

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# **Геометричне моделювання та комп'ютерна графіка. Частина 2**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавр  
за освітньою програмою «Цифрові технології в енергетиці»  
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Сидоренко Ю. В., Аушева Н. М., Михайлова І. Ю.

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2023

Рецензент:	Баган Т. Г.	кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри АЕП НН ІАТЕ
Відповідальний редактор:	Сегеда І. В.	кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри ЦТЕ НН ІАТЕ

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 3 від 07.12.2023 р.)  
за поданням Вченої ради Навчально-наукового інституту атомної та теплової  
енергетики (протокол № 4 від 28.11.2023 р.)*

Посібник розроблений на підставі силабусу кредитного модуля «Геометричне моделювання та комп'ютерна графіка. Частина 2» та призначений для якісної організації виконання комп'ютерного практикуму з зазначеного кредитного модуля студентами. Призначений для студентів, які навчаються за освітньою програмою підготовки бакалаврів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки».

У навчальному посібнику розглянуто сфери застосування геометричного моделювання та комп'ютерної графіки, дано огляд чисельних методів моделювання кривих і поверхонь для розуміння студентами використовуваних методів при програмуванні геометричного моделювання, та розглянуто принципи побудови полікоординатних відображень (політканинних та політочкових) при моделюванні процесів деформації.

Реєстр. № НП XX/XX-XXX. Обсяг 4,4 авт. арк.  
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
1. Історія виникнення комп'ютерної графіки.....	6
2. Застосування комп'ютерної графіки .....	10
3. Використання чисельних методів у комп'ютерній графіці .....	15
4. Наближення функцій. Апроксимація. Інтерполяція.....	19
5. Метод найменших квадратів.....	23
5.1 Лінійна апроксимація .....	24
5.2 Параболічна апроксимація.....	25
6. Інтерполяція .....	29
7. Методи інтерполяції.....	33
7.1 Кусково-лінійний метод.....	33
7.2 Метод Лагранжа.....	34
7.3 Метод Ньютона .....	36
8. Інтерполяція на основі функції Гауса. Звичайна інтерполяційна функція Гауса.....	40
9. Параметризація функцій Гауса .....	43
9.1 Параметрична функція Гауса.....	43
9.2 Сумарний метод Гауса .....	44
10. Полікоординатні перетворення.....	49
10.1 Метод політканинних перетворень.....	49
10.2 Конструювання кривої на площині методом політканинних перетворень.....	53
11. Політочкові перетворення у конструюванні геометричних об'єктів .....	58
11.1 Принцип двоїстості.....	58
11.2 Політочкові перетворення з двома точками базису .....	59
12. Політочкові перетворення при багатоточковому базисі.....	66
13. Варіанти політочкових перетворень .....	70

14. Зважені політочкові перетворення .....	80
15. Політочкові перетворення плоских кривих.....	86
16. Політочкові перетворення з використанням лінійної системи рівнянь .....	91
17. Деформаційне конструювання тривимірних геометричних об'єктів.....	96
18. Політочкові перетворення площини .....	103
Список використаної літератури .....	112
Список рекомендованої літератури.....	113

## ВСТУП

Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки та програмно-апаратного забезпечення сприяв змінам у традиційних представленнях про технології обробки інформації. З'явилися нові технології, які змінили стиль використання комп'ютерів. Серед них найбільших темпів росту зазнали комп'ютерна графіка та геометричне моделювання. Комп'ютерна графіка – це одна зі складових новітніх комп'ютерних технологій, яка, на сьогоднішній час, є важливою складовою освіти сучасного інженера. Нескладні графічні маніпуляції можуть бути представлені в різних існуючих бібліотеках, але сучасні програмні засоби потребують дедалі більшого залучення індивідуального потенціалу виконавця. Тобто, постійно виникає необхідність створення вузьких специфічних розробок, що відрізняються від класичних. Для розв'язання таких задач необхідно володіти знаннями та практичними навичками з курсу «Геометричне моделювання та комп'ютерна графіка».

Метою курсу є формування у студентів здатності до застосування принципів, методів і алгоритмів комп'ютерної графіки для розробки та системного проектування графічного забезпечення систем автоматизованого проектування. Після засвоєння матеріалу студенти повинні вміти розробляти програмні коди та графічні інтерфейси на основі алгоритмів комп'ютерної графіки із застосуванням формул теорії наближення функцій та створювати графічні інтерфейси взаємодії людини з комп'ютером на основі алгоритмів полікоординатних перетворень.

У даному навчальному посібнику приділяється увага математичному апарату, алгоритмам та концепціям комп'ютерної графіки. В результаті вивчення курсу студент повинен вміти обґрунтовувати вибір методів розв'язання задачі, вибирати та користуватись графічними системами відповідного рівня для вирішення різноманітних задач та оцінювати вірогідність отриманих результатів.

# 1. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

Комп'ютерна графіка – це галузь знань, яка вивчає способи та методи побудови графічних об'єктів за допомогою програмного забезпечення. До появи комп'ютерів процес проектування здійснювався за допомогою нарисної геометрії, був довгим і грубим.

Перші ЕОМ обробляли зображення, не маючи окремих засобів для роботи з графікою. Таким чином можна було отримати об'єкти на кшталт візерунків.

До перших етапів становлення комп'ютерної графіки можна віднести наступні.

У 1961 році програміст Стів Рассел очолив проект зі створення першої комп'ютерної гри «Spacewar!» з елементами графіки. Гра була створена на машині PDP-1.

У 1963 році американський вчений Айвен Сазерленд створив програмно-апаратний комплекс Sketchpad, який дозволяв малювати точки, лінії і кола на трубіці цифровим пером. Підтримувалися базові дії з примітивами: переміщення, копіювання та ін. По суті, це був перший векторний редактор, реалізований на комп'ютері. Також програму можна назвати першим графічним інтерфейсом, причому вона була такою ще до появи самого терміну.

У середині 1960-х рр. з'явилися розробки в промислових застосунках комп'ютерної графіки. Так, під керівництвом Т. Мофетта і Н. Тейлора фірма Itek розробила цифрову електронну креслярську машину.

У 1964 році General Motors представила систему автоматизованого проектування DAC-1, розроблену спільно з ІВМ.

Також 1964 році групою під керівництвом Н. Н. Константинова була створена комп'ютерна математична модель руху кішки. Машина БЕСМ-4, виконуючи написану програму рішення диференціальних рівнянь, малювала мультфільм «Кішечка», який для свого часу був проривом. Для візуалізації використовувався алфавітно-цифровий принтер.

У 1968 році суттєвий прогрес комп'ютерна графіка зазнала з появою можливості запам'ятовувати зображення і виводити їх на комп'ютерному дисплеї, електронно-променевої трубки.

Таким чином, можна сказати, що формування комп'ютерної графіки як самостійного напрямку інформаційних технологій відноситься до 60-х років ХХ ст. Але, слід зазначити, що вперше відображення інформаційних даних на екрані комп'ютера в графічному вигляді було продемонстровано на початку 50-х років спеціалістами Массачусетського технологічного інституту і згодом стало використовуватися в наукових і військових дослідженнях.

За цей час комп'ютерна графіка пройшла шлях від окремих експериментів до одного з найважливіших інструментів сучасності, вона є багатофункціональною складовою усіх інформаційних технологій і важливим компонентом для взаємодії людини з комп'ютером.

Одною з головних властивостей комп'ютерної графіки є робота з зображенням. Зображення не тільки місткий, але і доступний вид інформації, оскільки для сприйняття візуальної інформації від користувача вимагається менше зусиль. Інформація, що міститься у зображеннях, є найбільш концентрованою, найлегше сприймається та найшвидше обробляється.

На одному з етапів становлення виникла необхідність обробляти вихідне зображення, що викликало розвиток діалогових систем, тобто систем інтерактивної графіки. щоб користувач оперативно міг вносити зміни в зображення безпосередньо в процесі його відтворення (в реальному масштабі часу). Всі сучасні графічні системи є інтерактивні, тобто такі, які можуть відтворювати всі особливості реальних зображень.

Окремо необхідно згадати про форми збереження графічної інформації. Цифрові зображення неможливо представити без комп'ютерної обробки графічної інформації. В такому вигляді їх простіше зберігати, тиражувати, компонувати тощо. Цифрові зображення можна створити сканером, цифровим фотоапаратом, а потім відредагувати в програмі обробки зображень (наприклад, Adobe Photoshop), а можна створити цифрові малюнки з нуля, застосувавши спеціальні програми

(наприклад, Corel Draw) або написавши відповідну програму на мові програмування (наприклад, Visual C++).

Основними задачами комп'ютерної графіки є візуалізація інформації, тобто створення зображень різних об'єктів і сцен на екрані, виконання різних дій із зображеннями, зберігання та передавання графічної інформації. При розпізнаванні образів ставиться задача за початковим зображенням знайти математичний опис об'єктів, наприклад розпізнати текст. Тому обробка та розпізнавання зображень віднесені в самостійні напрями у сфері обробки графічної інформації. Отже, питаннями роботи з зображеннями займаються два напрями інформатики: комп'ютерна графіка та геометричне моделювання.

Комп'ютерна графіка – це галузь науки та інформатики, що вивчає методи створення, обробки та відображення графічних зображень за допомогою комп'ютерів [2]. Вона охоплює різноманітні аспекти, такі як розробка алгоритмів для створення графіки, моделювання тривимірних об'єктів, обробка зображень, відтворення кольорів, взаємодія з графічними об'єктами та їхнє відображення на екрані. Комп'ютерна графіка застосовується в різних галузях, включаючи ігрову індустрію, візуалізацію даних, комп'ютерний дизайн, архітектурне моделювання та інші області, де важливе створення або опрацювання зображень за допомогою комп'ютерних технологій.

Геометричне моделювання (комп'ютерна геометрія, Computer Aided Geometric Design, CAGD) – відносно молодий напрямок в прикладній математиці, що виділилася в 60-70-х роках минулого століття. Комп'ютерна геометрія – це галузь науки та інформатики, яка вивчає методи та алгоритми обробки геометричних об'єктів та вирішення задач, пов'язаних з їхнім розташуванням, взаємодією та властивостями за допомогою обчислювальних засобів. Основні напрями комп'ютерної геометрії включають в себе роботу з точками, лініями, кривими, поверхнями та об'єктами в тривимірному просторі, розробку алгоритмів для вирішення геометричних задач, а також застосування цих методів у візуалізації даних, графіці, комп'ютерному моделюванні та інших областях.



З 1984 року виходить спеціалізований журнал «Computer Aided Geometric Design». Своім стрімким розвитком геометричне моделювання зобов'язане, перш за все, розвитку комп'ютерної графіки.

***Питання для самоперевірки***

- 1. У яких роках проходило формування комп'ютерної графіки як самостійного напрямку інформаційних технологій?*
- 2. Що сприяло розвитку комп'ютерної графіки?*
- 3. Дайте визначення комп'ютерній графіці.*
- 4. Дайте визначення геометричному моделюванню.*

## 2. ЗАСТОСУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

Фундаментом більшості програм комп'ютерної графіки є складний та розгалужений математичний апарат, а саме методи аналітичної та нарисної геометрії, векторної алгебри, числових методів, математичної логіки, методів оптимізації та ін.

До недавнього часу комп'ютерна графіка була специфічним заняттям, яке вимагало дорогої техніки, значних машинних ресурсів та особливого програмного забезпечення, і не могло бути й мови про широке її використання в повсякденній практиці та навчальному процесі. Ситуація змінилась завдяки зменшенню вартості потужних персональних комп'ютерів та появою великої кількості нових графічних пакетів високого рівня та різноманітного прикладного характеру. На сьогодні комп'ютерна графіка забезпечує спілкування людини з комп'ютером за допомогою зображень і спрощення взаємодії користувача з комп'ютером. Зображення, як засіб комунікації, більш природне та ефективніше для людей. Під графічною формою подання інформації розуміють: ескізи, креслення, візуальне подання каркасних, поверхневих та твердотільних 3D-моделей різноманітних об'єктів (природних та штучних, статичних та динамічних, живих та неживих), схеми, діаграми, графіки, рисунки, фотографії, відео, анімацію, голограми, мультимедійну інформацію тощо [1]. Маніпуляції з графічною інформацією здійснюються в процесі діалогу людини з комп'ютером. Серед різноманітних форм сучасної комп'ютерної графіки існують великі відмінності з точки зору типу, якості зображення та можливості динамічного керування зображенням.

Однак, усі форми мають одну спільну властивість: зображення об'єкта формується та обробляється за допомогою цифрового процесора. Таким чином, комп'ютерна графіка – це створення, зберігання та обробка моделей об'єктів та їх відображення засобами комп'ютерної техніки.

Комп'ютерна графіка використовується в різних галузях діяльності людини: промисловості, науці, мистецтві, телебаченні, журналістиці, видавництві,

економіці, медицині, державних установах, навчальних закладах. Перелік її використання широкий та продовжує швидко зростати в міру того, як стають більш доступними та потужнішими персональні комп'ютери.

Базовими класами систем комп'ютерної графіки (КГ) та провідними галузями їх практичного застосування є:

- ділова КГ;
- інженерна КГ (САПР);
- анімаційна КГ та її забезпечення;
- образотворча КГ;
- видавнича КГ;
- рекламна КГ;
- когнітивна КГ (для дослідницьких цілей).

Системи ділової комп'ютерної графіки використовуються переважно в сферах бізнесу, маркетингу, управління підприємствами, економічних розрахунків. Дані системи призначені для наочного графічного подання даних, тобто креслення статичних, динамічних графіків, схем та діаграм (візуалізація різних числових даних).

Системи когнітивної (наукової) комп'ютерної графіки призначені для динамічної наочної візуалізації процесу та результатів проведення наукових експериментів, автоматизованого проектування наукових та науково-технічних задач, формування наукової документації з застосуванням спеціальної нотації (математичних, фізичних та хімічних формул тощо); дослідження географічних, геологічних, гідрогеологічних, сейсмологічних, екологічних, метеорологічних, астрономічних та інших природних об'єктів, процесів, явищ та систем, нафтогазових розвідки та видобування, комп'ютерної картографії, медичного діагностування тощо.

Системи інженерної комп'ютерної графіки призначені для автоматизації графічних та конструкторських робіт у процесі проектування виробів. В системах автоматизованого проектування (САПР) комп'ютерна графіка використовується для проектування систем механічних, електричних, електромеханічних та

електронних пристроїв та їх складових. До таких систем відносяться: складні комплекси та структури (споруди, енергетичні установки, кузов автомобілів, фюзеляж літаків, корпуси кораблів та їх внутрішні частини), електричні схеми, телефонні та комп'ютерні мережі. Кінцевою метою автоматизованого проектування є випуск креслень деталей, вузлів та складальних креслень. Значна увага приділяється інтерактивній роботі з моделлю системи або її компонентів. Математична модель, яка знаходиться в комп'ютері, перевіряє механічні, електричні чи теплові властивості системи. Математична модель інтерпретується моделюючою програмою, яка періодично видає інформацію про поведінку системи в різних умовах. Після завершення процесу проектування об'єкту, додаткові програми проводять обробку проектної бази даних з метою підготовки комплекту конструкторської та технологічної документації.

Системи образотворчої та анімаційної комп'ютерної графіки призначені для створення та художньої обробки комп'ютерних зображень, які відіграють роль: ілюстраційного матеріалу для друкованих та електронних видань (рисуноків, фотографій, ескізів, умовних схем, географічних карт, відеоматеріалів, мультимедіа-матеріалів, WEB-матеріалів тощо); дизайнерських розробок; рекламного оздоблення; творів мистецтва. Вони дозволяють формувати та перетворювати графічні об'єкти настільки ж легко, як масиви чисел або тексти.

Велику популярність набувають виготовлені за допомогою комп'ютера мультфільми (анімації), що демонструють поведінку різноманітних реальних чи змодельованих об'єктів у часі. Вони дозволяють вивчити математичні моделі найрізноманітніших явищ, які досліджуються наукою, наприклад, потік рідини, ядерні та хімічні реакції, фізіологічні системи та деформацію конструкцій під навантаженням, шляхом візуального представлення поведінки моделі в різних умовах. Комп'ютерна мультиплікація використовується як різноманітні тренажери, для імітації природної анатомії, динаміки та пластики рухів, міміки живих істот, їх іміджу та довілля на різних фазах їх життєвої діяльності (навчання, професійна діяльність, дозвілля, сон тощо). Широкого

розповсюдження набула комп'ютерна графіка при створенні художніх відеофільмів та рекламних відеороликів, насичених 3D-спецефектами.

Дедалі більшого поширення набуває використання комп'ютерної графіки для формування та розповсюдження інформації в адміністративних закладах і навіть в побуті. За її допомогою можна виготовляти як традиційні друковані документи (тверда копія), так і "електронні" документи, які складаються з тексту, таблиць, графіків та іншої ілюстративної двомірної інформації.

Спільною метою комп'ютерного мистецтва та реклами є бажання засобами комп'ютерної графіки виразити головний зміст зображення та звернути увагу на нього за допомогою естетично приємних зображень. Функції комп'ютерних графічних систем для втілення мистецтва, реклами та дизайну: створення творів мистецтва; музейна та реставраційна діяльність; оздоблення внутрішнього та зовнішнього інтер'єрів помешкань; підготовка друкованої продукції рекламно-інформаційного характеру; виготовлення слайдів, відеокліпів та мультимедійних презентацій для подання комерційної, наукової та навчальної інформації; підготовка інформаційних та рекламних роликів для телебачення; розвиток індустрії ігор та розваг.

Роль зображення в комп'ютерній графіці може бути засобом для досягнення кінцевої мети, або ж самою метою. Наприклад, в картографії робоче креслення та "растровий живопис" є результатом, тоді як в багатьох різновидах машинного проектування отримане зображення, призначене для візуалізації геометричних властивостей об'єкта, який проектується (електричної схеми, системи трубопроводів, крила літака чи деталі автомобіля, моста, корпусу судна і т. п.).

Математичним забезпеченням комп'ютерної графіки служать геометричні моделі разом із методами та алгоритмами перетворення цих моделей.

В основу комп'ютерної графіки покладено фундаментальний теоретичний апарат таких дисциплін як:

- аналітична геометрія;
- проєктивна геометрія;
- алгебрична геометрія;

- теорія графів;
- математична логіка;
- теорія кривих та поверхонь;
- диференційна геометрія;
- векторна алгебра;
- чисельні методи;
- теорія перетворень.

Не розглядаючи складних математичних задач, потенціал машинної графіки часто реалізується не повністю внаслідок неадекватного використання математичного апарату.

Глибоке оволодіння базовими математичними концепціями та мистецтвом програмування є головним ключем до розуміння подальшого розвитку машинної графіки.

### ***Питання для самоперевірки***

1. *Чи застосовували Ви особисто комп'ютерну графіку та де саме? Наведіть приклади.*
2. *Назвіть приклади галузей, у яких застосовується комп'ютерна графіка.*
3. *Які дисципліни покладено в основу комп'ютерної графіки?*

### **3. ВИКОРИСТАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ У КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ**

Однією з дисциплін, на яких базується комп'ютерна графіка є чисельні методи, які широко використовуються в проєктуванні та розробці математичного та програмного забезпечення сучасних комп'ютерів.

Значущість чисельних методів у інженерній практиці значно зросла з появою швидких та потужних комп'ютерів. Ґрунтовне вивчення чисельних методів поряд з володінням навичками програмування дозволить успішно створювати пакети сучасних комп'ютерних додатків для розв'язання конкретної технічної задачі. Всі чисельні методи мають специфічні властивості і характеристики, що відрізняє їх від точних аналітичних методів.

Чисельні методи – це математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача ставиться у вигляді, зручному для розв'язання на комп'ютері. Тоді математичну задачу називають обчислювальною задачею. Більшість чисельних методів є наближеними методами розв'язання задачі, які дають змогу знайти наближений до точного розв'язок з деякою похибкою.

Прості математичні задачі, що вивчаються в курсі вищої математики, в багатьох випадках допускають можливість одержання точних аналітичних розв'язків. Реальні інженерні задачі, що призводять до складних математичних моделей великої розмірності, вимагають застосування чисельних методів.

Розглянемо схему застосування вищої математики і чисельних методів на прикладі вивчення якогось умовного природного явища (рисунок 1).

Будемо вважати, що необхідно вивчити, проаналізувати та створити модель на базі певного природного явища. Наприклад, знайти зв'язок між характером та почерком людини, або знайти залежність стану здоров'я людини від міста знаходження її під час вибуху на Чорнобильській АЕС у 1986 році.

Для цього в першу чергу необхідно ознайомитись з сутністю цього явища, вивчити визначення, властивості та взаємодію даного явища з іншими. На базі таких знань створюється фізична модель.

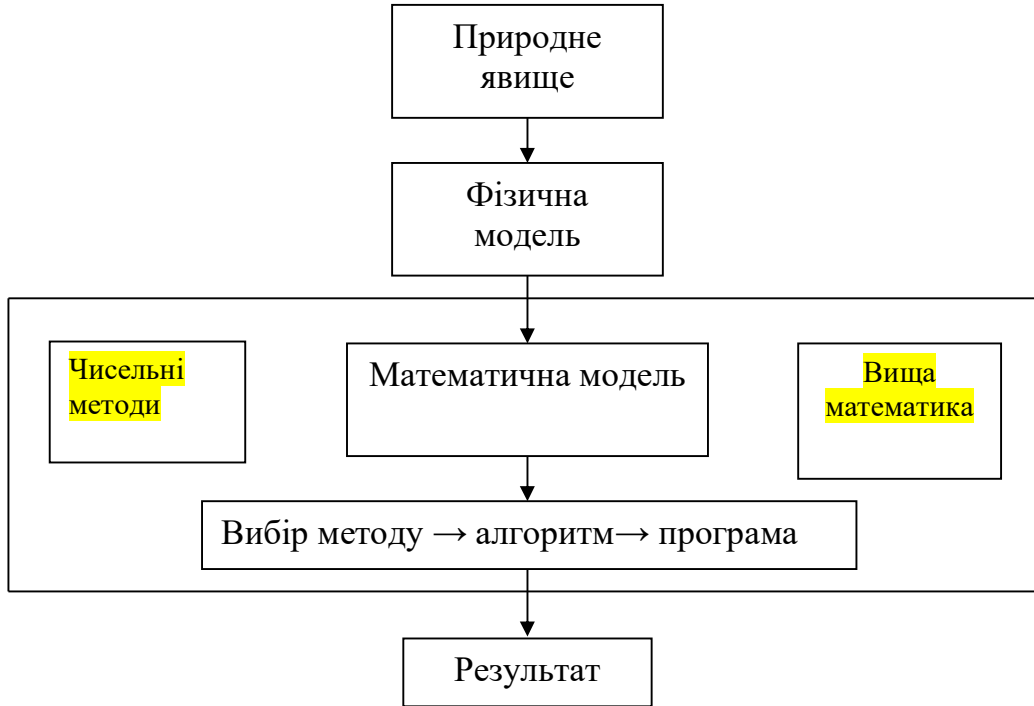


Рисунок 1 – Схема застосування вищої математики і чисельних методів при вивченні умовного природного явища

Фізична модель – це фізичне уявлення системи, об’єкта, явища або процесу з метою їхнього дослідження, тобто представлення за допомогою іншого фізичного («реального») об’єкта, що має в тому чи іншому аспекті «аналогічну» динаміку «поведінки», що водночас означає, що математичні моделі об’єкта дослідження та об’єкта-моделі є «аналогічними» (якщо не тотожними). Відповідно вимірювання параметрів об’єкта-моделі дозволяє отримати значення параметрів об’єкта дослідження.

Зазвичай фізичну модель явища формують спеціалісти у своїй галузі. Наприклад, якщо мова йде про медицину, то лікарі, якщо про екологію, то науковці у сфері екології і таке інше.



За допомогою фізичної моделі необхідно позбутись усіх описових моментів, залишивши тільки важливу математичну інтерпретацію тих процесів, які є сутністю фізичної моделі. Таким чином, на виході буде отримана математична модель явища.

Математична модель – це система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище.

При отриманні математичної моделі використовують загальні закони природознавства, спеціальні закони конкретних наук, результати пасивних та активних експериментів, імітаційне моделювання за допомогою обчислювальних машин. Математичні моделі дозволяють передбачити хід процесу, розрахувати цільову функцію (вихідні параметри процесу), керувати процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками.

Процес створення математичної моделі називається математичним моделюванням. Створенням математичних моделей займаються зазвичай фізики. Це найзагальніший та найбільш використовуваний в науці, зокрема, в кібернетиці, метод досліджень.

Для спрощеного уявлення про математичну модель досить сказати, що підручник з математики – це набір примітивних математичних моделей.

Для створення математичних моделей можна використовувати будь-які математичні засоби – апарат диференціальних та інтегральних рівнянь, теорію множин, абстрактну алгебру, математичну логіку, теорію ймовірностей, теорію графів, та інші.

Коли математична модель побудована, сформульовані задачі, які необхідно розв'язати, виникає необхідність вибору метода розв'язання. В залежності від умов поставленої задачі та додаткових умов, які накладаються на розв'язок, обирається метод, який буде покладено в основу створення алгоритму розв'язання. Якщо задачею є нелінійне рівняння, то обираються, наприклад, методи ділення навпіл, хорд, або Ньютона. Якщо це система лінійних рівнянь, обирають методи Гауса, або ітераційні методи розв'язання СЛАР. Якщо це диференціальні рівняння, то необхідно підібрати методи Ейлера, Ейлера-Коші,

або будь-які інші методи розв'язання ОДР чи ДРЧП, у залежності від вигляду та умов задачі.

Якщо співвідношення задаються аналітично, то їх можна розв'язати в замкненому вигляді (явно) відносно шуканих змінних як функції від параметрів моделі, або в частково замкненому вигляді (неявно), коли шукані змінні залежать від одного або багатьох параметрів моделі. До моделей цього класу належать диференціальні, інтегральні, різницеві рівняння, ймовірнісні моделі, моделі математичного програмування та інші.

Якщо не можна отримати точний розв'язок математичної моделі, використовуються чисельні методи.

Далеко не всі математичні задачі можна розв'язати точно навіть теоретично. Наприклад, не існує точних методів розв'язання нелінійних рівнянь загального вигляду, систем нелінійних рівнянь, задач інтерполяції, особливо екстраполяції. Тому в таких випадках єдиним способом розв'язання стають чисельні методи.

На основі обраного методу розв'язання задачі створюють алгоритм, за яким необхідно написати програмний код і отримати результат обчислень.

Таким чином, обирати метод розв'язання та створювати алгоритми можна як методами аналітичної математики, так і чисельними методами. Методи аналітичної математики дають змогу отримати точний результат, однак на практиці таке буває рідко: вхідні дані можуть бути неточними, і в цьому випадку точний результат отримати неможливо. У цьому випадку можна застосовувати лише апарат чисельних методів.

### ***Питання для самоперевірки***

- 1. Яка різниця між розв'язанням задач методами аналітичної математики та чисельних методів?*
- 2. Що таке математична модель?*
- 3. Що таке математичне моделювання?*
- 4. У яких випадках використовуються лише чисельні методи?*

## 4. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. АПРОКСИМАЦІЯ. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Задачі наближення функцій займають провідне місце в прикладній математиці. Існує думка, що практично всі прикладні задачі – це задачі теорії наближення функцій. Це означає, що зрештою ці задачі зводяться до визначення функцій, які добре описують процес і легко обчислюються. Способи побудови таких функцій специфічні для різних застосувань математики.

В першу чергу до застосувань теорії наближення функцій можна віднести задачі апроксимації спеціальних та елементарних функцій, які важко обчислювати. Наприклад, інтегральний синус, функції Бесселя, тригонометричні та обернені тригонометричні функції, логарифмічна і показникова функції і т.і.

Важливу роль відіграють методи наближення функцій в задачах відновлення, які часто виникають в різних прикладних науках: метеорології, геології, топографії і т.і. Задача відновлення полягає в тому, що функція відома на деякій множині точок і треба розробити алгоритм наближеного обчислення функції на більш широкій множині точок. Ці задачі розв'язують за допомогою інтерполяційних методів.

Важко перебільшити значення теорії наближення функцій для розробки методів комп'ютерної графіки. Завдяки бурхливому розвитку методу скінченних елементів і алгоритмах комп'ютерної графіки для наближеного подання функцій (кривих і поверхонь) вже майже 50 років широко використовують кусково-поліноміальні функції однієї і багатьох змінних. При цьому, в залежності від задачі і бажаної простоти алгоритму, використовують кусково-поліноміальну апроксимацію з різними вимогами гладкості в місцях стиковки поліномів. Підвищений інтерес фахівців саме до поліномів пояснюється не тільки історичними традиціями інтерполяції функцій одного аргументу. Перш за все це привабливі інтерполяційні та обчислювальні властивості поліномів, а також можливість узагальнення для функцій з двома та трьома аргументами.

