МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
усіх спеціальностей
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2019

УДК 621(07.034)
Т38

Укладач Ф. В. Новіков

Затверджено на засіданні кафедри природоохоронних технологій, екології та безпеки життєдіяльності.
Протокол № 2 від 30.08.2018 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Т38 **Технічна** механіка [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. Ф. В. Новіков. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 75 с.

Наведено методичні рекомендації до виконання завдань самостійної роботи, які містять індивідуальні завдання, завдання для контрольної роботи та охоплюють деякі теми навчальної дисципліни. Детально розглянуто питання визначення реакції опор та механічних напружень в елементах конструкцій під час їхнього розтягування та стискання, вигину та крутіння. Розглянуто основні положення кінематики та динаміки, наведено приклади вирішення завдань, які допоможуть студентам у процесі виконання самостійних робіт.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня.

УДК 621(07.034)

Вступ

Під час проектування та виробництва машин та систем завжди виникає питання розрахунку їхніх елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість, а також питання вибору оптимальних параметрів елементів конструкцій із погляду зниження витрат матеріалів під час забезпечення їхньої надійності та довговічності. Це потребує застосування законів технічної механіки (що містить теоретичну механіку, опір матеріалів та деталі машин) для розв'язання поставлених завдань. Тому вивчення студентами навчальної дисципліни "Технічна механіка" має важливе практичне значення для підготовки фахівців, які будуть займатися проектуванням та виготовленням різних механічних систем.

Програма навчальної дисципліни "Технічна механіка" передбачає вивчення загальних законів руху та рівноваги матеріальних тіл, основи розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість. Програма базується на знанні студентами загально професійних дисциплін.

З огляду на багатогранність технічних питань, з якими доводиться стикатися фахівцю у своїй практичній роботі, вивчення цієї технічної навчальної дисципліни слід здійснювати комплексно, поєднуючи лекції та практичні заняття з аудиторною й позааудиторною самостійною роботою студентів. Це дозволить студентам більш глибоко вивчити теоретичні питання та навчитися вирішувати практичні завдання.

Під час вивчення навчальної дисципліни "Технічна механіка" слід уважно прочитати методичні рекомендації із цієї теми, вивчити матеріал за рекомендованою літературою зі складанням стислого конспекту, відповісти на питання для самоконтролю.

Проведення аудиторної самостійної роботи дозволить студентам постійно спілкуватися з викладачем, ставити йому запитання та отримувати від нього відповіді на незрозумілі питання, особливо під час виконання індивідуальних завдань. Проведення позааудиторної самостійної роботи студентами є продовженням аудиторної самостійної роботи у вільний від занять час, що дозволить більш повно вивчити навчальну дисципліну "Технічна механіка". Виходячи із цього, в даній роботі наведено методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань самостійної роботи.

1. Виконання індивідуальних завдань

Тема 1. Основні поняття статики. Основні аксіоми статики

Вивчити основні поняття й аксіоми статики та отримати практичні навики їх застосування під час визначення рівноваги матеріальних точок та твердих тіл.

Індивідуальне завдання. Основні аксіоми статики та загальні закони рівноваги матеріальних точок та твердих тіл.

Мета роботи – ознайомити студентів з основними термінами та аксіомами статики; навчити визначати геометричним і аналітичним способами рівнодіючу плоскої системи сил, що сходяться.

Загальні відомості

У статиці розглядаються такі два основні завдання:

1) заміна даної системи сил, прикладених до твердого тіла, іншою системою сил, їй еквівалентною;

2) виведення загальних умов, за яких матеріальна точка і тверде тіло під дією прикладених сил залишаються в стані спокою або в стані рівномірної прямолінійної поступальної ходи, тобто виведення умов рівноваги сил, прикладених до матеріальної точки і твердого тіла.

Силами в механіці називаються взаємодії матеріальних тіл, в результаті яких відбувається зміна кінематичного стану цих тіл*. Дія сили на тверде тіло* визначається трьома чинниками: точкою дотику, напрямом сили, чисельним значенням сили. Сила – це векторна величина.

Сукупність сил, прикладених до твердого тіла, це система сил. Якщо до тіла прикладена система сил, що врівноваж-жується, то це означає, що ці сили знаходяться в рівновазі, або взаємно врівноважуються.

Коли одну систему сил, прикладених до даного твердого тіла, можна замінити іншою системою, не порушуючи при цьому його спокою або не змінюючи його руху, то такі *дві системи сил* називаються *еквівалентними.*

Рівнодіючою називається сила, яка надає таку саму дію на тіло, як і декілька сил. Рівнодіюча сила рівна геометричній сумі всіх сил, що діють на тіло: $\overline{F}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$, де i = 1, 2...; n – порядковий номер сили.

Врівноваженою називається така сила, яка рівна за величиною рівнодіючій силі, але направлена в протилежну сторону.

У основі вивчення рівноваги твердих тіл лежать деякі прості положення, які є аксіомами статики. Аксіоми виражають основні факти, підтверджені досвідом, під час вивчення дії сил на тверде тіло. Основні аксіоми статики сформульовано англійським вченим Нютоном (1642 – 1727 рр.).

Аксіома 1 (принцип інерції або перший закон Нютона).

Матеріальна точка знаходиться в рівновазі, якщо рівнодіюча всіх сил, що діють на неї, рівна нулю, тобто: $\overline{F}_{\Sigma} = \Sigma\overline{F}_i = 0$.

Здібність твердого тіла зберігати рух за відсутності сил, що діють, або в поступовій зміні цього руху, коли на тіло починають діяти сили, називається *інерцією* або *інертністю.* На підставі цієї аксіоми станом рівноваги вважається такий стан, коли тіло знаходиться в спокої або рухається прямолінійно і рівномірно, тобто за інерцією.

Аксіома 2 (принцип рівності двох сил). Дві сили, що діють на одне тіло, є взаємоврівноваженими, якщо вони рівні за величиною, протилежні за напрямом і лежать на одній прямій.

Умова, сформульована в цій аксіомі, є необхідною для рівноваги двох сил. Це означає, що якщо система двох сил знаходиться в рівновазі, то ці сили повинні бути рівні за модулем й діяти за однією прямою в протилежні сторони.

Аксіома 3 (принцип приєднання або виключення взаємоврівноважених сил).

Механічний стан тіла не зміниться, якщо до нього приєднати або виключити взаємоврівноважену систему сил.

Аксіома 4 (принцип паралелограма). Рівнодіюча двох сил, прикладених до тіла в одній точці і направлених один до одного під кутом, дорівнює геометричній сумі цих сил і зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 1.1).

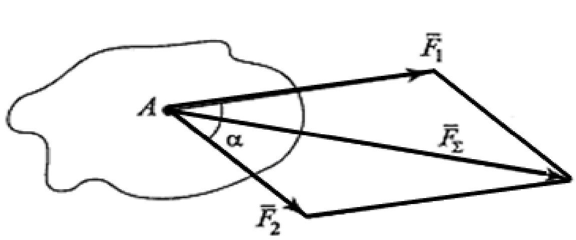

Рис. 1.1. **Паралелограм сил**

За теоремою косинусів (рис. 1.1): $F_{\Sigma}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$, звідки

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}.$$

Аксіома 5 (принцип дії і протидії). Сили, з якими два тіла діють одне на одне, рівні по величині, протилежні за напрямом і лежать на одній прямій (проте не врівноважують один одного, оскільки прикладені до різних тіл).

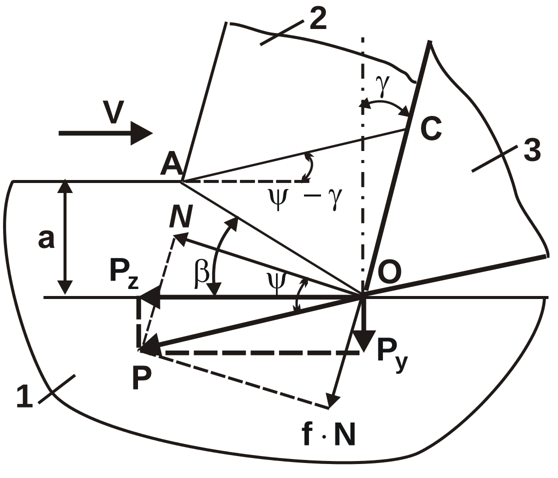

Рис. 1.2. **Розрахункова схема процесу різання**

Умовні позначення: 1 − оброблюваний матеріал; 2 − стружка; 3 – інструмент

Прикладом розкладання сили на дві складові є розрахункова схема параметрів стружкоутворення у процесі різання матеріалів (рис. 1.2), у якій із боку різального інструмента на оброблюваний матеріал діють нормальна N і дотична $f \cdot N$ складові сили різання P, де f – коефіцієнт тертя передньої поверхні інструмента зі стружкою, що утворюється. Нормальна N складова сили різання P діє в напряму, перпендикулярному передній поверхні інструмента, а дотична $f \cdot N$ складова – уздовж передньої поверхні інструмента.

Положення сили різання P визначає умовний кут тертя ψ оброблюваного матеріалу з передньою поверхнею інструмента, який відлічується від положення нормальної N складової сили різання.

Силу різання P також можна подати тангенціальною P_z і радіальною P_y складовими сили різання, які повернені відносно складових сили різання N і $f \cdot N$ на кут, що дорівнює передньому куту різального інструмента γ. Тому кут між векторами складових сили різання N і P_z дорівнює передньому куту різального інструмента γ, а кут між векторами сили різання P й тангенціальною P_z складовою сили різання дорівнює так званому куту дії $\omega = (\psi - \gamma)$.

Плоскою системою сил, що сходяться, називається система сил, лінії дії яких лежать в одній площині і перетинаються в одній точці (рис. 1.3 а).

Щоб з'ясувати, чи буде дане тіло знаходитися в рівновазі під дією плоскої системи сил, що сходяться, необхідно знайти її рівнодіючу силу. Якщо рівнодіюча сила рівна нулю, система сил знаходиться в рівновазі, якщо не рівна нулю – не знаходиться в рівновазі. Існує два способи визначення рівнодіючої сили плоскої системи сил, що сходяться: геометричний і аналітичний.

Геометричний спосіб визначення рівнодіючої – побудова силового багатокутника: у довільно вибрану точку переноситься об'єкт рівноваги, в цю точку поміщається початок першого вектора, перенесеного паралельно самому собі; у кінець першого вектора переноситься початок другого вектора, до кінця другого – початок третього й т. д.

Якщо побудований силовий багатокутник виявиться незамкнутим, значить, дана система сил не знаходиться в рівновазі (рис. 1.3 а). Геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, полягає в замкнутості силового багатокутника, тобто коли кінець останнього вектора співпадає з початком першого (рис. 1.3 б).

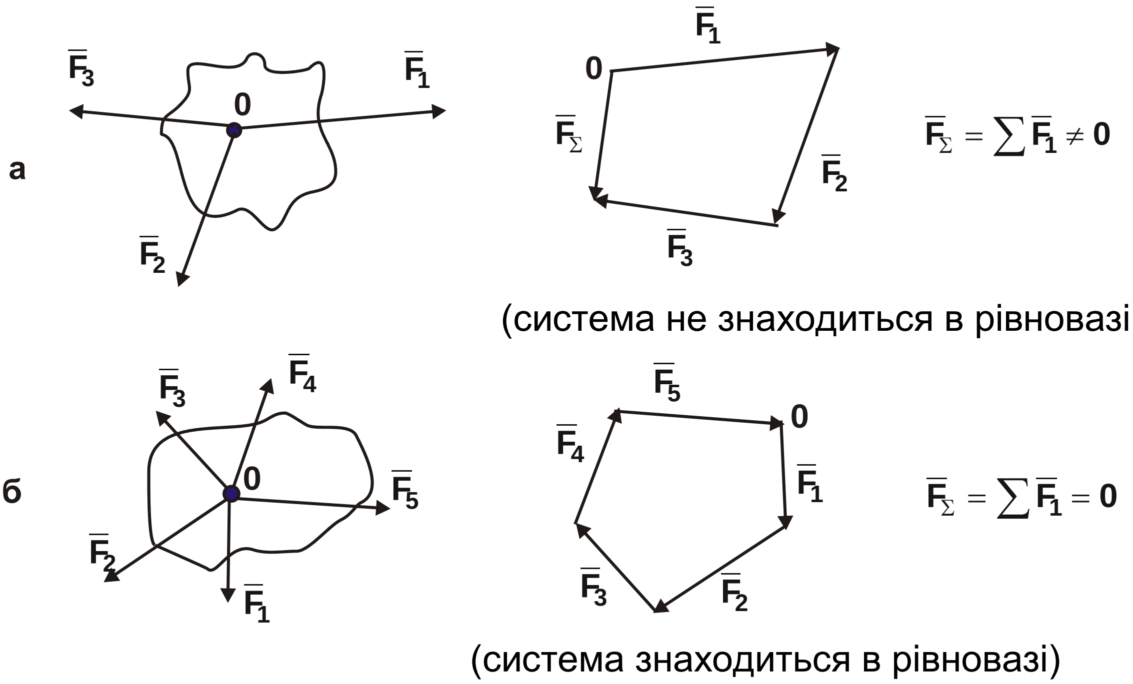

Рис. 1.3. **Силовий багатокутник**

Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої: всі сили проектуються на дві взаємно перпендикулярні осі координат, а потім знаходиться алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь х і вісь у. Якщо алгебраїчна сума проекцій всіх сил рівна нулю, дана система сил знаходиться в рівновазі:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad \Sigma F_{iy} = 0.$$

Порядок виконання самостійної роботи

Для виконання самостійної роботи кожен студент отримує від викладача свій варіант завдання (рис. 1.4, табл. 1.1), який полягає в побудові силового багатокутника та визначенні аналітичним способом величини і напряму рівнодіючої плоскої системи сил, що сходяться. На основі отриманих результатів розрахунку слід зробити висновок – знаходиться плоска система сил у рівновазі чи ні.

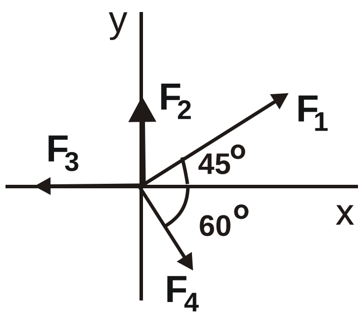

Рис. 1.4. **Розрахункова схема плоскої системи сил, що сходяться**

Таблиця 1.1

Значення зосереджених сил плоскої системи сил, що сходяться

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	5	8	10	20	10	12	9	11	18	4
F_2, кН	12	10	14	10	12	5	5	15	10	20
F_3, кН	10	5	6	9	8	10	12	5	15	7
F_4, кН	11	14	7	4	15	20	10	9	6	15

Звіт про виконану роботу

У звіті студент наводить основні терміни та поняття, ескізи плоских систем сил, що сходяться, та побудованих силових багатокутників, результати розрахунків та зроблені висновки.

Література: [2; 5; 8; 11 – 13].

Питання для самоконтролю

1. Що таке сила, система сил, еквівалентна система сил, рівнодіюча сила та врівноважена сила?

2. Сформулюйте аксіоми статики.

3. Як знайти рівнодіючу двох сил за допомогою паралелограма?

4. Покажіть, як можна визначити силу різання (див. рис. 1.2) за двома відомими складовими сили різання.

5. Умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться.

6. Силовий багатокутник і його призначення.

Тема 2. Зв'язки та їх реакції. Системи сил і умови їх рівноваги

Вивчити основні зв'язки та їх реакції, а також набути практичні навики їх застосування під час визначення умов рівноваги плоскої системи сил, що сходяться.

Індивідуальне завдання. Визначення реакцій різних типів зв'язків та розв'язання рівнянь плоскої системи сил, що сходяться.

Мета роботи – навчити студентів визначати реакції різних типів зв'язків та розв'язувати завдання рівноваги плоскої системи сил, що сходяться.

Загальні відомості

Зв'язками називають обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок тіла в просторі.

Сила, з якою зв'язок діє на тіло, називається *силою реакції* або просто *реакцією*. Згідно з аксіомою взаємодії, ці сили за модулем рівні і діють по одній прямій в протилежні сторони. Сили реакції та тиску прикладені до різних тіл і тому не є системою сил. Сили, що діють на тіло, діляться на активні й реактивні. *Активні сили* прагнуть переміщати тіло, до якого вони прикладені, а *реактивні* перешкоджають цьому переміщенню.

Під час розв'язання більшості завдань статики сковане тіло умовно зображають як вільне за допомогою так званого принципу звільнення, який формулюється так: всяке сковане тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки, замінивши їх реакціями. У результаті застосування цього принципу отримуємо тіло, що вільне від зв'язків і знаходиться під дією деякої системи активних і реактивних сил. *Правило для визначення напряму реакції* можна сформулювати так: напрям реакції зв'язку протилежний напряму переміщення, що знищується даним зв'язком. Розглянемо напрям реакцій основних видів зв'язку, (усього їх шість) що зустрічаються в різних конструкціях:

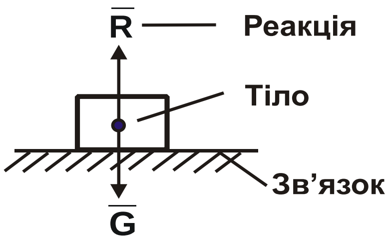

Рис. 2.1. **Напрям реакції гладкої поверхні**

1. У вигляді гладкої поверхні (поверхня столу, рівної дороги). Реакція зв'язку направлена перпендикулярно поверхні зв'язку (рис. 2.1).

Реакція зв'язку R направлена перпендикулярно опорній поверхні у бік тіла, оскільки зв'язок не дає тілу переміщатися тільки у бік опорної поверхні і перпендикулярно їй і проходить через центр тяжіння тіла.

2. У вигляді шорсткої поверхні. Умовно зображується похилою площиною (рис. 2.2). Повна реакція зв'язку $\overline{R}$ направлена під кутом β ($\overline{R}_n$ – нормальна реакція опори).

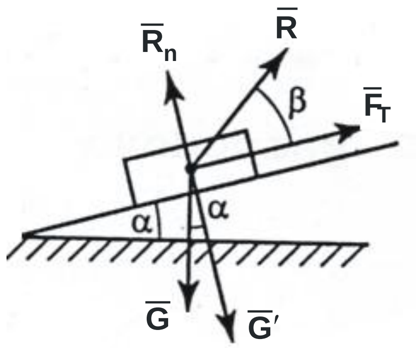

Рис. 2.2. **Напрям реакції шорсткої поверхні**

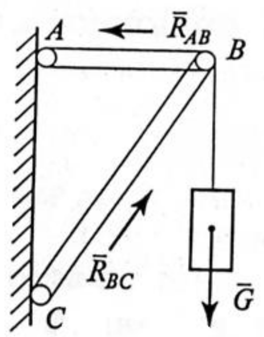

Рис. 2.3. **Напрям реакції прямого жорсткого стрижня**

3. У вигляді прямого жорсткого стрижня з шарнірним закріпленням кінців. Реакція стрижня направлена уздовж його осі (див. рис. 2.3).

У цьому випадку реакція стрижня може бути направлена тільки по лінії ВС (АВ), тобто по прямій, що сполучає шарніри. Шарнір – рухоме з'єднання двох тіл, що допускає тільки обертання навколо загальної осі (циліндровий шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

4. У вигляді точкової опори. Реакція направлена перпендикулярно поверхні опори (рис. 2.4).

У цьому випадку реакція $\overline{R}$ направлена по нормалі до поверхні тіла і в бік тіла (проходить через точку дотику чи центр тяжіння тіла), оскільки нормаль до поверхні тіла є єдиний напрям переміщення, який не допускають ці зв'язки. Реакція R рівна G і направлена в протилежну сторону.

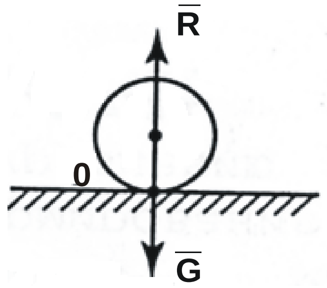

Рис. 2.4. **Напрям реакції точкової опори**

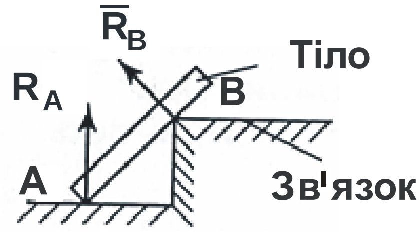

Рис. 2.5. **Напрям реакції ребра двогранного кута**

5. У вигляді ребра двогранного кута. Реакція направлена перпендикулярно поверхні тіла опори (див. рис. 2.5).

Тіло опирається на нерухому лінію (наприклад, на ребро двогранного кута). У цьому випадку реакція опори за відсутності тертя направлена по нормалі до поверхні даного тіла $\overline{R}_B$. Реакція $\overline{R}_A$ направлена по нормалі до опорної поверхні.

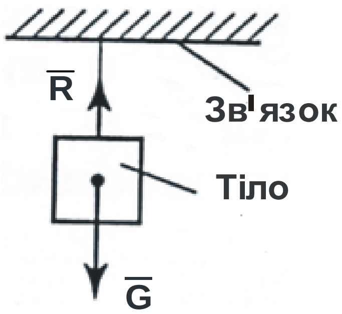

Рис. 2.6. **Напрям реакції гнучкого зв'язку**

6. У вигляді гнучкого зв'язку (ремінь, канат, ланцюг). Реакція направлена уздовж зв'язку і прикладена до тіла в точці прикріплення до нього нитки і направлена уздовж цієї нитки – $\overline{R}$, рис. 2.6.

Реакція $\overline{R}$ гнучкого зв'язку не дає тілу віддалятися від точки підвісу.

Щоб тіло знаходилося в рівновазі під дією плоскої системи сил, що сходяться, необхідно, щоб рівнодіюча сила дорівнювала нулю. Нижче наведено приклади, засновані на виконанні цієї умови рівноваги.

Приклад 2.1. До вертикальної гладкої стіни на тросі, що становить зі стіною кут α, підвішена однорідна куля (рис. 2.7). Визначити натяг F тросу та силу тиску P кулі на стіну, якщо сила тяжіння кулі G.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кулі. Для цього відкинемо зв'язки й замінимо їх реакціями. Реакція N гладкої стіни перпендикулярна стіні й проходить через центр кулі. Так як куля однорідна, то сила тяжіння G прикладена в його геометричному центрі. Реакція R спрямована уздовж троса і, відповідно до теореми про рівновагу трьох непаралельних сил, її лінія дії також повинна проходити через центр кулі.

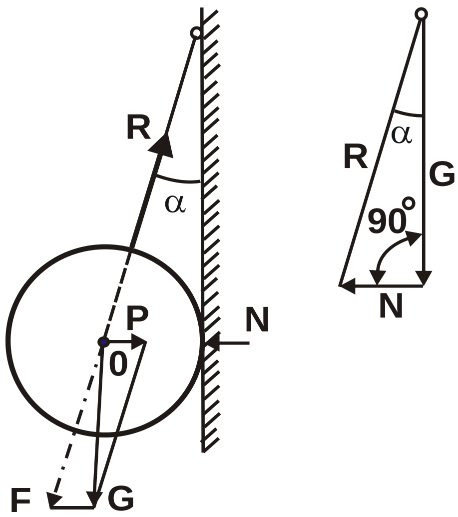

Рис. 2.7. **Розрахункова схема**

До системи трьох сил, що сходяться, слід застосувати геометричну умову рівноваги: $\sum F_i = 0$; $G + N + R = 0$.

