

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ

ЧАСТИНА 2



ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЖІЛ

ЧАСТИНА 2

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом «Радіотехніка»*



Харків
Компанія СМІТ
2008



УДК 621.3.011.1(07)
ББК 31.211
О-75

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів
які навчаються за напрямом «Радіотехніка»
(Лист від 18.05.2007 р. № 1.4/18-Г-772)*

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Рецензенти:

Ляхно В. І., проф. каф. проектування радіоелектронних систем літальних апаратів Харківського національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», д-р техн. наук, професор;
Бабасєв М. М., зав. каф. електротехніки та електричних машин Української державної академії залізничного транспорту, д-р техн. наук, професор;
Гімпілевич Ю. Б., зав. каф. радіотехніки Севастопольського національного технічного університету, д-р техн. наук

О-75 **Основи теорії кіл** : підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч. 2 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін ; за заг. редакцією В. М. Шокала та В. І. Правди. — Х.: Компанія СМІТ, 2008. — 560 с.

ISBN 978-966-2028-04-1
978-966-2028-06-5 (Ч. 2)

У другій частині підручника розглянуто такі теми: аналіз перехідних процесів класичним, часовим і операторним методами; багатополюсники; кола з розподіленими параметрами, довгі лінії; основи синтезу кіл; нелінійні кола. Вміщено велику кількість ілюстрацій та прикладів розв'язання задач, запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань з кожної розглянутої теми, а також довідкову та історичну інформацію з основних розділів теорії кіл.

Для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей напряму «Радіотехніка», а також студентів, які вивчають споріднені дисципліни за спеціальностями напрямів «Телекомунікації» та «Електронні апарати».

УДК 621.3.011.1(07)
ББК 31.211

ISBN 978-966-2028-04-1
978-966-2028-06-5 (Ч. 2)

© Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко,
І. О. Милютченко, О. І. Рибін, 2007
© ТОВ «Компанія СМІТ», 2008

ЗМІСТ

Передмова	6
Перелік скорочень	7
1. КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ	8
1.1. Основні поняття й визначення	9
1.2. Перехідні процеси в колах R, C та R, L	28
1.3. Перехідні процеси в колі R, L, C	33
1.4. Перехідні процеси в колах $R, C; R, L; R, L, C$ при синусоїдній дії	45
1.5. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	53
2. ЧАСОВИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ	56
2.1. Перехідна характеристика кола	57
2.2. Імпульсна характеристика кола	72
2.3. Часові характеристики типових кіл $R, L; R, C; R, L, C$	79
2.4. Визначення відгуку кола на ступінчасту дію за допомогою часових характеристик	91
2.5. Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою перехідної характеристики. Інтеграл Дюамеля	103
2.6. Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою імпульсної характеристики	113
2.7. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	129
3. ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КІЛ У НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ.	132
3.1. Пряме перетворення Лапласа. Оригінали і зображення	133
3.2. Зображення деяких дій	134
3.3. Співвідношення між зображеннями струмів і напруг в елементах кола	137
3.4. Операторна форма закону Ома і законів Кірхгофа за нульових початкових умов	141
3.5. Визначення оригіналу відгуку	145
3.6. Урахування ненульових початкових умов	154
3.7. Операторна передатна функція кола, її властивості. Нулі та полюси операторної передатної функції	158
3.8. Операторна вхідна функція кола, її властивості	166
3.9. Зв'язок операторної передатної функції з комплексною передатною функцією. Амплітудно-квадратична характеристика кола, її властивості	168
3.10. Мінімумально- та немінімумально-фазові кола	171
3.11. Операторна передатна функція неспотворювального кола	176

3.12. Зв'язок операторної передатної функції з часовими характеристиками	177	6.6. Фільтри верхніх частот	449
3.13. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	182	6.7. Смугові фільтри з симетричними характеристиками	457
4. БАГАТОПОЛЮСНИКИ	184	6.8. Загороджувальні фільтри з симетричними характеристиками	466
4.1. Загальні зауваження	185	6.9. Частотні залежності реактансних функцій	474
4.2. Системи рівнянь (моделі) прохідних чотириполосників	187	6.10. Реалізація реактансних функцій за Фостером	481
4.3. З'єднання чотириполосників	193	6.11. Реалізація реактансних функцій за Кауером	487
4.4. Характеристичні параметри чотириполосників	194	6.12. Реалізація ОПФ східчастими реактивними колами, навантаженими з обох боків	496
4.5. Функції кола	199	6.13. Перетворення схеми ФП у схеми інших типів. Денормування елементів перетворених схем	504
4.6. Функції кола та розрахунки параметрів чотириполосників	210	6.14. Синтез фільтрів на операційних підсилювачах	508
4.7. Приклади обчислення функцій деяких кіл	211	6.15. Синтез фільтрів на нетрадиційних операційних підсилювачах	511
4.8. Спеціальні двобрамники та трибрамники	217	6.16. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	522
4.9. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	239	7. НЕЛІНІЙНІ КОЛА	526
5. КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ. ДОВГІ ЛІНІЇ	242	7.1. Особливості теорії нелінійних кіл	527
5.1. Загальні положення	243	7.2. Характеристики і параметри нелінійних елементів.	527
5.2. Первинні параметри довгих ліній	247	7.3. Класифікація нелінійних елементів	530
5.3. Диференціальні (телеграфні) рівняння довгої лінії. Загальний розв'язок рівнянь для лінії без втрат	253	7.4. Диференціальні рівняння нелінійних кіл	533
5.4. Аналіз усталеного синусоїдного режиму довгої лінії	264	7.5. Нелінійні кола постійного струму	536
5.5. Лінії з малими втратами при синусоїдній дії	278	7.6. Апроксимація характеристик нелінійних елементів	540
5.6. Режим біжних хвиль	286	7.7. Нелінійний активний опір при синусоїдній дії	542
5.7. Режим стійних хвиль	292	7.8. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	551
5.8. Режим змішаних хвиль	314	Література	554
5.9. Методи узгодження довгих ліній	333	Предметний покажчик	555
5.10. Кругові діаграми ідеальних довгих ліній	349		
5.11. Комплексні функції та частотні характеристики довгих ліній	364		
5.12. Перехідні процеси в довгих лініях	376		
5.13. Операторні функції і часові характеристики ДЛ	395		
5.14. Застосування кіл із розподіленими параметрами	403		
5.15. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	423		
6. ОСНОВИ СИНТЕЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	428		
6.1. Етапи розв'язання задачі синтезу	429		
6.2. Частотна залежність ослаблення та вимоги до неї.	429		
6.3. Операторна передатна функція поліномного фільтра	431		
6.4. Фільтри з характеристиками Баттерворта	432		
6.5. Фільтри з характеристиками Чебишова	441		

*Прекрасне досягається вивченням і великими зусиллями,
поганае засвоюється само собою, без клопоту*
Демокрит



За сучасних умов інтенсивного розвитку й ускладнення принципів дії радіоелектронних пристроїв і систем значно зростає обсяг знань і, відповідно, кількість навчальних дисциплін, які має опанувати сучасний фахівець. Засвоєння знань зі спеціальних дисциплін стає можливим лише за наявності ґрунтовної теоретичної підготовки.

Однією з таких фундаментальних дисциплін для студентів, які навчаються за напрямом «Радіотехніка», є «Основи теорії кіл» (ОТК), що ґрунтується на дисциплінах «Вища математика», «Фізика» і є основою для засвоєння спеціальних курсів у вищому навчальному закладі та подальшої інженерної діяльності спеціаліста з радіотехніки й електрозв'язку.

Метою вивчення дисципліни ОТК є засвоєння основних законів і положень теорії електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами, оволодіння методами аналізу та синтезу електричних кіл.