Задача про наближення функцій ставиться наступним чином.

Дану функцію  $f(x)$  необхідно замінити узагальненим многочленом  $m$ -го порядку:

$$P_m(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_m\phi_m(x),$$

де:  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – сталі коефіцієнти,  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$  – задана на деякій множині  $X$  система функцій, достатньо гладких так, що б відхилення  $f(x)$  від  $P_m(x)$  на вказаній множині  $X$  було найменшим.

$P_m(x)$  називається апроксимуючим поліномом (многочленом).

Для практики важливим є випадок, коли система функцій  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$  – є послідовністю цілих невід’ємних степенів  $x$ :

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

Розглянемо поняття найменшого відхилення функцій.

Якщо подивитись на рисунок 2, то можна побачити, що є проблема визначення найменшого відхилення неперервної функції від точкового каркасу. Загального поняття найменшого відхилення не існує, але є різні типи задач теорії наближення, і є поняття «міри», яке вводиться в кожному випадку в залежності від додаткових умов задачі.

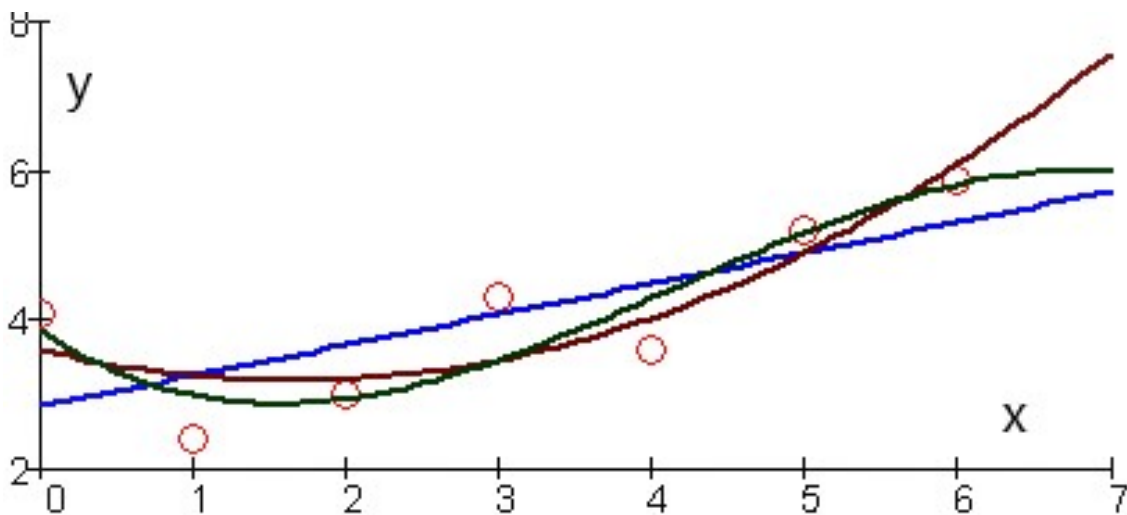


Рисунок 2 – Найменше відхилення функцій

В залежності від того, що розуміють під співвідношенням двох функцій, розрізняють різні типи задач теорії наближення:

- інтерполяція;
- середньоквадратичне наближення;
- рівномірне наближення та т.і.

Необхідність замінити функцію апроксимуючим многочленом виникає, якщо:

- функція є табличною;
- функція має складний аналітичний вираз для подальшого дослідження.

У теорії наближення функцій можна вирізнити два шляхи розв'язання задач: апроксимація у чистому вигляді та інтерполяція.

Апроксимація, якщо спрощено, це заміна дискретно заданої функції на неперервну (рисунок 3).

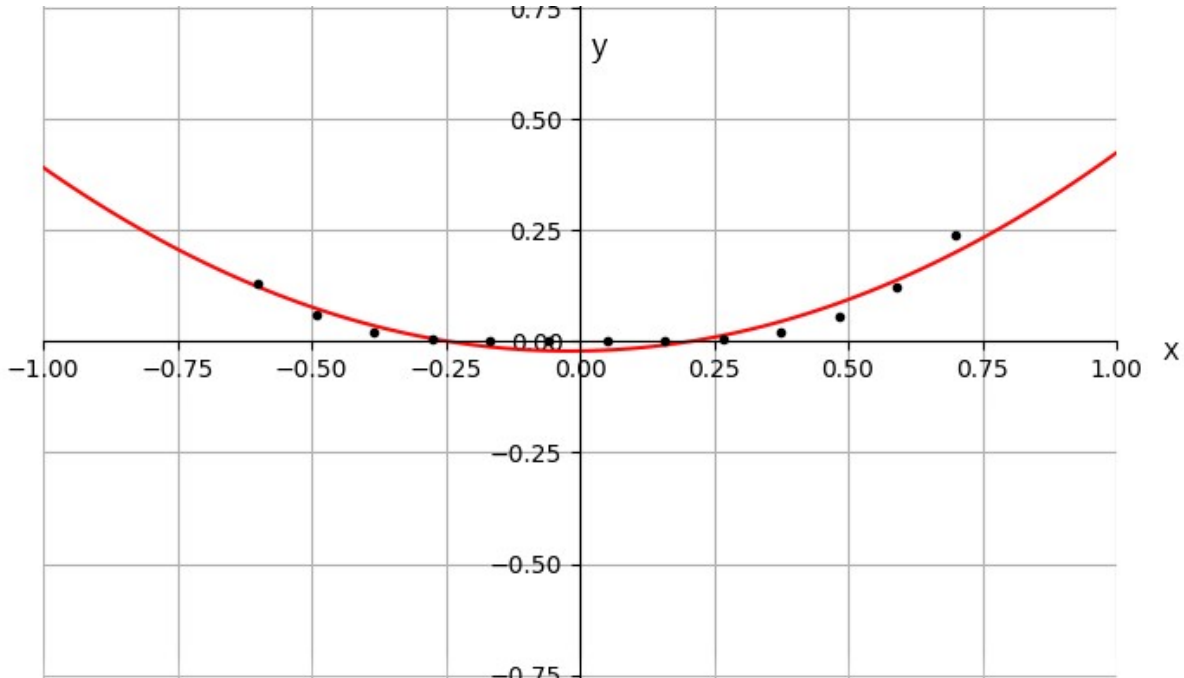


Рисунок 3 – Апроксимація функцій

А інтерполяція – це такий вид апроксимації, де задано додаткову умову обов'язкового проходження шуканої неперервної функції через задані точки (рисунок 4).

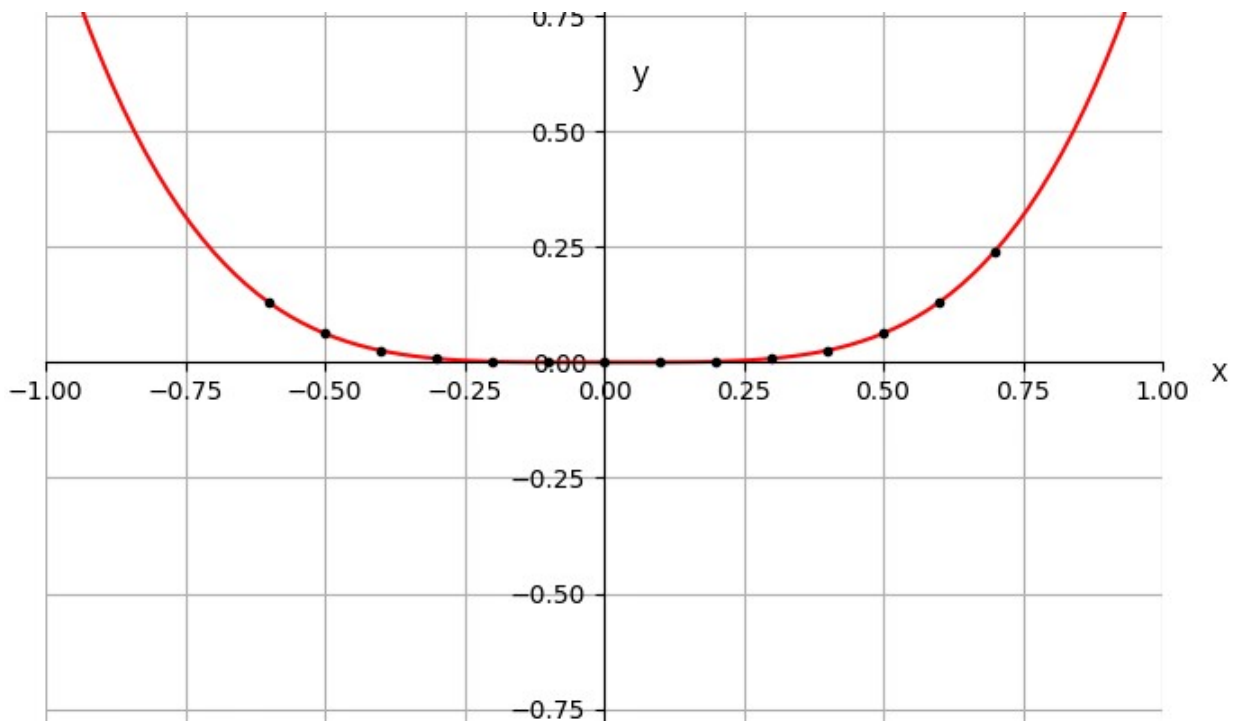


Рисунок 4 – Інтерполяція функцій

Обидва напрями мають своє застосування. Якщо дискретні значення функції були отримані шляхом зняття показників процесу, то, ймовірно, самі дані не є точними, і відхилення можуть виникати через помилки вимірювача. Тобто, людина могла не в той час зняти показання, не те побачити на шкалі та т.і. Тоді немає сенсу будувати криву, яка проходить безпосередньо через дані точки. І в цьому випадку краще використовувати методи апроксимації. Але якщо, наприклад, проектувальник задав точки, за якими повинно пройти крило літака, то у даному випадку вимога обов'язкового попадання в задані точки є актуальною, і необхідно буде розв'язувати задачу інтерполяції.

### ***Питання для самоперевірки***

1. *Які є сфери застосування теорії наближення функцій?*
2. *Що таке апроксимація і інтерполяція?*
3. *Чим відрізняються задачі апроксимації та інтерполяції?*

## 5. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Задані в окремих точках  $x$  значення  $y$  отримані зазвичай в результаті вимірів, і, отже, є наближеними числами. Тому немає необхідності прагнути того, щоб наближений многочлен в точках  $x$  приймав ті ж значення, що і задана функція. Крім того ступінь інтерполяційного многочлена дорівнює кількості заданих точок, з їх зростанням зростає і ступінь інтерполяційного многочлена.

Э й інший підхід до вирішення завдання про наближення функції, що ґрунтується на використанні методу найменших квадратів, згідно з яким за міру відхилення многочлена беруть величину:

$$S = \sum_{i=0}^n [P_m(x) - f(x)]^2$$

або

$$S = \sum_{i=0}^n [a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i]^2 \rightarrow \min,$$

яку необхідно мінімізувати.

Величина  $S$ -функції залежить від коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ , тому для розв'язання задачі оптимізації необхідно взяти частинні похідні  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  і прирівняти їх до 0.

$$\frac{\delta S}{\delta a_m} = 2 \sum (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta a_1} = 2 \sum (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta a_m} = 2 \sum (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0$$

Отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь, яку потрібно розв'язати відносно  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Існує багато методів розв'язання таких систем, наприклад, метод Гауса та його модифікації, Крамера, ітераційні методи тощо. Вибір методу розв'язання залежить від умов задачі та від вигляду і розмірності матриці коефіцієнтів.

На відміну від інтерполяції, степінь апроксимаційного полінома визначається користувачем. Розглянемо метод найменших квадратів (МНК) першої та другої степені.

## 5.1 Лінійна апроксимація

У випадку, коли необхідно побудувати лінійну залежність, тобто необхідно знайти апроксимуючу функцію у вигляді

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

виникає необхідність отримати вищезгадану систему з двома невідомими  $a_0$  і  $a_1$ . Для цього запишемо систему розмірністю 2:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

Для її розв'язання можна скористатись будь-яким методом розв'язання двовимірних систем. Наприклад, скористаємося формулами для систем 2x2. Для лінійної системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

розв'язок можна знайти за формулами:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Після розв'язання системи отримуємо коефіцієнти прямої  $a_0$  і  $a_1$ , які необхідно підставити в рівняння прямої.

Приклад апроксимації точок прямою наведено на рисунку 5.



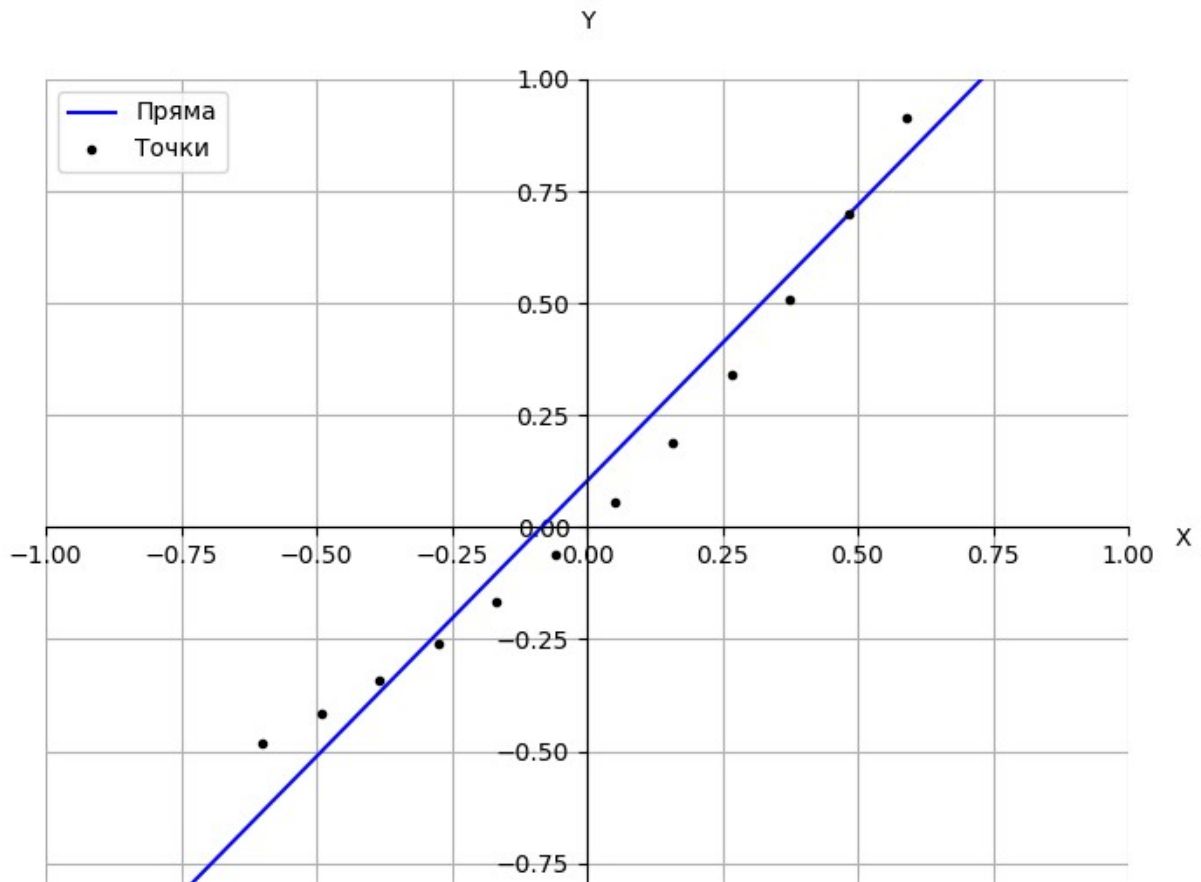


Рисунок 5 – Лінійна апроксимація по МНК

## 5.2 Параболічна апроксимація

На практиці нелінійну залежність  $y$  від  $x$  часто апроксимують багаточленом другого ступеня:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

де  $a_0$ ,  $a_1$ , та  $a_2$  – коефіцієнти, які потрібно визначити.

Квадратичне відхилення в цьому випадку буде мати вигляд

$$S = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2.$$

Запишемо нормальну систему для визначення  $a_0$ ,  $a_1$ , та  $a_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i^2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Після перетворення отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 - \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{aligned} \right\}$$

Ця система розв'язується методом Гауса та його модифікаціями, або ітераційними методами. Розв'язавши систему, і підставивши знайдені коефіцієнти  $a_0$ ,  $a_1$ , та  $a_2$  у рівняння параболи, отримаємо конкретний вигляд апроксимуючого багаточлена [3].

На рисунку 6 представлено результати апроксимації методом найменших квадратів другої степені.

Необхідно зазначити, що при розв'язанні математичних задач нерідко виникають питання щодо отриманого результату. Наприклад, якщо є тільки 2 точки у каркасі, то параболічну апроксимацію застосовувати не можна, так як парабола визначається трьома точками. І не тільки тому. Якщо каркас буде задано хаотичним чином, або дані ні про що не свідчать, то і наукова та практична значущість результату викликає сумніви. Тому є необхідність ввести поняття коректної постановки задачі.

Щоб задача була коректно поставлена, розв'язок повинен задовольняти наступні три умови.

1. Розв'язок існує.
2. Розв'язок єдиний.

3. Розв'язок стійкий (по Ляпунову) – при малому відхиленні вхідних даних, мало змінюється результат.

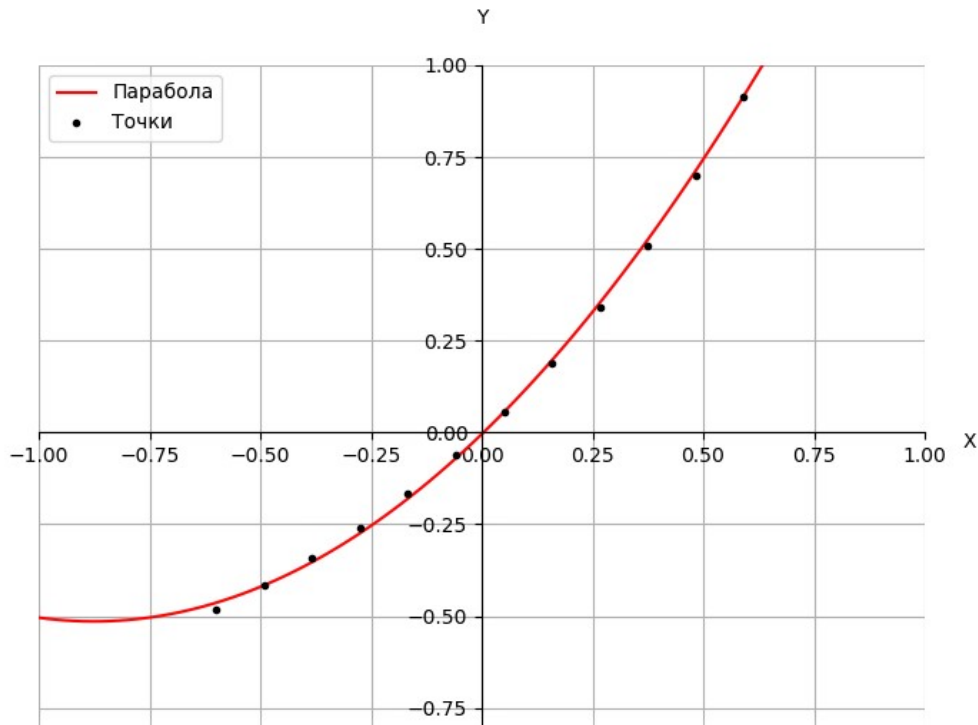


Рисунок 6 – Параболічна апроксимація по МНК

На завершення цього розділу є сенс зробити одне надзвичайно важливе зауваження, а точніше, попередження, яке полягає у тому, що, оскільки обчислювальні алгоритми методу найменших квадратів побудовані виключно на основі апроксимаційних процедур, то їх використання для розв'язання задач екстраполяції може призвести до неприпустимих помилок. Іншими словами, за допомогою цього методу можна успішно розв'язувати задачі загушення даних на вході, визначення значень функції в середині заданого відрізка, та задачі оптимального синтезу динамічної характеристики системи, за інформацією про її вхід та вихід, але ні в якому разі за допомогою цього методу не можна синтезувати моделі прогнозу.

### ***Питання для самоперевірки***

1. *Наведіть формули методу найменших квадратів першої та другої степені.*

2. *Від чого залежить степінь апроксимаційного полінома?*
3. *Що таке коректно поставлена задача?*
4. *Чи можна використовувати метод найменших квадратів для задач прогнозування?*

## 6. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Задача інтерполяції набуває особливої актуальності у наш час, оскільки розвиток науки і техніки викликає необхідність обробляти великі масиви даних.

Великі наукові інститути, фірми та компанії вкладають значні кошти у розвиток цього напрямку. Серед знаних компаній і корпорацій можна назвати *Google, Yahoo!* та інші. За потреби зменшення часу обробки та збільшення точності результату виникає необхідність створення апарату інтерполяційної обробки даних за рахунок аналізу проблем існуючих класичних методів, та удосконалення сучасних.

Задача отримання значень інтерполяційної функції з мінімальними похибками виникає у великій кількості сфер людської діяльності, наприклад, при геометричному моделюванні об'єктів і процесів, будівництві, побудові реальних сцен (3D-зображень), у літакобудуванні, банківській сфері, медицині, та інших.

Серед численних методів інтерполяції можна виокремити такі класичні методи: кусково-лінійна інтерполяція, поліноми Лагранжа та Ньютона. На практиці доволі часто ці методи використовують для розв'язання задачі інтерполяції.

Нехай функція  $f(x)$  задана у вигляді таблиці 1, де  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ , ...,  $y_n = f(x_n)$ .

Таблиця 1. Значення функції  $f(x)$  в точках

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$f(x)$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$

Дану дискретно задану функцію  $f(x)$  необхідно замінити неперервною функцією, яка обов'язково повинна проходити через задані точки (рисунок 7).

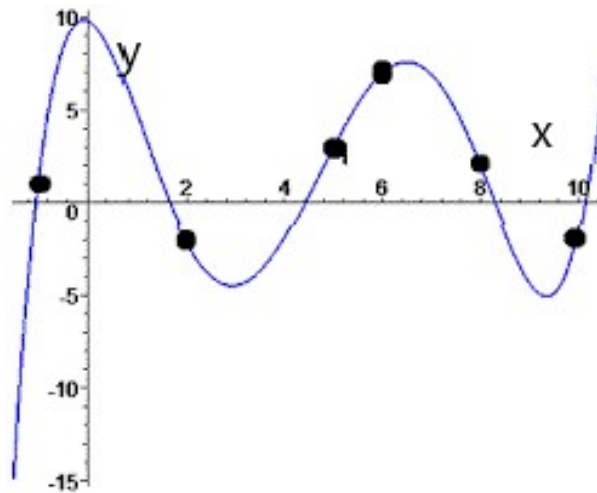


Рисунок 7 – Приклад задачі інтерполяції

Методи розв'язання задачі інтерполяції можна поділити на локальні та глобальні. У випадку локальної інтерполяції для отримання результату використовується інформація лише у двох сусідніх точках, а у випадку глобальної інтерполяції потрібно враховувати інформацію у всіх заданих точках. Тобто, поліном потрібно будувати враховуючі всі задані точки певного відрізка. Метод кусково-лінійної інтерполяції відноситься до локальної інтерполяції (рисунок 8), а до методів глобальної відносяться поліноми Лагранжа (рисунок 9), Ньютона, Стірлінга та інші.

Задані точки називають вузлами інтерполяції, а результат – інтеполюючою функцією. Задача інтерполяції зводиться до пошуку значень функції у точках, відмінних від вузлів інтерполяції.

Геометрична інтерпретація задачі інтерполяції полягає в тому, що потрібно знайти таку криву  $F(x)$  певного типу, що проходить через задану систему точок  $(x_i, y_i)$ . За допомогою цієї кривої можна знайти наближене значення  $f(x^*)$ , де  $x^*$  не є вузлом інтерполяції.

На практиці частіше за все інтерполюючу функцію будують у вигляді полінома. Інтерполяційний многочлен  $F(x)$  завжди однозначний, оскільки існує тільки один многочлен ступеня  $m$ , який в даних точках набуває заданих значень, але існує декілька способів побудови інтерполяційного многочлена.

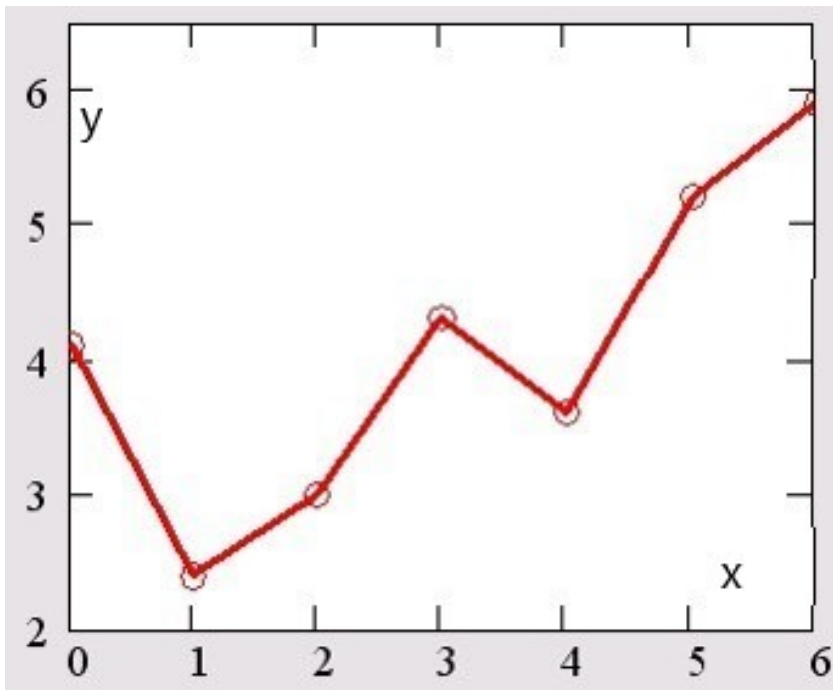


Рисунок 8 – Приклад локальної інтерполяції

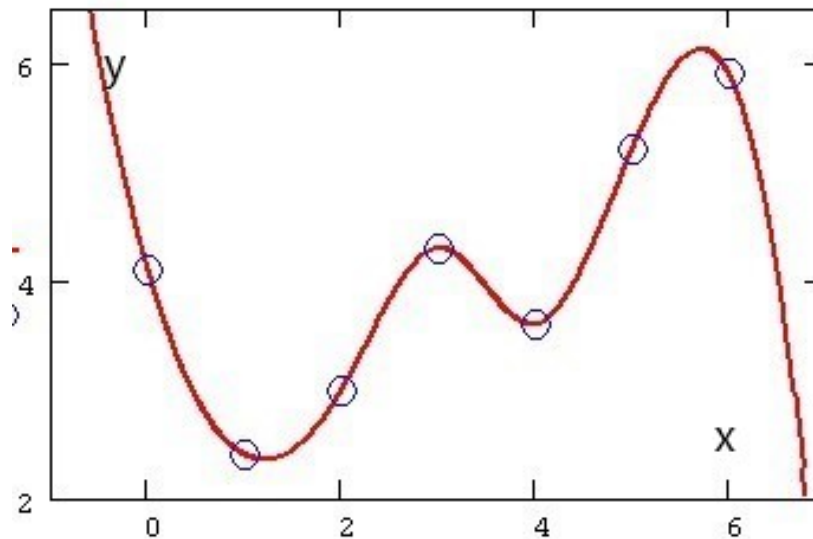


Рисунок 9 – Приклад глобальної інтерполяції

Задачі інтерполяції бувають трьох наступних типів.

1. Суть інтерполяція.
2. Обернена інтерполяція.
3. Екстраполяція (або прогнозування).

Суть інтерполяція, або звичайна інтерполяція – це пошук значення функції у точці, відмінної від вузла інтерполяції, у межах заданого відрізка.

Обернена інтерполяція – це пошук  $x$ , якщо відомо значення функції. Тобто, у якій точці функція набуває певного значення.

Екстраполяція - це пошук значення функції у точці, відмінної від вузла інтерполяції, за межами заданого відрізка (рисунок10).