Будуємо замкнутий силовий багатокутник, починаючи із зображення в довільному масштабі вектора відомої сили G.

Напрям обходу трикутника (тобто напрям стрілок) визначається цією силою. Із трикутника отримано:

$$N = G \cdot tg\alpha; \quad R = \frac{G}{\cos\alpha}.$$

Сила тиску P кулі на стіну, за аксіомою взаємодії, за модулем дорівнює реакції N стіни, але спрямована в протилежний бік: $P = N = G \cdot tg\alpha$.

Натяг тросу F за модулем дорівнює її реакції R: $F = R = G / \cos\alpha$.

Цю саму задачу можна розв'язати, розклавши силу тяжіння G за реальними напрямами (напрямами реакцій) на складові P (сила тиску кулі на стіну) і F (натяг тросу), причому, за аксіомою взаємодії $F = R$; $P = N$. Із паралелограма (див. рис. 2.7) легко визначити шукані величини. Такий метод розв'язання задачі називають *методом розкладання*.

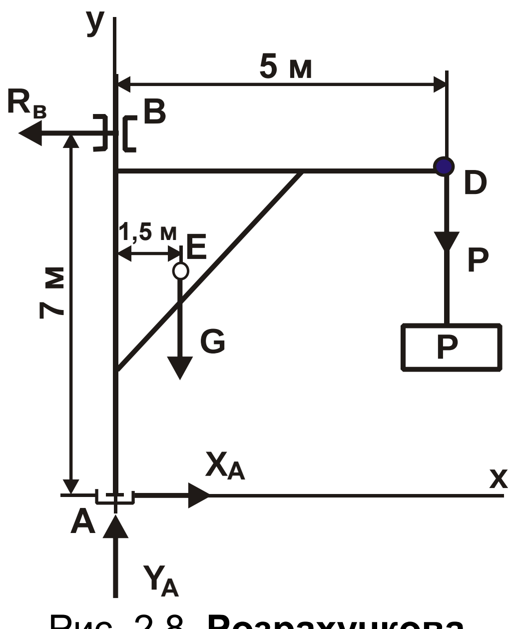

Рис. 2.8. **Розрахункова схема**

Приклад 2.2. На рис. 2.8 схематично зображено підйомний кран. У точці D на відстані 5 м від осі AB крана підвішений вантаж P= 50 кН. Сила тяжіння крана G=30 кН. Визначити реакції підп'ятника A та підшипника B.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу крана. Реакція R_B підшипника B спрямована перпендикулярно його осі, реакцію підпятника A слід розкласти на дві складові: X_A і Y_A. Таким чином, до крану прикладено плоску систему п'яти довільно розташованих сил, з яких три невідомі. Для розв'язання задачі слід застосувати до цієї системи аналітичні умови рівноваги й скласти три рівняння:

$$\sum M_A = 0; \qquad +R_B \cdot 7 - G \cdot 1{,}5 - R \cdot 5 = 0;$$

$$\sum X = 0; \qquad -R_B + X_A = 0;$$

$$\sum Y = 0; \qquad Y_A - P - G = 0.$$

Розв'язуючи перше рівняння, ми отримали:

$$R_B = \frac{G \cdot 1{,}5 + P \cdot 5}{7} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 + 50 \cdot 10^3 \cdot 5}{7} = 42{,}1 \cdot 10^3;\ \text{Н} = 42{,}1 \text{ кН}.$$

З другого рівняння отримано: $X_A - R_B = 42{,}1$ кН.

З третього рівняння встановлено: $Y_A = P + G = 50 + 30 = 80$ кН.

Приклад 2.3. Визначити реакції стрижнів, що утримують вантажі F_1 = 70 кН і F_2= 100 кН (рис. 2.9 а). Масою стрижнів знехтувати.

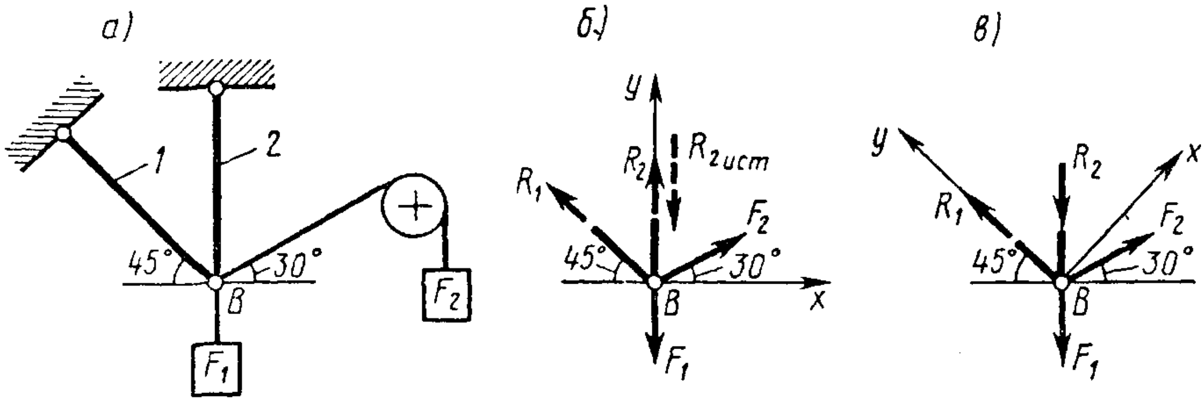

Рис. 2.9. **Розрахункові схеми**

Розв'язання. Для розв'язання цього завдання необхідно:

1. Вибрати тіло (точку), рівновагу якого слід розглядати.

2. Звільнити тіло (шарнір В) від зв'язків і зобразити діючі на нього активні сили і реакції відкинутих зв'язків. Причому реакції стрижнів слід направити від шарніра В, так як прийнято вважати, що стрижні розтягнуті.

3. Вибрати осі координат і скласти рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги системи збіжних сил на площині $\sum x_i = 0$; $\sum y_i = 0$. Вибираючи осі координат, слід враховувати, що отримані рівняння будуть вирішуватися простіше, якщо одну з осей направити перпендикулярно однієї з невідомих сил.

4. Визначити реакції стрижнів на основі зазначеної системи рівнянь.

5. Перевірити правильність отриманих результатів, вирішивши рівняння рівноваги щодо заново обраних координат.

Для виконання зазначених умов розв'язання даної задачі на рис. 2.9 б, 2.9 в графічно показано напрями дії на стрижень активних сил і реакцій відкинутих зв'язків, та запропоновано таку послідовність розв'язання задачі:

• Спочатку слід розглянути рівновагу шарніра B (див. рис. 2.9 б).

• Необхідно звільнити шарнір B від зв'язків та зобразити діючі на нього активні сили й реакції зв'язків (див. рис. 2.9 б).

• Під час вибору системи координат слід поєднати вісь y в напрямі з реакцією R_2 (див. рис. 2.9 б) та скласти рівняння рівноваги для системи сил, що діють на шарнір B:

$$\sum X_i = R_1 \cdot \cos 45^0 + F_2 \cdot \cos 30^0 = 0; \qquad (2.1)$$

$$\sum Y_i = R_1 \cdot \sin 45^0 + R_2 + F_2 \cdot \sin 30^0 - F_1 = 0. \qquad (2.2)$$

• Для визначення реакції стрижнів R_1 і R_2 слід розв'язати рівняння (2.1) та (2.2). З рівняння (2.1) маємо: $R_1 = \dfrac{F_2 \cdot \cos 30^0}{\cos 45^0} = \dfrac{100 \cdot 0{,}866}{0{,}707} = 122$ кН.

Підставляючи знайдене значення R_1 в рівняння (2.2), отримаємо:

$$R_2 = F_1 - F_2 \cdot \sin 30^0 - R_1 \cdot \sin 45^0 = 70 - 100 \cdot 0{,}5 - 122 \cdot 0{,}707 = -66{,}6 \text{ кН}.$$

Знак мінус перед значенням R_2 вказує на те, що спочатку обраний напрям реакції невірний – слід направити реакцію R_2 в протилежну сторону, тобто до шарніру B (на рис. 2.9 б дійсний напрям реакції R_2 показано штриховим вектором).

• Для перевірки правильності отриманих результатів необхідно вибрати нове розташування осей координат x і y (див. рис. 2.9 в). Щодо цих осей слід скласти рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = -R_1 \cdot \cos 45^0 + F_2 \cdot \cos 15^0 - F_1 \cdot \cos 45^0 = 0; \qquad (2.3)$$

$$\sum Y_1 = R_1 - F_1 \cdot \cos 45^0 - R_2 \cdot \cos 45^0 - F_2 \cdot \cos 75^0 - F_1 = 0. \qquad (2.4)$$

З рівняння (2.3) встановлено:

$$R_1 = \frac{F_2 \cdot \cos 15^0 - F_1 \cdot \cos 45^0}{\cos 45^0} = \frac{100 \cdot 0{,}965 - 70 \cdot 0{,}707}{0{,}707} = 66{,}6 \text{ кН}.$$

Підставляючи знайдене значення R_2 в рівняння (2.4), отримаємо:

$$R_1 = F_1 \cdot \cos 45^0 + R_2 \cdot \cos 45^0 + F_2 \cdot \cos 75^0 =$$

$$= 70 \cdot 0{,}707 + 66{,}6 \cdot 0{,}707 + 100 \cdot 0{,}258 = 122 \text{кН}.$$

Значення реакцій R_1 і R_2, що отримані під час розв'язання рівнянь (2.1) та (2.2), збігаються за величиною та напрямом зі значеннями, знайденими з рівнянь (2.3) та (2.4). Отже, задачу розв'язано правильно.

Порядок виконання роботи

1. Розв'язати самостійно таке завдання.

Через невагомий блок перекинуто трос АВ (рис. 2.10). До кінця троса В прив'язаний вантаж вагою Р, кінець троса А закріплений на вертикальній стіні під кутом α до неї. Визначити залежність реакцій осі блоку від кута α та розрахувати значення R_0 за умов $\alpha_1 = 60^0$; $\alpha_2 = 90^0$; $\alpha_3 = 120^0$.

Відповідь: $R_{01} = P$; $R_{02} = P\sqrt{2}$; $R_{03} = P\sqrt{3}$.

2. Кожний студент вибирає свій варіант завдання (табл. 2.1 рис. 2.11,) й визначає умови рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, у вигляді двох шарнірно з'єднаних між собою стрижнів, які утримують два вантажі.

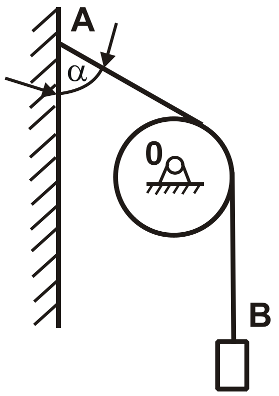

Рис. 2.10. **Схема розрахунку**

Таблиця 2.1

Значення ваги вантажів F_1 і F_2

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	5	8	10	20	10	12	9	11	18	4
F_2, кН	12	10	14	10	12	5	5	15	10	20

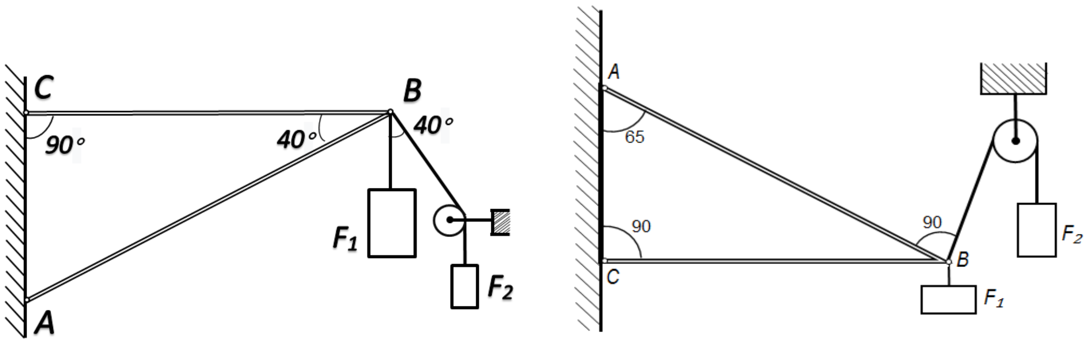

Рис. 2.11. **Ескізи для завдань**

Звіт про виконану роботу

У звіті студент наводить класифікацію зв'язків і їх реакції та розв'язання свого варіанту завдання рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, і робить висновки.

Література: [4; 5; 7; 11 – 13].

Питання для самоконтролю

1. Що таке зв'язки та реакції зв'язків у статиці?
2. Наведіть приклади і виконайте ескізи до поняття "зв'язок – жорсткий стрижень".
3. Що таке плоска система сил, що сходяться?
4. Які умови рівноваги плоскої системи сил, що сходяться?

Тема 3. Балкові опори та їхні реакції

Вивчити умови рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил та набути практичні навики їх застосування для визначення реакцій балкових опор.

Індивідуальне завдання. Визначення реакцій балкових опор із використанням рівнянь рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил.

Мета роботи – навчити студентів розв'язувати завдання з визначення реакцій балкових опор за умов рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил. Студентам необхідно набути навичок визначення реакцій опор, оскільки із цього починається вирішення багатьох завдань з опору матеріалів і деталей машин.

Загальні відомості

Плоскою системою довільно розташованих сил називається система сил, лінії дії яких лежать в однієї площині і не перетинаються в одній точці. Щоб тіло під дією плоскої системи довільно розташованих сил знаходилося в рівновазі, необхідно, щоб головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулю:

$$\overline{F_{гол}} = \overline{F_{\Sigma}} = \Sigma \overline{F_i} = 0; \qquad M_{гол} = \Sigma M_0(\overline{F_i}) = 0.$$

Виражаючи головний вектор системи сил, що сходяться, в аналітичній формі, отримано два рівняння рівноваги: $\Sigma F_{ix} = \Sigma F_{iy} = 0$.

Головний момент системи замінимо алгебраїчною сумою моментів даних сил щодо точки приведення: $\Sigma M_0(\overline{F}_i) = 0$. Таким чином, отримуємо умову рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил: алгебраїчну суму проекцій всіх сил на осі x і y та алгебраїчну суму моментів всіх сил щодо точки приведення які повинні дорівнювати нулю.

Перша (основна) форма рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad \Sigma F_{iy} = 0; \quad \Sigma M_0(\overline{F}_i) = 0.$$

Друга форма рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad \Sigma M_A(\overline{F}_i) = 0; \quad \Sigma M_B(\overline{F}_i) = 0.$$

Третя форма рівняння рівноваги:

$$\Sigma M_A(\overline{F}_i) = 0; \quad \Sigma M_B(\overline{F}_i) = 0; \quad \Sigma M_C(\overline{F}_i) = 0.$$

Розглянемо умови рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил стосовно визначення реакцій балкових опор.

Існує три типи балкових опор: шарнірно-рухома опора, шарнірно-нерухома опора і жорстке закладення (затискання). Шарнір є рухоме з'єднання двох тіл, що допускає обертання тільки навколо загальної осі (циліндровий шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

1. Схематично **шарнірно-рухома опора** зображена на рис. 3.1. Шарнірно-рухома опора також дає можливість балці безперешкод змінювати свою довжину у ході зміни температури і тим самим усуває можливість появи температурної деформації й напруження.

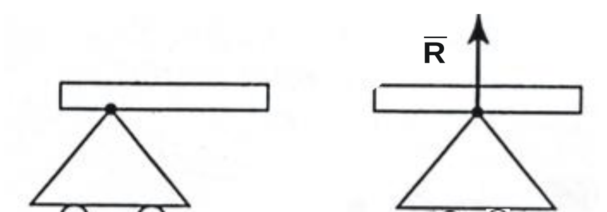

Рис. 3.1. **Шарнірно-рухома опора**

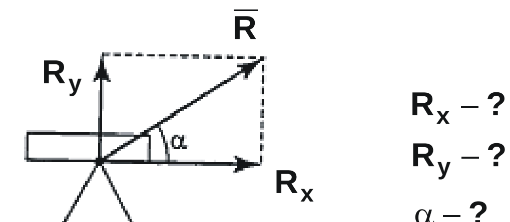

Рис. 3.2. **Шарнірно-нерухома опора**

2. Схематичне зображення **шарнірно-нерухомої опори** показано на рис. 3.2. Водночас опорний шарнір повинен бути розташований на рівні осі балки. Якщо ж ця умова не виконується, то під час проведення

розрахунків можна отримати значну похибку. Це пов'язано з подовженням або скороченням волокон балки при вигині, а цьому перешкоджає шарнірно-нерухома опора.

3. Опора **з жорстким затисканням**, або **закладенням** (рис. 3.3). Вона не дозволяє балці ні повертатися, ні переміщуватися. Про реакцію цієї опори нічого не відомо. Тому для цієї опори необхідно знайти три складові реакції: R_x, R_y, M.

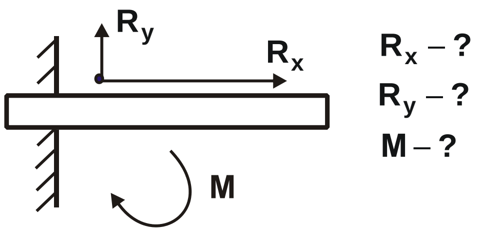

Рис. 3.3. **Опора з жорстким закладенням**

Жорстке закладення може бути отримане з шарнірно-нерухомої опори шляхом знищення шарніра. Знищуючи шарнір, здійснюється перешкода обертанню кінцевого перетину балки – вводимо нову реакцію, яка повинна перешкодити цьому обертанню. Такою реакцією може бути тільки пара сил. Тому затиснений кінець балки дає три невідомі реакції.

Балка з одним закладеним кінцем називається консольною балкою, або простою консоллю (частина балки звішується за опору, рис. 3.3). Усі реакції і момент вважаються прикладеними в точці А – центрі тяжіння опорного перетину. Для визначення невідомих реакцій використовують рівняння статики, яке виражає умову, що балка в цілому при дії всіх сил і реакцій, прикладених до неї, знаходиться в рівновазі. Оскільки всі сили лежать в одній площині, то рівнянь рівноваги для них можна написати три. Тому завдання визначення реакцій з умов статики вирішується за наявності лише трьох невідомих реакцій. Такі балки називаються статично визначеними. Нижче наведено приклади вирішення прикладів із визначення рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил.

Приклад 3.1. Горизонтальну балку АС закріплено за допомогою нерухомого шарніра в точці А та рухомого шарніра в точці В (рис. 3.4).

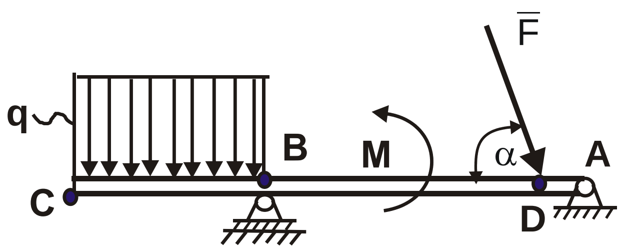

Рис. 3.4. **Розрахункова схема**

На балку діють у точці D зосереджена сила $\overline{F}$, пара сил із позитивним моментом M і на ділянці балки $BC = l$ м рівномірно розподілені сили інтенсивністю q (Н/м). Необхідно написати умови рівноваги балки і визначити реакції опор А і В.

1. Оскільки всі аксіоми та теореми статики формулюються для зосереджених сил, прикладених до твердого тіла, то слід розглянути спосіб переходу від паралельних розподілених сил до зосереджених сил. Розподілені сили характеризуються інтенсивністю q, тобто силою, що припадає на одиницю об'єму, площі або довжини. У розглянутому прикладі паралельні розподілені сили постійної інтенсивності діють на ділянці балки $BC = l$, тому слід замінити їх зосередженою силою (рис. 3.5).

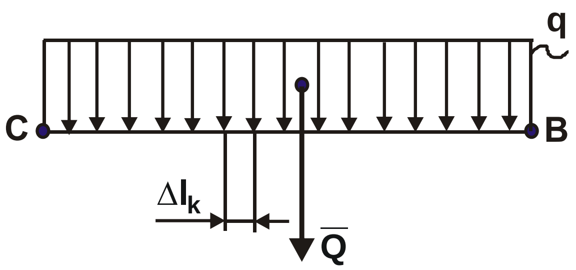

Рис. 3.5. **Зосереджена сила**

Для цього ділянку ВС необхідно представити відрізками Δl_k досить малих розмірів порівняно з довжиною ВС. На кожен відрізок Δl_k діє сила $\overline{q} \cdot \Delta l_k$, яку за достатньої малості довжини відрізка Δl_k можна вважати зосередженою елементарної силою. Тому на відрізку ВС буде діяти система елементарних зосереджених паралельних сил, які відповідно до теореми про складання двох паралельних сил $\overline{q} \cdot \Delta l_k$ можна послідовно скласти і замінити однією рівнодіючою силою, за модулем рівною:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} q \Delta l_k = q \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = ql.$$

Сила $\overline{Q}$ спрямована паралельно розподіленим силам і прикладена в середині відрізка ВС.

2. Звільнимо балку АС від зв'язків. Докладемо до точки А реакцію шарніру $\overline{R}_A = \overline{x}_A + \overline{y}_A$, а в точці В – реакцію $\overline{R}_B = \overline{y}_B$.

3. Графічно покажемо розрахункову схему, на якій позначено всі сили, що діють на балку АС (рис. 3.6).

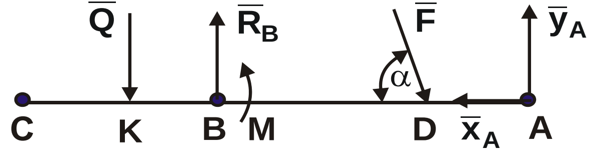

Рис. 3.6. **Розрахункова схема**

4. Необхідно підрахувати число невідомих: $\overline{x}_A$; $\overline{y}_A$; $\overline{y}_B$.

5. Далі слід скласти рівняння рівноваги плоскої системи сил, що діють на балку АС:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $\quad -x_A + F \cdot \cos\alpha = 0$; $\quad x_A = F \cdot \cos\alpha$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $\quad y_A + y_B - F \cdot \sin\alpha = 0$; $\quad y_A = F \cdot \sin\alpha + Q - y_B$;

3) $\sum m_A(\overline{F}_K) = 0$; $-y_B(AB) + M + Q(AK) + F(AD\sin\alpha)$;

$$y_B = \frac{1}{AB}\left[M + Q(AK) + F(AD\sin\alpha)\right].$$

Приклад 3.2. Горизонтальна балка довжиною l= 4 м закріплена на опорах (рис. 3.7) і навантажена парою сил з моментом m= 420 Н·м. Не враховуючи силу тяжіння балки, треба визначити реакції опор А і В.

