

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. П. Шпачук, В. О. Склярів

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

*(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за спеціальністю
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2019

Шпачук В. П. Технічна механіка. Конспект лекцій: (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / В. П. Шпачук, В. О. Склярів; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 179 с.

Автори :

д-р техн. наук, проф. В. П. Шпачук,
канд. техн. наук, доц. В. О. Склярів

Рецензент

А. О. Гарбуз, кандидат технічних наук кафедри теоретичної та будівельної механіки Харківського національного університету міського господарства ім. О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 1 від 31.08.2018.

Конспект містить Базові питання зі статички твердого тіла, довільненої системи сил, кінематики точки та твердого тіла, динаміки точки та твердого тіла як законів динаміки, диференціальні рівняння динаміки точки твердого тіла, а також основи опору матеріалів, де подано загальні принципи розрахунку елементів конструкцій; наведено приклади розрахування бруса на розтягування (стискування), зріз і зім'яття, поперечний згин.

Конспект складено з метою допомогти студентам електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів під час підготовки до занять, заліків та іспитів із курсу технічної механіки.

© В. П. Шпачук, В. О. Склярів, 2019

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019

ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Статика абсолютно твердого тіла	7
1.1 Базові визначення, поняття й аксіоми статички. Предмет статички	7
1.2 Класифікація систем сил	9
1.3 Аксіоми статички	9
1.4 Проекція сили на вісь, площину.....	12
1.5 Розклад сили на координатні складові.....	13
Питання для самоконтролю	14
2 В'язі та їх реакції	15
Питання для самоконтролю	18
3 Система збіжних сил	19
3.1 Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил	19
3.2 Умови рівноваги збіжних сил	22
3.3. Теорема про три непаралельні сили.....	23
3.4 Лема про паралельний перенос сили	25
Питання для самоконтролю	27
4 Умови рівноваги системи сил. Окремі випадки рівноваги	28
4.1 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил	28
4.2 Приклади розв'язання задач рівноваги	30
4.3 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл	32
Питання для самоконтролю	35
5 Розрахування плоскої ферми	36
5.1 Базові визначення і припущення	36
5.2 Порядок розрахунку плоскої ферми	38
Питання для самоконтролю	44
6 Базові твердження опору матеріалів	47
6.1 Базові допущення	47
6.2 Метод перетинів. Види навантаження	48
6.3 Напруги	52
Питання для самоконтролю	54

7 Розтягування і стиск	55
7.1 Нормальні сили і напруги в поперечному перерізі бруса	55
7.2 Переміщення й деформації. Закон Гука	60
7.3 Напружений стан під час одноосьового розтягнення.....	63
7.4 Розрахунки на міцність	66
7.5 Статично невизначені системи	68
Питання для самоконтролю	70
8 Крутіння	71
8.1 Чисте зрушення. Закон Гука під час зрушенні	71
8.2 Крутіння. Побудова епюр крутних моментів	72
8.3 Крутіння круглого прямого бруса. Базові передумови й формули	74
8.4 Розрахунки на міцність і твердість	79
Питання для самоконтролю	81
9 Геометричні характеристики плоских перетинів	82
9.1 Момент інерції перетинів	82
9.2 Поняття про головні центральні моменти інерції	84
9.3 Осьові моменти інерції найпростіших перетинів	86
Питання для самоконтролю	90
10 Вигин прямого бруса	91
10.1 Прямий вигин чистий і поперечний	91
10.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів	94
10.3 Базові розрахункові передумови і формули під час вигину.....	101
10.4 Розрахунки на міцність	104
10.5 Дотичні напруження під час поперечного вигину	107
Питання для самоконтролю	112
11 Кінематика точки	113
11.1 Способи завдання руху точки	113
11.2 Визначення швидкості та прискорення точки	115
11.3 Приклади розв'язання задач	123
Питання для самоконтролю	127

12	Поступальний і обертальний рухи твердого тіла	128
12.1	Поступальний рух твердого тіла	128
12.2	Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі	128
12.3	Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі	136
12.4	Приклади розв'язання задач	138
	Питання для самоконтролю	141
13	Плоскопаралельний рух твердого тіла	142
13.1	Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла	142
13.2	Визначення швидкостей точок плоскої фігури	143
13.3	Визначення прискорень точок плоскої фігури	148
13.4	Приклади розв'язання задач із визначення швидкостей точок тіла	148
13.5	Приклади розв'язання задач із визначення прискорень точок тіла	154
	Питання для самоконтролю	159
14	Диференціальні рівняння динаміки точки	160
14.1	Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	160
14.2	Прямолінійні коливання матеріальної точки	160
14.2.1	Вільні незатухаючі коливання	161
14.2.2	Вільні коливання за наявності сил опору (загасні коливання)	166
14.2.3	Вимушені коливання	169
	Питання для самоконтролю	176
	Список рекомендованих джерел	178
	Додаток А	179

ВСТУП

Цей конспект є частиною навчально-методичного комплексу за спеціальностями технічного профілю. Конспект призначений для вивчення загальнопрофесійної дисципліни «Технічна механіка». Навчально-методичні комплекти нового покоління включають традиційні і інноваційні навчальні матеріали, що дозволяють забезпечити вивчення загальноосвітніх і загальнопрофесійних дисциплін і професійних модулів. Кожен комплект містить підручники і навчальні посібники, засоби навчання та контролю, необхідні для засвоєння загальних і професійних компетенцій, зокрема й із урахуванням вимог працедавця. Навчальні видання доповнюються електронними освітніми ресурсами. Електронні ресурси містять теоретичні і практичні модулі з інтерактивними вправами і тренажерами, мультимедійні об'єкти, посилання на додаткові матеріали і ресурси в Інтернеті. У них включений термінологічний словник і електронний журнал, у якому фіксуються Базові параметри учбового процесу: час роботи, результат виконання контрольних і практичних завдань.

Відповідно до стандарту «Технічна механіка» включає розділи «Теоретична механіка» та «Опір матеріалів».

У розділі 1: «Теоретична механіка» викладено засади статички, кінематики, динаміки і наведені приклади рішення завдань.

У розділі 2: «Засади опору матеріалів» – подано загальні принципи розрахунку елементів конструкцій; наведено приклади розрахунків бруса на розтягування (стискування), зріз і зім'яло, поперечний згин. У цьому розділі розглядаються види напружених станів, гіпотези міцності, спільна дія кручення і вигину. Даються поняття про втомну міцність, динамічні навантаження і межу витривалості; розглядається стійкість при осьовому стискуванні стержня. Наводяться приклади розкриття статичної невизначеності стержневих систем.

У кінці кожної глави приведені контрольні питання. Вони допоможуть студентам проаналізувати викладений матеріал і перевірити свої знання.

1 СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1 Базові визначення, поняття і аксіоми статички. Предмет статички

Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються загальні твердження про сили, їх приведення до найпростішого вигляду та умови рівноваги матеріальних тіл, на які діють ці сили.

Під *рівновагою* розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. Умови рівноваги істотно залежать від того, чи є тіло твердим, *пружним*, рідким, газоподібним. У загальному курсі теоретичної механіки розглядаються тільки задачі про рівновагу абсолютно твердих тіл.

У статистиці розв'язуються такі Базові задачі: 1) приведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду; 2) визначення умов рівноваги сил, які діють на абсолютно тверде тіло. Ці задачі статички можна розв'язувати шляхом відповідних геометричних побудов або за допомогою числових розрахунків.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло, розмірами якого при вирішенні конкретної задачі можна знехтувати, або геометрична точка, яка наділена певною масою.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між частками якого залишається постійною. Тобто абсолютно тверде тіло зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

Сила – фізична величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами. Сила – величина векторна, її дія на абсолютно тверде тіло визначається: значенням або модулем сили; напрямом дії сили; точкою, в якій вона прикладена. Пряма *aa* (рис. 1.1), уздовж якої спрямована сила, називається *лінією дії сили*. Основною одиницею сили є 1 ньютон (Н). Це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в 1 м/с^2 ($1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м/с}^2$).

Графічно сила зображується спрямованим відрізком-вектором (рис. 1.1), довжина якого виражає у вибраному масштабі величину сили, а напрям відрізка відповідає напрямку сили. Силу позначатимемо буквою \vec{F} , а її величину (модуль) як F чи $|\vec{F}|$. Сукупність сил, що діють на абсолютно тверде тіло, називатимемо *системою сил* $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$.

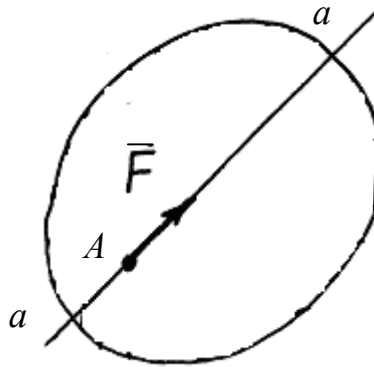


Рисунок 1.1 – Вектор сили

Наведемо ще такі визначення:

1. Тіло, яке не взаємодіє з іншими тілами і якому з даного твердження можна надати будь-яке переміщення у просторі, називається *вільним*.

2. Якщо одну систему сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, що діють на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$, не порушуючи при цьому стану спокою чи руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються *еквівалентними*: $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$.

3. Система сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, під дією якої вільне тверде тіло знаходиться у стані спокою, називається *зрівноваженою*, або *еквівалентною нулю*: $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$.

4. Якщо задана система сил $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n)$ еквівалентна одній силі, то ця сила називається *рівнодійною* \vec{R} заданої системи сил: $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n) \sim \vec{R}$.

5. Сила, яка прикладена до тіла в точці, називається *зосередженою*. *Точкою прикладання* сили називається та матеріальна частка тіла, до якої ця сила безпосередньо прикладена.

6. Сили, що діють на всі точки довжини, поверхні чи об'єму, називаються *розподіленими*.

Величину сили, яка припадає на одиницю довжини, площі або об'єму, називають *інтенсивністю*. Звичайно розподілену силу позначають буквою q , яка має розмірність Н/м, Н/м², Н/м³ відповідно. Прикладами розподілених сил є: тиск циліндричного котка на поверхню дороги; тиск колеса трамваю на рейку; тиск снігового шару на покрівлю; тиск рідини на стінки трубопроводу, посудини, греблі; сили ваги тіла та ін. Позначають характер дії розподілених сил графіком (епюрою). На рисунку 1.2, а, б, в наведено епюри рівномірної, трикуткової і довільної інтенсивностей діючих сил відповідно.

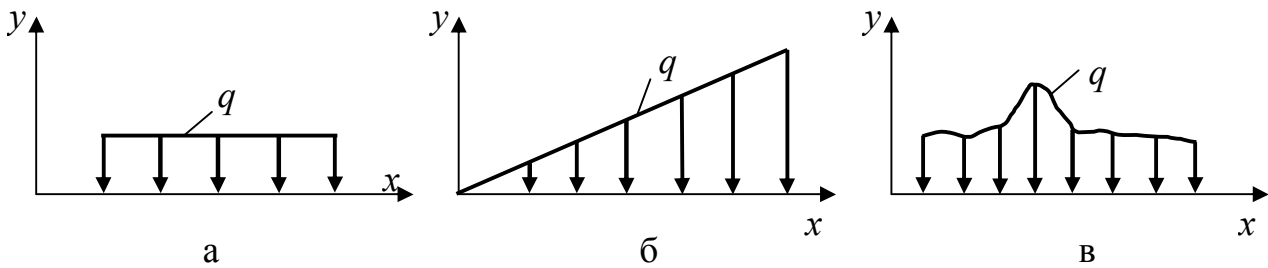


Рисунок 1.2 – Епюри рівномірної, трикуткової і довільної інтенсивностей діючих сил

7. *Зовнішні сили* – це сили, що діють на тіло або механічну систему з боку матеріальних точок або інших тіл, які не входять в цю систему.

8. *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками однієї механічної системи.

1.2 Класифікація систем сил

При вивченні статички будемо послідовно переходити від розгляду простих систем сил до більш складних, системи сил можна класифікувати так:

- система збіжних сил, плоска й просторова;
- плоска система паралельних сил;
- довільна плоска система сил;
- просторова система паралельних сил;
- довільна просторова система сил.

1.3 Аксиоми статички

В основі статички лежить ряд аксіом, що являють собою результат узагальнень численних дослідів і спостережень за рівновагою і рухом тіл, неодноразово підтверджених практикою. Аксиоми статички є вихідними твердженнями дослідного характеру, що приймаються без доведення. Вони формулюються так.

Аксиома 1. Вільне абсолютно тверде тіло може знаходитися під дією двох сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 у рівновазі тоді й тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ і діють уздовж однієї прямої aa у протилежних напрямках (рис. 1.3):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

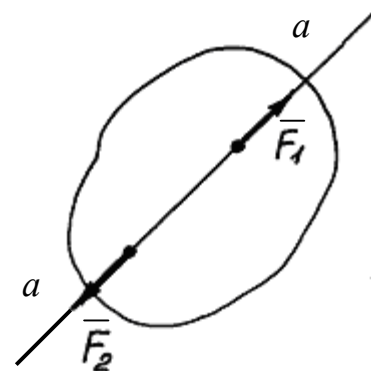


Рисунок 1.3 – «Двійка сил»

У механіці така система сил має назву «двійка сил».

Ця аксіома визначає найпростішу зрівноважену систему двох сил, оскільки досліди свідчать, що вільне тіло, на яке діє тільки одна сила, знаходиться в рівновазі не може.

Аксіома 2. Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не порушується, якщо до неї додати або відняти зрівноважену систему сил (наприклад, двійку сил).

Наслідок з аксіоми 2. Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, точку прикладання сили можна переносити вздовж її лінії дії.

Доведення. Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила \vec{F} , прикладена в точці А (рис. 1.4). Візьмемо на лінії дії aa цієї сили довільну точку В і прикладемо в ній дві сили \vec{F}_1, \vec{F}_1' (двійку сил), що дорівнюють за величиною силі \vec{F} , тобто ($F = F_1 = F_1'$).

Таку двійку сил можемо прикласти на підставі аксіоми 2. Сила \vec{F} , яка прикладена в точці А, і сила \vec{F}_1 , прикладена в точці В, складають, за побудовою, зрівноважену систему сил. Тому її можна відкинути, не порушуючи стану рівноваги тіла. Отже, залишається

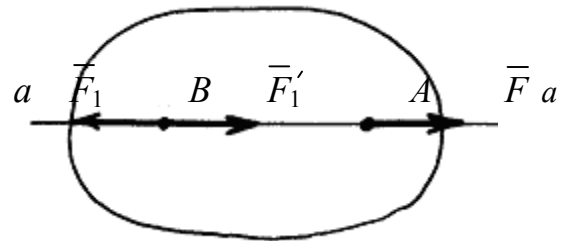


Рисунок 1.4 – Перенос сили

сила \vec{F}_1' , яка прикладена в точці В і дорівнює за величиною початковій силі \vec{F} . За інженерними розрахунками цим наслідком можна користуватися лише тоді, коли визначаються умови рівноваги конструкції і не розглядаються внутрішні зусилля, що виникають в її окремих частинах. Цей наслідок визначає силу як вектор, що ковзає по власній лінії дії, не залишаючи тіло (сила є ковзним вектором).

Аксіома 3 (аксіома про паралелограм сил). Система двох сил, прикладених в одній точці до абсолютно твердого тіла, має рівнодійну, яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладена в тій самій точці (рис. 1.5).

Вектор \vec{R} , який дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на векторах \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , як на сторонах, називається *геометричною сумою* цих векторів:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

У цій аксіомі сформульовано правило векторного додавання сил. Тому її можна сформулювати ще так: дві сили, які прикладені до абсолютно твердого тіла в

одній точці, мають рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в тій самій точці.

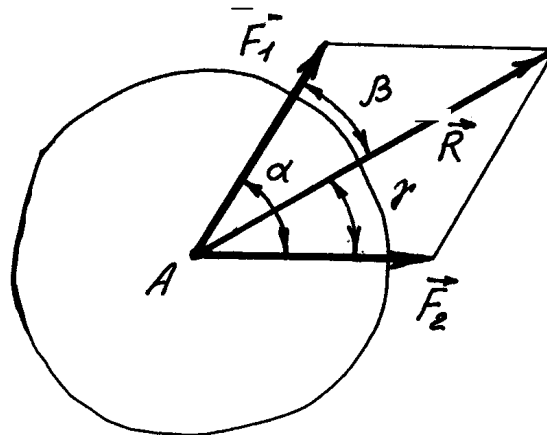


Рисунок 1.5 – Паралелограм сил

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}, \quad (1.2)$$

де α – кут між векторами \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

При однаковому напрямі сил ($\cos \alpha = 1$) $R = F_1 + F_2$, а при протилежному ($\cos \alpha = -1$) $R = F_1 - F_2$.

Будь-яку силу \vec{R} також можна єдиним способом розкласти на дві складові сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 за двома заданими напрямками, які утворюють кути β і γ з напрямком цієї сили:

$$F_1 = R \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}; \quad F_2 = R \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}. \quad (1.3)$$

Аксіома 4. Сили взаємодії двох матеріальних тіл \vec{F}_{12} (сила дії тіла 1 на тіло 2) і \vec{F}_{21} завжди рівні за величиною ($F_{12} = F_{21}$) і діють по одній прямій aa у протилежних напрямках (рис. 1.6).

Ця аксіома є третім законом Ньютона. Сили взаємодії двох тіл не створюють систему зрівноважених сил (двійку сил), бо вони прикладені до різних тіл.

Аксіома 5. Рівновага здеформованого тіла не порушиться, якщо воно затвердіє.

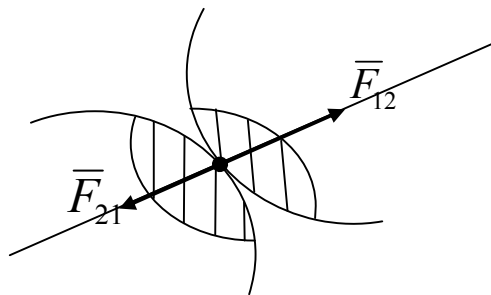


Рисунок 1.6 – Сили взаємодії двох матеріальних тіл

Аксиома 6. Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Ця аксіома має також назву – принцип звільнення від в'язей, який використовують при складанні рівнянь рівноваги будь-якої конструкції.

У статиці також зустрічаються задачі про рівновагу тіла, що складається з декількох твердих тіл, зв'язаних між собою. Таке тіло знаходиться в рівновазі, якщо в рівновазі перебувають всі складові тіла. У деяких випадках таке тіло розглядають як одне абсолютно тверде тіло.

Принцип затвердіння широко використовується в інженерних розрахунках.

1.4 Проекція сили на вісь, площину

Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, яка дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-» – якщо в бік від'ємного напрямку. Тому (рис.1.7,а) буде $F_x = F \cdot \cos \alpha$, $F_y = F \cdot \sin \alpha$, $T_x = 0$, $T_y = T$. Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

Проекцією сили на площину називається вектор, який міститься між проекціями початку і кінця даної сили на площину (рис. 1.7, б). Таким чином, проекція сили на площину, на різницю від проекції сили на вісь, є величиною векторною. На рисунку 1.7, б вектором \vec{F}_{xy} позначена проекція сили \vec{F} на площину xOy , а її проекції на осі Ox , Oy , Oz визначаються так:

$$F_x = F_{xy} \cos \psi = F \cos \theta \cdot \cos \psi ; \quad F_y = F_{xy} \sin \psi = F \cos \theta \cdot \sin \psi ; \quad F_z = F \sin \theta .$$

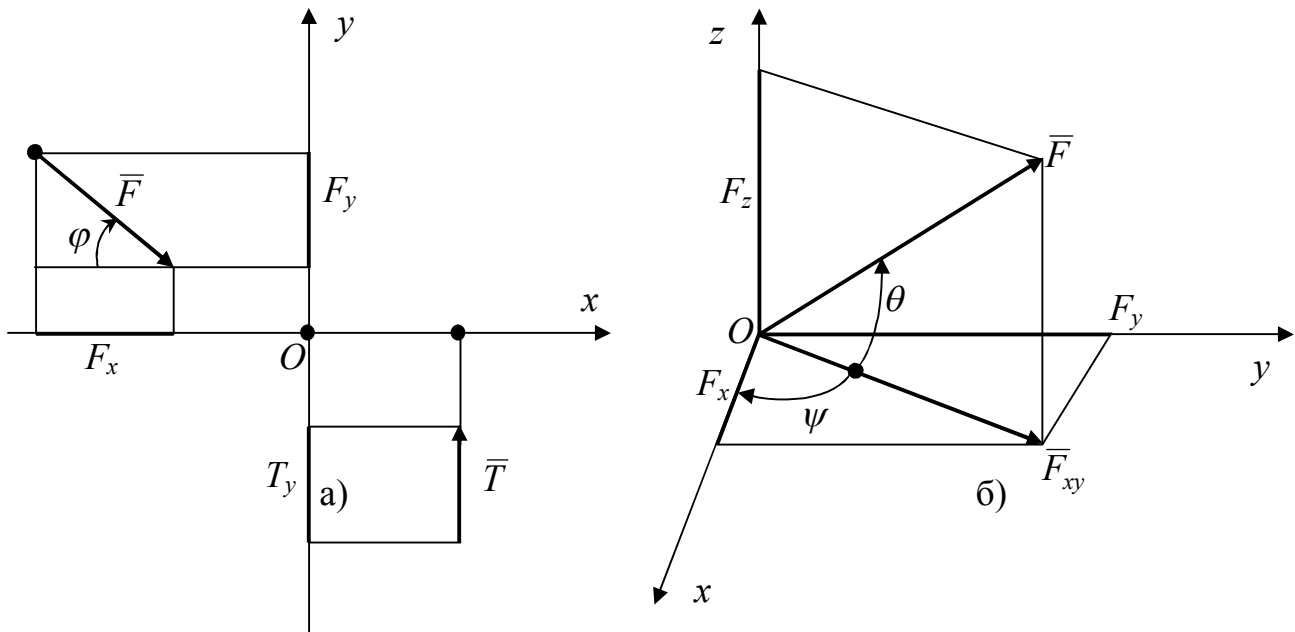


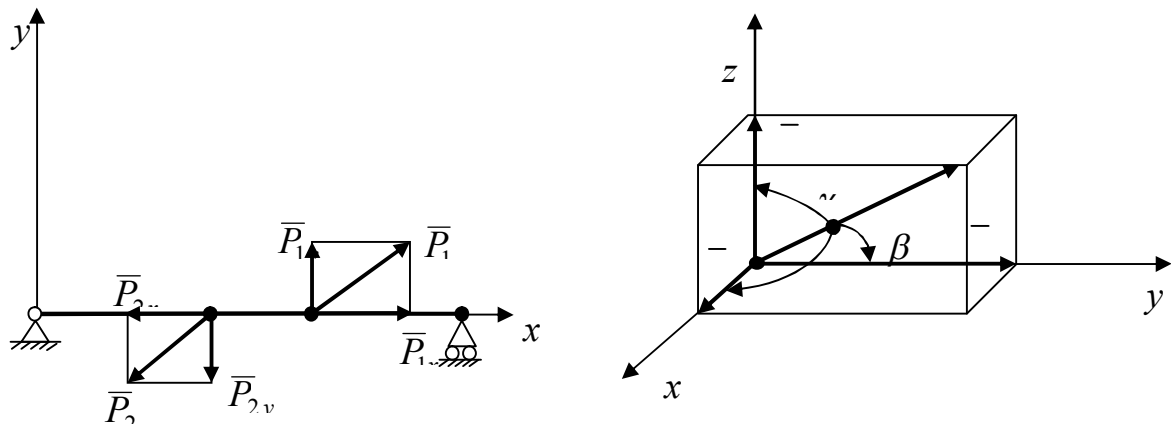
Рисунок 1.7 – Проекція сили

а) проекція сили на вісь; б) проекція сили на площину

Тут величини F_x і F_y визначено методом подвійного проектування: спочатку знаходиться проекція сили на площину xOy , а потім отриманий вектор \bar{F}_{xy} проектують на осі Ox і Oy .

1.5 Розклад сили на координатні складові

Відповідно до аксіоми 3 про паралелограм сил кожену силу можна розкласти на складові. Якщо їх лінії дії паралельні осям системи координат, то вони називаються *координатними складовими* сили у площині (сили $\bar{P}_{1x}, \bar{P}_{1y}, \bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}$ на рис. 1.8, а) або у просторі (сили $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ на рис. 1.8, б). При побудові координатних складових в першому випадку використовують метод прямокутника, а у другому – метод паралелепіпеда, відповідно до якого вектор \bar{F} сили уявляють діагоналлю паралелепіпеда (рис. 1.8, б), ребра якого приймають за її складові $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$.



O

a)

б)

Рисунок 1.8 – Розклад сили на координатні складові:

а) у площині; б) у просторі

У техніці процедуру розкладу сили на координатні складові використовують при розв'язанні задач рівноваги твердого тіла, наприклад, при складанні рівнянь моментів сил. Тут для координатних складових просто визначаються плечі сил, а деякі моменти складових виявляються рівними нулю за побудовою. Величини координатних складових розраховують за допомогою розглянутих в розділі 1.4 формул. Але якщо у просторі задано кути α , β , γ між вектором сили \vec{F} (рис. 1.8, б) і осями системи координат, то краще користуватися наступними виразами: $F_x = F \cos \alpha$; $F_y = F \cos \beta$; $F_z = F \cos \gamma$.

Питання для самоконтролю

1. Як класифікуються системи сил.
2. Назвіть аксіоми статички .
3. Сила як вектор.

2 В'ЯЗІ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

В'язями називають тіла або сукупність тіл, які обмежують рух даного тіла чи даної матеріальної системи. За аксіомою 6 невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Звільнення від в'язей дає можливість звести рівновагу невільного твердого тіла до відповідного питання про рівновагу вільного твердого тіла, яке знаходиться під дією одночасно зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, щоб перешкодити будь-яким його переміщенням, називається *реакцією в'язі*. Визначення реакцій в'язей має велике практичне значення: знаючи їх, будемо знати і сили тиску тіла на в'язі, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (наприклад, сила тяжіння), будемо називати *активними силами*. Особливість активної сили полягає в тому, що її модуль і напрям безпосередньо не залежать від інших сил, які діють на тіло. Реакції в'язей відрізняються від діючих на тіло активних сил тим, що їх напрямок і величина завжди залежать від цих сил і наперед невідомі. Якщо ніякі активні сили на тіло не діють, то реакції в'язей дорівнюють нулю. Для визначення реакції в'язі потрібно розв'язати відповідну задачу статички. Правильне визначення напрямів реакцій в'язей відіграє при розв'язуванні задач статички дуже важливу роль.

Розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких основних типів в'язей.

Ідеально гладенька поверхня. Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні цієї опори у точці стикання з даним тілом (рис. 2.1, а).

У випадках, коли спільна нормаль до поверхонь в'язі й тіла виявляється неозначеною, наприклад, вироджується в точку, то реакція в'язі спрямована по нормалі до тієї поверхні, до якої можна провести нормаль. Прикладом може бути опора ребром або вершиною кута (рис. 2.1, б, в).

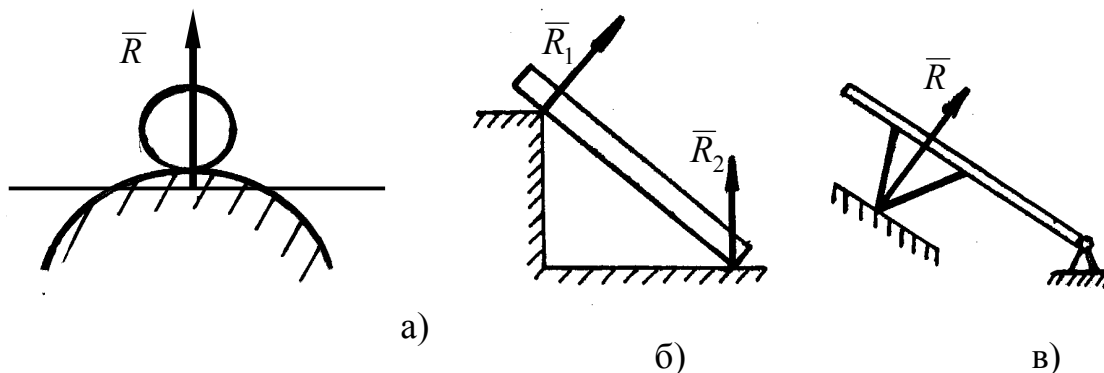


Рисунок 2.1 – Реакції в'язів

В'язь, що здійснюється гнучким тілом, ниткою або канатом, тросом, ланцюгом. Такі в'язі (рис. 2.2) працюють тільки на розтяг, їх реакції напрямлені по нитці. В'язь, реалізована в даному вигляді, не дає змоги тілу віддалятися від точки підвісу за напрямом AM . Тому реакція \bar{T} нитки AM спрямована завжди вздовж нитки до точки підвісу A . У задачах теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомою, гнучкою і нерозтяжною.

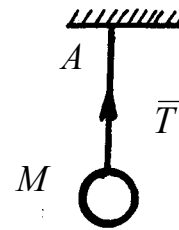


Рисунок 2.2 – Реакція гнучкого тіла

Шарнір циліндричний (сферичний), підп'ятник. З'єднання двох тіл, яке дає змогу одному тілу повертатися відносно іншого, не відділяючись, називається *шарніром*.

Нерухомий циліндричний шарнір. Він звичайно складається з обойми 1, яка закріплена на нерухомій опорі 2, і циліндричного вала 3 (рис. 2.3, а). Тут з'єднане з валом 3 тіло може обертатися тільки навколо осі O шарніра. Реакція \bar{R} циліндричного шарніра перпендикулярна до його осі і має напрям, який залежить від сил, прикладених до тіла. Тому її виражають у вигляді взаємно перпендикулярних координатних складових \bar{X}_0, \bar{Y}_0 , тобто $\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0$ і $R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$.

Рухомий циліндричний шарнір (коток). Цей вид в'язі не дає змогу тілу переміщатися в напрямі, перпендикулярному до опорної поверхні котка. Його реакція \bar{R} (рис. 2.3, б) напрямлена завжди по нормалі до опорної площини. Опора на котках застосовується звичайно в мостових конструкціях.

Сферичний шарнір. У випадку сферичного шарніра тіло, яке з'єднане з обоймою C , має змогу обертатися навколо центру шарніра в будь-якому напрямі (рис. 2.3, в). Реакцію сферичного шарніра виражають трьома координатними складовими $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 + \bar{Z}_0; R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}. \quad (2.2)$$

Підп'ятник. Якщо циліндричний шарнір перешкоджає переміщенню вала вздовж осі z вниз, то такий циліндричний шарнір називають підп'ятником. Опорна реакція підп'ятника має три координатні складові $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ (рис. 2.3, г):

$$\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 + \bar{Z}_0; R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}. \quad (2.3)$$

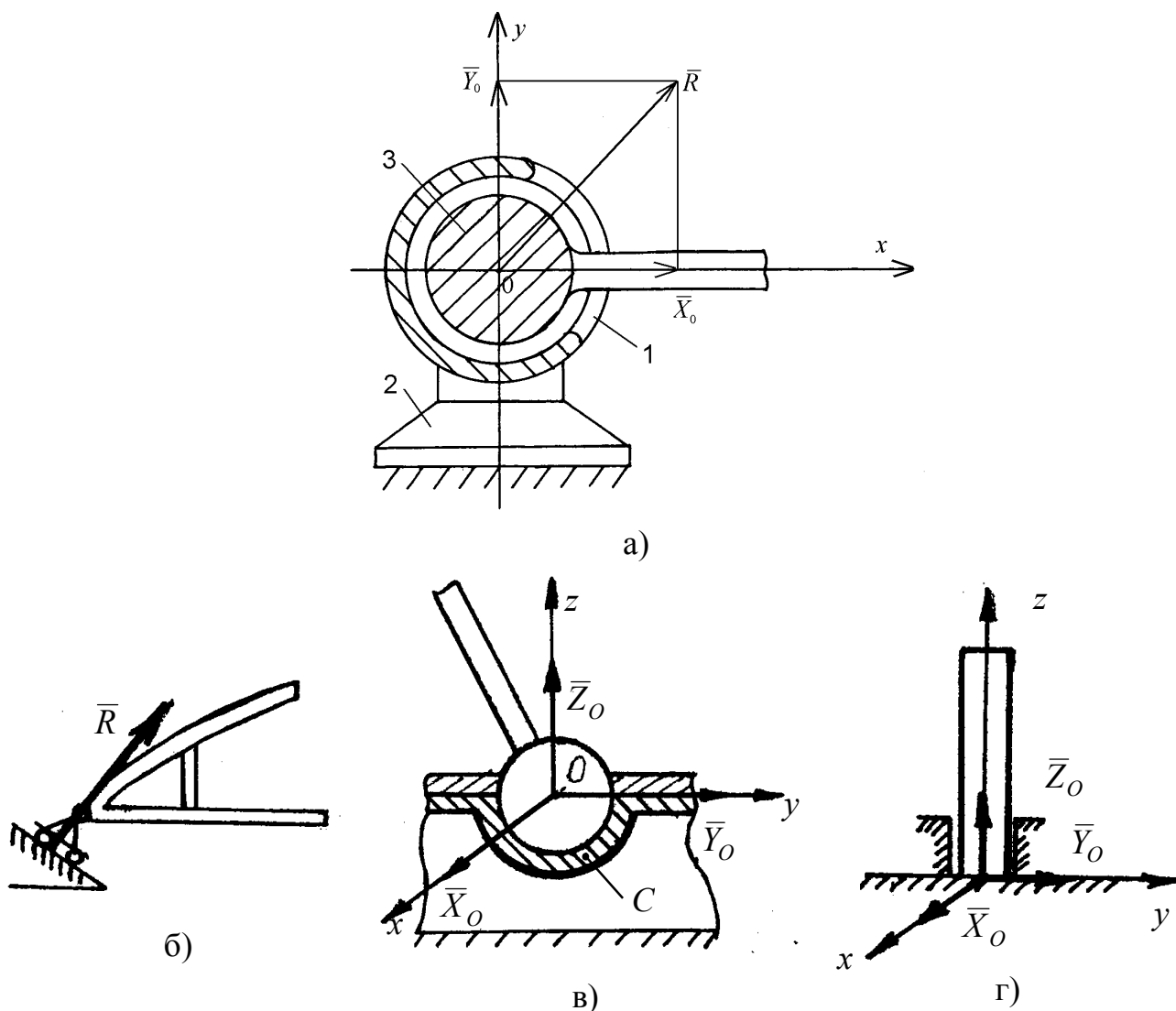


Рисунок 2.3 – Реакції в'язів

Ідеальний стержень. Так називається невагомий стержень AB , закріплений двома ідеальними шарнірами на його кінцях (рис. 2.4). Такий стержень працює тільки на розтяг або стиск. Реакція \bar{R}_{AB} ідеального стержня напрямлена по осі стержня. Якщо стержень розтягнутий, то реакція спрямована від тіла до стержня; якщо стержень стиснутий – то по стержню (рис. 2.4) від нього до тіла.

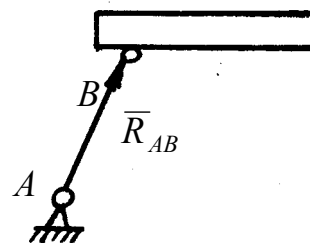


Рисунок 2.4 – Реакції стержнів

Жорстке защемлення. Балка AB кінцем A жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець вільний (рис. 2.5). Якщо на балку діє задана сила \bar{F} , то в защемленні виникають реакції \bar{X}_A, \bar{Y}_A і пара сил з моментом M_A .

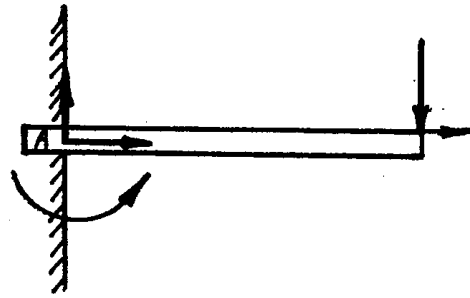


Рисунок 2.5 – Реакції защемлення

Опори з тертям. У цьому випадку реакцію опори \bar{R} розкладають на дві складові (рис. 2.6): силу \bar{R}_n , нормальну до поверхні опори, і силу \bar{R}_τ , дотичну до поверхні опори (силу тертя):

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_\tau;$$

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2}. \quad (2.4)$$

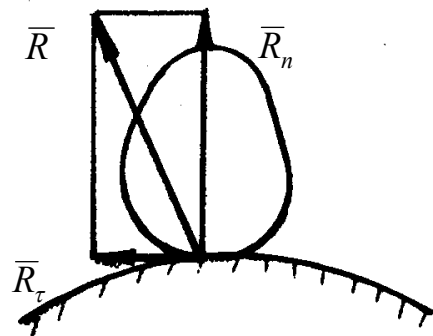


Рисунок 2.6 – Реакції опори з тертям

Питання для самоконтролю

1. Що зветься реакцією в'язей.
2. Які в'язі мають невизначну лінію дії реакції.

3 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

3.1 Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил

Найпростішою є система *збіжних сил*, тобто система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (точці O збігу сил). Вона може бути просторовою чи плоскою. В останньому випадку всі лінії дії сил системи належать одній площині.

Теорема про рівновагу. Система збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ еквівалентна одній силі (рівнодійній \bar{R}), яка дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил $\left(\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i\right)$ і прикладена в точці O їх збігу.

Доведення. Розглянемо (рис. 3.1, а) вихідну систему збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ з лініями дії a_1a_1, \dots, a_na_n і точками прикладання $A_{1, \dots, n}$.

Для кожної сили системи використовуємо аксіому 2 про перенесення сили уздовж лінії дії в точку O збігу (рис. 3.1, б). У результаті отримаємо систему сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$, прикладених в одній точці O .

На основі аксіоми 3 про паралелограм сил будь-яку кількість сил із загальною точкою прикладання можна складати геометрично. При цьому можна використовувати або правило паралелограма, або правило трикутника (многокутника).

У першому випадку (рис. 3.1, б), застосовуючи послідовно правило паралелограма, дістанемо спочатку рівнодійну $\bar{P}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, далі отримаємо рівнодійну $\bar{P}_2 = \bar{P}_1 + \bar{F}_3$ і нарешті рівнодійну $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ заданої системи сил (рис. 3.1, б).

За правилом многокутника рівнодійну сил (рис. 3.1, в) визначаємо як суму векторів цих сил: для цього з кінця вектора \bar{F}_1 відкладаємо вектор сили \bar{F}_2 , і т. д. З'єднавши початок першого вектора \bar{F}_1 з кінцем останнього \bar{F}_n , визначимо рівнодійну силу

Одержаний таким чином многокутник має назву *многокутника сил*, або силового многокутника, замикальна сторона якого виявляється рівнодійною силою системи.

Таким чином, теорему доведено.

Доведена теорема дозволяє розв'язувати задачу приведення систем збіжних сил до рівнодійної сили графічно (нею зручно користуватись у разі плоскої довільної системи сил).

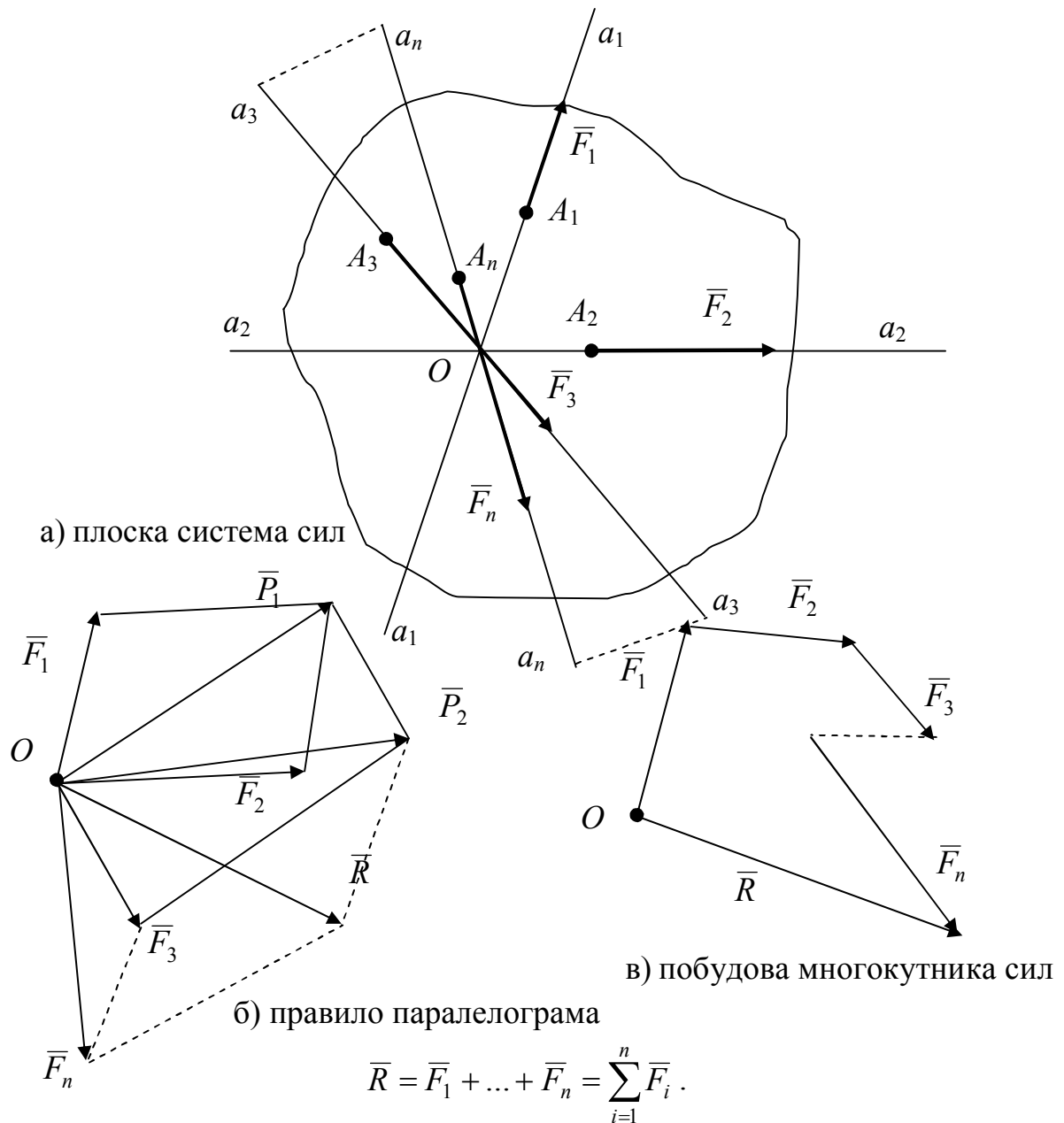


Рисунок 3.1 – Складання системи сил

Рівнодійну \bar{R} можна визначити також аналітично за її проекціями R_x, R_y, R_z на осі прямокутної системи координат методами векторної алгебри. У даному випадку рівнодійну \bar{R} представляють так:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z, \quad (3.1)$$

де $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$; $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$; $R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$; F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції сил системи на відповідні осі координат; $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ – координатні складові рівнодійної.

Величина (модуль) і напрямні косинуси рівнодійної сили \bar{R} визначають, враховуючи (3.1), за наступними формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (3.2)$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{R}}) = R_x / R; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{R}}) = R_y / R; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{R}}) = R_z / R.$$

Визначивши проекції або величину і напрямні косинуси рівнодійної, можна побудувати і сам вектор \bar{R} у заданій системі координат для подальшого розв'язання задачі рівноваги тіла.

Розглянемо, наприклад, задану в площині xOy (рис. 3.2, а) систему двох збіжних сил $F_1 = 1$ Н, $F_2 = 1$ Н. Визначимо рівнодійну \bar{R} системи методом додавання векторів початкових сил за правилом паралелограма, а також методом додавання координатних складових рівнодійної за правилом прямокутника (плоска система сил) або паралелепіпеда (просторова система) чи за правилом «модуль-кут».

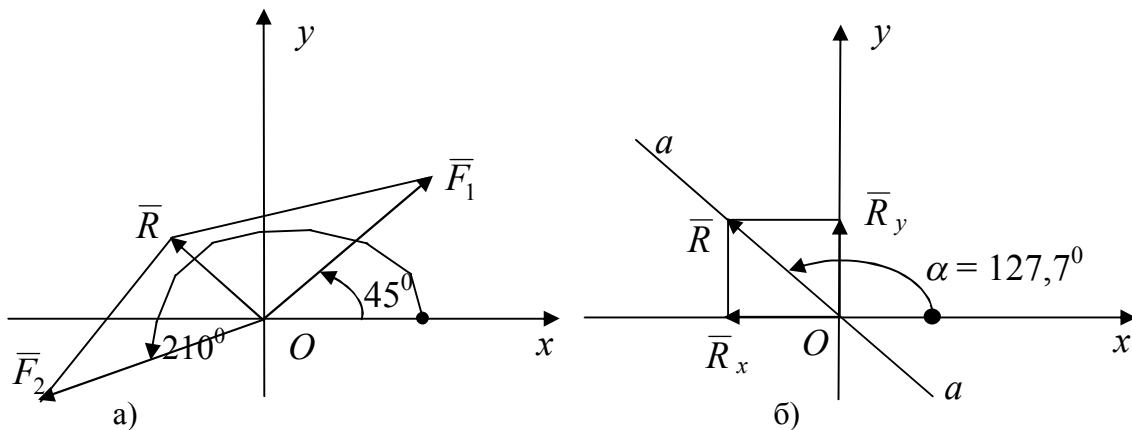


Рисунок 3.2 – Рівнодійна системи двох сил

У першому випадку будемо на силах \bar{F}_1, \bar{F}_2 , як на сторонах, паралелограм (рис. 3.2, а), діагональ якого буде шуканою рівнодійною \bar{R} . Величину (модуль) рівнодійної визначаємо за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos 165^\circ} = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot 0,966} = 0,26 \text{ (Н)}.$$

У другому випадку отримаємо: проекції рівнодійної

$$R_x = F_{1x} - F_{2x} = F_1 \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,866 = 0,159 \text{ (Н)},$$

$$R_y = F_{1y} - F_{2y} = F_1 \cdot \sin 45^\circ - F_2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,5 = 0,207 \text{ (Н)},$$

координатні складові рівнодійної:

$$\bar{R}_x = R_x \cdot \bar{i} = -0,159 \cdot \bar{i}, \quad \bar{R}_y = R_y \cdot \bar{j} = 0,207 \cdot \bar{j}.$$

Вектори \bar{R}_x і \bar{R}_y будуємо на рисунку 3.2, б. Склавши їх за правилом прямокутника, отримаємо шукану рівнодійну \bar{R} .

За правилом «модуль-кут» визначаємо величину рівнодійної

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0,159)^2 + (0,207)^2} = 0,26 \text{ (Н)}, \text{ її напрямний косинус}$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-0,159}{0,26} = -0,61 \text{ і кут } \alpha = 127,7^\circ. \text{ Будуємо в площині } xOy \text{ лінію дії}$$

$a-a$ рівнодійної (рис. 3.2, б), враховуючи визначений кут між нею і віссю Ox . Далі на лінії дії $a-a$ будуємо вектор рівнодійної, який починається в полюсі O системи координат і має величину (довжину) $R = 0,26$ (Н).

3.2 Умови рівноваги системи збіжних сил

Відповідно до теореми про рівнодійну будь-яка система збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ зводиться до прикладеної у точці O збігу сили \bar{R} , рівної геометричній сумі сил системи. За правилом багатокутника сила \bar{R} складає його замикальну сторону.

Під дією лише однієї сили, згідно з аксіомою 1 статички про двійку сил, тіло перебуватиме в рівновазі. Умови його рівноваги формулюються так: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = 0. \quad (3.3)$$

Це геометрична (векторна) умова рівноваги.

Необхідність умови (3.3) очевидна, бо якщо вона не виконується, то тіло знаходиться під дією рівнодійної сили й не перебуватиме у рівновазі.

Достатність цієї умови доведемо так. Якщо рівнодійна системи діючих на тіло сил дорівнює нулю, то за визначенням вона є зрівноваженою (еквівалентною нулю), а тіло під дією такої системи знаходиться у стані спокою безумовно.

Слід зазначити, що з умови $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$ випливає замкненість багатокутника сил: кінець останньої сили \bar{F}_n повинен збігатися з початком першої (точкою O на рис. 3.1, в).

Векторна рівність (3.3) перетворюється, з урахуванням формули (3.1), у аналітичну (алгебраїчну) форму рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0; \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0; \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Аналітична форма рівноваги формулюється наступним чином: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій цих сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

Необхідність означає, що з фізичних умов рівноваги випливають математичні, а достатність, навпаки, – з математичних умов випливають фізичні.

Якщо система збіжних сил є плоскою, то з трьох умов рівноваги (3.4) залишаються лише дві, наприклад,

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (3.5)$$

Отримані умови рівноваги у випадку, коли деякі сили в рівностях (3.4), (3.5) є реакціями в'язей, перетворюються в рівняння відносно цих реакцій. При цьому кількість невідомих реакцій в'язів, якщо задача статично визначена, не повинно перевищувати числа рівнянь.

3.3 Теорема про три непаралельні сили

Теорему про рівновагу трьох непаралельних сил застосовують в тих випадках, коли треба знайти дві невідомі сили (реакції в'язів), які зрівноважують третю відому силу (наприклад, силу ваги тіла), якщо відомо точку прикладання однієї з невідомих сил і лінію дії іншої.

Теорема. Якщо тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, з яких принаймні дві лежать в одній площині, то лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці, а вектори сил утворюють замкнений трикутник.

Доведення. Нехай тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, з яких \vec{F}_1 і \vec{F}_2 лежать в одній площині (рис. 3.3). Продовжимо лінії дії сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 і знайдемо їх точку перетину O . Перенесемо сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 вздовж їх ліній дії в точку O і знайдемо їх рівнодійну $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Замінивши сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 їх рівнодійною \vec{R} , одержимо, що дане тіло перебуває в рівновазі під дією тільки двох сил \vec{F}_3 і \vec{R} .

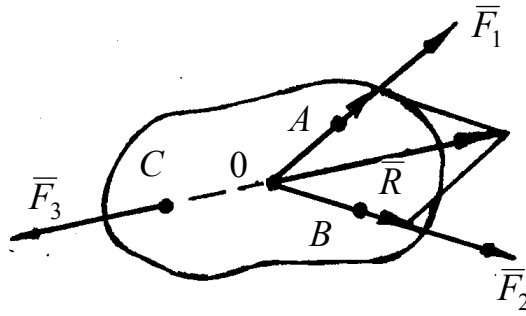


Рисунок 3.3 – Три непаралельні сили

Це можливо, враховуючи аксіому 1 про дві сили, тільки якщо сили \vec{F}_3 і \vec{R} мають спільну лінію дії, тобто коли лінія дії сили \vec{F}_3 проходить через точку O . Теорему доведено.

Зауважимо, що доведена теорема визначає необхідну, але не достатню умову рівноваги тіла під дією трьох сил. Дійсно, тіло під дією трьох сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, може і не перебувати в рівновазі, а здійснювати поступальний рівномірний рух, відповідно до першого закону Ньютона.

Застосувавши до заданої системи трьох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ геометричну умову рівноваги, дістаємо також, що трикутник сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ буде замкнений: кінець третьої сили \vec{F}_3 буде збігатися з початком першої сили \vec{F}_1 .

Приклад. Розглянемо, наприклад, зображену на рисунку 3.4, а механічну схему, що складається з бруса вагою P , який спирається кінцем на прямокутний виступ D і закріплений в точці A з підлогою через нерухому шарнірну опору. Визначимо реакції опор, якщо $AN = ND = a$.

Розв'язання. Лінії дії сили ваги \vec{P} і реакції в'язі \vec{R}_D у точці D відомі. Через точку O їх перетину, відповідно до теореми про три сили, повинна проходити невідома лінія дії реакції \vec{R}_A . Будуємо її на схемі. З урахуванням визначених ліній дій реакції \vec{R}_A, \vec{R}_D і відомої сили \vec{P} будуємо замкнений силовий трикутник (рис. 3.4, б) $O'N'M'$, який подібний трикутнику ONM на рисунку 3.4, а. Силовий трикутник дозволяє визначити не тільки напрями реакцій \vec{R}_A, \vec{R}_D , але і їх величини. Для цього треба використати умови

пропорційності сторін подібних трикутників $\left(\frac{ON}{MN} = \frac{P}{R_D} \right)$, а також теорему

косинусів $\left(R_A = \sqrt{P^2 + R_D^2 - 2P \cdot R_D \cdot \cos 30^\circ} \right)$.

