

Старіков С. М.

Український політехнічний технікум

# ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

## ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

Відповідно до програми підготовки молодшого спеціаліста за спеціальністю  
“Монтаж і експлуатація електроустаткування підприємств і цивільних споруд”

### **ПН – 24**

#### **Електричні кола постійного струму**

- |                    |   |
|--------------------|---|
| ПФ.С.01.3Р.0.07.01 | Загальні відомості про електричне поле    |
| ПФ.С.01.3Р.0.07.02 | Розрахунок лінійних кіл постійного струму |
| ПФ.С.02.ПП.Р.09    | Нелінійні кола постійного струму          |

### **ПН – 25**

#### **Електромагнетизм і електромагнітна індукція**

- |                    |                          |
|--------------------|--------------------------|
| ПФ.С.02.ПП.Р.09.10 | Магнітне поле            |
| ПФ.С.02.ПП.Р.09.11 | Магнітні кола            |
| ПФ.С.02.ПП.Р.09.12 | Електромагнітна індукція |

### **ПН – 26**

#### **Електричні кола змінного струму**

- |                      |  |
|----------------------|--|
| ПФ.С.01.3П.Р.0.07.03 | Основні поняття про змінний струм                    |
| ПФ.С.02.ПП.Р.0.10.01 | Розрахунок лінійних кіл синусоїдного струму          |
| ПФ.С.02.ПП.Р.0.10.02 | Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму |
| ПФ.С.01.3Р.0.07.04   | Трифазні кола  |
| ПФ.С.02.ПП.Р.09.13   | Електричні кола несинусоїдного струму                |
| ПФ.С.02.ПП.Р.0.10.03 | Перехідні процеси в електричних колах                |

Кривий Ріг

## Зміст

Зміст	2
Вступ	6
<b>ПН – 24 Електричні кола постійного струму</b>	
<b>ПФ.С.01.ЗР.0.07.01 Загальні відомості про електричне поле</b>	
§1 Електричне поле і його основні характеристики : напруженість , електричний потенціал	8
§2 Електропровідність	10
§3 Енергія електричного поля. Механічні сили в електричному полі	11
§4 Поняття про провідники , напівпровідники та діелектрики	13
§5 Електричний струм в провідниках	15
§6 Електричний опір . Залежність електричного опору провідників від температури	16
§7 Закон Ома	18
§8 Електричний струм в вакуумі	18
§9 Електричний струм в напівпровідниках	20
§10 Електричне коло. Елементи електричного кола	21
§11 Електрорушійна сила , потужність та коефіцієнт корисної дії джерела електричної енергії	22
§12 Перетворення електричної енергії в інші види енергії . Потужність та коефіцієнт корисної дії приймача електричної енергії . Закон Джоуля – Ленца	22
§13 Режими роботи електричних кіл : номінальний , робочий , холостого ходу , короткого замикання	24
§14 Схеми електричних кіл : принципова , монтажна , розрахункова . Схеми заміщення . Поняття про пасивні і активні елементи електричних кіл	26
<b>ПФ.С.01.ЗР.0.07.02 Розрахунок лінійних кіл постійного струму</b>	
§15 Цілі розрахунку електричних кіл	28
§16 Елементи схем електричних кіл : вітка , вузол , контур	28
§17 Закони Кірхгофа	29
§18 Неразгалужене електричне коло	30
§19 Поняття про втрату напруги в проводах	33
§20 Подільувач напруги	34
§21 Потенціальна діаграма нерозгалуженого електричного кола	35
§22 Розгалужене електричне коло з двома вузлами	36
§23 Розрахунок електричних кіл шляхом перетворення їх схем	41
§24 Розрахунок складних електричних кіл за допомогою законів Кірхгофа (метод вузлових і контурних рівнянь)	42
§25 Метод контурних струмів	44
§26 Метод накладання струмів	45
§27 Метод еквівалентного генератора	47
§28 Метод вузлової напруги (метод двох вузлів)	48
<b>ПФ.С.02.ПП.Р.09.09 Нелінійні кола постійного струму</b>	
§29 Нелінійні елементи кіл постійного струму	49
§30 Еквівалентні схеми найпростіших нелінійних кіл. Поняття про статичний та динамічний опори нелінійного елементу	51

§31	Графічний розрахунок нелінійних кіл при послідовному, паралельному та змішаному з'єднанні нелінійних елементів	54
	<b>ПН – 25. Електромагнетизм і електромагнітна індукція</b>	
	<b>ПФ.С.02.ПП.Р.09.10 Магнітне поле</b>	
§32	Закон Ампера	58
§33	Магнітна індукція	59
§34	Провідник зі струмом у магнітному полі	60
§35	Розрахунок магнітних полів за допомогою закону Біо Савара	61
§36	Розрахунок симетричних магнітних полів	63
§37	Магнітний потік та потокозчеплення	65
§38	Індуктивність власна і взаємна	66
§39	Обчислення індуктивностей	68
§40	Магнітні властивості речовини	69
§41	Закон повного струму та його застосування	71
§42	Енергія магнітного поля	72
§43	Механічні сили в магнітному полі	73
§44	Властивості і застосування феромагнітних матеріалів	75
	<b>ПФ.С.02.ПП.Р.09.11 Магнітні кола</b>	
§45	Розрахунок однорідного магнітного кола : пряма та обернена задачі . Магнітний опір	79
§46	Розрахунок нерозгалуженого неоднорідного магнітного кола : пряма та обернена задачі	81
§47	Розрахунок розгалуженого магнітного кола	83
§48	Постійні магніти	85
	<b>ПФ.С.02.ПП.Р.09.12 Електромагнітна індукція, явище електромагнітної індукції</b>	
§49	Закон електромагнітної індукції	87
§50	Правило Ленца	87
§51	Наведення ЕРС у провіднику, який рухається в магнітному полі	88
§52	Взаємне перетворення механічної і електричної енергії	89
§53	ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції	92
§54	Принцип дії трансформатора	93
§55	Вихрові струми	94
	<b>ПН – 26. Електричні кола змінного струму</b>	
	<b>ПФ.С.01.3Р.0.07.03 Основні поняття про змінний струм</b>	
§56	Поняття про змінний струм	95
§57	Отримання синусоїдної ЕРС	97
§58	Рівняння і графіки синусоїдних величин	100
§59	Характеристики синусоїдних величин	102
§60	Векторні діаграми : обґрунтування, побудова. Складання і віднімання векторів	103
§61	Діюча та середня величини змінного струму	107
	<b>ПФ.С.02.ПР.0.10.01 Розрахунок лінійних кіл синусоїдного струму</b>	
§62	Параметри електричних кіл змінного струму	111
§63	Коло з активним опором : рівняння струму, напруги та потужності ; векторна діаграма	111

§64	Коло з індуктивністю : рівняння струму , напруги та потужності ; векторна діаграма	113
§65	Коло з ємністю : рівняння струму , напруги та потужності ; векторна діаграма	117
§66	Коло з реальною котушкою індуктивності	121
§67	Коло з реальним конденсатором	127
§68	Послідовне з'єднання котушки і конденсатора	132
§69	Розрахунок нерозгалужених кіл змінного струму	138
§70	Паралельне з'єднання котушки і конденсатора	141
§71	Розрахунок кіл з паралельним з'єднанням віток	145
§72	Коливальний контур	149
§73	Резонанс напруг	150
§74	Резонанс струмів	153
§75	Компенсація реактивної потужності в електричних мережах за допомогою конденсаторів	155
§76	Основні поняття про чотириполюсники	160
§77	Схеми заміщення пасивного чотириполюсника	167
§78	Кругові діаграми	168
	<b>ПФ.С.02.ПР.0.10.02 .Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму</b>	
§79	Вираження характеристик електричних кіл комплексними числами	173
§80	Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі	180
§81	Аналогія з колами постійного струму з використанням комплексних чисел	182
§82	Розрахунок найпростіших кіл	184
§83	Розрахунок електричного кола з змішаним з'єднанням елементів	187
§84	Топографічні діаграми	188
§85	Коло з індуктивно зв'язаними елементами : послідовне з'єднання , паралельне з'єднання , повітряний трансформатор	191
	<b>ПФ.С.01.ЗР.0.07.04.Трифазні кола</b>	
§86	Загальні відомості про трифазні системи	201
§87	З'єднання обмоток генератора зіркою	204
§88	З'єднання обмоток генератора трикутником	207
§89	Симетричний режим трифазного кола при з'єднаннях зіркою і трикутником	208
§90	Несиметричний режим трифазного кола при з'єднаннях зіркою і трикутником	219
§91	Потужності трифазного кола	227
§92	Обертове магнітне поле	229
§93	Симетричні складові несиметричної трифазної системи	231
	<b>ПФ.С.02.ПП.Р.09.13 Електричні кола несинусоїдного струму</b>	
§94	Несинусоїдні напруги, струми і їх вираження	235
§95	Симетричні несинусоїдні функції	240
§96	Діюча величина несинусоїдного струму і потужність кола	243
§97	Розрахунок електричних кіл з несинусоїдними ЕРС і струмами	246
§98	Вищі гармоніки у трифазних колах	249
	<b>ПФ.С.02.ПР.0.10.03 Перехідні процеси в електричних колах</b>	
§99	Загальні відомості про перехідні процеси	256
§100	Вмикання котушки індуктивності на постійну напругу	257
§101	Вимикання котушки індуктивності від джерела постійної напруги	261
§102	Зміна опорів у колі з індуктивністю	262

§103	Зарядка конденсатора	265
§104	Розрядка конденсатора на опір	266
§105	Вмикання котушки індуктивності на синусоїдну напругу	267
§106	Коротке замикання у колі змінного струму	269
	Перелік використаної літератури	274

## Вступ

Сучасне суспільство неможливо уявити без використання електричної енергії. Практично всі матеріальні і духовні потреби людини задовольняються з використанням електричної енергії. Електрична енергія має цінні властивості: вона відносно нескладно одержується шляхом перетворення інших видів енергії (механічної, теплової, атомної та інші); можливість економічної і швидкої передачі на далекі відстані; відносна легкість перетворення в інший вид енергії; відносна простота управління електричними пристроями. Електрична енергія широко застосовується в промисловості, сільському господарстві, транспорті, зв'язку та побуті.

Джерело електричної енергії – це перетворювач якого-небудь виду неелектричної енергії в електричну. Основним видом такого перетворення є електромеханічний генератор – перетворювач механічної енергії в електричну. На теплових електростанціях працюють турбогенератори – електричні машини, які приводяться в рух тепловими (паровими, газовими) турбінами, а на гідроелектростанціях встановлюються гідрогенератори – електричні машини з приводом від електричних турбін. Турбогенератори і гідрогенератори електростанцій – це машини змінного струму. Для кіл постійного струму застосовуються електромеханічні генератори постійного струму; перетворювачі хімічної енергії в електричну – гальванічні елементи і акумулятори; пристрої для прямого перетворення теплової енергії в електричну – термоелектрогенератори.

Джерелами електричної енергії також є електричні трансформатори і випрямлячі. Ці пристрої не виробляють електричну енергію, а отримують її від тих же генераторів змінного струму, змінюючи її характеристики трансформатори змінюють величину напруги, а випрямлячі перетворюють змінну напругу в постійну. Трансформатори і випрямлячі, з одного боку, є споживачі електричної енергії, а з іншого – джерела.

В теперішній час виробництво, передачу, розподіл і споживання електроенергії в Україні здійснюють на трифазному змінному струмі частотою 50 Гц. Це пояснюється застосуванням для електроприводів різних механізмів простих і надійних трифазних асинхронних двигунів. За допомогою різних перетворювачів трифазний змінний струм для спеціальних електроустановок перетворюють в постійний. Державним стандартом встановлені номінальні значення напруги генераторів, трансформаторів, мереж і споживачів електричної енергії напругою до 1000 В і вище змінного струму. Перетворення напруги змінного струму здійснюють за допомогою підвищуючих трансформаторів і знижувальних – на підстанціях у споживачів. Генератори на електростанціях і окремі електростанції працюють паралельно. Це підвищує надійність електропостачання споживачів, зменшує кількість резервного обладнання, знижує вартість виробленої енергії, сприяє більш рівномірному завантаженню станцій і т. п. Сукупність уста –

новок по виробленню, розподілу і споживанню електроенергії і тепла, зв'язаних між собою електричними і тепловими мережами називають енергетичною системою, а частина енергосистеми (генератори, розподільчі пристрої, лінії електропередачі і приймачі електроенергії) – електричною системою.

Електроенергетика – основа розвитку економіки, вона є складовою частиною паливно-енергетичного комплексу. У народному господарстві електроенергетика відіграє дуже важливу роль.

Вона забезпечує всебічний науково – технічний прогрес у всіх, без винятку, виробництвах, поліпшує умови праці і побуту. Останнім часом зусилля вчених і практиків спрямовані на пошук альтернативно чистих енергетичних джерел : вітрової, сонячної, хвильової, приливно - відливної.

Завдання курсу полягають в освоєнні теорії фізичних явищ, покладених в основу створення і функціонування різних електротехнічних пристроїв, а також в прищеплюванні практичних навиків використання методів аналізу і розрахунку електричних і магнітних кіл для вирішення широкого круга завдань. В результаті вивчення курсу студент повинен знати основні методи аналізу і розрахунку сталих процесів в лінійних і нелінійних колах із зосередженими параметрами, в лінійних колах несинусоїдного струму, в лінійних колах з розподіленими параметрами, основні методи аналізу і розрахунку перехідних процесів у вказаних колах і уміти застосовувати їх на практиці.

Знання і навички, отримані при вивченні даного курсу, є базою для освоєння таких дисциплін, як: електропривод, промислова електроніка, електропостачання промислових підприємств, електричні виміри і так далі

При вивченні дисципліни передбачається, що студент має відповідну математичну підготовку в області диференціального і інтегрального числень, лінійної і нелінійної алгебри, комплексних чисел і тригонометричних функцій, а також знайомий з основними поняттями і законами електрики і магнетизму, що розглядаються в курсі фізики.

## ПН – 24 Електричні кола постійного струму

### ПФ.С.01.ЗР.0.07.01 Загальні відомості про електричне поле

#### § 1 Електричне поле і його основні характеристики : напруженість , електричний потенціал

Кожне заряджене тіло створює в довколишньому просторі електричне поле. Це поле

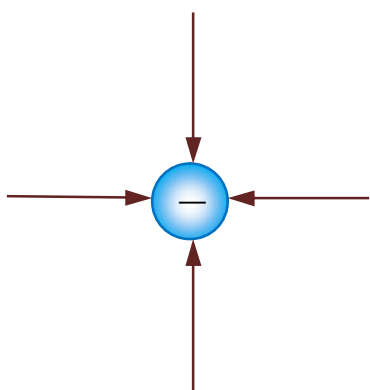


Рис . 1

Силкові лінії негативного заряду.

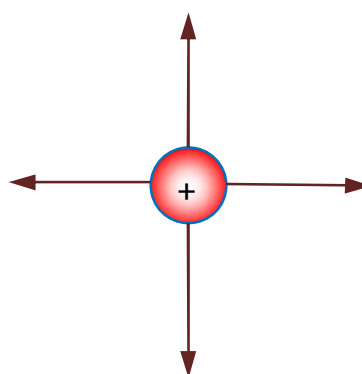


Рис . 2

Силкові лінії позитивного заряду

надає силову дію на інші заряджені тіла. Головна властивість електричного поля – дія на електричні заряди з деякою силою. Таким чином, взаємодія заряджених тіл здійснюється не безпосередньою їх дією один на одного, а через електричні поля, довколишні заряджені тіла. Для графічного зображення електричного поля використовуються лінії напруженості (силкові лінії). Їх будують за наступними правилами: Лінії напруженості починаються на позитивних зарядах, закінчуються на негативних або вирушають в нескінченність.

Вектор напруженості направлений по дотичній до лінії напруженості в кожній точці. Густота ліній пропорційна модулю напруженості електричного поля.

Для кількісного визначення електричного поля вводиться силова характеристика — напруженість електричного поля. Напруженістю електричного поля називають фізичну величину, рівну відношенню сили, з якою поле діє на позитивний пробний заряд, поміщений в дану точку простору, до величини цього заряду:

$$E = F / Q \quad (1)$$

Одиниця напруженості в міжнародній системі Si має назву вольт на метр (В/м), при такій напруженості на



заряд в 1 Кл діє сила в 1 Н. В електротехніці більше користуються іншою одиницею вимірювання — в/м.

Напруженність електричного поля – векторна фізична величина. Напрямок вектора збігається в кожній точці простору з напрямком сили, що діє на позитивний пробний заряд. Якщо за допомогою пробного заряду досліджується електричне поле, що створюється декількома зарядженими тілами, то результуюча сила виявляється рівній геометричній сумі сил, що діють на пробний заряд з боку кожного зарядженого тіла окремо. Електричне поле підкоряється принципу суперпозиції.

Електричний потенціал точки показує, яку роботу треба витратити для переміщення одиничного заряду в дану точку електричного поля з нескінченності :

$$\varphi = A / Q , ( \text{Дж} / \text{Кл} ) \quad (2)$$

Одиниця виміру потенціалу - вольт [В].

Різниця потенціалів двох точок називається напругою - U

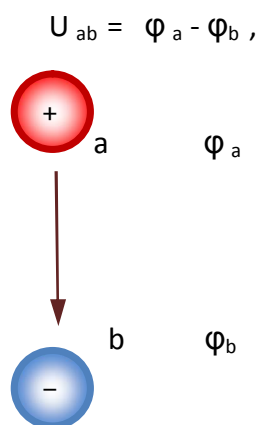


Рис. 3

При вивченні навчального матеріалу, крім основних одиниць вимірювання, застосовують частинні і кратні їм одиниці :

Величина	Назва	Позначення
$10^{12}$	Тера	Т
$10^9$	Гіга	Г
$10^6$	Мега	М
$10^3$	Кіло	к
$10^{-3}$	Мілі	м
$10^{-6}$	Мікро	мк
$10^{-9}$	Нано	н
$10^{-12}$	Піко	п

## § 2. Електропровідність

Електрична провідність - здатність речовини проводити під дією електричного поля, що не змінюється в часі, електричний струм, що не змінюється в часі.

Залежно від вигляду носіїв струму розрізняють:

- електронну провідність в металах і напівпровідниках;
- іонну провідність в електролітах;
- змішану електронно іонну провідність в плазмі.

Електрична провідність - основна характеристика ділянки електричного кола; величина зворотна електричному опору цієї ділянки. Вимірюється в  $1/\text{Ом}$

Коефіцієнт електропровідності металів характеризує їх електропровідну здатність і залежить від будови і структурних властивостей металу. В різних металах він різний. Теорія електропровідності дозволяє обчислити коефіцієнт електропровідності  $s$  для того або іншого металу.

За утворення струму в металах відповідальні валентні електрони. Із-за сильного зв'язку між атомами в металах електрони можуть легко переміщатися від атома до атома і у відсутності поля. У зв'язку з цим в основу теорії електропровідності металів можна покласти наступну модель: основу металу утворює іонна кристалічна решітка, у вузлах якої іони здійснюють безладний коливальний рух. Іонні решітки занурені в "електронний газ", окремі електрони якого здійснюють хаотичний рух, час від часу стикаючись з іонами решіток і один з одним. Коли метал поміщають в електричне поле, на кожен електрон діє електрична сила, що надає електронам прискорення, направлене проти вектора напруженості поля. В результаті в електричному полі електрони газу беруть участь одночасно в двох рухах: у безладному тепловому, для якого характерна деяка середня довжина вільного пробігу, і у впорядкованому русі (дрейфі) проти вектора  $E$ . Як основний постулат теорії приймемо допущення, що "електронний газ" в його тепловому русі підкоряється закону Больцмана, а впорядкований рух під дією поля підкоряється законам механіки Ньютона. Теорія, заснована на цьому постулаті, називається класичною теорією електропровідності.

Електропровідність матеріалів оцінюється по їх електричному опору і електричній провідності. Електричний опір металевого провідника не залежить від напруги в мережі. Ця властивість виражається законом Ома.

Електричний опір матеріалу, з якого виготовлений провідник, оцінюється питомим електричним опором  $\rho$ . Він характеризує опір в омах провідника з даного матеріалу довжиною 1 м з площею поперечного перерізу  $1 \text{ м}^2$ .

З матеріалів найменшим питомим електричним опором володіє срібло:  $\rho = 0,016 \text{ Ом}^*$

мм<sup>2</sup>/м, трохи більше воно в міді  $\rho = 0,017 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ , в алюмінію і заліза, вживаних в устаткуванні електрозварювання,  $\rho$  відповідно дорівнює 0,028 і 0,098 Ом-мм<sup>2</sup>/м.

Електрична провідність матеріалів характеризується питомою електричною провідністю  $\gamma$ , що є величиною, зворотною питомому електричному опору  $\gamma = 1/\rho$ .

Ця величина характеризує в сименсах (См) провідність циліндричного прямолінійного провідника площею поперечного перерізу 1 м<sup>2</sup> і довжиною 1 м. Сименс = 1 /Ом.

На питомий електричний опір  $\rho$  і питому електричну провідність  $\gamma$  великий вплив роблять домішки в металах, а також деформація металу в холодному стані (наклепання). Найбільшою питомою провідністю володіють чисті метали. Домішки, так само як і наклепання, знижують електропровідність. Так, питомий опір основного сплаву для виготовлення провідників— альдрея, що складається з Al з добавкою 0,5% Mg, 0,5% Si і 0,3% Fe, рівне 0,036 Ом \* мм<sup>2</sup>/м проти 0,028 Ом \* мм<sup>2</sup>/м в чистого алюмінію. Введені добавки, знижуючи електропровідність алюмінію, збільшують його міцність на розтягування з 1 до 3,5 МПа. Сплавляючи залізо з 25 % хрому і 5 % алюмінію, отримують сплав високого опору—хромаль з питомим електроопором  $\rho = 1,5 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ .

### § 3. Енергія електричного поля. Механічні сили в електричному полі

Поле, як і всяка фізична система, володіє енергією. Енергія є функція стану, а стан поля визначається напруженістю. Отже, енергія поля є функція напруженості. Проте в разі неоднорідного поля напруженість поля в різних його місцях різна. Тому необхідно ввести уявлення про концентрацію енергії в полі, яка міняється від точки до точки із зміною напруженості. Мірою концентрації енергії поля служить її щільність, яка визначається таким чином.

Розглянемо деякий малий об'єм поля  $dV$  поблизу даної точки. Позначимо енергію поля в цьому об'ємі через  $dW$ . Під щільністю енергії поля в даній точці розуміється відношення енергії  $dW$  до об'єму  $dV$ , тобто щільністю енергії поля називається енергія поля, що доводиться на одиницю об'єму поблизу тієї точки, в якій ця щільність визначається:

$$\omega = dW / dV \quad (3)$$

Щільність енергії поля - функція напруженості поля в даному місці. Цю функцію потрібно встановити.

Досвід показує, що заряджений конденсатор містить запас енергії. Енергія зарядженого конденсатора дорівнює роботі зовнішніх сил, яку необхідно витратити, аби зарядити конденсатор.

Процес зарядки конденсатора можна представити як послідовне перенесення досить малих порцій заряду  $\Delta q > 0$  з однієї обкладки на іншу (Рис.4). При цьому одна обкладка поступово заряджається позитивним зарядом, а інша – негативним. Оскільки кожна порція переносить

ся в умовах, коли на обкладках вже є деякий заряд  $q$ , а між ними існує деяка різниця потенціалів

$$U = q / C \quad (4)$$

при перенесенні кожної порції  $\Delta q$  зовнішні сили повинні зробити роботу

$$\Delta A = U \Delta q = q \Delta q / C \quad (5)$$

Енергія  $W_e$  конденсатора ємністю  $C$ , зарядженого зарядом  $Q$ , може бути знайдена шляхом інтеграції цього виразу в межах від  $0$  до  $Q$ :

$$W_e = A = Q^2 / 2C \quad (6)$$

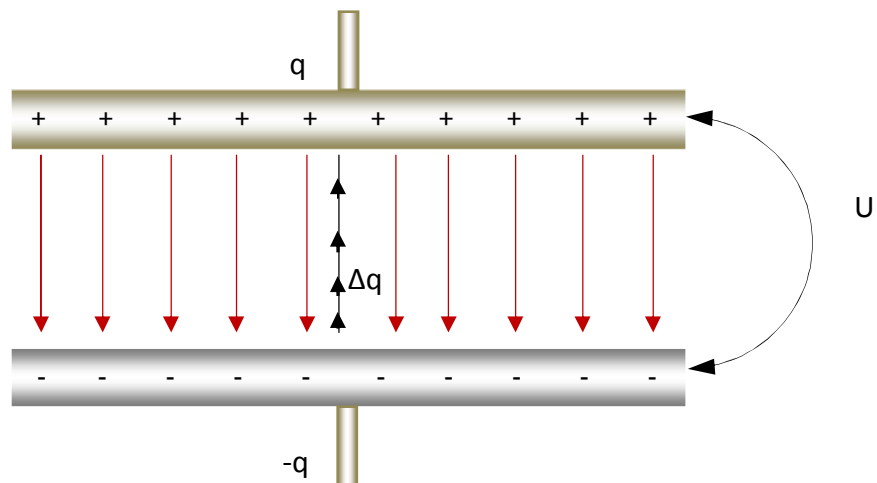


Рис. 4

Формулу, що виражає енергію зарядженого конденсатора, можна переписати в іншій еквівалентній формі, якщо скористатися співвідношенням  $Q = CU$ .

$$W_e = Q^2 / 2C = CU^2 / 2 = QU / 2 \quad (7)$$

Вираження електричної енергії через характеристики електричного поля :

$$Q = Ds \quad (8)$$

де  $D$  — потік вектора електричного зміщення через будь яку поверхню  $S$ , проведenu в діелектрику паралельно пластинам конденсатора .

Питання про механічні сили в електричному полі розглянуте на прикладі плоского

конденсатора (дивись Рис.5) , зарядженого від зовнішнього джерела енергії ,який має напругу  $U$ . Електричне поле конденсатора будемо вважати рівномірним. Сили  $F_e$ , які виникають внаслідок взаємодії з електричним полем , прикладені так , що вони притягуються .

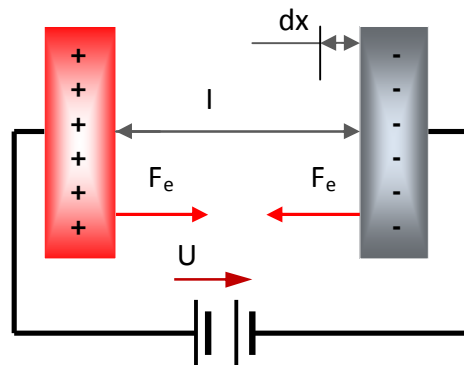


Рис. 5

Узагальнене вираження механічної сили в електричному полі :

Перший випадок ( $Q = \text{const}$ )

$$F_e = - dW_e / dx , \quad (9)$$

де  $dW_e$  — змінення енергії електричного поля ;

$dx$  — можливе невелике переміщення однієї з пластин конденсатора

від дії  $F_e$

Другий випадок ( $U = \text{const}$ )

$$F_e = - dW_e / dx \quad (10)$$

#### § 4. Поняття про провідники , напівпровідники та діелектрики

Провідник - матеріал, що проводить тепло або електрику (на противагу діелектрику). Провідник володіє високою тепло- або електропровідністю і найчастіше є речовиною, яка має багато вільних електронів (метали). Питома провідність провідників складає  $1 \cdot 10^7 \dots 3 \cdot 10^7$  См/м . Діелектрики, типу скла чи кераміки, мають мало вільних електронів. Вуглець - єдиний неметал, що є (у деяких формах) провідником тепла й електрики. Речовини типу кремнію і германію, електропровідність яких має проміжне значення у порівнянні з провідниками й діелектриками називаються напівпровідниками. Їх електропровідність може змінюватися у широкому діапазоні під впливом тепла, світла і напруги. Найкращі провідники — срібло ,

мідь , алюміній.

Важливе значення відіграє абстракція ідеального провідника. Ідеальний провідник має нескінченно велику електропровідність, і завдяки цій якості характеризується певними особливостями.

Електричне поле не може існувати в ідеальному провіднику, оскільки воно б викликало переміщення зарядів, які компенсували б поле.

Електричні заряди не можуть існувати всередині ідеальних провідників і зосереджуються на їхній поверхні.

Електричне поле завжди перпендикулярне поверхні ідеального провідника.

Реальні провідники, наприклад, метали мають характеристики близькі до характеристик ідеального провідника, проте змінне електричне поле проникає в них на певну глибину .

Напівпровідник — матеріал, електропровідність якого має проміжне значення між провідно-стями провідника та діелектрика.

Характерна риса напівпровідників — зростання електропровідності зі зростанням температури; при низьких температурах електропровідність мала. При температурі близькій до абсолютного нуля напівпровідники мають властивості ізоляторів. Кремній, наприклад, при низькій температурі погано проводить електрику, але під впливом світла, тепла чи напруги електро-провідність зростає.

Кремній найчастіше використовується в діодах, світлодіодах, транзисторах, вирівнювачах і інтегральних схемах (кремнієвих платах або чіпах), сонячних елементах. Окрім кремнія широко використовуються арсенід галію, арсенід алюмінію, германій та багато інших. В останні роки дедалі популярніші органічні напівпровідники, які застосовуються, наприклад, у копіювальній техніці.

Діелектрики — це матеріали, в яких заряди не можуть пересуватися з однієї частини тіла в іншу (зв'язані заряди). Зв'язаними зарядами є заряди що входять в склад атомів або молекул діелектрика, заряди іонів, в кристалах з іонною решіткою.

На практиці абсолютних діелектриків немає . Розглядання певного тіла як діелектрика залежить від постановки експерименту — якщо заряд, що пройшов через певне тіло малий у порівнянні з зарядами, що пройшли через інше тіло в даному експерименті, то перше тіло можна вважати діелектриком.

За агрегатним станом діелектрики поділяють:

Газоподібні (більшість газів) ;

Рідкі (гліцерин, олія, хімічно чиста вода) ;

Тверді (пластмаси, скло, полімерні смоли).

Основні електричні характеристики діелектриків:

Питомий електричний опір ;

Діелектрична проникність ;

Тангенс кута діелектричних втрат ;

Напруженість електричного поля за якої відбувається пробій .

Питома провідність для діелектриків складає  $10^{-17} \dots 10^{-7}$  См/м.

## § 5. Електричний струм в провідниках

Якщо ізольований провідник помістити в електричне поле то на вільні заряди  $q$  в провіднику діятиме сила

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (11)$$

В результаті в провіднику виникає короткочасне переміщення вільних зарядів. Цей процес закінчиться тоді, коли власне електричне поле зарядів, що виникли на поверхні провідника, не компенсуватиме повністю зовнішнє поле. Результуюче електростатичне поле усередині провідника дорівнює нулю

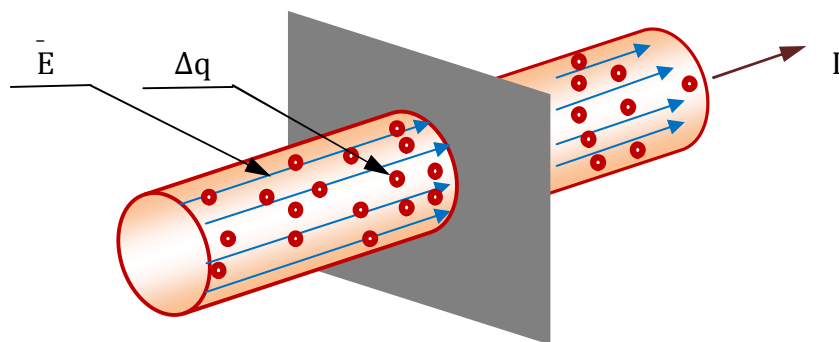


Рис. 6

Проте, в провідниках може за певних умов виникнути безперервний впорядкований рух вільних носіїв електричного заряду. Такий рух називається електричним струмом. За напрям електричного струму прийнятий напрям руху позитивних вільних зарядів. Для існування електричного струму в провіднику необхідно створити в ньому електричне поле.

Кількісною мірою електричного струму служить сила струму  $I$  – скалярна фізична величина, рівна відношенню заряду  $\Delta q$ , переносимого через поперечний переріз провідника (дивись

рис. 6) за інтервал часу  $\Delta t$ , до цього інтервалу часу:

$$I = \Delta q / \Delta t \quad (12)$$

Якщо сила струму і його напрям не змінюються з часом, то такий струм називається постійним. Для постійного струму :

$$I = Q/t \quad (13)$$

У Міжнародній системі одиниць Si сила струму вимірюється в амперах (А). Одиниця виміру струму 1 А встановлюється по магнітній взаємодії двох паралельних провідників із струмом. Постійний електричний струм може бути створений лише в замкнутому колі, в якому вільні носії заряду циркулюють по замкнутих траєкторіях. Електричне поле в різних точках такого кола незмінно в часі. Отже, електричне поле в колі постійного струму має характер замороженого електростатичного поля. Але при переміщенні електричного заряду в електростатичному полі по замкнутій траєкторії, робота електричних сил дорівнює нулю . Тому для існування постійного струму необхідна наявність в електричному колі пристрою, здатного створювати і підтримувати різниці потенціалів на ділянках кола за рахунок роботи сил неелектростатичного походження. Такі пристрої називаються джерелами постійного струму.

За напрям струму приймають напрям , в якому переміщуються позитивно заряджені частинки , або напрям руху протилежний руху електронів . Напрямок струму в колі вказується стрілкою.

## § 6. Електричний опір . Залежність електричного опору провідників від температури

Пристрій , включаємий в електричне коло і який володіє опором називається резистором . Резистори включаються в електричне коло для обмеження або регулювання струму . Резистори бувають регульованні і нерегульованні , зроблені з дрота та інші .

Електричним опором або просто опором називається величина , яка характеризує протидію електричного кола проходження електричного струму. Електричний опір характеризує спроможність елемента перетворювати електричну енергію в тепло.

Електричний пір – фізична величина. Позначають його літерою R – одиниця опору в Міжнародній системі (Si) Ом .  $1 \text{ Ом} = 1\text{В}/1\text{А}$

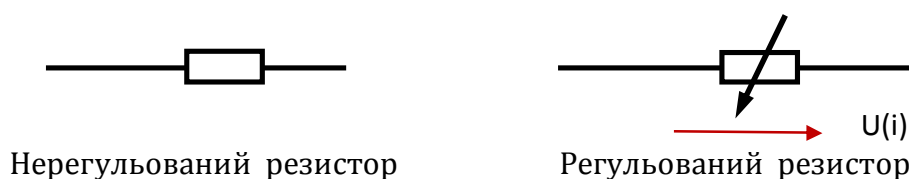


Рис. 7



Умовне графічне зображення резистора приведене на рис. 7. Резистор – це пасивний елемент, що характеризується резистивним опором. Останнє визначається геометричними розмірами тіла і властивостями матеріалу.

Опір провідника прямо пропорційний його довжині, обернено пропорційній площі поперечного перерізу і залежить від речовини, із якої складається провідник:

$$R = \rho \cdot L / S, \text{ Ом} \quad (14)$$

де  $L$  — довжина провідника в метрах;

$S$  — площа поперечного перерізу провідника,  $\text{мм}^2$ ;

$\rho$  — питомий опір,  $\text{Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м}$ .

Питомий опір є опір провідника її із даної речовини довжиною 1 м і перерізом 1  $\text{мм}^2$

Величина зворотня опору називається провідністю. Провідність визначається буквою  $G$

$$G = 1 / R. \quad (15)$$

Одиниця виміру провідності — сименс (См)

$$1 \text{ См} = 1 / 1 \text{ Ом}$$

Величина зворотня питомому опору називається питомою провідністю і позначається буквою  $\gamma$ .

$$\gamma = 1 / \rho \quad (16)$$

Питомий опір провідника залежить від температури, із збільшенням температури він збільшується майже у всіх металів по лінійному закону:

$$\rho_2 = \rho_1 [ 1 + \alpha ( t_2 - t_1 ) ], \quad (17)$$

де  $\rho_1$  і  $\rho_2$  — питомий опір при початковій і кінцевій температурах,

$\alpha$  — температурний коефіцієнт опору, який залежить від марки матеріалу;

$t_1$  і  $t_2$  — початкова і кінцева температура.

Для провідників любых розмірів із даного матеріала опір, в залежності від температури, виражається формулою:

$$R_2 = R_1 [ 1 + \alpha ( t_2 - t_1 ) ] \quad (18)$$

## § 7 Закон Ома

### Закон Ома для ділянки кола

Сила струму в ділянці кола прямопропорційна напрузі на цій ділянці і обернено пропорційна її опору:

$$I = U / R \text{ (A)} \quad (19)$$

### Закон Ома для повного кола

Сила струму в колі прямопропорційна електрорушійній силі джерела і обернено пропорційна її опору всього кола:

$$I = E / (R + R_0) \text{ (A)} \quad (20)$$

$E$  — електрорушійна сила джерела .

Електрорушійною силою джерела називається величина , яка вимірюється відношенням роботи , здійснюваної джерелом струму при переміщенні заряду по замкнутому колу , до величини заряду ( $E = A / Q$ ).

$R$  — опір зовнішньої частини кола ;

$R_0$  — опір внутрішньої частини кола (опір джерела).

## § 8 Електричний струм в вакуумі

Вакуум (від латинського *vacuum* – порожнеча) – стан газу при тиску, меншому атмосферного. Це поняття застосовується до газу в замкнутій судині або в судині, з якої відкачують газ .

В вакуумі можливо отримати електричний струм , для чого необхідно внести в нього носії зарядів .

На рис.8 зображена посудина з якої відкачене повітря .В цю посудину впаяні дві металеві пластини — два електроди . Одну з них А (анод) з'єднуємо з позитивним полюсом джерела струму , а іншу К (катод) — з негативним .

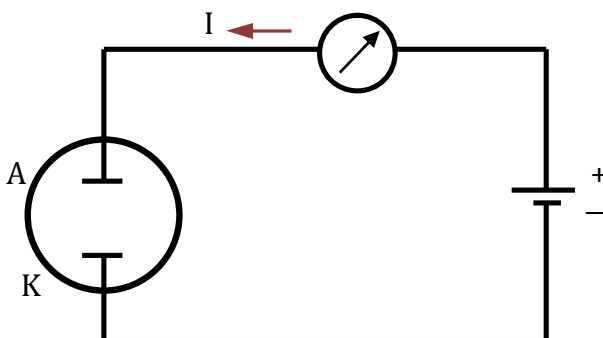


Рис. 8

Між анодом і катодом достатньо прикласти напругу 80...100 В. Якщо в коло включити чутливий міліамперметр, то він не покаже ніякого струму. З цього можна зробити висновок, що у вакуумі відсутні вільні носії зарядів. Якщо в якості катода впасти в посудину нитку з дрота, кінці якої винесені назовні і за допомогою іншого джерела струму розжарити її, то прилад включений в коло покаже струм. Розжарена нитка забезпечує в вакуумі наявність необхідних для існування струму носіїв заряду.

Стрілка гальванометра відхилялася всякий раз, коли до електроду під'єднувався плюс батареї, а до нитки – мінус. Якщо полярність мінялася, то струм в колі припинявся.

У розжареній металевій нитці швидкість руху і енергія електронів підвищуються настільки, що вони відриваються від поверхні нитки і вільним потоком спрямовуються в простір, що оточує її. Електрони, що вириваються з нитки, можна уподібнити ракетам, що здо-

лали силу земного тяжіння. Якщо до електроду буде приєднаний плюс батареї, то електричне поле усередині балона між ниткою розжарення і електродом спрямує до нього електрони. Тобто усередині лампи потече електричний струм.

Потік електронів у вакуумі є різновидом електричного струму. Такий електричний струм у вакуумі можна отримати, якщо в судину, звідки ретельно відкачується повітря, помістити катод, що нагрівається, є джерелом електронів, що «випаровуються», і анод. Між катодом і анодом створюється електричне поле, що надає електронам швидкості в певному напрямі.

В металах є електрони провідності. Середня швидкість руху цих електронів залежить від температури металу: вона тим більше, чим вище температура. Розташуємо у вакуумі на деякій відстані один від одного два металеві електроди (рис.8) і створимо між ними певну різницю потенціалів. Струму в колі не буде, що свідчить про відсутність в просторі між електродами вільних носіїв електричного заряду. Отже, в металах є вільні електрони, але вони стримуються усередині металу і при звичайних температурах практично не можуть виходити з нього.

Для того, щоб електрони змогли вийти за межі металу (аналогічно вильоту молекул за межі рідини при її випарі), вони повинні здолати сили електричного тяжіння з боку надлишку позитивного заряду, що виник в металі унаслідок вильоту електронів, а також сил відштовхування з боку електронів, які вилетіли раніше і утворили поблизу поверхні металу електронну «хмарку». Інакше кажучи, аби вилетіти з металу у вакуум, електрон повинен виконати певну роботу А проти цих сил, природно, різну для різних металів. Цю роботу називають роботою виходу електронів з металу. Робота виходу виконується електронами за рахунок їх кінетичної енергії. Тому ясно, що повільні електрони вирватися з металу не можуть, а вириваються лише ті, кінетична енергія яких перевищує роботу виходу, тобто. Виход вільних електронів з металу називають емісією електронів.

Для того, щоб існувала емісія електронів, необхідно надати електронам провідності металів кінетичну енергію, достатню для виконання роботи виходу. Залежно від способу повідомлення електронів необхідної кінетичної енергії бувають різні типи електронної емісії.

Якщо енергія надається електронам провідності за рахунок бомбардування металу

зовні якимись іншими частками (електронами, іонами), має місце вторинна електронна емісія. Емісія електронів може відбуватися під впливом опромінення металу світлом. В цьому випадку спостерігається фотоемісія, або фотоелектричний ефект. Можливо також виривання електронів з металу під дією сильного електричного поля – автоелектронна емісія. Нарешті, електрони можуть набувати кінетичної енергії за рахунок нагрівання тіла. В цьому випадку говорять про термоелектронну емісію.

Розглянемо детальніше явище термоелектронної емісії і його вживання. При звичайних температурах мізерне число електронів може володіти кінетичною енергією, порівнянною з роботою виходу електронів з металу. З підвищенням температури число таких електронів зростає і при нагріванні металу до температур порядку 1000 – 1500 градусів вже значне число електронів матиме енергію, що перевищує роботу виходу з металу. Саме ці електрони можуть

вилетіти з металу, але вони не віддаляються від його поверхні, оскільки метал при цьому заряджається позитивно і притягує електрони. Тому біля нагрітого металу створюється «хмарка» електронів. Частина електронів з цієї «хмарки» повертається назад в метал, і в той же час з металу вилітають нові електрони. При цьому між електронним «газом» і електронною «хмаркою» встановлюється динамічна рівновага, коли число електронів, що вилітають за певний час з металу, порівнюється з числом електронів, які за той же час повертаються з «хмарки» в метал.

## § 9 Електричний струм в напівпровідниках

Концентрація вільних електронів в напівпровідниках в тищі і мільйони разів менше, чим в металах. Цим пояснюється кількісна різниця в величинах їх питомої провідності.

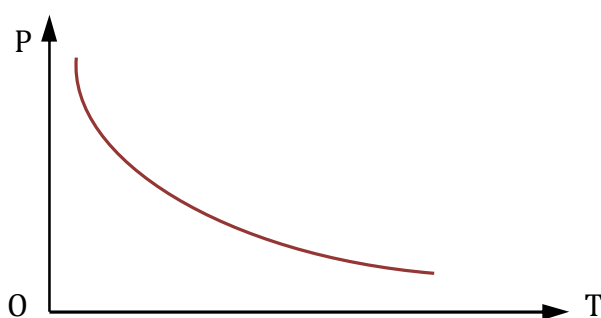


Рис. 9 Залежність питомого опору  $\rho$  чистого напівпровідника від абсолютної температури  $T$ .

В напівпровідниках, також як і в металах, електричний струм створюється електронами. Проте вони мають два види носіїв заряду: електрони і дірки. Рух вільних електронів обумовлює електричну електропровідність, а рух дірок — діркову. Швидкість руху електронів значно перевищує швидкість руху дірок, тому електропровідність більшості

чистих напівпровідників, в основному, електронна.

Якісна відмінність напівпровідників від металів виявляється перш за все в залежності питомого опору від температури. З пониженням температури опір металів падає. В напівпровідниках, навпаки, з пониженням температури опір зростає і поблизу абсолютного нуля вони практично стають ізоляторами (рис.9).

## § 10 Електричне коло. Елементи електричного кола

Електричне коло — сукупність сполучених між собою провідниками резисторів, конденсаторів, котушок індуктивності, джерел струму й напруги, перемикачів тощо, через яку може проходити електричний струм. Ці пристрої виконують в колі певні функції і називаються елементами кола.

В кожному елементі електричного кола можна виділити певне число затисків (полюсів), за допомогою яких він з'єднується з іншими елементами. Розрізняють два –и багатополюсні елементи. Двополюсники мають два затиски. До них відносяться джерела енергії (за винятком керованих і багатофазних), резистори, котушки індуктивності, конденсатори. Багатополюсні елементи – це, наприклад, тріод-пентоди, трансформатори, підсилювачі і так далі

Всі елементи електричного кола умовно можна розділити на активні і пасивні. Активним називається елемент, що містить в своїй структурі джерело електричної енергії. До пасивних відносяться елементи, в яких розсіюється (резистори) або накопичується (котушка індуктивності і конденсатори) енергія. До основних характеристик елементів кола відносяться їх вольт-амперні, вебер-амперні і кулон-вольтіві характеристики, що описуються диференціальними або алгебричними рівняннями. Якщо елементи описуються лінійними диференціальними або алгебричними рівняннями, то вони називаються лінійними, інакше вони відносяться до класу нелінійних. Точно кажучи, всі елементи є нелінійними. Можливість розгляду їх як лінійних, істотно спрощує математичний опис і аналіз процесів, які визначаються границями зміни характеризуючих їх змінних і їх частот. Коефіцієнти, що зв'язують змінні, їх похідні і інтеграли в цих рівняннях, називаються параметрами елемента.

Якщо параметри елемента не є функціями просторових координат, що визначають його геометричні розміри, то він називається елементом із зосередженими параметрами. Якщо елемент описується рівняннями, в які входять просторові змінні, то він відноситься до класу елементів з розподіленими параметрами. Класичним прикладом останніх є лінія передачі електроенергії (довга лінія).

Кола, що містять лише лінійні елементи, називаються лінійними. Наявність в схемі хоч би одного нелінійного елемента відносить її до класу нелінійних. В загальному випадку електричне коло це – поєднання слідуєчих елементів: джерел електричної енергії (генераторів) електричних приймачів (споживачів); пристроїв, які поєднують джерела електричної енергії, з

електричними приймачами .

Крім основних елементів в електричне коло входять різні допоміжні елементи для управління , контролю ,захисту , регулюванню і таке інше.

### **§ 11 . Електрорушійна сила , потужність та коефіцієнт корисної дії джерела електричної енергії**

Електрорушійною силою джерела називається величина , яка вимірюється відношенням роботи , здійснюємої джерелом струму при переміщенні заряду по замкнутому колу до величини заряду :

$$E = A / Q . \quad (19)$$

ЕРС як і напруга вимірюється в вольтах (В) .

Напрямок ЕРС і струму у джерелі електричного кола збігаються .

Потужністю джерела називається величина , яка виробляється за одиницю часу :

$$P_{дж} = W_{дж} / t = EIt / t = EI . \quad (20)$$

$$W_{дж} = EQ \quad Q = It \quad (21)$$

Одиниця виміру потужності — ват (Вт)

Відношення потужності приймача  $P_p$  до потужності джерела  $P_{дж}$  називається коефіцієнтом корисної дії джерела :

$$\eta_{дж} = P_p / P_{дж} = UI / EI = U / E \quad (22)$$

### **§ 12 Перетворення електричної енергії в інші види енергії . Потужність та коефіцієнт корисної дії приймача електричної енергії . Закон Джоуля – Ленца**

В електричному колі електрична енергія одночасно створюється в джерелі і перетворюється в інший вид енергії у приймачі . Тип приймача вибирається у відповідності з необхідним для практичних цілей видом неелектричної енергії.

#### **Перетворення електричної енергії в теплову.**

При проходженні електричного струму у провіднику кінетична енергія частинок , які ру-

хаються, передається іонам або молекулам, внаслідок чого провідник нагрівається.

Енергія електричного поля, яка витрачається на переміщення заряджених частинок

$$W_e = UQ = UIt, \quad (23)$$

Де  $U$  — різниця потенціалів на кінцях провідника,

$Q = It$  — заряд переміщуємих частинок.

Робота сил електричного поля витрачається на нагрів провідника, так як ніяких інших виявлень цієї роботи не спостерігається. Тому енергію  $W_e$  можна рахувати рівною тепловій енергії приймача:

$$W_n = W_e = IUt \quad (24)$$

У відповідності з законом Ома  $U = IR$ , тоді  $W_n = I^2Rt$  — ця формула є математичним вираженням закону Джоуля–Ленца.

Кількість електричної енергії, яка перетворюється у провіднику за одиницю часу в теплову енергію, пропорційна квадрату струму і електричному опору провідника. Швидкість перетворення електричної енергії в інший вид енергії у приймачі називається потужністю приймача.

$$P_n = W_n / t = UI. \quad (25)$$

Ця формула дійсна для любого приймача незалежно від виду енергії, який одержується в результаті перетворення.

Якщо електрична енергія повністю перетворюється у теплову, то потужність приймача можна виразити через струм у провіднику і його опір:

$$P_n = I^2R \quad (26)$$

Коефіцієнт корисної дії приймача — відношення електричної енергії (або потужності) корисно використовуємої в приймачах до всієї енергії (або потужності), яка поступила за цей же час в електричне коло:

$$\eta_n = W_2 / W_1 = P_2t / P_1t = P_2 / P_1 = U_2I_2 / U_1I_1 \quad (27)$$

Корисна потужність менше потужності, підведеної до кола на величину втрат тепла в дротах  $I^2R$ .

Явище перетворення в провідниках електричної енергії в теплову широко застосовується в практиці. На цьому принципі застосована дія більшості побутових і промислових нагрівальних пристроїв.

### Перетворення електричної енергії в світлову.

Принцип перетворення електричної енергії в теплову лежить також в основі роботи електричних ламп розжарювання. Нитка лампи, яка виготовлена з тугоплавкого металу (вольфраму), нагрівається при електричному струмі в неї до температури порядку 3000 °С.

При високій температурі частка енергії випромінюється у вигляді світлової енергії, яка в загальному потоці енергії, випромінюємої лампою, складає менше 10 %.

### Перетворення електричної енергії в механічну.

Для перетворення електричної енергії в механічну і навпаки використовується електромеханічна дія магнітного поля і електромагнітна індукція.

Пристрої, за допомогою яких ці перетворення здійснюються, називаються електричними машинами. Машина для перетворення електричної енергії в механічну називається двигуном, а для обратного перетворення — генератором.

Конструкції, принципи і режими роботи вивчаються в спеціальних дисциплінах.

## § 13 Режими роботи електричних кіл : номінальний , робочий , холостого ходу , короткого замикання

### Номінальний режим

Режим роботи, при якому дійсні струми, напруги і потужності елементів електричного кола відповідають їх номінальним величинам, називається номінальним. Джерела і

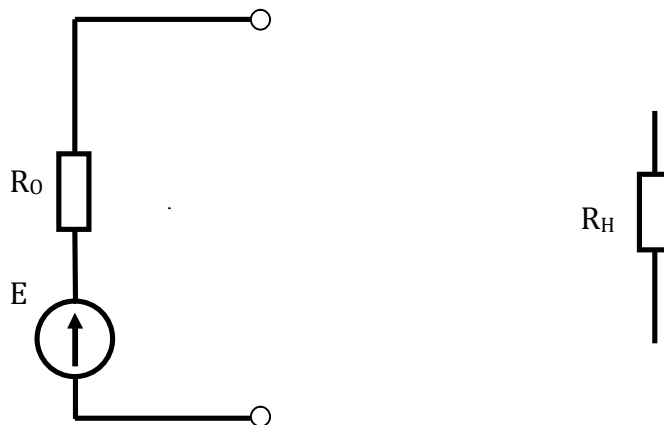


Рис. 10

приймачі електренергії, пристрої, які зв'язують джерела з приймачами, а також



допоміжні апарати і прилади характеризуються номінальними величинами струму  $I_n$ , напруги  $U_n$ , потужності  $P_n$  і т. п. на які ці пристрої розраховані заводами — виготовниками для нормальної роботи.

Номінальні величини вказуються в паспорті пристрою. Відхилення від номінального режиму небажані, а перевищення номінальних величин, в більшості випадків, неприпустимі, так як при цьому не можуть бути гарантовані розрахункові тривалість і економічність роботи електричних пристроїв і установок.

Номінальна напруга — основний параметр електроустановки. Вона впливає на вибір необхідної електричної ізоляції і на конструктивне виконання елементів електроустановки.

Значення номінальних струмів електричних пристроїв, в більшості випадків, лімітується гранично допустимими температурами нагріву цих пристроїв. Тривале проходження струму, вище номінального, може визвати неприпустиме збільшення температури і як наслідок — передчасний вихід електричного пристрою із ладу. Номінальні значення струму  $I_n$  і напруги  $U_n$  разом визначають важливий параметр любого електричного пристрою — номінальну потужність.

### **Робочий режим**

Робочим режимом називається такий режим при якому дійсні характеристики електричного кола відрізняються від номінальних величин її елементів, но відхилення знаходяться в допустимих межах.

### **Режим холостого ходу**

Режим холостого ходу — це такий режим, коли зовнішнє коло розімкнуте (рис.10). В режимі холостого ходу опір зовнішнього кола практично рівний нескінченності ( $R_{зовн.} = \infty$ ), а величина струму дорівнює нулю ( $I = 0$ ). Так як у цьому випадку падіння напруги усереднені джерела дорівнює нулю, то напруга генератора дорівнює її ЕРС ( $U_2 = E$ ).

### **Режим короткого замикання**

Коротке замикання виникає в результаті пошкодження ізоляції струмоведучих частин. Чим ближче до генератора місце к.з., тим менший опір створеного контуру a-b-c-d (рис.11) і тим більше величина струму короткого замикання.

Режимом короткого замикання називається режим електричного кола, при якому коротко замкнута ділянка з одним або декількома елементами, в зв'язку з чим напруга на цій ділянці дорівнює нулю.

При к. з. на затискачах генератора зовнішній опір стає близьким до нуля, а струм генератора досягає найбільшого значення:  $I_{к.з.} = E / R_2$  і може в багато разів перевищувати номінальний навантажувальний струм. Короткі замикання являють велику небезпеку для

електроустановок, так як можуть привести до виходу з ладу електроустаткування і тривалого порушення нормального режиму роботи. Тому електроустановки захищають від к. з.

Найпростіший захисний пристрій — плавкий запобіжник. В корпус запобіжника встановлюється тонкий дріт (плавка вставка). Якщо струм у колі перевищує норму, дріт нагрівається і розплавляється — коло струму розривається.

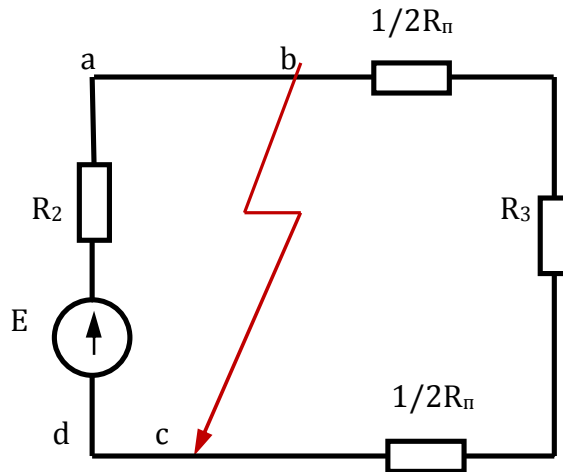


Рис. 11

#### § 14 Схеми електричних кіл : принципова , монтажна , розрахункова . Схеми заміщення . Поняття про пасивні і активні елементи електричних кіл

Схемою електричного кола називається його графічне зображення, яке показує послідовність з'єднання окремих елементів і відображає властивості електричного поля. Розрізняють декілька типів схем: принципову, монтажну, розрахункову, структурну, функціональну та інші.

На принциповій схемі приводиться повний склад елементів і вказані всі зв'язки між ними. Ця схема дає детальну уяву про принцип роботи електроустановки. Принципові схеми мають одну важливу особливість — окремі елементи електричних пристроїв можна для зручності креслити в окремих місцях. Умовні позначення в електричних схемах встановлені стандартами системи ЄСКД.

Монтажні схеми креслять для виготовлення, експлуатації і ремонту електроустановок. Вони показують, як прокладені дроти між окремими апаратами. На цих схемах вказується також тип дрота і його переріз.

Для полегшення розрахунку складається схема заміщення електричного кола, яка відображає властивості кола при певних умовах. На схемі заміщення відображають всі елементи, впливом яких на результат розрахунку не можна знехтувати, і вказують також електричні з'єднання між ними, які є в колі.

Схема заміщення (заступна схема) електричного кола — це розрахункова модель реального електричного кола, в якій реальні елементи замінені ідеальними.

Елементи кола, в яких електрична енергія перетворюється в тепло, характеризуються опором  $R$  або провідністю  $G$  і називаються пасивними.

Елементи електричного кола, в яких перетворення енергії здійснюється при наявності електрорушійної сили, характеризуються, в більшості випадків, постійними величинами ЕРС,  $E$  і внутрішнім опором  $r$  (рис.12а).

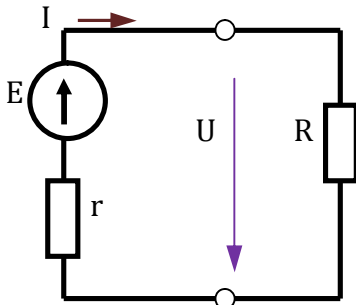


Рис. 12а

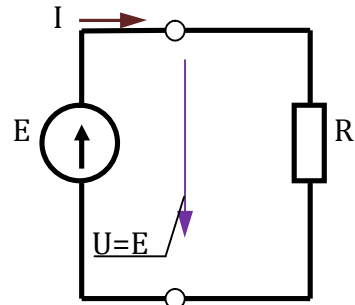


Рис. 12б

Такі елементи кола називаються активними. На розрахункових схемах джерело енергії можна подати ЕРС без внутрішнього опору, якщо цей опір малий в порівнянні з опором приймача (рис.12б). При  $r = 0$  внутрішнє падіння напруги  $U_0 = 0$ , тому напруга на затисках джерела при будь-якому струмі дорівнює ЕРС:  $U = E = \text{const}$ . Таке джерело енергії з незмінною напругою на його затисках, яке не залежить від зовнішнього опору, називається джерелом ЕРС.

В деяких випадках джерело електричної енергії на розрахунковій схемі замінюють іншою (еквівалентною) схемою (рис.13а), де замість ЕРС  $E$  джерело характеризується його струмом короткого замикання  $I_k$ , а замість внутрішнього опору в розрахунок вводиться внутрішня провідність  $g = 1/r$ .

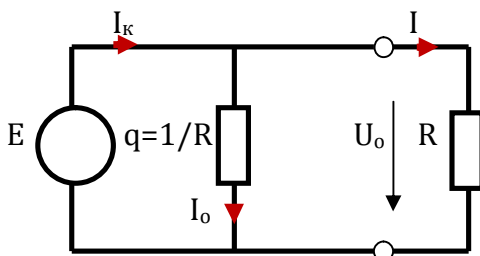


Рис. 13а

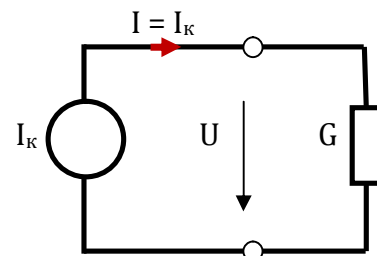


Рис. 13б

Якщо внутрішню провідність віднести до приймача, то можна припустити,  $g = 0$  і  $I_0 = 0$ . В цьому випадку при будь-якій величині напруги на затисках джерела його струм остається рівним струму короткого замикання (рис.13б)  $I = I_k = \text{const}$ .

Джерело з незмінним струмом, яке не залежить від зовнішнього опору, називається джерелом струму. Одне й теж джерело електричної енергії може бути замінено в розрахунковій схемі джерелом ЕРС або джерелом струму.

## **ПФ.С.01.ЗР.0.07.02 Розрахунок лінійних кіл постійного струму**

Лінійними електричними колами називаються кола, які складаються тільки з лінійних елементів. Лінійним елементом називається елемент кола, опір якого залишається постійним незалежно від сили струму в ньому і від величини напруги на його затискачах. Залежність напруги на якому-небудь елементі від струму в ньому  $U(I)$ , або залежність струму від напруги  $I(U)$  називається вольт-амперною характеристикою. Для лінійних пасивних елементів вольт-амперна характеристика зображає пряму, яка проходить через початок координат.

### **§15 Цілі розрахунку електричних кіл**

Основна ціль розрахунку електричного кола полягає у визначенні струмів в його вітках. Визначив струми можна знайти напруги і потужності віток та окремих елементів кола. Величини струмів, напруг, потужностей дають можливість оцінити умови та ефективність роботи електроустаткування і приладів на всіх ділянках електричного кола. Зв'язок між ЕРС, напругами і струмами лінійних електричних кіл виражається лінійними рівняннями, — рівняннями першого ступеня, тому для розрахунку їх застосовуються аналітичні методи із звичайними алгебраїчними перетвореннями.

Вихідними даними для розрахунку є ЕРС, які діють в цьому колі і характеристики (параметри) різних елементів кола, або їх опори, або номінальні напруги та потужності. При умові сталості (по величині і напрямку), діючих в полі ЕРС і незмінності опорів, які утворюють це коло, картина розподілу напруг, струмів та потужностей може бути тільки одна — задача має однозначне рішення.

### **§ 16 Елементи схем електричних кіл : вітка , вузол , контур**

При аналізі і розрахунку електричних кіл складають електричну схему на якій показують, як здійснюється з'єднання між джерелами та приймачами електричної енергії. Розглянемо наступну схему (рис.14)

Електричне коло складається з віток. Віткою електричного кола називається ділянка кола, яка складається тільки із послідовно з'єднаних елементів по яких проходить один і той же струм. Вітка своїми кінцями під'єднується до двох вузлів. В окремому випадку у вітці може бути лише один елемент (як наприклад, у заданій схемі в вітці з опором  $R_3$ ). На рис. 14 показані три вітки електричного кола.

Вузол — це точка, в якій з'єднані не менше трьох віток. Задана схема має два вузла — А і Б. Будь який замкнутий шлях, утворений вітками електричного кола називається контуром. В заданій схемі можна виділити три контури (АВСДА, АВЕФА, СДАФЕВС).

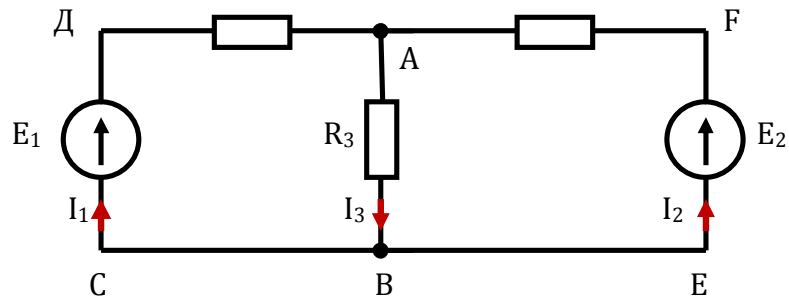


Рис. 14

### § 17 Закони Кірхгофа

Співвідношення між струмами, напругами та ЕРС у складному електричному колі визначаються двома законами Кірхгофа, які дають змогу здійснити розрахунок і аналіз електричного кола будь якої складності. Закони Кірхгофа універсальні: за їх допомогою можна здійснювати розрахунок як електричних кіл постійного, так і змінного струмів.

Перший закон Кірхгофа витікає з принципу неперервності електричного струму і відображає той факт, що всі заряди, які притікають до вузла складного електричного поля, витікають з нього. Тому згідно з першим законом Кірхгофа алгебраїчна сума струмів, які притікають до вузла, дорівнює сумі струмів, які витікають із вузла

Для формулювання 1-го закону Кірхгофа виділимо фрагменти електричного кола – рис. 14. У кожному дроті довільно задамося позитивним напрямом струму. Умовимося, що струми, направлені до вузла (загальній точці з'єднання), записуватимемо із знаком “плюс”, а струми, направлені від вузла, - із знаком “мінус” (можна було б узяти і навпаки).

Перший закон Кірхгофа формулюється таким чином: алгебраїчна сума струмів віток, які сходяться у вузлі дорівнює нулю.  $\sum I = 0$ . Домовились визнавати струми, які направлені до вузла позитивними, а ті, які направлені від вузла — негативними. Тоді для схеми зображеній на рис. 14 рівняння по першому закону Кірхгофа для вузла А має вигляд:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 ; \quad (28)$$

а для вузла В — 
$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 . \quad (29)$$

Другий закон Кірхгофа стосується електричного контура, під яким розуміють будь-який замкнутий шлях, утворений вітками складного кола. Він має наступне формування: у замкнутому контурі алгебраїчна сума ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг. Іншими словами можна сказати, що у замкнутому контурі алгебраїчна сума напруг і ЕРС дорівнює нулю. Ці два формулювання можна відобразити математично у вигляді:  $\sum E_k = \sum U_k = \sum I_k R_k$  або  $\sum U_k - \sum E_k = 0$

Під час складання рівнянь за другим законом Кірхгофа необхідно визначити знаки спадів напруг та ЕРС. Довільно вибирають напрями обходу контуру. При користуванні першою формою запису за другим законом Кірхгофа ( $\sum E_k = \sum U_k$ ) перед спадом напруги  $U_k$  ставиться знак плюс, якщо напрям обходу контуру співпадає з вибраним напрямом струму і знак мінус, якщо ці напрями протилежні. Розглянемо, як складаються рівняння за другим законом Кірхгофа на схемі зображеній на рис. 15

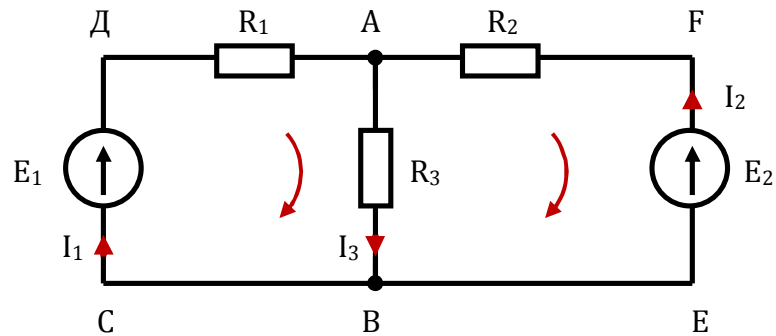


Рис. 15

Для контурів заданної схеми рівняння за другим законом Кірхгофа при вибраному напрямі обходу контурів за годинниковою стрілкою мають такий вигляд:

для контура ABCDA

$$E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 ; \quad (30)$$

для контура ABEFA

$$-E_1 = -I_2 R_2 - I_3 R_3 ; \quad (31)$$

для контура DAFEBСD

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 . \quad (32)$$

## § 18 Неразгалужене електричне коло

Елементи неразгалуженого електричного кола з'єднані між собою послідовно.

### Послідовне з'єднання елементів кола

Особливістю послідовного з'єднання є те, що електричний струм на всіх ділянках кола один і той же.

**а) Послідовне з'єднання пасивних елементів (рис.16 )**

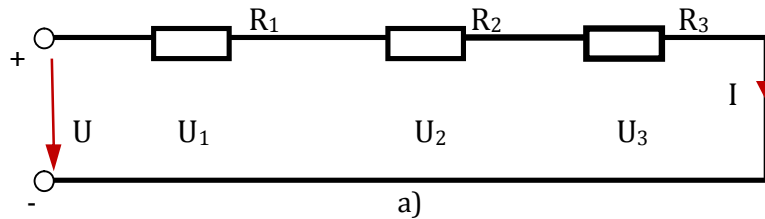


Рис. 16

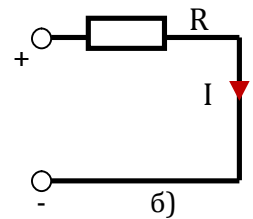


Рис.17

$$U_1 = IR_1 ; \quad U_2 = IR_2 ; \quad U_3 = IR_3 , \quad (33)$$

звідки

$$U_1 / U_2 / U_3 = R_1 / R_2 / R_3$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) = IR = U \quad (34)$$

де  $R = R_1 + R_2 + R_3$ , — опір , еквівалентний по своїй дії всім трьом опорам .

Ця рівність дозволяє три опора замінити одним еквівалентним і одержати більш просту схему (рис.17) при умові незмінності струму в колі і збереження того ж балансу потужностей . Цей випадок поширюється на будь яку кількість послідовно включених пасивних елементів . :

$$R = \sum_1^n R_n , \quad (35)$$

Загальний опір нерозгалуженого кола дорівнює сумі опорів його ділянок .

**б) послідовне з'єднання джерел ЕРС**

Джерела електричної енергії можна з'єднувати послідовно (рис.18) .

$$U = E_1 - E_2 + E_3 , \quad (36)$$

Ця рівність дозволяє три ЕРС замінити однією ( еквівалентною E )

$$E = E_1 - E_2 + E_3 \quad (37)$$

і одержати просту схему , в якій буде тільки одна ЕРС — E (рис.19)

Цей висновок можна поширити на будь яку кількість послідовно включених джерел . Якщо ЕРС всіх джерел рівні і направлені однаково , як це має місце при включенні акумуляторних елементів в батареї , то загальна ЕРС може бути визначена з формули :

$$E = nE_n, \quad (38)$$

де  $E_n$  — ЕРС одного елемента ;

$n$  — число елементів у батареї.

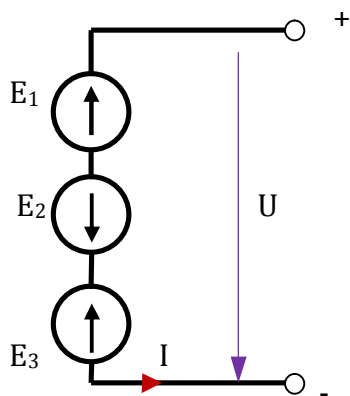


Рис .18

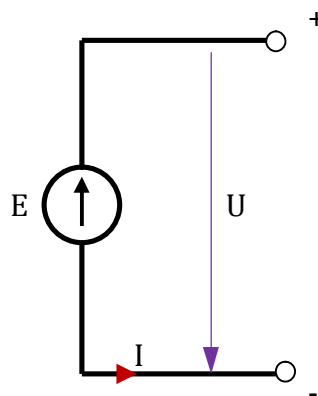


Рис . 19

### б) Загальний випадок послідовного з'єднання .

Розглянемо загальний випадок послідовного з'єднання джерел і приймачів електричної енергії на прикладі схеми , зображеній на рис.20

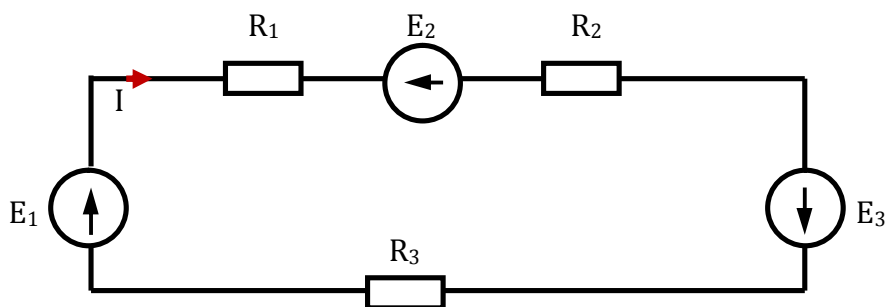


Рис . 20

Внутрішні опори джерел не враховуємо . Якщо застосувати другий закон Кірхгофа , вибрав довільно задавшись напрямом струму в колі і напрямом обходу контура ( наприклад по годинниковій стрілці ) , то можна записати вираження для струму кола :

$$I = ( E_1 - E_2 + E_3 ) / ( R_1 + R_2 + R_3 ) \quad (39)$$

Струм у колі визначається дією трьох ЕРС . При заданих напрямках ЕРС і струму елеме



нти з ЕРС  $E_1$  і  $E_3$  виробляють електричну енергію, а елемент з ЕРС  $E_2$  її споживають. В елементах кола, які характеризуються опорами  $R_1$ ,  $R_2$  і  $R_3$  електрична енергія перетворюється в теплову.

Рівняння балансу потужностей для кола, яке розглядається:

$$E_1 I + E_3 I = E_2 I + I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3$$

(сума потужностей джерел електричної енергії дорівнює сумі потужностей приймачів).

## § 19 Поняття про втрату напруги в проводах

Електрична енергія від джерел до споживача передається по проводам (двопроводна лінія).

Опір обох проводів лінії визначається з формули:

$$R_{л} = 2l / \gamma s, \quad (39)$$

де  $l$  — довжина одного проводу (м);

$\gamma$  — питома провідність (м / Ом мм<sup>2</sup>);

$s$  — переріз проводу (мм<sup>2</sup>).

При невеликій довжині лінії  $l$  опором проводів лінії можна зневажити.

При великій довжині проводів (десятки метрів і більше) опором проводів не можна зневажити, так як при проходженні струму в них падіння напруги буде помітне:

$$\Delta U = IR = I 2l / \gamma s \quad (40)$$

Різниця напруг в початку і в кінці лінії (рис.21)

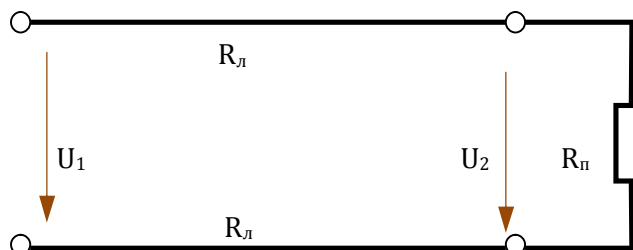


Рис. 21

$$U_1 - U_2$$

яка дорівнює падінню напруги в лінії, називається втратою напруги :

$$U_1 - U_2 = \Delta U = IR_n \quad (41)$$

При зміні опору приймача  $R_n$ , і тим самим струму в колі (навантаженні), від нуля до найбільш допустимого, пропорційно струму змінюється і втрата напруги. При незмінній напрузі  $U_1$  на початку лінії напруга  $U_2$  в кінці лінії, яка дорівнює напрузі на приймачі буде змінюватися від  $U'_2 = U_1$  при  $I = 0$  до  $U''_2 = U_1 - \Delta U$  при струмі навантаження  $I \neq 0$ . Тому допустима втрата напруги  $\Delta U$  дорівнює допустимому коливанню напруги на приймачах енергії  $U'_2 - U''_2$ , яка для ламп розжарювання складає 1...2%, а для двигунів — 2...5% від номінальної напруги приймачів.

## § 20 Поділювач напруги

Поділювач напруги — електротехнічний пристрій, який дозволяє знімати (використовувати) тільки частину постійної або змінної напруги, яка є в наявності за допомогою елементів електричних кіл (резисторів, конденсаторів або індуктивностей). При низьких температурах, в якості поділювачів напруги часто застосовують потенціометри; в колах змінного струму користуються також реактивними (ємносними і індуктивними) поділювачами (рис. 22).

Схеми поділювачів напруги :

а) резистивного  $U_2 = R_1 / (R_1 + R_2) U \quad (42)$

б) ємносного  $U_2 = C / (C_1 + C_2) U \quad (43)$

в) індуктивного  $U_2 = L_2 / (L_1 + L_2) U \quad (45)$

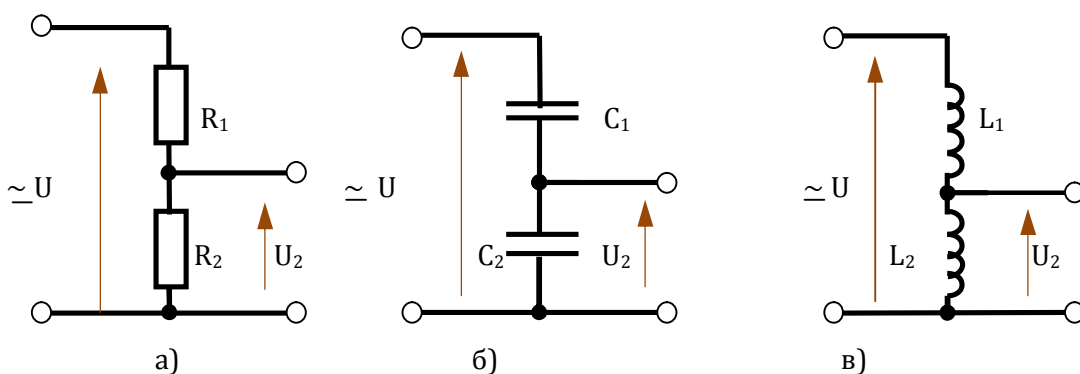


Рис. 22

При високих напругах в якості поділювачів застосовують ємнісні поділювачі (на змінному струмі) і резистивні (активні) поділювачі (на постійному струмі). Поділювачі напруги застосовується в радіо і електротехніці, вимірювальній і обчислювальній техніці і т. п.

## § 21 Потенціальна діаграма нерозгалуженого електричного кола

Зміну потенціалів в електричному колі можна наочно зобразити графічно у вигляді потенційної діаграми. Потенційна діаграма — це графік зміни потенціала при обході кола, побудований у прямокутній системі координат, в якій по осі абсцис, у визначеному масштабі, відкладаються опори ділянок кола, а по осі ординат — потенціали відповідних точок.