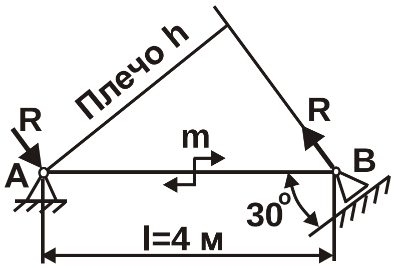

Рис. 3.7. **Схема розрахунку**

Розв'язання. Відкинемо опори, замінивши їх реакціями, й розглянемо рівновагу балки. Оскільки пару сил можна врівноважити тільки парою сил, то реакції R опор А і В повинні утворювати пару сил, причому, реакція шарнірно-рухомої опори В перпендикулярна опорній площині. Для розв'язання задачі слід застосувати умови рівноваги плоскої системи пар і скласти рівняння рівноваги: $\sum m_i = 0$; $-m + R \cdot h = 0$, де $h = l \cdot \cos 30^0$.

Звідки $R = \dfrac{m}{h} = \dfrac{m}{l \cdot \cos 30^0} = \dfrac{420}{4 \cdot 0{,}866} \approx 120$ Н.

Приклад 3.3. Консольна балка (рис. 3.8) довжиною l= 2 м навантажена на кінці силою F= 3 000 Н. Не враховуючи силу тяжіння балки, треба визначити реакції закладення.

Розв'язання. Для розв'язання завдання слід відкинути закладення,

Рис. 3.8. **Схема розрахунку**

замінивши його реакціями, та розглянути рівновагу балки. Реакція закладення є реактивною силою R та реактивним моментом m. Оскільки реактивний момент можна урівноважити тільки парою сил, то навантаження F й реакція R повинні утворювати пару сил, отже, $R = F = 3\ 000$ Н. Далі слід застосувати умову рівноваги плоскої системи пар сил і скласти рівняння рівноваги: $\sum m_i = 0$; $m - F \cdot l = 0$. Звідки $m = F \cdot l = 3\ 000 \cdot 2 = 6\ 000$ Н·м.

Приклад 3.4. Визначити реакцію опор балки згідно з рис. 3.9 а.

Послідовність розв'язання завдання:

1. Зобразити балку разом із навантаженнями.

2. Вибрати розташування координатних осей, поєднавши вісь X з балкою, а вісь Y направивши перпендикулярно осі X.

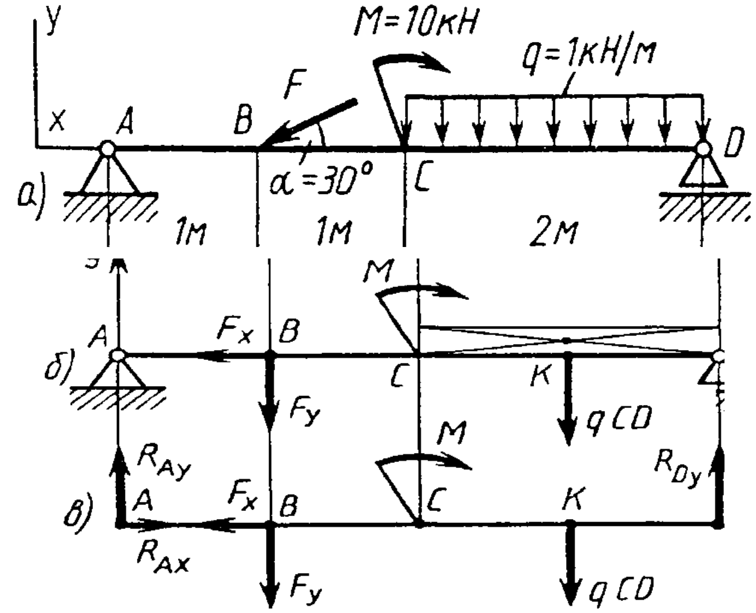

Рис. 3.9. **Розрахункова схема**

3. Провести необхідні перетворення заданих активних сил: силу, нахилену до осі балки під кутом а, замінити двома взаємно перпендикулярними складовими, а рівномірно розподілене навантаження це її рівнодіюча, яка додається в середині ділянки розподілу навантаження.

4. Звільнити балку від опор, замінивши їх дію реакціями опор, які спрямовані вздовж обраних осей координат.

5. Скласти рівняння рівноваги статики для довільної плоскої системи сил таким чином і в такій послідовності, щоб рішенням кожного із цих рівнянь було визначення однієї з невідомих реакцій опор.

6. Перевірити правильність знайдених опорних реакцій за рівнянням, яке не було використано для розв'язання завдання.

Розв'язання.

1. Нарисуємо балку з діючими навантаженнями (див. рис. 3.9 а).

2. Позначимо осі координат x і y.

3. Силу F необхідно замінити її складовими $F_x = F \cdot \cos\alpha$ і $F_y = F \cdot \sin\alpha$. Рівнодіюча $q \cdot CD$ рівномірно розподіленого навантаження прикладена в середині ділянки CD, тобто в точці К (див. рис. 3.9 б).

4. Замінимо опори балки опорними реакціями (див. рис. 3.9 в).

5. Для розв'язання завдання необхідно скласти рівняння рівноваги статики та визначити невідомі реакції опор.

Із рівняння суми моментів всіх діючих на балку сил, складеного відносно однієї з точок опор, визначається одна з невідомих вертикальних реакцій: $\sum M_A(F_i) = F_y \cdot AB + M + q \cdot CD \cdot AK - R_D \cdot AD = 0$;

$$R_{D_y} = \frac{F_y \cdot AB + M + q \cdot CD \cdot AK}{AD} = \frac{10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3}{4} = 6{,}5 \text{ кН.}$$

Визначається також інша вертикальна реакція ($F_y = F \cdot \sin\alpha$):

$$\sum M_D(F_i) = R_{A_y} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - q \cdot CD \cdot AK = 0;$$

$$R_{A_Y} = \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot BD - M + q \cdot CD \cdot KD}{AD} = \frac{20 \cdot 0{,}5 \cdot 3 - 10 + 2}{4} = 5{,}5 \text{ кН.}$$

Визначається горизонтальна реакція: $\sum X_i = R_{A_x} - F_x = 0$;

$$R_{A_x} = F_x = F \cdot \cos\alpha = 20 \cdot 0{,}866 = 17{,}3 \text{ кН.}$$

6. Далі перевіряється правильність отриманих результатів:

$$\sum Y_i = R_{A_y} - F_y - q \cdot CD + R_{D_y} = 5{,}5 - 10 - 2 + 6{,}5 = 0.$$

Як видно, умова $\sum Y_i$ рівноваги виконується. Отже, реакції опор знайдені правильно.

Просторовою системою довільно розташованих сил називається система сил, лінії дії яких не лежать в одній площині і не перетинаються в одній точці. Рівнодіюча такої системи сил також рівна геометричній сумі цих сил, але зображується діагоналлю складних об'ємних фігур (тетраедр, октаедр і т. д.).

Умова рівноваги просторової системи довільно розташованих сил: алгебраїчна сума проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні осі координат повинна бути рівна нулю ($\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0$) і алгебраїчна сума моментів всіх сил щодо тих же осей координат повинна бути рівна нулю ($\sum M_x(\overline{F_i}) = 0;\ \sum M_y(\overline{F_i}) = 0;\ \sum M_z(\overline{F_i}) = 0.$).

Приклад 3.5. На вал (рис. 3.10 а) жорстко насаджені шків 1 і колесо 2. Визначити сили F_2, $F_{r2} = 0{,}4 \cdot F_2$, реакції опор А і В, якщо F_1 = 100 Н.

Розв'язання.

1. Зобразити вал з усіма діючими на нього силами, а також осі координат (рис. 3.10 б).

2. Далі визначаються сили F_2 та F_{r2}. За умови рівноваги вала, що має нерухому вісь, встановлено: $\sum M_z(F_i) = 0$; $F_1 \cdot d_1 / 2 - F_2 \cdot d_2 / 2 = 0$;

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot d_1}{d_2} = \frac{100 \cdot 0{,}3}{0{,}1} = 300 \text{ Н}; \quad F_{r2} = 0{,}4 \cdot F_2 = 0{,}4 \cdot 300 = 120 \text{ Н.}$$

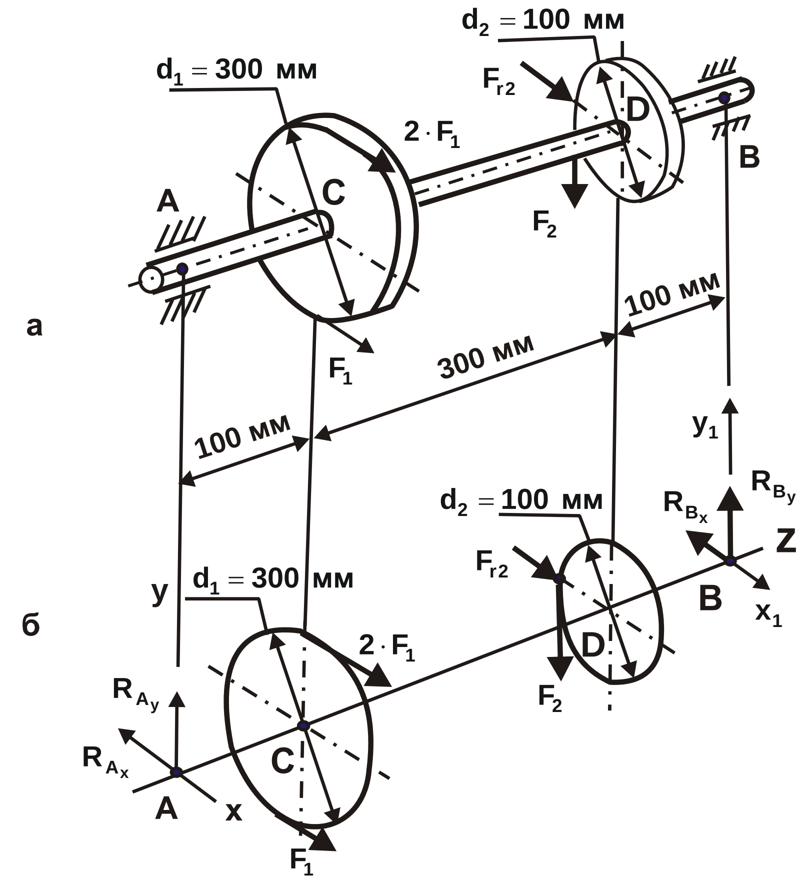

Рис. 3.10. **Розрахункова схема**

Слід скласти шість рівнянь рівноваги:

$$\sum M_x(F_i) = 0; \quad \sum M_x(F_i) = -R_{B_y} \cdot AB + F_2 \cdot AD = 0; \tag{3.1}$$

$$\sum M_y(F_i) = 0; \quad \sum M_y(F_i) = 3 \cdot F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_{B_x} \cdot AB = 0; \tag{3.2}$$

$$\sum M_{x1}(F_i) = 0; \quad \sum M_{x1}(F_i) = R_{A_y} \cdot AB - F_2 \cdot DB = 0; \tag{3.3}$$

$$\sum M_{y1}(F_i) = 0; \quad \sum M_{y1}(F_i) = R_{A_x} \cdot AB - 3 \cdot F_1 \cdot CB - F_{r2} \cdot DB = 0; \tag{3.4}$$

$$\sum X_i = 0; \quad \sum X_i = 3 \cdot F_1 + F_{r2} - R_{A_x} - R_{B_x} = 0; \tag{3.5}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad \sum Y_i = R_{A_y} - F_2 + R_{B_y} = 0. \tag{3.6}$$

Із рівнянь (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) визначено реакції опор:

$$R_{B_y} = \frac{F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{300 \cdot 0{,}4}{0{,}5} = 240 \text{ Н};$$

$$R_{B_x} = \frac{3 \cdot F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0{,}1 + 120 \cdot 0{,}4}{0{,}5} = 156 \text{ Н};$$

$$R_{A_y} = \frac{F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{300 \cdot 0{,}1}{0{,}5} = 60 \text{ Н};$$

$$R_{A_x} = \frac{3 \cdot F_1 \cdot CB + F_{r2} \cdot DB}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0{,}4 + 120 \cdot 0{,}1}{0{,}5} = 264 \text{ Н}.$$

Необхідно перевірити правильність знайдених реакцій опор за рівнянням (3.5): $\sum X_i = 3 \cdot F_1 + F_{r2} - R_{A_x} - R_{B_x} = 300 + 120 - 264 - 156 = 0$.

За рівнянням (3.6), маємо: $\sum Y_i = R_{A_y} - F_2 + R_{B_y} = 60 - 300 + 240 = 0$.

Отже, реакції R_{A_x}, R_{B_x} та R_{A_y}, R_{A_y} визначено правильно.

Порядок виконання роботи

Кожен студент отримує у викладача свої варіанти двох завдань із визначення реакцій опор балки (табл. 3.1 рис. 3.11,) та з визначення сил F_2 і $F_{r2} = 0{,}4 \cdot F_2$, реакцій опор вала за умови F_1 = 100 Н (рис. 3.12). На їх основі необхідно провести розрахунки та зробити висновки.

Таблиця 3.1

Значення зосередженої сили F, вигинного моменту M та навантаження q для визначення реакцій опор балок

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F, кН	5	8	10	7	4	5	9	11	10	4
M, кН·м	12	10	14	10	12	12	15	15	18	20
q, кН/м	2	5	6	3	1	2	6	5	5	2

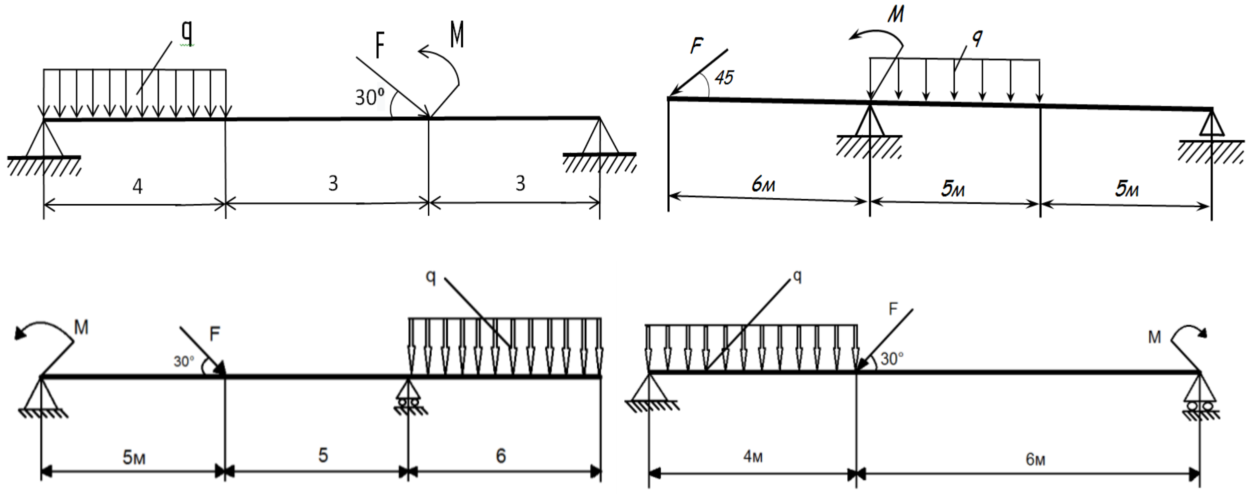

Рис. 3.11. **Розрахункові схеми для визначення реакцій опор балок**

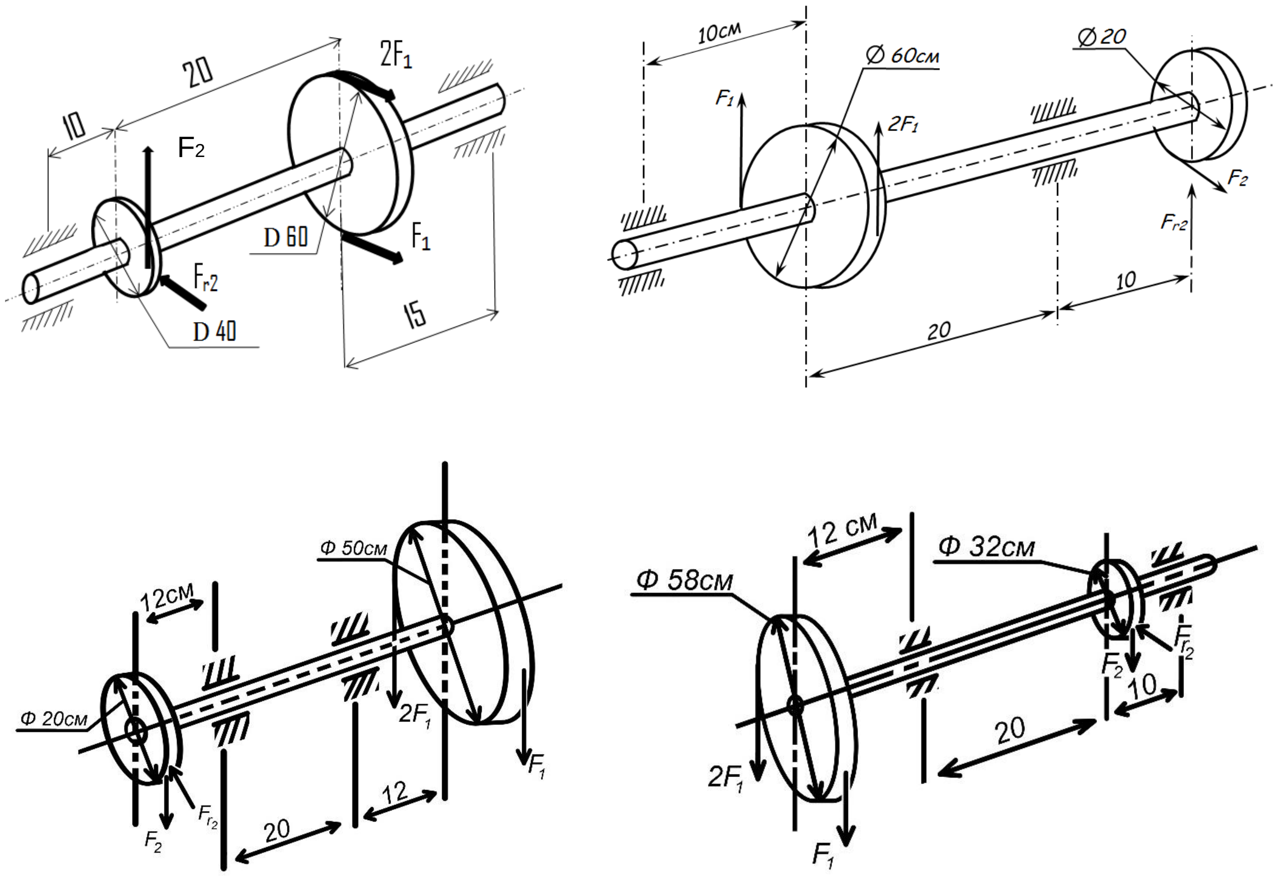

Рис. 3.12. **Розрахункові схеми вала, на який жорстко насаджені шків та колесо, з усіма діючими на них силами F_1, F_2 і $F_{r2} = 0{,}4 \cdot F_2$**

Звіт про виконану роботу

У звіті студент наводить умови рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил та розв'язання своїх двох варіантів завдань й робить висновки.

Література: [2; 4; 5; 7; 12; 13].

Питання для самоконтролю

1. Як визначається момент сили відносно точки?
2. Що таке головний вектор і головний момент системи сил?
3. Сформулюйте умови рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил.
4. Виконайте рисунки балкових опор та їх реакцій.
5. Напишіть систему рівнянь рівноваги для визначення реакцій в опорі із жорстким закладенням.

Тема 4. Центри ваги

Вивчення методів знаходження центрів ваги та їх застосування для вирішення практичних завдань.

Індивідуальне завдання. Визначення положення центра ваги плоских перетинів, складених із простих геометричних фігур, і профілів стандартного прокату.

Мета роботи – навчити студентів визначати положення центрів ваги простих геометричних фігур, плоских перетинів, складених із простих геометричних фігур і профілів стандартного прокату.

Загальні відомості

Система сил, лінії дії яких паралельні і лежать в одній площині, називається *плоскою системою паралельних сил*. *Центром паралельних* сил називається точка на лінії дії рівнодіючої, яка не міняє свого положення під час повороту всіх сил на один і той же кут. Для визначення положення центра паралельних сил С, знаходять його координати (рис. 4.1).

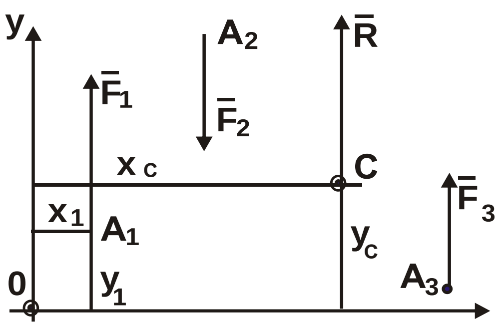

Рис. 4.1. **Координати центра паралельних сил**

Наприклад, є плоска система трьох паралельних сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, направлених в один бік, прикладених у точках A_1, A_2, A_3. Повернемо сили в положення, паралельне осі y. Оскільки рівнодіюча цих паралельних сил дорівнює алгебраїчній сумі, то отримаємо: $R = \sum F$ або $R = F_1 + F_2 + F_3$. Запишемо моменти сил системи щодо осі y. Згідно з теоремою Варіньона: $M(\overline{R}) = \sum M(\overline{F})$ або $R_{x_c} = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 = \sum F_x$, звідки $x_c = \dfrac{\sum F_x}{\sum F}$. Повернувши всі сили так, щоб вони виявилися паралельними осі x, на підставі аналогічних міркувань отримаємо: $y_c = \dfrac{\sum F_y}{\sum F}$.

Координати центру паралельних сил виражають x_c і y_c.

Розглянемо тіло, що складається з великої кількості елементарних частинок.

Центром тяжіння тіла називається центр паралельних сил тяжіння всіх елементарних частинок тіла.

Центр тяжіння є геометрична точка, яка може лежати поза тілом (наприклад, кільце, циліндр з отвором).

Сила ваги – це сила, з якою тіло притягується до землі. Центр ваги – це точка дотику сили тяжіння.