Підручник з «Основ теорії кіл» складено згідно з освітньо-професійною програмою Міністерства освіти і науки України за напрямом «Радіотехніка» й відповідною робочою програмою дисципліни. У першій частині книги розглянуто основні поняття й закони електричних кіл; методи розрахунку лінійних електричних кіл; усталений режим у колах синусоїдного струму; кола синусоїдного струму із взаємними індуктивностями; комплексні передатні функції та частотні характеристики електричних кіл; електричні фільтри.

Друга частина підручника містить такі розділи: аналіз перехідних процесів класичним, часовим та операторним методами; багатополосники; кола з розподіленими параметрами, довгі лінії; основи синтезу електричних кіл; нелінійні кола.

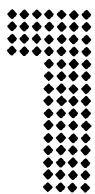
Готуючи це видання, автори узагальнили багаторічний досвід викладання дисципліни «Основи теорії кіл» на кафедрах «Основи радіотехніки» ХНУРЕ та «Теоретичні основи радіотехніки» НТУ «КПІ».

Ковалем Ю. О. написано розділи 2 і 5 (підрозділ 5.11 разом з Ю. М. Роздаловським); Л. В. Гринченко — розділи 3 і 6; І. О. Милютченко — розділи 1 і 7, підрозділи 4.3, 4.4, 6.14; О. І. Рибіним — розділ 4 і підрозділ 6.15.

Підручник орієнтовано на студентів ВНЗ денної та заочної форм навчання спеціальностей напрямку «Радіотехніка», він також може бути корисним для студентів, які вивчають споріднені дисципліни за спеціальностями напрямів «Телекомунікації» й «Електронні апарати».

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ССІ, ССІІ	струмові конвеєри із підсумовуванням напруги
ССІІІ	струмовий конвеєр із підсумовуванням струму
СFA	Current Feedback Amplifier — підсилювач зі струмовим зворотним зв'язком
ОТА	трансмітансний операційний підсилювач
VCI, VCIІ	напругові конвеєри із підсумовуванням струму
VCIІІ	напруговий конвеєр із підсумовуванням напруги
AKX	амплітудно-квадратична характеристика
AФX	амплітудно-фазова характеристика
AЧX	амплітудно-частотна характеристика
BAX	вольт-амперна характеристика
ДДФ	додатна дійсна функція
ДЛ	довга лінія
ДЛМВ	довга лінія з малими втратами
ДРФ	дробово-раціональна функція
ЕЛ	експоненційна лінія
ЕОМ	електронно-обчислювальна машина
ЕРС	електрорушійна сила
ЗДЛ	збалансована довга лінія
ЗФ	загороджувальний фільтр
ІДЛ	ідеальна довга лінія
КБХ	коефіцієнт біжної хвилі
КВФ	комплексна вхідна функція
КД	кругова діаграма
ККД	коефіцієнт корисної дії
КПФ	комплексна передатна функція
КСХ	коефіцієнт стійкої хвилі
КФ	комплексна функція
ЛЕК	лінійне електричне коло
НВ	напруговий базис
ОВФ	операторна вхідна функція
ОП	операційний підсилювач
ОПФ	операторна передатна функція кола
ОТП	транскондуктивний (трансмітансний) ОП
СБ	струмовий базис
СЗ	смуга затримання
СП	смуга пропускання
СФ	смуговий фільтр
ТОП	трансїмпедансний операційний підсилювач
ФБ	фільтр Баттерворта
ФНЧ, ФВЧ	фільтр нижніх, верхніх частот
ФП	фільтр-прототип
ФЧ	фільтр Чебишова
ФЧХ	фазочастотна характеристика
ЧХ	частотна характеристика



КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

- Основні поняття й визначення
Закони комутації та початкові умови
Вимушений і вільний режими
- перехідні процеси в колах R, C і R, L
- Перехідні процеси в колі R, L, C
Аперіодичний режим
Критичний режим
Коливальний режим
- Перехідні процеси в колах $R, C; R, L; R, L, C$ при синусоїдній дії

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = f(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

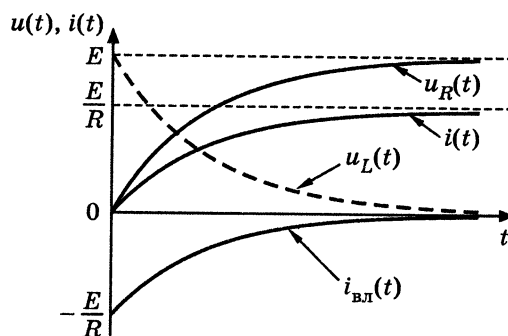
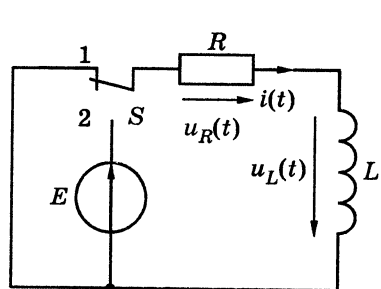
$$i(t) = i_{\text{вл}}(t) + i_{\text{вм}}(t)$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$i_L(-0) = i_L(+0); u_C(-0) = u_C(+0)$$



Огюстен Луї Коші



1.1. Основні поняття й визначення

У першій частині підручника з дисципліни ОТК розглядалися усталені (стаціонарні) процеси в лінійних електричних колах (ЛЕК). Стаціонарний режим (процес) характеризується тим, що струми і напруги або незмінні в часі (кола постійного струму), або є періодичними функціями часу (кола змінного струму).

Реальні електричні процеси завжди відрізняються від стаціонарних, оскільки будь-яка неперіодична зміна типу дії, параметрів кола або структури схеми викликає порушення стаціонарності режиму.

Перехідним називають процес, який виникає в електричному колі під час переходу від одного усталеного режиму до іншого. Перехідні процеси виникають за певних умов, наприклад, при комутації.

Комутація — це зміна параметрів або схеми кола, підключення або відключення джерела електричної енергії, зміна напруги на вході кола. Якщо коло містить тільки активні опори, то комутація миттєво «викликає» відповідні зміни струмів і напруг у вітках. За наявності реактивних елементів комутація супроводжується появою перехідних процесів. Теоретично тривалість перехідного процесу є нескінченною, а практично залежить від параметрів кола і вимірюється для низькочастотних кіл мілісекундами або мікросекундами. Застосовуючи спеціальні схеми і підбираючи параметри кола, можна прискорити або уповільнити перехідний процес.

Умовні графічні позначення деяких комутаційних пристроїв в електричних колах подані на рис. 1.1.

Отже, умовами виникнення перехідних процесів є, по-перше, комутація; по-друге, наявність у колі реактивних елементів.

Перехідні процеси в деяких електричних колах пристроїв зв'язку, автоматики, імпульсної й телевізійної техніки є робочими процесами при нормальній експлуатації цих пристроїв. Іноді перехідні процеси супроводжуються небажаними явищами: на певних ділянках кола виникають перенапруги і так звані надструми.

Тому розрахунок і дослідження перехідних процесів є важливою інженерною задачею.

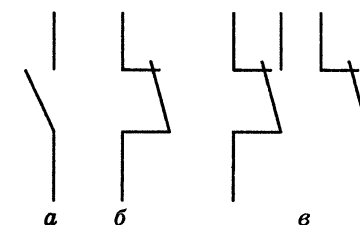


Рис. 1.1. Графічні позначення комутаційних пристроїв:

a — вимикач із замикаючим контактом; *b* — розмикаючим; *в* — перемикач однополюсний

1.1.1. Закони комутації та початкові умови

Виникнення перехідних процесів пов'язано з особливостями змінювання енергії електромагнітного поля в реактивних елементах. З фізичних міркувань зрозуміло, що енергія поля в індуктивностях $w_L = Li_L^2/2$ та ємностях $w_C = Cu_C^2/2$ не може змінюватися миттєво: енергія може змінюватися неперервно, без стрибків, оскільки в іншому випадку потужність $p = dw/dt$, яка дорівнює похідній енергії за часом, сягала б нескінченного значення, що фізично неможливо.