Побудуємо потенційну діаграму для кола, зображеного на рис.23

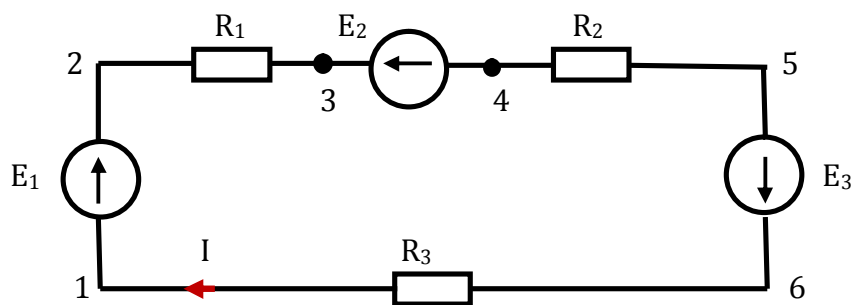


Рис . 23

В поданій схемі, при переході від точки 1 до точки 2 (рис.24), потенціал збільшується на величину  $E_1$ , а при переході від точки 2 до точки 3 знижується на величину

$$U_{23} = IR_1 \quad (45)$$

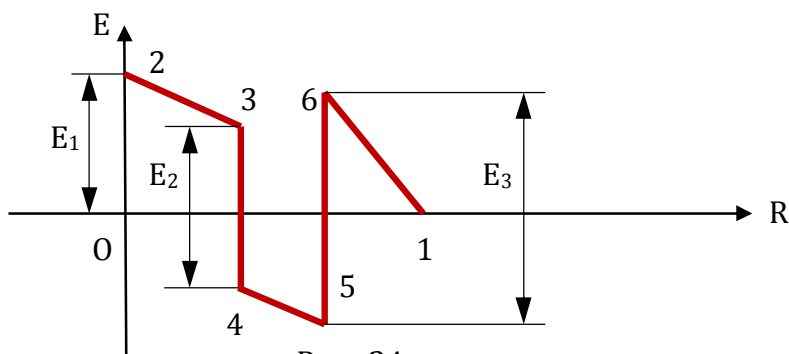


Рис . 24

При переході від точки 3 до точки 4 потенціал знижується на величину  $E_2$ .

Потенціал точки 1 приймаємо рівним нулю .Тоді :

$$\left. \begin{array}{ll} \varphi_2 = \varphi_1 + E_1 ; & \varphi_3 = \varphi_2 - I_1 R_1 ; \\ \varphi_4 = \varphi_3 - E_2 ; & \varphi_5 = \varphi_4 - I_2 R_2 ; \\ \varphi_6 = \varphi_5 + E_3 ; & \varphi_1 = \varphi_6 - I_3 R_3 . \end{array} \right\} (46)$$

Внутрішні опори джерел ЕРС прийняті рівними нулю , тому при переході через ці елементи потенціали змінюються стрибками .

## § 22 Розгалужене електричне коло з двома вузлами

Розгалужене електричне коло з двома вузлами складається з декількох віток. Вітки , які приєднані до двох вузлів , включаються паралельно (рис.25).

Особливістю паралельного з'єднання є те , що до всіх віток прикладається одна і та ж напруга .

### Паралельне з'єднання пасивних елементів

Приймачі електричної енергії , які зображені на рис. 25 опорами  $R_1, R_2, R_3$  підключені до двох вузлів (точки А і Б) , приєднаних до джерел електричної енергії з напругою  $U$  .

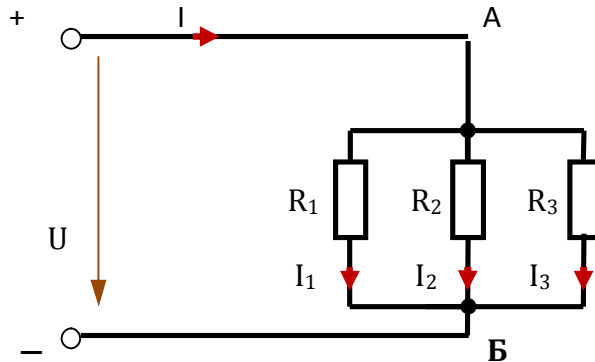


Рис . 25

У відповідності з першим законом Кірхгофа :  $I = I_1 + I_2 + I_3$  (47)

Струми приймачів можна виразити , використовуючи напругу між вузлами і провідності віток :

$$I_1 = UG_1 ; \quad I_2 = UG_2 ; \quad I_3 = UG_3 \quad , \quad (48)$$

де  $G_1 = 1 / R_1 \quad G_2 = 1 / R_2 \quad G_3 = 1 / R_3$  (49)

$$I = UG_1 + UG_2 + UG_3 = U(G_1 + G_2 + G_3), \quad (50)$$

Якщо поділити це рівняння на  $U$  то получимо :

$$I/U = G_1 + G_2 + G_3 \quad (51)$$

Відношення  $I/U$  — це провідність всього кола  $G$ , тоді :

$$G = G_1 + G_2 + G_3. \quad (52)$$

Цей випадок розповсюджується на любую кількість  $n$  паралельно з'єднаних приймачів :

$$G = \sum_1^n G_n. \quad (53)$$

При паралельному з'єднанні пасивних віток загальна провідність між двома вузлами дорівнює сумі провідностей всіх віток.

Якщо три провідності  $G_1$ ,  $G_2$  і  $G_3$  замінити однієї  $G$ , то можна получить більш просту схему (рис.26).

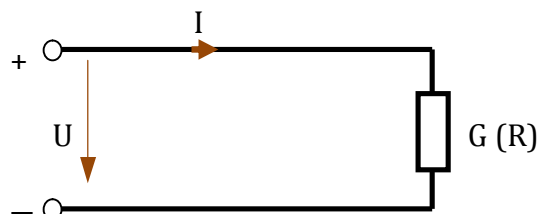


Рис . 26

Еквівалентний опір  $R$  при паралельному з'єднанні декількох віток визначається з рівняння :

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots + 1/R_n \quad (54)$$

У випадку паралельного з'єднання двох віток :

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 \quad \text{або} \quad R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \quad (55)$$

У випадку паралельного випадку трьох віток :

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3, \quad \text{або}$$

$$R = R_1 R_2 R_3 / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) \quad (56)$$

Струми у схемі :

$$I = U / R ; \quad I_1 = U / R_1 ; \quad I_2 = U / R_2 ; \quad I_3 = U / R_3 . \quad (57)$$

### Паралельне з'єднання джерел електричної енергії .

В практиці , часто , виникає необхідність паралельного включення джерел електричної енергії , які працюють сумісно на один або декілька приймачів (рис.27).

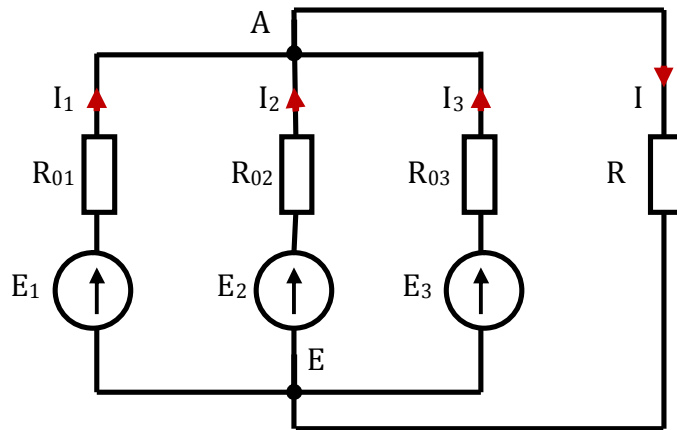


Рис . 27

$R_{01} , R_{02} , R_{03}$  — внутрішні опори джерел  $E_1 , E_2 , E_3$  .

Паралельне з'єднання джерел електричної енергії застосовується в тих випадках , коли струм приймача більше номінального струму одного джерела . Джерела з відносно великою ЕРС і меншим внутрішнім опором мають більший струм (приймають на себе більше навантаження) . Якщо ЕРС і внутрішні опори джерел однакові , то навантаження поміж ними розподіляється порівну .

Загальний струм в цьому випадку визначається добутком струму одного  $I_n$  джерела на кількість паралельно включених джерел :

$$I = I_n p \quad (58)$$

Кількість паралельно зєднаних джерел  $p$  повина бути не менше відношення

$$I / I_n \quad (p \geq I / I_n) \quad (59)$$

При паралельному з'єднанні позитивні затиски джерел з'єднуються в один вузол , а негативні — в інший . При однакових ЕРС і однакових внутрішніх опорах загальна ЕРС дорівнює ЕРС одного джерела , а еквівалентний опір

$$R_{oe} = R_o / p \quad (60)$$

### Змішане з'єднання джерел електричної енергії

Змішане з'єднання джерел — це сполучення послідовного і паралельного з'єднань

джерел (рис.28) .

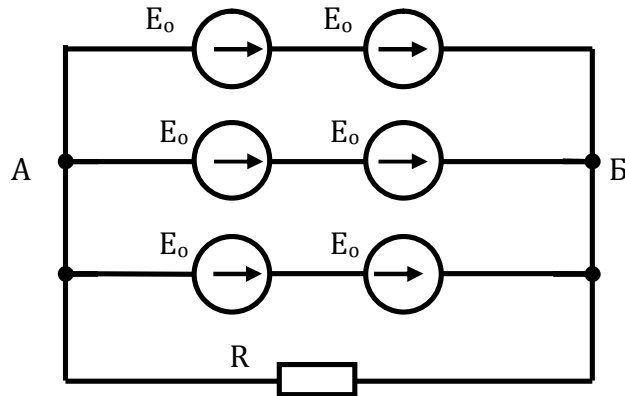


Рис . 28

Воно застосовується в тому випадку , якщо напруга і струм приймача більше  $U_n$  і  $I_n$  одного джерела . Кількість послідовно з'єднаних джерел в вітці і кількість паралельних віток з джерелами визначаються з формул , які були надані для послідовного та паралельного з'єднань джерел електричної енергії .

**Загальний випадок паралельного з'єднання джерел та приймачів електричної енергії .**

Висновки та формули , які були одержані раніше , можуть бути застосовані для розрахунку електричних кіл з двома вузлами , між якими міститься люба кількість паралельних віток з джерелами і приймачами енергії , в тому числі і такі вітки , які мають декілька елементів , з'єднаних послідовно (наприклад , схема зображена на рис.29)

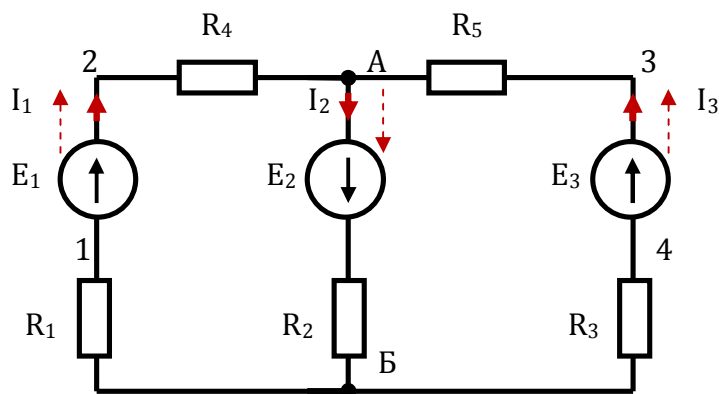


Рис . 29

Порядок розрахунку таких кіл передбачає попереднє визначення напруги між вузловими точками і має назву метод вузлової напруги .

Для застосування цього метода повинні бути задані ЕРС джерел і провідності віток (останні можна визначити , якщо задані опори елементів кожної вітки) .

В загальному випадку струми та ЕРС можуть мати різний напрям , тому при визначенні вузлової напруги треба взяти алгебраїчну сумму добутку EG :

$$U_{AB} = \sum EG / \sum G \quad (61)$$

Знак ЕРС установлюється у відповідності з позитивним напрямом струму в вітках, який вибирається довільно, но однаковий для всіх віток (наприклад, від Б до А). ЕРС вітки визначають позитивною, якщо її напрям збігається з позитивним напрямом струму. В протилежному випадку ЕРС підставляють зі знаком мінус в формулу, а також при визначенні струмів.

### Змішане з'єднання пасивних елементів.

Змішаним з'єднанням називається послідовно-паралельне з'єднання пасивних елементів, або ділянок кола, кожний з яких в свою чергу може складатися із послідовних або паралельно з'єднаних пасивних елементів.

На рис. 30 зображена схема змішаного з'єднання резисторів.

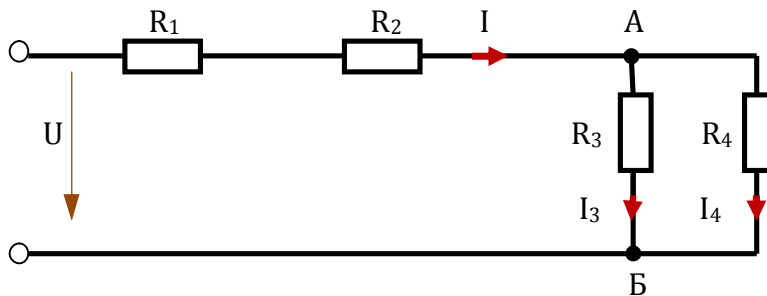


Рис. 30

Розрахунок такого кола при заданій ЕРС або напрузі джерела живлення і відомих опорах резисторів полягає в знаходженні струмів і напруг на всіх ділянках кола.

При розрахунку кола із змішаним з'єднанням резисторів користуються методом послідовного спрощення (згортання) схеми.

Застосовую цей метод, спочатку визначають еквівалентний опір розгалуженої ділянки кола:

$$R_{AB} = R_3 R_4 / (R_3 + R_4) \quad (62)$$

Тепер задане коло можна зобразити схемою, яка складається із трьох послідовно з'єднаних опорів (рис.31)

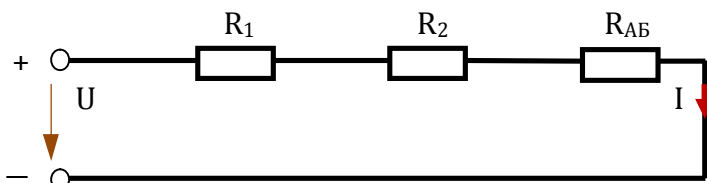


Рис. 31

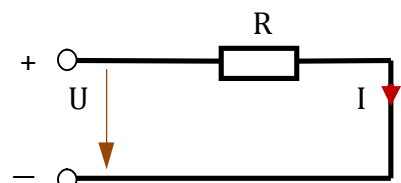


Рис. 32



Еквівалентний опір цього кола :

$$R = R_1 + R_2 + R_{AB} \quad (\text{рис. 32}) \quad (63)$$

По закону Ома струм кола :

$$I = U / R \quad (64)$$

Напруги на послідовно з'єднаних ділянках кола :

$$U_1 = IR_1; \quad U_2 = IR_2; \quad U_{AB} = IR_{AB} \quad (65)$$

Струми в паралельних вітках :

$$I_3 = U_{AB} / R_3; \quad I_4 = U_{AB} / R_4 \quad (66)$$

### § 23 Розрахунок електричних кіл шляхом перетворення їх схем

Електричні кола, які складаються з приймачів енергії (резисторів), з'єднаних послідовно, паралельно або змішано при живленні їх від одного джерела електричної енергії, а також кола, які мають один контур називають простими колами. При заданих ЕРС (напругах), джерел живлення і опорах струми та напруги на всіх ділянках простого кола можна визначити, користуючись законами Ома та Кірхгофа.

#### Метод перетворення трикутника і зірки опорів.

Пасивні елементи в електричних колах з'єднуються не тільки послідовно або паралельно. В багатьох схемах можна виділити групи із трьох елементів, які створюють трикутник (рис. 33), або зірку (рис. 34).

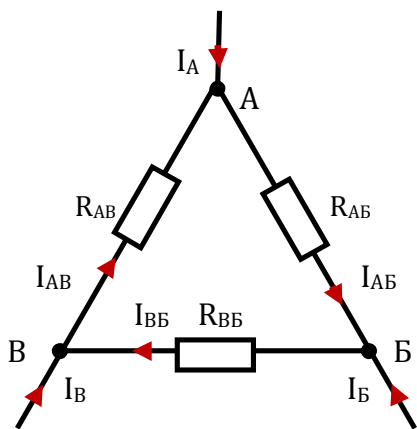


Рис . 33

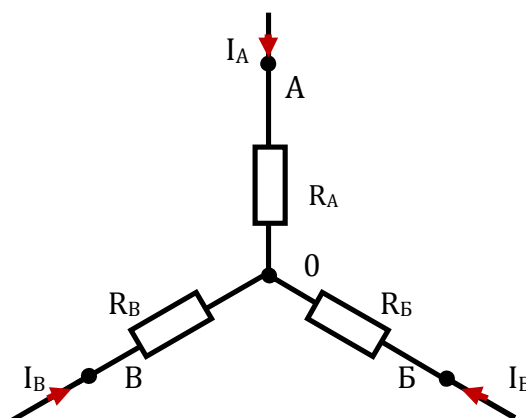


Рис . 34

В таких колах розрахунок значно спрощується, якщо трикутник опорів замінити зіркою опорів з загальним вузлом  $O$ , або навпаки. Ці заміни повинні бути еквівалентними, тобто, при відповідно рівних напругах між вершинами  $A, B$  і  $C$  трикутника і зірки струми  $I_A, I_B, I_C$  в проводах, з'єднуючих ці вершини з іншою частиною кола, повинні залишитися без змін.

Опори еквівалентної трьохпроменевої зірки по відомим опорам еквівалентного трикутника визначаються по формулам:

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{AB}R_{CA} / (R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}) \\ R_B &= R_{AB}R_{BC} / (R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}) \\ R_C &= R_{CA}R_{BC} / (R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}) \end{aligned} \right\} (67)$$

Опір проміння еквівалентної зірки дорівнює добутку опорів двох сторін трикутника до цієї вершини, що і промінь зірки, поділений на суму опорів всіх сторін трикутника. Якщо опори трикутника дорівнюють один одному:  $R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = R_{\Delta}$ , то будуть дорівнювати один одному і опори зірки:  $R_A = R_B = R_C = R_Y$ , причому із приведених вище формул слідує, що  $R_Y = R_{\Delta} / 3$ .

При зворотньому перетворенні зірки в еквівалентний трикутник, тобто при заданих опорах  $R_A, R_B, R_C$  опори сторін еквівалентного трикутника визначаються з формул:

$$\left. \begin{aligned} R_{AB} &= (R_A + R_B) + R_A R_B / R_C \\ R_{BC} &= (R_B + R_C) + R_B R_C / R_A \\ R_{CA} &= (R_C + R_A) + R_C R_A / R_B \end{aligned} \right\} (68)$$

Опори сторін еквівалентного трикутника дорівнюють сумі опорів двох променів зірки, приєднаних до тих же вершин, що і сторони трикутника і їх добутку, поділеного на опір третього проміння зірки.

## § 24 Розрахунок складних електричних кіл за допомогою законів Кірхгофа (метод вузлових і контурних рівнянь)

Любе складне коло можна розрахувати, застосувавши два закона Кірхгофа. Якщо для розглядаємого кола задані величини всіх ЕРС і опорів, то для знаходження всіх струмів треба стільки розрахункових рівнянь, скільки у колі невідомих струмів (по кількості віток). При цьому кількість незалежних вузлових рівнянь, які складаються по першому закону Кірхгофа, повинна бути на одиницю менше кількості вузлів кола. Інші рівняння складаються по другому закону Кірхгофа для контурів електричного кола. Рівняння по другому

закону Кірхгофа рекомендується складати для більш простих контурів з меншим числом резисторів та джерел живлення. Крім того, кожний новий контур, для якого складається рівняння, повинен мати не менше однієї вітки, яка не входить в контури, для яких вже складені рівняння.

Розглянемо як визначаються струми у вітках складного кола на прикладі наступної схеми (рис.35).

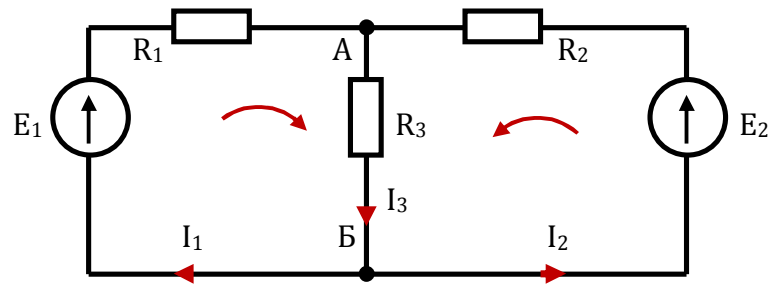


Рис . 35

Напрямок струмів можна вибирати довільно і при розрахунку їх вважають позитивними. На схемі їх показують стрілками. Якщо, після розрахунку, значення будь якого струму стане негативним, то в дійсності струм проходить в напрямку протилежному вибраному і показаному на схемі.

Так як задана схема має два вузли \$A\$ і \$B\$, то по першому закону Кірхгофа необхідно скласти одне рівняння для кожного з вузлів. Складаємо рівняння по першому закону Кірхгофа для вузла \$A\$:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (69)$$

Так як кількість невідомих, для розглядаємого кола, дорівнює трьом, то необхідно мати три незалежних рівняння. Тому по другому закону Кірхгофа необхідно скласти два рівняння для двох, будь-яких, незалежних контурів.

Складаємо рівняння по другому закону Кірхгофа для контурів \$ABCA\$ і \$ABDA\$, попередньо вибрав напрями обходу контурів, як показано на схемі.

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= I_1 R_1 + I_3 R_3 \\ E_2 &= I_2 R_2 + I_3 R_3 \end{aligned} \right\} (70)$$

Маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ E_1 &= I_1 R_1 + I_3 R_3 \\ E_2 &= I_2 R_2 - I_3 R_3 \end{aligned} \right\} (71)$$

Вирішив цю систему можна визначити струми  $I_1, I_2, I_3$ .

Точність виконаного розрахунку можна перевірити склавши баланс потужностей :

$$\sum EI = \sum I^2 R$$

Рівняння балансу потужностей складається для дійсних напрямів струмів .

## § 25 Метод контурних струмів

Метод контурних струмів потребує меншого числа розрахункових рівнянь у порівнянні з методом вузлових і контурних рівнянь і тому скорочує розрахунки кіл . Він заснований на застосуванні другого закону Кірхгофа .

Розглянемо метод контурних струмів на прикладі схеми , яка зображена на рис.36

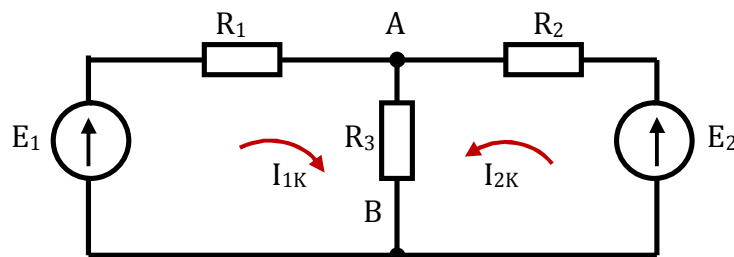


Рис . 36

Для розрахунку струмів в заданому колі контури вибирають так як і при складанні рівнянь по другому закону Кірхгофа . На зображеній схемі (рис.36) вибрані контури АБВА та АБГА і для кожного з них довільно задаються напрямом струму , який замикається в цьому контурі (для контура АБВА по годинниковій стрільці , а для контура АБГА — проти годинникової стрілки) . Ці струми називають контурними струмами ( $I_{2K}, I_{1K}$  — контурні струми) . Для кожного контура складається рівняння по другому закону Кірхгофа , причому за напрям обходу контура приймається напрям , який збігається з напрямом контурного струму . Число незалежних рівнянь по другому закону Кірхгофа дорівнює кількості незалежних контурів :

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= I_{1K} (R_1 + R_3) + I_{2K} R_3 \\ E_2 &= I_{2K} (R_2 + R_3) + I_{1K} R_3 \end{aligned} \right\} (72)$$

В праву частину цих рівнянь входить ЕРС джерел , які зустрічаються при обході даного контура . Алгебраїчна сума ЕРС даного контуру називається контурною ЕРС . Для розглядаємої схеми :

$$E_{1K} = E_1; \quad E_{2K} = E_2 \quad (73)$$

В ліву частину рівнянь входять падіння напруг, які обусловлені контурними струмами. Сума опорів всіх віток, які входять в даний контур, називається власним опором контура. Для розглядаємлі схеми для контурів АБВА та АБГА власні контури відповідно:

$$\left. \begin{aligned} R_{1K} &= R_1 + R_3 \\ R_{2K} &= R_2 + R_3 \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Опори віток, які входять в два суміжних контура, називаються загальними опорами. В розглядаємій схемі такі опори  $R_{12} = R_{21} = R_3$ . З урахуванням цих понять рівняння будуть мати такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} E_{1K} &= I_{1K}R_{1K} + I_{2K}R_{12} \\ E_{2K} &= I_{2K}R_{2K} + I_{1K}R_{21} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Вирішуючи цю систему рівнянь визначають контурні струми. Контурні струми дорівнюють дійсним струмам віток, які належать тільки даним контурам:

$$I_1 = I_{1K}; \quad I_2 = I_{2K} \quad (76)$$

Дійсні струми в вітках схеми, які відносяться до двох суміжних контурів дорівнюють алгебраїчній сумі контурних струмів тих контурів, в які ця вітка входить:

$$I_3 = I_{1K} + I_{2K} \quad (77)$$

Для розглядаємої схеми замість трьох рівнянь по першому та другому законам Кірхгофа достатньо двох рівнянь з двома контурними струмами.

Порядок складання рівнянь з контурними струмами:

- В заданій схемі вибирають довільно напрями струмів;
- Для незалежних контурів вибирають напрям контурних струмів;
- Визначають контури ЕРС, власні та загальні опори контурів, обходячи контури в напрямку контурних струмів;
- Складають систему рівнянь контурних струмів;
- За допомогою контурних струмів визначають дійсні струми в вітках заданої схеми.

## § 26 Метод накладання струмів

В деяких випадках розрахунок складних лінійних кіл можна виконати відносно просто, застосовую принцип накладання. Суть принципа накладання полягає в тому, що струм в

якій – небудь вітці з лінійними опорами дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів , які створюються в цій вітці всіма по черзі діючими ЕРС .

Здійснює розрахунок із застосуванням принципу накладання спочатку розглядають коло у якому діє тільки перша ЕРС —  $E_1$  . Всі опори кола , включаючи і опори джерел ЕРС яких дорівнюють нулю , залишаються незмінними . Для такого кола знаходять часткові струми у всіх вітках . Потім розрахунок повторюють для кола у якому діє тільки друга ЕРС —  $E_2$  . Аналогічні розрахунки здійснюють по черзі для всіх джерел електричної енергії . Таким чином , для кожної вітки , отримується стільки часткових струмів скільки джерел має коло .

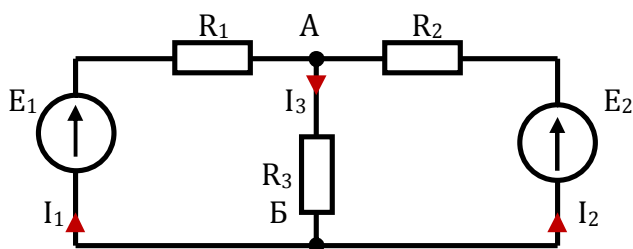


Рис . 37

Алгебраїчна сума цих часткових струмів дорівнює струму  $I$  в вітці при одночасній дії всіх джерел :

$$I = I' + I'' + I''' + \dots \quad (78)$$

де  $I'$  ,  $I''$  ,  $I'''$  — часткові струми

Розглянемо розрахунок методом накладання струмів на прикладі схеми зображеної на рис. 37.

Розглянемо спочатку коло в якому діє ЕРС —  $E_1$  (Рис .38)

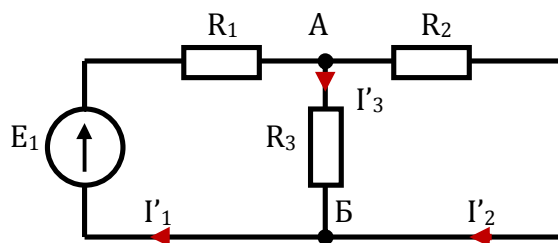


Рис . 38

Визначаємо часткові струми в цій схемі :

$$\begin{aligned} I'_1 &= E_1 / R' ; & R' &= R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3) ; \\ I'_2 &= U_{AB} / R_2 ; & I'_3 &= U'_{AB} / R_3 ; & U'_{AB} &= E_1 - I_1 R_1 . \end{aligned} \quad (79)$$

Потім розглядаємо коло , в якому діє тільки ЕРС —  $E_2$  (рис.39)

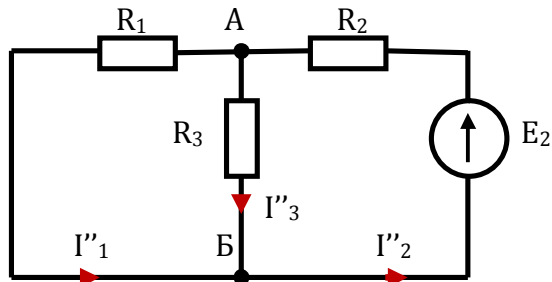


Рис. 39

Визначаємо часткові струми для цієї схеми :

$$\begin{aligned} I''_1 &= E_2 / R'' ; & R'' &= R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3) ; \\ I''_2 &= U''_{AB} / R_1 ; & I''_3 &= U''_{AB} / R_3 ; & U''_{AB} &= E_2 - I''_2 R_2 . \end{aligned} \quad (80)$$

Струм в вітках заданої схеми (рис. 37) знаходимо як алгебричні суми часткових струмів :

$$I_1 = I'_1 - I''_1 ; \quad I_2 = I'_2 - I''_2 ; \quad I_3 = I'_3 - I''_3 \quad (81)$$

Знак , який ставиться перед частковим струмом , залежить від того співпадає напрям часткових струмів (рис.38 , рис.39) з вибраними напрямками струму в вітках (рис. 37) , або протилежний йому .

## § 27 Метод еквівалентного генератора

Під час розрахунку електричних кіл може виникнути необхідність визначити струми не всіх віток , а лише однієї , або дослідити електричне коло при зміні параметрів однієї вітки . На вирішення цієї задачі спрямований метод еквівалентного генератора , згідно з яким все електричне коло , за виключенням вітки з опором  $R$  , в якій необхідно визначити величину струму  $I$  замінюється еквівалентним генератором з ЕРС , рівною  $E_r$  і внутрішнім опором  $R_r$  (рис. 40).

Для визначення  $E_r$  необхідно будь яким методом розрахувати електричне коло за умови , що вітка , у якій необхідно знайти струм , розімкнена , і знайти напругу між вузла-

ми, до яких під'єднана ця вітка. Це і буде ЕРС —  $E_r$ . Внутрішній опір еквівалентного генератора  $R_r$  визначається шляхом еквівалентних перетворень електричного кола стосовно вузлів, до яких під'єднана вітка з шуканим струмом, за умови, що всі джерела ЕРС замкнені, а всі джерела струму розімкнені.

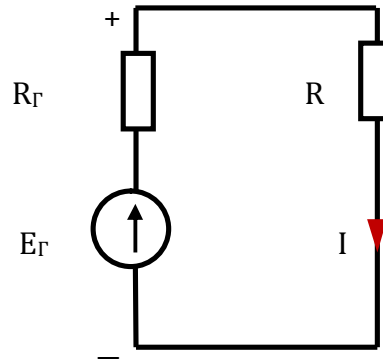


Рис .40

Іншими словами, необхідно знайти вхідний опір схеми, стосовно вузлів, до яких під'єднана вітка, в якій необхідно визначити струм. Обчисливши  $E_r$  та  $R_r$ , під'єднуємо цю вітку до затискачів еквівалентного генератора і розрахуємо просте електричне коло:

$$I = E_r / (R + R_r) \quad (82)$$

### § 28 Метод вузлової напруги (метод двох вузлів)

Метод вузлової напруги дає можливість більш просто, по зрівнянню з іншими методами, визначити струми в колі з двома вузлами (рис. 41).

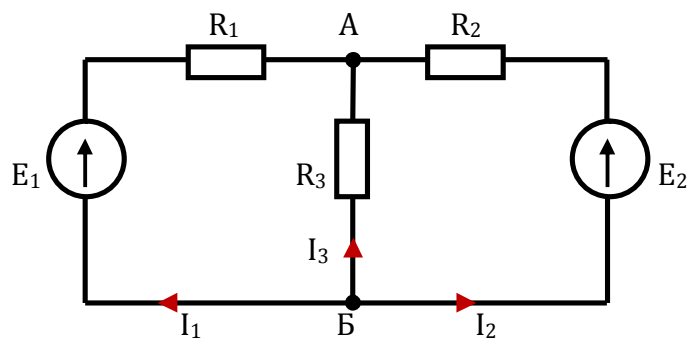


Рис . 41



При розрахунку цим методом за позитивні напрями струмів у всіх вітках приймаємо напрям від вузла Б до вузла А .

Спочатку визначають вузлову напругу  $U_{AB}$  між двома вузлами А і Б . В загальному випадку :

$$\sum(E / G) / \sum G \quad (83)$$

Вузлова напруга  $U$  дорівнює відношенню алгебричній сумі добутків ЕРС на провідності відповідних віток до суми провідностей всіх віток . Якщо яка-небудь ЕРС має протилежний напрям , то в формулу (1) вона входить зі знаком «-» .

Для заданої схеми :

$$U_{AB} = (E_1 G_1 + E_2 G_2) / (G_1 + G_2 + G_3) \quad (84)$$

Знайшовши вузлову напругу можна визначити струми у всіх вітках схеми :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (E_1 - U_{AB})G_1 \quad (2) \\ I_2 &= (E_2 - U_{AB})G_2 \quad (3) \\ I_3 &= (0 - U_{AB})G_3 \quad (4) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Якщо , яка – небудь ЕРС має протилежний напрям , то в формулі (2) і (3) вона входить зі знаком «-» .

## **ПФ.С.02.ПП.Р.09.09 Нелінійні кола постійного струму**

### **§ 29 Нелінійні елементи кіл постійного струму**

Нелінійним елементом називається елемент електричного кола , опір якого залежить від струму в ньому або напруги на його затисках . Електричне коло називається нелінійним при наявності одного або декількох нелінійних елементів .

Залежність напруги на будь якому елементі від струму в ньому  $U(I)$  , або залежність струму від напруги  $I(U)$  називається вольт – амперною характеристикою .

Для лінійних пасивних елементів вольт – амперна характеристика визначається прямою , яка проходить через початок координат (пряма 1 , рис.30) . Для нелінійного елемента вона непряма (криві 2 і 3 , рис.42) .

Приклади нелінійних елементів : електронні лампи , електровакуумні прилади, газорозрядні прилади , фотоеlementи , напівпровідникові прилади .

Нелінійні елементи дають змогу реалізувати процеси, що не можуть проходити у лінійних колах. Наприклад, нелінійні елементи дозволяють стабілізувати напругу та електричний струм, підсилювати струм та інше. Нелінійні елементи бувають керованими та некерованими. Некеровані нелінійні елементи мають одну вольт-амперну характеристику, керовані — сім'ю характеристик. Параметром цих характеристик є керуючий чинник.

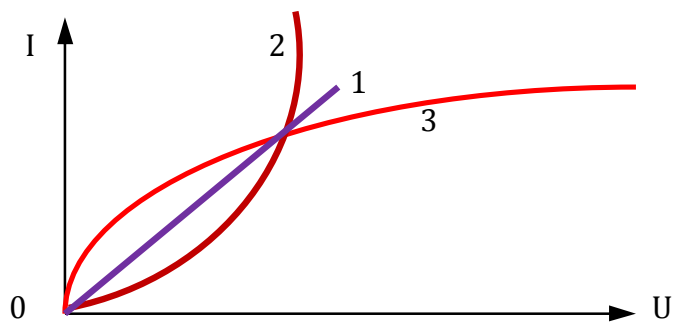


Рис .42

Характеристики поділяються на симетричні та несиметричні відносно осей координат. На рис . 43 характеристика а — симетрична, характеристика в — несиметрична. Елементи з симетричними характеристиками застосовуються у колах постійного та змінного струмів.

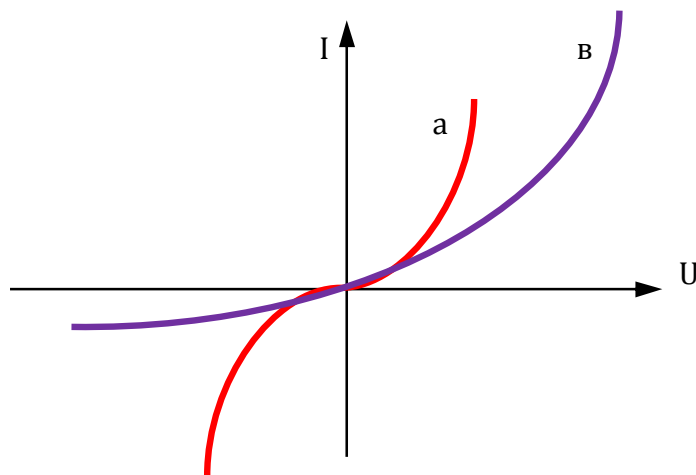


Рис . 43

Для нелінійних електричних кіл залишаються справедливими закони Ома і Кірхгофа.

Проте розглянуті раніше методи розрахунку для нелінійних кіл безпосередньо застосовувати не можна. Нелінійні кола розраховують двома методами: графічним та аналітичним. Аналітичний розрахунок можна виконати лише за умовою, що вольт-амперні

характеристики нелінійних елементів виражаються відносно простими рівняннями  $I = f(U)$ , крім того характеристики деяких нелінійних елементів, в визначеному інтервалі зміни напруг і струму, прямолінійні або близькі до прямої. В таких випадках можна скласти для нелінійного елемента еквівалентну схему заміщення з лінійними елементами і ввести її в аналітичний розрахунок. Після заміни нелінійних елементів еквівалентними схемами заміщення з лінійними елементами нелінійне коло можна розрахувати одним із методів, застосовуваних для розрахунку лінійних кіл.

### § 30 Еквівалентні схеми найпростіших нелінійних кіл. Поняття про статичний та динамічний опори нелінійного елемента

У нелінійних елементах розрізняють статичний та динамічний опори (рис. 44)

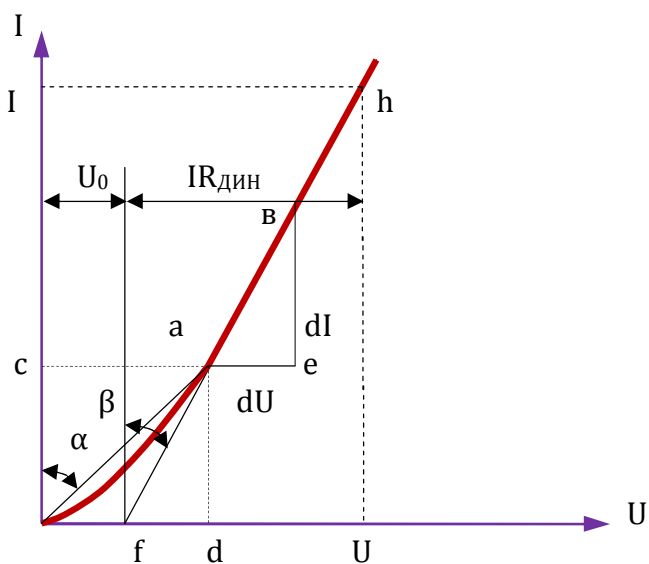


Рис. 44

Статичним опором у даній точці а вольт–амперної характеристик називають відношення напруги до струму, які відповідають цій точці:

$$R_{СТ} = U_a / I_a = \overline{m_u} \overline{od} / \overline{m_i} \overline{oc} = m_R \operatorname{tg} \alpha \quad (86),$$

де  $m_u$  і  $m_i$  — масштаби напруги і струму;

$$m_R = m_u / m_i \text{ — масштаб опору} \quad (87)$$

Динамічний опір в точці а визначається відношенням нескінченно малих приростів напруги  $dU$  і струму  $dI$  :

$$R_{\text{дин}} = dU / dI \approx \overline{m_{\text{ц}} ac} / \overline{m_{\text{і}} bc} = m_R \operatorname{tg} \varphi \quad (88)$$

Динамічний опір пропорційний тангенсу кута нахилу дотичної до вольт - амперної характеристики в точці а .

### Приведення нелінійних кіл до лінійних

Якщо продовжити лінійну ділянку  $h - b - a$  характеристики до перетину з віссю напруг , то вона перетне її в точці  $f$  . Відрізок  $of$  в прийнятому масштабі напруг виражає постійну напругу  $U_0$  . З рис. 43 наступне , що в будь якій точці  $h$  прямолінійної частини вольт - амперної частині характеристики напруга складається із постійної напруги  $U_0$  і частини , яка змінюється , визначаємої добутком струму і динамічного опору  $IR_{\text{дин}}$  . Пряма  $fh$  визначається рівнянням :

$$U = U_0 + IR_{\text{дин}} \quad (89)$$

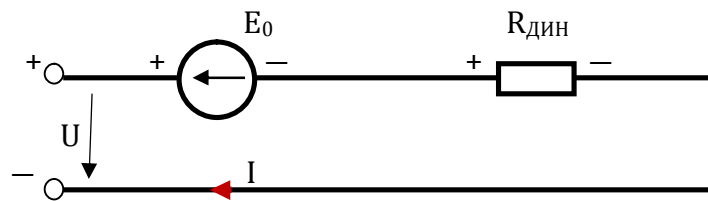


Рис . 45

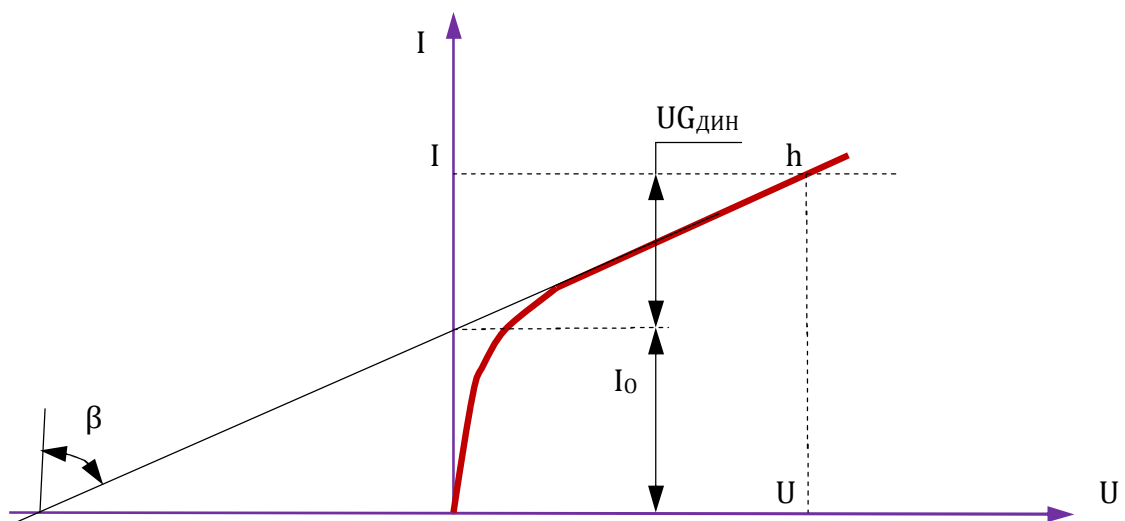


Рис .46

На основі рівняння (7) нелінійний елемент можна подати схемою послідовного з'єднання (рис. 45) При цьому  $U = E_o + IR_{дин}$  (90)

Аналогічну схему заміщення можна отримати для нелінійного елемента з вольт-амперною характеристикою, повернуту опуклістю до осі струмів (рис. 46).

ЕРС  $E_o$  в цьому випадку буде направлена по напрямку струму.

Нелінійний елемент з такою характеристикою можна подати схемою паралельного з'єднання джерела струму і динамічної провідності  $G_{дин}$  (рис. 47)

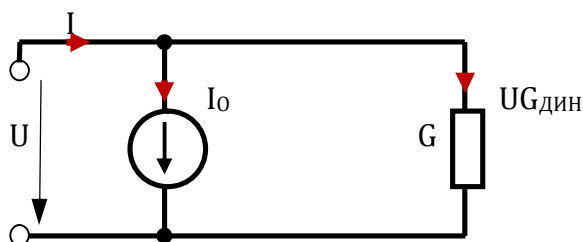


Рис . 47

В лінійній частині характеристики цієї схеми струм можна визначити :

$$I = I_o + UG_{дин} \quad (91)$$

Після заміни нелінійних елементів еквівалентними схемами заміщення з лінійними елементами нелінійне коло можна розрахувати одним із методів, застосовуваних для розрахунку лінійних кіл.

### Нелінійний активний двополюсник .

Нелінійний елемент, вольт-амперна характеристика якого не проходить через початок координат (рис. 48), можна зобразити схемою послідовного з'єднання постійної ЕРС та нелінійного опору.

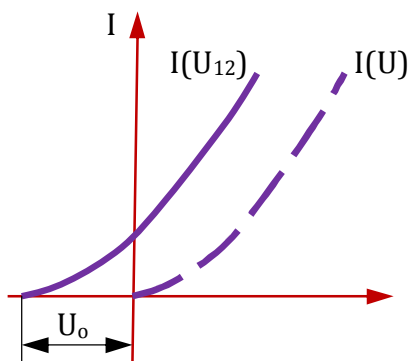


Рис .48

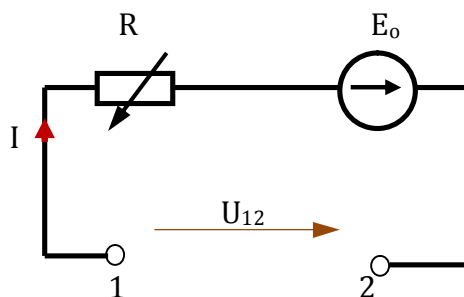


Рис . 49

Якщо характеристику нелінійного елемента перенести так, щоб вона проходила через початок координат, то будемо мати залежність  $I(U)$  нелінійного опору еквівалентної схеми, в яку крім цього нелінійного опору послідовно включено джерело ЕРС —  $E_0$ .

Еквівалентна схема (рис. 49) зображає активний двополюсник, для якого справедливе рівняння по другому закону Кірхгофа. У данному випадку

$$U_{12} = -U_0 + U(I); \quad U_{12} = -E_0 + U(I) \quad (92)$$

Цю схему вводити в аналітичний розрахунок не можна, так як вона замикається нелінійною, но її можна використати для спрощення більш складної схеми, в яку вона входить як частина.

### § 31 Графічний розрахунок нелінійних кіл при послідовному, паралельно-му та змішаному з'єднанні нелінійних елементів

#### Послідовне з'єднання двох нелінійних елементів.

Для розрахунку кола, зображеного на рис. 50, вибрав масштаби для струму і напруги, будують в загальній системі координат загальні вольт-амперні характеристики елементів  $I(U_1)$  і  $I(U_2)$  (рис.51).

Далі будують загальну вольт амперну характеристику для всього кола, яке виражає залежність струму у колі від загальної напруги.

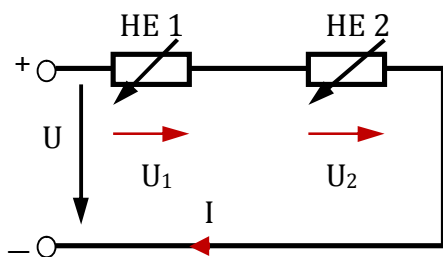


Рис. 50

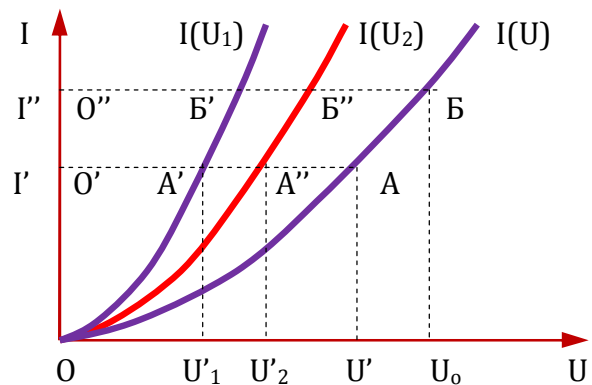


Рис. 51

Струм  $I$  обох ділянок кола однаковий, а загальна напруга  $U = U_1 + U_2$ .

Для побудови загальної вольт–амперної характеристики необхідно скласти абсциси вихідних кривих, які відповідають одному і тому ж струму. Одержуємо абсциси вольт–амперної характеристики всього кола  $I(U)$ .

Наприклад, складаючи абсциси  $O'A'$  та  $O'A''$  одержуємо абсцису  $O'A$ , яка виявляє собою напругу на затисках кола  $U' = U'_1 + U'_2$  при струмі  $I'$ . Аналогічно, задаваясь іншими значеннями сили струму, знаходимо відповідні точки через які проходять вольт–амперні характеристики кола.

Одержана вольт–амперна характеристика  $I(U)$  дає можливість по заданій напрузі знайти силу струму в колі і напруги на нелінійних елементах. Наприклад, при заданій напрузі живлення  $U_0$ , зображеній відрізками  $O'B$ , сила струму в колі буде мати значення  $I'$ , відрізок  $OO''$  (напруга на першому нелінійному елементі) зображається відрізком  $O'B'$ , а на другому — відрізком  $O''B''$ . Аналогічні побудови можна виконати і в тому випадку, коли один із елементів лінійний, або коли з'єднано більше двох нелінійних елементів.

### Паралельне з'єднання двох нелінійних елементів.

При паралельному з'єднанні двох нелінійних елементів (рис. 52) до них прикладена одна і та ж напруга, а струм в нерозгалуженій частині кола дорівнює сумі струмів в вітках:

$$I = I_1 + I_2$$

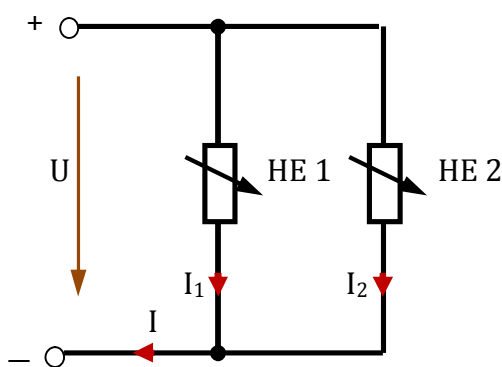


Рис . 52

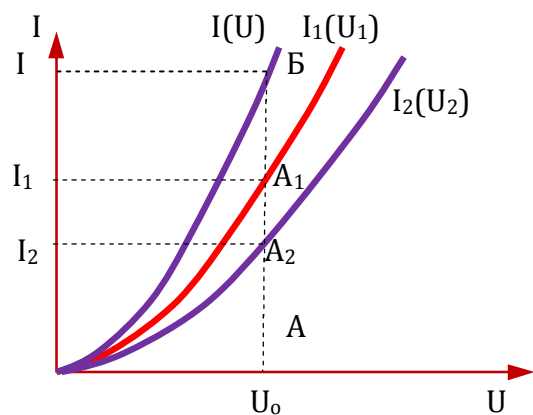


Рис . 53

Для побудови загальної вольт–амперної характеристики  $I(U)$  необхідно для ряду значень  $U$  скласти ординати вольт–амперних характеристик елементів, як показано на рис. 53.

Розрахунок такого кола, при заданих напругах живлення  $U$  і вольт–амперних характер-

ристикях  $I_1(U_1)$  і  $I_2(U_2)$  зводиться до визначення по цим характеристикам струмів  $I_1$  і  $I_2$  в вітках , так як

$$U_1 = U_2 = U_0 .$$

Відклавши по осі абсцис задану напругу  $U_0$  (відрізок  $OA$ ) і відновивши перпендикуляр з точки  $A_1$  знаходимо відрізок  $AA_1$  та  $AA_2$  , які відображають струми  $I_1$  та  $I_2$  .

Струм в нерозгалуженій частині кола дорівнює сумі струмів в вітках :

$$I = I_1 + I_2$$

Якщо треба знайти струми  $I_1$  та  $I_2$  по заданому струму  $I$  , в нерозгалуженій частині кола , то необхідно побудувати загальну вольт – амперну характеристику  $I(U)$  .

При загальному струмі  $I$  (точка  $B$  на загальній вольт – амперній характеристиці) знаходимо напругу :  $U_0 = U_1 = U_2$  (точка  $A$ ) і струми  $I_1$  і  $I_2$  (точка  $A_1$  і  $A_2$ ) .

Аналогічно вирішуються задачі при паралельному з'єднанні нелінійного елемента з лінійним , а також при більшій кількості лінійних та нелінійних елементів .

### **Змішане з'єднання нелінійних елементів .**

При змішаному з'єднанні нелінійних елементів рис.54) графічний розрахунок кола здійснюється методом «згортання» схеми . Спочатку по заданим вольт – амперним характеристикам паралельних віток  $I_2(U_{23})$  і  $I_3(U_{23})$  , які показані на рис. 55 , знаходимо вольт – амперну характеристику розгалуженої ділянки  $I_1(U_{23})$  . Для цього складаємо ординати вольт – амперних характеристик віток , які відповідають одним і тим же значенням напруги . Сумарна ордината  $I_1(U_{23})$   $O'B = O'A + O'B$  відповідає обчисленню суммарного струму в нерозгалуженій ділянки кола :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Вольт - амперна характеристика  $I_1(U_{23})$  визначає собою залежність сумарного струму паралельних віток від загальної напруги між вузлами 2 і 3 ( $U_{23} = U_2 = U_3$ ) .

Далі по вольт – амперній характеристикі  $I_1(U_{23})$  і вольт – амперній характеристикі  $I_1(U_1)$  першого елемента знаходимо вольт – амперну характеристику послідовно з'єднаних ділянок , які відповідають одним і тим же значенням струму . Знаходження сумарної абсциси ( $GE = GD + GV$ ) відповідає визначення сумарної напруги послідовно з'єднаних ділянок , рівного напрузі живлення ( $U = U_1 + U_{23}$ ) .

Якщо напруга  $U$  задана , то відклавши на осі абсцис відрізок  $OO''$  , якій зображає  $U$  по загальній вольт – амперній характеристикі  $I(U)$  знаходимо струм  $I_1 = I$  , зображений



відрізком  $O'E = OG$ . Потім, визначивши точку перерізу В горизонтальної прямої  $GE$  з вольт – амперною характеристикою  $I_1(U_{23})$  знаходимо напругу на розгалуженні  $U_{23}$  (відрізок  $OO' = GB$ ) і відмітивши точки А і Б, струми в вітках  $I_2$  (відрізок  $O'A$ ) і  $I_3$  (відрізок  $O'B$ ).

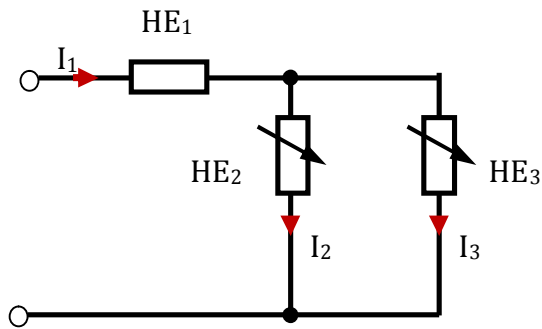


Рис . 54

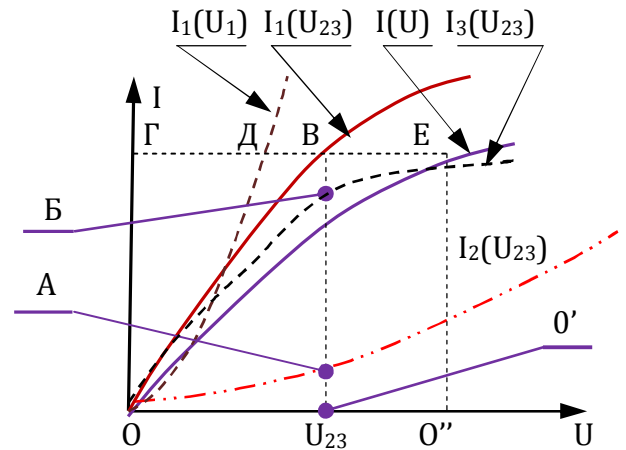


Рис . 55

## ПН – 25 . Електромагнетизм і електромагнітна індукція

### ПФ.С.02.ПП.Р.09.10 Магнітне поле

Магнітним полем називається одна з двох сторін електромагнітного поля , яке збуджується електричними зарядами , рухаючися частинок і зміною електричного поля і яка характеризується силовою дією на рухаючіся заряджені частинки , а отже і на електричні струми .

В просторі , який оточує електричні струми , створюються магнітні поля . Магнітне поле виявляється дякуючи магнітним явищам : притяганню і відштовхуванню проводів зі струмами або намагнічених тіл , дії проводника зі струмом на магнітну стрілку , електромагнітної індукції . Сили взаємодії магнітного поля з рухаючимися зарядженими частинками (струмами) називаються електромагнітними .

Вивчення магнітних явищ і розрахунки , які зв'язані з їх використанням , неможливі без кількісної оцінки магнітного поля .

Вибирая необхідну для цього величину , можна виходити із силової взаємодії двох проводів зі струмами .

## §32 Закон Ампера

Досвід показує, що на кожний з двох проводів діють сили, які притягують один до одного провoda з однаковим напрямом струмів і відштовхують провoda з протилежними напрямками струмів (рис. 56).

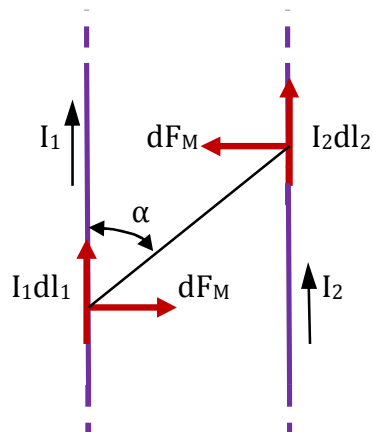


Рис. 56

Магнітні поля, обумовлені кожним із струмів, розташовані в одній і тій же області простору. Тому з відповідності з принципом накладання можна полагати, що обидва провoda оточені загальним магнітним полем, яке створюється в результаті накладання двох полів. Кожне поле зв'язано зі своїм струмом, коли відповідний провід відокремлений.

У такому випадку притягування або відштовхування проводів необхідно розглядати як результат силової дії загального магнітного поля на заряджені частинки, які створюють струм у кожному провіді.

Кількісні співвідношення для цього випадку визначаються законом Ампера, у відповідності з яким силова дія магнітного поля на заряджені частинки, які рухаються, розглядаються як взаємодія двох елементів лінійного струму.

Величина сили взаємодії між двома елементами лінійних струмів у вакуумі пропорційна добутку елементів лінійних струмів і обернено пропорційна квадрату між ними.

Елементом лінійного струму називається добуток  $Idl$ , де  $dl$  — довжина ділянки провoda зі струмом  $I$ , дуже мала (так же як і діаметр провoda) у порівнянні з відстанню від нього до точок, в яких розглядається магнітне поле струму  $I$ .

Якщо елементи лінійних струмів розташовані паралельно, то сила взаємодії між ними:

$$dF_m = \mu_0 I_1 dl_1 I_2 dl_2 \sin \alpha / 4\pi r^2 \quad (92),$$

де  $I_1 dl_1$ ;  $I_2 dl_2$  — елементи лінійних струмів;

$r$  — відстань між елементами ;

$\alpha$  — кут між напрямом одного із елементів лінійного струму і відрізком прямої  $r$ , проведеним від цього елемента до іншого ;

$\mu_0 / 4\pi$  — коефіцієнт пропорційності, величина якого визначається в залежності від системи одиниць ;

$\mu_0$  — магнітна стала .

В міжнародній системі одиниць (Si) магнітна стала :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн (генрі) / м (метр)} \quad (93)$$

Формула 92 та інші формули, які відносяться до магнітного поля в вакуумі справедливі і для магнітного поля в повітрі .

### § 33. Магнітна індукція

Магнітна індукція ( $B$ ) — векторна величина, яка характеризує магнітне поле і визначає силу, яка діє на рухому заряджену частинку, до добутку заряду  $Q$  і швидкості частинки, направленої так, що ця сила максимальна :

$$B = F_m / Qv \quad (94)$$

Напрямок вектора магнітної індукції перпендикулярний вектору сили і швидкості і збігається з поступальним переміщенням правого гвинта (або свердлика), якщо обертати його в напрямку від вектора сили до вектора швидкості частинки з позитивним зарядом .

Величина вектора  $B$  може бути визначена по механічній силі, яка діє на елемент провідника зі струмом, розміщений у магнітному полі :

$$B = F / IL ,$$

де  $L$  — довжина провідника

В Міжнародній системі одиниць (Si) за одиницю індукції магнітного поля приймається індукція такого поля, в якому на провідник зі струмом в 1 Ампер довжиною 1 метр діє сила 1 Ньютон .

$$\text{Н / Ам} = 1 \text{ Тл (Тесла)}$$

Ця одиниця названа на пошану сербського фізика Н.Тесли . Іноді магнітну індукцію вимірюють в Гс (Гаусах) . Ця одиниця названа на пошану німецького вченого К. Гауса .

### §34. Провідник зі струмом у магнітному полі

Великий практичний інтерес має вираження сили, яка діє на провідник зі струмом у рівномірному магнітному полі.

На рис. 57 показаний прямолінійний провід у просторі між полюсами постійного магніта або електромагніта (катушки со сталевим осередком), розташований так, що між напрямками вектора магнітної індукції  $B$  і струму у провіді  $I$ , кут  $\alpha = 90^\circ$ .

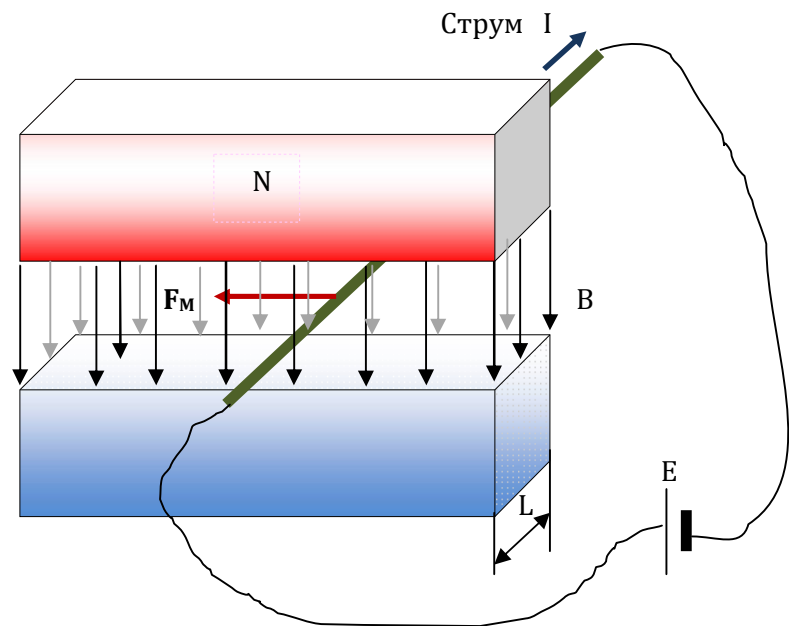


Рис. 57

У рівномірному магнітному полі на елемент довжини провода в будь-якому місці діє однакова електромагнітна сила:

$$F_M = B I L, \quad (95)$$

де  $B$  — магнітна індукція (Тл);

$I$  — струм в провіді, А

$L$  — довжина частини провода, розташованого в магнітному полі, м;

$F_M$  — величина електромагнітної сили, Н.

Якщо провід розташований так, що між напрямками вектора магнітної індукції поля і струму в провіді кут  $\alpha \neq 90^\circ$ , та електромагнітна сила визначається формулою:

$$F_m = BIl \sin \alpha \quad (96)$$

На провід зі струмом, розташованим вздовж ліній магнітної індукції, магнітне поле не діє.

Сила  $F_m$  направлена завжди перпендикулярно товщині, в якій лежить провід і знаходяться лінії магнітної індукції. Напрямок визначають з правила лівої руки: якщо розташувати ліву руку так, щоб витягнуті чотири пальці (крім великого) показували напрям струму у проводі, а лінії магнітної індукції «входили» в долоню, то великий палець, відігнутий перпендикулярно іншим чотирьом, покаже напрям електромагнітної сили (рис. 58).

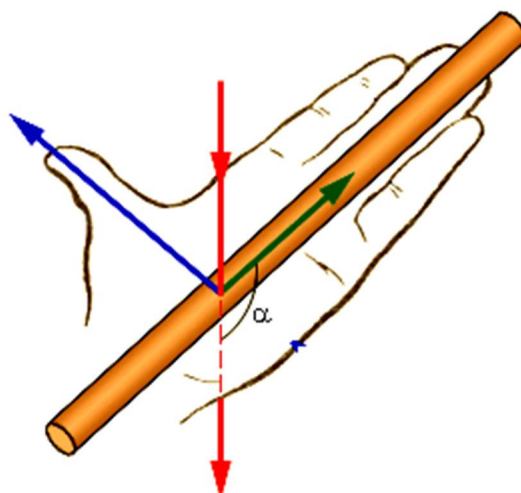


Рис. 58

### §35 . Розрахунок магнітних полів за допомогою закону Біо Савара

Визначим за допомогою закону Біо Савара магнітну індукцію і напруженість магнітного поля у ряді конкретних випадків.

#### Поле кругового струму.

На рис. 59 зображений кільцевий провід (виток) зі струмом  $I$ .

Необхідно визначити індукцію магнітного поля у центрі цього витка (точка  $O$ ).

У відповідності із законом Біо – Савара :

$$dB = dF_H / l_2 dl_2 = \mu_0 I dl_1 \sin \alpha / 4\pi r^2 \quad (97)$$

кожний елемент струму створює в точці  $O$  магнітну індукцію :

$$dB = \mu_0 I dl / 4\pi r^2 \quad (98),$$

при цьому мають на увазі, що кут  $\alpha = 90^\circ$  і складові результуючої магнітної індукції  $B$  в центрі витка від кожного елемента мають один і той же напрям, перпендикулярний площині витка, тому  $B = \oint dB = \oint \mu_0 I dl / 4\pi r^2 \quad (99).$

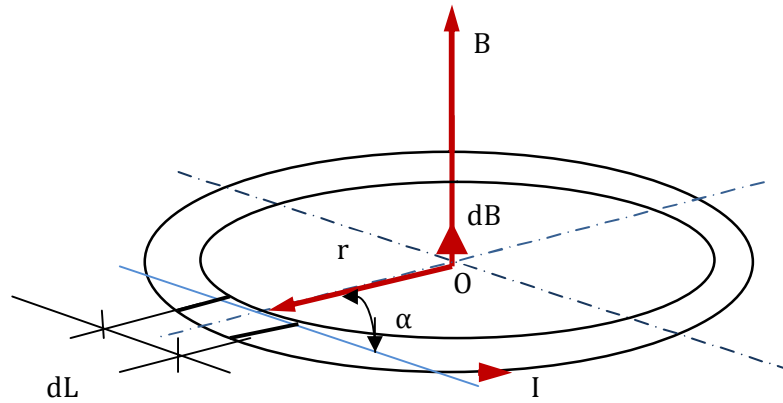


Рис. 59

Необхідно визначити індукцію магнітного поля у центрі цього витка (точка O).

Постійні величини винесемо за знак інтеграла :

$$B = \mu_0 I / 4\pi r^2 \cdot \oint dl, \quad (100)$$

де  $\oint dl = l = 2\pi r$  — довжина витка.

Отже 
$$B = \mu_0 I 2\pi r / 4\pi r^2 = \mu_0 I / 2r \quad (101)$$

### Поле прямого струму

Визначимо індукцію магнітного поля в точці A (рис. 60), якщо воно створюється струмом I прямолінійного провода кінцевої довжини.

Елемент довжини провода dl створює в точці A елементарний вектор магнітної індукції dB. Для того щоб знайти повну величину магнітної індукції необхідно скласти елементарні вектори dB від всіх елементів dl, з яких складається довжина провода.

Враховуючи, що провід і відрізки r, які проведені від любого елемента проводу в точку A, лежать в одній площині, можна зробити висновок, що всі вектори dB в точці A направлені по одній прямій перпендикулярно цієї площині, в даному випадку за креслення.

Тому повну величину магнітної індукції можна знайти інтегруванням :

$$dB = \mu_0 I dl \sin\alpha / 4\pi r^2 \quad (102)$$

Із рис. 60 наступне

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= a / (x - l); \\ L &= x - a \operatorname{ctg}\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

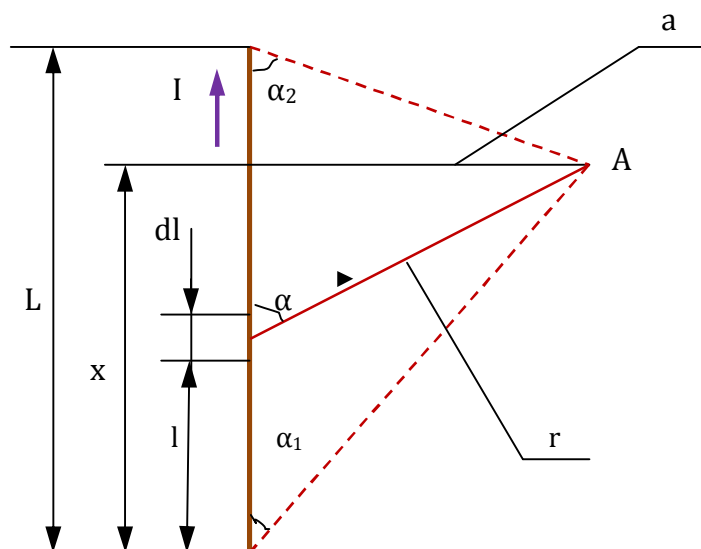


Рис. 60

Звідки 
$$dl = a dl / \sin^2\alpha, \quad (104)$$

Крім того 
$$\sin\alpha = a / r; \quad 1/r^2 = \sin^2\alpha / a^2 \quad (105)$$

$$I_B = \mu_0 I a \sin^2\alpha \sin\alpha l \alpha / 4\pi \sin^2\alpha a^2 = \mu_0 I \sin\alpha l_\alpha$$

Повна величина магнітної індукції в точці А

$$B = \mu_0 I (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) / 4\pi a \quad (106)$$

### §36. Розрахунок симетричних магнітних полів

Зв'язок струму з його магнітним полем, який виражається формулою закону Біо – Савара, можна застосувати для визначення основних характеристик в будь – якому випадку. Подібні

задачі рiшаються значно простiше на основi понять о циркуляцiї вектора магнiтної iндукцiї i повного струму.

Змiст цих понять розглянемо на прикладi магнiтного поля системи струмiв для довiльно замкнутого контуру (рис. 61) В кожнiй точцi цього контуру вектор магнiтної iндукцiї  $B$  може мати будь який напрям. Позначим через  $B_i$  проєкцiю цього вектора на напрям елемента довжини  $dl_i$  навколо вибраної точки контуру.

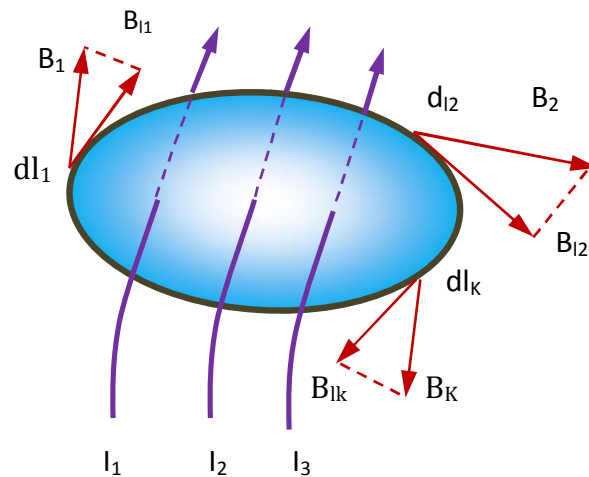


Рис. 61

Вираження  $\oint B dl$ , яке береться по всьому замкнутому контуру, називається циркуляцiєю вектора магнiтної iндукцiї по даному контуру.

Алгебричну суму струмiв  $\sum I$ , якi пронизують поверхню, обмежену контуром, називають повним струмом.

На основi закону Бiо – Савара, можна доказати, що циркуляцiя вектора магнiтної iндукцiї, по довiльно замкнутому контуру, пропорцiйна повному струму, який пронизує поверхню, обмежену цим контуром (рис. 61).

$$\oint B dl = \mu_0 \sum I \quad (107)$$

Для магнiтного поля у вакуумi коефiцiєнт пропорцiйностi мiж циркуляцiєю вектора магнiтної iндукцiї i повним струмом є магнiтна стала —  $\mu_0$ .

Для складання рiвняння (107) для конкретного випадку знак добутку  $B dl$  береться позитивним, якщо в данiй точцi напрям  $B$  збiгається з напрямом обходу контуру; знак струму приймається позитивним, якщо напрям лiнiї iндукцiї магнiтного поля даного струму, який визначається з правила буравчика, збiгається з напрямом обходу.



Виразення  $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  можна показати алгебричною сумою добутків  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ , яка складається з нескінченно великої кількості додатків.

Для рис. 61

$$B_1 dl_1 + B_2 dl_2 + \dots + B_{1k} dl_{1k} + \dots = (I_1 - I_2 + I_3) \mu_0.$$

Якщо вибрати контур, який збігається з лінією магнітної індукції, то замість проекції вектора магнітної індукції  $\mathbf{B}$  в формулу (107) можна підставити повну його величину  $B$ .

В окремих випадках магнітне поле має симетрію, при якій магнітна індукція во всіх точках такого контура має однакову величину. Для цих випадків формула (1) має більш простіше вираження:

$$B l = \mu_0 \sum I \quad (10),$$

$l$  — довжина контура.

Формула (107) справедлива для магнітного поля, яке створюється замкнутими струмами. Її не можна застосовувати для визначення складової магнітної індукції поля, яке створюється струмом на ділянці провода кінцевої довжини, як це зроблено при висновку формули на основі закону Біо – Савара.

### §37. Магнітний потік та потокозчеплення

Будь який провідник зі струмом створює магнітне поле. Другою важливою величиною, крім магнітної індукції, яка характеризує магнітне поле, є магнітний потік  $\Phi$  — число силових ліній, які проходять скрізь поверхню  $S$  (рис. 62).

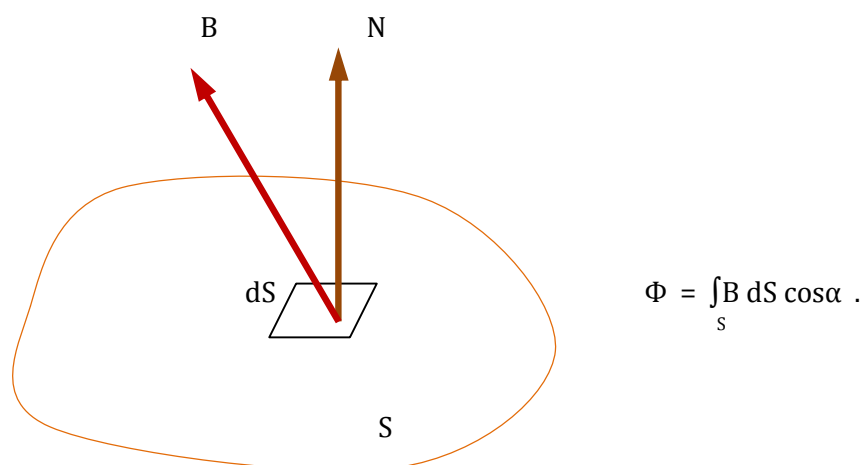


Рис. 62

Якщо магнітне поле рівномірне, а поверхня  $S$  є площиною, то

$$\Phi = B S \cos\alpha \text{ (рис. 63)}$$

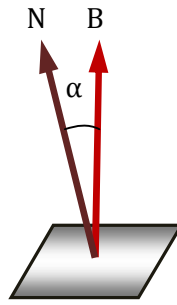


Рис. 63

Якщо площина  $S$  розташована перпендикулярно до напрямку вектора  $B$ , то

$$\Phi = B S \quad (108)$$

Одиниця вимірювання магнітного потоку в системі  $Si$  — Вебер (Вб). Ця одиниця названа на пошану німецького фізика В. Вебера.

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$$

Іноді магнітний потік вимірюють в Максвеллах (Мкс),

$$1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}.$$

Добуток числа витків ( $W$ ) та зчепленого з цими витками магнітного потоку  $\Phi$  називають потокозчепленням ( $\Psi$ )

$$\Psi = W \Phi \quad (109)$$

Потокозчеплення має ту ж розмірність, що і магнітний потік.

### §38. Індуктивність власна і взаємна

При зміні струму в контурі або котушці змінюється потокозчеплення самоіндукції, або, власне потокозчеплення, яке обумовлене струмом у цьому контурі (котушці), а також взаємне потокозчеплення з іншим контуром або котушкою.

Дослід показує, що однакова зміна струму в двох контурах або котушки, приводить, у загальному випадку, до різних змін їх потокозчеплення. Особливості даного контура або котушки у відношенні утворення потокозчеплення характеризуються індуктивністю: власною або взаємною.

### Індуктивність власна

Власна індуктивність відокремленого контура (або котушки) є величина, яка характеризує зв'язок потокозчеплення самоіндукції і струму, численно рівная відношенню потокозчеплення самоіндукції контура і струму в ньому:

$$L = \psi / I \quad (110)$$

У вакуумі і неферромагнітних речовинах це відношення для даного контуру (котушки) залишається незмінним незалежно від величини струму і потокозчеплення.

