

### Тема: Транспортная задача

ЗАДАНИЕ. Из трех холодильников  $A_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , вмещающих мороженную рыбу в количествах  $a_i$  т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов  $B_j$ ,  $j = \overline{1,5}$  в количествах  $b_j$  т. Стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника  $A_i$  в магазин  $B_j$  заданы в виде матрицы  $C = ((c_{ij}))$ ,  $3 \times 5$ .

Написать математическую модель задачи и спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

$$\begin{array}{l}
 a_1=320, \quad b_2=140, \\
 a_2=280, \quad b_3=110, \\
 a_3=250, \quad b_4=230, \\
 b_1=150, \quad b_5=220
 \end{array}
 \quad C = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи. Пусть  $x_{ij}$  - количество т рыбы, перевозимой из холодильника (поставщика)  $A_i$  в магазин (потребитель)  $B_j$ . Тогда задача заключается в минимизации общих транспортных расходов

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,3}, \\ \sum_{i=1}^3 c_{ij} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Задача имеет закрытый тип, т.к. запасы груза  $320+280+250 = 850$  т равны суммарным потребностям магазинов  $150+140+110+230+220 = 850$  т.

Составим опорный план по правилу минимального элемента.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	0 20	0 23	0 20	0 15	0 24	320
A2	0 29	0 15	0 16	0 19	0 29	280
A3	0 6	0 11	0 10	0 9	0 8	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Введем некоторые обозначения:  $A_i^*$  - излишек нераспределенного груза от поставщика  $A_i$ ,  $B_j^*$  - недостача в поставке груза потребителю  $B_j$ .

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,1). Помещаем туда меньшее из чисел  $A_3^*=250$  и  $B_1^*=150$ .

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,5). Помещаем туда меньшее из чисел  $A_3^*=100$  и  $B_5^*=220$ .

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,4). Помещаем туда меньшее из чисел  $A_1^*=320$  и  $B_4^*=230$ .

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,2). Помещаем туда меньшее из чисел  $A_2^*=280$  и  $B_2^*=140$ .

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,3). Помещаем туда меньшее из чисел  $A_2^*=140$  и  $B_3^*=110$ . Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,5). Помещаем туда меньшее из чисел  $A_1^*=90$  и  $B_5^*=120$ .

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,5). Помещаем туда меньшее из чисел  $A_2^*=30$  и  $B_5^*=30$ .

Пришли к таблице:

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20	23	20	15	24	320
A2	29	15	16	19	29	280
A3	6	11	10	9	8	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Транспортные расходы составят  $z = 12040$ .

Решим задачу методом потенциалов. Т.к.  $m+n-1=7$  и имеем 7 загруженных клеток, план ациклический. Пусть  $U_i$  и  $V_j$  - потенциалы  $i$ -го склада и  $j$ -го магазина соответственно.

Полагая потенциал  $U_1=0$ , определяем остальные потенциалы из соотношения  $U_i+V_j=C_{ij}$ , просматривая все занятые клетки. Получим:

$$U_1=0$$

$$V_4=C_{1,4}-U_1=15$$

$$V_5=C_{1,5}-U_1=24$$

$$U_2=C_{2,5}-V_5=5$$

$$U_3=C_{3,5}-V_5=-16$$

$$V_2=C_{2,2}-U_2=10$$

$$V_3=C_{2,3}-U_2=11$$

$$V_1=C_{3,1}-U_3=22$$

Для свободных клеток определим значения оценок (разностей между прямыми и косвенными тарифами).

$$S_{1,1} = C_{1,1} - (U_1 + V_1) = -2.$$

$$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 13.$$

$$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 9.$$

$$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2 + V_1) = 2.$$

$$S_{2,4} = C_{2,4} - (U_2 + V_4) = -1.$$

$$S_{3,2} = C_{3,2} - (U_3 + V_2) = 17.$$

$$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 15.$$

$$S_{3,4} = C_{3,4} - (U_3 + V_4) = 10.$$

Имеем две клетки с отрицательными оценками – (1,1) и (2, 4). Выбираем клетку с наименьшей оценкой (1, 1) и строим для нее цикл.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 20	23	20	15	- 24	320
				<b>230</b>	<b>90</b>	
A2	29	15	16	19	29	280
		<b>140</b>	<b>110</b>		<b>30</b>	
A3	- 6	11	10	9	+ 8	250
	<b>150</b>				<b>100</b>	
Потребность	150	140	110	230	220	