Положення центра ваги простих геометричних фігур:

1) у прямокутнику, квадраті, ромбі, паралелограмі – на перетині діагоналей (рис. 4.2);

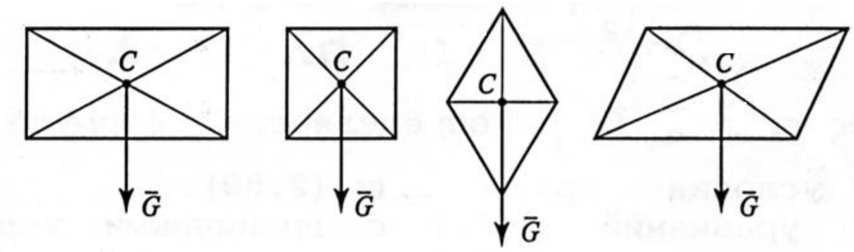

Рис. 4.2. **Центр ваги простих геометричних фігур**

2) у трикутнику – на перетині медіан (рис. 4.3): $x_c = \frac{1}{3}OB$, $y_c = \frac{1}{3}OA$;

3) у круговому секторі або півколі – в точці з координатами:

а) $x_C = r$, $y_C = \frac{2r}{3\pi}$ (рис. 4.4 а); б) $x_C = \frac{2r}{3\pi}$ (рис. 4.4 б);

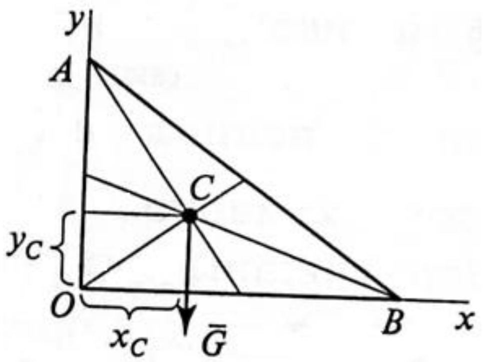

Рис. 4.3. **Центр ваги трикутника**

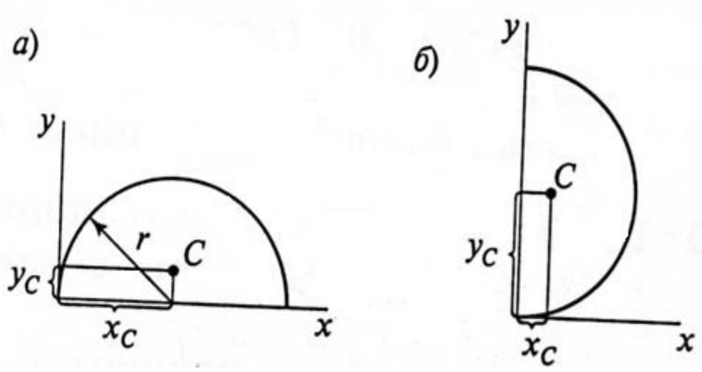

Рис. 4.4. **Центр ваги: а) кругового сектора; б) півкола**

4) у конусі або повній піраміді – на 1/3 висоти від основи (рис. 4.5):

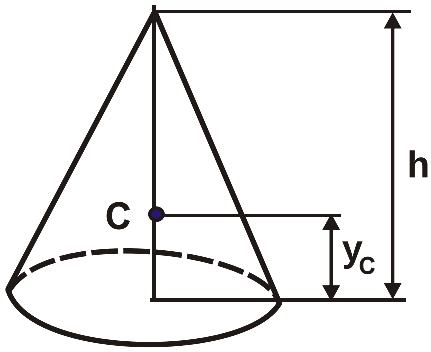

Рис. 4.5. **Центр ваги конуса (повної піраміди)**

Положення центра ваги плоских фігур прокатних профілів:

1) у балці двотаврової (рис. 4.6) – в точці з координатами $x_C = 0$; $y_C = h/2$, де h – висота двотавра;

2) у швелері (рис. 4.7) – в точці з координатами: $x_C = Z_0$; $y_C = h/2$, де h – висота швелера; Z_0 – відстань від центра ваги і y_C до зовнішньої грані стінки.

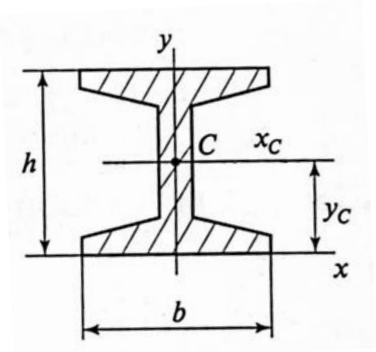

Рис. 4.6. **Центр ваги двотавра**

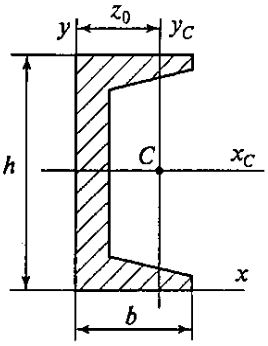

Рис. 4.7. **Центр ваги швелера**

Якщо плоска фігура має неправильну геометричну форму, то центр ваги такої фігури можна визначити двома способами:

• методом підвішування фігури на вістря;

• теоретичним методом, коли плоска фігура розбивається на певну кількість елементарних фігур, що мають правильну геометричну форму. Потім визначається положення центра ваги і площі кожної елементарної фігури. Координати центру ваги заданої складної фігури визначаються за формулами: $x_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$; $y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A_i}$, де A_i – площі елементарних фігур, на які розбита складна фігура; x_i, y_i – координати центра ваги кожної елементарної фігури щодо випадкових осей X і У.

Приклад 4.1. Визначити центр ваги перерізу, складеного з двутавра № 22 та швелера № 20, як показано на рис. 4.8.

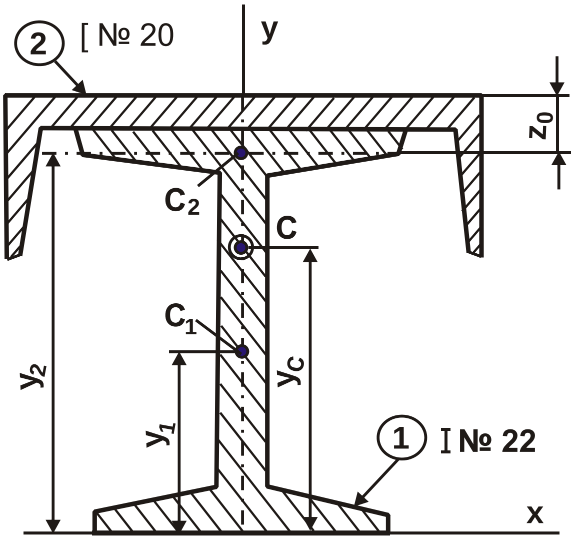

Рис. 4.8. **Розрахункова схема**

Розв'язання. З курсу креслення відомо, що номер профілю прокату відповідає найбільшому розміру його перетину, вираженого в сантиметрах.

Оскільки перетин, складений із двутавра та швелера, є фігурою, симетричною відносно осі y, то центр ваги такого перетину лежить на цій осі, тобто $x_C = 0$. За довідником визначають площі та координати центрів ваги двутавра 1 і швелера 2.

Для двотаврового перетину:

$$A_1 = 15{,}2 \text{ см}^2; \quad y_1 = \frac{22}{2} = 11 \text{ см}.$$

Для швелерового перетину:

$$A_2 = 12 \text{ см}^2; \qquad y_2 = 22 + d - z_0 = 22 + 0{,}32 - 1{,}25 = 21{,}07 \text{ см},$$

де d – товщина стінки швелера;

z_0 – розмір, який визначає положення центра ваги швелера.

Ординати центра тяжіння всього перерізу визначаються:

$$y_C = \frac{\sum(A_i \cdot y_i)}{\sum A_i}, \text{ тоді } \; y_C = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{15{,}2 \cdot 11 + 12 \cdot 21{,}07}{15{,}2 + 12} = 15{,}4 \text{ см}.$$

Порядок виконання роботи

Викладач видає групі студентів набір креслень різних плоских перетинів та профілів стандартного прокату і кожен студент на основі свого завдання аналітично визначає положення їх центра ваги.

Звіт про виконану роботу

Звіт складається з методики визначення центрів ваги різних геометричних фігур та результатів розрахунку положення центра ваги заданого перетину чи профілю стандартного прокату за своїм завданням.

Література [4; 5; 7; 9; 13].

Питання для самоконтролю

1. Що таке центр ваги?
2. Сформуйте основні методи знаходження центрів ваги.
3. Напишіть формули визначення координат центра ваги.
4. Зробіть рисунки простих геометричних фігур та покажіть, як можна визначити положення їх центрів ваги.

Тема 5. Основні поняття кінематики. Кінематика точки. Найпростіші рухи твердого тіла

Вивчення основних закономірностей кінематики точки й найпростіших рухів твердого тіла та практичне застосування набутих знань.

Індивідуальне завдання. Визначення відстані, швидкості, прискорення під час руху точки за заданою траєкторією.

Мета роботи – навчити студентів розв'язувати завдання кінематики для найпростіших рухів твердого тіла з визначення відстані, швидкості, прискорення під час руху точки за заданою траєкторією.

Загальні відомості

Кінематика – частина теоретичної механіки, в якій вивчаються рухи матеріальних точок і твердих тіл без урахування їх мас і сил, що діють на них. Класична механіка розглядає простір, в якому відбуваються спостережувані рухи матеріальних тіл, як тривимірний евклідовий простір. Час у кінематиці розглядається як величина, що безперервно змінюється і позначається буквою t. За одиницю часу приймають 1 секунду (с).

Лінія, що описується рухомою точкою в просторі, називається *траєкторією цієї точки.* Якщо траєкторія точки – пряма лінія, то рух точки називається прямолінійним; інакше – рух називається криволінійним.

Рівняння руху записується: $s = f(t)$, де s – відстань точки від початкового положення, яка є функцією часу; t – час руху точки від початкового моменту. Знаючи траєкторію точки та рівняння руху за цією траєкторією, можна визначити положення точки в будь-який момент часу, для чого слід у рівність $s = f(t)$ підставити час.

Координатний спосіб полягає в тому, що рух точки задається рухом її проекцій уздовж осей координат. Рівняння плоского руху точки в координатній формі записують: $x = f(t)$, $y = f_1(t)$.

Щоб при координатному способі завдання руху точки визначити рівняння траєкторії $y = f(x)$, необхідно з рівнянь руху виключити час. У разі переходу точки з одного положення в інше, яке відбувається за проміжок часу, точка переміщається на відстань s. Ця відстань має назву – *довжина шляху* (скорочено шлях). Вимірюється s в одиницях довжини, тобто в системі СІ – метр (м).

Швидкість V – це величина, що характеризує швидкість зміни пройденого шляху за одиницю часу:

$$V = \frac{ds}{dt}, \text{ м/с}; \qquad V_{cp} = \frac{s}{t}.$$

При рівномірному русі швидкість вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу: $V = s/t = const$.

Одиниця швидкості: $[V] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час}} = \text{метр в секунду} = \text{м/с}$.

Швидкість є величина векторна.

При прямолінійному рівномірному русі швидкість постійна за модулем й за напрямом, а вектор її співпадає з траєкторією.

При криволінійному русі швидкість точки за напрямом змінюється.

При нерівномірному русі точки модуль її швидкості зміняється.

Рух, в якому швидкість із часом зростає, називається *прискореним*; рух, в якому швидкість із часом сповільнюється, – *сповільненим.*

Прискорення є кінематична міра зміни вектора швидкості точки.

Прискорення є величина векторна. При прямолінійному русі точки вектор швидкості завжди співпадає з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також співпадає з траєкторією.

Прискорення є зміна швидкості в одиницю часу. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася, то середнє прискорення дорівнює $a_{cp} = \Delta V / \Delta t$.

Дійсне прискорення є межа, до якої прагне середнє прискорення за умови, коли проміжок часу також прагне до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}.$$

Таким чином, враховуючи, що $V = \frac{ds}{dt}$, отримаємо $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості або другій похідній координат (відстань від початку відліку переміщення) за часом. *Одиниця прискорення:*

$$[a] = \frac{[V]}{[t]^2} = \frac{\text{довжина}}{\text{час у квадраті}} = \text{метр на секунду у квадраті} = \text{м/с}^2.$$

Дотичне прискорення a_τ – це величина, що характеризує швидкість зміни величини швидкості за одиницю часу:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \text{ м/с}^2; \qquad a_\tau = \frac{V - V_0}{t}.$$

Дотичне прискорення завжди спрямоване по лінії вектора швидкості (рис. 5.1). При криволінійному русі точки, швидкість змінює свій напрям. Вектор дійсного прискорення є межа, до якої прямує відношення вектора приросту швидкості до відповідного проміжку часу, коли останній прямує до нуля: $a_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

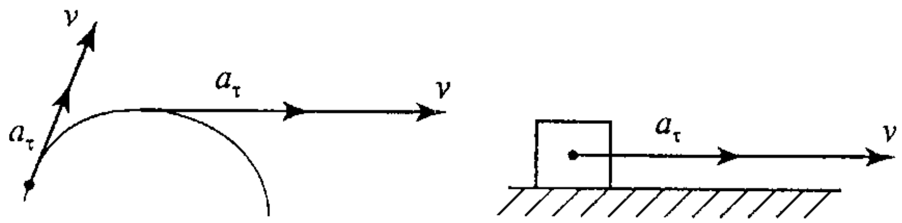

Рис. 5.1. **Напрямок дотичного прискорення**

Проекція повного прискорення на нормаль до траєкторії називається *нормальним прискоренням*; проекція повного прискорення на дотичну до траєкторії називається дотичним прискоренням. *Дотичне прискорення називають тангенціальним.*

Теорема. Нормальне прискорення рівне квадрату швидкості, що ділиться на радіус кривизни траєкторії в даній точці, а дотичне прискорення – це перша похідна швидкості за часом.

Якщо немає зміни швидкості по модулю, то $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$; якщо немає зміни швидкості за напрямом (прямолінійний рух), то $a_n = V^2/\infty = 0$.

Робимо висновок , що дотичне прискорення характеризує зміну швидкості тільки за модулем, а нормальне – тільки за напрямом.

Знаючи дотичне нормальне прискорення, можна обчислити модуль і напрям повного прискорення за формулою: модуль прискорення $a=\sqrt{a_{\tau}^{2}+a_{n}^{2}}$. Нормальне прискорення завжди спрямоване вздовж радіуса до центра кривизни траєкторії (рис. 5.2).

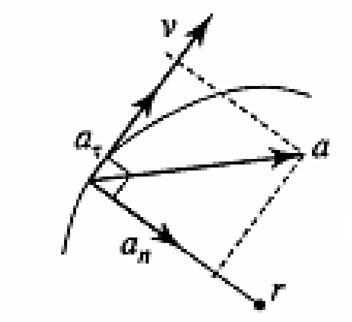

Рис. 5.2. **Напрям нормального прискорення**

Види руху точки залежно від прискорення:

1) рівномірний – це рух точки з постійною за величиною швидкістю. Характеризується такими величинами:

$$V=\frac{s}{t}=\mathrm{const}; \quad s=V\cdot t; \quad \alpha_{\tau}=0; \quad a_{н}=\frac{V^{2}}{r};$$

2) рівнозмінний (рівноприскорений, рівносповільнений) – це рух точки з постійним дотичним прискоренням:

$$|a_{\tau}|=\mathrm{const}; \quad a_{\tau}=\frac{V-V_{0}}{t}; \; s=V_{0}t+\frac{a_{\tau}t^{2}}{2}; \; a_{n}=\frac{V^{2}}{r}; \; V=V_{0}+a_{\tau}t.$$

Розрізняють два види простих рухів твердого тіла: *поступальний* рух і *обертальний* рух навколо нерухомої осі. При *поступальному русі* всі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості й прискорення.

Рух, за якого принаймні дві точки твердого тіла або незмінної системи залишаються нерухомими, називається *обертальним*.

Кутове переміщення тіла є функція часу, отже, закон обертального руху в найзагальнішому вигляді запишемо так: $\varphi=f(t)$. Шлях будь-якої точки тіла, що обертається: $s=r\varphi$, де r – відстань точки від осі обертання. Швидкість будь-якої точки визначається: $V=\frac{ds}{dt}=\frac{d(r\varphi)}{dt}=r\frac{d\varphi}{dt}$. Кутова швидкість є кінематичною мірою руху тіла, що обертається, та характеризує швидкість його кутового переміщення: $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$.

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом. Одиниця кутової швидкості:

$$[\varpi]=\frac{(\varphi)}{[t]}=\frac{\text{плоский кут}}{\text{час}}=\text{радіан в секунду}=\text{рад/с}.$$

Формула для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що обертається: $V = \omega r$.

У техніці часто швидкість обертання виражають в обертах за хвилину, позначають буквою n і називають частотою обертання. Встановимо залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання, вираженими відповідно в рад/с та с$^{-1}$: $\omega = \pi n / 30$ рад/с, де n – частота обертання тіла (об/хв або хв$^{-1}$).

Рівномірний обертальний рух. Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю, то рух називається рівномірним. Формули рівномірного обертального руху: $\omega = \mathrm{const}$; $\varphi = \omega t$.

Дотичне, нормальне і повне прискорення будь-якої точки тіла, що рівномірно обертається, визначають так:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = 0; \quad a_H = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_H^2} = a = \omega^2 r.$$

Нерівномірний обертальний рух. Якщо кутова швидкість тіла, що обертається, з часом змінюється, то рух називається нерівномірним. У найзагальнішому вигляді формули нерівномірного обертального руху запишуть: $\varphi = f(t)$; $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного тіла, що обертається: $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d(\omega r)}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt}$. Вираз $\dfrac{d\omega}{dt}$ позначають ε і називають кутовим прискоренням. Кутове прискорення є кінематичною мірою зміни кутової швидкості тіла, що обертається: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt_2}$.

Одиниця кутового прискорення:

$$[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{[\varphi]}{[t]^2};$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{плоский кут}}{\text{время в квадрате}} = \text{радіан на секунду в квадрате} = \text{рад/с}^2.$$

Формула для визначення дотичного прискорення будь-якої точки тіла, що обертається нерівномірно: $a_\tau = \varepsilon r$. Нормальне прискорення визначається за такою самою формулою, як і в разі рівномірного обертання, тобто $a_H = \omega^2 r$. Повне прискорення: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_н^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2}$, тоді $a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Якщо напрям кутового прискорення співпадає з напрямом обертання, то обертальний рух є прискореним, і навпаки (рис. 5.3).

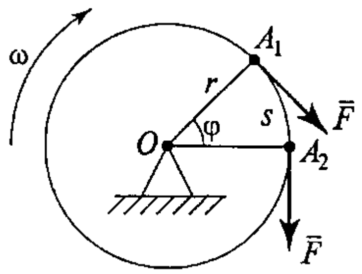

Рис. 5.3. **Схема обертального руху**

$a_Н = \omega^2 r$; $a_\tau = 0$; $V = \omega r$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі з постійним кутовим прискоренням, то рух називається рівнозмінним. Формули кутової швидкості та кутового переміщення:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t; \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Приклад 5.1. Точка рухається прямолінійно за законом $s = t^4 + 2t$ (s – в метрах; t – в секундах). Знайти її середнє прискорення в проміжку між моментами часу $t_1 = 5$ с; $t_2 = 7$ с, а також її дійсне прискорення в момент часу $t_3 = 6$ с.

Розв'язання. Спочатку необхідно визначити швидкість точки:

$$V = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 2.$$

Після підстановки в отриманий вираз замість t його значення $t_1 = 5$ с; $t_1 = 7$ с, маємо: $V_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 = 502$ м/с; $V_7 = 4 \cdot 7^3 + 2 = 1\,374$ м/с.

Отже, збільшення швидкості за даний проміжок часу $\Delta t = 7 - 5 = 2$ с дорівнює: $\Delta V = V_7 - V_5 = 1\,374 - 502 = 872$ м/с^2.

Середнє прискорення точки: $a_{ср} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{872}{2} = 436$ м/с^2.

Щоб визначити дійсне прискорення точки, необхідно встановити похідну від швидкості за часом: $a = \frac{dV}{dt} = 12 \cdot t^2$. Підставляючи в залежність замість t значення $t_3 = 6$ с, встановлюємо: $a_0 = 12 \cdot 6^2 = 432$ м/с^2.

Приклад 5.2. З рівняння руху точки:

$x = 4 - 4 \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{6}$; $\quad y = 2 - 4 \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{6}$ необхідно визначити:

1) рівняння траєкторії руху точки та нарисувати траєкторію;
2) початкове положення точки на траєкторії;
3) моменти часу, коли точка перетинає осі координат;
4) закон руху точки по траєкторії $s = \varphi(t)$, приймаючи за початок відліку відстаней початкове положення точки;
5) час t, за який точка пройде повне коло.

Розв'язання.

1. Щоб знайти рівняння траєкторії руху точки, необхідно із заданих рівнянь руху виключити час. Для цього рівняння руху слід розв'язати відносно величин $4 \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{6}$ і $4 \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{6}$ та звести отримані результати в квадрат:

$$(x-4)^2 = 4^2 \cdot \left(\sin\frac{\pi \cdot t}{6}\right)^2; \quad (y-2)^2 = 4^2 \cdot \left(\cos\frac{\pi \cdot t}{6}\right)^2.$$

Складаючи ці рівняння, отримаємо рівняння кола з радіусом R = 4 см і центром кола, розташованим в точці C(4; 2):

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4^2.$$

2. Для визначення положення точки в початковий момент часу необхідно підставити значення $t = 0$ в рівняння руху:

$$x = 4 - 4 \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{6} = 4 - 4 \cdot \sin\frac{\pi \cdot 0}{6} = 4 \text{ см};$$

$$y = 2 - 4 \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{6} = 2 - 4 \cdot \cos\frac{\pi \cdot 0}{6} = -2 \text{ см}.$$

За умови $t = 0$ точка займає положення M_0(4; –2).

3. Оскільки величина x може набувати значень $0 \le x \le 8$, а величина y – значень $-2 \le y \le 6$, то точки перетину з віссю x:

$$4^2 + (y-2)^2 = 4^2 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = 2,$$

і з віссю y:

$$2^2 + (x-4)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{12}.$$

4. Для визначення закону руху точки по траєкторії слід скористатися формулою: $s = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt$.

З умови $t > 0$ випливає, що з виходом із початкового положення координата x збільшується, координата y також збільшується. Цей напрям слід прийняти за позитивний, тоді

$$s = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt = \pm\int_0^t \sqrt{\left(-\frac{4\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{6}\right)^2 + \left(-\frac{4\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{6}\right)^2} \cdot dt =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi}{6} \cdot \int_0^t 1 \cdot dt = \frac{4 \cdot \pi}{6} \cdot t\Big|_0^t = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot t.$$

5. Далі потрібно самостійно визначити час T проходження точкою повного кола, де T – час, після якого шлях s стане рівним довжині кола.

Приклад 5.3. Точка рухається згідно з законом: $s = 0{,}1 \cdot t^2 + t$, де t – в секундах; S – в метрах.

Визначити середню швидкість точки за проміжок часу між кінцем 10-ої та кінцем 20-ої секунд й істинну швидкість в кінці 20-ї секунди.

Розв'язання. Для визначення середньої швидкості точки слід встановити збільшення часу і шляху за вказаний проміжок часу:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 – 10 = 10 \text{ с};$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \left(0{,}1 \cdot t_2^2 + t_2\right) - \left(0{,}1 \cdot t_1^2 + t_1\right) = 0{,}1 \cdot 20^2 + 20 – 0{,}1 \cdot 10^2 – 10 = 40 \text{ м}.$$

Середня швидкість точки визначається:

$$V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ м/с}.$$

Для визначення істинної швидкості точки необхідно продиференціювати рівняння руху за часом, в результаті чого отримана формула, що виражає залежність істинної швидкості від часу:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(0{,}1 \cdot t^2 + t\right)}{dt} = 0{,}2 \cdot t + 1.$$

Після підстановки в цей вираз часу, отримано значення істинної швидкості в кінці 20-ї секунди: $V_{20} = 0{,}2 \cdot t_2 + 1 = 0{,}2 \cdot 20 + 1 = 5$ м/с.