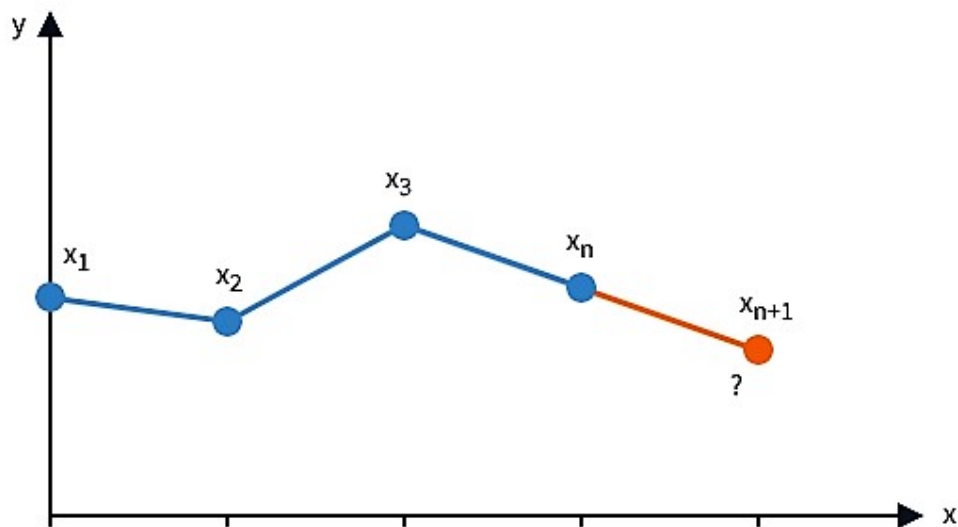


Рисунок 10 – Приклад задачі екстраполяції

Існує багато способів розв'язання задачі інтерполяції. Не всі методи, які використовують для суть інтерполяції, можуть розв'язувати також і задачі екстраполяції. Для цих задач існує багато своїх методів, причому з кожним роком кількість цих методів збільшується. В наступних розділах будуть розглянуті різні підходи до розв'язання задач інтерполяції, як поліноміальні методи, так і не поліноміальні.

#### ***Питання для самоперевірки***

1. *Що таке локальна та глобальна інтерполяція?*
2. *Яка головна відмінність апроксимації та інтерполяції?*
3. *Як формулюється задача інтерполяції?*
4. *Які існують типи задач інтерполяції?*



## 7. МЕТОДИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

### 7.1 Кусково-лінійний метод

Кусково-лінійний метод – це приклад локальної інтерполяції.

Нехай функція  $f(x)$  задана у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2. Значення функції у точках

x	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
y	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$

Змінимо функцію на ламану лінію, у якій кожен відрізок буде сполучати усі сусідні точки таблиці. Розрахуємо значення  $y$  в заданій точці  $x$ . Для цього подивимось на рисунок 11. Скористаємось формулою побудови прямої за двома заданими точками.

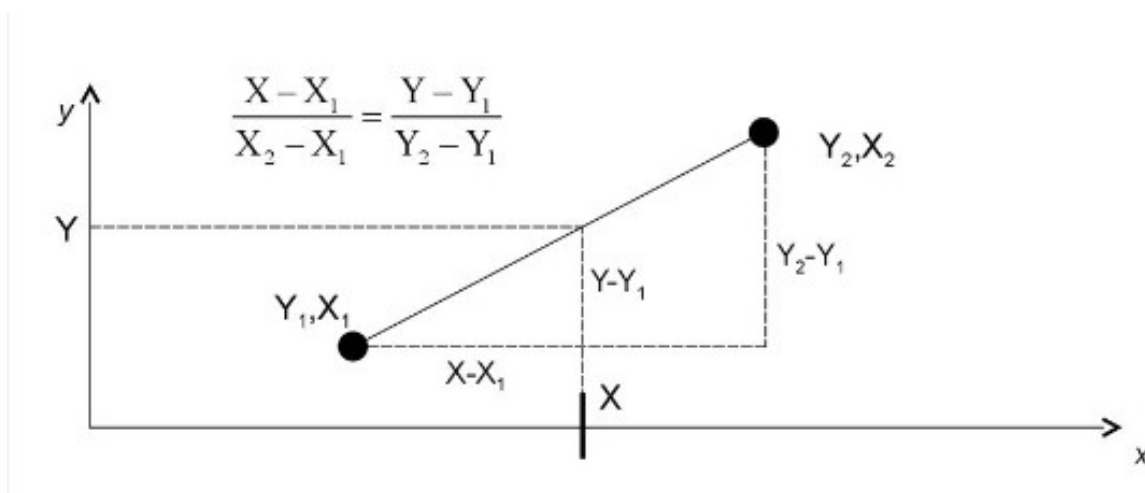


Рисунок 11 – Пошук  $y$  за заданим  $x$

З рисунку видно, що для будь-якої точки  $x$  значення функції  $y(x)$  може бути підраховано за двома сусідніми точками за наступною формулою:

$$y = y_{i-1} + (x - x_{i-1}) \frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$$

Це і є формула кусково-лінійної інтерполяції. [3]

Таким чином, при використанні кусково-лінійного інтерполяційного методу, в першу чергу необхідно визначити інтервал, в який потрапляє значення аргументу, після цього підставити значення у формулу з коефіцієнтами, відповідними для визначеного інтервалу, і підрахувати наближене значення функції.

Розглянемо приклад.

Нехай задано функцію у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3. Значення функції у точках

x	0	2	4	6	8
y	0	4	16	36	64

Потрібно знайти значення функції у точці  $x=3$ .

Розв'язок буде наступний.

Точка  $x=3$  належить проміжку  $2 \dots 4$ .

Тому позначимо  $x_{i-1} = 2$ ,  $x_i = 4$ ,  $y_{i-1} = 4$ ,  $y_i = 16$ ,

Підставляємо ці дані у формулу кусково-лінійної інтерполяції і отримуємо  $y = 10$ .

Якщо уважно подивитись на таблицю 3, то можна помітити, що це функція  $y=x^2$ . У точці  $x=3$  ця функція повинна мати значення  $y=9$ . А за формулою вийшло 10. Різниця – це похибка обчислень. Метод простий та швидкий при обрахунках, але дає великі похибки. Його, як правило, використовують, щоб знайти грубе наближення для значення функції.

## 7.2 Метод Лагранжа

Метод Лагранжа – це метод глобальної інтерполяції. Історія поліноміальної

інтерполяції  $f(x)$  починалася з формули Лагранжа (остання чверть 18 століття). Вважається, що інтерполяційну формулу Лагранжа першим застосував Варінг. Потім незалежно від Варінга її відкрив Ейлер у 1783 р. Публікація Лагранжа з'явилася у 1795 р. На думку деяких істориків ця формула була відома ще Ньютону (кінець 17 століття). В розвиток теорії поліноміальної інтерполяції функцій однієї змінної зробили свій внесок багато видатних вчених: Гаусс, Стірлінг, Бессель, Еверетт, Вандермонд, Чебишев, Ерміт та інші. Класична формула Лагранжа без будь-яких труднощів узагальнюється на двовимірні області (прямокутники) та тривимірні (прямокутні паралелепіеди).

Більш всього загальним виразом параболічної інтерполяції є інтерполяційна формула Лагранжа. Розглянемо многочлен  $P_i(x)$ , з такими властивостями:  $P_i(x_i) = 1$ ,  $P_i(x_j) = 0$ ,  $i \neq j$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

Якщо  $P_i$  буде давати 0 в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , окрім  $x_i$ , то можна його представити у наступному вигляді:

$$P_i(x) = C_i \cdot (x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n),$$

де  $C_i$  – це постійний коефіцієнт.

Визначивши, що  $x = x_i$ , і вважаючи, що при цьому  $P_i(x_i) = 1$ , отримаємо

$$1 = C_i \cdot (x_i-x_1)(x_i-x_2) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n),$$

звідки випливає наступне рівняння:

$$C_i = \frac{1}{(x_i-x_1)(x_i-x_2) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}$$

Після підстановки  $C_i$  в дану формулу можна визначити кінцеву формулу підрахунку  $P_i$ :

$$P_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}$$

Тепер перейдемо до визначення значення  $P_n(x)$ , що буде задовольняти умови інтерполяції, тобто у заданих точках  $x_i$  поліном повинен приймати задані значення  $y_i$ . Такий многочлен має наступний вигляд:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n P_i(x)y_i$$

Отже, об'єднавши ці дві формули отримаємо інтерполяційну формулу Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_{i-1})(x_1-x_{i+1}) \dots (x_1-x_n)}$$

Метод Лагранжа – один із класичних методів, який часто застосовують на практиці, що обумовлено відносно невеликою похибкою. Але ця похибка може збільшуватись при великій кількості заданих точок, або при різкій зміні кривизни функції. При цьому великі помилки виникають на кінцях заданого відрізка. Всередині відрізка похибка зазвичай залишається малою.

Недолік методу Лагранжа, що полягає у тому, що при збільшенні вузлів інтерполяції швидко збільшується похибка інтерполяції описано в так званому феномені Рунге.

За висхідну криву обрано функцію Рунге:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Рунге виявив, що для такого виду кривих верхня границя похибки інтерполяції прямує до нескінченності, коли кількість вузлів, а з нею і ступінь полінома, зростає, як показано на рисунку 12.

З рисунка видно, що на кінцях відрізка виникає велика похибка, що нівелює придатність методу Лагранжа для великої кількості точок. Але існують підходи, щоб уникнути цих недоліків.

### 7.3 Метод Ньютона

Метод Ньютона також є методом глобальної інтерполяції.

Нехай у однаково віддалених точках  $x_i = x_0 + i \cdot h$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), де  $h$  – це крок інтерполяції, задані значення  $y_i = f(x_i)$  для  $y = f(x)$ . Потрібно визначити поліном  $P_n(x)$ , у якого степінь не вище  $n$ , що буде задовольняти умову  $P_n(x_i) = y_i$ .

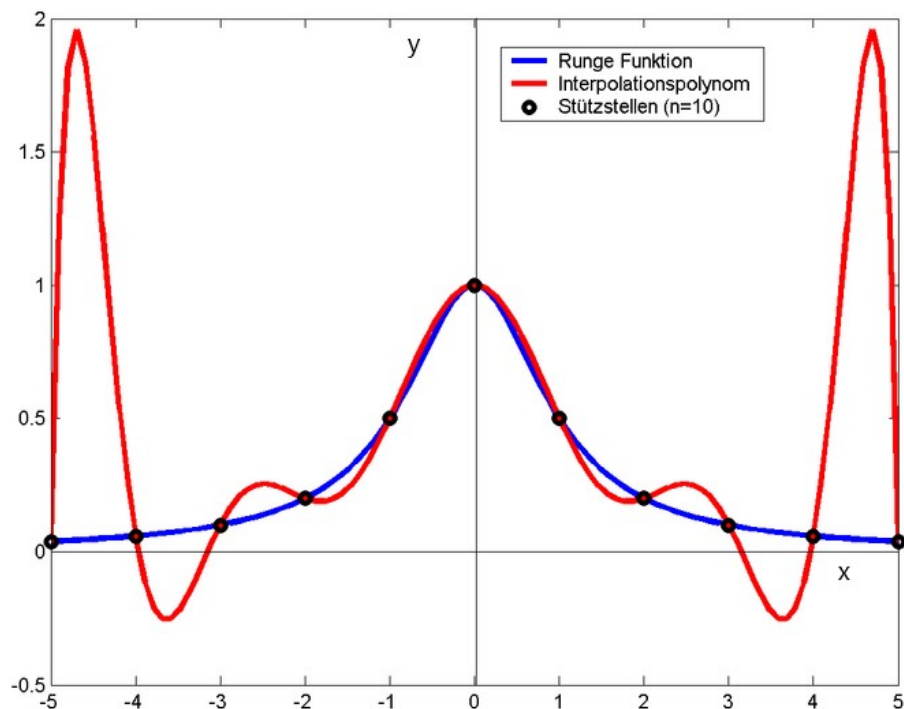


Рисунок 12 – Феномен Рунге

Інтерполяційні поліноми зручно використовувати, коли вони задані в формі Ньютона, за умови, що точка інтерполяції буде знаходитись близько до початку (пряма формула Ньютона) або до кінця таблиці (зворотна формула Ньютона) значень.

Пряма інтерполяційна формула Ньютона представлена у вигляді:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Обернена інтерполяційна формула Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де:  $q = \frac{x-x_0}{h}$ ,

вирази виду  $\Delta^k y_i$  підраховується за наступною формулою:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

Пряму інтерполяційну формулу Ньютона потрібно використовувати при інтерполяції функції  $y = f(x)$  в околі початкової точки  $x_0$ , де  $q$  досить мале. Якщо дана умова не виконана, то краще використовувати обернену формулу.

Графічно інтерполяційні функції, побудовані за формулами Лагранжа і Ньютона, співпадають. Яку саме формулу використовувати залежить від того, як саме задана початкова функція.

Отже, за допомогою методів інтерполяції можна отримати значення функції у точках, які не є вузлами інтерполяції.

Для прикладу візьмемо таблицю 4.

Таблиця 4. Значення функції у точках

x	y
-0.9	0.454
-0.7769	-0.772
-0.6538	-0.7872
-0.5308	0.4323
-0.4077	0.9738
-0.2846	0.012
-0.1615	-0.979
-0.0385	-0.4104
0.0846	0.8019
0.2077	0.7565
0.3308	-0.4754
0.4538	-0.9616
0.5769	0.06037
0.7	0.9877

На рисунку 13 зображено візуалізацію роботи методів кусково-лінійної інтерполяції та Лагранжа для таблиці.

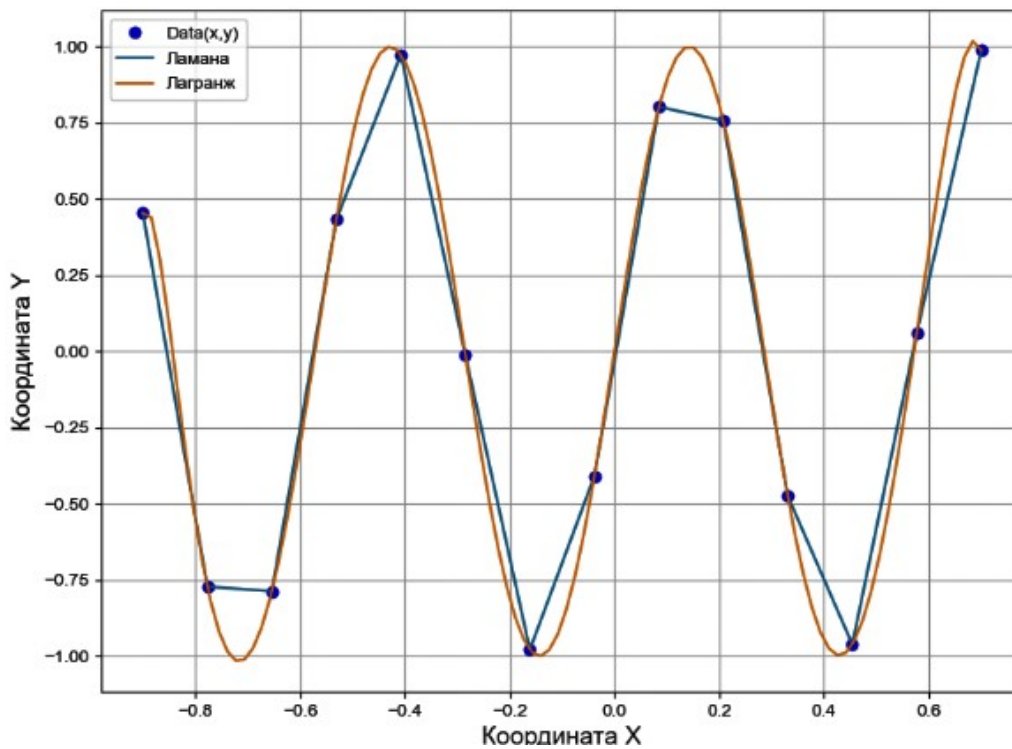


Рисунок 13 – Інтерполяція функції за допомогою кусково-лінійного методу та поліному Лагранжа

З рисунку видно, що кусково-лінійна інтерполяція графічно є ламаною лінією, і тому часто дає велику похибку обчислень. Метод Лагранжа є методом глобальної інтерполяції, і при побудові враховує інформацію про всі задані точки, тому часто дає доволі непоганий результат.

### ***Питання для самоперевірки***

1. *Наведіть приклади методів локальної та глобальної інтерполяції.*
2. *Для функції, заданої таблицею:*

<i>x</i>	<i>0</i>	<i>2</i>	<i>4</i>	<i>6</i>	<i>8</i>
<i>y</i>	<i>0</i>	<i>4</i>	<i>16</i>	<i>36</i>	<i>64</i>

*порахуйте значення у точці  $x=3$  за формулами Лагранжа та Ньютона.*

*Порівняйте результати з кусково-лінійною інтерполяцією.*

3. *Що впливає на похибку методу Лагранжа?*
4. *Чим відрізняються поліноми Лагранжа і Ньютона?*

## 8. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЇ ГАУСА. ЗВИЧАЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ГАУСА

Розглянемо наступну постановку задачі. Нехай функція  $f(x)$  задана дискретним каркасом точок:  $y_i=f(x_i)$ , тобто задані пари  $(x_i, y_i)$ . Задачею інтерполяції є побудова такої функції  $\phi(x)$ , що повинна приймати в заданих точках ті ж значення  $y_i$ , що й функція  $f(x)$ , а в проміжних точках відхилення  $\phi(x)$  від  $f(x)$  повинно бути мінімальним. Апроксимуючу функцію побудуємо у вигляді узагальненого многочлена:

$$\phi(x) = a_{00}\psi_1(x) + a_{11}\psi_2(x) + \dots + a_{nn}\psi_N(x),$$

де  $\psi_i(x)$  – система деяких незалежних функцій.

В якості  $\psi_i(x)$  була вибрана система експоненційних функцій. Запишемо інтерполяційну функцію, яку далі будемо називати Гаусс-функцією, у вигляді суми опорних функцій:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x),$$

де:  $\psi_i(x) = \tilde{y}_i e^{-\alpha(x-x_i)^2}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$  – базисні значення для функції  $\phi(x)$  при заданих аргументах  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $\alpha$  – деякий коефіцієнт, значенням якого можна варіювати. Наприклад, цей коефіцієнт можна прийняти, як:

$$\alpha = \frac{\pi(n-1)}{k},$$

де  $k = (x_{\max} - x_{\min})^2$ ,  $x_{\max}, x_{\min}$  – максимальне і мінімальне значення аргумента  $x$ , тобто значення кінців відрізка.

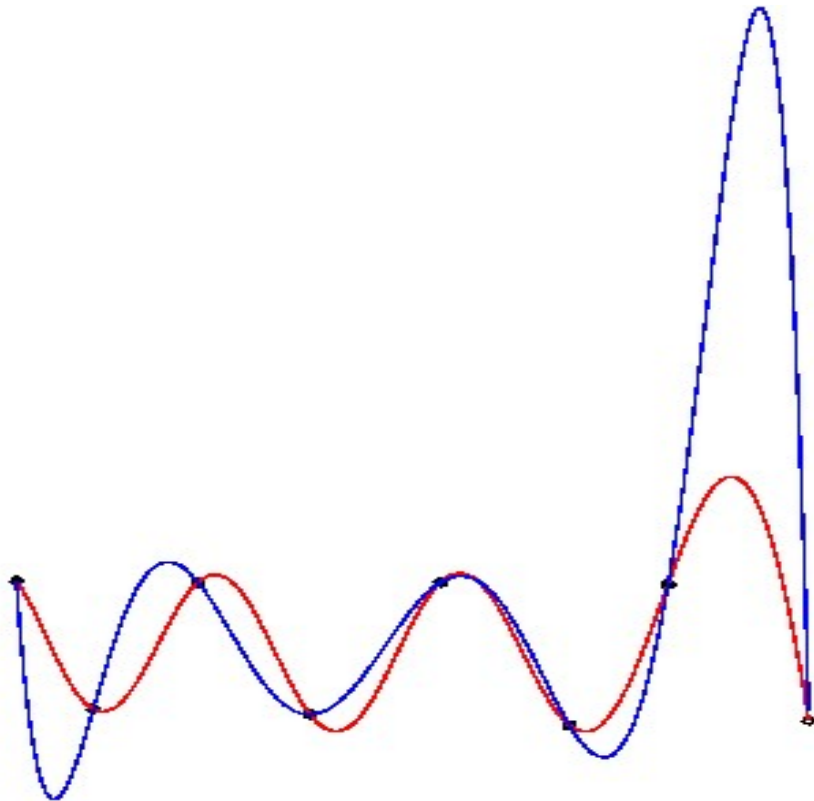
Геометрична інтерпретація способу Гаусс-функцій показана на рисунку 14.





$$G(x) = \tilde{y}_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(x-x_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(x-x_n)^2}.$$

Цей спосіб інтерполяції відрізняється передусім тим, що вплив будь-якого відхилення в експоненціальній залежності зменшується із збільшенням відстані, що зумовлює краще наближення у порівнянні, наприклад, з методом Лагранжа (рисунок 15).



а) Червоний колір - інтерполяційна функція Гауса

б) Синій колір - інтерполяційний поліном Лагранжа

Рисунок 15 – Порівняльний аналіз інтерполяційної функції Гауса та полінома Лагранжа

### ***Питання для самоперевірки***

1. *Наведіть формулу інтерполяційної функції Гауса.*
2. *Які методи застосовуються для розв'язання системи при реалізації функції Гауса?*
3. *Чим функція Гауса відрізняється від класичних методів інтерполяції?*

## 9. ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ ФУНКЦІЙ ГАУСА

### 9.1 Параметрична функція Гауса

У цьому підході є недоліки, загальні для методів з явним заданням інтерполяційних функцій. Наприклад, замкнені криві і поверхні не можуть бути описані у такий спосіб.

Для того, щоб усунути цей недолік, проведемо параметризацію інтерполяційної функції Гауса.

Параметризація Гаус-функції полягає в наступному.

Нехай заданий дискретний каркас точок, тобто пари вигляду  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Введемо параметр  $t$ , призначивши йому такі значення:  $t=0$  у точці  $(x_1, y_1)$ ,  $t=1$  у точці  $(x_2, y_2)$ ,  $t=2$  у точці  $(x_3, y_3)$ , ...,  $t=n-1$  у точці  $(x_n, y_n)$  (параметр  $t$  можна визначити також як набігаючу довжину ламаної, побудованої за цими точками).

Кожна точка, таким чином, буде мати три координати  $(t_i, x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, n$  (таблиця 5).

Таблиця 5. Значення функції та параметру  $t$  у точках

$t$	0	1	2	...	$n-1$
$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$

Запишемо інтерполяційну функцію Гаусса  $y=y(x)$  у вигляді:

$$x=x(t)$$

$$y=y(t)$$

де:

$$x(t) = \tilde{x}_1 e^{-a(t)^2} + \tilde{x}_2 e^{-a(t-1)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-a(t-n+1)^2},$$

$$y(t) = \tilde{y}_1 e^{-a(t)^2} + \tilde{y}_2 e^{-a(t-1)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-a(t-n+1)^2}.$$

Для знаходження базисних значень функції  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$  потрібно розв'язати систему вигляду

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t_1-t_1)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t_1-t_2)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t_1-t_n)^2} = x_1, \\ \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t_2-t_2)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t_2-t_n)^2} = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t_n-t_1)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t_n-t_2)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t_n-t_n)^2} = x_n. \end{cases}$$

Для визначення базисних значень функції  $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$ , потрібно розв'язати аналогічну систему

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_1-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_1-t_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_1-t_n)^2} = y_1, \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_2-t_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_2-t_n)^2} = y_2, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_n-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_n-t_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_n-t_n)^2} = y_n. \end{cases}$$

Таким чином, після отримання параметричних рівнянь та підстановки у ці функції параметру  $t$ , отримаємо значення  $x$  та  $y$ , які будуть утворювати інтерполяційну криву Гауса у параметричному вигляді.

## 9.2 Сумарний метод Гауса

Даний метод схожий на попередній і відрізняється лише тим, як задається параметр  $t$ . Параметр цей задається як набігаюча довжина ламаної.

Нехай  $P_i(x_i, y_i)$  — це  $i$ -тий інтерполяційний вузол (від лат. *point*, — точка, далі просто  $P_i$ ). Тоді останній вузол це  $P_n(x_n, y_n)$ . Задамо параметр  $t$  наступним чином:

$$t_i = t_{i-1} + distance(P_{i-1}, P_i),$$

де  $distance(P_{i-1}, P_i)$  - це відстань між двома точками (вузлами інтерполяції),  $i \in [1, N]$ , при  $i = 1, t = 0$ . Таким чином, кожній точці буде відповідати координата з трьох параметрів  $P_i(t_i, x_i, y_i)$ ,  $i \in [1, N]$  (таблиця 6).

Далі потрібно побудувати дві інтерполяційні функції Гауса  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$  та  $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$  та для візуалізації застосовувати лише координати  $x$  та  $y$  при однакових значеннях  $t$ .

Таблиця 6. Значення інтерполяційного вузла та змінної  $t$  у точках

$t_i$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	...	$t_n$
$t_i$	0	$t_1 + \text{dist}(P_1, P_2)$	$t_2 + \text{dist}(P_2, P_3)$	...	$t_{n-1} + \text{dist}(P_{n-1}, P_n)$
$P_i(x_i, y_i)$	$P_1(x_1, y_1)$	$P_2(x_2, y_2)$	$P_3(x_3, y_3)$	...	$P_n(x_n, y_n)$

Необхідно зауважити, що однозначні функції можна інтерполювати всіма трьома способами, а у випадку, коли функції мають декілька значень у для одного  $x$ , використовувати можна тільки параметричні функції Гауса.

Результати візуалізації заданої функції за допомогою трьох функцій Гауса представлена на рисунку 16.

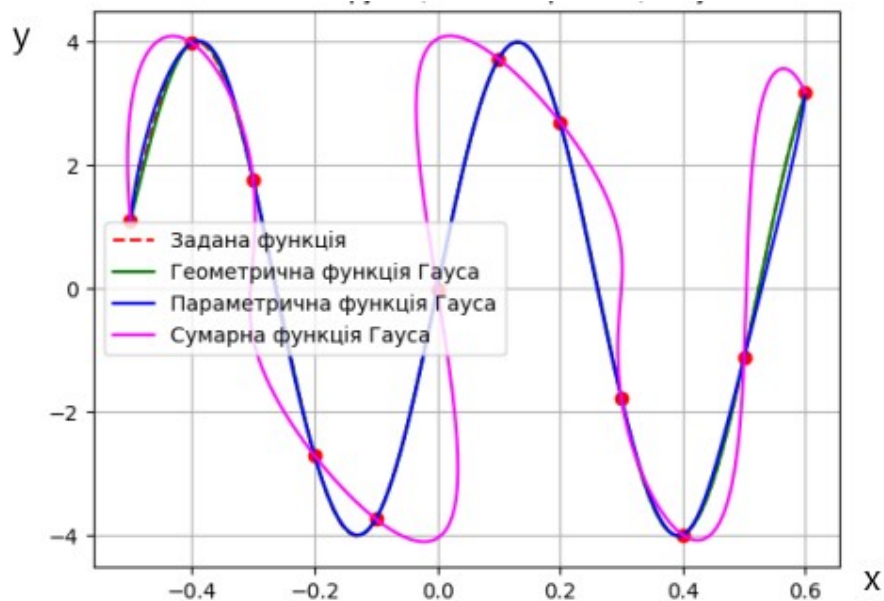


Рисунок 16 – Інтерполяція за допомогою трьох функцій Гауса

На рисунку 17 представлено результати інтерполяції замкненої фігури за допомогою параметричної та сумарної функції Гауса.

Функція Гауса добре себе проявила при інтерполяції не тільки елементарних математичних функцій, а і у випадку спіралеподібних функцій. На рисунку 18 представлено інтерполяцію спіралі Літуса.