Перемещаем по циклу груз величиной в 90 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".  
 В результате перемещения по циклу получим новый план:

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20	23	20	15	24	320
	<b>90</b>			<b>230</b>		
A2	29	15	16	19	29	280
		<b>140</b>	<b>110</b>		<b>30</b>	
A3	6	11	10	9	8	250
	<b>60</b>				<b>190</b>	
Потребность	150	140	110	230	220	

Целевая функция (транспортные расходы)  $z = 11860$ . Значение целевой функции изменилось на 180 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Проверим полученный план на оптимальность. Подсчитаем потенциалы.

$$U_1=0$$

$$V_1=C_{1,1}-U_1= 20$$

$$V_4=C_{1,4}-U_1= 15$$

$$U_3=C_{3,1}-V_1=-14$$

$$V_5=C_{3,5}-U_3= 22$$

$$U_2=C_{2,5}-V_5=7$$

$$V_2=C_{2,2}-U_2= 8$$

$$V_3=C_{2,3}-U_2= 9$$

Определяем значения оценок  $S_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$  для всех свободных клеток:

$$\begin{aligned}
 S_{1,2} &= C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 15. \\
 S_{1,3} &= C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 11. \\
 S_{1,5} &= C_{1,5} - (U_1 + V_5) = 2. \\
 S_{2,1} &= C_{2,1} - (U_2 + V_1) = 2. \\
 S_{2,4} &= C_{2,4} - (U_2 + V_4) = -3. \\
 S_{3,2} &= C_{3,2} - (U_3 + V_2) = 17. \\
 S_{3,3} &= C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 15. \\
 S_{3,4} &= C_{3,4} - (U_3 + V_4) = 8.
 \end{aligned}$$

Имеем клетку (2, 4) с отрицательной оценкой, план не оптимален. Строим для этой клетки цикл.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 20 90	23	20	- 15 230	24	320
A2	29	15 140	16 110	+ 19	- 29 30	280
A3	- 6 60	11	10	9	+ 8 190	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Перемещаем по циклу груз величиной в 30 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус". В результате перемещения по циклу получим новый план:

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 120	23	20	15 200	24	320
A2	29	15 140	16 110	19 30	29	280
A3	6 30	11	10	9	8 220	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Целевая функция (транспортные расходы)  $z = 11770$ , значение уменьшилось на 90 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Проверим полученный план на оптимальность. Подсчитаем потенциалы.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 0 \\
 V_1 &= C_{1,1} - U_1 = 20 \\
 V_4 &= C_{1,4} - U_1 = 15 \\
 U_2 &= C_{2,4} - V_4 = 4 \\
 U_3 &= C_{3,1} - V_1 = -14 \\
 V_5 &= C_{3,5} - U_3 = 22
 \end{aligned}$$

$$V_2 = C_{2,2} - U_2 = 11$$

$$V_3 = C_{2,3} - U_2 = 12$$

Определяем значения оценок для всех свободных клеток:

$$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 12.$$

$$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 8.$$

$$S_{1,5} = C_{1,5} - (U_1 + V_5) = 2.$$

$$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2 + V_1) = 5.$$

$$S_{2,5} = C_{2,5} - (U_2 + V_5) = 3.$$

$$S_{3,2} = C_{3,2} - (U_3 + V_2) = 14.$$

$$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 12.$$

$$S_{3,4} = C_{3,4} - (U_3 + V_4) = 8.$$

Так как все оценки  $S_{ij} \geq 0$ , то полученный план является оптимальным, минимальные транспортные расходы равны 11770. Оптимальный план перевозок представлен ниже.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 <b>120</b>	23	20	15 <b>200</b>	24	320
A2	29	15 <b>140</b>	16 <b>110</b>	19 <b>30</b>	29	280
A3	6 <b>30</b>	11	10	9	8 <b>220</b>	250
Потребность	150	140	110	230	220	