Приклад 5.4. Стрижень OA обертається навколо осі O в площині рисунка (рис. 5.4) за законом $\varphi = b \cdot t$; по стрижню рухається точка M за законом $OM = a \cdot t$. Знайти траєкторію абсолютного руху точки M.

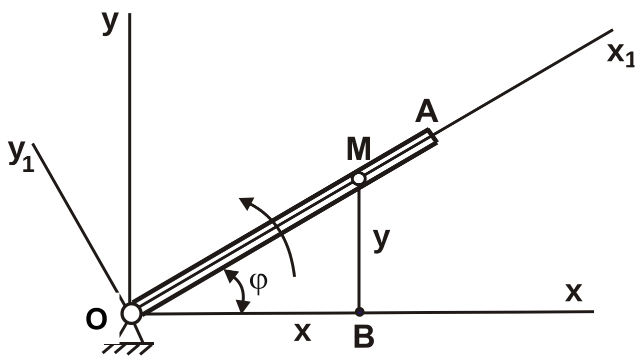

Рис. 5.4. **Розрахункова схема**

Розв'язання. Слід прийняти нерухомою систему координат xOy і рухому систему x_1Oy_1, незмінно пов'язаною зі стрижнем OA. У такому випадку переносним рухом буде обертання рухомих осей разом з умовно закріпленою на них в кожен момент точкою М навколо точки О, а відносним рухом – рух точки М уздовж стрижня.

Рівняння переносного обертального руху запишемо: $\varphi = b \cdot t$.

Рівняння відносного руху набуває вигляду: $x_1 = OM = a \cdot t$.

Визначимо рівняння абсолютного руху точки в координатній формі, для того координати x і y в нерухомій системі відліку xOy слід виразити як функцію часу t. З рис. 5.4 маємо: $x = OB = OM\cos\varphi$; $y = BM = OM\sin\varphi$ або, підставляючи значення φ і ОМ, отримаємо:

$$x = a \cdot t \cdot \cos bt; \quad y = a \cdot t \cdot \sin bt.$$

Щоб визначити рівняння траєкторії абсолютного руху точки, слід виключити з рівняння руху час t, розділивши друге рівняння на перше:

$$\frac{y}{x} = \frac{a \cdot t \cdot \sin bt}{a \cdot t \cdot \cos bt} = \operatorname{tg} bt, \qquad \text{звідки} \qquad t = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Крім того, після зведення рівнянь руху у квадрат і склавши їх, отримаємо: $x^2 + y^2 = a^2 \cdot t^2$; $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x}$.

Таким чином, отримано рівняння траєкторії абсолютного руху траєкторії точки М. Ця траєкторія є *архімедовою спіраллю*.

Порядок виконання роботи

Отримати завдання у викладача та розв'язати завдання з визначення відстані, швидкості, прискорення під час руху точки за заданою траєкторією.

Звіт про виконану роботу

Звіт складається з основних понять кінематики точки й найпростіших рухів твердого тіла та розв'язання заданого завдання.

Література [2; 5; 9; 12; 13].

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення траєкторії переміщення точки.
2. Що таке швидкість та прискорення переміщення точки?
3. Дайте характеристику рівномірному та рівнозмінному руху.
4. Дайте характеристику поступальному та обертальному руху.
5. Що таке кутова швидкість?

Тема 8. Механічна потужність при поступальному й обертальному русі. Теореми динаміки

Визначення механічної потужності при поступальному й обертальному русі та вивчення теорем динаміки для вирішення практичних завдань.

Індивідуальне завдання. Розв'язання задач із визначення потужності при поступальному і обертальному русі тіл та задач із визначення руху невільної матеріальної точки з використанням теорем динаміки.

Мета роботи – навчити студентів розв'язувати задачі з визначення механічної потужності при поступальному й обертальному русі та визначення законів руху тіла за допомогою теорем динаміки.

Загальні відомості

Робота, виконана якоюсь силою, може бути здійснена за різні проміжки часу. Щоб охарактеризувати, наскільки швидко відбувається робота, у механіці існує поняття потужності, яка позначається P. *Потужністю сили* називається робота, виконана за одиницю часу.

Потужність при поступальному русі. Якщо робота відбувається рівномірно, то потужність обчислюють за формулою: $P = \frac{W}{t}$.

Якщо напрямок сили й напрям переміщення збігаються, то цю формулу можна переписати в іншій формі: $P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t}$ або $P = FV$.

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість точки її додатка. Одиниця потужності:

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\text{робота}}{\text{час}} = \text{Джоуль на секунду} = \text{Ват (Вт)}.$$

Потужність при обертальному русі. Якщо робота відбувається силою, прикладеною до тіла що обертається, і притому рівномірно, то потужність у цьому випадку обчислюють за формулою:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{T\varphi}{t} \quad \text{або} \quad P = T\omega.$$

Потужність сили, прикладеної до тіла що обертається, дорівнює добутку обертаючого моменту на кутову швидкість.

Коефіцієнтом корисної дії η називається відношення корисної роботи (або потужності) до витраченої роботи:

$$\eta = \frac{W_к}{W_в} = \frac{P_к}{P_в}.$$

Якщо коефіцієнт корисної дії (к. к. д.) враховує тільки механічні втрати, то він називається механічним.

К. к. д. – завжди правильний дріб, іноді його виражають у відсотках:

$$\eta\ \% = \left(\frac{W_К}{W_в}\right)100.$$

Чим ближче к. к. д. до одиниці, тим продуктивніше машина.

Якщо ряд механізмів з'єднаний послідовно, тобто кожний наступний механізм одержує рух від веденої ланки попереднього механізму, то загальний к. к. д. η дорівнює добутку к. к. д. всіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \ldots \cdot \eta_н,$$

де η_1, η_2, η_3, ..., $\eta_н$ – к. к. д. кожного механізму окремо.

Теореми динаміки. Кількість руху матеріальної точки. Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між зміною динамічних заходів руху матеріальної точки і заходами дії сил, прикладених до цієї точки.

Кількістю руху mV матеріальної точки називається вектор, рівний добутку маси точки на її швидкість, який має напрям швидкості. Кількість руху є динамічна міра руху матеріальної точки. Одиниця кількості руху:

$$[mV] = [m]\ [V] = кг \cdot м/с.$$

Імпульсом Ft постійної сили F називається вектор, рівний добутку сили на час дії. Імпульс сили є міра її дії в часі. Одиниці імпульсу сили:

$$[Ft] = [F]\ [t] = [m]\ [\alpha]\ [t] = (кг \cdot м/с^2) \cdot с = кг \cdot м/с.$$

Кількість руху й імпульс сили виражаються в однакових одиницях, зв'язок між ними встановлює ***теорема про зміну кількості руху***, що формулюється так: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу.

Для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією постійної сили F рух є рівнозмінним. Формула швидкості: $V = V_0 + \alpha t$.

Переносимо V_0 у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу m матеріальної точки: $mV - mV_0 = m\alpha t$. Але добуток маси точки на її прискорення є сила, під дією якої точка рухається, отже: $mV - mV_0 = Ft$. У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час t, а в правій – імпульс сили за той же проміжок часу.

Якщо рух сповільнений ($V < V_0$), то вектор сили направлений у бік, протилежний швидкості. Якщо до матеріальної точки приклали декілька постійних сил, то зміна кількості руху дорівнює сумі (алгебраїчної, якщо сили діють по одній прямій, або векторної, якщо сили діють під кутом один до одного) імпульсів даних сил: $mV - mV_0 = \sum(F_i t)$.

На довільну точку системи маси m діє внутрішня сила $\bar{F}_{вн}$ і зовнішня сила $\bar{F}$. Згідно основного рівняння динаміки: $m\bar{\alpha} = \bar{F}_{вн} + \bar{F}$. Для всієї системи: $\sum m\bar{\alpha} = \sum\bar{F}_{вн} + \sum\bar{F}$, де $\sum\bar{F}_{вн}$ – головний вектор внутрішніх сил системи, рівний, як відомо, нулю; $\sum\bar{F} = \bar{R}$ – головний вектор зовнішніх сил. Тоді $\sum m\bar{\alpha} = M\alpha_c$; або $M\alpha_c = \bar{R}$, де M – маса системи; $\bar{\alpha}_c$ – прискорення центра мас. Іншими словами, кількість руху системи дорівнює: $\bar{K} = \sum m\bar{V}$.

Головний момент кількості руху або кінетичний момент механічної системи відносно осі. У разі поступального руху твердого тіла швидкості всіх його точок однакові й дорівнюють швидкості його центру мас, тобто $\bar{V} = \bar{V}_c$. Отже, $T = \sum\frac{mV^2}{2} = \frac{V_c^2}{2}\sum m$ або $T = \frac{MV_c^2}{2}$, де M – маса всього тіла. У разі поступальної ходи твердого тіла його кінетична енергія дорівнює половині маси тіла на квадрат швидкості його центру мас. У разі обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі z лінійна швидкість у його довільній точці A маси m складає ωr. Отже,

$$T = \sum\frac{mV^2}{2} = \sum\frac{mr^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum mr^2.$$

Величина $\sum mr^2$ називається моментом інерції тіла відносно осі обертання і позначається I_z, тобто $I_z = \sum mr^2$. Тоді $T = I_z\omega^2/2$.

У разі обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі його кінетична енергія дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

Приклад 8.1. Визначити роботу, яка виконується при рівномірному підйомі вантажу $G = 200$ Н по похилій площині на відстань $S = 6$ м, якщо кут, утворений площиною з горизонтом, $\alpha = 30^0$, а коефіцієнт тертя ковзання дорівнює $f = 0{,}01$ (рис. 8.1).

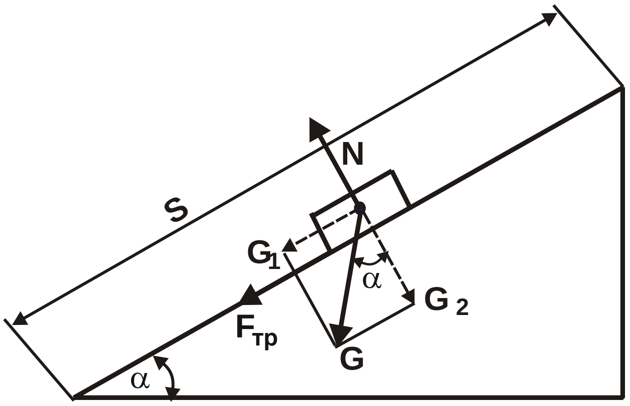

Рис. 8.1. **Розрахункова схема**

Розв'язання. Розкладемо силу ваги вантажу G на дві взаємно перпендикулярні складові G_1 і G_2, (паралельну і перпендикулярну), відповідно,похилій площині згідно з другим законом тертя ковзання. Тоді сила тертя $F_{тр}$ визначається $F_{тр} = f \cdot G_2 = f \cdot G \cdot \cos\alpha$.

Після застосування теореми про роботу рівнодіючої сили, визначимо шукану роботу як суму робіт сил опору (робота сили G_2 і нормальної реакції N дорівнює нулю, оскільки ці сили перпендикулярні напряму переміщення s): $W_\Sigma = G_1 \cdot s + F_{тр} \cdot s = G \cdot s \cdot \sin\alpha + f \cdot G \cdot s \cdot \cos\alpha$.

Після підстановки числових значень, отримаємо:

$$W_\Sigma = 200 \cdot 6 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 0{,}866 = 610{,}4 \text{ Дж.}$$

Приклад 8.2. За допомогою ременя шківа передається потужність $P = 14{,}72$ кВт. Діаметр ремінного шківа $D = 1\ 000$ мм, кутова швидкість $\omega = 5\pi$ рад/с. Припускаючи, що натяг S_1 провідної частини ременя удвічі більший натягу S_2 веденої частини, необхідно визначити S_1 і S_2 (рис. 8.2).

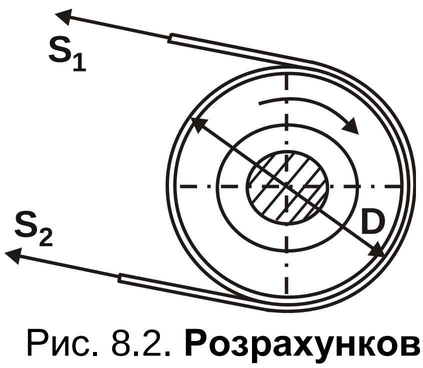

Рис. 8.2. **Розрахункова схема**

Розв'язання. Різниця натягу частин дорівнює силі тертя, що діє між ременем і шківом, і в даному випадку є окружним зусиллям. Обертальний момент, що діє на шків, дорівнює: $T = (S_1 - S_2) \cdot \dfrac{D}{2} = S_2 \cdot \dfrac{D}{2}$.

З іншого боку, обертальний момент можна визначити, знаючи передану потужність і кутову швидкість: $T = \dfrac{P}{\omega} = \dfrac{14720}{5 \cdot \pi}$ = 936 Н·м.

Виходячи із цього, можна визначити натяг веденої частини ременя:

$$S_2 = \frac{2 \cdot T}{D} = \frac{2 \cdot 936}{1} = 1\,872 \text{ Н.}$$

За заданою умовою натяг провідної частини в 2 рази більше натягу веденої частини, отже: $S_1 = 2 \cdot S_2 = 2 \cdot 1\,872 = 3\,744$ Н.

Пример 8.3. Тіло опускається без початкової швидкості по похилій площині, що становить з горизонтом кут $\alpha = 30^0$ (рис. 8.3). Визначити час t, протягом якого швидкість руху тіла досягне 13,9 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}25$.

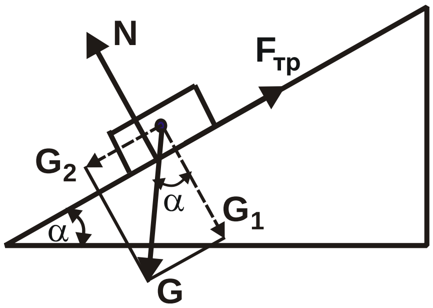

Рис. 8.3. **Розрахункова схема**

Розв'язання. Розглянемо тіло, як матеріальну точку, що рухається під дією сили тяжіння G, сили тертя $F_{тр}$ і нормальної реакції N по похилій площині. Розкладемо G на складові G_1 і G_2, одна з яких перпендикулярна, а інша – паралельна похилій площині, і застосуємо теорему про зміну кількості руху: $m \cdot V - m \cdot V_0 = \sum(F_i \cdot t)$.

Спроектуємо цю векторну рівність на напрям похилої площини, в результаті чого отримаємо: $m \cdot V - m \cdot V_0 = G_2 \cdot t - F_{тр} \cdot t$.

Застосувавши другий закон тертя ковзання і після підстановки значень, отримаємо: $\frac{G \cdot V}{g} = (G \cdot \sin\alpha - f \cdot G \cdot \cos\alpha) \cdot t$, звідки

$$t = \frac{V}{g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)} = \frac{13{,}9}{9{,}81 \cdot (0{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}866)} = 5 \text{ с.}$$

Порядок виконання роботи

Отримати завдання у викладача та розв'язати завдання з визначення механічної потужності при поступальному чи обертальному русі або завдання з визначення законів руху тіла за допомогою теорем динаміки.

Звіт про виконану роботу

Звіт складається з основних понять механічної потужності при поступальному й обертальному русі, теорем динаміки та розв'язання заданого завдання.

Література [4; 5; 7; 11; 13].

Питання для самоконтролю

1. Що таке механічна потужність?
2. Напишіть формули визначення механічної потужності при поступальному й обертальному русі.
3. Поясніть сутність коефіцієнта корисної дії (к. к. д.).
4. Що таке імпульс сили та кількість руху?
5. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху.
6. Що таке кінетична та потенційна енергії?

Тема 9. Основні поняття опору матеріалів. Розтягування і стискання

Вивчення методик розрахунку параметрів силового навантаження елементів конструкцій під час їх розтягування та стискання.

Індивідуальне завдання. Побудова епюр повздовжніх сил, нормальних напружень та визначення переміщень вільного кінця стрижня під час його розтягування та стискання.

Мета роботи – навчити студентів розв'язувати задачі опору матеріалів під час їх розтягування та стискання.

Загальні відомості

Розтягуванням або стисканням називається такий вид деформації, за яким в поперечному перерізі стрижня виникає один внутрішній силовий фактор – поздовжня сила N, яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на поздовжню вісь зовнішніх сил, що діють на відсічену частину стрижня.

Правило знаків для сили *N*: під час розтягування поздовжня сила позитивна, при стисканні – негативна. Під час розтягування (стискання) бруса в його поперечних перетинах виникають нормальні напруження $\sigma = N/A$ (де A – площа поперечного перерізу). Для нормальних напружень приймається теж правило знаків, що і для поздовжніх сил. Зміна довжини бруса (подовження або вкорочення) дорівнює алгебраїчній сумі подовжень його окремих ділянок і обчислюється за формулою Гука:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i},$$

де N_i, l_i, A_i – відповідно поздовжня сила, довжина і площа перетину в межах кожної ділянки бруса; Е – модуль поздовжньої пружності.

Послідовність розв'язання завдання.

1. Розбити брус на ділянки, починаючи від вільного кінця. Межами ділянок є перетини, в яких прикладені зовнішні сили і місця зміни розмірів поперечного перерізу.

2. Визначити за методом перетину поздовжню силу для кожної ділянки (ординати епюри N), побудувати епюру поздовжніх сил N. Провівши паралельно осі бруса базову (нульову) лінію епюри, відкласти перпендикулярно їй в довільному масштабі одержувані значення ординат. Через кінці ординат провести лінії, проставити знаки і заштрихувати епюру лініями, паралельними ординатам.

3. Для побудови епюри нормальних напружень визначаються напруження в поперечних перетинах кожної з ділянок. У межах кожної ділянки напруження постійні, тобто епюра на даній ділянці зображується прямою, паралельною осі бруса.

4. Переміщення вільного кінця бруса визначається сумою подовжень (вкорочень) ділянок бруса, обчислених за формулою Гука.

Приклад 9.1. Для даного ступінчатого бруса (рис. 9.1 а) побудувати епюру поздовжніх сил, епюру нормальних напружень і визначити переміщення вільного кінця бруса, якщо $E=2\cdot10^5$ МПа; $F_1=30$ кН; $F_2=38$ кН; $F_3=42$ кН; $A_1=1{,}9\cdot10^2$ мм^2; $A_2=3{,}1\cdot10^2$ мм^2.

Розв'язання.

1. Відзначаємо ділянки, як показано на рис. 9.1 а.

2. Визначаємо значення поздовжньої сили N на ділянках бруса:

$$N_1=0;\ N_{II}=F_I=30\text{ кН};\ N_{III}=F_I=30\text{ кН};\ N_{IV}=F_I-F_2=-8\text{ кН};$$

$$N_V=F_1-F_2-F_3=-50\text{ кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 9.1 б).

3. Визначаємо значення нормальних напружень:

$$\sigma_I=\frac{N_1}{A_1}=0;\quad \sigma_{II}=\frac{N_{II}}{A_1}=\frac{30\cdot10^3}{1{,}9\cdot10^2}=158\text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_{III}=\frac{N_{III}}{A_2}=\frac{30\cdot10^3}{3{,}1\cdot10^2}=96{,}8\text{ Н/мм}^2;\ \sigma_{IV}=\frac{N_{IV}}{A_2}=-\frac{8\cdot10^3}{3{,}1\cdot10^2}=-25{,}8\text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_V=\frac{N_V}{A_2}=-\frac{50\cdot10^3}{3{,}1\cdot10^2}=-163\text{ Н/мм}^2.$$

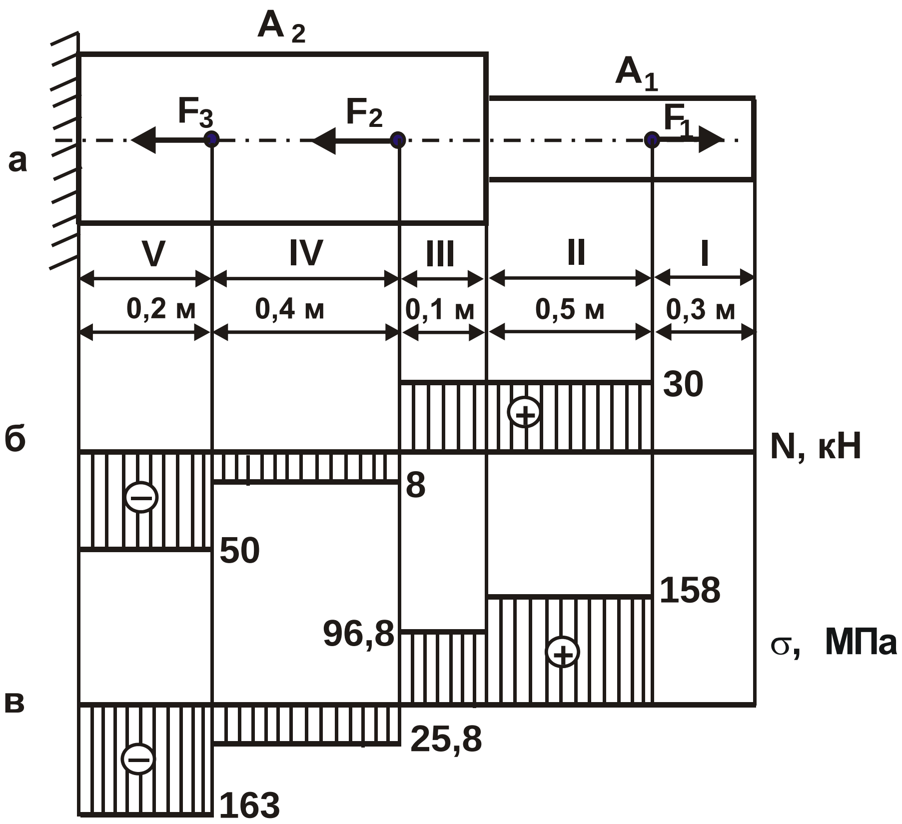

Рис. 9.1. **Розрахункова схема**

Будуємо епюру нормальних напружень (рис. 9.1 в).

5. Визначаємо переміщення вільного кінця бруса.

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} + \Delta l_V;$$

$$\Delta l_I = \frac{N_I \cdot l_I}{E \cdot A_I} = 0; \quad \Delta l_{II} = \frac{N_{II} \cdot l_{II}}{E \cdot A_I} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}9 \cdot 10^2} = 0{,}394 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III} \cdot l_{III}}{E \cdot A_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}1 \cdot 10^2} = 0{,}0484 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{IV} = -\frac{N_{IV} \cdot l_{IV}}{E \cdot A_2} = -\frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}1 \cdot 10^2} = -0{,}0516 \text{ мм};$$

$$\Delta l_V = -\frac{N_V \cdot l_V}{E \cdot A_2} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}1 \cdot 10^2} = -0{,}161 \text{ мм}.$$

$$\Delta l = 0{,}394 + 0{,}0484 - 0{,}0516 - 0{,}161 \approx 0{,}23 \text{ мм}.$$

Виходячи з умови міцності, можна вирішувати три види завдань:

• перевірка міцності $\sigma = N / A \le [\sigma]$;

• проектний розрахунок (підбір перерізу) $[A] \ge N \cdot [\sigma]$;

• визначення допустимого навантаження $[N] \le A \cdot [\sigma]$, де $[\sigma]$ – допустиме напруження, МПа.