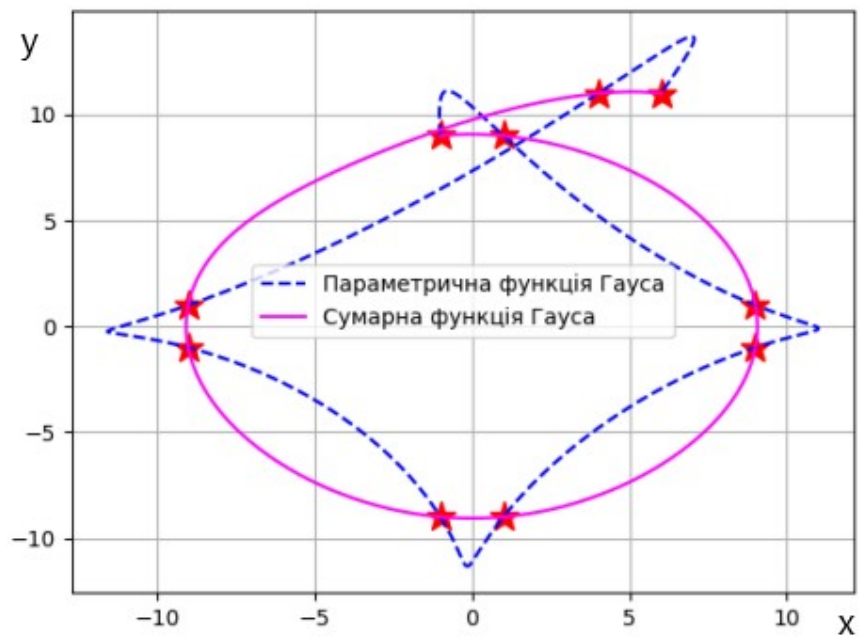


Рисунок 17 – Інтерполяція замкнутого каркасу за допомогою 2 функцій Гауса

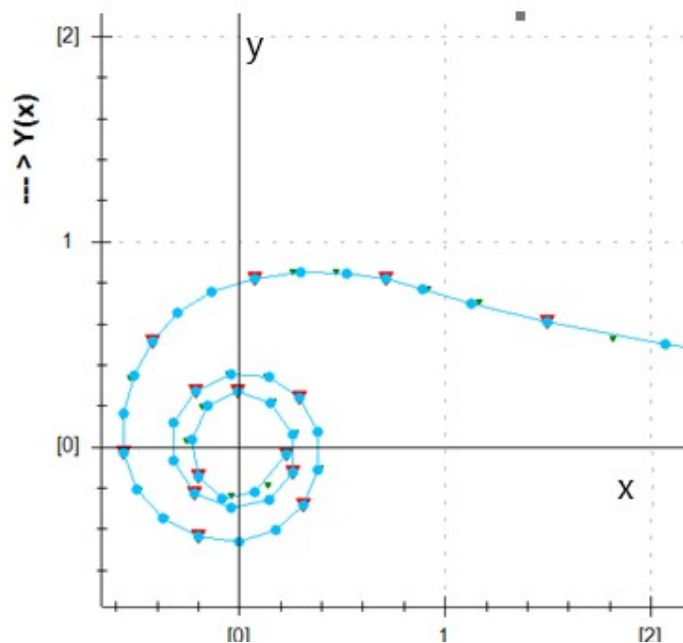


Рисунок 18 – Інтерполяція спіралі Літуса функцією Гауса

До позитивних результатів застосування функції Гауса можна віднести той факт, що функція Гауса вирішує проблему феномена Рунге, про який шлося у попередньому розділі. З рисунку 19 видно, що на кінцях заданого відрізка не виникає осциляцій, а похибка співставна з похибками всередині відрізка.



$$G(x) = \tilde{y}_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(x-x_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(x-x_n)^2}.$$

Для замкнених каркасів необхідно використовувати параметричну функцію Гауса та її різновиди.

***Питання для самоперевірки***

- 1. У яких випадках застосовуються параметричні функції Гауса?*
- 2. Які існують види параметричних функцій Гауса?*
- 3. Що можна сказати про стійкість функції Гауса?*



## 10. ПОЛІКООРДИНАТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

### 10.1 Метод політканинних перетворень

Серед методів нелінійних перетворень можна виокремити полікоординатні перетворення, а саме політканинні та політочкові. Саме ці два види перетворень будуть розглядатись у цьому курсі.

Однією з важливих і складних проблем деформаційного моделювання є цілеспрямоване інтерактивне керування формою геометричних об'єктів з синхронним створенням їх математичних (геометричних) моделей. Як один з можливих напрямків розв'язання задач цієї комплексної проблеми існує метод політканинних перетворень як апарату керованої зміни форми геометричних об'єктів. При політканинних перетвореннях зміна простору, що охоплює об'єкт, викликає адекватну зміну форми об'єкта.

Суть методу полягає в наступному.

Вводиться поняття політканини як сукупності прямих на площині або площин у просторі, які створюють деяку область, в якій вводиться політканинна система координат, і для кожної точки цієї області можна визначити свої політканинні координати. Кількість політканинних координат залежить від розміру політканини.

Об'єкт, який підлягає перетворенню, занурюється у політканину, при чому вигляд і розмір політканини обирається користувачем в залежності від умов конкретно поставленої задачі. Таким чином підібрана політканина утворює простір, в якому знаходиться об'єкт-прообраз.

Кожна точка об'єкта визначається не тільки декартовими координатами, а й відстанню до кожної з координатних функцій, що утворюють політканину, тобто політканинними координатами (рисунок 20).

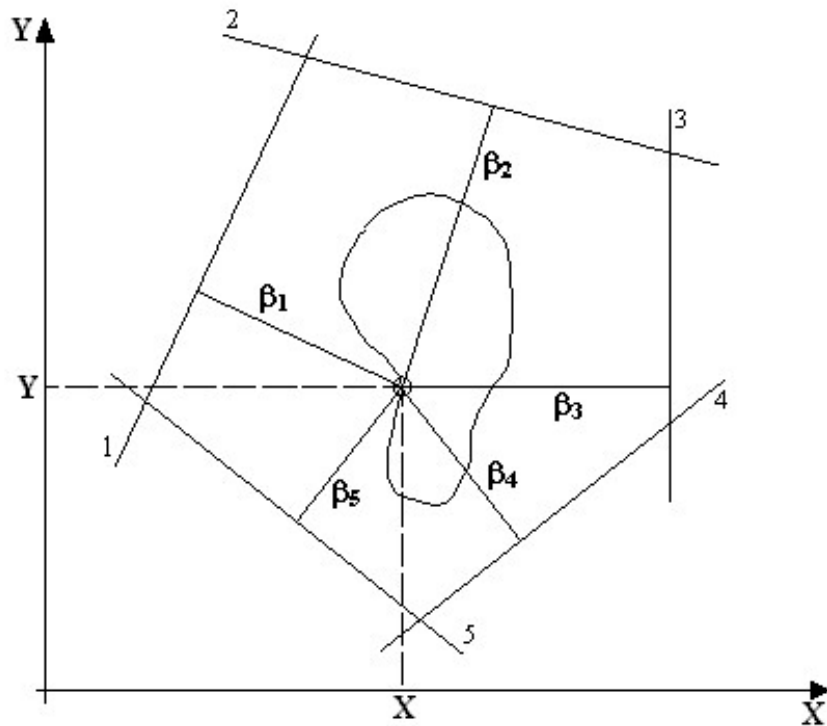


Рисунок 20 – Політканинні координати точки у початковому базисі

В процесі перетворення користувач змінює обумовленим чином орієнтацію координатних функцій, тобто змінює політканину. Із зміною політканини змінюється й об'єкт, який знаходиться у межах простору, утвореного політканиною, тобто кожна точка об'єкта змінює свої декартові координати згідно до проведеного перетворення (рисунок 21).

Розглянемо один з можливих варіантів отримання розв'язку такої задачі у просторі  $R^2$ .

Нехай на площині у декартовій системі координат  $XOY$  задана політканина ( $p$ -тканина) за допомогою  $p$  лінійних функцій-координат:

$$\beta_i = a_i x + b_i y + c_i, \quad i=1,2,\dots,p \geq 3.$$

Перетворимо  $p$ -тканину, тобто змінимо обумовленим чином орієнтацію координатних функцій. Нова  $p$ -тканина визначиться іншою системою рівнянь:

$$\varphi_i = A_i x + B_i y + C_i, \quad i=1,2,\dots,p \geq 3.$$

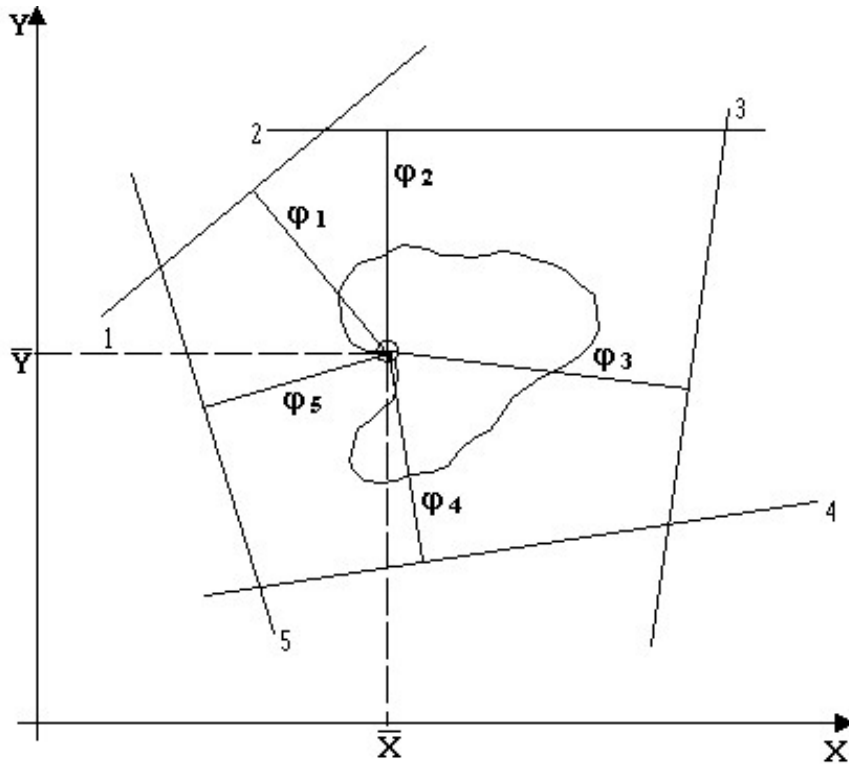


Рисунок 21 – Політканинні координати точки у перетвореному базисі

Положення будь-якої точки простору  $R^2$  у попередній  $p$ -тканині визначиться координатами  $(X, Y)$  – у системі координат  $XOY$ , або ж сукупністю координат  $\beta_i$ ,  $i=1, 2, \dots, p \geq 3$ , які називаються політканинними координатами. Аналогічно, після перетворення політканини точка буде мати координати  $(\bar{X}, \bar{Y})$  та  $\varphi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, p \geq 3$ . Політканинні координати  $\beta_i$  та  $\varphi_i$  визначають відстань від точки до  $i$ -ої координатної лінії у початковому і перетвореному базисі відповідно. Звичайно, якщо розглянути конкретну точку, то її політканинні координати до перетворення й після нього не співпадатимуть, тобто  $\beta_i \neq \varphi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, p \geq 3$ . Якщо ж прийняти протилежне, тобто спробувати побудувати точку у перетвореній  $p$ -тканині за умови  $\beta_i = \varphi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, p \geq 3$ , то замість точки отримаємо багатокутник, конфігурація якого однозначно визначається орієнтацією координатних функцій політканини. Таким чином, виникає необхідність отримання однозначного розв'язку задачі політканинного перетворення простору  $R^2$ , тобто встановлення

функціонального взаємозв'язку між координатами  $\beta_i$  та  $\varphi_i$ ,  $i=1,2,\dots,p \geq 3$  обох політканин.

Враховуючи, що координата точки у політканині є аналогом її віддаленості від відповідної координатної лінії, можна записати:

$$\varphi_i = \omega_i \beta_i, \quad i=1,2,\dots,p \geq 3.$$

Таким чином, система прийме такий вигляд:

$$\omega_i \beta_i = A_i x + B_i y + C_i, \quad i=1,2,\dots,p \geq 3.$$

Ця система містить  $p$  рівнянь та  $p+2$  невідомих ( $\omega_i$ ,  $i=1,2,\dots,p$  та  $X, Y$ ). Таким чином, для отримання однозначного розв'язку необхідно ввести дві додаткові умови.

Пропонується знайти  $\omega_i$ ,  $i=1,2,\dots,p \geq 3$  за умови їх мінімального відхилення від  $\omega_j$ ,  $j \leq p$ , тобто реалізувати функціонал такого вигляду:

$$S = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^p (\omega_j - \omega_i)^2 \rightarrow \min, \quad p \geq 3.$$

Продиференціювавши функціонал, знайдемо його екстремум. Для цього необхідно встановити змінні, по яким виконуватиметься диференціювання.

$$\omega_i = \left( \frac{A_i x + B_i y + C_i}{\beta_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, p \geq 3.$$

Таким чином  $\omega_i$  є функцією від  $x$  та  $y$  ( $\omega_i = f(x,y)$ ,  $i=1,2,\dots,p \geq 3$ ), тобто змінними диференціювання функціоналу є  $x$  та  $y$ . Для знаходження умов досягнення екстремума функціоналу треба знайти частинні похідні функціоналу за вказаними змінними  $x$ ,  $y$  та прирівняти їх до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (\omega_j - \omega_i) \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (\omega_j - \omega_i) \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial y} - \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Додаткові умови для однозначного розв'язку системи можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} D_x X + D_y Y + D = 0, \\ G_x X + G_y Y + G = 0, \end{cases}$$

де:

$$D_x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p K_{xji} (\beta_i A_j - \beta_j A_i); G_x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p K_{yji} (\beta_i A_j - \beta_j A_i);$$

$$D_x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p K_{xji} (\beta_i B_j - \beta_j B_i); G_x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p K_{yji} (\beta_i B_j - \beta_j B_i);$$

$$D = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p K_{xji} (\beta_i C_j - \beta_j C_i); G_x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p K_{yji} (\beta_i C_j - \beta_j C_i);$$

$$K_{xji} = \frac{A_j}{\beta_j \beta_i} - \frac{A_i}{\beta_i^2}; K_{yji} = \frac{B_j}{\beta_j \beta_i} - \frac{B_i}{\beta_i^2}; i=1,2,\dots,p \geq 3; i \neq j.$$

Система дозволяє отримати бажаний розв'язок - координати точки  $(\bar{X}, \bar{Y})$  у просторі  $R^2$  після перетворення політканини.

## 10.2 Конструювання кривої на площині методом політканинних перетворень

Розглянемо можливі алгоритми деформаційного конструювання плоских кривих ліній як їх політканинних перетворень.

Нехай будь-яким чином задана деяка початкова крива. Вважатимемо, що вона може бути переведена у точкове подання з будь-якою щільністю (точністю). Відновлення кривої за її точковим каркасом можливе, наприклад, за допомогою способу лінійної інтерполяції.

Відомо, що для завдання кривої лінії необхідно застосувати характеристичну ламану (вписану або описану), що у першому наближенні передає форму кривої (рисунок 22). Для цього потрібно визначити на початковій кривій характерні точки  $T_i, i=1,\dots, N$ . Це робить конструктор (дизайнер) на свій

розсуд. Перший варіант базису політканини як керуючого апарата може бути утворений як січними кривої (ламана  $T_1, T_2, \dots, T_N$ ), так і дотичними до неї ( $T_1, Q_1, Q_2, \dots, Q_{N-1}, T_N$ ). Подальше конструювання кривої полягає у послідовній зміні базису з відтворенням деформованої кривої на кожному кроці до отримання бажаного результату. Враховуючи ітераційний характер процесу конструювання, можливо повернення назад аж до першого кроку – призначення характерних точок.

Вибір конкретного варіанта політканинного базису (січні або дотичні) залежить від умов конкретної задачі.

Загальним недоліком обох варіантів є глобальний характер політканинного перетворення, тобто зміна однієї будь-якої координатної базисної лінії впливає на зміну всієї кривої. У варіанті дотичних немає можливості керувати розташуванням точок дотику, а у варіанті січних не можна безпосередньо впливати на характер зміни кривої, що проявляється у непрогнозованості зміни перших похідних (орієнтації дотичних). Окрім того, в обох варіантах немає можливості керувати положенням крайніх точок. Останнє обумовлено застосуванням незамкненого координатного базису політканини. Уникнути цього вдається, застосувавши замкнений базис  $T_1, T_2, \dots, T_N, T$ .

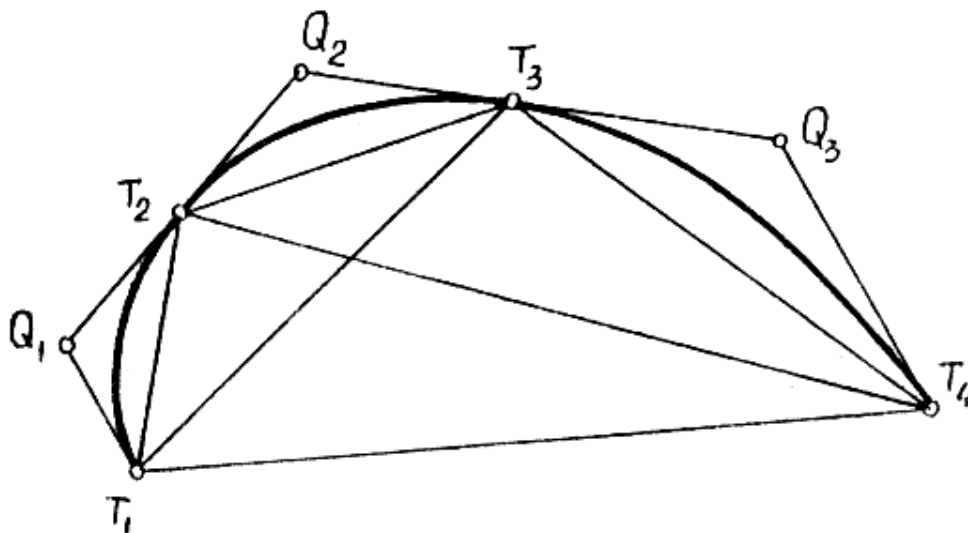


Рисунок 22 – Характеристичні ламані кривої-прообразу

Підвищити локальність деформаційного конструювання та забезпечити сегментованість кривих дозволяє застосування на одній кривій декількох координатних базисів. У найпростішому варіанті - це зовнішній аналог методу другого порядку. Крива - прообраз поділяється на окремі ділянки, на кожній з яких визначається тритканинний базис  $T_i Q_i T_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, N-1$ . Деформація кривої здійснюється окремо у межах кожного такого базису. При цьому забезпечується перший порядок гладкості у межах всієї кривої за умови спільності відповідних ліній базису та надається можливість введення на попередньо-гладкій опуклій кривій точок зламу або перегину. Останні співпадають з точками поділу кривої (рисунок 23).

Для досягнення більшого порядку гладкості у межах всієї кривої необхідно заключити ділянки кривої у координатний базис політканини більшого розміру. Так, для конструювання кривої з неперервною кривиною необхідно застосувати багатобазисні чотиритканинні перетворення. Чотиритканини розташовуються на кривій, перебиваючи одна одну і маючи спільні ділянки кривої для кожної пари сусідніх координатних базисів. При цьому вдається заздалегідь призначити точку дотику кривої-образу до дотичних координатних ліній та досягнути локальності керованої зміни форми кривої у межах чотирьох точок (двох сусідніх чотиритканин).

Одним з підходів до розв'язання задачі конструювання плоских кривих за допомогою багатобазисних чотиритканинних перетворень є застосування вагових коефіцієнтів перетворень для кожного координатного базису та уміння будувати "перехідну криву" у межах зони перекриття двох сусідніх координатних базисів політканини.

Вищезазначені способи деформаційного конструювання плоских кривих на основі політканинних перетворень складають основу конструювання просторових кривих та поверхонь. Просторова крива у цьому випадку подається як суперпозиція двох плоских кривих або визначається своїми проекціями на дві координатні площини. Результуюча крива теж зберігає неперервність зміни

векторів головних кривих. Процес завдання і конструювання поверхонь ззовні нагадує метод Безьє, але має більшу наочність і ґрунтується на інших принципах. Наведені алгоритми деформаційного конструювання плоских кривих на основі політканинних перетворень знайшли своє застосування при розв’язанні різноманітних практичних задач.

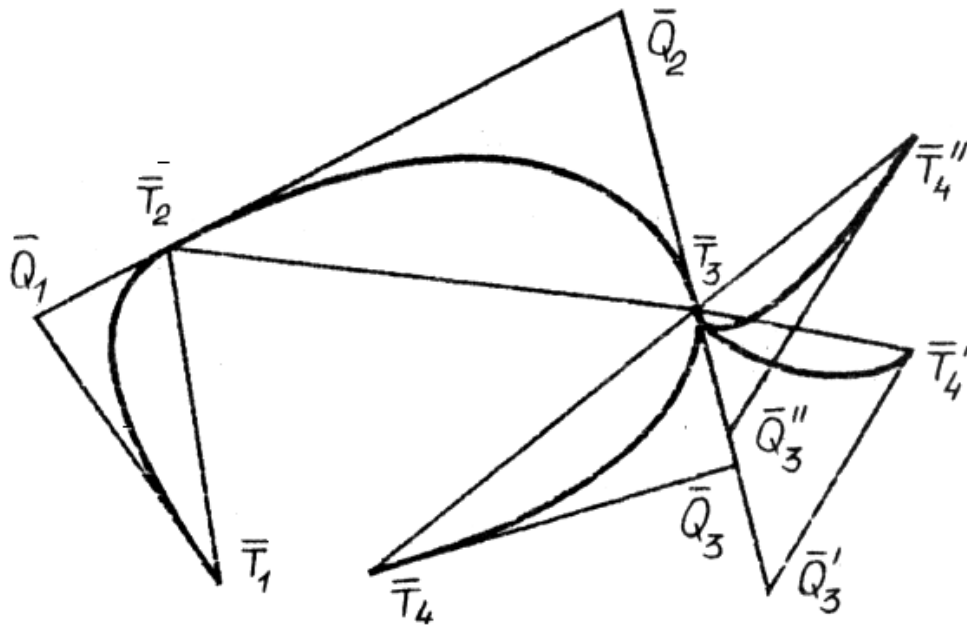


Рисунок 23—Деформація кривої за допомогою політканинних перетворень

При політканинних перетвореннях серед сукупності умов топологічності визначається взаємне розташування точок перетворюваного поля й координатного базису політканини. Критичним вважається належність точки поля певній координатній лінії чи її збіжність з вузлом координатного базису політканини. Отже, за зазначених умов, одна чи дві політканинні координати точки є “нульовими”, що робить перетворене положення такої точки невизначеним.

Таким чином, при політканинних перетвореннях потрібно перевіряти точки на належність точки поля певній координатній лінії чи її збіжність з вузлом координатного базису політканини, застосовувати для таких точок додаткові



розрахунки, що ускладнює алгоритм перетворень і робить його важким для розуміння пересічним користувачем.

Одним з головних недоліків політканинних перетворень є те, що координатний базисний простір задається сукупністю деяких функцій, що ускладнює процес його введення, в особливості у тих випадках, коли конструювання проводить користувач, не знайомий з математичними аспектами теорії політканинних перетворень. Набагато простіше було б об'єкт, який підлягає перетворенню, оточувати базисом, що задається сукупністю точок. Ця ідея реалізована у політочкових перетвореннях.

### ***Питання для самоперевірки***

- 1. Які ви знаєте методи полікоординатних перетворень?*
- 2. Що таке політканинні координати?*
- 3. Як розраховуються політканинні координати?*
- 4. У яких випадках застосовується метод політканинних перетворень?*
- 5. Які недоліки політканинних перетворень ви знаєте?*

## 11. ПОЛІТОЧКОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У КОНСТРУЮВАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

### 11.1 Принцип двоїстості

Використовуючи метод політканинних перетворень і застосовуючи до нього принцип двоїстості, було отримано новий спосіб перетворень, який називається способом політочкових перетворень.

Коротко зупинимось на теоретичних основах обґрунтування фундаментального поняття проєктивної геометрії - принципу двоїстості.

У проєктивному просторі є багато понять, аксіом і теорем, що мають симетричні вирази відносно основних форм. Наприклад, під терміном «лінійний ряд точок» розуміють множину точок, які належать одній прямій, а під терміном «пучок прямих» - множину прямих, які проходять через одну точку (належать одній точці). Легко можна помітити, що визначення другого терміну виходить з першого перестановкою у ньому слів «точка» і «пряма».

Можна навести ще приклади застосування принципу двоїстості. Для цього зіставимо по дві відомі аксіоми з'єднання (належності):

- дві різні точки належать одній прямій;
- дві різні прямі належать одній точці;
- три різні точки, які не належать одній прямій, належать одній площині;
- три різні площини, які не належать одній прямій, належать одній точці.

Перша пара аксіом симетрична відносно слів «точка» і «пряма», а друга пара аксіом – відносно слів «точка» і «площина».

Такі симетричні поняття, аксіоми та теореми у проєктивній геометрії звуться двоїстими.

Ці міркування знайшли своє відображення у принципі двоїстості, коли в будь-якому положенні, сформульованому відносно підпросторів проєктивного

простору, перестановка місцями пар підпросторів рівних розмірів не порушує справедливості цього положення .

Таким чином принцип двоїстості можна сформулювати наступним чином: *якщо в заданому положенні, аксіомі чи теоремі, що є істинними, замінити терміни на двоїсті, то ми одержимо нове положення, аксіому чи теорему, яка знов-таки буде істинною.*

Принцип двоїстості для двовимірного простору формулюється так: будь-яке положення, сформульоване відносно точок і прямих проективної площини, залишається справедливим, якщо у ньому замінити одночасно слово «точка» словом «пряма» і слово «пряма» словом «точка».

Цей принцип для тривимірного простору формулюється так: будь-яке положення, сформульоване відносно точок, прямих і площин тривимірного проективного простору, залишається справедливим, якщо у ньому замінити слово «точка» словом «площина», слово «площина» - словом «точка», а слово «пряма» залишити без змін.

Принцип двоїстості проявляється у багатьох галузях математики. Наприклад, правильні многогранники є попарнодвоїстими: куб (гексаедр) (8 вершин, 12 ребер, 6 граней) та октаедр (8 граней, 12 ребер, 6 вершин); додекаедр (20 вершин, 30 ребер, 12 граней) та ікосаедр (20 граней, 30 ребер, 12 вершин); тетраедр (4 вершини, 6 ребер, 4 грані) є двоїстим до самого себе.

В теорії алгебраїчних кривих формули Плюккера зв'язують двоїсті параметри: порядок і клас, подвійні точки й подвійні дотичні, точки звороту й точки перегину.

## **11.2 Політочкові перетворення з двома точками базису**

На основі застосування принципу двоїстості до політканинних перетворень було отримано новий вид перетворень, який називається політочкові перетворення, базисом яких є скінченна множина точок, а об'єктом перетворень буде пряма.

Принцип двоїстості у формульному вигляді може бути застосований до однорідного простору.

Однорідний простір на площині визначається введенням невизначеного множника як третьої координати :

$$\mathbf{X \text{ однор.} = WX,}$$

$$\mathbf{Y \text{ однор.} = WY,}$$

$$\mathbf{Z \text{ однор.} = W.}$$

В однорідному просторі рівняння прямої буде мати вигляд:

$$\mathbf{a \text{ Ходнор.} + b \text{ Yоднор.} + c \text{ Zоднор.} = 0}$$

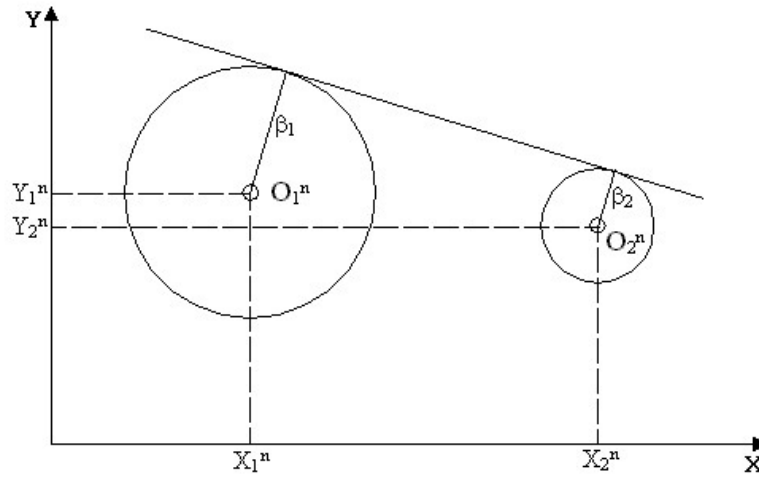
Це рівняння є симетричним для координат Ходнор., Yоднор., Zоднор. та коефіцієнтів a, b, c. Таким чином, можна вважати, що пряма визначається «координатами» a, b, c, а будь-яка точка простору – координатами Ходнор., Yоднор., Zоднор.. Застосуємо принцип двоїстості до політканинних перетворень, а саме замінемо політканинний базис, який визначається сім'єю прямих, на базис з точок, а об'єкт перетворень у цьому випадку буде не точка, а пряма.

У найпростішому випадку задаємо на площині дві точки каркасу і пряму, яку називають прообразом. Змінюємо обумовленим чином точки каркасу та за допомогою апарату політочкових перетворень отримаємо нову пряму, яка називається образом перетворень.

