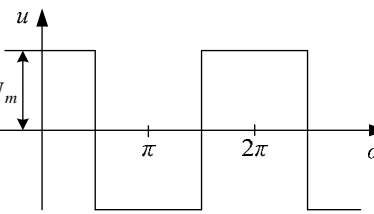
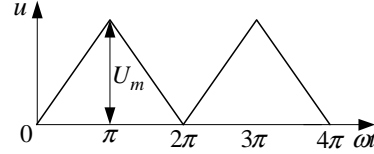
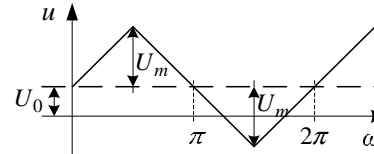
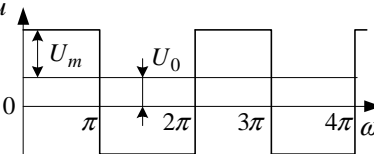
У цьому разі ряд не містить постійної та косинусної складових

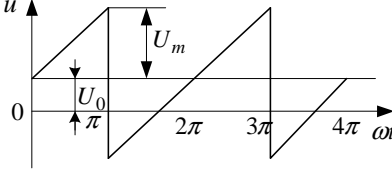
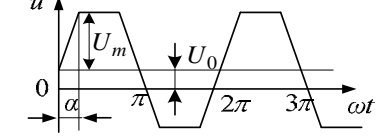
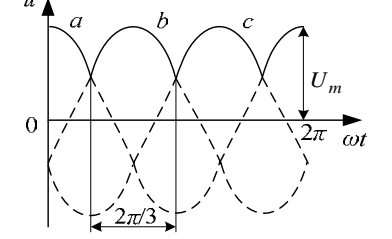
$$f(\omega t) = A_{1m} \sin \omega t + A_{2m} \sin 2\omega t + \dots + A_{km} \sin k\omega t. \quad (5.6)$$

Таблиця 5.1

Часові характеристики	Гармонічний склад
<p style="text-align: center;">1</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 5.3</p>	$u(t) \cong \frac{U_m}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \right. \\ \left. - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.4</p>	$u(t) \cong \frac{4U_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \right. \\ \left. - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.5</p>	$u(t) \cong \frac{4U_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \right. \\ \left. - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.6</p>	$u(t) \cong U_m - \frac{2U_m}{\pi} \sin \omega t - \\ - \frac{U_m}{\pi} \sin 2\omega t - \dots$

Продовження табл. 5.1

1	2
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.7</p>	$u(t) \cong U_m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.8</p>	$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \times \left(\frac{\cos \omega t}{1} - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.9</p>	$u(t) \cong U_m \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\omega t - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.10</p>	$u(t) \cong U_0 + \frac{8U_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.11</p>	$u(t) \cong U_0 + \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$

1	2
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.12</p>	$u(t) \cong U_0 - \frac{2U_m}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.13</p>	$u(t) \cong U_0 + \frac{4U_m}{\alpha\pi} (\sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 5.14</p>	$u(t) \cong \frac{3\sqrt{3}}{\pi} U_m \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2-1} \cos 3\omega t - \frac{1}{6^2-1} \cos 6\omega t + \frac{1}{9^2-1} \cos 9\omega t - \frac{1}{12^2-1} \cos 12\omega t + \dots \right)$

Основні положення. Для аналізу лінійних електричних кіл несинусоїдного струму використовують математичний апарат рядів Фур'є. Для цього несинусоїдні періодичні ЕРС, напруги та струми апроксимують усіченими тригонометричними рядами.

Загалом тригонометричний ряд складається з постійної складової (нульової гармоніки), основної і вищих гармонік. В окремих випадках деякі члени ряду можуть бути відсутні, що зумовлено властивістю несинусоїдної кривої, для якої здійснено розклад у ряд.

5.2. Діюче та середнє значення періодичного несинусоїдного струму. Коефіцієнти форми кривих

Для несинусоїдного струму за аналогією з синусоїдним вводять різні розрахункові значення. Діюче значення несинусоїдного струму визначається як середньоквадратичне

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \quad (5.7)$$

де $i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$.

Оскільки квадрат суми дорівнює сумі квадратів миттєвих значень усіх гармонік і сумі добутків миттєвих значень окремих гармонік різних частот, середнє значення яких за період дорівнює нулю, то (5.7) набуває вигляду

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sum i_k^2 dt} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^n I_k^2}. \quad (5.8)$$

Отже, діюче значення несинусоїдного струму дорівнює кореню квадратному з суми квадратів діючих значень усіх гармонік, у тому числі й нульової. Це стосується напруг та ЕРС

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_k^2}; \quad E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + \dots + E_k^2}. \quad (5.9a, б)$$

Середнє значення несинусоїдного струму визначають за формулою

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = I_0, \quad (5.10)$$

тобто середнє за період значення несинусоїдного струму дорівнює його постійній складовій. Зауважимо, що середнє значення синусоїдного струму дорівнює нулю.

Діючі значення несинусоїдних напруг та струмів можна виміряти аналоговими приладами електромагнітної, електродинамічної та феродинамічної систем, а постійні складові – приладами магнітоелектричної системи.

Середнє за модулем значення несинусоїдного струму визначається за формулою

$$I_{срм} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt. \quad (5.11)$$

В електроенергетичних мережах здебільшого криві напруг та струмів симетричні щодо осі абсцис. Для їх характеристики використовують відповідні коефіцієнти.

Коефіцієнтом форми k_ϕ називається відношення діючого до середнього за модулем значення

$$k_\phi = \frac{A}{A_{\text{срм}}}. \quad (5.12)$$

Для синусоїди $k_\phi = \pi / (2\sqrt{2}) = 1,11$.

Коефіцієнт амплітуди k_a дорівнює відношенню максимального значення до діючого

$$k_a = \frac{A_{\text{макс}}}{A}. \quad (5.13)$$

Для синусоїди $k_a = \sqrt{2} = 1,41$.

Коефіцієнт спотворення k_c визначають як відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення несинусоїдної величини

$$k_c = \frac{A_1}{A}. \quad (5.14)$$

Для синусоїди $k_c = 1$ (для несинусоїдного струму $k_c < 1$).

Коефіцієнт гармонік визначають як відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення першої гармоніки

$$k_z = \frac{1}{A_1} \sqrt{\sum_{k=2,3,\dots,\infty} A_k^2}. \quad (5.15)$$

Для синусоїди $k_z = 0$ (для несинусоїдного струму $k_z > 0$).

Основні положення. Діюче значення несинусоїдного струму (напруги, ЕРС) дорівнює кореню квадратному із суми квадратів діючих значень усіх гармонік, у тому числі й нульової, а середнє значення дорівнює постійній складовій.

Для характеристики відхилення несинусоїдної величини від синусоїди використовують різні коефіцієнти.

5.3. Потужності в колі періодичного несинусоїдного струму

Миттєву потужність як величину, що характеризує швидкість зміни енергії за одиницю часу, визначають незалежно від форми напруги та струму за формулою (1.28), а активна потужність будь-якого періодичного струму дорівнює середньому за період значенню миттєвої потужності

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt . \quad (5.16)$$

Подамо несинусоїдні напругу та струм двополюсника рядами Фур'є

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ku}); \quad (5.17)$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ki})$$

і підставимо в (5.16). У цьому разі інтеграл (5.16) складається із суми інтегралів, серед яких відмінними від нуля будуть тільки ті інтеграли, підінтегральні функції яких – це добуток постійних складових напруги та струму або їх гармонік однакових порядків. Решта інтегралів дорівнюватимуть нулю. У результаті одержимо формулу для обчислення активної потужності несинусоїдного струму

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots , \quad (5.18)$$

де U_k , I_k – діючі значення напруги та струму k -ї гармоніки; $\varphi_k = \psi_{ku} - \psi_{ki}$ – зсув фаз між k -ю гармонікою напруги та k -ю гармонікою струму.

Як видно з (5.18), активна потужність періодичного несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік, враховуючи нульову.

За аналогією з поняттям реактивної потужності для синусоїдних функцій в електричному колі з періодичними несинусоїдними напругами та струмами вводять поняття реактивної потужності

$$Q = \sum_{k=1,2,\dots,\infty} Q_k = \sum_{k=1,2,\dots,\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots , \quad (5.19)$$

а також повної потужності як добутку діючих значень напруги та струму

$$S = UI, \quad (5.20)$$

де U, I визначають за формулами (5.8), (5.9a).

На відміну від електричних кіл синусоїдного струму, сума квадратів активної і реактивної потужностей у колі з періодичними несинусоїдними напругами та струмами не дорівнює квадрату повної потужності

$$S^2 \geq P^2 + Q^2. \quad (5.21)$$

З метою оцінювання нерівності (5.21) вводять розрахункову величину, яку визначають за формулою

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}. \quad (5.22)$$

Величина D називається **потужністю спотворення** несинусоїдного струму, яка фізичного тлумачення не має і характеризує досконалість процесу одностороннього перетворення електричної енергії в інші види, зумовлену спотворенням форми кривої струму та напруги. Так, у разі гармонічного складу несинусоїдного струму та напруги, за умови незмінних їх діючих значень, повна потужність несинусоїдного струму залишається сталою, проте активна й реактивна потужності зменшуються, а значить, як видно із (5.22), потужність спотворення зростає. Отже, потужність спотворення характеризує вплив спотворення форм кривих струмів та напруг на одностороннє перетворення електричної енергії.

У колах синусоїдного струму активна потужність визначається як $P = UI \cos \varphi$, де величину $\cos \varphi$ називають **коефіцієнтом потужності**. У колах періодичного несинусоїдного струму також використовують поняття коефіцієнта потужності, який визначають за формулою

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}. \quad (5.23)$$

Відзначимо, що $\lambda = 1$ лише за умови, що до кола входять тільки резистивні елементи, опір яких не залежить від частоти, в інших випадках $\lambda < 1$. Поява вищих гармонік у кривих напруги та струму призводить до зниження коефіцієнта потужності споживача порівняно з такими ж діючими значеннями синусоїдних напруг та струмів.

Для спрощення аналізу електричних кіл несинусоїдного струму за відсутності постійних складових несинусоїдні струми та напруги замінюють еквівалентними синусоїдами основної частоти. Для цього приймають рівними їх діючі значення, а кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами беруть, враховуючи рівність $\cos \varphi = \lambda$.

Основні положення. Активну потужність у разі несинусоїдних струмів обчислюють як суму активних потужностей постійної складової та усіх гармонік. Реактивна потужність дорівнює сумі реактивних потужностей усіх гармонічних складових. Повну потужність визначають як добуток діючих значень напруги та струму. Однак у загальному випадку повна потужність не дорівнює кореню квадратному із суми квадратів активної і реактивної потужностей, тому вводиться поняття потужності спотворень.

Відношення активної потужності до повної за несинусоїдних струмів називається коефіцієнтом потужності, яким користуються для наближеного аналізу електричного кола несинусоїдного струму методом еквівалентних синусоїд.

5.4. Аналіз лінійних електричних кіл несинусоїдного струму

Згідно з методом накладання джерело несинусоїдної ЕРС можна розглядати як послідовне з'єднання джерела постійної та гармонічних ЕРС різних частот. Наприклад, якщо

$$e = E_0 + e_1 + e_2 + e_3 = E_0 + e_{1m} \sin(\omega t + \psi_{e1}) + e_{2m} \sin(2\omega t + \psi_{e2}) + e_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{e3}), \quad (5.24)$$

то еквівалентна заступна схема ЕРС має вигляд

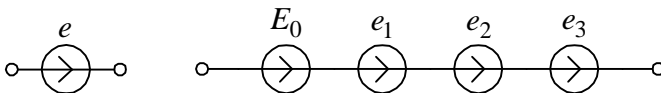


Рис. 5.15

Джерело несинусоїдного струму можна розглядати як паралельне з'єднання джерел постійного та гармонічних струмів різних частот. Наприклад, якщо

$$J = J_0 + J_1 + J_2 + J_3 = J_0 + J_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + J_{2m} \sin(2\omega t + \psi_{i2}) + J_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{i3}), \quad (5.25)$$

то еквівалентна заступна схема ДС має вигляд

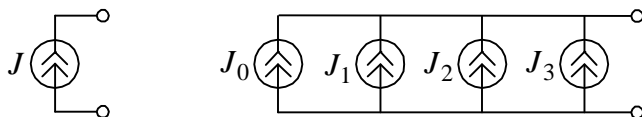


Рис. 5.16

Отже, застосовуючи метод накладання, розрахунок лінійних електричних кіл за несинусоїдних струмів можна звести до розрахунку електричних кіл, у яких діють джерела енергії однієї частоти (або постійні). Миттєві значення несинусоїдних струмів і напруг визначаються як сума струмів, зумовлених кожним джерелом зокрема.

Розрахунок виконується у наступному порядку:

- 1) несинусоїдні ЕРС та струми ДС розкласти у ряд Фур'є;
- 2) розрахувати електричне коло одним із відомих методів розрахунку складних електричних кіл, вважаючи, що в колі діють тільки ті складові розкладу в ряд Фур'є, які мають одну і ту саму частоту. До того ж для розрахунку гармонічних складових струмів і напруг однієї частоти доцільно користуватись символічним методом;

3) виконавши розрахунки по чергово для постійних і всіх гармонічних складових, за принципом накладання знайти миттєві значення струмів у вітках та напруг на окремих ділянках як суму постійної складової та миттєвих значень гармонік;

4) визначивши струми для всіх складових тригонометричного ряду, остаточно розв'язок подають у вигляді суми їх миттєвих значень

$$i_k(t) = I_0 + i_k(t)^{(1)} + i_k(t)^{(2)} + i_k(t)^{(3)} + \dots$$

Параметри елементів електричного кола при несинусоїдних струмах. Важливим питанням є визначення параметрів електричного кола для різних гармонічних складових. Очевидно, що активний опір R , якщо не враховувати явище скін-ефекту, не залежить від частоти. Однак реактивні опори індуктивних і ємнісних елементів залежать від порядкового номера k гармоніки. Їх визначають за формулами

$$X_{Lk} = kX_{L1} = k\omega L; \quad X_{Ck} = \frac{X_{C1}}{k} = \frac{1}{k\omega C}. \quad (5.26)$$

Як видно з (5.26), для постійної складової опір ідеальної котушки індуктивності дорівнює нулю, а для конденсатора – нескінченності. Звідси випливає, що під час розрахунку постійних складових струмів котушки індуктивностей необхідно вважати закороченими, а вітки з конденсаторами – розімкненими.

Залежність опорів реактивних елементів від частоти (порядку гармоніки) призводить до того, що напруги на індуктивних і ємнісних елементах відрізняються за формою від струмів, які через них протікають. Відзначимо, що векторні діаграми можна будувати лише для кожної гармоніки окремо. Не можна додавати та віднімати вектори чи комплексні напруги та струми різних гармонік.

***Основні положення.** Для аналізу лінійних електричних кіл несинусоїдного струму використовують метод накладання, згідно з яким розрахунок виконують для кожної гармоніки окремо. В результаті необхідно розрахувати один раз електричне коло постійного струму (для постійних складових) і декілька разів (за кількістю врахованих гармонік) – коло змінного струму.*

Параметри реактивних елементів для різних гармонік залежать від їх порядку (частоти).

5.5. Резонансні явища в колах несинусоїдного струму

Якщо в електричному колі, до якого входять індуктивні та ємнісні елементи, діють несинусоїдні ЕРС, то в ньому можуть виникати резонансні режими (резонанси струмів або напруг) не тільки на першій, але й на вищих гармоніках. За аналогією з

викладеним в п. 3.8 резонансним режимом на k -й гармоніці називається такий режим, за якого струм k -ї гармоніки на вході електричного кола збігається за фазою з k -ю гармонікою вхідної напруги. Отже, умови резонансу для k -ї гармоніки полягають у тому, що реактивна складова вхідного опору для цієї гармоніки повинна дорівнювати нулю.

В умовах резонансу на якій-небудь вищій гармоніці струми (напруги) цієї гармоніки можуть бути більшими від струмів (напруг) першої гармоніки, незважаючи на те, що амплітуда ЕРС першої гармоніки є більшою від амплітуди ЕРС відповідної вищої гармоніки.

Основні положення. В електричних колах несинусоїдного струму може виникати резонанс на окремій гармоніці або на декількох гармоніках.

5.6. Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1 Визначити миттєве значення струму в електричному колі (рис. 5.17), а також активну, реактивну і повну потужності, якщо $R=5 \text{ Ом}$, $L=0,0191 \text{ Гн}$, $C=530 \text{ мкФ}$,
 $u = \left(10 + 141 \sin(\omega t + 20^\circ) + 42,4 \sin(3\omega t + 45^\circ)\right) \text{ В}$.

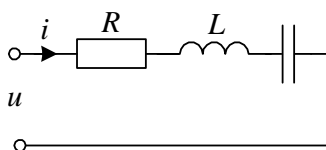


Рис. 5.17

Розв'язання. Миттєве значення струму у колі дорівнює у загальному випадку сумі постійної складової, основної та вищих гармонік. Розрахунки здійснюємо для кожної гармоніки окремо.

Постійна складова (нульова гармоніка):

$$\omega = 0; U_0 = 10 \text{ В}; \quad X_L = \omega L = 0; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \infty;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \infty; \quad I_0 = \frac{U_0}{Z_0} = \frac{10}{\infty} = 0.$$

У цьому електричному колі постійна складова струму $I_0 = 0$. Виконаємо розрахунки для гармонічних складових.

Перша гармоніка.

$$u_1 = 141 \sin(\omega t + 20^\circ) \text{ В}$$

або в комплексній формі $\underline{U}_1 = 100e^{j20^\circ} \text{ В}$.

$$X_{L1} = \omega L = 2\pi fL = 314,16 \cdot 0,0191 = 6 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{314,16 \cdot 530 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ Ом}.$$

Комплексний опір для першої гармоніки

$$\underline{Z}_1 = R + j(X_{L1} - X_{C1}) = (5 + j(6 - 8)) = 5,38e^{-j21^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексне значення струму першої гармоніки

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{100e^{j20^\circ}}{5,38 \cdot e^{-j21^\circ}} = 18,59e^{j41^\circ} \text{ А}.$$

Миттєве значення струму першої гармоніки

$$i_1 = 26,2 \sin(\omega t + 41^\circ) \text{ А}.$$

Розрахунок струму третьої гармоніки визначаємо аналогічно.

$$u_3 = 42,4 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}; \quad \dot{U}_3 = \frac{42,4}{2} e^{j45^\circ} = 30e^{j45^\circ} \text{ В};$$

$$X_{L3} = 3\omega L = 18 \text{ Ом}; \quad X_{C3} = 1/(3\omega C) = 2,67 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = 16,2 \text{ Ом};$$

$$\text{tg } \varphi_3 = \frac{X_{L3} - X_{C3}}{R} = 3,07; \quad \varphi_3 = 71^\circ;$$

$$\underline{Z}_3 = R + j(X_{L3} - X_{C3}) = 5 + j15,34 = 16,2e^{j71^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_3 = 30e^{j45^\circ} \text{ В}; \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{30e^{j45^\circ}}{16,2e^{j71^\circ}} = 1,86e^{-j26^\circ} \text{ А};$$

$$i_3 = 2,61 \sin(3\omega t - 26^\circ) \text{ А}.$$

Миттєве значення струму в колі

$$i = I_0 + i_1 + i_3 = (26,2 \sin(\omega t + 41^\circ) + 2,61 \sin(3\omega t - 26^\circ)) \text{ А}.$$

Діюче значення струму

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{18,5^2 + 1,85^2} = 18,59 \text{ A}.$$

Активна потужність

$$P = P_0 + P_1 + P_3 = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \\ = 100 \cdot 18,5 \cos 21^\circ + 30 \cdot 1,85 \cos 71^\circ = 1728 \text{ Вт}.$$

або

$$P = I_0^2 r + I_1^2 r + I_3^2 r = (I_0^2 + I_1^2 + I_3^2) r = (18,5^2 + 1,85^2) 5 = 1728 \text{ Вт}.$$

Реактивна потужність

$$Q = Q_1 + Q_3 = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 = \\ 100 \cdot 18,5 \cdot \sin(-21^\circ) + 30 \cdot 1,85 \cdot \sin 71^\circ = 925 \text{ вар}.$$

Діюче значення підведеної напруги

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{10^2 + 100^2 + 30^2} = 105 \text{ В}.$$

Повна потужність

$$S = UI = 105 \cdot 18,65 = 1960 \text{ В А}.$$

Приклад 5.2. У зображеному на рис. 5.18 електричному колі: $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$; $R = 5 \text{ Ом}$;

$$L = 0,01 \text{ Гн}; \quad C = 100 \text{ мкФ}.$$

$$J(t) = (4\sqrt{2} \sin \omega t + 3\sqrt{2} \sin(3\omega t - 10^\circ)) \text{ А}.$$

Визначити діюче значення напруги U на джерелі струму і активну потужність P .

Розв'язання. Розрахунок першої гармоніки ($\omega = 500 \text{ с}^{-1}$):

$$J_1(t) = 4\sqrt{2} \sin 500t \text{ А};$$

$$X_{L1} = \omega L = 500 \cdot 0,01 = 5 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{C\omega} = \frac{10^{-6}}{500 \cdot 100} = 25 \text{ Ом};$$

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{5^2 + (5 - 25)^2} = 20,6 \text{ Ом};$$

$$U_1 = I_1 \cdot Z_1 = 4 \cdot 20,6 = 82,4 \text{ В};$$

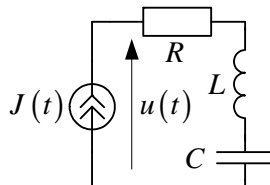


Рис. 5.18

$$P_1 = I_1^2 R = 4^2 \cdot 5 = 80 \text{ Вт};$$

Розрахунок третьої гармоніки ($\omega = 1500 \text{ с}^{-1}$):

$$J_3(t) = 3\sqrt{2} \sin 1500t \text{ А};$$

$$X_{L3} = 3\omega L = 15 \text{ Ом}; \quad X_{C3} = \frac{X_{C1}}{3} = 8,33 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = \sqrt{5^2 + (15 - 8,33)^2} = 8,34 \text{ Ом};$$

$$U_3 = I_3 Z_3 = 3 \cdot 8,34 = 25 \text{ В};$$

$$P_3 = I_3^2 R = 9 \cdot 5 = 45 \text{ Вт};$$

Діюче значення напруги на джерелі

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{82,4^2 + 25^2} = 86,1 \text{ В};$$

Активна потужність

$$P = P_1 + P_3 = 80 + 45 = 125 \text{ Вт}.$$

Приклад 5.3. Розглянемо зображене на рис. 5.19 електричне коло, в якому: $R = 5 \text{ Ом}$, $\omega L = 5 \text{ Ом}$, $1/\omega C = 20 \text{ Ом}$. Струм у котушці $i_L = 4 + 8 \sin \omega t + 6 \sin(2\omega t + \pi/2) \text{ А}$.

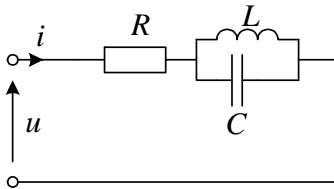


Рис. 5.19

Розв'язання. Розрахунок нульової гармоніки.

$$\text{Напруга нульової гармоніки } U^{(0)} = RI^{(0)} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ В}.$$

$$\text{Потужність нульової гармоніки } P^{(0)} = U^{(0)}I^{(0)} = 20 \cdot 4 = 80 \text{ Вт}.$$

Розрахунок першої гармоніки.

Комплексне амплітудне значення напруги на паралельній ділянці.

$$\underline{U}_m^{(1)} = j\omega L \underline{I}_{Lm}^{(1)} = 5 \cdot 8e^{j90^\circ} = 40e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

Комплексний опір паралельної ділянки

$$\underline{Z}_{LC}^{(1)} = \frac{j\omega L \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega L - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{5 \cdot 20}{j(5 - 20)} = j6,67 \text{ Ом}.$$

Комплексне амплітудне значення струму першої гармоніки в нерозгалуженій частині кола

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{\underline{U}_m^{(1)}}{\underline{Z}_{LC}^{(1)}} = \frac{40e^{j90^\circ}}{6,67e^{j90^\circ}} = 6 \text{ А}.$$

Комплексний опір всього кола

$$\underline{Z}^{(1)} = R + \underline{Z}_{LC}^{(1)} = \sqrt{5^2 + 6,67^2} e^{j \arctg(6,67/5)} = 8,3e^{j53^\circ}.$$

Комплексне амплітудне значення вхідної напруги

$$\underline{U}_m^{(1)} = \underline{Z}^{(1)} \underline{I}_m^{(1)} = 8,3e^{j53^\circ} \cdot 6 = 49,8e^{j53^\circ} \text{ В}.$$

Потужність першої гармоніки

$$P^{(1)} = U^{(1)} I^{(1)} \cos \varphi^{(1)} = 49,8 \cdot 6 / 2 \cdot \cos 53^\circ = 89,64 \text{ Вт}.$$

Розрахунок другої гармоніки

Комплексний опір паралельної ділянки

$$\underline{Z}_{LC}^{(2)} = \frac{j2\omega L \left(-j \frac{1}{2\omega C} \right)}{j2\omega L - j \frac{1}{2\omega C}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 20 / 2}{j(2 \cdot 5 - 20 / 5)} = \infty,$$

тобто в колі існує резонанс на другій гармоніці, а це означає, що струму другої гармоніки в нерозгалуженій його частині не буде. Отже, напруга другої гармоніки на вході кола дорівнює напрузі на паралельній ділянці, а активна потужність $P^{(2)} = U^{(2)} I^{(2)} \cos \varphi^{(2)} = 0$.

Комплексне амплітудне значення напруги на паралельній ділянці.

$$\underline{U}_m^{(2)} = j2\omega L \underline{I}_{Lm}^{(2)} = j2 \cdot 5 \cdot 6e^{j90^\circ} = -60 \text{ В}.$$

Миттєве значення напруги на вході кола

$$u = U^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} = 20 + 49,8 \sin(\omega t + 53^\circ) - 60 \sin 2\omega t .$$

Діюче значення напруги

$$U = \sqrt{\left(U^{(0)}\right)^2 + \left(U^{(1)}\right)^2 + \left(U^{(2)}\right)^2} = \sqrt{20^2 + \frac{49,8^2}{2} + \frac{60^2}{2}} = 58,6 \text{ В} .$$

Активна потужність всього кола

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} = 80 + 89,64 + 0 = 169,64 \text{ Вт} .$$

5.7. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

1. Яким способом можна подати періодичну несинусоїдну електричну напругу (ЕРС, струм)?
2. Який математичний апарат використовують для аналізу лінійних електричних кіл несинусоїдного струму?
3. Які є способи подання членів ряду Фур'є?
4. Як визначаються коефіцієнти ряду Фур'є?
5. Яка гармоніка називається основною, а які вищими?
6. Як визначається діюче значення несинусоїдної напруги (струму) через її гармонічний спектр?
7. Як визначається середнє значення несинусоїдної періодичної величини і чому воно дорівнює?
8. Як визначаються реактивні опори котушки та конденсатора для k -ї гармоніки?
9. За яких умов гармонічні спектри напруг і струмів однакові?
10. Як визначають діюче значення несинусоїдної напруги (струму, ЕРС)?
11. Як визначають активну і реактивну потужності несинусоїдного струму?
12. Як визначають повну потужність несинусоїдного струму?
13. Як визначають потужність спотворення несинусоїдного струму?
14. Як визначають коефіцієнт амплітуди та коефіцієнт форми несинусоїдної напруги (струму) і чому вони дорівнюють для синусоїди?
15. Як визначити коефіцієнт спотворення несинусоїдної періодичної напруги?

Екзаменаційні питання

1. Несинусоїдні ЕРС, напруги та струми. Розклад періодичної несинусоїдної електричної величини в ряд Фур'є.
2. Властивості періодичних симетричних несинусоїдних кривих.
3. Середнє, середнє за модулем та діюче значення несинусоїдних періодичних величин. Коефіцієнти, що характеризують форму кривої.
4. Параметри електричних кіл з несинусоїдними періодичними джерелами.

5. Розрахунок лінійних електричних кіл з несинусоїдними періодичними джерелами.
6. Потужності в колі періодичного несинусоїдного струму.
7. Коефіцієнт потужності в колі несинусоїдного струму.
8. Метод еквівалентних синусоїд і особливості його застосування.
9. Особливості резонансних режимів у колах з несинусоїдними джерелами.

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.1. Визначити дійсне значення напруги, яка подана тригонометричним рядом

$$u = \frac{400}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t) \text{ В.}$$

Відповідь: $U = 100 \text{ В.}$

Задача 5.2. Визначити покази амперметра електромагнітної системи, увімкненого на вході пасивного двополюсника, якщо через нього протікає струм $i = (1,73 + 6\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \sin 3\omega t) \text{ А.}$

Відповідь: $I = 3 \text{ А.}$

Задача 5.3. Обчислити активну потужність котушки індуктивності з параметрами $R = 20 \text{ Ом}$, $\omega L = 10 \text{ Ом}$, яка живиться напругою $u = (141,4 \sin \omega t + 56,57 \sin 2\omega t) \text{ В.}$

Відповідь: $P = 410 \text{ Вт.}$

Задача 5.4. Обчислити активну потужність, яку споживає пасивний двополюсник, що складається з послідовно з'єднаної котушки індуктивності і конденсатора, параметри яких $\omega L = 1/\omega C = R = 100 \text{ Ом}$, якщо напруга на вході $u = (141,4 \sin \omega t + 56,57 \sin 2\omega t) \text{ В.}$

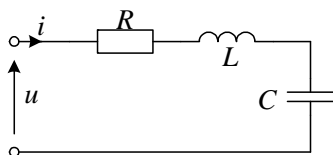
Відповідь: $P = 100 \text{ Вт.}$

Задача 5.5. Обчислити активну, реактивну та повну потужності, а також потужність спотворення, якщо напруга і струм на вході пасивного двополюсника визначаються рівняннями:

$$u = 141 \sin \omega t + 11 \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ В;}$$

$$i = 10,19 \sin(\omega t - 11,3^\circ) + 2 \cos 3\omega t + 10,19 \sin 5\omega t \text{ А.}$$

Відповідь: $P = 709,5 \text{ Вт}$; $Q = 123,8 \text{ вар}$; $S = 738 \text{ В}\cdot\text{А}$; $D = 160,5 \text{ ВА}$.



Задача 5.6. Визначити миттєве значення струму i , активну потужність і діюче значення напруги на конденсаторі, якщо: $\omega = 10^3 \text{ с}^{-1}$; $L = 0,05 \text{ Гн}$; $C = 5 \text{ мкФ}$; $R = 50 \text{ Ом}$; $u = 40 + 120 \sin \omega t + 60 \sin(2\omega t - 30^\circ) + 50 \sin(5\omega t - 60^\circ) \text{ В}$.

Відповідь: $i = 0,76 \sin(\omega t + 71,5^\circ) + 1,2 \sin(2\omega t - 30^\circ) - 0,23 \sin(5\omega t + 43,38^\circ) \text{ А}$;
 $P = 51,8 \text{ Вт}$; $U_C = 143 \text{ В}$.

Задача 5.7. У зображеному на рисунку до задачі 5.6 електричному колі $u = (100 + 50 \sin \omega t) \text{ В}$, $1/\omega C = 2\omega L = R$. Як зміняться покази вольтметра магнітоелектричної системи, під'єданого паралельно до затискачів конденсатора, якщо індуктивність L котушки збільшити у два рази?

Відповідь: Не зміниться.

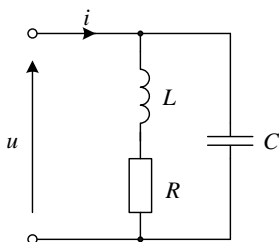
Задача 5.8. Через ідеальний індуктивний елемент електричного кола протікає струм $i = (4 + 30\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \sin 3\omega t) \text{ А}$. Визначити відношення амплітуди першої гармоніки напруги U_{m1} на котушці до амплітуди третьої гармоніки U_{m3} .

Відповідь: $U_{m1}/U_{m3} = 2$.

Задача 5.9. Визначити коефіцієнт потужності пасивного двополюсника, якщо вирази для напруги та струму мають вигляд:

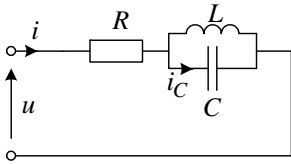
$$u = (120\sqrt{2} \sin \omega t + 50\sqrt{2} \sin(3\omega t + 45^\circ)); \quad i = (4\sqrt{2} \sin \omega t) \text{ А}.$$

Відповідь: $\lambda = 0,923$.



Задача 5.10. Визначити миттєве значення струму i , якщо: $u = 40 + 282 \sin \omega t + 134 \sin(2\omega t + 60^\circ) + 41,2 \sin(4\omega t + 45^\circ) \text{ В}$;
 $\omega = 10^3 \text{ с}^{-1}$; $L = 20 \text{ мГн}$; $C = 10 \text{ мкФ}$;
 $R = 20 \text{ Ом}$.

Відповідь: $i = 2,0 + 8,2 \sin(\omega t - 31^\circ) + 1,34 \sin(2\omega t + 60^\circ) + 1,13 \sin(4\omega t + 130^\circ) \text{ А}$

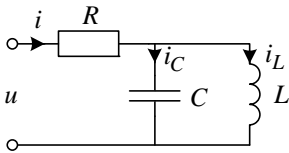


Задача 5.11. Визначити миттєві значення струмів i , i_C , якщо:

$$u = (100 + 50\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ) + 25\sqrt{2}\sin(3\omega t - 60^\circ)) \text{ В}; \quad \omega L = 20 \text{ Ом}; \\ 1/\omega C = 60 \text{ Ом}; \quad R = 40 \text{ Ом}.$$

Відповідь: $i = (2,5 + 1,41\sin(\omega t + 8,13^\circ) + 0,71\sin(3\omega t - 23,13^\circ)) \text{ А};$

$$i_C = (0,71\sin(\omega t - 171,9^\circ) + 1,06\sin(3\omega t - 23,13^\circ)) \text{ А}.$$



Задача 5.12. Визначити миттєві значення струмів, якщо: $R = 20 \text{ Ом}; L = 10 \text{ мГн};$

$$C = 33 \text{ мкФ}; \quad \omega = 10^3 \text{ с}^{-1};$$

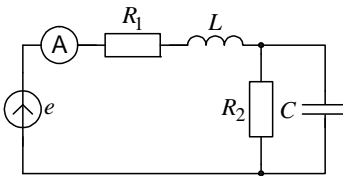
$$u = (62,8 + 80\sqrt{2}\sin\omega t + 30\sqrt{2}\sin 3\omega t + 16\sqrt{2}\sin 5\omega t) \text{ В}.$$

Відповідь:

$$i = 3,14 + 4,5\sin(\omega t - 36,87^\circ) + 1,69\sin(3\omega t + 36,87^\circ) + 1,1\sin(5\omega t + 19^\circ);$$

$$i_L = 3,14 + 6,8\sin(\omega t - 37^\circ) + 0,85\sin(3\omega t + 143^\circ) + 0,14\sin(5\omega t - 161^\circ);$$

$$i_C = 2,26\sin(\omega t - 143^\circ) + 2,54\sin(3\omega t + 37^\circ) + 1,21\sin(5\omega t + 19^\circ).$$

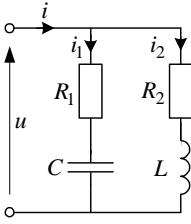


Задача 5.13. У колі несинусоїдного струму показ амперметра електромагнітної системи $I_A = 3 \text{ А}$. Вираз для ЕРС має вигляд $e = 22 + 42,43\sin\omega t + E_{m2}\sin 2\omega t$.

Визначити E_{m2} , якщо $R_1 = 1 \text{ Ом};$

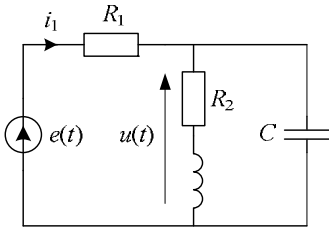
$$R_2 = 10 \text{ Ом}, \quad \omega L = 16 \text{ Ом}, \quad 1/(\omega C) = 20 \text{ Ом}.$$

Відповідь: $E_{m2} = 39,1 \text{ В}.$



Задача 5.14. Визначити активні потужності віток, якщо: $u = 100 \sin(\omega t + 90^\circ) + 60 \sin(3\omega t + 90^\circ) + 20 \sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ В}$;
 $\omega L = 1/(\omega C) = 3 \text{ Ом}$; $R_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}$.

Відповідь: $P_1 = 884,2 \text{ Вт}$; $P_2 = 1281 \text{ Вт}$.



Задача 5.15. Визначити напругу $u(t)$, якщо: $R_1 = 1 \text{ Ом}$; $R_2 = 0,5 \text{ Ом}$; $\omega L = 1 \text{ Ом}$;
 $1/(\omega C) = 9 \text{ Ом}$; $e(t) = 30,0 + 15 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t$.

Відповідь: $u(t) = 10,0 + 9,64 \sin(\omega t + 26,2) + 18,97 \sin(3\omega t + 4,8) \text{ В}$.

РОЗДІЛ 6

ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

6.1. Загальна характеристика чотириполюсників

Численні електротехнічні пристрої, що призначені для перетворення та пересилання електричної енергії, мають два вхідні та два вихідні затискачі, які прийнято називати **полюсами**. Їх внутрішнє електричне коло може бути довільної складності. Такі пристрої називаються **чотириполюсниками**. Прикладами чотириполюсників є двообмоткові трансформатори, однофазні випростувачі, підсилювачі, електричні фільтри, двопровідні лінії електропересилання тощо.

Під час експлуатації здебільшого необхідно і достатньо знати тільки залежності між вхідними та вихідними струмами і напругами. Теорія чотириполюсників дає можливість розраховувати режими пересилання електричної енергії між входом та виходом чотириполюсника, не вдаючись до розрахунку струмів та напруг всередині чотириполюсника, що істотно зменшує обсяг розрахунків під час аналізу електротехнічних пристроїв. Основи теорії чотириполюсників розглядатимемо за усталених синусоїдних режимів, що дає змогу використовувати символічний метод. Розглянемо основні поняття та визначення, що стосуються чотириполюсників.

Чотириполюсник **лінійний**, якщо його схема складається винятково з лінійних елементів, а якщо до нього входить хоча б один нелінійний елемент, то він **нелінійний**.

Чотириполюсники позначають прямокутником з чотирма полюсами. На рис. 6.1 наведено загальноприйняті позначення полюсів чотириполюсника: $1-1'$ – вхідних, $2-2'$ – вихідних; напрямів струмів: I_1 та I_1' – вхідних полюсів, I_2 та I_2' – вихідних та напруг: U_1 – між вхідними полюсами, U_2 – вихідними. Зауважимо, що тут прийняте, так зване, несиметричне позначення напрямків струмів: струм I_1 входить у чотириполюсник, а I_2 – виходить.