Порядок виконання роботи

Отримати варіант завдання (табл. 9.1, рис. 9.2) у викладача та розв'язати задачу з побудови епюр повздовжніх сил, нормальних напружень та визначення переміщень вільного кінця стрижня під час його розтягування та стискування, якщо модуль пружності для сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблиця 9.1

Значення повздовжніх сил F_1 і F_2, площ поперечного перерізу стрижня A_1 і A_2 та довжини його ділянки за варіантами

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, Н	10	15	25	10	15	20	30	40	35	15
F_2, Н	30	30	40	45	60	50	70	55	65	60
A_1, мм^2	200	100	150	200	250	200	100	150	250	100
A_2, мм^2	400	200	300	500	600	500	250	300	400	250
a, м	0,2	0,3	0,2	0,4	0,5	0,5	0,2	0,3	0,4	0,5

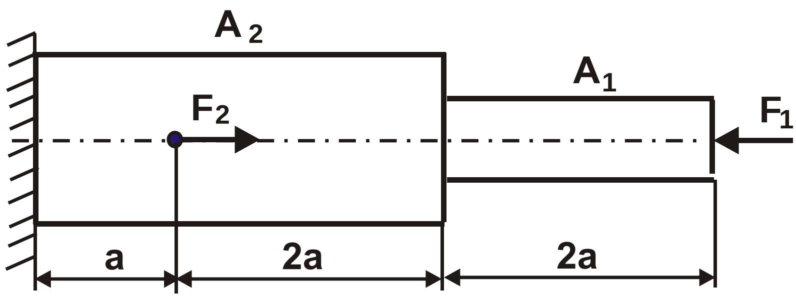

Рис. 9.2. **Розрахункова схема**

Звіт про виконану роботу

Звіт складається з основних понять побудови епюр повздовжніх сил і нормальних напружень, визначення переміщень вільного кінця стрижня під час його розтягування та розв'язку заданого завдання.

Література [2; 4; 6; 13].

Питання для самоконтролю

1. Що вивчається в розділі "Опір матеріалів"?

2. Наведіть відмінність пластичної деформації від пружної деформації.

3. Що таке механічне напруження та яка його одиниця виміру?

4. Які внутрішні силові фактори виникають під час деформації стискування?

5. Формула закону Гука.

6. Що таке модуль пружності та яка його одиниця виміру?

Тема 10. Зріз і зминання. Крутіння

Вивчення методик розрахунку параметрів силового навантаження елементів конструкцій під час їх крутіння.

Індивідуальне завдання. Визначення діаметра вала за умов його міцності та жорсткості під час крутіння.

Мета роботи – навчити студентів розв'язувати завдання опору матеріалів під час крутіння валів та будувати епюри крутних моментів.

Загальні відомості

Крутінням називають такий вид навантаження бруса, за якого в його поперечних перетинах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – крутний момент M_K.

Крутний момент в довільному поперечному перерізі бруса дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що діють на відсічену частину бруса: $M_K = \sum M_i$ (приймається, що площини дії всіх зовнішніх крутних моментів M_i перпендикулярні поздовжній осі бруса). Крутний момент позитивний, якщо для спостерігача, що дивиться на проведений розтин, він представляється спрямованим за годинниковою стрілкою. Відповідний зовнішній момент спрямований проти годинникової стрілки (рис. 10.1).

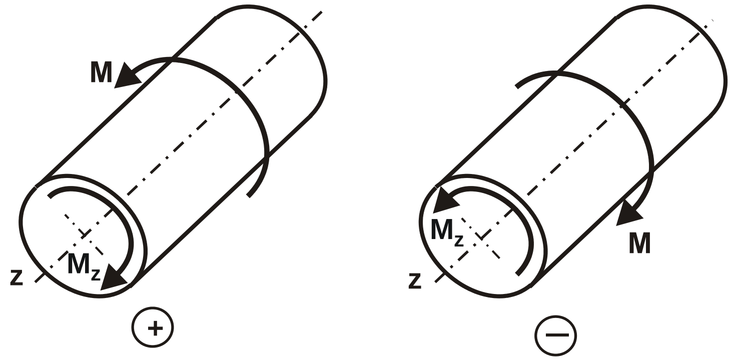

Рис. 10.1. **Правило знаків для крутних моментів**

У даному випадку необхідно виконати проектний розрахунок вала круглого або кільцевого поперечного перерізу за умов міцності та жорсткості; з двох отриманих діаметрів слід вибрати найбільше значення.

За умови міцності:	*За умови жорсткості*:
$W_p \geq \frac{M_{z_{max}}}{[\tau_k]}$, де $M_{z_{max}}$ – найбільший крутний момент; W_p – полярний момент опору крутіння; τ_k – допустиме дотичне напруження	$I_p \geq \frac{M_{z_{max}}}{G[\varphi_0]}$, де I_p – полярний момент інерції перерізу; G – модуль пружності в умовах зсуву; $[\varphi_0]$ – допустимий кут закручування перерізу
Перетин вал – коло	
$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$; Необхідний за міцністю діаметр вала: $d = \sqrt[3]{\frac{16M_{z_{max}}}{\pi[\tau_k]}}$	$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$; Необхідний за жорсткістю діаметр вала: $d = \sqrt[4]{\frac{32M_{z_{max}}}{\pi G[\varphi_0]}}$
Перетин вал – кільце	
$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1-c^4)$. Необхідний за міцністю зовнішній діаметр кільця $d = \sqrt[3]{\frac{16M_{z_{max}}}{\pi[\tau_k](1-c^4)}}$	$I_p = \frac{\pi d^4}{32}(1-c^4)$. Необхідний за жорсткістю зовнішній діаметр кільця $d = \sqrt[4]{\frac{32M_{z_{max}}}{\pi G[\varphi_0](1-c^4)}}$

Послідовність виконання завдання:

1. Визначити зовнішні крутні моменти за формулою $M = P/\omega$, де P – потужність, а ω – кутова швидкість.

2. Визначити врівноважувальний момент на основі рівняння рівноваги ΣMi = 0, оскільки під час рівномірного обертання вала алгебраїчна сума доданих до неї зовнішніх крутних (обертаючих) моментів дорівнює нулю.

3. Користуючись методом перетинів, слід побудувати епюру крутних моментів по довжині вала.

4. Для ділянки вала, в якій виникає найбільший крутний момент, визначити діаметр вала круглого або кільцевого перерізу за умов міцності й жорсткості. Для кільцевого перерізу вала слід прийняти співвідношення діаметрів c = d_0/d, де d_0 – внутрішній діаметр кільця; d – зовнішній діаметр кільця.

Приклад 10.1. Для вала зі сталі (рис. 10.2 а) з постійним за довжиною перерізом потрібно: 1) визначити значення моментів M_2 і M_3, відповідні потужності, що передаються, P_2 і P_3, врівноважувальний момент M_1; 2) побудувати епюру крутних моментів; 3) визначити необхідний діаметр вала з розрахунків на міцність і жорсткість, вважаючи за спрощеним варіантом (а) поперечний переріз вал – коло; за варіантом (б) – поперечний переріз вал – кільце, що має співвідношення діаметрів $c = d_0 / d = 0{,}8$.

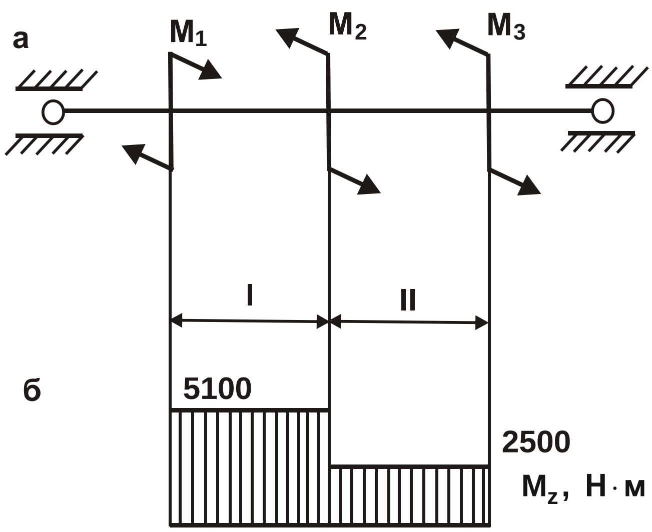

Рис. 10.2. **Розрахункова схема та епюра крутних моментів M_z**

Прийняти: $[\tau_k] = 30$ МПа; $[\varphi_0] = 0{,}02$ рад/м = $0{,}02 \cdot 10^{-3}$ рад/мм; $P_2 = 52$ кВт; $P_3 = 50$ кВт; $\omega = 20$ рад/с; $G = 8 \cdot 10^{-4}$ МПа.

Остаточне значення діаметра слід округлити до найближчого парного числа.

Розв'язання.

1. Визначаємо зовнішні крутні моменти:

$$M_2 = \frac{P_2}{\omega} = \frac{52 \cdot 10^3}{20} = 2\,600 \text{ Н·м}; \quad M_3 = \frac{P_3}{\omega} = \frac{50 \cdot 10^3}{20} = 2\,500 \text{ Н·м}.$$

2. Визначаємо врівноважувальний момент M_1:

$$\sum M_i = 0; \quad M_1 - M_2 - M_3 = 0; \; M_1 = M_2 + M_3 = 5\,100 \text{ Н·м}.$$

3. Визначаємо крутний момент на ділянках вала:

$$M_{z1} = M_1 = 5100 \text{ Н·м}; \quad M_{z11} = M_1 - M_2 = 5\,100 - 2\,600 = 2\,500 \text{ Н·м}.$$

Будуємо епюру крутних моментів M_z (див. рис. 10.2 б):

4. Визначаємо діаметр вала за умов міцності й жорсткості:

$$M_{z_{max}} = 5\,100 \text{ Н·м (див. рис. 10.2 б).}$$

<table>
<tr><td colspan="2">а) Перетин вал – коло</td></tr>
<tr><td>За умови міцності:
$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{z_{max}}}{\pi[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 30}} =$
= 95,2 мм.
Приймаємо d = 95 мм</td><td>За умови жорсткості :
$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{z_{max}}}{\pi G[\varphi_0]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3}}} =$
= 75,5 мм.
Приймаємо d = 76 мм</td></tr>
<tr><td colspan="2">Необхідний діаметр вийшов більше з розрахунку на міцність, тому його приймаємо як остаточний d = 95 мм</td></tr>
<tr><td colspan="2">б) Перетин вал – кільце</td></tr>
<tr><td>За умови міцності:
$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{z_{max}}}{\pi[\tau_k](1-c^4)}} =$
$= \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 30(1-0{,}8^4)}} =$
= 113 мм.
Приймаємо d = 114 мм</td><td>За умови жорсткості:
$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{z_{max}}}{\pi G[\varphi_0](1-c^4)}} =$
$= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3}(1-0{,}8^4)}} =$
= 86,5 мм.
Приймаємо d = 86 мм</td></tr>
<tr><td colspan="2">Необхідні діаметри остаточно приймаємо з розрахунків на міцність: d = 114 мм; d_0 = 0,8·d = 0,8·114 = 91,2 мм. Приймаємо d_0 = 92 мм</td></tr>
</table>

Порядок виконання роботи

Отримати завдання у викладача та розв'язати завдання з визначення діаметра вала за умов його міцності та жорсткості під час крутіння.

Звіт про виконану роботу

Звіт складається з основних понять із визначення діаметра вала за умов його міцності та жорсткості під час крутіння, побудови епюр крутних моментів та розв'язку заданого завдання.

Література [4; 6; 13].

Питання для самоконтролю

1. Що таке крутіння та які при ньому виникають деформації?
2. Напишіть умову міцності вала під час крутіння.
3. Напишіть умову жорсткості вала під час крутіння.
4. Що таке крутний момент?
5. Як визначається знак крутного моменту.

Тема 11. Вигин. Вигин і крутіння

Вивчення методик розрахунку параметрів силового навантаження елементів конструкцій при їх вигині.

Індивідуальне завдання. Визначення розмірів поперечного перерізу балки за умов її міцності на вигин.

Мета роботи – навчити студентів розв'язувати завдання опору матеріалів при вигині балок та будувати епюри поперечних сил та вигинних моментів.

Загальні відомості

Вигин – це такий вид деформації бруса, за якого в його поперечних перетинах виникають вигинні моменти. У більшості випадків одночасно з вигинними моментами виникають і поперечні сили: такий вигин називають *поперечним*; якщо поперечні сили не виникають, вигин називають *чистим*. Вигинний момент M_i в довільному поперечному перерізі бруса дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на відсічену частину, відносно центра ваги перерізу: $M_B = \Sigma M$. Поперечна сила в довільному поперечному перерізі бруса дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відсічену частину: $Q = \Sigma F$.

Правило знаків для поперечної сили: силам, що повертають відсічену частину балки відносно розглянутого перетину за годинниковою стрілкою, приписується знак плюс (рис. 11.1 а), а силам, що повертають відсічену частину балки відносно розглянутого перетину проти годинникової стрілки, приписується знак мінус (рис. 11.1 б).

Правило знаків для вигинних моментів: зовнішнім моментам, які призводять до вигину умовно закріпленої в перерізі відсіченої частини бруса опуклістю вниз, приписується знак плюс (рис. 11.2 а), а моментам, які призводять до вигину відсіченої частини бруса опуклістю вгору – знак мінус (рис. 11.2 б).

Між виразами вигинного моменту M_x, поперечної сили Q_y та інтенсивністю розподіленого навантаження q існують диференціальні залежності: $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$; $\frac{dQ_y}{dz} = q$.

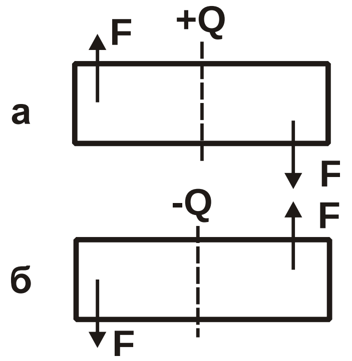

Рис. 11.1. **Правило знаків для поперечної сили**

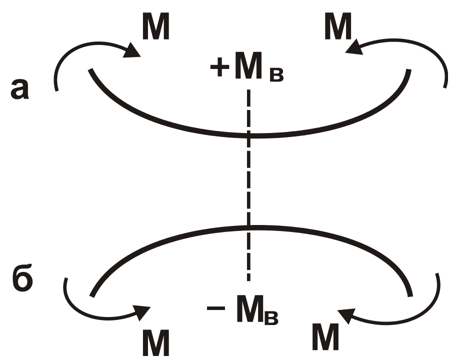

Рис. 11.2. **Правило знаків для вигинних моментів**

На основі методу перетинів і диференціальних залежностей встановлюється зв'язок епюр M_B і Q_y та із зовнішнім навантаженням, тому достатньо обчислити ординати епюр для характерних перерізів і з'єднати їх лініями. Характерними є перетини балки, де прикладені зосереджені сили і моменти (включаючи опорні перерізи), а також перетини, що обмежують ділянки з рівномірно розподіленим навантаженням.

Правила побудови епюри поперечних сил:

1. На ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, епюра зображується прямою лінією, нахиленою до осі балки.

2. На ділянці, вільній від розподіленого навантаження, епюра зображується прямою лінією, паралельною осі балки.

3. У перетині балки, де прикладена зосереджена пара сил, поперечна сила не змінює свого значення.

4. У перетині, де прикладена зосереджена сила, епюра поперечних сил змінюється стрибкоподібно на значення, що дорівнює доданої силі.

5. У кінцевому перетині балки поперечна сила чисельно дорівнює зосередженій силі (активній або реактивній), яка додається в цьому перерізі. Якщо в кінцевому перетині балки не приклали зосереджену силу, то поперечна сила в цьому перерізі дорівнює нулю.

Правила побудови епюри вигинних моментів:

1. На ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, епюра моментів зображується квадратичною параболою. Опуклість параболи спрямована назустріч навантаженню.

2. На ділянці, вільній від рівномірно розподіленого навантаження, епюра моментів зображується прямою лінією.

3. У перетині балки, де прикладена зосереджена пара сил, вигинний момент змінюється стрибкоподібно на значення, що дорівнює моменту прикладеної пари сил.

4. Вигинний момент у кінцевому перетині балки дорівнює нулю, якщо в ньому не прикладена зосереджена пара сил. Якщо ж в кінцевому перетині прикладено активну або реактивну пару сил, то вигинний момент у цьому перерізі дорівнює моменту прикладеної пари сил.

5. На ділянці, де поперечна сила дорівнює нулю, балка знаходиться в стані чистого вигину, і епюра вигинних моментів зображується прямою, паралельною осі балки.

6. Вигинний момент приймає екстремальне значення в перерізі, де епюра поперечних сил проходить через нуль, змінюючи знаки з "+" на "–" або з "–" на "+". У даному випадку потрібно побудувати епюри поперечних сил і вигинних моментів, а також підібрати розміри поперечного перерізу балки, виконаної з прокатного профілю – двутавра. Умова міцності для балок із перетинами, симетричними відносно нейтральної осі, має вигляд: $\sigma_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} \le [\sigma]$, де W_x – осьовий момент опору перерізу.

Для вибору перетину балки (проектного розрахунку) з умови міцності визначають значення осьового моменту опору: $W_x \ge M_{x_{max}} / [\sigma]$.

За знайденим моментом опору W_x підбирають відповідний перетин згідно з сортаментом. Для закріпленої одним кінцем балки розрахунок доцільно виконувати з вільного кінця балки (щоб уникнути визначення опорних реакцій у закладенні). Послідовність виконання задачі:

1. Балку необхідно розділити на ділянки за характерними точками.

2. Визначити вид епюри поперечних сил на кожній дільниці залежно від зовнішнього навантаження, обчислити поперечні сили в характерних перетинах і побудувати епюру поперечних сил.

3. Визначити вид епюри вигинних моментів на кожній дільниці залежно від зовнішнього навантаження, обчислити вигинні моменти в характерних перетинах і побудувати епюру вигинних моментів. Для підбору перетину з умови міцності необхідно визначити W_x в небезпечному перерізі, тобто в перерізі, де вигинний момент має найбільше за модулем значення.

Приклад 11.1. Для консольної балки (поперечний переріздвутавр, $[\sigma]=160$ МПа) побудувати епюри Q_y і M_x та підібрати переріз по сортаменту.

1. Поділити балку на ділянки за перетинами A, B, C, (рис. 11.3 а).
2. Слід визначити поперечну силу Q_y в характерних перетинах і побудувати епюру поперечної сили (рис. 11.3 б): $Q_{yA}^{лев}=-F=-1$ кН; $Q_{yB}^{прав}=-F=-1$ кН; $Q_{yA}^{лев}=-F+F_1=-F_2+F_1=-1+2=1$ кН.

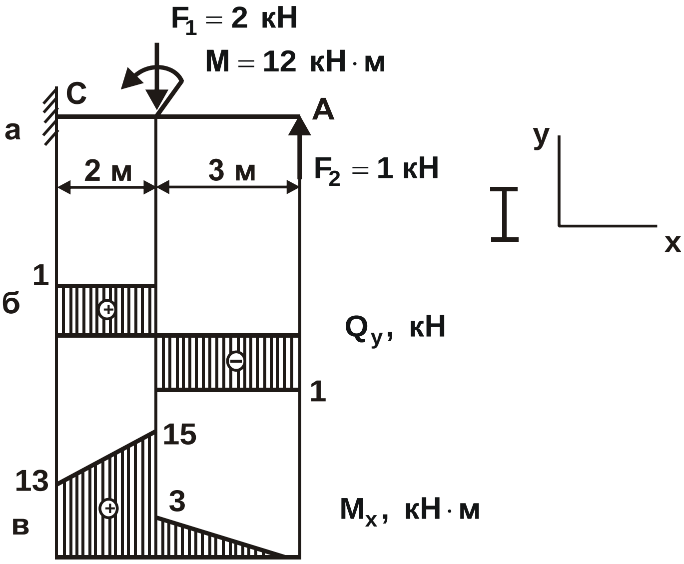

Рис. 11.3. **Епюри поперечної сили Q_y і вигинного моменту M_x**

3. Визначити значення вигинного моменту M_x в характерних перетинах і побудувати епюру вигинного моменту: $M_A=0$;

$$M_B^{прав}=F_2\cdot AB=1\cdot3=3 \text{ кН·м}; \quad M_B^{лев}=F_2\cdot AB+M=1\cdot3+12=15 \text{ кН·м};$$

$$M_C=F_2\cdot AC+M-F_1\cdot BC=1\cdot5+12-2\cdot2=13 \text{ кН·м}.$$

4. Виходячи з епюри M_x (рис. 11.3 в), маємо:

$$M_{X_{max}}=15 \text{ кН·м} = 15\cdot10^6 \text{ Н·мм};$$

$$W_X=\frac{M_{X_{max}}}{[\sigma]}=\frac{15\cdot10^6}{160}=93700 \text{ мм}^3 = 93{,}7 \text{ см}^3.$$

Відповідно до ДСТУ 8239-72 обираємо двотавр № 16.

Приклад 11.2. Для заданої двохопорної балки (рис. 11.4 а) визначити реакції опор, побудувати епюри поперечних сил, вигинних моментів і визначити розміри поперечного перерізу (h, b, d) у формі прямокутника або кола, прийнявши для прямокутника h/b = 1,5. Вважати $[\sigma]=160$ МПа.