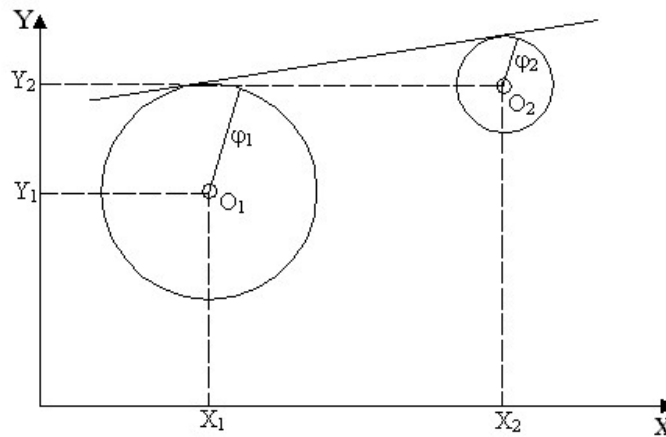
Геометрично проілюструємо таку задачу.

Як показано на рисунку 24, дві точки каркасу  $O_1^n$  та  $O_2^n$  задаються декартовими координатами  $x_1^n, y_1^n$  та  $x_2^n, y_2^n$ . Проводимо висхідну пряму (пряму, яка підлягає перетворенню) і визначаємо відстань від цих двох точок до заданої прямої. Для цього рівняння прямої (за умови  $Z_{однор.} = 1$ )  $ax+by+c=0$  приводимо до нормалізованого вигляду, тобто ділимо всі коефіцієнти на  $\sqrt{a^2 + b^2}$  з урахуванням знаку, який є протилежним до знаку c і після послідовної підстановки  $x_1^n, y_1^n$  та  $x_2^n, y_2^n$  у нормалізоване рівняння прямої отримуємо

координати  $\beta_1$  та  $\beta_2$ , які характеризують точки  $O_1^n$  та  $O_2^n$  з точки зору політочкових перетворень.



а)



б)

Рисунок 24 – Політочкові перетворення при двох точках базису: (а) - пряма у початковому базисі, (б) - пряма у перетвореному базисі

Таким чином маємо:

- дві точки  $O_1^n$  та  $O_2^n$ , визначені декартовими координатами  $(x_1^n, y_1^n)$  та  $(x_2^n, y_2^n)$  та політочковими координатами  $\beta_1$  та  $\beta_2$ ;

- пряму - прообраз, яка є дотичною до двох кіл з радіусами  $\beta_1$  та  $\beta_2$  і з центрами  $O_1^n$  та  $O_2^n$ .

Змінюємо каркас, тобто міняємо декартові координати точок  $O_1^n$  та  $O_2^n$ . Нові точки позначимо  $O_1$  та  $O_2$  (рисунок 24б), а відповідні їм нові координати  $(x_1, y_1)$  і  $(x_2, y_2)$ . При цьому політочкові координати змінюватись не будуть.

Нову перетворену пряму будемо шукати у вигляді:

$$Ax + By + C = 0.$$

Для того, щоб визначити коефіцієнти  $A, B, C$ , потрібно розв'язати систему рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = \beta_1, \\ Ax_2 + By_2 + C = \beta_2, \\ A^2 + B^2 = 1, \end{cases}$$

де  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , - декартові координати нового базису,  $\beta_1$  та  $\beta_2$  - політочкові координати прямої-прообразу, а  $A, B, C$  - коефіцієнти перетвореної прямої, які треба визначити.

У результаті розв'язку системи нелінійних рівнянь будемо мати.

$$B_1 = \frac{2dy \sqrt{4x^2(x^2 - d^2 + y^2)}}{2(y^2 + x^2)} = \frac{dy \sqrt{x^2 - d^2 + y^2}}{x^2 + y^2},$$

$$B_2 = \frac{dy + x\sqrt{x^2 - d^2 + y^2}}{x^2 + y^2}.$$

Коефіцієнти  $A$  отримуємо за допомогою визначених коефіцієнтів  $B$ :

$$A = \pm \sqrt{1 - B^2},$$

і таких коефіцієнтів буде 4:  $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$ , а саме:

$$A_{1,1} = \sqrt{1 - B_1^2},$$

$$A_{1,2} = -\sqrt{1 - B_1^2},$$

$$A_{2,1} = \sqrt{1 - B_2^2},$$

$$A_{2,2} = -\sqrt{1 - B_2^2}.$$

Оскільки отримано чотири коефіцієнти  $A_{1,1}$ ,  $A_{1,2}$ ,  $A_{2,1}$ ,  $A_{2,2}$ , то це свідчить про те, що розв'язкам системи будуть чотири прямі, тобто розв'язок не буде однозначним, оскільки одній прямій-прообразу ставиться у відповідність чотири прямі-образи. Така ситуація виникає тому, що для визначення прямої у початковому базисі фіксується її геометричне положення відносно базисних координат. Після політочкових перетворень отримана пряма повинна відстояти від точок нового базису на певну (вказану) відстань. Тобто потрібно знайти пряму, яка знаходиться на певній відстані від заданих точок нового базису. Для того, щоб геометрично розв'язати таку задачу, потрібно зафіксувати дві точки нового базису, провести два кола з центрами в цих точках з радіусами, які дорівнюють відстаням від шуканої прямої до цих точок та провести дотичну (дотичні) до цих двох кіл. У загальному випадку таких прямих буде чотири (рисунок 25), які й були отримані за допомогою коефіцієнтів  $A_{1,1}$ ,  $A_{1,2}$ ,  $A_{2,1}$ ,  $A_{2,2}$ . Для отримання однозначного розв'язку (виділення з чотирьох однієї прямої) потрібно провести такі дії.

Для знаходження коефіцієнта  $C$  підставляємо послідовно всі отримані  $A$  і  $B$  в обидва перші рівняння системи, наприклад:

$$A_{1,1} x_1 + B_1 y_1 + C = \beta_1,$$

$$A_{1,1} x_2 + B_1 y_2 + C = \beta_2.$$

Якщо отримані з обох рівнянь  $C$  не співпадають, то даний коефіцієнт  $A_{1,1}$  слід викреслити з розглядаємих.

Така підстановка дозволяє позбавитися двох зайвих коефіцієнтів  $A$  за рахунок того, що "відстань" від точок базису до прямої може мати знак "-" або "+", а при розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь (а саме при піднесенні в квадрат) мінуси могли бути загублені.

Таким чином отримуємо дві прямі, які є розв'язками зазначеної системи.

Математично процедуру вибору однієї з двох можливих прямих при політочкових перетвореннях можна записати так (рисунок 26):

$$\text{знак}(\overrightarrow{O_1 O_2}) \times (\overrightarrow{a, b}) = \text{знак}(\overrightarrow{O_1 O_2}) \times (\overrightarrow{A, B}),$$

$$\text{знак } (\overrightarrow{O_1^n O_2^n}) \times (\overrightarrow{a, b}) \neq \text{знак } (\overrightarrow{O_1 O_2}) \times (\overrightarrow{A', B'}),$$

що не підходить, тобто векторний добуток двох векторів дає знак “+”, якщо перший вектор повертається до другого в тому напрямку, що і вісь X до вісі Y, і “-”, якщо навпаки. Користуючись вказаною ознакою, можна позбавитись зайвої прямої.

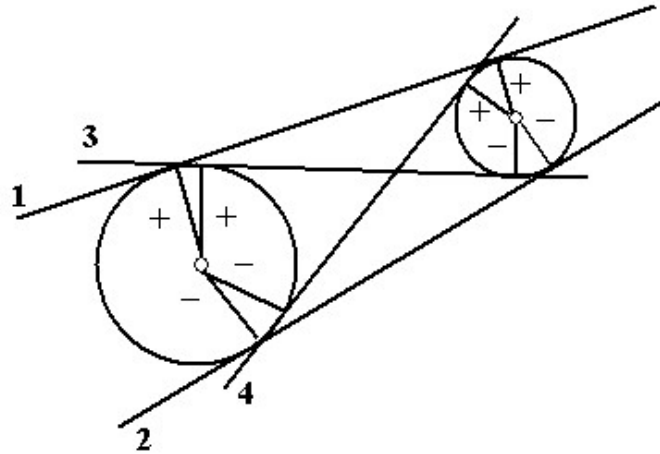


Рисунок 25 – Можливе розташування дотичних до двох кіл з урахуванням знаку відстаней

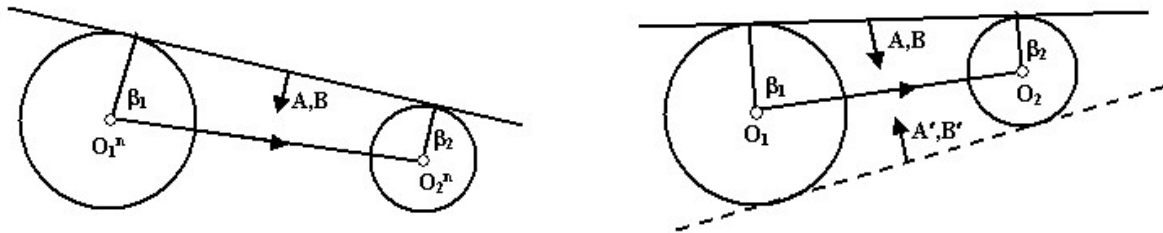


Рисунок 26 – Позбавлення зайвої прямої - розв’язку системи при політочкових перетвореннях

Отримана пряма є образом заданої прямої після проведення політочкових перетворень, які дозволяють змінювати положення прямої, не доторкаючись до



самої прямої, а змінюючи лише каркас точок, що її оточують, тобто впливаючи на простір, у якому знаходиться об'єкт (пряма).

Таким чином, є можливість змінювати положення цього об'єкту.

У випадку, коли каркас точок складався лише з двох точок, існує можливість вимагати, щоб при перетворенні не змінювались політочкові координати  $\beta_1$  і  $\beta_2$ . У випадку, коли каркас має більше двох точок, це неможливо.

### ***Питання для самоперевірки***

- 1. Сформулюйте принцип двоїстості.*
- 2. Наведіть приклади застосування принципу двоїстості?*
- 3. Що таке політочкові перетворення? Який алгоритм роботи цих перетворень?*
- 4. Що є базисом та об'єктом при політочкових перетвореннях?*

## 12. ПОЛІТОЧКОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРИ БАГАТОТОЧКОВОМУ БАЗИСІ

Розглянемо докладніше політочкові перетворення за умови багатоточкового каркасу (рисунок 27).

Початковий базис в однорідному просторі задається базисними точками з координатами  $x_i^n, y_i^n, z_i^n, i=1,2,\dots,p$ . У цьому базисі пряма-прообраз визначається за допомогою рівнянь вигляду

$$ax_i^n + by_i^n + cz_i^n = \beta_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

де  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  – координати прообразу - прямої. Тобто, точки каркасу задаються декартовими координатами  $(x_1^n, y_1^n, z_1^n), (x_2^n, y_2^n, z_2^n), \dots, (x_p^n, y_p^n, z_p^n)$ , а прообраз-пряма - політочковими координатами  $\beta_i$ , які є відстанню зі своїм знаком від цих точок до прямої – образу, яка в свою чергу задається коефіцієнтами  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , якщо ці коефіцієнти  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  є нормалізованими.

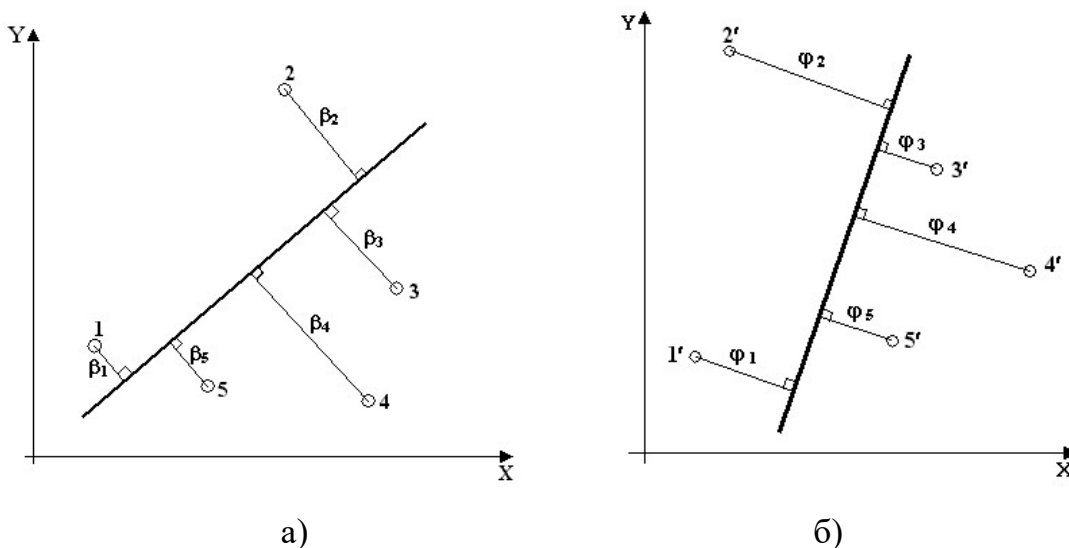


Рисунок 27—Політочкові перетворення при багатоточковому базисі: (а) – пряма у початковому базисі, (б) – пряма у перетвореному базисі

Перетворений базис буде заданий у вигляді сім’ї нових точок  $x_i, y_i, z_i$ . Нові “відстані” будуть визначатись за формулами:

$$\varphi_i = Ax_i + By_i + Cz_i,$$

де  $x_i, y_i, z_i$  - новий базис,  $A, B, C$  – невідомі координати нової прямої.

Значення  $\beta_i$  та  $\varphi_i$  будемо називати політочковими координатами прямої.

У випадку багатоточкового каркасу будуть змінюватись не лише декартові координати  $x_i, y_i, z_i$ , а й політочкові координати  $\beta_i$  прямої, які будуть дорівнювати  $\varphi_i$ .

Якщо розглянути конкретну пряму багатоточкового каркасу, то її політочковий базис до перетворення і після нього у загальному випадку не співпадатимуть, тобто  $\beta_i \neq \varphi_i, i = 1, 2, \dots, p$ .

Виникає необхідність отримання однозначного розв'язку задачі політочкового перетворення простору  $R^2$ , тобто встановлення функціонального взаємозв'язку між координатами  $\beta_i$  та  $\varphi_i, i=1,2,\dots,p$  в обох базисах.

Враховуючи, що координата прямої у політочковому базисі є аналогом її віддаленості від відповідної базисної точки, політочкове перетворення можна записати у вигляді:

$$\varphi_i = \omega_i \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Підставимо замість  $\varphi_i$  в ліву частину рівняння  $\omega_i \beta_i$ :

$$\omega_i \beta_i = Ax_i + By_i + Cz_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Ця система містить  $p$  рівнянь та  $p+3$  невідомих ( $\omega_i, i = 1, 2, \dots, p, A, B, C$ ). Таким чином, для отримання однозначного розв'язку системи необхідно ввести три додаткові умови.

Для отримання додаткових умов пропонується знайти  $\omega_i, i = 1, 2, \dots, p$  за умови їх мінімального відхилення від одиниці, тоді  $\varphi_i$  будуть мало відхилятися від  $\beta_i$ . Таким чином, пропонується мінімізувати функціонал такого вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^p (\omega_i - 1)^2 \rightarrow \min.$$

Підставимо замість  $\omega_i$  вираз  $\varphi_i/\beta_i$ :

$$S = \sum_{i=1}^p \left( \frac{\varphi_i}{\beta_i} - 1 \right)^2 = \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{Ax_i + By_i + Cz_i}{\beta_i} \right) - 1 \right)^2 \rightarrow \min.$$

Необхідно знайти **A**, **B**, **C**, які є розв'язком системи, для чого знаходимо частинні похідні за **A** та **B**. Третє рівняння системи випливає з умови, що отримана пряма повинна бути нормалізованою:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + CZ_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right) \left( \frac{X_i}{\beta_i} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + CZ_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right) \left( \frac{Y_i}{\beta_i} \right) = 0;$$

Система, розв'язок якої дасть нам коефіцієнти перетвореної прямої, буде мати вигляд:

$$\begin{cases} A \frac{\sum_{i=1}^p \frac{X_i}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{X_i Z_i}{\beta_i^2}} + B \frac{\sum_{i=1}^p \frac{X_i Y_i}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{X_i Z_i}{\beta_i^2}} + C = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{X_i}{\beta_i}}{\sum_{i=1}^p \frac{X_i Z_i}{\beta_i^2}}, \\ A \frac{\sum_{i=1}^p \frac{X_i Y_i}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{Y_i Z_i}{\beta_i^2}} + B \frac{\sum_{i=1}^p \frac{Y_i^2}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{Y_i Z_i}{\beta_i^2}} + C = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{Y_i}{\beta_i}}{\sum_{i=1}^p \frac{Y_i Z_i}{\beta_i^2}}, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

У цій системі  $X_i, Y_i, Z_i$  - декартові координати точок нового базису,  $\beta_i$  - політочкові координати заданої прямої. Коли підставимо їх у систему, то отримаємо біля **A** і **B** числові значення. Таким чином, отримана система співпадає за виглядом з заданою системою і розв'язується аналогічно до неї. Розв'язком системи будуть координати **A**, **B** та **C**, тобто нова пряма

$$\mathbf{AX} + \mathbf{BY} + \mathbf{C} = \mathbf{0}.$$

Якщо прирівняти  $\mathbf{z}=\mathbf{1}$ , у випадку  $\mathbf{n}$  точок базису система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_{10} + \mathbf{By}_{10} + \mathbf{C} = \mathbf{d}_{10}, \\ \mathbf{Ax}_{20} + \mathbf{By}_{20} + \mathbf{C} = \mathbf{d}_{20}, \\ \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 = \mathbf{1}, \end{cases}$$

$$\text{де: } \mathbf{x}_{10} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{x_i^2}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{x_i}{\beta_i^2}}, \quad \mathbf{y}_{10} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{x_i y_i}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{x_i}{\beta_i^2}}, \quad \mathbf{d}_{10} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{x_i}{\beta_i}}{\sum_{i=1}^p \frac{x_i}{\beta_i^2}}$$

$$x_{20} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{x_i y_i}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{y_i}{\beta_i^2}}, \quad y_{20} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{y_i^2}{\beta_i^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{y_i}{\beta_i^2}}, \quad d_{20} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{y_i}{\beta_i}}{\sum_{i=1}^p \frac{y_i}{\beta_i^2}}$$

де  $x_i$ ,  $y_i$  - декартові координати точок базису, а  $\beta_i$  – відстань від точок базису до прямої. Розв'язком системи будуть  $A$ ,  $B$ , та  $C$  - коефіцієнти нової прямої.

### *Питання для самоперевірки*

1. Яка формула визначає політочкові перетворення?
2. Що є розв'язком системи при політочкових перетвореннях?

### 13. ВАРІАНТИ ПОЛІТОЧКОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

При розв'язанні задачі політочкових перетворень виникає проблема отримання однозначного розв'язку у просторі  $\mathbf{R}^2$ .

Однозначну відповідність двох точкових полів образу й прообразу (за умови топологічності перетворення) у зв'язку з багатозначністю розв'язку можливо досягти тільки на основі застосування методів оптимізації з використанням функціоналів визначеного вигляду. Вигляд функціоналу забезпечує досягнення деякого оптимуму розв'язку задачі біективного політочкового перетворення тіла.

При політочкових перетвореннях об'єкт має у початковому базисі політочкові координати  $\beta_i, i=1, \dots, p$ , та у перетвореному базисі  $\varphi_i, i=1, \dots, p$ , які можна отримати з рівняння.

Політочкові координати образу й прообразу пов'язані рівнянням

$$\varphi_i = \omega_i \beta_i, i = 1, \dots, p,$$

де  $p$  – кількість точок базису, а  $\omega_i$  - деякі множники, причому за умови топологічності перетворення  $\omega_i > 0$ . Виходячи з вигляду системи, за допомогою якої розв'язується задача політочкових перетворень,  $p$  є ще й кількістю рівнянь цієї системи. Для того, щоб задача перетворення об'єкта мала однозначний розв'язок, кількість рівнянь системи повинна дорівнювати кількості невідомих, а саме  $p+3$  ( $A, B, C$  і  $\omega_i, i=1, 2, \dots, p$ ). Тобто система повинна бути доповнена трьома додатковими умовами, які можна отримати із застосуванням мінімізуючих функціоналів різного вигляду.

Розмаїття практичних задач, для успішного розв'язання яких може бути застосований апарат політочкових перетворень, вимагає наявності різних виглядів політочкових відповідностей двох точкових полів, що забезпечить одержання розв'язку, який найбільшою мірою задовольнятиме вимоги практичних задач чи узгоджуватиметься з деякою сукупністю наперед заданих умов.

Використання оптимізаційних функціоналів різного вигляду значно розширює можливості користувачів програмного модулю, який реалізує апарат політочкових перетворень і дасть змогу проводити розробки нових пошукових алгоритмів розв'язання різноманітних задач геометричного моделювання. Багатоваріантність та ітераційність цих задач вимагатиме від спеціалістів, які користуватимуться апаратом політочкових перетворень, певного рівня фахової підготовки, розуміння суті поставленої перед ними задачі й чіткого уявлення про бажаний кінцевий результат своєї роботи.

Враховуючи вищезазначене, розглянемо різні види мінімізуючих функціоналів в залежності від умов, накладених на конкретну задачу.

У первісному варіанті функціонал мав такий вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^{p\Sigma} (\omega_i - 1)^2 \rightarrow \min.$$

Мінімізуючи цей функціонал, отримуємо систему, розв'язком якої будуть коефіцієнти перетвореної прямої. За умови застосування такого функціоналу отримана система має як свої переваги, так і свої вади.

Перевагою є той факт, що система є визначеною, вона сумісна, легко розв'язується, знаходження частинних похідних є нескладною задачею й алгоритм розрахунку такої політочкової відповідності досить простий.

Але у такому підході є й свої недоліки. В основу цього виду функціоналу закладено ідею приблизної рівності  $\varphi_i$  та  $\beta_i$  ( $\varphi_i \approx \beta_i$ ), або, іншими словами, треба було досягти, щоб множники  $\omega_i$  у всіх випадках приблизно дорівнювали б одиниці ( $\omega_i \approx 1$ ). Таким чином, не враховувався вплив на об'єкт точок в залежності від відстаней об'єкта до заданого каркасу, тобто вважалося, що всі точки каркасу однаково впливають на об'єкт, в незалежності від того, до якої з точок об'єкт знаходиться ближче. Але, як показав комп'ютерний аналіз, не завжди ідея однакового підходу до множників виправдовує себе. Крім того, при даному вигляді функціоналу неможливо врахувати різницю у відстанях в двох множинах (у початковому та перетвореному базисах). Інакше, не враховується

різниця між так званими мірами цих двох множин. Наприклад, якщо прийняти за міру площу фігури, що утворюється базисом, то при зміні базису (зміні площі утвореної фігури) відстані у перетвореній множині повинні також змінюватись адекватним чином. Тобто, такий вигляд функціоналу зумовив звуження можливостей політочкових перетворень.

Розглянемо знаходження  $\omega_i$  за умови мінімізації функціоналу такого вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^p (\omega_k - \omega_i)^2 + \sum_{i=1}^p (\omega_n - \omega_i)^2, \quad 1 < k \neq n < p.$$

Для реалізації цього функціоналу потрібно виразити, використовуючи систему функцій, всі  $\omega_i$  через вибрані  $\omega_k$  та  $\omega_n$  та знайти частинні похідні вказаного функціоналу за змінними  $\omega_k$  та  $\omega_n$ . Отримана в результаті цих дій система з двох лінійних рівнянь дозволить визначити коефіцієнти  $\omega_k$  та  $\omega_n$ , а на їх основі політочкові ( $\varphi_k$  та  $\varphi_n$ ) та декартові ( $X, Y$ ) координати образу. При потребі можливо визначити й всі інші  $\omega_i$  та  $\varphi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, p$ ,  $i \neq k$ ,  $i \neq n$ .

У функціоналі в якості змінних можуть фігурувати тільки два параметри ( $\omega_k$  та  $\omega_n$ ), що пов'язано з виглядом первинної системи рівнянь як системи функцій. Це примушує вибирати тільки два пріоритетні напрямки політочкових перетворень, знижує вплив на знаходження образу інших політочкових координат і значно обмежує можливості оптимізаційного процесу побудови перетвореного образу тіла.

Такий вигляд функціоналу має суттєві вади, а саме: алгоритм розрахунку такої політканинної відповідності досить складний та багатоходовий; коефіцієнти рівняння прямої-образу не можуть бути визначені безпосередньо, а тільки після знаходження множників  $\omega_k$  та  $\omega_n$ .

Більш детально розглянемо спрощений вигляд такого функціоналу, який встановлює політочкову відповідність за такою формулою:



$$S = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^p (\omega_i - \omega_j)^2, \quad 1 \leq j \leq p$$

В якості первинної системи рівнянь ( $p$  рівнянь та  $p+3$  невідомих) взято рівняння, що встановлюють зв'язок між політочковими й декартовими координатами образу. Таким чином вдається уникнути деяких недоліків попередньої відповідності й значно спростити та скоротити розрахунки. Так, декартові координати образу визначаються безпосереднім чином у результаті здійснення оптимізаційного процесу на основі вказаного функціоналу.

Підставимо замість  $\omega_i$  та  $\omega_j$  їх вирази через політочкові координати  $\phi$  та  $\beta$ , а саме  $\frac{\phi_i}{\beta_i}, \frac{\phi_j}{\beta_j}$ :

$$S = \sum_{i=1}^p \left( \frac{\phi_i}{\beta_i} - \frac{\phi_j}{\beta_j} \right)^2 = \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{Ax_i + By_i + C}{\beta_i} \right) - \left( \frac{Ax_j + By_j + C}{\beta_j} \right) \right)^2 \rightarrow \min.$$

Мінімізація цього функціоналу потребує знаходження частинних похідних за змінними  $A$  та  $B$ .

Знайдемо похідні  $\partial S / \partial A$  та  $\partial S / \partial B$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{Ax_i + By_i + C}{\beta_i} \right) - \left( \frac{Ax_j + By_j + C}{\beta_j} \right) \right) \left( \frac{x_i}{\beta_i} - \frac{x_j}{\beta_j} \right) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{Ax_i + By_i + C}{\beta_i} \right) - \left( \frac{Ax_j + By_j + C}{\beta_j} \right) \right) \left( \frac{y_i}{\beta_i} - \frac{y_j}{\beta_j} \right) = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

Проведемо необхідні перетворення:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{Ax_i + By_i + C}{\beta_i} \right) - \left( \frac{Ax_j + By_j + C}{\beta_j} \right) \right) \left( \frac{x_i \beta_j - x_j \beta_i}{\beta_i \beta_j} \right) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{Ax_i + By_i + C}{\beta_i} \right) - \left( \frac{Ax_j + By_j + C}{\beta_j} \right) \right) \left( \frac{y_i \beta_j - y_j \beta_i}{\beta_i \beta_j} \right) = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

Розкриємо перші дужки:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \left( \frac{(Ax_i\beta_j + By_j\beta_j + C\beta_j - Ax_j\beta_i - By_j\beta_i - C\beta_i)(x_i\beta_j - x_j\beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^p \left( \frac{(Ax_i\beta_j + By_j\beta_j + C\beta_j - Ax_j\beta_i - By_j\beta_i - C\beta_i)(y_i\beta_j - y_j\beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2} \right) = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

Коли зберемо подібні, отримаємо:

$$\begin{cases} A \sum_{i=1}^p \frac{(x_i\beta_j - x_j\beta_i)^2}{(\beta_i\beta_j)^2} + B \sum_{i=1}^p \frac{(x_i\beta_j - x_j\beta_i)(y_i\beta_j - y_j\beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2} + \\ \quad \& + C \sum_{i=1}^p \frac{(x_i\beta_j - x_j\beta_i)(\beta_j - \beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2} = 0, \\ A \sum_{i=1}^p \frac{(x_i\beta_j - x_j\beta_i)(x_i\beta_j - x_j\beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2} + B \sum_{i=1}^p \frac{(y_i\beta_j - y_j\beta_i)^2}{(\beta_i\beta_j)^2} + \\ \quad \& + C \sum_{i=1}^p \frac{(y_i\beta_j - y_j\beta_i)(\beta_j - \beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2} = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= \sum_{i=1}^p \frac{(x_i\beta_j - x_j\beta_i)^2}{(\beta_i\beta_j)^2}, \\ K_{1,2} &= \sum_{i=1}^p \frac{(x_i\beta_j - x_j\beta_i)(y_i\beta_j - y_j\beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2}, \\ K_{1,3} &= \sum_{i=1}^p \frac{(x_i\beta_j - x_j\beta_i)(\beta_j - \beta_i)^2}{(\beta_i\beta_j)^2}, \\ K_{2,1} &= \sum_{i=1}^p \frac{(y_i\beta_j - y_j\beta_i)(x_i\beta_j - x_j\beta_i)}{(\beta_i\beta_j)^2}, \\ K_{2,2} &= \sum_{i=1}^p \frac{(y_i\beta_j - y_j\beta_i)^2}{(\beta_i\beta_j)^2}, \\ K_{2,3} &= \sum_{i=1}^p \frac{(y_i\beta_j - y_j\beta_i)(\beta_j - \beta_i)^2}{(\beta_i\beta_j)^2}, \end{aligned}$$

тобто введемо коефіцієнти, які після того, як будуть підставлені конкретні координати (декартові та політочкові), отримають числові значення.