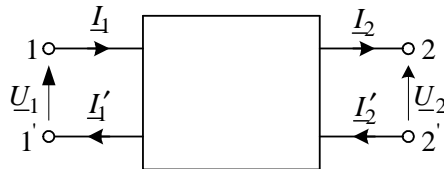


Рис. 6.1

Чотириполюсники, як і двополюсники, поділяються на **пасивні** та **активні**. Чотириполюсники, до схеми яких не входять джерела електричної енергії, називаються пасивними, а ті, що мають у своєму складі джерела, – активними. Активні чотириполюсники позначають прямокутником з написом **A**, а пасивні – з написом **Π** (рис. 6.2).

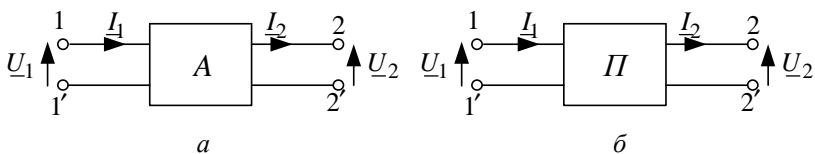


Рис. 6.2

Зазвичай букву **Π** не пишуть, маючи на увазі, що чотириполюсник пасивний, а позначають лише активні чотириполюсники. Відзначимо, що пасивний лінійний чотириполюсник може мати в своєму складі джерела енергії, якщо їхня дія взаємно компенсується так, що напруги на обох парах розімкнених та від'єднаних від зовнішніх кіл затискачів чотириполюсника дорівнюють нулю. Дія

таких скомпенсованих джерел енергії не проявляється в зовнішніх колах, під'єднаних до вхідних та вихідних затискачів.

Інакше кажучи, чотириполіусник є активним, якщо струм $I_1 \neq 0$ у разі короткого замикання полюсів 1–1' або струм $I_2' \neq 0$ – у разі короткого замикання полюсів 2–2'.

Чотириполіусник, для якого виконується перший закон Кірхгофа окремо для входу ($I_1 - I_1' = 0$) та окремо для виходу ($I_2 - I_2' = 0$), називається **прохідним** чотириполіусником.

Чотириполіусник, у якого взаємна провідність $Y_{12} = I_1 / U_2$ між входом та виходом дорівнює взаємній провідності $Y_{21} = I_2 / U_1$ між виходом та входом, тобто $Y_{12} = Y_{21}$, називається **взаємним**, а якщо $Y_{12} \neq Y_{21}$ – **невзаємним**.

Чотириполіусник, у якого вхідний опір $Z_{1вх} = U_1 / I_1$ стосовно полюсів 1–1' дорівнює вхідному опорі $Z_{2вх} = U_2 / I_2$ стосовно полюсів 2–2', тобто $Z_{1вх} = Z_{2вх}$, називається **симетричним**, а якщо $Z_{1вх} \neq Z_{2вх}$ – **несиметричним**.

Чотириполіусники, що містять керовані елементи (електронні та напівпровідникові прилади), називаються **керованими**.

Якщо параметри чотириполіусника не залежать від параметрів схем, що під'єднані до його зовнішніх полюсів, то такий чотириполіусник називається **автономним**, а якщо залежать – **неавтономним**.

У теорії прохідних чотириполіусників досліджують загальні його властивості стосовно полюсів, незалежно від внутрішньої схеми. Надалі розглядатимемо лише прохідні чотириполіусники як найпоширеніші в техніці.

Основні положення. Чотириполіусник – це частина електричного кола довільної складності, яка має два вхідні і два вихідні затискачі (полюси). Їх поділяють на: активні та пасивні; лінійні та нелінійні; симетричні та несиметричні; взаємні та невзаємні; автономні та неавтономні.

6.2. Рівняння прохідних пасивних чотириполосників

Оскільки активний чотириполосник завжди можна однозначно звести до еквівалентного пасивного із ззовні винесеними додатковими джерелами, розглянемо основні властивості та методи аналізу пасивних чотириполосників.

Напруги і струми внутрішніх віток та вузлів прохідних чотириполосників не розглядають, а беруть до уваги лише струми та напруги входу ($\underline{U}_1, \underline{I}_1$) і виходу ($\underline{U}_2, \underline{I}_2$). Співвідношення, які пов'язують між собою ці змінні, називаються **рівняннями чотириполосника**, а коефіцієнти при змінних – **параметрами**. Рівняння чотириполосника стосовно змінних $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$ записують, виражаючи будь-яку пару з них через іншу. Кількість таких систем рівнянь дорівнює кількості комбінацій з чотирьох елементів по два, яка становить **шість**. Оскільки всі зазначені системи описують один і той же лінійний чотириполосник, то будь-яку з них можна одержати з іншої системи за допомогою лінійних перетворень, а, значить, одну систему параметрів можна виразити через іншу.

Кожна з шести систем рівнянь чотириполосника характеризується відповідними коефіцієнтами, які повністю визначають поведінку чотириполосника стосовно його полюсів

Систему рівнянь чотириполосника можна подати в одній з шести форм.

A-форма рівнянь чотириполосника визначає залежності вхідної напруги \underline{U}_1 та струму \underline{I}_1 від вихідної напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= A_{11}\underline{U}_2 + A_{12}\underline{I}_2 ; \\ \underline{I}_1 &= A_{21}\underline{U}_2 + A_{22}\underline{I}_2\end{aligned}\tag{6.1}$$

або у матричній формі

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix},\tag{6.2}$$

де $A = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix}$ – матриця так званих A -параметрів, в якій: \underline{A}_{11} , \underline{A}_{22} – безрозмірні коефіцієнти; \underline{A}_{12} – має розмірність опору, а \underline{A}_{21} – провідності.

Коефіцієнтам чотириполосника можна надати фізичну інтерпретацію:

$\underline{A}_{11} = \underline{U}_{10} / \underline{U}_{20}$ – комплексний коефіцієнт передачі напруги при $\underline{I}_2 = 0$ (неробочий режим);

$\underline{A}_{22} = \underline{I}_{1k} / \underline{I}_{2k}$ – комплексний коефіцієнт передачі струму при $\underline{U}_2 = 0$ (коротке замикання);

$\underline{A}_{12} = \underline{U}_{1k} / \underline{I}_{2k}$ – комплексний взаємний опір між входом та виходом при $\underline{U}_2 = 0$;

$\underline{A}_{21} = \underline{I}_{10} / \underline{U}_{20}$ – комплексна взаємна провідність між входом та виходом при $\underline{I}_2 = 0$.

У деяких підручниках застосовують інше, зручніше для написання позначення коефіцієнтів A -форми рівнянь чотириполосника, яке не потребує написання індексів, згідно з яким

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{B}, \quad \underline{A}_{21} = \underline{C}, \quad \underline{A}_{22} = \underline{D},$$

а відповідні рівняння чотириполосника мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

A -форма рівнянь є найпоширенішою для аналізу в системах пересилання електричної енергії. Вона дає змогу визначити струм \underline{I}_1 та напругу \underline{U}_1 на вході чотириполосника, які необхідні для забезпечення на виході (у споживача) струму \underline{I}_2 та напруги \underline{U}_2 (тобто заданої потужності).

B -форма рівнянь чотириполосника є дуальною до A -форми. Вона визначає залежності вихідних значень струму \underline{I}_2 та напруги \underline{U}_2 від вхідних – \underline{I}_1 та \underline{U}_1 , тобто у разі зміни напрямку пересилання енергії. Для одержання цієї форми рівнянь необхідно систему рівнянь (6.3) розв'язати стосовно \underline{U}_2 та \underline{I}_2 ,

змінивши напрями струмів I_1 та I_2 на протилежні. **B**-форма рівнянь чотириполюсника має вигляд

$$\begin{aligned} U_2 &= B_{11}U_1 + B_{12}I_1; \\ I_2 &= B_{21}U_1 + B_{22}I_1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

або в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Bmatrix}, \quad (6.5)$$

де $\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Bmatrix}$ – матриця **B**-параметрів.

Y-форму рівнянь чотириполюсника можна одержати, якщо розв'язати рівняння **A**-форми стосовно струмів I_1 та I_2 . Вона визначає залежності струмів I_1 та I_2 від напруг U_1 та U_2

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2; \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

або в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}, \quad (6.7)$$

де $\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{Bmatrix}$ – матриця **Y**-параметрів.

Очевидно, що всі коефіцієнти рівнянь (6.6) мають розмірності провідностей. Відповідно фізична інтерпретація коефіцієнтів така: Y_{11} – вхідна провідність при $U_2 = 0$; Y_{22} – вихідна провідність при $U_1 = 0$; Y_{12} – взаємна провідність між входом та виходом при $U_2 = 0$; Y_{21} – взаємна провідність між виходом та входом при $U_1 = 0$.

Z-форма рівнянь чотириполюсника є дуальною до **Y**-форми рівнянь і визначає залежності напруг U_1 та U_2 від струмів I_1 та I_2 . Її можна одержати, якщо розв'язати рівняння (6.6) стосовно напруг U_1 та U_2

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

де $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix}$ – матриця \mathbf{Z} -параметрів.

Усі коефіцієнти рівнянь (6.8) мають розмірності опорів.

G-форма рівнянь чотириполюсника визначає залежності струму \underline{I}_1 та напруги \underline{U}_2 від струму \underline{I}_2 та напруги \underline{U}_1 . Вона має вигляд

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{G}_{11}\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{G}_{21}\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

де $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{bmatrix}$ – матриця \mathbf{G} -параметрів.

H-форма рівнянь чотириполюсника є дуальною до \mathbf{G} -форми і визначає залежності напруги \underline{U}_1 та струму \underline{I}_2 від напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_1 . Вона має вигляд

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

де $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$ – матриця \mathbf{H} -параметрів.

Розмірність коефіцієнтів рівнянь (6.10) та (6.12) і їх фізичну інтерпретацію здійснюють за аналогією з попередніми формами.

Коефіцієнти усіх шести форм рівнянь пасивного прохідного чотириполюсника є сталими за умови незмінної частоти і визначаються тільки внутрішньою структурою чотириполюсника

та параметрами елементів, з яких він складається. Коефіцієнти чотириполосника не залежать від параметрів схем (джерел живлення та приймачів), що під'єднуються до зовнішніх полюсів чотириполосника. Вони однозначно характеризують режим роботи кола, стосовно його зовнішніх полюсів. Як видно з рівнянь чотириполосника, він однозначно задається чотирма коефіцієнтами однієї із вищенаведених форм рівнянь. Оскільки усі форми рівнянь є рівнозначними, то надалі властивості чотириполосників та методи їх аналізу виконуватимемо на основі рівнянь A -форми.

З аналізу рівнянь взаємного чотириполосника випливає, що визначник системи рівнянь будь-якої форми завжди дорівнює одиниці. Зокрема, для A -форми

$$\Delta A = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21}\underline{A}_{12} = 1. \quad (6.14)$$

Це означає, що пасивний взаємний чотириполосник однозначно характеризується тільки трьома незалежними параметрами.

Аналіз рівнянь форм A та B свідчить, що при взаємній заміні вхідних та вихідних полюсів $\underline{A}_{11} = \underline{B}_{22}$, $\underline{A}_{22} = \underline{B}_{11}$. На рис. 6.3а, б, наведені схеми та відповідні рівняння чотириполосника у разі живлення з боку виходу

Рівняння схеми зображеної на рис. 6.3а мають вигляд

$$\underline{U}_2 = \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1.$$

Рівняння зображеної на рис. 6.3б схеми мають вигляд

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{22}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}_2.$$

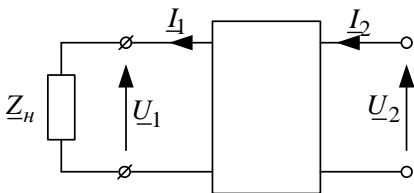


Рис. 6.3а

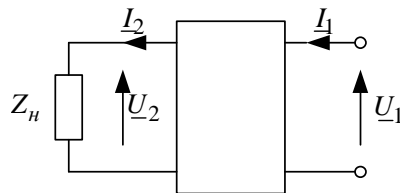


Рис. 6.3б

Отже, якщо поміняти вхід і вихід місцями, то в рівняннях A -форми необхідно коефіцієнти \underline{A}_{11} та \underline{A}_{22} поміняти місцями. Якщо за такої заміни режим роботи зовнішньої частини кола не зміниться, то такий чотириполосник називається **симетричним**. Інакше кажучи, чотириполосник симетричний, якщо у разі зміни місцями джерела і споживача не змінюються струми і напруги на вході та виході чотириполосника, інакше чотириполосник – **несиметричний**. Для симетричного чотириполосника – $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, або $\underline{A} = \underline{D}$. Отже, симетричний чотириполосник характеризується лише двома незалежними параметрами.

Основні положення. Відомо шість форм рівнянь чотириполосника, які характеризують його режими роботи. Між коефіцієнтами цих форм існує однозначний зв'язок.

Визначник системи рівнянь взаємного чотириполосника будь-якої форми завжди дорівнює одиниці.

6.3. Визначення коефіцієнтів чотириполосника

Коефіцієнти чотириполосника можна визначити двома способами: аналітичним – якщо відома внутрішня структура (схема) чотириполосника та її параметри, і експериментальним – якщо є фізична модель (реальне коло) чотириполосника.

Аналітичний спосіб було проілюстровано вище. Його застосування для кола довільної складності полягає в тому, що формується система рівнянь за оптимальним методом; у одержаній системі рівнянь струми двох полюсів та напруги між ними (ці полюси задані як вхідні $1-1'$) виражаємо через струми двох полюсів та напруги між ними (ці полюси задані як вихідні $2-2'$) (рис. 6.1).

Розглянемо експериментальний спосіб визначення параметрів чотириполосника.

За аналогією з двополосниками параметри чотириполосника можуть бути визначені з дослідів **неробочого режиму** та **короткого замикання**. Оскільки прохідний пасивний чотирипо-

люсник характеризується трьома незалежними параметрами, то необхідно здійснити три експерименти – досліди неробочого режиму та короткого замикання за умови живлення з боку однієї пари полюсів і один із таких дослідів за умови живлення з боку другої пари полюсів.

Теоретичне обґрунтування експериментального способу визначення параметрів розглянемо на прикладі A -форми рівнянь симетричного чотириполюсника

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Як зазначалось вище, для симетричного пасивного прохідного чотириполюсника маємо дві додаткові умови

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; \quad \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}, \quad (6.16)$$

а, отже, незалежними є тільки два параметри. З урахуванням (6.16) для визначення усіх параметрів чотириполюсника достатньо провести лише два експерименти, наприклад, досліди неробочого режиму та короткого замикання з боку вхідних полюсів (затискачів).

Дослід неробочого режиму ($\underline{I}_2 = 0$). Із (6.15) витікає, що в режимі відсутності навантаження на виході чотириполюсника $\underline{U}_{10} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{20}$, $\underline{I}_{10} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{20}$, отже,

$$\frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_{10} = Z_{10}e^{j\varphi_{10}}, \quad (6.17)$$

де \underline{U}_{10} , \underline{I}_{10} – комплекси напруги та струму на вході чотириполюсника, \underline{Z}_{10} комплексний вхідний опір у цьому експерименті.

Дослід короткого замикання ($\underline{U}_2 = 0$). Із (6.15) витікає, що в режимі короткого замикання на виході чотириполюсника $\underline{U}_{1k} = \underline{A}_{12}\underline{I}_{2k}$, $\underline{I}_{1k} = \underline{A}_{21}\underline{I}_{2k}$. Звідси за аналогією з (6.17) одержимо

$$\frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{I}_{1k}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_{1k} = Z_{1k}e^{j\varphi_{1k}}, \quad (6.18)$$

де \underline{U}_{1k} , \underline{I}_{1k} – комплекси напруги та струму в цьому експерименті, а \underline{Z}_{1k} – вхідний опір.

Для того, щоб виразити **A**-параметри через Z_{10} , Z_{1k} , необхідно розв'язати систему рівнянь (6.16)–(6.18). У результаті знаходимо

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{Z_{10}}{(Z_{10} - Z_{1k})}}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} Z_{1k}; \quad \underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / Z_{10}. \quad (6.19)$$

Комплексні вхідні опори Z_{10} , Z_{1k} чотириполюсника, як і двополюсника, можна виміряти за допомогою амперметра, вольтметра і фазометра (або ватметра).

Основні положення. Параметри чотириполюсника можна визначити аналітично, якщо відома внутрішня схема, або експериментально з дослідів неробочого режиму та короткого замикання. Для прохідного пасивного чотириполюсника необхідно здійснити три досліді (наприклад, два досліді за умови живлення з боку вхідних полюсів і один – з боку вихідних), а для симетричного чотириполюсника достатньо двох дослідів.

6.4. Характеристичні параметри чотириполюсника

Для аналізу електричних кіл, які складаються з чотириполюсників, важливими є питання забезпечення оптимальних умов пересилання енергії через окремих чотириполюсник і розрахунок зміни вихідних струмів та напруг за модулем та фазою щодо вхідних. З метою спрощення аналізу вводяться параметри чотириполюсника, які однозначно пов'язані з коефіцієнтами рівнянь чотириполюсника і називаються у **характеристичними параметрами**. До них належать **характеристичний опір** і **коефіцієнт передачі**. Ці параметри називають **вторинними**, на відміну від коефіцієнтів рівнянь чотириполюсника, які називають **первинними**.

Характеристичним називають такий опір, за умови вмикання якого на вихід чотириполюсника його вхідний опір дорівнює цьому опоріві. Очевидно, що несиметричний чотириполюсник має два характеристичні опори: Z_{c1} і Z_{c2} , один з яких

визначається за умови живлення з боку вхідних полюсів (1–1'), а другий – з боку виходу (полюси 2–2'). Для симетричного чотириполюсника ці опори рівні між собою, тобто $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c$, через це іноді опір \underline{Z}_c називають повторним. Якщо чотириполюсник навантажений на характеристичний опір $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$, то такий режим роботи називають **узгодженим**. Надалі обмежимося аналізом симетричних чотириполюсників.

Виразимо характеристичний опір симетричного чотириполюсника через A -параметри. Для цього до виходу чотириполюсника (рис. 6.4) під'єднаємо опір навантаження $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$.

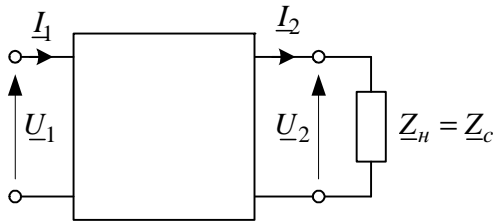


Рис. 6.4

Підставимо в A -форму рівнянь чотириполюсника $\underline{U}_2 = \underline{Z}_c \underline{I}_2$.

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2 = \underline{A}_{11} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2. \quad (6.20a)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2 = \underline{A}_{21} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2. \quad (6.20б)$$

Поділивши рівняння (6.20a) на рівняння (6.20б), одержуємо

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{1ex} = \underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2}.$$

Звідки

$$\underline{A}_{11} \underline{Z}_c + \underline{A}_{12} = \underline{A}_{21} \underline{Z}_c^2 + \underline{A}_{22} \underline{Z}_c.$$

Оскільки для симетричного чотириполюсника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, для обчислення характеристичного опору через A -параметри одержимо вираз

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}. \quad (6.21)$$

Для визначення коефіцієнта передачі симетричного чотириполюсника знайдемо відношення напруги \underline{U}_1 на вході до напруги \underline{U}_2 на виході чотириполюсника. Враховуючи, що в режимі узгодженого навантаження $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_c$, одержуємо

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{A}_{12}\underline{U}_2.$$

Відношення вхідної напруги \underline{U}_1 до вихідної \underline{U}_2 визначається за формулою

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_c} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}, \quad (6.22)$$

Подібну процедуру здійснимо і для струмів, застосувавши вираз (6.20б),

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{Z}_c\underline{I}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2; \\ \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} &= \underline{A}_{22} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_c = \underline{A}_{22} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Для симетричного чотириполюсника з (6.22) та (6.23) випливає, що у разі узгодженого навантаження

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}. \quad (6.24)$$

Для визначення співвідношення між напругами (струмами) на вході і виході чотириполюсника за узгодженого навантаження підставимо в (6.24) комплексні значення $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\psi_{u1}}$, $\underline{U}_2 = U_2 e^{j\psi_{u2}}$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1 e^{j\psi_{u1}}}{U_2 e^{j\psi_{u2}}} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})} = e^{(\alpha + j\beta)} = e^\alpha \cdot e^{j\beta},$$

де

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} \quad (6.25)$$

– **коефіцієнт згасання**, який характеризує зміну напруги (струму) за модулем між входом та виходом (безрозмірна величина, одиницею вимірювання якої є **непер**; згасання в один непер відповідає зміні напруги в $e = 2,72$ рази);

$$\beta = \psi_{u_1} - \psi_{u_2} \quad (6.26)$$

– *коефіцієнт фази*, який характеризує зсув фаз між напругами (струмами) на вході \underline{U}_1 та виході \underline{U}_2 чотириполюсника.

Комплексна величина

$$\underline{\Gamma} = \alpha + j\beta = \gamma e^{j\theta} \quad (6.27)$$

називається *коефіцієнтом передачі*. Вона дорівнює відношенню вхідної напруги (струму) до вихідної напруги (струму) за узгодженого навантаження чотириполюсника

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = e^{\underline{\Gamma}}. \quad (6.28)$$

Оскільки коефіцієнт згасання $\alpha = \ln U_1 / U_2$, то завжди $\alpha \geq 0$, тобто від'ємним бути не може. Характеристичний опір і коефіцієнт передачі чотириполюсника називають вторинними параметрами, оскільки вони визначаються структурою та параметрами елементів схеми і не залежать від напруг та струмів на вході та виході.

Визначимо складові α та β коефіцієнта передачі через A -параметри чотириполюсника. Для цього праву частину рівняння (6.22) запишемо у показниковій формі

$$\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} = m e^{j\theta}. \quad (6.29)$$

Отже, вирази (6.28) та (6.29) повинні бути ідентичними, тобто

$$e^{\underline{\Gamma}} = e^{(\alpha + j\beta)} = m e^{j\theta}; \quad \alpha = \ln m; \quad \beta = \theta. \quad (6.30)$$

Вирази (6.29) та (6.30) дають змогу визначити коефіцієнт згасання α та коефіцієнт фази β через A -параметри чотириполюсника.

Необхідно зауважити, що коефіцієнт передачі $\underline{\Gamma}$ характеризує режим за узгодженого навантаження і є параметром чотириполюсника, на відміну від передавальної функції, яка визначається за будь-якого навантаження.

Основні положення. Коефіцієнти рівнянь чотириполюсника називають первинними параметрами, характеристичний опір і коефіцієнт передачі – вторинними.

Для несиметричного пасивного чотириполюсника існує два характеристичні опори (з боку входу та виходу), для симетричного чотириполюсника вони рівні між собою.

Навантаження чотириполюсника характеристичним опором називається узгодженим режимом його роботи.

Коефіцієнт передачі чотириполюсника характеризує режим його роботи у разі узгодженого навантаження.

6.5. Заступні схеми взаємних чотириполюсників

Оскільки у загальному випадку режим роботи взаємного чотириполюсника визначається трьома незалежними параметрами, то еквівалентна заступна схема повинна складатись не менше ніж із трьох елементів, параметри яких визначаються коефіцієнтами рівнянь чотириполюсника, що можуть утворити дві структури: у вигляді зірки або трикутника (так звані **Т**- або **П**-подібні заступні схеми). Установимо залежності між коефіцієнтами **A**-форми рівнянь чотириполюсника та параметрами еквівалентних заступних схем.

Т-подібна заступна схема (з'єднання зіркою) зображена на рис. 6.5.

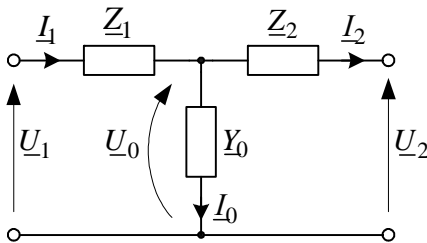


Рис. 6.5

Виразимо вхідні величини U_1 та I_1 через вихідні – U_2 та I_2 . За законами Кірхгофа

$$I_1 = I_0 + I_2; \quad U_0 = Z_2 I_2 + U_2. \quad (6.31 \text{ а, б})$$

Згідно із законом Ома з урахуванням (6.31а)

$$I_0 = Y_0 U_0 = Y_0 (Z_2 I_2 + U_2). \quad (6.31 \text{ в})$$

Підставивши (6.31в) у (6.31а), одержуємо залежність вхідного струму I_1 від вихідних напруги U_2 та струму I_2

$$I_1 = Y_0(Z_2 I_2 + U_2) + I_2 = Y_0 U_2 + (1 + Z_2 Y_0) I_2. \quad (6.32)$$

На підставі другого закону Кірхгофа

$$U_1 = Z_1 I_1 + U_0 = Z_1 I_1 + Z_2 I_2 + U_2. \quad (6.33)$$

Підставивши (6.32) у (6.33), одержуємо залежність вхідної напруги U_1 від вихідних напруги U_2 та струму I_2

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_1 (Y_0 U_2 + (1 + Z_2 Y_0) I_2) + Z_2 I_2 + U_2 = \\ &= (1 + Z_2 Y_0) U_2 + (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0) I_2. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Оскільки система рівнянь (6.1) та рівняння (6.32), (6.34) повинні бути еквівалентними, то коефіцієнти при координатах U_2 та I_2 повинні бути рівними. Звідки знаходимо

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 + Z_2 Y_0; & A_{22} &= 1 + Z_1 Y_0; & A_{21} &= Y_0; \\ A_{12} &= Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

З рівнянь (6.35) можна виразити параметри Y_0 , Z_1 , Z_2 через A -параметри

$$Y_0 = A_{21}; \quad Z_1 = (A_{22} - 1) / A_{21}; \quad Z_2 = (A_{11} - 1) / A_{21}. \quad (6.36)$$

Для симетричного чотириполюсника $A_{11} = A_{22}$, це означає, що $Z_1 = Z_2$.

П-подібна заступна схема (з'єднання трикутником) зображена на рис. 6.6. З метою визначення її параметрів виразимо вхідну напругу U_1 та вхідний струм I_1 через вихідну напругу U_2 та вихідний струм I_2 .

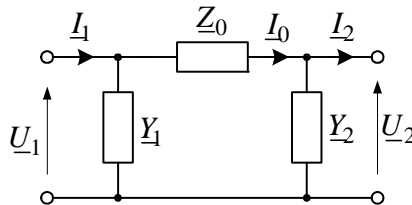


Рис. 6.6

За другим законом Кірхгофа для схеми рис. 6.6

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_0 (\underline{Y} \underline{U}_2 + \underline{I}_2) + \underline{U}_2 = (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2. \quad (6.37)$$

Згідно з першим законом Кірхгофа з урахуванням (6.37) одержимо

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y} \underline{U}_1 + \underline{I}_0 = \underline{Y}_1 ((1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2) + \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \\ &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (6.38)$$

З рівнянь (6.37), (6.38) можна визначити залежності між A -параметрами та параметрами Π -подібної заступної схеми. Вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_0; \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \\ \underline{Z}_0 &= \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_1 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{Z}_0; \quad \underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{Z}_0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Для симетричного чотириполюсника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ і $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2$.

Аналогічно можна визначити залежності між параметрами T -подібних або Π -подібних заступних схем і параметрами чотириполюсника, записаних у кожній із вищезазначених форм рівнянь.

Основні положення. Пасивні взаємні чотириполюсники характеризуються чотирма коефіцієнтами, серед яких незалежними є лише три, оскільки визначник рівнянь, які його описують, дорівнює одиниці.

Незалежно від внутрішньої електричної схеми чотириполюсника, його можна замінити T - або Π -подібною заступною схемою, до якої входять три пасивні елементи.

6.6. Рівняння симетричного чотириполюсника в гіперболічній формі

Виразимо A -параметри симетричного чотириполюсника через характеристичні параметри. З порівняння (6.32) та (6.35) витікає, що

$$e^{\Gamma} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}. \quad (6.40a)$$

Враховуючи що для симетричного чотириполюсника $\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = 1$, одержуємо

$$e^{-\Gamma} = \underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}. \quad (6.40b)$$

На підставі (6.40 а) та (6.40 б) одержимо вираз для визначення параметра \underline{A}_{11} (\underline{A}_{22}) за відомим характеристичним параметром $\underline{\Gamma}$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = \text{ch } \underline{\Gamma}. \quad (6.41)$$

Для визначення параметрів \underline{A}_{12} та \underline{A}_{21} знайдемо різницю виразів (6.40а) та (6.40б). У результаті одержимо

$$\sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = \text{sh } \underline{\Gamma}. \quad (6.42)$$

Домноживши (6.42) на характеристичний опір \underline{Z}_c , з урахуванням (6.31) одержимо

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \text{sh } \underline{\Gamma}. \quad (6.43)$$

Поділивши (6.42) на \underline{Z}_c , з урахуванням (6.21) матимемо

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_c} \text{sh } \underline{\Gamma}. \quad (6.44)$$

З рівнянь (6.41), (6.43), (6.44) та (6.20) отримаємо рівняння симетричного чотириполюсника у гіперболічній формі за узгодженого навантаження

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \text{ch } \underline{\Gamma} + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \text{sh } \underline{\Gamma}; \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{U}_2 \text{sh } \underline{\Gamma} + \underline{I}_2 \text{ch } \underline{\Gamma}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Основні положення. Коефіцієнти рівнянь чотириполюсника можна виразити через характеристичні параметри, використовуючи гіперболічні функції. Такі рівняння називають рівняннями чотириполюсника у гіперболічній формі.

6.7. Способи з'єднання чотириполюсників

Для двополюсників є тільки два можливі способи з'єднання, а саме: послідовне, коли через них проходить один і той самий струм, і паралельне – коли обидва двополюсники під'єднані до одного джерела напруги. Найвність у прохідних чотириполюсників двох незалежних пар полюсів дає змогу здійснити

шість можливих з'єднань. Розглянемо коротко ці можливі попарні сполучення чотириполосників.

Послідовне з'єднання передбачає, що вхідні і відповідно вихідні струми чотириполосників є однаковими. На рис. 6.7 наведено схему двох послідовно з'єднаних чотириполосників N та M . Як видно зі схеми

$$\underline{I}_{1N} = \underline{I}_{1M}; \quad \underline{I}_{2N} = \underline{I}_{2M}, \quad (6.46)$$

тобто рівняння (6.46) задовольняють умовам послідовного з'єднання на вході і на виході.

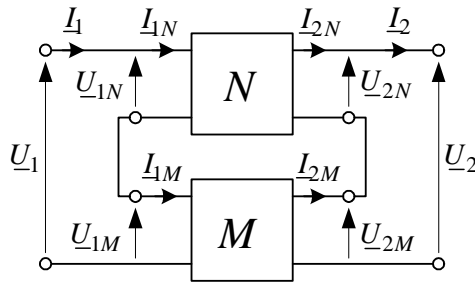


Рис. 6.7

Два чотириполосники, за аналогією із двополосниками, можна перетворити в один еквівалентний чотириполосник. Умова перетворення

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 = \underline{I}_{1N} = \underline{I}_{1M}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{2N} = \underline{I}_{2M}. \\ \underline{U}_1 = \underline{U}_{1N} + \underline{U}_{1M}; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{2N} + \underline{U}_{2M}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

У цьому разі доцільно скористатися \mathbf{Z} -формою (6.10) рівнянь, оскільки необхідно додавати напруги окремих чотириполосників і на вході, і на виході. Запишемо рівняння для чотириполосників N та M з урахуванням позначень на рис. 6.7

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1N} = \underline{Z}_{11N}\underline{I}_{1N} + \underline{Z}_{12N}\underline{I}_{2N}; \quad \underline{U}_{2N} = \underline{Z}_{21N}\underline{I}_{2N} + \underline{Z}_{22N}\underline{I}_{2N}. \\ \underline{U}_{1M} = \underline{Z}_{11M}\underline{I}_{1M} + \underline{Z}_{12M}\underline{I}_{2M}; \quad \underline{U}_{2M} = \underline{Z}_{21M}\underline{I}_{2M} + \underline{Z}_{22M}\underline{I}_{2M}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Після підстановки (6.48) у (6.47) одержимо рівняння еквівалентного чотириполосника у \mathbf{Z} -формі

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 = (\underline{Z}_{11N} + \underline{Z}_{11M})\underline{I}_1 + (\underline{Z}_{12N} + \underline{Z}_{12M})\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 = (\underline{Z}_{21N} + \underline{Z}_{21M})\underline{I}_2 + (\underline{Z}_{22N} + \underline{Z}_{22M})\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (6.49)$$

або у матричній формі

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_{MN} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.50)$$

де $\mathbf{Z}_{MN} = \mathbf{Z}_M + \mathbf{Z}_N$, а \mathbf{Z}_{MN} , \mathbf{Z}_M , \mathbf{Z}_N – матриці еквівалентного чотириполосника та складових чотириполосників відповідно M і N .

Отже, перетворення чотириполосників при послідовному з'єднанні зводиться до додавання матриць \mathbf{Z} -параметрів складових чотириполосників.

Паралельне з'єднання передбачає, що напруги відповідно на вході і виході чотириполосників однакові (рис. 6.8).

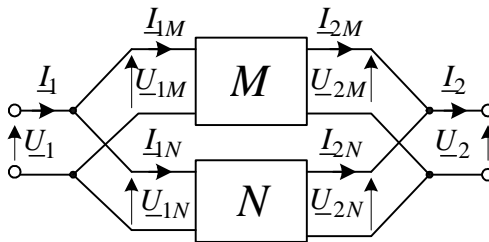


Рис. 6.8

Очевидно, що

$$\underline{U}_{1M} = \underline{U}_{1N}; \quad \underline{U}_{2M} = \underline{U}_{2N}. \quad (6.51)$$

Зображені на рис. 6.8 чотириполосники M і N можна перетворити в один еквівалентний. Умови перетворення

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{1M} + \underline{I}_{1N}; & \underline{U}_1 &= \underline{U}_{1M} = \underline{U}_{1N}; \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{2M} + \underline{I}_{2N}; & \underline{U}_2 &= \underline{U}_{2M} = \underline{U}_{2N}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

У цьому разі для здійснення перетворення згідно з (6.52) доцільно скористатись \mathbf{Y} -формою рівнянь (6.6) чотириполосника. Підставивши рівняння (6.6) у (6.52), за аналогією з здійсненими вище перетвореннями, одержуємо

$$\mathbf{Y}_{MN} = \mathbf{Y}_M + \mathbf{Y}_N. \quad (6.53)$$

Перетворення чотириполосників за паралельного з'єднання зводиться до додавання матриць \mathbf{Y} -параметрів складових чотириполосників.

Змішане з'єднання чотириполіусників має дві модифікації: послідовно-паралельне та паралельно-послідовне. Послідовно-паралельне передбачає послідовне з'єднання на вході чотириполіусників та паралельне на виході. На рис. 6.9 наведено послідовно-паралельне з'єднання чотириполіусників M та N .

Умови такого з'єднання: на вході

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1N} = \underline{I}_{1M}; \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_{1M} + \underline{U}_{1N} \quad (6.54)$$

і на виході

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2N} + \underline{I}_{2M}; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{2M} = \underline{U}_{2N}. \quad (6.55)$$

Можна довести, що перетворення чотириполіусників M та N у разі послідовно-паралельного з'єднання зводиться до додавання матриць \mathbf{H}_M та \mathbf{H}_N їх \mathbf{H} -параметрів

$$\mathbf{H}_{MN} = \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_N, \quad (6.56)$$

де \mathbf{H}_{MN} – матриця \mathbf{H} -параметрів еквівалентного чотириполіусника.

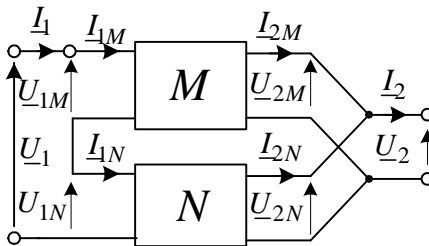


Рис. 6.9

Паралельно-послідовне з'єднання чотириполіусників M та N (рис. 6.10) передбачає паралельне з'єднання полюсів на вході та послідовне на виході.

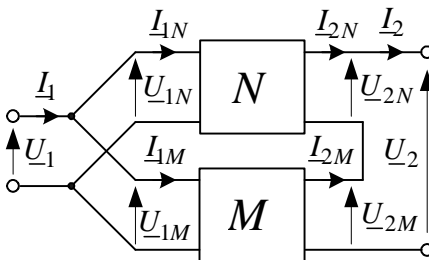


Рис. 6.10

Умови паралельно-последовного з'єднання мають вигляд:
на вході

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1M} = \underline{U}_{1N}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_{1N} + \underline{I}_{1M} \quad (6.57a)$$

і на виході

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2N} + \underline{U}_{2M}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{2N} = \underline{I}_{2M}. \quad (6.57b)$$

У цьому разі перетворення зводиться до додавання **G**-параметрів

$$\mathbf{G}_{MN} = \mathbf{G}_M + \mathbf{G}_N. \quad (6.58)$$

Каскадне з'єднання передбачає під'єднання до вихідних полюсів чотириполюсника **M** вхідних полюсів чотириполюсника **N**, а до вихідних полюсів чотириполюсника **N** вхідних полюсів чотириполюсника **P** (рис. 6.11). Такому з'єднанню відповідають умови

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_{2M}; \quad \underline{U}_{1P} = \underline{U}_{2N}; \quad \underline{I}_{1N} = \underline{I}_{2M}; \quad \underline{I}_{1P} = \underline{I}_{2N}. \quad (6.59)$$

Для еквівалентного перетворення, зображених на рис. 6.11 чотириполюсників **M**, **N** та **P**, їх рівняння доцільно записати в **A**-формі. Доведено, що матриця еквівалентної схеми дорівнює добутку **A**-матриць каскадно з'єднаних чотириполюсників

$$\mathbf{A}_{MNP} = \mathbf{A}_M \cdot \mathbf{A}_N \cdot \mathbf{A}_P. \quad (6.60)$$

Каскадно з'єднані чотириполюсники називають **ланцюговою схемою**. І якщо ці чотириполюсники ідентичні, то така схема називається **однорідною** ланцюговою схемою.

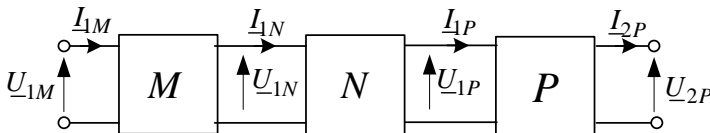


Рис. 6.11

Інколи застосовується **зворотнє** каскадне з'єднання чотириполюсників, за якого струми мають напрямок (напрямок передавання енергії), протилежний до наведеного на рис. 6.11. Для еквівалентного перетворення зворотного каскадного з'єднання чотириполюсників доцільно застосовувати **B**-форму рівнянь, і за аналогією з попереднім одержимо

$$\mathbf{B}_{PNM} = \mathbf{B}_P \cdot \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{B}_M. \quad (6.61)$$

Основні положення. Якщо два або кілька чотириполюсників з'єднані між собою, то коефіцієнти еквівалентного чотириполюсника можна визначити через коефіцієнти складових чотириполюсників за формулами, які залежать від способу їх з'єднання.

