

# ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЖІН

ЧАСТИНА 1



# ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЖІЛ

## ЧАСТИНА 1

*Затверджено Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,  
які навчаються за напрямом «Радіотехніка»*

 Харків  
Компанія СМІТ  
2008



УДК 621.3.011.1(07)  
ББК 31.211  
О-75

*Затверджено Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,  
які навчаються за напрямом «Радіотехніка»  
(Лист від 18.05.2007 р. № 1.4/18-Г-772)*

**Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено**

**Рецензенти:**

*Ляхно В. І.*, проф. каф. проектування радіоелектронних систем літальних апаратів Харківського національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», д-р техн. наук, професор;  
*Бабаєв М. М.*, зав. каф. електротехніки та електричних машин Української державної академії залізничного транспорту, д-р техн. наук, професор

**Основи теорії кіл: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч. 1 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін / За заг. редакцією В. М. Шокала та В. І. Правди. — Х.: Компанія СМІТ, 2008. — 432 с.**

ISBN 978-966-2028-04-1  
978-966-2028-05-8 (Ч. 1)

У першій частині підручника розглянуто основні поняття, закони і методи аналізу лінійних електричних кіл в усталеному режимі постійного та синусоїдного струмів; кола з індуктивними зв'язками при синусоїдній дії; комплексні передатні функції і частотні характеристики електричних кіл; електричні фільтри. Вміщено велику кількість ілюстрацій та прикладів розв'язання задач, запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань з кожної розглянутої теми, а також довідкову й історичну інформацію з основних розділів теорії кіл.

Для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей напрямку «Радіотехніка», а також студентів, які вивчають споріднені дисципліни за спеціальностями напрямів «Телекомунікації» та «Електронні апарати».

УДК 621.3.011.1(07)  
ББК 31.211

ISBN 978-966-2028-04-1  
978-966-2028-05-8 (Ч. 1)

© Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко,  
І. О. Милютченко, О. І. Рибін, 2007  
© ТОВ «Компанія СМІТ», 2008

## ЗМІСТ

Передмова	5
Перелік скорочень та умовних позначень	6
<b>1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ І ЗАКОНИ ТЕОРІЇ КІЛ</b>	<b>12</b>
1.1. Визначення електричного кола	13
1.2. Електричний струм	14
1.3. Напряга	16
1.4. Потужність і енергія	18
1.5. Пасивні елементи кола	20
1.6. Активні елементи кола	32
1.7. Схема електричного кола	36
1.8. Основні закони теорії кіл	38
1.9. Класифікація кіл і режимів їх роботи. Задачі теорії кіл	40
1.10. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	42
<b>2. МЕТОДИ АНАЛІЗУ КІЛ</b>	<b>44</b>
2.1. Постановка задачі та огляд основних методів аналізу кіл	45
2.2. Метод еквівалентних перетворень	46
2.3. Метод рівнянь Кірхгофа	61
2.4. Метод контурних струмів	67
2.5. Метод вузлових напруг	76
2.6. Метод накладання	89
2.7. Метод еквівалентного генератора	92
2.8. Енергетичні співвідношення в колах постійного струму	103
2.9. Принцип взаємності	108
2.10. Теорема компенсації	112
2.11. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	116
<b>3. УСТАЛЕНИЙ РЕЖИМ У КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ</b>	<b>119</b>
3.1. Загальна характеристика кіл синусоїдного струму	120
3.2. Основні параметри синусоїдних струмів, напруг і ЕРС	124
3.3. Діючі та середні випрямлені значення синусоїдних струмів, напруг і ЕРС	132
3.4. Векторне і комплексне подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС	135
3.5. Елементи $R$ , $L$ , $C$ у колах синусоїдного струму	147
3.6. Послідовне з'єднання елементів $R$ , $L$ , $C$ у режимі синусоїдного струму	155
3.7. Паралельне з'єднання елементів $R$ , $L$ , $C$ у режимі синусоїдного струму	166
3.8. Еквівалентна заміна послідовного з'єднання елементів паралельним і навпаки	176
3.9. Закони Кірхгофа в комплексній формі	183
3.10. Комплексний метод розрахунку кіл синусоїдного струму	186
3.11. Векторні діаграми кіл синусоїдного струму	197
3.12. Енергетичні співвідношення в колах синусоїдного струму	207
3.13. Режим передачі максимальної активної потужності від джерела до навантаження в колах синусоїдного струму	217

*Ані мистецтво, ані мудрість недосяжні,  
якщо їм не навчатися.  
Демокрит*



3.14. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань . . . . .	225
<b>4. КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ ІЗ ВЗАЄМНИМИ ІНДУКТИВНОСТЯМИ . . . . .</b>	<b>227</b>
4.1. Рівняння для кіл із взаємними індуктивностями в комплексній формі. Особливості розрахунку кіл з індуктивними зв'язками. . . . .	228
4.2. Еквівалентні перетворення ділянок кіл із взаємними індуктивностями . . . . .	235
4.3. Лінійний трансформатор . . . . .	245
4.4. Схеми заміщення трансформатора . . . . .	251
4.5. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань . . . . .	258
<b>5. КОМПЛЕКСНІ ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. . . . .</b>	<b>260</b>
5.1. Поняття і визначення. . . . .	261
5.2. Вибірні властивості електричних кіл. Смуга пропускання. . . . .	273
5.3. Послідовний коливальний контур. Схеми контуру. Резонансний режим. Вторинні параметри. Резонансні криві. . . . .	279
5.4. Комплексні передатні функції і частотні характеристики послідовного контуру. Абсолютна, відносна й узагальнена розстройки . . . . .	289
5.5. Вибірність резонансного контуру. Смуга пропускання . . . . .	297
5.6. Вплив опорів джерела і навантаження на вибірні властивості послідовного контуру . . . . .	305
5.7. Паралельний резонансний контур . . . . .	307
5.8. Складні паралельні контури. . . . .	324
5.9. Зв'язані коливальні контури. Поняття, визначення і схеми . . . . .	330
5.10. Види резонансів у зв'язаних контурах і способи настроювання . . . . .	339
5.11. Комплексні передатні функції та частотні характеристики зв'язаних коливальних контурів . . . . .	356
5.12. Смуга пропускання зв'язаних коливальних контурів . . . . .	368
5.13. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань . . . . .	375
<b>6. ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ. . . . .</b>	<b>381</b>
6.1. Визначення передатних функцій складних кіл з двополюсними елементами . . . . .	382
6.2. Частотні характеристики ідеальних електричних фільтрів . . . . .	385
6.3. Частотні характеристики фільтрів другого порядку і схемна реалізація цих фільтрів . . . . .	388
6.4. Передатні функції схем з операційними підсилювачами . . . . .	409
6.5. Топологічний метод визначення передатних функцій кола, яке містить обернені елементи . . . . .	422
6.6. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань . . . . .	425
Література . . . . .	427
Предметний покажчик. . . . .	428

За сучасних умов інтенсивного розвитку й ускладнення принципів дії радіоелектронних пристроїв і систем значно зростає обсяг знань і, відповідно, кількість навчальних дисциплін, якими повинен оволодіти сучасний фахівець. Засвоєння численних спеціальних дисциплін стає можливим лише за наявності ґрунтовної теоретичної підготовки, яку студенти здобувають, вивчаючи загальнонаукові та загальноінженерні дисципліни.

Однією з таких дисциплін для студентів, котрі навчаються за напрямом «Радіотехніка», є «Основи теорії кіл» (ОТК), у якій розглядаються основи електро- і радіотехніки. Вона ґрунтується на дисциплінах «Вища математика», «Фізика» і є основою для засвоєння практично всіх спеціальних курсів у вищому навчальному закладі (ВНЗ) та подальшої інженерної діяльності спеціаліста у галузі радіотехніки та електрозв'язку. Опанування основ теорії електричних кіл — це запорука оволодіння фаховими дисциплінами.

Метою вивчення дисципліни ОТК є засвоєння основних законів та положень теорії електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами, оволодіння методами аналізу та синтезу електричних кіл.

Підручник з «Основ теорії кіл» складено згідно з Освітньо-професійною програмою Міністерства освіти і науки України за напрямом «Радіотехніка» та відповідною робочою програмою дисципліни. Перша частина книги містить шість розділів, у яких розглядаються основні теми навчальної дисципліни ОТК-1: основні поняття і закони електричних кіл; методи розрахунку лінійних електричних кіл; усталений режим у колах синусоїдного струму; кола синусоїдного струму із взаємними індуктивностями; комплексні передатні функції та частотні характеристики електричних кіл; електричні фільтри.

Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю ілюстрацій і прикладів розв'язання задач, запитаннями та завданнями для самоперевірки і контролю засвоєння знань з кожної розглянутої теми, необхідною довідковою та історичною інформацією з основних розділів теорії кіл. Наявність предметного покажчика полегшує користування підручником.

Готуючи це видання, автори узагальнили багаторічний досвід викладання дисципліни «Основи теорії кіл» на кафедрі «Основи радіотехніки» Харківського національного університету радіоелектроніки.

Підручник орієнтовано на студентів ВНЗ денної та заочної форм навчання спеціальностей напряму «Радіотехніка», він також може бути корисним для студентів, які вивчають споріднені дисципліни за спеціальностями напрямів «Телекомунікації» та «Електронні апарати».

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

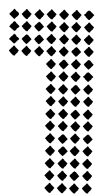
АФХ	амплітудно-фазова характеристика
АЧХ	амплітудно-частотна характеристика
ВАХ	вольт-амперна характеристика
ЗФ	загороджувальний фільтр
ЕРС	електрорушійна сила
КЗ	коротке замикання
ККД	коефіцієнт корисної дії
КПФ	комплексна передатна функція
ОП	операційний підсилювач
РФ	режекторний фільтр
СЗ	смуга затримання
СП	смуга пропускання
СФ	смуговий фільтр
ФНЧ, ФВЧ	фільтр нижніх, верхніх частот
ФЧХ	фазочастотна характеристика
ХХ	холостий хід
$A(\omega)$	ослаблення
$B_L, B_C$	індуктивна, ємнісна провідність
$B_{н.узг}$	реактивна провідність навантаження узгоджена
С	ємність
$\cos \varphi$	коефіцієнт потужності
$d$	загасання контуру
$E$	постійна ЕРС, діюче значення синусоїдної ЕРС
$E_1 \dots E_N$	контурні ЕРС
$(E_i)$	матриця-стовпець контурних ЕРС
$E(I_{вх})$	джерело напруги, кероване струмом (ДНКС)
$E_m$	амплітуда синусоїдної ЕРС
$e(t)$	комплексне миттєве значення синусоїдної ЕРС
$e(t), e$	миттєве значення ЕРС
$E(U_{вх})$	джерело напруги, кероване напругою (ДНКН)
$E_{в1}$	випрямлене однонапівперіодне середнє значення синусоїдної ЕРС
$E_{в2}$	випрямлене двонапівперіодне середнє значення синусоїдної ЕРС
$E_e$	еквівалентна ЕРС
$f$	циклічна частота синусоїдного коливання
$\underline{F}_m$ вих	комплексна амплітуда відгуку на виході кола

$\underline{F}_m$ вх	комплексна амплітуда вхідної дії
$f_{рез}$	резонансна частота
$G$	провідність
$G_{\parallel}$	активна складова комплексної провідності паралельного кола
$G_i$	внутрішня провідність джерела струму
$G_{ii}$	власна провідність вузла
$(G_{ij})$	квадратна матриця провідностей
$(G_{ij})^{-1}$	обернена матриця провідностей
$G_{ij} = G_{ji}$	взаємна провідність вузлів
$G_{вх}$	вхідна провідність
$G_e$	еквівалентна провідність
$G_{н.узг}$	активна провідність навантаження узгоджена
$H_0$	значення АЧХ на нульовій частоті
$H_I(j\omega)$	комплексний коефіцієнт передачі за струмом
$H(j\omega)$	КПФ кола
$H_{max}$	максимальне значення АЧХ
$H_U(j\omega)$	комплексний коефіцієнт передачі за напругою
$H(\omega)$	модуль КПФ, або АЧХ
$H_{норм}$	нормоване значення АЧХ
$I$	постійний струм, діюче значення синусоїдного струму
$I_0$	постійна складова змінного струму
$I_1 \dots I_N$	контурні струми
$I_K$	діюче значення струму в контурі
$I_m$	амплітуда синусоїдного струму
$(I_i)$	матриця-стовпець контурних струмів
$I_{в1}$	випрямлене однонапівперіодне середнє значення синусоїдного струму
$I_{в2}$	випрямлене двонапівперіодне середнє значення синусоїдного струму
$I_{вих}, i_{вих}$	вихідний струм
$I_{вх}, i_{вх}$	вхідний струм
$I_{дж}$	струм джерела
$I_{дж}(I_{вх})$	джерело струму, кероване струмом (ДСКС)
$I_{дж}(U_{вх})$	джерело струму, кероване напругою (ДСКН)
$I_{дж e}$	струм еквівалентного джерела
$I_{к.з}$	струм короткого замикання
$I_n$	струм навантаження; діюче значення синусоїдного струму в навантаженні

$I_{\text{рез}}$	діюче резонансне значення струму контуру	$P_{\text{н}}$	потужність навантаження
$(I_{\text{вз}_i})$	матриця-стовпець вузлових струмів джерел	$P'_k, P''_k$	шляхи графа
$\underline{I}_{2\text{м.м}}$	максимально можливе комплексне діюче значення струму у другому контурі системи з двох індуктивно зв'язаних контурів	$\underline{P}_S$	комплексна потужність
$\underline{I}_{\text{вз}}$	комплексне діюче значення вузлового струму джерела	$p$	коефіцієнт увімкнення
$\underline{I}_{\text{дж}}$	комплексне діюче значення струму джерела	$p(t), p$	миттєве значення потужності
$\underline{I}_{\text{н}}$	комплексне діюче значення струму навантаження	$Q$	добротність контуру
$i(t), i$	миттєве значення змінного струму	$Q, q(t)$	заряд
$i_{\text{дж}}(t)$	миттєве значення струму джерела струму	$Q_e$	еквівалентна добротність
$i_{\text{р}}(t)$	миттєве значення реактивної складової струму	$R$	активний опір
$i_{\text{сигн}}$	сигнальна складова струму	$R_0$	омічний опір
$\underline{i}(t)$	комплексне миттєве значення синусоїдного струму	$R_i$	внутрішній опір джерела
$K$	контур	$R_{ii}$	власний опір контуру
$k$	коефіцієнт зв'язку	$R_{ij} = R_{ji}$	взаємний опір контурів
$k_{\text{пр}}$	коефіцієнт прямокутності	$(R_{ij})$	квадратна матриця опорів
$L$	індуктивність	$(R_{ij})^{-1}$	обернена матриця опорів
$M$	взаємна індуктивність	$R'_C$	опір витікання конденсатора
$N_{\text{ІЗ.К.}}$	кількість незалежних рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа	$R_{\text{вих}}$	вихідний опір
$N_{\text{ІІЗ.К.}}$	кількість незалежних рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа	$R_{\text{вн}}$	активний внесений опір
$N_1, N_2$	кількість витків первинної та вторинної обмоток трансформатора	$R_e$	еквівалентний опір
$N_E$	кількість джерел напруги в колі	$R_{\text{н}}$	опір навантаження
$N_I$	кількість джерел струму в колі	$R_{\text{н.узг}}$	опір навантаження узгоджений
$N_R$	кількість опорів кола	$R_{\text{посл}}$	активний опір послідовно з'єднаних елементів
$n$	коефіцієнт трансформації	$R_{\text{ш}}$	опір шунта
$N_{\text{в}}$	кількість віток схеми	$R_{\text{вх}}$	вхідний опір
$N_{\text{вз}}$	кількість вузлів схеми	$R_{=}$	активна складова комплексного опору послідовного кола
$P$	постійна потужність	$T$	період
$P_A$	активна потужність	$U$	постійна напруга, діюче значення синусоїдної напруги
$P_{A\text{н}}$	активна потужність у навантаженні	$U_0$	постійна складова змінної напруги
$P_E$	потужність джерела ЕРС	$U_m$	амплітуда синусоїдної напруги
$P_{I_{\text{дж}}}$	потужність джерела струму	$(U_{i0})$	матриця-стовпець вузлових напруг
$P_Q$	реактивна потужність	$U_{\text{в1}}$	випрямлене однонапівперіодне середнє значення синусоїдної напруги
$P_{R_{\text{вх}}}, P_{G_{\text{вх}}}$	потужність, яка розсіюється у внутрішньому опорі, провідності	$U_{\text{в2}}$	випрямлене двонапівперіодне середнє значення синусоїдної напруги
$P_S$	повна потужність	$U_{\text{вих}}, u_{\text{вих}}$	вихідна напруга
		$U_{\text{вх}}, u_{\text{вх}}$	вхідна напруга
		$U_{\text{дж}}$	напруга на затискачах джерела струму
		$U_{\text{н}}$	напруга навантаження

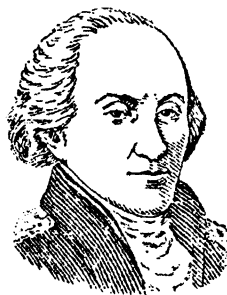
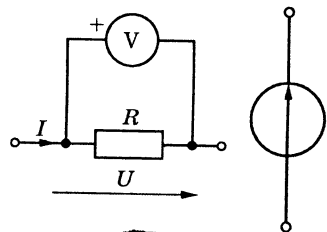
$U_{x.x}$	напруга холостого ходу
$\underline{U}_{20\text{м.м}}$	максимально можливе комплексне діюче значення напруги на конденсаторі другого контуру системи з двох індуктивно зв'язаних контурів
$\underline{U}_K$	комплексне діюче значення напруги на контурі
$\underline{U}_m \text{ x.x}$	комплексна амплітуда напруги холостого ходу
$\underline{U}_{\text{вх}}, \underline{U}_{\text{вих}}$	комплексні діючі значення напруг на вхідних і вихідних затискачах кола
$u(t), u$	миттєве значення змінної напруги
$u_p(t), \underline{U}_p, \underline{U}_m$	миттєве, комплексне діюче, комплексне амплітудне значення реактивної напруги
$u_{\text{сигн}}$	сигнальна складова напруги
$\underline{u}(t)$	комплексне миттєве значення синусоїдної напруги
$V$	постійний потенціал
$v(t), v$	миттєве значення змінного потенціалу
$W$	енергія
$w(t), w$	миттєве значення енергії
$X$	реактивний опір
$X_L, X_C$	індуктивний, ємнісний опір
$X_M$	опір взаємоіндукції
$X_{\text{вн}}$	реактивний внесений опір
$X_n$	реактивний опір навантаження
$X_{\text{н.узг}}$	реактивний опір навантаження узгоджений
$X_{\text{посл}}$	реактивний опір послідовно з'єднаних елементів
$X_{=}$	реактивна складова комплексного опору послідовного кола
$Y$	повна провідність
$Y_{\text{вх}}(j\omega)$	комплексна вхідна провідність
$Y_{\text{пер}}(j\omega)$	комплексна передатна провідність
$\underline{Y}$	комплексна провідність
$(\underline{Y})$	матриця комплексних провідностей кола
$\underline{Y}_L, \underline{Y}_C$	комплексна провідність індуктивності, ємності
$\underline{Y}_{\text{вн}}$	комплексна внесена провідність
$\underline{Y}_{\text{н.узг}}$	комплексна провідність навантаження узгоджена
$\underline{Y}_{\parallel}, \underline{Y}_{=}$	комплексна провідність паралельного (послідовного) кола
$Z_{\text{рез}}$	резонансний опір контуру еквівалентний
$Z_{\text{вх}}(j\omega)$	комплексний вхідний опір
$Z_{\text{пер}}(j\omega)$	комплексний передатний опір

$\underline{Z}_L, \underline{Z}_C$	комплексний опір індуктивності, ємності
$\underline{Z}_M$	комплексний опір взаємоіндукції
$\underline{Z}_{\text{вн}}$	комплексний внесений опір
$\underline{Z}_e$	комплексний опір кола еквівалентний
$\underline{Z}_e^*$	опір складного паралельного контуру еквівалентний
$\underline{Z}_e$	комплексний еквівалентний опір кола при узгодженому
$\underline{Z}_{\text{зг}}$	ввімкненні індуктивно зв'язаних котушок
$\underline{Z}_{\text{зс}}$	комплексний еквівалентний опір кола при зустрічному
	ввімкненні індуктивно зв'язаних котушок
$\underline{Z}_n$	комплексний опір навантаження
$\underline{Z}_{\text{не}}$	комплексний опір навантаження еквівалентний
$\underline{Z}_{\text{н.узг}}$	комплексний опір навантаження узгоджений
$\underline{Z}_{\parallel}, \underline{Z}_{=}$	комплексний опір паралельного (послідовного) кола
$\Delta f, \Delta\omega$	абсолютна розстройка контуру
$\Delta G$	визначник матриці провідностей кола
$\Delta R$	визначник матриці опорів кола
$2\Delta\omega_{\text{П}}$	смуга пропускання високодобротного контуру
$2\Delta\omega_{\text{Пе}}$	еквівалентна смуга пропускання контуру
$\eta$	коефіцієнт корисної дії (ККД)
$\eta_E$	ККД джерела ЕРС
$\eta_{\text{дж}}$	ККД джерела струму
$\lambda$	довжина хвилі
$\xi$	узагальнена розстройка контуру
$\Pi_{\omega}, \Pi_f$	смуга пропускання кола
$\rho$	характеристичний опір резонансного контуру
$\varphi$	зсув фаз; аргумент комплексного опору
$\varphi(\omega)$	аргумент КПФ, або ФЧХ
$\psi(t)$	повна фаза
$\psi_0$	початкова фаза
$\psi_{0i}; \psi_{0u}; \psi_{0e}$	початкові фази струму, напруги та ЕРС
$(\psi_0; \psi_u; \psi_e)$	
$\omega$	кутова частота синусоїдного коливання
$\omega_{C \text{ max}}$	частота максимуму напруги на ємності
$\omega_{L \text{ max}}$	частота максимуму напруги на індуктивності
$\omega_{\text{гр}}$	гранична частота фільтра
$\omega_{\text{рез}}$	резонансна частота
$\omega_{\text{р посл}}, \omega_{\text{р пар}}$	частоти послідовного і паралельного резонансу



## ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ І ЗАКОНИ ТЕОРІЇ КІЛ

- Визначення електричного кола
- Електричні струм, напруга, потужність і енергія
- Пасивні елементи кола — опір, ємність, індуктивність, взаємна індуктивність
- Активні елементи кола
- Схема електричного кола
- Основні закони теорії кіл
- Класифікація кіл і режимів їх роботи
- Задачі теорії кіл



Ш. Кулон



Дж. Джоуль

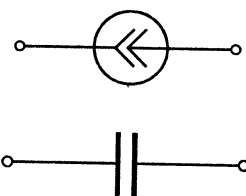
$$P = RI^2; I = \frac{U}{R}$$



Е. Х. Ленц



О. Вольта



Г. Ом



### 1.1. Визначення електричного кола

Для опису, дослідження, розрахунків і проектування радіотехнічних пристроїв, систем і комплексів використовують два види моделей, підґрунтям яких є *теорія електромагнітного поля і теорія кіл*.

Теорія електромагнітного поля розглядає параметри поля, які змінюються в часі й у просторі (напруженість електричного поля, індукцію магнітного поля, об'ємний заряд, щільність струму, щільність енергії та ін.).

Теорія кіл використовує обмежену кількість елементів (зосереджених у просторі або розподілених за однією з його координат) і досліджує змінювання у часі (а в деяких випадках ще й за однією з координат) кількох інтегральних параметрів, таких як *струм, напруга, електрорушійна сила, заряд, магнітний потік, енергія*.

Вибір виду моделі обумовлюється призначенням, принципами побудови і складом системи та її окремих пристроїв. Застосування тієї чи іншої моделі визначається постановкою задачі. Розмежування сфер застосування моделей є умовним.

Теорія поля застосовується, наприклад, під час розв'язання задачі поширення радіохвиль різних діапазонів, а також при аналізі таких пристроїв, як хвилеводи, об'ємні резонатори, антени.

Теорія кіл застосовується для моделювання окремих вузлів систем і пристроїв, котрі мають провідники та елементи, в яких визначальною є лише одна сторона поля. Як правило, лінійні розміри таких пристроїв значно менші довжини хвилі коливань, що використовуються. В окремому випадку допускається сумірність одного з розмірів пристрою з довжиною хвилі.

Завдяки відносній простоті та наявності різноманітних методів аналізу, теорія кіл широко застосовується в техніці. Тому, використовуючи поняття «електричне коло», часто мають на увазі не тільки модель (схему заміщення) реального пристрою, але і самий реальний пристрій. Щоб усунути непорозуміння, пов'язані з отождоженням реального об'єкта і його моделі, доцільно сформулювати визначення реального кола (реального пристрою) та ідеального кола (об'єкта теорії кіл).

*Реальним електричним колом* є пристрій, який складається з провідних середовищ і реальних елементів, котрі створюють замкнені шляхи для електричного струму. Процеси в таких пристроях описуються поняттями струму, напруги, ЕРС та ін.



*Ідеальне електричне коло* — це модель, яка містить обмежену кількість ідеальних елементів (пасивних і активних) і призначена для інтерпретації реального кола (пристрою). Ідеальне електричне коло, подібно до реального, оперує поняттями струму, напруги, ЕРС та ін.

У теорії кіл використовуються три пасивних і два активних елементи.

Пасивні елементи (рис. 1.1) — це опір  $R$ , індуктивність  $L$  і ємність  $C$ . Кола, які містять опір, індуктивність і ємність, утворюють клас  $R, L, C$  кіл. Щоб врахувати явища взаємоіндукції, вводиться четвертий пасивний елемент — взаємоіндукція  $M$ . Це дозволяє розширити клас  $R, L, C$  до класу  $R, L, C, M$  кіл.

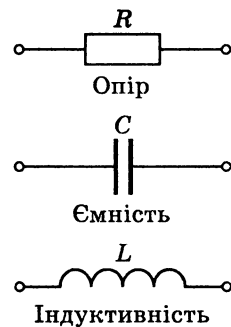


Рис. 1.1. Пасивні елементи ідеального кола

У пасивних елементах енергія або поглинається (в опорі), або накопичується (в індуктивності та взаємній індуктивності — енергія магнітного поля, а в ємності — електричного).

Активні елементи (джерела енергії) — це джерело напруги і джерело струму.

Поряд з електричними колами існують магнітні кола (які містять феромагнітні матеріали й описуються магніторухливими силами та магнітними потоками), а також електронні кола, до складу яких входять електронні прилади (лампи, транзистори, мікросхеми тощо).

При подальшому викладенні термін «коло» відповідатиме введеному вище поняттю «ідеальне електричне коло».

## 1.2. Електричний струм

*Електричний струм* — це впорядковане переміщення електричних зарядів. Струм характеризується величиною і напрямом. Чисельно струм визначається кількістю зарядів, що пройшли через поперечний переріз провідника за одиницю часу (у разі постійного струму) або, у загальному випадку, як швидкість зміни зарядів, що пройшли крізь поперечний переріз провідника.

Позначення і кількісне визначення постійного струму має вигляд

$$I = Q/T,$$

де  $Q$  — кількість зарядів, що пройшли за час  $T$  через поперечний переріз провідника.

Змінний струм, що змінюється в часі за довільним законом, описується функцією часу, званою миттєвим значенням:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

де  $q(t)$  — функція, що характеризує змінювання кількості зарядів, які переміщуються через поперечний переріз провідника.

У теорії кіл заряд вимірюється в кулонах<sup>1</sup> (Кл), час — у секундах (с), струм — в амперах<sup>2</sup> (А). Секунда й ампер належать до основних одиниць вимірювання у міжнародній системі, яка скорочено позначається СІ або SI.

У теорії кіл і техніці напрям струму пов'язують з напрямом переміщення позитивних зарядів (струм направлений від «+» до «-»). Напрямок струму в колі вказується стрілкою, що показує відомий або передбачуваний напрям переміщення позитивних зарядів (рис. 1.2, а). У випадку, коли фактичний напрям струму невідомий, вибраний напрям струму називають умовним позитивним напрямом. Отриманий після виконання розрахунків знак струму дозволяє визначити його фактичний напрям. Якщо обчислене значення постійного струму позитивне ( $I > 0$ ), то фактичний напрям струму збігається з вибраним. У іншому випадку, коли  $I < 0$ , фактичний напрям струму є протилежним вибраному напрямку. У разі змінного струму (рис. 1.2, б) його фактичний напрям збігається з вибраним в ті інтервали часу, для яких знайдене миттєве значення струму  $i(t) > 0$ . Упродовж часу, коли  $i(t) < 0$ , фактичний напрям струму є протилежним вибраному напрямку.

<sup>1</sup> Кулон Шарль Огустен, Ch. Coulomb (1736–1806) — французький військовий інженер, член Паризької академії наук. Сконструював чутливий прилад — крутильні ваги, за допомогою яких досліджував ефекти електричних і магнітних взаємодій. Запропонував методи вимірювання кількості електрики та магнетизму (магнітних мас). Після робіт Кулона стало можливим створення математичної теорії електричних і магнітних явищ. Одиницю із назвою «кулон» уперше було введено у 1881 р.

<sup>2</sup> Ампер Андре Марі, A. M. Ampere (1775–1836) — французький фізик і математик, член Паризької і Петербурзької академії наук, один із засновників сучасної електродинаміки. Його ім'ям, крім одиниці електричного струму, названо гіпотезу, правило, закон, прилад для вимірювання сили струму. Він вперше вжив такі поняття, як «електричний струм», «електричне коло», встановив напрям струму в замкненому колі. Написав узагальнюючу працю «Теорія електродинамічних явищ, отримана виключно із досліду». Дослідження Ампера стосуються також математики, хімії, філософії, психології, лінгвістики, зоології. Одиниця із назвою «ампер» вперше була введена в 1881 р.

Для вимірювання струму в реальних колах використовуються прилади, які називають амперметрами. У теорії кіл застосовується поняття ідеального амперметра, який має нульовий опір і тому не змінює режим роботи кола. Амперметр вмикається безпосередньо в ту ділянку кола, де виконується вимірювання струму; за допомогою амперметра визначають як величину, так і напрям струму (рис. 1.2).

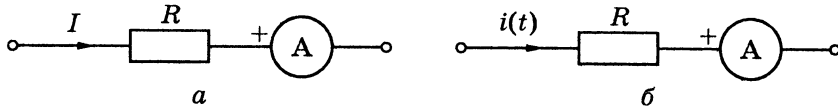


Рис. 1.2. Позначення струму і спосіб його вимірювання

Напрямок постійного струму визначається вибором відповідної полярності ввімкнення амперметра. Амперметр реєструє величину струму тільки за умови певної взаємної орієнтації (показана на рис. 1.2, а) фактичного напрямку струму та «позитивного затискача» амперметра, який позначено знаком «+». Аналогічно вимірюються величини і напрями струмів в реальних пристроях за допомогою реальних амперметрів різних типів (аналогових або цифрових).

Для змінного струму (рис. 1.2, б) ідеальний амперметр є приладом для спостереження або реєстрації миттєвого значення  $i(t)$ . При цьому «позитивний затискач» амперметра дозволяє визначити інтервали часу, протягом яких фактичний напрям збігається з умовно вибраним, і навпаки.

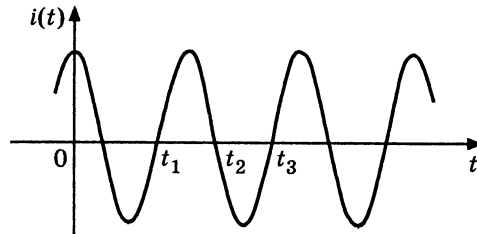


Рис. 1.3. Приклад вимірюваного або розрахованого миттєвого значення струму

Наприклад, для вимірюваного миттєвого значення струму  $i(t)$  (рис. 1.3) і вибраного на рис. 1.2, б умовного позитивного напрямку цього ж струму

в інтервалі часу  $t_1 < t < t_2$  фактичний напрям струму збігається з вибраним, а в інтервалі  $t_2 < t < t_3$  є протилежним вибраному напрямку.

### 1.3. Напрямок

Напрямок чисельно дорівнює роботі, яку витрачено на перенесення одиничного позитивного заряду з однієї точки в іншу. Напрямок спрямована від точки з більшим потенціалом до точки з меншим

потенціалом (напрямок, як і струм, спрямована від «+» до «-»). Напрямок вимірюється у вольтах<sup>3</sup> (В).

Позначення і кількісні визначення постійної та змінної напруг мають вигляд, відповідно:

$$U = V_2 - V_1; u(t) = v_2(t) - v_1(t),$$

де  $V, v(t)$  — потенціали відповідних точок, між якими визначаються постійна або змінна напрямок.

Функція часу  $u(t)$  називається миттєвим значенням змінної напруги.

Напрямок напруги на ділянці кола, подібно до напрямку струму, вказується стрілкою, яка показує відомий або передбачуваний напрям (умовний позитивний) переміщення позитивних зарядів у разі позитивного значення витраченої енергії сторонніх сил (джерел) на перенесення цих зарядів. Як і для струму, умовний позитивний напрям напруги і отриманий після виконання розрахунків знак напруги дозволяють визначити її фактичний напрям.

У пасивних елементах умовні позитивні напрями струму і напруги вибираються, як правило, однаково (рис. 1.4).

Для вимірювання постійної напруги і характеристик змінної напруги в реальних пристроях використовуються прилади, які називають

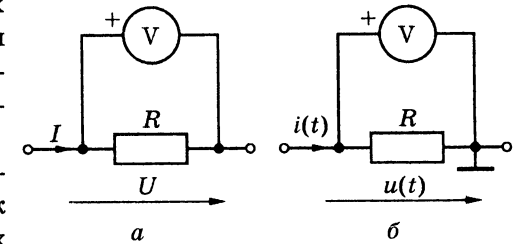


Рис. 1.4. Позначення і спосіб вимірювання напруги

вольтметрами. До характеристик змінної напруги належать максимальне (пікове), діюче і середнє значення, що розглядаються нижче у розд. 3. В теорії кіл використовується поняття ідеального вольтметра, який має нескінченно великий опір і тому не змінює

<sup>3</sup> Вольта Олександр, А. Volta (1745–1827) — італійський вчений. Встановив зв'язок між кількістю електрики, ємністю і напругою. Створив перший генератор електричного струму — «вольтові стовпи», який приніс йому всесвітню славу. Наполеон надав йому титул графа і сенатора Італійського королівства. Поняття «напруга» визначав як «зусилля, яке виробляє кожна точка наелектризованого тіла, щоб позбавитися від наявної у ній електрики і передати її іншим тілам. Цьому зусиллю відповідають, власне кажучи, явища притягання, відштовхування та інші і, зокрема, міра розходження пелюстків електромметра». Одиницю із назвою «вольт» вперше введено у 1881 р.

режим роботи кола. Вольтметр вмикається паралельно ділянці кола, на якій вимірюється напруга (рис. 1.4).

У разі вимірювання постійної напруги вольтметр дозволяє визначити не тільки величину, але і напрям напруги (рис. 1.4, а). Для оцінки напрямку напруги один із затискачів вольтметра маркується знаком «+».

У вольтметрів, призначених для вимірювання характеристик змінної напруги (рис. 1.4, б), один з полюсів заземлюється, а інший — «потенційний» — умовно позначається знаком «+». Для спостереження миттєвого значення змінної напруги  $u(t)$  і вимірювання її характеристик може використовуватися осцилограф.

#### 1.4. Потужність і енергія

Введені вище поняття струму і напруги визначають енергетичні співвідношення теорії кіл.

У пасивній ділянці кола з напругою  $u$  і струмом  $i$  перенесення нескінченно малого заряду  $dq$  від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом супроводжується витратою джерелами елементарної енергії:

$$dw = udq = uidt.$$

При цьому миттєве значення потужності, яке дорівнює швидкості зміни енергії, становитиме

$$p = \frac{dw}{dt} = ui.$$

Потужність вимірюється у ватах<sup>4</sup> (Вт).

У випадку, якщо  $p > 0$  (фактичні напрями напруги та струму збігаються), пасивна ділянка кола споживає енергію. Споживання енергії означає її незворотне поглинання, нагромадження або перетворення в інші види енергії. Якщо  $p < 0$  (фактичні напрями напруги і струму протилежні), пасивна ділянка кола віддає енергію.

Для постійних струмів і напруг потужність  $P$  постійна і

$$P = UI.$$

Миттєве значення енергії  $w(t)$ , а також енергія  $W$ , поглинена, накопичена або перетворена в інші види енергії за час  $\tau$ , визначаються як

<sup>4</sup> Уатт Джеймс, J. Watt (1736–1819) — англійський винахідник. Автор кількох винаходів і теоретичних праць в галузі теплотехніки. Творець досконалого парового двигуна. Одиницю із назвою «ват» вперше введено у 1889 р.

$$w(t) = \int_{-\infty}^t pdt = \int_{-\infty}^t uidt; \quad W = \int_0^{\tau} pdt = \int_0^{\tau} uidt.$$

Енергія вимірюється в джоулях<sup>5</sup> (Дж), Дж = Вт · с.

У разі постійних значень струму і напруги енергія пропорційна часу:

$$W = \int_0^{\tau} UI dt = UI\tau.$$

Розглянуті енергетичні співвідношення можна застосувати і до джерел енергії. Для джерела ЕРС замість напруг у відповідні вирази підставляються значення ЕРС (для постійного джерела —  $E$ ; для змінного джерела його миттєве значення —  $e$ ). Якщо для джерела  $p > 0$  (істинний напрям струму і напрям ЕРС збігаються), джерело віддає енергію. У іншому випадку, якщо  $p < 0$ , джерело поглинає енергію.

Відомості щодо розглянутих у підрозд. 1.2–1.4 понять теорії кіл в узагальненому вигляді наведено у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Струм, напруга, ЕРС, потужність і енергія

Параметри	Позначення і формули	Одиниця вимірювання	
		назва	позначення
Струм	$I = Q/T$ — постійний струм; $i(t) = dq/dt$ — миттєве значення змінного струму; $Q, q(t)$ — заряд; $T$ — інтервал часу	ампер	А
Напруга	$U = V_2 - V_1$ ; $u(t) = v_2(t) - v_1(t)$ ; $U, V$ — постійна напруга і потенціал; $u(t), v(t)$ — миттєві значення напруги і потенціалу	вольт	В
ЕРС	$E = V_2 - V_1$ — постійна ЕРС; $e(t) = v_2(t) - v_1(t)$ — миттєве значення ЕРС	вольт	В

<sup>5</sup> Джоуль Джеймс Прескотт, J. P. Joule (1818–1889) — англійський підприємець, власник пивовареного заводу в м. Манчестері. Захоплювався електричними дослідженнями та конструюванням електричних приладів. Працював також у галузі теплотехніки. У статті «Про тепловий ефект електромагнетизму та величину роботи теплоти» обґрунтував, що кількість теплоти, яка виділяється у провіднику, пропорційна квадрату сили струму (закон Джоуля — Ленца). Одиницю із назвою «джоуль» вперше введено у 1889 р.

Закінчення табл. 1.1

Параметри	Позначення і формули	Одиниця вимірювання	
		назва	позначення
Потужність	$P = UI$ — постійна потужність; $p(t) = ui$ — миттєве значення потужності	ват	Вт
Енергія	$w(t) = \int_{-\infty}^t pdt = \int_{-\infty}^t uidt$ — миттєве значення енергії; $W = \int_0^{\tau} pdt = \int_0^{\tau} uidt$ — величина енергії, яку витрачено або спожито протягом інтервалу часу $\tau$	джоуль	Дж

## 1.5. Пасивні елементи кола

### 1.5.1. Опір

*Опором* називається ідеальний пасивний елемент, у якому незворотно поглинається енергія. Опір є моделлю реальних елементів, у яких енергія перетворюється в інший вид (теплову, механічну та ін.) або електромагнітну енергію іншої якості. Прикладами реальних елементів, які наближаються до опору за своїми властивостями, є резистори, діоди, узгоджені антени в режимі випромінювання.

Графічне зображення опору з позначенням напрямів струму і напруги показано на рис. 1.4.

Термін «опір» і його позначення  $R$  застосовують як для позначення цього елемента, так і для його кількісної оцінки:

а) для постійного струму

$$R = U/I; \quad (1.1)$$

б) для змінного струму

$$R = u/i. \quad (1.2)$$

Опір вимірюється в омах<sup>6</sup> (Ом).

<sup>6</sup> Ом Георг Симон, G. S. Ohm (1787–1854) — німецький фізик. Експериментально відкрив і теоретично обґрунтував закон, який встановлює кількісний зв'язок між напругою і струмом в опорі. Цей закон носить його ім'я. Результати теоретичних та експериментальних досліджень Ома викладено в основній праці «Гальванічне коло, розроблене математично» (1827). Написав низку робіт з акустики. Одиницю із назвою «омада» (потім замінено на «ом») вперше введено у 1881 р.

Для кількісної оцінки і якісної характеристики опору застосовується також поняття провідності  $G = 1/R$ .

Провідність вимірюється у сименсах<sup>7</sup> (См).

Співвідношення між струмом і напругою в опорі можна записати за допомогою провідності у вигляді:

а) для постійного струму

$$I = GU; \quad (1.3)$$

б) для змінного струму

$$i = Gu. \quad (1.4)$$

Вирази (1.1)–(1.4) є різними формами запису закону Ома.

Опір називається *лінійним*, якщо він не залежить від величини і напрямку струму. Це відповідає лінійному характеру так званої вольт-амперної характеристики (ВАХ), зображеної на рис. 1.5, а. Якщо опір є лінійним, але залежить від часу  $R(t)$ , його називають *параметричним*. У нелінійного опору ВАХ має вигляд, зображений на рис. 1.5, б, а величина опору в загальному випадку залежить від величини і напрямку струму, тобто  $R(i)$ .

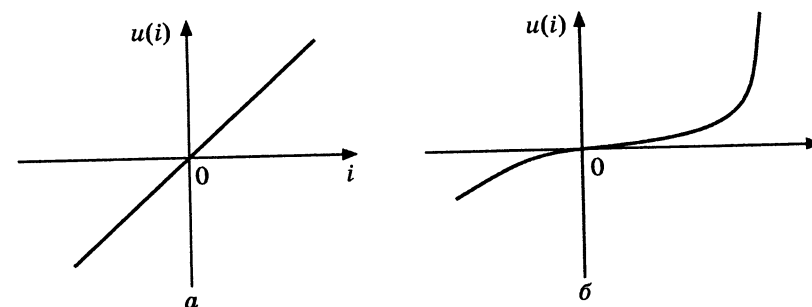


Рис. 1.5. Вольт-амперні характеристики опорів:  
а — лінійного; б — нелінійного

<sup>7</sup> Сименс Ернст Вернер, E. W. Siemens (1816–1892) — німецький винахідник і підприємець. Засновник та власник великих електротехнічних концернів «Сименс і Гальске», «Сименс і Шуккерт» та ін. Працював у галузях гальванопластики, телеграфії, силової електротехніки (освітлення, трамвай, електростанції тощо). Здійснив вимірювання діелектричної сталості багатьох речовин. Створив ртутний еталон опору. Ініціював створення центрального германського метрологічного закладу. Одиницю із назвою «сименс» вперше введено у 1936 р. До цього одиниця мала назву «ом в мінус першому степені»; пропонувався також варіант назви «мо», який підкреслював обернену пропорційність до одиниці «ом».

Потужність в опорі завжди додатна, що підтверджує незворотне поглинання енергії в ньому:

а) для постійного струму

$$P = UI = RI^2 = GU^2; \quad (1.5)$$

б) у разі довільного закону зміни струму

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2. \quad (1.6)$$

Співвідношення (1.5) і (1.6) виражають закон Джоуля — Ленца<sup>8</sup>.

Енергія, що поглинається в опорі за час  $\tau$ , становить:

а) для постійного струму

$$W = RI^2 \tau = GU^2 \tau; \quad (1.7)$$

б) у разі довільного закону зміни струму

$$W = \int_0^{\tau} Ri^2 dt = \int_0^{\tau} Gu^2 dt. \quad (1.8)$$

### 1.5.2. Ємність

Ємність — ідеальний пасивний елемент, у якому накопичується енергія електричного поля. Графічне зображення ємності показане на рис. 1.6.

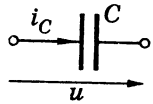


Рис. 1.6.  
Ємність

За своїми властивостями до ємності наближається реальний елемент — конденсатор (якщо в ньому знехтувати опором втрат та індуктивними властивостями затискачів). Термін «ємність» і його позначення  $C$  застосовується як для позначення ємнісного елемента,

так і для його кількісної оцінки:

$$C = \frac{q}{u}, \quad (1.9)$$

де  $q$  — накопичений в ємності заряд;  $u$  — напруга на ємності.

<sup>8</sup> Ленц Емілій Християнович (1804–1865) — російський фізик, академік. Один із творців вчення про електрику і теоретичних основ електротехніки. Одним із перших прийняв закон Ома, розглядав закони розподілу струму в розгалужених провідниках (у цих роботах був попередником Кірхгофа). Встановив правило, яке визначало напрям індукованих струмів (правило Ленца). Експериментально обґрунтував закон теплової дії струму (закон Джоуля — Ленца).

Заряд вимірюється в кулонах (Кл), ємність — у фарадах<sup>9</sup> (Ф).

Подібно опорі ємність може бути лінійною, параметричною і нелінійною. У лінійній ємності залежність заряду від напруги (кулон-вольтна характеристика)  $q(u)$  є лінійною функцією (рис. 1.7, а), а  $C$  — постійна величина. Параметрична ємність залежить від часу —  $C(t)$ . Для нелінійної ємності кулон-вольтна характеристика  $q(u)$  є нелінійною функцією (рис. 1.7, б), а ємність залежить від напруги —  $C(u)$ .

Для лінійної ємності співвідношення між струмом і напругою, враховуючи вираз (1.9), мають вигляд:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt}; \quad (1.10)$$

$$u = \frac{1}{C} \int i_C dt. \quad (1.11)$$

Миттєві потужність і енергія в лінійній ємності визначаються виразами:

$$p_C = ui_C = Cu \frac{du}{dt}; \quad (1.12)$$

$$w_C(t) = \int p_C dt = \int C u du = \frac{Cu^2}{2}. \quad (1.13)$$

Як видно з (1.12), потужність у ємності додатна, якщо напруга на ній з часом зростає:  $du/dt > 0$ . Це відповідає накопиченню в ємності енергії електричного поля. Якщо  $du/dt < 0$ , потужність є від'ємною, тобто ємність віддає енергію (розряджається). Співвідношення (1.13) показує, що енергія електричного поля в ємності завжди додатна, а за величиною є пропорційною ємності та квадрату напруги.

<sup>9</sup> Фарадей Майкл, М. Faraday (1791–1867) — видатний англійський фізик. Відкрив закон електромагнітної індукції. Вперше висловив думку про дискретність електрики та про елементарний заряд. Проводив дослідження діелектриків. Відкрив явище магнітного обертання площини поляризації електромагнітних хвиль, яке отримало назву ефекту Фарадея. Відкрив діаманетизм і парамагнетизм. Запровадив метод відображення магнітного поля за допомогою силових ліній. Фарадей займався вивченням хімічної дії струму: сформулював закон електролізу; запровадив низку нових, тепер загальноживаних термінів (анод, катод, електроліт, іони та ін.). Результати досліджень Фарадея в галузі електрики були опубліковані у трьох томах під назвою «Експериментальні дослідження з електрики». Одиницю під назвою «фарада» вперше введено у 1881 р.

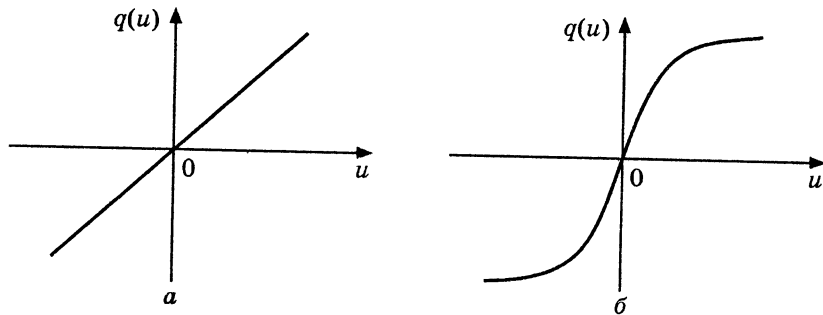


Рис. 1.7. Кулон-вольтні характеристики ємностей: а — лінійної; б — нелінійної

У разі постійної напруги ( $u = U = \text{const}$ ) струм та потужність в ємності дорівнюють нулю, тобто ємність є ділянкою кола з нескінченно великим опором (ділянку кола розімкнено). При цьому в ємності накопичується енергія  $W_C = CU^2/2$ .

### 1.5.3. ІНДУКТИВНІСТЬ

*Індуктивність* — це ідеальний пасивний елемент, у якому накопичується енергія магнітного поля. Графічне зображення індуктивності з позначенням напрямів струму і напруги показано на рис. 1.8. Фізичною моделлю індуктивності є ідеалізована котушка самоіндукції (рис. 1.9).

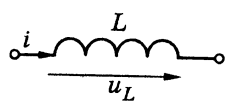


Рис. 1.8. Індуктивність

В ідеалізованій котушці самоіндукції відсутні втрати ( $R=0$ ) і енергія електричного поля ( $C=0$ ). Обмотка ідеалізованої котушки самоіндукції складається з  $N$  витків, які намотано настільки близько один до одного, що відсутні лінії магнітної індукції (зображені на рис. 1.9, а пунктиром). Останнє означає відсутність розсіювання магнітного поля між витками котушки.

Магнітне поле ідеалізованої котушки самоіндукції можна описувати за допомогою ліній магнітної індукції, дотичними до яких у кожній точці є вектори магнітної індукції  $\vec{B}$  (рис. 1.9, а), або за допомогою інтегрального параметра — магнітного потоку  $\Phi$  (рис. 1.9, б). *Магнітний потік* — це скалярна величина, що дорівнює інтегралу вектора магнітної індукції по перерізу витків котушки:

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Величина магнітного потоку пропорційна кількості витків  $N$  і величині струму, що протікає в котушці.

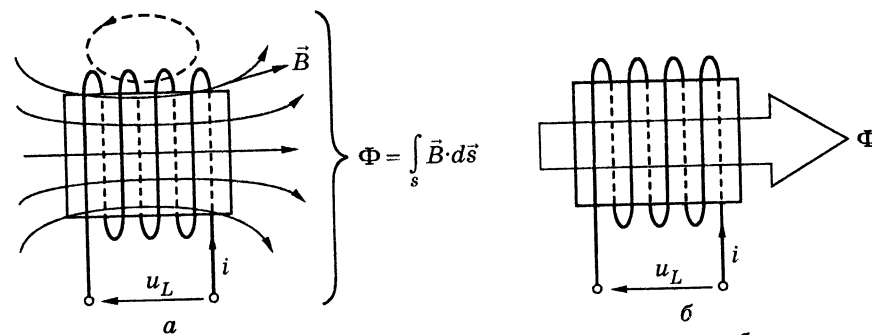


Рис. 1.9. Ідеалізована котушка самоіндукції з умовним зображенням: а — ліній і вектора магнітної індукції; б — магнітного потоку

Магнітний потік прийнято умовно зображати у вигляді стрілки, напрям якої збігається з напрямом ліній магнітної індукції (рис. 1.9, б). Як відомо, напрям ліній магнітної індукції пов'язаний з напрямом струму за правилом правого гвинта.

Кількісно індуктивність оцінюється поняттям *потокосцеплення*, яке дорівнює сумі магнітних потоків усіх витків розглядуваної котушки,

$$\Psi = N\Phi. \quad (1.14)$$

Величина індуктивності дорівнює відношенню потокосцеплення до струму, що його викликав:

$$L = \Psi/i. \quad (1.15)$$

Потік і потокосцеплення вимірюються у веберах<sup>10</sup> (Вб). Індуктивність вимірюється в генрі<sup>11</sup> (Гн). Термін «індуктивність» та її позначення  $L$  застосовуються як для позначення індуктивного елемента, так і для його кількісної оцінки.

Оскільки потік є пропорційним кількості витків  $N$ , потокосцеплення та індуктивність пропорційні квадрату кількості витків.

<sup>10</sup> Вебер Вільгельм Едуард, W. E. Weber (1804–1891) — німецький фізик. Розробив абсолютну систему електричних і магнітних одиниць. Відкрив закон взаємодії рухомих зарядів. Експериментально визначив швидкість світла. Досліджував хвильові процеси й акустику. Одиницю під назвою «вебер» вперше введено у міжнародну практику в 1935 р. (у СРСР — у 1948 р.).

<sup>11</sup> Генрі Джозеф, J. Henry (1797–1878) — американський фізик. Незалежно від Фарадея визначив явище електромагнітної індукції та коливальний характер розряду конденсатора. Проводив роботи також у галузі метеорології. Створив електромагніти з великою піднімальною силою.

Реальним елементом, близьким за своїми властивостями до індуктивності, є котушка самоіндукції, намотана проводом з високوپровідного матеріалу на каркасі з малими втратами.

Індуктивність є лінійною, якщо вона не залежить від величини і напряму струму. Це відповідає лінійному характеру так званої вебер-амперної характеристики  $\Psi(i)$  (рис. 1.10, а). Лінійна індуктивність  $L(t)$ , яка залежить від часу, називається *параметричною*.

Якщо вебер-амперна характеристика є нелінійною функцією (рис. 1.10, б), то індуктивність називається нелінійною і залежить, у загальному випадку, від величини і напряму струму.

Зв'язок між напругою і струмом в індуктивності можна отримати, використовуючи вираз (1.15) і закон електромагнітної індукції  $u = d\Psi/dt$ . Для лінійної індуктивності ( $\Psi = Li$ ,  $L = \text{const}$ ) справедливі співвідношення:

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt}; \quad (1.16)$$

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt. \quad (1.17)$$

Миттєві потужність і енергія в лінійній індуктивності визначаються виразами:

$$p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}; \quad (1.18)$$

$$w_L(t) = \int p dt = \int Li di = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.19)$$

Згідно з (1.18) потужність в індуктивності додатна, якщо струм зростає з часом:  $di/dt > 0$ . Це означає накопичення енергії магнітного поля в індуктивності. При  $di/dt < 0$  потужність є від'ємною, тобто

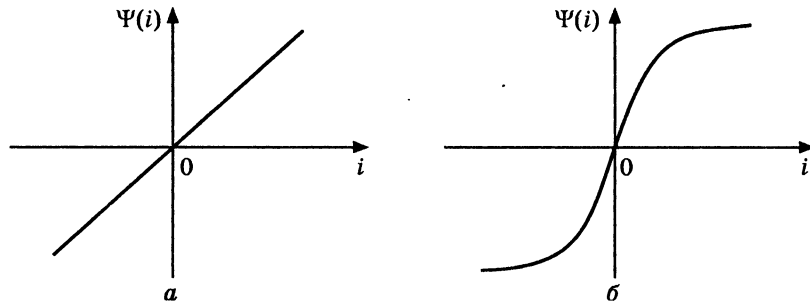


Рис. 1.10. Вебер-амперні характеристики індуктивностей: а — лінійної; б — нелінійної

індуктивність віддає енергію. Енергія магнітного поля в індуктивності, відповідно до (1.19), завжди додатна, причому пропорційна індуктивності і квадрату струму. У разі постійного струму ( $i = I = \text{const}$ ) напруга і потужність в індуктивності дорівнюють нулю, тобто індуктивність є ділянкою кола з нульовим опором (ділянка кола короткозамкнена). При цьому індуктивність відрізняється від провідника тим, що в ній накопичена енергія  $W_L = LI^2/2$ .

Порівнюючи основні співвідношення для індуктивності та ємності, можна помітити, що при заміні  $L$  на  $C$ ,  $u$  на  $i$ , а  $i$  на  $u$  у всіх виразах для індуктивності виходять відповідні вирази для ємності. Є справедливим і зворотний перехід. Така відповідність називається подвійністю або дуальністю елементів  $L$  і  $C$ . Дуальними є також елементи «опір» і «провідність».

#### 1.5.4. Взаємна індуктивність

Взаємна індуктивність (взаємоіндукція) характеризує фізичні процеси в двох або більше ідеалізованих котушках самоіндукції, що мають спільне магнітне поле.

На рис. 1.11–1.12 показані такі види магнітних потоків двох ідеалізованих індуктивно зв'язаних котушок:

$\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{22}$  — магнітні потоки самоіндукції, викликані в котушках власними струмами;

$\Phi_{21}$ ,  $\Phi_{12}$  — магнітні потоки взаємоіндукції, викликані в кожній з котушок струмом іншої котушки;

$\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  — повні магнітні потоки котушок, викликані струмами в обох котушках;

$\Phi_{1S} = \Phi_{11} - \Phi_{12}$ ,  $\Phi_{2S} = \Phi_{22} - \Phi_{21}$  — магнітні потоки розсіяння котушок.

Залежно від способу намотування витків котушок і напрямів струмів у них повні магнітні потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  є або сумою (рис. 1.11)

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}; \quad \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12}, \quad (1.20)$$

або різницею (рис. 1.12)

$$\Phi_1 = \Phi_{11} - \Phi_{21}; \quad \Phi_2 = \Phi_{22} - \Phi_{12} \quad (1.21)$$

відповідних магнітних потоків самоіндукції і взаємоіндукції.

Увімкнення котушок, коли магнітні потоки самоіндукції і взаємоіндукції підсумовуються, називається *узгодженим увімкненням*. Якщо магнітні потоки самоіндукції і взаємоіндукції віднімаються, то увімкнення котушок називається *зустрічним*. Слід

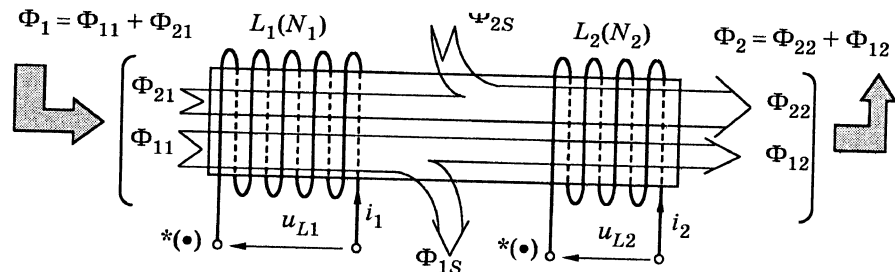


Рис. 1.11. Ідеалізовані індуктивно зв'язані котушки (узгоджене ввімкнення)

підкреслити, що поняття «увімкнення котушок» (узгоджене або зустрічне) означає не електричне з'єднання котушок, а взаємодію їх магнітних потоків.

Щоб визначити характер увімкнення індуктивно зв'язаних котушок, прийнято виділяти так звані однойменні затискачі. Останні позначаються зірочками або жирними точками (рис. 1.11, 1.12). Надалі однойменні затискачі позначатимемо зірочками. Введення таких затискачів дозволяє зображувати схеми з індуктивно зв'язаними котушками без позначення напрямів намотування їх витків.

Однаковий напрям струмів індуктивно зв'язаних котушок відносно їх однойменних затискачів відповідає узгодженому ввімкненню, протилежні напрями струмів відносно однойменних затискачів — зустрічному.

За відсутності розсіювання у витках кожної з котушок їх повні потокозчеплення, враховуючи співвідношення (1.14), (1.20) і (1.21), становитимуть:

для першої котушки

$$\Psi_1 = N_1 \Phi_1 = N_1 \Phi_{11} \pm N_1 \Phi_{21} = \Psi_{11} \pm \Psi_{21}; \quad (1.22)$$

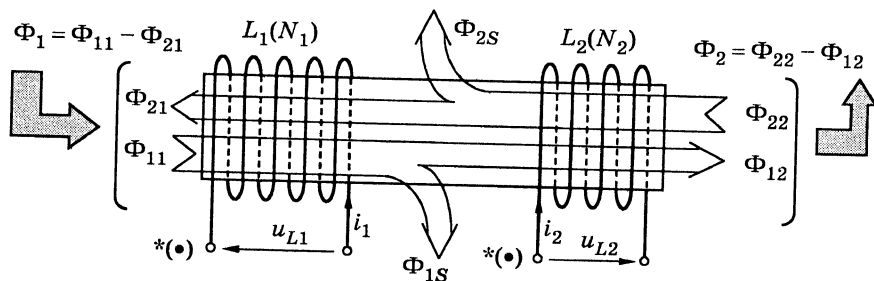


Рис. 1.12. Ідеалізовані індуктивно зв'язані котушки (зустрічне ввімкнення)

для другої котушки

$$\Psi_2 = N_2 \Phi_2 = N_2 \Phi_{22} \pm N_2 \Phi_{12} = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}, \quad (1.23)$$

де  $\Psi_{11}$ ,  $\Psi_{22}$  — потокозчеплення самоіндукції;  $\Psi_{12}$ ,  $\Psi_{21}$  — потокозчеплення взаємоіндукції.

У виразах (1.22) і (1.23) знак плюс відповідає узгодженому, а знак мінус — зустрічному увімкненню.

Аналогічно до індуктивностей, що визначаються відповідно до співвідношення (1.15), як

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2}, \quad (1.24)$$

взаємна індуктивність  $M$  визначається як відношення потокозчеплень взаємоіндукції до відповідних струмів:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}; \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2}. \quad (1.25)$$

Як і індуктивності, взаємна індуктивність може бути лінійною, параметричною і нелінійною.

У разі лінійної взаємної індуктивності

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Термін «взаємна індуктивність» та її літерне позначення  $M$  застосовуються як для позначення цього параметра, так і для його кількісної оцінки.

Взаємна індуктивність вимірюється в генрі (Гн) і зображується на схемах як елемент зв'язку між індуктивностями з позначенням однойменних затискачів (рис. 1.13, а, б). Взаємна індуктивність реальних елементів за інших однакових умов (діаметр і конструктивне виконання котушок) пропорційна добутку кількості витків котушок ( $M \sim N_1 N_2$ ).

Для лінійних індуктивностей і взаємоіндуктивностей параметри  $L_1$ ,  $L_2$  і  $M$  є постійними величинами. Тоді напруги на затискачах індуктивно зв'язаних котушок становитимуть:

$$u_{L1} = \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{d(L_1 i_1 \pm M i_2)}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad (1.26)$$

$$u_{L2} = \frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{d(L_2 i_2 \pm M i_1)}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \quad (1.27)$$



Пасивні елементи теорії кіл

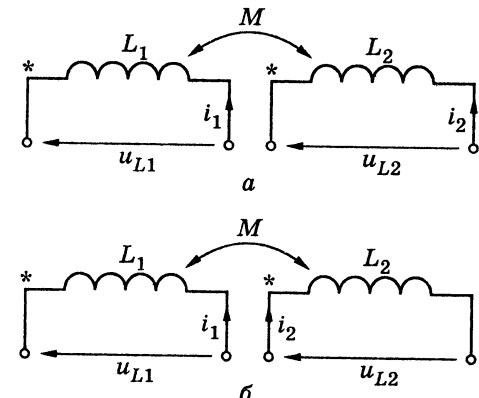


Рис. 1.13. Схемне зображення індуктивно зв'язаних котушок: а — узгоджене; б — зустрічне увімкнення

ку, якій дорівнює середньому геометричному відношень потоків взаємоіндукції і самоіндукції:

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}} \quad (1.28)$$

Оскільки потоки взаємоіндукції не можуть перевищувати відповідні потоки самоіндукції, значення коефіцієнта зв'язку обмежені:  $0 \leq k \leq 1$ .

Для лінійних індуктивних елементів потоки можна подати як

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{\Psi_{11}}{N_1} = \frac{L_1 i_1}{N_1}; \quad \Phi_{22} = \frac{\Psi_{22}}{N_2} = \frac{L_2 i_2}{N_2}; \\ \Phi_{12} &= \frac{\Psi_{12}}{N_2} = \frac{M i_1}{N_2}; \quad \Phi_{21} = \frac{\Psi_{21}}{N_1} = \frac{M i_2}{N_1}, \end{aligned}$$

що дозволяє виразити коефіцієнт зв'язку через параметри  $L_1$ ,  $L_2$  і  $M$  у вигляді

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (1.29)$$

Основні поняття і співвідношення, що характеризують пасивні елементи теорії кіл, зведено у табл. 1.2.

Перші доданки в рівняннях (1.26), (1.27) є напругами самоіндукції, а другі — напругами взаємоіндукції. У разі узгодженого увімкнення котушок напруга взаємоіндукції збігається за знаком з напругою самоіндукції, а у разі зустрічного увімкнення знаки цих напруг протилежні.

Для оцінки міри зв'язку двох котушок вводиться безрозмірний коефіцієнт зв'язку,

Параметри	Схемне позначення	Одиниця вимірювання		Розрахункові співвідношення
		назва	позначення	
Опір		ом	Ом	$u = Ri; p = Ri^2$
Провідність		сименс	См	$i = Gu; p = Gu^2$
Ємність		фарада	Ф	$C = q/u$ ( $q$ — заряд); $i_C = C \frac{du}{dt}; u_C = \frac{1}{C} \int i dt;$ $W_C = \frac{Cu^2}{2}$
Індуктивність		генрі	Гн	$L = \Psi/i$ ( $\Psi$ — потокозчеплення); $u_L = L \frac{di}{dt}; i = \frac{1}{L} \int u_L dt;$ $W_L = \frac{Li^2}{2}$
Взаємна індуктивність — узгоджене увімкнення		генрі	Гн	$u_{L1} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt};$ $u_{L2} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$
Взаємна індуктивність — зустрічне увімкнення		генрі	Гн	$u_{L1} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt};$ $u_{L2} = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$

## 1.6. Активні елементи кола

Активні елементи кола — це джерела енергії, що зумовлюють появу в пасивних елементах струмів і напруг. У теорії кіл основними є два види ідеальних джерел — джерела напруг і джерела струмів.

Ідеальне джерело напруги — активний елемент, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через джерело (рис. 1.14, а). Ідеальне джерело напруги називають також ідеальним джерелом електрорушійної сили.

ЕРС чисельно дорівнює роботі, яку витрачає джерело на переміщення одиничного позитивного заряду всередині джерела (у напрямку стрілки проти сил електричного поля) від одного його затискача («-») до іншого («+»). ЕРС, як і напруга, вимірюється у вольтах і позначається: у разі джерела змінної напруги миттєвим значенням ЕРС —  $e(t)$  або  $e$ ;

у разі джерела постійної напруги — величиною його ЕРС  $E$ .

При ввімкненні до ідеального джерела постійної ЕРС опору навантаження  $R_H$  (рис. 1.14, б) струм у колі та напруга на навантаженні (або на затискачах джерела) становитимуть відповідно:

$$I_H = E/R_H; U_H = E. \quad (1.30)$$

Співвідношення (1.30) виконується за будь-якого навантаження, що дозволяє

побудувати ВАХ ідеального джерела постійної напруги (рис. 1.14, в) і зробити висновок, що ЕРС і напруга на затискачах ідеального джерела напруги збігаються за величиною і протилежні за напрямом.

Рівняння балансу потужностей для кола, зображеного на рис. 1.14, б, має вигляд:

$$P_E = P_H,$$

де  $P_E = EI_H$  — потужність джерела;  $P_H = U_H I_H = R_H I_H^2 > 0$  — потужність навантаження. З рівняння балансу потужностей виходить, що джерело віддає енергію, а навантаження її споживає.

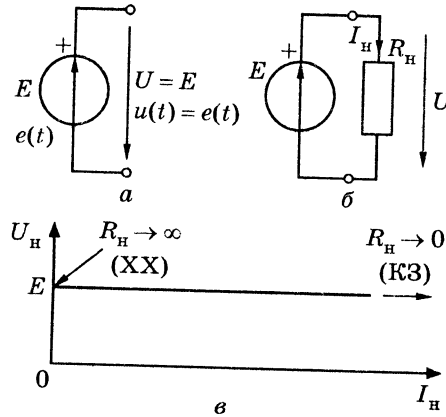


Рис. 1.14. Ідеальне джерело напруги та його вольт-амперна характеристика

У режимі короткого замикання, коли  $R_H = 0$ , струм і потужність джерела прямують до нескінченності. Оскільки фізично це неможливо, таке джерело прийнято називати *ідеальним*.

Будь-яке реальне джерело (акумулятор, випрямляч, електро-механічний або електронний генератори та ін.) істотно відрізняється від ідеального передусім тим, що не може забезпечити нескінченно велику потужність, яку забезпечує ідеальне джерело в режимі КЗ. У реальних джерел із зростанням струму напруга зменшується. Це ускладнює моделювання реальних джерел із застосуванням ідеального джерела напруги. Тому в теорії кіл вводиться так зване реальне джерело у вигляді послідовно сполучених ідеального джерела напруги і пасивного елемента. В окремому випадку використовується опір, який називається внутрішнім  $R_i$  (рис. 1.15, а).

Якщо ввімкнути до реального джерела постійної ЕРС опір навантаження  $R_H$  (рис. 1.15, б), струм у навантаженні становитиме:

$$I_H = \frac{E}{R_i + R_H},$$

звідки

$$U_H = R_H I_H = E - R_i I_H. \quad (1.31)$$

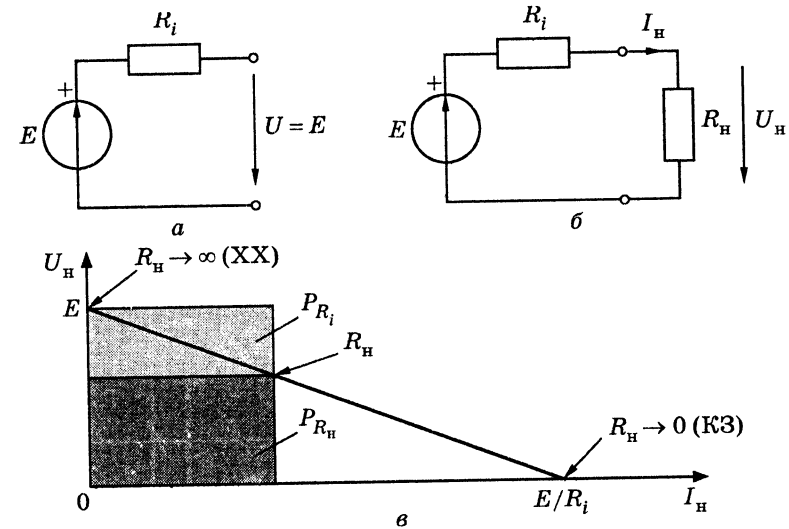


Рис. 1.15. Реальне джерело постійної напруги та його вольт-амперна характеристика

Рівнянню (1.31) відповідає лінійна ВАХ з негативним нахилом, що зображена на рис. 1.15, в. У режимі холостого ходу  $I_H = 0$ , оскільки  $R_H \rightarrow \infty$ . Тому напруга на затискачах реального джерела (рис. 1.15, в), як і ідеального джерела (рис. 1.14, в), становить  $U_H = E$ . У режимі КЗ ( $R_H = 0$ ) напруга і струм у навантаженні становлять, відповідно,  $U_H = 0$ ,  $I_H = E/R_i$ .

За будь-якого опору навантаження потужності енергій, розсіюваних у навантаженні та внутрішньому опорі, можна подати як площі відповідних прямокутників (рис. 1.15, в). Сума цих площ чисельно дорівнює потужності енергії, яка віддається джерелом. Таке подання потужностей наочно показує, що не існує режимів, котрі фізично не реалізуються. Це наближає реальне джерело теорії кіл до реальних джерел електричної енергії, однак повне їх отождошення не завжди можливе.

Ідеальне джерело струму — активний елемент, струм якого не залежить від напруги на його затискачах. Позначення ідеального джерела струму показано на рис. 1.16, а.

Якщо ввімкнути до ідеального джерела постійного струму опір навантаження  $R_H$  (рис. 1.16, б), струм у колі та напруга на навантаженні становитимуть відповідно  $I_H = I_{дж}$ ;  $U_H = R_H I_{дж}$ . Ці співвідношення відповідають ВАХ, зображеній на рис. 1.16, в.

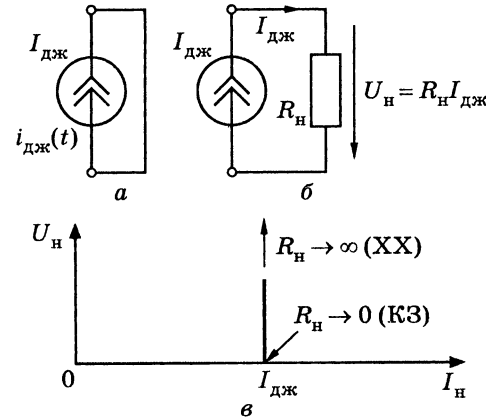


Рис. 1.16. Ідеальне джерело струму та його вольт-амперна характеристика

джерело струму, як і ідеальне джерело напруги, не придатне для моделювання реальних джерел енергії. Тому в теорії кіл розглядається реальне джерело, у якого внутрішній опір  $R_i$  увімкнений

паралельно джерелу (рис. 1.17, а). У разі паралельного з'єднання доцільно використовувати внутрішню провідність  $G_i = 1/R_i$ .

Якщо ввімкнути до реального джерела постійного струму опір навантаження  $R_H$  (рис. 1.17, б), струм у внутрішньому опорі

$$I_i = I_{дж} - I_H,$$

звідки, перемножуючи ліву і праву частини рівності на  $R_i$ , можна отримати вираз ВАХ джерела:

$$U_H = R_i I_i = R_i I_{дж} - R_i I_H.$$

ВАХ реального джерела постійного струму зображена на рис. 1.17, в (тут же показана геометрична інтерпретація потужностей як площ відповідних прямокутників). Ця характеристика аналогічна ВАХ реального джерела постійної напруги (рис. 1.15, в), що дозволить у подальшому розглянути умови еквівалентної заміни цих джерел.

Порівняння реальних джерел напруги і струму показує їх дуальність.

Основні довідкові дані про джерела наведено в табл. 1.3.

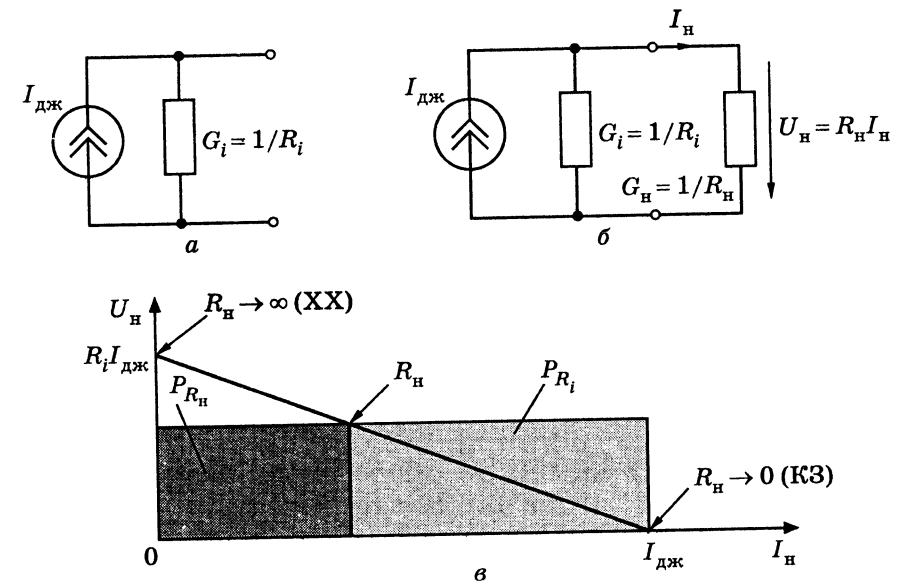
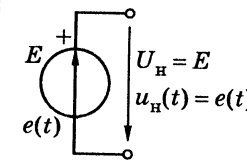
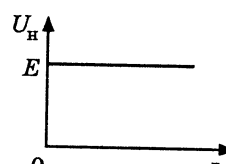
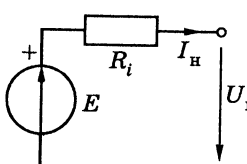
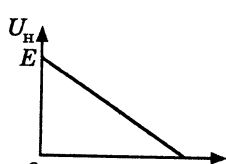
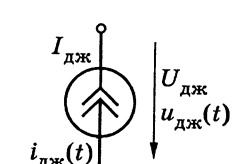
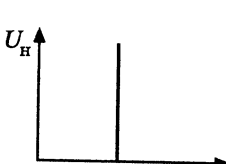
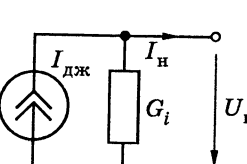
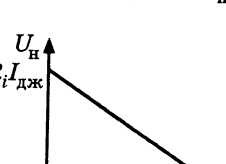


Рис. 1.17. Реальне джерело постійного струму та його вольт-амперна характеристика

Таблиця 1.3

Активні елементи електричного кола

Параметри	Схемне позначення	Вольт-амперна характеристика
Ідеальне джерело напруги		
Реальне джерело напруги (R_i — внутрішній опір)		
Ідеальне джерело струму		
Реальне джерело струму (G_i — внутрішня провідність)		

1.7. Схема електричного кола

Схемою електричного кола називається графічне зображення способу з'єднання пасивних і активних елементів кола. З'єднання елементів на схемі здійснюється ідеальними провідниками. Зі схемою кола пов'язані геометричні (топологічні) поняття — вітка, вузол, контур, граф, дерево графа.

Вітка — один або декілька послідовно сполучених елементів, в яких проходить один і той же струм. Кількість віток збігається з кількістю струмів у колі.

Вузол — точка з'єднання трьох і більше віток.  
 Контур — замкнений шлях по вітках схеми.  
 Граф схеми — графічне подання схеми, в якій вітки умовно зображено лініями (ребрами), а вузли — точками (вершинами).

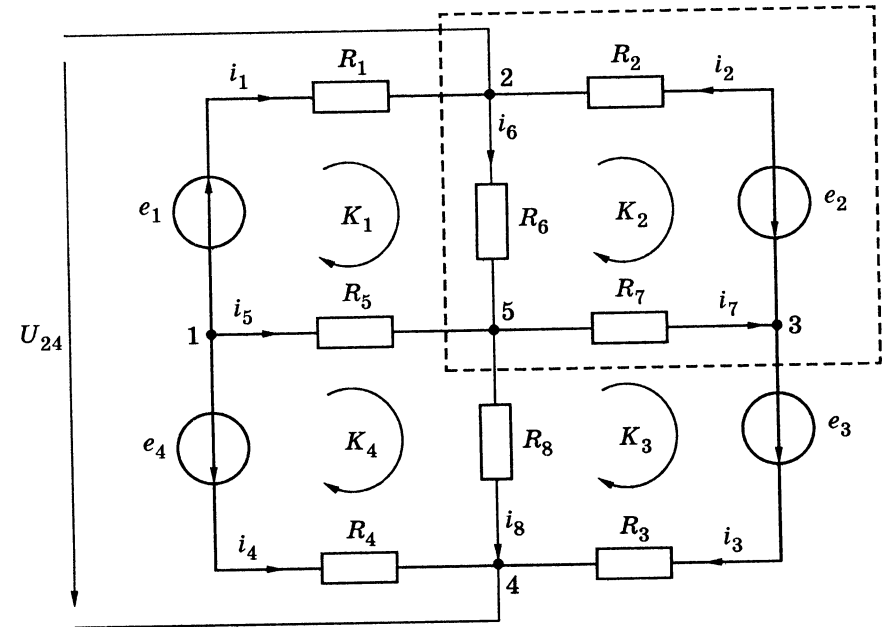


Рис. 1.18. Схема електричного кола

Дерево графа — частина графа, що включає всі вузли, але не створює жодного контуру.

Головна вітка графа (хорда графа) — вітка, що не входить до вибраного дерева.

Як приклад, на рис. 1.18 зображена схема кола, яка містить вісім віток і п'ять вузлів. На схемі показано декілька контурів, позначених буквою K, з вибраними напрямками обходу для складання рівнянь за другим законом Кірхгофа.

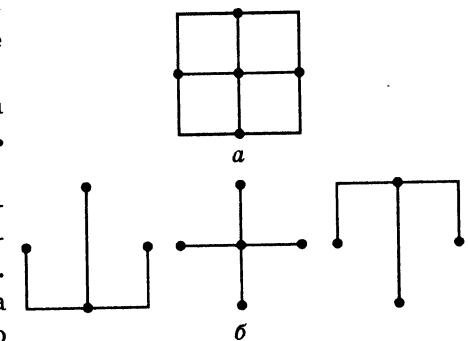


Рис. 1.19. Граф схеми (а), зображеної на рис.1.18, і приклади його дерев (б)

## 1.8. Основні закони теорії кіл

До основи теорії кіл покладено закон Ома, розглянутий вище у вигляді співвідношень (1.1)–(1.4), і два закони Кірхгофа<sup>12</sup>.

*Перший закон Кірхгофа виходить з закону збереження зарядів стосовно вузла і формулюється так: алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у вузлі дорівнює нулю. У математичній формі цей закон можна записати у вигляді:*

- для кола змінного струму

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0; \quad (1.32)$$

(алгебраїчна у вузлі)

- для кола постійного струму

$$\sum_{k=1}^m I_k = 0, \quad (1.33)$$

(алгебраїчна у вузлі)

де  $m$  — кількість віток, увімкнених до вузла.

Складаючи рівняння (1.32) або (1.33) згідно з першим законом Кірхгофа, знаки струмів, спрямованих до вузла і від вузла, беруть різними відповідно до будь-якого вибраного правила знаків.

Наприклад, вибираючи правило знаків, відповідно до якого струми, що входять у вузол, беруться зі знаком плюс, а струми, які виходять з вузла, — зі знаком мінус, рівняння за законом Кірхгофа для вузлів схеми, зображеної на рис. 1.18, матимуть вигляд:

$$\text{для вузла 1 } -i_1 - i_5 - i_4 = 0; \text{ для вузла 2 } i_1 - i_6 + i_2 = 0;$$

$$\text{для вузла 3 } -i_2 - i_2 + i_7 = 0; \text{ для вузла 4 } i_4 + i_3 + i_8 = 0;$$

$$\text{для вузла 5 } i_5 + i_6 - i_7 - i_8 = 0.$$

Перший закон Кірхгофа застосовується не тільки до вузлів, але і до будь-якої частини, виокремленої зі схеми. Так, для частини схеми, позначеної на рис. 1.18 пунктиром, можна записати:

$$i_1 + i_5 - i_3 - i_8 = 0.$$

<sup>12</sup> Кірхгоф Густав Роберт, К. G. Kirchhoff (1824–1887) — німецький фізик, член Берлінської академії наук. У 1847 р. встановив закономірності розподілу струмів у розгалужених колах. Запровадив поняття електричного потенціалу й абсолютно чорного тіла. Займався проблемами механіки та технікою спектрального аналізу в хімії. Сформулював основний закон теплового випромінювання. Його чотиригома праця «Лекції з математичної фізики» відіграла значну роль у розвитку теоретичної фізики.

*Другий закон Кірхгофа виходить із закону збереження енергії для будь-якого контуру кола при переміщенні в ньому одиничного заряду і формулюється так: у будь-якому контурі алгебраїчна сума миттєвих значень напруг дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень ЕРС.*

Другий закон Кірхгофа в загальному випадку і для кола постійного струму, відповідно, можна подати у вигляді:

$$\sum_{k=1}^m u_k = \sum_{l=1}^n e_l; \quad (1.34)$$

(алгебраїчні в контурі)

$$\sum_{k=1}^m U_k = \sum_{l=1}^n E_l, \quad (1.35)$$

(алгебраїчні в контурі)

де  $m$  — кількість пасивних елементів у контурі;  $n$  — кількість джерел ЕРС у контурі.

Знаки доданків у рівняннях, складених згідно з другим законом Кірхгофа, визначають, виходячи з довільно вибраних напрямів обходу в кожному з контурів (див. рис. 1.18). Напруги і ЕРС, напрями яких збігаються з вибраним напрямом обходу, беруться зі знаком плюс, в іншому випадку — зі знаком мінус.

Для контурів, вибраних на рис. 1.18, з урахуванням вказаних напрямів обходу виходять рівняння:

$$\text{для першого контуру } K_1 \quad R_1 i_1 + R_6 i_6 - R_5 i_5 = e_1;$$

$$\text{для другого контуру } K_2 \quad -R_2 i_2 - R_7 i_7 - R_6 i_6 = e_2;$$

$$\text{для третього контуру } K_3 \quad R_7 i_7 + R_3 i_3 - R_8 i_8 = e_3;$$

$$\text{для четвертого контуру } K_4 \quad R_5 i_5 + R_8 i_8 - R_4 i_4 = -e_4.$$

Другий закон Кірхгофа застосовується також для контурів, до складу яких входять напруги на ділянках схеми. Наприклад, позначивши напругу  $U_{24}$  між вузлами 2–4 і розглядаючи її спільно з трьома контурами, можна скласти рівняння:

$$U_{24} - R_4 i_4 + R_1 i_1 = e_1 - e_4;$$

$$U_{24} - R_3 i_3 + R_2 i_2 = -e_2 - e_3;$$

$$U_{24} - R_8 i_8 - R_6 i_6 = 0.$$

Закони Кірхгофа справедливі як для лінійних, так і для нелінійних кіл. Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа для нелінійних кіл, необхідно враховувати залежність опорів від струмів, тобто записувати рівняння у вигляді:

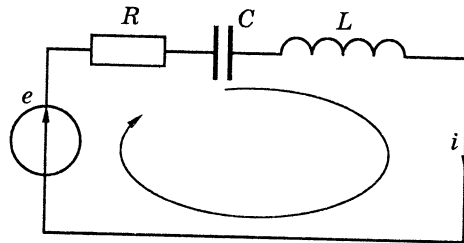


Рис. 1.20. Приклад схеми кола з елементами  $R$ ,  $L$ ,  $C$  для складання рівняння за другим законом Кірхгофа

$$\sum_{k=1}^m R_k(i_k)i_k = \sum_{l=1}^n e_l.$$

(алгебраїчні в контурі)

За наявності в колі індуктивностей і ємностей у рівняннях для запису напруг на цих елементах необхідно використати вирази (1.11) і (1.16). Тому рівняння для схеми, зображеної на рис. 1.20, матиме вигляд:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e.$$

### 1.9. Класифікація кіл і режимів їх роботи. Задачі теорії кіл

Кола класифікують за різними ознаками: лінійні і нелінійні; дво-, чотири- і багатополюсні; активні та пасивні; із зосередженими і розподіленими параметрами.

У лінійних колах всі елементи лінійні, тобто їх параметри не залежать від величин і напрямів струмів і напруг. При наявності у колі хоча б одного нелінійного елемента коло є *нелінійним*.

За кількістю зовнішніх затискачів (поліусів), за допомогою яких дане коло сполучено з іншими колами, розрізняють дво-поліусники, чотиріполіусники і багатополіусники.

*Пасивне коло* або складається тільки з пасивних елементів, або містить джерела енергії, котрі компенсують один одного. *Активні* кола містять джерела енергії, які обумовлюють напруги на розімкнених або струми в замкнених зовнішніх затискачах.

Критерієм, за яким коло відносять до кіл із зосередженими параметрами, теоретично є наявність зосереджених елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  у вітках схеми і незмінність струму в будь-якому перерізі кожної вітки у будь-який момент часу. Практичною ознакою кіл із

зосередженими параметрами є те, що довжина хвилі коливань, що використовуються, істотно перевищує геометричні розміри реального кола.

У колах з розподіленими параметрами елементи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  розподілені вздовж кола. При цьому струми і напруги залежать не тільки від часу, але і від однієї з координат, наприклад  $x$ , — що характеризує відстань від джерела:  $i(t, x)$ ,  $u(t, x)$ . У реальних кіл з розподіленими параметрами один з лінійних розмірів сумірний з довжиною хвилі.

Розрізняють два основних режими роботи кіл — *усталений* (стаціонарний) і *неусталений* (перехідний).

В *усталеному режимі* струми і напруги змінюються у часі за періодичним законом:  $i(t) = i(t + nT)$ ;  $u(t) = u(t + nT)$ , де  $T$  — період. Окремим випадком усталеного режиму є режим постійного струму, коли всі струми і напруги є постійними величинами, тобто  $T \rightarrow \infty$ .

У разі *перехідних режимів* струми і напруги є неперіодичними функціями часу. Причинами виникнення перехідних режимів є підключення кола до джерел і відключення від них, змінювання схеми та її параметрів, дія сигналів.

Теорія кіл розглядає два види задач — аналізу і синтезу.

*Задача аналізу* полягає у визначенні декількох або всіх струмів і напруг заданої схеми за відомими значеннями її елементів (пасивних і активних). Для аналізу кіл використовуються загальні методи розрахунку кіл.

*Задачі синтезу* поділяються на два види — параметричний і структурний синтез. Параметричний синтез полягає у визначенні значень елементів відомої схеми з метою досягнення заданих характеристик або режиму роботи схеми. Структурний синтез передбачає складання схеми і визначення параметрів її елементів. Задачі структурного синтезу складніші, не завжди однозначні та не завжди реалізуються.

*Примітка.* У розрахунках і практичних застосуваннях теорії кіл поряд із введеними одиницями вимірювання струму, напруги, опору, індуктивності, ємності, енергії і потужності широко використовуються десяткові кратні та часткові одиниці, що записуються за допомогою префіксів, приєднаних до одиниць вимірювання (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Множники і префікси для утворення десяткових кратних і часткових одиниць

Множник	Префікс	Позначення	Найменування
$10^{18}$	екса	Е	квінтильйон
$10^{15}$	пета	П	квадрильйон
$10^{12}$	тера	Т	трильйон
$10^9$	гіга	Г	мільярд
$10^6$	мега	М	мільйон
$10^3$	кіло	к	тисяча
$10^2$	гекто	г	сто
10	дека	да	десять
$10^{-1}$	деци	д	одна десята
$10^{-2}$	санти	с	одна сота
$10^{-3}$	мілі	м	одна тисячна
$10^{-6}$	мікро	мк	одна мільйонна
$10^{-9}$	нано	н	одна мільярдна
$10^{-12}$	піко	п	одна трильйонна
$10^{-15}$	фемто	ф	одна квадрильйонна
$10^{-18}$	ато	а	одна квінтильйонна

1.10. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

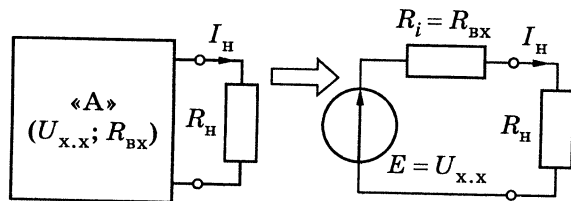
1. У чому полягає відмінність реального та ідеального електричних кіл? Які пасивні та активні елементи використовуються в теорії кіл?
2. Що таке позитивний напрям струму? Який висновок можна зробити, якщо після виконання розрахунків струм має від'ємне значення?
3. Якими приладами вимірюються величина і напрям постійного струму і напруги? Назвіть властивості ідеальних амперметра і вольтметра.
4. Чи залежить вибір позитивного напрямку напруги від позитивного напрямку струму?
5. Починаючи з моменту  $t=0$ , через опір  $R = 1$  Ом проходить струм  $i = 1 - e^{-t}$  А. Яка кількість енергії виділиться у вигляді тепла до моменту часу, коли струм досягне значення 0,632 А?  
Відповідь: 0,168 Дж.

6. Починаючи з моменту  $t=0$ , через індуктивність  $L = 1$  Гн проходить струм  $i = 1 - e^{-t}$  А. Знайти напругу на індуктивності та енергію магнітного поля в момент часу, коли струм досягне значення 0,632 А.  
Відповідь: 0,37 В; 0,2 Дж.
7. Ємність  $C = 1$  Ф, котра має електричний заряд 1 Кл, у момент  $t=0$  починає розряджатися через опір  $R = 1$  Ом. Струм змінюється згідно з законом  $i = e^{-t}$  А. Знайти напругу на ємності й енергію електричного поля в момент часу, коли струм досягне значення 0,37 А.  
Відповідь: 0,37 В; 0,068 Дж.
8. Пояснити поняття однойменних затискачів індуктивно зв'язаних котушок.
9. Дві індуктивно зв'язані котушки мають індуктивності  $L_1 = 4$  Гн і  $L_2 = 25$  Гн; коефіцієнт зв'язку  $k = 0,5$ . Визначити взаємну індуктивність. Чому дорівнює загальна індуктивність цих котушок при зустрічному та узгодженому увімкненні, якщо їх з'єднати послідовно?  
Відповідь: 5 Гн; 19 Гн; 39 Гн.
10. Чому для двох індуктивно зв'язаних котушок не можуть одночасно виконуватися умови  $L_1 < M$  і  $L_2 < M$ ?
11. Зобразити вольт-амперні характеристики ідеальних джерел напруги і струму. Чим відрізняються ВАХ ідеальних і реальних джерел енергії?
12. Назвати і пояснити основні топологічні поняття, які використовуються в теорії кіл.
13. Вважаючи в схемі (рис. 1.18)  $R_5 \rightarrow \infty$  і  $R_7 \rightarrow \infty$ , скласти рівняння за другим законом Кірхгофа для всіх контурів кола.



## МЕТОДИ АНАЛІЗУ КІЛ

- Постановка задачі та огляд основних методів аналізу кіл
- Метод еквівалентних перетворень
- Метод рівнянь Кірхгофа
- Метод контурних струмів
- Метод вузлових напруг
- Метод накладання
- Метод еквівалентного генератора
- Енергетичні співвідношення в колах постійного струму
- Принцип взаємності
- Теорема компенсації



$$\sum_{k=1}^{N_R} R_k I_k^2 = \sum_{l=1}^{N_E} E_l I_l + \sum_{m=1}^{N_I} I_{дж,m} U_{дж,m}$$



Г. Кірхгоф

$$\sum_{k=1}^m u_k = \sum_{l=1}^n e_l$$

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0$$



Г. Гельмгольц



Дж. Уатт

### 2.1. Постановка задачі та огляд основних методів аналізу кіл

Задача аналізу в загальному випадку полягає в розрахунку струмів у вітках кола, для якого задані схема і параметри елементів (пасивних і активних). При цьому кількість невідомих збігається з кількістю віток  $N_B$ . Можливі також інші варіанти постановки задач аналізу. Наприклад, необхідно визначити параметри деяких елементів і частину струмів кола при заданих значеннях інших струмів і параметрів елементів. Як і у загальному випадку, кількість невідомих при цьому не повинна перевищувати  $N_B$ .

Аналіз кіл заснований на законах Кірхгофа і співвідношеннях між напругами і струмами в пасивних елементах. Однак безпосереднє застосування законів Кірхгофа необхідне тільки для аналізу нелінійного кола. Для аналізу лінійних кіл розроблено декілька простіших методів, доцільність застосування яких визначається постановкою задачі аналізу (необхідністю визначення всіх, частини або одного зі струмів), конфігурацією схеми, особливостями практичного застосування кола та ін. Ці методи зводяться до складання і розв'язання меншого числа рівнянь, ніж це потрібно при використанні законів Кірхгофа або до матричних і топологічних розрахунків, зручних для виконання на ЕОМ.

Для будь-якого методу аналізу, що застосовується, складність розрахунків істотно залежить від режиму роботи кола (усталений або перехідний) і вигляду функцій, якими описуються миттєві значення параметрів джерел.

Найпростіше виконується аналіз лінійного кола з джерелами постійного струму (напруги) в усталеному режимі. При цьому всі струми і напруги є постійними дійсними величинами, а з пасивних елементів у колі залишаються тільки опори, оскільки індуктивності та ємності можна виключити (індуктивності замінити ідеальними провідниками, а ємності — розімкнути). У цьому випадку аналіз кола зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь з дійсними коефіцієнтами.

Вихідні рівняння для усталених режимів у колах з іншими джерелами (наприклад, синусоїдних коливань) і для перехідних режимів є, в загальному випадку, інтегро-диференціальними. При цьому, крім класичної теорії розв'язання диференціальних рівнянь, застосовуються методи алгебри комплексних чисел і операторний метод, які дозволяють звести інтегро-диференціальні рівняння для кіл з джерелами синусоїдних коливань в усталеному



режимі до алгебраїчних рівнянь з комплексними числами або (для перехідних режимів) до алгебраїчних рівнянь з операторними зображеннями функцій часу.

У даному розділі розглядаються основні методи аналізу кіл (еквівалентних перетворень; рівнянь Кірхгофа; контурних струмів; вузлових напруг; накладання; еквівалентного генератора) стосовно усталеного режиму кіл з джерелами постійного струму (напруги). Це дозволяє спростити виклад і полегшити розуміння методів і прийомів, які надалі будуть використані для аналізу усталеного режиму в колах з джерелами коливачь синусоїдної форми, а також для аналізу перехідних процесів. Крім основних методів аналізу, в даному розділі викладено також основні теореми і принципи лінійних кіл.

## 2.2. Метод еквівалентних перетворень

Суть методу полягає в раціональному застосуванні деяких прийомів еквівалентних перетворень, що призводять до спрощення схеми, тобто зменшення в ній кількості віток, вузлів, контурів, і зведенні її до одноконтурної або двовузлової. Крім самостійного застосування, прийоми еквівалентних перетворень входять як складовий елемент в інші методи розрахунку. Тому метод еквівалентних перетворень розглядається першим.

Під *еквівалентними* розуміють такі перетворення однієї частини схеми, при яких не змінюється режим роботи (струми і напруги) в іншій частині схеми, що залишилася неперетвореною. Найпоширеніші прийоми еквівалентних перетворень у лінійних колах постійного струму, зведені до табл. 2.1, розглянемо детальніше.

### 2.2.1. Еквівалентні перетворення при послідовному з'єднанні елементів

*Послідовним* називається з'єднання елементів, коли в них протікає однаковий струм. Приклад ділянки кола з послідовним з'єднанням декількох опорів і джерел ЕРС показаний на рис. 2.1, а.

Використовуючи другий закон Кірхгофа для контуру (рис. 2.1, а), до складу якого входить ділянка з послідовно сполученими елементами і напруга на його затискачах, для довільно вибраних напрямів струму  $I$  та обходу контуру можна записати рівняння

$$U - \sum_{i=1}^n R_i I = \sum_{k=1}^m E_k. \quad (2.1)$$

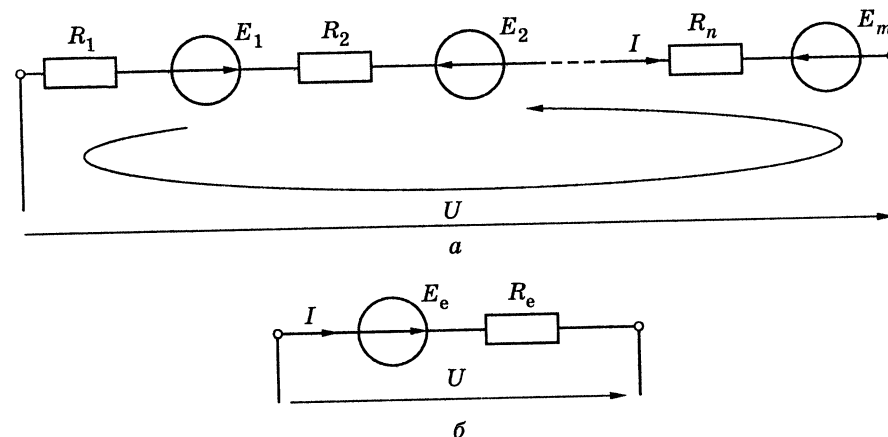


Рис. 2.1. Перетворення послідовно з'єднаних елементів

Рівняння (2.1) можна подати у вигляді

$$U - R_e I = E_e,$$

де  $R_e = \sum_{i=1}^n R_i$  — еквівалентний опір, що дорівнює арифметичній

сумі всіх послідовно сполучених опорів;  $E_e = \sum_{k=1}^m E_k$  — еквівалентна

ЕРС, яка дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС джерел даної ділянки.

Отже, ділянку з послідовним з'єднанням опорів і джерел напруги можна замінити послідовним з'єднанням двох елементів — еквівалентного опору й еквівалентного джерела напруги (рис. 2.1, б).

Для окремих випадків, коли відсутні або джерела, або опори, ділянку кола можна замінити відповідно опором  $R_e$  або джерелом  $E_e$ .

### 2.2.2. Еквівалентні перетворення при паралельному з'єднанні елементів

*Паралельним* називається з'єднання елементів з однаковою напругою на них. Приклад ділянки кола з паралельним з'єднанням декількох опорів і джерел струму показаний на рис. 2.2, а.

Якщо до вузла ділянки кола з паралельним з'єднанням  $n$  провідностей і  $m$  джерел струму застосувати перший закон Кірхгофа, виходить рівняння

$$\sum_l^n G_l U + \sum_k^m I_{дж_k} = 0. \quad (2.2)$$

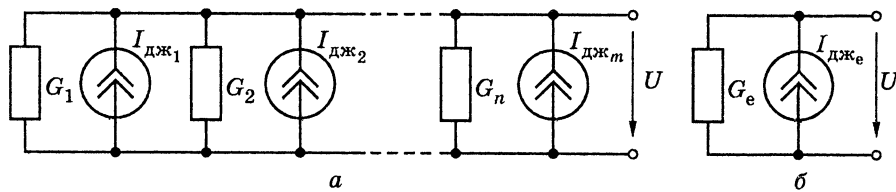


Рис. 2.2. Перетворення ділянки кола з паралельно з'єднаними елементами

Рівняння (2.2) можна записати у вигляді:

$$G_e U + I_{дж_e} = 0,$$

де  $G_e = \sum_l^n G_l$  — еквівалентна провідність, яка дорівнює арифметич-

ній сумі всіх паралельно сполучених провідностей;  $I_{дж_e} = \sum_k^m I_{дж_k}$  —

еквівалентне джерело, струм якого дорівнює алгебраїчній сумі струмів джерел даної ділянки.

Отже, ділянку з паралельним з'єднанням кількох елементів у загальному випадку можна замінити паралельним з'єднанням двох елементів — еквівалентної провідності та еквівалентного джерела струму (рис. 2.2, б).

Дане правило справедливе для пасивної паралельної ділянки кола, в якому відсутні джерела, і паралельного з'єднання тільки одних ідеальних джерел. У першому з цих випадків ділянку кола можна замінити опором  $R_e = 1/G_e$ , а у другому — ідеальним джерелом зі струмом  $I_{дж_e}$ . Так, для поширеного випадку двох паралельно увімкнених опорів  $R_1$  і  $R_2$  еквівалентний опір

$$R_e = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Застосовуючи розглянуті вище прийоми перетворень, пасивне коло, що містить сукупність послідовно і паралельно увімкнених опорів (таке з'єднання називають *змішаним*), можна замінити одним еквівалентним опором.

**Приклад 2.1.** Для кола, схема якого зображена на рис. 2.3, а, визначити еквівалентний опір відносно затискачів 1, 2.

*Розв'язання.* Коло, що не містить джерел, називається *пасивним*. Затискачі, за допомогою яких пасивне коло підключається до інших кіл,

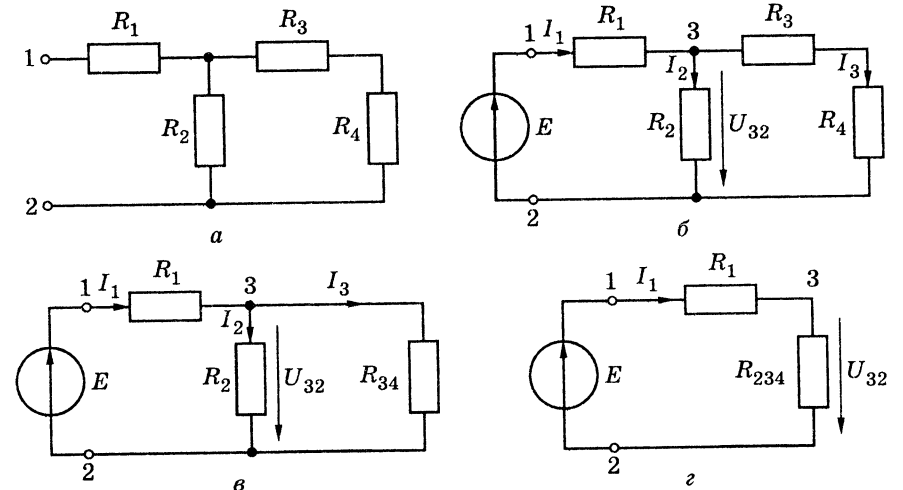


Рис. 2.3. До прикладів 2.1 і 2.2

називаються *вхідними*. Відповідно, опір відносно цих затискачів називається *вхідним опором*. Отже, у прикладі необхідно визначити вхідний опір даного кола.

Якщо відсутність струмів і напруг у даному пасивному колі викликає ускладнення у визначенні способів з'єднання опорів, можна до вхідних затискачів 1, 2 увімкнути джерело і розглянути розподіл струмів у вітках кола (рис. 2.3, б). Тоді послідовність дій може бути такою:

а) опори  $R_3$  і  $R_4$  сполучені послідовно, тому замінимо їх еквівалентним опором  $R_{34} = R_3 + R_4$  (рис. 2.3, в);

б) паралельно сполучені опори  $R_2$  і  $R_{34}$  замінимо еквівалентним опором  $R_{234} = R_2 R_{34} / (R_2 + R_{34})$  (рис. 2.3, г);

в) в отриманій одноконтурній схемі (рис. 2.3, г) опори  $R_1$  і  $R_{234}$  увімкнені послідовно, тому замінимо їх еквівалентним опором, який і є вхідним опором даного кола:

$$R_e = R_1 + R_{234} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

**Приклад 2.2.** Розрахувати струми у вітках схеми, зображеної на рис. 2.3, б, для заданих числових значень параметрів елементів:  $E = 50$  В;  $R_1 = 2,6$  кОм;  $R_2 = 4$  кОм;  $R_3 = 1$  кОм;  $R_4 = 5$  кОм.

*Розв'язання.* Враховуючи результати, отримані у прикладі 2.1, виконаємо розрахунок в такому порядку:

а) розрахуємо опори ділянок кола (рис. 2.3, б, в, г):

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 1 + 5 = 6 \text{ кОм}; \quad R_{234} = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2,4 \text{ кОм};$$

б) обчислимо еквівалентний опір кола відносно затискачів джерела (рис. 2.3, з):

$$R_e = R_1 + R_{234} = 2,6 + 2,4 = 5 \text{ кОм};$$

в) визначимо струм в одноконтурній схемі (рис. 2.3, з):

$$I_1 = \frac{E}{R_e} = \frac{50}{5} = 10 \text{ мА};$$

г) визначимо напругу між вузлами 3, 2 (рис. 2.3, в, з):

$$U_{32} = R_{234} I_1 = 2,4 \cdot 10 = 24 \text{ В};$$

д) використовуючи знайдену напругу  $U_{32}$ , за законом Ома розрахуємо струми

$$I_2 = \frac{U_{32}}{R_2} = \frac{24}{4} = 6 \text{ мА}, \quad I_3 = \frac{U_{32}}{R_{34}} = \frac{24}{6} = 4 \text{ мА}.$$

Струми  $I_2$  і  $I_3$  можуть бути знайдені і без визначення  $U_{32}$ , якщо врахувати, що  $U_{32} = R_{234} I_1 = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}} I_1$ :

$$I_2 = I_1 \frac{R_{34}}{R_2 + R_{34}}; \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{34}}.$$

Ці формули відображають розподіл струмів у паралельних вітках і дозволяють спростити розрахунки.

### 2.2.3. Еквівалентні перетворення опорів, увімкнених у вигляді «трикутника» або «зірки»

З'єднання трьох опорів у вигляді «трикутника» або П-схеми показано на рис. 2.4; з'єднання у вигляді «зірки» або Т-схеми — на рис. 2.5. Ці з'єднання не містять послідовно або паралельно

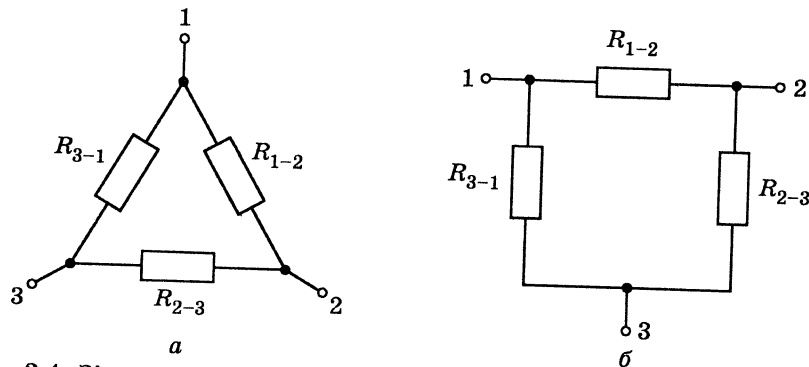


Рис. 2.4. З'єднання опорів у вигляді: а — «трикутника»; б — П-схеми

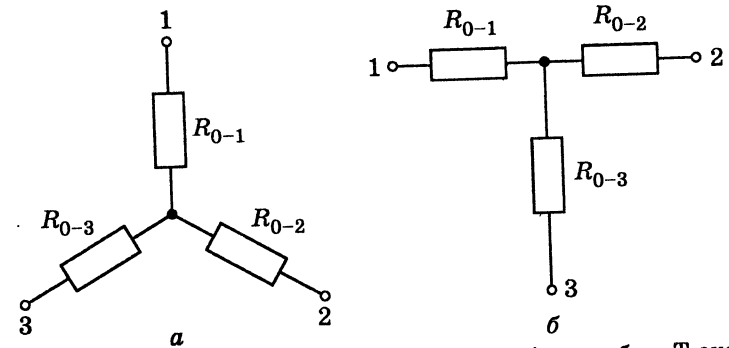


Рис. 2.5. З'єднання опорів у вигляді: а — «зірки»; б — Т-схеми

увімкнених елементів, і тому до них застосовують окремий вид еквівалентних перетворень: «зірка — трикутник» і навпаки.

Кожна з розглядуваних схем за допомогою трьох затискачів — 1, 2, 3 — підключається до інших кіл. Оскільки схеми повинні бути еквівалентні в будь-яких режимах, для виведення умов еквівалентності можна використати окремі режими холостого ходу по чергово для кожного із затискачів або короткого замикання по чергово для кожної пари затискачів.

У разі еквівалентної заміни «трикутника» (рис. 2.4) із заданими опороми  $R_{1-2}, R_{2-3}, R_{3-1}$  «зіркою» (рис. 2.5) вихідні рівняння можна записати, по чергово прирівнюючи між собою опори еквівалентних схем  $R_e$  з боку двох затискачів для режиму холостого ходу третього затискача. У результаті виходить система рівнянь для виведення умов еквівалентності:

$$R_{e_{1-2}} = R_{0-1} + R_{0-2} = \frac{R_{1-2}(R_{2-3} + R_{3-1})}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}; \quad | + | - | + | \quad (2.3)$$

$$R_{e_{2-3}} = R_{0-2} + R_{0-3} = \frac{R_{2-3}(R_{1-2} + R_{3-1})}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}; \quad | + | + | - | \quad (2.4)$$

$$R_{e_{3-1}} = R_{0-3} + R_{0-1} = \frac{R_{3-1}(R_{2-3} + R_{1-2})}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}; \quad | - | + | + | \quad (2.5)$$

де  $R_{e_{1-2}}, R_{e_{2-3}}, R_{e_{3-1}}$  — еквівалентні опори з боку вузлів відповідно 1-2, 2-3, 3-1, коли вузли 3, 1, 2 не увімкнені до інших кіл.

Підсумовуючи рівняння (2.3)–(2.5) з урахуванням знаків, вказаних у стовпцях праворуч від рівнянь, можна отримати розрахункові формули для переходу від «трикутника» до еквівалентної «зірки»:

$$R_{0-1} = \frac{R_{1-2}R_{3-1}}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}; R_{0-2} = \frac{R_{2-3}R_{1-2}}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}; \quad (2.6)$$

$$R_{0-3} = \frac{R_{3-1}R_{2-3}}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}.$$

Вихідні рівняння для еквівалентної заміни «зірки» із заданими опорами  $R_{0-1}, R_{0-2}, R_{0-3}$  на «трикутник» виходять з рівності провідностей двополюсників, які отримують, розглядаючи режими короткого замикання по чергово для кожної з пар затискачів еквівалентних схем. Ці рівняння мають вигляд:

$$G_{1-2} + G_{2-3} = \frac{1}{\frac{1}{G_{0-2}} + \frac{1}{G_{0-1} + G_{0-3}}} = \frac{G_{0-2}(G_{0-1} + G_{0-3})}{G_{0-1} + G_{0-2} + G_{0-3}}; \quad (2.7)$$

$$G_{3-1} + G_{2-3} = \frac{1}{\frac{1}{G_{0-3}} + \frac{1}{G_{0-1} + G_{0-2}}} = \frac{G_{0-3}(G_{0-1} + G_{0-2})}{G_{0-1} + G_{0-2} + G_{0-3}}; \quad (2.8)$$

$$G_{1-2} + G_{3-1} = \frac{1}{\frac{1}{G_{0-1}} + \frac{1}{G_{0-2} + G_{0-3}}} = \frac{G_{0-1}(G_{0-2} + G_{0-3})}{G_{0-1} + G_{0-2} + G_{0-3}}; \quad (2.9)$$

Застосування до системи рівнянь (2.7)–(2.9) перетворень, використаних вище для рівнянь (2.3)–(2.5), дозволяє отримати розрахункові формули для еквівалентного переходу від «зірки» до «трикутника»:

$$G_{1-2} = \frac{G_{0-1}G_{0-2}}{G_{0-1} + G_{0-2} + G_{0-3}}; G_{2-3} = \frac{G_{0-2}G_{0-3}}{G_{0-1} + G_{0-2} + G_{0-3}};$$

$$G_{3-1} = \frac{G_{0-1}G_{0-3}}{G_{0-1} + G_{0-2} + G_{0-3}}.$$

Формули для переходу від «зірки» до «трикутника» можна записати також для опорів:

$$R_{1-2} = R_{0-1} + R_{0-2} + \frac{R_{0-1}R_{0-2}}{R_{0-3}}; R_{2-3} = R_{0-2} + R_{0-3} + \frac{R_{0-2}R_{0-3}}{R_{0-1}};$$

$$R_{3-1} = R_{0-1} + R_{0-3} + \frac{R_{0-1}R_{0-3}}{R_{0-2}}. \quad (2.10)$$

«Трикутник» або «зірка» називаються *симетричними*, якщо для їх елементів виконуються співвідношення:

$$R_{1-2} = R_{2-3} = R_{3-1} = R_{\Delta}; R_{0-1} = R_{0-2} = R_{0-3} = R_{\perp}.$$

Із виразів (2.6) і (2.10) виходить, що симетричні «трикутник» і «зірка» еквівалентні, якщо  $R_{\perp} = R_{\Delta}/3$  або  $R_{\Delta} = 3R_{\perp}$ . Зазначимо, що розглянуті вище еквівалентні перетворення можна застосовувати тільки для пасивних ділянок кола, які не мають джерел.

**Приклад 2.3.** Розрахувати струми у вітках схеми, зображеної на рис. 2.6, якщо  $E = 30$  В;  $R_1 = R_2 = 10$  кОм;  $R_3 = 60$  кОм;  $R_4 = R_5 = 20$  кОм;  $R_6 = 15$  кОм.

*Розв'язання.*

У даній схемі є два «трикутники» (один містить вітки 1–2, 2–3, 3–1, другий — вітки 2–4, 4–3, 3–2) та дві «зірки» (промені однієї утворені вітками 2–1, 2–3, 2–4, промені другої — вітками 3–1, 3–2, 3–4), еквівалентні перетворення яких спрощують схему і залишають в ній тільки послідовно і паралельно з'єднані елементи. Є також «зірка» з променями 4–2, 4–3, 4–5, перетворення якої не спрощує схему.

Частина цього кола, що містить опори  $R_1 \dots R_5$ , називається «мостом», а ділянки між вузлами 1, 4 і 2, 3 — «діагоналями моста». Коло такого виду використовується у вимірвальній техніці.

Виберемо варіант розв'язання, в якому «трикутник», що складається з віток 2–4, 4–3, 3–2, перетворюється в еквівалентну «зірку» з променями 0–2, 0–3, 0–4 (рис. 2.7). Опори еквівалентної «зірки» визначимо, використовуючи формули (2.6) і введені на рис. 2.7 позначення:

$$R_{0-2} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{60 \cdot 20}{20 + 20 + 60} = 12 \text{ кОм};$$

$$R_{0-3} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{60 \cdot 20}{20 + 20 + 60} = 12 \text{ кОм};$$

$$R_{0-4} = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20 + 60} = 4 \text{ кОм}.$$

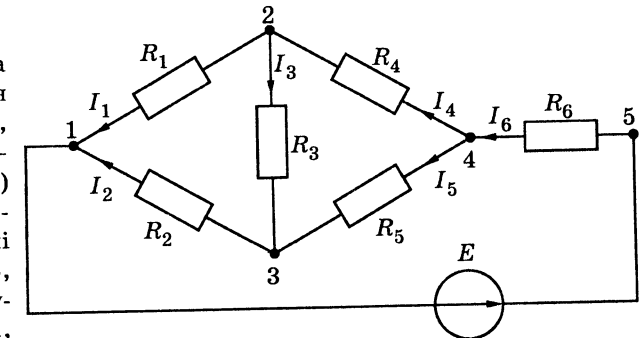


Рис. 2.6. До прикладу 2.3

У перетвореній схемі опори  $R_1$  і  $R_{0-2}$ ,  $R_2$  і  $R_{0-3}$ ,  $R_6$  і  $R_{0-4}$  сполучені послідовно, а вітки, утворені парами опорів  $R_1$  і  $R_{0-2}$ ,  $R_2$  і  $R_{0-3}$ , — паралельно. Враховуючи це, розрахуємо струми  $I_6$ ,  $I_1$  і  $I_2$  у перетвореній схемі, які збігаються зі струмами вихідної схеми (рис. 2.6):

$$I_6 = \frac{E}{R_e} = \frac{30}{30} = 1 \text{ мА}; I_1 = I_6 \frac{R_{2,0-3}}{R_{1,0-2} + R_{2,0-3}} = 1 \cdot \frac{22}{22 + 22} = 0,5 \text{ мА};$$

$I_2 = I_6 - I_1 = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ мА}$  (згідно з першим законом Кірхгофа для вузла 1) або

$$I_2 = I_6 \frac{R_{1,0-2}}{R_{1,0-2} + R_{2,0-3}} = 1 \cdot \frac{22}{22 + 22} = 0,5 \text{ мА},$$

$$\text{де } R_e = R_6 + R_{0-4} + \frac{R_{1,0-2}R_{2,0-3}}{R_{1,0-2} + R_{2,0-3}} = 15 + 4 + \frac{22 \cdot 22}{22 + 22} = 30 \text{ кОм};$$

$$R_{1,0-2} = R_1 + R_{0-2} = 10 + 12 = 22 \text{ кОм}; R_{2,0-3} = R_2 + R_{0-3} = 22 \text{ кОм}.$$

Струми  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  у перетвореній схемі відсутні. Щоб знайти ці струми, можна або застосувати інший варіант перетворення (наприклад, «трикутник» 1-2-3 перетворити в «зірку»), або розрахувати напруги  $U_{23}$ ,  $U_{42}$ ,  $U_{43}$ , які збігаються з аналогічними напругами початкової схеми і дозволяють знайти в ній шукані струми.

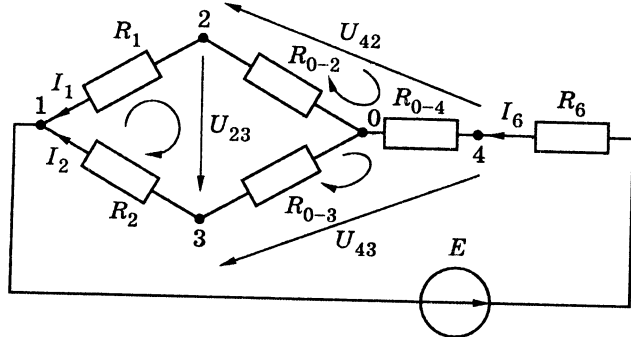


Рис. 2.7. До прикладу 2.3

відповідних контурів (рис. 2.7), а струми  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  — за допомогою закону Ома для опорів  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  (рис. 2.6):

$$U_{23} = R_1 I_1 - R_2 I_2 = 10 \cdot 0,5 - 10 \cdot 0,5 = 0; I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = 0;$$

$$U_{42} = R_{0-4} I_6 + R_{0-2} I_1 = 4 \cdot 1 + 12 \cdot 0,5 = 10 \text{ В}; I_4 = \frac{U_{42}}{R_4} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ мА};$$

$$U_{43} = R_{0-4} I_6 + R_{0-3} I_2 = 4 \cdot 1 + 12 \cdot 0,5 = 10 \text{ В}; I_5 = \frac{U_{43}}{R_5} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ мА}.$$

Особливістю режиму мостової схеми (рис. 2.6) є відсутність струму в «діагоналі моста»  $R_3$  за наявності струмів у інших вітках. Цей режим

називається «балансом моста». Умова «балансу моста» у загальному вигляді та практичне застосування такого режиму розглядатимуться нижче у прикладі 2.14.

## 2.2.4. Еквівалентні перетворення джерел

Умови еквівалентності реальних джерел напруги і струму можна отримати за умови еквівалентності двох однакових режимів у зовнішніх колах цих джерел. Найпростішими режимами є режим холостого ходу (рис. 2.8), коли напруги  $U_{x,x}$  на розімкнених затискачах джерел однакові, і режим короткого замикання (рис. 2.9), коли струми  $I_{к.з}$  при замкнених затискачах джерел дорівнюють один одному.

З умови еквівалентності режимів холостого ходу і короткого замикання відповідно виходять два рівняння:

$$E = R_i'' I_{дж}; \frac{E}{R_i'} = I_{дж}. \quad (2.11)$$

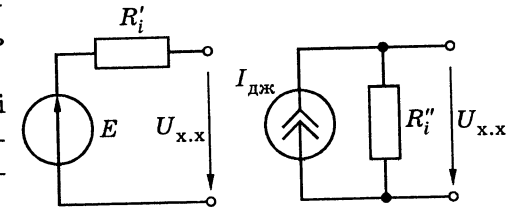


Рис. 2.8. Режим холостого ходу еквівалентних джерел

З рівнянь (2.11) виходить, що внутрішні опори еквівалентних джерел однакові:

$$R_i'' = R_i' = R_i. \quad (2.12)$$

З урахуванням співвідношення (2.12) рівняння (2.11) матимуть вигляд:

$$E = R_i I_{дж}; \quad (2.13)$$

$$I_{дж} = \frac{E}{R_i}. \quad (2.14)$$

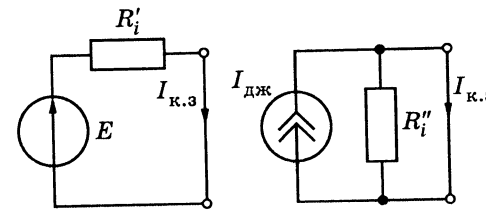


Рис. 2.9. Режим короткого замикання еквівалентних джерел

Формули (2.12)–(2.14) дозволяють сформулювати умови еквівалентності реальних джерел:

- 1) внутрішні опори еквівалентних джерел напруги і струму однакові;
- 2) ЕРС джерела напруги дорівнює напрузі холостого ходу еквівалентного джерела струму;
- 3) струм джерела струму дорівнює струму короткого замикання еквівалентного джерела напруги.

Друга з цих умов використовується при еквівалентній заміні реального джерела струму на джерело напруги, а третя — у разі заміни реального джерела напруги на джерело струму.

Перетворення реальних джерел, крім безпосереднього використання для аналізу кіл методом еквівалентних перетворень, знаходять застосування у таких випадках: для обґрунтування деяких прийомів еквівалентних перетворень, наприклад для перетворення паралельно сполучених реальних джерел напруги і послідовно сполучених реальних джерел струму (табл. 2.1); на підготовчих етапах деяких методів, коли всі джерела необхідно подати у вигляді джерел напруги або у вигляді джерел струму; у методі еквівалентного генератора, який розглядатиметься нижче у підрозділі 2.7.

Ідеальні джерела напруги і струму не можуть бути еквівалентно перетворені безпосередньо. Для перетворення схем з ідеальними джерелами використовуються прийоми їх еквівалентних перенесень, що дозволяє замінити одне з таких ідеальних джерел двома або більше реальними джерелами. Приклади таких перетворень показано на рис. 2.10, 2.11. При перенесенні ідеальних джерел вихідні рівняння для контурів або вузлів, складені за законами Кірхгофа, не змінюються.

Щоб перенести ідеальне джерело напруги (рис. 2.10, а), послідовно з ним вмикається таке саме ідеальне джерело, але з протилежним напрямом (рис. 2.10, б). При цьому, щоб зберегти рівняння,

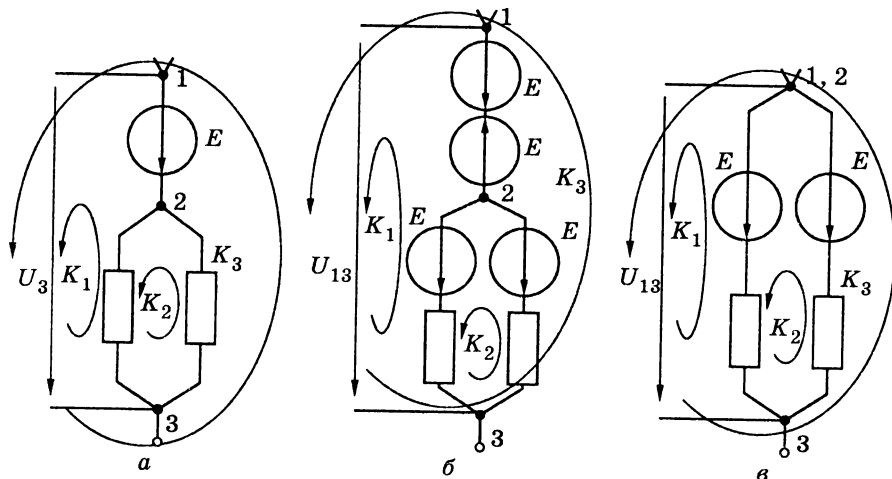


Рис. 2.10. Еквівалентне перетворення ділянки кола з ідеальним джерелом напруги

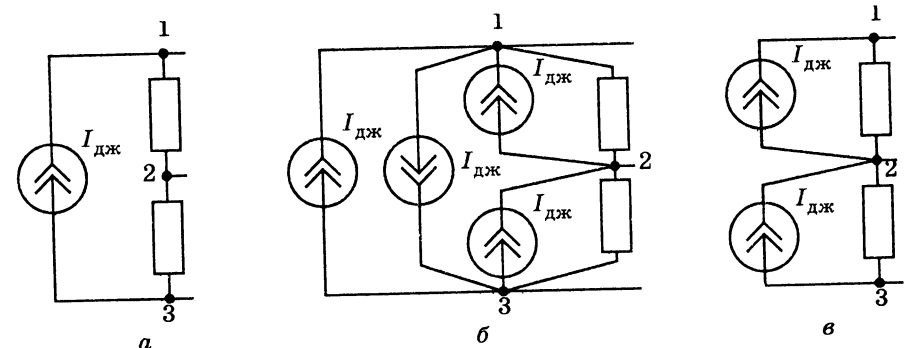


Рис. 2.11. Еквівалентне перетворення ділянки кола з ідеальним джерелом струму

складені згідно з другим законом Кірхгофа, у відповідні вітки контурів  $K_1, K_2, K_3$  додаються такі ж ідеальні джерела (рис. 2.10, б). Далі схема може бути спрощена об'єднанням вузлів 1, 2 в один вузол, оскільки напруга між цими вузлами дорівнює нулю. У перетвореній схемі (рис. 2.10, в) відсутні ідеальні джерела напруги.

У разі перенесення ідеального джерела струму (рис. 2.11, а) паралельно з ним вмикається таке саме ідеальне джерело струму з протилежним напрямом, а для дотримання рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа, паралельно вузлам схеми (відповідно 1–2 і 2–3) вмикаються такі ж ідеальні джерела (рис. 2.11, б). Два паралельно увімкнених і протилежно спрямованих ідеальних джерел струму компенсують одне одного, і тому їх можна виключити. Внаслідок цього схема матиме вигляд, як на рис. 2.11, в. В отриманій схемі відсутні ідеальні джерела струму.

На завершення розглянемо приклад, у якому використовуються основні прийоми еквівалентних перетворень.

**Приклад 2.4.** Використовуючи методи еквівалентних перетворень, визначити струм  $I_5$  у колі, схема якого зображена на рис. 2.12.

*Розв'язання.* Спочатку перетворимо «трикутник», що складається з опорів  $R_6, R_7, R_8$ , в еквівалентну «зірку»  $R_{0-1}, R_{0-2}, R_{0-3}$  і перенесемо ідеальне джерело струму. Схема матиме вигляд, як показано на рис. 2.13. Далі еквівалентно перетворимо реальні джерела струму (рис. 2.14, а) і послідовно ввімкнені елементи (рис. 2.14, б). Параметрами схеми, зображеної на рис. 2.14, б, є:

$$E_{e1} = E_1 + I_{дж} R_1; E_{e3} = E_3 - I_{дж} R_2;$$

$$R_{e1} = R_1 + R_3 + R_{0-1}; R_{e2} = R_4 + R_{0-2}; R_{e3} = R_2 + R_{0-3}.$$

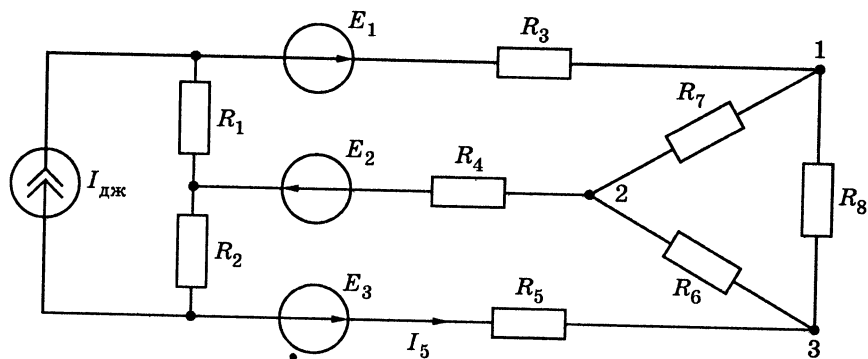


Рис. 2.12. До прикладу 2.4

Замінимо паралельно ввімкнені реальні джерела напруги ( $E_{e1}, R_{e1}; E_2, R_{e2}$ ) одним джерелом (рис. 2.15, а) з параметрами:

$$E_{e4} = \left( \frac{E_{e1}}{R_{e1}} - \frac{E_2}{R_{e2}} \right) R_{e4}; \quad R_{e4} = \frac{R_{e1}R_{e2}}{R_{e1} + R_{e2}}$$

Визначимо шуканий струм в отриманій одноконтурній схемі (рис. 2.15, б):

$$I_5 = \frac{E_{e3} - E_{e4}}{R_{e3} + R_{e4} + R_5} = \frac{E_e}{R_5 + R_e}$$

де  $E_e = E_{e3} - E_{e4}; R_e = R_{e3} + R_{e4}$ .

У даному прикладі для окремого випадку показано, що по відношенню до одного з опорів  $R_5$  іншу частину кола можна еквівалентно замінити реальним джерелом з параметрами  $E_e$  і  $R_e$  (рис. 2.15, б). Така заміна є основою методу еквівалентного генератора (підрозд. 2.7).

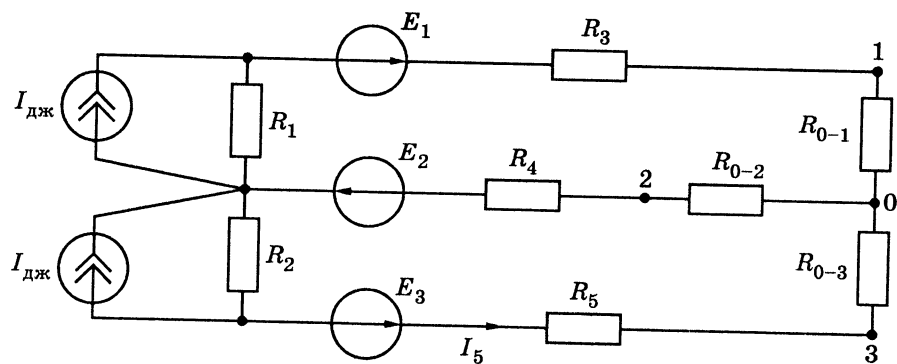


Рис. 2.13. До прикладу 2.4

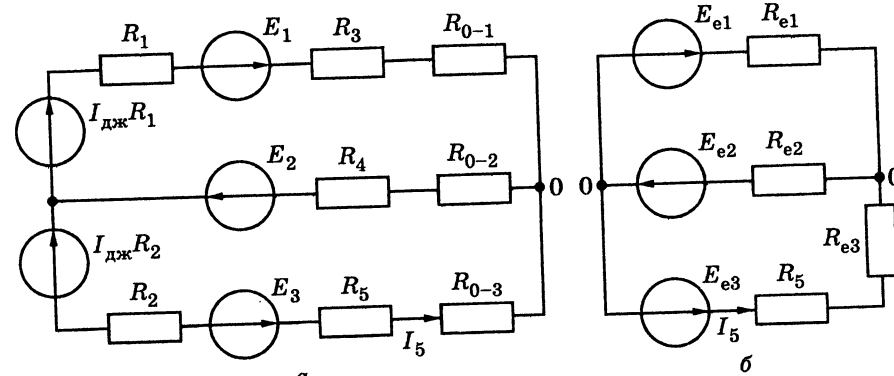


Рис. 2.14. До прикладу 2.4

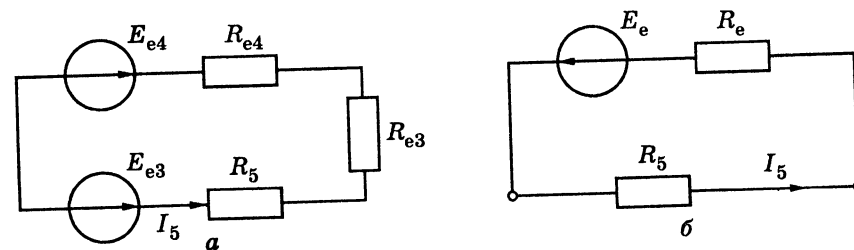


Рис. 2.15. До прикладу 2.4

Прийоми еквівалентних перетворень зведено до табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Прийоми еквівалентних перетворень

Вид перетворення	Вихідна схема	Еквівалентна схема	Розрахункові формули
Послідовне з'єднання			$R_e = \sum_{k=1}^n R_k$
Паралельне з'єднання			$G_e = \sum_{k=1}^n G_k$
«Трикутник» ↓ «Зірка»			$R_{0-1} = \frac{R_{1-2}R_{3-1}}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}$ $R_{0-2} = \frac{R_{2-3}R_{1-2}}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}$ $R_{0-3} = \frac{R_{3-1}R_{2-3}}{R_{1-2} + R_{2-3} + R_{3-1}}$

Вид перетворення	Вихідна схема	Еквівалентна схема	Розрахункові формули
«Зірка» ↓ «Трикутник»			$R_{1-2} = R_{0-1} + R_{0-2} + \frac{R_{0-1}R_{0-2}}{R_{0-3}}$ $R_{2-3} = R_{0-2} + R_{0-3} + \frac{R_{0-2}R_{0-3}}{R_{0-1}}$ $R_{3-1} = R_{0-1} + R_{0-3} + \frac{R_{0-1}R_{0-3}}{R_{0-2}}$
Заміна джерела струму джерелом напруги			$E = I_{дж} / G_i$ $R_i = 1 / G_i$
Заміна джерела напруги джерелом струму			$I_{дж} = E / R_i$ $G_i = 1 / R_i$
Заміна паралельно з'єднаних джерел напруги одним джерелом			$E_e = \frac{\sum_{k=1}^n G_k E_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$ <p>алгебраїчна сума</p> $G_e = \sum_{k=1}^n G_k$
Заміна послідовно з'єднаних джерел струму одним джерелом			$I_{дже} = \frac{\sum_{k=1}^n R_k I_{джk}}{\sum_{k=1}^n R_k}$ <p>алгебраїчна сума</p> $R_e = \sum_{k=1}^n R_k$

### 2.3. Метод рівнянь Кірхгофа

Метод рівнянь Кірхгофа полягає у складанні необхідної і достатньої кількості рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа і подальшому їх розв'язанні.

Якщо скласти рівняння за першим законом Кірхгофа для всіх вузлів схеми, то в отриману систему рівнянь (у разі вибору одного і того ж правила знаків) кожний зі струмів увійде двічі, але з різними знаками. Тому сума складених рівнянь дорівнюватиме нулю, а це означає, що система рівнянь є залежною. Наприклад, для кола, схема якого зображена на рис. 2.16, система рівнянь за першим законом Кірхгофа, котра складена для всіх вузлів за одним і тим же правилом знаків (струми, направлені до вузла, входять у рівняння зі знаком плюс, а струми, направлені від вузла, — зі знаком мінус), має вигляд:

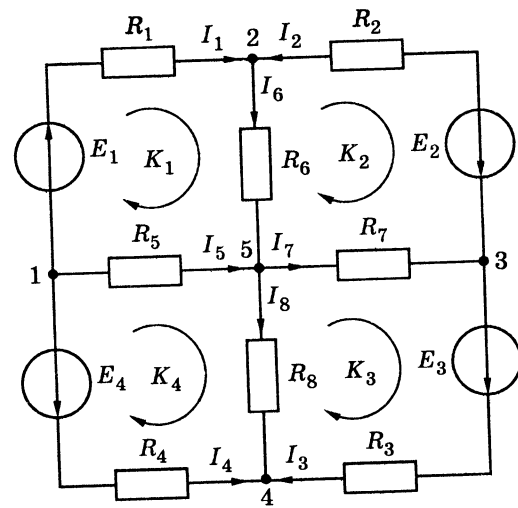


Рис. 2.16. Схема кола для обґрунтування методу рівнянь Кірхгофа

$$\begin{aligned}
 &\text{для вузла 1 } -I_1 - I_5 - I_4 = 0; \\
 &\text{для вузла 2 } I_1 - I_6 + I_2 = 0; \\
 &\text{для вузла 3 } -I_2 - I_3 + I_7 = 0; \\
 &\text{для вузла 4 } I_3 + I_4 + I_8 = 0; \\
 &\text{для вузла 5 } I_5 + I_6 - I_7 - I_8 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Сума лівих частин усіх рівнянь в отриманій системі (2.15) дорівнює нулю, а сума рівнянь для будь-якого з чотирьох вузлів призводить до рівняння для виключеного п'ятого вузла. Це означає, що кількість незалежних рівнянь  $N_{ІЗ.К}$ , складених згідно з першим законом Кірхгофа, на одиницю менша кількості вузлів схеми  $N_{вз}$ :

$$N_{ІЗ.К} = N_{вз} - 1.$$



Кількість контурів  $N_{\text{ПЗ.К}}$ , необхідна для складання рівнянь згідно з другим законом Кірхгофа, має доповнювати кількість рівнянь  $N_{\text{ІЗ.К}}$  до кількості невідомих струмів, котра дорівнює кількості віток  $N_{\text{В}}$ , тобто  $N_{\text{ІЗ.К}} + N_{\text{ПЗ.К}} = N_{\text{В}}$ .

Кількість незалежних рівнянь, які складаються за другим законом Кірхгофа, становить:

$$N_{\text{ПЗ.К}} = N_{\text{В}} - N_{\text{ІЗ.К}} = N_{\text{В}} - (N_{\text{ВЗ}} - 1) = N_{\text{В}} - N_{\text{ВЗ}} + 1.$$

Рівняння за другим законом Кірхгофа необхідно складати для так званих незалежних контурів.

Вибір незалежних контурів у загальному випадку є неоднозначною задачею. Незалежні контури мають відрізнятися один від одного хоча б однією віткою. Наприклад, чотири контури, вказані на рис. 2.16 ( $N_{\text{ПЗ.К}} = N_{\text{В}} - N_{\text{ІЗ.К}} = 8 - 4 = 4$ ), є незалежними.

Щоб вибрати незалежні контури, можна використати будь-яке з дерев графа кола, по чергово додаючи до нього головні вітки. Як приклад на рис. 2.17 показані два варіанти вибору незалежних контурів з використанням дерев графа для розглядуваного кола. Древа графа на рис. 2.17 зображені суцільними лініями, а головні вітки графа — пунктирними лініями. Контури, зображені на рис. 2.17, а, відповідають контурам, які вибрані на рис. 2.16. На рис. 2.17, б показаний інший варіант вибору незалежних контурів для розглядуваного кола.

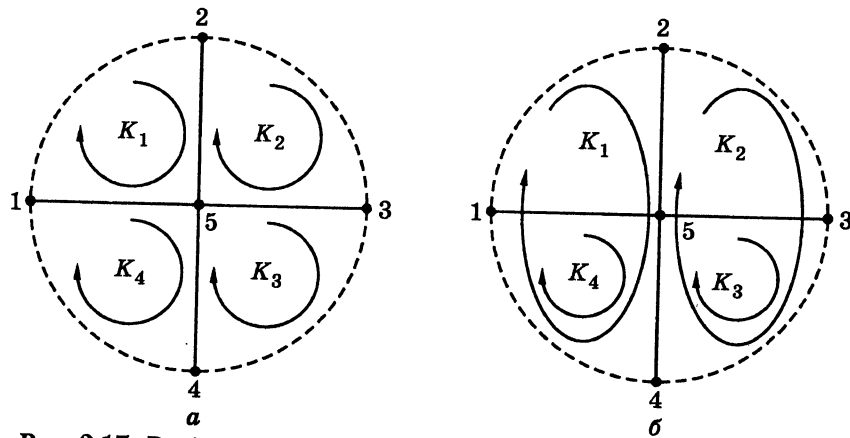


Рис. 2.17. Варіанти вибору незалежних контурів з використанням дерев графа для кола, схема якого зображена на рис. 2.16

Для вибраних на рис. 2.16 контурів ( $K_1 \dots K_4$ ) і напрямів обходу в них система рівнянь за другим законом Кірхгофа матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \text{для контуру } K_1 (1-2-5-1) \quad R_1 I_1 + R_6 I_6 - R_5 I_5 &= E_1; \\ \text{для контуру } K_2 (2-3-5-2) \quad -R_2 I_2 - R_7 I_7 - R_6 I_6 &= E_2; \\ \text{для контуру } K_3 (3-4-5-3) \quad R_3 I_3 - R_8 I_8 + R_7 I_7 &= E_3; \\ \text{для контуру } K_4 (1-5-4-1) \quad R_5 I_5 + R_8 I_8 - R_4 I_4 &= -E_4. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Розв'язуючи спільну систему рівнянь, що складається з (2.15) без рівняння для вузла 5 і (2.16), можна знайти всі або необхідну частину струмів даного кола.