Одиниця індуктивності у системі СІ — Генрі (Гн)

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб} / 1 \text{ А} ,$$

Ця одиниця названа на пошану американського фізика Генрі Джозефа. В практичних розрахунках індуктивність може виражатись у частках генрі: мілігенрі (мГн) і мікрогенрі (мкГн).  $1 \text{ Гн} = 10^6 \text{ мкГн}$

### Індуктивність взаємна .

Розглянемо магнітний зв'язок двох котушок зі струмами, розташованих одна від однієї так, що магнітний потік, який визивається струмом першої котушки  $I_1$ , зчеплений з витками обох котушок.

Припускаємо, що потоки розсіяння відсутні (всі магнітні лінії однієї котушки зчеплені з іншою котушкою).

Власне потокозчеплення першої котушки:

$$\Psi_{1.1} = \Phi_1 w_1 = L_1 I_1 \quad (111),$$

де  $w_1$  — число витків першої котушки.

Магнітний потік, створений струмом першої котушки, зчеплений з витками другої котушки.

Взаємне потокозчеплення, як і власне пропорційне струму, який створює потік:

$$\Psi_{1.2} = \Phi_1 w_2 = M_{1.2} I_1 \quad (112)$$

де  $w_2$  — число витків другої котушки;

$M_{1.2}$  — коефіцієнт пропорційності — стала величина (у неферромагнітному середовищі), яка залежить від конструктивних особливостей розглядаємої системи котушок і називається взаємоіндуктивністю. З рівнянь (11) і (12), наступне

$$L_1 / M_{1.2} = w_1 / w_2 \quad (113)$$

Магнітний зв'язок може здійснюватися потоком другої котушки, яка має струм  $I_2$ .

По аналогії з першою котушкою, власне потокозчеплення :

$$\Psi_{2,2} = \Phi_2 w_2 = L_2 I_2 \quad (114)$$

Взаємне потокозчеплення :

$$\Psi_{2,1} = \Phi_2 w_1 = M_{2,1} I_2 \quad (115)$$

Відношення :

$$L_2 / M_{2,1} = w_2 / w_1$$

З відношень індуктивностей котушок до взаємоіндуктивностей знаходимо :

$$M_{1,2} M_{2,1} = L_1 L_2$$

Коефіцієнти  $M_{1,2}$  і  $M_{2,1}$  однакові :

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (116)$$

### §39 . Обчислення індуктивностей

Провідні контури і котушки — найбільш розповсюджені елементи електротехнічних пристроїв, а індуктивність є конструктивною характеристикою цих елементів і застосовується при розрахунках. Тому важливе їх обчислення для різних випадків.

#### Індуктивність котушки .

Для приблизного обчислення індуктивності циліндричної котушки кінцевої довжини, якщо  $l_k \gg D$ ; користуються вираженням :

$$L = \mu_0 S N^2 / l_k \quad (117)$$

де  $S = \pi D^2 / 4$  — площа поперечного перерізу котушки ;

$N$  — кількість витків котушки ;

$l$  — довжина ділянки .

Індуктивність кільцевої котушки на тороїдному осерді визначається з тієї ж формули, де  $l = 2\pi r$ .

В практиці застосовують котушки різної форми, для яких умова  $l_k \gg D$  частіше всього не виконується. Тому для визначення індуктивності таких котушек розраховують розрахункові криві, або емпіричні формули, поправочні коефіцієнти до формули (117), які є в довідках.

### Індуктивність двопроводної лінії.

Для визначення індуктивності ділянки двопроводної лінії застосовують формулу:

$$L = \psi / I = \ln(a/r_0) \cdot \mu_0 \cdot l / \pi \quad (114)$$

де  $a$  — відстань між проводами;

$r_0$  — радіус провода;

$l$  — довжина ділянки двопроводної лінії.

Підрахунок по формулі (114) дає неточний результат, так як не була врахована внутрішня індуктивність, яка була створена магнітним потоком усереднені дротів.

## §40. Магнітні властивості речовини

Магнітне поле, яке створюють струми в проводах впливає на речовину, а речовина, в свою чергу, змінює магнітне поле.

### Намагнічування речовини.

Будь яка речовина, яка знаходиться в магнітному полі зовнішніх струмів, приходить в особливий стан намагніченості, яка характеризується виникненням в ньому додаткового магнітного поля.

Рух заряджених частинок всередині атома можна розглядати, як елементарні внутріатомні струми, тому додаткове магнітне поле, яке виникає в результаті намагнічування називається полем елементарних (внутрішніх) струмів.

Магнітні властивості елементарного кругового струму (рис. 64) можна характеризувати магнітним моментом, величина якого визначається добутком елементарного кругового струму і площі описаного їм круга, а напрям — по правилу буравчика:

$$m = iS \quad (115)$$

При відсутності магнітного поля зовнішніх струмів, елементарні струми всередині речовини, орієнтовані безладно, тому загальний магнітний момент, навіть невеликих об'ємів речовини, не є рівним нулю, а магнітне поле елементарних струмів не виявляється.

Вплив магнітного поля зовнішніх струмів на кругові елементарні струми заключається в тому, що змінюється орієнтація осей обертання частинок так, що їх магнітні моменти стають направленими в одну сторону.

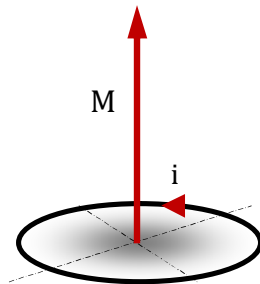


Рис . 64

Інтенсивність і характер намагнічування у різних речовин в однаковому магнітному полі зовнішніх струмів значно відрізняється. Тому всі речовини розподіляються на три групи. До першої групи відносяться діамагнітні речовини, в яких магнітне поле елементарних струмів направлено проти, визвавшого його поля, зовнішніх струмів. До діамагнітних речовин відносяться: вода, водень, кварц, срібло та інші.

До другої і третьої груп відносяться відповідно парамагнітні (алюміній, кисень, повітря і т.п.) і ферромагнітні речовини (залізо, нікель, кобальт та деякі їх сплави). Загальним для речовин цієї групи є те, що при намагнічуванні магнітні моменти елементарних струмів в них орієнтуються в напрямку поля зовнішніх струмів. В результаті магнітне поле підсилюється.

#### Намагніченість речовини .

Міра намагнічування речовини оцінюється вектором намагнічування  $M$ . Для однорідної, по всім напрямкам речовини, величина вектора намагнічування дорівнює геометричній сумі магнітних моментів елементарних струмів в одиниці об'єму величини:

$$M = \sum m / v \quad (116)$$

#### Напруженість магнітного поля .

Магнітне поле у речовині можна розглядати як результат дії тільки струмів в проводах (в вітках) котушки.

$$(B / \mu_0 - M)l = IN \quad (117)$$

Якщо, в якості характеристики поля прийняти нову векторну величину  $H$ , яка називається напруженістю магнітного поля, то

$$H = B / \mu_0 - M \quad (118)$$

формула (117) буде мати наступний вигляд :

$$Hl = IN \quad (119)$$

Напруженість  $H$ , як характеристика магнітного поля, не залежить від властивостей середовища, а визначається тільки величиною струмів в проводах, що значно поліпшує розрахунки магнітних полів.

### Магнітна проникність речовин.

Величина

$$\mu_a = \mu_0 (1 + \chi) \quad (120)$$

характеризує магнітні властивості речовини, в якій існує магнітне поле і називається абсолютною магнітною проникністю.

В формулі (120)  $\chi$  — це коефіцієнт пропорційності між напруженістю поля  $H$  і намагиченості  $M$ , який називається магнітною сприйнятливістю :

$$M = \chi H \quad (121)$$

В практиці зручно користуватися відношенням абсолютної магнітної проникності речовини  $\mu_a$  до магнітної сталої  $\mu_0$ ;

$$\mu_r = \mu_a / \mu_0 = 1 + \chi \quad (122)$$

Величина  $\mu_r$  називається відносною магнітною проникністю і показує в скільки разів магнітне поле у речовині сильніше (або слабкіше), чим в вакуумі, при інших рівних умовах. Магнітна сприйнятливість феромагнітних речовин велика, тому їх величина  $\mu_r \gg 1$ . Для інших речовин  $\chi \approx 0$ , а  $\mu_r = 1$ .

## §41. Закон повного струму та його застосування

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I \quad (123)$$

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля по замкнутому контуру дорівнює повному струмові, що зчеплений з цим контуром.

Додатними вважають струми, напрям магнітного поля яких, збігається з напрямом обходу контуру. Напрямок магнітного поля визначається за правилом буравчика.

Щодо прикладу на рис. 65 закон повного струму має вигляд:

$$\oint H dl = I_1 - I_2 - I_3 + I_4$$

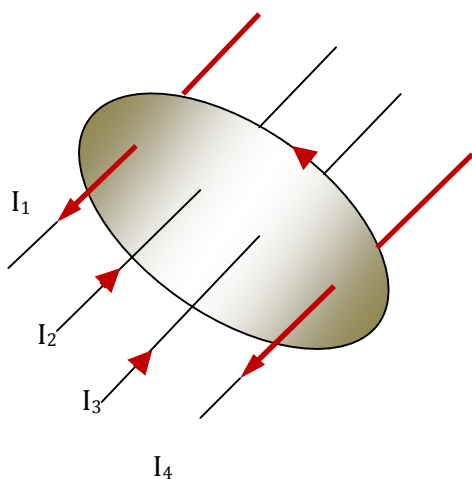


Рис. 65

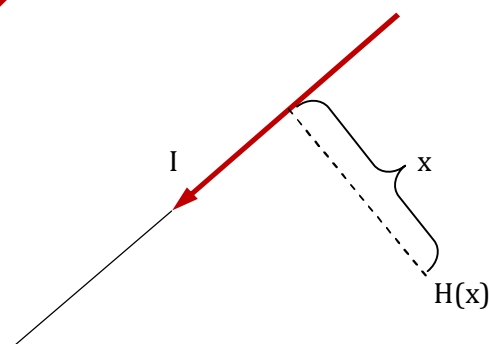


Рис. 66

За допомогою закону повного струму можна розв'язати багато задач. Наприклад, визначити напруженість магнітного поля на довільній відстані  $x$  від провідника зі струмом  $I$  (рис. 66). Замкнутим контуром можна обрати коло, що має радіус  $x$ . Тоді за законом повного струму:

$$\left. \begin{aligned} \oint H dl &= I; \\ H 2\pi x &= I; \\ H &= I / 2\pi x. \end{aligned} \right\} (124)$$

## §42. Енергія магнітного поля

При виникненні електричного струму у провідному контурі одна частина енергії джерела живлення витрачається на подолання електричного опору контуру і перетворюється в тепло, а інша запасується у вигляді енергії магнітного поля.

Енергія магнітного поля котушки визначається з формули:

$$W_M = \Psi \cdot I / 2 = LI^2 / 2 = \Psi^2 / 2L \quad (125)$$

де  $\Psi = W\Phi$  — потокозчеплення.



### §43 . Механічні сили в магнітному полі

В техніці широко застосовуються пристрої, в основі роботи яких лежить силова дія магнітного поля (електродвигуни, реле, тягові і підйомні електромагніти, електровимірвальні прилади та інші). Електромагнітні сили необхідно враховувати при розрахунку електричних апаратів, проектуванні розподільних пристроїв електростанцій та в інших випадках.

#### Провід зі струмом в магнітному полі.

Магнітне поле діє на провід зі струмом, розміщений у полі, з силою  $F$ , яку називають електромагнітною силою. В загальному випадку електромагнітну силу  $F$ , яка діє на провід довільної форми, розташований в неоднорідному магнітному полі, можна визначити як геометричну суму елементарних сил  $dF$ , діючих на окремі елементарні довжини провoda  $dL$ .

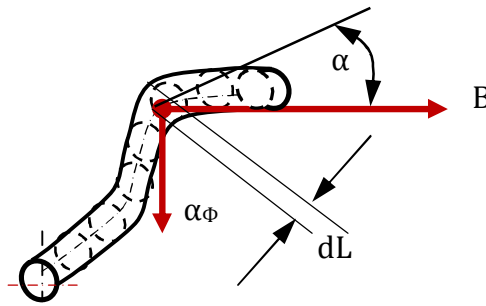


Рис. 67

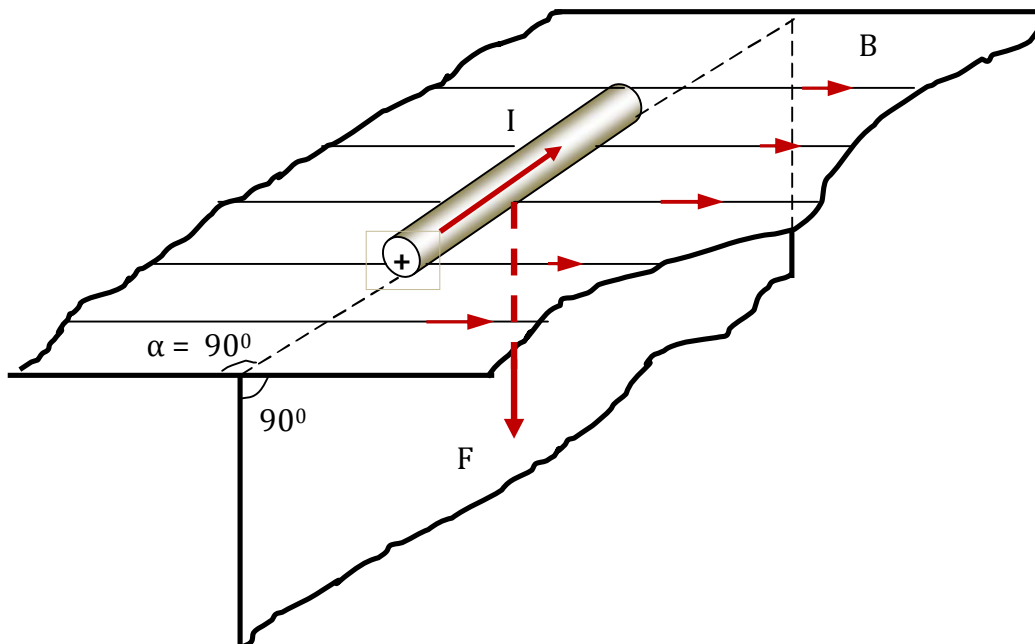


Рис. 68

Елемент провода нескінчено малої довжини  $dl$  можна розглядати, як прямолінійний, а магнітне поле, в якому він розташований, — однородним (рис. 67), тому елементарна сила

$$dF = I B dl \sin\alpha, \quad (126)$$

а сила, діюча на ділянку провода кінцевої довжини  $l$  знаходиться як підсумок векторів елементарних сил по всій довжині розглядаємої ділянки:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} \quad (127)$$

Якщо прямолінійний провід довжиною  $l$ , по якому проходить струм  $I$  розташований в однородному магнітному полі перпендикулярно напрямку магнітних ліній і вектора індукції (рис. 68), то на нього буде діяти електромагнітна сила:

$$F = I B l \quad (128)$$

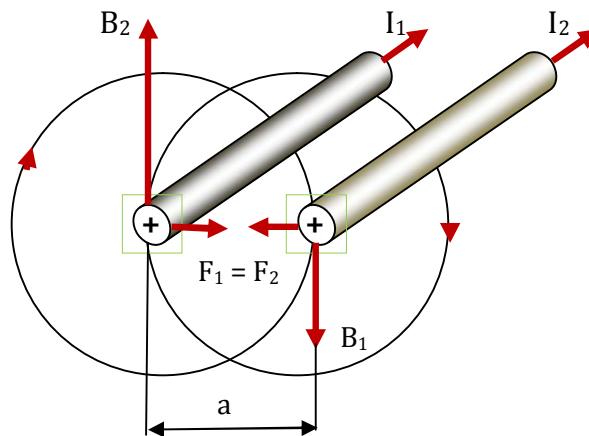


Рис. 69а

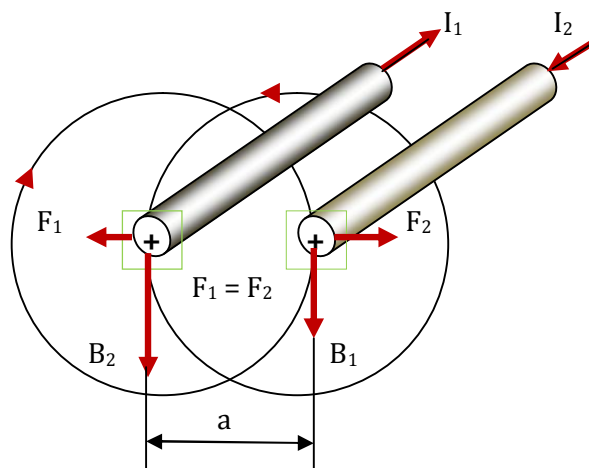


Рис. 69б

Якщо виразити силу струму в амперах , магнітну індукцію в теслах і довжину в метрах , то получимо силу виражену в ньютонах :

$$H = A \cdot Tл \cdot м = A \cdot Вб \cdot м / м^2 = A \cdot Вб / м = Дж / м .$$

Напрямок вектора електромагнітної сили визначається з правилів лівої руки (рис. 58) .

### Паралельні проводи

Якщо по двом паралельним проводам , які знаходяться на відстані  $a$  один від одного , проходять різні струми  $I_1$  і  $I_2$  одного напрямку (рис. 69а) або протилежних напрямків (рис. 69б) , то на провід зі струмом  $I_1$  , який знаходиться в магнітному полі струму  $I_2$  , буде діяти електромагнітна сила  $F_1$  , а на провід зі струмом  $I_2$  , який знаходиться в магнітному полі струму  $I_1$  , буде діяти сила  $F_2$  .

### Електрон в магнітному полі

Електромагнітну силу , діючу на провід зі струмом розташований перпендикулярно напрямку магнітних ліній , можна розглядати як суму , діючу на вільні електрони провідника , — направлений рух яких є і струмом . Сила , діюча на електрон , прямопропорційна магнітній індукції , заряду електрона і швидкості , з якою електрон рухається перпендикулярно напрямку струму . Напрямок цієї сили визначається з правила лівої руки , причому чотири витягнутих пальця руки повинні співпадати з напрямком струму .

Вплив магнітного поля на потік електронів знаходить широке застосування в техніці , наприклад для фокусування електронного променя в електронно – проміневих трубках .

## §44. Властивості і застосування феромагнітних матеріалів

В електротехніці широко застосовуються феромагнітні матеріали , дякуючи їх здібності намагнічуватися і значно підсилювати зовнішнє магнітне поле .

У феромагнітних матеріалах магнітна проникність велика , та не стала . Ці матеріали намагнічуються в магнітному полі , тобто після закінчення дії магнітного поля вони зберігають магнітні властивості . Ці матеріали називають феромагнетиками (рис. 70) .

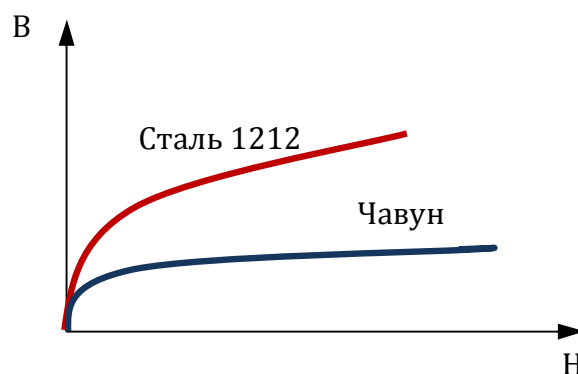


Рис. 70

Кривою намагнічування називається залежність магнітної індукції від напруженості магнітного поля. Типова крива намагнічування має лінійну ділянку та ділянку насичення. Лінійну ділянку використовують при роботі феромагнетика у вимірювальних приладах, коли треба зберегти лінійну залежність магнітних властивостей матеріалу від напруженості магнітного поля.

Ділянку насичення використовують у таких пристроях, де феромагнетик має забезпечити постійну та максимальну магнітну індукцію (генератори постійного струму, двигуни, тощо).

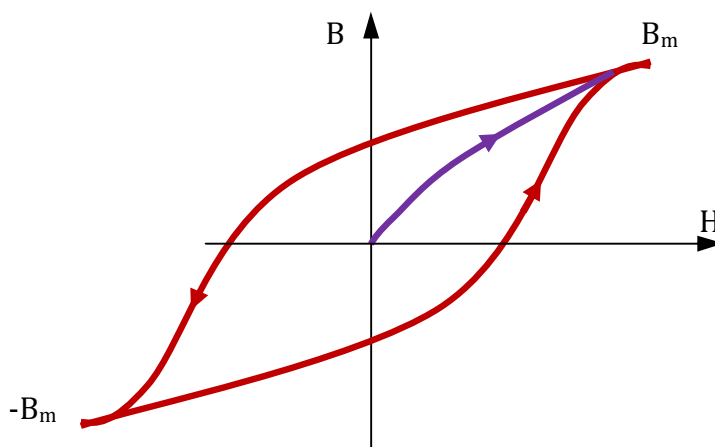


Рис. 71

Якщо розглянути процес змінного намагнічування феромагнетика, то можна побудувати петлю гістерезису (рис. 71).

Форма та площа петлі залежить від матеріалу осередка. За петлею гістерезису визначаються характеристики феромагнітного матеріалу. Петля гістерезису визначається основними величинами (рис. 72):

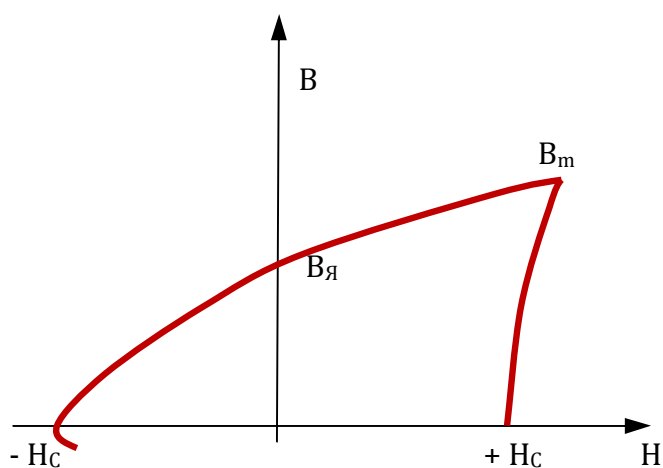


Рис. 72

а) індукцією насичення ( $B_m$ ) — максимальною індукцією, котру може забезпечити феромагнетик;

б) залишковою індукцією ( $B_r$ ), котра встановлюється у ферромагнетику при вимкненні поля;

в) коерцитивною силою ( $H_c$ ), тобто значенням напруженості поля, необхідного для розмагнічування ферромагнетика (для встановлення індукції  $B = 0$ ).

Площа петлі гістерезису пропорційна енергії, що витрачається на перемагнічування матеріалу. Коерцитивна сила характеризує спроможність матеріалу зберігати залишкову намагніченість. Для практики велике значення мають особливі властивості ферромагнітних речовин, які виявляються у процесі намагнічування. Ці властивості можна прослідити з досліду, вимірюючи напруженість поля  $H$  і магнітну індукцію  $B$  котушки со сталевим осердям.

### Властивості ферромагнітних матеріалів :

- Ферромагнітні речовини відносно легко і сильно намагнічуються. Відносна магнітна проникність  $\mu_r$  для деяких ферромагнітних матеріалів досягає значень  $10^5$  і вище.
- Із зростанням напруженості зовнішнього магнітного поля намагніченість і магнітна індукція збільшуються; однак намагніченість і магнітна індукція не пропорційні напруженості поля (рис. 73)

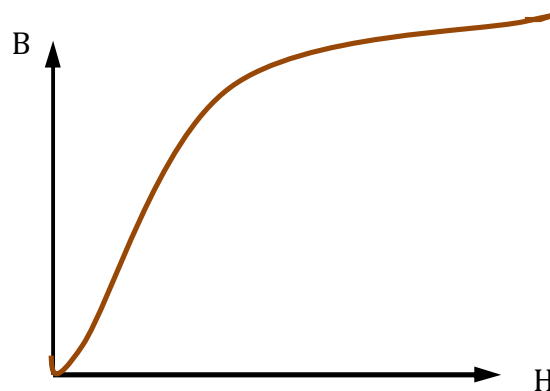


Рис. 73

Це означає, що магнітна сприйнятливість  $\chi$  і магнітна проникність  $\mu_r$  — не сталі величини, а залежать від намагніченості  $M$ :

- Починаючи з деякої напруженості поля  $H$ , при її збільшенні, відбувається магнітне насичення (такий стан ферромагнітних речовин, при якому зростання напруженості не тягне за собою збільшення намагніченості);
- При зменшенні напруженості поля  $H$ , після досягнення стану насичення намагніченість і магнітна індукція зменшуються. Проте величини  $M$  і  $B$  відрізняються від тих, які були зафіксовані для однакових  $H$  при збільшенні напруженості;
- При усуненні зовнішнього поля ( $H = 0$ ) виявляється залишкова намагніченість ( $M$  і  $B$  не дорівнюють нулю);
- При збільшенні напруженості поля  $H$ , в зворотньому напрямку, спочатку здійсню-

ється розмагнічення намагніченого зразка , а потім намагнічування в зворотньому напрямку ( $M$  і  $B$  змінюють знак) до насичення ;

- При циклічному перемагнічуванні з визначеною частотою феромагнітна речовина нагрівається , що свідчить про затрату енергії на перемагнічування .

Для всіх феромагнітних матеріалів визначені властивості виявляються загальними , проте проявляються вони по різному , в залежності від їх хімічного складу . В зв'язку з чим розрізняють дві основні групи фероматеріалів : магнітотверді і магнітом'які .

Магнітотверді матеріали мають великі величини залишкової магнітної індукції і коерцитивної сили , широку петлю магнітного гістерезису . Магнітотверді феромагнетики використовують для створення постійних магнітних потоків . Сталі магніти виготовляють з магнітотвердих матеріалів . Найпоширенішими є сплави типу ЮНДК (залізо , кобальт , нікель , алюміній) з великою коерцитивною силою .

Для магнітом'яких матеріалів характерні велика магнітна проникність і невелика коерцитивна сила (вузька петля гістерезису). Магнітом'які феромагнетики мають незначні витрати на перемагнічування матеріалу . Тому вони використовуються для створення змінних магнітних потоків , тобто у магнітних колах з котушками , увімкненими на зміну напругу . Магнітом'які осердя застосовуються у трансформаторах , двигунах та генераторах змінного струму , електромагнітах , тощо .

В електротехнічних приладах застосовують холоднокатану електротехнічну сталь(марки 3412 ... 3416) , гарячекатану електротехнічну сталь (марки 1211 , 1313 , 1411 , 1213 , 1212 , 1311 , 1411 , 1412 , 1413 , 1511 , 1512 , 1513 , 1514) тощо .

Витрати на вихрові струми в осерді залежать від питомого електричного опору матеріалу . Застосування феритів в електротехнічних приладах та пристроях дає змогу зробити осердя суцільними , а не шихтованими . Феріти мають великий питомий електричний опір , їх застосовують в колах підвищеної частоти .

Магнітні характеристики феромагнетиків погіршуються від механічних ударів і підвищення температури . Сталі магніти при цьому розмагнічуються .

### **ПФ.С.02.ПП.Р.09.11 Магнітні кола**

В конструкцію великої кількості електротехнічних пристроїв (електричних машин , трансформаторів , електричних апаратів , вимірювальних приладів тощо) входять магнітні кола .

Магнітним колом називається частина електротехнічного пристрою , яка має феромагнітні тіла , в котрій при наявності намагнічуючої сили виникає магнітний потік  $\Phi$  , вздовж котрої , замикаються лінії магнітної індукції . Джерелами намагнічуючої сили можуть бути котушки зі струмами , постійні магніти .

В конструктивному відношенні магнітні кола виконують розгалуженими і нерозгалуженими ; застосування того чи іншого вигляду кола визначаються , в основному , призначенням електромагнітного пристрою .

#### §45. Розрахунок однорідного магнітного кола : пряма та обернена задачі . Магнітний опір

В нерозгалуженому магнітному колі (рис.74) магнітний потік на всіх ділянках один і той же .

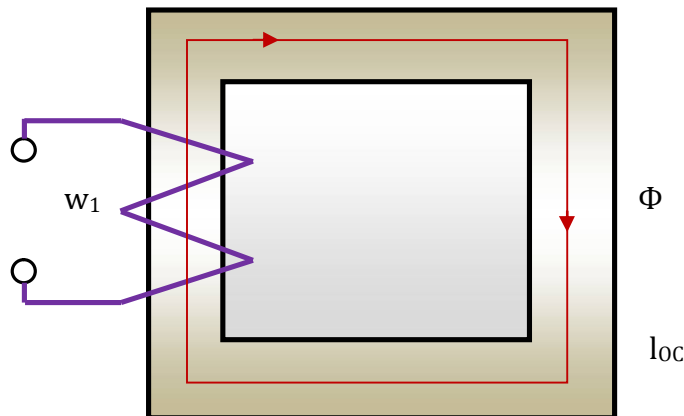


Рис. 74

При обчисленні магнітних кіл виникають , як правило , дві задачі — пряма і обернена . Щодо прямої задачі , то звичайно , задаються геометрія кола , матеріал та магнітний потік . Треба визначити магніторушійну силу . Щодо оберненої задачі , то , звичайно задаються геометрія кола , матеріал магніторушійна сила .Треба визначити магнітний потік .

Магнітне коло є однорідним , коли в усьому колі постійні  $B$  і  $H$  . Тобто на всіх ділянках кола один матеріал та однаковий переріз .

Якщо розв'язують пряму задачу , то обчислюють :

а) за заданим потоком  $\Phi$  - магнітну індукцію  $B$  :

$$B = \Phi / S \quad (129)$$

б) за кривою намагнічування — напруженість магнітного поля (рис. 75)

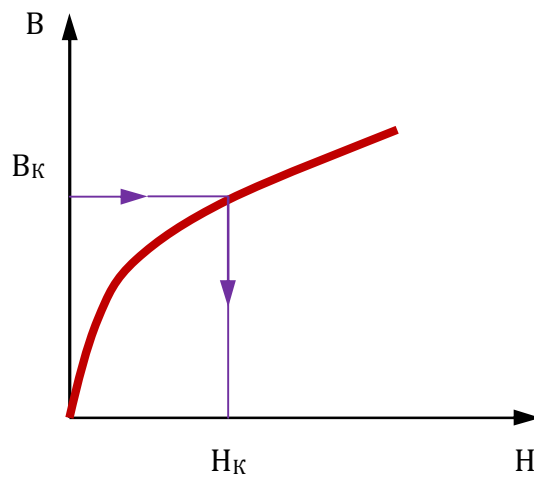


Рис. 75

в) за законом повного струму — магніторушійну силу :

$$w I = H l_{oc} \quad (126)$$

Розв'язок оберненої задачі виконують таким чином :

а) за законом повного струму визначають напруженість магнітного поля :

$$H = w I / l_{oc} ; \quad (127)$$

б) за кривою намагнічування обчислюють магнітну індукцію ;

в) магнітний потік обчислюють за співвідношенням :

$$\Phi = B S \quad (128)$$

Для конкретних величин  $B$  і  $H$ , визначених в ході рішення, можна підрахувати статичну магнітну проникність даного матеріалу за формулою :

$$\mu_a = B H, \quad (129)$$

тоді магнітна індукція :

$$B = \mu_a w I / l \quad (130)$$

Магнітний потік

$$\Phi = \mu_a I W S / l = I W / l / \mu_a S \quad (131)$$

Позначив значення цього вираження через  $R_M$  ( $R_M = l / \mu_a S$ ), получимо :





в) індукція у зазорі дорівнює індукції сусідньої ділянки . Звичайно зазор є дуже малим , тому його переріз вважають рівним площі перерізу сусідньої ділянки :

$$B_0 = B_2 ;$$

г) за кривою намагнічування визначають напруженість на кожній ділянці ;

д) напруженість у повітряному зазорі визначають за співвідношенням :

$$H_0 = B_0 / \mu_0 ; \quad (134)$$

е) за законом повного струму обчислюють магніторушійну силу :

$$w I = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_{об} . \quad (135)$$

Обернена задача (визначення магнітного потоку) розв'язується , як правило , таким чином :

а) задається магнітний потік  $\Phi'$  і розв'язується пряма задача , тобто визначається  $(w I)'$  ;

б) задається друге значення магнітного потку  $\Phi''$  і також розв'язується пряма задача тощо ;

в) будується магнітна характеристика кола (залежність потоку від магніторушійної сили) . За цією характеристикою визначається магнітний потік (рис. 77)

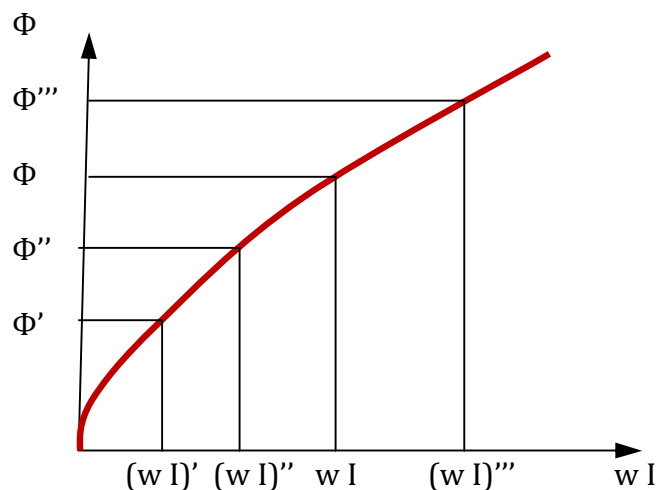


Рис. 77

### §47 . Розрахунок розгалуженого магнітного кола

На рис. 78 зображено симетричне розгалужене магнітне коло ( $OO'$  — вісь симетрії)

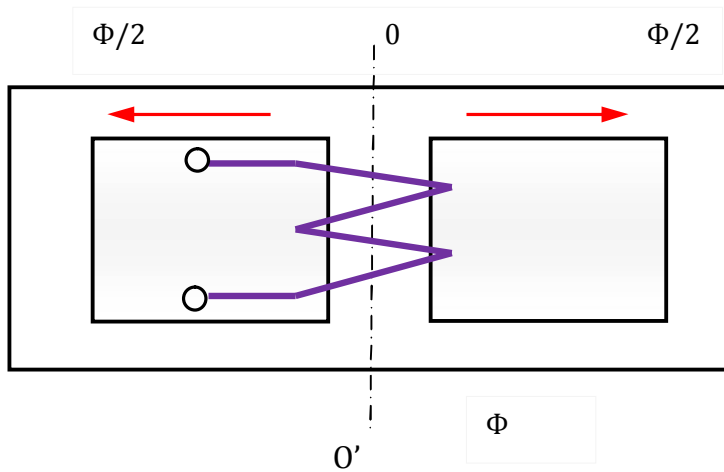


Рис. 78

При розв'язанні прямої та оберненої задач обчислюється лише половина кола . При цьому на ділянці з обмоткою магнітний потік дорівнює  $\Phi$  . На ділянках без обмоток — береться потік , що дорівнює  $\Phi/2$  .

На рис. 80 зображено несиметричне неоднорідне магнітне поле .

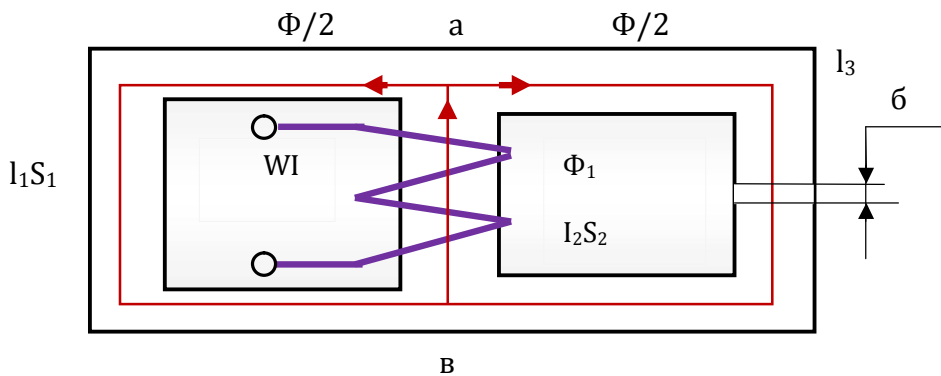


Рис.79

У прямій задачі задаються геометрія , матеріал та один із потоків . Треба визначити магніторушійну силу та інші потоки . Розв'язання можна провести за такою схемою :

а) складається рівняння за першим законом Кірхгофа щодо магнітних кіл :

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0 , \quad \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 ; \quad (136)$$

б) складаються рівняння за другим законом Кірхгофа щодо магнітних кіл (закон повного струму щодо двох замкнених контурів) :

$$\left. \begin{aligned} H_1 l_1 + H_2 l_2 &= w I, \\ H_3 l_3 + H_0 b - H_1 l_1 &= 0 ; \end{aligned} \right\} (137)$$

Складена система з трьох рівнянь має три невідомі (два потоки та магніторушійну силу) :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_3 ; \\ H_1 l_1 + H_2 l_2 &= w I ; \\ H_3 l_3 + H_0 b - H_1 l_1 &= 0 ; \end{aligned} \right\} (138)$$

в) за відомим потоком визначається індукція на ділянці :

Наприклад :

якщо задано потік  $\Phi_3$ , визначають  $B_3 = \Phi_3 / S_3$ ; (139)

за кривою намагнічування знаходять  $H_3$ ;

обчислюють індукцію і напруженість у зазорі:  $B_0 = B_3$ ;  $H_0 = B_0 / \mu_0$ ;

визначають магнітну напругу між точками а і б ( $U_{аб}$ ) :

$$U_{аб} = H_3 l_3 + H_0 \cdot b ; \quad (140)$$

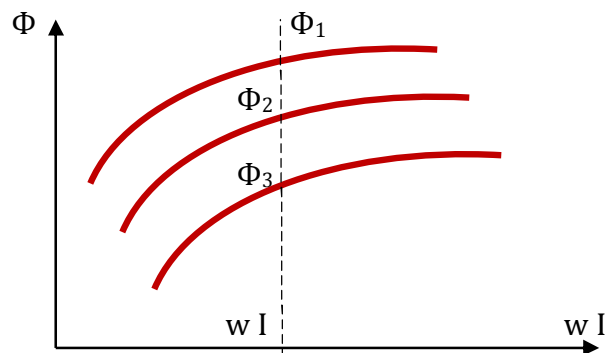


Рис. 80

за  $U_{аб}$  обчислюють  $H_2$ :  $H_2 l_2 = U_{аб}$ ;

— за кривою намагнічування знаходять  $B_2$ , а потім потік:  $\Phi_2 = B_2 S_2$ ;

— визначають невідомий потік :

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad (141)$$

У оберненій задачі, як правило, задається магніторушійна сила і треба визначити усі потоки. Обчислення здійснюються таким чином: кілька разів довільно задається один із потоків і розв'язуються прямі задачі. Потім будується сім'я магнітних характеристик (рис. 80)

За допомогою сім'ї характеристик визначаються невідомі потоки. Потім виконують перевірку обчислення.

### §48 . Постійні магніти

В вимірювальних приладах, електричній апаратурі і інших пристроях в якості джерел намагнічуючої сили широко застосовують постійні магніти.

Електричні кола з постійними магнітами мають декілька ділянок:

із магнітотвердого матеріалу — постійного магніта;

із магнітом'якого матеріалу — магнітопровода;

повітряний проміжок, форми і розміри якого, визначаються конструкцією і призначенням пристрою.

При розрахунку магнітного кола з постійними магнітами треба визначити магнітний потік в повітряному проміжку або по заданому потоку знайти оптимальні розміри постійного магніта (найменший об'єм і габарити).

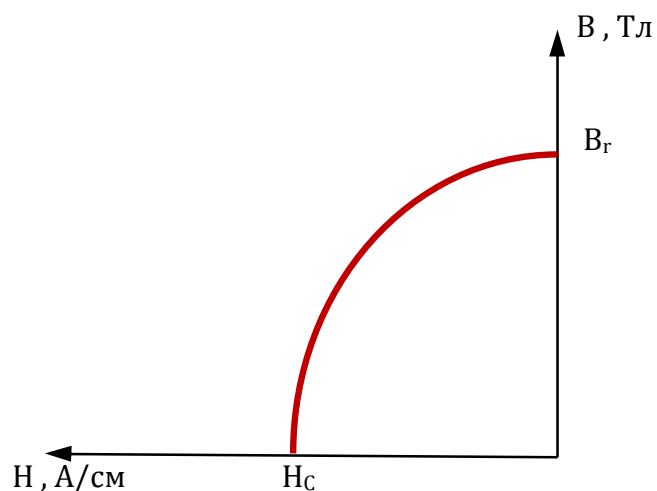


Рис. 81

Величини залишкової магнітної індукції  $B_r$  і коерцитивної сили характеризують матеріал постійного магніта, — чим вони більше, тим вище його якість. Проміжні магнітні ста-

ни визначаються часткою петлі магнітного гістерезиса, яка знаходиться в другій чверті — характеристикою розмагнічування (рис. 81).

Ця характеристика використовується при розрахунку постійних магнітів.

### Визначення магнітного потоку в магнітному колі з постійним магнітом.

Зневажаючи потоком розсіяння і магнітною напругою в ділянках із магнітом'якого матеріала можна побудувати у загальній системі координат залежності

$\Phi(U_{MT})$  і  $\Phi(-U_{MO})$ . В цьому випадку шуканий магнітний потік визначається точкою їх перехрещення (рис. 82)

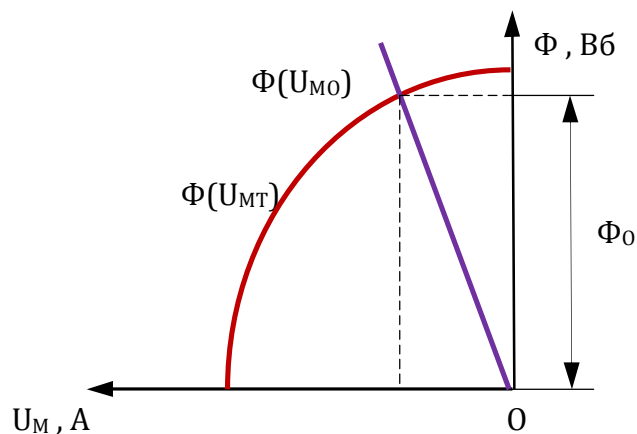


Рис. 83

Магнітна індукція в повітряному проміжку :  $B = \Phi_0/S_0$

Напруженість поля в повітряному проміжку і магніті направлені в протилежні сторони, що слідує з рівності :

$$H_T l_T + \sum H l = 0 \quad \text{або} \quad U_{MT} = -\sum U_M \quad (\text{у відповідності з законом повного струму}),$$

де  $U_{MT}$  — магнітний опір постійного магніта ;

$\sum U_M = \sum (U_{MC} + U_{MO})$  — сума магнітних напруг усіх ділянок магнітного кола, включаючи повітряні проміжки, но без постійного магніта.

### ПФ.С.02.ПП.Р.09.12 Електромагнітна індукція, явище електромагнітної індукції

Електромагнітна індукція — це одне з явищ, на яких засновані електротехніка і радіотехніка.

Явище електромагнітної індукції відкрив у 1831 році англійський фізик М. Фарадей і на

основі цього відкриття сформулював один із важливіших фізичних законів — закон електромагнітної індукції.

### §49 . Закон електромагнітної індукції

За законом електромагнітної індукції у провідникові , що рухається у магнітному полі , індукується ЕРС , тобто

$$E = -v B l \sin \alpha \quad (142),$$

де  $E$  — ЕРС провідника ;

$v$  — швидкість його руху .

Напрямок струму визначається за правилом правиці . У загальному разі ЕРС дорівнює швидкості зміни магнітного потоку , зчепленого з контуром , у якому вона індукується , тобто :

$$E = -D\Phi / dt \quad (143)$$

Знак «-» підтверджує правило Ленца . Тобто ЕРС прагне протидіяти причині , що її зумовлює .

### §50 . Правило Ленца

В 1883 р. професор Петербургського університету Е.Х. Ленц встановив загальне правило для визначення напрямку індукованого струму і електромагнітних сил , які виникають в результаті взаємодії магнітного поля з індукованим струмом .

Якщо магнітний потік , зчеплений з провідним замкненим контуром , змінюється , в контурі виникають явища електричного і механічного характеру , які протидіють зміні магнітного потоку .

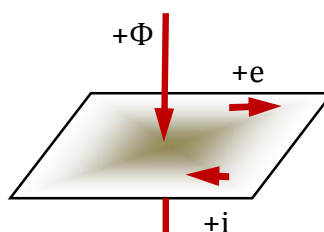


Рис.83

Правило Ленца відображає виявлення електромагнітної інерції в системах контурів зі

струмами. Цьому правилу відповідає знак «мінус» в формулі (143), яка виражає закон електромагнітної індукції, якщо прийняти позитивними напрямки магнітного потоку і індукованої в контурі ЕРС, які задовольняють правилу правого буравчика (рис. 83)

Припустимо, що позитивний магнітний потік, зчеплений з контуром, збільшується. Приріст потоку  $d\Phi$  і швидкість його зміни  $d\Phi/dt$  позитивні ( $d\Phi > 0$ ,  $d\Phi/dt > 0$ ). Індукована в контурі ЕРС, в відповідності, направлена проти вибраного позитивного напрямку, тобто негативна ( $e < 0$ ), (рис. 84).

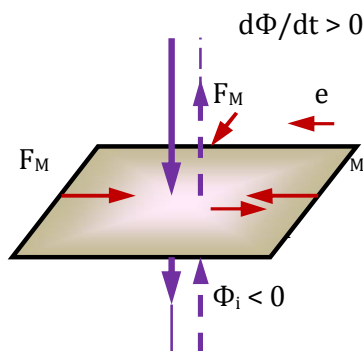


Рис. 84

Індукований в контурі і (напрямок його співпадає з напрямком ЕРС) створює вторинний магнітний потік  $\Phi_i$ , який у відповідності з правилом буравчика, діє проти основного потоку  $\Phi$  в контурі, тобто, протидіє його збільшенню. Одночасно в контурі виникають електромагнітні сили, які стягують контур (напрямок сили визначається правилом лівої руки).

## §51. Наведення ЕРС у провіднику, який рухається в магнітному полі

У провіднику, який рухається у магнітному полі так, що він перехрещує лінії магнітної індукції, індукується ЕРС. Це явище — різновид електромагнітної індукції.

Розглянемо відрізок АБ прямолінійного провідника, який рухається і перехрещує під прямим кутом лінії магнітної індукції рівномірного поля з магнітною індукцією  $B$ .

Визначимо ЕРС індукції при русі провідника довжиною  $AB = l$  зі швидкістю  $v$  в однородному магнітному полі, індукція якого  $B$ , враховуючи, що провідник рухається перпендикулярно до ліній індукції магнітного поля (рис. 85)



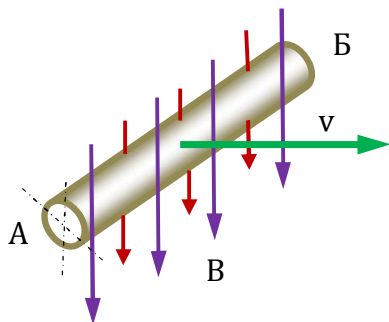


Рис. 85

При швидкості  $v$  провідник довжиною  $l$  перехрестить за секунду площу  $vl$ .

При індукції поля  $B$  число магнітних силових ліній, які перехрещуються провідником в одиницю часу, дорівнює  $Bvl$ .

Тому у провіднику виникає ЕРС індукції :

$$E = Bvl.$$

При русі провідника не перпендикулярно до силових ліній, число перехрещених силових ліній визначається з формули :

$$E = Bvl \sin \alpha,$$

де  $\alpha$  — кут між векторами індукції кола і швидкості руху провідника.

В практиці для визначення напрямку індуктивної ЕРС застосовують правило правиці: якщо розташувати праву руку так, щоб великий палець, відігнутий перпендикулярно до інших чотирьох, показував напрям руху провідника, а лінії магнітної індукції входили в долоню, то витягнуті чотири пальця покажуть напрям ЕРС електромагнітної індукції.

## §52. Взаємне перетворення механічної і електричної енергії

Електромеханічна дія магнітного поля і електромагнітна індукція використовуються для перетворення механічної енергії в електричну і назад.

Пристрої, за допомогою яких ці перетворення здійснюються, називаються електричними машинами. Машина для перетворення механічної енергії в електричну називається генератором, а для зворотнього перетворення — двигуном. Конструкції, принципи і режими роботи різних електричних машин вивчаються у дисципліні «Електричні машини».

В дисципліні ТОЕ у загальному вигляді розглядаються принципи взаємного перетворення механічної і електричної енергії.

### Перетворення механічної енергії в електричну .

Провідник АБ (рис. 85) рухається з постійною швидкістю за рахунок енергії будь якого первинного двигуна — джерела механічної енергії .

Механічна потужність руху провідника :

$$P_{\text{мех}} = F_{\text{мех}} v \quad (20) , \quad (144)$$

де  $F_{\text{мех}}$  — сила , яка діє на провідник збоку первинного двигуна .

Дякуючи електромагнітній індукції у провіднику виникають ЕРС і струм :

$$I = E(r + R) , \quad (145)$$

де  $r$  — опір провідника АБ (внутрішній опір джерела електричної енергії) ;

$R$  — опір зовнішньої частини кола , включаючи опір приймача і частини шин , які входять в контур .

У даному випадку провідник А Б є джерелом ЕРС , електрична потужність якого

$$P = E I \quad (146)$$

Величину  $P$  часто називають електромагнітною потужністю . З появою струму у провіднику АБ виникає електромагнітна сила  $F_{\text{м}}$  , яка діє у напрямку , перпендикулярному напрямку струму .

Застосовуючи правило лівої руки , можемо перекоонатись в тому , що електромагнітна сила  $F_{\text{м}}$  направлена проти сили  $F_{\text{мех}}$  . Отже , зовнішня сила  $F_{\text{мех}}$  , у даному випадку , рухаюча , а  $F_{\text{м}}$  — гальмова .

При постійній швидкості  $v$ (сталий рух) рухаюча і гальмова сили рівні :

$$F_{\text{мех}} = F_{\text{м}} = B v l , \quad (147)$$

Підставляя вираження сили у формулу (20) получимо :

$$P_{\text{мех}} = F_{\text{мех}} v = B l v ; \quad (148)$$

Так як  $Bvl = E$  , то

$$P_{\text{мех}} = E I = P \quad (149)$$

Отже , механічна потужність первинного двигуна дорівнює електричній потужності джерела .

Вираження (149) показує, що при русі провідника у магнітному полі, в напрямку механічної сили, здійснюється повне перетворення механічної енергії в електричну.

Напруга на кінцях провідника  $U_{AB}$  одночасно напругою на зовнішній частині кола, яка менше ЕРС на величину внутрішнього падіння напруги:  $U_{AB} = E - Ir = IR$  (150)

### Перетворення електричної енергії в механічну.

Зворотнє перетворення електричної енергії в механічну можна показати на тому ж провіднику, змінивши декілька електричне коло, в яке він входить. Замість приймача електричної енергії до кола входить джерело електричної енергії з ЕРС  $E_0$ .

Якщо на кінцях провідника АБ забезпечити і підтримувати напругу  $U_{AB}$  більше, чим його ЕРС, струм у ньому змінить напрям на зворотній (у відповідності з формулою 150), струм змінює знак).

Такий стан у колі досягається дякуючи наявності ЕРС  $E_0$  джерела електричної енергії. При позитивному напрямку струму

$$I = (U_{AB} - E) / r \quad (151)$$

В цьому випадку ЕРС індукції у провіднику направлена проти струму і являється проти-ЕРС.

Зустрічний напрям ЕРС і струму є ознакою споживання електричної енергії у даному пристрої і перетворює її в інший вид енергії. Дійсно, зі зміною напрямку струму, змінюється, на протилежне, і напрям електромагнітної сили  $F_m$  і співпадає тепер з напрямом швидкості руху провідника. Сила  $F_m$  стає рухаючою. Тепер протидіє механічна сила  $F_{мех}$  (наприклад, сила тертя). Складаємо баланс потужностей для розглядаємого електричного кола. Провідник АБ являється приймачем електричної енергії, його електрична потужність:

$$P = U_{AB} I \quad (152)$$

Так як  $U_{AB} = E = Ir$ ,

$$то \quad P = EI + I^2 r \quad (153)$$

Враховуючи вираження  $E = Bv$  записуємо:

$$P = BvI + I^2 r = F_m v + I^2 r_0 \quad (154)$$

Перший доданок у цій сумі визначає механічну потужність провідника, який рухається, а

другий — потужність теплових витрат у провіднику АБ у відповідності з законом Джоуля – Ленца .

В зв'язку з тим , що механічна енергія виникає як результат дії сил магнітного поля , може скластися уява , що рух провідника здійснюється за рахунок енергії магнітного поля . В дійсності же в механічну перетворюється електрична енергія джерела , що і підтверджується рівнянням (154) . Магнітне поле є тут лише посередником при перетворенні енергії . Останнє зауваження відноситься і до зворотнього перетворення енергії — механічної в електричну .

### §53 . ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції

При зміні власного потокозчеплення в контурі або котушці індуктивності наводиться ЕРС самоіндукції , а при зміні взаємного потокозчеплення — ЕРС самоіндукції .

#### ЕРС самоіндукції .

Зміна власного потокозчеплення , звичайно , є наслідком зміни струму :

$$e_L = - d\psi_L/dt = -d(L i)/dt ,$$

або

$$e_L = - L (di/dt) \quad (155)$$

ЕРС самоіндукції пропорційна швидкості зміни струму  $di/dt$  . Вона протидіє зміні струму (при збільшенні струму перешкоджає його збільшенню , а при зменшенні затримує його падіння — правило Ленца)

Чим швидше змінюється струм , тим більше протидія його збільшенню або падінню . Проте ця протидія залежить не тільки від швидкості зміни струму , але і від конструкції електромагнітного пристрою , що у формулі (155) виражається множителем  $L$  (індуктивністю цього пристрою) .

Якщо зміна струму в контурі є наслідком зміни прикладеної до неї напруги , то ЕРС самоіндукції направлена проти прикладеної напруги , коли струм збільшується , і співпадає по напрямку з напругою , коли струм зменшується .

Подібно масі , яка характеризує інертність в механічній системі , індуктивність характеризує інертність в електромагнітній системі .

#### ЕРС взаємоіндукції .

Для системи магніто – зв'язаних котушок ЕРС самоіндукції :

$$e_{2M} = - d\psi_{1.2}/dt ; \quad e_{1M} = - d\psi_{2.1}/dt ; \quad ((156)$$

Зміна взаємного потокозчеплення може бути наслідком зміни струму в одній із котушок або зміною коефіцієнта зв'язку .

Припустимо , що змінюється струм  $i_1$  в першій котушці . ЕРС взаємоіндукції  $e_{2M}$  у другій котушці пропорційна швидкості зміни цього струму :

$$e_{2M} = - d\psi_{1.2}/dt = - M(di_1/dt) \quad (157)$$

Аналогічно , при зміні струму  $e_2$  , ЕРС самоіндукції :

$$e_{1M} = - d\psi_{2.1}/dt = - M(di_2/dt) \quad (158)$$

В тому і в іншому випадку коефіцієнтом пропорційності є взаємоіндуктивність системи  $M$  .

Правило Ленца , в застосуванні до такої системи , вказує на те , що зміна струму в одній котушці зустрічає протидію з боку іншої котушки .

З вираження (157) наступне , що ЕРС взаємоіндукції  $e_{2M}$  , а отже , і індукований струм  $i_2$  мають знак , протилежний швидкості зміни струму  $i_1$  . Це означає , що при збільшенні струму  $i_1$  і його магнітного потоку  $\Phi_{1.2}$  індукований струм створює магнітний потік  $\Phi_{2.1}$  , направлений зустрічно потоку  $\Phi_{1.2}$  : при зменшенні  $i_1$  потік  $\Phi_{2.1}$  направлений в відповідності з потоком  $\Phi_{1.2}$  , який зменшується .

Аналогічне міркування можна привести з вираження (158) . Напрямок магнітних потоків , в обох випадках , як звичайно , визначається з правила буравчика .

Взаємоіндуктивність , так же як і індуктивність характеризує електромагніту інерцію , но в системі котушок (контурів) , які мають магнітний зв'язок .

## §54 . Принцип дії трансформатора

Трансформатор — це електромагнітний апарат , що перетворює електричну енергію змінного струму з одними параметрами на електричну енергію з іншими параметрами . У трансформаторі перетворюється напруга , струм та початкова фаза . Незмінною залишається частота струму .

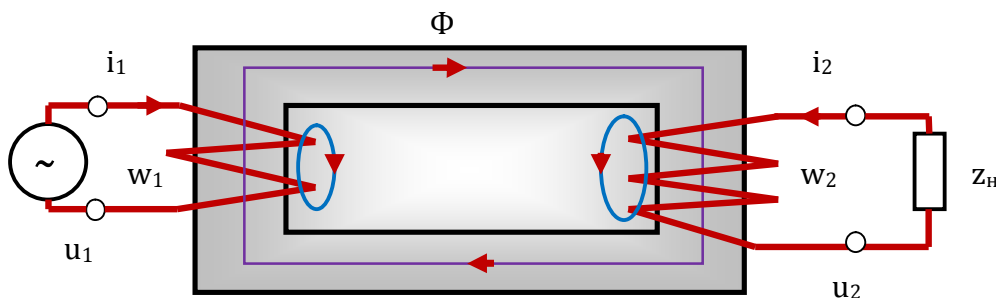


Рис . 86

Найпростіший трансформатор має магнітопровід (осердя) і обмотки. За кількістю обмоток трансформатори бувають двообмоткові та багато обмоткові. На рис. 86 наведено будову двохобмоткового трансформатора. Обмотка із кількістю витків  $w_1$  називається первинною. До затискачів первинної обмотки підводиться електрична енергія. На затискачі вторинної обмотки втикається споживач  $z_n$ . Первинна обмотка вмикається на синусоїдну напругу, у колі протікає змінний струм, який індукує основний магнітний потік  $\Phi$ , що замикається у магнітопроводі, та потік розсіяння  $\Phi_{p1}$ , що замикається у повітрі.

Змінний магнітний потік  $\Phi$  індукує ЕРС  $e_1$  і  $e_2$  у первинній та вторинній обмотках. Якщо до вторинної обмотки увімкнута навантаження, то почне протікати струм  $I_2$  і виникне потік розсіяння вторинної обмотки  $\Phi_{p2}$ , що замикається у повітрі.

$$e_1 = - (d\psi_1/dt) = - w_1(d\Phi/dt) \quad (159)$$

$$e_2 = - (d\psi_2/dt) = - w_2(d\Phi/dt) \quad (160)$$

Важливою характеристикою трансформатора є коефіцієнт трансформатора:

$$k_T = E_1/E_2 = w_1/w_2 \quad (161)$$

## §55 . Вихрові струми

Як було показано раніше, в замкнутій контурі, який пронизується змінним магнітним потоком, виникає ЕРС електромагнітної індукції. Якщо контур виконаний із провідника, то під дією ЕРС в ньому протікає струм. Струми протікають і в тілах із провідних матеріалів (сталь, мідь, алюміній та інші), розташованих у магнітному полі, яке змінюється. Ці струми замикаються в контурах, площини котрих перпендикулярні напрямку магнітного потоку, який змінюється, і називаються вихровими струмами. Якщо, наприклад, в обмотці котушки з масивним сталевим осердям проходить змінний струм, то в осерді наводяться вихрові струми, котрі замикаються в площині перпендикулярній вектору магнітної індукції. Ці струми визивають нагрів сталі і цим самим знижують к.к.д. електромагнітних механізмів. Ці втрати енергії називаються втратами від вихрових струмів

Для зменшення вихрових струмів застосовують:

магнітопроводи із електротехнічної сталі з домішкою кремнія, які володіють збільшеним питомим опором;

магнітопроводи, які виконуються з окремих, ізольованих один від одного листів сталі, товщиною 0,35 ... 0,5 мм, внаслідок чого збільшується опір магнітопровода для вихрових струмів і зменшуються вихрові струми.

Вихрові струми виникають і в якорі електричної машини при обертанні його в магнітному полі. Зменшення їх досягається тими же способами.

В трансформаторах, електричних машинах, інших апаратах і механізмах вихрові струми негативно впливають на роботу і їх необхідно стримувати. В інших приладах, навпаки, вони можуть бути використані для приведення в дію механізмів і приладів для забезпечення необхідного режиму роботи.

Так, в лічильниках електричної енергії, при обертанні диска виникають вихрові струми. Електромагнітна сила взаємодії цих струмів з магнітним полем створює гальмовий момент, необхідний для нормальної роботи прилада.

Вихрові струми широко застосовуються для індукційної плавки металів і для індукційного нагріву при поверхневому загартуванні металевих деталей.

## **ПН – 26 . Електричні кола змінного струму**

### **ПФ.С.01.3Р.0.07.03 Основні поняття про змінний струм**

#### **§56 . Поняття про змінний струм**

Змінний струм довгий час не знаходив практичного вживання. Це було пов'язано з тим, що перші генератори електричної енергії виробляли постійний струм, який сповна задовольняв технологічним процесам електрохімії, а двигуни постійного струму володіють хорошими регульовальними характеристиками. Проте у міру розвитку виробництва постійний струм все менш став задовольняти зростаючим вимогам економічного електропостачання. Змінний струм дав можливість ефективного дроблення електричної енергії і зміни величини напруги за допомогою трансформаторів. З'явилася можливість виробництва електроенергії на крупних електростанціях з подальшим економічним її розподілом споживачам, збільшився радіус електропостачання.

**Струм, який змінюється в часі за величиною та напрямом. називається змінним.** Один із напрямів змінного струму вважають додатним, а протилежний - від'ємним. Значення струму в даний момент часу називають миттєвим значенням. Кожному моментові часу відповідає певне за величиною і напрямом значення змінного струму.

Змінний струм, миттєве значення якого повторюється через рівні проміжки часу, називається періодичним, а найменший проміжок часу, через який відбувається повторення, називається періодом змінного струму. Серед періодичних змінних струмів найбільше поширення має гармонічний струм, тобто такий, що є синусоїдною функцією часу. Закон зміни такого струму можна представити функцією :

$$I = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (162)$$

де  $I_m$  — амплітуда,  $\omega = 2\pi f$  — циклічна частота,  $\psi_i$  — початкова фаза. Частота  $f$  струму зв'язана з періодом  $T$  залежністю  $f = 1/T$ .

Таким чином, синусоїдний струм характеризується трьома величинами: амплітудою  $I_m$ , частотою  $\omega$  і початковою фазою  $\psi_i$ . Амплітуда - це найбільше за абсолютною величиною значення синусоїдного струму. Найменший проміжок часу, через який значення струму повторюється, називається *періодом*, а величина, обернена до періоду, називається *частотою*. Постійний струм, можна розглядати як частковий випадок змінного струму (частота  $f = 0$ , а період  $T = \infty$ ). Діапазон частот змінних струмів, які використовуються в техніці, складає від долей герц до мегагерц. Промислова частота становить 50 Гц (Україна, країни Європи, Росія і ін.) та 60 Гц (США, Японія і ін.). Аналогічно до струму синусоїдними функціями є напруга та ЕРС.

Надалі, говорячи про змінний струм, у цьому розділі матимемо на увазі синусоїдний струм. Його графік зображений на рис. 87. Аргумент синусоїдної функції (1) називають фазою, а значення фази при  $t=0$  - початковою фазою.

Якщо дві синусоїдні величини (наприклад, напруга та струм) мають різні початкові фази, то кажуть, що між ними існує зсув фаз. Зсув фаз визначається за формулою

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \quad (163)$$

В даний час центральне виробництво і розподіл електричної енергії здійснюється, в основному, на змінному струмі. Кола з змінними – струмами в порівнянні з колами постійного струму мають ряд особливостей. Змінні струми і напруга викликають змінні електричні і магнітні поля. В результаті зміни цих полів в колах виникають явища самоіндукції і взаємної індукції, які роблять найістотніший вплив на процеси, що протікають в колах, ускладнюючи їх аналіз.

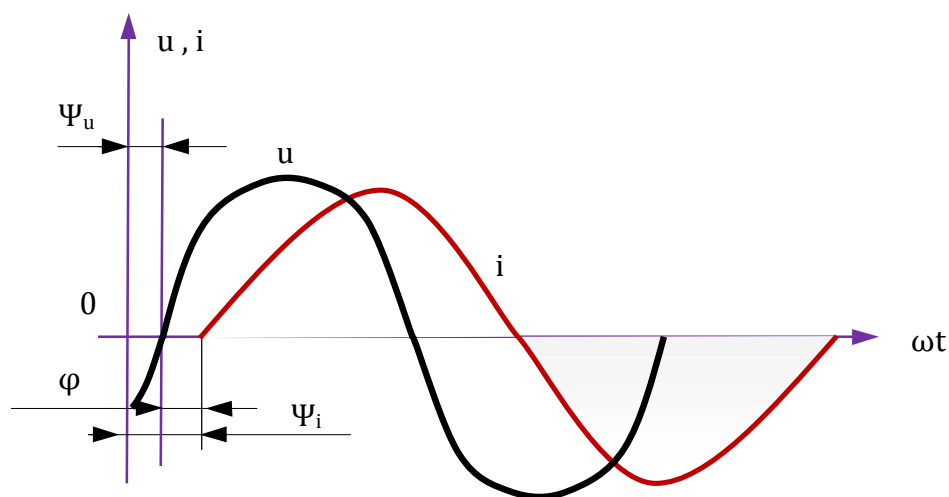


Рис . 87



## §57 . Отримання синусоїдної ЕРС

Для здобуття ЕРС синусоїдальної форми генератор змінного струму промислового типу має певні конструктивні особливості . Проте принципово синусоїдну залежність ЕРС від часу можна отримати, обертаючи з постійною частотою в рівномірному магнітному полі провідник у вигляді прямокутної рамки (рис . 88).

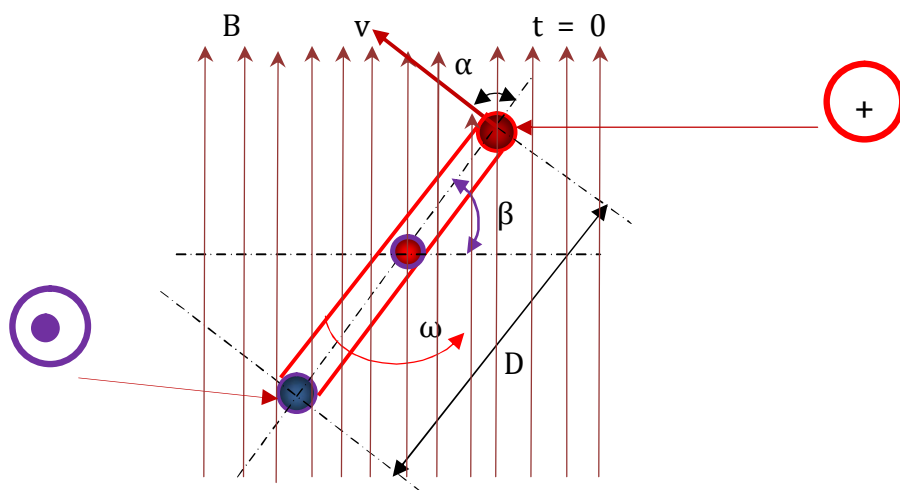


Рис . 88

### Обертання витка в рівномірному магнітному полі

ЕРС в рамці , що має два активних провідники довжиною  $l$  ,  $l = 2 B v l \sin \alpha$  . завдовжки (надалі усі величини,що змінюються у часі: струми, напруга, ЕРС і т. д.—будемо позначати малими буквами на відміну від постійних значень для тих же величин, які позначають великими буквами).

При рівномірному обертанні рамки лінійна швидкість провідника не змінюється:

$$v = D\omega / 2 , \quad (164)$$

а кут між напрямом швидкості і напрямом магнітного поля змінюється пропорційно часу:

$$\beta = \alpha = \omega t \quad (165)$$

Кут  $\beta$  визначає положення рамки, що обертається, відносно площини, перпендикулярної напрямку магнітної індукції. (Положення рамки у момент початку відліку часу  $t = 0$  характеризується кутом  $\beta = 0$ .) Тому ЕРС в рамці є синусоїдною функцією часу .

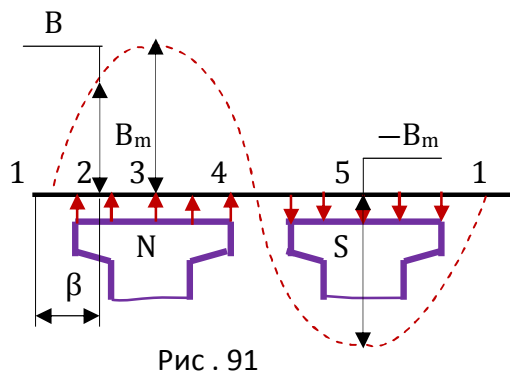
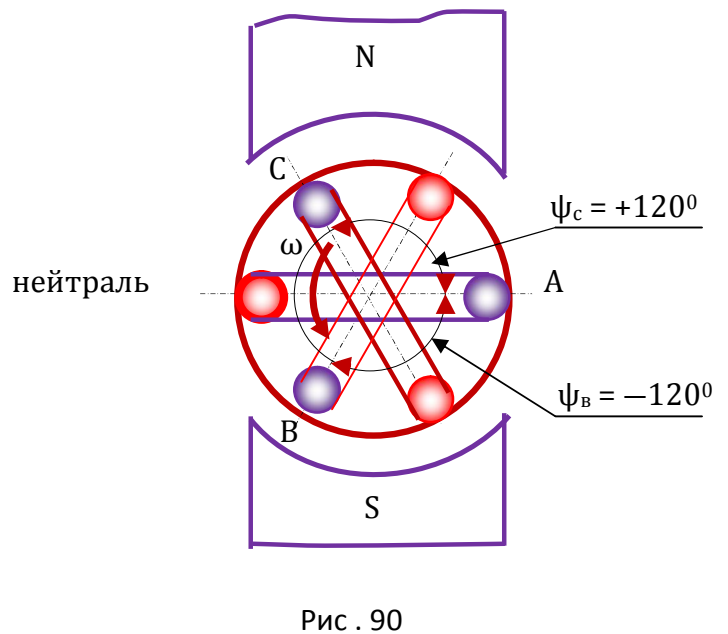
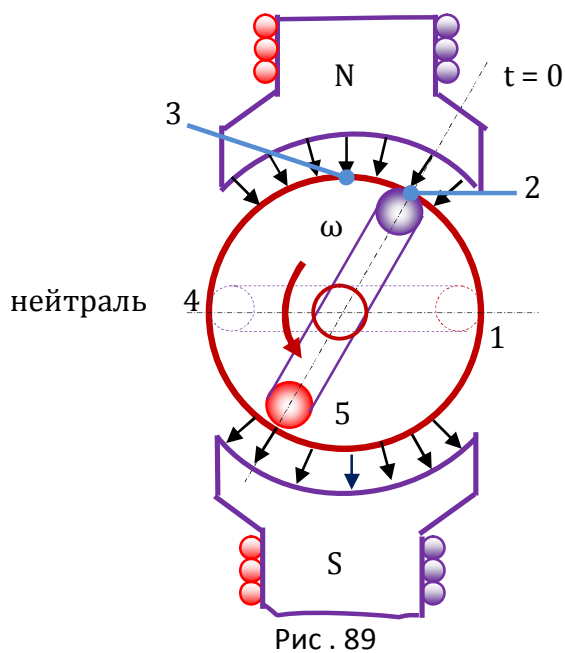
$$E = B l D \omega \sin \omega t \quad (166)$$

Найбільшої величини ЕРС досягає при куті  $\alpha = \omega t = 90^\circ$ :

У розглянутому випадку синусоїдна зміна ЕРС досягається за рахунок безперервної зміни кута, під яким проводники пересікають лінії магнітної індукції. Проте такий спосіб отримання ЕРС в практиці не застосовується, оскільки важко створити рівномірне поле в чималому об'ємі.

### Генератор змінного струму

В електромашинних генераторах змінного струму промислового типу синусоїдна ЕРС виходить при постійному куту, але в нерівномірному магнітному полі.



Магнітне поле генератора (радіальне) в повітряному зазорі між статором і ротором направ-

лене по радіусах кола ротора (рис .89). Магнітна індукція уздовж повітряного зазору розподілена згідно із законом, близькому до синусоїдного. Такий розподіл досягається відповідною формою полюсних наконечників . Синусоїдний закон розподілу магнітної індукції уподовж повітряного зазору показаний на рис . 91 в розгорнутому вигляді. У будь-якій точці повітряного зазору, положення якої визначається кутом  $\beta$  , відліченим від нейтральної площини (нейтралі) проти руху годинникової стрілки, магнітна індукція виражається рівнянням :

$$B = B_m \sin \beta \quad (167)$$

Нейтральна площина перпендикулярна осі полюсів і ділить магнітну систему на симетричні частини, з яких одна відноситься до північного полюса, а інша — до південного.

Найбільшу величину магнітна індукція має під серединою полюсів, тобто при кутах  $\beta = 90^\circ (B = B_m)$  і  $\beta = 270^\circ (B = -B_m)$ .

На нейтралі (при  $\beta = 0$  і  $\beta = 180^\circ$ ) магнітна індукція дорівнює нулю ( $B = 0$ ).

Відзначимо ще один різновид генераторів змінного струму — генератор з трьома обмотками (трифазний генератор), які на схемі рис . 90 показані трьома витками у роторі (в турбогенераторів і гідрогенераторів ці обмотки знаходяться на статорі). Площини витків знаходяться під кутом  $120^\circ$  один до одного.

#### **ЕРС у обмотці генератора**

При рівномірному обертанні ротора в його обмотці (на рис . 89) — у витку наводиться ЕРС , що визначається за формулою :

$$e = Bv2l \quad (168)$$

Підставляючи вираження магнітній індукції , отримаємо :

$$e = B_m v 2 l \sin \beta$$

При  $\beta = 90^\circ$  , тобто в положенні провідника під серединою полюса, наводиться найбільша ЕРС

$$E_m = B_m 2 v l \quad (169)$$

Рівняння ЕРС можна записати так:

$$e = E_m \sin \omega t \quad (170)$$

Враховуючи , що  $\beta = \alpha = \omega t$  , отримаємо таку ж залежність ЕРС від часу, як і при обертанні рамки (див. рис . 88), вважаючи початковим положення витка ( $t=0$ ), коли його площина збігається з нейтраллю . Таким чином, і в даному випадку ЕРС є синусоїдною функцією часу . Такий же результат виходить, якщо обернути полюси, а провідники залишити нерухомими.

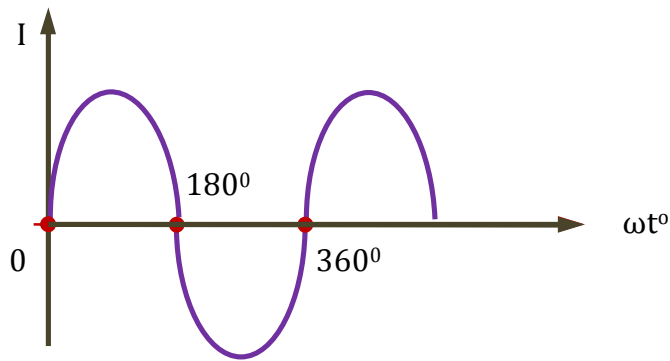


Рис .92

У прямокутній системі координат ЕРС можна зобразити в функції кута  $\beta = \omega t$  або у функції часу  $t$ . Залежність  $e(\omega t)$  і  $e(t)$  можна зобразити одною кривою, але при різних масштабах по осі абсцис, що відрізняються в  $\omega$  раз.

Якщо обмотку генератора замкнути через опір, то в утвореному колі виникає синусоїдний струм, що повторює формою криву ЕРС.

Вважаючи опір кола лінійним, рівним  $R$ , отримуємо для струму таке вираження:

$$i = e/R = E_m \sin \omega t / R = I_m \sin \omega t, \quad (171)$$

де  $I_m = E_m / R$  — найбільша величина струму.

Напругу і струм синусоїдної форми можна отримати за допомогою генераторів, що не мають частин, що обертаються, і магнітних полюсів, наприклад лампових генераторів.

## §58 . Рівняння і графіки синусоїдних величин

Аналіз електричних кіл змінного струму неможливе проводити без вираження ЕРС, струмів, напруги їх рівняннями. Для наочності застосовуються графіки цих величин в прямокутній системі координат. Тому розглянемо рівняння і графіки синусоїдних величин детальніше.

### Рівняння і графіки

Рівняння ( $e = E_m \sin \omega t$ ) записане для випадку, коли початок відліку часу ( $t = 0$ ) збігається з моментом проходження витка через нейтраль на рис. 89, а положення 1, у якому площина витка збігається з нейтраллю).

На рис. 90 положення витків теж відповідає початку відліку часу ( $t = 0$ ) і визначається для кожного з них кутом, відліченим від нейтралі до площини витка: для першого витка цей кут  $\Psi_A = 0$ , для другого —  $\Psi_B < 0$  і третього —  $\Psi_C > 0$ .

При обертанні ротора ЕРС, які наводяться у всіх витках, не будуть однаковими. Дійсно ЕРС у витках:

$$\left. \begin{aligned} A \quad e_{AO} &= E_m \sin 0^\circ = 0; \\ B \quad e_{BO} &= E_m \sin \psi_B < 0; \\ C \quad e_{CO} &= E_m \sin \psi_C > 0 \end{aligned} \right\} (172)$$

Ця залежність ЕРС від початкового положення витка враховується введенням в рівняння початкового кута.