Це твердження виражає принцип неперервності в часі сумарного магнітного потокозчеплення індуктивності Ψ і сумарного електричного заряду ємності q . Якщо момент комутації розглядати як початок відліку часу $t_0 = 0$, то момент безпосередньо перед комутацією позначається $t = -0$, а момент безпосередньо після комутації $t = +0$. Враховуючи ці позначення, можна записати

$$\sum_i q_i(-0) = \sum_i q_i(+0); \quad \sum_i \Psi_i(-0) = \sum_i \Psi_i(+0).$$

Оскільки $\Psi = Li$, $Q = Cu$, то

$$\sum_i L_i i_L(-0) = \sum_i L_i i_L(+0); \quad \sum_i C_i u_C(-0) = \sum_i C_i u_C(+0).$$

З поданих рівнянь, вважаючи сумарні значення L і C незмінними, отримують так звані *закони комутації*:

$i_L(-0) = i_L(+0)$ — перший закон комутації;

$u_C(-0) = u_C(+0)$ — другий закон комутації.

Отже, в початковий момент після комутації струм в індуктивності (напряга на ємності) залишається саме таким, яким він був безпосередньо перед комутацією, а потім плавно змінюється. При цьому слід пам'ятати, що в колах з ідеальними елементами стрибкоподібно можуть змінюватися: 1) струми в опорах і ємностях; 2) напруги на опорах та індуктивностях.

Значення струму в індуктивності та напруги на ємності до моменту комутації називають *початковими умовами*. Оскільки початок перехідного процесу звичайно вважають таким, що збігається з початком відліку часу, то початкові умови для струму в індуктивності та напруги на ємності k -ї вітки позначають $i_{L_k}(-0)$, $u_{C_k}(-0)$.

Розрізняють нульові та ненульові початкові умови. Якщо первинний запас енергії у всіх реактивних елементах кола дорівнює нулю, початкові умови називаються *нульовими*. Якщо хоча б в одному накопичувальному елементі первинний запас енергії ненульовий,

початкові умови називають *ненульовими*. Наприклад, кола, зображені на рис. 1.2 і 1.3, а, мають нульові початкові умови, а коло (рис. 1.3, б) — ненульові.

За нульових початкових умов, коли $i_L(-0) = 0$, $u_C(-0) = 0$, індуктивність у початковий момент часу після комутації еквівалентна розриву кола, а ємність — короткому замиканню. У випадку ненульових початкових умов, тобто коли $i_L(-0) \neq 0$, $u_C(-0) \neq 0$, індуктивність у перший момент після комутації еквівалентна джерелу струму $i_L(-0)$, а ємність — джерелу ЕРС $u_C(-0)$.

Початковими значеннями називають значення всіх електричних величин та їх похідних безпосередньо після комутації, тобто в момент часу $t = +0$. Використовують поняття *незалежних початкових значень*: $i_L(+0)$, $u_C(+0)$. Аналізуючи перехідні процеси в розгалужених колах, поряд із незалежними використовують так звані *залежні початкові значення*, а саме: значення всіх струмів і напруг, крім i_L , u_C , а також їх похідних при $t = +0$. Залежні початкові значення обчислюють за незалежними, виходячи з законів Кірхгофа.

При розрахунку перехідних процесів в електричних колах початкові значення мають бути відомими — заданими або додатково знайденими з урахуванням законів комутації.

1.1.2. Загальна характеристика методів аналізу перехідних процесів

Розрахунок перехідних процесів у будь-якій ЛЕК складається з таких основних операцій:

- 1) вибір додатних напрямів струмів у вітках;
- 2) визначення значень струмів та напруг безпосередньо перед комутацією;
- 3) складання характеристичного рівняння і визначення його коренів;
- 4) одержання виразів для шуканих струмів і напруг як функцій часу

Широко розповсюдженими методами розрахунку перехідних процесів є: 1) класичний; 2) часовий; 3) операторний; 4) спектральний. Для всіх методів перші три операції здійснюються однаково, тому їх слід розглядати як спільну частину всіх методів. Різниця полягає в заключній операції, особливості якої розглядаються для кожного методу окремо.

1.1.3. Вимушений і вільний режими

Аналіз електричних процесів у ЛЕК, як відомо, базується на розв'язанні рівнянь Кірхгофа для миттєвих значень напруг і струмів

в елементах кола. Оскільки дані миттєві значення пов'язані диференціальними залежностями, рівняння, які описують перехідні процеси, є диференціальними.

У ЛЕК з постійними зосередженими параметрами процеси описуються лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами, методику складання якого можна розглянути на прикладі кола (рис. 1.2) з нульовими початковими умовами, де потрібно знайти струм в індуктивності.

Система рівнянь за законами Кірхгофа з урахуванням диференціального співвідношення між напругою і струмом в елементі L

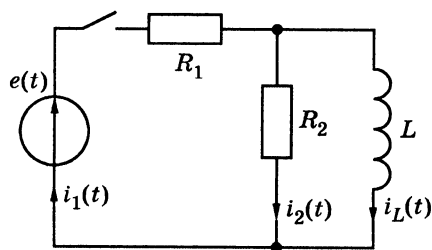


Рис. 1.2. Електричне коло з нульовими початковими умовами

$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ матиме вигляд

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_L(t); \\ e(t) = i_1(t)R_1 + i_2(t)R_2; \\ 0 = L \frac{di_L(t)}{dt} - i_2(t)R_2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему методом підстановки, можна підставити значення $i_1(t)$ з першого рівняння до другого:

$$e(t) = i_2(t)R_1 + i_L(t)R_1 + i_2(t)R_2; \quad i_2(t) = \frac{e(t) - i_L(t)R_1}{R_1 + R_2},$$

а далі вираз для струму $i_2(t)$ — до третього рівняння:

$$0 = L \frac{di_L(t)}{dt} - \frac{e(t)R_2}{R_1 + R_2} + i_L(t) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

У результаті виходить шукане диференціальне рівняння відносно струму $i_L(t)$:

$$L \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{e(t)}{R_1}. \quad (1.1)$$

У загальному вигляді процеси в ЛЕК описуються лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку:

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = f(t), \quad (1.2)$$

де $y(t)$ — шукана функція (струм, напруга) — відгук кола на вхідну дію; $f(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$ — відома

функція, яка залежить від дії $x(t)$; $a_0, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n$ — постійні коефіцієнти.

Слід зазначити, що вигляд лівої частини рівняння (1.2) залежить не від того, для якої змінної воно складається, а тільки від схеми кола і параметрів його елементів. У цьому нескладно перекоонатися, записавши рівняння (1.1) відносно напруги на індуктивності та врахувавши зв'язок $i_L(t)$ та $u_L(t)$:

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} u_L(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = \frac{e(t)}{R_1}.$$

Якщо продиференціювати останнє рівняння за часом і помножити його на L , виходить вираз:

$$L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{du_L(t)}{dt} + u_L(t) = \frac{L}{R_1} \frac{de(t)}{dt}, \quad (1.3)$$

який відрізняється від рівняння (1.1) тільки правою частиною.

Стосовно ж (1.1),

$$x(t) = e(t); \quad y(t) = i_L(t); \quad n = 1; \quad b_0 = 1; \quad b_1 = L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}; \quad f(t) = \frac{e(t)}{R_1}; \quad a_0 = \frac{1}{R_1}.$$

У математиці існують різні способи розв'язання рівняння (1.2).

Згідно з класичним методом розв'язок (1.2) слід шукати у вигляді суми двох функцій — загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y(t) = y_{\text{вл}}(t) + y_{\text{вм}}(t), \quad (1.4)$$

де $y_{\text{вл}}(t)$ — загальний розв'язок рівняння (1.2) без правої частини, який характеризує електричні явища за відсутності зовнішньої дії; $y_{\text{вм}}(t)$ — частинний розв'язок (1.2) з правою частиною.