Для запису і розв'язання систем рівнянь за методом рівнянь Кірхгофа можна використовувати прийоми матричної алгебри. Для цього доданки у рівняннях спільної системи розташовують у порядку зростання номерів струмів і формально додають відсутні в рівняннях струми з нульовими значеннями співмножників. Для даного прикладу записана у такий спосіб система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} -I_1 + 0I_2 + 0I_3 - I_4 - I_5 + 0I_6 + 0I_7 + 0I_8 = 0; \\ I_1 + I_2 + 0I_3 + 0I_4 + 0I_5 - I_6 + 0I_7 + 0I_8 = 0; \\ 0I_1 - I_2 - I_3 + 0I_4 + 0I_5 + 0I_6 + I_7 + 0I_8 = 0; \\ 0I_1 + 0I_2 + I_3 + I_4 + 0I_5 + 0I_6 + 0I_7 + I_8 = 0; \\ R_1 I_1 + 0I_2 + 0I_3 + 0I_4 - R_5 I_5 + R_6 I_6 + 0I_7 + 0I_8 = E_1; \\ 0I_1 - R_2 I_2 + 0I_3 + 0I_4 + 0I_5 - R_6 I_6 - R_7 I_7 + 0I_8 = E_2; \\ 0I_1 + 0I_2 + R_3 I_3 + 0I_4 + 0I_5 + 0I_6 + R_7 I_7 - R_8 I_8 = E_3; \\ 0I_1 + 0I_2 + 0I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 + 0I_6 + 0I_7 + R_8 I_8 = -E_4. \end{cases} \quad (2.17)$$

Систему рівнянь (2.17) можна подати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & R_6 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & -R_6 & -R_7 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & R_7 & -R_8 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & 0 & 0 & R_8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ -E_4 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Права частина рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа, дорівнює нулю. Тому формально можна прийняти для коефіцієнтів у лівій частині цих рівнянь, що мають значення +1, -1 або 0, розмірність опору, а для нульових значень у правій частині

рівнянь — розмірність напруги. Це дозволяє стисло записати матричну систему (2.18) у вигляді:

$$(R_{ij})(I_i) = (E_i), \quad (2.19)$$

де  $(R_{ij})$  — квадратна матриця узагальнених опорів методу рівнянь Кірхгофа;  $(I_i)$  — матриця-стовпець невідомих струмів;  $(E_i)$  — матриця-стовпець узагальнених ЕРС методу рівнянь Кірхгофа;  $i, j$  — відповідно, номери рядків і стовпців елементів матриць.

Розгляд понять узагальнених опорів і ЕРС пов'язаний зі штучним перетворенням розмірності складових рівнянь, утворених за першим законом Кірхгофа, про що згадувалось вище.

Матрицю струмів у рівнянні (2.19) можна знайти за допомогою оберненої матриці узагальнених опорів:

$$(I_i) = (R_{ij})^{-1}(E_i). \quad (2.20)$$

Перевагою використання матричної алгебри, як у методі рівнянь Кірхгофа, так і в інших методах аналізу кіл, є компактність записів систем рівнянь у вигляді (2.19) та їх розв'язку (2.20), а також зручність розрахунків з використанням ЕОМ. Однак застосування матриць не скорочує обсяг обчислень.

Вітки з ідеальними джерелами струму враховують лише при складанні рівнянь за першим законом Кірхгофа. При цьому незалежні контури, вибрані для запису рівнянь за другим законом Кірхгофа, не повинні містити вітки з ідеальними джерелами струму (приклад 2.5).

Щоб перевірити розраховані струми і напруги у колі, рекомендується застосовувати рівняння балансу потужностей, засноване на законі збереження енергії у колі. Відповідно до цього рівняння сума потужностей опорів дорівнює алгебраїчній сумі потужностей джерел. Рівняння балансу потужностей для кола, що містить  $N_R$  опорів,  $N_E$  джерел напруги і  $N_I$  джерел струму, має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{N_R} R_k I_k^2 = \sum_{l=1}^{N_E} E_l I_l + \sum_{m=1}^{N_I} I_{дж_m} U_{дж_m}. \quad (2.21)$$

(алгебраїчні суми)

У правій частині рівняння (2.21) потужності джерел можуть бути як додатними, так і від'ємними. Додатне значення потужності джерела означає, що воно віддає енергію, від'ємне — споживає. Потужності джерел є додатними величинами, якщо у джерела напруги напрями ЕРС і струму збігаються, а у джерела струму

напрями напруги  $U_{дж}$  і струму  $I_{дж}$  протилежні. В інших випадках потужності джерел від'ємні. Наприклад, рівняння балансу потужностей для схеми, зображеної на рис. 2.16, записується у вигляді:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 + R_7 I_7^2 + R_8 I_8^2 = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4.$$

**Приклад 2.5.** Розрахувати струми у колі, схема якого зображена на рис. 2.18, методом рівнянь Кірхгофа для заданих параметрів елементів:  $I_{дж} = 10 \text{ мА}$ ;  $E_1 = 10 \text{ В}$ ;  $E_2 = 40 \text{ В}$ ;  $E_3 = 50 \text{ В}$ ;  $R_1 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 10 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 5 \text{ кОм}$ ;  $R_4 = 11 \text{ кОм}$ ;  $R_5 = 5 \text{ кОм}$ .

*Розв'язання.* Схема містить п'ять віток з невідомими струмами ( $N_v = 5$ ) і чотири вузли ( $N_{вз} = 4$ ). Кількість незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа становитиме  $N_{ІЗ.К} = N_{вз} - 1 = 4 - 1 = 3$ , а за другим законом Кірхгофа —  $N_{ІІЗ.К} = N_v - N_{ІЗ.К} = 5 - 3 = 2$ .

У розглядуваному колі є ідеальне джерело струму. Тому, вибираючи незалежні контури для складання рівнянь за другим законом Кірхгофа, вітку з цим джерелом не слід включати до контурів. Вибрані контури  $K_1$  і  $K_2$  і напрями обходу в них показані на рис. 2.18.

Вибираємо довільно умовні позитивні напрями струмів ( $I_1 \dots I_5$ ) у вітках схеми (рис. 2.18).

Для вузлів 1, 2, 3 і вибраних незалежних контурів  $K_1$  і  $K_2$  складемо рівняння за законами Кірхгофа:

- для вузла 1  $-I_1 + I_4 + I_{дж} = 0;$  (2.22)

- для вузла 2  $-I_2 - I_4 - I_5 = 0;$  (2.23)

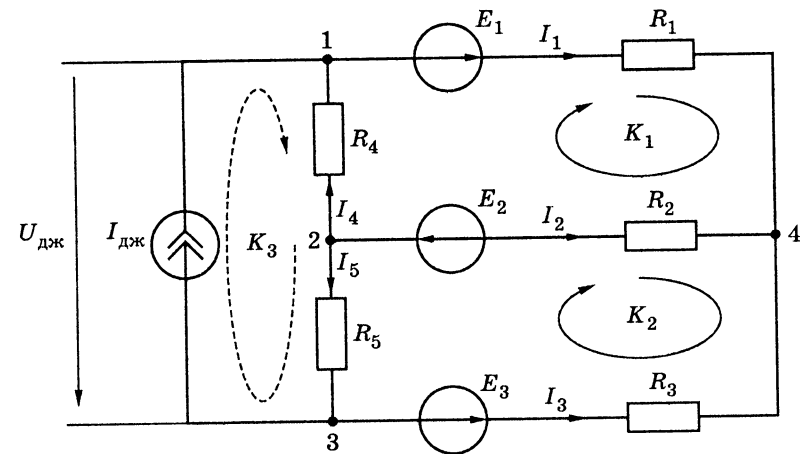


Рис. 2.18. До прикладу 2.5

$$\bullet \text{ для вузла 3} \quad -I_3 + I_5 - I_{\text{дж}} = 0; \quad (2.24)$$

$$\bullet \text{ для контуру } K_1 \quad R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_4 I_4 = E_1 + E_2; \quad (2.25)$$

$$\bullet \text{ для контуру } K_2 \quad R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_5 I_5 = -E_2 - E_3. \quad (2.26)$$

Виразимо струми  $I_4, I_5$  і  $I_2$  з рівнянь (2.22)–(2.24) через струми  $I_1$  і  $I_3$ :

$$I_4 = I_1 - I_{\text{дж}}; \quad I_5 = I_3 + I_{\text{дж}}; \quad I_2 = -I_4 - I_5 = -I_1 - I_3$$

і підставимо ці вирази в рівняння (2.25) і (2.26). В результаті отримаємо систему рівнянь з двома невідомими струмами  $I_1$  і  $I_3$ :

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2(I_1 + I_3) + R_4(I_1 - I_{\text{дж}}) = E_1 + E_2; \\ R_2(I_1 + I_3) + R_3 I_3 + R_5(I_3 + I_{\text{дж}}) = E_2 + E_3. \end{cases} \quad (2.27)$$

Перетворимо систему рівнянь (2.27), підставимо до неї числові значення параметрів і знайдемо струми  $I_1$  і  $I_3$  за допомогою визначників:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_4)I_1 + R_2 I_3 = E_1 + E_2 + R_4 I_{\text{дж}}; \\ R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_3 = E_2 + E_3 - R_5 I_{\text{дж}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 \cdot 10^3 \cdot I_1 + 10 \cdot 10^3 \cdot I_3 = 160 \text{ В}; \\ 10 \cdot 10^3 \cdot I_1 + 20 \cdot 10^3 \cdot I_3 = 40 \text{ В}; \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{10^3 \begin{vmatrix} 160 & 10 \\ 40 & 20 \end{vmatrix}}{10^6 \begin{vmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{2800 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 7 \text{ мА};$$

$$I_3 = \frac{10^3 \begin{vmatrix} 25 & 160 \\ 10 & 40 \end{vmatrix}}{10^6 \begin{vmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{-600 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^6} = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -1,5 \text{ мА}.$$

Струми  $I_2, I_4$  і  $I_5$  знайдемо через струми  $I_1$  і  $I_3$ :

$$I_4 = I_1 - I_{\text{дж}} = 7 - 10 = -3 \text{ мА}; \quad I_5 = I_3 + I_{\text{дж}} = -1,5 + 10 = 8,5 \text{ мА};$$

$$I_2 = -I_1 - I_3 = -7 + 1,5 = -5,5 \text{ мА}.$$

Від'ємні значення струмів  $I_2$  і  $I_4$  вказують, що їх дійсні напрями протилежні вибраним.

Щоб перевірити розв'язок, складемо рівняння балансу потужностей:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 + U_{\text{дж}} I_{\text{дж}}, \quad (2.28)$$

де  $U_{\text{дж}}$  — напруга на затискачах джерела струму (рис. 2.18).

Напругу  $U_{\text{дж}}$  знайдемо на основі другого закону Кірхгофа для контуру  $K_3$ , зображеного на рис. 2.18 пунктиром:

$$R_5 I_5 - U_{\text{дж}} - R_4 I_4 = 0,$$

звідки  $U_{\text{дж}} = R_5 I_5 - R_4 I_4 = 5 \cdot 8,5 + 11 \cdot 3 = 75,5 \text{ В}$ .

Розраховуючи баланс потужностей, у ліву і праву частини рівняння (2.28) задані значення опорів підставимо в кілоомах ( $10^3 \text{ Ом}$ ), а знайдені значення струмів — у міліамперах ( $10^{-3} \text{ А}$ ). При цьому потужності, що входять до складу рівняння (2.28), вимірюватимуться у міліватах ( $10^{-3} \text{ Вт}$ ).

Розрахуємо баланс потужностей:

$$\begin{aligned} R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = \\ = 4 \cdot 7^2 + 10 \cdot (-5,5)^2 + 5 \cdot (-1,5)^2 + 11 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot 8,5^2 = 970 \text{ мВт}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 + U_{\text{дж}} I_{\text{дж}} = \\ = 10 \cdot 7 - 40 \cdot (-5,5) + 50 \cdot (-1,5) + 75,5 \cdot 10 = 970 \text{ мВт}. \end{aligned}$$

Від'ємне значення потужності джерела напруги  $E_3$  вказує на те, що це джерело не віддає, а споживає енергію.

Метод рівнянь Кірхгофа є найзагальнішим методом, що дозволяє розраховувати як лінійні, так і нелінійні кола. Недолік методу пов'язаний з необхідністю складання і розв'язання порівняно великої кількості рівнянь. Для лінійних кіл частіше застосовуються методи контурних струмів і вузлових напруг, які ґрунтуються на складанні рівнянь відповідно тільки за першим або тільки за другим законом Кірхгофа.

## 2.4. Метод контурних струмів

Метод контурних струмів дозволяє обмежитись записом рівнянь тільки за другим законом Кірхгофа. Ці рівняння складають для незалежних контурів, використовуючи так звані контурні струми.

Пояснити значення контурних струмів можна на прикладі графа кола і одного з його дерев, зображених на рис. 2.19. У розгляді ваному колі — вісім струмів ( $I_1 \dots I_8$ ), але достатньо виміряти (див. амперметри на рис. 2.19, а) або розрахувати певну частину з них (наприклад, струми  $I_1 \dots I_4$  головних віток дерева графа, зображеного на рис. 2.19, б), щоб із застосуванням першого закону Кірхгофа знайти інші струми:

$$I_5 = I_1 - I_2; \quad I_6 = I_3 - I_2; \quad I_7 = I_4 - I_3; \quad I_8 = I_1 - I_4.$$

Можна показати, що такими заздалегідь вимірними або розрахованими струмами можуть бути струми головних віток та інших

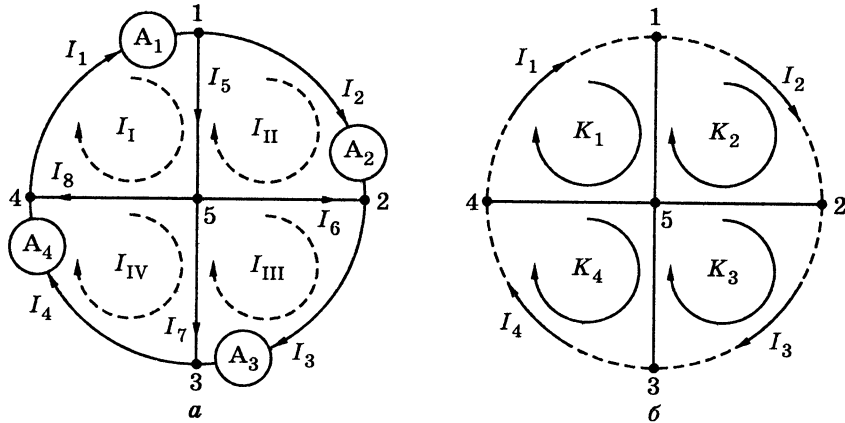


Рис. 2.19. Приклад графа кола для пояснення поняття контурних струмів

дерев графа кола. Струми головних віток, що дозволяють розрахувати інші струми на основі першого закону Кірхгофа, називаються *контурними струмами*.

Контурні струми є розрахунковими струмами, які збігаються зі струмами головних віток графа й умовно обходять всі вітки відповідного контуру. Кількість контурних струмів дорівнює кількості незалежних рівнянь, що складаються за другим законом Кірхгофа ( $N_{ПЗ.К}$ ). Контурні струми прийнято нумерувати римськими цифрами. На рис. 2.19, а контурні струми ( $I_I \dots I_{IV}$ ) показано пунктирними лініями.

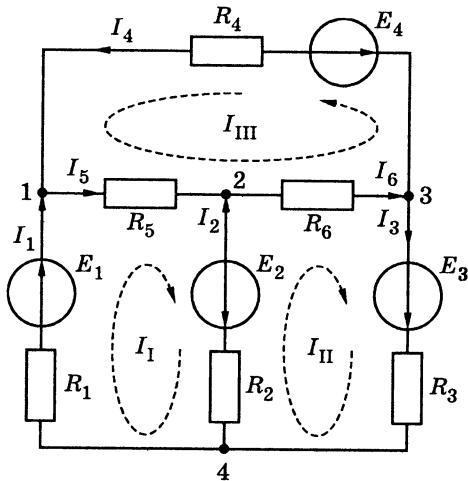


Рис. 2.20. Приклад кола для обґрунтування методу контурних струмів

Рівняння за другим законом Кірхгофа, складені для контурних струмів, утворюють систему рівнянь методу контурних струмів.

Обґрунтуємо метод контурних струмів на прикладі кола, схема якого з вибраними контурними струмами  $I_I, I_{II}$  і  $I_{III}$  показана на рис. 2.20.

Рівняння за другим законом Кірхгофа для вибраних контурів і напрямів обходу, які збігаються з напрямками контурних струмів, записуються так:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_2 I_2 = E_1 + E_2 & \text{(для контуру 1);} \\ R_2 I_2 + R_6 I_6 + R_3 I_3 = E_3 - E_2 & \text{(для контуру 2);} \\ R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = -E_4 & \text{(для контуру 3).} \end{cases} \quad (2.29)$$

Струми  $I_1, I_3$  і  $I_4$  збігаються з відповідними контурними струмами:

$$I_1 = I_I; \quad I_3 = I_{II}; \quad I_4 = I_{III}, \quad (2.30)$$

а інші струми віток можна виразити через контурні струми згідно з першим законом Кірхгофа:

$$I_2 = I_3 - I_1 = I_{II} - I_I; \quad I_5 = I_1 + I_4 = I_I + I_{III}; \quad I_6 = I_3 + I_4 = I_{II} + I_{III}. \quad (2.31)$$

Система (2.29) після підстановки до неї виразів (2.30) і (2.31) матиме вигляд:

$$\begin{cases} R_1 I_I + R_5 (I_I + I_{III}) - R_2 (I_{II} - I_I) = E_1 + E_2; \\ R_2 (I_{II} - I_I) + R_6 (I_{II} + I_{III}) + R_3 I_{II} = E_3 - E_2; \\ R_4 I_{III} + R_5 (I_I + I_{III}) + R_6 (I_{II} + I_{III}) = -E_4. \end{cases} \quad (2.32)$$

Групування подібних членів у лівих частинах рівнянь системи (2.32) призводить до стандартної форми запису системи за методом контурних струмів:

$$\begin{cases} (R_1 + R_5 + R_2) I_I - R_2 I_{II} + R_5 I_{III} = E_1 + E_2; \\ -R_2 I_I + (R_2 + R_6 + R_3) I_{II} + R_6 I_{III} = E_3 - E_2; \\ R_5 I_I + R_6 I_{II} + (R_4 + R_5 + R_6) I_{III} = -E_4. \end{cases} \quad (2.33)$$

Аналіз рівнянь системи (2.33) дозволяє встановити такі закономірності:

- коефіцієнт при контурному струмі, номер якого збігається з номером контуру, для якого складається рівняння, дорівнює сумі опорів цього контуру;
- коефіцієнтами при контурних струмах, номери яких не збігаються з номером контуру, для якого складається рівняння,

є опори віток, що належать одночасно двом контурам; знак цих коефіцієнтів залежить від того, однаково чи протилежно направлені контурні струми у цих вітках;

- праві частини рівнянь системи (2.33) є алгебраїчними сумами ЕРС джерел напруги відповідно до другого закону Кірхгофа.

Вказані закономірності визначають поняття: власний опір контуру, взаємний опір контурів і контурна ЕРС.

*Власним опором контуру* називається сума опорів усіх віток, які утворюють контур. Власні опори завжди додатні і позначаються подвійними індексами, які збігаються з номером контуру ( $R_{11}$ ,  $R_{22}$  та ін.).

*Взаємним опором контурів* називається опір вітки, яка є спільною для двох або більше контурних струмів. Взаємні опори позначаються подвійним індексом, утвореним номерами контурів, для яких цей опір є спільним ( $R_{12} = R_{21}$ ;  $R_{23} = R_{32}$  та ін.). Взаємний опір додатний, якщо контурні струми в ньому направлені протилежно, і від'ємний, якщо контурні струми в ньому направлені протилежно.

*Контурною ЕРС* називається алгебраїчна сума ЕРС джерел, увімкнених у вітки контуру. Знаки, з якими ЕРС джерел входять до складу контурної ЕРС, визначаються відповідно до вибраного напрямку контурного струму. Індеси контурних ЕРС прийнято записувати римськими цифрами у відповідності до номерів контурів ( $E_I$ ,  $E_{II}$  та ін.).

З урахуванням введених понять система рівнянь (2.33) перетворюється так:

$$\begin{cases} R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} = E_I; \\ R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + R_{23}I_{III} = E_{II}; \\ R_{31}I_I + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} = E_{III}, \end{cases} \quad (2.34)$$

де  $R_{11} = R_1 + R_5 + R_2$ ,  $R_{22} = R_2 + R_6 + R_3$ ,  $R_{33} = R_4 + R_5 + R_6$  — власні опори контурів;  $R_{12} = R_{21} = -R_2$ ,  $R_{13} = R_{31} = R_5$ ,  $R_{23} = R_{32} = R_6$  — взаємні опори контурів;  $E_I = E_1 + E_2$ ,  $E_{II} = E_3 - E_2$ ,  $E_{III} = -E_4$  — контурні ЕРС.

Упорядкована форма запису системи рівнянь за методом контурних струмів (2.34) є зручною для розв'язування за допомогою визначників:

$$\begin{cases} I_I = \frac{\begin{vmatrix} E_I & R_{12} & R_{13} \\ E_{II} & R_{22} & R_{23} \\ E_{III} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} E_I + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} E_{II} + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} E_{III}; \\ I_{II} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & E_I & R_{13} \\ R_{21} & E_{II} & R_{23} \\ R_{31} & E_{III} & R_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_R} E_I + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_R} E_{II} + \frac{\Delta_{32}}{\Delta_R} E_{III}; \\ I_{III} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_I \\ R_{21} & R_{22} & E_{II} \\ R_{31} & R_{32} & E_{III} \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_R} E_I + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_R} E_{II} + \frac{\Delta_{33}}{\Delta_R} E_{III}, \end{cases} \quad (2.35)$$

де  $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{12} = \Delta_{21}, \Delta_{13} = \Delta_{31}, \Delta_{23} = \Delta_{32}$  — алгебраїчні доповнення, формули для обчислення яких наведено в табл. 2.2;

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \text{ — визначник матриці опорів.}$$

Таблиця 2.2

Співвідношення для обчислення алгебраїчних доповнень

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$	$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} R_{21} & R_{23} \\ R_{31} & R_{33} \end{vmatrix}$	$(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}$
$i=2$	$(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$	$(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{13} \\ R_{31} & R_{33} \end{vmatrix}$	$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}$
$i=3$	$(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{22} & R_{23} \end{vmatrix}$	$(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{13} \\ R_{21} & R_{23} \end{vmatrix}$	$(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$

Система (2.34) є стандартною формою запису рівнянь за методом контурних струмів для будь-якого кола з трьома незалежними контурами. Аналогічну форму запису мають системи рівнянь для кіл з іншою кількістю незалежних контурів. При цьому змінюється тільки кількість рівнянь і кількість доданків у лівій частині

цих рівнянь. У загальному випадку для кола з  $N$  незалежними контурами система рівнянь за методом контурних струмів може бути записана так:

$$\begin{cases} R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + \dots + R_{1N}I_N = E_I; \\ R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + \dots + R_{2N}I_N = E_{II}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_{N1}I_I + R_{N2}I_{II} + \dots + R_{NN}I_N = E_N. \end{cases} \quad (2.36)$$

У матричній формі систему (2.36) можна записати у повному і стислому вигляді, відповідно:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ \dots \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_I \\ E_{II} \\ \dots \\ E_N \end{pmatrix}; \quad (2.37)$$

$$(R_{ij})(I_i) = (E_i), \quad (2.38)$$

де  $(R_{ij})$  — квадратна матриця власних і взаємних опорів контурів або скорочено — матриця опорів;  $(I_i)$  — матриця-стовпець контурних струмів;  $(E_i)$  — матриця-стовпець контурних ЕРС;  $i, j$  — відповідно номери рядка і стовпця елементів матриць.

Матриця опорів симетрична, оскільки  $R_{ij} = R_{ji}$ . На головній діагоналі цієї матриці розташовані власні опори контурів  $R_{ii}$ .

Розв’язок матричних рівнянь (2.37), (2.38) відносно невідомої матриці контурних струмів має вигляд:

$$(I_i) = (R_{ij})^{-1}(E_i), \quad (2.39)$$

де  $(R_{ij})^{-1}$  — обернена матриця опорів.

Аналізуючи кола методом контурних струмів, не обов’язково виводити рівняння так, як це було зроблено вище. Розрахунок кіл методом контурних струмів рекомендується виконувати за такою методикою:

- провести заміну реальних джерел струму (якщо вони є у колі) на джерела напруги;
- вибрати незалежні контури і напрями контурних струмів у них;
- визначити власні та взаємні опори контурів, а також контурні ЕРС;

- записати і розв’язати стандартну систему рівнянь методу контурних струмів;
- за знайденими контурними струмами знайти за допомогою першого закону Кірхгофа струми в інших вітках схеми.

Складання системи рівнянь також не є обов’язковим. Маючи певні навички, можна безпосередньо використовувати співвідношення (2.35) або (2.39), тобто знаходити контурні струми із застосуванням визначників або матриць.

Якщо у колі є ідеальні джерела струму, застосування методу контурних струмів має деякі особливості (див. приклад 2.7). Щоб вибрати незалежні контури, необхідно використати дерева графа так, щоб ідеальні джерела струму входили у головні вітки. У цьому випадку струми джерел дорівнюють відомим контурним струмам, а рівняння складаються і розв’язуються тільки для контурів, у яких контурні струми невідомі. При цьому до рівнянь включаються доданки, які враховують спади напруг, обумовлені відомими контурними струмами, що дорівнюють струмам ідеальних джерел.

**Приклад 2.6.** Методом контурних струмів визначити струми у вітках схеми, зображеної на рис. 2.21.

**Розв’язання.** У даному колі всі джерела є джерелами ЕРС, тому їх перетворювати не потрібно. Схема має чотири незалежних контури, в яких вибираємо контурні струми  $I_I \dots I_{IV}$ .

Визначаємо власні опори контурів і контурні ЕРС:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_5 + R_6; \\ R_{22} &= R_2 + R_6 + R_7; \\ R_{33} &= R_3 + R_7 + R_8; \\ R_{44} &= R_4 + R_5 + R_8; \\ E_I &= E_1; \quad E_{II} = -E_2; \\ E_{III} &= -E_3; \quad E_{IV} = E_4. \end{aligned}$$

Знаходимо взаємні опори контурів:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_{21} = -R_6; \quad R_{23} = R_{32} = -R_7; \\ R_{34} &= R_{43} = R_8; \quad R_{14} = R_{41} = R_5; \\ R_{13} &= R_{31} = 0; \quad R_{24} = R_{42} = 0; \end{aligned}$$

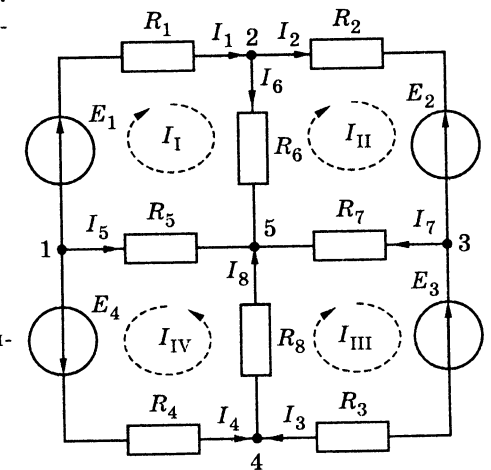


Рис. 2.21. До прикладу 2.6

Взаємні опори  $R_{12}, R_{21}, R_{23}, R_{32}$  — від'ємні величини, оскільки контурні струми в них спрямовані протилежно. У взаємних опорах  $R_{34}, R_{43}, R_{14}, R_{41}$  контурні струми спрямовані в один бік, тому ці опори додатні. Взаємні опори  $R_{13}, R_{31}, R_{24}, R_{42}$  дорівнюють нулю, оскільки відповідні контури (перший і третій; другий і четвертий) не мають спільних віток.

Не записуючи систему рівнянь, знаходимо контурні струми із застосуванням визначників:

$$I_I = \frac{\begin{vmatrix} E_I & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ E_{II} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ E_{III} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ E_{IV} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}}{\Delta_R}; \quad I_{II} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & E_I & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & E_{II} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & E_{III} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & E_{IV} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}}{\Delta_R};$$

$$I_{III} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_I & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & E_{II} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & E_{III} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & E_{IV} & R_{44} \end{vmatrix}}{\Delta_R}; \quad I_{IV} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & E_I \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & E_{II} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & E_{III} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & E_{IV} \end{vmatrix}}{\Delta_R};$$

де  $\Delta_R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}$  — визначник матриці опорів.

Використовуючи знайдені контурні струми, визначимо струми у вітках даної схеми для вибраних на рис. 2.21 умовних позитивних напрямів струмів:

$$I_1 = I_I; \quad I_2 = I_{II}; \quad I_3 = I_{III}; \quad I_4 = I_{IV}; \\ I_5 = -I_I - I_{IV}; \quad I_6 = I_I - I_{II}; \quad I_7 = I_{II} - I_{III}; \quad I_8 = I_{III} + I_{IV}.$$

**Приклад 2.7.** Методом контурних струмів розрахувати струми у колі, схема якого наведена у прикладі 2.5 ( $I_{дж} = 10$  мА;  $E_1 = 10$  В;  $E_2 = 40$  В;  $E_3 = 50$  В;  $R_1 = 4$  кОм;  $R_2 = 10$  кОм;  $R_3 = 5$  кОм;  $R_4 = 11$  кОм;  $R_5 = 5$  кОм).

*Розв'язання.* У даному колі є ідеальне джерело струму. Тому скористаємося відповідними рекомендаціями з вибору контурних струмів і складання рівнянь методом контурних струмів.

Виберемо контурні струми так, щоб один з них  $I_{III}$  збігся зі струмом  $I_{дж}$ . Для цього візьмемо таке дерево графа (рис. 2.22), щоб в одну з головних віток графа (вітка 1–3) було ввімкнено джерело струму. Пронумеруємо контурні струми так (рис. 2.23), щоб  $I_{III} = I_{дж}$ , і розрахуємо невідомі контурні струми  $I_I$  і  $I_{II}$ .

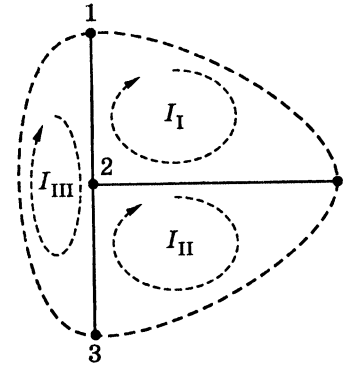


Рис. 2.22. До прикладу 2.7

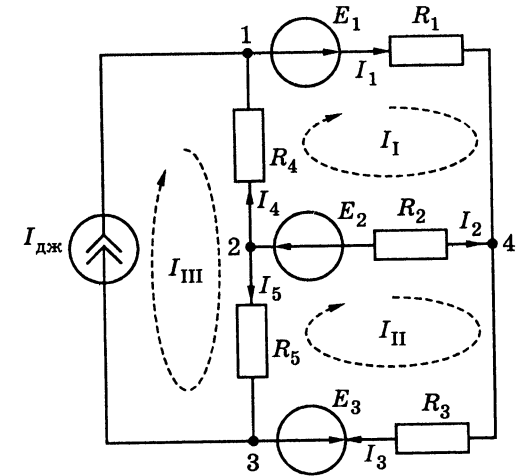


Рис. 2.23. До прикладу 2.7

Розрахуємо власні та взаємні опори, а також контурні ЕРС:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_4 = 4 + 10 + 11 = 25 \text{ кОм};$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5 = 10 + 5 + 5 = 20 \text{ кОм};$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -10 \text{ кОм}; \quad R_{13} = R_{31} = -R_4 = -11 \text{ кОм};$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -5 \text{ кОм};$$

$$E_I = E_1 + E_2 = 10 + 40 = 50 \text{ В}; \quad E_{II} = -E_2 - E_3 = -40 - 50 = -90 \text{ В}.$$

Складемо рівняння за методом контурних струмів для першого і другого контурів, враховуючи, що напруги на взаємних опорах  $R_{13}$  і  $R_{23}$  обумовлені контурним струмом  $I_{III}$ :

$$\begin{cases} R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} = E_I; \\ R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + R_{23}I_{III} = E_{II}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Підставляючи в систему рівнянь (2.40) знайдені власні та взаємні опори, контурні ЕРС і відоме значення контурного струму  $I_{III} = I_{дж} = 10$  мА, отримуємо:

$$\begin{cases} 25 \cdot 10^3 I_I - 10 \cdot 10^3 I_{II} = 50 + 11 \cdot 10 = 160 \text{ В}; \\ -10 \cdot 10^3 I_I + 20 \cdot 10^3 I_{II} = -90 + 5 \cdot 10 = -40 \text{ В}. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за допомогою визначників:

$$I_I = \frac{10^3 \begin{vmatrix} 160 & -10 \\ -40 & 20 \end{vmatrix}}{10^6 \begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{2800}{400} 10^{-3} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 7 \text{ мА};$$

$$I_{II} = \frac{10^3 \begin{vmatrix} 25 & 160 \\ -10 & -40 \end{vmatrix}}{10^6 \begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{600}{400} 10^{-3} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 1,5 \text{ А} = 1,5 \text{ мА}.$$

Використовуючи розраховані значення контурних струмів, визначимо струми у вітках схеми для вибраних умовних позитивних напрямів струмів (рис. 2.23):

$$I_1 = I_I = 7 \text{ мА}; I_2 = I_{II} - I_I = 1,5 - 7 = -5,5 \text{ мА}; I_3 = I_{II} = 1,5 \text{ мА};$$

$$I_4 = I_I - I_{III} = 7 - 10 = -3 \text{ мА}; I_5 = I_{III} - I_{II} = 10 - 1,5 = 8,5 \text{ мА}.$$

Від'ємні значення струмів  $I_2$  і  $I_4$  показують, що їх дійсні напрями протилежні вибраним.

Отже, результати розрахунків збігаються з результатами, отриманими у прикладі 2.5. Відмінність у знаку струму  $I_3$  пояснюється відмінністю у виборі напрямів для цього струму в прикладах 2.7 і 2.5. Зазначимо також, що система рівнянь (2.40) записана відповідно до методу контурних струмів безпосередньо за схемою, в той час як аналогічна система рівнянь (2.27) у прикладі 2.5 отримана внаслідок перетворення рівнянь (2.22)–(2.26). Отже, метод контурних струмів є економнішим, оскільки потребує меншої кількості операцій.

## 2.5. Метод вузлових напруг

Метод вузлових напруг полягає у складанні та розв'язанні рівнянь за першим законом Кірхгофа.

У даному методі для складання рівнянь використовуються так звані *вузлові напруги*. Введемо поняття вузлової напруги на прикладі графа кола, зображеного на рис. 2.24. Один з вузлів графа вибрано як *базисний вузол* або «база» і позначений індексом «0». Інші вузли пронумеровані цифрами 1...4. Напруги між вузлами позначені двома індексами, що повторюють номери відповідних вузлів графа.

Напруги  $U_{10}, U_{20}, U_{30}, U_{40}$  є незалежними, оскільки вони дозволяють визначити всі інші

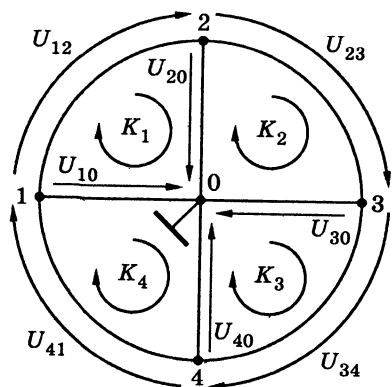


Рис. 2.24. До введення поняття вузлової напруги

напруги відповідно до другого закону Кірхгофа для контурів  $K_1 \dots K_4$ :

$$U_{12} = U_{10} - U_{20}; U_{23} = U_{20} - U_{30};$$

$$U_{34} = U_{30} - U_{40}; U_{41} = U_{40} - U_{10}.$$

У разі вибору іншого базисного вузла незалежні напруги будуть іншими, але їх кількість для даного кола, як і раніше, дорівнюватиме чотирьом.

Ці незалежні напруги прийнято називати вузловими напругами. Отже, *вузлові напруги* — це напруги вузлів відносно базисного вузла. Для струмів кола, які знаходять через вузлові напруги із застосуванням закону Ома, можна скласти рівняння згідно з першим законом Кірхгофа для вузлів 1...4. Така система з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими вузловими напругами є системою рівнянь методу вузлових напруг.

Якщо покласти, що потенціал базисного вузла дорівнює нулю (на рис. 2.24 це позначено знаком «заземлення»), вузлові напруги дорівнюватимуть потенціалам відповідних вузлів. Тому метод вузлових напруг іноді називають *методом вузлових потенціалів*.

Метод вузлових напруг, для полегшення його розуміння, доцільно розглянути на прикладі. Як такий приклад використаємо коло, розглянуте вище для обґрунтування методу контурних струмів (див. рис. 2.20). Застосовуючи метод вузлових напруг, реальні джерела напруги необхідно перетворити у джерела струму, а замість опорів ввести їх провідності. Після цього схема кола матиме вигляд, зображений на рис. 2.25. Один з вузлів схеми вибраний як базисний. Вузлові напруги  $U_{10}, U_{20}, U_{30}$  і струми  $I_1, I_2, I_3$  у вітках, увімкнених до «бази», вибрано такими, що вони спрямовані до базисного вузла. Напрями інших струмів вибрано довільними.

Застосовуючи закон Ома, можна записати струми у вітках даного кола через напруги віток:

$$I_1 = G_1 U_{10}; I_2 = G_2 U_{20}; I_3 = G_3 U_{30}; \quad (2.41)$$

$$I_4 = G_4 U_{31}; I_5 = G_5 U_{12}; I_6 = G_6 U_{23}. \quad (2.42)$$

Якщо напруги  $U_{31}, U_{12}, U_{23}$  виразити через вузлові напруги

$$U_{31} = U_{30} - U_{10}; U_{12} = U_{10} - U_{20}; U_{23} = U_{20} - U_{30}$$



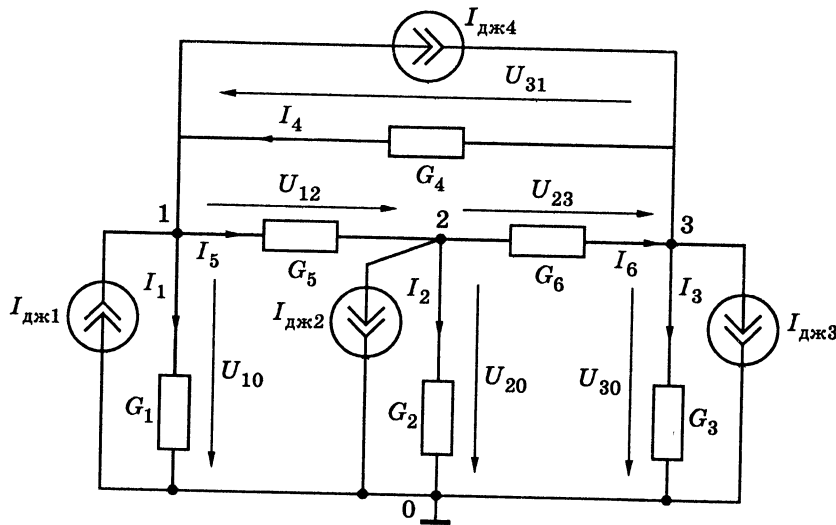


Рис. 2.25. Приклад для обґрунтування методу вузлових напруг

і підставити до виразу (2.42), тоді струми  $I_4, I_5, I_6$  також будуть виражені через вузлові напруги:

$$I_4 = G_4(U_{30} - U_{10}); I_5 = G_5(U_{10} - U_{20}); I_6 = G_6(U_{20} - U_{30}). \quad (2.43)$$

Рівняння за першим законом Кірхгофа для вузлів 1, 2 і 3 (відповідно до правила знаків, згідно з яким струми, направлені до вузла, мають знак мінус, а струми, направлені від вузла, — знак плюс) мають вигляд:

$$\begin{cases} I_1 - I_4 + I_5 - I_{дж1} + I_{дж4} = 0 & \text{(для вузла 1);} \\ I_2 - I_5 + I_6 + I_{дж2} = 0 & \text{(для вузла 2);} \\ I_3 + I_4 - I_6 - I_{дж4} + I_{дж3} = 0 & \text{(для вузла 3).} \end{cases} \quad (2.44)$$

Після підстановки в систему (2.44) виразів (2.41) і (2.43), які пов'язують струми віток з вузловими напругами, система набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} G_1 U_{10} - G_4(U_{30} - U_{10}) + G_5(U_{10} - U_{20}) - I_{дж1} + I_{дж4} = 0; \\ G_2 U_{20} - G_5(U_{10} - U_{20}) + G_6(U_{20} - U_{30}) + I_{дж2} = 0; \\ G_3 U_{30} + G_4(U_{30} - U_{10}) - G_6(U_{20} - U_{30}) - I_{дж4} + I_{дж3} = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Після групування доданків з вузловими напругами в лівій частині кожного з рівнянь системи (2.45) і перенесення відомих струмів джерел до правих частин рівнянь формується стандартна система методу вузлових напруг:

$$\begin{cases} (G_1 + G_4 + G_5)U_{10} - G_5U_{20} - G_4U_{30} = I_{дж1} - I_{дж4}; \\ -G_5U_{10} + (G_2 + G_5 + G_6)U_{20} - G_6U_{30} = -I_{дж2}; \\ -G_4U_{10} - G_6U_{20} + (G_3 + G_4 + G_6)U_{30} = I_{дж4} - I_{дж3}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Аналіз системи рівнянь (2.46) дозволяє зробити такі висновки:

- у лівій частині кожного з рівнянь системи напруга вузла, для якого складається рівняння, помножується на суму провідностей віток, увімкнених до даного вузла;
- вузлові напруги, номери яких не збігаються з номером вузла, для якого складається дане рівняння, помножуються на взяті зі знаком мінус провідності віток, увімкнених між цим та іншими вузлами;
- права частина кожного з рівнянь системи є алгебраїчною сумою струмів джерел, увімкнених до вузла, для якого складається рівняння; струми джерел, направлених до вузла, мають знак плюс, в іншому випадку — знак мінус.

Вказані закономірності покладено в основу понять: власна провідність вузла, взаємна провідність вузлів і вузловий струм джерел.

*Власною провідністю* вузла називається сума провідностей всіх віток, увімкнених до цього вузла. Власні провідності вузлів завжди додатні і позначаються подвійними індексами, що повторюють номер вузла ( $G_{11}, G_{22}$  тощо).

*Взаємною провідністю* вузлів називається сума провідностей віток, які сполучають два незаземлених вузли. Взаємні провідності позначаються подвійним індексом, складеним з номерів вузлів, для яких ця провідність є спільною ( $G_{12} = G_{21}; G_{23} = G_{32}$  тощо). Взаємні провідності завжди від'ємні, якщо вузлові напруги направлені до базисного вузла.

*Вузловим струмом джерел* називається алгебраїчна сума струмів джерел, увімкнених до даного вузла. Струми джерел, спрямовані до вузла, входять у вузлові струми джерел зі знаком плюс, а струми джерел, спрямовані від вузла, — зі знаком мінус. У позначеннях вузлових струмів джерел використовується один числовий індекс, що відповідає номеру вузла ( $I_{в31}, I_{в32}$  тощо).

З урахуванням введених понять система рівнянь (2.46) матиме вигляд:

$$\begin{cases} G_{11}U_{10} + G_{12}U_{20} + G_{13}U_{30} = I_{вз1}; \\ G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} + G_{23}U_{30} = I_{вз2}; \\ G_{31}U_{10} + G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} = I_{вз3}, \end{cases} \quad (2.47)$$

де  $G_{11} = G_1 + G_4 + G_5$ ;  $G_{22} = G_2 + G_5 + G_6$ ;  $G_{33} = G_3 + G_4 + G_6$ ;  $G_{12} = -G_{21} = -G_5$ ;  $G_{13} = G_{31} = -G_4$ ;  $G_{23} = G_{32} = -G_6$ ;  $I_{вз1} = I_{дж1} - I_{дж4}$ ;  $I_{вз2} = -I_{дж2}$ ;  $I_{вз3} = I_{дж4} - I_{дж3}$ .

Система (2.47) є стандартною формою запису рівнянь у методі вузлових напруг для будь-якого кола з чотирма вузлами і, отже, з трьома вузловими напругами. Подібну форму запису мають системи рівнянь для кіл і з іншою кількістю вузлів. При цьому змінюється тільки кількість рівнянь і число доданків у лівій частині цих рівнянь. У загальному випадку для кола з  $N$  вузловими напругами система рівнянь методу вузлових напруг має вигляд:

$$\begin{cases} G_{11}U_{10} + G_{12}U_{20} + \dots + G_{1N}U_{N0} = I_{вз1}; \\ G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} + \dots + G_{2N}U_{N0} = I_{вз2}; \\ \dots \\ G_{N1}U_{10} + G_{N2}U_{20} + \dots + G_{NN}U_{N0} = I_{взN}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Стандартні форми запису систем рівнянь у методах вузлових напруг і контурних струмів подібні. Тому аналогічними є матричні форми запису систем та їх розв'язків.

У матричній формі систему (2.48) стисло можна записати так:

$$(G_{ij})(U_{i0}) = (I_{взi}), \quad (2.49)$$

де  $(G_{ij})$  — квадратна матриця власних і взаємних провідностей вузлів або скорочено — матриця провідностей;  $(U_{i0})$  — матриця-стовпець вузлових напруг;  $(I_{взi})$  — матриця-стовпець вузлових струмів джерел;  $i, j$  — відповідно номери рядка і стовпця елементів матриць.

Матриця провідностей симетрична, оскільки  $G_{ij} = G_{ji}$ . На головній діагоналі цієї матриці розташовані власні провідності вузлів  $G_{ii}$ .

Розв'язок матричної системи (2.49) відносно невідомої матриці вузлових напруг можна записати у вигляді:

$$(U_{i0}) = (G_{ij})^{-1}(I_{взi}), \quad (2.50)$$

де  $(G_{ij})^{-1}$  — обернена матриця провідностей.

Розв'язок системи рівнянь (2.47) із застосуванням визначників має вигляд:

$$\begin{cases} U_{10} = \frac{\begin{vmatrix} I_{вз1} & G_{12} & G_{13} \\ I_{вз2} & G_{22} & G_{23} \\ I_{вз3} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_G} I_{вз1} + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_G} I_{вз2} + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_G} I_{вз3}; \\ U_{20} = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & I_{вз1} & G_{13} \\ G_{21} & I_{вз2} & G_{23} \\ G_{31} & I_{вз3} & G_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_G} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_G} I_{вз1} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_G} I_{вз2} + \frac{\Delta_{32}}{\Delta_G} I_{вз3}; \\ U_{30} = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & I_{вз1} \\ G_{21} & G_{22} & I_{вз2} \\ G_{31} & G_{32} & I_{вз3} \end{vmatrix}}{\Delta_G} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_G} I_{вз1} + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_G} I_{вз2} + \frac{\Delta_{33}}{\Delta_G} I_{вз3}, \end{cases} \quad (2.51)$$

де  $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{12} = \Delta_{21}, \Delta_{13} = \Delta_{31}, \Delta_{23} = \Delta_{32}$  — алгебраїчні доповнення, за структурою подібні тим, що наведені в табл. 2.2;

$\Delta_G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}$  — визначник матриці провідностей.

Аналізуючи коло методом вузлових напруг, виведення рівнянь можна не робити і виконувати розрахунки в такому порядку:

- зробити еквівалентну заміну реальних джерел напруги на джерела струму;
- вибрати один з вузлів як базисний і відповідно позначити його індексом «0» (див. рис. 2.25), а інші вузли пронумерувати;
- вибрати у напрямку «бази» умовні позитивні напрями вузлових напруг і струмів у вітках, увімкнених до базисного вузла; умовні позитивні напрями інших напруг прийняти довільними;
- розрахувати власні та взаємні провідності вузлів, а також вузлові струми джерел;
- записати і розв'язати стандартну систему рівнянь за методом вузлових напруг;

- за знайденими вузловими напругами обчислити напруги між іншими (незаземленими) вузлами схеми; ці напруги визначаються за другим законом Кірхгофа для контурів, утворених невідомою і вузловими напругами;
- згідно із законом Ома розрахувати струми у вітках.

Запис системи рівнянь не є обов'язковим. Маючи певні навички, можна безпосередньо використовувати співвідношення (2.51) або (2.50), тобто розраховувати вузлові напруги із застосуванням визначників або у матричному вигляді.

Якщо у колі є ідеальні джерела напруги, застосування методу вузлових напруг має особливості. У цьому випадку деякі напруги між вузлами відомі і дорівнюють заданім ЕРС ідеальних джерел. Якщо як базисний вибрано вузол, до якого увімкнено ідеальне джерело напруги, відомою стає пов'язана з ним вузлова напруга. Це призводить до скорочення кількості невідомих вузлових напруг і, відповідно, до зменшення кількості необхідних рівнянь (приклад 2.9).

Отже, перевагами методів контурних струмів і вузлових напруг можна вважати меншу кількість рівнянь у порівнянні з методом рівнянь Кірхгофа, однотипність цих рівнянь і простоту їх розв'язання за допомогою визначників і матриць. Застосування цих методів обмежується тим, що використовувати їх можна для аналізу тільки лінійних кіл.

Вибір методу контурних струмів або методу вузлових напруг для розрахунку конкретного кола обумовлюється кількістю необхідних рівнянь. Якщо необхідна кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа ( $N_{вз} - 1$ ) менша кількості рівнянь за другим законом Кірхгофа ( $N_{в} - N_{вз} + 1$ ), доцільніше використовувати метод вузлових напруг. У цьому випадку виконується нерівність

$$N_{в} > 2(N_{вз} - 1).$$

Метод вузлових напруг відзначається простотою вибору базисного вузла і вузлових напруг у порівнянні із складністю вибору незалежних контурів у методі контурних струмів.

Найбільшу перевагу має метод вузлових напруг при розрахунку кіл з двома вузлами і довільною кількістю віток. Наприклад, на рис. 2.26 зображені два варіанти схем кола з двома вузлами і  $N$  невідомими струмами. За умови рівності опорів ( $G_1 = 1/R_1$ ,  $G_2 = 1/R_2$ , ...,  $G_N = 1/R_N$ ) обох кіл і при виконанні співвідношень між параметрами джерел  $I_{дж1} = E_1/R_1$ ,  $I_{дж2} = E_2/R_2$ , ...,  $I_{джN} = E_N/R_N$ ,

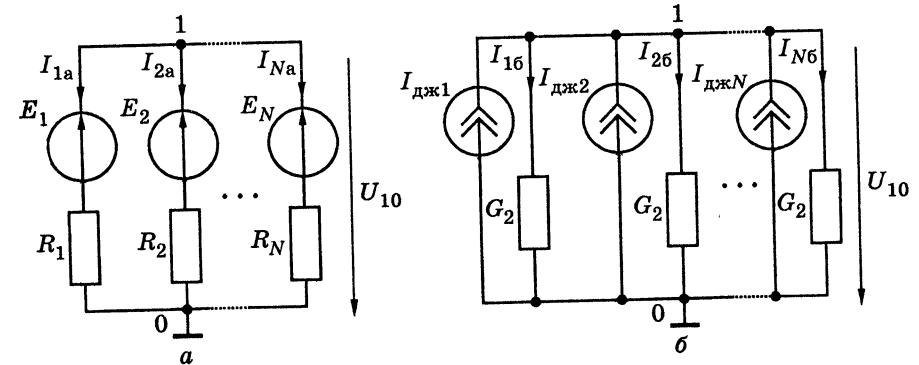


Рис. 2.26. Схеми кіл з двома вузлами

зображені на рис. 2.26 кола еквівалентні. Еквівалентність полягає у рівності вузлових напруг  $U_{10}$  цих кіл. Однак струми у відповідних вітках таких еквівалентних схем у загальному випадку не дорівнюють один одному, і тому вони позначені різними індексами (індексом «а» — для схеми, зображеної на рис. 2.26, а, та індексом «б» — для схеми, зображеної на рис. 2.26, б).

Вузлова напруга для схеми, зображеної на рис. 2.26, б, визначається з одного рівняння:

$$G_{11}U_{10} = I_{вз1},$$

звідки

$$U_{10} = I_{вз1}/G_{11},$$

де  $I_{вз1} = \sum_{k=1}^N I_{джk}$  — вузловий струм джерел вузла 1;  $G_{11} = \sum_{k=1}^N G_k$  — власна провідність вузла 1.

Струми у розглядуваних схемах можна подати через знайдену вузлову напругу:

$$I_{1б} = G_1U_{10}; \quad I_{2б} = G_2U_{10}; \quad \dots \quad I_{Nб} = G_NU_{10};$$

$$I_{1а} = G_1(U_{10} - E_1) = I_{1б} - I_{дж1};$$

$$I_{2а} = G_2(U_{10} - E_2) = I_{2б} - I_{дж2};$$

.....

$$I_{Na} = G_N(U_{10} - E_N) = I_{Nб} - I_{джN}.$$

Порівняння цих виразів показує, що  $I_{1а} \neq I_{1б}$ ,  $I_{2а} \neq I_{2б}$  та ін.

Слід зазначити, що розрахунок даних схем методом контурних струмів потребує розв'язання системи, котра складається з  $(N-1)$  рівняння.

**Приклад 2.8.** Методом вузлових напруг визначити в загальному вигляді струми у колі, розглянутому в прикладі 2.6 (див. рис. 2.21).

*Розв'язання.* Зробимо еквівалентну заміну джерел ЕРС на джерела струму, виберемо базисний вузол і вузлові напруги, а також умовні позитивні напрями струмів. Після цього представимо схему кола так, як показано на рис. 2.27.

Визначимо власні і взаємні провідності вузлів, а також вузлові струми джерел:

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_1 + G_4 + G_5; & G_{22} &= G_1 + G_2 + G_6; & G_{33} &= G_2 + G_3 + G_7; & G_{44} &= G_3 + G_4 + G_8; \\ G_{12} &= G_{21} = -G_1; & G_{23} &= G_{32} = -G_2; & G_{34} &= G_{43} = -G_3; & G_{14} &= G_{41} = -G_4; \\ G_{13} &= G_{31} = 0; & G_{24} &= G_{42} = 0; & I_{вз1} &= -I_{дж1} - I_{дж4}; & I_{вз2} &= I_{дж1} + I_{дж2}; \\ I_{вз3} &= -I_{дж2} + I_{дж3}; & I_{вз4} &= -I_{дж3} + I_{дж4}. \end{aligned}$$

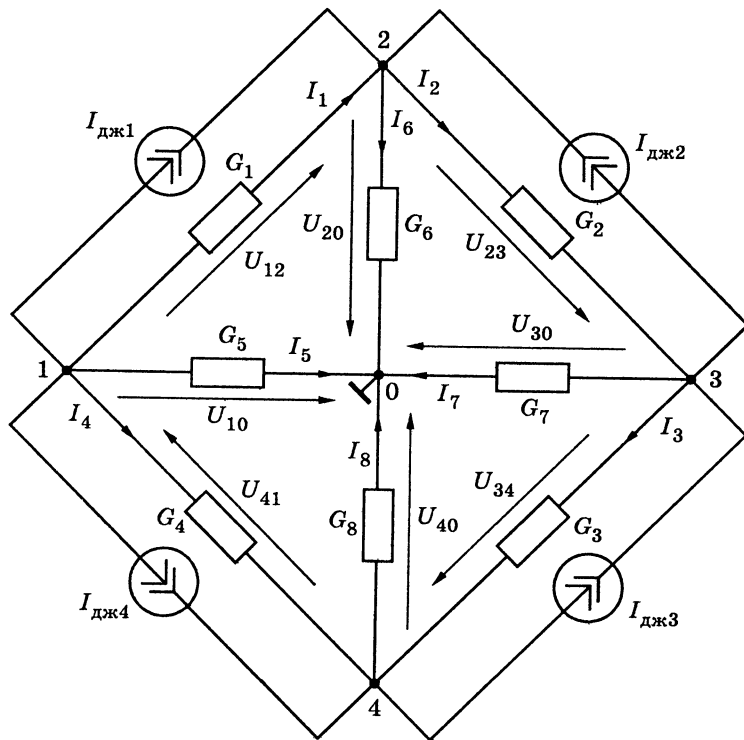


Рис. 2.27. До прикладу 2.8

Взаємні провідності  $G_{13}, G_{31}, G_{24}, G_{42}$  дорівнюють нулю, оскільки відповідні пари вузлів (1 і 3; 2 і 4) не мають спільних віток.

Не записуючи попередньо систему рівнянь, знаходимо вузлові напруги із застосуванням визначників:

$$U_{10} = \frac{\begin{vmatrix} I_{вз1} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ I_{вз2} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ I_{вз3} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ I_{вз4} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}}{\Delta_G}; \quad U_{20} = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & I_{вз1} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & I_{вз2} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & I_{вз3} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & I_{вз4} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}}{\Delta_G};$$

$$U_{30} = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & I_{вз1} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & I_{вз2} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & I_{вз3} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & I_{вз4} & G_{44} \end{vmatrix}}{\Delta_G}; \quad U_{40} = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & I_{вз1} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & I_{вз2} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & I_{вз3} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & I_{вз4} \end{vmatrix}}{\Delta_G};$$

де  $\Delta_G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}$  — визначник матриці провідностей.

Шукані струми, з урахуванням знайдених вузлових напруг, а також вказаних на рис. 2.27 умовних позитивних напрямів для струмів і напруг, становитимуть:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1 U_{12} = G_1 (U_{10} - U_{20}); & I_2 &= G_2 U_{23} = G_2 (U_{20} - U_{30}); \\ I_3 &= G_3 U_{34} = G_3 (U_{30} - U_{40}); & I_4 &= G_4 U_{14} = G_4 (U_{10} - U_{40}); \\ I_5 &= G_5 U_{10}; & I_6 &= G_6 U_{20}; & I_7 &= G_7 U_{30}; & I_8 &= G_8 U_{40}. \end{aligned}$$

Струми  $I_1, I_2, I_3, I_4$  у перетвореній схемі (рис. 2.27) відрізняються від струмів з такими ж індексами в початковій схемі (див. рис. 2.21).

Щоб розрахувати струми  $I_1, I_2, I_3, I_4$  у колі, схема якого зображена на рис. 2.21, скористаємося другим законом Кірхгофа для контурів, що складаються з віток з шуканими струмами і напругами на цих вітках:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1 (U_{12} + E_1) = G_1 (U_{10} - U_{20}) + I_{дж1}; \\ I_2 &= G_2 (U_{23} - E_2) = G_2 (U_{20} - U_{30}) - I_{дж2}; \\ I_3 &= G_3 (U_{34} - E_3) = G_3 (U_{30} - U_{40}) - I_{дж3}; \\ I_4 &= G_4 (U_{14} + E_4) = G_4 (U_{10} - U_{40}) + I_{дж4}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.9.** Методом вузлових напруг розрахувати струми у колі, схема якого зображена на рис. 2.28. Параметри елементів кола  $E_1 = 20$  В;  $E_2 = 10$  В;  $E_3 = 5$  В;  $E_4 = 10$  В;  $G_1 = 0,2$  мСм;  $G_2 = 1$  мСм;  $G_3 = 0,8$  мСм;  $G_4 = 0,5$  мСм;  $G_5 = 1,5$  мСм.

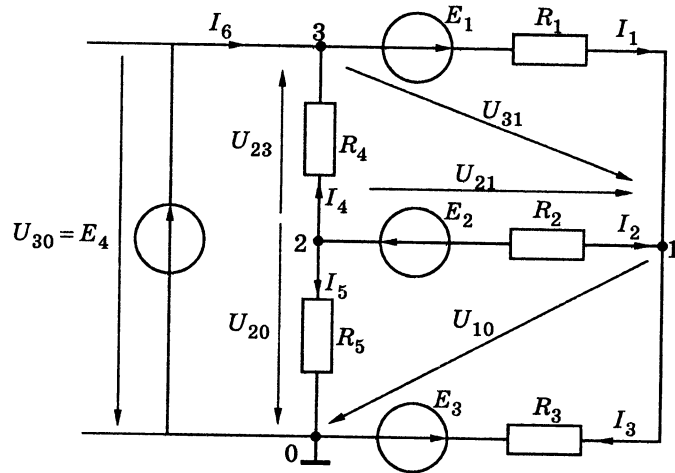


Рис. 2.28. До прикладу 2.9

**Розв'язання.** Оскільки в даному колі є ідеальне джерело напруги, скористаємось наведеними вище рекомендаціями і виберемо як базисний вузол один із затискачів ідеального джерела. Базисний вузол і вузлові напруги, а також умовні позитивні напрями напруг і струмів показано на рис. 2.28.

Розрахуємо власні та взаємні провідності вузлів:

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_1 + G_2 + G_3 = 0,2 + 1 + 0,8 = 2 \text{ мСм}; \\ G_{22} &= G_2 + G_4 + G_5 = 1 + 0,5 + 1,5 = 3 \text{ мСм}; \\ G_{12} = G_{21} &= -G_2 = -1 \text{ мСм}; \quad G_{13} = G_{31} = -G_1 = -0,2 \text{ мСм}; \\ G_{23} = G_{32} &= -G_4 = -0,5 \text{ мСм}. \end{aligned}$$

Власну провідність  $G_{33}$  не обчислюємо, оскільки вузлова напруга для вузла 3 відома ( $U_{30} = E_4$ ), і рівняння для цього вузла не складається.

Розрахуємо вузлові струми, перетворивши джерела ЕРС в еквівалентні джерела струму (на схемі не показані):

$$\begin{aligned} I_{вз1} &= G_1 E_1 - G_2 E_2 + G_3 E_3 = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 20 - 10^{-3} \cdot 10 + 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = \\ &= -2 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -2 \text{ мА}; \quad I_{вз2} = G_2 E_2 = 10^{-3} \cdot 10 \text{ А} = 10 \text{ мА}. \end{aligned}$$

Складемо рівняння за методом вузлових напруг для вузлів 1 і 2, враховуючи в них доданки, що містять відому вузлову напругу вузла 3 ( $U_{30} = E_4$ ):

$$\begin{cases} G_{11}U_{10} + G_{12}U_{20} + G_{13}U_{30} = I_{вз1}; \\ G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} + G_{23}U_{30} = I_{вз2}. \end{cases} \quad (2.52)$$

Підставляючи в систему рівнянь (2.52) розраховані вище власні та взаємні провідності, вузлові струми джерел і відоме значення вузлової напруги  $U_{30} = E_4 = 10 \text{ В}$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10^{-3} U_{10} - 10^{-3} U_{20} &= -2 \cdot 10^{-3} + 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 0; \\ -10^{-3} U_{10} + 3 \cdot 10^{-3} U_{20} &= 10 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 15 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь за допомогою визначників:

$$U_{10} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ В}; \quad U_{20} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{30}{5} = 6 \text{ В}.$$

Використовуючи розраховані значення  $U_{10}$  і  $U_{20}$ , визначимо струми у вітках схеми для вибраних на рис. 2.28 умовних позитивних напрямів напруг і струмів:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1(U_{31} + E_1) = G_1(U_{30} - U_{10} + E_1) = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot (10 - 3 + 20) = \\ &= 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 5,4 \text{ мА}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= G_2(U_{21} - E_2) = G_2(U_{20} - U_{10} - E_2) = 10^{-3} \cdot (6 - 3 - 10) = \\ &= -7 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -7 \text{ мА}; \end{aligned}$$

$$I_3 = G_3(U_{10} - E_3) = 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot (3 - 5) = -1,6 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -1,6 \text{ мА};$$

$$I_4 = G_4 U_{23} = G_4(U_{20} - U_{30}) = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (6 - 10) = -2 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -2 \text{ мА};$$

$$I_5 = G_5 U_{20} = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 9 \text{ мА};$$

$$I_6 = I_1 - I_4 = 5,4 - (-2) = 7,4 \text{ мА}.$$

Від'ємні значення струмів  $I_2$ ,  $I_3$  і  $I_4$  вказують на те, що їх реальні напрями протилежні вибраним.

**Приклад 2.10.** Розрахувати струми у колі, що має два вузли (рис. 2.29, а), якщо  $E_1 = 20 \text{ В}$ ;  $E_2 = 10 \text{ В}$ ;  $E_3 = 7 \text{ В}$ ;  $R_1 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 1 \text{ кОм}$ .

**Розв'язання.** Розрахунок можна провести як безпосередньо для заданої схеми з джерелами напруги (рис. 2.29, а), так і для схеми з еквівалентними джерелами струму (рис. 2.29, б). В обох схемах вузлова напруга  $U_{10}$  однакова.

Розрахуємо параметри еквівалентних джерел струму:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{4 \cdot 10^3} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ См} = 0,25 \text{ мСм};$$

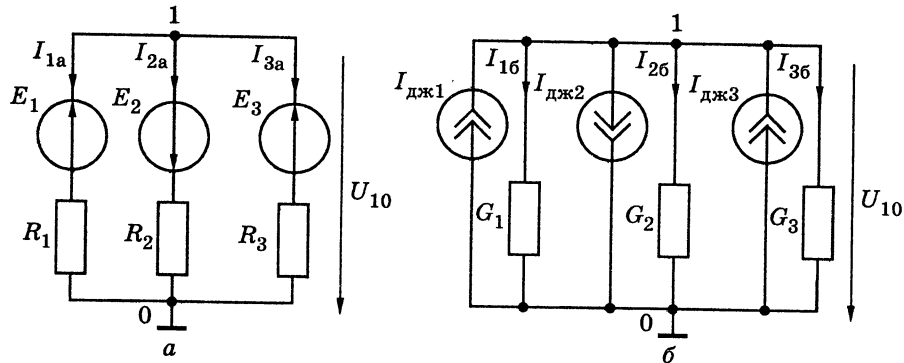


Рис. 2.29. До прикладу 2.10

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ СМ} = 0,5 \text{ мСМ}; G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \text{ СМ} = 1 \text{ мСМ};$$

$$I_{дж1} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{20}{4 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 5 \text{ мА}; I_{дж2} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{10}{2 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 5 \text{ мА};$$

$$I_{дж3} = \frac{E_3}{R_3} = \frac{7}{10^3} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 7 \text{ мА}.$$

Визначимо власну провідність, вузловий струм і напругу першого вузла:

$$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3 = 0,25 + 0,5 + 1 = 1,75 \text{ мСМ};$$

$$I_{вз1} = I_{дж1} - I_{дж2} + I_{дж3} = 5 - 5 + 7 = 7 \text{ мА};$$

$$U_{10} = \frac{I_{вз1}}{G_{11}} = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{1,75 \cdot 10^{-3}} = 4 \text{ В}.$$

За знайденою вузловою напругою розрахуємо струми в розглядуваних схемах:

$$I_{1a} = \frac{U_{10} - E_1}{R_1} = \frac{4 - 20}{4 \cdot 10^3} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -4 \text{ мА};$$

$$I_{2a} = \frac{U_{10} + E_2}{R_2} = \frac{4 + 10}{2 \cdot 10^3} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 7 \text{ мА};$$

$$I_{3a} = \frac{U_{10} - E_3}{R_3} = \frac{4 - 7}{10^3} = -3 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -3 \text{ мА};$$

$$I_{16} = G_1 U_{10} = 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 10^{-3} \text{ А} = 1 \text{ мА};$$

$$I_{26} = G_2 U_{10} = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 2 \text{ мА};$$

$$I_{36} = G_3 U_{10} = 10^{-3} \cdot 4 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 4 \text{ мА}.$$

Еквівалентність перетворення джерел в даних схемах означає рівність тільки вузлових напруг. Всі інші параметри режимів в цих колах різні. Відрізняються не тільки струми у відповідних опорах, але й кількісні показники балансів потужностей в схемах.

Складемо і розрахуємо рівняння балансу потужностей для вихідної схеми з джерелами напруги (див. рис. 2.29, а):

— потужність, що розсіюється в опорах

$$R_1 I_{1a}^2 + R_2 I_{2a}^2 + R_3 I_{3a}^2 = 4 \cdot 10^3 \cdot (-4 \cdot 10^{-3})^2 + 2 \cdot 10^3 \cdot (7 \cdot 10^{-3})^2 + 10^3 \cdot (-3 \cdot 10^{-3})^2 = 171 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 171 \text{ мВт};$$

— потужність джерел напруги

$$-E_1 I_{1a} + E_2 I_{2a} - E_3 I_{3a} = -20 \cdot (-4 \cdot 10^{-3}) + 10 \cdot 7 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot (-3 \cdot 10^{-3}) = 171 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 171 \text{ мВт}.$$

Розрахуємо баланс потужностей для схеми з еквівалентними джерелами струму (див. рис. 2.29, б):

— потужність, що розсіюється в опорах

$$G_1 U_{10}^2 + G_2 U_{10}^2 + G_3 U_{10}^2 = 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 4^2 + 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4^2 + 10^{-3} \cdot 4^2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 28 \text{ мВт};$$

— потужність джерел струму

$$U_{10} I_{дж1} - U_{10} I_{дж2} + U_{10} I_{дж3} = 4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 28 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 28 \text{ мВт}.$$

## 2.6. Метод накладання

Метод накладання базується на однойменному принципі, так званому принципі суперпозиції або незалежності дії. Принцип накладання, а отже, і даний метод, справедливі тільки для лінійних кіл.

Використовуючи вирази (1.1), (1.10), (1.17), що пов'язують струми і напруги в пасивних лінійних елементах  $R, L, C$ , можна показати, що для цих елементів справедливе співвідношення

$$i(k_1 u_1 \pm k_2 u_2 \pm \dots \pm k_n u_n) = k_1 i(u_1) \pm k_2 i(u_2) \pm \dots \pm k_n i(u_n),$$

де  $k_n$  — будь-які дійсні числа.

Для окремого випадку, коли  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$ , це означає, що струм у будь-якому лінійному елементі дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які викликані в цьому елементі кожною з прикладених до нього напруг (або джерел ЕРС). У цьому полягає принцип накладання для лінійних елементів. Цей принцип справедливий також

для напруги на лінійному елементі у разі паралельного підключення до нього декількох джерел струму.

Із справедливості принципу накладання для лінійних пасивних елементів випливає можливість його застосування для струмів і напруг будь-якого лінійного кола, що містить декілька джерел. Принцип накладання підтверджується також співвідношеннями (2.35) і (2.51), отриманими при розгляді методів контурних струмів і вузлових напруг. Ці співвідношення показують, що струм будь-якої вітки лінійного електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі струмів, викликаних в цій вітці кожним з джерел окремо. Аналогічно принцип накладання можна обґрунтувати для напруги на будь-якій ділянці лінійного кола.

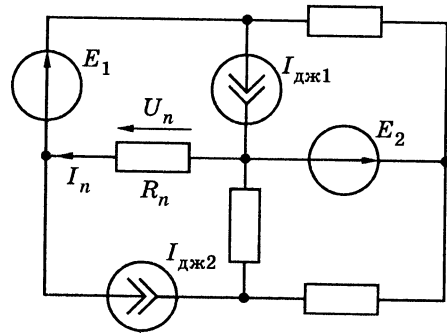


Рис. 2.30. Схема лінійного кола, яке містить чотири джерела

$n$ -му елементі розглядуваної схеми є алгебраїчними сумами відповідних струмів і напруг в окремих схемах:

$$I_n = I_{na} - I_{nb} + I_{nb} + I_{nr}; U_n = U_{na} - U_{nb} + U_{nb} + U_{nr}.$$

Розв'язання задач методом накладання полягає в знаходженні і подальшому алгебраїчному підсумовуванні часткових струмів (або напруг) від кожного (або від груп) з джерел. Визначаючи частковий струм від одного джерела (*див.*, наприклад, схеми, зображені на рис. 2.31), доцільно застосовувати метод еквівалентних перетворень.

Слід зауважити, що принцип накладання не є справедливим для потужності в опорі, оскільки потужність є квадратичною функцією струму (або напруги). Для даного прикладу (рис. 2.31) це відповідає очевидній нерівності:

Наприклад, режим у колі, схема якого зображена на рис. 2.30, можна подати як сукупність чотирьох окремих режимів (рис. 2.31). У кожній з окремих схем діє одне з джерел, а інші джерела виключені. Виключення джерела напруги означає замикання його затискачів, а виключення джерела струму — їх розмикання. Відповідно до принципу накладання струм у  $n$ -й вітці та напруга на

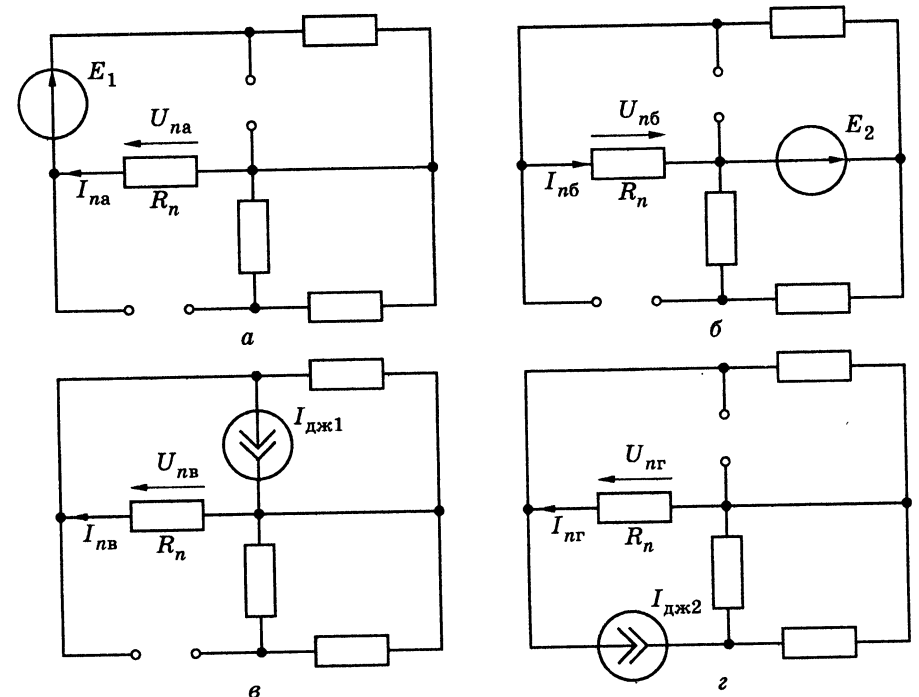


Рис. 2.31. Окремі схеми для знаходження методом накладання струму  $I_n$  і напруги  $U_n$  у колі, схема якого зображена на рис. 2.30

$$R_n I_n^2 = R_n (I_{na} - I_{nb} + I_{nb} + I_{nr})^2 \neq R_n I_{na}^2 + R_n I_{nb}^2 + R_n I_{nb}^2 + R_n I_{nr}^2.$$

Принцип накладання для лінійних кіл є окремим випадком подібного принципу для будь-яких лінійних систем (механічних, гідравлічних та ін.). У загальному випадку принцип накладання формулюється так: дія суми причин дорівнює алгебраїчній сумі дій від кожної з цих причин, які діють окремо.

**Приклад 2.11.** Розрахувати методом накладання струм  $I_1$  у колі, схема якого зображена на рис. 2.32, якщо  $E_1 = 20$  В;  $E_2 = 30$  В;  $I_{дж} = 80$  мА;  $R_1 = 3$  кОм;  $R_2 = 2$  кОм.

**Розв'язання.** Для визначення струму  $I_1$  методом накладання скористуємося двома окремими схемами (рис. 2.33). У першій з цих схем (рис. 2.33, а) виключимо джерело струму, а у другій (рис. 2.33, б) — джерела напруги  $E_1$  і  $E_2$ . Очевидно, що розглядати в даному прикладі три окремі схеми недоцільно, оскільки при виключенні джерела струму виходить одноконтурна схема з одним струмом  $I_{1a}$  (рис. 2.33, а).

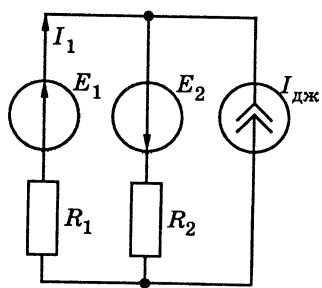


Рис. 2.32.  
До прикладу 2.11

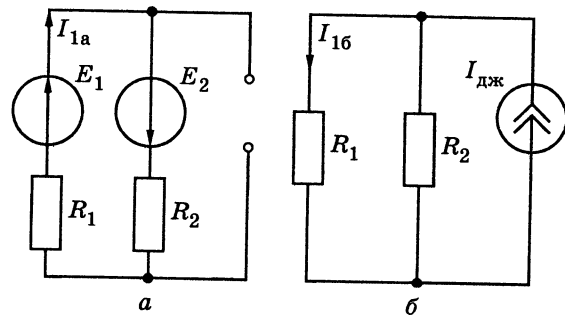


Рис. 2.33. Окремі схеми для визначення струму  $I_1$  методом накладання у прикладі 2.11

Розрахуємо часткові струми  $I_{1a}$  та  $I_{16}$  і визначимо методом накладання шуканий струм  $I_1$ :

$$I_{1a} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 + 30}{(3 + 2) \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 10 \text{ мА};$$

$$I_{16} = \frac{I_{дж} R_2}{R_1 + R_2} = \frac{80 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3}{(3 + 2) \cdot 10^3} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 32 \text{ мА};$$

$$I_1 = I_{1a} - I_{16} = (10 - 32) \cdot 10^{-3} = -22 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -22 \text{ мА}.$$

Від'ємне значення знайденого струму показує, що його фактичний напрям протилежний вибраному на рис. 2.32.

## 2.7. Метод еквівалентного генератора

Метод еквівалентного генератора заснований на двох теоремах про активний двополюсник. Це — теорема про еквівалентне джерело напруги (теорема Тевенена<sup>1</sup>) і теорема про еквівалентне джерело струму (теорема Нортона<sup>2</sup>). В основу цих теорем покладено поняття двополюсника як частини електричного кола з двома затискачами (полюсами). Напруга на розімкнених затискачах двополюсника називається *напругою холостого ходу*  $U_{x,x}$  (рис. 2.34).

<sup>1</sup> Тевенен, М. Л. Thevenin (1857–1926) — французький телеграфний інженер. У 1833 р. відкрив теорему про еквівалентне джерело напруги. Однак відомо (Harold Hallikainen. *Thevenin's Theorem. Radio World — December 13, 1995*), що вперше аналогічну теорему в 1853 р. сформулював німецький вчений Герман Гельмгольц, Herman Von Helmholtz (1821–1894).

<sup>2</sup> Нортон Ед., Е. Л. Norton (18..– 19..) — інженер, а згодом начальник відділу телефонної лабораторії Бела (США); у 1926 р. запропонував нове формулювання теоремами, замінивши джерело напруги джерелом струму.

Якщо до складу двополюсника входять тільки лінійні елементи, то двополюсник називається *лінійним*. В іншому випадку двополюсник є *нелінійним*.

Розрізняють пасивні й активні двополюсники. Пасивний двополюсник не містить джерел, або вони компенсують одне одного так, що напруга холостого ходу дорівнює нулю ( $U_{x,x} = 0$ ). Основним параметром пасивного двополюсника є *вхідний опір*  $R_{вх}$ , яким можна еквівалентно замінити пасивний двополюсник (рис. 2.35).

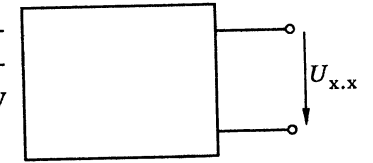


Рис. 2.34. Умовне зображення двополюсника

Активний двополюсник містить джерела, які на розімкнених затискачах створюють відмінну від нуля напругу холостого ходу ( $U_{x,x} \neq 0$ ).

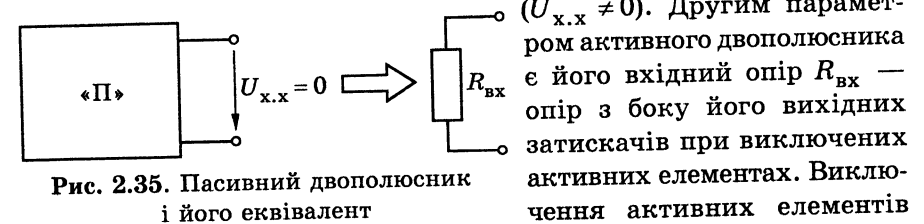


Рис. 2.35. Пасивний двополюсник і його еквівалент

Другим параметром активного двополюсника є його вхідний опір  $R_{вх}$  — опір з боку його вихідних затискачів при виключених активних елементах. Виключення активних елементів полягає в замиканні ідеальних джерел напруги і розмиканні ідеальних джерел струму.

Позначення активного двополюсника і значення його параметрів (напруги холостого ходу і вхідного опору) показані на рис. 2.36.

**Теорема про еквівалентне джерело напруги (теорема Тевенена):** лінійний активний двополюсник можна замінити реальним джерелом напруги, ЕРС  $E$

якого дорівнює напрузі холостого ходу  $U_{x,x}$ , а внутрішній опір  $R_i$  дорівнює вхідному опору  $R_{вх}$  даного активного двополюсника.

Еквівалентність такої заміни означає, що струм в однакових опорах навантаження даного активного

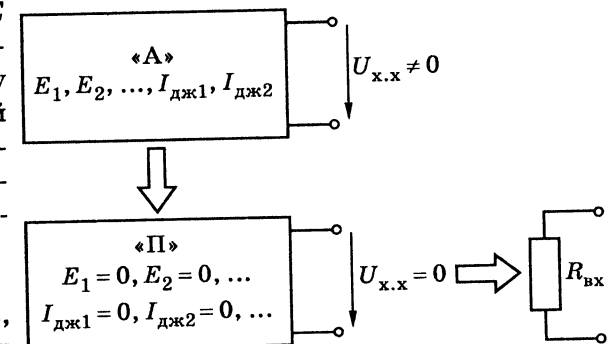


Рис. 2.36. Активний двополюсник і його параметри  $U_{x,x}$  і  $R_{вх}$



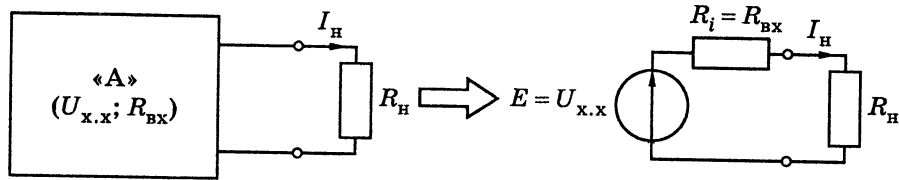


Рис. 2.37. До пояснення теореми про еквівалентне джерело напруги двополюсника і струм відповідного реального джерела напруги дорівнюють один одному (рис. 2.37), тобто

$$I_{н} = \frac{U_{x,x}}{R_{вх} + R_{н}}. \quad (2.53)$$

Для доказу теореми про еквівалентне джерело напруги послідовно з вихідними затискачами активного двополюсника вмикається додаткове ідеальне джерело напруги  $E = U_{x,x}$  так, щоб у пасивному двополюснику (позначений на рис. 2.38, а пунктиром), який отримано внаслідок цього, напруга на вихідних затискачах і струм у навантаженні дорівнювали б нулю:

$$U_{нр} = 0; I_{нр} = 0.$$

Відповідно до принципу накладання струм одержаного пасивного двополюсника  $I_{нр}$  є алгебраїчною сумою двох струмів, один з яких викликаний всіма джерелами даного активного двополюсника (рис. 2.38, б), а другий — додатковим ідеальним джерелом напруги  $E = U_{x,x}$ , увімкненим до послідовно сполучених опорів  $R_{вх}$  і  $R_{н}$  (рис. 2.38, в).

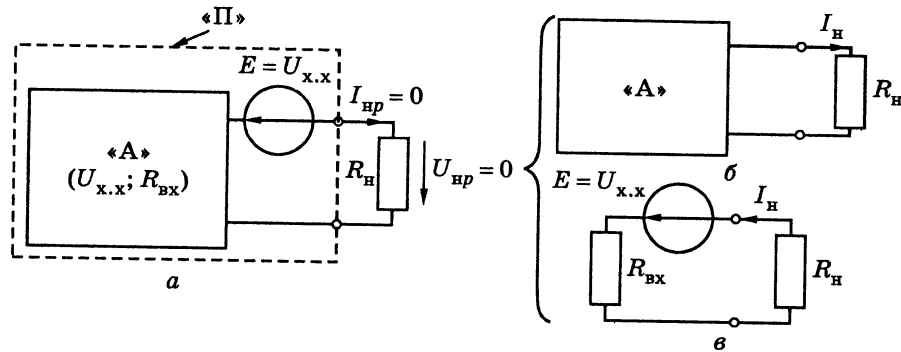


Рис. 2.38. Доведення теореми про еквівалентне джерело напруги

Ці струми однакові за величиною і протилежні за напрямом. Відповідно до зображеної на рис. 2.38, в схеми струм навантаження визначається як

$$I_{н} = \frac{U_{x,x}}{R_{вх} + R_{н}},$$

що відповідає виразу (2.53), а отже, і формулюванню теореми про еквівалентне джерело напруги.

**Теорема про еквівалентне джерело струму (теорема Нортона):** лінійний активний двополюсник можна замінити реальним джерелом струму  $I_{дж}$ , внутрішній опір  $R_i$  якого дорівнює входному опору активного двополюсника  $R_{вх}$ , а струм  $I_{дж}$  дорівнює струму короткого замикання  $I_{к.з}$  даного активного двополюсника.

Суть теореми про еквівалентне джерело струму ілюструє рис. 2.39. Струм джерела на рис. 2.39, б відповідно до теореми Нортона і співвідношення (2.53)

$$I_{дж} = I_{к.з} = \frac{U_{x,x}}{R_{вх}}.$$

У схемі, зображеній на рис. 2.39, б, струм у навантаженні

$$I_{н} = \frac{I_{дж} R_{вх}}{R_{вх} + R_{н}} = \frac{U_{x,x}}{R_{вх} + R_{н}},$$

що відповідає виразу (2.53) і означає еквівалентність режиму в навантаженні для схем, показаних на рис. 2.37 і 2.39.

Теорему про еквівалентне джерело струму можна розглядати як наслідок теореми про еквівалентне джерело напруги, якщо зробити заміну реального джерела напруги, еквівалентного даному активному двополюснику відповідно до теореми Тевенена (див. рис. 2.37), на джерело струму.

Метод еквівалентного генератора знаходить широке застосування для розв'язання теоретичних і прикладних задач. В основу

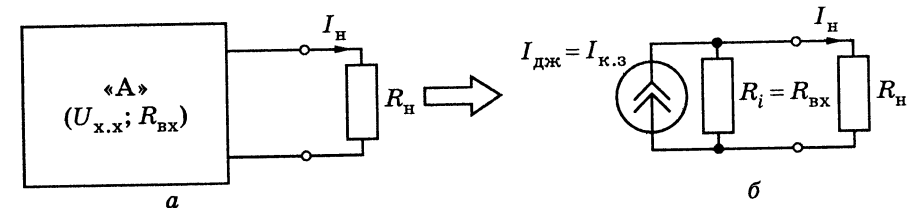


Рис. 2.39. До пояснення теореми про еквівалентне джерело струму

методу покладено визначення основних параметрів активного дво-  
полюсника —  $E = U_{x,x}$  ( $I_{дж} = I_{к.з}$ ) і  $R_{вх}$ .

Експериментальне визначення цих параметрів можливе, в за-  
гальному випадку, за результатами розрахунку режимів кола ( $U_H$ ,  
 $I_H$ ) для двох значень опору навантаження ( $R_{H1}$  і  $R_{H2}$ ). Розв'язання  
системи рівнянь (рис. 2.37)

$$\begin{cases} U_{H1} = U_{x,x} - R_{вх} I_{H1}; \\ U_{H2} = U_{x,x} - R_{вх} I_{H2} \end{cases}$$

дозволяє визначити основні параметри активного двополюсника  
у вигляді:

$$U_{x,x} = \frac{U_{H2} I_{H1} - U_{H1} I_{H2}}{I_{H1} - I_{H2}}; R_{вх} = \frac{U_{H2} - U_{H1}}{I_{H1} - I_{H2}}.$$

Окремими випадками режиму навантаження є режими холос-  
того ходу ( $R_H \rightarrow \infty$ ) і короткого замикання ( $R_H \rightarrow 0$ ). Залежно від  
можливості реалізування цих режимів для даного активного дво-  
полюсника використовуються такі варіанти визначення його  
основних параметрів:

1) у разі режимів холостого ходу і короткого замикання за ре-  
зультатами вимірювання напруги холостого ходу  $U_{x,x}$  (вольтмет-  
ром) і струму короткого замикання  $I_{к.з} = I_{дж}$  (амперметром)  
розраховується вхідний опір:

$$R_{вх} = \frac{U_{x,x}}{I_{к.з}};$$

2) у разі тільки режиму холостого ходу за результатами вимірю-  
вання напруги холостого ходу  $U_{x,x}$ , а також струму  $I_H$  або напруги  
 $U_H$  на відомому опорі навантаження  $R_H$ , розраховується вхідний  
опір:

$$R_{вх} = \frac{U_{x,x} - R_H I_H}{I_H} = \frac{U_{x,x} - U_H}{U_H} R_H;$$

3) у разі тільки режиму короткого замикання за результатами  
вимірювання струму короткого замикання  $I_{к.з}$ , а також струму  $I_H$   
або напруги  $U_H$  на відомому опорі навантаження  $R_H$ , розрахову-  
ється вхідний опір і напруга холостого ходу:

$$R_{вх} = \frac{R_H I_H}{I_{к.з} - I_H} = \frac{U_H}{R_H I_{к.з} - U_H} R_H; U_{x,x} = R_{вх} I_{к.з}.$$

Вибір того чи іншого способу вимірювань параметрів активного  
двополюсника визначається тим, наскільки критичні для нього ре-  
жими холостого ходу або короткого замикання.

Розв'язуючи задачі, параметри активного двополюсника  $U_{x,x}$   
(або  $I_{к.з}$ ) і  $R_{вх}$  визначають розрахунковим шляхом.

Щоб розрахувати напругу холостого ходу  $U_{x,x}$ , рекомендується  
використовувати другий закон Кірхгофа для контуру, до складу  
якого входить ця напруга. Струми, а потім і напруги на елементах  
віток, що входять у вибраний контур, визначаються при  $R_H \rightarrow \infty$ .

Щоб розрахувати струм короткого замикання  $I_{к.з}$  (заміна ак-  
тивного двополюсника за теоремою Нортон), доцільно, замкнув-  
ши  $R_H = 0$ , знаходити струм у перемичці за першим законом  
Кірхгофа для одного з вузлів, до якого увімкнено опір  $R_H = 0$ . Стру-  
ми інших віток, які сполучено у цьому вузлі, заздалегідь визнача-  
ються за спрощеною схемою ( $R_H = 0$ ).

Для визначення вхідного опору у двополюснику виключаються  
всі джерела енергії і розраховується вхідний опір отриманого па-  
сивного двополюсника. Виключення джерел полягає в тому, що за-  
тискачі ідеальних джерел напруги замикаються, а ідеальних  
джерел струму розмикаються; у реальних джерел залишаються їх  
внутрішні опори. Для розрахунку  $R_{вх}$  доцільно застосовувати при-  
йоми еквівалентних перетворень (див. табл. 2.1).

У загальному випадку  $R_{вх}$  можна розрахувати, застосувавши до  
пасивного двополюсника метод контурних струмів. Увімкнувши  
до пасивного двополюсника ідеальне джерело напруги  $E$ , вибира-  
ють контурні струми так, щоб перший контурний струм  $I_I$  збігся  
з вхідним струмом двополюсника, тобто  $I_I = I_{вх}$  (рис. 2.40). Це доз-  
воляє визначити вхідний струм:

$$I_I = I_{вх} = \frac{\begin{vmatrix} E & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{\Delta_{11} E}{\Delta_R}, \quad (2.54)$$

де  $\Delta_R$  — визначник, складений з власних і взаємних опорів;  $\Delta_{11}$  —  
алгебраїчне доповнення визначника  $\Delta_R$ , що отримується викрес-  
люванням першого рядка і першого стовпця.

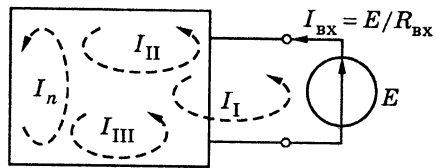


Рис. 2.40. Розрахунок  $R_{ВХ}$  методом контурних струмів

Із співвідношення (2.54) виходить, що вхідний опір пасивного двополюсника можна розрахувати так:

$$R_{ВХ} = \frac{E}{I_{ВХ}} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}$$

Аналогічно можна визначити  $R_{ВХ}$  за допомогою методу вузлових напруг, вибравши як перший вузол один із затискачів двополюсника, а як базисний — інший затискач двополюсника. Можна довести, що в цьому випадку справедливе співвідношення:

$$R_{ВХ} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_G}$$

де  $\Delta_G$  — визначник, складений з власних і взаємних провідностей;  $\Delta_{11}$  — алгебраїчне доповнення визначника  $\Delta_G$ , що отримується викреслюванням першого рядка і першого стовпця.

**Приклад 2.12.** Розрахувати методом еквівалентного генератора струм  $I_1$  у колі, схема якого зображена на рис. 2.41, якщо  $E_1 = 20$  В;  $E_2 = 30$  В;  $I_{дж} = 80$  мА;  $R_1 = 3$  кОм;  $R_2 = 2$  кОм.

**Розв'язання.** Згідно з умовою задачі опір  $R_1$  є навантаженням, а інша частина схеми, окреслена на рис. 2.41 пунктиром, — активним двополюсником.

Щоб визначити  $R_{ВХ}$ , виключаємо джерела і в отриманому пасивному двополюснику (рис. 2.42, а) знаходимо:  $R_{ВХ} = R_2 = 2$  кОм.

Для розрахунку  $U_{х.х}$  розглянемо режим холостого ходу і складемо рівняння згідно з другим законом Кірхгофа для вибраного на рис. 2.42, б контуру, до складу якого входить  $U_{х.х}$ :

$$U_{х.х} + I_{дж} R_2 = E_1 + E_2,$$

звідки

$$U_{х.х} = -I_{дж} R_2 + E_1 + E_2 = -80 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 + 30 + 20 = -110 \text{ В.}$$

За знайденими значеннями  $U_{х.х}$  і  $R_{ВХ}$  визначимо шуканий струм:

$$I_1 = \frac{U_{х.х}}{R_1 + R_{ВХ}} = \frac{-110}{(3+2) \cdot 10^3} = -22 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -22 \text{ мА.}$$

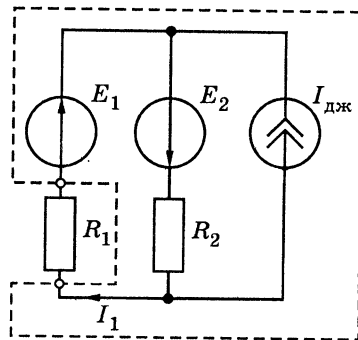


Рис. 2.41. До прикладу 2.12

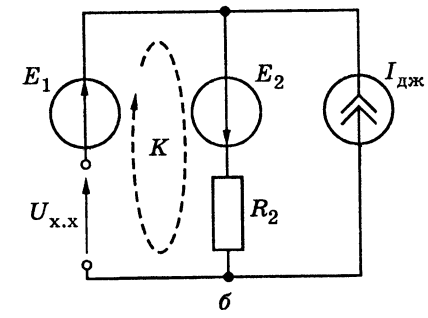
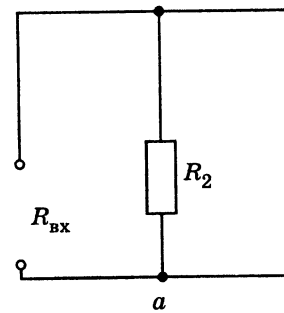


Рис. 2.42. Схеми у прикладі 2.12 для визначення: а —  $R_{ВХ}$ ; б —  $U_{х.х}$

Отриманий результат збігається з результатом розрахунку струму  $I_1$ , здобутого методом накладання у прикладі 2.11.

**Приклад 2.13.** Розрахувати методом еквівалентного генератора струм  $I_1$  у колі, схема і параметри якого наведено у прикладах 2.5 і 2.7 ( $I_{дж} = 10$  мА;  $E_1 = 10$  В;  $E_2 = 40$  В;  $E_3 = 50$  В;  $R_1 = 4$  кОм;  $R_2 = 10$  кОм;  $R_3 = 5$  кОм;  $R_4 = 11$  кОм;  $R_5 = 5$  кОм).

**Розв'язання.** Зобразимо схему кола відповідно до постановки задачі (рис. 2.43). На цій схемі пунктиром позначимо активний двополюсник у режимі холостого ходу, виберемо напрям напруги  $U_{х.х}$  і контур  $K$ , до складу якого входить  $U_{х.х}$ .

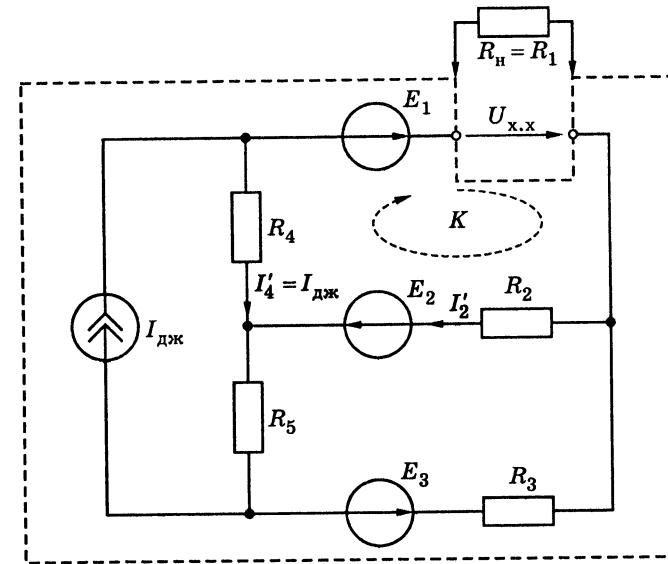


Рис. 2.43. До прикладу 2.13

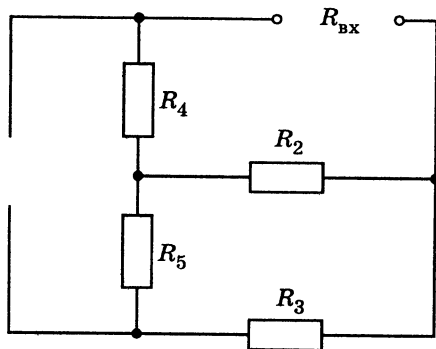


Рис. 2.44. Схема для визначення  $R_{вх}$  у прикладі 2.13

Вхідний опір активного двополюсника обчислимо, застосовуючи прийоми еквівалентних перетворень для схеми (рис. 2.44), в якій виключені джерела (джерела ЕРС  $E_1, E_2$  і  $E_3$  замкнені, а джерело струму  $I_{дж}$  розімкнено):

$$R_{вх} = R_4 + \frac{R_2(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} = 11 + \frac{10 \cdot (5 + 5)}{10 + 5 + 5} = 16 \text{ кОм.}$$

Перед тим, як складати рівняння за другим законом Кірхгофа для

вибраного контуру  $K$  і визначати напругу холостого ходу, розрахуємо для цього режиму струми у вітках контуру  $I'_4$  і  $I'_2$ . Ці струми позначені штрихами для того, щоб підкреслити їх відмінність від відповідних струмів для робочого режиму кола з увімкненим опором  $R_1$ . Струм  $I'_4$  (рис. 2.43) дорівнює струму джерела  $I_{дж}$ . Струм  $I'_2$  розрахуємо, застосовуючи принцип накладання:

$$I'_2 = \frac{E_2 + E_3}{R_2 + R_3 + R_5} - I_{дж} \frac{R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{E_2 + E_3 - I_{дж} R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{40 + 50 - 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3}{(10 + 5 + 5) \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 2 \text{ мА.}$$

Далі складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для вибраного контуру (рис. 2.43) і визначаємо напругу холостого ходу:

$$\begin{aligned} U_{х.х} + R_2 I'_2 - R_4 I_{дж} &= E_1 + E_2; \\ U_{х.х} &= -R_2 I'_2 + R_4 I_{дж} + E_1 + E_2 = \\ &= -10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 11 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} + 10 + 40 = 140 \text{ В.} \end{aligned}$$

Насамкінець, за теоремою про еквівалентне джерело напруги розрахуємо струм у навантаженні:

$$I_1 = \frac{U_{х.х}}{R_{вх} + R_1} = \frac{140}{(16 + 4) \cdot 10^3} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 7 \text{ мА.}$$

Знайдене значення збігається з результатами, отриманими в прикладі 2.5 методом рівнянь Кірхгофа і у прикладі 2.7 методом контурних струмів.

**Приклад 2.14.** Методом еквівалентного генератора визначити в загальному вигляді струм  $I_5$  у колі, схема якого зображена на рис. 2.45.

**Розв'язання.** Виключаючи джерело ЕРС, отримуємо схеми (рис. 2.46) для визначення вхідного опору даного активного двополюсника.

Щоб розрахувати  $R_{вх}$ , використовуємо прийоми еквівалентних перетворень опорів. Враховуючи, що пари опорів  $R_1, R_2$  і  $R_3, R_4$  сполучені паралельно, а еквівалентні опори цих пар — послідовно, отримуємо:

$$R_{вх} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

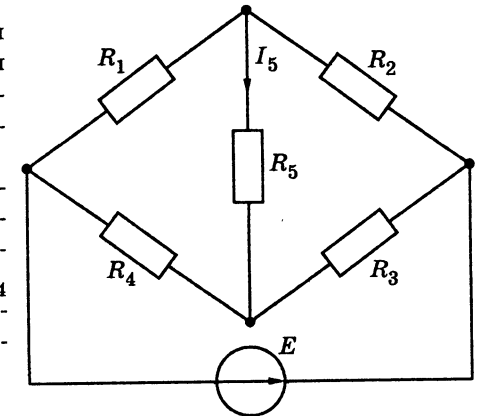


Рис. 2.45. Схема до визначення  $I_5$

Складаємо схему для визначення напруги холостого ходу (рис. 2.47). У цій схемі вибираємо напрям напруги холостого ходу, який збігається із вказаним на рис. 2.45 напрямом струму  $I_5$ , і контур, до складу якого входить  $U_{х.х}$ .

Визначаємо необхідні для розрахунку  $U_{х.х}$  струми  $I_{12}$  і  $I_{34}$  у вітках вибраного контуру:

$$I_{12} = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad I_{34} = \frac{E}{R_3 + R_4}.$$

За законом Кірхгофа для контуру  $K$  (рис. 2.47) знаходимо напругу холостого ходу

$$U_{х.х} = R_1 I_{12} - R_4 I_{34} = \frac{E(R_1 R_3 - R_4 R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

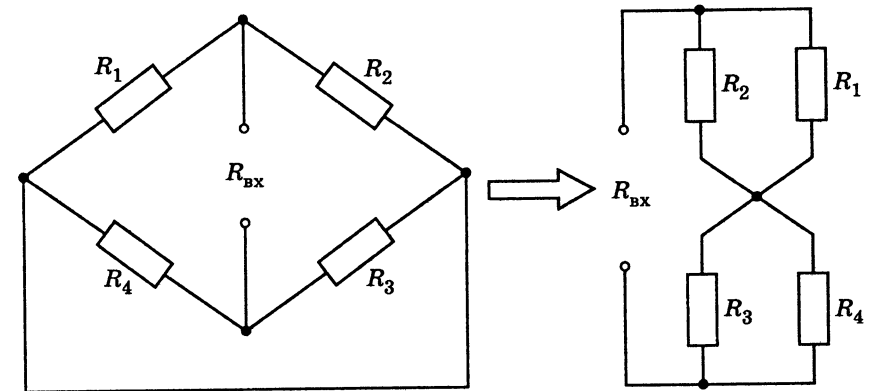


Рис. 2.46. Схеми для визначення  $R_{вх}$  у прикладі 2.14

Після підстановки знайдених  $U_{x,x}$  і  $R_{вх}$  у співвідношення (2.53) і перетворень отримуємо остаточний вираз для шуканого струму:

$$I_5 = \frac{U_{x,x}}{R_{вх} + R_5} = \frac{E(R_1 R_3 - R_4 R_2)}{R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}. \quad (2.55)$$

Як згадувалося вище (приклад 2.3), ця схема називається «мостом» і застосовується у вимірвальній техніці. Вітки з опорами  $R_1, R_2, R_3, R_4$  мають назву «плечі моста», а вітка з опором  $R_5$  і джерелом  $E$  — «діагоналі моста». Характерним для мостової схеми є режим, за яким  $I_5 = 0$ . Такий режим називається «балансом моста».

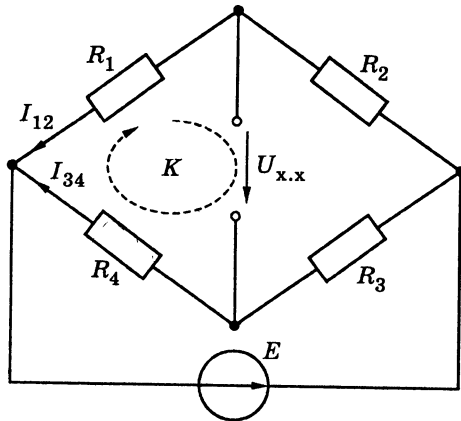


Рис. 2.47. Схема для визначення  $U_{x,x}$  у прикладі 2.14

Виходячи з рівності нулю чисельника у виразі (2.55), «балансу моста» відповідає рівність добутків опорів протилежних «плечей моста»:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4. \quad (2.56)$$

Режим балансу «моста» використовується для визначення невідомого опору  $R_1$ , якщо відомі опори  $R_2, R_3, R_4$ , за якими досягається баланс «моста».

$$R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}.$$

У цьому випадку опір  $R_1$  може бути розрахований згідно з (2.56) як

<sup>3</sup> Уїтстон Чарлз, Wheatstone (1802–1875) — англійський фізик, член Лондонського королівського товариства. Займався дослідженнями у галузі акустики та електрики. Розробив і запатентував один із перших телеграфних апаратів. Сконструював низку приладів, у тому числі так званий «місток Уїтстона».

## 2.8. Енергетичні співвідношення в колах постійного струму

Енергетичні співвідношення в колах постійного струму в загальному вигляді описуються рівнянням балансу потужностей (2.21). Найбільше практичне значення має задача аналізу енергетичних співвідношень для одного з опорів кола (наприклад,  $n$ -го опору  $R_n$ ) за умови зміни його величини в таких випадках:

- 1) потужність в опорі  $P_n = R_n I_n^2$  досягає максимальної величини;
- 2) коефіцієнт корисної дії  $\eta$ , який є відношенням потужності  $P_n$  до сумарної потужності джерел кола, досягає заданого значення.

Безпосереднє застосування рівняння балансу потужностей (2.21) для розв'язання поставлених вище задач призводить до громіздких розрахунків, пов'язаних з аналізом потужності  $P_n$  і ККД  $\eta$  у рівняннях:

$$P_n(R_n) = R_n I_n^2 = \sum_{l=1}^{N_E} E_l I_l + \sum_{m=1}^{N_I} I_{дж,m} U_{дж,m} - \sum_{k=1; k \neq n}^{N_R} R_k I_k^2; \quad (2.57)$$

$$\eta(P_n) = \frac{P_n}{\sum_{l=1}^{N_E} E_l I_l + \sum_{m=1}^{N_I} I_{дж,m} U_{дж,m}}, \quad (2.58)$$

де  $N_R, N_E, N_I$  — відповідно кількість опорів, джерел напруги і джерел струму в колі.

Для розв'язання таких задач доцільніше використовувати метод еквівалентного генератора, вважаючи опір  $R_n$  навантаженням ( $R_n = R_n$ ), а іншу частину схеми — активним двополюсником (рис. 2.48, а). Заміна активного двополюсника еквівалентним джерелом напруги (струму) дозволяє виразити потужність у навантаженні через основні параметри активного двополюсника:

— для схеми з еквівалентним джерелом напруги (рис. 2.48, б)

$$P_n(R_n) = R_n I_n^2 = \frac{R_n U_{x,x}^2}{(R_{вх} + R_n)^2}; \quad (2.59)$$

— для схеми з еквівалентним джерелом струму (рис. 2.48, в)

$$P_n(G_n) = G_n U_n^2 = \frac{G_n I_{к.з}^2}{(G_{вх} + G_n)^2}. \quad (2.60)$$

Потужність у навантаженні для схем з еквівалентними джерелами може бути розрахована також на основі рівнянь балансу

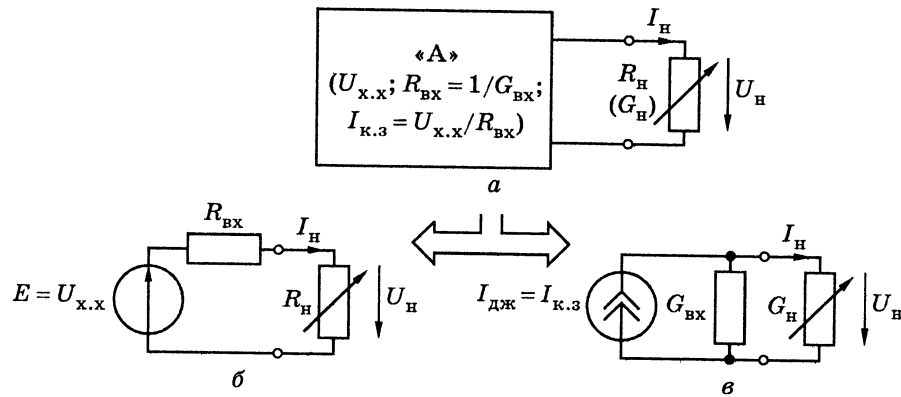


Рис. 2.48. Застосування методу еквівалентного генератора для аналізу енергетичних співвідношень у навантаженні

потужностей. Для схеми з еквівалентним джерелом напруги (рис. 2.48, б) рівняння балансу потужностей має вигляд:

$$R_H I_H^2 + R_{вх} I_H^2 = U_{x.x} I_H, \quad (2.61)$$

звідки

$$P_H = R_H I_H^2 = U_{x.x} I_H - R_{вх} I_H^2. \quad (2.62)$$

Для схеми з еквівалентним джерелом струму (рис. 2.48, в):

$$G_H U_H^2 + G_{вх} U_H^2 = I_{к.з} U_H = U_{x.x} I_H \frac{R_H}{R_{вх}}; \quad (2.63)$$

$$P_H = G_H U_H^2 = I_{к.з} U_H - G_{вх} U_H^2. \quad (2.64)$$

Співвідношення (2.59), (2.60), (2.62), (2.64) еквівалентні з погляду аналізу потужності  $P_H$ . Вибір того або іншого співвідношення визначається постановкою задачі. Однак рівняння балансу потужностей (2.61) і (2.63) кількісно відрізняються, якщо  $R_H \neq R_{вх}$ . Це пояснюється тим, що при перетворенні джерел еквівалентними є тільки режими у навантаженні.

У схемах, зображених на рис. 2.48, струм, напруга і потужність в опорі навантаження при зміні величини  $R_H$  змінюються однаково. Оскільки для граничних значень опору навантаження ( $R_H = 0$  — режим короткого замикання і  $R_H \rightarrow \infty$  — режим холостого ходу) потужності в навантаженні дорівнюють нулю ( $P_H = 0$ ), то при деякому значенні опору навантаження потужність у ньому буде максимальною. Режим, при якому досягається передача максимальної потужності від активного двополюсника у навантаження,

називається *режимом узгодження* навантаження з джерелом, а опір (провідність) навантаження, що забезпечує цей режим, позначається відповідним індексом  $R_{H,uzg}$  ( $G_{H,uzg}$ ).

Щоб визначити  $R_{H,uzg}$  або  $G_{H,uzg}$ , необхідно дослідити на екстремум функції  $P_H(R_H)$  або  $P_H(G_H)$ , які описуються відповідно виразами (2.59) і (2.60).

Оскільки функції  $P_H(R_H)$  і  $P_H(G_H)$  є дуальними, можна обмежитися аналізом однієї з них, наприклад функції  $P_H(R_H)$ . Для цього прирівнюється нулю похідна функції  $P_H(R_H)$  за  $R_H$ :

$$\frac{dP_H(R_H)}{dR_H} = \frac{U_{x.x}^2 [(R_{вх} + R_H)^2 - 2R_H(R_{вх} + R_H)]}{(R_{вх} + R_H)^4} = \frac{U_{x.x}^2 (R_{вх}^2 - R_H^2)}{(R_{вх} + R_H)^4} = 0,$$

звідки

$$R_H = R_{H,uzg} = R_{вх}; \quad G_H = G_{H,uzg} = G_{вх}. \quad (2.65)$$

Отже, для передачі максимальної потужності від активного двополюсника у навантаження необхідно, щоб опір (провідність) навантаження дорівнював вхідному опору (провідності) активного двополюсника.

Після підстановки у вирази (2.59) і (2.60) відповідно  $R_{H,uzg} = R_{вх}$  і  $G_{H,uzg} = G_{вх}$  виходить співвідношення для розрахунку максимальної потужності в навантаженні:

$$P_{H,max} = \frac{U_{x.x}^2}{4R_{вх}} = \frac{I_{к.з}^2}{4G_{вх}}.$$

У режимі узгодження навантаження з джерелом  $\eta_U = \eta_I = 0,5$ , тобто ККД становить 50%. Режим узгодження знаходить широке застосування у так званих малострумних пристроях, для яких величина ККД не має великого значення. Для енергетичних пристроїв, навпаки, ККД має вирішальне значення.

У загальному випадку, якщо  $R_H \neq R_{H,uzg}$ , для розглянутих еквівалентних схем значення ККД відрізняються. Такий висновок виходить з аналізу формули для обчислення ККД схеми з еквівалентним джерелом напруги (рис. 2.48, б) —  $\eta_E$  і ККД схеми з еквівалентним джерелом струму (рис. 2.48, в) —  $\eta_{I_{дж}}$ :

$$\eta_E = \frac{R_H I_H^2}{U_{x.x} I_H} = \frac{R_H I_H^2}{R_{вх} I_H^2 + R_H I_H^2} = \frac{R_H}{R_{вх} + R_H} = \frac{G_{вх}}{G_{вх} + G_H}; \quad (2.66)$$



Перевіримо виконання умови балансу потужностей і розрахуємо ККД:

$$P_1 + P_{R_{\text{вх}}} = P_E = 2,42 \text{ Вт}; \quad \eta_E = \frac{P_1}{P_E} = \frac{1,452}{2,42} = 0,6 = 60 \%$$

У разі еквівалентного джерела струму режим у навантаженні ( $I_1 = 22 \text{ мА}; U_1 = R_1 I_1 = 3 \cdot 10^3 \cdot 22 \cdot 10^{-3} = 66 \text{ В}; P_1 = 1,452 \text{ Вт}$ ) не зміниться. Тому розрахуємо тільки потужність джерела і потужність в його внутрішній провідності:

$$P_{I_{\text{дж}}} = I_{\text{к.з}} U_1 = 55 \cdot 10^{-3} \cdot 66 = 3,63 \text{ Вт}; \quad P_{G_{\text{вх}}} = G_{\text{вх}} U_1^2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 66^2 = 2,178 \text{ Вт}.$$

Складемо рівняння балансу потужностей для еквівалентного джерела струму і визначимо ККД:

$$P_1 + P_{G_{\text{вх}}} = P_{I_{\text{дж}}} = 3,63 \text{ Вт}; \quad \eta_{I_{\text{дж}}} = \frac{P_1}{P_{I_{\text{дж}}}} = \frac{1,452}{3,63} = 0,4 = 40 \%$$

Потужність у навантаженні буде максимальною, якщо  $R_1 = R_{\text{вх}} = 2 \text{ кОм}$ . Розрахуємо за цієї умови режим у навантаженні ( $I_1, U_1, P_1$ ), потужності в еквівалентному джерелі напруги  $P_E$  і його внутрішньому опорі  $P_{R_{\text{вх}}}$ , потужності в еквівалентному джерелі струму  $P_{I_{\text{дж}}}$  і його внутрішній провідності  $P_{G_{\text{дж}}}$ , а також ККД:

$$I_1 = \frac{U_{\text{х.х}}}{R_{\text{вх}} + R_1} = \frac{110}{(2+2) \cdot 10^3} = 27,5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 27,5 \text{ мА};$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 27,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 55 \text{ В};$$

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 2 \cdot 10^3 \cdot (27,5 \cdot 10^{-3})^2 = 1,5125 \text{ Вт};$$

$$P_E = E I_1 = 110 \cdot 27,5 \cdot 10^{-3} = 3,025 \text{ Вт};$$

$$P_{R_{\text{вх}}} = R_{\text{вх}} I_1^2 = 2 \cdot 10^3 \cdot (27,5 \cdot 10^{-3})^2 = 1,5125 \text{ Вт};$$

$$P_{I_{\text{дж}}} = I_{\text{к.з}} U_1 = 55 \cdot 10^{-3} \cdot 55 = 3,025 \text{ Вт};$$

$$P_{G_{\text{вх}}} = G_{\text{вх}} U_1^2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 55^2 = 1,5125 \text{ Вт};$$

$$\eta = \frac{P_1}{P_E} = \frac{P_1}{P_{I_{\text{дж}}}} = \frac{1,5125}{3,025} = 0,5 = 50 \%$$

## 2.9. Принцип взаємності

Принцип взаємності (зворотності) встановлює зв'язок між режимами (струмом або напругою) двох ділянок кола при перенесенні з першої ділянки до другої єдиного для цього кола ідеального джерела (напруги або струму). При цьому можливі два варіанти:

1) з однієї вітки в іншу переноситься ідеальне джерело напруги і встановлюється зв'язок між струмами цих віток;

2) з однієї ділянки кола до іншої переноситься ідеальне джерело струму і встановлюється зв'язок між напругами на цих ділянках.

Принцип взаємності застосовується тільки для лінійних кіл.

Згідно з першим варіантом (рис. 2.51), при перенесенні ідеального джерела напруги  $E$ , яке ввімкнено в першу вітку (1-1') і яке викликає у другій вітці (2-2') струм  $I_2$  (рис. 2.51, а), у другу вітку (рис. 2.51, б) джерело  $E$  викличе в першій вітці такий самий струм  $I_1 = I_2$ . Експериментальне трактування цього варіанта принципу взаємності — в лінійному пасивному колі перестановка ідеального джерела напруги й амперметра не змінює показання останнього.

Для обґрунтування викладеного варіанта принципу взаємності використовується метод контурних струмів. У схемах, зображених на рис. 2.51, вибирається  $N$  одностипно направлених контурних струмів. Як перший контурний струм вибирається струм  $I_1$ , напрям якого збігається з напрямом ЕРС першої вітки, а як другий — струм  $I_{II}$ , який збігається зі струмом  $I_2$ , що вимірюється амперметром (рис. 2.51, а).

У схемі, яка зображена на рис. 2.51, а, значення контурних ЕРС становитимуть:  $E_I = E; E_{II} = E_{III} = \dots = E_N = 0$ . Тоді вираз для струму  $I_2$  можна подати у вигляді:

$$I_2 = I_{II} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & E & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & 0 & \dots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N1} & 0 & \dots & R_{NN} \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{\Delta_{12} \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot E}{\Delta_R}, \quad (2.68)$$

де  $\Delta_R$  — однаковий для показаних на рис. 2.51 схем визначник системи рівнянь, складених за методом контурних струмів.

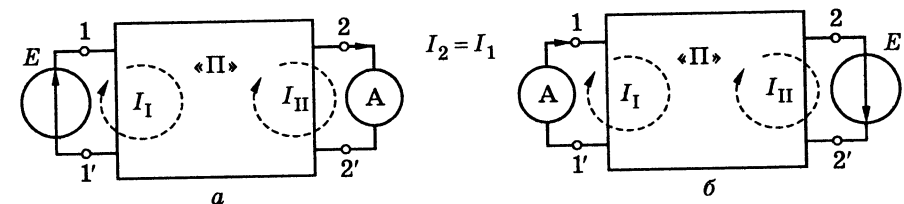


Рис. 2.51. Принцип взаємності для кола з джерелом напруги



У схемі, зображеній на рис. 2.51, б, контурними ЕРС є:  $E_I = 0$ ;  $E_{II} = E$ ;  $E_{III} = \dots = E_N = 0$ . Тому вираз для визначення струму  $I_1$  в цій схемі має вигляд:

$$I_1 = I_I = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ E & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{\Delta_{21} \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot E}{\Delta_R}. \quad (2.69)$$

Визначник  $\Delta_R$  симетричний відносно головної діагоналі. У симетричного визначника рядки і стовпці з однаковими номерами ідентичні, тому  $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ . Отже, вирази (2.68) і (2.69) збігаються, тобто струми, що порівнюються, однакові ( $I_2 = I_1$ ).

Рис. 2.52 пояснює принцип взаємності для кола з джерелом струму. У цьому випадку при перенесенні ідеального джерела струму  $I_{дж}$ , яке ввімкнене в першу вітку (1-1') і спричиняє на затискачах 2-2' напругу  $U_2$  (рис. 2.52, а), у другу вітку (рис. 2.52, б) джерело  $I_{дж}$  спричинить на затискачах першої вітки напругу  $U_1 = U_2$ . Експериментальне трактування другого варіанта принципу взаємності — в лінійному пасивному колі перестановка ідеального джерела струму і вольтметра не змінює показання вольтметра.

Для доказу другого варіанта принципу взаємності можна застосувати метод вузлових напруг. Якщо в схемі вузли 1' і 2' є спільним вузлом (рис. 2.52), який вибирається як базисний, доказ аналогічний наведеному вище із застосуванням методу контурних струмів. У іншому випадку аналіз ускладнюється, оскільки потрібно вибрати довільний базисний вузол (0) і обґрунтувати рівність  $U_2 = U_{20} - U_{10}$  першої схеми (рис. 2.52, а) і  $U_1 = U_{10} - U_{1'0}$  другої схеми (рис. 2.52, б). Такий варіант доказу пропонується виконати самостійно.

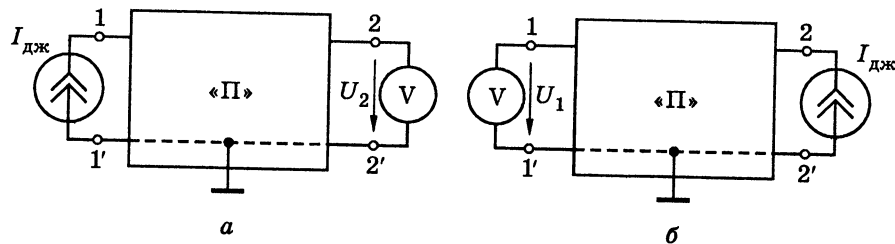


Рис. 2.52. Принцип взаємності для кола з джерелом струму

Викладені варіанти принципу взаємності відіграють важливу роль як у теорії кіл, так і в теорії поля. Прикладом може служити відомий принцип взаємності (зворотності) антен.

Принцип взаємності зручно застосовувати для розв'язання деяких задач теорії кіл.

**Приклад 2.16.** Використовуючи принцип взаємності, визначити струм  $I_5$  мостової схеми, зображеної на рис. 2.45 в прикладі 2.14.

*Розв'язання.* Перенесемо ідеальне джерело напруги в діагональ моста послідовно з опором  $R_5$ , після чого схема матиме вигляд, показаний на рис. 2.53, а. Відповідно до принципу взаємності, струм  $I_5$  в діагоналі моста схеми, яку розглянуто в прикладі 2.14 (див. рис. 2.45), і струм  $I_5$  в отриманій схемі (рис. 2.53, а) мають збігатися.

Щоб визначити струм  $I_5$  (рис. 2.53, а), скористаємось першим законом Кірхгофа для вузла 1

$$I_4 - I_5 - I_1 = 0,$$

засудивши визначивши струми  $I_1$  і  $I_4$ .

Об'єднавши вузли 1 і 2, отримаємо схему (рис. 2.53, б). Застосувавши метод еквівалентних перетворень, знаходимо струми:

$$I_E = \frac{E}{R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{E(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)};$$

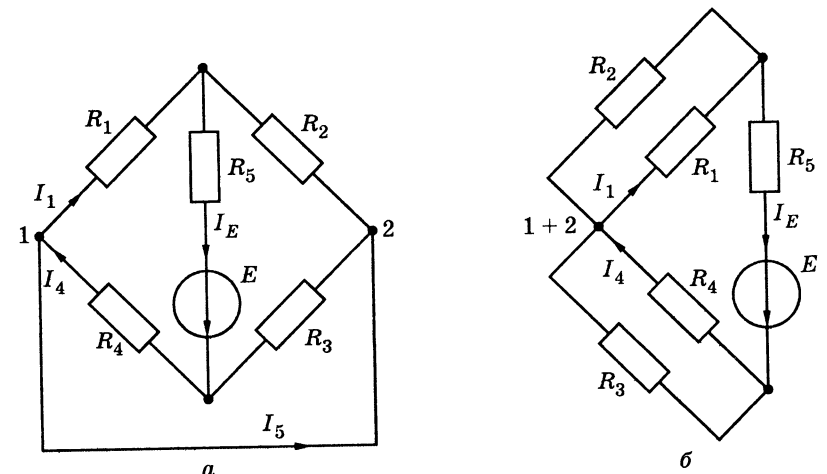


Рис. 2.53. До прикладу 2.16

$$I_4 = \frac{I_E R_3}{R_3 + R_4} = \frac{E(R_1 + R_2)R_3}{R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)};$$

$$I_1 = \frac{I_E R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E(R_3 + R_4)R_2}{R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}.$$

Скориставшись рівнянням, складеним вище за першим законом Кірхгофа, і згідно з отриманими виразами для струмів  $I_1$  і  $I_4$  визначаємо шуканий струм:

$$I_5 = I_4 - I_1 = \frac{E(R_1 R_3 - R_4 R_2)}{R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}.$$

Розв'язок збігається з виразом для струму  $I_5$  у прикладі 2.14.

### 2.10. Теорема компенсації

Зміст теореми компенсації полягає в тому, що будь-яка ділянка кола, що розглядається як двополюсник, може бути еквівалентно замінена ідеальним джерелом ЕРС або струму (рис. 2.54).

Можливість заміни ділянки кола джерелом ЕРС виходить з рівняння, записаного за другим законом Кірхгофа для контуру, до складу якого входить напруга на цій ділянці. Особливим випадком такої ділянки кола може бути  $l$ -й опір  $R_l$ , що входить в контур (рис. 2.55, а), який містить  $m$  опорів і  $n$  джерел ЕРС ( $1 \leq l \leq m$ ). Нехай напрям напруги на цьому опорі  $U_l = R_l I_l$  збігається з напрямом обходу контуру (рис. 2.55, а). Тоді за другим законом Кірхгофа рівняння для цього контуру можна записати у вигляді:

$$U_l + \sum_{\substack{k=1; \\ k \neq l}}^m U_k = \sum_{k=1}^n E_k. \quad (2.70)$$

(алгебраїчні)

Перенесення напруги  $U_l$  у праву частину рівності дозволяє записати рівняння (2.70) у вигляді

$$\sum_{\substack{k=1; \\ k \neq l}}^m U_k = \sum_{k=1}^n E_k - U_l = \sum_{k=1}^n E_k - E_l. \quad (2.71)$$

(алгебраїчні)

Рівнянню (2.71) відповідає контур з  $(m-1)$  опорами і  $(n+1)$  джерелами ЕРС. Замість опору  $R_l$  у контурі з'явилось джерело  $E_l = U_l = R_l I_l$ , спрямоване протилежно напрузі  $U_l$  (рис. 2.55, б).

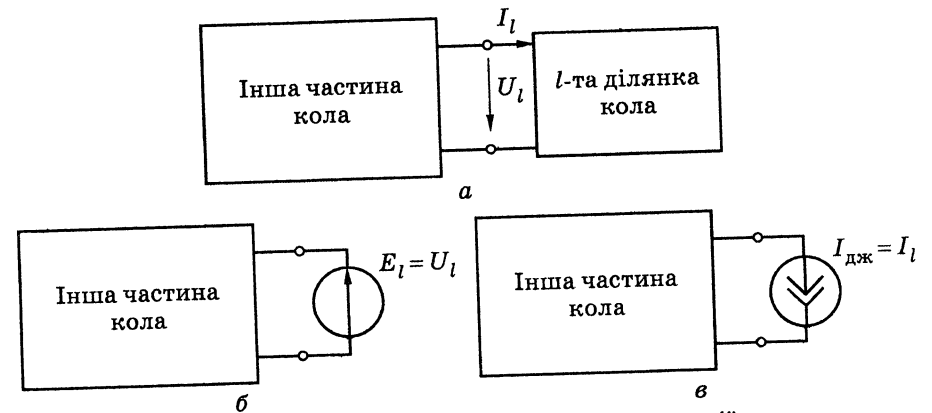


Рис. 2.54. Пояснення теореми компенсації

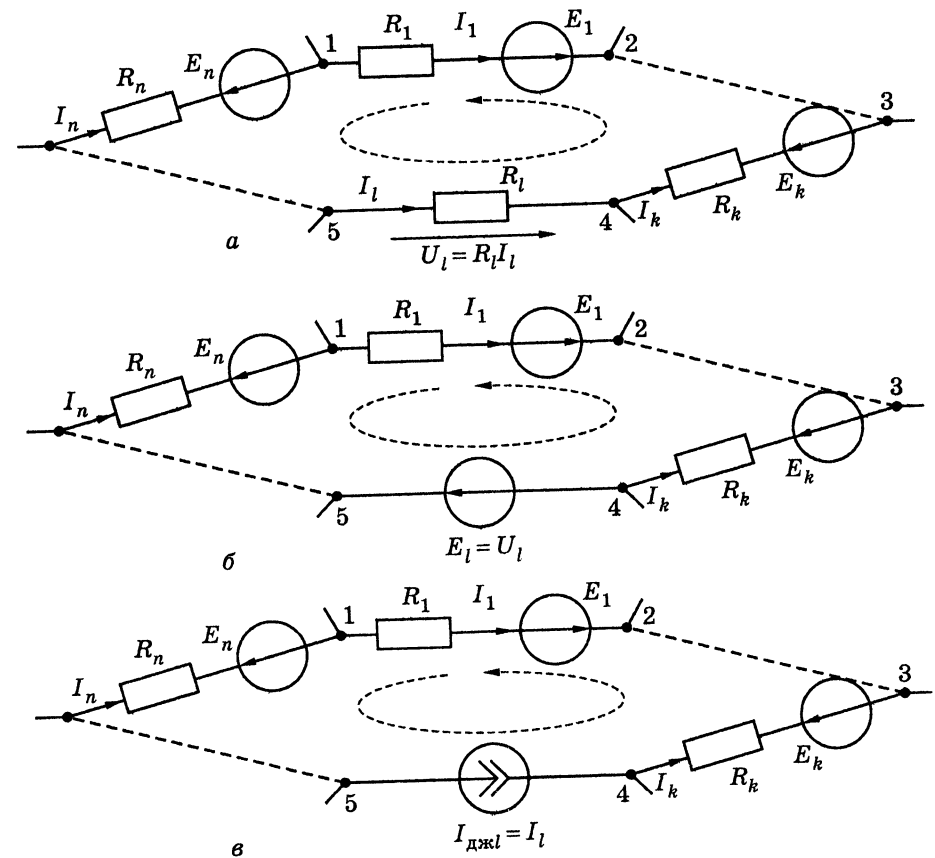


Рис. 2.55. Приклади заміни ділянки кола залежними джерелами

Узагальнюючи даний приклад, можна сформулювати один з варіантів теореми компенсації: будь-яку ділянку кола, представлену у вигляді двополюсника з напругою на його затискачах  $U_l$  (рис. 2.54, а), можна еквівалентно замінити джерелом ЕРС, яка за величиною дорівнює напрузі  $U_l$  і протилежна їй за напрямом (рис. 2.54, б).

Другий варіант формулювання теореми компенсації виходить з того, що рівняння, складені за першим законом Кірхгофа для відповідних вузлів схеми, не зміняться, якщо одну з віток замінити ідеальним джерелом струму, струм якого дорівнює струму цієї вітки. Якщо вказану заміну застосувати до вітки з опором  $R_l$  (рис. 2.55, а), то схема матиме вигляд, як показано на рис. 2.55, в. У загальному випадку суть такого варіанта теореми компенсації полягає в тому, що будь-яку ділянку кола, яка є двополюсником з вхідним струмом  $I_l$  (рис. 2.54, а), можна еквівалентно замінити джерелом струму, струм якого  $I_{дж_l} = I_l$  (рис. 2.54, в).

Параметри джерел напруги і струму, про які йдеться в обґрунтуваннях і формулюваннях теореми компенсації, залежать від режиму роботи кола, а отже, від значень усіх його елементів. Такі джерела прийнято називати *залежними* або *неавтономними* на відміну від раніше розглянутих *незалежних* або *автономних* джерел.

Залежні джерела знаходять широке застосування в схемах заміщення електронних приладів (електровакуумних і напівпровідникових приладів, інтегральних мікросхем та ін.). У цих випадках параметри залежних джерел керуються вхідними напругами або струмами. Тому залежні джерела в схемах заміщення електронних приладів часто називають *керованими*.

На рис. 2.56 показані види керованих джерел:

а) джерело напруги, кероване напругою (ДНКН)  $E(U_{вх})$ , — рис. 2.56, а;

б) джерело струму, кероване струмом (ДСКС)  $I_{дж}(I_{вх})$ , — рис. 2.56, б;

в) джерело напруги, кероване струмом (ДНКС)  $E(I_{вх})$ , — рис. 2.56, в;

г) джерело струму, кероване напругою (ДСКН)  $I_{дж}(U_{вх})$ , — рис. 2.56, г.

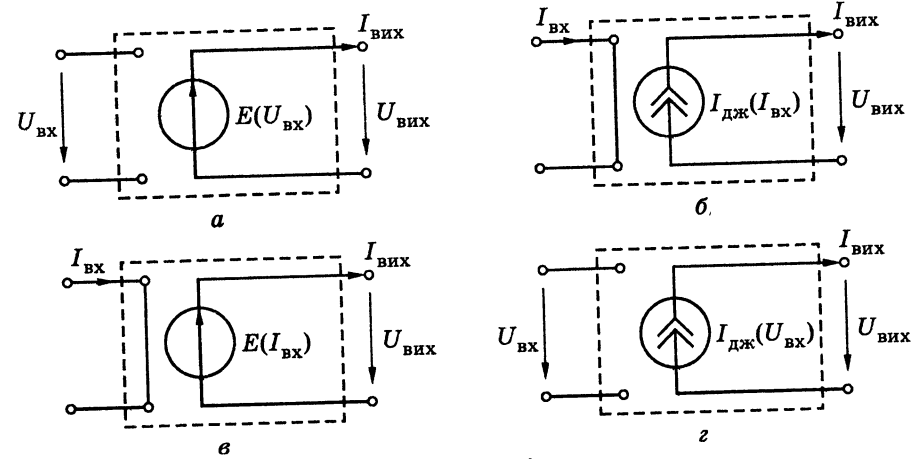


Рис. 2.56. Керовані джерела

Загалом, як керуючі (вхідні)  $(I_{вх}, U_{вх})$ , так і керовані (вихідні) струми або напруги  $(I_{вих} = I_{дж}, U_{вих} = E)$  можуть бути не тільки постійними, як це показано на рис. 2.56, але й такими, що змінюються в часі ( $i_{вх}, u_{вх}, i_{вих} = i_{дж}, u_{вих} = e$ ). У лінійних колах коефіцієнти (керуючі величини), що зв'язують вхідні та вихідні струми (напруги), є безрозмірними або розмірними постійними величинами:

а) для ДНКН  $E(U_{вх}) = H_U U_{вх}; e(u_{вх}) = H_U u_{вх}$ , де  $H_U$  — безрозмірний коефіцієнт передачі за напругою;

б) для ДСКС  $I_{дж}(I_{вх}) = H_I I_{вх}; i_{дж}(i_{вх}) = H_I i_{вх}$ , де  $H_I$  — безрозмірний коефіцієнт передачі за струмом;

в) для ДНКС  $E(I_{вх}) = R_{пер} I_{вх}; e(i_{вх}) = R_{пер} i_{вх}$ , де  $R_{пер}$  — передатний опір;

г) для ДСКН  $I_{дж}(U_{вх}) = G_{пер} U_{вх}; i_{дж}(u_{вх}) = G_{пер} u_{вх}$ , де  $G_{пер}$  — передатна провідність.

Для режиму постійних струмів і напруг у параметричних колах керуючі величини залежать від часу:  $H_U(t), H_I(t), R_{пер}(t), G_{пер}(t)$ , а в нелінійних колах — від вхідних струмів (напруг):  $H_U(U_{вх}), H_I(I_{вх}), R_{пер}(I_{вх}), G_{пер}(U_{вх})$ .

Якщо змінні вхідні напруги (струми) є порівняно невеликими відхиленнями  $u_{сигн}, i_{сигн}$  (званими також сигнальними складовими або просто сигналами) від деяких постійних значень  $(I_0, U_0)$ , то для цих сигналів нелінійні керовані джерела в першому

наближенні можна вважати лінійними. Наприклад, при дії на нелінійний ДСКН керуючої напруги

$$u_{\text{вх}} = U_0 + u_{\text{сигн}}, u_{\text{сигн}} \ll U_0$$

вихідний струм можна приблизно розрахувати, якщо розкласти функцію  $i_{\text{дж}}(u_{\text{вх}})$  в ряд Тейлора<sup>4</sup> поблизу  $u_{\text{вх}} = U_0$  й обмежитися першою похідною цієї функції:

$$i_{\text{вих}} \approx i_{\text{дж}}(U_0) + \left[ \frac{di_{\text{дж}}(u_{\text{вх}})}{du_{\text{вх}}} \right]_{u_{\text{вх}}=U_0} u_{\text{сигн}}.$$

### 2.11. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Сформулювати задачу аналізу електричних кіл. Назвати основні методи аналізу кіл.
2. Які перетворення схеми називаються еквівалентними?
3. Яке з'єднання елементів називається послідовним, паралельним, змішаним?
4. При послідовному з'єднанні двох опорів загальний опір становить 25 Ом, а при паралельному — 6 Ом. Знайти величини цих опорів.  
*Відповідь:* 15 Ом; 10 Ом.
5. Розрахувати струми у вітках схеми, розглянутої у прикладі 2.3, застосувавши перетворення «трикутника» опорів між вузлами 1, 2, 3 в еквівалентну «зірку».  
*Відповідь:*  $-0,4$  мА.
6. Сформулювати умови еквівалентності реальних джерел напруги і струму.
7. Використовуючи методи еквівалентних перетворень, визначити струм  $I_5$  у колі, розглянутому в прикладі 2.4, якщо  $E_2 = 0$ ,  $R_4 \rightarrow \infty$ . Відомо, що  $E_1 = E_3 = 2$  В,  $I_{\text{дж}} = 1$  мА,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1$  кОм,  $R_8 = 2$  кОм.  
*Відповідь:*  $-0,4$  мА.
8. Для кола, схема якого зображена на рис. 2.12, визначити кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа, які необхідно скласти для аналізу схеми методом рівнянь Кірхгофа.  
*Відповідь:* 5; 3.

<sup>4</sup> Тейлор Брук, Taylor (1685–1731) — англійський математик і філософ, член Лондонської королівської спілки та її вчений секретар. Досліджував властивості функцій. У 1712 р. здобув, а в 1715 р. опублікував загальну формулу розвинення функцій у степеневий ряд. Тейлор започаткував математичне вивчення задачі про коливання струни, працював над теорією кінцевих різниць.

9. Яку перевагу мають методи контурних струмів (вузлових напруг) у порівнянні з методом рівнянь Кірхгофа? Який критерій вибору цих методів для розрахунку певного кола?
10. Пояснити поняття контурних струмів, опорів, ЕРС.
11. Пояснити поняття вузлової напруги, базисного вузла, вузлового струму джерел.
12. Як визначається величина і знак взаємного опору (провідності) в методі контурних струмів (вузлових напруг)?
13. Опори  $R_{0-1} = R_{0-2} = R_{0-3} = 1$  кОм утворюють «зірку» (див. рис. 2.5). Між вузлами 1 і 2, 3 і 2, 3 і 1 увімкнено ідеальні джерела струму:  $I_{1 \rightarrow 2} = I_{3 \rightarrow 2} = I_{3 \rightarrow 1} = 1$  мА (напрямок струмів джерел вказаний стрілками між індексами). Визначити струми віток, використовуючи метод вузлових напруг.  
*Відповідь:*  $I_1 = 0$ ;  $I_2 = I_3 = 2$  мА.
14. У чому полягає принцип накладання? Для яких кіл він застосовується?
15. Який буде струм  $I_1$  у колі, зображеному на рис. 2.32 (приклад 2.11), якщо при заданих параметрах схеми: а) змінити напрям усіх джерел на протилежні; б) змінити напрям тільки джерела  $E_1$ ?  
*Відповідь:* а) 22 мА; б)  $-30$  мА.
16. Розрахувати методом накладання струм  $I_2$  у колі, схема якого зображена на рис. 2.32, зберігши вихідні дані прикладу 2.11.  
*Відповідь:* 58 мА.
17. Пояснити поняття вхідного опору активного двополюсника. Як перейти від активного двополюсника до пасивного?
18. Для активного двополюсника за результатами вимірювань напруга холостого ходу і струм короткого замикання становили відповідно 10 В і 10 мА. Визначити струм в опорі навантаження 1 кОм, який увімкнений до затискачів двополюсника.  
*Відповідь:* 5 мА.
19. Якщо увімкнути до активного двополюсника опір навантаження 100 Ом, напруга на цьому опорі становитиме 1 В. Визначити вхідний опір активного двополюсника, якщо напруга холостого ходу на його затискачах дорівнює 3 В.  
*Відповідь:* 200 Ом.
20. У колі, розглянутому в прикладі 2.13, знайти вхідний опір і напругу холостого ходу активного двополюсника, вважаючи навантаженням опір  $R_3$ . Розрахувати методом еквівалентного генератора струм  $I_3$  в опорі,

попередньо вибравши позитивний напрям  $I_3$  згідно з напрямом джерела  $E_3$ .