6.8. Рівняння активних автономних чотириполюсників

Як зазначалось в п. 6.1, у активних автономних чотириполюсниках за відсутності під'єднаних до зовнішніх полюсів джерел полюсні струми (I_1, I_2) та міжполюсні напруги (U_1, U_2) як на вході, так і на виході не дорівнюють нулю. Система рівнянь вигляду (6.1) для цього випадку стає не чинною, оскільки у разі короткого замикання первинних 1-1' та відповідно вторинних 2-2' виводів (полюсів), тобто при $U_1 = 0$ та $U_2 = 0$ струми I_1 та I_2 також повинні дорівнювати нулю, що не відповідає умовам автономності та активності, а саме $I_{1k} \neq 0$; $I_{2k} \neq 0$. Це стосується і неробочого режиму, коли при $I_1 = 0, I_2 = 0$, напруги неробочого режиму на вході U_{10} та на виході U_{20} не дорівнюють нулю.

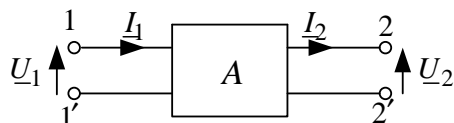


Рис. 6.12

Для формування рівнянь активного автономного чотириполюсника (рис. 6.12) застосуємо теорему про активний двополюсник окремо для входу та виходу. У результаті одержимо дві можливі еквівалентні схеми: варіант з джерелом напруги (рис. 6.13а) та варіант з джерелом струму (рис. 6.13б).

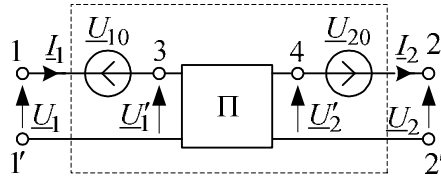


Рис. 6.13а

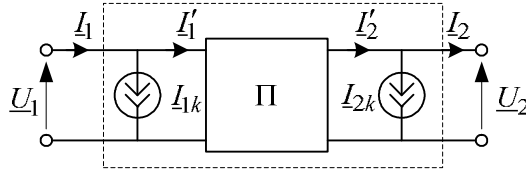


Рис. 6.13б

Сформуємо рівняння для одержаних еквівалентних схем.

Чотириполусник рис. 6.13а стосовно полюсів 3–1' та 4–2' є пасивним, А-форма рівнянь якого має вигляд

$$\underline{U}'_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \quad \underline{I}'_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \quad (6.62)$$

Очевидно, що

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{10} + \underline{U}'_1; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{20} + \underline{U}'_2; \quad \underline{I}'_1 = \underline{I}_1; \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}_2. \quad (6.63)$$

З рівнянь (6.62) і (6.63), одержуємо рівняння активного автономного чотириполусника у вигляді

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 + (\underline{U}_{10} - \underline{A}_{11}\underline{U}_{20}); \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 - \underline{A}_{21}\underline{U}_{20}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Для варіанта схеми з джерелом струму рівняння (6.62) необхідно перетворити.

Згідно з рис. 6.13б

$$\underline{I}'_1 = \underline{I}'_1 - \underline{I}_{1k}; \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}_2 + \underline{I}_{2k}; \quad \underline{U}'_1 = \underline{U}'_1; \quad \underline{U}'_2 = \underline{U}_2. \quad (6.65)$$

Підставляючи (6.65) в (6.62), одержуємо інший вигляд рівнянь активного автономного чотириполусника

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_{2k}; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 + \underline{I}_{1k} + \underline{A}_{22}\underline{I}_{2k}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Отже, для аналізу активних автономних чотириполусників можна використовувати методи розрахунку пасивних чотириполусників.

Основні положення. Активний чотириполіусник можна звести за допомогою еквівалентних перетворень до відповідно з'єднаних пасивного чотириполіусника і джерел електричної енергії, що дає змогу застосувати до його аналізу теорію пасивних чотириполіусників.

6.9. Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1. Відомі первинні параметри зображеного на рис. 6.14 симетричного чотириполіусника (безвтратного реактивного фільтра) $L_1 = L_2 = L = 0,01$ Гн; $C_0 = 10^{-5}$ Ф. До його виходу під'єднано навантаження, опір R_n якого дорівнює характеристичному опорі Z_C чотириполіусника. Потужність навантаження $P_n = 70,0$ Вт, а частота живлення $\omega = 1000$ с⁻¹.

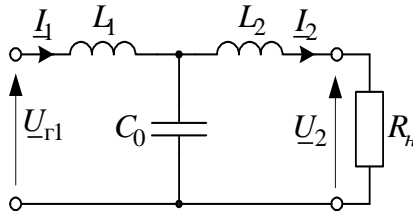


Рис. 6.14

Обчислити:

- А-параметри чотириполіусника та перевірити рівність одиниці значення детермінанту рівнянь;
- характеристичний опір, коефіцієнт передачі за заданої частоти та опір навантаження;
- вхідні опори у разі короткого замикання та неробочого режиму;
- вхідні струми, напруги, комплексну потужність та коефіцієнт корисної дії фільтра;
- побудувати векторні діаграми струмів та напруг.

Розв'язання. Розрахунок здійснюємо комплексним методом. Відповідна комплексна схема електричного кола (рис. 6.14) має вигляд, зображений на рис. 6.15.

Очевидно, що

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} = j\omega L = j0,1 \cdot 100 = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_0 = j\omega C_0 = j1000 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = j0,05 \text{ Ом}^{-1}.$$

А. Розрахуємо A -параметри згідно з формулами (6.19) з урахуванням позначень рис. 6.15.

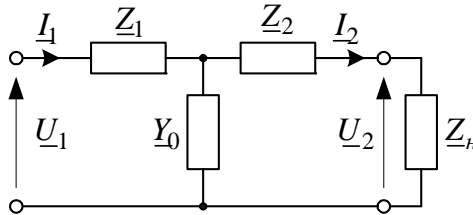


Рис. 6.15

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_0 = 1 + j10 \cdot j0,05 = 0,5;$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 = j10 + j10 + j10 \cdot j10 \cdot j0,05 = j15 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{Y}_0 = j0,05 \text{ Ом}^{-1}.$$

Обчислимо детермінанти системи рівнянь A -форми згідно з (6.14)

$$\Delta A = \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = 0,5 \cdot 0,5 - (j15 \cdot j0,05) = 0,25 + 0,75 = 1,0;$$

Б. Обчислимо характеристичний опір \underline{Z}_c та коефіцієнт передачі $\underline{\Gamma}$ за частоти $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$.

Характеристичний опір симетричного чотириполюсника обчислюємо за формулою (6.31)

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{j15}{j0,05}} = 17,32 \text{ Ом}.$$

Це означає, що опір навантаження $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$ резистивний, тобто $\underline{Z}_H = R_H = 17,32 \text{ Ом}$.

Згідно з (6.40) коефіцієнт передачі $\underline{\Gamma}$ визначаємо через A -параметри:

$$e^{\underline{\Gamma}} = \frac{A_{11}}{A_{21}} + \sqrt{\frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}}} = 0,5 + \sqrt{(j15) \cdot (j0,05)} = 1 \cdot e^{j60^\circ} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta}.$$

Отже, $e^{\alpha} = 1$, $\alpha = 0$, $e^{j\beta} = e^{j60^\circ}$; $\beta = 60^\circ$.

В. Вхідні опори за неробочого режиму \underline{Z}_{10} та короткого замикання \underline{Z}_{1k} обчислюються за формулами (6.25) та (6.26)

$$\underline{Z}_{10} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{0,5}{j0,05} = -j10 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{1k} = \frac{A_{12}}{A_{21}} = \frac{j15}{j0,05} = 300 \text{ Ом}.$$

Г. Для розрахунку напруги та струму на вході чотирьохполюсника необхідно попередньо обчислити струм та напруги на його виході (на навантаженні). Оскільки $P_H = R_H I_2^2$, $R_H = Z_C$, то:

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_H}{R_H}} = \sqrt{\frac{70}{17,32}} = 2,01 \text{ А}.$$

Прийемо початкову фазу вихідного струму $\psi_{i2} = 0$, тобто

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\psi_{i2}} = 2,01e^{j0^\circ} \text{ А}.$$

Напруга на виході $\underline{U}_2 = R_2 I_2 = 17,32 \cdot 2,01e^{j0^\circ} = 34,82e^{j0^\circ} \text{ В}$.

Вхідні напругу та струм визначаємо згідно з формулами (6.37) з урахуванням, що $\underline{\Gamma} = \alpha + j\beta = 0^\circ + j60^\circ$,

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{j\underline{\Gamma}} = 34,82e^{j60^\circ} \text{ В}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^{j\underline{\Gamma}} = 2,01e^{j60^\circ} \text{ А}.$$

Комплексна потужність на вході

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = P_1 + jQ_1 = 34,82e^{j60^\circ} \cdot 2,01e^{-j60^\circ} = (70 + j0) \text{ ВА}.$$

Отже, $P_1 = 70 \text{ Вт}$; $Q_1 = 0 \text{ вар}$.

$$\text{Коефіцієнт корисної дії } \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{70}{70} = 1.$$

Д. Для побудови діаграм струмів та напруг необхідно обчислити величини:

$$\underline{U}_{L2} = \underline{Z}_2 I_2 = j10 \cdot 2,01e^{j0^\circ} = 20,1e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{C0} = \underline{U}_2 + \underline{U}_{L2} = 34,82e^{j0^\circ} + 20,1e^{j90^\circ} = 40,15e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$I_{C_0} = Y_0 U_{C_0} = j0,05 \cdot 40,15 e^{j30^\circ} = 2,01 e^{j120^\circ} \text{ A};$$

$$I_1 = I_{C_0} + I_2 = 2,01 e^{j120^\circ} + 2,01 e^{j0^\circ} = 2,01 e^{j60^\circ} \text{ A};$$

$$U_{L_1} = Z_1 I_1 = j10 \cdot 2,01 e^{j60^\circ} = 20,1 e^{j150^\circ} \text{ B};$$

$$U_1 = U_{C_0} + U_{L_1} = 40,15 e^{j30^\circ} + 20,1 e^{j150^\circ} = 34,82 e^{j60^\circ} \text{ B}.$$

На підставі обчислених векторів на рис. 6.16 побудовані діаграми напруг та струмів.

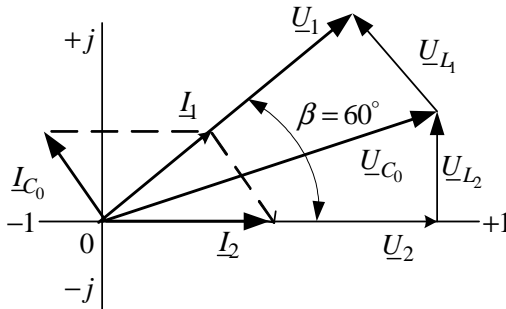


Рис. 6.16

Приклад 6.2. Відомі результати дослідів неробочого режиму та короткого замикання симетричного чотириполюсника (рис. 6.17).

$$I_{10} = 1,4 \text{ A}; \quad U_{10} = 10 \text{ B}; \quad P_{10} = 6,25 \text{ Вт}; \quad \varphi_{10} < 0;$$

$$I_{1k} = 0,625 \text{ A}; \quad U_{1k} = 10 \text{ B}.$$

Необхідно визначити **A**-параметри досліджуваного чотириполюсника, нарисувати **П** – подібну заступну схему чотириполюсника та розрахувати її параметри, а також записати рівняння чотириполюсника в **A**-формі.

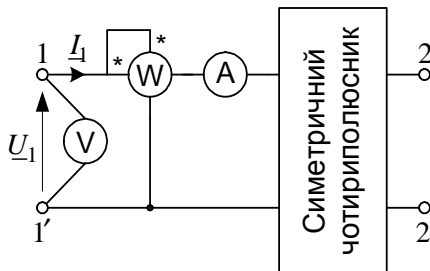


Рис. 6.17

Розв'язання. Для обчислення \underline{A} -параметрів чотириполюсника необхідно попередньо розрахувати опори \underline{Z}_{10} та \underline{Z}_{1k} (вхідні комплексні опори)

$$\underline{Z}_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \frac{10}{1,4} = 7,143 \text{ Ом};$$

$$\varphi_{10} = \arccos \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}} = \arccos \frac{6,25}{10 \cdot 1,4} = 61^\circ 30'.$$

В умовах експерименту зазначено, що $\varphi_{10} < 0$, отже,
 $\underline{Z}_{10} = 7,143e^{-j61^\circ 30'} \text{ Ом}.$

Аналогічно

$$\underline{Z}_{1k} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \frac{10}{0,625} = 16 \text{ Ом};$$

$$\varphi_{1k} = \arccos \frac{P_{1k}}{U_{1k} I_{1k}} = \arccos \frac{6,25}{0,625 \cdot 10} = 0;$$

$$\underline{Z}_{1k} = 16e^{j0} \text{ Ом}.$$

Згідно з (6.24)

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1k}}} = \sqrt{\frac{7,43e^{-j61^\circ 30'}}{7,43e^{-j61^\circ 30'} - 16e^{j0}}} = 0,707e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{1k} = 0,707e^{j45^\circ} \cdot 16e^{j0} = 11,31e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_{10} = 0,707e^{j45^\circ} / 7,143e^{-j61^\circ 30'} = 0,0988e^{j108^\circ 30'} \text{ Ом}^{-1}.$$

На рис. 6.18 наведена Π -подібна заступна схема чотириполюсника, параметри якої визначаються за формулами (6.22).

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 11,31e^{j45^\circ} = R_0 + jX_0 = (8 + j8) \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_{11} - 1) = \frac{1 \cdot e^{j45^\circ}}{11,31} (1 - 0,707e^{j45^\circ}) = j0,0625 \text{ Ом}^{-1}.$$

Із одержаних результатів витікає, що повздовжня вітка має активно індуктивний опір \underline{Z}_0 , а поперечні вітки – реактивні провідності \underline{Y}_1 та \underline{Y}_2 суто ємнісного характеру.

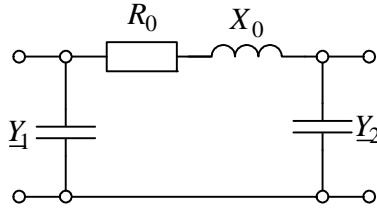


Рис. 6.18

Рівняння чотириполюсника в **A**-формі згідно з (6.1) мають вигляд:

$$\underline{U}_1 = 0,707e^{j45^\circ} \underline{U}_2 + 11,31e^{j45^\circ} \underline{I}_2 \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = 0,0988e^{j108^\circ 30'} \underline{U}_2 + 0,707e^{j45^\circ} \underline{I}_2 .$$

Приклад 6.3. Два однакові симетричні чотириполюсники *M* та *N* сполучені каскадно (рис. 6.19). Відомі їх матриці **A**-параметрів $\|A_M\| = \|A_N\| = \begin{vmatrix} 0,5 & 10 \\ 0,1 & 0,5 \end{vmatrix}$, вихідний струм $\underline{I}_2 = 1e^{j0} \text{ А}$ і напруга $\underline{U}_2 = 10e^{j0} \text{ В}$. Необхідно розрахувати діючі значення вхідної напруги та струму.

Розв'язання. Для визначення струму \underline{I}_1 та напруги \underline{U}_1 необхідно згідно з формулою (6.60) обчислити параметри результуючої матриці A_{MN}

$$\|A_{MN}\| = \|A_M\| \cdot \|A_N\| = \begin{vmatrix} 0,5 & 10 \\ 0,1 & 0,5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & 10 \\ 0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,25 & 10 \\ 0,1 & 1,25 \end{vmatrix} .$$

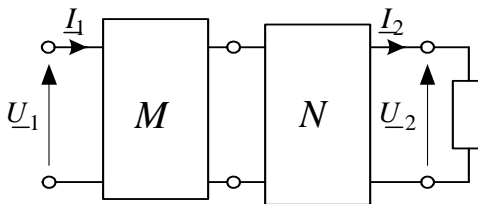


Рис. 6.19

Рівняння еквівалентного чотирьохполосника відповідно до (6.1) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 1,25\underline{U}_2 + 10\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= 0,1\underline{U}_2 + 1,25\underline{I}_2 \end{aligned}$$

Підставляючи в одержані рівняння задані в умовах задачі значення \underline{U}_2 та \underline{I}_2 , визначаємо діюче значення вхідної напруги $U_1 = 1,25 \cdot 10 + 10 \cdot 1,0 = 22,5 \text{ В}$ та діюче значення вхідного струму $I_1 = 0,1 \cdot 10 + 1,25 \cdot 1,0 = 2,25 \text{ А}$.

Приклад 6.4. Два однакових симетричних чотирьохполосники M та N сполучені паралельно (рис. 6.20). Відомі їх матриці \mathbf{Y} -параметрів $\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,05 & 0,1 \end{vmatrix}$ та діючі значення напруг на вході $U_1 = 20 \text{ В}$ та виході $U_2 = 10 \text{ В}$

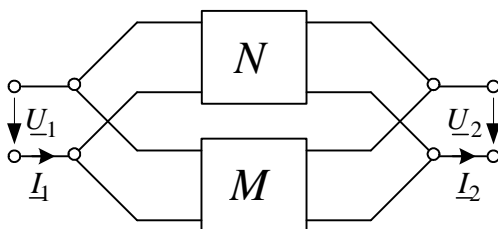


Рис. 6.20

Розрахувати діючі значення вхідного I_1 та вихідного I_2 струмів.

Розв'язання. Згідно з формулою (6.53) результуюча \mathbf{Y}_{MN} -матриця

$$\|\mathbf{Y}_{MN}\| = \|\mathbf{Y}_M\| + \|\mathbf{Y}_N\| = \begin{vmatrix} (0,1+0,1) & (0,2+0,2) \\ (0,05+0,05) & (0,1+0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 \end{vmatrix}.$$

Тоді струми згідно з формулами (6.6) дорівнюють:

на вході – $I_1 = 0,2 \cdot 20 + 0,4 \cdot 10 = 8 \text{ А}$;

на виході – $I_2 = 0,1 \cdot 20 + 0,2 \cdot 10 = 4 \text{ А}$.

6.10. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

1. Що називається чотириполюсником?
2. Які чотириполюсники називаються пасивними? Прохідними? Автономними?
3. Скількома рівняннями описується прохідний чотириполюсник?
4. Скількома незалежними коефіцієнтами характеризується пасивний чотириполюсник?
5. Яке співвідношення між коефіцієнтами пасивного прохідного чотириполюсника?
6. Як можна визначити коефіцієнти чотириполюсника?
7. Скільки є форм рівнянь чотириполюсників?
8. Які розмірності мають коефіцієнти чотириполюсника в **A**-формі?
9. Чи можуть всі коефіцієнти **A**-форми пасивного чотириполюсника бути дійсними?
10. Чи зміняться визначенні за частоти ω коефіцієнти **A**-форми чотириполюсника, якщо частота збільшиться у двічі?
11. Які параметри чотириполюсника називаються первинними, а які вторинними?
12. Що називається характеристичним опором чотириполюсника? Як його визначають?
13. За яких умов характеристичний опір чотириполюсника є повторним?
14. У чому полягає режим узгодженого навантаження чотириполюсника?
15. Що називається коефіцієнтом передачі чотириполюсника? Як його визначають?
16. Що характеризує коефіцієнт передачі чотириполюсника?
17. Чи може в симетричному пасивному чотириполюснику коефіцієнт згасання α бути від'ємним?
18. Яку величину використовують для характеристики зміни вихідної напруги чотириполюсника стосовно вхідної за діючим значенням, а яку за фазою?
19. Як визначаються еквівалентні параметри кількох з'єднаних між собою чотириполюсників?
20. Якими способами можна з'єднати два чотириполюсники?
21. Яке з'єднання чотириполюсників називається узгодженим?
22. Як визначається коефіцієнт передачі каскадно з'єднаних пасивних прохідних чотириполюсників?

Екзаменаційні питання

1. Багатопольсні елементи електричного кола. Чотириполюсники та їх класифікація.
2. Рівняння лінійного прохідного чотириполюсника.
3. Шість форм рівнянь чотириполюсника.
4. Суть коефіцієнтів чотириполюсника.

5. Взаємність чотириполюсника, симетрія чотириполюсника.
6. Схеми заміщення взаємного прохідного чотириполюсника.
7. Експериментальне визначення коефіцієнтів прохідного чотириполюсника.
8. Характеристичні параметри чотириполюсника.
9. Вхідні, повторні та характеристичні опори чотириполюсника.
10. Коефіцієнт передачі та послаблення сигналу чотириполюсника.
11. Рівняння чотириполюсника, виражені через характеристичні параметри.
12. Зворотне вмикання чотириполюсника.
13. Ланцюгові схеми. Симетрична однорідна ланцюгова схема.
14. Основні рівняння та заступні схеми активного прохідного чотириполюсника.

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.1. Визначити комплексні опори **T**- подібної заступної схеми чотириполюсника, якщо: $\underline{A}_{11} = 0,6 + j0,1$; $\underline{A}_{12} = (17 + j72) \text{ Ом}$; $\underline{A}_{21} = (0,5 + j0,2) \text{ См}$.

Відповідь: $\underline{Z}_1 = (10 + j40) \text{ Ом}$; $\underline{Z}_2 = (20 + j50) \text{ Ом}$; $\underline{Z}_3 = -j100 \text{ Ом}$.

Задача 6.2. Параметри повітряного трансформатора: $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,5 \text{ мГн}$, $L_2 = 0,72 \text{ мГн}$. Коефіцієнт зв'язку $k = 0,5$. Визначити **A**-параметри еквівалентного чотириполюсника за частоти $f = 10 \text{ кГц}$.

Відповідь: $\underline{A}_{11} = 1,66 - j0,106$; $\underline{A}_{12} = (9,76 + j56) \text{ Ом}$;
 $\underline{A}_{21} = -j0,053 \text{ См}$; $\underline{A}_{22} = 2,39 - j0,159 \text{ Ом}$.

Задача 6.3. Визначити **A**-параметри симетричного чотириполюсника, якщо з досліду неробочого режиму і короткого замикання відомо: $U_{10} = 10 \text{ В}$, $I_{10} = 1,0 \text{ А}$, $P_{10} = 10 \text{ Вт}$, $U_{1k} = 10 \text{ В}$, $I_{1k} = 0,8 \text{ А}$, $P_{1k} = 8 \text{ Вт}$.

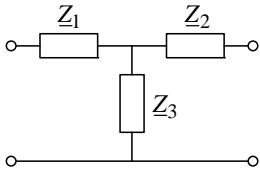
Відповідь: $\underline{A}_{11} = j2$, $\underline{A}_{12} = j25 \text{ Ом}$, $\underline{A}_{21} = -j0,2 \text{ См}$.

Задача 6.4. З досліду неробочого режиму і короткого замикання симетричного чотириполюсника відомо: $\underline{U}_{10} = 100e^{j60^\circ} \text{ В}$, $\underline{I}_{10} = 10e^{j30^\circ} \text{ А}$, $\underline{U}_{1k} = 100e^{j30^\circ} \text{ В}$, $\underline{I}_{1k} = 10e^{-j30^\circ} \text{ А}$. Визначити комплексне значення вхідного опору у разі навантаження чотириполюсника на повторний опір.

Відповідь: $\underline{Z}_{\text{вх}} = 10e^{j45^\circ} \text{ Ом}$.

Задача 6.5. В умовах попередньої задачі визначити зсув фаз між вхідною напругою та струмом.

Відповідь: $\varphi = 45^\circ$.



Задача 6.6. Визначити характеристичні опори несиметричного чотириполосника, якщо $\underline{Z}_1 = 12,5 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_2 = j6 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_3 = -j16,7 \text{ Ом}$.

Відповідь: $\underline{Z}_{C1} = 12,5 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{C2} = 8,0 \text{ Ом}$.

Розділ 7

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1. Основні поняття та визначення

Після вмикання електричного кола в ньому встановлюються струми та напруги на всіх ділянках кола відповідно до їх параметрів та прикладеної напруги. Інакше кажучи, в колі встановлюється режим, у якому струми і напруги або залишаються незмінними в часі (електричні кола постійного струму), або періодично змінюються за одним і тим же законом (електричні кола змінного струму). Усталені режими називають іноді вимушеними (вони зумовлені дією вимушувальних сил – джерел напруги та струму). Як зазначалось у попередніх розділах, їх розрахунок зводиться до розв'язування лінійних систем звичайних алгебричних рівнянь або рівнянь у комплексній формі.

Вмикання або вимикання джерел енергії, зміну структури електричного кола або скачкоподібну зміну параметрів його елементів називають *комутацією*. У результаті комутації порушується рівноважний стан електричного кола, внаслідок чого відбувається перехід від одного усталеного режиму роботи електричного кола до іншого. Усталений режим, який існував у колі до комутації, називають *докомутаційним*, а той, що встановився після комутації, – *післякомутаційним*. Процес переходу від одного енергетичного стану, який відповідає докомутаційному режимові, до іншого, який відповідає післякомутаційному режимові, називається *перехідним процесом*.

Після комутації новий усталений режим виникає миттєво лише в колах з винятково резистивними елементами. Реактивні елементи є накопичувачами енергії, а внаслідок комутації відбувається зміна запасеної в них енергії. Зокрема енергію електричного поля W_e конденсатора ємністю C , до якого прикладена напруга u , визначають за формулою

$$W_e = \frac{Cu^2}{2}.$$

Енергію магнітного поля W_m котушки індуктивністю L , через яку протікає струм i , визначають за формулою

$$W_m = \frac{Li^2}{2}.$$

Процес накопичення та віддачі енергії реактивними елементами не може відбуватись миттєво, тому що в цьому разі миттєве значення потужності джерела повинно бути нескінченно великим, оскільки вона визначається як похідна по часові від енергії

$$p(t) = \frac{dW}{dt},$$

і якщо $dt \rightarrow 0$, то $p(t) \rightarrow \infty$. Оскільки енергія не може змінюватись стрибком, то і струм в індуктивному та напруга на ємнісному елементах не можуть змінюватись стрибком.

У перехідному процесі струми та напруги є змінними в часі величинами, незалежно від того, зумовлені вони джерелами постійної чи змінної напруги або струму, тому їх прийнято позначати малими літерами як функції часу: $u(t)$, $i(t)$.

Перехідні процеси можуть бути швидкоплинними або повільними і тривати від часток секунди до десятків секунд. Під час перехідного процесу напруги на окремих ділянках електричного кола, а також струми у його вітках можуть значно перевищувати усталені номінальні значення, тому визначення часових залежностей струмів та напруг у перехідному процесі має важливе значення. Крім того, для проектування систем керування важливо знати тривалість перехідних процесів у конкретних електротехнічних пристроях.

Для розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах використовують:

- а) класичний метод;
- б) операторний метод;

в) метод, заснований на застосуванні інтеграла Дюамеля;
г) спектральний метод (заснований на застосуванні інтеграла Фур'є).

На практиці здебільшого використовують класичний та операторний методи, основою яких є відповідні математичні методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь. Теоретично їх можна застосовувати для розрахунку перехідних процесів у колах будь-якої складності.

Основною сферою застосування інтеграла Дюамеля є випадки, коли напруга живлення змінюється за складним законом, наприклад, у разі неперервної її зміни.

Суть спектрального методу полягає у представленні неперіодичних функцій у вигляді суми нескінченної множини синусоїдних функцій з нескінченно малими амплітудами і частотами. Однак цей метод не має істотних переваг порівняно з операторним методом. Крім того, він має меншу сферу застосування, оскільки обмежений вузьким класом функцій.

7.2. Закони комутації

Комутація електричного кола в реальних фізичних об'єктах відбувається протягом деякого невеликого часового інтервалу, однак під час розрахунку перехідних процесів вважають, що комутація відбувається миттєво. Це дає змогу відлік часу, з якого починається перехідний процес ($t = 0$), відраховувати з моменту комутації. Загальноприйнято час, який передував моменту комутації (границя ліворуч) позначати $t = 0_-$, а той, з якого починається перехідний процес (границя праворуч), $t = 0_+$.

Для розрахунку перехідного процесу в електричному колі необхідно знати початкові умови – значення напруг $u(0_+)$ та струмів $i(0_+)$, з яких починається їх зміна в перехідному процесі. Перехід від значень цих величин при $t = 0_-$ до їх значень при $t = 0_+$ визначається **законами комутації**. Сформулюємо їх.

Перший закон комутації. Струм i_L , який протікає через котушку індуктивності, під час комутації не може змінюватись стрибком. Інакше кажучи, після комутації струм i_L починає

змінюватись з того значення, яке було до комутації. Математично перший закон комутації можна записати у вигляді

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0).$$

Напруга на котушці індуктивності може змінюватись стрибком.

Другий закон комутації. Напруга u_C на конденсаторі під час комутації не може змінюватись стрибком. Інакше кажучи, після комутації напруга u_C починає змінюватись з того значення, яке було до комутації. Математично другий закон комутації можна записати у вигляді

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0).$$

Струм конденсатора може змінюватись стрибком.

Закони комутації дають змогу визначити значення напруг та струмів при $t = 0_+$, з яких починається їх зміна в перехідному процесі.

7.3. Початкові умови

Розрахунок перехідного процесу в електричному колі полягає в розв'язуванні системи інтегро-диференціальних рівнянь, які описують динамічний режим електричного кола, яке утворилось внаслідок комутації. Для цього необхідно знати значення струмів у вітках і напруг на різних ділянках електричного кола в перший момент після комутації ($t = 0_+$), тобто, так звані, **початкові умови**. Якщо струми, що протікають через котушки індуктивності, і напруги на конденсаторах до комутації дорівнювали нулю, то початкові умови називають **нульовими** початковими умовами, а в протилежному випадку – **ненульовими**. Згідно із законами комутації струми, які протікають через індуктивні елементи, а також напруги на конденсаторах не можуть мати стрибки в момент комутації. Це означає, що початкові умови для них (при $t = 0$) можна визначити з розрахунку докомутаційного режиму. Інші струми та напруги можуть змінюватись під час комутації стрибкоподібно. Їх визначають з рівнянь Кірхгофа, складених для скомутованого електричного кола, на підставі відомих значень струмів індуктивних елементів і напруг на конденсаторах.

Значення струмів у вітках з індуктивними елементами і напруг на ємнісних елементах при $t = 0_+$ називають **незалежними** початковими умовами, а значення решти струмів і напруг, які визначаються на підставі незалежних початкових умов, – **залежними** початковими умовами.

Основні положення. Процес переходу від одного усталеного режиму до іншого називається перехідним. Перехідний процес виникає у разі порушення рівноважного стану електричного кола, що може бути зумовлено вмиканням або вимиканням джерел ЕРС та ДС, а також раптовою зміною його структури або параметрів елементів. Перехідні процеси можливі лише в електричних колах, до яких входять реактивні елементи, які здатні запасати енергію.

Усталений режим, який існував в колі до комутації, називають докомутаційним, а той, що встановився після комутації, – післякомутаційним.

Розрахунок перехідного процесу полягає в знаходженні розв'язку системи диференціальних рівнянь, якою він описується. Для визначення початкових умов використовують два закони комутації, згідно з якими струми в індуктивних котушках і напруги на конденсаторах у момент комутації не можуть змінюватися стрибком, тобто вони є неперервними функціями часу.

Значення струмів у котушках індуктивності та напруг на конденсаторах у проміжок часу $t = 0_+$ називають незалежними початковими умовами. Всі решта струмів та напруг визначають на підставі відомих з розрахунку докомутаційного режиму незалежних початкових умов, тому їх називають залежними початковими умовами.

7.4. Класичний метод розрахунку перехідних процесів

7.4.1. Суть класичного методу. Перехідні процеси можуть виникати лише в електричних колах з реактивними елементами. Такі кола описуються за допомогою систем рівнянь, які завжди можна звести до диференціальних. Отже, задача розрахунку

перехідного процесу в лінійному електричному колі полягає в розв'язуванні системи лінійних диференціальних рівнянь, які в загальному є неоднорідними.

Як відомо з математики, розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна подати у вигляді суми двох складових: загального розв'язку однорідного диференціального рівняння і часткового розв'язку неоднорідного диференціального рівняння. Однорідними диференціальними рівняннями описують процеси, які протікають в електричному колі за відсутності дії сторонніх джерел енергії. Ці процеси відбуваються лише за рахунок запасеної в конденсаторах і котушках енергії, а тому струми та напруги, які визначаються з розв'язання однорідних диференціальних рівнянь, називаються *вільними*. А оскільки в реальних електричних колах завжди відбувається розсіювання енергії, то вони завжди прямують до нуля. Складові напруг та струмів, які визначаються як частковий розв'язок неоднорідних диференціальних рівнянь, називаються *вимушеними*. За своїм фізичним змістом – це ті величини, які відповідають післякомутаційному усталеному режимові в колі за заданих значень вимушувальних сил, якими є напруги джерел ЕРС та струми ДС. У лінійних колах постійного струму – це постійні величини, а в колах синусоїдного струму – це синусоїдні величини того ж періоду, що і збурення. Надалі вільні складові напруг та струмів позначатимемо нижнім індексом “*v*”, а вимушені – “*y*”.

Згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах напруги на елементах та струми віток подають як суму двох складових

$$u(t) = u_y(t) + u_v(t); \quad i(t) = i_y(t) + i_v(t),$$

де $u_y(t)$, $i_y(t)$ – усталені значення напруги та струму, які визначаються шляхом розрахунку усталеного режиму кола, що утворилось після комутації, а $u_v(t)$, $i_v(t)$ – вільні складові, які визначаються як загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь (в яких відсутнє збурення, тобто права частина дорівнює нулю). Зауважимо, що розклад напруг та струмів на вільні і вимушені складові є математичним засобом, який можна застосовувати лише до розрахунку лінійних електричних кіл, для яких правомірний принцип суперпозиції (накладання).

Для знаходження вільних складових як загального розв'язку однорідних диференціальних рівнянь необхідно визначати сталі інтегрування. Їх визначають з початкових умов, що є найбільшою проблемою класичного методу розрахунку перехідних процесів у складних електричних колах.

7.4.2. Характеристичне рівняння. Перехідні процеси відбуваються в електричному колі, яке утворилось у результаті комутації. Отже, для розрахунку перехідного процесу класичним методом необхідно скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа для скомутованої схеми електричного кола. Згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів струми та напруги необхідно подати у вигляді суми вільних та усталених складових. Отже, вихідна система рівнянь розпадається на дві: для вимушених складових і для вільних.

У системі рівнянь для вільних складових відсутні збурювальні сили, тобто так звані праві частини рівнянь дорівнюють нулю, причому кількість рівнянь дорівнює кількості вільних струмів. Для знаходження останніх необхідно скласти характеристичне рівняння та знайти його корені. Існує два способи складання характеристичного рівняння:

а) на підставі головного визначника алгебризованої системи рівнянь для вільних струмів;

б) на підставі виразу для вхідного комплексного опору стосовно будь-якої вітки електричного кола.

Алгебризацію системи інтегро-диференціальних рівнянь для вільних складових можна здійснити формальною заміною в них операції диференціювання множенням на λ , а інтегрування – діленням на λ , де λ – корінь характеристичного рівняння. Характеристичне рівняння одержимо, прирівнявши до нуля головний визначник алгебризованої системи. Очевидно, що те ж рівняння можна одержати, якщо систему рівнянь, що описує перехідний процес, шляхом підстановки звести до одного рівняння вищого порядку і замінити в ньому похідні різних порядків відповідними степенями оператора λ .

Для складання характеристичного рівняння на підставі вхідного опору необхідно записати вираз останнього в комплексній формі, замінити в ньому $j\omega$ на λ і прирівняти одержаний вираз до нуля. Зауважимо, що в разі наявності в схемі вітки з джерелом струму, не можна визначати вхідний опір стосовно цієї вітки. Під час визначення вхідного опору необхідно закоротити всі джерела ЕРС і розімкнути вітки з ДС.

Кількість значень коренів p характеристичного рівняння визначається його порядком (степенем). До того ж від кількості коренів та їхніх значень залежить характер зміни вільних складових струмів та напруг, а отже і загальний вигляд функцій, які їх описують.

7.4.3. Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом. Загалом розрахунок перехідного процесу класичним методом складається з таких етапів:

а) розрахунок докомутаційного усталеного режиму в електричному колі та визначення незалежних початкових умов – значень струмів у вітках з котушками індуктивності та напруг на конденсаторах за $t = 0$;

б) складання системи рівнянь Кірхгофа стосовно миттєвих значень напруг та струмів для електричного кола, яке утворилось у результаті комутації;

в) визначення залежних початкових умов на підставі відомих з п. а) незалежних початкових умов та законів комутації;

г) складання характеристичного рівняння та визначення його коренів;

д) формування аналітичних виразів для вільних складових відповідно до значень коренів характеристичного рівняння;

е) визначення вимушених складових струмів та напруг шляхом розрахунку усталеного режиму в скомутованому електричному колі;

є) визначення сталих інтегрування;

ж) подання струмів та напруг у вигляді суми вимушених і вільних складових та визначення сталих інтегрування.

Реалізацію викладеного вище алгоритму розрахунку перехідного процесу класичним методом проілюструємо на прикладі перехідного процесу в електричному колі (рис. 7.1), в якому діє постійна ЕРС;

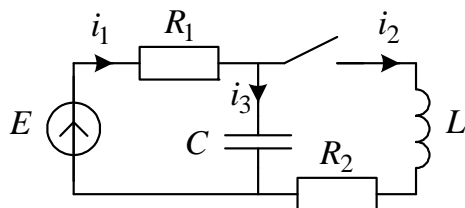


Рис. 7.1

а) розрахунок докомутаційного усталеного режиму. Як видно з рис. 7.1, у докомутаційному усталеному режимі всі струми дорівнюють нулю, тобто $i_1 = i_2 = i_3 = 0$, а напруга на конденсаторі $u_c = E$. Незалежні початкові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_c(0_+) &= u_c(0_-) = u_c(0) = E; \\ i_2(0_+) &= i_2(0_-) = i_2(0) = 0; \end{aligned} \quad (7.1)$$

б) рівняння Кірхгофа для схеми, яка утворилась після комутації, мають вигляд

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt &= E; \\ R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0; \end{aligned} \quad (7.2)$$

в) залежні початкові умови визначаємо, використовуючи незалежні початкові умови (7.1), з рівнянь (7.2), записаних для моменту часу $t = 0_+$

$$\begin{aligned} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0; \\ R_1 i_1(0_+) + u_c(0_+) &= E; \\ R_2 i_2(0_+) + L \frac{di_2(0_+)}{dt} - u_c(0_+) &= 0; \end{aligned} \quad (7.3)$$

г) **характеристичне рівняння**, складене на основі визначника з використанням системи рівнянь (7.2), має вигляд

$$\Delta(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline R_1 & 0 & \frac{1}{\lambda C} \\ \hline 0 & R_2 + \lambda L & -\frac{1}{\lambda C} \\ \hline \end{array} = 0. \quad (7.4)$$

Звідси одержимо

$$R_1 C L \lambda^2 + (R_1 R_2 C + L) \lambda + R_1 + R_2 = 0. \quad (7.5)$$

Проілюструємо інший спосіб складання характеристичного рівняння – з використанням загального виразу для комплексного вхідного опору стосовно затискачів джерела ЕРС

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = R_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C}(R_2 + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R_2 + j\omega L}. \quad (7.6a)$$

Простіший вираз для вхідного опору можна одержати, якщо його визначити стосовно вітки з конденсатором

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_1(R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L}. \quad (7.6b)$$

Для одержання характеристичного рівняння необхідно в будь-якому з рівнянь (7.6) замінити $j\omega$ на λ і одержаний вираз прирівняти до нуля. Легко перекоонатись, що отримані характеристичні рівняння будуть ідентичними з рівнянням (7.5).