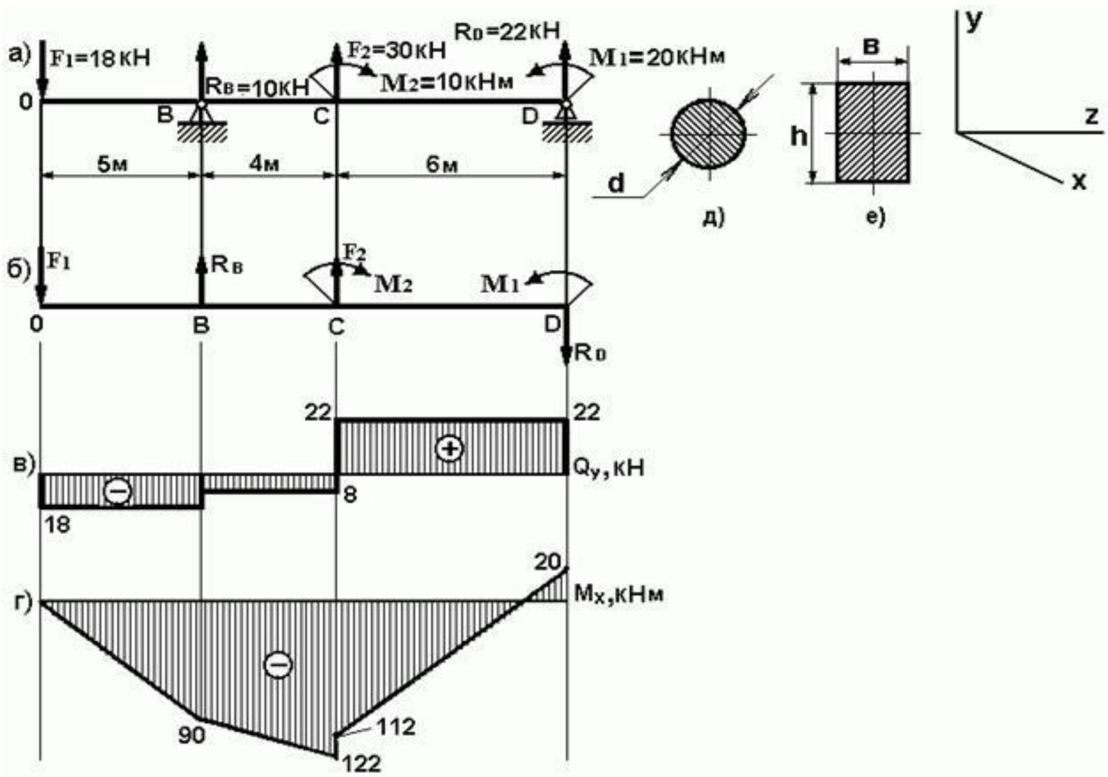

Рис. 11.4. **Епюри поперечної сили Qy і вигинного моменту Mx**

Розв'язання:

1. Визначаємо опорні реакції і перевіряємо їх значення:

$$\sum M_D = 0; \quad \sum M_D = -M_1 + F_2 \cdot CD + M_2 + R_B \cdot BD - F_1 \cdot OD = 0;$$

$$R_B = \frac{(M_1 - F_2 \cdot CD + F_1 \cdot OD)}{BD} = \frac{20 - 30 \cdot 10 + 18 \cdot 15}{10} = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_B = -F_1 \cdot OB + M_2 - F_2 \cdot BC - R_D \cdot BD - M_1 = 0;$$

$$R_D = \frac{-F_1 \cdot OB + M_2 - F_2 \cdot BC - M_1}{BD} = \frac{-18 \cdot 5 + 10 - 30 \cdot 4 - 20}{10} = -22 \text{ кН}.$$

Оскільки реакція R_D отримана зі знаком мінус, то слід змінити її напрям на протилежний. Дійсний напрям реакції R_D – вниз (див. рис. 11.4 б).

Перевірка: $\sum Y_0 = -F + R_B + F_2 - R_D = -18 + 10 + 30 - 22 = 0$.

Умова статики $\sum Y_i = 0$ виконується, отже, реакції опор визначені правильно. Під час побудови епюр використовуються дійсні напрями реакцій опор.

2. Ділимо балку на ділянки за перетинами O, B, C, D (див. рис. 11.4 б).

3. Визначаємо в характерних перетинах значення поперечної сили Q_y і будуємо епюру зліва направо (див. рис. 11.4 в):

$$Q_0^{пр} = -F_1 = -18 \text{ кН}; \qquad Q_B^{лів} = -F_1 = -18 \text{ кН};$$

$$Q_B^{пр} = -F_1 + R_B = -18 + 10 = -8 \text{ кН}; \quad Q_C^{лів} = -F_1 + R_B = -18 + 10 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_B^{пр} = -F_1 + R_B + F_2 = -18 + 10 + 30 = 22 \text{ кН}; \quad Q_c^{лів} = -F_1 + R_B + F_2 = 22 \text{ кН}.$$

4. Обчислюємо в перетинах значення вигинного моменту M_X і будуємо епюру (див. рис. 11.4 г): $M_0 = 0$; $M_B = -F_1 \cdot AB = -18 \cdot 5 = -90$ кН·м;

$$M_C^{лів} = -F_1 \cdot OC + R_B \cdot BC = -18 \cdot 9 + 10 \cdot 4 = -122 \text{ кН·м};$$

$$M_C^{пр} = -F_1 \cdot OC + R_B \cdot BC + M_2 = -18 \cdot 9 + 10 \cdot 4 + 10 = -112 \text{ кН·м};$$

$$M_D^{лів} = -F_1 \cdot OD + R_B \cdot BD + M_2 + F_2 \cdot CD = -18 \cdot 15 + 10 \cdot 10 + 10 + 30 \cdot 6 = 20 \text{ кН·м}.$$

5. Обчислюємо розміри перетину даної балки з умов міцності на вигин за двома варіантами: а) перетин – прямокутник із заданим співвідношенням сторін (рис. 11.4 е); б) перетин – коло (рис. 11.4 д). Обчислення розмірів прямокутного перетину:

$$W_X = \frac{M_{X_{max}}}{[\sigma]} = \frac{122 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}76 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 0{,}762 \cdot 10^6 \text{ мм}^3.$$

Із формули $W_X = bh^2 / 6$, із урахуванням $h = 1{,}5b$, знаходимо:

$$b = \sqrt[3]{\frac{6W_X}{2{,}25}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0{,}762 \cdot 10^6}{2{,}25}} = 10^2 \cdot \sqrt[3]{2{,}06} = 127 \text{ мм}.$$

Із формули $W_X = \pi b^2 / 32$, знаходимо діаметр круглого перетину:

$$b = \sqrt[3]{\frac{32W_X}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0{,}762 \cdot 10^6}{3{,}14}} = 196 \text{ мм}.$$

Якщо розглядається спільна дія вигину і крутіння, то розрахунок проводиться із застосуванням гіпотез міцності: $\sigma_{екв} = \dfrac{M_{екв}}{W_X} \le [\sigma]$, де $M_{екв}$ – еквівалентний момент.

При гіпотезі найбільших дотичних напружень (третя гіпотеза):

$$M_{еквIII} = \sqrt{M_B^2 + M_K^2}.$$

При гіпотезі потенційної енергії формозміни (п'ята гіпотеза):

$$M_{еквV} = \sqrt{M_B^2 + 0{,}75 M_K^2}.$$

В обох формулах M_K і M_B – відповідно крутний і сумарний вигинний моменти в перерізі вала. Числове значення сумарного вигинного моменту дорівнює геометричній сумі вигинних моментів, що виникають у даному перетині від вертикально і горизонтально діючих зовнішніх сил:

$$M_B = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}.$$

Послідовність вирішення задачі.

1. Привести діючі на вал навантаження до його осі, звільнити вал від опор, замінивши їх дію реакціями у вертикальній і горизонтальній площинах.

2. За заданими потужністю Р і кутовою швидкістю ω визначити обертаючі моменти, що діють на вал.

3. Обчислити навантаження F_1, Fr_1, F_2, Fr_2, прикладені до валу.

4. Скласти рівняння рівноваги всіх сил, що діють на вал, окремо у вертикальній площині й окремо в горизонтальній площині і визначити реакції опор в обох площинах.

5. Побудувати епюру крутних моментів.

6. Побудувати епюри вигинних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах (епюри M_X і M_Y).

7. Визначити найбільше значення еквівалентного моменту:

$$M_{еквIII} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} \text{ чи}$$

$$M_{еквV} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + 0{,}75M_Z^2}.$$

8. Прийнявши $s_{екв} = [s]$, визначити осьовий момент: $W_X = M_{екв}/[s]$. За умови, що для суцільного круглого перетину $W_X = \dfrac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^3$, можна визначити d:

$$d \ge \sqrt{\frac{32M_{екв}}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt{\frac{M_{екв}}{0{,}1[\sigma]}}.$$

Приклад 11.3. Для вала зі сталі постійного поперечного перерізу з двома зубчастими колесами (рис. 11.5 а), що передає потужність Р = 15 кВт при кутовій швидкості $\omega = 30$ рад/с, визначити діаметр вала за двома варіантами: а) використовуючи третю гіпотезу міцності; б) використовуючи п'яту гіпотезу міцності. Прийняти: [s] = 160 МПа; $F_{r1} = 0{,}4F_1$; $F_{r2} = 0{,}4F_2$.

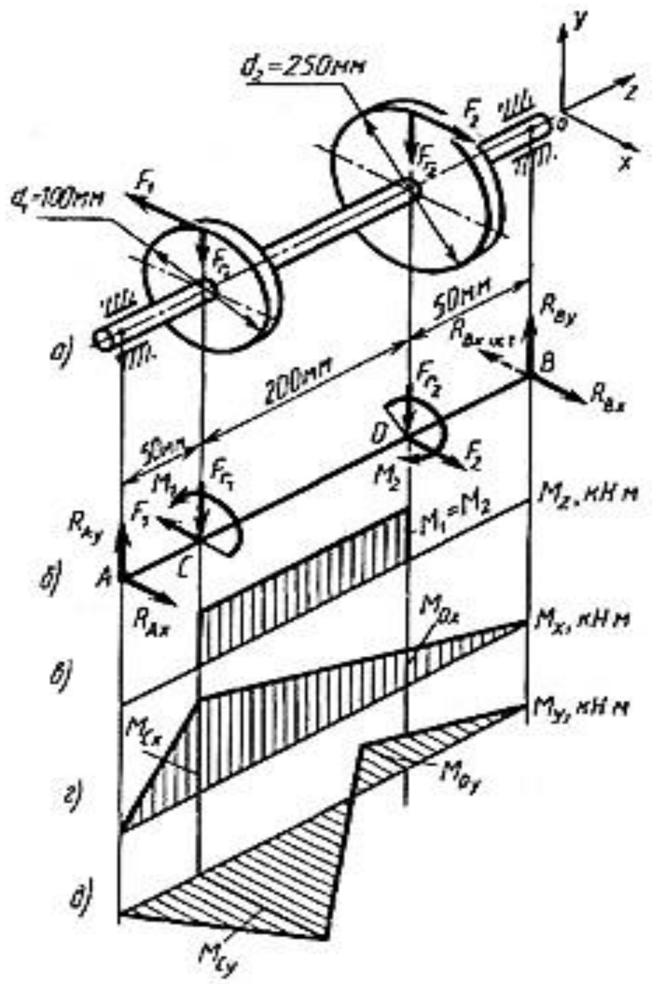

Рис. 11.5. **Епюри крутних моментів**

Розв'язання:

1. Складаємо розрахункову схему вала, приводячи діючі на вал навантаження до осі (див. рис. 11.5 б).

При рівномірному обертанні вала $M_1 = M_2$, де M_1 і M_2 – крутні пари, які додаються при перенесенні сил F_1 і F_2 на вісь вала.

2. Визначаємо крутний момент, діючий на вал:

$$M_1 = M_2 = P / W = 0{,}5 \cdot 10^3 \text{ Н·м} = 0{,}5 \text{ кН·м}.$$

3. Обчислимо навантаження, прикладені до вала:

$$F_1 = \frac{2M_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3}{0{,}1} = 10^4 \text{ Н} = 10 \text{ кН}; \quad F_{r1} = 0{,}4 \cdot 10 = 4 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{2M_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3}{0{,}25} = 10^4 \text{ Н} = 10 \text{ кН}; \quad F_{r2} = 0{,}4 \cdot 4 = 1{,}6 \text{ кН}.$$

4. Визначаємо реакції опор у вертикальній площині (див. рис. 11.5 б):

$$\sum M_A = F_{r1} \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_B \cdot AB = 0;$$

$$R_{B_Y} = \frac{F_{r1} \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{4 \cdot 0{,}05 + 1{,}6 \cdot 0{,}25}{0{,}3} = 2 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_{A_Y} \cdot AB + F_{r1} \cdot BC - F_{r2} \cdot DB = 0;$$

$$R_{A_Y} = \frac{F_{r1} \cdot BC + F_{r2} \cdot DD}{AB} = \frac{4 \cdot 0{,}25 + 1{,}6 \cdot 0{,}05}{0{,}3} = 3{,}6 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_{A_Y} - F_{r1} - F_{r2} + R_{B_Y} = 2 - 4 - 1{,}6 + 3{,}6 = 0.$$

Таким чином, $\sum Y = 0$, отже, R_{A_Y} і R_{B_Y} визначено правильно.

Визначаємо реакції опор в горизонтальній площині (див. рис. 11.5 б):

$$\sum M_A = F_1 \cdot AC - F_2 \cdot AD - R_{B_Y} \cdot AB = 0;$$

$$R_{B_X} = \frac{F_1 \cdot AC - F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{10 \cdot 0{,}05 - 4 \cdot 0{,}25}{0{,}3} = -1{,}66 \text{ кН}.$$

Знак мінус вказує на те, що дійсний напрям реакції протилежний обраному (див. рис. 11.5 б): $\sum M_B = R_{A_X} \cdot AB - F_1 \cdot CB + F_2 \cdot DB = 0$;

$$R_{A_X} = \frac{F_1 \cdot AC + F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{10 \cdot 0{,}25 - 4 \cdot 0{,}05}{0{,}3} = 7{,}66 \text{ кН};$$

$$\sum X = R_{A_X} - F_1 + F_2 - R_{B_X} = 7{,}66 - 10 + 4 - 1{,}66 = 0.$$

Таким чином, $\sum X = 0$, отже, R_{A_X} і R_{B_X} визначено правильно.

5. Будуємо епюру крутних моментів M_z (див. рис. 11.5 в).

6. Визначаємо в характерних перетинах значення вигинних моментів M_X у вертикальній площині і M_Y в горизонтальній площині і будуємо епюри (див. рис. 11.5 г, д):

$M_{C_1} = R_{A_1} \cdot AC = 3{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}18$ кН;

$M_{D_x} = R_{A_y} \cdot AD - F_{r_1} \cdot CD = 3{,}6 \cdot 0{,}25 - 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$ кН·м;

$M_{C_2} = R_{A_x} \cdot AC = 7{,}66 \cdot 0{,}05 = 0{,}383$ кН·м;

$M_{D_y} = R_{A_x} \cdot AD - F_{r_1} \cdot CD = 7{,}66 \cdot 0{,}25 - 10 \cdot 0{,}2 = -0{,}085$ кН·м.

7. Обчислюємо найбільше значення еквівалентного моменту за заданими гіпотезами міцності. Оскільки в даному прикладі значення сумарного вигинного моменту в перерізі С більше, ніж в перерізі D,

$$M_{uC} = \sqrt{M_{Cx}^2 + M_{Cy}^2} = \sqrt{0{,}18^2 + 0{,}383^2} = 0{,}423 \text{ кН·м};$$

$$M_{uD} = \sqrt{M_{Dx}^2 + M_{Dy}^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}085^2} = 0{,}13 \text{ кН·м}$$

то перетин С є безпечним. Визначаємо еквівалентний момент в С.

Варіанти:

а) за гіпотезою найбільших дотичних напружень :

$$M_{эквIII} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0{,}18^2 + 0{,}383^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}429} = 0{,}655 \text{ кН·м.};$$

б) за гіпотезою потенційної енергії формозміни:

$$M_{эквV} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0{,}75 M_z^2} = \sqrt{0{,}18^2 + 0{,}383^2 + 0{,}75 \cdot + 0{,}5^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}366} = 0{,}605 \text{ кН·м}.$$

8. Визначаємо необхідні розміри вала за варіантами а і б:

$$d = \sqrt{\frac{M_{эквIII}}{0{,}1[\sigma]}} \approx \sqrt{\frac{0{,}655 \cdot 10^5}{0{,}1 \cdot 160}} = 34{,}5 \text{ мм};$$

$$d = \sqrt{\frac{M_{эквV}}{0{,}1[\sigma]}} \approx \sqrt{\frac{0{,}605 \cdot 10^5}{0{,}1 \cdot 160}} = 33{,}6 \text{ мм}.$$

Приймаємо: $d_{вала}$ = 34 мм.

Порядок виконання роботи

Отримати варіант свого завдання (табл. 11.1, табл. 11.2, рис. 11.6, рис. 11.7) у викладача та розв'язати завдання з визначення розмірів поперечного перерізу балки за умов її міцності на вигин.

Таблиця 11.1

Значення F_1 і F_2, M та довжин ділянок балки a_1, a_2, a_3 за варіантами

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, Н	5	8	10	20	10	12	9	11	18	4
F_2, Н	12	10	14	10	12	5	5	15	10	20
М, Н·м	10	5	6	9	8	10	12	5	15	7
a_1, м	2	5	4	2	3	5	7	6	4	2
a_2, м	3	2	3	5	4	2	5	8	9	3
a_3, м	5	5	7	8	6	5	3	2	5	4

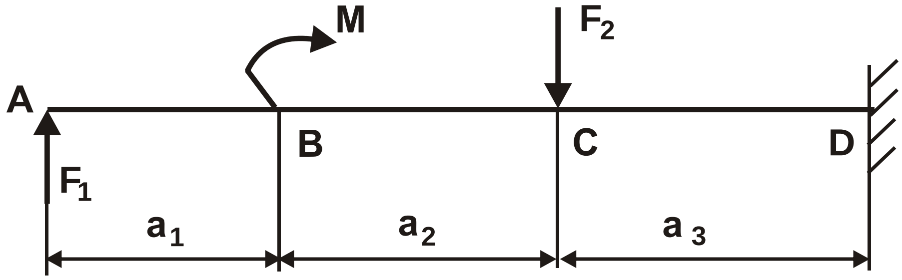

Рис. 11.6. **Розрахункова схема**

Таблиця 11.2

Значення F_1 і F_2, q та довжин ділянок балки a_1, a_2, a_3 за варіантами

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, Н	5	8	10	20	10	12	10	10	15	4
F_2, Н	10	10	14	10	12	5	5	15	10	20
q, Н/м	2	3	5	4	2	6	5	4	2	5
a_1, м	2	5	4	2	3	5	7	6	4	2
a_2, м	3	2	3	5	4	2	5	8	4	3
a_3, м	5	5	5	8	6	5	3	2	5	4

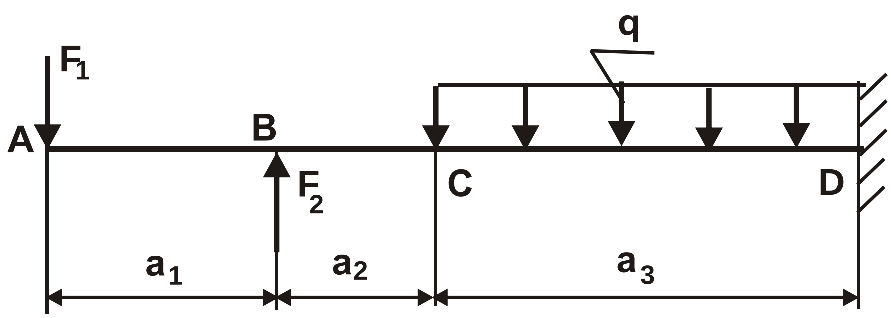

Рис. 11.7. **Розрахункова схема**

Звіт про виконану роботу

Звіт складається з основних понять із визначення розмірів поперечного перерізу балки за умов її міцності на вигин, побудови епюр поперечних сил і вигинних моментів та розв'язку заданого завдання.

Література [4; 6; 13].

Питання для самоконтролю

1. Що таке вигинний момент?
2. Назвіть правила знаків для вигинних моментів та поперечних сил.
3. Напишіть умову міцності на вигин для балки із перерізом, симетричним відносно нейтральної осі.
4. Опишіть осевий момент опору перерізу.
5. Напишіть формули для визначення осевого моменту опору перерізу прямокутника та круга.

Тема 14. Деталі обертання. З'єднання

Вивчення конструкційних особливостей і методів розрахунку параметрів деталей обертання та з'єднань для проектування й виконання кінематичного та силового розрахунків різних механічних пристроїв.

Індивідуальне завдання. Розрахунок параметрів механічного пристрою – одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора.

Мета роботи – навчити студентів виконувати розрахунок параметрів одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора.

Загальні відомості

Редуктором називається механізм, що знижує кутову швидкість і збільшує крутний момент у приводах від електродвигуна до робочої машини. Редуктор складається зі зубчастих або черв'ячних передач, встановлених в окремому герметичному корпусі, що принципово відрізняє його від зубчастої або черв'ячної передачі, вбудованої у виконавчий механізм або машину. Редуктори широко застосовують у різних галузях машинобудування, тому кількість їх різновидів велика. Щоб зменшити габарити приводу і поліпшити його зовнішній вигляд, у машинобудуванні застосовують мотор-редуктори, які є агрегатами, в яких об'єднані електродвигун і редуктор.

Значне поширення отримали одноступінчасті циліндричні прямозубі редуктори завдяки широкому діапазону потужностей, що передаються, довговічності, простоті виготовлення та обслуговування.

Вихідні дані для розрахунку параметрів одноступінчатого циліндричного прямозубого редуктора (рис. 14.1.):

• Частота обертання n_2 = 172 об./хв.

• Вихідна потужність (потужність на відомому валу) P_2 = 3,7 кВт.

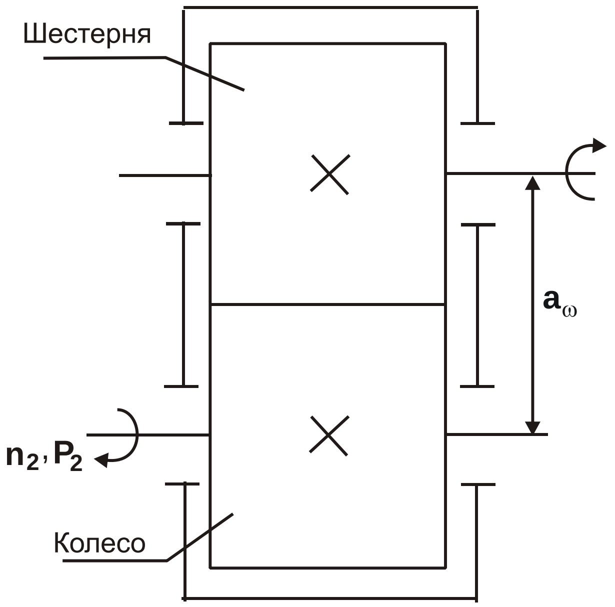

Рис. 14.1. **Схема одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора**

1. Кінематичний і силовий розрахунок приводу.

1.1. Вибір електродвигуна.

Передавальне відношення редуктора $i=4$.

Попереднє число обертів електродвигуна $n_g = n_2 \cdot i = 688$ об./хв.

Приймаємо для зубчастої передачі коефіцієнт корисної дії $\eta = 0{,}97$.

Визначаємо необхідну потужність електродвигуна:

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} = 3{,}81 \text{ кВт.}$$

Із таблиці вибираємо електродвигун типу 4A132S8:

Тип електродвигуна	Потужність	Число обертів
4A132S8	4,0 кВт	720 об./хв

1.2. Визначення передавального числа: $i = u = \frac{n_g}{n_2} = 4$ (рекомендоване передавальне число для циліндричного редуктора 2,5 < i < 8).

1.3. Розрахунок кутової швидкості:

для веденого валу: $w_2 = \frac{n_2 \pi}{30} = 18$ рад/с;

для валу провідної шестерні: $w_1 = \frac{n_g \pi}{30} = 72$ рад/с.