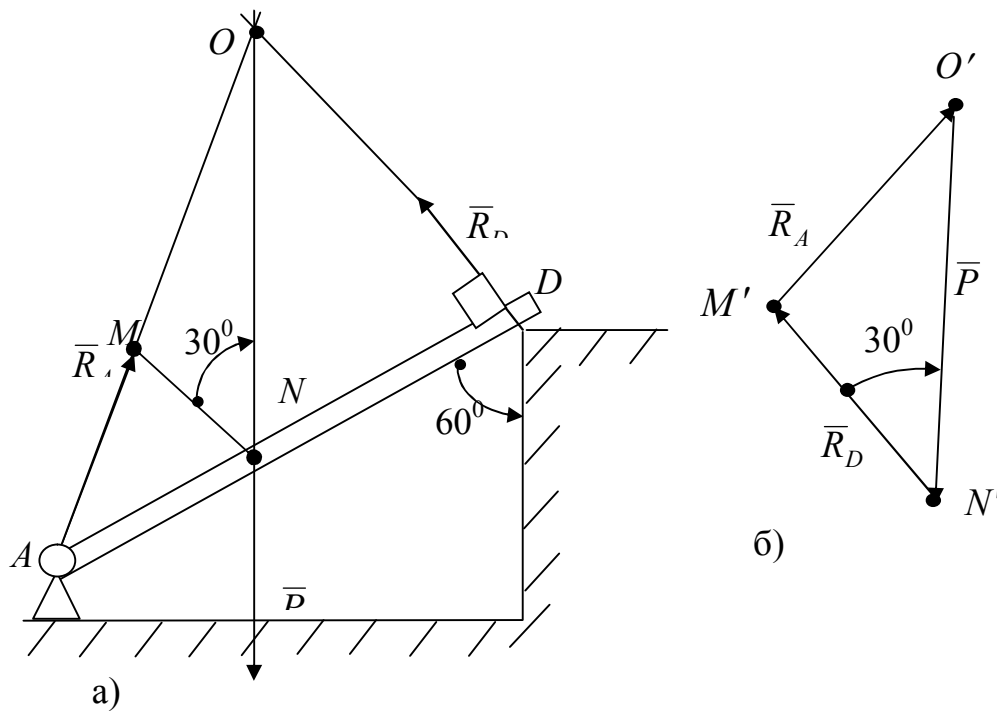


Рисунок 3.4 – Три непаралельні сили

3.4 Лема про паралельне перенесення сили

Відповідно до аксіоми 2 статки (див. розд. 1) прикладену до тіла силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку іншу його точку. При цьому дія сили на тіло, а також стан тіла не змінюються.

У ряді практичних задач рівноваги, пов'язаних зі спрощенням заданої системи сил, часто виникає необхідність перенесення сили до заданого центра паралельно самій до себе.

На відміну від попереднього випадку паралельне перенесення сили призводить в умовах збереження початкового механічного стану тіла до зміни системи діючих на нього силових факторів: до тіла необхідно додатково додати пару сил, параметри якої визначає наступна лема.

Лема. Прикладену до тіла в точці O (рис. 3.5, а) силу \vec{F} можна перенести паралельно самій собі в будь-яку його іншу точку O_1 (центр приведення), додаючи при цьому, для збереження механічного стану тіла, пару сил (\vec{F}, \vec{F}^*) з моментом $\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*)$, рівним моменту $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$ вихідної сили \vec{F} відносно центра приведення O_1 .

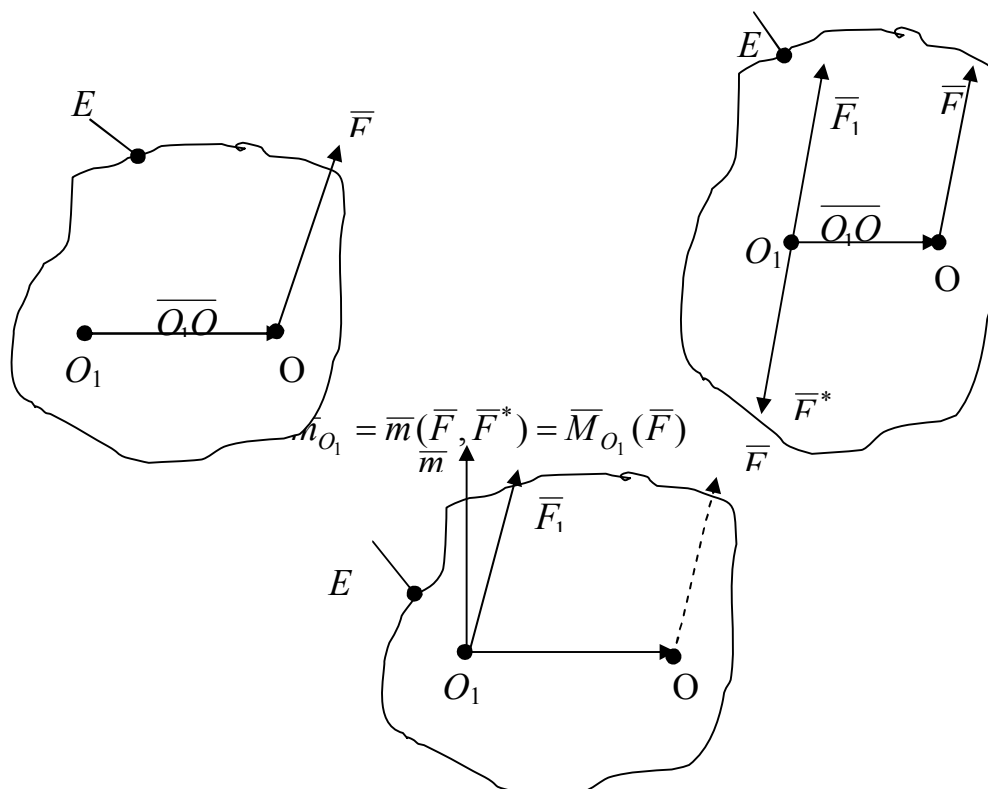


Рисунок 3.5 – Паралельне перенесення сили

Доведення. Нехай у точці O (рис. 3.5, а) до тіла прикладена розташована в площині E сила \vec{F} . Позначимо систему сил, діючу на тіло, як (\vec{F}) . Виберемо в тілі, в пл. E , довільну точку O_1 , твердження якої визначимо вектором $\overline{O_1O}$. Позначимо її як центр приведення « O_1 ». Прикладемо далі в пл. E у цьому центрі (рис. 3.5, б) еквівалентну нулю систему $(\vec{F}_1, \vec{F}^*) \sim 0$ двох сил (двійку сил) з параметрами: $\vec{F}_1 = -\vec{F}^*$, $\vec{F}^* = -\vec{F}$. При цьому, відповідно до аксіоми 2 статички, стан тіла не зміниться, а вихідна система сил (\vec{F}) перетвориться в еквівалентну систему трьох сил: $(\vec{F}) \sim (\vec{F}, (\vec{F}_1, \vec{F}^*)) \sim (\vec{F}_1, (\vec{F}, \vec{F}^*))$.

За побудовою на рисунку 3.5, б, сила \vec{F}_1 прикладена в точці приведення O_1 і дорівнює \vec{F} , а система двох сил (\vec{F}, \vec{F}^*) створює пару сил, що називається приєднаною парою сил. Далі в центрі приведення O_1 на рисунку 3.1, в побудуємо вектор $\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*) = \overline{O_1O} \times \vec{F}$, рівний моменту отриманої пари сил, і вектор $\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \overline{O_1O} \times \vec{F}$, рівний моменту вихідної сили \vec{F} відносно полюса O_1 . За визначенням вони є перпендикулярними до пл. E , прикладеними в точці O_1 і рівними. Тобто момент приєднаної пари сил дорівнює моменту вихідної сили відносно нового центра приведення O_1 :

$$\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*) = \vec{M}_{O_1}(\vec{F}). \quad (3.6)$$

Отже лему доведено.

Рівняння (3.5) використовують на практиці при визначенні параметрів приєднаної пари сил (\bar{F}_1, \bar{F}^*) і сили \bar{F}_1 , які в більшості випадків являють собою прикладений до ланки механізму крутний момент і силу тиску ланки на вісь. Розглянемо, наприклад, барабан радіуса R (рис. 3.6,а), до якого в точці A з боку намотаної нитки прикладено силу \bar{F} . Використуємо для сили \bar{F} доведену лему, прийнявши за центр приведення точку O . У результаті отримаємо, що вихідна система сил (\bar{F}) зводиться: до сили \bar{F}_1 (рівній \bar{F}) і до пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) з моментом $m_0 = m(\bar{F}, \bar{F}^*)$ (рис. 3.6, а). При цьому на барабан діють: момент $m_0 = R \cdot F$, який обертає барабан, і сила \bar{F}_1 , що здійснює тиск

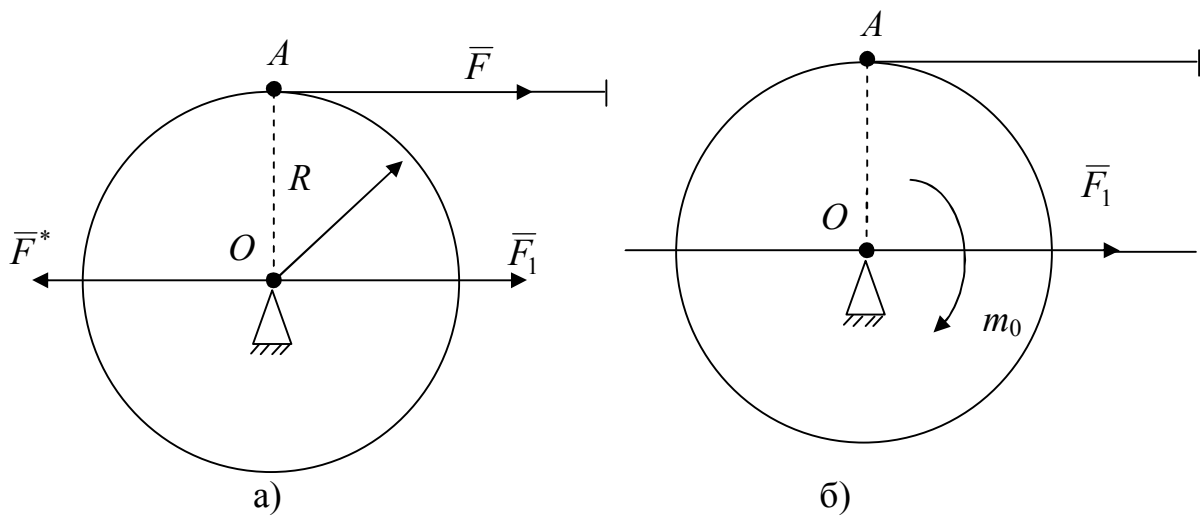


Рисунок 3.6 – Система: «опора – вісь – барабан – нитка»

на вісь барабану (рис. 3.6, б). Їх величини використовуються в подальшому при розв'язанні задач динаміки і міцності системи «опора – вісь – барабан – нитка».

4 УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ СИЛ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ РІВНОВАГИ

4.1 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Як відомо (п. 3), довільна система сил у площині в загальному випадку зводиться у центрі O до сили \bar{R} , яка дорівнює головному вектору \bar{F}_0 системи, і пари сил з моментом \bar{m}_0 , який дорівнює головному моменту \bar{M}_0 системи. При цьому головний вектор належить площині дії пари \bar{m}_0 , що співпадає з площиною дії сил системи.

Для даної системи сил існують три окремі випадки рівноваги.

Перша (основна) форма умов рівноваги. Припустимо, що площина дії системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ співпадає з координатною площиною xOy (рис. 4.1) системи координат $Oxyz$.

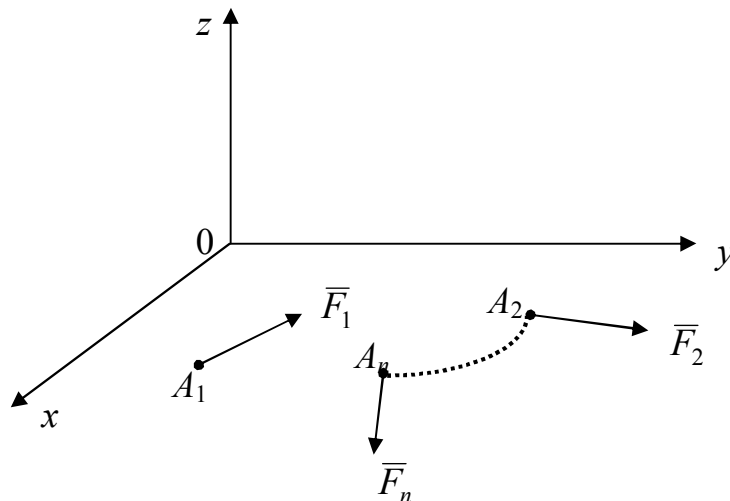


Рисунок 4.1 – Система сил в площині (*перша (основна) форма умов рівноваги*)

Проекції сил системи, а також радіусів-векторів точок їх прикладання на вісь Oz в даному випадку дорівнюють нулю. Тому система умов рівноваги (4.1) перетворюється в наступну:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (4.1)$$

Система (4.4) аналітичних (алгебраїчних) умов рівноваги твердого тіла формулюється таким чином: для рівноваги довільної системи сил у площині необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з координатних осей Ox і Oy і алгебраїчна сума їх моментів відносно осі Oz (або довільного центра O в площині дії сил системи $\sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0$), дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги. У даному випадку умови рівноваги формулюються так: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів сил відносно будь-яких двох точок у площині дії сил і сума проєкцій цих сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю. Для площини E дії сил системи, точок B, C на ній і осі Ox (рис. 4.2) буде:

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad F_{Bx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (4.2)$$

де F_{Bx} – проєкція головного вектора системи сил у точці B на вісь Ox .

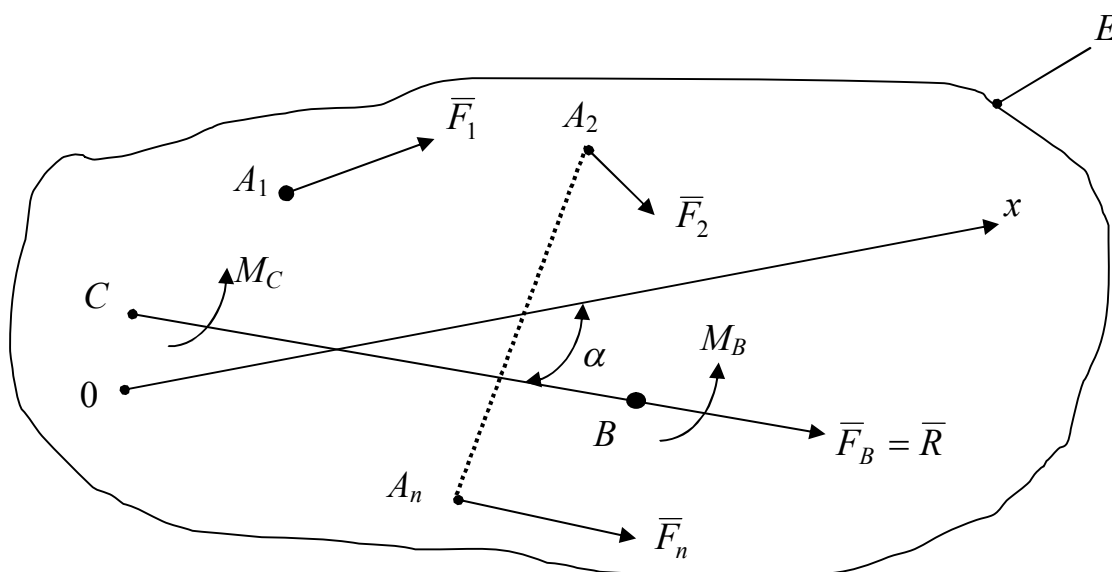


Рисунок 4.2 – Система сил в площині (друга форма умов рівноваги)

Необхідність цих умов очевидна, бо якщо будь-яка з умов не буде виконуватися, то або в точці B головний вектор системи $\bar{F}_B \neq 0$, або головний момент $\bar{M}_B \neq 0$ (чи $\bar{M}_C \neq 0$) і тоді рівноваги тіла не відбувається.

Достатність умов (4.5) доведемо наступним чином. Якщо виконуються тільки перші з двох умов (4.5), тобто $M_B = 0$ і $M_C = 0$, то така система сил може мати лише рівнодійну $\bar{R} = \bar{F}_B$ (рис. 4.2), лінія дії якої проходить через точки B і C . Оскільки вісь Ox проходить під кутом $\alpha \neq \pi/2$ до відрізка BC , то остання умова (4.1) може бути виконана тільки коли $F_{Bx} = F_B \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \alpha = 0$, тобто коли $\bar{R} = \bar{F}_B = 0$. Це призводить до одночасного виконання всіх умов (4.1), що забезпечують рівновагу тіла безумовно.

Третя форма умов рівноваги. Ця форма умов рівноваги формулюється таким чином: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і

достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок, наприклад B, C, D , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю (рис. 4.4):

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; M_D = \sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = 0, \quad (4.3)$$

де B, C, D – точки приведення системи сил.

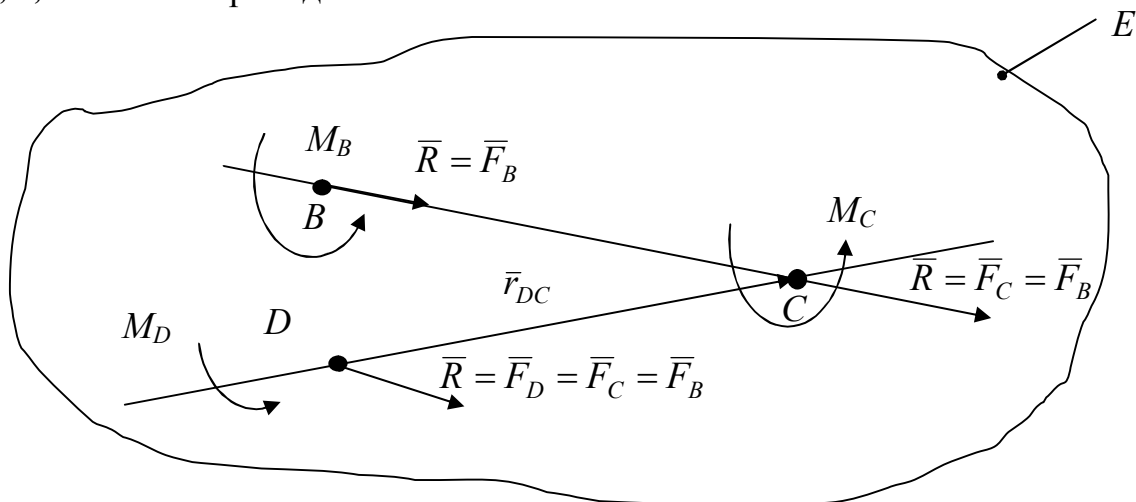


Рисунок 4.3 – Система сил в площині (третя форма умов рівноваги)

Необхідність цих умов, враховуючи (3.11), очевидна, бо при одночасному виконанні, наприклад двох перших умов, головний момент системи при $\bar{r}_{DC} \neq 0$ може дорівнювати нулю у третій точці D ($\bar{M}_D = \bar{M}_C + \bar{r}_{DC} \times \bar{F}_B$) тільки коли головний вектор \bar{F}_B системи сил дорівнює нулю. Тому при одночасному виконанні умов (4.3) виконуються умови (4.1) рівноваги тіла і воно буде у рівновазі.

Достатність умов (4.3) впливає з того, що при їх виконанні система сил не знаходилася б у рівновазі тільки у випадку, коли її відмінна від нуля рівнодійна \bar{R} проходила одночасно через всі три точки BCD площини E , що неможливо за визначенням.

4.2 Приклади розв'язання задач рівноваги

Приклад 1. Рівновага довільної системи сил у площині.

Початкова схема конструкції наведена на рисунку 4.4, а. Тут на балку із защемленим кінцем A на відрізку CD діє рівномірно розподілене навантаження $q = 0,8$ кН/м, в точці B – сила $F = 2$ кН під кутом 45° . Крім того, до балки прикладена пара сил з моментом $m = 1,2$ кН·м. Необхідно визначити реакції

защемлення при дії на балку заданої системи зовнішніх силових факторів. Розміри балки в метрах вказані на рисунку.

Розв'язання.

Розрахункова схема наведена на рисунку 4.4, б. При її побудові використано принцип звільнення від в'язів, розподілене навантаження замінено зосередженою силою $Q = 3 \cdot 0,8 = 2,4$ кН, а сила \bar{F} – координатними складовими \bar{F}_x, \bar{F}_y з величинами

$$F_x = F \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН,}$$

$$F_y = F \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН.}$$

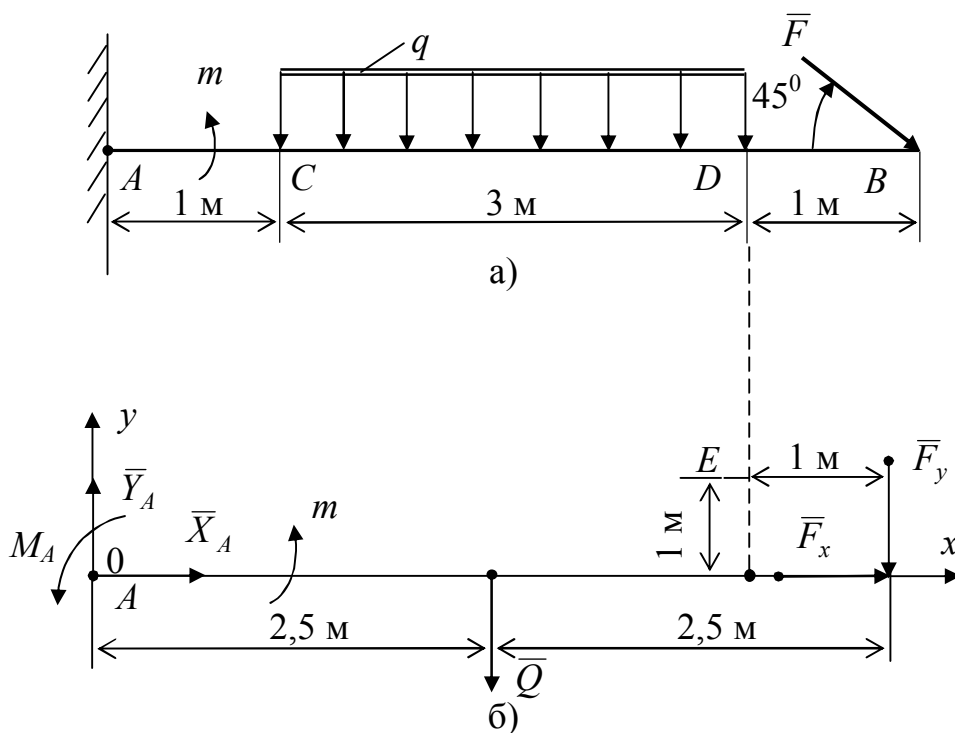


Рисунок 4.4 – Розрахункова схема

Відповідно до рисунка 4.4, б, балка як вільне тверде тіло, перебуває в рівновазі під дією заданих сил $\bar{Q}, \bar{F}_x, \bar{F}_y$, пари сил з моментом m і реакції защемлення у вигляді силових складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A та пари сил з моментом M_A .

Складемо рівняння рівноваги балки, використавши першу форму умов рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + F_x = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - Q - F_y = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad M_A + m - 2,5Q - 5F_y = 0.$$

З отриманих трьох рівнянь можна визначити три невідомі реакції:
з першого рівняння

$$X_A = -F_x = -1,41 \text{ (кН)};$$

з другого рівняння

$$Y_A = Q + F_y = 2,4 + 1,41 = 3,81 \text{ (кН)};$$

з третього рівняння

$$M_A = 5F_y + 2,5Q - m = 5 \cdot 1,41 + 2,5 \cdot 2,4 - 1,2 = 11,87 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Знак (–) отриманої реакції \bar{X}_A показує, що в дійсності вона направлена на розрахунковій схемі у протилежний бік.

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язів складемо рівняння моментів сил відносно точки E , що знаходиться на відстані 1 м від точки B і від балки (рис.6.5, б).

Перевірка.

$$\begin{aligned} \sum M_E &= M_A - Y_A \cdot 4 + m + Q \cdot 1,5 - F_y \cdot 1 + X_A \cdot 1 + F_x \cdot 1 = \\ &= 11,87 - 3,81 \cdot 4 + 1,2 + 2,4 \cdot 1,5 - 1,41 \cdot 1 - 1,44 \cdot 1 + 1,41 \cdot 1 = 18,08 - 18,08 = 0. \end{aligned}$$

4.3 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл

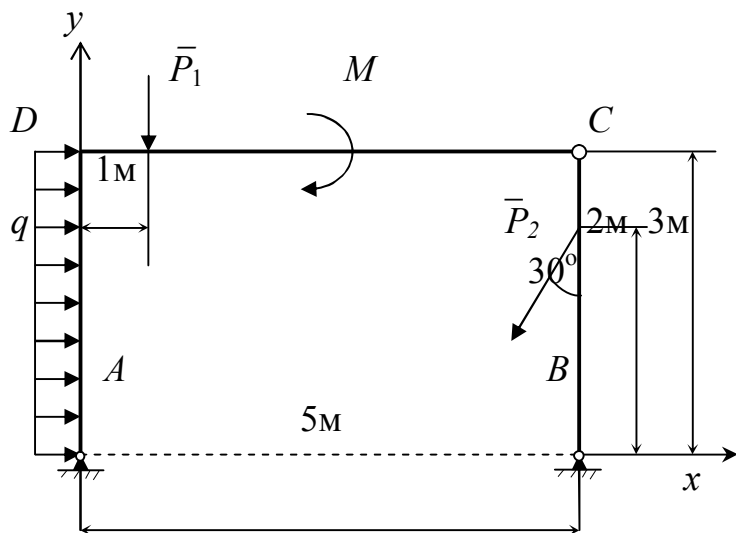
Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним з двох способів:

- 1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що складають конструкцію;
- 2) початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

Приклад 1. Два невагомих стержні ADC і BC з'єднані між собою шарніром C і закріплені нерухожими шарнірами A і B . На конструкцію діють сили $P_1=10$ кН, $P_2=20$ кН, розподілене навантаження інтенсивністю $q = 4$ кН/м і пара сил з моментом $M=50$ кНм. Розміри задані на вихідній схемі (рис. 4.5). Треба визначити реакції опор A і B , а також тиск у проміжному шарнірі C складеної конструкції.

Розв'язання. При розв'язанні задачі першим способом будемо розглядати рівновагу всієї складеної конструкції, а також стержня CB окремо.

Побудуємо розрахункову схему: відкинемо опори і замінимо їх реакціями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$, замінимо розподілене навантаження зосередженою силою $Q=3q$, прикладеною в середину ділянки AD , побудуємо осі координат.



При цьому шарнір C вважатимемо нерухомим (закреслено на рис. 4.6), використавши аксіому 5 затвердіння.

Визначимо величини сил \bar{Q}, \bar{P}_{2x} і \bar{P}_{2y} :

$$Q = 3q = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН},$$

$$P_{2x} = P \cdot \sin 30^\circ,$$

$$P_{2y} = P \cdot \cos 30^\circ.$$

Рисунок 4.5 – Задана схема

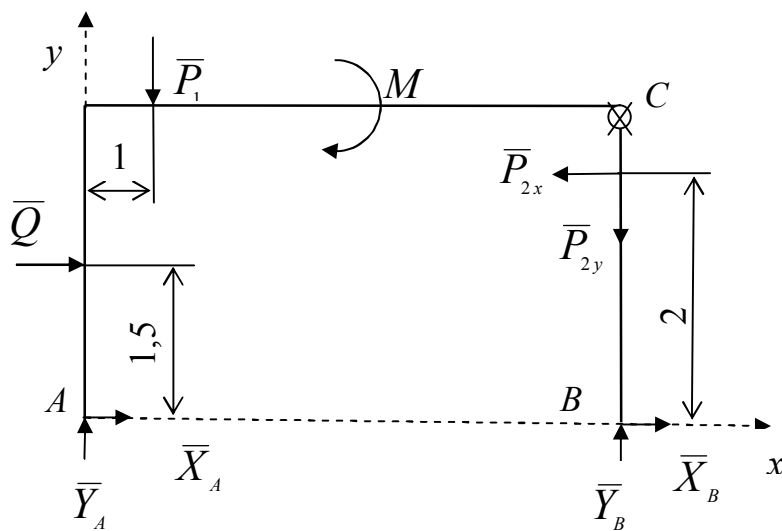


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема

Складемо рівняння рівноваги нерозчленованої конструкції:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_B + Q - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_B - P_1 - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = -Y_A \cdot 5 - Q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 4 - M + P_{2x} \cdot 2 = 0.$$

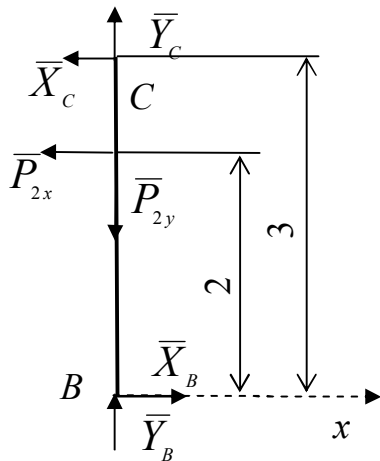


Рисунок 4.7 – Розрахункова схема

Далі розчленимо конструкцію на складові елементи і розглянемо окремо стержень BC . Дію відкинутої конструкції ADC замінимо реакціями \bar{X}_C, \bar{Y}_C у шарнірі C .

Примітка. Напрямки осей координат на обох розрахункових схемах (рис. 4.6, рис. 4.7) повинні співпадати.

Складемо рівняння рівноваги стержня BC :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_B - X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_B + Y_C - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(F_i) = X_B \cdot 3 - P_{2x} \cdot 1 = 0.$$

Відповідно до розглянутих на рисунку 4.6 і рисунку 4.7 розрахункових схем ми маємо шість невідомих реакцій опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ та реакції \bar{X}_C, \bar{Y}_C у шарнірі C . Визначимо їх із складених шести рівнянь рівноваги.

Із третього рівняння знаходимо

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot 4 + P_2 \sin 30^\circ \cdot 2 - M - Q \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \sin 30^\circ \cdot 2 - 50 - 12 \cdot 1,5}{5} = -1,6 \text{ кН},$$

з другого рівняння отримаємо

$$Y_B = -Y_A + P_1 + P_{2y} = -(-1,6) + 10 + 20 \cos 30^\circ = 28,92 \text{ кН}.$$

$$\text{Із шостого рівняння знаходимо } X_B = \frac{P_2 \sin 30^\circ}{3} = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{3} = 3,33 \text{ кН},$$

з п'ятого отримаємо $Y_C = P_2 \cos 30^\circ - Y_B = 20 \cdot \cos 30^\circ - 28,92 = -11,6 \text{ кН}$,

з четвертого – $X_C = X_B - P_2 \sin 30^\circ = 3,33 - 20 \cdot \sin 30^\circ = -6,67 \text{ кН}$, і, нарешті, з

першого – $X_A = -X_B - Q + P_2 \sin 30^\circ = -3,33 - 12 + 20 \cdot \sin 30^\circ = -5,33 \text{ кН}$.

Значення $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ менші нуля, відповідно ці реакції в дійсності спрямовані протилежно зображеним на рисунку 4.7.

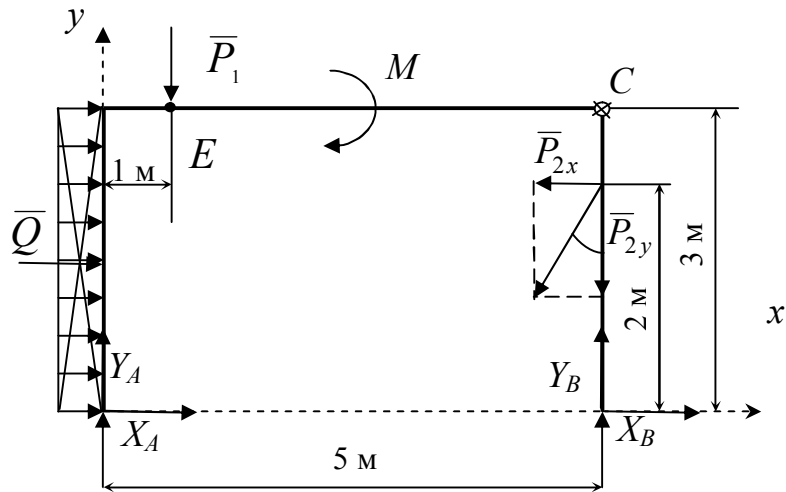


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема

Для перевірки одержаних величин реакцій опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ розглянемо складену конструкцію в цілому і складемо рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дій цих реакцій, наприклад, відносно точки E (рис. 4.8). Шарнір C знову будемо вважати нерухомим.

Перевірка.

$$\sum_{i=1}^n M_E(\bar{F}_i) = X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 1 + Q \cdot 1,5 - M - P_{2x} \cdot 1 - P_{2y} \cdot 4 + Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 3 =$$

$$= -5,33 \cdot 3 - (-1,6) \cdot 1 + 12 \cdot 1,5 - 50 - 20 \sin 30^\circ \cdot 1 - 20 \cos 30^\circ \cdot 4 + 28,92 \cdot 4 +$$

$$+ 3,33 \cdot 3 = -15,99 + 8 + 18 + 40 - 50 - 10 + 9,9 = -145,27 + 145,27 = 0.$$

При цьому рівність нулю суми моментів сил відносно точки E означає правильність визначених реакцій.

5 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

5.1 Базові визначення і припущення

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, що складається з прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою за допомогою шарнірів.

Ферми являють собою досить розповсюджені складові частини промислових і цивільних споруд. Їх використовують як опори трубопроводів і ліній електропередач (рис. 5.1), радіовежі (рис. 5.2), конструкції кранів, елементи великих прольотів будівельних та спортивних споруд, елементи мостів та ін.

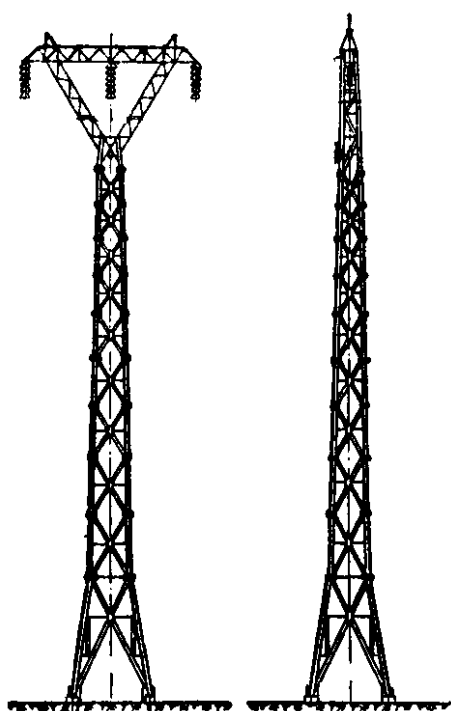


Рисунок 5.1 – Опори ЛЕП



Рисунок 5.2 – Ейфелева вежа
(Париж, Франція)

Якщо всі стержні ферми розташовані в одній площині, ферму називають *плоскою*. З'єднання стержнів ферми між собою називається *вузлами*.

Основним завданням розрахунку ферми є визначення зусиль, що виникають у стержнях при дії зовнішнього навантаження. При цьому розрахунки виконують при наступних припущеннях:

- усі зовнішні навантаження прикладені тільки у вузлах;

– вагою стержнів і тертям у вузлах, які є ідеальними шарнірами, нехтують.

Тоді на підставі першої аксіоми статики можна вважати, що стержні ферми працюють тільки на розтяг або стиск. Наведені припущення вносять певну похибку в розрахунки у порівнянні з дійсним напруженим станом стержнів, але ця похибка невелика і отримані результати можна використовувати для технічних розрахунків елементів ферми на міцність.

Найпростішим прикладом ферми є система трьох стержнів, з'єднаних між собою шарнірами (рис. 5.3).

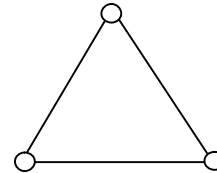


Рисунок 5.3 – Система трьох стержнів

Простою плоскою фермою називається ферма, яка може бути побудована з трикутної шляхом

послідовного приєднання кожного нового вузла за допомогою двох нових стержнів (рис. 5.4).

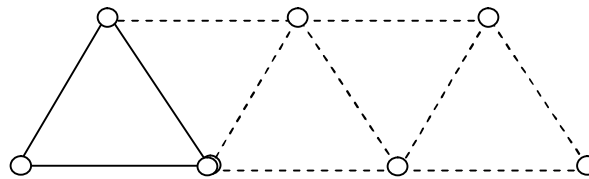


Рисунок 5.4 – Стержнева система

Розглянемо зв'язок між кількістю вузлів n і кількістю стержнів k у простих фермах. Основний трикутник (рис. 5.3) має три вузли і три стержні. Для незмінного з'єднання з основним трикутником кожного з решти $n-3$ вузлів потрібно приєднати два стержні. Отже, загальна кількість стержнів у простій ферми з урахуванням трьох стержнів основного трикутника визначається так:

$$k = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \quad (5.1)$$

Покажемо, що проста ферма статично означена, якщо число опорних реакцій дорівнює трьом. Дійсно, для кожного вузла можна скласти два рівняння рівноваги, оскільки на нього діє збіжна система сил. Таким чином, усього можна скласти $2n$ рівнянь рівноваги. У ці рівняння будуть входити k невідомих зусиль у стержнях і три реакції опор. З урахуванням формули (5.1) загальне число невідомих буде:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n,$$

тобто дорівнюватиме числу рівнянь рівноваги. Таким чином, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Зазначимо, що якщо число стержнів k менше, ніж підраховане за формулою (5.1), то така конструкція буде механізмом, тобто матиме можливість рухатися. Якщо число стержнів більше, ніж підраховане за формулою (5.1), або число опорних реакцій більше трьох, ферма буде статично неозначена і для її розрахунку треба застосувати методи будівельної механіки.

5.2 Порядок розрахунку простої ферми

1. Спочатку складають три рівняння рівноваги для визначення реакцій опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій бажано скласти перевірочне рівняння.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають у себе умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і реакції опор. Але попереднє визначення опорних реакцій суттєво спрощує розв'язання задачі.

2. Далі визначають зусилля у стержнях ферми.

Звичайно використовують два способи: вирізання вузлів і Ріттера.

а) *Спосіб вирізання вузлів.* Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в усіх стержнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги збіжних систем сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох.

Для визначеності припускають, що всі зусилля направлені від вузла, тобто стержні розтягнуті. Якщо в результаті розрахунків значення зусилля буде від'ємним, то це означатиме, що стержень стиснутий. Останній вузол розглядають, як правило, для перевірки.

Зусилля в окремих стержнях можуть виявитись нульовими, тобто стержні будуть ненавантаженими. Такі стержні можна визначити за допомогою кількох лем.

Лема 1. Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються два стержні (рисунок 5.5), то зусилля в цих стержнях дорівнюватимуть нулю, тобто

$$S_1 = 0 \text{ і } S_2 = 0.$$

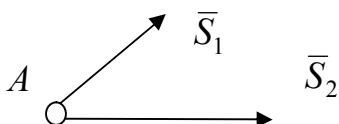


Рисунок 5.5

Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються три стержні (рис. 5.6), з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля у третьому стержні дорівнює нулю: $S_3 = 0$.

$$\bar{S}_3$$

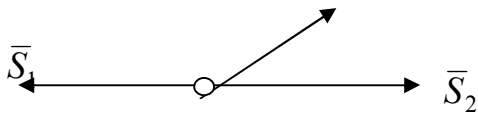


Рисунок 5.6

Лема 3. Якщо до вузла, в якому збігаються два стержні, прикладена зовнішня сила \bar{P} у напрямку одного з стержнів (рис. 5.7), то зусилля у другому стержні дорівнює нулю: $S_2 = 0$.

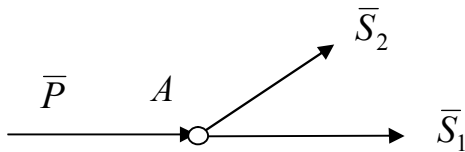


Рисунок 5.7

б) *Спосіб Ріттера.* Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в окремих стержнях ферми, зокрема, для перевірочних розрахунків. Згідно з цим способом ферму розподіляють на дві частини перерізом, який проходить не більше, ніж через три стержні, і розглядають рівновагу однієї з частин. Зусилля в перерізаних стержнях направляють від перерізу, тобто припускають (як і в способі вирізання вузлів), що всі стержні розтягнуті. Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стержня, через який пройшов переріз. Для цього складають рівняння моментів відносно точки площини (цю точку називають *точкою Ріттера*), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стержнів, які потрапили в переріз. Якщо два інших стержні перерізу виявляються паралельними, то складають рівняння проєкцій сил на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стержнів. Таким чином, спосіб Ріттера дає змогу визначити зусилля в будь-якому стержні ферми незалежно від зусиль в інших стержнях.

Аналізуючи вищезазвані способи визначення зусиль у стержнях, зазначимо, що зусилля способом вирізання вузлів визначають послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Це може призвести до накопичення похибок, тому бажано значення знайдених зусиль при розгляді наступних вузлів брати якомога точнішими. Крім того, помилка у визначенні одного зусилля призведе до неправильних розрахунків усіх інших стержнів, що залишились.

Спосіб Ріттера на відміну від попереднього не призводить до накопичення похибок, бо всі зусилля визначаються незалежно одне від одного.

Але одночасно це не дає можливості помітити грубі помилки, що можуть трапитись при обчисленні. У деяких фермах також не всі зусилля можуть бути визначені способом Ріттера незалежно одне від одного.

Таким чином, найкраща методика визначення зусиль у стержнях ферми полягає в поєднанні способів вирізання вузлів і Ріттера. При цьому всі зусилля визначаються за способом вирізання вузлів і деякі з них перевіряють способом Ріттера.

Приклад 1. Визначити зусилля у стержнях ферми (рис. 5.8), на яку діє задана сила $P = 10$ кН. Зусилля у стержнях 2, 3, 4 перевірити способом Ріттера.

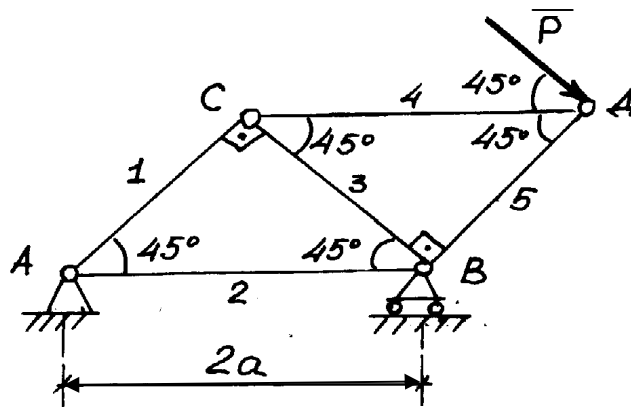


Рисунок 5.8 – Задана схема

Розв'язання:

1) Розглянемо рівновагу ферми (рис. 5.9) і визначимо реакції опор А і В:

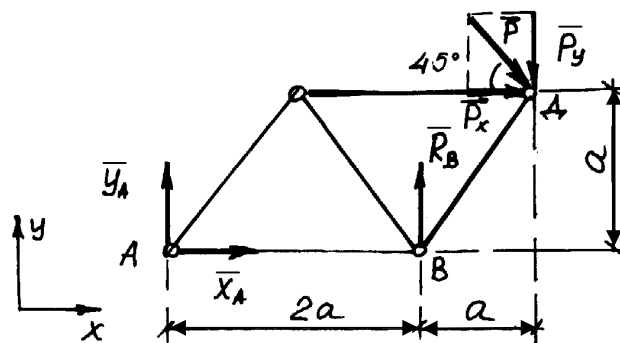


Рисунок 5.9 – Розрахункова схема

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0,$$

де P_x, P_y – модулі складових сили \bar{P} : $P_x = P \cdot \cos 45^\circ$, $P_y = P \cdot \sin 45^\circ$,

$$R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ кН};$$

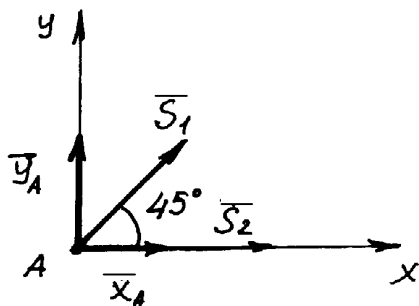
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0;$$

$$Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^n M_{\Delta}(F_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$
 $= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$

2) Визначимо зусилля у стержнях ферми методом вирізання вузлів:

а) розглянемо рівновагу вузла А (рис. 5.10):



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

Рисунок 5.10 – Вузел «А»

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0;$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

б) розглянемо рівновагу вузла С (рис. 5.11):

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

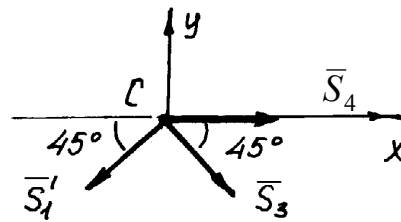


Рисунок 5.11 – Вузел «С»

$$-S_1' \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = -S_1' = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1 \cdot \cos 45^\circ + S_3' \cos 45^\circ + S_4 = 0;$$

$$S_4 = S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

(за модулем $S_1' = S_1 = 10$ кН);

в) розглянемо рівновагу вузла В (рис. 5.12):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S'_2 - S'_3 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

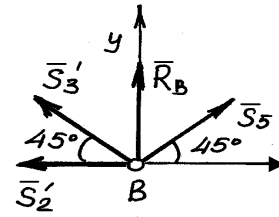


Рисунок 5.12 – Вузел «В»

$$S_5 = \frac{S'_2 + S'_3 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$

друге рівняння можна використати для перевірки:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -S'_3 \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

$$(S'_2 = S_2; S'_3 = S_3);$$

г) для перевірки розглянемо останній вузол Д (рис. 5.13):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S'_4 - S'_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

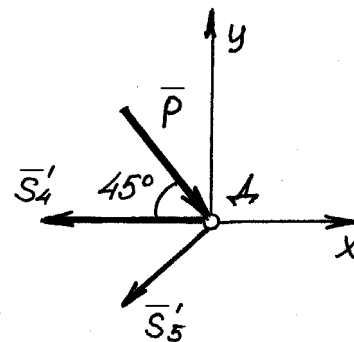


Рисунок 5.13 – Вузел «Д»

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \sin 45^\circ - S'_5 \sin 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

$$(S'_4 = S_4; S'_5 = S_5);$$

3) Визначимо зусилля у стержнях 2, 3, 4 ферми методом Ріттера. Для цього проведемо переріз через ці стержні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми (рис. 5.14):

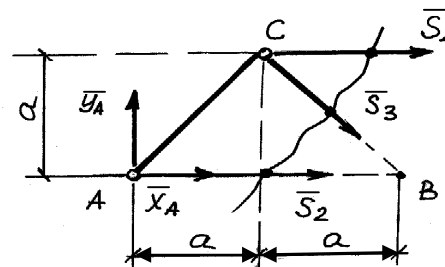


Рисунок 5.14 – Переріз по Ріттеру

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0;$$

$$S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0; \quad S_4 - 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

Відповідь: 1) $X_A \approx -7$ кН; $Y_A \approx -7$ кН; $R_B = 14$ кН; знаки « \leftarrow » означають, що справжнє направлення складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A протилежне показаним на рисунках;

2) $S_1 = 10$ кН; $S_2 = 0$; $S_3 = -10$ кН; $S_4 \approx 14$ кН; $S_5 = -10$ кН; стержні 1, 4 – розтягнуті; 3, 5 – стиснуті; 2 – ненавантажений.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що є предметом статички?
2. Дайте фізичне і геометричне визначення поняття сили, вкажіть її розмірність.
3. Яке тіло називається абсолютно твердим?
4. Які системи сил називаються статично еквівалентними? Визначте формулою системи сил, еквівалентні нулю, а також одній силі. Як називається стан тіла, що знаходиться під дією системи сил першого типу? Як називається сила, до якої приводиться система другого типу?
5. Сформулюйте і проаналізуйте аксіоми статички.
6. Чи зміниться стан тіла, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії її дії?
7. Що таке двійка сил? Чому вона еквівалентна?
8. Дайте визначення в'язі.
9. Яке тіло називається вільним?
10. Наведіть приклади технічної реалізації в'язів. Що таке реакція в'язі? Покажіть реакції типових в'язів: абсолютно гладка поверхня, нитка, ідеальний стержень, циліндричний шарнір, сферичний шарнір, нерухома опора з циліндричним шарніром, рухома опора з циліндричним шарніром, жорстке защемлення.
11. У чому полягає «Принцип визволення від в'язів»? Наведіть приклад.
12. Дайте визначення системи сил, що сходиться у просторі і на площині. Що таке точка сходу системи сил?
13. Чому еквівалентна система сил, що сходяться? Покажіть це на прикладі трьох сил.
14. Проаналізуйте на прикладі теорему про три сили (приклад задається викладачем).
15. Дайте визначення проекції сили на вісь і площину. Визначте проекції сил, що паралельні, перпендикулярні й розташовані під кутом до горизонтальної осі Ox .
16. Як формулюються умови рівноваги системи сил, що сходяться, у геометричній і алгебраїчній формах?
17. Визначте момент сили відносно точки і проаналізуйте його властивості. Що таке плече сили?
18. Як направлений вектор – момент сили відносно даної точки?
19. Запишіть векторну формулу, яка визначає модуль і напрям вектора моменту сили відносно даної точки.

20. Визначите момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості.
21. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
22. Яка залежність між моментом сили відносно точки і моментом тієї ж сили відносно осі, яка проходить через цю точку?
23. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
24. При якому напрямі сили її момент відносно даної осі є найбільшим?
25. Дайте визначення алгебраїчного моменту сили.
26. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, і точку її прикладання.
27. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, і точку її прикладання.
28. Знайдіть рівнодіючу системи рівномірно розподілених сил за довжиною для прямокутної епюри їхнього розподілу.
29. Знайдіть рівнодіючу системи розподілених за довжиною сил для трикутної епюри їхнього розподілу при $q(0) = 0$.
30. Дайте визначення парі сил. Чому пара сил не має рівнодіючої?
31. Які властивості мають пари сил? Сформулюйте теорему про перенесення пари сил у паралельну площину.
32. Чи залежить момент пари сил від її розташування у площини?
33. Складіть дві пари сил, що лежать у пересічних площинах.
34. Які пари сил називаються еквівалентними? Коли дві пари будуть еквівалентними?
35. Як формулюються умови рівноваги системи пар сил у геометричній і алгебра їхній формах?
36. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
37. Дайте визначення головного вектора системи сил.
38. Що називається головним моментом системи сил?
39. Чому дорівнюють головний момент і головним момент відносно даної точки довільної системи сил.
40. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор системи сил і рівнодійна?
41. До яких двох силових факторів можна звести довільну систему сил у просторі?
42. Як змінюється головний вектор системи сил при перенесенні центра зведення?
43. Якою властивістю володіє головний момент системи сил при перенесенні центра зведення?
44. Коли плоска довільна система сил приводиться тільки до пари сил?

45. Сформулюйте умови зведення плоскої довільної системи сил тільки до однієї сили (рівнодіючої).
46. Як орієнтовані в просторі головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил? Наведіть їх механічну схему.
47. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, що за визначенням еквівалентна нулю?
48. Сформулюйте геометричні й алгебраїчні умови рівноваги твердого тіла.
49. Скільки рівнянь рівноваги в алгебраїчній формі для довільної просторової системи сил? Запишіть їх.
50. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої довільної системи сил.
51. Сформулюйте першу форму умов рівноваги для плоскої довільної системи сил.
52. Сформулюйте другу форму умов рівноваги плоскої довільної системи сил.
53. Сформулюйте третю форму умов рівноваги довільної системи сил у площині.
54. Дайте поняття ферми як технічної конструкції. Наведіть приклади статично визначених плоских ферм,
55. Сформулюйте принцип розрахунку плоскої ферми методом вирізання вузлів.
56. Як розраховують плоскі ферми методом Ріттера? Чим він відрізняється від методу вирізання вузлів?

6 БАЗОВІ ТВЕРДЖЕННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

6.1 Базові допущення

Для того, щоб наука про опір матеріалів могла рекомендувати загальні теоретичні основи розрахунку елементів конструкцій, виконуваних з різних матеріалів, необхідно виходити з низки допущень про їхні властивості, а також з допущень про характер деформацій.

Допущення про властивості матеріалів:

1. Матеріал *однорідний*, тобто його властивості не залежать від розмірів виділеного з тіла обсягу. У дійсності однорідних матеріалів у природі немає. Наприклад, структура металів складається з безлічі хаотично розташованих мікроскопічно дрібних кристалів (зерен). Розміри елементів конструкцій, що розраховуються ж, як правило, незмірно перевищують розміри кристалів, тому допущення про однорідність матеріалу тут цілком застосовно.

2. Матеріал становить *суцільне середовище* і безупинно заповнює весь обсяг елемента конструкції. Це допущення впливає безпосередньо з першого про однорідність матеріалу – і дозволяє застосовувати математичний аналіз.

3. Матеріал *ізотропний*, тобто фізико–механічні властивості однакові в усіх напрямках. Таким чином, виділений із суцільного середовища елемент не залежить від орієнтації щодо обраної системи координат. Метали завдяки своїй дрібнозернистій структурі вважаються ізотропними. Але є багато неізотропних – анізотропних – матеріалів. До них належать деревина, тканини, фанера, багато пластмас. В опорі матеріалів розглядаються в основному матеріали ізотропні.

4. Матеріал у визначених межах навантаження тіла має ідеальну пружність, тобто після зняття навантаження тіло цілком відновлює первісні форми і розміри.