*Відповідь:* 11 кОм; -24 В; -1,5 мА.

21. Сформулювати умову узгодження джерела з навантаженням за активною потужністю. Яке при цьому буде значення коефіцієнта корисної дії?
22. За яким критерієм здійснюється узгодження джерела з навантаженням: а) малострумівих кіл; б) потужних енергетичних пристроїв?
23. Визначити потужність джерел і перевірити виконання балансу потужностей для кола, схема і параметри якого наведені у прикладі 2.9.  
*Відповідь:* 260 мВт.
24. У чому полягає принцип взаємності? Для яких кіл можна застосувати даний принцип?
25. Використовуючи принцип взаємності, визначити струм  $I_3$  у схемі, яка зображена на рис. 2.6 у прикладі 2.3.  
*Вказівка.* Застосувати перетворення «трикутника» опорів  $R_2, R_5, R_6$  в еквівалентну «зірку».
26. Сформулювати теорему компенсації. Чим пояснюється можливість заміни ділянки кола джерелом ЕРС?
27. Назвати види керування джерел напруги і струму. Який параметр є керуючим для кожного з цих джерел?



## УСТАЛЕНИЙ РЕЖИМ У КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

- Загальна характеристика кіл синусоїдного струму
- Основні параметри синусоїдних струмів, напруг і ЕРС
- Діючі та середні випрямлені значення синусоїдних струмів, напруг і ЕРС
- Векторне і комплексне подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС
- Елементи  $R, L, C$  у колах синусоїдного струму
- Послідовне та паралельне з'єднання елементів  $R, L, C$  у режимі синусоїдного струму
- Еквівалентна заміна послідовного з'єднання елементів паралельним і навпаки
- Закони Кірхгофа в комплексній формі
- Комплексний метод розрахунку кіл синусоїдного струму
- Векторні діаграми кіл синусоїдного струму
- Енергетичні співвідношення в колах синусоїдного струму
- Режим передачі максимальної активної потужності від джерела до навантаження



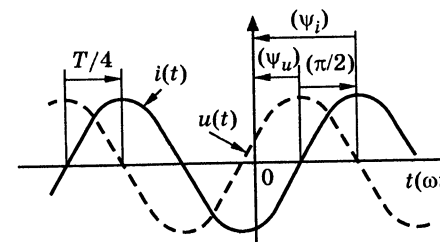
Ж. Б. Фур'є



Г. Герц

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$f = \frac{1}{T}; \lambda = vT = \frac{v}{f}$$



Л. Ейлер

### 3.1. Загальна характеристика кіл синусоїдного струму

Синусоїдні струми, напруги або ЕРС змінюються у часі відповідно до тригонометричних функцій синуса або косинуса. Крім теорії кіл, ці функції застосовуються в теоретичній фізиці (наприклад, класична задача коливань струни), в електродинаміці та ін. На відміну від кіл із зосередженими параметрами у колах з розподіленими параметрами і в задачі коливань струни процеси мають синусоїдний характер як у часі, так і за однією з координат (довжиною). В електродинаміці процеси описуються синусоїдними функціями як у часі, так і за трьома просторовими координатами.

Синусоїдні струми, напруги або ЕРС належать до категорії періодичних, тобто повторюються через певні проміжки часу. Періодичні струми, напруги або ЕРС можуть змінюватися не тільки за законами синуса або косинуса, але і за складнішими несинусоїдними законами. Загалом, для миттєвих значень періодичних струмів та їх похідних справедливі співвідношення:

$$i(t) = i(t \pm nT);$$

$$i'(t) = i'(t \pm nT),$$

де  $T$  — період;  $n$  — будь-яке ціле число.

Отже, *період*  $T$  — мінімальний проміжок часу, через який періодичний процес і його похідні повторюються. Період вимірюється в секундах (с). Секунда належить до основних одиниць вимірювання в системі СІ.

Величина, обернена періоду, називається *циклічною частотою* або коротко — *частотою*:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота має розмірність (зв'язок з основними одиницями) —  $\text{с}^{-1}$ , а одиницею вимірювання частоти є герц<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Герц Генріх Рудольф, Heinrich Hertz (1857–1894) — німецький фізик, один із засновників сучасної електродинаміки. Експериментально довів існування електромагнітних хвиль і досліджував їх властивості. Результати викладені в роботах «Основні рівняння електродинаміки тіл, що покояться» (1890) та «Основні рівняння електродинаміки рухомих тіл» (1890). Ім'ям Герца, крім одиниці вимірювання частоти, названі вібратор і резонатор, за допомогою яких він експериментально довів існування електромагнітних хвиль і досліджував їх властивості. Одиниця під назвою «герц» уперше запропонована в 1928 р., а як міжнародна прийнята в 1933 р.

Частота в герцах дорівнює кількості періодів коливань протягом інтервалу часу, який дорівнює секундi.

Відомо, що періодичні функції, що задовольняють умовам Діріхле<sup>2</sup>, можна подати рядом Фур'є<sup>3</sup> у вигляді суми деякої постійної величини і синусоїдних складових з кратними частотами ( $f, 2f, 3f, \dots$ ). Доданки ряду Фур'є прийнято називати *гармоніками*, що й викликало вживання терміна *гармонічний режим* (гармонічні струми, напруги, ЕРС) поряд з терміном *синусоїдний режим* (синусоїдні струми, напруги, ЕРС). Крім того, іноді використовується застарілий термін *змінний струм*.

Ряди Фур'є у поєднанні з принципом накладання застосовуються для аналізу усталених режимів лінійних кіл з періодичними несинусоїдними джерелами. Для цього миттєві значення ЕРС або струмів джерел виражаються у вигляді сум (спектрів) гармонічних складових різних частот ( $0, f, 2f, 3f, \dots$ ) і виконуються розрахунки окремих усталених режимів кола для кожної з гармонік спектра. Відповідно до принципу накладання, режим кола можна розрахувати як суму окремих усталених режимів — постійного струму і синусоїдних струмів з кратними частотами. У радіотехніці такий спектральний (частотний) метод широко використовується для розрахунку проходження періодичних і одиничних сигналів через лінійні кола. Для одиничних сигналів застосовується граничний перехід від ряду до інтеграла Фур'є, якщо  $T \rightarrow \infty$ .

З поняттями *період* і *частота* пов'язане таке важливе для кіл з розподіленими параметрами й електродинаміки поняття, як довжина хвилі:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f},$$

де  $v$  — швидкість поширення електромагнітних коливань, які мають частоту  $f$ .

<sup>2</sup> Діріхле Петер Густав Лежен, Dirichlet (1805–1859) — німецький математик, учень Фур'є. Основні роботи належать до теорії чисел, математичного аналізу (сформулював поняття умов збіжності рядів), механіки, математичної фізики. Сформулював умови, за яких періодична функція може бути розкладена в тригонометричний ряд, — для функції на інтервалі  $T$  припустима кінцева кількість розривів першого роду і кінцева кількість максимумів і мінімумів.

<sup>3</sup> Фур'є Жан Батіст Жозеф, Fourier (1768–1830) — французький математик, член Паризької АН, почесний член Петербурзької АН. Основний об'єкт досліджень — математична фізика. Основні роботи — «Аналітична теорія тепла» (1822) й «Аналіз означених рівнянь» (1831). Розробив метод розділення змінних, заснований на поданні функцій тригонометричними рядами (рядами Фур'є).

Швидкість поширення  $v$  залежить від параметрів середовища й у вільному просторі (вакуумі) дорівнює швидкості світла  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с.<sup>4</sup>

Довжина хвилі вимірюється в метрах (м) і характеризує просторову періодичність електромагнітних хвиль.

В енергетиці використовуються коливання порівняно низьких частот: 50 Гц (Європа), 60 Гц (Америка), 400 Гц (живлення спеціальних пристроїв).

У радіотехнічних та інформаційних системах використовуються сигнали, носійні частоти яких перебувають в межах від край низьких (одиниці герц) до частот оптичного діапазону (більше  $3 \cdot 10^{12}$  Гц). Прийнята відповідно до діючих стандартів класифікація діапазонів частот і довжин хвиль наведена в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Класифікація діапазонів частот і довжин хвиль

№	Класифікація діапазонів частот		Класифікація довжин хвиль	
	Найменування	Частота	Найменування	Довжина хвилі (у вакуумі)
Радіочастоти і радіохвилі (згідно з ДСТУ 3254-95)				
1	Вельминизькі	(3–30) Гц	Декамегаметрові	(10–100) Мм
2	Наднизькі	(30–300) Гц	Мегаметрові	(1–10) Мм
3	Інфранизькі	(300–3000) Гц	Гектокілометрові	(100–1000) км
4	Дуже низькі	(3–30) кГц	Міріаметрові	(10–100) км
5	Низькі	(30–300) кГц	Кілометрові	(1–10) км
6	Середні	(300–3000) кГц	Гектометрові	(100–1000) м
7	Високі	(3–30) МГц	Декаметрові	(10–100) м
8	Дуже високі	(30–300) МГц	Метрові	(1–10) м
9	Ультрависокі	(300–3000) МГц	Дециметрові	(10–100) см
10	Надвисокі	(3–30) ГГц	Сантиметрові	(1–10) см
11	Вельмивисокі	(30–300) ГГц	Міліметрові	(1–10) мм
12	Гіпервисокі	(300–3000) ГГц	Дециміліметрові	(0,1–1) мм
Оптичні				
13	більше 3 ТГц		менше 0,1 мм	

<sup>4</sup> Швидкість світла у вакуумі є однією з універсальних фізичних сталих (констант) і зараз оцінена з відносною похибкою  $4 \cdot 10^{-9}$  величиною  $c = 299792458$  м/с.

У колах синусоїдного струму, як правило, миттєві значення параметрів джерел  $e(t)$  та  $i_{дж}(t)$  змінюються згідно з гармонічним законом з однаковою частотою. В усталеному (стаціонарному) режимі таких кіл усі струми  $i(t)$  і напруги  $u(t)$  також змінюються за гармонічним законом з тією ж частотою.

Теорія кіл синусоїдного струму зобов'язана своїм розвитком широкому практичному застосуванню таких струмів спочатку в енергетиці, а потім у радіотехніці та в інших інформаційних галузях техніки. Використання синусоїдних струмів в енергетиці дозволило успішно розв'язати основні завдання виробництва (електромашинні генератори), транспортування (трифазні системи), перетворення (трансформатори) і споживання (двигуни, випрямлячі та ін.) електроенергії.

Синусоїдні струми і напруги в радіотехніці — це, передусім, так звані носійні коливання, які є основою формування сигналів. Як джерела носійних коливань використовуються різні типи генераторів (лампові, транзисторні, квантові та ін.). Резонансними системами цих генераторів є коливальні контури, які залежно від діапазону і вимог до стабільності частот, що генеруються, реалізуються за допомогою кіл із зосередженими параметрами (котушки індуктивності та конденсатори), кіл з розподіленими параметрами (довгі лінії), електромеханічних (кварцових) і об'ємних резонаторів.

Висока стабільність частоти сучасних генераторів покладена в основу еталонів деяких фізичних одиниць. Наприклад, сучасний еталон часу і частоти є квантовим генератором (мазером), який створено на базі цезію-133<sup>5</sup>.

Функції, що змінюються за гармонічним законом, мають виняткові математичні особливості, які використовуються в теорії кіл. Ці функції не змінюють свою форму, якщо їх диференціювати та інтегрувати, а у разі однакових частот — підсумовувати і віднімати. На вказаних властивостях гармонічних коливань ґрунтується комплексний метод розрахунку кіл синусоїдного струму, який дозволяє використати всі розглянуті для кіл постійного струму прийоми і методи розрахунку з однією відмінністю — усі величини

<sup>5</sup> З 1967 р. секунда визначена як інтервал часу, протягом якого здійснюється 9 192 631 770 коливань резонансної частоти енергетичного переходу між рівнями надтонкої структури основного стану атома цезію-133 (при відсутності зовнішніх магнітних полів). Відносна нестабільність сучасних квантових еталонів часу і частоти становить  $\Delta t/t = \Delta f/f \approx 10^{-13} \dots 10^{-14}$ .

(струми, напруги, ЕРС, опори, провідності) характеризуються комплексними числами. У зв'язку з цим, аналізуючи усталений режим кіл синусоїдного струму, доцільно застосовувати методи алгебри комплексних чисел.

### 3.2. Основні параметри синусоїдних струмів, напруг і ЕРС

Для аналітичного запису синусоїдних струмів, напруг і ЕРС використовується як функція синуса ( $\sin x$ ), так і функція косинуса ( $\cos x$ ). Як відомо, обидві ці функції мають період  $2\pi$ , змінюються в межах  $\pm 1$  і відрізняються тільки взаємним зсувом на  $\pi/2$ :

$$\sin x = \cos(x - \pi/2).$$

В енергетиці переважно застосовується функція синуса. Оскільки історично теорія кіл і енергетика розвивалися разом, в теорії кіл було введено термін — *кола синусоїдного струму*. Пізніше, в зв'язку із застосуванням гармонічного режиму для формування сигналів, вдалішим виявилось використання функції косинуса, що зумовлено її парністю. Цим пояснюється використання в подальшому викладенні переважно функції косинуса із збереженням традиційних термінів — *синусоїдні струми, напруги, ЕРС*.

Основні параметри, які характеризують синусоїдні струми, напруги і ЕРС, можна поділити на три групи:

а) параметри, що відображають інтенсивність (рівень, енергію), — *амплітуда, діюче і середнє значення*;

б) параметри, що характеризують періодичність і частоту, — *період і частоти двох видів (циклічна і кутова)*;

в) параметри, пов'язані з початком відліку часу, — *повна і початкова фаза*.

*Амплітудою* називається максимальне значення синусоїдного струму, напруги або ЕРС. Амплітуди позначаються відповідними латинськими великими літерами з індексами «*t*», наприклад  $I_m$ ,  $U_m$ ,  $E_m$ . Одиниці вимірювання амплітуд збігаються з одиницями вимірювання миттєвих значень відповідних гармонічних процесів.

Амплітуди визначають максимальні відхилення коливань синусоїдних струмів, напруг і ЕРС від середнього значення:

$$i(t) = I_m \cos x; u(t) = U_m \cos x; e(t) = E_m \cos x.$$

Незалежна змінна (аргумент)  $x$  функцій, що описують синусоїдні струми, напруги і ЕРС, називається *фазою*; використовують-ся також терміни *повна фаза, поточна фаза, миттєва фаза*.

Щоб записати миттєві значення синусоїдних струмів, напруг і ЕРС, необхідно подати фазу  $x$  у вигляді функції часу  $x = \psi(t)$ . Оскільки  $\psi(t)$  є лінійною функцією часу, для її запису достатньо двох значень. Як одне з них можна вибрати значення повної фази в нульовий момент часу:

$$\psi(0) = \psi_0,$$

а як інше — значення повної фази через період

$$\psi(T) = \psi_0 + 2\pi.$$

Значення повної фази в нульовий момент часу  $\psi_0$  називається *початковою фазою*. У зв'язку з періодичністю гармонічних процесів початкові фази змінюються в межах

$$-\pi \leq \psi_0 \leq \pi.$$

Отже, фаза гармонічного процесу є лінійною функцією часу (рис. 3.1), значення якої в момент часу  $t = 0$  дорівнює початковій фазі  $\psi_0$ , а кут нахилу

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega,$$

де  $\omega$  — *кутова (кругова) частота*, одиницею виміру якої є радіан за секунду (рад/с).

З урахуванням уведених понять і позначень аналітично повну фазу можна подати так:

а) якщо  $\psi_0 = 0$ , тобто початок відліку часу збігається з максимумом функції  $\cos x$

$$\psi(t) = \frac{2\pi t}{T} = 2\pi f t = \omega t; \quad (3.1)$$

б) якщо  $\psi_0 \neq 0$ ,

$$\psi(t) = \frac{2\pi t}{T} + \psi_0 = 2\pi f t + \psi_0 = \omega t + \psi_0 = \omega \left( t + \frac{\psi_0}{\omega} \right) = \omega(t - t_0), \quad (3.2)$$

де  $t_0 = -\frac{\psi_0}{\omega}$  — зсув максимуму функції відносно початку відліку часу.

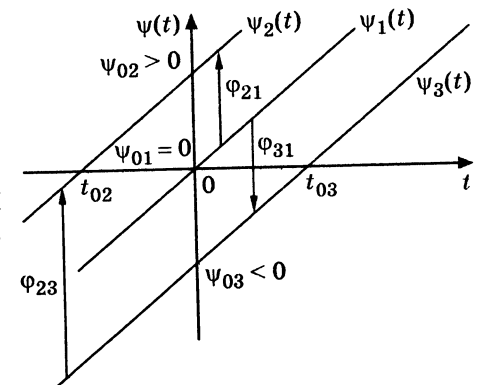


Рис. 3.1. Залежність повних фаз від часу



Діапазону  $-\pi \leq \psi_0 \leq \pi$  відповідають межі зміни для зсуву початку відліку часу:

$$-\frac{T}{2} \leq t_0 \leq \frac{T}{2}.$$

На рис. 3.1 показано графіки залежності від часу повних фаз для трьох гармонічних коливань з однаковими частотами ( $\omega = 2\pi f$ ) і різними значеннями початкових фаз:  $\psi_{01} = 0$ ;  $\psi_{02} > 0$ ;  $\psi_{03} < 0$ . Згідно з (3.1) і (3.2) відповідні повні фази набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \omega t; \\ \psi_2(t) &= \omega t + \psi_{02} = \omega(t - t_{02}); \\ \psi_3(t) &= \omega t + \psi_{03} = \omega(t - t_{03}).\end{aligned}$$

Графіки  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $\psi_3(t)$  мають однаковий нахил, який визначається частотою. Оскільки кут нахилу лінійної функції дорівнює її похідній, кутову частоту можна визначити так:

$$\omega = \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Дане співвідношення показує, що кутова частота характеризує швидкість зміни фази і не залежить від початкової фази. Також цей вираз має фундаментальне значення в теорії сигналів з кутовою модуляцією, у яких фази є нелінійними функціями часу, і тому частоти не є постійними величинами.

Зображені на рис. 3.1 графіки фаз зміщені один відносно одного як за фазою, так і у часі. Так, функція  $\psi_2(t)$  зміщена відносно  $\psi_1(t)$  по осі ординат (за фазою) на величину  $\varphi_{21} = \psi_{02} > 0$ . З іншого боку, графік  $\psi_2(t)$  можна розглядати як графік  $\psi_1(t)$ , який зсунуто по осі абсцис (за часом) на величину

$$t_{02} = -\frac{\psi_{02}}{\omega}.$$

Тому всі точки функції  $\psi_2(t)$  з'являються у часі раніше відповідних точок  $\psi_1(t)$  на інтервал часу  $t_{02}$ , тобто

$$\psi_2(t) = \psi_1(t - t_{02}).$$

Оскільки нульовому значенню аргументу (фази) відповідає максимум функції косинуса, максимальне значення коливання з фазою  $\psi_2(t)$  відбувається раніше, ніж максимум коливання з фазою  $\psi_1(t)$ .

З розглянутими поняттями випередження (або запізнення) за фазою гармонічних коливань пов'язане поняття *зсуву фаз*  $\phi$  як

різниці повних або початкових фаз гармонічних процесів з однаковою частотою і спільним вибором початку відліку часу (див. рис. 3.1). Зі зсувом фаз пов'язаний зсув гармонічних процесів у часі:

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega}.$$

Зсув фаз змінюється в межах  $\pm\pi$ , а зсув  $\Delta t$  — у межах  $\pm T/2$ .

Гармонічний процес, який упродовж половини періоду раніше досягає максимуму або інших характерних точок, вважається випереджаючим у часі або за фазою.

Прикладом зсувів гармонічних коливань за фазою і в часі є розглянуті вище випередження за фазою ( $\varphi_{21} = \psi_{02} - \psi_{01} > 0$ ) і в часі ( $\Delta t_{21} = -t_{02} > 0$ ) коливання, що має фазу  $\psi_2(t)$ , відносно коливання з фазою  $\psi_1(t)$ . На рис. 3.1 показані також фазові зсуви  $\varphi_{23} = \psi_{02} - \psi_{03} > 0$  і  $\varphi_{31} = \psi_{03} - \psi_{01} < 0$ .

Для різних варіантів початкових фаз миттєві значення синусоїдних струмів, напруг і ЕРС записуються у вигляді:

а) якщо початкові фази дорівнюють нулю ( $\psi_0 = 0$ ),

$$i(t) = I_m \cos(\omega t); u(t) = U_m \cos(\omega t); e(t) = E_m \cos(\omega t);$$

б) якщо початкові фази відмінні від нуля ( $\psi_0 \neq 0$ ),

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_{0i}); u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_{0u}); e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_{0e}),$$

де  $\psi_{0i}$ ;  $\psi_{0u}$ ;  $\psi_{0e}$  — початкові фази відповідно струму, напруги і ЕРС.

У подальшому, щоб скоротити запис, початкові фази струму, напруги і ЕРС позначатимуться відповідно  $\psi_i$ ;  $\psi_u$ ;  $\psi_e$ .

Як приклади на рис. 3.2–3.4 побудовані графіки миттєвих значень трьох синусоїдних струмів  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  та  $i_3(t)$ , які відрізняються тільки початковими фазами:

$$\psi_{i1} = 0 (t_{01} = 0); \psi_{i2} > 0 (t_{02} < 0); \psi_{i3} < 0 (t_{03} > 0).$$

Графіки залежності миттєвих значень від часу прийнято називати *часовими діаграмами*.

Графіки миттєвих значень можна будувати і в функції повної фази. На рис. 3.2–3.4 для такого варіанта фазова змінна  $\omega t$  і пов'язані з нею параметри, що відкладаються на графіках по осі абсцис, наведені в дужках.

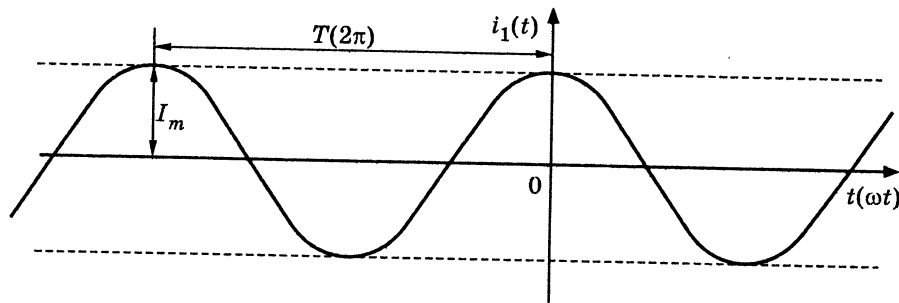


Рис. 3.2. Часова діаграма синусоїдного струму з початковою фазою  $\psi_{i1} = 0$  ( $t_{01} = 0$ )

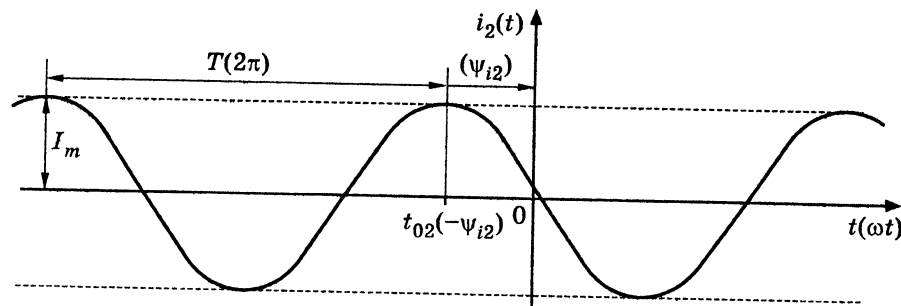


Рис. 3.3. Часова діаграма синусоїдного струму з початковою фазою  $\psi_{i2} > 0$  ( $t_{02} < 0$ )

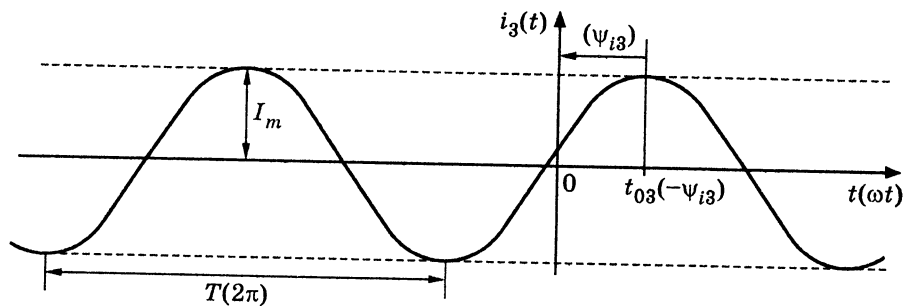


Рис. 3.4. Часова діаграма синусоїдного струму з початковою фазою  $\psi_{i3} < 0$  ( $t_{03} > 0$ )

Часові діаграми струмів  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  та  $i_3(t)$  (рис. 3.2–3.4) відповідають повним фазам  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  і  $\psi_3(t)$ , графіки яких побудовано на рис. 3.1.

Аналіз часових діаграм (рис. 3.2–3.4) дозволяє зробити висновки:  
1) початок відліку часу гармонічного процесу (струму, напруги, ЕРС) з нульовою початковою фазою ( $\psi = 0$ ) збігається з одним із максимумів часової діаграми, тобто з максимальним миттєвим значенням (рис. 3.2);

2) максимум часової діаграми гармонічного процесу з додатною початковою фазою ( $\psi > 0$ ) зміщений ліворуч по осі часу (або фазовій осі) на величину  $t_0 = -\psi/\omega < 0$  ( $-\psi < 0$ ) (рис. 3.3); дане коливання випереджає за фазою на  $\psi$  (у часі на  $|t_0|$ ) гармонічний процес з нульовою фазою;

3) максимум часової діаграми гармонічного процесу з від'ємною початковою фазою ( $\psi < 0$ ) зміщений праворуч по осі часу (або фазовій осі) на величину  $t_0 = -\psi/\omega > 0$  ( $-\psi > 0$ ) (рис. 3.4); у цьому випадку коливання відстає за фазою на  $\psi$  (у часі на  $|t_0|$ ) від гармонічного процесу з нульовою фазою;

4) на часових діаграмах величина і знак початкової фази  $\psi$  відповідають відліку від абсциси найближчого максимуму коливання до осі ординат (показано відповідними стрілками на рис. 3.3 і 3.4).

Повні і початкові фази можна порівнювати незалежно від розмірності гармонічних процесів. Так, широко використовується оцінка зсуву фаз між напругою і струмом (рис. 3.5 і 3.6)

$$\varphi = \psi_u(t) - \psi_i(t) = \psi_u - \psi_i.$$

Якщо  $\varphi < 0$  (рис. 3.5), напруга відстає від струму (струм випереджає напругу). Навпаки, напруга випереджає струм (струм відстає від напруги), якщо  $\varphi > 0$  (рис. 3.6). Слід зазначити, що фазовий зсув не залежить від вибору початку відліку часу.

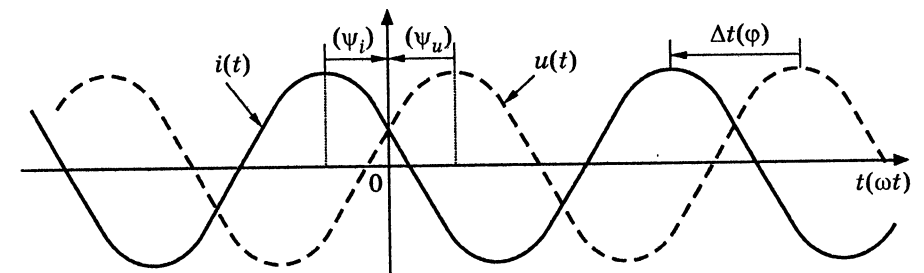


Рис. 3.5. Часові діаграми струму і напруги, фазовий зсув між якими  $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$  (напруга відстає від струму)

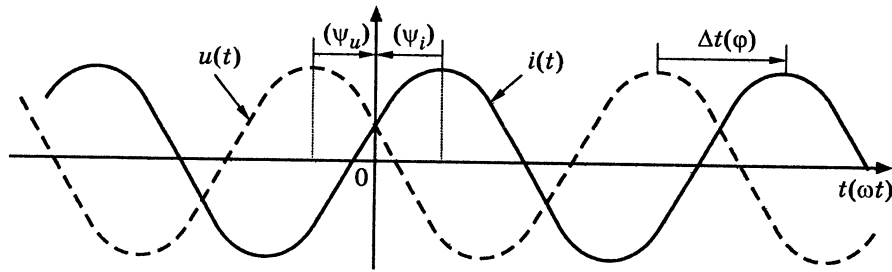


Рис. 3.6. Часові діаграми струму і напруги, фазовий зсув між якими  $\varphi = \psi_u - \psi_i > 0$  (напруга випереджає струм)

Фазові зсуви, кратні  $\pi/2$ , мають спеціальні назви:

а) процеси «синфазні», або перебувають «у фазі», коли  $\varphi = 0$  (рис. 3.7);

б) процеси «протифазні» у випадку, коли  $\varphi = \pm\pi$  (рис. 3.8);

в) процеси перебувають «у квадратурі», якщо  $\varphi = \pm\pi/2$  (рис. 3.9).

Очевидно, що для «протифазних» процесів поняття «випереджає» або «відстає» не мають сенсу (рис. 3.8).

Експериментальне спостереження і вимірювання параметрів синусоїдних струмів, напруг і ЕРС виконується за допомогою осцилографів.

Щоб спостерігати миттєве значення, вимірювати амплітуду і період, синусоїдний процес подається на вхід каналу вертикального відхилення променя електронно-променевої трубки осцилографа. Для відхилення променя по горизонталі формується періодична лінійно зростаюча напруга, період якої кратний періоду досліджуваного синусоїдного процесу. Часові діаграми, що спостерігаються при цьому, мають вигляд, показаний на рис. 3.2–3.4. У тих випадках, коли вибір початку відліку часу не є принциповим, його вибирають так, щоб початкова фаза  $\psi = 0$  (рис. 3.2).

Щоб досліджувати і вимірювати зсув фаз, два гармонічні процеси з однаковою частотою подаються на входи каналів вертикального і горизонтального відхилень. На екрані осцилографа при цьому формуються так звані фігури Ліссажу<sup>6</sup> 1-го і 2-го порядків у вигляді еліпсів, які для окремих випадків перетворюються в лінії або кола. Спостереження і вимірювання зсуву фаз можна також виконувати за допомогою дво- або багатоканальних осцилографів, на

<sup>6</sup> Ліссажу Жюль Антуан, Ж. А. Lissajous (1822–1880) — французький фізик, член-кореспондент Паризької АН. Розробив оптичний метод дослідження підсумовування коливань за допомогою фігур, пізніше названих його ім'ям.

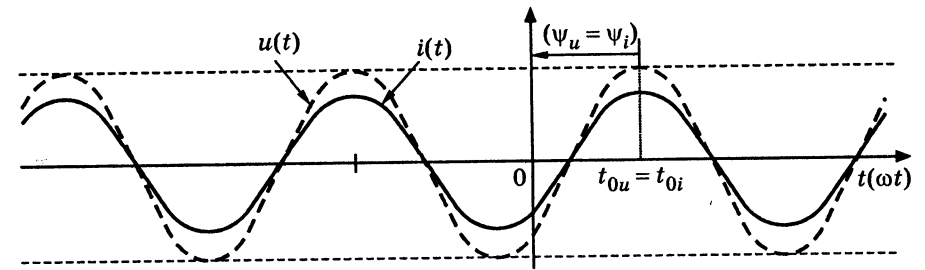


Рис. 3.7. Часові діаграми струму і напруги, які перебувають «у фазі» ( $\varphi = 0$ )

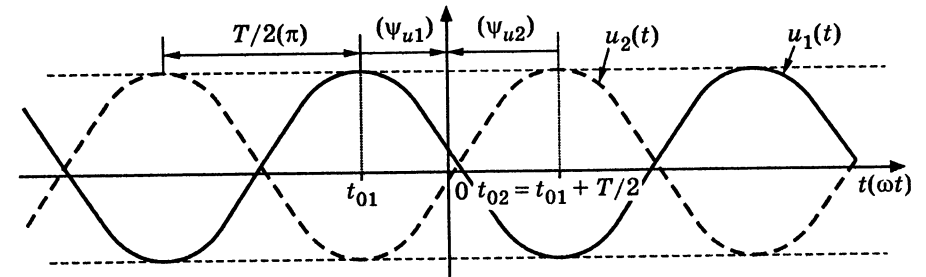


Рис. 3.8. Часові діаграми двох «протифазних» напруг ( $\varphi_{12} = \pm\pi$ )

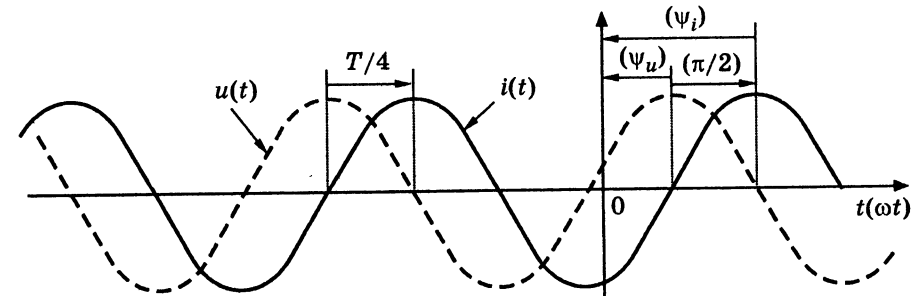


Рис. 3.9. Часові діаграми струму і напруги, які перебувають «у квадратурі» ( $\varphi = \pi/2$ )

входи вертикального відхилення яких поступають досліджувані процеси. За осцилограмами, що спостерігаються при цьому, подібними до тих, які зображені на рис. 3.5–3.9, визначаються часові або фазові зсуви процесів.

Розглянуті параметри гармонічних процесів мають важливе значення не тільки для аналізу кіл синусоїдного струму, але і в теорії

сигналів. Шляхом зміни (модуляції) згідно із законом повідомлення, що передається, амплітуди, частоти або фази гармонічного коливання, яке виконує функцію носійного коливання, формуються сигнали відповідно з амплітудною, частотною і фазовою модуляціями.

Незважаючи на те, що при формуванні сигналів з амплітудною модуляцією закон зміни амплітуди визначається повідомленням, що передається, амплітуду розглядають як енергетичний параметр. На відміну від амплітуди частота і фаза є інформаційними параметрами.

До енергетичних параметрів, що не беруть участі у формуванні сигналів, належать розглянуті нижче діючі та середні випрямлені значення синусоїдних струмів, напруг і ЕРС.

### 3.3. Діючі та середні випрямлені значення синусоїдних струмів, напруг і ЕРС

Діюче значення синусоїдного струму характеризує енергію, що поглинається в опорі при проходженні цього струму протягом інтервалів часу, кратних періоду.

Діюче значення синусоїдного струму  $i(t)$  чисельно дорівнює такому постійному струму  $I$ , який в опорі  $R$  за період  $T$  виділяє таку ж енергію, як і струм  $i(t)$  за таких саме умов (у тому ж опорі за такий же час).

Поняття діючого значення застосовується не тільки для струму, але і для напруги та ЕРС. Більшість амперметрів і вольтметрів проградуєвані у діючих значеннях. Крім терміна *діюче значення*, іноді застосовується застарілий термін *ефективне значення*.

Визначенню діючого значення синусоїдного струму  $i(t)$  відповідають схеми і співвідношення, показані на рис. 3.10.

З рівності енергій, які виділені в опорі за період постійним і синусоїдним струмами (рис. 3.10)

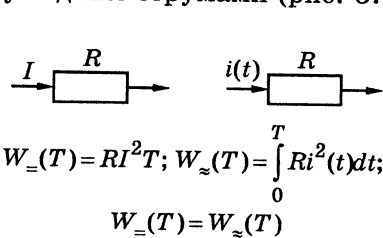


Рис. 3.10. До визначення діючого значення синусоїдного струму

$$RI^2T = \int_0^T R[i(t)]^2 dt,$$

виходить співвідношення для розрахунку діючого значення синусоїдного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt}. \quad (3.3)$$

Аналогічний вигляд мають вирази для діючих значень напруг і ЕРС:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt}. \quad (3.4)$$

Вирази (3.3) і (3.4) відповідають обчисленню середнього квадратичного значення функції за період, яке широко використовується, щоб розрахувати діючі значення будь-яких періодичних процесів, у статистичних розрахунках та ін.

Діюче значення не залежить від початкової фази синусоїдного процесу. Тому, обчислюючи діюче значення синусоїдного струму, доцільно прийняти нульову початкову фазу. Підстановка в формулу (3.3) миттєвого значення струму у вигляді  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  дозволяє знайти вираз для діючого значення синусоїдного струму:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \cos(\omega t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) dt} = \\ &= I_m \sqrt{\frac{1}{2T} \left( \int_0^T dt + \int_0^T (\cos 2\omega t) dt \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cong 0,707 I_m. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Співвідношення (3.5) застосовується також до синусоїдних напруг і ЕРС:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cong 0,707 U_m; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cong 0,707 E_m. \quad (3.6)$$

У пристроях електроживлення синусоїдні струми і напруги перетворюються у постійні. Такі пристрої називаються *випрямлячами*, а перетворення — *випрямленням*. Випрямлення кількісно оцінюється середніми випрямленими значеннями синусоїдних струмів, напруг і ЕРС. Залежно від принципу дії розрізняють одно- і двонапівперіодні випрямлячі (рис. 3.11, 3.12), результати випрямлення в яких характеризуються відповідно однопівперіодним  $I_{в1}$  і двонапівперіодним  $I_{в2}$  середніми значеннями:

$$I_{в1} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_{в1}(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} I_m \cos \omega t dt = \frac{I_m}{\omega T} \sin \omega t \Big|_{-T/4}^{T/4} = \frac{I_m}{\pi};$$

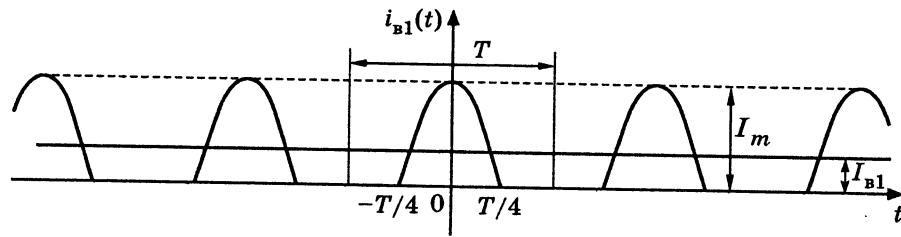


Рис. 3.11. Однонапівперіодне випрямлення синусоїдного струму

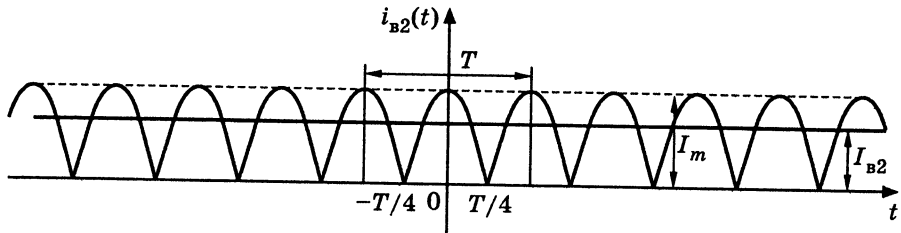


Рис. 3.12. Двонапівперіодне випрямлення синусоїдного струму

$$I_{в2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_{в2}(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} I_m \cos \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \sin \omega t \Big|_{-T/4}^{T/4} = \frac{2I_m}{\pi}$$

де  $i_{в1}(t) = \begin{cases} i(t), & \text{якщо } i(t) > 0 \\ 0, & \text{якщо } i(t) < 0 \end{cases}$  — однонапівперіодний випрямлений

струм;  $i_{в2}(t) = |i(t)|$  — двонапівперіодний випрямлений струм.

Розглянуті у підрозд. 3.1–3.3 основні параметри синусоїдних струмів, напруг і ЕРС наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Основні параметри синусоїдних струмів, напруг і ЕРС

Параметр	Позначення	Одиниці виміру (найменування/позначення)	Визначення, розрахункові співвідношення
Миттєве значення	$i(t)$ $u(t)$ $e(t)$	ампер/А вольт/В вольт/В	$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$ $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$ $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_e)$
Період	$T$	секунда/с	Мінімальний інтервал часу, через який процес повторюється

Параметр	Позначення	Одиниці виміру (найменування/позначення)	Визначення, розрахункові співвідношення
Частота (циклічна)	$f$	герц/Гц	Кількість періодів за одиницю часу $f = 1/T$
Кутова частота	$\omega$	радіан за секунду/рад/с	$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
Амплітуда	$I_m$ $U_m; E_m$	ампер/А вольт/В	Максимальне значення
Діюче (ефективне, середньоквадратичне) значення	$I$ $U; E$	ампер/А вольт/В	$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$
Середнє випрямлене (однонапівперіодне)	$I_{в1}$ $U_{в1}; E_{в1}$	ампер/А вольт/В	$I_{в1} = I_m/\pi$ $U_{в1} = U_m/\pi; E_{в1} = E_m/\pi$
Середнє випрямлене (двонапівперіодне)	$I_{в2}$ $U_{в2}; E_{в2}$	ампер/А вольт/В	$I_{в2} = 2I_m/\pi$ $U_{в2} = 2U_m/\pi; E_{в2} = 2E_m/\pi$
Фаза	$\psi(t)$	радіан/рад	$\psi(t) = \omega t + \psi$
Початкова фаза	$\psi(\psi_i, \psi_u, \psi_e)$	радіан/рад	$\psi = \psi(0)$
Зсув фаз	$\phi$	радіан/рад	$\phi = \psi_1 - \psi_2$ , якщо $\omega_1 = \omega_2$

3.4. Векторне і комплексне подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС

Миттєві значення  $i(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$  досить повно описують синусоїдні струми, напруги і ЕРС, однак вони незручні, щоб виконувати розрахунки. Якщо скористатися для аналізу кіл синусоїдного струму миттєвими значеннями, то, відповідно до законів Кірхгофа, треба скласти рівняння з тригонометричними функціями часу. Розв'язання таких рівнянь, які називають *трансцендентними*, ускладнюється тим, що невідомими величинами є амплітуди і початкові фази шуканих струмів і напруг, а відомими — параметри джерел (амплітуди, початкові фази і частота). У зв'язку з цим доцільно

застосувати інші способи подання гармонічних процесів. Такі способи мають спростити як операції підсумовування і віднімання гармонічних процесів з однакою частотою, так і розв'язання систем рівнянь, складених за законами Кірхгофа. Цим вимогам відповідають векторне і комплексне подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС.

Векторне подання засноване на відомому визначенні тригонометричних функцій як проєкцій одиничного вектора. При цьому проєкція вектора на горизонтальну вісь відповідає  $\cos \alpha$ , а проєкція на вертикальну вісь —  $\sin \alpha$ , де  $\alpha$  — кут, який відлічується проти годинникової стрілки від горизонтальної осі до вектора. Якщо до гармонічних процесів застосувати векторне подання, то вектор стане таким, що обертається. Параметри цього вектора однозначно пов'язані з параметрами відповідного процесу: швидкість обертання дорівнює кутовій частоті  $\omega$ ; довжина вектора збігається з амплітудою; кутове положення вектора в будь-який момент часу відповідає фазі  $\psi(t) = \omega t + \psi$ , а в момент часу  $t = 0$  — початковій фазі  $\psi$ . На рис. 3.13 зображений вектор  $\vec{i}(t)$ , що обертається, і показано, як

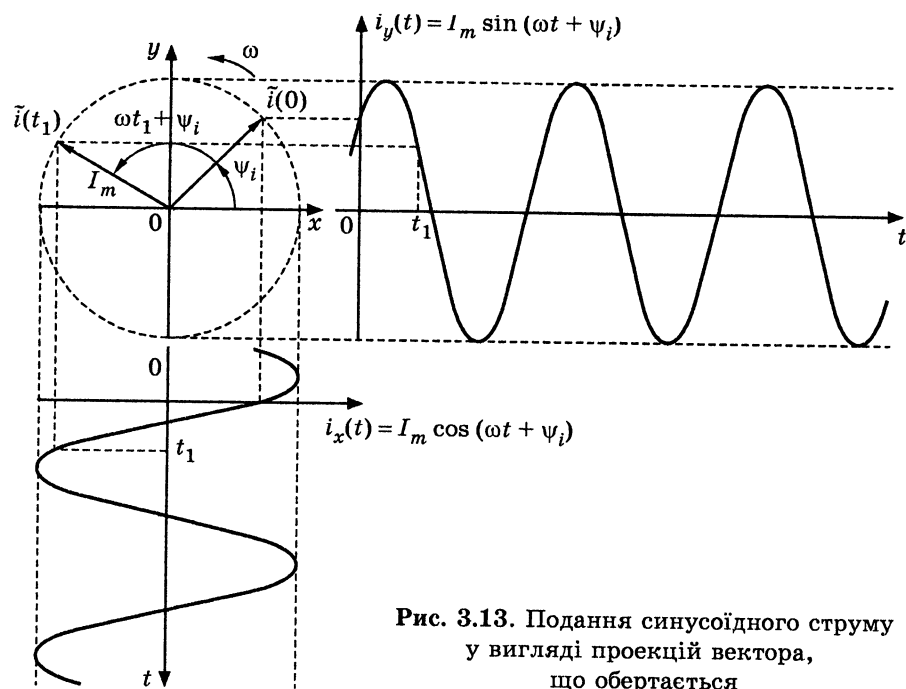


Рис. 3.13. Подання синусоїдного струму у вигляді проєкцій вектора, що обертається

отримати за його допомогою миттєві значення струму в синусоїдній і косинусоїдній формах запису.

Крім наочного зображення гармонічних процесів, векторне подання істотно спрощує операції підсумовування і віднімання миттєвих значень. Відомо, що проєкція суми (різниці) двох і більше векторів на будь-яку вісь дорівнює сумі (різниці) проєкцій цих векторів на ту ж вісь (властивість комутативності векторів). Оскільки для векторів, що обертаються, ця властивість справедлива в будь-який момент часу, то у разі однакової швидкості обертання векторів операції підсумовування (віднімання) миттєвих значень можуть бути зведені до підсумовування (віднімання) відповідних векторів в один з моментів часу, наприклад,  $t = 0$ . Такий спосіб підсумовування двох синусоїдних струмів показаний на рис. 3.14.

Недоліком векторного подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС є неточність графічних способів його реалізації і складність застосування для розв'язання систем рівнянь.

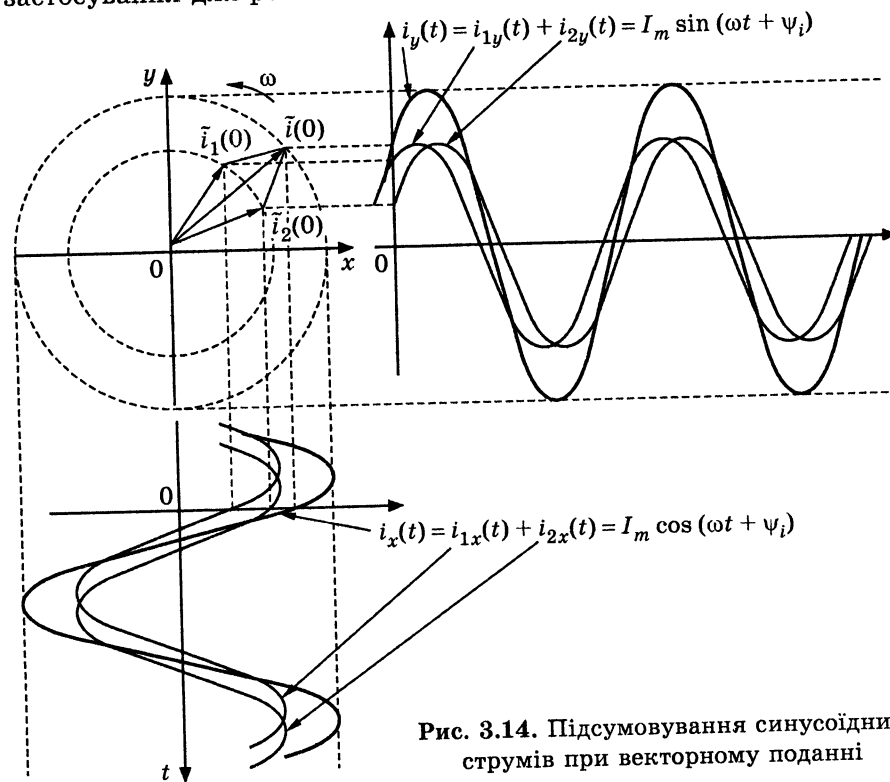


Рис. 3.14. Підсумовування синусоїдних струмів при векторному поданні

Поєднати переваги векторного подання гармонічних процесів і надати операціям над векторами аналітичної форми дозволяє

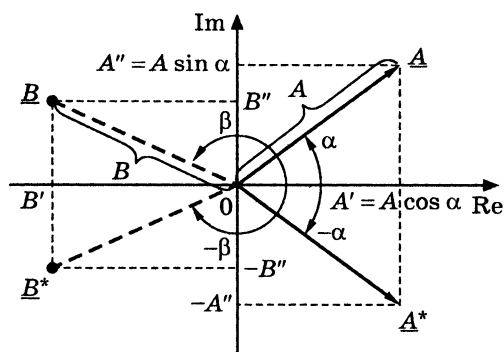


Рис. 3.15. Подання комплексних чисел на комплексній площині

перенесення векторів, що обертаються, на комплексну площину (рис. 3.15).

По осі абсцис комплексної площини відкладаються дійсні (реальні) складові комплексних чисел. Тому ця вісь називається *дійсною* і позначається  $\text{Re}$ . Таке позначення дійсної осі пов'язане з операцією  $\text{Re}[\dots]$ <sup>7</sup>, що означає виділення дійсної частини комплексного виразу в дужках.

Вісь ординат комплексної площини називається *уявною*, оскільки на ній відкладаються уявні частини комплексних чисел. Позначення уявної осі зумовлене операцією виділення уявної частини комплексного виразу  $\text{Im}[\dots]$ <sup>8</sup>.

Не слід плутати позначення уявної осі та операції виділення уявної частини з позначенням амплітуди струму  $I_m$ .

Комплексні числа, що відповідають точкам або векторам на комплексній площині, прийнято позначати підкреслюванням. Основні терміни і позначення, які пов'язані з комплексними числами і застосовуються в комплексному методі аналізу кіл, наведені на рис. 3.15 і в табл. 3.3, а операції над комплексними числами — в табл. 3.4.

Алгебра комплексних чисел ґрунтується на формулі Ейлера<sup>9</sup>

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha,$$

де  $e \approx 2,718$  — основа натуральних логарифмів;  $j$  — уявна одиниця.

<sup>7</sup> Позначення дійсної осі комплексної площини та операції визначення дійсної частини комплексного числа пов'язані з першими літерами слова *real* (реальний).

<sup>8</sup> Позначення — це перші літери слова *imaginary* (уявний).

<sup>9</sup> Ейлер Леонард, Euler (1707–1783) — видатний швейцарський математик, фізик, механік і астроном; академік Петербурзької та Паризької АН. У галузі математики вперше використав поняття функції комплексної змінної, зробив значний внесок у теорію чисел, диференціальну геометрію, теорію спеціальних функцій, варіаційне числення, теорію імовірностей, топологію. Працював у галузі навігації, суднобудування, оптики, опору матеріалів; розраховував політ аеростата.

Вектори, що обертаються в комплексній площині, проєкції яких відповідають синусоїдним струмам, напругам і ЕРС, називаються *комплексними миттєвими значеннями* (комплексними гармоніками) і позначаються відповідно  $\underline{i}(t)$ ,  $\underline{u}(t)$ ,  $\underline{e}(t)$ . Комплексні миттєві значення можна записати в одній з трьох форм запису комплексних чисел — показниковій, тригонометричній і алгебраїчній:

$$\begin{aligned} \underline{i}(t) &= I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \text{Re}[\underline{i}(t)] + j \text{Im}[\underline{i}(t)]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m \cos(\omega t + \psi_u) + j U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \\ &= \text{Re}[\underline{u}(t)] + j \text{Im}[\underline{u}(t)]; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \underline{e}(t) &= E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} = E_m \cos(\omega t + \psi_e) + j E_m \sin(\omega t + \psi_e) = \\ &= \text{Re}[\underline{e}(t)] + j \text{Im}[\underline{e}(t)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таблиця 3.3

Форми запису і складові комплексних чисел

Термін		Аналітичний запис
Форми подання комплексних чисел	Алгебраїчна	$\underline{A} = A' + jA'' = \text{Re}[\underline{A}] + j \text{Im}[\underline{A}]$
	Тригонометрична	$\underline{A} =  \underline{A}  \cos \alpha + j  \underline{A}  \sin \alpha$
	Показникова	$\underline{A} =  \underline{A}  e^{j\alpha}$
	Спряжене комплексне число	$\underline{A}^* = A' - jA'' =  \underline{A}  e^{(-j\alpha)}$
Складові комплексних чисел	Дійсна частина	$A' = \text{Re}(\underline{A}) =  \underline{A}  \cos \alpha$
	Уявна частина	$A'' = \text{Im}(\underline{A}) =  \underline{A}  \sin \alpha$
	Модуль	$ \underline{A}  = A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}$
	Аргумент	$\alpha = \arctg(A''/A') + n\pi, n=0; 1$
		$\alpha = (-1)^n \arccos(A'/A), n=0; 1$
Уявна одиниця	$\alpha = (-1)^n \arcsin(A''/A) + n\pi, n=0; 1$ значення $n$ залежить від чверті, де лежить комплексне число $j = \sqrt{-1} = e^{j\pi/2}; -j = e^{-j\pi/2}; j^2 = -1$	

Таблиця 3.4

## Основні операції над комплексними числами

Операція	Співвідношення
Підсумовування	$\underline{A} + \underline{B} = (A' + B') + j(A'' + B'')$
Віднімання	$\underline{A} - \underline{B} = (A' - B') + j(A'' - B'')$
Множення	$\underline{A}\underline{B} = Ae^{j\alpha} Be^{j\beta} = AB e^{j(\alpha+\beta)}$
Ділення	$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}$
Піднесення до степеня	$\underline{A}^n = A^n e^{j(n\alpha)}$
Добуття кореня	$\sqrt[n]{\underline{A}} = \sqrt[n]{A} e^{j(\alpha/n)}$
Сума спряжених комплексних чисел	$\underline{A} + \underline{A}^* = 2A'$
Різниця спряжених комплексних чисел	$\underline{A} - \underline{A}^* = j2A''$
Добуток спряжених комплексних чисел	$\underline{A}\underline{A}^* = A^2$

Модулі комплексних гармонік дорівнюють амплітудам  $I_m, U_m, E_m$ , а аргументи — повним фазам  $\psi(t) = \omega t + \psi$  відповідних синусоїдних струмів, напруг і ЕРС. Дійсною частиною комплексних гармонік є миттєві значення в косинусоїдній формі запису, а уявною — миттєві значення, записані в синусоїдній формі. Комплексні гармоніки у виразах (3.7)–(3.9) мають однакову частоту, що відповідає усталеному режиму кола з синусоїдними джерелами однакової частоти.

На рис. 3.16, а на комплексній площині показана комплексна гармоніка з тими ж параметрами, що і струм, миттєві значення якого зображені на рис. 3.13 у вигляді проєкцій вектора  $\tilde{i}(t)$ , що обертається.

Комплексні миттєві значення в показниковій формі можна записати як добуток трьох співмножників:

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}; \underline{u}(t) = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}; \underline{e}(t) = E_m e^{j\psi_e} e^{j\omega t}. \quad (3.10)$$

Перші співмножники у виразах (3.10) є амплітудами гармонік, другі — визначаються початковими фазами гармонік. Третій співмножник

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

однаковий в кожному з виразів (3.10), визначає швидкість обертання векторів і називається *оператором обертання*.

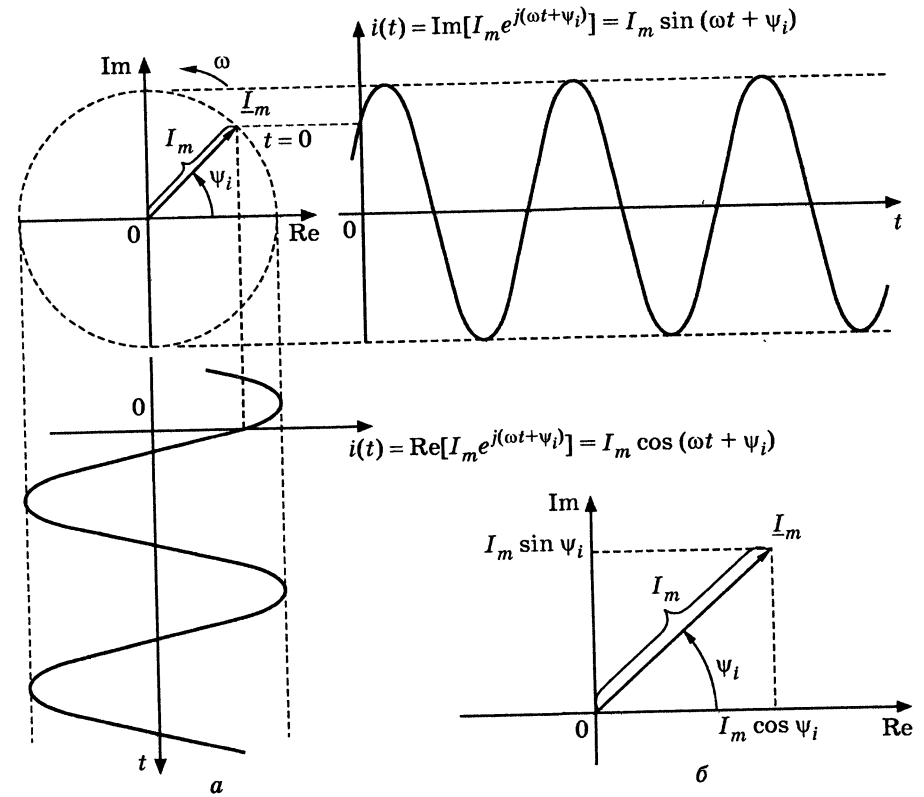


Рис. 3.16. Подання синусоїдного струму в комплексній формі

У момент часу  $t=0$  вирази (3.10) перетворюються в комплексні величини, які мають важливе значення в методах аналізу кіл синусоїдного струму і називаються *комплексними амплітудами*:

$$\underline{I}_m = \underline{i}(0) = I_m e^{j\psi_i}; \underline{U}_m = \underline{u}(0) = U_m e^{j\psi_u}; \underline{E}_m = \underline{e}(0) = E_m e^{j\psi_e}. \quad (3.11)$$

*Комплексна амплітуда синусоїдного струму, напруги або ЕРС* ( $\underline{I}_m, \underline{U}_m, \underline{E}_m$ ) — це комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді ( $I_m, U_m, E_m$ ), а аргумент — початковій фазі ( $\psi_i, \psi_u, \psi_e$ ) відповідно струму, напруги або ЕРС.

На комплексній площині комплексні амплітуди є нерухомими векторами (рис. 3.16, б).

Поряд з комплексними амплітудами застосовуються *комплексні діючі значення* ( $\underline{I}, \underline{U}, \underline{E}$ ), які відрізняються від комплексних



амплітуд тільки модулями. У комплексних діючих значень модулі дорівнюють діючим значенням ( $I$ ,  $U$ ,  $E$ ) синусоїдних струмів, напруг або ЕРС:

$$\underline{I} = Ie^{j\psi_i}; \underline{U} = Ue^{j\psi_u}; \underline{E} = Ee^{j\psi_e}. \quad (3.12)$$

Подання гармонічних процесів однакової частоти в комплексному вигляді дозволяє спростити їх алгебраїчне підсумовування. Для цього використовується згадана вище властивість комутативності векторів. Наприклад, алгебраїчне підсумовування трьох гармонічних напруг виконуватиметься так:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) - u_2(t) + u_3(t) = \\ &= U_{m1} \cos(\omega t + \psi_{u1}) - U_{m2} \cos(\omega t + \psi_{u2}) + U_{m3} \cos(\omega t + \psi_{u3}) = \\ &= \operatorname{Re}[\underline{U}_{m1}e^{j\omega t}] - \operatorname{Re}[\underline{U}_{m2}e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\underline{U}_{m3}e^{j\omega t}] = \\ &= \operatorname{Re}[\underline{U}_{m1}e^{j\omega t} - \underline{U}_{m2}e^{j\omega t} + \underline{U}_{m3}e^{j\omega t}] = \\ &= \operatorname{Re}[(\underline{U}_{m1} - \underline{U}_{m2} + \underline{U}_{m3})e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\underline{U}_m e^{j\omega t}] = \\ &= \operatorname{Re}[U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}] = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \end{aligned}$$

де  $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = \underline{U}_{m1} - \underline{U}_{m2} + \underline{U}_{m3}$  — комплексна амплітуда результуючої напруги, яка дорівнює алгебраїчній сумі комплексних амплітуд напруг, що підсумовуються.

Отже, щоб алгебраїчно підсумовувати миттєві значення синусоїдних струмів (напруг або ЕРС), достатньо провести алгебраїчне підсумовування комплексних амплітуд цих струмів (напруг або ЕРС) і від здобутої комплексної амплітуди перейти до миттєвого значення.

На рис. 3.17, а показані вектори, які відповідають комплексним амплітудам трьох напруг, що підсумовуються у наведеному вище прикладі, і результат алгебраїчного підсумовування комплексних амплітуд (рис. 3.17, б). Результуючий вектор  $\underline{U}_m$  (рис. 3.17, б) замикає ламану лінію, утворену векторами, що алгебраїчно підсумовуються при їх паралельному перенесенні.

Сукупність векторів, які відповідають комплексним амплітудам (або комплексним діючим значенням) синусоїдних струмів, напруг або ЕРС і алгебраїчно підсумовуються відповідно до законів Кірхгофа для даного кола, називається *векторною діаграмою*.

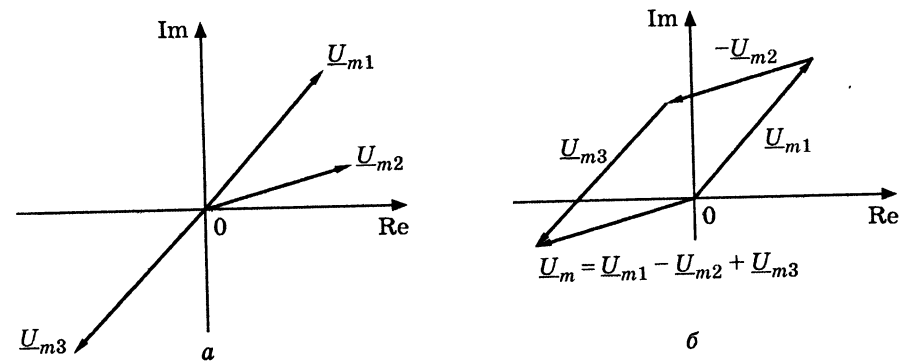


Рис. 3.17. Принцип побудови векторної діаграми

На основі комплексних амплітуд і комплексних діючих значень синусоїдних струмів і напруг вводиться поняття *комплексного опору* і *комплексної провідності*.

*Комплексний опір* — це відношення комплексних амплітуд (або комплексних діючих значень) напруги і струму:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U}{I}. \quad (3.13)$$

У показниковій формі комплексний опір має вигляд:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi},$$

де  $Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$  — модуль комплексного опору, котрий називається *повним опором*;  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  — аргумент комплексного опору.

Величина, обернена комплексному опору, називається *комплексною провідністю*

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}. \quad (3.14)$$

У показниковій формі комплексну провідність записують у вигляді

$$\underline{Y} = Ye^{-j\varphi},$$

де  $Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}$  — модуль комплексної провідності, який називається *повною провідністю*;  $-\varphi = \varphi_i - \varphi_u$  — аргумент комплексної провідності.

Основні поняття, пов'язані з комплексним поданням синусоїдних струмів, напруг і ЕРС, зведені до табл. 3.5.

Таблиця 3.5

## Комплексне подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС

Назва	Позначення	Одиниці виміру (найменування/позначення)	Співвідношення
Комплексне миттєве значення (комплексна гармоніка)	$\underline{i}(t)$	ампер/А	$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + jI_m \sin(\omega t + \psi_i)$
	$\underline{u}(t)$	вольт/В	$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m \cos(\omega t + \psi_u) + jU_m \sin(\omega t + \psi_u)$
	$\underline{e}(t)$	вольт/В	$\underline{e}(t) = E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} = E_m \cos(\omega t + \psi_e) + jE_m \sin(\omega t + \psi_e)$
Оператор обертання	$e^{j\omega t}$	безрозмірний	$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$
Комплексна амплітуда	$\underline{I}_m$	ампер/А	$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$
	$\underline{U}_m; \underline{E}_m$	вольт/В	$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}; \underline{E}_m = E_m e^{j\psi_e}$
Комплексне діюче значення	$\underline{I}$	ампер/А	$\underline{I} = I e^{j\psi_i}$
	$\underline{U}; \underline{E}$	вольт/В	$\underline{U} = U e^{j\psi_u}; \underline{E} = E e^{j\psi_e}$

Особливості застосування комплексного подання синусоїдних струмів, напруг і ЕРС ілюструють приклади 3.1–3.4.

**Приклад 3.1.** Записати комплексне миттєве значення, комплексну амплітуду і комплексне діюче значення напруги:

$$u(t) = 5 \cos \left( 10^9 t - \frac{3\pi}{4} \right) \text{ В.}$$

*Розв'язання.* Використовуючи визначення, запишемо комплексне миттєве значення, комплексну амплітуду і комплексне діюче значення даної напруги у вигляді:

$$\underline{u}(t) = 5 e^{j(10^9 t - 3\pi/4)} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_m = 5 e^{j(-3\pi/4)} = 5 \cos(-3\pi/4) + j5 \sin(-3\pi/4) = -\frac{5}{\sqrt{2}} - j \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ В;}$$

$$\underline{U} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j(-3\pi/4)} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cos(-3\pi/4) + j \frac{5}{\sqrt{2}} \sin(-3\pi/4) = -2,5 - j2,5 \text{ В.}$$

**Приклад 3.2.** Записати вираз миттєвого значення струму, у якого комплексне діюче значення і частота становлять відповідно  $\underline{I} = -4 + j4$  мА;  $f = 50$  МГц. Побудувати графік (часову діаграму) миттєвого значення струму.

*Розв'язання.* Оскільки за умовою задане комплексне діюче значення, спочатку визначимо комплексну амплітуду, а потім перейдемо від алгебраїчної форми до показникової:

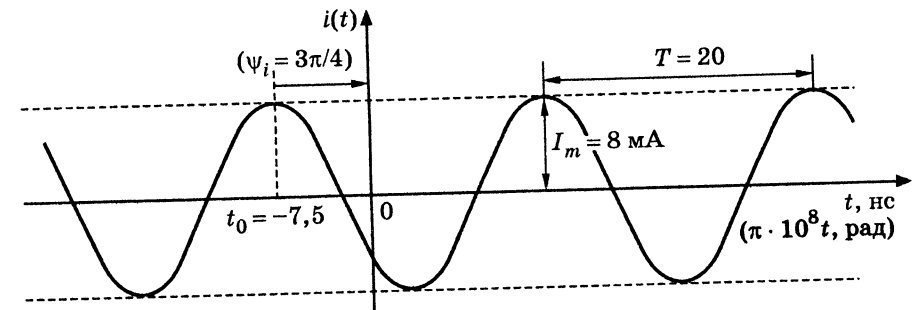
$$\underline{I}_m = (-4 + j4)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(-1 + j1) = 4\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg(-1) + \pi} = 8e^{j(3\pi/4)} \text{ мА.}$$

Комплексне число, що відповідає комплексній амплітуді даного струму, розташовано у другій чверті (дійсна частина від'ємна, уявна — додатна). Тому, визначаючи аргумент комплексної амплітуди  $\psi_i$  (див. табл. 3.3), до головного значення  $\arctg(-1) = -\pi/4$  додаємо  $\pi$ .

Перейдемо від комплексної амплітуди до миттєвого значення:

$$i(t) = \text{Re}[\underline{I}_m e^{j(2\pi f t)}] = \text{Re}[8e^{j(3\pi/4)} \cdot e^{j(2\pi \cdot 50 \cdot 10^7 t)}] = 8 \cos \left( \pi \cdot 10^8 t + \frac{3\pi}{4} \right) \text{ мА.}$$

На графіку  $i(t)$  (рис. 3.18) по осі ординат відкладемо струм у міліамперах, по осі абсцис — дві змінні: час у наносекундах ( $1 \text{ нс} = 10^{-9} \text{ с}$ ) і фази

Рис. 3.18. Часова діаграма струму  $i(t)$  до прикладу 3.2

в радіанах. Період коливань і зсув максимуму струму відносно початку координат у часі відповідно становлять:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с} = 20 \text{ нс;}$$

$$t_0 = -\frac{\psi_i}{\omega} = -\frac{3\pi/4}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^6} = -7,5 \cdot 10^{-9} \text{ с} = -7,5 \text{ нс.}$$

**Приклад 3.3.** Для вузла кола (рис. 3.19) вибрані напрями трьох струмів у вітках і задані миттєві значення двох з них:

$$i_1(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 10^6 t - \pi/2) \text{ мА; } i_2(t) = 1,41 \cos(2\pi \cdot 10^6 t + 3\pi/4) \text{ мА.}$$

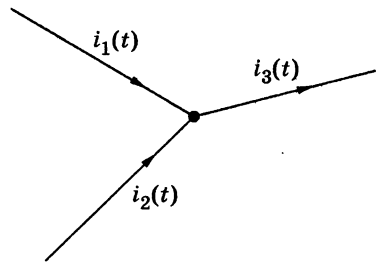


Рис. 3.19. До прикладу 3.3

Визначити струм  $i_3(t)$ , побудувати часову діаграму для цього струму і векторну діаграму струмів для даного вузла.

*Розв'язання.* Визначимо шуканий струм з рівняння за першим законом Кірхгофа для даного вузла:

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0,$$

звідки

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t).$$

Щоб підсумувати миттєві значення струмів  $i_1(t)$  та  $i_2(t)$ , перейдемо до їх комплексних амплітуд:

$$\underline{I}_{m1} = 2e^{-j\pi/2} = -j2 \text{ мА}; \quad \underline{I}_{m2} = 1,41e^{j(3\pi/4)} = -1 + j1 \text{ мА}.$$

Підсумовуючи комплексні амплітуди  $\underline{I}_{m1}$  і  $\underline{I}_{m2}$ , визначимо комплексну амплітуду  $\underline{I}_{m3}$  шуканого струму і запишемо його миттєве значення:

$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = -j2 - 1 + j1 = -1 - j1 = \sqrt{2}e^{j(-3\pi/4)} \text{ мА};$$

$$i_3(t) = \text{Re}[\underline{I}_{m3}e^{j(2\pi ft)}] = \text{Re}[\sqrt{2}e^{j(-3\pi/4)}e^{j(2\pi \cdot 10^6 t)}] = \sqrt{2}\cos\left(2\pi \cdot 10^6 t - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos[2\pi \cdot 10^6(t - 0,375 \cdot 10^{-6})] \text{ мА}.$$

На комплексній площині побудуємо вектори, що відповідають комплексним амплітудам заданих струмів (рис. 3.20, а), і векторну діаграму для струмів вузла (рис. 3.20, б), яка показує зв'язок між комплексними амплітудами струмів  $\underline{I}_{m1}$ ,  $\underline{I}_{m2}$  і  $\underline{I}_{m3}$  згідно з першим законом Кірхгофа. Використовуючи отримані вирази для струму  $i_3(t)$ , побудуємо графік його миттєвого значення (рис. 3.21).

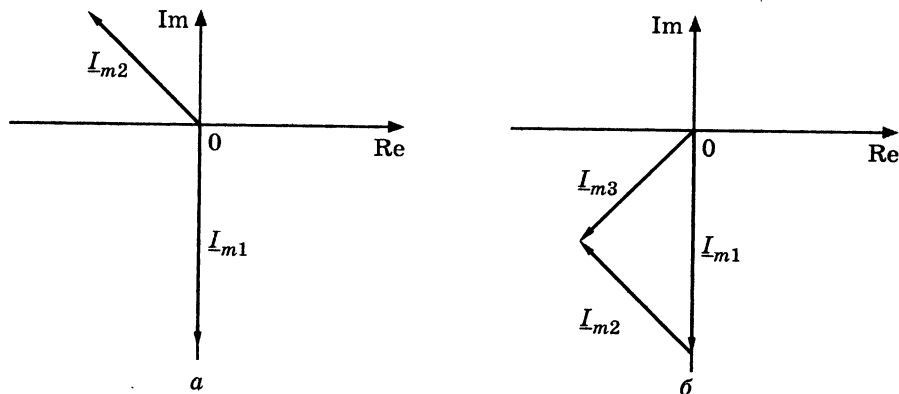


Рис. 3.20. Векторна діаграма струмів у вузлі

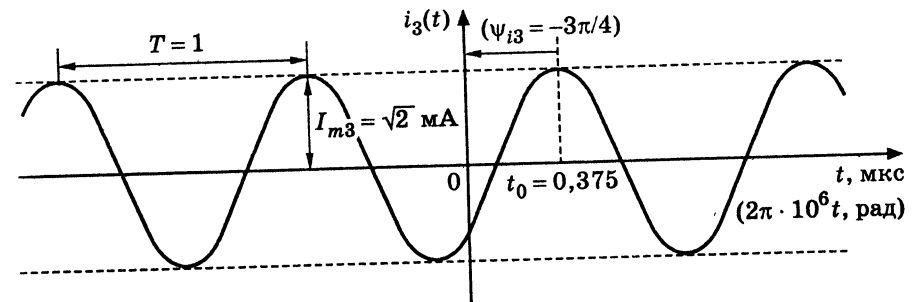


Рис. 3.21. Часова діаграма струму  $i_3(t)$

**Приклад 3.4.** На деякій пасивній ділянці кола комплексні амплітуди напруги і струму становлять:  $\underline{U}_m = -4 \text{ В}; \underline{I}_m = -1 + j\sqrt{3} \text{ мА}$ . Знайти комплексний опір і комплексну провідність даної ділянки.

*Розв'язання.* Щоб розрахувати комплексний опір і комплексну провідність, подамо задані комплексні величини в показниковій формі і застосуємо співвідношення (3.13) і (3.14):

$$\underline{U}_m = -4 = 4e^{j\pi} \text{ В};$$

$$\underline{I}_m = -1 + j\sqrt{3} = \sqrt{(-1)^2 + 3} \cdot e^{j\arctg(-\sqrt{3}) + \pi} = 2e^{j(2\pi/3)} \text{ мА} = 2 \cdot 10^{-3} e^{j(2\pi/3)} \text{ А};$$

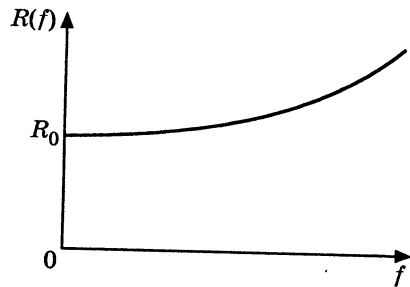
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{4e^{j\pi}}{2 \cdot 10^{-3} e^{j(2\pi/3)}} = 2 \cdot 10^3 e^{j(\pi/3)} \text{ Ом} = 2e^{j(\pi/3)} \text{ кОм};$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{2 \cdot 10^{-3} e^{j(2\pi/3)}}{4e^{j\pi}} = 0,5 \cdot 10^{-3} e^{j(-\pi/3)} \text{ См} = 0,5e^{j(-\pi/3)} \text{ мСм}.$$

### 3.5. Елементи $R, L, C$ у колах синусоїдного струму

Елемент  $R$  у колах синусоїдного струму називається *активним опором*. Уведення цього терміна викликано необхідністю розрізняти цей елемент і введені вище комплексний опір (3.13) і повний опір, а також розглянуті нижче декілька видів опорів для даного режиму кіл. Термін «активний опір» підкреслює також незворотне поглинання енергії в даному елементі.

Стосовно резистора, який за своїми параметрами найближчий до елемента  $R$ , використовуються терміни «омічний» і «активний опори». Ці терміни характеризують відмінності у величинах опорів резистора при постійному (омічний опір  $R_0$ ) і синусоїдному струмах (активний опір  $R(f)$ ). На рис. 3.22 показано якісну залежність опору резистора від частоти  $R(f)$ . Збільшення опору резистора



з підвищенням частоти пояснюється поверхневим ефектом і випромінюванням.

Нехай через лінійний ідеальний активний опір  $R$  проходить синусоїдний струм (рис. 3.23, а):

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i). \quad (3.15)$$

Згідно із законом Ома напруга на активному опорі

$$u(t) = RI_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m \cos(\omega t + \psi_u). \quad (3.16)$$

З виразу (3.16) виходить, що амплітуда напруги на активному опорі  $U_m$  пов'язана, за законом Ома, з амплітудою струму  $I_m$ :

$$U_m = RI_m,$$

а початкові фази напруги і струму збігаються:

$$\psi_u = \psi_i.$$

Отже, миттєві значення напруги і струму в активному опорі є коливаннями, які перебувають у фазі (рис. 3.23, б).

Від співвідношень (3.15) і (3.16), що описують миттєві значення струму і напруги в активному опорі, можна перейти до комплексних амплітуд струму і напруги:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_m = RI_m e^{j\psi_i} = U_m e^{j\psi_u}.$$

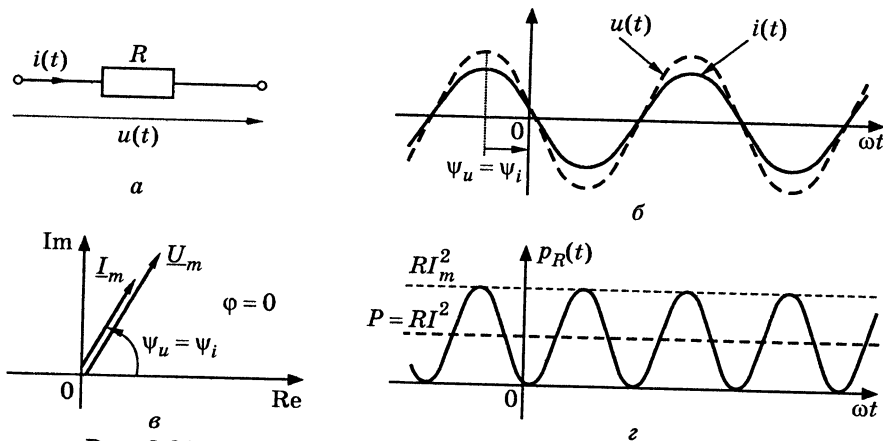


Рис. 3.23. Режим синусоїдного струму в активному опорі

Отримані комплексні амплітуди дозволяють побудувати векторну діаграму у вигляді двох однаково спрямованих векторів (рис. 3.23, в) і визначити комплексні опір і провідність:

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{RI_m e^{j\psi_i}}{I_m e^{j\psi_i}} = R; \quad \underline{Y}_R = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{I_m e^{j\psi_i}}{RI_m e^{j\psi_i}} = \frac{1}{R} = G. \quad (3.17)$$

Миттєва потужність в активному опорі

$$\begin{aligned} p_R(t) &= u(t)i(t) = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \psi_i) = \frac{RI_m^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)] = \\ &= RI^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)] = GU^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

де  $I, U$  — відповідно діючі значення струму і напруги.

У розглядуваному режимі, як і в інших режимах роботи активного опору, миттєва потужність позитивна в будь-який момент часу, що означає безперервне поглинання енергії. Середнє за період значення миттєвої потужності називається *активною потужністю*. Активна потужність вимірюється у ватах і становить:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T RI^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)] dt = RI^2 = GU^2. \quad (3.19)$$

Графік миттєвої потужності в активному опорі з позначенням максимального і середнього (активна потужність) значень зображений на рис. 3.23, г.

Синусоїдний струм, який описується виразом (3.15), проходячи через лінійну *індуктивність*  $L$  (рис. 3.24, а), викликає появу напруги, яка згідно з формулою (1.16), визначається в такий спосіб:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \omega LI_m \cos\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos(\omega t + \psi_u). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Вираз (3.20) показує, що амплітуда напруги на індуктивності пов'язана з амплітудою струму співвідношенням:

$$U_m = \omega LI_m = X_L I_m, \quad (3.21)$$

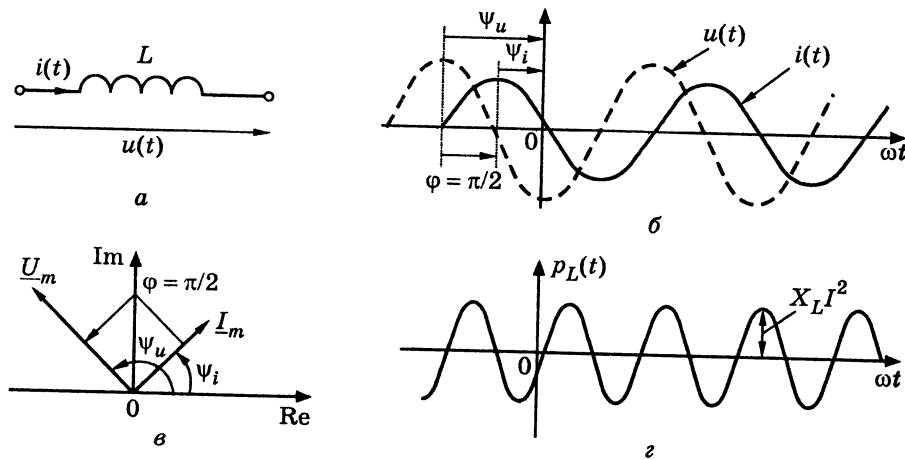


Рис. 3.24. Режим синусоїдного струму в індуктивності

яке є законом Ома. У виразі (3.21) опорю відповідає величина  $\omega L$ , котра вимірюється в омах. Величина  $\omega L$  називається індуктивним опором і позначається

$$X_L = \omega L. \quad (3.22)$$

Згідно з (3.20) початкова фаза напруги на індуктивності

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}.$$

Отже, в індуктивності зсув фаз між напругою і струмом

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}. \quad (3.23)$$

Вираз (3.23) показує, що напруга на індуктивності випереджає струм (або струм в індуктивності відстає від напруги) за фазою на  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ), а у часі — на  $T/4$ . Отже, коливання напруги і струму в індуктивності перебувають «у квадратурі».

Графіки миттєвих значень напруги і струму в індуктивності показані на рис. 3.24, б.

Комплексні амплітуди струму і напруги в індуктивності

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_m = \omega L I_m e^{j(\psi_i + \pi/2)} = U_m e^{j\psi_u}$$

дозволяють побудувати векторну діаграму у вигляді двох зсунутих на  $\pi/2$  векторів (рис. 3.24, в).

Комплексні опір і провідність індуктивності становлять:

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\omega L I_m e^{j(\psi_i + \pi/2)}}{I_m e^{j\psi_i}} = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L = jX_L; \quad (3.24)$$

$$\underline{Y}_L = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{I_m e^{j\psi_i}}{\omega L I_m e^{j(\psi_i + \pi/2)}} = \frac{1}{\omega L e^{j\pi/2}} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{jX_L} = -jB_L, \quad (3.25)$$

де  $B_L = 1/\omega L$  — індуктивна провідність, що вимірюється в сименсах (См).

Миттєва потужність в індуктивності змінюється за законом

$$\begin{aligned} p_L(t) &= u(t)i(t) = -\omega L I_m^2 \sin(\omega t + \psi_i) \cos(\omega t + \psi_i) = \\ &= -\frac{X_L I_m^2}{2} \sin 2(\omega t + \psi_i) = -X_L I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i) = \\ &= -B_L U^2 \sin 2(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (3.26)$$

На відміну від активного опору, в якому миттєва потужність завжди додатна, в індуктивності миттєва потужність є знакозмінною (рис. 3.24, г). В інтервалах часу, коли  $p_L(t) > 0$ , індуктивність накопичує енергію, а коли  $p_L(t) < 0$ , — віддає енергію. При цьому середнє за період значення миттєвої потужності в індуктивності дорівнює нулю. Ця принципова відмінність характеру зміни потужностей в індуктивності й активному опорі обумовила появу терміна «реактивний елемент». До реактивних елементів належать індуктивність і ємність.

Кількісною характеристикою миттєвої потужності реактивного елемента є її максимальне значення, яке називається реактивною потужністю і вимірюється у варах (ВАр). В індуктивності реактивна потужність

$$P_{Q_L} = X_L I^2 = B_L U^2. \quad (3.27)$$

Напругу на лінійній ємності  $C$  (рис. 3.25, а) в режимі синусоїдного струму (3.15) можна визначити, застосовуючи співвідношення (1.11):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \int I_m \cos(\omega t + \psi_i) dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \frac{1}{\omega C} I_m \cos\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos(\omega t + \psi_u). \end{aligned} \quad (3.28)$$

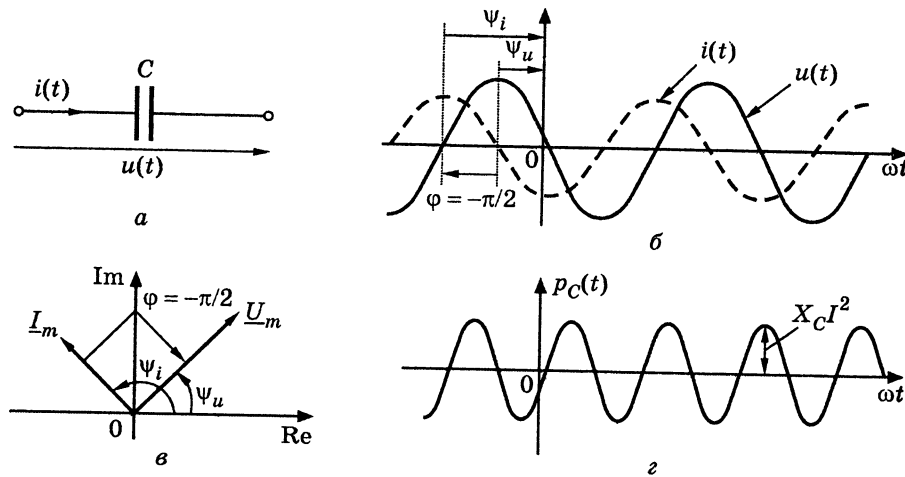


Рис. 3.25. Режим синусоїдного струму в ємності

Враховуючи особливості синусоїдного режиму, при інтегруванні миттєвого значення струму стала інтегрування прийнята нульовою.

Вираз (3.28) дозволяє оцінити амплітудні і фазові співвідношення між напругою і струмом у ємності.

Амплітуда напруги на ємності пов'язана з амплітудою струму співвідношенням:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m. \quad (3.29)$$

У виразі (3.29) величина  $1/\omega C$ , яка відповідає опору і вимірюється в омах, називається *ємнісним опором*:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (3.30)$$

Оскільки початкова фаза напруги на ємності

$$\psi_u = \psi_i - \frac{\pi}{2},$$

зсув фаз між напругою і струмом

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.31)$$

Отже, напруга на ємності відстає від струму (або струм в ємності випереджає напругу) за фазою на  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ), а у часі — на  $T/4$ .

Як і в індуктивності, коливання напруги і струму в ємності перебувають «у квадратурі».

Графіки миттєвих значень напруги і струму в ємності зображені на рис. 3.25, б.

Векторна діаграма для ємності має вигляд зсунутих на  $\pi/2$  векторів (рис. 3.25, в), які відповідають комплексним амплітудам струму і напруги:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_m = \frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\psi_i - \pi/2)} = U_m e^{j\psi_u}.$$

Комплексні опір і провідність ємності визначаються так:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\psi_i - \pi/2)}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = -j \frac{1}{\omega C} = -j X_C; \quad (3.32)$$

$$\underline{Y}_C = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{I_m e^{j\psi_i}}{\frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\psi_i - \pi/2)}} = \omega C e^{j\pi/2} = \frac{1}{X_C} e^{j\pi/2} = j\omega C = j B_C, \quad (3.33)$$

де  $B_C = \omega C = 1/X_C$  — *ємнісна провідність*, що вимірюється, як і інші види провідності, в сименсах (См).

Миттєва потужність в ємності

$$\begin{aligned} p_C(t) &= u(t)i(t) = \frac{1}{\omega C} I_m^2 \sin(\omega t + \psi_i) \cos(\omega t + \psi_i) = \\ &= \frac{X_C I_m^2}{2} \sin 2(\omega t + \psi_i) = X_C I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i) = \\ &= B_C U^2 \sin 2(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Графік миттєвої потужності в ємності зображений на рис. 3.25, г. Особливості зміни потужностей у ємності та індуктивності (рис. 3.24, г) аналогічні. Тому ємність, як і індуктивність, належить до реактивних елементів. Реактивна потужність у ємності

$$P_{Q_C} = X_C I^2 = B_C U^2. \quad (3.35)$$

Розглянуті в даному підрозділі основні поняття і співвідношення зведені до табл. 3.6.

Таблиця 3.6  
Елементи  $R, L, C$  у колах синусоїдного струму

Елемент	$R$	$L$	$C$
Комплексний опір $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$	$R$	$j\omega L = jX_L = \omega L e^{j\pi/2}$	$\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2}$
Повний опір $Z =  Z $	$R$	$X_L = \omega L$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
Аргумент $\underline{Z}$ $\varphi = \psi_u - \psi_i$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
Подання $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ на комплексній площині			
Комплексна провідність $\underline{Y} = Ye^{-j\varphi}$	$G$	$\frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L = \frac{1}{\omega L} e^{-j\pi/2}$	$j\omega C = jB_C = \omega C e^{j\pi/2}$
Повна провідність $Y =  Y $	$G$	$B_L = \frac{1}{\omega L}$	$B_C = \omega C$
Миттєва потужність	$P_R(t) = RI^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)] = GU^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]$	$P_L(t) = -X_L I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i) = -B_L U^2 \sin 2(\omega t + \psi_i)$	$P_C(t) = X_C I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i) = B_C U^2 \sin 2(\omega t + \psi_i)$
Активна $P_A$ і реактивна $P_Q$ потужності	$P_A = RI^2 = GU^2$	$P_{Q_L} = X_L I^2 = B_L U^2$	$P_{Q_C} = X_C I^2 = B_C U^2$
Векторна діаграма			

### 3.6. Послідовне з'єднання елементів $R, L, C$ у режимі синусоїдного струму

Розгляд послідовного з'єднання елементів  $R, L, C$  у режимі синусоїдного струму має як теоретичне, так і практичне значення. З точки зору теорії, аналіз цього кола дозволяє ввести всі види опорів, сформулювати закон Ома в комплексній формі, продемонструвати методику побудови векторних діаграм. Дане коло практично застосовується не тільки як одна зі схем заміщення будь-якої пасивної ділянки кола, але і як схема заміщення послідовного коливального контуру, який розглядається в розд. 5.

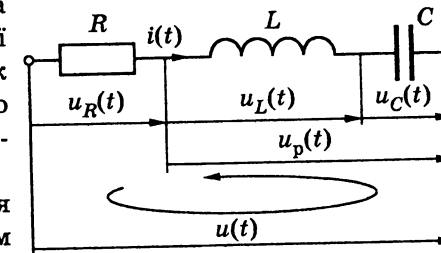


Рис. 3.26. Послідовне з'єднання елементів  $R, L, C$

Схему послідовного з'єднання елементів  $R, L, C$  з позначенням позитивних напрямів заданого струму  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$  і шуканих напруг зображено на рис. 3.26. Крім раніше розглянутих напруг на кожному з елементів, що описуються виразами (3.16), (3.20) і (3.28), на схемі вказано так звану реактивну напругу:

$$u_p(t) = u_L(t) + u_C(t).$$

Напруга на затискачах кола, згідно з другим законом Кірхгофа для вказаного на рис. 3.26 контуру,

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_R(t) + u_p(t) = \\ &= RI_m \cos(\omega t + \psi_i) + \omega LI_m \cos\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\omega C} I_m \cos\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Оскільки доданки у співвідношенні (3.36) мають однакову частоту, параметри напруги  $u(t)$  можна визначити, підсумовуючи комплексні амплітуди відповідних миттєвих значень напруг (див. підрозд. 3.4):

$$\begin{aligned} \underline{u}_m &= U_m e^{j\psi_u} = \underline{u}_{mR} + \underline{u}_{mL} + \underline{u}_{mC} = \\ &= RI_m e^{j\psi_i} + \omega LI_m e^{j(\psi_i + \pi/2)} + \frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\psi_i - \pi/2)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Якщо в (3.37) винести за дужки спільний множник  $I_m e^{j\psi_i} = \underline{I}_m$ , то даний вираз прийме вигляд закону Ома в комплексній формі:

$$\underline{U}_m = \left( R + \omega L e^{j\pi/2} + \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \right) I_m e^{j\psi_i} = \underline{Z} \underline{I}_m, \quad (3.38)$$

де  $\underline{Z} = R + \omega L e^{j\pi/2} + \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$  — комплексний опір кола.

Комплексний опір  $\underline{Z}$  є сумою комплексних опорів елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Аналіз формули (3.38) дозволяє зробити висновок, що при послідовному з'єднанні будь-якої кількості пасивних елементів їх комплексні опори підсумовуються.

Запис комплексного опору  $\underline{Z}$  в алгебраїчній і показниковій формах дозволяє ввести поняття основних видів опорів в колах синусоїдного струму.

Алгебраїчна форма запису комплексного опору має вигляд:

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX, \quad (3.39)$$

де уявна частина комплексного опору  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C$  називається *реактивним опором*.

Показникова форма подання комплексного опору визначається виразами:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \exp\left(j \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) = \\ &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \exp\left(j \arctg \frac{X_L - X_C}{R}\right) = \\ &= \sqrt{R^2 + X^2} \exp\left(j \arctg \frac{X}{R}\right) = |\underline{Z}| \exp j\varphi, \end{aligned} \quad (3.40)$$

де  $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$  — пов-

ний опір;  $\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}$  — аргумент

комплексного опору послідовного кола  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

Комплексні опори можна зобразити на комплексній площині (рис. 3.27).

Застосування показникової форми запису комплексного опору у виразі закону Ома в комплексній формі дозволяє визначити комплексну амплітуду напруги  $\underline{U}_m$  на затискачах розглядуваного кола, а отже, і миттєве значення  $u(t)$  цієї напруги. Дійсно, після підстановки всіх множників у показниковій формі закон Ома матиме вигляд

$$\begin{aligned} \underline{U}_m &= U_m e^{j\psi_u} = Z e^{j\varphi} I_m e^{j\psi_i} = \\ &= Z I_m e^{j(\psi_i + \varphi)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

що дозволяє знайти співвідношення для амплітуд і початкових фаз, а також перейти від комплексної амплітуди до миттєвого значення напруги  $u(t)$ :

$$U_m = Z I_m; \quad (3.42)$$

$$\psi_u = \psi_i + \varphi; \quad (3.43)$$

$$u(t) = \text{Re}[\underline{U}_m e^{j\omega t}] = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = Z I_m \cos(\omega t + \psi_i + \varphi). \quad (3.44)$$

Вираз (3.42) показує, що повний опір  $Z$  за законом Ома пов'язує амплітуди, а отже, і діючі значення напруги і струму кола:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}. \quad (3.45)$$

Отже, закон Ома справедливий як для комплексних амплітуд (комплексних діючих значень), так і для амплітуд (діючих значень) напруг і струмів. Однак закон Ома не справедливий для миттєвих значень, оскільки відношення миттєвого значення напруги (3.44) до миттєвого значення заданого струму є функцією часу:

$$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{Z I_m \cos(\omega t + \psi_i + \varphi)}{I_m \cos(\omega t + \psi_i)} = Z \frac{\cos(\omega t + \psi_i + \varphi)}{\cos(\omega t + \psi_i)},$$

хоча жоден з повних опорів елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  від часу не залежить.

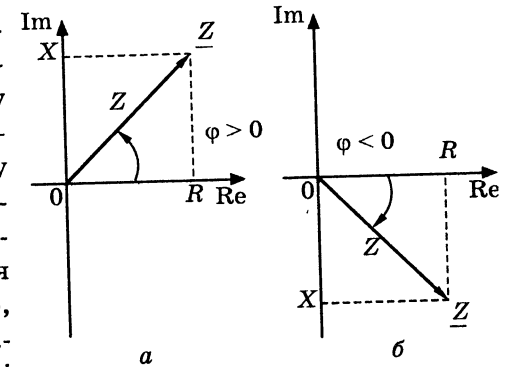


Рис. 3.27. Зображення комплексних опорів послідовного кола  $R$ ,  $L$ ,  $C$  на комплексній площині:  
а —  $X > 0$ ,  $\varphi > 0$ ; б —  $X < 0$ ,  $\varphi < 0$



Після підстановки в (3.42) розгорненого виразу для повного опору можна встановити зв'язок між амплітудами (діючими значеннями) напруг на ділянках кола  $R, L, C$ :

$$\begin{aligned} U_m &= I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(RI_m)^2 + (X_L I_m - X_C I_m)^2} = \\ &= \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2} = \sqrt{U_{mR}^2 + U_{mp}^2}; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$U = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_p^2}, \quad (3.47)$$

де  $U_{mp} = |U_{mL} - U_{mC}| = |X|I_m$ ;  $U_p = |U_L - U_C| = |X|I$  — амплітуда і діюче значення реактивної напруги відповідно.

Формули (3.46) і (3.47) показують, що амплітуди і діючі значення, а отже, і показання вимірювальних приладів (для даного кола — вольтметрів) у колах синусоїдного струму підсумовуються не арифметично, а геометрично — з урахуванням фазових співвідношень відповідних процесів.

Аргумент комплексного опору, як видно з виразу (3.43), визначає зсув фаз між напругою і струмом:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R} \quad (3.48)$$

і, залежно від параметрів кола ( $R, L, C$ ) і частоти, може змінюватися у межах

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.49)$$

Окремі випадки, які відповідають індуктивності ( $\varphi = \pi/2$ ) і ємності ( $\varphi = -\pi/2$ ), можливі, якщо  $R = 0$ .

Якщо  $0 < \varphi < \pi/2$  ( $X > 0$ ;  $X_L > X_C$ ), то напруга за фазою випереджає струм. Це відповідає *індуктивному характеру* кола.

У разі *ємнісного характеру* кола напруга за фазою відстає від струму. Це відповідає змінюванню аргументу комплексного опору в межах  $0 > \varphi > -\pi/2$  ( $X < 0$ ;  $X_L < X_C$ ).

Режим, при якому коло, що містить елементи  $R, L, C$ , має активний характер ( $\varphi = 0$ ;  $X_L = X_C$ ), зветься *резонансом*. Резонансний режим є основним у роботі коливальних контурів і розглядається в розд. 5.

Застосування у виразі (3.41) алгебраїчної форми запису комплексного опору дозволяє проаналізувати комплексні амплітуди напруг на елементах кола:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m &= [R + j(X_L - X_C)]I_m e^{j\psi_i} = \\ &= RI_m e^{j\psi_i} + jX_L I_m e^{j\psi_i} - jX_C I_m e^{j\psi_i} = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC}; \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\underline{U}_m = (R + jX)I_m e^{j\psi_i} = RI_m e^{j\psi_i} + jXI_m e^{j\psi_i} = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mp}, \quad (3.51)$$

де  $\underline{U}_{mp} = \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC}$  — комплексна амплітуда реактивної напруги.

На відміну від рівняння (3.50), яке практично повторює отриманий вище вираз (3.37), співвідношення (3.51) дозволяє розглянути комплексну амплітуду реактивної напруги та її параметри:

$$\underline{U}_{mp} = U_{mp} e^{j\psi_p} = jXI_m e^{j\psi_i} = |X|I_m e^{j(\psi_i \pm \pi/2)},$$

де  $U_{mp} = |X|I_m$  — амплітуда реактивної напруги;  $\psi_p$  — початкова фаза реактивної напруги ( $\psi_p = \psi_i + \pi/2$ , якщо  $X > 0$  і  $\psi_p = \psi_i - \pi/2$ , якщо  $X < 0$ ).

Миттєве значення реактивної напруги

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \text{Re}[\underline{U}_{mp} e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[|X|I_m e^{j(\psi_i \pm \pi/2 + \omega t)}\right] = \\ &= |X|I_m \cos\left(\omega t + \psi_i \pm \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Отже, амплітуда реактивної напруги пов'язана з амплітудою струму за законом Ома за допомогою модуля реактивного опору, а фазовий зсув між реактивною напругою і струмом становить:

- $\pi/2$  у разі індуктивного характеру кола ( $X > 0$ ;  $X_L > X_C$ );
- $-\pi/2$  у разі ємнісного характеру кола ( $X < 0$ ;  $X_L < X_C$ ).

У режимі резонансу ( $\varphi = 0$ ;  $X_L = X_C$ ) амплітуда реактивної напруги дорівнює нулю.

Амплітудні та фазові співвідношення для даного кола ілюструють векторні діаграми, показані на рис. 3.28.

Побудову векторних діаграм слід починати із зображення комплексної амплітуди  $\underline{I}_m$  відомого струму. Комплексні амплітуди напруг на елементах  $R, L, C$  є векторами, орієнтованими відносно вектора  $\underline{I}_m$  відповідно до табл. 3.6. Результатом підсумовування цих векторів є вектор, що відповідає комплексній амплітуді напруги  $\underline{U}_m$  на затискачах кола. Вектори, які відповідають комплексним

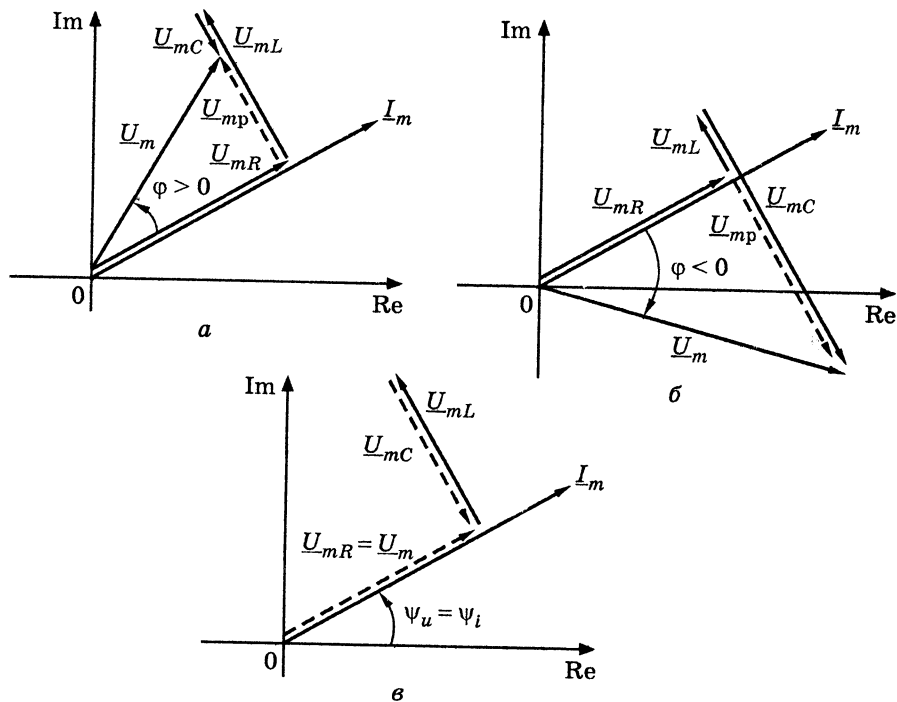


Рис. 3.28. Векторні діаграми послідовного кола  $R, L, C$ :  
 а — індуктивний характер кола ( $X > 0$ ;  $\varphi > 0$ );  
 б — ємнісний характер кола ( $X < 0$ ;  $\varphi < 0$ );  
 в — резонанс ( $X = 0$ ;  $\varphi = 0$ )

амплітудам реактивної напруги  $\underline{U}_{mr} = \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC}$ , на рис. 3.28, а, б побудовані пунктиром.

Аналіз векторних діаграм даного кола і співвідношень (3.46)–(3.51) дозволяє зробити такі висновки:

а) у разі індуктивного характеру кола амплітуда напруги на індуктивності більше амплітуди напруги на ємності;

б) у разі ємнісного характеру кола амплітуда напруги на ємності більше амплітуди напруги на індуктивності;

в) напруги на індуктивності і ємності перебувають у протифазі, а амплітуда реактивної напруги дорівнює їх різниці (від більшої амплітуди віднімається менша);

г) амплітуда напруги на затискачах кола відповідає гіпотенузі, а амплітуди реактивної напруги і напруги на активному опорі — катетам прямокутного трикутника;

д) за умови резонансу коло має активний характер: реактивна напруга дорівнює нулю (амплітуди напруг на індуктивності та ємності однакові); напруги на затискачах кола й активному опорі однакові.

Розглянуті вище види опорів і співвідношення для них у колах синусоїдного струму зведені до табл. 3.7. Основні співвідношення для розрахунку комплексним методом кіл  $R, L, C$  і окремих випадків (кола  $R, L$ ;  $R, C$ ;  $L, C$ ) наведені в табл. 3.8.

Таблиця 3.7

Опори в колах синусоїдного струму

Опори	Позначення	Розрахункові співвідношення
Активний	$R$	$R = \frac{\underline{U}_{mR}}{I_m} = \frac{U_{mR}}{I_m} = \frac{U_R}{I_R}$
Індуктивний	$X_L$	$X_L = \omega L = \frac{U_{mL}}{I_{mL}} = \frac{U_L}{I_L}$
Ємнісний	$X_C$	$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_{mC}}{I_{mC}} = \frac{U_C}{I_C}$
Реактивний	$X$	$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ ; $ X  = \frac{U_{mp}}{I_p} = \frac{U_p}{I_p}$
Комплексний	$\underline{Z}$	$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX =$ $= Z e^{j\varphi} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$
Повний	$Z$	$Z =  \underline{Z}  = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$ $= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} =$ $= \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$
Аргумент $\underline{Z}$	$\varphi = \psi_u - \psi_i$	$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} =$ $= \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}$

Послідовне з'єднання елементів R, L, C у колах синусоїдного струму

Схема	Z	Z =  Z	φ	Векторна діаграма
	$R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$	$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$	$\arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}$	
	$R + jX_L = R + j\omega L = Ze^{j\varphi}$	$\sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$	$\arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{\omega L}{R}$	
	$R - jX_C = R - j\frac{1}{\omega C} = Ze^{j\varphi}$	$\sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$-\arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega CR}$	
	$j(X_L - X_C) = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = jX$	$ X_L - X_C  = \left \omega L - \frac{1}{\omega C}\right  =  X $	$\begin{cases} \pi/2, X > 0 \\ -\pi/2, X < 0 \end{cases}$	

**Приклад 3.5.** Миттєві значення напруги на ділянці кола, зображеної на рис. 3.26, становить  $u(t) = 20 \cos(10^6 t + \pi/2)$  В. Параметри кола:  $R = 1$  кОм;  $L = 2,73$  мГн;  $C = 1$  нФ. Знайти миттєві значення струму в колі та напруг на його ділянках. Побудувати векторну діаграму.

**Розв'язання.** Визначаємо комплексний опір кола:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 10^3 + j\left(10^6 \cdot 2,73 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-9}}\right) =$$

$$= 10^3 + j10^3(2,73 - 1) = 10^3(1 + j1,73) \text{ Ом} = 1 + j1,73 \text{ кОм} = 2e^{j\pi/3} \text{ кОм.}$$

Використовуючи закон Ома в комплексній формі, комплексну амплітуду заданої напруги  $\underline{U}_m = 20e^{j\pi/2}$  В і знайдений комплексний опір кола  $\underline{Z}$ , знаходимо комплексну амплітуду струму:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{20e^{j\pi/2}}{2 \cdot 10^3 e^{j\pi/3}} = 10 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/6} \text{ А} = 10e^{j\pi/6} \text{ мА.}$$

Розраховуємо комплексні амплітуди напруг на ділянках кола:

$$\underline{U}_{mR} = R \underline{I}_m = 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/6} = 10e^{j\pi/6} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{mL} = j\omega L \underline{I}_m = j2,73 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/6} = 27,3e^{j2\pi/3} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{mC} = -j\frac{1}{\omega C} \underline{I}_m = -j10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/6} = 10e^{-j\pi/3} \text{ В;}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mp} &= j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \underline{I}_m = j(2,73 - 1) \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/6} = \\ &= 17,3e^{j(\pi/2 + \pi/6)} = 17,3e^{j2\pi/3} \text{ В.} \end{aligned}$$

За допомогою знайдених комплексних амплітуд побудуємо векторну діаграму (рис. 3.29) і запишемо миттєві значення струму і напруг на ділянках кола:

$$i(t) = 10 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ мА;}$$

$$u_R(t) = 10 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ В;}$$

$$u_L(t) = 27,3 \cos\left(10^6 t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ В;}$$

$$u_C(t) = 10 \cos\left(10^6 t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ В;}$$

$$u_p(t) = 17,3 \cos\left(10^6 t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ В.}$$

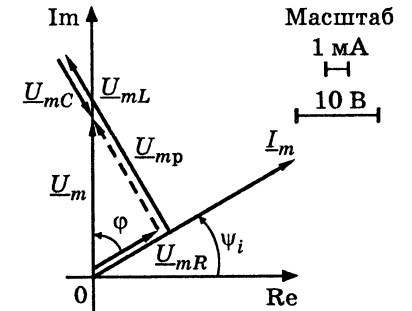


Рис. 3.29. Векторна діаграма до прикладу 3.5

Дане коло має індуктивний характер. Зсув фаз між напругою на затискачах кола і струмом дорівнює аргументу комплексного опору і становить  $\varphi = \pi/3$ .

**Приклад 3.6.** Показання амперметра  $A$  і трьох із п'яти вольтметрів  $V_R, V_L, V_C$ , що вимірюють діючі значення струму і напруг на ділянках кола  $R, L, C$  (рис. 3.30), становлять:  $I = 20$  мА;  $U_R = 3$  В;  $U_L = 1$  В;  $U_C = 5$  В. Визначити показання інших вольтметрів і параметри кола, якщо кутова частота  $\omega = 10^5$  рад/с. Побудувати векторну діаграму, вважаючи початкову фазу струму нульовою.

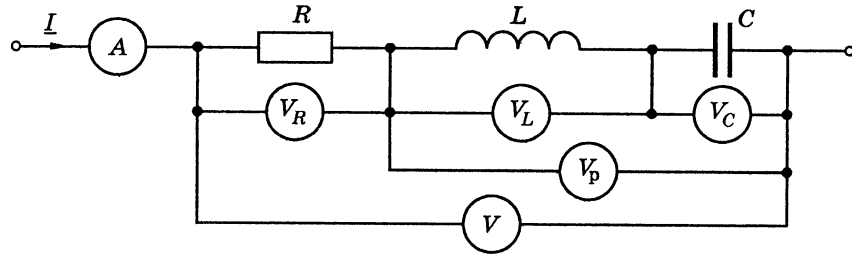


Рис. 3.30. До прикладу 3.6

**Розв'язання.** Використовуючи співвідношення (3.47) між діючими значеннями напруг на ділянках кола  $R, L, C$  визначимо реактивну напругу  $U_p$  (показання вольтметра  $V_p$ ) і напругу на затискачах кола  $U$  (показання вольтметра  $V$ ):

$$U_p = U_C - U_L = 5 - 1 = 4 \text{ В}; \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_p^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ В}.$$

Щоб обчислити параметри кола, застосуємо закон Ома для діючих значень напруг і струму в елементах  $R, L, C$ :

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{3}{20 \cdot 10^{-3}} = 150 \text{ Ом}; \quad X_L = \omega L = \frac{U_L}{I} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ Ом};$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{50}{10^5} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гн} = 500 \text{ мкГн};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I} = \frac{5}{20 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ Ом};$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^5 \cdot 250} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Ф} = 40 \text{ нФ}.$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 3.31) для комплексних діючих значень струму і напруг на ділянках кола:

$$\underline{I} = 20 \text{ мА}; \quad \underline{U}_R = 3 \text{ В}; \quad \underline{U}_L = e^{j\pi/2} \text{ В}; \quad \underline{U}_C = 5e^{-j\pi/2} \text{ В};$$

$$\underline{U}_p = 4e^{-j\pi/2} \text{ В}; \quad \underline{U} = 5e^{j\varphi} \text{ В},$$

де  $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{50 - 250}{150} \approx -53^\circ = -\frac{2\pi \cdot 53}{360} = -0,927$  рад — аргумент комплексного опору кола.

**Приклад 3.7.** Напруга на затискачах кола, схема якого зображена на рис. 3.32, має вигляд  $u_1(t) = U_{m1} \cos \omega t$ . Параметри кола  $R = 2$  кОм;  $C = 5$  нФ. Визначити частоту, коли амплітуда напруги  $u_2(t)$  становитиме  $U_{m1}/\sqrt{2}$ , і початкову фазу цієї напруги. Побудувати векторну діаграму.

**Розв'язання.** Встановимо в загальному вигляді зв'язок між амплітудами і початковими фазами напруг  $u_2(t)$  та  $u_1(t)$ :

1) комплексна амплітуда напруги  $u_1(t)$

$$\underline{U}_{m1} = U_{m1};$$

2) комплексна амплітуда струму

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{Z}} = \frac{U_{m1}}{R - jX_C}, \text{ де } X_C = \frac{1}{\omega C};$$

3) комплексна амплітуда напруги  $u_2(t)$

$$\underline{U}_{m2} = -jX_C \underline{I}_m = \frac{-jX_C U_{m1}}{R - jX_C};$$

4) комплексна величина, яка дорівнює відношенню комплексних амплітуд напруг  $u_2(t)$  і  $u_1(t)$ ,

$$\underline{H}_{21} = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{U}_{m1}} = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} e^{j(\psi_{u2} - \psi_{u1})} = \frac{-jX_C}{R - jX_C}.$$

Враховуючи, що модуль величини  $\underline{H}_{21}$  дорівнює відношенню амплітуд напруг  $u_2(t)$  і  $u_1(t)$ , визначимо співвідношення між параметрами кола, за яких виконується задане в умові відношення амплітуд:

$$|\underline{H}_{21}| = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отримана рівність виконується, коли

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = R,$$

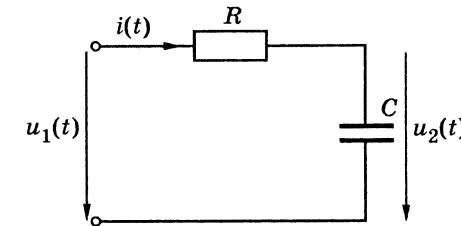


Рис. 3.32. До прикладу 3.7

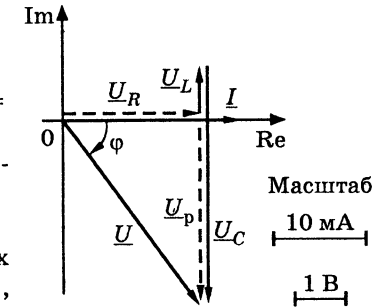


Рис. 3.31. Векторна діаграма до прикладу 3.6

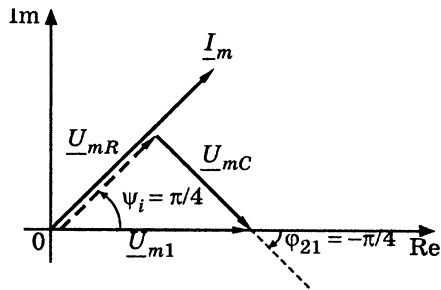


Рис. 3.33. Векторна діаграма до прикладу 3.7

звідки знаходимо частоту джерела синусоїдної напруги:

$$\omega = \frac{1}{RC} = \frac{1}{2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 10^5 \text{ рад/с;}$$

$$f = \frac{10^5}{2\pi} = 1,59 \cdot 10^4 \text{ Гц} = 15,9 \text{ кГц.}$$

Зсув фаз між напругами  $u_2(t)$  і  $u_1(t)$  визначимо як аргумент  $\underline{H}_{21}$ :

$$\varphi_{21} = \psi_{u2} - \psi_{u1} = -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{X_C}{R} = -\frac{\pi}{4}.$$

Щоб побудувати векторну діаграму, обчислимо початкову фазу струму:

$$\psi_i = \arctg \frac{X_C}{R} = \frac{\pi}{4}.$$

Векторну діаграму будемо для довільно вибраного масштабу амплітуд, але з урахуванням визначених фазових зсувів (рис. 3.33).

Комплексна величина  $\underline{H}_{21}$ , що використана для розв'язання даного прикладу і залежить тільки від схеми кола, її параметрів і частоти, є комплексною передатною функцією, види яких розглядатимуться в розд. 5.

### 3.7. Паралельне з'єднання елементів $R, L, C$ у режимі синусоїдного струму

Кола в режимі синусоїдного струму, що містить паралельно сполучені елементи  $R, L, C$ , має велике теоретичне і практичне значення. Теоретичний аналіз цього кола дозволяє розглянути всі види провідностей для режиму синусоїдного струму. Дане коло застосовується як схема заміщення будь-якої пасивної ділянки кола і як одна зі схем заміщення паралельного контуру (див. розд. 5).

Схема паралельного з'єднання елементів  $R, L, C$  з позначенням позитивних напрямів заданої напруги на затискачах кола  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$  і шуканих струмів показана на рис. 3.34.

Струм кола можна визначити, застосувавши перший закон Кірхгофа

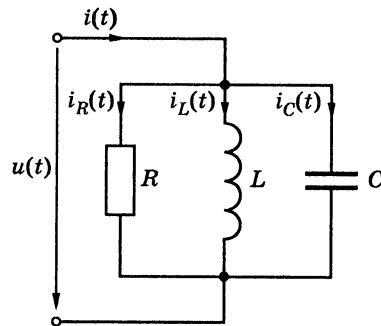


Рис. 3.34. Схема паралельного з'єднання елементів  $R, L, C$

для будь-кого з вузлів з урахуванням вибраних позитивних напрямів струмів у вітках:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt + C \frac{du(t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{R} U_m \cos(\omega t + \psi_u) + \frac{1}{\omega L} U_m \sin(\omega t + \psi_u) - \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \\ &= \frac{1}{R} U_m \cos(\omega t + \psi_u) + \frac{1}{\omega L} U_m \cos\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + \omega C U_m \cos\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Доданки у виразі (3.52) мають однакову частоту. Тому параметри струму  $i(t)$  можна знайти, підсумовуючи комплексні амплітуди відповідних струмів у вітках:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m e^{j\psi_i} &= \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC} = \\ &= \frac{U_m e^{j\psi_u}}{R} + \frac{U_m e^{j(\psi_u - \pi/2)}}{\omega L} + \omega C U_m e^{j(\psi_u + \pi/2)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Якщо в правій частині рівняння (3.53) винести за дужки спільний множник  $U_m e^{j\psi_u}$ , який є комплексною амплітудою напруги  $\underline{U}_m$  на затискачах кола, матимемо вираз закону Ома в комплексній формі з використанням комплексної провідності

$$\underline{I}_m = \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{\omega L} e^{-j\pi/2} + \omega C e^{j\pi/2} \right] U_m e^{j\psi_u} = \underline{Y} \underline{U}_m, \quad (3.54)$$

де  $\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\omega L} e^{-j\pi/2} + \omega C e^{j\pi/2} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C$  — комплексна провідність кола.

Співвідношення (3.54) показує, що комплексна провідність паралельно з'єднаних елементів  $R, L, C$ , а отже, і комплексна провідність будь-якої кількості паралельно сполучених пасивних елементів, дорівнює сумі комплексних провідностей цих елементів.

Комплексну провідність в алгебраїчній формі записують у вигляді:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{\omega L} - j\omega C \right) = G - j(B_L - B_C) = G - jB, \quad (3.55)$$

де  $B = \frac{1}{\omega L} - \omega C = B_L - B_C$  — реактивна провідність.

Уявна частина комплексної провідності в загальному вигляді береться зі знаком мінус у зв'язку з тим, що аргументи комплексного опору і провідності як обернених величин відрізняються знаками:

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y e^{j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi. \quad (3.56)$$

У показниковій формі запису комплексна провідність має вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \exp\left[-j \arctg\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) R\right] = \\ &= \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} \exp\left(-j \arctg \frac{B_L - B_C}{G}\right) = \\ &= \sqrt{G^2 + B^2} \exp\left(-j \arctg \frac{B}{G}\right) = |\underline{Y}| \exp(-j\varphi), \end{aligned} \quad (3.57)$$

де  $|\underline{Y}| = Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$  — повна провідність;  $(-\varphi) = -\arctg\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) R = -\arctg \frac{B_L - B_C}{G} = -\arctg \frac{B}{G}$  — аргумент комплексної провідності паралельного кола  $R, L, C$ .

Комплексну провідність, подібно комплексним опорам, зображують вектором на комплексній площині (рис. 3.35).

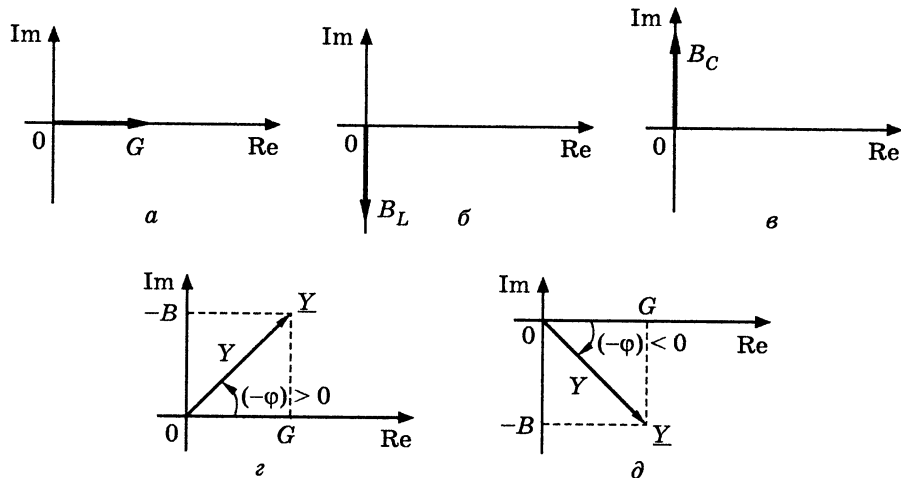


Рис. 3.35. Зображення комплексних провідностей на комплексній площині: а —  $G$ ; б —  $\underline{Y}_L = -jB_L$ ; в —  $\underline{Y}_C = jB_C$ ; г —  $\underline{Y}$  якщо  $G \neq 0, -B > 0$ ;  $(-\varphi) > 0, \varphi < 0$ ; д —  $\underline{Y}$  якщо  $G \neq 0, -B < 0$ ;  $(-\varphi) < 0, \varphi > 0$

Використання показникової форми запису комплексної провідності дозволяє визначити комплексну амплітуду струму кола, амплітудні та фазові співвідношення між напругою і струмом у колі, а також записати миттєве значення струму:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = Y e^{-j\varphi} U_m e^{j\psi_u} = Y U_m e^{j(\psi_u - \varphi)}; \quad (3.58)$$

$$I_m = Y U_m; \quad (3.59)$$

$$\psi_i = \psi_u - \varphi; \quad (3.60)$$

$$i(t) = \text{Re}[\underline{I}_m e^{j\omega t}] = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = Y U_m \cos(\omega t + \psi_u - \varphi). \quad (3.61)$$

Вираз (3.58) показує, що комплексна провідність  $\underline{Y}$  пов'язує згідно із законом Ома комплексні амплітуди (комплексні діючі значення) струму і напруги кола:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{I}{U}. \quad (3.62)$$

З формули (3.59) отримуємо вираз, який пов'язує за законом Ома амплітуди (діючі значення) струму і напруги кола:

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}. \quad (3.63)$$

Слід зазначити, що загалом для режиму синусоїдного струму закон Ома не виконується для миттєвих значень струмів і напруг. Наприклад, для даного кола відношення миттєвого значення знайденого струму (3.61) до миттєвого значення заданої напруги є функцією часу:

$$\frac{i(t)}{u(t)} = \frac{Y U_m \cos(\omega t + \psi_u - \varphi)}{U_m \cos(\omega t + \psi_u)} = Y \frac{\cos(\omega t + \psi_u - \varphi)}{\cos(\omega t + \psi_u)}.$$

Підстановка в (3.59) розгорненого виразу для повної провідності (3.57) встановлює зв'язок між амплітудами (діючими значеннями) струмів у вітках кола:

$$\begin{aligned} I_m &= U_m \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \\ &= \sqrt{I_{mR}^2 + (I_{mL} - I_{mC})^2} = \sqrt{I_{mR}^2 + I_{mp}^2}; \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$I = U \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{I_R^2 + I_p^2}, \quad (3.65)$$

де  $I_{mp} = |I_{mL} - I_{mC}|$ ;  $I_p = |I_L - I_C|$  — відповідно амплітуда і діюче значення реактивної складової струму.

Співвідношення (3.64) дуальні виразам (3.46) для послідовного кола  $R, L, C$  і показують, що амплітуди і діючі значення, а отже, і показання вимірювальних приладів (для даного кола амперметрів) у колах синусоїдного струму підсумовуються не арифметично, а геометрично — з урахуванням фазових співвідношень відповідних процесів.

Аргумент комплексної провідності  $(-\varphi)$ , як видно з формул (3.58) і (3.60), визначає зсув фаз між напругою і струмом

$$(-\varphi) = \psi_i - \psi_u$$

і залежно від параметрів кола ( $R, L, C$ ) і частоти може змінюватися у межах:

$$-\frac{\pi}{2} \leq (-\varphi) \leq \frac{\pi}{2}$$

Окремі випадки, які відповідають ємності  $(-\varphi) = \pi/2$  та індуктивності  $(-\varphi) = -\pi/2$ , можливі, якщо  $G = 0$ .

За умови, що  $0 > (-\varphi) > -\pi/2$  ( $B > 0$ ;  $B_L > B_C$ ), струм за фазою відстає від напруги, що відповідає *індуктивному характеру кола*. Якщо аргумент комплексної провідності змінюється в межах  $0 < (-\varphi) < \pi/2$  ( $B < 0$ ;  $B_L < B_C$ ), коло має *ємнісний характер*.

При резонансі коло, що містить елементи  $R, L, C$ , має активний характер ( $\varphi = 0$ ;  $B_L = B_C$ ).

Застосування алгебраїчної форми запису комплексної провідності дозволяє виконати аналіз комплексних амплітуд струмів у вітках кола:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= [G - j(B_L - B_C)]U_m e^{j\psi_u} = \\ &= GU_m e^{j\psi_u} - jB_L U_m e^{j\psi_u} + jB_C U_m e^{j\psi_u} = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC}; \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\underline{I}_m = (G - jB)U_m e^{j\psi_u} = GU_m e^{j\psi_u} - jBU_m e^{j\psi_u} = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mp}, \quad (3.67)$$

де  $\underline{I}_{mp} = \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC} = jBU_m e^{j\psi_u}$  — комплексна амплітуда реактивної складової струму кола.

На відміну від рівняння (3.66), яке повторює отриманий вище вираз (3.53), співвідношення (3.67) дозволяє записати комплексну

амплітуду, амплітуду, початкову фазу і миттєве значення реактивної складової струму кола:

- $\underline{I}_{mp} = I_{mp} e^{j\psi_p} = -jBU_m e^{j\psi_u} = |B|U_m e^{j(\psi_u \pm \pi/2)}$ ;
- $I_{mp} = |B|U_m$ ;
- $\psi_p = \psi_u \pm \frac{\pi}{2}$ ;
- $i_p(t) = |B|U_m \cos\left(\omega t + \psi_u \pm \frac{\pi}{2}\right)$ .

Амплітуда реактивної складової струму пов'язана з амплітудою напруги за допомогою модуля реактивної провідності, а фазовий зсув між реактивним струмом і прикладеною до затискачів кола напругою становить:

а)  $\psi_p = \frac{\pi}{2}$  для ємнісного характеру кола ( $B < 0$ ;  $B_L < B_C$ );

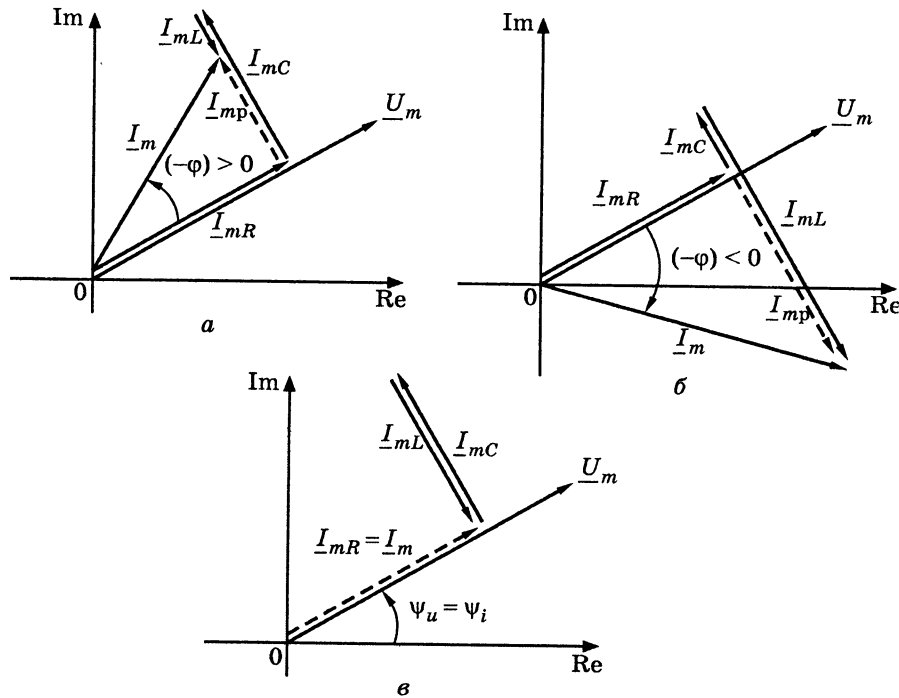
б)  $\psi_p = -\frac{\pi}{2}$  для індуктивного характеру кола ( $B > 0$ ;  $B_L > B_C$ ).

Найменування, позначення та розрахункові формули для різних видів провідності в колах синусоїдного струму зведені до табл. 3.9.

Таблиця 3.9

Провідності в колах синусоїдного струму

Провідність	Позначення	Розрахункові формули
Активна	$G$	$G = \frac{I_{mR}}{\underline{U}_{mR}} = \frac{I_{mR}}{U_{mR}} = \frac{I_R}{\underline{U}_R} = \frac{I_R}{U_R}$
Індуктивна	$B_L$	$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{I_{mL}}{U_{mL}}$
Ємнісна	$B_C$	$B_C = \omega C = \frac{I_{mC}}{U_{mC}}$
Реактивна	$B$	$B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ ; $ B  = \frac{I_{mp}}{U_{mp}}$
Комплексна	$\underline{Y}$	$\underline{Y} = G - jB = \underline{Y} e^{-j\varphi} = \frac{I_m}{\underline{U}_m} = \frac{I}{\underline{U}}$
Повна	$Y$	$Y =  \underline{Y}  = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}$
Аргумент $\underline{Y}$	$(-\varphi)$	$-\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \psi_i - \psi_u$



**Рис. 3.36.** Векторні діаграми паралельного кола  $R, L, C$ :  
 а — ємнісний характер кола ( $-B > 0$ ;  $-\varphi > 0$ ,  $\varphi < 0$ );  
 б — індуктивний характер кола ( $-B < 0$ ;  $-\varphi < 0$ ,  $\varphi > 0$ );  
 в — резонанс ( $B = 0$ ,  $\varphi = 0$ )

Векторні діаграми, побудовані на рис. 3.36, ілюструють амплітудні та фазові співвідношення між струмами і напругами в даному колі.

Аналіз векторних діаграм для паралельного кола  $R, L, C$  дозволяє зробити висновки:

а) струм в активному опорі збігається за фазою з прикладеною до кола напругою, а струми в індуктивності та ємності відповідно відстають чи випереджають цю напругу на кут  $\pi/2$ ;

б) струми в індуктивності та ємності перебувають у протифазі;

в) у разі індуктивного характеру кола амплітуда струму в індуктивності більше амплітуди струму в ємності, а у разі ємнісного характеру кола амплітуда струму в ємності більше амплітуди струму в індуктивності;

г) амплітуда реактивної складової струму дорівнює різниці амплітуд струмів у реактивних елементах;

д) амплітуда струму кола відповідає гіпотенузі, а амплітуди реактивного струму і струму в активному опорі — катетам прямокутного трикутника, згідно із співвідношеннями (3.64) і (3.65);

е) при резонансі, незважаючи на наявність елементів  $L$  і  $C$ , коло має активний характер; амплітуди струмів в індуктивності та ємності однакові, дорівнюють одна одній також амплітуди струму в активному опорі та загального струму кола.

Порівняння співвідношень для послідовного і паралельного кіл  $R, L, C$  показує, що паралельне коло дуальне відносно послідовного. Це означає, що всі співвідношення, отримані для одного кола, можна застосувати для іншого, якщо замінити струм напругою, індуктивність — ємністю, провідність — опором і навпаки, тобто зробити заміну вихідних величин на дуальні.

Основні співвідношення для розрахунку паралельного кола  $R, L, C$ , а також кіл, які містять тільки два елементи ( $R, L$ ;  $R, C$ ;  $L, C$ ) в режимі синусоїдного струму, наведені в табл. 3.10.

**Приклад 3.8.** Миттєве значення струму в ємності кола, зображеного на рис. 3.34,  $i_C(t) = 10 \cos(10^6 t + \pi/2)$  мА. Параметри кола:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  мГн;  $C = 2$  нФ. Визначити миттєві значення струмів кола і напруги на його затискачах. Побудувати векторну діаграму.

*Розв'язання.* Попередньо записавши комплексну амплітуду струму

$$\underline{I}_{mC} = 10e^{j\pi/2} \text{ мА} = 10 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/2} \text{ А}$$

і розрахувавши комплексний опір ємності

$$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = -j0,5 \cdot 10^3 \text{ Ом},$$

визначимо за законом Ома комплексну амплітуду напруги на затискачах кола:

$$\underline{U}_m = \underline{Z}_C \underline{I}_{mC} = -j0,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/2} = 5 \text{ В}.$$

Розрахуємо комплексну провідність кола і комплексні амплітуди струмів:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = \frac{1}{10^3} - j \left( \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-3}} - 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \right) = \\ &= 10^{-3} + j10^{-3} \text{ См} = 10^{-3} \sqrt{2} e^{j\pi/4} \text{ См}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{mR} = G \underline{U}_m = 10^{-3} \cdot 5 \text{ А} = 5 \text{ мА};$$

$$\underline{I}_{mL} = -j \frac{1}{\omega L} \underline{U}_m = -j \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-3}} \cdot 5 = 5 \cdot 10^{-3} e^{-j\pi/2} \text{ А} = 5e^{-j\pi/2} \text{ мА};$$



Таблиця 3.10  
Паралельне з'єднання елементів  $R, L, C$  у режимі синусоїдного струму

Схема	$Y$	$Y =  Y $	$(-\varphi)$	Векторна діаграма
	$G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = G - j(B_L - B_C) = G - jB = Ye^{-j\varphi}$	$\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$	$-\arctg \frac{1/\omega L - \omega C}{G} = -\arctg \frac{B_L - B_C}{G} = -\arctg \frac{B}{G}$	
	$G - j\frac{1}{\omega L} = G - jB_L = Ye^{-j\varphi}$	$\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + B_L^2}$	$-\arctg \frac{1}{\omega LG} = -\arctg \frac{B_L}{G}$	
	$G + j\omega C = G + jB_C = Ye^{-j\varphi}$	$\sqrt{G^2 + (\omega C)^2} = \sqrt{G^2 + B_C^2}$	$\arctg \frac{\omega C}{G} = \arctg \frac{B_C}{G}$	
	$-j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = -j(B_L - B_C) = -jB = Ye^{j\pi/2}$	$\left \frac{1}{\omega L} - \omega C\right  =  B_L - B_C  =  B $	$\begin{cases} -\pi/2, B_L > B_C \\ \pi/2, B_L < B_C \end{cases}$	

$I_m = YU_m = 10^{-3} \sqrt{2} e^{j\pi/4} \cdot 5 \approx 7,05 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/4} \text{ А} = 7,05 e^{j\pi/4} \text{ мА.}$   
 За знайденими комплексними амплітудами побудуємо векторну діаграму (рис. 3.37) і запишемо миттєві значення напруги і струмів кола:

$$i(t) = 7,05 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ мА;}$$

$$i_R(t) = 5 \cos(10^6 t) \text{ мА;}$$

$$i_L(t) = 5 \cos\left(10^6 t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ мА;}$$

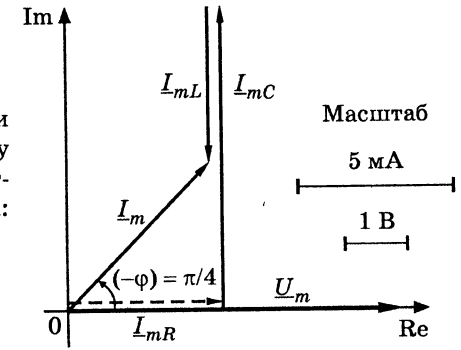
$$u(t) = 5 \cos(10^6 t) \text{ В.}$$


Рис. 3.37. Векторна діаграма до прикладу 3.8

Зсув фаз між струмом і напругою на затискачах кола дорівнює аргументу комплексної провідності  $(-\varphi) = \pi/4$ . Дане коло має ємнісний характер.

**Приклад 3.9.** Показання вольтметра і трьох із п'яти амперметрів, що вимірюють діючі значення напруг і струмів у вітках кола  $R, L, C$  (рис. 3.38), становлять:  $U = 60 \text{ В}$ ;  $I_R = 30 \text{ мА}$ ;  $I_L = 60 \text{ мА}$ ;  $I_C = 20 \text{ мА}$ . Визначити показання інших амперметрів і параметри кола, якщо кутова частота  $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$ . Побудувати векторну діаграму, вважаючи початкову фазу напруги нульовою.

**Розв'язання.** Використовуючи співвідношення (3.65) між діючими значеннями струмів у вітках паралельного кола  $R, L, C$ , визначимо

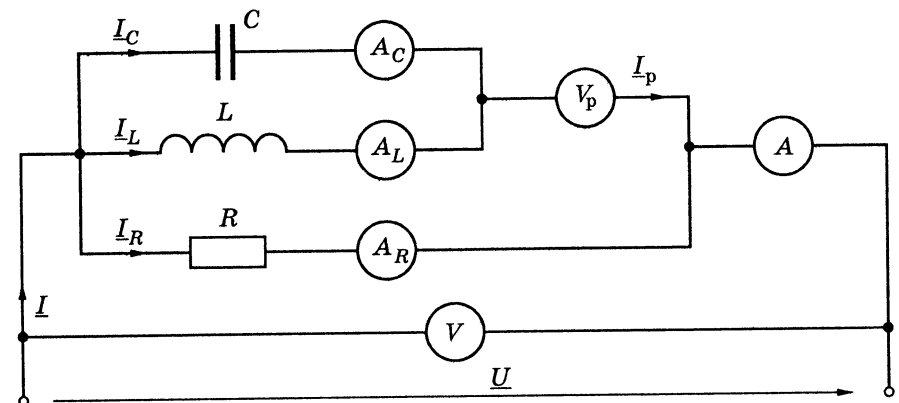


Рис. 3.38. До прикладу 3.9

реактивний струм  $I_p$  (показання амперметра  $A_p$ ) і загальний струм кола  $I$  (показання амперметра  $A$ ):

$$I_p = I_L - I_C = 60 - 20 = 40 \text{ мА};$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_p^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ мА}.$$

Обчислимо параметри елементів  $G$ ,  $L$  і  $C$ , застосувавши закон Ома для діючих значень напруги і струмів в елементах:

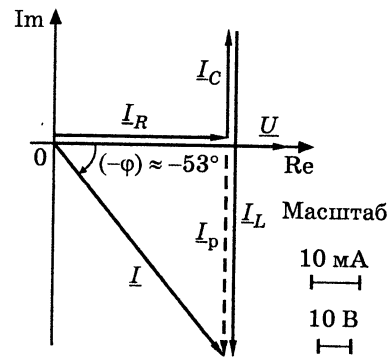


Рис. 3.39. Векторна діаграма до прикладу 3.9

$$G = \frac{I_R}{U} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{60} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{I_L}{U} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{60} = 10^{-3} \text{ См};$$

$$L = \frac{1}{\omega B_L} = \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-3}} = 10^{-3} \text{ Гн} = 1 \text{ мГн};$$

$$B_C = \omega C = \frac{I_C}{U} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{60} \approx 0,333 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$C = \frac{B_C}{\omega} \approx \frac{0,333 \cdot 10^{-3}}{10^6} = 0,333 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 0,333 \text{ нФ}.$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 3.39) для комплексних діючих значень струмів і напруги кола:

$$\underline{U} = 60 \text{ В}; \underline{I}_R = 30 \text{ мА}; \underline{I}_L = 60e^{-j\pi/2} \text{ мА};$$

$$\underline{I}_C = 20e^{j\pi/2} \text{ мА}; \underline{I}_p = 40e^{-j\pi/2} \text{ мА}; \underline{I} = 50e^{-j\varphi} \text{ мА},$$

де  $(-\varphi) = -\arctg \frac{B_L - B_C}{G} = -\arctg \frac{10^{-3} - 0,33 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3}} \approx -53^\circ$  — аргумент комплексної провідності кола.

### 3.8. Еквівалентна заміна послідовного з'єднання елементів паралельним і навпаки

Розглянуті в підрозділах 3.6–3.7 поняття комплексних опорів і провідностей дозволяють не тільки обґрунтувати закон Ома в комплексній формі для пасивної ділянки кола, але й еквівалентно подати будь-який лінійний пасивний двополюсник у вигляді послідовного або паралельного кіл  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . При цьому для еквівалентного послідовного кола доцільно використовувати комплексний опір, а для еквівалентного паралельного кола — комплексну провідність (рис. 3.40).