Враховуючи ці позначення, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} AK_{1,1} + BK_{1,2} + CK_{1,3} = 0, \\ AK_{2,1} + BK_{2,2} + CK_{2,3} = 0, \\ A^2 + B^2 = 1, \end{cases}$$

розв'язком якої будуть коефіцієнти **A**, **B** та **C** нової прямої після політочкового перетворення.

Розв'яжемо цю систему за умови  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

Спочатку необхідно розділити перше й друге рівняння на коефіцієнти, які стоять біля **C**:

$$\begin{cases} A \frac{K_{1,1}}{K_{1,3}} + B \frac{K_{1,2}}{K_{1,3}} + C = 0, \\ A \frac{K_{2,1}}{K_{2,3}} + B \frac{K_{2,2}}{K_{2,3}} + C = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге:

$$\begin{cases} A \left( \frac{K_{1,1}}{K_{1,3}} - \frac{K_{2,1}}{K_{2,3}} \right) + B \left( \frac{K_{1,2}}{K_{1,3}} - \frac{K_{2,2}}{K_{2,3}} \right) = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$x = \frac{K_{1,1}}{K_{1,3}} - \frac{K_{2,1}}{K_{2,3}},$$

$$y = \frac{K_{1,2}}{K_{1,3}} - \frac{K_{2,2}}{K_{2,3}},$$

$$\begin{cases} Ax + By = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + By = 0, \\ A = \sqrt{1 - B^2}. \end{cases}$$

Підставимо вираз для **A** в перше рівняння:

$$\sqrt{1 - B^2} \cdot x + By = 0.$$

$$\sqrt{1 - B^2} \cdot x = -By.$$

$$(1 - B^2) \cdot x = B^2 y^2.$$

$$x^2 - x^2 B^2 = B^2 y^2.$$

$$B^2 y^2 + B^2 x^2 = x^2.$$

$$B^2 (y^2 + x^2) = x^2.$$

$$B^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

$$B_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad B_2 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Обчислимо  $A$ :

$$A = \pm \sqrt{1 - B^2}.$$

$$A = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}$$

$$A = \pm \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x^2}{x^2 + y^2}}.$$

$$A_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad A_2 = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

З вигляду системи випливає, що розв'язками даної системи будуть  $A_1$  і  $B_2$  або  $A_2$  і  $B_1$ .

Таким чином, отримуємо дві прямі, які є розв'язком зазначеної системи. Для того, щоб визначити одну пряму, можна скористатись схемою, : знак  $(\overrightarrow{O_1 O_2}) \times (\overrightarrow{a, b}) = \text{знак}(\overrightarrow{O_1 O_2}) \times (\overrightarrow{A, B})$ , знак  $(\overrightarrow{O_1 O_2}) \times (\overrightarrow{a, b}) \neq \text{знак}(\overrightarrow{O_1 O_2}) \times (\overrightarrow{A', B'})$ , тобто векторний добуток двох векторів дає знак "+", якщо перший вектор повертається до другого в тому напрямку, що і вісь  $X$  до осі  $Y$ , і "-", якщо навпаки. Користуючись вказаною ознакою, можна позбавитись зайвої прямої.

Існує також інший алгоритм вибору однієї прямої з двох: в якості точок нового базису обираються точки початкового базису і визначається формула (одна з двох), за якою були отримані коефіцієнти нової прямої, яка повинна співпадати з вихідною. За цією ж формулою визначаються коефіцієнти і нової прямої за умови обрання точок нового базису, який вже не співпадає з

початковим. Іншими словами, побудова нової прямої проводиться за тією ж формулою, що й задана пряма у випадку, коли новий базис співпадає з початковим (при тривіальному перетворенні). Таким чином отримується єдина пряма з коефіцієнтами **A**, **B** та **C**, яка є розв'язком задачі політочкових перетворень. Геометрично така задача проілюстрована на рисунках 28 та 29.

Запропонований математичний метод розрахунку політочкової відповідності відкриває нові можливості стосовно побудови функціоналів в залежності від конкретних умов задачі, що розв'язується.

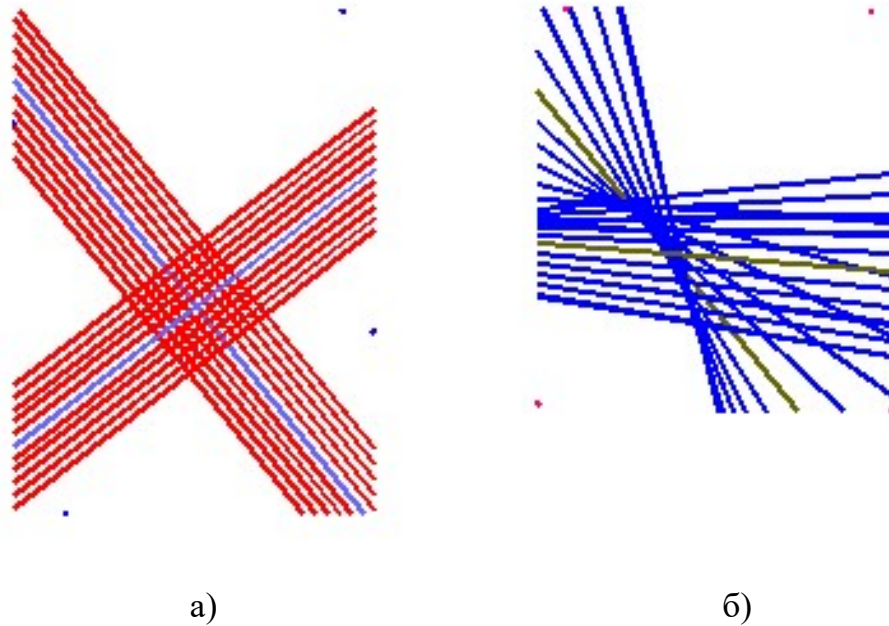


Рисунок 28 – Чотириточкові перетворення сім'ї прямих: (а) – прямі в початковому базисі, (б) – перетворені прямі

Це пов'язано з тим, що в якості змінних використані декартові координати **(X,Y)** образу-прямої, які неявним чином задіяні у структурі функціоналу. Враховуючи, що функціонал призначений зберегти взаємне розташування між точками тіла (між політочковими координатами образу й прообразу) й тому повинен мати у своїй структурі виключно множники  $\omega_i$   $i=1,\dots,p$ , або ж політочкові координати  $\beta_i$  та  $\phi_i$  прямої, то в якості функціоналу політочкової відповідності загалом може бути використаний будь-який функціональний запис,

що є сумою різниць вищезазначених змінних у будь-яких комбінаціях. А так як кожна з цих змінних  $(\omega_i, \beta_i, \varphi_i)$  є функцією від декартових координат  $(X, Y)$ , то відомі методи оптимізації дозволяють завжди здійснити перехід до функціональної залежності відносно шуканих змінних  $(X, Y)$ .

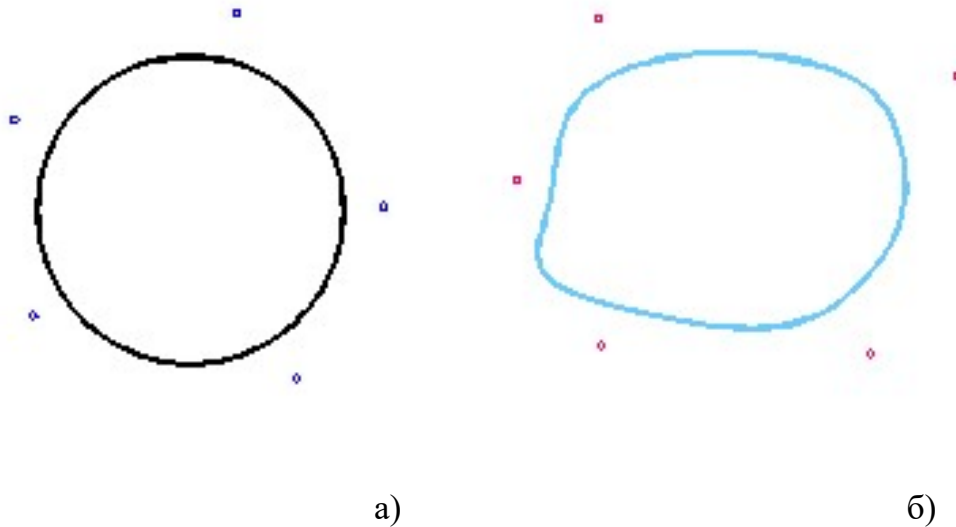


Рисунок 29 – П’ятиточкові перетворення об’єкта (кола): (а) – об’єкт в початковому базисі, (б) – перетворений об’єкт

Так, наприклад, можна продовжити вказану послідовність і записати функціонал, що визначає в якості пріоритетних три базисні точки за номерами  $k$ ,  $n$  та  $j$ :

$$S = \sum_{i=1}^p (\omega_k - \omega_i)^2 + \sum_{i=1}^p (\omega_n - \omega_i)^2 + \sum_{i=1}^p (\omega_j - \omega_i)^2, \quad 1 \leq k \neq n \neq j \leq p.$$

Або ж всі координатні точки у рівній мірі:

$$S = \sum_{n=1}^p \sum_{i=1}^p (\omega_n - \omega_i)^2.$$

За деяких умов може виявитися доречним задання політочкової відповідності на основі функціоналу, що забезпечує мінімізацію різниці відповідних політканинних координат образу й прообразу :

$$S = \sum_{i=1}^p (\phi_i - \beta_i)^2.$$

Окремого розгляду потребує питання введення вагових коефіцієнтів.

Кожний з вищеописаних варіантів визначення політочкової відповідності може бути застосований в залежності від умов розв'язання конкретної задачі.

### ***Питання для самоперевірки***

- 1. Які є варіанти політочкових перетворень?*
- 2. Що таке функціонал перетворень?*
- 3. Яким чином функціонал впливає на вигляд політочкових перетворень?*

## 14. ЗВАЖЕНІ ПОЛІТОЧКОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Сучасна практика геометричного моделювання динамічних об'єктів все частіше вимагає застосування таких методів, які б не залежали від певного виду функціонального визначення геометричного об'єкта. На цей час для цілей моделювання й прогнозування розвитку динамічних процесів застосовується багато різноманітних варіантів створення математичних моделей за допомогою імітаційного моделювання, яке ґрунтується на описанні динамічних об'єктів за допомогою геометричних моделей з візуальним відстеженням динаміки зміни форми віртуальних геометричних об'єктів як певних графічних образів.

Політочкові відповідності образу й прообразу встановлюються на основі деякого функціоналу, який є певним інваріантом політочкового перетворення, що проявляється в збереженні останнім відповідно з задіяним критерієм сукупного взаємного розташування елементів геометричного об'єкта (точок, ліній) у координатному базисі та політочкових координат цих елементів. Одним з можливих напрямків урізноманітнення варіантів реалізації політочкових перетворень є застосування апарату вагових функцій.

Політочкові координати образу  $(\varphi_i, i=1, \dots, p)$  й прообразу  $(\beta_i, i=1, \dots, p)$  пов'язані рівнянням  $\varphi_i = \omega_i \beta_i, i=1, \dots, p$ , де  $p$  — кількість точок базису, а  $\omega_i$  — деякі множники, причому за умови топологічності перетворення  $\omega_i > 0$ . При цьому політочкова відповідність прообразу й образу встановлюється за функціоналом, який має такий вигляд:

$$S = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^p (\omega_i - \omega_j)^2, \quad 1 \leq j \leq p$$

Частинним випадком цього функціоналу є мінімізуючий функціонал вигляду:



$$S = \sum_{i=1}^{p\Sigma} (\omega_i - 1)^2 \rightarrow \min.$$

У наведених залежностях всі координатні базисні точки мають рівну вагу. Надання вищої пріоритетності певній точці або їх визначеній групі досягається відповідним введенням вагових функцій, що визначатимуть рівень впливу кожної точки на політочкове перетворення геометричного об'єкта.

У загальному випадку мінімізуючий функціонал зваженого політочкового перетворення можна записати у вигляді:

$$S = \sum_{i=1}^p m(\beta_i, \beta_j)^2 (\omega_i - \omega_j)^2, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Або у частинному випадку:

$$S = \sum_{i=1}^p m(\beta_i) (\omega_i - 1)^2.$$

Вагові коефіцієнти  $m(\beta_i)$  можуть бути задані у числовому вигляді й вводиться до перетворення, чи мати певне функціональне подання й визначатись у процесі політочкового перетворення відповідно з конфігураціями базису образу й прообразу.

В залежності від умов конкретної задачі чи вимог до результату певний вигляд функціонального завдання вагових функцій політочкового перетворення вибирається з точки зору потреб користувача. Наприклад, будемо вважати, що кожна точка каркасу впливає на політочкову залежність тим сильніше, чим ближче вона знаходиться до конкретної точки об'єкта, що перетворюється. Розглянемо таку залежність докладніше на прикладі застосування вагових коефіцієнтів до функціоналу.

Нехай

$$m(\beta_i) = \frac{1}{\beta_i^2},$$

де  $\beta_i$  - відстань від об'єкта перетворень (прямої) до точок базису. Таким чином, вводимо умову, за якої вагові коефіцієнти точок базису політочкового

перетворення обернено пропорційно залежать від квадрату відстані до зазначеної точки, тобто чим ближче точка до зазначеної прямої, тим більше пряма до неї притягується, і навпаки, далекі точки, які знаходяться на більшій відстані, мало впливають на перетворення прямої. Чим більша відстань від точки до прямої, тим менше її вплив на політочкові перетворення зазначеної прямої. Тобто,

$$S = \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{1}{\beta_i^2} \right) (\omega_i - 1)^2 \right) \rightarrow \min.$$

Мінімізуємо заданий функціонал. Для цього підставимо замість  $\omega_i$  вираз  $\varphi_i / \beta_i$  :

$$S = \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{1}{\beta_i^2} \right) (\omega_i - 1)^2 \right) =$$

$$- \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{1}{\beta_i^2} \right) \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right)^2 \right) \rightarrow \min.$$

Необхідно знайти **A**, **B**, **C**, які є розв'язком зазначеної системи, для чого знаходимо частинні похідні по **A** та по **B** :

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{1}{\beta_i^2} \right) \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right) \left( \frac{X_i}{\beta_i} \right) \right) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{1}{\beta_i^2} \right) \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right) \left( \frac{Y_i}{\beta_i} \right) \right) = 0;$$

Розкриємо дужки :

$$A \sum_{i=1}^p \left( \frac{X_i X_i}{\beta_i^4} \right) + B \sum_{i=1}^p \left( \frac{X_i Y_i}{\beta_i^4} \right) + C \sum_{i=1}^p \left( \frac{X_i Z_i}{\beta_i^4} \right) - \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{\beta_i^4} = 0;$$

$$A \sum_{i=1}^p \left( \frac{Y_i X_i}{\beta_i^4} \right) + B \sum_{i=1}^p \left( \frac{Y_i Y_i}{\beta_i^4} \right) + C \sum_{i=1}^p \left( \frac{Y_i Z_i}{\beta_i^4} \right) - \sum_{i=1}^p \frac{Y_i}{\beta_i^4} = 0;$$

У спрощеному вигляді за умови  $z_i=1$  отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} Ax_{10} + By_{10} + C = d_{10}, \\ Ax_{20} + By_{20} + C = d_{20}, \\ A^2 + B^2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{де: } x_{10} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i^2}{\sum_{i=1}^p \beta_i^4}, \quad y_{10} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i y_i}{\sum_{i=1}^p \beta_i^4}, \quad d_{10} = \frac{\sum_{i=1}^p d_i x_i}{\sum_{i=1}^p \beta_i^4},$$

$$x_{20} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i y_i}{\sum_{i=1}^p \beta_i^4}, \quad y_{20} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i^2}{\sum_{i=1}^p \beta_i^4}, \quad d_{20} = \frac{\sum_{i=1}^p d_i y_i}{\sum_{i=1}^p \beta_i^4},$$

де:  $x_i, y_i$  - декартови координати точок базису, а  $\beta_i$  – відстань від точок базису до прямої.

Ця система дає  $A, B, C$  - коефіцієнти нової прямої при зважених політочкових перетвореннях.

Система розв'язується таким же чином, як і у попередніх розділах. Вибір методів розв'язання системи залежить від додаткових умов задачі, які впливають на точність розв'язання.

Результати роботи алгоритму зважених політочкових перетворень наведені на рисунках 30 та 31. В якості прообразу обрано коло, розміщене у чотириточковому базисі. Політочкове перетворення задається введенням залежності від точок базису. Якщо залежність росте, коло перетворюється в квадрат (повторює вигляд базису), якщо зменшується, коло стає схожим на криволінійний ромб. Рисунок 30 демонструє покрокову зміну форми кола зі зміною залежності від відстаней до точок базису.

На рисунку 31 представлено результат роботи алгоритму зважених політочкових перетворень, коли ваги змінюються тільки в одній точці (3). За об'єкт перетворення обрано коло. З ростом ваги у точці об'єкт наближається до цієї точки. Якщо вага зменшується, то об'єкт «відштовхується» від точки.

Застосування зважених політочкових перетворень дозволить одержувати геометричні об'єкти заданої форми за допомогою зміни певної ваги при

політочкових перетвореннях їх прообразів. Особливо цікаво виглядають об'єкти після зважених політочкових перетворень у просторі, але про це мова піде дещо пізніше.

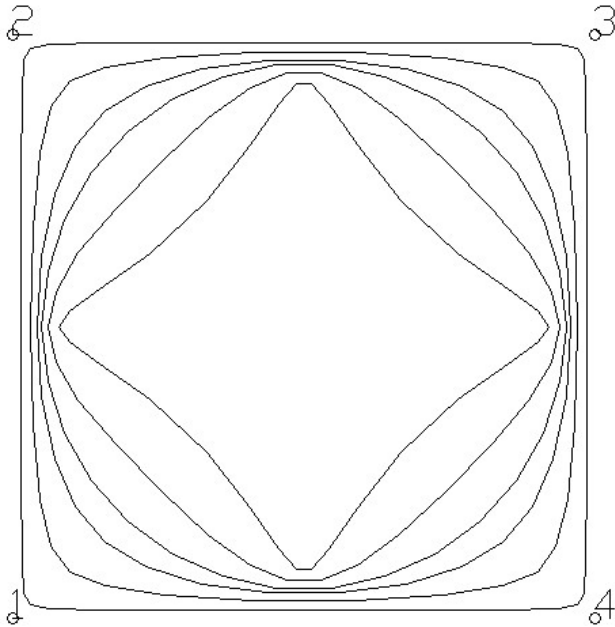


Рисунок 30 – Зважені політочкові перетворення

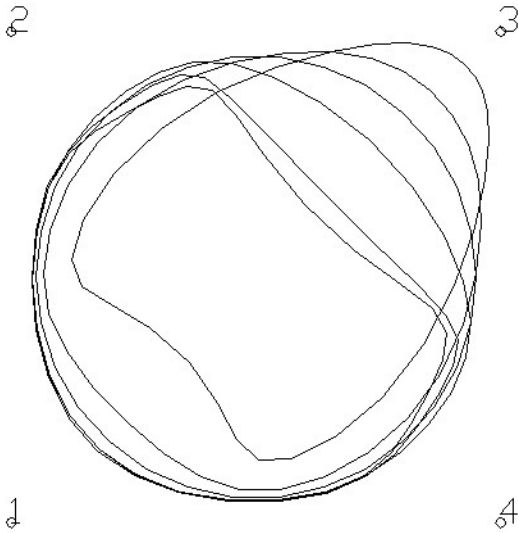


Рисунок 31 – Політочкові перетворення зі зміною ваги в одній точці

### ***Питання для самоперевірки***

- 1. Яким чином вводяться ваги при зважених політочкових перетвореннях?*
- 2. Як розв'язується система при визначенні коефіцієнтів прямої?*
- 3. Яким чином вага впливає на вигляд об'єкта при зважених політочкових перетвореннях?*

## 15. ПОЛІТОЧКОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ

У випадку політочкових перетворень необхідно зазначити, що ці перетворення не є лінійними. Для отримання однозначного розв'язку при політочкових перетвореннях необхідно розв'язувати оптимізаційну задачу. Враховуючи, що політочкова відповідність двох полів встановлюється на основі деякого функціоналу, будемо вважати таку відповідність функціональною, інваріантом якої є встановлене вказаним функціоналом співвідношення між політочковими координатами образу й прообразу. У науковій літературі такі перетворення визначаються як перетворення, що зберігають варіаційну задачу (інваріант - Лагранжиан функціоналу).

Одним з найважливіших напрямків дослідження будь-якого перетворення є питання про вибір координатної сітки, зображення на ній довільної кривої та знаходження зображення відповідної кривої на перетвореній сітці. Розглянемо ці питання щодо політочкових перетворень.

Оберемо початковий базис, і кожену точку об'єкта будемо представляти як точку перетину двох прямих, тобто можна сказати, що вводиться поняття координатної сітки. Нехай для спрощення це буде прямокутна сітка. Будемо вважати, що кожену лінію цієї сітки можна представити у вигляді

$$Ax+By+C=0.$$

Оскільки об'єктом політочкових перетворень є пряма, тоді, застосовуючи ці перетворення до кожної з координатних ліній, отримаємо нові прямі, які й будуть утворювати координатну сітку в новому базисі.

Вигляд сітки можна змінити, якщо застосувати політочкові перетворення з ваговими коефіцієнтами. При цьому існують декілька напрямків вводу вагових коефіцієнтів для зміни вигляду сітки.

1. У початковому базисі за допомогою встановлення необхідних вагів виділяємо ту частину сітки, де зображення цікавить більш за все, тоді

після перетворень виділена ділянка буде змінюватись більше або менше за інші, в залежності від умов, поставлених у задачі. Це може бути застосовано у дизайнерській діяльності, у рекламному бізнесі, тощо.

2. Змінити сітку можна також у вже перетвореному базисі, якщо ввести ваги на точки отриманого базису й таким чином відслідковувати зміни об'єкта за базисом, що змінюється.

На рисунку 32 представлено приклад політочкового перетворення координатної сітки.

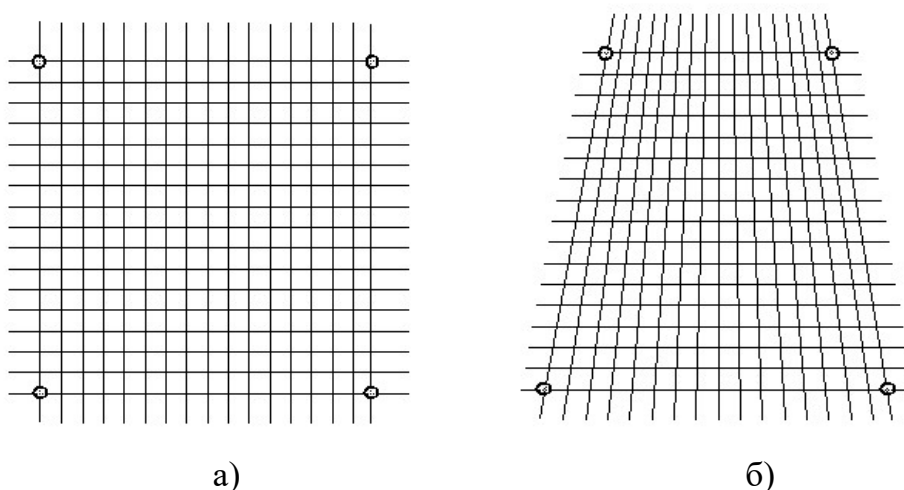


Рисунок 32 – Політочкові перетворення сітки: сітка у початковому базисі, (б) – сітка у перетвореному базисі

Після того, як координатна сітка побудована, виникає питання про перетворення кривої та зображення її у новому базисі.

Існують різні шляхи розв'язання цієї задачі. Оскільки координатна сітка була вже побудована в обох базисах, то можна зафіксувати об'єкт у початковому базисі і знайти відповідні точки в новому базисі. Для цього заданий об'єкт треба розбити на точки, знайти координати кожної точки та перерахувати їх у новому базисі (рисунок 33).

Розбиття об'єкта на точки проводиться будь-яким шляхом. Кількість точок обирається з умови необхідної точності результату. У перетвореному базисі нові

точки необхідно поєднати, наприклад, за допомогою параметричної, або сумарної інтерполяційної функції Гауса.

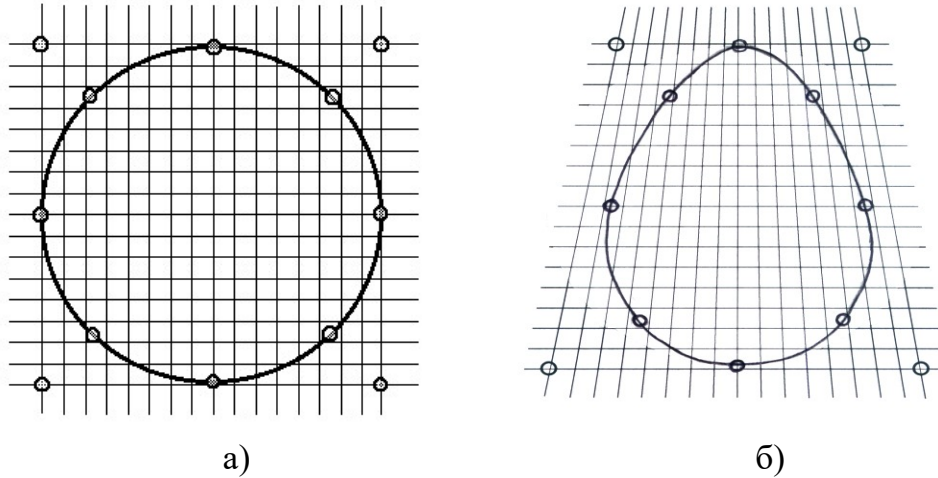


Рисунок 33 – Побудова кривої на перетвореній сітці: (а) – крива у початковому базисі, (б) – крива у перетвореному базисі

Є й інший підхід до вирішення цієї проблеми, коли побудова заданої кривої ліній проводиться синхронно із зміною координатного базису.

Суть його полягає в наступному.

Нехай на площині задана деяка крива (рисунок 34). Розіб'ємо точками задану криву на ділянки, тобто переведемо її у точкове подання з будь-якою щільністю. Ці точки будуть опорними для побудови ламаної лінії, яка буде замінити задану криву при політочкових перетвореннях. Задана крива, таким чином, перетворюється на сукупність відрізків прямих ліній, а прямі лінії є безпосередньо об'єктами політочкових перетворень.

Ця ламана лінія занурюється в точковий базис (кількість точок базису регулюється користувачем з точки зору умов поставленої задачі). Подальше конструювання кривої полягає у послідовній зміні базису, перенесенні кожної прямої у новий базис з відтворенням деформованої кривої на кожному кроці до отримання бажаного результату. Враховуючи ітераційний характер процесу конструювання, можливо повернення назад аж до першого кроку – призначення характерних точок.



В результаті описаного способу політочкового перетворення плоскої кривої, образом заданої кривої буде множина точок перетину перетворених прямих. Ці точки можна вважати дискретним каркасом перетвореної кривої. Для отримання неперервного вигляду цієї функції можна застосувати різні апроксимаційні методи.

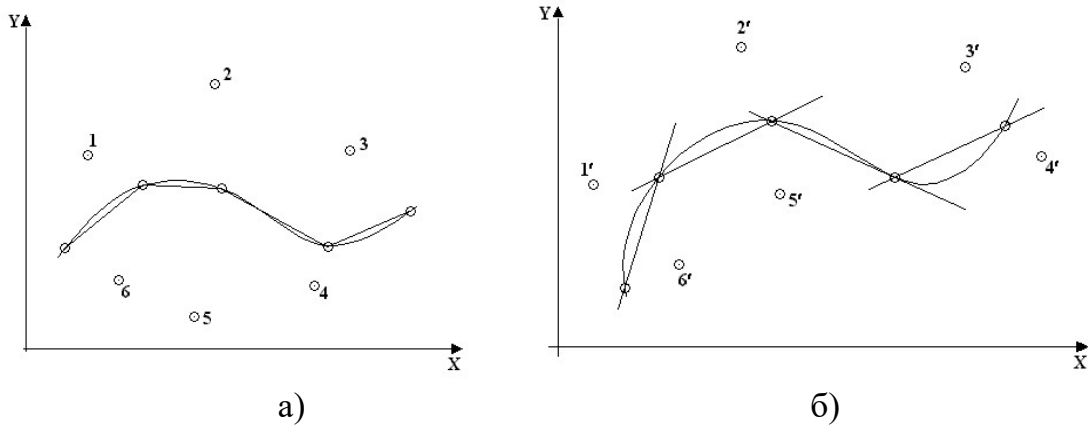


Рисунок 34 – Побудова кривої як перетвореної ламаної лінії: (а) – крива у початковому базисі, (б) – крива у перетвореному базисі

Одним з підходів до розв'язання задачі конструювання плоских кривих за допомогою політочкових перетворень є застосування вагових коефіцієнтів перетворень для кожного координатного базису. На рисунку 35 представлено реалізацію саме такого підходу. У третю точку було введено ваговий коефіцієнт, що призвело до зміни форми об'єкта.