Допущення про характер деформування елементів конструкцій:

1. Переміщення точок елемента конструкції, обумовлені його пружними деформаціями, незначні порівняно з розмірами самого тіла. Відповідно до цього допущення, деформований елемент конструкції (або вся конструкція цілком) несуттєво відрізняється від недеформованого, тому під час складання рівнянь рівноваги сил, що діють на деформоване тіло, можна зневажати тими змінами, що відбулися після прикладення зовнішніх сил (див. рис. 6, а, б). Отже варто виходити з первинної форми тіла (елемента конструкції) і його початкових розмірів. Це твердження коротко називається принципом початкових розмірів.

2. Переміщення точок пружного тіла у відомих межах навантаження прямо пропорційні силам, що викликають ці переміщення. Наприклад, якщо сила F викликала переміщення точки B на відстань δ (рис. 6.1, а), то сила $2F$ викликає переміщення точки B на відстань 2δ (рис. 6.1, б). Конструкції, для яких справедливо це допущення, називаються лінійно-деформованими.

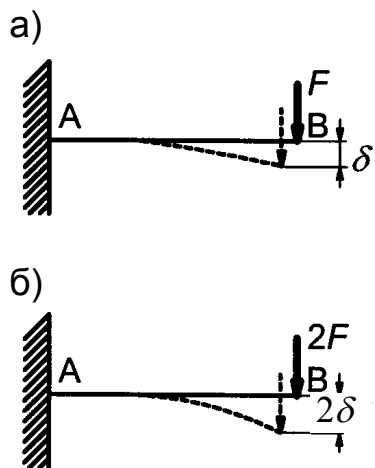


Рисунок 6.1 – Консольна балка під дією зосередженої сили

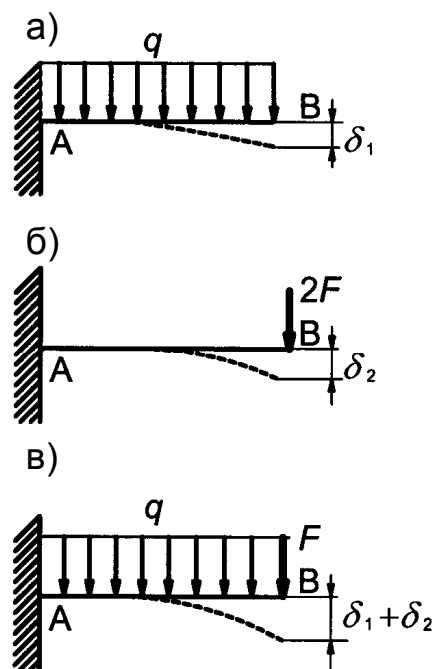


Рисунок 6.2 – Консольна балка

3. Для лінійно-деформованих конструкцій справедливий відомий з теоретичної механіки *принцип незалежності дії сил* – результат дії декількох сил не залежить від послідовності навантаження ними певної конструкції і дорівнює сумі результатів дії кожної сили окремо. Отже, якщо під дією рівномірно розподіленого навантаження точка B бруса (рис. 6.2, а) переміститься на відстань δ_1 , а під дією зосередженої сили (рис. 6.2, б) – на відстань δ_2 , то за одночасної дії обох сил переміщення точки B дорівнює сумі переміщень δ_1 і δ_2 (рис. 6.2, в).

6.2 Метод перетинів. Види навантаження

Розтягуючи руками гумовий джгут або згинаючи товстий сталевий дріт ми відчуваємо опір цих тіл, іноді сили наших рук виявляється недостатньо, щоб ще більш розтягти джгут або зігнути дріт. Здатність тіла пручатися зміні первинної форми визначається силами зчеплення між усіма суміжними частками тіла, що на відміну від зовнішніх сил, прикладених до тіла, називаються внутрішніми силами. Внутрішні сили (іноді них називають силами

пружності), як свідчить досвід, зростають разом зі збільшенням навантажень, але до відомої межі, після чого зчеплення між частками тіла припиняється і тіло руйнується.

Для того правильно розрахувати конструкцію на міцність або на твердість, необхідно уміти визначати внутрішні сили за заданим навантаженням. Для виявлення внутрішніх сил в опорі матеріалів застосовується метод перетинів, суть якого викладена нижче.

Подумки поділимо думкою брус, навантажений урівноваженою системою сил F_k (рис. 6.3, а), поперечним перерізом A на частині I і II і відкинемо одну з них, наприклад частину II . З метою зберігання рівноваги частини бруса, що залишився, (рис. 6.3, б), замінимо дію на неї відкинутої частини системою сил, що є внутрішніми для цілого бруса і зовнішніми стосовно відсіченої частини. У результаті приведення цієї системи сил до центра ваги перетину одержимо головний вектор F_{zl} і головний момент M_{zl} (рис. 6.3, в).

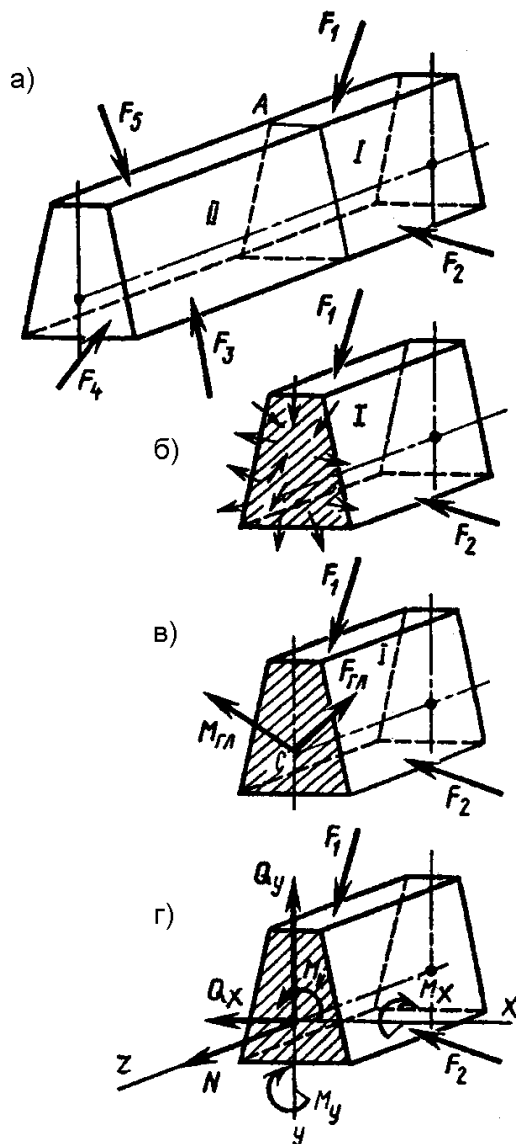


Рисунок 6.3 – Метод перетинів

Виберемо систему координатних осей x, y, z таким чином, щоб вісь z була спрямована перпендикулярно перетині, тобто збігалася з віссю бруса, а осі x і y розташовувалися в площині перетину, причому одна з осей (вісь y) збігалася з її віссю симетрії (рис. 6.3, г). Розклавши головний вектор і головний момент на складові по обраних осях, одержимо три сили N, Q_x, Q_y і три моменти M_x, M_y, M_z , які називаються внутрішніми силовими факторами.

Шість внутрішніх силових факторів разом із відомими зовнішніми силами на частині бруса, що залишилася, утворять урівноважену систему сил, для якої можна скласти шість рівнянь рівноваги. Легко побачити, що в кожне з цих рівнянь входить один з невідомих внутрішніх силових факторів. Отже, вирішуючи рівняння, знайдемо

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \sum F_{xx}; & M_x &= \sum M_x(F_k); \\ Q_y &= \sum F_{xy}; & M_y &= \sum M_y(F_k); \\ N &= \sum F_{xz}; & M_k &= \sum M_z(F_k). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Складова N головного вектора внутрішніх сил, спрямована перпендикулярно площині поперечного переріза бруса, називається *нормальною (подовжньою) силою*. Складові Q_x, Q_y , лежачі в площині поперечного переріза, називаються *перцевими силами*. Складового головного моменту внутрішніх сил момент M_k , що виникає в площині поперечного переріза бруса, називається *крутильним моментом*. Складові моменти M_y і M_z , що виникають у площинах, перпендикулярних поперечному перерізу бруса, називаються *згинальними моментами*.

З рівності (6.1) випливає, що нормальна сила N дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь z зовнішніх сил, які діють на частину бруса, що залишилася; кожна з поперечних сил (Q_x і Q_y) дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на відповідну вісь зовнішніх сил, які діють на частину бруса, що залишилася; *крутильний момент* M_k дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на розглянуту частину бруса, щодо нормальної до перетину осі z ; кожний зі згинальних моментів M_x і M_y дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, які діють на частину бруса, що залишилася, щодо осей x або y відповідно.

Правила визначення знаків проєкцій або моментів зовнішніх сил під час їхнього алгебраїчного підсумовування сформульовані далі у відповідних главах.

За аналогією з наведеними найменуваннями внутрішніх силових факторів наводиться класифікація видів навантаження бруса. Так, якщо в поперечних перерізах бруса виникає тільки нормальна сила N , то брус розтягнутий (сила N

спрямована від перетину) або стиснутий (сила N спрямована до перетину). Якщо в поперечному перерізі виникає тільки момент M_k , то брус у цьому перетині працює на *крутіння*. Якщо в поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент M_x (або M_y), то відбувається *чистий вигин*. Якщо в поперечних перерізах поряд зі згинальним моментом (наприклад, M_x) виникає і поперечна сила Q_y , то це *поперечний вигин*. Можливі випадки, коли брус працює на крутіння і вигин або розтягання одночасно.

Таким чином, метод перетинів дозволяє визначити внутрішні силові фактори і види навантаження. Практично метод перетинів зводиться до виконання такими операцій:

- 1) розрізаємо брус на дві частини;
- 2) відкидаємо одну з частин (доцільно відкинути частину, на яку діє більше число зовнішніх сил, або частину, що містить закладення);
- 3) замінюємо дію відкинutoї частини на залишену шістьма внутрішніми силовими факторами;
- 4) визначаємо значення внутрішніх силових факторів з умов рівноваги для відсіченої частини бруса;
- 5) установлюємо вид навантаження.

Як зазначалося вище, внутрішні сили визначають взаємодію між частинами бруса, причому ця взаємодія підкоряється аксіомі статички про рівність дії і протидії. Отже внутрішні силові фактори, що виникають у перетині праворуч, дорівнюють внутрішнім силовим факторам у перетині ліворуч, але спрямовані в протилежні боки (рис. 6.4).

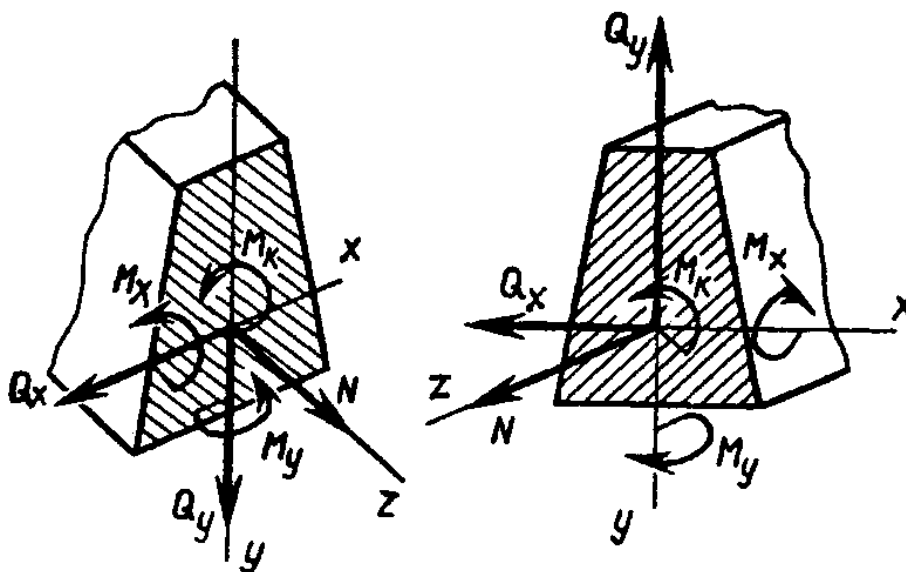


Рисунок 6.4 – Внутрішні силові фактори

6.3 Напруги

Метод перетинів дозволяє розрахувати внутрішні силові фактори. Для оцінки міцності необхідно вміти визначати внутрішні сили в будь-якій точці перетину розглянутого бруса, тому введемо числову міру інтенсивності внутрішніх сил – *напругу*.

Розглянемо брус, до якого прикладене деяке навантаження. Брус під дією навантаження знаходиться в рівновазі. Застосовуючи метод перетинів, розсічемо брус поперечною площиною, відкинемо ліву частину бруса, замінимо дію відкинутої частини на розглянуту системою внутрішніх сил. Виділимо навколо довільної точки малу площадку ΔA (рис. 6.5, а). Рівнодіючу внутрішніх сил у межах цієї площадки позначимо ΔF . Відношення

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = p_{cp}, \quad (6.2)$$

називається середньою напругою по площадці ΔA . Вектор середньої напруги збігається по напрямку з вектором рівнодіючої ΔF .

Під час поступового зменшення площадки ΔA змінюються як модуль, так і напрямок рівнодіючої внутрішніх сил ΔF , а отже, вектор p_{cp} поступово наближається до дійсного значення напруги p у заданій точці (рис. 6.5, б).

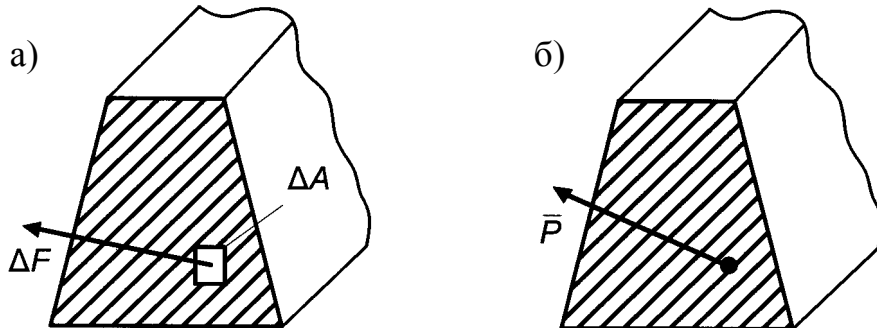


Рисунок 6.5 – Рівнодіюча внутрішніх сил ΔF

Числове значення цієї напруги виражається рівністю

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (6.3)$$

Відповідно до формул (6.2) і (6.3), одиницею виміру напруги служить одиниця сили, поділена на одиницю виміру площі. У Міжнародній системі одиниць (СИ) одиниця сили – H , одиниця площі – m^2 , значить одиниця напруги в цій системі – H/m^2 названа паскалем, тобто $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Паскаль – дуже мала

одиниця напруги, тому більш уживаною є величина – мегапаскаль: 1 МПа – 10^6 Па, що чисельно дорівнює 1 Н/мм^2 .

Вектор p повної напруги в точці перетину можна розкласти на два складові вектори: σ і τ (рис. 6.6, а). Вектор σ , спрямований перпендикулярно перетині, називається *нормальною напругою*. Вектор τ , що лежить у площині перетину, називається *дотичним напруженням*. Оскільки вектори σ і τ взаємно перпендикулярні, залежність між числовими значеннями напруг p , σ і τ виражається формулою:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (6.4)$$

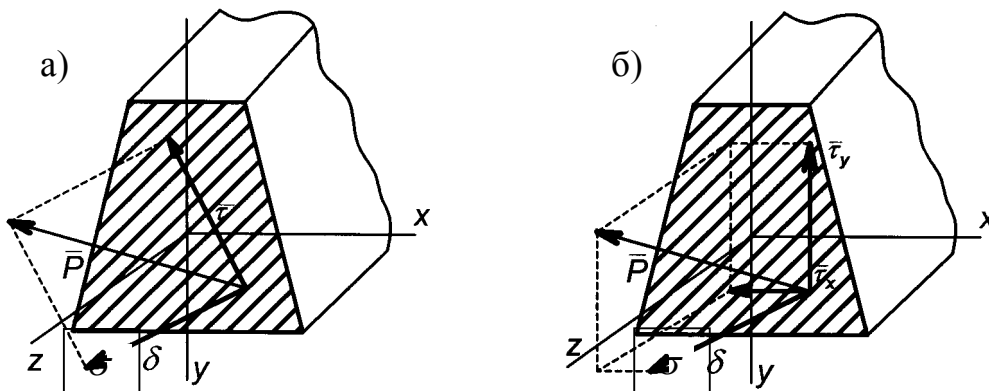


Рисунок 6.6 – Складові вектори: σ і τ

Частіше виявляється доцільним, відповідно з обраними осями координат x , y , z (рис. 6.6, б), розкласти вектор p не на два, а на три складові вектори: σ (нормальна напруга), рівнобіжний осі Z , τ_x і τ_y (дотичні напруження), рівнобіжні відповідно осям x та y . У цьому випадку

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (6.5)$$

Між внутрішніми силовими факторами і напруженнями σ , τ_x і τ_y існують визначені залежності, до встановлення яких ми перейдемо в наступних главах. Проте зазначимо: наявність нормальної напруги σ у будь-якій точці поперечного переріза обумовлено виникненням у цьому перетині нормальної сили N або згинальних моментів M_x і M_y . Наявність дотичних напружень τ або τ_x і τ_y обумовлено внутрішніми силовими факторами, що виникають у площині перетину, тобто поперечними силами Q_x , Q_y або крутильним моментом M_k .

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається міцністю, твердістю і стійкістю деталі (конструкції)?
2. За якими ознаками і як класифікуються навантаження в опорі матеріалів?
3. Яка мета застосування методу перетинів? Укажіть у процесі застосування цього методу послідовність операцій.
4. З якими внутрішніми силовими факторами пов'язане виникнення в поперечних перерізах бруса нормальних напружень і з якими – дотичних напружень?
5. Формула і розмірність напруги p .

7 РОЗТЯГАННЯ І СТИСК

7.1 Нормальні сили і напруги в поперечному перерізі бруса

Вид навантаження бруса, при якому в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – нормальна сила N , називається *розтяганням* або *стиском*. Прямий брус, що працює тільки на розтягання (стиск), називають *стрижнем*.

Брус розтягнуть, якщо зовнішні сили F , прикладені до його кінців, діють уздовж осі бруса і спрямовані в сторони від бруса (рис. 7.1, а). При дії осьових навантажень F , спрямованих до бруса, він стиснутий (рис. 7.1, б).

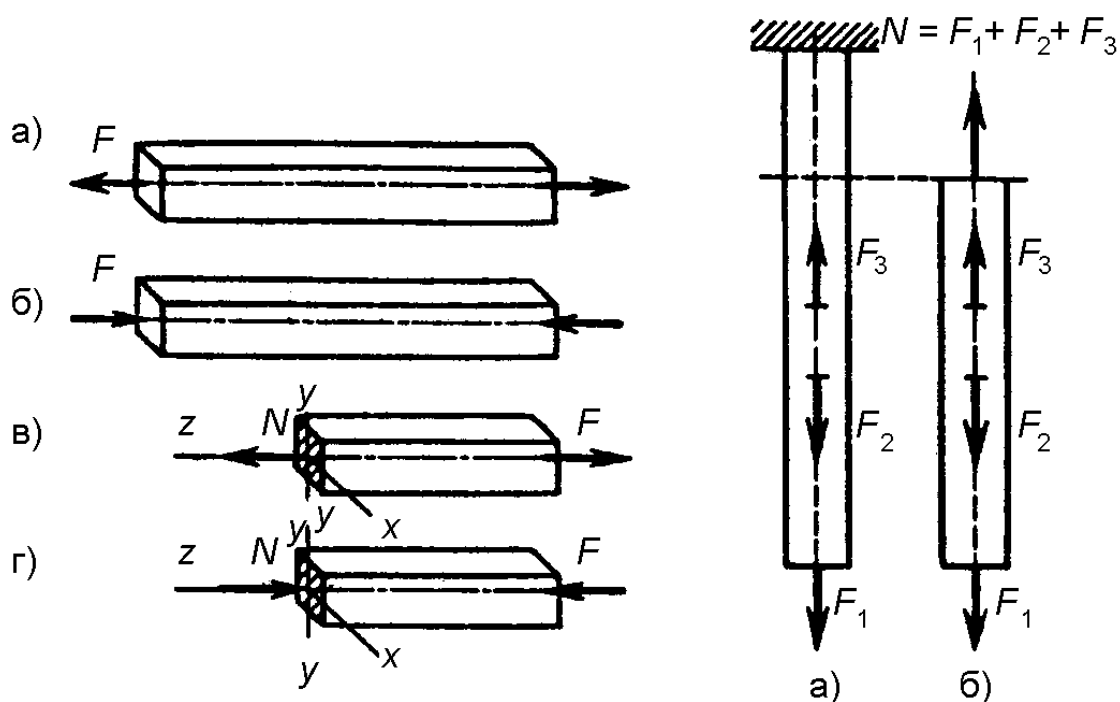


Рисунок 7.1 –

Зовнішні та нормальні сили

Рисунок 7.2 –

Навантажений осьовими силами

За таких навантажень у поперечних перерізах виникає тільки подовжня сила N . Дійсно, якщо відповідно до методу перетинів розрізати розтягнутий брус і відкинути, наприклад, його ліву частину (рис. 7.1, в), то для зрівноважування зовнішньої сили F досить у перетині прикласти тільки один внутрішній силовий фактор – нормальну силу N , направивши її по осі Z від перетину. Відповідно до першого з рівнянь (7.1)

$$N = F.$$

Інші внутрішні силові фактори у цьому випадку дорівнюють нулеві (проекції сили F на вісь v і на вісь x дорівнюють нулеві і моменти сили F щодо

кожної з осей x , y , z також дорівнюють нулеві). Отже, нормальна сила N є рівнодіюча внутрішніх сил у цьому перетині. Аналогічний результат одержимо, розрізавши стиснутий брус (рис. 7.1, г), з тією лише різницею, що в останньому випадку нормальна сила N спрямована до перетину.

Якщо брус навантажений не двома, як на рисунку 7.1, а, а великою кількістю осьових сил (рис. 7.2, а) і по один бік від обраного перетину маються сили, спрямовані в протилежні боки (рис. 7.2, б), то доцільно визначитися з правилом знаків для проекцій зовнішніх сил під час визначення нормальної сили в перетині: *проекції зовнішніх сил, спрямованих від перетину, позитивні і, навпаки, проекції зовнішніх сил, спрямованих до перетину, негативні.*

Це правило справедливе для будь-якої залишеної частини бруса – правої або лівої (у разі горизонтального твердження бруса), нижньої або верхньої (у разі вертикального розташування бруса).

Якщо в результаті алгебраїчного додавання проекцій зовнішніх сил вийшло, що $N > 0$, то нормальна сила спрямована від перетину і брус у цьому перетині випробує розтягання; коли значення $N < 0$ нормальна сила спрямована до перетину і брус випробує стиск. У тих випадках, коли під час переходу від одного перетину до іншого нормальна сила змінюється, будують графіки зміни значень нормальної сили N по довжині бруса. Такі графіки називаються епюрами (рис. 7.3).

Епюра N зображується у виді ліній рівнобіжних базової і вилучених від неї на величину відповідному значенню нормальної сили цієї ділянки бруса.

Переходимо тепер до визначення напружень у поперечних перерізах бруса.

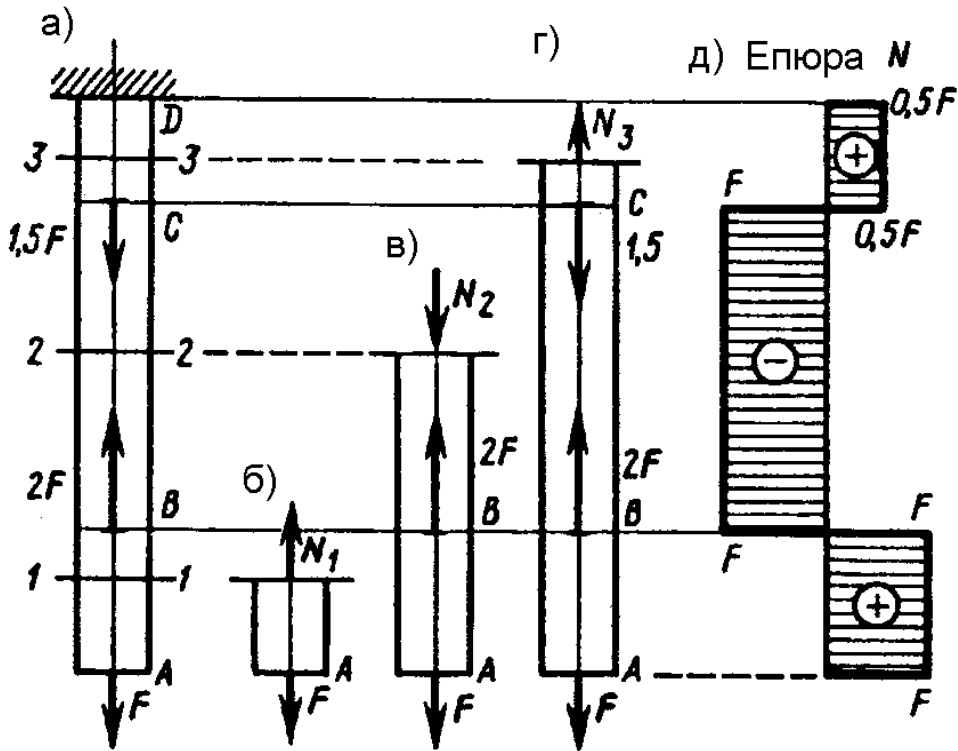


Рисунок 7.3 – Побудова епюр

Ця задача розв'язується на основі *гіпотези плоских перетинів*, (Я. Бернуллі старший (854 – 1705 рр.)). Стосовно до розглянутого виду навантаження гіпотеза говорить: перпендикулярний осі недеформованого бруса плоский перетин A (рис. 7.4, а) залишається також плоским і перпендикулярним осі і під час розтягання (стиску) бруса (рис. 7.4, б).

Виходячи з того, що в розтягнутому (стиснутому) брусі поперечні перерізи залишаються рівнобіжними один одному, природно припустити, що внутрішні сили розподілені по перетині рівномірно (рис. 7.4, в). Нормальна сила N є рівнодіючою внутрішніх сил у поперечному перерізі, тоді нормальна напруга в будь-якій точці перетину

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (7.1)$$

де A – площа поперечного переріза бруса. Нормальна напруга спрямована так само, як і нормальна сила: під час розтягання бруса – від перетину, при стиску – до перетину.

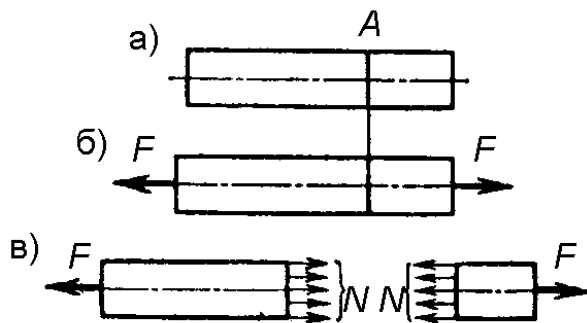


Рисунок 7.4 –
Гіпотеза плоских перетинів

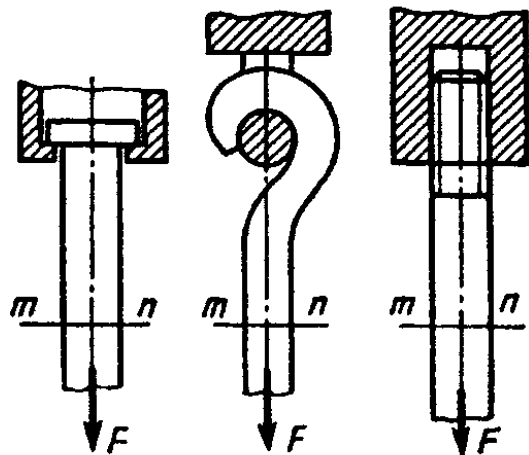


Рисунок 7.5 –
Поперечні перерізи $m-n$

Розглядаючи розтягання бруса осьовими силами, прикладеними до його торців, ми не торкалися питання про те, яким способом сили, що розтягують, прикладені до бруса. Під час кожного зі способів (рис. 7.5) поблизу закріплень брус випробує більш складний вид навантаження, ніж просте розтягання. Разом із тим експериментальні дослідження показують, що особливості прикладення або застосування зовнішніх сил до розтягнутого бруса впливають на розподіл напруження у його поперечних перерізах тільки поблизу місць навантаження і закріплення.

У поперечних перерізах $m-n$ (рис. 7.5) на відстані, що перевищує їхній найбільший розмір, під час визначення нормальних навантажень досить брати до уваги тільки значення заданої осьової сили F і площі A .

Це твердження відоме як *принцип Сен-Венана* в застосуванні до розтягання (стиску) бруса.

Застосовуючи цей принцип надалі, ми не будемо брати до уваги конкретний спосіб прикладання до бруса зовнішніх сил.

Якщо нормальні напруги в різних перетинах бруса не однакові або через зміну нормальних сил уздовж осі бруса, або через зміну площі поперечних перерізів (рис. 7.6, а), то будують епюри нормальних напруг (епюра σ), що наочно характеризує напружений стан бруса по всій його довжині (рис. 7.6, в).

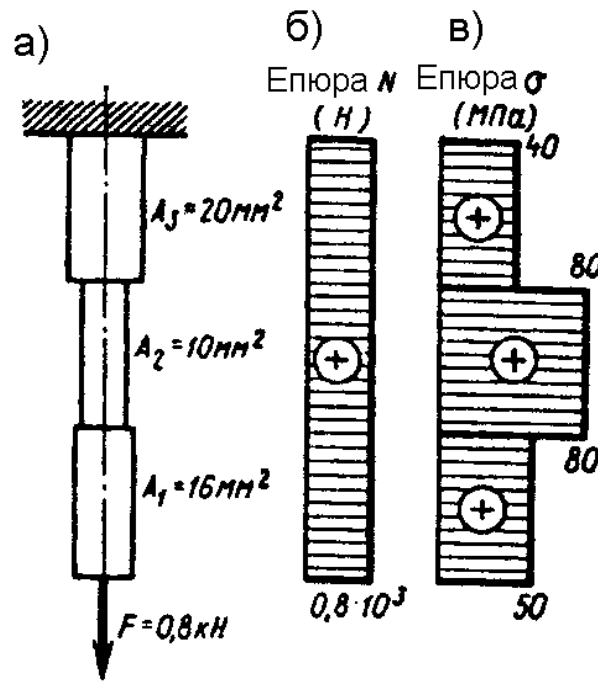


Рисунок 7.6 – Епюра нормальних напруг

Приклад 1. Триступінчастий брус із площами поперечних перерізів ступінів $A_1 = 16 \text{ мм}^2$, $A_2 = 10 \text{ мм}^2$ і $A_3 = 20 \text{ мм}^2$ навантажений примусово $F = 0,8 \text{ кН}$, як показано на Рисунок 7.6. Визначити подовжні сили N і нормальні напруги в поперечних перерізах бруса, побудувати епюри N і σ .

1. Будуємо епюри подовжньої сили.

Брус розтягнуть силою $F = 0,8 \text{ кН} = 0,8 \times 10^3 \text{ Н}$. Застосовуючи метод перетинів, визначаємо, що в будь-якому перетині бруса $N = F = 0,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Епюра N зображена на рисунку 7.6, б.

2. Будуємо епюри нормального напруження.

Площі поперечних перерізів ступінів задані. Підставляючи їхнє значення у формулу (7.1), знаходимо нормальні напруги:

у поперечному перерізі нижнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_1} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{16} = 50 \text{ Н/мм}^2;$$

у поперечному перерізі середнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_2} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{10} = 50 \text{ Н/мм}^2;$$

у поперечному перерізі верхнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_3} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{20} = 50 \text{ Н/мм}^2.$$

Епюра нормальних напруг по всій довжині бруса зображена на рисунку 7.6, в.

Нормальні напруги в поперечних перерізах однієї ступіні не змінюються, тому епюра σ для кожного ступеня зображується відрізком, рівнобіжним (ліворуч або праворуч залежно від знака «+» або «-») базової лінії; відстані між цими відрізками і базовою лінією пропорційні нормальним напругам у перетинах ступінів.

7.2 Переміщення і деформації. Закон Гука

Під час розтягання прямолінійного бруса круглого перетину його первинна довжина l збільшиться на величину Δl (рис. 7.7, а), а первинний поперечний розмір (діаметр d) зменшиться на Δd (рис. 7.7, б).

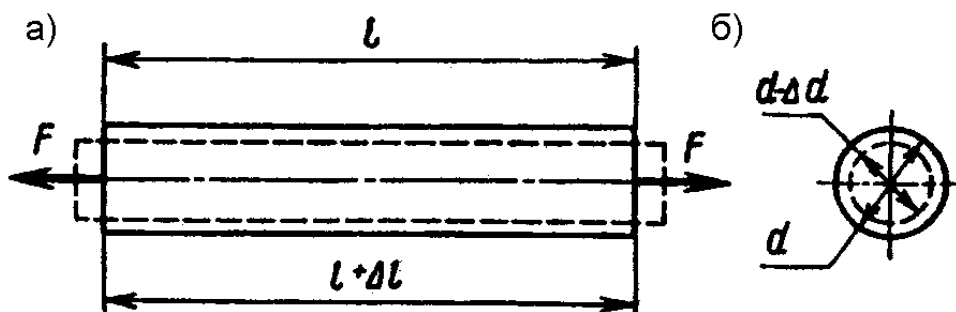


Рисунок 7.7 – Розтягання прямолінійного бруса

Величина Δl називається *абсолютним подовженням бруса*, а величина Δd – *абсолютним поперечним звуженням*. Під час стиску бруса його довжина відповідно коротшає на Δl , а поперечний розмір збільшується на Δd . Розглядаючи кожну з цих величин як різницю між початковим (до навантаження) і кінцевим (після навантаження) розмірами, їм варто приписувати протилежні знаки: у разі розтягання бруса $\Delta l > 0$, $\Delta d < 0$, у разі стиску $\Delta l < 0$, $\Delta d > 0$.

Про ступінь деформування бруса не можна оцінювати за значеннями Δl або Δd , тому що останні залежать не тільки від зовнішніх сил, але і від початкових розмірів бруса. Деформування бруса під час розтягання (стиску) характеризують величини

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta l}{l}, \quad (7.2)$$

і

$$\varepsilon' = \pm \frac{\Delta d}{d}. \quad (7.3)$$

де ε – подовжня деформація;

ε' – поперечна деформація бруса.

З формул (7.2) і (7.3) видно, що ε і ε' – величини безрозмірні.

Експериментально доведено, що подовжня і поперечна деформації пропорційно один одному, тобто

$$|\varepsilon'| = \mu |\varepsilon|, \quad (7.4)$$

де коефіцієнт пропорційності μ , що залежить від матеріалу, називається *коефіцієнтом Пуассона*. Експериментально встановлено, що його значення для різних матеріалів коливається в межах 0...0,5. Наприклад, у пробки $\mu = 0$ (під час розтягання або стиску пробочного брусочка його поперечні розміри практично не змінюються), у каучуку (гуми) значення μ близько до 0,5; для сталі $\mu = 0,25...0,3$.

У межах пружних деформацій між нормальною напругою і подовжньою деформацією існує прямо пропорційна залежність, що носить назву *закону Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (7.5)$$

Коефіцієнт пропорційності E називається модулем пружності, і його значення виражається в одиницях напруги, тому що ε – величина без розмірна.

Значення модуля пружності E для деяких матеріалів:

стали всіх марок –	2,1x10 ⁵ МПа;
мідь технічна –	1,2x10 ⁵ МПа;
бронза олов'яниста –	1x10 ⁵ МПа;
алюмінієві сплави –	0,7x10 ⁵ МПа;
каучук (гума) –	7,85 МПа.

Модуль пружності характеризує твердість матеріалу, тобто здатність чинити опір деформаціям. Відповідно до закону Гука (7.5), за тих самих значеннях нормальної напруги в поперечних перерізах бруса його подовжні деформації ε тим менше, чим більше модуль пружності E .

Якщо в рівності (7.5) замінити ε вираженням з формули (7.2)

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

то одержимо вираження

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E}. \quad (7.6)$$

Замінивши тут σ його вираженням з формули (7.1), одержимо

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}. \quad (7.7)$$

Тут вираження AE/l називається *твердістю бруса або окремої його ділянки під час розтягання (стиску)*.

Під час розв'язання рішенні деяких практичних задач виникає необхідність поряд із подовженнями у разі розтягання (стиску) враховувати також і його температурні подовження $\Delta l_1 = \alpha_t l$, де α_t – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу. У цьому випадку

$$\varepsilon = \frac{\sigma l}{E} + \alpha t,$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE} + \alpha t l. \quad (7.8)$$

Приклад 2. Визначити повне подовження бруса, розглянутого в прикладі 1 (див. рис. 7.6), якщо довжини ступінів бруса $l_1 = l_2 = l_3 = 200$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Рішення. Під час розв'язання рішенні задачі в прикладі 2 побудована еюра нормальних напруг (див. рис. 7.6,в), з якої видно, що в поперечному перерізі верхнього ступеня $\sigma_3 = 40$ Н/мм², середньої ступіні $\sigma_2 = 80$ Н/мм² і нижньої $\sigma_1 = 50$ Н/мм². Довжини ступінів і модуль пружності відомі, тому для визначення подовження ступінів бруса доцільно скористатися формулою (7.6).

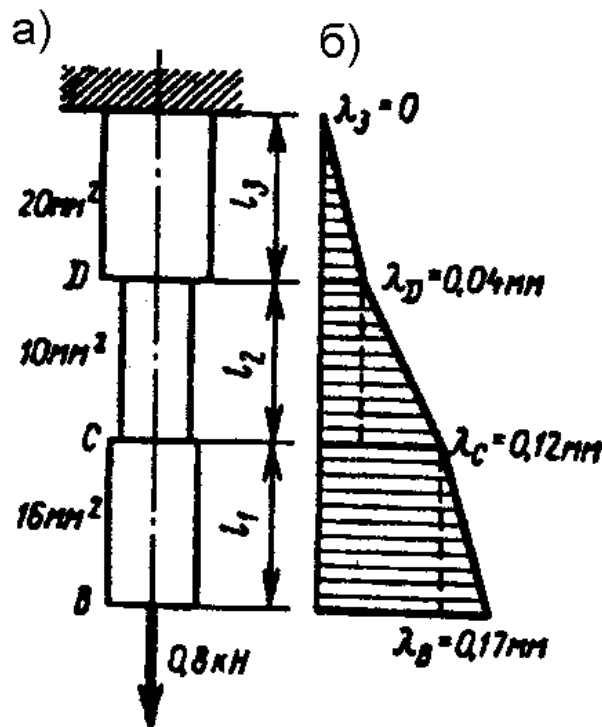


Рисунок 7.8 – Еюра переміщень

У результаті одержимо:

Верхній ступінь

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{40 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,04 \text{ мм};$$

середній ступінь

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{80 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,08 \text{ мм};$$

нижній ступінь

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{50 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,05 \text{ мм}.$$

Визначивши подовження ступінів, можна побудувати епюри переміщень λ перетинів. Для цього поруч із кресленням бруса (рис. 7.8, а) паралельно його осі проводимо базову лінію, а переміщення перетинів зображуємо перпендикулярними до неї відрізками, узятими у визначеному масштабі.

Переміщення перетину в закладенні дорівнює нулеві, тобто $\lambda_3 = 0$; переміщення перетину D дорівнює подовженню верхнього ступеня бруса, тобто $\lambda_D = \Delta l_3 = 0,04$ мм; переміщення перетину C дорівнює сумі подовжень верхнього і середнього ступінів бруса, тобто $\lambda_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,04 + 0,08 = 0,12$ мм; переміщення перетину B дорівнює сумі подовжень усіх трьох ступінів, інакше кажучи, повному подовженню бруса Δl , тобто

$$\lambda_B = \Delta l = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,04 + 0,08 + 0,05 = 0,17 \text{ мм}.$$

З'єднавши кінці відрізків, що зображують переміщення розглянутих перетинів прямими, одержимо епюри переміщень по всій довжині бруса (рис. 7.8, б).

7.3 Напружений стан під час одноосьового розтягання

Напружений стан у точці характеризується незліченною безліччю нормальних і дотичних напружень, що виникають на площадках, які можна провести через цю точку.

Для дослідження напруженого стану бруса з поперечним перерізом A у разі розтягання силами F , що діють уздовж його осі (одноосьове розтягання), виберемо яку-небудь точку B (рис. 7.9, а) і зобразимо її у виді малого елемента у формі прямокутного паралелепіпеда з площею бічної грані d окремо від бруса (рис. 7.9, б).

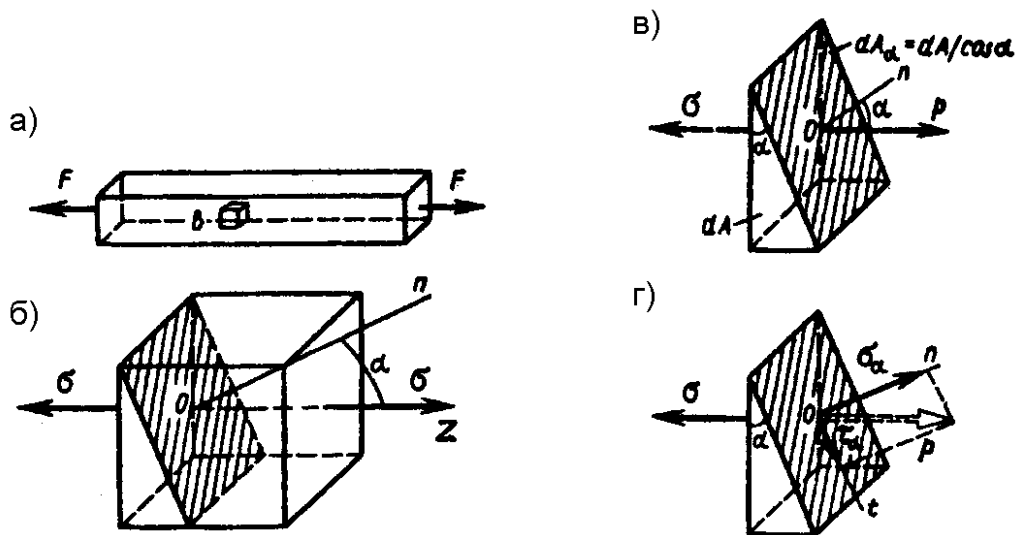


Рисунок 7.9 – Перетин при одноосьовому розтяганні

Якщо припустити, що брус складається з нескінченно великої кількості дуже тонких подовжніх волокон і вважати, що всі ці волокна не надавлюють один на одного, а тільки розтягуються (гіпотеза про ненатиснення волокон), то можна дійти висновку, що на гранях паралелепіпеда, рівнобіжних поперечним перерізам бруса, виникають тільки нормальні напруги σ , а на інших гранях напруги дорівнюють нулеві.

Розріжемо виділений елемент по перетині (на рис. 7.9, б воно заштриховано), нормаль On до якого утворить з віссю z кут α , і відкинемо частину елемента правіше перетину. Залишена ліва частина (рис. 7.9, в) зберігає рівновагу, тому що сила σd , що діє на перпендикулярну осі z площадку d , урівноважується силою $p d \alpha$, що діє на нахилену до осі z площадку $d_\alpha = d / \cos \alpha$, тобто

$$\sigma d = p d \alpha / \cos \alpha.$$

Розкладемо вектор p повної напруги на площадці d_α на складові σ_α і τ_α .

Отже, виникла на похилій площадці повна напруга

$$p = \sigma \cos \alpha. \quad (7.9)$$

Розклавши напругу p на дві складові по нормалі O_n і дотичної O_t до похилої площадки (рис. 7.9, г), знаходимо

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha \quad \text{і} \quad \tau_\alpha = p \sin \alpha.$$

Підставимо сюди замість p його значення з рівняння (7.9) і враховуючи, що $\sin \alpha \cos \alpha = 0,5 \sin 2\alpha$, одержимо

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (7.10)$$

$$\tau_\alpha = 0,5 \sigma \sin 2\alpha \quad (7.11)$$

Таким чином, знаючи нормальну напругу σ у поперечному перерізі розтягнутого (стиснутого) бруса, можна за формулами (7.10) і (7.11) визначити нормальне σ_α і дотичне τ_α напруги в перетині бруса, нахиленому до осі бруса під будь-яким кутом α .

З формул (7.10) і (7.11) випливає:

а) за $\alpha = 0^\circ$ (перетин бруса перпендикулярно осі z $\cos^2 \alpha = \cos^2 0^\circ = 1$; $\sin 2\alpha = \sin 0^\circ = 0$), $\sigma_0 = \sigma$, $\tau_0 = 0$;

б) за $\alpha = 90^\circ$ (поздовжній перетин бруса $\cos^2 \alpha = \cos^2 90^\circ = 0$; $\sin 2\alpha = \sin 180^\circ = 0$), $\sigma_{90} = \sigma$, $\tau_{90} = 0$;

в) за $\alpha = 45^\circ$ ($\cos^2 \alpha = \cos^2 45^\circ = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$; $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$), $\sigma_{45} = \sigma/2$, $\tau_{45} = \sigma/2$.

У такий спосіб встановлено, що під час одноосьового розтягання максимальна нормальна напруга $\sigma_{\max} = \sigma = F/A$ виникає в поперечних перерізах бруса ($\alpha = 0$); максимальне дотичне напруження $\tau_{\max} = \tau_{45} = \sigma/2$ виникає в перетинах, нахилених до осі бруса під кутом 45° .

Крім того, з рівності (7.11) випливає, що перехід від довільної площадки з нахилом α до площадки з нахилом $\alpha+90^\circ$ (рис. 7.10) ніяк не відбиває на абсолютному значенні дотичних напружень. Дійсно, якщо

$$|\tau_\alpha| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right|, \text{ те } |\tau_{\alpha+90}| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha + 180) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right| = |\tau_\alpha|.$$

Отже,

$$|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha+90}|.$$

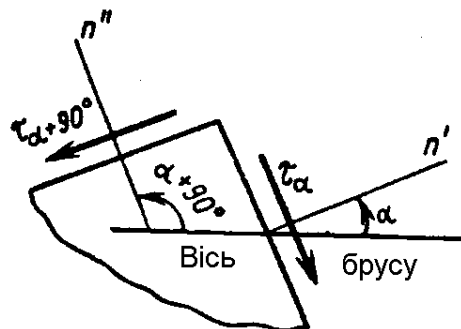


Рисунок 7.10 – Схема до закону парності дотичних напружень

Ця рівність виражає **закон парності дотичних напружень**: дотичні напруження, що виникають у двох взаємно перпендикулярних площадках, рівні один одному за модулем і спрямовані або від ребра, або до ребра, утвореному площадками.

7.4 Розрахунки на міцність

Під час проектування елемента конструкції необхідно визначити розміри, що забезпечують його безпечну роботу при заданих навантаженнях. Для успішного розв'язання цієї задачі необхідно виходити з того, щоб найбільша розрахункова напруга в поперечному перерізі елемента конструкції, що виникла при заданому навантаженні, була менше тієї граничної напруги, за якої виникає небезпека появи пластичної деформації або небезпека руйнування.

Відношення граничної напруги $\sigma_{пред}$ до розрахункової σ називається *коефіцієнтом запасу міцності* s :

$$s = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma}. \quad (7.12)$$

Під час розрахунку елемента конструкції коефіцієнт запасу міцності задається заздалегідь і називається *нормативним або необхідним* і позначається $[s]$.

Міцність елемента конструкції забезпечується, якщо дійсний коефіцієнт запасу міцності не нижче необхідного, тобто

$$s \geq [s]. \quad (7.13)$$

Нерівність (7.13) виражає умову міцності елемента конструкції.

Розділивши граничну напругу на нормативний коефіцієнт запасу, одержимо *напругу, що допускається*, $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}. \quad (7.14)$$

Тоді умову міцності можна виразити нерівністю

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (7.15)$$

тобто міцність елемента конструкції забезпечується, якщо найбільша напруга, яка виникає в ньому, не перевищує тієї, що допускається.

Для пластичних матеріалів як під час розтягання, так і під час стиску граничною напругою є границя плинності σ_T , тому для них напругу, що допускається, одержують виходячи з границі плинності σ_T :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{s_T}. \quad (7.16)$$

У практиці конструювання, розрахунку й експлуатації машин і споруджень величину запасу міцності s_T приймають рівною: $[s_T] = 1,4 \dots 2$.

Для крихких матеріалів напругу розтягання, що допускається, $[\sigma_p]$ і напругу стиску, що допускається, $[\sigma_c]$ одержують виходячи з меж міцності $\sigma_{вр}$ або $\sigma_{вс}$:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{sp}}{S_g} \text{ та } [\sigma_c] = \frac{\sigma_{sc}}{S_g} \quad (7.17)$$

У цьому випадку приймають, що запас міцності $[S_B] = 2,5 \dots 5$, а іноді і вище.

Умова міцності (7.15) стосовно до розрахунків на міцність під час розтягання (стиску) записується у виді:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (7.18)$$

Виходячи з цієї умови роблять три види розрахунків.

Проектувальний розрахунок. При цьому розрахунку відомі навантаження, що діють на брус, задані σ_g або обраний матеріал та заданий нормативний запас міцності $[S]$. Розміри поперечного перерізу бруса, що забезпечують необхідну міцність, визначаємо в такий спосіб: вважають $\sigma = [\sigma]$, площу перетину, з огляду на (7.18), визначають за формулою:

$$\frac{N}{[\sigma]} \leq A. \quad (7.19)$$

Визначивши з цієї формули необхідну площу поперечного перерізу, залежно від форми (коло, квадрат і ін.) знаходять його розміри.

Визначення навантаження, що допускається. У цьому випадку відомі розміри бруса і його матеріал, а потрібно визначити максимально припустиме навантаження. Для цього, прийнявши $\sigma = [\sigma]$, з умови (7.18) одержуємо

$$[N] \leq A[\sigma]. \quad (7.20)$$

Потім за допомогою методу перетину за знайденим значенням подовжньої сили, що допускається, $[N]$ визначаємо значення навантаження, що допускається.

Перевірочний розрахунок. При цьому розрахунку навантаження бруса, його матеріал і розміри відомі та потрібно перевірити, чи виконується умова (7.18). Для цього визначають найбільшу розрахункову напругу $\sigma = N/A$ у поперечному перерізі бруса і порівнюють із тією, що допускається. Найбільша розрахункова напруга не повинна бути більше тієї, що допускається. Розрахункову напругу вважають безпечною, якщо вона перевищує ту, що допускається не більш ніж на 5 %. Поперечний переріз бруса, у якому виникає найбільша розрахункова напруга під час розтягання (стиску), називається *небезпечним*.

7.5 Статично невизначені системи

Механічна система, для якої реакції зв'язків і внутрішніх силових факторів не можуть бути визначені за допомогою рівнянь рівноваги статички і методу перетинів, називається *статично невизначеною*. Статично невизначені системи відрізняються від статично визначених великою кількістю накладених зв'язків.

На рисунку 7.17 подані статично визначені системи, нормальні сили N у яких визначаються за допомогою одного рівняння проєкцій на вісь $x(a)$, двох рівнянь проєкцій на осі x і y (б), одного рівняння моментів щодо нерухомого шарніра (в).

На рисунку 7.18 подані статично невизначені системи. Нормальна сила N у поперечному перерізі бруса, жорстко заробленого з обох кінців (рис. 7.18, а), не може бути визначена з рівняння проєкцій на вісь x , тому що в нього входять дві невідомі величини – нормальна сила N і реакція R . Системи з кількістю невідомих сил, на одиницю перевищуючими кількість рівнянь статички, які можна скласти для цієї системи, називаються один раз статично невизначеними. Для того, щоб розв'язати задачу, необхідно скласти додаткове рівняння переміщень з умови, що загальна довжина бруса залишається незмінною.

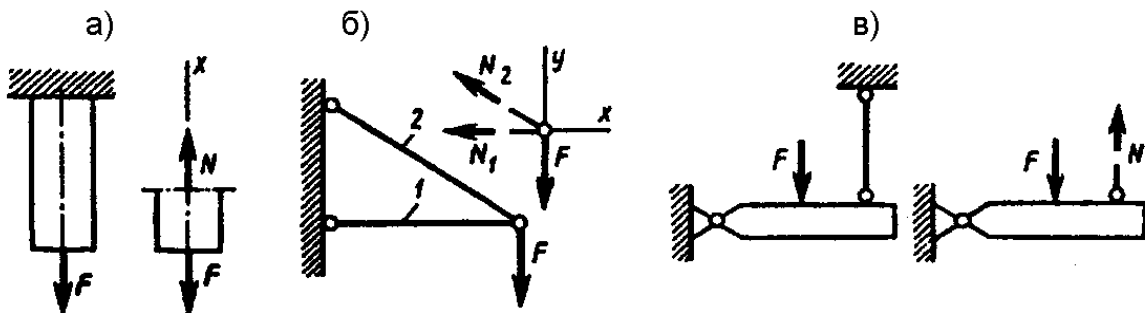


Рисунок 7.17 – Статично визначені системи

Система на рисунку 7.18, б також один раз статично невизначена, тому що в два рівняння проєкцій сил, які можна скласти в цьому випадку, входять три невідомі величини: N_1 , N_2 , N_3 .

Система на рисунку 7.18, в два рази статично невизначена – у ті ж два рівняння статички входять чотири невідомі. Для розв'язання цих задач у першому випадку потрібно скласти одне додаткове рівняння переміщень, а у другому – два, виходячи з умови, що у разі зміни довжини стержнів вузол A залишається для них загальним.