Характеристичне рівняння (7.5) має другий порядок. Його корені визначають за формулою

$$\lambda_{1,2} = \frac{R_1 R_2 C + L}{2R_1 C L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 R_2 C + L}{2R_1 C L}\right)^2 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 C L}}. \quad (7.7)$$

Залежно від числових значень параметрів електричного кола корені можуть бути:

дійсні різні (причому обов'язково від'ємні)

$$\lambda_1 = -\delta_1, \quad \lambda_2 = -\delta_2;$$

дійсні рівні (від'ємні)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta;$$

комплексні спряжені з від'ємною дійсною частиною

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega_g;$$

д) вільні складові. Загальний вираз для вільних складових струмів і напруг визначається значенням коренів характеристичного рівняння.

Якщо ці корені дійсні і різні, то вільні складові струму i_2 і напруги u_2 мають вигляд

$$\begin{aligned} i_{2e}(t) &= A_1 e^{-\delta_1 t} + A_2 e^{-\delta_2 t}; \\ u_{ce}(t) &= B_1 e^{-\delta_1 t} + B_2 e^{-\delta_2 t}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 – сталі інтегрування, тобто в колі відбувається згасаючий аперіодичний процес.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, то вільні складові записуються у вигляді

$$\begin{aligned} i_{2e}(t) &= (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}; \\ u_{ce}(t) &= (B_1 + B_2 t) e^{-\delta t}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

тобто наявний граничний (критичний) випадок аперіодично згасаючого процесу.

У разі комплексних коренів вільні складові мають коливний згасаючий характер

$$\begin{aligned} i_{2e}(t) &= (A_1 \cos \omega_g t + A_2 \sin \omega_g t) e^{-\delta t}; \\ u_{ce}(t) &= (B_1 \cos \omega_g t + B_2 \sin \omega_g t) e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Рівняння (7.10) можна подати в іншому вигляді, а саме:

$$\begin{aligned} i_{2e}(t) &= A e^{-\delta t} \sin(\omega_g t + \psi_i); \\ u_{ce}(t) &= B e^{-\delta t} \sin(\omega_g t + \psi_u), \end{aligned} \quad (7.11)$$

в яких визначенню підлягають величини A, B, ψ_i, ψ_u ;

е) усталені (вимушені) складові струму i_{2y} та напруги u_{cy} як частковий розв'язок системи неоднорідних диференціальних рівнянь (7.2) отримаємо за допомогою розрахунку усталеного режиму для скомутованого електричного кола. Оскільки ЕРС джерела

постійна, то струм $i_{3y} = 0$, отже, $i_{1y}(0_+) = i_{2y}(0_+)$, а рівняння, які описують усталений режим у скомутованому колі, мають вигляд

$$\begin{aligned} R_1 i_{2y} + u_{cy} &= E; \\ R_2 i_{2y} - u_{cy} &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

З системи алгебричних рівнянь (7.12) визначасмо

$$i_{2y} = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad u_{cy} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2};$$

є) **сталі інтегрування** A_1, A_2, B_1, B_2 знаходимо на основі початкових умов та законів Кірхгофа. Оскільки сталих інтегрування чотири, а незалежних початкових умов дві, то для їх знаходження необхідно знати значення похідних струму котушки індуктивності та напруги на конденсаторі при $t = 0_+$, які визначаємо на підставі вихідної системи (7.2).

Оскільки

$$i_3 = C \frac{du_c}{dt},$$

то для визначення зазначених похідних одержимо систему рівнянь

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{u_c}{L} + \frac{R_2 i_2}{L}; \quad (7.13a)$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{E}{R_1 C} - \frac{u_c(t)}{R_1 C} - \frac{i_2(t)}{C}. \quad (7.13б)$$

Підставляємо незалежні початкові умови (7.1) в рівняння (7.13)

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{u_c(0)}{L}; \quad (7.14a)$$

$$\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{1}{R_1 C} (E - u_c(0)). \quad (7.14б)$$

Згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів струми і напруги подають у вигляді суми вимушених і вільних складових. Отже, для моменту часу $t = 0_+$ одержимо

$$\begin{aligned} i_2(0_+) &= i_{2y}(0_+) + i_{2\epsilon}(0_+); \\ \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} &= \left. \frac{di_{2y}}{dt} \right|_{t=0_+} + \left. \frac{di_{2\epsilon}}{dt} \right|_{t=0_+}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$u_c(0) = u_{cy}(0) + u_{ce}(0);$$

$$\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+} = \left. \frac{du_{cy}}{dt} \right|_{t=0+} + \left. \frac{du_{ce}}{dt} \right|_{t=0+}. \quad (7.16)$$

Для конкретності вважатимемо, що вільні складові струмів мають вигляд (7.10). Диференціюючи (7.10) по t , знаходимо похідні від вільних складових струму $i_{2e}(t)$ та напруги $u_{ce}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{di_{2e}}{dt} = & (-A_1 \omega_\delta \sin \omega_\delta t + A_2 \omega_\delta \cos \omega_\delta t) e^{-\delta t} - \\ & -(A_1 \cos \omega_\delta t + A_2 \sin \omega_\delta t) \delta e^{-\delta t}; \end{aligned} \quad (7.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{ce}}{dt} = & (-B_1 \omega_\delta \sin \omega_\delta t + B_2 \omega_\delta \cos \omega_\delta t) e^{-\delta t} - \\ & -(B_1 \cos \omega_\delta t + B_2 \sin \omega_\delta t) \delta e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (7.17b)$$

Беручи до уваги (7.10), (7.12), (7.14), (7.17), одержуємо систему рівнянь

$$0 = \frac{E}{R_1 + R_2} + A_1; \quad E = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} + B_1;$$

$$\frac{E}{L} = 0 + A_2 \omega_\delta - \delta A_1; \quad \frac{1}{R_1 C} = 0 + B_2 \omega_\delta - \delta B_1,$$

з якої визнаємо сталі інтегрування.

$$A_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad A_2 = \frac{E}{\omega_\delta} \left(\frac{1}{L} + \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right);$$

$$B_1 = E \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right); \quad B_2 = \frac{E}{\omega_\delta} \left(\frac{1}{R_1 C} + \delta \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \right); \quad (7.18)$$

ж) загальні вирази для струмів та напруг. Запишемо вирази для струму $i_2(t)$ та напруги $u_c(t)$ в перехідному процесі як суму усталених і вільних складових.

$$i_2(t) = i_{2y}(t) + i_{2e}(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} +$$

$$+ \left(-\frac{E}{R_1 + R_2} \cdot \cos \omega_\delta t + \frac{E}{\omega_\delta} \left(\frac{1}{L} - \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right) \sin \omega_\delta t \right) e^{-\delta t};$$

$$u_c(t) = u_{cy}(t) + u_{ce}(t) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} + \left(E \left(1, 0 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \cos \omega_6 t + \frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{R_1 C} + \delta - \frac{R_2 \delta}{R_1 + R_2} \right) \sin \omega_6 t \right) e^{-\delta t}.$$

Ввівши позначення

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\left(\frac{E}{R_1 + R_2} \right)^2 + \frac{E^2}{\omega_6^2} \left(\frac{1}{L} - \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right)^2};$$

$$\psi_{i_2} = \arctg \frac{A_1}{A_2} = \frac{-\frac{E}{R_1 + R_2}}{\frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{L} - \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right)},$$

одержуємо загальний вираз для струму

$$i_2(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + A e^{-\delta t} \sin(\omega_6 t + \psi_{i_2}). \quad (7.19)$$

Аналогічно, ввівши позначення

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{E^2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 + \frac{E^2}{\omega_6^2} \left(\frac{1}{R_1 + R_2} \right)^2},$$

$$\psi_{uc} = \arctg \frac{B_1}{B_2} = \frac{E \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)}{\frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{R_1 C} + \delta - \frac{R_2 \delta}{R_1 + R_2} \right)},$$

одержуємо загальний вираз для напруги на конденсаторі

$$u_c(t) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} + B e^{-\delta t} \sin(\omega_6 t + \psi_{uc}). \quad (7.20)$$

Так само можна знайти і інші струми та напруги в переліченому процесі.

Основні положення. Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах полягає у розв'язуванні системи звичайних диференціальних рівнянь, складених для електричного кола, яке утворилось внаслідок комутації.

Згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів струми та напруги подають у вигляді суми двох складових, одна з яких називається вимушеною, або усталеною, а друга – вільною.

За фізичним змістом усталені складові – це струми та напруги в післякомутаційному усталеному режимі. Вони зумовлені дією джерел енергії.

Вільні складові зумовлені невідповідністю запасу електромагнітної енергії в реактивних елементах до комутації тому значенню, яке повинно встановитись у них після комутації. У реальних електричних колах вільні складові з плином часу завжди прямують до нуля.

Загальний вигляд для вільних складових залежить від коренів характеристичного рівняння, яке можна скласти двома способами: на підставі головного визначника алгебризованої системи рівнянь для вільних складових або на підставі вхідного опору, визначеного стосовно будь-якої вітки схеми.

7.5. Перехідні процеси в простих електричних колах

7.5.1. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними резистором і котушкою індуктивності

А. Вмикання котушки індуктивності на постійну напругу

Розглянемо електричне коло, схема якого зображена на рис. 7.2.

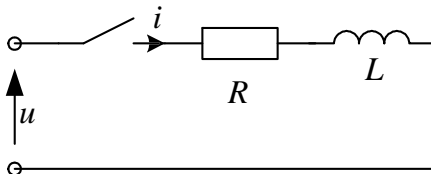


Рис. 7.2

Перехідний процес у колі описується диференціальним рівнянням

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t). \quad (7.21)$$

Однорідне рівняння, яке відповідає вільній складовій, має вигляд

$$L \frac{di_e}{dt} + Ri_e = 0. \quad (7.22)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda L + R = 0 \quad (7.23)$$

має один корінь $\lambda = -R/L$.

Вільна складова струму

$$i_e(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Струм у перехідному процесі подаємо сумою усталеної і вільної складових

$$i(t) = i_y(t) + i_e(t). \quad (7.24)$$

У разі вмикання електричного кола на постійну напругу ($U = const$) усталену складову струму визначають за законом Ома

$$i_y(t) = \frac{U}{R},$$

а струм у колі описується рівнянням

$$i(t) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (7.25)$$

Сталу інтегрування A знаходимо з початкових умов

$$i(0) = 0,$$

звідки $A = -U/R$.

Отже, струм у перехідному процесі змінюється за законом

$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (7.26)$$

На рис. 7.3 наведені криві струму $i(t)$ та його складових $i_y(t)$ і $i_e(t)$ у перехідному процесі.

Величина

$$\tau = \left| \frac{1}{\lambda} \right| = \frac{L}{R}$$

називається **сталю** часу (одиниця вимірювання – секунда). Вона характеризує швидкість спадання вільної складової струму в перехідному процесі. Графічно – це довжина піддотичної до

кривої $i_e(t)$. Зростання струму в зображеному на рис. 7.2 колі відбувається тим швидше, чим менша стала часу. Оскільки експонента не перетинає осі абсцис, то теоретично перехідний процес триває нескінченно довго. Однак на практиці можна вважати, що він закінчується через час $t = (3 \div 5)\tau$. Тривалість перехідного процесу визначається лише параметрами електричного кола і не залежить від величини напруги, що діє в колі.

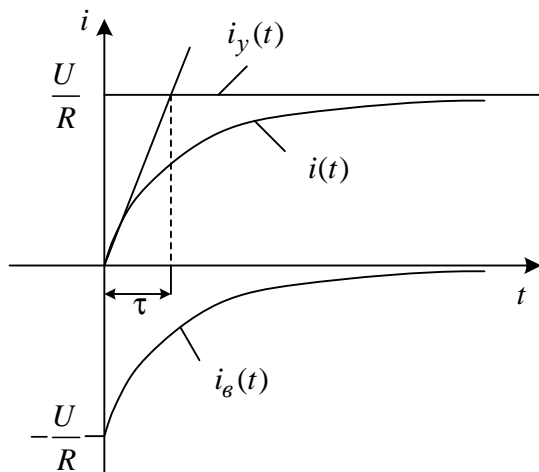


Рис. 7.3

Стала часу чисельно дорівнює проміжкові часу, за який вільна складова струму чи напруги зменшується в $e = 2,718$ разів. Відповідно струм у колі у разі вмикання на постійну напругу досягає 63,2 % від свого усталеного значення. За час $t = 5\tau$ струм становить $i = 99,3 i_y$.

Б. Вмикання котушки індуктивності на синусоїдну напругу $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Вимушена складова струму має вигляд

$$i_y(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

де $\varphi = \arctg(\omega L / R)$, тому

$$i(t) = i_y(t) + i_e(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Зауважимо, що усталену складову можна визначити символічним методом.

Враховуючи початкові умови $i(0) = i(0_-) = 0$, знаходимо

$$A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi).$$

Загальний вираз для струму в перехідному процесі має вигляд

$$i(t) = I_m \left(\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (7.27)$$

Напругу на індуктивному елементі знаходимо як похідну від струму $i(t)$

$$u_L = L \frac{di(t)}{dt} = LI_m \left(\omega \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) + \frac{1}{\tau} \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (7.28)$$

Приклад часових залежностей напруги $u(t)$, струму $i(t)$ та його складових наведено на рис. 7.4.

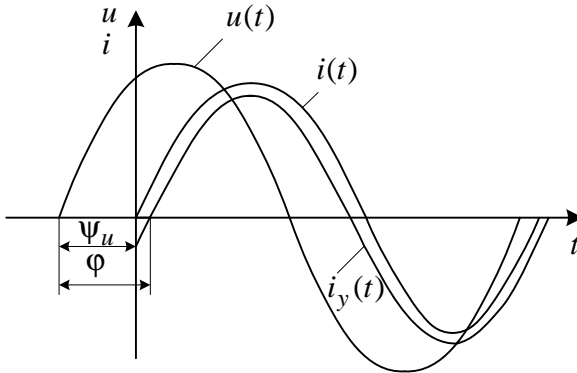


Рис. 7.4

Характер зміни струму $i(t)$ в перехідному процесі залежить від миттєвого значення прикладеної напруги $u(t)$ в момент комутації, тобто від початкової її фази ψ_u . Як видно з (7.27), вільна складова струму визначається добутком значення синусоїдної функції $\sin(\psi_u - \varphi)$ на експоненту. Отже, у разі $(\psi_u - \varphi) = 0$ вільна складова дорівнює нулю і в колі відразу настає усталений синусоїдний режим. Якщо комутація відбувається за умови

$\sin(\psi_u - \varphi) = \pm 1, 0$, то початкове значення вільної складової струму максимальне і дорівнює $i_{e \max} = U_m / \sqrt{R^2 + X^2}$. Однак максимальне значення струму в колі завжди менше від подвійного значення його амплітуди в усталеному режимі.

7.5.2. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними резистором і конденсатором

А. Вмикання конденсатора на постійну напругу

Розглянемо перехідний процес у зображеному на рис. 7.5 електричному колі за умови $U = \text{const}$.

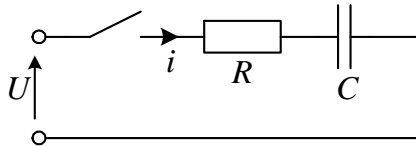


Рис. 7.5

Вважатимемо, що до комутації конденсатор ємністю C був незаряджений. Отже, початкові умови нульові, тобто напруга на конденсаторі $u_c(0) = 0$.

За другим законом Кірхгофа для скомутованої схеми

$$U = Ri + u_c. \quad (7.29)$$

Враховуючи, що $i = C \frac{du_c}{dt}$, одержуємо

$$u = RC \frac{du_c}{dt} + u_c. \quad (7.30)$$

Характеристичне рівняння

$$RC\lambda + 1 = 0 \quad (7.31)$$

має корінь $p = -1/(RC)$. Отже, *стала* часу $\tau = RC$.

Напругу на конденсаторі в перехідному процесі подамо у вигляді суми усталеної і вільної складових

$$u_c(t) = u_{cy}(t) + u_{cb}(t) = u_{cy}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Струм у колі визначається за формулою

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C \frac{du_{cy}}{dt} - \frac{A}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Якщо коло вмикається на постійну напругу U , то $i_y(t) = 0$, усталена складова напруги на конденсаторі $u_{cy}(t) = U$, а стала інтегрування $A = -U$. Отже,

$$u_c(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7.32)$$

Часові залежності напруги на конденсаторі та струму у разі вмикання конденсатора на постійну напругу наведені на рис. 7.6.

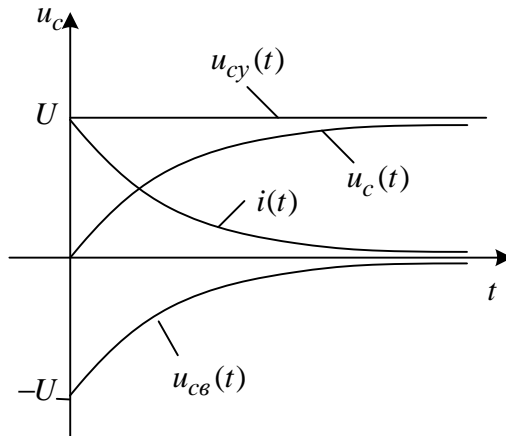


Рис. 7.6

Б. Вмикання конденсатора на синусоїдну напругу. Якщо коло вмикається на синусоїдну напругу $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, то усталена складова напруги на конденсаторі

$$u_{cy} = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t + \psi_u - \varphi - \frac{\pi}{2} \right),$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi = -\arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right).$$

Отже,

$$u_c(t) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Враховуючи, що $u_c(0) = 0$, для визначення сталої A одержимо рівняння

$$0 = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi_u - \varphi) + A.$$

Звідси

$$A = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi_u - \varphi).$$

Отже, в перехідному процесі напруга на конденсаторі змінюється за законом

$$u_c(t) = -\frac{I_m}{\omega C} \left(\cos(\omega t + \psi_u - \varphi) - \cos(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (7.33)$$

а струм у колі

$$i = C \frac{du_c}{dt} = I_m \left(\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{1}{\omega CR} \cos(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (7.34)$$

Якщо в момент комутації початкова фаза прикладеної напруги $\psi_u = \varphi + \pi/2$, то вільна складова відсутня і в колі відразу встановлюється усталений синусоїдний режим.

В. Розряд конденсатора на резистор. Розглянемо процес розряду конденсатора ємністю C , який заряджений до напруги U , на резистор з опором R (рис. 7.7). Очевидно, що перехідний процес відбувається за рахунок накопиченої в електричному полі енергії $W_c = CU^2/2$

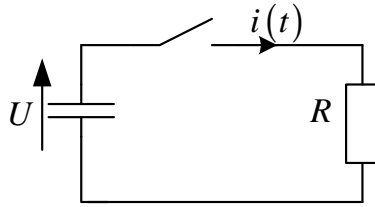


Рис. 7.7

Оскільки конденсатор розряджається, то усталені значення струму i_y і напруги на конденсаторі u_{cy} дорівнюють нулю. Отже, необхідно визначити лише вільні складові.

Рівняння Кірхгофа для вільних складових має вигляд

$$Ri_g + u_{ce} = 0.$$

Враховуючи, що

$$i_g = C \frac{du_{ce}}{dt},$$

одержуємо для вільних складових диференціальне рівняння

$$RC \frac{du_{ce}}{dt} + u_{ce} = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u_c(t) = u_{ce}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ue^{-\frac{t}{RC}}, \quad (7.35)$$

де $A = u_c(0) = U$, $\tau = RC$.

Для струму в колі одержуємо вираз

$$i(t) = i_g(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7.36)$$

Перехідний процес під час розряджання конденсатора полягає в переході накопиченої в конденсаторі енергії електричного поля у теплову, яка виділяється в резисторі, тобто

$$W = \int_0^{\infty} i^2(t) R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt = \frac{CU^2}{2}.$$

Графіки струму та напруги в перехідному процесі наведені на рис. 7.8.

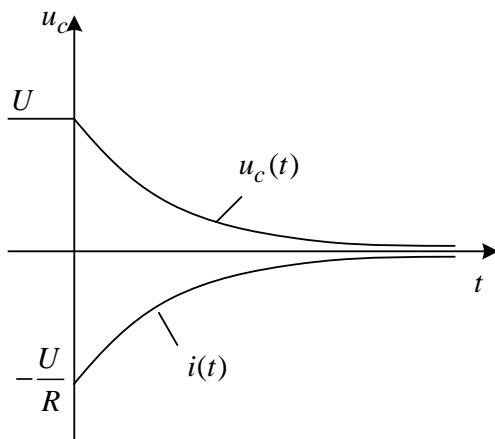


Рис. 7.8

7.5.3. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними конденсатором і котушкою індуктивності

А. Аперіодичний розряд конденсатора. Розглянемо перехідний процес, що виникає в зображеному на рис. 7.9 електричному колі, якщо конденсатор перед замиканням вимикача був заряджений до напруги U . На відміну від розряду конденсатора на резистор, під час якого напруга на конденсаторі монотонно спадає до нуля, його розряд на котушку індуктивності з параметрами R , L , може бути аперіодичним або періодичним, тобто коливним.

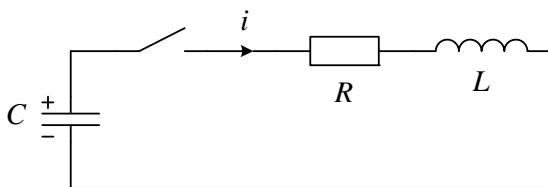


Рис. 7.9

Оскільки конденсатор розряджається, то усталена складова струму відсутня. Отже, диференціальне рівняння, яке описує перехідний процес, має вигляд

$$Ri_g + L \frac{di_g}{dt} + u_{cg} = 0. \quad (7.37)$$

Виражаючи струм через напругу на конденсаторі, одержуємо

$$\frac{d^2 u_{ce}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{ce}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{ce} = 0. \quad (7.38)$$

Диференціюючи рівняння (7.37) по t , одержуємо аналогічне рівняння для струму в колі

$$\frac{d^2 i_g}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_g}{dt} + \frac{1}{LC} i_g = 0, \quad (7.39)$$

що свідчить про однаковий закон зміни напруги на конденсаторі та струму.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0, \quad (7.40)$$

а його корені визначають за формулою

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Характер вільного процесу залежить від коренів рівняння, які визначаються підкореневим виразом. Зокрема, якщо $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, то корені λ_1 , λ_2 будуть дійсними і різними, а загальний розв'язок має вигляд

$$u_{ce} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (7.41)$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов

$$u_c(0) = U; \quad i(0) = 0.$$

Враховуючи, що

$$i_g(t) = C \frac{du_c}{dt} = C (A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}), \quad (7.42)$$

одержуємо з рівнянь (7.41), (7.42) при $t = 0$

$$A_1 = \frac{\lambda_2 U}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad A_2 = -\frac{\lambda_1 U}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Напруга на конденсаторі та струм у колі змінюються за законом

$$u_{ce}(t) = \frac{U}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}); \quad (7.43a)$$

$$i_g(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 C U}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (7.43b)$$

Рівняння (7.43б) можна записати в іншому вигляді, якщо врахувати, що добуток, коренів характеристичного рівняння (як рівняння другого порядку) дорівнює його вільному члену, тобто $\lambda_1 \lambda_2 = 1/LC$. Отже,

$$i_g(t) = \frac{U}{L(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (7.44)$$

Напруга на індуктивному елементі визначається за формулою

$$u_L(t) = \frac{U}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (7.45)$$

Оскільки в колі є індуктивний елемент, то струм спочатку наростає від нуля до деякого максимального значення, а потім спадає до нуля. Чим більша індуктивність котушки, тим повільніше спадає напруга на конденсаторі.

Б. Періодичний розряд конденсатора. За значення активного опору

$$R = R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$$

корені характеристичного рівняння (7.40) дійсні і рівні між собою. Такий опір називають **критичним**. У цьому граничному випадку процес ще буде аперіодичним. Зазвичай його називають граничним аперіодичним.

Періодичний (коливний) процес виникає під час розряду конденсатора на котушку індуктивності з параметрами R, L , якщо $R < R_{кр}$. У цьому разі корені характеристичного рівняння (7.40) комплексні спряжені, тобто $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$, де $\alpha = R/(2L)$,

$$\omega_0 = \sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}.$$

Напругу на конденсаторі та струм визначають за формулами

$$u_C(t) = u_{Cg}(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \gamma) \quad (7.46a)$$

$$i(t) = i_g(t) = -CAe^{-\alpha t} (\alpha \sin(\omega_0 t + \gamma) - \omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma)), \quad (7.46б)$$

тобто криві зміни $u_C(t)$ та $i(t)$ мають характер згасаючих синусоїдних функцій з частотою власних коливань контуру ω_0 і коефіцієнтом згасання α (рис. 7.10).

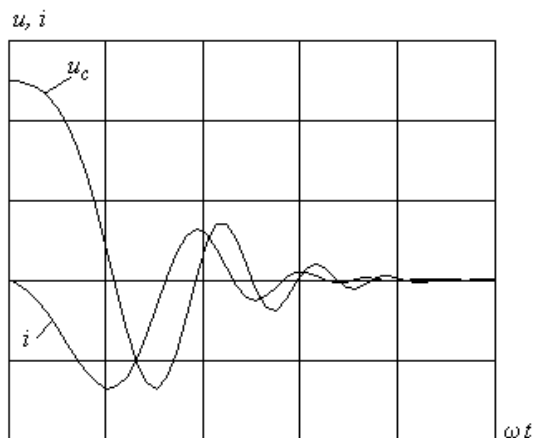


Рис. 7.10

Під час розряджання конденсатора відбувається обмін енергією між котушкою індуктивності і конденсатором, до того ж у резисторі відбувається незворотне її перетворення в теплову. Очевидно, що в ідеальному коливальному контурі ($R = 0$) відсутнє незворотне перетворення енергії і коливний процес має незгасаючий характер, причому частота ω_0 вільних коливань дорівнює резонансній частоті контуру.

7.6. Приклади розв'язування задач класичним методом

Приклад 7.1. Визначити перехідний струм $i(t)$ у колі (рис. 7.11), якщо $e(t) = 127 \sin(\omega t - 50^\circ)$; $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$; $\omega L = 3 \text{ Ом}$; $f = 50 \text{ Гц}$.

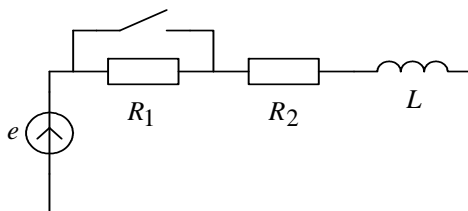


Рис. 7.11

Розв'язання. Комплексне значення струму в колі до комутації.

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{127e^{-j50^\circ}}{5e^{-j36,87^\circ}} = 25,4e^{-j86,87^\circ} \text{ A.}$$

Миттєве значення струму

$$i = 25,4 \sin(\omega t - 86^\circ 50')$$

Визначаємо початкові умови

$$i(0) = 25,4 \sin(-86^\circ 50') = -25,35 \text{ A.}$$

Усталений (вимушений) режим кола після комутації

$$\underline{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{2 + j3} = 35,2e^{-j106^\circ 20'} \text{ A;}$$

$$i_y = 35,2 \sin(\omega t - 106^\circ 20') \text{ A.}$$

$$i_y(0_+) = 35,2 \sin(-106^\circ 20') = -33,8 \text{ A.}$$

Згідно з класичним методом

$$i(t) = i_y(t) + i_g(t) = (35,2 \sin(\omega t - 106^\circ 20') + Ae^{\lambda t}) \text{ A;}$$

$$i(0) = (35,2 \sin(-106^\circ 20') + A) \text{ A.}$$

Стала $A = 8,45$;

$$i(0_+) = i_y(0_+) + i_g(0_+)$$

$$i_g(0_+) = i(0_+) - i_y(0_+) = -25,35 + 33,8 = 8,45 \text{ A.}$$

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\lambda L + R_2 = 0; \quad \lambda = -\frac{R_2}{L} = -210e^{-t}, \text{ де } L = 3/\omega = 0,095 \text{ Гн.}$$

Остаточо

$$i(t) = i_y(t) + i_g(t) = 35,2 \sin(\omega t - 106^\circ 20') + 8,45e^{-210t}.$$

Приклад 7.2. Знайти значення струму i в електричному колі (рис. 7.12) через час $t = 0,002$ с після вимикання рубильника, якщо $R_1 = R_2 = 5 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $f = 50 \text{ Гц}$, $e(t) = 220\sqrt{2} \sin \omega t$, а комутація відбувається в момент часу, коли $e = E_m$.

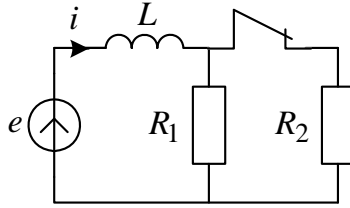


Рис. 7.12

Розв'язання. Розрахуємо струм у колі до комутації. Для цього обчислюємо вхідний комплексний опір кола.

$$\underline{Z} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + j\omega L = 4e^{j51^\circ 35'} \text{ Ом.}$$

Визначивши комплексне значення струму \underline{I} в докомутаційному режимі

$$\underline{I} = \frac{E}{\underline{Z}} = \frac{220e^{j90^\circ}}{4e^{j51^\circ 35'}} = 55e^{j38^\circ 25'} \text{ А,}$$

запишемо його миттєве значення

$$i = 77,8 \sin(\omega t + 38^\circ 25').$$

Вільна складова струму має вигляд

$$i_g = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

де

$$\tau = \frac{L}{R_1} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Комплексне значення усталеного струму

$$\underline{I}_y = \frac{E}{\underline{Z}} = 37,26e^{j57,87^\circ},$$

де $\underline{Z} = 5 + j3,14 = 5,9e^{j32,13^\circ}$.

Миттєве значення струму в усталеному режимі

$$i_y(t) = 52,53 \sin(\omega t + 57,87^\circ).$$

Повний струм подамо як суму вимушеної і вільної складових

$$i(t) = i_y(t) + i_g(t) = 52,6 \sin(\omega t + 57^\circ 50') + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Для визначення сталої інтегрування обчислюємо значення струму i як такого, що протікає через котушку індуктивності, в час $t = 0$

$$i(0) = 77,8 \sin 38^\circ 25' \text{ A.}$$

Враховуючи (7.35) і закони комутації, записуємо

$$77,5 \sin 38^\circ 30' = 52,6 \sin 57^\circ 50' + A ,$$

звідки постійна $A = 4$.

Остаточо

$$i(t) = 52,6 \sin(\omega t + 57^\circ 50') + 4e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A.}$$

Визначаємо значення струму при $t = 0,002 \text{ c}$

$$i(0,002) = 52,6 \sin(36^\circ + 57^\circ 50') + 4e^{-1} = 53,9 \text{ A.}$$

Приклад 7.3. Розрахувати часові залежності струмів віток та напруги на котушці індуктивності в колі (рис. 7.13), якщо $U = 30 \text{ В}$; $L = 1 \text{ Гн}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$.

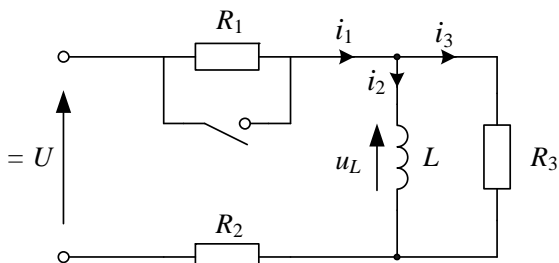


Рис. 7.13

Розв'язання. Незалежні початкові умови

$$i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ A};$$

Запишемо рівняння Кірхгофа для кола після комутації (R_1 закорочено):

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$i_3 R_3 + i_1 R_2 = U;$$

$$L \frac{di_2}{dt} - i_3 R_3 = 0.$$

Розв'яжемо систему стосовно i_2 . Після перетворення одержимо рівняння

$$L \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U.$$

Складаємо характеристичне рівняння та визначаємо його корінь

$$L\lambda + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 0; \quad \lambda = -\frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)L} = -5 \text{ c}^{-1}.$$

Усталена та вільна складові струму i_2 :

$$i_{2,y} = \frac{U}{R_2} = \frac{30}{10}; \quad i_{2,e}(t) = Ae^{\lambda t}.$$

Підставивши числові значення, одержуємо розв'язок

$$i_2(t) = 3 + Ae^{-5t} \text{ A}.$$

Використовуючи початкові умови, визначаємо сталу інтегрування.

$$i_2(0) = 3 + A; \quad A = -1,5.$$

Отже, $i_2 = 3 - 1,5e^{-5t} \text{ A}$.

Беручи до уваги, що $u_{R_3} = u_L$, визначаємо

$$i_3 = \frac{u_L}{R_3} = \frac{7,5e^{-5t}}{10} = 0,75e^{-5t} \text{ A};$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 3 - 1,5e^{-5t} + 0,75e^{-5t} \text{ A}.$$

Напряга $u_L = L \frac{di_2}{dt} = (-1,5) \cdot (-5)e^{-5t} = 7,5e^{-5t} \text{ B}$.

Приклад 7.4. Два індуктивно зв'язаних контури (рис. 7.14) мають параметри: $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,05 \text{ Гн}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ і взаємна індуктивність $M = 0,06 \text{ Гн}$.

Знайти закони зміни струмів i_1 та i_2 в перехідному процесі, зумовленому розмиканням рубильника якщо, $R_0 = 5 \text{ Ом}$, а величина постійної ЕРС $E = 120 \text{ В}$.

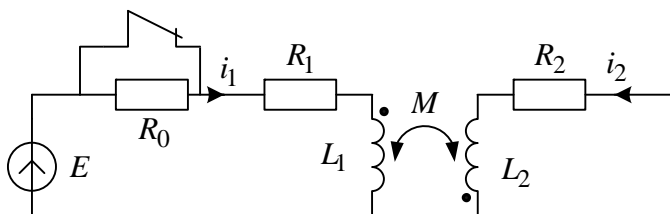


Рис. 7.14

Розв'язання. Для електричного кола, яке утворилось після розмикання рубильника, за законами Кірхгофа, складаємо рівняння

$$E = (R_1 + R_0)i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \quad (7.47a)$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \quad (7.47б)$$

Для складання характеристичного рівняння систему (7.47) зведемо до одного диференціального рівняння з одним невідомим – струмом i_2 . Для цього з рівняння (7.47) визначаємо

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{R_2}{M} i_2 + \frac{L_2}{M} \cdot \frac{di_2}{dt}. \quad (7.48a)$$

У результаті диференціювання рівнянь (7.47) одержуємо

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} = \frac{R_2}{M} \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{L_2}{M} \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2}; \quad (7.48б)$$

$$0 = (R_1 + R_0) \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - M \frac{d^2 i_2}{dt^2}. \quad (7.48в)$$

З рівнянь (7.48) знаходимо

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + [(R_1 + R_0)L_2 + r_2 L_1] \frac{di_2}{dt} + (R_1 R_2 + R_0 R_2) i_2 = 0. \quad (7.49)$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$(L_1 L_2 - M^2) \lambda^2 + \frac{d^2 i_2}{dt^2} + [(R_1 + R_0)L_2 + R_2 L_1] \lambda + R_1 R_2 + R_0 R_2 = 0. \quad (7.50)$$

Підставивши в (7.50) числові значення, визначаємо корені

$$\lambda_1 = -71,5 \text{ c}^{-1}; \quad \lambda_2 = -1000 \text{ c}^{-1}.$$

Загальні вирази для струмів мають вигляд

$$i_1 = i_{1y} + i_{1e} = i_{1y} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}; \quad (7.51a)$$

$$i_2 = i_{2y} + i_{2e} = i_{2y} + B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (7.51б)$$

Визначаємо струми усталеного (вимушеного) режиму

$$i_{1y} = \frac{E}{R_1 + R_0} = 12 \text{ A}; \quad i_{2y} = 0. \quad (7.52a)$$

Сталі інтегрування знаходимо з диференціальних рівнянь (7.47) та рівнянь (7.51). Для цього диференціюємо (7.51)

$$\frac{di_1}{dt} = 0 + A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t};$$

$$\frac{di_2}{dt} = 0 + B_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

та визначаємо значення похідних при $t = 0_+$

$$\left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2; \quad \left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0} = B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2. \quad (7.53)$$

З рівнянь (7.47) обчислюємо значення похідних струмів

$$120 = (5 + 5) 24 + 0,05 \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} - 0,06 \left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0}; \quad (7.54)$$

$$0 = 0,1 \left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0} - 0,06 \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0}.$$

$$\left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} = -8571; \quad \left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0} = -5142. \quad (7.55)$$

Згідно із законами комутації струми $i_1(t)$ та $i_2(t)$ не змінюються стрибком. Отже, система рівнянь для визначення сталих інтегрування має вигляд

$$A_1 + A_2 = 12;$$

$$B_1 + B_2 = 0,$$

звідки знаходимо

$$A_1 = 3,7; \quad A_2 = 8,3; \quad B_1 = -5,54; \quad B_2 = 5,54.$$

Підставляючи їх в (7.51), одержуємо залежності

$$i_1 = (12 + 3,7e^{-71,5t} + 8,3e^{-1000t}) A;$$

$$i_2 = (5,54e^{-71,5t} + 5,54e^{-1000t}) A.$$

Графіки часових залежностей струмів побудовані на рис. 7.15.