Відомо, що задача про визначення частинного розв'язку диференціального рівняння при заданій початковій умові має назву задачі Коші¹.

¹ Коші Огюстен Луї, Cauchy (1789–1857) — французький математик, член Паризької (1816) і Петербурзької АН (1831). Автор понад 800 праць з арифметики і теорії чисел; алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, тригонометрії, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики, теорії пружності, оптики тощо. Коші належать терміни «модуль» комплексного числа, «спряжені» комплексні числа й ін.

Класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах полягає у складанні диференціального рівняння, що описує стан кола, розв'язанні цього рівняння й фізичному трактуванні розв'язку. Перевагою класичного методу є його відносна простота, якщо порядок кола не перевищує двох.

У колі з реактивними елементами енергія джерела частково розсіюється на опорах, а частково накопичується в реактивних елементах. Процеси, які існують у колі за рахунок цього запасу енергії після вимкнення джерела, називають *вільними*. Тобто, якщо дія $x(t) = 0$, коло перебуває у вільному режимі. Функції, що визначаються за загальним розв'язком, зветься *вільними складовими* (струмів, напруг тощо). Характер вільного процесу визначається схемою кола і параметрами його елементів.

Функція $y_{\text{вм}}(t)$ характеризує *вимушений* режим, обумовлений зовнішнім джерелом. Характер змінювання електричних величин у колі у вимушеному режимі визначається не лише схемою і параметрами кола, але й законом змінювання дії. Якщо дія $x(t)$ — постійна функція або періодична за часом, то вимушений струм (напруга) буде одночасно й усталеним.

Існує універсальний метод визначення вільної складової, згідно з яким оператор диференціювання в однорідному для (1.2) рівнянні

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = 0 \quad (1.5)$$

заміняють алгебраїчним оператором p :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = p^n; \quad \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} = p^{n-1} \dots \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = p^2; \quad \frac{dy(t)}{dt} = p; \quad y(t) = 1.$$

Після цієї заміни вираз (1.5) перетворюється у *характеристичне рівняння* кола:

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (1.6)$$

Степінь характеристичного полінома — лівої частини виразу (1.6) — визначається порядком диференціального рівняння (1.2) і називається *порядком кола*.

Примітка. Диференціальне рівняння кола можна отримати, не складаючи вихідної системи рівнянь Кірхгофа. Достатньо визначити *комплексну передатну функцію (КПФ)* кола $H(j\omega)$.

Для того щоб довести це твердження, доцільно скористатись комплексними миттєвими значеннями дії та відгуку. Якщо дія

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t},$$

то для лінійного кола відгук змінюється з такою самою частотою, але має іншу комплексну амплітуду

$$\underline{y}(t) = H(j\omega) \underline{X}_m e^{j\omega t}.$$

Функція $\underline{y}(t)$ є частинним розв'язком рівняння (1.2). Підстановка $\underline{x}(t)$ і $\underline{y}(t)$ до (1.2) приводить до тотожності:

$$\begin{aligned} H(j\omega) \underline{X}_m e^{j\omega t} [b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0] = \\ = \underline{X}_m e^{j\omega t} [a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 j\omega + \alpha_0]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Множник $(j\omega)^n$ здобутий унаслідок n -кратного диференціювання $e^{j\omega t}$. Після скорочення на $e^{j\omega t}$ та \underline{X}_m з виразу (1.7) виходить, що

$$H(j\omega) = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 j\omega + \alpha_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}. \quad (1.8)$$

Порівнюючи формули (1.2) і (1.8), нескладно помітити, що коефіцієнти a_k і b_k відповідно однакові, $j\omega$ — символ першої похідної, а $(j\omega)^k$ — символ k -ї

похідної. Добуток $b_k (j\omega)^k$ відповідає члену $b_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}$ диференціального рівня-

ня, а $a_k (j\omega)^k$ — $a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$. Отже, за знаменником дробу (1.8) можна скласти ліву

частину рівняння (1.2), а за чисельником (1.8) — праву.

Використання КПФ кола для складання підсумкового рівняння дещо спрощує класичний метод аналізу, оскільки зведення системи рівнянь до одного рівняння є досить громіздкою задачею, простіше визначити КПФ.

Знаменник виразу (1.8) після заміни $(j\omega)^k$ на p^k утворює характеристичний поліном. Якщо цей поліном прирівняти до нуля, виходить характеристичне рівняння.

Як зазначено вище, вигляд лівої частини рівняння (1.2) не залежить від того, для якої змінної воно складається. Тому для здобуття рівняння кола можна скористатись комплексною функцією (КФ) будь-якого виду, зокрема КВФ — *комплексною вхідною функцією* — $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ чи $Y_{\text{вх}}(j\omega)$, а для складання характеристичного рівняння застосувати такий спосіб: а) записати формулу вхідного опору або провідності кола в комплексній формі; б) у формулі $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ чи $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ замінити множник $j\omega$ на p ; в) отриманий вираз прирівняти до нуля: $Z_{\text{вх}}(p) = 0$, $Y_{\text{вх}}(p) = 0$.

Характеристичне рівняння можна отримати, прирівнюючи до нуля вхідний опір $Z_{\text{вх}}(p)$ відносно будь-якої вітки кола. У тих випадках, коли розгалужене коло має єдиний накопичувач енергії, зручніше розглядати формулу вхідного опору відносно вітки з накопичувачем енергії. Якщо у схемі є джерело струму, для здобуття характеристичного рівняння рекомендується виконати одну з двох дій: розрахувати опір $Z_{\text{вх}}(p)$ не відносно вітки з джерелом (вважаючи її розімкненою), а відносно будь-якої іншої вітки кола, або розрахувати провідність відносно вітки з джерелом і прирівняти її до нуля: $Y_{\text{вх}}(p) = 0$.

Принцип складання диференціального та характеристичного рівняння кола за допомогою КПФ і $Z_{\text{вх}}(p)$ розглянуто у прикладі 1.2.

Вигляд вільної складової визначається характером коренів характеристичного рівняння p_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Корені p_k рівняння (1.6) можуть бути дійсними, комплексними, простими і кратними. Оскільки в ЛЕК параметри елементів додатні, а коефіцієнти рівняння (1.6) визначаються схемою кола і параметрами її елементів, то $b_i > 0$. Тому корені p_k — від'ємні дійсні або комплексно-спряжені, які мають від'ємну дійсну частину ($\text{Re } p_k < 0$).

Якщо серед коренів характеристичного рівняння немає кратних, тоді

$$y_{\text{вл}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (1.9)$$

де A_k — стала інтегрування.

Якщо є комплексно-спряжені корені, наприклад $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_{\text{вл}k}$, то вираз $A_k e^{p_k t} + A_{k+1} e^{p_{k+1} t}$ перетворюється на

$$e^{-\delta_k t} (A_k e^{j\omega_{\text{вл}k} t} + A_{k+1} e^{-j\omega_{\text{вл}k} t}) = e^{-\delta_k t} (M \cos \omega_{\text{вл}k} t + N \sin \omega_{\text{вл}k} t) = A e^{-\delta_k t} \sin(\omega_{\text{вл}k} t + \psi), \quad (1.10)$$

де A, ψ — сталі інтегрування.

Якщо серед n коренів p_k l коренів є кратними дійсному кореню, наприклад p_1 , то

$$y_{\text{вл}}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_l t^{l-1}) e^{p_1 t} + \sum_{k=l+1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (1.11)$$

Якщо є m -кратні спряжені комплексні корені, тоді

$$y_{\text{вл}}(t) = e^{-\delta_1 t} \sum_{i=1}^m t^{i-1} (M_i \cos \omega_{\text{вл}1} t + N_i \sin \omega_{\text{вл}1} t) + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (1.12)$$

З огляду на те, що в ЛЕК корені або їх дійсна частина є від'ємними, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{вл}}(t) = 0$.