Система на рисунку 7.18, г один раз статично невизначена і до рівняння моментів сил щодо точки A , що містить дві невідомі сили (N_1 і N_2), потрібно додатково скласти одне рівняння переміщень. На рисунку 7.18, д зображена два рази статично невизначена система і додаткових рівнянь переміщень необхідно скласти два. У подібних випадках рівняння переміщень складають з умови, що місця закріплення стержнів на твердій балці AB залишаються на одній прямій.

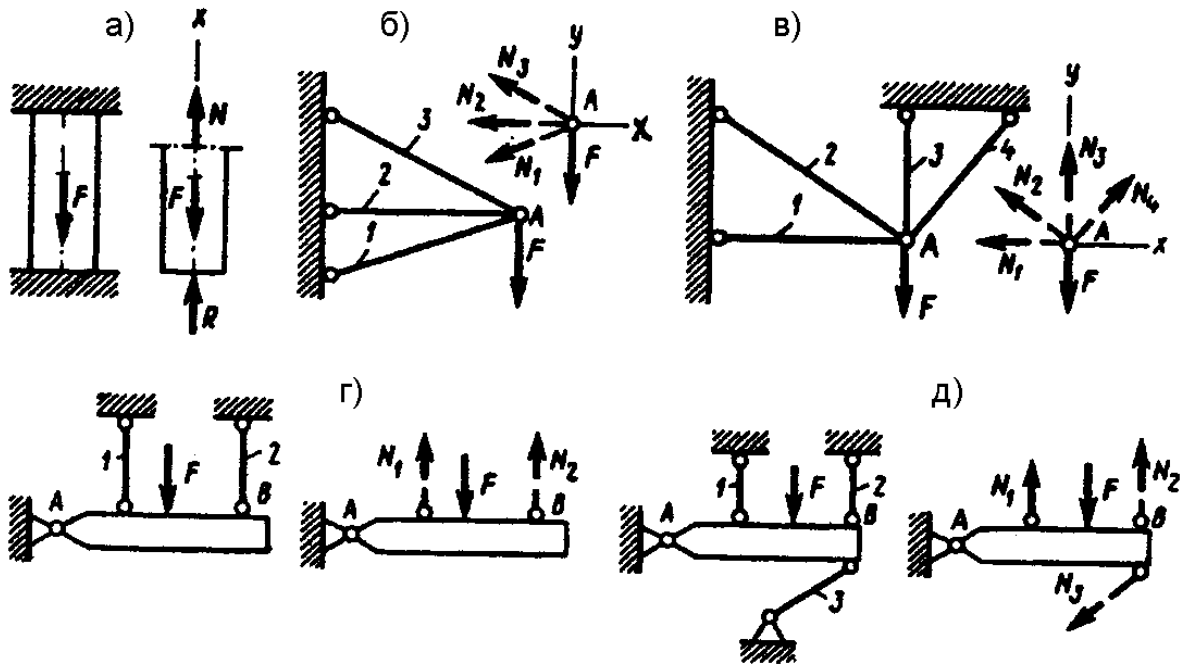


Рисунок 7.18 – Статично невизначені системи

Узагалі говорячи, якщо число невідомих сил системи на n перевищує число рівнянь статики, які можна скласти для неї, то система називається n раз статично невизначеною і для розв'язання задачі необхідно скласти n рівнянь переміщень.

У статично невизначених системах іноді необхідно враховувати напруги, що виникають у разі зміни температури системи в цілому або окремих її елементах. Так, наприклад, у стержні, жорстко забитому з обох кінців у непіддатливих стінках (рис. 7.19, а), під час нагрівання виникають напруги стиску (рис. 7.19, б), а під час охолодження – напруги розтягання (рис. 7.19, в).



Рисунок 7.19 – Статично невизначені системи залежно від зміни температури

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як потрібно навантажити прямий брус, щоб він працював тільки на розтягання (стиск)?
2. Сформулюйте закон Гука. Який фізичний зміст модуля подовжньої пружності E ?
3. Круглий брус діаметром d і довжиною l , навантажений подовжньою силою P подовжувався на Δl . Яке подовження одержить виготовлений з того ж матеріалу і навантажений примусово P брус:
 - а) довжиною $l_1 = 2l$ і діаметром $d_1 = d/2$;
 - б) довжиною $l_2 = 2l$ і $d_2 = 2d$ діаметром?
4. Що таке «гранична напруга» і що таке «розрахункова напруга»?
5. Що таке напруга, що допускається, і як вона вибирається залежно від властивостей матеріалів?
6. На якому-небудь прикладі пояснить, як можна певну статично визначену систему перетворити в статично невизначену?
7. Чому під час нагрівання одного зі стрижнів кронштейна (див. рис. 7.17, б) в обох стрижнях не виникне додаткова (температурна) напруга, а під час нагрівання, наприклад, стрижня 2 (див. рис. 7.18, б) у всіх стрижнях виникають ці напруги?

8 КРУТІННЯ

8.1 Чисте зрушення. Закон Гука під час зрушення

Як приклад напруженого стану в точці бруса розглядався (див. гл. 7) одноосьовий напружений стан і в зв'язку з цим був установлений закон парності дотичних напружень. Розглянемо ще один напружений стан, що носить назву *чисте зрушення* (рис. 8.1, а). При чистому зрушенні на чотирьох гранях виділеного елемента виникають тільки дотичні напруження, а дві грані вільні від напруг.

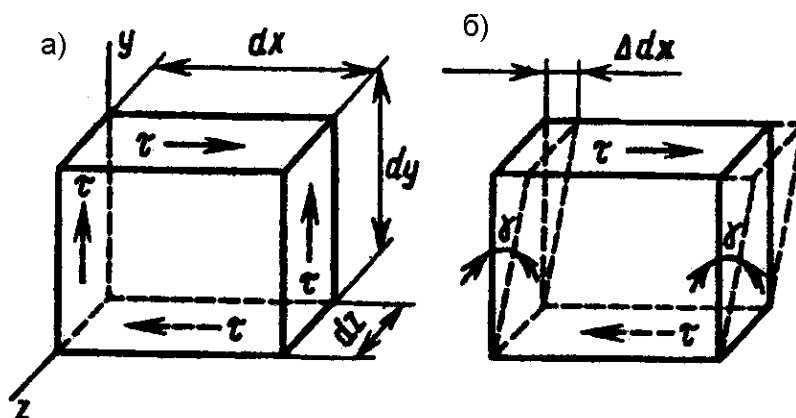


Рисунок 8.1 – Виділений елемент конструкції

Відповідно до закону парності, дотичні напруження τ на всіх чотирьох площях рівні за абсолютною величиною, але спрямовані по суміжних гранях або від ребра, або до ребра. Легко довести, що виділений елемент під час зрушення знаходиться в рівновазі (рис. 8.1, а).

На вертикальних площадках $dA_v = dz \cdot dy$ діють сили $\tau (dz \cdot dy)$, що утворять пари з моментом щодо осі z :

$$\tau (dz \cdot dy) \cdot dx.$$

На горизонтальних площадках $dA_h = dx \cdot dz$ діють сили $\tau (dx \cdot dz)$ утворюючої пари з моментом щодо осі z :

$$-\tau (dx \cdot dz) \cdot dy,$$

а алгебраїчна сума моментів пар щодо осі z :

$$\tau (dz \cdot dy) dx - \tau (dx \cdot dz) dy = 0.$$

Явище зрушення полягає в тому, що під дією зовнішніх сил первинна форма виділеного елемента спотворюється (рис. 8.1, б), тобто, наприклад, горизонтальні площадки зрушуються відносно один одного на відстань Δdx , яка називається *абсолютним зрушенням*, і прямий кут $\pi/2$ між суміжними площадками змінюється на величину γ . Цей кут не залежить від розмірів

виділеного елемента, тому він є мірою деформації зрушення і називається *кутом зрушення* або *кутовою деформацією*. Установлено, що дотичні напруження і кут зрушення в межах пружних деформацій зв'язані між собою прямою пропорційною залежністю

$$\tau = G\gamma, \quad (8.1)$$

яка називається *законом Гука під час зрушення*. Коефіцієнт пропорційності G називається *модулем пружності під час зрушення* і характеризує *твердість матеріалу під час зрушення*.

Для того самого матеріалу між модулем пружності E , модулем зрушення G і коефіцієнтом Пуассона μ існує така залежність:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.2)$$

За цією формулою, знаючи E та μ , легко знайти G . Наприклад, для сталі $\mu = 0,25$ і тоді одержимо $G = 0,4 E$.

8.2 Крутіння. Побудова епюр крутильних моментів

Крутінням називається такий вид навантаження бруса, за якого в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – крутильний момент. Для того щоб одержати такий вид навантаження в найпростішому випадку, брус необхідно навантажити діючими в площинах, перпендикулярних його осі, і в протилежних напрямках двома парами сил (рис. 8.2, а), моменти T_1 і T_2 яких називаються зовнішніми скручуючими моментами. Надалі будемо вважати, що алгебраїчна сума зовнішніх моментів, прикладених до бруса, дорівнює нулеві, тобто брус знаходиться в рівновазі (у стані спокою або рівномірного обертання).

Розріжемо брус по перетину A на частини I і II (рис. 8.2, а) і, відкинувши частину I, розглянемо рівновагу залишеної частини II. З рисунку 8.2, б бачимо, що рівновага забезпечується виникненням у перетині тільки крутильного моменту M_k . При цьому алгебраїчні суми проекцій зовнішніх сил, що утворюють пари, на кожному з осей дорівнюють нулеві, дорівнюють нулеві і моменти пар сил щодо осей x та y . Отже, одержимо, що

$$N = 0; \quad Q_x = 0; \quad Q_y = 0; \quad M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_k = T_2.$$

Якщо ж відкинути частину II бруса (рис. 8.2, в), то одержимо, що в перетині A , крутильний момент, $M_k = T_1$ не зміниться ні за величиною, ні за напрямком, тому що за умови рівноваги бруса $T_1 = T_2$.

У тих випадках, коли на брус діють не два, а кілька скручуючих моментів, доцільно під час обчислення крутильних моментів, прийняти таке

правило знаків: під час розгляду кожної із залишених частин бруса з боку перетину зовнішні моменти, що діють по ходу годинникової стрілки, вважаємо позитивними, діючі проти ходу годинникової стрілки – негативними.

Для одержання наочної картини зміни крутильних моментів, у різних перетинах будують їх епюри по всій довжині бруса. Порядок побудови епюри крутильних моментів, M_k розглянемо на прикладі.

На рисунку 8.3, а зображений брус, навантажений чотирма моментами. З умови рівноваги бруса випливає, що $T_1 + T_2 + T_3 + T_0 = 0$. Перетинами, у яких прикладені скручуючі моменти, брус розділений на чотири ділянки: I, II, III і IV. Розсічемо брус на ділянці I, і відкинувши частину бруса правіше перетину, бачимо (рис. 8.3, б), що залишена ліва частина не навантажена. Виходить, $M_{kI} = 0$. Розсічемо брус на ділянці II, відкинемо праву частину бруса і розглянемо ліву частину з боку перетину. З рисунку 8.3, в побачимо, що $M_{kII} = T_1$ (якщо дивитися з боку перетину, то момент T_1 діє по ходу годинникової стрілки). Розглядаючи далі ліву частину бруса з боку перетину на ділянці III (рис. 8.3, г), бачимо, що $M_{kIII} = T_1 + T_2$. З розгляду лівої частини бруса з боку перетину на ділянці IV (рис. 8.3, д) випливає $M_{kIV} = T_1 + T_2 - T_0$. З умови рівноваги всіх скручуючих чотирьох моментів ($T_0 = T_1 + T_2 + T_3$) ясно, що $-T_0 + T_1 + T_2 < 0$. Тому $M_{kIV} < 0$.

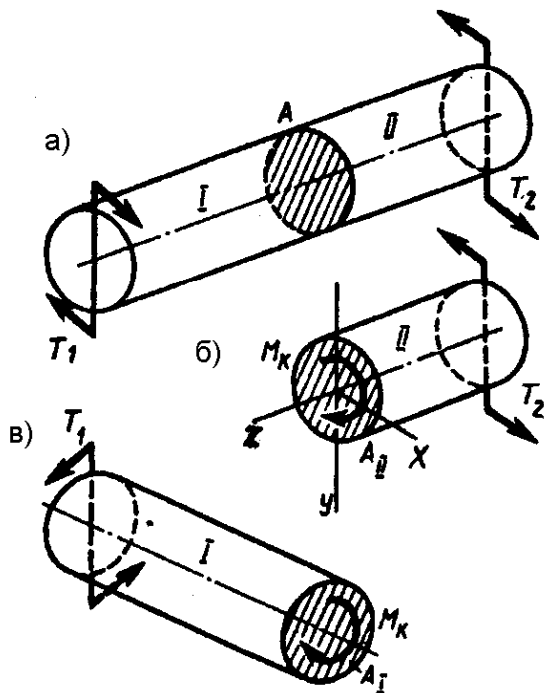


Рисунок 8.2 – Брус круглого перерізу

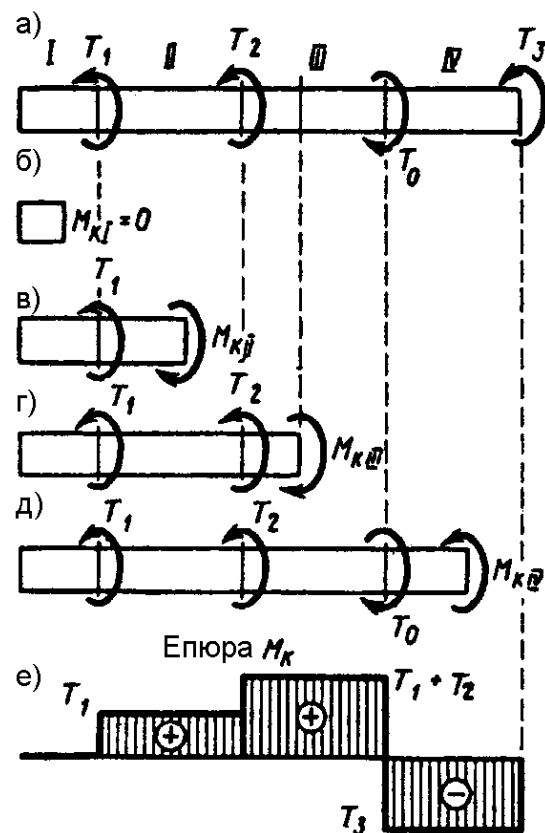


Рисунок 8.3 – Брус, навантажений чотирма моментами

На рисунку 8.3, є результати обчислень зображені у виді епюри. На будь-якій ділянці між перетинами бруса, навантаженими скручуючими моментами, крутильні моменти залишаються постійними. При переході від однієї ділянки до іншої на епюрі виникають стрибки, чисельно рівні моментам зовнішніх пар, що скручують.

Епюри M_k можна було б будувати і праворуч, і ліворуч. Тоді, відкидаючи щораз ліву частину бруса, ми одержали б для ділянки IV $M_I = -T_3$ (з умови рівноваги зовнішніх моментів випливає, що $T_3 = -T_0 + T_1 + T_2$), для ділянки III $M_{кIII} = -T_3 + T_0$ (легко бачити, що $-T_3 + T_0 = T_1 + T_2$) і т.д.

8.3 Крутіння круглого прямого бруса. Базові передумови і формули

Залежності між величинами, що характеризують крутіння бруса, представляються в найбільш простому виді при круглому поперечному перерізі бруса. Розглядаючи крутіння круглого прямого бруса, виходимо з трьох допущень: обраний в брусі до навантаження поперечний переріз залишається плоским і перпендикулярним осі і після навантаження (гіпотеза Я. Бернуллі); відстані між поперечними перерізами під час навантаження бруса не змінюються; радіуси поперечних перерізів бруса не викривляються.

Уявимо собі забитий одним кінцем у непіддатливій стінці брус круглого поперечного перерізу радіуса r , на циліндричній поверхні якого уздовж утворюючих нанесені прямі лінії (рис. 8.4, а). Якщо вільний кінець бруса навантажити моментом T_0 , то брус деформується (скручується) і лінії на циліндричній поверхні приймають вид гвинтових ліній (рис. 8.4, б). Для того щоб досліджувати деформований стан бруса, виділимо з нього на відстані x від закладення елемент довжиною dx і зобразимо цей елемент окремо в збільшеному виді (рис. 8.5).

Припустимо, що лівий перетин виділеного елемента повернувся на деякий кут φ , тоді правий перетин, розташований трохи далі від нерухомого перетину бруса в закладенні, повернувся на кут $\varphi + d\varphi$. Кут $d\varphi = \sphericalangle BO_1B_1$ називається *кутом закручування* виділеного елемента. Цей кут залежить від довжини елемента dx , тому при тому самому деформованому стані може бути різним.

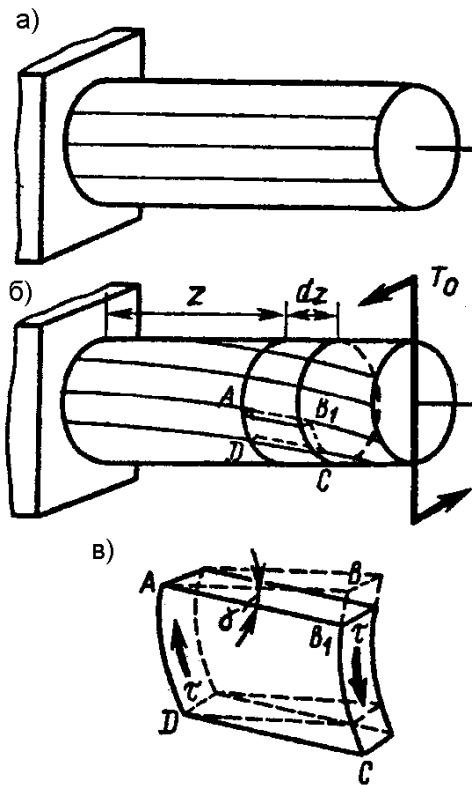


Рисунок 8.4 –
Завантажений брус
круглого поперечного перерізу

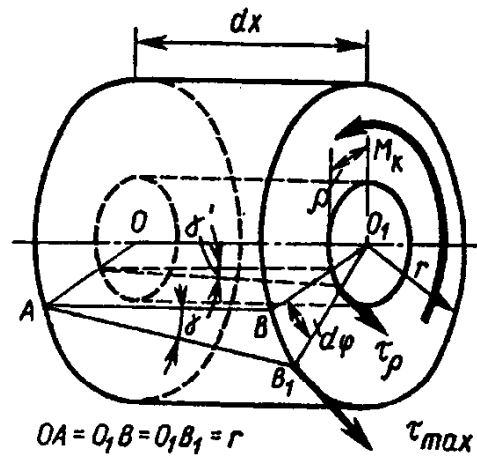


Рисунок 8.5 – Виділений елемент
бруса круглого поперечного перерізу

Деформація бруса під час крутіння характеризується величиною

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (8.3)$$

що називається відносним кутом закручування. Це кут взаємного повороту двох перетинів, віднесений до відстані між ними.

Якщо в поверхні виділеного елемента вирізати шар AB_1CD (див. рис. 8.4, б, в), що через малість розмірів можна вважати призмою, то цей призматичний елемент знаходиться в стані чистого зрушення, тобто $\perp BAB_1$ на циліндричній поверхні елемента (рис. 8.5) є кутом закручування γ . Наближено можна вважати $BB_1 = d\varphi \cdot r = \gamma \cdot dx$, звідси з урахуванням рівності (8.3)

$$\gamma = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) r = \varphi_0 r. \quad (8.4)$$

Для того щоб виразити максимальні дотичні напруження τ_{\max} у крайніх точках поперечного переріза бруса, знайдене значення γ підставимо у вираження (8.1):

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r. \quad (8.5)$$

Якщо думкою вирізати призматичний елемент на відстані ρ від осі бруса, то кут зрушення у цього елемента $\gamma' < \gamma$ (рис. 8.4) і тоді в будь-якій точці поперечного переріза на відстані ρ від центра

$$\tau_\rho = G\varphi_0\rho. \quad (8.6)$$

Рівність (8.6) виражає лінійний закон зваді розподілу дотичних напружень за поперечним перерізом під час крутінні. Розподіл дотичних напружень по перетину відповідно до цього закону показано на рисунку 8.6, а, максимальні дотичні напруження крутіння τ_{\max} виникають у краю перетину, а в міру наближення до центра зменшуються до нуля. Таким чином, у більшому ступені чинять опір крутінню ті частини бруса, що розташовані ближче до його поверхні. Тому для економії матеріалу бруси, що працюють на крутіння, іноді виготовляють пустотілими. Поперечний переріз такого бруса для порожнього вала має форму плоского кругового кільця, розподіл дотичних напружень у ньому показано на рисунку 8.6, б. Дотичні напруження внаслідок закону парності виникають і в поздовжніх перетинах бруса (рис. 8.7).

Знаючи закон розподілу дотичних напружень по перетину, установимо залежність між виниклим у ньому крутильним моментом M_k , відносним кутом φ_0 закручування і максимальним дотичним напруженням τ_{\max} .

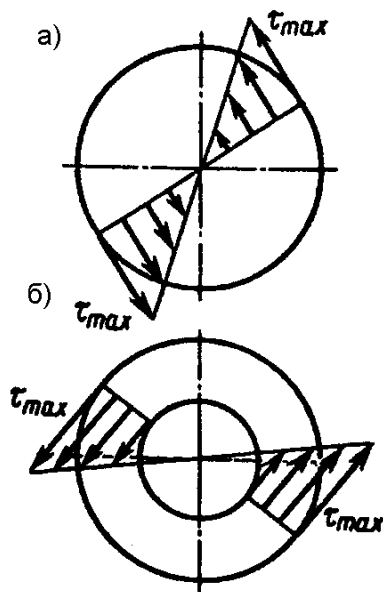


Рисунок 8.6 –

Дотичні напруження у поперечному перерізі під час крутіння

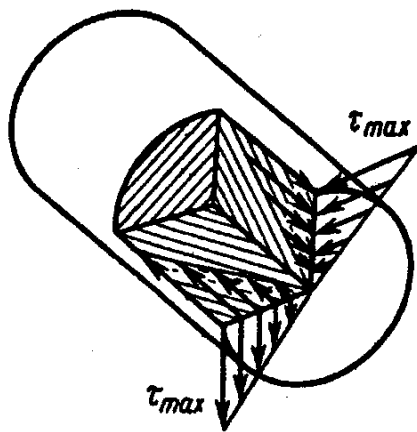


Рисунок 8.7 –

Нехай у деякому перетині (рис. 8.8, а) виник крутильний момент M_k який, як відомо з попереднього пункту, можна визначити через зовнішні моменти. На деякій відстані ρ від центра виберемо в перетині нескінченно малу площадку

dA і допустимо, що напруга по цій площадці τ_ρ . Тоді з урахуванням рівності (8.6) елементарний крутильний момент

$$dM_k = \tau_\rho dA \rho = G \varphi_0 \rho^2 dA.$$

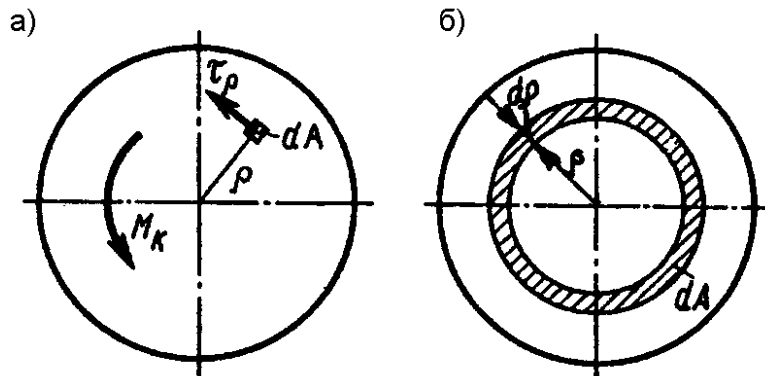


Рисунок 8.8 – Крутильний момент у перерізі

Підсумовуючи елементарні крутильні моменти dM_k по всій площі і з огляду на те, що $G \varphi_0$ і – величини постійні, одержуємо $M_k = G \varphi_0 \int_A \rho^2 dA$.

Позначивши J_ρ вираженням $\int_A \rho^2 dA$, одержимо

$$M_k = G \varphi_0 J_\rho. \quad (8.7)$$

Величина

$$\int_A \rho^2 dA = J_\rho, \quad (8.8)$$

тобто сума добутків всіх елементарних площадок поперечного переріза на квадрати їхніх відстаней від центра називається *полярним моментом інерції перетину*.

У рівнянні (8.8) ρ виражається в м, см або мм, а d – у м^2 , см^2 , або мм^2 . Отже, полярний момент інерції виражається в м^4 , см^4 , або мм^4 .

З рівності (8.7) одержуємо вираження відносного кута закручування

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{G J_\rho}. \quad (8.9)$$

Повний кут закручування бруса (значення кутового переміщення під час крутіння)

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_\rho} \quad (8.10)$$

Легко побачити, що ця формула в принципі аналогічна формулі (7.1) для подовження Δl . Добуток GJ_p називається *твердістю перетину бруса під час крутіння*.

У формулі (8.9) φ_0 виражається в рад/м або рад/мм, у формулі (8.10) φ виражається в рад.

Замінивши в рівності (8.7) добуток $G\varphi_0$ його вираженням з формули (8.5) ($G\varphi_0 = \tau_{\max}/r$) одержимо $M_k = \frac{\tau_{\max} J_p}{r}$. Звідки максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_k r}{J_p}. \quad (8.11)$$

Відношення полярного моменту інерції круглого перетину до його радіуса називається *полярним моментом опору* і позначається W_p :

$$W_p = \frac{J_p}{r}, \quad (8.12)$$

де W_p виражається в м^3 , см^3 або мм^3 . Таким чином,

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (8.13)$$

Максимальне дотичне напруження в поперечному перерізі бруса дорівнює частці від розподілу крутильного моменту на полярний момент опору.

Під час обчислення значень φ_0 , φ і τ_{\max} відповідно за формулами (8.9), (8.10) і (8.11) крім крутильного моменту M_k , модуля зрушення G , довжини l потрібно знати значення полярного моменту інерції J_p або полярного моменту опору W_p , що залежать від форми і розмірів перетину.

Для того щоб одержати формулу полярного моменту інерції кола, виділимо в його площі на відстані ρ від центра елемент dA у вигляді плоского кільця шириною $d\rho$ (рис. 8.8, б). Якщо зневажити різницею між довжинами зовнішнього і внутрішнього контурів кільцевого елемента, то його площа $dA = 2\pi\rho d\rho$. Підставляючи значення dA у вираження (8.8) і приймаючи до уваги, що при інтегруванні по всій площі ρ змінюється від 0 до $d/2$ (де d – діаметр круглого перетину), одержуємо

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2}.$$

Звідси

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (8.14)$$

Аналогічно, для кільцевого перетину

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_0^4) = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4), \quad (8.15)$$

де d – зовнішній, а d_0 – внутрішній діаметри кільця, $c = d_0/d$.

Підставляючи у формулу (8.12) значення J_p з рівностей (8.14) і (8.15) і маючи, що $r = d/2$ одержуємо полярні моменти опору круглого перетину

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (8.16)$$

і кільцевого перетину

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4). \quad (8.17)$$

8.4 Розрахунки на міцність і твердість

Умова міцності під час крутіння має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k] \quad (8.18)$$

Границя плинності під час крутіння зв'язана із границею плинності під час розтягання залежністю $\tau_T \approx (0,55 \dots 0,60)[\sigma_T]$, для пластичних матеріалів приймають $\tau_k \approx (0,55 \dots 0,60)[\sigma_p]$.

За умовою міцності під час крутіння (8.18) виконують три види розрахунків.

Проектувальний розрахунок. Визначивши крутильний момент у перетині бруса і прийнявши $\tau_{\max} = [\tau_k]$, знаходимо необхідне значення полярного моменту опору:

$$W_p = \frac{M_k}{[\tau_k]}. \quad (8.19)$$

Потім, виходячи з формули поперечного переріза (коло або кільце), знаходимо діаметр бруса з формули (8.16) або (8.17). Отримане значення діаметра в міліметрах варто округлити до найближчого більшого парного числа або числа, що закінчується на 5.

Розрахунок навантаження, що допускається. Визначивши полярний момент опору перетину бруса і прийнявши $\tau_{\max} = [\tau_k]$ знаходимо значення крутильного моменту, що допускається:

$$[M_k] = W_p [\tau_k]. \quad (8.20)$$

Потім, виходячи зі схеми навантаження, знаходимо навантаження, що максимально допускається.

Перевірочний розрахунок. Визначивши максимальний крутильний момент у поперечному перерізі бруса і полярний момент опору перетину, $\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p}$ знаходимо і порівнюємо його з $[\tau_{\kappa}]$.

Умова твердості бруса під час крутіння полягає в тому, щоб відносний кут закручування φ_0 не перевершував деякого заданого значення, що допускається $[\varphi_0]$ тобто

$$\varphi_0 = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} \leq [\varphi_0]. \quad (8.21)$$

У Міжнародній системі одиниць (СИ) кут закручування, що допускається $[\varphi_0]$ виражається в рад/м, але в практиці розрахунку на закручування часто кут, що допускається, задається в град/м. Тоді це значення потрібно перевести в одиниці СИ, помноживши на відношення $\pi/180$, тобто

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{180^{\circ}} [\varphi_0^{\circ}]. \quad (8.22)$$

Застосовувані в машинобудуванні значення кутів, що допускаються, закручування коливаються в досить широких межах: найчастіше приймають $[\varphi_0] = (4,38 \dots 17 \dots 17,5) 10^{-3}$ рад/м = $(4,38 \dots 17 \dots 17,5) \cdot 10^{-6}$ рад/мм або $[\varphi_0^{\circ}] = (0,25 \dots 1 \dots 1,0)$ град/м = $(0,25 \dots 1 \dots 1,0) 10^{-3}$ град/мм.

За умовою твердості (8.21) виконують теж три види розрахунків: **перевірочний** – безпосередньо за розрахунковою формулою (8.21); **проектувальний** – за розрахунковою формулою:

$$J_p = \frac{M_{\kappa}}{G[\varphi_0]}. \quad (8.23)$$

Далі, залежно від форми перетину (коло або кільце) за знайденим значенням з формул (8.14) або (8.15) визначають діаметр або діаметри d і d_0 .

Розрахунок навантаження, що допускається, виконують за формулою

$$[M_{\kappa}] = GJ_p [\varphi_0]. \quad (8.24)$$

Об'єктом розрахунків на міцність або твердість часто стає брус, що називається валом. На вал при передачі потужності завжди діють принаймні два скручуючих моменти (іноді три і більше). Під час розрахунку валів необхідно пам'ятати відому з теоретичної механіки формулу, що виражає залежність між обертаючим (скручуючим) моментом T_{ep} , переданою потужністю P і кутовою швидкістю ω :

$$T_{вр} = \frac{P}{\omega}, \quad (8.25)$$

а також формулу, що виражає залежність між кутовою швидкістю ω (с^{-1}) і частотою обертання n (хв^{-1}):

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (8.26)$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте закон Гука під час зрушення. Який фізичний зміст модуля зрушення G ?

2. Як потрібно навантажити брус, щоб він працював тільки на крутіння?

3. Брус навантажений системою трьох пар у площинах поперечних перерізів, причому дія двох із них урівноважується дією третьої. Як варто розташувати уздовж бруса ці три пари, щоб крутильний момент у будь-якому перетині бруса був за абсолютним значенням менше найбільшого з трьох прикладених?

4. Від яких геометричних характеристик перетину залежить під час крутіння міцність бруса, а від яких – його твердість? Чому міцність і твердість під час крутіння залежать від цих характеристик, а не від площі поперечного перерізу?

5. Два круглих бруси мають рівні площі поперечних перерізів, але один із цих перетинів суцільне коло, а інше – кругове кільце. Який із брусів має: а) велику міцність; б) велику твердість?

6. Чи в однаковій мірі змінюється твердість і міцність бруса круглого поперечного перерізу у разі зміни його діаметра?

9 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

9.1 Момент інерції перетинів

З деякими геометричними характеристиками перетинів ми знайомі. Кожний перетин бруса має визначену геометричну форму і площу. У формули для визначення координат центра ваги перетину входить алгебраїчна сума добутків елементарних площ на координати їхніх центрів ваги; ця величина називається *статичним моментом перетину*. В інтегральній формі статичні моменти перетину S_x і S_y щодо осей x та y можна подати так:

$$S_x = \int_A y dA \text{ і } S_y = \int_A x dA \quad (9.1)$$

З формул статички випливає:

$$S_x = Ay_c \text{ і } S_y = Ax_c, \quad (9.2)$$

де A – площа перетину;

x_c і y_c – координати центра ваги перетину. Легко помітити, що за $y_c = 0$, коли вісь x проходить через центр ваги перетину, $S_x = 0$: *статичні моменти перетину щодо центральних осей дорівнюють нулеві*.

Під час дослідження залежності між крутильним моментом і дотичними напруженнями виникла ще одна геометрична характеристика – *полярний момент інерції перетину* J_p . Поява цієї величини обумовлена нерівномірністю розподілу дотичних напружень по перетину під час крутіння.

Познайомимося з новими геометричними характеристиками перетину – *осьовими і відцентровими моментами інерції* щодо координатних осей (рис. 9.1).

Уявимо собі, що перетин розділений на безліч елементарних площадок dA (на рис. 9.1 зображена одна з них), координати яких x та y . Тоді інтеграли

$$J_x = \int_A y^2 dA \text{ і } J_y = \int_A x^2 dA \quad (9.3)$$

називаються *моментами інерції перетину* щодо осей x або y , а інтеграл

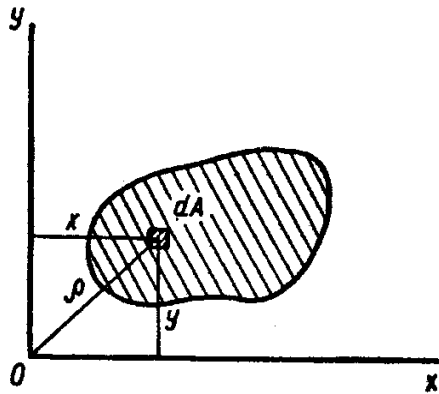


Рисунок 9.1 –
Довільний перетин

$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad (9.4)$$

прийнято називати *відцентровим моментом інерції* перетину щодо осей x та y .

Так само як і полярний момент інерції, осьові і відцентрові моменти інерції виражаються в м^4 , см^4 і мм^4 .

Величина площадки dA позитивна, тому незалежно від знака координати,

x або y осьові моменти інерції завжди позитивні, а відцентровий момент інерції може бути як позитивним, так і негативним залежно від розташування перетину щодо осей x або y .

Відстань ρ між елементарною площадкою dA і початком координат зв'язана з координатами площадки очевидною залежністю (рис. 9.1) $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Помноживши на dA обидві частини цієї рівності, а потім проінтегрувавши їх по всій площі перетину:

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

одержимо важливу залежність між осьовими і полярними моментами інерції

$$J_p = J_x + J_y. \quad (9.5)$$

Сума осьових моментів інерції перетину – відносно взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції щодо точки перетинання цих осей. Моменти інерції щодо осей, що проходять через центр ваги перетину, називаються центральними.

Між моментами інерції перетину щодо рівнобіжних осей, з яких одна центральна, існує важлива залежність, використувана далі в розрахунках. Розташуємо перетин в осях координат x_1Oy_1 , а потім через центр ваги з перетину проведемо осі $Cx \parallel Ox_1$ і $Cy \parallel Oy_1$ (рис. 9.2). Координати елементарної площадки dA перетину в осях x_1Oy_1 зв'язані з координатами в центральних осях рівностями

$$y_1 = y + a \text{ і } x_1 = x + e,$$

де a і e – відстані між осями.

Зведемо обидві частини першої рівності в другий ступінь:

$$y_1^2 = y^2 + a^2 + 2ay.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на dA і проінтегруємо по всій площі перетину:

$$\int_A y_1^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA.$$

Розглядаючи кожен інтеграл окремо, бачимо: $\int_A y_1^2 dA = J_{x_1}$ –

момент інерції перетину відносно осі, рівнобіжної центральній;

$\int_A y^2 dA = J_x$ – центральний момент

інерції перетину; $\int_A dA$ – площа

перетину; $\int_A y dA = S_x = 0$

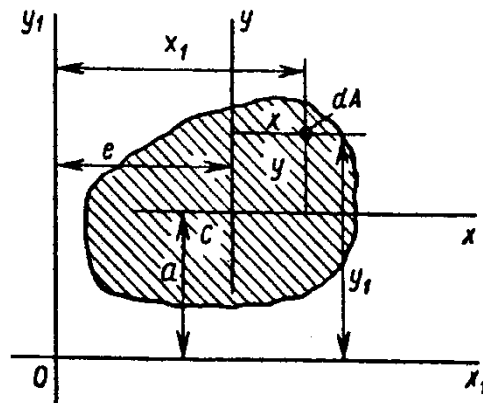


Рисунок 9.2 –
Рівнобіжні осі

– статичний момент перетину щодо центральної осі, як відомо, дорівнює нулеві.

Отже, в остаточному вигляді остання рівність запишеться так:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A. \quad (9.6)$$

Аналогічно, з рівності $x_1 = x + e$ одержимо

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A. \quad (9.7)$$

Таким чином, момент інерції перетину щодо осі, рівнобіжної центральній, завжди більше центрального моменту інерції на добуток квадрата відстані між осями на площу перетину.

9.2 Поняття про головні центральні моменти інерції

Осі, щодо яких осьові моменти інерції перетину приймають екстремальні значення, а відцентровий момент дорівнює нулеві, називаються *головними*.

Допустимо, що деякий перетин розташований в осях $x_1 O y_1$ як показано на рисунку 9.3, а. Ясно, що відцентровий момент інерції $J_{x_1 y_1} > 0$, тому що за такого твердження перетину всі елементарні відцентрові моменти інерції $x_i y_i dA_i > 0$. При поступовому повороті осей (рис. 9.3, б) значення $J_{x_1 y_1}$, стане зменшуватися, тому що для площадок dA_i над віссю x_1 елементарні відцентрові моменти інерції $x_i y_i dA_i > 0$, а для площадок dA_k нижче осі x_1 – $x_k y_k dA_k < 0$, оскільки в цих площадок $y_k < 0$. Нарешті, за визначеного твердження осей

відцентровий момент інерції $J_{x_1 y_1} = 0$. Осі $x_1 O y_1$ у цей момент займають твердження головних осей (рис. 9.3, б).

Практичне значення мають не будь-які головні осі, а тільки головні центральні осі. Твердження головних центральних осей зовсім просто знаходити для симетричних перетинів. Центр ваги симетричного перетину обов'язково лежить на осі симетрії. Тому, якщо сполучити з віссю симетрії одну з осей координат, а іншу провести до неї перпендикулярно через центр ваги, одержимо систему *головних центральних осей* (рис. 9.4). По один бік осі симетрії є площадка dA з елементарним відцентровим моментом інерції $+x y dA$, по іншу площадка dA з елементарним відцентровим моментом $-x y dA$ і при підсумовуванні їх по всьому перетину $J_{xy} = 0$.

Щодо однієї з головних центральних осей момент інерції перетину максимальний, а щодо другої – мінімальний. Для перетину на рисунку 9.4 $J_{\max} = J_x$ і $J_{\min} = J_y$.

Якщо перетин має дві осі симетрії (наприклад, прямокутник), то обидві вони є головними центральними, тому що їхнє перетинання визначає твердження центра ваги перетину. Багато перетинів мають по дві, три (і більше) пари осей симетрії, які можна приймати за головні центральні осі.

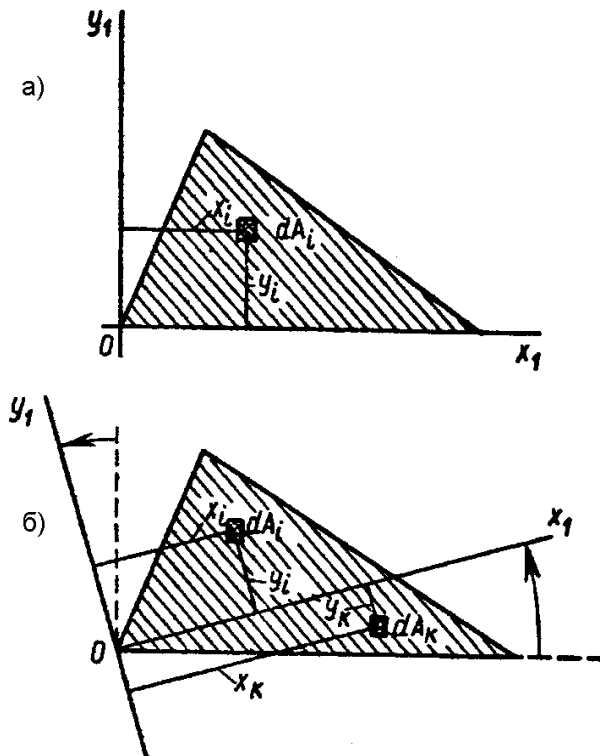


Рисунок 9.3 – Довільний перетин

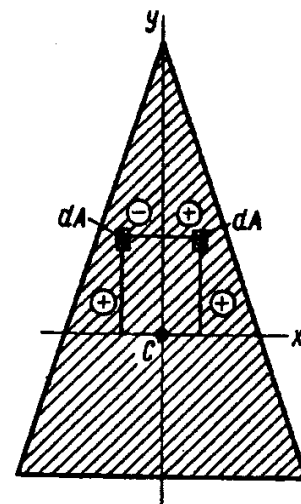


Рисунок 9.4– Трикутний перетин

Наприклад, у квадрата (рис. 9.5) таких осей симетрії дві пари, у правильного шестикутника – три пари, а в кола – незліченна безліч пар.

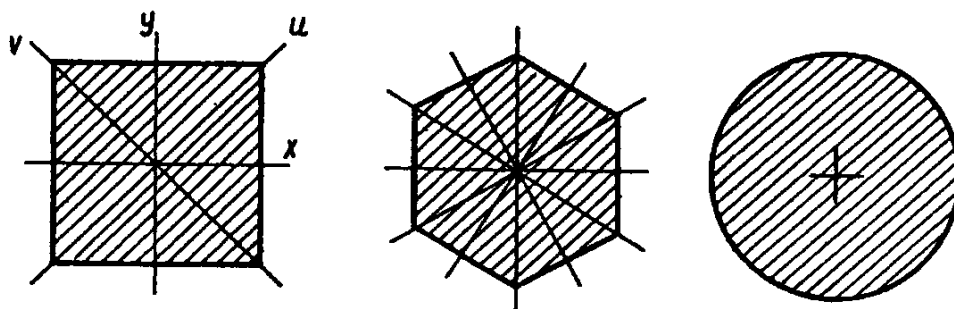


Рисунок 9.5 – Головні центральні осі найпростіших перетинів

Моменти інерції перетину щодо головних центральних осей називаються *головними центральними моментами інерції*. Площини, проведені через вісь бруса і головні осі інерції його поперечного перерізу, називаються *головними площинами*.

9.3 Осьові моменти інерції найпростіших перетинів

Прямокутник. Прямокутний перетин має дві осі симетрії, а головні центральні осі C_x і C_y проходять через середини рівнобіжних сторін (рисунок 9.6). Головний центральний момент інерції щодо осі x

$$J_x = \int_A y^2 dA.$$

Елементарну площадку d у цьому випадку можна подати у вигляді смужки у всю ширину перетину і товщиною, значить $dA = b \cdot dy$. Підставивши під знак інтеграла значення dA і проінтегрував по всій площі, тобто в межах зміни ординати у від $-h/2$ до $+h/2$, одержимо

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{24} - \left(\frac{bh^3}{24} \right).$$

Остаточно

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (9.8)$$

Аналогічно одержимо формулу головного центрального моменту інерції прямокутника щодо осі y :

$$J_y = \frac{bh^3}{12}. \quad (9.9)$$

Іноді необхідно знати моменти інерцій прямокутника щодо осей x та y , рівнобіжних головним центральним. Для одержання цих значень скористаємося формулами (9.6) і (9.7):

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh$$

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A = \frac{b^3 h}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh$$

тобто

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{3} \text{ і } J_{y_1} = \frac{b^3 h}{3} \quad (9.10)$$

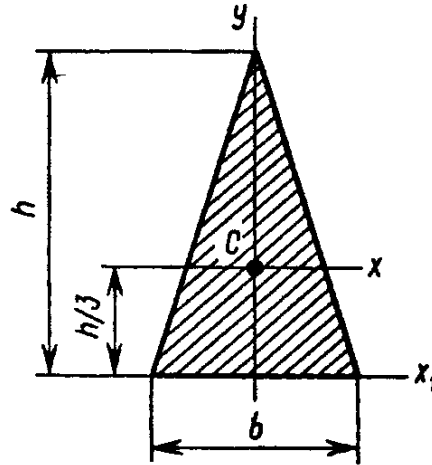
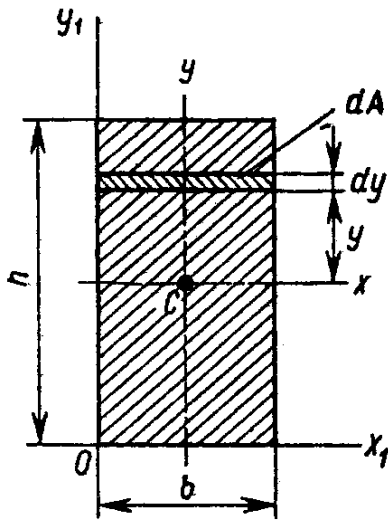


Рисунок 9.6 – Прямокутний перетин Рисунок 9.7 – Трикутний перетин

Легко зрозуміти, що для квадрата, тобто за $h = b$, формули (9.8) і (9.9) приймуть вигляд

$$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}, \quad (9.11)$$

а формули (9.10) – вигляд

$$J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{b^4}{3}. \quad (9.12)$$

Рівнобедрений трикутник. Центр ваги рівнобедреного трикутника лежить на його осі симетрії на відстані $y_c = h/3$ від підстави (рис. 9.7). Головні центральні моменти інерції перетину, що має форму рівнобедреного трикутника, такі:

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{y_1} = \frac{b^3 h}{48}. \quad (9.13)$$

Момент інерції трикутного перетину щодо осі x_1 минаючої уздовж підстави b ,

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12}. \quad (9.14)$$

Коло, кільце. Для кола або кільця (рис. 9.8) головні центральні моменти інерції щодо осей x та y рівні між собою. Тому з рівності (9.5), що виражає залежність між осьовими і полярними моментами інерції, одержуємо

$$J_p = 2J_x = 2J_y \text{ або } J = J_x = J_y = \frac{J_p}{2}.$$

Підставивши значення J_p , з формули (17.14), одержимо для круглого перетину

$$J = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (9.15)$$

Для кільцевого перетину після підстановки з формули (9.15) одержимо

$$J = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4), \quad (9.16)$$

де

$$c = d_0 / d.$$

Варто зазначити, що якщо в перетину два головних центральних моменти інерції рівні між собою (до таких перетинів належать коло, кільце, квадрат і т.п.), то у цих перетинів будь-яка центральна вісь – головна і всі центральні моменти інерції однакові.

У багатьох конструкціях для окремих елементів використовують сталевий прокат, форма і розміри якого передбачені відповідними ДСТУ. Для прокату з поперечними перерізами, відмінними від таких простих геометричних фігур, як прямокутник або коло, розроблені таблиці, що містять усі необхідні для розрахунків характеристики.

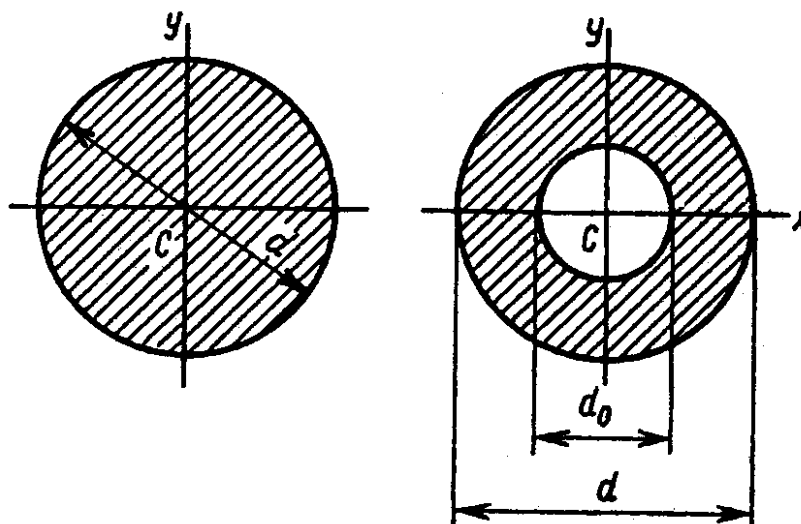


Рисунок 9.8 – Круглий перетин

Для сталі прокатної кутової рівнополочної (ДСТУ 8509–86) (рис. 9.9) у таблиці зазначені: розміри (мм) b , d , R і r ; площа поперечного переріза (см²);

маса 1 м довжини прокату (кг); J_x і J_{x_1} – моменти інерції площ перетинів щодо осей x та x_1 ; $J_{x_0\max}$ і $J_{y_0\min}$ – моменти інерції щодо головних центральних осей (см^4); значення z_0 (см), що визначає твердження центра ваги профілю щодо осі x_1 , сполученої з зовнішньою гранню полиці профілю.

Для сталі прокатної нерівнополочної (ДСТУ 8510–86) (рис. 9.10) крім розмірів B , b , d , R і r , площі поперечного переріза і маси 1 м прокату наведені моменти інерції щодо осей x , y , x_1 і y_1 (J_x , J_y , J_{x_1} і J_{y_1}), а також значення X_0 і B_0 , що визначають твердження центра ваги перетину в осях x_1 і y_1 .

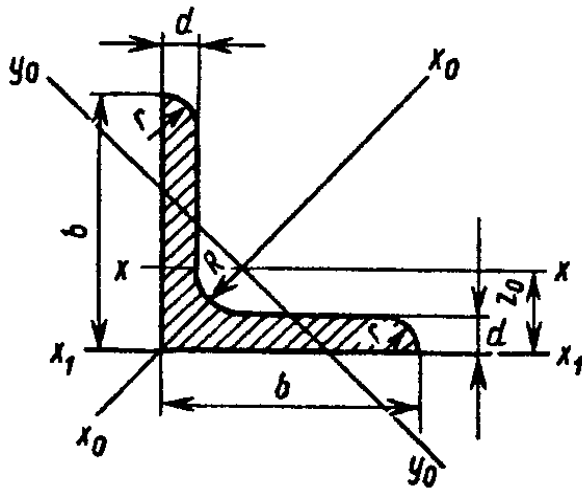


Рисунок 9.9 – Рівнополочний кут

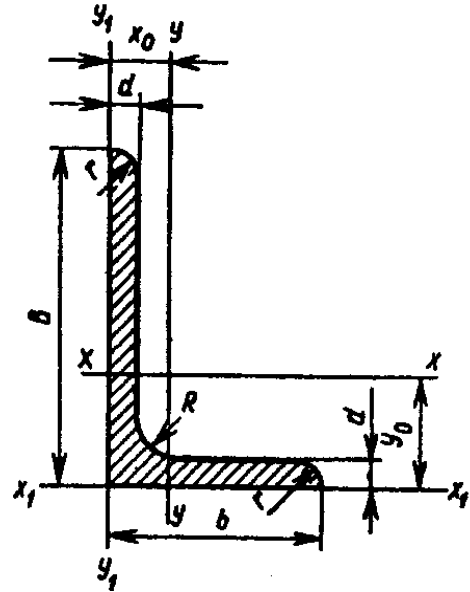


Рисунок 9.10 – Нерівнополочний кут

ДСТУ 8239–89* на сталеві двотаврові балки (рис. 9.11) містить дані про всі розміри, площу перетину і масу 1 м балки; значення J_x і J_y – моментів інерції щодо осей x та y , що для цього перетину – головні центральні осі, а також значення W_x і W_y – моментів опору перетину щодо тих же осей (см^3).

ДСТУ 8240–89* на сталеві швелери з ухилом внутрішніх граней полиць (рис. 9.12) містить дані про розміри h , b , d , t , R і r , площі, маси, J_x , J_y , W_x і W_y , а також значення визначальне твердження центра ваги щодо осі y_1 . У кожному з чотирьох ДСТУ нумерація профілів відповідає основному розмірові, вираженому в сантиметрах. Так, № 7,5 рівнополочного куточка належить до профілю, у якого $b = 75$ мм; № 6,3/4,0 нерівнополочного куточка належить до профілю з розмірами полиць $B = 63$ мм і $b = 40$ мм, № 20 двотавру належить до профілю висотою $h = 200$ мм, аналогічна і нумерація швелерів.