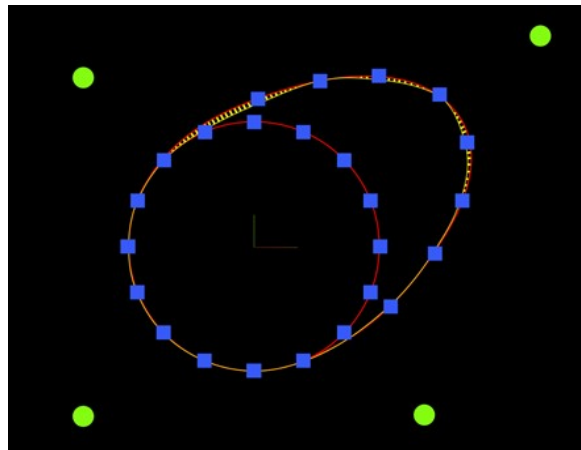


Рисунок 35 – Побудова кривої з додаванням ваги

Метод політочкових перетворень дозволяє будувати плоскі криві за допомогою різних методів. Вибір методу представлення об'єкта для перетворення належить користувачу.

***Питання для самоперевірки***

- 1. Яким чином можна представляти криву для перетворення?*
- 2. Який зі способів представлення кривої кращий?*

## 16. ПОЛІТОЧКОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

При моделюванні динамічних процесів часто виникає проблема конструювання об'єктів (плоских чи об'ємних), що зазнали деформаційних змін. Вище був описаний підхід до розв'язання деформаційної задачі політочкового перетворення на площині, у якому для отримання однозначного розв'язку треба було застосовувати оптимізаційні методи, які зводилися до розв'язання нелінійної системи рівнянь. Система нелінійних рівнянь у випадку тривимірного простору (тобто при просторових перетвореннях) також розв'язується, як буде показано далі, але буде більш складною, тому є сенс ввести деякі спрощення алгоритму перетворень. Розглянемо інший підхід до вирішення оптимізаційної задачі. Для цього розглянемо можливість розв'язання задачі політочкових перетворень на площині на базі лінійної системи рівнянь.

Початковий базис в однорідному просторі задається базисними точками з координатами  $x_i^n, y_i^n, z_i^n, i=1,2,\dots,p$ .

У цьому базисі пряма-прообраз визначається за допомогою рівнянь вигляду:

$$ax_i^n + by_i^n + cz_i^n = \beta_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

де  $x_i^n, y_i^n, z_i^n$  - координати точок початкового базису,  $a, b, c$  – коефіцієнти заданої прямої.

Перетворений базис буде заданий у вигляді сім'ї нових точок  $x_i, y_i, z_i$ . Нові “відстані” будуть визначатись за формулами:

$$\varphi_i = Ax_i + By_i + Cz_i,$$

де  $x_i, y_i, z_i$  - координати точок нового базису,  $A, B, C$  – невідомі коефіцієнти перетвореної прямої у новому базисі.

Для отримання однозначного розв'язку задачі політочкового перетворення прямої з одного базису в інший треба було застосовувати оптимізаційні методи, які зводилися до розв'язання нелінійної системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_{10} + \mathbf{By}_{10} + \mathbf{C} = \mathbf{d}_{10}, \\ \mathbf{Ax}_{20} + \mathbf{By}_{20} + \mathbf{C} = \mathbf{d}_{20}, \\ \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 = \mathbf{1}, \end{cases}$$

де  $\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20}, \mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \mathbf{d}_{10}, \mathbf{d}_{20}$  – деякі функції від декартових координат точок нового базису та від відстаней прямої прообразу до точок висхідного базису. Ця система дає нам  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  - коефіцієнти нової прямої.

Існує інший підхід до розв'язання цієї задачі.

Нелінійність вказаній системі рівнянь надає третє рівняння, яке має на меті зберігати нормованість перетвореної прямої. Нормою у випадку таких політочкових перетворень є відстань від точок базису до прямої, що перетворюється, причому під відстанню розуміють число, яке може бути отримане при підстановці координат точок базису у нормований вигляд прямої. Якщо не накладати вимоги нормованості отриманої (перетвореної) прямої, то під відстанню (нормою) можна розуміти число, яке отримане шляхом прямої підстановки координат точок базису у рівняння прямої.

У цьому випадку третє рівняння системи (як і перші два) ми отримаємо при мінімізації оптимізаційного функціоналу такого вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^p (\omega_i - 1)^2 \rightarrow \min.$$

Для цього підставимо замість  $\omega_i$  вираз  $\frac{\omega_i}{\beta_i}$  :

$$S = \sum_{i=1}^p \left( \frac{\varphi_i}{\beta_i} - 1 \right)^2 = \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{(\mathbf{Ax}_i + \mathbf{By}_i + \mathbf{Cz}_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right)^2 \rightarrow \min.$$

Необхідно знайти  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ , які є розв'язком системи, для чого знаходимо частинні похідні за трьома змінними  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  та  $\mathbf{C}$ :

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right) \left( \frac{X_i}{\beta_i} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right) \left( \frac{Y_i}{\beta_i} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} = 2 \sum_{i=1}^p \left( \left( \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i)}{\beta_i} \right) - 1 \right) \left( \frac{Z_i}{\beta_i} \right) = 0;$$

Після того, як ми у кожному з трьох рівнянь розкриємо дужки та зведемо подібні, отримаємо три рівняння з невідомими **A**, **B**, **C** такого вигляду:

$$\begin{aligned} A \sum_{i=1}^p \frac{(X_i X_i)}{\beta_i^2} + B \sum_{i=1}^p \frac{(X_i Y_i)}{\beta_i^2} + C \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{\beta_i^2} - \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{\beta_i} &= 0 \\ A \sum_{i=1}^p \frac{(Y_i X_i)}{\beta_i^2} + B \sum_{i=1}^p \frac{(Y_i Y_i)}{\beta_i^2} + C \sum_{i=1}^p \frac{Y_i}{\beta_i^2} - \sum_{i=1}^p \frac{Y_i}{\beta_i} &= 0 \\ A \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{\beta_i^2} + B \sum_{i=1}^p \frac{Y_i}{\beta_i^2} + C \sum_{i=1}^p \frac{1}{\beta_i^2} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\beta_i} &= 0 \end{aligned}$$

Ці три рівняння утворюють систему, яка є лінійною відносно невідомих **A**, **B**, **C** і тому може бути розв'язана будь-яким відомим методом.

Розв'язком даної системи будуть **A**, **B**, **C**, які є коефіцієнтами нової перетвореної прямої.

Тестові приклади роботи з лінійною системою подані на рисунку 36. Об'єктом перетворення обрано коло. Зліва на рисунку показано маніпулювання точками базису і відтворення змін форми кола при кожній маніпуляції з точками базису. Справа показано переміщення однієї точки (3) і покрокове відтворення форми кола при цій процедурі.

Такий же підхід можна застосувати і до створення і розв'язання системи при зважених політочкових перетвореннях. На рисунку 37 представлено п'ятиточкові перетворення кола при звичайних (а) та зважених (б) перетвореннях.

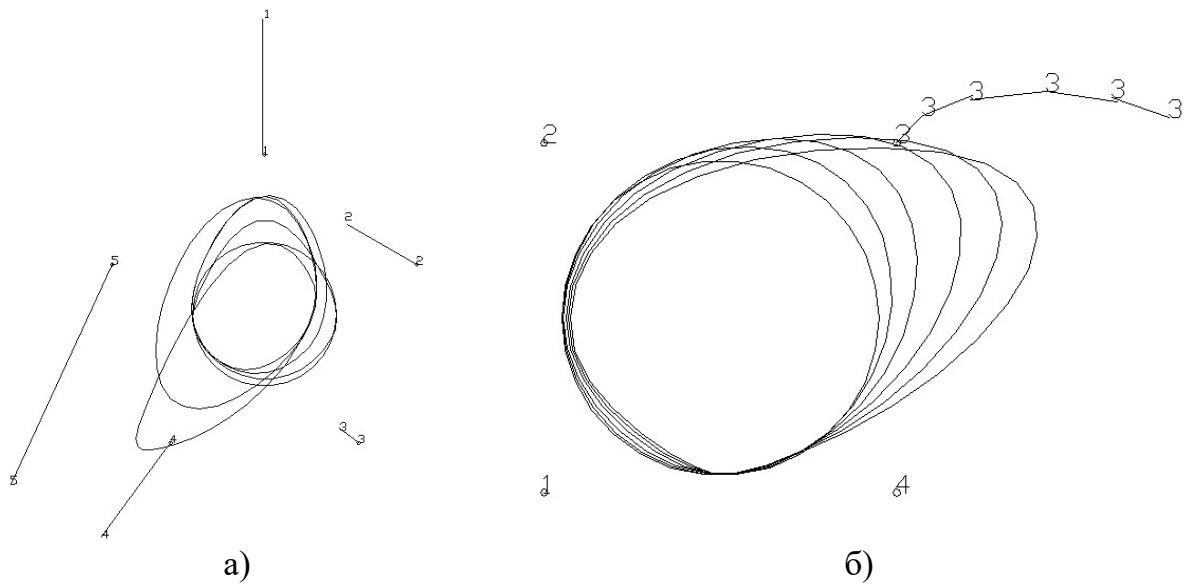


Рисунок 36 – Оперування точками базису при перетворенні кола: (а) – перенесення всіх точок базису, (б) – перенесення однієї точки базису (т.3)

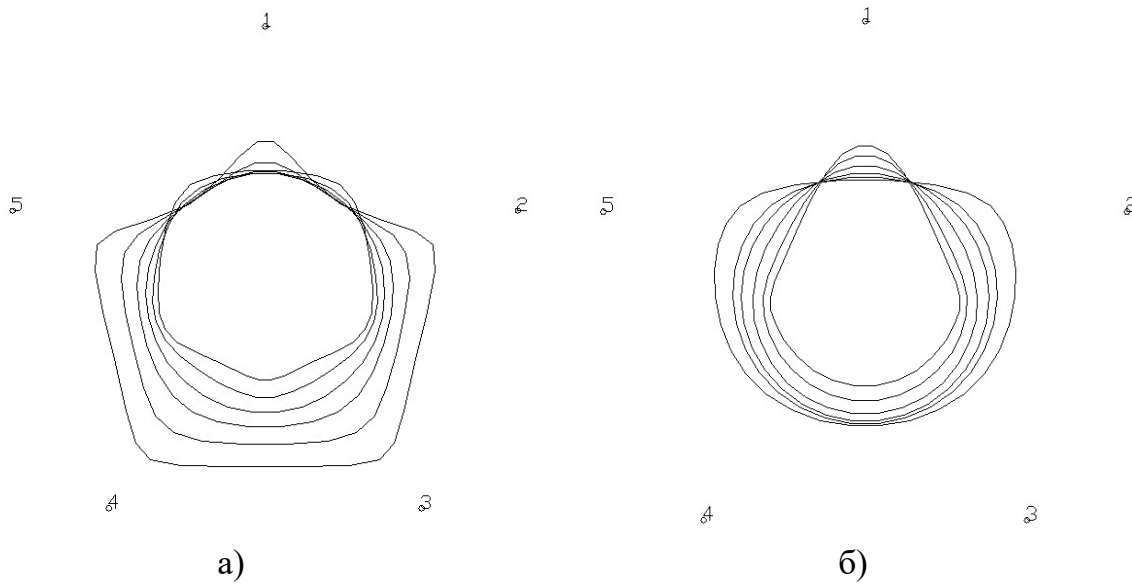


Рисунок 37 – Результати п'ятиточкових перетворень кола з використанням лінійної системи рівнянь: (а) – п'ятиточкові перетворення, (б) – зважені п'ятиточкові перетворення

Для розв'язання лінійної системи рівнянь було обрано метод Гауса, так як він дає досить непогану точність. Але, якщо за умовою задачі точність необхідно підвищувати, то можна використовувати і ітераційні методи.

В зв'язку з розвитком сучасних технологій та нарощуванням потужності комп'ютерів все більше набувають актуальності задачі, пов'язані з моделюванням складних тривимірних тіл та їх поведінки в режимі реального часу. Геометричне моделювання має широкий спектр практичного використання, від медицини, біомеханіки, архітектури, дизайну, скульпінгу, до застосування у промисловому виробництві та ігровій індустрії.

Існує безліч методів побудови тривимірних об'єктів, та моделювання їх у просторі, але більшість методів не відслідковує процеси деформації, і має завеликі похибки обчислення. Крім того, фізико-математичні методи розв'язання задачі деформації тривимірних тіл є дуже складними, віднімають багато часу, і часто взагалі не мають розв'язку. Тому для отримання результату у цьому випадку краще користуватись методами імітаційного моделювання, яким є метод політочкових перетворень. Особливо доречним є те, що система, яка реалізує ці перетворення, є лінійною, а тому легко розв'язується будь яким методом.

Такий підхід до розв'язання задачі площинних політочкових перетворень дає можливість відносно простого переходу до просторової задачі. У випадку тривимірного простору базисом політочкових перетворень буде множина точок, а об'єктом перетворень (за принципом двоїстості) буде площина. Тривимірні об'єкти будуть моделюватись за допомогою перетворених площин такими ж способами (підходами), як площинні об'єкти будувались за допомогою перетворених прямих.

### ***Питання для самоперевірки***

- 1. Система якого вигляду реалізує політочкові перетворення?*
- 2. У який спосіб розв'язується лінійна система при політочкових перетвореннях?*

## 17. ДЕФОРМАЦІЙНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Моделювання тривимірних об'єктів у теперішній час проводиться із застосуванням сучасних комп'ютерних технологій, які дають можливість отримати не лише математичні розв'язки, подані у вигляді багатовимірних чисельних масивів, а й надають можливість візуального покрокового стеження за об'єктом, який змінюється. Оскільки майже будь-який об'єкт моделювання може бути поданий у графічному вигляді (наприклад, дискретно-точкові криві лінії й поверхні), то важливим є надання можливості конструктору зорового відстеження у реальному часі результатів своєї роботи і наявність деякого керуючого апарату зміни форми об'єкта, що має геометричну природу (тобто, складається з простих геометричних об'єктів: точок, ліній, ламаних, площин) в результаті певної сукупності простих дій, які є звичними й інтуїтивно зрозумілими користувачеві.

Такий підхід до моделювання тривимірних об'єктів є особливо актуальним, коли йде мова про об'єкти, що зазнали деформаційних змін. У даному випадку керований синтез геометричних об'єктів потрібної форми за їх визначеними прототипами може бути здійснений за допомогою політочкових перетворень, які повною мірою відповідають основним принципам сучасних деформаційних методів, що останнім часом отримали стрімкий розвиток.

Серед існуючих методів тривимірного деформаційного моделювання можна окремо виділити метод політканинних перетворень, який є узагальнюючим щодо лінійних перетворень (афінні та проєктивні перетворення є окремими випадками політканинних перетворень відповідної розмірності) та характеризується більшою гнучкістю й значно більшими можливостями стосовно деформації (нелінійної та анізотропної) простору, проте далеко не гарантує збереження топології геометричного об'єкта, що перетворюється.

Коротко розв'язання задач тривимірного моделювання за умови застосування деформаційного конструювання геометричних об'єктів



безпосередньо у тривимірному просторі з реалізацією діалогу за допомогою динамічних комп'ютерних наочних зображень геометричного об'єкта й керуючого апарата, що неперервно й синхронно змінюються (деформуються) за допомогою політканинних перетворень можна описати так.

Площинні політканини є поширенням прямолінійних політканин площини на тривимірний простір і задаються координатним базисом політканини (КБПТ), що складається з деякої кількості орієнтованих базисних координатних площин (БКП). Розглянемо площинну політканину (далі – політканину), що задається КБПТ у вигляді гексаедру (початковий стан многогранника – куб, рисунок 38), який повною мірою узагальнює всі особливості зазначених КБПТ. Областю визначення  $\Theta$  політканини вважатимемо частину простору  $\mathbf{R}^3$ , обмежену гексаедром. Кожна БКП КБПТ, що є гранню многогранника, є орієнтованою. При цьому, вектор нормалі кожної з цих площин вважатимемо напрямленим поза межі гексаедра. Це досягається спеціальним завданням і нормалізацією рівнянь БКП.

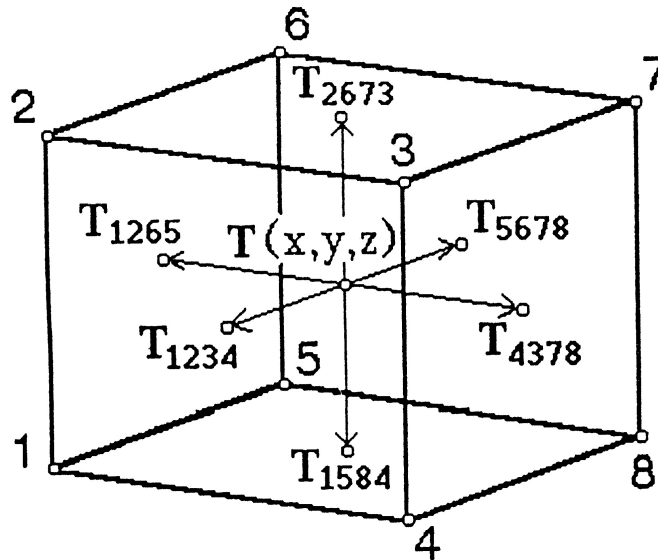


Рисунок 38 – Початкова площинна політканина

Зазначена політканина відносно загальної декартової системи координат  $OXYZ$  визначається за допомогою такої системи функцій-координат

$$\beta_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i, \quad i = 1, \dots, p \geq 3.$$

Кожна з функцій цієї системи за умови  $\beta_i=0$  визначає відповідну БКП КБПТ. Сукупність  $\beta_i, i=1, \dots, p$  є політканинними координатами точки  $T(x,y,z)$  відносно заданого КБПТ. Якщо КБПТ заданий рівняннями площин у нормованому вигляді, то  $|\beta_i|$  є відстанню від точки  $T(x,y,z)$  до  $i$ -ї БКП політканини. Враховуючи зазначену вище орієнтованість БКП (напрямок їх векторів нормалей), всі точки у межах  $\Theta$  (тобто, всередині гексаедра) мають додатні  $\beta_i, i=1, \dots, p$ . Цей факт може бути проілюстрований тим, що  $\beta_i, i=1, \dots, p$  ототожнюються з векторами, напрямленими від точки  $T(x,y,z)$  до відповідних БКП перпендикулярно останнім. Тобто,  $\beta_1=TT_{1234}$ ,  $\beta_2=TT_{1265}$  і так далі (рисунок 39). Черговість літер вказує на спрямованість вектору - координати.

Керування політканинним перетворенням із застосуванням комп'ютерних засобів полягає у послідовній цілеспрямованій зміні положення (зміщенні у просторі  $R^3$ ) вершин многогранника як графічного (зорового) інтерпретатора КБПТ.

Технологічно зазначений процес відбувається таким чином. Спочатку серед усіх вершин многогранника вибирається одна точка, що буде керованою на цей момент часу. Потім визначаються грані многогранника, до яких належить виділена точка. Якщо грань (БКП) керованого многогранника (КБПТ), одна з вершин якої зміщується, має більше, ніж три точки ( $n>3$ ), то, як правило,  $(n-3)$  точок цієї ж грані (не враховуючи керовану на цей момент точку) теж повинні адекватно змінити своє положення.

Звичайно, що однозначний розв'язок такої задачі вимагає фіксації положення двох будь-яких (на розсуд оператора) точок грані й визначення можливих напрямків (траєкторій) зміщення рухомих точок. Пояснимо більш докладно цей процес (рис. 39). Як видно з рисунка, всі вершини керованого многогранника (КБПТ) поділені на п'ять груп: керована точка; група сталих (фіксованих) точок; незалежна фіксована точка; група першорядно-рухомих точок; другорядно-рухома точка.

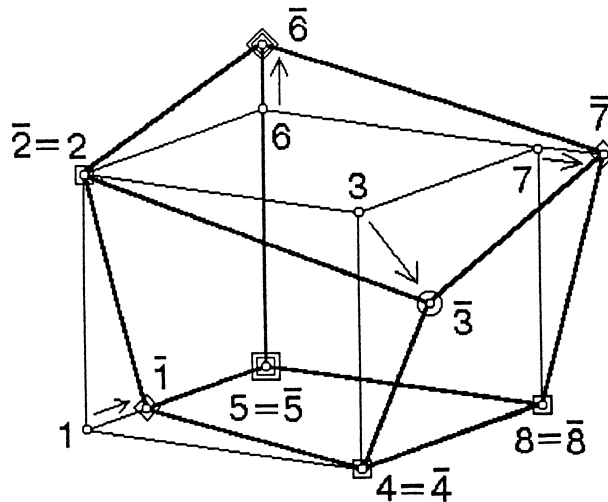


Рисунок 39 – Перетворена площинна політканина

В якості керованої обрана точка 3, зміщене положення якої позначене  $3^*$ . Точка 3 є спільною для трьох граней (БКП): 1-2-3-4, 4-3-7-8 та 2-6-7-3. Приймаючи до уваги, що після зміщення точки 3 всі інші точки з числа вищезазначених повинні зайняти таке положення, щоб не порушити визначений закон утворення граней (площин), виділяємо зі складу цих трьох граней дві грані першорядної й одну грань другорядної деформації. Грані першорядної деформації (1-2-3-4 та 4-3-7-8) повинні мати по дві сталі (фіксовані) точки (2,4 та 4, 8 відповідно) та по одній першорядно-рухомій точці (1 та 7 відповідно). Грань другорядної деформації (2-6-7-8) виділяється наявністю другорядно-рухомої точки (вершина 6). Інші три точки (2, 3 та 7) цієї грані визначаються конфігурацією попередніх двох граней.

Розподіл зазначених трьох граней на дві групи обумовлюється черговістю визначення їх конфігурації (положення у просторі заданих точок-вершин) в результаті зміщення керованої точки. Так, для площини 4-3-7-8 призначаються сталі (фіксовані) точки 4 та 8, а нове положення точки 7 ( $7^*$ ) визначається як точка зустрічі ребра 6-7 з площиною  $3^*-4^*-8^*$ . Тобто, ребро 6-7 приймається за траєкторію руху першорядно-рухомої точки 7. Аналогічним чином призначаються сталі (фіксовані) точки 2 та 4 (остання є спільною з попередньою

гранню) для площини 1-2-3-4 й знаходиться нове положення точки 1 (1\*) як точки зустрічі ребра 1-5 з площиною 2\*-3\*-4\*. Нова конфігурація грані 2-6-7-3 визначається керованою точкою 3\* та точками 2\* та 7\*, знайденими на попередньому кроці алгоритму, а точка 6\* є точкою зустрічі ребра 5-6 з площиною 2\*-7\*-3\*.

Незадіяною у цих розрахунках залишилась вершина 5 многогранника. Вона ніяким чином не пов'язана з деформацією КБПТ, викликаною зміщенням керованої точки 3, не змінює свого положення й тому отримала назву “незалежної фіксованої точки”. Як видно з наведеного алгоритму, траєкторіями зміщення рухомих точок (1, 6 та 7) прийняті ребра, що перетинають деформовані грані.

Повторюючи наведений алгоритм для інших вибраних керованих точок (вершин многогранника), можна досягти бажаної конфігурації КБПТ, що обумовить політканинне перетворення простору  $\mathbf{R}^3$  у межах області визначення політканини  $\Theta$ .

Окрім інтерактивної зміни конфігурації КБПТ (многогранника) можливий також однокроковий перехід до нового КБПТ, що представлений у вигляді машинної моделі. Машинна модель (ММ) КБПТ як геометричний об'єкт у цьому випадку являє собою ММ гранованого тіла, що містить геометричну й топологічну частини. У цьому випадку створюється й підтримується бібліотека (файлова база даних) КБПТ.

Аналогічним чином відбувається керована деформація КБПТ іншої розмірності.

Окрім вищезазначеного можлива реалізація й інших варіантів політканинної відповідності двох тривимірних точкових просторів у межах області визначення  $\Theta$  політканини (рисунок 40).

Наведені рисунки наочно доводять працездатність запропонованого методу й переконують у можливості його застосування для вирішення різноманітних задач. Зокрема, це задачі геометричного моделювання динамічних процесів, як, наприклад, моделювання зміни форми з одночасним пересуванням дощових хмар.

Хмари у цьому випадку апроксимуються певною сукупністю еліпсоїдів, а розмірність і конфігурація КБПТ визначається можливими напрямками руху повітряних мас (трояндою вітрів).

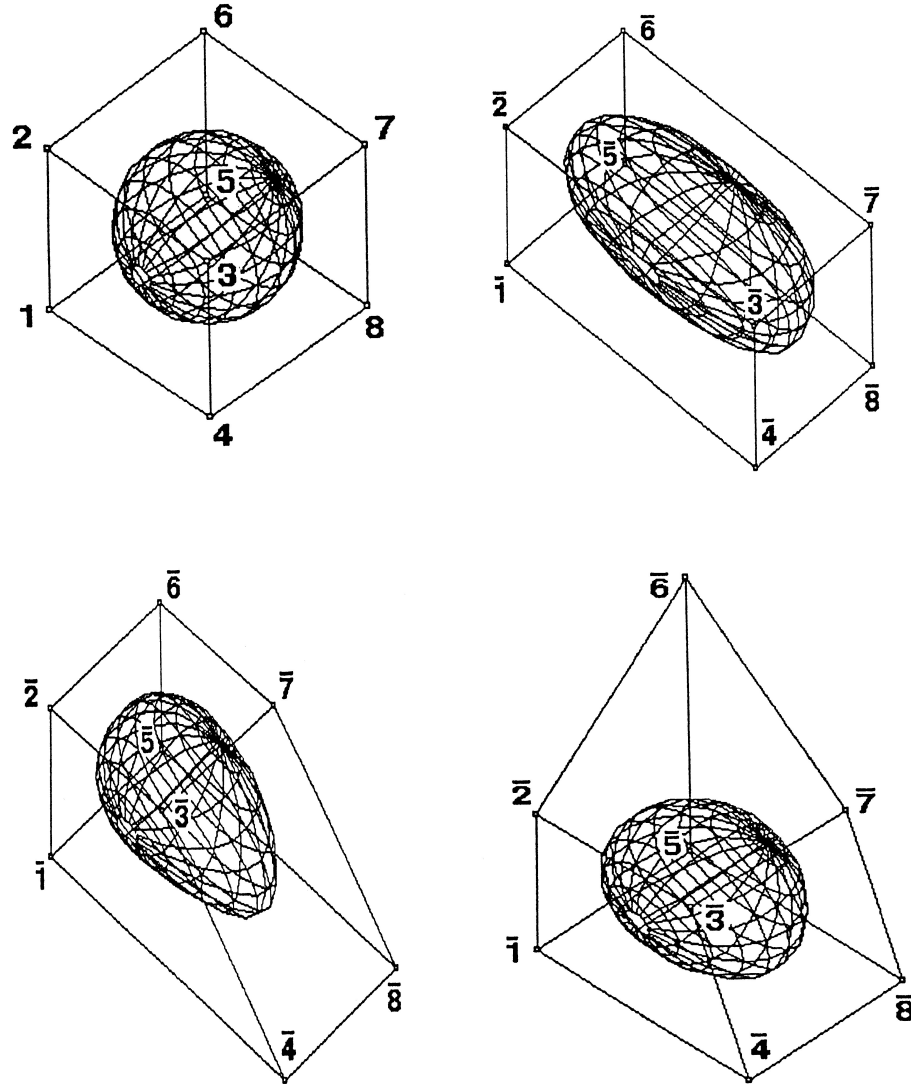


Рисунок 40 – Чотири об'єкти, отримані за допомогою маніпуляції різними точками базису

Метод політканинних перетворень має багато переваг, але негативним у цьому методі є те, що базисом є множина площин (наприклад, гексаедр), і якщо змінювати положення однієї вершини, то потрібно проводити перерахунок усіх точок, що були задіяні при зміні конфігурації гексаедру, тобто при політканинних

перетвореннях треба проводити додаткові обчислення, щоб новий базис (нова політканина) також був множиною площин, а значить, точки, які належать координатному базису, мають чітку функціональну залежність (а саме, точки повинні належати конкретній площині). Ця обставина накладає жорсткі обмеження на можливість маніпуляції простором, у якому знаходиться об'єкт перетворень, а отже, звужує можливі напрямки процесу деформації.