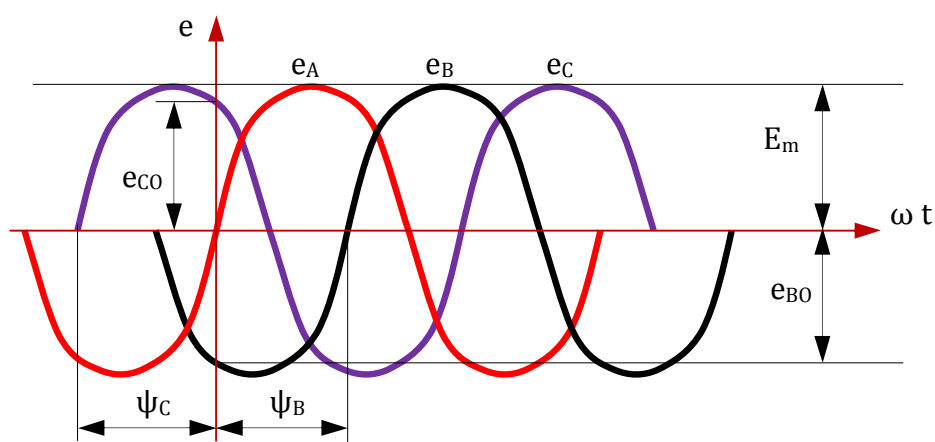


Рис . 93

З врахуванням початкового кута ЕРС витка С виражається рівнянням :

$$e_C = E_m \sin (\omega t + \psi_C) ,$$

ЕРС витка В

$$e_B = E_m \sin (\omega t - \psi_B)$$

Таким чином, в загальному вигляді рівняння ЕРС повинно бути записано так:

$$e = E_m \sin (\omega t \pm \psi) \quad (173)$$

На рис. 93 побудовані графіки ЕРС трьох витків, що відрізняються у момент початку відліку часу розташуванням відносно нейтральної площини ( $e_A$  при  $\psi_A = 0$ , з

$e_C$  при  $\psi_C > 0$ ,  $e_B$  при  $\psi_B < 0$ )

## §59 . Характеристики синусоїдних величин

Рівнянням і графіком задаються всі характеристики синусоїдної величини, що змінюється: амплітуда, кутова частота, початкова фаза, період, частота і для будь-якого моменту часу миттєва величина.

Далі приведені визначення цих характеристик, і вони показані на рис 94. стосовно синусоїдної ЕРС . Визначення поширюються на всі величини, що змінюються по синусоїдному закону (струм, напруга і ін.).

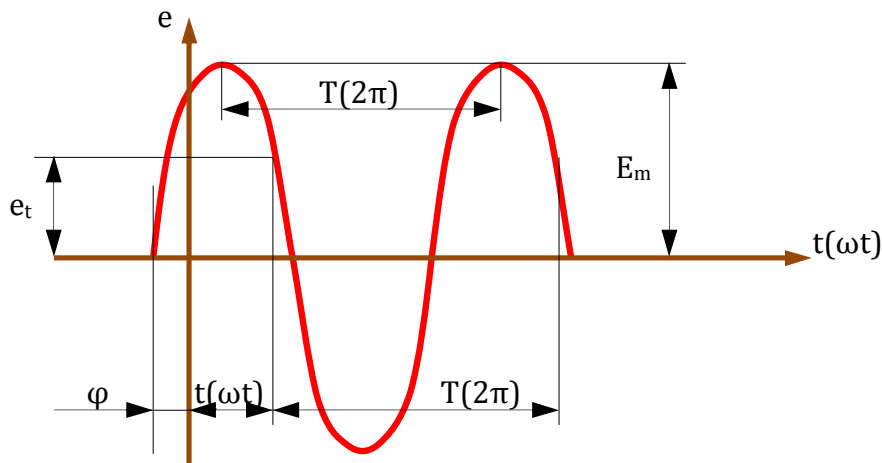


рис. 94

Миттєва величина (або миттєве значення) ЕРС ( $e$ ) — величина ЕРС в даний момент часу. Миттєва ЕРС визначається рівнянням :

$$e = E_m \sin (\omega t \pm \psi_c) \quad (174)$$

при підстановці в нього часу  $t$  , минулого від початку відліку до даного моменту.

Період  $T$  — найменший інтервал часу, після закінчення якого миттєві величини періодичної ЕРС повторюються. Якщо аргумент синусоїдної функції виражається в кутах, то період виражається постійною величиною  $2\pi$ .

Частота  $f$  — величина , зворотня періоду:

$$f = 1/T, \quad (175)$$

тобто частота дорівнює числу періодів змінної ЕРС в секунду. Частота виражається в герцах (Гц):  $1 \text{ Гц} = 1/\text{с}$ .

Амплітуда  $E_m$  — найбільша величина, яку приймає ЕРС протягом періоду. Амплітуда є одною з миттєвих величин, яка відповідає аргументу  $\omega t \pm \psi$  , рівному  $(k\pi + 90^\circ)$  , де  $k$  — будь-яке ціле число або нуль.

Фаза (фазовий кут  $\omega t \pm \psi$ ) — аргумент синусоїдною ЕРС, відмічений від найближчої попередньої точки переходу ЕРС через нуль до позитивного значення. Фаза у будь-який момент часу визначає стадію гармонійної зміни синусоїдної ЕРС.

Початкова фаза  $\psi$  — фаза синусоїдної ЕРС у початковий момент часу.

Дві синусоїдні величини, що мають різні початкові фази, називаються зсунутими по фазі.

Циклічна частота  $\omega$  — швидкість зміни фази. За час одного періоду  $T$  фазовий кут рівномірно змінюється на  $2\pi$ , тому

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f \quad (176)$$

### §60 . Векторні діаграми : обґрунтування , побудова . Складання і віднімання векторів

До цих пір величини, що змінюються по синусоїдному закону, задавали рівняннями і зображали графіками в прямокутній системі координат. При розрахунку електричних кіл змінного струму користуються вельми простим і наочним способом графічного зображення синусоїдних величин за допомогою векторів, що обертаються

#### Обґрунтування векторної діаграми

Передбачимо, що струм заданий рівнянням

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) .$$

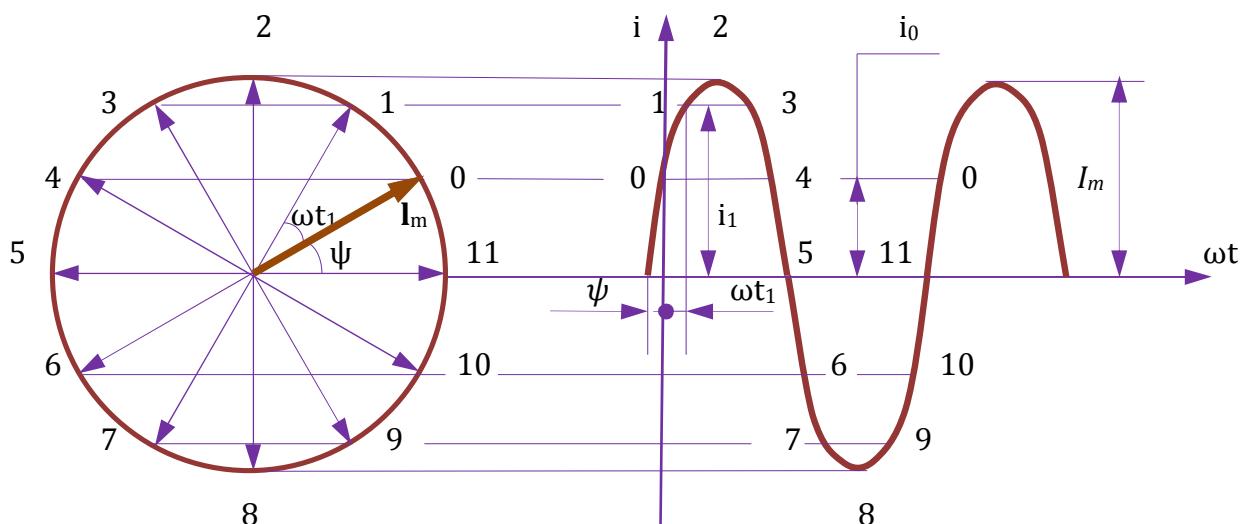


Рис .95

Проведемо дві взаємно перпендикулярні осі і з точки перетину осей проведемо вектор  $I_m$ ,

довжина якого в певному масштабі  $M_i$  виражає амплітуду струму  $I_m$  :

$$i_m = I_m / M_i$$

Напрямок вектора виберемо так, щоб з позитивним напрямком горизонтальної осі вектор складав кут" рівний початковій фазі  $\psi$  (рис . 95).

Проекція цього вектора на вертикальну вісь визначає миттєвий струм в початковий момент часу:

$$i_0 = I_m \sin \psi.$$

Уявимо собі, що вектор  $I_m$  обертається проти руху часової стрілки з кутовою швидкістю, рівній циклічній частоті  $\omega$ . Його положення у будь-яку мить часу визначається кутом  $\omega t + \psi$ .

Тоді миттєвий струм для довільного моменту часу  $t$  можна визначити проекцією вектора  $I_m$  на вертикальну вісь у цей момент часу.

Наприклад , для  $t = t_1$   $i_1 = I_m \sin (\omega t_1 + \psi)$  ,

у загальному вигляді  $i = I_m \sin (\omega t + \psi)$

Отримали таке ж рівняння, яким був заданий змінний струм. що свідчить про можливість зображення струму вектором, що обертається, при нанесенні його на креслення в початковому положенні.

### Побудова векторної діаграми

Обертаючи вектор  $I_m$  проти руху годинникової стрілки, в прямокутній системі координат побудуємо графік зміни проекції його на вертикальну вісь в межах одного обороту (одного періоду). Отримаємо відомий вже графік синусоїдної функції , відповідний заданному рівнянню.

При побудові векторів позитивні кути відлічують від позитивного напрямку горизонтальної осі проти обертання годинникової стрілки, а негативні — по її руху. В процесі розрахунку електричного кола визначається ряд синусоїдних величин. Всі їх можна зобразити на одному кресленні за допомогою векторів, що обертаються, прив'язавши до одної пари взаємно перпендикулярних осей.

Сукупність векторів, що зображують на одному кресленні декілька синусоїдних величин однакової частоти в початковий момент часу , називається векторною діаграмою. Наприклад, напруга і струм в електричному колі виражаються рівняннями

$$u = 125 \sin (\omega t + 30^\circ);$$

$$i = 12 \sin (\omega t + 20^\circ).$$

Векторна діаграма такого кола зображена на рис. 96. Якщо вибрати масштаби напруги і струму

$$M_u = 50 \text{ В/см};$$

$$M_i = 4 \text{ А/см}; \text{ то}$$



$$U_m = U_m/M_u = 125/50 = 2,5 \text{ см};$$

$$I_m = I_m/M_i = 12/4 = 3 \text{ см}.$$

Векторна діаграма містить вектори синусоїдних величин однакової частоти, тому вони обертаються з однаковою частотою і їх взаємне розташування не міняється.

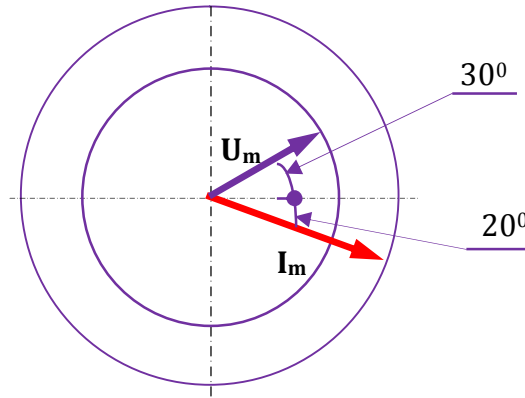


Рис . 96

Початок відліку часу вибирають довільно, тому один з векторів діаграми можна направити довільно; останні ж потрібно розташовувати з врахуванням зсуву фаз по відношенню до першого або попереднього вектору

### Складання і віднімання векторів

Простота і наочність векторних діаграм — не єдине і не головне достоїнство способу зображення синусоїдних величин.

Потрібно скласти , наприклад , два струми , заданих рівняннями:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1);$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

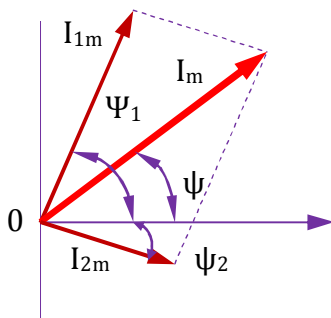


Рис . 97

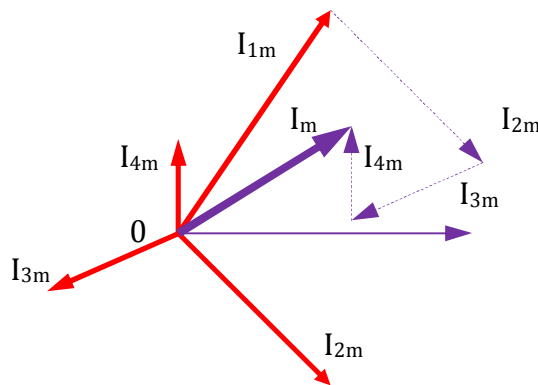


Рис . 98

## Вираження суми

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$$

виявляється громіздким, з нього не можна побачити амплітуду і початкову фазу результуючого струму.

Можна графічно скласти два задані струми, побудувавши їх в одній системі координат і для ряду аргументів, знайшовши суму двох ординат.

Через отримані точки проведемо криву суми, побачимо, що, ця крива теж синусоїда з таким же періодом, як і доданки. По кривій загального струму можна знайти амплітуду і початкову фазу.

Громіздкість і незручність такого складання очевидні,

Дуже просто складання і віднімання синусоїдних величин виконується по правилах складання і віднімання векторів.

Складемо два задані струми  $i_1$  і  $i_2$  за відомим правилом складання векторів (рис. 97). Для цього зобразимо струми у вигляді векторів із загального початку  $O$ . Результуючий вектор знайдемо як діагональ паралелограма, побудованого на складових векторах:

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}$$

Складання векторів, особливо трьох і більше, зручніше вести в такому порядку; один вектор залишається на місці, інші переносяться паралельно самим собі так, щоб початок подальшого вектора збігся з кінцем попереднього.

Вектор  $\dot{I}_m$ , проведений з початку першого вектора в кінець останнього, є сумою всіх векторів (рис. 98).

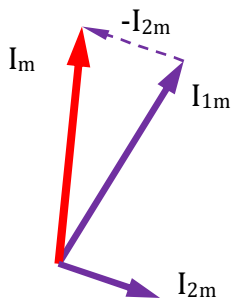


Рис . 99

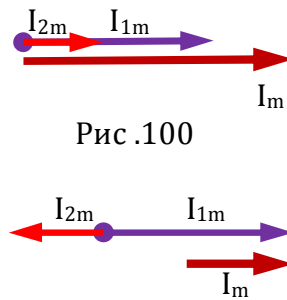


Рис . 100

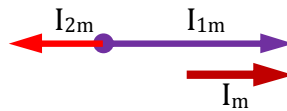


Рис . 101

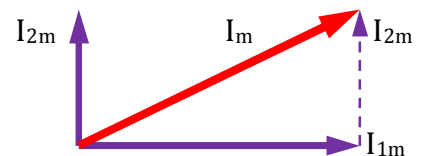


Рис . 102

Віднімання одного вектора з іншого виконують складанням прямого вектора — зменшуваного і зворотного — віднімаємого (рис. 99):

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{1m} - \dot{I}_{2m} = \dot{I}_{1m} + (-\dot{I}_{2m}),$$

При складанні синусоїдних величин в окремих випадках можна застосувати аналітичне рішення: стосовно рис . 97 — по теоремі косинусів ; до рис . 100 — складання модулів векторів ; рис . 101 — віднімання модулів векторів , рис . 102 — по теоремі Піфагора.

## §61 . Діюча та середня величини змінного струму

Про змінний струм все відомо, якщо задано його рівняння або графік. Проте в практиці користуватися рівняннями або графіками струмів скрутно.

Змінний струм зазвичай характеризується його діючою величиною . При вивченні випрямних пристроїв і електричних машин користуються середніми величинами ЕРС , струму, напруги.

### Діюча величина змінного струму

При визначенні діючої величини змінного струму можна виходити з якої небудь його дії в електричному колі (теплової, механічної взаємодії дротів із струмами).

На рис . 103 зображені графіки двох струмів: постійного — 1 і змінного — 2 , причому величина постійного струму дорівнює амплітуді змінного.

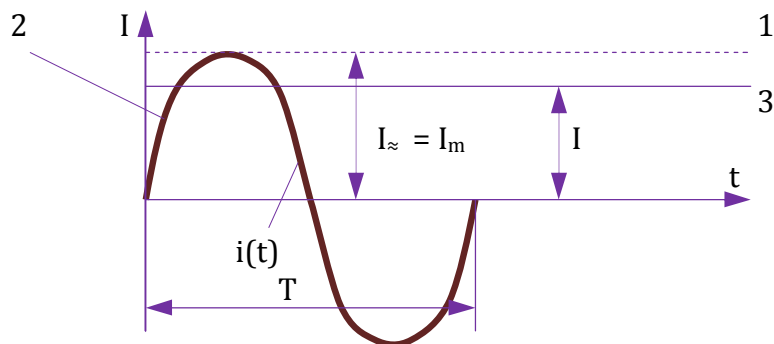


Рис . 103

Постійний струм, рівний амплітуді змінного, виділить більше тепла в одному і тому ж елементі кола за один і той же час, оскільки змінний струм протягом полуперіода менше постійного, і лише одну мить ці струми рівні.

Діюча величина змінного струму  $I$  чисельно дорівнює величині постійного струму, який в одному і тому ж елементі кола за час періоду  $T$  виділяє стільки ж тепла, скільки за тих же умов виділяє змінний струм.

Діюча величина змінного струму  $I$  , що діє менше амплітуди (пряма 3 на рис .103).

Визначимо кількість тепла, виділеного за період  $T$  постійним струмом, рівним  $I$ , і змінним струмом  $i = I_m \sin \omega t$  (див.рис. 103) у елементі кола з опором  $R$ :

$$Q_{\text{пост}} = I^2 R T; \quad Q_{\text{змін}} = \int_0^T i^2 R dt = I_m^2 R \int_0^T \sin^2 \omega t dt .$$

Прирівнюючи  $Q_{\text{пост}} = Q_{\text{змін}}$ , знайдемо

$$I^2 T = \int_0^T i^2 dt; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (177)$$

Діюча величина періодичного струму, що діє, є його середньою квадратичною за період.

Її можна знайти з рівняння (177), але для наочності використаємо графічне рішення поставленої задачі.

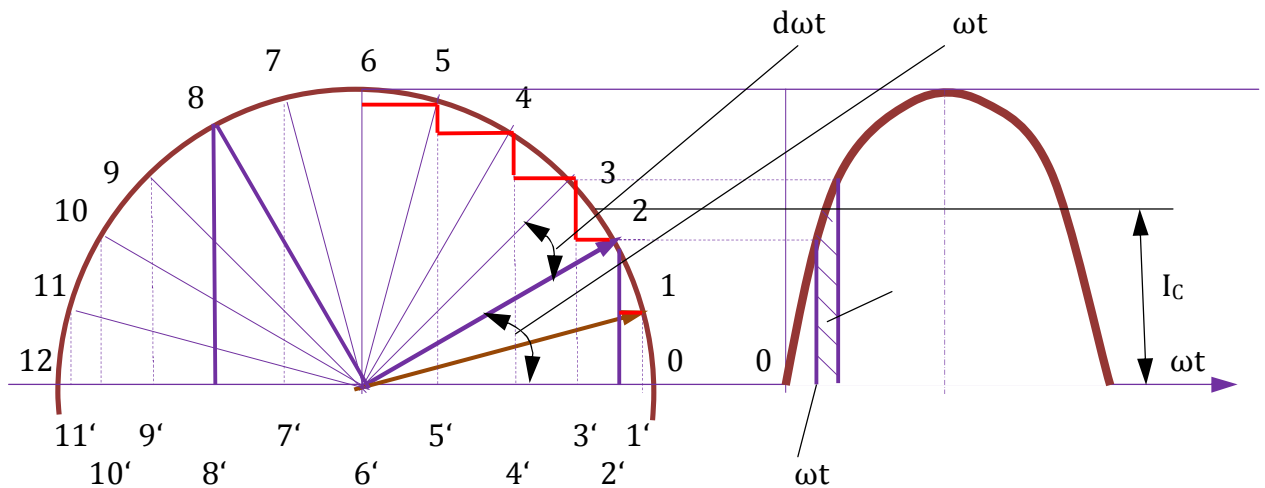


Рис . 104

Середньоквадратичну величину змінного струму за період можна надати у вигляді квадратного кореня з суми дуже великого числа ординат кривої  $i^2(t)$ , розділеною на число ординат  $n$ :

$$I = \sqrt{(i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2) / n}, \quad (178)$$

де в чисельнику підкорінного вираження надана сума квадратів ряду миттєвих струмів протягом періоду,  $n$  — число цих значень, прагнуче до  $\infty$ .

На рис. 104 показані ряд положень що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  вектора струму  $I_m$  і відповідні їм миттєві струми  $i$ . Ці положення відмічені точками 0, 1, 2 і т. д. на колі, котре описує кінець вектора  $I_m$ .

Розглянемо два положення вектора  $I_m$  (відмічені точками 2 і 8), віддалені по колу на  $90^\circ$ , тобто що знаходяться відповідно в першій і другій чвертях кола. Прямокутні трикутники  $6'-2-$

$2'$  і  $6'-8-8'$  рівні, оскільки рівні їх сторони:  $2-2'=6'-8'$  і  $2'-6'=8-8'$ . З цих трикутників виходить:

$$i_2^2 + i_8^2 = I_m^2$$

Кожному положенню вектора  $I_m$  в першій чверті відповідає інше його положення в другій, для яких можна написати аналогічне вираження. Такі міркування можна провести для іншого півкола, тобто розповсюдити їх на другий напівперіод струму, причому квадрати негативних миттєвих струмів будуть позитивними, тому

$$i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_8^2 + i_n^2 = (n/2) I_m^2$$

Підставляючи цей вираз в формулу для отримання середньоквадратичного значення змінного струму за період, отримуємо

$$I = I_m / \sqrt{2} \quad (179)$$

Таким чином, діюча величина синусоїдного струму менше його амплітуди в  $\sqrt{2}$  рази.

Поняття про діючу величину можна розповсюдити на всі синусоїдні функції і, отже, говорити про величину діючої напруги, ЕРС.

Діючі величини струму напруги вимірюються електровимірювальними приладами. Номінальні струми і напруга електротехнічних пристроїв виражаються діючими величинами. Ввівши поняття про діючу величину надалі векторні діаграми будуватимемо для діючих величин напруг і струмів.

Відношення амплітуди до діючої величини називається коефіцієнтом амплітуди  $K_a$ . Для синусоїдної функції цей коефіцієнт рівний  $\sqrt{2}$ ; якщо крива струму або напруги має гострішу форму, ніж синусоїда, то  $K_a > \sqrt{2}$ , інакше  $K_a < \sqrt{2}$  (при прямокутній формі  $K_a = 1$ ).

### Середня величина змінного струму

Середньою величиною змінного струму (ЕРС, напруги) називається середнє арифметичне зі всіх миттєвих величин за напівперіод.

Середня величина дорівнює висоті прямокутника з основою  $\pi$  (у кутовій мірі), площа якого дорівнює площі  $S$ , обмеженою позитивною півхвилею струму і віссю абсцис (див. рис. 104),

$$I_c \pi = S.$$

Для визначення площі  $S$  потрібно скласти в межах напівперіода елементарні площі  $dS$ , одна з яких на рисунку показана при деякому куті  $\omega t$  і миттєвій величині струму  $i$ .

При малій зміні кута ( $d\omega t \rightarrow 0$ ) значення струму можна вважати постійним, тому

$$dS = i d\omega t = I_m \sin \omega t d\omega t.$$

Зміні кута на  $d\omega t$  відповідає поворот на такий же кут вектора  $I_m$ , кінець якого опише дугу 2-3 завдовжки

$$dl = I_m d\omega t,$$

тому

$$dS = dl \sin \omega t$$

Довжину дуги  $dl$  можна вважати рівною гіпотенузі прямокутного трикутника 2-3-3". Цей трикутник має взаємно перпендикулярні сторони з трикутником 2-6'-2', тому кути при вершинах 3 і 6' рівні  $\omega t$ . Сторона 2-3" трикутника 2-3-3" дорівнює проекції гіпотенузи 2-3 на горизонтальну вісь:

$$dS = dl \sin \omega t = \sqrt{2'-3'}.$$

Такі ж міркування можна привести для подальших і попередніх змін кута  $\omega t$  на  $d\omega t$ . Отже суму  $S$  елементарних площ  $dS$ , узятую за полуперіод, можна прирівняти проекції півкола на його діаметр:

$$S = 2 I_m.$$

Таким чином

$$I_c \pi = 2 I_m.$$

Середня величина синусоїдного струму

$$I_c = 2 I_m / \pi.$$

Середня величина синусоїдальної функції за період дорівнює нулю, оскільки площі позитивної і негативної півхвиль рівні.

Відношення діючої величини до середньої називається коефіцієнтом форми кривої  $K_\phi$

$$K_\phi = I/I_c.$$

Для синусоїди

$$K_\phi = (I_m/\sqrt{2}) \cdot (\pi/2 I_m) = (\pi/2\sqrt{2}) = 1,11.$$

Знайдемо середню і діючу величини ЕРС, що наводиться в прямокутному витку (див. рис. 88) при обертанні його у рівномірному магнітному полі з постійною кутовою швидкістю. Для цього у формулі для знаходження найбільшого значення ЕРС позначимо:  $D = S$  — площа витка;  $B_S = \Phi_m$  — найбільша величина магнітного потоку, зчепленого з витком.

Амплітуда ЕРС за наявності  $N$  витків

$$E_m = \Phi_m N \omega = 2\pi f N \Phi_m \quad (181)$$

Середня величина ЕРС

$$E_c = 2E_m/\pi = 4 f N \Phi_m \quad (182)$$

Діюча величина  $E_C$

$$E = K_\Phi E_C = 1.11 E_C = 4.44 f N \Phi_m \quad (183)$$

## ПФ.С.02.ПР.0.10.01 Розрахунок лінійних кіл синусоїдного струму

### §62 . Параметри електричних кіл змінного струму

Всі реальні електротехнічні пристрої володіють електричним опором  $R$ , індуктивністю  $L$  і ємністю  $C$ , які є параметрами електричного кола змінного струму. Проте вплив кожного з параметрів на струм в колі різний, тому в деяких випадках з розрахункової схеми виключаються ті, вплив яких незначний.

Таким чином схема електричного кола змінного струму характеризується одним з вказаних параметрів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  або комбінацією їх при різних способах з'єднання елементів.

### §63 . Коло з активним опором : рівняння струму , напруги та потужності ; векторна діаграма

Електричні лампи розжарювання, пічі опору, побутові нагрівальні прилади; реостати і інші приймачі, де електрична енергія перетворюється в теплову, на схемах заміщення зазвичай показані лише опором  $R$ .

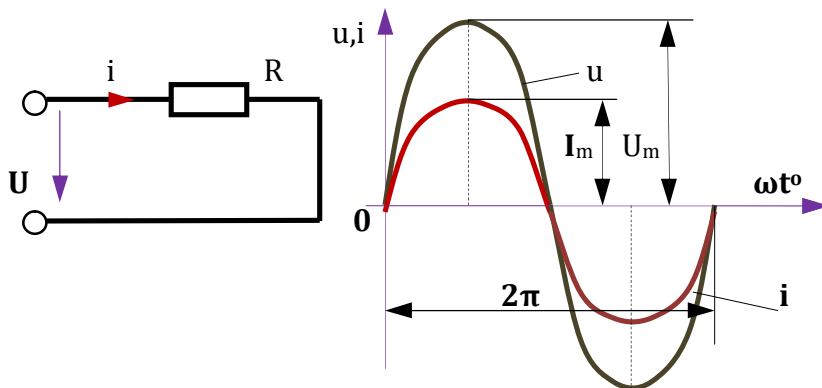


Рис . 105

Рис . 106



Рис . 107

Для схеми, змальованої на рис. 93 задані опір  $R$  і напруга, що змінюється згідно із законом

$$u = U_m \sin \omega t$$

Потрібно визначити струм і потужність кола.

### Струм у колі

Виразення для миттєвого струму знайдемо за законом Ома:

$$I = u/R = (U_m \sin \omega t)/R = I_m \sin \omega t ,$$

де  $I_m = U_m / R$  — амплітуда струму.

З рівнянь напруги і струму видно, що початкові фази обох кривих однакові, тобто напруга і струм в колі з опором  $R$  збігаються по фазі. Це показано на графіках і векторній діаграмі (рис. 93 і рис. 94).

Діючий струм знайдемо, розділивши амплітуду на  $\sqrt{2}$ :

$$I_m/\sqrt{2} = U_m/\sqrt{2} R ,$$

звідси

$$I = U/R ; \quad U = IR ; \quad R=U/I \quad (184)$$

Формули (184) виражають закон Ома для кола змінного струму з опором  $R$ .

### Миттєва потужність

При змінних величинах напруги і струму швидкість перетворення електричної енергії в приймачі, тобто його потужність, теж змінюється. Миттєва потужність дорівнює множенню миттєвих величин напруги і струму:

$$P = U_m \sin \omega t I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t .$$

З тригонометрії знайдемо

$$\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t) / 2$$

Враховуючи це, запишемо

$$P = U_m I_m / 2 - U_m I_m / 2 \cos 2\omega t \quad (185)$$

Треба відмітити, що потужність протягом періоду залишається позитивною, хоча струм і напруга міняють свій знак. Це виходить завдяки збігу по фазі напруги і струму.

Постійність знаку потужності говорить про те, що напрям потоку електричної енергії залишається протягом періоду незмінним, в даному випадку від мережі (від джерела енергії) в приймач з опором  $R$ , де електрична енергія безповоротно перетворюється в інший вигляд енергії. В цьому випадку електрична енергія називається активною.



Якщо  $R$  — опір провідника, то відповідно до закону Ленца — Джоуля електрична енергія в ньому перетворюється тепло.

### Активна потужність

Швидкість перетворення електричної енергії в інший вид енергії за кінцевий проміжок часу, значно більший періоду зміни струму, характеризується середньою потужністю. Вона дорівнює середній потужності за період, яку називають активною.

Активна потужність — середнє арифметичне миттєвої потужності за період.

Активна потужність кола з опором дорівнює множенню величин напруги і струму:

$$P = UI = I^2R = U^2/R \quad (186)$$

Опір  $R$ , визначає мий з формули (186) відношенням активної потужності кола до квадрата діючого струму називається активним електричним опором.

З математичної точки зору активна потужність є постійною складовою в рівнянні миттєвої потужності  $p(t)$ .

Середня потужність за період :

$$P = U_m I_m / 2 = UI$$

### §64 . Коло з індуктивністю : рівняння струму , напруги та потужності ; векторна діаграма

Досліджуємо далі коло , що містить лише індуктивність , є штучним, оскільки котушки, лінії електропередачі і інші пристрої окрім індуктивності  $L$  мають і активний опір.

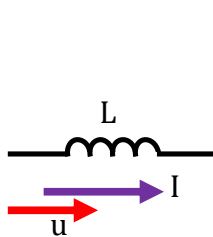


Рис. 108

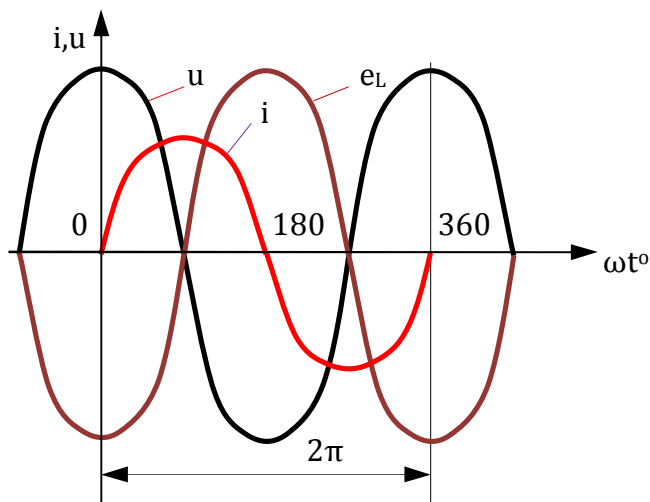


рис. 109

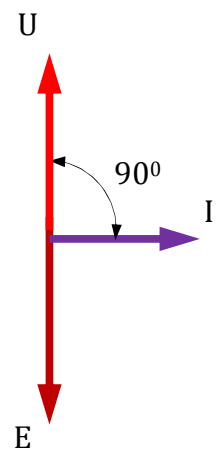


рис . 110

Проте розгляд ідеальної котушки (при  $R = 0$ ) необхідний для з'ясування фізичних процесів в реальних колах.

Це тим більше поважно, що в окремих випадках активним опором і ємністю можна нехтувати із-за їх крихти. Наприклад, ненавантажений трансформатор в схемі заміщення у ряді випадків може бути представлений лише своєю індуктивністю.

Допустимо, що для кола (рис . 108) відомі індуктивність  $L$  і струм, що змінюється згідно із законом

$$i = I_m \sin \omega t .$$

Потрібно визначити напругу і потужність кола.

### Індуктивна напруга

Змінний струм в котушці викликає ЕРС самоіндукції . За відсутності активного опору прикладена до котушки напруга врівноважується лише ЕРС самоіндукції тому відповідно до другого закону Кірхгофа у будь-який момент часу  $u = e_L$  .

ЕРС самоіндукції пропорційна швидкості зміни струму

$$e_L = - L (di/dt) ,$$

а напруга

$$u = L (di/dt) .$$

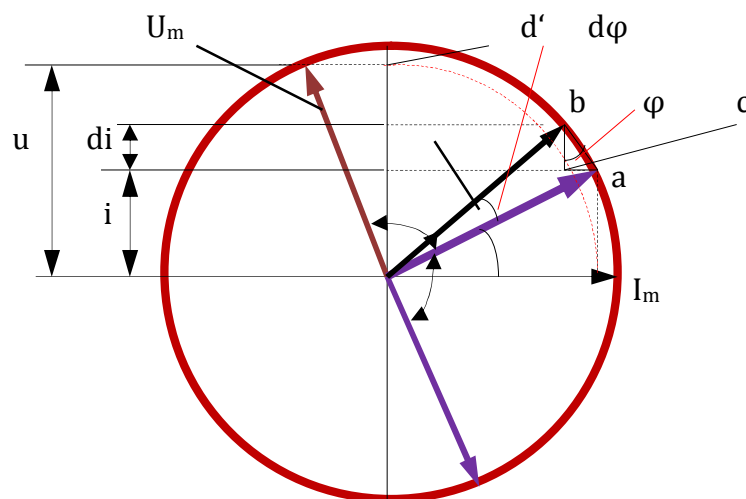


Рис . 111

Рівняння прикладеної напруги можна знайти, розглядаючи векторну діаграму на рис . 99 ,

де струм змальований вектором  $I_m$ , який передбачається таким, що обертається з кутовою швидкістю, рівній циклічній частоті  $\omega$ . У початковому положенні (при  $t = 0$ ) вектор  $I_m$  направлений по горизонтальній осі управо. Це відповідає рівнянню струму, якщо миттєві величини  $i$  визначати проекцією вектора, що обертається  $I_m$  на вертикальну вісь.

Розглянемо проміжні положення вектора  $I_m$ , віддалені від початкового на кут  $\varphi = \omega t$  і  $(\varphi + d\varphi)$ , де  $d\varphi$  — елементарний кут, на який вектор  $I_m$  обертається за малий проміжок часу  $dt$ . За час  $dt$  струм змінився на  $di$ . Приріст струму виражається катетом прямокутного трикутника  $abc$ , гіпотенуза якого  $ab$  при вельми малому куті  $d\varphi$  може бути прирівняна дузі кола між точками  $a$  і  $b$ , а кут при вершині  $b$  рівний  $\varphi$ . Тому відрізок  $ab$  у масштабі струму має значення  $I_m d\varphi$  і  $di = I_m d\varphi \cos \varphi$ .

Рівняння напруги :

$$U = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (187)$$

### Індуктивний опір

Діюча величина напруги визначається з рівняння (187)

$$U = I \omega L = I X_L$$

$$I = U/X_L \quad (188)$$

Коефіцієнт пропорційності між діючими величинами напруги і струму, рівний добутку індуктивності і циклічної частоти  $\omega L$ , позначають  $X_L$  і називають реактивним опором індуктивності або індуктивним опором.

Індуктивний опір виражається в Омах:

$$[X_L] = [U/I] = V/A = \text{Ом}$$

Діюча величина струму в колі з індуктивністю дорівнює відношенню діючої величини напруги до індуктивного опору.

Формула схожа на формулу Ома. Це дозволяє струм в колі з індуктивністю визначати так само, як струм в колі з активним опором. Але потрібно пам'ятати, що індуктивний опір з фізичної точки зору нічого спільного із звичайним опором не має. Поняття про індуктивний опір, введене для полегшення розрахунку, замінює в розрахунку фактичний вплив ЕРС самоіндукції на струм в колі, тобто відображає інерційні властивості електричного кола.

### Векторна діаграма кола

Зіставлення рівнянь струму і напруги показує, що в колі з індуктивністю струм відстає від напруги по фазі на чверть періоду, або в кутовій мірі на  $\pi/2$ . Це видно також з рис. 111.

Миттєва напруга виражається відрізком o-d у масштабі, що відрізняється від масштабу струму в  $\omega L$  раз. Перенесемо цей відрізок на вертикальну вісь (відрізок o-d'), де відкладаються миттєві величини струму. Цій миттєвій напрузі і відповідає вектор  $U_m$ , випереджаючий вектор  $I_m$  по ходу обертання на кут  $90^\circ$ . ЕРС самоіндукції, направлена проти прикладеної напруги, має рівняння

$$e = -\omega L I_m \cos \omega t = E_m \sin(\omega t - 90^\circ),$$

а на рис. 111 зображена вектором  $E_m$ , що відстає від вектора струму  $I_m$  на  $90^\circ$ . На рис. 109 і рис. 110 це показано окремо на графіку і векторній діаграмі (на векторній діаграмі відкладені діючі величини).

### Миттєва і реактивна потужності

Миттєва потужність  $p = ui$ , або

$$P = V_m \sin(\omega t + \pi/2) I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = (U_m I_m / 2) \sin 2\omega t.$$

Графік зміни потужності (рис. 112) є синусоїдою подвійної частоти з амплітудою

$$Q = U_m I_m / 2$$

або

$$Q = UI$$

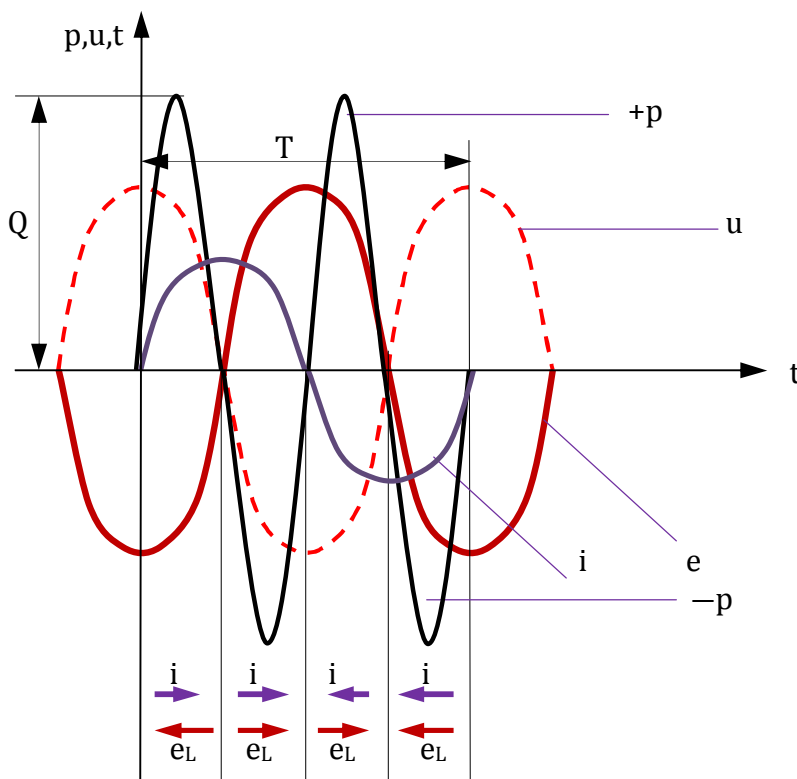


Рис. 112

Найбільша величина потужності в колі з індуктивністю дорівнює добутку діючих напруги і струму. Для з'ясування фізичного сенсу енергетичних процесів звернемо ще раз увагу на графік потужності. З нього видно, що миттєва потужність протягом періоду чотири рази міняє знак. Зміна знаку потужності означає, що напрям потоку енергії міняється. У першу чверть періоду, коли струм в колі збільшується, енергія накопичується в магнітному полі котушки за рахунок енергії джерела. Котушка в цей час є приймачем енергії — струм направлений проти ЕРС самоіндукції. У другу чверть періоду, коли струм зменшується, енергія повертається в мережу (джерелу). Напрями ЕРС самоіндукції і струму в котушці збігаються — котушка є джерелом енергії. У наступну половину періоду процес повторюється.

Нетрудно відмітити, що кількість енергії, що нагромаджується в котушці за одну чверть періоду (площа «+»), точно дорівнює кількості енергії, повертаємої назад в наступну чверть періоду (площа «-»).

Середня (активна) потужність за період в колі з індуктивністю дорівнює нулю ( $P = 0$ ), оскільки в колі з індуктивністю перетворення електричної енергії в інші види енергії (теплову, механічну) не відбувається.

Швидкість накопичення і спаду енергії магнітного поля міняється по гармонійному закону. Амплітуда кривої миттєвої потужності  $Q$  є характеристикою цього процесу і називається реактивною потужністю.

Одиницю потужності в цьому випадку називають вар — вольт-ампер реактивний — на відміну від одиниці активної потужності — вата.

## §65. Коло з ємністю : рівняння струму , напруги та потужності ; векторна діаграма

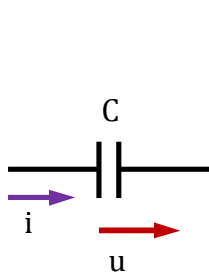


Рис . 113

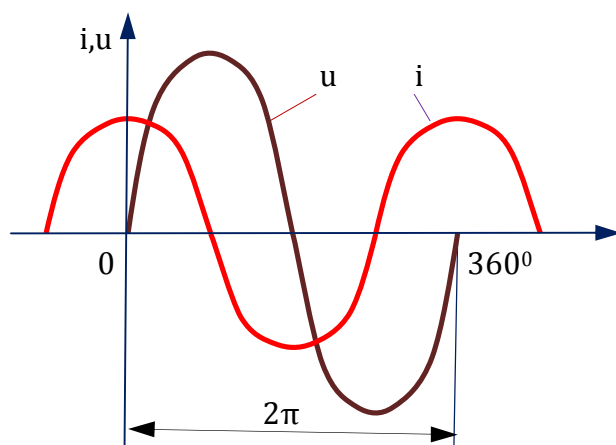


Рис . 114

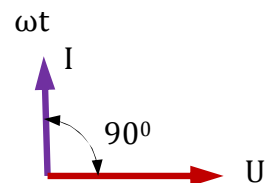


Рис . 115

В конденсаторі з ідеальним діелектриком передбачається повна відсутність струму провідності і втрат енергії. Зміна напруги між обкладками конденсатора супроводиться електричним струмом зміщення, величина якого залежить від ємності  $C$ . При напрузі на конденсаторі (рис. 113)  $u = U_m \sin \omega t$  визначимо струм і потужність.

### Електричний струм зміщення

Зовнішнє електричне поле викликає поляризацію діелектрика. При всякій зміні електричного поля змінюється поляризованість діелектрика, причому зв'язані заряджені частинки, що входять до складу атомів і молекул речовини, переміщуються, утворюючи електричний струм.

Явище руху зв'язаних заряджених частинок в діелектриці при зміні поляризації діелектрика називають електричним струмом поляризації.

Струм поляризації

$$i_n = dq/dt = [d(\sigma S)]/dt = S d\sigma/dt \quad (189)$$

де  $\sigma$  — щільність електричного зміщення заряду; звідси

$$i_n/S = d\sigma/dt$$

де  $i_n/S = J_n$  — щільність струму поляризації.

Знайдемо, що щільність струму поляризації дорівнює швидкості зміни поляризованості:

$$J_n = dP/dt \quad (190)$$

При зміні електричного поля міняється не лише вектор поляризації  $P$  але і вектор електричного зміщення у вакуумі  $D_0$ :

$$Dd/dt = dD_0/dt + dP/dt$$

Другий доданок в правій частині цього рівняння є щільність струму поляризації, пов'язаного з рухом заряджених часток діелектрика. Перший доданок також має розмірність щільності струму, але характеризує фізичний процес в самому електричному полі при його зміні в часі.

Величину  $dD_0/dt = J_0$  називають щільністю електричного зміщення у вакуумі. Щільність повного електричного струму зсуву

$$J = dD/dt = J_0 + J_n$$

Введення поняття про струм зміщення дозволяє розглядати електричне коло з конденсатором безперервним: на ділянках з провідників є струм провідності, а в діелектриці — рівний йому струм зміщення.

### Струм у колі з ємністю

Заряд конденсатора пропорційний напрузі між його обкладками  $[Q = C U]$ , тому зміна напруги супроводиться зміною заряду:  $dq = C du$ .

Швидкість зміни заряду пропорційна швидкості зміни

напруги:

$$dq/dt = C (du/dt)$$

Але швидкість зміни заряду дорівнює електричному струму:

$$i = dq/dt = C (du/dt) \quad (191)$$

При цьому в зовнішній по відношенню до конденсатора ділянці кола відбувається рух електронів (струм провідності) через джерело. Одночасно при збільшенні напруги здійснюється поляризація діелектрика в конденсаторі і виникає струм зміщення. При зменшенні напруги діелектрик деполіаризується.

Таким чином, струм в колі з конденсатором пропорційний швидкості зміни напруги на його обкладках.

Характер зміни струму при синусоїдальній напрузі можна прослідити на векторній діаграмі аналогічно тому, як це зроблено при розгляді кола з індуктивністю (див. рис. 111), віднісши міркування до швидкості зміни напруги.

На діаграмі вектори струму і напруги слід поміняти місцями. У зв'язку з цим рівняння струму для кола з ємністю можна записати аналогічно рівнянню для напруги в колі з індуктивністю:

$$i = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin (\omega t + 90^\circ) \quad (192)$$

Рівняння струму можна отримати, диференціюючи рівняння напруги:

$$i = C (du/dt) = C [d (U_m \sin \omega t)] / dt = \omega C U_m \cos \omega t$$

### Ємносний опір

Величина  $\omega C U_m = I_m$  є амплітуда струму. Розділивши цей вираз на  $\sqrt{2}$ , отримаємо

$$I = \omega C U = U / X_C \quad (193)$$

Величину  $1/\omega C$  позначають  $X_C$  і називають реактивним опором ємності або ємносним опором. Ємнісний опір — величина, зворотна добутку ємності і циклічної частоти.

Діючий струм в колі з ємністю дорівнює відношенню діючої напруги, до ємносного опору.

Формула (193) формою збігається з формулою Ома. Проте ємнісний опір фізично нічого спільного із звичайним опором  $R$  не має.

Поняття про ємнісний опір, введене для полегшення розрахунків, відображає в розрахунку протидію зарядженого конденсатора струму в колі.

Зіставлення рівнянь напруги і струму показує, що в колі з ємністю напруга відстає від струму по фазі на чверть періоду, або в кутовій мірі на  $\pi/2$ . Це показано на графіці і векторній діаграмі (рис . 114 і рис . 115)

### Потужність в колі

Побудова графіка миттєвої потужності (рис . 116) виконується точно так, як і для кола з індуктивністю, якщо мати на увазі, що миттєва потужність виражається :

$$p = ui ,$$

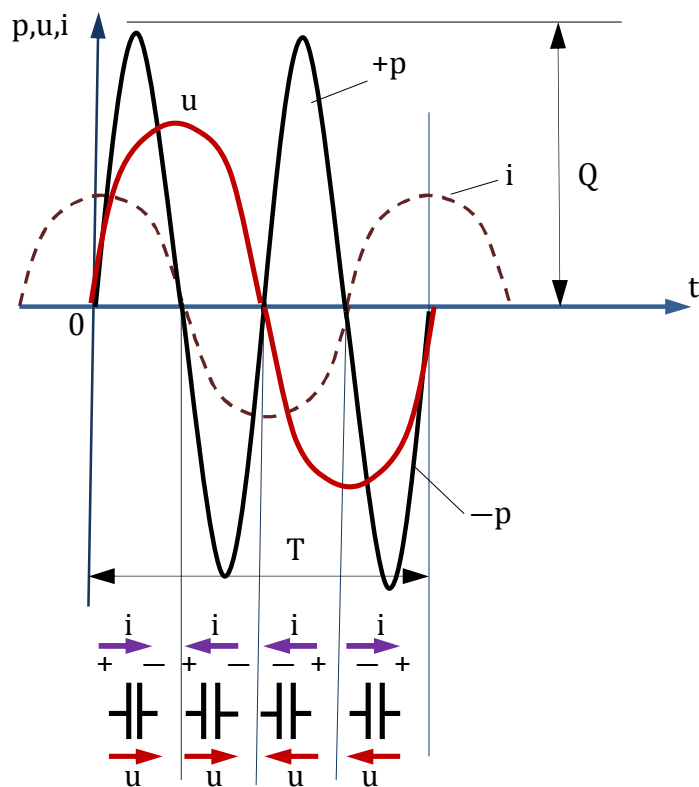


Рис . 116

або

$$p = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t + \pi/2) = (U_m I_m \sin 2\omega t) / 2$$

З графіка видно, що миттєва потужність, як і в колі з індуктивністю, чотири рази протягом періоду міняє знак. У першу чверть періоду, коли напруга на конденсаторі збільшується, енергія накопичується в електричному полі конденсатора за рахунок роботи джерела. Конденсатор



в цей час заряджає, тобто є приймачем енергії: напрями струму і прикладеної напруги збігаються. У другу чверть періоду, коли напруга зменшується, енергія в тій же кількості повертається в мережу (до джерела), струм в колі направлений проти напруги мережі, тобто конденсатор є джерелом енергії (розряджається).

Провівши міркування, аналогічні тим, які були зроблені для кола з індуктивністю, знайдемо, що активна потужність в колі з ємністю дорівнює нулю ( $P = 0$ ), а реактивна потужність дорівнює добутку діючих величин напруги і струму :

$$Q = U I = U^2 \omega c \quad (194)$$

Таким чином, в колі з ємністю, так само як і в колі з індуктивністю, перетворення електричної енергії в інші види енергії (теплову, механічну) не відбувається.

### §66. Коло з реальною котушкою індуктивності

Реальна котушка відрізняється від ідеальної тим, що змінний струм в ній супроводиться не лише зміною енергії в магнітному полі, але і перетворенням електричної енергії в інший вигляд. Зокрема, в дроті котушки електрична енергія перетвориться в тепло відповідно до закону Ленца — Джоуля .

Раніше було з'ясовано, що в колі змінного струму процес перетворення електричної енергії в інший вигляд характеризується активною потужністю кола  $P$  , а зміна енергії в магнітному полі — реактивною потужністю  $Q$  .

У реальній котушці мають місце обоє процеси, тобто її активна і реактивна потужності відмінні від нуля. Тому в схемі заміщення реальна котушка має бути зображена активним і реактивним елементами. Ділення реальної котушки на два елементи штучно, оскільки конструктивно обоє елементи неподільні. Проте такою ж схемою заміщення можна зобразити реальне коло з двох конструктивно не поєднаних елементів, один з яких характеризується лише активною потужністю  $P(Q = 0)$ , а інший — реактивною (індуктивною) потужністю  $Q(P = 0)$ .

#### Схема заміщення котушки з послідовним з'єднанням елементів

В схемі з послідовним з'єднанням елементів реальна котушка характеризується активним опором  $R$  і індуктивністю  $L$  .

Активний опір визначається величиною потужності втрат

$$R = P/I^2,$$

а індуктивність — конструкцією котушки . Передбачимо, що струм в котушці (рис . 117),

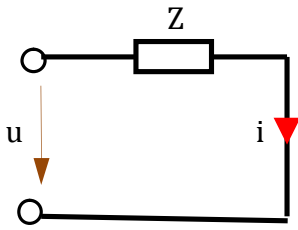


Рис . 117

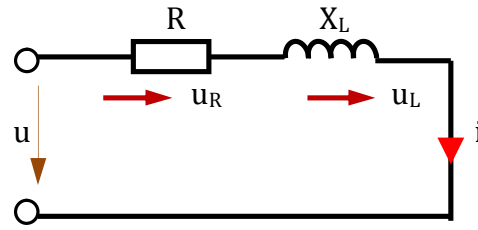


Рис . 118

виражається рівнянням  $i = I_m \sin \omega t$ .

Потрібно визначити в колі напругу і потужність.

При змінному струмі в котушці виникає ЕРС самоіндукції  $e_L$ , тому струм залежить від дії прикладеної напруги і ЕРС  $e_L$ . Рівняння електричної рівноваги кола, складене по другому закону Кірхгофа, має вигляд

$$u + e_L = i R,$$

або

$$u = iR + (-e_L) = iR + L(di/dt) = u_R + u_L \quad (195)$$

Прикладена до котушки напруга складається з двох доданків, одне з яких  $U_R$  дорівнює падінню напруги в активному опорі, а інше  $u_L = L(di/dt)$  врівноважує ЕРС самоіндукції. Відповідно до цього котушку в схемі заміщення можна зобразити активним і індуктивним опорами, з'єднаними послідовно (рис . 118).

Додатково відмітимо, що обоє доданки в правій частині рівності (195) є синусоїдними функціями часу. Згідно виводам, отриманим раніше,  $U_R$  збігається по фазі із струмом, а  $U_L$  випереджає струм на  $90^\circ$ . Тому

$$u = R I_m \sin \omega t + \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2).$$

### Векторна діаграма напруг. Повний опір котушки

Скористаємося векторним способом складання синусоїдних величин. Амплітуди складових загальної напруги

$$U_{mR} = R I_m$$

$$U_{mL} = \omega L I_m,$$

а діючі величини

$$U_R = R I;$$

$$U_L = X_L I.$$

Вектор загальної напруги

$$U = U_R + U_L$$

Для того, щоб знайти величину вектора  $U$ , побудуємо векторну діаграму (рис . 119),

заздалегідь вибравши масштаби струму  $M_t$  і напруги  $M_u$ .

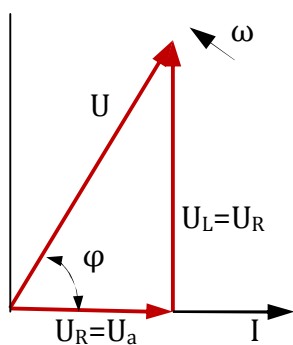


Рис . 119

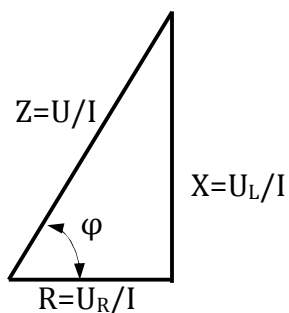


Рис . 120

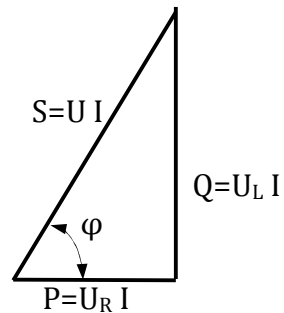


Рис . 121

За вихідний вектор діаграми приймаємо вектор струму  $I$ . Напрямок цього вектора збігається з позитивним напрямом осі, від якої відлічуються фазові кути (початкова фаза заданого струму  $\psi_i = 0$ ). Як і раніше, цю вісь зручно (але не обов'язково) направити по горизонталі.

Вектор  $U_R$  по напрямку збігається з вектором струму  $I$ , а вектор  $U_L$  направлений перпендикулярно вектору  $I$  з позитивним кутом.

З діаграми можна побачити, що вектор струму  $I$  загальної напруги  $U$  відображає вектор струму  $I$  на кут  $\varphi > 0$ , але  $< 90^\circ$ , а по величині дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, катетами якого є вектори падінь напруги - в активному і індуктивному опорах  $U_R$  і  $U_L$ :

$$U_R = U \cos \varphi \quad (196)$$

Проекція вектора напруги  $U$  на напрям вектора струму називається активною складовою вектора напруги і позначається  $U_a$ . Для котушки за схемою рис . 118 при  $U_a = U_R$

$$U_L = U \sin \varphi \quad (197)$$

Проекція вектора напруги  $U$  на напрям, перпендикулярний вектору струму, називається реактивною складовою вектора напруги і позначається  $U_p$ . Для котушки  $U_p = U_L$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \quad (198)$$

При струмі  $i = I_m \sin \omega t$  рівняння напруги можна записати на підставі векторної діаграми у вигляді

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Сторони трикутника напруги, виражені в одиницях напруги, розділимо на струм  $I$ . Отримаємо подібний трикутник опорів (рис . 120), катетами якого є активний  $R = U_R / I$  і індуктивний  $X_L = U_L / I$  опори, а гіпотенузою — величина  $Z = U / I$ .

Відношення діючої напруги до діючого струму даного кола називається повним опором кола. Сторони трикутника опорів не можна вважати векторами, оскільки опори не є функціями часу.

З трикутника опорів виходить

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (199)$$

Поняття про повний опір кола  $Z$  дозволяє виразити зв'язок між діючими величинами напруги і струму формулою, подібною формулі Ома :

$$U = \sqrt{R^2 + X_L^2} I = I Z ; \quad I = U // Z \quad (200)$$

З трикутників напруги і опорів визначаються

$$\cos \varphi = U_R / U = R / Z ; \quad \sin \varphi = U_L / U = X_L / Z ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = U_L / U = X_L / R \quad (201)$$

### Потужність котушки

Миттєва потужність котушки

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t .$$

З графіка миттєвої потужності (рис . 122) можна побачити, що протягом періоду потужність чотири рази міняє знак; отже, напрямки потоку енергії і в даному випадку протягом періоду міняється. Відносно деякої осі  $t'$ , зміщеною паралельно осі  $t$  на величину  $P$ , графік миттєвої потужності є синусоїдальною функцією подвійної частоти.

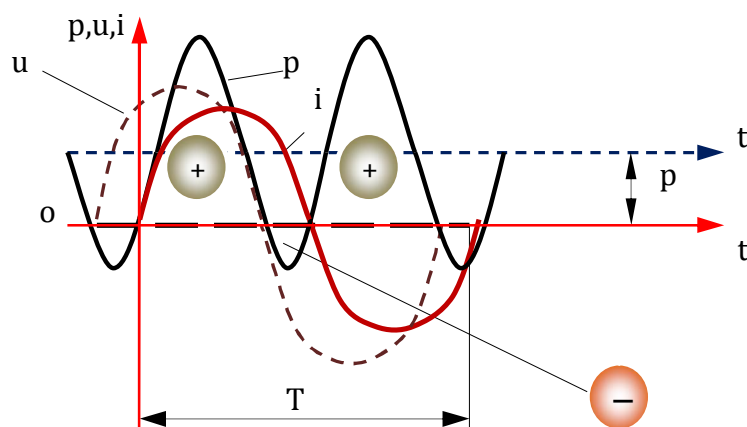


Рис . 122

При позитивному значенні потужності енергія переходить від джерела в приймач, а при негативному — навпаки. Неважко відмітити, що кількість енергії, що поступила в приймач (позитивна площа), більше поверненої назад (негативна площа).

Отже, в колі з активним опором і індуктивністю частина енергії, що поступає від генератора безповоротно перетворюється на інший вигляд енергії, але деяка частина повертається назад. Цей процес повторюється в кожен період струму, тому в ланцюзі разом з безперервним перетворенням електричної енергії на інший вигляд енергії (активна енергія) частина її здійснює коливання між джерелом і приймачем (реактивна енергія).

Швидкість безповоротного процесу перетворення енергії оцінюється середньою потужністю за період, або активною потужністю  $P$ , швидкість змінного процесу характеризується реактивною потужністю  $Q$ .

На підставі виводів, отриманих раніше, у активному опорі  $p = U_R I$ ;  $Q = 0$ , а в індуктивному  $P = 0$ ;  $Q = U_L I$ .

Активна потужність всього кола дорівнює активній потужності в опорі  $R$ , а реактивна — реактивній потужності в індуктивному опорі  $X_L$ . Підставляючи значення  $U_R = U \cos \varphi$  і  $U_L = U \sin \varphi$ , визначаємо з трикутника напруги, отримаємо:

$$P = U I \cos \varphi \quad (202)$$

$$Q = U I \sin \varphi \quad (203)$$

Окрім активної і реактивної потужностей користуються поняттям повної потужності  $S$ , яка визначається добутком діючих величин напруги і струму кола:

$$S = U I = I^2 Z \quad (204)$$

Загальну потужність можна визначити також з формули:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (205)$$

Потужності  $S$ ,  $P$  і  $Q$  графічно можна виразити сторонами прямокутного трикутника (див. рис. 121). Трикутник потужностей виходить з трикутника напруг, якщо сторони останнього, вираженої в одиницях напруги, помножити на струм.

З трикутника потужностей можна визначити

$$\cos \varphi = P/S; \quad \sin \varphi = Q/S; \quad \operatorname{tg} \varphi = Q/P. \quad (206)$$

Повна потужність має ту ж розмірність, що  $P$  і  $Q$ , але для відмінності одиницю повної потужності називають вольт-ампер (В А). Активна потужність  $P$  менше або дорівнює повній потужності кола. Відношення активної потужності кола до її повної потужності

$P/S = \cos \varphi$  називають коефіцієнтом потужності.

Призначення приймачів електричної енергії — перетворення її в інші види енергії. Тому коливання енергії в колі не лише даремні, але і шкідливі, оскільки при цьому в приймачі не здійснюється повне перетворення електричної енергії в роботу або тепло, а в з'єднаних дротах вона втрачається.

### Схема заміщення котушки з паралельним з'єднанням елементів

Для реальної котушки можна скласти і іншу розрахункову схему — з паралельним з'єднанням двох віток: з активною  $G$  і індуктивною  $B_L$  провідністями. На рис . 123 ця схема показана порівняно з схемою послідовного з'єднання активного і індуктивного опорів (рис . 118), розглянутою раніше.

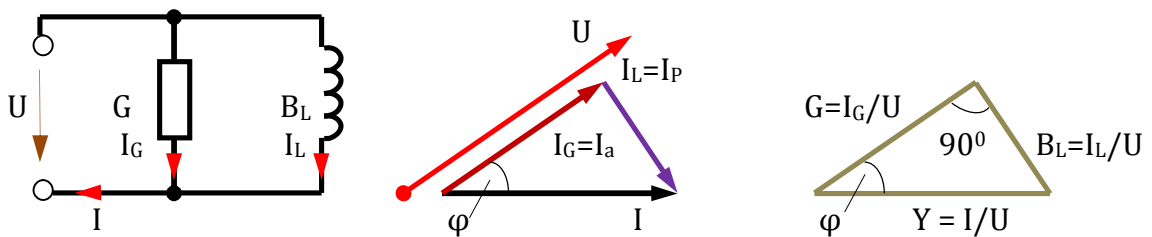


Рис . 123

Покажемо, що схеми рис . 123 і рис . 118 еквівалентні в тому сенсі, що при однаковій напрузі зберігаються незмінними струм в неразгалуженій частині кола, активна і реактивна потужності.

Вектор струму  $I$  можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові і відповідно до схеми і векторної діаграми на рис . 123 виразити векторною рівністю

$$\dot{i} = \dot{i}_G + \dot{i}_L \quad (207)$$

Для схеми паралельного з'єднання активного і індуктивного елементів загальною є прикладена напруга, а струми різні:  $I_G$  — струм в вітці з активною провідністю по фазі збігається з напругою ;  $I_L$  — струм в вітці з індуктивною провідністю, по фазі відстає від напруги на кут  $90^\circ$ .

Вектор струму  $I$  і його складові  $I_G$  і  $I_L$  утворюють прямокутний трикутник, тому

$$I = \sqrt{I_G^2 + I_L^2} \quad (208)$$

Складова струму в активному елементі

$$I_G = I \cos \varphi \quad (209)$$

Проекція вектора струму  $I$  на напрям напруги називається активною складовою вектора струму і позначається  $I_a$ . Для котушки за схемою на рис. 123  $I_a = I_G$ .

Складова струму в реактивному елементі .

$$I_L = I \sin \varphi \quad (210)$$

Проекція вектора струму  $I$  на напрям, перпендикулярний вектору напруги, називається реактивною складовою вектора струму і позначається  $I_p$ . Для котушки  $I_p = I_L$ .

Сторони трикутника струмів, виражені в одиницях струму, можна розділити на напругу  $U$  і отримати подібний трикутник провідності, катетами якого є активна  $G = I_G/U$  і індуктивна  $B_L = I_L/U$  провідності, а гіпотенузою — величина  $Y = I/U$ , називаєма повною провідністю кола. З трикутника провідності і з врахуванням раніше отриманих виражень з трикутника опорів отримаємо

$$\left. \begin{aligned} Y &= \sqrt{G^2 + B_L^2} \\ G &= I_G / U = I \cos \varphi / IZ = R / Z^2 \\ B_L &= I_L / U = I \sin \varphi / IZ = X_L / Z^2 \\ Y &= I / U = 1/Z \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

Крім того

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= I_G / I = G / Y \\ \sin \varphi &= I_L / I = B_L / Y \\ \operatorname{tg} \varphi &= I_L / I_G = B_L / G \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

## § 67. Коло з реальним конденсатором

При змінній напрузі на реальному конденсаторі окрім струму є невеликі струми провідності через товщу діелектрика (об'ємний струм) і по поверхні (поверхневий струм).

Струми провідності і поляризацію діелектрика супроводжують втрати енергії. Таким чином, в реальному конденсаторі разом із зміною енергії електричного поля (це характеризує реак

тивна потужність  $Q$ ) із-за недосконалості діелектрика йде безповоротний процес перетворення електричної енергії в тепло, швидкість якого виражається активною потужністю  $P$ . Тому в схемі заміщення реальний конденсатор має бути показаний активним і реактивним елементами.

Розподіл реального конденсатора на два елементи – це розрахунковий прийом, оскільки конструктивно їх виділити не можна. Проте таку ж схему заміщення має реальне коло з двох елементів, один з яких характеризується лише активною потужністю  $P$  ( $Q = 0$ ), інший – реактивною (ємнісною) потужністю  $Q = (P = 0)$ .

### Схема заміщення конденсатора з паралельним з'єднанням елементів

Реальний конденсатор (з втратами) можна подати еквівалентною схемою паралельного з'єднання активної  $G$  і ємнісної провідностей (рис.124) причому активна провідність визначається потужністю втрат в конденсаторі  $G = \frac{P}{U_c^2}$ , а ємність – конструкцію конденсатора. Передбачимо, що провідність  $G$  і  $C$  для такого кола відомі, а напруга має рівняння  $u = U_m \sin \omega t$ . Потрібно визначити струми в колі і потужність.

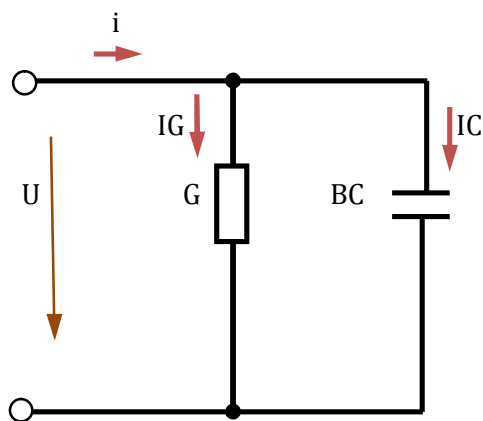


Рис. 124

Дослідження кола з активним опором і кола з ємністю показало, що при синусоїдній напрузі струми в них теж синусоїдні. При паралельному з'єднанні віток  $G$  і  $C$ , згідно першому закону Кірхгофа, загальний струм  $i$  дорівнює сумі струмів в вітках з активною і ємнісною провідностями:

$$i = i_G + i_C. \quad (213)$$

Враховуючи, що струм  $i_G$  збігається по фазі з напругою, а струм  $i_C$  випереджає напругу на чверть періоду, рівняння загального струму можна записати в наступному вигляді:

$$i = i_{Gm} \sin \omega t + i_{cm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Оскільки



$$I_{Gm} = GU_m \text{ а } I_{cm} = B_c U_m,$$

то

$$i = GU_m \sin \omega t + B_c U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

### Векторна діаграма струмів

Для визначення діючої величини загального струму  $I$  методом векторного складання побудуємо векторну діаграму згідно рівняння

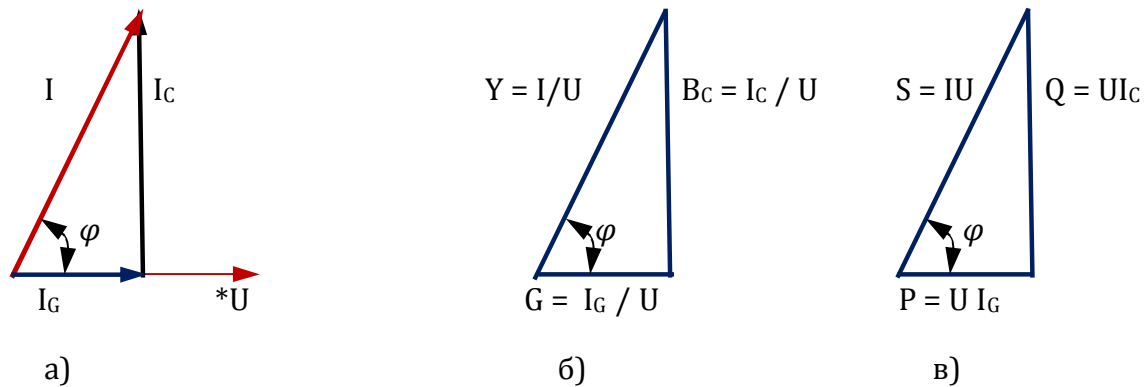


Рис.125

$$I = I_G + I_C.$$

Діючі величини складових струму :

$$I_G = GU ; \quad I_C = B_c U. \quad (214)$$

Першим на векторній діаграмі зображується вектор напруги  $U$  (рис.125,а), його напрям збігається з позитивним напрямом осі, від якої відлічуються фазові кути (початкова фаза напруги  $\varphi_u = 0$ ).

Вектор  $I_G$  збігається по напрямку з вектором  $U$ , а вектор  $I_C$  направлений перпендикулярно вектору  $U$  з позитивним кутом.

З векторної діаграми можна побачити, що вектор загальної напруги відстає від вектора загального струму на кут  $\varphi$ , величина якого більше нуля, але менше  $90^\circ$ .

Вектор  $I$  є гіпотенузою прямокутного трикутника, катети якого – складові його вектори  $I_G$  і  $I_C$ :

$$I = \sqrt{I_G^2 + I_c^2} . \quad (215)$$

$$I_G = I \cos \varphi ; \quad I_c = I \sin \varphi .$$

При напрузі  $u = U_m \sin \omega t$  відповідно до векторної діаграми рівняння струму

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

### Трикутник провідностей

Сторони трикутників струму , виражені в одиницях струму, поділимо на напругу  $U$ .

Отримаємо подібний трикутник провідностей (рис.125,б), катетами якого є активна

$G = \frac{I_G}{U}$  і ємнісна  $B_c = \frac{I_c}{U}$  провідності, а гіпотенузою – повна провідність кола  $Y = \frac{I}{U}$ .

З трикутника провідностей

$$Y = \sqrt{G^2 + B_c^2} . \quad (216)$$

Зв'язок між діючими величинами напруги і струму виражається формулами

$$I = U \sqrt{G^2 + B_c^2} = UY;$$

$$U = \frac{I}{Y} . \quad (217)$$

З трикутників струмів і провідностей визначають величини

$$\cos \varphi = \frac{I_G}{I} = \frac{G}{Y}; \quad \sin \varphi = \frac{I_c}{I} = \frac{B_c}{Y} ; \quad (218)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_c}{I_G} = \frac{B_c}{G}.$$

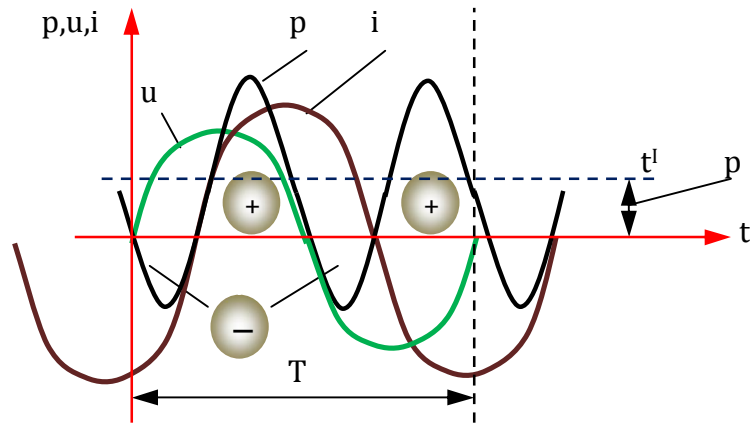


Рис.126

## Потужність

Виразення миттєвої потужності реального конденсатора

$$p = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

збігається з вираженням миттєвої потужності котушки.

Міркування,аналогічні тим ,які зроблені при розгляді графіка миттєвої потужності котушки (див.рис.122), можна провести і для реального конденсатора на основі графіка рис.126.

Величини активної , реактивної і повної потужностей виражаються тими ж формулами , які були отримані для котушки.

Це можна показати , якщо сторони трикутника струмів, виражені в одиницях струму, помножити на напругу U.

В результаті множення вийде подібний трикутник потужностей (рис.125,в), катетами якого є потужності :

активна

$$P = UI_G = UI \cos \varphi; \quad (219)$$

реактивна

$$Q = UI_c = UI \sin \varphi; \quad (220)$$

повна

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (221)$$

### Схема заміщення конденсатора з послідовним з'єднанням елементів

Реальний конденсатор, так само як і котушка, на розрахунковій схемі може бути показаний послідовним з'єднанням двох ділянок: з активним R і ємнісним опорами.

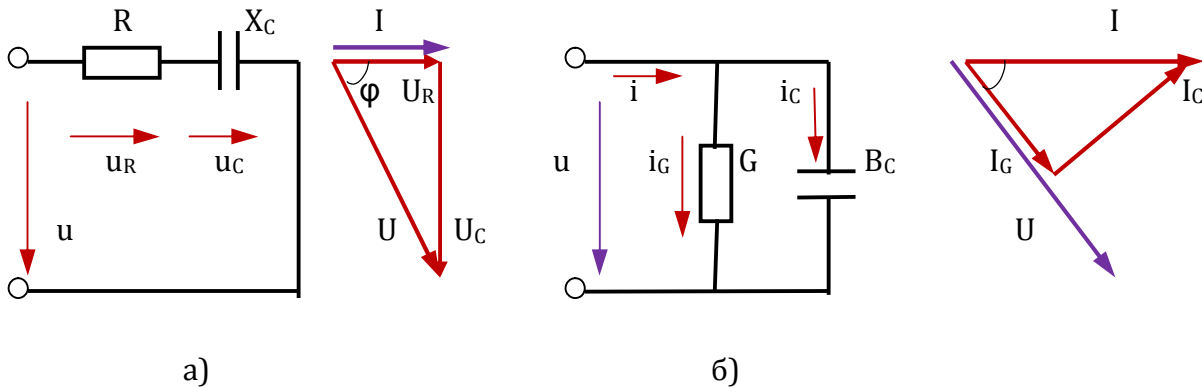


Рис. 127

На рис.127,а така схема показана порівняно з схемою паралельного з'єднання активної і ємнісної провідностей (рис.127,б). Всі виводи і формули, отримані для котушки, залишаються в силі і для конденсатора за умови заміни індуктивного опору ємнісним. Конденсатори, вживаємі на практиці, мають відносно малі втрати енергії. Тому в схемах заміщення вони показані найчастіше лише реактивною частиною, тобто ємністю С

$$\left[ B_c = \omega C, \quad X_c = \frac{1}{(\omega C)} \right].$$

Ділянки кола, де послідовно з'єднані окремі елементи – резистор R і конденсатор C, мають таку схему заміщення, як показано на рис.127,а.

### §68. Послідовне з'єднання котушки і конденсатора

При послідовному з'єднанні котушки і конденсатора на розрахунковій схемі кожен з цих елементів електричного кола може бути показаний активним і реактивним опорами або активною і реактивною провідностями. Для розрахунку простішою є схема рис.128,а де елементи з'єднані послідовно, а в схемі рис.128,б вони з'єднані змішано. Передбачимо відомими параметри котушки  $R_1, L_1$  конденсатора  $R_2, C$  струм у колі  $i = I_m \sin \omega t$ . Потрібно визначити напругу на ділянках кола і потужність.