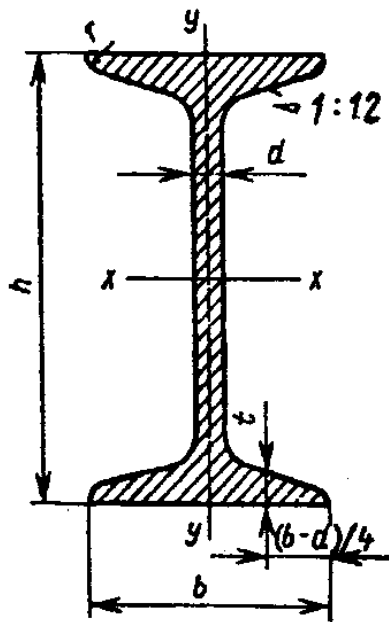


Рисунок 9.11 – Двотавр

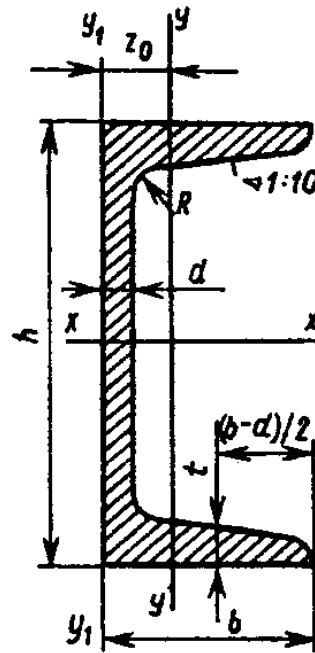


Рисунок 9.12 – Швелер

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому статичний момент будь-якого перетину щодо центральної осі дорівнює нулеві?
2. Чому дорівнює полярний момент інерції прямокутного перетину зі сторонами 4 і 5 см: а) щодо його центра ваги; б) щодо однієї з вершин перетину? (Відповідь: а) 120 см^4 ; б) 416 см^4 .)
3. У скільки разів момент інерції трикутника щодо осі, що проходить уздовж його підстави, менше моменту інерції щодо осі, що проходить через вершину паралельно підставі? (Відповідь у 3 рази.)

10 ВИГІН ПРЯМОГО БРУСА

10.1 Прямий вигин чистий і поперечний

Прямим чистим вигином називають такий вид навантаження бруса, за якого в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор згинальний момент. Якщо крім згинаючого моменту виникає поперечна сила, то має місце *прямий поперечний вигин*. Усі зовнішні сили при прямому вигині бруса діють у його головній площині (рис. 10.1), скривлення осі бруса відбувається в тій же площині.

Бруси, що працюють на вигин, називають *балками*. На розрахунковій схемі балку прийнято замінити її віссю. При цьому всі сили повинні бути приведені до осі балки, а силова площина (площина дії навантаження) збігатися з площиною креслення.

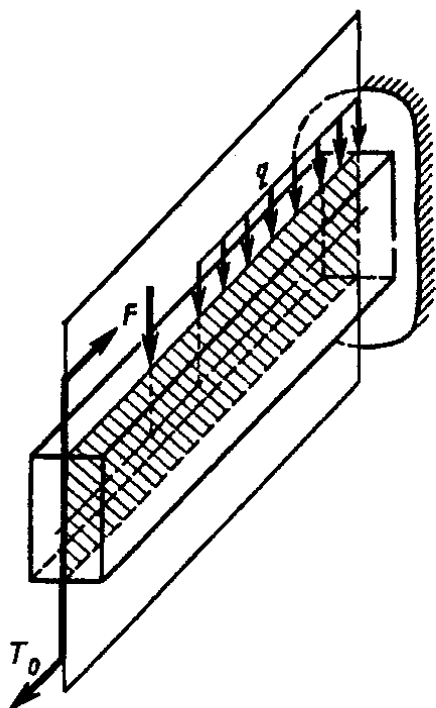


Рисунок 10.1 – Навантаження бруса

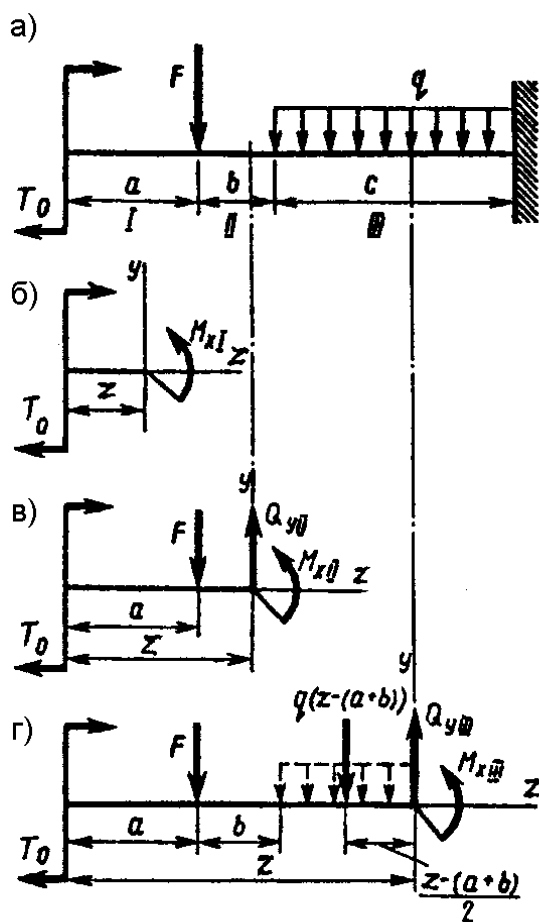


Рисунок 10.2 –
Розрахункова схема визначення
внутрішніх силових факторів

Додавши балці, поданої на рисунку 10.1, умовне зображення (рис. 10.2, а), визначимо внутрішні силові фактори в її поперечних перерізах. Відповідно до місця прикладення навантажень – пари сил з моментом T_0 , зосередженої сили F і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q – розділимо балку на три ділянки: I, II і III. Розсічемо балку на ділянці I перетином, розташованим на відстані z від місця додатка моменту T_0 і відкинемо праву частину балки (рис. 10.2, б). Тоді на підставі рівняння (10.1)

$$Q_{yI} = 0.$$

Оскільки проекції сил, що утворюють пари, на вісь z дорівнюють нулеві і рівновага частини балки, що залишилася, забезпечується одним згинальним моментом M_x . У разі зміни z від 0 до a , тобто в будь-якому перетині на ділянці I (якщо $0 \leq z \leq a$), згинальний момент

$$M_{xI} = T_0.$$

Отже, ділянка I балки знаходиться в стані чистого вигину.

Розсічемо балку на ділянці II перетином, розташованим на відстані z [тепер $a \leq z \leq (a + b)$] від лівого кінця балки, і, відкинувши її праву частину (рис. 10.2, в) знайдемо, що поперечна сила дорівнює проекції зовнішньої сили на вісь y , тобто

$$Q_{yII} = -F,$$

а згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моменту пари і моменту сили F щодо центра ваги перетину:

$$M_{zII} = T_0 - F(z-a).$$

Дія моменту $F(z-a)$ протилежна дії моменту T_0 , тому він узятий зі знаком мінус. Балка на ділянці II знаходиться в стані поперечного вигину, тому що в перетинах цієї ділянки виникають поперечна сила і згинальний момент. Значимо, що в цьому випадку значення поперечної сили Q_{yII} на ділянці II не залежить від z , тобто в будь-якому перетині $Q_{yII} = -F = \text{const}$. Числове значення згинаючого моменту знаходиться в лінійній залежності від z , тобто змінюється під час переходу від одного перетину до іншого.

Розсічемо балку на ділянці III перетином на відстані z [$(a + b) \leq z \leq (a + b + c)$] від лівого її кінця і, відкинувши праву частину (рисунок 10.2, г) знайдемо поперечну силу

$$Q_{yIII} = -Fq[z - (a + b)]$$

і згинальний момент

$$M_{xIII} = M_0 - F(z - a) - q \frac{[z - (a + b)]^2}{2}.$$

На цій ділянці виникає теж поперечний вигин. Причому через наявність тут рівномірно розподіленого навантаження поперечна сила залежить від місця перетину на ділянці: у міру пересування перетину вправо (при зростанні z) збільшується абсолютне значення другого, що складається $q[x - (a + b)]$; згинальний момент змінюється залежно від z за параболічним законом.

Між згинальним моментом M_x , поперечною силою й інтенсивністю q рівномірно розподіленого навантаження існують такі диференціальні залежності:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q \quad (10.1)$$

– похідна від згинаючого моменту по довжині балки дорівнює поперечній силі;

$$\frac{dQ}{dz} = -q \quad (10.2)$$

– похідна від поперечної сили по довжині балки дорівнює інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження узятій зі зворотним знаком.

Справедливість залежностей можна перевірити для значень M_x і Q_y , знайдених, наприклад, для ділянки III балки (рис. 10.2, г), яким можна надати такий вид:

$$M_{xIII} = T_0 - F_x + Fa - \frac{qx^2}{2} + xq(a + b) - \frac{q(a + b)^2}{2};$$

$$Q_{yIII} = -F - qx + q(a + b).$$

Продиференціювавши перше вираження по x , маючи на увазі, що T_0 , F , a , b і q – величини постійні:

$$\frac{dM_x}{dx} = -F - qx + q(a + b) = Q_{yIII}.$$

Продиференціювавши вираз поперечної сили, одержимо

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q \text{ або } \frac{dQ_y}{dx} = q.$$

З диференціальних залежностей (10.1) і (10.2) випливає: 1) якщо $M_x = const$, то $Q = 0$; 2) якщо $Q = const$, то $q = 0$, а M_x змінюється за лінійним законом, причому коли $Q > 0$ M_x зростає, а коли $Q < 0$ зменшується; 3) якщо Q змінюється за лінійним законом, то M_x змінюється за параболічним законом.

10.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Визначаючи поперечну силу і згинальний момент у різних перетинах балки (рис. 10.2), ми бачимо, що їхні значення змінюються по довжині балки залежно від виду навантажень і місця їхнього прикладання. Під час розрахунків дуже важливо знати зміну Q і M_x у перетинах по всій довжині балки, а цього можна досягти побудовою епюр.

Виходячи з того, що при поперечному вигині напрямком зовнішніх сил перпендикулярний осі балки, а при її розсіченні можна відкинути будь-яку частину – праву або ліву, сформулюємо правила визначення значень Q і M_x .

Поперечна сила Q_y в довільному поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі значень зовнішніх сил, прикладених до балки по один бік від перетину, при цьому силам, що повертають щодо перетину залишену частину балки по ходу годинної стрілки, приписується знак «плюс» (рис. 10.3, а), а силам, що повертають щодо перетину залишену частину балки проти ходу годинникової стрілки, приписується знак «мінус» (рис. 10.3, б).

Згинальний момент M_x у довільному поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, що діють по одну сторону від перетину, щодо тієї точки осі бруса, через яку проходить перетин, при цьому зовнішнім моментам, що згинають вісь балки опуклістю вниз, приписується знак «плюс» (рис. 10.4, а), а моментам, що згинають вісь балки опуклістю нагору, знак «мінус» (рис. 10.4, б).

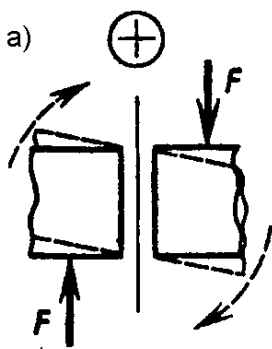


Рисунок 10.3 – Правило знаків

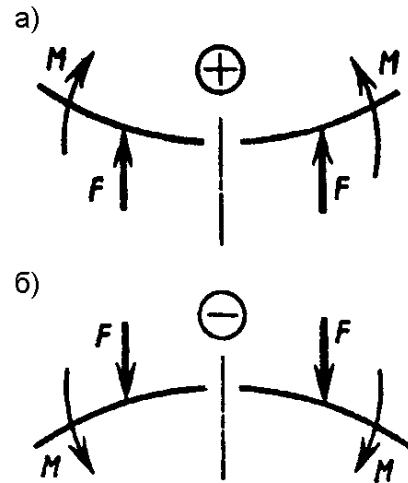


Рисунок 10.4 – Правило знаків

Розглянемо кілька прикладів побудови епюр Q і M_x за типових навантажень балки.

Балка, затиснена одним кінцем (консоль) і навантажена двома чисельно рівними силами, як подано на рисунку 10.5, а, має ділянки I і II.

Застосовуючи метод перетинів і використовуючи правило знаків (див. рис. 10.3 і 18.4), знаходимо, що на ділянці I (рис. 10.5, б) поперечна сила

$$Q_y = F,$$

тобто не залежить від x . Отже, епюра Q_y на ділянці I зобразиться відрізком прямої, рівнобіжної базової лінії.

На ділянці II (рис. 10.5, в) поперечна сила

$$Q_{yII} = F - F = 0$$

Епюра Q_y для всієї балки подана на рисунку 10.5, г.

Згинальний момент на ділянці I (рис. 10.5, б)

$$M_{xI} = Fz,$$

тобто під час зміни z від 0 до $(0 \leq z < a)$ значення M_x рівномірно збільшується від 0 до Fa , тобто $MOXY = 0$, $M_{XB} = Fa$.

На ділянці II (рис. 10.5, в) значення згинаючого моменту

$$M_{xII} = Fz - F(z - a) = Fa.$$

Епюра по всій довжині балки зображена на рисунку 10.5, д. Як бачимо, у поперечних перерізах балки на ділянці II виникає тільки один внутрішній силовий фактор – згинальний момент; отже, ділянка II знаходиться в стані чистого вигину. Епюри Q_y і M_x на рисунку 10.5 ілюструють справедливість наслідків 10.2 і 10.1: на ділянці I $Q_y = F = const$, причому $Q_y > 0$, а M_{xI} зростає за лінійним законом; на ділянці II $Q_{yII} = 0$ і значення $M_{xII} = Fa = const$.

Двоопірна балка навантажена між опорами A і B силою F (рис. 10.6, а). На відміну від попереднього випадку тут попередньо необхідно визначити реакції R_A і R_B опор балки. З рівняння моментів щодо опори B знаходимо $R_A = Fb/(a + b)$, а з рівняння моментів щодо опори A знаходимо $R_B = Fa/(a + b)$.

Балка має дві ділянки. Розсікаючи балку на ділянці I і відкидаючи частину балки правіше перетину, знаходимо:

$$Q_{yI} = R_A = \frac{Fb}{a + b} \quad \text{і} \quad M_{xI} = R_A z = \frac{Fbz}{a + b}.$$

У такий спосіб на ділянці I поперечна сила постійна і дорівнює $Fb/(a + b)$ (рис. 10.6, б), а згинальний момент під час зміни z від 0 до a ($0 \leq z < a$) збільшується від 0 до $Fab/(a + b)$ (рис. 10.6, в).

Розсікаючи балку на ділянці II і відкидаючи частину балки правіше перетину, знаходимо:

$$Q_{yII} = R_A - F = \frac{Fb}{a + b} - F = \frac{-F_a}{a + b};$$

$$M_{xII} = R_A z - F(z - a) = \frac{Fbz}{a + z} - F(z - a).$$

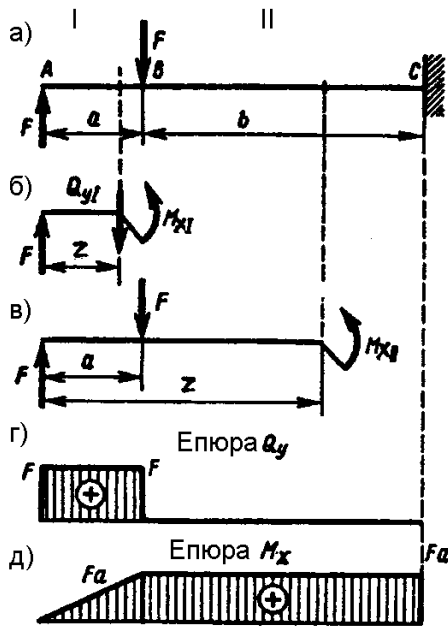


Рисунок 10.5 – Консольна балка

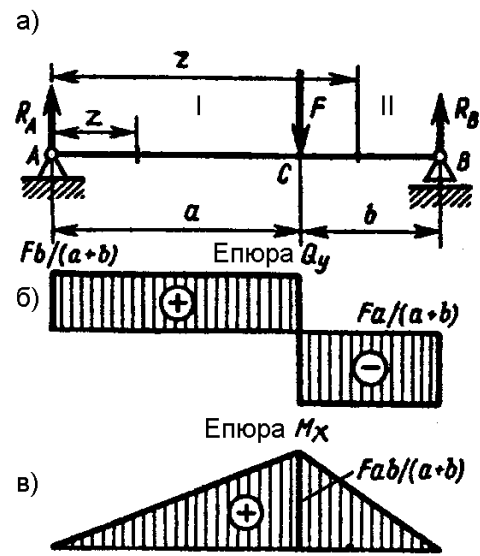


Рисунок 10.6 – Двоопорна балка

Поперечна сила на ділянці II має значення, рівне $-Fa/(a + b) = -R_B$ (рис. 10.6, б). На ділянці II z змінюється в межах $a \leq z \leq (a+b)$, тому коли $z = a$ згинальний момент $M_x = Fab/(a+b)$, а коли $z = a + b$

$$M_{xB} = \frac{Fb(a+b)}{a+b} - F(a+b-a) = 0,$$

тобто під час зміни z від 0 до $(a - b)$ згинальний момент зменшується або зменшується від $Fab/(a+b)$ до 0 (рис. 10.6, в).

Епюри Q і M_x на рисунку 10.6 ілюструють справедливість наслідку 10.2 (див. п. 10.1): рівномірно розподілених навантажень на балці немає ($q = 0$) і на кожній з обох ділянок балки Q_y зберігає постійне значення, тому M_x на тій і на іншій ділянці змінюється за лінійним законом, але $Q_y > 0$ і на ділянці I M_x зростає, а $Q_{yII} < 0$ і на ділянці II M_x зменшується.

Двоопірна балка навантажена між опорами парою сил, момент якої T (рис. 10.7, а). Діючі на балку пари сил можна зрівноважити тільки парою, тому реакції опор утворять пари сил (R_A, R_B) і $R_A = R_B = T/(a+b)$.

Розсікаючи балку на ділянці I, а потім на ділянці II і відкидаючи в обох випадках праву частину балки, одержуємо

$$Q_{yI} = Q_{yII} = R_A = \frac{T}{(a+b)},$$

тобто значення поперечної сили Q_y по всій довжині балки постійно (рис. 10.7, б). Згинальний момент на ділянці I

$$M_{xI} = R_A z = \frac{Tz}{a+b}$$

і під час зміни z від 0 до a ($0 \leq z < a$) значення згинаючого моменту збільшується від 0 до $Ta/(a+b)$.

Згинальний момент на ділянці II

$$M_{xII} = R_A z - T = Tz/(a+b) - T.$$

Коли $z = a$ одержимо $M_{xCI} = Ta/(a+b) - T = -Tb/(a+b)$;

коли $z = a+b$ $M_{xCII} = T(a+b)/(a+b) - T = 0$.

Отже, під час зміни z у бокових вітварях $a \leq z < (a+b)$ значення M_{xII} збільшується від $-Tb/(a+b)$ до 0.

Таким чином, у перетині балки, де прикладена пара сил з моментом T , на епюрі M_x виникає стрибок від $Ta/(a+b)$ до $-Tb/(a+b)$ (рис. 10.7, в), тобто на значення моменту прикладеної пари.

Епюри на рисунку 10.7 ще раз ілюструють справедливість твердження, що під час $Q = const$ і $Q > 0$ згинальний момент M_x зростає за лінійним законом.

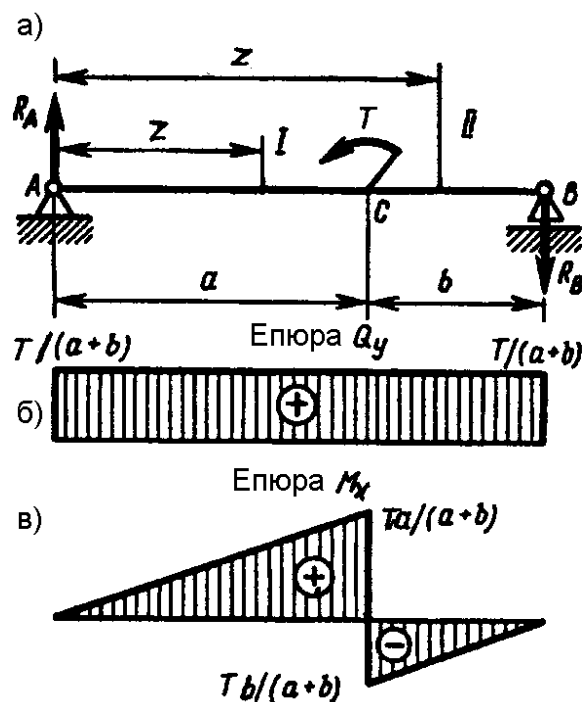


Рисунок 10.7 – Двоопірна балка навантажена між опорами парою сил

Двоопорна балка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q , як показано на рисунку 10.8, а. Реакції опор

А і В цієї балки: $R_A = \frac{2qa}{3}$ і $R_B = \frac{4qa}{3}$. Як і в попередніх випадках, балка має дві ділянки.

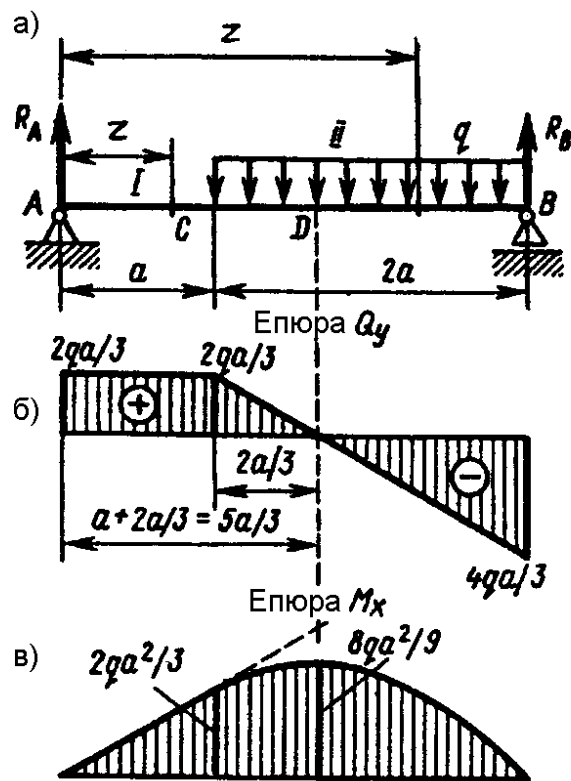


Рисунок 10.8 – Двоопорна балка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням

На ділянці I $Q_{yI} = R_A = \frac{2qa}{3} = const$;

$$M_x = R_A z = \frac{2qaz}{3}$$

і у разі зміни z у межах $0 \leq z < a$ згинальний момент збільшується за лінійним законом від $M_{ox} = 0$ у перетині над опорою А до $M_{xc} = 2q^{2/3}$ у перетині, що проходить через точку С.

На ділянці II $Q_{yII} = R_A - q(z - a) = \frac{2}{3}qa - q(z - a)$;

$$M_{xII} = R_A z - q(z - a)(z - a) / 2 = \frac{2}{3}qaz - q(z - a)^2 / 2.$$

Як бачимо, на ділянці II і поперечна сила і згинальний момент змінюються залежно від z . Під час зміни z в інтервалі $a \leq z < 3a$ поперечна сила змінюється за лінійним законом від $Q_{yc} = 2qa/3$ в перетині, проведеному через точку С, до $Q_{yb} = (2/3)qa - q(3a - a) = -4qa/3$ у перетині над опорою В, проходячи в деякому перетині балки через нульове значення (рис. 10.8, б).

Твердження перетину, де $Q_y = 0$, необхідно визначити, оскільки виходячи з диференціальної залежності (10.1) у перетині, де поперечна сила змінює знак, переходячи від $Q_y > 0$ до $Q_y < 0$, згинальний момент досягає максимального значення.

З рівняння $Q_{yII} = 2qa/3 - q(z - a) = 0$ випливає, що перетин D , у якому $Q_y = 0$ (рисунок 10.8, а, б), відстоїть від лівої опори A на відстані

$$z = a + \frac{2a}{3} = \frac{5a}{3}.$$

Згинальний момент, як видно з наведеної вище рівності, є квадратична функція від z , тому на ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, еюра згинаючого моменту зображується параболою: коли $z = a$ у перетині $M_{xC} = \frac{2}{3}qa^2$;

$$\text{коли } z = \frac{5}{3}a \text{ у перетині } D \quad M_{xD} = \frac{2qa}{3} \times \frac{5a}{3} \times \frac{q}{2} \left(\frac{5a}{3} - a \right)^2 = \frac{8qa^2}{9};$$

$$\text{коли } z = 3a \text{ у перетині } B \quad M_{xB} = \frac{2qa}{3} \times 3a - \frac{q}{2}(3a - a)^2 = 2qa^2 - 2qa^2 = 0$$

(рис. 10.8, в).

Побудова еюри ілюструє справедливість наслідків 10.1 і 10.2 з п. 10.1, що впливають з диференціальних залежностей між M_x , Q_y , і q .

Сформулюємо Базові правила побудови еюр поперечних сил і згинальних моментів, що є як наслідками диференціальних залежностей q , Q_y і M_x , так і впливають безпосередньо з методу перетинів.

1. На ділянці балки без рівномірно розподіленого навантаження ($q = 0$) поперечна сила $Q = const$ та її еюра зображується відрізком прямої, рівнобіжним базової лінії, а згинальний момент змінюється за лінійним законом та еюра M_x зображується нахиленим до базової лінії відрізком прямої.

2. На ділянці балки, що несе рівномірно розподілене навантаження, поперечна сила Q змінюється за лінійним законом і її еюра зображується похилою прямою, а згинальний момент змінюється за квадратичним законом і його еюра зображується дугою параболи, опуклість якої звернена убік, протилежну напрямкові дії навантаження.

3. Якщо на ділянках, зазначених у п.1 і 2, $Q > 0$, то згинальний момент зростає; якщо $Q < 0$, то згинальний момент зменшується; якщо $Q = 0$, то згинальний момент постійний.

4. Якщо поперечна сила, змінюючись за лінійним законом, проходить через нульове значення, то в перетині, де $Q = 0$, згинальний момент досягає екстремального значення: максимального – у разі переходу ліворуч праворуч

від $Q > 0$ до $Q < 0$ і мінімального – у разі переходу також ліворуч праворуч від $Q < 0$ до $Q > 0$.

5. Якщо границею ділянки балки є точка прикладення зосередженої сили F , то епюра Q у цьому місці змінюється стрибкоподібно на значення F , а на епюрі M_z виникає злам, тобто відбувається різка зміна кута нахилу відрізка прямої або дуги параболи.

6. Якщо границею ділянки балки є точка прикладення зосередженої пари сил, то на епюрі Q це не відбиває, а на епюрі M_z виникає стрибок, дорівнює значенню моменту пари.

7. Якщо границею ділянки є початок або закінчення дії рівномірно розподіленого навантаження, то на епюрі Q виникає злам (перехід від рівнобіжного до базової лінії відрізка до похилого або, навпаки, від похилого до рівнобіжного), а на епюрі M_z прямолінійна і параболічна ділянки сполучаються плавно (прямолінійна ділянка є дотичним до дуги параболи в їхній загальній точці).

8. У перетині на вільному або шарнірно обпертому кінці балки згинальний момент дорівнює нулеві, якщо в цьому місці не прикладена зосереджена пара сил.

Поперечна сила в цьому перетині дорівнює зовнішній зосередженій силі.

9. У перетині, що збігається з закладенням, значення Q і M_x , що вийшли на епюрах, рівні відповідно опорній реакції і реактивному моменту.

Під час побудови епюр Q і M_x рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1) знайти опорні реакції (для консолі їх можна не знаходити);

2) розбити брус на ділянки, границями яких є перетини, у яких прикладені зосереджені сили і пари, і починається або закінчується розподілене навантаження. Такі перетини прийнято називати характерними;

3) застосовуючи метод перетинів, побудувати епюри поперечних сил. Якщо поперечна сила, змінюючись безупинно, проходить через нульове значення, то необхідно визначити абсцису перетину, де Q звертається в нуль;

4) обчислити в характерних перетинах значення згинальних моментів і за знайденими ординатами побудувати епюри M_x .

10.3 Базові розрахункові передумови і формули під час вигину

Вище встановлено, що під час чистого вигину в поперечних перерізах виникають тільки нормальні напруги. Для з'ясування закону їхнього розподілу по поперечному перерізі балки і висновку формули, що визначає напругу в довільній точці поперечного перерізу, уведемо такі допущення:

1) *перпендикулярний осі недеформованого бруса плоский перетин залишається і після вигину плоским і нормальним до вигнутої осі бруса (гіпотеза плоских перетинів);*

2) *подовжні волокна бруса під час його деформації не надавлюють один на одного.*

Картина деформованого стану під час чистого вигину, що підтверджує гіпотезу плоских перетинів, добре видна на гумовій моделі бруса прямокутного перетину з нанесеної на бічній грані сіткою з подовжніх і поперечних ліній (рис. 10.9, а), що імітують подовжні шари і поперечний переріз бруса. У разі навантаження обох кінців бруса протилежно спрямованими парами сил подовжні лінії викривляються, утворюючи дуги окружності, а поперечні, залишаючись прямими, лише повертаються на деякий кут (рис. 10.9, б).

Таким чином, під час чистого вигину поперечні перерізи повертаються і подовжні шари бруса на опуклій частині бруса подовжуються, а на увігнутої – коротшають. Очевидно, що десь повинен знаходитися шар, первинна довжина якого не змінилася. Цей шар називається *нейтральним* (НС на рис. 10.9, б). Його твердження поки не відомо.

Візьмемо в брусі (рис. 10.9) два суміжних поперечних переріза, розташованих одне від іншого на відстані dz , і допустимо, що під час вигину між ними утворився кут $d\theta$ (рис. 10.10), вершина якого лежить у центрі кривизни нейтрального шару.

Кривизна нейтрального шару

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} \quad (10.3)$$

З рисунку 10.9 зрозуміло, що відрізок AB довільного шару вигнутого бруса одержав подовження $\Delta dz = \cup B'B = d\theta y$, де y – відстань від цього шару до нейтрального. Тоді за формулою (10.3) знаходимо

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{d\theta}{dz} y$$

або з урахуванням рівності (10.3)

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (10.4)$$

Для переходу від деформацій до напруг застосуємо закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E y}{\rho} \quad (10.5)$$

Можливість застосування закону Гука в розглянутій формі обумовлена прийнятим допущенням про ненатиснення волокон балки один на одного, тобто припущенням, що кожне з них знаходиться в стані одноосьового розтягання або стиску.

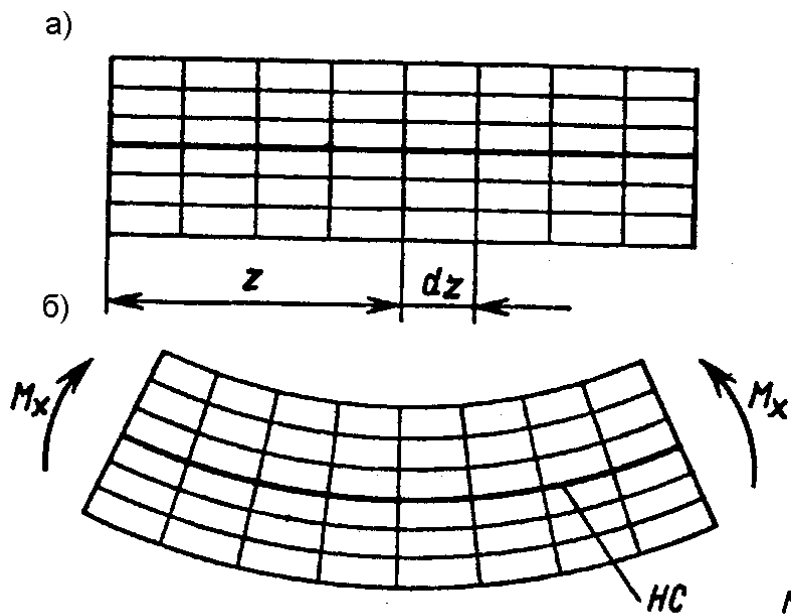


Рисунок 10.9 –
Картина деформованого стану підчас чистого вигину

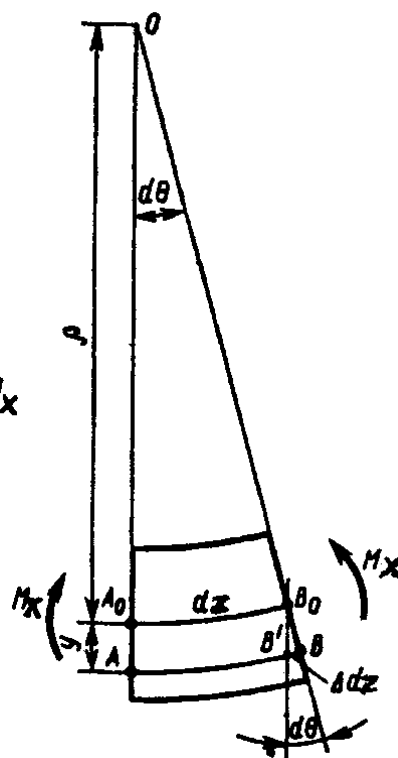


Рисунок 10.10 –

Картина деформованого стану підчас чистого вигину

Виразження (10.5) показує, що нормальна напруга в довільній точці поперечного переріза прямо пропорційна її відстані у від нейтральної осі. Графічне тлумачення формули (10.5) показано на рисунку 10.11. Лінія перетинання нейтрального шару з поперечним перерізом називається *нейтральною віссю* (НО). У точках, розташованих на нейтральній осі, $\sigma = 0$ (оскільки для цих точок $y = 0$) і в будь-яких інших точках перетину нормальні напруги пропорційні їхній відстані від нейтрального шару, тобто вони змінюються за лінійним законом. Якщо, як звичайно, напругу розтягання направити від перетину, а напругу стиску – до перетину, то одержимо картину розподілу напруження, показано на рисунку 10.11.

Твердження нейтральної осі визначимо з умови, що нормальна сила в поперечному перерізі у разі чистого вигину дорівнює нулеві. Розбивши

поперечний переріз на безліч елементарних площадок dA (рис. 10.12) підсумував елементарні подовжні сили

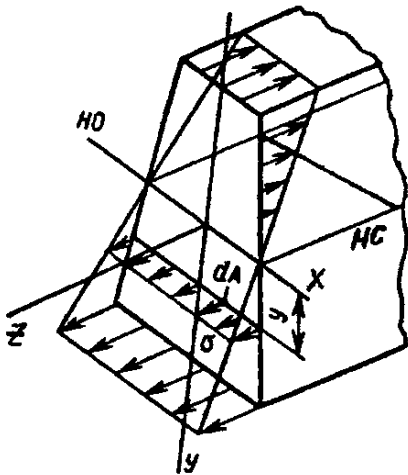


Рисунок 10.11 – Поперечний переріз

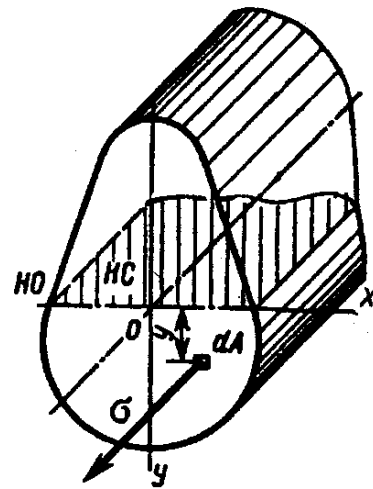


Рисунок 10.12 – Поперечний переріз

$$dN = \sigma \cdot dA = \frac{E y dA}{\rho}$$

по всій площі перетину, одержимо

$$N = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Винесена за знак інтеграла постійна величина $E/\rho \neq 0$, оскільки радіус кривизни деформованого бруса не дорівнює нескінченності. Отже, ця рівність має сенс лише при

$$\int_A y dA = 0.$$

Цей інтеграл становить статичний момент поперечного переріза щодо нейтральної осі. З п. 10.1 відомо, що статичний момент перетину дорівнює нулеві лише щодо центральної осі. Отже, *нейтральна вісь збігається з центральною віссю x*. У розглянутому випадку (рис. 10.11) силова лінія (вісь Oy) збігається з віссю симетрії перетину, тобто є однією з головних центральних осей. Нейтральна вісь їй перпендикулярна і проходить, як ми установили, через центр ваги, тобто це друга головна центральна вісь. Опускаючи доказ, можна стверджувати, що *під час прямого вигину, тобто у випадку, коли силова площина збігається з головною площиною, нейтральна вісь збігається з головною центральною віссю*.

Для визначення радіуса кривизни нейтрального шару використовуємо залежність між згинальним моментом і нормальними напругами:

$$M_x = \int_A \sigma y dA,$$

де dA – елементарна площадка поперечного переріза (рис. 10.12);

σdA – елементарна нормальна сила;

$\sigma dAy = \sigma y dA$ елементарний момент внутрішніх сил щодо осі x .

Підставивши замість σ його вираження з (10.5), знаходимо

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,$$

де $\int_A y^2 dA = J_x$ – момент інерції перетину щодо осі x (див. формулу (10.3)).

Таким чином, $M_x = \frac{1}{\rho} EJ_x$. Звідси $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$.

За цією формулі визначається *кривизна вигнутої осі бруса, що характеризує деформацію вигину*. Тут величина EJ_x називається *твердістю перетину бруса під час вигину*.

Виключивши ρ з рівностей (10.4) і (10.5), одержимо формулу для визначення нормальної напруги в довільній точці поперечного переріза

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x}. \quad (10.6)$$

Формула (10.6), виведена з розгляду прямого чистого вигину, як показують дослідження, цілком прийнятна і для визначення нормальних напруг під час поперечного вигину.

10.4 Розрахунки на міцність

Балки розраховують на міцність за найбільшими нормальними напругами, що виникають в їхніх поперечних перерізах. Під час поперечного вигину балок поряд з нормальними виникають і дотичні напруження, обумовлені наявністю поперечної сили, але вони в переважній більшості випадків невеликі і під час розрахунків на міцність не враховуються.

Міцність балки забезпечена, якщо найбільші за абсолютним значенням нормальні напруги, що виникають у небезпечному перерізі, не перевищують припустимих. Для балки, поперечні розміри якої по всій довжині постійні, небезпечний переріз той, у якому виникає найбільший по модулю згинальний момент. Найбільші нормальні напруги виникають у точках небезпечного поперечного переріза, максимально вилучених від нейтральної осі. Ці точки

прийнято називати *небезпечними*. Значення максимальних напруг у небезпечних точках знайдемо за формулою (10.6):

$$\max \sigma_p = \frac{M_x y_1}{J_x}; \quad \max \sigma_c = \frac{M_x y_2}{J_x};$$

де y_1 і y_2 – відстані від нейтральної осі до найбільш вилучених точок відповідно в розтягнутій і стиснутій зонах перетину.

Якщо матеріал балки крихкий, наприклад загартована сталь, чавун, текстоліт та ін., то розрахунок на міцність під час вигину проводять за напругами розтягання і стиску. У крихких матеріалів межа міцності під час стиску вище межі міцності під час розтягання ($\sigma_{bc} > \sigma_{bp}$). Отже, поперечним перерізам балок з крихких матеріалів доцільно додавати асиметричну форму щодо нейтральної осі (рис. 10.13) і розташовувати балки так, щоб велика частина матеріалу знаходилася в розтягнутій зоні.

Таким чином, під час розрахунків балок з крихкого матеріалу використовують дві умови міцності:

– для розтягнутої зони

$$\max \sigma_p = \frac{M_x y_1}{J_x} \leq [\sigma_p]$$

– для стиснутої зони

$$\max \sigma_c = \frac{M_x y_2}{J_x} \leq [\sigma_c]$$

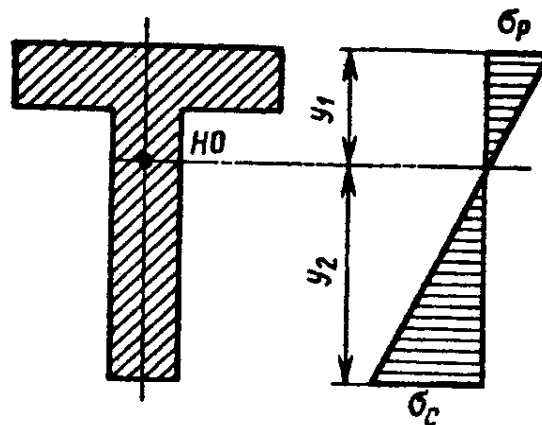


Рисунок 10.13 – Тавровий переріз

Причому найкраще використання матеріалу відбувається при формі перетину, що задовольняє умові $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$.

Під час розрахунку балок із пластичних матеріалів, наприклад з низьковуглецевої сталі або кольорових металів, напруги, що допускаються на розтяг і стиск однакові: $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$, тому для таких балок доцільними є

перетини, симетричні щодо нейтральної осі (рис. 10.14), тому що в цьому випадку найбільш вилучені точки в розтягнутій і стиснутій зонах перетину розташовуються на однаковій відстані $e = h/2$ від нейтральної осі. І, отже,

$$\max \sigma_p = \max \sigma_c = \sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{h}{2}.$$

Розділимо чисельник і знаменник правої частини цієї рівності на $h/2$:

$$\sigma_{\max} = M_x \div \frac{J_x}{\frac{h}{2}}.$$

Величина $\frac{J_x}{\frac{h}{2}} = W_x$, що виражається в м^3 , см^3 або мм^3 , називається

моментом опору перетину під час вигину.

Для прямокутного перетину (рис. 10.14), розміри якого $d \times h$, момент опору

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{h}{2}} \frac{dh^3}{12} \div \frac{h}{2} = \frac{dh^2}{6}. \quad (10.7)$$

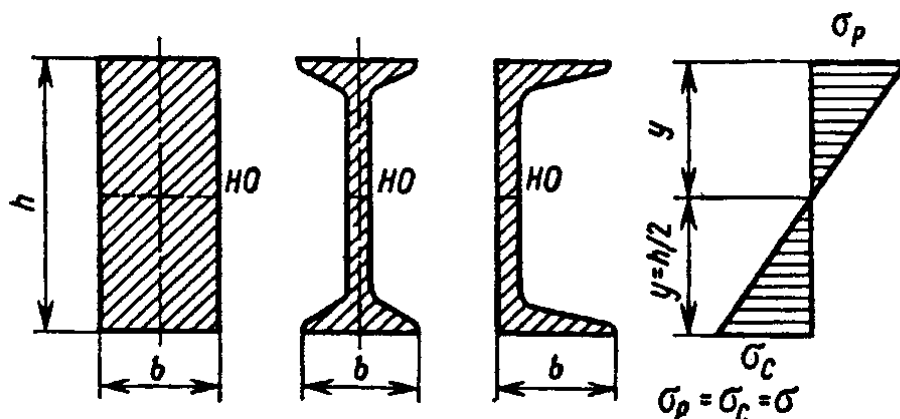


Рисунок 10.14 Прямокутний перетин, двотавр, швелер

Для круглого перетину

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{d}{2}} \frac{\pi d^4}{32} \div \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (10.8)$$

Найбільш економічні під час вигину такі форми перетину, за яких матеріал бруса розташований якнайдалі від нейтральної осі. У таких брусів за найменшої витрати матеріалів виходить найбільший момент опору W_x , тому і виникли профілі стандартного прокату (рис. 10.14), усі необхідні геометричні характеристики яких містяться в ДСТУ 8239–89 «Двотаври сталеві

гарячевальцьовані. Сортамент», ДСТУ 8240–89 «Швелери сталеві гарячевальцьовані. Сортамент».

Таким чином, найбільші напруги розтягання або стиску в симетричному щодо нейтральної осі перетині знаходять за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$$

і умова міцності балки з пластичного матеріалу має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (10.9)$$

виходячи з якого виконують три види розрахунків.

Проектувальний розрахунок. Приймавши $\sigma_{\max} = [\sigma]$, за згинальним моментом M_x у небезпечному перерізі знаходять необхідне значення моменту опору

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]}.$$

Потім, виходячи з прийнятої для балки форми поперечного переріза, знаходять його розміри.

Розрахунок навантаження, що допускається, виконується якщо $\sigma_{\max} = [\sigma]$ за формулою:

$$[M_x] = W_x [\sigma]. \quad (10.10)$$

Потім, виходячи зі схеми навантаження балки, знаходять значення навантаження, що допускається.

Перевірочний розрахунок. Визначивши максимальний згинальний момент і момент опору перетину, знаходять за формулою (10.9) значення σ і порівнюють його з $[\sigma]$.

Аналогічно виконують розрахунки балок з умови міцності (10.9).

10.5 Дотичні напруження під час поперечного вигину

Під час поперечного вигину крім нормальних напруг у поперечному перерізі бруса виникають дотичні напруження, а відповідно до закону парності, такі ж напруги з'являються й у поздовжніх перетинах бруса. Виникнення дотичних напружень у поздовжніх перетинах можна проілюструвати таким прикладом. Якщо брус прямокутного перетину висотою $2h$ навантажити силою F , він зігнеться, як показано на рисунку 10.15, а. Якщо з такого ж матеріалу виготовити два брус висотою h кожний, то під час навантаження їх силою P і відсутності тертя між ними вони зігнуться кожен сам по собі (рис. 10.15, б).

Звідси видно, що під час вигину цілого бруса висотою $2h$ між частинами бруса, розділеними подовжніми шарами, виникає взаємодія, у результаті якої і виникають дотичні напруження (рис. 10.15, в).

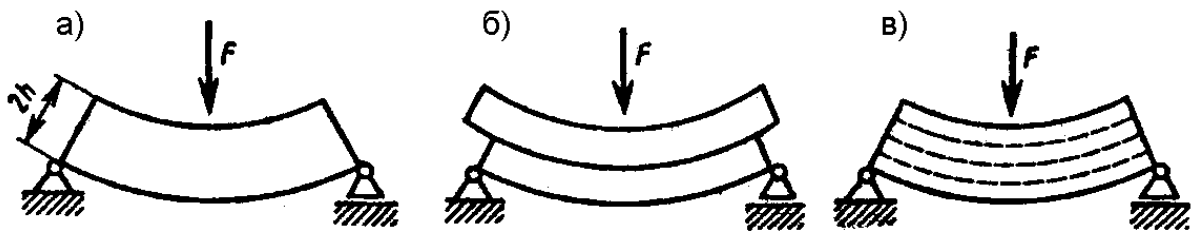


Рисунок 10.15 – Поперечний вигин

Числові значення дотичних напружень у поперечних перерізах визначають, використовуючи закон парності, через напруги, що виникають у поздовжніх перетинах.

Під час поперечного вигину, згинальний момент, під час переходу від одного перетину до іншого уздовж осі бруса змінюється. Отже, якщо в брусі виділити елемент довжиною dz (рис. 10.16, а), то в його перетині, наприклад, праворуч згинальний момент відрізняється від згинаючого моменту ліворуч на dM_x . Відповідно максимальні нормальні напруги в перетині праворуч на $d\sigma$ більше, ніж ліворуч (рис. 10.16, б). Поздовжнім перетином, проведеним на відстані y від осі z (рис. 10.16,б, в), відокремимо від елемента його верхню частину і переконаємося в тім, що її рівновага можлива лише за наявності дотичних напружень у поздовжньому перетині.

Рівнодіюча елементарних нормальних сил у перетині ліворуч

$$N_{\text{лів}} = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Підставивши сюди значення σ з формули (10.6), одержимо

$$N_{\text{лів}} = \int_A \frac{M_x}{J_x} y_i dA = \frac{M_x}{J_x} \int_A y_i dA$$

де $\int_A y_i dA = S_{x_{\text{оом}}}$ – статичний момент щодо осі x площі поперечного перерізу

відсіченої частини. Отже,

$$N_{\text{лів}} = \frac{M_x S_{x_{\text{оом}}}}{J_x}.$$

Аналогічним образом знаходимо значення нормальної сили в правому перетині

$$N_{omc} + dN_{omc} = \frac{(M_x + dM_x)S_{xomc}}{J_x}$$

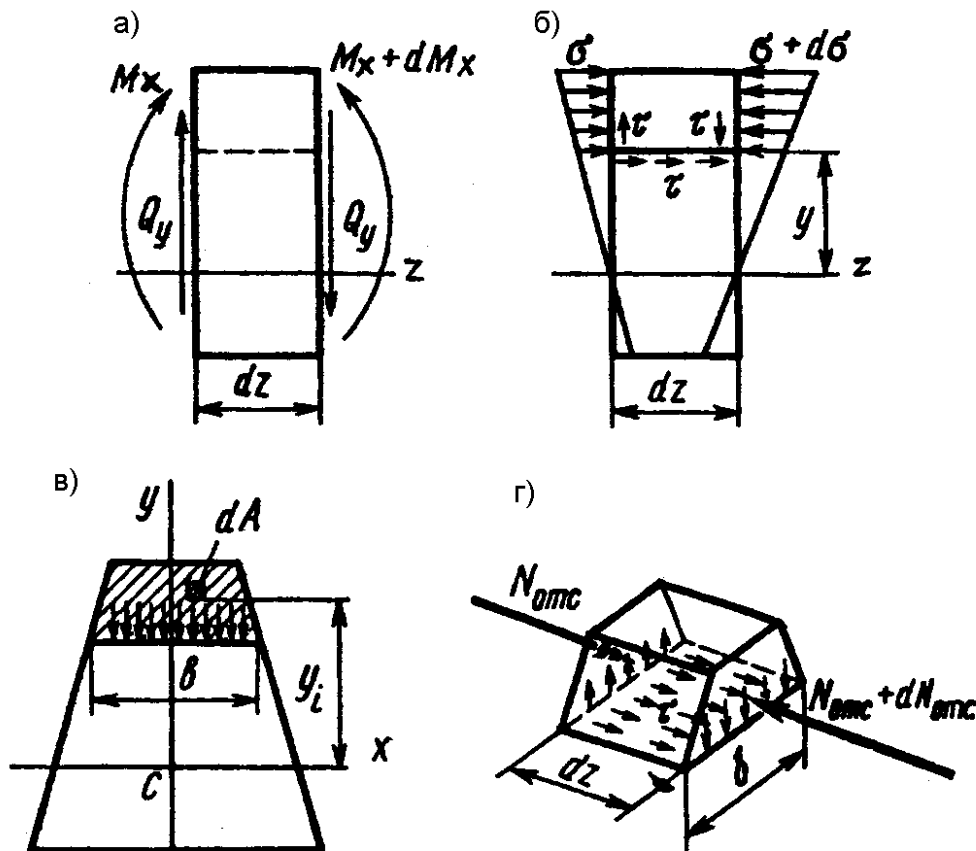


Рисунок 10.16 – Схема розподілу напруг та нормальних зусиль

Як бачимо, нормальні сили, що виникають праворуч і ліворуч відсіченої частини елемента, не врівноважують один одного, а тим часом розглянута частина елемента бруса знаходиться в рівновазі. Отже, різниця нормальних сил

$$dN_{omc} = \frac{dM_x S_{xomc}}{J_x}$$

повинна врівноважуватися дотичними силами, що виникають у поздовжньому перетині відділеного елемента (рис. 10.16, г). Вважаючи, що дотичні напруження по ширині b перетину розподілені рівномірно, одержимо

$$\frac{dM_x S_{xomc}}{J_x} = \tau b dz \quad \text{або} \quad \frac{dM_x S_{xomc}}{dz J_x} = \tau b$$

Звідки, пам'ятаючи, що $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, [див. (10.1)], одержимо формулу

Журавського

$$\tau = \frac{Q_y S_{x_{омс.}}}{J_x b} \quad (10.11)$$

Визначаючи за цією формулою значення дотичних напружень у поздовжніх перетинах бруса, знаходимо рівні їм за законом парності дотичні напруження й у поперечному перерізі.

Застосуємо формулу Журавського до прямокутного поперечного переріза бруса (рис. 10.17, а), у якому виникла поперечна сила Q_y . Момент інерції прямокутного перетину $J_x = bh^3/12$, ширина перетину $b = const$ по усій висоті. Отже, дотичні напруження τ у точках перетину, розташованих на відстані y від центральної осі, залежать від зміни статичного моменту $S_{омс.}$ заштрихованої частини перетину вище рівня v .

Статичний момент заштрихованої частини перетину

$$S_{x_{омс.}} = A_{омс.} \cdot y_1,$$

де заштрихована площа

$$A_{омс.} = b (h/2 - y),$$

а ордината центра ваги цієї площі

$$y_1 = 1/2(h/2 + y).$$

Отже,

$$S_{x_{омс.}} = A_{омс.} \cdot y_1 = b(h/2 - y)1/2(h/2 + y) = b/2(h^2/4 - y^2).$$

Підставляючи знайдені значення J_x , $S_{омс.}$ у формулу (18.11), одержимо

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Як бачимо, еюра дотичних напружень по висоті перетину (рис. 10.17, б) зображується квадратичною параболою. Максимальна напруга виникає в точках перетину, розташованих на центральній осі (коли $b = 0$):

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}.$$

Таким чином, максимальне дотичне напруження в 1,5 рази перевищує середнє значення напруги

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q_y}{A} = \frac{Q_y}{bh}$$

у верхньої і нижньої крайки перетину (коли $y = H/2$) $\tau = 0$.

У балці прямокутного, а також круглого перетинів максимальні дотичні напруження виникають у тих точках, де нормальні напруги дорівнюють нулеві, і, навпаки, у крайніх точках перетину, де нормальні напруги максимальні, дотичні напруження дорівнюють нулеві. Тому за небезпечні можна прийняти точки, найбільш вилучені від нейтральної осі, що підтверджується практикою

експлуатації балок, що працюють на вигин. Однак у випадку тонкостінних профілів (наприклад, двотавру) необхідно перевірити міцність балки й у точках, де полка з'єднується зі стінкою, оскільки тут виникають значні як нормальні, так і дотичні напруження.