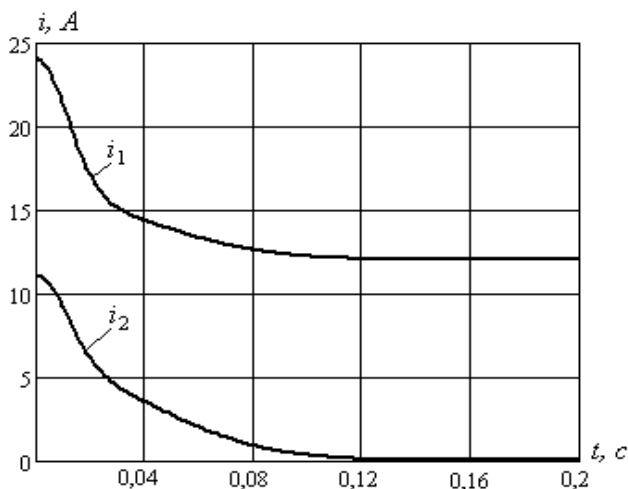


Рис. 7.15

Приклад 7.5. За якого значення опору R в електричному колі з послідовним з'єднанням R , L , C період (частота ω_0) коливань струму під час розряду конденсатора буде мінімальним, а при яких – максимальним.

Відповідь: Період коливань буде мінімальним і дорівнюватиме $T = 2\pi/\omega_0$, де ω_0 – частота, за умови $R = 0$. Він зростає і прямує до нескінченності в міру наближення значення R до критичного $R_{kp} = 2\sqrt{L/C}$, коли корені характеристичного рівняння стають рівними і дійсними.

7.7. Операторний метод розрахунку перехідних процесів

7.7.1. Суть операторного методу. Класичний метод розрахунку перехідних процесів можна застосовувати для аналізу як завгодно складних електричних кіл. Однак чим вищий порядок характеристичного рівняння, тим трудомісткішою є процедура знаходження сталих інтегрування. Як відомо з математики, одним із шляхів розв'язування лінійних диференціальних рівнянь є *операторний* метод. Він ґрунтується на використанні поняття зображення функції. Кожній функції часу відповідає функція комплексної змінної $p = \alpha + j\omega$ і навпаки – кожній функції змінної p відповідає відповідна функція часу. Зауважимо, що зображення функцій часу використовується під час застосування символічного методу розрахунку усталених режимів в електричних колах синусоїдного струму, де зображенням синусоїдної функції часу є комплексне число.

Під час застосування операторного методу розрахунку перехідних процесів перехід від функції часу t до функції комплексної змінної p здійснюється за допомогою прямого перетворення Лапласа, згідно з яким функції $f(t)$ дійсної змінної t ставиться у відповідність інша функція $F(p)$ комплексної змінної p , яку називають зображенням. Такий перехід здійснюють за формулою

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (7.56)$$

Інтегральне рівняння (7.56) відображає пряме перетворення Лапласа. Функція $f(t)$ називається оригіналом, а функція $F(p)$ – зображенням за Лапласом. Інакше кажучи, оригінал і зображення – це дві функції: дійсної змінної t та комплексної змінної p , які пов'язані перетворенням Лапласа. Кожен *оригінал* має своє єдине *зображення*.

Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, то скорочено записуватимемо так

$$f(t) \Rightarrow F(p). \quad (7.57)$$

У математиці на функцію $f(t)$ накладаються певні обмеження, однак усі функції, які використовуються в електротехніці, вимоги до них задовольняють.

Для знаходження оригіналу $f(t)$ за відомим зображенням $F(p)$ необхідно виконати обернене перетворення Лапласа за допомогою інтеграла Бромвіча

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (7.58)$$

який є розв'язком інтегрального рівняння (7.56) стосовно невідомої функції $f(t)$ і можна одержати за методами теорії функцій комплексного аргументу. Його використання дає змогу одержати формули **теорему розкладу**, яку розглянемо далі.

Операторний метод дає змогу формалізувати розв'язування диференціальних рівнянь. Цього досягається завдяки тому, що під час застосування операторного методу операція диференціювання зводиться до множення, а операція інтегрування – до ділення на комплексну змінну p (подібно, як у символічному методі розрахунку ustalених режимів електричних кіл синусоїдного струму). У результаті система інтегро-диференціальних рівнянь дійсної змінної (оригіналу) замінюється системою алгебричних рівнянь стосовно зображень, тобто здійснюється їх алгебризація.

Отже, суть операторного методу розрахунку перехідних процесів полягає в переході від реальних функцій часу до їх зображень, розрахунку операторних струмів та напруг і здійснення зворотного переходу. Важливою властивістю операторного методу розрахунку перехідних процесів є відсутність необхідності обчислення сталих інтегрування, оскільки всі початкові умови враховуються під час переходу від систем інтегро-диференціальних рівнянь до систем операторних алгебричних рівнянь. Операторні зображення струму $i(t)$ та напруги $u(t)$ позначають відповідно як $I(p)$ та $U(p)$.

Розрахунок перехідного процесу операторним методом виконується в такій послідовності:

а) здійснити перехід від функцій часу до їх операторних зображень;

б) виконати розрахунки операторних струмів та напруг із застосуванням будь-якого з відомих методів аналізу лінійних електричних кіл;

в) здійснити перехід від операторних зображень до функцій часу.

Насамкінець зауважимо, що в літературі відоме, так зване, перетворення Карсона–Хевісайда, згідно з яким

$$f(t) \Rightarrow pF(p), \quad (7.59)$$

однак під час розв'язування електротехнічних задач його рідко застосовують.

Основні положення. Суть операторного методу розрахунку перехідних процесів полягає в переході від реальних електричних величин до їх операторних зображень, виконання розрахунків і зворотного переходу від зображень до оригіналів.

Згідно з операторним методом розрахунку перехідних процесів пошук розв'язку переноситься з області функцій дійсної змінної t в область функції комплексної змінної $p = \alpha + j\omega$.

Важливою властивістю операторного методу розрахунку перехідних процесів є відсутність необхідності обчислення сталих інтегрування.

7.7.2. Основні властивості перетворення Лапласа.

Математичним операціям над оригіналами відповідають операції над зображеннями і навпаки. Ці операції дають змогу знаходити зображення різних функцій, похідних та інтегралів з метою переходу від систем рівнянь стосовно оригіналів до систем операторних рівнянь, а також здійснювати зворотний перехід від операторних зображень до оригіналів. Перехід від функцій часу до операторних функцій здійснюється за допомогою прямого перетворення Лапласа, яке визначають за формулою (7.56). Однак на практиці цією формулою не доводиться користуватись, оскільки в теорії операторного числення знайдено зображення

практично для всіх функцій, які трапляються в різних галузях техніки, зокрема й в електротехніці. Зображення для найуживаніших функцій наведені в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	A	$\frac{A}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$
4	$e^{\mp j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \pm j\omega_0}$
5	$e^{j(\omega_0 t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega_0}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$
7	$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
8	$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
9	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega_0 \cos \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
10	$\cos(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega_0 \sin \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
11	$\text{sh } at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
12	$\text{chat} = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$

Розглянемо формули для обчислення зображень похідних і інтегралів від оригіналів. Згідно з (7.56) зображення похідної обчислюємо за формулою

$$f'(t) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow pF(p) - f(0). \quad (7.60)$$

Використовуючи формулу (7.60), обчислюємо операторне зображення напруги на індуктивному елементі

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad U_L(p) = pLI(p) - Li(0). \quad (7.61)$$

де $i(0)$ – значення струму при $t = 0$.

Для зображення інтеграла одержимо

$$\int_0^{\infty} f(t) dt \Rightarrow \frac{1}{p} F(p),$$

а враховуючи, що

$$u_c = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_c(0),$$

зображення напруги на конденсаторі має вигляд

$$U_c(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p}, \quad (7.62)$$

де $u_c(0)$ – значення напруги на конденсаторі при $t = 0$.

Величину $Li(0)$ називають *внутрішньою* ЕРС, яка зумовлена запасом енергії в магнітному полі котушки індуктивності внаслідок протікання в ній струму $i(0)$ безпосередньо перед комутацією. Аналогічно $u_c(0)/p$ – це внутрішня ЕРС, яка зумовлена запасом енергії в електричному полі конденсатора внаслідок наявності напруги $u_c(0)$ на ньому, безпосередньо перед комутацією.

Основні положення. Застосування операторного методу дає змогу замінити систему інтегро-диференціальних рівнянь стосовно оригіналів (функцій часу), системою алгебричних рівнянь стосовно їх зображень, тобто здійснити алгебризацію вихідної системи рівнянь.

У разі застосування операторного методу операція диференціювання замінюється множенням на оператор p , а операція інтегрування – діленням, внаслідок чого замість вихідних інтегро-диференціальних рівнянь стосовно часових функцій розглядаються алгебричні рівняння стосовно їх зображень.

7.7.3. Операторні заступні схеми. Застосування операторного методу розрахунку перехідних процесів потребує складання операторної заступної схеми. Під час її складання всі величини замінюються їх операторними зображеннями (наприклад, $i(t)$ на $I(p)$, $u(t)$ на $U(p)$, $e(t)$ на $E(p)$ і т.д.). Крім того, індуктивні елементи замінюються відповідно до (7.61) послідовними схемами, які складаються з операторного опору pL і джерела ЕРС зі значенням $Li(0)$ (рис. 7.16, а), а ємнісні елементи – послідовними схемами, які складаються з операторного опору $1/(pC)$ і джерела ЕРС величиною $u_C(0)/p$ (рис. 7.16, б). Причому додатний напрямок джерела ЕРС, увімкненого послідовно до котушки індуктивності, збігається з напрямом струму $i_L(t)$, а джерела ЕРС, увімкненого послідовно до ємнісного елемента, – зустрічно до струму $i_C(t)$.

Операторне рівняння схеми рис. 7.16, а має вигляд $U(p) = pL \cdot I(p) - Li(0)$, де $i(0)$ – початкове значення струму, а схеми рис. 7.16, б – $U(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p}$, де $u_C(0)$ – початкове значення напруги.

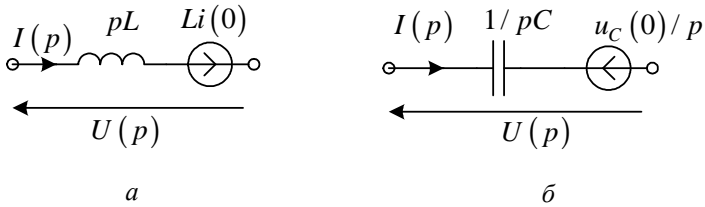


Рис. 7.16

Для прикладу на рис. 7.17 наведено схему електричного кола та його операторну заступну схему.

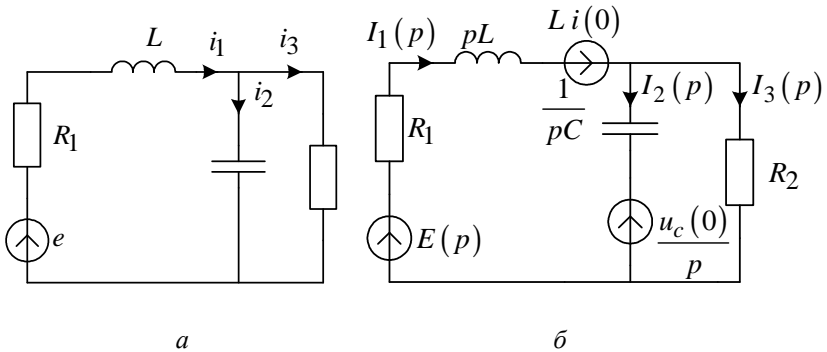


Рис. 7.17

7.7.4. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі. Під час складання рівнянь за законами Ома та Кірхгофа необхідно дотримуватись усіх правил, які були сформульовані вище для дійсних функцій часу. Наприклад, для вітки, яка складається з послідовно з'єднаних резистора, котушки індуктивності та конденсатора, можна записати

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt,$$

тому згідно з (7.61), (7.62) в операторній формі одержимо

$$\begin{aligned}
 U(p) &= RI(p) + pLi(p) - Li(p) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_c(0)}{p} = \\
 &= \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) I(p) - Li(0) + \frac{u_c(0)}{p}.
 \end{aligned}
 \tag{7.63}$$

Величина

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}
 \tag{7.64}$$

називається **операторним опором** двополюсника, де R , pL , $1/(pC)$ – операторні опори резистора, котушки та конденсатора відповідно.

Як видно з (7.64), операторний опір вітки можна одержати з комплексного опору формальною заміною $j\omega$ на p .

Операторні зображення струму $I(p)$ і напруги $U(p)$ узагальненої вітки, до якої входить резистор (параметр – R), котушка індуктивності (параметр – L) і конденсатор (параметр – C), зв’язані співвідношенням

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_c(0)/p}{Z(p)},
 \tag{7.65}$$

яке є **законом Ома** в операторній формі.

Якщо початкові умови нульові, то рівняння (7.65) набуває вигляду

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.
 \tag{7.66}$$

Рівняння (7.65) залишається справедливим, якщо процес у колі до комутації не був усталеним. У цьому разі числові значення $u_c(0)$ і $i_L(0)$ необхідно брати такими, які вони мають у момент комутації.

Перший закон Кірхгофа в операторній формі записується у вигляді рівняння

$$\sum_k I_k(p) = 0.
 \tag{7.67a}$$

Другий закон Кірхгофа в операторній формі має вигляд

$$\sum_k E_k(p) = \sum_k U_k(p), \quad (7.67б)$$

де $U_k(p)$ – визначається згідно з (7.63).

У разі ненульових початкових умов рівняння другого закону Кірхгофа (7.67б) набуває вигляду

$$\sum_k \left(E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{p} \right) = \sum_k Z_k(p) I_k(p). \quad (7.68)$$

Величини $L_k i_k(0)$ і $u_{ck}(0)/p$ дають змогу врахувати ненульові початкові умови. Їх можна розглядати як додаткові джерела енергії (так звані внутрішні ЕРС), які вводяться до віток з індуктивними елементами, напрямком яких збігається з напрямком струму, та до віток з ємнісними елементами, напрямком яких протилежний до напрямку струму. Зважаючи на це, для визначення струмів можна використовувати метод накладання і розраховувати процес у колі спочатку за нульових початкових умов, а потім знайти струми та напруги, зумовлені дією додаткових ЕРС, які визначаються початковими умовами, і результати додати.

Оскільки для операторних заступних схем справедливі закони Кірхгофа, то для розрахунків зображень можна використовувати всі методи, які застосовуються до розрахунку лінійних електричних кіл постійного струму.

Основні положення. Застосування перетворення Лапласа дає змогу перейти від операцій над реальними функціями часу до операцій над зображеннями.

В операторному методі розрахунок операторних зображень струмів можна визначити будь-яким із методів розрахунку лінійних електричних кіл з використанням операторної заступної схеми, в якій реальні джерела електричної енергії та опори пасивних елементів подані відповідними операторними зображеннями. До операторної заступної схеми входять увімкнені послідовно до реактивних елементів, так звані, внутрішні джерела енергії, які дають змогу врахувати початкові умови.

7.7.5. Перехід від зображень до оригіналу. Теорема розкладу. Після знаходження операторних зображень струмів та напруг, необхідно здійснити перехід до реальних функцій часу. На практиці найчастіше операторні зображення визначаються у вигляді раціонального дробу

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (7.69)$$

де $F_1(p)$, $F_2(p)$ – поліноми оператора p степеня відповідно m та n . Для знаходження оригіналів таких зображень користуються **теоремою розкладу**, суть якої полягає в такому.

Вважатимемо, що степінь m полінома $F_1(p)$ чисельника менша від степеня n полінома $F_2(p)$ знаменника, тобто $m < n$. Тоді за умови, що рівняння $F_2(p) = 0$ не має кратних коренів, а також спільних коренів з рівнянням $F_1(p) = 0$, дріб (7.69) можна розкласти на прості дроби за формулою

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (7.70)$$

де p_1, \dots, p_n – корені рівняння $F_2(p) = 0$.

Оскільки перехід від зображень до оригіналів кожної компоненти виразу (7.70) здійснюють за формулою

$$\frac{A_k}{p - p_k} \doteq A_k e^{p_k t}, \quad (7.71)$$

то оригінал шуканої величини $x(t)$ є сумою

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7.72a)$$

де $F_2'(p_k)$ – значення похідної функції $F_2(p)$, якщо $p = p_k$.

Якщо рівняння $F_2(p) = 0$ має один корінь, що дорівнює нулю, то його можна записати у вигляді добутку

$$F_2(p) = p F_3(p).$$

У цьому разі оригінал знаходять за формулою

$$x(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.72б)$$

Якщо рівняння $F_2(p) = 0$ має n різних коренів, причому корінь p_1 має кратність m_1 , корінь p_2 має кратність m_2 і т.д., то оригінал визначають за формулою

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right]_{p=p_k}. \quad (7.72в)$$

Рівняння (7.72) називають **теоремою розкладу**. Зауважимо, що теорема розкладу (7.72в) у разі наявності простих коренів (кратність $m_k = 1$) є частковим випадком теореми розкладу для випадку кратних коренів, якщо прийняти $0! = 1$.

Якщо серед коренів рівняння $F_2(p) = 0$ є комплексно спряжені корені p_k і p_k^* , то в рівняннях (7.72а), (7.72б) достатньо визначити доданок для одного з цих коренів, наприклад p_k , а для спряженого кореня p_k^* взяти спряжене значення цього доданка. Сума, яка відповідає цим двом доданкам, дорівнює подвоєному значенню дійсної частини, знайденої для одного з коренів.

Основні положення. Застосування перетворення Лапласа дає змогу алгебризувати систему диференціальних рівнянь, які описують перехідний процес, у результаті чого задача зводиться до знаходження операторних зображень струмів, напруг тощо, які можна визначити одним із методів розрахунку ustalених режимів лінійних електричних кіл: законів Кірхгофа, контурних струмів, вузлових напруг.

Зворотний перехід від операторних зображень до функцій дійсної змінної (оригіналів) здійснюється на підставі теореми розкладу або за допомогою спеціальних таблиць.

7.8. Приклади розв'язування задач операторним методом

Приклад 7.6. Для порівняння розв'яжемо операторним методом задачу прикладу 7.3.

Розв'язання. Операторна заступна схема електричного кола для післякомутаційного режиму зображена на рис. 7.18.

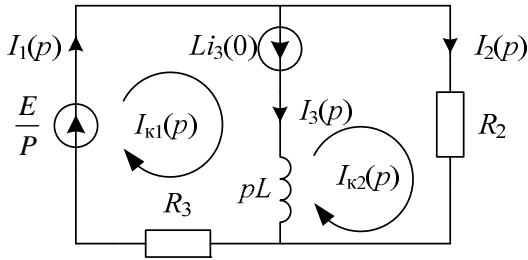


Рис. 7.18

Незалежні початкові умови

$$i_L(0) = i_3(0) = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ A};$$

Систему рівнянь складемо за методом контурних струмів

$$I_{k1}(p)(R_3 + pL) - I_{k2}(p)pL = \frac{E}{p} + Li_3(0);$$

$$-I_{k1}(p)pL + I_{k2}(p)(R_2 + pL) = -Li_3(0).$$

Розв'язавши її стосовно струму $I_{k2}(p)$, після підстановки числових значень одержимо

$$I_{k2}(p) = \frac{1,5p + 15}{p(p + 5)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Переходимо до оригіналу струму I_{k2} .

Оскільки поліном $F_2(p) = 0$ має два корені $p_1 = 0$, $p_2 = -5$, то згідно з теоремою розкладу

$$i_{k2}(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=1}^2 \frac{1,5p_k + 15}{2p_k + 5} e^{p_k t} =$$

$$= \frac{15}{5} + \frac{1,5(-5) + 15}{2(-5) + 5} e^{-5t} = 3 - 1,5e^{-5t} \text{ A.}$$

Відповідь: $i_2(t) = i_{k2}(t) = 3 - 1,5e^{-5t} \text{ A.}$

Приклад 7.7. Визначити перехідний струм i_1 в зображеному на рис. 7.19 колі за дії постійної ЕРС, якщо $E = 10 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$; $C = 10^{-3} \text{ Ф}$.

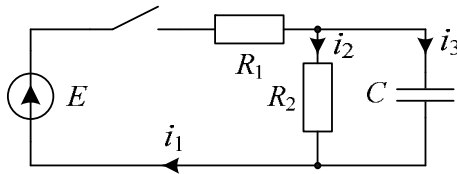


Рис. 7.19

Розв'язання. Незалежні початкові умови $u_C(0) = 0$.
Операторна заступна схема

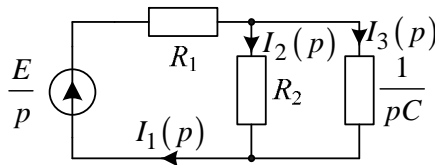


Рис. 7.20

За законом Ома

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}}} =$$

$$= \frac{E(R_2 Cp + 1)}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)} = \frac{0,1p + 10}{p(0,1p + 20)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Переходимо до оригіналу струму $i_1(t)$ за допомогою формули розкладу. Рівняння $F_1(p) = p(0,1p + 20) = 0$ має два корені: $p_1 = 0$, $p_2 = -200$. Похідна від знаменника виразу для струму $I_1(p)$ визначається за формулою $F_2'(p) = 0,2p + 20$.

Отже,

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{0,1p_k + 10}{0,1p_k + 20} e^{p_k t} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0,1(-200) + 10}{0,2(-200) + 20} e^{-200t} =$$

$$= 0,5 + 0,5e^{-200t} \text{ А.}$$

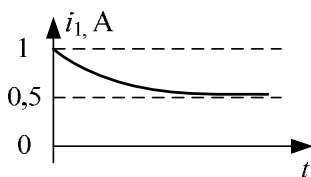


Рис. 7.21

Часова залежність струму i_1 в перехідному процесі наведена на рис. 7.21.

7.9. Перехідні процеси під час вмикання кола на напругу довільної форми

7.9.1. Вступні зауваження. Класичний та операторний методи використовують для розрахунку перехідних процесів у колах постійного або синусоїдного струму. Проте цим не вичерпується група задач з розрахунку перехідних процесів. Зокрема, нерідко виникає потреба проаналізувати процеси, які відбуваються під час вмикання електричного кола на неперервно змінну напругу довільної форми, наприклад, у разі джерел енергії трикутної, прямокутної, лінійно наростаючої чи спадаючої форми. У разі лінійного електричного кола перехідний процес у ньому можна розрахувати на основі методу накладання із застосуванням інтегралу Дюамеля. Суть методу полягає в тому, що визначають перехідну провідність кола, яка числово дорівнює струмові в колі за дії напруги в один вольт, а потім визначають перехідний струм у колі, зумовлений дією довільної напруги $u = u(t)$, за однією з відомих формул.

7.9.2. Перехідні функції. Припустимо, що двополусник, операторна провідність якого $Y(p)$, вмикають на постійну напругу

U_0 . Операторне зображення струму $I(p)$ на вході визначають за формулою

$$I(p) = U_0(p)Y(p). \quad (7.73)$$

Оригінал струму $I(p)$ можна подати у вигляді

$$i(t) = U_0 g(t), \quad (7.74)$$

де величину $g(t)$, яка є функцією часу, називають **перехідною провідністю**. Її вимірюють у сіменсах (См), тобто як звичайну провідність.

Як видно з (7.74), перехідна провідність числово дорівнює струмові $i(t)$ на вході двополюсника під час вмикання його на постійну напругу $U_0 = 1$ В, тобто

$$i(t) = 1,0 \cdot g(t). \quad (7.75)$$

Звідси впливає спосіб визначення перехідної провідності. Для цього необхідно знайти класичним або операторним методом вираз для струму у вітці у разі вмикання її на постійну напругу в один вольт. Наприклад, перехідну провідність схеми рис. 7.2 визначають за формулою

$$g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (7.76)$$

Аналогічно можна знайти перехідну функцію напруги у разі живлення кола від джерела струму величиною один ампер. Така перехідна величина називається **перехідним опором** $r(t)$ і вимірюється в омах. Загальна назва перехідних величин (провідності чи опору) – **перехідна функція** $h(t)$. Перехідні функції є функціями часу і не залежать від величини та форми кривих прикладених напруг чи струму, а визначаються параметрами елементів схеми електричного кола. Оскільки значення перехідної функції $h(t)$ залежить від часу, то її називають (**часовою перехідною характеристикою**). Її можна визначити як класичним, так і операторним методом.

7.9.3. Інтеграл Дюамеля. Нехай до джерела неперервно змінної напруги $u(t)$ (рис. 7.22, а) вмикають пасивний лінійний двополюсник з довільною внутрішньою схемою. Необхідно знайти струм $i(t)$ на вході двополюсника.

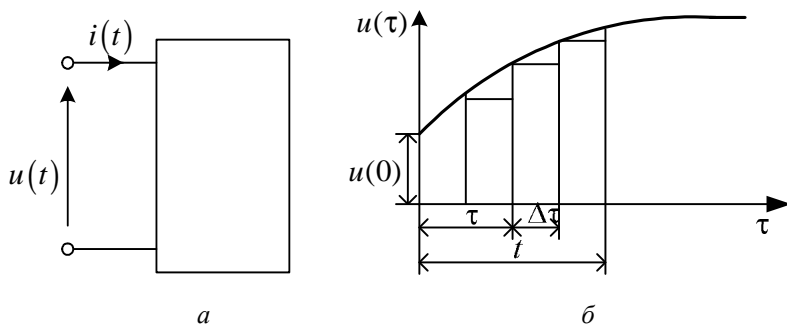


Рис. 7.22

Неперервно змінну напругу $u(t)$ замінимо ступінчастою функцією з елементарними стрибками напруги Δu (рис. 7.22, б). Тоді зміну напруги можна подати як вмикання при $t = 0$ постійної напруги величиною $u(0)$, а потім елементарних постійних напруг величиною Δu з часовим інтервалом $\Delta \tau$. Ці елементарні напруги можуть мати знак плюс чи мінус залежно від того зростаючий чи спадаючий характер має крива напруги.

Складова струму в момент часу t від постійної напруги $u(0)$ дорівнює $u(0) \cdot g(t)$. Складова струму в момент часу t від елементарного стрибка напруги Δu , який відбувається в момент часу τ дорівнює $\Delta u \cdot g(t - \tau)$. Це пояснюється тим, що елементарний стрибок напруги Δu починає діяти на час τ пізніше розмикання рубильника на вході, тобто проміжок часу між моментом τ початку дії цього стрибка і моментом часу t дорівнює $(t - \tau)$.

Елементарний стрибок напруги Δu можна подати у вигляді

$$\Delta u \approx \Delta \tau \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta \tau \cdot u'(\tau),$$

а відповідну йому складову струму визначити за формулою

$$\Delta u \cdot g(t - \tau) = u'(\tau) \Delta \tau \cdot g(t - \tau).$$

Елементарні стрибки напруги вмикають в інтервалі часу від нуля до t , де t – час, для якого визначається струм. Тому, додаючи складові струму, зумовлені всіма стрибками, і переходячи до

границі при $\Delta\tau \rightarrow 0$, а також, врахувавши складову струму від початкового стрибка напруги $u(0)$, одержуємо формулу

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (7.77a)$$

яку називають першою формою *інтегралу Дюамеля*. Зауважимо, що літерою τ позначено змінну інтегрування, а літерою t – поточне значення часу, для якого потрібно знайти перехідний струм.

Аналогічно можна знайти будь-яку перехідну електричну величину $y(t)$ як реакцію кола на збурення $x(\tau)$. Отже, в загальному вигляді формулу (7.77a) можна записати так

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Відомі й інші форми цього інтегралу, які запишемо стосовно перехідного струму,

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad (7.77б)$$

де $u'(t-\tau)$ – похідна функції $u(t-\tau)$ за аргументом $(t-\tau)$;

$$i(t) = u(t)g(0) + \int_0^t u(\tau)g'(t-\tau)d\tau; \quad (7.77в)$$

$$i(t) = u(t)g(0) + \int_0^t u(t-\tau)g'(\tau)d\tau. \quad (7.77г)$$

Ту чи іншу форму вибирають залежно від того, наскільки простим буде підінтегральний вираз.

Насамкінець, зауважимо, що формули інтегралу Дюамеля використовують лише у разі нульових початкових умов. За необхідності дослідження перехідного процесу в активному електричному колі з ненульовими початковими умовами застосовують принцип накладання і зведення задачі до нульових початкових умов.

Розрахунок перехідного процесу з використанням інтегралу Дюамеля виконують у такій послідовності:

а) використовуючи класичний або операторний методи розрахунку перехідних процесів, визначити перехідну провід-

ність $g(t)$ як реакцію кола на одиничну напругу $u(t)=1,0\text{ В}$ та замінити в одержаному виразі аргумент t на $(t-\tau)$;

б) на кожній ділянці неперервної зміни функції вхідної напруги $u(\tau)$ апроксимувати її аналітичним виразом та продиференціювати одержані вирази по часу;

в) для кожного інтервалу часу неперервної зміни вхідної напруги записати вирази для струму у вигляді інтегралу Дюамеля, поданого однією з формул (7.77) з урахуванням стрибків вхідної напруги $u(\tau)$. Останні записують як добуток $\Delta u g(t-t_k)$ величини стрибка на перехідну провідність, де t_k – час конкретного стрибка;

г) одержаний вираз для струму інтегрують по τ і знаходять остаточні вирази для струму в перехідному процесі за дії прикладеної неперервно змінної напруги як функції часу t .

Основні положення. Реакція пасивного лінійного електричного кола на вмикання джерела напруги величиною один вольт або струму величиною один ампер називається перехідною функцією.

Перехідну провідність можна визначити шляхом розрахунку перехідного процесу в колі при дії одиничної напруги класичним або операторним методом. Перехідний опір визначають аналогічно.

Перехідний процес у лінійному електричному колі, який зумовлений дією неперервно змінної напруги довільної форми, можна визначити за допомогою формул накладання, які називають формулами інтеграла Дюамеля. Для цього необхідно спочатку визначити будь-яким методом перехідний струм у колі, зумовлений дією одиничної напруги, а потім скористатись однією з формул вказаного інтеграла.

Якщо відома перехідна провідність електричного кола, то струм у перехідному процесі, зумовленому дією неперервно змінної напруги $u = u(t)$ довільної форми, можна визначити за однією з відомих формул інтеграла Дюамеля, які в теоретичному сенсі є рівноцінними.

7.10. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

1. За яких умов в електричному колі виникає перехідний процес?
2. Як визначають початкові значення струмів та напруг під час розрахунку перехідних процесів?
3. Для чого складають характеристичне рівняння?
4. Які є способи складання характеристичного рівняння?
5. У чому полягає суть класичного методу розрахунку перехідного процесу?
6. Який математичний зміст мають усталена і вільна складові, якими подають розв'язок у класичному методі розрахунку перехідних процесів?
7. У чому полягає різниця розрахунку перехідного процесу класичним методом у разі дії в колі синусоїдної напруги та постійної?
8. У чому полягає суть операторного методу розрахунку перехідного процесу?
9. Як враховують початкові умови під час розрахунку перехідних процесів операторним методом?
10. Чим відрізняється розрахунок перехідних процесів операторним методом з нульовими і ненульовими початковими умовами?
11. Які переваги і недоліки класичного методу розрахунку перехідних процесів?
12. Які переваги і недоліки операторного методу розрахунку перехідних процесів?
13. Як визначають корені характеристичного рівняння під час розрахунку перехідного процесу операторним методом?
14. Яку величину називають сталою часу електричного кола й від чого вона залежить?
15. Від чого залежить тривалість перехідного процесу?
16. Як визначити сталу часу з кривої перехідного процесу?
17. За яких умов виникає коливний перехідний процес?
18. Який опір називається критичним і як його визначають?
19. Яке найбільше значення може мати струм у колі під час вмикання RL -кола на синусоїдну напругу?
20. Яке найбільше значення може мати напруга на конденсаторі під час вмикання RC -кола на синусоїдну напругу?
21. Чи можуть бути змінними струм і напруга на конденсаторі у разі вмикання RLC -кола на постійну напругу?
22. За якої умови під час вмикання кола перехідний процес відсутній?

Екзаменаційні питання

1. Визначення початкових значень струмів та напруг під час розрахунку перехідних процесів.
2. Закони комутації та їх застосування для визначення початкових умов під час розрахунку перехідних процесів.

3. Загальний вигляд розв'язку диференціальних рівнянь, що описують перехідний процес у класичному методі.
4. Стала часу простого електричного кола, її визначення та фізичний зміст.
5. Характеристичне рівняння, методи його складання та корені.
6. Перехідний процес під час вмикання котушки індуктивності на постійну напругу.
7. Фізичні явища під час розмикання електричного кола з індуктивним елементом.
8. Перехідний процес під час вмикання кола з параметрами R , C на постійну напругу.
9. Розряд конденсатора на резистор.
10. Вмикання котушки індуктивності на синусоїдну напругу.
11. Загальний вигляд вільних складових струмів та напруг у простому колі з двома реактивними елементами залежно від значень коренів характеристичного рівняння.
12. Вмикання кола з послідовно з'єднаними конденсатором та резистором на синусоїдну напругу.
13. Перехідний процес у простому електричному колі з послідовним з'єднанням котушки індуктивності та конденсатора.
14. Аперіодичний та періодичний процеси під час розрядження конденсатора. Критичний режим.
15. Суть операторного методу розрахунку перехідних процесів. Перетворення Лапласа.
16. Операторне відображення похідної, інтеграла та деяких основних функцій.
17. Загальна методика розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах операторним методом.
18. Операторні параметри заступної схеми електричного кола під час розрахунку перехідного процесу операторним методом.
19. Операторна заступна схема електричного кола.
20. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі.
21. Методи розрахунку операторних заступних схем.
22. Способи переходу від зображень за Лапласом до оригіналів. Теорема розкладу.
23. Розрахунок вільних складових струмів та напруг операторним методом.
24. Перехідні функції. Перехідний опір та перехідна провідність.
25. Розрахунок перехідних процесів в електричному колі під час вмикання на напругу довільної форми.

Завдання для самостійної роботи

Задача 7.1. Котушка реле з параметрами $R = 50 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, вмикається на затискачі джерела постійної ЕРС з параметрами $R_0 = 50 \text{ Ом}$, $E = 10 \text{ В}$. Визначити час, через який час струм досягне значення $i = 0,05 \text{ А}$.

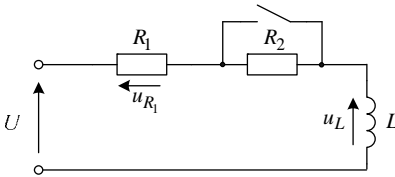
Відповідь: $t = 0,693 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Задача 7.2. Два послідовно з'єднаних конденсатори, які заряджені до напруг $U_{c1} = 50 \text{ В}$, $U_{c2} = 30 \text{ В}$ розряджаються на резистор з опором $R = 1000 \text{ Ом}$. Записати вираз для закону зміни струму в перехідному процесі, якщо $C_1 = 0,15 \text{ мкФ}$, $C_2 = 0,25 \text{ мкФ}$.

Відповідь: $i(t) = 2 \cdot 10^{-2} e^{-1067t} \text{ А}$.

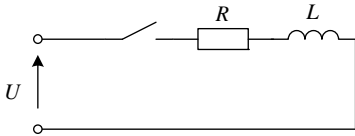
Задача 7.3. Котушка індуктивності з параметрами $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГн}$ вмикається на постійну напругу. Визначити момент часу, коли струм у колі досягне значення $i(t) = 0,99 i_{уст}$.

Відповідь: $t = 0,46 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.



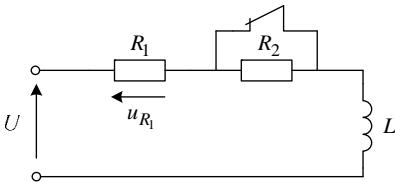
Задача 7.4. Визначити залежність напруг $u_{R1}(t)$ та $u_L(t)$ в перехідному процесі, якщо коло вмикається на постійну напругу $U = 120 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$.

Відповідь: $u_{R1}(t) = 120 - 90e^{-100t}$,
 $u_L(t) = 90e^{-100t}$.



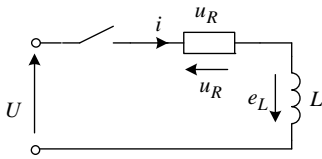
Задача 7.5. Визначити значення струму в колі через час $t = 2,0\tau$ після вмикання на напругу $u = 141,4 \sin(314t + 30^\circ)$, якщо $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 0,5 \text{ Гн}$.

Відповідь: $i = 0,397 \text{ А}$.



Задача 7.6. Визначити залежність напруги $u_{R1}(t)$ в перехідному процесі, якщо в колі діє постійна напруга $U = 120 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L = 0,4 \text{ Гн}$.

Відповідь: $u_{R1}(t) = 30 + 90e^{-100t}$.



Задача 7.7. Визначити значення u_R та e_L в момент часу $t = 0,01$ с, якщо $U = 100$ В, $L = 1$ Гн, $R = 10$ Ом.

Відповідь: $u_R = 63,21$ В;
 $e_L = -367,9$ В.

Задача 7.8. У зображеному на рисунку до попередньої задачі електричному колі напруга $U = 160$ В, опір $R = 8$ Ом, індуктивність $L = 32$ мГн. Визначити:

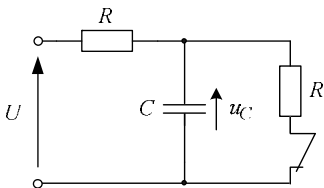
- сталу часу;
- закон зміни струму в перехідному процесі;
- швидкість зміни струму di/dt в початковий момент перехідного процесу;
- значення струму в перехідному процесі в момент часу $t = 4 \cdot 10^{-3}$ с;
- як зміниться визначене за пунктом г) значення струму, якщо L збільшити у два рази.

Відповідь: а) $\tau = 0,0125$ А/с; б) $i(t) = 20(1 - e^{-250t})$ А;

в) $di/dt = 5 \cdot 10^3$ А/с; г) $i(4 \cdot 10^{-3}) = 12,64$ А; д) $i(4 \cdot 10^{-3}) = 7,87$ А.

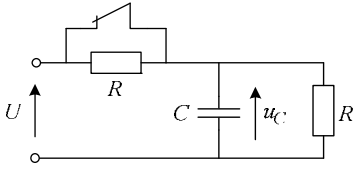
Задача 7.9. Котушка індуктивності з параметрами $L = 0,1$ Гн, $R = 10$ Ом, вмикається на постійну напругу $U = 100$ В. Визначити через який час струм досягне значення, яке дорівнює половині усталеного.

Відповідь: $t = 6,93 \cdot 10^{-3}$ с.



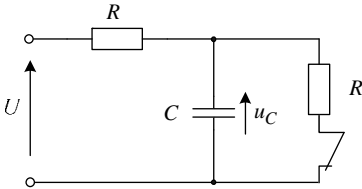
Задача 7.10. Електричне коло живиться від джерела постійної напруги $U = 200$ В. Визначити залежність напруги $u_C(t)$ в перехідному процесі, якщо $R = 200$ Ом, $C = 50$ мкФ.

Відповідь: $u_C(t) = 200 - 100e^{-100t}$.



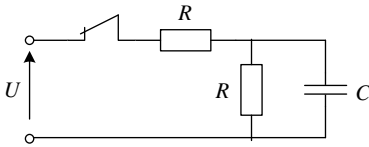
Задача 7.11. Визначити залежність напруги $u_C(t)$ в перехідному процесі, якщо $U = 100 \text{ В}$, $R = 200 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

Відповідь: $u_C(t) = 50 + 50e^{-100t}$.