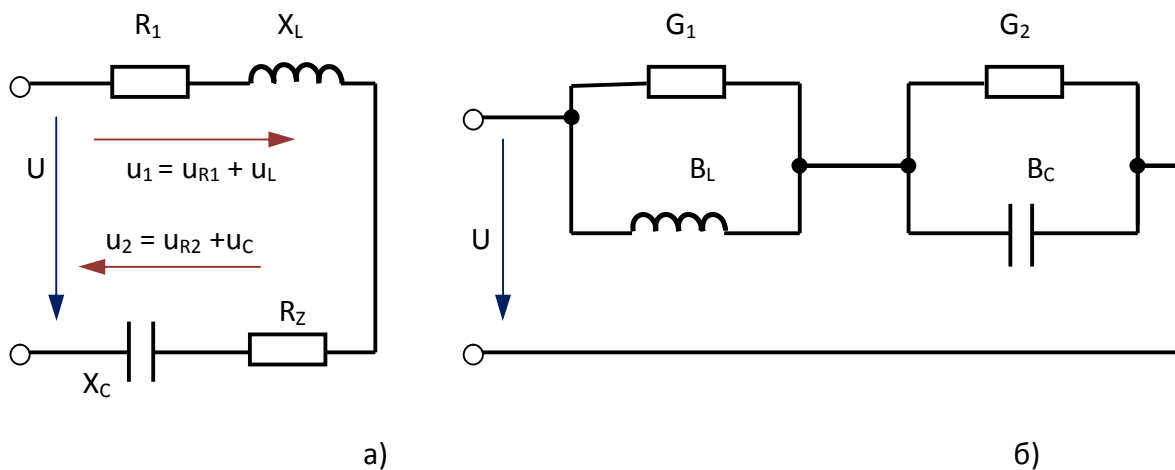


Рис.128

### Векторна діаграма і повний опір кола

Миттєву величину загальної напруги можна показати сумою миттєвої напруги на окремих елементах схеми:

$$u = u_{1R} + u_L + u_{2R} + u_C.$$

Маючи на увазі неспівпадання по фазі активних і реактивних напруг, загальну напругу отримаємо векторним складанням:

$$U = U_{1R} + U_L + U_{2R} + U_C.$$

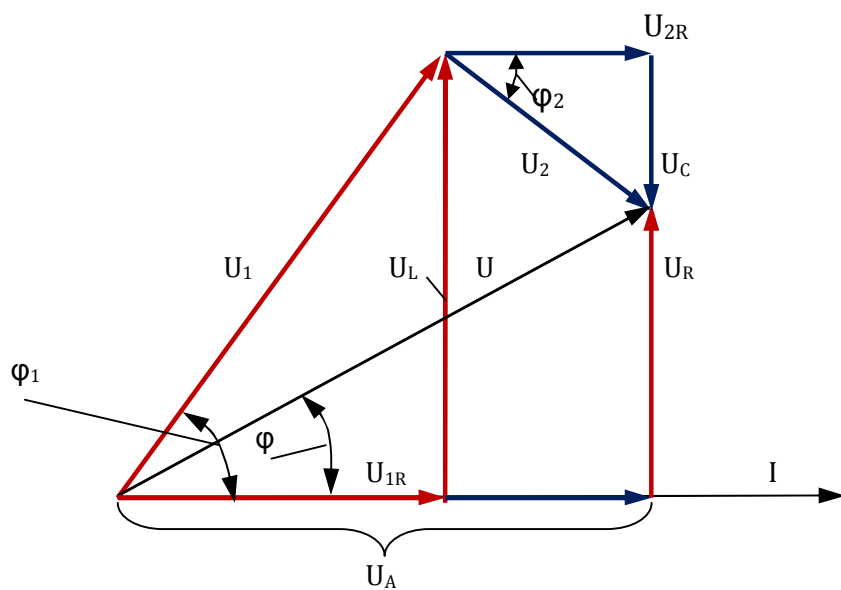


Рис.129

Для побудови векторної діаграми знаходимо :

$$U_{1R} = IR_1; \quad U_{2R} = IR_2; \quad U_L = IX_L; \quad U_C = IX_C.$$

Залежно від співвідношення величин реактивних опорів індуктивності і ємності можна відзначити три випадки.

1.  $X_L > X_C$ . Для цього випадку векторна діаграма зображена на рис.129. На діаграмі побудовані трикутники напруги для котушки і конденсатора і знайдені вектори напруги на цих елементах.

Векторна сума напруги  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}$  дає загальну напругу в колі. В той же час вектор  $U$  є гіпотенузою прямокутного трикутника напруги, катети якого – активна і реактивна напруги, кола ( $U_\alpha$  і  $U_R$ ). Оскільки вектори активних складових напруги направлені в один бік, їх чисельні значення складаються :  $U_\alpha = U_{1R} + U_{2R}$ .

Вектори реактивних складових напруги направлені по одній прямій в протилежні сторони, тому їм додають різні знаки : реактивну напругу індуктивності вважають позитивною, а напругу ємності – негативною :

$$U_R = U_L - U_C.$$

При однаковому струмі у всіх елементах кола  $U_L > U_C$ . Струм відстає від загальної напруги по фазі на кут  $\varphi$ . З трикутника напруги виходить

$$U = \sqrt{(U_{1R} + U_{2R})^2 + (U_L - U_C)^2} = I\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2};$$

або

$$U = I\sqrt{R^2 + X^2} = IZ, \quad (222)$$

де

$$R = R_1 + R_2 \quad X = X_L - X_C$$

загальний активний і реактивний опори кола прямокутного трикутника опорів, який отримують вже відомим способом з трикутника напруги.

Повний опір кола  $Z$  є коефіцієнтом пропорційності між діючими величинами

струму і загальної напруги кола :

$$U = IZ ; \quad I = \frac{U}{Z} ; \quad Z = \frac{U}{I}.$$

З трикутників напруги і опорів визначають наступні величини :

$$\cos \varphi = \frac{U_\alpha}{U} = \frac{R}{Z} ; \quad \sin \varphi = \frac{(U_L - U_C)}{U} = \frac{X_L - X_C}{Z} ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(U_L - U_C)}{U_\alpha} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Кут зсуву по фазі між напругою і струмом в колі

позитивний -  $\varphi > 0$ . (Фазові кути відлічуються від вектора струму).

2.  $X_L < X_C$ . Векторна діаграма зображена на рис. 130, де  $U_L < U_C$ , тому загальна напруга відстає від струму на кут  $\varphi < 0$ .

Реактивний опір кола має ємнісний характер. Розрахункові формули для першого випадку залишаються без зміни і для другого випадку.

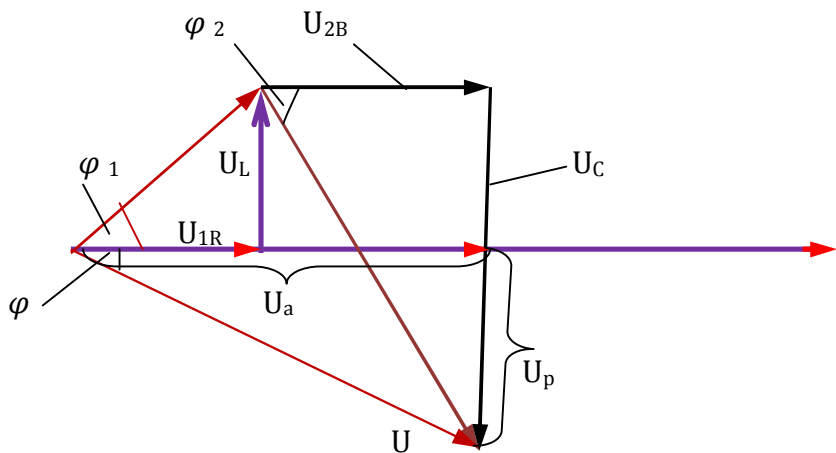


Рис.130

3.  $X_L = X_C$ . В цьому випадку складові напруги котушки і конденсатора рівні по величині і взаємно компенсовані :  $U_L = U_C$  (рис.131). Тому реактивна складова загальної напруги і загальний реактивний опір дорівнюють нулю, а повний опір кола  $Z = R$ . Загальна напруга збігається по фазі із струмом і дорівнює по величині активній складовій напрузі. Кут  $\varphi$  зсуву фаз між струмом і загальною напругою дорівнює нулю.

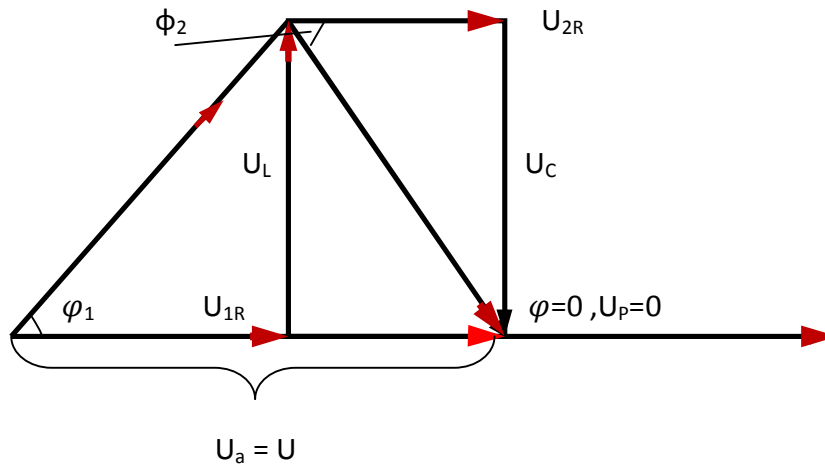


Рис. 131

Струм в колі і загальна напруга зв'язані формулою

$$U = IR, \text{ або } I = \frac{U}{R}.$$

В разі  $X_L = X_C$  в колі має місце явище резонансу напруги, про який буде детально розказано далі.

#### Енергетичний процес в колі

З трикутника напруги легко отримати трикутник потужностей, з якого наступні відомі формули :

$$P = UI \cos \varphi; \quad Q = UI \sin \varphi; \quad (223)$$

$$S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} = UI.$$

Реактивні потужності входять в розрахунки також з різними знаками : індуктивна потужність позитивна, а ємнісна – негативна.

Відповідно до цього знак реактивної потужності всього кола може бути тим або іншим, що виходить із формул (223).

При  $\varphi > 0$   $Q > 0$ ; при  $\varphi < 0$   $Q < 0$ . Активна потужність позитивна при будь-якому куту,



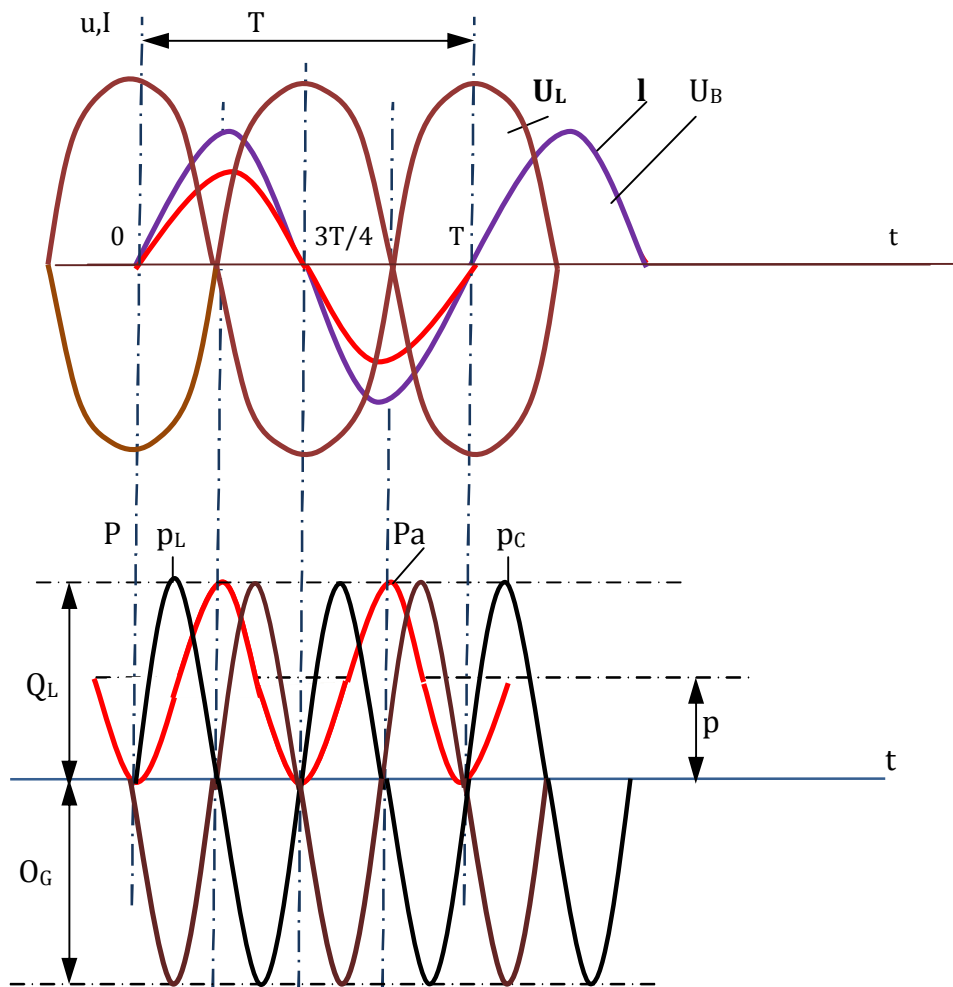


Рис . 132

оскільки  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ . Повна потужність також завжди позитивна. Можна зробити висновок, що в даному колі здійснюється перетворення електричної енергії ( $P \neq 0$ ) і змінний процес між генератором і приймачем ( $Q \neq 0$  при  $\varphi \neq 0$ ). Енергетичні процеси в даному випадку складніші, ніж в раніше розглянутих простих колах. Ускладнення пояснюється тим, що наряду з обміном енергією між генератором і приймачем здійснюється обмін енергією усередині приймача, між котушкою і конденсатором. Особливості енергетичного процесу в колі з послідовним з'єднанням котушки і конденсаторів відображені на рис.132, де показані графіки миттєвої потужності окремих елементів в цілому при  $X_L = X_C$ . Котушка і конденсатор протягом полуперіода накопичують рівні кількості енергії. Проте в першу чверть періоду, коли струм збільшується, а напруга на конденсаторі зменшується, енергія накопичується в магнітному полі котушки і зменшується в електричному полі конденсатора, причому швидкість зміни енергії (потужність) в будь-який момент часу однакова. Це дає підставу вважати, що обмін енергією відбувається лише в приймачі між котушками і конденсатором.

Для перетворення електричної енергії в інший вигляд приймач отримує її від генератора з середньою швидкістю (потужністю)  $P$ .

### §69. Розрахунок нерозгалужених кіл змінного струму

Порядок розрахунку, встановлений для кола при послідовному з'єднанні котушки і конденсатора, можна застосувати і для кола, що містить довільне число котушок і конденсаторів,

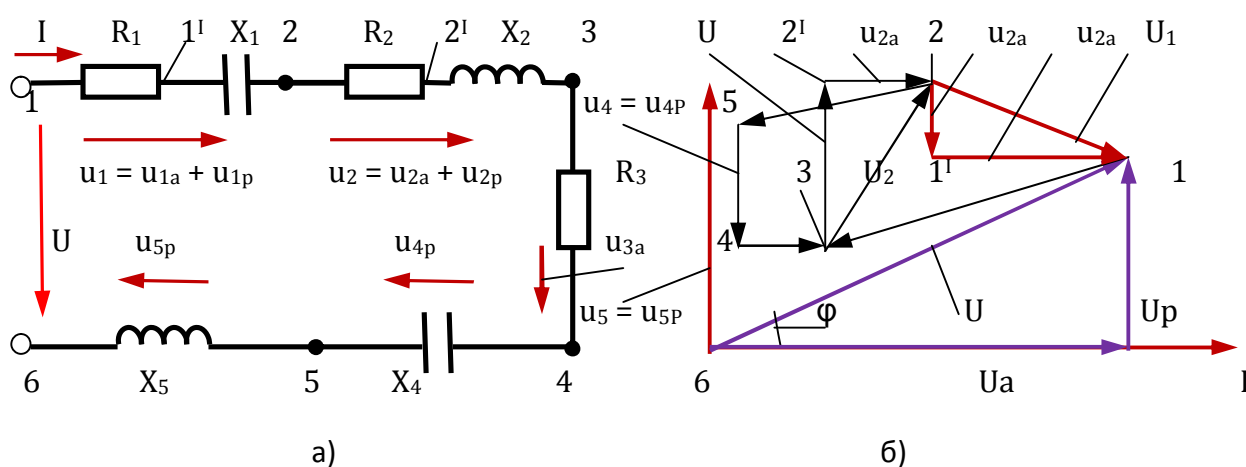


Рис. 133

з'єднаних послідовно. На рис.133,а для прикладу дана схема нерозгалуженого кола, що складається з п'яти ділянок: конденсатора ( $R_1, X_1$ ) і котушки ( $R_2, X_2$ ), поданих активними і реактивними опорами; резистора  $R_3$ ; ідеальних конденсатора  $X_4$  і котушки  $X_5$ .

Передбачимо, що окрім опорів відомий струм в колі  $i = I_m \sin \omega t$ .

Потрібно знайти напругу на ділянках, загальну напругу в колі і потужність.

#### Векторна діаграма

Виберемо умовно позитивний напрям струму  $i$ , як вказано на схемі. Для миттєвих величин відповідно до другого закону Кірхгофа рівняння напруги

$$u = u_{1a} + u_{1p} + u_{2a} + u_{2p} + u_{3a} + u_{4p} + u_{5p}.$$

Переходячи до діючих величин напруги, потрібно написати векторну суму:

$$U = U_{1a} + U_{1p} + U_{2a} + U_{2p} + U_{3a} + U_{4p} + U_{5p}.$$

Чисельно вектори напруг визначаються множенням струму і опору відповідної ділянки.

На рис.133,б побудована векторна діаграма, яка відповідає цьому рівнянню. За початковий, як завжди при розрахунку нерозгалужених кіл, прийнятий вектор струму, потім проведені вектори падіння напруги на кожній ділянці схеми, причому напрямки їх відносно вектора струму вибрані відповідно до характеру опору ділянок.

При побудові діаграми напруги початковою точкою вибрана точка 6, співпадаюча з початком вектора струму  $I$ . З цієї точки проведений вектор  $U_{5p}$  реактивної напруги індуктивності (по фазі випереджає струм на  $90^\circ$ ) між точками 5 і 6 кола. З кінця його проведений вектор  $U_{4p}$  реактивної напруги ємності (по фазі відстає від струму на  $90^\circ$ ) між точками 4 і 5 кола. Потім відкладений вектор  $U_{3a}$  активної напруги на резисторі (збігається по фазі зі струмом) між точками 3 і 4 кола і т.д., якщо слідувати по колу проти напрямку струму. Точки векторної діаграми, де сходяться початок наступного вектора з кінцем попереднього, позначені тими ж номерами, якими на схемі позначені точки, що відділяють один елемент від іншого.

При такій побудові напругу між будь-якими двома точками кола можна знайти по величині і фазі, провівши вектор на діаграмі між точками з тими ж номерами.

Наприклад, напруга  $U_{5,2}$  між точками 5 і 2 виражається вектором, проведеним з точки 2 в точку 5 (вектор  $U_{5,2}$  направлений у зворотній бік); напруга  $U_{3,1}$  між точками 3 і 1 виражається вектором, проведеним з точки 1 в точку 3.

Векторна діаграма, побудована відповідно до чергування елементів кола, називається топографічною, оскільки точки, що відділяють вектори один від одного, відповідають точкам, що розділяють елементи схеми.

### Розрахункові формули

З векторної діаграми видно, що всі активні складові векторів напруги направлені однаково – паралельно вектору струму, тому векторне складання їх можна замінити арифметичним і знайти активну складову напруги кола:

$$U_a = U_{1a} + U_{2a} + U_{3a}.$$

Реактивні складі векторів напруги перпендикулярні вектору струму, причому індуктивні напруги направлені в один бік, а ємнісні – в інший. Тому реактивна складова напруги кола  $U_p$  визначається їх алгебраїчною сумою, в якій індуктивні напруги вважаються позитивними, а ємнісні – негативними:

$$U_p = U_{1p} + U_{2p} - U_{4p} + U_{5p}.$$

Вектори активної, реактивної і повної напруги кола створюють прямокутний трикутник, з якого виходить

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} . \quad (224)$$

Підставивши падіння напруги , виражені через струм і відповідні опори отримаємо :

$$U = I \sqrt{(\sum R_n)^2 + (\sum X_n)^2} ; \quad (225)$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{(\sum R_n)^2 + (\sum X_n)^2}} = \frac{U}{Z}$$

Таким чином знову отримана знайома вже формула , що зв'язує струм, напругу і повний опір кола. У цій формулі  $\sum R_n$ - загальний активний опір , рівний арифметичній сумі всіх активних опорів, що входять в нерозгалужене коло;  $\sum X_n$ - загальний реактивний опір рівний алгебраїчній сумі всіх реактивних опорів, що входять в нерозгалужене коло. У цій сумі індуктивні опори вважаються позитивними, а ємнісні – негативними. Повний опір нерозгалуженого кола.

$$Z = \sqrt{(\sum R_n)^2 + (\sum X_n)^2} . \quad (226)$$

У загальному випадку повний опір кола визначається як гіпотенуза прямокутного трикутника, катетами якого є виражені в певному масштабі активний і реактивний опори всього кола. З трикутника опорів виходить :

$$\cos \varphi = \frac{\sum R_n}{Z} ; \quad \sin \varphi = \frac{\sum X_n}{Z} ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum X_n}{\sum R_n} . \quad (227)$$

Від трикутника напруги можна перейти також до трикутника потужностей і отримати вже відомі формули для визначення потужностей в колі :

$$P = UI \cos \varphi ; \quad Q = UI \sin \varphi ; \quad S = UI.$$

В той же час активну потужність кола можна подати як арифметичну суму активних потужностей в елементах з активним опором. Реактивна потужність кола дорівнює алгебраїчній сумі потужностей реактивних елементів.

У цій сумі потужність індуктивних елементів вважається позитивною, а ємнісних – негативною :

$$P = \sum P_n ; \quad Q = \sum Q_n ; \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} . \quad (228)$$

Формули (223 - 226) є загальними ; з них можна отримати конкретне вираження для будь-якого нерозгалуженого кола.

### §70. Паралельне з'єднання котушки і конденсатора

Для розгляду паралельного з'єднання котушки і конденсатора подаємо їх на схемі активними і реактивними провідностями(рис.134,а).

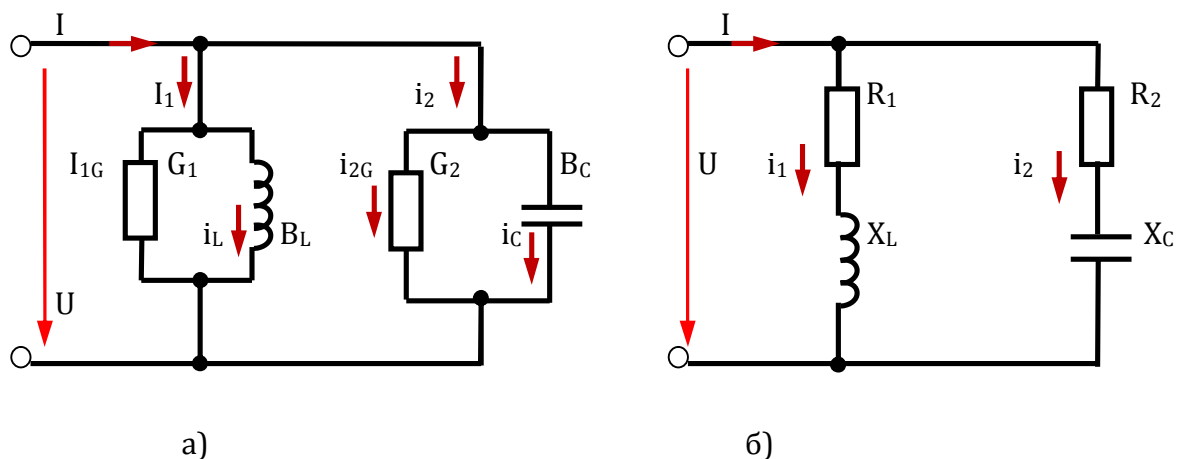


рис.134

На схемі рис.134,б ті ж котушки і конденсатор подані активними і реактивними опорами. Перша схема має деяку перевагу , оскільки в ній всі елементи з'єднані паралельно , а в іншій вони з'єднані змішано.

Вважаючи відомими параметрами котушки  $G_1$ ,  $B_L$  і конденсатора  $G_2$ ,  $B_C$  , а також напругу  $u = U_m \sin \omega t$  визначимо струми в колі і його потужність.

## Векторна діаграма кола. Повна провідність кола

Згідно першому закону Кірхгофа, миттєва величина загального струму дорівнює сумі миттєвих струмів окремих віток:

$$i = i_1 + i_2 = i_{1G} + i_L + i_{2G} + i_C.$$

Маючи на увазі неспівпадання по фазі активних і реактивних струмів, величину загального струму знайдемо векторним складанням:

$$I = I_{1G} + I_L + I_{2G} + I_C.$$

Для побудови векторної діаграми знаходимо:

$$I_{1G} = UG_1; I_{2G} = UG_2; U_L = I B_L; I_C = U B_C.$$

Залежно від співвідношення величин реактивної провідності віток з індуктивністю і ємністю можна визначити три випадки.

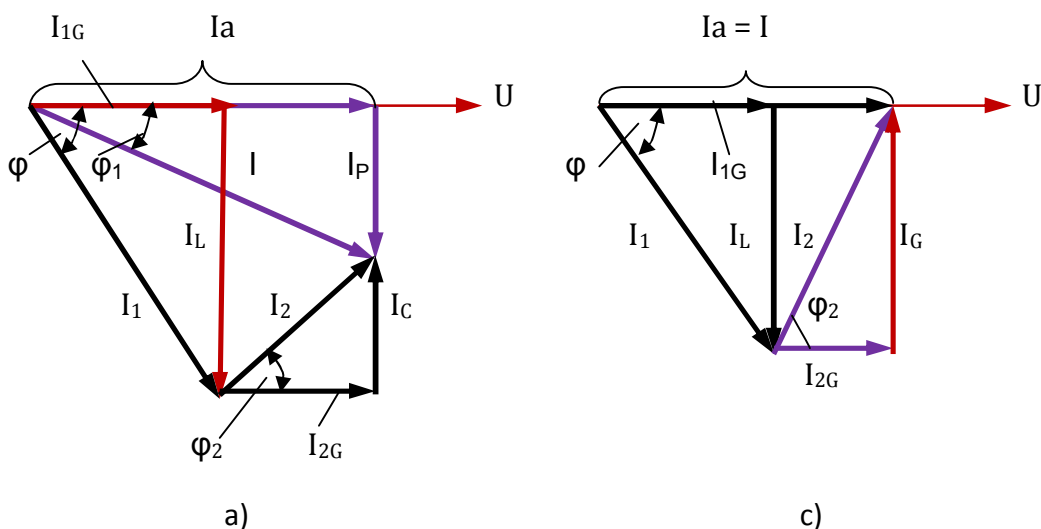
1.  $B_L > B_C$ . Для цього випадку на рис. 135,а. на діаграмі побудовані трикутники струмів для котушки і конденсатора і знайдені вектори струмів

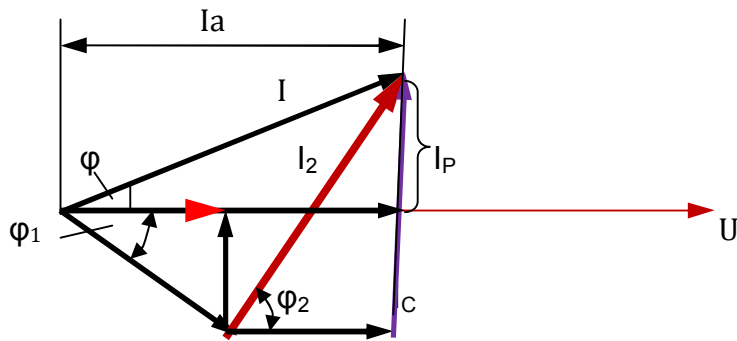
$I_1$  і  $I_2$  в цих елементах:

$$I_1 = I_{1G} + I_L; \quad I_2 = I_{2G} + I_C.$$

Векторна сума струмів  $I_1 + I_2 = I$  дає загальний струм в колі. В той же час вектор  $I$  є гіпотенузою прямокутного трикутника струмів, катети якого – складові вектора струму по двом взаємно перпендикулярним осям:

$$I_a = I_{1G} + I_{2G} \text{ — активна складова;}$$





б)

Рис. 135

$\dot{I}_p = \dot{I}_L + \dot{I}_C$  – реактивна складова.

Вектори активних складових струмів направлені в один бік, тому їх чисельні значення складаються. Вектори реактивних складових струмів направлені перпендикулярно вектору напруги в протилежні сторони, тому їм дають різні знаки: індуктивні струми вважаються позитивними, а ємнісні – негативними. При однаковій напрузі на всіх елементах кола  $I_L > I_C$ . Загальний струм відстає від загальної напруги по фазі на кут  $\varphi$ . З трикутника струмів наступне

$$I = \sqrt{(I_{1G} + I_{2G})^2 + (I_L - I_C)^2} = U\sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_L - B_C)^2};$$

або

$$I = U\sqrt{G^2 + B^2} = UY,$$

де  $G = G_1 + G_2$  і  $B = B_L - B_C$  - загальна активна і реактивна провідності кола;

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  - повна провідність кола.

Ці три провідності графічно можна зобразити сторонами прямокутного трикутника провідностей, який виходить вже відомим способом з трикутника струмів. Повна провідність кола  $Y$  є коефіцієнтом пропорційності між діючими величинами загального струму і напруги кола:

$$I = UY; \quad U = \frac{I}{Y}; \quad Y = \frac{I}{U}. \quad (229)$$

З трикутників струмів і провідностей визначаються величини:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{I_a}{I} = \frac{G}{Y}; \\ \sin \varphi &= \frac{(I_L - I_C)}{I} = \frac{(B_L - B_C)}{Y}; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{(I_L - I_C)}{I_a} = \frac{(B_L - B_C)}{G}. \end{aligned} \right\} (230)$$

Кут зсуву по фазі між напругою і загальним струмом в колі позитивний ( $\varphi > 0$ ). Фазові кути відлічуються від вектора струму.

2.  $B_L < B_C$ . Векторна діаграма змальована на рис.135,б. Оскільки  $I_L < I_C$ , то напруга відстає від загального струму на кут  $\varphi < 0$ .

Реактивна провідність кола має ємнісний характер. Розрахункові формули, отримані для випадку 1, дійсні і для цього випадку.

3.  $B_L = B_C$ . В цьому випадку реактивні складові струмів котушки і конденсатора рівні по величині:  $I_L = I_C$ . Реактивна складова загального струму і загальна реактивна провідність дорівнюють нулю. Загальний струм збігається по фазі з напругою і рівний по величині активній складовій струму. Кут  $\varphi$  зсуву фаз між загальним струмом і напругою дорівнює нулю.

Загальний струм в колі і напруга зв'язані формулою

$$I = UG, \text{ або } U = \frac{I}{G}.$$

У випадку  $B_L = B_C$  кола має місце резонанс струмів, про який детально було розказано пізніше.

### Енергетичний процес в колі

З векторної діаграми струмів легко отримати трикутник потужностей, з якого виходять ті ж формули, які були отримані для послідовного з'єднання котушки і конденсатора.

Реактивні потужності індуктивності і ємності входять в розрахунок з різними знаками: реактивна потужність індуктивності позитивна, а реактивна потужність ємності негативна. Відповідно до цього знак реактивної потужності всього кола може бути тим або іншим.

Якщо  $\varphi > 0$ , то  $Q > 0$ ; при  $\varphi < 0$ ,  $Q < 0$



Активна потужність позитивна при будь-якому значенні кута. Повна потужність теж завжди позитивна.

У даному колі активна потужність має певну величину ( $P \neq 0$ ), отже має місце перетворення електричної енергії в інший вигляд. Крім того, частина енергії, отриманої від генератора, повертається назад в генератор ( $Q \neq 0$  при  $\varphi \neq 0$ ). Обмін енергією здійснюється також між катушкою і конденсатором.

### §71. Розрахунок кіл з паралельним з'єднанням віток

Розрахунок електричного кола, розглянутий в попередньому параграфі, можна розповсюдити на кола, що містять довільне число приймачів, з'єднаних паралельно.

На рис.136,а паралельно з'єднані ті ж елементи кола, які були розглянуті при послідовному з'єднанні (див.рис.133,а). Передбачимо, щодля цього кола відомі напруга  $u = U_m \sin \omega t$  і параметри елементів кола R,L,C. Потрібно знайти струми в колі і потужність.

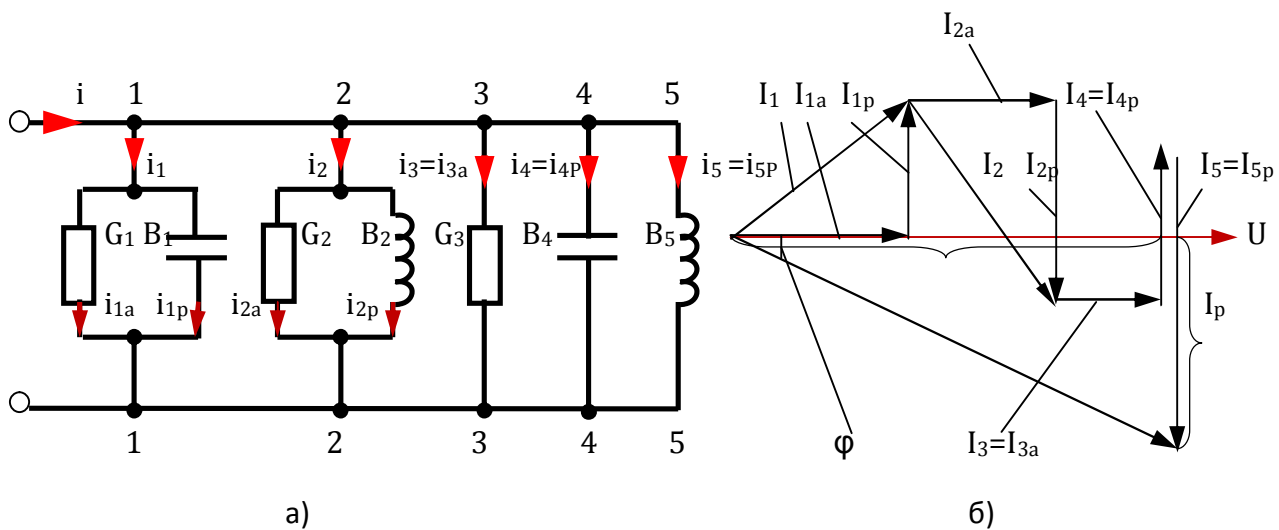


Рис. 136

#### Векторна діаграма

Для миттєвих величин відповідно до першого закону Кірхгофа рівняння струмів

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5.$$

Подаваючи струм в кожній вітці сумою активної і реактивної складових, отримаємо

$$i = i_{1a} + i_{1p} + i_{2a} + i_{2p} + i_{3a} + i_{4p} + i_{5p}.$$

Для діючих струмів потрібно написати векторне рівняння

$$I = I_{1a} + I_{1p} + I_{2a} + I_{2p} + I_{3a} + I_{4p} + I_{5p}.$$

Чисельні значення векторів струмів визначаються добутком напруги і провідності відповідної вітки.

На рис.136,б побудована векторна діаграма, відповідна цьому рівнянню. За вихідний вектор прийнятий, як завжди при розрахунку кіл з паралельним з'єднанням віток, вектор напруги  $U$ , а потім нанесені вектори струму в кожній вітці, причому напрями їх відносно вектора напруги вибрані відповідно до характеру провідності віток. Початковою точкою при побудові діаграми струмів вибрана точка, співпадаюча з початком вектора напруги. З цієї точки проведений вектор  $I_{1a}$  активного струму вітки 1 – 1 (по фазі збігається з напругою), а з кінця його проведений вектор  $I_{1p}$  реактивного струму тієї ж вітки (випереджає напругу на  $90^\circ$ ). Ці два вектори є складовими вектора  $I_1$  струму першої вітки. Далі в тому ж порядку відкладені вектори струмів інших віток. Слід звернути увагу на те, що провідність вітки 3-3 активна, тому реактивна складова струму в цій вітці дорівнює нулю. У вітках 4-4 і 5-5 провідність реактивна, тому в складі цих струмів немає активних складових.

### Розрахункові формули

З векторної діаграми видно, що всі активні складові векторів струму направлені однаково – паралельно вектору напруги, тому векторне складання їх можна замінити арифметичним і знайти активну складову загального струму:

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} + I_{3a}.$$

Реактивні складові векторів струмів перпендикулярні вектору напруги, причому індуктивні струми направлені в один бік, а ємнісні – в інший. Тому реактивна складова загального струму в колі визначається алгебричною їх сумою, в якій індуктивні струми вважаються позитивними, в ємнісні – негативними.

$$I_p = -I_{1p} + I_{2p} - I_{4p} + I_{5p}.$$

Вектори активного, реактивного і повного струму всього кола утворюють прямокутний трикутник, з якого виходить

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (231)$$

Підставивши величини струмів в вітках, виражені через напругу і відповідну провідність, отримаємо

$$I = U \sqrt{\left(\sum G_n\right)^2 + \left(\sum B_n\right)^2}; \quad (232)$$

$$U = \frac{I}{\sqrt{\left(\sum G_n\right)^2 + \left(\sum B_n\right)^2}} = \frac{I}{Y}, \quad (233)$$

де:  $\sum G_n$  - загальна активна провідність, рівна арифметичній сумі активної провідності всіх віток;  $\sum B_n$  - загальна реактивна провідність, рівна алгебричній сумі реактивної провідності всіх віток (у цій сумі індуктивні провідності вважаються позитивними, а ємнісні – негативними);  $Y$  – повна провідність кола:

$$Y = \sqrt{\left(\sum G_n\right)^2 + \left(\sum B_n\right)^2}. \quad (234)$$

Таким чином отримана знайома вже формула, що зв'язує напругу, струм і провідність кола.

Слід звернути увагу на можливі помилки при визначенні повної провідності кола по відомій провідності окремих віток: не можна складати арифметично провідність віток, якщо струми в них не збігаються по фазі.

Повну провідність кола в загальному випадку визначають як гіпотенузу прямокутного трикутника, катетами якого є виражені в певному масштабі активна і реактивна провідність всього кола:

$$\cos \varphi = \frac{\sum G_n}{Y}; \quad \sin \varphi = \frac{\sum B_n}{Y}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum B_n}{\sum G_n}. \quad (235)$$

Від трикутника струмів можна перейти також до трикутника потужностей і для визначення потужності отримати відомі вже формули:

$$P = UI \cos \varphi; \quad Q = UI \sin \varphi; \quad S = UI. \quad (236)$$

Активну потужність кола можна подати як арифметичну суму активних потужностей віток.

Реактивна потужність кола дорівнює алгебричній сумі потужностей віток. В цьому випадку індуктивна потужність береться позитивною, і ємнісна – негативною:

$$P = \sum P_n ; Q = \sum Q_n ;$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

(237)

### Розрахунок кола без визначення провідності віток

Розрахунок електричного кола при паралельному з'єднанні віток можна виконати без попереднього визначення активної і реактивної провідності, тобто зображаючи елементи кола в схемі заміщення їх активними і реактивними опорами (рис.137,а).

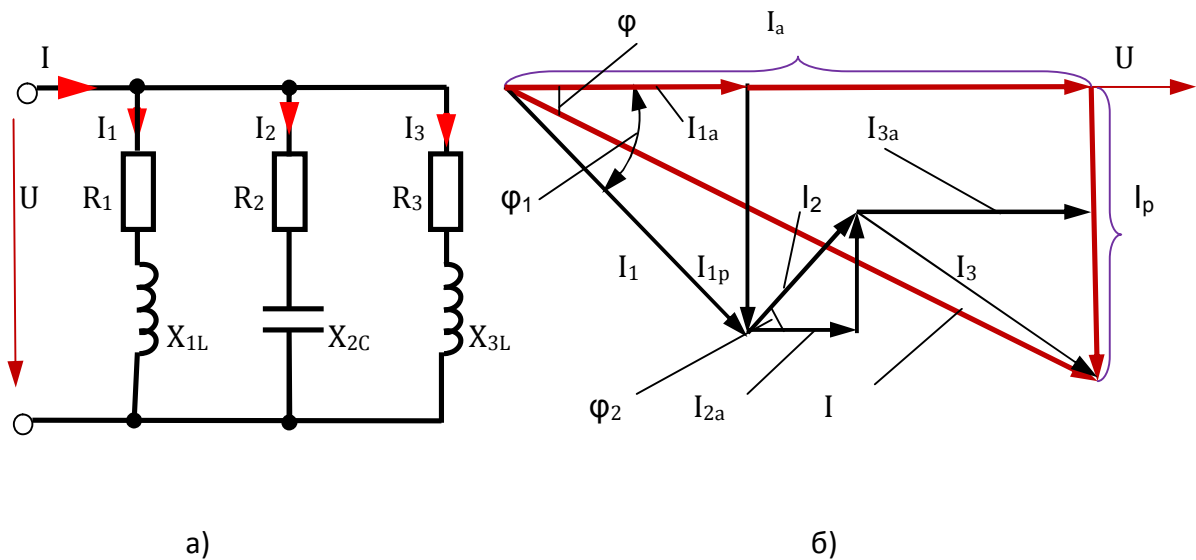


Рис. 137

Визначають струми в вітках за формулою (225) :

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} ; I_2 = \frac{U}{Z_2} \text{ і так далі,}$$

де  $Z_1, Z_2$  і так далі – повні опори віток.

Повний опір вітки, в яку входять декілька елементів, сполучених послідовно , визначають за формулою (226):

$$Z = \sqrt{\left(\sum R_n\right)^2 + \left(\sum X_n\right)^2}.$$

Для побудови векторної діаграми струмів (рис.137,б) можна визначити активну і реактивну складові струму кожної вітки за формулами :

$$I_{1a} = I_1 \left( \frac{R_1}{Z_1} \right), \quad I_{1p} = I_1 \left( \frac{X_1}{Z_1} \right)$$

і так далі для всіх віток.

В цьому випадку відпадає необхідність визначення кутів  $\varphi_1, \varphi_2$  і побудови їх на кресленні.

Струм в неразгалуженій частині кола

$$I = I_{1a} + I_{1p} + I_{2a} + I_{2p} + \dots$$

## §72. Коливальний контур

Коливальний контур складається із ідеальних котушки і конденсатора. У коливальному контурі здійснюється коливальний процес, який полягає у взаємному перетворенні електричного і магнітного полів. При цьому змінюється енергія полів.

В будь-яких коливальних системах можна спостерігати явище резонансу. Електричний резонанс виникає в електричних колах змінного струму, які мають індуктивності і ємності.

Вивчення резонансу необхідно, так як це явище широко застосовується в електричному зв'язку (як корисне), а в установках з великими струмами і напругами, де його виникнення спеціально не передбачається, резонанс може бути небезпечним (можуть виникнути перенапруги і пробої ізоляції).

### Характеристики коливального контуру

Енергетичний процес у коливальному контурі має періодичний характер з періодом  $T$ . Коливання в електричному колі які не зв'язані з джерелом енергії, називаються власними або вільними.

Період власних коливань

$$T_0 = \frac{1}{f_0}; \quad f_0 - \text{частота власних коливань.} \quad (238)$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} ; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{кутова частота власних коливань.}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} ; \quad (239)$$

$$I_m = U_m \frac{U_m}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{U_m}{Z_B}. \quad (240)$$

Величина , яка знаходиться у знаменнику , має розмірність опору і називається хвильовим опором контуру :

$$Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (241)$$

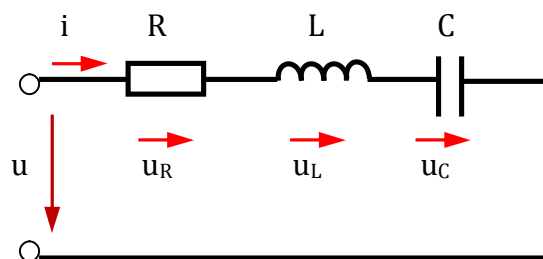
### §73. Резонанс напруг

При розгляді різних режимів електричних кіл в § 67 був відмічений випадок рівності реактивних опорів  $X_L = X_C$  при послідовному з'єднанні елементів, що містять ємність і індуктивність.

В цьому випадку електричне коло знаходиться в режимі резонансу напруг, який характеризується тим, що реактивна потужність кола дорівнює нулю, струм і напруга збігаються по фазі.

#### Умова виникнення резонансу

Резонанс напруг виникає при визначеній для даного кола частоті джерела енергії (частоті вимушених коливань), яку називають резонансною частотою  $\omega_p$ . При резонансній частоті , як буде показано далі ,  $X_L = X_C$



a)

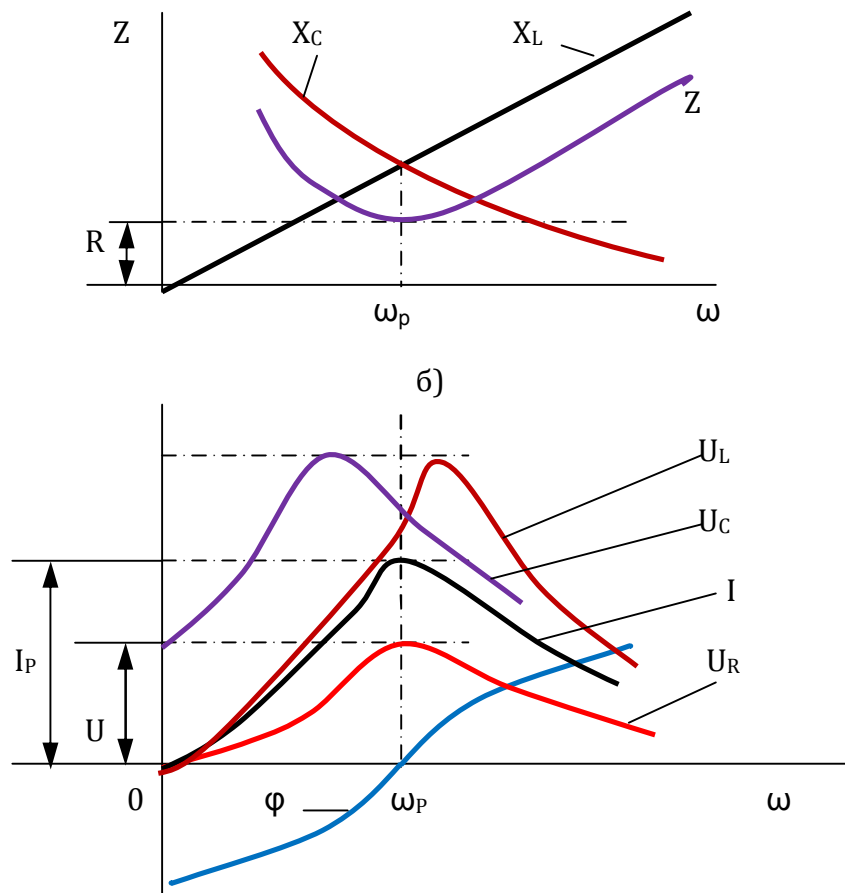


Рис. 138

Режим електричного кола при послідовному з'єднанні ділянок з індуктивністю і ємністю, що характеризується рівністю індуктивного і ємнісного опорів, називають резонансом напруг.

Резонанс напруг розглянемо спочатку на схемі кола (рис.138,а), що ідеалізується, в якому послідовно з резистором  $R$  включені ідеальні (без втрат) котушка  $L$  і конденсатор  $C$ .

Реактивні опори  $X_L$  і  $X_C$  (рис.138,б) залежать від частоти вимушених коливань  $\omega$ :

$$X_L = \omega L ; \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Прирівнюючи реактивні опори і враховуючи, що  $\omega = \omega_p$ , отримаємо

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}.$$

Звідси резонансна частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}} ; f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (242)$$

В даному випадку вираження для резонансної частоти збігається з формулою (239) для частоти власних коливань в контурі без втрат.

Основні співвідношення між величинами, що характеризують режим електричного кола і енергетичні процеси, розглянуті в § 67. Потрібно відзначити, що в нерозгалуженому колі обмін енергією між котушкою і конденсатором здійснюється через джерело енергії, яке поповнює втрати енергії в активних опорах.

### Резонансні криві

Резонанс напруг в колі можна встановити двома шляхами :

1. Зміною параметрів  $L$  і  $C$  (одного з них або обох разом) при постійній частоті джерела або
2. Зміною частоти джерела енергії при постійних  $L$  і  $C$ .

У зв'язку з цим великий практичний інтерес представляють залежності напруги і струмів на окремих елементах кола від частоти. Ці залежності називають резонансними кривими (рис.138,в).

Реактивні опори із зміною частоти змінюються, як показано на рис.138,б. При збільшенні частоти  $X_L$  збільшується пропорційно частоті, а  $X_C$  зменшується за законом зворотної пропорційності.

Відповідно повний опір  $Z$  кола при резонансній частоті  $\omega_p$  виявляється найменшим, рівним активному опору  $R$ ; при частоті  $\omega < \omega_p$  повний опір збільшується із зменшенням частоти за рахунок зростання  $X_C$ ; при частотах  $\omega > \omega_p$  повний опір зростає із збільшенням частоти за рахунок зростання  $X_L$ .

Така залежність повного опору від частоти визначає характер зміни струму при постійній напрузі в колі (рис.138,в). При  $\omega = 0$  струм дорівнює нулю, далі із збільшенням частоти струм збільшується і при  $\omega = \omega_p$  досягає максимуму  $I_p$ . Подальше збільшення частоти веде до поступового зменшення струму до нуля при  $\omega = \infty$ . Аналогічно змінюється напруга на активному опорі  $U_R$ , яка пропорційна струму  $U_R = IR$ .



Напруга на конденсаторі  $U_c$  при  $\omega = 0$  дорівнює напрузі на затисках джерела  $U$ , оскільки опір конденсатора  $X_c = \infty$ , що відповідає розриву кола на його затисках. Із зростанням частоти  $U_c$  збільшується, досягаючи найбільшої величини при частоті, декілька меншої резонансної, і далі зменшується до нуля при  $\omega = \infty$ .

Індуктивна напруга  $U_L = 0$  при частоті  $\omega = 0$ , оскільки опір  $X_L = 0$ . Збільшення частоти веде до збільшення  $U_L$ , яке при частоті, декілька більшої резонансної, досягає максимуму, а потім зменшується до величини напруги джерела при  $\omega = \infty$ , коли опір  $X_L = \infty$ , що відповідає розриву кола на затисках котушки.

При частотах менше резонансної, реактивний опір кола має ємнісний характер (негативний), тому і кут зсуву фаз в колі негативний. Зменшуючись із зростанням частоти, він стає рівним нулю при резонансі ( $f_p=0$ ), а потім змінює знак і збільшується при подальшому збільшенні частоти.

## §74. Резонанс струмів

При розгляді паралельного з'єднання котушки і конденсатора був відмічений випадок рівності активної і реактивної провідностей  $B_L = B_c$  елементів, що містять ємність і індуктивність.

В цьому випадку електричне коло знаходиться в режимі резонансу струмів, який характеризується тим, що реактивна потужність кола дорівнює нулю, струм і напруга збігаються по фазі ( $\varphi = 0$ ).

### Умови виникнення резонансу

Так само як і резонанс напруг, резонанс струмів виникає, коли частота джерела енергії дорівнює резонансній частоті  $\omega_p$ , а  $B_L = B_c$ .

Режим електричного кола при паралельному з'єднанні ділянок з індуктивністю і ємністю, що характеризується рівністю індуктивної і ємнісної провідностей називають резонансом струмів.

Спочатку розглянемо цей режим для схеми кола, що ідеалізується (рис.140,а). У цій схемі паралельно резистору  $R$  включені ідеальні котушки  $L$  і конденсатор  $C$ , втрати енергії в яких не враховуються. Реактивна провідність залежить від частоти вимушених коливань.

Для розглядаємої схеми :

активна провідність

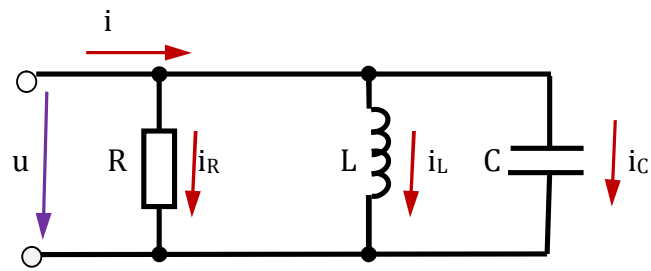
$$G = \frac{1}{R};$$

реактивні провідності

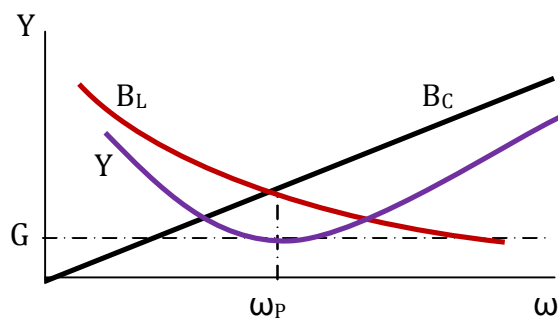
$$B_L = \frac{1}{\omega L} ; B_C = \omega C .$$

При резонансі струмів

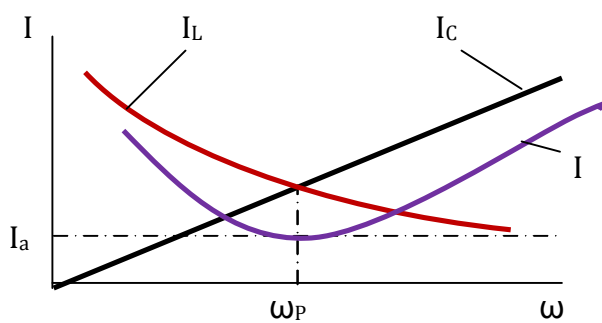
$$B_L = B_C ; \omega = \omega_p ; \frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C .$$



а)



б)



в)

Рис. 140

Звідси визначають резонансну частоту :

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

Вираження для резонансної частоти в даному випадку таке ж, яке було отримано при розгляді резонансу напруг ( див.формулу 242 ) і для частоти власних коливань в контурі без втрат.

Резонанс струмів так само як і резонанс напруг , можна отримати зміною параметрів L і C або зміною частоти джерела енергії.

### Резонансні криві

На рис.140,б показані залежності провідностей від частоти. Повна провідність кола Y при резонансній частоті  $\omega_p$  виявляється найменшою , рівною активній провідності G.

При зміні частоти у обидві сторони від резонансної повна провідність збільшується .

При заданій напрузі джерела енергії струм в колі пропорційний провідності (рис.140,в) :

$I = UY$  , тому крива I ( $\omega$ ) формою повторює криву Y ( $\omega$ ). Стан резонансу струмів характеризується найменшою величиною струму в колі і рівністю нулю кута зсуву фаз між напругою і струмом ( $\varphi_p = 0$ ).

При резонансі струмів відношення струму індуктивного або ємнісного до струму в нерозгалуженій частині кола дорівнює відношенню хвильової провідності

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

до активної провідності кола G .

Реактивні провідності при резонансі

$$\omega_p C = \frac{1}{\omega_p L} = \frac{C}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = Y_B .$$

Тому

$$I_L = I_C = UY_B = \frac{1}{G} Y_B ; \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{Y_B}{G} .$$

## §75. Компенсація реактивної потужності в електричних мережах за допомогою конденсаторів

Раніше було відмічено, що в електричному колі змінного струму , в якому є котушка індуктивності і конденсатор, включені послідовно або паралельно, загальна реактивна потужність кола завжди менша, ніж реактивна потужність кожного з елементів.

Завдяки взаємному обміну енергією між котушкою і конденсатором джерело частково або повністю звільняється від постачання реактивної енергії кола.

В цьому випадку говорять про компенсацію реактивної потужності котушки реактивною потужністю конденсатора і навпаки ( реактивні потужності  $Q_L$  і  $Q_C$  мають протилежні знаки ). Повна компенсація реактивної потужності має місце при резонансі.

Компенсація реактивної потужності в електричних мережах має велике техніко-економічне значення.

Далі коротко розглянуті загальні відомості з цього питання і принцип вживання конденсаторів для компенсації реактивної потужності.

### **Реактивна потужність електричних установок**

Енергетичний процес в котушці індуктивності , включеної в коло змінного струму, характеризується активною потужністю  $P = UI \cos \varphi$  і реактивною потужністю  $Q = UI \sin \varphi$ .

В електричній схемі заміщення така котушка подається активним опором  $R$  і індуктивністю  $L$ , або активною провідністю  $G$  і реактивною провідністю  $B$ .

В цьому відношенні до котушки індуктивності подібні багаточисельні пристрої змінного струму : асинхронні двигуни , індукційні нагрівальні установки, трансформатори, повітряні лінії і ін.

Отримуючи від генераторів електричну енергію , ці пристрої передають або перетворюють її в інші види енергії (активна потужність  $P$ ), тобто ті функції , для яких створені . Одночасно вони обмінюються енергією з джерелами (реактивна потужність  $Q$ ) , що є процесом , хоча і не бажаним але немінучим.

Якщо реактивна потужність пристрою не дорівнює нулю , то відношення  $\frac{Q}{P} = \tan \varphi \neq 0$  , а коефіцієнт потужності  $\cos \varphi < 1$  .

На кожному підприємстві одночасно працюють електродвигуни ( їх може бути багато), трансформатори і інші пристрої. Чим більше їх число і чим менше їх коефіцієнт потужності, тим більша загальна реактивна потужність електроустаткування виробничої дільниці, цеху, всього підприємства.

Величина загальної реактивної потужності електричної установки або електроустаткування підприємства в цілому залежить ще і від правильного вибору , міри завантаження електродвигунів, трансформаторів, від дотримання правил експлуатації електроустаткування.

Далі буде показано, що за рахунок реактивної потужності споживачів електричний струм в мережах виявляється більше, ніж потрібний по величині активного навантаження. З цим зв'язана одна з проблем проектування і експлуатації електричних мереж.

При передачі електричної енергії, особливо на великі відстані, із-за наявності індуктивних і

ємнісних опорів в елементах мережі змінного струму виникає також проблема підтримки заданого рівня напруги на всіх приймачах.

Для забезпечення оптимальної величини струму і необхідних величин напруги в мережі необхідно мати оптимальний баланс реактивних потужностей (індуктивної і ємнісної).

### **Вплив величини реактивної потужності на техніко-економічні показники електроустановок**

Для з'ясування впливу величини реактивної потужності на економічні показники електротехнічних установок розглянемо приймач енергії (наприклад, асинхронний електродвигун), що працює з постійною активною потужністю при постійній нарузі в мережі. Струм в приймачі, а отже, і в дротах, що з'єднують його з джерелом енергії, за цих умов залежить від величини реактивної потужності  $Q$  :

$$I = \frac{S}{U} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U}. \quad (243)$$

Чим більше реактивна потужність приймача, тим більший струм має бути в самому приймачі, в генераторі, з'єднаних дротах, трансформаторі і інших елементах мережі електропостачання.

Потужність теплових витрат, згідно закону Ленца – Джоуля, пропорційна квадрату струму і опору дротів :

$$\Delta P = I^2 R .$$

Вочевидь, чим більше струм приймача, тим більше втрати енергії у всіх елементах електричного кола.

Вартість втраченої енергії входить в експлуатаційні витрати. Зменшення реактивної потужності приймачів веде до зменшення їх струмів, скороченню втрат енергії і експлуатаційних витрат.

Якщо електрична установка спроектована з відносно великою величиною реактивної потужності, то устаткування (комутаційна апаратура, прилади контролю і т.д.) і провода необхідно вибрати на більш великі струми, чим при меншій величині реактивної потужності.

Це означає, що устаткування має бути встановлене відносно великих розмірів, а провода – більшого перерізу. Останнє потягне за собою збільшення об'єму будівель, обважнювання фундаментів і опор і тому подібне. Зменшення реактивної потужності приймачів енергії скорочує капітальні витрати.

Генератори електричної енергії і трансформатори характеризуються номінальною потужністю – добутком номінальних величин напруги і струму :

$$S_H = U_H I_H .$$

Як найповніше використання генераторів і трансформаторів відповідає режиму роботи з номінальним струмом при номінальній напрузі (особливі випадки , коли допускається деяке перевантаження устаткування при експлуатації, тут не враховується ).

Величина активної потужності генератора дорівнює активній потужності приймачів, що живляться від нього.

Якщо реактивна потужність приймачів дорівнює нулю, то генератор може розвивати активну потужність , рівну його номінальній потужності , тобто основна функція генератора – перетворення енергії – може бути виконана якнайповніше, а первинний двигун (наприклад, турбіна), також розрахований на номінальну потужність, працюватиме з повним навантаженням.

За наявності у приймачів реактивної потужності активна потужність генератора менше номінальної, хоча він працює при номінальній напрузі і струмі.

Таким чином, генератор і первинний двигун по потужності недовантажені, що призводить до зниження їх коефіцієнта корисної дії.

### **Компенсація реактивної потужності**

З приведених міркувань виходить, що реактивну потужність установок, споживаючих електричну енергію, треба по можливості скорочувати.

На практиці це досягається шляхом правильного вибору потужності електродвигунів змінного струму і трансформаторів, раціональною експлуатацією їх без недовантаження і роботи вхолосту.

Ці і деякі інші заходи зменшення реактивної потужності, пов'язані з вибором і експлуатацією електроустаткування, називають природними.

У тих випадках, коли природні заходи не можуть забезпечити оптимальної величини реактивної потужності установки, приймають штучні заходи для її компенсації.

Одним з таких заходів є включення паралельно до приймачів батареї конденсаторів.

Для визначення потужності і ємності батареї конденсаторів мають бути відомі величини напруги мережі  $U$ , реактивної потужності установки до компенсації ( $Q_1$ ) і після компенсації ( $Q_2$ ).

Можна встановити батарею конденсаторів потужністю  $Q_c = Q_1$  , тоді  $Q_2 = 0$ .

Повна компенсація реактивної потужності звільняє повністю мережу від реактивного струму.

Проте техніко – економічні розрахунки показують, що повна компенсація в більшості випадків не є оптимальним рішенням питання, оскільки компенсаційний простір виявляється складнішим і дорожчим, чим при деякій оптимальній величині реактивної потужності  $Q_2$ , яку визначають на основі техніко – економічного зіставлення варіантів.

Потужність батареї конденсаторів

$$Q_c = Q_1 - Q_2 ,$$

а ємність

$$C = \frac{Q_c}{\omega U^2} . \quad (244)$$

Сутність компенсації реактивної потужності за допомогою конденсаторів можна побачити з векторної діаграми ( рис.141,б), побудованої для схеми (рис.141,а), на якій паралельно приймачу, наприклад, асинхронному двигуну (групі двигунів), може бути включена конденсаторна батарея.

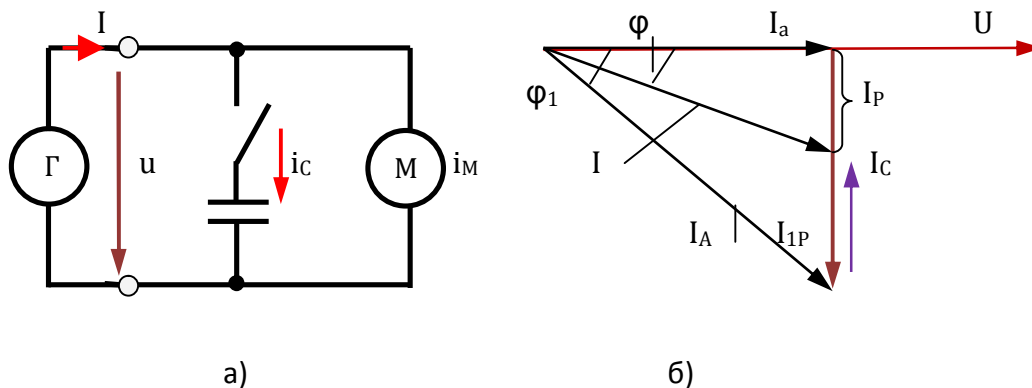


Рис. 141

До включення конденсаторів струм в дротах, що підходять  $I_d$  відстає по фазі від напруги на кут  $\varphi_1$ . Після включення батареї реактивна складова  $I_{p1}$  струму двигуна частково компенсується ємнісним струмом  $I_c$ , у зв'язку з чим струм в дротах, що підводять, зменшується до  $I$ , а кут зсуву фаз – до  $\varphi_2$  ( у обмінному енергетичному процесі між генератором і приймачем бере участь менша кількість електромагнітної енергії).

Активна складова струму в дротах не змінюється, отже, по активній потужності режим кола залишається тим самим :

$$\cos \varphi_2 = I_d \cos \varphi_1 .$$

Струм батареї конденсаторів має величину

$$I_C = I_D \sin \varphi_1 - I \sin \varphi_2 ;$$

$$I_D = \frac{P}{U \cos \varphi_1} ; I = \frac{P}{U \cos \varphi_2} ,$$

де  $P$  – активна потужність приймача ( у даному випадку двигуна ),

$$I_C = \frac{P}{U} \left( \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} - \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} \right) = \frac{P}{U} (tg \varphi_1 - tg \varphi_2) .$$

Ємність батареї конденсаторів

$$C = \frac{I_C}{\omega U} .$$

Потужність батареї конденсаторів

$$Q_C = UI_C .$$

Неважко відмітити , що потужність конденсаторів можна знайти, не підраховуючи струм  $I_C$ :

$$Q_C = P(tg \varphi_1 - tg \varphi_2) . \quad (245)$$

*(Визначення оптимальної величини  $Q_2$  , вибір вигляду компенсуючого пристрою і місця його установки в мережі розглядаються в спеціальних курсах).*

## **§76. Основні поняття про чотириполюсники**

Нерідко виникає завдання досліджувати зміну режиму одної вітки складного електричного кола при зміні електричних характеристик в іншій вітці.

Рішення такої задачі полегшується за допомогою поняття про чотириполюсники, оскільки в аналізі розглядаються лише дві вітки , а режим останньої частини кола може залишатися невідомим.



Такий метод застосовується при дослідженні ліній електропередачі, трансформаторів, електричних машин, підсилювачів і ін.

### Рівняння чотириполюсника

Кожна з двох будь-яких віток електричного кола, яке передбачається розглянути у взаємозв'язку, приєднані до останньої частини кола двома затисками або, як ще говорять, в двох полюсах (рис.142,а).

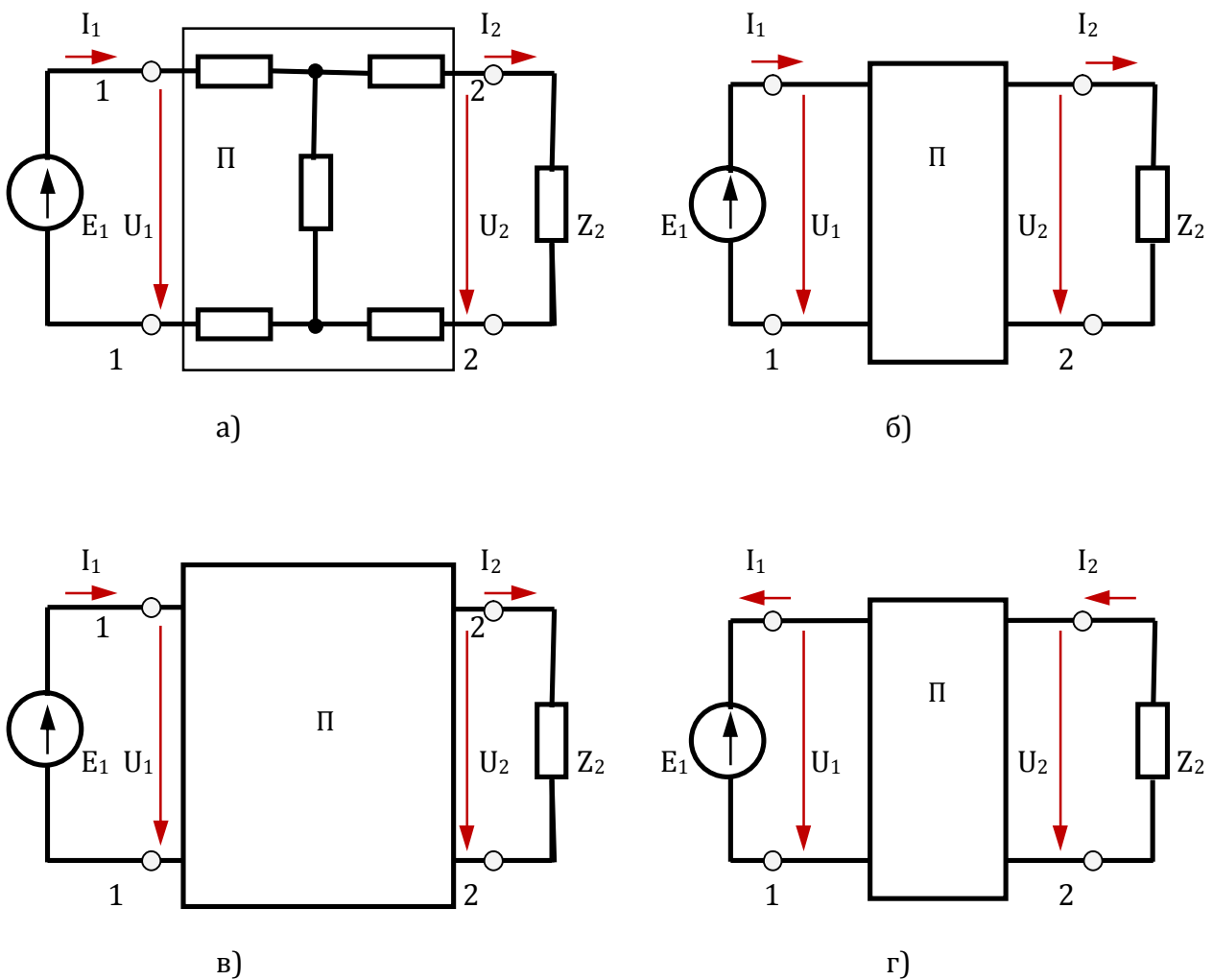


Рис.142

Частина електричного кола, що має дві пари затисків, одна з яких є вхідною, а інша – вихідною, називається чотириполюсником. Внутрішній зміст і схеми чотириполюсників можуть бути різноманітні. Завдання полягає в тому, аби написати загальні вираження, придатні для будь-якого чотириполюсника.

## Постановка задачі

Чотириполюсник, що має в своїх вітках джерела електричної енергії, називається активним, а чотириполюсник, що не має в своїх вітках джерел енергії – пасивним.

Режим роботи чотириполюсника відносно двох віток, які приєднуються до його затисків, сповна визначений, якщо відомі напруга і струми на вході і виході:  $u_1, u_2, i_1, i_2$ .

Завдання ставиться таке: з чотирьох величин, що визначають режим чотириполюсника, дві величини задано; їх можна розглядати як задані дії на коло. Необхідно знайти дві інші величини які є відгуками на ці дії.

На практиці частіше доводиться розглядати схеми, в яких одна з віток, приєднаних до чотириполюсника, містить джерело енергії, а інша – приймач.

Затиски, до яких приєднується вітка з джерелом, вважаємо вхідними, а затиски, до яких приєднується приймач, - вихідними.

Вхідними затисками може бути будь-яка пара затисків – первинна 1 – 1 або вторинна 2 – 2 (рис.142,б).

## Основні рівняння чотириполюсника

Позначимо комплекси напруги і струму з боку первинних затисків  $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ , з боку вторинних затисків –  $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_1 = \dot{E}_1, U_2 = \dot{I}_2 Z_2$ .

У режимі чотириполюсника нічого не зміниться, якщо замість приймача  $Z_2$  до вторинних затисків приєднати джерело, ЕРС якого  $E_2 = -U_2$  (рис.142,в).

Після такої заміни можна застосувати метод накладання для знаходження залежності між вхідними і вихідними напругами і струмами.

При короткому замиканні затисків 2 – 2 (джерело  $E_2$  виключене) часткові струми в схемі викликає ЕРС. Величини їх пропорційні напрузі  $U_1$ .

За наявності джерела  $E_2$  і короткому замиканні затисків 1 – 1 величини струмів пропорційні  $U_2$ .

Коефіцієнти пропорційності мають розмірність провідності:  $\underline{Y}_{1.1}, \underline{Y}_{1.2}$  – входні провідності,  $\underline{Y}_{2.1}, \underline{Y}_{1.2}$  – взаємні провідності.

Відповідно до принципу взаємності взаємні провідності рівні між собою:  $\underline{Y}_{2.1} = \underline{Y}_{1.2}$ .

Застосовуючи принцип накладання струмів, знаходимо:

$$i_1 = i'_1 + i''_1; i_2 = i'_2 + i''_2,$$

або

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 - \underline{Y}_{12} \dot{U}_2; \\ i_2 &= \underline{Y}_{2.1} U_1 - \underline{Y}_{2.2} \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

З цих рівнянь можна отримати інші рівняння, в яких заданими можна вважати напругу і струм на виході чотириполюсника, а шуканими – напруга і струм на вході. Для цього систему рівнянь треба вирішити відносно  $U_1, I_1$  :

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2; \quad I_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2. \quad (247)$$

У цих рівняннях комплекси  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  називаються коефіцієнтами або параметрами чотириполюсника.

$$\underline{A} = \frac{\underline{Y}_{2.2}}{\underline{Y}_{2.1}}; \quad \underline{B} = \frac{1}{\underline{Y}_{2.1}}; \quad (248)$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{Y}_{1.1} \underline{Y}_{2.2} - \underline{Y}_{1.2} \underline{Y}_{2.1}}{\underline{Y}_{2.1}}; \quad \underline{D} = \frac{\underline{Y}_{1.1}}{\underline{Y}_{2.1}}.$$

Рівняння у формі (247) зручно застосовувати в тих випадках, коли чотириполюсник виконує роль передавальної ланки між джерелом і приймачем енергії.

### Властивості чотириполюсників

Між коефіцієнтами чотириполюсників є такий зв'язок :

$$\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1. \quad (249)$$

Це неважко довести, якщо у формулу (249) підставити вираження (248).

Якщо поміняти місцями вхідні і вихідні затиски (рис.142,г), то рівняння вигляду (246) можна

записати , помінявши індекси при всіх величинах .

Вирішення цих рівнянь відносно  $\dot{U}_2$  і  $\dot{I}_2$  дає

$$\dot{U}_2 = \underline{D} \dot{U}_1 + \underline{B} \dot{I}_1 ; \dot{I}_2 = \underline{C} \dot{U}_1 + \underline{A} \dot{I}_1 . \quad (250)$$

Зіставлення (250) і (247) показує, що при зміні місця вхідних і вихідних затисків в рівняннях чотириполюсника змінюються місцями коефіцієнти  $\underline{A}$  і  $\underline{D}$  .

Звідси витікає , що при рівності коефіцієнтів  $\underline{A}$  і  $\underline{D}$  чотириполюсник має однакове коло з боку тієї і іншої пари затисків. Такий чотириполюсник називається симетричним.

### Режими чотириполюсника

Для практики найбільший інтерес має режим навантаження чотириполюсника. Проте раніше розглянемо режими холостого ходу і короткого замикання на виході чотириполюсника , які використовуються , зокрема, для визначення його параметрів.

### Холостий хід і коротке замикання

В режимі холостого ходу на виході чотириполюсника (рис.143,а)  $\dot{I}_2 = 0$  ;  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2х}$ .

При короткому замиканні вторинних затисків (рис.143,б)  $\dot{U}_2 = 0$  ;  $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2к}$

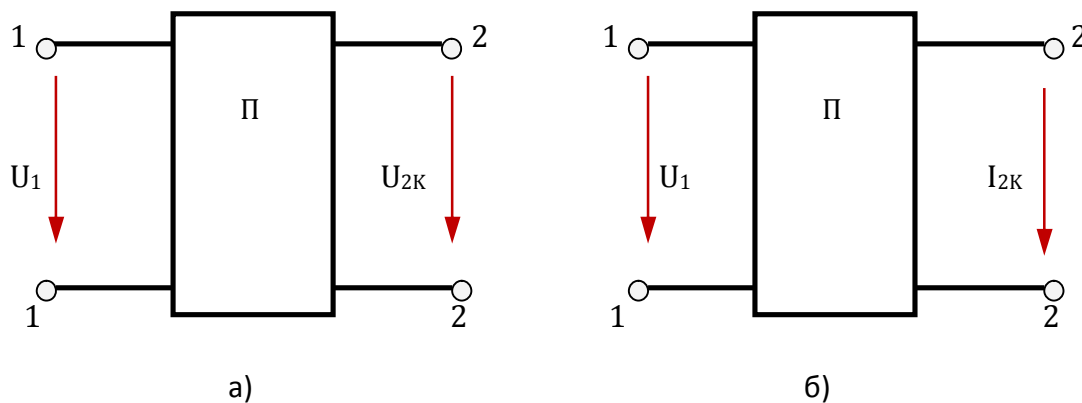


Рис. 143

З рівнянь виходить

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1x} &= \underline{A} \dot{U}_{2x}; \dot{i}_{1x} = \underline{C} \dot{U}_{2x}; \\ \dot{U}_{1k} &= \underline{B} \dot{i}_{2k}; \dot{i}_{1k} = \underline{D} \dot{i}_{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

З цих виражень надається можливим виразити параметри чотириполюсника :

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{U}_{2x}}; \underline{B} = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{i}_{2k}}; \\ \underline{C} &= \frac{\dot{i}_{1x}}{\dot{U}_{2x}}; \underline{D} = \frac{\dot{i}_{1k}}{\dot{i}_{2k}}. \end{aligned} \right\} \quad (252)$$

З досвіду холостого ходу можна також знайти вхідний опір при розімкнених вторинних затисках [див.(251)]

$$\frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{i}_{1x}} = \underline{Z}_{1x} + \frac{\underline{A}}{\underline{C}}. \quad (253)$$

З досвіду короткого замикання [див.(251)] знаходять вхідний опір при замкнених накоротко вторинних затисках :

$$\frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{i}_{1k}} = \underline{Z}_{1k} + \frac{\underline{B}}{\underline{D}}. \quad (254)$$

Якщо відомі внутрішня схема і опори всіх віток чотириполюсника, то параметри його можна знайти розрахунком, застосовуючи відомі методи перетворення схем.