Оскільки вільні процеси в ЛЕК згасають, розв'язок диференціального рівняння $y(t)$ з часом прямує до $y_{\text{вм}}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\text{вм}}(t). \quad (1.13)$$

Теоретично перехідний процес триває нескінченно і вимушена складова $y_{\text{вм}}(t)$ є розв'язком рівняння для $t \rightarrow \infty$. Ця обставина

дозволяє у випадку постійної або синусоїдної дії визначати $y_{\text{вм}}(t)$ методами теорії кіл, викладеними в першій частині підручника.

Кількість сталих інтегрування A_k у розв'язку рівняння кола збігається з його порядком n . Для визначення n сталих A_k потрібно n рівнянь і n початкових умов. Необхідну кількість рівнянь можна отримати $(n-1)$ -кратним диференціюванням розв'язку (1.4). Початкові значення знаходять, розглядаючи вихідну систему рівнянь Кірхгофа при $t = (+0)$, у якій незалежні початкові значення відомі з законів комутації.

Нехай розв'язок рівняння кола порядку n має вигляд

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} + y_{\text{вм}}(t). \quad (1.14)$$

Якщо продиференціювати (1.14) послідовно $(n-1)$ разів, вийде система:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sum_{k=1}^n p_k A_k e^{p_k t} + y'_{\text{вм}}(t); \\ y''(t) &= \sum_{k=1}^n p_k^2 A_k e^{p_k t} + y''_{\text{вм}}(t); \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(t) &= \sum_{k=1}^n p_k^{(n-1)} A_k e^{p_k t} + y^{(n-1)}_{\text{вм}}(t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для $t = (+0)$ співвідношення (1.14) і (1.15) призводять до системи рівнянь відносно A_k :

$$\begin{aligned} y(+0) &= \sum_{k=1}^n A_k + y_{\text{вм}}(+0); \\ y'(+0) &= \sum_{k=1}^n p_k A_k + y'_{\text{вм}}(+0); \\ y''(+0) &= \sum_{k=1}^n p_k^2 A_k + y''_{\text{вм}}(+0); \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(+0) &= \sum_{k=1}^n p_k^{(n-1)} A_k + y^{(n-1)}_{\text{вм}}(+0). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Знаючи початкові значення, тобто ліві частини рівнянь (1.16), знаходять A_k . Наприклад, для кола першого порядку

$$y(+0) = A_1 + y_{\text{вм}}(+0), \text{ звідки } A_1 = y(+0) - y_{\text{вм}}(+0).$$

Отже, аналіз перехідних процесів класичним методом складається з таких етапів:

1. Розрахунок режиму до комутації — визначення початкових умов $i_{L_k}(-0)$, $u_{C_k}(-0)$.

2. Визначення незалежних початкових значень $i_L(+0)$, $u_C(+0)$ із використанням законів комутації.

3. Складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для моменту часу $t = +0$ (після комутації), отримання диференціального рівняння кола відносно шуканої змінної.

4. Визначення характеристичного рівняння (1.6) і його коренів, розрахунок вільного режиму за формулами (1.9)–(1.12).

5. Знаходження частинного розв'язку рівняння (1.2), тобто розрахунок вимушеного режиму.

6. Визначення залежних початкових значень.

7. Розрахунок сталих інтегрування, виходячи зі співвідношень (1.16).

8. Підсумовування вільних і вимушених складових за формулою (1.4).

Слід пам'ятати, що фізично існують тільки повні струми (напруги), які дорівнюють сумі вимушеної та вільної складових. Саме їх можна вимірювати або спостерігати за допомогою приладів (осцилографа, вольтметра тощо). Щодо них слушні закони комутації. Вимушена та вільна складові є розрахунковими величинами (інакше кажучи, математичною абстракцією), сума яких дає реальні (фізичні) струми і напруги.

Приклад 1.1. Скласти диференціальне рівняння для кола з нульовим (рис. 1.3, а) і ненульовим (рис. 1.3, б) первинним запасом енергії.

Розв'язання. Рівняння, що описують процеси в колі, складаються для режиму після комутації. Складемо для схеми (рис. 1.3, а) систему рівнянь за методом Кірхгофа, наприклад для вузла 1 та контурів K_1 і K_2 :

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0; \\ R_1 i_1(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_3(t) dt + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t); \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t). \end{cases} \quad (1.17)$$

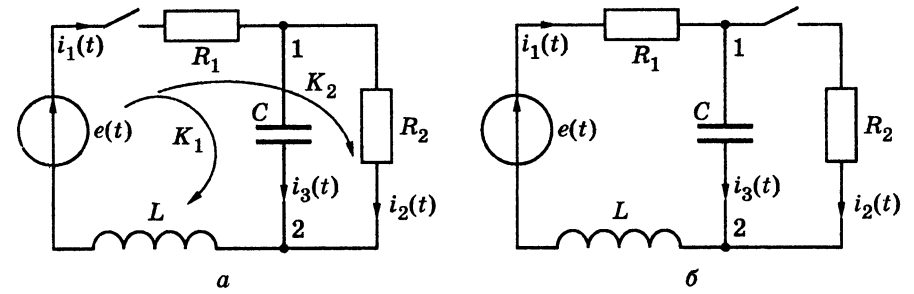


Рис. 1.3. Електричні кола: а — з нульовими; б — з ненульовими початковими умовами

Для розв'язання системи (1.17) зведемо її до рівняння відносно якоїсь однієї змінної, наприклад струму $i_1(t)$. Для цього продиференціюємо друге рівняння системи (1.17):

$$R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i_3(t) dt = \frac{de(t)}{dt}. \quad (1.18)$$

Далі визначимо з першого рівняння системи (1.17)

$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t), \quad (1.19)$$

а з третього —

$$i_2(t) = \frac{e(t)}{R_2} - \frac{L}{R_2} \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{R_1}{R_2} i_1(t). \quad (1.20)$$

Підставивши (1.20) до (1.19), а далі вираз для $i_3(t)$ до (1.18), здобудемо підсумкове рівняння для струму $i_1(t)$:

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{L + R_1 R_2 C}{R_2 LC} \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} i_1(t) = \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{R_2 LC} e(t). \quad (1.21)$$

Оскільки порядок рівняння (1.21) другий, коло (рис. 1.3, а) є колом другого порядку.

Якщо первинний запас енергії кола ненульовий (рис. 1.3, б), після комутації схема матиме такий самий вигляд, як і для кола з нульовими початковими умовами, а система рівнянь за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0; \\ R_1 i_1(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_3(t) dt + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t); \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

буде аналогічною системі (1.17). Системи (1.17) і (1.22) різняться лише нижньою межею інтеграла у другому рівнянні, який можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_3(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_3(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_3(t) dt = U_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i_3(t) dt,$$

де U_{C0} — початкова напруга на ємності в момент комутації.

Оскільки U_{C0} — постійна величина, її похідна за часом дорівнює нулю. Тому перетворення системи (1.22), подібні перетворенням системи (1.17), приводять до рівняння (1.21).

Приклад 1.2. Скласти диференціальне й характеристичне рівняння для кола (рис. 1.2), вважаючи відгуком напругу на індуктивності.

Розв'язання. Використовуючи формулу для КПФ

$$H(j\omega) = \frac{U_L}{E} = \frac{I_1 Z_{RL}}{I_1 Z_{вх}} = \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} \left/ \left(R_1 + \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} \right) \right. = \frac{R_2 j\omega L}{j\omega L(R_1 + R_2) + R_1 R_2}, \quad (1.23)$$

за знаменником запишемо ліву, а за чисельником — праву частину диференціального рівняння кола відносно напруги $u_L(t)$:

$$L(R_1 + R_2) \frac{du_L(t)}{dt} + R_1 R_2 u_L(t) = L R_2 \frac{de(t)}{dt}.$$

Поділивши останнє рівняння на $R_1 R_2$, отримуємо вираз (1.3).