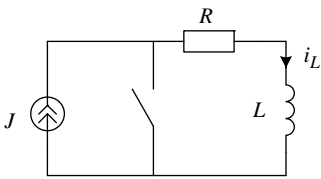
Задача 7.12. Визначити залежність напруги $u_C(t)$ в перехідному процесі, якщо $U = 200 \text{ В}$, $R = 200 \text{ Ом}$, $C = 50 \text{ мкФ}$.

Відповідь: $u_C(t) = 200 - 100e^{-100t}$.



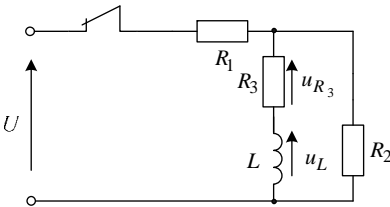
Задача 7.13. Конденсатор ємністю $C = 2 \text{ мкФ}$ від'єднується від джерела постійної напруги $U = 100 \text{ В}$. Визначити напругу на конденсаторі через $t = 0,01 \text{ с}$, якщо $R = 5 \text{ кОм}$.

Відповідь: $u_C = 18,4 \text{ В}$.



Задача 7.14. Визначити часову залежність струму $i_L(t)$ в котушці після замикання рубильника, якщо $J = 6 \text{ А}$, $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,25 \text{ Гн}$.

Відповідь: $i_L(t) = 6e^{-40t}$.

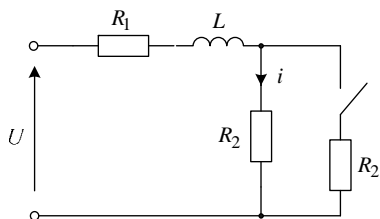


Задача 7.15. Визначити залежність струму $i(t)$, напруг $u_{R_3}(t)$ та $u_L(t)$ в перехідному процесі, якщо $U = 80 \text{ В}$, $R_1 = 120 \text{ Ом}$, $R_2 = 200 \text{ Ом}$, $R_3 = 50 \text{ Ом}$, $L = 0,5 \text{ Гн}$.

Відповідь: $i(t) = 0,4e^{-500t}$;

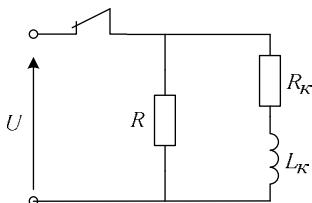
$u_L(t) = -100e^{-500t}$,

$u_{R_3}(t) = 200e^{-500t}$.



Задача 7.16. Визначити залежність струму $i(t)$ в перехідному процесі, якщо $U = 150 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $L = 0,3 \text{ Гн}$.

Відповідь: $i(t) = 2,5 - 1,0e^{-100t}$.



Задача 7.17. Визначити ЕРС самоіндукції в котушці в момент її від'єднання від джерела постійної напруги $U = 20 \text{ В}$, якщо: $R = 10 \text{ Ом}$, $R_к = 0,5 \text{ Ом}$, $L_к = 0,1 \text{ Гн}$.

Відповідь: $E = 420 \text{ В}$.

Задача 7.18. Котушка реле (рисунок до попередньої задачі) має параметри: $R_к = 5 \text{ Ом}$, $L_к = 1 \text{ Гн}$. Напруга живлення $U = 25 \text{ В}$. Яким повинно бути значення паралельно увімкненого опору R , щоб у момент вимикання реле ЕРС самоіндукції перевищувала напругу живлення у 2 рази.

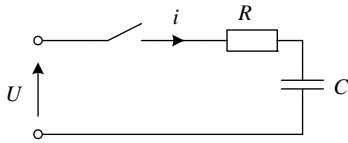
Відповідь: $R = 5 \text{ Ом}$.

Задача 7.19. Котушки реле з параметрами $R_к = 100 \text{ Ом}$, $L_к = 1 \text{ Гн}$ вмикаються на напругу $U = 100 \text{ В}$. Яким повинно бути значення паралельно увімкненого опору $R_д$, щоб у момент вимикання ЕРС самоіндукції перевищувала напругу живлення у два рази.

Відповідь: $R_д = 100 \text{ Ом}$.

Задача 7.20. Визначити величину опору R резистора, якщо заряджений до напруги $U_0 = 500 \text{ В}$ конденсатор ємністю $C = 40 \text{ мкФ}$ під час розряджання на цей опір за час $t = 5,56 \text{ мс}$ витратив половину початково запасеної енергії.

Відповідь: $R = 400 \text{ Ом}$.



Задача 7.21. Визначити початкову фазу ψ_u напруги $u = 312 \sin(314t + \psi_u)$ В за якої в колі відразу настає усталений режим, якщо $R = 250$ Ом, $C = 100$ мкФ, а також залежність від часу напруги $u_C(t)$.

Відповідь: $\psi_u = 82,7^\circ$;

$u_C = 39,4 \sin(314t)$ В.

Розділ 8

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1. Первинні параметри та диференціальні рівняння однорідної лінії

Під час пересилання електричної енергії через довгі лінії навіть за промислової частоти через наявність ємності між проводами та недосконалість ізоляції виникають струми зміщення та витоку крізь ізоляцію. Це ж явище спостерігається в лініях зв'язку уже у разі невеликих довжин лінії, оскільки ці лінії працюють на високих частотах. У попередніх розділах розглянуто електричні кола зі зосередженими параметрами, тобто такими, в яких можна нехтувати струмами, зумовленими ємністю між проводами (струмами зміщення), і провідністю ізоляції (струмами витоку). Струми та напруги в електричних колах із зосередженими параметрами залежать лише від часу: $u = u(t)$, $i = i(t)$, тобто є функціями однієї змінної, і їх можна описати звичайними диференціальними рівняннями. Однак за високих напруг, які наявні в лініях пересилання, а також високих частот, які існують у лініях зв'язку, нехтувати струмами зміщення і витоку неприпустимо, отже, струм у різних перерізах лінії відрізнятиметься. Струм у проводах лінії зумовлює спад напруги в активному опорі і створює змінне магнітне поле, яке наводить у лінії ЕРС самоіндукції, тому напруга між проводами в різних точках лінії буде неоднакова. У зв'язку з чим струм у лінії та напруга залежать від місця у лінії, а

тому вони є не тільки функціями часу t , але й координати відстані x , тобто вони є функціями двох змінних

$$u = u(x, t); \quad i = i(x, t).$$

Отже, довгі лінії не можна розглядати як кола із зосередженими параметрами. На відміну від кіл із зосередженими параметрами, процеси в електричних колах з розподіленими параметрами описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Практично будь-яке коло функціонує як коло з розподіленими параметрами, але особливо необхідно враховувати розподілений характер параметрів у довгих лініях електропересилань та ліній зв'язку. Ці лінії характеризуються питомими (тобто погонними) параметрами: активними опорами, провідностями, індуктивностями, ємностями, а іноді і взаємними індуктивностями. Їх розглядають як електричні кола з *розподіленими* параметрами. Якщо ці параметри розподілені рівномірно уздовж лінії, то лінію називають *однорідною*. Це можливо тоді, коли проводи лінії виготовлені з однакового матеріалу, мають однаковий поперечний переріз, взаємне розташування і характеристики середовища (ізоляції) не змінюються уздовж лінії. Для кількісного оцінювання зміни струму та напруги вздовж лінії, необхідно враховувати, що кожен елемент довжини лінії має активний опір R_0 та індуктивність L_0 , а між проводами є активна провідність G_0 і ємність C_0 . Ці параметри називаються *первинними*. Погонні параметри однорідної лінії є сталими і не залежать від координати довжини. Лінія, вздовж якої значення погонних параметрів змінюються, називається *неоднорідною*.

Оскільки первинні параметри однорідної лінії (R_0 , L_0 , G_0 , C_0) стосуються одиниці довжини, то вони відповідно мають розмірності: Ом/м, Гн/м, См/м, Ф/м, хоча на практиці в силовій електроенергетиці здебільшого використовують кратні їм параметри, які відносяться до одиниці довжини, що дорівнює 1 км.

Заступна схема елементарної ділянки однорідної лінії зображена на рис. 8.1. Для записування диференціальних рівнянь, яким задовольняють струми та напруги в будь-якій точці лінії з координатою x зобразимо довгу лінію як сукупність послідовно з'єднаних елементів довжиною dx , кожен з яких має опір $R_0 dx$, індук-

тивність $L_0 dx$, провідність $G_0 dx$, ємність $C_0 dx$. Для еквівалентної схеми елементарної ділянки лінії на підставі законів Кірхгофа можна записати рівняння для приростів напруг та струмів.

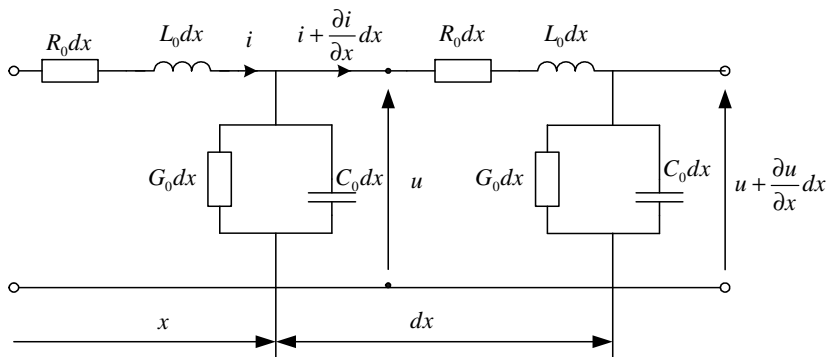


Рис. 8.1

Якщо в деякий момент часу t в точці, яка розташована на відстані x від початку лінії, напруга та струм мають значення відповідно u та i (рис. 8.1), то в той же час на відстані $x+dx$ ці величини можна визначити як

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Отже, спад напруги u на ділянці dx визначають за формулою

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = R_0 i dx + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} dx. \quad (8.1a)$$

Різниця між струмами на початку та в кінці ділянки лінії довжиною dx зумовлена наявністю струму провідності між проводами. Її визначають за формулою

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = G_0 u dx + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} dx. \quad (8.1б)$$

Скоротивши (8.1 а, б) на dx , одержуємо рівняння однорідної лінії в частинних похідних

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Розв'язок одержаної системи рівнянь дає змогу визначити миттєві значення напруги та струму як функції лінійної координати x та часу t . Рівняння (8.2) називають *телеграфними* рівняннями. Ці рівняння застосовують як для аналізу процесів у лініях передавання інформації за допомогою електричних сигналів, які є двопровідними, так і в трифазних електроенергетичних лініях, де за умови їх симетрії стає можливим розглядати процеси в одній фазі. У разі несиметричних режимів роботи трифазних мереж аналіз режиму доцільно зводити до застосування методу симетричних складових, тобто до аналізу однофазних схем прямої, зворотної і нульової послідовностей (див. п. 4.6). Отже, надалі рівняння (8.2) розглядатимемо в одновимірному трактуванні, в яких напруга $u = u(x, t)$ – це напруга між проводами, а струм $i = i(x, t)$ – це струм проводу двопровідної лінії.

З математичного погляду рівняння (8.2) належать до класу гіперболічних рівнянь. Вони, як і звичайні диференціальні рівняння, мають безліч розв'язків, тому знаходження конкретного розв'язку потребує знання початкових і крайових умов. Ці умови задають у вигляді закономірності розподілу напруги та струму в початковий момент часу.

***Основні положення.** Довгі лінії описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Це пояснюється тим, що струми та напруги в довільній точці лінії є функціями двох змінних: координати відстані x і часу t . Коефіцієнтами цих рівнянь є погонні параметри лінії: R_0, L_0, G_0, C_0 , які називають первинними параметрами.*

8.2. Рівняння однорідної лінії в комплексній формі. Вторинні параметри

Струми та напруги в електричних колах із зосередженими параметрами є функціями однієї змінної – часу, і їх можна описати звичайними диференціальними рівняннями. На відміну від них, процеси в електричних колах з розподіленими параметрами описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Розглянемо питання розв'язування диференціальних рівнянь (8.2) у разі незмінних первинних параметрів і синусоїдної напруги живлення. За цієї умови струми та напруги в будь-якій точці лінії з координатою x змінюються за гармонічними законами

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Їх можна записати в комплексній формі у вигляді

$$\underline{I}(t) = I e^{j(\omega t + \psi_i)} = I e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t};$$

$$\underline{U}(t) = U e^{j(\omega t + \psi_u)} = U e^{j\psi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}.$$

Комплексні значення напруги \underline{U} та струму \underline{I} є функціями тільки однієї змінної – координати x , тому рівняння (8.2) в частинних похідних для миттєвих значень напруги u та струму i будуть звичайними диференціальними рівняннями для комплексних значень напруги \underline{U} та струму \underline{I}

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0) \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad (8.3a)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0) \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U} \quad (8.3б)$$

де

$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ – комплексний опір одиниці довжини лінії;

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ – комплексна провідність одиниці довжини лінії.

(Зауважимо, що $\underline{Y}_0 \neq 1/\underline{Z}_0$).

Розв'яжемо систему рівнянь (8.3). Для цього диференціюємо рівняння (8.3а) по x

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\underline{I}}{dx}. \quad (8.4)$$

Підставивши (8.3б) в (8.4), одержуємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x}, \quad (8.5)$$

де $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ – сталі інтегрування, а

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (8.6)$$

Комплексна величина

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$$

називається **коефіцієнтом поширення**, причому α – це **коефіцієнт згасання**, який характеризує зменшення за амплітудою синусоїдної величини у разі поширення хвилі уздовж лінії на одиницю довжини ($\alpha \geq 0$), а β – **коефіцієнт фази**, який характеризує її зміну за фазою ($\beta \geq 0$).

Диференціюючи (8.5) по x і підставляючи одержане значення похідної в (8.3а), матимемо

$$\underline{I} = \underline{Z}_C^{-1} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x}). \quad (8.7)$$

Комплексна величина

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad (8.8)$$

має розмірність опору і називається **хвильовим опором**. Якщо однорідну лінію зобразити чотириполосником, то його характеристичний опір дорівнює хвильовому опорю лінії.

Хвильовий опір \underline{Z}_C і коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ називаються **вторинними** (або хвильовими) параметрами лінії, оскільки вони визначаються через первинні параметри лінії.

Для реально існуючих повітряних ліній електропередавання числове значення хвильового опору $\underline{Z}_C = Ze^{j\varphi}$ знаходиться в межах $Z = 300\text{--}600 \text{ Ом}$, кабельних – $Z = 50\text{--}200 \text{ Ом}$, а кут φ має емнісний характер.

Для лінії постійного струму $\omega = 0$, а отже,

$$\underline{\gamma} = \sqrt{R_0 G_0}, \quad \underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Надалі напругу та струм на початку лінії ($x = 0$) позначатимемо нижнім індексом “1”, а в кінці ($x = l$) – індексом “2” (рис. 8.2).

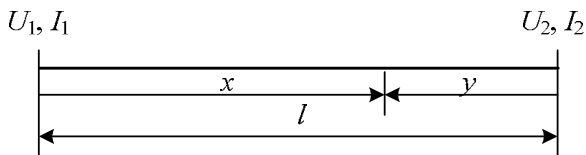


Рис. 8.2

Визначимо сталі інтегрування \underline{A}_1 та \underline{A}_2 , які входять до рівнянь (8.5) та (8.7), використовуючи граничні умови. Підставивши у зазначені рівняння $x = 0$, одержуємо систему рівнянь

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{Z}_c^{-1}(\underline{A}_1 + \underline{A}_2),$$

з яких знаходимо

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1}{2}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1}{2}. \quad (8.9)$$

Підставивши (8.9) у (8.5) і (8.7), одержуємо рівняння, які дають змогу визначити напругу \underline{U} та струму \underline{I} в будь-якій точці лінії на відстані x від її початку через їх значення \underline{U}_1 та \underline{I}_1 на початку лінії

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1)e^{\gamma x}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2}(\underline{I}_1 + \underline{Z}_c^{-1} \underline{U}_1)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{I}_1 - \underline{Z}_c^{-1} \underline{U}_1)e^{\gamma x}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Користуючись рівняннями (8.10), можна визначити напругу та струм у довільній точці лінії через їх значення \underline{U}_2 та \underline{I}_2 в кінці лінії. Для цього необхідно замінити в рівнянні (8.10) координату x на $y = (l - x)$, тобто відлік вести від кінця лінії (рис. 8.2). У результаті одержимо формули для визначення напруги та струму на відстані y від кінця лінії через їх значення \underline{U}_2 , \underline{I}_2 в кінці лінії

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c)e^{\gamma y} + \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c)e^{-\gamma y}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2}(\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Z}_c^{-1})e^{\gamma y} + \frac{1}{2}(\underline{I}_2 - \underline{U}_2 \underline{Z}_c^{-1})e^{-\gamma y}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Основні положення. Хвильовий опір \underline{Z}_c і коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ визначаються через **первинні** параметри: R_0, L_0, G_0, C_0 , тому їх називають **вторинними параметрами** лінії.

За умови, що напруга і струм у лінії синусоїдні, їх можна записати в комплексній формі, а диференціальні рівняння лінії зводяться до звичайних з комплексними змінними. Розв'язавши ці рівняння, одержуємо вирази для струму та напруги в довільній точці лінії через їх значення на початку або в кінці лінії.

8.3. Лінія як чотириполюсник

Використовуючи гіперболічні функції

$$\underline{sh}\underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2}; \quad \underline{ch}\underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2},$$

рівняння (8.10) можна записати компактніше

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \underline{ch}\underline{\gamma}x - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \underline{sh}\underline{\gamma}x; \\ \underline{I} &= \underline{I}_1 \underline{ch}\underline{\gamma}x - \underline{Z}_c^{-1} \underline{U}_1 \underline{sh}\underline{\gamma}x. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Відповідно рівняння (8.11) з використанням гіперболічних функцій мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \underline{ch}\underline{\gamma}y + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \underline{sh}\underline{\gamma}y; \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \underline{ch}\underline{\gamma}y + \underline{Z}_c^{-1} \underline{U}_2 \underline{sh}\underline{\gamma}y. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Підставивши в рівняння (8.13) $y = l$, одержуємо рівняння, які зв'язують між собою напругу і струм на початку та в кінці лінії.

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \underline{ch}\underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \underline{sh}\underline{\gamma}l; \\ \underline{I}_1 &= \underline{U}_2 \underline{Z}_c^{-1} \underline{sh}\underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \underline{ch}\underline{\gamma}l. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Порівнюючи (8.14) з рівняннями чотириполюсника в A -формі

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2, \end{aligned}$$

доходимо висновку, що однорідну лінію можна розглядати як симетричний чотириполюсник, коефіцієнти якого визначають за формулами

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{ch}\underline{\gamma}l; & \underline{B} &= \underline{Z}_c \underline{sh}\underline{\gamma}l; \\ \underline{C} &= \underline{Z}_c^{-1} \underline{sh}\underline{\gamma}l; & \underline{D} &= \underline{ch}\underline{\gamma}l \end{aligned}$$

і його можна подати T - або Π -подібною заступною схемою. Однак розглядати всю лінію як чотириполюсник можна лише для визначення співвідношення між напругами та струмами на початку та в кінці лінії. Для дослідження розподілу напруги та струму уздовж лінії її необхідно розглядати як однорідну ланцюгову схему з великою кількістю елементарних ланок. Чим з більшої кількості ланок складатиметься ланцюгова схема, тим точнішими будуть результати розрахунку. Вибір необхідної кількості ланок в моделі лінії залежить від конкретної задачі.

Основні положення. Найкомпактнішу форму записування рівнянь однорідної лінії можна одержати, якщо скористатись гіперболічними функціями.

Для визначення співвідношення між напругами та струмами на початку і в кінці лінії її можна розглядати як чотириполюсник, коефіцієнти якого визначаються через вторинні параметри лінії.

8.4. Вхідний опір однорідної лінії

Для дослідження процесів, які відбуваються в лінії, необхідно знати її вхідний опір. Під останнім розуміють комплексний опір \underline{Z}_{ex} , яким можна замінити всю лінію разом зі споживачем \underline{Z}_2 у кінці лінії. Його можна визначити за формулою

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U_1}{I_1},$$

або з урахуванням (8.14)

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c \operatorname{tg} \gamma l}{\underline{Z}_2 \operatorname{tg} \gamma l + \underline{Z}_c}. \quad (8.15)$$

За відсутності навантаження в кінці лінії (неробочий режим) ($\underline{Z}_2 = \infty$, $I_2 = 0$) з рівнянь (8.14) знаходимо

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{ex0} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \underline{Z}_c \operatorname{cth} \gamma l = \frac{\underline{Z}_c}{\operatorname{th} \gamma l}. \quad (8.16a)$$

За короткого замикання ($Z_2 = 0, U_2 = 0$)

$$Z_k = Z_{\text{ex}k} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = Z_c \operatorname{th} \gamma l. \quad (8.16б)$$

Комплексні опори неробочого режиму Z_0 та короткого замикання Z_k можна визначити експериментально, а, користуючись ними, визначити хвильовий опір та коефіцієнт поширення γ з формул

$$Z_c = \sqrt{Z_0 Z_k}; \quad \operatorname{tg} \gamma l = \sqrt{Z_k / Z_0}. \quad (8.17)$$

Виходячи з (8.15), (8.16), вхідний опір Z_{ex} лінії під час навантаження Z_2 можна виразити через опори неробочого режиму (Z_0) та короткого замикання (Z_k) за формулою

$$Z_{\text{ex}} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_k}{Z_2 + Z_0}. \quad (8.18)$$

Якщо опір Z_2 навантаження дорівнює хвильовому Z_c , то такий режим лінії називають **узгодженням**. У цьому разі відношення комплексів напруги \underline{U} і струму \underline{I} в довільній точці лінії дорівнює хвильовому опоріві

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = Z_c.$$

Основні положення. Вхідний опір однорідної лінії та вторинні (хвильові) параметри за будь-якого навантаження можна визначити на підставі дослідів неробочого режиму та короткого замикання.

Якщо навантаження однорідної лінії дорівнює хвильовому опоріві, то такий режим її роботи називають узгодженням.

8.5. Біжучі хвилі в лінії та коефіцієнт відбиття хвилі

Рівняння (8.10) дають змогу визначити комплексні значення напруги і струму в довільній точці лінії з координатою x на підставі їх значень $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ на початку лінії, а рівняння (8.11) – на підставі значень напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2 в кінці лінії. З

метою докладнішого аналізу електромагнітного процесу в лінії перейдемо від символічного зображення напруги та струму до їх миттєвих значень. Для цього комплексні величини \underline{A}_1 та \underline{A}_2 (див. (8.9)) запишемо у вигляді

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}; \quad \underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2},$$

і підставимо їх у (8.5). Зважаючи, що $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$, одержуємо

$$\underline{U} = A_1 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_1 - \beta x)} + A_2 e^{\alpha x} e^{j(\psi_2 + \beta x)}.$$

Звідси для миттєвих значень напруги отримаємо вираз

$$u(x, t) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) = u_\varphi(x, t) + u_\psi(x, t). \quad (8.19a)$$

Отже, напругу в довільній точці лінії можна розглядати як суму двох складових u_φ і u_ψ , кожна з яких за фіксованого значення x ($x = const$) є синусоїдною функцією часу. Для фіксованого значення часу ($t = const$) амплітуда першої складової ($\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x}$) зменшується (рис. 8.3), а другої ($\sqrt{2} A_2 e^{\alpha x}$) збільшується у разі переміщення від початку до кінця лінії. Складові $u_\varphi(x, t)$ та $u_\psi(x, t)$ називають **біжущими** хвилями в лінії, перша з яких називається **прямою (падаючою)** і поширюється від початку до кінця лінії, а друга – **зворотною (відбитою)** і поширюється від кінця до початку лінії, причому кожна з них згасає у напрямку руху. Отже, кожна складова в фіксований час змінюється уздовж лінії за законом згасаючої хвилі.

Аналогічно можна одержати у вигляді падаючої і відбитої хвиль вираз для миттєвого значення струму

$$i(x, t) = \sqrt{2} A_1 Z_c^{-1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi) + \sqrt{2} A_2 Z_c^{-1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi) = i_\varphi(x, t) + i_\psi(x, t), \quad (8.19б)$$

де $i_\varphi(x, t)$ – пряма хвиля струму, $i_\psi(x, t)$ – зворотна, а φ – аргумент хвильового опору $\underline{Z}_c = Z e^{j\varphi}$.

Зворотні хвилі в лінії можна розглядати як результат відбиття прямих хвиль від кінця лінії.

Розподіл біжучої прямої хвилі напруги уздовж лінії для кількох моментів часу наведено на рис. 8.3. Аналогічний вигляд має розподіл відбитих хвиль.

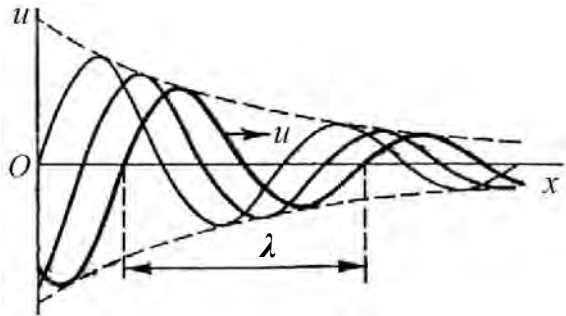


Рис. 8.3

Для оцінювання співвідношення між прямою і зворотною хвилями напруги та струму використовують комплексний коефіцієнт відбиття хвилі, який визначають як відношення комплексних значень напруг (струмів) відбитої до падаючої хвилі в довільній точці лінії.

Комплексний коефіцієнт відбиття хвилі напруги визначається відношенням

$$\underline{k}_u = \frac{U_{\psi} e^{-\gamma x}}{U_{\phi} e^{\gamma x}} = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} e^{-2\gamma x}. \quad (8.20)$$

Коефіцієнт відбиття хвилі струму обчислюють за формулою

$$\underline{k}_i = \frac{Z_c - Z_2}{Z_c + Z_2} e^{-2\gamma x}. \quad (8.21)$$

У разі узгодженого навантаження $Z_2 = Z_c$, отже $\underline{k}_u = \underline{k}_i = 0$, а це означає, що відбиті хвилі **відсутні**. Однак, якщо в лінії є з'єднання ділянок з різними параметрами, тобто лінія неоднорідна, то в місці з'єднання біжуча хвиля розпадається на дві, одна з яких переходить з однієї ділянки до другої, а друга відбивається від стику ліній. За аналогією з оптичними поняттями першу називають

вають заломленою хвилею, другу – відбитою. Під час відбиття хвилі від кінця лінії заломленої хвилі бути не може.

Основні положення. Напругу і струм у довгій лінії можна розглядати як результат накладання двох біжучих хвиль: прямої і відбитої, які рухаються в протилежних напрямках з однаковою швидкістю.

Для оцінювання співвідношення між прямою і зворотною хвилями напруги та струму користуються комплексними коефіцієнтами їх відбиття.

Якщо лінія навантажена на хвильовий опір, то відбиті хвилі відсутні.

8.6. Довжина хвилі в лінії та фазова швидкість

Хвиля напруги (струму) поширюється уздовж лінії з постійною швидкістю v , яка називається **фазовою**. Якщо переміщуватись уздовж лінії зі швидкістю v , то спостерігатимемо незмінну фазу напруги. Інакше кажучи, значення напруги в деякій точці з координатою x залишатиметься незмінним, якщо ця точка буде переміщуватись уздовж лінії зі швидкістю v . За такої умови фаза хвилі спостерігається незмінною, тобто

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const} . \quad (8.22)$$

Продиференціювавши (8.22) по t та враховуючи, що $v = dx/dt$, одержуємо формулу для визначення фазової швидкості

$$v = \frac{\omega}{\beta} . \quad (8.23)$$

Як видно з (8.23), довжина хвилі у довгій лінії залежить лише від коефіцієнта фази β . Аналогічне значення, але з протилежним знаком, можна одержати для швидкості переміщення зворотної хвилі напруги (струму). Це підтверджує той факт, що ці хвилі рухаються в протилежних напрямках.

Другим параметром біжучих хвиль є їх **довжина** λ – найменша відстань між двома точками, взятими в напрямку поши-

рення хвилі, в яких фази відрізняються на 2π . Інакше кажучи, довжина хвилі – це відстань, на яку поширюється хвиля за один період $T = 1/f$, де T – період біжучої хвилі, який однаковий для прямої та зворотної хвилі, тобто пряма та зворотна хвилі мають однакові властивості щодо зміни їх амплітуд, фаз та швидкості поширення. Оскільки коефіцієнт β характеризує зміну фази напруги (струму) у разі зміни координати x , то довжину хвилі визначають за формулою

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (8.24)$$

З урахуванням (8.24) формулу (8.23) можна записати у вигляді

$$v = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{\lambda}{T}. \quad (8.25)$$

У повітряних лініях пересилання електроенергії за частоти $f = 50$ Гц швидкість v близька до швидкості світла, тому довжина хвилі λ становить

$$\lambda = vT \approx c / f = 6000 \text{ км}.$$

Це означає, що навіть у лінії завдовжки 1000 км за частоти 50 Гц вміщується порівняно невелика частка довжини хвилі, і спостерігати в ній хвильові зміни напруги чи струму уздовж лінії неможливо, оскільки на такій довжині спостерігаємо монотонну їх зміну. Хвильову зміну напруги і струму уздовж лінії можна спостерігати лише в лініях зв'язку, зокрема, при $f = 50$ МГц $\lambda = 6$ м. Крім того, зауважимо, що в кабельних лініях швидкість поширення хвилі значно менша від повітряних.

Основні положення. *Пряма й відбита хвилі напруги та струму в довгій лінії характеризуються двома параметрами: фазовою швидкістю v і довжиною хвилі λ .*

Якщо переміщатись уздовж лінії з фазовою швидкістю, то спостерігатимемо незмінну фазу напруги та струму.

Довжина хвилі в лінії залежить від коефіцієнта поширення, який визначається її первинними параметрами.

8.7. Однорідна лінія в режимі узгодженого навантаження

Рівняння (8.13) для напруги \underline{U} і струму \underline{I} у довільній точці лінії на відстані y від кінця лінії можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_2 \left(ch\gamma y + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_2} sh\gamma y \right); \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \left(ch\gamma y + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} sh\gamma y \right).\end{aligned}\tag{8.26}$$

Режим роботи лінії за будь-якого значення навантаження \underline{Z}_2 можна одержати накладанням двох граничних режимів – неробочого та короткого замикання. Справді, для неробочого режиму ($\underline{Z}_2 = \infty$), враховуючи (8.26), маємо

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \underline{U}_2 ch\gamma y; \\ \underline{I}_0 &= \underline{U}_2 \underline{Z}_2^{-1} sh\gamma y,\end{aligned}\tag{8.27a}$$

а для короткого замикання ($\underline{Z}_2 = 0$)

$$\begin{aligned}\underline{U}_k &= \underline{Z}_c \underline{I}_2 sh\gamma y; \\ \underline{I}_k &= \underline{I}_2 ch\gamma y.\end{aligned}\tag{8.27б}$$

Отже, з урахуванням (8.27) рівняння (8.13) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_0 + \underline{U}_k; \\ \underline{I} &= \underline{I}_0 + \underline{I}_k.\end{aligned}\tag{8.28}$$

Як впливає з (8.28), розподіл напруги та струму уздовж лінії можна знайти, користуючись розподілом їх складових за неробочого режиму та короткого замикання, а годографи комплексів напруги та струму в режимі заданого навантаження лінії можна побудувати за допомогою годографів цих складових.

Оскільки в режимі *узгодженого* навантаження $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$ відбиті хвилі відсутні, а відношення комплексів напруги і струму в довільній точці лінії дорівнює \underline{Z}_c , то режим роботи генератора, який живить таку лінію, не зміниться, якщо будь-яку частину лінії відрізати і замість неї під'єднати навантаження, що дорівнює хвильовому опорі \underline{Z}_c .

Для визначення напруги та струму в режимі узгодженого навантаження ($Z_2 = Z_c$) скористаємось формулами (8.12). У результаті одержимо

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{\gamma y}; \quad \underline{I} = \underline{I}_2 e^{\gamma y}. \quad (8.29)$$

Формули (8.29) дають змогу визначити напругу і струм на початку однорідної лінії, навантаженої хвильовим опором, через їх значення в кінці лінії

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\gamma l}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^{\gamma l}. \quad (8.30)$$

Напруга і струм зсунені між собою на кут φ , що відповідає відстані уздовж лінії φ/β . Якщо прийняти початкову фазу напруги \underline{U}_2 в кінці лінії такою, що дорівнює нулю, то миттєві значення напруги і струму в довільній точці лінії визначаються за формулами

$$u = U_{2m} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y);$$

$$i = I_{2m} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y - \varphi).$$

Потужність, яка пересилається по лінії за номінальної напруги в режимі узгодженого навантаження, називається **натуральною**. Зважаючи на те, що у разі узгодженого навантаження наявна в лінії тільки пряма хвиля, комплекс потужності, яка пересилається по лінії, визначають за відомими значеннями напруги \underline{U}_1 та струму \underline{I}_1 на початку лінії

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_1 e^{-\gamma x} \frac{U_1^*}{Z_c^*} e^{-\gamma^* x} = \\ &= \frac{U_1^2}{Z_c} e^{-2\alpha x} e^{j\varphi} = \frac{U_1^2}{Z_c} e^{-2\alpha x} \cos \varphi + j \frac{U_1^2}{Z_c} e^{-2\alpha x} \sin \varphi \end{aligned}$$

або \underline{U}_2 , \underline{I}_2 – у кінці лінії

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_2 e^{\gamma y} \frac{U_2^*}{Z_c^*} e^{\gamma^* y} = \\ &= \frac{U_2^2}{Z_c} e^{2\alpha y} e^{j\varphi} = \frac{U_2^2}{Z_c} e^{2\alpha y} \cos \varphi + j \frac{U_2^2}{Z_c} e^{2\alpha y} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Значення активної та реактивної потужностей зменшується в міру поширення хвилі від початку до кінця лінії. Зменшення активної потужності зумовлено втратами на елементі dx в поздовжньому елементарному активному опорі $R_0 dx$ та поперчній активній провідності $G_0 dx$, а реактивної – змінами запасів енергії електричного і магнітного полів.

Активна потужність, яка пересилається через довільний перетин лінії, зменшується у разі збільшення віддалі від початку лінії за законом

$$P = UI \cos \varphi = \frac{U_2^2}{Z_2} e^{2\alpha x}. \quad (8.31)$$

Отже, потужність на початку $x=0$ та в кінці $x=l$ лінії в умовах узгодженого навантаження визначають за формулами

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 I_1 \cos \varphi = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \varphi; \\ P_2 &= U_2 I_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Коефіцієнт корисної дії однорідної лінії визначають як відношення активної потужності P_2 в кінці лінії до активної потужності P_1 на початку лінії, тобто

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (8.33)$$

Основні положення. Розподіл напруги та струму уздовж лінії можна розглядати, як результат накладання їхніх значень за неробочого режиму та короткого замикання.

У разі роботи лінії в режимі узгодженого навантаження відношення комплексів напруги і струму в довільній точці лінії дорівнює хвильовому опорі.

Активна потужність, яку пересилають по лінії за номінальної напруги в режимі узгодженого навантаження, називається натуральною. Вона зменшується в міру віддалення від початку лінії, що зумовлено втратами в активних опорах провідів та провідністю ізоляції.

8.8. Лінія без спотворень та лінія без втрат

Хвильовий опір Z_C та коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ залежать від частоти (див. (8.6), (8.8)). Отже, якщо уздовж лінії поширюється несинусоїдний сигнал, то коефіцієнт згасання для різних гармонік різний. Вони поширюються уздовж лінії з різними швидкостями. Значить, під час поширення несинусоїдних хвиль напруг і струмів змінюється їхня форма, тобто відбувається спотворення, яке шкідливе для пересилання інформації, особливо звукової. Для усунення спотворення необхідно, щоб хвильові характеристики лінії не залежали від частоти. Це можливо, якщо для первинних параметрів виконується співвідношення

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}. \quad (8.34)$$

Фазова швидкість для такої лінії не залежить від частоти, тобто хвилі всіх частот поширюються з однаковою фазовою швидкістю і всі однаково згасають (зменшуються за амплітудою). Лінія, для якої виконується співвідношення (8.34), називається **лінією без спотворень**. Хвильовий опір такої лінії визначається за формулою

$$Z_c = \sqrt{L_0 / C_0} = \sqrt{R_0 / G_0}, \quad (8.35)$$

тобто він не залежить від частоти і є активним.

Враховуючи (8.35), знаходимо коефіцієнт поширення хвилі для лінії без спотворень.

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (8.36a)$$

Фазова швидкість у цьому разі має максимальне значення

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}, \quad (8.36b)$$

і також не залежить від частоти (c – швидкість поширення світла в середовищі з магнітною сталою μ_r і діелектричною сталою ϵ_r).

Ліній без втрат не існує, однак можна створити лінію, в якій ці втрати будуть настільки малі, що ними можна знехтувати. **Лінію без втрат** можна розглядати як ідеалізацію реальної лінії. Отже, якщо $R_0 \ll \omega L_0$, а $G_0 \ll \omega C_0$ то можна прийняти: $R_0 = 0$, $G_0 = 0$ і дослідити характер електромагнітних процесів

за цієї умови. Зазначеним умовам з деяким наближенням відповідають лінії пересилання інформації і лінії пересилання електроенергії високих напруг (вище 330 кВ).

Коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ лінії без втрат

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{L_0C_0}, \quad (8.37)$$

тобто коефіцієнт згасання $\alpha = 0$, а коефіцієнт фази $\beta = \omega\sqrt{L_0C_0}$.

У цьому разі хвильовий опір

$$Z_c = \sqrt{L_0/C_0},$$

тобто є винятково активним і від частоти не залежить.

Довжина хвилі у лінії без втрат

$$v = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{T}{\sqrt{L_0C_0}}.$$

Фазова швидкість прямої та зворотної хвиль у цьому разі не залежить від частоти

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}.$$

Для визначення напруги \underline{U} і струму \underline{I} в довільній точці лінії без втрат скористаємось формулами (8.12), (8.13) і врахуємо, що $\underline{\gamma}y = j\beta y$; $chjx = \cos x$; $shjx = j \sin x$; $sh\gamma y = shj\beta y = j \sin \beta y$.

У результаті одержимо рівняння лінії без втрат, які дають змогу визначити ці величини за їх значеннями ($\underline{U}_1, \underline{I}_1$) на початку лінії

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \cos \beta x + jZ_c \underline{I}_1 \sin \beta x; \quad (8.38a)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 \cos \beta x - jZ_c^{-1} \underline{U}_1 \sin \beta x,$$

та за значеннями ($\underline{U}_2, \underline{I}_2$) в її кінці

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + jZ_c \underline{I}_2 \sin \beta y; \quad (8.38б)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \cos \beta y + jZ_c^{-1} \underline{U}_2 \sin \beta y.$$

Основні положення. У лінії без спотворення хвилі різних частот поширюються з однаковою швидкістю і всі однаковою мірою зменшуються за амплітудою, а фазова швидкість не залежить від частоти і має максимальне значення.