Крім вищезазначеного, досить складним представляється процес оточення об'єкта, що деформується, площинами, тобто вибір початкової політканини не є інтуїтивно зрозумілим, насамперед, з точки зору обрання оптимального координатного базису.

Цих недоліків можна запобігти, якщо при моделюванні деформації оточувати об'єкт множиною точок, тобто доцільно проводити моделювання за допомогою політочкових перетворень, базисом яких є множина точок, а об'єктом перетворень – площина.

### ***Питання для самоперевірки***

- 1. Що є базисом перетворень при тривимірному політканинному моделюванні?*
- 2. Яким чином задається об'єкт перетворень?*

## 18. ПОЛІТОЧКОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ

Використовуючи спосіб політочкових перетворень площинних об'єктів, перейдемо до тривимірного простору. У випадку політочкових перетворень прямої на площині базисом перетворень була множина точок площини, а об'єктом перетворень була пряма, або множина прямих, якщо потрібно було проводити деформацію об'єкта, заданого певним набором прямих. У випадку тривимірних політочкових перетворень базисом перетворень буде множина точок тривимірного простору, а об'єктом перетворень буде площина, або площини, у випадку, коли тривимірний об'єкт може бути представлений множиною площин.

Розглянемо розрахункові залежності, що реалізують політочкові перетворення однієї заданої площини у тривимірному просторі.

Принцип двоїстості у формульному вигляді може бути застосований до однорідного простору.

Однорідний простір визначається введенням невизначеного множника як четвертої координати:

$$X \text{ однор.} = WX$$

$$Y \text{ однор.} = WY$$

$$Z \text{ однор.} = WZ$$

$$h \text{ однор.} = W.$$

В однорідному просторі рівняння площини буде мати вигляд:

$$a X_{\text{однор.}} + b Y_{\text{однор.}} + c Z_{\text{однор.}} + d h_{\text{однор.}} = 0.$$

Це рівняння є симетричним відносно до координат  $X_{\text{однор.}}$ ,  $Y_{\text{однор.}}$ ,  $Z_{\text{однор.}}$ ,  $h_{\text{однор.}}$  та коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Таким чином, можна вважати, що площина визначається «координатами»  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , а будь-яка точка простору -  $X_{\text{однор.}}$ ,  $Y_{\text{однор.}}$ ,  $Z_{\text{однор.}}$ ,  $h_{\text{однор.}}$ .

Політочкові перетворення у тривимірному просторі будуть визначатись як перетворення площин, а базисом таких перетворень буде множина точок, яку ми

будемо змінювати в залежності від умов, накладених на розв'язок задачі деформування заданого об'єкта.

Геометрично проілюструємо задачу тривимірних політочкових перетворень.

Як показано на рисунку 41, точки початкового каркасу **1, 2, 3, 4, 5** задаються декартовими координатами  $x_i, y_i, z_i$ . Проводимо висхідну площину (площину, яка підлягає перетворенню), і визначаємо відстань від точок початкового базису до заданої площини. Для цього її рівняння (за умови  $h$  однор. =1) приводимо до нормалізованого вигляду і після підстановки у рівняння координат базисних точок отримуємо координати  $\gamma_i$ , які є політочковими координатами площини.

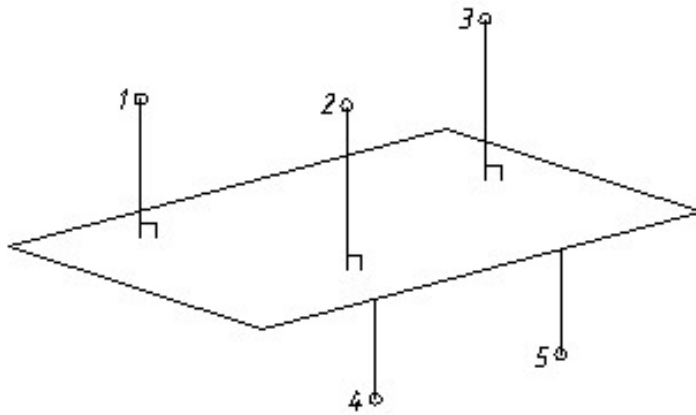


Рисунок 41 – Площина у початковому базисі

Змінюємо каркас, тобто міняємо декартові координати точок початкового базису (рисунок 42). Нові точки **1', 2', 3', 4', 5'** утворюють новий базис, у якому потрібно знайти положення нової (перетвореної) площини.

Розглянемо докладніше політочкові перетворення за умови багатоточкового каркасу.

Площина-прообраз визначиться у висхідному базисі системою рівнянь

$$\gamma_i = ax_i + by_i + cz_i + dh_i, \quad i = 1 \dots n,$$

де **a, b, c, d** – коефіцієнти заданої площини,



$x_i, y_i, z_i, h_i$  – координати точок висхідного базису.

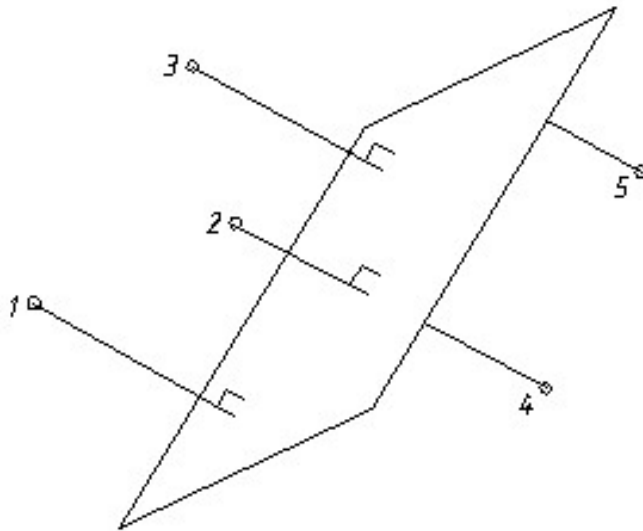


Рисунок 42 – Перетворена площина у новому базисі

Потрібно знайти нове положення площини у зміненому базисі. Перетворена площина буде визначатись системою рівнянь вигляду:

$$\varphi_i = AX_i + BY_i + CZ_i + DH_i, i = 1..n,$$

де  $A, B, C, D$  – невідомі коефіцієнти шуканої площини,

$X_i, Y_i, Z_i, H_i$  – координати нового базису,

$\varphi_i$  – відстань від точок висхідного базису до площини-прообразу.

Якщо розглянути конкретну площину у багатоточковому каркасі, то її політканинні координати до перетворення і після нього у загальному випадку не співпадатимуть, тобто  $\gamma_i \neq \varphi_i, i = 1, 2, \dots, p$ . Таким чином, виникає необхідність отримання однозначного розв'язку задачі політочкового перетворення простору  $R^3$ , тобто встановлення функціонального взаємозв'язку між координатами  $\gamma_i$  та  $\varphi_i, i=1,2,\dots,p$  в обох базисах.

За аналогією з площинними політочковими перетвореннями, враховуючи, що координати площини у політочковому базисі є аналогом її віддаленості від відповідних базисних точок, політочкове перетворення у тривимірному просторі можна записати у вигляді:

$$\varphi_i = \omega_i \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Підставимо замість  $\varphi_i$  в ліву частину рівняння  $\omega_i \gamma_i$ :

$$\omega_i \gamma_i = Ax_i + By_i + Cz_i + Dh_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ця система містить  $n$  рівнянь та  $n+4$  невідомих ( $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n, A, B, C, D$ ). Таким чином, для отримання однозначного розв'язку системи необхідно ввести чотири додаткові умови.

Для отримання додаткових умов пропонується знайти  $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$  за умови їх мінімального відхилення від одиниці, тоді  $\varphi_i$  будуть мало відхилятися від  $\gamma_i$ . Таким чином, пропонується мінімізувати функціонал такого вигляду:

$$\sum (\varphi_i - \gamma_i)^2 \rightarrow 0, \quad i = 1 \dots n.$$

Задача зводиться до пошуку екстремуму цього функціоналу. Знайдемо частинні похідні за змінними  $A, B, C$  та  $D$

$$\frac{\partial \sum (\varphi_i - \gamma_i)^2}{\partial A} = 2 \sum X_i (AX_i + BY_i + CZ_i + DH_i - \gamma_i) = 0.$$

$$\frac{\partial \sum (\varphi_i - \gamma_i)^2}{\partial B} = 2 \sum Y_i (AX_i + BY_i + CZ_i + DH_i - \gamma_i) = 0.$$

$$\frac{\partial \sum (\varphi_i - \gamma_i)^2}{\partial C} = 2 \sum Z_i (AX_i + BY_i + CZ_i + DH_i - \gamma_i) = 0.$$

$$\frac{\partial \sum (\varphi_i - \gamma_i)^2}{\partial D} = 2 \sum H_i (AX_i + BY_i + CZ_i + DH_i - \gamma_i) = 0.$$

Ці чотири рівняння утворюють лінійну систему рівнянь. У матричному вигляді будемо мати:

$$A \cdot V = B,$$

де:

$$A = \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & \sum X_i Y_i & \sum X_i Z_i & \sum X_i H_i \\ \sum Y_i X_i & \sum Y_i^2 & \sum Y_i Z_i & \sum Y_i H_i \\ \sum Z_i X_i & \sum Z_i Y_i & \sum Z_i^2 & \sum Z_i H_i \\ \sum H_i X_i & \sum H_i Y_i & \sum H_i Z_i & \sum H_i^2 \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sum X_i \gamma_i \\ \sum Y_i \gamma_i \\ \sum Z_i \gamma_i \\ \sum H_i \gamma_i \end{bmatrix}.$$

Розв'язком цієї лінійної системи рівнянь будуть значення **A, B, C, D**, тобто коефіцієнти шуканої перетвореної площини.

Політочкові перетворення площини складають основу моделювання тривимірних об'єктів, які зазнали деформаційних змін за допомогою тривимірних політочкових перетворень. Оскільки більшість реальних тривимірних об'єктів можна представити у вигляді множини площин (гранованого тіла), то за допомогою послідовного політочкового перетворення кожної з площин ми отримаємо перетворений тривимірний об'єкт.

При політочкових перетвореннях у тривимірному просторі об'єкт представляється набором плоских трикутників. Кожний такий трикутник можна представити чотирма площинами, які перетинаються у його вершинах (рисунок 43).

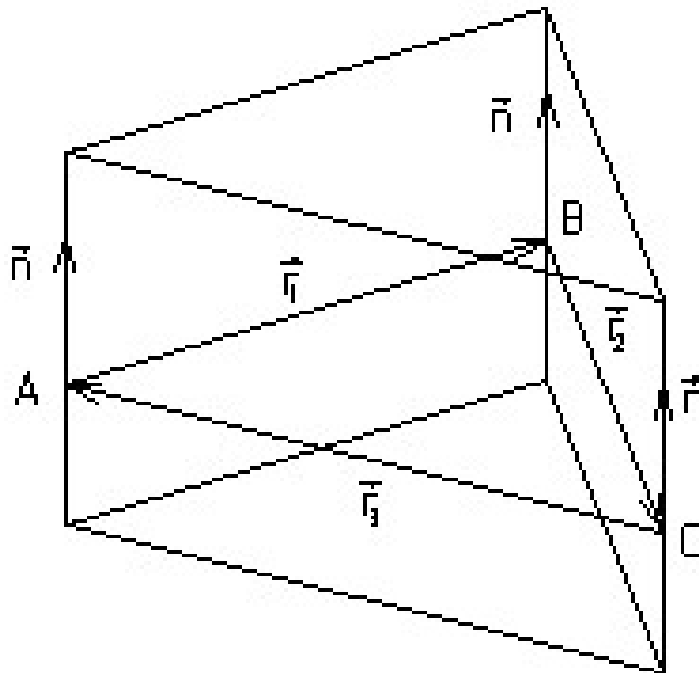


Рисунок 43 – Представлення об'єкта перетворень трикутниками

До кожної з площин застосовуються політочкові перетворення, тобто у новому базисі визначаються нові положення утворюючих площин, які в свою чергу визначають положення трикутника перетвореного об'єкта в новому базисі. Перетворені трикутники утворюють грановане тіло, яке є образом заданого.

На рисунку 44 представлено тривимірний об'єкт (сфера) перед початком процесу політочкових перетворень.

На рисунку 45 показано сферу після відображення процесу деформації за допомогою політочкових перетворень.

Такий же підхід можна застосовувати і до зважених політочкових перетворень.

На рисунку 46 наведено приклади роботи системи зважених політочкових перетворень, коли точки базису залишаються на місці, але у різних точках змінюється вага. В залежності від ваги об'єкт (сфера) змінює свою форму.

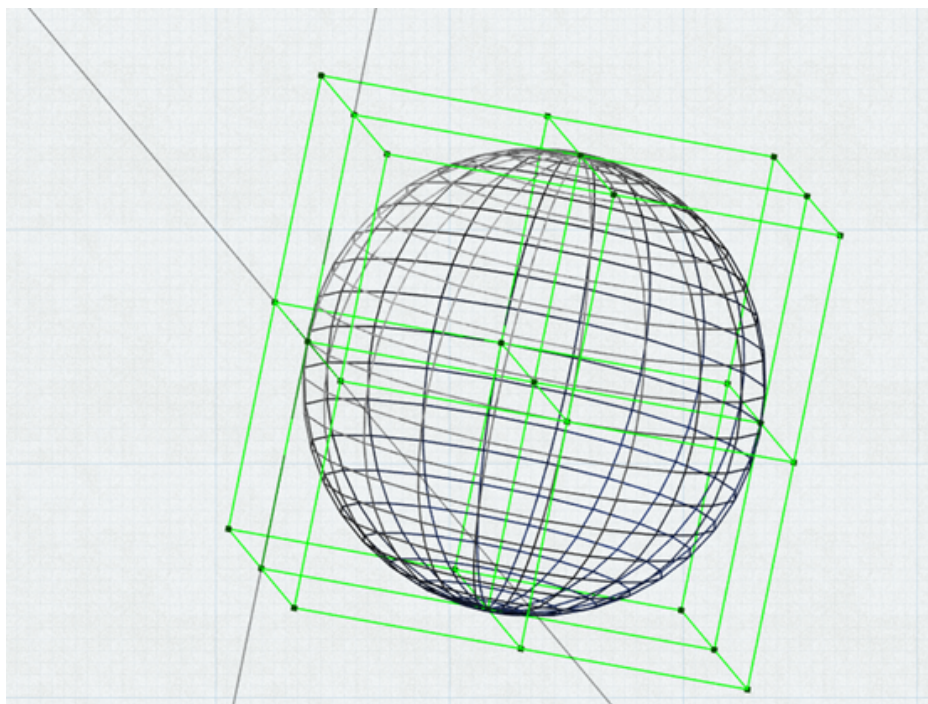


Рисунок 44 – 3D об'єкт – сфера

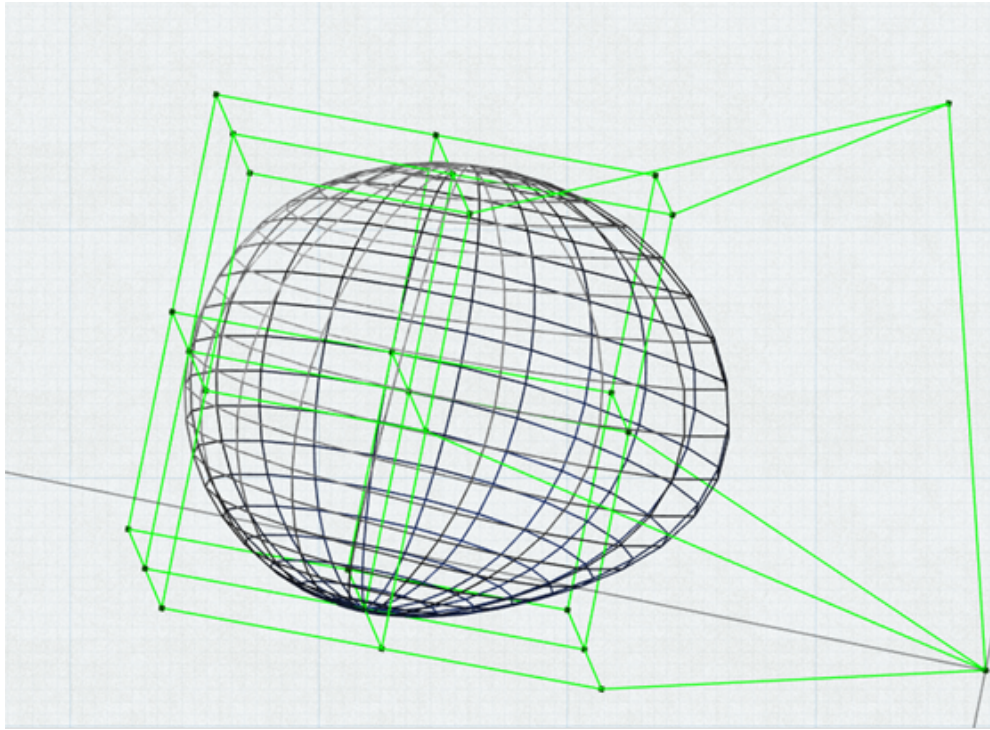


Рисунок 45 – Приклад деформації заданого об'єкта (сфери)

На останньому рисунку можна побачити, що за певних умов сфера перетворюється в куб.

Алгоритм перетворення тривимірного тіла можна описати наступним чином.

1. Тривимірне тіло занурюється у точковий базис. Це робить користувач, обираючи точки базису з урахуванням умов, накладених на задачу, наприклад, на кінцеву форму об'єкта.
2. Тіло, яке підлягає деформації, представляється множиною площин (трикутників). Це можна зробити, наприклад, за допомогою тріангуляції.
3. Виконуються послідовні політочкові перетворення кожної з площин та визначається їх перетин, таким чином отримуємо трикутники об'єкта у новому базисі.

4. Застосовуючи існуючі методи просторової інтерполяції (або можливості сучасних графічних пакетів), згладжуємо отриману грановану поверхню.

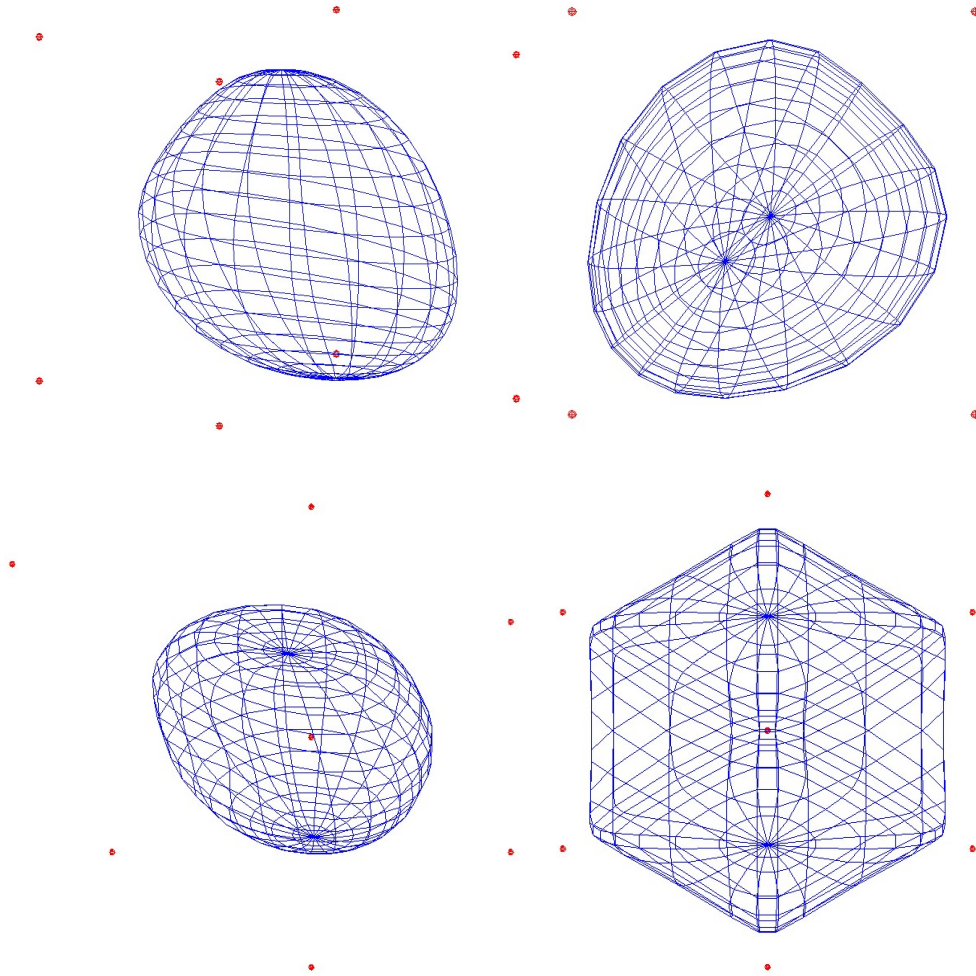


Рисунок 46 – Чотири об'єкти, отримані нарощуванням ваги в різних точках базису

Отже, при перетвореннях тривимірних об'єктів виникає необхідність спрощення алгоритму політочкових перетворень шляхом відмови від нормалізації прямої. Це дозволяє отримати лінійну систему (замість нелінійної), за допомогою якої розв'язується оптимізаційна задача .

Для моделювання об'єктів у тривимірному просторі використовується математичний апарат способу конструювання деформованих просторових

об'єктів за допомогою тривимірних політочкових перетворень. Цей спосіб дозволяє проводити моделювання деформованого об'єкта покроково з візуальним відстеженням результатів роботи.

***Питання для самоперевірки***

- 1. Що є базисом та об'єктом при тривимірних політочкових перетвореннях?*
- 2. Яким чином розв'язується задача тривимірних перетворень?*
- 3. Яка розмірність системи, що розв'язує оптимізаційну задачу при тривимірних політочкових перетвореннях?*

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Маценко В.Г. Комп'ютерна графіка: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2009 – 343 с.
2. Павлик І.В., Шкіца Л.Є., Чаплінський С.С. Комп'ютерна графіка: Конспект лекцій. – Івано-Франківськ: Факел, 2005. – 137 с.
3. Лук'яненко С.О. Числові методи в інформатиці: Навч. посіб. – К.: “Видавництво “Політехніка””, 2010. – 140с.



## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аушева Н.М., Шаповалова С.І., Мажара О.О. Математичне забезпечення програмного інструментарію розробки систем екологічного моніторингу: монографія. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2017. – 140 с.
2. Аушева Н.М. Геометричне моделювання кривих та поверхонь: методичні вказівки. -К.:ПП „ППНВ”, 2005. - 36 с.
3. Ванін В.В., Залевська О.В., Сидоренко Ю.В. До питання стійкості чисельних методів математичної моделі динамічної системи. Прикладна геометрія та інженерна графіка 2020, вип.98 —С.35-42.
4. Ванін В.В., Залевська О.В., Сидоренко Ю.В., Войтович А.В. Аналіз методів моделювання розповсюдження звуку у хвилеводі. Сучасні проблеми моделювання. 2021. Вип.21. С.47-53.
5. Ванін В.В., Залевська О.В., Сидоренко Ю. В., Ковальчук О.В., Gong XiaoDong (2022). Алгоритми нейронних сіток при побудові клітинних автоматів. Сучасні проблеми моделювання, (24), 28-37.
6. Геометричне моделювання в САПР-3 [Електронний ресурс] : методичні вказівки для виконання курсової роботи для студентів напрямку підготовки 6.050101 «Комп’ютерні науки» денної форми навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. Ю. В. Сидоренко, А. Л. Гурін. – Електронні текстові дані (1 файл: 311 Кбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2011.
7. Залевська О.В., Яблонський П.Н., Фіногенов О.Д., Сидоренко Ю.В, Ситник А.Ю. Реалізація алгоритму фрактального стиснення графічного зображення. Сучасні проблеми моделювання. 2021. Вип.22. С.48-55.
8. Залевська О.В., Яблонський П.М., Сидоренко Ю.В., Мірошніченко І.В., Ситник А.Ю. Удосконалення методу та алгоритму фрактального стиснення графічного зображення. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2021. Вип.100. С.118-125.

9. Сидоренко Ю.В., Шалденко О.В. Вагові політочкові перетворення при моделюванні можливих результатів пластичної хірургії. Сучасні проблеми моделювання. 2019. – Вип.15. – С. 151-161.
10. Сидоренко Ю.В., Бадаєв Ю.І. Геометричне моделювання складних об'єктів на основі політочкових відображень відрізків прямих. Сучасні проблеми моделювання. 2019. -Вип.16.-С.17-24.
11. Сидоренко Ю.В., Шалденко О.В. Візуалізація об'єктів політочкових перетворень за допомогою інтерполяційної функції Гауса. Сучасні проблеми моделювання. 2020.- Вип.17.-С.108-114.
12. Сидоренко Ю.В., Залевська О.В. Підвищення точності алгоритму політочкових перетворень. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2020, вип.97 — С.129-135.
13. Сидоренко Ю.В., Городецький М.В. Аналіз роботи алгоритму інтерполяційної функції Гауса на елементарних алгебричних функціях. Сучасні проблеми моделювання. 2020.- Вип.19.-С.138-145.
14. Сидоренко Ю.В., Залевська О.В., Городецький М.В., Найдиш А.В. Peculiarities of location of basic nodes of Gausfunction on the example of spiral-curved curves. Сучасні проблеми моделювання, 2022, Вип.23, С.151-158.
15. Сидоренко Ю.В., Залевська О.В., Городецький М.В., Спирінцев Д.В. Аналіз поведінки похибки обчислень при Гаус-інтерполяції функції Рунге. Сучасні проблеми моделювання, 2022. Вип.23, С.159-167.
16. Сидоренко Ю.В., Залевська О.В., Шалденко О. В. Обчислення площі перетвореного об'єкта при політочкових перетвореннях. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2022. Випуск 102. Київ. Ст.65-75.
17. Сидоренко, Ю., Шалденко, О., & Онисько, А. (2023). Система політочкових перетворень групи об'єктів в одному базисі. Сучасні проблеми моделювання, (25), 202-209.
18. Barry G. Blundell An Introduction to Computer Graphics and Creative 3-D Environments, Springer-Verlag London Limited, 2008.- 501p.

19. Donald D. Hearn, M. Pauline Baker Computer Graphics, 2014 – 662 p. Режим доступу : <https://archive.org/details/DonaldHearnM.PaulineBakerComputerGraphicsBookFi.org/mode/2up>.
20. Klaus Engel, Markus Hadwiger, Joe M. Kniss, Christof Rezk-Salama, Daniel Weiskopf Real-Time Volume Graphics, A K Peters, Ltd, 2006.- 487 p.
21. Max K. Agoston Computer Graphics and Geometric Modeling Implementation and Algorithms, SpringerVerlag London Limited, 2005.- 907 p.
22. Sidorenko Yu, Kryvda O., Leshchynska I. System of modeling of structural elements of ventilation systems by polycoordinate transformations. Strength of Materials and Theory of Structures. 2020. No. 104. P. 221-228.
23. Sydorenko Yu. V., Horodetskyi M.V. Modification of the algorithm for selecting a variable parameter of the Gaussian interpolation function. Control Systems and Computers, 2020, Issue 6 (290), pp. 21-28.
24. Todd A. Ell, Nicolas Le Bihan, Stephen J. Sangwine Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing, ISTE Ltd, 2014 - 127p.
25. Zalevska, O., Sydorenko, I., Naidysh, A., Finogenov, O., Yablonskyi, P., Ladogubets, T., & Miroshnichenko, I. (2021, February). Construction and Study of the Mathematical Model for the System Using Three-Dimensional Cellular Automata. In 2021 IEEE 16th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM) (pp. 49-52). IEEE.
26. Sydorenko Iu. V., Kryvda O.V., Antoniuk K.V. Systems of the burning edge visualization and determination of the forest fire damage Innovation and information technologies in the social and economic development of society. Monografia. Strońska, wyższa szkoła techniczna w Katowica, 2018. p.58-70.
27. Sydorenko Yu.V., Onysko A.I., Shaldenko O.V., Horodetskyi M.V. Interpolation of different types of spiral-like curves by gaus-interpolation methods. Control Systems and Computers, 2022, Issue 3 (299), pp. 1-10.