Якщо поперечний переріз двотаврової балки спрощено представити складеним з трьох прямокутників (рис. 10.18, а), то епюри дотичних напружень у стінці балки (рис. 10.18, б) одержимо в такий спосіб.

Напруги у верхній (і нижній) точці стінки знаходимо, підставивши у формулу Журавського (10.11) статичний момент полиці S_{xII} щодо осі x і прийнявши ширину перетину b рівній товщині стінки двотавру d (див. рис. 10.2):

$$\tau_k = \frac{Q_y S_{xII}}{J_x d}.$$

Максимальні дотичні напруження, що виникають у точках на нейтральній осі x , знаходимо з формули

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x}{J_x d},$$

де S_x – статичний момент напівперетину щодо осі x . Величина S_x береться з таблиць ДСТ 8239–89.

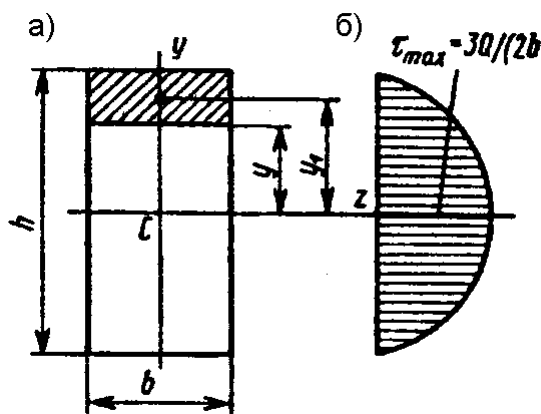


Рисунок 10.17 – Поперечний переріз прямокутника

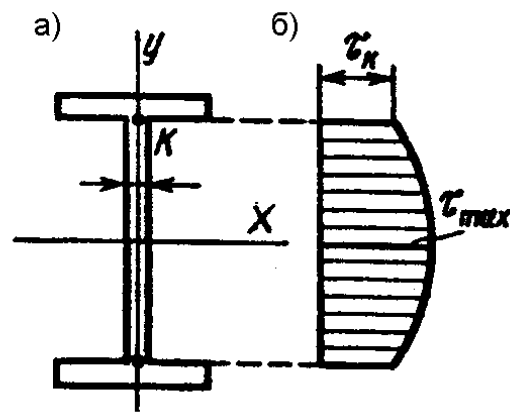


Рисунок 10.18 – Поперечний переріз двотаврової балки

У коротких двотаврових балках великої висоти дотичні напруження можуть досягати великих значень у випадках значних навантажень, прикладених поблизу опор. У таких випадках крім основного розрахунку на міцність за нормальними напруженнями варто визначати максимальні дотичні напруження в тому перетині, де виникла найбільша поперечна сила, і порівняти

їх із тими, що допускаються. Як правило, для сталевих балок приймають $[\tau] = 0,6[\sigma]$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Виникненням яких внутрішніх факторів характеризується прямий чистий вигин і прямий поперечний вигин?

Наведіть приклади навантаження бруса зосередженими силами, за яких на ділянці (ділянках) бруса в поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент?

2. Як визначити напругу в будь-якій точці певного поперечного перерізу під час прямого вигину?

3. В скільки разів зменшиться міцність балки прямокутного перетину з підставою b і висотою h , якщо балку покласти пліском (тобто щоб висота стала основою, а підстава висотою)?

4. Які особливості розрахунку балок з крихких матеріалів?

5. Чому під час вигину в поздовжніх перетинах балок виникають дотичні напруження?

6. У скільки разів збільшиться прогин:

а) двухопорної;

б) консольної балки, якщо рівномірно розподілене навантаження по всій довжині балки замінити зосередженим, у першому випадку прикладеним посередині між опорами, а в другому – на кінці консолі?

(Відповідь: а) у 4 рази; б) у 1,6 рази.)

11 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

11.1. Способи завдання руху точки

Для завдання руху точки в просторі можна застосовувати один з трьох способів: векторний, координатний та натуральний.

Векторний спосіб завдання руху точки

Твердження точки M , що рухається відносно системи відліку $Oxyz$, можна визначити, задаючи її радіус-вектор \vec{r} , проведений з початку координат O в дану точку M (рис. 1.1). При русі точки M її радіус-вектор \vec{r} буде з плином часу змінюватися за модулем, і напрямом, тобто буде вектором-функцією:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (11.1)$$

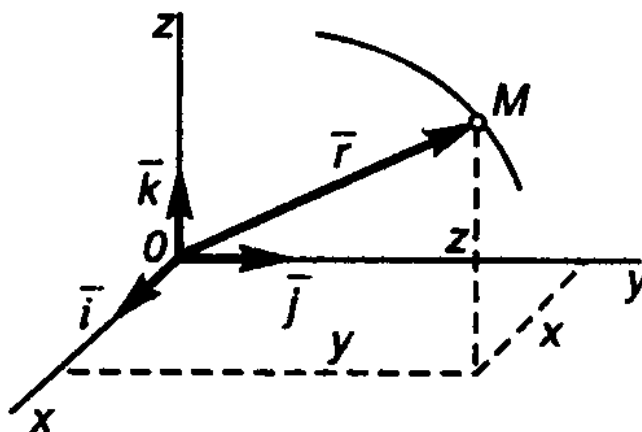


Рисунок 11.1 – Векторний спосіб завдання руху точки

Рівність (11.1) визначає твердження точки M у просторі, а отже, закон її руху у векторній формі.

Неперервна лінія, яку описує точка, що рухається, відносно даної системи відліку, називається *траєкторією точки*. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, рух точки називається *прямолінійним*, а якщо крива – *криволінійним*.

При векторному способі завдання руху траєкторією точки є геометричне місце кінців її радіуса-вектора \vec{r} (годографа цього вектора).

Координатний спосіб завдання руху точки

Твердження точки в просторі можна визначити також її декартовими координатами x, y, z , які під час руху точки будуть змінюватися з плином часу.

Отже рівняння руху точки в будь-який момент часу має вигляд

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (11.2)$$

Функціональні залежності (1.2) є рівняннями руху (законом руху) точки в прямокутних декартових координатах. Зазначимо, що задати рух точки можна й іншими системами координат, наприклад, полярними, сферичними і т.д.

Рівняння руху (11.2) можна розглядати як рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де параметром є час t . Вилучивши з рівнянь руху час t , можна визначити рівняння траєкторії в звичайній координатній формі, тобто у вигляді залежності між координатами x, y, z точки.

Перехід від координатного способу завдання руху точки до векторного, і навпаки, може бути здійснений у такий спосіб.

Задаючи одиничні вектори (орти) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координатних осей і позначаючи проекції радіуса-вектора \bar{r} на ці осі $r_x = x, r_y = y, r_z = z$ (рис. 1.1), одержимо для вектора \bar{r} вираз

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (11.3)$$

Приклад. Нехай рух точки в площині Oxy задано рівняннями

$$x = 2t, \quad y = 1,5t^2. \quad (11.4)$$

За цих рівнянь можна визначити, що в момент часу $t_0 = 0$ точка знаходиться в положенні $M_0(0, 0)$, а у момент часу $t_1 = 1$ с – у положенні $M_1(2; 1,5)$ і т.д. Даючи часу t різні значення і зображуючи відповідні твердження точок, можемо побудувати її траєкторію (рис. 11.2).

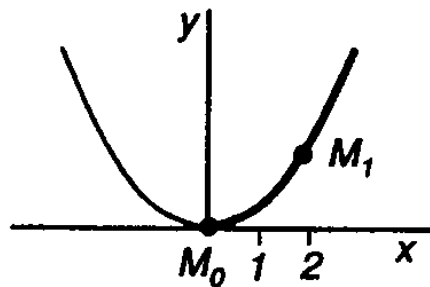


Рисунок 11.2 – Координатний спосіб завдання руху точки

Іншим шляхом траєкторію можна знайти, вилучивши t з рівнянь (11.4). З першого рівняння знаходимо $t = x/2$ і, підставляючи це значення t у друге рівняння, одержуємо $y = (3/8)x^2$. Отже, точка рухається по дузі параболи, вершина якої розташована на початку координат. Траєкторією руху буде тільки права вітка параболи (оскільки при $t \geq 0$ буде $x \geq 0$).

Натуральний спосіб завдання руху точки

Цей спосіб завдання руху може бути застосований, якщо заздалегідь відома траєкторія руху точки (наприклад, заздалегідь відома траєкторія, залізничного вагона, що рухається по рейках, і т.д.). Нехай крива AB є траєкторією точки M щодо системи відліку $Oxyz$ (рису. 11.3). Зазначимо на траєкторії нерухому точку O' , яку приймемо за початок відліку дугової координати s , і домовимося про напрямки додатного і від'ємного відліку координати s .

Отже, на рисунку 11.3 координата s для точок, що знаходяться на траєкторії праворуч початку відліку O' , буде вважатися додатною, ліворуч O' – від'ємною.

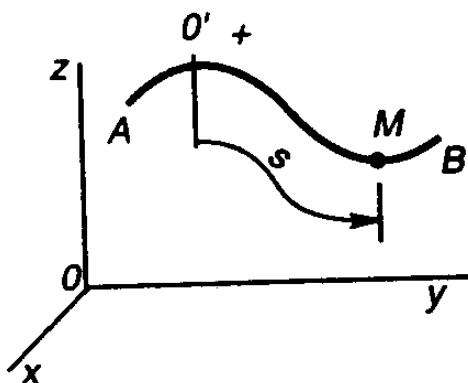


Рисунок 11.3 – Натуральний спосіб завдання руху точки

Тоді, щоб визначити твердження точки в будь-який момент часу, треба знати залежність дугової координати від часу:

$$s = f(t). \quad (11.4)$$

Рівняння (11.4) описує закон руху точки M уздовж траєкторії. Зазначимо, що величина s у рівнянні (11.4) визначає твердження точки на лінії її руху, через відстань від точки O до точки M , вимірювану уздовж дуги траєкторії і взяту з відповідним знаком, а не пройдений точкою, що рухається, шлях.

11.2 Визначення швидкості та прискорення точки

Основними кінематичними характеристиками руху точки є векторні величини – швидкість і прискорення точки.

Визначення швидкості та прискорення точки при векторному способі завдання руху точки. Нехай точка, що рухається, знаходиться в момент часу t у положенні M , обумовленому радіусом-вектором \vec{r} , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – у положенні M_1 , обумовленому радіусом-вектором \vec{r}_1 (рис. 11.4,а). Переміщення

точки за проміжок часу Δt визначається вектором переміщення точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$. Відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу Δt дає векторну величину, що називається середньою за модулем і напрямом швидкістю точки за проміжок часу Δt :

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (11.5)$$

Вектор \vec{V}_{cp} , відповідно до виразу (11.5), спрямований так само, як і вектор $\Delta\vec{r}$, тобто уздовж хорди MM_1 у бік руху точки.

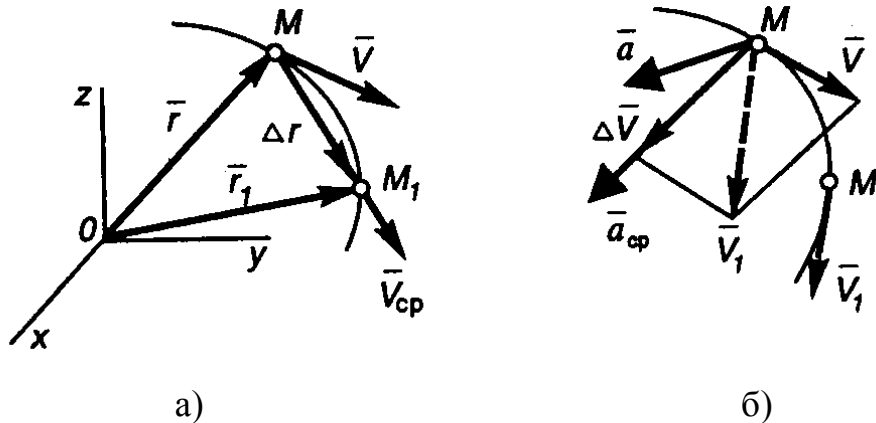


Рисунок 11.4 – Визначення швидкості та прискорення точки

Швидкістю точки в даний момент часу t називається векторна величина \vec{V} , до якої прямує середня швидкість \vec{V}_{cp} , якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{V}_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) \text{ або } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (11.6)$$

Отже, вектор швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки за часом.

Оскільки граничним напрямом січної MM_1 є дотична (по ній спрямований також вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$), то вектор швидкості в даний момент часу теж спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік її руху (рис. 11.4,а).

При криволінійному русі точки в загальному випадку змінюється і напрям вектора швидкості та його модуль (числове значення). При прямолінійному русі точки вектор швидкості увесь час спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка, і, отже, може змінюватися лише величина швидкості. Розмірність швидкості – м/с, км/ч.

Зміну вектора швидкості \vec{V} з плином часу характеризує векторна величина \vec{a} , яка має назву *прискорення \vec{a} точки*.

Нехай у деякий момент часу t точка, що рухається, знаходиться в положенні M і має швидкість \bar{V} , а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ переміщується у твердження M_1 і має швидкість \bar{V}_1 (рис. 1.4,б). Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ швидкість точки отримала зміну $\Delta\bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}$. Зазначимо, що вектор $\Delta\bar{V}$ завжди спрямований в бік угнутості розглянутої траєкторії точки. Вектор середнього прискорення точки за проміжок часу Δt :

$$\bar{a}_{cp} = \Delta\bar{V} / \Delta t. \quad (11.7)$$

Він має той самий напрям, що й вектор $\Delta\bar{V}$, тобто спрямований у бік угнутості ділянки траєкторії.

Прискоренням точки в даний момент часу t є векторна величина \bar{a} , до якої прямує середнє прискорення \bar{a}_{cp} , якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} \right) = d\bar{V} / dt \quad (11.8)$$

або з урахуванням рівняння (1.6)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (11.9)$$

Отже, вектор прискорення точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом. Розмірність прискорення – м/с².

З формули (11.9) маємо, що вектор прискорення \bar{a} буде спрямований за напрямом елементарного приросту вектора швидкості $d\bar{V}$. Виходячи з цього, встановимо розташування вектора \bar{a} відносно траєкторії точки. При прямолінійному русі вектор \bar{a} спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка. При криволінійному русі вектор \bar{a} спрямований у бік угнутості траєкторії (рис. 11.4, б) і розташовується в дотичній площині. Для різних точок просторової кривої твердження дотичної площині буде своє. Якщо траєкторією точки є плоска крива, то дотична площина збігається з площиною цієї кривої.

Визначення швидкості та прискорення точки при координатному способі завдання руху точки. Загальні формули (11.6) і (11.9), котрі визначають величини \bar{V} і \bar{a} , містять похідні від вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Диференціюючи за часом цей вираз, одержимо

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \quad (11.10)$$

або

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}. \quad (11.11)$$

Звідси маємо, що проекція швидкості точки на координатні осі дорівнює першим похідним від координат точки за часом:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad (11.12)$$

де точка над буквою є символом диференціювання за часом.

Модуль швидкості та її напрям у просторі (позначивши кути, що утворить вектор \bar{V} з осями x, y, z відповідно α, β, γ) знайдемо за формулами

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos \alpha = V_x / V, \quad \cos \beta = V_y / V, \quad \cos \gamma = V_z / V. \quad (11.13)$$

Вектор прискорення \bar{a} відповідно знайдемо диференціюванням за часом виразу (11.10) або (11.11). Одержимо

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}$$

або

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \bar{i} + \frac{dV_y}{dt} \bar{j} + \frac{dV_z}{dt} \bar{k}$$

або

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (11.14)$$

Звідси випливає, що проекції вектора прискорення точки на осі координат дорівнюють першим похідним від відповідних проекцій вектора швидкості або другим похідним від відповідних координат точки за часом:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}. \quad (11.15)$$

Модуль і напрям прискорення будуть

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos \alpha_1 = a_x / a, \quad \cos \beta_1 = a_y / a, \quad \cos \gamma_1 = a_z / a, \quad (11.16)$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути між вектором \bar{a} і координатними осями x, y, z .

Визначення швидкості та прискорення точки при натуральному способі завдання руху точки. При натуральному способі завдання руху задається траєкторія точки і закон її руху уздовж траєкторії у виді $s = f(t)$.

У цьому випадку значення векторів \bar{V} і \bar{a} визначають за їх проекціями не на осі нерухомої системи відліку $Oxyz$, а на осі рухомої прямокутної системи координат $M\tau\nu b$, що має початок у точці M і рухається разом з нею по траєкторії (рис. 11.5). Ці осі є осями натурального тригранника, спрямовані в такий спосіб: вісь $M\tau$ (дотична) – по дотичній до траєкторії у бік додатного відліку відстані s ; вісь $M\nu$ (головна нормаль) – по нормалі до траєкторії, що лежить у дотичній площині, в бік угнутості траєкторії; вісь Mb (бінормаль) –

перпендикулярна до перших двох осей, утворюючи з ними праву систему осей. Тут $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – відповідно орти (одичні вектори) осей системи координат $M\tau n b$.

Вектор швидкості при натуральному способі завдання руху точки буде

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad (11.17)$$

де ds – елементарне переміщення точки по дузі траєкторії.

Введемо одичний вектор $\bar{\tau} = d\bar{r}/ds$, спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік додатного відліку відстані s .

Тоді

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} \text{ або } \bar{V} = V_{\tau} \cdot \bar{\tau}, \quad (11.18)$$

де

$$V_{\tau} = ds/dt = \dot{s}, \quad (11.19)$$

тобто V_{τ} – числове (алгебраїчне) значення швидкості в даний момент часу, яке дорівнює першій похідній від відстані (криволінійної координати) s цієї точки за часом.

Величина V_{τ} , будучи проекцією вектора \bar{V} на дотичну, буде мати знак плюс або мінус: якщо $V_{\tau} > 0$, то швидкість спрямована у бік додатного відліку відстані s ; якщо $V_{\tau} < 0$ – у протилежну сторону. Отже, знак V_{τ} визначає напрям вектора \bar{V} відносно осі τ . На Рисунок 11.5 вектор \bar{V} зображений для випадку, коли $V_{\tau} > 0$, тобто напрями вектора \bar{V} й осі τ збігаються. З (11.18) маємо, що модуль швидкості \bar{V} буде $V = |\bar{V}| = |V_{\tau}|$.

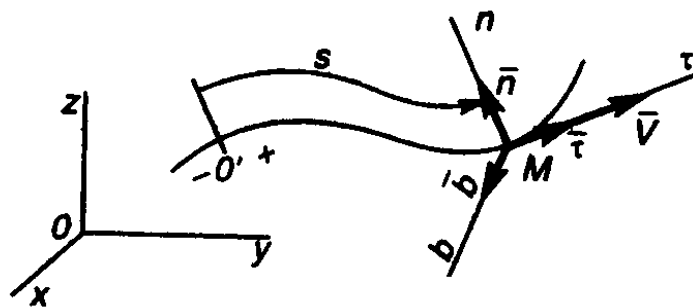


Рисунок 11.5 – Визначення швидкості та прискорення точки при натуральному способі завдання руху точки

Визначимо прискорення точки за формулою (11.9), продиференціюючи за часом вираз (11.18):

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(V_\tau \cdot \bar{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt} \bar{\tau} + V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (11.20)$$

Знайдемо

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту вектора $\bar{\tau}$; ρ – радіус кривини траєкторії в розглянутій точці.

Підставивши цей вираз в (11.20), маємо

$$\bar{a} = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \quad (11.21)$$

Отже, прискорення точки дорівнює геометричній сумі двох векторів, один з яких \bar{a}_τ спрямований по дотичній (дотичне прискорення), а другий – вектор \bar{a}_n спрямований по головній нормалі (нормальне прискорення):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (11.22)$$

Площина, що проходить через дотичну і головну нормаль, є дотичною до розташованого в ній вектора прискорення точки.

Проекції вектора \bar{a} на осі натурального тригранника визначаються за формулами:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \quad (11.23)$$

Оскільки складові \bar{a}_τ і \bar{a}_n взаємно перпендикулярні, для модуля вектора \bar{a} одержимо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (11.24)$$

На підставі формул (11.23) маємо: величина a_τ (проекція вектора \bar{a} на напрям τ) може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю; величина a_n по криволінійній траєкторії завжди додатна, цим визначається, що складова \bar{a}_n буде завжди спрямована у бік угнутості кривої; величина a_b (проекція прискорення на бінормаль) дорівнює нулю.

Кут μ відхилення вектора \bar{a} від нормалі Mn визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg} \mu = a_\tau / a_n, \quad (11.25)$$

його значення може бути в інтервалі $-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$.

Якщо $a_\tau < 0$, то $\mu < 0$ і вектор \bar{a} відхилений від нормалі M в сторону, протилежну додатному напрямку осі $M\tau$ (рисунок 11.6,а); при $a_\tau > 0$ кут $\mu > 0$ і

вектор \bar{a} відхиляється від нормалі за напрямом осі $M\tau$ (рис. 11.6, в); якщо $a_\tau = 0$, то $\mu = 0$ і вектор \bar{a} спрямований по нормалі Mn (рис. 11.6, б).

У загальному випадку руху точки може змінюватися і модуль, і напрям вектора швидкості. Аналіз формул (11.23) приводить до висновку: *дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною, нормальне прискорення – зміну напрямку вектора швидкості.*

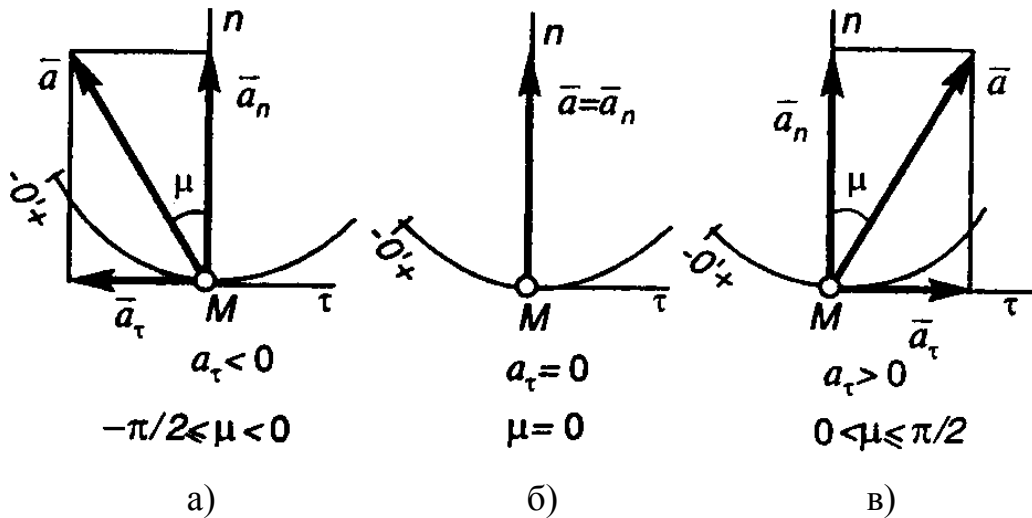


Рисунок 11.6 – Положення вектора прискорення на траєкторії

Окремі випадки руху точки

Рівномірний рух. Рівномірним називається рух точки по траєкторії, при якому числове значення швидкості увесь час залишається постійним; отже, $V_\tau = const$. Тоді

$$a_\tau = dV_\tau / dt = 0.$$

Якщо рівномірний рух криволінійний, то прискорення точки буде представлено лише нормальною складовою $\bar{a} = \bar{a}_n$ і $a = a_n = V^2/\rho$. У даному випадку прискорення обумовлене тільки зміною вектора швидкості точки за напрямом.

Якщо рівномірний рух точки відбувається по прямолінійній траєкторії, то $\rho = \infty$ й $a_n = V^2/\rho = 0$. У цьому випадку $a_n = a_\tau = 0$, а отже $a = 0$. Визначимо, що рівномірний прямолінійний рух є єдиним рухом, у якому прискорення точки увесь час дорівнює нулю.

Знайдемо закон рівномірного руху. З формули (11.19) маємо $ds = V_\tau \cdot dt$. Якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ точка має координату s_0 , то, беручи від

лівої і правої частин рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $V_\tau = const$), отримаємо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t V_\tau \cdot dt \quad \text{або} \quad s - s_0 = V_\tau t.$$

Остаточно знаходимо закон рівномірного руху точки у вигляді

$$s = s_0 + V_\tau t. \quad (11.26)$$

Рівнозмінний рух. Рівнозмінним називається рух точки по траєкторії, при якому дотичне прискорення залишається увесь час постійним: $a_\tau = const$.

Знайдемо закон цього руху, вважаючи, що при $t_0 = 0$ виконується $s = s_0$ і $V_\tau = V_0$. Відповідно до першої з формул (11.23) $dV_\tau = a_\tau dt$. Беручи від обох частин цього рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $a_\tau = const$), отримаємо закон зміни швидкості точки при рівнозмінному русі:

$$V_\tau = V_0 + a_\tau t. \quad (11.27)$$

Формулу (11.27) представимо у вигляді

$$ds/dt = V_0 + a_\tau t \quad \text{або} \quad ds = V_0 \cdot dt + a_\tau \cdot dt.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, знайдемо закон рівнозмінного руху точки:

$$s = a_\tau t^2 / 2 + V_0 t + s_0. \quad (11.28)$$

Величина швидкості при рівнозмінному русі змінюється за законом (11.27). Якщо модуль швидкості зростає, то рух називається *прискореним*, а якщо зменшується – *уповільненим*. При прискореному русі величини V_τ і a_τ мають однакові знаки (кут між векторами \vec{V} і \vec{a} – ДСТУ, рис. 11.7,а), при уповільненому русі величини V_τ і a_τ мають різні знаки (кут між векторами \vec{V} і \vec{a} тупий, рис. 11.7, б).

У випадку рівнозмінного прямолінійного руху точки $a_n = 0$ і у виразах (11.27), (11.28) варто приймати $a_\tau = a = const$.

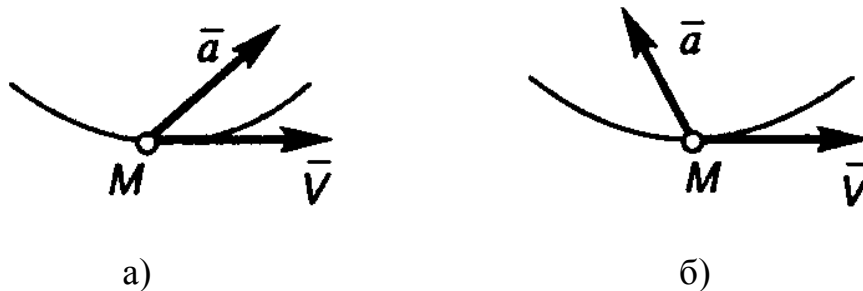


Рисунок 11.7 – Рух точки а) прискорений, б) уповільнений.

11.3. Приклади розв'язання задач

Задача 1. Закон руху точки M в площині Oxy заданий рівняннями $x = 4\sin(\pi t/6) - 1$, $y = 3\cos(\pi t/6) + 2$, де x, y – у сантиметрах, t – у секундах.

Визначити рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 2$ с знайти швидкість і прискорення точки, її дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії у відповідній її точці. Траєкторію та знайдені векторні величини відобразити на схемі.

Розв'язання. Рівняння траєкторії точки будемо шукати у вигляді залежності між координатами точки (у координатній формі). Для вилучення з рівнянь руху часу t , що входить в аргументи тригонометричних функцій, використовуємо формулу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ або, вважаючи } \alpha = \pi t/6, \\ \sin^2(\pi t/6) + \cos^2(\pi t/6) = 1. \quad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вираз відповідних функцій і підставляємо в рівняння (1). Отримаємо

$$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+1}{4}, \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y-2}{3},$$

звідки

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1. \quad (2)$$

Отже, траєкторією точки є еліпс, центр C якого має координати $(-1, 2)$, а розміри півосей, паралельних осям x і y , відповідно 4 і 3 см (рис. 11.8, а).

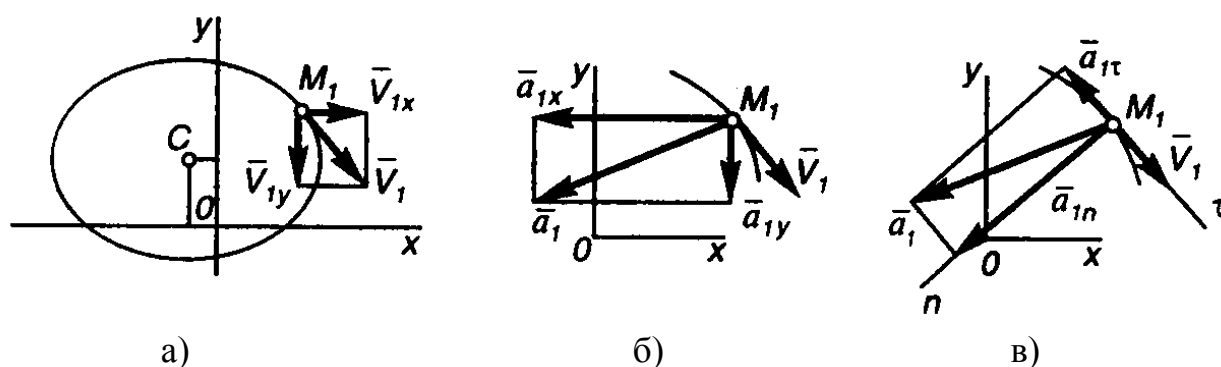


Рисунок 11.8 Траєкторія точки – еліпс

Швидкість точки знайдемо за її проекціями на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = \frac{2}{3}\pi \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad V_y = \dot{y} = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

Підставивши ці вирази у формулу

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad (3)$$

після спрощень отримуємо величину швидкості точки:

$$V = \frac{\pi}{6} \sqrt{9 + 7 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)}. \quad (4)$$

При $t_1 = 2$ с буде $V_{1x} = 1,05$ см/с, $V_{1y} = -1,36$ см/с і $V_1 = 1,72$ см/с.

Використовуючи отримані результати, побудуємо на схемі вектор \bar{V}_1 , попередньо визначивши координати точки M_1 : $x_1 = 2,46$ см, $y_1 = 3,5$ см (рис. 11.8,а).

Знайдемо далі прискорення точки:

$$a_x = \dot{V}_x = -\frac{\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad a_y = \dot{V}_y = -\frac{\pi^2}{12} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

При $t_1 = 2$ с буде $a_{1x} = -0,95$ см/с², $a_{1y} = -0,41$ см/с² і $a_1 = 1,02$ см/с².

За цими результатами будемо вектор \bar{a}_1 (рис. 11.8,б).

Визначимо тепер дотичне і нормальне прискорення точки, тобто проекції вектора \bar{a} на осі τ і n .

Дотичне прискорення знайдемо, продиференціюючи за часом рівняння (3):

$$\dot{V} = (2V_x \dot{V}_x + 2V_y \dot{V}_y) / 2V.$$

Тоді, враховуючи, що $\dot{V} = a_\tau$, $\dot{V}_x = a_x$, $\dot{V}_y = a_y$, маємо

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення величин для $t_1 = 2$ с, отримуємо $a_{1\tau} = -0,26$ см/с².

Нормальне прискорення точки при відомих значеннях величин a і a_τ обчислимо за формулою $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

Підставивши значення a_1 , $a_{1\tau}$, маємо $a_{1n} = 0,98$ см/с².

Зобразимо на Рисунок 1.8,в координатні складові $\bar{a}_{1\tau}$ і \bar{a}_{1n} , які знайдемо шляхом розкладання вектора \bar{a}_1 на напрями дотичної τ і головної нормалі n . Напрямок осі τ встановлюємо відповідно до знаку проекції $a_{1\tau}$ (оскільки $a_{1\tau} < 0$, то вісь $M_1\tau$ протилежна вектору $\bar{a}_{1\tau}$), вісь M_1n спрямована до неї перпендикулярно у бік угнутості траєкторії.

Радіус кривини траєкторії визначимо за формулою $\rho = V^2 / a_n$. Підставляючи числові значення V_1 і a_{1n} , знайдемо, $\rho_1 = 3,0$ см.

Відповідь: $V_1 = 11,72$ см/с, $a_1 = 11,02$ см/с², $a_{1\tau} = -0,26$ см/с²,
 $a_{1n} = 0,98$ см/с², $\rho_1 = 3,0$ см.

Задача 2. Матеріальна точка рухається у площині Oxy . Початкова швидкість \vec{V}_0 утворює з горизонталлю кут α . Рух точки задано рівняннями:

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2,$$

де g – постійна величина.

Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, а також висоту траєкторії і час підйому з початкового твердження (точки O) до найвищої точки траєкторії.

Розв'язання. Для визначення траєкторії потрібно знайти залежність між координатами x і y точки, що рухається. Визначивши з першого рівняння $t = x / V_0 \cdot \cos \alpha$ і підставивши в друге, маємо рівняння траєкторії

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Траєкторія точки – парабола (рис. 11.9).

Диференціюючи рівняння руху за часом, знайдемо:

$$V_x = \dot{x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = \dot{y} = V_0 \sin \alpha - gt, \quad (2)$$

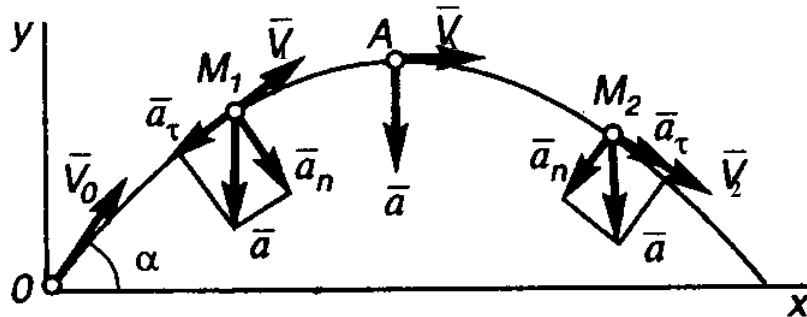


Рисунок 11.9 – Траєкторія точки – парабола

звідки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}. \quad (3)$$

Визначаємо прискорення точки. Для проєкцій прискорення \vec{a} на осі координат маємо:

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = -g. \quad (4)$$

Таким чином, точка рухається з постійним за модулем і напрямом прискоренням, паралельним вертикальній осі Oy (g – це прискорення вільного падіння). Звертаємо увагу на те, що оскільки $a = \text{const}$, рух точки не є рівнозмінним, оскільки умовою рівнозмінності руху є не $a = \text{const}$, а $a_\tau = \text{const}$. У розглянутому русі, як далі буде визначено, значення a_τ не постійно.

Знаходимо a_τ , диференціюючи вираз (3):

$$a_\tau = \dot{V} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{V}.$$

Тепер визначимо висоту траєкторії руху, тобто координату y_A найвищої точки (рисунок 11.9). Оскільки $V_{Ay} = 0$ (вектор швидкості \bar{V}_A є перпендикулярним осі y), то підставивши це значення в друге рівняння (2), знайдемо час руху з точки O в точку A (час підйому): $t_A = V_0 \sin \alpha / g$. Підставивши значення $t = t_A$ в друге із заданих рівнянь руху, після спрощень отримуємо висоту траєкторії:

$$y_A = (V_0^2 / 2g) \sin^2 \alpha.$$

Оскільки розглянутий рух відбувається з постійним прискоренням $\bar{a} = \overline{\text{const}}$, але воно є змінним, то на гілці підйому (від точки O до точки A) рух буде уповільненим (див. твердження M_1 на рис. 11.9: вектори \bar{a}_τ і \bar{V}_1 спрямовані протилежно), а на гілці спуску – прискореним (див. твердження M_2 на рисунку 11.9: вектори \bar{a}_τ і \bar{V}_2 спрямовані в один бік).

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється дугова координата s точки від пройденого нею шляху? Коли вони збігаються?
2. Чи залежить напрям орта \bar{t} дотичної до траєкторії від напрямку руху точки?
3. Які зміни вектора швидкості характеризують дотичне і нормальне прискорення?
4. Чи може точка, що рівномірно рухається, мати прискорення?
5. Чи однакові поняття «рух точки з прискоренням» і «прискорений рух точки»?
6. Як визначити, рух точки є прискореним чи уповільненим?
7. Як напрямлена швидкість точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
8. Як напрямлене прискорення точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
9. Якими способами можна задати рух точки?
10. Як можна охарактеризувати рух точки, якщо її дотичне прискорення не від'ємне?
11. В якому випадку руху точки її дотичне і нормальне прискорення одночасно дорівнюють нулю?
12. Який рух точки називають рівномірним, рівнозмінним?
13. Що таке траєкторія руху точки?
14. Дайте визначення механічного руху точки.

12. ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

У вивченні кінематики твердого тіла можна виділити дві задачі:

- 1) задання руху і визначення кінематичних характеристик руху тіла в цілому;
- 2) визначення кінематичних характеристик руху окремих точок тіла.

12.1 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається при русі паралельною своєму початковому напрямку, тобто не повертається.

Точки тіла, що рухається поступально, можуть мати траєкторії будь-якого виду: прямолінійні або криволінійні.

Властивості поступального руху тіла визначаються наступною теоремою: *при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують геометрично однакові (при накладенні співпадаючі) траєкторії і мають у кожний момент часу однакові за модулем і напрямом швидкості та прискорення.*

Для доказу розглянемо тіло, що робить поступальний рух (рис. 12.1). Для радіусів-векторів двох довільних точок A і B тіла справедлива рівність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (12.1)$$

Варто мати на увазі, що довжина вектора AB постійна, як відстань між точками абсолютно твердого тіла, а його напрям залишається незмінним при поступальному русі тіла, отже $\overline{AB} = const$.

Тоді з рівняння (12.1) отримуємо, що годограф радіуса-вектора точки A , що є траєкторією цієї точки, зміщений відносно годографа радіуса-вектора точки B (траєкторії точки B) на постійний вектор \overline{AB} і ці траєкторії при накладенні збігаються.

Продиференціювавши обидві частини рівняння (12.1), врахувавши при цьому, що $d(\overline{AB})/dt = 0$, маємо

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \quad \text{і} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (12.2)$$

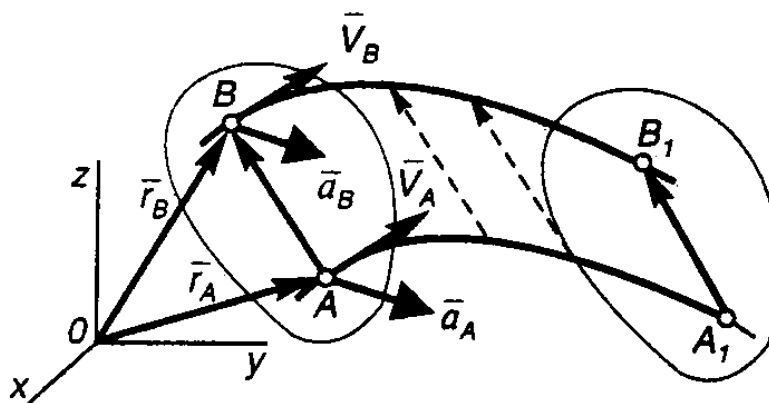


Рисунок 12.1 – Поступальний рух твердого тіла

Отже, теорема доведена.

З теореми випливає, що поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї з його точок. Отже, вивчення кінематики поступального руху зводиться до задачі кінематики точки, нами вже розглянутої.

З огляду на вищенаведені властивості поступального руху, однакову для всіх точок тіла швидкість \vec{V} називають швидкістю поступального руху тіла, а прискорення точок \vec{a} – прискоренням поступального руху тіла.

Зазначимо, що поняття «швидкість тіла» і «прискорення тіла» мають сенс тільки при поступальному русі тіла, оскільки тільки в цьому випадку ці характеристики однакові для всіх точок тіла.

12.2 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому всі точки, що лежать на деякій прямій, незмінно зв'язаній з тілом, залишаються під час руху нерухомими (рис. 12.2). Ця пряма називається віссю обертання. Траєкторіями всіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

Відзначимо також, що всі прямі тіла, паралельні осі обертання (наприклад, пряма mm' на рис. 12.2), рухаються поступально, залишаючись паралельними цієї осі.

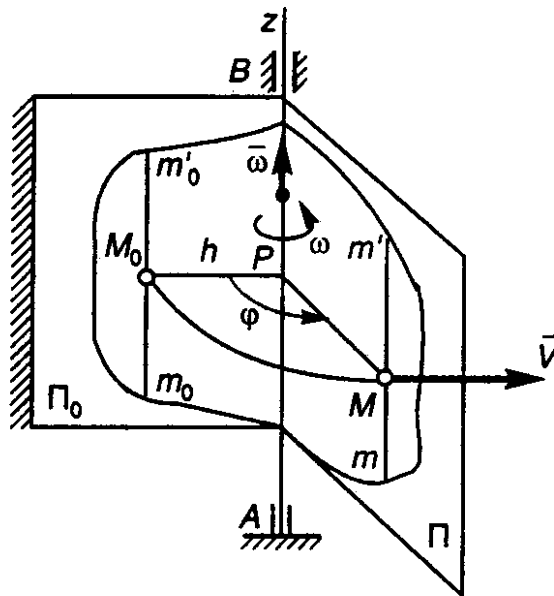


Рисунок 12.2 – Обертальний рух твердого тіла

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла

Проведемо через вісь обертання Az тіла (рис. 12.2) дві півплощини: півплощину Π , незмінно зв'язану з тілом і обертову разом з ним, та нерухому в просторі півплощину Π_0 . Тоді твердження тіла в будь-який момент часу визначається узятим з відповідним знаком кутом φ між цими півплощинами, що називається *кутом повороту тіла*. Кут вважається додатним, якщо він відлічений від нерухомої півплощини в напрямку проти ходу годинникової стрілки (для спостерігача, що дивиться з позитивного кінця осі Az), і від'ємним, якщо він відлічений за ходом годинникової стрілки. Вимірюється кут φ у радіанах: $[\varphi] = \text{рад}$.

Щоб знати твердження тіла в будь-який момент часу, треба знати залежність кута φ від часу t , тобто

$$\varphi = f(t). \quad (12.3)$$

Рівняння (12.3) виражає закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є його кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість характеризує зміну з часом кута повороту тіла, а її числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кута повороту за часом:

$$\omega = d\varphi/dt \text{ або } \omega = \dot{\varphi}. \quad (12.4)$$

Знак ω визначає напрям обертання: якщо $\omega > 0$, то обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки, якщо $\omega < 0$, то тіло обертається за ходом годинникової стрілки. Ця обставина відбивається і зображенням величини ω за допомогою дугової стрілки (рис. 12.2). Розмірність кутової швидкості – рад/с.

У техніці кутову швидкість часто визначають числом обертів за хвилину, зазначаючи цю величину через n об/хв. Оскільки за один оберт тіло повертається на кут 2π рад, а $1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$, то

$$\omega = 2\pi n / 60 = \pi n / 30.$$

Усі параметри кутової швидкості тіла можна відобразити у вигляді вектора $\vec{\omega}$, модуль якого дорівнює $|\dot{\phi}|$ і який спрямований уздовж осі обертання у той бік, відкілья видно, що обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 12.2).

Кутове прискорення характеризує зміну з часом кутової швидкості тіла, а його числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла за часом:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}. \quad (12.5)$$

Розмірність кутового прискорення $1 - \text{рад/с}^2$.

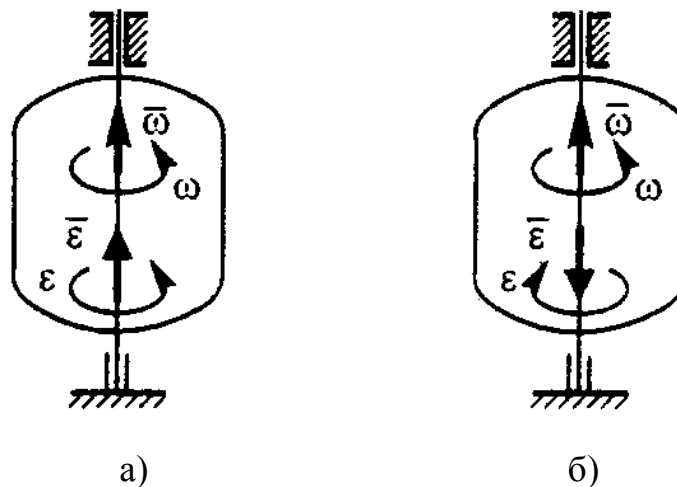


Рисунок 12.3 Кутові швидкість та прискорення

При збіжності знаків ε і ω їх дугові стрілки спрямовані однаково (рис. 12.3, а), при різних знаках – дугові стрілки будуть спрямовані взаємно протилежно (рис. 12.3, б). Кутове прискорення тіла можна зобразити у вигляді вектора $\vec{\varepsilon}$, спрямованого уздовж осі обертання. При цьому

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt. \quad (12.6)$$

Коли тіло обертається прискорено, то величини ω і ε мають однакові знаки і напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямом вектора $\vec{\omega}$ (рис. 12.3, а). Коли тіло обертається уповільнено, то величини ω і ε мають різні знаки і вектори $\vec{\omega}$

і $\vec{\varepsilon}$ спрямовані уздовж осі обертання в протилежні боки (рис. 12.3, б).

Якщо кутова швидкість тіла залишається за весь час руху постійною ($\omega = const$), то обертання тіла називається *рівномірним*.

Інтегруючи рівність $d\varphi = \omega \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$), одержимо закон *рівномірного обертання*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (12.7)$$

Якщо кутове прискорення тіла за весь час руху залишається постійним ($\varepsilon = const$), то обертання називається *рівнозмінним*.

Інтегруючи рівність $d\omega = \varepsilon \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$), одержимо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (12.8)$$

Представляючи цей вираз як $d\varphi/dt = \omega_0 + \varepsilon t$ або у вигляді $d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt$ і вдруге інтегруючи, знайдемо закон *рівнозмінного обертання*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \quad (12.9)$$

Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Як було відзначено раніше, прямі, проведені в тілі паралельно осі обертання (наприклад, пряма mm' на рис. 12.2), здійснюють поступальний рух, тобто, швидкості та прискорення усіх точок кожної такої прямої будуть однакові. Отже, для вивчення кінематичних характеристик точок тіла досить визначити відповідні величини для точок перетину, проведеного перпендикулярно осі обертання.

Траєкторіями усіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

Розглянемо яку-небудь точку M тіла, що знаходиться на відстані h від осі обертання (рис. 12.2). Якщо за час dt відбувається елементарне обертання тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому здійснює по своїй траєкторії елементарне переміщення $ds = h \cdot d\varphi$. Тоді числове (алгебраїчне) значення швидкості точки відповідно до формули (11.19) буде

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \text{ або } V = h\omega. \quad (12.10)$$

Таким чином, алгебраїчне значення величини швидкості точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку кутової

швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання. Вектор швидкості \vec{V} спрямований по дотичній до описуваного точкою кола (або перпендикулярно площині Π , що проходить через вісь обертання і точку M , або перпендикулярно прямої MP , що з'єднує точку M з віссю обертання) по напрямку руху, що збігається з напрямом дугової стрілки кутової швидкості (рис. 12.2).

Вектори швидкостей усіх точок перерізу, перпендикулярного осі обертання, будуть розташовуватися в його площині, утворюючи поле швидкостей, вид якого зображений на рисунку 12.4.

Відзначимо, що:

- 1) вектори швидкостей точок перпендикулярні прямим, що з'єднують точки з віссю обертання, і спрямовані у бік обертання тіла (дугової стрілки ω);
- 2) модулі швидкостей точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання.

Швидкість \vec{V} точки тіла, що обертається, іноді називають лінійною або коловою на відміну від кутової швидкості тіла.

Для знаходження прискорення точки M скористаємося формулами $a_\tau = dV_\tau / dt$, $a_n = V^2 / \rho$. Підставляючи до них значення V з рівності (12.10) і з урахуванням того, що в нашому випадку $\rho = h$, одержимо: $a_\tau = h\dot{\omega}$, $a_n = h^2\omega^2 / h$ або остаточно:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \quad (12.11)$$

Дотична складова прискорення \vec{a}_τ спрямована по дотичній до траєкторії точки у бік дугової стрілки кутового прискорення ε , нормальна складова \vec{a}_n спрямована по радіусу MP до осі обертання (рис. 12.5).

Повне прискорення точки M буде

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \text{або} \quad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (12.12)$$

Відхилення вектора \vec{a} від радіуса описуваного точкою кола (від нормалі до траєкторії) визначається кутом μ , що обчислюється за формулою (11.25) $\operatorname{tg}\mu = a_\tau / a_n$ і, використовувачи рівняння (12.11), одержимо

$$\operatorname{tg}\mu = \varepsilon / \omega^2. \quad (12.13)$$

Зазначимо, що при обчисленні кінематичних характеристик різних точок тіла, що обертається, в формули (12.12), (12.13) для даного моменту часу будуть підставлятися тіж самі значення величин ω і ε , оскільки вони є характеристиками руху всього тіла. Звідси випливає, що в даний момент часу

кут μ для векторів прискорень усіх точок однаковий, а модулі прискорень точок пропорційні їх відстаням від осі обертання.

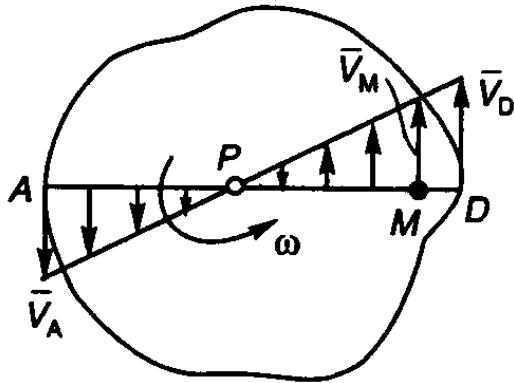


Рисунок 12.4 – Розташування швидкостей

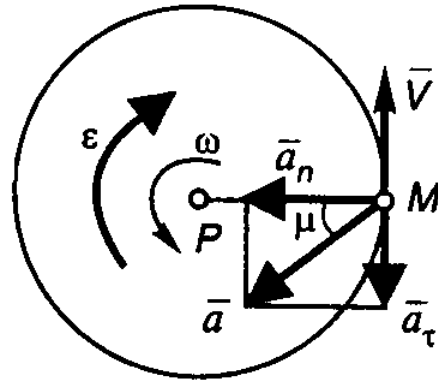


Рисунок 12.5 – Кінематичні характеристики

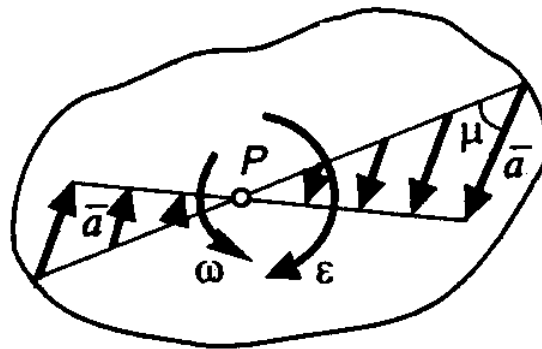


Рисунок 12.6 – Поле прискорень точок тіла

Поле прискорень точок тіла показано на рисунку 12.6.

Приведемо також векторні вирази швидкості та прискорення точки тіла, що обертається.

Нехай тіло здійснює обертальний рух і в даний момент часу відомі характеристики його руху $\bar{\omega}$ і $\bar{\epsilon}$ (рис. 12.7). З довільної точки O осі обертання проведемо радіус-вектор \bar{r} точки M (причому $\angle MPO = 90^\circ$ і $MP = h = r \sin \alpha$).

З побудови на рисунку 2,7,а випливає, що вектор швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки (формула Ейлера):

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (12.14)$$

Модуль цього вектора $|V| = |\omega| r \sin \alpha = |\omega| h$ збігається з раніше отриманим за формулою (12.10).

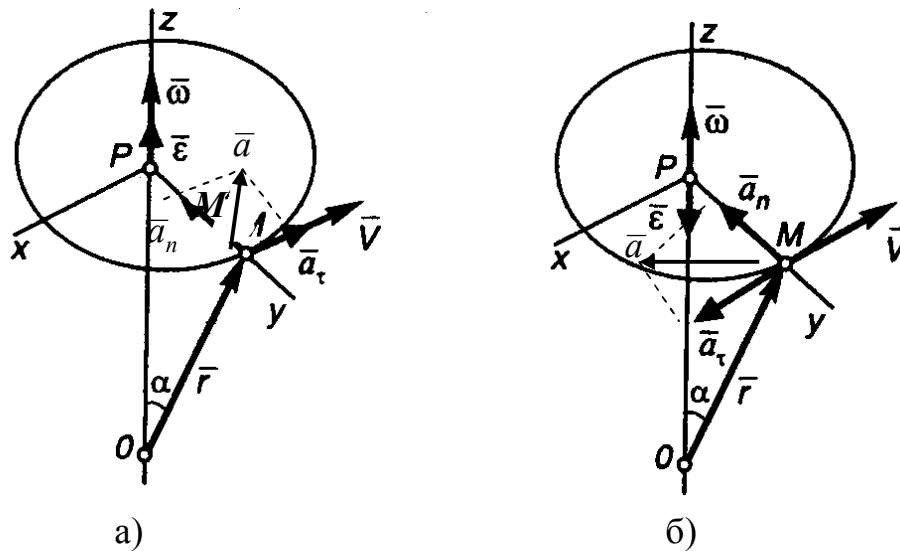


Рисунок 12.7 – Векторні вирази швидкості та прискорення точки тіла, що обертається

Вектор прискорення точки M визначимо як похідну вектора швидкості за часом:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

або

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}. \quad (12.15)$$

Формулу (12.15) називають формулою Ривальса, з якої випливає, що вектор прискорення точки \bar{a} дорівнює векторній сумі двох векторів. Перший доданок $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ називають *обертальною* складовою прискорення. При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ спрямований по дотичній до траєкторії точки M , тому його позначимо \bar{a}_t , а його модуль буде $|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon h$. Другий доданок у формулі (12.15) називають *доосьовою* складовою прискорення. При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор добутку $\bar{\omega} \times \bar{V}$ спрямований уздовж MP , тобто по головній нормалі до траєкторії точки M (позначимо його в цьому випадку \bar{a}_n), а його модуль буде

$$|\bar{\omega} \times \bar{V}| = \omega V \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h.$$

З урахуванням формул (2.11), (2.15) робимо висновок, що

$$\bar{a}_t = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V}, \quad \bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n. \quad (12.16)$$

Формули (12.16) є векторними виразами дотичного, нормального і повного прискорень точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Розташування цих векторів показано на рисунку 12.7, а – при прискореному обертанні, рисунку 12.7,б – при уповільненому обертанні.