У лінії без втрат коефіцієнт згасання дорівнює нулю, а хвильовий опір є винятково активним і від частоти не залежить.

8.9. Стоячі хвилі в лінії

Стояча хвиля є результатом накладання прямої та зворотної хвиль з однаковими амплітудами. Математично рівняння стоячої хвилі можна подати добутком двох періодичних (тригонометричних) функцій, одна з яких є функцією часу, а друга – координати точки лінії. Для стоячих хвиль характерне чергування **вузлів** та **пучностей** (рис. 8.4), причому стоячі хвилі напруги та струму завжди зсунені одна щодо іншої в часі на кут $\pi/2$, а в просторі – на одну четверту довжини хвилі. Стоячі хвилі в лінії виникають у лініях без втрат у неробочому режимі і за короткого замикання, а також у разі суто реактивного навантаження. Інакше кажучи, коли реактивна потужність, яка споживається навантаженням лінії, дорівнює нулю. Зокрема, за неробочого режиму ($I_2 = 0$, $Z_2 = \infty$) рівняння (8.38б) має вигляд

$$\underline{U} = U_2 \cos \beta y ;$$

$$\underline{I} = jZ_c^{-1} U_2 \sin \beta y .$$

Відповідно для миттєвих значень одержимо

$$u = U_{2m} \cos \beta y \sin \omega t ; \tag{8.39}$$

$$i = Z_c^{-1} U_{2m} \sin \beta y \cos \omega t .$$

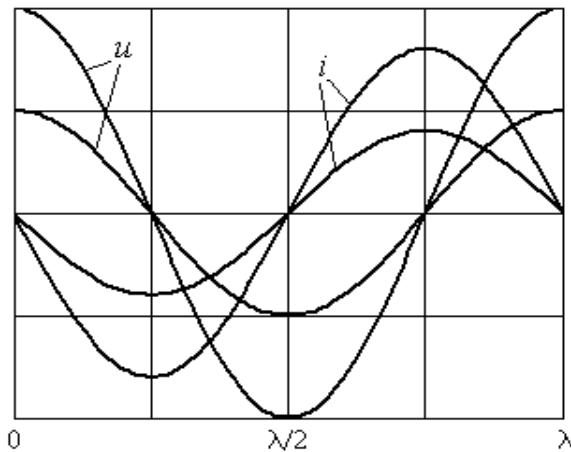


Рис. 8.4

Кожне з рівнянь (8.39) можна подати у вигляді двох складових – прямої і зворотної хвилі, які мають однакові амплітуди.

$$\begin{aligned} u &= \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta y) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta y); \\ i &= \frac{U_{2m}}{2Z_c} \sin(\omega t + \beta y) - \frac{U_{2m}}{2Z_c} \sin(\omega t - \beta y). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Як видно з (8.40), в неробочому режимі в кінці лінії ($y = 0$), а також у точках з координатами

$$y = k \frac{\pi}{\beta} = k \frac{\lambda}{2},$$

де k – ціле число, в будь-який момент часу наявні максимуми (пучності) напруги і нулі (вузли) струму (рис. 8.4), а на відстанях

$$y = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

завжди спостерігаються вузли напруги і пучності струму. Зауважимо, що вузли струму збігаються з пучностями струму і навпаки.

У вузлах напруга (струм) дорівнює нулю в будь-який момент часу, тому потужність у них завжди дорівнює нулю і енергія через ці точки передаватись не може. У разі стоячих хвиль енергія може переміщуватись лише в межах між вузлом напруги і струму і пов'язана вона з обміном енергією між електричним і магнітним полями на кожній з цих ділянок.

Аналогічне спостерігаємо у разі короткого замикання кінця лінії без втрат. Відмінність електромагнітних процесів у неробочому режимі та в режимі короткого замикання лінії без втрат полягає в тому, що міняються місцями розташування вузлів і пучностей напруги та струму. Зокрема, в кінці розімкненої лінії є вузол струму ($I_2 = 0$) і пучність напруги, а в кінці короткозамкненої лінії – пучність струму і вузол напруги ($U_2 = 0$).

Основні положення. *Стоячі хвилі викають у лінії без втрат у неробочому режимі, у разі короткого замикання і винятково реактивного навантаження.*

Стояча хвиля є результатом накладання прямої та зворотної хвилі з однаковими амплітудами. Вона характеризується пучностями і нулями напруги та струму.

8.10. Вмикання лінії на постійну напругу

Розгляд електромагнітної хвилі в лінії як накладання падаючих і відбитих хвиль напруги та струму, які поширюються в протилежних напрямках з однаковою фазовою швидкістю, дає змогу розглядати відбиті хвилі як результат відбиття прямих хвиль від кінця лінії. Оскільки в разі навантаження лінії на хвильовий опір \underline{Z}_c відбиті хвилі відсутні, у лініях зв'язку завжди прагнуть досягти їх усунення. Умова відсутності відбитих хвиль близька до умови, за якої приймач одержує від генератора найбільшу потужність. Для узгодження опорів генератора і лінії або лінії і споживача, останній можна вмикати в лінію через трансформатор з відповідним коефіцієнтом трансформації.

Під час вмикання кола з розподіленими параметрами виникає пряма хвиля, яка поширюється уздовж лінії і заряджає лінію. Для джерела напруги синусоїдної форми промислової частоти довжина хвилі становить 6000 км, тому впродовж достатньо великої ділянки напругу можна вважати постійною. З цієї причини явище поширення електромагнітної хвилі якісно можна розглянути на прикладі хвилі з прямокутним фронтом (рис. 8.5) у лінії без втрат. Для такої хвилі характерне те, що у всіх точках лінії, розташованих до фронту хвилі, напруга і струм дорівнюють нулю, а в точках, розташованих за фронтом хвилі, напруга і струм незмінні.

Зауважимо, що поширення хвилі з прямокутним фронтом необхідно розглядати як ідеалізацію реального процесу, оскільки поширення електромагнітної хвилі з прямокутним фронтом означає, що напруга і струм у кожній точці лінії стрибкоподібні, а це неможливо в колах з індуктивностями та ємностями.

Поширення хвилі в лінії є сумою прямої (ϕ) і відбитої (ψ) хвиль. У разі розімкненої лінії відбита хвиля напруги має таке ж значення, як і пряма, а хвиля струму відбивається зі зміною знака

$$u_\psi = u_\phi; \quad i_\psi = -i_\phi.$$

У разі короткого замикання лінії навпаки – хвиля напруги відбивається зі зміною знака, а хвиля струму має таке ж значення, як і пряма.

$$u_\psi = -u_\phi; \quad i_\psi = i_\phi.$$

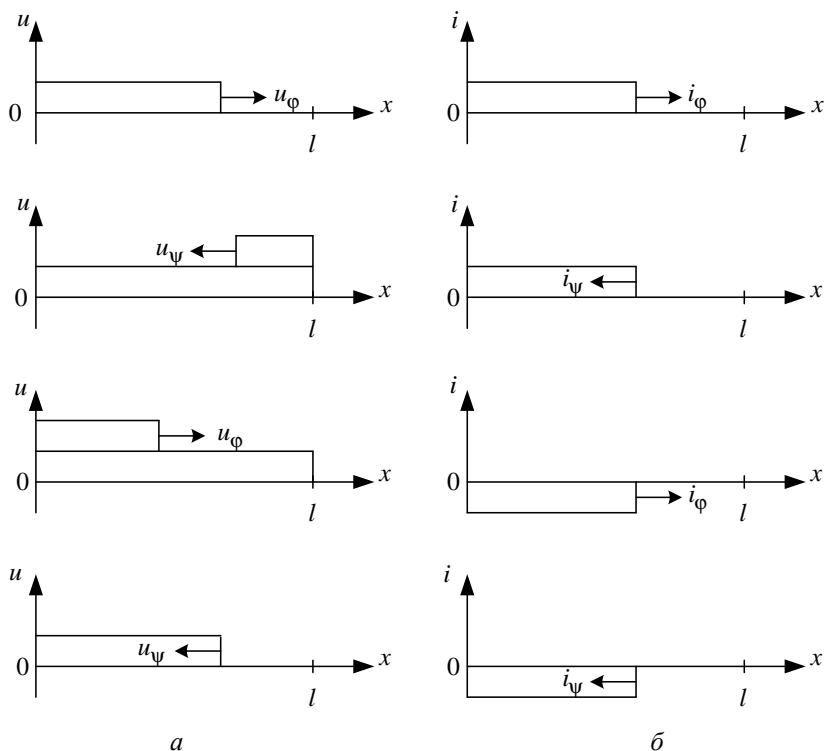


Рис. 8.5

Розглянемо процеси вмикання розімкненої в кінці лінії постійну напругу U_0 . Після вмикання джерела уздовж лінії поширюються хвилі напруги з прямокутним фронтом і струму (рис. 8.5). Дійшовши до кінця, ці хвилі відіб'ються, причому хвиля наруги без зміни знака, а струму – з протилежним знаком. Якщо лінія розімкнена на кінці, то коефіцієнти відбиття напруги $k_u = 2$, а струму $k_i = 0$, отже, під час переміщення в напрямку джерела відбиті хвилі накладаються на падаючі, внаслідок чого напруга в лінії подвоюється ($u_2 = 2U_0$), а струм зменшується до нуля ($i_2 = 0$). Відбиті від розімкненого кінця хвилі, досягнувши джерела, знову відіб'ються, причому відбита хвиля напруги змінить знак, а струму ні (як у разі короткого замикання). Від'ємна хвиля напруги під час переміщення до кінця лінії знижує напругу в ній до значення, що дорівнює напрузі джерела, а струм буде

протилежним до свого початкового значення. Досягнувши кінця лінії, хвилі втретє відіб'ються, в результаті чого до джерела поширяться від'ємна хвиля напруги, яка знизить напругу в лінії до нуля, і додатна хвиля струму, яка також знизить його до нуля. Цим завершується повний цикл, який надалі повторюється.

У разі короткого замикання лінії $k_u = 0$, $k_i = 2$. Відбита хвиля напруги відбивається від кінця лінії зі зміною знака і компенсує падаючу хвилю ($u_2 = 0$), а хвиля струму – без зміни і струм у лінії подвоюється. Оскільки під час всіх наступних відбивань від джерела і від короткозамкненого кінця лінії хвиля напруги відбивається зі зміною знака, то напруга в лінії дорівнюватиме або напрузі джерела, або нулю. Відбивання хвилі струму і від кінця лінії, і від джерела відбувається без зміни знака. Тому струм у лінії після кожного відбивання зростає на величину початкового значення, і в результаті струм зростає.

Повний цикл процесу в лінії довжиною l відбувається за час

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC}.$$

Цей період називають періодом власних коливань лінії. Зауважимо, що в контурі із еквівалентними зосередженими параметрами котушки індуктивністю L_0l і ємністю C_0l він дорівнював би $T_0 = 2\pi l\sqrt{L_0C_0}$, тобто в $\pi/2$ разів більший.

У разі узгодженого навантаження ($Z_2 = Z_c$) $u_2 = U_{\text{пад}}$, $i_2 = I_{\text{пад}}$, тому відбитих хвиль немає, а енергію хвилі повністю поглинає навантаження.

8.11. Приклади розв'язування задач

Приклад 8.1. Визначити хвильовий опір, коефіцієнт поширення та довжину хвилі в лінії, якщо відомі первинні параметри лінії: $R_0 = 5,0 \text{ Ом/км}$; $L_0 = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$; $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$; $G_0 = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$. Частота напруги $f = 10 \text{ кГц}$.

Розв'язання.

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = 547e^{-j1,17^\circ};$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = (4,42 + j218)10^{-3};$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,218} = 28,8 \text{ км.}$$

Приклад 8.2. Лінія електропересилання має параметри: $R_0 = 1 \text{ Ом/км}$, $\omega L_0 = 0$; $G_0 = 0$;

$\omega C_0 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ См/км}$. Визначити довжину хвилі.

Розв'язання.

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 1 \text{ Ом/км}; \quad \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = j0,4 \cdot 10^{-3} \text{ См/км};$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{1 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} = 0,02e^{-j45} = \sqrt{2} \cdot 10^{-2} + j\sqrt{2} \cdot 10^{-2}.$$

$$\beta = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}; \quad \alpha = \frac{2\pi}{\beta} = \pi\sqrt{2} \cdot 10^2 \text{ км.}$$

Приклад 8.3. Параметри кабельної лінії: $\omega_0 = 1000 \text{ с}^{-1}$;
 $R_0 = 1 \text{ Ом/км}$, $\omega L_0 = 0$; $G_0 = 0$; $C_0 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/км}$. Визначити фазову швидкість поширення хвилі.

Розв'язання.

$$\underline{Y}_0 = j\omega_0 C_0 = j1000 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} = j0,4 \cdot 10^{-3} \text{ См/км};$$

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 1 \text{ Ом/км};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{4 \cdot 0,4e^{j90}} = 10^{-2}\sqrt{2} + j10^{-2}\sqrt{2};$$

$$\beta = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}; \quad v = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{1000}{\sqrt{2} \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 10^5 \text{ км/с.}$$

Приклад 8.4. Хвильовий опір телеграфного кабеля за частоти $f = 800 \text{ Гц}$ становить $\underline{Z}_c = 84e^{-j38,87} \text{ Ом}$, а коефіцієнт поширення $\underline{\gamma} = (5,36 + j6,7) \cdot 10^{-2} \text{ 1/км}$. Визначити швидкість поширення хвилі.

Розв'язання.
$$v = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{2 \cdot 800}{6,7 \cdot 10^{-2}} = 7500 \text{ км/с.}$$

8.12. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

1. Чим відрізняються електричні кола з розподіленими параметрами від кіл із зосередженими параметрами?
2. Як зображають заступну схему однорідної довгої лінії?
3. Який фізичний зміст мають первинні параметри довгої лінії?
4. Які рівняння називають телеграфними?
5. Які параметри довгої лінії називаються вторинними (хвильовими)? Як їх визначають?
6. Чи впливає навантаження лінії на величину хвильового опору?
7. Чому хвильовий опір повітряних ліній значно більший, ніж кабельних?
8. Які складові має коефіцієнт поширення, та що вони характеризують?
9. Який режим роботи довгої лінії називають узгодженим?
10. Яку хвилю називають прямою, а яку відбитою?
11. За яких умов відбиті хвилі відсутні?
12. Які є коефіцієнти відбиття і як їх визначають?
13. Як визначають довжину хвиль у лінії?
14. Що означає фазова швидкість і від чого вона залежить?
15. Чому швидкість поширення хвилі в кабельних лініях більша, ніж у повітряних?
16. Яка лінія називається лінією без спотворень?
17. Які властивості має лінія без спотворень?
18. Яка лінія називається лінією без втрат?
19. Які властивості має лінія без втрат?
20. У яких лініях і за яких умов виникають стоячі хвилі?
21. Яка ланцюгова схема називається однорідною?
22. Як визначають хвильовий опір та коефіцієнт поширення лінії без втрат?
23. Як визначають фазову швидкість та коефіцієнт відбиття лінії без втрат?
24. За яких умов у лінії можуть виникати стоячі хвилі?
25. Який характер розподілу амплітуд напруги та струму в лінії в режимі стоячих хвиль?
26. Чи може напруга на початку лінії з втратами бути меншою від напруги в кінці лінії в режимі відсутності навантаження?
27. За яких умов форма хвиль напруги та струму в лінії буде незмінною і однаковою в будь-який момент часу?
28. Чи виникає перехідний процес у лінії у разі миттєвої зміни активного навантаження?
29. Чи будуть у разі короткого замикання двопровідної лінії поширюватися хвилі напруги та струму від місця замикання у напрямках до початку та до кінця лінії?

Екзаменаційні питання

1. Первинні параметри та заступна схема однорідної лінії.
2. Диференціальні рівняння однорідної лінії.
3. Рівняння однорідної лінії в комплексній формі та їх загальне розв'язання. Вторинні параметри лінії.

4. Рівняння синусоїдного процесу в однорідній лінії. Лінія як чотириполюсник.
5. Біжучі хвилі в лінії.
6. Коефіцієнти відбиття хвиль напруги та струму в лінії. Багаторазове відбиття хвиль у лінії.
7. Явище відбиття електромагнітної хвилі від навантаження в кінці лінії. Однорідна лінія в режимі узгодженого навантаження.
8. Лінія без спотворень, її параметри.
9. Лінія без втрат. Вхідний опір лінії без втрат у режимі короткого замикання та неробочого режиму.
10. Стоячі хвилі в лінії.
11. Вхідний опір лінії без втрат у режимі короткого замикання та неробочого режиму.
12. Виникнення перехідних процесів у колах з розподіленими параметрами.
13. Визначення рівняння падаючої хвилі напруги та струму в лінії у разі її вмикання до джерела.
14. Визначення виразу відбитих хвиль напруги та струму в лінії за допомогою заступної схеми.
15. Поширення електромагнітної хвилі через коло зі зосередженими параметрами, увімкненого на стику двох ліній.
16. Розрахунок перехідних процесів під час перемикань у довгих лініях.

Завдання для самостійної роботи

Задача 8.1. Визначити вторинні параметри лінії, якщо вхідні опори в режимах короткого замикання та неробочого режиму відповідно дорівнюють: $\underline{Z}_k = 351e^{j22,75^\circ}$, $\underline{Z}_0 = 1070e^{-j37,18^\circ}$.

Відповідь: $\underline{Z}_c = 612e^{-j7,22^\circ}$; $\underline{\gamma} = (2,43 + j17,5) \cdot 10^{-3}$.

Задача 8.2. Визначити вторинні параметри лінії завдовжки $l = 200$ км, яка працює за частоти $f = 800$ Гц, а вхідні опори в режимах короткого замикання та неробочого режиму відповідно дорівнюють:

$\underline{Z}_k = 351e^{j22,75^\circ}$, $\underline{Z}_0 = 1070e^{-j37,18^\circ}$.

Відповідь: $\underline{Z}_c = 612e^{-j7,22^\circ}$; $\underline{\gamma} = (2,43 + j17,5) \cdot 10^{-3}$;

$R_0 = 2,82$ Ом/км; $L_0 = 2,82$ Ом/км;

Задача 8.3. Відомі параметри лінії завдовжки 59 км за частоти $f = 800$ Гц: $\underline{Z}_0 = 360e^{-j78^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_k = 900e^{j63^\circ}$ Ом. Визначити первинні параметри

Відповідь: $R_0 = 2,84$ Ом/км, $L_0 = 1,94 \cdot 10^{-3}$ Гн/км;

$G_0 = 0,7 \cdot 10^{-6}$ См/км; $C_0 = 6,250$ мкФ/км.

Задача 8.4. Визначити хвильовий опір \underline{Z}_c , коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$, а також параметри L_0, C_0 лінії без спотворення завдовжки $l = 100$ км, якщо виміряні за частоти $f = 1600$ Гц вхідні опори у разі неробочого режиму і короткого замикання становлять $\underline{Z}_{10} = 900e^{-j40^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_{1k} = 100e^{j40^\circ}$ Ом.

Відповідь: $\underline{Z}_c = 300$ Ом; $L_0 = 10^{-8}$ Гн/км; $C_0 = 11,2 \cdot 10^{-8}$ мкФ/км;
 $\underline{\gamma} = \beta + j\alpha = (2,5 \cdot 10^{-8} + j3,35 \cdot 10^{-8})$ 1/км.

Задача 8.5. Відомі параметри кабельної лінії за частоти $f = 800$ Гц: $R_0 = 22,6$ Ом/км, $L_0 = 0,6 \cdot 10^{-3}$ Гн/км; $G_0 = 0,7 \cdot 10^{-6}$ См/км; $C_0 = 35,5 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. Визначити хвильовий опір і коефіцієнт поширення.

Відповідь:

$\underline{Z}_c = 357e^{-j41,1^\circ}$ Ом; $\underline{\gamma} = 0,0634e^{j48,67^\circ} = (0,048 + j0,042)$ 1 км.

Розділ 9

НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

9.1. Основні поняття та визначення

У попередніх розділах розглянуто лінійні електричні кола, параметри елементів яких вважали незмінними під час протікання струму різної величини або зміни прикладеної напруги. Хоча елементів з абсолютно незмінними параметрами не існує, у більшості практичних задач зміною параметрів можна знехтувати і вважати їх лінійними. Елементи, які характеризуються нелінійною залежністю між напругою на його затискачах і струмом, називаються **нелінійними**. Відповідно електричне коло, до якого входить хоча б один нелінійний елемент, називається нелінійним.

Практично всім елементам електричних кіл властива деяка нелінійність. Наприклад, активний опір металевого провідника залежить від його температури $R_t = R_0(1 + \alpha t)$, де R_t , R_0 – значення опору за температури $t^\circ\text{C}$ та 0°C відповідно, а α – температурний коефіцієнт опору. Оскільки температура в конкретних умовах залежить від величини струму, то опір виявляється також залежним від струму. Однак для більшості практичних задач у разі реально наявного діапазону зміни струму температура змінюється неістотно і зміною опору можна знехтувати.

У лінійній електротехніці застосовують ідеалізацію електричних елементів, яку можна застосовувати тільки тоді, коли неврахування нелінійності істотно не впливає на результати аналізу. Однак у багатьох практично важливих випадках нелінійність зумовлює появу принципово нових явищ, які неможливі в лінійних колах і лежать в основі роботи багатьох пристроїв.

Отже, нехтувати нелінійністю можна лише тоді, коли вона не покладена в основу роботи пристрою і коли це не призводить до значних відхилень результатів розрахунку від експериментальних даних. Якщо нелінійність є причиною появи принципово нових явищ, які неможливі в лінійному колі, нехтувати нелінійністю характеристик елементів не можна. Наприклад, вольт-амперна характеристика баретера, який застосовують для стабілізації струму, має вигляд (рис. 9.1, а). Опір баретера зростає зі збільшенням струму. Струм у ньому практично не змінюється за зміни напруги в межах від U_1 до U_2 . У терморезисторах, які застосовують для стабілізації напруги, напруга залишається постійною за зміни струму в межах від I_1 до I_2 (рис. 9.1, б). У них опір з підвищенням температури зменшується.

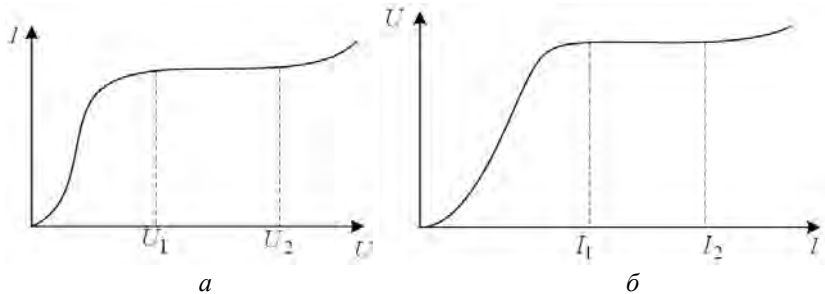


Рис. 9.1

Поділ електричних кіл на лінійні і нелінійні має принципове значення, тому що більшість методів аналізу лінійних електричних кіл для нелінійних кіл не придатні. Це зумовлено тим, що нелінійні електричні кола описуються нелінійними алгебричними та диференціальними рівняннями і до них не можна безпосередньо застосувати відомі класичні методи аналізу (комплексної змінної, операторного числення, рядів Фур'є тощо).

Нелінійні вольт-амперні характеристики можуть мати не тільки резистивні, але й реактивні елементи. Наприклад, котушки з феромагнітним осердям, конденсатори з сегнетодіелектриками. На рис. 9.2 наведені умовні графічні зображення лінійних елементів електричного кола – резистивного з параметром R , індуктивного з параметром L та ємнісного з параметром C та відповідні зображення нелінійних елементів.

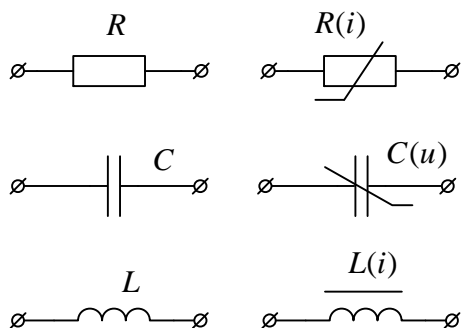


Рис. 9.2

Нелінійні елементи поділяються на **некеровані** і **керовані**. На відміну від некерованих, які мають одну вольт-амперну характеристику, керовані мають ціле їх сімейство. Для цього у них здебільшого є додатковий контур, через який відбувається вплив на струм чи напругу основного контуру. Керованими резистивними елементами є транзистори, тиристори, терморезистори, фоторезистори тощо, а некерованими – лампи розжарювання, діоди, газотрони, баретери, стабіловольти тощо.

Залежно від фізичних процесів, які відбуваються в нелінійних елементах, їх поділяють на **безінерційні** та **інерційні**. Безінерційні елементи мають властивість практично миттєво реагувати на швидку зміну напруги чи струму, а в інерційних елементах ця зміна відбувається з деяким запізненням в часі за складними нелінійними законами. Наприклад, інерційність може бути зумовлена температурною залежністю провідності матеріалу. Миттєве значення струму, який протікає через резистивний елемент, визначається значенням напруги в цей момент часу, тому він є безінерційним.

Основні положення. Елементи, які мають нелінійні вольт-амперні характеристики, називаються нелінійними. Відповідно електричне коло, до якого входить хоча б один нелінійний елемент, називається нелінійним.

Нелінійними можуть бути резистори, конденсатори, котушки індуктивності. Нелінійні елементи поділяють на безінерційні та інерційні, керовані та некеровані.

9.2. Характеристики та параметри нелінійних елементів

На відміну від лінійної електротехніки, де існує пропорційний зв'язок між електричними та магнітними величинами, в нелінійній електротехніці ці залежності описуються нелінійними характеристиками. Для виконання розрахунків повинні бути відомі характеристики нелінійних елементів, які входять до електричного кола. Їх можна подати: для нелінійного резистивного елемента вольт-амперною характеристикою $u = u(i)$, для котушки індуктивності – вебер-амперною $\psi = \psi(i)$, а для конденсатора – кулон-вольтною $q = q(u)$. Характеристики нелінійних елементів можна задавати у вигляді графічних зображень, таблиць або аналітичних виразів.

Нелінійний резистор характеризується параметром R , який залежить від струму $R = R(i)$ чи напруги $R = R(u)$; нелінійна котушка індуктивності – параметром L , який залежить від струму $L = L(i)$ або магнітного потоку $L = L(\Phi)$; нелінійний конденсатор – параметром C , який залежить від напруги на ньому $C = C(u_c)$ або заряду $C = C(q)$. Відповідні рівняння цих нелінійних елементів мають вигляд

$$u_R = R(i) \cdot i; \quad u_L = \frac{d\psi(i)}{dt}; \quad i_C = \frac{dq(u_c)}{dt},$$

де $\psi(i) = L(i) \cdot i$ – потокозчеплення котушки; $q(u) = C(u_c) \cdot u_c$ – заряд конденсатора.

Нелінійними елементами є напівпровідникові та електронні прилади. На низьких частотах їхні еквівалентні схеми можна подати у вигляді резистивних нелінійних елементів. На високих частотах характеристики зазначених вище елементів залежать від частоти, тому до еквівалентної заступної схеми вводять реактивні елементи.

Нелінійними індуктивними елементами є котушки з феромагнітними осердями. У них залежність магнітного потоку від струму, який протікає по обмотці, нелінійна, а тому індуктивність котушки залежить від величини змінного струму. Крім того, феромагнітним матеріалам властиве явище гістерезису, яке зумовлює додаткові втрати під час перемагнічування. Розріз-

няють статичну петлю гістерезисну, яку одержують у разі повільного перемагнічування, і динамічну, яку одержують за значних частот (наприклад, 400 Гц). Із зростанням частоти перемагнічування площа петлі збільшується, оскільки вона пропорційна до енергії, що витрачається на гістерезис та вихрові струми в сталюму осерді. Однак під час розв'язування багатьох задач, неоднозначність кривої намагнічування не враховують, а використовують так звану основну криву намагнічування, яка задана в довідниках і є однозначною.

У лінійних конденсаторах обкладинки розділені діелектриком, діелектрична проникність ϵ яких не залежить від напруженості електричного поля. Тому для них залежність миттєвого значення заряду q на обкладинці конденсатора від миттєвого значення напруги u_c між обкладинками (кулон-вольтна характеристика) лінійна, а величина ємності не залежить від напруги. Для нелінійних конденсаторів, які називають *варикондами*, залежність $q = q(u_c)$ – нелінійна, а ємність залежить від величини напруги u_c . Діелектриком у таких конденсаторах слугує сегнетодіелектрик – матеріал, у якому електрична проникність є функцією напруженості електричного поля. Таку властивість мають кристали сегнетової солі, титанат стронцію, сегнетокерамічні матеріали на основі титаната барію, свинцю тощо. У разі дії на сегнетодіелектрик зовнішнього електричного поля в ньому відбуваються процеси, подібні до процесів у феромагнетиках. Отже, сегнетодіелектрикам властиве явище гістерезису, а площа петлі характеризує втрати на гістерезис за один цикл. Однак для більшості діелектриків ці втрати малі і ними в багатьох практичних задачах нехтують, вважаючи кулон-вольтну характеристику однозначною. Під час нагрівання (температура Кюрі) сегнетодіелектричні властивості зникають.

Характеристики нелінійних елементів поділяють на:

- а) симетричні і несиметричні;
- б) однозначні і багатозначні;
- в) монотонно змінні і немонотонно.

Характеристика нелінійного елемента симетрична, якщо її вигляд не залежить від напрямку струму в ньому та напруги на його

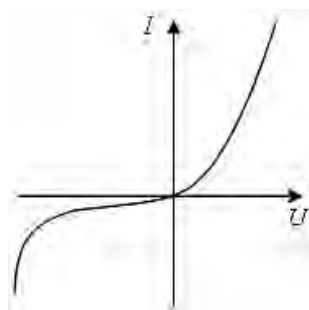


Рис. 9.3

затискачах. Симетричні характеристики мають лампи розжарювання, батареї, терморезистори, індуктивні котушки, нелінійні конденсатори тощо. Відомі нелінійні елементи, у яких вольт-амперні характеристики різні для різних напрямів напруги на затискачах та струму. Типовим прикладом нелінійного елемента з несиметричною вольт-амперною характеристикою є напівпровідниковий діод (рис. 9.3).

Симетрія (або несиметрія) характеристик має істотне значення для розв'язування багатьох технічних задач, наприклад, випрямлення змінного струму тощо. Багатозначні характеристики мають ферорезонансні кола, деякі напівпровідникові прилади, прилади з динатронним ефектом та явищем гістерезису тощо. Монотонність характеристик має визначальне значення під час дослідження коливних процесів тощо.

Нелінійні характеристики можна подати як статичні, для миттєвих значень або діючих. Вольт-амперні характеристики, в яких кожна точка діючого (або постійного) значення струму відповідає певному діючому (або постійному) значенню напруги, називають статичними. Статичні характеристики називають характеристиками на постійному струмові. Якщо в деякій точці характеристики безінерційного нелінійного елемента з координатами U_0, I_0 змінити значення напруги на ΔU , то нове усталене значення струму можна визначити із статичної характеристики.

Якщо до нелінійного елемента прикладена змінна напруга, то зв'язок $u = u(i)$ між миттєвими значеннями струму i та напруги називається характеристикою миттєвих значень або динамічною характеристикою. Характеристику лінійного елемента для діючих значень можна одержати з характеристики для миттєвих значень за допомогою зміни масштабу. Однак, якщо до нелінійного елемента прикласти синусоїдну напругу, то струм не буде синусоїдним: він матиме, крім основної гармоніки, вищі гармонічні складові. Отже, перейти до діючих значень за допомогою ділення

на $\sqrt{2}$ максимальних значень неправомірно. Тобто, характеристику для діючих значень неможливо одержати з характеристики для миттєвих значень масштабуванням.

Для визначення параметрів нелінійних електричних кіл використовують задані графічно чи таблично вольт-амперні характеристики або їх аналітичну апроксимацію. Розрізняють **статичні** та **динамічні** параметри. На підставі статичних характеристик визначають статичний та диференціальний опори. Статичний опір визначають за формулою

$$R_{\text{ст}} = \frac{U}{I} = \text{tg}\beta.$$

Як видно з рис. 9.4, статичний опір $R_{\text{ст}}$ в точці A пропорційний тангенсу кута β між прямою, яка з'єднує точку A з початком координат, і віссю абсцис. Статичний опір нелінійного елемента, як і лінійного, завжди додатний.

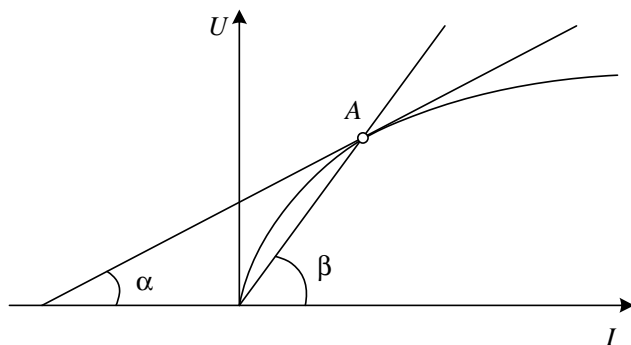


Рис. 9.4

Диференціальний опір R_{∂} визначають як похідну

$$R_{\partial} = \frac{dU}{dI} = \text{tg}\alpha.$$

Для нелінійних елементів, які мають спадаючу вольт-амперну характеристику, диференціальний опір від'ємний. Інакше кажучи, якщо на деякій ділянці вольт-амперної характеристики нелінійного елемента напруга зменшується у разі зростання струму (рис. 9.5), то

диференціальний опір стає від'ємним. Зображена на рис. 9.5 вольтамперна характеристика відповідає лампі з тліючим розрядом, відомій як неонові лампи. Якщо збільшувати напругу на ній, відбувається так зване запалювання лампи, яке відповідає появі тліючого розряду, і газ починає світитися. Спадаюча частина характеристики відповідає зростанню іонізації газу за збільшення струму і відповідно збільшення провідності газового проміжку. Подібну характеристику має і стабіловольт, який використовують для стабілізації напруги.

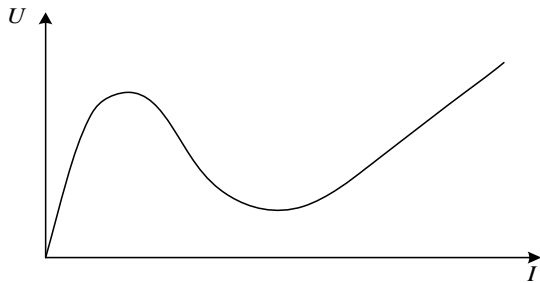


Рис. 9.5

Аналогічно до нелінійного резистивного елемента визначають статичну та динамічну індуктивності нелінійної котушки індуктивності. Зокрема,

$$L_{\partial} = \frac{d\psi}{di}, \quad L_{cm} = \frac{\psi}{i},$$

які визначають з вебер-амперної характеристики $\psi = \psi(i)$, приклад якої наведено на рис. 9.6. Для лінійних елементів диференціальні і статичні параметри збігаються.

Динамічні (диференціальні) параметри використовують у числових методах розрахунку перехідних процесів та ітераційних методах розрахунку усталених режимів, де вони є елементами матриці Якобі.

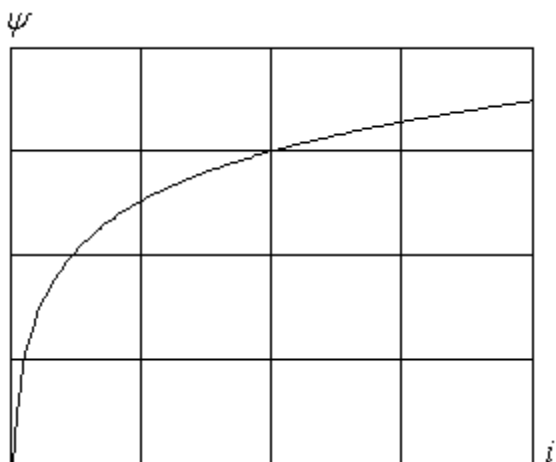


Рис. 9.6

Основні положення. Характеристики нелінійних елементів бувають симетричні і несиметричні; однозначні і багатозначні; монотонно змінні і немонотонно. Їх можна подати як статичні, для миттєвих значень або діючих.

Для нелінійного елемента на підставі цих характеристик можна визначати статичні та динамічні параметри.

9.3. Методи аналізу нелінійних електричних кіл

Методи дослідження процесів в електричних колах з нелінійними елементами значно складніші, ніж у лінійних колах, тому що процеси в них описуються нелінійними алгебричними та диференціальними рівняннями. Розраховувати нелінійні електричні кола можна графічним методом, графо-аналітичним або числовим. Для розрахунку нелінійних електричних кіл можна застосовувати і аналітичні методи, однак це пов'язано з певними, нерідко доволі грубими допущеннями. Зокрема можна наближено здійснювати розрахунок на підставі гармонічного аналізу, в тому

числі й спектрального, із застосуванням так званої гармонічної лінеаризації. Іншим варіантом застосування аналітичного методу є використання лінеаризації характеристик нелінійних елементів в околі деякої точки, яка відповідає усталеному режимові. Очевидно, що аналізувати динамічні режими за такого підходу неможливо. І, нарешті, найточнішим і одночасно найскладнішим з погляду його реалізації є метод, у якому здійснюють кусково-нелінійну апроксимацію характеристик нелінійних елементів і знаходять аналітичний розв'язок для кожної ділянки з подальшим їхнім стикуванням. У деяких випадках, коли вольт-амперні характеристики нелінійних елементів можна виразити простими аналітичними функціями, розраховувати можна аналітично, однак на практиці, не зважаючи на значну складність, кількість задач, для яких це можливо здійснити, незначна.

Графічні методи розрахунку практично втратили свою актуальність і мають переважно пізнавальне значення. Їх можна застосовувати лише для розрахунку простих електричних кіл, для яких відомі задані графічно вольт-амперні характеристики. Їх суть полягає в побудові еквівалентних характеристик послідовно або паралельно з'єднаних елементів. Основними недоліками графічного способу розрахунку є громіздкість, невисока точність і неможливість машинного аналізу.

У сучасних умовах розвитку обчислювальних і програмних засобів основними і найефективнішими методами аналізу нелінійних електричних кіл будь-якої складності є числові методи.

Основні положення. *Розраховувати нелінійні електричні кола можна графічним методом, графо-аналітичним або числовим.*

У разі подання нелінійних характеристик елементів простими аналітичними виразами для розв'язування деяких задач можна застосовувати і аналітичні методи, однак сфера їх застосування доволі обмежена.