Для здобуття характеристичного рівняння замінимо в лівій частині диференціального рівняння (1.3) оператор диференціювання на оператор p :

$$L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} p + 1 = 0. \quad (1.24)$$

Визначимо характеристичне рівняння в інший спосіб, прирівнявши до нуля вхідний опір кола $Z_{вх}(j\omega)$ відносно затискачів джерела:

$$R_1 + \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} = 0; \quad j\omega L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + 1 = 0.$$

Після заміни $j\omega$ на p отримуємо вираз (1.24).

Приклад 1.3. Визначити струм $i_2(t)$ електричного кола, схему якого зображено на рис. 1.4, а.

Розв'язання. Початкові умови в колі нульові. Запишемо систему рівнянь Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_C(t) = 0; \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = e(t); \\ u_C(t) - R_2 i_2(t) = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

і зведемо її до одного рівняння відносно струму $i_2(t)$:

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_2(t) = \frac{1}{R_1 R_2 C} e(t). \quad (1.26)$$

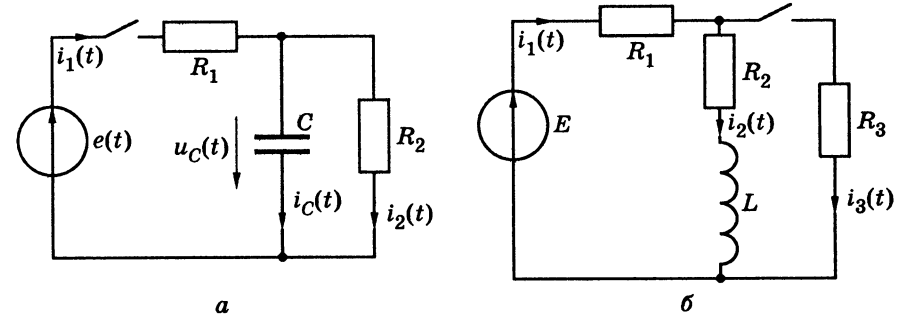


Рис. 1.4. Схеми електричних кіл до прикладів 1.3 і 1.4

Складемо характеристичне рівняння

$$p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = 0,$$

визначимо його корінь:

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

Розв'язок рівняння (1.26) згідно з класичним методом має такий вигляд:

$$i_2(t) = A_1 e^{p_1 t} + i_{2\text{вм}}(t), \quad (1.27)$$

де вимушена складова струму $i_{2\text{вм}}(t)$ може бути записана конкретно, якщо буде заданий закон змінювання вхідної дії. Визначення вимушеної складової відгуку в режимі постійної та синусоїдної дії розглянуто в прикладі 1.4 та підрозділах 1.2, 1.4.

Отримаємо сталу інтегрування з рівняння (1.27), підставивши $t = +0$:

$$i_2(+0) = A_1 + i_{2\text{вм}}(+0). \quad (1.28)$$

Початкове значення струму $i_2(+0)$ здобудемо з третього рівняння системи (1.25) при $t = +0$:

$$u_C(+0) - R_2 i_2(+0) = 0.$$

Оскільки початкові умови нульові, то $u_C(-0) = 0$. За другим законом комутації $u_C(+0) = u_C(-0)$. Отже, $i_2(+0) = 0$ і з виразу (1.28) визначаємо:

$$A_1 = -i_{2\text{вм}}(+0); \quad i_2(t) = -i_{2\text{вм}}(+0) e^{p_1 t} + i_{2\text{вм}}(t).$$

Приклад 1.4. Електричне коло (рис. 1.4, б) увімкнено до джерела постійної ЕРС. Визначити струм $i_3(t)$. Параметри кола: $E = 12$ В, $R_1 = R_3 = 10$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $L = 2$ мГн.

Розв'язання

1. Розглядуване коло має ненульові початкові умови. За законами Кірхгофа складемо систему рівнянь для миттєвих значень напруг і струмів для моменту часу $t = +0$:

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t); \\ R_1 i_1(t) + R_3 i_3(t) = E; \\ R_3 i_3(t) - L \frac{di_2(t)}{dt} - R_2 i_2(t) = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Розв'язуючи цю систему відносно струму $i_3(t)$, знаходимо диференціальне рівняння:

$$L(R_1 + R_3) \frac{di_3(t)}{dt} + i_3(t)[R_1 R_3 + R_2(R_1 + R_3)] = ER_2, \quad (1.30)$$

з якого визначаємо характеристичне рівняння:

$$L(R_1 + R_3)p + (R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2) = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння становить:

$$p_1 = -\frac{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2}{L(R_1 + R_3)} = -4000 \text{ с}^{-1}. \quad (1.31)$$

Примітка. Зазначимо, що іноді задачу аналізу перехідного процесу в колі першого порядку розв'язують, виключаючи етап складання диференціального рівняння. При цьому корінь характеристичного рівняння знаходять за допомогою сталої часу $\tau = -1/p_1$ (див. підрозділ 1.2). Оскільки характеристичне рівняння кола (як ліва частина диференціального) не залежить від зовнішньої дії, сталу часу можна визначати, розглядаючи вільний процес у колі. При цьому передбачається, що джерела напруги розімкнено, джерела струму — замкнено, а в реактивному елементі накопичено деякий запас енергії. Накопичувальний елемент розглядається як джерело енергії, а інша частина кола — як його навантаження.

Для кола R, C (див. п. 1.2.1) стала часу $\tau_C = R_e C$, для кола R, L (див. п. 1.2.3) стала часу $\tau_L = L/R_e$, де R_e — еквівалентний опір кола відносно затискачів накопичувального елемента.

Оскільки джерелом вільних процесів у схемі є індуктивність, визначимо значення еквівалентного опору відносно затискачів індуктивності:

$$R_e = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}{R_1 + R_3};$$

$$p_1 = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R_e}{L} = -\frac{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2}{L(R_1 + R_3)}.$$

Як бачимо, отриманий результат збігається з виразом (1.31).

Розв'язок рівняння (1.30) шукаємо у вигляді:

$$i_3(t) = A_1 e^{p_1 t} + i_{3\text{вм}}(t). \quad (1.32)$$

2. Щоб знайти вимушену складову, розглянемо момент часу $t \rightarrow \infty$. В усталеному режимі постійного струму опір індуктивності дорівнює нулю. За еквівалентною схемою (рис. 1.5, а) знаходимо шуканий струм

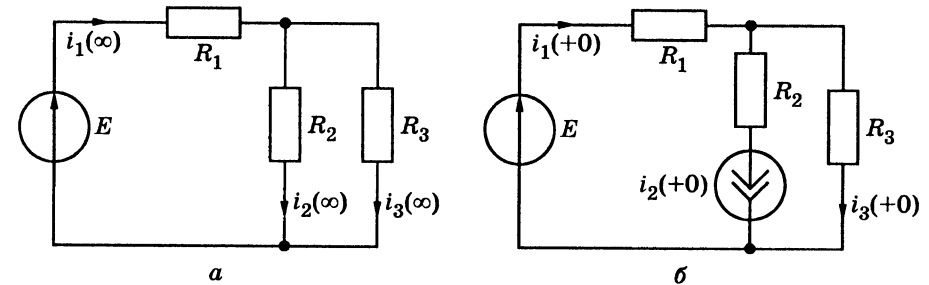


Рис. 1.5. Еквівалентні схеми кола (рис. 1.4, б) для моментів часу: а — $t \rightarrow \infty$; б — $t = +0$

$i_{3\text{вм}}(t) = i_3(\infty)$, користуючись законом Ома та формулою розподілу струмів у паралельних вітках:

$$i_3(\infty) = i_1(\infty) \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{ER_2}{[R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)](R_2 + R_3)} = \frac{12 \cdot 3}{(10 + 30/13) \cdot 13} = 0,225 \text{ А.}$$