12.3. Перетворення обертового руху відносно однієї осі в обертовий рух відносно іншої осі

Таке перетворення обертових рухів дуже широко розповсюджене в техніці. Якщо осі обертання паралельні чи перетинаються, то обертання паралельні чи перетинаються, то обертання можна передати за допомогою зубчастих або фрикційних передач. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім (рис. 12.8, а, в), так і внутрішнім (рис. 12.8, б, г).

Перетворення обертових рухів з паралельними осями можна реалізувати також і за допомогою пасових або ланцюгових передач. При цьому пасова передача із непережесним рухом паса (рис. 12.9, а) еквівалентна внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, а з пережесним рухом паса (рис. 12.9, б) – зовнішньому зчепленню. При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають провідним або ведучим, друге – веденим, а весь механізм називають передавальним.

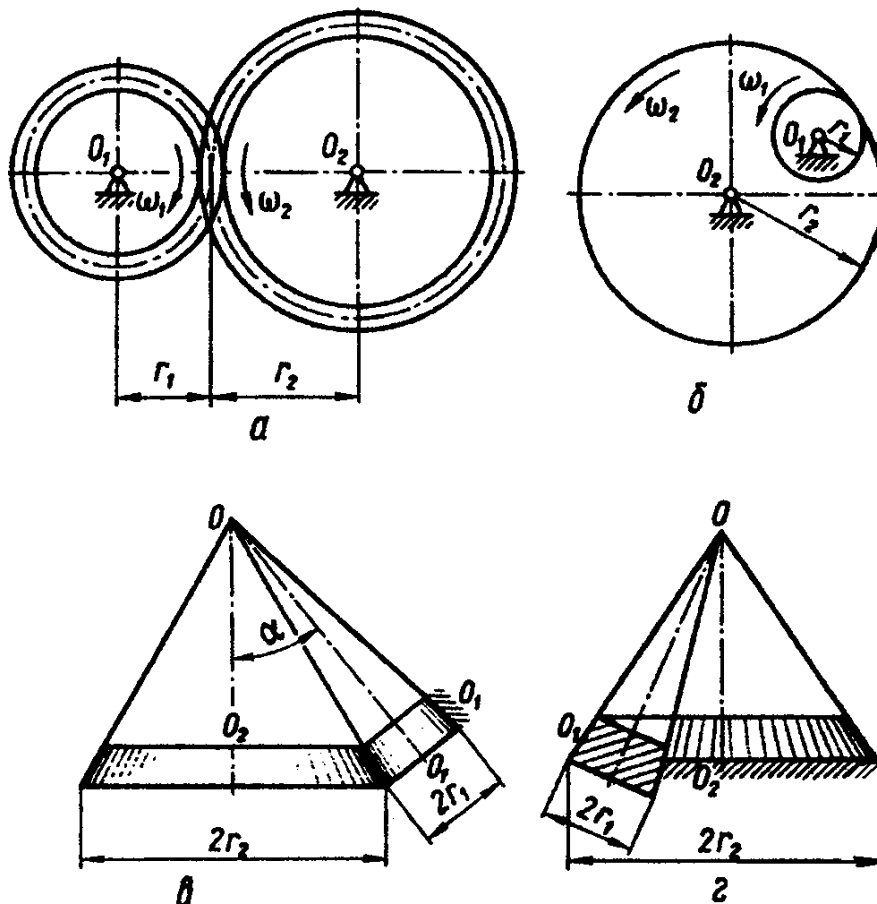


Рисунок 12.8 – Передача обертового руху (зубчата та фрикціонна)

Основною для кінематичного розрахунку цих передач (рис. 12.8, 12.9), є припущення, що в системі немає ковзання, зазорів між зубцями коліс, а паси,

ланцюги тощо не деформуються. Це означає, що швидкості на ободі зубчастих коліс, які знаходяться в зчепленні, та швидкості на ободах шківів пасових і ланцюгових передач однакові. Тобто в цих випадках має місце співвідношенням

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (12.17)$$

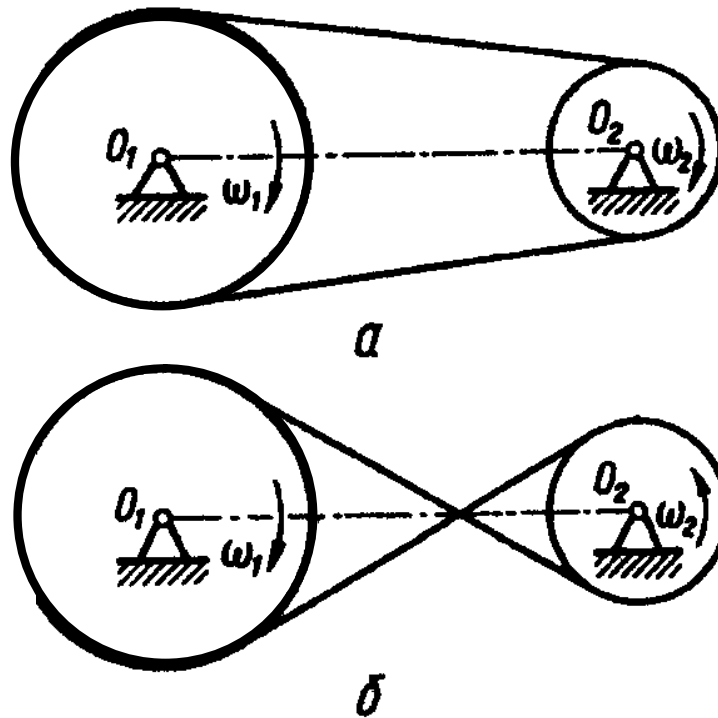


Рисунок 12.9 – Ремінна передача

Отже, кутові швидкості коліс зубчастих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (12.18)$$

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають перпендикулярним числом:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (12.19)$$

Якщо врахувати, що число зубців пропорційно довжинам кіл, а значить і радіусам, то передаточне число можна визначити через відповідне відношення числа зубців:

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (12.20)$$

12.4. Приклади розв'язання задач

Задача 1. Маховик, що робить $n = 60$ об/хв, після вимикання двигуна ($t_0 = 0$) обертається рівноуповільнено і зупиняється через $t_2 = 20$ с. Визначити, скільки обертів зробив маховик до повної його зупинки, а також швидкість і прискорення точки, що лежить на ободі маховика радіуса $R = 0,4$ м, через $t_1 = 10$ с після вимикання двигуна.

Розв'язання. Оскільки маховик обертається рівноуповільнено, то для нього, вважаючи при $t_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$, справедливі такі залежності:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Початкова кутова швидкість дорівнює $\omega_0 = \pi n / 30 = 2\pi$ рад.с⁻¹.

У момент зупинки при $t_2 = 20$ с кутова швидкість маховика $\omega_2 = 0$. Підставляючи ці значення в друге з отриманих рівнянь, визначимо кутове прискорення маховика (ця величина під час розглянутого руху постійна):

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t_2 \text{ або } 0 = 2\pi + \varepsilon \cdot 20, \text{ відкіля } \varepsilon = -0,1\pi \text{ рад. с}^{-2}.$$

Якщо позначити через N число обертів, зроблених маховиком за час $t_2 = 20$ с, то кут повороту за той же час буде дорівнювати $\varphi_2 = 2\pi N$. Підставивши знайдені значення ε і ω_0 у перше з отриманих рівнянь, одержимо

$$2\pi N = 2\pi t_2 + (-0,1\pi)t_2^2 / 2,$$

відкіля, з урахуванням значення t_2 , знайдемо $N = 10$ об.

Для визначення в момент часу $t_1 = 10$ с швидкості та прискорення точки, що лежить на ободі маховика, необхідно визначити ще кутову швидкість ω_1 . Використовуючи друге рівняння, одержимо:

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 \text{ або } \omega_1 = 2\pi - 0,1\pi \cdot 10 = \pi \text{ рад. с}^{-1}.$$

Визначимо швидкість та прискорення точки на ободі маховика:

$$V = \omega_1 R = \pi \cdot 0,4 = 1,26 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = |\varepsilon| R = 0,1\pi \cdot 0,4 = 0,126 \text{ м/с}^2; \quad a_n = V^2 / R = 1,26^2 / 0,4 = 3,97 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 3,98 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $N = 10$ об; $V = 1,26$ м/с; $a = 3,98$ м/с².

Задача 2. У механізмі, зображеному на рисунку 2.10, обертання колеса 1 радіуса R_1 передається на двоступінчасте колесо 2 радіуса R_2 за допомогою пасової передачі; вантаж 3 прив'язаний до кінця нитки, намотаної на ступінь меншого діаметра r_2 колеса 2. Закон обертання колеса 1 $\varphi_1 = 5t - t^2$, радіуси $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см, $r_2 = 6$ см. Визначити: $\vec{V}_B, \vec{a}_B, \vec{V}_D, \vec{a}_D$ у момент часу $t_1 = 2$ с.

Розв'язання. У розглянутому механізмі колеса 1, 2 з'єднані пасом і здійснюють обертальні рухи. Частини паса, що охоплюють колеса (дуга $K_1K'_1$ на колесі 1 і дуга $K_2K'_2$ на колесі 2), здійснюють разом з ними обертальний рух; частини паса K_1K_2 і $K'_1K'_2$ рухаються поступально. Відрізок DE нитки, як і вантаж 3, рухається поступально.

Визначаємо спочатку кутові швидкості колес 1, 2 і швидкості точок D (вантаж 3), B (колеса 2). Знаючи закон обертання колеса 1, знаходимо його кутову швидкість

$$\omega_1(t) = \dot{\varphi}_1(t) = 5 - 2t. \quad (1)$$

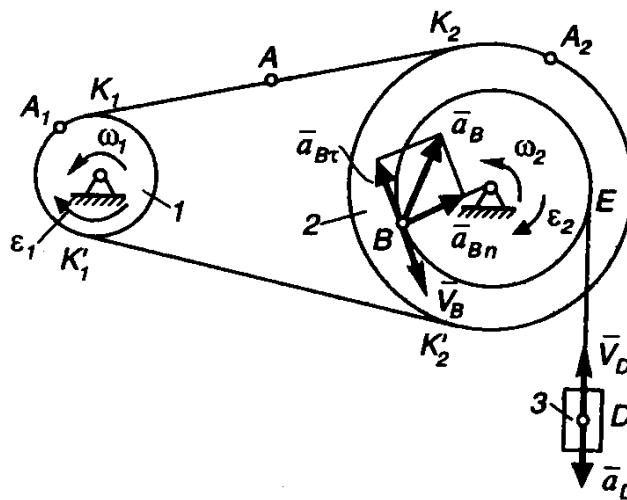


Рисунок 12.10 – Схема підйомного механізму

Вважаючи, що пас по ободу колес не ковзає, одержимо, що швидкості всіх точок паса і, отже, точок на ободах охоплених пасом кожного з колес, у даний момент часу чисельно однакові, тобто

$$V_{A1} = V_A = V_{A2}.$$

Але швидкості точок A_1 і A_2 можна виразити через кінематичні характеристики руху колес 1 і 2 таким чином: $V_{A1} = \omega_1 R_1$, $V_{A2} = \omega_2 R_2$. Підставивши ці вирази в попереднє рівняння, одержимо

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \quad (2)$$

звідси знаходимо $\omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2$.

У момент часу $t_1 = 2$ с одержимо $\omega_2 = 0,5$ рад. с^{-1} .

Оскільки $V_D = V_B = \omega_2 r_2$, то при $t_1 = 2$ с одержимо $V_D = V_B = 3$ см/с. Зображуємо на рисунку 2.8 вектори \vec{V}_D і \vec{V}_B .

Для визначення прискорень точок B , D встановимо залежність між кутовими прискореннями колес 1, 2, зв'язаних пасовою передачею. Оскільки

рівність (2) справедлива для будь-якого моменту часу, то, беручи похідну від обох її частин, одержимо:

$$\frac{d\omega_1}{dt} R_1 = \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \text{ або } \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2 \text{ або } \varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2. \quad (3)$$

Знаходимо далі $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1(t) = -2$ рад. с^{-2} . Для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо також $\varepsilon_2 = -1$ рад. с^{-2} .

На рисунку 12.10 для моменту часу $t_1 = 2$ с величини ω і ε кожного колеса зображено дуговими стрілками відповідно до знаків їх числових значень.

Визначаємо прискорення точки B : $\bar{a}_B = \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn}$, де чисельно $a_{B\tau} = |\varepsilon_2| r_2$, $a_{Bn} = \omega^2 r_2$. Тоді для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо $a_{B\tau} = 6 \text{ см/с}^2$, $a_{Bn} = 1,5 \text{ см/с}^2$, $a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = 6,18 \text{ см/с}^2$.

Прискорення точки D чисельно дорівнює дотичному прискоренню точки B : $a_D = a_{B\tau} = 6 \text{ см/с}^2$.

Вектори прискорень точок B и D зображуємо на Рисунок 12.8.

Відповідь: $V_B = V_D = 3 \text{ см/с}$, $a_B = 6,18 \text{ см/с}^2$, $a_D = 6 \text{ см/с}^2$.

Питання для самоконтролю

1. Швидкості та прискорення двох точок тіла за весь час його руху однакові за модулями і напрямками. Чи можна стверджувати, що дане тіло рухається поступально?
2. Траєкторії всіх точок тіла є колами. Чи можна стверджувати, що тіло здійснює обертальний рух; поступальний рух?
3. Тіло обертається рівномірно. Чи можна стверджувати, що для всіх його точок $\vec{V} = const$?
4. Прискорення яких точок тіла, що обертається: а) мають рівні модулі; б) мають однакові напрями; в) однакові за модулем і напрямом?
5. Чи можливо таке обертання тіла навколо нерухомої осі, при якому вектори швидкості та прискорення довільної точки тіла взаємно перпендикулярні? Спрямовані по одній прямій?
6. Чи можна визначити, що обертання тіла прискорене або уповільнене, за знаком тільки ω або тільки ε ?
7. Вектор прискорення точок диска, що обертається, спрямований під кутом $\mu = 45^\circ$ до його радіуса. Яке співвідношення між модулями кутової швидкості та кутового прискорення цього диска?
8. Як перевести кутову швидкість, яка виражена в об/хв, у рад/сек?
9. Як спрямовані вектори кутової швидкості і кутового прискорення при уповільненому та прискореному обертаннях?

13 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

13.1 Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються у площинах, паралельних деякій площині, нерухомій в розглянутій системі відліку.

При такому русі тіла будь-яка пряма, перпендикулярна нерухомій площині Π (наприклад, прямі aa' , bb' на рис. 13.1), буде здійснювати поступальний рух, отже, всі кінематичні характеристики точок, що лежать на цій прямій, будуть тотожні. Звідси робимо висновок, що для вивчення руху всього тіла досить досліджувати як рухається в площині Oxy переріз цього тіла, що утворює деяку плоску фігуру. Тут площина Oxy є нерухомою і паралельною площині Π .

Твердження плоскої фігури в площині Oxy визначається твердженням будь-якого проведеного на цій фігурі відрізка AB (рис. 13.2). У свою чергу, твердження відрізка AB визначається, наприклад, координатами x_A , y_A точки A та величиною кута φ між відрізком AB і віссю x . Точку A , яку вибрано для визначення твердження плоскої фігури, називають *полюсом*.

Закон руху плоскої фігури в її площині, а отже, і плоскопаралельного руху твердого тіла щодо системи координат Oxy визначається трьома рівняннями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (13.1)$$

Аналізуючи залежності (3.1), можна зробити висновок, що рух плоскої фігури в її площині є сукупність двох рухів: поступального руху, при якому всі точки рухаються так само, як і полюс A , і обертального руху навколо цього полюса (при цьому фігура обертається навколо осі, що проходить через точку A перпендикулярно площині Π).

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла є швидкість і прискорення полюса (\vec{V}_A, \vec{a}_A – характеристики поступальної складової руху), а також кутова швидкість і кутове прискорення тіла (ω, ε – характеристики обертальної складової руху).

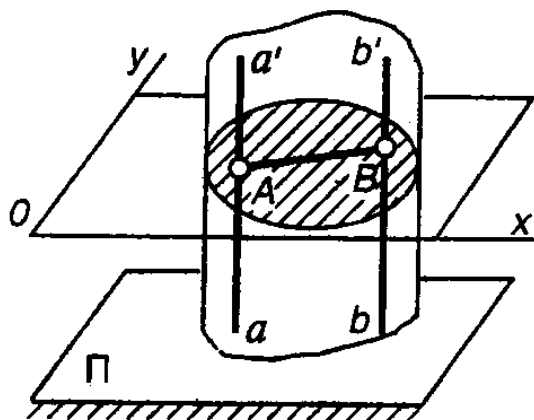


Рисунок 13.1 – Поступальний рух

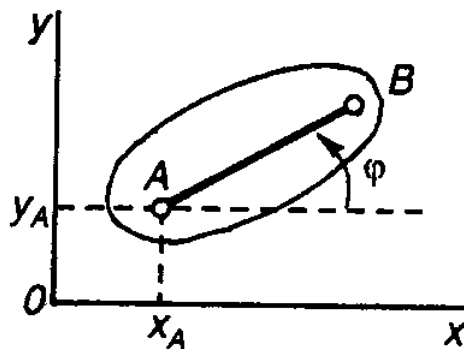


Рисунок 13.2 – Положення тіла на площині

Як полюс можна вибрати будь-яку точку фігури. При зміні точки, вибраної за полюс, характеристики поступальної складової руху змінюються (швидкість і прискорення іншої точки фігури в загальному випадку будуть відрізнятися від \bar{V}_A і \bar{a}_A), а характеристики обертальної складової руху ω і ε залишаються незмінними (оскільки яка-завгодно пряма перерізу, паралельного площині Π при плоскопаралельному русі твердого тіла повертається на один і той же кут).

13.2 Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Нагадаємо, що рух плоскої фігури можна розглядати як складову з поступального руху разом з полюсом і обертального руху навколо полюса.

Відповідно до цього швидкість довільної точки M плоскої фігури геометрично складається із швидкості будь-якої точки A , що прийнята за полюс, і швидкості, яку точка M одержує при обертанні фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}. \quad (13.2)$$

При цьому швидкість \bar{V}_{MA} визначається за величиною і напрямом так само, якби тіло здійснювало обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку A , тобто

$$\bar{V}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}, \quad \text{де} \quad V_{MA} = \omega \cdot AM, \quad \bar{V}_{MA} \perp \overline{AM}. \quad (13.3)$$

Таким чином, якщо відомі швидкість полюса \bar{V}_A і кутова швидкість тіла ω , то швидкість будь-якої точки M тіла визначається, відповідно до рівності (13.2), діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах \bar{V} і \bar{V}_{MA} , як на сторонах (рис. 13.3), а модуль швидкості V_M обчислюється за формулою:

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A \cdot V_{MA} \cdot \cos \gamma}, \quad (13.4)$$

де γ – кут між векторами \vec{V}_A і \vec{V}_{MA} .

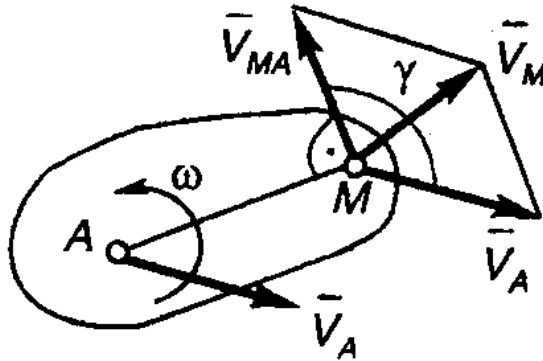


Рисунок 13.3 – Швидкості точок плоскої фігури

Теорема про проекції швидкостей двох точок твердого тіла

Відповідно до рівняння (13.2) для двох довільних точок A і B твердого тіла справедлива формула $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, відповідно до якої виконуємо побудову, зображену на рисунку 13.4. Проектуючи обидві частини цього рівняння на вісь Ax , спрямовану по відрізку AB , і, з урахуванням, що вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний прямій AB , знаходимо

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha. \quad (13.5)$$

Цей результат і виражає теорему: проекції швидкостей двох точок твердого тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні між собою.

Природно, що рівність проекцій векторів означає рівність цих проекцій за їх модулем і знаком.

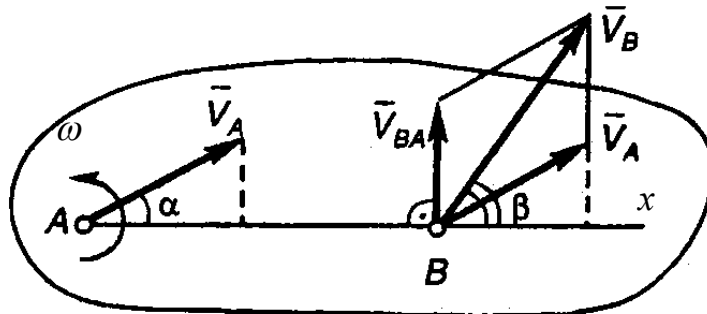


Рисунок 13.4 – Проекції швидкостей двох точок твердого тіла

Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ)

Для визначення швидкостей точок плоскої фігури виберемо за полюс будь-яку точку P . Тоді відповідно до формули (13.2) швидкість довільної точки M визначається як сума двох векторів \vec{V}_P і \vec{V}_{MP} :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}, \quad \text{де} \quad V_{MP} = \omega \cdot MP, \quad \vec{V}_{MP} \perp \overline{MP}.$$

Якби виявилось, що швидкість полюса P в даний момент часу дорівнює нулю, то права частина цього рівняння була б представлена одним доданком \vec{V}_{MP} , а швидкість будь-якої іншої точки визначалася б як її лінійна швидкість при обертанні тіла навколо полюса P :

$$V_M = \omega \cdot MP, \quad \vec{V}_M \perp \overline{MP}. \quad (13.6)$$

Отже, якщо вибрати як полюс точку P , швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, то модулі швидкостей усіх інших точок фігури будуть пропорційні їхнім відстаням від полюса P , а напрями векторів швидкостей цих точок будуть перпендикулярні прямим, що з'єднують розглянуту точку і полюс P . Природно, що розрахунок швидкостей точок за формулами (13.6) значно простіше розрахунок за загальною формулою (13.2).

Точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається *миттєвим центром швидкостей (МЦШ)*. Легко переконатися, що коли фігура рухається непоступально, то така точка в кожний момент часу існує і при цьому єдина. Розглянемо способи визначення твердження миттєвого центра швидкостей.

Спосіб 1. Нехай у момент часу t для плоскої фігури відомі її кутова швидкість ω і швидкість \vec{V}_A будь-якої її точки A (рис. 13.5, а). Тоді, вибираючи точку A за полюс, швидкість шуканої нами точки P можна визначити за формулою $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}$.

Задача полягає в тому, щоб знайти таку точку P , у якій лінійна швидкість $\vec{V}_P = 0$, а отже, $\vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = 0$ і звідси $\vec{V}_{PA} = -\vec{V}_A$. Тоді для точки P швидкість \vec{V}_{PA} , яку точка P одержує при обертанні фігури навколо полюса A , і швидкість \vec{V}_A полюса A будуть рівні за модулем ($V_{PA} = V_A$) і протилежні за напрямом. Крім того, точка P повинна лежати на перпендикулярі до вектора швидкості \vec{V}_A . Визначення твердження точки P , що відповідає зазначеним умовам, здійснюється такою побудовою: з точки A (рис. 13.5, б) відновимо перпендикуляр до вектору \vec{V}_A і відкладемо на ньому відстань $AP = V_A / \omega$ у той

бік від точки A , куди «покаже» вектор \vec{V}_A , якщо його повернути в напрямку дугової стрілки ω на 90° .

Відзначимо, що миттєвий центр швидкостей може бути розташований як на самій фігурі, так і на її уявному продовженні (тобто поза фігурою). Миттєвий центр швидкостей є єдиною точкою плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. В інший момент часу миттєвим центром швидкостей буде вже інша точка плоскої фігури.

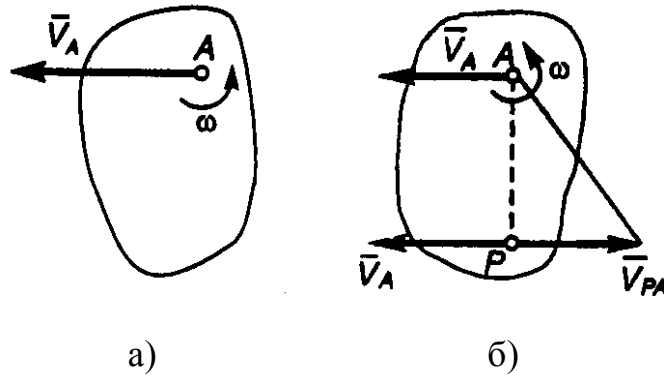


Рисунок 13.5 – Спосіб 1

Спосіб 2. Якщо відомі напрями швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B двох точок A і B плоскої фігури, то миттєвий центр швидкостей буде знаходитися в точці перетину перпендикулярів, відновлених з точок A і B до векторів їх швидкостей. Така побудова виконана на рисунку 13.6. Вона обґрунтована тим, що для будь-яких точок A і B фігури застосовані твердження (13.6):

$$V_A = \omega \cdot AP, \quad \vec{V}_A \perp \overline{AP} \quad \text{і} \quad V_B = \omega \cdot BP, \quad \vec{V}_B \perp \overline{BP}.$$

З цих рівностей випливає, що

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (13.7)$$

Отже, якщо МЦШ визначено, то швидкості точок плоскої фігури визначаються, начебто ця фігура в даний момент часу обертається навколо миттєвого центра швидкостей (точки P).

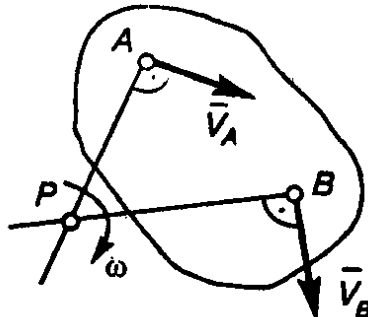


Рисунок 13.6 – Спосіб 2

Спосіб 3. Якщо швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, то можливі три варіанти зображені на рисунку 13.7.

При цьому у випадку, коли швидкості точок A і B паралельні й пряма AB не перпендикулярна \vec{V}_A (рис. 13.7, в), то миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності ($AP = \infty$), тобто фактично не існує, а кутова швидкість обертання фігури $\omega = V_A / AP = V_A / \infty = 0$. Тут швидкості всіх точок фігури в даний момент часу рівні одна одній і фігура має розподіл швидкостей як при поступальному русі. Такий стан руху тіла називають *миттєво поступальним*.

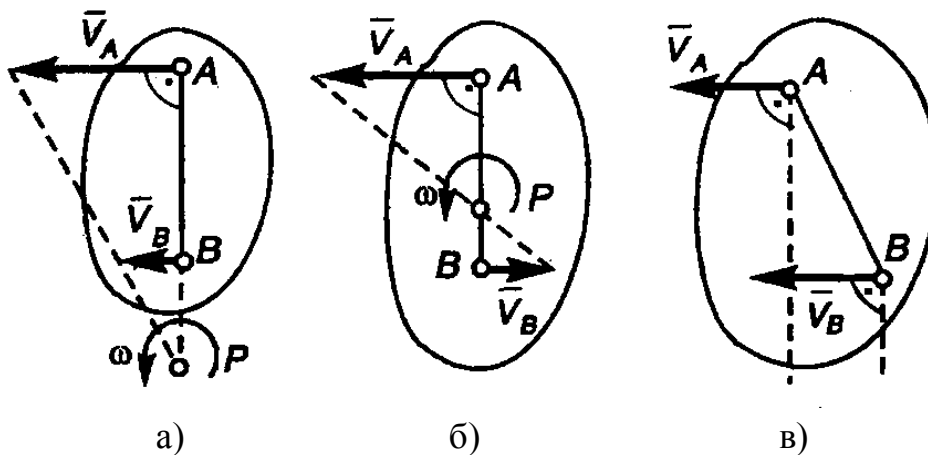


Рисунок 13.7 – Спосіб 3

Спосіб 4. Якщо плоский рух тіла здійснюється шляхом кочення без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 13.8), то точка дотику P буде миттєвим центром швидкостей.

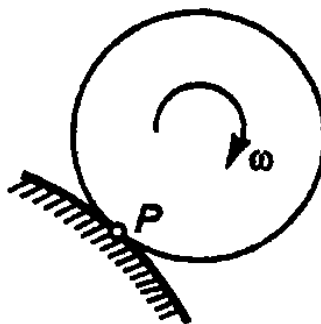


Рисунок 13.8 – Спосіб 4

13.3. Визначення прискорень точок плоскої фігури

Прискорення будь-якої точки M плоскої фігури геометрично складається з прискорення будь-якої точки A , прийнятої за полюс, і прискорення, що точка M одержує при обертанні фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \quad (13.8)$$

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (13.9)$$

де ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення фігури.

При розв'язанні задач зручніше вектори в правій частині рівняння (13.8) представити як суми дотичних і нормальних складових. Тоді отримаємо

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n, \quad (13.10)$$

де $\bar{a}_{A\tau}, \bar{a}_{An}$ – дотичне і нормальне прискорення точки A ; $\bar{a}_{MA}^\tau, \bar{a}_{MA}^n$ – дотична і нормальна складова прискорення \bar{a}_{MA} точки M в її обертанні сумісно з тілом навколо полюса A .

При цьому модулі векторів \bar{a}_{MA}^τ і \bar{a}_{MA}^n , як прискорення точки тіла, що обертається, визначаються відповідно до формул (13.11):

$$a_{MA}^\tau = MA \cdot \varepsilon; \quad a_{MA}^n = MA \cdot \omega^2. \quad (13.11)$$

Тут вектор \bar{a}_{MA}^τ спрямований перпендикулярно MA у бік дугової стрілки ε , а вектор \bar{a}_{MA}^n спрямований від точки M до полюсу A .

Якщо точка M рухається криволінійно, то вектор \bar{a}_M в лівій частині рівності (3.10) треба замінити сумою складових за напрямом координатних осей: \bar{a}_{Mx} і \bar{a}_{My} .

Подальші особливості використання рівняння (13.10) розглянемо при розв'язанні конкретних задач.

13.4. Приклади розв'язання задач по визначенню швидкостей точок тіла

Задача 1. Колесо радіуса R котиться по нерухомій поверхні без ковзання (рис. 13.9, а). Знайти швидкість точок K і D колеса, якщо відомі швидкість \bar{V}_C центра C колеса та відстань $KC = b$ і кут α .

Розв'язання. Розглянутий рух колеса за визначенням є плоскопаралельним. Приймаючи точку C за полюс (оскільки її швидкість відома) відповідно до загального рівняння (13.2) для точки K матимемо

$$\bar{V}_K = \bar{V}_C + \bar{V}_{KC}, \quad \text{де} \quad \bar{V}_{KC} \perp \overline{KC}, \quad V_{KC} = \omega \cdot KC.$$

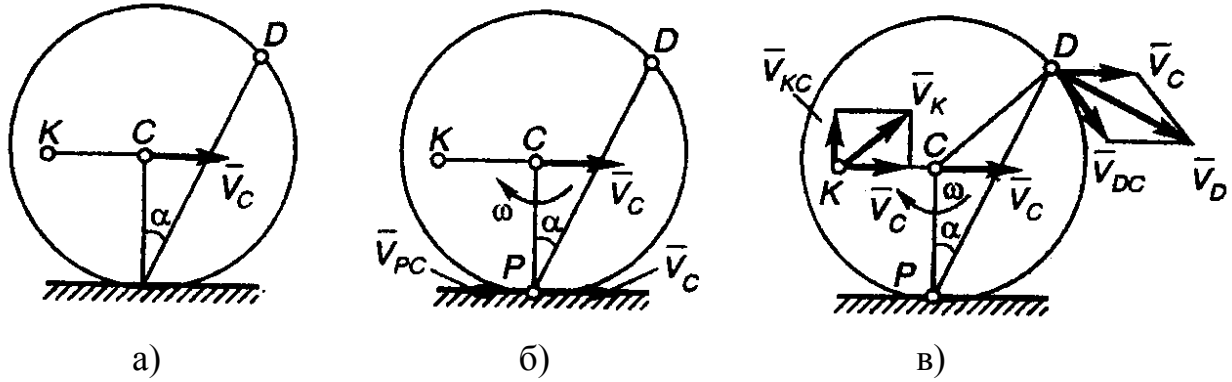


Рисунок 13.9 – Плоскопаралельний рух колеса

Для визначення кутової швидкості ω розглянемо лінійну швидкість точки P дотику колеса з нерухомою поверхнею (рис. 13.9,б). Для цієї точки можна записати рівняння

$$\vec{V}_P = \vec{V}_C + \vec{V}_{PC}, \quad \text{де} \quad \vec{V}_{PC} \perp \overline{PC}, \quad V_{PC} = \omega \cdot PC.$$

Особливістю точки P є те, що в даний момент часу її швидкість $V_P = 0$, оскільки колесо котиться без ковзання. Тоді отримане рівняння дає вираз

$$0 = \vec{V}_C + \vec{V}_{PC}.$$

Звідси випливає наступне: 1) швидкості \vec{V}_{PC} і \vec{V}_C повинні бути спрямовані в протилежні сторони; 2) з рівності модулів $V_{PC} = V_C$ одержуємо $\omega \cdot PC = V_C$, звідси знайдемо величину $\omega = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_C}{R}$. Відповідно до напрямку вектора \vec{V}_{PC} визначаємо напрям ω і зображуємо його на кресленні.

Тепер повертаємося до визначення V_k . Знаходимо $V_{KC} = \omega \cdot KC = \frac{V_C \cdot b}{R}$.

Знаючи напрям кутової швидкості ω , виконуємо побудову прямокутника на векторах \vec{V}_C і \vec{V}_{KC} (рис. 13.9,в). Остаточного знаходимо

$$V_K = \sqrt{V_C^2 + V_{KC}^2} = V_C \sqrt{1 + (b/R)^2}.$$

Швидкість точки D на ободі колеса визначимо за формулою (8.7), враховуючи, що точка P дотику колеса і поверхні є його МЦШ:

$$V_D = \omega \cdot DP = \frac{V_C}{R} \cdot (2R \cdot \cos \alpha) = 2V_C \cos \alpha, \quad \vec{V}_D \perp \overline{DP}.$$

Задача 2. Повзуни A і B з'єднані стержнем з шарнірами на кінцях, переміщуються по взаємно перпендикулярних напрямних (рис. 13.10, а). Визначити при даному куті α швидкість точки B , якщо відома швидкість \vec{V}_A .

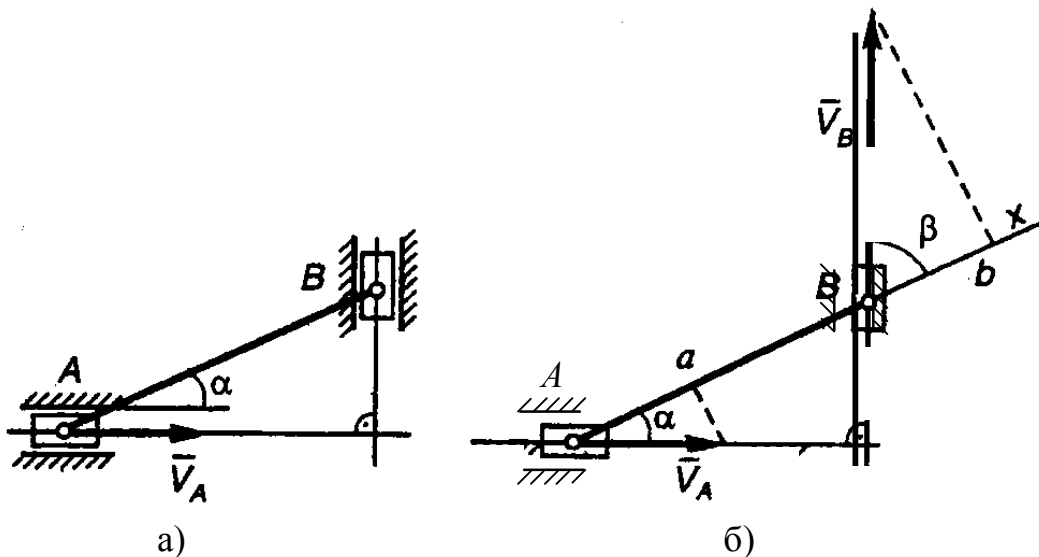


Рисунок 13.10 – Розрахункова схема плоского механізму (Задача 2)

Розв'язання. Проведемо вісь Ax через точки A і B . Знаючи напрям \vec{V}_A , знаходимо проекцію цього вектора на цю вісь: $V_{Ax} = V_A \cos \alpha$ (на рисю 13.10,б це буде відрізок Aa). Далі на схемі від точки B відкладаємо відрізок $Bb = Aa$ і, відновлюючи в точці b перпендикуляр до осі Ax , знаходимо точку C його перетину з віссю вертикальних напрямних, яка і буде визначати кінець невідомого вектора швидкості \vec{V}_B точки B .

Відповідно до теореми про проекції швидкостей: $V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$. Звідси остаточно визначимо (врахувавши, що $\beta = 90^\circ - \alpha$) $V_B = V_A \cos \alpha / \cos(90^\circ - \alpha)$ або $V_B = V_A \operatorname{ctg} \alpha$.

Задача 3. Плоский механізм складається із стержнів 1, 2, 3, 4 і повзуна B (рис. 13.11), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами в точках O_1 і O_2 шарнірами; точка D знаходиться всередині стержня AB . Довжини стержнів: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 0,7$ м, $l_4 = 0,3$ м. Кутова швидкість стержня 1 у заданому положенні механізму $\omega_1 = 2$ рад. с^{-1} і спрямована проти ходу годинникової стрілки. Визначити $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_D, \vec{V}_E, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Розв'язання. У розглянутому механізмі стержні 1, 4 здійснюють обертальний рух відповідно навколо точок O_1 і O_2 , повзун B – поступальний в своїх напрямних, а стержні 2, 3 – плоскопаралельний рух.

Швидкість точки A визначимо як приналежну стержню 1, який здійснює обертальний рух:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp \overline{O_1 A}.$$

Розглянемо рух стержня 2. Швидкість його точки A визначена, а напрям швидкості точки B співпадає з віссю напрямних, це обумовлено тим, що вона належить одночасно стержню 2 і повзуну, що рухається уздовж напрямних. Далі, відновлюючи з точок A і B перпендикуляри до \vec{V}_A і напрямку швидкості повзуна B , знаходимо твердження точки P_2 – МЦШ стержня 2.

За напрямом вектора \vec{V}_A визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_2 стержня 2 і знаходимо її числову величину

$$AP_2 = AB \cdot \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м (одержимо при розгляді } \Delta AP_2B),$$

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = 0,8 / 1,04 = 0,77 \text{ рад. с}^{-1}.$$

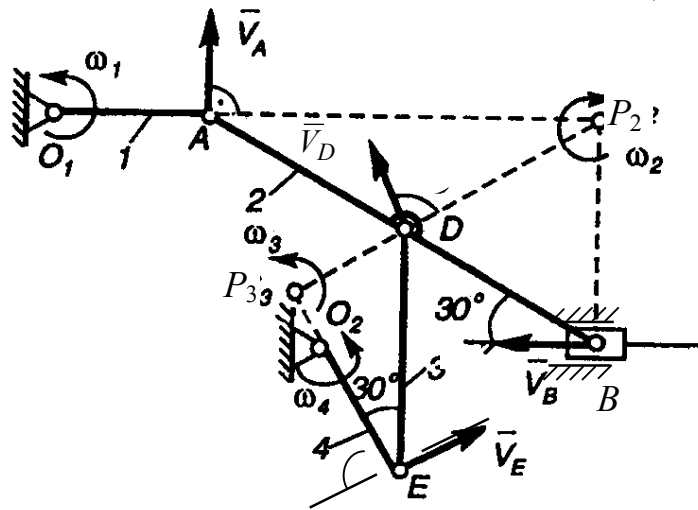


Рисунок 13.11 – Розрахункова схема плоского механізму (Задача 3)

Тепер визначаємо числові значення і напрями швидкостей точок B і D стержня 2 (з урахуванням, що ΔDP_2B – рівнобічний і $BP_2 = AB \cdot \cos 60^\circ = 0,6$ м, а $DP_2 = BP_2 = 0,6$ м):

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 0,62 \text{ м/с; } \vec{V}_B \perp \overline{P_2B};$$

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 = 0,62 \text{ м/с; } \vec{V}_D \perp \overline{P_2D}.$$

Розглянемо далі рух стержня 3. Швидкість точки D відома. Оскільки точка E належить одночасно і стержню 4, що обертається навколо точки O_2 , то лінія дії швидкості V_E буде перпендикулярною $\overline{O_2E}$. Тоді, відновлюючи в точках D і E перпендикуляри до швидкості \vec{V}_D і лінії дії швидкості \vec{V}_E , знаходимо твердження точки P_3 – МЦШ стержня 3. За напрямом вектора \vec{V}_D визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_3 стержня 3. Її чисельну величину знаходимо (попередньо визначивши з прямокутного ΔDP_3E відрізок $DP_3 = DE \cdot \sin 30^\circ = 0,35$ м) так:

$$\omega_3 = V_D / P_3D = 1,77 \text{ рад. с}^{-1}.$$

Далі, обчисливши $P_3E = ED \cdot \cos 30^\circ = 0,605 \text{ м}$, визначаємо швидкість $V_E = \omega_3 \cdot P_3E = 1,07 \text{ м/с}$; $\vec{V}_E \perp \overline{P_3E}$. За напрям дугової стрілки ω_3 визначаємо напрям вектора швидкості \vec{V}_E .

Розглянемо тепер рух стержня 4, що обертається навколо точки O_2 . Знаючи напрям і чисельну величину \vec{V}_E , знаходимо напрям і величину кутової швидкості ω_4 : $\omega_4 = V_E / O_2E = V_E / l_4 = 3,57 \text{ рад. с}^{-1}$.

Відповідь: $V_A = 0,8 \text{ м/с}$, $V_B = V_D = 0,63 \text{ м/с}$, $V_E = 1,07 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,77 \text{ рад.с}^{-1}$; $\omega_3 = 1,77 \text{ рад. с}^{-1}$; $\omega_4 = 3,57 \text{ рад. с}^{-1}$, напрями цих величин показано на Рисунок 13.11.

Задача 4. Плоский механізм складається із стержнів 1, 2, 3 і катка, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 13.12, а). З'єднання стержнів між собою і стержня 3 з катком в точці D – шарнірні. Довжини стержнів: $l_1 = 0,4 \text{ м}$, $l_2 = 0,6 \text{ м}$, $l_3 = 0,8 \text{ м}$. При кутах $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, відомих величинах і напрямках кутової швидкості $\omega_1 = 2 \text{ рад. с}^{-1}$ і швидкості центра O катка $V_0 = 0,346 \text{ м/с}$, $\angle ABD = 90^\circ$ визначити швидкість точки B і кутову швидкість ω_2 стержня 2.

Розв'язання. Аналіз принципу дії механізму показує наступне: стержень 1 виконує обертальний навколо точки O_1 рух; стержні 2, 3, а також каток – плоскопаралельні рухи.

Розглядаючи рух стержня 1, знаходимо напрям і величину швидкості точки A : $V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0,8 \text{ м/с}$; $\vec{V}_A \perp \overline{O_1A}$. Напрямок вектора швидкості \vec{V}_A визначаємо за напрямом дугової стрілки ω_1 .

Розглянемо далі рух катка. Його миттєвий центр швидкостей розташований в точці P дотику катка і поверхні, тоді V_D знайдемо як

$$V_D = V_0 \cdot DP / OP.$$

Оскільки у трикутнику $\triangle DOP$ за визначенням, кут $\beta = 30^\circ$, то $DP = 2 \cdot OP \cdot \cos 30^\circ = OP \cdot \sqrt{3}$. Тоді швидкість $V_D = V_0 \cdot DP / OP = V_0 \cdot \sqrt{3} = 0,6 \text{ м/с}$. При цьому вектор \vec{V}_D спрямований перпендикулярно DP у бік дугової стрілки ω_1 стержня 1.

Тому що точка B механізму належить одночасно стержням AB і BD , то за теоремою про проекції швидкостей повинно виконуватись: 1) проекція вектора \vec{V}_B на вісь Ax дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{V}_A (відрізок Aa на рисунок 13.12, а), тобто $Aa = V_A \cos \alpha = 0,4 \text{ м/с}$; 2) проекція вектора \vec{V}_B на вісь Dy

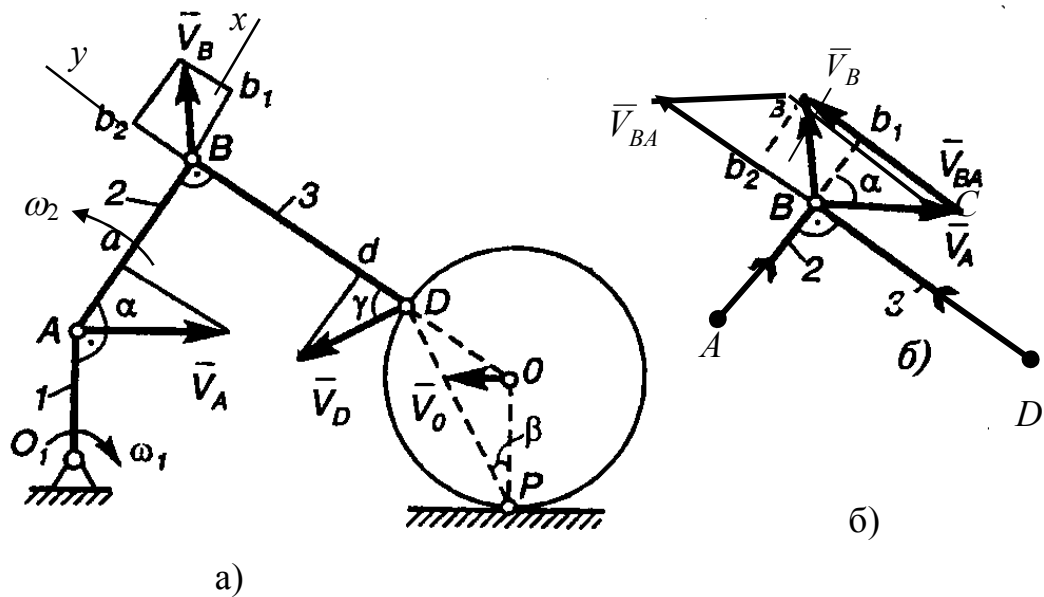


Рисунок 13.12 – Розрахункова схема плоского механізму (Задача 4)

дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{V}_D (відрізок Dd на Рисунок 13.12, а), тобто $Dd = V_D \cos \gamma = 0,3 \text{ м/с}$ ($\gamma = 60^\circ$ за побудовою).

Далі вирішуємо задачу графічно. Відкладаємо від точки B у відповідних напрямках відрізки $Bb_1 = Aa$ і $Bb_2 = Dd$. Відновлюємо з точки b_1 перпендикуляр до Bb_1 , а з точки b_2 – перпендикуляр до Bb_2 . Точка перетину цих перпендикулярів визначає кінець шуканого вектора \vec{V}_B .

Оскільки відрізки Bb_1 і Bb_2 у даному випадку взаємно перпендикулярні, то

$$V_B = \sqrt{(Bb_1)^2 + (Bb_2)^2} = 0,5 \text{ м/с.}$$

Визначаємо ω_2 . На рисунку 3.12, б графічно зображено векторну рівність:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad \vec{V}_{BA} \perp \overline{AB},$$

де вектори \vec{V}_A і \vec{V}_B визначені, а за напрямом вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний стержню AB . Зі схеми (рис. 13.12, б) знаходимо

$$V_{BA} = Bb_2 + Cb_1 = V_D \cos \gamma + V_A \sin \alpha = 0,3 + 0,693 = 0,993 \text{ м/с.}$$

Кінцево $\omega_2 = V_{BA} / AB = 1,66 \text{ рад. с}^{-1}$ (напрямок дугової стрілки ω_2 , враховуючи напрям швидкості \vec{V}_{BA} – проти ходу годинникової стрілки).

Відповідь: $V_B = 0,5 \text{ м/с}$; $\omega_2 = 1,66 \text{ рад. с}^{-1}$.

13.5. Приклади розв'язання задач по визначенню прискорень точок тіла

Задача 1. Механізм (рис. 13.13) складається із стержнів 1,2 і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомою опорою O шарнірами. Стержень 1 обертається навколо точки O за законом $\varphi = 0,5(3t - t^2)$ рад. У момент часу $t_1 = 1$ с механізм займає твердження, зображене на рисунку 3.13: кути $\alpha = \beta = 30^\circ$, а кут $\angle OAB = 120^\circ$.

Визначити для цього твердження механізму швидкість \vec{V}_B і прискорення \vec{a}_B повзуна B , а також кутову швидкість ω_2 і кутове прискорення ε_2 стержня 2, якщо довжини стержнів $l_1 = 2$ м, $l_2 = 4$ м.

Розв'язання. Знаходимо кутову швидкість і кутове прискорення стержня 1 як функції часу: $\omega_1 = \dot{\varphi} = 0,5(3 - 2t)$, $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = -1$. Тоді для моменту часу $t_1 = 1$ с одержимо $\omega_1 = 0,5$ рад. с^{-1} , $\varepsilon_1 = -1$ рад. с^{-2} . Відповідно до знаків цих величин зображуємо їх на Рисунок 3.13 дуговими стрілками: ω_1 проти ходу годинникової стрілки, ε_1 – за ходом годинникової стрілки.

Визначимо швидкість точки A \vec{V}_A , розглядаючи обертальний рух стержня 1:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 1 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp \vec{OA}.$$

Кутову швидкість ω_2 стержня 2, а також швидкість його точки B визначимо методом МЦШ. Для цього будемо МЦШ стержня 2, відновлюючи перпендикуляри в точках A і B до \vec{V}_A і лінії швидкості точки B повзуна, яка співпадає з віссю напрямних останнього. Точка P_2 перетину перпендикулярів і буде МЦШ стержня 2.

З рисунку 13.13 слідує, що всі кути трикутника AP_2B дорівнюють 60° , а трикутник є рівнобічним, тому отримаємо $P_2A = P_2B = AB = 4$ м, а також

$$\omega_2 = V_A / P_2A = 0,25 \text{ рад. } \text{с}^{-1}, \quad V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{ м/с}.$$

Прискорення точки A , яка належить стержню 1, що здійснює обертання навколо точки O , представимо як (13.10)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An},$$

де числові значення

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_{An} = \omega_1^2 l_1 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Тут вектор \vec{a}_{An} спрямований уздовж AO від точки A до точки O , а $\vec{a}_{A\tau}$ перпендикулярний AO і спрямований у напрямку дугової стрілки ε_1 .

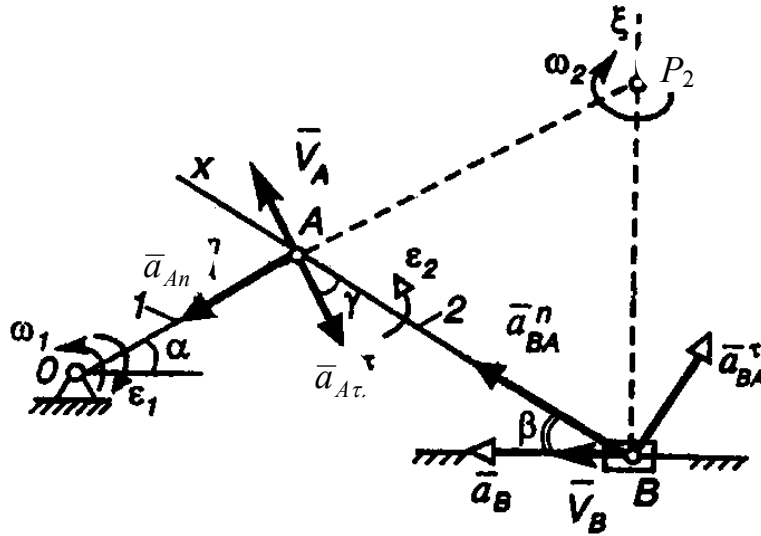


Рисунок 13.13 – Схема розв’язання задач по визначенню прискорень точок тіла

Оскільки точка B цього стержня одночасно належить і повзуну, що рухається у напрямних прямолінійно, то вектор \bar{a}_B належить осі напрямним повзуна. Зображуємо вектор \bar{a}_B на схемі, припускаючи, що він спрямований у той же бік, що і \bar{V}_B .