9.4. Аналіз нелінійних електричних кіл постійного струму графічним методом

9.4.1. Послідовне з'єднання нелінійних елементів. Розглянемо послідовне з'єднання двох нелінійних елементів (рис. 9.7), вольт-амперні характеристики яких наведені на рис. 9.8.

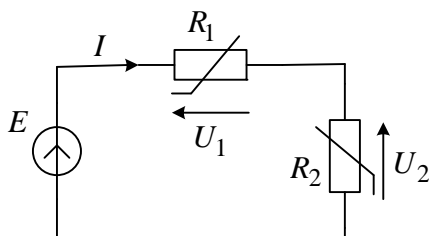


Рис. 9.7

Для визначення струму в колі (рис. 9.7) за заданого значення ЕРС побудуємо сумарну характеристику обох елементів, яка описується рівнянням

$$U = U_1(I) + U_2(I) = U(I). \quad (9.1)$$

Щоб одержати таку характеристику, необхідно для кожного значення струму I скласти ординати U_1 та U_2 , які відповідають характеристикам нелінійних елементів (рис. 9.8). Це еквівалентно заміні двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів з характеристиками $U_1 = U_1(I_1)$ і $U_2 = U_2(I_2)$ одним з характеристикою $U = U(I)$.

Струм у колі знаходимо графічно, відклавши на осі ординат відрізок, що дорівнює значенню ЕРС у відповідному масштабі. Опускаючи перпендикуляр з точки перетину кривої $U(I)$ з прямою ab на вісь абсцис, одержуємо значення струму I і напруг U_1 та U_2 на нелінійних елементах, які відповідають заданому значенню E .

Аналогічно розв'язують задачу графічного розрахунку електричного кола з одним лінійним і одним нелінійним елементами або кількома послідовно з'єднаними нелійними елементами.

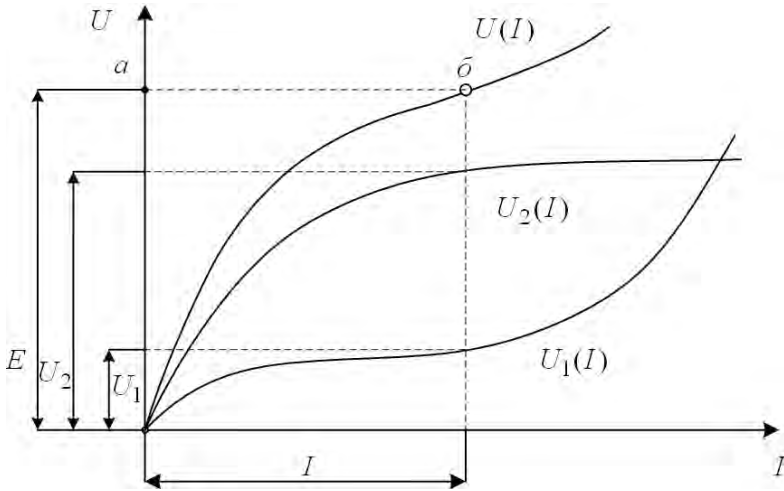


Рис. 9.8

9.4.2. Паралельне з'єднання нелінійних елементів. Розрахунок за графічним методом нелінійного електричного кола у разі паралельного з'єднання елементів розглянемо на прикладі зображеного на рис. 9.9 кола з двома нелінійними резисторами, характеристики яких зображені на рис. 9.10.

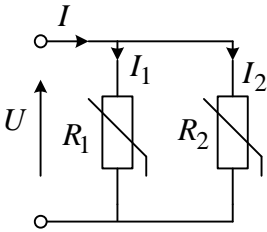


Рис. 9.9

Згідно з першим законом Кірхгофа

$$I = I_1 + I_2. \quad (9.2)$$

Напруга на обох елементах однакова, а отже, для побудови вольт-амперної характеристики $U(I) = U(I_1 + I_2)$

необхідно задатись рядом значень напруги U і для кожного з них здійснити графічне додавання ординат характеристик $U(I_1)$ і $U(I_2)$ (рис. 9.10). Для визначення струмів за будь-якого значення напруги $U = U_3$ необхідно відкласти на осі ординат відрізок, що дорівнює заданій напрузі U_3 , і провести горизонтальну лінію. На її перетині з відповідними кривими одержуємо значення струмів I_{13} , I_{23} та I_3 . Такий підхід можна застосувати до розрахунку кола з будь-якою кількістю з'єднаних паралельно нелінійних елементів.

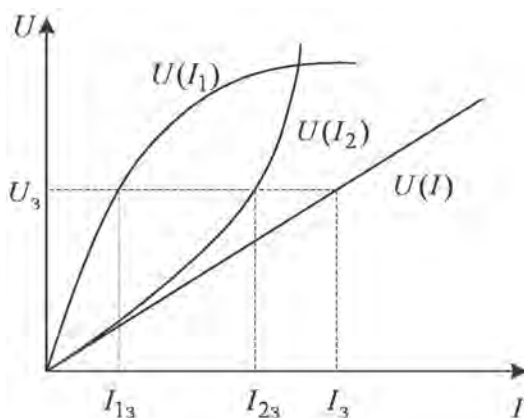


Рис. 9.10

9.4.3. Змішане з'єднання нелінійних елементів. Графічно розраховують електричне коло у разі змішаного з'єднання нелінійних елементів за допомогою згортання схеми і побудови нелінійної характеристики еквівалентного двополюсника. Це зводиться до графічного способу перетворення схеми відповідно до способу з'єднання елементів, у результаті чого одержують їх еквівалентні вольт-амперні характеристики. Для цього використовують викладені вище графічні способи заміни двох нелінійних елементів одним на основі побудови еквівалентної вольт-амперної характеристики. Очевидно, що у разі збільшення кількості нелінійних елементів, графічний розрахунок значно ускладнюється.

9.4.4. Метод еквівалентного генератора. Якщо в розглянутому електричному колі є лише одна вітка з нелінійним елементом, то струм у ній можна визначити, користуючись методом еквівалентного генератора. Для цього необхідно всю лінійну частину електричного кола замінити еквівалентним генератором (рис. 9.11, *a*), тобто подати у вигляді активного двополюсника, до якого під'єднана вітка з нелінійним елементом R .

Як відомо, схему лінійного активного двополюсника стосовно затискачів c, d вітки з нелінійним елементом можна подати у вигляді джерела ЕРС E_c , величина якої дорівнює напрузі на затискачах c, d за умови розмикання, а внутрішній опір – вхідному опорі R_c двополюсника стосовно цих затискачів.

Отже, електричне коло зводиться до одноконтурного з одним нелінійним елементом (9.11, б), розрахунок якого здійснюється побудовою еквівалентної вольт-амперної характеристики послідовно з'єднаних лінійного R_2 і нелінійного R елементів.

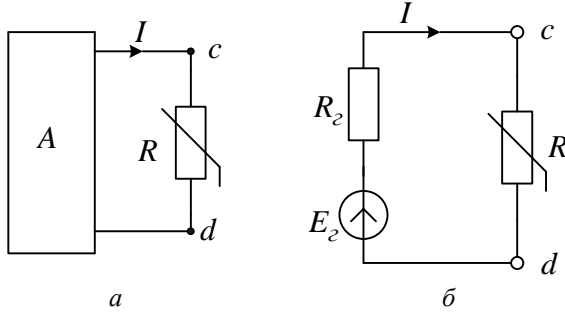


Рис. 9.11

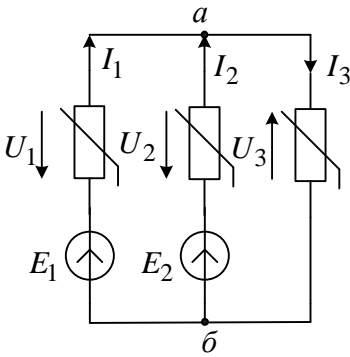


Рис. 9.12

9.4.5. Метод двох вузлів.

Електричне коло, яке має тільки два вузли, тобто складається з паралельно з'єднаних віток з нелінійними елементами, можна розрахувати за графічним методом двох вузлів. Його застосування розглянемо на прикладі схеми (рис. 9.12), яка має три паралельні вітки з нелінійним елементом у кожній і дві ЕРС.

Вольт-амперні характеристики $U_1 = U_1(I_1)$, $U_2 = U_2(I_2)$, $U_3 = U_3(I_3)$ нелінійних елементів задані відповідними кривими (рис. 9.13).

Як і для лінійних електричних кіл, задаємось додатними напрямками струмів у вітках. За першим законом Кірхгофа

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (9.3)$$

Кожен з цих струмів зв'язаний нелінійною залежністю з відповідною напругою – U_1 , U_2 , U_3 , які на основі методу вуз-

лових напруг можна виразити в функції однієї змінної – напруги між вузлами $U_{a\bar{b}}$

$$\begin{aligned} U_1 &= E_1 - U_{a\bar{b}}; \\ U_2 &= E_2 - U_{a\bar{b}}; \\ U_3 &= U_{a\bar{b}}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Задаючись низкою значень $U_{a\bar{b}}$, за формулами (9.4) визначаємо

$$U_1 = U_1(U_{a\bar{b}}); \quad U_2 = U_2(U_{a\bar{b}}); \quad U_3 = U_3(U_{a\bar{b}}) \quad (9.5)$$

і, користуючись вольт-амперними характеристиками нелінійних елементів, для кожної напруги (U_1, U_2, U_3) знаходимо відповідні значення струмів (I_1, I_2, I_3), що дає змогу побудувати залежності

$$I_1 = I_1(U_{a\bar{b}}); \quad I_2 = I_2(U_{a\bar{b}}); \quad I_3 = I_3(U_{a\bar{b}}). \quad (9.6)$$

Для знаходження розв'язку (струмів I_1, I_2, I_3) за заданих значень ЕРС E_1, E_2 необхідно відповідно до рівняння (9.3) знайти на побудованих в одному масштабі кривих (9.6) точку, для якої виконується рівність

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (9.7)$$

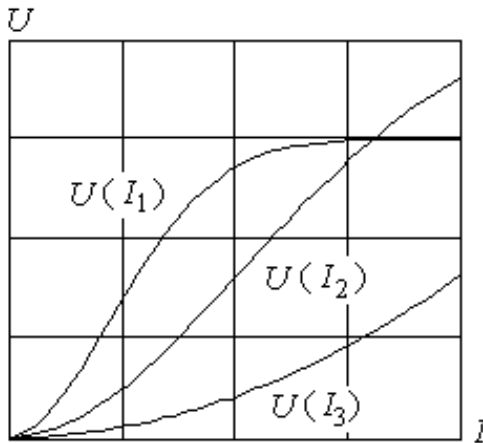


Рис. 9.13

Для цього потрібно додати ординати кривих $I_1(U_{ab})$ і $I_2(U_{ab})$, у результаті чого одержимо результуючу характеристику $I = I_1 + I_2 = I(U_{ab})$, на перетині якої з кривою $I_3 = I_3(U_{ab})$, яка є оберненою до вольт-амперної характеристики $U_3 = U_3(I_3)$, знаходимо розв'язок, тобто значення напруги U_{ab} , якому відповідають значення струмів I_1, I_2, I_3 .

***Основні положення.** Для графічного аналізу нелінійних електричних кіл постійного струму можна застосовувати заміну кількох послідовно чи паралельно увімкнених віток однією еквівалентною, метод двох вузлів, метод еквівалентного генератора.*

Для виконання розрахунків нелінійних електричних кіл графічним методом використовуються задані графічно вольт-амперні характеристики нелінійних елементів.

9.5. Аналіз нелінійних електричних кіл за дії синусоїдних джерел

9.5.1. Аналіз процесів у колі з вентилям за дії синусоїдної ЕРС. Електричним вентилям прийнято називати нелінійний активний опір, який має односторонню провідність, тобто його вольт-амперна характеристика несиметрична. Найпоширенішими серед них є напівпровідникові елементи. За умови невисоких частот динамічні характеристики таких елементів практично збігаються зі статичними, тобто можна вважати їх безінерційними.

Для прикладу розглянемо електричне коло з послідовно з'єднаним напівпровідниковим діодом з активним навантаженням (рис. 9.14, *a*), в якому діє синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega t$, так званий однопівперіодний випростувач. Зауважимо, що надалі розглядатимемо не ідеалізований вентиль, у якого для однієї полярності напруги опір дорівнює нулю, а для протилежної нескінченності, а реальний, опір якого в прямому напрямку малий, а в зворотному великий. Його вольт-амперна характеристика має зображений на рис. 9.3 вигляд.

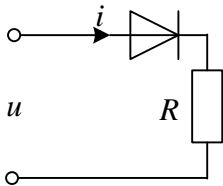


Рис. 9.14а

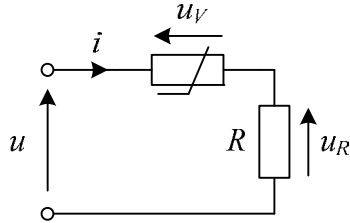


Рис. 9.14б

Згідно з другим законом Кірхгофа прикладена напруга зрівноважується спадом наруги u_v на вентилі і u_R на резисторі з опором R (рис. 9.14, б), перша з яких зв'язана зі струмом нелінійною залежністю, а друга – лінійною, тобто

$$U_m \sin \omega t = u_v + Ri, \quad (9.8)$$

де $i = i(u_v)$ визначається із зображеної на рис. 9.3 характеристики, в якій: $U = u_v$, а $I = i$.

На рис. 9.15 наведена крива струму в колі рис. 9.14б за синусоїдної напруги живлення. Для її побудови використовують три координатні площини, на яких зображено залежності: а) вольт-амперна характеристика вентиля у вигляді $i = i(u_v)$; б) часова залежність прикладеної до вентиля синусоїдної напруги $u_v = u_v(t)$, вісь напруги u_v якої збігається з попередньою; в) побудована на основі перших двох характеристик часова залежність струму $i_v(t)$ вентиля, який збігається із струмом у колі $i = i(t)$. Спосіб побудови показано на рис. 9.15, на якому зображені криві: $u_v = U_m \sin \omega t$; $i = i(u_v)$; $i = i(t)$. Кожному миттєвому значенню прикладеної до вентиля напруги u_v згідно з вольт-амперною характеристикою вентиля відповідає значення струму $i(u_v)$. Визначаючи ці значення графічно і переходячи до координат $i - t$, будуємо залежність $i(t)$ струму в колі від часу.

Як видно з рис. 9.15, несиметричність вольт-амперної характеристики зумовлює несиметрію кривої струму: максимальні додатні значення струму набагато більші від максимальних від'ємних.

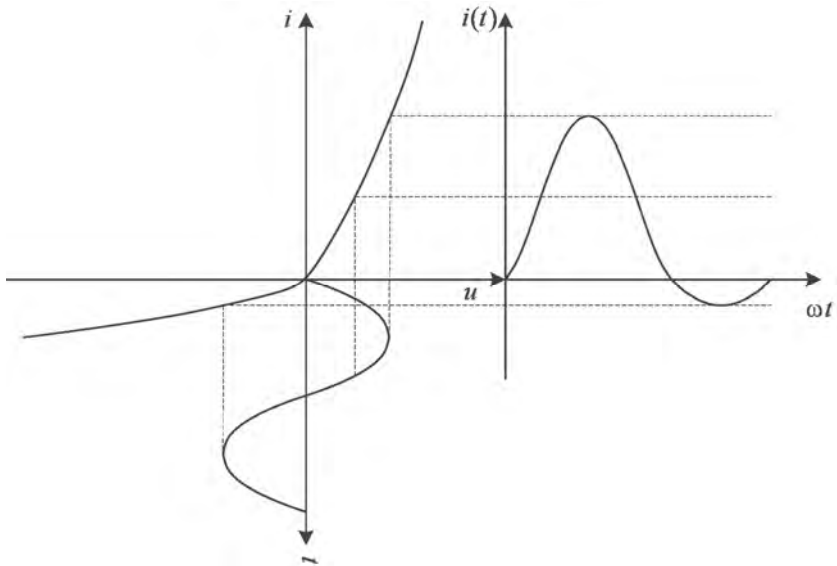


Рис. 9.15

Крива струму у колі з вентиляем, крім гармонічних складових, має постійну складову, яка тим більша, чим більша амплітуда прикладеної напруги. За порівняно великих значень прикладеної напруги від'ємною півхвилею струму можна знехтувати, тобто вважати вентиль ідеальним.

Рівняння (9.8) дає змогу побудувати вольт-амперну характеристику всього кола як двох послідовно з'єднаних елементів, один з яких лінійний, а другий – нелінійний.

9.5.2. Електромагнітні процеси в нелінійній котушці індуктивності за дії синусоїдної ЕРС. Розглянемо процеси в котушці з феромагнітним осердям і кількістю витків w , до якої прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin \omega t .$$

У разі протікання струму i в котушці виникає магнітний потік Φ , а її потокозчеплення можна визначити за формулою $\psi = w\Phi$.

Для спрощення знехтуємо активним опором обмотки і потоком розсіювання. Згідно із законом електромагнітної індукції

$$u_L = u = -e_L = \frac{d\psi}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Звідси

$$\Phi = \frac{1}{w} \int U_m \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega w} \sin(\omega t - \pi/2) = \Phi_m \sin(\omega t - \pi/2).$$

Отже, якщо до ідеальної котушки ($R = 0$) з феромагнітним осердям прикладена синусоїдна напруга, магнітний потік також змінюється за синусоїдним законом і відстає від прикладеної напруги на кут $\pi/2$. Відзначимо, що залежність магнітного потоку від намагнічувальної сили (а значить і струму) в реальній котушці нелінійна і визначається кривою намагнічування магнітного матеріалу. У результаті, як видно з рис. 9.16, у разі синусоїдної форми магнітного потоку крива струму несинусоїдна: вона має вищі гармоніки, і передусім – третю. Основна гармоніка струму збігається за фазою з кривою магнітного потоку і відстає від напруги на кут $\pi/2$.

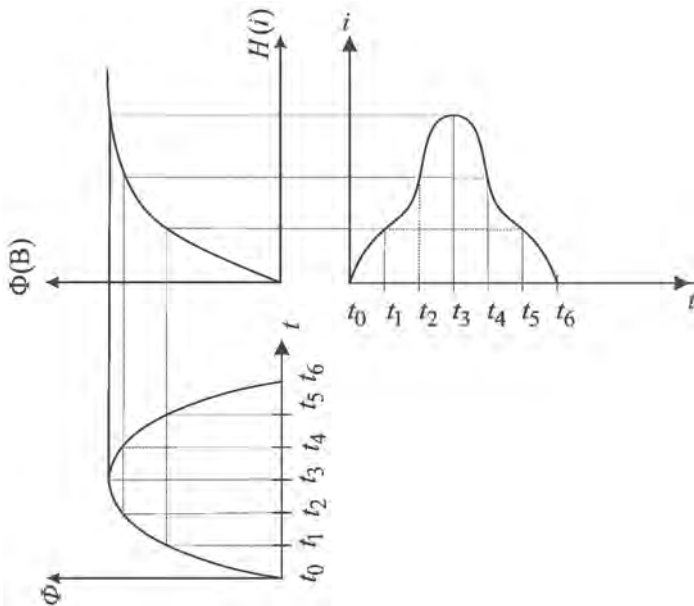


Рис. 9.16

Основні положення. Наявність у колі нелінійного елемента призводить до несинусоїдності струму за синусоїдної напруги живлення і навпаки.

Нелінійні реактивні елементи, які мають зазвичай симетричні вольт-амперні характеристики, спричиняють спотворення форми кривих напруг та струмів, тобто призводять до появи вищих гармонік, з яких найбільшу амплітуду має здебільшого третя.

У котушці з феромагнітним осердям за дії синусоїдної напруги внаслідок нелінійної залежності між магнітним потоком і струмом, що його створює, відбувається спотворення кривої струму. За синусоїдної напруги живлення нелінійної котушки індуктивності струм буде несинусоїдним, а у разі синусоїдного струму в котушці несинусоїдною буде напруга на ній.

9.6. Числові методи розрахунку нелінійних електричних кіл

Будь-яке нелінійне електричне коло можна описати за допомогою рівнянь Кірхгофа, однак система рівнянь є нелінійною. Крім того, її потрібно доповнити нелійними характеристиками елементів, які можуть бути задані аналітично або таблично. Отже, проблема розрахунку нелінійного електричного кола зводиться до розв'язування нелінійної системи рівнянь. У розв'язанні цієї задачі чинне місце займають числові методи, які дають змогу віднайти розв'язок з необхідною точністю.

Для числового розрахунку ustalених режимів у нелінійних електричних колах широко застосовуються ітераційні методи, серед яких найефективнішим є ітераційний метод Ньютона. Покажемо його застосування для розв'язування складеної за законами Кірхгофа системи рівнянь, яку подамо у вигляді нелінійного векторного рівняння

$$\bar{Q}(\bar{X}) = 0. \quad (9.9)$$

Згідно з методом Ньютона $(k + 1)$ – ненаближення вектора \bar{X} визначають за формулою

$$\bar{X}^{(k+1)} = \bar{X}^{(k)} - \Delta \bar{X}^{(k)}, \quad (9.10)$$

де $\Delta\vec{X}^{(k)}$ – приріст вектора \vec{X} , який обчислюють розв’язуванням системи рівнянь

$$J\Delta\vec{X}^{(k)} = \vec{Q}^{(k)}, \quad (9.11)$$

у якій

$$J = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{\partial Q_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial X_m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \frac{\partial Q_m}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial Q_m}{\partial X_m} \\ \hline \end{array}$$

– матриця Якобі, а $\vec{Q}^{(k)}$ – вектор нев’язок системи (9.8) за значення вектора $\vec{X} = \vec{X}^{(k)}$.

Приклад 9.1. Для нелінійної системи рівнянь Кірхгофа, складеної для схеми рис. 9.9,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0; \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 &= E_1 - E_2; \\ R_3 I_3 + R_2 I_2 &= E_2 \end{aligned}$$

матриця Якобі має вигляд

$$J = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline R_1 & -R_2 & 0 \\ \hline 0 & R_2 & R_3 \\ \hline \end{array},$$

де $R_1 = \frac{\partial U_1}{\partial I_1}$, $R_2 = \frac{\partial U_2}{\partial I_2}$, $R_3 = \frac{\partial U_3}{\partial I_3}$ – диференціальні опори, які

визначають диференціюванням відповідних нелінійних залежностей (рис. 9.11) на кожній k -й ітерації, тобто для кожного значення компонент вектора $\vec{X}^{(k)} = (I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, I_3^{(k)})$.

Алгоритм ітераційного уточнення здійснюють за формулами (9.10), (9.11). Метод має квадратичну збіжність, однак основною проблемою є пошук початкового наближення.

9.7. Апроксимація нелінійних характеристик

Для розрахунку нелінійних електричних кіл використовують апроксимації таблично заданих нелінійних характеристик елементів, які мають здебільшого експериментальне походження. Від точності та способу подання цих кривих залежить оптимізація обчислювального процесу розв'язування поставленої задачі, тому питання апроксимації характеристик має важливе значення.

Способи апроксимації нелінійних характеристик розвивали і вдосконалювали протягом багатьох років відповідно до зміни вимог, які до них висували. Коли розрахунки виконувались без використання комп'ютерів, головною вимогою до апроксимацій була простота апроксимуючого виразу, що досягалось зниженням точності відтворення нелінійних характеристик. У разі розв'язування задач за допомогою комп'ютера передусім постають дві вимоги: висока точність і наявність достатньої кількості неперервних похідних на всьому інтервалі зміни аргументу кривої.

Відомі способи апроксимації нелінійних залежностей можна поділити на:

- а) кусково-лінійні;
- б) апроксимації однією аналітичною функцією на всьому інтервалі зміни аргументу ;
- в) апроксимації одним поліномом високого ступеня, який проходить через усі вузлові точки;
- г) апроксимації кількома поліномами невисоких порядків або іншими функціями, які відповідно зістиковані між собою;
- д) апроксимації сплайнами другого або третього порядку.

Апроксимація одним аналітичним виразом є проста, однак має надто низьку точність, тому її використання може бути зумовлене лише необхідністю одержати аналітичний розв'язок задачі. Наприклад, вольт-амперну характеристику напівпровідникового діода можна наближено виразити рівнянням $I = \alpha U^2$, де α – коефіцієнт, а для апроксимації кривих намагнічування нерідко використовують обернені тригонометричні функції.

Апроксимація одним степеневим поліномом (наприклад, Лагранжа), який збігається із заданими значеннями кривої у вузлових точках, достатньо проста, однак поліном такого типу має так

звані осциляції (хвилястість), що призводить до ще більших осциляцій похідної, а це спричинює розбіжність ітераційних процесів.

У разі апроксимації кривої кількома поліномами забезпечується достатньо висока точність, однак у точках стикування крива має розриви похідних. Аналогічні недоліки має і кусково-лінійна апроксимація.

Зазначимо, що в разі математичного моделювання як статичних характеристик, так і динамічних режимів електротехнічних пристроїв використовують не тільки нелінійні характеристики, а й їхні похідні. Зокрема більшість методів числового інтегрування диференціальних рівнянь, які використовують для розрахунку перехідних процесів в електротехнічних пристроях, потребують наявності неперервних похідних не тільки першого, а й вищих порядків. У разі використання ітераційного методу Ньютона для розрахунку усталених режимів та статичних характеристик використовують першу похідну. За наявності розривів похідної або осциляцій практично неможливо досягти збіжності ітераційного процесу, а у разі розрахунку перехідного процесу числовими методами відбувається необгрунтоване дроблення кроку інтегрування, зумовлене невідповідністю вибраного способу апроксимації числовому методу інтегрування диференціальних рівнянь.

Найповніше задовольняють вимоги високої точності апроксимації нелінійних характеристик елементів і неперервності та плавності зміни похідних кубічні сплайни, однак таблично задані характеристики мають експериментальне походження, і інтерполяційний сплайн має осциляції. Уникнути їх можна лише попереднім згладжуванням експериментальних даних або застосуванням так званих згладжувальних сплайнів, які поєднують в собі апроксимацію і згладжування одним із відомих методів, наприклад, найменших квадратів.

9.8. Питання та завдання для самостійної роботи

Контрольні питання

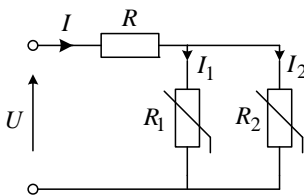
1. Які елементи електричного кола називаються нелінійними?
2. Чим відрізняється нелінійний резистор від лінійного?
3. Як визначити статичний опір нелінійного резистора?
4. Як визначити диференціальний опір нелінійного резистора?

5. Чи можуть статичний та диференціальний опори нелінійного резистора мати однакові значення?
6. У яких задачах аналізу електричних кіл використовують статичний опір, а в яких диференціальний?
7. Чи можуть статичний та диференціальний опори нелінійного резистора приймати від'ємні значення?
8. Якими методами можна розрахувати нелінійне електричне коло постійного струму?
9. Чи можна застосовувати для розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму метод накладання?
10. Чи можна застосовувати графічний метод розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму у разі з'єднання споживачів "зіркою" та "трикутником"?

Завдання для самостійної роботи

Задача 9.1. Напряга на електричній дузі описується рівнянням $u = (20 + 36/i) \text{ В}$. Напряга джерела $U_0 = 60$. Визначити струм у колі, якщо послідовно до дуги увімкнено резистор з опором $R = 4 \text{ Ом}$.

Відповідь: а) $I = 9,0 \text{ А}$, б) $I = 1,0 \text{ А}$.



Задача 9.2. Визначити струми та напругу на нелінійних резисторах, вольт-амперні характеристики яких:

$$I_1 = (10^{-3} \cdot U_1^2 + 6 \cdot 10^{-2} U_1) \text{ А};$$

$$I_2 = (6 \cdot 10^{-4} U_2^2 + 4 \cdot 10^{-2} U_2) \text{ А},$$

якщо $U = 68 \text{ В}$, $R = 50 \text{ Ом}$.

Відповідь: $I_1 = 0,7 \text{ А}$, $I_2 = 0,46 \text{ А}$,

$$U_1 = U_2 = 10 \text{ В}.$$

Задача 9.3. Напряга $u = 100 \sin \omega t \text{ В}$ прикладена до нелінійного резистора, вольт-амперна характеристика якого описується рівнянням $i = (0,3u + 0,04u^2) \cdot 10^{-3} \text{ А}$. Написати вираз для струму та визначити потужність, яка виділяється в резисторі.

Відповідь: $i = 0,2 + 0,03 \sin \omega t + 0,2 \sin(2\omega t - \pi/2)$; $P = 1,5 \text{ Вт}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей: учеб. пособие / В.С. Андреев. – М.: Радио и связь, 1982. – 281 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учеб. / Л.А. Бессонов – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
3. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: учебник. В 2-х т. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман. – СПб., 2004. – Т.1. – 576 с.
4. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки. Частина 1: навч. посіб. / Воробкевич А.Ю., Маляр В.С., Совин Р.Я. і ін. за ред А.Ю. Воробкевича, О.І. Шегедина. – К.: Магнолія Плюс, 2011. – 224 с.
5. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
6. Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники: Сб. задач / Н.В. Коровкин, Е.Е. Селина, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2004. – 512 с.
7. Костін М.О. Теоретичні основи електротехніки: підруч. / М.О. Костін, О.Г. Шейкіна. – Дніпропетровськ: Вид. Дніпропетр. нац. ун-ту залізнич. транспорту. 2006. – Т. 1. – 336 с.: – Т. 2. – 276 с.
8. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи / П.Н. Матханов. – М.: Высш. шк., 1977. – 272 с.
9. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники / Л.Р. Нейман, К.С. Демирчян. – Л.: Энергоатомиздат, 1981. – Т. 1. – 536 с.; Т. 2. – 416 с.
10. Перхач В.С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола: підруч. / В.С. Перхач. – К.: Вища шк., 1992. – 450 с.

11. Поляков М.Г. Математичні основи теоретичної електротехніки: навч. посіб.: у 2-ох ч. / М.Г. Поляков, Л.Я. Фомичова, С.О. Сушко. – Дніпропетровськ: НГАУ, 2001, Ч.1. – 210 с.
12. Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие / В.А. Прянишников – СПб.: Корона, 2000. – 368 с.
13. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов: у 3-х т. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2004. Т.1 – 463 с.
14. Теоретичні основи електротехніки: підруч. у 3-х т. / В.С. Бойко, В.В. Бойко, Ю.Ф. Водолюб і ін.; за заг. ред. І.М. Чиженка, В.С. Бойка. – К: Політехніка. – 2004. – Т.1. – 272 с.
15. Филиппов Е. Нелинейная электротехника: пер. с нем. / Е. Филиппов. – М.: Энергия, 1976. – 496 с.
16. Фриск В.В. Основы теории цепей: учеб. пособ. / В.В. Фриск. – М.: РадиоСофт, 2002. – 288 с.
17. Чабан В.Й. Теоретична електротехніка: навч. посіб. / В.Й. Чабан. – Львів: Фенікс, 2002. – 240 с.
18. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей: учеб. пособ. / М.Р. Шебес, М.В. Каблукова. – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.
19. Шегедин О.І., Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки: навч. посіб. / О.І. Шегедин, В.С. Маляр, – Львів: Магнолія Плюс, 2007. – Ч. 1. – 172 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Амплітуда
– комплексна, 58
– синусоїдної величини, 53, 54
- Баланс потужностей, 47, 48, 50, 68, 71, 94
- Вар, 70
- Ват, 70
- Вітка, 19–21, 27, 42–44, 189
- Вимірювання потужності, 50, 114
- Вольт-ампер, 32
- Вузол електричного кола
– базовий, 37, 39
- Двополюсник
– активний, 42, 49, 183
– пасивний, 68, 69, 92–94, 157, 158
- Добротність, 78, 90, 93, 94, 96, 97
- Елементи електричного кола
– лінійні, 20, 31
– нелінійні, 20, 281, 283
– інерційні, 283
– безінерційні, 283
- ЕРС джерела, 18
– індукції, 84
– самоіндукції, 24, 62, 84
- Ємність
– конденсатора, 24
– лінії, 254
- Закони Кірхгофа
– в комплексній формі, 72
– в операторній формі, 235, 236
- Закон Ома в комплексній формі, 66
- Закони комутації, 197–199, 223, 246
- Згасання контуру, 78
- З'єднання чотириполюсників
– каскадне, 182
– паралельне, 178, 180
– послідовне, 181
– послідовно-паралельне, 181, 182
- Значення змінного струму
– діюче, 55, 61
– комплексне, 71
– миттєве, 53, 55
- Зсув фаз, 54, 55, 66, 94, 99, 131, 146, 174, 194
- Індуктивність, 24, 81, 93, 94, 97, 158, 219, 224, 249, 254
– власна, 62
– взаємна, 81
- Інтеграл
– Бромвіча, 229
– Дюамеля, 242
- Коефіцієнт
– відбиття хвилі, 264
– зв'язку котушок, 82
– згасання, 173, 174, 192, 258, 270, 271
– потужності синусоїдного струму, 69
– спотворення, 156
– чотириполюсника, 164, 165, 168, 169, 178
– фази, 174, 258, 271
– форми несинусоїдного струму, 145
- Коливання, 75
- Коливний процес, 220
- Коло
– електричне
– з розподіленими параметрами, 254
– із зосередженими параметрами, 195
– лінійне, 53
– нелінійне, 281
– несинусоїдного струму, 137, 148
– постійного струму, 150
– трифазне, 112
– – несиметричне, 112
– – симетричне, 100
- Комутація, 197, 212, 221
- Конденсатор, 25, 29, 63–65, 90, 93, 213, 216, 217, 235, 250, 251
- Лінія
– пересилання, 253
– довга, 254
– зв'язку, 253
– однорідна, 254

- неоднорідна, 254, 264
 - пересилання електроенергії, 258, 266, 271
 - постійного струму, 258
- Метод
- аналітичний, 289
 - графо-аналітичний, 289
 - графічний, 289–291
 - вузлових напруг, 49
 - еквівалентних перетворень, 44, 88
 - еквівалентного генератора, 42
 - контурних струмів, 35, 38, 49
 - накладання, 44, 49, 149, 150, 236
 - ітераційний, 300
 - розрахунку перехідних процесів
 - – класичний, 196, 199, 202
 - – операторний, 196, 197, 228, 241, 244
 - – спектральний, 197
 - комплексний, 72
 - контурних струмів, 74
 - Ньютона, 300, 303
 - накладання, 119
 - симетричних складових, 116
- Напруга
- електрична, 17
 - вузлова, 38
 - лінійна, 104, 106
 - трифазна, 103, 106
 - несинусоїдна, 138
 - вхідна, вихідна чотириполюсника, 161, 174
- Опір
- активний, 23, 61, 93, 150, 254
 - власний, 36
 - лінії, 261, 262
 - чотириполюсника, 163
 - взаємної індукції, 82
 - диференціальний, 287
 - зворотної послідовності, 118
 - індуктивний, 62
 - емнісний, 64, 65, 67
 - комплексний, 66, 67, 84, 88, 92, 94, 127, 222, 257, 261
 - нульової послідовності, 118
 - операторний, 235
 - прямої послідовності, 118
 - реактивний, 67, 75
 - статичний, 287
 - характеристичний, 77, 171, 172, 174, 178, 185, 186, 192, 258
 - хвильовий, 78, 258, 262, 265, 271, 274, 276, 278, 280
- Параметри
- погонні довгої лінії, 254
 - характеристичні, 177, 178, 193
 - хвильові, 258
 - чотириполюсника, 164, 169, 171, 174, 185, 192, 193
- Перетворення
- еквівалентне електричного кола, 45
 - з'єднання трифазного кола, 103
 - Карсона, 230
 - Лапласа, 228–230, 236, 238
- Потокозчеплення, 24, 62, 80, 81, 82
- Потужність
- активна, 69, 70, 76, 113, 115, 132, 134, 146, 147, 155
 - миттєва, 29, 32, 68, 69, 92, 112, 132
 - натуральна, 268
 - повна, 76, 129, 147, 148
 - реактивна, 113, 272
 - спотворення, 147, 156, 157
- Провідність електрична
- активна, 67
 - вхідна, 75, 78
 - комплексна, 65, 67
 - операторна, 241
 - реактивна, 67, 80
- Процеси перехідні
- усталені, 209
- Режим електричного кола
- короткого замикання, 169
 - неробочого режиму, 169
 - перехідний, 20
 - узгодженого навантаження, 262, 267, 269
 - усталений, 17, 20
- Резонанс
- в колах несинусоїдного струму, 150

- напруг, 75, 89, 93, 96
- струмів, 75, 93, 97
- Рівняння**
 - Кірхгофа, 41, 73, 74, 83, 203, 223
 - вузлові, 41
 - контурні, 35
 - довгої лінії, 256
 - пасивного чотириполюсника, 164
 - усталеного режиму однорідної лінії, 255
 - характеристичне, 201, 204, 221, 224, 225, 246
 - чотириполюсника, 164, 165, 168, 188
- Розряд конденсатора**
 - аперіодичний, 217
 - коливний, 217, 219
- Сила**
 - електричного струму, 15
 - електрорушійна, 18
- Система**
 - зворотної послідовності, 102, 103, 116
 - несиметрична, 100
 - нульової послідовності, 103, 116
 - прямої послідовності, 102, 103, 116
 - симетрична, 100, 102, 103, 119
- Складова**
 - вільна, 211, 212, 215
 - усталена, 214, 217
- Стала**
 - електрична, 12
 - магнітна, 12
 - часу, 210, 213
- Струм**
 - змінний, 17, 53–55
 - зміщення, 15, 18, 25
 - контурний, 35, 36, 37
 - несинусоїдний, 17, 138
 - перенесення, 15
 - періодичний, 138
 - повний, 13
 - провідності, 15, 63
 - постійний, 17
 - синусоїдний, 54
- Схема**
 - Арона, 115
 - заступна, 19, 21, 22, 63, 74, 94, 148, 149, 175–177, 189, 239, 240, 247, 261, 279
 - зворотної послідовності, 121
 - комплексна, 186
 - ланцюгова, 182, 261, 278
 - нульової послідовності, 122
 - однорідна ланцюгова, 193
 - прямої послідовності, 120
- Теорема розкладу, 229, 237, 238, 247**
- Трансформатор, 20, 23, 83, 94, 274**
- Умови початкові**
 - залежні, 203
 - незалежні, 203, 206
- Фаза**
 - напруги, 61
 - початкова, 53, 61, 68, 215
 - струму, 68
- Характеристика**
 - вебер-амперна, 24
 - вольт-амперна, 23, 282
 - кулон-вольтна, 20, 285
 - лінійного елемента, 20
 - нелінійного елемента, 20, 284
- Частота**
 - кутова, 53, 68, 92
 - напруги, струму, 89, 98, 278
 - резонансна, 76, 79, 93
 - циклічна, 53
- Чергування фаз, 102, 103, 117, 118, 131**
- Чотириполюсник**
 - автономний, 163
 - активний, 164
 - пасивний, 170, 192
 - прохідний, 192
 - симетричний, 169, 260