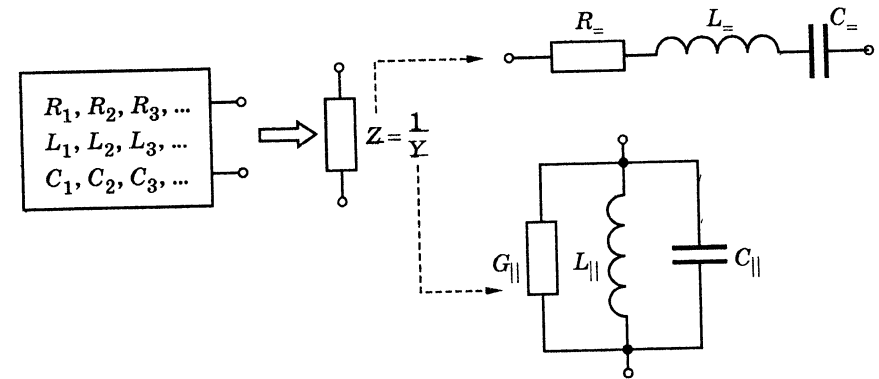


Рис. 3.40. Варіанти еквівалентної заміни пасивного двополюсника послідовним або паралельним колами  $R$ ,  $L$ ,  $C$

На рис. 3.40 і в подальшому викладенні для того, щоб розрізняти параметри послідовного і паралельного кіл, у позначеннях елементів і величин використовуються відповідні індекси: «=» — для послідовного кола; «||» — для паралельного кола.

Необхідно звернути увагу на неоднозначність показаних на рис. 3.40 перетворень для параметрів  $L$  і  $C$ , пов'язану з тим, що реактивні складові комплексних опорів ( $X = \omega L_{=} - 1/\omega C_{=}$ ) і провідностей ( $B = 1/\omega L_{||} - \omega C_{||}$ ) еквівалентного кола для заданої частоти  $\omega$  утворюють одне рівняння з двома невідомими  $L$  і  $C$ . Тому один з цих параметрів —  $L$  або  $C$  — має бути заданий.

Вибираючи як належить параметр одного з реактивних елементів, цей елемент можна виключити (замкнути або розімкнути), і тоді в схемі заміщення залишиться тільки другий реактивний елемент. Варіанти таких еквівалентних замінь наведені в табл. 3.11.

Встановлення зв'язків між параметрами відповідних елементів послідовного і паралельного еквівалентних кіл має не тільки теоретичне, але і практичне значення для складання схем заміщення реальних елементів.

Прикладами практичних задач, у яких необхідно здійснити еквівалентну заміну послідовного кола паралельним або навпаки, є задачі розрахунку кіл, у яких конденсатори і котушки самоіндукції подані відповідними схемами заміщення. Так, основна схема заміщення конденсатора, яка найбільш відповідає його конструкції й основним характеристикам, показана на рис. 3.41, а. Щоб спростити розрахунки, іноді використовують еквівалентну

Таблиця 3.11

Співвідношення для розрахунку параметрів  
єдиного реактивного елемента в еквівалентних схемах

Знак реактивного опору або провідності	Вибір значення одного з реактивних елементів	Співвідношення для розрахунку єдиного реактивного елемента
$X > 0$	$C_{\parallel} \rightarrow \infty$	$L_{\parallel} = \frac{X}{\omega}$
$X < 0$	$L_{\parallel} = 0$	$C_{\parallel} = \frac{1}{ X \omega}$
$B > 0$	$C_{\parallel} = 0$	$L_{\parallel} = \frac{1}{B\omega}$
$B < 0$	$L_{\parallel} \rightarrow \infty$	$C_{\parallel} = \frac{ B }{\omega}$

послідовну схему заміщення конденсатора (рис. 3.41, б). Аналогічні схеми для котушки самоіндукції зображені на рис. 3.41, в (основна схема заміщення) і рис. 3.41, з (паралельна схема заміщення).

Загалом є два варіанти еквівалентних перетворень:

- 1) перехід від послідовного кола до паралельного (рис. 3.42, а);
- 2) перехід від паралельного кола до послідовного (рис. 3.42, б).

Переходячи від послідовного кола до паралельного, для заданих активної і реактивної складових комплексного опору послідовного кола  $R_{\parallel}$  і  $X_{\parallel}$  визначають активну і реактивну складові комплексної провідності паралельного кола  $G_{\parallel}$  і  $B_{\parallel}$ .

Оскільки кола еквівалентні, їх комплексні провідності однакові і тому

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{\parallel} = \underline{Y}_{\parallel} &= \frac{1}{R_{\parallel} + jX_{\parallel}} = \frac{R_{\parallel} - jX_{\parallel}}{(R_{\parallel} + jX_{\parallel})(R_{\parallel} - jX_{\parallel})} = \frac{R_{\parallel} - jX_{\parallel}}{R_{\parallel}^2 + X_{\parallel}^2} = \\ &= \frac{R_{\parallel}}{R_{\parallel}^2 + X_{\parallel}^2} - j \frac{X_{\parallel}}{R_{\parallel}^2 + X_{\parallel}^2} = G_{\parallel} - jB_{\parallel}, \end{aligned}$$

де  $G_{\parallel} = \frac{R_{\parallel}}{R_{\parallel}^2 + X_{\parallel}^2} = \frac{R_{\parallel}}{Z_{\parallel}^2}$ ;  $B_{\parallel} = \frac{X_{\parallel}}{R_{\parallel}^2 + X_{\parallel}^2} = \frac{X_{\parallel}}{Z_{\parallel}^2}$  — відповідно активна і реактивна провідність еквівалентної паралельної схеми.

Переходячи від паралельного кола до послідовного, для заданих активної і реактивної складових комплексної провідності паралельного кола  $G_{\parallel}$  і  $B_{\parallel}$  визначають активну і реактивну складову

комплексного опору послідовного кола  $R_{\parallel}$  і  $X_{\parallel}$ . При цьому використовується рівність комплексних опорів кіл, що перетворюються:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\parallel} = \underline{Z}_{\parallel} &= \frac{1}{G_{\parallel} - jB_{\parallel}} = \\ &= \frac{G_{\parallel} + jB_{\parallel}}{(G_{\parallel} - jB_{\parallel})(G_{\parallel} + jB_{\parallel})} = \\ &= \frac{G_{\parallel} + jB_{\parallel}}{G_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2} = \\ &= \frac{G_{\parallel}}{G_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2} + j \frac{B_{\parallel}}{G_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2} = \\ &= R_{\parallel} + jX_{\parallel}, \end{aligned}$$

де  $R_{\parallel} = \frac{G_{\parallel}}{G_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2} = \frac{G_{\parallel}}{Y_{\parallel}^2}$ ;

$X_{\parallel} = \frac{B_{\parallel}}{G_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2} = \frac{B_{\parallel}}{Y_{\parallel}^2}$  — від-

повідно активний і реактивний опір еквівалентної послідовної схеми.

З отриманих співвідношень виходить:

1) розрахунок параметрів  $L$  і  $C$  еквівалентних схем дає неоднозначний результат, на що вказано вище в даному підрозділі;

2) параметри активних опорів (або провідностей) еквівалентних схем залежать від параметрів не тільки активних провідностей (або опорів), але і реактивних елементів вихідних схем;

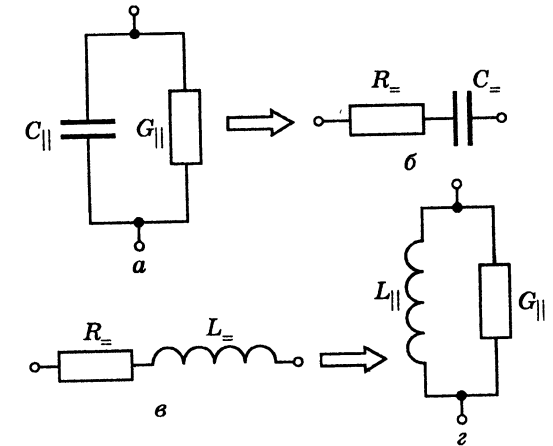


Рис. 3.41. Основні схеми заміщення:  
а — конденсатора;  
б — котушки самоіндукції;  
б, з — еквівалентні перетворення цих схем

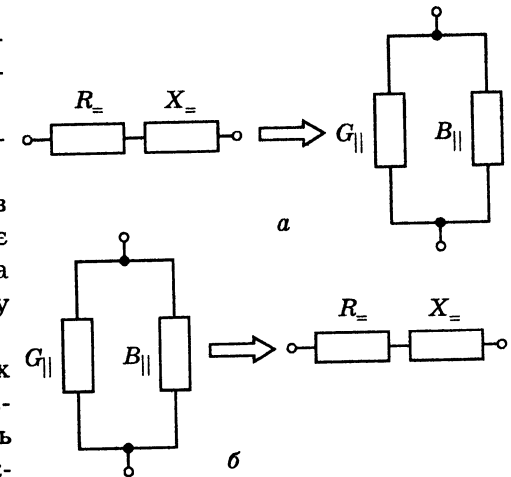
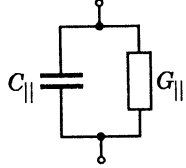



Рис. 3.42. Задачі еквівалентних перетворень послідовних і паралельних схем

Співвідношення для розрахунку параметрів елементів еквівалентних схем конденсатора і котушки самоіндукції

Реальний елемент і його основна схема заміщення	Параметри еквівалентних активних опорів і провідностей	Параметри еквівалентних реактивних елементів
Конденсатор 	$R_{=} = \frac{G_{  }}{G_{  }^2 + (\omega C_{  })^2}$	$C_{=} = \frac{G_{  }^2 + (\omega C_{  })^2}{\omega^2 C_{  }}$
Котушка самоіндукції 	$G_{  } = \frac{R_{=}}{R_{=}^2 + (\omega L_{=})^2}$	$L_{  } = \frac{R_{=}^2 + (\omega L_{=})^2}{\omega^2 L_{=}}$

Отже, ємності в паралельній і послідовній схемах заміщення для даного режиму роботи конденсатора приблизно однакові, а опори — обернено пропорційні один одному.

Найпоширенішому режиму роботи котушок самоіндукції в радіотехніці відповідає умова

$$\omega L_{=} \gg R_{=} \quad (3.69)$$

При цьому параметри паралельної схеми заміщення котушок самоіндукції (див. табл. 3.13) становитимуть:

$$G_{||} \cong \frac{R_{=}}{(\omega L_{=})^2}; R_{||} \cong \frac{(\omega L_{=})^2}{R_{=}} \gg R_{=}; L_{||} \cong \frac{(\omega L_{=})^2}{\omega^2 L_{=}} = L_{=}.$$

Особливості співвідношень між параметрами паралельної і послідовної схем заміщення котушки самоіндукції для розглянутого режиму роботи аналогічні отриманим вище для конденсатора.

**Приклад 3.10.** Розрахувати параметри елементів послідовної схеми заміщення конденсатора (рис. 3.41, б) для трьох значень частоти:  $\omega_1 = 0$  (режим постійного струму);  $\omega_2 = 10^3$  рад/с;  $\omega_3 = 10^6$  рад/с. Параметри елементів паралельної схеми заміщення конденсатора (рис. 3.41, а) становлять:  $G_{||} = 10^{-5}$  См,  $C_{||} = 10$  нФ.

3) параметри реактивних елементів еквівалентних схем визначаються параметрами не тільки реактивних елементів, але і активних опорів (або провідностей) вихідних схем;

4) параметри активних опорів (або провідностей) і реактивних елементів еквівалентних схем є функціями частоти;

5) параметри відповідних елементів еквівалентних послідовного і паралельного кіл не дорівнюють один одному, тобто

$$R_{=} \neq R_{||}; L_{=} \neq L_{||}; C_{=} \neq C_{||}.$$

Здобуті розрахункові співвідношення зведені до табл. 3.12.

З отриманих загальних виразів для еквівалентних перетворень виходять наведені в табл. 3.13 розрахункові співвідношення для параметрів елементів еквівалентних схем конденсатора і котушки самоіндукції (рис. 3.41).

Таблиця 3.12

Розрахункові співвідношення для еквівалентних перетворень послідовного і паралельного кіл

Складові $Z$ або $Y$	Перехід від послідовного кола до паралельного	Перехід від паралельного кола до послідовного
Активні	$G_{  } = \frac{R_{=}}{R_{=}^2 + X_{=}^2} = \frac{R_{=}}{Z_{=}^2}$	$R_{=} = \frac{G_{  }}{G_{  }^2 + B_{  }^2} = \frac{G_{  }}{Y_{  }^2}$
Реактивні	$B_{  } = \frac{X_{=}}{R_{=}^2 + X_{=}^2} = \frac{X_{=}}{Z_{=}^2}$	$X_{=} = \frac{B_{  }}{G_{  }^2 + B_{  }^2} = \frac{B_{  }}{Y_{  }^2}$

Конденсатори зазвичай працюють у режимі, коли в основній паралельній схемі заміщення опір витікання  $R_{||}$  значно більший реактивного опору  $1/\omega C_{||}$ , тобто  $R_{||} \gg 1/\omega C_{||}$  або  $R_{||}\omega C_{||} \gg 1$ . Ці нерівності можна записати для провідностей у вигляді:

$$G_{||} \ll \omega C_{||} \quad (3.68)$$

З урахуванням співвідношення (3.68) параметри послідовної схеми заміщення конденсатора (див. табл. 3.13) становитимуть:

$$R_{=} \cong \frac{G_{||}}{(\omega C_{||})^2} = \frac{1}{R_{||}(\omega C_{||})^2} = \frac{R_{||}}{(R_{||}\omega C_{||})^2} \ll R_{||}; C_{=} \cong \frac{(\omega C_{||})^2}{\omega^2 C_{||}} = C_{||}.$$

**Розв'язання.** Щоб визначити параметри елементів послідовної схеми заміщення конденсатора, підставимо у відповідні формули з табл. 3.13 задані параметри елементів паралельної схеми заміщення:

$$R_{\pm} = \frac{G_{\parallel}}{G_{\parallel}^2 + (\omega C_{\parallel})^2} = \frac{10^{-5}}{10^{-10} + (\omega \cdot 10^{-8})^2}; \quad C_{\pm} = \frac{G_{\parallel}^2 + (\omega C_{\parallel})^2}{\omega^2 C_{\parallel}} = \frac{10^{-10} + (\omega \cdot 10^{-8})^2}{\omega^2 \cdot 10^{-8}}$$

Розрахуємо параметри елементів для заданих частот:

1)  $\omega_1 = 0$  (режим постійного струму):

$$R_{\pm} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{10^{-5}}{10^{-10} + (\omega \cdot 10^{-8})^2} = 10^5 \text{ Ом} = 100 \text{ кОм} = R_{\parallel};$$

$$C_{\pm} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{10^{-10} + (\omega \cdot 10^{-8})^2}{\omega^2 \cdot 10^{-8}} \rightarrow \infty;$$

2)  $\omega_2 = 10^3$  рад/с:

$$R_{\pm} = \frac{10^{-5}}{10^{-10} + (\omega_2 \cdot 10^{-8})^2} = \frac{10^{-5}}{10^{-10} + (10^3 \cdot 10^{-8})^2} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Ом} = 50 \text{ кОм};$$

$$C_{\pm} = \frac{10^{-10} + (\omega_2 \cdot 10^{-8})^2}{\omega_2^2 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^{-10} + (10^3 \cdot 10^{-8})^2}{10^6 \cdot 10^{-8}} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Ф} = 20 \text{ нФ};$$

3)  $\omega_3 = 10^6$  рад/с:

$$R_{\pm} = \frac{10^{-5}}{10^{-10} + (\omega_3 \cdot 10^{-8})^2} = \frac{10^{-5}}{10^{-10} + (10^6 \cdot 10^{-8})^2} \cong 0,1 \text{ Ом};$$

$$C_{\pm} = \frac{10^{-10} + (\omega_3 \cdot 10^{-8})^2}{\omega_3^2 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^{-10} + (10^6 \cdot 10^{-8})^2}{10^{12} \cdot 10^{-8}} \cong 10^{-8} \text{ Ф} = 10 \text{ нФ} = C_{\parallel}.$$

Розрахунки показують, що значення параметрів елементів при  $\omega_2 = 10^3$  рад/с відповідають загальному випадку, коли  $R_{\pm} \neq R_{\parallel}$ ;  $C_{\pm} \neq C_{\parallel}$ .

У режимі постійного струму ( $\omega_1 = 0$ ) опори послідовної та паралельної схем заміщення збігаються, а ємність у послідовній схемі заміщення прямує до нескінченності, що відповідає короткому замиканню ємності. Отже, в цьому режимі забезпечується еквівалентність послідовної та паралельної схем заміщення.

При  $\omega_3 = 10^6$  рад/с виконується нерівність (3.68) і між параметрами схем заміщення існують співвідношення:

$$R_{\pm} \ll R_{\parallel}; \quad C_{\pm} \cong C_{\parallel}.$$

**Приклад 3.11.** Визначити параметри елементів паралельної схеми заміщення індуктивної котушки (рис. 3.41, з) для трьох частот:  $\omega_1 = 0$  (режим постійного струму);  $\omega_2 = 10^3$  рад/с;  $\omega_3 = 10^6$  рад/с. Параметри елементів послідовної схеми заміщення індуктивної котушки (рис. 3.41, в):  $R_{\pm} = 1$  Ом;  $L_{\pm} = 1$  мГн.

**Розв'язання.** Підставляючи у відповідні формули з табл. 3.13 задані параметри послідовної схеми заміщення індуктивної котушки, отримуємо:

$$G_{\parallel} = \frac{R_{\pm}}{R_{\pm}^2 + (\omega L_{\pm})^2} = \frac{1}{1 + (\omega \cdot 10^{-3})^2}; \quad R_{\parallel} = 1 + (\omega \cdot 10^{-3})^2;$$

$$L_{\parallel} = \frac{R_{\pm}^2 + (\omega L_{\pm})^2}{\omega^2 L_{\pm}} = \frac{1 + (\omega \cdot 10^{-3})^2}{\omega^2 \cdot 10^{-3}}.$$

Виконаємо розрахунки для заданих частот:

1)  $\omega_1 = 0$  (режим постійного струму):

$$R_{\parallel} = \lim_{\omega \rightarrow 0} [1 + (\omega \cdot 10^{-3})^2] = 1 \text{ Ом} = R_{\pm}; \quad L_{\parallel} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1 + (\omega \cdot 10^{-3})^2}{\omega^2 \cdot 10^{-3}} \rightarrow \infty;$$

2)  $\omega_2 = 10^3$  рад/с:

$$R_{\parallel} = 1 + (10^3 \cdot 10^{-3})^2 = 2 \text{ Ом}; \quad L_{\parallel} = \frac{1 + (10^3 \cdot 10^{-3})^2}{10^6 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 2 \text{ мГн};$$

3)  $\omega_3 = 10^6$  рад/с:

$$R_{\parallel} = 1 + (10^6 \cdot 10^{-3})^2 \cong 10^6 \text{ Ом} = 1 \text{ МОм};$$

$$L_{\parallel} = \frac{1 + (10^6 \cdot 10^{-3})^2}{10^{12} \cdot 10^{-3}} \approx 10^{-3} \text{ Гн} = 1 \text{ мГн} = L_{\pm}.$$

Частоті  $\omega_2 = 10^3$  рад/с відповідає загальний випадок ( $R_{\pm} \neq R_{\parallel}$ ;  $L_{\pm} \neq L_{\parallel}$ ). У режимі постійного струму ( $\omega_1 = 0$ ) еквівалентність послідовної та паралельної схем заміщення забезпечується тим, що активні опори схем заміщення збігаються, а індуктивність у паралельній схемі заміщення прямує до нескінченності, що відповідає її розмиканню.

При  $\omega_3 = 10^6$  рад/с виконується нерівність (3.69) і стосовно параметрів схем заміщення слушні співвідношення:

$$R_{\parallel} \gg R_{\pm}; \quad L_{\parallel} \cong L_{\pm}.$$

### 3.9. Закони Кірхгофа в комплексній формі

Закон Ома в комплексній формі застосовується тільки для розрахунку пасивних ділянок кіл синусоїдного струму. Щоб розраховувати розгалужені кола синусоїдного струму з джерелами, застосовують закони Кірхгофа в комплексній формі.

### Перший закон Кірхгофа в комплексній формі

У колі синусоїдного струму для будь-якого вузла, до якого увімкнено  $M$  віток, рівняння згідно з першим законом Кірхгофа для миттєвих значень струмів може бути записане у вигляді алгебраїчної суми<sup>10</sup>:

$$\sum_{k=1}^M I_{mk} \cos(\omega t + \psi_{ik}) = 0. \quad (3.70)$$

Після підстановки миттєвого значення  $k$ -го струму, вираженого за допомогою комплексної амплітуди

$$I_{mk} \cos(\omega t + \psi_{ik}) = \operatorname{Re}[I_{mk} e^{j(\omega t + \psi_{ik})}] = \operatorname{Re}[\underline{I}_{mk} e^{j\omega t}],$$

ліва частина рівняння (3.70) набуде вигляду суми проєкцій векторів, що обертаються з однаковою кутовою частотою  $\omega$ :

$$\sum_{k=1}^M \operatorname{Re}[\underline{I}_{mk} e^{j\omega t}] = 0. \quad (3.71)$$

Використовуючи властивість комутативності векторів (сума проєкцій векторів дорівнює проєкції суми цих векторів), рівняння (3.71) можна перетворити так:

$$\operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^M \underline{I}_{mk} e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^M \underline{I}_{mk} \right] e^{j\omega t} \right\} = 0. \quad (3.72)$$

Співвідношення (3.72) показує: в будь-який момент часу проєкція вектора, що обертається з кутовою частотою  $\omega$

$$\left[ \sum_{k=1}^M \underline{I}_{mk} \right] e^{j\omega t},$$

дорівнює нулю. Це можливо тільки у випадку, якщо цей вектор дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^M \underline{I}_{mk} = 0. \quad (3.73)$$

Співвідношення (3.73) є математичним записом першого закону Кірхгофа в комплексній формі.

<sup>10</sup> Усі записані в цьому підрозділі суми є алгебраїчними; знаки доданків вибираються згідно з правилами, які застосовують, складаючи рівняння за законами Кірхгофа.

Розділивши ліву і праву частини рівняння (3.73) на  $\sqrt{2}$ , отримаємо запис першого закону Кірхгофа в комплексній формі для комплексних діючих значень синусоїдних струмів:

$$\sum_{k=1}^M \underline{I}_k = 0. \quad (3.74)$$

**Формулювання першого закону Кірхгофа в комплексній формі:**  
у вузлі кола синусоїдного струму алгебраїчна сума комплексних амплітуд синусоїдних струмів віток дорівнює нулю;

у вузлі кола синусоїдного струму алгебраїчна сума комплексних діючих значень синусоїдних струмів віток дорівнює нулю.

### Другий закон Кірхгофа в комплексній формі

Рівняння, складене згідно з другим законом Кірхгофа для миттєвих значень усіх  $K$  напруг у контурі та  $N$  ЕРС кола синусоїдного струму, має вигляд:

$$\sum_{k=1}^K U_{mk} \cos(\omega t + \psi_{uk}) = \sum_{n=1}^N E_{mn} \cos(\omega t + \psi_{en}). \quad (3.75)$$

Якщо у рівняння (3.75) підставити миттєві значення напруг і ЕРС, виражені через комплексні амплітуди

$$U_{mk} \cos(\omega t + \psi_{uk}) = \operatorname{Re}[U_{mk} e^{j(\omega t + \psi_{uk})}] = \operatorname{Re}[\underline{U}_{mk} e^{j\omega t}];$$

$$E_{mn} \cos(\omega t + \psi_{en}) = \operatorname{Re}[E_{mn} e^{j(\omega t + \psi_{en})}] = \operatorname{Re}[\underline{E}_{mn} e^{j\omega t}],$$

рівняння матиме вигляд:

$$\sum_{k=1}^K \operatorname{Re}[\underline{U}_{mk} e^{j\omega t}] = \sum_{n=1}^N \operatorname{Re}[\underline{E}_{mn} e^{j\omega t}]. \quad (3.76)$$

Перетворюючи рівняння (3.76) подібно тому, як це було зроблено вище при виведенні першого закону Кірхгофа в комплексній формі, можна записати:

$$\operatorname{Re} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^K \underline{U}_{mk} \right] e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \sum_{n=1}^N \underline{E}_{mn} \right] e^{j\omega t} \right\},$$

звідки виходить співвідношення для другого закону Кірхгофа в комплексній формі:

$$\sum_{k=1}^K \underline{U}_{mk} = \sum_{n=1}^N \underline{E}_{mn}. \quad (3.77)$$

Відповідне рівняння для комплексних діючих значень синусоїдних напруг і ЕРС у контурі має вигляд:

$$\sum_{k=1}^K \underline{U}_k = \sum_{n=1}^N \underline{E}_n. \quad (3.78)$$

Якщо кожному з напруг у лівій частині рівнянь (3.77) і (3.78) подати згідно із законом Ома в комплексній формі, другий закон Кірхгофа в комплексній формі можна записати у вигляді рівнянь:

$$\sum_{k=1}^K \underline{Z}_k \underline{I}_{mk} = \sum_{n=1}^N \underline{E}_{mn}; \quad (3.79)$$

$$\sum_{k=1}^K \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum_{n=1}^N \underline{E}_n. \quad (3.80)$$

**Формулювання другого закону Кірхгофа в комплексній формі:**  
у контурі кола синусоїдного струму алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг дорівнює алгебраїчній сумі комплексних амплітуд ЕРС;

у контурі кола синусоїдного струму алгебраїчна сума комплексних діючих значень напруг дорівнює алгебраїчній сумі комплексних діючих значень ЕРС.

### 3.10. Комплексний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

Комплексний метод розрахунку кіл синусоїдного струму виходить із законів Ома і Кірхгофа в комплексній формі. В літературі зустрічається також стара назва методу — символічний.

Комплексний метод, або метод комплексних амплітуд, уперше застосований для розрахунку кіл синусоїдного струму в кінці XIX ст. американськими інженерами Штейнметцем<sup>11</sup> і Кеннелі<sup>12</sup>.

<sup>11</sup> Штейнметц Чарлз Протеус, Steinmetz (1865–1923) — американський електротехнік. Як головний електрик концерну «Дженерал електрик компанії» проектував більшість електричних машин і апаратів, які виробляв цей концерн. Дослідницькі роботи присвячені втратам на вихреві струми, світлотехніці, електричним розрядам, інженерній математиці (метод комплексних амплітуд).

<sup>12</sup> Кеннелі Артур Едвін, Kennely (1871–1945) — американський електротехнік. Учень Едісона. Викладав курс електротехніки в Гарвардському університеті. Керував науковими дослідженнями у галузі електротехніки в Массачусетському технологічному інституті. Одночасно з Хевісайдом запропонував гіпотезу про відбиття радіохвиль від шарів атмосфери (іоносфери), які проводять електрику.

Принципи складання і форми запису рівнянь за законами Ома і Кірхгофа в комплексній формі для кіл синусоїдного струму і кіл постійного струму (див. розд. 2) відрізняються тільки тим, що в першому випадку в рівняннях записуються комплексні, а у другому — дійсні числа. Це дозволяє зробити висновок про те, що методи розрахунку для кіл постійного струму можна розповсюдити на кола синусоїдного струму, застосувавши комплексне подання струмів, напруг, ЕРС, опорів, провідностей. Комплексний метод розрахунку кіл синусоїдного струму загалом складається з таких етапів:

- а) постановка задачі в комплексному вигляді, яка включає:
  - перехід від миттєвих значень ЕРС (задаючих струмів) джерел напруги (струму) до їх комплексних амплітуд (комплексних діючих значень);
  - розрахунок комплексних опорів (комплексних провідностей) пасивних елементів кола;
  - складання еквівалентної комплексної схеми кола;
  - вибір в еквівалентній комплексній схемі кола умовних позитивних напрямів комплексних струмів і напруг;
- б) розрахунок комплексних амплітуд (комплексних діючих значень) шуканих струмів і напруг одним з методів:
  - еквівалентних перетворень;
  - рівнянь Кірхгофа;
  - контурних струмів;
  - вузлових напруг;
  - накладання;
  - еквівалентного генератора;
- в) перехід від знайдених комплексних амплітуд (комплексних діючих значень) шуканих струмів і напруг до їх миттєвих значень;
- г) побудова за результатами розрахунків графічних ілюстрацій (часових і векторних діаграм);
- д) аналіз енергетичних співвідношень у колі.

У конкретних задачах окремі етапи можуть бути відсутніми. Так, у деяких задачах вихідні параметри задаються в комплексному вигляді і потрібно тільки визначити невідомі струми і напруги — також у комплексному вигляді. Іноді обмежується кількістю необхідних графічних ілюстрацій, хоча в окремих задачах, навпаки, побудова часових і особливо векторних діаграм має самостійне значення. Якщо енергетичні співвідношення не є визначальними

для розв'язання задачі, енергетичні розрахунки не виконуються. Методика побудови векторних діаграм і особливості аналізу енергетичних співвідношень в колах синусоїдного струму розглядаються у підрозд. 3.11 і 3.12.

Розв'язання задач комплексним методом ілюструється наступними прикладами.

**Приклад 3.12.** Визначити методом рівнянь Кірхгофа у загальному вигляді струми в лінійному колі, схема якого показана на рис. 3.43. Задано параметри пасивних елементів кола і миттєві значення ЕРС джерел:

$$e_1(t) = E_{m1} \cos(\omega t + \psi_{e1});$$

$$e_2(t) = E_{m2} \cos(\omega t + \psi_{e2});$$

$$e_3(t) = E_{m3} \cos(\omega t + \psi_{e3}).$$

*Розв'язання.* Виберемо довільно умовні позитивні напрями струмів у схемі (рис. 3.43) і запишемо в загальному вигляді комплексні опори і комплексні амплітуди ЕРС джерел даного кола:

$$\underline{Z}_1 = R_1; \underline{Z}_2 = j\omega L_2; \underline{Z}_3 = -j\frac{1}{\omega C_3}; \underline{Z}_4 = R_4 + j\omega L_4;$$

$$\underline{Z}_5 = j\left(\omega L_5 - \frac{1}{\omega C_5}\right); \underline{Z}_6 = R_6 + j\left(\omega L_6 - \frac{1}{\omega C_6}\right);$$

$$\underline{E}_{m1} = E_{m1}e^{j\varphi_{e1}}; \underline{E}_{m2} = E_{m2}e^{j\varphi_{e2}}; \underline{E}_{m3} = E_{m3}e^{j\varphi_{e3}}.$$

Складемо еквівалентну комплексну схему кола (рис. 3.44).

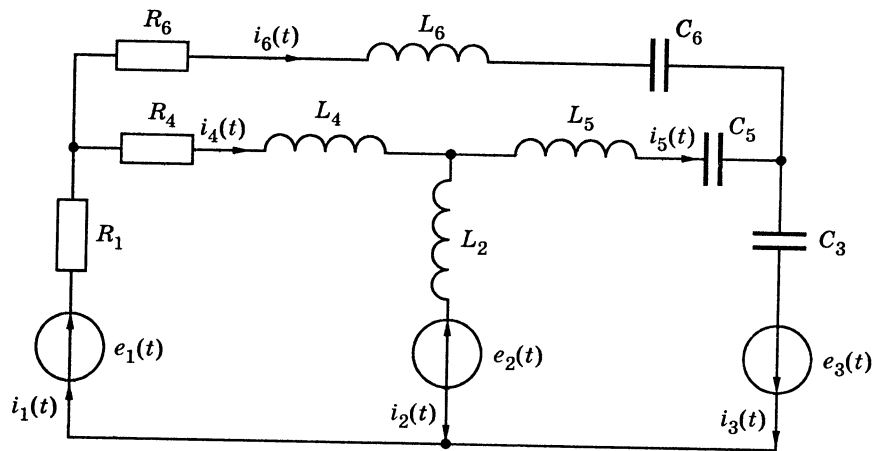


Рис. 3.43. Схема кола до прикладу 3.12

Пронумеруємо вузли, виберемо три незалежних контури і напрями обходу в них, після чого складемо необхідну і достатню кількість незалежних рівнянь:

1) згідно з першим законом Кірхгофа:

$$\text{для вузла 1 } \underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m4} - \underline{I}_{m6} = 0;$$

$$\text{для вузла 2 } \underline{I}_{m4} - \underline{I}_{m2} - \underline{I}_{m5} = 0;$$

$$\text{для вузла 3 } \underline{I}_{m6} + \underline{I}_{m5} - \underline{I}_{m3} = 0;$$

2) згідно з другим законом Кірхгофа:

$$\text{для контуру I } \underline{Z}_1 \underline{I}_{m1} + \underline{Z}_2 \underline{I}_{m2} + \underline{Z}_4 \underline{I}_{m4} = \underline{E}_{m1} - \underline{E}_{m2};$$

$$\text{для контуру II } \underline{Z}_5 \underline{I}_{m5} + \underline{Z}_3 \underline{I}_{m3} - \underline{Z}_2 \underline{I}_{m2} = \underline{E}_{m2} + \underline{E}_{m3};$$

$$\text{для контуру III } \underline{Z}_6 \underline{I}_{m6} - \underline{Z}_5 \underline{I}_{m5} - \underline{Z}_4 \underline{I}_{m4} = 0.$$

Щоб визначити струми в загальному вигляді, скористаємось матричною формою запису системи рівнянь і матричним методом розв'язання системи:

$$(\underline{Z}) \cdot (\underline{I}_m) = (\underline{E}_m);$$

$$(\underline{I}_m) = (\underline{Z})^{-1} \cdot (\underline{E}_m),$$

де  $(\underline{Z})$  — матриця узагальнених комплексних опорів;  $(\underline{Z})^{-1}$  — обернена матриця узагальнених комплексних опорів;  $(\underline{I}_m)$  — матриця-стовпець невідомих комплексних струмів;  $(\underline{E}_m)$  — матриця-стовпець узагальнених комплексних ЕРС.

Суть узагальнених комплексних опорів і узагальнених комплексних ЕРС аналогічна відповідним поняттям, введеним у підрозд. 2.3 при розгляді методу рівнянь Кірхгофа для кіл постійного струму.

У даному прикладі вказані матриці мають вигляд:

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \underline{Z}_1 & \underline{Z}_2 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_6 \end{pmatrix}; (\underline{I}_m) = \begin{pmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \\ \underline{I}_{m3} \\ \underline{I}_{m4} \\ \underline{I}_{m5} \\ \underline{I}_{m6} \end{pmatrix}; (\underline{E}_m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{E}_{m1} - \underline{E}_{m2} \\ \underline{E}_{m2} + \underline{E}_{m3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

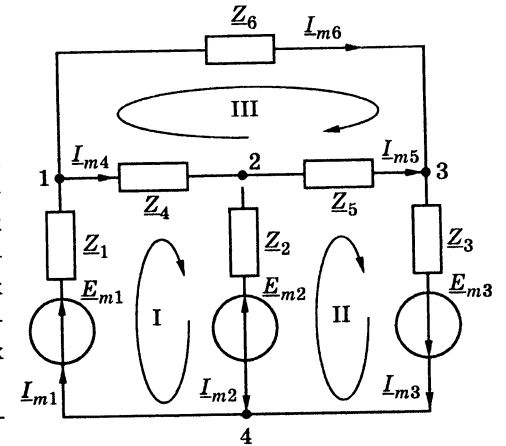


Рис. 3.44. Еквівалентна комплексна схема кола до прикладу 3.12



За знайденими комплексними амплітудами струмів визначимо їх миттєві значення, наприклад:

$$i_1(t) = \text{Re}[I_{m1} e^{j\omega t}] = \text{Re}[I_{m1} e^{j\psi_1} e^{j\omega t}] = I_{m1} \cos(\omega t + \psi_1).$$

**Приклад 3.13.** Методом контурних струмів визначити в загальному вигляді струми в колі, схема і параметри якого відповідають прикладу 3.12.

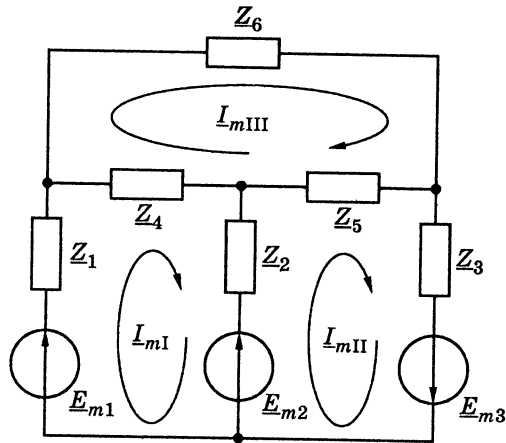


Рис. 3.45. До прикладу 3.13

**Розв'язання.** Виберемо три незалежних контури і напрями комплексних контурних струмів (рис. 3.45).

Запишемо вирази для елементів, які входять до визначників згідно з методом контурних струмів:

1) власні комплексні опори контурів

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_4;$$

$$Z_{22} = Z_2 + Z_3 + Z_5;$$

$$Z_{33} = Z_4 + Z_5 + Z_6;$$

2) взаємні комплексні опори контурів

$$Z_{12} = Z_{21} = -Z_2; \quad Z_{13} = Z_{31} = -Z_4; \quad Z_{23} = Z_{32} = -Z_5;$$

3) комплексні амплітуди контурних ЕРС

$$E_{mI} = E_{m1} - E_{m2}; \quad E_{mII} = E_{m2} + E_{m3}; \quad E_{mIII} = 0.$$

Використовуючи визначники, запишемо в загальному вигляді вирази для обчислення комплексних амплітуд контурних струмів:

$$I_{mI} = \frac{\begin{vmatrix} E_{mI} & Z_{12} & Z_{13} \\ E_{mII} & Z_{22} & Z_{23} \\ E_{mIII} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}, \quad I_{mII} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & E_{mI} & Z_{13} \\ Z_{21} & E_{mII} & Z_{23} \\ Z_{31} & E_{mIII} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}, \quad I_{mIII} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & E_{mI} \\ Z_{21} & Z_{22} & E_{mII} \\ Z_{31} & Z_{32} & E_{mIII} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}.$$

Виразимо комплексні амплітуди струмів у вітках через знайдені комплексні амплітуди контурних струмів:

$$I_{m1} = I_{mI}; \quad I_{m2} = I_{mI} - I_{mII}; \quad I_{m3} = I_{mIII};$$

$$I_{m4} = I_{mI} - I_{mIII}; \quad I_{m5} = I_{mII} - I_{mIII}; \quad I_{m6} = I_{mIII}.$$

Перехід від знайдених комплексних амплітуд струмів у вітках до миттєвих значень виконаємо аналогічно прикладу 3.12.

**Приклад 3.14.** Методом вузлових напруг визначити в загальному вигляді струми в колі, схема і параметри якого наведені в прикладі 3.12.

**Розв'язання.** Як варіант розв'язання задач комплексним методом, скористаємось у даному прикладі комплексними діючими значеннями. Перетворимо джерела напруги в еквівалентні джерела струму. Тоді комплексні діючі значення задаючих струмів джерел становитимуть:

$$I_{дж1} = \frac{E_{m1}}{\sqrt{2}Z_1}; \quad I_{дж2} = \frac{E_{m2}}{\sqrt{2}Z_2}; \quad I_{дж3} = \frac{E_{m3}}{\sqrt{2}Z_3}.$$

Складемо еквівалентну комплексну схему кола (рис. 3.46), в якій виберемо базисний вузол і спрямовані до нього комплексні діючі значення вузлових напруг.

Знайдемо необхідні компоненти для складання визначників за методом вузлових напруг:

1) власна комплексна провідність вузлів

$$Y_{11} = Y_1 + Y_4 + Y_6; \quad Y_{22} = Y_2 + Y_4 + Y_5;$$

$$Y_{33} = Y_3 + Y_5 + Y_6;$$

2) взаємна комплексна провідність вузлів

$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_4; \quad Y_{13} = Y_{31} = -Y_6; \quad Y_{23} = Y_{32} = -Y_5;$$

3) комплексні діючі значення вузлових струмів джерел

$$I_{вз1} = I_{дж1}; \quad I_{вз2} = I_{дж2}; \quad I_{вз3} = -I_{дж3}.$$

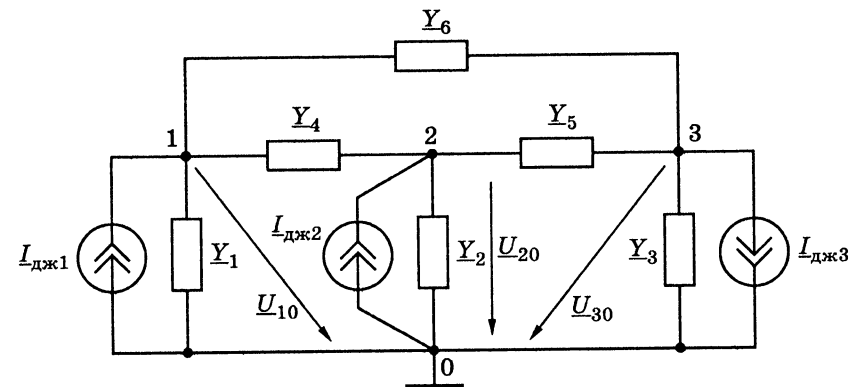


Рис. 3.46. Комплексна схема кола

Складемо в загальному вигляді вирази для обчислення комплексних діючих значень вузлових напруг:

$$\underline{U}_{10} = \begin{vmatrix} \underline{I}_{вз1} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{I}_{вз2} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{I}_{вз3} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{vmatrix}; \underline{U}_{20} = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{I}_{вз1} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{I}_{вз2} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{I}_{вз3} & \underline{Y}_{33} \end{vmatrix}; \underline{U}_{30} = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{I}_{вз1} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{I}_{вз2} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{I}_{вз3} \end{vmatrix}.$$

За допомогою знайдених комплексних діючих значень вузлових напруг визначимо комплексні діючі значення струмів у вітках схеми:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_{10}; \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_{20}; \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{U}_{30};$$

$$\underline{I}_4 = \underline{Y}_4 (\underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}); \underline{I}_5 = \underline{Y}_5 (\underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}); \underline{I}_6 = \underline{Y}_6 (\underline{U}_{10} - \underline{U}_{30}).$$

Миттєві значення струмів у вітках запишемо, враховуючи зв'язок комплексних амплітудних і комплексних діючих значень, наприклад:

$$i_1(t) = \text{Re}[\sqrt{2} \underline{I}_1 e^{j\omega t}] = \text{Re}[\sqrt{2} \underline{I}_1 e^{j\psi_1} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} \underline{I}_1 \cos(\omega t + \psi_1).$$

**Приклад 3.15.** Методом контурних струмів визначити струми у колі, схему якого зображено на рис. 3.47, а. Параметри джерел і пасивних елементів кола становлять:

$$e_1(t) = 10 \cos\left(10^6 t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ В}; e_2(t) = 10 \cos\left(10^6 t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ В};$$

$$L = 2 \text{ мГн}; C = 1 \text{ нФ}; R = 2 \text{ кОм}.$$

**Розв'язання.** Складемо еквівалентну комплексну схему (рис. 3.47, б) і розрахуємо параметри цієї схеми:

$$\underline{E}_{m1} = 10 e^{j3\pi/4} \text{ В}; \underline{E}_{m2} = 10 e^{-j\pi/4} \text{ В};$$

$$\underline{Z}_1 = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-9}} = -j10^3 \text{ Ом} = -j1 \text{ кОм};$$

$$\underline{Z}_2 = R = 2 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 2 \text{ кОм}; \underline{Z}_3 = j\omega L = j10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} = j2 \text{ кОм}.$$

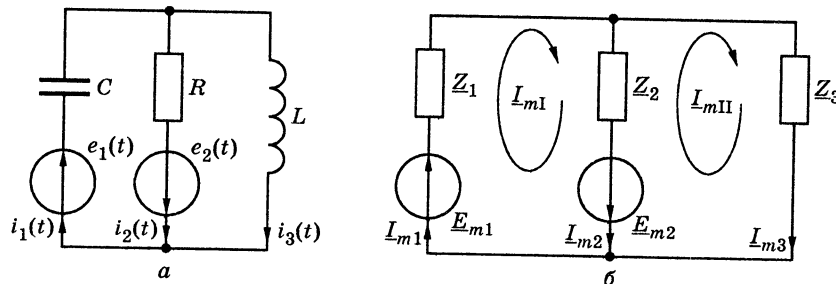


Рис. 3.47. До прикладу 3.15

Для вибраних напрямів контурних струмів (рис. 3.47, б) розрахуємо власні та взаємні комплексні опори, а також комплексні амплітуди контурних ЕРС:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 10^3(2 - j1) \text{ Ом} = 2 - j1 \text{ кОм};$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 10^3(2 + j2) \text{ Ом} = 2 + j2 \text{ кОм};$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_2 = -2 \cdot 10^3 \text{ Ом} = -2 \text{ кОм};$$

$$\underline{E}_{m1} = \underline{E}_{m1} + \underline{E}_{m2} = 10 e^{j3\pi/4} + 10 e^{-j\pi/4} \approx -7,07 + j7,07 + 7,07 - j7,07 = 0;$$

$$\underline{E}_{mII} = -\underline{E}_{m2} = -10 e^{-j\pi/4} \approx -7,07 + j7,07 \text{ В}.$$

Використовуючи стандартні формули для двоконтурної схеми, визначимо комплексні амплітуди контурних струмів:

$$\underline{I}_{mI} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{E}_{mI} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{E}_{mII} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}} \approx \frac{10^3 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ (-7,07 + j7,07) & (2 + j2) \end{vmatrix}}{10^6 \begin{vmatrix} (2 - j1) & -2 \\ -2 & (2 + j2) \end{vmatrix}} =$$

$$= 10^{-3} \left( \frac{-14,1 + j14,1}{2 + j2} \right) = j7,07 \cdot 10^{-3} \text{ А} = j7,07 \text{ мА};$$

$$\underline{I}_{mII} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{E}_{mI} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{E}_{mII} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}} \approx \frac{10^3 \begin{vmatrix} (2 - j1) & 0 \\ -2 & (-7,07 + j7,07) \end{vmatrix}}{10^6 \begin{vmatrix} (2 - j1) & -2 \\ -2 & (2 + j2) \end{vmatrix}} =$$

$$= 10^{-3} \left( \frac{-7,07 + j21,21}{2 + j2} \right) = (3,535 + j7,07) \cdot 10^{-3} \text{ А} = 3,535 + j7,07 \text{ мА}.$$

За допомогою знайдених комплексних амплітуд контурних струмів обчислимо комплексні амплітуди струмів у вітках:

$$\underline{I}_{m1} = \underline{I}_{mI} \approx 7,07 e^{j\pi/2} \text{ мА}; \underline{I}_{m3} = \underline{I}_{mII} \approx 3,535 + j7,07 = 7,905 e^{j1,107} \text{ мА};$$

$$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{mI} - \underline{I}_{mII} \approx j7,07 - 3,535 - j7,07 = -3,535 = 3,535 e^{j\pi} \text{ мА}.$$

Перейдемо від комплексних амплітуд до миттєвих значень струмів:

$$i_1(t) \approx 7,07 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ мА};$$

$$i_2(t) \approx 3,535 \cos(10^6 t + \pi) \text{ мА};$$

$$i_3(t) \approx 7,905 \cos(10^6 t + 1,107) \text{ мА}.$$

**Приклад 3.16.** Методом накладання розрахувати струм  $I_{m2}$  у колі, схемі і параметри якого наведено в прикладі 3.15.

*Розв'язання.* Комплексну амплітуду шуканого струму визначимо у вигляді алгебраїчної суми струмів в опорі  $Z_2$  для двох окремих схем (рис. 3.48), у кожній з яких залишимо тільки по одному джерелу.

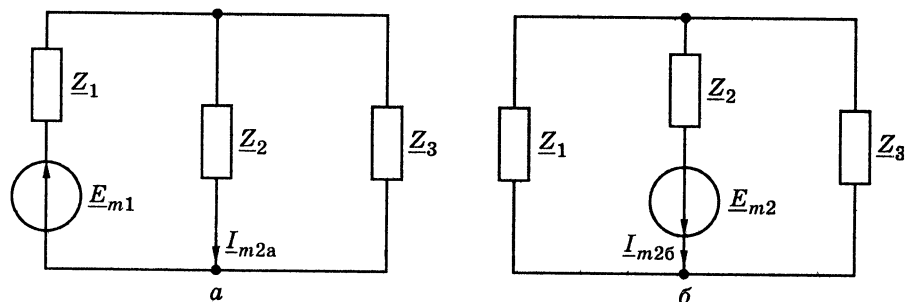


Рис. 3.48. До прикладу 3.16

Розрахуємо струми в опорі  $Z_2$  окремих схем:

1) струм у схемі рис. 3.48, а

$$I_{m2a} = \frac{\underline{E}_{m1} Z_3}{\left( Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) (Z_2 + Z_3)} = \frac{10e^{j3\pi/4} \cdot j2 \cdot 10^3}{\left( -j1 + \frac{2 \cdot j2}{2 + j2} \right) (2 + j2) \cdot 10^6} = 7,07 \cdot 10^{-3} e^{j\pi} \text{ А} = 7,07 e^{j\pi} \text{ мА} = -7,07 \text{ мА};$$

2) струм у схемі рис. 3.48, б

$$I_{m2б} = \frac{\underline{E}_{m2}}{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} = \frac{10e^{-j\pi/4}}{\left( 2 + \frac{-j1 \cdot j2}{-j1 + j2} \right) \cdot 10^3} = \frac{10e^{-j\pi/4}}{(2 - j2) \cdot 10^3} = 3,535 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 3,535 \text{ мА}.$$

Визначимо комплексну амплітуду шуканого струму, враховуючи напрямки часткових струмів:

$$I_{m2} = I_{m2a} + I_{m2б} = 3,535 - 7,07 = -3,535 \text{ мА}.$$

Отримане значення збігається з результатом, розрахованим методом контурних струмів в прикладі 3.15.

**Приклад 3.17.** Методом еквівалентного генератора напруги розрахувати струм  $I_{m1}$  у колі, схема і параметри якого наведені в прикладі 3.15.

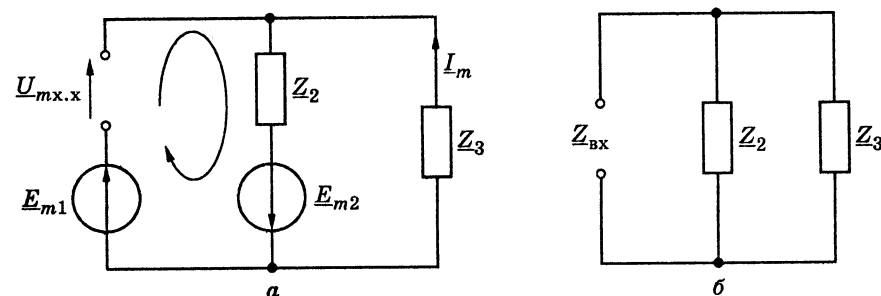


Рис. 3.49. До прикладу 3.17

*Розв'язання.* Складемо еквівалентні комплексні схеми для визначення комплексної амплітуди напруги холостого ходу (рис. 3.49, а) і комплексного вхідного опору (3.49, б).

Виразимо в загальному вигляді комплексну амплітуду напруги холостого ходу  $\underline{U}_{мх.х}$  (рис. 3.49, а). Для цього виберемо контур, до складу якого входить  $\underline{U}_{мх.х}$ , і запишемо рівняння згідно з другим законом Кірхгофа для цього контуру:

$$\underline{U}_{мх.х} + Z_2 I_m = \underline{E}_{m1} + \underline{E}_{m2},$$

де  $I_m = \frac{\underline{E}_{m2}}{Z_2 + Z_3}$ .

З отриманого рівняння виходить, що

$$\underline{U}_{мх.х} = \underline{E}_{m1} + \underline{E}_{m2} - Z_2 I_m = \underline{E}_{m1} + \underline{E}_{m2} - \frac{Z_2 \underline{E}_{m2}}{Z_2 + Z_3}.$$

Обчислимо комплексну амплітуду напруги холостого ходу:

$$\underline{U}_{мх.х} = 10e^{j3\pi/4} + 10e^{-j\pi/4} - \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10e^{-j\pi/4}}{(2 + j2) \cdot 10^3} \cong \cong -7,07 + j7,07 + 7,07 - j7,07 \text{ В} + j7,07 = 7,07 e^{j\pi/2} \text{ В}.$$

Визначимо комплексний вхідний опір активного двополюсника (рис. 3.49, б)

$$Z_{вх} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(2 \cdot j2) \cdot 10^6}{(2 + j2) \cdot 10^3} = (1 + j1) \cdot 10^3 = \sqrt{2} \cdot 10^3 e^{j\pi/2} \text{ Ом} = 1 + j1 \text{ кОм}.$$

Відповідно до теореми Тевенена, обчислимо комплексну амплітуду шуканого струму:

$$I_{m1} = \frac{\underline{U}_{мх.х}}{Z_{вх} + Z_1} \cong \frac{7,07 e^{j\pi/2}}{(1 + j1 - j1) \cdot 10^3} = \frac{7,07 e^{j\pi/2}}{10^3} = 7,07 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/2} \text{ А} = 7,07 e^{j\pi/2} \text{ мА}.$$

Отриманий результат збігається зі значеннями, розрахованими вище в прикладах 3.15 і 3.16.

**Приклад 3.18.** Вивести умову балансу мостової схеми в режимі синусоїдного струму (рис. 3.50, а).

*Розв'язання.* Умову балансу мостової схеми, тобто рівність нулю струму  $I_{m0}$  в діагоналі моста, виведемо, використовуючи метод еквівалентного генератора.

Для схеми, зображеної на рис. 3.50, б, складемо рівняння згідно з другим законом Кірхгофа для контуру, в який входить напруга холостого ходу:

$$\underline{U}_{mx.x} + \underline{Z}_1 I'_m - \underline{Z}_4 I''_m = 0,$$

$$\text{де } I'_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad I''_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}.$$

Використовуючи отримані співвідношення, запишемо вираз для комплексної амплітуди напруги холостого ходу і прирівняємо його до нуля:

$$\underline{U}_{mx.x} = \frac{\underline{Z}_4 \underline{E}_m}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} - \frac{\underline{Z}_1 \underline{E}_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(\underline{Z}_2 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_3) \underline{E}_m}{(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} = 0.$$

З отриманого рівняння визначаємо умову балансу мостової схеми в режимі синусоїдного струму:

$$\underline{Z}_2 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_3. \quad (3.81)$$

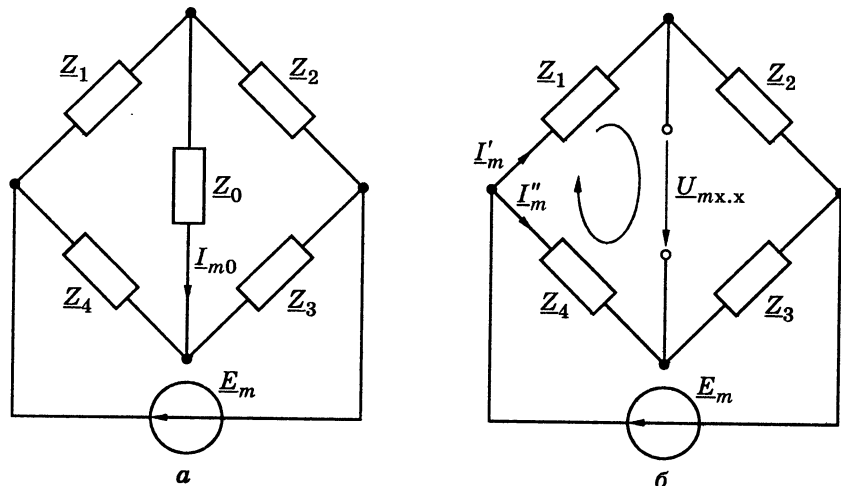


Рис. 3.50. До прикладу 3.18

Співвідношення (3.81) показує, що баланс мостової схеми в режимі синусоїдного струму спостерігається за умови рівності добутків комплексних опорів «протилежних плеч» мостової схеми. З умови балансу мостової схеми для комплексних опорів виходить два окремих баланси для модулів (повних опорів) і аргументів комплексних опорів:

$$Z_2 Z_4 = Z_1 Z_3; \quad \varphi_2 + \varphi_4 = \varphi_1 + \varphi_3.$$

Якщо елементами кола є активні опори, то умова балансу мостової схеми в режимі синусоїдного струму (3.81) збігається з отриманою в розд. 2 умовою балансу мостової схеми в колах постійного струму (див. приклад 2.14).

Режим балансу мостової схеми в колах синусоїдного струму використовується в приладах для вимірювання параметрів індуктивних котушок і конденсаторів на заданій частоті. Принцип вимірювання полягає в тому, що за трьома відомими комплексними опорами «плечей» мостової схеми при її балансі на заданій частоті можна визначити комплексний опір індуктивної котушки або конденсатора, увімкнених у четверте «плече». За результатами вимірювань можна оцінити активні та реактивні опори котушки або конденсатора.

### 3.11. Векторні діаграми кіл синусоїдного струму

Поняття про векторну діаграму було введено як сукупність векторів комплексних (амплітуд або діючих значень) струмів, напруг і ЕРС кола, що алгебраїчно підсумовуються на комплексній площині відповідно до законів Кірхгофа (підрозд. 3.4). Векторні діаграми використовувалися для аналізу найпростіших послідовних і паралельних кіл  $R$ ,  $L$ ,  $C$  (підрозд. 3.6 і 3.7).

Побудова векторних діаграм на заключних етапах аналізу кіл синусоїдного струму дозволяє перевірити правильність виконаних розрахунків. Для всіх векторів у цьому випадку відомі як модулі (амплітуди або діючі значення), так і аргументи (початкові фази). Тому такі діаграми називаються *кількісними*.

Векторні діаграми можуть використовуватися також незалежно від результатів розрахунку кола. При цьому модулі векторів комплексних струмів і напруг можуть вибиратися довільними, але для цих векторів повинні виконуватися закони Кірхгофа і фазові співвідношення в елементах  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Такі діаграми, на відміну від кількісних, називаються *якісними*.

Якісні діаграми зазвичай будуються для пасивних кіл, що мають вхідні і вихідні затискачі. До вхідних затискачів підключається джерело (напруги або струму). Побудова якісних діаграм для таких кіл дозволяє виконати аналіз фазових і амплітудних співвідношень між струмами і напругами вихідних і вхідних затискачів кола.

Побудову якісної векторної діаграми доцільно починати з вектора, який відповідає комплексним струму або напрузі на вихідних затискачах. Амплітуда (діюче значення) і початкова фаза першого вектора діаграми вибираються довільними. Для зручності побудови початкову фазу можна взяти нульовою. Подальша побудова діаграми полягає у підсумовуванні комплексних струмів у вузлах схеми і комплексних напруг у контурах за умови виконання фазових співвідношень між комплексними струмами і напругами в елементах  $R, L, C$ .

На рис. 3.51 показано побудову якісної векторної діаграми для комплексних діючих значень напруг і струму в колі  $R, L$ .

Комплексні діючі значення напруг на вхідних і вихідних затискачах кола (рис. 3.51, а) позначені відповідно  $\underline{U}_{вх}$  і  $\underline{U}_{вих}$ . Побудову діаграми доцільно почати з вектора  $\underline{U}_{вих}$  або з вектора  $\underline{I}$ .

У даному випадку побудова діаграми починається з вектора  $\underline{U}_{вих}$ . Тому послідовність побудови векторної діаграми така:

- 1) довільно вибирається модуль вектора  $\underline{U}_{вих}$ , а його початкова фаза приймається нульовою;
- 2) вектор струму  $\underline{I}$  (рис. 3.51, б) відстає за фазою від напруги  $\underline{U}_{вих}$  на кут  $\pi/2$ , оскільки це струм і напруга в індуктивності  $L$ ;

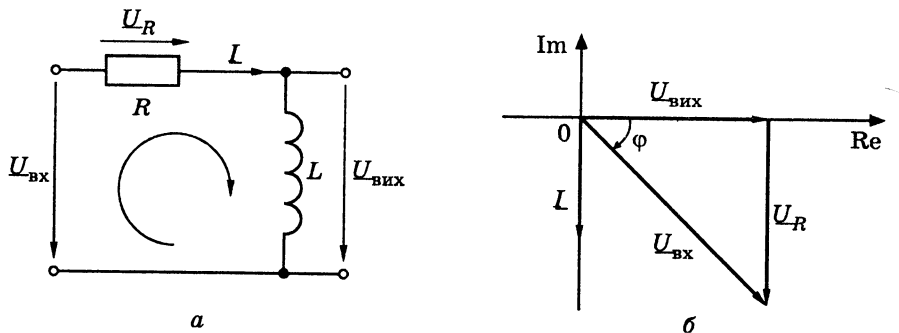


Рис. 3.51. Приклад побудови якісної векторної діаграми

3) вектор  $\underline{U}_{вх}$  (рис. 3.51, б) визначається у відповідності з другим законом Кірхгофа для вказаного на рис. 3.51, а контуру у вигляді:

$$\underline{U}_{вх} = \underline{U}_{вих} + \underline{U}_R,$$

де вектор  $\underline{U}_R$  відповідно до фазових співвідношень між напругою і струмом в активному опорі збігається за фазою з вектором  $\underline{I}$ .

Якісні векторні діаграми дозволяють проаналізувати амплітудні та фазові співвідношення між вхідними і вихідними коливаннями за умови змінювання частоти.

Так, вважаючи діюче значення вхідної напруги для даного кола постійним ( $U_{вх} = \text{const}$ ), векторну діаграму у разі змінювання частоти можна подати у вигляді, показаному на рис. 3.52.

Аналіз діаграми (рис. 3.52) дозволяє зробити висновки:

- 1) вихідна напруга випереджає вхідну на кут  $\varphi$ , величина якого зменшується із зростанням частоти у межах  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ; при  $f \rightarrow 0$   $\varphi \rightarrow \pi/2$ , а при  $f \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow 0$ ;
- 2) діюче значення вихідної напруги менше діючого значення вхідної напруги; при  $f \rightarrow 0$ :  $U_{вих}(0) \rightarrow 0$ ,  $U_{вх}(0) = U_R(0)$ ; при  $f \rightarrow \infty$ :  $U_{вих}(\infty) \rightarrow U_{вх}(\infty)$ ,  $U_R(0) \rightarrow 0$ .

Слід зазначити, що ці висновки здобуті тільки з аналізу якісної векторної діаграми без виконання розрахунків.

Аналітичні вирази підтверджують слушність зроблених висновків:

$$\varphi = \arctg \frac{U_R}{U_{вих}} = \arctg \frac{RI}{\omega LI} = \arctg \frac{R}{\omega L};$$

$$U_{вх} = \sqrt{U_R^2 + U_{вих}^2} = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Методика побудови діаграм ілюструється такими прикладами.

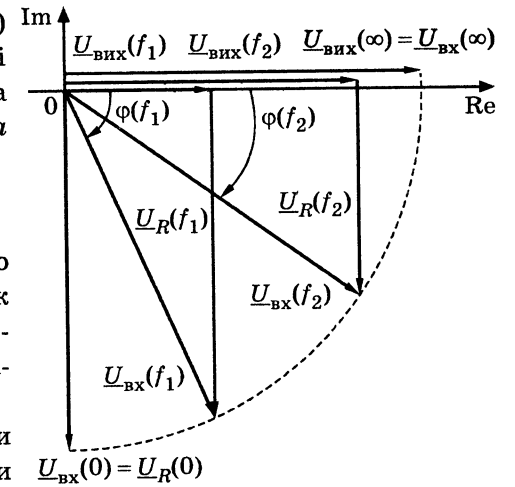


Рис. 3.52. Векторні діаграми кола (рис. 3.51, а) для різних значень частоти ( $0, f_1 < f_2, \infty$ ) і  $U_{вх} = \text{const}$

**Приклад 3.19.** Побудувати векторну діаграму для кола, схема якого зображена на рис. 3.53, а. Параметри кола становлять:

$$u(t) = 10 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right); R = X_L = 2 \text{ кОм}; X_C = 1 \text{ кОм}.$$

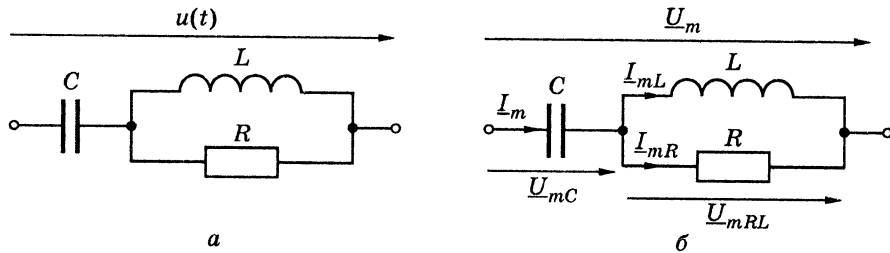


Рис. 3.53. До прикладу 3.19

*Розв'язання.* Після вибору умовних позитивних напрямів струмів і напруг, а також їх комплексного позначення (рис. 3.53, б), запишемо параметри схеми у комплексному вигляді:

$$\underline{U}_m = 10e^{j\pi/4} \text{ В}; \underline{Z}_R = 2 \text{ кОм}; \underline{Z}_L = jX_L = j2 \text{ кОм}; \underline{Z}_C = -jX_C = -j1 \text{ кОм}.$$

Щоб розрахувати комплексні амплітуди струмів і напруг кола, застосуємо метод еквівалентних перетворень і закон Ома:

1) обчислимо комплексний опір кола:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_R}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = -j10^3 + \frac{j2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{(j2 + 2) \cdot 10^3} = \\ &= -j10^3 + \frac{j4 \cdot 10^6}{2\sqrt{2} \cdot 10^3 e^{j\pi/4}} = (-j1 + \sqrt{2}e^{j\pi/4}) \cdot 10^3 = 10^3 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}; \end{aligned}$$

2) розрахуємо комплексні амплітуди струмів:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{10e^{j\pi/4}}{10^3} = 10^{-2} e^{j\pi/4} \text{ А} = 10e^{j\pi/4} \text{ мА}; \\ \underline{I}_{mL} &= \underline{I}_m \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = 10^{-2} e^{j\pi/4} \frac{2 \cdot 10^3}{(j2 + 2) \cdot 10^3} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/4}}{2\sqrt{2} e^{j\pi/4}} \approx 0,707 \cdot 10^{-2} \text{ А} = 7,07 \text{ мА}; \\ \underline{I}_{mR} &= \underline{I}_m \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = 10^{-2} e^{j\pi/4} \frac{j2 \cdot 10^3}{(j2 + 2) \cdot 10^3} = \frac{2 \cdot 10^{-2} e^{j3\pi/4}}{2\sqrt{2} e^{j\pi/4}} \approx \\ &\approx 0,707 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/2} = j0,707 \cdot 10^{-2} \text{ А} = j7,07 \text{ мА}; \end{aligned}$$

3) визначимо комплексні амплітуди напруг:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mC} &= \underline{Z}_C \underline{I}_m = -j \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/4} = 10e^{-j\pi/4} \text{ В}; \\ \underline{U}_{mRL} &= \underline{Z}_R \underline{I}_{mR} \approx 2 \cdot 10^3 \cdot 0,707 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/2} = 14,1e^{j\pi/2} = j14,1 \text{ В}. \end{aligned}$$

Побудову векторної діаграми можна починати з одного з трьох векторів:  $\underline{I}_{mR}$ ;  $\underline{I}_{mL}$ ;  $\underline{U}_{mRL}$  (рис. 3.54).

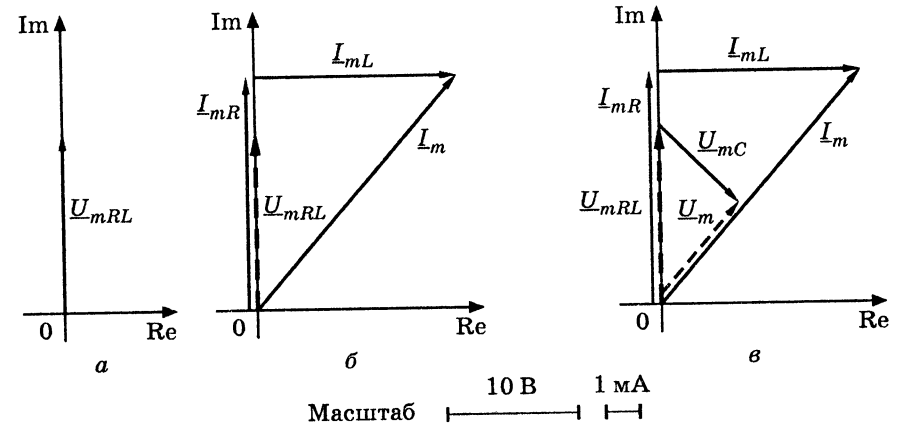


Рис. 3.54. Побудова векторної діаграми у прикладі 3.19

Розглянемо один з варіантів побудови діаграми:

1) відповідно до вибраного масштабу для амплітуд напруг будуюмо вектор  $\underline{U}_{mRL}$  (рис. 3.54, а);

2) вибравши масштаб для амплітуд струмів, будуюмо вектор комплексної амплітуди загального струму  $\underline{I}_m$  у вигляді суми комплексних амплітуд струмів в активному опорі та індуктивності (рис. 3.54, б):

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL};$$

3) підсумовуючи комплексну амплітуду напруги на ділянці  $R, L$  ( $\underline{U}_{mRL}$ ) і комплексну амплітуду напруги на ємності, отримуємо комплексну амплітуду заданої напруги (рис. 3.54, в):

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{mC} + \underline{U}_{mRL}.$$

Векторна діаграма (рис. 3.54) підтверджує правильність розрахунків, оскільки результати підсумовування векторів збігаються з розрахунковими значеннями відповідних векторів.

**Приклад 3.20.** Побудувати кількісну векторну діаграму для кола, розрахованого у прикладі 3.15.

*Розв'язання.* Використовуючи варіанти схеми кола, показані на рис. 3.47 у прикладі 3.15, зобразимо зручну для побудови діаграми схему

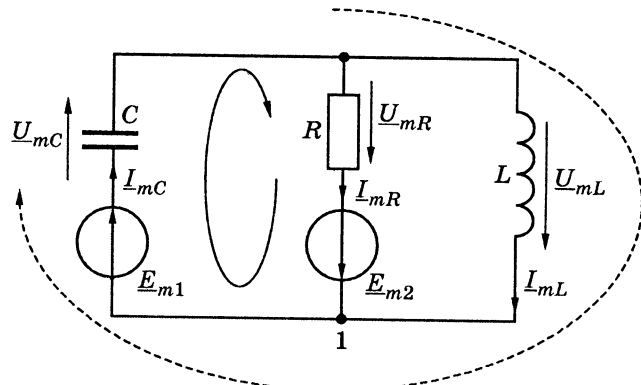


Рис. 3.55. До прикладу 3.20

(рис. 3.55), на якій вкажемо напрями і позначення комплексних амплітуд струмів і напруг, а також контури і напрями обходу в них.

Скористаємося заданими і розрахованими у прикладі 3.15 величинами:

1) комплексні амплітуди струмів

$$\underline{I}_{mC} = 7,07e^{j\pi/2} \text{ мА}; \quad \underline{I}_{mR} \approx -3,535 = 3,535e^{j\pi} \text{ мА};$$

$$\underline{I}_{mL} \approx 3,535 + j7,07 = 7,905e^{j1,107} \text{ мА};$$

2) комплексні амплітуди ЕРС джерел

$$\underline{E}_{m1} = 10e^{j3\pi/4} \text{ В}; \quad \underline{E}_{m2} = 10e^{-j\pi/4} \text{ В};$$

3) комплексні опори елементів

$$\underline{Z}_C = -j1 \text{ кОм}; \quad \underline{Z}_R = 2 \text{ кОм}; \quad \underline{Z}_L = j2 \text{ кОм}.$$

Щоб побудувати діаграму, розрахуємо комплексні амплітуди напруг:

$$\underline{U}_{mC} = \underline{Z}_C \underline{I}_{mC} = -j10^3 \cdot 7,07 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/2} = 7,07 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{mR} = \underline{Z}_R \underline{I}_{mR} \approx 2 \cdot 10^3 \cdot 3,535 \cdot 10^{-3} e^{j\pi} = 7,07e^{j\pi} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{mL} = \underline{Z}_L \underline{I}_{mL} \approx j2 \cdot 10^3 \cdot 7,905 \cdot 10^{-3} e^{j1,107} = 15,81e^{j2,678} \text{ В}.$$

Векторну діаграму для даного кола побудуємо, об'єднавши три окремі діаграми, які ілюструють у векторному вигляді рівняння за першим законом Кірхгофа для будь-якого з двох вузлів схеми і за другим законом Кірхгофа для вибраних контурів (див. рис. 3.55).

Окремі діаграми наведені на рис. 3.56, де зображені:

а) окрема діаграма (рис. 3.56, а) для комплексних амплітуд струмів, яка відповідає рівнянню за першим законом Кірхгофа для вузла 1:

$$\underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} = \underline{I}_{mC};$$

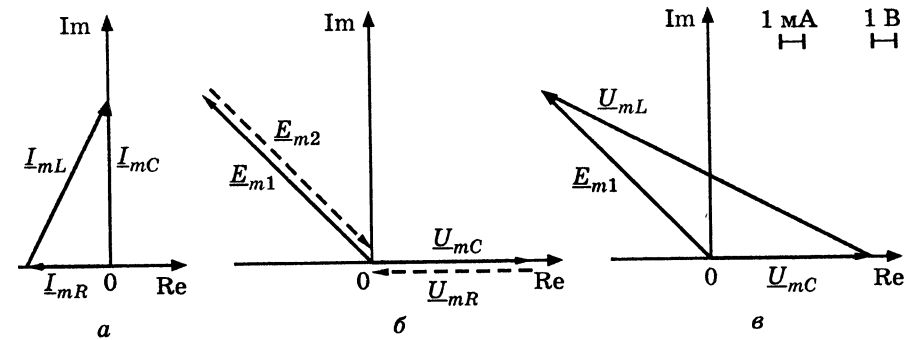


Рис. 3.56. Окремі векторні діаграми до прикладу 3.20

б) окрема діаграма (рис. 3.56, б) для комплексних амплітуд напруг і ЕРС, яка відповідає складеному згідно з другим законом Кірхгофа рівнянню для контуру, позначеного на схемі (рис. 3.55) суцільною лінією:

$$\underline{U}_{mC} + \underline{U}_{mR} = \underline{E}_{m1} + \underline{E}_{m2};$$

в) окрема діаграма (рис. 3.56, в), яка відповідає рівнянню згідно з другим законом Кірхгофа для контуру, позначеного на схемі (рис. 3.55) пунктирною лінією:

$$\underline{U}_{mC} + \underline{U}_{mL} = \underline{E}_{m1}.$$

Поєднуючи окремі діаграми, здобудемо повну векторну діаграму кола (рис. 3.57).

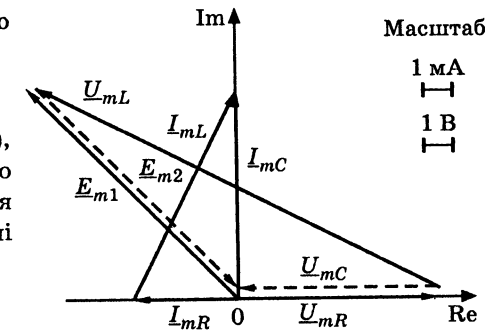


Рис. 3.57. Повна векторна діаграма до прикладу 3.20

**Приклад 3.21.** Зобразити якісну векторну діаграму для кола, схема якого показана на рис. 3.58. Побудову діаграми виконати за умови, що вхідний опір кола має активний характер і  $L_1 = L_2$ . Проаналізувати

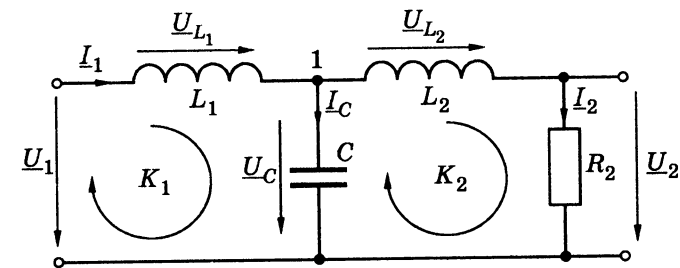


Рис. 3.58. Схема кола до прикладу 3.21

амплітудні та фазові співвідношення між напругами і струмами на вході і виході кола у разі змінювання частоти.

**Розв'язання.** Щоб побудувати векторну діаграму, скористаємось комплексними діючими значеннями напруг і струмів, позначимо їх на схемі (рис. 3.58) та виберемо умовні позитивні напрями.

Побудову векторної діаграми почнемо з векторів  $\underline{U}_2$  та  $\underline{I}_2$ , які збігаються за фазою, а їх початкові фази вважатимемо нульовими (рис. 3.59, а).

Оскільки струм  $\underline{I}_2$  є струмом в індуктивності  $L_2$ , вектор напруги  $\underline{U}_{L_2}$  випереджає за фазою вектор струму  $\underline{I}_2$  на кут  $\pi/2$ . Підсумовуючи у відповідності з другим законом Кірхгофа для контуру  $K_2$  вектори напруги  $\underline{U}_2$  і  $\underline{U}_{L_2}$ , отримуємо вектор напруги  $\underline{U}_C$  (рис. 3.59, б).

Будуємо вектор струму  $\underline{I}_C$ , який випереджає за фазою вектор напруги  $\underline{U}_C$  на кут  $\pi/2$ . Застосовуючи перший закон Кірхгофа для вузла 1, здобуємо вектор вхідного струму  $\underline{I}_1$  у вигляді суми векторів струмів  $\underline{I}_C$  і  $\underline{I}_2$  (рис. 3.59, в).

Враховуючи, що струм  $\underline{I}_1$  є струмом в індуктивності  $L_1$ , вектор напруги  $\underline{U}_{L_1}$  випереджає за фазою на кут  $\pi/2$  вектор струму  $\underline{I}_1$ . Модуль вектора  $\underline{U}_{L_1}$  дорівнюватиме модулю вектора  $\underline{U}_{L_2}$ , оскільки  $L_1 = L_2$ . Підсумовуючи вектор напруги  $\underline{U}_C$  з вектором напруги  $\underline{U}_{L_1}$ , отримуємо у відповідності з другим законом Кірхгофа для контуру  $K_1$  вектор вхідної напруги  $\underline{U}_1$  (рис. 3.59, г). Для того, щоб забезпечити активний характер вхідного опору, вектори  $\underline{U}_1$  і  $\underline{I}_1$  мають перебувати «у фазі». Щоб виконати цю умову, діаграму зображаємо симетрично відносно вектора  $\underline{U}_C$ .

Порядок побудови векторної діаграми ілюструє рис. 3.59.

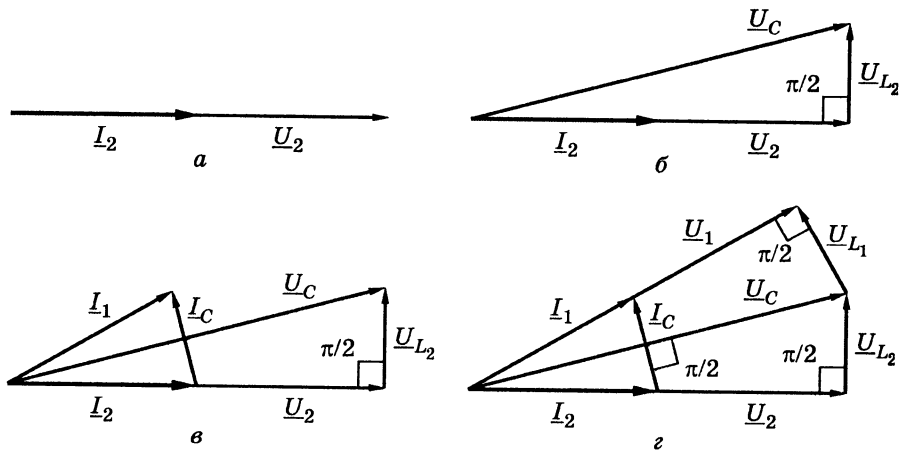


Рис. 3.59. Побудова векторної діаграми до прикладу 3.21

Аналіз векторної діаграми дозволяє встановити такі особливості розглянутого кола:

1) діючі (амплітудні) значення вхідних і вихідних струмів (напруг) дорівнюють одне одному;

2) вхідний опір дорівнює вихідному опору  $R_2$ ;

3) вихідні напруга і струм відстають за фазою від вхідних напруги і струму на кут  $\varphi$ , який збільшується із зростанням частоти (рис. 3.60); граничні значення цього кута становлять  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , причому  $\varphi = 0$ , якщо  $f = 0$ .

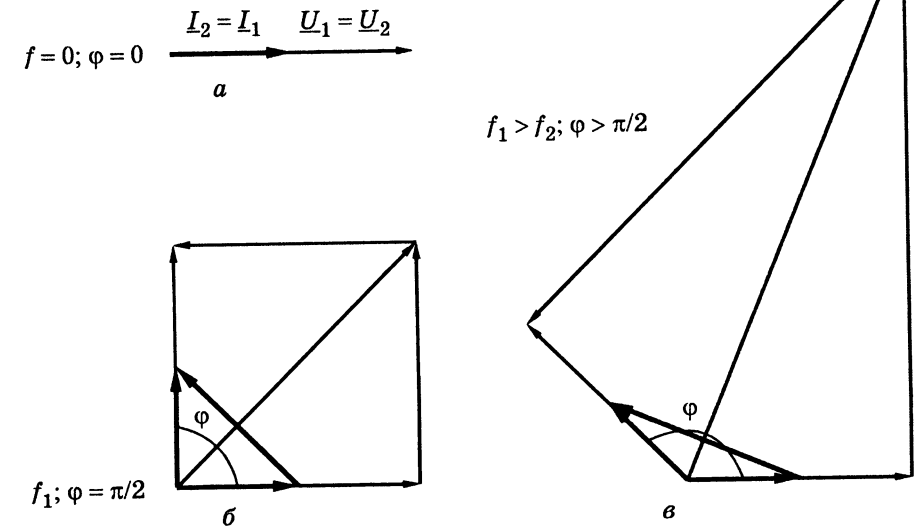


Рис. 3.60. Векторна діаграма до прикладу 3.21 для різних частот

Розглянуте коло практично застосовується як *фільтр нижніх частот*. Теорія дозволяє встановити суворіші кількісні співвідношення між параметрами кола і характеристиками фільтра. Однак якісні векторні діаграми дозволяють наочно інтерпретувати фізичний зміст роботи даного та інших типів фільтрів.

**Приклад 3.22.** Побудувати якісну векторну діаграму і проаналізувати амплітудні та фазові співвідношення між напругами на вході і виході мостової схеми, зображеної на рис. 3.61, за умови, що  $R_1 = R_2$  і  $C_1 = C_2$ .

**Розв'язання.** Діаграму зобразимо для вибраних на рис. 3.61 напрямів комплексних діючих значень напруг і струмів, а також контурів  $K_1$  і  $K_2$ .

Оскільки  $R_1 = R_2$  і  $C_1 = C_2$ , комплексні струми в паралельних вітках однакові. Тому побудову діаграми починаємо з векторів струмів  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$ , прийнявши їх початкову фазу нульовою (рис. 3.62, а).



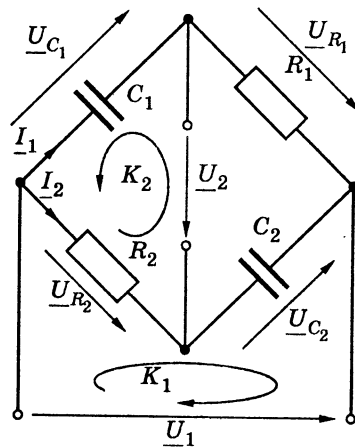


Рис. 3.61. Схема кола до прикладу 3.22

Далі будемо синфазні з векторами комплексних струмів вектори комплексних напруг на активних опорах  $\underline{U}_{R1} = \underline{U}_{R2}$  і вектори напруг на ємностях  $\underline{U}_{C1} = \underline{U}_{C2}$ , які однакові за модулем і відстають за фазою на кут  $\pi/2$  від струмів (рис. 3.62, б). Підсумовуючи на підставі рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру  $K_1$  вектори комплексних напруг на активних опорах і ємностях, здобуваємо вектор комплексної вхідної напруги (рис. 3.62, в):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{C2}.$$

Використовуючи рівняння згідно з другим законом Кірхгофа для контуру  $K_2$

$$\underline{U}_{R2} - \underline{U}_{C1} - \underline{U}_2 = 0,$$

будуємо вектор комплексної вихідної напруги  $\underline{U}_2$  як різницю комплексної напруги на активному опорі та комплексної напруги на ємності (рис. 3.62, в):

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{R2} - \underline{U}_{C1}.$$

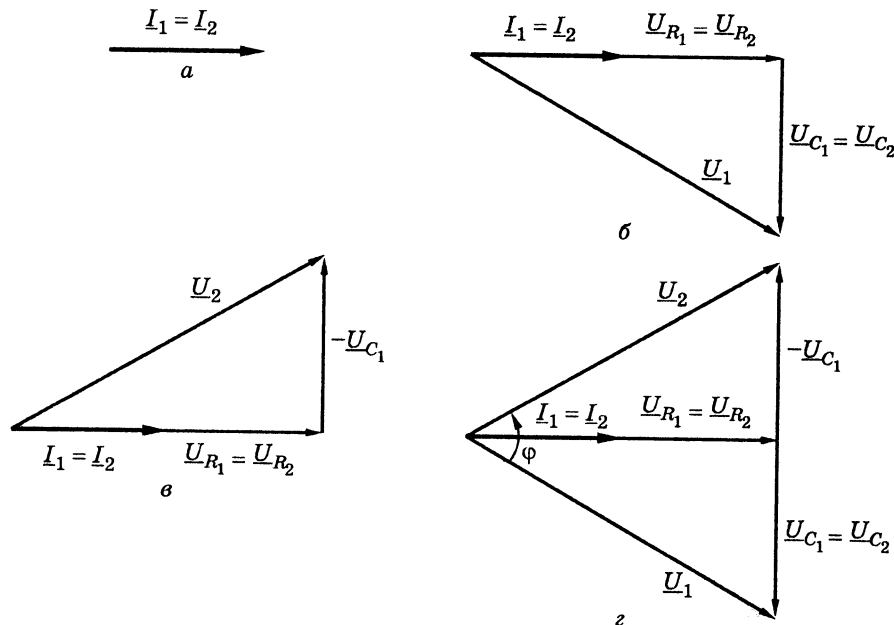


Рис. 3.62. Побудова векторної діаграми до прикладу 3.22

Підсумкова векторна діаграма зображена на рис. 3.62, з.

Аналіз діаграми дозволяє зробити висновки:

1) незалежно від частоти вихідна і вхідна напруги мають однакові діючі, а отже, і амплітудні значення;

2) вихідна напруга випереджає вхідну на кут  $\varphi$ , котрий змінюється у межах  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , причому  $\varphi \rightarrow 0$ , якщо  $f \rightarrow \infty$ ;  $\varphi \rightarrow \pi$ , якщо  $f \rightarrow 0$ .

Особливості амплітудних і фазових співвідношень між вихідною і вхідною напругами дозволяють використовувати дане коло як фазообертач.

### 3.12. Енергетичні співвідношення в колах синусоїдного струму

Основним енергетичним показником у колах синусоїдного струму, як і в колах постійного струму, є потужність. Оскільки миттєві значення напруг і струмів змінюються за гармонічним законом, миттєва потужність у колах синусоїдного струму є функцією часу. Тому вводиться низка умовних показників потужності, які розглядаються нижче. Ці показники використовуються як для пасивних елементів і ділянок кіл, так і для джерел енергії.

Будь-яку пасивну ділянку в колах синусоїдного струму можна замінити еквівалентним комплексним опором  $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ . Щоб спростити аналіз, початкову фазу напруги слід вважати нульовою. Тоді миттєва потужність на цій ділянці

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m \cos \omega t [I_m \cos(\omega t - \varphi)] = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.82)$$

$$\text{де } I_m = \frac{U_m}{Z}.$$

Вираз (3.82) після тригонометричного перетворення

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

матиме вигляд:

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t - \varphi), \quad (3.83)$$

де  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ ;  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  — діючі значення напруги і струму.

Отже, миттєва потужність є коливанням (рис. 3.63) з кутовою частотою  $2\omega$ , зміщеним відносно осі часу на величину  $UI \cos \varphi$ , яка називається *активною потужністю* і позначається  $P_A$ .

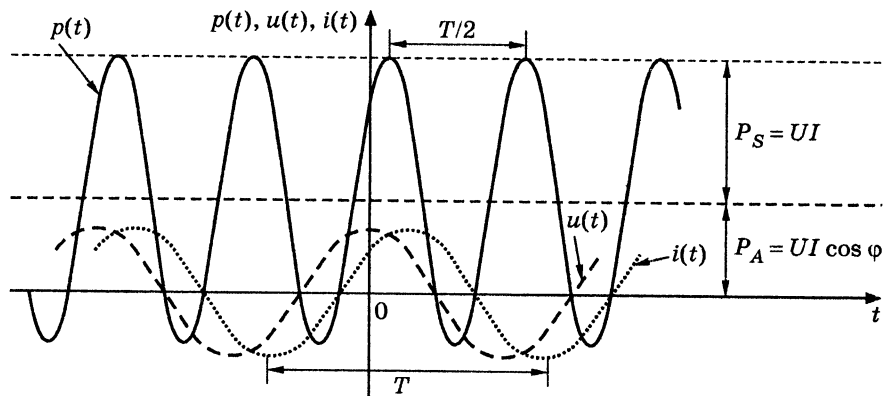


Рис. 3.63. Часові діаграми миттєвих значень напруги, струму і потужності

Активна потужність вимірюється у *ваттах* (Вт) і є середнім значенням миттєвої потужності на інтервалах часу, кратних періоду  $T$ :

$$P_A = \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi = ZI^2 \cos \varphi = YU^2 \cos \varphi = RI^2 = GU^2. \quad (3.84)$$

Максимальне відхилення миттєвої потужності від її середнього значення (тобто від активної потужності) називається *повною потужністю*:

$$P_S = ZI^2 = YU^2. \quad (3.85)$$

Повну потужність можна розглядати як границю, до якої прямує активна потужність у разі активного характеру кола ( $\cos \varphi = 1$ ). Одиницею вимірювання повної потужності є *вольт-ампер* (позначення — ВА).

Відношення активної потужності до повної потужності називається *коефіцієнтом потужності*:

$$\frac{P_A}{P_S} = \cos \varphi.$$

Коефіцієнт потужності є безрозмірним і позначається  $\cos \varphi$ .

Коефіцієнт потужності є важливим показником в енергетиці, оскільки характеризує міру використання енергії в лінії передачі. Чим більше  $\cos \varphi$ , тим менше різниця між активною і повною потужностями і тим менше інтервали часу, протягом яких  $p(t) < 0$  і накопичена в реактивних елементах кола енергія повертається до джерела.

Подальше перетворення другого доданка у виразі для миттєвої потужності (3.83) за допомогою формули

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

дозволяє подати миттєву потужність (рис. 3.64, а) у вигляді суми миттєвих значень активної  $p_A(t) > 0$  (рис. 3.64, б) і реактивної  $p_Q(t)$  (рис. 3.64, в) потужностей:

$$\begin{aligned} p(t) &= UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cdot \cos 2\omega t + UI \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = \\ &= UI \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) + UI \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = \\ &= P_A (1 + \cos 2\omega t) + P_S \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = p_A(t) + p_Q(t), \end{aligned} \quad (3.86)$$

де  $p_A(t) = P_A (1 + \cos 2\omega t) > 0$  (рис. 3.64, б);  $p_Q(t) = P_S \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t$  (рис. 3.64, в).

Миттєве значення активної потужності пасивної ділянки кола в будь-який момент часу додатне, що свідчить про незворотне поглинання енергії в активних опорах цієї ділянки.

Миттєве значення реактивної потужності (рис. 3.64, в) має вигляд коливання, інтенсивність якого визначається величиною

$$P_Q = UI \sin \varphi = P_S \sin \varphi = XI^2 = BU^2, \quad (3.87)$$

яка називається *реактивною потужністю*.

Реактивна потужність вимірюється у *вольт-амперах реактивних* (ВАр). Реактивна потужність додатна, якщо  $\varphi > 0$  (коло має індуктивний характер), і від'ємна, якщо  $\varphi < 0$  (коло має ємнісний характер). Реактивна потужність дорівнює нулю у разі активного характеру опору кола ( $\varphi = 0$ ).

Впродовж часових інтервалів, коли  $p_Q(t) > 0$ , реактивні елементи кола накопичують енергію, а коли  $p_Q(t) < 0$ , реактивні елементи кола віддають енергію джерелу. Отже, реактивна потужність характеризує обмін енергією між джерелом і ділянкою кола.

Активну, реактивну і повну потужності, що описуються відповідно співвідношеннями (3.84), (3.87) і (3.85), об'єднують комплексною величиною, так званою *комплексною повною потужністю синусоїдного струму*, або, коротко, *комплексною потужністю*.

В алгебраїчній, показниковій і тригонометричній формах комплексна потужність записується так:

$$\underline{P}_S = P_A + jP_Q = P_S e^{j\varphi} = P_S \cos \varphi + jP_S \sin \varphi. \quad (3.88)$$

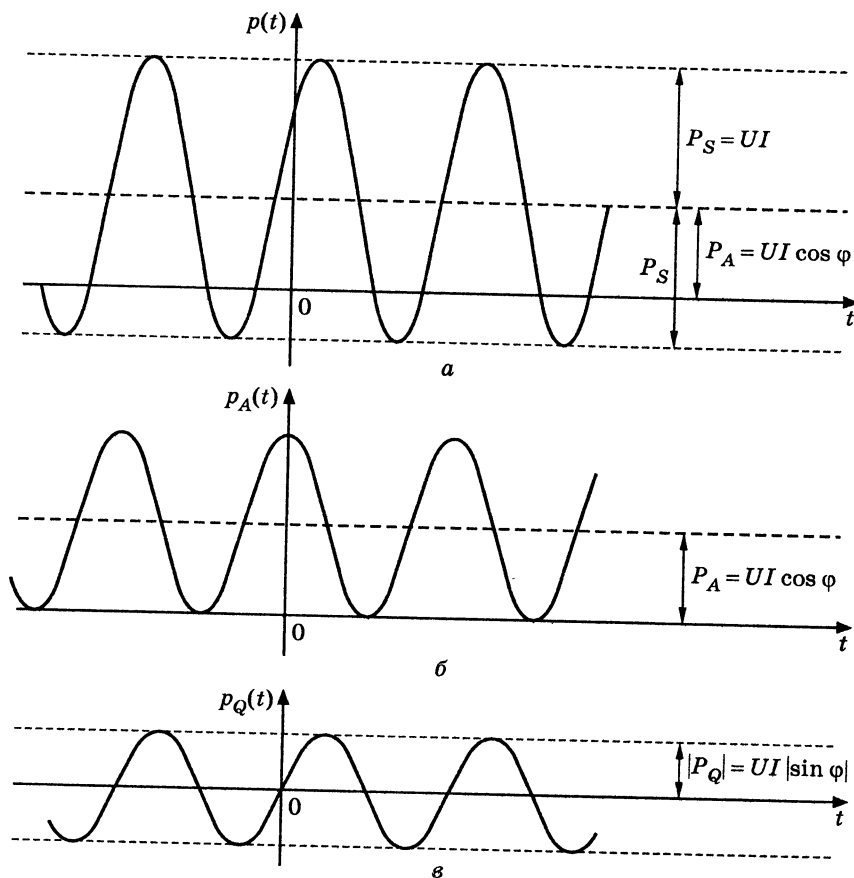


Рис. 3.64. Графіки миттєвих значень:  
 а — потужності; б — активної; в — реактивної потужності

З виразу (3.88) виходить, що модуль, дійсне та уявне значення комплексної потужності дорівнюють відповідно повній, активній і реактивній потужностям:

$$|P_S| = P_S = \sqrt{P_A^2 + P_Q^2}; P_A = \text{Re}[P_S] = P_S \cos \varphi; P_Q = \text{Im}[P_S] = P_S \sin \varphi.$$

Аргумент комплексної потужності дорівнює зсуву фаз між напругою і струмом:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \text{arctg}(P_Q/P_A).$$

Побудова комплексної потужності на комплексній площині (рис. 3.65) ілюструє наведені вище співвідношення.

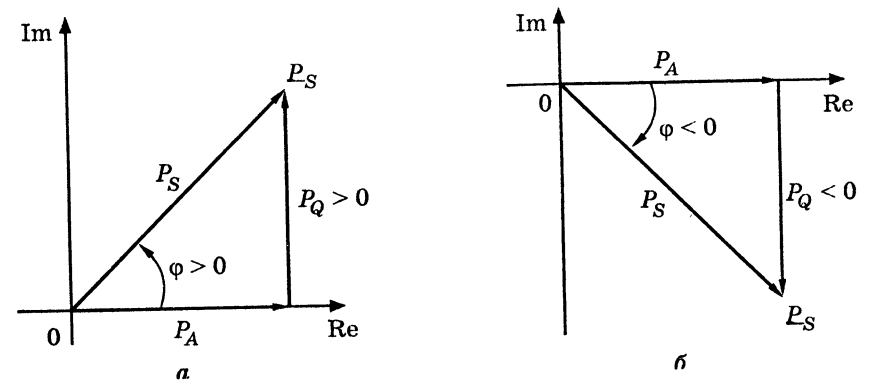


Рис. 3.65. Подання комплексної потужності та її складових на комплексній площині (трикутник потужностей) для:  
 а — індуктивного; б — ємнісного характеру пасивної ділянки кола

Щоб виразити комплексну потужність через комплексні діючі значення напруги і струму, використовуються вирази:

$$P_S = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = \underline{Y}^* U^2, \quad (3.89)$$

де  $\underline{U} = U e^{j\psi_u}$  — комплексне діюче значення напруги;  $\underline{I}^* = I e^{-j\psi_i}$  — спряжене комплексне діюче значення струму.

Основні показники потужності для пасивних кіл синусоїдного струму зведені до табл. 3.14.

Кількісні показники потужності для пасивної ділянки кола можна застосувати для джерел енергії. З урахуванням миттєвих значень синусоїдних напруг (ЕРС) і струмів в ідеальних джерелах (рис. 3.66, а, б) і відповідних їм комплексних діючих значень параметрів джерел (рис. 3.66, в, г) вводяться показники потужності джерел (табл. 3.15).

Відмітною особливістю ідеальних джерел є те, що їх активна потужність може бути від'ємною ( $P_A < 0, \cos \varphi < 0$ ); при цьому  $\pi/2 < \varphi < -\pi/2$ . Це означає, що джерело споживає енергію. В енергетиці реальний генератор з від'ємною активною потужністю працює як двигун, споживаючи енергію. Такий режим джерела розглянутий у прикладі 3.23.

Із закону збереження енергії виходить, що для будь-якого кола виконується рівняння балансу миттєвих потужностей: сума миттєвих потужностей у пасивних елементах дорівнює сумі миттєвих потужностей в ідеальних джерелах. Для кола, що містить  $N_{\Pi}$

Показники потужності  
для пасивних ділянок кіл синусоїдного струму

Потужність	Позначення	Одиниці вимірювання (найменування/позначення)	Розрахункові співвідношення
Повна	$P_S$	вольт-ампер/ВА	$P_S = UI = ZI^2 = YU^2 = \sqrt{P_A^2 + P_Q^2}$
Активна	$P_A$	ват/Вт	$P_A = UI \cos \varphi = RI^2 = GU^2$
Реактивна	$P_Q$	вольт-ампер реактивний/ВАр	$P_Q = UI \sin \varphi = XI^2 = BU^2$
Комплексна	$\underline{P}_S$	вольт-ампер/ВА	$\underline{P}_S = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 = \underline{Y}^*U^2 = P_A + jP_Q = P_S e^{j\varphi}$
Коефіцієнт потужності	$\cos \varphi$	—	$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg(P_Q/P_A)$

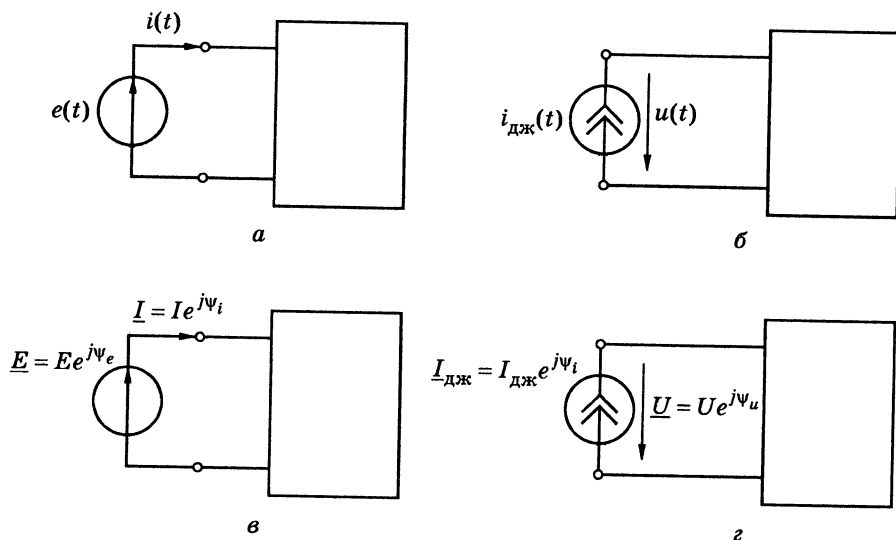


Рис. 3.66. Ідеальні джерела напруги та струму з позначенням миттєвих і комплексних діючих значень напруг і струмів для розрахунку потужності

Показники потужності  
ідеальних джерел синусоїдної напруги і струму

Потужність	Розрахункові співвідношення	
	джерело напруги (ЕРС)	джерело струму
Миттєва, $p(t)$	$e(t)i(t)$	$u(t)i_{\text{дж}}(t)$
Повна, $P_S$	$P_S = EI$	$P_S = UI_{\text{дж}}$
Активна, $P_A$	$P_A = EI \cos \varphi$	$P_A = UI_{\text{дж}} \cos \varphi$
Реактивна, $P_Q$	$P_Q = EI \sin \varphi$	$P_Q = UI_{\text{дж}} \sin \varphi$
Комплексна, $\underline{P}_S$	$\underline{P}_S = \underline{E}\underline{I}^* = P_A + jP_Q = P_S e^{j\varphi}$	$\underline{P}_S = \underline{U}\underline{I}_{\text{дж}}^* = P_A + jP_Q = P_S e^{j\varphi}$
Коефіцієнт потужності, $\cos \varphi$	$\varphi_E = \psi_e - \psi_i = \arctg \frac{P_Q}{P_A}$	$\varphi_I = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{P_Q}{P_A}$

пасивних елементів,  $N_E$  ідеальних джерел напруги та  $N_I$  ідеальних джерел струму, рівняння балансу миттєвих потужностей має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{N_{\Pi}} u_k(t)i_k(t) = \sum_{k=1}^{N_E} [\pm e_k(t)i_k(t)] + \sum_{k=1}^{N_I} [\pm u_k(t)i_{\text{дж}k}(t)]. \quad (3.90)$$

Вирази для миттєвих потужностей джерел напруги у правій частині рівняння (3.90) мають знак плюс, якщо напрями ЕРС і умовні позитивні напрями струмів у джерелах збігаються (рис. 3.66, а), і знак мінус, якщо ці напрями протилежні. Для джерел струму миттєва потужність у рівнянні (3.90) додатна, якщо напрям струму джерела й умовний позитивний напрям напруги на його затискачах протилежні (рис. 3.66, б), і від'ємна, якщо ці напрями збігаються.

Застосування до кожного з доданків рівняння (3.90) перетворень, аналогічних (3.82), (3.83) і (3.86), дозволяє обґрунтувати рівняння балансу активних, реактивних і комплексних потужностей для кола синусоїдного струму:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_{\Pi}} R_k I_k^2 &= \sum_{k=1}^{N_{\Pi}} U_k I_k \cos \varphi_k = \\ &= \sum_{k=1}^{N_E} [\pm E_k I_k \cos \varphi_{ek}] + \sum_{k=1}^{N_I} [\pm U_k I_{\text{дж}k} \cos \varphi_{ik}]; \end{aligned} \quad (3.91)$$

Вихідні дані джерел ЕРС, струмів і напруг у колі

Дані	Миттєве значення	Комплексна амплітуда	Комплексне діюче значення
ЕРС джерел, В	$e_1(t) = 10 \cos \left( 10^6 t + \frac{3\pi}{4} \right)$ $e_2(t) = 10 \cos \left( 10^6 t - \frac{\pi}{4} \right)$	$\underline{E}_{m1} = 10e^{j3\pi/4}$ В; $\underline{E}_{m2} = 10e^{-j\pi/4}$	$\underline{E}_1 = 7,07e^{j3\pi/4}$ $\underline{E}_2 = 7,07e^{-j\pi/4}$
Струм, мА	$i_1(t) \approx 7,07 \cos \left( 10^6 t + \frac{\pi}{2} \right)$ $i_2(t) \approx 3,535 \cos (10^6 t + \pi)$ $i_3(t) \approx 7,905 \cos (10^6 t + 1,107)$	$\underline{I}_{m1} \approx 7,07e^{j\pi/2}$ $\underline{I}_{m2} \approx 3,535e^{j\pi}$ $\underline{I}_{m3} \approx 7,905e^{j1,107}$	$\underline{I}_1 \approx 5e^{j\pi/2}$ $\underline{I}_2 \approx 2,5e^{j\pi}$ $\underline{I}_3 \approx 5,59e^{j1,107}$
Напряга, В	$u_1(t) \approx 7,07 \cos (10^6 t)$ $u_2(t) \approx 7,07 \cos (10^6 t + \pi)$ $u_3 \approx 15,81 \cos (10^6 t + 2,678)$	$\underline{U}_{m1} \approx 7,07$ $\underline{U}_{m2} \approx 7,07e^{j\pi}$ $\underline{U}_{m3} \approx 15,81e^{j2,678}$	$\underline{U}_1 \approx 5$ $\underline{U}_2 \approx 5e^{j\pi}$ $\underline{U}_3 \approx 11,18e^{j2,678}$

Щоб скласти рівняння балансу миттєвих потужностей, попередньо розрахуємо миттєві потужності пасивних елементів і джерел ЕРС.

Миттєві потужності пасивних елементів

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t) \approx [7,07 \cos (10^6 t)] \left[ 7,07 \cdot 10^{-3} \cos \left( 10^6 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= 0,5 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \left[ \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \frac{\pi}{2} \right] = 25 \cdot 10^{-3} \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ Вт};$$

$$p_1(t) = 25 \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ мВт};$$

$$p_2(t) = u_2(t)i_2(t) \approx [7,07 \cos (10^6 t + \pi)] [3,535 \cdot 10^{-3} \cos (10^6 t + \pi)] =$$

$$= 12,5 \cdot 10^{-3} [1 + \cos (2 \cdot 10^6 t + 2\pi)] = 12,5 \cdot 10^{-3} + 12,5 \cdot 10^{-3} \cos (2 \cdot 10^6 t) \text{ Вт};$$

$$p_2(t) = 12,5 + 12,5 \cos (2 \cdot 10^6 t) \text{ мВт};$$

$$p_3(t) = u_3(t)i_3(t) \approx [15,81 \cos (10^6 t + 2,678)] [7,905 \cdot 10^{-3} \cos (10^6 t + 1,107)] =$$

$$= 0,5 \cdot 15,81 \cdot 7,905 \cdot 10^{-3} \left[ \cos (2 \cdot 10^6 t + 3,785) + \cos \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= 62,49 \cdot 10^{-3} \cos (2 \cdot 10^6 t + 3,785) \text{ Вт};$$

$$p_3(t) = 62,49 \cos (2 \cdot 10^6 t + 3,785) \text{ мВт}.$$

$$\sum_{k=1}^{N_{\Pi}} X_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{N_{\Pi}} U_k I_k \sin \varphi_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_E} [\pm E_k I_k \sin \varphi_{ek}] + \sum_{k=1}^{N_I} [\pm U_k I_{джk} \sin \varphi_{ik}]; \quad (3.92)$$

$$\sum_{k=1}^{N_{\Pi}} Z_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{N_{\Pi}} U_k I_k^* = \sum_{k=1}^{N_E} [\pm \underline{E}_k \underline{I}_k^*] + \sum_{k=1}^{N_I} [\pm \underline{U}_k \underline{I}_{джk}^*]. \quad (3.93)$$

Вибір знаків доданків у рівняннях (3.91)–(3.93) для різних видів потужностей джерел визначається відповідно до правил, сформульованих вище для доданків у правій частині рівняння балансу миттєвих потужностей (3.90).

Слід зазначити, що рівняння балансу для повних потужностей у загальному випадку не виконується.

Аналізуючи потужності реальних джерел, можна перенести в праві частини рівнянь (3.91)–(3.93) доданки, пов'язані з потужностями відповідно у внутрішніх активних, реактивних і комплексних опорах джерел. При цьому в лівих частинах рівнянь залишаться доданки, що характеризують потужності інших пасивних елементів кола, котрі звичайно розглядаються як навантаження. Це дозволяє оцінювати активну потужність у навантаженні, коефіцієнт корисної дії і розв'язувати інші енергетичні задачі.

**Приклад 3.23.** Скласти рівняння балансу миттєвих, активних, реактивних і комплексних потужностей для кола, розрахованого у прикладі 3.15.

**Розв'язання.** Зобразимо на рис. 3.67 схему заданого кола і позначимо напрями джерел ЕРС, а також вибрані умовні позитивні напрями струмів і напруг. ЕРС, струми і напруги, враховуючи необхідність розрахунку потужностей, показані на рис. 3.67 у вигляді комплексних діючих значень.

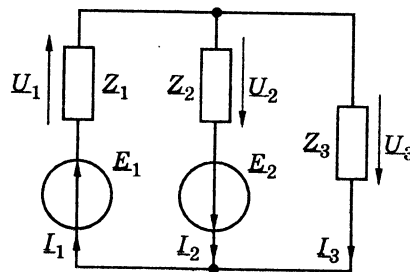


Рис. 3.67. До прикладу 3.23

Представимо параметри джерел ЕРС і розраховані значення (миттєві та комплексні амплітудні) струмів і напруг (див. приклади 3.15 і 3.20) у вигляді таблиці (табл. 3.16, другий і третій стовпці). Розрахуємо і занесемо в останній стовпець табл. 3.16 необхідні для розрахунку потужностей комплексні діючі значення джерел ЕРС.

Миттєві потужності джерел з урахуванням вибраних напрямів струмів в них і заданих напрямів ЕРС джерел (рис. 3.67)

$$p_{E1}(t) = e_1(t)i_1(t) = \left[ 10 \cos \left( 10^6 t + \frac{3\pi}{4} \right) \right] \left[ 7,07 \cdot 10^{-3} \cos \left( 10^6 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= 35,35 \cdot 10^{-3} \left[ \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{5\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \right] =$$

$$= 25 \cdot 10^{-3} + 35,35 \cdot 10^{-3} \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{5\pi}{4} \right) \text{ Вт};$$

$$p_{E1}(t) = 25 + 35,35 \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{5\pi}{4} \right) \text{ мВт};$$

$$p_{E2}(t) = e_2(t)i_2(t) = \left[ 10 \cos \left( 10^6 t - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 3,535 \cdot 10^{-3} \cos (10^6 t + \pi) \right] =$$

$$= 17,675 \cdot 10^{-3} \left[ \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{3\pi}{4} \right) + \cos \frac{5\pi}{4} \right] =$$

$$= -12,5 \cdot 10^{-3} + 17,675 \cdot 10^{-3} \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{3\pi}{4} \right) \text{ Вт};$$

$$p_{E2}(t) = -12,5 + 17,675 \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{3\pi}{4} \right) \text{ мВт}.$$

Відмітною особливістю миттєвої потужності другого джерела є негативне значення постійної складової, тобто активної потужності. Це означає, що дане джерело працює в режимі споживання енергії.

Обчислимо сумарні миттєві потужності пасивних елементів  $p_{\Sigma Z}(t)$  і джерел ЕРС  $p_{\Sigma E}(t)$ :

$$p_{\Sigma Z}(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) =$$

$$= 25 \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{2} \right) + 12,5 + 12,5 \cos (2 \cdot 10^6 t) + 62,49 \cos (2 \cdot 10^6 t + 3,785) =$$

$$= 12,5 + 39,5 \cos (2 \cdot 10^6 t - 2,82) \text{ мВт};$$

$$p_{\Sigma E}(t) = p_{E1}(t) + p_{E2}(t) =$$

$$= 25 + 35,35 \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{5\pi}{4} \right) - 12,5 + 17,675 \cos \left( 2 \cdot 10^6 t + \frac{3\pi}{4} \right) =$$

$$= 12,5 + 39,5 \cos (2 \cdot 10^6 t - 2,82) \text{ мВт}.$$

Щоб підсумувати у виразах для  $p_{\Sigma Z}(t)$  і  $p_{\Sigma E}(t)$  гармонічні доданки, застосуємо комплексне подання миттєвих потужностей:

$$25e^{j\pi/2} + 12,5 + 62,49e^{j3,785} = 39,5e^{-j2,82};$$

$$35,35e^{j5\pi/4} + 17,675e^{j3\pi/4} = 39,5e^{-j2,82}.$$

Рівність  $p_{\Sigma Z}(t)$  і  $p_{\Sigma E}(t)$  підтверджує справедливість рівняння балансу миттєвих потужностей (3.90) для даного кола.

Складемо і розрахуємо для даного кола рівняння балансу комплексних потужностей (3.93):

$$\underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_2^2 = \underline{E}_1 I_1^* + \underline{E}_2 I_2^*;$$

$$\underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_2^2 =$$

$$= -j10^3 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 + 2 \cdot 10^3 \cdot (2,5 \cdot 10^{-3})^2 + j2 \cdot 10^{-3} \cdot (5,59 \cdot 10^{-3})^2 =$$

$$= 12,5 \cdot 10^{-3} + j37,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт};$$

$$\underline{E}_1 I_1^* + \underline{E}_2 I_2^* = 7,07e^{j3\pi/4} \cdot 5 \cdot 10^{-3} e^{-j\pi/2} + 7,07e^{-j\pi/4} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-j\pi} =$$

$$= 35,35 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/4} + 17,67 \cdot 10^{-3} e^{j3\pi/4} =$$

$$= 25 \cdot 10^{-3} + j25 \cdot 10^{-3} - 12,5 \cdot 10^{-3} + j12,5 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 12,5 \cdot 10^{-3} + j37,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Баланс комплексних потужностей підтверджує баланси активних (12,5 мВт) і реактивних (37,5 мВт) потужностей.

### 3.13. Режим передачі максимальної активної потужності від джерела до навантаження в колах синусоїдного струму

Іноді достатньо обмежитися аналізом енергетичних співвідношень для одного з комплексних опорів кола, котре розглядається як навантаження ( $\underline{Z}_н = R_н + jX_н$ ), у разі зміни величин його активної  $R_н$  і реактивної  $X_н$  складових. У малопотужних радіотехнічних пристроях актуальною є окрема постановка такої задачі, яка полягає в узгодженні комплексного опору навантаження з іншою частиною схеми, котра розглядається як активний двополюсник, за критерієм досягнення максимальної активної потужності у навантаженні<sup>13</sup>. Постановка і розв'язання такої задачі для режиму постійного струму наведені в підрозд. 2.8.

Задача узгодження навантаження з активним двополюсником синусоїдного струму за критерієм досягнення максимальної активної потужності полягає у визначенні комплексного опору

<sup>13</sup> Приклади розв'язання задач узгодження в радіотехніці: реалізація режимів передачі максимальної активної потужності від малопотужного передавального пристрою (активний двополюсник) в антену (навантаження), що випромінює, або від приймальної антени (активний двополюсник) у вхідні кола приймального пристрою (навантаження).

навантаження  $\underline{Z}_{н.узг} = R_{н.узг} + jX_{н.узг}$ , коли активна потужність  $P_{Ан} = R_{н.узг} I_{н}^2$  максимальна ( $I_{н}$  — діюче значення струму в навантаженні). При цьому параметри активного двополюсника «А» (вхідний комплексний опір  $\underline{Z}_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$  і комплексне діюче значення напруги холостого ходу  $\underline{U}_{х.х}$ ) вважаються відомими. Таку постановку задачі ілюструє рис. 3.68, а.

Заміна активного двополюсника «А» еквівалентними джерелами напруги (рис. 3.68, б) або струму (рис. 3.68, в) дозволяє виразити активну потужність у навантаженні через задані параметри двополюсника і параметри навантаження, що змінюються, співвідношеннями:

$$P_{Ан}(R_{н}, X_{н}) = R_{н} I_{н}^2 = \frac{R_{н} U_{х.х}^2}{(R_{вх} + R_{н})^2 + (X_{вх} + X_{н})^2}; \quad (3.94)$$

$$P_{Ан}(G_{н}, B_{н}) = G_{н} U_{н}^2 = \frac{G_{н} I_{к.з}^2}{(G_{вх} + G_{н})^2 + (B_{вх} + B_{н})^2}. \quad (3.95)$$

Слід підкреслити, що у виразах (3.94), (3.95) та у співвідношеннях, які здобуватимуться нижче,  $R_{н} \neq 1/G_{н}$ ,  $X_{н} \neq 1/B_{н}$ ,  $R_{вх} \neq 1/G_{вх}$ ,  $X_{вх} \neq 1/B_{вх}$ . Це виходить із співвідношень між відповідними комплексними опорами і провідностями

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{1}{\underline{Y}_{вх}}; \quad \underline{Z}_{н} = \frac{1}{\underline{Y}_{н}}$$

і матеріалу підрозд. 3.8.

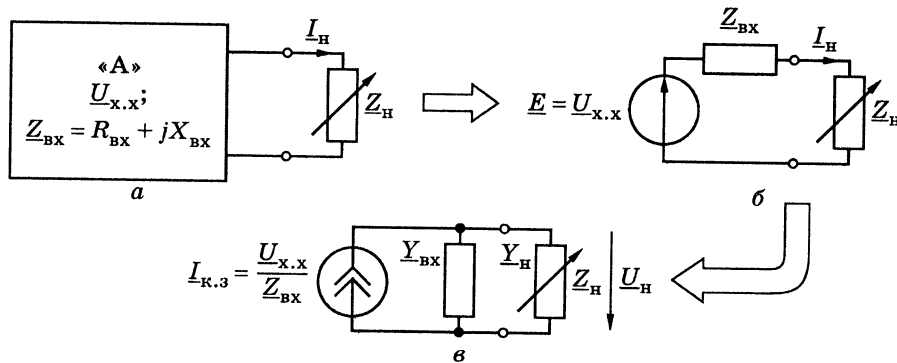


Рис. 3.68. Постановка і методика розв'язання задачі узгодження навантаження з активним двополюсником синусоїдного струму за критерієм досягнення максимальної активної потужності

Щоб визначити  $R_{н.узг}$  і  $X_{н.узг}$  (або  $G_{н.узг}$  і  $B_{н.узг}$ ), необхідно дослідити на екстремум функції двох змінних  $P_{Ан}(R_{н}, X_{н})$  або  $P_{Ан}(G_{н}, B_{н})$ , використовуючи вирази (3.94) і (3.95). Оскільки ці функції дуальні, можна обмежитися аналізом однієї з них, наприклад  $P_{Ан}(R_{н}, X_{н})$ . Аналіз спрощується, оскільки змінні  $R_{н}$ ,  $X_{н}$  не залежать одна від одної. Тому екстремуму функції  $P_{Ан}(R_{н}, X_{н})$  відповідають значення  $R_{н.узг}$  і  $X_{н.узг}$ , для яких незалежно виконуються умови:

$$\frac{\partial P_{Ан}(R_{н}, X_{н})}{\partial X_{н}} = 0; \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial P_{Ан}(R_{н}, X_{н})}{\partial R_{н}} = 0. \quad (3.97)$$

Співвідношення (3.96) приводить до рівняння

$$\frac{\partial P_{Ан}(R_{н}, X_{н})}{\partial X_{н}} = \frac{-R_{н} U_{х.х}^2 2(X_{вх} + X_{н.узг})}{[(R_{вх} + R_{н})^2 + (X_{вх} + X_{н.узг})^2]^2} = 0,$$

розв'язком якого є величина реактивного опору узгодженого навантаження

$$X_{н.узг} = -X_{вх}. \quad (3.98)$$

Вираз (3.94) після підстановки до нього співвідношення для  $X_{н.узг}$  матиме вигляд:

$$P_{Ан}(R_{н}, X_{н.узг}) = \frac{R_{н} U_{х.х}^2}{(R_{вх} + R_{н})^2}. \quad (3.99)$$

Формула (3.99) для  $P_{Ан}(R_{н}, X_{н.узг})$  збігається з виразом (2.59), одержаним при аналізі режиму передачі максимальної потужності від джерела до навантаження в колах постійного струму. Це дозволяє, не розв'язуючи рівняння (3.97), використати остаточний результат аналізу режиму узгодження (див. розв'язок рівняння (2.65)):

$$R_{н.узг} = R_{вх}. \quad (3.100)$$

Враховуючи дуальність виразів (3.94) і (3.95), активна і реактивна провідності узгодженого навантаження для еквівалентного джерела струму (рис. 3.68, в) становитимуть:

$$G_{н.узг} = G_{вх}; \quad B_{н.узг} = -B_{вх}. \quad (3.101)$$

Після підстановки у вирази (3.94) і (3.95) відповідно  $R_{н.узг} = R_{вх}$  і  $X_{н.узг} = -X_{вх}$ ,  $G_{н.узг} = G_{вх}$  і  $B_{н.узг} = -B_{вх}$  виходить співвідношення для розрахунку максимальної активної потужності у навантаженні в колах синусоїдного струму:

$$P_{Ан\max} = \frac{U_{х.х}^2}{4R_{вх}} = \frac{I_{к.з}^2}{4G_{вх}}.$$

Формули (3.98), (3.100) і (3.101) дозволяють записати загальні співвідношення між узгодженими комплексними опорами і провідностями навантажень і вхідними комплексними опорами і провідностями активного двополюсника:

$$\underline{Z}_{н.узг} = R_{н.узг} + jX_{н.узг} = R_{вх} - jX_{вх} = \underline{Z}_{вх}^*; \quad (3.102)$$

$$\underline{Y}_{н.узг} = G_{н.узг} - jB_{н.узг} = G_{вх} + jB_{вх} = \underline{Y}_{вх}^*. \quad (3.103)$$

Отже, для передачі максимальної активної потужності до навантаження в колах синусоїдного струму необхідно, щоб комплексний опір (комплексна провідність) навантаження і комплексний вхідний опір (комплексна вхідна провідність) активного двополюсника були комплексно спряженими величинами.

Тобто необхідною умовою узгодження за критерієм максимальної активної потужності у навантаженні в колах синусоїдного струму є наявність резонансних режимів у послідовному колі  $\underline{Z}_{вх}$ ,  $\underline{Z}_{н.узг}$  для еквівалентного джерела напруги (рис. 3.68, б) і в паралельному колі  $\underline{Y}_{вх}$ ,  $\underline{Y}_{н.узг}$  для еквівалентного джерела струму (рис. 3.68, в). При цьому еквівалентний опір кола в першому випадку і еквівалентна провідність кола у другому будуть активними і становитимуть:

$$\underline{Z}_e = 2R_{вх}; \quad \underline{Y}_e = 2G_{вх}.$$

У режимі узгодження значення ККД як відношення активної потужності навантаження до активної потужності джерела для схем з джерелом напруги (рис. 3.68, б) і джерелом струму (рис. 3.68, в) становитимуть:

$$\eta_E = \frac{R_{н.узг} I_n^2}{U_{х.х} I_n \cos \varphi_E} = \frac{R_{н.узг} I_n}{U_{х.х} \cos \varphi_E} = \frac{R_{н.узг} U_{х.х}}{U_{х.х} 2R_{вх} \cos \varphi_E} = 0,5;$$

$$\eta_I = \frac{G_{н.узг} U_n^2}{U_n I_{к.з} \cos \varphi_I} = \frac{G_{н.узг} U_n}{I_{к.з} \cos \varphi_I} = \frac{G_{н.узг} I_{к.з}}{I_{к.з} 2G_{вх} \cos \varphi_I} = 0,5,$$

де  $\varphi_E$  — зсув фаз між ЕРС джерела напруги і струмом;  $\varphi_I$  — зсув фаз між напругою і струмом джерела струму;  $\varphi_E = \varphi_I = 0$ , враховуючи резонансний режим за умови узгодження.

Оскільки в режимі узгодження ККД порівняно невеликий ( $\eta_E = \eta_I = 0,5$ , тобто 50 %), цей режим знаходить застосування у так званих малопотужних пристроях, для яких величина ККД не має великого значення.

Для потужних пристроїв, наприклад радіопередавальних пристроїв потужністю порядку десятків–сотень кіловат і більше, визначальне значення має ККД. За умови збереження резонансного режиму в еквівалентних схемах заміщення потужних пристроїв (як активних двополюсників) і навантажень можна скористатися результатами аналізу ККД в підрозд. 2.8 для режиму постійного струму (див. рис. 2.49 і 2.50). Це дозволяє зробити такі висновки:

- щоб збільшити ККД в потужних радіотехнічних пристроях, які за своїми параметрами доцільніше представити еквівалентною схемою з джерелом ЕРС, необхідно забезпечити виконання умови  $R_n \gg R_{вх}$ ;
- у пристроях, для яких доцільніші еквівалентні схеми з джерелом струму, ККД зростає, якщо  $R_n \ll R_{вх}$ .

Якщо умови (3.102) і (3.103) не виконуються і не можна, з погляду технічної реалізації, відповідно змінити опір навантаження, між джерелом і навантаженням вмикаються узгоджувальні пристрої. Щоб ці пристрої не вносили додаткових втрат, в них використовуються переважно реактивні елементи. В розд. 4 розглядається можливість застосування для узгодження трансформаторів, а в розд. 5 — зв'язаних коливальних контурів. Окремим способом узгодження активних опорів  $R_n \neq R_{вх}$  і  $G_n \neq G_{вх}$  з джерелом є послідовно-паралельне увімкнення двох відповідно розрахованих реактивних елементів ( $jX_1$ ;  $jX_2$  і  $-jB_1$ ;  $-jB_2$ ) між активним двополюсником і навантаженням (рис. 3.69).

Реактивні опори (рис. 3.69, а) і реактивні провідності (рис. 3.69, б) визначаються із умови узгодження активних двополюсників з еквівалентними комплексними навантаженнями  $\underline{Z}_{н_e}$  і  $\underline{Y}_{н_e}$ .

Схеми, зображені на рис. 3.69, є дуальними. Це підтверджується розрахунком еквівалентного комплексного опору  $\underline{Z}_{н_e}$  для



однієї з них (рис. 3.69, а) і еквівалентної комплексної провідності  $Y_{He}$  — для іншої (рис. 3.69, б):

$$\begin{aligned} Z_{He} &= jX_1 + \frac{R_H jX_2}{R_H + jX_2} = \\ &= \frac{R_H X_2^2}{R_H^2 + X_2^2} + j \left( X_1 + \frac{R_H^2 X_2}{R_H^2 + X_2^2} \right) = R_{He} + jX_{He}; \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} Y_{He} &= -jB_1 + \frac{1}{1/G_H + j1/B_2} = \\ &= \frac{G_H B_2^2}{G_H^2 + B_2^2} - j \left( B_1 + \frac{G_H^2 B_2}{G_H^2 + B_2^2} \right) = G_{He} - jB_{He}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

З умови спряженості комплексного вхідного опору джерела (рис. 3.69, а) та еквівалентного комплексного опору навантаження виходить два рівняння:

$$R_{He} = \frac{R_H X_2^2}{R_H^2 + X_2^2} = R_{Bx}; \quad (3.106)$$

$$X_{He} = X_1 + \frac{R_H^2 X_2}{R_H^2 + X_2^2} = -X_{Bx}. \quad (3.107)$$

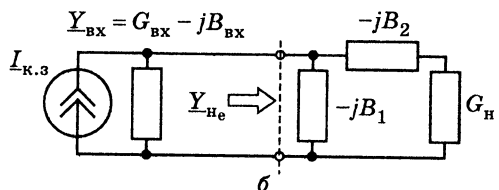
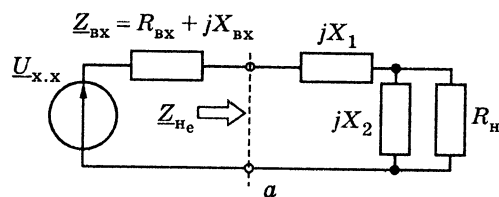


Рис 3.69. Узгодження:

а — опору  $R_H \neq R_{Bx}$ ;  
б — провідності  $G_H \neq G_{Bx}$  навантаження з активним двополюсником

З рівняння (3.106) знаходять значення узгоджувального реактивного опору  $X_2$  у вигляді:

$$X_2 = \pm R_H \sqrt{\frac{R_{Bx}}{R_H - R_{Bx}}}. \quad (3.108)$$

Після підстановки до рівняння (3.107) знайденого співвідношення (3.108) для  $X_2$  отримують вираз для узгоджувального реактивного опору  $X_1$ :

$$X_1 = -(X_{Bx} \pm \sqrt{R_{Bx}(R_H - R_{Bx})}). \quad (3.109)$$

Формули (3.108) і (3.109) показують, що даний спосіб узгодження можливий, якщо виконується умова  $R_H > R_{Bx}$ .

Дуальність виразів (3.104) і (3.105) дозволяє без виведення записати формули для розрахунку провідностей узгоджувальних елементів (рис. 3.69, б):

$$B_2 = \pm G_H \sqrt{\frac{G_{Bx}}{G_H - G_{Bx}}}; \quad (3.110)$$

$$B_1 = -(B_{Bx} \pm \sqrt{G_{Bx}(G_H - G_{Bx})}). \quad (3.111)$$

Зі співвідношень (3.110) і (3.111) виходить умова фізичної реалізованості такого узгодження:

$$G_H > G_{Bx}.$$

**Приклад 3.24.** Визначити параметри навантаження, узгодженого з активним двополюсником (рис. 3.70, а), отриманим у прикладі 3.17. Розрахувати узгоджений режим у навантаженні (струм, активну і реактивну потужності).

*Розв'язання.* Скористаємося розрахованими в прикладі 3.17 параметрами даного активного двополюсника:

$$\underline{U}_{mx,x} = 7,07 e^{j\pi/2} \text{ В}; \quad \underline{Z}_{Bx} = 1 + j1 \text{ кОм}.$$

Визначимо узгоджене навантаження як опір, комплексно спряжений вхідному опору даного активного двополюсника:

$$\underline{Z}_{н,узг} = \underline{Z}_{Bx}^* = 1 - j1 \text{ кОм}.$$

Розрахуємо комплексну амплітуду струму в узгодженому навантаженні (рис. 3.70, б):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{mн} &= \frac{\underline{U}_{mx,x}}{\underline{Z}_{Bx} + \underline{Z}_{н,узг}} = \frac{7,07 e^{j\pi/2}}{(1 + j \cdot 1 + 1 - j \cdot 1) \cdot 10^3} = \\ &= 3,535 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/2} \text{ А} = 3,535 e^{j\pi/2} \text{ мА}. \end{aligned}$$

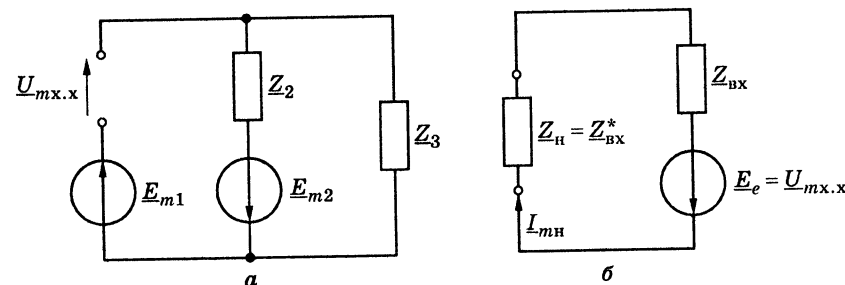


Рис. 3.70. До прикладу 3.24

Визначимо активну і реактивні потужності в узгодженому навантаженні як дійсну й уявну частини комплексної потужності:

$$\begin{aligned} P_{S_H} &= Z_H I_H^2 = (1 - j1) \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot (7,07 \cdot 10^{-3})^2 = \\ &= (6,25 - j6,25) \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 6,25 - j6,25 \text{ мВт}; \\ P_{A_H} &= 6,25 \text{ мВт}; P_{Q_H} = -6,25 \text{ мВт}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.25.** Узгодити активний двополюсник, схема і параметри якого наведені в прикладі 3.24, з активним опором  $R_H = 400 \text{ Ом}$ , використовуючи схеми з додатковими узгоджувальними реактивними елементами.

*Розв'язання.* Оскільки  $R_H < R_{вх}$ , для узгодження застосуємо схему, зображену на рис. 3.69, б, і співвідношення (3.110) і (3.111) для розрахунку узгоджувальних елементів. Попередньо розрахуємо значення провідності навантаження, а також активних і реактивних складових вхідної комплексної провідності двополюсника:

$$\begin{aligned} G_H &= 1/R_H = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}; \\ Y_{вх} &= \frac{1}{Z_{вх}} = \frac{1}{(1 + j1) \cdot 10^3} = (0,5 - j0,5) \cdot 10^{-3} \text{ См}; \\ G_{вх} &= 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}; B_{вх} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}. \end{aligned}$$

Обчислимо провідності узгоджувальних елементів:

$$\begin{aligned} B_2 &= \pm G_H \sqrt{\frac{G_{вх}}{G_H - G_{вх}}} = \pm 2,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{(2,5 - 0,5) \cdot 10^{-3}}} = \pm 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ См}; \\ B_1 &= -(B_{вх} \pm \sqrt{G_{вх}(G_H - G_{вх})}) = \\ &= -(0,5 \cdot 10^{-3} \pm \sqrt{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (2,5 - 0,5) \cdot 10^{-3}}) = -(0,5 \pm 1) \cdot 10^{-3} \text{ См}. \end{aligned}$$

Розглянемо обидва варіанти розв'язку:

$$1) B_1' = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}; B_2' = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$2) B_1'' = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}; B_2'' = -1,25 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Для заданої в прикладах 3.15–3.17 кутової частоти  $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$  розрахуємо параметри узгоджувальних індуктивностей та ємностей:

$$1) C_1' = \frac{|B_1'|}{\omega} = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 1,5 \text{ нФ}; L_2' = \frac{1}{\omega B_2'} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 0,8 \text{ мГн};$$

$$2) L_1'' = \frac{1}{\omega B_1''} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 2 \text{ мГн}; C_2'' = \frac{|B_2''|}{\omega} = 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 1,25 \text{ нФ}.$$

### 3.14. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Пояснити основні параметри, що описують синусоїдні коливання: амплітуда, фаза (повна і початкова), період, частота (циклічна і кутова).
2. Що називається часовою діаграмою?
3. Що таке фазовий зсув струму відносно напруги? Чи залежить фазовий зсув від вибору початку відліку часу?
4. Зобразити часові діаграми синусоїдних струму  $i(t) = 2 \cos \omega t \text{ А}$  і напруги  $u(t) = 2 \cos(\omega t - \pi/3) \text{ В}$ . Яке з цих коливань є випереджаючим?
5. Як називаються фазові зсуви, кратні  $\pi/2$ ? Пояснити їх значення.
6. Дати визначення діючого значення синусоїдного струму. Яке співвідношення між діючим і амплітудним значеннями?
7. Пояснити поняття середнього випрямленого значення синусоїдного струму. Розрахувати однонапівперіодне і двонапівперіодне середні значення синусоїдного струму, якщо амплітуда струму становить  $0,5 \text{ А}$ .  
*Відповідь:*  $I_{B1} = 0,159 \text{ А}; I_{B2} = 0,318 \text{ А}$ .
8. Коло складається з джерела ЕРС  $e(t) = 100 \sin 400t \text{ В}$ , опору  $R = 50 \text{ Ом}$  та індуктивності  $L = 0,1 \text{ Гн}$ , сполучених послідовно. Вважаючи струм синусоїдним, знайти для моменту  $t = \pi/200 \text{ с}$  миттєві значення струму, напруг на елементах і потужностей, що підводяться до них; визначити діючі значення струму і напруг на елементах.  
*Відповідь:*  $-0,975 \text{ А}; -48,8 \text{ В}; 48,8 \text{ В}; 47,5 \text{ Вт}; -47,5 \text{ Вт}; 1,1 \text{ А}; 55 \text{ В}; 44 \text{ В}$ .
9. Зберігши умову попередньої задачі, замінити індуктивність ємністю  $100 \text{ мкФ}$ .  
*Відповідь:*  $0,8 \text{ А}; 40 \text{ В}; -40 \text{ В}; 32 \text{ Вт}; -32 \text{ Вт}; 1,26 \text{ А}; 63 \text{ В}; 31,5 \text{ В}$ .
10. Що називається комплексною амплітудою, комплексним діючим значенням синусоїдного струму, напруги, ЕРС?
11. Що таке векторна діаграма?
12. Як перейти від миттєвих значень до комплексних і зворотно?
13. Два комплексних опори сполучені послідовно. Миттєві значення напруг на цих опорах дорівнюють:  $u_1(t) = 10 \cos(\omega t + \pi/3) \text{ В}$ ,  $u_2(t) = 5 \cos(\omega t + \pi/12) \text{ В}$ . Знайти комплексну амплітуду і миттєве значення сумарної напруги.  
*Відповідь:*  $\underline{U}_m = 14 e^{j45,5^\circ} \text{ В}; u(t) = 14 \cos(\omega t + 45,5^\circ) \text{ В}$ .
14. Для вузла кола (див. рис. 3.19) вибрано напрями трьох струмів у вітках і задані миттєві значення двох з них:  $i_1(t) = 10 \sin \omega t \text{ мА}$ ,  $i_2(t) = 10 \cos(\omega t + \pi/4) \text{ мА}$ . Визначити струм  $i_3(t)$ , побудувати часову діаграму для цього струму і векторну діаграму струмів для даного вузла.  
*Відповідь:*  $i_3(t) = 7,65 \cos(\omega t + 67,5^\circ) \text{ мА}$ .

15. До кола, що складається з послідовно сполучених опору  $R = 1$  кОм і ємності  $C = 1$  нФ, прикладено напругу  $u(t) = 10 \sin(10^6 t)$  В. Знайти струм у колі, активну, реактивну і повну потужності.

*Відповідь:*  $i(t) = 7,07 \sin(10^6 t + \pi/4)$  мА; 0,025 Вт; -0,025 ВАр; 0,0353 ВА.

16. До кола, що складається з послідовно сполучених опору  $R = 8$  кОм та індуктивності  $L = 6$  мГн, прикладено напругу  $u(t) = 141 \cos(10^6 t + \pi/3)$  В. Знайти у колі струм, активну, реактивну і повну потужності.

*Відповідь:*  $i(t) = 14,1 \cos(10^6 t + 0,41)$  мА; 0,8 Вт; 0,6 ВАр; 1 ВА.

17. До послідовного кола ( $R = 20$  Ом,  $L = 100$  мГн і  $C = 50$  мкФ) прикладено напругу  $u(t) = 14,14 \sin(377t)$  В. Обчислити комплексні діючі значення струму і напруги на елементах  $R$ ,  $L$  і  $C$ , побудувати векторну діаграму.

*Відповідь:*  $0,396e^{j37,5^\circ}$  А;  $7,92e^{j37,5^\circ}$  В;  $14,95e^{j127,5^\circ}$  В;  $21e^{-j52,5^\circ}$  В.

18. Комплексний опір ділянки кола дорівнює  $3 + j5$  Ом. Обчислити активну і реактивну провідності.

*Відповідь:*  $G = 0,082$  См;  $B = 0,147$  См.

19. Комплексна провідність ділянки кола дорівнює  $0,2 - j0,2$  См. Обчислити активний і реактивний опори.

*Відповідь:*  $R = 2,5$  Ом;  $X = 2,5$  Ом.

20. На ділянці кола задано комплексні діючі значення напруги  $\underline{U} = 30$  В і струму  $\underline{I} = 6 + j0,9$  А. Знайти комплексний опір і комплексну провідність кола.

*Відповідь:*  $\underline{Z} = 4,95e^{-j8,5^\circ}$  Ом;  $\underline{Y} = 0,202e^{j8,5^\circ}$  См.

21. Щоб визначити параметри котушки індуктивності  $R$ ,  $L$ , проведено вимірювання прикладеної напруги (вольтметром) і струму (амперметром) у двох режимах: а)  $f_1 = 0$ ,  $U_1 = 100$  В,  $I_1 = 1$  А; б)  $f_2 = 500$  Гц,  $U_2 = 100$  В,  $I_2 = 0,5$  А. Знайти параметри котушки, а також показання амперметра при  $f_3 = 1000$  Гц,  $U_3 = 100$  В.

*Відповідь:*  $R = 100$  Ом;  $L = 55$  мГн;  $I = 0,277$  А.

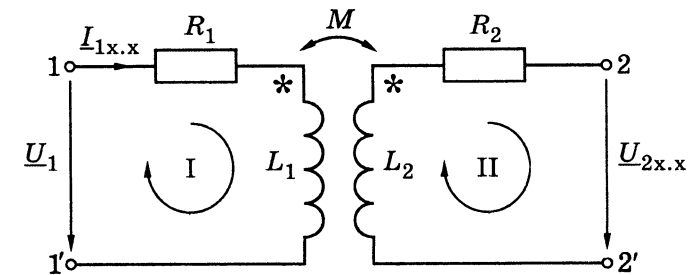
22. Обчислити струм у діагональній вітці мостової схеми (див. рис. 3.50, а), якщо  $\underline{E} = 10$  В,  $\underline{Z}_1 = 20 + j10$  Ом,  $\underline{Z}_2 = -j20$  Ом,  $\underline{Z}_3 = 20$  Ом,  $\underline{Z}_4 = -j10$  Ом,  $\underline{Z}_5 = 10$  Ом.

*Відповідь:*  $\underline{I} = 0,09 - j0,34$  А.



## КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ ІЗ ВЗАЄМНИМИ ІНДУКТИВНОСТЯМИ

- Рівняння для кіл із взаємними індуктивностями в комплексній формі. Особливості розрахунку кіл з індуктивними зв'язками
- Еквівалентні перетворення ділянок кіл із взаємними індуктивностями
- Лінійний трансформатор
- Схеми заміщення трансформатора



$$n = \frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M}$$



М. Доливо-Добровольський



П. Яблочков



Н. Тесла

#### 4.1. Рівняння для кіл із взаємними індуктивностями в комплексній формі.

##### Особливості розрахунку кіл з індуктивними зв'язками

У попередньому розділі для спрощення викладу розглядалися кола без індуктивних зв'язків. Оскільки індуктивні кола мають широке практичне застосування (спільні магнітні поля двох і більше котушок самоіндукції визначають принцип дії таких пристроїв, як трансформатори, зв'язані коливальні контури, варіометри та ін.), режим синусоїдного струму в таких колах потребує окремого розгляду.

Основні співвідношення для довільних законів зміни струмів в індуктивно зв'язаних колах отримані в розд. 1, п. 1.5.4. Нехай струми в двох індуктивно зв'язаних елементах (див. рис. 1.13) змінюються за синусоїдним законом з однаковою частотою:

$$i_1 = I_{m1} \cos(\omega t + \psi_{i1}); i_2 = I_{m2} \cos(\omega t + \psi_{i2}).$$

Миттєві значення напруг на цих елементах, з урахуванням співвідношень (1.26) і (1.27), становитимуть:

$$u_{L1} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = -\omega L_1 I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) \mp \omega M I_{m2} \sin(\omega t + \psi_{i2}) = \omega L_1 I_{m1} \cos\left(\omega t + \psi_{i1} + \frac{\pi}{2}\right) \pm \omega M I_{m2} \cos\left(\omega t + \psi_{i2} + \frac{\pi}{2}\right); \quad (4.1)$$

$$u_{L2} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = -\omega L_2 I_{m2} \sin(\omega t + \psi_{i2}) \mp \omega M I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) = \omega L_2 I_{m2} \cos\left(\omega t + \psi_{i2} + \frac{\pi}{2}\right) \pm \omega M I_{m1} \cos\left(\omega t + \psi_{i1} + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.2)$$

Застосування методу комплексних амплітуд для підсумовування синусоїдних доданків у виразах (4.1) і (4.2) призводить до запису миттєвих значень напруг у вигляді:

$$u_{L1} = \text{Re}[U_{mL1} e^{j\omega t}]; u_{L2} = \text{Re}[U_{mL2} e^{j\omega t}]. \quad (4.3)$$

Комплексні амплітуди напруг у виразах (4.3) пов'язані з комплексними амплітудами струмів співвідношеннями:

$$U_{mL1} = j\omega L_1 I_{m1} \pm j\omega M I_{m2} = Z_{L1} I_{m1} \pm Z_M I_{m2}; \quad (4.4)$$

$$U_{mL2} = j\omega L_2 I_{m2} \pm j\omega M I_{m1} = Z_{L2} I_{m2} \pm Z_M I_{m1}, \quad (4.5)$$

де  $I_{m1} = I_{m1} e^{j\psi_{i1}}$ ;  $I_{m2} = I_{m2} e^{j\psi_{i2}}$  — комплексні амплітуди заданих струмів;  $Z_{L1} = j\omega L_1$ ;  $Z_{L2} = j\omega L_2$  — комплексні опори індуктивностей;  $Z_M = j\omega M = jX_M$  — комплексний опір взаємоіндукції;  $X_M = \omega M$  — опір взаємоіндукції.

У співвідношеннях (4.1), (4.2), (4.4) і (4.5) відповідно миттєві значення напруг взаємоіндукції (записані із застосуванням функції косинуса), а також їх комплексні амплітуди при узгодженому увімкненні збігаються за знаком з доданками напруг самоіндукції, а при зустрічному увімкненні мають протилежні знаки. Схеми ділянки розглядуваного кола для узгодженого і зустрічного увімкнень з позначенням комплексних амплітуд струмів і напруг показані на рис. 4.1.

Здобуті в комплексному вигляді співвідношення (4.4), (4.5) між напругами і струмами для двох індуктивно зв'язаних елементів можна застосовувати до кіл з будь-якою кількістю взаємних індуктивностей. Складаючи для таких кіл рівняння згідно з другим законом Кірхгофа, необхідно у виразі для комплексної напруги на кожному індуктивно зв'язаному елементі, крім комплексної напруги самоіндукції, записувати всі комплексні напруги взаємоіндукції з урахуванням їх знаків відповідно до характеру увімкнення (узгоджене або зустрічне).

Для розрахунку лінійних кіл із взаємними індуктивностями комплексним методом, крім методу рівнянь Кірхгофа (див. приклад 4.1), застосовують без додаткових перетворень методи контурних струмів (див. приклад 4.2) і накладання. Для розв'язання окремих задач використовують прийоми еквівалентних перетворень і метод еквівалентного генератора (підрозд. 4.2 і 4.3). Застосування методу вузлових напруг у комплексному вигляді для розрахунку кіл з взаємними індуктивностями без додаткових перетворень ускладнене.

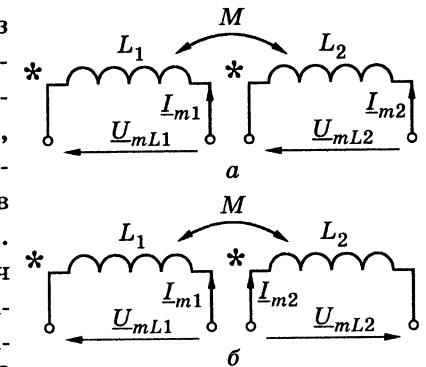
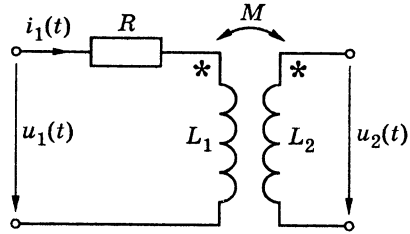


Рис. 4.1. Ділянка кола із взаємною індуктивністю з позначенням комплексних амплітуд струмів і напруг: а — для узгодженого; б — зустрічного увімкнень

**Приклад 4.1.** Для кола, схема якого зображена на рис. 4.2, визначити миттєве значення напруги  $u_2(t)$  на розімкнених затискачах індуктивності  $L_2 = 100 \text{ мГн}$ , якщо  $u_1(t) = 10 \cos(10^6 t + \pi/4) \text{ В}$ ;  $k = 0,707$ ;  $L_1 = 1 \text{ мГн}$ ;  $R = 1 \text{ кОм}$ .



**Рис. 4.2.** Схема кола до прикладу 4.1

амплітуду заданої напруги і визначимо необхідні для розрахунків комплексні опори елементів кола:

$$\underline{U}_{m1} = 10e^{j\pi/4} \text{ В}; \underline{Z}_{L1} = j\omega L_1 = j10^6 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} = j1 \text{ кОм};$$

$$\underline{Z}_M = j\omega M = j10^6 \cdot 0,707 \cdot 10^{-3} = j7,07 \cdot 10^3 \text{ Ом} = j7,07 \text{ кОм}.$$

Розрахуємо комплексну амплітуду струму:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_{m1}}{R + \underline{Z}_{L1}} = \frac{10e^{j\pi/4}}{(1 + j1) \cdot 10^3} = 7,07 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 7,07 \text{ мА}.$$

Враховуючи узгоджений характер увімкнення індуктивно зв'язаних елементів і відсутність струму в розімкнених затискачах індуктивності  $L_2$ , визначимо комплексну амплітуду шуканої напруги:

$$\underline{U}_{m2} = \underline{Z}_M \underline{I}_{m1} = j7,07 \cdot 10^3 \cdot 7,07 \cdot 10^{-3} = j50 \text{ В}.$$

Запишемо миттєве значення напруги  $u_2(t)$ :

$$u_2(t) = 50 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}.$$

**Приклад 4.2.** Скласти у загальному вигляді необхідну і достатню кількість рівнянь для визначення у комплексному вигляді струмів кола (рис. 4.3) методом рівнянь Кірхгофа. Параметри елементів кола, а також комплексна амплітуда і частота джерела ЕРС задані.

**Розв'язання.** Виберемо умовні позитивні напрями для комплексних амплітуд струмів у схемі, пронумеруємо вузли, виберемо два незалежних контури і напрями обходу в них (рис. 4.3), після чого складемо необхідну і достатню кількість незалежних рівнянь у комплексній формі:

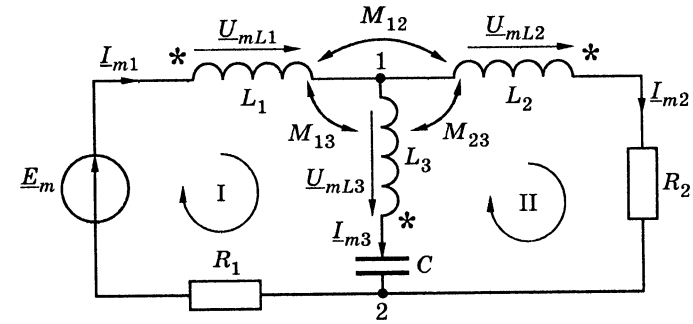
— згідно з першим законом Кірхгофа для вузла 1

$$\underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2} - \underline{I}_{m3} = 0; \quad (4.6)$$

**Розв'язання.** Використовуючи співвідношення (1.29) для коефіцієнта зв'язку  $k$ , визначимо взаємну індуктивність:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,707\sqrt{100 \cdot 10^{-6}} = 7,07 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 7,07 \text{ мГн}.$$

Щоб розв'язати задачу комплексним методом, запишемо комплексну



**Рис. 4.3.** Схема кола до прикладу 4.2

— згідно з другим законом Кірхгофа

$$\text{для контуру I } \underline{U}_{mL1} + \underline{U}_{mL3} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_{m3} + R_1 \underline{I}_{m1} = \underline{E}_m; \quad (4.7)$$

$$\text{для контуру II } \underline{U}_{mL2} + R_2 \underline{I}_{m2} - \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_{m3} - \underline{U}_{mL3} = 0. \quad (4.8)$$

Запишемо вирази для комплексних амплітуд напруг на індуктивностях, використовуючи значення відповідних індуктивностей, взаємних індуктивностей і враховуючи характер увімкнення:

$$\underline{U}_{mL1} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1} - j\omega M_{12} \underline{I}_{m2} - j\omega M_{13} \underline{I}_{m3}; \quad (4.9)$$

$$\underline{U}_{mL2} = j\omega L_2 \underline{I}_{m2} - j\omega M_{12} \underline{I}_{m1} + j\omega M_{23} \underline{I}_{m3}; \quad (4.10)$$

$$\underline{U}_{mL3} = j\omega L_3 \underline{I}_{m3} - j\omega M_{13} \underline{I}_{m1} + j\omega M_{23} \underline{I}_{m2}. \quad (4.11)$$

Підставимо вирази (4.9)–(4.11) в рівняння (4.7) і (4.8) і згрупуємо доданки:

$$[R_1 + j\omega(L_1 - M_{13})] \underline{I}_{m1} + j\omega(M_{23} - M_{12}) \underline{I}_{m2} + j\left[\omega(L_3 - M_{13}) - \frac{1}{\omega C}\right] \underline{I}_{m3} = \underline{E}_m; \quad (4.12)$$

$$j\omega(M_{13} - M_{12}) \underline{I}_{m1} + [R_2 + j\omega(L_2 - M_{23})] \underline{I}_{m2} + j\left[\omega(M_{23} - L_3) + \frac{1}{\omega C}\right] \underline{I}_{m3} = 0. \quad (4.13)$$

Рівняння (4.6), (4.12) і (4.13) записані у впорядкованій формі і дозволяють знайти комплексні амплітуди струмів даного кола, застосовуючи визначники.

Зазначимо, що дане коло має одне джерело енергії, однак безпосередньо визначити еквівалентний комплексний опір відносно затискачів джерела

$Z_e$  методом перетворень не можна. Цей опір можна визначити після розрахунку струмів:

$$Z_e = \frac{E_m}{I_{m1}}$$

**Приклад 4.3.** Для кола, наведеного в прикладі 4.2 (рис. 4.3), скласти в загальному вигляді рівняння за методом контурних струмів. Використовуючи ці рівняння, отримати еквівалентну схему даного кола без індуктивних зв'язків і визначити вхідний комплексний опір відносно затискачів джерела.

**Розв'язання.** Введемо два контурних струми (рис. 4.4), за допомогою яких виразимо струми у вітках:

$$I_{m1} = I_{mI}; \quad I_{m2} = I_{mII}; \quad I_{m3} = I_{mI} - I_{mII}.$$

Вирази, здобуті для струмів у вітках, підставимо до рівнянь (4.12) і (4.13), які складено у прикладі 4.2 згідно з другим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} [R_1 + j\omega(L_1 - M_{13})]I_{mI} + j\omega(M_{23} - M_{12})I_{mII} + \\ + j\left[\omega(L_3 - M_{13}) - \frac{1}{\omega C}\right](I_{mI} - I_{mII}) = E_m; \\ j\omega(M_{13} - M_{12})I_{mI} + [R_2 + j\omega(L_2 - M_{23})]I_{mII} + \\ + j\left[\omega(M_{23} - L_3) + \frac{1}{\omega C}\right](I_{mI} - I_{mII}) = 0. \end{aligned}$$

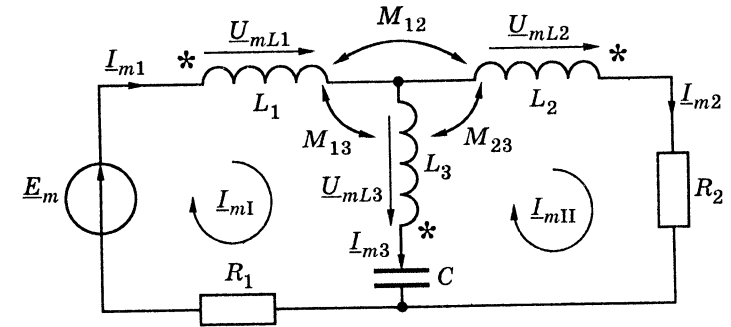
Зведемо подібні члени і подамо рівняння в стандартному вигляді відповідно до методу контурних струмів:

$$\begin{aligned} \left\{R_1 + j\left[\omega(L_1 + L_3 - 2M_{13}) - \frac{1}{\omega C}\right]\right\}I_{mI} - \\ - j\left[\omega(L_3 - M_{23} - M_{13} + M_{12}) - \frac{1}{\omega C}\right]I_{mII} = E_m; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} - j\left[\omega(L_3 - M_{23} - M_{13} + M_{12}) - \frac{1}{\omega C}\right]I_{mI} + \\ + \left\{R_2 + j\left[\omega(L_2 + L_3 - 2M_{23}) - \frac{1}{\omega C}\right]\right\}I_{mII} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Запишемо систему рівнянь (4.14) і (4.15) у загальному вигляді:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_{mI} + Z_{12}I_{mII} = E_{mI}; \\ Z_{21}I_{mI} + Z_{22}I_{mII} = E_{mII}, \end{aligned} \quad (4.16)$$



**Рис. 4.4.** Схема кола до прикладу 4.3 з позначенням комплексних амплітуд контурних струмів

де

$$Z_{11} = R_1 + j\left[\omega(L_1 + L_3 - 2M_{13}) - \frac{1}{\omega C}\right]; \quad Z_{22} = R_2 + j\left[\omega(L_2 + L_3 - 2M_{23}) - \frac{1}{\omega C}\right] -$$

власні комплексні опори першого і другого контурів, відповідно;

$$\begin{aligned} Z_{12} = Z_{21} = -j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C}\right) + j\omega(M_{23} + M_{13}) - j\omega M_{12} = \\ = -j\left[\omega(L_3 - M_{23} - M_{13} + M_{12}) - \frac{1}{\omega C}\right] - \end{aligned}$$

взаємний комплексний опір першого і другого контурів;  $E_{mI} = E_m$ ;  $E_{mII} = 0$  — комплексні амплітуди контурних ЕРС відповідно першого і другого контурів.

Аналіз отриманих виразів для власних і взаємних комплексних опорів контурів дозволяє сформулювати правила, як визначити ці опори, не складаючи рівнянь.

До складу власного комплексного опору контуру, крім комплексних опорів елементів даного контуру без індуктивних зв'язків, входять подвійні взаємоіндуктивні комплексні опори ( $\pm j\omega 2M$ ) між елементами даного контуру. Знак цих опорів визначається характером увімкнення елементів відносно даного контурного струму. При узгодженому увімкненні ці опори позитивні ( $j\omega 2M$ ), а при зустрічному — негативні ( $-j\omega 2M$ ).

Як елементи  $L_1$  і  $L_3$  в першому контурі, так і елементи  $L_2$  і  $L_3$  у другому контурі, в даному прикладі увімкнені зустрічно відносно своїх контурних струмів. Тому у власні комплексні опори контурів відповідні подвійні взаємоіндуктивні опори входять зі знаком мінус ( $-j\omega 2M_{13}$ ;  $-j\omega 2M_{23}$ ).

Взаємний комплексний опір контурів складається з комплексних опорів елементів без індуктивних зв'язків у спільних для даних контурів вітках і взаємоіндуктивних комплексних опорів ( $\pm j\omega M$ ) між елементами,

в яких дані контурні струми наводять ЕРС взаємодукції. При узгодженому увімкненні відносно даних контурних струмів взаємодуктивний комплексний опір додатний ( $+j\omega M$ ), а при зустрічному — від'ємний ( $-j\omega M$ ).

Взаємодуктивні комплексні опори  $j\omega M_{23}$  і  $j\omega M_{13}$  у взаємному опорі додатні, оскільки вони увімкнені узгоджено відносно контурних струмів. Індуктивності  $L_1$  і  $L_2$  увімкнені зустрічно відносно контурних струмів, і тому взаємодуктивний комплексний опір  $j\omega M_{12}$  входить у взаємний опір зі знаком мінус.

Використовуючи систему рівнянь (4.16) і вирази для власних і взаємних комплексних опорів контурів, складемо еквівалентну двоконтурну схему даного кола без індуктивних зв'язків (рис. 4.5, а) з комплексними опорами:

$$\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12} = R_1 + j\omega(L_1 - M_{13} + M_{23} - M_{12}) = R_1 + j\omega L_{e1};$$

$$\underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{12} = R_2 + j\omega(L_2 - M_{23} + M_{13} - M_{12}) = R_2 + j\omega L_{e2};$$

$$\underline{Z}_{e3} = -\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21} = j\left[\omega(L_3 - M_{23} - M_{13} + M_{12}) - \frac{1}{\omega C}\right] = j\left(\omega L_{e3} - \frac{1}{\omega C}\right),$$

де  $L_{e1} = L_{11} - L_{12} = L_1 - M_{13} + M_{23} - M_{12}$ ;  $L_{e2} = L_2 - M_{23} + M_{13} - M_{12}$ ;  $L_{e3} = L_3 - M_{23} - M_{13} + M_{12}$  — еквівалентні індуктивності схеми (рис. 4.5, б) без взаємодуктивних зв'язків.

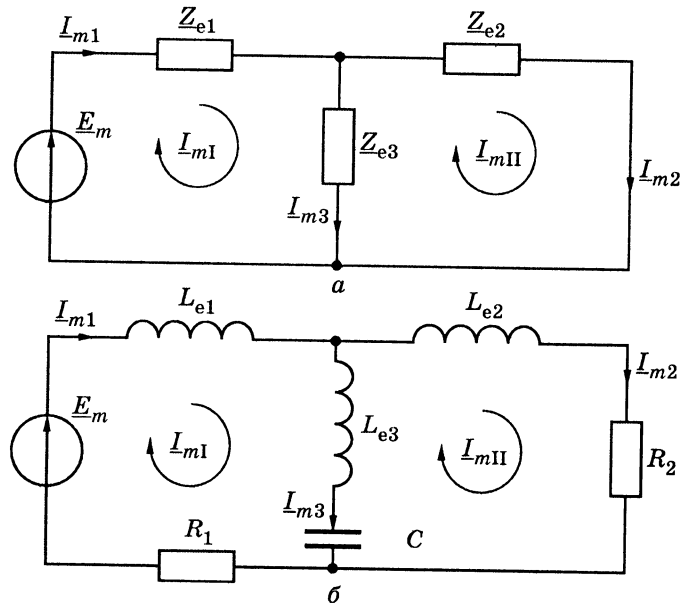


Рис. 4.5. Еквівалентні схеми кола до прикладу 4.3

Режим отриманої схеми (рис. 4.5, б) без взаємодуктивних зв'язків може бути розрахований будь-яким з методів, на відміну від початкової схеми із взаємними індуктивностями. Наприклад, можна визначити комплексний опір кола відносно затискачів джерела, використовуючи прийоми еквівалентних перетворень:

$$\underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_{e1} + \frac{(R_2 + j\omega L_{e2})j(\omega L_{e3} - 1/\omega C)}{R_2 + j[\omega(L_{e2} + L_{e3}) - 1/\omega C]}.$$

Схему, показану на рис. 4.5, б, можна практично реалізувати для будь-якої частоти, якщо еквівалентні індуктивності додатні ( $L_{e1} > 0$ ;  $L_{e2} > 0$ ;  $L_{e3} > 0$ ). Від'ємна індуктивність  $L$  на заданій частоті еквівалентна ємності  $C = 1/(\omega^2 |L|)$ .

#### 4.2. Еквівалентні перетворення ділянок кіл із взаємними індуктивностями

Метою перетворень ділянок кіл із взаємними індуктивностями є заміна їх еквівалентними схемами без елементів з індуктивними зв'язками. До основних прийомів належать еквівалентні перетворення при послідовному і паралельному з'єднаннях віток з індуктивними елементами, а також перетворення взаємних індуктивностей, які мають спільну точку з'єднання.

Послідовне і паралельне з'єднання з практичного боку доцільно розглядати для двох індуктивно зв'язаних котушок самоіндукції. Схеми заміщення для цього випадку зображені на рис. 4.6. На схемах показані активні опори  $R_1$ ,  $R_2$ , індуктивності  $L_1$ ,  $L_2$  і позначений індуктивний зв'язок  $M$ . При цьому характер увімкнення котушок, незалежно від напрямку струму, визначається послідовністю увімкнення однойменних затискачів (рис. 4.6).

Співвідношення між комплексними амплітудами струмів і напруг для узгодженого (рис. 4.6, а) і зустрічного (рис. 4.6, б) увімкнень мають вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{m12} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_{m2} = R_1 \underline{I}_m + \underline{U}_{mL1} + R_2 \underline{I}_m + \underline{U}_{mL2} = \\ &= R_1 \underline{I}_m + j\omega L_1 \underline{I}_m \pm j\omega M \underline{I}_m + R_2 \underline{I}_m + j\omega L_2 \underline{I}_m \pm j\omega M \underline{I}_m = \\ &= [R_1 + j\omega(L_1 \pm M) + R_2 + j\omega(L_2 \pm M)] \underline{I}_m = \\ &= [R_1 + j\omega L_{e1} + R_2 + j\omega L_{e2}] \underline{I}_m = \\ &= [(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)] \underline{I}_m = (R_e + j\omega L_e) \underline{I}_m, \end{aligned} \quad (4.17)$$

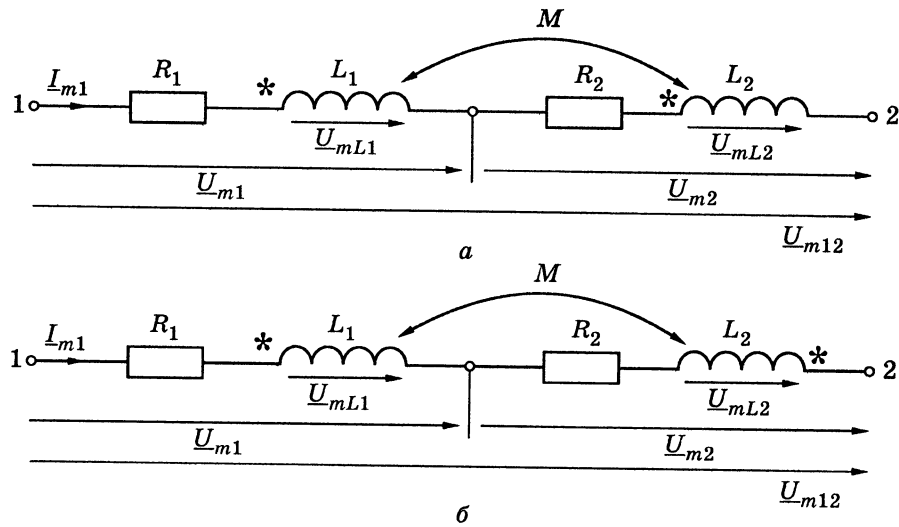


Рис. 4.6. Послідовне з'єднання індуктивно зв'язаних котушок:  
 а — для узгодженого; б — зустрічного увімкнень

де  $L_{e1} = L_1 + M$ ;  $L_{e2} = L_2 + M$ ;  $L_e = L_1 + L_2 + 2M$  — еквівалентні індуктивності відповідно першої котушки, другої котушки і всього кола при узгодженому увімкненні;  $L_{e1} = L_1 - M$ ;  $L_{e2} = L_2 - M$ ;  $L_e = L_1 + L_2 - 2M$  — відповідні еквівалентні індуктивності при зустрічному увімкненні.

У виразі (4.17) напруги взаємоіндукції при узгодженому увімкненні мають знак плюс, а при зустрічному — знак мінус.

Співвідношення (4.17) дозволяє побудувати векторні діаграми (рис. 4.7).

Співвідношення, отримані для послідовного з'єднання індуктивно зв'язаних котушок, а також побудовані векторні діаграми дозволяють зробити висновки:

1) у разі узгодженого увімкнення еквівалентні індуктивності кожної з котушок збільшуються на  $M$ , а еквівалентна індуктивність всього кола ( $L_e = L_1 + L_2 + 2M$ ) збільшується на  $2M$  порівняно з випадком відсутності взаємоіндуктивних зв'язків; при узгодженому увімкненні та максимальному зв'язку ( $k = 1$ ;  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ) еквівалентні індуктивності становитимуть  $L_{e1} = L_1 + \sqrt{L_1 L_2}$ ,  $L_{e2} = L_2 + \sqrt{L_1 L_2}$ ,  $L_e = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2} = (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2$ ; якщо при цьому індуктивності однакові ( $L_1 = L_2 = L$ ), то  $L_e = 4L$ ;

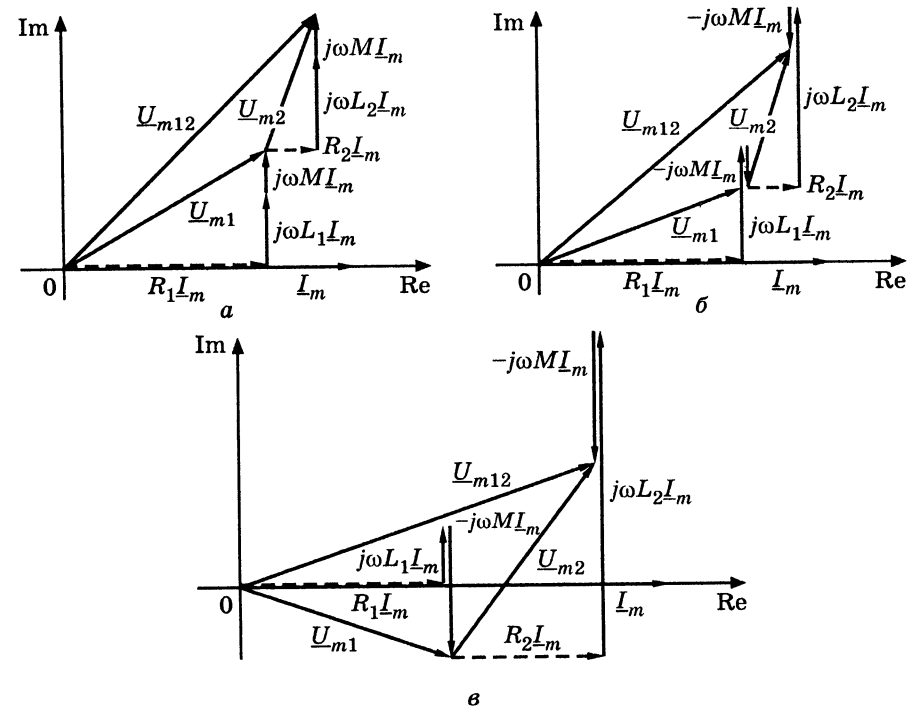


Рис. 4.7. Векторні діаграми при послідовному з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок для: а — узгодженого; б — зустрічного увімкнення,  $L_1 > M$ ,  $L_2 > M$ ; в — зустрічного увімкнення,  $L_1 < M$ ,  $L_2 > M$

2) при зустрічному увімкненні еквівалентні індуктивності кожної з котушок зменшуються у порівнянні з випадком відсутності взаємоіндуктивних зв'язків на  $M$ , а еквівалентна індуктивність усього кола зменшується на  $2M$ ; при максимальному зв'язку ( $k = 1$ ) і зустрічному увімкненні еквівалентні індуктивності становитимуть:  $L_{e1} = L_1 - \sqrt{L_1 L_2}$ ,  $L_{e2} = L_2 - \sqrt{L_1 L_2}$ ,  $L_e = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} = (\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2$ ; при цьому еквівалентна індуктивність кола або додатна, якщо  $L_1 \neq L_2$ , або дорівнює нулю ( $L_e = 0$ ), якщо індуктивності однакові ( $L_1 = L_2 = L$ );

3) еквівалентні індуктивності кола при узгодженому і зустрічному увімкненнях відрізняються на  $4M$ ; при максимальному зв'язку ця відмінність становитиме  $4\sqrt{L_1 L_2}$ , а у разі однакових індуктивностей —  $4L$ ;



4) при зустрічному увімкненні, сильному зв'язку та істотній відмінності індуктивностей за величиною ( $L_1 \ll L_2$  або  $L_1 \gg L_2$ ) еквівалентна індуктивність котушки з меншою індуктивністю може стати від'ємною ( $L_{e1,2} = L_{1,2} - M < 0$ ); комплексний опір такої котушки матиме ємнісний характер, а коло, загалом, — індуктивний характер; наприклад, векторна діаграма (рис. 4.7, в) відповідає варіанту, коли  $L_{e1} = L_1 - M < 0$ .

Залежність еквівалентної індуктивності послідовно сполучених індуктивно зв'язаних котушок від величини зв'язку і характеру увімкнення використовується у *варіометрах* — пристроях, які

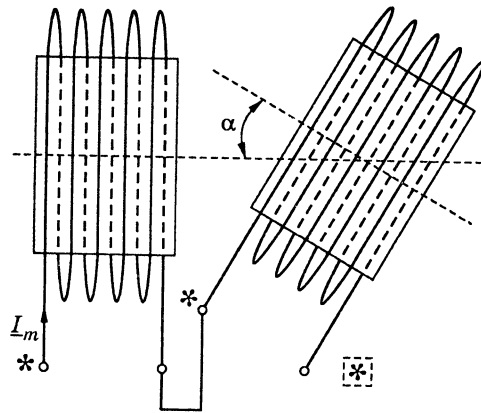


Рис. 4.8. Варіометр

дозволяють змінювати в широких межах індуктивність, а також при виготовленні дротяних резисторів з малою індуктивністю. Варіометр складається з двох послідовно увімкнених індуктивно зв'язаних котушок, одна з яких повертається відносно іншої на кут  $0 < \alpha < 180^\circ$  (рис. 4.8). Залежно від величини цього кута змінюється характер увімкнення і взаємна індуктивність  $M(\alpha)$ . Для вказаних на рис. 4.8 однойменних затискачів в діапазоні значень  $0 < \alpha < 90^\circ$  котушки увімкнено узгоджено, а для  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  — зустрічно (для цього випадку позначення однойменного затискача рухомої котушки на рис. 4.8 обведено пунктирною рамкою). При  $\alpha = 90^\circ$  взаємна індуктивність мінімальна, а при  $\alpha = 0^\circ$  і  $\alpha = 180^\circ$  має максимальну величину ( $M(0) = M(180^\circ) = M_m$ ). Отже, для діапазону кутів повороту  $0 < \alpha < 180^\circ$  еквівалентна індуктивність варіометра становитиме  $L_e = L_1 + L_2 \pm 2M_m$ .

Щоб зменшити «паразитну» індуктивність дротяних резисторів, використовується так зване біфілярне намотування (рис. 4.9). Істотне зменшення (теоретично до нуля) еквівалентної індуктивності при такому намотуванні забезпечується за рахунок послідовного з'єднання однакових ( $L_1 = L_2 = L$ ) зустрічно увімкнених індуктивностей з максимальним зв'язком ( $k \approx 1$ ;  $M \approx L$ ).

Аналіз паралельного з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок виконують, використовуючи однакову для двох віток напругу  $\underline{U}_{m12}$  (рис. 4.10, а, б).

При узгодженому увімкненні (рис. 4.10, а) співвідношення для комплексної амплітуди напруги  $\underline{U}_{m12}$  згідно з другим законом Кірхгофа для вибраних контурів  $K_1$  і  $K_2$  записуються у вигляді:

$$\underline{U}_{m12} = R_1 \underline{I}_{m1} + j\omega L_1 \underline{I}_{m1} + j\omega M \underline{I}_{m2} = \underline{Z}_1 \underline{I}_{m1} + j\omega M \underline{I}_{m2}; \quad (4.18)$$

$$\underline{U}_{m12} = R_2 \underline{I}_{m2} + j\omega L_2 \underline{I}_{m2} + j\omega M \underline{I}_{m1} = \underline{Z}_2 \underline{I}_{m2} + j\omega M \underline{I}_{m1}, \quad (4.19)$$

де  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$  — комплексні опори котушок без урахування взаємоіндуктивних зв'язків.

Для подальших перетворень виразів (4.18) і (4.19) використовують рівняння, складене за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_m - \underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2} = 0.$$

Після підставлення у праві частини рівнянь (4.18), (4.19) виразів для струмів  $\underline{I}_{m2} = \underline{I}_m - \underline{I}_{m1}$  та  $\underline{I}_{m1} = \underline{I}_m - \underline{I}_{m2}$ , відповідно, і зведення подібних доданків рівняння (4.18) і (4.19) матимуть вигляд:

$$\underline{U}_{m12} = (\underline{Z}_1 - j\omega M) \underline{I}_{m1} + j\omega M \underline{I}_m; \quad (4.20)$$

$$\underline{U}_{m12} = (\underline{Z}_2 - j\omega M) \underline{I}_{m2} + j\omega M \underline{I}_m. \quad (4.21)$$

Вирази (4.20) і (4.21) дозволяють синтезувати еквівалентне коло без взаємоіндуктивних зв'язків (рис. 4.10, в). Коло має дві паралельні вітки, утворені комплексними опорами:  $\underline{Z}_1 - j\omega M = R_1 + j\omega(L_1 - M)$  і  $\underline{Z}_2 - j\omega M = R_2 + j\omega(L_2 - M)$ , і загальну вітку з комплексним опором  $j\omega M$ . Комплексний опір еквівалентного кола (рис. 4.10, в), а отже, і комплексний опір вихідного кола при узгодженому увімкненні (рис. 4.10, а) визначається за формулою:

$$\underline{Z}_{зг} = j\omega M + \frac{(\underline{Z}_1 - j\omega M)(\underline{Z}_2 - j\omega M)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - j2\omega M} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - j2\omega M}.$$

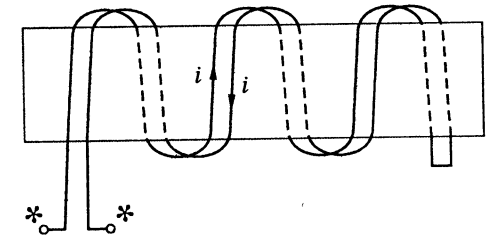


Рис. 4.9. Принцип біфілярного намотування

Для ідеальних котушок ( $R_1 = R_2 = 0$ ) комплексний опір паралельного кола при узгодженому увімкненні

$$\underline{Z}_{зг} = \frac{j\omega L_1 j\omega L_2 + (\omega M)^2}{j\omega L_1 + j\omega L_2 - j2\omega M} = j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = j\omega L_{зг},$$

де  $L_{зг} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \geq 0$  — еквівалентна індуктивність двох паралельно увімкнених індуктивностей при узгодженому увімкненні.

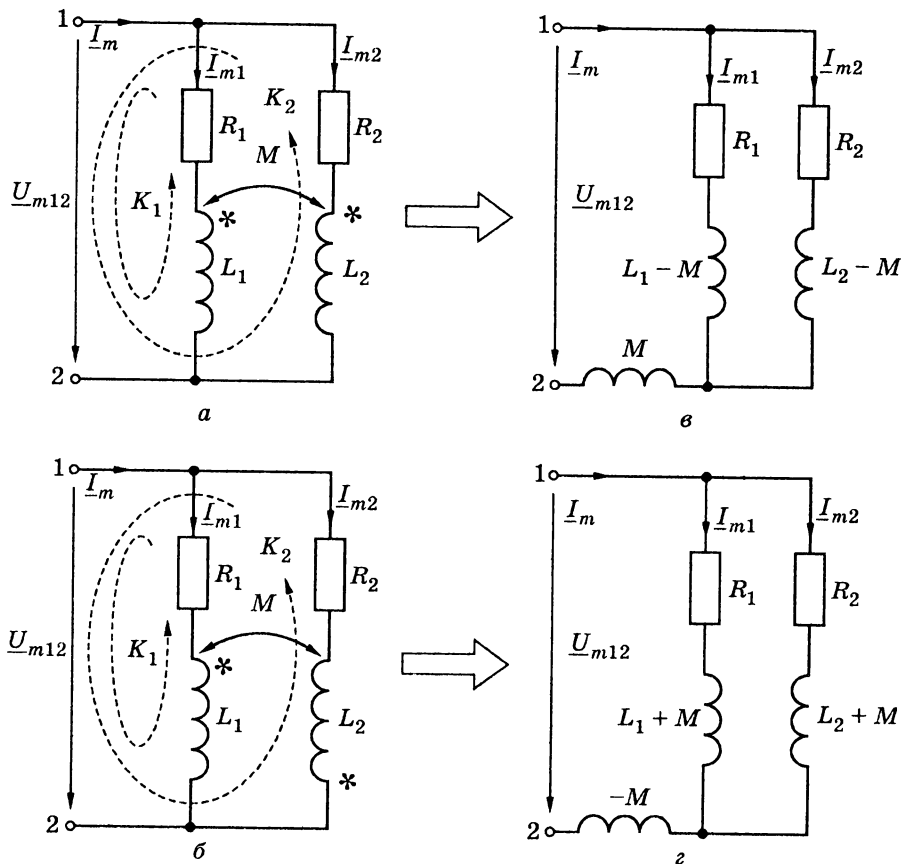


Рис. 4.10. Еквівалентні перетворення двох паралельно з'єднаних індуктивно зв'язаних котушок: а, в — при узгодженому; б, г — при зустрічному увімкненнях

Аналогічне виведення для зустрічного увімкнення (рис. 4.10, б) приводить до співвідношень для  $\underline{U}_{m12}$ :

$$\underline{U}_{m12} = [R_1 + j\omega(L_1 + M)]\underline{I}_{m1} - j\omega M \underline{I}_m = (\underline{Z}_1 + j\omega M)\underline{I}_{m1} - j\omega M \underline{I}_m; \quad (4.22)$$

$$\underline{U}_{m12} = [R_2 + j\omega(L_2 + M)]\underline{I}_{m2} - j\omega M \underline{I}_m = (\underline{Z}_2 + j\omega M)\underline{I}_{m2} - j\omega M \underline{I}_m. \quad (4.23)$$

Еквівалентне коло без взаємоіндуктивних зв'язків для зустрічного увімкнення, яке відповідає виразам (4.22) і (4.23), показано на рис. 4.10, г. При цьому комплексні опори кола для реальних та ідеалізованих котушок відповідно запишуться у вигляді:

$$\underline{Z}_{зс} = -j\omega M + \frac{(\underline{Z}_1 + j\omega M)(\underline{Z}_2 + j\omega M)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + j2\omega M} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + j2\omega M};$$

$$\underline{Z}_{зс} = j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} = j\omega L_{зс},$$

де  $L_{зс} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \geq 0$  — еквівалентна індуктивність двох паралельно і зустрічно увімкнених індуктивностей.

Виведення співвідношень і синтез еквівалентних схем для індуктивно зв'язаних елементів зі спільною точкою з'єднання (рис. 4.11 і 4.12) виконуються аналогічно наведеним вище для паралельного з'єднання.

Вихідні та еквівалентні схеми для індуктивно зв'язаних елементів зі спільною точкою з'єднання однойменних затискачів для узгодженого і зустрічного увімкнень зображені на рис. 4.11, а вихідні та перетворені рівняння для комплексних амплітуд напруг на затискачах розглядуваних кіл мають вигляд:

$$\underline{U}_{m10} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1} \pm j\omega M \underline{I}_{m2} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1} \pm j\omega M (\underline{I}_m \mp \underline{I}_{m1}) = j\omega (L_1 - M) \underline{I}_{m1} \pm j\omega M \underline{I}_m; \quad (4.24)$$

$$\underline{U}_{m20} = j\omega L_2 \underline{I}_{m2} \pm j\omega M \underline{I}_{m1} = j\omega L_2 \underline{I}_{m2} \pm j\omega M (\underline{I}_m \mp \underline{I}_{m2}) = j\omega (L_2 - M) \underline{I}_{m2} \pm j\omega M \underline{I}_m, \quad (4.25)$$

де  $\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} \pm \underline{I}_{m2}$  — комплексна амплітуда струму в загальній вітці еквівалентної схеми (рис. 4.11, б, г) для узгодженого (верхній знак) і зустрічного (нижній знак) увімкнень.

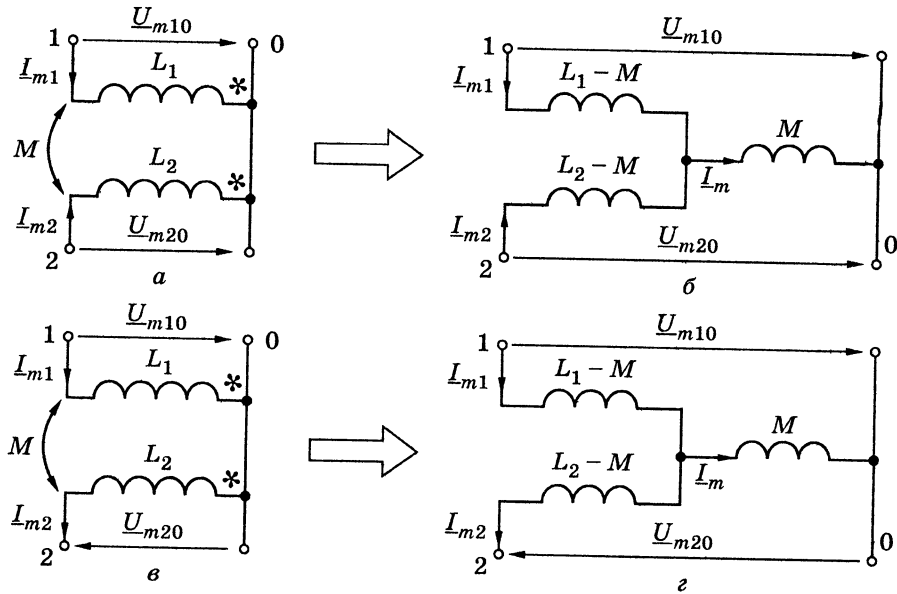


Рис. 4.11. Еквівалентне перетворення індуктивно зв'язаних елементів зі спільною точкою з'єднання однойменних затискачів

У рівняннях (4.24), (4.25) верхні знаки відповідають узгодженому, а нижні — зустрічному увімкненню.

Остаточним виразам для комплексних амплітуд напруг (4.24), (4.25) відповідає загальна еквівалентна схема без індуктивних зв'язків як для узгодженого (рис. 4.11, б), так і для зустрічного (рис. 4.11, г) увімкнень.

Подібний аналіз для індуктивно зв'язаних елементів зі спільною точкою, до якої увімкнені різнойменні затискачі (рис. 4.12, а), приведе до еквівалентної схеми без індуктивних зв'язків, зображеної на рис. 4.12, б.

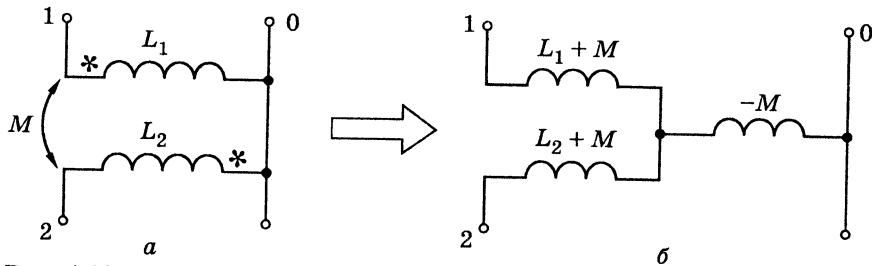


Рис. 4.12. Еквівалентне перетворення індуктивно зв'язаних елементів зі спільною точкою з'єднання

Отже, еквівалентні схеми для індуктивно зв'язаних елементів зі спільною точкою визначаються не видом увімкнення (узгоджене або зустрічне), а способом з'єднання однойменних затискачів відносно цієї точки.

До еквівалентних схем без індуктивних зв'язків можна застосувати традиційні прийоми еквівалентних перетворень для послідовного і паралельного з'єднань, а також для переходу від пасивного «трикутника» до «зірки» і навпаки. Розраховуючи два індуктивно зв'язаних елементи зі спільною точкою з'єднання при короткому замиканні одного з них (рис. 4.13, а, б), можна використати еквівалентні перетворення їх еквівалентних схем (рис. 4.13, в, г). При замиканні індуктивності  $L_2$  еквівалентна індуктивність (рис. 4.13, д) з боку затискачів 1-0, незалежно від способу з'єднання однойменних затискачів, становитиме:

$$L_{e10} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = L_1 (1 - k^2),$$

де  $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$  — коефіцієнт зв'язку.

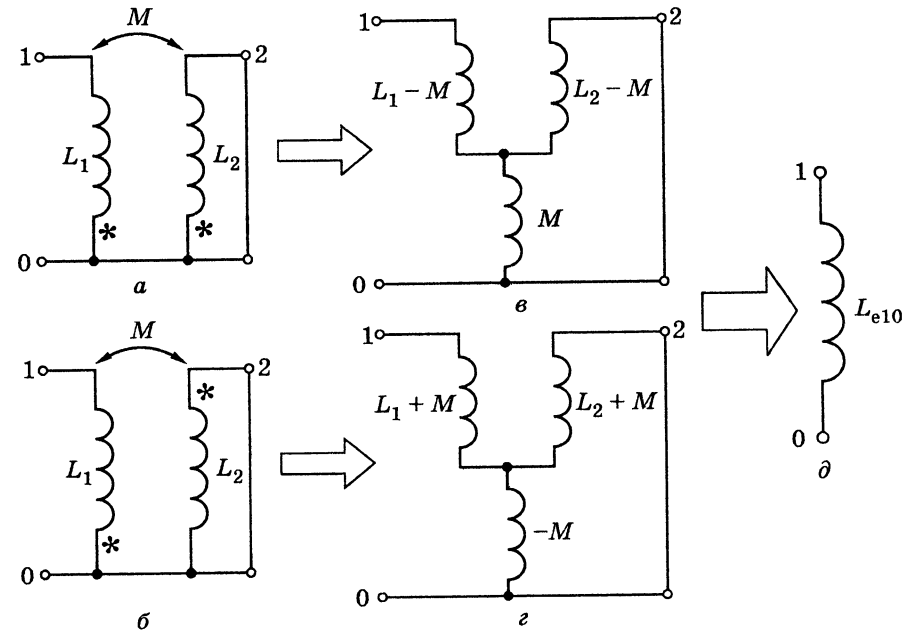


Рис. 4.13. Еквівалентні перетворення індуктивно зв'язаних елементів зі спільною точкою з'єднання при короткому замиканні одного з них

**Приклад 4.4.** Повні опори двох послідовно сполучених індуктивно зв'язаних котушок (див. рис. 4.6) з параметрами ( $R_1 = R_2 = R$ ;  $L_1 = L_2 = L$ ) на частоті  $f = 1$  МГц дорівнюють при узгодженому увімкненні  $Z_{зг} = 1,414$  кОм, а при зустрічному —  $Z_{зс} = 1$  кОм. Знайти активний опір  $R$ , індуктивність  $L$  кожної котушки та їх взаємну індуктивність  $M$ , якщо коефіцієнт зв'язку  $k = 0,5$ .

*Розв'язання.* Запишемо співвідношення для повних опорів при узгодженому і зустрічному увімкненнях:

$$Z_{зг} = \sqrt{(2R)^2 + [\omega(2L + 2M)]^2};$$

$$Z_{зс} = \sqrt{(2R)^2 + [\omega(2L - 2M)]^2}.$$

Підставляючи задані значення повних опорів і частоти, а також використовуючи співвідношення для коефіцієнта зв'язку у разі ідентичних котушок  $k = 0,5 = M/L$ , отримуємо систему з двох рівнянь з двома невідомими:

$$1414 = 2\sqrt{R^2 + (2\pi \cdot 10^6 \cdot 1,5L)^2};$$

$$1000 = 2\sqrt{R^2 + (2\pi \cdot 10^6 \cdot 0,5L)^2}.$$

Піднісши до квадрата ліві та праві частини рівнянь, маємо:

$$0,5 \cdot 10^6 = R^2 + 9\pi^2 \cdot 10^{12} L^2;$$

$$0,25 \cdot 10^6 = R^2 + \pi^2 \cdot 10^{12} L^2,$$

звідки після елементарних перетворень отримуємо:

$$L = \frac{10^{-3}}{\sqrt{32\pi}} = 56,27 \text{ мкГн}; \quad R = \sqrt{\frac{1,75}{8}} \cdot 10^3 = 468 \text{ Ом};$$

$$M = 0,5L = 28,135 \text{ мкГн}.$$

**Приклад 4.5.** Для кола, розглянутого в прикладі 4.2 (див. рис. 4.3), визначити комплексний опір відносно затискачів джерела, використовуючи еквівалентні перетворення взаємних індуктивностей.

*Розв'язання.* Оскільки взаємні індуктивності в даному колі мають спільну точку (вузол 1 на рис. 4.3), щоб виконати перетворення, скористаємося розглянутими вище прийомами (див. рис. 4.11 і 4.12). На рис. 4.14 показані вихідна ділянка кола з взаємними індуктивностями (рис. 4.14, а) й етапи перетворення: еквівалентна схема після виключення

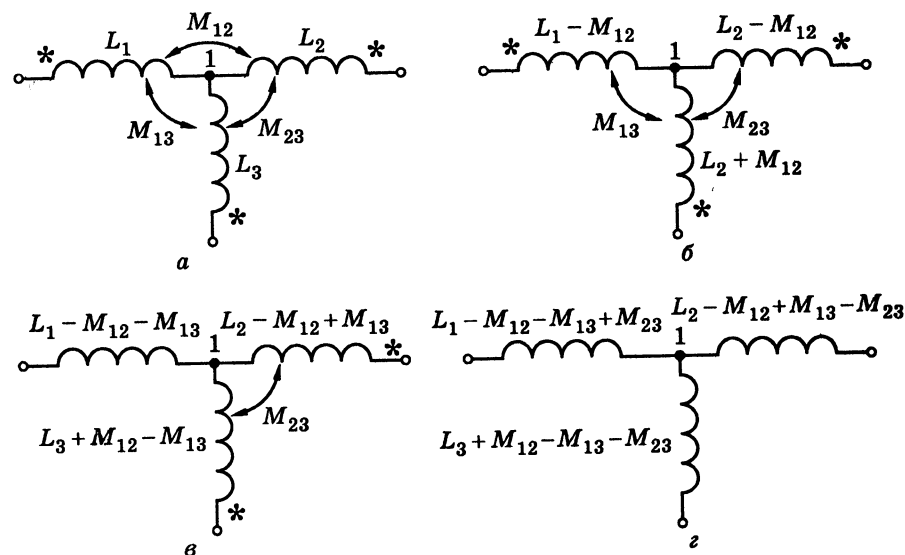


Рис. 4.14. Перетворення індуктивно зв'язаних елементів до прикладу 4.5

елемента  $M_{12}$  (рис. 4.14, б); еквівалентна схема після виключення елемента  $M_{13}$  (рис. 4.14, в); еквівалентна схема після виключення елемента  $M_{23}$  (рис. 4.14, г).

Еквівалентні схеми перетвореної ділянки кола (рис. 4.14, г) збігаються зі схемами, отриманими у прикладі 4.3. Відповідно ідентичними є і вирази для комплексного опору кола відносно затискачів джерела:

$$\underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_{e1} + \frac{(R_2 + j\omega L_{e2})j(\omega L_{e3} - 1/\omega C)}{R_2 + j[\omega(L_{e2} + L_{e3}) - 1/\omega C]},$$

де  $L_{e1} = L_1 - M_{12} - M_{13} + M_{23}$ ;  $L_{e2} = L_2 - M_{12} + M_{13} - M_{23}$ ;  $L_{e3} = L_3 + M_{12} - M_{13} - M_{23}$  — еквівалентні індуктивності ділянки кола без взаємоіндуктивних зв'язків (рис. 4.14, г).

### 4.3. Лінійний трансформатор

*Трансформатором* називається пристрій, призначений для перетворення амплітуд і початкових фаз напруг і струмів, принцип дії якого заснований на явищі взаємоіндукції. Історично поява трансформаторів значною мірою обумовила широке практичне застосування синусоїдних струмів у другій половині XIX ст. Перші

практичні і теоретичні роботи, пов'язані з трансформаторами, виконали Яблочков<sup>1</sup>, Ферраріс<sup>2</sup>, Доливо-Добровольський<sup>3</sup>, Тесла<sup>4</sup>.

Залежно від призначення розрізняють силові однофазні та трифазні трансформатори в блоках живлення радіотехнічних пристроїв і електроенергетиці, високочастотні трансформатори для перетворення сигналів (інша назва — зв'язані коливальні контури), узгоджувальні трансформатори для перетворення опорів, імпульсні трансформатори, вимірювальні трансформатори та ін.

Крім призначення, трансформатори класифікують і за іншими ознаками — кількості індуктивно зв'язаних котушок (обмоток), наявності або відсутності нелінійних елементів (лінійні та нелінійні трансформатори), ступеня ідеалізації (реальний, довершений та ідеальний трансформатори), конструктивним ознакам (матеріал і геометрія осердя), можливості плавного регулювання параметрів (настроювальні трансформатори, автотрансформатори).

У даному підрозділі розглядається лінійний трансформатор з двома обмотками. Схема реального лінійного трансформатора з двома обмотками показана на рис. 4.15. Параметри з індексом «1» відповідають первинній обмотці, а з індексом «2» — вторинній.

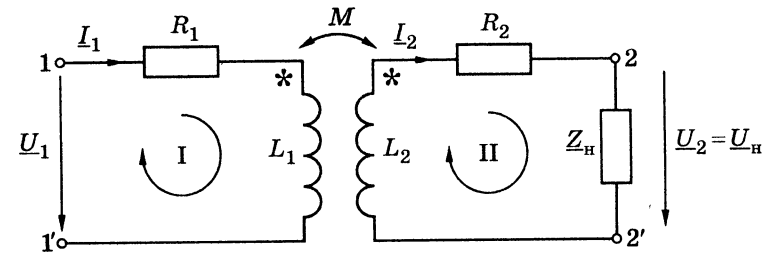


Рис. 4.15. Схема реального трансформатора

Вказані на рис. 4.15 напрями комплексних діючих значень струмів<sup>5</sup>  $\underline{I}_1$ ;  $\underline{I}_2$  і комплексних діючих значень напруг<sup>6</sup>  $\underline{U}_1$ ;  $\underline{U}_2 = \underline{U}_H$  є стандартними, якщо розглядати дане коло як чотириполюсник (затискачі 1, 1' є вхідними, а затискачі 2, 2' — вихідними), і відповідають зустрічному характеру увімкнення взаємних індуктивностей. Активні опори  $R_1, R_2$  враховують втрати в обмотках трансформатора.

Рівняння реального трансформатора, складені згідно з другим законом Кірхгофа для вибраних контурів I, II і напрямів струмів і напруг, мають вигляд:

$$(R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{U}_1; -j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H)\underline{I}_2 = 0. \quad (4.26)$$

Якісна векторна діаграма, побудована відповідно до системи рівнянь (4.26), показана на рис. 4.16.

Згідно з рекомендаціями (підрозд. 3.11), побудова діаграми починається з виходу кола, тобто з рівняння для вторинного контуру (вектори для цього контуру зображені жирними лініями).

Першим побудований вектор струму  $\underline{I}_2$ , у якого початкова фаза прийнята нульовою. Далі для прийнятого індуктивного характеру навантаження ( $\varphi_H > 0$ ) побудований вектор  $\underline{U}_H = \underline{Z}_H \underline{I}_2$ , до якого згідно з другим рівнянням системи (4.26) додані вектори  $R_2 \underline{I}_2$  (перебуває у фазі зі струмом  $\underline{I}_2$ ) і  $j\omega L_2 \underline{I}_2$  (випереджає струм  $\underline{I}_2$  на кут  $\pi/2$ ). Оскільки друге рівняння системи (4.26) дорівнює нулю, вектор  $-j\omega M \underline{I}_1$  будується як такий, що замикає ланану лінію, утворену раніше побудованими векторами ( $\underline{U}_H$ ;  $R_2 \underline{I}_2$ ;  $j\omega L_2 \underline{I}_2$ ).

Вектор  $-j\omega M \underline{I}_1$  відстає від струму  $\underline{I}_1$  на кут  $\pi/2$ , що дозволяє побудувати вектор струму  $\underline{I}_1$  і почати будувати вектори напруг, що входять у ліву частину першого рівняння системи (4.26). Два з цих

<sup>5</sup> У подальшому викладенні коротко називатимуться *струмами*.

<sup>6</sup> У подальшому викладенні коротко називатимуться *напругами*.

<sup>1</sup> Яблочков Павло Миколайович (1847–1894) — військовий інженер, винахідник у галузі електротехніки. Розробив і вдосконалив перше джерело світла (електрична свічка), генератори і хімічні джерела струму, трансформатор (патент — у 1876 р.). Ініціював централізоване виробництво електроенергії.

<sup>2</sup> Ферраріс Галілео, Ferraris (1847–1897) — італійський фізик і електротехнік. Основні роботи присвячені теорії і практичному застосуванню змінних струмів. У 1884–1887 рр. одним з перших виконав дослідження трансформаторів. Відкрив явище магнітного поля, що обертається, і на цій основі створив модель асинхронного двигуна. Працював також у галузі оптики і теорії тепла.

<sup>3</sup> Доливо-Добровольський Михайло Йосипович (1862–1919) — електротехнік. Збагатив електротехніку низкою видатних відкриттів і винаходів, розробив усі пристрої (генератори, двигуни, трансформатори, лінії передачі) для трифазних систем. Створив оригінальні електровимірювальні прилади. Зробив внесок у становлення електротехнічної освіти.

<sup>4</sup> Тесла Нікола, Tesla (1856–1943) — сербський винахідник у галузі електротехніки та радіотехніки. Незалежно від Ферраріса відкрив явище магнітного поля, що обертається. Запатентував низку конструкцій електричних машин, лічильників, частотомірів та ін. Брав участь у створенні Ніагарської гідроелектростанції. Розробив високочастотні трансформатор (1891) і генератори. Досліджував можливість безпроводової передачі електроенергії. Його ім'ям у системі СІ названа одиниця магнітної індукції, густини магнітного потоку і магнітної поляризації *тесла* (Тл), а також одиниця магнітного векторного потенціалу поляризації *тесла-метр* (Тл·м).

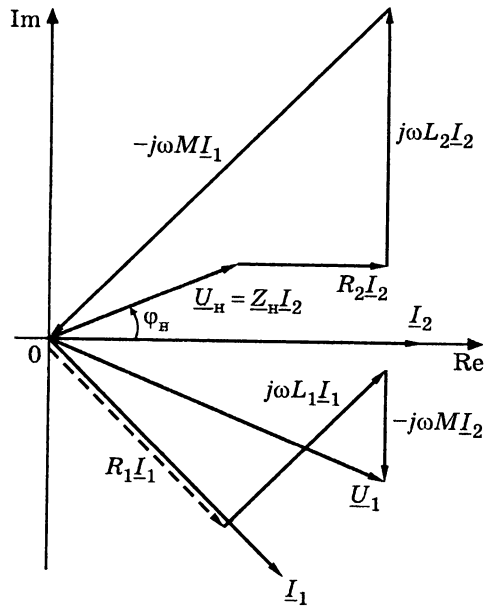


Рис. 4.16. Векторна діаграма реального трансформатора

векторів пов'язані за фазою з струмом  $I_1$  ( $R_1 I_1$  перебуває у фазі зі струмом  $I_1$ ;  $j\omega L_1 I_1$  випереджає цей струм на кут  $\pi/2$ ), а вектор напруги взаєміндукції  $-j\omega M I_2$  зумовлений струмом  $I_2$  і відстає від нього на кут  $\pi/2$ . Підсумовування побудованих векторів ( $R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2$ ) дозволяє отримати вектор вхідної напруги  $U_1$ .

Теоретичне і практичне значення має режим холостого ходу у вторинній обмотці трансформатора (рис. 4.17). У цьому випадку  $Z_H \rightarrow \infty$ ;  $I_2 = 0$  і рівняння (4.26) набудуть вигляду:

$$(R_1 + j\omega L_1) I_{1x.x} = U_1; -j\omega M I_{1x.x} + U_{2x.x} = 0. \quad (4.27)$$

Струм первинної обмотки в режимі холостого ходу  $I_{1x.x}$  називається *струмом намагнічення*<sup>7</sup>. Струм намагнічення і напруга на розімкнених затискачах вторинної обмотки (напруга холостого ходу  $U_{2x.x}$ ) визначаються із системи рівнянь (4.27) у вигляді:

$$I_{1x.x} = \frac{U_1}{R_1 + j\omega L_1}; U_{2x.x} = j\omega M I_{1x.x} = \frac{j\omega M U_1}{R_1 + j\omega L_1}.$$

Дві спрощені моделі (*довершений* та *ідеальний* трансформатор) дозволяють обґрунтувати можливості трансформаторів перетворювати вхідні та вихідні напруги, струми й опори, ввести поняття коефіцієнта трансформації і пояснити значення струму намагнічення.

*Довершеним* називається трансформатор (рис. 4.18), у якого відсутні втрати і коефіцієнт зв'язку дорівнює одиниці ( $R_1 = R_2 = 0$ ;  $k = M/\sqrt{L_1 L_2} = 1$ ).

<sup>7</sup> Діюче значення струму намагнічення є одним з технічних показників більшості трансформаторів, які використовуються в електроенергетиці, і становить не більше 5–10% від діючого значення струму  $I_1$  в режимі навантаження.

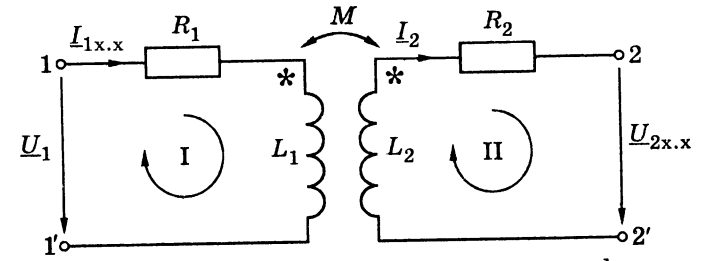


Рис. 4.17. Режим холостого ходу реального трансформатора

Рівняння згідно з другим законом Кірхгофа для довершеного трансформатора можна подати у вигляді:

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2; U_2 = j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_2. \quad (4.28)$$

Одержані рівняння є залежними, оскільки визначник для коефіцієнтів у правій частині рівнянь дорівнює нулю. Залежність рівнянь системи (4.28) виявляється в тому, що відношення другого рівняння до першого є дійсною величиною

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_2}{j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2} = \frac{M I_1 - L_2 I_2}{L_1 I_1 - M I_2} = \frac{(\sqrt{L_1 L_2}) I_1 - L_2 I_2}{L_1 I_1 - (\sqrt{L_1 L_2}) I_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}},$$

яка називається *коефіцієнтом трансформації*:

$$n = \frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M}.$$

Оскільки індуктивності ідеалізованих котушок пропорційні квадратам кількості витків, коефіцієнт трансформації можна виразити через числа витків обмоток у вигляді

$$n = \frac{N_2}{N_1},$$

де  $N_1, N_2$  — відповідно кількість витків первинної та вторинної обмоток.

З першого рівняння системи (4.28) можна виразити струм  $I_1$  у вигляді

$$I_1 = \frac{U_1}{j\omega L_1} + \frac{M}{L_1} I_2 = I_{1x.x} + n I_2, \quad (4.29)$$

де  $I_{1x.x} = \frac{U_1}{j\omega L_1}$  — струм намагнічення довершеного трансформатора.

З виразу (4.29) виходить, що відношення струмів  $I_1$  і  $I_2$

$$\frac{I_1}{I_2} = n + \frac{I_{1x.x}}{I_2}$$

відрізняється від коефіцієнта трансформації на величину, яка дорівнює відношенню струму намагнічення до струму вторинної обмотки.

Якщо у довершеного трансформатора спрямувати  $L_1 \rightarrow \infty$ , то струм намагнічення дорівнюватиме нулю ( $I_{1x.x} = 0$ ). Такий трансформатор називається *ідеальним*.

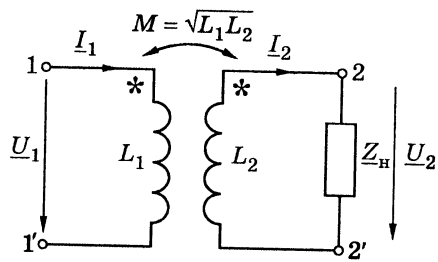


Рис. 4.18. Довершений трансформатор

У ідеального трансформатора коефіцієнт трансформації пов'язує не тільки напруги і струми

$$n = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}, \quad (4.30)$$

але і комплексний опір навантаження з вхідним комплексним опором у вигляді:

$$\frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right) \left(\frac{I_1}{I_2}\right) = n^2. \quad (4.31)$$

Схема ідеального трансформатора показана на рис. 4.19.

Аналіз співвідношень (4.30) і (4.31) дозволяє зробити висновки:

1) ідеальний трансформатор, не змінюючи початкові фази, перетворює тільки амплітуди (діючі значення) вхідних і вихідних напруг і струмів:

$$U_2 = nU_1; \quad \psi_{u_2} = \psi_{u_1};$$

$$I_1 = nI_2; \quad \psi_{i_1} = \psi_{i_2};$$

2) вхідний опір ідеального трансформатора має такий же характер (аргумент), як і опір навантаження, відрізняючись від нього величиною повного опору в  $n^2$  разів:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{н}}}{n^2};$$

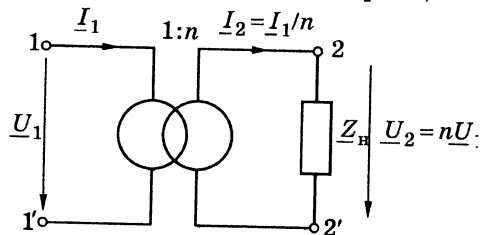


Рис. 4.19. Схема ідеального трансформатора

3) ККД ідеального трансформатора дорівнює одиниці, оскільки комплексні потужності, а отже, активні, реактивні та повні потужності на вході та в навантаженні однакові:

$$\begin{aligned} \underline{P}_{S1} &= \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = P_{A1} + jP_{Q1} = P_{S1} e^{j\varphi_1} = \\ &= \underline{P}_{S2} = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = P_{A2} + jP_{Q2} = P_{S2} e^{j\varphi_2}, \end{aligned}$$

де  $\varphi_1 = \psi_{u_1} - \psi_{i_1}$ ;  $\varphi_2 = \psi_{u_2} - \psi_{i_2}$ ;  $\varphi_1 = \varphi_2$  — фазові зсуви між напругами і струмами на вході та виході ідеального трансформатора, які дорівнюють один одному;  $P_{S1} = U_1 I_1$ ;  $P_{S2} = U_2 I_2$ ;  $P_{S1} = P_{S2}$ ;  $P_{A1} = U_1 I_1 \cos \varphi_1$ ;  $P_{A2} = U_2 I_2 \cos \varphi_2$ ;  $P_{A1} = P_{A2}$ ;  $P_{Q1} = U_1 I_1 \sin \varphi_1$ ;  $P_{Q2} = U_2 I_2 \sin \varphi_2$ ;  $P_{Q1} = P_{Q2}$  — повні, активні та реактивні потужності на вході та виході ідеального трансформатора, які дорівнюють одна одній;

4) довершений трансформатор за своїми властивостями наближається до ідеального, якщо  $I_{1x.x}/I_2 \ll n$ .

#### 4.4. Схеми заміщення трансформатора

Для розрахунку режиму реального трансформатора застосовується система рівнянь (4.26), яку в загальному випадку можна записати у вигляді:

$$\underline{Z}_{11} I_1 - \underline{Z}_M I_2 = \underline{U}_1; \quad -\underline{Z}_M I_1 + \underline{Z}_{22} I_2 = 0, \quad (4.32)$$

де  $\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$  — комплексний опір первинної обмотки;  $\underline{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_{\text{н}}$  — комплексний опір вторинної обмотки;  $\underline{Z}_M = j\omega M = jX_M$  — комплексний опір взаємної індуктивності.

Системі рівнянь (4.26) відповідає двоконтурна схема, в якій  $\underline{Z}_{11}$  і  $\underline{Z}_{22}$  є власними комплексними опорами контурів, а  $-\underline{Z}_M$  — взаємним комплексним опором (рис. 4.20, а). Така схема називається *чотириполюсною схемою заміщення трансформатора*. На рис. 4.20, б, в показані варіанти чотириполюсних схем заміщення з позначенням конкретних елементів. Чотириполюсна схема заміщення (рис. 4.20, б) безпосередньо виходить з системи рівнянь (4.26). Індуктивності в цій схемі сполучені «зіркою», перетворення елементів якої в еквівалентний «трикутник» дозволяє отримати ще одну схему заміщення (рис. 4.20, в).

Крім чотириполюсної схеми заміщення для розрахунку тільки струму  $I_1$  або струму  $I_2$  застосовуються так звані двополюсні схеми

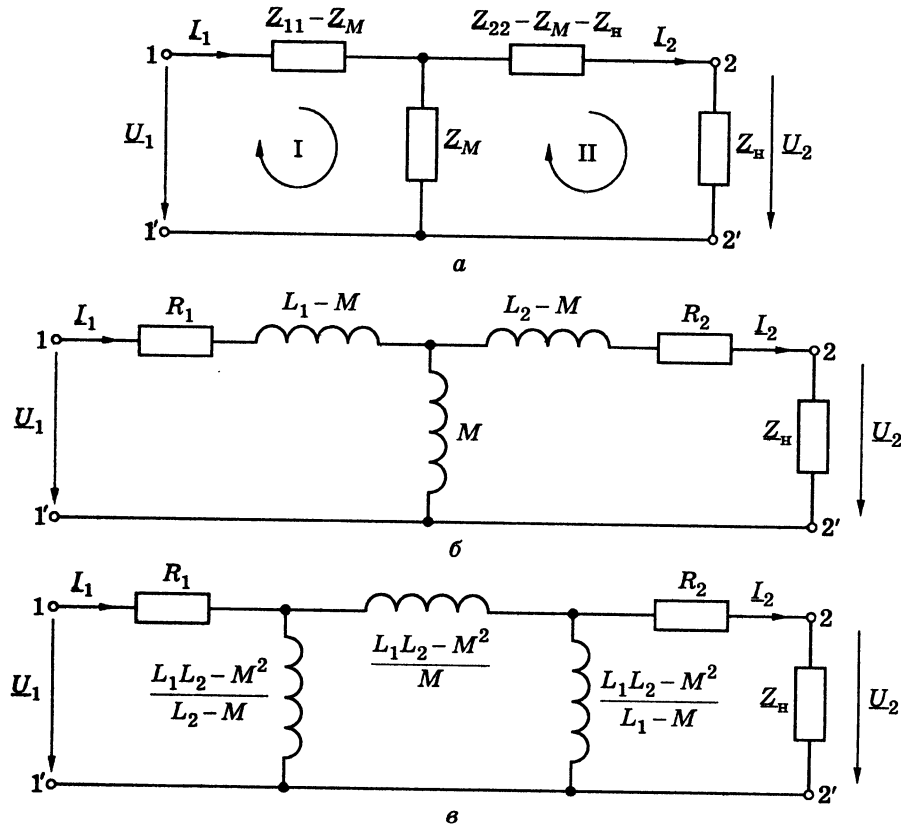


Рис. 4.20. Чотириполюсні схеми заміщення трансформатора заміщення, засновані на перетворенні виразів для струмів  $I_1$  і  $I_2$ , отриманих у результаті розв'язання системи (4.32):

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} U_1 & -Z_M \\ 0 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & -Z_M \\ -Z_M & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{22} U_1}{Z_{11} Z_{22} - Z_M^2} = \frac{U_1}{Z_{11} - Z_M^2 / Z_{22}} = \frac{U_1}{Z_{11} + Z_{1\text{вн}}}; \quad (4.33)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & U_1 \\ -Z_M & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & -Z_M \\ -Z_M & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_M U_1}{Z_{11} Z_{22} - Z_M^2} = \frac{Z_M U_1 / Z_{11}}{Z_{22} - Z_M^2 / Z_{11}} = \frac{U_{2\text{х.х}}}{Z_{22} + Z_{2\text{вн}}}, \quad (4.34)$$

де  $Z_{1\text{вн}} = -Z_M^2 / Z_{22}$  — комплексний опір, що вноситься в первинну обмотку і враховує вплив вторинної обмотки;  $Z_{2\text{вн}} = -Z_M^2 / Z_{11}$  — комплексний опір, що вноситься у вторинну обмотку і враховує вплив первинної обмотки;  $U_{2\text{х.х}} = Z_M U_1 / Z_{11}$  — напруга на розімкнених затискачах вторинної обмотки (напруга холостого ходу).

Двополюсна схема заміщення трансформатора, заснована на кінцевому виразі (4.33) для струму  $I_1$ , зображена на рис. 4.21, а. У розгорненому вигляді ця схема показана на рис. 4.21, б, де кожен з комплексних опорів  $Z_{11}$  і  $Z_{1\text{вн}}$  представлений у вигляді двох послідовно сполучених опорів згідно із записом виразів для цих опорів в алгебраїчній формі:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_{11} + jX_{11} = R_1 + j\omega L_1; \\ Z_{1\text{вн}} &= \frac{-Z_M^2}{Z_{22}} = \frac{X_M^2}{R_{22} + jX_{22}} = \frac{X_M^2 (R_{22} - jX_{22})}{(R_{22} + jX_{22})(R_{22} - jX_{22})} = \\ &= \frac{X_M^2 (R_{22} - jX_{22})}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \frac{X_M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j \frac{X_M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = R_{1\text{вн}} + jX_{1\text{вн}}, \quad (4.35) \end{aligned}$$

$$\text{де } R_{1\text{вн}} = \frac{X_M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \frac{X_M^2 R_{22}}{Z_{22}^2}; \quad X_{1\text{вн}} = -\frac{X_M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = -\frac{X_M^2 X_{22}}{Z_{22}^2} \text{ — від-}$$

повідно активний і реактивний опори, що вносяться з вторинної обмотки у первинну;  $Z_{22} = \sqrt{R_{22}^2 + X_{22}^2}$  — повний опір вторинної обмотки.

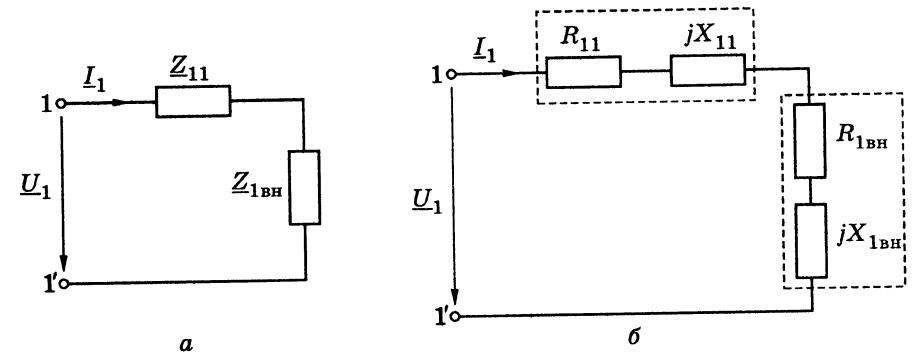


Рис. 4.21. Двополюсні схеми заміщення для розрахунку струму  $I_1$



Активний опір  $R_{1\text{вн}}$ , що вноситься з вторинної обмотки у первинну, враховує при розрахунку струму  $I_1$  втрати енергії у вторинній обмотці. Реактивний опір  $X_{1\text{вн}}$ , що вноситься з вторинної обмотки у первинну, характеризує обмін енергією між обмотками, викликаний реактивними елементами вторинної обмотки. Знак мінус у виразі для цього опору показує, що характер опору, що вноситься, є зворотним характеру власного опору вторинної обмотки. Якщо опір вторинної обмотки має індуктивний характер ( $X_{22} > 0$ ), то опір, що вноситься з вторинної обмотки в первинну, має ємнісний характер і навпаки.

Двополюсну схему заміщення для розрахунку струму  $I_2$  реального трансформатора можна побудувати, виходячи з виразу (4.34). До входів спрощеної (рис. 4.22, а) і розгорненої (рис. 4.22, б) схем прикладено напругу холостого ходу у вторинній обмотці  $U_{2\text{х.х}}$ , а комплексний опір, що вноситься, становить:

$$\begin{aligned} Z_{2\text{вн}} &= \frac{-Z_M^2}{Z_{11}} = \frac{X_M^2}{R_{11} + jX_{11}} = \frac{X_M^2 (R_{11} - jX_{11})}{(R_{11} + jX_{11})(R_{11} - jX_{11})} = \\ &= \frac{X_M^2 (R_{11} - jX_{11})}{R_{11}^2 + X_{11}^2} = \frac{X_M^2 R_{11}}{R_{11}^2 + X_{11}^2} - j \frac{X_M^2 X_{11}}{R_{11}^2 + X_{11}^2} = R_{2\text{вн}} + jX_{2\text{вн}}, \quad (4.36) \end{aligned}$$

де  $R_{2\text{вн}} = \frac{X_M^2 R_{11}}{R_{11}^2 + X_{11}^2} = \frac{X_M^2 R_{11}}{Z_{11}^2}$ ;  $X_{2\text{вн}} = -\frac{X_M^2 X_{11}}{R_{11}^2 + X_{11}^2} = -\frac{X_M^2 X_{11}}{Z_{11}^2}$  — відповідно активний і реактивний опори, що вносяться з первинної обмотки у вторинну;  $Z_{11} = \sqrt{R_{11}^2 + X_{11}^2}$  — повний опір первинної обмотки.

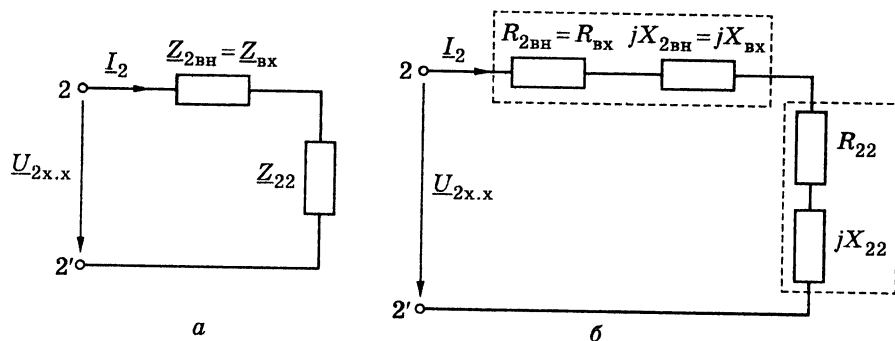


Рис. 4.22. Двополюсні схеми заміщення для розрахунку струму  $I_2$

Структура і склад елементів двополюсної схеми заміщення для розрахунку струму  $I_2$  відповідають визначенню цього струму методом еквівалентного генератора напруги (за теоремою Тевенена). Комплексний опір  $Z_{2\text{вн}}$ , що вноситься, має значення вхідного комплексного опору еквівалентного генератора  $Z_{\text{вх}}$ . Тому ця схема заміщення дозволяє не тільки аналізувати режим у вторинній обмотці, але і розглядати можливості узгодження навантаження з генератором за критерієм максимальної активної потужності у навантаженні.

Для ідеального трансформатора

$$R_1 = R_2 = 0; \quad Z_{11} = j\omega L_1 \rightarrow \infty; \quad Z_{22} = j\omega L_2 \rightarrow \infty; \quad X_M = j\omega M \rightarrow \infty.$$

Тому в двополюсних схемах заміщення ідеального трансформатора (рис. 4.23) активні опори, що вносяться, дорівнюють нулю, а реактивні опори, що вносяться, і напруга холостого ходу становлять відповідно:

$$X_{1\text{вн}} = -\frac{X_M^2 X_{22}}{Z_{22}^2} = -\frac{(\omega M)^2 \omega L_2}{(\omega L_2)^2} = -\omega \frac{L_1 L_2^2}{L_2^2} = -\omega L_1;$$

$$X_{2\text{вн}} = -\frac{X_M^2 X_{11}}{Z_{11}^2} = -\frac{(\omega M)^2 \omega L_1}{(\omega L_1)^2} = -\omega \frac{L_2 L_1^2}{L_1^2} = -\omega L_2;$$

$$U_{2\text{х.х}} = \frac{Z_M U_1}{Z_{11}} = \frac{j\omega M U_1}{j\omega L_1} = \frac{M U_1}{L_1} = n U_1,$$

де  $n = \frac{M}{L_1}$  — коефіцієнт трансформації.

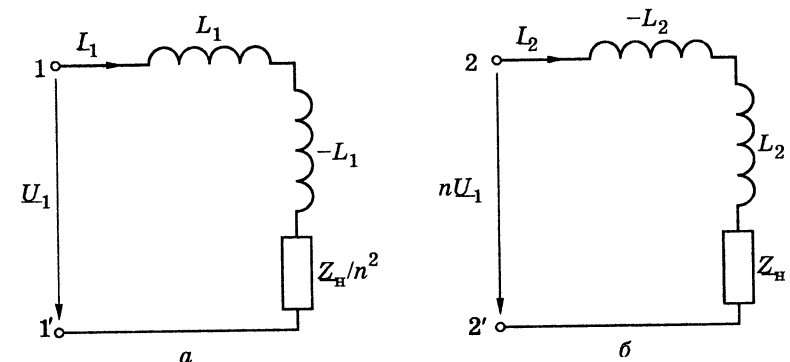


Рис. 4.23. Двополюсні схеми заміщення ідеального трансформатора

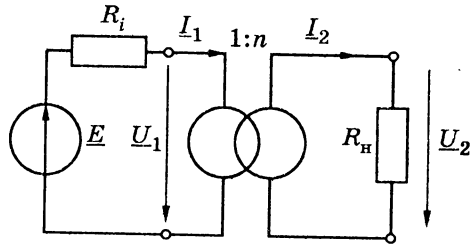


Рис. 4.24. Схема кола до прикладу 4.6

**Приклад 4.6.** Реальне джерело синусоїдної напруги (рис. 4.24) з параметрами  $\underline{E}=30$  В,  $R_i=75$  Ом увімкнене до входу ідеального трансформатора з коефіцієнтом трансформації  $n=10$ . Трансформатор навантажений на активний опір  $R_n=2,5$  кОм. Розрахувати струм джерела, а також струм, напругу і потужність в опорі навантаження. Визначити опір навантаження, за якого потужність у навантаженні буде максимальною, і величину цієї потужності.

*Розв'язання.* Використовуючи двополосну схему заміщення ідеального трансформатора (рис. 4.23, а), розрахуємо струм джерела:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R_i + R_n/n^2} = \frac{30}{75 + 2,5 \cdot 10^3/10^2} = 0,3 \text{ А} = 300 \text{ мА.}$$

Визначимо напругу на вхідних затискачах трансформатора:

$$\underline{U}_1 = \underline{E} - R_i \underline{I}_1 = 30 - 75 \cdot 0,3 = 7,5 \text{ В.}$$

Застосовуючи двополосну схему заміщення ідеального трансформатора (рис. 4.23, б), розрахуємо струм, напругу і потужність у навантаженні:

$$\underline{I}_2 = \frac{n \underline{U}_1}{R_n} = \frac{10 \cdot 7,5}{2,5 \cdot 10^3} = 0,03 \text{ А} = 30 \text{ мА;}$$

$$\underline{U}_2 = R_n \underline{I}_2 = 2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,03 = 75 \text{ В;}$$

$$P_n = R_n \underline{I}_2^2 = 2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,03^2 = 2,25 \text{ Вт.}$$

Щоб отримати максимальну потужність у навантаженні, активний опір, що вноситься у первинну обмотку, має дорівнювати внутрішньому опору джерела:

$$R_{1вн} = \frac{R_n}{n^2} = R_i,$$

звідки визначається необхідний для досягнення максимальної потужності опір навантаження:

$$R_n = R_i n^2 = 10^2 \cdot 75 = 7,5 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 7,5 \text{ кОм.}$$

Розрахуємо режим роботи кола для знайденого значення опорі навантаження:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R_i + R_n/n^2} = \frac{30}{75 + 7,5 \cdot 10^3/10^2} = 0,2 \text{ А} = 200 \text{ мА;}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{E} - R_i \underline{I}_1 = 30 - 75 \cdot 0,2 = 15 \text{ В;}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{n \underline{U}_1}{R_n} = \frac{10 \cdot 15}{7,5 \cdot 10^3} = 0,02 \text{ А} = 20 \text{ мА; } \underline{U}_2 = R_n \underline{I}_2 = 7,5 \cdot 10^3 \cdot 0,02 = 150 \text{ В;}$$

$$P_n = R_n \underline{I}_2^2 = 7,5 \cdot 10^3 \cdot 0,02^2 = 3 \text{ Вт.}$$

**Приклад 4.7.** Реальне джерело з параметрами, наведеними у прикладі 4.6, і активний опір  $R_n=2,5$  кОм увімкнено до затискачів довершеного трансформатора (рис. 4.25). Індуктивності обмоток трансформатора і частота джерела дорівнюють відповідно:  $L_1=0,005$  Гн;  $L_2=0,5$  Гн;  $f=5$  кГц. Розрахувати струм джерела, а також струм, напругу і потужність в опорі навантаження. Порівняти режим роботи даного кола з режимом, який розглянуто в прикладі 4.6 для ідеального трансформатора.

*Розв'язання.* Розрахуємо взаємну індуктивність, коефіцієнт трансформації і кутову частоту джерела:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{0,005 \cdot 0,5} = 0,05 \text{ Гн; } n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{\frac{0,5}{0,005}} = 10;$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^3 = 3,14 \cdot 10^4 \text{ рад/с.}$$

Щоб визначити струм джерела за двополосною схемою заміщення (див. рис. 4.21), попередньо розрахуємо активний і реактивний опори, що вносяться:

$$R_{1вн} = \frac{(\omega M)^2 R_n}{R_n^2 + (\omega L_2)^2} = \frac{(3,14 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{(2,5 \cdot 10^3)^2 + (3,14 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-1})^2} = 24,38 \text{ Ом;}$$

$$X_{1вн} = -\frac{(\omega M)^2 \omega L_2}{R_n^2 + (\omega L_2)^2} = -\frac{(3,14 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 3,14 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-1}}{(2,5 \cdot 10^3)^2 + (3,14 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-1})^2} = -153,2 \text{ Ом.}$$

Згідно з виразом (4.33) розрахуємо струм у первинній обмотці (струм джерела):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{Z_{11} + Z_{1вн}} = \frac{\underline{E}}{R_i + j\omega L_1 + R_{1вн} + jX_{1вн}} = \frac{30}{75 + j157,1 + 24,38 - j153,2} = \frac{30}{99,38 + j3,9} = 0,301 - j0,0117 = 0,302 e^{-j2,236^\circ} \text{ А.}$$

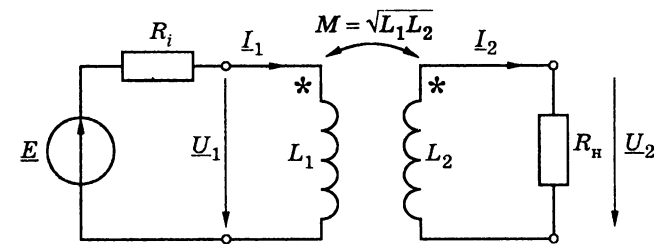


Рис. 4.25. Схема кола до прикладу 4.7

Визначимо напругу на вхідних затискачах трансформатора:

$$\underline{U}_1 = \underline{E} - R_1 I_1 = 30 - 75 \cdot (0,301 - j0,0117) = 7,395 + j0,883 = 7,447 e^{j6,807^\circ} \text{ В.}$$

Оскільки даний трансформатор довершений, напругу на його вторинній обмотці розрахуємо у вигляді:

$$\underline{U}_2 = n \underline{U}_1 = 10 \cdot 7,447 e^{j6,81^\circ} = 74,47 e^{j6,81^\circ} \text{ В.}$$

Використовуючи знайдену напругу на вторинній обмотці, визначимо струм і потужність у навантаженні:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_H} = \frac{74,47 e^{j6,81^\circ}}{2,5 \cdot 10^3} = 0,0298 e^{j6,81^\circ} \text{ А;}$$

$$P_H = R_H I_2^2 = 2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,0298^2 = 2,2184 \text{ Вт.}$$

Порівняння результатів, отриманих у даному прикладі, з результатами розрахунків для ідеального трансформатора у прикладі 4.6 ( $\underline{I}_1 = 0,3 \text{ А}$ ;  $\underline{I}_2 = 0,03 \text{ А}$ ;  $\underline{U}_2 = 75 \text{ В}$ ;  $P_H = 2,25 \text{ Вт}$ ), дозволяє зробити такі висновки:

1) діючі значення струмів і напруг, а також потужність у навантаженні у разі довершеного трансформатора менше на величину порядку одиниць відсотків у порівнянні з ідеальним трансформатором;

2) відношення струмів первинної та вторинної обмоток у довершеного трансформатора відрізняється від коефіцієнта трансформації і є комплексним числом:

$$\underline{n}_i = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{0,302 e^{-j2,236^\circ}}{0,0298 e^{j6,81^\circ}} = 10,134 e^{-j9,046^\circ};$$

3) якщо в ідеального трансформатора, навантаженого на активний опір, всі струми і напруги збігаються за фазою з ЕРС джерела, то у довершеного трансформатора існують фазові зсуви між ЕРС джерела і струмами.

#### 4.4. Запитання та завдання

##### для самоперевірки і контролю засвоєння знань

- У вітку першої котушки схеми рис. 4.10, а послідовно увімкнена ємність 50 мкФ. Параметри схеми:  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 0,2 \text{ Гн}$ ;  $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ ; коефіцієнт зв'язку становить 0,4. Обчислити напругу на ємності, якщо напруга на паралельних вітках дорівнює  $100 \cos 400t \text{ В}$ .  
Відповідь:  $83,6 e^{-j143^\circ} \text{ В}$ .
- Задані параметри трансформатора: опір 40 Ом та індуктивність 0,05 Гн — для первинної обмотки, опір 50 Ом та індуктивність 0,05 Гн — для вторинної обмотки; коефіцієнт зв'язку 0,6. Первинна обмотка приєднана до джерела ЕРС  $100 \cos 400t \text{ В}$ , вторинна обмотка — до джерела ЕРС  $150 \cos (400t - 30^\circ) \text{ В}$ . Електрорушійні сили

джерел спрямовані до однойменних затискачів трансформатора. Обчислити активні потужності, що поступають від кожного з джерел і йдуть на втрати всередині трансформатора.

Відповідь: 128 Вт; 360 Вт.

- Опір взаємної індукції двох однакових індуктивно зв'язаних котушок з комплексним опором  $10 + j10 \text{ Ом}$  кожна дорівнює  $j4 \text{ Ом}$  (рис. 4.26). Комплексний опір ємності дорівнює  $-j20 \text{ Ом}$ , а ЕРС джерел становлять  $\underline{E}_{m1} = 10 \text{ В}$  і  $\underline{E}_{m2} = 10 e^{j30^\circ} \text{ В}$ . Знайти напругу на ємності.

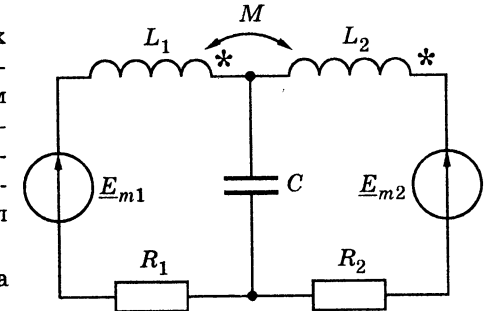
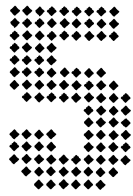


Рис. 4.26. Схема кола

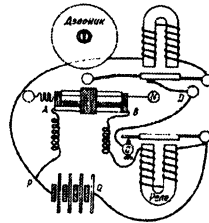
з індуктивно зв'язаними котушками

- Відповідь:  $10,95 e^{-j1,3^\circ} \text{ В}$ .
- Трансформатор, що має дві обмотки на спільному осерді, характеризується такими даними:  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 1 \text{ Гн}$ , загальний опір вторинної обмотки і навантаження 10 кОм, відношення кількості витків  $N_1/N_2 = 10$ , коефіцієнт зв'язку  $k = 0,5$ . Обчислити параметри чотирьохполюсної схеми заміщення (рис. 4.20, б).  
Відповідь:  $L_1 - M = -0,04 \text{ Гн}$ ,  $L_2 - M = 0,95 \text{ Гн}$ ,  $M = 0,05 \text{ Гн}$ .
- Пояснити поняття: а) ідеальний; б) довершений; в) реальний трансформатор.
- Побудувати векторну діаграму струмів і напруг у колі, схема якого показана на рис. 4.10, а.
- Побудувати векторну діаграму струмів і напруг у колі, схема якого показана на рис. 4.10, б.
- Пояснити поняття однойменних затискачів індуктивно зв'язаних котушок.
- Пояснити застосування трансформатора як узгоджувального пристрою.
- Пояснити поняття коефіцієнта трансформації. Як він обчислюється?



## КОМПЛЕКСНІ ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

- Поняття і визначення
- Вибірні властивості електричних кіл. Смуга пропускання
- Послідовний коливальний контур. Схеми контуру. Резонансний режим. Вторинні параметри. Резонансні криві
- Комплексні передатні функції і частотні характеристики послідовного контуру. Абсолютна, відносна і узагальнена розстройки
- Вибірність резонансного контуру. Смуга пропускання
- Вплив опорів джерела і навантаження на вибірні властивості послідовного контуру
- Паралельний резонансний контур
- Складні паралельні контури
- Зв'язані коливальні контури. Поняття, визначення і схеми
- Види резонансів у зв'язаних контурах і способи настроювання
- Комплексні передатні функції та частотні характеристики зв'язаних коливальних контурів
- Смуга пропускання зв'язаних коливальних контурів



Дж. Томсон



Л. Мандельштам



О. Попов

$$T_{\text{рез}} = \frac{1}{f_{\text{рез}}} = 2\pi\sqrt{LC}$$

### 5.1. Поняття і визначення

Аналіз усталеного режиму лінійного електричного кола при синусоїдній дії показує, що миттєві значення струмів (напруг) також змінюються за синусоїдним законом з частотою дії. При цьому амплітуди і початкові фази струмів (напруг) залежать як від схеми і параметрів кола, так і від амплітуди та початкової фази дії. Щоб визначити відгук лінійного електричного кола на довільну дію, застосовуючи спектральний метод (див. підрозд. 3.1), необхідно багаторазово обчислювати комплексним методом амплітуди і початкові фази гармонік відгуку, спричинені відповідними гармоніками дії. Щоб спростити подібні розрахунки, використовують комплексні передатні функції (КПФ) кіл.

Щоб визначити КПФ, лінійне електричне коло (ЛЕК) умовно подають у вигляді дво- або чотириполіусника. Чотириполіусник — це схема з двома парами затискачів (рис. 5.1). Пару затискачів, до яких підведено дію, називають вхідними, а затискачі, на яких визначається відгук, — вихідними.

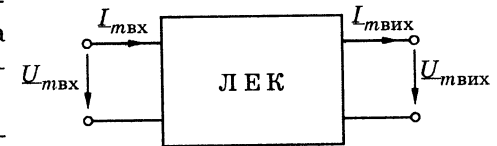


Рис. 5.1. Позначення електричного кола як чотириполіусника

Комплексні амплітуди напруги  $\underline{U}_{\text{mvkh}}$  або струму  $\underline{I}_{\text{mvkh}}$  на вході чотириполіусника можна умовно позначити  $\underline{F}_{\text{mvkh}}$  (дія), а комплексні амплітуди напруги  $\underline{U}_{\text{mvkh}}$  або струму  $\underline{I}_{\text{mvkh}}$  на виході —  $\underline{F}_{\text{mvkh}}$  (відгук). Тоді, за визначенням, *комплексна передатна функція кола* — це відношення комплексної амплітуди відгуку до комплексної амплітуди дії:

$$H(j\omega) = \frac{\underline{F}_{\text{mvkh}}}{\underline{F}_{\text{mvkh}}}. \quad (5.1)$$

Значення  $H(j\omega)$  не зміниться, якщо комплексні амплітуди дії та відгуку замінити комплексними діючими значеннями, не використовуючи при цьому в правій частині виразу (5.1) індекс  $m$ :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{F}_{\text{вих}}}{\underline{F}_{\text{вх}}}. \quad (5.2)$$

Залежно від того, яка величина (струм або напруга) є дією, а яка — відгуком, комплексна передатна функція  $H(j\omega)$  має різне фізичне значення і розмірність.

1. Якщо  $\underline{F}_{\text{вх}} = \underline{U}_{\text{вх}}, \underline{F}_{\text{вих}} = \underline{U}_{\text{вих}}$ , то  $H(j\omega) = H_U(j\omega) = \underline{U}_{\text{вих}} / \underline{U}_{\text{вх}}$  — безрозмірний комплексний коефіцієнт передачі за напругою.

2. Якщо  $\underline{F}_{\text{вх}} = \underline{I}_{\text{вх}}, \underline{F}_{\text{вих}} = \underline{I}_{\text{вих}}$ , то  $H(j\omega) = H_I(j\omega) = \underline{I}_{\text{вих}} / \underline{I}_{\text{вх}}$  — безрозмірний комплексний коефіцієнт передачі за струмом.

3. Якщо  $\underline{F}_{\text{вх}} = \underline{I}_{\text{вх}}, \underline{F}_{\text{вих}} = \underline{U}_{\text{вих}}$ , то  $H(j\omega) = Z_{\text{пер}}(j\omega) = \underline{U}_{\text{вих}} / \underline{I}_{\text{вх}}$  — комплексний передатний опір.

4. Якщо  $\underline{F}_{\text{вх}} = \underline{U}_{\text{вх}}, \underline{F}_{\text{вих}} = \underline{I}_{\text{вих}}$ , то  $H(j\omega) = Y_{\text{пер}}(j\omega) = \underline{I}_{\text{вих}} / \underline{U}_{\text{вх}}$  — комплексна передатна провідність.

Слід зазначити, що загалом  $Z_{\text{пер}}(j\omega) \neq 1/Y_{\text{пер}}(j\omega)$ .

Якщо відгук визначають на вхідних затискачах, коло розглядається як *двополюсник* і КПФ набуває значення комплексної вхідної функції (комплексного вхідного опору або провідності).

Якщо  $\underline{F}_{\text{вх}} = \underline{U}_{\text{вх}}, \underline{F}_{\text{вих}} = \underline{I}_{\text{вих}}$ , то  $H(j\omega) = Y_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{I}_{\text{вих}} / \underline{U}_{\text{вх}}$  — комплексна вхідна провідність.

Якщо  $\underline{F}_{\text{вх}} = \underline{I}_{\text{вх}}, \underline{F}_{\text{вих}} = \underline{U}_{\text{вих}}$ , то  $H(j\omega) = Z_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{U}_{\text{вих}} / \underline{I}_{\text{вх}}$  — комплексний вхідний опір.

Комплексну передатну (вхідну) функцію можна подати в показниковій, тригонометричній та алгебраїчній формах запису:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega) \cos \varphi(\omega) + jH(\omega) \sin \varphi(\omega) = \text{Re}[H(j\omega)] + j\text{Im}[H(j\omega)], \quad (5.3)$$

де  $|H(j\omega)| = H(\omega)$ ;  $\varphi(\omega)$ ;  $\text{Re}[H(j\omega)]$ ;  $\text{Im}[H(j\omega)]$  — відповідно модуль, аргумент, дійсна і уявна частини комплексної передатної (вхідної) функції.

КПФ лінійного кола залежить не від комплексної амплітуди дії, а від частоти дії, схеми і параметрів кола. Якщо параметри лінійного кола не змінюються, КПФ та її складові залежать тільки від частоти, що підтверджується виразами (5.1)–(5.3).

Залежність від частоти модуля КПФ кола називається *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ).

Залежність від частоти аргументу КПФ кола називається *фазо-частотною характеристикою* (ФЧХ).

Із співвідношень (5.1)–(5.3) виходить:

$$|H(j\omega)| = H(\omega) = \frac{F_{\text{твих}}}{F_{\text{твх}}} = \frac{F_{\text{вих}}}{F_{\text{вх}}}; \quad (5.4)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{вих}}(\omega) - \varphi_{\text{вх}}(\omega). \quad (5.5)$$

Вирази (5.4) та (5.5) показують, що АЧХ характеризує частотну залежність відношення амплітуд (діючих значень) відгуку і дії, а ФЧХ — залежність від частоти різниці початкових фаз відгуку і дії. Таке трактування використовується при експериментальному вимірюванні АЧХ і ФЧХ за допомогою приладів, які працюють в автоматичному режимі: вольтметрів, фазометрів і генераторів із змінюваною частотою. При цьому переважно використовується не кутова  $\omega$ , а циклічна частота  $f$ .

При графічному поданні частотних характеристик електричного кола АЧХ і ФЧХ, як правило, зображають окремо (рис. 5.2, а, б).

Разом з тим, залежність КПФ від частоти можна зобразити одним графіком на комплексній площині, де для кожного значення частоти  $\omega$  або  $f$  по дійсній осі відкладають  $\text{Re}[H(j\omega)]$ , а по уявній —  $\text{Im}[H(j\omega)]$ . Тому вектор  $H(j\omega_1)$ , що відповідає частоті  $\omega_1$ , має

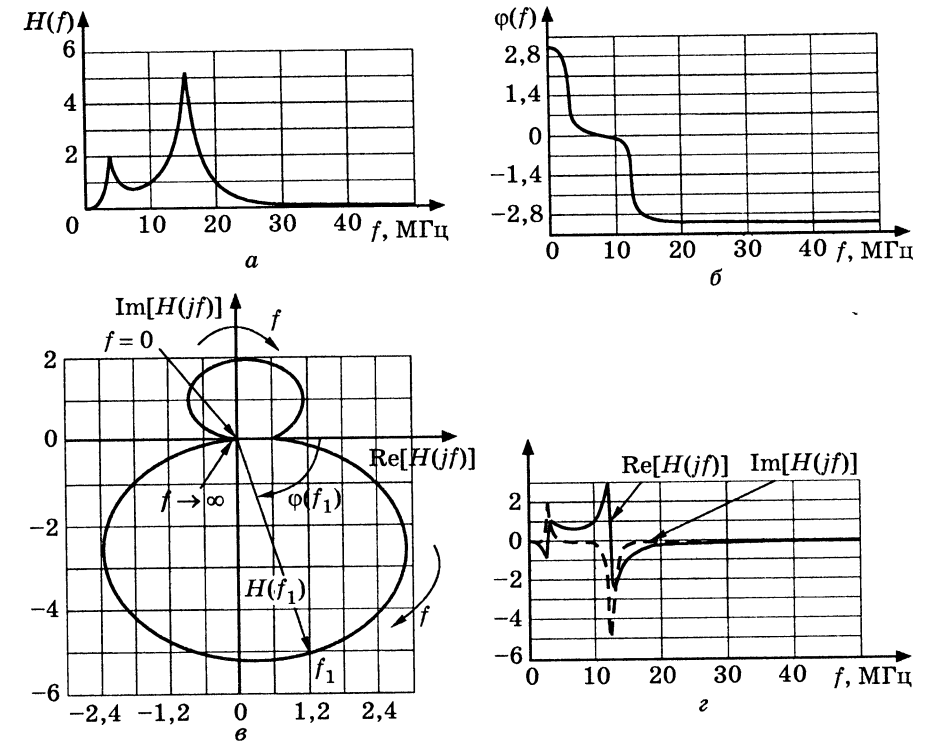


Рис. 5.2. Графіки: а — АЧХ; б — ФЧХ; в — АФХ; г — дійсної та уявної частин КПФ кола

довжину  $H(\omega_1)$  і кут  $\phi(\omega_1)$ . При змінюванні частоти кінець вектора  $H(j\omega)$  описує деяку криву (рис. 5.2, в), яку називають *годографом*. Таке подання КПФ інакше прийнято називати *амплітудно-фазовою характеристикою* (АФХ) кола. Графік АФХ будують при змінюванні частоти  $\omega$  або  $f$  від нуля до нескінченності, позначаючи стрілкою напрям зростання частоти.

В окремих випадках аналізують залежності дійсної  $\text{Re}[H(j\omega)]$  і уявної частин КПФ кола від частоти (рис. 5.2, з).

Для розрахунку КПФ і частотних характеристик використовується комплексний метод (див. приклади 5.1–5.3).

У тих випадках, коли діапазон змінювання АЧХ великий, застосовують логарифмічні одиниці — бели<sup>1</sup> (Б), децибелі (дБ) або непері<sup>2</sup> (Нп), які основані на десяткових логарифмах та безпосередньо використовуються щодо відношення потужностей:

$$A, B = \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right); \quad A, \text{дБ} = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$

Оскільки потужності пропорційні квадратам діючих значень струмів і напруг, співвідношення для розрахунку АЧХ в цих одиницях мають вигляд:

$$H(\omega), \text{Б} = \lg\left(\frac{F_{\text{вих}}}{F_{\text{вх}}}\right)^2 = 2 \cdot \lg\left(\frac{F_{\text{вих}}}{F_{\text{вх}}}\right) = 2 \cdot \lg\left(\frac{F_{\text{мвих}}}{F_{\text{мвх}}}\right);$$

$$H(\omega), \text{дБ} = 10 \cdot \lg\left(\frac{F_{\text{вих}}}{F_{\text{вх}}}\right)^2 = 20 \cdot \lg\left(\frac{F_{\text{вих}}}{F_{\text{вх}}}\right) = 20 \cdot \lg\left(\frac{F_{\text{мвих}}}{F_{\text{мвх}}}\right).$$

У радіотехніці частіше застосовують децибелі, оскільки бел є порівняно великою одиницею: один бел відповідає змінюванню потужності у десять разів, а напруги або струму — в сто разів.

Порівняння графіка АЧХ, побудованого на рис. 5.3, а в децибелах, з вихідним графіком (рис. 5.2, а) показує, що застосування

<sup>1</sup> Белл А. Г., А. Г. Bell (1847–1922) — американський інженер та винахідник. У 1876 р. отримав у США патент на винайдений ним телефон, а у 1877 р. — додатковий патент на його вдосконалення. Оприлюднив роботи з відтворення і запису звуку. З 1897 р. — директор Смітсонівського інституту в Бостоні.

<sup>2</sup> Нефер Дж., J. Napier (1550–1617) — шотландський математик. Виклав властивості логарифмів, увів таблиці логарифмів, правила користування ними і приклади використання.

логарифмічних одиниць призводить до «розтягування» області малих значень і «стиснення» ділянок з максимальними значеннями.

На відміну від децибела одиниця непер базується на натуральному логарифмі стосовно відношення не потужностей, а амплітуд

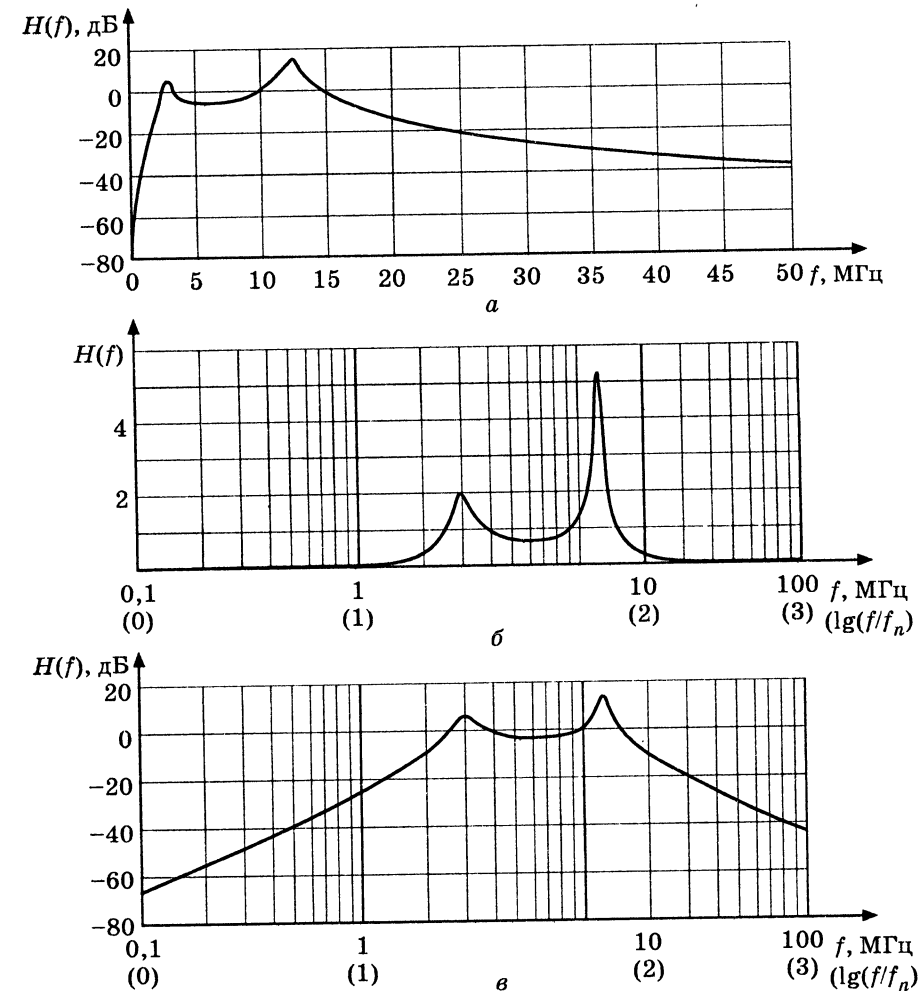


Рис. 5.3. Побудова АЧХ у логарифмічному масштабі: а — по осі ординат (у децибелах); б — по осі частот; в — по осях ординат (у децибелах) і частот

або діючих значень напруг (струмів). Тому для оцінки АЧХ у неперах справедливе співвідношення:

$$H(\omega), \text{Нп} = \ln \left( \frac{F_{\text{твих}}}{F_{\text{вх}}} \right) = \ln \left( \frac{F_{\text{вих}}}{F_{\text{вх}}} \right).$$

Використовуючи зв'язок між десятковими та натуральними логарифмами ( $\ln x = 2,3 \cdot \lg x$ ), можна записати вираз для розрахунку АЧХ у неперах за допомогою десяткових логарифмів і отримати співвідношення між неперами і децибелами у вигляді:

$$H(\omega), \text{Нп} = 2,3 \cdot \lg \left( \frac{F_{\text{твих}}}{F_{\text{вх}}} \right) = 2,3 \cdot \lg \left( \frac{F_{\text{вих}}}{F_{\text{вх}}} \right);$$

$$1 \text{ Нп} \approx 8,7 \text{ дБ}; \quad 1 \text{ дБ} \approx 0,115 \text{ Нп}.$$

Непери застосовують, розраховуючи узгоджені симетричні чотириполюсники, кола з розподіленими параметрами (довгі лінії) та лінії зв'язку.

Слід зазначити, що логарифмічні одиниці безпосередньо застосовують тільки для безрозмірних АЧХ:  $H_I(\omega)$  і  $H_U(\omega)$ . Щоб застосувати логарифмічні одиниці до розмірних АЧХ  $Z(\omega)$  і  $Y(\omega)$ , їх необхідно попередньо пронормувати. Для нормування, як правило, використовують максимальне значення АЧХ, причому нормувати доцільно і безрозмірні АЧХ.

Будуючи графіки АЧХ і ФЧХ у широкому частотному діапазоні, використовують логарифмічні масштаби також по осі частот, на якій відкладають відрізки, пропорційні логарифмам частоти (рис. 5.3, б), за допомогою десяткових логарифмів і логарифмів з основою два.

Логарифмічні частотні шкали не мають точки, яка відповідає  $\omega = 0$  ( $f = 0$ ), оскільки  $\lg 0 \rightarrow \infty$ . Тому побудову частотних характеристик починають зі значення деякої початкової частоти  $f_n$  (на рис. 5.3, б  $f_n = 0,1$  МГц).

Щоб градуувати вісь частот, використовують абсолютні значення частоти або безрозмірні відносні величини: декади  $\lg(f/f_n)$  і октави  $\log_2(f/f_n)$ . На графіку АЧХ (рис. 5.3, б) по осі частот у дужках вказані декади.

АЧХ, зображені у логарифмічному масштабі по осях частот і ординат, називають *логарифмічними* (рис. 5.3, в). Застосування логарифмічного масштабу по осі частот надає частотним характеристикам більшу наочність в області низьких частот. Крім того,

суттєве зменшення крутості логарифмічних АЧХ дозволяє застосувати їх кусково-лінійну апроксимацію.

**Приклад 5.1.** Знайти комплексний коефіцієнт передачі за напругою  $H_U(j\omega)$ , АЧХ і ФЧХ для схем, зображених на рис. 5.4, а, б. Побудувати графіки АЧХ, ФЧХ і АФХ.

*Розв'язання.* Оскільки дані схеми однотипні за структурою і дуальні, визначатимемо  $H_U(j\omega)$  паралельно, використовуючи позначення: а — для схеми (рис. 5.4, а); б — для схеми (рис. 5.4, б).

Вважаючи відомою напругу  $\underline{U}_{\text{вх}}$ , за законом Ома в комплексній формі визначимо  $\underline{U}_{\text{вих}}$ :

$$\text{а) } \underline{U}_{\text{вих}} = R\underline{I} = \frac{R\underline{U}_{\text{вх}}}{R + j\omega L} = \frac{\underline{U}_{\text{вх}}}{1 + j\omega(L/R)};$$

$$\text{б) } \underline{U}_{\text{вих}} = \left( \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I} = \frac{\underline{U}_{\text{вх}}}{j\omega C(R + 1/j\omega C)} = \frac{\underline{U}_{\text{вх}}}{1 + j\omega RC}.$$

Знайдемо  $H_U(j\omega)$ :

$$\text{а) } H_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = \frac{\underline{U}_{\text{вх}}}{[1 + j\omega(L/R)]\underline{U}_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + j\omega(L/R)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{RL}};$$

$$\text{б) } H_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = \frac{\underline{U}_{\text{вх}}}{(1 + j\omega RC)\underline{U}_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{RC}},$$

де  $\tau_{RL} = L/R$ ,  $\tau_{RC} = RC$  — величини, які мають розмірність часу і називаються *сталими часу* кіл  $R$ ,  $L$  і  $R$ ,  $C$  відповідно.

Оскільки отримані вирази для  $H_U(j\omega)$  однотипні, запишемо  $H_U(j\omega)$ , АЧХ і ФЧХ єдиною формулою:

$$H_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j \arctg(\omega\tau)} = H_U(\omega) e^{j\varphi_U(\omega)}, \quad (5.6)$$

де  $H_U(\omega) = 1/\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$  — рівняння АЧХ;  $\varphi_U(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$  — рівняння ФЧХ;  $\tau$  — стала часу, яка дорівнює  $\tau_{RL}$  ( $\tau_{RC}$ ) для кола  $R$ ,  $L$  ( $R$ ,  $C$ ).

Графіки АЧХ (рис. 5.4, в) і ФЧХ (рис. 5.4, г) змінюються із зростанням частоти  $\omega$  монотонно, оскільки розглянуті кола мають тільки один частотно залежний елемент.

Щоб проаналізувати АФХ, перетворимо вираз для  $H_U(j\omega)$ :

$$\begin{aligned} H_U(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega\tau} = 0,5 + \frac{0,5 - 0,5j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \\ &= \frac{0,5 + 0,5\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j2 \arctg(\omega\tau)} = 0,5 + 0,5e^{j2\varphi_U(\omega)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Запис (5.7) дозволяє подати графік АФХ (рис. 5.5) у вигляді суми двох векторів — дійсного числа 0,5 і комплексного числа  $0,5e^{j2\varphi_U(\omega)}$ , модуль

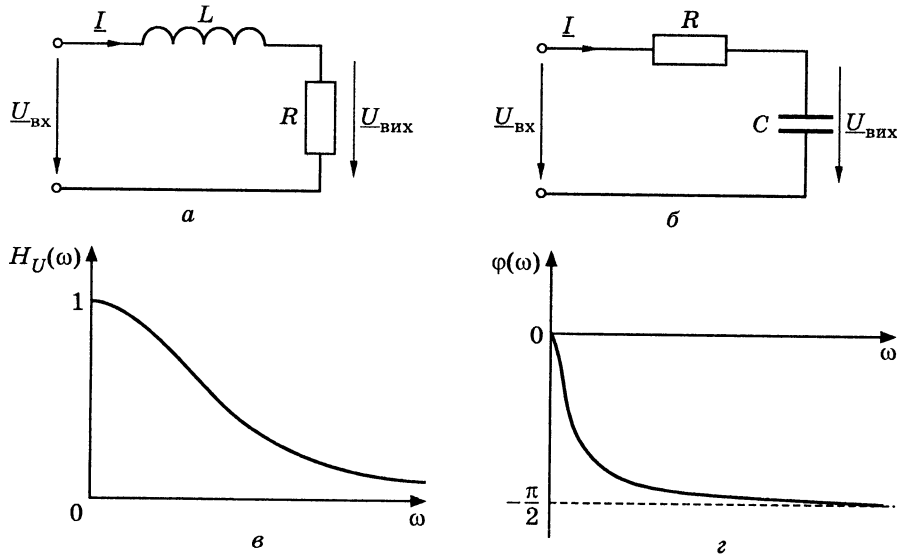


Рис. 5.4. До прикладу 5.1:  
а, б — схеми кіл; в — графік АЧХ; г — графік ФЧХ

якого є постійним, а аргумент  $2\varphi_U(\omega)$  змінюється залежно від частоти від 0 (при  $\omega=0$ ) до  $-\pi$  (при  $\omega \rightarrow \infty$ ). Тому годограф АФХ є півколом радіусом 0,5 і координатами центра (0,5; 0).

Вираз для  $H_U(j\omega)$ , а також графіки АЧХ і ФЧХ дозволяють оцінити можливості практичного застосування досліджуваних кіл.

У діапазоні частот  $0 \leq \omega \ll 1/\tau$  ( $\omega\tau \ll 1$ ) комплексний коефіцієнт передачі за напругою  $H_U(j\omega) \approx 1$ , АЧХ  $H_U(\omega) \approx 1$ , ФЧХ  $\varphi_U(\omega) \approx 0$ . Тому вхідні і вихідні коливання мають однакові амплітуди та початкові фази.

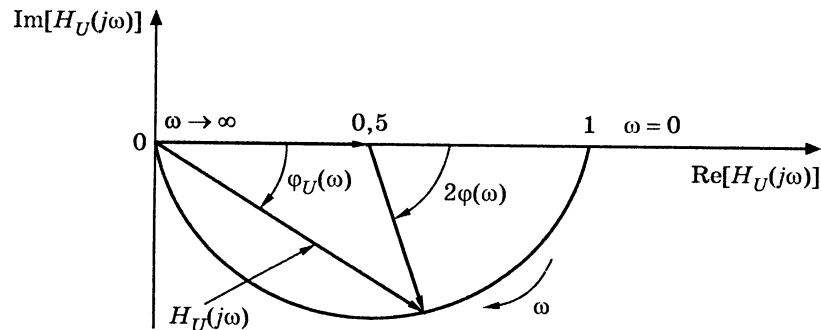


Рис. 5.5. АФХ (годограф) передатної функції кола до прикладу 5.1

Для частот  $1/\tau \ll \omega < \infty$  ( $\omega\tau \gg 1$ ) коефіцієнт передачі за напругою  $H_U(j\omega) \approx 1/(j\omega\tau)$ , АЧХ  $H_U(\omega) \approx 1/(\omega\tau)$ , ФЧХ  $\varphi_U(\omega) \approx -\pi/2$ . При цьому миттєві значення вхідної та вихідної напруги можна записати у вигляді:

$$u_{\text{вих}}(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u);$$

$$u_{\text{вих}}(t) \approx \frac{U_m}{\omega\tau} \cos\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_m}{\omega\tau} \sin(\omega t + \psi_u) = \frac{1}{\tau} \int u_{\text{вих}}(t) dt.$$

Отже, за умови  $\omega\tau \gg 1$  розглянуті кола з точністю до коефіцієнта  $1/\tau$  виконують операцію інтегрування вхідних коливань і тому називаються інтегрувальними.

**Приклад 5.2.** Розрахувати комплексний коефіцієнт передачі за напругою  $H_U(jf)$  і комплексну вхідну провідність  $Y(jf)$  для схеми (рис. 5.6). Параметри схеми:  $R = 5$  Ом;  $L = 1,75$  мкГн;  $C = 400$  пФ. У діапазоні частот (0...10) МГц побудувати графіки АЧХ, ФЧХ, АФХ для  $H_U(jf)$ ,  $\text{Re}[H_U(jf)]$ ,  $\text{Im}[H_U(jf)]$ , а також АЧХ, ФЧХ, АФХ для  $Y(jf)$ .

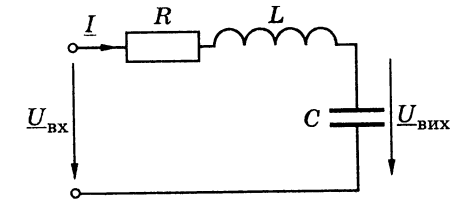


Рис. 5.6. Схема кола до прикладу 5.2

**Розв'язання.** Запишемо у загальному вигляді вираз для комплексного коефіцієнта передачі:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вх}}}{[R + j\omega L + 1/j\omega C]U_{\text{вх}}} \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}.$$

Складемо рівняння частотних характеристик:

$$H_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}; \quad \varphi_U(\omega) = -\arctg \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC};$$

$$\text{Re}[H_U(j\omega)] = \frac{1 - \omega^2 LC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}; \quad \text{Im}[H_U(j\omega)] = -\frac{\omega RC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}.$$

Підставимо параметри кола у здобуті вирази і запишемо співвідношення для розрахунку частотних характеристик в функції частоти  $f$ :

$$H_U(f) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 f^2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10})^2 + (2\pi f \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-10})^2}};$$

$$\varphi_U(f) = -\arctg \frac{2\pi f \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}{1 - 4\pi^2 f^2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10}};$$



$$\operatorname{Re}[H_U(jf)] = \frac{1 - 4\pi^2 f^2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10}}{(1 - 4\pi^2 f^2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10})^2 + (2\pi f \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-10})^2};$$

$$\operatorname{Im}[H_U(jf)] = -\frac{2\pi f \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}{(1 - 4\pi^2 f^2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10})^2 + (2\pi f \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-10})^2}.$$

Результати розрахунків частотних характеристик подамо графічно (рис. 5.7).

Складемо вирази для комплексної вхідної провідності, АЧХ і ФЧХ даного кола:

$$Y(j\omega) = \frac{I}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{1}{R + j(\omega L - 1/\omega C)};$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad \varphi_Y(\omega) = -\arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (5.8)$$

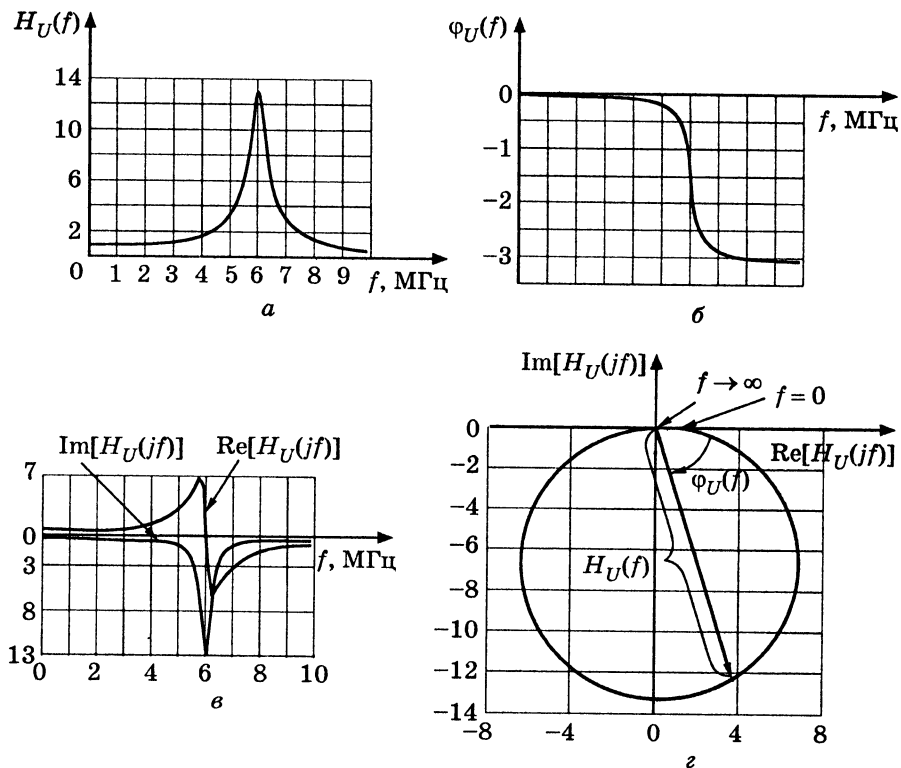


Рис. 5.7. Графіки для  $H_U(jf)$  до прикладу 5.2: а — АЧХ; б — ФЧХ; в —  $\operatorname{Re}[H_U(jf)]$  і  $\operatorname{Im}[H_U(jf)]$ ; г — АФХ

Запишемо формули для розрахунку АЧХ і ФЧХ у функції частоти  $f$ :

$$Y(f) = \frac{1}{\sqrt{5^2 + \left(2\pi f \cdot 1,75 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2\pi f \cdot 4 \cdot 10^{-10}}\right)^2}};$$

$$\varphi_U(f) = -\arctg \frac{2\pi f \cdot 1,75 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2\pi f \cdot 4 \cdot 10^{-10}}}{5}.$$

За результатами розрахунків АЧХ, ФЧХ і АФХ побудуємо графіки (рис. 5.8).

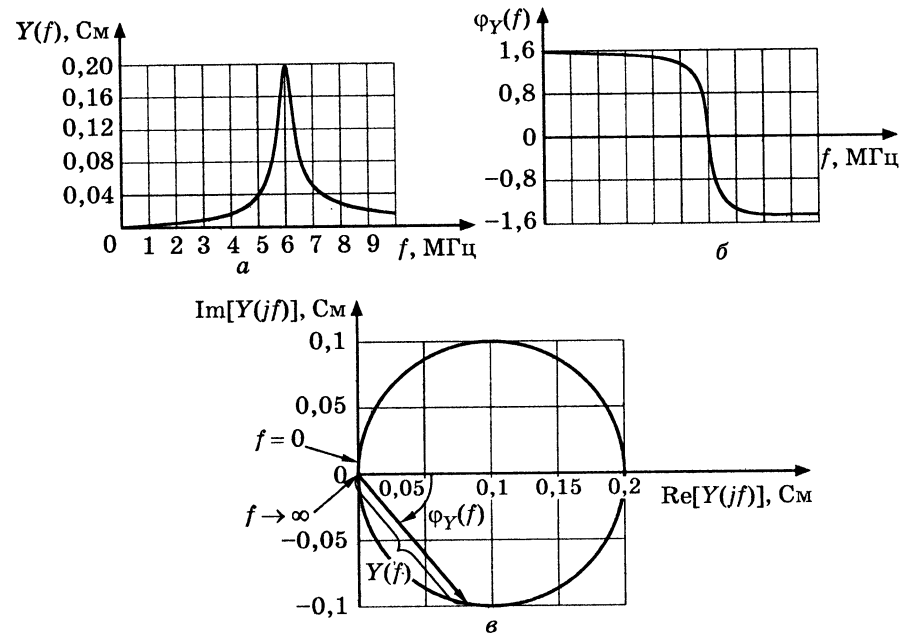


Рис. 5.8. Графіки для  $Y(jf)$  до прикладу 5.2: а — АЧХ; б — ФЧХ; в — АФХ

**Приклад 5.3.** Визначити комплексний коефіцієнт передачі за напругою  $H_U(j\omega)$  мостової схеми (рис. 5.9, а). Побудувати графіки АЧХ, ФЧХ і АФХ.

**Розв'язання.** З рівняння, складеного для контуру  $K$  за другим законом Кірхгофа, виразимо комплексне діюче значення вихідної напруги:

$$U_{\text{вих}} - \frac{1}{j\omega C} I + R I = 0;$$

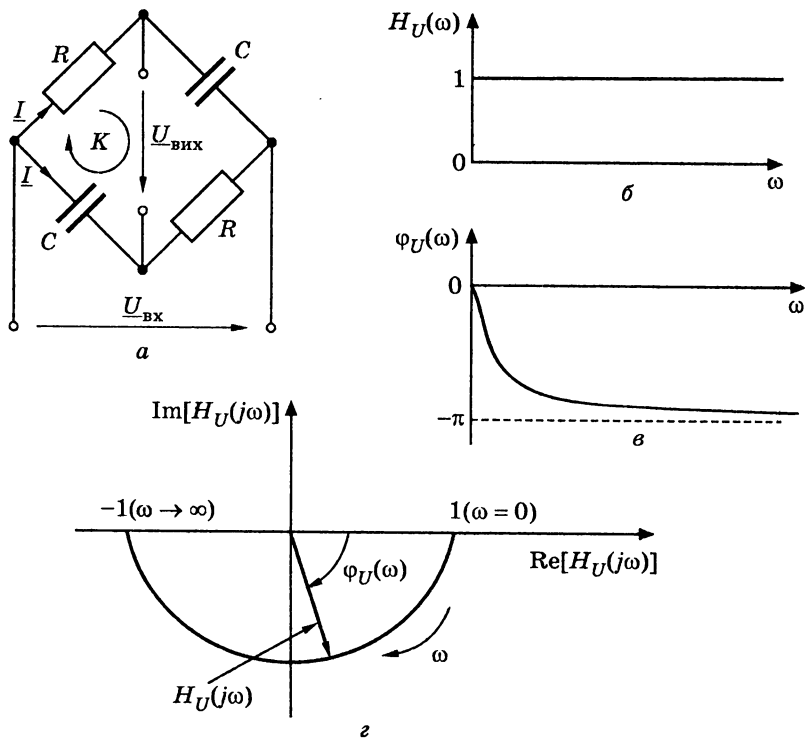


Рис. 5.9. До прикладу 5.3:

а — схема кола; графіки: б — АЧХ; в — ФЧХ; г — АФХ

$$U_{\text{вих}} = \frac{1}{j\omega C} I - RI = \left( \frac{1}{j\omega C} - R \right) I = \left( \frac{1}{j\omega C} - R \right) \frac{U_{\text{вх}}}{1/j\omega C + R} = \frac{U_{\text{вх}}(1 - j\omega CR)}{1 + j\omega CR}$$

Запишемо співвідношення для  $H_U(j\omega)$ , АЧХ і ФЧХ:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + j\omega CR}; \quad H_U(\omega) = \frac{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = 1;$$

$$\varphi_U(\omega) = -2\arctg(\omega CR) = -2\arctg(\omega\tau),$$

де  $\tau = RC$  — стала часу кожної з віток схеми.

Побудуємо графіки АЧХ (рис. 5.9, б), ФЧХ (рис. 5.9, в), а на їх основі — графік АФХ (рис. 5.9, г).

Помітною особливістю частотних характеристик даного кола є постійність АЧХ для всіх частот та суттєва залежність зсуву фаз (у межах  $0 \dots \pi$ ) від частоти. Тому розглянуте коло застосовується як *фазообертач* — пристрій, який змінює фазу синусоїдного коливання, не змінюючи його

амплітуду. Зсув фаз регулюється зміною сталої часу  $\tau$  кожної вітки кола за умови збереження симетрії схеми.

## 5.2. Вибірні властивості електричних кіл. Смуга пропускання

Згідно з виразом (5.4) амплітуди відгуку кола  $F_{\text{твих}}$  і дії  $F_{\text{твх}}$  пов'язані через АЧХ:

$$F_{\text{твих}} = H(\omega)F_{\text{твх}}.$$

Якщо  $H(\omega) = 0$ , відгук відсутній за будь-якої амплітуди дії (коло «не пропускає» вхідне коливання), оскільки  $F_{\text{твих}} = 0$ .

Якщо  $H(j\omega) \neq 0$ , амплітуда відгуку тим більша, чим більше значення АЧХ для частоти дії. Якщо АЧХ залежить від частоти (рис. 5.2, а, рис. 5.4, в, рис. 5.7, а), коло має вибірні властивості.

*Вибірність*, або селективність, — це властивість кола з набору коливань різних частот виділяти («пропускати») коливання одних і «не пропускати» коливання інших частот.

Якщо АЧХ не залежить від частоти (рис. 5.9, б), коло не є вибірним. Вибірні властивості кіл характеризують величиною ослаблення, яке визначається відношенням:

$$A(\omega) = \frac{H_{\text{max}}}{H(\omega)} > 1; \quad A(\omega), \text{ дБ} = 20 \cdot \lg \left( \frac{H_{\text{max}}}{H(\omega)} \right) > 0,$$

де  $H_{\text{max}}$  — максимальне значення АЧХ, а також смугою пропускання (СП) і коефіцієнтом прямокутності АЧХ.

*Смуга пропускання* — це діапазон частот, у межах якого АЧХ  $H(\omega)$  зменшується не більше, ніж у задане число разів  $n$  порівняно з максимальним значенням  $H_{\text{max}}$ . Інакше, СП — це смуга частот, в межах якої ослаблення менше певного значення:  $A(\omega) \leq n$ . СП прийнято позначати  $\Pi_\omega$  або  $\Pi_f$  залежно від одиниць вимірювання частоти (рад/с або Гц).

Граничні частоти СП є розв'язком будь-якого з рівнянь:

$$H(\omega) = \frac{H_{\text{max}}}{n}; \quad A(\omega) = \frac{H_{\text{max}}}{H(\omega)} = n; \quad H_{\text{норм}}(\omega) = \frac{H(\omega)}{H_{\text{max}}} = \frac{1}{n},$$

де  $H_{\text{норм}}(\omega)$  — АЧХ, нормована до максимального значення  $H_{\text{max}}$ .

Як рівень відліку СП прийнято значення  $n = \sqrt{2}$ , що відповідає зменшенню потужності коливань на границях СП (саме таку мінімальну зміну потужності звукових коливань відчуває людське

вуху) порівняно з максимальним значенням. Рівняння для розрахунку граничних частот СП матимуть такий вигляд:

$$H(\omega) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \approx \frac{H_{\max}}{1,41} \approx 0,707 H_{\max};$$

$$H_{\text{норм}}(\omega) = \frac{H(\omega)}{H_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707; \quad (5.9)$$

$$H_{\text{норм}}(\omega, \text{дБ}) = 20 \cdot \lg 0,707 = -3 \text{ дБ}; \quad A(\omega) = \frac{H_{\max}}{H(\omega)} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Залежно від форми АЧХ кількість граничних частот СП може бути різною (рис. 5.10). На рис. 5.10, а, б показані АЧХ з одною граничною частотою  $\omega_{\text{гр}} (f_{\text{гр}})$ . Максимальне значення цих АЧХ відповідає граничним значенням частот  $\omega=0$  (рис. 5.10, а) і  $\omega \rightarrow \infty$  (рис. 5.10, б). Очевидно, у першому випадку  $\Pi_{\omega} = \omega_{\text{гр}}$  ( $\Pi_f = f_{\text{гр}}$ ), а у другому —  $\Pi_{\omega} \rightarrow \infty$  ( $\Pi_f \rightarrow \infty$ ).

На рис. 5.10, в показані різні за формою АЧХ (криві 1 і 2), у яких збігаються граничні частоти СП  $\omega_{\text{гр}1} (f_{\text{гр}1})$  і  $\omega_{\text{гр}2} (f_{\text{гр}2})$  і тому смуга пропускання однакова:

$$\Pi_{\omega} = \omega_{\text{гр}2} - \omega_{\text{гр}1}; \quad \Pi_f = f_{\text{гр}2} - f_{\text{гр}1}. \quad (5.10)$$

На рис. 5.10, г зображена АЧХ, яка має чотири граничні частоти і дві СП:

$$\Pi'_{\omega} = \omega'_{\text{гр}2} - \omega'_{\text{гр}1}; \quad \Pi''_{\omega} = \omega''_{\text{гр}2} - \omega''_{\text{гр}1};$$

$$\Pi'_f = f'_{\text{гр}2} - f'_{\text{гр}1}; \quad \Pi''_f = f''_{\text{гр}2} - f''_{\text{гр}1}.$$

Смуга пропускання, хоча і є важливим показником вибірності, однак не дозволяє досить повно порівнювати міру послаблення коливань, частоти яких перебувають у межах і за межами СП.

Щоб визначити монотонність АЧХ, вводиться коефіцієнт нерівномірності ослаблення у смузі пропускання, який оцінюється максимальним значенням ослаблення  $A(\omega)_{\max} \leq \sqrt{2}$  (рис. 5.10, в, графік 1) у межах СП. При цьому значення ослаблення на границях смуги  $A(\omega) = \sqrt{2}$  не враховуються.

Щоб оцінювати вибірні властивості кіл з однаковою СП, їх АЧХ порівнюють з ідеальною прямокутною характеристикою (на рис. 5.10, в позначена штрихуванням), яка не змінює амплітуду вихідних коливань у порівнянні з вхідними для частот у межах СП ( $A(\omega) = 1$ ) і придушує коливання, частоти яких лежать за межами

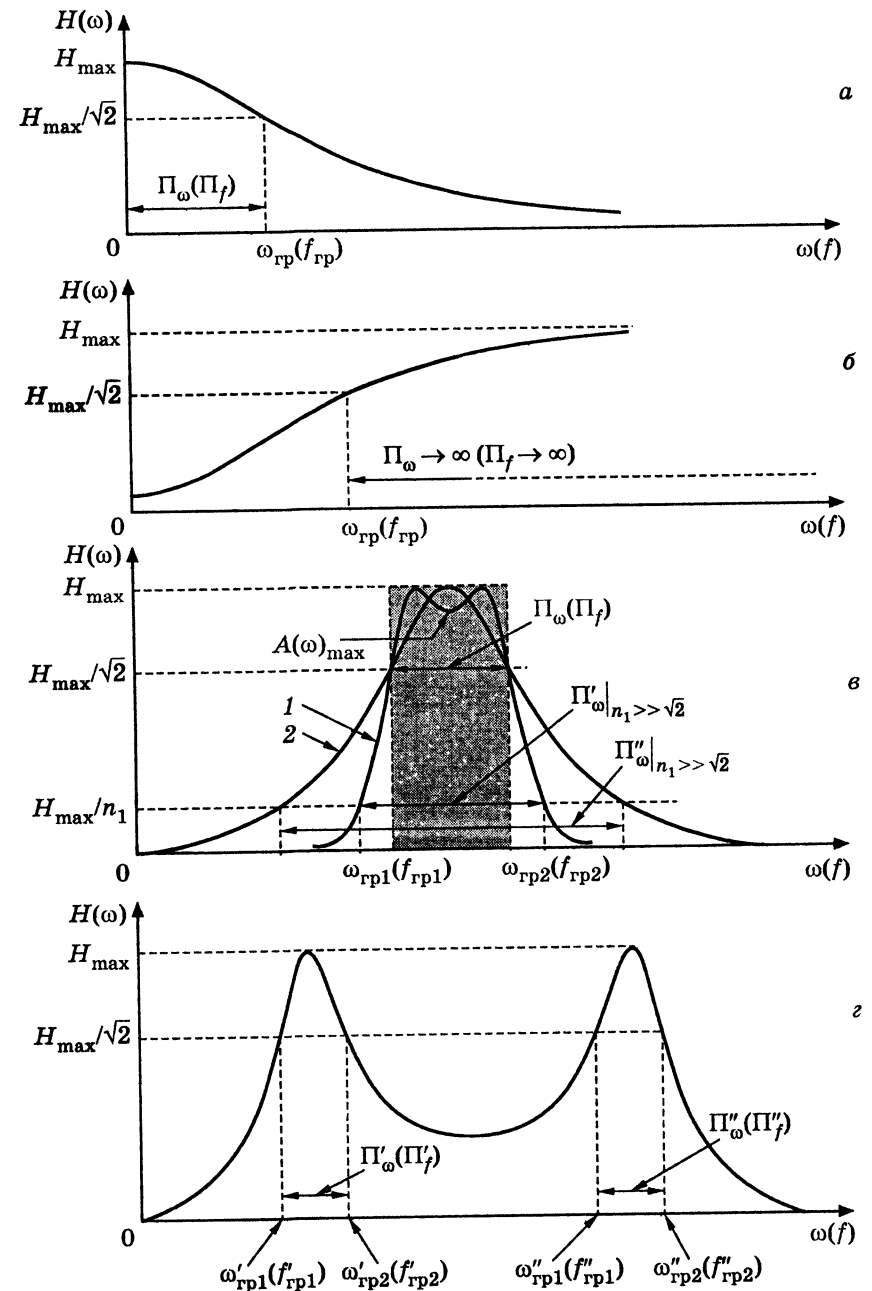


Рис. 5.10. Різновиди АЧХ і смуг пропускання

смуги ( $A(\omega) \rightarrow \infty$ ). Для кількісної оцінки прямокутності АЧХ реальних кіл використовується коефіцієнт прямокутності, який розраховується як відношення СП на рівні  $n_1 \gg \sqrt{2}$  (практично використовується одне зі значень 10, 100 або 1000) і на стандартному рівні  $n = \sqrt{2}$ :

$$k_{\text{пр}} = \frac{\Pi_{\omega}|_{n_1 \gg \sqrt{2}}}{\Pi_{\omega}|_{n=\sqrt{2}}} = \frac{\Pi_f|_{n_1 \gg \sqrt{2}}}{\Pi_f|_{n=\sqrt{2}}}. \quad (5.11)$$

Для ідеальної АЧХ коефіцієнт прямокутності дорівнює одиниці. У реальних кіл форма АЧХ відрізняється від ідеальної і  $k_{\text{пр}} > 1$ . При однакових значеннях СП і  $n_1 \gg \sqrt{2}$  вибірнішим є коло, у якого коефіцієнт прямокутності менше. Тому з двох АЧХ (рис. 5.10, в) кращу вибірність забезпечує характеристика, позначена номером 1.