Спочатку визначають вхідні опори  $\underline{Z}_{1x}$  і  $\underline{Z}_{1k}$  і додатково – вхідний опір з боку вторинних затисків при розімкнених первинних затисках ( $\dot{i}_1 = 0$ ). З рівнянь (250)

$$\underline{Z}_{2x} = \frac{\dot{U}_{2x}}{\dot{i}_{2x}} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}. \quad (255)$$

Спільним рішенням чотирьох рівнянь визначають коефіцієнти чотириполюсника.

Як контрольне можна використовувати рівняння , отримане на основі режиму короткого замикання на первинній стороні.

Вхідний опір з боку вторинних затисків при короткому замиканні на первинній стороні із (250) при  $\dot{U}_1 = 0$

$$\underline{Z}_{2к} = \frac{\dot{U}_{2к}}{i_{2к}} = \frac{B}{A}.$$

### Режим при навантаженні

Напряга і струм на вході чотириполюсника складаються з двох доданків.

Враховуючи вираження (252) основні рівняння чотириполюсника можна записати так :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}i_2 = \dot{U}_{1х} + \dot{U}_{1к}; \\ i_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}i_2 = i_{1х} + i_{1к}. \end{aligned} \right\} (256)$$

З рівнянь можна побачити , що напругу і струм на вході чотириполюсника в режимі при навантаженні визначають накладанням відповідних величин , відомих по режимах холостого ходу і короткого замикання.

Робочий режим чотириполюсника в деяких випадках характеризується вхідним опором з боку первинних затисків ( $\underline{Z}_{1вх}$ ) і з боку вторинних затисків ( $\underline{Z}_{2вх}$ ).

Розділимо перше рівняння на друге :

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}i_2}{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}i_2}.$$

Але  $\dot{U}_2 = i_2 \underline{Z}_2$ , тому

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_2 + \underline{D}}, \quad (257)$$

де  $Z_2$  – опір навантаження на вторинній стороні.

Вхідний опір з боку вторинних затисків знайдемо з рівнянь :

$$\underline{Z}_{2\text{вх}} = \frac{\dot{U}_2}{i_2} = \frac{D\dot{U}_1 + B i_1}{C\dot{U}_1 + A i_1}.$$

Враховуючи, що  $\dot{U}_1 = i_1 \underline{Z}_1$ , де  $\underline{Z}_1$  – опір навантаження на первинній стороні, знайдемо

$$\underline{Z}_{2\text{вх}} = \frac{\dot{U}_2}{i_2} = \frac{D\underline{Z}_1 + B}{C\underline{Z}_1 + A}. \quad (258)$$

### §77. Схеми заміщення пасивного чотириполюсника

Пасивний чотириполюсник, в якого опори елементів схеми постійні, можна привести до однієї з еквівалентних схем заміщення з трьома вітками, з'єднаними зіркою або трикутником.

#### Т-подібна схема заміщення

Три вітки пасивного чотириполюсника, з'єднані зіркою, утворюють Т-подібну схему заміщення (рис.144,а). Для цієї схеми струм на вході

$$i_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} + i_2 \left(1 + \frac{Z_b}{Z_c}\right). \quad (259)$$

Напруга на вході

$$\dot{U}_1 = i_1 \cdot Z_a + i_2 Z_b + \dot{U}_2. \quad (260)$$

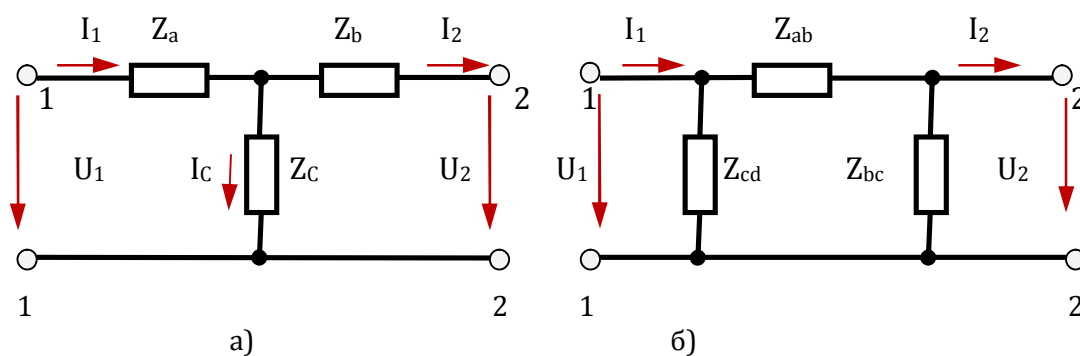


Рис.144

Виразення коефіцієнтів Т – подібної схеми заміщення пасивного чотиріполюсника :

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_c} ; \quad \underline{B} = \frac{\underline{Z}_a \cdot \underline{Z}_b + \underline{Z}_b \cdot \underline{Z}_c + \underline{Z}_c \cdot \underline{Z}_a}{\underline{Z}_c} ; \\ \underline{C} &= \frac{1}{\underline{Z}_c} ; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_c} . \end{aligned} \right\} (261)$$

### П – подібна схема заміщення

В схемі рис.144,а зірку опорів  $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$  можна замінити еквівалентним трикутником опорів  $\underline{Z}_{ab} ; \underline{Z}_{bc} ; \underline{Z}_{ca}$ .

Після такої заміни отримаємо еквівалентну П - подібну схему заміщення пасивного чотиріполюсника (рис.144,б). Визначимо вхідні величини цієї схеми

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cdot \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{bc}} \right) + i_2 \underline{Z}_{ab} ; \\ i_1 &= \dot{U}_2 \cdot \frac{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}} + i_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ca}} \right) . \end{aligned} \right\} (262)$$

Виразення коефіцієнтів для П – подібної схеми заміщення пасивного чотиріполюсника.

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \frac{\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{bc}} ; \quad \underline{B} = \underline{Z}_{ab} ; \\ \underline{C} &= \frac{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}} ; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ca}} . \end{aligned} \right\} (263)$$

## §78. Кругові діаграми

При проектуванні електромеханічних установок поданих схемами заміщення, виникає необ-



хідність дослідження режимів роботи при зміні одного із параметрів.

У таких випадках по даним розрахунків будують графіки зміни ряду електротехнічних величин (струму,  $\cos \varphi$  і т. д.) в залежності від змінного параметра.

Застосовують вже відомі методи розрахунку кіл змінного струму, для побудови графіків необхідно багато разів повторити рішення однієї і той же задачі. Цей спосіб трудомісткий і тривалий.

У даному випадку можна застосувати графічний метод дослідження електричних кіл змінного струму за допомогою кругових діаграм.

Обґрунтування методу, порядок побудови кругової діаграми і визначення величин ряду електротехнічних величин розглянемо для одного з простих кіл.

### Обґрунтування методу

При послідовному з'єднанні індуктивного опору  $X_L$  і активного опору  $R$  (рис.145)

$$\dot{U} = Ri + jX_L i.$$

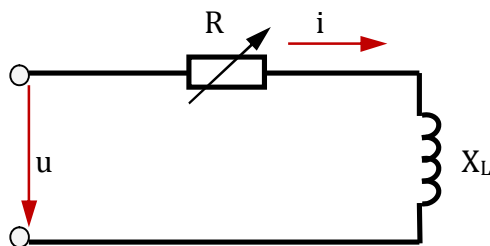


Рис. 145

Якщо діюча величина прикладеної до кола напруги стала, а активний опір змінюється, то відповідно буде змінюватися струм у колі:

при  $R = 0$  струм

$$i_k = \frac{U}{jX_L}.$$

Струм  $I_k$  при короткому замиканні ділянки з змінним струмом називається струмом короткого замикання, при  $R = \infty$  (розрив кола)  $I = 0$ .

Таким чином, при зміні активного опору від  $R = \infty$  до 0 струм у колі змінюється від 0 до  $I_k$ .

Проміжні величини струму можна знайти, поділивши рівняння на  $jX_L$ :

$$\frac{U}{jX_L} = \frac{R}{jX_L} \dot{I} + \dot{I},$$

або

$$\dot{I}_k = \dot{I} + \left(-j \frac{R}{X_L} \dot{I}\right).$$

Із останнього рівняння наступне, що сума двох векторів – вектора струму  $\dot{I}$  відстаючого від нього на  $90^\circ$  вектора  $-j \frac{R}{X_L} \dot{I}$  стала і дорівнює струму короткого замикання. Це відповідає випадку, коли кінець вектора струму переміщується по колу, яке проходить через початок вектора струму і кінець вектора  $-j \frac{R}{X_L} \dot{I}$ , а вектор струму  $\dot{I}_k$  є діаметром цього кола (рис.146).

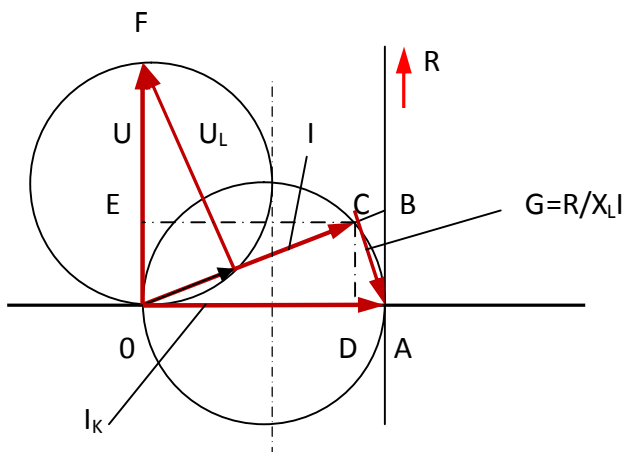


Рис.146

### Побудова кругової діаграми

Для побудови кола, яке називають круговою діаграмою струмів, необхідно визначити струм короткого замикання  $I_k$ , відкласти на кресленні в відповідному масштабі  $M_i$  відрізок  $\overline{OA}$ , який відповідає цьому струму, і побудувати на ньому, як на діаметрі, півкола. Струм короткого замикання устанавлюється в колі при  $R = 0$ , тому є чисто індуктивним, відстає від напруги на  $90^\circ$ . Виходячи з цього, визначають напрям вектора напруги. Для вияснення залежності струму і інших величин від активного опору необхідно виконати додаткові побудови – в деякому мас-

штабі  $M_R$  по напрямку вектора струму відкласти індуктивний опір  $X_L$ . Зокрема можна опір  $X_L$  визначити тим же відрізком  $OA$ ; тоді масштаб опорів  $M_R$  не буде довільним:

$$\overline{OA} = \frac{I_k}{M_i} = \frac{X_L}{M_R}; \quad M_R = \left(\frac{X_L}{I_k}\right) M_i.$$

Із точки  $A$  в цьому випадку проводять пряму  $\overline{AR}$ , перпендикулярну вектору  $I_k$ . На цій прямій із точки  $A$  в тому ж масштабі  $M_R$  відкладають величини активного опору  $R$ . Відклавши опір  $R$  відрізком  $AB$  і провівши пряму  $\overline{OB}$ , отримуємо трикутник опорів, гіпотенуза якого  $\overline{OB}$  виражає повний опір кола  $Z$ .

### Визначення величин з кругової діаграми

В точці  $C$  перехрещення прямої  $\overline{OB}$  з круговою діаграмою лежить кінець вектора струму, проведеного з точки  $O$ . Чисельне значення струму знаходять множенням довжини відрізка  $OC$  на масштаб струмів  $I = \overline{OC} \cdot M_i$ .

Аналогічно знаходять струми при інших опорах  $R$  від  $0$  до  $\infty$ . Проекції відрізка  $\overline{OC}$  на напрями напруги і струму короткого замикання дають активну і реактивну складові струму в тому ж масштабі  $M_i$ :

$$I_a = \overline{OC} \cdot M_i, \quad I_L = \overline{OD} \cdot M_i.$$

Відрізок  $\overline{OE}$  у масштабі потужності виражає активну потужність, а відрізок  $\overline{OD}$  – реактивну потужність кола:

$$P = I_a U = \overline{OE} M_i U = \overline{OE} M_p;$$

$$Q = I_L U = \overline{OD} M_i U = \overline{OD} M_p,$$

де  $M_p = M_i U$  – масштаб потужності.

У масштабі потужності  $M_p$  відрізок  $\overline{OC}$  виражає повну потужність кола. Якщо на відрізку  $\overline{OF}$ , який виражає у масштабі напруг  $M_L$ , повну напругу кола  $U$ , побудувати, як на діаметрі, півкола, то можна визначити активну і реактивну складові напруги і коефіцієнт потужності  $\cos \varphi$ .

Півкола OGF є круговою діаграмою напруг. Відрізок  $\overline{OG}$ , співпадаючий по напрямку з вектором струму, у масштабі напруг виражає активну напругу  $U_R$ , відрізок  $\overline{GF}$ , перпендикулярний вектору струму – реактивну напругу  $U_L$ . Точка G, в якій поєднуються кінець вектора  $U_R$  та початок вектора  $U_L$ , знаходиться в перехрещенні лінії струму  $\overline{OC}$  з круговою діаграмою напруг.

Цей висновок виходить з подоби трикутників OGF і OCA.

При збільшенні R від 0 до  $\infty$   $\cos \varphi$  збільшується від 0 до 1, причому відрізок  $\overline{OF}$  у масштабі  $M_\varphi$  відповідає  $\cos \varphi = 1$ . Дійсно, при  $R = \infty$  напрям вектора струму буде збігатися з напрямом вектора напруги (довжина вектора струму в цьому випадку дорівнює нулю).

Кругова діаграма напруг вектора струму перехрестить напрям в точці F (точка G по діаграмі переміститься і буде збігатися з точкою F). Якщо відрізок  $\overline{OF}$  розділити на 100 частин, то, суміщуючи відрізок  $\overline{OG}$  з прямою  $\overline{OF}$ , можна знайти значення  $\cos \varphi$  з точністю до 0,01.

### ПФ.С.02.ПР.0.10.02 .Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

Методи розрахунку електричних кіл змінного струму за допомогою векторних діаграм,

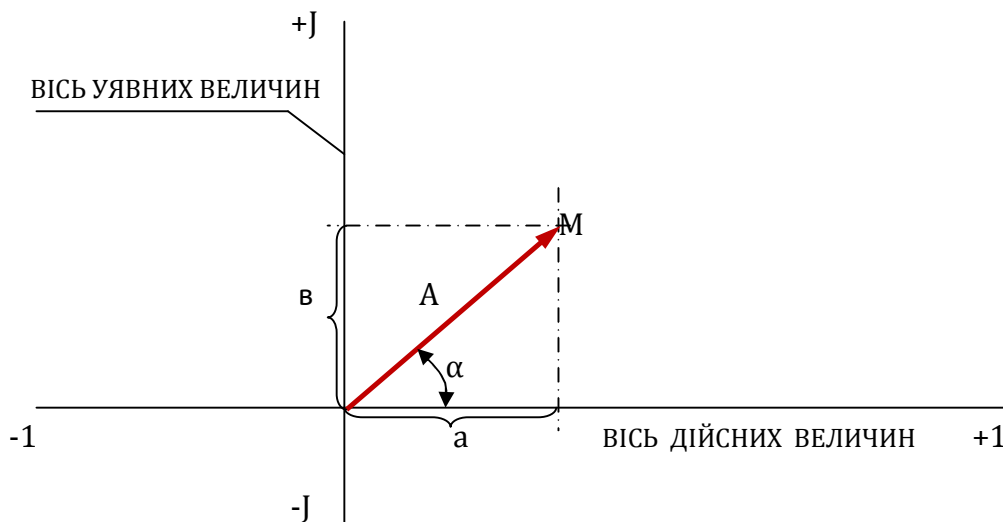


Рис. 147

засновані на зображенні синусоїдних величин векторами. Із курсу математики звісно, що кожному вектору  $\underline{A}$  в комплексній площині (рис.147) відповідає комплексне число  $\underline{A}$ , котре можна виразити у формі : алгебричній –  $A = a + j b$  ; тригонометричній –  $A = A \cos \varphi + j A \sin \varphi$  ; показовій –  $A = A e^{j\alpha}$ .

Це дає підставу від графічного (векторного) вираження синусоїдних напруг і струмів перейти до аналітичного вираження їх комплексними числами, а операції з векторами замінити алгебричними діями.

## §79. Вираження характеристик електричних кіл комплексними числами

При розрахунку електричних кіл змінного струму використовують або визначають наступні величини : ЕРС, напруги, струми, опори, провідність, потужність. Всі ці величини повинні бути виражені комплексними числами в так називаємій символічній формі.

### Напруги та струми

Подібно тому , як на векторних діаграмах довжини векторів виражають діючі величини, комплексні вираження ЕРС, напруг та струмів, записують так , що модулі їх також дорівнюють діючим величинам. Комплекси синусоїдних величин , які змінюються, позначають точками над їх буквеними позначеннями (наприклад, комплекси напруги  $\dot{U}$ , струму  $\dot{i}$ ).

Комплекси величин, які не залежать від часу (наприклад, опорів, провідностей), позначають великими буквами без точок, але з рисою унизу :  $\underline{Z}$  ,  $\underline{Y}$ . Для прикладу розглянемо схему електричного кола паралельного з'єднання котушки і конденсатора (рис.148). Напруга на затискачах кола виражається рівнянням

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

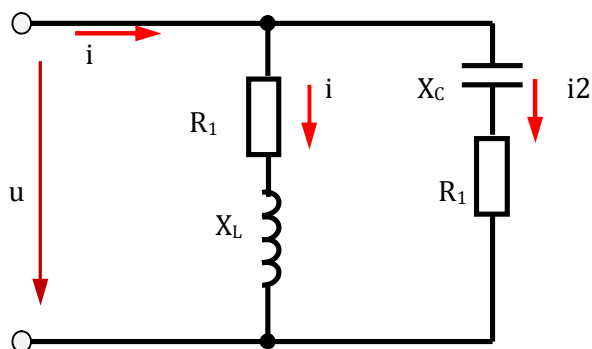


Рис 148

Цій напрузі відповідає вектор  $U$  в комплексній площині (рис.149) та комплексне число у показовій формі

$$\dot{U} = U_e^{j\psi_u} \quad (264)$$

Струм  $i_1$  у котушці відстає від напруги

на кут  $\varphi_1$ ;

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi_1) = I_{1m} \sin(\omega t - \psi_{1i});$$

кут  $\psi_{1i} = \psi_u - \varphi_1$ , в розглядаєму випадку  $\psi_{1i} < 0$ .

Вектору струму  $I_1$  відповідає комплексне число :

$$I_1 = I_{1e}^{-j\varphi_{1i}} = jI_1 \cos \varphi_{1i} - jI_1 \sin \psi_{1i}. \quad (265)$$

Струм у конденсаторі випереджає напругу на кут  $\varphi_2$ . Вектору струму  $I_2$  відповідає рівняння

$$i_2 = I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \psi_u + \varphi_2) = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{2i})$$

та комплекс

$$I_2 = I_{2e}^{j\varphi_{2i}} = I_2 \cos \psi_{2i} + jI_2 \sin \psi_{2i}, \quad (266)$$

де  $\psi_{2i} = \psi_u + \varphi_2$ ;  $\psi_{2i} > 0$ .

В відповідності з першим законом Кірхгофа, струм у нерозгалуженій частині кола, складається із струмів у паралельних вітках

$$I = I_1 + I_2$$

Для визначення цього струму, складання векторів  $I_1$  та  $I_2$  можна замінити складанням комплексів :

$$I = I_1 + I_2;$$

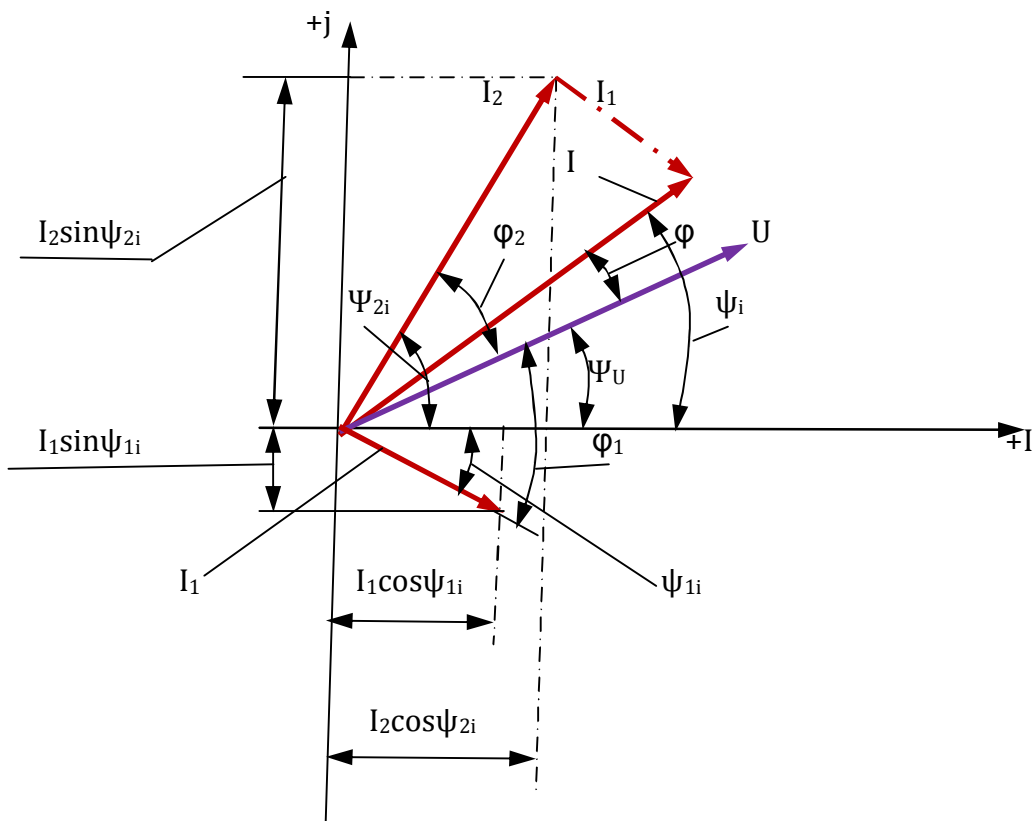


Рис.149

$$\begin{aligned} \dot{I} &= (I_1 \cos \psi_{1i} - jI_1 \sin \psi_{1i}) + (I_2 \cos \psi_{2i} + jI_2 \sin \psi_{2i}) = \\ &= I \cos \varphi_1 + jI \sin \psi_i = I_e^{j\psi_i}. \end{aligned} \quad (267)$$

Слід звернути увагу на різницю між діючою або уявною частками комплексу з одного боку, і активної або реактивної складових вектора струму – з іншого.

Діюча та уявна частка комплексу струму дорівнюють проєкціям вектора струму на осі комплексної площині (вісь діючих та вісь уявних величин).

Активна та реактивна складові вектора струму у даній ділянці кола дорівнюють його проєкціям на взаємно перпендикулярні осі, одна з котрих направлена вздовж вектора напруги цієї ж ділянки кола.

Діюча та уявна частки комплексу струму дорівнюють відповідно активній і реактивній складовим вектора струму тільки у тому випадку, якщо вектор напруги направлений вздовж осі дійсних чисел (комплекс напруги виражається дійсним числом).

## Опори

Користуючись схемою поданою на рис. 148 можна виразити в комплексній формі опори. Поділивши комплекс напруги  $\dot{U}$  на комплекс струму в котушці  $\dot{I}_1$ , отримаємо комплекс опору першої вітки :

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = \frac{U_e^{j\psi_u}}{I_{1e}^{-j\psi_{1i}}} = \frac{U}{I_1} e^{j(\psi_u + \psi_{1i})} = Z_1 e^{j\varphi_1}, \quad (268)$$

де  $Z_1 = \frac{U}{I_1}$  – модуль комплексу повного опору;

$\varphi_1 = \psi_u + \psi_{1i}$  – кут зсуву фаз між напругою і струмом першої вітки ( $\varphi_1 > 0$ ).

Виразимо комплекс опору котушки в тригонометричній і алгебричній формі :

$$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1} = Z_1 \cos \varphi_1 + jZ_1 \sin \varphi_1.$$

Але  $Z_1 \cos \varphi_1 = R_1$  ;  $Z_1 \sin \varphi_1 = X_L$  , тому

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L . \quad (269)$$

Аналогічно, для другої вітки

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = \frac{U_e^{j\psi_u}}{I_{2e}^{j\psi_{2i}}} = \frac{U}{I_2} e^{j(\psi_u - \psi_{2i})} = Z_2 e^{-j\varphi_2},$$

де  $Z_2 = \frac{U}{I_2}$  – модуль комплексу повного опору;

$\varphi_2 = \psi_u - \psi_{2i}$  – кут зсуву між напругою та струмом другої вітки ( $\varphi_2 < 0$ );

$$\underline{Z}_2 = Z_2 e^{-j\varphi_2} = Z_2 \cos \varphi_2 - jZ_2 \sin \varphi_2,$$



або

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_C . \quad (270)$$

Якщо у вітках схеми реактивні опори відсутні ( $X_L = X_C = 0$ ), то в відповідності з вираженнями (269), (270),  $\underline{Z}_1 = R_1$  ;  $\underline{Z}_2 = R_2$  .

При  $R_1 = R_2 = 0$

$$\underline{Z}_1 = jX_L ; \underline{Z}_2 = -jX_C .$$

Висновки з приведених міркувань :

- Активний опір в комплексній формі виражається дійсним позитивним числом
- Реактивні опори в комплексній формі виражаються уявними числами, причому індуктивний опір ( $X_L$ ) позитивний, а ємнісний ( $X_C$ ) негативний.
- Повний опір ділянки кола при послідовному з'єднанні R і X виражається комплексним числом , дійсна частка котрого дорівнює активному опору , а уявна частка дорівнює реактивному опору цієї ділянки.

### Провідності

Вираження провідностей віток у комплексній формі можна отримати зі схеми заміщення котушки і конденсатора при послідовному з'єднанні (рис.150).

$$\underline{Y}_1 = \frac{i_1}{U} ; \underline{Y}_2 = \frac{i_2}{U} . \quad (271)$$

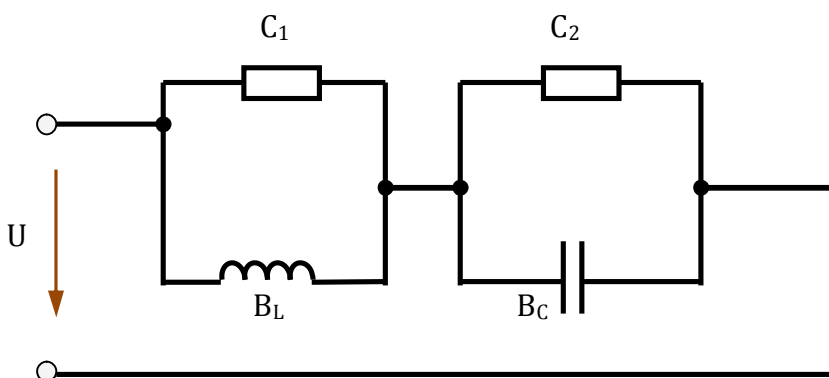


Рис. 150

З цих формул видно, що вираження провідностей комплексними числами можна отримати в такому ж порядку, як для опорів. Повні провідності у символічній формі можна знайти, як величини обернені комплексам повних опорів:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}. \quad (272)$$

Для першої вітки (катушки)

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{R_1 - jX_L}{(R_1 + jX_L)(R_1 + jX_L)} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = G_1 - jB_L; \end{aligned}$$

$$\underline{Y}_1 = G_1 - jB_L = \frac{i_1}{\dot{U}} = \frac{I_{2e}^{-j\psi_{1i}}}{U_e^{-j\psi_u}} = Y_e^{-j\varphi_1}, \quad (273)$$

де  $G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2}$  і  $B_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}$  - активна і індуктивна провідності.

Для другої вітки (конденсатора)

$$\begin{aligned} \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{R_2 + jX_C}{(R_2 - jX_C)(R_2 + jX_C)} = \\ &= \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} + j \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = G_2 + jB_C; \end{aligned}$$

$$\underline{Y}_2 = G_2 + jB_C = \frac{i_2}{\dot{U}} = \frac{I_{2e}^{j\psi_{2i}}}{U_e^{j\psi_u}} = Y_{2e}^{j\varphi_2}, \quad (274)$$

де  $G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}$  і  $B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$  - активна і ємнісна провідності.

Результати цих перетворень показують, що повна провідність вітки електричного кола в комплексній формі виражається комплексним числом, дійсна частка котрого дорівнює активній провідності, а уявна частка дорівнює реактивній провідності цієї вітки, причому індуктивна провідність негативна, а ємнісна позитивна.

### Потужність

Комплекс потужності у даному колі визначається множенням комплексу напруги на сполучений комплекс струму цього кола.

Для вітки з активним опором та індуктивністю (рис.148), в відповідності з векторною діаграмою (рис.149)

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u}; \quad \dot{i}_1 = I_1 e^{-j\psi_{1i}}.$$

Добуток комплексу напруги і сполученого комплексу струму

$$\underline{S}_1 = \dot{U} \dot{i}_1^* = U e^{-j\psi_u} I_1 e^{j\psi_{1i}} = U I_1 e^{j(\psi_u + \psi_{1i})} = U I_1 e^{j\varphi_1}.$$

В алгебричній формі

$$\underline{S}_1 = \dot{U} \dot{i}_1^* = U I_1 \cos \varphi_1 + j U I_1 \sin \varphi_1 = P_1 + j Q_L. \quad (275)$$

Дійсна частка отриманого комплексу виражає активну потужність, а уявна частка без множника  $j$  – реактивну потужність першої вітки.

Для вітки з активним опором і ємністю

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u}; \quad \dot{i}_2 = I_2 e^{j\psi_{2i}};$$

$$\underline{S}_2 = \dot{U} \dot{i}_2^* = U e^{j\psi_u} I_2 e^{-j\psi_{2i}} = U I_2 e^{j(\psi_u - \psi_{2i})} = U I_2 e^{-j\varphi_2}.$$

В алгебричній формі

$$\underline{S}_2 = \dot{U}_2 \dot{I}_2^* = U I_2 \cos \varphi_2 - j U I_2 \sin \varphi_2 = P_2 - j Q_C. \quad (276)$$

Реактивна потужність у колі з ємністю має негативний знак на відміну від позитивного знаку реактивної потужності в колі з індуктивністю. Модуль комплексу потужності в першій та другій вітках дорівнює повній потужності

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= U I_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_L^2}; \\ S_2 &= U I_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_C^2}. \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

## §80. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Закон Ома в комплексній формі

$$i = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\alpha}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{\dot{U}}{R + jX}.$$

### Закони Кірхгофа

В відповідності з першим законом Кірхгофа, алгебрична сума комплексів струмів в електричному вузлі дорівнює нулю:

$$\sum i = 0 \quad (278)$$

Для складання рівняння у символічній формі по першому закону необхідно вибрати умовно-позитивні напрями струмів.

У рівнянні струм записують зі знаком плюс, якщо він направлений до вузла.

Для схеми рис.151

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

або

$$i = i_1 + i_2 + i_3,$$

а у комплексній формі

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

або

$$i = i_1 + i_2 + i_3.$$

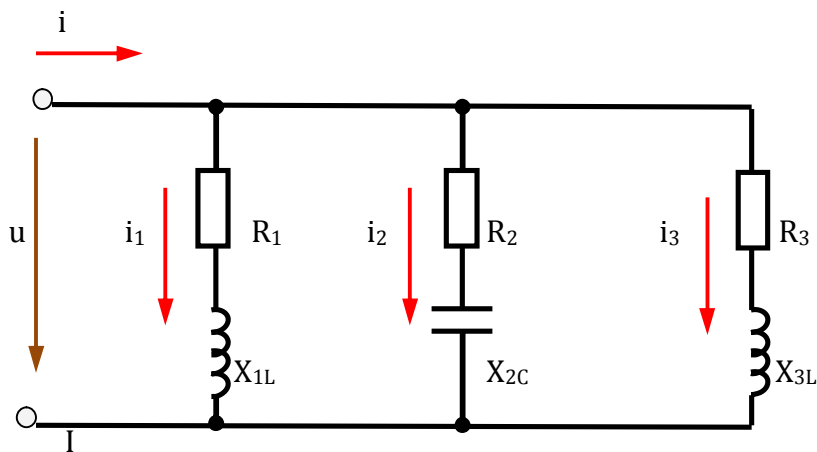


Рис. 151

В відповідності з другим законом Кірхгофа, у контурі електричного кола алгебрична сума комплексів ЕРС джерел дорівнює алгебричній сумі комплексів падінь напруги :

$$\sum iZ = \sum \dot{E} . \quad (279)$$

Для схеми рис. 152

$$iR_1 + u_c + u_L + iR_2 = e_1 - e_2 ,$$

а у комплексній формі

$$iR_1 + i(-jX_c) + ijX_L + iR_2 = \dot{E}_2 - \dot{E}_1 .$$

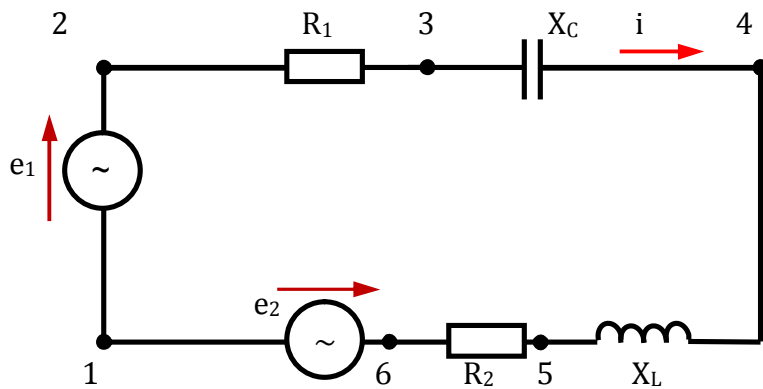


Рис. 152

### §81. Аналогія з колами постійного струму з використанням комплексних чисел

#### Метод перетворення

На прикладі кола змішаного з'єднання опорів (рис. 153) розглянемо розрахунок методом перетворення та спрощення схеми. Паралельно з'єднані вітки, які мають повні опори

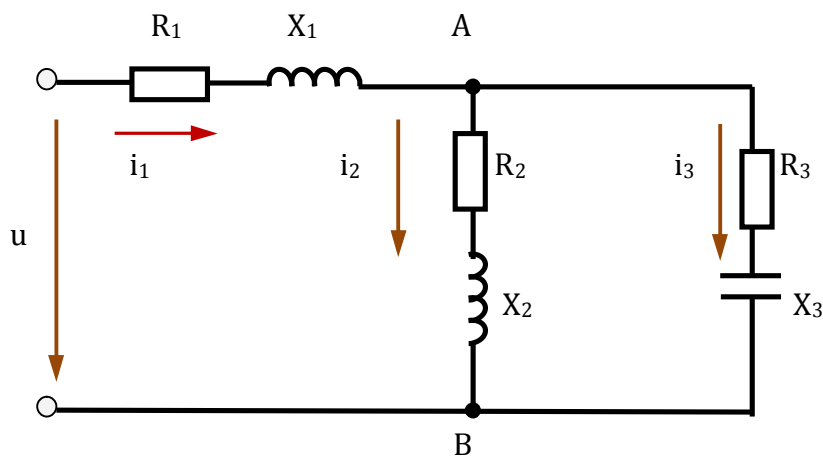


Рис. 153

$$Z_2 = R_2 + jX_2 \text{ та } Z_3 = R_3 - jX_3,$$

замінюються однією віткою з еквівалентним опором

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Опір у нерозгалуженій частині кола  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$  з'єднаний послідовно з опором  $\underline{Z}_{AB}$ .

Загальний опір кола

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{AB}.$$

Струм в нерозгалуженій частині кола

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

Напруги на ділянках кола

$$\dot{U}_1 = i_1 \cdot \underline{Z}_1, \quad \dot{U}_{AB} = i_1 \cdot \underline{Z}_{AB}.$$

Струм у паралельних вітках

$$i_2 = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_2}; \quad i_3 = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_3}.$$

Перетворенням можна спрощувати і більш складні схеми з послідовним і паралельним з'єднанням ділянок, а також схеми, які містять трикутники або трипроменеві зірки опорів.

### Метод вузлової напруги

Схему з двома вузлами можна розрахувати, визначивши вузлову напругу з формули

$$\dot{U}_{AB} = \frac{\sum \dot{E} \underline{Y}}{\sum \underline{Y}}. \quad (280)$$

Ця формула аналогічна формулі

$$U_{AB} = \frac{\sum EG}{\sum G}.$$

У числівнику її записана алгебрична сума добутків комплексів ЕРС і провідностей всіх віток, а у знаменнику – сума комплексів провідностей віток.

Комплекс струму визначають з формули

$$i_n = (\dot{E}_n - U_{AB})Y_n. \quad (281)$$

Правило вибору знаків ЕРС у формулах (279) – (281) такі ж, як і у колі постійного струму, з тою лише різницею, що умовно – позитивні напрями ЕРС вибираються при розрахунку, а у колі постійного струму напрями ЕРС звичайно задані.

### Метод вузлових та контурних рівнянь

Якщо у колі задані всі ЕРС та її параметри R,L,C або комплексні опори, то для знаходження n невідомих струмів необхідно скласти n рівнянь по першому і другому законам Кірхгофа, як це було показано для кіл постійного струму, але у комплексній формі.

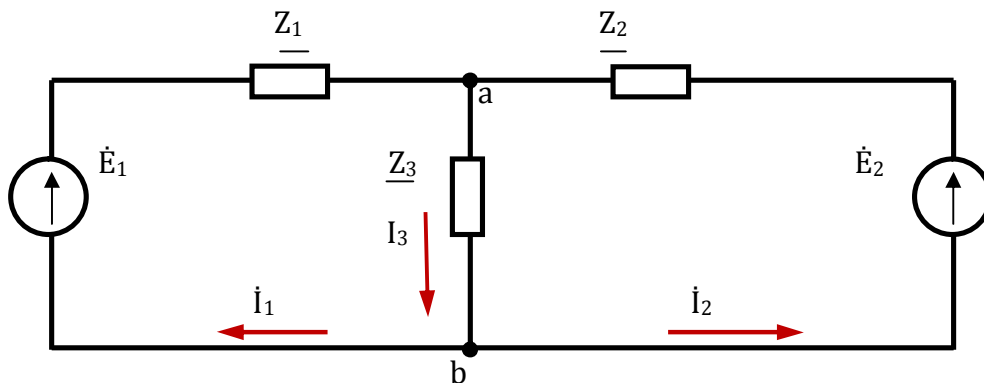


Рис. 154

Так, наприклад, для кола (рис.154) з трьома шукаємими струмами необхідно скласти всього три рівняння: одне по першому закону Кірхгофа та два по другому закону Кірхгофа для двох любих незалежних контурів.

### §82. Розрахунок найпростіших кіл

Для нерозгалуженого кола, наприклад, з чотирма ділянками (рис.155), по другому закону



Кірхгофа комплексна ЕРС джерела живлення дорівнює алгебричній сумі комплексних падінь напруг :

$$\dot{E} = \underline{Z}_1 i + \underline{Z}_2 i + \underline{Z}_3 i + \underline{Z}_4 i = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4.$$

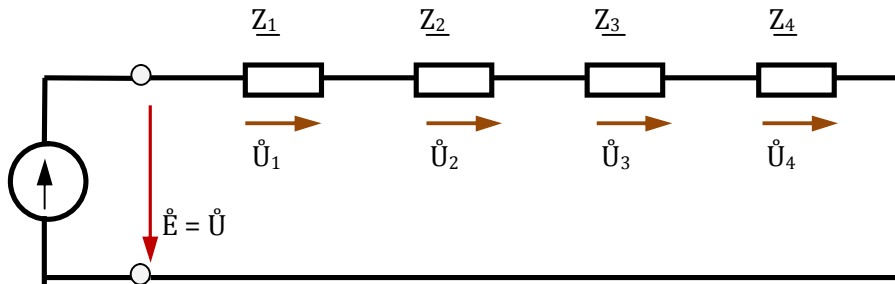


Рис.155

Так як струм на всіх ділянках незгалуженого кола один і той же , то

$$\dot{E} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) i ,$$

звідки

$$\frac{\dot{E}}{i} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 = \underline{Z} . \quad (282)$$

При заданих параметрах ділянок (рис.155)

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R_1 + jX_{L1} + R_2 - jX_{C2} + R_3 + jX_{L3} + R_4 - jX_{C4} = \\ &= (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + j(X_{L1} + X_{L3} - X_{C2} - X_{C4}) = R_e + jX_e . \end{aligned}$$

Струм у колі

$$i = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} .$$

Напруги на окремих ділянках

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}; \dot{U}_2 = \underline{Z}_2 \dot{I}; \dot{U}_3 = \underline{Z}_3 \dot{I}; \dot{U}_4 = \underline{Z}_4 \dot{I}.$$

Комплексна потужність кола визначається з формули :

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I} = U e^{j(\varphi+\psi)} \cdot I e^{-j\psi} = UI \cos \varphi + jU \sin \varphi = P + jQ . \quad (283)$$

З першого закону Кірхгофа комплексний струм в нерозгалуженій частині кола, яка наприклад, має три паралельні вітки, рис.156, дорівнює алгебричній сумі комплексних струмів всіх віток кола :

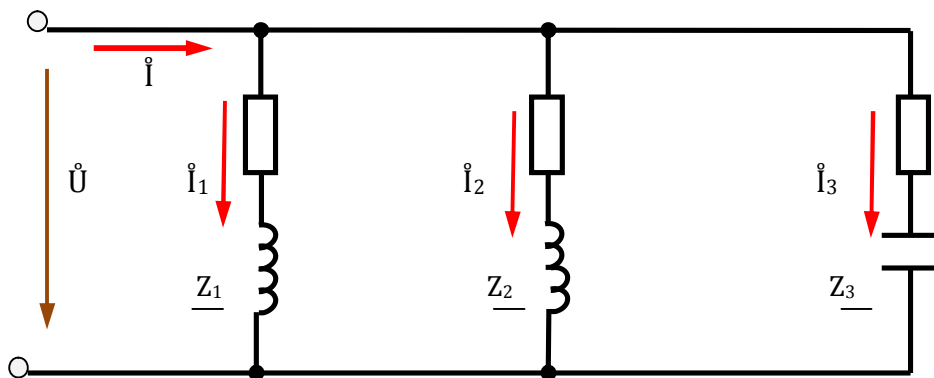


Рис. 156

$$i = i_1 + i_2 + i_3 .$$

По закону Ома струми у вітках і загальний струм

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1}; i_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2}; i_3 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_3}; I = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

де  $Z$  – загальний або еквівалентний опір кола.

Підставивши вираження струмів у попередню рівність отримаємо

$$\frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} + \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_3}$$

або після скорочення

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}.$$

Переходячи до комплексних провідностей ,знаходимо , що

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 . (284)$$

### §83. Розрахунок електричного кола з змішаним з'єднанням елементів

Розрахунок кіл з змішаним з'єднанням опорів при заданій напрузі і відомих параметрах кола полягає у визначенні струмів , напруг і потужностей всіх ділянок кола. Якщо застосувати комплексний метод , то розрахунок таких кіл аналогічний розрахунку кола послідовного струму з змішаним з'єднанням опорів.

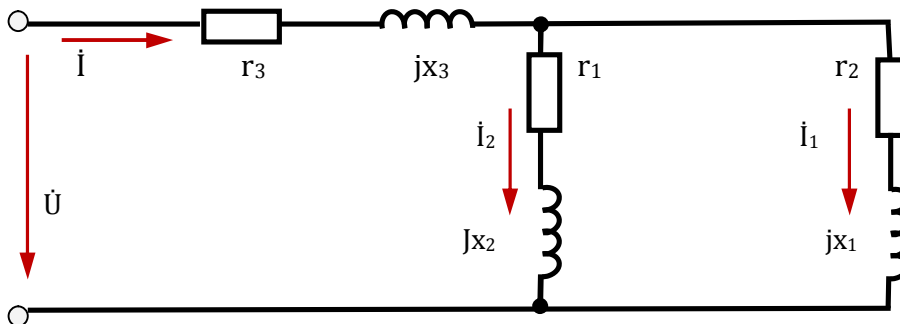


Рис.157

Для кола (рис.157) розрахунок виконується у такому порядку. Спочатку визначається опір розгалуженої частини кола :

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}.$$

Так як розгалужена частина кола з'єднана послідовно з нерозгалуженою ділянкою, то опір всього кола

$$\underline{Z} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12}.$$

Якщо число паралельних віток більше двох, то слід спочатку підсумовувати комплексні провідності, аналогічно підсумовуванню для трьох віток по (284), а потім перейти до опору паралельного з'єднання і обчисленню  $\underline{Z}$ .

Струм у нерозгалуженій частині кола дорівнює сумі струмів в паралельних вітках

$$i = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

Напруга на нерозгалуженій ділянці  $\underline{Z}_3$

$$\dot{U}_3 = \underline{Z}_3 i.$$

Струми в паралельних вітках

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_1}; \quad i_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2}.$$

Активні і реактивні потужності визначаються з формули (283).

## §84. Топографічні діаграми

Напругу на виводах кола змінного струму можна виразити комплексним числом – комплексною напругою і зобразити на комплексній площині вектором. Напруга між двома точками електричного кола, це є різниця потенціалів між цими точками. Отже, потенціал окремих точок кола також можна подати комплексами – комплексними потенціалами і зобразити відповідними векторами. Вектор зображаючий комплексний потенціал, починається з початку координат: його кінець позначають тією ж буквою (або цифрою), що і точку кола, потенціал якої зображає вектор.

Наприклад, на рис.158 побудовані вектори комплексних потенціалів

$$\dot{\varphi}_a = 10 + j20V \quad i \quad \dot{\varphi}_b = 30 - j15V$$

і різниця векторів або вектор напруги

$$\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = 10 + j20 - 30 + j15 = -20 + j35V.$$

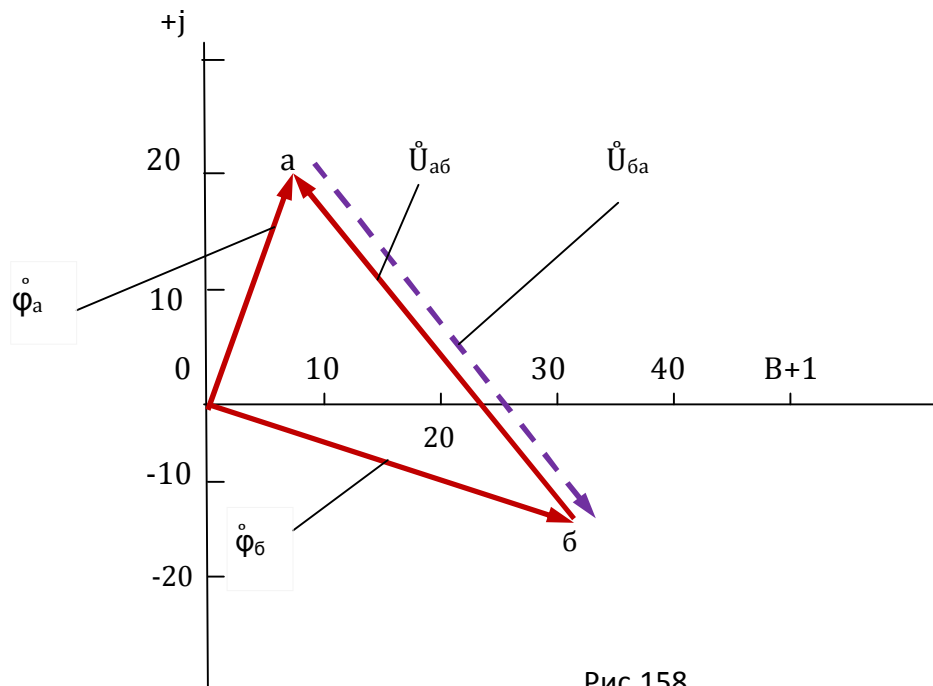


Рис.158

Напряга  $\dot{U}_{ab}$  побудована з правила віднімання векторів, так що

$$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b + \dot{U}_{ab} \text{ (рис. 158)}$$

Тому напруга  $\dot{U}_{ab}$  зображається вектором, направленим від точки *б* (другий індекс у напруги  $\dot{U}_{ab}$ ) до точки *а* (перший індекс).

Напруга

$$\dot{U}_{ba} = \dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_a = 30 - j15 - 10 + j20 = 20 - j35V.$$

Очевидно,  $\dot{U}_{ba} = -\dot{U}_{ab}$  і зображається вектором, направленим від точки *а* до точки *б* (штрихова лінія на рис.158).

Така векторна діаграма називається топографічною; вона задовольняє двом умовам: 1) кожній точці електричного кола відповідає призначена точка на векторній діаграмі і

2) вектор, проведений з початку координат в будь-яку точку діаграми, зображає комплексний потенціал відповідної точки кола.

При побудові топографічної діаграми потенціал однієї з точок кола приймають рівним нулю і на діаграмі точку нульового потенціалу суміщують з точками координат.

На такій діаграмі відрізок, з'єднуючий будь-які дві точки, також визначає комплексну напругу між відповідними точками кола.

На рис. 159 надане нерозгалужене коло.

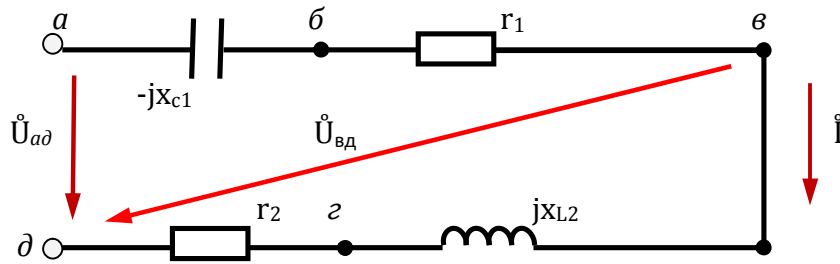


Рис.159

Для побудови топографічної діаграми (рис.160) приймаємо, наприклад, потенціал точки д рівним нулю ( $\dot{\varphi}_d = 0$ ). Обходячи контур у напрямку, зустрічному струму, визначаємо потенціал усіх точок кола.

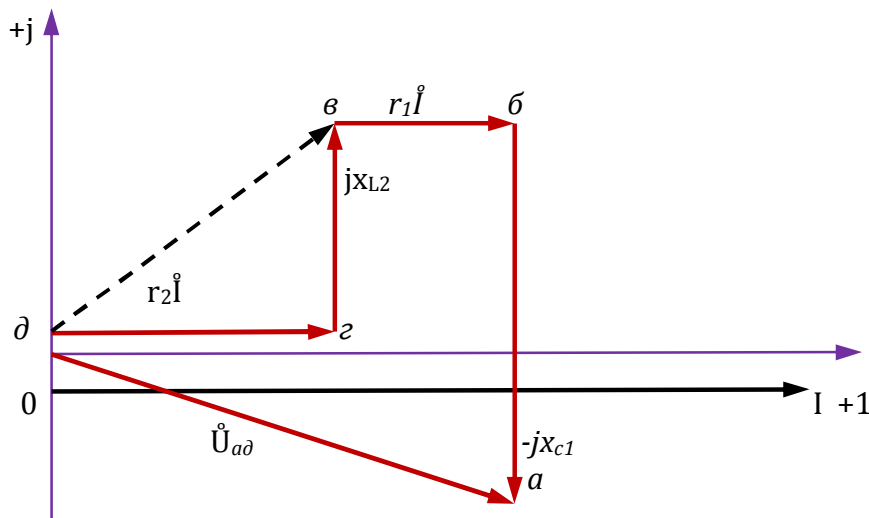


Рис.160

Початкову фазу загального струму приймаємо рівною нулю ( $i = I$ ), тому вектор струму  $I$  направлений уздовж позитивної півосі дійсних величин. Потенціал точки г або  $\dot{\varphi}_g$  вище потенціалу  $\dot{\varphi}_d$  на падіння напруги в опорі  $r_2$  ( $r_2 I$ ) або

$$\dot{\varphi}_g = \dot{\varphi}_d + r_2 I = 0 + r_2 I = r_2 I.$$

Побудувавши вектор  $r_2 I$ , отримаємо на діаграмі точку  $z$ . Потенціал точки  $v$  або  $\dot{\phi}_v$  більше потенціалу  $\dot{\phi}_z$  на падіння напруги на індуктивному опорі  $X_{L2}$  або в комплексній формі на  $j X_{L2} I$ .

Побудувавши вектор напруги  $\dot{U}_{vz} = \dot{\phi}_v - \dot{\phi}_z = j X_{L2} I$ , який починається у точці  $z$  і випереджає струм по фазі на  $90^\circ$ , отримаємо точку  $v$ .

Потенціал точки  $b$  або  $\dot{\phi}_b$  більше  $\dot{\phi}_v$  на падіння напруги  $r_1 I$ . Побудувавши із точки  $v$  вектор напруги  $\dot{U}_{bv} = \dot{\phi}_b - \dot{\phi}_v = R_1 I$ , паралельний струму, знаходимо точку  $b$ .

Нарешті, побудувавши вектор падіння напруги  $\dot{U}_{ab} = \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = -j X_c I$ , який починається з точки  $b$  і відстає по фазі від струму на кут  $90^\circ$ , отримаємо точку  $a$  (рис.160). Вектор, з'єднаний точками  $d$  і  $a$  і направлений від точки  $d$  до точки  $a$ , зображає напругу  $\dot{U}_{ad}$  на виводах кола.

Необхідно ураховати, що вектори напруг на топографічній діаграмі мають по відношенню до точок кола напрямки, зворотні позитивним напрямкам напруг відносно тих же точок кола.

Наприклад, напруга  $\dot{U}_{vd} = \dot{\phi}_v - \dot{\phi}_d$ , направлена на схемі (рис.159) від точки  $v$  до точки  $d$ , на топографічній діаграмі має протилежний напрямок відносно цих точок, що погоджується з правилом віднімання векторів, в відповідності з яким вектор різниці завжди направлений в одну сторону з зменшуваним вектором.

## § 85. Коло з індуктивно зв'язаними елементами : послідовне з'єднання, паралельне з'єднання, повітряний трансформатор

Розглянемо особливості розрахунку кіл, в яких є індуктивно (магнітно) зв'язані котушки.

### Послідовне з'єднання

Коло, яке складається з двох послідовно з'єднаних котушок, можна надати послідовними схемами заміщення. У цьому випадку, можливе їх однакове або зустрічне включення.

При однаковому включенні (рис.161) магнітний потік першої котушки  $\Phi_{21}$ , підсумовується. Також підсумовуються потоки  $\Phi_{22}$  і  $\Phi_{12}$ , підсумовуються збуджені ними ЕРС індукції і взаємодіючі індукції, відповідно рівні

$$e_{L1} = \frac{-L_1 di_1}{dt} ; e_{L2} = \frac{-L_2 di_2}{dt} \quad (285)$$

та

$$e_{M1} = \frac{-Mdi}{dt} ; e_{M2} = \frac{-Mdi_1}{dt} , \quad (286)$$

де при послідовному з'єднанні  $i_1 = i_2 = i$ .

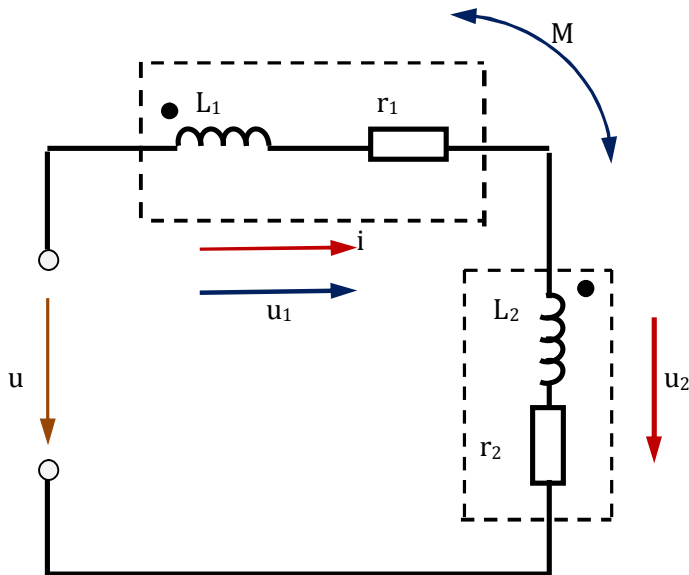


Рис. 161

Напруга  $u_1$  на виводах першої котушки при однаковому з'єднанні

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} ,$$

або в комплексній формі

$$\dot{U}_1 = r_1 i + j\omega L_1 i + j\omega M i . \quad (287)$$

Рівняння (284) записано також, як і рівняння по другому закону Кірхгофа в комплексній формі, тільки ліворуч, замість ЕРС джерела живлення, стоїть напруга на виводах (напруга живлення кола з двох послідовно з'єднаних котушок), а праворуч додатково враховано падіння напруги, яке компенсує ЕРС взаємної індукції.

Аналогічно напруга на виводах другої котушки



$$u_2 = r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} ,$$

або

$$\dot{U}_2 = r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} . \quad (288)$$

Напряга на виводах кола

$$u = u_1 + u_2 = (r_1 + r_2) i + M \frac{di}{dt} + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

або

$$\dot{U} = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} . \quad (289)$$

Векторна діаграма кола при послідовному однаковому включенні двох котушок показана на рис. 162. Для того, щоб відрізнити на схемах однакове включення від зустрічного, один з виводів котушок називають початком, а другий – кінцем. У однієї з котушок початок і кінець можуть бути вибрані довільно. У другій котушки початком називають той вивід, який треба приєднати до кінця першої, щоб отримати однакове з'єднання.

Можна сказати, що при однаковому включенні котушки з'єднанні одна з одною різнойменними виводами або, що при однаковому з'єднанні струм входить в однойменні виводи.

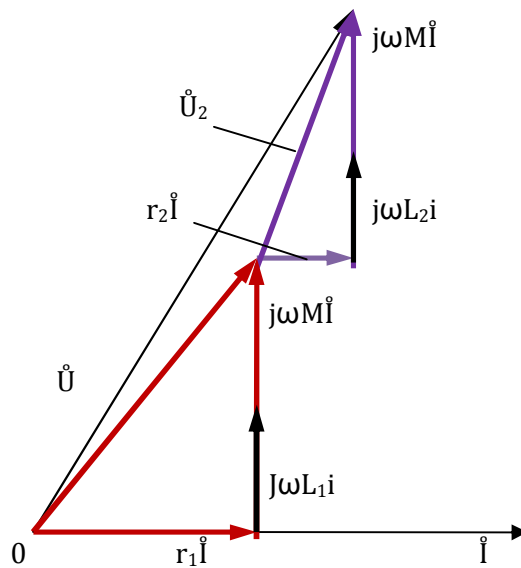


Рис. 162

Початок котушок відрізняють яким-небудь знаком, наприклад, крапкою, зірочкою тощо.

При зустрічному включенні котушок ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції віднімаються. Тому напруга на виходах першої котушки

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

або в комплексній формі

$$\dot{U}_1 = r_1 I + j\omega L_1 I - j\omega M I. \quad (290)$$

Аналогічно

$$u_2 = r_2 i = L_2 di/dt + M di/dt$$

$$\dot{U}_2 = r_2 I + j\omega L_2 I - j\omega M I \quad (291)$$

і

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = r_1 I + j\omega L_1 I - j\omega M I + r_2 I + j\omega L_2 I + j\omega M I. \quad (292)$$

Зустрічне включення отримується, якщо котушки з'єднані одна з одною однойменними виводами (рис.163).

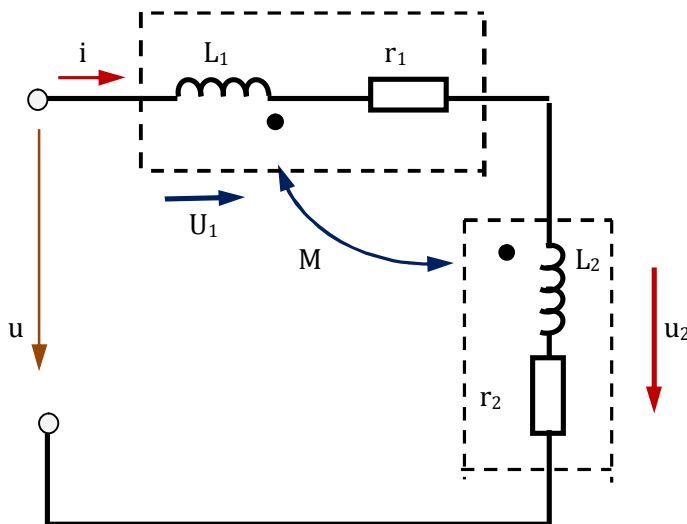


Рис. 163

На рис.164 дана вектора діаграма кола при зустрічному включенні котушок. Сумарна (еквівалентна) індуктивність кола і її індуктивний опір при однаковому включенні більше, чим при зустрічному.

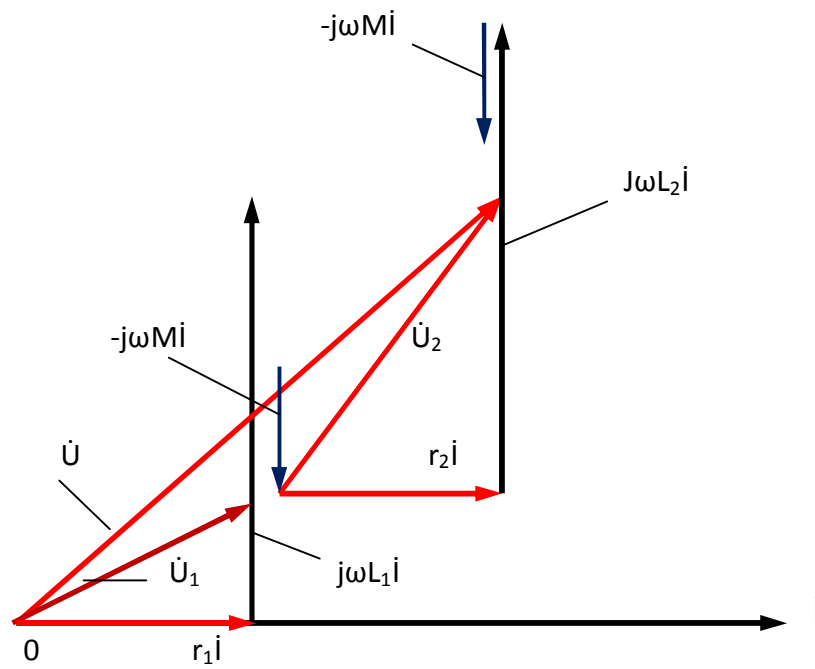


Рис. 164

При однаковому з'єднанні

$$L_0 = L_1 + L_2 + 2M,$$

$$X_0 = \omega L_C = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M. \quad (293)$$

При зустрічному з'єднанні

$$L_3 = L_1 + L_2 - 2M,$$

$$X_3 = \omega L_3 = \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M. \quad (294)$$

Якщо однойменні виводи котушок невідомі, то для розрахунку кола необхідно попередньо провести розмітку виводів. Один з способів розмітки виводів дається в [2] ст.346.

## Паралельне з'єднання

Можливі два випадки паралельного з'єднання індуктивно зв'язаних котушок : однойменними і різнойменними виводами до загального вузла. На рис.165 показано приєднання котушок однойменними виводами – початками до загального верхнього вузла.

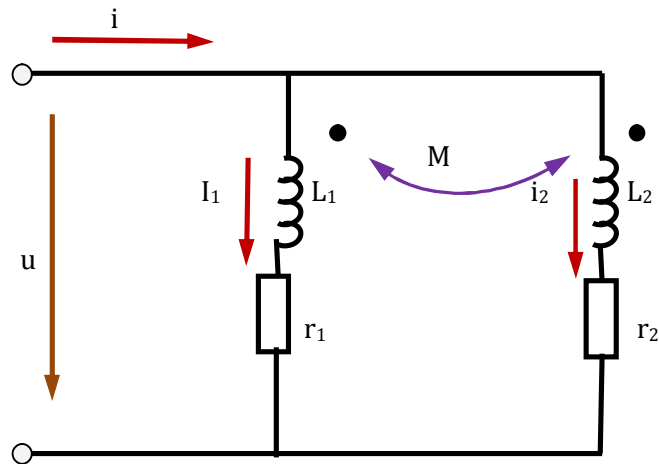


Рис. 165

Вибравши позитивні напрямки струмів так, як показано на рис.165 , будемо рахувати таке з'єднання однаковим (струми входять в однойменні виводи).

Напруга на першій вітці

$$\dot{U} = \underline{Z}_1 i_1 + j\omega M i_2 . \quad (295)$$

Напруга на другій вітці

$$\dot{U} = \underline{Z}_2 i_2 + j\omega M i_1 , \quad (296)$$

де

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1 \quad i \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2 .$$

Виключаючи із (295) і (296) струм  $i_2$  , визначаємо струм у першій вітці :

$$i_1 = \frac{\dot{U} \underline{Z}_2 - \dot{U} j\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2} = \frac{\dot{U} (\underline{Z}_2 - j\omega M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2} . \quad (297)$$

Аналогічно, виключаючи струм  $i_1$  , знаходимо струм в другій вітці :

$$i_2 = \frac{\dot{U}(Z_1 - j\omega M)}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}. \quad (298)$$

Рівняння для напруги  $\dot{U}$  при зустрічному з'єднанні котушок відрізняються від написаних

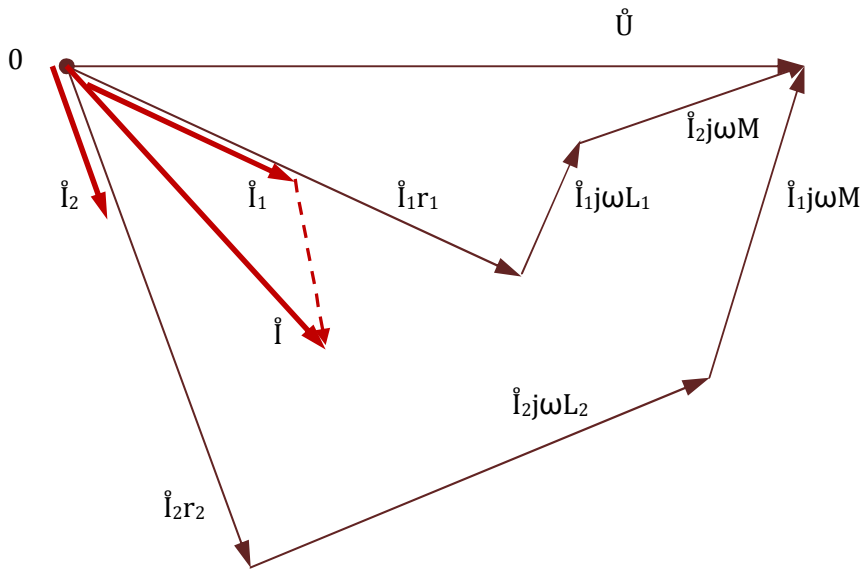


Рис. 166

для однакового з'єднання тільки знаком перед додатком з взаємною індуктивністю  $M$ .

Струм в нерозгалуженій частині кола для будь-якої із паралельних схем з'єднання котушок визначається з однієї і тієї ж формули :

$$i = i_1 + i_2. \quad (299)$$

На рис.166 показана векторна діаграма для кола з паралельним з'єднанням котушок по рис. 165.

### Повітряний трансформатор

На рис.167 показана схема повітряного трансформатора, який складається з двох індуктивно зв'язаних котушок (обмоток), одна з котрих намотана на другу.

Обмотка трансформатора, приєднана до джерела живлення з напругою  $u_1$ , називається первинною, а друга, до якої підключається приймач, наприклад, з активним опором  $R$ , називається вторинною.

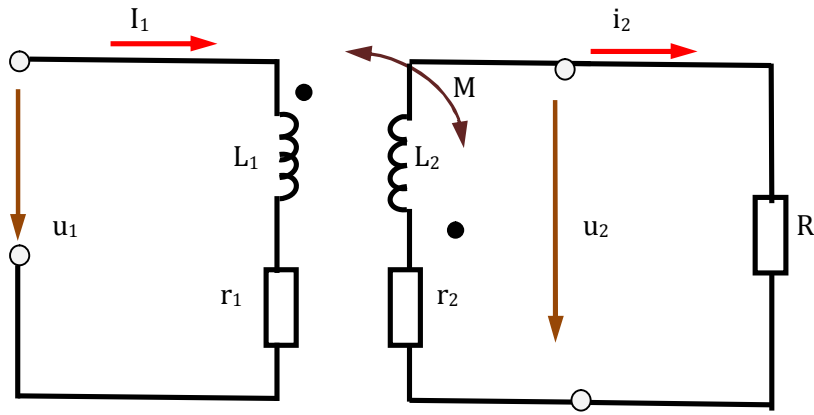


Рис.167

Позитивні напрямки напруги  $u_2$  на вторинній обмотці і струму  $i_2$  во вторинному колі можуть бути вибрані довільно, наприклад так, щоб струми входили в однойменні виводи (рис.167). У цьому випадку, як і при послідовному з'єднанні, необхідно рахувати, що ЕРС самоіндукції і взаємної індукції підсумовуються і компенсуючи їх напруги записуються в рівняннях з однаковими знаками. Отже, напруга на виводах первинної обмотки записується аналогічно (287) :

$$\dot{U}_1 = R_1 i_1 + j\omega L_1 \dot{i}_1 + j\omega M \dot{i}_2 = \underline{Z}_1 \dot{i}_1 + j\omega M \dot{i}_2. \quad (300)$$

Таким чином, напруга  $\dot{U}_1$  складається із активної складової  $r_1 \dot{i}_1$ , яка співпадає по фазі зі струмом  $i_1$  (рис.168), складової  $j\omega L_1 \dot{i}_1$ , яка випереджає по фазі струм  $i_1$  на  $90^\circ$ , і складової  $j\omega M \dot{i}_2 = -\dot{E}_{1M}$ ,

яка випереджає по фазі струм  $i_2$  на  $90^\circ$ .

Так як у вторинному колі джерело живлення відсутнє, то за другим законом Кірхгофа можна записати

$$0 = (R + r_2) \dot{i}_2 + j\omega L_2 \dot{i}_2 + j\omega M \dot{i}_1 = \dot{U}_2 + r_2 \dot{i}_2 + j\omega L_2 \dot{i}_2 + j\omega M \dot{i}_1 = \underline{Z}_{22} \dot{i}_2 + j\omega M \dot{i}_1, \quad (301)$$

де  $R \dot{i}_2 = \dot{U}_2$  - напруга на приймачі і вона ж (рис.167) на виводах вторинної обмотки;

$\underline{Z}_{22} = R + r_2 + j\omega L_2$  - опір вторинного кола.

ЕРС взаємної індукції у вторинній обмотці

$$\dot{E}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1$$

або

$$\dot{E}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1 = \underline{Z}_{22} \dot{I}_2 = (R + r_2) \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 . \quad (302)$$

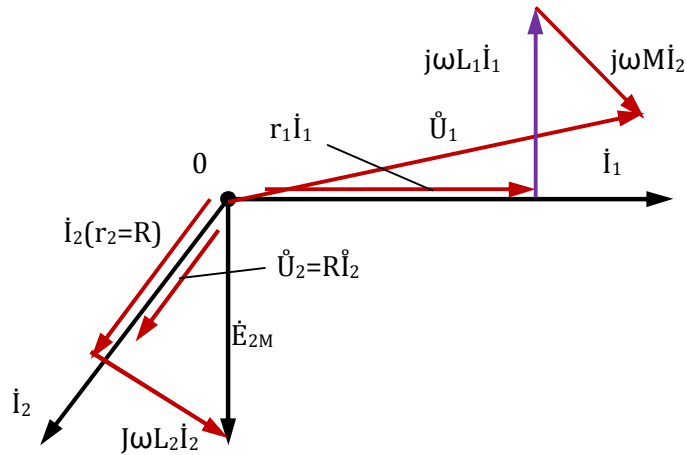


Рис.168

На діаграмі (рис.168) показано, що ЕРС  $\dot{E}_{2M}$  відстає по фазі від струму  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$  і дорівнює сумі падінь напруг на опорах  $R$  і  $r_2$  і на індуктивності  $L_2$ .

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M \dot{I}_1}{\underline{Z}_{22}} . \quad (303)$$

Підставивши це вираження струму  $\dot{I}_2$  у (292), отримаємо для напруги на первинній обмотці

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - j^2 \frac{(\omega M)^2 \dot{I}_1}{\underline{Z}_{22}} = \left( \underline{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_{22}} \right) \dot{I}_1 = \underline{Z}_{\text{вх}} \dot{I}_1 , \quad (304)$$

де  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  - вхідний опір навантаженого трансформатора.

Другий додаток вхідного опору називається внесеним опором у первинне коло :

$$\underline{Z}_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_{22}}$$

і враховує вплив вторинного кола з опором  $\underline{Z}_{22}$  на струм  $\dot{I}_1$  первинного .

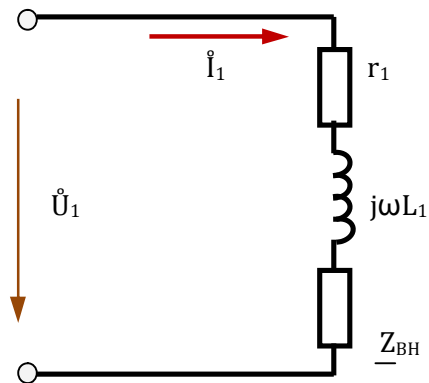


Рис.169

Для джерела живлення навантажений трансформатор можна подати простою схемою заміщення (Рис. 169).

Дійсно, з закону Ома

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + \underline{Z}_{\text{вн}}\dot{I}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{вн}})\dot{I}_1 = \underline{Z}_{\text{вх}}\dot{I}_1, \quad (305)$$

що співпадає з (304).

Визначається струм із (304)

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}}, \quad (306)$$

після чого струм  $I_2$  розраховується із (303).

Отже, при заданих параметрах первинного і вторинного кіл і напрузі джерела живлення можна розрахувати струми  $I_1$ , а потім  $I_2$ , після чого побудувати векторну діаграму . У випадку не-навантаженого трансформатора ( в режимі холостого ходу ),

$$i_2 = 0, \quad i_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_1}.$$

З ( 301 ) напруга на вторинній обмотці



$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2x} = -j\omega M \dot{I}_1 = \dot{E}_{2M}. \quad (307)$$

## ПФ.С.01.ЗР.0.07.04.Трифазні кола

### §86. Загальні відомості про трифазні системи

Трифазна система відноситься до багатофазних систем електричних кіл.

Многофазною системою електричних кіл називається система, яка складається з декількох електричних кіл змінного струму однієї частоти, ЕРС котрих мають різні фази.

Окремі частини многофазної системи скорочено називають фазами. Таким чином, терміну «фаза» відповідають два поняття: 1) кут, визначаючий зміну синусоїдної величини; 2) одна з складових частин многофазної системи.

Многофазну систему електричних кіл, з'єднаних одна з одною, називають звичайно многофазним колом.

Сукупність ЕРС, напруг або струмів в фазах многофазного кола називають многофазною системою ЕРС, напруг або струмів.

У теперішній час із всіх многофазних систем найбільш широко застосовується трифазна система.

Трифазна система складається з трьох електричних кіл змінного струму однієї частоти, ЕРС котрих мають різні початкові фази.

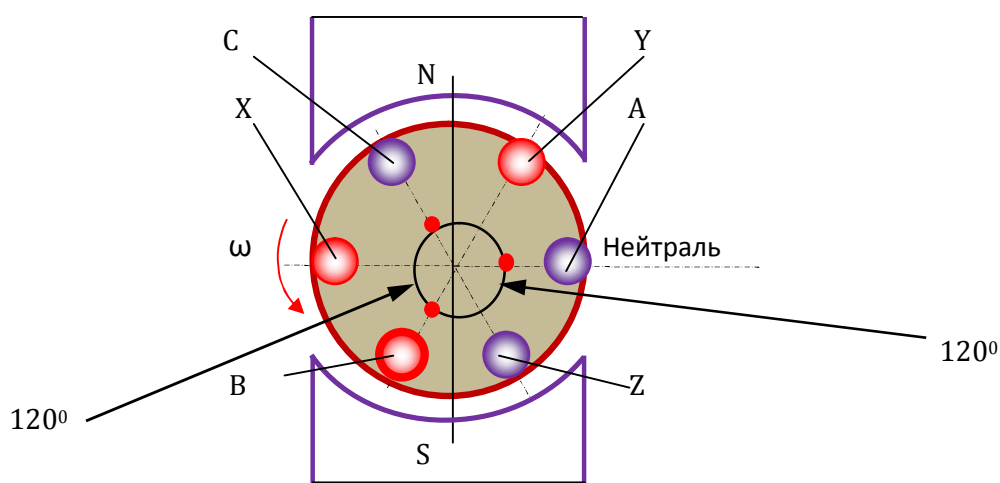


Рис.170

Трифазна система змінного струму була розроблена в 1891 р. російським інженером М.О.Доліво - Добровольським і отримала поширення у всьому світі , як система , яка забезпечує найбільш економічну передачу електричної енергії і дозволяє створити прості і дешеві електродвигуни, генератори і трансформатори.