1.4. Розрахунок обертаючих моментів:

для веденого валу: $T_2 = T_1 i \eta = 205{,}3$ Н·м;

для валу провідної шестерні: $T_1 = \frac{1000 P_1}{\omega} = 52{,}9$ Н·м.

2. Ескізна компоновка редуктора.

2.1. Орієнтовний розрахунок діаметрів валів зубчастої передачі.

Розрахунок на крутіння для вихідних кінців провідного і веденого валів: $W_k \geq T / [\tau]_k$, де W_k – момент опору перерізу крутіння, см^3.

Для великого перерізу: $W_k = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2 d^3$; $0{,}2 d^3 = \frac{T}{[\tau]_k}$; $[\tau]_k = 12 МПа$;

$d_2 = \sqrt[3]{\frac{T}{0{,}2 \cdot [\tau]_k}} \approx 44$ мм, $d_1 = \sqrt[3]{\frac{T}{0{,}2 \cdot [\tau]_k}} \approx 28$ мм. Найближче стандартне значення відповідає d_2 =43 мм.

2.2. Розрахунок конструктивних елементів редуктора.

За таблицями обираємо матеріали шестерні і коліс:

для шестерні – сталь 55; для колеса – сталь 45.

2.2.1. Розрахунок напруження на контактну витривалість.

Наближене значення меж контактної витривалості визначаємо за таблицями. Для колеса: $\sigma_{Hlimb} = 20HB + 70 = 450$ МПа. За таблицями: $S_H = 1{,}2$ – коефіцієнт безпеки; $K_{HL} = 1{,}0$ – коефіцієнт довговічності.

Допустиме контактне напруження: $[\sigma_H] = \frac{\sigma_{Hlimb}}{S_H} \cdot K_{HL} = 375$ МПа.

2.2.2. Визначення геометричних розмірів зубчастої передачі.

Міжосьова відстань: $a_\omega = K_a (i+1) \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta} 10^3}{u [\sigma_H]^2 \psi_{ba}}} \approx 153{,}2$ мм. Відповідно зі стандартом приймаємо найближче стандартне значення a_ω=160 мм.

Визначення модуля за умови $b = \psi_{ba} \cdot a_w = 64$: $m = \dfrac{b}{\psi_m} = 4$.

Модуль $m = 4$ відповідає стандарту. Ділильне коло: шестерні $d_1 = \dfrac{2a}{m+1} = 64$ мм; зубчастого колеса: $d_2 = d_1 \cdot u = 256$ мм.

Робоча ширина: шестерні: $b_2 = 64$ мм; зубчастого колеса: $b_1 = b_2 + 5 = 69$ мм.

Визначаємо сумарне число зубів: $z_\Sigma = \dfrac{2a_\omega}{m} = 80$, число зубів у шестерні: $z_1 = \dfrac{z_\Sigma}{i+1} = 16$, число зубів колеса: $z_2 = z_\Sigma - z_1 = 64$.

Перевіряємо збіг початкових кіл у полюсі зачеплення:

$$a = a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = 160.$$

Діаметри кіл вершин (виступів) шестерні та колеса:

$$d_{a1} = d_1 + 2m = 72 \text{ мм}; \quad d_{a2} = d_2 + 2m = 264 \text{ мм}.$$

Діаметри кіл впадин шестерні та колеса:

$$d_{f1} = d_1 - 2{,}5m = 52 \text{ мм}; \quad d_{f2} = d_2 - 2{,}5m = 246 \text{ мм}.$$

Порядок виконання роботи

Отримати у викладача варіант свого завдання та виконати розрахунок параметрів механічного пристрою – одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора.

Звіт про виконану роботу

Звіт складається з опису конструкції одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора, кінематичного та силового розрахунків його параметрів, ескізної компоновки редуктора та висновків із виконаної роботи.

Література [1 – 4; 6; 10].

Питання для самоконтролю

1. Як визначається передатне відношення редуктора?
2. Як визначається потужність електродвигуна редуктора?
3. У чому полягає розрахунок валів зубчастої передачі на міцність?
4. Яка формула визначення напруження на контактну витривалість?
5. Як визначаються геометричні розміри зубчастої передачі?

2. Методичні рекомендації до виконання контрольної роботи

Загальні положення

Виконання контрольної роботи для оцінки самостійної роботи передбачає: систематизацію, закріплення, розширення теоретичних і практичних знань із дисципліни та застосування їх для конкретних даних; розвиток навичок самостійної роботи.

Контрольна робота виконується самостійно і допускає наявність таких елементів наукового дослідження: практичної значущості; комплексного системного підходу; теоретичного використання передової сучасної методології і наукових розроблень; наявність елементів творчості.

Практична значущість контрольної роботи полягає в обґрунтовуванні реальності її результатів для потреб практики.

Реальною вважається робота, яка виконана на основі реальних даних і результати якої повністю або частково можуть бути впроваджені в практику.

Комплексний системний підхід до розкриття теми роботи полягає в тому, що предмет дослідження розглядається з різних точок зору – з позицій теоретичної бази і практичних напрацювань, умов його реалізації, аналізу, обґрунтовування шляхів удосконалення тощо, в тісному взаємозв'язку та єдиній логіці викладу.

Застосування сучасної методології полягає в тому, що під час виконання роботи необхідно використовувати новітні досягнення з розрахунку та проектування елементів технічних систем, які засновані на основних положеннях технічної механіки, що передбачають знання теоретичної механіку, опору матеріалів та деталей машин, із застосовуванням різноманітних методів й засобів діагностичних досліджень.

У процесі виконання контрольної роботи разом із теоретичними знаннями та практичними навичками за фахом, студент повинен продемонструвати здібності до науково-дослідної роботи та вміння творчо мислити, навчитися розв'язувати науково-прикладні, актуальні завдання.

Тема контрольної роботи спільна для всіх студентів, але кожен виконує свій варіант за номером у списку групи. Тема контрольної роботи може змінюватися, уточнюватися на розсуд викладача та повинна бути з ним узгоджена.

Тема: *"Розрахунок на міцність елементів конструкцій".*

Мета: Оволодіння студентами необхідними знаннями та практичними навичками методик розрахунку на міцність елементів конструкцій та вибору їх раціональних параметрів.

Вимоги до змісту

Контрольна робота повинна містити такі розділи:

Титульна сторінка. Повинна містити назву університету; назву кафедри; назву навчальної дисципліни; тему контрольної роботи; прізвище та ініціали студента, спеціальність, курс, номер залікової книжки; дату подання роботи викладачеві на перевірку (день, місяць, рік).

Зміст. Повинен відтворювати назви розділів, підрозділів тощо, які розкривають тему контрольної роботи, із зазначенням номерів сторінок, на яких вони розміщені.

Вступ. У "Вступі" студентом розкривається сутність та стан наукового завдання та його значущість, підстави та вихідні дані для розроблення теми контрольної роботи, надається обґрунтування необхідності проведення дослідження.

Основна частина. Форма подання може бути довільною (текстова, графічна, таблична, у вигляді моделей, структурних схем тощо). Перевага надається застосуванню комп'ютерної графіки (за допомогою графічних редакторів). Стиль викладення – науковий. Основна частина складається з розділів.

1. Аналіз вихідних даних. Узгодити з викладачем свій варіант завдання та провести аналіз методик розрахунку на міцність елементів конструкцій та вибору їх раціональних параметрів. Виконати ескіз схеми навантаження циліндричного бруса.
2. Побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напружень для навантаженого стального циліндричного бруса (рис. 1). Визначити площі поперечного перерізу бруса A_1, A_2 та його діаметри d_1, d_2 за умови міцності бруса, коли $[\sigma]$=100 МПа, для F_1= 4 кН; F_2= 8 кН; F_3= 2 кН.

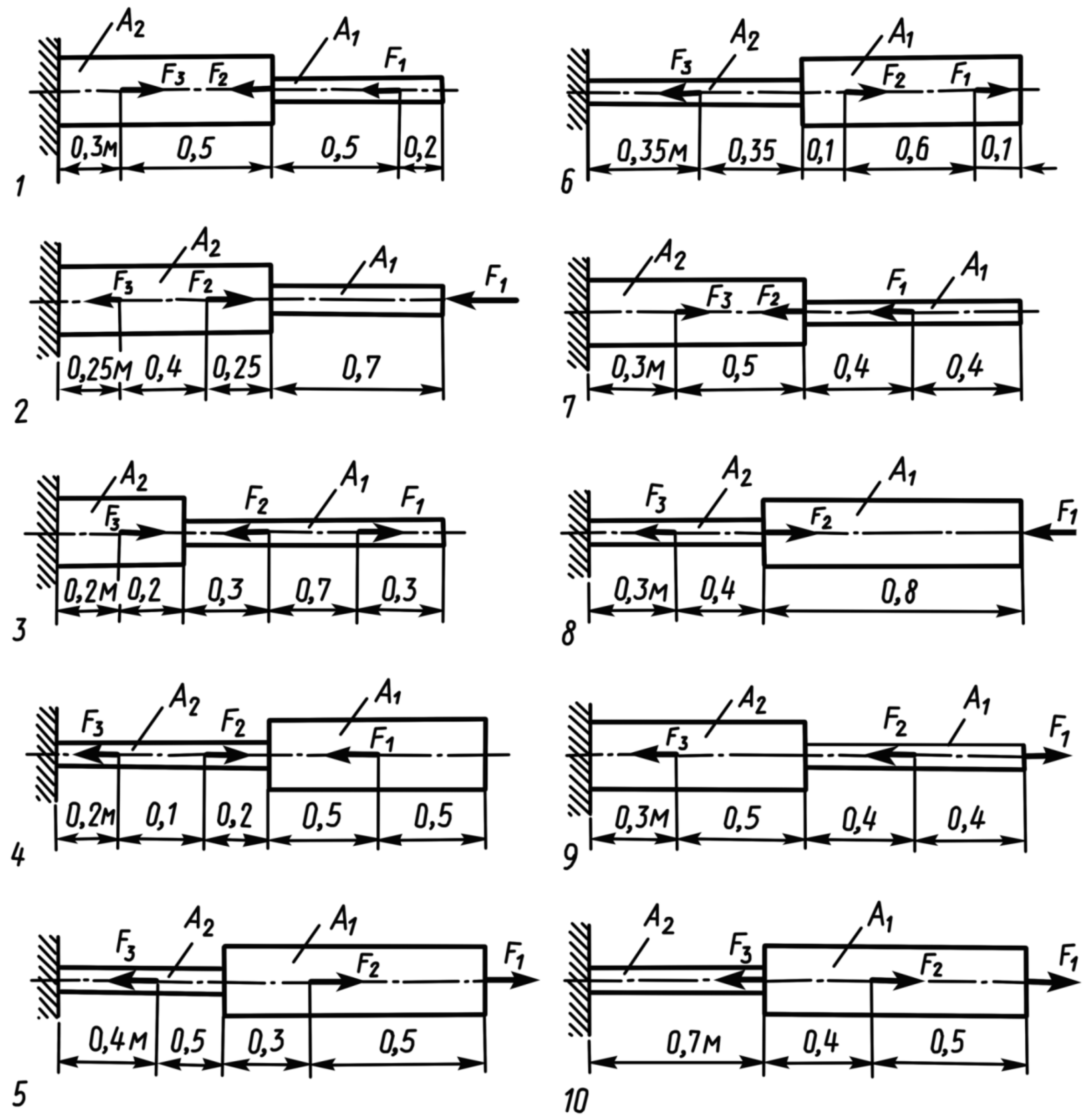

Рис. 1. **Схеми навантаження циліндричного бруса**

3. Визначити подовження (скорочення) бруса Δl для модуля поздовжньої пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Обґрунтувати умови більш рівномірного розподілу нормальних напружень вздовж бруса.

4. Визначити реакції опор та побудувати епюри поперечних сил та вигинних моментів для балки, яка працює на вигин (рис. 2). Визначити діаметр поперечного перерізу балки в формі прямокутника (висотою h та шириною b, приймаючи h/b = 1,5) за умови її міцності, коли $[\sigma]$=100 МПа; F_1 = 5 кН; F_2= 7 кН; M = 12 кН·м.

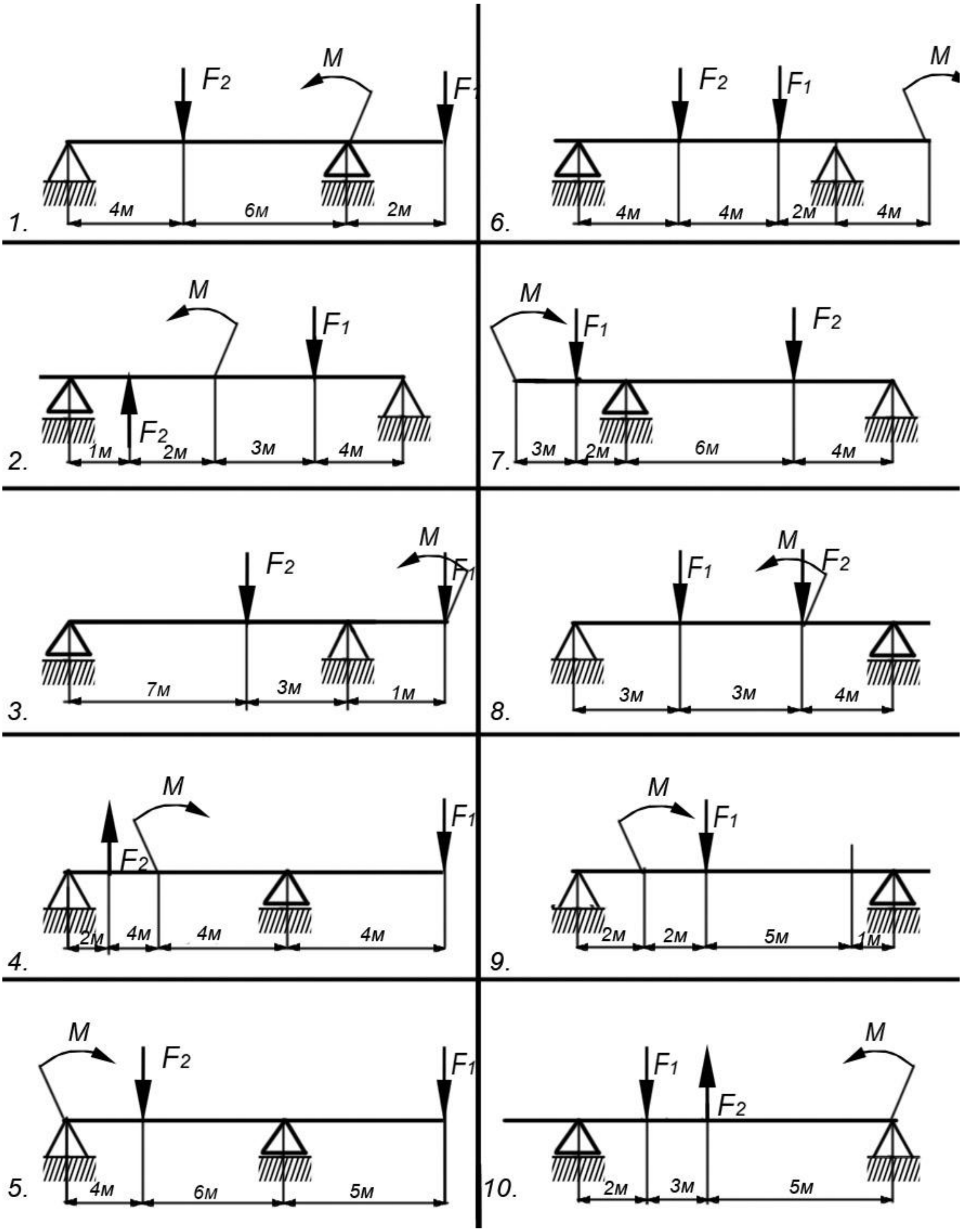

Рис. 2. **Схеми балок, які працюють на вигин**

Висновки. Містять перелік пропозицій і рекомендацій та практичні результати, висновки щодо практичного використання отриманих результатів, їх техніко-економічної ефективності.

Список літератури. У кінці роботи наводиться повний список використаних джерел, який необхідно скласти в певному порядку (законодавчі та нормативні акти, статистичні довідники, загальна та спеціальна література за алфавітом). Відомості про джерела, які включені до списку, необхідно давати згідно з вимогами державного стандарту з обов'язковим наведенням праць.

Додатки. У додатки можуть бути включені матеріали у вигляді креслень, розрахункових таблиць, схем інструментальних налагоджень або графіків, діаграм, структурних схем. За наявності кількох додатків оформлюється окрема сторінка "ДОДАТКИ", номер якої є останнім, що належить до обсягу роботи.

Вимоги до оформлення

Контрольна робота оформлюється розбірливим почерком чорною пастою одного кольору або за допомогою комп'ютерного набору на одній сторінці аркуша білого паперу формату А4 (210х297) через 1,5 міжрядкового інтервала. У ході виконання завдання необхідно дотримуватися нормативно встановлених правил оформлення тексту таблиць, формул, розрахунків, схем, рисунків відповідно вимог до ДСТУ 3008–95 "Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлення" (тридцять рядків на сторінку). Мінімальний розмір шрифту основного тексту має бути не менше 14 пт. Цифри та букви необхідно писати чітко, висота не менше 3,5 мм.

Текст необхідно писати або друкувати, залишаючи поля таких розмірів: ліве – не менше 30 мм; праве – не менш 10 мм; верхнє – не менше 20 мм; нижнє – не менше 20 мм.

Обсяг роботи повинен становити в друкованому варіанті 20 – 25 сторінок. Орієнтовна кількість сторінок у розділах: вступ – 1 – 2 стор.; основна частина – 15 – 20 стор.; висновки та рекомендації – 2 – 3 стор.

Текст основної частини поділяють на розділи і підрозділи. Заголовки структурних частин завдання "ЗМІСТ", "ВСТУП", "РОЗДІЛ.", "ВИСНОВКИ", "СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ", "ДОДАТКИ" пишуть (друкують) великими літерами симетрично до тексту.

Заголовки підрозділів пишуть (друкують) маленькими літерами (крім першої великої) з абзацного відступу. Крапку в кінці заголовка не ставлять. У кінці заголовка, написаного (надрукованого) в підбір до тексту, ставиться крапка.

Усі структурні складові основної частини починаються з нових сторінок, відокремлюються від наступного тексту одним рядком. Крапка в кінці назви розділу або підрозділу не ставиться.

Нумерацію сторінок, розділів, підрозділів, рисунків, таблиць подають арабськими цифрами без знака №.

Структурні частини завдання "ЗМІСТ", "ВСТУП", "ВИСНОВКИ", "СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ" не нумерують. Номер розділу ставлять після слова "РОЗДІЛ" на тому ж рядку, після номера крапку не ставлять, а потім з нового рядка пишуть (друкують) заголовок розділу.

Підрозділи нумерують в межах кожного розділу. Номер підрозділу складається з номера розділу та порядкового номера підрозділу, між якими ставлять крапку. У кінці номера підрозділу повинна стояти крапка, наприклад: "2.3." (третій підрозділ другого розділу). Потім у тому самому рядку йде заголовок підрозділу.

Ілюстрації та таблиці необхідно подавати безпосередньо після тексту, де вони згадані (за зразком – "подано на рис. 3.1", "дивись у табл. 3.2" або "... (рис. 3.2)") вперше, або на наступній сторінці. Ілюстрації та таблиці, які розміщені на окремих сторінках, включають до загальної нумерації сторінок.

Ілюстрації позначають словом "Рис." та нумерують послідовно в межах розділу, за виключенням ілюстрацій, поданих у додатках.

Номер ілюстрації повинен складатися з номера розділу та порядкового номера ілюстрації, між якими ставиться крапка. Наприклад: "Рис. 1.2" (другий рисунок першого розділу). За умови наявності в роботі тільки однієї ілюстрації, цей рисунок нумерується як "Рис. 1". Номер ілюстрації, її назва та пояснювальні підписи розміщують послідовно під ілюстрацією.

Таблиці нумерують послідовно (за винятком таблиць, поданих у додатках) у межах розділу. У правому верхньому куті над відповідним заголовком таблиці розміщують напис "Таблиця" із зазначенням її номера. Номер таблиці повинен складатися з номера розділу та порядкового номера таблиці, між якими ставиться крапка, наприклад: "Таблиця 1.2" (друга таблиця першого розділу).

Під час переносу частини таблиці на іншу сторінку слово "Таблиця" та номер її вказують один раз справа над першою частиною таблиці, над іншими частинами пишуть слова, наприклад: "Продовження табл. 1.2".

Рекомендована література

Основна

1. Деталі машин : підручник / А. В. Міняйло, Л. М. Тіщенко, Д . І. Мазоренко та ін. – Київ : Агроосвіта , 2013. – 448 с.

2. Ивченко В. А. Техническая механика : учеб. пособ. / В. А. Ивченко. – Москва : ИНФАМ, 2003. – 157 с.

3. Куклин Н. Г. Детали машин : учеб. для машиностроит. спец. техникумов / Н. Г. Куклин, Г. С. Куклина. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1987. – 383 с.

4. Покровский В. Е. / Техническая механика : методические указания и контрольные задания для учащихся-заочников машиностроительных специальностей техникумов [2-е изд.] / В. Е. Покровский, А. И. Столярчук. – Москва : Высшая школа, 1990. – 160 с.

5. Свідерський В. П. Теоретична механіка : конспект лекцій / В. П. Свідерський, О. Г. Прасок. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2008. – 112 с.

Додаткова

6. Беляев Н. М. Сопротивление материалов : учебник / Н. М. Беляев. – Москва : Высшая школа, 1999. – 856 с.

7. Воронков И. М. Курс теоретической механики : учебник / И. М. Воронков. – Москва : Высшая школа, 2002. – 562 с.

8. Металлорежущие станки / Н. С. Ачеркан, А. А. Гаврюшин и др. – Москва : Машиностроение, 1985. – Т. 1. – 222 с.

9. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике / Б. Н. Квасников и др. ; под общ. ред. А. А. Яблонского. – Москва : Высшая школа, 1992. – 432 с.

10. Справочник технолога-машиностроителя: В 2-х т. / под ред. А. Г. Косиловой, Г. К. Мещерякова. – Москва : Машиностроение, 1985. – 496 с.

11. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва : Высшая школа, 1986. – 197 с.

12. Теоретична механіка. Статика і кінематика : навч. посіб. з методичними вказівками і контрольними завданнями для студентів заочної форми навчання / Ю. О. Єрфорт, С. В. Подлєсний – Краматорськ : ДДМА, 2007. – 164 с.

13. Эрдеди А. А. Техническая механика : теоретическая механика. Сопротивление материалов : учебник для машиностр. спец. техникумов / А. А. Эрдеди, Ю. А. Медведев, Н. А. Эрдеди. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1991. – 304 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладач **Новіков** Федір Васильович

Відповідальний за видання *Ю. В. Буц*

Редактор *О. В. Анацька*

Коректор *Т. А. Маркова*

План 2019 р. Поз. № 94 ЕВ. Обсяг 75 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.