Коефіцієнт прямокутності можна визначити тільки для кіл, у яких АЧХ монотонно зменшується до нуля за межами СП:  $A(\omega) \rightarrow \infty$ . Цій умові задовольняють характеристики, зображені на рис. 5.10, а, б, в.

Кола  $R, C$  та  $R, L$  мають односторонню вибірність в області низьких або високих частот (рис. 5.10, а, б). Щоб забезпечити вибірність у діапазоні частот поблизу резонансної частоти, використовують кола  $R, L, C$ . Аналізу резонансних режимів і вибірних властивостей цих кіл присвячено наступний матеріал даного розділу.

**Приклад 5.4.** Визначити СП кіл, розглянутих у прикладі 5.1. Оцінити коефіцієнт прямокутності АЧХ для різних значень  $n_1 \gg \sqrt{2}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи вираз (5.6) для АЧХ і враховуючи максимальне значення  $H_U \max = 1$ , а також співвідношення (5.9), складемо рівняння для визначення граничних частот СП:

$$H_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо два значення граничної частоти, з яких тільки додатне має фізичний сенс:

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\tau}.$$

Оскільки максимальне значення АЧХ відповідає частоті  $\omega=0$ , запишемо вираз для СП у вигляді:

$$\Pi_{\omega} = \omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\tau}.$$

Щоб знайти  $k_{\text{пр}}$ , скористуємося співвідношенням (5.11), попередньо визначивши  $\Pi_{\omega}|_{n_1 \gg \sqrt{2}}$ :

$$H_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = \frac{1}{n_1},$$

звідки  $\Pi_{\omega}|_{n_1 \gg \sqrt{2}} = \omega_{\text{гр}1} \approx \frac{n_1}{\tau}$ ;

$$k_{\text{пр}} = \frac{\Pi_{\omega}|_{n_1 \gg \sqrt{2}}}{\Pi_{\omega}|_{n=\sqrt{2}}} \approx n_1.$$

Отже, значення коефіцієнта прямокутності АЧХ даних кіл збігається з рівнем відліку  $n_1 \gg \sqrt{2}$ .

На графіку АЧХ (рис. 5.11, а) позначимо отримані СП на стандартному рівні  $n = \sqrt{2}$  і на рівні  $n_1 \gg \sqrt{2}$ , а на графіку ФЧХ (рис. 5.11, б) накреслимо жирною лінією ділянку, що відповідає частотам СП.

**Приклад 5.5.** Розрахувати СП для АЧХ  $Y(f)$  кола (див. приклад 5.2). Визначити  $k_{\text{пр}}$  АЧХ для рівня  $n_1 = 10$ .

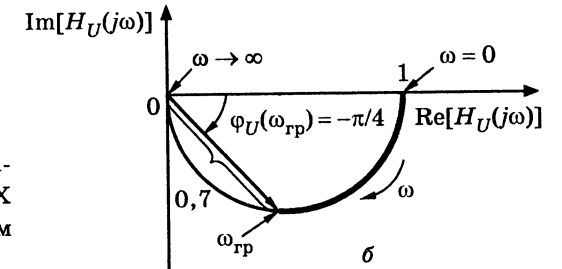
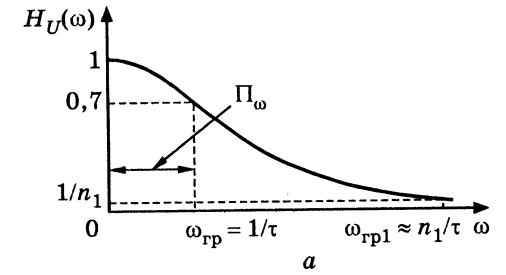
**Розв'язання.** Застосовуючи співвідношення (5.8), (5.9) і враховуючи максимальне значення  $Y_{\max} = 1/R$ , визначимо граничні частоти СП:

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{1}{R\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)^2}} = \frac{1}{R\sqrt{2}};$$

$$\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \pm 1; \quad \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \omega_{\text{рез}}^2 = 0;$$

$$\omega_{\text{гр}1...4} = \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_{\text{рез}}^2}; \quad f_{\text{гр}1...4} = \frac{\pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_{\text{рез}}^2}}{2\pi},$$

де  $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — кутова резонансна частота.



**Рис. 5.11.** Графіки, що ілюструють параметри вибірності кіл у прикладі 5.4: а — АЧХ; б — АФХ

Два додатних значення граничних частот мають фізичний сенс:

$$f_{гр1,2} = \frac{\pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_{рез}^2}}{2\pi}, \quad (5.12)$$

а два від'ємних — не реалізуються:

$$f_{гр3,4} = \frac{\pm \frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_{рез}^2}}{2\pi}.$$

Підставляючи у формулу (5.12) значення параметрів кола (див. приклад 5.2), отримаємо:

$$f_{гр1} = \frac{\frac{5}{2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6}} + \sqrt{\left(\frac{5}{2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + \frac{1}{1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10}}}}{2\pi} = 5,792 \text{ МГц};$$

$$f_{гр2} = \frac{\frac{5}{2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6}} - \sqrt{\left(\frac{5}{2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + \frac{1}{1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10}}}}{2\pi} = 6,247 \text{ МГц}.$$

СП визначимо за формулою (5.10):

$$\Pi_f = f_{гр2} - f_{гр1} = 6,247 - 5,792 = 0,455 \text{ МГц}.$$

Щоб проілюструвати результати розрахунків, побудуємо графіки АЧХ (рис. 5.12, а, б) і АФХ (рис. 5.12, в), на яких позначимо граничні частоти і СП.

Значення СП на рівні  $n_1 = 10$  визначимо за методикою, використаною вище для стандартного рівня:

$$Y(\omega) = \frac{1}{R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)^2}} = \frac{1}{R n_1};$$

$$f'_{гр1,2} = \frac{\pm \frac{n_1 R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{n_1 R}{2L}\right)^2 + \omega_{рез}^2}}{2\pi},$$

$$\Pi_f|_{n_1=10} \approx f'_{гр2} - f'_{гр1} = \frac{n_1(R/L)}{2\pi} = \frac{10 \cdot 5 / 1,75 \cdot 10^{-6}}{2\pi} = 4,55 \text{ МГц}.$$

СП на рівні  $n_1 = 10$  позначена на рис. 5.12, а.

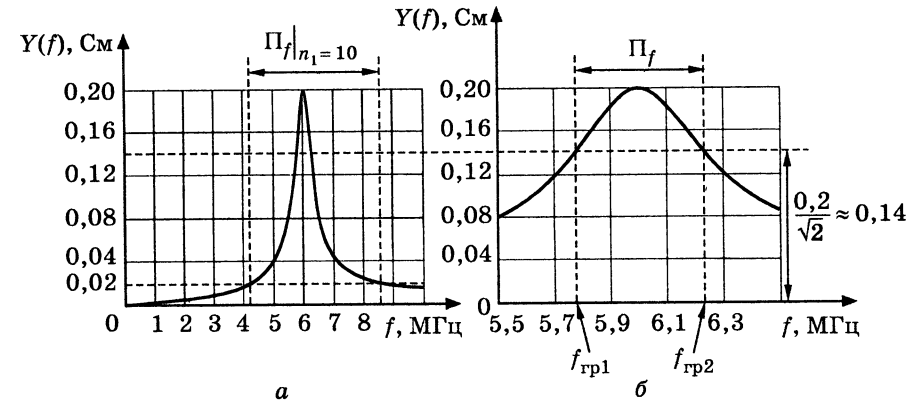


Рис. 5.12. Графіки, що ілюструють вибірність кола у прикладі 5.5: а, б — АЧХ; в — АФХ

Щоб оцінити  $k_{цр}$  АЧХ на рівні  $n_1 = 10$ , застосуємо формулу (5.11):

$$k_{цр} = \frac{\Pi_f|_{n_1=10}}{\Pi_f|_{n=\sqrt{2}}} \approx \frac{4,55}{0,455} = 10.$$

### 5.3. Послідовний коливальний контур. Схеми контуру. Резонансний режим. Вторинні параметри. Резонансні криві

Коливальними називаються кола, в яких можливе явище резонансу напруг або струмів.

Послідовний коливальний, або резонансний, контур (рис. 5.13, а) складається з котушки індуктивності та конденсатора, з'єднаних послідовно з джерелом напруги. На рис. 5.13, а схеми заміщення

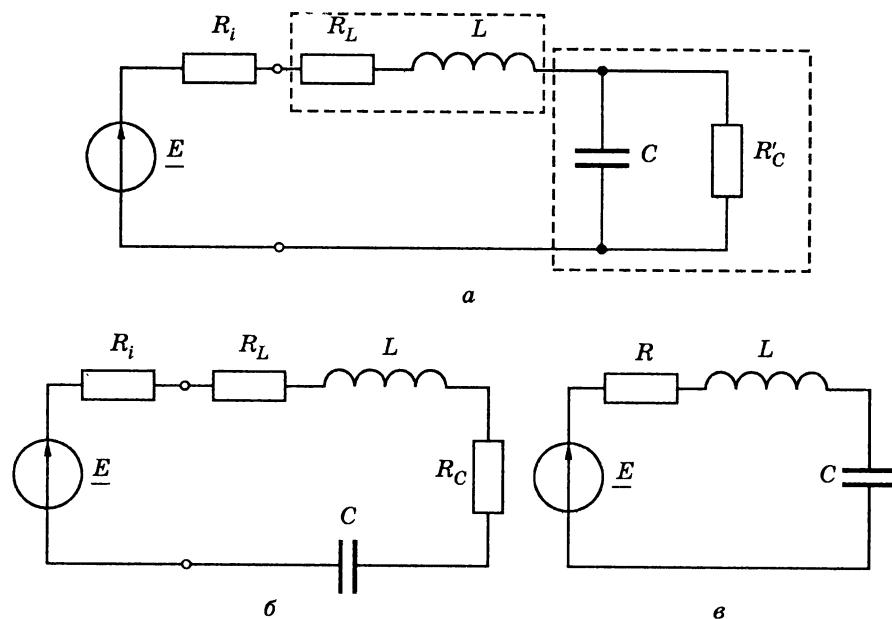


Рис. 5.13. Схеми послідовного коливального контуру

катушки і конденсатора обведені пунктиром. Коливальний контур винайдений німецьким фізиком Брауном<sup>3</sup>.

Схема заміщення катушки індуктивності представлена послідовним з'єднанням ідеальних елементів  $R_L$  і  $L$ , які мають певне фізичне значення: опір  $R_L$  характеризує втрати енергії в катушці і дорівнює десяткам або одиницям Ом, а  $L$  — це індуктивність катушки. Еквівалентна схема конденсатора — це паралельне з'єднання ємності  $C$  і опору витікання  $R'_C$ , який враховує втрати енергії від струмів зміщення в ізоляції конденсатора. Опір  $R'_C$  може перевищувати сотні кілоом. Оскільки для запису рівнянь така схема не досить зручна, доцільно перетворити паралельне з'єднання

<sup>3</sup> Браун Карл Фердинанд, Braun (1850–1918) — професор фізики Страсбурзького університету. В 1897 р. створив електронно-променеву трубку. В 1898 р. винайшов коливальний контур з малим загасанням. Виготовив кристалічний детектор для перших радіоприймачів, винайшов декілька типів антен і запропонував багато технічних удосконалень, які сприяли розвитку радіозв'язку. В 1909 р. Гіль'єрмо Марконі та Фердинанду Брауну присуджено Нобелівську премію з фізики за створення безпроводового телеграфу. (На жаль, роботи російського фізика О. С. Попова, який у 1895 р. оприлюднив, але не запатентував результати своїх досліджень щодо можливості передачі повідомлень за допомогою електромагнітних хвиль, не потрапили у поле зору Нобелівського комітету.)

$R'_C$  і  $C$  у послідовне — з параметрами  $R_C$  і  $C$  (рис. 5.13, б). Причому ємність  $C$  залишається майже незмінною, а опір  $R_C$  буде тим менше, чим більше  $R'_C$ . Якщо послідовно з'єднати опори  $R_i$ ,  $R_L$  і  $R_C$  замістити сумарним опором втрат  $R = R_i + R_L + R_C$ , виходить узагальнена схема коливального контуру, параметри якого  $R$ ,  $L$ ,  $C$  називаються *первинними* (рис. 5.13, в).

За законом Ома комплексне діюче значення струму в узагальненій схемі послідовного контуру

$$\begin{aligned} \underline{I} &= I e^{j\psi_I} = \frac{\underline{E}}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{\underline{E}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \\ &= \frac{\underline{E}}{R + jX} = \frac{E e^{j\psi_E}}{\sqrt{R^2 + X^2} e^{j\varphi}} = \frac{E}{Z} e^{j(\psi_E - \varphi)}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

де  $X = X_L - X_C$  — реактивний опір контуру;  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  — повний опір контуру;  $\varphi = \arctg(X/R)$  — аргумент комплексного опору контуру.

Частотні залежності реактивного опору і його складових ( $X_L$ ,  $-X_C$ ,  $X$ ) показані на рис. 5.14, а. Точка, в якій  $X(\omega) = 0$  (графік  $X(\omega)$  перетинає вісь частот), відповідає умові резонансу. Частота, що задовольняє цій умові, є резонансною:

$$X(\omega_{\text{рез}}) = 0, \quad \omega_{\text{рез}} L - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = 0,$$

звідки

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{або} \quad f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (5.14)$$

Період коливань і довжина хвилі для резонансної частоти становлять:

$$\begin{aligned} T_{\text{рез}} &= \frac{1}{f_{\text{рез}}} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (\text{формула Томсона}^4); \\ \lambda_{\text{рез}} &= c T_{\text{рез}} = \frac{c}{f_{\text{рез}}} = c 2\pi\sqrt{LC}, \end{aligned}$$

де  $c$  — швидкість поширення електромагнітних хвиль.

<sup>4</sup> Томсон Дж., Thomson J. (1824–1907) — англійський фізик. Більше 50 років керував кафедрою теоретичної фізики університету в Глазго. За наукові заслуги отримав титул лорда Кельвіна за назвою річки в цьому місті. Зробив внесок у термодинаміку, теорію електричних коливань, математичну фізику. Здійснив низку винаходів і удосконалень у телеграфії та вимірвальній техніці. Запропонував термодинамічну температурну шкалу, одиниця виміру в якій отримала назву — кельвін (К).

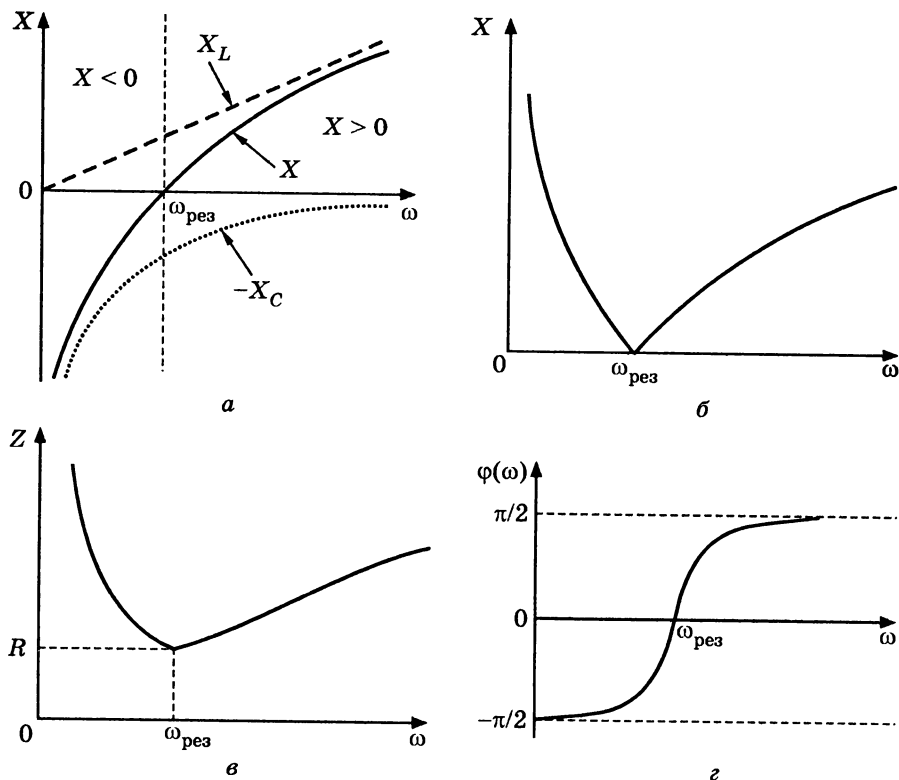


Рис. 5.14. Графіки частотних залежностей: а — реактивного опору і його складових; б — модуля реактивного опору; в, г — модуля й аргументу комплексного опору послідовного контуру

На початку розвитку радіотехніки значний внесок у теорію і практику коливальних систем зробив Мандельштам<sup>5</sup>.

У діапазоні від 0 до  $\omega_{\text{рез}}$  реактивний опір контуру від'ємний, що відповідає його ємнісному характеру. У діапазоні від  $\omega_{\text{рез}}$  до  $\omega \rightarrow \infty$  реактивний опір додатний і, отже, має індуктивний характер.

Частотна залежність повного опору відповідно до (5.13) показана на рис. 5.14, в. Форма кривої  $Z$  близька до кривої  $|X|$  (рис. 5.14, б), оскільки саме модуль  $X$  визначає повний опір при

<sup>5</sup> Мандельштам Леонід Ісаакович (1879–1944) — фізик, дійсний член АН СРСР; народився в Одесі. Вчився, а потім працював у Страсбурзі з К. Ф. Брауном до 1918 р. Брав участь у дослідженнях і розробках радіопристроїв у фірмі «Сименс і Гальске». Основні праці стосуються радіофізики, теорії коливальних і оптики.

відходить від резонансної частоти. Повний опір на резонансній частоті є активним:

$$Z_{\text{рез}} = R, \quad (5.15)$$

що відповідає відсутності фазового зсуву між зовнішньою напругою і струмом у колі (такий резонанс є фазовим):

$$\varphi(\omega_{\text{рез}}) = 0. \quad (5.16)$$

Слід звернути увагу на те, що для  $\omega = \omega_{\text{рез}}$  повний опір є мінімальним. Графік залежності аргументу комплексного опору від частоти (рис. 5.14, г) визначається частотною залежністю  $X(\omega)$ .

Частотна залежність діючого (амплітудного) значення струму називається *резонансною кривою* (рис. 5.15). З формули (5.13) виходить, що частотна залежність величини  $I$  обернено пропорційна частотній залежності повного опору (рис. 5.14, в). При резонансі діюче (амплітудне) значення струму досягає максимуму:

$$I_{\text{рез}} = \frac{E}{R}; \quad I_{m \text{рез}} = \frac{E_m}{R}, \quad (5.17)$$

що є ознакою амплітудного резонансу.

Частота амплітудного резонансу струму збігається з частотою фазового резонансу.

Практично настроїти контур у резонанс можна, змінюючи частоту, ємність або індуктивність. Залежності діючого (амплітудного) значення струму від ємності або індуктивності називають *настроювальними кривими*. Ці криві досягають максимуму при резонансі.

Згідно з умовою резонансу  $X = 0$  значення реактивних опорів індуктивності та ємності дорівнюють одне одному і називаються *характеристичним опором* контуру  $\rho$ :

$$\rho = \omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C}. \quad (5.18)$$

Якщо у формулу (5.18) підставити вираз (5.14), виходить значення характеристичного опору, який визначається первинними параметрами контуру:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.19)$$

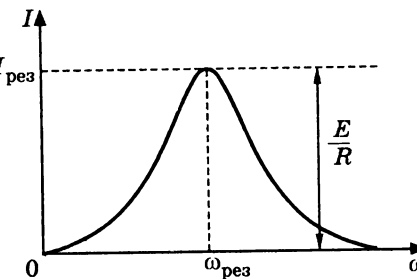


Рис. 5.15. Графік резонансної кривої струму послідовного контуру

Характеристичний опір становить одиниці кілоом, якщо  $f_{рез}$  не перевищує сотні мегагерц.

На резонансній частоті  $\omega_{рез}$  комплексні значення струму і напруг на елементах контуру становитимуть:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{рез} &= \frac{\underline{E}}{R}; \quad \underline{U}_{Rрез} = \underline{E}; \quad \underline{U}_{Lрез} = j\omega_{рез} L \underline{I}_{рез} = j \frac{\rho}{R} \underline{E}; \\ \underline{U}_{Cрез} &= -j \frac{1}{\omega_{рез} C} \underline{I}_{рез} = -j \frac{\rho}{R} \underline{E}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ці векторні величини зображені на діаграмі (рис. 5.16) і відповідають рівнянню, складеному за другим законом Кірхгофа для  $\omega = \omega_{рез}$ :

$$\underline{E} = \underline{U}_{Rрез} + \underline{U}_{Lрез} + \underline{U}_{Cрез}.$$

Як виходить з діаграми і співвідношень (5.20), при  $\omega = \omega_{рез}$  напруга на опорі  $\underline{U}_{Rрез}$  дорівнює значенню  $\underline{E}$  і збігається за фазою зі струмом  $\underline{I}$ , а напруги на реактивних елементах протилежні за фазою і рівні між собою за модулем (діючі або амплітудні значення):

$$\underline{U}_{Cрез} = \frac{1}{\omega_{рез} CR} E = \frac{\rho}{R} E; \quad \underline{U}_{Lрез} = \frac{\omega_{рез} L}{R} E = \frac{\rho}{R} E.$$

Оскільки  $\underline{U}_{Rрез} = R \underline{I}_{рез} = E$ , напруга на зовнішніх затискачах кола при резонансі збігається з напругою на опорі.

Вирази для  $\underline{U}_{Cрез}$  і  $\underline{U}_{Lрез}$  мають однаковий коефіцієнт перед  $E$ , який позначається літерою  $Q$  і називається *добротністю контуру*:

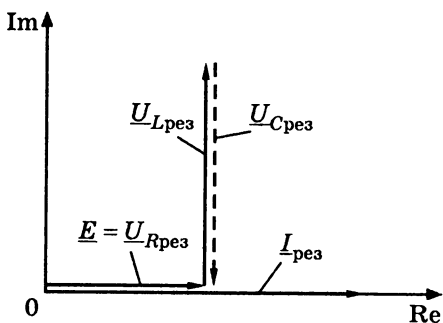


Рис. 5.16. Векторна діаграма струму і напруг послідовного контуру при резонансі

$$Q = \frac{\omega_{рез} L}{R} = \frac{1}{\omega_{рез} CR} = \frac{\rho}{R}. \quad (5.21)$$

Діючі (амплітудні) значення напруг на реактивних елементах на резонансній частоті перевищують діюче значення ЕРС джерела в  $Q$  разів:

$$\underline{U}_{Cрез} = \underline{U}_{Lрез} = QE. \quad (5.22)$$

Тому резонанс у послідовному коливальному контурі називають *резонансом напруг*.

Добротність  $Q$  з урахуванням виразів (5.19) і (5.21) можна визначити через первинні параметри контуру:

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}, \quad (5.23)$$

тобто добротність показує, наскільки характеристичний опір перевищує опір втрат у контурі. Добротність називають також коефіцієнтом якості контуру. Межі змінювання добротності для контуров з малими втратами становлять 20...500, якщо  $f_{рез} < 100$  МГц. У цьому ж діапазоні частот вищу добротність ( $Q > 1000$ ) забезпечують електромеханічні (кварцові та магнітострикційні) коливальні пристрої. У діапазоні частот  $f > 100$  МГц коливальні пристрої реалізують, застосовуючи довгі лінії й об'ємні резонатори. Перспективною технологією виготовлення високодобротних контурів є акустоелектроніка, яка використовує поверхневі акустичні хвилі.

Слід зазначити, що при резонансі максимальна енергія, накопичена в магнітному полі індуктивності, дорівнює максимальній енергії електричного поля ємності:

$$\begin{aligned} W_{L \max} &= \frac{LI_{рез}^2}{2} = LI_{рез}^2; \\ W_{C \max} &= \frac{CU_{Cрез}^2}{2} = CU_{Cрез}^2 = C \left( \frac{1}{\omega_{рез} C} I_{рез} \right)^2 = LI_{рез}^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Отже,  $W_{C \max} = W_{L \max}$ . Тобто в контурі на резонансній частоті індуктивність і ємність накопичують енергію, яка досягає однакового значення, але у різні моменти часу. Під час обміну енергіями між реактивними елементами вона частково поглинається в опорі — ці втрати компенсує джерело.

Енергія втрат в активному опорі за період  $T_{рез}$  становить:

$$W_{Rрез} = PT_{рез} = RI_{рез}^2 T_{рез}. \quad (5.25)$$

Вирази (5.24) і (5.25) дозволяють дати енергетичне трактування добротності:

$$Q = 2\pi \frac{W_{L \max}}{W_{Rрез}} = 2\pi \frac{LI_{рез}^2}{RI_{рез}^2 T_{рез}} = \frac{2\pi f_{рез} LI_{рез}^2}{RI_{рез}^2} = \frac{\omega_{рез} L}{R}.$$

Отже, добротність прямо пропорційна максимальній енергії, яка накопичується в реактивних елементах при резонансі, й обернено



пропорційна енергії втрат в активному опорі за період резонансної частоти  $T_{\text{рез}}$ .

Особливості резонансу напруг і способів настроювання визначають принцип дії вимірювальних приладів, які називаються « $Q$ -метрами». До складу цих приладів входять генератори із змінною частотою, змінні конденсатори й індикатори струму.  $Q$ -метри дозволяють вимірювати не тільки добротності контурів, але й індуктивності котушок і ємності конденсаторів.

Величина, обернена добротності, позначається літерою  $d$  і називається *загасанням* контуру:

$$d = \frac{1}{Q}. \quad (5.26)$$

На відміну від первинних параметрів  $R, L, C$ , резонансна частота  $\omega_{\text{рез}}$  ( $f_{\text{рез}}$ ), період резонансної частоти  $T_{\text{рез}}$ , характеристичний опір  $\rho$ , добротність контуру  $Q$ , загасання  $d$  називаються *вторинними параметрами* контуру.

Частотні залежності діючих значень (амплітуд) напруг на елементах  $R, L, C$  також називають *резонансними кривими*.

Виходячи з закону Ома в комплексній формі для схеми (рис. 5.13, в), комплексне діюче значення напруги на активному опорі

$$\underline{U}_R = R\underline{I} = RIe^{j\psi_I}, \quad (5.27)$$

звідки виходить рівняння резонансної кривої напруги на активному опорі:

$$U_R(\omega) = RI(\omega). \quad (5.28)$$

Для ємності та індуктивності

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \frac{1}{\omega C e^{j\pi/2}} I e^{j\psi_I}, \quad \underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = \omega L e^{j\pi/2} I e^{j\psi_I},$$

звідки виходять рівняння резонансних кривих напруг на ємності та індуктивності:

$$U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} I(\omega); \quad (5.29)$$

$$U_L(\omega) = \omega L I(\omega). \quad (5.30)$$

Відповідно до формул (5.28)–(5.30) можна побудувати графіки резонансних кривих напруги на елементах контуру. В області частот поблизу  $\omega_{\text{рез}}$  при малих добротностях, тобто при великому опорі втрат, спостерігаються специфічні особливості резонансних

кривих. Значення струму на резонансній кривій (рис. 5.15) повільно зменшується при відході від резонансної частоти. З кривою струму за формою збігається резонансна крива напруги на активному опорі  $U_R(\omega)$  — ці криві відрізняються постійним коефіцієнтом  $R$  (рис. 5.17).

Максимальне діюче (амплітудне) значення напруги на опорі (амплітудний резонанс) спостерігається на частоті  $\omega_{\text{рез}}$ , яка є також і частотою фазового резонансу.

Крива частотної залежності діючого значення напруги на ємності згідно з виразом (5.29) здобута множенням кривої струму, подібної до  $U_R(\omega)$ , на ємнісний опір  $1/\omega C$ , обернено пропорційний частоті. Оскільки крива  $I$  мало змінюється поблизу резонансної частоти, максимум кривої  $U_C(\omega)$  зміщується у бік частот, менших за резонансну (рис. 5.17). Такий же висновок можна дістати, аналізуючи співвідношення (5.29) з урахуванням значення струму  $I$  (5.13):

$$U_C = \frac{E}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}. \quad (5.31)$$

Напруга максимальна при мінімальних значеннях знаменника дробу (5.31) або його підкоренового виразу:

$$(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2. \quad (5.32)$$

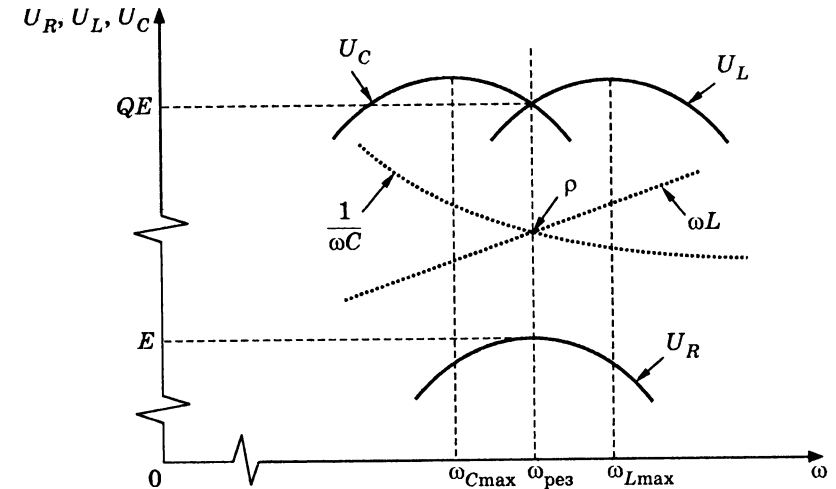


Рис. 5.17. Графіки резонансних кривих напруг на елементах послідовного коливального контуру

Якщо похідну виразу (5.32) за  $\omega$  прирівняти нулю і розв'язати отримане рівняння

$$(C^2 R^2 + 2\omega L^2 C^2 - 2LC)2\omega = 0,$$

значення частоти  $\omega_{C \max}$ , що відповідає максимуму  $U_C$ , становитиме:

$$\omega_{C \max} = \sqrt{\frac{2LC - C^2 R^2}{2L^2 C^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R^2 C}{2L}\right)}.$$

З урахуванням співвідношень (5.14), (5.19), (5.21) і (5.26) можна здобути остаточний вираз для  $\omega_{C \max}$ :

$$\omega_{C \max} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 - 0,5d^2}.$$

Після підстановки значень  $\omega_{C \max}$  у рівняння (5.31) і його перетворення виходить формула для визначення максимальної напруги на ємності:

$$U_{C \max} = \frac{E}{d\sqrt{1 - 0,25d^2}} = \frac{EQ}{\sqrt{1 - 0,25d^2}} = \frac{U_{C \text{рез}}}{\sqrt{1 - 0,25d^2}} > U_{C \text{рез}}. \quad (5.33)$$

Аналіз резонансної кривої діючого значення напруги на індуктивності виконується аналогічно відповідно до формули (5.30). Оскільки індуктивний опір  $\omega L$  збільшується із зростанням частоти, це призводить до зміщення максимуму  $U_L(\omega)$  у бік частот, вищих від резонансної. Частота, яка відповідає максимальній напрузі на індуктивності, і максимум напруги на індуктивності  $U_{L \max}$  становитимуть:

$$\omega_{L \max} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\sqrt{1 - 0,5d^2}}; \quad U_{L \max} = \frac{EQ}{\sqrt{1 - 0,25d^2}} = \frac{U_{L \text{рез}}}{\sqrt{1 - 0,25d^2}} > U_{L \text{рез}}.$$

У високодобротного контуру загасання  $d$  невелике і різниця між  $U_{C \max}$  і  $U_{L \max}$  як між собою, так і з резонансним значенням  $QE$  буде незначною. Наприклад, при добротності  $Q = 10$  ( $d = 0,1$ ) частоти максимумів становитимуть  $\omega_{C \max} = 0,9975\omega_{\text{рез}}$  і  $\omega_{L \max} = 1,0025\omega_{\text{рез}}$ , а максимуми напруг:  $U_{C \max} = U_{L \max} = 1,0012QE$ . Отже, при  $Q > 10$  можна вважати, що  $\omega_{C \max} \approx \omega_{L \max} \approx \omega_{\text{рез}}$ ,  $U_{C \max} = U_{L \max} \approx U_{C \text{рез}} \approx U_{L \text{рез}} \approx QE$ . Слід, однак, зазначити, що при низькій добротності різниця між максимумами напруг на реактивних елементах та їх резонансними значеннями, а також відмінність частот,

які відповідають цим максимумам, і резонансною частотою можуть бути суттєвими. Тому загалом визначати резонансну частоту контуру за максимумом діючого значення напруг на реактивних елементах не можна.

**Приклад 5.6.** Розрахувати вторинні параметри послідовного контуру, розглянутого у прикладах 5.2 і 5.5. Знайти комплексні діючі значення струму і напруг на елементах контуру, якщо  $\underline{E} = 5e^{-j\pi/4}$  В.

*Розв'язання.* Обчислимо вторинні параметри, використовуючи формули (5.14), (5.19), (5.23), (5.26):

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-10}}} = 6,015 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 6,015 \text{ МГц};$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1,75 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-10}}} = 66,14 \text{ Ом}; \quad Q = \frac{\rho}{R} = \frac{66,14}{5} = 13,23; \quad d = \frac{1}{Q} = \frac{1}{13,23} = 0,076.$$

На підставі співвідношення (5.20), розрахуємо резонансний режим у контурі:

$$\underline{I}_{\text{рез}} = \frac{\underline{E}}{R} = \frac{5e^{-j\pi/4}}{5} = e^{-j\pi/4} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{R \text{рез}} = \underline{E} = 5e^{-j\pi/4} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{L \text{рез}} = j\frac{\rho}{R}\underline{E} = jQE = e^{j\pi/2} 13,23 \cdot 5e^{-j\pi/4} = 66,15e^{j\pi/4} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{C \text{рез}} = -j\frac{\rho}{R}\underline{E} = -jQE = e^{-j\pi/2} 13,23 \cdot 5e^{-j\pi/4} = 66,15e^{-j3\pi/4} \text{ В}.$$

#### 5.4. Комплексні передатні функції і частотні характеристики послідовного контуру. Абсолютна, відносна й узагальнена розстройки

Якщо дією вважати ЕРС  $\underline{F}_{\text{вх}} = \underline{E}$ , то відповідно до формули (5.2) КПФ послідовного коливального контуру:

$$H(j\omega) = \frac{\underline{F}_{\text{вих}}}{\underline{E}}. \quad (5.34)$$

Якщо відгуком вважати струм, КПФ є комплексною провідністю:

$$Y(j\omega) = \frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{1}{R + jX},$$

де  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  — реактивний опір контуру.

Якщо в формулі (5.34) відгуком є напруги на елементах контуру, КПФ є комплексними коефіцієнтами передачі за напругою:

$$H_{U_R}(j\omega) = \frac{U_R}{E} = \frac{R}{R+jX}; \quad H_{U_C}(j\omega) = \frac{U_C}{E} = \frac{-j/\omega C}{R+jX};$$

$$H_{U_L}(j\omega) = \frac{U_L}{E} = \frac{j\omega L}{R+jX}.$$

Вирази для АЧХ і ФЧХ послідовного контуру, а також значення КПФ і АЧХ для резонансної частоти наведені у табл. 5.1. Графіки частотних характеристик показані на рис. 5.18–5.20.

Таблиця 5.1

Вирази для АЧХ і ФЧХ послідовного контуру; значення  $H(j\omega)$  і  $H(\omega)$  для резонансної частоти

Відгук	$H(j\omega_{\text{рез}}), H(\omega_{\text{рез}})$	АЧХ	ФЧХ
$\underline{I}$	$Y(j\omega_{\text{рез}}) = Y(\omega_{\text{рез}}) = \frac{1}{R}$	$Y_{\text{вх}}(\omega) = \frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}$	$\varphi_Y(\omega) = \psi_I - \psi_E =$ $= \varphi_{U_R}(\omega) = \psi_{U_R} - \psi_E =$ $= -\arctg \frac{X}{R}$
$\underline{U_R}$	$H_{U_R}(j\omega_{\text{рез}}) =$ $= H_{U_R}(\omega_{\text{рез}}) = 1$	$H_{U_R}(\omega) = \frac{U_R}{E} =$ $= \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$	
$\underline{U_C}$	$H_{U_C}(j\omega_{\text{рез}}) = -jQ$ $H_{U_C}(\omega_{\text{рез}}) = Q$	$H_{U_C}(\omega) = \frac{U_C}{E} =$ $= \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + X^2}}$	$\varphi_{U_C}(\omega) = \psi_{U_C} - \psi_E =$ $= -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X}{R}$
$\underline{U_L}$	$H_{U_L}(j\omega_{\text{рез}}) = jQ$ $H_{U_L}(\omega_{\text{рез}}) = Q$	$H_{U_L}(\omega) = \frac{U_L}{E} =$ $= \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + X^2}}$	$\varphi_{U_L}(\omega) = \psi_{U_L} - \psi_E =$ $= \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X}{R}$

На рис. 5.18 графіки частотних характеристик зображені для двох значень добротності  $Q_1 > Q_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

Для контуру з низькою добротністю ( $1 < Q < 10$ ) криві  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  (рис. 5.19, а) мають такий же вигляд, як і відповідні резонансні криві (рис. 5.17), але по осі ординат відкладені не абсолютні, а відносні (до величини  $E$ ) значення напруг.

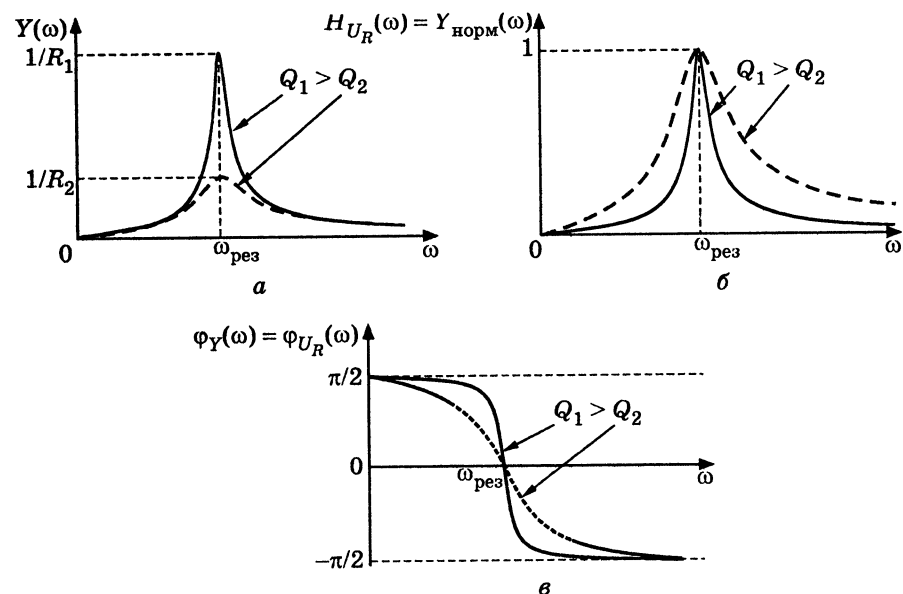


Рис. 5.18. Графіки частотних характеристик для  $Y(j\omega)$  і  $H_{U_R}(\omega)$  послідовного контуру: а, б — АЧХ; в — ФЧХ

За високої добротності  $H(\omega)$  максимуми кривих  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  практично дорівнюють  $Q$ , а частота максимумів відповідає резонансній (рис. 5.20, а), тобто поблизу резонансної частоти криві збігаються. При  $\omega=0$  і  $\omega \rightarrow \infty$  відмінності у значеннях АЧХ зберігаються.

Щоб визначити граничні значення АЧХ  $H_{U_C}(\omega)$ ,  $H_{U_L}(\omega)$  (рис. 5.19, а і 5.20, а), слід скласти еквівалентні схеми (рис. 5.21) послідовного контуру на граничних частотах  $\omega=0$  і  $\omega \rightarrow \infty$ .

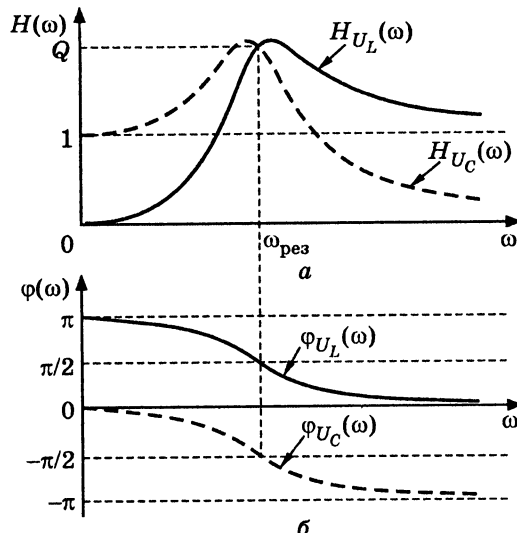


Рис. 5.19. Графіки частотних характеристик для контуру з низькою добротністю: а — АЧХ; б — ФЧХ

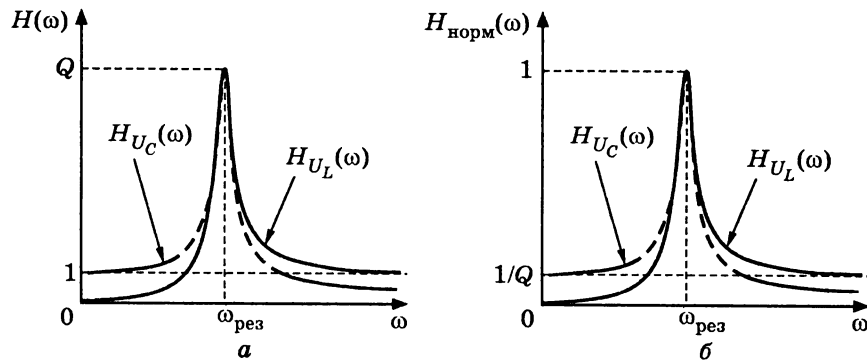


Рис. 5.20. Графіки АЧХ  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  контуру з високою добротністю:

*a* — в абсолютних; *б* — у нормованих одиницях

З рис. 5.21, *a* виходить, що  $U_L(0) = 0$ ,  $U_C(0) = E$ , тому значення АЧХ для нульового значення частоти  $H_{U_L}(0) = 0$ ,  $H_{U_C}(0) = 1$ . Для  $\omega \rightarrow \infty$  (рис. 5.21, *б*)  $U_L(\infty) = E$ ;  $U_C(\infty) = 0$ , тому  $H_{U_L}(\infty) = 1$ ;  $H_{U_C}(\infty) = 0$ .

При значних змінах добротності ординати графіків АЧХ можуть суттєво відрізнятись, що незручно для побудови і аналізу кривих. Щоб позбутися цього, переходять від абсолютних координат до відносних, які можна відрозумувати по осі ординат (абсцис) — нарізно або по обох осях одночасно.

У відносних координатах по осі ординат зображають тільки АЧХ, оскільки межі змінювання ФЧХ при різних добротностях не змінюються. Для нормування АЧХ використовують резонансні значення  $H(\omega_{рез})$  (див. табл. 5.1).

Вирази для нормованих АЧХ зведені до табл. 5.2, у яку, однак, не внесено вираз для  $H_{U_R,норм}(\omega)$ , оскільки  $H_{U_R}(\omega_{рез}) = 1$ , і тому

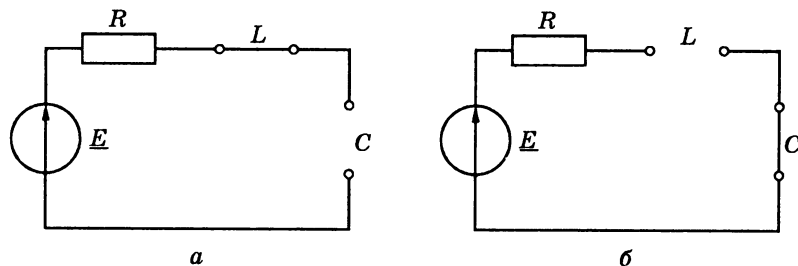


Рис. 5.21. Еквівалентні схеми послідовного контуру для граничних значень частоти: *a* —  $\omega = 0$ ; *б* —  $\omega \rightarrow \infty$

$H_{U_R,норм}(\omega) = H_{U_R}(\omega)$ . Отже, графік (рис. 5.18, *б*) відповідає одночасно  $Y_{норм}(\omega)$ ,  $H_{U_R}(\omega)$  і  $H_{U_R,норм}(\omega)$ .

Таблиця 5.2

Нормовані АЧХ послідовного контуру

$Y_{норм}(\omega)$	$H_{U_C,норм}(\omega)$	$H_{U_L,норм}(\omega)$
$\frac{Y(\omega)}{1/R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}}$	$\frac{H_{U_C}(\omega)}{1/(\omega_{рез}RC)} = \frac{\omega_{рез}/\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}}$	$\frac{H_{U_L}(\omega)}{(\omega_{рез}L)/R} = \frac{\omega/\omega_{рез}}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}}$

Нормовані АЧХ  $H_{U_C,норм}(\omega)$  і  $H_{U_L,норм}(\omega)$  (рис. 5.20, *б*) для контурів високої добротності поблизу резонансної частоти  $\omega_{рез}/\omega \approx \omega/\omega_{рез} \approx 1$  практично збігаються між собою та з іншими нормованими АЧХ. З відходом від резонансної частоти відмінності цих АЧХ зростають.

Розраховуючи високодобротні коливальні контури, в радіотехнічних пристроях досліджують їх поведінку переважно в області частот, які мало відрізняються від резонансної частоти  $\omega_{рез}$ , тобто коли частота генератора

$$\omega = \omega_{рез} + \Delta\omega, \quad f = f_{рез} + \Delta f.$$

Величини

$$\Delta\omega = \omega - \omega_{рез} \quad \text{або} \quad \Delta f = f - f_{рез}, \quad (5.35)$$

які називають *абсолютними розстройками*, вказують, наскільки і в який бік поточна частота відрізняється від резонансної. Коли розстройка від'ємна, значення частоти  $\omega(f)$  менше  $\omega_{рез}$  ( $f_{рез}$ ), коли додатна, — навпаки; а якщо  $\omega = \omega_{рез}$  ( $f = f_{рез}$ ), тоді  $\Delta\omega = 0$  ( $\Delta f = 0$ ). Якщо по осі абсцис відкладати абсолютну розстройку, початок координат відповідає резонансній частоті.

Як приклад, на рис. 5.22 показані графіки залежностей  $Y_{норм}(\Delta\omega)$  і  $\phi_Y(\Delta\omega)$  від абсолютної розстройки для двох значень добротності. Частотні характеристики в координатах абсолютної розстройки відрізняються від аналогічних характеристик у функції частоти (рис. 5.18) тільки зсувом на початок координат.

Відношення абсолютної розстройки до резонансної частоти  $\Delta\omega/\omega_{рез}$ , або  $\Delta f/f_{рез}$ , називається *відносною розстройкою*. Для резонансних контурів, у яких  $Q \gg 1$ , відносна розстройка поблизу резонансної частоти  $\Delta\omega/\omega_{рез} \ll 1$ .

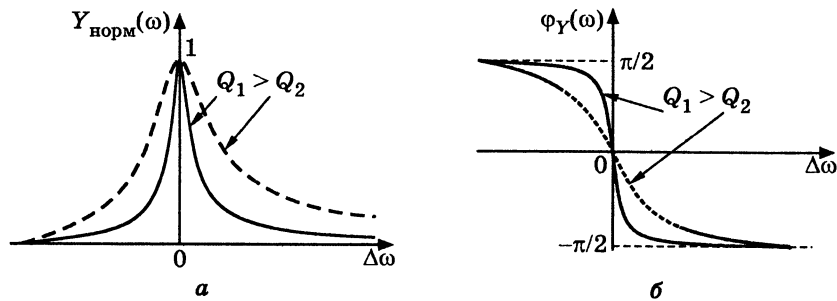


Рис. 5.22. Частотні характеристики послідовного контуру для  $Y(j\omega)$  у функції абсолютної розстройки: *a* — нормовані АЧХ; *b* — ФЧХ

Частотні характеристики можна розглядати також як функції величини  $X/R$ , що визначає частотну залежність виразів ФЧХ (табл. 5.1) і нормованих АЧХ (табл. 5.2) добротних контурів поблизу резонансної частоти. Ця величина називається *узагальненою розстройкою* і позначається грецькою літерою  $\xi$ :

$$\xi = \frac{X}{R}. \quad (5.36)$$

Аналізуючи добротні контури поблизу резонансної частоти, нормовані АЧХ в функції  $\xi$  описують загальною формулою:

$$H_{\text{норм}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (5.37)$$

Співвідношення для ФЧХ (див. табл. 5.1) у функції узагальненої розстройки мають вигляд:

$$\varphi_Y(\xi) = \varphi_{U_R}(\xi) = -\arctg \xi; \quad \varphi_{U_C}(\xi) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi; \quad \varphi_{U_L}(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctg \xi \quad (5.38)$$

Нормовані частотні характеристики (5.37) і (5.38) показані на рис. 5.23.

АЧХ і ФЧХ у функції  $\xi$  (рис. 5.23) не залежать від добротності. Ці криві симетричні відносно осі ординат, на відміну від кривих (рис. 5.18, *a, b*), асиметрія яких обумовлена несиметричною формою графіка  $X = f(\omega)$  (див. рис. 5.14, *b*) відносно значення  $\omega_{\text{рез}}$ . Причому асиметрія тим більша, чим менша резонансна частота.

Зазвичай замість точної формули (5.36) використовують поблизу, до якої входять абсолютна розстройка  $\Delta\omega$  ( $\Delta f$ ), резонансна частота  $\omega_{\text{рез}}$  ( $f_{\text{рез}}$ ) і добротність  $Q$ . Щоб знайти приблизне значення

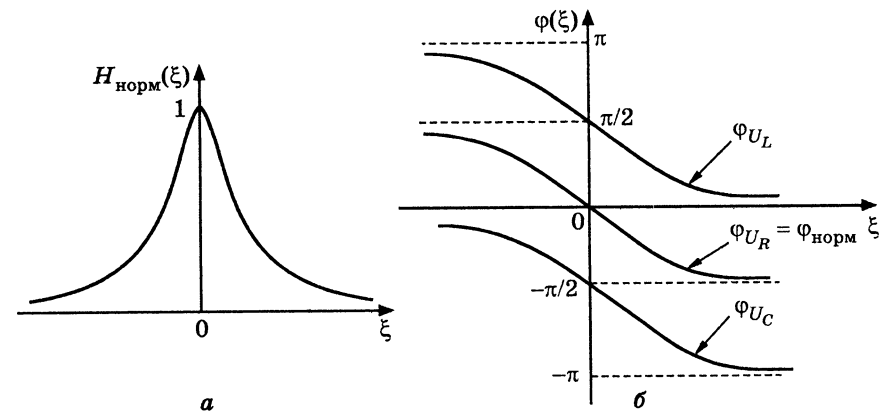


Рис. 5.23. Графіки АЧХ і ФЧХ послідовного контуру в функції узагальненої розстройки: *a* — нормована АЧХ; *b* — ФЧХ

функції  $\xi(\omega)$ , її розкладають у ряд Тейлора поблизу значення аргументу  $\omega = \omega_{\text{рез}}$ :

$$\begin{aligned} \xi(\omega) &= \xi(\omega_{\text{рез}}) + \frac{\xi'(\omega)|_{\omega=\omega_{\text{рез}}}}{1!} (\omega - \omega_{\text{рез}}) + \frac{\xi''(\omega)|_{\omega=\omega_{\text{рез}}}}{2!} (\omega - \omega_{\text{рез}})^2 + \dots = \\ &= \xi(\omega_{\text{рез}}) + \frac{\xi'(\omega)|_{\omega=\omega_{\text{рез}}}}{1!} \Delta\omega + \frac{\xi''(\omega)|_{\omega=\omega_{\text{рез}}}}{2!} \Delta\omega^2 + \dots \end{aligned}$$

Якщо обмежитись першими двома членами ряду і врахувати, що  $\xi(\omega_{\text{рез}}) = 0$ , приблизний вираз для узагальненої розстройки матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \xi(\omega) &\approx \frac{X'(\omega)|_{\omega=\omega_{\text{рез}}}}{R} \Delta\omega = \frac{[\omega L - 1/(\omega C)]'|_{\omega=\omega_{\text{рез}}}}{R} \Delta\omega = \\ &= \frac{1}{R} \left[ L + \frac{1}{\omega^2 C} \right]_{\omega=\omega_{\text{рез}}} \Delta\omega = \frac{\omega_{\text{рез}} L}{R} \frac{2\Delta\omega}{\omega_{\text{рез}}} \end{aligned}$$

Остаточну формулу для приблизного визначення  $\xi$  записують у вигляді:

$$\xi \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_{\text{рез}}} Q = \frac{2\Delta f}{f_{\text{рез}}} Q. \quad (5.39)$$

Слід зазначити, що, виходячи з формули (5.39), одну и ту ж ординату графіків (рис. 5.23), яка відповідає певному значенню  $\xi$ , при збільшенні  $Q$  можна отримати, зменшуючи абсолютну розстройку  $\Delta\omega$ .

Поблизу резонансної частоти всі КПФ високодобротного контуру можна звести до єдиного виразу *нормованої комплексної передатної функції* нормуванням до резонансних значень  $H(j\omega_{\text{рез}})$  (див. табл. 5.1):

$$H_{\text{норм}}(j\xi) = \frac{Y_{\text{вх}}(j\xi)}{Y_{\text{вх}}(j\omega_{\text{рез}})} = \frac{H_{U_R}(j\xi)}{H_{U_R}(j\omega_{\text{рез}})} = \frac{H_{U_C}(j\xi)}{H_{U_C}(j\omega_{\text{рез}})} = \frac{H_{U_L}(j\xi)}{H_{U_L}(j\omega_{\text{рез}})} = \frac{1}{1+j\xi}$$

З останнього виразу виходять співвідношення для нормованих АЧХ і ФЧХ:

$$H_{\text{норм}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \varphi_{\text{норм}}(\xi) = -\text{arctg } \xi \quad (5.40)$$

Вираз для нормованої АЧХ збігається зі співвідношенням (5.37), а формула (5.40) для нормованої ФЧХ (рис. 5.23, б) — з виразом (5.38) для  $\varphi_{U_R}(\xi) = \varphi_Y(\xi)$ .

Щоб побудувати графік нормованої АФХ (рис. 5.24), доцільно представити  $H_{\text{норм}}(j\xi)$  у вигляді суми двох векторів:

$$H_{\text{норм}}(j\xi) = \frac{1}{1+j\xi} = 0,5 + \frac{0,5-j0,5\xi}{1+j\xi} = 0,5 + 0,5e^{-j2\text{arctg } \xi} = 0,5 + 0,5e^{j2\varphi_{\text{норм}}(\xi)}$$

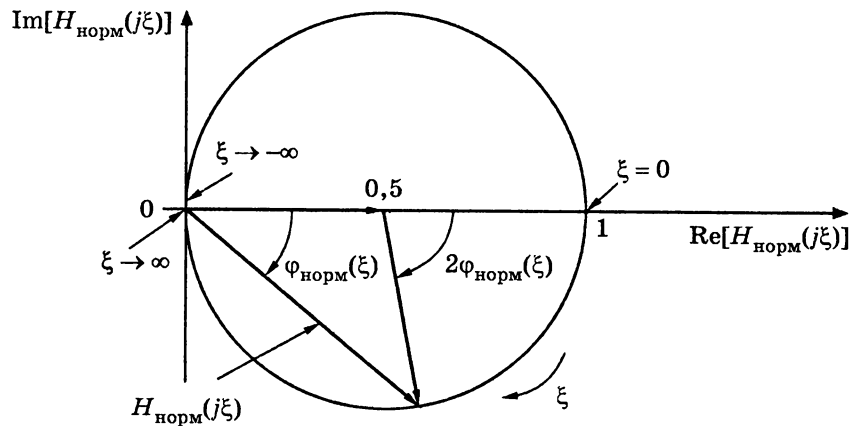


Рис. 5.24. АФХ нормованої КПФ послідовного контуру

## 5.5. Вибірність резонансного контуру. Смуга пропускання

Вибірні властивості кіл характеризуються СП і коефіцієнтом прямокутності АЧХ (див. підрозд. 5.2).

Для контурів з високою добротністю ( $Q \gg 1$ ) нормовані АЧХ всіх видів КПФ описуються єдиним виразом (5.37) у функції узагальненої розстройки. Використовуючи формули (5.37) і (5.9), рівняння для визначення узагальненої розстройки на границях СП можна записати у вигляді:

$$\varphi_{\text{норм}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.41)$$

звідки  $\xi^2 = 1$ , і корені рівняння

$$\xi_{\text{гр}1,2} = \pm 1. \quad (5.42)$$

Співвідношення (5.41) і (5.42) ілюструються на графіках нормованих АЧХ (рис. 5.25, а) і ФЧХ (рис. 5.25, б). На рис. 5.28, б позначені також значення нормованої ФЧХ на границях СП:

$$H_{\text{норм}}(\xi_{\text{гр}1,2}) = -\text{arctg } \xi_{\text{гр}1,2} = -\text{arctg}(\pm 1) = \mp \frac{\pi}{4}$$

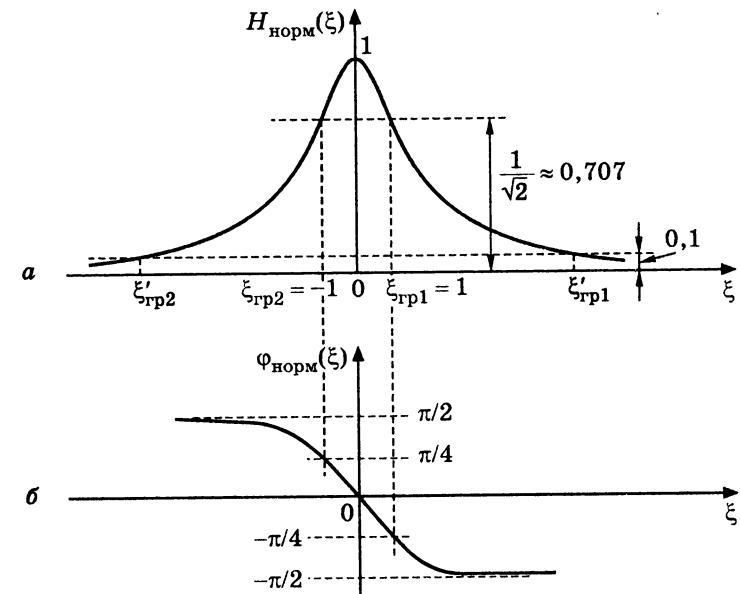


Рис. 5.25. Параметри СП на графіках: а — АЧХ; б — ФЧХ

Підставляючи здобуті значення  $\xi_{гр1,2}$  до виразу (5.39), можна записати:

$$\xi_{гр1,2} = \pm 1 \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_{рез}} Q = \frac{2\Delta f}{f_{рез}} Q,$$

звідки можна одержати співвідношення для розрахунку приблизних значень абсолютних розстройок для границь СП, граничних частот і величини СП:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{П1,2} &= \pm \frac{\omega_{рез}}{2Q}; \Delta f_{П1,2} = \pm \frac{f_{рез}}{2Q}; \\ \omega_{гр1,2} &= \omega_{рез} \pm \frac{\omega_{рез}}{2Q}; \Delta f_{гр1,2} = f_{рез} \pm \frac{f_{рез}}{2Q}; \\ \omega_{гр1} - \omega_{гр2} &= \frac{\omega_{рез}}{Q} = 2\Delta\omega_{П1} = 2|\Delta\omega_{П2}|; \\ f_{гр1} - f_{гр2} &= \frac{f_{рез}}{Q} = 2\Delta f_{П1} = 2|\Delta f_{П2}|. \end{aligned}$$

Отже, для високодобротних контурів розстройки вправо  $\Delta\omega_{П1}$  і вліво  $\Delta\omega_{П2}$  від резонансної частоти за модулем однакові, а граничні частоти лежать симетрично значенню  $\omega_{рез}$ . Смуга пропускання дорівнює подвоєному значенню розстройки  $\Delta\omega_{П1} = |\Delta\omega_{П2}|$ , і тому для вибірних кіл з АЧХ, симетричними відносно резонансної частоти (рис. 5.26), смугу пропускання  $\Pi_{\omega}$  позначають  $2\Delta\omega_{П1}$ :

$$2\Delta\omega_{П1} = \frac{\omega_{рез}}{Q}; 2\Delta f_{П1} = \frac{f_{рез}}{Q}. \quad (5.43)$$

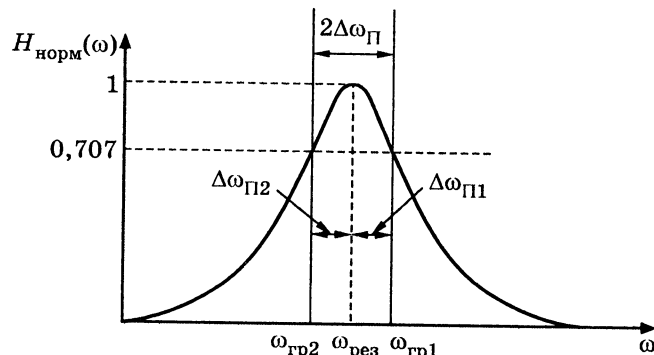


Рис. 5.26. До визначення смуги пропускання

З формули (5.43) виходить, що СП прямо пропорційна резонансній частоті та обернено пропорційна добротності.

Щоб оцінити значення коефіцієнта прямокутності згідно з виразом (5.11), необхідно попередньо визначити СП на рівні  $n_1 = 10$  (рис. 5.25, а):

$$\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{10},$$

звідки

$$\xi^2 = 99; \xi'_{гр1,2} = \pm\sqrt{99} = \pm 9,95 \approx \pm 10; 2\Delta\omega_{П1}|_{n_1=10} \approx 10 \frac{\omega_{рез}}{Q}.$$

Отже, коефіцієнт прямокутності для високодобротних контурів

$$k_{пр} = \frac{2\Delta\omega_{П1}|_{n_1=10}}{2\Delta\omega_{П1}|_{n=\sqrt{2}}} \approx 10.$$

Незважаючи на відносно невисокий  $k_{пр}$  АЧХ, послідовний контур як просте вибірне коло має велике значення у радіотехніці.

АЧХ  $Y_{норм}(\omega)$  описується виразом (5.37) незалежно від величини добротності. Отже, для контурів з низькою добротністю  $Q < 10$  СП можна оцінити, застосовуючи співвідношення (5.43). При цьому, однак, не можна використовувати приблизну формулу (5.39), і тому граничні частоти СП відповідають рівнянню:

$$\xi_{гр1,2} = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \pm 1,$$

розв'язок якого у прикладі 5.5 приводить до співвідношення (5.12). Використовуючи кутову частоту, вираз (5.12) можна записати у вигляді:

$$\omega_{гр1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\omega_{рез}^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \pm \frac{R}{2L} + \omega_{рез} \sqrt{1 + (0,5d)^2},$$

звідки для СП виходить:

$$\Pi_{\omega} = \omega_{гр1} - \omega_{гр2} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_{рез}}{Q}.$$

Отже, формули для розрахунку СП кривої  $Y(\omega)$  для низькодобротних і високодобротних контурів збігаються. При цьому, на відміну від СП високодобротних контурів, СП низькодобротних

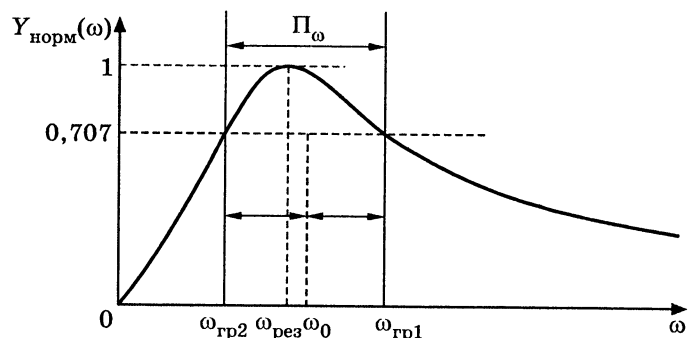


Рис. 5.27. До визначення смуги пропускання АЧХ  $Y_{\text{норм}}(\omega)$  для низькодобротного контуру

контурів (рис. 5.27) симетричні не відносно  $\omega_{\text{рез}}$ , а відносно частоти

$$\omega_0 = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 + (0,5d)^2} > \omega_{\text{рез}}.$$

Аналіз СП для  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  при  $Q < 10$  свідчить, що існують три характерні варіанти:

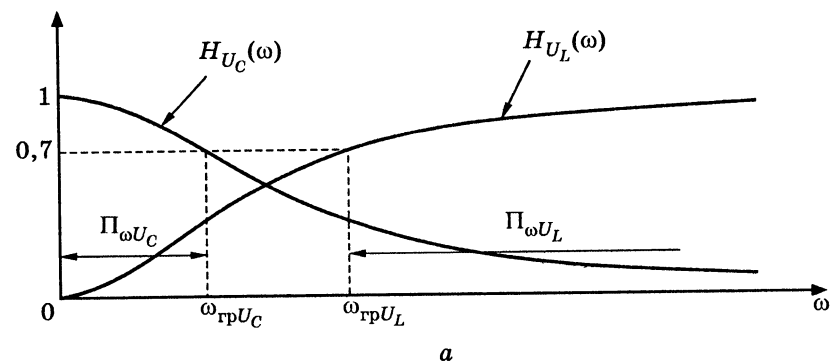
- 1)  $H_{U_C \text{ max}} = H_{U_L \text{ max}} = 1$  (рис. 5.28, а);
- 2)  $1 < H_{U_C \text{ max}} = H_{U_L \text{ max}} \leq \sqrt{2}$  (рис. 5.28, б);
- 3)  $H_{U_C \text{ max}} = H_{U_L \text{ max}} > \sqrt{2}$  (рис. 5.28, в).

У першому і другому випадках СП має тільки одну граничну частоту на рівні 0,707 від максимуму, а іншою границею СП є  $\omega = 0$  або  $\omega \rightarrow \infty$ . Щоб визначити значення добротності (або загасання), можна, використовуючи вираз (5.28) для максимуму АЧХ, скласти і розв'язати рівняння:

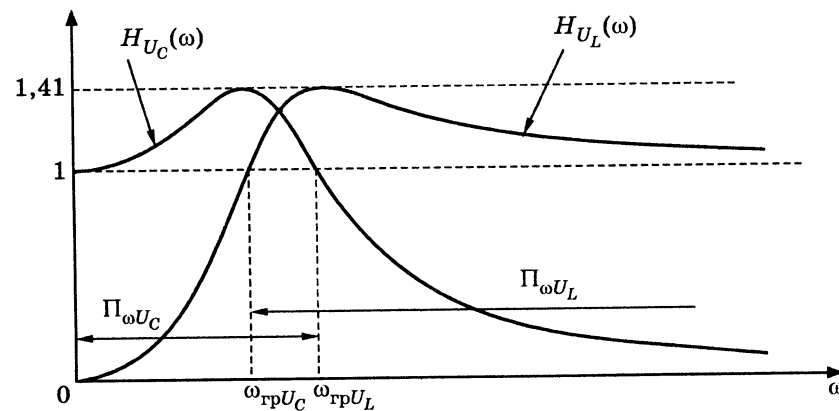
$$H_{U_C \text{ max}} = H_{U_L \text{ max}} = \frac{1}{d\sqrt{1-0,25d^2}} = 1, \text{ звідки } d = \sqrt{2}; Q = 0,707;$$

$$H_{U_C \text{ max}} = H_{U_L \text{ max}} = \frac{1}{d\sqrt{1-0,25d^2}} = \sqrt{2}, \text{ звідки } d = 0,765; Q = 1,307.$$

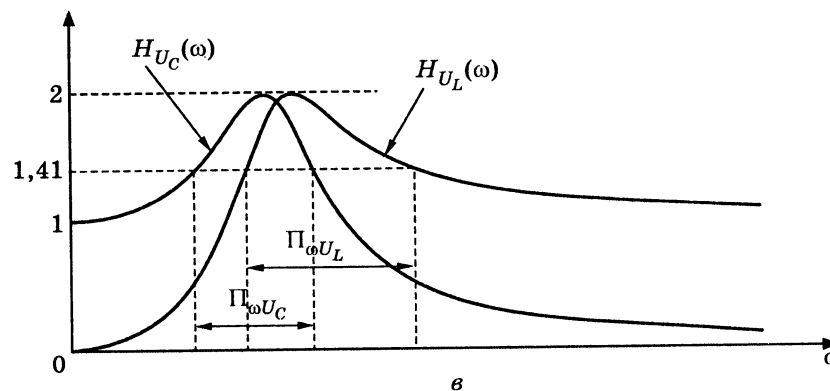
Отже, перший варіант ( $H_{U_C \text{ max}} = H_{U_L \text{ max}} = 1$ ) спостерігається при  $d \geq \sqrt{2}$ ;  $Q \leq 0,707$ , а другий ( $1 < H_{U_C \text{ max}} = H_{U_L \text{ max}} \leq \sqrt{2}$ ) — при  $\sqrt{2} > d \geq 0,765$ ;  $0,7 < Q \leq 1,3$ . При  $d < 0,765$ ;  $Q > 1,3$  СП має дві граничні частоти (рис. 5.28, в).



а



б



в

Рис. 5.28. Смуга пропускання АЧХ  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  для низькодобротних контурів



Щоб визначити граничні частоти СП, слід розв'язати рівняння:

1) для  $d \geq \sqrt{2}$ :

$$H_{U_C}(\omega) = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$H_{U_L}(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

2) для  $d < \sqrt{2}$ :

$$H_{U_C}(\omega) = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega}\right)^2}} = \frac{H_{U_C \text{ max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{d\sqrt{2-0,5d^2}};$$

$$H_{U_L}(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega}\right)^2}} = \frac{H_{U_L \text{ max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{d\sqrt{2-0,5d^2}}.$$

Формули, отримані в результаті розв'язання рівнянь, наведені в табл. 5.5. При поглибленому вивченні дисципліни ці формули рекомендується вивести самостійно.

Співвідношення  $\omega_{\text{гр1}}/\omega_{\text{рез}}$  і  $\omega_{\text{гр2}}/\omega_{\text{рез}}$  з табл. 5.3 для  $Q > 1,3$  можна застосувати і в разі  $Q \gg 1$  ( $d \ll 1$ ).

Для  $H_{U_C}(\omega)$

$$\omega_{\text{гр1}} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1-0,5d^2 + d\sqrt{1-0,25d^2}} \approx \omega_{\text{рез}} \sqrt{1+d} \approx \omega_{\text{рез}} \left(1 + \frac{d}{2}\right) = \omega_{\text{рез}} \left(1 + \frac{1}{2Q}\right);$$

$$\omega_{\text{гр2}} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1-0,5d^2 - d\sqrt{1-0,25d^2}} \approx \omega_{\text{рез}} \sqrt{1-d} \approx \omega_{\text{рез}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) = \omega_{\text{рез}} \left(1 - \frac{1}{2Q}\right).$$

Для  $H_{U_L}(\omega)$

$$\omega_{\text{гр1}} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{\frac{1-0,5d^2 + d\sqrt{1-0,25d^2}}{1-2d^2 + 0,5d^4}} \approx \omega_{\text{рез}} \sqrt{1+d} \approx \omega_{\text{рез}} \left(1 + \frac{d}{2}\right) = \omega_{\text{рез}} \left(1 + \frac{1}{2Q}\right);$$

$$\omega_{\text{гр2}} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{\frac{1-0,5d^2 - d\sqrt{1-0,25d^2}}{1-2d^2 + 0,5d^4}} \approx \omega_{\text{рез}} \sqrt{1-d} \approx \omega_{\text{рез}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) = \omega_{\text{рез}} \left(1 - \frac{1}{2Q}\right).$$

Якщо у здобутих виразах знехтувати величинами  $d^2 \ll 1$  і  $d^4 \ll 1$ , то приблизне значення СП збігається з формулою (5.43):

$$\Pi_{\omega} = \omega_{\text{гр1}} - \omega_{\text{гр2}} = \omega_{\text{рез}} d = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q}.$$

Таблиця 5.3

Значення граничних частот СП  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  для контурів з низькою добротністю

Діапазон		Частота	АЧХ	
$Q$	$d$		$H_{U_C}(\omega)$	$H_{U_L}(\omega)$
$Q \leq 0,7$	$d \geq \sqrt{2}$	$\frac{\omega_{\text{гр}}}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{f_{\text{гр}}}{f_{\text{рез}}}$	$\sqrt{a + \sqrt{a^2 + 1}}$	$\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + 1}}$
$0,7 < Q \leq 1,3$	$\sqrt{2} > d \geq 0,765$		$\sqrt{a + d\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a - d\sqrt{b}}{1 - 2d^2 + 0,5d^4}}$
$Q > 1,3$	$d < 0,765$	$\frac{\omega_{\text{гр1}}}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{f_{\text{гр1}}}{f_{\text{рез}}}$	$\sqrt{a + d\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a + d\sqrt{b}}{1 - 2d^2 + 0,5d^4}}$
		$\frac{\omega_{\text{гр2}}}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{f_{\text{гр2}}}{f_{\text{рез}}}$	$\sqrt{a - d\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a - d\sqrt{b}}{1 - 2d^2 + 0,5d^4}}$

Примітка.  $a = 1 - 0,5d^2$ ;  $b = 1 - 0,25d^2$ .

Приклад 5.7. Для  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  послідовного контуру (див. приклади 5.2, 5.4, 5.6 і 5.7) розрахувати СП за приблизною і точною формулами. Оцінити похибки приблизних обчислювань.

**Розв'язання.** Приблизне значення СП розраховуємо за формулою (5.43), використовуючи вторинні параметри контуру:

$$f_{\text{рез}} = 6,015 \text{ МГц}; Q = 13,23; d = 0,076;$$

$$2\Delta f_{\Pi} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q} = \frac{6,015 \cdot 10^6}{13,23} = 0,455 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 455 \text{ кГц}.$$

Позначивши індексом «Т» точні значення СП, за формулами (табл. 5.5) при  $Q > 1,3$  отримаємо:  
для  $H_{U_C}(\omega)$

$$f_{\text{гр1}} = f_{\text{рез}} \sqrt{1 - 0,5d^2 + d\sqrt{1 - 0,25d^2}} =$$

$$= 6,015 \cdot 10^6 \sqrt{1 - 0,5(0,076)^2 + 0,076\sqrt{1 - 0,25(0,076)^2}} =$$

$$= 6,231 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 6,231 \text{ МГц};$$

$$f_{\text{гр2}} = f_{\text{рез}} \sqrt{1 - 0,5d^2 - d\sqrt{1 - 0,25d^2}} =$$

$$= 6,015 \cdot 10^6 \sqrt{1 - 0,5(0,076)^2 - 0,076\sqrt{1 - 0,25(0,076)^2}} =$$

$$= 5,773 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 5,773 \text{ МГц};$$

$$2\Delta f_{\Pi_T} = f_{\text{гр1}} - f_{\text{гр2}} = 6,231 - 5,773 = 0,458 \text{ МГц} = 458 \text{ кГц};$$

для  $H_{U_L}(\omega)$

$$f_{\text{гр1}} = f_{\text{рез}} \sqrt{\frac{1 - 0,5d^2 + d\sqrt{1 - 0,25d^2}}{1 - 2d^2 + 0,5d^4}} =$$

$$= 6,015 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1 - 0,5(0,076)^2 + 0,076\sqrt{1 - 0,25(0,076)^2}}{1 - 2(0,076)^2 + 0,5(0,076)^4}} =$$

$$= 6,267 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 6,267 \text{ МГц};$$

$$f_{\text{гр2}} = f_{\text{рез}} \sqrt{\frac{1 - 0,5d^2 - d\sqrt{1 - 0,25d^2}}{1 - 2d^2 + 0,5d^4}} =$$

$$= 6,015 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1 - 0,5(0,076)^2 - 0,076\sqrt{1 - 0,25(0,076)^2}}{1 - 2(0,076)^2 + 0,5(0,076)^4}} =$$

$$= 5,807 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 5,807 \text{ МГц};$$

$$2\Delta f_{\Pi_T} = f_{\text{гр1}} - f_{\text{гр2}} = 6,267 - 5,807 = 0,46 \text{ МГц} = 460 \text{ кГц}.$$

Оцінюючи відносні похибки приблизних розрахунків СП за формулою

$$\frac{2\Delta f_{\Pi} - 2\Delta f_{\Pi_T}}{2\Delta f_{\Pi_T}} 100 \%,$$

знаходимо для  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  відповідно: 0,66 %; 1,1 %. Малі значення похибок пояснюються тим, що у даному контурі  $Q > 10$ .

## 5.6. Вплив опорів джерела і навантаження на вибірні властивості послідовного контуру

У схемі заміщення реального послідовного контуру (див. рис. 5.13, в) активний опір  $R$  враховує внутрішній опір джерела, втрати в котушці індуктивності та опір витікання конденсатора. Щоб з'ясувати вплив кожного з цих опорів на властивості контуру, слід проаналізувати вирази для його добротності та загасання:

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\rho}{R_i + R_L + R_C}; \quad (5.44)$$

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R_i + R_L + R_C}{\rho} = \frac{R_i}{\rho} + \frac{R_L}{\rho} + \frac{R_C}{\rho} =$$

$$= \frac{R_i}{\rho} + d_L + d_C = \frac{R_i}{\rho} + \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}, \quad (5.45)$$

де  $Q_L = \frac{1}{d_L} = \frac{\rho}{R_L}$ ;  $Q_C = \frac{1}{d_C} = \frac{\rho}{R_C}$ ;  $d_L$ ;  $d_C$  — відповідно добротності та загасання котушки індуктивності та конденсатора.

З урахуванням формули (5.45) вираз для добротності (5.44) матиме такий вигляд:

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{1}{\frac{R_i}{\rho} + \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}} = \frac{1}{\frac{R_i}{\rho} + (Q_L + Q_C)/Q_L Q_C} =$$

$$= \frac{Q_L Q_C / (Q_L + Q_C)}{Q_L Q_C / (Q_L + Q_C) \cdot \frac{R_i}{\rho} + 1} = \frac{Q_{LC}}{R_i / (R_L + R_C) + 1}, \quad (5.46)$$

де  $Q_{LC} = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C} = \frac{\rho}{R_L + R_C}$  — еквівалентна добротність послідовно з'єднаних котушки індуктивності і конденсатора.

З формули (5.46) виходить, що СП

$$2\Delta\omega_{\Pi} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q_{LC}} \left( 1 + \frac{R_i}{R_L + R_C} \right) = 2\Delta\omega_{\Pi_{LC}} \left( 1 + \frac{R_i}{R_L + R_C} \right), \quad (5.47)$$

де  $2\Delta\omega_{\Pi LC} = \omega_{\text{рез}}/Q_{LC}$  — СП контуру, який живиться від ідеального джерела напруги.

Вираз (5.47) показує, що зі збільшенням внутрішнього опору джерела  $R_i$  вибірність кола погіршується, тобто для покращення вибірності послідовний контур слід підключати до джерела з  $R_i \ll R_L + R_C$ .

На вибірність контуру впливає також опір навантаження  $R_H$ , який зазвичай вмикається паралельно конденсатору (рис. 5.29, а).

Щоб спростити аналіз, доцільно перетворити паралельне з'єднання елементів  $R_H$  і  $C$  у послідовне  $Z = R_{\text{посл}} + jX_{\text{посл}}$  (позначено на рис. 5.29 пунктиром) за формулами:

$$Z = R_{\text{посл}} + jX_{\text{посл}} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2},$$

$$\text{де } G = \frac{1}{R_H}, \quad B = -\omega C.$$

На резонансній частоті

$$R_{\text{посл}} = \frac{1/R_H}{1/R_H^2 + (\omega_{\text{рез}} C)^2}; \quad X_{\text{посл}} = -\frac{\omega_{\text{рез}} C}{1/R_H^2 + (\omega_{\text{рез}} C)^2} = -\frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_{\text{посл}}}.$$

Якщо  $R_H \gg \rho = 1/\omega_{\text{рез}} C$ , то  $1/R_H^2 \ll (\omega_{\text{рез}} C)^2$ . Тоді величиною  $1/R_H^2$  можна знехтувати:

$$R_{\text{посл}} \approx \frac{1}{R_H (\omega_{\text{рез}} C)^2} = \frac{\rho^2}{R_H}; \quad X_{\text{посл}} \approx -\frac{\omega_{\text{рез}} C}{(\omega_{\text{рез}} C)^2} = -\frac{1}{\omega_{\text{рез}} C}. \quad (5.48)$$

Отже, параметри послідовної еквівалентної схеми (рис. 5.29, б) становитимуть:  $C_{\text{посл}} = C$ ,  $R + R_{\text{посл}} = R_e$ . Тому з урахуванням виразу (5.48) еквівалентні добротність і СП можна записати у вигляді:

$$Q_e = \frac{\rho}{R_e} = \frac{\rho}{R + R_{\text{посл}}} = \frac{\rho}{R + \rho^2/R_H} = \frac{\rho/R}{1 + \rho^2/RR_H} = \frac{Q}{1 + Q\rho/R_H}; \quad (5.49)$$

$$2\Delta\omega_{\Pi_e} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} \left( 1 + Q \frac{\rho}{R_H} \right) = 2\Delta\omega_{\Pi} \left( 1 + Q \frac{\rho}{R_H} \right), \quad (5.50)$$

де  $Q = \rho/R$ ,  $2\Delta\omega_{\Pi} = \omega_{\text{рез}}/Q$  — відповідно добротність і СП ненавантаженого контуру.

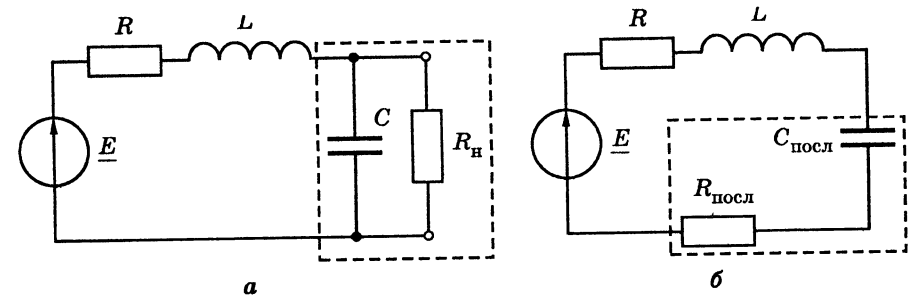


Рис. 5.29. Схеми заміщення послідовного контуру з урахуванням опору навантаження

З виразів (5.49) і (5.50) виходить, що чим менший опір  $R_H$ , тим менша еквівалентна добротність  $Q_e$  і тим ширша смуга пропускання. Отже, щоб покращити вибірні властивості кола, необхідно виконати умову:

$$Q \frac{\rho}{R_H} \ll 1 \text{ або } R_H \gg Q\rho.$$

## 5.7. Паралельний резонансний контур

Паралельний резонансний контур — це коло, яке складається з індуктивного і ємнісного елементів (індуктивної котушки і конденсатора), з'єднаних паралельно (рис. 5.30, а). Опір витікання конденсатора  $R'_C$  можна перерахувати у послідовно з'єднаний з елементами контуру опір  $R_C = \rho^2/R'_C$  (рис. 5.30, б). Схеми на рис. 5.30 відповідають простому паралельному контуру, або паралельному контуру першого виду. Оскільки у цьому підрозділі розглядається контур тільки даного виду, для скорочення використовується термін «паралельний контур».

Так само, як і для послідовного контуру, параметри  $R$ ,  $L$ ,  $C$  є первинними параметрами паралельного контуру, причому очевидно, що активний опір дорівнює сумі опорів котушки і конденсатора:  $R = R_L + R_C$ .

### 5.7.1. Аналіз резонансного режиму

Еквівалентний опір паралельного контуру для довільного значення частоти  $\omega$  становить:

$$Z_e = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_L + j\omega L)(R_C + 1/j\omega C)}{R_L + R_C + j\omega L + 1/j\omega C}, \quad (5.51)$$

де  $Z_1 = R_L + j\omega L$ ,  $Z_2 = R_C + 1/j\omega C$  — опори паралельних віток.

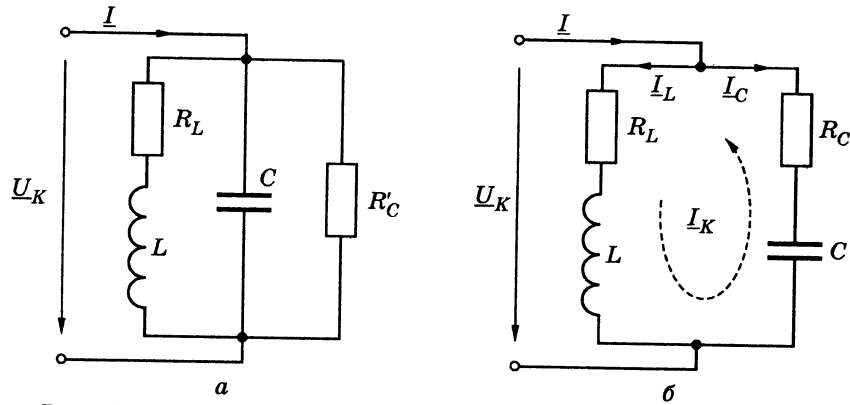


Рис. 5.30. Схеми простого паралельного резонансного контуру

Поблизу резонансної частоти  $\omega \cong \omega_{\text{рез}}$  доданки  $1/\omega C$  і  $\omega L$  приблизно дорівнюють характеристичному опору  $\rho = \omega_{\text{рез}} L = 1/\omega_{\text{рез}} C$ . З огляду на те, що для резонансного контуру, утвореного елементами з високою добротністю, виконуються співвідношення:

$$\rho \gg R_L, \rho \gg R_C, \quad (5.52)$$

доданками  $R_L$  і  $R_C$  у чисельнику виразу (5.51) можна знехтувати, і тоді приблизне значення опору становитиме:

$$Z_e = \frac{L/C}{R_L + R_C + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\rho^2}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}, \quad (5.53)$$

де  $R = R_L + R_C$  — опір загальних втрат в елементах контуру при його послідовному обході.

За визначенням, резонанс спостерігається, якщо опір кола є суто активним. Це можливо, якщо уявна частина знаменника (5.53) дорівнює нулю:

$$\omega_{\text{рез}} L - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = 0.$$

Тоді формули для резонансної частоти паралельного і послідовного контурів збігаються:

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.54)$$

Якщо виконуються співвідношення (5.52), умови резонансу в послідовному контурі такі ж, як у паралельному контурі (рис. 5.30, б), у якому, однак, загальний реактивний опір, що дорівнює нулю, визначається при послідовному обході елементів

контуру. Тому формула (5.54) для паралельного контуру є приблизною, а для послідовного — точною. Щоб знайти точну формулу для резонансної частоти паралельного контуру, слід визначити умови, за яких опір  $Z_e$  (5.51) або провідність  $Y_e$  будуть дійсними величинами.

Комплексна еквівалентна провідність контуру становить:

$$Y_e = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C - j/\omega C} = G - jB. \quad (5.55)$$

У виразі (5.55) уявна частина  $Y_e$ , тобто реактивна провідність,

$$B = \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} - \frac{1/\omega C}{R_C^2 + (1/\omega C)^2}.$$

Умова резонансу  $B(\omega_{\text{рез}}) = 0$  призводить до рівняння (5.56), розв'язком якого є точний вираз для розрахунку резонансної частоти:

$$-\omega_{\text{рез}} L \left( R_C^2 + \left( \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} \right)^2 \right) + \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} (R_L^2 + (\omega_{\text{рез}} L)^2) = 0; \quad (5.56)$$

$$-\omega_{\text{рез}}^2 L C R_C^2 - \frac{L}{C} + R_L^2 + (\omega_{\text{рез}} L)^2 = 0; \quad \omega_{\text{рез}}^2 L C \left( \frac{L}{C} - R_C^2 \right) = \frac{L}{C} - R_L^2,$$

звідки

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_L^2}{\rho^2 - R_C^2}}. \quad (5.57)$$

Точна формула резонансної частоти паралельного контуру (5.57) збігається з приблизною формулою (5.54) за умов (5.52), які завжди виконуються для контурів з високою добротністю, а також у разі  $R_L = R_C < \rho$  при низькій добротності.

З виразу (5.53) виходить формула для еквівалентного резонансного опору:

$$Z_{e \text{ рез}} = \frac{\rho^2}{R}, \quad (5.58)$$

яка є приблизною, оскільки отримана з урахуванням умови (5.52). Точну формулу для еквівалентної резонансної провідності за умови  $B(\omega_{\text{рез}}) = 0$  можна знайти, записавши дійсну частину виразу (5.55):

$$Y_{e \text{ рез}} = G_{e \text{ рез}} = \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega_{\text{рез}} L)^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + (1/\omega_{\text{рез}} C)^2}.$$

Оскільки з формули (5.56) виходить, що

$$R_C^2 + \left( \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} \right)^2 = \frac{R_L^2 + (\omega_{\text{рез}} L)^2}{\omega_{\text{рез}}^2 LC},$$

то

$$G_{\text{е рез}} = \frac{R_L + R_C \omega_{\text{рез}}^2 LC}{R_L^2 + (\omega_{\text{рез}} L)^2}. \quad (5.59)$$

Враховуючи формули (5.52) і (5.54), від точного співвідношення (5.59) можна перейти до приблизного:

$$G_{\text{е рез}} \approx \frac{R_L + R_C}{\rho^2} = \frac{R}{\rho^2},$$

оберненого до формули (5.58).

Використовуючи різні варіанти запису характеристичного опору:

$$\omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = QR,$$

можна, виходячи з виразу (5.58), записати ще декілька формул для еквівалентного резонансного опору:

$$Z_{\text{е рез}} = \frac{(\omega_{\text{рез}} L)^2}{R} = \frac{1}{(\omega_{\text{рез}} C)^2 R} = \frac{L}{CR} = Q\rho = Q^2 R. \quad (5.60)$$

З формули (5.60) можна зробити висновок, що резонансні опори паралельного і послідовного контурів, утворених однаковими високодобротними індуктивним і ємнісним елементами, відрізняються в  $Q^2$  разів. Наприклад, якщо котушка індуктивності та конденсатор з еквівалентною добротністю  $Q = 50$  мають при послідовному з'єднанні резонансний опір  $R = 20$  Ом, то при паралельному з'єднанні цих же елементів  $Z_{\text{е рез}} = 50$  кОм.

Резонансний режим у паралельному контурі аналізують, вважаючи відомим струм загальної вітки  $\underline{I}$ . Згідно з законом Ома в комплексній формі струми віток  $\underline{I}_L$ ,  $\underline{I}_C$  і напруга на контурі  $\underline{U}_K$  у схемі заміщення (рис. 5.30, б) для довільної частоти становитимуть:

$$\underline{U}_K = \underline{I} Z_{\text{е}}; \quad \underline{I}_L = \frac{\underline{U}_K}{R_L + j\omega L}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_K}{R_C - j/\omega C}. \quad (5.61)$$

За умови (5.52) резонансні значення комплексних напруги на контурі та струмів у вітках

$$\underline{U}_{K \text{ рез}} = \underline{I} Z_{\text{е рез}} = \underline{I} \frac{\rho^2}{R}; \quad (5.62)$$

$$\underline{I}_{L \text{ рез}} = \frac{\underline{U}_{K \text{ рез}}}{R_L + j\rho} \cong \underline{I} \frac{\rho^2}{R j\rho} = -jQ\underline{I}; \quad \underline{I}_{C \text{ рез}} = \frac{\underline{U}_{K \text{ рез}}}{R_C - j\rho} \cong -\underline{I} \frac{\rho^2}{R j\rho} = jQ\underline{I}. \quad (5.63)$$

Для модулів діючих значень рівняння (5.62) і (5.63) перетворюються так:

$$U_{K \text{ рез}} = I \frac{\rho^2}{R}; \quad I_{L \text{ рез}} = QI; \quad I_{C \text{ рез}} = QI. \quad (5.64)$$

З огляду на те, що діючі (амплітудні) значення струмів у паралельних вітках контуру в  $Q$  разів перевищують діюче (амплітудне) значення струму в загальній вітці, резонанс у паралельному контурі називається *резонансом струмів*.

Отже, *резонанс струмів* — це явище на ділянці електричного кола, що має паралельно з'єднані індуктивний і ємнісний елементи, при якому на частотах поблизу резонансної спостерігається різке збільшення амплітуди коливань струмів у реактивних елементах порівняно з амплітудою коливань струму в загальній вітці.

Відповідно до знайдених виразів (5.62) і (5.63) на рис. 5.31 зображені векторні діаграми струмів і напруг у паралельному контурі при резонансі.

Діаграма (рис. 5.31, а) зображена для випадку, коли  $R_L = R_C \neq 0$ . При цьому фазові кути  $\varphi_C$  і  $|\varphi_L|$  наближаються до значення  $90^\circ$ , але не дорівнюють йому:  $\varphi_L = -\arctg(\rho/R_L)$ ;  $\varphi_C = \arctg(\rho/R_C)$ . Загальний струм за величиною малий, а за фазою збігається з прикладеною до контуру напругою  $\underline{U}_{K \text{ рез}}$ . Початкова фаза струму вибрана нульовою. Оскільки зсув фаз між струмом  $\underline{I}$  і напругою  $\underline{U}_{K \text{ рез}}$  дорівнює нулю, еквівалентний опір кола має активний характер. Згідно з формулою (5.63), вектори струмів  $\underline{I}_{L \text{ рез}}$  і  $\underline{I}_{C \text{ рез}}$  практично перебувають у протифазі, а їх модулі на підставі виразу (5.64) однакові. Тобто можна вважати, що у колі існує контурний струм  $I_K$  (рис. 5.30, б):

$$I_K = I_{L \text{ рез}} = I_{C \text{ рез}} = I_{\text{рез}} = QI.$$

Векторна діаграма (рис. 5.31, б) відповідає ідеальному контуру без втрат ( $R_L = R_C = 0$ ), який настроєно в резонанс. У цьому випадку струми  $\underline{I}_{L \text{ рез}}$  і  $\underline{I}_{C \text{ рез}}$  протилежні за фазою і точно дорівнюють

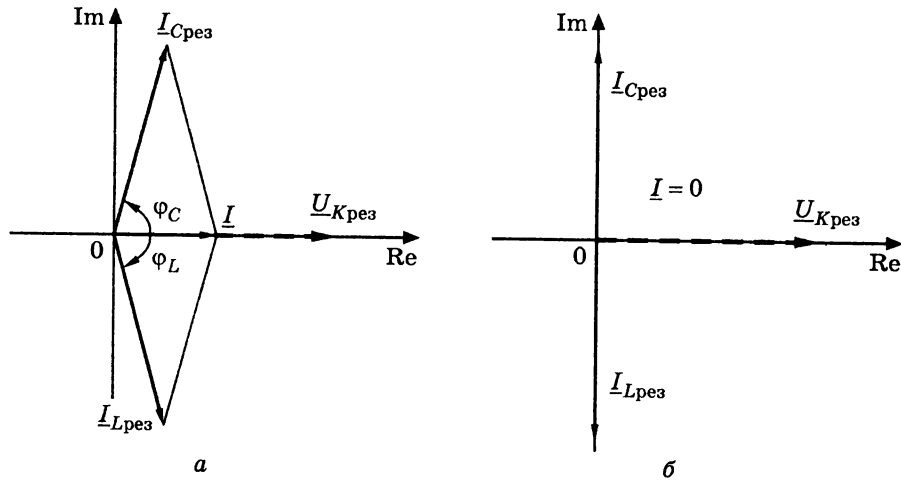


Рис. 5.31. Векторні діаграми струмів і напруги в паралельному контурі при резонансі: *a* — з урахуванням втрат; *б* — для ідеального контуру

один одному за модулем:  $I_K = I_{Lрез} = I_{Cрез} = U_{Kрез} / \rho$ . Тому струм у нерозгалуженій ділянці кола дорівнює нулю, а резонансний опір контуру прямує до нескінченності. Але при цьому в самому контурі циркулює струм  $I_K$ .

### 5.7.2. Комплексні передатні функції та частотні характеристики паралельного контуру

Визначаючи КПФ паралельного контуру, дією вважають струм  $I$  у загальній вітці (рис. 5.30, б), а відгуками — напругу  $U_K$  і струми  $I_L, I_C$  у вітках. Така постановка задачі відповідає увімкненню контуру до ідеального джерела струму (рис. 5.32), у якого  $I_{дж} = I, R_i \rightarrow \infty$ .

Якщо відгуком є напруга на контурі, то КПФ збігається з комплексним вхідним опором:

$$H(j\omega) = \frac{U_K}{I_{дж}} = Z_e(j\omega) \approx \frac{\rho^2}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

Використовуючи формулу (5.53), комплексний опір  $Z_e$  паралельного контуру з високою добротністю можна подати у різних формах запису в функції узагальненої розстройки:

$$\underline{Z}_e = \frac{\rho^2}{R + jX} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} = \frac{Z_{eрез}}{1 + j\xi} = \frac{Z_{eрез}}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = Z_e(\xi) e^{j\varphi(\xi)}, \quad (5.65)$$

де  $X = \omega L - 1/\omega C$  — реактивний опір;  $\xi = X/R$  — узагальнена розстройка;  $Z_e(\xi)$  — повний опір контуру;  $\varphi(\xi)$  — аргумент комплексного опору.

Аналізуючи АЧХ і ФЧХ у функції узагальненої розстройки, використовують вирази:

$$Z_e(\xi) = \frac{Z_{eрез}}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi(\xi) = -\arctg \xi, \quad (5.66)$$

З формули (5.65) можна визначити частотні залежності активної  $R_e(\xi)$  і реактивної  $X_e(\xi)$  складових комплексного опору:

$$Z_e(j\xi) = \frac{Z_{eрез}}{1 + j\xi} \frac{1 - j\xi}{1 - j\xi} = \frac{Z_{eрез}}{1 + \xi^2} - j \frac{Z_{eрез} \xi}{1 + \xi^2} = R_e(\xi) + jX_e(\xi),$$

де

$$R_e(\xi) = \frac{Z_{eрез}}{1 + \xi^2}; \quad X_e(\xi) = -\frac{Z_{eрез} \xi}{1 + \xi^2}. \quad (5.67)$$

Графіки залежностей  $Z_e(\xi), R_e(\xi), X_e(\xi)$  і  $\varphi(\xi)$ , побудованих на підставі формул (5.66), (5.67), зображені на рис. 5.33. Вид кривих  $Z_e(\xi), R_e(\xi)$  (рис. 5.33, а) і  $\varphi(\xi)$  (рис. 5.33, в) безпосередньо виходить з їх аналітичних записів.

Особливостями графіка  $X_e(\xi)$  (рис. 5.33, а, б) є:

- 1) при  $\xi = 0$  опір  $X_e = 0$ ;
- 2) в області малих розстроек ( $\xi \ll 1$ )  $X_e(\xi) \cong -Z_{eрез} \xi$ , тобто це відрізок прямої з негативним нахилом;
- 3) в області великих розстроек ( $\xi \gg 1$ )  $X_e(\xi) \cong -Z_{eрез} / \xi$ , тобто це гіпербола, яка завдяки знаку «-» у формулі (5.67) для  $X_e(\xi)$  лежить у другому і четвертому квадрантах декартової системи координат.

Щоб визначити абсциси екстремумів кривої  $X_e(\xi)$ , необхідно розв'язати рівняння:

$$\frac{dX_e(\xi)}{d\xi} = -Z_{eрез} \frac{1 + \xi^2 - 2\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} = 0,$$

звідки  $\xi = \pm 1, X_e(\pm 1) = \mp Z_{eрез} / 2, R_e(\pm 1) = Z_{eрез} / 2$ .

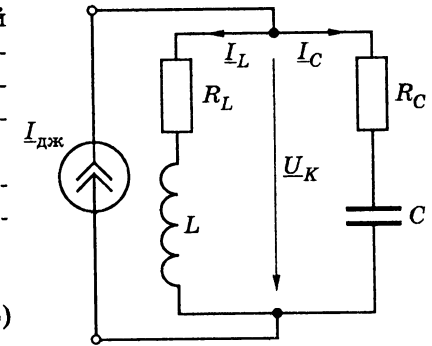


Рис. 5.32. Схема увімкнення паралельного резонансного контуру до ідеального джерела струму

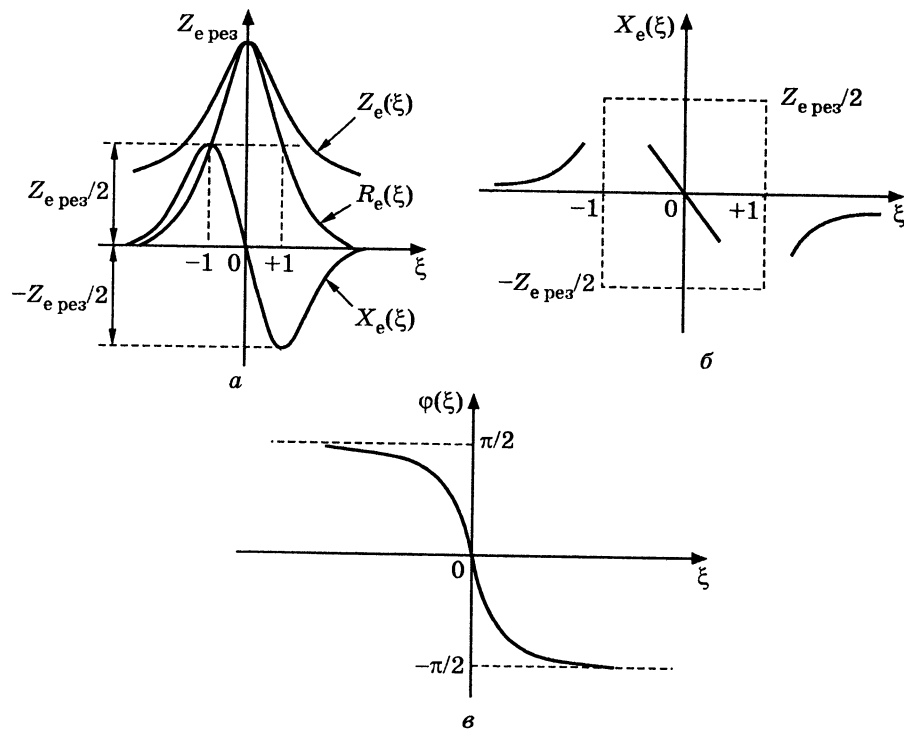


Рис. 5.33. Графіки складових комплексного опору паралельного контуру в функції узагальненої розстройки

Окремі ділянки залежності  $X_e(\xi)$  показані на рис. 5.33, б, а повністю цей графік зображено на рис. 5.33, а. Аналіз графіка  $X_e(\xi)$  показує, що при від'ємних розстройках  $\xi < 0$  опір  $X_e > 0$ . Отже, для частот  $\omega < \omega_{\text{рез}}$  характер реактивного опору  $X_e$  визначає індуктивна вітка, про що також свідчить позитивне значення фазової характеристики. При додатних розстройках  $\xi > 0$  опір  $X_e < 0$ , тобто для  $\omega > \omega_{\text{рез}}$  характер  $X_e$  визначається ємнісною віткою, опір якої зменшується із зростанням частоти. Слід підкреслити, що значення  $\varphi(\xi)$  для  $\xi > 0$  також від'ємні.

Будуючи графіки АЧХ і ФЧХ в функції  $f$  або  $\omega$  поблизу резонансної частоти, можна використовувати приблизний вираз (5.38) для узагальненої розстройки. Це відповідає зсуву графіків (рис. 5.33), так, що їх значення для  $\xi = 0$  відповідатимуть графікам АЧХ і ФЧХ у функції частоти для  $f = f_{\text{рез}}$  ( $\omega = \omega_{\text{рез}}$ ).

Однотипність графіків АЧХ і ФЧХ в функції узагальненої розстройки для послідовного і паралельного контурів пояснюється тим, що вирази для комплексної провідності послідовного контуру

$$Y(j\xi) = \frac{Y_{\text{рез}}}{1 + j\xi} = \frac{1/R}{1 + j\xi}$$

і комплексного опору паралельного контуру

$$Z_e(j\xi) = \frac{Z_{e\text{рез}}}{1 + j\xi} = \frac{\rho^2/R}{1 + j\xi}$$

є дуальними.

Відношення  $Z_e(j\xi)/Y(j\xi) = \rho^2$  не залежить від  $\xi$ , а отже, і від частоти.

Дуальність послідовного і паралельного контурів дозволяє застосувати формулу (5.43) для розрахунку СП паралельного контуру:

$$2\Delta\omega_{\Pi} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q}; \quad 2\Delta f_{\Pi} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q}.$$

Однак граничні значення АЧХ при  $\omega = 0$  і  $\omega \rightarrow \infty$  цих контурів відрізняються. Для послідовного контуру ці значення прямують до нуля, а для паралельного (рис. 5.34 і 5.35) вони становлять:

$$Z_e(0) = R_L; \quad Z_e(\infty) = R_C.$$

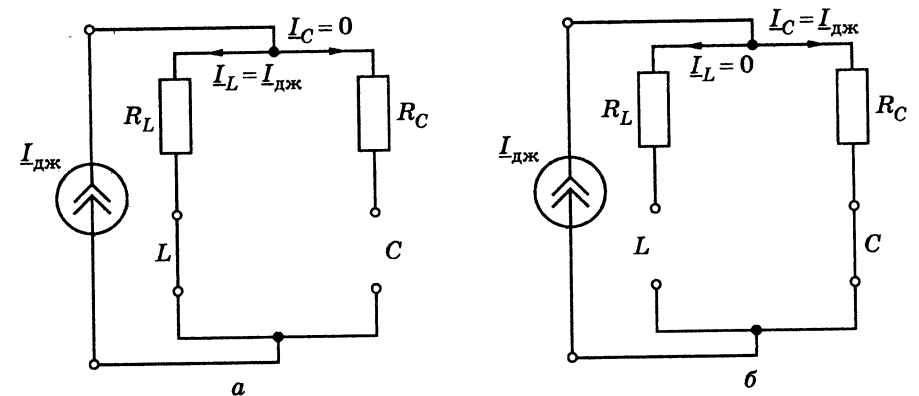


Рис. 5.34. Еквівалентні схеми паралельного контуру для граничних значень частоти: а —  $\omega = 0$ ; б —  $\omega \rightarrow \infty$

Якщо відгуком є струми у вітках паралельного контуру, відповідні КПФ становитимуть:

$$H_{I_L}(j\omega) = \frac{I_L}{I_{дж}} = \frac{I_{дж} Z_e(j\omega)}{I_{дж} j\omega L} = \frac{Z_e(j\omega)}{j\omega L}; \quad (5.68)$$

$$H_{I_C}(j\omega) = \frac{I_C}{I_{дж}} = \frac{I_{дж} Z_e(j\omega)}{I_{дж} [1/(j\omega C)]} = j\omega C Z_e(j\omega), \quad (5.69)$$

де  $Z_e(j\omega) = \frac{\rho^2}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\rho^2}{R + jX}$  — комплексний опір контуру.

Значення КПФ і АЧХ для резонансної частоти, вирази для нормованих АЧХ, а також для частотних характеристик, що виходять із співвідношень (5.68) і (5.69), наведені в табл. 5.4.

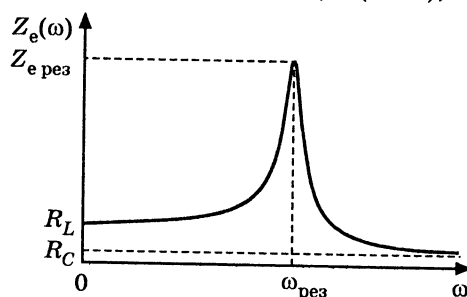


Рис. 5.35. Граничні значення АЧХ  $Z_e(\omega)$  паралельного контуру

Порівняння КПФ, АЧХ і ФЧХ паралельного (відгуки  $I_L, I_C$ ) і послідовного (відгуки  $U_C, U_L$ ) контурів (див. табл. 5.1, 5.2) дозволяє зробити висновок щодо рівності відповідних КПФ і частотних характеристик (табл. 5.5), що підтверджує принцип дуальності контурів, розглянутий під час аналізу провідності  $Y(j\xi)$  послідовного контуру й опору  $Z_e(j\xi)$  паралельного контуру.

Принцип дуальності можна використати, будуючи графіки АЧХ і ФЧХ (рис. 5.36 і 5.37).

Для контуру з низькою добротністю ( $1 < Q < 10$ ) графіки  $H_{I_L}(\omega)$  і  $H_{I_C}(\omega)$  (рис. 5.36, а, б) мають такий самий вигляд, як  $H_{U_C}(\omega)$  і  $H_{U_L}(\omega)$  (див. рис. 5.19, а), а також відповідні резонансні криві (див. рис. 5.17) для послідовного контуру. АЧХ  $H_{I_L}(\omega)$  досягає максимального значення на частоті  $\omega_{L \max} = \omega_{рез} \sqrt{1 - 0,5d^2}$ , яка менше резонансної і визначається аналогічно до частоти максимуму  $H_{U_C}(\omega)$  у послідовному контурі. Максимум  $H_{I_C}(\omega)$  спостерігається на частоті  $\omega_{C \max} = \omega_{рез} / \sqrt{1 - 0,5d^2}$ , яка більше резонансної і дорівнює частоті максимуму  $H_{U_L}(\omega)$  у послідовному контурі.

Вирази для АЧХ і ФЧХ паралельного контуру; значення  $H(j\omega)$  і  $H(\omega)$  для резонансної частоти

Відгук	$H(j\omega_{рез}), H(\omega_{рез})$	АЧХ	ФЧХ
$I_L$	$H_{I_L}(j\omega_{рез}) = -jQ$ $H_{I_L}(\omega_{рез}) = Q$	$H_{I_L}(\omega) = \frac{I_L}{I_{дж}} = \frac{\rho^2/\omega L}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ $H_{I_L \text{ норм}}(\omega) = \frac{H_{I_L}(\omega)}{H_{I_L}(\omega_{рез})} = \frac{\omega_{рез}/\omega}{\sqrt{1 + (X/R)^2}} = \frac{\omega_{рез}/\omega}{\sqrt{1 + \xi^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}$	$\varphi_{I_L}(\omega) = \psi_{I_L} - \psi_{I_{дж}} = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X}{R} = -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi$
$I_C$	$H_{I_C}(j\omega_{рез}) = jQ$ $H_{I_C}(\omega_{рез}) = Q$	$H_{I_C}(\omega) = \frac{I_C}{I_{дж}} = \frac{\rho^2 \omega C}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ $H_{I_C \text{ норм}}(\omega) = \frac{H_{I_C}(\omega)}{H_{I_C}(\omega_{рез})} = \frac{\omega/\omega_{рез}}{\sqrt{1 + (X/R)^2}} = \frac{\omega/\omega_{рез}}{\sqrt{1 + \xi^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}$	$\varphi_{I_C}(\omega) = \psi_{I_C} - \psi_{I_{дж}} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X}{R} = \frac{\pi}{2} - \arctg \xi$

Максимальні значення АЧХ становлять:

$$H_{I_L}(\omega_{L \max}) = H_{I_C}(\omega_{C \max}) = \frac{Q}{\sqrt{1 - 0,25d^2}}$$

За високої добротності максимуми кривих  $H_{I_C}(\omega)$ ,  $H_{I_L}(\omega)$  майже дорівнюють  $Q$ , а частота максимумів відповідає резонансній (рис. 5.37), тобто поблизу резонансної частоти криві сходяться.

Значення  $H_{I_C}(\omega)$  і  $H_{I_L}(\omega)$  на граничних частотах  $\omega = 0$  і  $\omega \rightarrow \infty$  виходять з еквівалентних схем (див. рис. 5.34):

$$H_{I_C}(0) = 0; H_{I_L}(0) = 1; H_{I_C}(\infty) = 1; H_{I_L}(\infty) = 0.$$



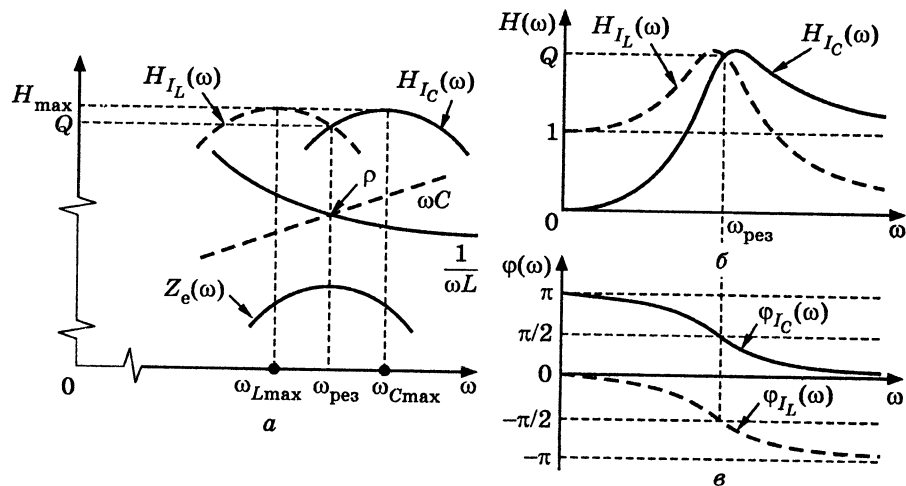


Рис. 5.36. Графіки АЧХ і ФЧХ передатних функцій паралельного контуру з низькою добротністю: а, б — АЧХ; в — ФЧХ

Всі КПФ високодобротних паралельних контурів (як і послідовних) поблизу резонансних частот можна звести до єдиної нормованої КПФ у функції узагальненої розстройки нормуванням до резонансного значення  $H(j\omega_{рез})$  (див. табл. 5.4):

$$H_{норм}(j\xi) = \frac{Z_e(j\xi)}{Z_{e\text{рез}}} = \frac{H_{I_C}(j\xi)}{H_{I_C\text{рез}}} = \frac{H_{I_L}(j\xi)}{H_{I_L\text{рез}}} = \frac{1}{1+j\xi} \quad (5.70)$$

Таблиця 5.5

Дуальні КПФ, АЧХ і ФЧХ контурів

Послідовний контур	Паралельний контур
$H_{U_C}(j\omega)$	$H_{I_L}(j\omega)$
$H_{U_L}(j\omega)$	$H_{I_C}(j\omega)$
$H_{U_C}(\omega)$	$H_{I_L}(\omega)$
$H_{U_L}(\omega)$	$H_{I_C}(\omega)$
$\varphi_{U_C}(\omega)$	$\varphi_{I_L}(\omega)$
$\varphi_{U_L}(\omega)$	$\varphi_{I_C}(\omega)$

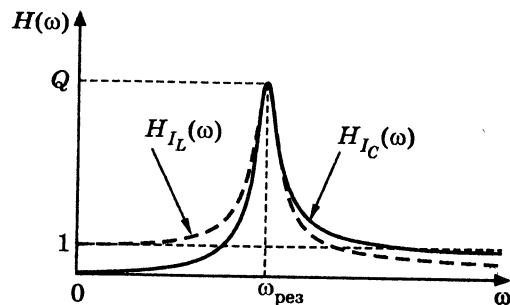


Рис. 5.37. Графіки АЧХ  $H_{I_C}(\omega)$  і  $H_{I_L}(\omega)$  паралельного контуру з високою добротністю

Оскільки вираз (5.70) збігається з формулою нормованої КПФ послідовного контуру (див. підрозд. 5.4), збігаються і співвідношення для нормованих АЧХ (5.37) і ФЧХ (5.40):

$$H_{норм}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \varphi_{норм}(\xi) = -\arctg \xi$$

Збіг нормованих КПФ для одиночних (послідовних і простих паралельних) контурів дозволяє, за однакової добротності  $Q \gg 1$ , зробити такі висновки:

1. АЧХ послідовного і паралельного контурів мають однакові СП, коефіцієнт прямокутності ( $k_{пр} \approx 10$ ) і форму поблизу резонансної частоти.

2. ФЧХ і АФХ одиночних контурів для дуальних відгуків збігаються.

3. Для послідовного і паралельного контурів можна застосувати однакові розрахункові співвідношення для таких вторинних параметрів, як добротність, загасання, резонансна частота, характеристичний опір.

4. Послідовний і паралельний контури відрізняються величиною резонансного опору (опір паралельного контуру в  $Q^2$  разів більший) і характером резонансів (у послідовного — резонанс напруг; у паралельного — резонанс струмів).

Основні параметри одиночних резонансних контурів наведені в табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Параметри одиночних резонансних контурів

		Вид і схеми контурів	
		Послідовний	Паралельний
Параметри	Позначення		
Резонансні частоти	$\omega_{рез}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\approx \frac{1}{\sqrt{LC}}, Q \gg 1$
	$f_{рез}$	$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$\approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, Q \gg 1$

Закінчення табл. 5.6

Параметри	Позначення	Вид і схеми контурів		
		Послідовний	Паралельний	
Резонансні опори	$Z_{\text{рез}}$	$R$	$R_0$	$\approx \frac{\rho^2}{R_L + R_C}$
Характеристичний опір	$\rho$	$\omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$		
Добротність	$Q$	$\frac{\rho}{R} = \frac{\omega_{\text{рез}} L}{R} = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$	$\frac{R_0}{\rho} = \frac{R_0}{\sqrt{L/C}}$	$\frac{\rho}{R_L + R_C} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_L + R_C}$
		$2\pi \frac{W_{L_{\text{max}}}}{W_{R_{\text{рез}}}} = \omega_{\text{рез}} \frac{W_p}{P_R}$ ( $W_p$ — максимальна енергія в $L$ і $C$ ; $W_{R_{\text{рез}}}$ — енергія втрат у $R$ за період; $P_R$ — потужність у $R$ )		
Загасання	$d$	$\frac{1}{Q}$		
Вид резонансу	$U_{C_{\text{рез}}}$	Резонанс напруг $U_{L_{\text{рез}}} = U_{C_{\text{рез}}} = QE$	Резонанс струмів $I_{L_{\text{рез}}} = I_{C_{\text{рез}}} = QI$	
Абсолютна розстройка	$\Delta\omega$ $\Delta f$	$\omega - \omega_{\text{рез}}$ $f - f_{\text{рез}}$		
Узагальнена розстройка	$\xi$	$\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{X}{R} \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{рез}}} = 2Q \frac{\Delta f}{f_{\text{рез}}}$		
Смуга пропускання	$2\Delta f_{\Pi}$	$2\Delta f_{\Pi} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q} = f_{\text{рез}} d$		

### 5.7.3. Вплив внутрішнього опору джерела й опору навантаження на вибірні властивості паралельного контуру

Якщо контур живиться реальним джерелом (рис. 5.38, а), струм у загальній вітці  $I$  змінюється при змінюванні опору контуру, який залежить від частоти. У радіотехнічних пристроях для використання вибірних властивостей контуру паралельно до нього підключають інші каскади, які на еквівалентній схемі (рис. 5.38, а) узагальнено

позначено як опір навантаження  $R_H$ . Внутрішній опір джерела і опір навантаження можуть суттєво впливати на частотні характеристики контуру.

Паралельно з'єднані  $R_i$ ,  $R_H$  можна замінити еквівалентним шунтуючим опором  $R_{\text{ш}} (1/R_{\text{ш}} = 1/R_i + 1/R_H)$ . Тоді увімкнене до зашкочків 1–1' джерело струму можна розглядати як ідеальне (рис. 5.38, б), а опір  $R_{\text{ш}}$  перерахувати за формулою (5.48) у послідовний  $R_{\text{посл}} = \rho^2/R_{\text{ш}}$  (рис. 5.38, в). В результаті опір загальних втрат дорівнюватиме сумі  $R_L, R_C, R_{\text{посл}}$ , а еквівалентна добротність контуру з урахуванням виразу (5.49) становитиме:

$$Q_e = \frac{\rho}{R_L + R_C + R_{\text{посл}}} = \frac{\rho}{R + \rho^2(1/R_i + 1/R_H)} = \frac{Q}{1 + Z_{\text{рез}}/R_i + Z_{\text{рез}}/R_H} \quad (5.71)$$

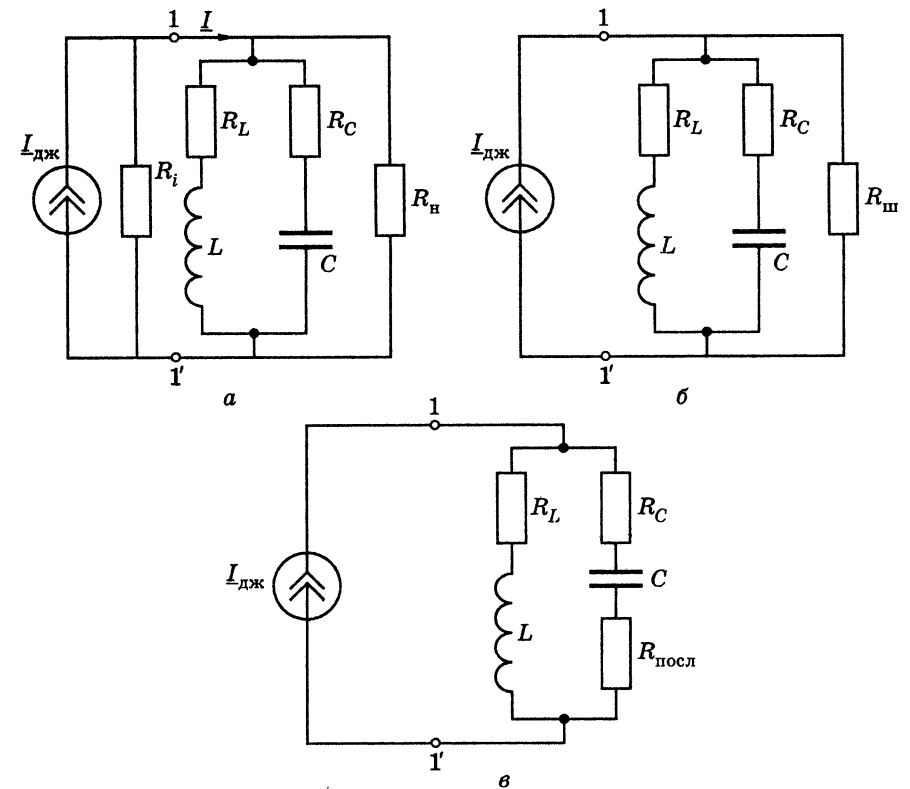


Рис. 5.38. Схеми паралельного контуру з урахуванням опорів джерела і навантаження

де  $R = R_L + R_C$ ,  $Q = \rho/R$ ,  $Z_{e\text{рез}} = \rho^2/R$  — відповідно опір втрат; добротність і резонансний опір нешунтованого контуру.

Еквівалентна добротність  $Q_e$  залежить від власної добротності  $Q$  і від відношень опорів  $Z_{e\text{рез}}$  до внутрішнього опорів джерела  $R_i$  і до опорів навантаження  $R_n$ . Із зменшенням величини  $R_i$  ( $R_n$ ) еквівалентна добротність зменшується. Еквівалентна добротність визначає еквівалентну СП:

$$2\Delta\omega_{\Pi_e} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q_e}, \quad (5.72)$$

яка збільшується при зменшенні  $Q_e$ .

Крім збільшення СП, зменшення добротності призводить також до зменшення еквівалентного резонансного опорів  $Z_{e\text{рез}} = Q_e \rho$  і значень відповідних ординат АЧХ  $H_{I_L}(\omega)$  і  $H_{I_C}(\omega)$ .

Отже, на відміну від послідовного контуру, використання вибірних властивостей паралельного контуру доцільне тоді, коли внутрішній опір джерела струму достатньо великий:  $R_i \gg Z_{e\text{рез}}$ . Опір навантаження впливає на вибірність контуру так само, як і у послідовному контурі, але за умови, що  $R_n \gg Z_{e\text{рез}}$ .

Отже, на відміну від послідовного контуру, використання вибірних властивостей паралельного контуру доцільне тоді, коли внутрішній опір джерела струму достатньо великий:  $R_i \gg Z_{e\text{рез}}$ . Опір навантаження впливає на вибірність контуру так само, як і у послідовному контурі, але за умови, що  $R_n \gg Z_{e\text{рез}}$ .

Якщо контур живиться від джерела ЕРС, то, з'єднавши його послідовно з опором  $R_0$ , можна за умови  $R_0 \gg Z_{e\text{рез}}$  забезпечити незмінність амплітуди струму  $I$  (рис. 5.39):

$$I = \frac{E}{R_0 + Z_e(j\omega)}; \quad I \cong \frac{E}{R_0}.$$

Якщо як відгук кола (рис. 5.39) розглядати напругу  $U_K$ , комплексний коефіцієнт передачі за напругою становитиме:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_K}{E} = \frac{IZ_e(j\omega)}{E} = \frac{Z_e(j\omega)}{R_0 + Z_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + R_0/Z_e(j\omega)}. \quad (5.73)$$

Вплив опорів  $R_0$  на вибірні властивості контуру зменшується із збільшенням  $R_0$ , але при цьому зменшується також значення  $H_U(\omega)$  відповідно до виразу (5.73).

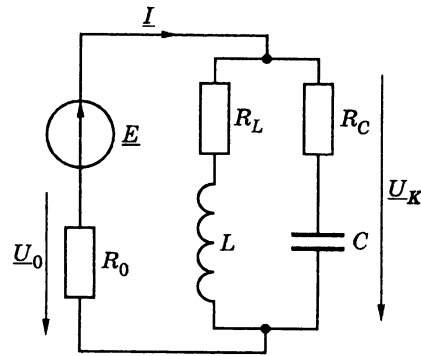


Рис. 5.39. Увімкнення контуру до джерела напруги

Якщо  $R_0 \leq Z_{e\text{рез}}$ , а відгуком є напруга  $U_0$ , КПФ матиме вигляд:

$$H_{U_0}(j\omega) = \frac{U_0}{E} = \frac{U_0}{U_0 + U_K} = \frac{1}{1 + U_K/U_0} = \frac{1}{1 + Z_e(j\omega)/R_0}.$$

АЧХ, яка визначається функцією  $H_{U_0}(\omega)$ , матиме мінімальне значення на частоті резонансу (рис. 5.40):

$$H_{U_0}(\omega_{\text{рез}}) = \frac{1}{1 + Z_{e\text{рез}}/R_0}.$$

Тому область поблизу резонансної частоти в даному випадку є смугою затримання, яку можна визначити як діапазон частот, де  $H_{U_0}(\omega)$  не перевищує у  $\sqrt{2}$  разів значення  $H_{U_0}(\omega_{\text{рез}})$ . Збільшення опорів  $R_0$  ( $R'_0 > R_0$ , рис. 5.40) спричинює збільшення  $H_{U_0}(\omega_{\text{рез}})$  і зменшення смуги затримання  $2\Delta\omega_3$ , завдяки зростанню еквівалентної добротності відповідно до формули (5.71):

$$Q_e = \frac{Q}{1 + Z_{e\text{рез}}/R_0}.$$

Отже, живлячись від джерела ЕРС, паралельний контур інакше виявляє свої вибірні властивості, залишаючись високоомним вибірним навантаженням, котре на резонансній частоті має резистивний характер. Щоб отримати в такому навантаженні максимальну активну потужність, необхідно узгодити джерело ЕРС з опором навантаження, котрим є паралельний контур, тобто виконати умову  $R_i = Z_{e\text{рез}}$ , де  $R_i$  — внутрішній опір джерела. Якщо

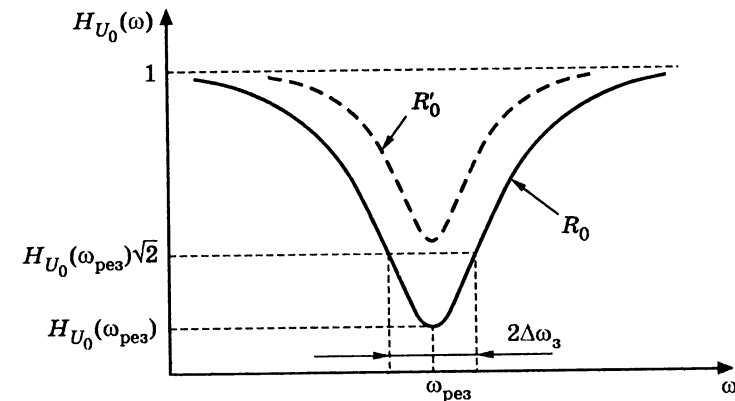


Рис. 5.40. АЧХ  $H_{U_0}(\omega)$  контуру, увімкненого до джерела напруги

$R_i < Z_{e\text{рез}}$ , зменшення  $Z_{e\text{рез}}$  недоцільно, оскільки збільшує СП. Щоб зменшити значення резонансного опору, зберігши вибірні властивості кола, застосовують складні паралельні контури.

### 5.8. Складні паралельні контури

Схему паралельного резонансного контуру можна подати в узагальненому вигляді (рис. 5.41, а). Для резонансної частоти  $\omega = \omega_{\text{рез}}$  у контурі з високою добротністю має виконуватися умова:

$$X_{1\text{рез}} + X_{2\text{рез}} = 0. \quad (5.74)$$

У схемі (рис. 5.41, б), яку розглянуто у підрозд. 5.7, реактивний опір лівої вітки  $X_1$  індуктивний, а правої  $X_2$  — ємнісний. Така схема називається простим паралельним контуром (контуром першого виду, або контуром з повним увімкненням). Загалом, опори  $X_1$  і  $X_2$  можуть бути довільними сполученнями індуктивностей і ємностей, але вони мають задовольняти умові резонансу (5.74) на незмінній частоті  $\omega_{\text{рез}}$ .

На рис. 5.41, в показано варіант схеми, у якій реактивний опір лівої вітки утворений тільки індуктивністю  $L_1$ , а правої — індуктивністю  $L_2$  і ємністю  $C$ . Таку схему називають *контуром другого виду*, або *контуром з розподіленою індуктивністю*.

У контурі третього виду (з розподіленою ємністю, рис. 5.41, г) у ліву вітку увімкнено тільки ємність  $C_1$ , а в праву — ємність  $C_2$  та індуктивність  $L$ . Контури другого і третього видів називають *складними*, або *контурами з частковим увімкненням*.

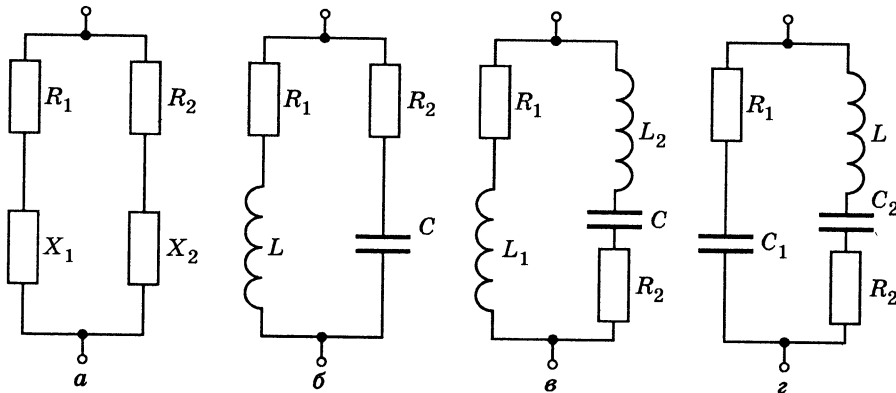


Рис. 5.41. Схеми складних паралельних контурів

Вхідний (еквівалентний) опір складного контуру становить:

$$\underline{Z}_e^* = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)}$$

Для контурів з високою добротністю, характеристичний опір яких  $\rho \gg R = R_1 + R_2$ , при малих розстройках вираз для  $\underline{Z}_e^*$  спрощується:

$$\underline{Z}_e^* \approx \frac{jX_1 jX_2}{R + j(X_1 + X_2)}$$

Для резонансної частоти  $\omega_{\text{рез}}$  виконується умова (5.74), згідно з якою  $X_{2\text{рез}} = -X_{1\text{рез}}$ . Тому еквівалентний резонансний опір становитиме:

$$\underline{Z}_{e\text{рез}}^* = \frac{jX_{1\text{рез}} jX_{2\text{рез}}}{R + j(X_{1\text{рез}} + X_{2\text{рез}})} = \frac{-X_{1\text{рез}} X_{2\text{рез}}}{R} = \frac{X_{1\text{рез}}^2}{R} = \frac{X_{2\text{рез}}^2}{R},$$

де  $X_{1\text{рез}}$ ,  $X_{2\text{рез}}$  — резонансний реактивний опір відповідної вітки, яка містить реактивність тільки одного характеру.

Вираз для еквівалентного резонансного опору  $\underline{Z}_e^*$  можна подати у вигляді:

$$\underline{Z}_{e\text{рез}}^* = \frac{X_{1\text{рез}}^2 \rho^2}{\rho^2 R} = \frac{X_{2\text{рез}}^2 \rho^2}{\rho^2 R} = \rho^2 \frac{\rho^2}{R} = \rho^2 Z_{e\text{рез}}, \quad (5.75)$$

де  $\rho = \frac{|X_{1\text{рез}}|}{R} = \frac{|X_{2\text{рез}}|}{R}$  — коефіцієнт увімкнення;  $Z_{e\text{рез}} = \frac{\rho^2}{R}$  —

еквівалентний резонансний опір простого паралельного контуру.

Слід зазначити, що коефіцієнт увімкнення змінюється у межах:  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Для складних контурів другого і третього видів виведення співвідношень для розрахунку резонансної частоти і коефіцієнта увімкнення дає такі результати.

*Контур другого виду* (контур з розподіленою індуктивністю, рис. 5.41, в). Резонансна частота визначається з формули (5.74):

$$\omega_{\text{рез}} L_1 + \omega_{\text{рез}} L_2 - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = 0,$$

звідки

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}. \quad (5.76)$$

Якщо  $L_1 + L_2 = L$  — індуктивність контуру з повним увімкненням, то резонансна частота при розподілі індуктивності не змінюється. Коефіцієнт увімкнення з урахуванням співвідношення (5.75) обчислюється так:

$$p = \frac{\omega_{\text{рез}} L_1}{\omega_{\text{рез}} (L_1 + L_2)} = \frac{L_1}{L}.$$

Контур третього виду (контур з розподіленою ємністю, рис. 5.41, з).

Умова (5.74) для даного контуру призводить до рівняння:

$$\omega_{\text{рез}} L - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_1} - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_2} = 0,$$

з якого

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC_1 C_2 / (C_1 + C_2)}}. \quad (5.77)$$

Якщо  $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$  — повна ємність контуру — збігається за величиною з ємністю  $C$  у схемі (рис. 5.41, б), тоді резонансні частоти контурів першого і третього видів будуть однаковими.

Коефіцієнт увімкнення з урахуванням (5.77) становитиме:

$$p = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_1} / \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_1 C_2 / (C_1 + C_2)} = \frac{1/C_1}{(C_1 + C_2)/C_1 C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

На підставі виразів (5.75)–(5.77) можна зробити висновок, що у складному паралельному контурі, у порівнянні з простим, резонансний опір контуру зменшується в  $p^2$  разів і зберігається значення резонансної частоти.

Характерною рисою складних паралельних контурів є наявність резонансів напруг у вітках поряд з резонансом струмів у самому контурі. Тому на відміну від простого контуру частотна залежність повного опору складного контуру має два екстремуми (рис. 5.42).

Для контуру другого виду частота паралельного резонансу  $\omega_{\text{рпар}}$  визначається за формулою (5.76). Цій частоті відповідає значення повного опору  $Z_{\text{е рез}}^*$ , яке розраховується за формулою (5.75). Частоту послідовного резонансу обчислюють з умови  $X_{2\text{рез}} = 0$ :

$$\omega_{\text{рпосл}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}.$$

Повний опір контуру другого виду на цій частоті визначатиметься переважно активним опором правої вітки  $R_2$ . З наведених

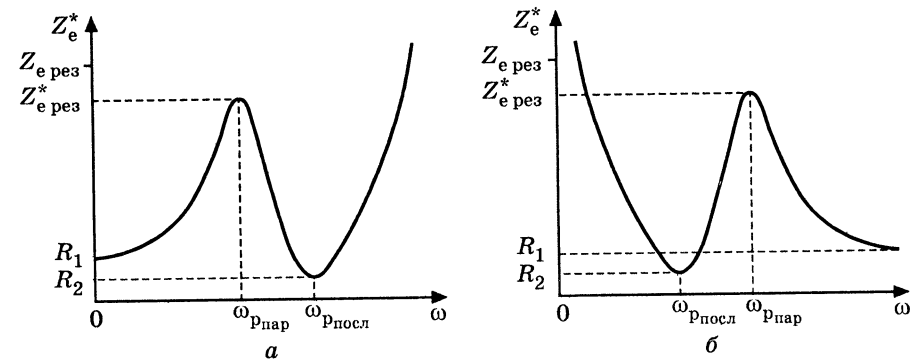


Рис. 5.42. Графіки частотних залежностей повного опору складних паралельних контурів: а — другого виду; б — третього виду

формул для резонансних частот видно, що  $\omega_{\text{рпосл}} > \omega_{\text{рпар}}$ , оскільки  $L_2 < L_1 + L_2$ .

Резонанс струмів у складному паралельному контурі третього виду згідно з формулою (5.77) спостерігається на частоті  $\omega_{\text{рпар}} = 1/\sqrt{LC_1 C_2 / (C_1 + C_2)}$ , при цьому опір контуру дорівнює  $Z_{\text{е рез}}^*$ . Резонанс напруг у послідовному контурі (права вітка рис. 5.41, з) спостерігатиметься за умови  $X_{2\text{рез}} = 0$  на частоті  $\omega_{\text{рпосл}} = 1/\sqrt{L_2 C}$ , причому повний опір паралельного контуру визначатиме мінімальний опір  $R_2$  правої вітки. Оскільки  $C_2 > C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ , то  $\omega_{\text{рпосл}} < \omega_{\text{рпар}}$ .

Якщо на частоті  $\omega_{\text{рпар}}$  резонансний опір складного контуру як навантаження дорівнює внутрішньому опором джерела  $R_i$ :

$$Z_{\text{е рез}}^* = p^2 \frac{\rho^2}{R} = R_i, \quad (5.78)$$

то потужність у навантаженні буде максимальною.

Частотні залежності амплітуди напруги на контурі повторюватимуть за формою частотні характеристики повного опору. Отже, вибірні властивості складних контурів дозволяють збільшити амплітуду напруги корисного сигналу у смузі частот поблизу  $\omega_{\text{рпар}}$  і одночасно значно зменшити амплітуду напруги завади на частоті  $\omega_{\text{рпосл}}$  за рахунок того, що  $R_2 \ll Z_{\text{е рез}}^*$ .

Приклад 5.8. Визначити співвідношення між струмами на резонансній частоті у складному паралельному контурі (рис. 5.43, а).

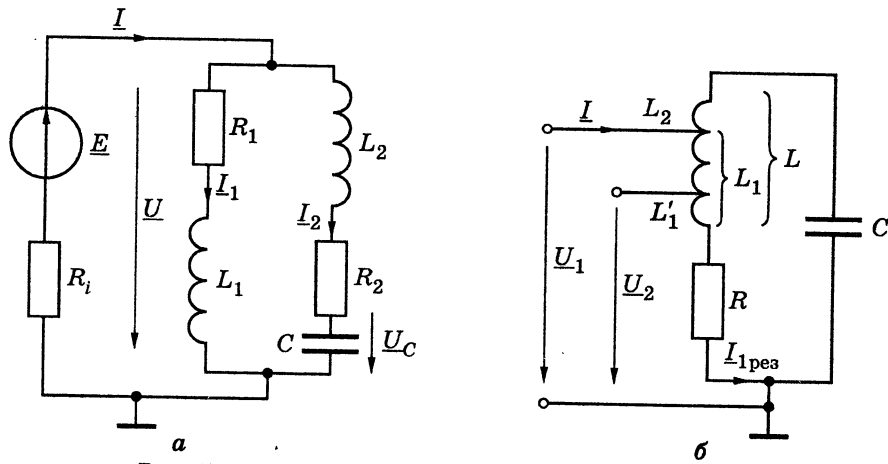


Рис. 5.43. Схеми складних паралельних контурів

**Розв'язання.** Знайдемо струм у загальній вітці на резонансній частоті, враховуючи, що резонансний опір складного контуру становить  $Z_{e\text{рез}}^* = p^2 Z_{e\text{рез}} = p^2 \rho^2 / R$  ( $p = L_1 / (L_1 + L_2)$ ,  $R = R_1 + R_2$ ):

$$I_{\text{рез}} = \frac{E}{R_i + Z_{e\text{рез}}^*} = \frac{E}{R_i + p^2 Z_{e\text{рез}}}$$

Знайдемо напругу на контурі:

$$U_{K\text{рез}} = I_{\text{рез}} p^2 Z_{e\text{рез}}$$

Визначимо струми у вітках:

$$I_{1\text{рез}} = \frac{U_{K\text{рез}}}{R_1 + j\omega_{\text{рез}} L_1} \approx \frac{U_{K\text{рез}}}{j\omega_{\text{рез}} (L_1 + L_2) p} = \frac{I_{\text{рез}} p^2 Z_{e\text{рез}}}{j\rho p} = \frac{I_{\text{рез}} p^2 \rho^2 / R}{j\rho p} = -j I_{\text{рез}} p Q;$$

$$I_{2\text{рез}} = \frac{U_{K\text{рез}}}{R_2 + j(\omega_{\text{рез}} L_2 - 1/\omega_{\text{рез}} C)}$$

Якщо вираз для реактивного опору переписати у вигляді:  $\omega_{\text{рез}} L_2 - \rho = \omega_{\text{рез}} (L - L_1) - \rho = \rho - \rho p - \rho = -\rho p$ , отримаємо:

$$I_{2\text{рез}} = \frac{I_{\text{рез}} p^2 Z_{e\text{рез}}}{R_2 - j\rho p} \approx \frac{I_{\text{рез}} p^2 \rho^2 / R}{j\rho p} = j I_{\text{рез}} p Q.$$

Отже, у складному паралельному контурі спостерігається резонанс струмів, але амплітуди струмів у вітках на резонансній частоті перевищують амплітуду струму в загальній вітці в  $pQ$  разів, тобто в  $1/p$  разів менше у порівнянні зі струмами у вітках при повному увімкненні.