Найпростіший трифазний генератор (рис.170) має на роторі три однакові обмотки (фази), початки і кінці яких позначають відповідно буквами А,В,С і Х,У,З і які зсунуті у просторі відносно одна до одної на рівні кути  $120^\circ$ . При оберненні ротора в обмотках генератора індукуються ЕРС однакової частоти і рівної амплітуди , які зсунуті по фазі відносно одна до одної на однакові кути  $120^\circ$ . Така система трьох ЕРС називається симетричною.

Якщо амплітуди ЕРС не рівні одна одній або кути зсуву фаз не рівні  $120^\circ$ , то система ЕРС називається несиметричною.

На рис. 170 обмотки ротора показані в початковому положенні ( $t = 0$ ) . При оберненні ротора проти годинникової стрілки рівняння ЕРС можна записати у вигляді :

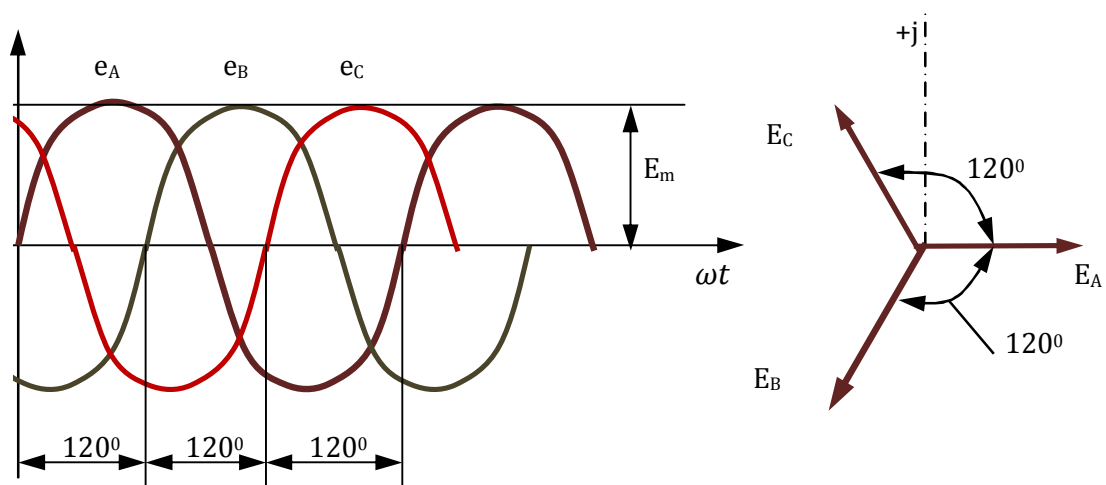


Рис.171

$$e_A = E_m \sin \omega t ;$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ) ; \quad (308)$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ). \quad (309)$$

Цим рівнянням відповідають графіки ЕРС і векторна діаграма, зображені на рис.171.

$$\dot{E}_A = E_A; \dot{E}_B = Ee^{-j120^\circ}; \dot{E}_C = Ee^{-j240^\circ}. \quad (310)$$

Якщо прийняти за вихідний вектор ЕРС  $\dot{E}_A$ , то ЕРС  $\dot{E}_B$  відстає від  $\dot{E}_A$ , а ЕРС  $\dot{E}_C$  відстає від  $\dot{E}_B$ . Отже, максимальних значень ЕРС у фазах досягають у такому порядку: спочатку у фазі А, потім у В і далі у С.

При оберненні векторів ЕРС проти годинникової стрілки і мимо нерухомої осі  $+j$ , вони будуть проходити у наступному порядку:  $\dot{E}_A \rightarrow \dot{E}_B \rightarrow \dot{E}_C$ .

Такий порядок чергування називається прямою послідовністю фаз. При зворотньому оберненні ротора генератора отримується зворотня послідовність фаз.

У подальшому при розгляданні трифазних систем приймається пряма послідовність фаз, яка рахується нормальною. На схемах заміщення обмотки трифазного генератора позначають, як показано на рис.172 і умовно приймають напрямки ЕРС від кінця до початку обмотки позитивними.

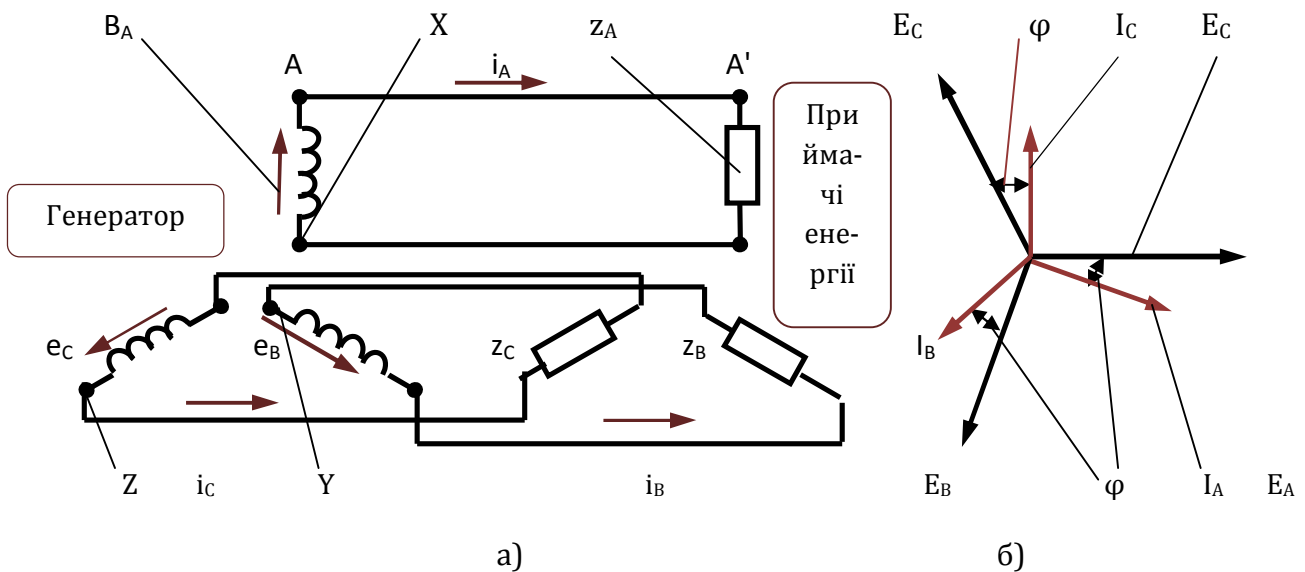


Рис. 172

Якщо кожен обмотку трифазного генератора з'єднати зі своїм приймачем, то створюються три незалежні кола, кожне зі своїм струмом. Одне таке коло з її елементами (обмотки генератора, приймач, з'єднувальні проводи) в практиці називається фазою. Така трифазна система називається незв'язаною. У незв'язаній трифазній системі генератор з приймачем енергії з'єднується шістьма проводами.

Велика кількість з'єднувальних проводів – основний недолік незв'язаних систем, в зв'язку з чим вони і не застосовуються. Скорочення числа з'єднувальних проводів досягається у зв'язаних системах, де обмотки генератора, як і окремі фази приймача, електрично зв'язані між собою і створюють трифазні кола. Для цього М.О. Доліво – Добровольським були запропоновані дві схеми з'єднання: зіркою і трикутником, які застосовуються і в теперішній час

### §87. З'єднання обмоток генератора зіркою

З'єднання обмоток зіркою дозволяє зменшити число проводів, які з'єднують генератор з приймачем, з шести при незв'язаній системі до чотирьох або до трьох.

При з'єднанні зіркою (рис.173) до початків обмоток генератора А,В,С приєднують три лінійних проводи, які підходять до приймача.

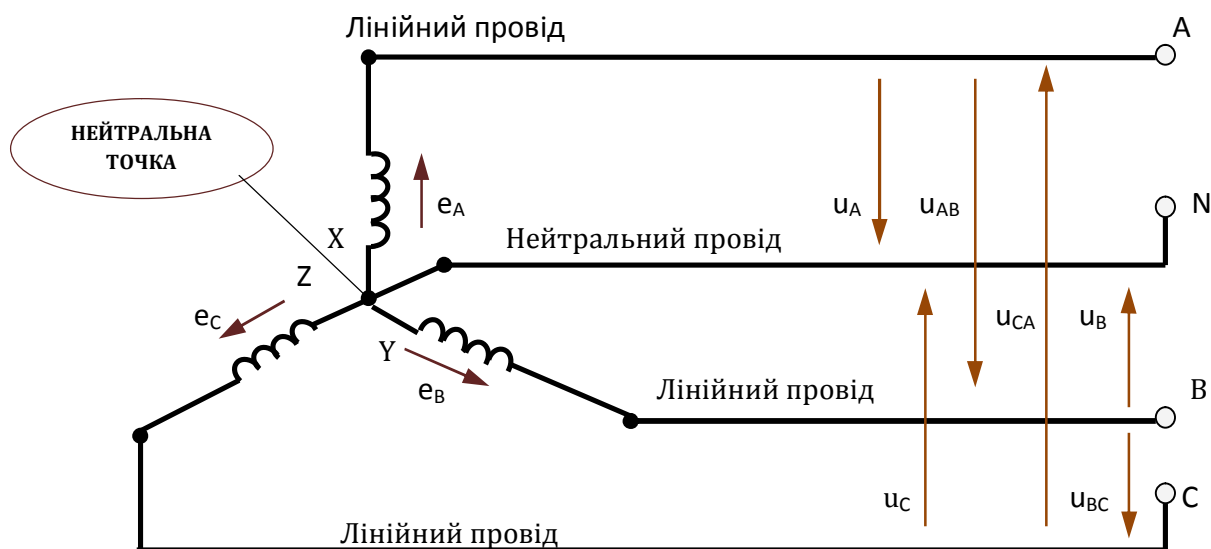


Рис.173

Кінці обмоток X,Y,Z об'єднують у вузол, називаємий нейтраллю генератора або його нейтральною точкою N. У чотирипровідній системі до нейтралі генератора приєднують нейтральний провід. У трипровідній системі він відсутній.

Напруги між лінійними та нейтральними проводами називаються фазними напругами:  $u_A$ ,  $u_B$  і  $u_C$ . Фазна напруга відрізняється від фазної ЕРС на падіння напруги в обмотці генератора.

Далі падіннями напруги у фазах генератора будемо знехтувати. Приймаємо, що  $u_A = e_A$ ,

$$u_B = e_B, \quad u_C = e_C.$$

Рахуємо, що задані напруги  $u_A, u_B, u_C$ .

Напруги між лінійними проводами називаються лінійними:  $u_{AB}, u_{BC}$  і  $u_{CA}$ .

Позитивний напрямок напруги зазначається порядком запису індексів, наприклад, позитивний напрямок напруги  $u_{AB}$  від точки А до точки В (рис.173).

Миттєві значення фазних напруг дорівнюють різниці миттєвих значень потенціалів початків і кінців відповідних обмоток :

$$u_A = \varphi_A - \varphi_X; \quad u_B = \varphi_B - \varphi_Y; \quad u_C = \varphi_C - \varphi_Z. \quad (311)$$

Миттєві значення лінійних напруг дорівнюють різниці миттєвих значень потенціалів початків відповідних обмоток :

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B; \quad u_{BC} = \varphi_B - \varphi_C; \quad u_{CA} = \varphi_C - \varphi_A. \quad (312)$$

Кінці обмоток з'єднані у вузол, тому потенціали їх однакові :

$$\varphi_X = \varphi_Y = \varphi_Z.$$

Миттєве значення лінійної напруги між проводами А і В

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_X + u_A) - (\varphi_Y + u_A) - (\varphi_Y + u_B) = u_A - u_B. \quad (313)$$

По аналогії для двох інших лінійних напруг можна написати

$$u_{BC} = u_B - u_C; \quad u_{CA} = u_C - u_A. \quad (314)$$

Отже можна стверджувати, що миттєве значення будь-якої лінійної напруги дорівнює алгебричній різниці миттєвих значень відповідних фазних напруг. Аналогічно при символічній формі запису люба комплексна напруга дорівнює різниці відповідних фазних комплексних напруг

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (315)$$

На векторній діаграмі (рис.174) зображені три вектори фазних напруг

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A; \dot{U}_B = \dot{E}_B; \dot{U}_C = \dot{E}_C.$$

Вектор будь-якої лінійної напруги дорівнює різниці відповідних векторів фазних напруг. З векторної діаграми можна побачити, що вектори двох суміжних фазних напруг і вектор відповідної лінійної напруги, наприклад, вектори  $\dot{U}_B, -\dot{U}_C$  і  $\dot{U}_{BC}$  створюють замкнутий трикутник. При симетричній системі напруг діючі значення фазних напруг дорівнюють одна одній  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_L$ .

Тому трикутник рівнобедрений і має кути  $30^\circ, 30^\circ$  і  $120^\circ$ . З трикутника знаходимо, що

$$\frac{1}{2} U_L = U_\phi \cos 30^\circ,$$

або

$$U_L = 2U_\phi \cos 30^\circ = \frac{2U_\phi \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_\phi, \quad (316)$$

тобто лінійна напруга в  $\sqrt{3}$  раз більше фазної напруги. Крім того, з рис.174 можна зробити висновок, що зірка векторів лінійних напруг повернута на  $30^\circ$  у бік обертання векторів відносно зірки векторів фазних напруг.

Алгебрична сума лінійних напруг завжди дорівнює нулю. Дійсно, прийняв до умови вираження (312), можна написати

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{CA} = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_C + \varphi_C - \varphi_A = 0$$

Або

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \quad (317)$$

У симетричній трифазній системі дорівнює нулю і сума фазних напруг :

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0, \quad (318)$$

як і сума фазних ЕРС (рис.171)

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0.$$

В цьому можна переконатись, склавши відповідні вектори, як це показано для фазних напруг на рис.174.

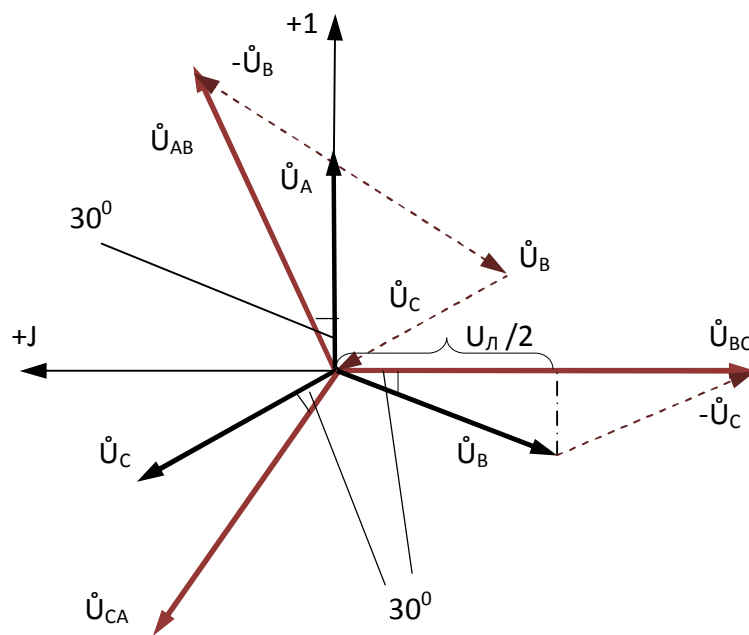


Рис. 174

### § 88. З'єднання обмоток генератора трикутником

З'єднання обмоток генератора трикутником дозволяє зменшити число проводів , які з'єднують

генератор з приймачем , з шести при незв'язаній системі до трьох.

Якщо кінець першої обмотки X трифазного генератора (рис.175) з'єднаний з початком другої обмотки B , кінець другої обмотки Y – з початком третьої C і кінець третьої Z – з початком першої A , то у цьому випадку говорять, що обмотки генератора з'єднані трикутником.

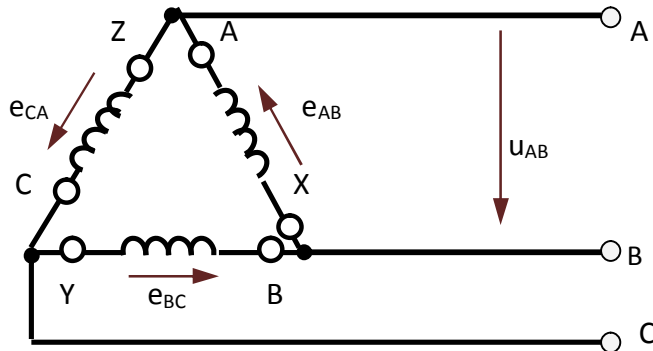


Рис.175

Лінійні проводи, які підходять до приймача, приєднуються до початків обмоток генератора A,B,C тобто і до кінців відповідних сусідніх обмоток Z,X,Y (рис.175). Внаслідок цього фазні напруги на обмотках генератора одночасно виявляються і лінійними напругами. Обмотки генератора , які з'єднані трикутником, створюють замкнутий контур з малим опором, в котрому діє сума трьох ЕРС  $e_{AB}, e_{BC}, e_{CA}$ . Щоб у контурі при відсутності навантаження не виник струм, сума цих ЕРС в будь-який момент часу повинна бути рівною нулю. Цій вимозі задовольняє симетрична система трьох ЕРС, у котрих однакові дійсні значення E і зсув фаз між кожною парою ЕРС дорівнює  $120^{\circ}$  , як і у ЕРС на рис.171 і напруг на рис.174.

Лінійні напруги

$$u_{AB} = e_{AB}, u_{BC} = e_{BC}, u_{CA} = e_{CA}$$

(якщо знехтувати падіннями напруги в обмотках генератора).

## §89. Симетричний режим трифазного кола при з'єднаннях зіркою і трикутником

### З'єднання зіркою

При з'єднанні обмоток генератора зіркою і при трифазному приймачі ( у котрого, як і у генератора, три частини називаються фазами) або трьох приймачах, з'єднаних зіркою, можна , як було сказано раніше , отримати чотирипровідну (рис.176) або трипровідну трифазну систему.



Чотирипровідна система отримується після заміни трьох зворотних проводів незв'язаної системи (рис.177) загальним нейтральним проводом.

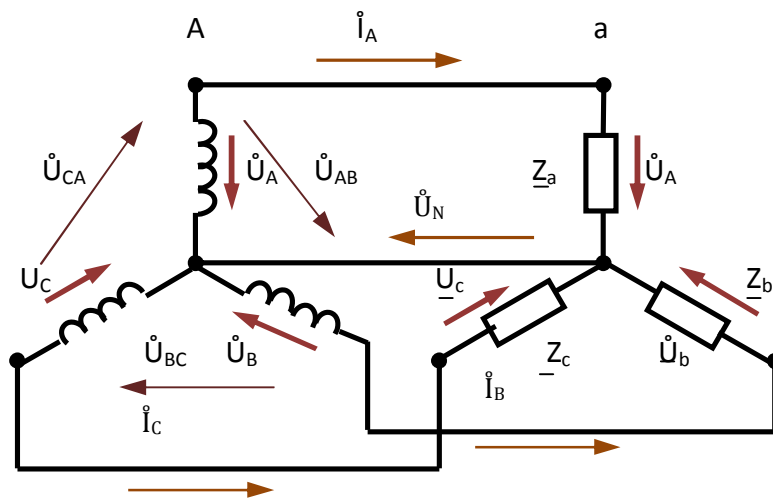


Рис.176

Чотирипровідна система отримується після заміни трьох зворотних проводів незв'язаної системи (рис.177) загальним нейтральним проводом.

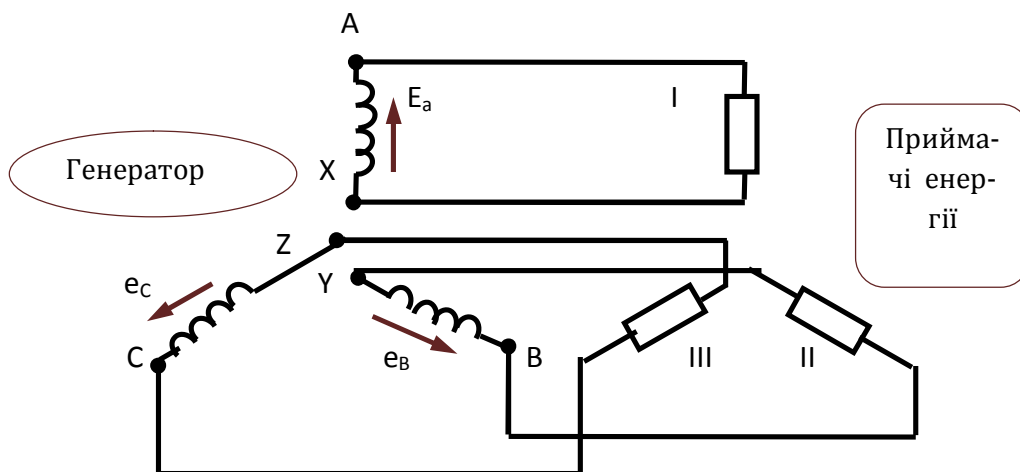


Рис.177

Початки обмоток (фаз) генератора показані великими літерами А,В,С, відповідні виводи приймача, або трьох приймачів, з'єднаних зіркою, малими літерами а,в,с. Один кінець нейтрального проводу приєднаний до нейтральної (загальної) точки N фаз генератора, другий до нейтральної приймача.

Позитивні напрямки струмів в лінійних проводах  $I_A, I_B, I_C$  вибирають від генератора до приймача, струму  $I_N$  у нейтральному проводі в зворотньому напрямку, так що за першим законом Кірхгофа

$$I_N = I_A + I_B + I_C. \quad (319)$$

При достатньо малому опорі нейтрального та лінійних проводів різниця потенціалів між нейтральними точками N і n дорівнює нулю.

Тому створюються три самостійні контури, і внаслідок малих опорів нейтрального і лінійних проводів фазні напруги приймача дорівнюють відповідним фазним напругам генератора :

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A; \dot{U}_b = \dot{U}_B; \dot{U}_c = \dot{U}_C.$$

На рис.178 надана топографічна діаграма напруг кола .

Потенціал нейтральної точки N генератора прийнятий рівним нулю, і так як падіння напруги у

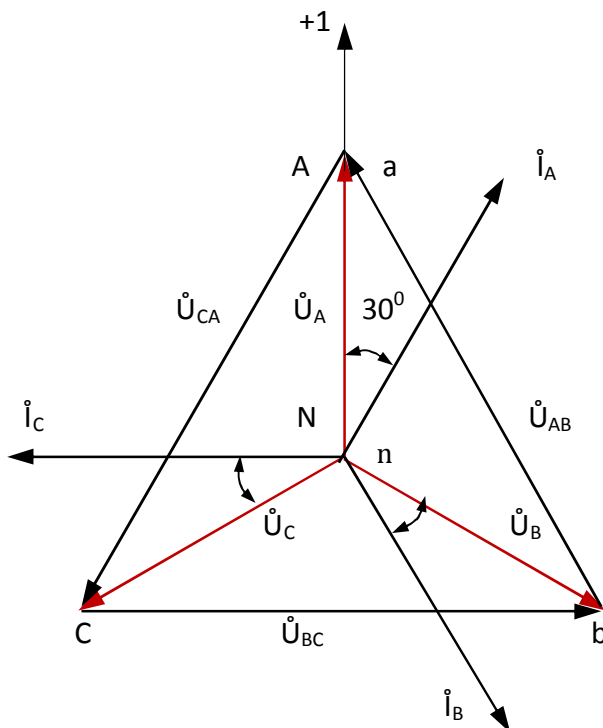


Рис. 178

нейтральному проводі відсутнє, то й потенціал нейтральної точки n приймача теж дорівнює нулю. Відклавши з точки N вектори фазних напруг

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a = U_\phi; \dot{U}_B = \dot{U}_b = U_\phi e^{-j120^\circ};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_c = U_\phi e^{j120^\circ},$$

Отримаємо точки А,В,С (або а,в,с) діаграми , які відповідають точкам кола, позначеними тими ж літерами.

На топографічній діаграмі  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$  вектори лінійних напруг.

З рис.174

$$\dot{U}_{AB} = U_\ell e^{j30^\circ}; \dot{U}_{BC} = U_\ell e^{j90^\circ}; \dot{U}_{CA} = U_\ell e^{j150^\circ},$$

$$U_\ell = \sqrt{3}U_\phi.$$

При заданих фазних напругах і відомих опорах  $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$  фаз приймача струм у кожному контурі визначається за законом Ома :

$$i_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}; i_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_b}; i_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_c}. \quad (320)$$

У симетричного трифазного приймача або у трьох однакових приймачів, з'єднаних зіркою,

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z} = Z e^{j\varphi}.$$

Тому лінійні струми і струми у фазах приймача, які їм дорівнюють, тобто фазні струми :

$$i_A = \frac{\dot{U}_A}{Z e^{j\varphi}} = I_\phi e^{-j\varphi}; \quad (321)$$

$$i_B = \frac{\dot{U}_A e^{-j120^\circ}}{Z e^{j\varphi}} = I_\phi e^{-j\varphi} e^{-j120^\circ}; \quad (322)$$

$$i_C = \frac{\dot{U}_A e^{j120^\circ}}{Z e^{j\varphi}} = I_\phi e^{-j\varphi} e^{j120^\circ}, \quad (323)$$

де

$$I_\phi = I_n = \frac{U_\phi}{Z} = \frac{U_n}{\sqrt{3}Z}. \quad (324)$$

Таким чином, лінійні або фазні струми числено однакові (рівні дійсні значення) і зсунуті по фазі відносно один одного на рівні кути  $120^\circ$ .

Сума векторів трьох струмів, які створюють симетричну трійку, як можна побачити з рис.178, дорівнює нулю, як і трьох векторів фазних напруг (рис.174). Тому струм у нейтральному провіді відсутній.

$I_N = 0$  і нейтральний провід не потрібний.

Таку чотирипровідну систему можна замінити трипровідною системою по схемі зірка – зірка без зміни режиму (рис.179).

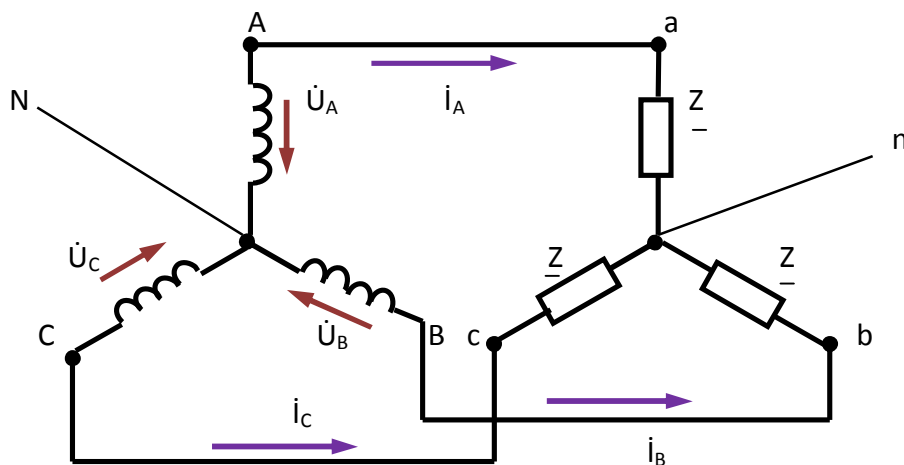


Рис.179

Режим остається симетричним з рівним нулю струмом у нейтральному провіді чотирипровідного кола і при кінцевому опорі нейтрального проводу. При заданих фазних  $U_\phi$ , або лінійних

$U_{\phi}$  напругах генератора і опорах  $\underline{Z}$  приймачів кут зсуву фаз  $\varphi$  між фазною напругою і фазним (лінійним) струмом можна визначити через його тангенс або синус :

$$tg \varphi = \frac{x}{R} \text{ або } \sin \varphi = \frac{x}{Z}. \quad (325)$$

Активна потужність кожної фази

$$P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi.$$

Активна потужність, віддаєма генератором і отримуєма приймачами

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi. \quad (326)$$

Реактивна потужність фази

$$Q_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi.$$

Реактивна потужність , віддаєма генератором і отримуєма приймачами

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi. \quad (327)$$

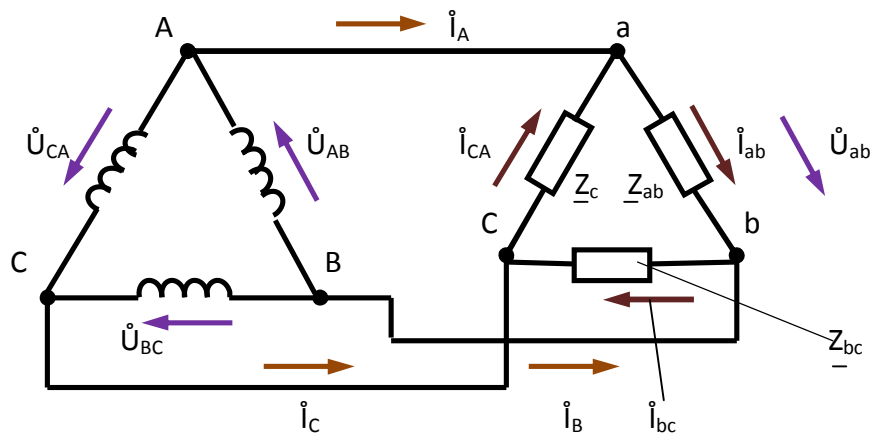
Повна потужність генератора або приймачів

$$S = 3S_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3} U_{\phi} I_{\phi}. \quad (328)$$

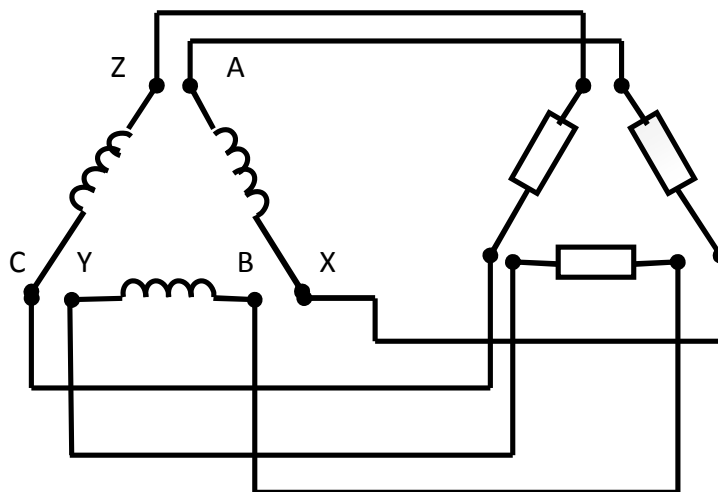
### **З'єднання трикутником**

Схему з'єднання обмоток генератора трикутником ( §87) і таку ж схему з'єднання фаз три фазного приймача або трьох приймачів (рис.180,а) можна отримати із незв'язаного трифазного

кола з шістьма проводами (рис.180,б) шляхом заміни кожної пари суміжних проводів на рис. 180,б одним проводом.



a)



б)

Рис.180

При з'єднанні трикутником фаз приймача, або трьох приймачів з опорам  $Z_{ab}, Z_{bc}, Z_{ca}$  ці приймачі підключаються безпосередньо до лінійних проводів. Якщо опорам лінійних проводів можна знехтувати, то лінійні напруги кола  $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca}$ .

Позитивні напрямки лінійних струмів, як і при з'єднанні зіркою, вибираються від генератора до приймача. За позитивний напрямок фазних струмів в приймачах приймаються напрямки від  $a$  до  $b$ , від  $b$  до  $c$ , від  $c$  до  $a$ , що показують порядком літер в індексах, наприклад,  $I_{ab}$  – це

струм у фазі  $av$ , направлений від вузла  $a$  до вузла  $v$ .

Струм у кожному лінійному проводі дорівнює різниці струмів двох фаз, котрі з'єднані в один вузол з цим проводом (рис.180,а), що виходить з першого закону Кірхгофа .

Для вузла  $a$  (рис.180,а)

$$i_A + i_{ca} = i_{av}$$

Звідки

$$i_A = i_{av} - i_{ca} . \quad (329)$$

Аналогічно для вузлів  $v$  і  $c$

$$i_B = i_{vc} - i_{av} , \quad (330)$$

$$i_C = i_{ca} - i_{vc} . \quad (331)$$

Фазні струми можна визначити за законом Ома :

$$i_{av} = \frac{\dot{U}_{av}}{\underline{Z}_{av}}; i_{vc} = \frac{\dot{U}_{vc}}{\underline{Z}_{vc}}; i_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} . \quad (332)$$

Симетричний режим трифазного кола характеризується симетричною системою напруг

$$U_{av} = U_{vc} = U_{ca}$$

або

$$U_n = U_\phi \quad (333)$$

і симетричною системою струмів, що можливо тільки при симетричному трифазному приймачі, у котрого комплексні опори всіх фаз однакові :

$$\underline{Z}_{av} = \underline{Z}_{vc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z} = Ze^{j\varphi} .$$

Таким чином, при симетричній системі напруг (рис.181)

$$\dot{U}_{ab} = U_{\phi} e^{j30^{\circ}} = U_{\phi} e^{j30^{\circ}};$$

$$\dot{U}_{bc} = U_{\phi} e^{j30^{\circ}} e^{-j120^{\circ}} = U_{\phi} e^{-j90^{\circ}};$$

$$\dot{U}_{ca} = U_{\phi} e^{j30^{\circ}} e^{+j120^{\circ}} = U_{\phi} e^{+j150^{\circ}}$$

і однакових опорах фаз приймача фазні струми

$$i_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \frac{I_{\phi} e^{j30^{\circ}}}{Z e^{j\varphi}} = I_{\phi} e^{j(30^{\circ}-\varphi)}; \quad (334)$$

$$i_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}} = \frac{I_{\phi} e^{-j90^{\circ}}}{Z e^{j\varphi}} = I_{\phi} e^{-j(90^{\circ}+\varphi)} = I_{\phi} e^{j(30^{\circ}-\varphi-120^{\circ})}; \quad (335)$$

$$i_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}} = \frac{I_{\phi} e^{j150^{\circ}}}{Z e^{j\varphi}} = I_{\phi} e^{j(150^{\circ}-\varphi)} = I_{\phi} e^{j(30^{\circ}-\varphi+120^{\circ})}; \quad (336)$$

тобто створюють симетричну систему.

Діючі значення струмів однакові :

$$I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{Z},$$

а по фазі струми зсунуті відносно один одного на рівні кути  $120^{\circ}$ .

Щоб показати на діаграмі зсуви фаз між напругами і струмами , вектори струмів проведені (рис.181) не з початку координат , а побудовані в точках А,В,С. Лінійні струми дорівнюють різницям відповідних фазних струмів (рис.182), їх діючі значення однакові і зсуви по фазі між



ними, як і між фазними струмами, дорівнюють  $120^\circ$ , що і показано на векторній діаграмі рис. 182, де лінійні і фазні струми побудовані з початку координат.

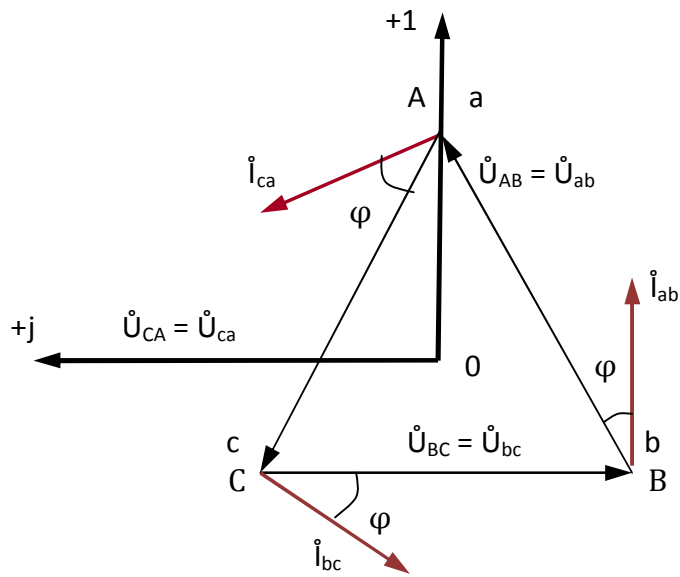


Рис.181

Із діаграми можна побачити, що вектори фазних струмів суміжних фаз разом з вектором відповідного лінійного струму створюють рівнобедрений трикутник з кутами  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  і  $120^\circ$ .

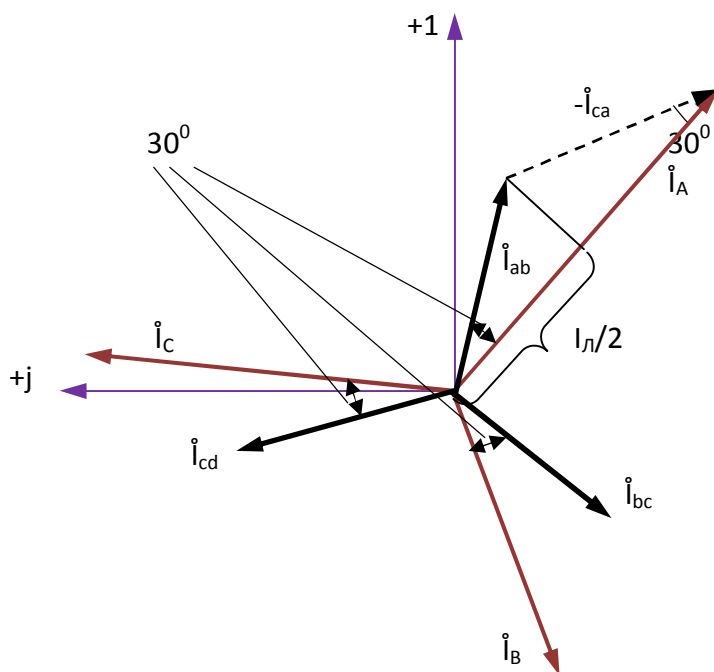


Рис. 182

З трикутника отримуємо

$$\frac{I_n}{2} = I_\phi \cos 30^\circ = I_\phi \frac{\sqrt{3}}{2}$$

або

$$I_n = 2I_\phi \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}I_\phi, \quad (337)$$

тобто лінійний струм більше фазного в  $\sqrt{3}$  раз. Із діаграми також виходить, що кожний лінійним струм відстає по фазі від відповідного фазного струму на кут  $30^\circ$ .

При заданих напругах  $U_n = U_\phi$  і опорях  $Z$  приймача кут зсуву фаз між фазною напругою і струмом можна визначити, як і при з'єднанні зіркою з (137).

Активна і реактивна потужності однієї фази

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi ; \quad Q_\phi = U_\phi I_\phi \sin \varphi.$$

Активна потужність, віддаєма генератором і отримуєма приймачем

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_n I_n \cos \varphi, \quad (338)$$

так як з (333) і (337)

$$U_\phi I_\phi = \frac{U_n I_n}{\sqrt{3}}.$$

Реактивна потужність, віддаєма генератором і отримуєма приймачем,

$$Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3}U_n I_n \sin \varphi. \quad (339)$$

Повна потужність генератора або приймача

$$S = 3S_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3}U_{лл}. \quad (340)$$

## § 90. Несиметричний режим трифазного кола при з'єднаннях зіркою і трикутником

### З'єднання зіркою з нейтральним проводом, опором котрого можна знехтувати

Чотирипровідна система з симетричною, як звичайно буває в реальних колах, системою фазних напруг генератора або мережі живлення

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a = \dot{U}_{\phi}; \dot{U}_B = \dot{U}_b = \dot{U}_{\phi}e^{-j120^{\circ}};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_c = \dot{U}_{\phi}e^{+j120^{\circ}}$$

і несиметричному трифазному приймачі або трьома різними приймачами, з'єднаними зіркою, показана на рис.176.

Струм у нейтральному проводі обумовлений неоднаковим (нерівномірним) навантаженням фаз. В окремому випадку при однаковому навантаженні фаз, як було показано в §88, він дорівнює нулю. Практично струм у нейтральному проводі в більшості випадків значно менше лінійних струмів. Тому у трифазних системах нейтральний провід має переріз в 2-3 рази менше перерізу лінійних проводів.

Обрив нейтрального проводу при однаковому навантаженні фаз приймача визиває зміну фазних напруг: підвищення на одних фазах приймачів і зниження на інших. Така зміна напруги неприпустима; наприклад, при освітлювальному навантаженні зниження напруги на частині ламп розжарювання визиває недостатнє розжарення їх, а на інших підвищення напруги приводить до перегріву і швидкому перегоранню ламп. Зважаючи на викладене в нейтральних проводах запобіжники не встановлюються.

Потужність в окремих фазах у трифазному колі з нейтральним проводом визначається з тих же формул, які застосовувались для кіл змінного струму, тобто комплексні потужності

$$\dot{S}_a = \dot{U}_a I_a^* = P_a + jQ_a;$$

$$\dot{S}_b = \dot{U}_b I_b^* = P_b + jQ_b;$$

$$\dot{S}_c = \overset{*}{\dot{U}_c} I_c = P_c + jQ_c. \quad (341)$$

Активні потужності окремих фаз можна визначити з формул :

$$P_a = U_a I_a \cos \varphi_a; \quad P_b = U_b I_b \cos \varphi_b; \quad (342)$$

$$P_c = U_c I_c \cos \varphi_c,$$

а активна потужність всього кола дорівнює сумі активних потужностей окремих фаз :

$$P = P_a + P_b + P_c.$$

Реактивні потужності окремих фаз

$$Q_a = U_a I_a \sin \varphi_a; \quad Q_b = U_b I_b \sin \varphi_b \quad (343)$$

$$Q_c = U_c I_c \sin \varphi_c$$

і реактивна потужність всього кола

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c.$$

Тому

$$\dot{S} = \dot{S}_a + \dot{S}_b + \dot{S}_c \quad (344)$$

(одночасно підсумувати повні потужності  $S_a, S_b, S_c$ , а не комплексні, неможна). Повна потужність  $S$  (або  $S_a, S_b, S_c$ ) дорівнює модулю відповідної комплексної потужності  $\dot{S}$  (або  $\dot{S}_a, \dot{S}_b, \dot{S}_c$ ).

Приймачі електричної енергії можна розподілити на дві групи. До однієї з них відносяться електричні лампи, нагрівальні прилади та інші однофазні приймачі, котрі не можуть забезпечити рівномірне навантаження фаз.

У чотирипровідній трифазній системі ці приймачі включаються між нейтральним проводом і кожним із лінійних проводів (рис.183), причому їх номінальна напруга повинна бути рівною фазній напрузі мережі.

До іншої групи відносяться , наприклад, трифазні електродвигуни , котрі мають три однакові (симетричні) обмотки і забезпечують рівномірне навантаження трьох фаз.

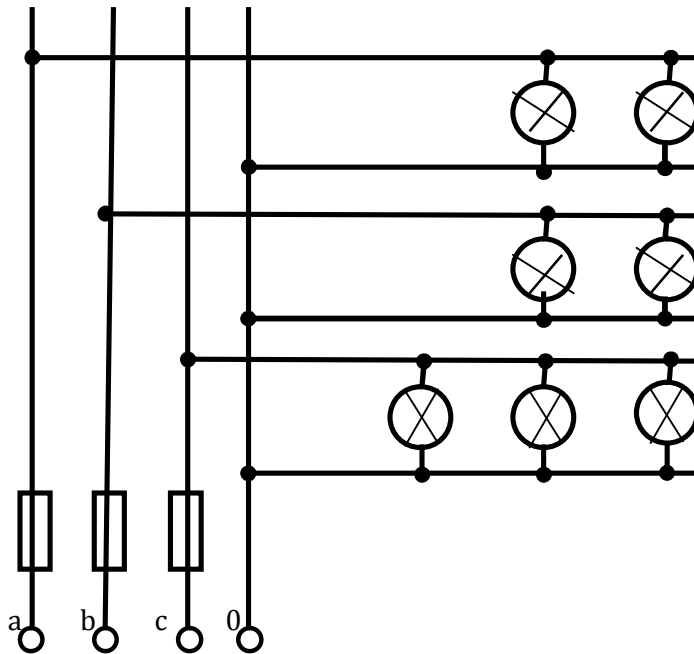


Рис. 183

Для таких приймачів нейтральний провід не потрібний (струм у ньому дорівнює нулю), і їх включають у трифазну мережу без нейтрального проводу; їх номінальна лінійна напруга повинна бути рівною лінійній напрузі трифазній мережі , в котру вони включаються.

### Трифазне коло з нейтральним проводом, який має опір

Якщо опором нейтрального проводу  $Z_N$  не можна знехтувати (рис.184), то при неоднакових опорах фаз приймача через нейтральний провід проходить струм  $I_N$  і між нейтраліями приймача  $n$  і генератора  $N$  виникає різниця потенціалів – зміщення нейтралі :

$$\dot{U}_{nN} = \dot{U}_N = Z_N i_N .$$

Нехтуючи опором фаз генератора і лінійних проводів , напруги на фазах приймача можна визначити , як різницю відповідних напруг фаз генератора і напруги нейтралі, тобто

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_N; \quad (345)$$

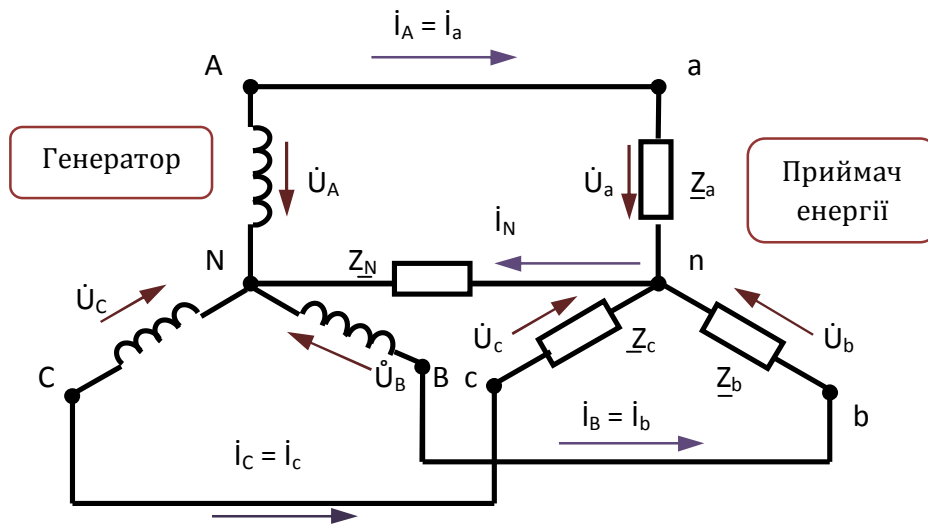


Рис.184

$$\dot{U}_B = \dot{U}_B - \dot{U}_N; \quad (346)$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_N. \quad (347)$$

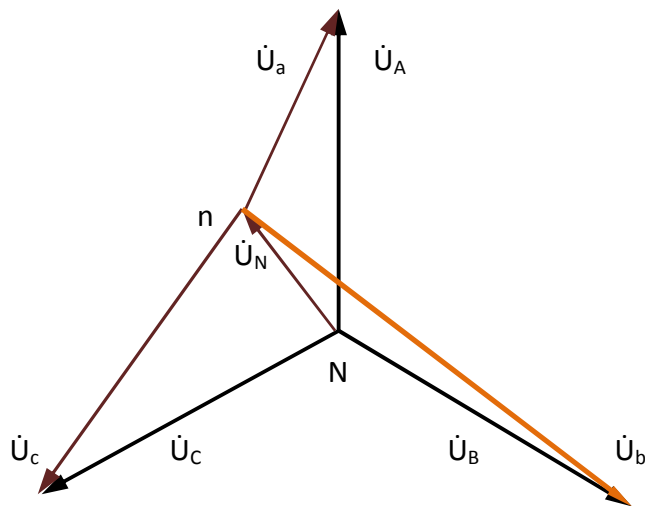


Рис. 185

При симетричній системі фазних напруг генератора фазні напруги приймача відрізняються одна від одної тим більше, чим більше зміщення нейтралі .

На рис.185 побудовані вектори фазних напруг приймача  $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$  при деякому зміщенні нейтралі  $\dot{U}_N$ .

Застосувавши метод вузлової напруги можна визначити зміщення нейтралі з формули :

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_a \underline{Y}_a + \dot{U}_b \underline{Y}_b + \dot{U}_c \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N}, \quad (348)$$

де

$$\dot{U}_a = \dot{E}_a; \dot{U}_b = \dot{E}_b; \dot{U}_c = \dot{E}_c;$$

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a}; \underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b}; \underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c}; \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N},$$

так як опори фаз генератора не ураховуються.

Якщо опорами лінійних проводів знехтувати не можна, то їх необхідно урахувати відповідним збільшенням опорів фаз приймача.

Таким чином, розрахунок розглядаємого кола зводиться до визначення напруги зміщення нейтралі (348), після чого з формул (345 - 347) знаходяться фазні напруги приймача і за законом Ома фазні і рівні їм лінійні струми кола :

$$i_a = I_A = \underline{Y}_a \dot{U}_a; i_b = I_B = \underline{Y}_b \dot{U}_b;$$

$$i_c = \underline{Y}_c \dot{U}_c; i_N = \underline{Y}_N \dot{U}_N. \quad (349)$$

За першим законом Кірхгофа

$$i_N = I_A + I_B + I_C = i_a + i_b + i_c.$$

Потужності у фазах приймача можна визначити з комплексів напруг і сполучених комплексів струмів :

$$\dot{S}_a = \dot{U}_a I_a^* = P_a + jQ_a ;$$

$$\dot{S}_b = \dot{U}_b I_b^* = P_b + jQ_b ;$$

$$\dot{S}_c = \dot{U}_c I_c^* = P_c + jQ_c ,$$

або з формул аналогічним (342-344) .

Розглянутий метод розрахунку застосовується і для трипровідного кола , якщо прийняти  $Z_N = \infty$  ,  $Y_N = 0$  і  $I_N = 0$ .

При розрахунку струмів приймачів , з'єднаних зіркою і підключених до мережі з заданою симетричною системою лінійних напруг, можна припустити, що ці напруги створюються заміщувачим генератором . Фазні напруги такого генератора

$$U_A = U_B = U_C = E_A = E_B = E_C = \frac{U_L}{\sqrt{3}} .$$

Після цього отримане коло розраховується розглянутим вище методом.

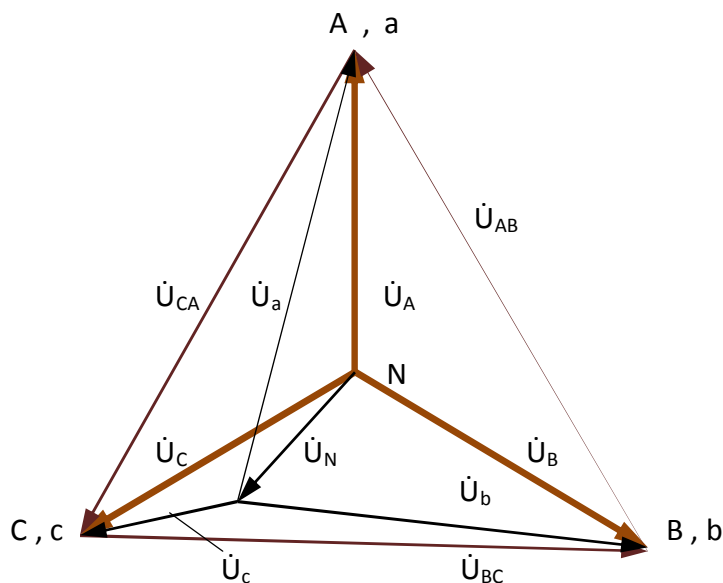


Рис. 186



Напругу між окремими точками трифазного кола можна знайти графічно, побудувавши топографічну діаграму.

Побудуємо діаграму для кола по рис.184. Припускаємо, що точка N, розташована у початку координат (рис.186) , відповідає нейтральній точці генератора, потенціал котрої прийнятий за нульовий :  $\varphi_N = 0$ .

Відклавши із точки N вектори фазних напруг  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  отримаємо точки A,B,C, які відповідають точкам кола , позначеним тими ж літерами . Вектор  $\dot{U}_{AB} = \dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_B$  , який дорівнює різниці векторів  $\dot{U}_A - \dot{U}_B$  , зображає лінійну напругу. Аналогічно і вектори  $\dot{U}_{BC}$  і  $\dot{U}_{CA}$  зображають лінійні напруги.

Відклавши із точки N вектор

$$\dot{U}_N = \dot{U}_{nN} = \dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_N = \dot{\varphi}_n ,$$

котрий зображає зміщення нейтралі , отримаємо точку n – потенціал нейтральної точки приймача, а вектори  $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$  зображають відповідні фазні напруги приймача.

Якщо зміщення нейтралі відсутнє, то точка n збігається з точкою N .

### **З'єднання трикутником**

Схема з'єднання обмоток генератора і несиметричного трифазного приймача або трьох різних приймачів трикутником була надана на рис. 180.

Якщо можна знехтувати опором проводів, то лінійні і фазні напруги приймача рівні, як і для симетричного кола, відповідним напругам генератора :

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB} = U_\phi e^{j30^\circ} ;$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC} = U_\phi e^{-j90^\circ} ;$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA} = U_\phi e^{j150^\circ} .$$

Фазні струми визначаються за законом Ома, а лінійні за першим законом Кірхгофа .

Векторна діаграма струмів будується аналогічно показаній на рис.182 , але ні фазні , ні лінійні струми не створюють симетричну трійцю векторів. Застосувати множник  $\sqrt{3}$  для несиметрич-

ної системи струмів не можна.

При несиметричному режимі роботи комплексні потужності в окремих фазах

$$\dot{S}_{OB} = \dot{U}_{OB} I_{OB}^* = P_{OB} + jQ_{OB};$$

$$\dot{S}_{BC} = \dot{U}_{BC} I_{BC}^* = P_{BC} + jQ_{BC};$$

$$\dot{S}_{CO} = \dot{U}_{CO} I_{CO}^* = P_{CO} + jQ_{CO}.$$

Комплексна, активна і реактивна (але не повна) потужності трифазного кола визначаються підсумовуванням відповідних потужностей всіх фаз.

### Змішані схеми з'єднання

Схеми з'єднання приймачів енергії не залежать від схеми з'єднання обмоток генератора. Основною умовою, яка визначає схему з'єднання приймачів, є співвідношення між напругою мережі і номінальною напругою приймача. Приймач повинен включатися так, щоб на виводах

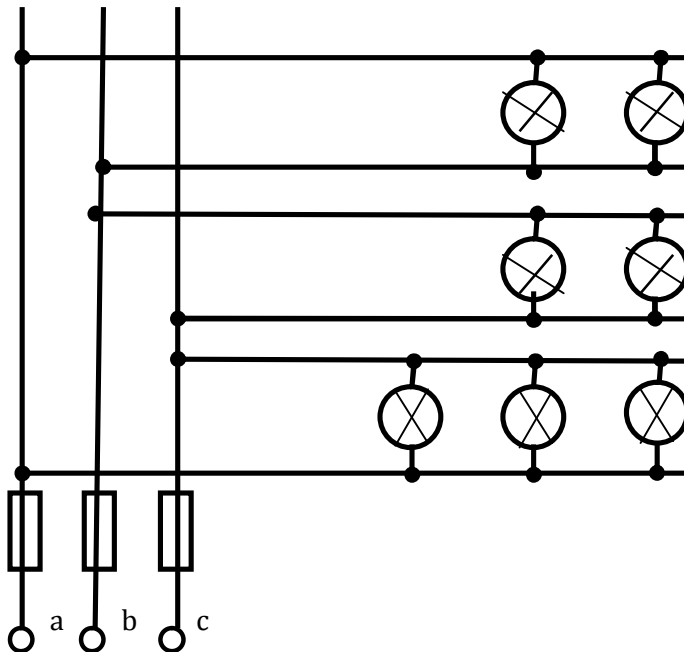


Рис. 187

однофазного приймача або на виводах кожної фази трифазного приймача була напруга, яка дорівнює їх номінальній фазній напрузі. Наприклад, лампи розжарювання з номінальною напругою 127 В включаються за схемою зірка з нейтральним проводом (рис.176) при лінійній напрузі мережі  $220 \text{ В} = \sqrt{3} 127 \text{ В}$ , або за схемою трикутника при напрузі мережі 127 В (рис.187).

Лампи з номінальною напругою 220 В включаються в мережу з напругою  $380 \text{ В} = \sqrt{3} 220 \text{ В}$  за схемою зірки з нейтральним проводом (рис.176) і за схемою трикутника (рис.187) – в мережу з лінійною напругою 220 В ; електродвигун з номінальними напругами 127 / 220 В включається в мережу з напругою 127 В за схемою трикутник, а в мережу з напругою 220 В – за схемою зірки ; аналогічно при напругах електродвигуна 220/380 В він включається трикутником в мережу напругою 220 В, або зіркою – в мережу з напругою 380 В.

## § 91. Потужності трифазного кола

Миттєва потужність трифазного кола дорівнює сумі миттєвих потужностей трьох фаз :

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C . \quad (350)$$

При симетричному режимі зсув фаз  $\varphi$  між відповідними фазною напругою і фазним струмом один і той же і миттєва потужність

$$p_A = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos(2\omega t - \varphi);$$

$$p_B = U_m \sin(\omega t - 120^\circ) I_m \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi) = U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi);$$

$$p_C = U_m \sin(\omega t + 120^\circ) I_m \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi) = U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos(2\omega t + 240^\circ - \varphi),$$

де прийнято до уваги, що  $U_\phi I_\phi = \frac{U_m I_m}{2}$ .

Беручи до уваги , що

$$U_{\phi} I_{\phi} \cos(2\omega t - \varphi) + U_{\phi} I_{\phi} \cos(2\omega t - 240^{\circ} - \varphi) + U_{\phi} I_{\phi} \cos(2\omega t + 240^{\circ} - \varphi) = 0,$$

отримуємо

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi.$$

Таким чином, при симетричному режимі миттєва потужність трифазного кола не залежить від часу і дорівнює активній потужності кола:

$$P = P = 3P_{\phi}. \quad (351)$$

Трифазне коло, миттєва потужність якого стала, називається зрівноваженим.

Активна потужність трифазного кола дорівнює сумі активних потужностей всіх трьох фаз:

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C. \quad (352)$$

При симетричному режимі роботи

$$U_A = U_B = U_C = U_{\phi};$$

$$I_A = I_B = I_C = I_{\phi};$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi.$$

Таким чином

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi, \quad (353)$$

так як при з'єднанні приймачів зіркою

$$I_{\phi} = I_{\ell} \text{ i } U_{\phi} = \frac{U_{\ell}}{\sqrt{3}},$$

а при з'єднанні трикутником

$$I_{\phi} = I_{\ell} \sqrt{3} \text{ i } U_{\phi} = U_{\ell}.$$

Необхідно знати, що у лінійних струмів і напруг індекс «л» часто не пишуть, також не пишуть індекси для кутів зсуву фаз між фазами, напругою і струмом. Реактивна потужність трифазного кола дорівнює алгебричній сумі реактивних потужностей трьох фаз:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C. \quad (354)$$

При симетричному режимі роботи реактивна потужність кола

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\ell} I_{\ell} \sin \varphi. \quad (355)$$

Повна потужність трифазного кола при симетричному режимі роботи

$$S = 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3} U_{\ell} I_{\ell}. \quad (356)$$

## §92. Обертове магнітне поле

Обертове магнітне поле створюється обмоткою статора, що складається із трьох котушок. Ці котушки розташовані під кутом  $120^{\circ}$  одна до одної і на них подається трифазна синусоїдна напруга. Тобто у котушках проходять струми, що зсунуті один до одного на  $120^{\circ}$  (Рис. 188). Можна розглянути моменти часу, коли фазні струми сягають максимальних значень. Із таблиці видно, що максимальний струм не збігається за напрямом із двома іншими фазними струмами.

Три котушки статорної обмотки (початки А, В, С, кінці x, y, z) розташовані під кутом  $120^\circ$  (Рис. 189). Відповідно до таблиці на рисунку зображені напрями струмів. Якщо об'єднати провідники з однаковим напрямом струмів, можна зобразити магнітне поле статора. Це поле буде обертатися відповідно до частоти струму, тобто

$$n_1 = 60f_1/p$$

Таким чином, кутова частота обертання двополюсного поля дорівнює кутовій частоті струму в обмотці статора.

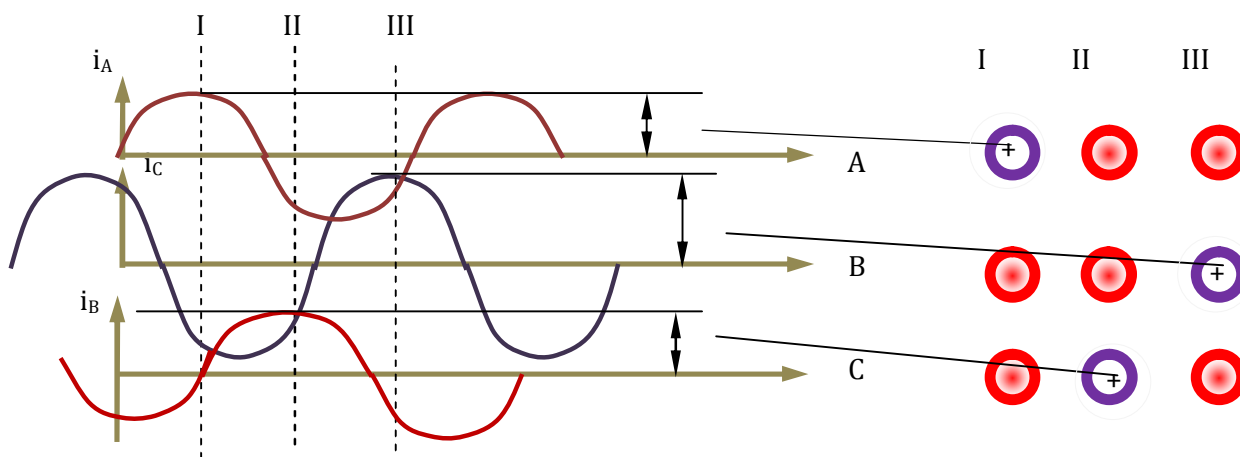


Рис. 188

I			II			III		
A	B	C	A	B	C	A	B	C
+	•	•	•	•	+	•	+	•

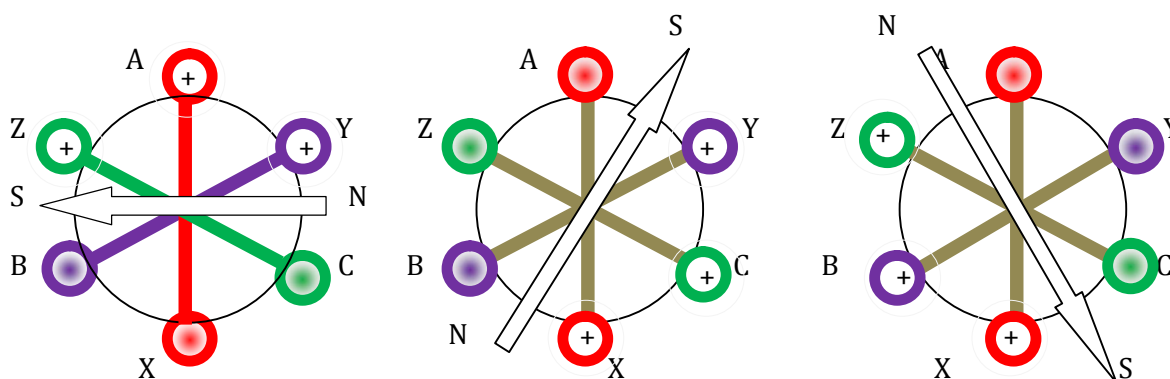


Рис. 189

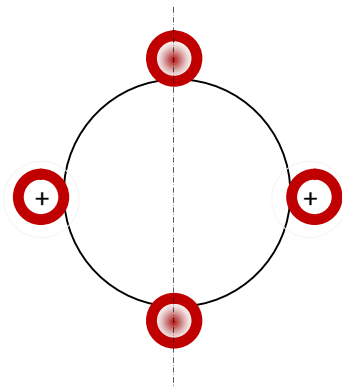


Рис. 190

Якщо у кожен фазу обмотки статора увімкнуті по дві котушки (витки укласти не через  $180^\circ$ , а через  $90^\circ$ , як наведено на рис. 190), то одержимо чотириполюсне поле. Це поле обертається у два рази повільніше, тому що у цьому разі  $p = 2$  (дві пари полюсів). Можна і далі збільшувати кількість пар полюсів, збільшуючи кількість котушок у кожній фазі. Таким чином створюється багатопольсне обертове магнітне поле.

### § 93. Симетричні складові несиметричної трифазної системи

Несиметричну трифазну систему струмів (напруг або інших синусоїдних величин) можна зобразити як суму трьох симетричних систем.

Розкладання несиметричної системи векторів на симетричні складові застосовується для розрахунку і аналізу несиметричних режимів у трифазних колах: при симетричному навантаженні, але при несиметричній системі ЕРС, при однофазних та двофазних коротких замиканнях, при обриві лінійних проводів у колах з симетричною системою ЕРС.

Перша симетрична система має пряму послідовність фаз ( $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1$ , рис. 191, а), друга – зворотню ( $A_2 \rightarrow C_2 \rightarrow B_2$ , рис. 191, б).

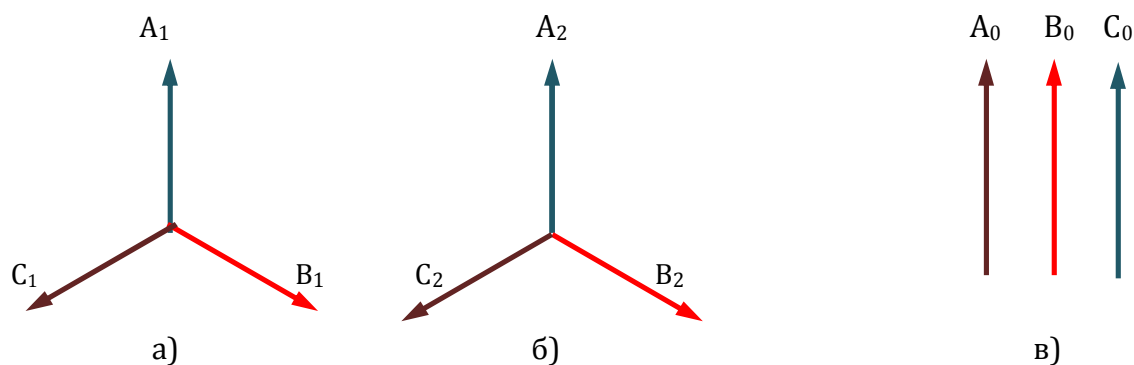


Рис. 191

Третя система, називаємо системою кульової послідовності, складається із трьох рівних величин, співпадаючих по фазі ( $A_0, B_0, C_0$ , рис.191,в).

Система величин:

прямої послідовності

$$\dot{A}_1, \dot{B}_1 = \dot{A}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \dot{C}_1 = \dot{A}_1 e^{+j\frac{2\pi}{3}};$$

зворотної послідовності

$$\dot{A}_2, \dot{B}_2 = \dot{A}_2 e^{+j\frac{2\pi}{3}}; \dot{C}_2 = \dot{A}_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}};$$

нульової послідовності

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0.$$

Множення на  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$  означає поворот вектора на  $120^\circ$  проти руху годинникової стрілки. Позначимо  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$  через  $a$  і будемо називати це вираження поворотним множником.

Поворот вектора проти годинникової стрілки на  $240^\circ$  можна виразити множенням його на  $a^2$ . Множення вектора на  $a^2$  не змінює його положення:

$$a^3 = e^{j2\pi}; a^4 = a^3 \cdot a = a. \quad (357)$$

За допомогою поворотного множника  $a$  системи прямої і зворотної можна записати так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1, \dot{B}_1 &= \dot{A}_1 a^2; \dot{C}_1 = \dot{A}_1 a; \\ \dot{A}_2, \dot{B}_2 &= \dot{A}_2 a; \dot{C}_2 = \dot{A}_2 a^2. \end{aligned} \right\} (358)$$



Сума синусоїдних величин дорівнює нулю, тому

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (359)$$

Комплекси несиметричної системи можна виразити через симетричні складові :

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0 ; \\ \dot{B} &= \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0 ; \\ \dot{C} &= \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0 . \end{aligned} \right\} \quad (360)$$

Якщо величини  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$  несиметричної системи відомі , то можна визначити з цієї системи рівнянь симетричні складові.

Використовуюя вираження (358) систему рівнянь можна записати у такому вигляді :

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0 ; \\ \dot{B} &= \dot{A}_1 a^2 + \dot{A}_2 a + \dot{A}_0 ; \\ \dot{C} &= \dot{A}_1 a + \dot{A}_2 a^2 + \dot{A}_0 . \end{aligned} \right\} \quad (361)$$

Рішення цієї системи рівнянь дозволяє знайти симетричні складові  $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_0$

$$\dot{A}_0 = \frac{\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}}{3} ; \dot{A}_1 = \frac{\dot{A} + \dot{B} a + \dot{C} a^2}{3} ; \quad (362)$$

$$\dot{A}_2 = \frac{\dot{A} + \dot{B} a^2 + \dot{C} a}{3} .$$

Відзначимо деякі властивості трифазних кіл у відношенні до симетричних складових струмів і напруг.

Ступінь несиметрії лінійних напруг оцінюється коефіцієнтом несиметрії, тобто відношенням складової зворотної послідовності до складової прямої послідовності:

$$\varepsilon\% = 100 \frac{U_{2л}}{U_{1л}}. \quad (363)$$

Система лінійних напруг вважається симетричною, якщо коефіцієнт несиметрії менше 5%.

Припустимо, що величини А,В,С є лінійними струмами у чотирипровідній системі. Сума лінійних струмів дорівнює струму у нульовому проводі, тому складова струму нульової послідовності дорівнює струму у нульовому проводі. Звідси випливає, що струм у нульовому проводі можна знайти, якщо утроїти послідовності.

У трипровідній системі сума лінійних струмів дорівнює нулю. Лінійні струми у цьому випадку не містять складової нульової послідовності. Це справедливо і для лінійних напруг трифазної системи, сума яких також дорівнює нулю.

Відсутність струму в одній або двох фазах при несиметричному режимі означає, що сума трьох симетричних складових струмів у цих фазах дорівнює нулю.

### ПФ.С.02.ПП.Р.09.13 Електричні кола несинусоїдного струму

У цьому розділі розглядаються електричні кола, в котрих ЕРС напруги або струми змінюються на протязі часу за періодичним законом, відмінним від синусоїдного

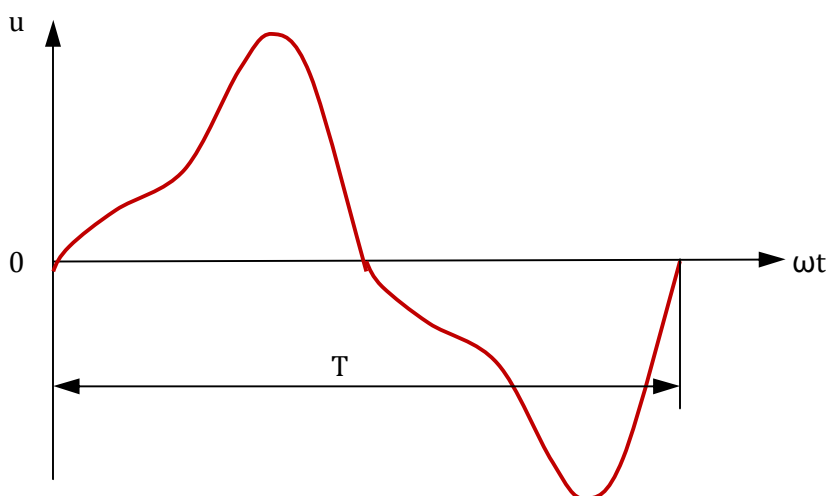


Рис.192

$$e(t) = e(t + T); \quad u(t) = u(t + T); \quad i(t) = i(t + T), \quad (364)$$

де  $T$  – період . Закон зміни періодичної функції в межах періоду  $T$  може бути довільним.

В електричному колі з лінійними елементами несинусоїдний струм виникає, якщо у ньому діє несинусоїдна напруга (ЕРС).

Несинусоїдний струм і напруга на окремих ділянках кола можуть виникнути і при синусоїдній напрузі джерела, коли у колі є елементи з нелінійною вольт - амперною характеристикою.

### § 94. Несинусоїдні напруги, струми і їх вираження

Несинусоїдні періодичні функції, також як і синусоїдні , наочно зображають у вигляді графіків. Для розрахунків необхідні аналітичні вираження несинусоїдних функцій.

Аналітичне вираження несинусоїдної періодичної функції здійснюється за допомогою теореми Фур'є, згідно котрій люба періодична функція  $Y(\omega t)$  може бути подана у вигляді суми ряду складових, з котрих одна складова стала, а інші постають синусоїдними функціями з кратними частотами (в подальшому вони називаються гармонічними складовими або просто гармоніками):

$$Y = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (365)$$

де  $A_0$  – стала складова ;

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  - амплітуди гармонічних складових;

$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_k$  - початкові фази гармонік.

Перша гармонічна складова має період , який дорівнює періоду несинусоїдної кривої  $Y(\omega t)$ . Вона називається першою або основною гармонікою.

Всі інші гармонічні складові мають частоти, у ціле число разів більше частоти першої гармоні-

ки. Ці гармоніки називають вищими.

На рис.193 показані несинусоїдні ЕРС, які містять дві синусоїдні складові – першу і третю – при різній величині початкової фази третьої гармоніки :

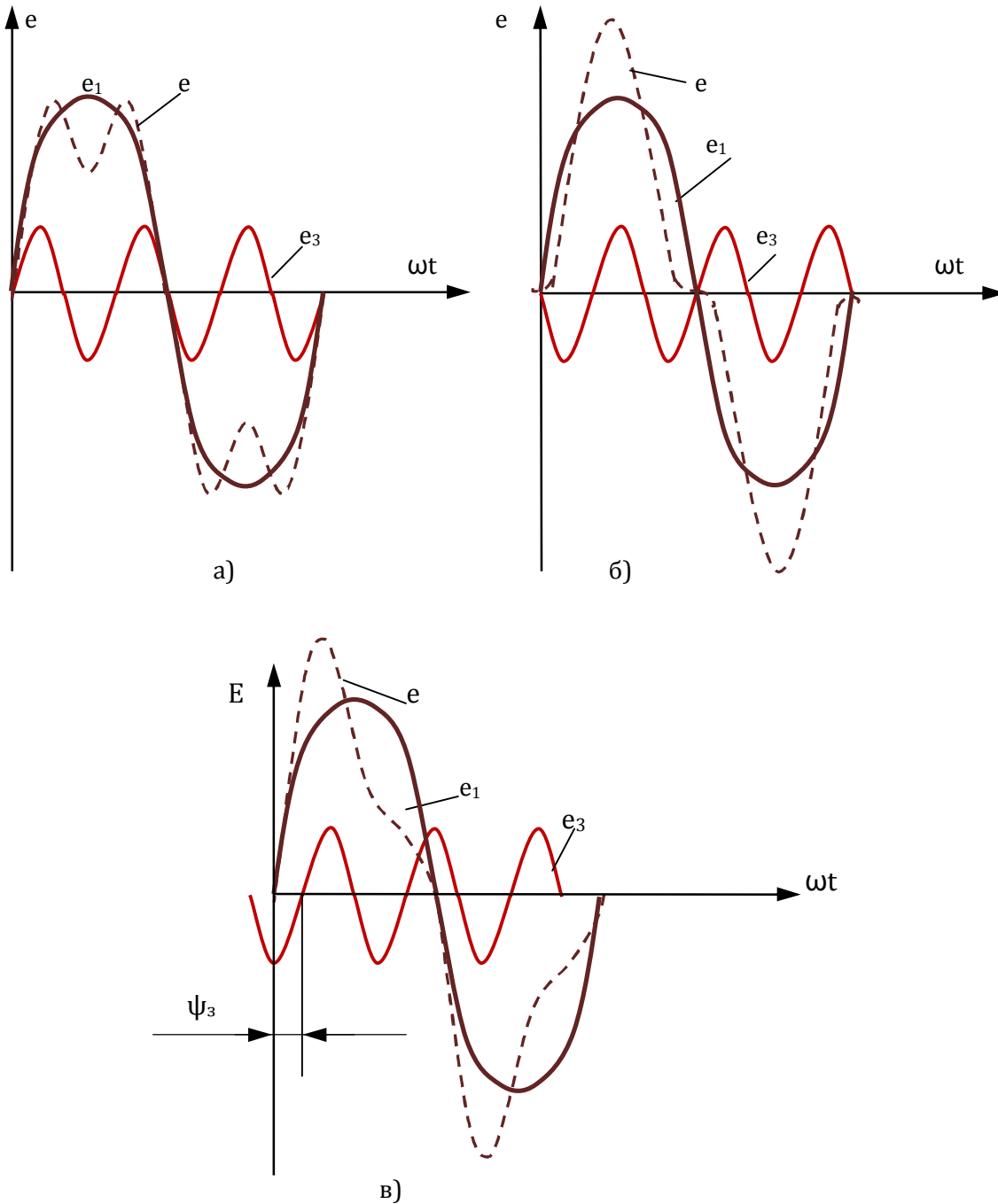


Рис.193

$$a) e = e_1 + e_2 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin 3\omega t ;$$

$$б) e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin(3\omega t - 180^\circ) ; ;$$

$$в) e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin(3\omega t - \psi_3).$$

Виразення (365) можна перевірити , застосувавши відому з тригонометрії формулу синусу двох кутів :

$$A_k \sin(\kappa\omega t + \psi_k) = A_k \sin \kappa\omega t \cos \psi_k + A_k \cos \kappa\omega t \sin \psi_k.$$

Позначив сталі величини

$$A_k \cos \psi_k = B_k; \quad A_k \sin \psi_k = C_k ,$$

отримаємо

$$A_k \sin(\kappa\omega t + \psi_k) = B_k \sin \kappa\omega t + C_k \cos \kappa\omega t.$$

Застосувавши подібний запис до всіх гармонічних складових ,несинусоїдну функцію можна виразити так :

$$Y = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + \\ + B_k \sin \kappa\omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_k \cos \kappa\omega t . (366)$$

Зворотній перехід від ряду (365) до ряду (366) неважко зробити , визначивши

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \quad i \quad tg \psi_k = \frac{C_k}{B_k} . (367)$$

При визначенні кута  $\psi_k$  необхідно ураховувати окремо знаки  $C_k$  і  $B_k$  , так як від них залежить величина кута. Наприклад, при позитивних  $C_k$  і  $B_k$  їх відношення позитивне, а кут лежить у пе-

ршій чверті, при негативних  $C_k$  і  $B_k$  їх відношення теж позитивне, але кут знаходиться у третій чверті.