Для визначення прискорення \bar{a}_B прийемо точку A як полюс і скористаємося формулою (13.10)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Зображуємо на схемі вектор \bar{a}_{BA}^n (уздовж відрізка BA від точки B до точки A) і знаходимо його числове значення (8.11)

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Числове значення \bar{a}_{BA}^τ , відповідно до (13.11), могло б бути визначено як $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, але у даному випадку кутове прискорення ε_2 невідомо. Для вектора \bar{a}_{BA}^τ можемо вказати на кресленні його напрям (припустивши, що ε_2 спрямовано проти ходу годинникової стрілки). Зображуємо цей вектор перпендикулярно AB у відповідний бік.

Отже, з величин, що входять для \bar{a}_B , невідомі тільки числові значення двох величин a_B і a_{BA}^τ . Їх можна знайти, спроектувавши векторне рівняння на будь-які дві осі.

Щоб визначити a_B , спроектуємо спочатку обидві частини рівняння на вісь Bx :

$$a_B \cos \beta = -|a_{A\tau}| \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n.$$

Підставивши у рівняння числові значення усіх величин, знайдемо $a_B = -1,34 \text{ м/с}^2$. Оскільки $a_B < 0$, то, вектор \bar{a}_B буде насправді спрямованим протилежно зображеному на рисунку 13.13.

Визначаємо далі кутове прискорення стержня 2. Щоб знайти ε_2 , варто спочатку визначити a_{BA}^τ . Для цього обидві частини рівняння спроектуємо на напрям вісь $B\xi$:

$$0 = -|a_A^\tau| \cos \alpha - a_A^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \beta + a_{BA}^n \sin \beta.$$

Підставивши в рівняння числові значення усіх величин, знайдемо $a_{BA}^\tau = 2,43 \text{ м/с}^2$. Оскільки одержали $a_{BA}^\tau > 0$, то дійсний напрям вектора \bar{a}_{BA}^τ збігається з тим, що передбачалося при розрахунку.

Тепер з рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$ одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 0,61 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-2}$. Напрямок ε_2 буде проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на схемі.

Відповідь: $V_B = 1 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,25 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$, $a_B = -1,34 \text{ м/с}^2$ (знак указує, що напрям a_B насправді протилежний показаному на рис. 13.13),

$$\varepsilon_2 = 0,61 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Задача 2. Механізм (рис. 13.14, а) складається із стержнів 1, 2, 3, з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами. Довжини стержнів $l_1 = 2 \text{ м}$, $l_2 = 4 \text{ м}$, $l_3 = 1,25 \text{ м}$. У момент часу, коли $\alpha = \beta = 30^\circ$, і $\angle O_1AB = 120^\circ$, для стержня 1 відомі величини і напрями кутової швидкості і кутового прискорення: $\omega_1 = 0,5 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 1 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-2}$. Для даного твердження механізму визначити швидкість і прискорення точки B , кутові швидкості та кутові прискорення стержнів 2 і 3.

Розв'язання. Визначення \bar{V}_B і ω_2 цілком збігаються з тим, що виконано при розв'язанні задачі 1:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}, \quad \gamma = 30^\circ, \quad \omega_2 = V_A / P_2A = 0,25 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1},$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{ м/с}.$$

Оскільки стержень 3 здійснює обертальний рух навколо осі O_2 , то

$$\omega_3 = V_B / l_3 = 0,8 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Визначаємо прискорення точки B . Точка B рухається по колу радіуса O_2B , тому напрям прискорення \bar{a}_B заздалегідь невідомий.

У цьому випадку вектор \bar{a}_B варто представити як суму двох його складових $\bar{a}_{B\tau}$ і \bar{a}_{Bn} . Прийнявши для стержня 2 точку A за полюс, одержимо

$$\bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn} = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n.$$

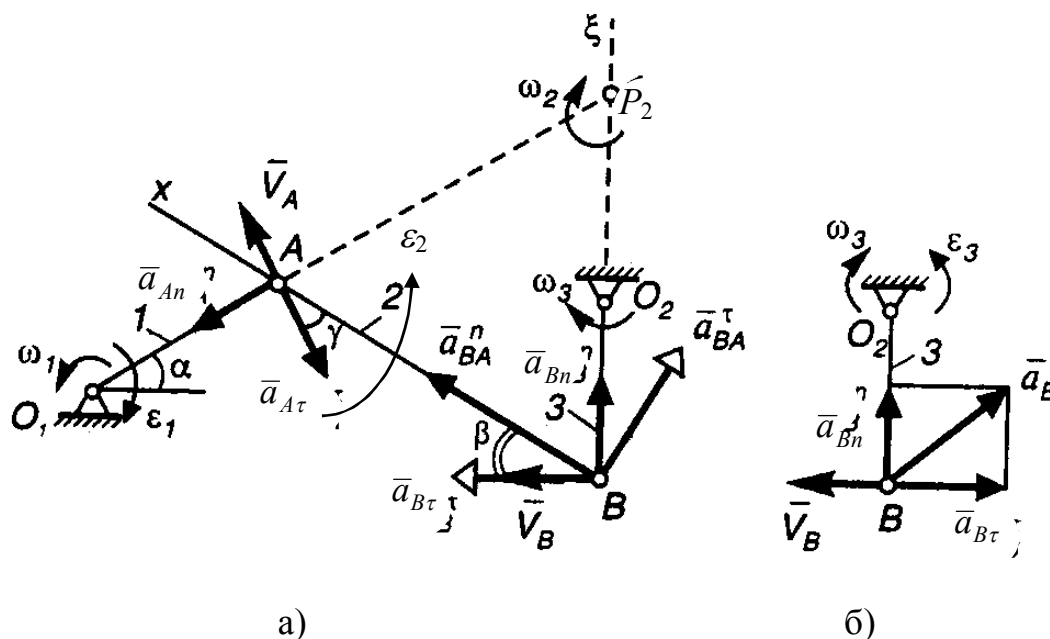


Рисунок 13.14 – Схема розв’язання задач по визначенню прискорень точок тіла

Для векторів, зазначених у правій частині цього рівняння отримаємо

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_{An} = \omega_1^2 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2 = 0,25 \text{ м/с}^2,$$

напрями цих векторів показано на Рисунок 13.14, а.

Вектори лівої частини рівняння визначаються для точки B , яка належить стержню 3, що робить обертальний рух навколо точку O_2 . Вектор \bar{a}_{Bn} буде спрямований уздовж BO_2 від точки B до точки O_2 і чисельно

$$a_{Bn} = V_B^2 / l_3 = \omega_3^2 l_3 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Невідомий вектор $\bar{a}_{B\tau}$ направимо перпендикулярно стержню 3 у бік, за ходом годинникової стрілки.

Отже, з величин, що входять у векторне рівняння, невідомі тільки числові значення $a_{B\tau}$ і a_{BA}^{τ} , які можна знайти, спроектувавши обидві частини рівняння на вісь Bx :

$$a_{B\tau} \cos \beta + a_{Bn} \sin \beta = -a_{A\tau} \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n.$$

Підставивши числові значення усіх величин, знайдемо $a_{B\tau} = -1,8 \text{ м/с}^2$. Знак мінус указує, що напрям $\bar{a}_{B\tau}$ в дійсності є протилежним зображеному на рисунку 13.14, а.

Тепер обчислюємо величину прискорення

$$a_B = \sqrt{(a_{B\tau})^2 + (a_{Bn})^2} = 1,97 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо кутове прискорення стержня 2, спроектувавши обидві частини рівняння на напрям осі $B\xi$ одержимо

$$a_{Bn} = -a_{A\tau} \cos \alpha - a_{An} \sin \alpha + a_{BA}^n \sin \beta + a_{BA}^\tau \cos \beta.$$

Підставивши числові значення величин, знайдемо $a_{BA}^\tau = 3,36 \text{ м/с}^2$.

Оскільки $a_{BA}^\tau > 0$, то фактично вектор \bar{a}_{BA}^τ спрямований, як показано на рисунку 13.14, а.

Тепер, користуючись формулою $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 0,84 \text{ рад.с}^{-2}$, напрям ε_2 – проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на рисунку 13.14, а.

Визначаємо кутове прискорення стержня 3. Стержень 3 (рис. 13.14, б) здійснює обертальний рух навколо точки O_2 . З рівняння $a_{B\tau} = \varepsilon_3 l_3$ одержимо $\varepsilon_3 = |a_{B\tau}| / l_3 = 1,44 \text{ рад.с}^{-2}$, напрям ε_3 – проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на рисунку 13.14, б.

Відповідь: $V_B = 1 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,25 \text{ рад.с}^{-1}$, $\omega_3 = 0,8 \text{ рад.с}^{-1}$, $a_B = 1,97 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_2 = 0,84 \text{ рад.с}^{-2}$, $\varepsilon_3 = 1,44 \text{ рад.с}^{-2}$.

Питання для самоконтролю

1. З яких рухів складається плоскопаралельний рух твердого тіла?
2. Що є основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла?
3. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла залежать / не залежать від вибору полюса?
4. Що називається миттєвим центром швидкостей?
5. Як розподілені швидкості точок плоскої фігури відносно МЦШ?
6. Скільки миттєвих центрів швидкостей може мати плоска фігура у певний момент часу?
7. Чи можлива ситуація, коли плоска фігура не має у певний момент часу миттєвого центра швидкостей?
8. Як можна побудувати миттєвий центр швидкостей у загальному випадку. Яка інформація потрібна для цієї побудови?
9. У якому випадку рух плоскої фігури називають миттєво поступальним?
10. Де знаходиться МЦШ для колеса, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні?
11. Як визначається швидкість точки плоскої фігури?
12. Як визначається прискорення точки плоскої фігури?

14 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ ТОЧКИ

14.1 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Основне рівняння динаміки: $m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ – можна записати у вигляді

диференціального рівняння (*векторна форма*):

$$m\ddot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i,$$

де m – маса точки;

\bar{r} – радіус-вектор точки, який є функцією часу.

Дане рівняння можна подати у вигляді проєкцій на три осі декартових координат x, y, z (*алгебраїчна форма*):

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz},$$

де $\sum_{i=1}^n F_{ix}$, $\sum_{i=1}^n F_{iy}$, $\sum_{i=1}^n F_{iz}$ – алгебраїчні суми проєкції всіх сил, що діють на точку,

на координатні осі.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в *натуральній формі*:

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in}; \quad 0 = \sum_{i=1}^n F_{ib},$$

де v_τ – проєкція швидкості на дотичну; ρ – радіус кривизни траєкторії в даній

точці; $\sum_{i=1}^n F_{i\tau}$, $\sum_{i=1}^n F_{in}$, $\sum_{i=1}^n F_{ib}$ – алгебраїчні суми проєкцій сил, що діють на точку,

на натуральні осі τ, n, b . Цими рівняннями зручно користуватися, коли точка рухається, наприклад, по колу.

14.2 Прямолінійні коливання матеріальної точки

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються *механічними коливаннями*. При цьому на матеріальну точку можуть діяти відновлююча сила (сила, що залежить від твердження точки і намагається повернути точку в твердження рівноваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, та збуджуюча сила, задана функцією часу. Розглянемо один із простіших випадків руху – прямолінійні коливання матеріальної точки.

Залежно від комбінації цих сил в лінійних системах розрізняють такі види коливального руху: вільні незатухаючі, затухаючі і вимушені.

14.2.1 Вільні незатухаючі коливання

Існує клас сил, що називаються *відновлюючими*, модулі яких у лінійних задачах є пропорційними відхиленню точки від твердження, де ці сили дорівнюють нулю, і напрямленими до цього твердження:

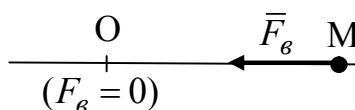

$$F_g = c \cdot MO, \quad (14.1)$$

Рисунок 14.1 – Відновлююча сила де c – коефіцієнт пропорційності.

Як буде показано в подальшому, відновлюючі сили надають руху точки коливальний характер. Коливання, які відбуваються під дією тільки відновлюючої сили, називаються *вільними незатухаючими*.

Фізична природа відновлюючих сил може бути різною. Це може бути пружна сила пружини, сила Архімеда у випадку тіла, що плаває на поверхні рідини та ін. У подальшому як відновлюючу будемо розглядувати силу пружності пружини, за допомогою якої, до речі, моделюються пружні властивості реальних тіл. У лінійних задачах сила пружності відповідає закону Гука:

$$F_{np} = c \cdot \lambda, \quad (14.2)$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини, що показує, яку силу треба прикласти до кінця пружини для її деформації на одиницю довжини;
 λ – деформація пружини (різниця між довжиною пружини у певному стані (розтягнутому або стиснутому) і недеформованому).

Розглянемо вертикальні коливання вантажу маси m , що підвішений до пружини жорсткості c і здійснює поступальний рух. У цьому випадку вантаж можна вважати матеріальною точкою маси m . Визначимо рівняння руху точки.

Для цього зобразимо точку на розрахунковій схемі у довільному положенні (рис. 14.2). Тут \bar{P} – сила ваги ($P = m \cdot g$); \bar{F}_{np} – сила пружності.

Послідовно позначимо на схемі три характерних рівня:

Рівень 1 – відповідає вільному кінцю недеформованої пружини (у цьому положенні $F_{np} = 0$);

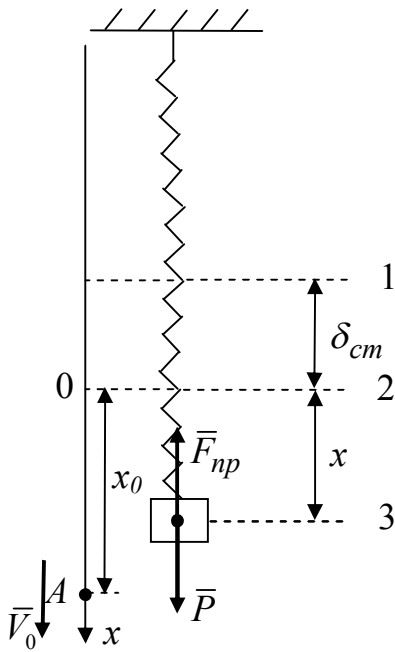


Рисунок 14.2 –
Вільні незатухаючі
коливання

Рівень 3 – довільне твердження точки під час коливань (як правило, рівень 3 зображують так, щоб рівні 1, 2, 3 йшли на схемі послідовно).

Початок системи координат вибираємо в положенні рівноваги точки (рівень 2), а вісь x направляємо у бік зростання цифр 1, 2, 3 на схемі (рис. 14.2). У такому разі довільне твердження буде знаходитись в області додатних значень координати x .

Складемо диференціальне рівняння руху точки. Для цього спроєкуємо основне рівняння динаміки

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

на вісь x :

$$m\ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{ст} + x),$$

де $\lambda = \delta_{ст} + x$ – повна деформація пружини у довільному положенні. З урахуванням рівності (14.3) права частина останнього рівняння спроститься:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (14.4)$$

Після перетворень *диференціальне рівняння вільних коливань* матеріальної точки набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (14.5)$$

де $\omega_0 = \sqrt{c/m}$.

Рівень 2 – твердження статичної рівноваги точки, рух якої досліджується (це твердження буде нижчим за рівень 1, оскільки під час приєднання вантажу до кінця недеформованої пружини остання буде розтягнутою під дією сили ваги \bar{P} точки). Відстань між рівнями 1 (недеформованої пружини) і 2 (статичної рівноваги точки) називається *статичною деформацією пружини* і позначається $\delta_{ст}$. У

положенні рівноваги точки $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$,

або $P - F_{np} = 0$. Остання рівність, враховуючи формулу (14.2), де деформація пружини $\lambda = \delta_{ст}$ набуде вигляду

$$P - c \cdot \delta_{ст} = 0. \quad (14.3)$$

Таким чином, рух матеріальної точки під дією тільки відновлюючої сили описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння (14.5). Оскільки корені характеристичного рівняння $z^2 + \omega_0^2 = 0$, що відповідає рівнянню (14.5), є уявними ($z_{1,2} = \pm i\omega_0$, де $i = \sqrt{-1}$), то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (14.5) буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \quad (14.6)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Отримаємо далі похідну за часом від координати x :

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (14.7)$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначимо, склавши початкові умови.

Припустимо, що матеріальна точка почала рухатись, маючи додатні значення початкової координати (точка А на рисунку 14.2) і проекції швидкості:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0. \quad (14.8)$$

Підставляючи умови (14.8) у вирази функцій координати (14.6) і швидкості (14.7) точки, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}$.

Після підставки сталих інтегрування вираз (14.7), набуде вигляду

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (14.9)$$

Рівняння (14.9) називається *рівнянням вільних незатухаючих коливань* матеріальної точки.

Проаналізуємо їх властивості.

Для зручності аналізу перетворимо рівняння (14.8) (або (14.9)), вводячи позначки $C_1 = A \cdot \sin s\varphi_0$, $C_2 = A \cdot \cos \varphi_0$, у форму

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (14.10)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ (або з урахуванням початкових умов

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0}{V_0}).$$

У законі коливань точки (14.2) параметр A є *амплітудою коливань* (найбільше відхилення точки від твердження рівноваги), аргумент $\omega_0 t + \varphi_0$ називається *фазою коливань*, а величина φ_0 – *початковою фазою*. Параметр ω_0 має назву *колової частоти коливань* (або *власної частоти*). Колова частота визначає кількість коливань за проміжок часу 2π секунд і вимірюється у *рад/с* (або *1/с*). Слід зазначити, що в технічній літературі використовується і звичайна частота f , яка визначає кількість коливань за 1 секунду, вимірюється в *Гц* (Герц) і зв'язана з коловою частотою співвідношенням $\omega_0 = 2\pi f$.

Побудуємо графік вільних коливань (функції (14.11)).

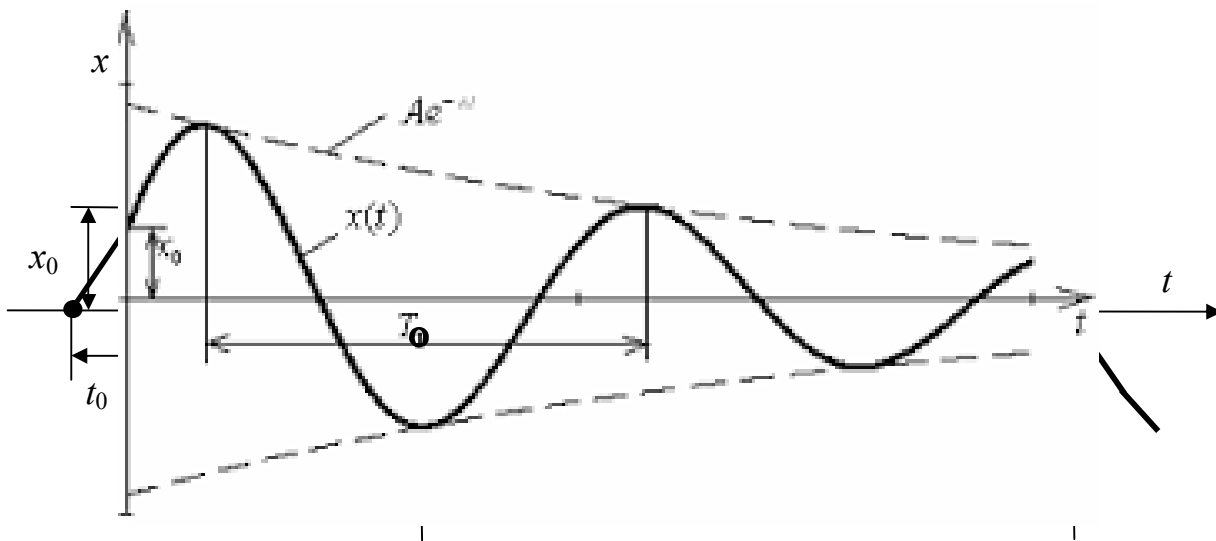


Рисунок 14.3 – Закон вільних коливань точки

На рисунку 14.3 маємо: x_0 – початкове відхилення точки від твердження її рівноваги; A – амплітуда коливань; t_0 – інтервал часу, $t_0 = \varphi_0 / \omega_0$; T_0 – період коливань (проміжок часу, протягом якого відбувається повне коливання).

Залежність між періодом і коловою частотою визначається з умови періодичності руху і має вигляд

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f}. \quad (14.11)$$

Вільні коливання мають такі властивості:

1. Згідно з формулою (14.10) вільні коливання є незатухаючими *гармонійними*, бо здійснюються за законом синуса з власною частотою ω_0 . Це обумовлено дією на точку лише консервативної сили \vec{F}_{np} пружини, тому розглянута на рисунку 14.2 механічна система називається *консервативною*.

2. Як видно з формул (14.8) і (14.10), власна частота ω_0 і період T_0 від початкових умов не залежать, а визначаються тільки параметрами системи (жорсткістю c і масою m). Така властивість механічної системи має назву *ізохронності* коливань.

3. Амплітуда A і початкова фаза φ_0 , як витікає зі співвідношень (14.9), залежать від початкових умов. За $x_0 = 0$; $V_0 = 0$ коливання не виникають.

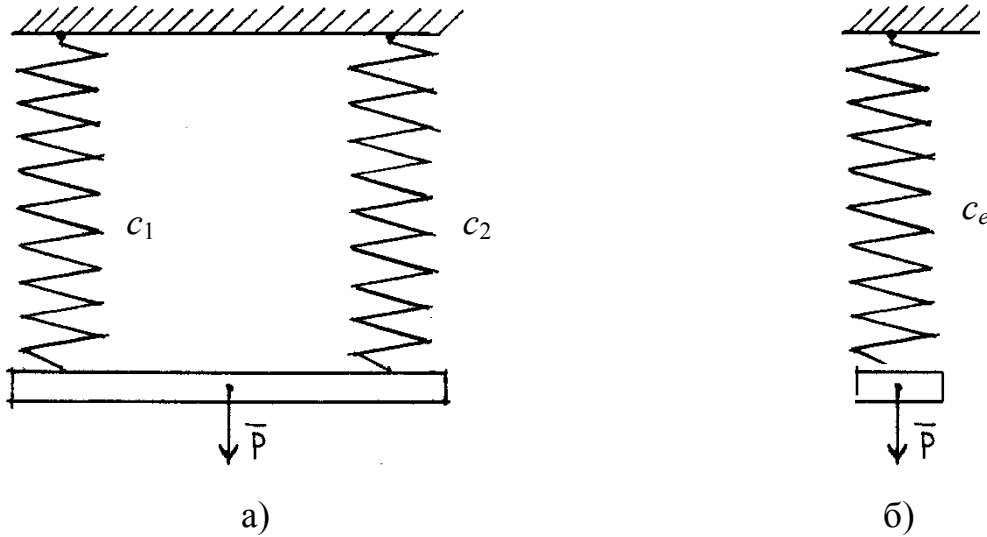


Рисунок 14.4 – Паралельне з'єднання

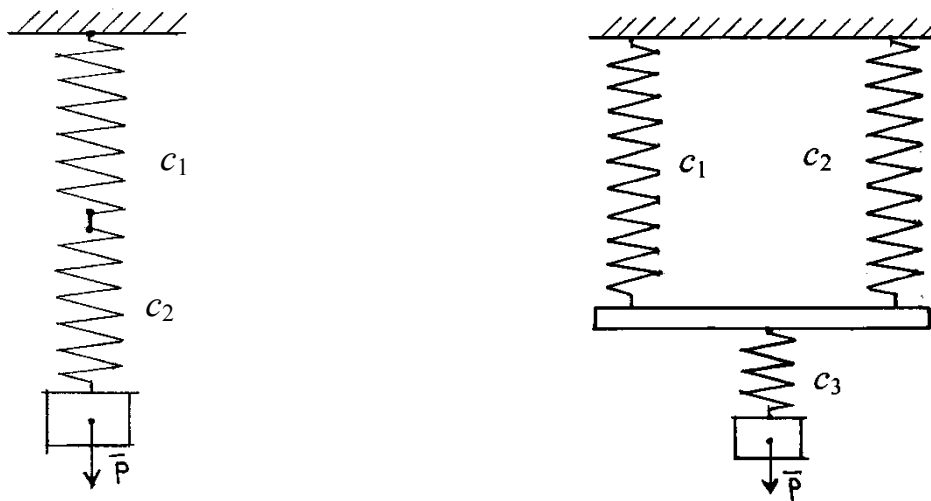


Рисунок 14.5 – Послідовне з'єднання

Рисунок 14.6 – Змішане з'єднання

На практиці в реальних вузлах, агрегатах машин пружини (амортизатори), які з'єднують вантаж з основою, можуть утворювати систему паралельно, послідовно і паралельно-послідовно (змішано) з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку початкові механічні схеми системи необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість c_e . Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі під час паралельного з'єднання пружних

елементів (рис. 14.4, а) буде мати жорсткість $c_e = c_1 + c_2$ (рис. 14.4, б). Під час послідовного з'єднання пружних елементів (рис. 14.5) еквівалентна жорсткість $c_e = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2)$. Під час змішаного з'єднання елементів (рисунок 14.6) отримаємо $c_e = (c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3) / (c_1 + c_2 + c_3)$ (рис. 14.6).

14.2.2 Вільні коливання за наявності сил опору (затухаючі коливання)

У випадку з'єднання вантажу з основою за допомогою металевих амортизаторів, а також під час руху в середовищі (рідині) на матеріальну точку діє сила опору, яку за малих швидкостей руху вважають прямо пропорційною швидкості точки і напрямленою в бік, протилежний швидкості: $\bar{R} = -b\bar{V}$, де b – коефіцієнт опору середовища, його розмірність Н·с/м або кг/с. Коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору (в'язкого тертя), називаються *затухаючими*, а механічна схема називається дисипативною.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як і на рисунку 14.7, тільки додається сила опору \bar{R} (під час зображення сили опору вважаємо, що точка рухається в бік додатного напрямку осі x) (рис. 14.7). Умовні позначення на рисунках 14.6 і 14.7 співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки матиме вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R}$$

або $m\ddot{x} = P - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x}$,

або, враховуючи (9.36), $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.

Розділимо всі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad (14.12)$$

де h – коефіцієнт демпфірування коливань, його розмірність c^{-1} .

Тоді диференціальне рівняння вільних коливань за наявності сил опору буде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (14.13)$$

Характеристичне рівняння для (14.13)

має вигляд

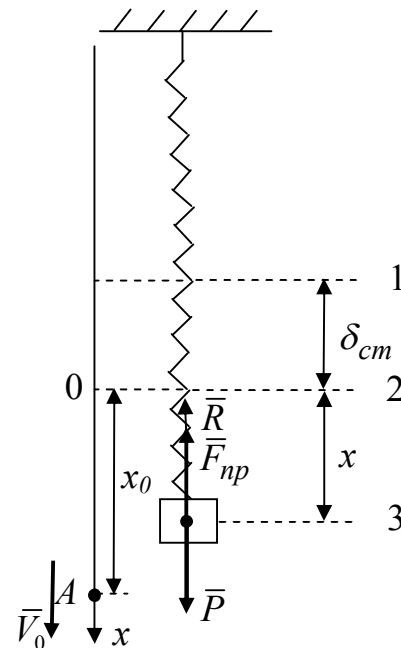


Рисунок 14.7– Затухаючі коливання

$$z^2 + 2hz + \omega_0^2 = 0,$$

а його корені дорівнюють

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (14.14)$$

Із (14.14) видно, що характер руху точки істотним чином залежить від співвідношення h і ω_0 : якщо $h \geq \omega_0$, то корені характеристичного рівняння дійсні, якщо $h < \omega_0$ – то комплексні. Розглянемо ці випадки.

За $h > \omega_0$ (випадок великого опору) загальний розв'язок диференціального рівняння (14.13) матиме вигляд

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (14.15)$$

Це рівняння описує *апериодичний (не коливальний) затухаючий рух*. Координата x точки за $t \rightarrow \infty$ монотонно зменшується по експоненті (оскільки корені p_1 і p_2 від'ємні), і точка наближається до твердження статичної рівноваги. Графіки функції (14.15) за різних початкових умов (криві 1, 2, 3 за $V_0 > 0$; $V_0 \leq 0$ і $|V_0| < |p_2| x_0$; і $V_0 > 0$ і $|V_0| > |p_2| x_0$ відповідно) наведені на рисунку 14.8.

Якщо $h = \omega_0$ (граничний випадок), то загальний розв'язок диференціального рівняння (14.13) матиме вигляд

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t), \quad (14.16)$$

де $C_1 = x_0$; $C_2 = \dot{x}_0 + h \cdot x_0$.

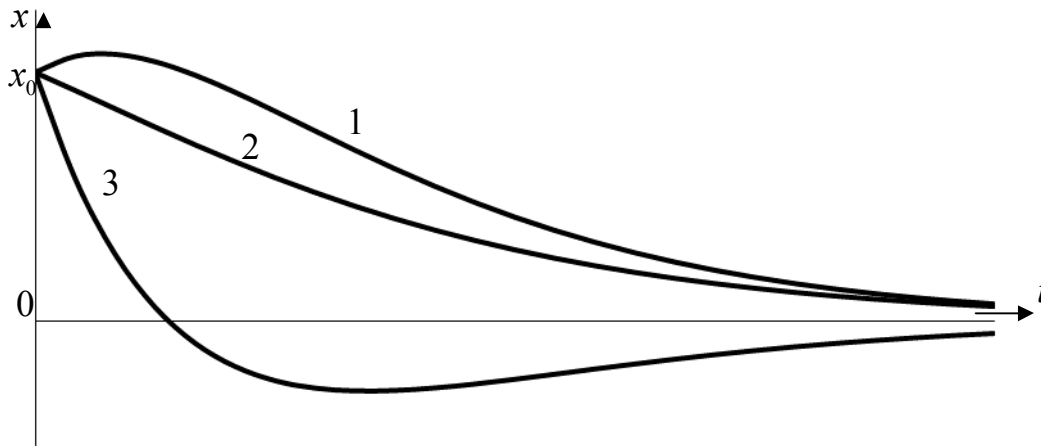


Рисунок 14.8 – Графіки функції $x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$

Такий рух також є *апериодичним затухаючим* ($x \rightarrow 0$ за $t \rightarrow \infty$).

За $h < \omega_0$ (випадок малого опору) загальний розв'язок диференціального рівняння (14.13) матиме вигляд

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t), \quad (14.17)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов ($C_1 = x_0; C_2 = (V_0 + hx_0) / \omega_0^*$), а величина

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \quad (14.18)$$

Рівняння (14.17) називається рівнянням затухаючих коливань матеріальної точки. Для зручності графічного аналізу перетворимо рівняння (14.17), аналогічно (14.16), у форму

$$x = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(\omega_0^* t + \varphi_0), \quad (14.19)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_2}{C_1}$ (або з урахуванням початкових умов

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + hx_0)^2}{\omega_0^{*2}}}, \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0^*}{V_0 + hx_0}.$$

З рівняння (14.19) видно, що рух точки має *затухаючий коливальний* характер (оскільки $e^{-ht} \rightarrow 0$ за $t \rightarrow \infty$), а величина ω_0^* є *коловою частотою затухаючих коливань*. Графік функції (14.19) наведений на рисунку 14.9.

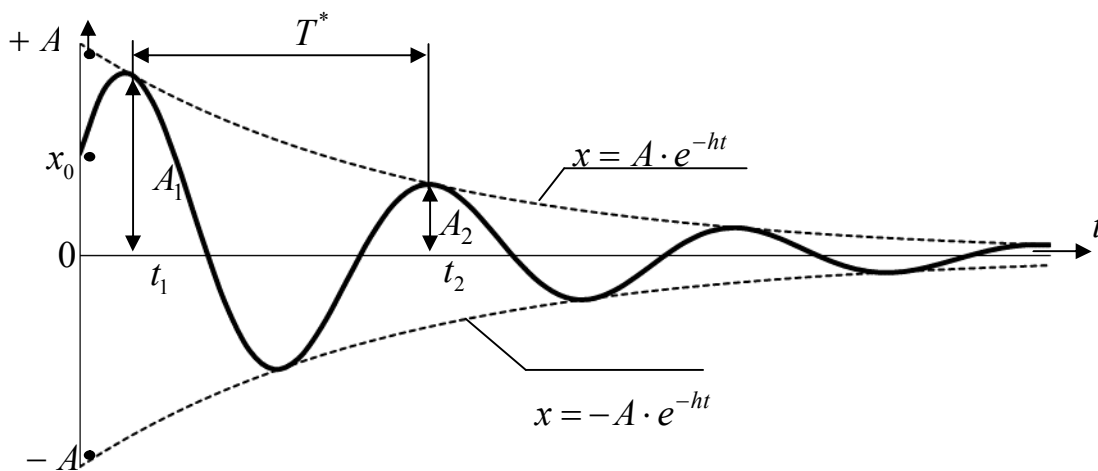


Рисунок 14.9 – Графік функції $x = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(\omega_0^* t + \varphi_0)$,

На рисунку 14.9 $x_0 = A \cdot \sin \varphi_0$, а криві $x = A \cdot e^{-ht}$ і $x = -A \cdot e^{-ht}$ є границями області, усередині якої розташовується графік руху. Рух точки є коливальним, але не періодичним, оскільки з часом послідовні максимальні відхилення точки від твердження рівноваги A_1, A_2, \dots зменшуються. Проте проміжок часу T^* між цими відхиленнями є величиною сталою і дорівнює

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (14.20)$$

Величину T^* умовно називають *періодом затухаючих коливань*. Зрівнюючи формули (14.16) і (14.20), можна зробити висновок, що період затухаючих коливань більший за період відповідних вільних незатухаючих коливань точки, тобто завжди $T^* > T$.

Розглянемо відношення послідовних максимальних відхилень точки від твердження рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{\cancel{A} \cdot e^{-ht_2} \cdot \sin(\omega_0^* t_2 + \varphi_0)}{\cancel{A} \cdot e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-h(t_1+T^*)} \cdot \sin(\omega_0^*(t_1+T^*) + \varphi_0)}{e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \\ &= \frac{\cancel{e^{ht_1}} \cdot e^{-hT^*} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + 2\pi + \varphi_0)}{\cancel{e^{ht_1}} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-hT^*} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)}}{e^{-ht_1} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)}} = e^{-hT^*}. \end{aligned}$$

Таким чином, відношення послідовних амплітуд затухаючих коливань стало і дорівнює

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = e^{-hT^*}. \quad (14.21)$$

Величина η (знаменник геометричної прогресії, за якою спадають амплітуди затухаючих коливань) називається *декрементом затухаючих коливань*, а модуль натурального логарифма цієї величини

$$\Lambda = |\ln \eta| = hT^* \quad (14.22)$$

називається *логарифмічним декрементом затухаючих коливань*. Поняття про декремент затухаючих коливань використовують під час експериментального визначення коефіцієнта опору середовища.

14.2.3 Вимушені коливання

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім відновлюючої сили, діє збурювання, яке змінюється за часом, або якщо відбувається переміщення точки прикріплення до основи пружини чи пружного тіла.

Силове збудження коливань

У цьому випадку коливання виникають у разі безпосередньої дії на точку збурюючої сили. Ця сила може бути довільною функцією часу, проте

розглянемо простіший, але практично важливий випадок, коли сила змінюється за гармонійним законом

$$Q = H_B \cdot \sin \omega_B t, \quad (14.23)$$

де H_B , ω_B – амплітуда і колова частота збурюючої сили.

Випадок консервативної системи

Механічна система, яка моделює такий випадок коливань зображена на рисунку 14.10. Умовні позначення на рисунку 14.10 і 14.7 співпадають, однак тут до матеріальної точки окрім сил ваги \bar{P} і пружності $\bar{F}_{пр}$ прикладена збурююча сила \bar{Q} .

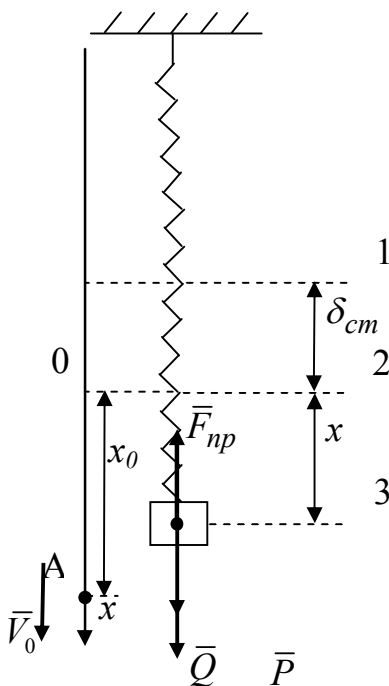


Рисунок 14.10 – Силове збудження коливань

Отже, рівняння динаміки точки матиме вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_y + \bar{Q}$$

$$\text{або } m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) + H_B \sin \omega_B t,$$

або, враховуючи (14.3),

$$m\ddot{x} + cx = H_B \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{H_B}{m}. \quad (14.24)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (14.25)$$

Рівняння (14.25) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (14.25) подамо у вигляді

$$x = x_1 + x_2, \quad (14.26)$$

де x_1 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;

x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (14.25):

$$x_1 = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t. \quad (14.27)$$

Під час визначення частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_B \neq \omega_0; \quad \omega_B \approx \omega_0; \quad \omega_B = \omega_0.$$

У випадку $\omega_B \neq \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота механічної системи різні) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot \sin \omega_B t. \quad (14.28)$$

Підставляючи (14.27) у (14.28), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$-\omega_B^2 A_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_0^2 A_B \cdot \sin \omega_B t = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Це рівняння виконується для будь-якого t , якщо

$$A_B = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2}. \quad (14.29)$$

Підставляючи (14.29) у (14.28), а (14.28) і (14.27) у (14.26), отримаємо загальний розв'язок рівняння (14.25):

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (14.30)$$

Визначимо сталі інтегрування C_1, C_2 , які входять у формулу (14.31), за допомогою початкових умов (14.25). Для цього продиференціюємо за часом формулу (14.30):

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t. \quad (14.31)$$

Підставляючи початкові умови (14.25) у вирази (14.30) і (14.31), отримаємо

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases} \quad (14.32)$$

З останніх рівнянь сталі інтегрування будуть:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right). \quad (14.33)$$

Підставляючи знайдені сталі інтегрування у вираз (14.30), отримаємо

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (14.34)$$

Рівняння (14.34) називається *рівнянням вимушених коливань* матеріальної точки без урахування сил опору або рівнянням вимушених коливань консервативної систем.

Проаналізуємо *властивості вимушених коливань*:

– вимушені коливання є *бігармонійними* (типовий графік коливань наведено на рис. 14.11), тобто складаються з вільних коливань з частотою ω_0 (описуються першими двома доданками рівняння (14.34)) і чисто вимушених коливань з частотою збурюючої сили ω_B (останній доданок рівняння (14.34));

– особливим є те, що за наявності збурюючої сили вільні коливання збуджуються і за нульових умов (коли $x_0 = 0, V_0 = 0$);

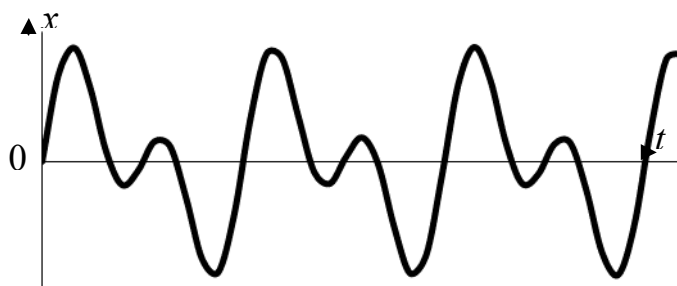


Рисунок – 14.11

– амплітуда чисто вимушених коливань (модуль виразу (14.34)) не залежить від початкових умов, а визначається параметрами збурюючої сили і механічної системи.

Розглянемо далі випадок, коли частота збурюючої сили і власна частота близькі за значенням: $\omega_B \approx \omega_0$.

Припустимо, що початкові умови нульові ($x_0 = 0, V_0 = 0$). Тоді, поклавши $\omega_B/\omega_0 \approx 1$, але $\omega_0^2 - \omega_B^2 \neq 0$ і $\omega_0 + \omega_B \approx 2\omega_B$, з виразу (14.65) отримаємо

$$x = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot (\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t) = 2 \cdot \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t. \quad (14.35)$$

Графік цього руху наведено на рисунку 14.12.

Такий рух називається *биттям*: коливальних рух, який відбувається з частотою ω_B збурюючої сили та амплітудою, що є періодичною (з частотою $(\omega_B - \omega_0)/2$) функцією часу.

У разі виконання $\omega_B = \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота співпадають) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot t \cdot \cos \omega_B t. \quad (14.36)$$

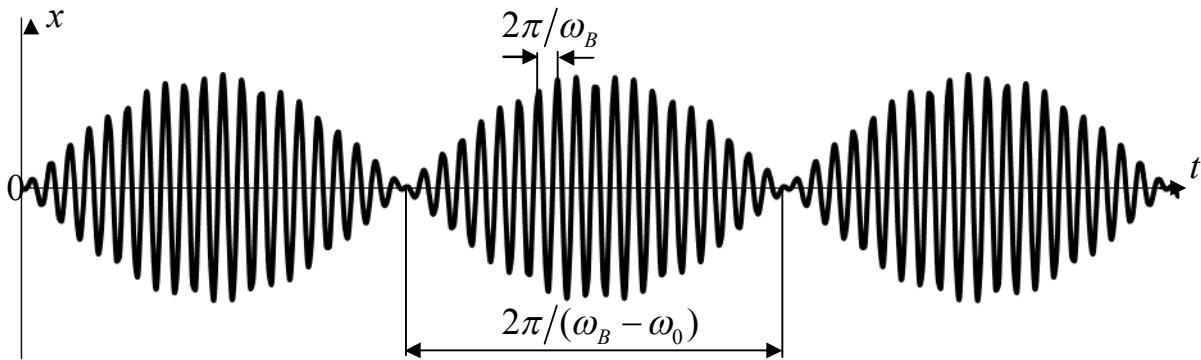


Рисунок 14.12 – Графік

$$x = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot (\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t) = 2 \cdot \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t \text{ руху}$$

Підставляючи (14.33) у (14.35), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$A_B \cdot (-t \cdot \omega_B^2 \cdot \cos \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_B^2 \cdot t \cdot \cos \omega_B t) = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Оскільки $\sin \omega_B t \neq 0$ для довільного t , то справедливе рівняння

$$A_B (-2\omega_B) = H,$$

звідки

$$A_B = -\frac{H}{2\omega_B}. \quad (14.37)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (14.25) матиме вигляд:

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{H \cdot t}{2\omega_B} \cdot \cos \omega_B t. \quad (14.38)$$

Як неважко помітити, амплітуда чисто вимушених коливань $\frac{H \cdot t}{2\omega_B}$

збільшується прямо пропорційно часу і за $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається *резонансом*, а рівність $\omega_B = \omega_0$ – *умовою резонансу*. Графік залежності частинного розв'язка (14.38) від часу показаний на рисунку 14.13.

У реальних будівельних конструкціях транспортних машин, явище резонансу може бути причиною їхнього руйнування. У вібраційних машинах технологічного призначення, однак, його використовують за для зменшення потужності, що споживається.

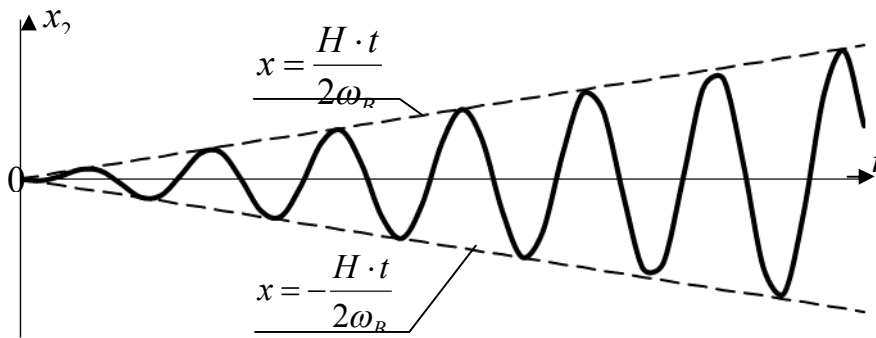


Рисунок 14.13 Графік залежності частинного розв'язка

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{H \cdot t}{2\omega_B} \cdot \cos \omega_B t \text{ від часу показаний}$$

Кінематичне збудження коливань

Під час кінематичного збудження коливань заданий рух здійснює основа у точці прикріплення до нього кінця пружини за законом

$$\xi = A_\xi \cdot \sin \omega_B t, \quad (14.39)$$

де A_ξ – амплітуда переміщення основи, ω_B – її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), зображена на рисунку 14.14. Умовні позначення на рисунку 14.10 і 14.14 співпадають.

Для консервативної системи диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{pr}$$

або

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{cr} + x - \xi),$$

або, враховуючи (14.39),

$$m\ddot{x} + cx = c \cdot a_\xi \cdot \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{c \cdot a_\xi}{m}. \quad (14.40)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (14.41)$$

Диференціальне рівняння повністю співпадає з рівнянням (14.25). Отже, закон вимушених коливань консервативної системи під час кінематичного збудження і його властивості будуть такими ж, як і під час силового.

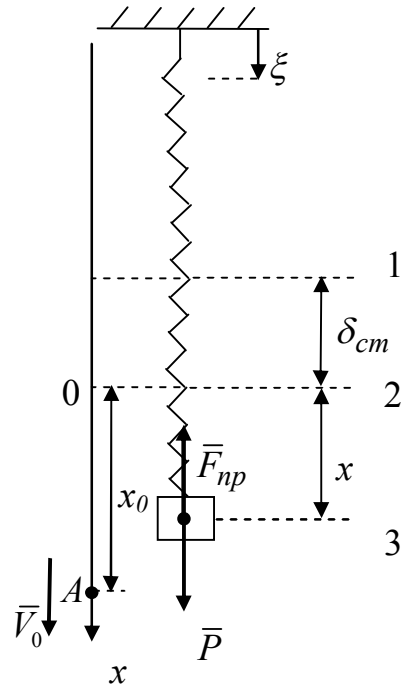


Рисунок 14.14 – Кінематичне збудження коливань

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте закони Ньютона.
2. Яка система відліку називається інерціальною?
3. Який закон називається основним законом динаміки?
4. Що розуміють під «інертністю» матеріальної точки?
5. Які рівняння називаються диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
6. Які рівняння називаються натуральними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
7. Сформулюйте дві Базові задачі динаміки матеріальної точки.
8. Яка різниця між диференціальними рівняннями вільної і невільної матеріальної точки?
9. Як зміниться диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки при її складному русі?
10. Під дією якої сили здійснюються вільні коливання матеріальної точки?
11. Який вид має диференціальне рівняння вільних коливань і який його загальний розв'язок?
12. У якому положенні доцільно розміщувати початок відліку?
13. Що називається амплітудою, періодом і частотою вільних коливань матеріальної точки і від чого вони залежать?
14. Який вид має графік вільних коливань матеріальної точки?
15. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих коливань і який його загальний розв'язок?
16. Який вид має загальний розв'язок диференціальне рівняння затухаючих коливань за $h = \omega_0$, $h < \omega_0$ і $h > \omega_0$.
17. Що називається декрементом і логарифмічним декрементом коливань?
18. Який вид мають графіки затухаючих коливань і періодичного руху матеріальної точки?
19. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору і який його загальний розв'язок?
20. За якої умови виникає резонанс і який вид мають рівняння і графік вимушених коливань матеріальної точки під час резонансу?
21. Надайте визначення кінематичного збудження коливань матеріальної точки.
22. Який вид мають графіки АЧХ і ФЧХ дисипативної і консервативної систем?

23. Чому дорівнюють значення ω_{\max} , $W(\omega_{\max})$ і $\varphi(\omega_{\max})$ під час дослідження АЧХ на екстремум?
24. Надайте поняття, формулу властивості коефіцієнта динамічності механічної системи.
25. Під дією якої сили здійснюються вільні коливання матеріальної точки?
26. Який вид має диференціальне рівняння вільних коливань і який його загальний розв'язок?
27. У якому положенні доцільно розміщувати початок відліку?
28. Що називається амплітудою, періодом і частотою вільних коливань матеріальної точки і від чого вони залежать?
29. Який вид має графік вільних коливань матеріальної точки?
30. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих коливань і який його загальний розв'язок?
31. Який вид має загальний розв'язок диференціальне рівняння затухаючих коливань за $h = \omega_0$, $h < \omega_0$ і $h > \omega_0$.
32. Що називають декрементом і логарифмічним декрементом коливань?
33. Який вид мають графіки затухаючих коливань і періодичного руху матеріальної точки?
34. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору і який його загальний розв'язок?
35. За якої умови виникає резонанс і який вид мають рівняння і графік вимушених коливань матеріальної точки під час резонансу?
36. Дайте визначення кінематичного збудження коливань матеріальної точки.
37. Який вид мають графіки АЧХ і ФЧХ дисипативної і консервативної систем?
38. Чому дорівнюють значення ω_{\max} , $W(\omega_{\max})$ і $\varphi(\omega_{\max})$ під час дослідження АЧХ на екстремум?
39. Чому дорівнює головний вектор і головний момент сил інерції у разі поступального руху твердого тіла?
40. Чому дорівнює проекція головного моменту сил інерції твердого тіла на нерухому вісь обертання?
41. Як визначають головний вектор і головний момент сил інерції у разі плоского руху тіла, котре має головну вісь інерції тіла, що перпендикулярна площині руху?
42. Які умови повинні виконуватись під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, щоб динамічні реакції підшипників дорівнювали нулю?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кильчевский Н. А. Основы теоретической механики / Н. А. Кильчевский, Н. И. Ремизова, Е. Н. Кильчевская. – Киев : Вища школа, 1986. – 296 с.
2. Крюков К. П. Конструкции и механический расчет линий электропередач / К. П. Крюков, Б. П. Новгородцев. – М. : Энергия, 1979.
3. Кесельман Л. М. Основы механики воздушных линий электропередачи / Л. М. Кесельман. – М. : Энергоатомиздат, 1992.
4. Правила устройства электроустановок. – 6 изд. – М. : Энергоатомиздат, 1986.
5. Чихладзе, Е. Д. Опір матеріалів [Текст] : навч. посібник / Е. Д. Чихладзе. – Харків : УкрДАЗТ, 2002. – 362 с.
6. Шутенко, Л. Н. Строительная механика. Краткий курс. Раздел 1. Статически определимые стержневые системы [Текст] / Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько. – Харьков : ХГАГХ, 2003. – 90 с.
7. Теоретична механіка: Статика [Текст] : конспект лекцій / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 95 с.
8. Шутенко, Л. Н. Основы теории упругости и пластичности [Текст] : учебное пособие для студентов строительных специальностей / Л. Н. Шутенко, Н. А. Засядько, А. А. Чупрынин. – Харьков : ХНАГХ, 2007. – 135 с.
9. Шутенко, Л. М. Опір матеріалів [Текст] : навч.-метод. посібник до лабораторних робіт / Л. М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А. Засядько. – Харків : ХНАМГ, 2004. – 79 с.
10. Опір матеріалів. Ч. 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях [Текст] : конспект лекцій / За заг. ред. В. П. Шпачука; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва; – Харків : ХНАМГ, 2010. – 139 с.
11. Опір матеріалів. Ч. 2. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при складних навантаженнях Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях [Текст] : конспект лекцій / За заг. ред. В. П. Шпачука; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва; – Х. : ХНАМГ, 2014.– 109 с.
12. Шутенко, Л. Н. Строительная механика [Текст] : краткий курс. Раздел 3 / Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько. – Харьков : ХГАГХ, 2005. – 116 с.
13. В. П. Шпачук Технічна механіка : навчальний посібник (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології») / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 277 с.

Додаток А

Базові позначення

- F – сила
- N – зусилля
- M – момент
- f – коефіцієнт тертя ковзання
- k – коефіцієнт тертя кочення
- m – маса
- V – лінійна швидкість
- a – лінійне прискорення
- ω – кутова швидкість
- ε – кутове прискорення
- U – переміщення
- A – робота
- h – коефіцієнт корисної дії
- J – момент інерції
- S – імпульс сили
- L – момент кількості руху
- σ – нормальна напруга
- τ – дотична напруга
- A – площа поперечного перерізу
- E – модуль пружності першого роду
- μ – коефіцієнт Пуассона
- G – модуль пружності другого роду
- S_x – статичний момент відносно осі x
- J_x – осьовий момент інерції
- J_p – полярний момент інерції
- W_p – полярний момент опору
- n – коефіцієнт запасу
- l – гнучкість стержня
- λ – деформація
- $\delta \%$ – відносне подовження при розриві зразка

Навчальне видання

**ШПАЧУК Володимир Петрович,
СКЛЯРОВ В'ячеслав Олександрович**

Конспект лекцій
з дисципліни

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

*(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за спеціальністю
141 – «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерний набір і верстання *В. О. Скляров*

План 2018, поз. 115 Л.

Підп. до друку 25.04.2019. Формат 60×84/16.

Друк на ризографі. Ум.-друк. арк. 10,6

Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.