**Приклад 5.9.** Визначити комплексний коефіцієнт передачі за напругою схеми (рис. 5.43, а) на резонансній частоті за умови, що дією є ЕРС, а відгуком — напруга на ємності контуру  $U_C$ .

**Розв'язання.** Визначимо відгук за законом Ома, використовуючи вираз для струму  $I_{2\text{рез}}$ :

$$U_{C\text{рез}} = -j \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} I_{2\text{рез}} = -j\rho I_{2\text{рез}}.$$

Підставимо значення  $I_{2\text{рез}}$  і  $I_{\text{рез}}$  з попереднього прикладу:

$$U_{C\text{рез}} = -j\rho(j I_{\text{рез}} p Q) = \frac{E p \rho Q}{R_i + p^2 Z_{e\text{рез}}}.$$

Знайдемо КПФ:

$$H_U(j\omega_{\text{рез}}) = \frac{U_{C\text{рез}}}{E},$$

$$H_U(j\omega_{\text{рез}}) = \frac{p \rho Q}{R_i + p^2 Z_{e\text{рез}}} = \frac{p Z_{e\text{рез}}}{R_i + p^2 Z_{e\text{рез}}} = \frac{p^2 Z_{e\text{рез}}}{p(R_i + p^2 Z_{e\text{рез}})} = \frac{1}{p(1 + R_i/Z_{e\text{рез}}^*)}$$

**Приклад 5.10.** Визначити КПФ складного паралельного контуру (рис. 5.43, б) на резонансній частоті. Контур і навантаження увімкнені частково до джерела струму з коефіцієнтами увімкнення  $p_1$  і  $p_2$  відповідно. Дія —  $U_1$ , відгук —  $U_2$ ;  $L = L_1 + L_2$ .

**Розв'язання.** Знайдемо струм загальної вітки, яку увімкнено до джерела з коефіцієнтом  $p_1 = L_1/L$ , за умови  $\omega = \omega_{\text{рез}}$ :

$$I_{\text{рез}} = \frac{U_1}{p_1^2 Z_{e\text{рез}}}$$

Запишемо вираз для струму індуктивної вітки (див. приклад 5.9):

$$I_{1\text{рез}} = -j p_1 I_{\text{рез}} Q = \frac{-j Q U_1}{p_1 Z_{e\text{рез}}}$$

Використовуючи закон Ома в комплексній формі, визначимо вихідну напругу  $U_2$  (напругу навантаження, увімкненого до контуру частково з коефіцієнтом  $p_2 = L_1'/L$ ):

$$U_{2\text{рез}} = I_{1\text{рез}} (R + j\omega_{\text{рез}} L_1') \approx I_{1\text{рез}} j\omega_{\text{рез}} p_2 L = I_{1\text{рез}} j p_2 \rho.$$

Перетворимо вираз для  $U_{2\text{рез}}$  з урахуванням попередньої формули для  $I_{1\text{рез}}$ :

$$U_{2\text{рез}} = p_2 \rho \frac{U_1 Q}{p_1 Z_{e\text{рез}}} = \frac{p_2 U_1}{p_1}$$

Застосовуючи отриманий вираз для  $\underline{U}_{2\text{рез}}$ , визначимо значення КПД на резонансній частоті:

$$H_U(j\omega_{\text{рез}}) = \frac{U_{2\text{рез}}}{U_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Аналізуючи цю формулу, бачимо, що навіть при малих значеннях коефіцієнтів  $p_1$ ,  $p_2$  значення  $H_U(j\omega_{\text{рез}})$  може бути близьким до одиниці.

### 5.9. Зв'язані коливальні контури. Поняття, визначення і схеми

*Зв'язаними* називаються два або більше одиночних коливальних контурів, у яких процеси впливають один на одного.

Перевагами зв'язаних коливальних контурів у порівнянні з одиночними є:

- 1) краща вибірність за рахунок прямокутнішої форми АЧХ;
- 2) можливість плавного регулювання СП;
- 3) простота узгодження з джерелом, завдяки можливості регулювання вхідного опору.

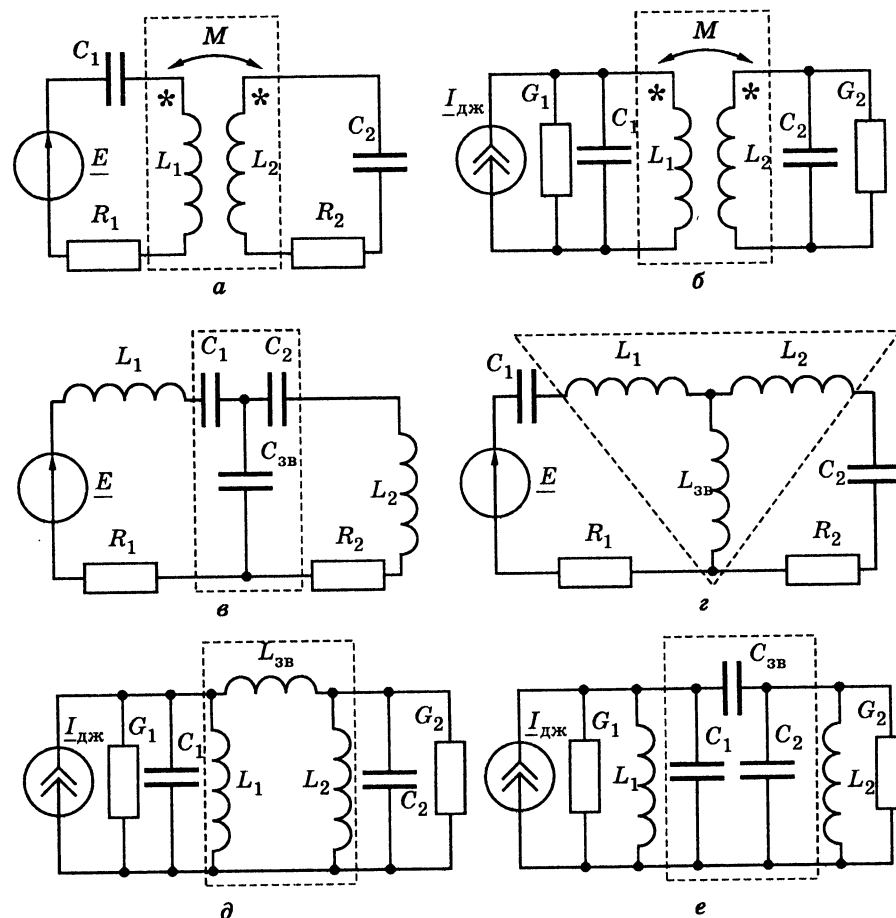
Зв'язані коливальні контури відрізняються кількістю  $n$  одиночних контурів, які входять до їх складу, видом зв'язку і способом технічної реалізації.

У радіотехніці широко застосовується система з двох зв'язаних одиночних контурів  $n = 2$ . Уже в цьому випадку наочно виявляються переваги зв'язаних контурів. Крім цього, така система досить просто розраховується і реалізується. Зі збільшенням  $n$  істотно зростають складнощі розрахунку і настроювання зв'язаних контурів. Тому практично  $n < 4 \dots 6$ . У цьому розділі розглядається система тільки з двох зв'язаних контурів.

Як елемент зв'язку принципово може бути використаний будь-який пасивний елемент (взаємна індуктивність, індуктивність, ємність, опір) або їх комбінації (наприклад, індуктивність і ємність). Слід зазначити, що опір як елемент зв'язку використовується дуже рідко через внесені втрати.

На рис. 5.44 показані поширені схеми двох зв'язаних контурів для випадків взаємоіндуктивного (трансформаторного), індуктивного (автотрансформаторного) та ємнісного зв'язку. Для скорочення записів у наведених схемах і у подальшому розгляді використовуються комплексні діючі значення, які називатимуться далі коротко струмами і напругами.

Залежно від виду одиночних контурів система зв'язаних контурів підключається до джерела напруги (для послідовного контуру) або джерела струму (для паралельного контуру). На відміну від



**Рис. 5.44.** Схеми зв'язаних коливальних контурів:  
*a, б* — взаємоіндуктивний зв'язок; *в* — внутрішній ємнісний зв'язок;  
*г* — внутрішній індуктивний зв'язок;  
*д* — зовнішній індуктивний зв'язок; *е* — зовнішній ємнісний зв'язок

взаємоіндуктивного зв'язку (рис. 5.44, *a, б*), інваріантного як для послідовних, так і для паралельних контурів, індуктивний та ємнісний зв'язки реалізуються по-різному для послідовних і паралельних контурів (рис. 5.44, *в-е*). У разі послідовних контурів елементи зв'язку одночасно входять в кожний з контурів (рис. 5.44, *в, г*), і тому такий зв'язок називається внутрішнім. У зв'язаних паралельних контурах (рис. 5.44, *д, е*) елементи зв'язку увімкнено інакше, і зв'язок називається зовнішнім.

На рис. 5.44 пунктиром позначено так звані чотириполосники зв'язку, які містять однотипні з елементом зв'язку реактивні елементи контурів. Поняття чотириполосника зв'язку покладено в основу визначення коефіцієнта зв'язку, який є кількісним показником ступеня зв'язку.

Коефіцієнт зв'язку  $k$  визначається як середнє геометричне КПФ для чотириполосника зв'язку в режимах холостого ходу при прямому і зворотному увімкненні джерела напруги  $\underline{E}$  (рис. 5.45):

$$k = \sqrt{\underline{H}_{2x.x} \underline{H}_{1x.x}}, \quad (5.79)$$

де  $\underline{H}_{2x.x} = \underline{U}_{2x.x} / \underline{E}$  — комплексний коефіцієнт передачі за напругою при увімкненні джерела напруги на вхід чотириполосника зв'язку (пряме увімкнення);  $\underline{H}_{1x.x} = \underline{U}_{1x.x} / \underline{E}$  — комплексний коефіцієнт передачі за напругою при увімкненні джерела напруги на вихід чотириполосника зв'язку (зворотне увімкнення).

Оскільки чотириполосники зв'язку складаються з однотипних реактивних елементів, уведені у виразі (5.79) КПФ збігаються з їх модулями:

$$\underline{H}_{2x.x} = \frac{U_{2x.x}}{E} = \frac{U_{2x.x}}{E}; \quad \underline{H}_{1x.x} = \frac{U_{1x.x}}{E} = \frac{U_{1x.x}}{E}.$$

Тому коефіцієнти зв'язку є дійсними числами.

Коефіцієнти зв'язку для режимів, показаних на рис. 5.45, розраховуються у такий спосіб:

1) для взаємоіндуктивного зв'язку —

$$k = \frac{\sqrt{j\omega M} \sqrt{j\omega M}}{\sqrt{j\omega L_1} \sqrt{j\omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad (5.80)$$

2) для внутрішнього ємнісного зв'язку —

$$k = \frac{\sqrt{1/j\omega C_{зв}} \sqrt{1/j\omega C_{зв}}}{\sqrt{1/j\omega C_1 + 1/j\omega C_{зв}} \sqrt{1/j\omega C_2 + 1/j\omega C_{зв}}} = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_{зв} + C_1)(C_{зв} + C_2)}} = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{C_{11} C_{22}}}, \quad (5.81)$$

де  $C_{11} = C_{зв} + C_1$ ;  $C_{22} = C_{зв} + C_2$ ;

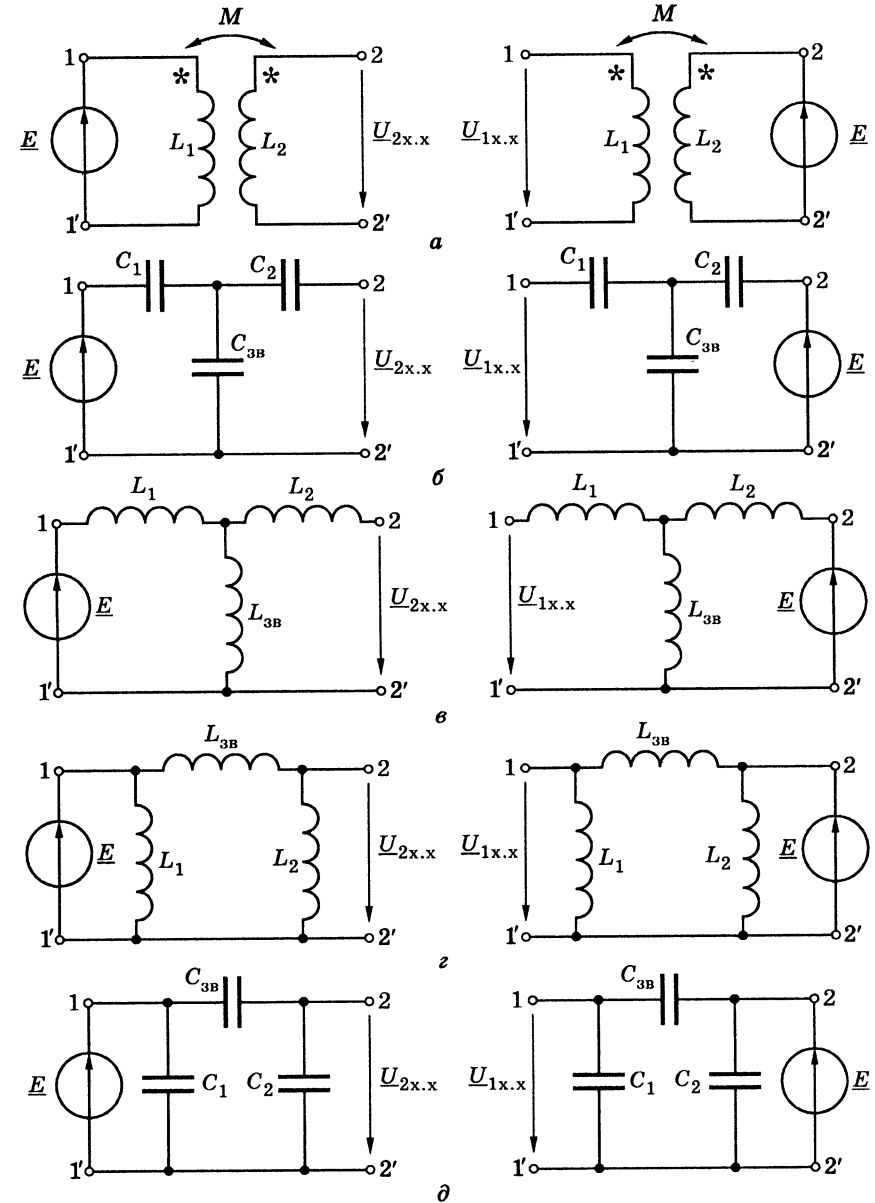


Рис. 5.45. Режими, використовувані для оцінки коефіцієнта зв'язку: а — взаємоіндуктивний зв'язок; б — внутрішній ємнісний зв'язок; в — внутрішній індуктивний зв'язок; г — зовнішній індуктивний зв'язок; д — зовнішній ємнісний зв'язок



3) для внутрішнього індуктивного зв'язку —

$$k = \sqrt{\frac{j\omega L_{зв}}{j\omega L_1 + j\omega L_{зв}} \frac{j\omega L_{зв}}{j\omega L_2 + j\omega L_{зв}}} = \frac{L_{зв}}{\sqrt{(L_1 + L_{зв})(L_2 + L_{зв})}} = \frac{L_{зв}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}, \quad (5.82)$$

де  $L_{11} = L_{зв} + L_1$ ;  $L_{22} = L_{зв} + L_2$ ;

4) для зовнішнього індуктивного зв'язку —

$$k = \sqrt{\frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + j\omega L_{зв}} \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + j\omega L_{зв}}} = \sqrt{\frac{L_2 L_1}{(L_2 + L_{зв})(L_1 + L_{зв})}} = \sqrt{\frac{L_2 L_1}{L_{11} L_{22}}}; \quad (5.83)$$

5) для зовнішнього ємнісного зв'язку —

$$k = \sqrt{\frac{1/j\omega C_2}{1/j\omega C_2 + 1/j\omega C_{зв}} \frac{1/j\omega C_1}{1/j\omega C_1 + 1/j\omega C_{зв}}} = \frac{C_{зв}}{\sqrt{(C_2 + C_{зв})(C_1 + C_{зв})}} = \frac{C_{зв}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}}. \quad (5.84)$$

Аналіз виразів (5.80)–(5.84) показує, що значення коефіцієнта зв'язку перебуває в межах  $0 \leq k \leq 1$ . Вираз (5.80) для взаємніндуктивного зв'язку збігається з виразом (1.29), здобутим в розд. 1 на основі співвідношень між потоками в двох ідеалізованих індуктивно зв'язаних котушках.

Щоб визначити струми і потім розрахувати (за необхідності) напруги на елементах у зв'язаних послідовних контурах (рис. 5.44, а, в, г), доцільно використати метод контурних струмів. Це призводить до системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} \underline{I}_I - \underline{Z}_{зв} \underline{I}_{II} &= \underline{E}; \\ -\underline{Z}_{зв} \underline{I}_I + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{II} &= 0, \end{aligned} \quad (5.85)$$

де  $\underline{I}_I = \underline{I}_1$ ;  $\underline{I}_{II} = \underline{I}_2$  — контурні струми, які дорівнюють струмам відповідних коливальних контурів;  $\underline{Z}_{зв} = jX_{зв}$  — комплексний опір елемента зв'язку;  $\underline{Z}_{11}$  ( $\underline{Z}_{22}$ ) — сума всіх комплексних опорів першого (другого) контуру, включаючи комплексний опір елемента зв'язку.

Системі рівнянь (5.85) відповідає узагальнена двоконтурна схема послідовних зв'язаних контурів з внутрішнім зв'язком (рис. 5.46). Вирази, за допомогою яких описуються комплексні опори  $\underline{Z}_{11}$ ,  $\underline{Z}_{22}$  і  $\underline{Z}_{зв}$ , для схем (рис. 5.44, а, в, г) зведені до табл. 5.7.

Вирази для опорів у системі рівнянь (5.85)

Вид зв'язку (рисунок)	$\underline{Z}_{11}$	$\underline{Z}_{22}$	$\underline{Z}_{зв}$
Взаємніндуктивний (рис. 5.44, а)	$R_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = R_1 + jX_1$	$R_2 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = R_2 + jX_2$	$j\omega M$
Внутрішній ємнісний (рис. 5.44, в)	$R_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_{зв}} \right)$	$R_2 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_{зв}} \right)$	$\frac{1}{j\omega C_{зв}}$
Внутрішній індуктивний (рис. 5.44, г)	$R_1 + j \left[ \omega(L_1 + L_{зв}) - \frac{1}{\omega C_1} \right]$	$R_2 + j \left[ \omega(L_2 + L_{зв}) - \frac{1}{\omega C_2} \right]$	$j\omega L_{зв}$

Розв'язання системи рівнянь (5.85) дозволяє отримати вирази для струмів  $\underline{I}_1$  і  $\underline{I}_2$ , які практично збігаються зі співвідношеннями (4.33) і (4.34). Тому для аналізу послідовних зв'язаних коливальних контурів можна використати двополюсні схеми заміщення (див. рис. 4.21 і 4.22) і співвідношення (4.35), (4.36) при розрахунку параметрів цих схем.

Завдяки простоті аналізу і настроювання, індуктивно зв'язані коливальні контури отримали широке практичне застосування. На рис. 5.47 зображені двополюсні схеми заміщення, а в табл. 5.8 — розрахункові співвідношення для параметрів цих схем. У подальшому викладі цьому виду зв'язаних контурів буде приділено основну увагу.

Щоб розрахувати режим паралельних зв'язаних коливальних контурів, доцільніше використовувати метод вузлових напруг для узагальненої схеми, зображеної на рис. 5.48.

Система рівнянь, складена за методом вузлових напруг для узагальненої схеми паралельних зв'язаних контурів із зовнішнім зв'язком (рис. 5.48), запишеться так:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} \underline{U}_{10} - \underline{Y}_{зв} \underline{U}_{20} &= \underline{I}_{дж}; \\ -\underline{Y}_{зв} \underline{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \underline{U}_{20} &= 0, \end{aligned} \quad (5.86)$$

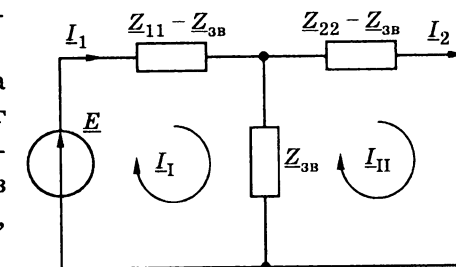


Рис. 5.46. Узагальнена схема зв'язаних контурів з внутрішнім зв'язком

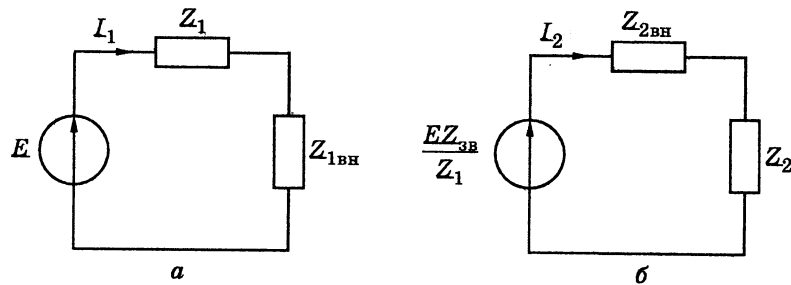


Рис. 5.47. Двополюсні схеми заміщення двох послідовних індуктивно зв'язаних коливальних контурів

Таблиця 5.8

Співвідношення для розрахунку параметрів двополюсних схем заміщення двох індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.47)

Найменування і позначення елементів двополюсних схем	Розрахункові співвідношення
Комплексний опір першого контуру, $Z_1$	$R_1 + jX_1 = R_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)$
Комплексний опір другого контуру, $Z_2$	$R_2 + jX_2 = R_2 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)$
Комплексний опір, що вноситься з другого контуру в перший, $Z_{1вн}$	$R_{1вн} + jX_{1вн}$
Активний опір, що вноситься з другого контуру в перший, $R_{1вн}$	$\frac{(\omega M)^2 R_2}{R_2^2 + X_2^2} = \frac{X_{зв}^2 R_2}{Z_2^2}$
Реактивний опір, що вноситься з другого контуру в перший, $X_{1вн}$	$-\frac{(\omega M)^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} = -\frac{X_{зв}^2 X_2}{Z_2^2}$
Комплексний опір, що вноситься з першого контуру у другий, $Z_{2вн}$	$R_{2вн} + jX_{2вн}$
Активний опір, що вноситься з першого контуру у другий, $R_{2вн}$	$\frac{(\omega M)^2 R_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{X_{зв}^2 R_1}{Z_1^2}$
Реактивний опір, що вноситься з першого контуру у другий, $X_{2вн}$	$-\frac{(\omega M)^2 X_1}{R_1^2 + X_1^2} = -\frac{X_{зв}^2 X_1}{Z_1^2}$
Комплексний опір зв'язку, $Z_{зв}$	$j\omega M = jX_{зв}$

де  $U_{10}$ ;  $U_{20}$  — показані на рис. 5.48 вузлові напруги;  $Y_{зв} = -jB_{зв}$  — комплексна провідність елемента зв'язку (див. табл. 5.9);  $Y_{11} = Y_1 + Y_{зв}$ ;  $Y_{22} = Y_2 + Y_{зв}$  — власні комплексні провідності першого і другого вузлів відповідно;  $Y_1$ ;  $Y_2$  — комплексні провідності першого і другого коливальних контурів відповідно (табл. 5.9).

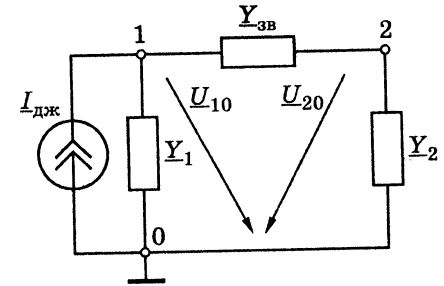


Рис. 5.48. Узагальнена схема зв'язаних контурів із зовнішнім зв'язком

Таблиця 5.9

Вирази для провідностей у системі рівнянь (5.86)

Вид зв'язку (рисунок)	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{зв}$
Взаємоіндуктивний <sup>6</sup> (рис. 5.44, б)	$Y_1 = G_1 - j \left( \frac{1}{\omega L_{e1}} - \omega C_1 \right)$ $L_{e1} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}$	$Y_2 = G_2 - j \left( \frac{1}{\omega L_{e2}} - \omega C_2 \right)$ $L_{e2} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}$	$\frac{1}{j\omega L_{eзв}}$ $L_{eзв} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}$
Зовнішній індуктивний (рис. 5.44, д)	$Y_1 = G_1 - j \left( \frac{1}{\omega L_1} - \omega C_1 \right)$	$Y_2 = G_2 - j \left( \frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2 \right)$	$\frac{1}{j\omega L_{зв}}$
Зовнішній ємнісний (рис. 5.44, е)			$j\omega C_{зв}$

Розв'язання системи рівнянь (5.86) і перетворення отриманих виразів для  $U_{10}$  і  $U_{20}$  призводять до двополюсних схем заміщення для паралельних коливальних контурів із зовнішнім зв'язком (рис. 5.49):

$$U_{10} = \frac{\begin{vmatrix} I_{джк} & -Y_{зв} \\ 0 & Y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & -Y_{зв} \\ -Y_{зв} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{22} I_{джк}}{Y_{11} Y_{22} - Y_{зв}^2} = \frac{I_{джк}}{Y_{11} - Y_{зв}^2 / Y_{22}} = \frac{I_{джк}}{Y_{11} + Y_{1вн}}; \quad (5.87)$$

<sup>6</sup> При записі виразів для  $Y_1$ ,  $Y_2$  і  $Y_{зв}$  використано варіант чотириполюсної схеми заміщення трансформатора (див. рис. 4.20, е).

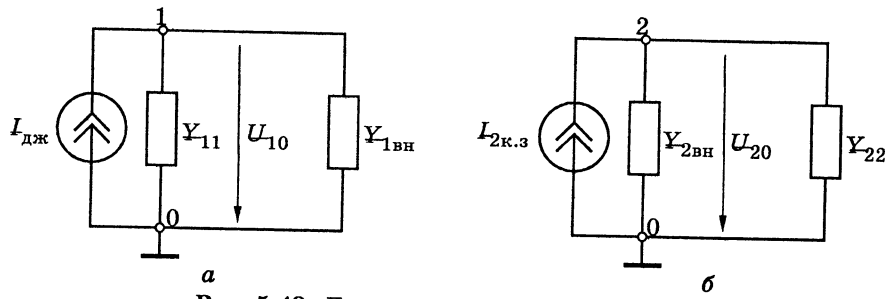


Рис. 5.49. Двополюсні схеми заміщення двох паралельних коливальних контурів із зовнішнім зв'язком

$$\underline{U}_{20} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{I}_{дж} \\ -\underline{Y}_{зв} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{зв} \\ -\underline{Y}_{зв} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\underline{Y}_{зв} \underline{I}_{дж}}{\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{зв}^2} = \frac{\underline{Y}_{зв} \underline{I}_{дж} / \underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{зв}^2 / \underline{Y}_{11}} = \frac{\underline{I}_{2к.з}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{2вн}}, \quad (5.88)$$

де  $\underline{Y}_{1вн} = \underline{Y}_{зв}^2 / \underline{Y}_{22}$  — комплексна провідність, що вноситься в перший коливальний контур; вона враховує вплив другого контуру і підключається паралельно власній комплексній провідності першого вузла;  $\underline{Y}_{2вн} = \underline{Y}_{зв}^2 / \underline{Y}_{11}$  — комплексна провідність, що вноситься у другий коливальний контур, вона враховує вплив першого контуру і підключається паралельно власній комплексній провідності другого вузла;  $\underline{I}_{2к.з} = \underline{Y}_{зв} \underline{I}_{дж} / \underline{Y}_{11}$  — струм при короткому замиканні другого контуру.

У двополюсній схемі заміщення (рис. 5.49, а), яка виходить з виразу (5.87) для напруги  $\underline{U}_{10}$ , комплексна внесена провідність  $\underline{Y}_{1вн}$  в алгебраїчній формі запису має вигляд:

$$\underline{Y}_{1вн} = \frac{-\underline{Y}_{зв}^2}{\underline{Y}_{22}} = \frac{B_{зв}^2}{G_{22} - jB_{22}} = \frac{B_{зв}^2 (G_{22} + jB_{22})}{(G_{22} - jB_{22})(G_{22} + jB_{22})} = \frac{B_{зв}^2 (G_{22} + jB_{22})}{G_{22}^2 + B_{22}^2} = \frac{B_{зв}^2 G_{22}}{G_{22}^2 + B_{22}^2} - j \frac{B_{зв}^2 B_{22}}{G_{22}^2 + B_{22}^2} = G_{1вн} - jB_{1вн}, \quad (5.89)$$

де  $G_{1вн} = \frac{B_{зв}^2 G_{22}}{G_{22}^2 + B_{22}^2} = \frac{B_{зв}^2 G_{22}}{Y_{22}^2}$ ;  $B_{1вн} = \frac{B_{зв}^2 B_{22}}{G_{22}^2 + B_{22}^2} = \frac{B_{зв}^2 B_{22}}{Y_{22}^2}$  — відповідно активна і реактивна внесені провідності, які увімкнено

паралельно власній комплексній провідності першого вузла;  $Y_{22} = \sqrt{G_{22}^2 + B_{22}^2}$  — повна власна провідність другого вузла.

Двополюсна схема заміщення (рис. 5.49, б) для розрахунку напруги на другому контурі  $\underline{U}_{20}$  виходить з кінцевого виразу (5.88). На вхід цієї схеми увімкнено джерело, струм якого дорівнює струму короткого замикання другого контуру  $\underline{I}_{2к.з} = \underline{Y}_{зв} \underline{I}_{дж} / \underline{Y}_{11}$ , а комплексна провідність

$$\underline{Y}_{2вн} = \frac{-\underline{Y}_{зв}^2}{\underline{Y}_{11}} = \frac{B_{зв}^2}{G_{11} - jB_{11}} = \frac{B_{зв}^2 (G_{11} + jB_{11})}{(G_{11} - jB_{11})(G_{11} + jB_{11})} = \frac{B_{зв}^2 (G_{11} + jB_{11})}{G_{11}^2 + B_{11}^2} = \frac{B_{зв}^2 G_{11}}{G_{11}^2 + B_{11}^2} - j \left( \frac{B_{зв}^2 B_{11}}{G_{11}^2 + B_{11}^2} \right) = G_{2вн} - jB_{2вн}, \quad (5.90)$$

де  $G_{2вн} = \frac{B_{зв}^2 G_{11}}{G_{11}^2 + B_{11}^2} = \frac{B_{зв}^2 G_{11}}{Y_{11}^2}$ ;  $B_{2вн} = \frac{B_{зв}^2 B_{11}}{G_{11}^2 + B_{11}^2} = \frac{B_{зв}^2 B_{11}}{Y_{11}^2}$  — відповідно активна і реактивна складові провідності, що вноситься у другий контур;  $Y_{11} = \sqrt{G_{11}^2 + B_{11}^2}$  — повна власна провідність першого вузла.

Двополюсна схема заміщення для розрахунку напруги  $\underline{U}_{20}$  за складом елементів і значенням струму джерела відповідає методу еквівалентного генератора струму (теорема Норттона). Тому внесена провідність  $\underline{Y}_{2вн}$  є вхідною комплексною провідністю еквівалентного генератора, тобто  $\underline{Y}_{2вн} = \underline{Y}_{вх}$ .

## 5.10. Види резонансів у зв'язаних контурах і способи настроювання

У зв'язаних коливальних контурах можливі декілька видів резонансів, які відрізняються двополюсними схемами заміщення, що використовуються для аналізу, і способами настроювання.

Для послідовних зв'язаних коливальних контурів з внутрішнім зв'язком можна використати двополюсні схеми для трансформатора (див. рис. 4.21 і 4.22), а також співвідношення (4.35) і (4.36). Щоб розрахувати зв'язані коливальні контури за цими схемами, використовують формули, наведені в табл. 5.10 для різних видів зв'язку. Двополюсні схеми заміщення і розрахункові співвідношення для індуктивно зв'язаних коливальних контурів, на прикладі яких нижче будуть детальніше розглянуті методика

розрахунку резонансних режимів і особливості їх настроювання, наведені відповідно на рис. 5.47 і в табл. 5.8. Двополюсні схеми заміщення паралельних коливальних контурів із зовнішнім зв'язком показані на рис. 5.49, а параметри цих схем описуються співвідношеннями (5.89), (5.90).

Настроювання зв'язаних контурів в резонанс здійснюється зміною параметрів контурів і величини зв'язку при незмінних амплітуді та частоті джерела.

Двополюсні схеми для аналізу режиму першого контуру (рис. 4.21, 5.47, а і 5.49, а), які надалі стисло називатимуться першими схемами заміщення, є підґрунтям для розгляду *першого частинного і першого складного резонансів*.

Перший частинний резонанс спостерігається, коли у відповідній першій схемі заміщення сумарний опір (провідність) має активний характер при ненульових власних і внесених реактивних опорах (провідностях). Таке визначення призводить до співвідношень:

- для загального випадку контурів з внутрішнім зв'язком (рис. 4.21)

$$X_{11} + X_{1\text{вн}} = 0 \text{ за умови } X_{11} \neq 0, X_{1\text{вн}} \neq 0, \quad (5.91)$$

звідки

$$X_{11} = -X_{1\text{вн}} = \frac{X_{\text{зв}}^2 X_{22}}{Z_{22}^2} = \frac{X_{\text{зв}}^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2};$$

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.47, а)

$$X_1 + X_{1\text{вн}} = 0 \text{ за умови } X_1 \neq 0, X_{1\text{вн}} \neq 0, \quad (5.92)$$

звідки

$$X_1 = -X_{1\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2 X_2}{Z_2^2} = \frac{(\omega M)^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2};$$

- для загального випадку контурів із зовнішнім зв'язком (рис. 5.49, а)

$$B_{11} + B_{1\text{вн}} = 0 \text{ за умові } B_{11} \neq 0, B_{1\text{вн}} \neq 0, \quad (5.93)$$

звідки

$$B_{11} = -B_{1\text{вн}} = \frac{B_{\text{зв}}^2 B_{22}}{Y_{22}^2} = \frac{B_{\text{зв}}^2 B_{22}}{G_{22}^2 + B_{22}^2}.$$

З урахуванням виразів (5.91) і (5.93) перші схеми заміщення для контурів з внутрішнім і зовнішнім зв'язками матимуть вигляд, показаний на рис. 5.50.

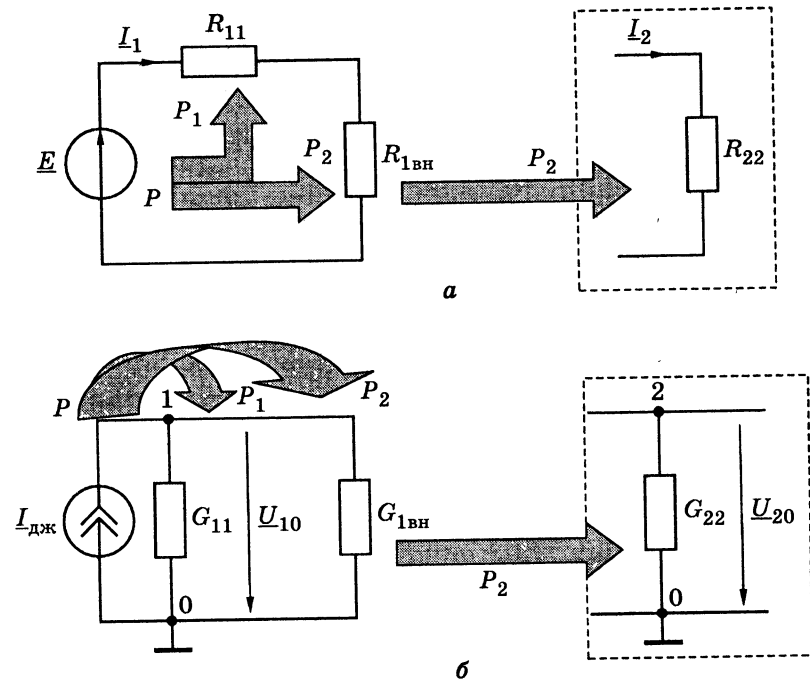


Рис. 5.50. Перші схеми заміщення зв'язаних контурів при першому частинному резонансі:  
а — з внутрішнім; б — із зовнішнім зв'язком

У зв'язаних контурах з внутрішнім зв'язком (рис. 5.50, а) струм першого контуру становить:

$$I_1 = \frac{E}{R_{11} + R_{1\text{вн}}},$$

де  $R_{1\text{вн}} = X_{\text{зв}}^2 R_{22} / Z_{22}^2$  — активна складова опору, що вноситься з другого контуру в перший.

Щоб визначити струм у другому контурі, можна використати баланс активних потужностей у початковій і першій схемах заміщення (рис. 5.50, а):

$$P = P_1 + P_2 = R_{11} I_1^2 + R_{22} I_2^2 = R_{11} I_1^2 + R_{1\text{вн}} I_1^2,$$

звідки

$$P_2 = R_{22} I_2^2 = R_{1\text{вн}} I_1^2; \quad I_2 = I_1 \sqrt{\frac{R_{1\text{вн}}}{R_{22}}}.$$

Аналогічно розраховуються напруги на першому і другому контурах із зовнішніми зв'язками (рис. 5.50, б):

$$\underline{U}_{10} = \frac{I_{дж}}{G_{11} + G_{1вн}}; P = P_1 + P_2 = G_{11}U_{10}^2 + G_{22}U_{20}^2 = G_{11}U_{10}^2 + G_{1вн}U_{10}^2;$$

$$P_2 = G_{22}U_{20}^2 = G_{1вн}U_{10}^2; U_{20} = U_{10} \sqrt{\frac{G_{1вн}}{G_{22}}}.$$

Настроювання на перший частинний резонанс доцільно здійснювати зміною реактивного опору (провідності) першого контуру, як правило, регулюванням ємності. Критерієм настройки буде досягнення максимальних значень струмів або напруг на реактивних елементах як першого, так і другого контурів.

Настроювання індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.51) частіше виконують змінюванням  $C_1$ ,  $C_2$  або  $M$ .

У режимі першого частинного резонансу струм у першому контурі (показання амперметра  $A_1$ )

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{1вн}},$$

що більше, ніж цей же струм за відсутності резонансу:

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + R_{1вн})^2 + (X_1 + X_{1вн})^2}}.$$

Струм у другому контурі та напруга на ємності  $C_2$  (показання амперметра  $A_2$  і вольтметра  $V_{C2}$ ) при першому частинному резонансі досягають максимуму тільки у разі настроювання реактивними елементами першого контуру (в цьому випадку ємністю  $C_1$ ), оскільки у виразах для струму і напруги

$$I_2 = \frac{I_1 \omega M}{Z_2}; U_{C2} = \frac{I_2}{\omega C_2} = \frac{I_1 M}{C_2 Z_2}$$

змінюється тільки струм  $I_1$ , а параметри  $\omega$ ,  $C_2$ ,  $Z_2$ ,  $M$  не змінюються.

Отже, настроювання індуктивно зв'язаних коливальних контурів на перший частинний резонанс можна здійснити зміною ємності  $C_1$  за критерієм досягнення максимумів струмів  $I_1$ ,  $I_2$  або напруги  $U_{C2}$ .

Слід зазначити, що досягнення максимальних значень  $I_2$  і  $U_{C2}$  при першому частинному резонансі не забезпечує режим передачі максимальної потужності у другий контур. При зміні зв'язку і

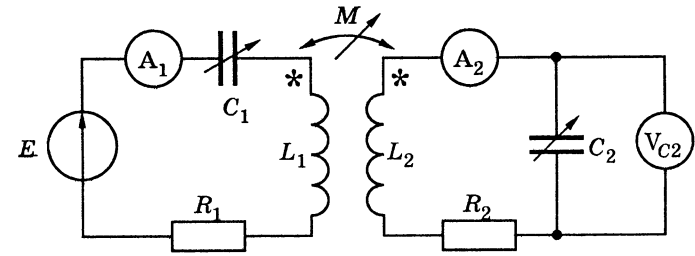


Рис. 5.51. Настроювання індуктивно зв'язаних контурів

повторному настроюванні на перший частинний резонанс значення  $I_2$  і  $U_{C2}$  можуть бути як більше, так і менше попередніх. Цим пояснюється найменування даного резонансу — *частинний*.

Режим передачі максимальної активної потужності у другий контур називається *першим складним резонансом*. Для аналізу даного режиму і його настроювання використовують перші схеми заміщення.

Перші двополюсні схеми заміщення (рис. 4.21, 5.47, а і 5.49, а) можна розглядати як схеми еквівалентних генераторів, у яких внутрішніми опорамі (провідностями) є  $Z_{11}$  (загальний випадок контурів з внутрішнім зв'язком),  $Z_1$  (індуктивно зв'язані контури),  $Y_{11}$  (загальний випадок контурів із зовнішнім зв'язком), а елементами, що враховують вплив навантаження (другого контуру), — відповідно,  $Z_{1вн}$ ,  $Y_{1вн}$ . Тому умовами першого складного резонансу, які збігаються з умовами передачі максимальної активної потужності у другий контур, є:

- для загального випадку контурів з внутрішнім зв'язком

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11} = Z_{1вн}^* = R_{1вн} - jX_{1вн}, \quad (5.94)$$

звідки  $R_{11} = R_{1вн}$ ;  $X_{11} = -X_{1вн}$ ;

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = Z_{1вн}^* = R_{1вн} - jX_{1вн}, \quad (5.95)$$

звідки  $R_1 = R_{1вн}$ ;  $X_1 = -X_{1вн}$ ;

- для контурів із зовнішнім зв'язком

$$Y_{11} = G_{11} - jB_{11} = Y_{1вн}^* = G_{1вн} + jB_{1вн}, \quad (5.96)$$

звідки  $G_{11} = G_{1вн}$ ;  $B_{11} = -B_{1вн}$ .

Аналіз співвідношень (5.94)–(5.96) показує, що умови першого складного резонансу включають умови першого частинного резонансу (5.91)–(5.93) (якщо  $X_{11} \neq 0$ ,  $X_1 \neq 0$ ,  $B_{11} \neq 0$ ) і додаткові умови

рівності активних власних і внесених опорів (провідностей). Перші схеми заміщення для першого складного резонансу показані на рис. 5.52.

При першому складному резонансі струм першого контуру у разі внутрішнього зв'язку (рис. 5.52, а) і напруга на першому контурі при зовнішньому зв'язку (рис. 5.52, б) становлять відповідно:

$$\underline{I}_1 = \frac{E}{2R_{11}}; \underline{U}_{10} = \frac{I_{дж}}{2G_{11}}.$$

Оскільки при першому складному резонансі у другому контурі виділяється максимальна активна потужність, струм у другому контурі  $\underline{I}_2$  (рис. 5.52, а) і напруга на другому контурі  $\underline{U}_{20}$  (рис. 5.52, б) досягають максимально можливих значень, і тому в їх позначеннях  $\underline{I}_{2_{м.м}}$  і  $\underline{U}_{20_{м.м}}$  застосовуються характерні індекси — скорочення слів «максимум максиморум».

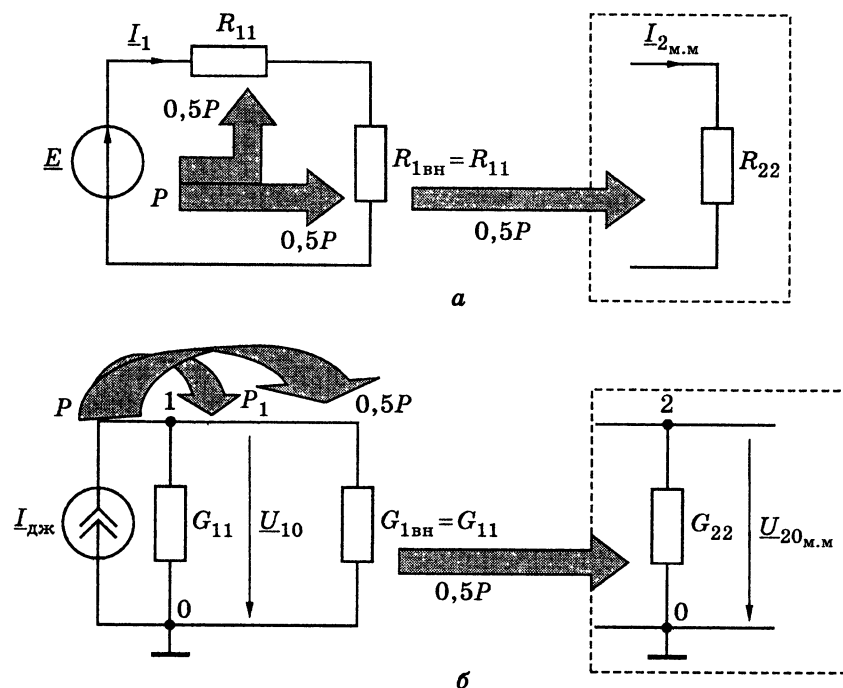


Рис. 5.52. Перші схеми заміщення зв'язаних контурів при першому складному резонансі:  
а — з внутрішнім; б — із зовнішнім зв'язками

Щоб розрахувати режим другого контуру при першому складному резонансі, як і у разі першого частинного резонансу, можна використати баланс активних потужностей:

- для контурів із внутрішнім зв'язком

$$0,5P = R_{11} I_1^2 = R_{22} (I_{2_{м.м}})^2,$$

звідки

$$I_{2_{м.м}} = I_1 \sqrt{\frac{R_{11}}{R_{22}}} = \frac{E}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}}; \quad (5.97)$$

- для контурів із зовнішнім зв'язком

$$0,5P = G_{11} U_{10}^2 = G_{22} (U_{20_{м.м}})^2,$$

звідки

$$U_{20_{м.м}} = U_{10} \sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}} = \frac{I_{дж}}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}. \quad (5.98)$$

Щоб настроїти систему на перший складний резонанс, змінюють реактивні опори (провідності) першого контуру (як правило, регулюючи ємність першого контуру) для виконання умови першого частинного резонансу і величину зв'язку для досягнення рівності активних складових власних опорів і опорів, що вносяться в першій схемі заміщення. Виходячи з рівності активних складових власних і внесених опорів, виконують розрахунок величини зв'язку:

- для загального випадку контурів з внутрішнім зв'язком

$$R_{11} = R_{1_{вн}} = \frac{X_{зв}^2 R_{22}}{Z_{22}^2}, \text{ звідки } X_{зв} = Z_{22} \sqrt{\frac{R_{11}}{R_{22}}}; \quad (5.99)$$

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів

$$R_1 = R_{1_{вн}} = \frac{(\omega M)^2 R_2}{Z_2^2}, \text{ звідки } M = \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}; \quad (5.100)$$

- для загального випадку контурів із зовнішнім зв'язком

$$G_{11} = G_{1_{вн}} = \frac{B_{зв}^2 G_{22}}{Y_{22}^2}, \text{ звідки } B_{зв} = Y_{22} \sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}}. \quad (5.101)$$

Настроювання індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.51) на перший складний резонанс проводиться змінюванням  $C_1$  і  $M$ . Критерієм настройки є досягнення максимально можливого показання амперметра  $A_2$  або вольтметра  $V_{C_2}$ , що відповідає значенням  $I_{2_{м.м}} = E/2\sqrt{R_{11}R_{22}}$  і  $U_{C_2_{м.м}}$ .

На вищих частотах вимірювання виконують переважно вольтметром.

Настроювання починається з довільного значення взаємної індуктивності  $M'$ , за якої виконується настройка на перший частинний резонанс ємністю  $C_1$  і вимірюється значення  $U'_{C_2}$ . Потім взаємна індуктивність збільшується на величину  $\Delta M$ :  $M'' = M' + \Delta M$ , і знову проводиться настроювання на перший частинний резонанс ємністю  $C_1$ . Отримана величина  $U''_{C_2}$  порівнюється з попереднім значенням  $U'_{C_2}$ . Якщо  $U''_{C_2} > U'_{C_2}$ , то взаємну індуктивність потрібно збільшувати з певним «кроком», кожного разу підстроюючи ємність  $C_1$  за максимумом  $U_{C_2}$ , до досягнення значення  $U_{C_2_{м.м}}$ . У іншому випадку, коли  $U''_{C_2} < U'_{C_2}$ , взаємну індуктивність необхідно зменшувати, починаючи зі значення  $M'$ , аналогічно підстроюючи при кожному з чергових значень  $M$  на перший частинний резонанс до остаточної настройки на перший складний резонанс.

Описана методика настроювання відповідає так званому методу послідовних наближень, що дозволяє експериментально визначити єдиний максимум функції двох змінних  $U_{C_2}(C_1, M)$  (рис. 5.53).

Розгляд другого частинного і другого складного резонансів ґрунтується на двополюсних схемах для аналізу режиму другого контуру (рис. 4.22, 5.47, б і 5.49, б). Ці схеми далі називатимуться другими схемами заміщення.

Умовою другого частинного резонансу є активний характер другої схеми заміщення при ненульових реактивних власних і внесених опорах (провідностях). За цієї умови матимемо:

- для загального випадку контурів з внутрішнім зв'язком (рис. 4.22)

$$X_{22} + X_{2вн} = 0 \text{ за умови } X_{22} \neq 0, X_{2вн} \neq 0, \quad (5.102)$$

звідки

$$X_{22} = -X_{2вн} = \frac{X_{зв}^2 X_{11}}{Z_{11}^2} = \frac{X_{зв}^2 X_{11}}{R_{11}^2 + X_{11}^2};$$

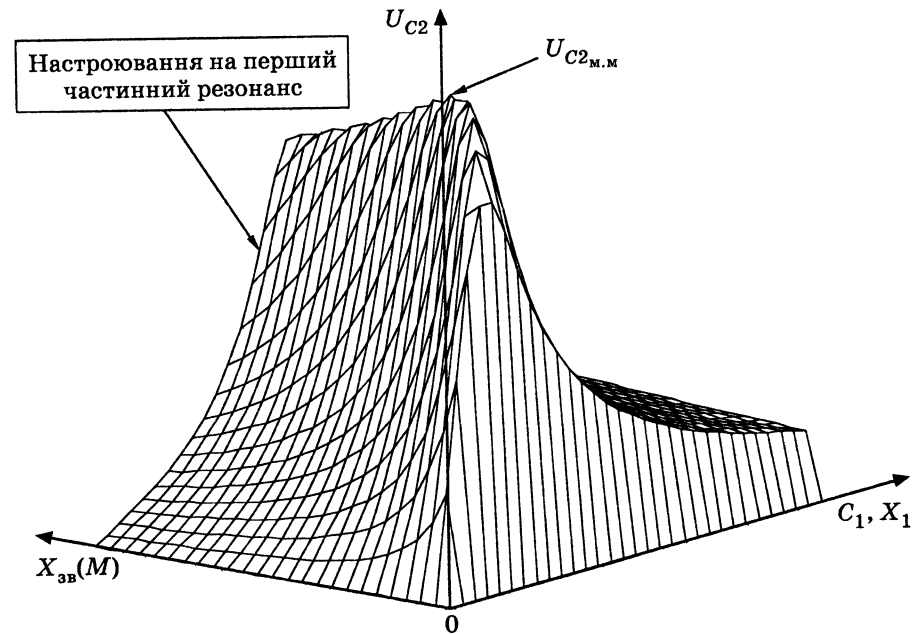


Рис. 5.53. Аксонетричне зображення функції  $U_{C_2}(C_1, M)$ , максимум якої відповідає першому складному резонансу

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.47, б)

$$X_2 + X_{2вн} = 0 \text{ за умови } X_2 \neq 0, X_{2вн} \neq 0, \quad (5.103)$$

звідки

$$X_2 = -X_{2вн} = \frac{(\omega M)^2 X_1}{Z_1^2} = \frac{(\omega M)^2 X_1}{R_1^2 + X_1^2};$$

- для загального випадку контурів із зовнішнім зв'язком (рис. 5.49, б)

$$B_{22} + B_{2вн} = 0 \text{ за умови } B_{22} \neq 0, B_{2вн} \neq 0, \quad (5.104)$$

звідки

$$B_{22} = -B_{2вн} = \frac{B_{зв}^2 B_{11}}{Y_{11}^2} = \frac{B_{зв}^2 B_{11}}{G_{11}^2 + B_{11}^2}.$$

Виходячи зі співвідношень (5.102) і (5.104), другі схеми заміщення набудуть вигляду, зображеного на рис. 5.54.

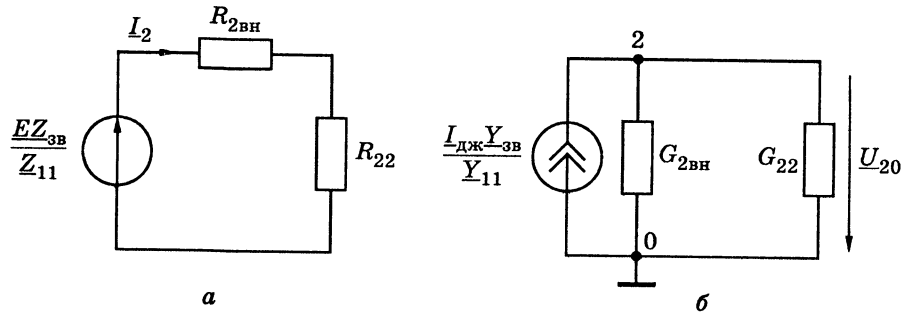


Рис. 5.54. Другі схеми заміщення зв'язаних контурів при другому частинному резонансі:  
а — з внутрішнім; б — із зовнішнім зв'язком

Струм другого контуру у разі внутрішнього зв'язку (рис. 5.54, а) і напруга на другому контурі при зовнішньому зв'язку (рис. 5.54, б) становитимуть:

$$I_2 = \frac{E_{x.x}}{R_{22} + R_{2zv}}, \quad U_{20} = \frac{I_{k.з}}{G_{22} + G_{2zv}},$$

де  $E_{x.x} = EZ_{zv}/Z_{11}$ ;  $R_{2zv} = X_{zv}^2 R_{11}/Z_{11}^2$  — відповідно напруга холостого ходу на затискачах розімкненого другого контуру і активна складова опору, що вноситься з першого контуру у другий у разі внутрішнього зв'язку;  $I_{k.з} = I_{дж} Y_{zv}/Y_{11}$ ;  $G_{2zv} = B_{zv}^2 G_{11}/Y_{11}^2$  — відповідно струм при короткому замиканні другого контуру і активна складова провідності, що вноситься з першого контуру в другий у разі зовнішнього зв'язку.

Критеріями настроювання є максимальні значення струму або напруг на реактивних елементах другого контуру. Настроювання доцільно здійснювати зміною реактивного опору (провідності) другого контуру, регулюючи його ємність. Наприклад, настроювання індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.51) здійснюється ємністю  $C_2$  за максимумом показання амперметра  $A_2$  або вольтметра  $V_{C2}$ .

Другий складний резонанс — це режим передачі максимальної активної потужності у другий контур. Аналіз даного режиму і настроювання на нього основані на других схемах заміщення. Розрахункові співвідношення для другого складного резонансу виходять з умови досягнення максимальної активної потужності в колах синусоїдного струму:

- для загального випадку контурів із внутрішнім зв'язком

$$Z_{22} = Z_{2zv}^*, \quad (5.105)$$

звідки  $R_{22} = R_{2zv}$ ;  $X_{22} = -X_{2zv}$ ;

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів

$$Z_2 = Z_{2zv}^*, \quad (5.106)$$

звідки  $R_2 = R_{2zv}$ ;  $X_2 = -X_{2zv}$ ;

- для випадку контурів із зовнішнім зв'язком

$$Y_{22} = Y_{2zv}^*, \quad (5.107)$$

звідки  $G_{22} = G_{2zv}$ ;  $B_{22} = -B_{2zv}$ .

З виразів (5.105)–(5.107) виходить, що умови другого складного резонансу включають умови другого частинного резонансу (5.102)–(5.104) і умови рівності активних власних і внесених опорів (провідностей). Остання умова дозволяє визначити величину зв'язку, необхідного для отримання другого складного резонансу:

- для загального випадку контурів із внутрішнім зв'язком

$$R_{22} = R_{2zv} = \frac{X_{zv}^2 R_{11}}{Z_{11}^2}, \quad \text{звідки } X_{zv} = Z_{11} \sqrt{\frac{R_{22}}{R_{11}}}; \quad (5.108)$$

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів

$$R_2 = R_{2zv} = \frac{(\omega M)^2 R_1}{Z_1^2}, \quad \text{звідки } M = \frac{Z_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}; \quad (5.109)$$

- для загального випадку контурів із зовнішнім зв'язком

$$G_{22} = G_{2zv} = \frac{B_{zv}^2 G_{11}}{Y_{11}^2}, \quad \text{звідки } B_{zv} = Y_{11} \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}}. \quad (5.110)$$

Схеми заміщення для другого складного резонансу показані на рис. 5.55.

Схеми, зображені на рис. 5.55, а також співвідношення (5.108) і (5.110) дозволяють розрахувати режим другого контуру при другому складному резонансі:

- для контурів з внутрішнім зв'язком

$$I_{2.m.m} = \frac{EZ_{zv}}{Z_{11} 2R_{22}} = \frac{E}{Z_{11} 2R_{22}} \left( Z_{11} \sqrt{\frac{R_{22}}{R_{11}}} \right) = \frac{E}{2\sqrt{R_{11} R_{22}}}; \quad (5.111)$$



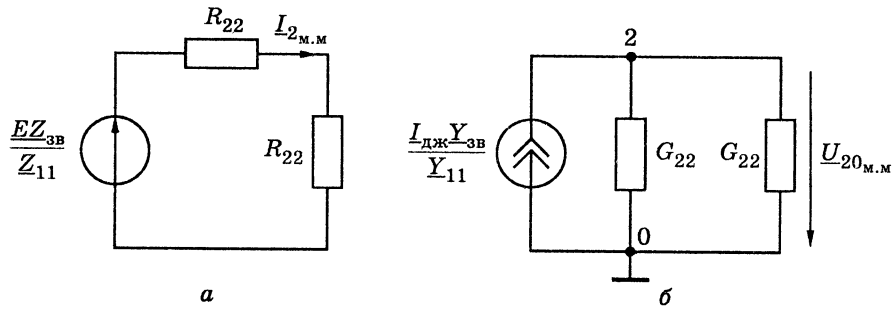


Рис. 5.55. Другі схеми заміщення зв'язаних контурів при другому складному резонансі:  
а — з внутрішнім; б — із зовнішнім зв'язком

- для контурів із зовнішнім зв'язком

$$U_{20_{м.м}} = \frac{I_{дж} Y_{зв}}{Y_{11} 2G_{22}} = \frac{I_{дж}}{Y_{11} 2G_{22}} \left( Y_{11} \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right) = \frac{I_{дж}}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}. \quad (5.112)$$

Отже, при першому і другому складних резонансах режим другого контуру однаковий, оскільки збігаються значення  $I_{2_{м.м}}$  (див. співвідношення (5.97) і (5.111)) і  $U_{20_{м.м}}$  (див. співвідношення (5.98) і (5.112)).

Настроювання на другий складний резонанс здійснюють реактивними елементами другого контуру (як правило, регулюючи ємність цього контуру) і зміною величини зв'язку. Настроювання індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.51) на другий складний резонанс проводиться змінюванням  $C_2$  і  $M$ . Для настроювання використовується розглянутий вище метод послідовних наближень, оскільки функція  $U_{C_2}(C_2, M)$  аналогічна зображеній на рис. 5.53 функції  $U_{C_2}(C_1, M)$ .

Частинні і складні резонанси передбачають відсутність резонансів в кожному з контурів ( $X_{11} \neq 0$ ;  $X_{22} \neq 0$ ;  $B_{11} \neq 0$ ;  $B_{22} \neq 0$ ). Режим, коли кожний з контурів настроєний в резонанс ( $X_{11} = 0$ ;  $X_{22} = 0$ ;  $B_{11} = 0$ ;  $B_{22} = 0$ ), має назву індивідуальних резонансів. Поєднання індивідуальних резонансів і оптимального зв'язку, при якому спостерігається передача у другий контур максимальної активної потужності, призводить до так званого повного резонансу.

У режимі індивідуальних резонансів реактивні складові внесених опорів (провідностей) у схемах заміщення дорівнюють нулю. Активні внесені опори (провідності), а також струми (напруги) в контурах при цьому становитимуть:

- для загального випадку контурів з внутрішнім зв'язком

$$R_{1_{вн}} = \frac{X_{зв}^2}{R_{22}}; R_{2_{вн}} = \frac{X_{зв}^2}{R_{11}}; I_1 = \frac{E}{R_{11} + R_{1_{вн}}}; I_2 = \frac{EZ_{зв}}{R_{11}(R_{22} + R_{2_{вн}})}; \quad (5.113)$$

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів

$$R_{1_{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{R_2}; R_{2_{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{R_1}; I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{1_{вн}}}; I_2 = \frac{Ej\omega_{рез} M}{R_1(R_2 + R_{2_{вн}})}; \quad (5.114)$$

- для загального випадку контурів із зовнішнім зв'язком

$$G_{1_{вн}} = \frac{B_{зв}^2}{G_{22}}; G_{2_{вн}} = \frac{B_{зв}^2}{G_{11}}; U_{10} = \frac{I_{дж}}{G_{11} + G_{1_{вн}}}; U_{20} = \frac{I_{дж} Y_{зв}}{G_{11}(G_{22} + G_{2_{вн}})}; \quad (5.115)$$

Здійснюючи настроювання кожного з контурів у резонанс, необхідно виключити вплив іншого контуру, тобто розімкнути.

Для індивідуального настроювання індуктивно зв'язаних коливальних контурів (рис. 5.51) спочатку виключається вплив другого контуру його розмиканням або істотним зменшенням зв'язку (взаємної індуктивності). Після цього перший контур настроюється ємністю  $C_1$  за максимумом струму  $I_1$  (або  $U_{C_1}$ ), встановлюється певне значення зв'язку і настроюється в резонанс другий контур ємністю  $C_2$  за максимумом струму  $I_2$  (або  $U_{C_2}$ ).

Повний резонанс спостерігається тоді, коли в будь-якій з схем заміщення власний опір (провідність) дорівнює внесеному опору (провідності). Виходячи з цього, рівняння, отримані із застосуванням співвідношень (5.113)–(5.115), дозволяють визначити значення оптимальних зв'язків:

- для загального випадку контурів з внутрішнім зв'язком

$$R_{11} = R_{1_{вн}} = \frac{X_{зв}^2}{R_{22}}; R_{22} = R_{2_{вн}} = \frac{X_{зв}^2}{R_{11}}, \text{ звідки } X_{зв.опт} = \sqrt{R_{11}R_{22}}; \quad (5.116)$$

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів

$$R_1 = R_{1_{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{R_2}; R_2 = R_{2_{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{R_1}, \text{ звідки } M_{опт} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega_{рез}}; \quad (5.117)$$

- для загального випадку контурів із зовнішнім зв'язком

$$G_{11} = G_{1\text{вн}} = \frac{B_{\text{зв}}^2}{G_{22}}; G_{22} = G_{2\text{вн}} = \frac{B_{\text{зв}}^2}{G_{11}}, \text{ звідки } B_{\text{зв.опт}} = \sqrt{G_{11}G_{22}}. \quad (5.118)$$

Порівняння отриманих значень оптимального зв'язку з відповідними величинами зв'язку для першого і другого складних резонансів (співвідношення (5.99)–(5.101) і (5.108)–(5.110)) показує, що значення оптимального зв'язку менше, ніж при складних резонансах.

Підстановка у вирази (5.113)–(5.115) співвідношень для оптимальних зв'язків (5.116)–(5.118) дозволяє одержати формули розрахунку режимів другого контуру при повному резонансі:

- для загального випадку контурів з внутрішнім зв'язком

$$I_1 = \frac{E}{2R_{11}}; I_{2\text{м.м}} = \frac{jE}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}}; \quad (5.119)$$

- для індуктивно зв'язаних коливальних контурів

$$I_1 = \frac{E}{2R_1}; I_{2\text{м.м}} = \frac{jE}{2\sqrt{R_1R_2}}; \quad (5.120)$$

- для загального випадку контурів із зовнішнім зв'язком

$$U_{10} = \frac{I_{\text{дж}}}{2G_{11}}; U_{20\text{м.м}} = \frac{jI_{\text{дж}}}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}. \quad (5.121)$$

Отже, режим другого контуру однаковий не тільки при першому і другому складних резонансах, але і при повному резонансі. У будь-якому з цих режимів значення  $I_{2\text{м.м}}$  і  $U_{20\text{м.м}}$  збігаються.

Настроювання на повний резонанс здійснюється індивідуальним настроюванням контурів зміною їх реактивних елементів і підбором оптимального зв'язку. Оскільки для зв'язаних контурів із зовнішнім або внутрішнім зв'язками (крім індуктивно зв'язаних контурів) змінення зв'язку викликає розстроювання кожного з контурів, для настроювання на повний резонанс застосовується метод послідовних наближень. Наявність трьох змінних параметрів (наприклад,  $C_1, C_2, X_{\text{зв}}$ ) робить настроювання складнішим, ніж у разі складних резонансів.

Настроювання індуктивно зв'язаних контурів на повний резонанс істотно спрощується, оскільки зміна зв'язку  $M$  не впливає на реактивні опори кожного з контурів і не порушує їх настройок на індивідуальні резонанси. Тому після настроювання кожного з контурів у резонанс здійснюється остаточне настроювання на повний резонанс змінюванням взаємної індуктивності за показанням приладів  $A_2$  або  $V_{C2}$  (рис. 5.51). Настроювання можна проводити і за показаннями амперметра  $A_1$ . При повному резонансі струм  $I_2$  зменшується в два рази у порівнянні з випадком відсутності зв'язку ( $M = 0$ ).

Настроювальні криві індуктивно зв'язаних контурів на повний резонанс зображені на рис. 5.56.

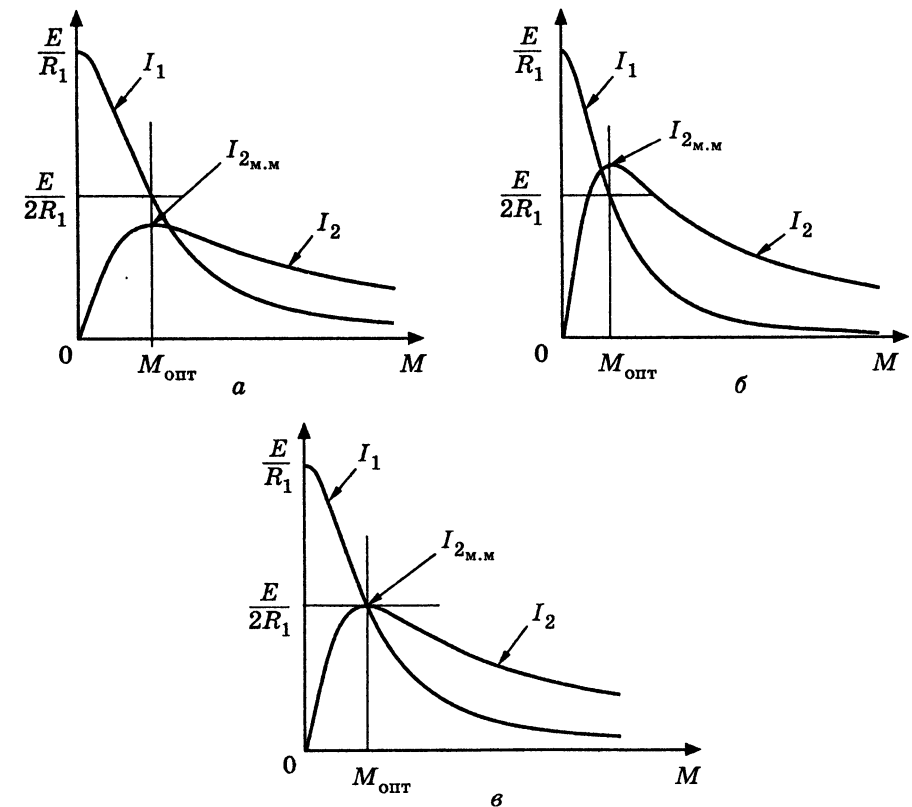


Рис. 5.56. Настроювальні криві індуктивно зв'язаних контурів на повний резонанс: а —  $R_2 > R_1$ ; б —  $R_2 < R_1$ ; в —  $R_2 = R_1$

При повному резонансі в ідентичних індуктивно зв'язаних контурах

$$C_1 = C_2 = C; L_1 = L_2 = L; R_1 = R_2 = R;$$

$$X_{зв.опт} = \omega M = R; I_1 = I_{2_{м.м}} = \frac{E}{2R}; U_{C_{2_{м.м}}} = \frac{E}{2R\omega_{рез} C} = \frac{QE}{2},$$

де  $Q = \frac{1}{\omega_{рез} C}$  — добротність кожного з контурів.

Співвідношення, необхідні для аналізу резонансних режимів у зв'язаних контурах, зведені до табл. 5.10 і 5.11. Крім виразів (5.91)–(5.121), до таблиць включені співвідношення, що безпосередньо виходять зі схем заміщення.

Таблиця 5.10

Основні співвідношення для аналізу резонансних режимів у зв'язаних коливальних контурах для загальних видів зв'язку

Резонанси	Вид зв'язку	Умови	Режим другого контуру
Перший частинний	Внутрішній	$X_{11} = -X_{1вн}$	$I_2 = \frac{EZ_{зв}}{Z_{22}(R_{11} + R_{1вн})}$
	Зовнішній	$B_{11} = -B_{1вн}$	$U_{20} = \frac{I_{дж} Y_{зв}}{Y_{22}(G_{11} + G_{1вн})}$
Перший складний	Внутрішній	$X_{11} = -X_{1вн}; R_{11} = R_{1вн}$ $X_{зв} = Z_{22} \sqrt{\frac{R_{11}}{R_{22}}}$	$I_{2_{м.м}} = \frac{E}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}}$
	Зовнішній	$B_{11} = -B_{1вн}; G_{11} = G_{1вн}$ $B_{зв} = Y_{22} \sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}}$	$U_{20_{м.м}} = \frac{I_{дж}}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}$
Другий частинний	Внутрішній	$X_{22} = -X_{2вн}$	$I_2 = \frac{EZ_{зв}}{Z_{11}(R_{22} + R_{2вн})}$
	Зовнішній	$B_{22} = -B_{2вн}$	$U_{20} = \frac{I_{дж} Y_{зв}}{Y_{11}(G_{22} + G_{2вн})}$

Закінчення табл. 5.10

Резонанси	Вид зв'язку	Умови	Режим другого контуру
Другий складний	Внутрішній	$X_{22} = -X_{2вн}; R_{22} = R_{2вн}$ $X_{зв} = Z_{11} \sqrt{\frac{R_{22}}{R_{11}}}$	$I_{2_{м.м}} = \frac{E}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}}$
	Зовнішній	$B_{22} = -B_{2вн}; G_{22} = G_{2вн}$ $B_{зв} = Y_{11} \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}}$	$U_{20_{м.м}} = \frac{I_{дж}}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}$
Індивідуальні	Внутрішній	$X_{11} = 0; X_{22} = 0$	$I_2 = \frac{EZ_{зв}}{R_{11}(R_{22} + R_{2вн})}$
	Зовнішній	$B_{11} = 0; B_{22} = 0$	$U_{20} = \frac{I_{дж} Y_{зв}}{G_{11}(G_{22} + G_{2вн})}$
Повний	Внутрішній	$X_{11} = 0; X_{22} = 0;$ $R_{11} = R_{1вн}; R_{22} = R_{2вн};$ $X_{зв.опт} = \sqrt{R_{11}R_{22}}$	$I_{2_{м.м}} = \frac{jE}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}}$
	Зовнішній	$B_{11} = 0; B_{22} = 0;$ $G_{11} = G_{1вн}; G_{22} = G_{2вн}$ $B_{зв.опт} = \sqrt{G_{11}G_{22}}$	$U_{20_{м.м}} = \frac{jI_{дж}}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}$

Таблиця 5.11

Основні співвідношення для розрахунку резонансних режимів в індуктивно зв'язаних коливальних контурах

Резонанси	Умови	Режим першого і другого контурів
Перший частинний	$X_1 = -X_{1вн}$	$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{1вн}}; I_2 = \frac{Ej\omega M}{Z_2(R_1 + R_{1вн})}$ де $R_{1вн} = \frac{(\omega M)^2 R_2}{Z_2^2}$
Перший складний	$X_1 = -X_{1вн}; R_1 = R_{1вн};$ $M = \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$	$I_1 = \frac{E}{2R_1}; I_2 = \frac{jZ_2 E}{2Z_2 \sqrt{R_1 R_2}};$ $I_{2_{м.м}} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}$

Другий частинний	$X_2 = -X_{2вн}$	$\underline{I}_1 = \frac{E Z_2}{Z_1 Z_2 + (\omega M)^2}; \underline{I}_2 = \frac{E j \omega M}{Z_1 (R_2 + R_{2вн})},$ де $R_{2вн} = \frac{(\omega M)^2 R_1}{Z_1^2}$
Другий складний	$X_2 = -X_{2вн}; R_2 = R_{2вн};$ $M = \frac{Z_1 \sqrt{R_2}}{\omega \sqrt{R_1}}$	$\underline{I}_1 = \frac{E Z_2}{Z_1 Z_2 + (\omega M)^2}; \underline{I}_{2.м.м} = \frac{j Z_1 E}{2 Z_1 \sqrt{R_1 R_2}};$ $\underline{I}_{2.м.м} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}}$
Індивідуальні	$X_1 = 0; X_2 = 0$	$\underline{I}_1 = \frac{E}{R_1 + R_{1вн}}; \underline{I}_2 = \frac{E j \omega_{рез} M}{R_2 (R_1 + R_{1вн})};$ де $R_{1вн} = \frac{(\omega_{рез} M)^2}{R_2}$
Повний	$X_1 = 0; X_2 = 0;$ $R_1 = R_{1вн}; R_2 = R_{2вн};$ $M_{опт} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega_{рез}}$	$\underline{I}_1 = \frac{E}{2 R_1}; \underline{I}_{2.м.м} = \frac{j E}{2 \sqrt{R_1 R_2}};$ $\underline{I}_{2.м.м} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}}$

### 5.11. Комплексні передатні функції та частотні характеристики зв'язаних коливальних контурів

КПФ і частотні характеристики зв'язаних коливальних контурів розглядаються, як правило, на прикладі індуктивно зв'язаних контурів, з огляду на їх широке практичне застосування і простоту аналізу. Наведені схеми індуктивно зв'язаних послідовних (див. рис. 5.44, а) і паралельних (рис. 5.44, б) контурів є дуальними. Тому достатньо розглянути одну з них, наприклад, схему з джерелом ЕРС і послідовними контурами (рис. 5.44, а).

Загалом контури можуть відрізнятися параметрами  $R, L, C$  (рис. 5.57, а), однак кожен з них має одну й ту саму резонансну частоту:

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

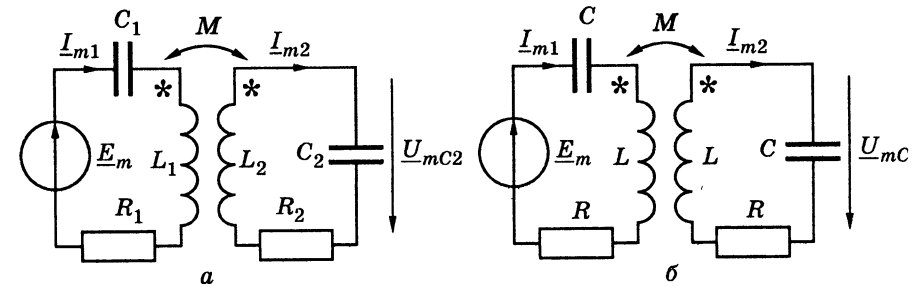


Рис. 5.57. Схеми для аналізу комплексних коефіцієнтів передачі і частотних характеристик індуктивно зв'язаних коливальних контурів

Як окремий випадок, що має широке практичне застосування, розглядаються ідентичні контури (рис. 5.57, б), у яких

$$C_1 = C_2 = C; L_1 = L_2 = L; R_1 = R_2 = R,$$

а резонансна частота становить:

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Найчастіше застосовують контури високої добротності, тому:

- для неідентичних контурів

$$Q_1 = \frac{\omega_{рез} L_1}{R_1} = \frac{1}{\omega_{рез} C_1 R_1} \gg 1; Q_2 = \frac{\omega_{рез} L_2}{R_2} = \frac{1}{\omega_{рез} C_2 R_2} \gg 1;$$

- для ідентичних контурів

$$Q = \frac{\omega_{рез} L}{R} = \frac{1}{\omega_{рез} C R} \gg 1.$$

Якщо як вхідна величина приймається комплексна амплітуда ЕРС  $\underline{E}_m$ , а як вихідні величини  $\underline{I}_{m1}, \underline{I}_{m2}, \underline{U}_{mC2}$  (аналогічно для ідентичних контурів  $\underline{I}_{m1}, \underline{I}_{m2}, \underline{U}_{mC}$ ), КПФ визначаються так:

$$\underline{Y}_{вх} = \frac{\underline{I}_{m1}}{\underline{E}_m}; \underline{Y}_{пер} = \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{E}_m}; \underline{H}_{U_{C2}} = \frac{\underline{U}_{mC2}}{\underline{E}_m};$$

$$\underline{H}_{U_C} = \frac{\underline{U}_{mC}}{\underline{E}_m} \text{ (для ідентичних контурів).}$$

Передатна функція  $\underline{Y}_{\text{вх}}$  є комплексною вхідною провідністю зв'язаних контурів і може бути записаною за допомогою виразу для  $\underline{I}_{m1}$  (див. табл. 5.11):

- для неідентичних контурів

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{\underline{I}_{m1}}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2} = \frac{R_2 + jX_2}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (\omega M)^2} =$$

$$= \frac{R_2(1 + jX_2/R_2)}{R_1 R_2 [1 + jX_1/R_1 + jX_2/R_2 - (X_1 X_2)/(R_1 R_2) + (\omega M)^2 / (R_1 R_2)]}; \quad (5.122)$$

- для ідентичних контурів

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{\underline{I}_{m1}}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^2 + (\omega M)^2} = \frac{R + jX}{(R + jX)^2 + (\omega M)^2} =$$

$$= \frac{1 + jX/R}{R[1 + j2X/R - X^2/R^2 + (\omega M)^2/R^2]}, \quad (5.123)$$

де  $X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$ ;  $X_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2$ ;  $X = \omega L - 1/\omega C$  — реактивні опори відповідних контурів у схемах, які зображено на рис. 5.57.

Оскільки для високодобротних контурів КДФ і частотні характеристики аналізуються в області частот поблизу резонансної частоти, однакової для даних зв'язаних контурів, у виразах (5.122) і (5.123) доцільно використовувати величини узагальнених розстройок для відповідних контурів:

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} \approx 2 \frac{\Delta f}{f_{\text{рез}}} Q_1; \quad \xi_2 = \frac{X_2}{R_2} \approx 2 \frac{\Delta f}{f_{\text{рез}}} Q_2; \quad \xi = \frac{X}{R} \approx 2 \frac{\Delta f}{f_{\text{рез}}} Q \quad (5.124)$$

і ввести поняття *фактор*, або *параметр зв'язку*:

- для неідентичних контурів

$$A = \frac{\omega M}{\omega_{\text{рез}} M_{\text{опт}}} \approx \frac{\omega_{\text{рез}} M}{\sqrt{R_1 R_2}} = k \sqrt{Q_1 Q_2}, \quad (5.125)$$

де  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  — коефіцієнт зв'язку;

- для ідентичних контурів

$$A = \frac{\omega M}{\omega_{\text{рез}} M_{\text{опт}}} \approx \frac{\omega_{\text{рез}} M}{R} = kQ, \quad (5.126)$$

де  $k = \frac{M}{L}$  — коефіцієнт зв'язку.

Наведені у співвідношеннях (5.124)–(5.126) приблизні значення узагальнених розстройок і факторів зв'язку поблизу резонансної частоти дозволяють подати вирази (5.122) і (5.123) у функції узагальнених розстройок, а фактор зв'язку  $A$  розглядати як параметр:

$$\underline{Y}_{\text{вх}}(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{1 + j\xi_2}{R_1 [(1 - \xi_1 \xi_2 + A^2) + j(\xi_1 + \xi_2)]}; \quad (5.127)$$

$$\underline{Y}_{\text{вх}}(\xi) \approx \frac{1 + j\xi}{R[(1 - \xi^2 + A^2) + j2\xi]}. \quad (5.128)$$

Аналогічно, спочатку в загальному вигляді, а потім використовуючи величини узагальнених розстройок і факторів зв'язку, можна подати інші передатні функції:

- для неідентичних контурів

$$\underline{Y}_{\text{пер}}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{E}_m} = \frac{j\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2} = \frac{j\omega M}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + (\omega M)^2} =$$

$$= \frac{j(\omega M) / \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{R_1 R_2} [1 + jX_1/R_1 + jX_2/R_2 - (X_1 X_2)/(R_1 R_2) + (\omega M)^2 / (R_1 R_2)]} \approx$$

$$\approx \frac{jA}{\sqrt{R_1 R_2} [(1 - \xi_1 \xi_2 + A^2) + j(\xi_1 + \xi_2)]}; \quad (5.129)$$

$$\underline{H}_{U_{C2}}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\underline{U}_{mC2}}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{E}_m} \frac{1}{j\omega C_2} \approx \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \frac{AQ_2}{(1 - \xi_1 \xi_2 + A^2) + j(\xi_1 + \xi_2)}, \quad (5.130)$$

де  $Q_2 = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_2 R_2} \approx \frac{1}{\omega C_2 R_2}$  — добротність другого контуру та її при-

близний вираз для малих розстройок за частотою;

- для ідентичних контурів

$$\underline{Y}_{\text{пер}}(\xi) = \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{E}_m} = \frac{j\omega M}{\underline{Z}^2 + (\omega M)^2} = \frac{j\omega M}{(R + jX)^2 + (\omega M)^2} \approx$$

$$\approx \frac{jA}{R[(1 - \xi^2 + A^2) + j2\xi]}; \quad (5.131)$$

$$\underline{H}_{U_{C2}}(\xi) = \frac{\underline{U}_{mC2}}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{E}_m} \frac{1}{j\omega C} \approx \frac{AQ}{(1 - \xi^2 + A^2) + j2\xi}, \quad (5.132)$$

де  $Q = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} CR} \approx \frac{1}{\omega CR}$  — добротність ідентичних контурів та її при-

близний вираз для малих розстройок за частотою.

Застосування узагальнених розстроек як незалежних змінних у формулах (5.127)–(5.132) для КПФ дозволяє здобути в функції цих самих змінних вирази для АЧХ (табл. 5.12) і ФЧХ (табл. 5.13). Перевагою застосування узагальнених розстроек є їх прямо пропорційний зв'язок з величинами абсолютних  $\Delta f$  і відносних розстроек  $\Delta f/f_{\text{рез}}$ . Тому графіки АЧХ і ФЧХ у функції відрізняються тільки масштабом по осі абсцис від графіків відповідних АЧХ і ФЧХ у функції  $\Delta f$  або  $\Delta f/f_{\text{рез}}$ .

Найпростіше аналізуються АЧХ і ФЧХ для ідентичних зв'язаних контурів, для яких АЧХ описуються функціями (див. табл. 5.12), у яких змінна  $\xi$  має парні степені. Тому АЧХ є парними функціями  $\xi$  (або  $\Delta f$ ), тобто графіки АЧХ симетричні відносно осі ординат. При  $\xi \rightarrow \pm\infty$  значення АЧХ прямують до нуля. Тому АЧХ мають непарну кількість екстремумів (один або три). Можна показати, що ФЧХ  $\varphi_{\text{Д}}$  і  $\varphi_{U_{C2}}$  є непарними функціями  $\xi$  (або  $\Delta f$ ). При  $\xi \rightarrow \pm\infty$  ці ФЧХ прямують відповідно до значень  $\mp\pi/2$  ( $\varphi_{\text{Д}}$ ) і  $\mp\pi$  ( $\varphi_{U_{C2}}$ ).

Щоб спростити аналіз АЧХ, доцільно її пронормувати. Для АЧХ струму першого контуру  $Y_{\text{вх}}$  для нормування можна використати значення

$$Y_{\text{вх}}(0)|_{A=0} = \frac{1}{R}.$$

Внаслідок цього нормована АЧХ струму першого контуру становитиме:

$$Y_{\text{вх.норм}}(\xi) = \frac{Y_{\text{вх}}(\xi)}{Y_{\text{вх}}(0)|_{A=0}} = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.133)$$

Щоб знайти екстремальні значення нормованої АЧХ струму першого контуру, необхідно прирівняти до нуля похідну виразу (5.133), внаслідок чого одержимо рівняння:

$$\xi[\xi^4 + 2\xi^2 - (A^4 + 4A^2 - 1)] = 0,$$

яке має п'ять коренів:

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_{2,3,4,5} = \pm \sqrt{-1 \pm \sqrt{A^4 + 4A^2}}.$$

Вирази для АЧХ індуктивно зв'язаних контурів

АЧХ	Неідентичні контури (рис. 5.57, а)	Ідентичні контури (рис. 5.57, б)
$Y_{\text{вх}}$	$\frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{1 + (\xi_2)^2}{(1 - \xi_1 \xi_2 + A^2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}$	$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}}$
$Y_{\text{пер}}$	$\frac{A}{\sqrt{R_1 R_2 [(1 - \xi_1 \xi_2 + A^2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2]}}$	$\frac{A}{R \sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}}$
$H_{U_{C2}}$	$\frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} A Q_2}{\sqrt{R_1 [(1 - \xi_1 \xi_2 + A^2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2]}}$	$\frac{A Q}{\sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}}$

Таблиця 5.13

Вирази для ФЧХ індуктивно зв'язаних контурів

ФЧХ	Неідентичні контури (рис. 5.57, а)	Ідентичні контури (рис. 5.57, б)
$\varphi_{\text{Д1}}$	$\arctg \xi_2 - \arctg \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \xi_1 \xi_2 + A^2}$	$\arctg \xi - \arctg \frac{2\xi}{1 - \xi^2 + A^2}$
$\varphi_{\text{Д2}}$	$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \xi_1 \xi_2 + A^2}$	$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2\xi}{1 - \xi^2 + A^2}$
$\varphi_{U_{C2}}$	$-\arctg \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \xi_1 \xi_2 + A^2}$	$-\arctg \frac{2\xi}{1 - \xi^2 + A^2}$

Оскільки узагальнена розстройка — це дійсне число, необхідно відкинути уявні корені, обумовлені знаком мінус (позначений дужками у підкореновому виразі) або мають місце у разі, коли виконується нерівність:

$$A^4 + 4A^2 < 1, \quad \text{звідки } A < \sqrt{-2 + \sqrt{5}} = 0,486 \approx 0,5.$$

Отже, для  $A < 0,5$  є один екстремум при  $\xi_1 = 0$ , а для  $A > 0,5$  — три екстремуми при

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_{2,3} = \pm \sqrt{-1 + \sqrt{A^4 + 4A^2}}.$$

Єдиний екстремум АЧХ для  $A < 0,5$  є максимумом, а з трьох екстремумів для  $A > 0,5$  один (при  $\xi_1 = 0$ ) є мінімумом, а інші (при  $\xi_{2,3}$ ) — максимумами. Ці висновки підтверджуються кількісними графіками, побудованими на рис. 5.58, а для характерних значень фактора зв'язку  $A$ .

При  $A = 0$  (відсутність зв'язку) АЧХ відповідає характеристиці одиночного контуру. При  $A > 0,5$  (графіки для  $A = 1$  і  $A = \sqrt{5}$  на рис. 5.58, а) криві АЧХ мають «двогорбову» («двохвильову») форму.

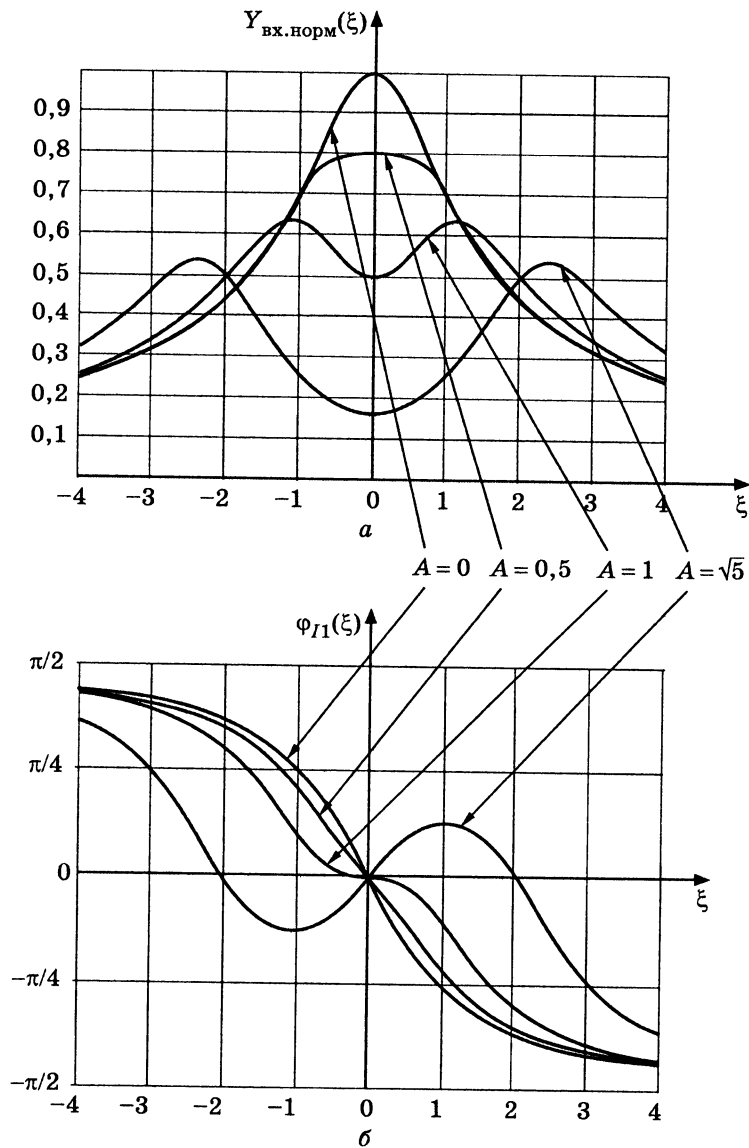


Рис. 5.58. АЧХ і ФЧХ струму першого контуру

Графіки ФЧХ для тих самих значень фактора зв'язку, які показані на рис. 5.58, б, підтверджують зазначене вище положення, що при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  функція  $\varphi_L$  прямує відповідно до значення  $\mp\pi/2$ . Слід зауважити, що  $\varphi_L = 0$  не тільки при  $\xi = 0$ , але і при деяких інших значеннях розстройки, однак не для будь-яких значень фактора зв'язку. Для уточнення цього висновку необхідно розв'язати рівняння:

$$\varphi_L = \arctg \xi - \arctg \frac{2\xi}{1 - \xi^2 + A^2} = 0,$$

яке призведе до рівності:

$$\xi = \frac{2\xi}{1 - \xi^2 + A^2},$$

розв'язок якої дає значення узагальнених розстроек, за яких ФЧХ  $\varphi_L$  має нульові значення:

$$\xi_0 = 0; \xi_{I,II} = \mp\sqrt{A^2 - 1}.$$

Якщо перше з цих значень узагальнених розстроек  $\xi_0 = 0$  є очевидним, то два інших значення  $\xi_{I,II}$  фізично реалізуються тільки для  $A \geq 1$  і відповідають повному ( $A = 1$ ) або складним ( $A > 1$ ) резонансам, оскільки при цих значеннях узагальнених розстроек  $\varphi_L = 0$  (резонанс у першій схемі заміщення), а значення нормованої АЧХ становить:

$$Y_{\text{вх.норм}}(\xi_{I,II}) = 0,5, \text{ тобто } I_{m1} = \frac{E_m}{2R} = I_{m2_{\text{м.м}}}.$$

Цей висновок підтверджується графіками АЧХ і ФЧХ для  $A = 1$  і  $A = \sqrt{5}$  (рис. 5.58), які відповідно для  $\xi_0 = 0$  і  $\xi_{I,II} = \pm 2$  мають значення:

$$Y_{\text{вх.норм}}(0)|_{A=1} = Y_{\text{вх.норм}}(\pm 2)|_{A=\sqrt{5}} = 0,5;$$

$$\varphi_L(0)|_{A=1} = \varphi_L(\pm 2)|_{A=\sqrt{5}} = 0.$$

АксонOMETричне подання функції  $Y_{\text{вх.норм}}(\xi, A)$  показано на рис. 5.59.

Незмінність ФЧХ струму першого контуру поблизу точки  $\xi_0 = 0$  для  $A = 1$  (рис. 5.58, б) використовують, проектуючи фазостабільні пристрої. При цьому амплітуда напруги на ємності на резонансній частоті становить:

$$U_{mC} = \frac{E_m}{2R\omega_{\text{рез}}C} = \frac{QE_m}{2} = U_{mC_{\text{м.м}}}.$$

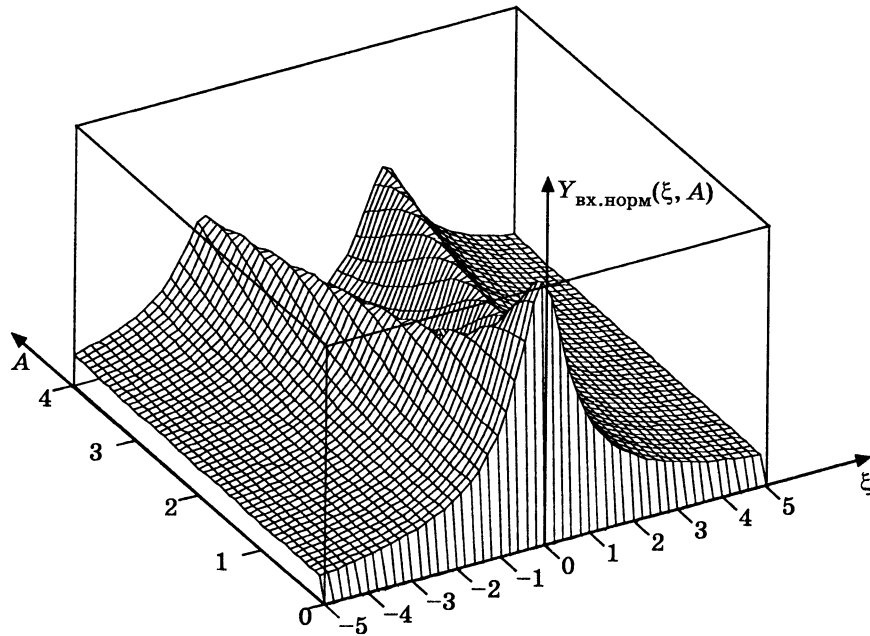


Рис. 5.59. Аксонометричне подання нормованих АЧХ  $Y_{\text{вх.норм}}(\xi, A)$

АЧХ для струму і напруги на ємності другого контуру нормують до їх максимально можливого значення:

$$Y_{\text{пер.м.м}} = \frac{1}{2R}; \quad H_{U_{C_{\text{м.м}}}} = \frac{1}{2R\omega_{\text{рез}}C} = \frac{Q}{2}.$$

Таке нормування призводить до єдиного виразу для цих АЧХ:

$$H_{2\text{норм}}(\xi) = \frac{Y_{\text{пер}}(\xi)}{Y_{\text{пер.м.м}}} = \frac{H_{U_C}(\xi)}{H_{U_{C_{\text{м.м}}}}} = \frac{2A}{\sqrt{(1-\xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.134)$$

АЧХ для другого контуру, як і АЧХ для струму першого контуру, є парною функцією  $\xi$  (або  $\Delta f$ ), а при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  функція  $H_{2\text{норм}}(\xi)$  прямує до нуля. Отже, графіки АЧХ симетричні відносно осі ординат. Щоб знайти екстремальні значення нормованої АЧХ другого контуру, достатньо дослідити на екстремум функцію, що стоїть під коренем у виразі (5.134):

$$\frac{d}{d\xi} [(1-\xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2] = -4\xi(1-\xi^2 + A^2) + 8\xi = 4\xi(\xi^2 + 1 - A^2) = 0.$$

Здобуте рівняння має корені:

- 1)  $\xi_0 = 0$ , що відповідає  $\Delta f = 0$  або  $f = f_{\text{рез}}$ ;
- 2)  $\xi_{I,II} = \mp\sqrt{A^2 - 1}$  — розстройки, що мають фізичне значення тільки при  $A > 1$ ; при  $A = 1$  корені  $\xi_{I,II}$  збігаються з  $\xi_0 = 0$ .

Значення розстройки  $\xi_{I,II}$  були здобуті вище в результаті аналізу ФЧХ струму першого контуру, де була обґрунтована їх відповідність режиму максимальної активної потужності у другому контурі. Це підтверджується і безпосередньою підстановкою до виразу (5.134) значень  $\xi = \xi_{I,II}$ :

$$H_{2\text{норм}}(\xi_{I,II}) = \frac{2A}{\sqrt{(1-A^2 + 1+A^2)^2 + 4(A^2 - 1)}} = 1. \quad (5.135)$$

Графік  $\xi_{I,II}(A)$  на рис. 5.60, а показує, що зі збільшенням зв'язку (за умови, що  $A > 1$ ) режим передачі максимальної активної потужності настає на частотах, симетричних відносно резонансної частоти та все віддаленіших від неї.

Частоти, які відповідають розстройкам  $\xi_{I,II}$ , називаються *частотами зв'язку*. Відповідні кількісні оцінки для них виходять із співвідношення:

$$\xi_{I,II} = \mp\sqrt{A^2 - 1} \approx 2 \frac{\Delta f_{I,II}}{f_{\text{рез}}} Q,$$

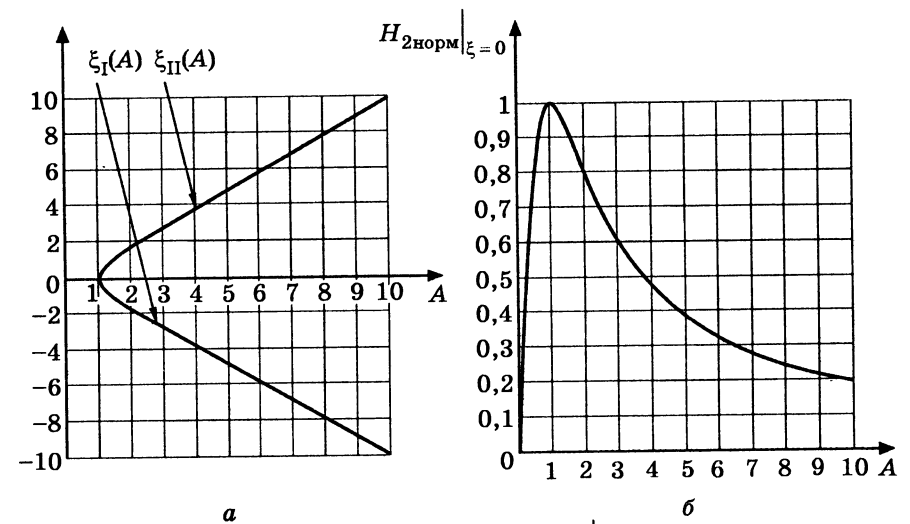


Рис. 5.60. Графіки залежностей  $\xi_{I,II}$  і  $H_{2\text{норм}}|_{\xi=0}$  від фактора зв'язку



звідки можна знайти вирази для абсолютних розстройок і частот зв'язку:

$$\Delta f_{I,II} = f_{I,II} - f_{\text{рез}} \approx \mp \frac{f_{\text{рез}} \sqrt{A^2 - 1}}{2Q} = \mp \frac{f_{\text{рез}} \sqrt{(kQ)^2 - 1}}{2Q} = \mp \frac{f_{\text{рез}} \sqrt{k^2 - d^2}}{2};$$

$$f_{I,II} = f_{\text{рез}} \left( 1 \mp \frac{f_{\text{рез}} \sqrt{k^2 - d^2}}{2} \right), \quad (5.136)$$

де  $d = 1/Q$  — загасання контуру.

Отже, узагальненим розстройкам  $\xi_{I,II}$  (а також абсолютним розстройкам  $\Delta f_{I,II}$  і частотам зв'язку  $f_{I,II}$ ) відповідають максимуми АЧХ другого контуру.

При  $\xi_0 = 0$  ( $\Delta f = 0$ ,  $f = f_{\text{рез}}$ ) нормована АЧХ є функцією фактора зв'язку:

$$H_{2\text{норм}}(A) \Big|_{\xi=0} = \frac{2A}{1+A^2}.$$

Графік функції  $H_{2\text{норм}} \Big|_{\xi=0}$  (рис. 5.60, б) свідчить, що на частоті індивідуального резонансу контурів спостерігається режим максимальної активної потужності тільки при  $A = 1$ . Цей режим згідно з виразом (5.126) відповідає оптимальному значенню взаємної індуктивності:

$$M_{\text{опт}} = \frac{R}{\omega_{\text{рез}}}.$$

Отже, якщо фактор зв'язку змінюється в межах  $0 < A \leq 1$ , АЧХ має єдиний максимум при  $\xi = 0$ , а для  $A > 1$  графік АЧХ має три екстремуми — мінімум при  $\xi = 0$  і максимуми при  $\xi = \xi_{I,II}$ . Графіки АЧХ для  $A < 1$  є «одногорбовими», а при  $A > 1$  стають «двогорбовими». Така залежність АЧХ від фактора зв'язку обумовила наступну класифікацію степеня зв'язку:

- 1) *слабкий зв'язок*, коли  $0 < A < 1$  ( $M < M_{\text{опт}}$ ,  $k < d$ );
- 2) *критичний зв'язок*, коли  $A = 1$  ( $M = M_{\text{опт}}$ ,  $k = d$ );
- 3) *сильний зв'язок*, коли  $A > 1$  ( $M > M_{\text{опт}}$ ,  $k > d$ ).

Результати теоретичного аналізу підтверджуються побудованим на рис. 5.61 тривимірним графіком функції  $H_{2\text{норм}}(\xi, A)$  і на рис. 5.62, а — графіками  $H_{2\text{норм}}(\xi)$ , розрахованими для характерних значень фактора зв'язку.

ФЧХ для струму другого контуру зміщена відносно ФЧХ для напруги на ємності другого контуру на  $\pi/2$  (див. співвідношення

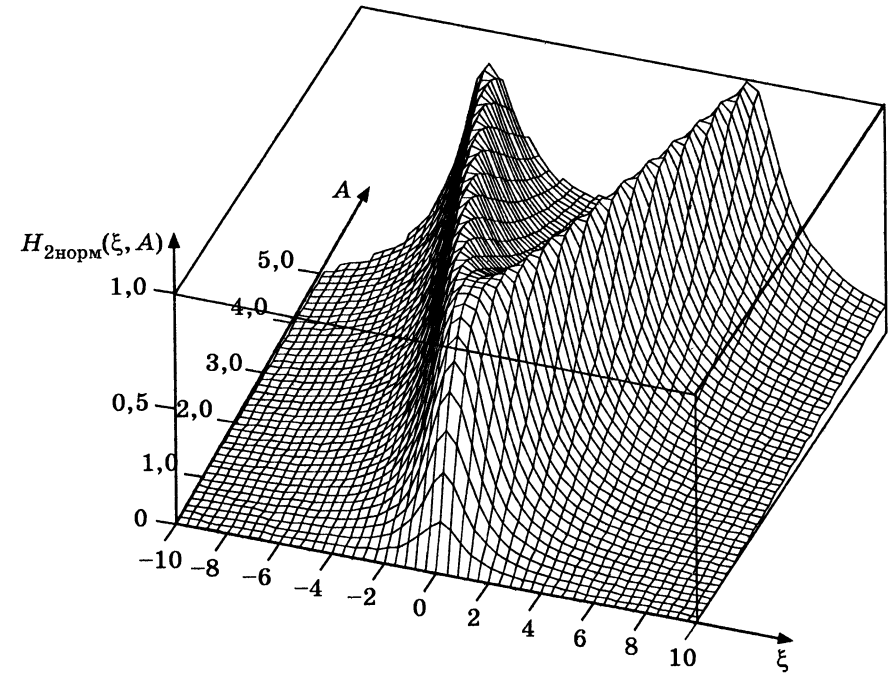


Рис. 5.61. Аксонометричне зображення нормованої АЧХ другого контуру, як функції узагальненої розстройки  $\xi$  і фактора зв'язку  $A$

для  $\varphi_{I2}(\xi)$  і  $\varphi_{U_C}(\xi)$  в табл. 5.13). Тому можна обмежитись аналізом однієї з них, наприклад ФЧХ для напруги на ємності другого контуру. Ця ФЧХ є непарною функцією  $\xi$  (або  $\Delta f$ ), а при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  прямує відповідно до значення  $\mp\pi$ .

Графіки ФЧХ для напруги на ємності другого контуру, розраховані для характерних значень фактора зв'язку, зображено на рис. 5.62, б. Ці графіки відрізняються від ФЧХ для струму першого контуру (рис. 5.58, б) не тільки граничними значеннями ( $\mp\pi$  для  $\varphi_{U_C}(\xi)$ ;  $\mp\pi/2$  для  $\varphi_{I1}(\xi)$ ), але й характером змінювання (нульовими значеннями, знаками похідної, точками перегину).

Функція  $\varphi_{U_C}(\xi)$ , що описує ФЧХ для напруги на ємності другого контуру, дорівнює нулю тільки при  $\xi = 0$  та має від'ємну похідну для будь-якого значення  $\xi$ . При  $A > 1$  і  $\xi = \xi_{I,II}$  функція  $\varphi_{U_C}(\xi)$  має точки перегину, а значення функції в цих точках становлять:

$$\varphi_{U_C}(\xi_I) = \pi/2; \quad \varphi_{U_C}(\xi_{II}) = -\pi/2.$$

Нагадаємо, що функція  $\varphi_{I1}(\xi_{I,II})$  дорівнює нулю.

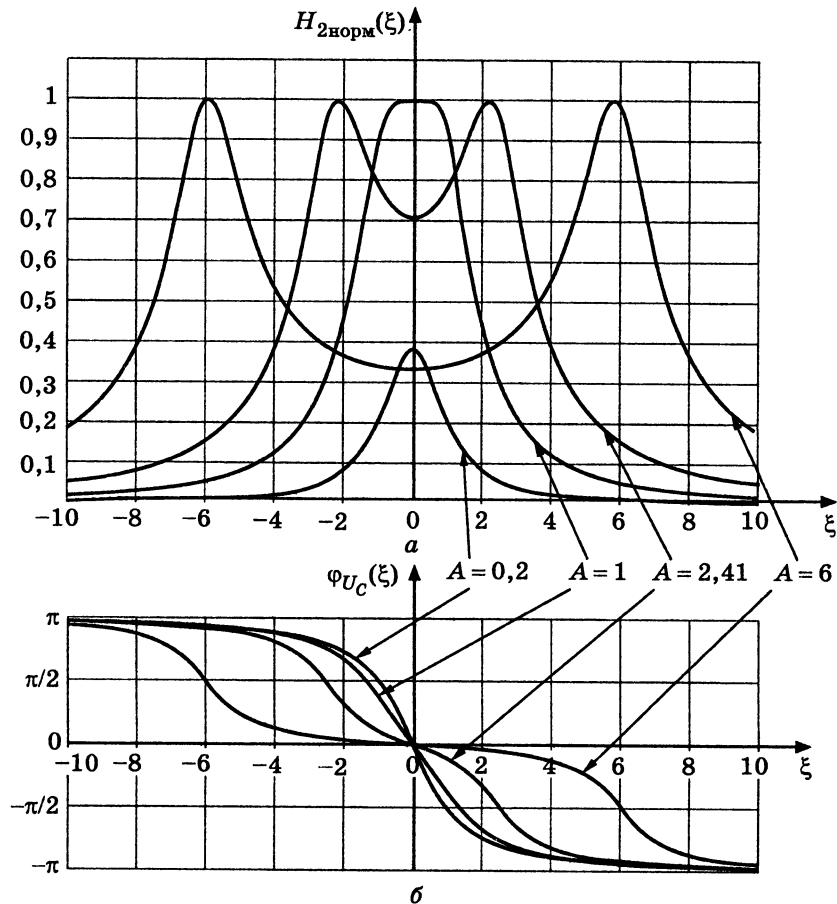


Рис. 5.62. Частотні характеристики напруги на ємності другого контуру для різних значень фактора зв'язку: *a* — нормовані АЧХ; *б* — ФЧХ

### 5.12. Смуга пропускання зв'язаних коливальних контурів

Порівняння графіків АЧХ для першого (рис. 5.58, *a*) і другого (рис. 5.62, *a*) контурів свідчить, що з точки зору вибірності краща АЧХ для другого контуру. Цим пояснюється увага, яку традиційно приділяють дослідженню СП зв'язаних контурів, якщо використовувати як відгук струм або напругу на ємності другого контуру.

У разі критичного і сильного зв'язку ( $A \geq 1$ ) нормовані АЧХ другого контуру (5.134) мають максимальні значення, які дорівнюють одиниці. Тому, якщо використовувати загальнозв'язаний рівень

відліку  $\sqrt{2}$  від максимуму АЧХ, границі смуги пропускання для  $A \geq 1$  відповідають рівнянню:

$$H_{2\text{норм}}(\xi) = \frac{2A}{\sqrt{(1-\xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

яке після перетворень матиме вигляд:

$$\xi^4 - 2\xi^2(A^2 - 1) + (A^4 - 6A^2 + 1) = 0. \quad (5.137)$$

Бікватратне рівняння (5.137) має чотири корені:

$$\xi_{\text{II...4}} = \mp \sqrt{A^2 \pm 2A - 1},$$

фізична реалізація яких залежить від того, чи є вони дійсними або уявними числами. Значення граничних узагальнених розстроек

$$\xi_{\text{II,4}} = \mp \sqrt{A^2 + 2A - 1}$$

є такими, що фізично реалізуються (дійсними), оскільки  $A \geq 1$ .

Граничні узагальнені розстройки

$$\xi_{\text{II,3}} = \mp \sqrt{A^2 - 2A - 1}$$

фізично реалізуються, якщо справедлива нерівність

$$A^2 - 2A - 1 > 0,$$

яка виконується для факторів зв'язку

$$A > 1_{(-)}^+ \sqrt{2} \approx 2,41. \quad (5.138)$$

Знак мінус у нерівності (5.138) слід відкинути, оскільки він призводить до від'ємного значення  $A$ .

Отже, при  $A > 2,41$  фізичний зміст мають чотири значення узагальнених розстроек, які відповідають границям СП. Це відповідає двом окремим смугам (рис. 5.63, *a*), які лежать поблизу значень узагальнених розстроек  $\xi_{\text{I,II}}$ , причому

$$\xi_{\text{III}} < \xi_{\text{I}} < \xi_{\text{II}}; \xi_{\text{III}} < \xi_{\text{II}} < \xi_{\text{IV}}.$$

Якщо в межах  $A > 2,41$  зменшувати зв'язок, то значення  $\xi_{\text{II,3}}$  зближуються і при  $A = 2,41$  збігатимуться і дорівнюватимуть нулю:

$$\xi_{\text{II,3}} \Big|_{A=2,41} = \mp \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) - 1} = 0.$$

При цьому СП буде неперервною (рис. 5.63, б) з граничними значеннями узагальнених розстройок:

$$\xi_{\Pi,4} = \mp \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})} - 1 \approx \mp 3,1.$$

Якщо далі зменшувати зв'язок у діапазоні  $A < 2,41$ , СП зменшується, і при критичному зв'язку (рис. 5.63, з) граничні значення узагальнених розстройок становитимуть:

$$\xi_{\Pi,4} = \mp \sqrt{A^2 + 2A - 1} = \mp \sqrt{1+2-1} \approx \mp 1,41.$$

Кількісні оцінки для граничних значень узагальнених розстройок дозволяють на підставі співвідношення (5.124) записати загальну формулу для визначення СП і розрахувати її для характерних значень фактора зв'язку:

$$2\Delta f_{\Pi} = \xi_{\Pi 4} \frac{f_{\text{рез}}}{Q}; \quad (5.139)$$

$$2\Delta f_{\Pi}|_{A=2,41} = 3,1 \frac{f_{\text{рез}}}{Q}; \quad 2\Delta f_{\Pi}|_{A=1} = 1,41 \frac{f_{\text{рез}}}{Q}.$$

Порівняння здобутих оцінок для СП зв'язаних контурів з СП одиночного контуру показує, що у зв'язаних контурів смуга пропускання більше у 3,1 рази при  $A = 2,41$  та в 1,41 рази — при  $A = 1$ . Тому режим, за якого  $A = 2,41$ , характеризується *максимальною смугою пропускання* (рис. 5.63, б).

При дуже сильному зв'язку, коли  $A \gg 1$ , АЧХ має вид двох резонансних кривих (рис. 5.63, в), приблизними оцінками параметрів яких є:

$$H_{2\text{норм}}(0) \approx \frac{2}{A} \ll 1; \quad \xi_{I,\Pi} \approx \mp A;$$

$$\xi_{\Pi \dots 4} \approx \mp \sqrt{A^2 \pm 2A} = \mp A \sqrt{1 \pm \frac{2}{A}} \approx \mp A \left(1 \pm \frac{1}{A}\right) = \mp A \mp 1;$$

$$\xi_{\Pi,2} \approx -A \mp 1; \quad \xi_{\Pi 3,4} \approx A \mp 1.$$

Отже, при дуже сильному зв'язку резонансні криві мають максимальні значення на частотах зв'язку (5.136), які з урахуванням  $k \gg d$  ( $A \gg 1$ ) приблизно дорівнюють значенням:

$$f_{I,\Pi} \approx f_{\text{рез}} \left(1 \mp \frac{k}{2}\right),$$

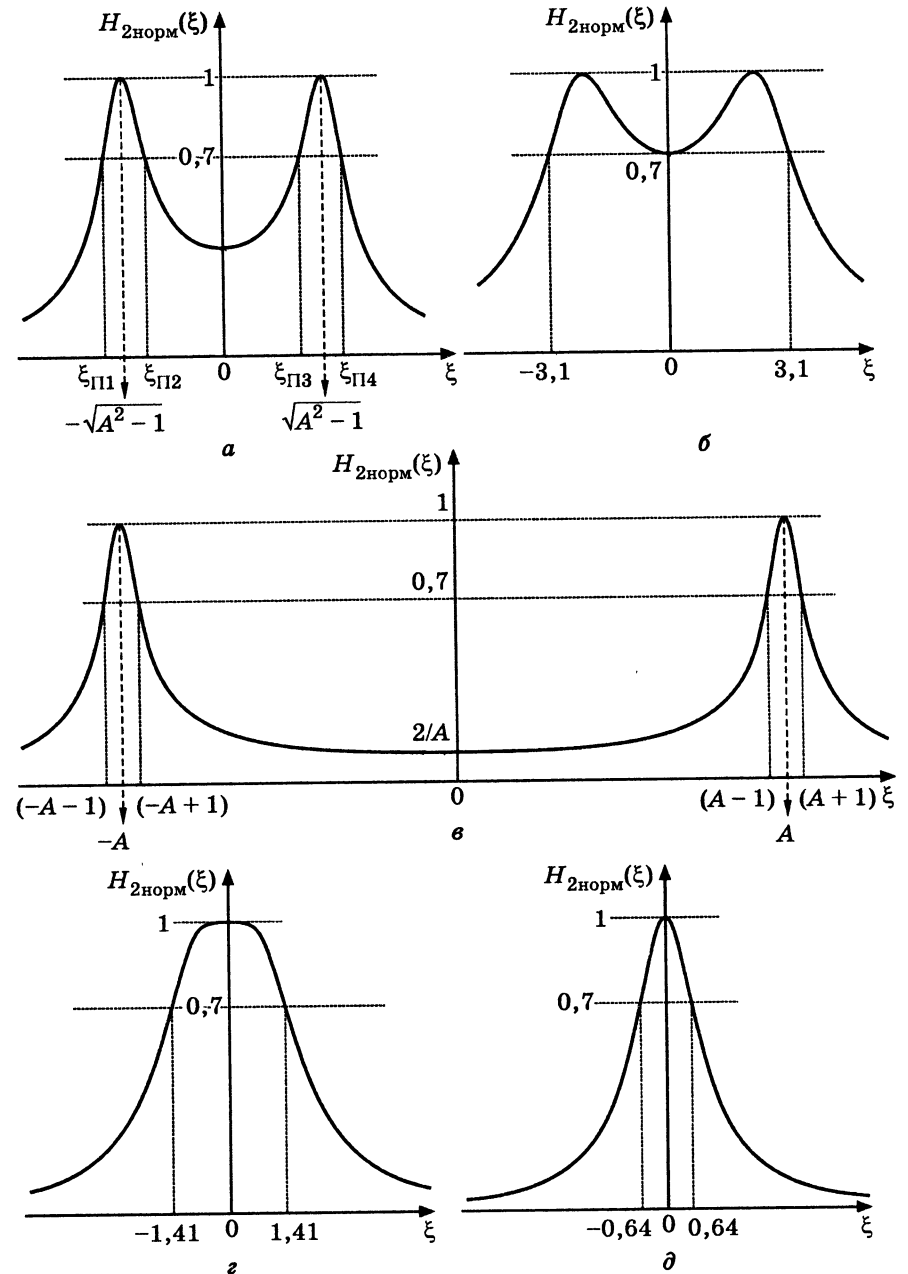


Рис. 5.63. Сму́га пропускання індуктивно зв'язаних контурів: а —  $A > 2,41$ ; б —  $A = 2,41$ ; в —  $A \gg 1$ ; з —  $A = 1$ ; д —  $A \ll 1$

а СП кожної з кривих наближається до СП одиночного контуру

$$2\Delta f_{\Pi} \approx \frac{f_{\text{рез}}}{Q}.$$

Зв'язані контури з дуже сильним зв'язком застосовуються у пристроях для обробки так званих двочастотних сигналів, які мають дві окремі спектральні смуги. Принцип сильного зв'язку контурів використовується також для реалізації стрибкоподібного перестроювання частоти генерування у високочастотних електронних приладах — магнетронах.

Оскільки для слабого зв'язку ( $A < 1$ ) максимальні значення АЧХ при  $\xi=0$  не досягають рівнів «максимум максимум», а становлять:

$$Y_{\text{пер}}(0) = \frac{A}{R(1+A^2)}; H_{U_c}(0) = \frac{AQ}{1+A^2},$$

то для аналізу СП в цьому випадку потрібне інше нормування:

$$H'_2(\xi) = \frac{Y_{\text{пер}}(\xi)}{Y_{\text{пер}}(0)} = \frac{H_{U_c}(\xi)}{H_{U_c}(0)} = \frac{1+A^2}{\sqrt{(1-\xi^2+A^2)^2+4\xi^2}}. \quad (5.140)$$

З урахуванням співвідношення (5.140), рівняння для знаходження границь СП при  $A < 1$  має вигляд:

$$\frac{1+A^2}{\sqrt{(1-\xi^2+A^2)^2+4\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.141)$$

Перетворюючи вираз (5.141), знаходимо біквдратне рівняння,

$$\xi^4 - 2\xi^2(A^2 - 1) - (A^2 + 1)^2 = 0,$$

яке має розв'язок при

$$\xi_{\Pi \dots 4} = \mp \sqrt{A^2 - 1}_{(-)} \sqrt{2(A^2 + 1)}.$$

Знак мінус, позначений дужками у підкореневому виразі, відповідає уявним значенням коренів  $\xi_{\Pi 2,3}$ , оскільки  $A < 1$ . Тому фізичний сенс мають граничні значення узагальнених розстройок

$$\xi_{\Pi,4} = \mp \sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(A^2 + 1)}},$$

приблизні значення яких при дуже слабкому зв'язку ( $A \ll 1$ ) становлять:

$$\xi_{\Pi,4} \approx \mp \sqrt{-1 + \sqrt{2}} \approx \mp 0,64.$$

Отже, при дуже слабкому зв'язку СП зв'язаних контурів (рис. 5.63, *д*) менша, ніж у одиночного контуру в 0,64 рази. Це пояснюється тим, що при дуже слабкому зв'язку опори, що вносяться, нехтовно малі порівняно з власними опорами, і підсумково АЧХ можна приблизно розглядати як добуток АЧХ кожного з контурів з ваговим коефіцієнтом, пропорційним фактору зв'язку  $A$ .

Отже, зміною зв'язку можна регулювати СП зв'язаних контурів у широких межах — від 0,64 до 3,1 від ширини СП одиночного контуру.

Крім можливості регулювати смугу пропускання, перевагою зв'язаних контурів є їх краща вибірність у порівнянні з одиночним контуром, що зумовлено більшим наближенням форми АЧХ до прямокутної (П-подібної).

Для порівняння вибірних властивостей зручно не аналізувати АЧХ як функцію узагальненої розстройки, а побудувати розглядувані АЧХ для одиночного контуру і зв'язаних контурів з різними добротностями в функції частоти  $f$  або абсолютної розстройки  $\Delta f$  так, щоб порівнювані кола мали однакову СП. Таку побудову виконано на рис. 5.64, *а* для одиночного контуру з добротністю  $Q_1$  і зв'язаних контурів з характерними значеннями факторів зв'язку. Режим, за якого значення фактора зв'язку  $A = 3,75$ , розглянуто як випадок, коли СП поділена на дві окремих ділянки, а  $H_{2\text{норм}}(0) = 0,5$ . Розрахунки показують, що  $\xi_{\Pi 4}(3,75) = 4,535$ .

Добротності контурів вибрані так, щоб забезпечити для всіх розглянутих режимів однакове значення СП:

$$Q|_{A=1} = 1,41Q_1; Q|_{A=2,41} = 3,1Q_1; Q|_{A=3,75} = 4,535Q_1.$$

Згідно з формулою (5.139) це значення становитиме:

$$2\Delta f_{\Pi} = 1,41 \frac{f_{\text{рез}}}{1,41Q_1} = 3,1 \frac{f_{\text{рез}}}{3,1Q_1} = 4,535 \frac{f_{\text{рез}}}{4,535Q_1} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q_1},$$

що збігається з СП даного одиночного контуру.

Графіки АЧХ для зв'язаних контурів (рис. 5.64, а) мають за межами СП більшу крутість, ніж у одиночного контуру. Із збільшенням фактора зв'язку в межах  $1 \leq A \leq 2,41$  крутість АЧХ за межами СП збільшується. При подальшому збільшенні фактора зв'язку в межах  $A > 2,41$  крутість спаду АЧХ зростає незначно, але суттєво збільшується нерівномірність АЧХ у межах СП. На рис. 5.64, б побудовано графіки ФЧХ для струму в одиночному

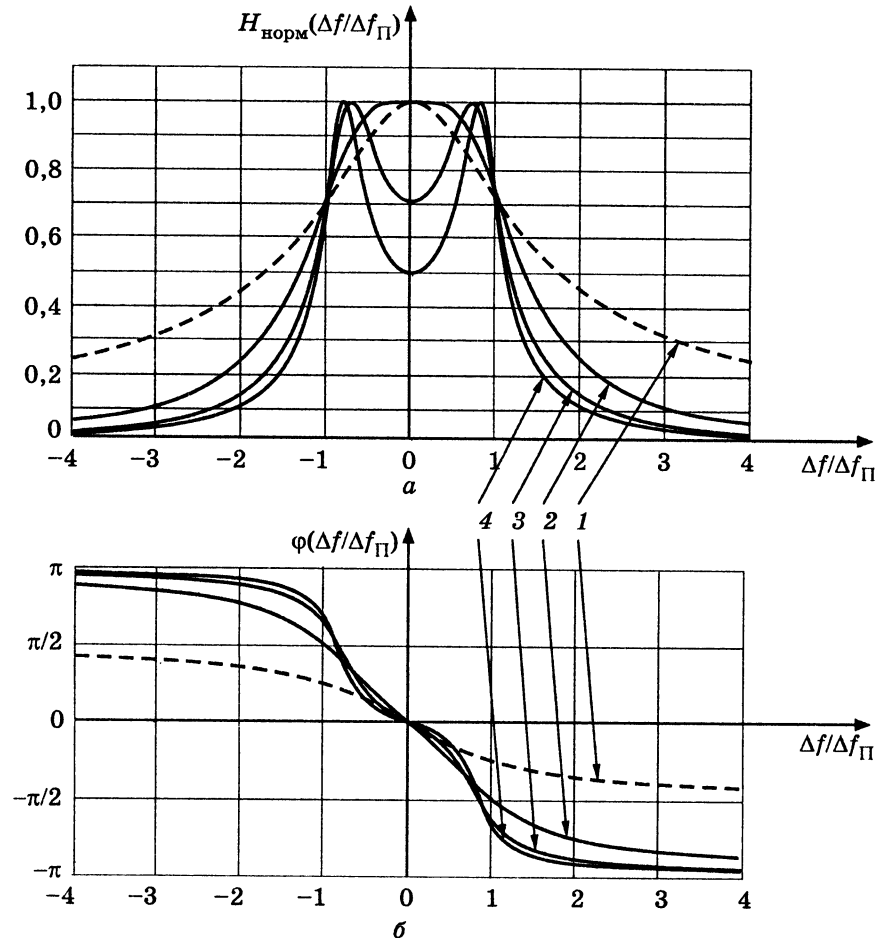


Рис. 5.64. Частотні характеристики одиночного і зв'язаних контурів з однакою смугою пропускання: а — нормовані АЧХ; б — ФЧХ (1 — одиночний контур; 2, 3, 4 — зв'язані контури для  $A=1$ ,  $A=2,41$ ,  $A=3,75$ )

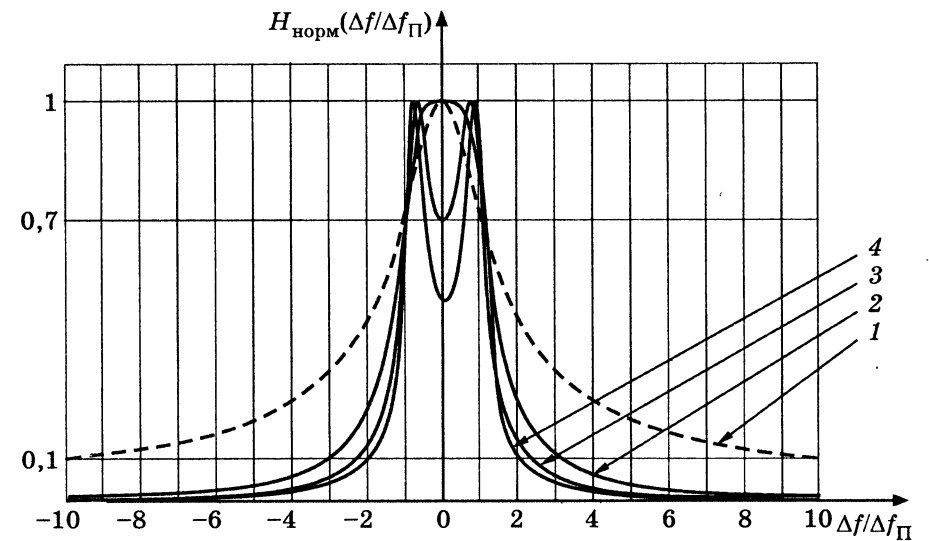


Рис. 5.65. Оцінка прямокутності АЧХ одиночного і зв'язаних контурів з однакою смугою пропускання: 1 — одиночний контур; 2, 3, 4 — зв'язані контури для  $A=1$ ,  $A=2,41$ ,  $A=3,75$

контурі і напруги на ємності зв'язаних контурів. Графіки ФЧХ мають найбільшу крутість там, де різко змінюється відповідна АЧХ.

Для кількісної оцінки вибірних властивостей кола застосовується коефіцієнт прямокутності АЧХ (див. підрозд. 5.2). Для оцінки  $k_{\text{пр}}$  досліджуваних кіл на рис. 5.65 побудовано їх АЧХ у ширшому частотному діапазоні. З показаних на цьому рисунку графіків виходить, що при виборі рівня відліку 0,1 коефіцієнти прямокутності становитимуть: для одиночного контуру  $k_{\text{пр}} = 10$ ; для зв'язаних контурів  $k_{\text{пр}} = 3$  ( $A = 1$ );  $k_{\text{пр}} = 2,34$  ( $A = 2,41$ ).

### 5.13. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Дати визначення КПФ кола. Назвати види передатних функцій. Коли передатна функція є вхідною функцією?
2. Визначити комплексний коефіцієнт передачі за напругою, АЧХ, ФЧХ для кола (див. рис. 5.4, б), вважаючи відгуком напругу на опорі. Параметри кола:  $R = 100$  Ом,  $C = 10$  нФ. Побудувати графіки АЧХ і ФЧХ, визначити СП.

Відповідь:  $10^6$  рад/с  $< \Pi_{\omega} < \infty$ .

3. Зберігши умову попередньої задачі, визначити частоту, за якою амплітуда напруги на виході кола становить 0,8 амплітуди напруги на вході. Знайти зсув фаз між вхідною і вихідною напругами на цій частоті.

*Відповідь:* 212,2 кГц;  $-36,87^\circ$ .

4. Визначити комплексний коефіцієнт передачі за напругою, АЧХ, ФЧХ для кола (див. рис. 5.4, а), вважаючи відгук напругу на опорі  $R=100$  Ом, якщо  $L=0,1$  мГн.

*Відповідь:*  $H_U(j\omega) = \frac{100}{100 + j\omega \cdot 10^{-4}}$ .

5. Визначити в загальному вигляді КПФ, АЧХ і ФЧХ кола, схема якого зображена на рис. 3.47, а (див. приклад 3.15), виключивши джерело  $e_1(t)$  і вважаючи дією  $e_2(t)$ , а відгук — напругу на опорі. Побудувати у загальному вигляді графіки АЧХ і ФЧХ.

*Вказівка.* Будуючи графік ФЧХ, розглянути два випадки:  $X_L > X_C$ ,  $X_L < X_C$  (скористатися векторною діаграмою).

*Відповідь:*  $H(j\omega) = \frac{1}{1 - jZ_{e_{рез}}/X}$ ;  $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (Z_{e_{рез}}/X)^2}}$ ;

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{\omega L}{R}, & \omega \ll \omega_{рез} \\ \frac{\pi}{2}, & \omega = \omega_{рез} \\ \arctg \frac{1}{\omega CR}, & \omega \gg \omega_{рез}. \end{cases}$$

6. Визначити в загальному вигляді КПФ, АЧХ і ФЧХ кола, схема якого зображена на рис. 5.6, вважаючи дією  $U_{вх}$ , а відгук — напругу на реактивній ділянці кола  $U_X$ . Побудувати у загальному вигляді графіки АЧХ і ФЧХ.

*Вказівка.* Будуючи графік ФЧХ, розглянути два випадки:  $X_L > X_C$ ,  $X_L < X_C$  (скористатися векторною діаграмою).

*Відповідь:*  $H(j\omega) = \frac{j\xi}{1 - j\xi}$ ;  $H(\omega) = \frac{|\xi|}{\sqrt{1 + \xi^2}}$ ;  $\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi, & \omega < \omega_{рез} \\ \frac{\pi}{2} - \arctg \xi, & \omega > \omega_{рез}. \end{cases}$

7. Розрахувати комплексний коефіцієнт передачі за напругою  $H_U(j\omega)$ , АЧХ і ФЧХ для схеми (рис. 5.66) з параметрами:  $R_1=4$  Ом;  $R_2=4,5$  Ом;  $L_1=L_2=1$  мкГн;  $C_1=3$  нФ;  $C_2=0,2$  нФ;  $M=0,4$  мкГн. Побудувати

графіки АЧХ, ФЧХ і АФХ у діапазоні частот (0...50) МГц та порівняти з кривими, зображеними на рис. 5.2.

8. Визначити та вказати на графіках СП для  $H_U(f)$  кола, схема і параметри якого наведені у завданні 7. Порівняти отримані результати з відомими графіками АЧХ (в абсолютних, відносних і логарифмічних одиницях по осі ординат) та графіком АФХ (рис. 5.67).

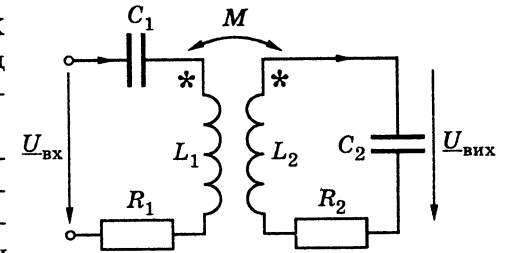


Рис. 5.66. Схема кола

9. Сформулювати умову резонансу в послідовному контурі. Пояснити поняття амплітудного і фазового резонансу.

10. Що таке резонансна частота, характеристичний опір, добротність? За якими формулами вони визначаються?

11. Чому резонанс у послідовному контурі називається резонансом напруг? Зобразити векторну діаграму напруг при резонансі.

12. Зобразити резонансні криві струму, відкладаючи по осі абсцис частоту, абсолютну й узагальнену розстройки. Як зміниться графік резонансної кривої струму при збільшенні опорі  $R$  удвічі?

13. Пояснити поняття вибірності кола. Дати визначення смуги пропускання.

14. Настроювання послідовного контуру на різні частоти здійснюється зміною ємності контуру. Максимальному значенню  $C_{max} = 625$  пФ відповідає резонансна частота 800 кГц. Яке значення резонансної частоти відповідає мінімуму ємності  $C_{min} = 100$  пФ?

*Відповідь:* 2 МГц.

15. Обчислити резонансну частоту і частоти, за яких напруги на  $L$  і  $C$  максимальні у колі з послідовно сполученими  $R = 50$  Ом,  $L = 10$  мГн,  $C = 1$  мкФ.

*Відповідь:* 10 000 рад/с, 10 690 рад/с, 9354 рад/с.

16. У послідовному контурі ЕРС генератора  $e(t) = 50\sqrt{2} \sin \omega t$  мВ,  $R = 10$  Ом,  $L = 100$  мкГн,  $C = 100$  пФ. Знайти резонансну частоту, резонансний струм і напругу на елементах контуру, характеристичний опір, добротність, загасання, енергії магнітного й електричного полів.

*Відповідь:*  $\omega_{рез} = 10^7$  рад/с,  $I_{рез} = 5$  мА,  $Q = 100$ ,

$W_{C_{max}} = W_{L_{max}} = 25 \cdot 10^{-10}$  Дж.

17. У послідовному контурі ЕРС генератора  $e(t) = 2\sqrt{2} \sin \omega t$  В,  $f_{рез} = 800$  кГц,  $I_{рез} = 300$  мА,  $U_{C_{рез}} = 300$  В. Знайти СП контуру. Як зміниться модуль

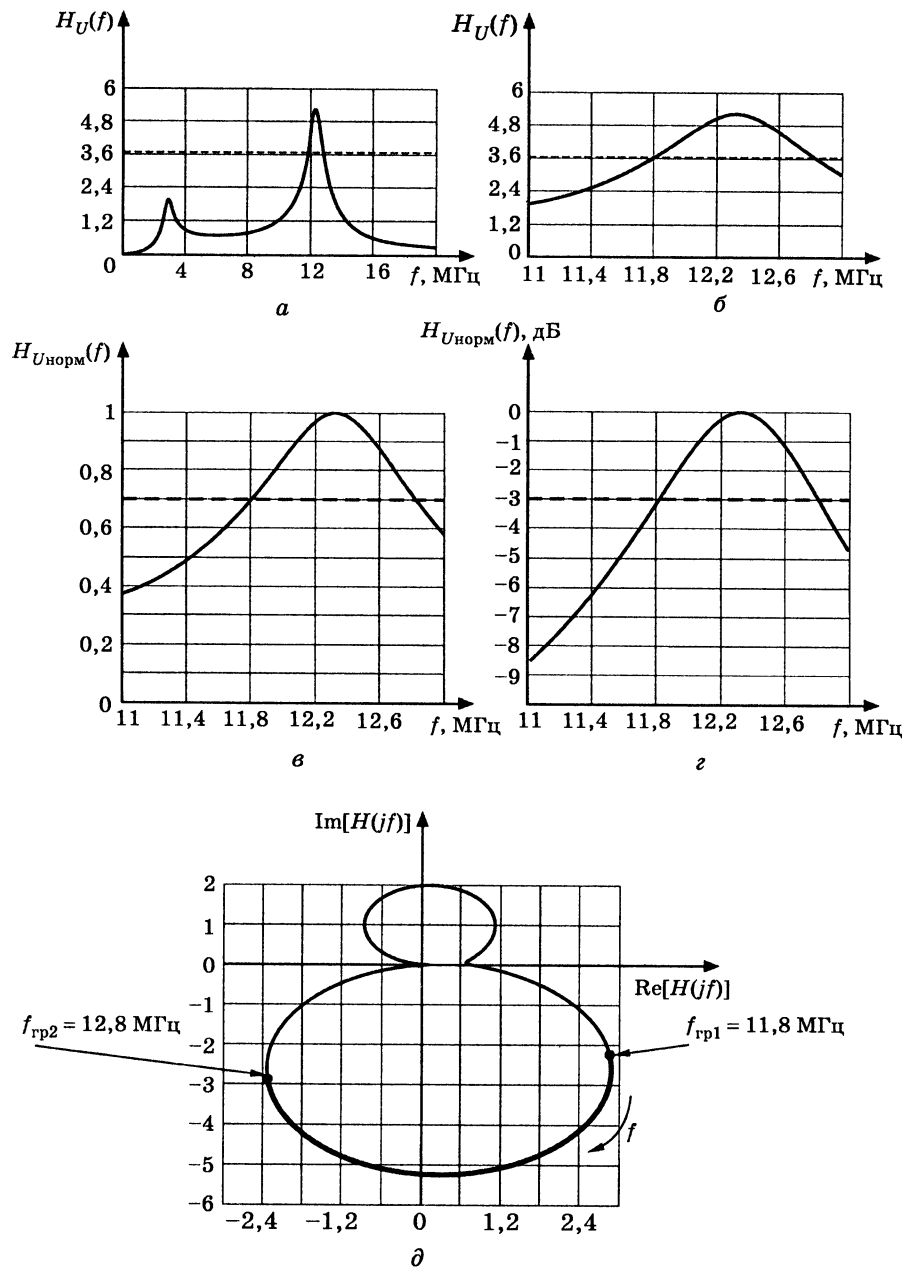
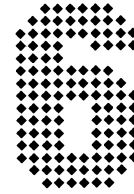


Рис. 5.67. Графіки для завдання 8 з позначенням граничних частот і СП:  
а, б, в, г — АЧХ; д — АФХ

діючого значення струму, якщо, не змінюючи напругу генератора, збільшити його частоту до 812 кГц?

*Відповідь:* 5,33 кГц; 65 мА.

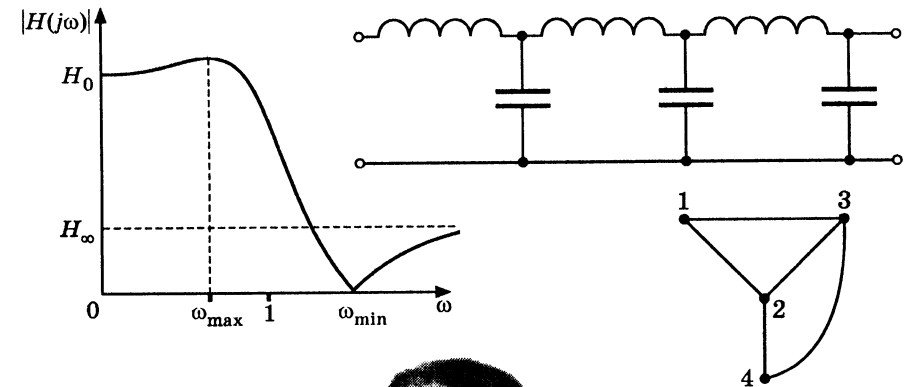
18. Чому резонанс у паралельному контурі називається резонансом струмів? Зобразити векторну діаграму струмів при такому резонансі.
19. Як залежать від частоти модуль і аргумент еквівалентного комплексного опору паралельного контуру?
20. Параметри паралельного контуру (рис. 5.30, б)  $R_L = 9 \text{ Ом}$ ,  $R_C = 1 \text{ Ом}$ ,  $L = 100 \text{ мкГн}$ ,  $C = 100 \text{ пФ}$ . Обчислити резонансну частоту і повний опір контуру. Розрахувати струми віток і потужність, яка виділяється в контурі при резонансі, якщо напруга на контурі становить 200 В.  
*Відповідь:*  $10^7 \text{ рад/с}$ , 100 кОм, 200 мА; 0,4 Вт.
21. Знайти СП паралельного контуру з характеристичним опором 800 Ом і опором втрат 16 Ом з урахуванням впливу опору генератора  $R_i = 20 \text{ кОм}$ . Резонансна частота контуру 700 кГц.  
*Відповідь:* 42 кГц.
22. Визначити добротність, ємність, резонансну частоту, узагальнену й абсолютну розстройку, за якої еквівалентний опір простого паралельного контуру  $|Z_e| = 78 \text{ кОм}$ , що становить 0,78 від значення резонансного опору  $Z_{e\text{рез}}$  ( $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ мГн}$ ).  
*Відповідь:*  $Q = 100$ ,  $C = 1 \text{ нФ}$ ,  $f_{\text{рез}} = 159,2 \text{ кГц}$ ;  $\xi = 0,8$ ;  $\Delta f = \pm 637 \text{ Гц}$ .
23. Як знайти резонансний опір складного паралельного контуру? Як визначається коефіцієнт увімкнення?
24. Чому частотна залежність повного опору складного контуру має два екстремуми? Як визначити частоти паралельного і послідовного резонансів для контуру другого виду, третього виду?
25. Паралельний контур другого виду (рис. 5.41, в) з  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 150 \text{ мкГн}$ ,  $L_2 = 25 \text{ мкГн}$ ,  $C = 1600 \text{ пФ}$ , увімкнений до джерела ЕРС з внутрішнім опором  $R_i = 20 \text{ кОм}$ . Визначити власну добротність контуру  $Q$ , еквівалентну добротність  $Q_e$ , а також діапазон частот, за яких повний опір контуру перевищує 10 кОм.  
*Відповідь:*  $Q = 66$ ,  $Q_e = 36,6$ ;  $\Delta f = 298 \dots 303,6 \text{ кГц}$ .
26. Знайти частоти послідовного і паралельного резонансів для паралельного контуру третього виду (рис. 5.41, г), якщо  $R_1 = 0 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $L = 300 \text{ мкГн}$ ,  $C_1 = 300 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 300 \text{ пФ}$ .  
*Відповідь:*  $f_{\text{посл}} = 530,5 \text{ кГц}$ ;  $f_{\text{пар}} = 750,3 \text{ кГц}$ .
27. Параметри схеми (рис. 5.44, е) із зовнішнім ємнісним зв'язком:  $C_1 = 100 \text{ пФ}$ ,  $C_2 = 10 \text{ пФ}$ ,  $C_{\text{зв}} = 50 \text{ пФ}$ . Замінити цю схему еквівалентною схемою з внутрішнім ємнісним зв'язком (рис. 5.44, в).  
*Вказівка.* Скористатись перетворенням опорів «трикутник — зірка».  
*Відповідь:*  $C_1 = 650 \text{ пФ}$ ,  $C_2 = 65 \text{ пФ}$ ,  $C_{\text{зв}} = 130 \text{ пФ}$ .