При побудові синусоїд по осі абсцис необхідно відкладати початкову фазу  $k$ -ї гармоніки, перерелічивши її на масштаб основної гармоніки, тобто замість  $\psi_k$  відкласти  $\frac{\psi_k}{k}$ . Це витікає з того, що градуювання осі абсцис подається у масштабі першої гармоніки, тому на відрізок  $\omega t = 2\pi$  розміщується  $k$  повних циклів  $k$ -ї гармоніки.

Коефіцієнти  $A_0$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  ряду (366) визначаються за допомогою наступних формул :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y d\omega t ; \quad (368)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Y \sin k\omega t + d\omega t ; \quad (369)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Y \cos k\omega t + d\omega t . \quad (370)$$

Якщо закон зміни ординати несинусоїдної кривої можна зобразити у вигляді рівняння, то вираження (368) – (370) дозволяють у більшості випадків виконати аналітично розкладання її у тригонометричний ряд вигляду (366) і далі, якщо треба, перейти до ряду (365). Стала складова, як можна побачити з формули (368) є середнім значенням функції за її період.

Таким чином, стала складова у тригонометричному ряду відсутня, якщо середнє за період значення дорівнює нулю.

Коефіцієнт ряду (366) можна визначити графо-аналітичним методом, котрий дає приблизне значення коефіцієнтів, але зате є більш загальним, так як не потребує аналітичного вираження розкладаємої у ряд функції.

Періодична крива викреслюється на графіку (рис.194).

На протязі відрізка, який відповідає періоду, на рівних відстанях  $\Delta\omega t$  один від одного проводяться ординати кривої.

Коефіцієнт  $A_0$  визначається з приблизного вираження

$$A'_0 = \left( \sum_1^m Y \right) : m, (371)$$

де  $\sum Y$  - алгебрична сума всіх ординат, яка береться за період;

$m$ - число ординат.

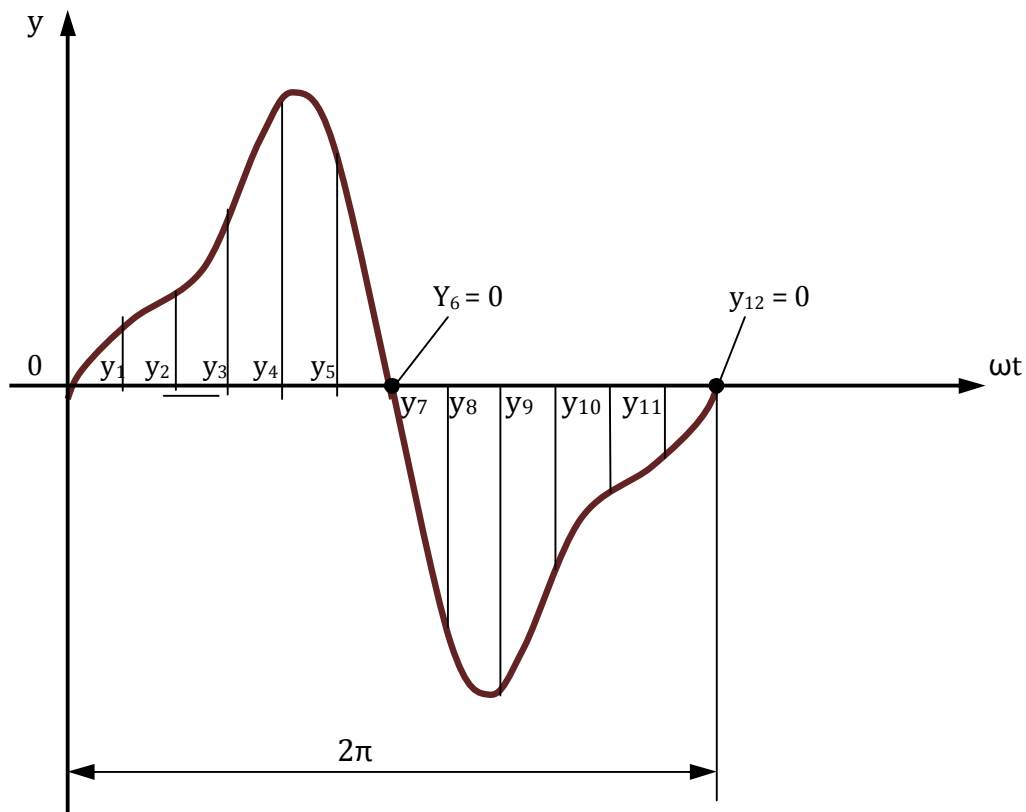


Рис. 194

Виразення (371) виникає з основного (368) .

Результат визначення  $A_0$  тим точніше, чим менше буде взятий інтервал між ординатами.

Аналогічно визначаються коефіцієнти  $B_k$  і  $C_k$  з виразень (369) і (370)

$$B_k \approx \frac{2}{m} \sum_1^m Y \sin k\omega t ; (372)$$

$$C_k \approx \frac{2}{m} \sum_1^m Y \cos k\omega t . (373)$$

## § 95. Симетричні несинусоїдні функції

Несинусоїдні функції , з котрими приходится зустрічатися в електротехніці , частіше всього мають симетрію. Одні з них симетричні відносно осі абсцис, інші – відносно осі ординат або початку координат. Симетрія несинусоїдних кривих полегшує їх аналітичне вираження.

### Функція, симетрична відносно осі абсцис

На рис.195 показаний графік симетричної функції відносно осі абсцис.

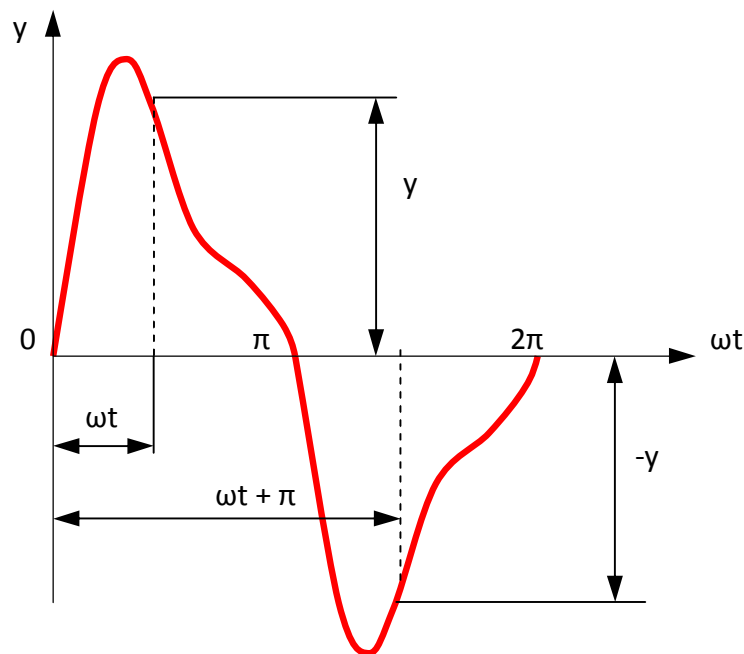


Рис. 195

Для такого графіка

$$Y(\omega t) = -Y(\omega t + \pi) . (374)$$

При симетрії відносно осі абсцис значення функції повторюються з зворотнім знаком через половину періоду, тому негативна півхвиля , яка зсунута на пів періоду , є дзеркальним відображенням позитивної півхвилі. Таку форму має крива струму у котушці з феромагнітним осердям при синусоїдній напрузці.



У складі тригонометричного ряду функції, котра підпорядковується співвідношенню (374), відсутня стала складова і гармоніка парного порядку.

Крива, симетрична відносно осі абсцис, виражається тригонометричним рядом такого вигляду:

$$Y(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + A_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots \quad (375)$$

або

$$Y(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + \dots + \\ + C_1 \cos \omega t + C_3 \cos 3\omega t + C_5 \cos 5\omega t + \dots \quad (376)$$

### Функція, симетрична відносно осі ординат

Симетрію відносно осі ординат мають криві, у котрих при зміні знака аргументу величина і знак функції не змінюються (рис.196).

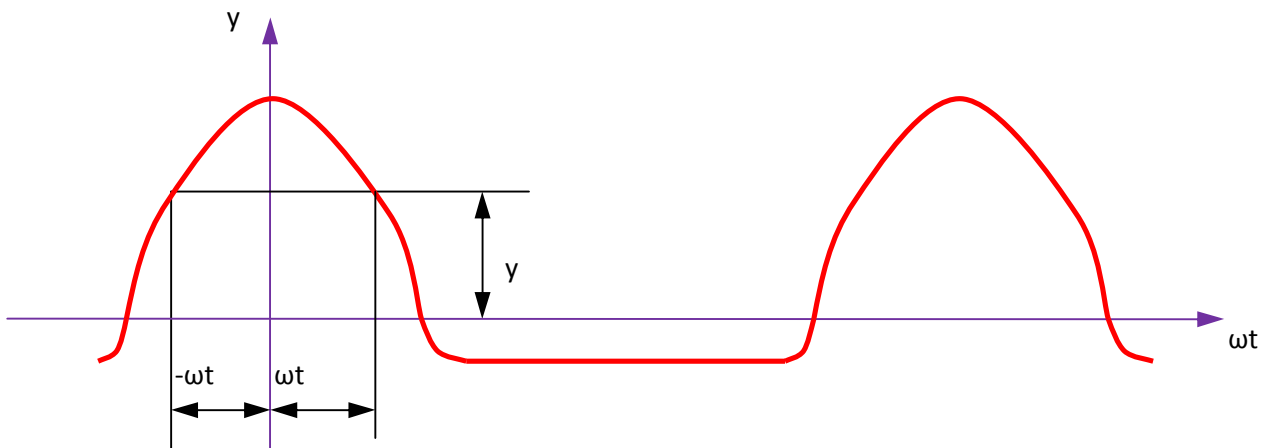


Рис. 196

$$Y(\omega t) = Y(-\omega t). \quad (377)$$

Таку симетрію має, наприклад, струм у навантаженні схеми однопівперіодного випрямлення (рис.197).

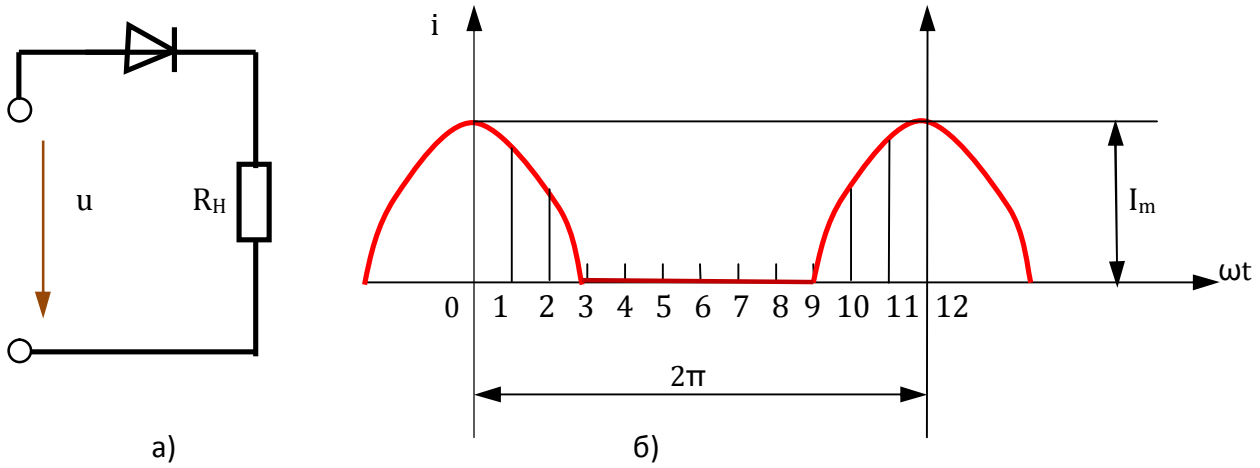


Рис.197

Функція, симетрична відносно осі ординат не має синусів :

$$Y(\omega t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (378)$$

Функція, симетрична відносно початку координат

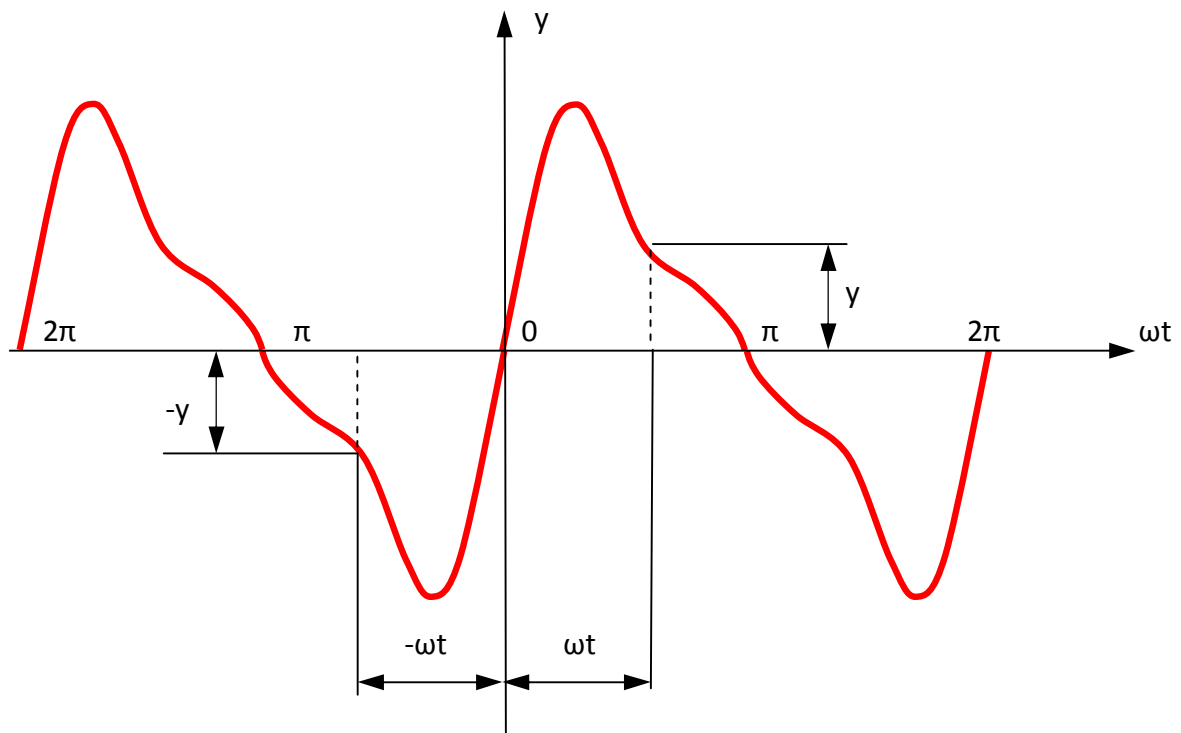


Рис. 198

Симетрія відносно початку координат (рис.198) відповідає умові

$$Y(\omega t) = -Y(-\omega t). \quad (379)$$

У цьому випадку при зміні знака аргументу функція змінює знак, не змінюючи величини. Така функція не має сталої складової і косинусів.

Також можна побачити у даному випадку, що в обох половинах періоду є дві рівні по величині ординати з різними знаками. Тому середнє значення функції за період, або стала складова, дорівнює нулю. Відсутні і несиметричні відносно початку координат косинусоїдні складові.

Функція має тільки ряд синусів, які мають симетрію такого ж характеру, як і функція в цілому:

$$Y(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (380)$$

## § 96. Діюча величина несинусоїдного струму і потужність кола

При розрахунку електричних кіл з несинусоїдними струмами і напругами визначають величини струмів, напруг та потужностей. При цьому використовують поняття про діючі величини несинусоїдних струмів і напруг.

Як вже відомо, діюча величина синусоїдного змінного струму численно дорівнює такому постійному струму, при котрому виділяється стільки ж тепла, скільки при змінному струмі в одному і тому ж резисторі за однаковий час, який дорівнює одному періоду  $T$ . Із такої ж умови визначають діючу величину змінного несинусоїдного струму.

При цьому необхідно ураховувати, що несинусоїдний струм складається з постійної складової і ряду синусоїдних гармонік:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 \dots = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \quad (381)$$

Загальна кількість тепла, котра виділяється при несинусоїдному струмі в деякому елементі кола з опором  $R$  на протязі одного періоду  $T$ , буде дорівнювати сумі кількостей тепла від всіх його складових. В даному випадку припускаємо, що опір  $R$  не залежить від частоти, тобто поверхневий ефект не ураховується:

$$Q = Q_0 + \sum Q_k, \quad (382)$$

де  $Q$  – тепло, яке виділяється за один період  $T$  при несинусоїдному струмі, діюча величина котрого дорівнює  $I$ :

$$Q = I^2 RT.$$

$Q_0$  – тепло, яке виділяється за той же час при струмі, який дорівнює сталій складовій:

$$Q = I_0^2 RT.$$

За час періоду  $T_k$  при струмі, який дорівнює  $k$ -ї складовій виділяється тепла

$$Q'_k = \int_0^{T_k} i_k^2 R dt = I_k^2 RT_k,$$

де  $I_k$  – діюча величина струму  $k$ -ї гармоніки. За час, який дорівнює періоду основної гармоніки, виділяється в  $k$  разів більше тепла:

$$Q_k = kQ'_k = I_k^2 R \cdot k \cdot T_k = I_k^2 RT.$$

Після підстановки в (382) отримуємо

$$I^2 RT = I_0^2 RT + I_1^2 RT + I_2^2 RT + \dots + I_k^2 RT \quad (383)$$

або

$$I^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2.$$

Звідси наступне, що діюча величина несинусоїдного струму є середньою квадратичною із сталої складової і діючих величин синусоїдних складових цього струму:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}. \quad (384)$$

Аналогічне вираження можна отримати і для діючої величини несинусоїдної напруги :

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2}. \quad (385)$$

Діючі величини несинусоїдних струмів і напруг вимірюються електровимірювальними приладами теплової електромагнітної і електродинамічної систем.

Несинусоїдні періодичні криві характеризуються коефіцієнтом амплітуди і коефіцієнтом форми, а також коефіцієнтом перекручення  $d$ .

Коефіцієнт перекручення дорівнює відношенню діючих значень основної гармоніки і всієї функції

$$d = \frac{A_1}{A}. \quad (386)$$

Для синусоїди  $d = 1$ .

Для трикутної форми кривої (рис.199)  $d \approx 0,99$ , а для прямокутної форми (рис.200)  $d = 0,9$ .

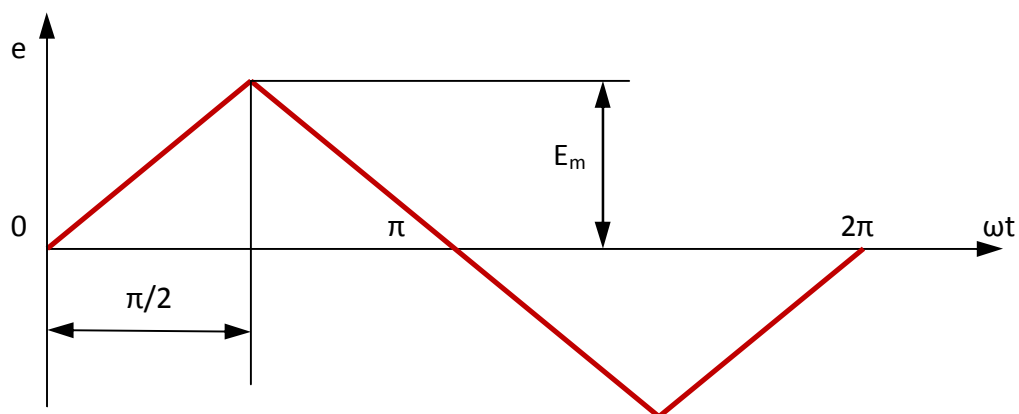


Рис. 199

Вираження (383) дає підставу для визначення активної (середньої за період  $T$ ) потужності у колі при несинусоїдному струмі.

Доданки у правій частині цього вираження визначають енергію, яка відповідає кожній складовій струму  $i$ , виділяємо у колі за період  $T$ .

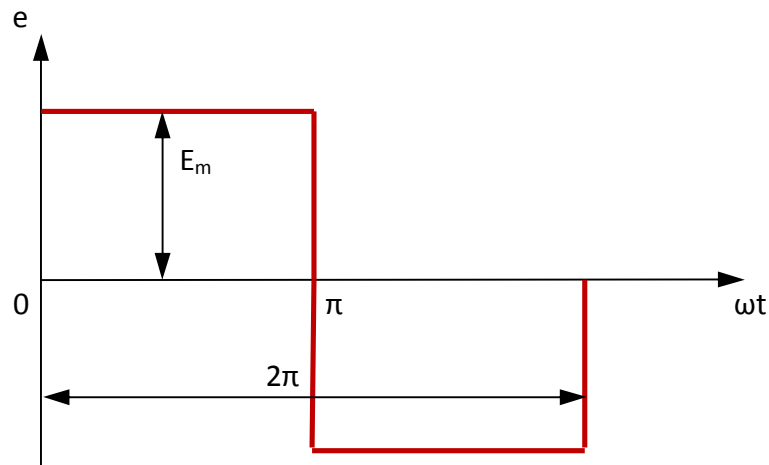


Рис. 200

Після скорочення на  $T$  отримуємо рівняння активних потужностей

$$I^2 R = I_0^2 R + I_1^2 R + I_2^2 R + \dots + I_k^2 R \quad (387)$$

або

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k. \quad (388)$$

Активна потужність у колі несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей, які відповідають сталій складовій і окремим гармонікам.

Цей висновок розповсюджується на будь які кола (лінійні та нелінійні), так як формулу (388) можна отримати із загального визначення активної потужності, як середнього значення потужності за період:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (389)$$

## § 97. Розрахунок електричних кіл з несинусоїдними ЕРС і струмами

Цілі та задачі розрахунку електричних кіл з несинусоїдними струмами не відрізняються від тих, котрі були вказані для кіл постійного струму і кіл з синусоїдними напругами і струмами.

Розрахунок лінійного електричного кола з несинусоїдними ЕРС, виконується на основі принципу накладання . Застосування принципу накладання обумовлено можливістю подати несинусоїдну ЕРС у вигляді суми сталої і синусоїдної складових :

$$e = E_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \dots$$

Джерело несинусоїдної ЕРС можна зобразити як послідовне з'єднання джерела сталої ЕРС і джерел синусоїдних ЕРС з відповідними частотами.

Розглядаючи дію кожного джерела окремо, можна визначити складові струму на всіх ділянках кола , виконавши розрахунок відомими методами.

Миттєва величина загального струму на будь-якій ділянці кола дорівнює алгебричній сумі миттєвих струмів від кожного джерела :

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots$$

Отже, розрахунок лінійного кола з несинусоїдною ЕРС зводиться до рішення кількох задач: визначення однієї сталої складової і ряду синусоїдних складових струму , число котрих дорівнює числу синусоїдних складових ЕРС.

Вирішуючи ці задачі , треба пам'ятати , що реактивні опори залежать від частоти . Тому для кожної гармонічної складової необхідно визначити опори кола.

Індуктивний та ємнісний опори для першої гармоніки знаходять з відомих формул.

Той же опір для  $k$ -ї гармоніки відрізняється від опора для першої гармоніки у  $k$  разів :

$$X_{kL} = \omega_k X_L = k\omega_1 L = kX_{1L} ;$$

$$X_{kC} = \frac{1}{\omega_k C} = \frac{1}{k\omega_1 C} = \frac{X_{1C}}{k} .$$

Активний опір із-за поверхневого ефекту теж залежить від частоти. Але для невисоких частот і малих перерізів проводів , активний опір можна рахувати сталим , який дорівнює опору постійного струму.

Реактивний опір конденсатора зменшується з ростом частоти, тому даже при напрузі, близькій до синусоїдної, складові струму вищих гармонік можуть досягати значних величин. Дякуючи цьому крива струму при ємнісному навантаженні більше відрізняється від синусоїди, чим крива напруги.

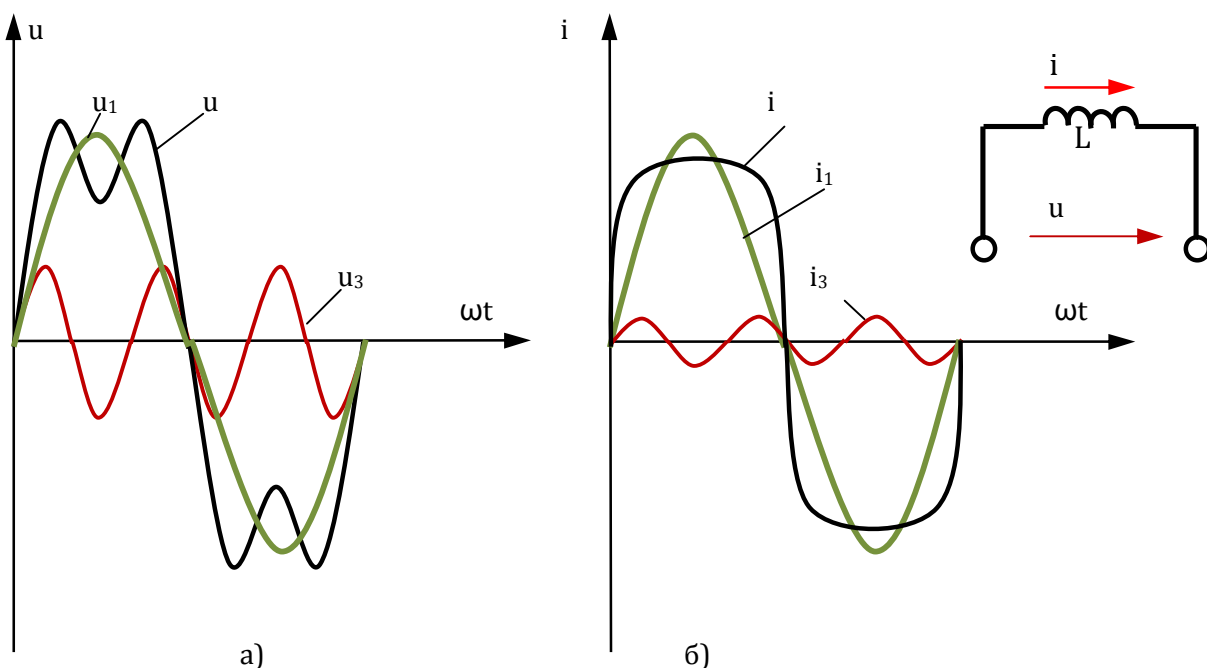
При індуктивному навантаженні крива струму ближче до синусоїди, чим крива напруги, так як збільшенням частоти індуктивний опір збільшується і вищі гармоніки проявляються слабше. Це положення ілюструється рис. 201, на якому зображені графіки напруги (а) і струму у колі з індуктивністю (б) і у колі з ємністю (в). Однакова для обох кіл несинусоїдна напруга має першу та третю гармоніки.

Опори для першої гармоніки також прийняті однакові ( $X_{1L} = X_{1C}$ , тобто  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ). Опір для третьої гармоніки у колі:

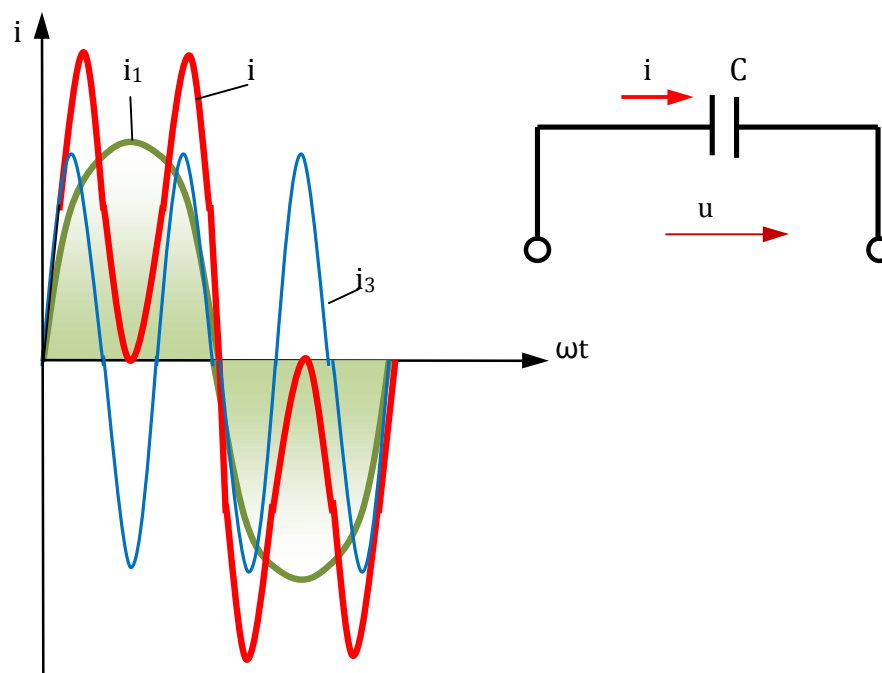
$$\text{з індуктивністю } X_{3L} = 3\omega L = 3X_{1L},$$

$$\text{з ємністю } X_{3C} = \frac{1}{3\omega C} = \frac{X_{1C}}{3}.$$

При такому співвідношенні опорів перші гармоніки струму в обох колах однакові, третя гармоніка струму у колі з індуктивністю менше третьої гармоніки струму у колі з ємністю у дев'ять разів.







(в)

Рис.201

При визначенні синусоїдних складових струму можна користуватися символічним методом і будувати векторні діаграми. В той же час загальний струм не можливо визначити складанням комплексів або векторів складових різних частот.

Таке складання синусоїдних величин можливо лише тоді, коли вони мають однакову частоту. У цьому випадку відповідні вектори обертаються з однаковою частотою, а їх взаємне розташування на кресленні не змінюється.

Вектори, які зображають синусоїдні величини різних частот, обертаються з різними кутовими швидкостями, тому їх взаємне розташування на кресленні безперервно змінюється і складання таких векторів неможливо.

Іноді для спрощення розрахунків несинусоїдні струми і напруги замінюють еквівалентними синусоїдними, які мають такі ж діючі величини.

Дякуючи такій заміні можна використовувати векторні діаграми і отримані на їх основі розрахункові формули.

## § 98. Вищі гармоніки у трифазних колах

Трифазні кола у відношенні до вищих гармонік напруг і струмів мають деякі особливості. Розглянемо відомі схеми з'єднання трифазних систем при несинусоїдних напругах. При

цьому будемо вважати, що напруги не мають сталих складових і парних гармонік, тобто розглядаються криві напруг, симетричні відносно осі абсцис, котрі на практиці зустрічаються найбільше часто.

Симетрична трифазна система напруг, як відомо, характеризується тим, що криві напруг у всіх фазах за формою однакові, але зсунуті на одну третю періоду ( $\frac{2\pi}{3}$ ).

Основну гармоніку напруг можна виразити системою трьох рівнянь

$$\left. \begin{aligned} u_{1A} &= U_{1m} \sin \omega t ; \\ u_{1B} &= U_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) ; \\ u_{1C} &= U_{1m} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \right\}$$

Система рівнянь для  $k$ -х гармонік фазної напруги відрізняється від попередньої тим, що аргумент синусоїдної функції збільшений у  $k$  разів :

$$\begin{aligned} u_{kA} &= U_{km} \sin k\omega t ; \\ u_{kB} &= U_{km} \sin\left(k\omega t - \frac{2\pi k}{3}\right) ; \\ u_{kC} &= U_{km} \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi k}{3}\right). \end{aligned}$$

Спочатку розглянемо гармоніки, кратні трьом, тобто приймаємо  $k = 3n$ , де  $n$  – ціле число :

$$\begin{aligned} u_{kA} &= U_{km} \sin 3n\omega t ; \\ u_{kB} &= U_{km} \sin(3n\omega t - 2\pi n) = U_{km} \sin 3n\omega t ; \end{aligned}$$

$$u_{кС} = U_{км} \sin(3n\omega t + 2\pi n) = U_{км} \sin 3n\omega t .$$

Напруги у всіх фазах однакові і співпадають за фазою, так як зсув на повний період (або ціле число періодів  $2\pi n$ ) рівнозначний відсутності зсуву.

Гармоніки кратні трьом, тобто 3,6,9,12 і т.д., створюють симетричну систему нульової послідовності.

На рис.202,а гармоніки напруг, кратні трьом, показані трьома однаковими векторами, співпадаючими за напрямом.

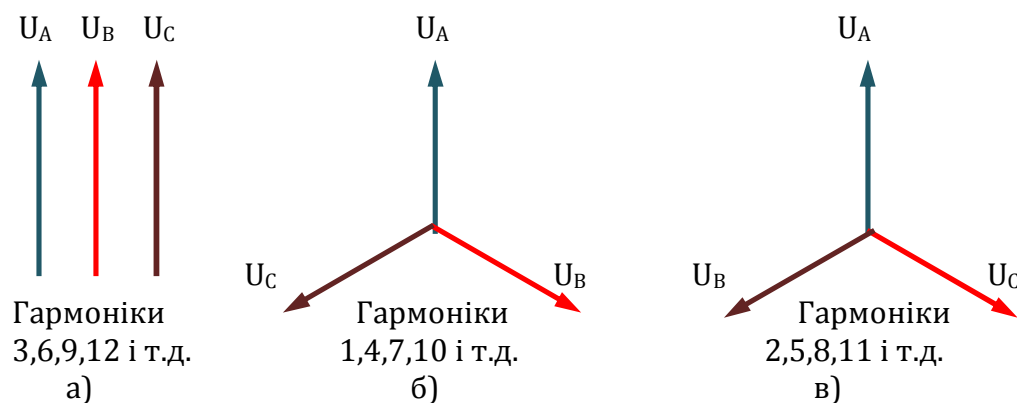


Рис. 202

Якщо  $k = 3n + 1$ , то напруга  $u_B$  відстає за фазою від  $u_A$  на кут  $\frac{2\pi}{3}$ , а  $u_C$  випереджає  $u_A$  на такий же кут.

Наприклад, четверті гармоніки фазних напруг ( $k = 4$ ) виражаються рівняннями

$$u_{4A} = U_{4m} \sin 4\omega t ;$$

$$u_{4B} = U_{4m} \sin \left[ 4\omega t - \frac{2\pi(3+1)}{3} \right] = U_{4m} \sin \left[ 4\omega t - \frac{2\pi}{3} \right];$$

$$u_{4C} = U_{4m} \sin \left[ 4\omega t + \frac{2\pi(3+1)}{3} \right] = U_{4m} \sin \left[ 4\omega t + \frac{2\pi}{3} \right].$$

Отже, гармоніки 1,4,7,10,13 і т.д. створюють симетричну систему прямої послідовності.

На рис. 202,б показана векторна діаграма напруг цих гармонік .

Вектори діаграми треба уявляти оберненими проти руху годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $k\omega$  , при цьому порядок проходження векторів прямий : за вектором  $U_A$  наступний вектор  $U_B$ , а потім  $U_C$  .

Приймаючи  $k = 3n - 1$  можна побачити, що напруга  $u_B$  випереджає  $u_A$  за фазою на кут  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $u_C$  відстає від  $u_A$  на такий же кут.

Наприклад, п'яті (  $k = 5$  ) гармоніки фазних напруг мають рівняння :

$$u_{5A} = U_{5m} \sin 5\omega t ;$$

$$u_{5B} = U_{5m} \sin \left[ 5\omega t - \frac{2\pi(6-1)}{3} \right] = U_{5m} \sin \left[ 5\omega t + \frac{2\pi}{3} \right];$$

$$u_{5C} = U_{5m} \sin \left[ 5\omega t + \frac{2\pi(6-1)}{3} \right] = U_{5m} \sin \left[ 5\omega t - \frac{2\pi}{3} \right].$$

Гармоніки 2,5,8,11,14 і т.д. створюють симетричну систему зворотної послідовності. Порядок проходження векторів діаграми на рис. 202,в при оберненні їх проти руху годинникової стрілки зворотній : за вектором  $u_A$  наступний  $u_C$  і далі  $u_B$  (проходження векторів у прямому порядку  $u_A \rightarrow u_B \rightarrow u_C$  відповідає оберненню їх у зворотному напрямку за рухом годинникової стрілки ).Якщо напруги фаз мають однакові сталі складові, то у сукупності їх можна розглядати як складову нульової послідовності при частоті, яка дорівнює нулю.

### З'єднання зіркою

При з'єднанні обмоток джерела зіркою (рис.203) лінійні напруги дорівнюють різницям фазних напруг двох суміжних фаз .

Збігаючись за фазою, гармоніки фазних напруг, кратні трьом (  $k = 3,6,9,\dots$ ), при відніманні дадуть нуль. Тому у лінійних напругах гармоніки , кратні трьом відсутні.

По цій причині при несинусоїдних напругах

$$\frac{U_n}{U_\phi} < \sqrt{3} .$$

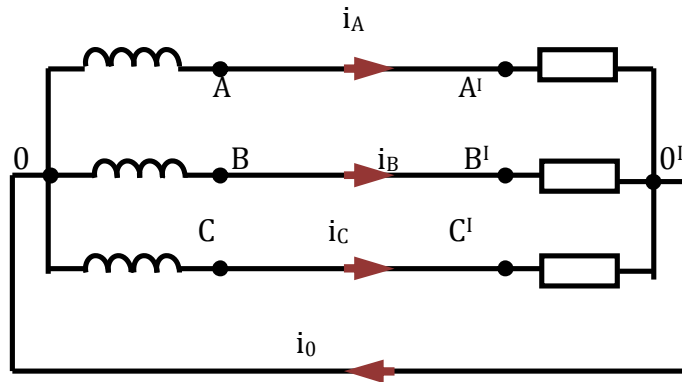


Рис.203

Дійсно :

$$\left. \begin{aligned} U_{\phi} &= \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots} \\ U_n &= \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots} \end{aligned} \right\} \quad (390)$$

Розглянемо два випадки симетричного навантаження , з'єднаного зіркою :

За наявності нульового проводу треті гармоніки підсумовуються, створюя струм у нульовому проводі :

$$I_{03} = 3I_3.$$

Це також відноситься і до вищих гармонік кратним трьом. Всі інші гармоніки, які створюють системи прямої або зворотної послідовності, в сумі дають нуль.

Таким чином, при симетричному навантаженні у нульовому проводі є струм, який дорівнює потроєній сумі струмів вищих гармонік нульової послідовності :

$$I_0 = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots} \quad (391)$$

При відсутності нульового проводу сума фазних струмів в будь-якому випадку дорівнює нулю, тому у складі фазних струмів гармоніки, кратні трьом , повинні бути відсутніми.

Отже, фазні напруги на навантаженні не можуть мати гармоніки, кратні трьом.

Для струмів нульової послідовності відсутність нульового проводу означає розрив у колі на ділянці між нульовими точками джерела і приймача. Таким чином, між нульовими точками створюється напруга ( зміщення нейтралі) кожної гармоніки, кратної трьом, причому величина зміщення дорівнює величині цієї гармоніки у фазній напрузі джерела.

Ураховуючи всі гармоніки, які визивають зміщення, отримаємо напругу між нульовими точками джерела і приймача навіть при симетричному навантаженні :

$$U_0 = \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + U_{15}^2 + \dots} \quad (392)$$

Таке зміщення нейтралі, пов'язане з дією гармонік струму, кратних трьом, може спостерігатися в електричних мережах 6 – 35 кВ з ізольованою нейтраллю.

### З'єднання трикутником

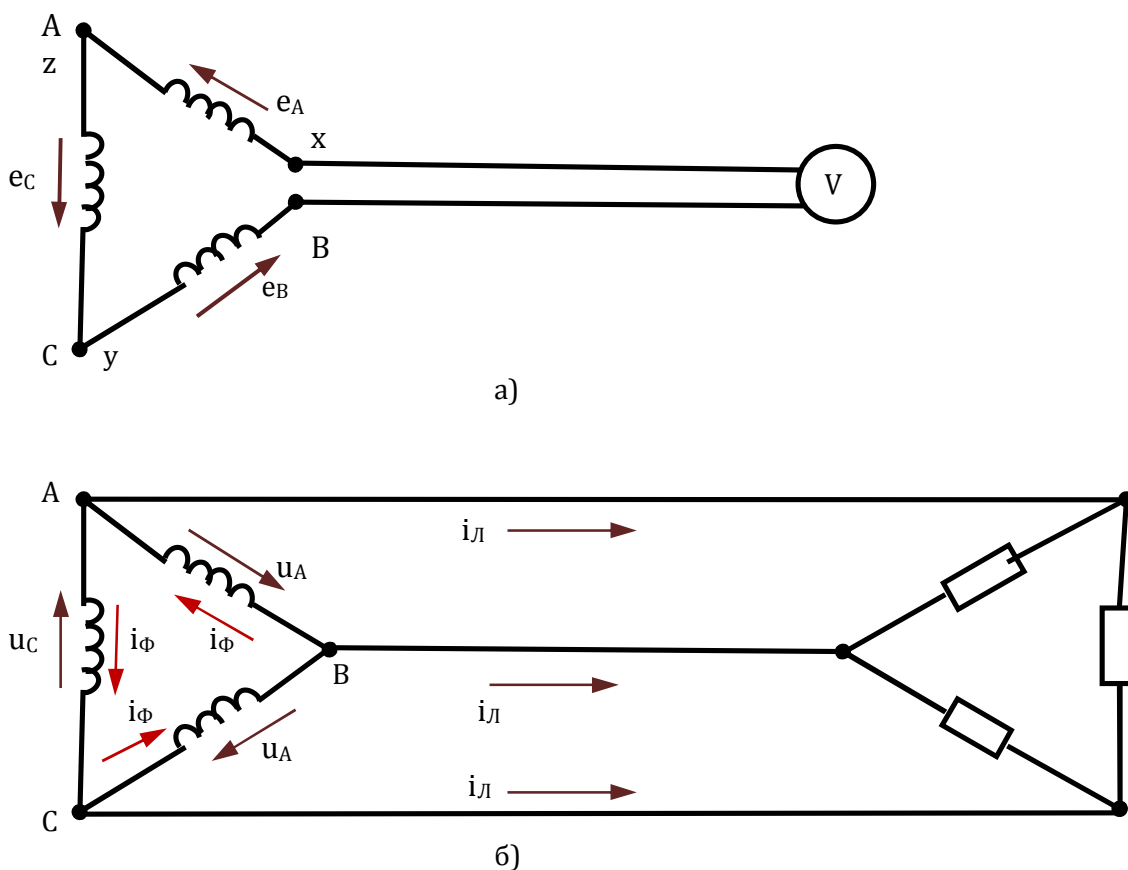


Рис.204

Обмотки генератора або трансформатора, які з'єднані трикутником (рис.204) створюють замкнутий контур.

Результуюча ЕРС трьох фаз у цьому контурі не має гармонік, кратних трьом, так як трифазна система ЕРС кожної гармоніки є симетричною системою прямої або зворотної послідовності.

При наявності в ЕРС обмоток гармонік кратних трьом, останні створюють системи нульової послідовності, тому результуюча ЕРС гармоніки, кратної трьом, дорівнює потроєній ЕРС однієї фази.

Наприклад, результуюча ЕРС третьої гармоніки

$$E'_3 = 3E_3.$$

Вольтметр, включений послідовно в контур обмоток джерела, показує загальну напругу

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \dots} \quad (393)$$

У замкнутому трикутнику обмоток джерела без навантаження (зовнішнє коло джерела розімкнуте), результуюча ЕРС гармонік, кратних трьом, визиває струм, котрий умовно називають внутрішнім або зрівнювальним (рис.204,б).

В обмотках навантаженого джерела крім струму навантаження існує той же зрівнювальний струм гармонік, кратних трьом.

Зрівнювальний струм визиває в обмотках джерела падіння напруги, які зрівноважують ЕРС цих гармонік.

Результуюча ЕРС гармонік не кратних трьом, є фазною (і лінійною) напругою джерела при відсутності навантаження

$$U_\phi = \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots} \quad (394)$$

Відсутність у напрузі джерела гармонік, кратних трьом, з'являється причиною відсутності цих гармонік в струмах зовнішнього кола.

Таким чином, фазний струм генератора

$$I_{\phi} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + \dots}, \quad (395)$$

лінійний струм у зовнішньому колі

$$I_n = \sqrt{3} \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} \quad (396)$$

З формул (395) та (396) можна побачити, що

$$\frac{I_n}{I_{\phi}} < \sqrt{3}.$$

Зрівнювальний струм в обмотках джерела визиває додатковий їх нагрів, тому з'єднання трикутником обмоток генераторів звичайно не застосовується.

## ПФ.С.02.ПР.0.10.03 Перехідні процеси в електричних колах

### § 99. Загальні відомості про перехідні процеси

Перехідними називають процеси, що проходять при змінах режиму роботи в електричних колах. Ці процеси проходять в електричних колах при вмиканні на напругу, вимиканні джерела живлення, зміні параметрів, що вміщує коло.

Для розгляду особливостей перехідних процесів використовують два закони комутації.

За допомогою законів комутації виявляють початкові умови перехідних процесів.

Перший закон комутації формулюється так: сила струму у колі з індуктивністю не може змінюватися стрибком. Якщо припустити стрибкову зміну сили струму, то це вимагатиме нескінченної величини ЕРС самоіндукції, оскільки

$$e_L = - \frac{d}{dt} (Li).$$



За другим законом комутації напруга на обкладках конденсатора та заряд ємності не можуть змінюватися стрибком. В іншому разі струм у колі буде нескінченно великим :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt},$$

де  $q$  – заряд ємності,

$u_c$  - напруга обкладках конденсатора.

### § 100. Вмикання котушки індуктивності на постійну напругу

Розглянемо вмикання індуктивності на постійну напругу (рис.205).

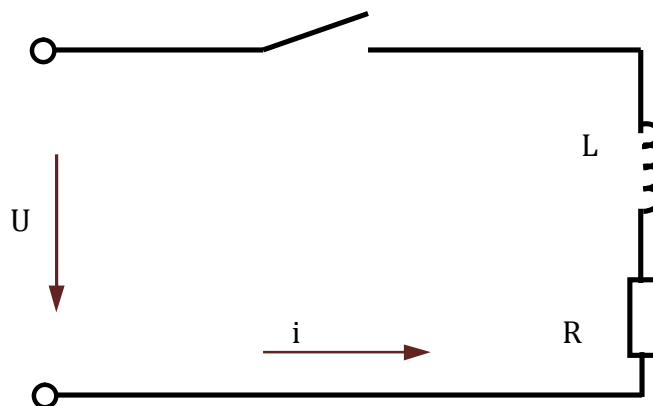


Рис.205

За другим законом Кірхгофа

$$U = iR + \frac{d}{dt}(Li).$$

Якщо  $L = const$ , то можна розділити змінні у цьому рівнянні та розв'язати його відносно струму, тобто

$$U = iR = L \frac{di}{dt};$$

$$\frac{U}{R} - i = \frac{L}{R} \frac{di}{dt}.$$

Звичайно  $\frac{U}{R} = I$  називають усталеним струмом, тобто таку силу має струм після закінчення перехідного процесу. Це струм, що встановлюється у колі, коли перехідних явищ немає. Змінні розділяються :

$$(I - i)dt = \frac{L}{R} di;$$

$$\frac{L}{R} dt = \frac{di}{I - i}.$$

Проінтегрувавши ліву та праву частини отримаємо :

$$\frac{R}{L} t = -\ln \frac{I - i}{A},$$

де  $A$  – стала інтегрування , що визначається за початковими умовами.

Після потенціювання можна дістати

$$e^{\frac{R}{L}t} = \frac{I - i}{A}.$$

Щоб визначити початкові умови , треба використати перший закон комутації. При  $t = 0$

$i = 0$  тому, що струм не може змінюватися стрибком ( до вмикання кола  $i = 0$ , тобто при  $t = 0$ ,  $i = 0$ ). За допомогою підстановки початкових умов у останній вираз визначаємо  $A = I$ .

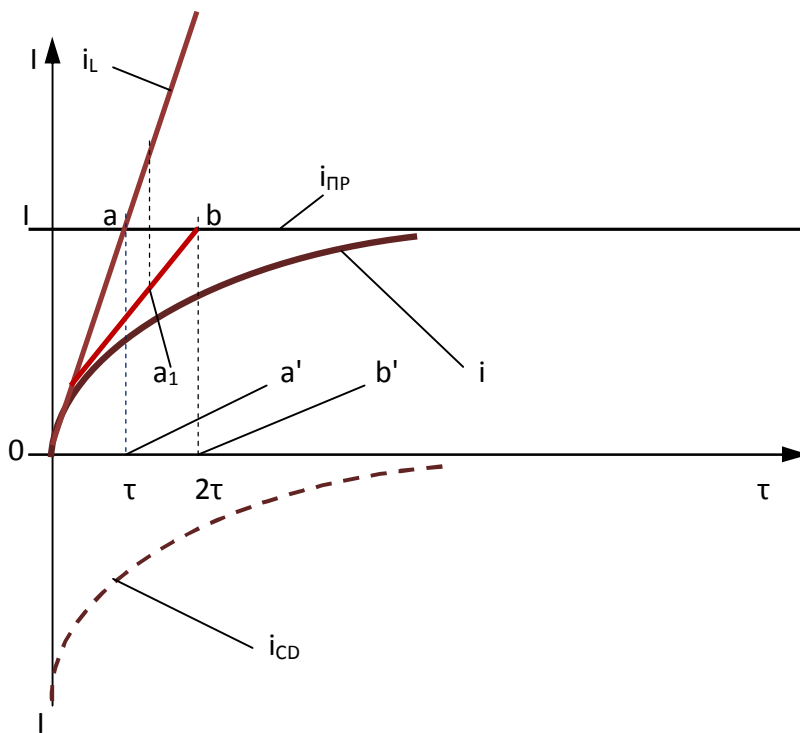


Рис. 206

Величина  $\frac{R}{L} = \tau$  називається сталою часу. Вона має розмірність часу і характеризує швидкість процесу (рис.207) .

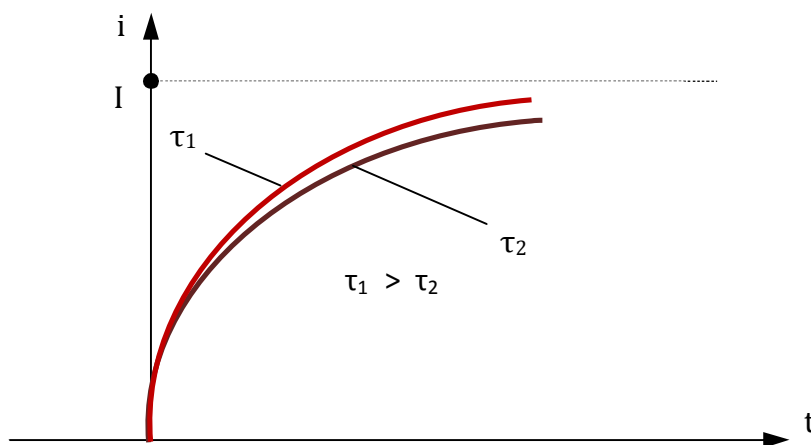


Рис.207

Таким чином, струм у колі змінюється за експонентною (рис.207)

$$i = I \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

З останнього рівняння можна побачити, що перехідний струм можна розглядати як алгебричну суму двох складових :

$$i = I - Ie^{-\frac{t}{\tau}} = i_{np} + i_{\sigma}.$$

Перша складова – це струм , усталений у колі після закінчення перехідного процесу (пряма  $i_{np}$  на рис.206):

$$i_{np} = I = \frac{U}{R}. \quad (397)$$

Цей струм визначається безперервною дією постійної напруги  $U$  у перехідному і в усталеному режимах. Його називають примусовим струмом.

Друга складова виникає на початку перехідного процесу і поступово згасає до нуля, після чого перехідний процес вважають скінченним (крива  $i_{\sigma}$  на рис.206). Ця складова перехідного струму називається вільним струмом. Він змінюється за законом

$$i_{\sigma} = -Ie^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (398)$$

Графік перехідного струму (рис.206) можна дістати склавши графіки примусового і вільного струмів. Однак треба пам'ятати , що фізично реальним на протязі перехідного процесу є загальний струм, який поступово збільшується від початкового ( $i = 0$ ) до усталеного ( $i = I$ ).

Одночасно з збільшенням струму здійснюється процес поступової зміни ( у даному випадку накоплення ) енергії

$$W_m = \frac{Li^2}{2}$$

в магнітному полі.

При  $t = 3\tau$  перехідний процес практично закінчується.

Стала часу у колах з індуктивністю залежить тільки від співвідношення індуктивності та активного опору.

### § 101. Вимикання котушки індуктивності від джерела постійної напруги

Припустимо, що індуктивність з усталеним струмом миттєво вимикають від джерела на резистор. За другим законом Кірхгофа рівняння кола має вигляд :

$$0 = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Проінтегрувавши це рівняння розподілом змінних, маємо

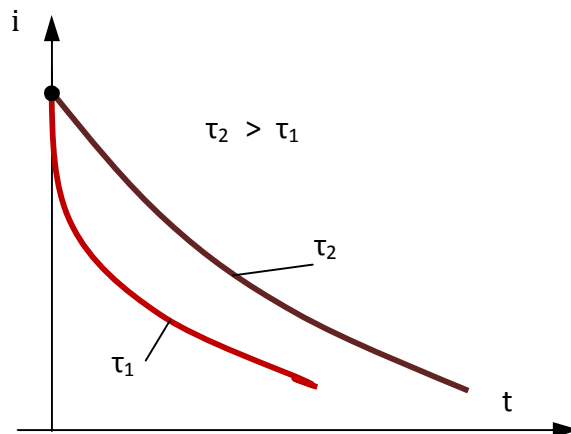


Рис.208

$$-\frac{R}{L} dt = \frac{di}{i} ; -\frac{R}{L} t = \ln \frac{i}{A} ;$$

$$e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{i}{A} ; i = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

де  $A$  – стала інтегрування, що визначається за початкових умов:  $t = 0, i = I$  (за першим законом комутації).

Таким чином, струм у колі змінюється за експонентою (рис.208).

## § 102. Зміна опору у колі з індуктивністю

При вмиканні котушки індуктивності з параметрами  $R, L$ , опір кола зменшується стрибком від  $\infty$  до  $R$ , а при вимиканні він збільшується від  $R$  до  $\infty$ .

В відповідності з такими змінами струм у колі за час перехідного періоду збільшується від 0 до  $I$  або зменшується від  $I$  до 0.

При зміні опору кола стрибком в кінцевих межах виникає перехідний процес, який у загальних рисах подібний до вже розглянутих процесів.

Деякі особливості перехідного процесу обумовлені тим, що при зменшенні опору струм збільшується починаючи з деякої кінцевої величини, а при збільшенні опору струм зменшується не до нуля.

### Зменшення опору у колі

При розімкненому рубильнику  $R$  у колі з послідовно з'єднаними опором  $R_1$  і котушкою  $R_2, L$  (рис.209) усталений струм

$$I_1 = U(R_1 + R_2).$$

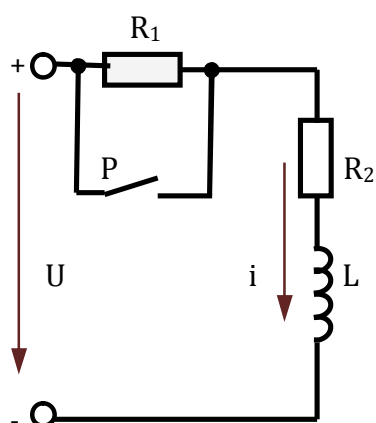


Рис.209

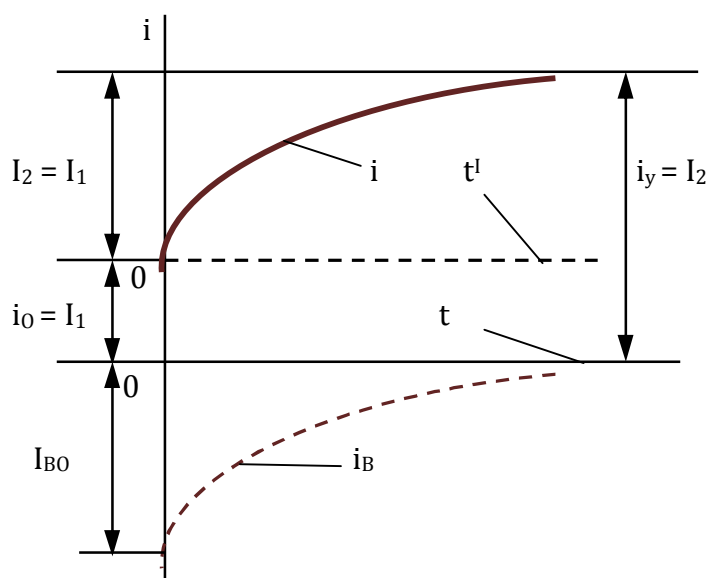


Рис. 210

Після замикання рубильника опір у колі раптово зменшується до  $R_2$ , а струм поступово збільшується до

$$I_2 = \frac{U}{R_2}.$$

Внаслідок зменшення опору у колі виникає додатковий вільний струм ( $i_{в0}$ ), початкова величина якого визначається в відповідності з першим законом комутації :

$$i_{в0} = I_1 - I_2 .$$

Якщо до примусового струму  $i_{пр.} = I_2$  додати вільний струм  $i_{в0} = I_1 - I_2$ , то дістанемо перехідний струм, який у початковий момент зберігає свою попередню величину  $I_1$  :

$$i_0 = i_{пр0} + i_{в0} = I_2 + I_1 - I_2 = I_1 .$$

Вільний струм зменшується на протязі перехідного процесу до нуля за відомим законом (рис.210).

По аналогії з формулою (398) маємо

$$i_{в} = i_{в0} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = (I_1 - I_2) e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

або

$$i_{в} = -(I_2 - I_1) e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

де

$$\tau_2 = \frac{L}{R_2} ;$$

$$i = i_{пр} + i_{в} = I_2 - (I_2 - I_1) e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (399)$$

## Збільшення опору у колі

Зворотній перехід від другого режиму до першого здійснюється після розмикання рубильника. Опір кола раптово збільшується, а струм  $I_2$  зменшується за експоненціальним законом, наближаючись до усталеної величини  $I_1$  (рис. 211).

(рис.209) усталений струм

$$I_1 = U(R_1 + R_2).$$

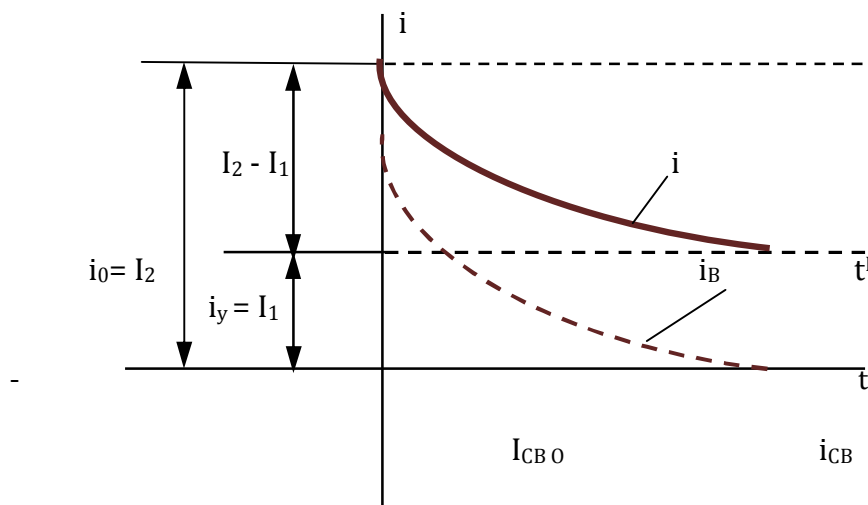


Рис.211

Примусова складова перехідного струму

$$i_{пр} = I_1.$$

Вільна складова по аналогії за формулою (399)

$$i_B = (I_2 - I_1)e^{-\frac{t}{\tau_1}},$$

де



$$\tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

Рівняння перехідного струму

$$i = i_{np} + i_{\epsilon} = I_1 + (I_2 - I_1)e^{-\frac{t}{\tau_1}}. \quad (400)$$

### § 103. Зарядка конденсатора

На рис. 212 наведено коло заряду конденсатора з джерелом постійного струму.

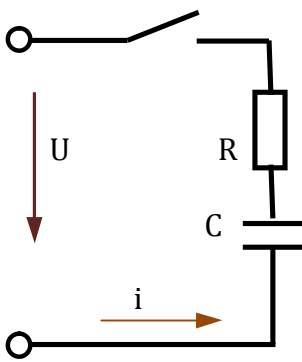


Рис. 212

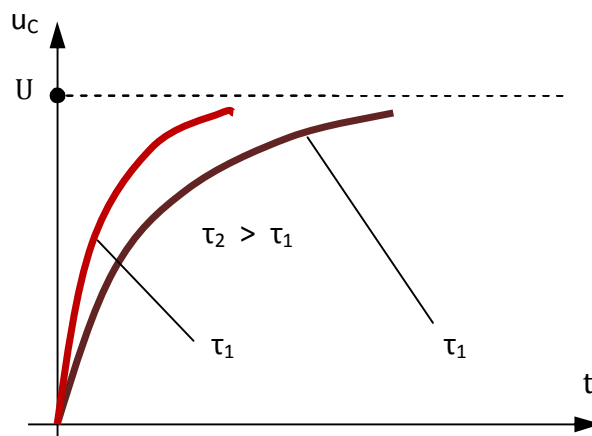


Рис. 213

Визначимо залежність зміни напруги від часу. Рівняння кола має вигляд

$$U = iR + u_c.$$

Якщо

$$i = C \frac{du_c}{dt},$$

то

$$U = RC \frac{du_c}{dt} + u_c.$$

Це диференціальне рівняння розв'язується розподілом змінних :

$$\frac{dt}{RC} = \frac{du_c}{U - u_c},$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln \frac{U - u_c}{A},$$

де  $A$  – стала інтегрування, що визначається за початковими умовами.

За другим законом комутації  $t = 0, U_c = 0, A = U$ .

Напруга на обкладках конденсатора змінюється за законом

$$u_c = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Ця залежність наведена на рис. 213.

Стала часу  $\tau = RC$  характеризує швидкість процесу.

### § 104. Розрядка конденсатора на опір

Розрядку конденсатора можна розглядати за схемою, що наведена на рис. 214.

Рівняння кола у цьому разі має вигляд

$$0 = u_c + iR.$$

Якщо поділити змінні та проінтегрувати, можна визначити закон зміни напруги на обкладках конденсатора

$$u_c = Ae^{\frac{t}{RC}},$$

де А – стала інтегрування (  $A = U$  ).

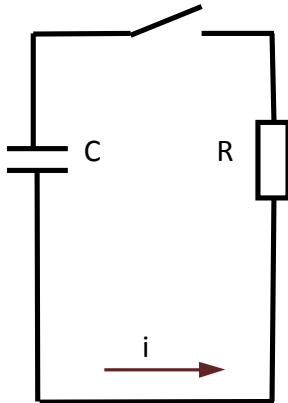


Рис. 214

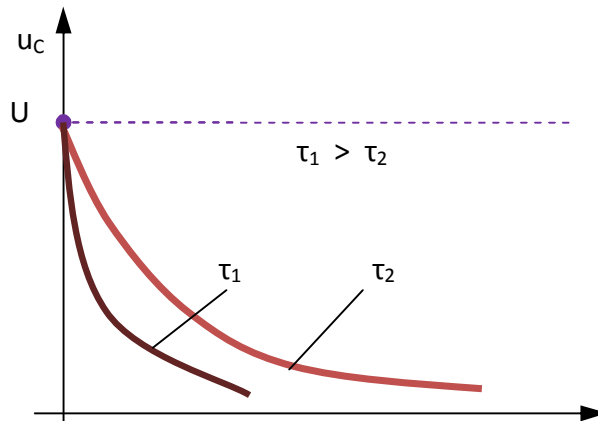


Рис. 215

Таким чином ,

$$u_c = Ue^{-t/RC}$$

Стала часу  $\tau = RC$  визначає швидкість перебігу процесу (рис.215).

### §105. Вмикання котушки індуктивності на синусоїдну напругу

Якщо індуктивність та активний опір увімкнути на синусоїдну ЕРС, то за другим законом Кірхгофа

$$u = iR + L \frac{di}{dt};$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi);$$

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = iR + L \frac{di}{dt},$$

де  $\psi$  – початкова фаза напруги .

Примусовий струм (струм під впливом синусоїдної ЕРС) завжди є синусоїдним і відстає від напруги на зсув фаз  $\varphi$ , тобто

$$i'_{np} = i_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Вільну складову струму можна визначити, розв'язуючи рівняння без правої частини, тобто

$$\frac{di_g}{dt} = -\frac{i_g}{L};$$

$$\frac{di_g}{i_g} = -\frac{R}{L} dt;$$

$$i_g = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

де  $A$  – стала інтегрування, що визначається за початкових умов. При  $t = 0, i = 0$ , але  $i = i_{np} + i_g$ , тобто  $i_{np} = -i_g, A = -i_{np}(0)$ ,

$$A = -I_m \sin(\psi - \varphi),$$

$$i_g = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Перехідний струм у колі ( $i = i_{np} + i_g$ ) змінюється за законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Примусова складова є синусоїда, вільна складова струму – експонента (рис.216). Перехідний струм може мати амплітуду майже удвічі більшу ніж амплітуда примусової складової.

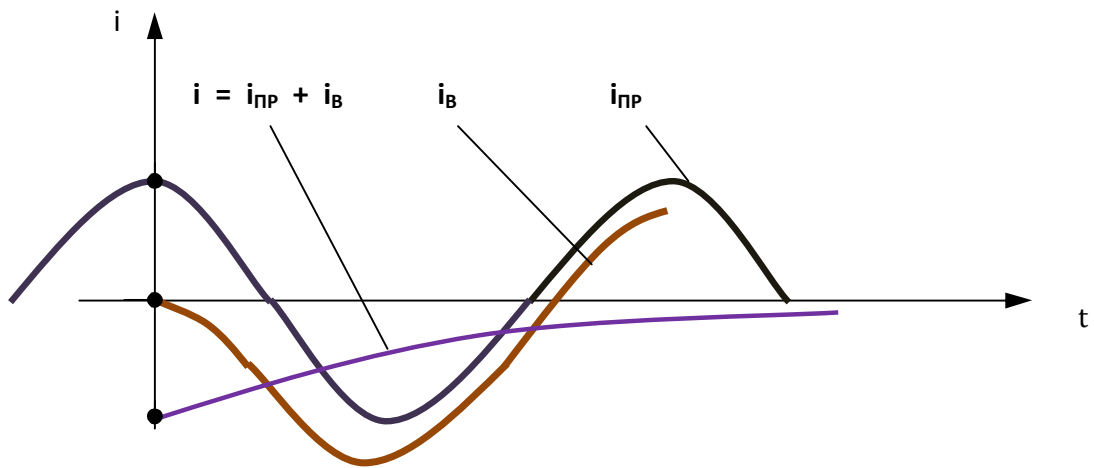


Рис. 216

### § 106. Коротке замикання у колі змінного струму

При раптовому короткому замиканні опір кола  $Z$  зменшується стрибком.

Розглянемо перехідний процес, який виникає в результаті зміни опора на схемі рис.217, де електричне навантаження  $Z_H$  підключено через опір  $Z_L$  до джерела синусоїдної напруги з сталою амплітудою і незмінною частотою.

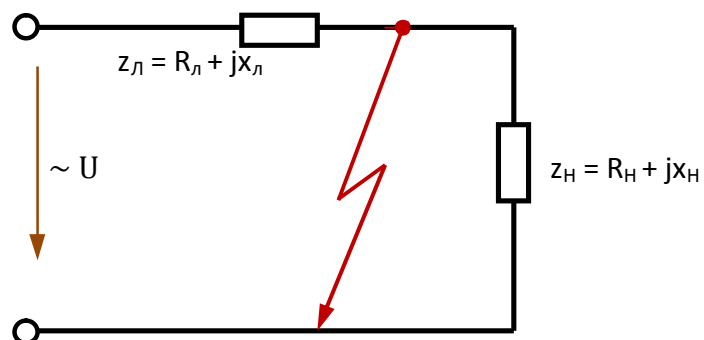


Рис.217

Такою схемою заміщення можна зобразити реальне коло, у якому до шин трансформаторної підстанції через лінію ( $Z_L$ ) підключена група споживачів електричної енергії ( $Z_H$ ).

Припустимо, що опір кола змінився в результаті короткого замикання в кінці лінії, як показано на рис. 217. При цьому будемо вважати, що синусоїдна напруга джерела залишається незмінною за амплітудою.

До короткого замикання усталений режим характеризується напругою  $\dot{U}$  і струмом :

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{(Z_L + Z_H)}$$

Рівняння напруги прикладеної до кола,

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi), (401)$$

де  $\psi$  – фазовий кут, який визначає напругу у початковий момент короткого замикання ( $t = 0$ ).

Усталений струм до короткого замикання відстає від напруги на кут  $\varphi_1 > 0$ , який залежить від параметрів лінії і навантаження :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_L + X_H}{R_L + R_H}$$

У цьому випадку рівняння струму

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \psi - \varphi_1). (402)$$

Усталений режим після короткого замикання характеризується тією ж напругою  $U$  і струмом

$$i_2 = \frac{\dot{U}}{Z_L}$$

Рівняння усталеного струму

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2), \quad (403)$$

де  $\varphi_2$ - кут зсуву фаз напруги і усталеного струму короткого замикання, визначаємий співвідношенням активного і реактивного опорів короткозамкнутого кола :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_n}{R_n}.$$

Перехідний струм у короткозамкнутій лінії показаний сумою примусової і вільної складових :

$$i_k = i_{np} + i_\theta$$

( $i_{np} = i_2$ - усталений струм короткого замикання).

Вільна складова струму змінюється за тим же законом по якому вона змінюється у колі за схемою рис.209 при зменшенні опору :

$$i_\theta = -K_7 e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

де  $\tau_2$  - стала часу короткозамкнутого кола :

$$\tau_2 = \frac{L_n}{R_n};$$

$K_7$  – стала величина , визначаємая з початкових умов.

$$K_7 = I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2) - I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1) . \quad (404)$$

Вільна складова перехідного струму

$$i_{\theta} = [I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1) - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2)] e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (405)$$

Перехідний струм короткого замикання виражається рівнянням

$$I_{\kappa} = I_{2m} (\sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + [I_{1m} \sin(\psi - \varphi_2) - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2)] e^{-\frac{t}{\tau_2}}).$$

На рис.218 показані графіки напруги і струму у колі до і після короткого замикання .

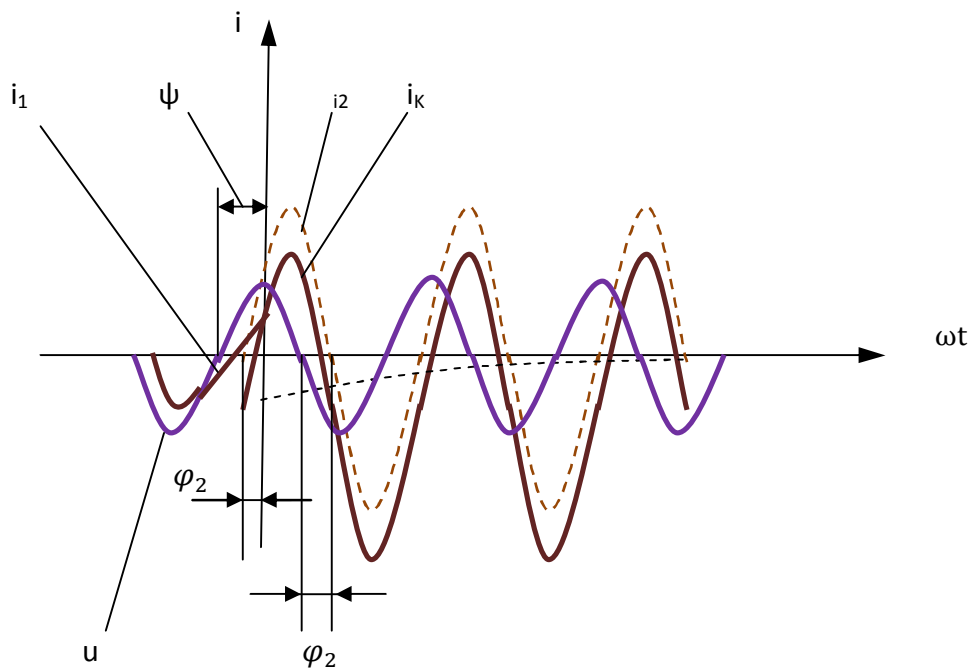


Рис.218

Примусова складова змінюється за синусоїдним законом, і тому її називають періодичною складовою, а вільна складова не змінює знак, і її називають аперіодичною складовою струму короткого замикання.

Початкову величину вільної складової визначають із рівняння (405):

$$i_{\theta 0} = I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1) - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2) .$$

Вона залежить від початкової фази напруги  $\psi$ , тобто від моменту появи короткого замикання.



Найбільш важким випадком є коротке замикання в момент, коли миттєва напруга на затискачах кола дорівнює нулю ( $\psi = 0$ ), а опір кола короткого замикання чисто індуктивний ( $\varphi_2 = 90^\circ$ ). Відповідний графік струму короткого замикання показаний на рис. 219.

В реальних електричних мережах індуктивний опір кола короткого замикання у багатьох випадках значно більше активного, тому при розрахунку струмів короткого замикання активний

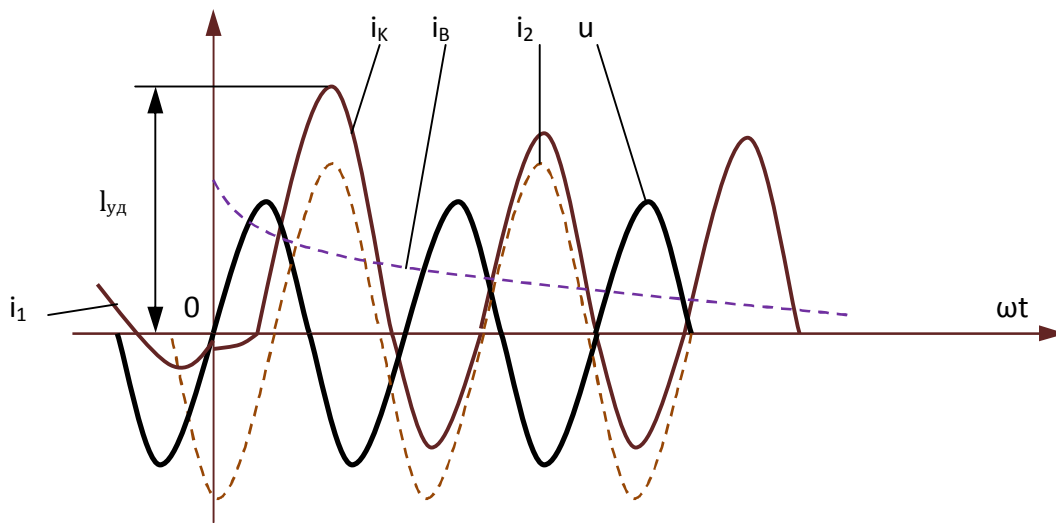


Рис.219

опір часто не ураховують. При цій умові вільна складова перехідного струму в момент  $t = 0$  близька до найбільш можливої величини, рівній амплітуді періодичної складової. Якщо активний опір кола короткого замикання невеликий, вільна складова загасає повільно, тому у самому несприятливому випадку за час, приблизно рівний півперіоду, струм короткого замикання досягає своєї найбільшої величини, близької до подвійної амплітуди усталеного струму короткого замикання.

Найбільший миттєвий струм короткого замикання називають ударним струмом ( $i_{уд}$ ).

Вільна складова струму короткого замикання загасає тим швидше, чим менше стала часу кола короткого замикання, тобто чим більше активний опір і менша індуктивність.

Параметри кіл короткого замикання в реальних колах звичайно такі, що вільна складова струму короткого замикання помітно виявляється протягом 0,1 – 0,2 с.

## Перелік використаної літератури

1. Ф. Е. Евдокимов  
Теоретические основы электротехники , Москва ,  
“Высшая школа” , 1981 г.
2. В. С. Попов  
Теоретическая электротехника , Москва ,  
“Энергоатомиздат” , 1990 г.
3. Ю.В. Буртаев , П.К. Овсянников  
Теоретические основы электротехники , Москва ,  
“Энергоатомиздат” , 1984 г.
4. Б. І. Паначевний  
Електротехніка , Харків ,  
“Торнадо” , 1999 р.
5. О. І. Шегедін , В. С. Маляр  
Теоретичні основи електротехніки (частина І) , Львів ,  
“Магнолія плюс” , 2004 р.