3. Для того щоб визначити сталу інтегрування A_1 , розглянемо рівняння (1.32) при $t = +0$:

$$i_3(+0) = A_1 + i_{3\text{вм}}(+0),$$

звідки

$$A_1 = i_3(+0) - i_{3\text{вм}}(+0). \quad (1.33)$$

Оскільки шуканий струм $i_3(t)$ не є струмом в індуктивному елементі, до нього не можна безпосередньо застосувати закон комутації. У цьому випадку $i_3(+0)$ є залежним початковим значенням, яке можна знайти двома способами:

а) для моменту $t = +0$, підставивши перше рівняння системи (1.29) до другого, матимемо:

$$R_1[i_2(+0) + i_3(+0)] + R_3 i_3(+0) = E, \text{ звідки } i_3(+0) = \frac{E - R_1 i_2(+0)}{R_1 + R_3}.$$

Струм можна визначити з першого закону комутації як струм в індуктивності:

$$i_2(+0) = i_2(-0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12}{10 + 3} = 0,923 \text{ А,}$$

$$\text{тоді } i_3(+0) = \frac{12 - 10 \cdot 0,923}{10 + 10} = 0,139 \text{ А;}$$

б) складемо схему кола для моменту $t = +0$ (рис. 1.5, б), враховуючи, що за ненульових початкових умов індуктивність еквівалентна джерелу

струму $i_2(+0)$. Оскільки в цій схемі є два джерела, скористуємось методом накладання:

$$i_3(+0) = i_{3a}(+0) - i_{3c}(+0) = \frac{E}{R_1 + R_3} - i_2(+0) \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0,6 - 0,462 = 0,139 \text{ А.}$$

Отже, з формули (1.33) $A_1 = 0,139 - 0,225 = -0,086 \text{ А}$, а кінцевий вираз для струму матиме вигляд:

$$i_3(t) = -0,086e^{-4000t} + 0,225 \text{ А.}$$

Приклад 1.5. До замикання контакту в колі (рис. 1.6, а) був усталений режим постійного струму. Визначити: 1) струми в усталеному режимі при $t \rightarrow \infty$; 2) струми та їх перші похідні за часом для моменту замикання контакту $t = +0$ за таких умов: $R_1 = R_2 = R_4 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = R_5 = 200 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $E_1 = 120 \text{ В}$.

Розв'язання

1. В усталеному режимі при $t \rightarrow \infty$ опір індуктивності прямує до нуля, а опір ємності — до нескінченності. Виходячи з еквівалентної схеми (рис. 1.6, б), знаходимо:

$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3 R_5 / (R_3 + R_5)} = \frac{120}{100 + 100 + 100} = 0,4 \text{ А;}$$

$$i_3(\infty) = i_5(\infty) = i_1(\infty) \frac{R_5}{R_3 + R_5} = 0,4 \frac{1}{2} = 0,2 \text{ А; } i_4(\infty) = 0.$$

2. Розрахунок режиму для $t = +0$ почнемо з визначення незалежних початкових значень, користуючись усталеними значеннями струмів та напруг до комутації й законами комутації:

$$i_3(+0) = i_3(-0) = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120}{100 + 100 + 200} = 0,3 \text{ А;}$$

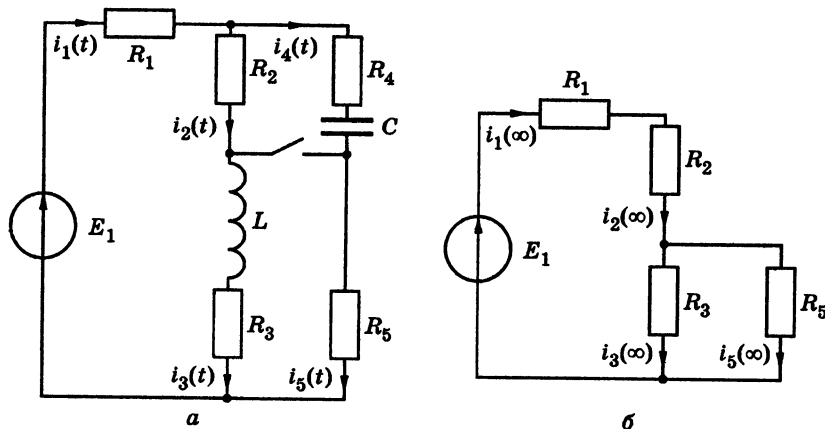


Рис. 1.6. Схеми кола для моментів часу: а — $t = -0$; б — $t \rightarrow \infty$

$$u_C(+0) = u_C(-0) = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120 \cdot (100 + 200)}{100 + 100 + 200} = 90 \text{ В.}$$

За ненульових початкових умов індуктивність еквівалентна джерелу струму $i_3(+0)$, а ємність — джерелу ЕРС $u_C(+0)$. Еквівалентну схему кола при $t = +0$ показано на рис. 1.7, а. Щоб розрахувати струми, скористаємось методом контурних струмів, попередньо перетворивши джерело струму $i_3(+0)$ до джерела ЕРС $E_e = i_3(+0)R_5 = 0,3 \cdot 200 = 60 \text{ В}$ (рис. 1.7, б).

Запишемо матриці опорів та контурних ЕРС:

$$(R) = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 100 \\ 100 & 200 \end{pmatrix} \text{ Ом; } (E) = \begin{pmatrix} E_1 + E_e \\ u_C(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix} \text{ В.}$$

Обчислимо контурні струми:

$$I_I = \frac{1}{\Delta_R} (180 \cdot \Delta_{11} + 90 \cdot \Delta_{21}) = \frac{180 \cdot 200 + 90 \cdot (-100)}{70\,000} = 0,386 \text{ А;}$$

$$I_{II} = \frac{1}{\Delta_R} (180 \cdot \Delta_{12} + 90 \cdot \Delta_{22}) = \frac{180 \cdot (-100) + 90 \cdot 400}{70\,000} = 0,257 \text{ А}$$

та шукані струми віток: $i_1(+0) = I_I = 0,386 \text{ А}$; $i_2(+0) = I_I + I_{II} = 0,643 \text{ А}$; $i_4(+0) = -I_{II} = -0,257 \text{ А}$; $i_5(+0) = I_I - i_3(+0) = 0,086 \text{ А}$.

Похідні струмів визначимо, продиференціювавши за часом систему рівнянь Кірхгофа для схеми (рис. 1.7, б):

$$\begin{cases} i_1'(t) = i_2'(t) + i_4'(t); \\ (R_1 + R_5)i_1'(t) + R_2 i_2'(t) = 0; \\ R_2 i_2'(t) - R_4 i_4'(t) = u_C'(t). \end{cases} \quad (1.34)$$

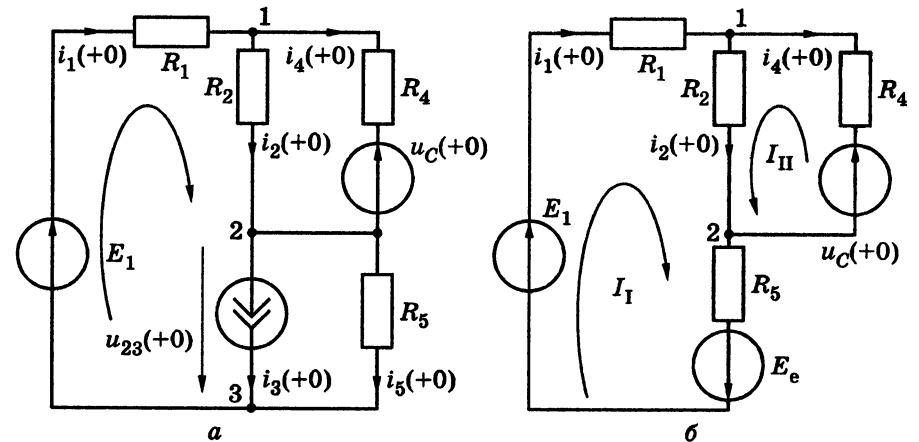


Рис. 1.7. Еквівалентні схеми кола при $t = +0$

Враховуючи, що $i'_C(+0) = \frac{i_4(+0)}{C}$, і розв'язуючи систему (1.34) для моменту $t=+0$ відносно похідної струму $i'_4(+0)$, отримаємо:

$$i'_4(+0) = -\frac{i_4(+0)}{C \left[R_4 + \frac{R_2(R_1 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_5} \right]} = \frac{-0,257}{10^{-6} \cdot (100 + 100 \cdot 300/400)} = 1468 \text{ А} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$i'_2(+0) = -\frac{i'_4(+0)(R_1 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_5} = -\frac{1468 \cdot 300}{400} = -1101 \text{ А} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$i'_1(+0) = i'_2(+0) + i'_4(+0) = -1101 + 1468 = 367 \text{ А} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Обчисливши напругу $u_{23}(+0)$ за другим законом Кірхгофа для першого контуру (див. рис. 1.7, а):

$$u_{23}(+0) = E - R_1 i'_1(+0) - R_2 i'_2(+0) = 120 - 100 \cdot 0,386 - 100 \cdot 0,643 = 17 \text{ В},$$