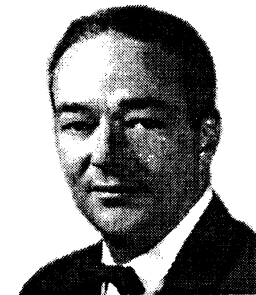
## ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

28. У системі індуктивно зв'язаних контурів (рис. 5.66) з параметрами  $C_1 = C_2 = 400$  пФ,  $L_1 = L_2 = 92$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 30$  Ом,  $M = 10$  мкГн спостерігався перший частинний резонанс при  $\omega = 5 \cdot 10^6$  рад/с. Потім взаємна індуктивність була збільшена на 10 мкГн. Як необхідно змінити індуктивність  $L_1$ , щоб відновити стан першого частинного резонансу? Розрахувати струми контурів, якщо  $E = 20$  В.  
Відповідь:  $L'_1 = 68$  мкГн,  $I_1 = 133$  мА,  $I_2 = 266$  мА.
29. Два однакових індуктивно зв'язаних контури ( $L_1 = L_2 = 250$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом) настроєні окремо на частоту  $f_0 = 5 \cdot 10^5$  Гц. Визначити СП: 1) одиночного контуру; 2) системи в режимі критичного зв'язку.  
За якого значення коефіцієнта зв'язку СП зв'язаної системи у два рази перевищує СП одиночного контуру? Розрахувати частоти зв'язку для цього випадку.  
Відповідь: 6366 Гц; 8976 Гц; 0,0184; 496 657,7 Гц; 503 342,2 Гц.
30. Система двох індуктивно зв'язаних контурів ( $R_1 = 15$  Ом,  $R_2 = 100$  Ом,  $L_1 = 250$  мкГн,  $L_2 = 300$  мкГн) настроєна в повний резонанс. Визначити значення ємностей контурів; струми в контурах; оптимальне значення взаємної індуктивності; ККД.  
Відповідь:  $C_1 = 281$  пФ;  $C_2 = 234$  пФ;  $I_1 = 1,67$  мА,  $I_{2_{\text{м.м}}} = 0,645$  мА;  $M_{\text{опт}} = 10,27$  мкГн;  $\eta = 0,5$ .
31. Як залежить СП ідентичних індуктивно зв'язаних контурів від параметра зв'язку  $kQ$ ?

- Визначення передатних функцій складних кіл з двополюсними елементами
- Частотні характеристики ідеальних електричних фільтрів
- Частотні характеристики фільтрів другого порядку і схемна реалізація цих фільтрів
- Передатні функції фільтрів з операційними підсилювачами
- Топологічний метод визначення передатних функцій кола, яке містить обернені елементи



Г. Марконі



С. Мезон

$$\underline{H} = \frac{\sum P'_k \Delta'_k}{\sum P''_k \Delta''_k}$$



Дж. Генрі



### 6.1. Визначення передатних функцій складних кіл з двоуполусними елементами

Розраховуючи параметри електричних кіл, визначають передатні функції кола переважно, розглядаючи його як чотириполусник, до якого приєднується джерело синусоїдної напруги з параметрами  $\underline{E}$ ,  $R_i$  з одного боку і опір навантаження  $\underline{Z}_H$  — з іншого (рис. 6.1, а). Якщо пара входних та вихідних застискачів має один спільний вузол (позначено на рисунку пунктирною лінією), чотириполусник є *прохідним*.

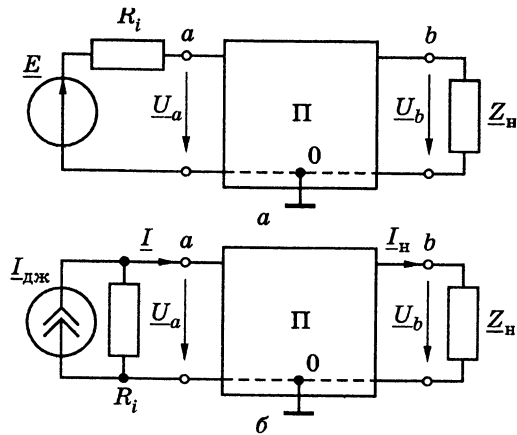


Рис. 6.1. Схеми чотириполусника для визначення передатних функцій

Якщо чотириполусник містить елементи  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , він називається *пасивним* і позначається літерою «П». Якщо позначити вхідний вузол літерою  $a$ , вихідний —  $b$ , а спільний вузол заземлити та застосувати для аналізу метод вузлових напруг, то вхідною величиною (дією) буде вузлова напруга  $\underline{U}_{a0}$ , вихідною (відгуком) — вузлова напруга  $\underline{U}_{b0}$  (у подальшому викладенні коротко позначатимуться  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_b$ ). Згідно з принципом еквівалентного перетворення джерело з параметрами  $\underline{E}$ ,  $R_i$  можна замінити за умови незмінної напруги  $\underline{U}_a$  джерелом струму з параметрами  $\underline{I}_{дж} = \underline{E}/R_i$ ,  $R_i$  (рис. 6.1, б).

Оскільки від нуля відрізняється тільки єдиний вузловий струм вузла  $a$  ( $\underline{I}_a = \underline{I}$ ), вузлова напруга  $k$ -го вузла визначається методом вузлових напруг:

$$\underline{U}_k = \frac{\Delta_{ak}}{\Delta_Y} \underline{I}, \quad (6.1)$$

де  $\Delta_Y$  — визначник матриці комплексних провідностей ( $\underline{Y}$ ) пасивного чотириполусника;  $\Delta_{ak}$  — алгебраїчне доповнення матриці ( $\underline{Y}$ ).

Згідно з формулою (6.1) вузлові напруги  $\underline{U}_a$  і  $\underline{U}_b$  визначають так:

$$\underline{U}_a = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta_Y} \underline{I}; \quad \underline{U}_b = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_Y} \underline{I}. \quad (6.2)$$

Комплексний коефіцієнт передачі за напругою (дія —  $\underline{U}_a$ , відгук —  $\underline{U}_b$ )  $H_U(j\omega) = \underline{U}_b/\underline{U}_a$  з урахуванням виразу (6.2) дорівнюватиме:

$$H_U(j\omega) = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}, \quad (6.3)$$

причому в режимі холостого ходу до складу власної провідності  $\underline{Y}_{bb}$  вузла  $b$  входять тільки комплексні провідності пасивного чотириполусника, який увімкнено до цього вузла. Якщо врахувати вплив навантаження, до власної провідності  $\underline{Y}_{bb}$  вузла  $b$  слід додати провідність навантаження:

$$\tilde{Y}_{bb} = \underline{Y}_{bb} + \frac{1}{\underline{Z}_H}. \quad (6.4)$$

Вираз (6.4) враховують тільки для знаходження алгебраїчного доповнення  $\Delta_{aa}$ , до складу якого входить власна провідність вузла  $b$ .

Якщо при дії  $\underline{U}_a$  відгуком буде струм у навантаженні  $\underline{I}_H$ , КПФ:

$$H(j\omega) = \frac{\underline{I}_H}{\underline{U}_a} = \frac{\underline{U}_b/\underline{Z}_H}{\underline{U}_a} = \frac{H_U(j\omega)}{\underline{Z}_H} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa} \underline{Z}_H}. \quad (6.5)$$

Якщо дією вважати вхідний струм  $\underline{I}$ , а відгуком — напругу  $\underline{U}_a$ , КПФ має значення вхідного опору і з урахуванням (6.2) дорівнюватиме:

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{I}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_Y} = Z_{вх}(j\omega). \quad (6.6)$$

Комплексний коефіцієнт передачі за струмом (дія —  $\underline{I}$ , відгук —  $\underline{I}_H$ ) згідно з (6.2) становитиме:

$$H_I(j\omega) = \frac{\underline{I}_H}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_b/\underline{Z}_H}{\underline{I}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_Y \underline{Z}_H}. \quad (6.7)$$

Необхідно зауважити, що за наявності  $\underline{Z}_H$  в алгебраїчні доповнення  $\Delta_{aa}$  та  $\Delta_Y$  у формулах (6.5)–(6.7) входить провідність  $\tilde{Y}_{bb}$ , котра розраховується згідно з виразом (6.4).

Визначення передатних функцій за допомогою визначника й алгебраїчних доповнень матриці комплексних провідностей ( $\underline{Y}$ ) набуває сенсу за умови розгалуженого кола. Матриця ( $\underline{Y}$ ) складається за уніфікованими правилами. Головна діагональ у загальному випадку містить власні комплексні провідності:

$$\underline{Y}_{kk} = G_{kk} + j\omega C_{kk} + \frac{1}{j\omega L_{kk}},$$

а над- та піддіагональні елементи складають взаємні провідності:

$$\underline{Y}_{ks} = \left( G_{ks} + j\omega C_{ks} + \frac{1}{j\omega L_{ks}} \right).$$

Отже, комплексну провідність можна визначити як поліном відносно  $j\omega$

$$\underline{Y} = G + j\omega C + (j\omega)^{-1} \frac{1}{L}, \quad (6.8)$$

де  $G$ ,  $C$ ,  $\frac{1}{L}$  — додатні дійсні величини.

Якщо матриця ( $\underline{Y}$ ) має другий порядок:

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix},$$

тобто вхідний вузол чотириполосника  $a=1$ , вихідний  $b=2$ , а загальний (третій) — заземлений, комплексний коефіцієнт передачі за напругою такої схеми згідно з (6.3) становитиме:

$$H_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} = \frac{G_{12} + j\omega C_{12} + (j\omega)^{-1}(1/L_{12})}{G_{22} + j\omega C_{22} + (j\omega)^{-1}(1/L_{22})}.$$

Щоб позбавитись від'ємного степеня, слід помножити чисельник та знаменник на множник  $j\omega$

$$H_U(j\omega) = \frac{C_{12}(j\omega)^2 + G_{12}j\omega + (1/L_{12})}{C_{22}(j\omega)^2 + G_{22}j\omega + (1/L_{22})}.$$

Якщо позначити латинськими літерами зі змінними індексами коефіцієнти (дійсні додатні величини) при різних степенях  $j\omega$  для чисельника  $a_i$  ( $i=2,0$ ), для знаменника  $b_j$  ( $j=2,0$ ), вираз для КПФ матиме вигляд:

$$H_U(j\omega) = \frac{a_2(j\omega)^2 + a_1j\omega + a_0}{b_2(j\omega)^2 + b_1j\omega + b_0}. \quad (6.9)$$

Чотириполосник з КПФ (6.9) називається ланкою другого порядку. *Порядок ланки* визначається максимальним степенем аргументу  $j\omega$  полінома знаменника. Слід зауважити, що степінь полінома чисельника не може перевищувати степінь полінома знаменника, отже деякі коефіцієнти  $a_i$  можуть бути нульовими. На відміну від чисельника всі коефіцієнти знаменника ненульові:  $b_j \neq 0$ , причому степінь полінома знаменника в (6.9) дорівнюватиме

двом за наявності у колі, як мінімум, двох реактивних опорів різного характеру, які відповідають доданкам  $C_{22}$  і  $1/L_{22}$ . Збільшення кількості ємностей (індуктивностей) призводить до збільшення максимального степеня аргументу  $j\omega$ , тобто до збільшення порядку ланки.

Для ланки  $n$ -го порядку

$$H_U(j\omega) = \frac{a_m(j\omega)^m + \dots + a_1j\omega + a_0}{b_n(j\omega)^n + \dots + b_1j\omega + b_0}, \quad (6.10)$$

причому  $n \geq m$ .

Залежно від того, які з коефіцієнтів дорівнюють нулю, модуль КПФ  $H_U(\omega)$  по-різному залежить від частоти на різних ділянках частотного діапазону.

## 6.2. Частотні характеристики ідеальних електричних фільтрів

Чотириполосник, для якого ділянки АЧХ суттєво відрізняються на різних ділянках частотного діапазону, називається *електричним фільтром*. Вважається, що фільтр «пропускає» коливання в діапазоні частот  $\omega_1 \dots \omega_2$ , якщо значення АЧХ фільтра в цьому діапазоні мало відрізняються від константи, наприклад, від одиниці:

$$H_U(\omega) \approx 1. \quad (6.11)$$

Смуга частот, для яких виконується умова (6.11), називається *смугою пропускання*, або смугою прозорості фільтра. Якщо для коливань з частотами в діапазоні  $\omega_3 \dots \omega_4$  АЧХ фільтра мало відрізняється від нуля

$$H_U(\omega) \approx 0, \quad (6.12)$$

кажуть, що фільтр не пропускає коливання з такими частотами, а смуга частот  $\omega_3 \dots \omega_4$  називається смугою непрозорості, або *смугою затримання* (СЗ).

Смуга частот, розташована між смугою пропускання і смугою затримання, називається *смугою переходу*.

АЧХ ідеальних фільтрів не мають смуги переходу. Смуги пропускання та затримання розділяє гранична частота  $\omega_{гр}$ . Залежно від того, до якої частини частотного діапазону належать смуги пропускання та затримання, фільтри поділяються на фільтри нижніх частот (ФНЧ), фільтри верхніх частот (ФВЧ), смугові фільтри (СФ), загороджувальні фільтри (ЗФ).

Якщо фільтр «не пропускає» коливання не смуги частот, а тільки однієї частоти, він має назву режекторного фільтра (РФ), а ця частота називається частотою режекції  $\omega_p$ .

АЧХ фільтрів вищезгаданих типів зображені на рис. 6.2.

ФНЧ має СП в межах від нуля до  $\omega_{гр}$ , а СЗ починається від  $\omega_{гр}$  і прямує до нескінченності. Смуга пропускання ФВЧ:  $\omega_{гр} \dots \infty$ , а смуга затримання:  $0 \dots \omega_{гр}$ .

СФ «пропускає» коливання частот в діапазоні  $\omega_{гр1} \dots \omega_{гр2}$  і має дві СЗ: від нуля до  $\omega_{гр1}$  та від  $\omega_{гр2}$  до нескінченності. ЗФ, навпаки, має дві СП: від нуля до  $\omega_{гр1}$  та від  $\omega_{гр2}$  до нескінченності, а СЗ перебуває в межах від  $\omega_{гр1}$  до  $\omega_{гр2}$ .

Режекторний фільтр (від латинського *resectio* — відтинання) «виризає» коливання з частотою  $\omega_p$ .

АЧХ ідеальних фільтрів мають стрибки на граничних частотах, що фізично неможливо для реальних фільтрів. Але, збільшуючи порядок ланки, можна досягти досить різкого перепаду значень АЧХ поблизу частоти  $\omega_{гр}$ . Схеми фільтрів високих порядків переважно реалізують, з'єднуючи каскадно (тобто один за одним) ланки не більш як другого порядку (рис. 6.3).

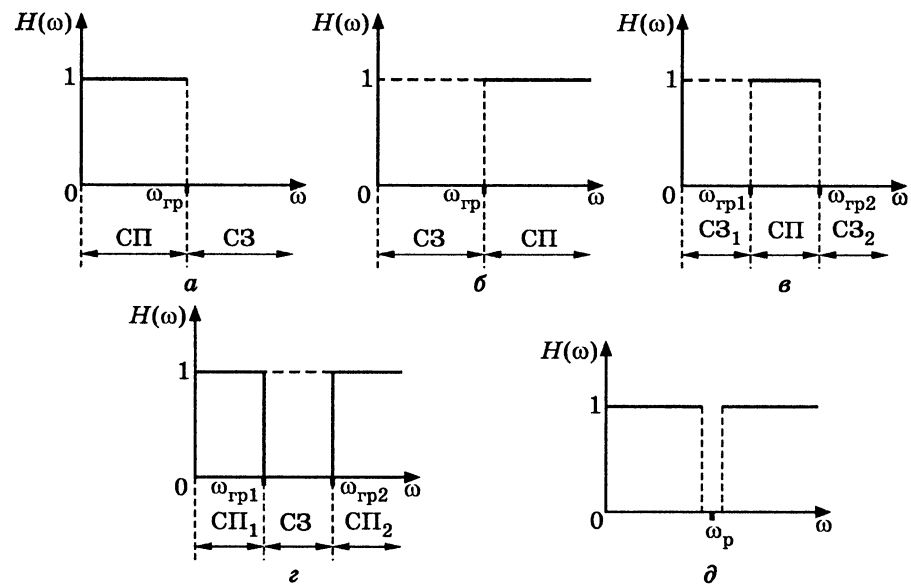


Рис. 6.2. АЧХ ідеальних фільтрів: а — ФНЧ; б — ФВЧ; в — СФ; г — ЗФ; д — РФ

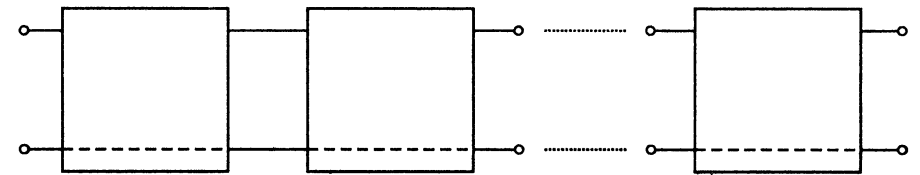


Рис. 6.3. Каскадне з'єднання чотиріполюсників, які утворюють фільтр

При цьому, якщо порядок реальної ланки, наприклад ФНЧ, не перевищує двох, його АЧХ (рис. 6.4) значно відрізняється від АЧХ ідеального ФНЧ (рис. 6.2, а).

Для нульової частоти  $H(\omega)|_{\omega=0} = 1$ , у смузі пропускання значення АЧХ перебувають у межах  $1/\sqrt{2} \leq H(\omega) \leq \sqrt{2}$ . Частота, якій відповідає рівень  $1/\sqrt{2} = 0,707$ , є граничною:  $H(\omega_{гр}) = 1/\sqrt{2}$ . У смузі затримання значення  $H(\omega)$  не має перевищувати деякий заданий рівень  $\Delta$ , якому відповідає частота  $\omega_\Delta$ .

Смуга частот від  $\omega_{гр}$  до  $\omega_\Delta$  є смугою переходу (рис. 6.4). Якщо АЧХ досягає максимуму (відносно одиниці) у смузі пропускання, крутість кривої зростає, що призводить до зменшення смуги переходу (рис. 6.4, б). Зміна форми кривої АЧХ досягається за рахунок варіації коефіцієнтів  $a_i, b_j$ , що, в свою чергу, досягається зміною величин елементів, які складають коло.

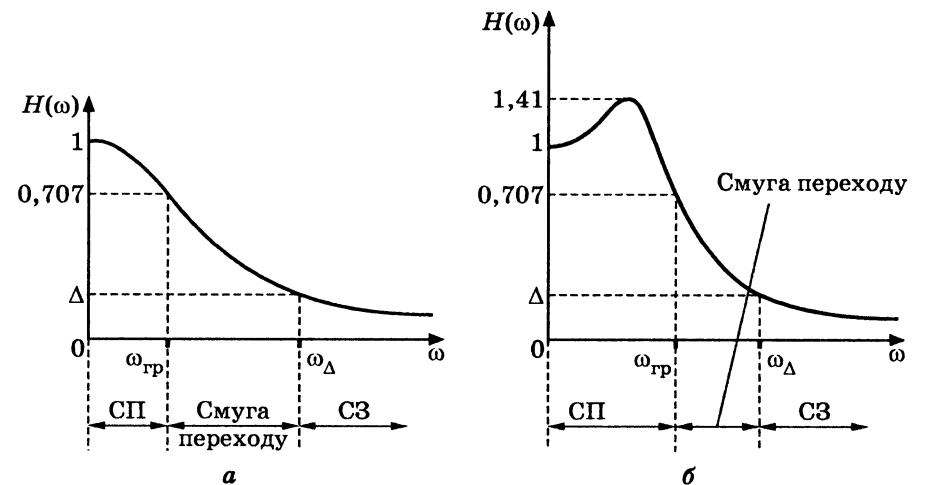


Рис. 6.4. АЧХ реального ФНЧ

### 6.3. Частотні характеристики фільтрів другого порядку і схемна реалізація цих фільтрів

Ланки другого порядку використовують як фільтри різних типів або включають до складу фільтрів вищих порядків. Виходячи з виразу (6.9), для ланки другого порядку в загальному випадку АЧХ визначається так:

$$H_U(\omega) = \frac{\sqrt{(a_0 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega)^2}}{\sqrt{(b_0 - b_2 \omega^2)^2 + (b_1 \omega)^2}}. \quad (6.13)$$

Аргумент КПФ (6.9), тобто ФЧХ, становить:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega), \quad (6.14)$$

де

$$\varphi_1(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{a_1 \omega}{a_0 - a_2 \omega^2} & \text{для } a_0 > a_2 \omega^2; \\ \pi - \arctg \frac{a_1 \omega}{|a_0 - a_2 \omega^2|} & \text{для } a_0 < a_2 \omega^2; \end{cases}$$

$$\varphi_2(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{b_1 \omega}{b_0 - b_2 \omega^2} & \text{для } b_0 > b_2 \omega^2; \\ \pi - \arctg \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|} & \text{для } b_0 < b_2 \omega^2. \end{cases}$$

Частоту, при якій виконується умова  $b_0 - b_2 \omega^2 = 0$ , позначають  $\omega_{\text{рез}}$ :

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}}. \quad (6.15)$$

Дійсні додатні значення частоти  $\omega$ , за яких  $H_U(\omega) = 0$ , позначають  $\omega_{\text{мін}}$ , а дійсні додатні значення  $\omega$ , за яких  $H_U(\omega)$  досягає максимуму, —  $\omega_{\text{макс}}$ .

Ланка другого порядку є *фільтром нижніх частот* за умови:

$$a_1 = a_2 = 0. \quad (6.16)$$

Тоді КПФ (6.9) має вигляд:

$$H_U(j\omega) = \frac{a_0}{b_2(j\omega)^2 + b_1 j\omega + b_0}. \quad (6.17)$$

АЧХ ФНЧ визначається за формулою:

$$H_U(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(b_0 - b_2 \omega^2)^2 + (b_1 \omega)^2}}. \quad (6.18)$$

Значення АЧХ на нульовій частоті та частоті  $\omega_{\text{рез}}$  становитимуть:

$$H_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(\omega); H_0 = \frac{a_0}{b_0}; \quad (6.19)$$

$$H_{\text{рез}} = H(\omega_{\text{рез}}); H_{\text{рез}} = \frac{a_0}{b_1 \omega_{\text{рез}}} = \frac{a_0}{b_1 \sqrt{b_0/b_2}} = H_0 \frac{\sqrt{b_0 b_2}}{b_1}.$$

Подібно до резонансного контуру можна записати:

$$H_{\text{рез}} = H_0 Q,$$

або

$$H_{\text{рез}} = \frac{H_0}{d}; \quad (6.20)$$

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{b_1}{\sqrt{b_0 b_2}}, \quad (6.21)$$

де  $Q$  — добротність ланки другого порядку;  $d$  — загасання ланки.

На відміну від контурів для фільтрів значення  $d$  ( $Q$ ) мало відрізняється від одиниці.

Оскільки АЧХ ФНЧ не має мінімуму, достатньо визначити тільки частоту максимуму  $\omega_{\text{макс}}$ , прорівнюючи нулю похідну квадрата знаменника виразу (6.18) за  $\omega^2$ :

$$\begin{aligned} -2(b_0 - b_2 \omega^2)b_2 + b_1^2 &= 0; \\ b_0 - b_2 \omega_{\text{макс}}^2 &= \frac{b_1^2}{2b_2}; \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$b_2 \omega_{\text{макс}}^2 = b_0 - \frac{b_1^2}{2b_2}; \omega_{\text{макс}}^2 = \frac{b_0}{b_2} \left( 1 - \frac{b_1^2}{2b_2 b_0} \right).$$

З урахуванням (6.15) вираз для  $\omega_{\text{макс}}$  матиме вигляд:

$$\omega_{\text{макс}} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 - 0,5d^2}. \quad (6.23)$$

Це значення збігається з отриманою вище, в підрозд. 5.3, формулою для частоти максимуму напруги на ємності у послідовному резонансному контурі.

Формулу (6.22) з урахуванням виразу (6.21) можна переписати як

$$b_0 - b_2 \omega_{\max}^2 = \frac{1}{2} b_0 d^2,$$

тоді значення АЧХ на частоті  $\omega_{\max}$ , виходячи з (6.18), становитиме:

$$\begin{aligned} H_U(\omega_{\max}) = H_{\max} &= \frac{a_0}{\sqrt{0,25b_0^2 d^4 + b_1^2 \omega_{\max}^2}} = \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{0,25b_0^2 d^4 + b_1^2 \omega_{\text{рез}}^2 (1-0,5d^2)}}. \end{aligned}$$

Після підстановки (6.15) знаменник виразу для  $H_{\max}$ , враховуючи формулу (6.21), можна записати як

$$b_0 \sqrt{0,25d^4 + d^2(1-0,5d^2)} = b_0 d \sqrt{1-0,25d^2}.$$

$$\text{Тоді } H_{\max} = \frac{a_0}{b_0 d \sqrt{1-0,25d^2}} = \frac{H_0}{d \sqrt{1-0,25d^2}} \text{ або}$$

$$H_{\max} = \frac{H_{\text{рез}}}{\sqrt{1-0,25d^2}}. \quad (6.24)$$

Значення  $H_{\max}$  також збігається з екстремумом АЧХ послідовного резонансного контуру за умови, що відгуком є напруга на ємності.

При  $d = \sqrt{2}$  ( $Q = 0,707$ ) АЧХ має максимум  $H_{\max} = H_0$  на нульовій частоті ( $\omega_{\max} = 0$ , згідно з (6.23)), отже, крива монотонно спадає зі зростанням частоти. Гранична частота  $\omega_{\text{гр}}$ , якій відповідає рівень  $0,707H_0$ , збігається зі значенням  $\omega_{\text{рез}}$ . Виходячи з (6.20), значення АЧХ на частоті  $\omega_{\text{рез}}$  становитиме:

$$H_{\text{рез}} = \frac{H_0}{d} \Big|_{d=\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707H_0,$$

тобто при  $d = \sqrt{2}$  виконується рівність  $\omega_{\text{гр}} = \omega_{\text{рез}}$ .

Щоб визначити  $\omega_{\text{гр}}$  при інших значеннях  $d$ , слід прирівняти праву частину виразу (6.18) для  $\omega_{\text{гр}} = \omega_{\text{рез}}$  до значення  $H_0/\sqrt{2}$ :

$$H_U(\omega_{\text{гр}}) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}.$$

З урахуванням виразу  $\frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{a_0}{b_0 \sqrt{2}}$  виходить рівняння:

$$\frac{a_0}{b_0 \sqrt{\left(1 - \frac{b_2}{b_0} \omega_{\text{гр}}^2\right)^2 + \left(\frac{b_1 \omega_{\text{гр}}}{b_0}\right)^2}} = \frac{a_0}{b_0 \sqrt{2}}.$$

Тоді  $\left(1 - \left(\frac{\omega_{\text{гр}}}{\omega_{\text{рез}}}\right)^2\right)^2 + d^2 \left(\frac{\omega_{\text{гр}}}{\omega_{\text{рез}}}\right)^2 = 2$ , звідки

$$\left(\frac{\omega_{\text{гр}}}{\omega_{\text{рез}}}\right)^2 = 1 - 0,5d^2 + \sqrt{(1-0,5d^2)^2 + 1}. \quad (6.25)$$

При  $d > \sqrt{2}$  ( $Q < 0,707$ ) частота  $\omega_{\max}$  згідно з виразом (6.23) стає уявною величиною, а згідно з (6.25)  $\omega_{\text{гр}} < \omega_{\text{рез}}$ . На рис. 6.5 зображена АЧХ ФНЧ при  $d > \sqrt{2}$  ( $d = 2$ ), причому крива спадає зі зростанням частоти швидше, ніж у попередньому випадку. При  $d < \sqrt{2}$  ( $Q > 0,707$ ) згідно з формулами (6.23) та (6.25) виконується умова:  $\omega_{\max} < \omega_{\text{рез}} < \omega_{\text{гр}}$ . На рис. 6.5 показано також графік АЧХ фільтра для  $d = 1$ .

За умови  $d \ll \sqrt{2}$  АЧХ  $H_U(\omega)$  фільтра має такий самий вигляд, як модуль КПФ  $H_{Uc}(\omega)$  послідовного резонансного контуру. Відносні значення частот та відповідні їм відносні рівні наведені в табл. 6.1.

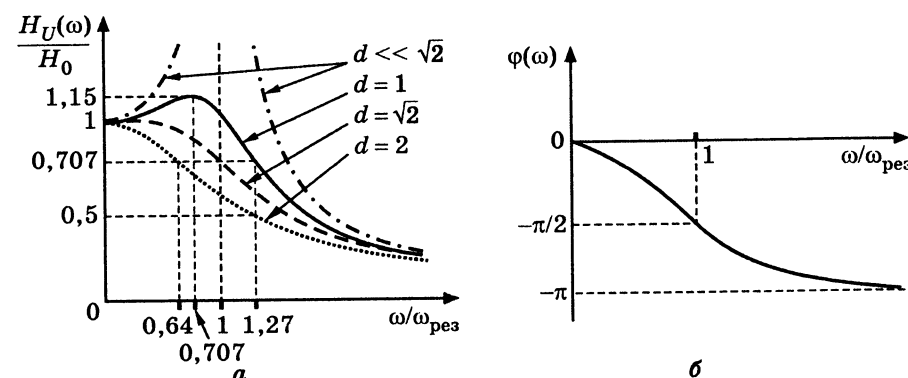


Рис. 6.5. Частотні характеристики ФНЧ

Таблиця 6.1

## Значення відносних частот та рівнів АЧХ ФНЧ

$d = \frac{H_0}{H_{\text{рез}}}$	1	$\sqrt{2}$	2
$\omega_{\text{гр}}/\omega_{\text{рез}}$	1,27	1	0,64
$\omega_{\text{max}}/\omega_{\text{рез}}$	0,707	0	—
$H_{\text{max}}/H_0$	1,15	1	—
$\frac{H_{\text{рез}}}{H_0} = \frac{1}{d}$	1	0,707	0,5

Отже, АЧХ ФНЧ другого порядку при  $1 \leq d \leq \sqrt{2}$  в смузі прозорості за визначенням не менше рівня  $0,707H_0$ , але й не перевищує значення  $\sqrt{2}H_0$ , тобто ці значення найприйнятніші для фільтрації коливань нижніх частот.

ФЧХ ФНЧ виходить з виразу (6.14). За умови (6.16) виконується рівність  $\varphi_1(\omega) = 0$ , тоді

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{b_1 \omega}{b_0 - b_2 \omega^2}, & \omega < \omega_{\text{рез}}; \\ \arctg \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|} - \pi, & \omega > \omega_{\text{рез}}. \end{cases} \quad (6.26)$$

На нульовій частоті  $\varphi(\omega)|_{\omega=0} = 0$ , на резонансній частоті  $\varphi(\omega_{\text{рез}}) = -\arctg \infty = -\pi/2$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  значення ФЧХ наближається до  $-\pi$ . Графік ФЧХ ФНЧ зображено на рис. 6.5, б.

При зменшенні (збільшенні) добротності крутість ФЧХ поблизу значення  $\omega_{\text{рез}}$  відповідно зменшується (збільшується).

Реалізувати ФНЧ можна за допомогою послідовного резонансного контуру з низькою добротністю за умови, що відгуком є напруга на ємності (рис. 6.6, а).

Вважаючи, що опір  $R$  у схемі (рис. 6.6) відповідає втратам у коштуці індуктивності (тобто  $R$  існує за наявності в схемі індуктивності), і тому не позначаючи його у вигляді окремого елемента, одержимо схему (рис. 6.6, б). Фільтри, які реалізують за допомогою тільки індуктивностей та ємностей, називаються *реактивними*. Як видно з рис. 6.5, а, повільний спад АЧХ не дає можливості чітко розділити смуги пропускання та затримання.

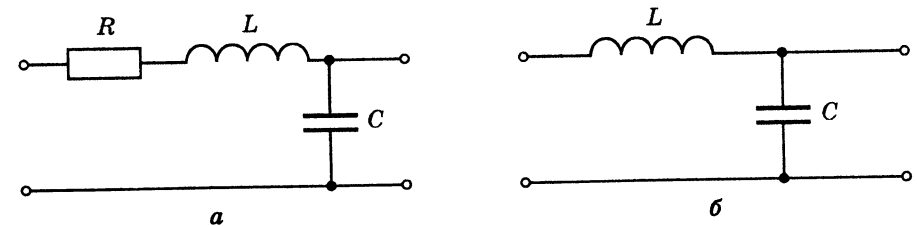


Рис. 6.6. Схеми реального та ідеального ФНЧ

Щоб зменшити смугу переходу (рис. 6.4), застосовують каскадне з'єднання ланок (рис. 6.3). Такі схеми мають назву східчастих або ланцюгових. Східчаста схема ФНЧ зображена на рис. 6.7.

Якщо в цій схемі виділити симетричні ланки перерізами  $a-a$  (при цьому розтинаються опори подовжніх віток), отримаємо  $T$ -подібні схеми з половинними значеннями індуктивностей  $L/2$  (рис. 6.8, а). З міркувань симетрії першої  $T$ -подібної ланки, індуктивність, увімкнена до вузла 1, також дорівнюватиме  $L/2$ . Якщо зробити розтин за перерізами  $b-b$ , розділивши навпіл опори поперечних віток, отримаємо  $\Pi$ -подібні схеми з половинними значеннями ємностей  $C/2$ , які при ланцюговому з'єднанні утворюють вихідну ємність  $C$  (рис. 6.8, б). Ємність, увімкнена до вузлів 2-2' (рис. 6.7), з міркувань симетрії останньої  $\Pi$ -подібної ланки становитиме  $C/2$ .

$T$ -,  $\Pi$ -подібні ланки з навантаженням утворюють кола третього порядку, які тут не розглядаються.  $T$ -подібна ланка — це коло другого порядку, для якого за умови  $d = \sqrt{2}$  гранична частота збігається з резонансною:  $\omega_{\text{рез}} = \omega_{\text{гр}} = 2/\sqrt{LC}$ . За такою ж формулою визначається гранична частота  $T$ -,  $\Pi$ -подібних схем. Схемам, зображеним на рис. 6.8, притаманна особливість: добуток опору подовжньої вітки та ємнісного опору є константою, яка не залежить від частоти. Тому такі фільтри мають назву *фільтрів k-типу*.

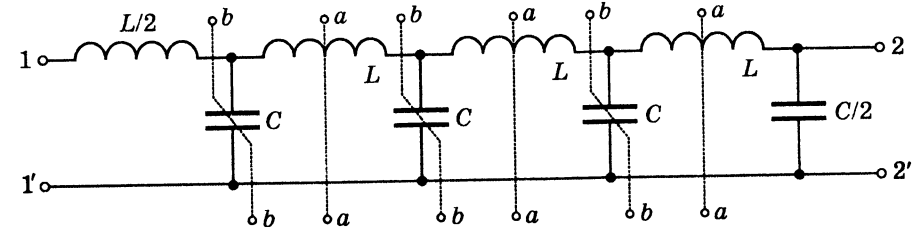


Рис. 6.7. Східчаста схема ФНЧ

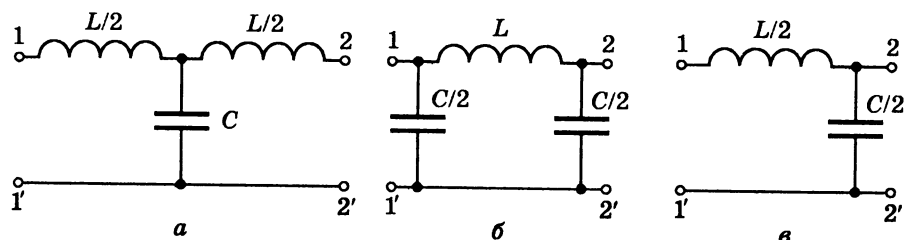


Рис. 6.8. Схеми Т-, П- та Г-подібних ланок ФНЧ

Тоді Г-подібний ФНЧ на відміну від рис. 6.6, б матиме половинні значення індуктивності та ємності (рис. 6.8, в), оскільки при  $d = \sqrt{2}$  гранична частота становить  $\omega_{\text{рез}} = \omega_{\text{гр}} = 2/\sqrt{LC}$ . Так само визначають граничні частоти Т- і П-подібних схем. Такі ланки навантажують на опір  $R_{\text{н}} = \sqrt{L/C}$ , вважаючи його, за аналогією з контурами, *характеристичним*. АЧХ ланки з навантаженням суттєво відрізняється від кривих на рис. 6.5, а, отриманих без урахування навантаження.

Фізично дію фільтрів, зображених на рис. 6.8, можна пояснити тим, що на низьких частотах індуктивності не становлять значного опору струму, який протікає від джерела, увімкненого до затискачів 1–1', до навантаження, увімкненого до затискачів 2–2'. На високих частотах вихідний струм зменшується завдяки великому опору індуктивності. Оскільки на шляху струму до навантаження є вітка з малим ємнісним опором, туди відгалужується значна частина струму.

КПФ фільтра верхніх частот можна отримати з виразу (6.9) за умови:

$$a_1 = a_0 = 0. \quad (6.27)$$

Тоді 
$$H_U(j\omega) = \frac{a_2(j\omega)^2}{b_2(j\omega)^2 + b_1j\omega + b_0}$$

або 
$$H_U(j\omega) = \frac{-a_2\omega^2}{b_0 - b_2\omega^2 + jb_1\omega}. \quad (6.28)$$

АЧХ ФВЧ описується виразом:

$$H_U(\omega) = \frac{a_2\omega^2}{\sqrt{(b_0 - b_2\omega^2)^2 + (b_1\omega)^2}}. \quad (6.29)$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  значення АЧХ становитиме:

$$H_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H_U(\omega) = \frac{a_2}{b_2}. \quad (6.30)$$

На резонансній частоті, яка обчислюється з (6.15), значення АЧХ

$$H_{\text{рез}} = \frac{a_2\omega^2}{b_1\omega} \Big|_{\omega=\omega_{\text{рез}}} = \frac{a_2}{b_1} \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} = \frac{a_2}{b_2} \sqrt{\frac{b_0 b_2}{b_1^2}}.$$

Враховуючи (6.21) та (6.30), резонансне значення АЧХ ФВЧ можна записати у вигляді:

$$H_{\text{рез}} = \frac{H_\infty}{d}. \quad (6.31)$$

Частоту  $\omega_{\text{max}}$ , на якій АЧХ ФВЧ досягає максимуму, можна знайти як частоту екстремуму оберненої функції  $1/H_U(\omega)$ , взявши її похідну за  $\omega^2$ :

$$\omega_{\text{max}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\sqrt{1 - 0,5d^2}}, \quad (6.32)$$

звідки видно, що  $\omega_{\text{max}} > \omega_{\text{рез}}$ , а вираз для  $\omega_{\text{max}}$  збігається з формулою для частоти максимуму напруги на індуктивності в послідовному резонансному контурі (див. пізрозд. 5.3).

Якщо підставити вираз (6.32) в (6.29), можна здобути максимальне значення АЧХ ФВЧ:

$$H_{\text{max}} = \frac{H_\infty}{d\sqrt{1 - 0,25d^2}}.$$

З урахуванням (6.31) значення максимуму  $H_{\text{max}}$  обчислюється за формулою (6.24), що також збігається зі значенням модуля КПФ  $H_{U_L}(\omega)|_{\omega=\omega_{\text{max}}}$  послідовного резонансного контуру.

Граничну частоту ФВЧ визначають, прирівнявши формулу (6.29) значенню  $H_\infty/\sqrt{2}$ . Тоді квадрат рівняння (6.29) становитиме:

$$\frac{a_2^2\omega_{\text{гр}}^4}{(b_0 - b_2\omega^2)^2 + (b_1\omega_{\text{гр}})^2} = \frac{H_\infty^2}{2},$$

або

$$\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 \frac{\omega_{\text{гр}}^4}{[(b_0/b_2)^2 - \omega_{\text{гр}}^2]^2 + (b_1/b_2)^2\omega_{\text{гр}}^2} = 0,5 \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2.$$

Перетворення рівняння з урахуванням (6.15) та (6.21) дозволяють отримати співвідношення:

$$\left(\frac{\omega_{\text{гр}}}{\omega_{\text{рез}}}\right)^2 = 0,5d^2 - 1 + \sqrt{(0,5d^2 - 1)^2 + 1}.$$

Відносні значення  $\omega_{\text{гр}}/\omega_{\text{рез}}$  та  $\omega_{\text{мах}}/\omega_{\text{рез}}$ , а також  $H_{\text{мах}}/H_{\infty}$ ,  $H_{\text{рез}}/H_{\infty}$  для різних значень  $d$  зведені до табл. 6.2. Ці значення знайдені по графіках АЧХ ФВЧ (рис. 6.9, а). Слід зауважити, що всі відносні значення частот у табл. 6.2 є оберненими величинами відносно значень у табл. 6.1. При  $d \ll \sqrt{2}$  АЧХ фільтра збігається з АЧХ послідовного контуру високої добротності  $H_{U_L}(\omega)$ . Як видно з рис. 6.9, а, при  $1 \leq d \leq \sqrt{2}$  АЧХ ФВЧ за формою найприйнятніша для фільтрації коливань верхніх частот.

Таблиця 6.2

Значення відносних частот та рівнів АЧХ ФВЧ

$d = \frac{H_{\infty}}{H_{\text{рез}}}$	1	$\sqrt{2}$	2
$\omega_{\text{гр}}/\omega_{\text{рез}}$	0,786	1	1,552
$\omega_{\text{мах}}/\omega_{\text{рез}}$	1,41	$\infty$	—
$H_{\text{мах}}/H_{\infty}$	1,15	1	—
$\frac{H_{\text{рез}}}{H_{\infty}} = \frac{1}{d}$	1	0,707	0,5

Оскільки згідно з виразом (6.28) аргумент чисельника КПФ  $\varphi_1(\omega) = \pi$ , на підставі виразу (6.14) ФЧХ ФВЧ має вигляд:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \pi - \arctg \frac{b_1 \omega}{b_0 - b_2 \omega^2}, & \omega < \omega_{\text{рез}}; \\ \arctg \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|}, & \omega > \omega_{\text{рез}}. \end{cases} \quad (6.33)$$

Графік ФЧХ ФВЧ зображено на рис. 6.9, б. Його крутість у точці з координатами  $(1, \pi/2)$  збільшуватиметься при зменшенні  $d$ .

ФВЧ можна реалізувати з урахуванням (рис. 6.10, а) або без урахування втрат (рис. 6.10, б).

Каскадне з'єднання реактивних ФВЧ показано на рис. 6.11.

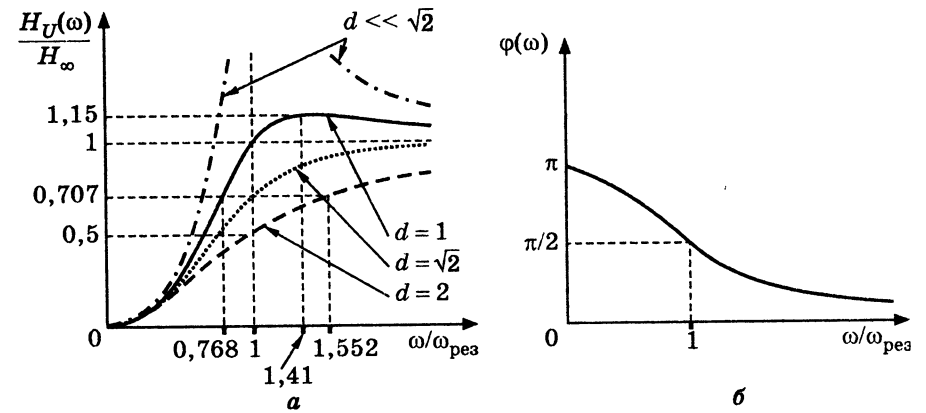


Рис. 6.9. Частотні характеристики ФВЧ

Щоб виділити симетричні  $T$ -подібні ланок за перерізами  $a-a$ , розтинають опори подовжніх віток. Тоді ємності кожної нової ланки подвоюються, щоб при послідовному об'єднанні утворити вихідну ємність  $C$ . Утворюючи  $\Pi$ -подібні ланки за перерізами  $b-b$ , розтинають опори поперечних віток, індуктивності при цьому подвоюються. Із міркувань симетрії утворених  $T$ - та  $\Pi$ -ланок, подвоюється ємність, яку увімкнено до вузла 1, та індуктивність між вузлами 2-2'. Схеми  $T$ -,  $\Pi$ - та  $\Gamma$ -подібних ланок зображено на рис. 6.12.

Граничну частоту ланок визначають як резонансну частоту  $\Gamma$ -подібної ланки, що справедливо при  $d = \sqrt{2}$ :

$$\omega_{\text{гр}} = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Такою ж вважається гранична частота  $\omega_{\text{гр}}$  і для інших ланок.

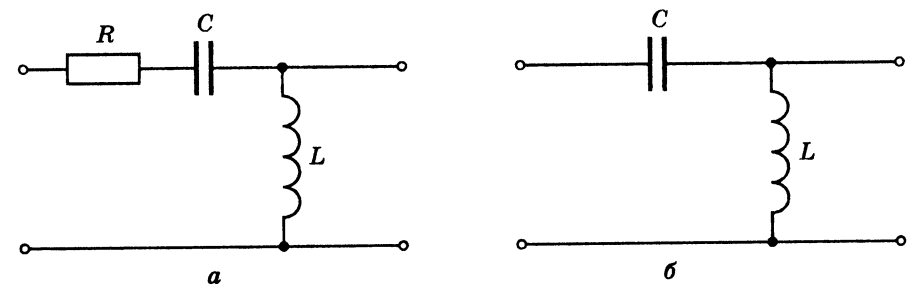


Рис. 6.10. Схеми реального та ідеального ФВЧ



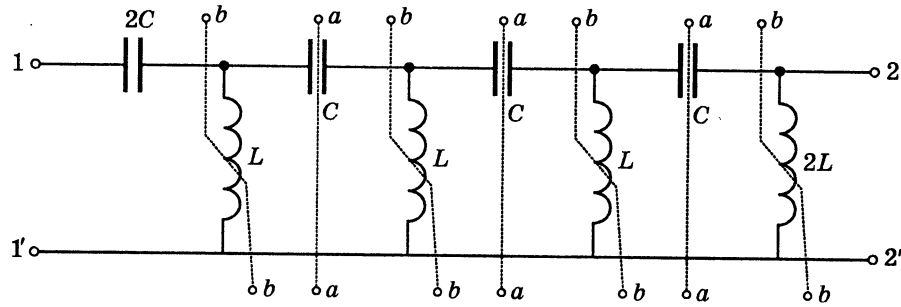


Рис. 6.11. Східчаста схема ФВЧ

Розглянуті схеми (рис. 6.12) також є фільтрами  $k$ -типу. Опір навантаження, як і для ФНЧ, становить:  $R_H = \sqrt{L/C}$ .

Ємність, яку увімкнено в коло на шляху від джерела (затискачі 1–1') до навантаження (затискачі 2–2'), має великий опір на низьких частотах, які фільтр «не пропускає», а індуктивність — малий. Тому значна частина струму на низьких частотах відгалужуватиметься не в навантаження, а у вітку з індуктивним опором. На високих частотах умови протікання струму змінюються на протилежні. Якщо увімкнуті навантаження, частотні характеристики ланок реактивних фільтрів погіршуються у порівнянні з вихідними ідеальними характеристиками.

Розглянемо *смуговий фільтр*.

З виразу (6.9) отримаємо КПФ СФ другого порядку за умови:

$$a_0 = a_2 = 0; \quad (6.34)$$

$$H_U(j\omega) = \frac{a_1 j\omega}{b_2 (j\omega)^2 + b_1 j\omega + b_0}. \quad (6.35)$$

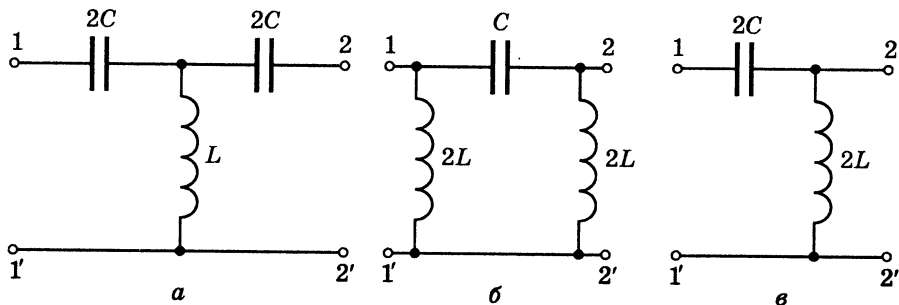


Рис. 6.12. Схеми Т-, П- та Г-подібних ланок ФВЧ

АЧХ СФ

$$H_U(\omega) = \frac{a_1 \omega}{\sqrt{(b_0 - b_2 \omega^2)^2 + (b_1 \omega)^2}} \quad (6.36)$$

має екстремум на частоті  $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{b_0/b_2}$ . У цьому легко переконатися, взявши похідну від  $[H_U(\omega)]^2$  за  $\omega^2$  і прирівнявши її до нуля:

$$a_1^2 [(b_0 - b_2 \omega^2)^2 + (b_1 \omega)^2] - a_1^2 \omega^2 [b_1^2 - 2b_2(b_0 - b_2 \omega^2)] = 0.$$

Після нескладних алгебраїчних перетворень виходить рівняння:

$$b_2^2 \omega_{\text{max}}^4 - b_0^2 = 0,$$

звідки

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}}; \quad \omega_{\text{max}} = \omega_{\text{рез}}. \quad (6.37)$$

Максимальне значення АЧХ становить:

$$H_{\text{max}} = H_U(\omega_{\text{max}}) = \frac{a_1}{b_1}.$$

Якщо  $a_1 = b_1$ , максимальне значення АЧХ  $H_{\text{max}} = 1$ .

Смуга пропускання обмежується частотами, на яких виконується рівність  $H_U(\omega_{\text{гр}}) = H_{\text{max}}/\sqrt{2}$ :

$$\frac{a_1 \omega_{\text{гр}}}{\sqrt{(b_0 - b_2 \omega_{\text{гр}}^2)^2 + (b_1 \omega_{\text{гр}})^2}} = \frac{a_1}{b_1 \sqrt{2}}.$$

Скоротивши та піднесши до квадрата, останній вираз можна подати у вигляді:

$$2b_1^2 \omega_{\text{гр}}^2 = (b_0 - b_2 \omega_{\text{гр}}^2)^2 + (b_1 \omega_{\text{гр}})^2,$$

звідки

$$b_1 \omega_{\text{гр}} = b_0 - b_2 \omega_{\text{гр}}^2;$$

$$b_1 \omega_{\text{гр}} = b_2 \left( \frac{b_0}{b_2} - \omega_{\text{гр}}^2 \right),$$

з урахуванням рівняння (6.37)

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{b_2}{b_1} (\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{гр}}^2) = \frac{b_2}{b_1} (\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{гр}})(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{гр}}).$$

Вважаючи, що при  $d \gg 1$  виконуються співвідношення  $\omega_{\max} - \omega_{\text{гр}} = \Delta\omega_{\Pi}$ ;  $\omega_{\max} + \omega_{\text{гр}} \approx 2\omega_{\max} = 2\omega_{\text{гр}}$ , вираз для  $\omega_{\text{гр}}$  можна записати у вигляді:

$$\omega_{\text{гр}} \approx \frac{b_2}{b_1} \Delta\omega_{\Pi} 2\omega_{\text{гр}};$$

$$\Pi_{\omega} = 2\Delta\omega_{\Pi} \approx \frac{b_1 \sqrt{b_0}}{b_2 \sqrt{b_0}} = d\omega_{\text{рез}}. \quad (6.38)$$

Формула (6.38) збігається з формулою СП послідовного резонансного контуру високої добротності. Тобто СФ притаманні вибірні властивості тільки за умови  $d \ll 1$ . Вираз (6.35) збігається з КПФ  $H_{U_R}(j\omega)$  послідовного коливального контуру. Графіки АЧХ СФ зображені на рис. 6.13, а для різних значень загасання фільтра  $d$  ( $d_1 < d_2$ ), де позначені також відповідні смуги пропускання  $\Pi_{\omega 1} < \Pi_{\omega 2}$ .

Рівняння ФЧХ СФ, виходячи з формули (6.14), а також використовуючи вираз (6.34), можна записати так:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{b_1 \omega}{b_0 - b_2 \omega^2}, & \omega < \omega_{\text{рез}}; \\ \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|}, & \omega > \omega_{\text{рез}}. \end{cases}$$

Криву ФЧХ СФ показано на рис. 6.13, б.

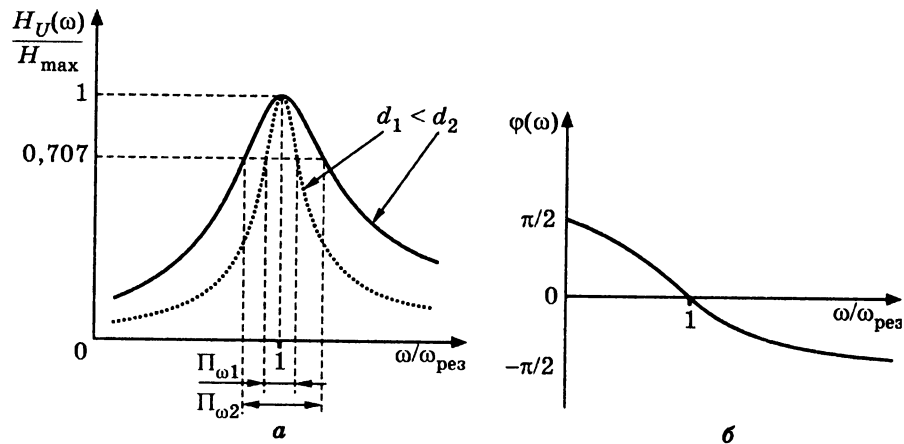


Рис. 6.13. Частотні характеристики СФ

Оскільки частотні характеристики смугового фільтра збігаються з частотними характеристиками послідовного коливального контуру, за умови, що відгуком є напруга на опорі  $R$ , реалізувати СФ можна схемою, показаною на рис. 6.14, а. У цій схемі використовується явище резонансу в послідовному ідеальному контурі, утвореному з елементів  $L, C$ . Також можна побудувати СФ, використовуючи резонанс у паралельному ідеальному контурі, але такі схеми (рис. 6.14, б) не застосовують там, де треба забезпечити вузьку смугу переходу. Наприклад, для телефонного каналу, де смуга переходу становить 300 Гц.

Для кращого розділення смуг пропускання і затримання, ланки ФНЧ та ФВЧ з'єднують каскадно. Якщо гранична частота ФВЧ  $\omega_{\text{гр1}}$  менша за граничну частоту ФНЧ  $\omega_{\text{гр2}}$ , каскадне з'єднання

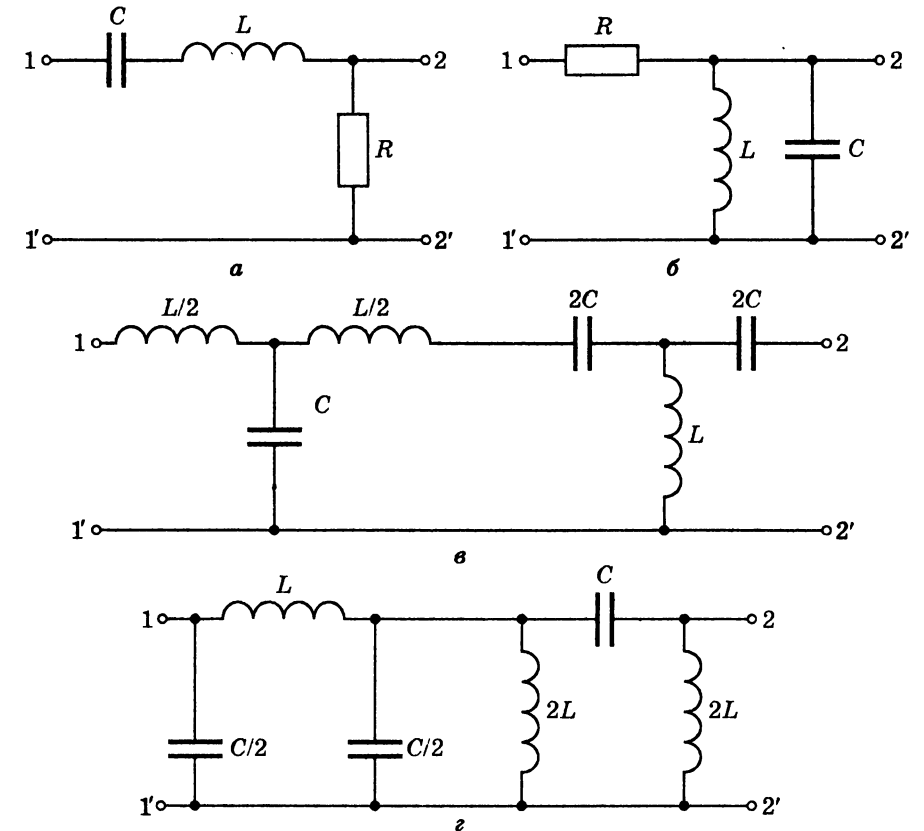


Рис. 6.14. Схеми СФ

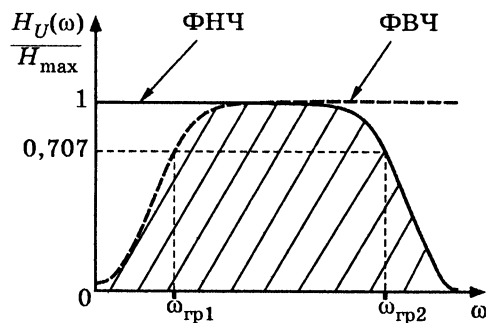


Рис. 6.15. АЧХ ФНЧ, ФВЧ, СФ

таких фільтрів (рис. 6.14, в, г) утворює смуговий фільтр за умови  $H_0 \approx H_\infty$  зі смугою пропускання  $\Pi_\omega = \omega_{гр2} - \omega_{гр1}$ . На рис. 6.15 площа під кривою АЧХ СФ позначена штрихуванням.

На практиці з елементів схем (рис. 6.14, в, г) утворюють їх модифікації, що містять ідеальні послідовні та паралельні контури (рис. 6.16, а, б) з однаковими резонансними частотами, порядок яких становить сотні кілогерц. Використання схем з контурами полегшує настроювання фільтрів на задані частоти.

Комплексний опір послідовного ідеального контуру, який вмикається у подовжню вітку,

$$\underline{Z}_1 = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad |X_1| = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|,$$

а паралельного контуру, який вмикається до поперечної вітки,

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{j(\omega C - 1/\omega L)}, \quad |X_2| = \frac{1}{|\omega C - 1/\omega L|}.$$

Графіки частотних залежностей  $|X_1|$  та  $|X_2|$  показано на рис. 6.17. У смузі пропускання ( $\omega_2 \dots \omega_3$ ) виконується співвідношення  $|X_1| \ll |X_2|$ , а в смугах частот  $0 \dots \omega_2, \omega_3 \dots \infty$ , наприклад на частотах

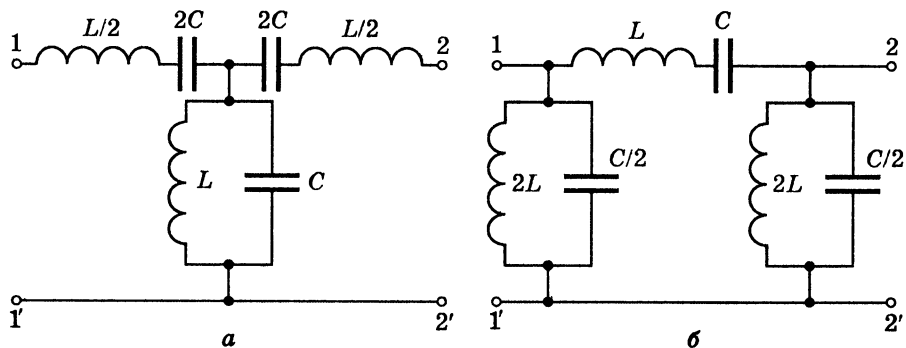


Рис. 6.16. Схеми реактивних СФ k-типу

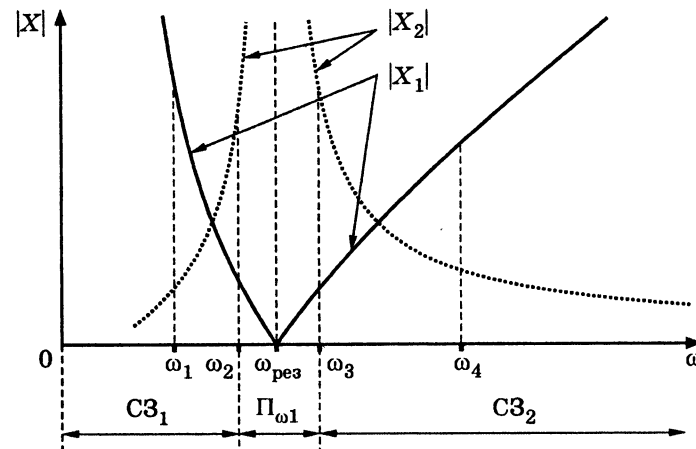


Рис. 6.17. Частотні залежності модулів реактивних опорів  $|X_1|, |X_2|$

$\omega_1, \omega_4$ , — навіпки. Причому добуток  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2$  також є константою для будь-якої частоти  $\omega$

Суттєвим недоліком СФ k-типу є те, що за умови  $\omega_{рез}/\Pi_\omega \gg 1$  значення індуктивностей та ємностей можуть відрізнитись на кілька порядків.

На практиці СФ часто реалізують схемою з двох однакових індуктивно зв'язаних контурів у режимі критичного зв'язку (рис. 6.18), який забезпечує резонансну криву  $U_2(\omega)$ , близьку до П-подібної.

Якщо вхідною дією СФ є напруга  $U_1$ , перший контур є послідовним (рис. 6.18, а); у разі, коли перший контур живиться від джерела струму  $I_1$ , він є паралельним (рис. 6.18, б).

Якщо фільтр «вирізає» (не пропускає) коливання певної частоти, такий фільтр називається *режекторним*. До режекторних належать також фільтри нижніх та верхніх частот, у смузі затримання яких

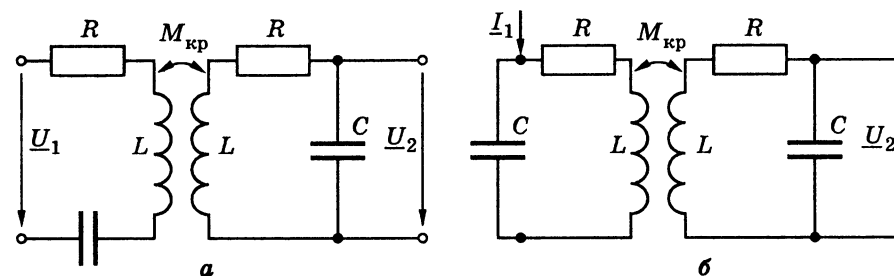


Рис. 6.18. Схеми СФ

є частота, значення АЧХ для якої практично дорівнює нулю. КПФ (6.9) за умови

$$a_1 = 0 \quad (6.39)$$

матиме вигляд:

$$H_U(j\omega) = \frac{a_2(j\omega)^2 + a_0}{b_2(j\omega)^2 + b_1j\omega + b_0}. \quad (6.40)$$

АЧХ РФ становить:

$$H_U(\omega) = \frac{|a_0 - a_2\omega^2|}{\sqrt{(b_0 - b_2\omega^2)^2 + (b_1\omega)^2}}. \quad (6.41)$$

Екстремуми АЧХ (6.41) знаходять у такий спосіб. Частоту режекції позначають  $\omega_{\min}$  і обчислюють за умови:  $H_U(\omega) = 0$ , тобто  $a_0 - a_2\omega_{\min}^2 = 0$ , звідки

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}. \quad (6.42)$$

Частоту  $\omega_{\max}$  визначають із умови

$$\frac{d^2[H_U(\omega)]}{\omega^2} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля чисельник одержаного після диференціювання дробу, отримують рівняння:

$$(2a_0b_2^2 - a_2b_1^2 - 2a_2b_2b_0)\omega_{\max}^2 = 2a_0b_2b_0 - 2a_2b_0^2 - a_1b_1^2,$$

звідки, з урахуванням виразів (6.19), (6.21) та (6.30), можна записати:

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{\frac{H_0(1-0,5d^2) - H_\infty}{H_0 - H_\infty(1-0,5d^2)}}.$$

Якщо ввести позначення  $H_0/H_\infty = m$ , тоді

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{\frac{1-0,5d^2 - \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{m}(1-0,5d^2)}}. \quad (6.43)$$

Підстановка співвідношення (6.43) у формулу (6.41) дозволяє знайти максимальне значення АЧХ РФ:

$$H_{\max} = H(\omega_{\max}) = \frac{H_0}{d} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{d^2}{m}}{1 - 0,25d^2}}. \quad (6.44)$$

АЧХ, яка визначається формулою (6.44), має особливості для різних значень  $m$ :

1.  $m > 1$ , тобто  $H_0 > H_\infty$ . Оскільки  $H_0 = a_0/b_0$ ;  $H_\infty = a_2/b_2$ , виконується співвідношення  $a_0/b_0 > a_2/b_2$ . Множення останнього виразу на дріб  $b_0/a_2$ , який, виходячи з реальних чисельних значень, перевищує одиницю, призводить до нерівності  $a_0/a_2 > b_0/b_2$ , що з урахуванням рівнянь (6.15) та (6.42) відповідає співвідношенню  $\omega_{\min} > \omega_{\text{рез}}$ .

Для виразу (6.43) при  $m > 1$ , за умови  $d < \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{m}\right)}$ , виконується співвідношення  $\omega_{\max} < \omega_{\text{рез}}$ , тобто

$$\omega_{\min} > \omega_{\text{рез}} > \omega_{\max}. \quad (6.45)$$

Графік АЧХ, зображений на рис. 6.19, а, відповідає АЧХ фільтра нижніх частот з режекцією (РФНЧ) на частоті  $\omega_{\min}$ .

2. За умови  $m < 1$ , або  $H_0 < H_\infty$ , виконується співвідношення  $\omega_{\min} < \omega_{\text{рез}}$ . При  $d < \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{m}\right)}$  з виразу (6.43) маємо, що  $\omega_{\max} > \omega_{\text{рез}}$ , тоді

$$\omega_{\min} < \omega_{\text{рез}} < \omega_{\max}. \quad (6.46)$$

Виходячи з виразу (6.44) при  $m < 1$ , максимальне значення АЧХ РФ

$$H_{\max} = \frac{H_0}{dm} \sqrt{\frac{(m-1)^2 + md^2}{1-0,25d^2}} = \frac{H_\infty}{d} \sqrt{\frac{(m-1)^2 + md^2}{1-0,25d^2}}. \quad (6.47)$$

У даному випадку АЧХ (рис. 6.19, б) відповідає фільтру верхніх частот з режекцією (РФВЧ).

3.  $m = 1$ ,  $H_0 = H_\infty$ ,  $\omega_{\min} = \omega_{\text{рез}}$ . Виходячи з формули (6.43), частота  $\omega_{\max}$  стає при  $m = 1$  уявною величиною, тобто АЧХ матиме один екстремум-мінімум, що відповідає характеристикам режекторного фільтра. Графік АЧХ РФ зображено на рис. 6.19, в.

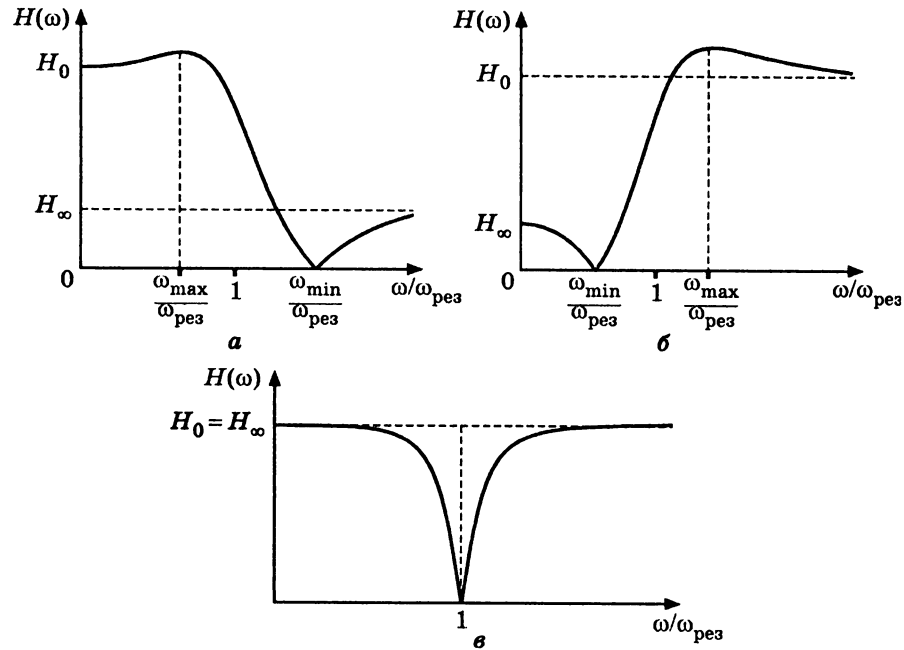


Рис. 6.19. АЧХ режекторних фільтрів

РФНЧ може бути реалізований схемою (рис. 6.20, а), для якої слушні співвідношення:

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}; \omega_{\min} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}; H_0 = 1; H_{\infty} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}.$$

РФВЧ реалізується схемою (рис. 6.20, б):

$$\omega_{\min} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}; \omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}; H_{\infty} = 1; H_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

РФ фільтр реалізується схемою (рис. 6.20, в), для якої частота режекції визначається з формули  $\omega_{\min} = 1/\sqrt{LC}$ ,  $R$  — опір навантаження.

Якщо знехтувати опором  $R$ , схеми (рис. 6.20, а, б) перетворюються у так звані реактивні фільтри *m*-типу (рис. 6.21).

На рис. 6.21, а показано схему ФНЧ, яка відрізняється від схеми (див. рис. 6.6, б) тим, що подовжня вітка містить не всю індуктивність  $L$ , а тільки її частину ( $L_1 = mL$ ). На рис. 6.21, б зображено

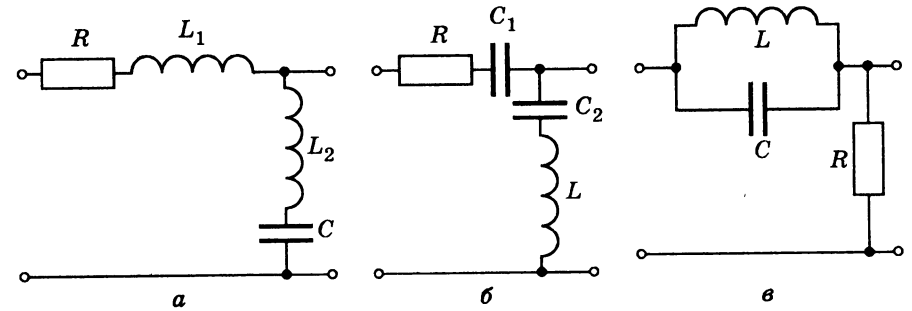


Рис. 6.20. Схеми режекторних фільтрів

ФВЧ, який, на відміну від схеми (рис. 6.10, б), у подовжній вітці містить ємність не  $C$ , а  $C_1 = C/m$ . Звідси походить і назва фільтра *m*-типу.

Звернімо увагу на те, що від схеми ФНЧ (див. рис. 6.8, а, б) замінивши  $L$  на  $C$ ,  $C$  на  $L$ , можна перейти до схеми ФВЧ (рис. 6.12, а, б), причому перший утворений елемент, як і вихідний, повинен мати половинний чи подвійний опір. Схеми СФ (див. рис. 6.16, а, б) заміною послідовного з'єднання індуктивності та ємності на відповідне паралельне та навпаки можна перетворити на схеми ЗФ (рис. 6.22).

Слід зазначити, що ЗФ *k*-типу за умови  $\omega_{\text{рез}}/2\Delta\omega_3 \gg 1$  ( $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ ,  $2\Delta\omega_3$  — смуга затримання) притаманні такі ж недоліки, як і відповідним їм СФ.

ФЧХ режекторних фільтрів визначають з формули (6.14), враховуючи умову (6.39):

$$\varphi_1(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{\min}, \\ \pi, & \omega \geq \omega_{\min}. \end{cases}$$

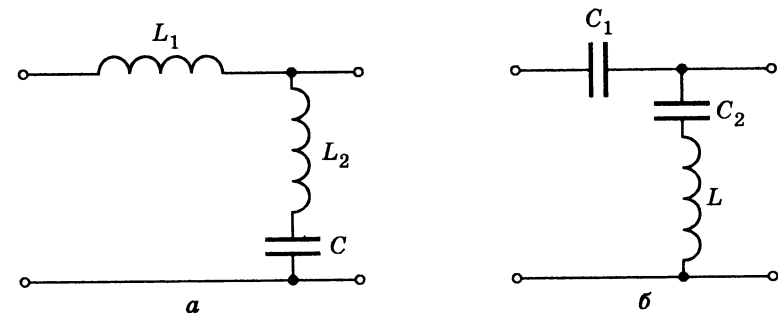


Рис. 6.21. Фільтри *m*-типу

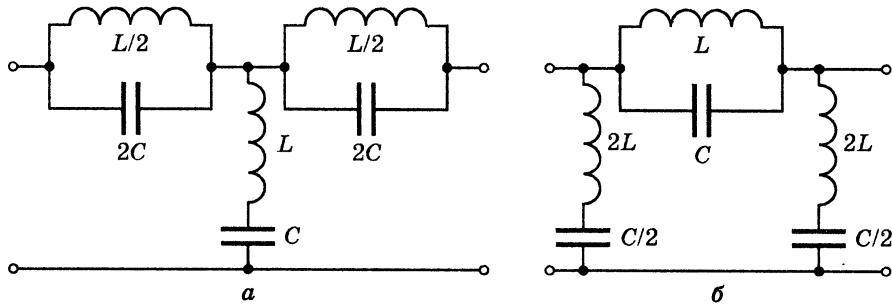


Рис. 6.22. Схеми ЗФ  $k$ -типу

З урахуванням рівняння (6.45) вираз для ФЧХ РФНЧ становитиме:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{b_0 - b_2 \omega^2}, & \omega \leq \omega_{\text{рез}}; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|}, & \omega_{\text{рез}} < \omega \leq \omega_{\text{мин}}; \\ \operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|}, & \omega > \omega_{\text{мин}}. \end{cases} \quad (6.48)$$

Для РФВЧ з урахуванням співвідношення (6.46) вираз для ФЧХ матиме вигляд:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{b_0 - b_2 \omega^2}, & \omega \leq \omega_{\text{мин}}; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|}, & \omega_{\text{мин}} < \omega \leq \omega_{\text{рез}}; \\ \operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|}, & \omega > \omega_{\text{рез}}. \end{cases} \quad (6.49)$$

РФ, для якого  $\omega_{\text{рез}} = \omega_{\text{мин}}$ , має ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{b_0 - b_2 \omega^2}, & \omega \leq \omega_{\text{рез}}; \\ \operatorname{arctg} \frac{b_1 \omega}{|b_0 - b_2 \omega^2|}, & \omega > \omega_{\text{рез}}. \end{cases} \quad (6.50)$$

На рис. 6.23 зображено графіки ФЧХ розглянутих фільтрів згідно з формулами (6.48)–(6.50).

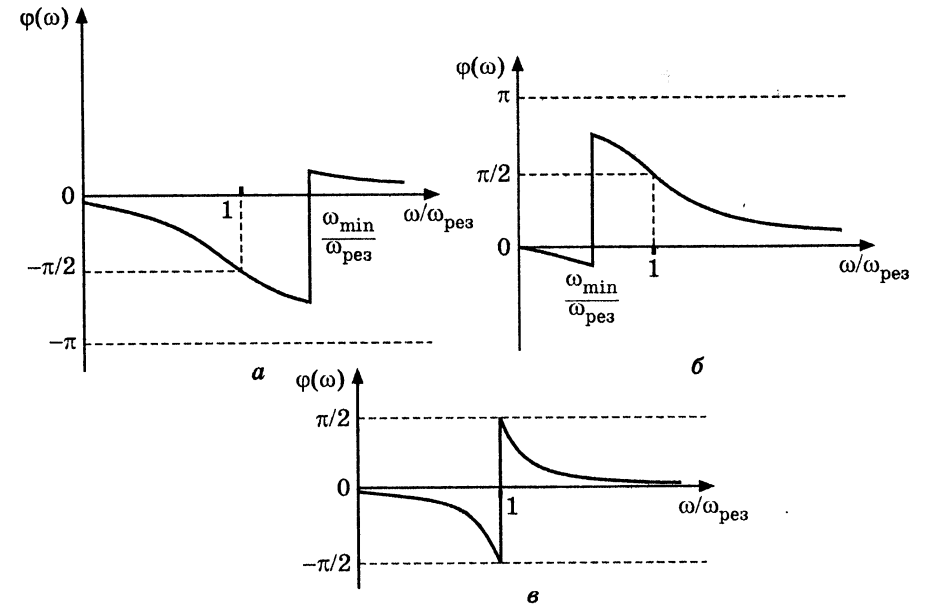


Рис. 6.23. ФЧХ фільтрів:  $a$  — РФНЧ;  $b$  — РФВЧ;  $c$  — РФ

З графіків видно, що на відміну від фільтрів нижніх і верхніх частот (рис. 6.5,  $b$  і рис. 6.9,  $b$ ), ФЧХ режекторних фільтрів мають на частоті  $\omega_{\text{мин}}$  стрибок на  $\pi$ .

ФЧХ усіх розглянутих фільтрів другого порядку мають спадний характер.

#### 6.4. Передатні функції схем з операційними підсилювачами

Нерідко за допомогою ланки другого порядку не вдається задовольнити вимоги до АЧХ фільтра (див. рис. 6.4). Тоді виникає необхідність у каскадному з'єднанні декількох ланок, які утворюють фільтр порядку  $n > 2$ . Це з'єднання може бути узгодженим або розв'язаним. Узгодження передбачає таке з'єднання, коли увімкнення наступної ланки (або навантаження) не змінює частотних характеристик попередньої ланки. Узгодження має виконуватись як у смузі пропускання, так і в смузі затримання. При каскадному з'єднанні розглянутих вище (підрозд. 6.2) ланок  $\Gamma$ -,  $T$ - або  $\Pi$ -подібних реактивних фільтрів узгодження між ланками виконується автоматично, завдяки утворенню східчастої схеми. На жаль, цього не можна сказати про з'єднання останньої ланки з навантаженням  $R_H \cong \sqrt{L/C}$ , яке дозволяє виконати умови узгодження

реактивного фільтра тільки на одній частоті у смузі пропускання. Наслідком цього є відмінність розглянутих частотних характеристик від реальних у бік погіршення. Такі ж наслідки виникають, якщо врахувати втрати в реальних елементах, котрі реалізують ідеальні індуктивності та ємності.

Для побудови каскадно-розв'язаних фільтрів необхідно застосовувати ланки, які мають великий вхідний опір  $R_{вх}$  (щоб уникнути впливу на попередню ланку) і малий вихідний опір  $R_{вих}$ . Ланки таких фільтрів, котрі, крім пасивних, містять ще й електронні елементи, розглянемо нижче. Формули для КПФ (6.3, 6.5–6.7) можна використовувати і для схем, які, крім двополюсних елементів, містять три-, чотириполюсні (транзистори, операційні підсилювачі (ОП) та ін.), взагалі багатопольсні елементи, які працюють у лінійному режимі, тобто в режимі малих сигналів.

Особливості складання матриці комплексних провідностей  $(\underline{Y})$  доцільно розглянути на прикладі схеми (рис. 6.24), утвореної внаслідок паралельного з'єднання двох чотириполюсників з комплексними провідностями, другий індекс у позначенні яких відповідає номеру чотириполюсника.

Перший чотириполюсник з незалежними вузлами  $a, b$  має матрицю  $(\underline{Y})_1$  комплексних провідностей, складену згідно з методом вузлових напруг:

$$(\underline{Y})_1 = \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{21} & -\underline{Y}_{21} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{31} \end{pmatrix}.$$

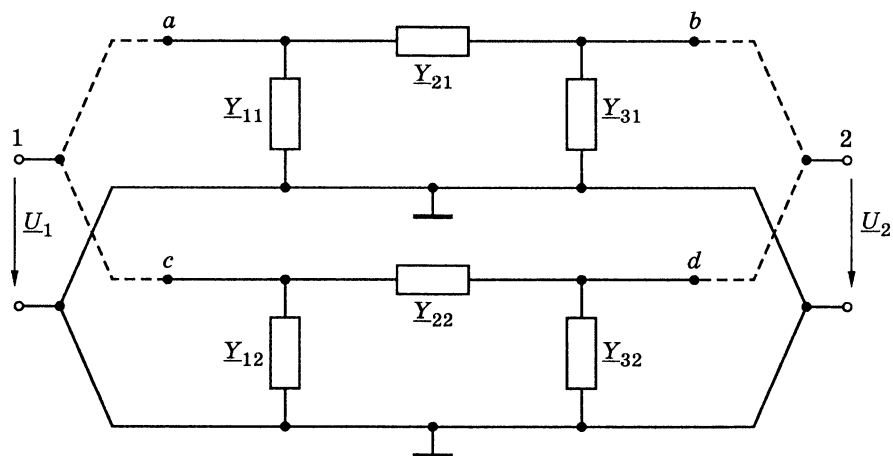


Рис. 6.24. Паралельне з'єднання двох чотириполюсників

Відповідно, для другого чотириполюсника з незалежними вузлами  $c, d$  матриця комплексних провідностей становить:

$$(\underline{Y})_2 = \begin{matrix} c & d \\ d & c \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{22} \\ -\underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{32} \end{pmatrix}.$$

З'єднуючи чотириполюсники паралельно, можна отримати чотириполюсник з незалежними вузлами 1 ( $a, c$ ) та 2 ( $b, d$ ), матриця комплексних провідностей якого дорівнює сумі матриць  $(\underline{Y})_1$  та  $(\underline{Y})_2$ , тобто  $(\underline{Y}) = (\underline{Y})_1 + (\underline{Y})_2$ :

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{21} - \underline{Y}_{22} \\ -\underline{Y}_{21} - \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{21} + \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{32} \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо у чотириполюсниках з матрицями  $(\underline{Y})'$  і  $(\underline{Y})''$  (рис. 6.25) виділити вузли  $p, q, r$ , то після їх об'єднання матриця  $(\underline{Y})$  новоутвореної схеми становитиме:

$$(\underline{Y}) = (\underline{Y})' + (\underline{Y})''. \quad (6.51)$$

Якщо виділити вхідний вузол  $a$  і вихідний вузол  $b$  новоутвореної схеми (рис. 6.25, б), її КПФ можна визначати згідно з формулами (6.3), (6.5)–(6.7). Якщо один з чотириполюсників (рис. 6.25, а) є операційним підсилювачем, формули передатних функцій новоутвореної схеми (рис. 6.25, б) з огляду на властивості ОП визначатимуться матрицями комплексних провідностей нижчого рангу.

*Операційний підсилювач* — це мікросхема, що реалізує підсилювач з дуже великим коефіцієнтом підсилення  $\mu$ ; він має дві пари вхідних затискачів та одну — вихідних. Схеми з ОП використовують у колах автоматичного регулювання, де вони виконують операції формування, диференціювання, інтегрування та інші, і тому отримали назву — операційні.

Схемне зображення ОП показано на рис. 6.26, а, де  $p$  — інвертувальний вхід,  $q$  — прямий (неінвертувальний) вхід,  $r$  — вихід. Усі напруги визначаються

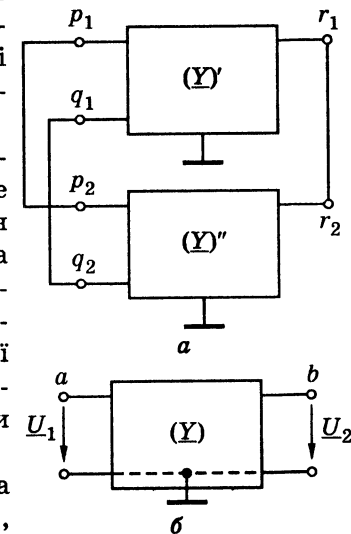


Рис. 6.25.

Схеми чотириполюсників

відносно заземленого вузла. ОП живиться від двох джерел постійної напруги (+E, -E), котрі на схемі не показані, як і елементи корекції.

За своїми властивостями ОП — це джерело напруги  $\underline{E}$ , кероване вхідними напругами  $\underline{U}_p$  та  $\underline{U}_q$ , точніше їх різницею, звідси вихідна напруга становить:

$$\underline{U}_r = -\underline{E} = \mu(\underline{U}_q - \underline{U}_p) \text{ або } \underline{E} = \mu(\underline{U}_p - \underline{U}_q), \quad (6.52)$$

де  $\mu$  — коефіцієнт підсилення (для сучасних ОП  $\mu = 10^5 \dots 10^6$ ). Якщо  $\underline{U}_q = 0$ , то  $\underline{U}_r = -\mu \underline{U}_p$ , тому вхід  $p$  має назву інвертувального; при  $\underline{U}_p = 0$   $\underline{U}_r = \mu \underline{U}_q$ , тому вхід  $q$  — прямий (неінвертувальний).

Якщо обидві вхідні напруги відмінні від нуля, вихідна напруга визначається за формулою (6.52), а таке увімкнення ОП має назву *диференційного, або чотирьополусного*. Вхідний опір  $R_{вх}$  сучасних ОП між вузлом  $p$  та заземленим вузлом, а також між вузлом  $q$  та заземленим вузлом становить  $10^6 \dots 10^{12}$  Ом, а вихідний опір  $R_{вих}$  між вузлом  $r$  та заземленим вузлом становить десятки омів, тобто джерело  $\underline{E}$  є майже ідеальним керованим джерелом напруги (рис. 6.26, б). За такою еквівалентною схемою не можна скласти матрицю провідностей ( $\underline{Y}$ )". Щоб отримати матрицю провідностей ОП, необхідно врахувати опір  $R_{вих}$ , увімкнений послідовно з дже-

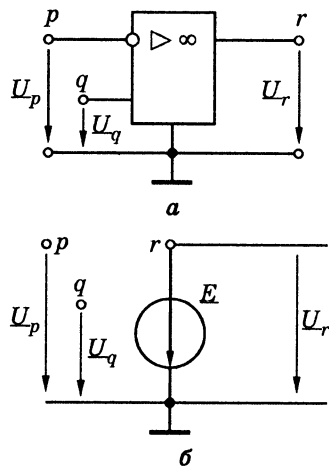


Рис. 6.26.

Схемне зображення ОП та його еквівалентна схема

релом  $\underline{E}$  (рис. 6.27, а). Для спрощення запису цей опір у подальшому позначено  $R_{вих} = R$ .

Перетворення керованого джерела напруги з параметрами  $\underline{E}$ ,  $R$  в еквівалентне кероване джерело струму з параметрами  $\underline{I} = \underline{E}/R$ ,  $G = 1/R$  (рис. 6.27, б) дозволяє з урахуванням виразу (6.52) записати:  $\underline{I} = G\mu(\underline{U}_p - \underline{U}_q)$ . Струми  $\underline{I}_p$ ,  $\underline{I}_q$ ,  $\underline{I}_r$ , які втікають у вузли  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , можна визначити через вузлові напруги  $\underline{U}_p$ ,  $\underline{U}_q$ ,  $\underline{U}_r$ :

$$\begin{cases} \underline{I}_p = 0; \\ \underline{I}_q = 0; \\ \underline{I}_r = G\mu(\underline{U}_p - \underline{U}_q) + G\underline{U}_r. \end{cases}$$

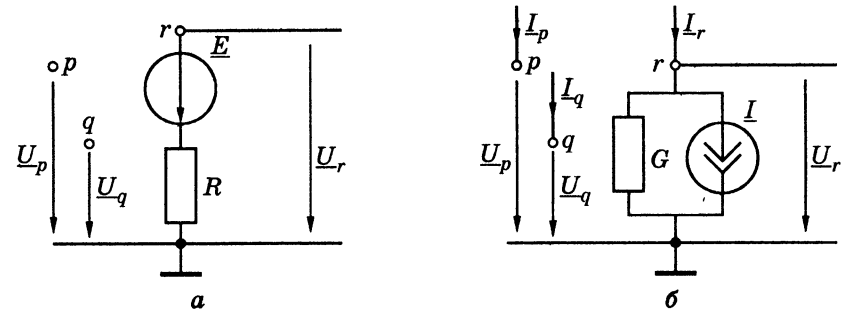


Рис. 6.27. Еквівалентні схеми ОП з керованими джерелами різних видів

Матрична форма цієї системи рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}_q \\ \underline{I}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu G & -\mu G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_r \end{pmatrix},$$

тобто матриця провідностей ОП буде такою:

$$(\underline{Y})'' = \begin{matrix} & p & q & r \\ \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu G & -\mu G & G \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (6.53)$$

Матриця комплексних провідностей ( $\underline{Y}$ )' схеми (рис. 6.25, а), що містить тільки двополусні елементи і має  $m$  незалежних вузлів, записується у вигляді:

$$(\underline{Y})' = \begin{matrix} & 1 & \dots & p & q & r & \dots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ p \\ q \\ r \\ \dots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \dots & \underline{Y}_{1p} & \underline{Y}_{1q} & \underline{Y}_{1r} & \dots & \underline{Y}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{p1} & \dots & \underline{Y}_{pp} & \underline{Y}_{pq} & \underline{Y}_{pr} & \dots & \underline{Y}_{pm} \\ \underline{Y}_{q1} & \dots & \underline{Y}_{qp} & \underline{Y}_{qq} & \underline{Y}_{qr} & \dots & \underline{Y}_{qm} \\ \underline{Y}_{r1} & \dots & \underline{Y}_{rp} & \underline{Y}_{rq} & \underline{Y}_{rr} & \dots & \underline{Y}_{rm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{m1} & \dots & \underline{Y}_{mp} & \underline{Y}_{mq} & \underline{Y}_{mr} & \dots & \underline{Y}_{mm} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (6.54)$$

До складу власних і взаємних комплексних провідностей входять провідності резисторів  $G$  та ємностей  $j\omega C$ . Застосування ОП дозволяє без використання індуктивностей отримати передатні функції схем з такими ж вибірними властивостями, як і у резонансних кіл. Схеми з ОП мають назву ARC-схем. З'єднуючи



чотириполюсники паралельно (рис. 6.25, а), з урахуванням рівняння (6.52) можна записати матрицю ( $\underline{Y}$ ) схеми (рис. 6.25, б):

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & p & q & r & \dots & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ p \\ q \\ r \\ \dots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \dots & \underline{Y}_{1p} & \underline{Y}_{1q} & \underline{Y}_{1r} & \dots & \underline{Y}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{p1} & \dots & \underline{Y}_{pp} & \underline{Y}_{pq} & \underline{Y}_{pr} & \dots & \underline{Y}_{pm} \\ \underline{Y}_{q1} & \dots & \underline{Y}_{qp} & \underline{Y}_{qq} & \underline{Y}_{qr} & \dots & \underline{Y}_{qm} \\ \underline{Y}_{r1} & \dots & \underline{Y}_{rp} + \mu G & \underline{Y}_{rq} - \mu G & \underline{Y}_{rr} + G & \dots & \underline{Y}_{rm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{m1} & \dots & \underline{Y}_{mp} & \underline{Y}_{mq} & \underline{Y}_{mr} & \dots & \underline{Y}_{mm} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.55)$$

Комплексний коефіцієнт передачі за напругою згідно з виразом (6.3)

$$H_U(j\omega) = \frac{U_b}{U_a} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}. \quad (6.56)$$

Матриця (6.55) відрізняється від матриці (6.54) тільки елементами  $r$ -го рядка, які визначаються параметрами ОП. Алгебраїчні доповнення, які входять у вираз (6.56), розкривають за елементами  $r$ -го рядка матриці (6.55):

$$\Delta_{ab} = \underline{Y}_{r1} \Delta_{ab,r1} + (\underline{Y}_{rp} + \mu G) \Delta_{ab,rp} + (\underline{Y}_{rq} - \mu G) \Delta_{ab,rq} + (\underline{Y}_{rr} + G) \Delta_{ab,rr} + \dots + \underline{Y}_{rm} \Delta_{ab,rm},$$

де  $\Delta_{ab,r1}$  — подвійне алгебраїчне доповнення, яке одержують з матриці (6.55), викреслюючи рядки з номерами  $a, r$  та стовпці з номерами  $b, 1$ .

Перетворення виразів

$$\begin{aligned} \Delta_{ab} &= \mu G \Delta_{ab,rp} - \mu G \Delta_{ab,rq} + G \Delta_{ab,rr} + \\ &+ \underline{Y}_{r1} \Delta_{ab,r1} + \underline{Y}_{rp} \Delta_{ab,rp} + \underline{Y}_{rq} \Delta_{ab,rq} + \underline{Y}_{rr} \Delta_{ab,rr} + \dots + \underline{Y}_{rm} \Delta_{ab,rm} = \\ &= \mu G \Delta_{ab,rp} - \mu G \Delta_{ab,rq} + G \Delta_{ab,rr} + \Delta'_{ab}; \\ \Delta_{aa} &= \mu G \Delta_{aa,rp} - \mu G \Delta_{aa,rq} + G \Delta_{aa,rr} + \Delta'_{aa}, \end{aligned}$$

де  $\Delta'_{ab}, \Delta'_{aa}$  — алгебраїчні доповнення матриці ( $\underline{Y}$ ), розкриті за елементами  $r$ -го рядка, дозволяє записати таке:

$$\begin{aligned} \Delta_{ab} &= \Delta'_{ab} + \mu G (\Delta_{ab,rp} - \Delta_{ab,rq}) + G \Delta_{ab,rr}; \\ \Delta_{aa} &= \Delta'_{aa} + \mu G (\Delta_{aa,rp} - \Delta_{aa,rq}) + G \Delta_{aa,rr}. \end{aligned}$$

З теорії визначників відомо:

$$\Delta_{ab,rp} - \Delta_{ab,rq} = \Delta_{ab,r(p+q)}.$$

Сумарне алгебраїчне доповнення  $\Delta_{ab,r(p+q)}$  можна здобути з матриці ( $\underline{Y}$ ) (6.55), яка містить провідності тільки двополюсних елементів, викресливши рядки з номерами  $a, r$  і стовпці з номерами  $b, p$  після утворення нового стовпця з номером  $q$ , провідності якого — це сума провідностей стовпців  $p$  та  $q$ .

З урахуванням перетворень можна записати:

$$\begin{aligned} \Delta_{ab} &= \Delta'_{ab} + \mu G \Delta_{ab,r(p+q)} + G \Delta_{ab,rr}; \\ \Delta_{aa} &= \Delta'_{aa} + \mu G \Delta_{aa,r(p+q)} + G \Delta_{aa,rr}. \end{aligned}$$

Комплексний коефіцієнт передачі за напругою схеми, яка містить один ОП, з урахуванням його параметрів  $G, \mu$  становитиме:

$$H_U(j\omega)_{G,\mu} = \frac{\Delta'_{ab} + \mu G \Delta_{ab,r(p+q)} + G \Delta_{ab,rr}}{\Delta'_{aa} + \mu G \Delta_{aa,r(p+q)} + G \Delta_{aa,rr}}.$$

Якщо вихідний опір ОП  $R \rightarrow 0$ , тобто  $G \rightarrow \infty$ , то в останній формулі можна враховувати тільки параметр  $\mu$ . Тоді

$$H_U(j\omega)_{\mu} = \lim_{G \rightarrow \infty} H_U(j\omega)_{G,\mu}.$$

Граничний перехід призводить до співвідношення:

$$H_U(j\omega)_{\mu} = \frac{\mu \Delta_{ab,r(p+q)} + \Delta_{ab,rr}}{\mu \Delta_{aa,r(p+q)} + \Delta_{aa,rr}}.$$

Якщо взяти до уваги, що перший доданок з множником  $\mu$  ( $\mu = 10^5 \dots 10^6$ ) значно більший за другий, комплексний коефіцієнт передачі за напругою можна знайти як границю:

$$H_U(j\omega) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} H_U(j\omega) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mu \Delta_{ab,r(p+q)} + \Delta_{ab,rr}}{\mu \Delta_{aa,r(p+q)} + \Delta_{aa,rr}}.$$

Остаточно КПФ для схеми з ОП (рис. 6.26, а) матиме вигляд:

$$H_U(j\omega) = \frac{\Delta_{ab,r(p+q)}}{\Delta_{aa,r(p+q)}}. \quad (6.57)$$

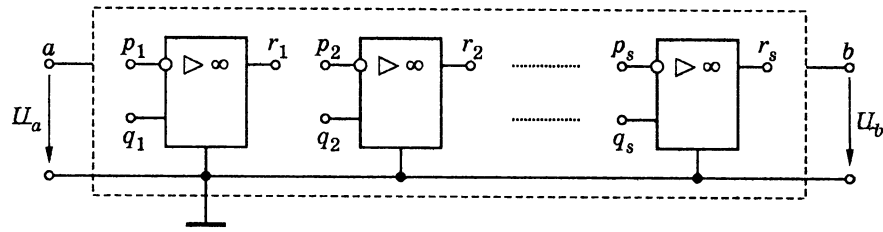


Рис. 6.28. Структура схеми з  $s$  ОП (диференційне увімкнення)

Якщо схема містить  $s$  операційних підсилювачів (рис. 6.28), її КПФ становитиме:

$$H_U(j\omega) = \frac{\Delta_{ab, r_1(p_1+q_1), r_2(p_2+q_2), \dots, r_s(p_s+q_s)}}{\Delta_{aa, r_1(p_1+q_1), r_2(p_2+q_2), \dots, r_s(p_s+q_s)}}. \quad (6.58)$$

Тобто чим більшу кількість ОП містить схема, тим більше викреслюється рядків і підсумовується стовпців у вихідній матриці ( $Y$ ) і тим менше залишається рядків і стовпців у підматриці, з якої визначаються алгебраїчні доповнення у формулі (6.58).

Знак алгебраїчного доповнення чисельника визначається послідовністю викреслених рядків:  $a, r_1, r_2, \dots, r_s$  та послідовністю викреслених стовпців:  $b, p_1, p_2, \dots, p_s$ . Ці дві послідовності слід упорядкувати (індекси мають зростати або зменшуватись) перестановками тільки двох сусідніх індексів.

Отже, знак чисельника визначається співвідношенням:

$$(-1)^{\sigma_1 + \varepsilon_1},$$

де  $\sigma_1$  — сума індексів всіх елементів, що складають обидві послідовності;  $\varepsilon_1$  — кількість перестановок (інверсій) у двох послідовностях.

Аналогічно визначається знак алгебраїчного доповнення знаменника:  $(-1)^{\sigma_2 + \varepsilon_2}$ , де  $\sigma_2$  — сума індексів у послідовностях  $(a, r_1, r_2, \dots, r_s)$ ,  $(a, p_1, p_2, \dots, p_s)$ , а  $\varepsilon_2$  — кількість інверсій у цих послідовностях.

Так, наприклад, кількість інверсій у послідовності (7, 2, 4, 6) дорівнює трьом: після першої перестановки послідовність буде такою: (2, 7, 4, 6), після другої — (2, 4, 7, 6), після третьої — (2, 4, 6, 7), тобто  $\varepsilon = 3$ .

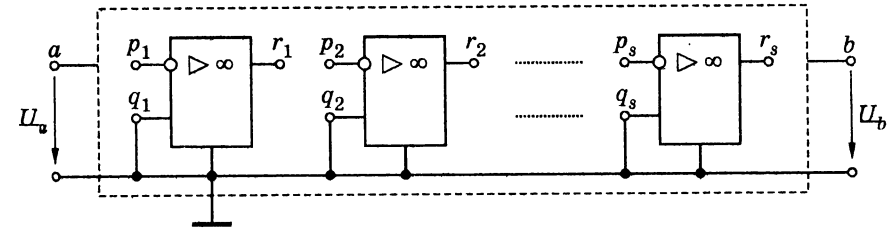


Рис. 6.29. Структура схеми з  $s$  ОП (триполюсне увімкнення)

Якщо прямі входи  $q_i$  операційних підсилювачів заземлено (рис. 6.29), увімкнення ОП називається *триполюсним*. Комплексний коефіцієнт передачі за напругою схеми (рис. 6.29) здобувають з виразу (6.58), не враховуючи індексів  $q_i$ :

$$H_U(j\omega) = \frac{\Delta_{ab, r_1 p_1, r_2 p_2, \dots, r_s p_s}}{\Delta_{aa, r_1 p_1, r_2 p_2, \dots, r_s p_s}}. \quad (6.59)$$

Знаки алгебраїчних доповнень виразу (6.59) визначаються так само, як і для рівняння (6.58). Щоб збільшити вхідний опір схем (рис. 6.28, 6.29), вузол  $a$  з'єднують з виходом будь-якого ОП. Такі схеми дозволяють утворити каскадно-розв'язані реалізації фільтрів.

Якщо схема містить ОП у чотириполюсному увімкненні, це враховується індексами  $r_i(p_i + q_i)$  в алгебраїчному доповненні КПФ; якщо схема містить ОП у триполюсному увімкненні, в алгебраїчному доповненні залишаються індекси  $r_i p_i$ .

Розглянемо декілька схем з ОП, які реалізують ланки ARC-фільтрів.

**Приклад 6.1.** Визначити коефіцієнт передачі за напругою схеми з ОП (рис. 6.30).

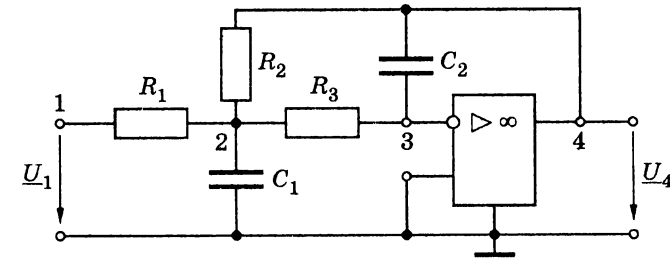


Рис. 6.30. Схема кола у прикладі 6.1

**Розв'язання.** Визначимо кількість незалежних вузлів — чотири. Вхідний вузол  $a=1$ , вихідний  $b=4$ , інвертувальний вхід ОП  $p=3$ , вихід ОП  $r=4$ . Тоді комплексний коефіцієнт передачі становитиме:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_4}{U_1} = \frac{\Delta_{ab, rp}}{\Delta_{aa, rp}}; \quad H_U(j\omega) = \frac{\Delta_{14, 43}}{\Delta_{11, 43}}$$

Щоб визначити алгебраїчні доповнення, складемо матрицю комплексних провідностей  $(\underline{Y})$ , яка містить тільки двополюсні елементи:

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1 & -G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_3 & G_3 + j\omega C_2 & -j\omega C_2 \\ 0 & -G_2 & -j\omega C_2 & G_2 + j\omega C_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Визначимо чисельник КПФ.

Після викреслення рядків з номерами 1, 4 і стовпців з номерами 4, 3 залишаються рядки з номерами 2, 3 і стовпці з номерами 1, 2, котрі утворюють підматрицю  $(\underline{Y})_a$ :

$$(\underline{Y})_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1 \\ 0 & -G_3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Отже,  $\Delta_{14, 43} = (-1)^{\sigma_1 + \varepsilon_1} G_1 G_3$ .

Сума індексів  $\sigma_1 = 1 + 4 + 4 + 3 = 12$ . Обидві послідовності, які складають номери викреслених рядків (1, 4) і стовпців (4, 3), упорядковані, але перша має зростаючий характер, а друга — спадний. Виконавши одну перестановку, другу послідовність робимо зростаючою: (3, 4), тобто  $\varepsilon_1 = 1$ .

Остаточно матимемо:

$$\Delta_{14, 43} = (-1)^{13} G_1 G_3 = -G_1 G_3.$$

Знаменник КПФ визначимо з підматриці  $(\underline{Y})_b$ :

$$(\underline{Y})_b = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1 & -G_2 \\ -G_3 & -j\omega C_2 \end{pmatrix} \end{matrix};$$

$$\Delta_{11, 43} = (-1)^{\sigma_2 + \varepsilon_2} [(G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1)(-j\omega C_2) - G_2 G_3].$$

Послідовність викреслених рядків: (1, 4); стовпців: (1, 3). Враховуючи, що  $\sigma_2 = 1 + 4 + 1 + 3 = 9$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ , матимемо:

$$\begin{aligned} \Delta_{11, 43} &= (-1)^9 [-(j\omega)^2 C_1 C_2 - j\omega C_2 (G_1 + G_2 + G_3) - G_2 G_3] = \\ &= (j\omega)^2 C_1 C_2 + j\omega C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3; \\ H_U(j\omega) &= \frac{G_1 G_3}{(j\omega)^2 C_1 C_2 + j\omega C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3}. \end{aligned}$$

Від'ємний знак перед дробом — наслідок того, що вхідна дія подається на інвертувальний вхід. Коефіцієнти КПФ дорівнюють відповідно:  $a_0 = G_1 G_3$ ,  $b_2 = C_1 C_2$ ,  $b_1 = C_2 (G_1 + G_2 + G_3)$ ,  $b_0 = G_2 G_3$ , тобто розглянута схема є ФНЧ.

**Приклад 6.2.** Визначити коефіцієнт передачі за напругою схеми з ОП (рис. 6.31).

**Розв'язання.** Запишемо формулу для комплексного коефіцієнта передачі за напругою:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_7}{U_1} = \frac{\Delta_{17, 72, 34, 56}}{\Delta_{11, 72, 34, 56}} = \frac{\Delta_a}{\Delta_b}. \quad (6.60)$$

Складемо матрицю провідностей двополюсних елементів:

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & -G_2 - j\omega C_1 \\ 0 & -G_3 & G_3 + j\omega C_2 & -j\omega C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega C_2 & G_4 + j\omega C_2 & -G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_4 & G_4 + G_5 & -G_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_5 & G_5 + G_6 & -G_6 \\ 0 & -G_2 - j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 & -G_6 & G_5 + G_6 + j\omega C_1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Щоб визначити чисельник  $\Delta_a$  виразу (6.60), необхідно викреслити рядки з номерами 1, 7, 3, 5 (в результаті залишаться рядки з номерами 2, 4, 6) та стовпці з номерами 7, 2, 4, 6 (залишаться стовпці з номерами 1, 3, 5):

$$(\underline{Y})_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -G_1 & -G_3 & 0 \\ 0 & -j\omega C_2 & -G_4 \\ 0 & -G_3 & -G_5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

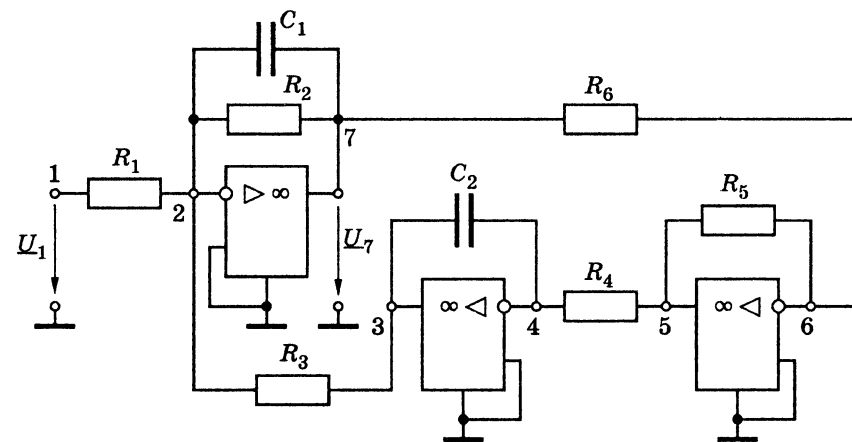


Рис. 6.31. Схема кола до прикладу 6.2

Отже,

$$\Delta_a = (-1)^{\sigma_1 + \varepsilon_1} (-j\omega C_2 G_1 G_5),$$

де  $\sigma_1 = 1 + 7 + 3 + 5 + 7 + 2 + 4 + 6 = 35$ .

Послідовність (1, 7, 3, 5) упорядковується двома перестановками, а послідовність (7, 2, 4, 6) — трьома, тобто  $\varepsilon_1 = 2 + 3 = 5$ .

Тоді  $(-1)^{35+5} = 1$ ;  $\Delta_a = -j\omega C_2 G_1 G_5 = -j\omega a_1$ .

Визначаючи знаменник, виключають рядки з номерами 1, 7, 3, 5 (залишають — 2, 4, 6), як і для  $\Delta_a$ . Номери викреслених стовпців — 1, 2, 4, 6 (залишаються стовпці з номерами 3, 5, 7):

$$(\underline{Y})_b = 4 \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -G_3 & 0 & -G_2 - j\omega C_1 \\ -j\omega C_2 & -G_4 & 0 \\ 6 & 0 & -G_5 & -G_6 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\Delta_b = (-1)^{\sigma_2 + \varepsilon_2} [-G_3 G_4 G_6 - j\omega C_2 G_2 G_5 - (j\omega)^2 C_1 C_2 G_5],$$

де  $\sigma_2 = 1 + 7 + 3 + 5 + 1 + 2 + 4 + 6 = 29$ ;  $\varepsilon_2 = 2$ .

Остаточно матимемо:

$$\Delta_b = (j\omega)^2 C_1 C_2 G_5 + j\omega C_2 G_2 G_5 + G_3 G_4 G_6 = (j\omega)^2 b_2 + j\omega b_1 + b_0.$$

Отже, схема (рис. 6.31) реалізує СФ з КПФ:

$$H_U(j\omega) = \frac{j\omega C_2 G_1 G_5}{(j\omega)^2 C_1 C_2 G_5 + j\omega C_2 G_2 G_5 + G_3 G_4 G_6}.$$

**Приклад 6.3.** Визначити коефіцієнт передачі за напругою схеми (рис. 6.32), яка містить ОП у чотири- і триполюсному увімкненні.

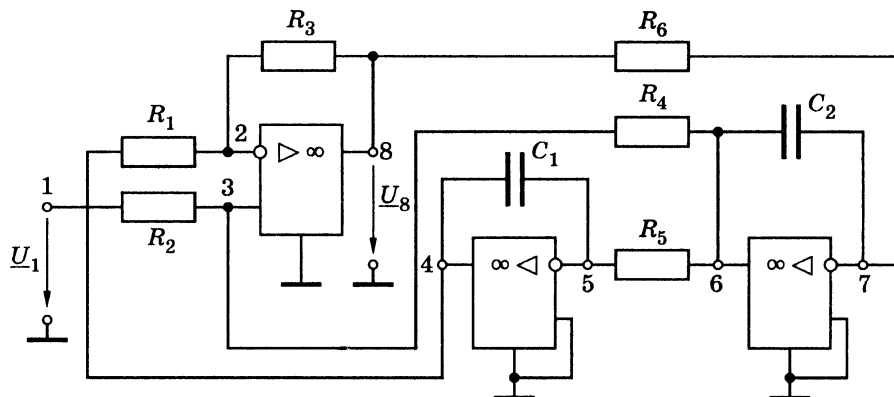


Рис. 6.32. Схема кола у прикладі 6.3

**Розв'язання.** Комплексний коефіцієнт передачі за напругою за умови, що  $a = 1$ ,  $b = 8$ ,  $r_1 = 8$ ,  $p_1 = 2$ ,  $q_1 = 3$ ,  $r_2 = 4$ ,  $p_2 = 5$ ,  $r_3 = 6$ ,  $p_3 = 7$ , становитиме:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_8}{U_1} = \frac{\Delta_{18, 8(2+3), 45, 67}}{\Delta_{11, 8(2+3), 45, 67}} = \frac{\Delta_a}{\Delta_b}.$$

Складемо матрицю комплексних провідностей двополюсних елементів схеми (рис. 6.32):

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & -G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & G_1 + G_3 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & -G_3 \\ 4 & -G_2 & 0 & G_2 + G_4 & 0 & 0 & -G_4 & 0 \\ 5 & 0 & -G_1 & 0 & G_1 + j\omega C_1 & -j\omega C_1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -j\omega C_1 & G_5 + j\omega C_1 & -G_5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & -G_4 & 0 & -G_5 & G_4 + G_5 + j\omega C_2 & -j\omega C_2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega C_2 & G_6 + j\omega C_2 \\ 8 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & -G_6 & G_3 + G_6 \end{pmatrix}.$$

На відміну від розглянутих прикладів 6.1, 6.2, де рядки і стовпці тільки викреслюються, в цьому випадку треба утворити стовпець, підсумовуючи провідності у стовпцях з номерами 2, 3. Новоутворений стовпець має номер 3+, а стовпець з номером 2 зникає, тобто послідовність викреслених рядків алгебраїчного доповнення  $\Delta_a$  становитиме: (1, 8, 4, 6), залишаються рядки з номерами 2, 3, 5, 7, а послідовність викреслених стовпців — (8, 2, 5, 7), тобто залишаються стовпці з номерами 1, 3+, 4, 6.

Сума індексів  $\sigma_1 = 1 + 8 + 4 + 6 + 8 + 2 + 5 + 7 = 41$ . Послідовність викреслених рядків упорядковується двома перестановками, а послідовність викреслених стовпців — трьома:  $\varepsilon_1 = 5$ .

Тоді  $(-1)^{\sigma_1 + \varepsilon_1} = 1$ , а підматриця чисельника становитиме:

$$(\underline{Y})_a = 5 \begin{pmatrix} 1 & 3+ & 4 & 6 \\ 2 & 0 & G_1 + G_3 & -G_1 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_4 & 0 & -G_4 \\ 5 & 0 & 0 & -j\omega C_1 & -G_5 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -j\omega C_2 \end{pmatrix}.$$

Позначка «3+» вказує стовпець, провідності якого визначаються як сума провідностей:  $\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i3}$ .

З підматриці  $(\underline{Y})_a$  визначимо алгебраїчне доповнення чисельника  $\Delta_a$ :

$$\Delta_a = G_2(G_1 + G_3)(j\omega)^2 C_1 C_2 = (j\omega)^2 a_2.$$

Алгебраїчне доповнення знаменника  $\Delta_b$  утворюється тими ж рядками, що і  $\Delta_a$ . Послідовність викреслених стовпців упорядкована (1, 2, 5, 7), після викреслювання залишаються стовпці з номерами (3+, 4, 6, 8). Сума

індексів  $\sigma_1 = 1 + 8 + 4 + 6 + 1 + 2 + 5 + 7 = 34$ , кількість інверсій  $\varepsilon_2 = 2$ ; знак доповнення визначається виразом  $(-1)^{\sigma_2 + \varepsilon_2} = 1$ .

Алгебраїчне доповнення знаменника  $\Delta_b$  визначається з підматриці  $(\underline{Y})_b$ :

$$(\underline{Y})_b = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3+ & 4 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} G_1 + G_3 & -G_1 & 0 & -G_3 \\ G_2 + G_4 & 0 & -G_4 & 0 \\ 0 & -j\omega C_1 & -G_5 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega C_2 & -G_6 \end{pmatrix} \end{matrix};$$

$$\Delta_b = (j\omega)^2 C_1 C_2 G_3 (G_2 + G_4) + j\omega C_1 G_4 G_6 (G_1 + G_3) + G_1 G_5 G_6 (G_2 + G_4);$$

$$\Delta_b = (j\omega)^2 b_2 + j\omega b_1 + b_0.$$

Отже, розглянута схема є ланкою другого порядку ФВЧ з КПФ:

$$H_U(j\omega) = - \frac{(j\omega)^2 C_1 C_2 G_2 (G_1 + G_3)}{(j\omega)^2 C_1 C_2 G_3 (G_2 + G_4) + j\omega C_1 G_4 G_6 (G_1 + G_3) + G_1 G_5 G_6 (G_2 + G_4)}.$$

### 6.5. Топологічний метод визначення передатних функцій кола, яке містить обернені елементи

Застосування матричного методу для визначення КПФ кіл, які містять двополюсні (обернені) та багатополюсні елементи, було розглянуто у підрозд. 6.1, 6.4. Наприклад, схема електричного кола з двополюсними оберненими елементами (рис. 6.33, а) має відповідну матричну модель:

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_1 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 & -\underline{Y}_3 \\ -\underline{Y}_1 & -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (6.61)$$

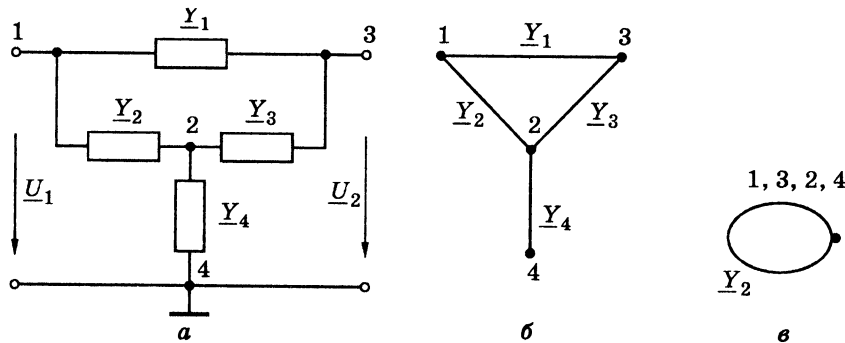


Рис. 6.33. Коло з двополюсними елементами

Якщо для визначення КПФ кола (6.3), (6.5)–(6.7) використовувати матричний метод, виникає необхідність у знаходженні алгебраїчних доповнень та визначника матриці комплексних провідностей кола  $(\underline{Y})$ , які містять як додатні, так і від'ємні доданки. Деякі з цих доданків взаємно скорочуються, що свідчить про надлишковість *матричної моделі* кола.

Згідно з матричним методом комплексний коефіцієнт передачі кола (рис. 6.33, а) за напругою

$$H_U(j\omega) = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}},$$

де  $\Delta_{13}$ ,  $\Delta_{11}$  — алгебраїчні доповнення матриці комплексних провідностей (6.61):

$$\Delta_{13} = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 + \underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4); \quad (6.62)$$

$$\Delta_{11} = \underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_3 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_4). \quad (6.63)$$

При визначенні доповнення  $\Delta_{11}$  доданок  $\underline{Y}_3^2$  скорочується.

Згаданого недоліку надлишковості позбавлена *топологічна модель* кола, яку відображає неспрямований граф (рис. 6.33, б). Кожна дуга цього графа має певну провідність, але не має напрямку. Між двома будь-якими вузлами графа можна вибрати *шлях*, який проходить по вітках графа повз його неповторювані вузли.

Шлях — це добуток провідностей віток графа, через які він проходить. Так, між вузлами 1–4 (рис. 6.33, б) є два шляхи:

$$P_1 = \underline{Y}_2 \underline{Y}_4; \quad P_2 = \underline{Y}_1 \underline{Y}_3 \underline{Y}_4.$$

Як відомо, КПФ кола можна визначити за топологічною *формулою Мезона*<sup>1</sup>:

$$H(j\omega) = \frac{\sum P'_k \Delta'_k}{\sum P''_k \Delta''_k}, \quad (6.64)$$

в якій використано шляхи  $P'_k, P''_k$  та їх алгебраїчні доповнення  $\Delta'_k, \Delta''_k$ .

<sup>1</sup> Мезон Самуель Джефферсон, S. J. Mason (1921–1974) — американський вчений, професор Массачусетського технологічного інституту (MIT). У докторській дисертації розробив теорію сигнальних направлених графів. Запропонував концепцію одностороннього підсилення як інструмента для опису лінійних підсилювачів. Використав нові методи вивчення теорії електричних кіл, в тому числі цифровий аналіз сигналів. У співавторстві з Г. Циммерманом (Henry Zimmermann) створив підручники «Теорія електронних кіл» і «Електричні кола і сигнали». Займався також розробкою оптичних скануючих систем і сенсорних засобів для сліпих.

Алгебраїчне доповнення шляху — це визначник графа, що утворюється з графа кола після замикання шляху. Відомо, що визначник графа складається з величин його дерев. Якщо шлях проходить через усі вузли графа, після замикання шляху граф міститиме один вузол, біля якого може утворюватися петля з віток графа. Граф, отриманий після замикання шляху  $P_2$ , зображено на рис. 6.33, в. Вважається, що визначник такого графа дорівнює одиниці ( $\Delta = 1$ ).

Шляхи  $P'_k, P''_k$  у формулі (6.64) різняться між собою.

Шлях  $P'_k$  — це шлях між парою вхідних вузлів, що обов'язково проходить через пару вихідних вузлів, до яких приєднується вимірювальний прилад з одиничною провідністю. Це може бути або вольтметр ( $G_V = 1$ ), або амперметр ( $G_A = 1$ ).

Шлях  $P''_k$  — це усі шляхи між парою вибраних вузлів, але за умови відсутності вхідної дії у колі. Щоб виключити вхідну дію, вхідні вузли або замикаються, якщо дія — напруга, або розмикаються, якщо дія — струм. Крім того, слід виключити вітку з вимірювальним приладом: якщо ним є вольтметр — розімкнути, якщо амперметр — замкнути.

Щоб визначити чисельник у формулі (6.64), необхідно розглянути можливі шляхи між вхідними (1–4) вузлами графа (рис. 6.34, б) і вихідними вузлами 3–4, до яких увімкнемо вольтметр з провідністю  $G_V = 1$  (рис. 6.34, а).

Є два таких шляхи:  $P'_1 = \underline{Y}_1 G_V = \underline{Y}_1$ ;  $P'_2 = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 G_V = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3$  (рис. 6.34, б). Замикаючи шлях  $P'_1$ , отримують граф (рис. 6.34, в), визначник якого є алгебраїчним доповненням шляху  $P'_1$ :  $\Delta'_1 = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$ . Оскільки шлях  $P'_2$  проходить через усі вузли графа, його алгебраїчне доповнення дорівнює одиниці:  $\Delta'_2 = 1$ .

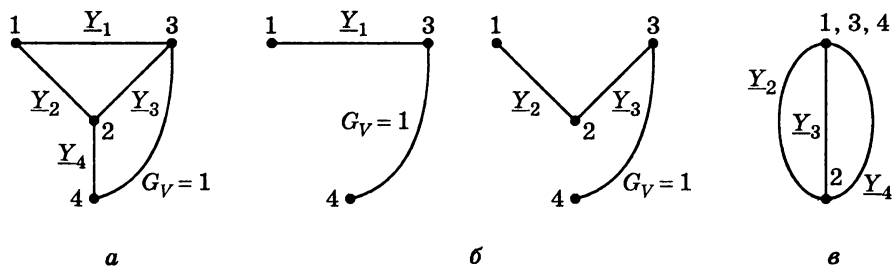


Рис. 6.34. Шляхи  $P'_k$  графа схеми

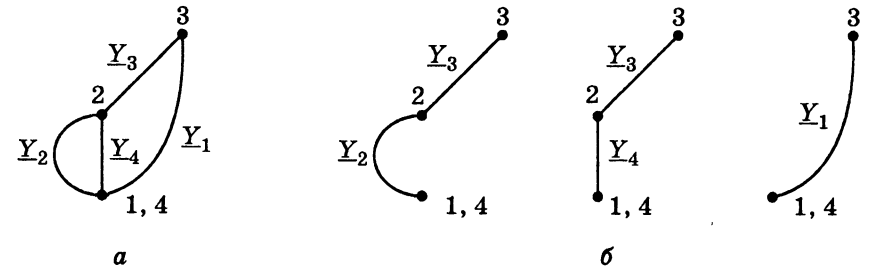


Рис. 6.35. Шляхи  $P''_k$  графа схеми

Отже,

$$\sum P'_k \Delta'_k = P'_1 \Delta'_1 + P'_2 \Delta'_2 = \underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_2 \underline{Y}_3.$$

Цей результат збігається з виразом (6.62).

Щоб визначити знаменник у формулі (6.64), замикають вузли 1–4 вихідного графа, внаслідок чого отримують граф (рис. 6.35, а), у якому відсутня вітка з провідністю вольтметра.

На рис. 6.35, б показано шляхи між вузлами 3–1, 4:

$$P''_1 = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3; P''_2 = \underline{Y}_3 \underline{Y}_4; P''_3 = \underline{Y}_1.$$

Внаслідок замикання шляхів  $P''_1$  та  $P''_2$ , що проходять через усі вузли модифікованого графа (рис. 6.35, а), алгебраїчні доповнення цих шляхів дорівнюватимуть одиниці:  $\Delta''_1 = \Delta''_2 = 1$ . Замикання шляху  $P''_3$  призводить до утворення графа (рис. 6.34, в), тобто  $\Delta''_3 = \Delta'_1 = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$ .

Остаточний вираз для знаменника у формулі (6.64) матиме вигляд:

$$\sum P''_k \Delta''_k = P''_1 \Delta''_1 + P''_2 \Delta''_2 + P''_3 \Delta''_3 = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 + \underline{Y}_3 \underline{Y}_4 + \underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4),$$

що також збігається із співвідношенням (6.63), отриманим за допомогою матричної моделі.

Схеми, які містять необернені елементи (наприклад, ОП), мають графи з направленими вітками. На жаль, такі топологічні моделі стають надлишковими і тому втрачають свою перевагу перед матричними моделями.

## 6.6. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Пояснити поняття: електричний фільтр, смуга пропускання (затримання, переходу).
2. Навести класифікацію фільтрів за частотними властивостями.

## ЛІТЕРАТУРА

3. Які фільтри називають реактивними? Навести схеми найпростіших реактивних ланок ФНЧ (ФВЧ). Пояснити їх дію з фізичних міркувань.
4. З якою метою застосовують каскадне з'єднання ланок фільтра? Яка схема фільтра називається східчастою?
5. Записати формулу для КПФ ланки другого порядку. Які значення набудатимуть коефіцієнти чисельника  $a_i$  для передатних функцій ФНЧ, ФВЧ, СФ, РФ другого порядку?
6. Як реалізують СФ за допомогою резонансних контурів різних типів? Навести приклади схем.
7. Накреслити схеми реактивних  $k$ -фільтрів,  $m$ -фільтрів. Порівняти їх частотні властивості.
8. Розрахувати ФНЧ  $k$ -типу з граничною частотою 1000 Гц і характеристичним опором 100 Ом.  
*Відповідь:*  $L = 31,8$  мГн;  $C = 3,18$  мкФ.
9.  $T$ -подібний ФНЧ складається з двох індуктивностей по 0,1 мГн і ємності 2 мкФ. Визначити частоту зрізу  $f_3$  (граничну частоту). Побудувати графік характеристичного опору  $Z_T(f)$ , якщо відомо, що для ФНЧ  $k$ -типу добуток опору подовжньої вітки та ємнісного опору дорівнює константі  $k^2$ .  
*Вказівка.* Скористатись формулою  $Z_T(f) = k\sqrt{1 + (jf/f_3)^2}$ .  
*Відповідь:*  $f_3 = 15,915$  кГц;  $Z_T = 10\sqrt{1 - (2\pi f)^2 \cdot 10^{-10}}$  Ом.
10. Два  $\Gamma$ -подібних ФВЧ, кожен з яких складається з ємності 1 мкФ та індуктивності 10 мГн, утворюють  $\Pi$ -подібний фільтр. Розрахувати частоту зрізу  $f_3$  (граничну частоту) і характеристичний опір при  $2f_3$  та  $0,5f_3$ .  
*Вказівка.* Скористатись формулою  $Z_{\Pi}(f) = \frac{k}{\sqrt{1 + (f_3/jf)^2}}$ .  
*Відповідь:*  $f_3 = 1592$  Гц; 115,47 Ом;  $-j57,74$  Ом.
11. Дати визначення ідеального ОП. Навести параметри реального ОП.
12. Чим відрізняються диференційне та триполюсне увімкнення ОП?
13. Завдяки яким властивостям ОП, для розрахунку коефіцієнта передачі за напругою можна використовувати приблизну формулу (6.57)?
14. Пояснити, як складається формула для розрахунку коефіцієнта передачі за напругою у випадку каскадного з'єднання схем з ОП.

1. *Атабеков Г. И.* Основы теории цепей : учеб. для вузов. — М. : Энергия, 1969. — 424 с.
2. *Бакалов, В. П.* Основы теории цепей / В. П. Бакалов, В. Ф. Дмитриков, Б. И. Крук. — М. : Радио и связь, 2000. — 592 с.
3. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учеб. для вузов. — 10-е изд. — М. : Гардарики, 2002. — 638 с.
4. *Бирюков, В. Н.* Сборник задач по теории цепей / В. Н. Бирюков, В. П. Попов, В. И. Семенов. — М. : Высш. шк., 1998.
5. *Зернов Н. В., Карнов В. Г.* Теория радиотехнических цепей. — М. : Энергия, 1972. — 816 с.
6. *Лосев, А. К.* Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1985. — 496 с.
7. *Попов, В. П.* Основы теории цепей : учеб. для вузов. — 3-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 2000. — 575 с.
8. *Татур, Т. А.* Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях : учеб. пособие для вузов / Т. А. Татур, В. Е. Татур. — М. : Высш. шк., 2001. — 407 с.
9. *Фриск, В. В.* Основы теории цепей : учеб. пособие. — М. : ИП РадиоСофт, 2002. — 288 с.
10. *Шебес, М. Р.* Задачник по теории линейных электрических цепей М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. — М. : Высш. шк., 1990. — 544 с.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

### А

Автотрансформатор 246  
Ампер 15, 19, 144  
Амперметр 16, 132, 164, 170, 342  
— ідеальний 16  
Амплітуда 124, 135  
— комплексна 141  
Аргумент 139, 143

### Б

Баланс:  
— «моста» 55, 102  
— потужностей 64, 66, 89, 103

### В

Варіометр 238  
Ват 18, 20  
Вебер 25  
Вектор, що обертається 139  
Взаєміндукція 14, 27, 30  
Вибірність кола 273, 306  
Визначник матриці 66, 71, 74, 382  
Випередження за фазою 127, 129, 150  
Відгук (реакція) кола 261, 262  
Вісь:  
— дійсна 138  
— уявна 138  
Вітка 36, 40  
— головна 36  
Вольт 17, 19, 144  
Вольт-ампер 208, 212  
— реактивний 209, 212  
Вольтметр 17, 158, 342  
— ідеальний 17  
Вузол 37, 38  
— базисний 76, 77, 82

### Г

Гармоніки 121, 139, 140  
Генрі 25, 29, 31  
Герц 120, 135  
Годограф 264, 268  
Граф схеми 37, 423, 424

### Д

Двополюсник 40, 262  
— активний 92–94, 103  
— пасивний 92–94, 97

Дерево графа 37  
Джоуль 19, 20  
Джерела напруги та струму  
еквівалентні 55, 60  
Джерело:  
— залежне (неавтономне) 114  
— електричної енергії 19, 34  
— ЕРС 19, 32  
— напруги 14  
— — ідеальне 32, 36  
— — реальне 33, 36  
— незалежне (автономне) 114  
— реальне 33  
— струму 14  
— — ідеальне 34, 36  
— — реальне 35  
Діаграма:  
— векторна 142, 197  
— кількісна 197, 201  
— часова 127, 128  
— якісна 197, 203  
Ділянки кола еквівалентні 46, 47  
Добротність 284, 285, 320  
— еквівалентна 305, 321  
Довжина хвилі 281  
Дуальність 27, 173, 315

### Е

Еквівалентні «зірка»  
і «трикутник» 50, 59  
Елемент:  
— пасивний 14, 31  
— кола 14–16, 36, 40, 41  
— — ідеальний 14  
Енергія 13, 20, 23

### Є

Ємність 14, 22, 31

### З

Задача:  
— аналізу 41  
— синтезу 41  
Закон:  
— гармонічний 123, 124  
— Джоуля — Ленца 19, 22  
— Кірхгофа другий 38, 39  
— Кірхгофа перший 38  
— Ома 21

Заряд електричний 15  
Затискачі однойменні 28, 238, 241  
Згасання 286, 320, 366  
З'єднання:  
— «зіркою» 50, 59  
— змішане 48  
— каскадне 387, 396  
— паралельне 47, 59  
— послідовне 46, 59  
— «трикутником» 50, 59  
Значення синусоїдного струму:  
— діюче 124, 132, 135  
— — комплексне 141  
— миттєве 124, 127  
— середнє 124  
— — випрямлене 133  
— — двонапівперіодне 133, 135  
— — однонапівперіодне 133, 135  
— — періодичної функції 124  
Зсув фаз 126, 130, 150, 170

### І

Індуктивність 24, 25, 149  
— взаємна 14, 27, 31  
Індукція 25  
— магнітна 24, 25

### К

Класифікація кіл 40  
Коефіцієнт  
— зв'язку 30, 230, 243, 332  
— корисної дії 103  
— передачі 115, 262, 383  
— потужності 208, 213  
— прямокутності 276, 279  
— трансформації 249, 250  
— увімкнення 325, 329  
Кола індуктивно зв'язані 228  
Коло:  
— активне 40  
— дуальне 173  
— електричне 13, 14  
— лінійне 40  
— — електричне 40, 261  
— нелінійне 40  
— пасивне 40  
— розгалужене 38  
Конденсатор 22  
Контур 37–40  
— одиночний 319, 330, 373  
— паралельний 307

— — резонансний 307  
— послідовний 279  
— — резонансний 279  
— простий 324, 307  
— складний 324  
Контури коливальні зв'язані 330, 331  
Котушка самоіндукції 24, 25  
Крива резонансна 283, 286  
Кулон 15

### М

Матриця:  
— квадратна 64, 72  
— опорів 72  
— провідностей 80  
Матриця-стовпець 72, 80  
Метод:  
— комплексних амплітуд 138, 186  
— вузлових напруг 76, 81, 187  
— еквівалентних перетворень 46  
— еквівалентного генератора 92, 187  
— комплексний 138, 186  
— контурних струмів 67, 82  
— накладання 89, 187, 194  
— рівнянь Кірхгофа 61, 65  
Модель:  
— матрична 423  
— топологічна 423

### Н

Навантаження 32–34, 305, 320  
Напруга 13, 17, 19  
— вузлова 76, 77  
— реактивна 158  
— холостого ходу 55, 92, 101  
Напрями струму та напруги позитивні  
15, 17

### О

Обмотка трансформатора вторинна 246  
Ом 20  
Оператор обертання (повороту) 140, 144  
Опір 14, 20, 31  
— активний 147, 161  
— взаємний контурів 70, 73  
— витікання конденсатора 307  
— власний контуру 70, 73  
— внесений 336  
— внутрішній джерела 33, 34  
— вхідний 92, 262  
— еквівалентний 47



— резонансний 309, 320  
— смісний 152, 161  
— зв'язку 334, 336  
— індуктивний 150, 161  
— комплексний 156, 161  
— омічний 147  
— передатний 115  
— повний 143, 154  
— реактивний 156, 161  
— резонансний 309, 320  
— характеристичний 283, 308, 320

## II

Параметри контуру:  
— вторинні 286, 319  
— первинні 281, 307  
Перенесення джерел у схемі 56  
Перетворення:  
— «зірки» в «трикутник» 50, 60  
— схем з двома вузлами 48  
— «трикутника» в «зірку» 50, 59  
Період 120  
Підсилювач операційний 411  
Поле:  
— електричне 14, 22  
— магнітне 14, 24, 26  
Порядок ланки 384  
Потенціал 16–19  
Потік:  
— магнітний 13, 14, 24, 25  
— розсіяння 27  
Потокозчеплення 25, 28  
Потужність:  
— активна 149, 154, 207  
— комплексна 209, 212, 213  
— миттєва 23, 26, 149, 151  
— повна 208, 212, 213  
— реактивна 151, 209, 212  
Правило знаків 38, 61  
Принцип взаємності  
(зворотності) 108–110  
Провідність 21, 31  
— активна 171  
— взаємна вузлів 79, 84  
— власна вузла 79  
— внутрішня джерела 35, 36  
— вхідна 262  
— еквівалентна 48  
— смісна 153, 171  
— індуктивна 151, 171  
— кола вхідна 262

— комплексна 167, 169, 171  
— передатна 115  
— повна 168, 171  
— реактивна 167, 171  
Процес періодичний 120

## P

Радіан 125, 135  
Режим:  
— короткого замикання 33, 96, 114  
— перехідний 41  
— узгодження 105, 219  
— усталений 41  
— холостого ходу 34, 96, 104  
Резонанс:  
— амплітудний 283, 287  
— другий складний 348, 355  
— другий частинний 346, 354, 356  
— індивідуальний 350, 355, 356  
— напруг 284, 320  
— перший складний 340, 343, 354  
— перший частинний 340, 354, 355  
— повний 350, 355, 356  
— струмів 311, 320  
— фазовий 283, 287  
Рівняння:  
— контурних струмів 68, 70  
— вузлових напруг 79, 80  
— матричні 63, 64  
Розмикання 93, 351  
Розстройка контура:  
— абсолютна 293  
— відносна 293  
— узагальнена 294  
Ряд гармонічний (Фур'є) 121

## C

Сила:  
— електрорушійна 13, 19  
— — контурна 70  
Сименс 21  
Система одиниць міжнародна (СИ) 15  
Смуга:  
— затримання 323, 385  
— переходу 385, 387  
— пропускання 273, 298, 368, 385  
Спектр 121  
Струм 14, 19  
— джерел вузловий 79, 382  
— змінний 15, 121  
— контурний 68

— короткого замикання 55, 95  
— намагнічення 248, 249  
— постійний 14, 15, 19  
— реактивний 170  
— синусоїдний 120, 123  
— частковий 90  
Схема заміщення 13, 155  
— конденсатора 177, 179, 280  
— котушки самоіндукції 179, 280  
— трансформатора 251  
— — двополюсна 253  
— — чотириполюсна 251

## Схема:

— електрична 36  
— мостова 54, 102, 111, 196, 271  
— східчаста (ланцюгова) 393

## T

### Теорема:

— компенсації 112, 114  
— про еквівалентне джерело напруги 92, 93  
— про еквівалентне джерело струму 92, 95  
Трансформатор 123, 245  
— довершений 274, 275  
— ідеальний 248  
— лінійний 250  
— реальний 246  
Трикутник:  
— потужностей 211  
— напруг 160  
— струмів 173

## y

### Увімкнення

— диференційне 412  
— зустрічне 27  
— триполюсне 417  
— узгоджене 27  
Узгодження 105, 217, 219

## Ф

Фаза 124  
— миттєва 124  
— повна 124  
— поточна 124  
— початкова 124, 125  
Фазообертач 272

Фактор (параметр) зв'язку 358  
Фарада 23

### Фільтр:

— загороджувальний 385  
— верхніх частот 385, 394  
— електричний 385  
— *k*-типу 393  
— *m*-типу 406  
— нижніх частот 385, 388, 419  
— реактивний 392  
— режекторний 386, 403  
— смуговий 385, 398, 420

### Форма розрахунку:

— комплексна 183  
— комплексного числа:  
— — алгебраїчна 139  
— — показникова 139  
— — тригонометрична 139

### Формула:

— Ейлера 138  
— Мезона 423  
— Томсона 281

### Функція:

— комплексна вхідна 262  
— передатна 261, 262

## X

### Характеристика:

— амплітудно-фазова 264  
— амплітудно-частотна 262  
— вебер-амперна 26  
— вольт-амперна 21, 36  
— кулон-вольтна 23  
— фазочастотна 262

Характеристики частотні 263, 356, 385

## Ч

### Частота 120

— гранична 273, 385, 397  
— зв'язку 365  
— кутова (кругова) 125, 135  
— режекції 386, 406  
— резонансна 284, 308  
— циклічна 120, 135  
Чотириполюсник 40, 261, 410  
— прохідний 382  
— зв'язку 332

## III

Шлях 423

*Навчальне видання*

КОВАЛЬ Юрій Олександрович  
ГРИНЧЕНКО Людмила Василівна  
МИЛЮТЧЕНКО Іван Олександрович  
РИБІН Олександр Іванович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ  
Частина 1

Підручник для студентів  
вищих навчальних закладів

*За загальною редакцією  
проф. В. М. Шокала та проф. В. І. Правди*

Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено

Редактор *Ю. В. Статкевич*  
Коректор *Т. М. Матвієнко*  
Комп'ютерна верстка *В. І. Коряк*  
Дизайн обкладинки *О. Л. Герасименюк*

Підписано до друку 21.01.2008. Формат 60x90/16. Папір офсетний.  
Гарнітура SchoolBookC. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 27,0.  
Обл.-вид. арк. 26,2. Тираж 3500 прим. Зам. №1937/128.

ТОВ «Компанія СМІТ»  
61166, м. Харків, просп. Леніна, 14  
Тел.: 8(057) 717-54-94  
Факс: 8(057) 702-13-07  
E-mail: book@smit.com.ua  
<http://www.smit-book.com>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів  
видавничої продукції ДК № 435 від 26.04.2001

Віддруковано з готових діапозитивів у ТОВ «Навчальний друк»,  
62300, Харківська обл., м. Дергачі, вул. Петровського, 163а.  
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК № 58 від 10.06.2002 р.