розрахуємо похідну струму в індуктивності $i'_3(+0)$ як $i'_3(+0) = u_{23}(+0)/L = 17/0,01 = 1700 \text{ А} \cdot \text{с}^{-1}$, а похідну струму $i'_5(+0)$ — за першим законом Кірхгофа для вузла 3 (див. рис. 1.7, а): $i'_5(+0) = i'_1(+0) - i'_3(+0) = 367 - 1700 = -1333 \text{ А} \cdot \text{с}^{-1}$.

Приклад 1.6. До електричного кола, яке утворюють послідовно з'єднані елементи $L = 40 \text{ мГн}$, R та C (рис. 1.8, а), прикладено постійну напругу $U = 120 \text{ В}$. Конденсатор замкнено. Раптовим розімкненням контакту конденсатор вводиться в коло. Визначити напругу на обкладках конденсатора та струм у двох випадках: 1) $R = 100 \text{ Ом}$, $C = 25 \text{ мкФ}$; 2) $R = 80 \text{ Ом}$, $C = 5 \text{ мкФ}$. Накреслити криву $u_C(t)$.

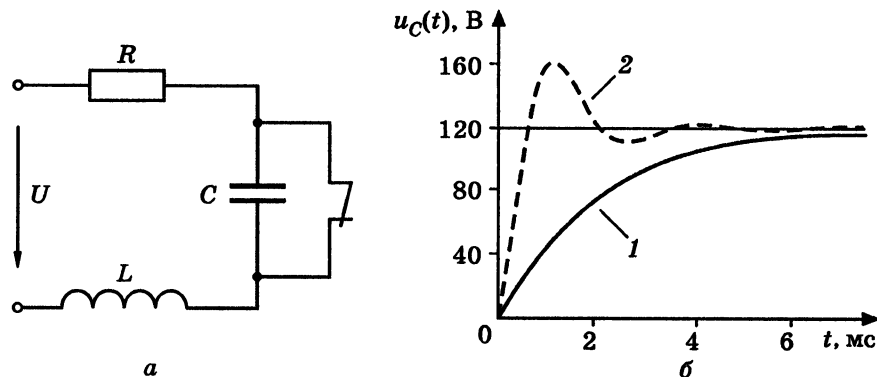


Рис. 1.8. Схема (а) та графіки часової залежності напруги на ємності (б) до прикладу 1.6

Розв'язання. Розв'яжемо задачу, виключаючи етап складання диференціального рівняння. Напругу на конденсаторі знайдемо як суму вимушеного та вільного значень: $u_C(t) = u_{\text{Свл}}(t) + u_{\text{Свм}}(t)$.

Вимушена складова напруги в усталеному режимі $u_{\text{Свм}}(t) = 120 \text{ В}$, оскільки після розмикання ключа із завершенням перехідного процесу конденсатор буде заряджений до рівня прикладеної до кола постійної напруги.

Для визначення вільної складової прирівняємо до нуля вхідний опір кола $Z_{\text{вх}}(j\omega)$, замінивши $j\omega$ на p :

$$R + pL + 1/pC = 0; \quad p^2 LC + pRC + 1 = 0.$$

Здобує характеристичне рівняння має два корені:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (1.35)$$

Для кожного з двох заданих випадків обчислимо корені $p_{1,2}$, а також вільну складову шуканої напруги.

1. За формулою (1.35) знаходимо: $p_1 = -2000 \text{ с}^{-1}$, $p_2 = -500 \text{ с}^{-1}$. Для різних дійсних коренів характеристичного рівняння вільна складова має вигляд (1.9):

$$u_{\text{Свл}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

де A_1, A_2 — сталі інтегрування.

Підсумовуючи вільну та вимушену складові, матимемо:

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + u_{\text{Свм}}(t).$$

Щоб розрахувати A_1, A_2 , скористаємося формулами (1.15), (1.16):

$$\begin{cases} u_C(+0) = A_1 + A_2 + 120; \\ u'_C(+0) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases} \quad (1.36)$$

Згідно з законом комутації за нульових початкових умов $u_C(-0) = u_C(+0) = 0$. Щоб знайти значення похідної $u'_C(+0)$, запишемо диференціальне співвідношення між напругою і струмом у ємності:

$$\frac{du_C(+0)}{dt} = \frac{i_C(+0)}{C}.$$

Оскільки в момент $t=+0$ за нульових початкових умов ємність еквівалентна короткому замиканню, а індуктивність була замкнена в усталеному режимі до комутації, струм $i_C(+0) = U/R$.

Тоді система (1.36) матиме вигляд

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + 120; \\ \frac{U}{RC} = p_1 A_1 + p_2 A_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -A_1 - 120; \\ 48000 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо $A_1 = 8$ В, $A_2 = -128$ В. Отже,

$$u_C(t) = 120 + 8e^{-2000t} - 128e^{-500t} \text{ В (рис. 1.8, б, крива 1);}$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -0,4e^{-2000t} + 1,6e^{-500t} \text{ А.}$$

2. За формулою (1.35) $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{вл}} = -1000 \pm j2000 \text{ с}^{-1}$. Для комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння вільна складова має вигляд (1.10):

$$u_{\text{Свл}}(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{вл}} t + \psi),$$

де A, ψ — сталі інтегрування.

Підсумовуючи вільну та вимушену складові, матимемо:

$$u_C(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{вл}} t + \psi) + u_{\text{Свм}}(t).$$

Складемо систему рівнянь аналогічно системі (1.36):

$$\begin{cases} 0 = A \sin \psi + 120; \\ \frac{U}{RC} = -\delta A \sin \psi + A \omega_{\text{вл}} \cos \psi. \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння $A = -\frac{120}{\sin \psi}$ та підставимо до другого:

$$3 \cdot 10^5 = 120\delta - 120\omega_{\text{вл}} \text{ctg } \psi, \text{ звідки } \psi = \text{arctg}(-3/4) = -53^\circ; A = 150 \text{ В.}$$

Запишемо кінцевий вираз напруги на конденсаторі:

$$u_C(t) = 120 + 150e^{-1000t} \sin(2000t - 53^\circ) \text{ В (рис. 1.8, б, крива 2).}$$

Зазначимо, що вільну складову також можна знайти, використовуючи функцію косинус: $u_{\text{Свл}}(t) = A_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t + \psi_1)$.

Розраховуючи аналогічно сталі інтегрування A_1, ψ_1 , отримаємо:

$$u_C(t) = 120 - 150e^{-1000t} \cos(2000t + 37^\circ) \text{ В.}$$

Диференціюючи $u_C(t)$ і помножуючи на C , визначаємо струм:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= 0,75 \cdot 10^{-3} e^{-1000t} [1000 \cos(2000t + 37^\circ) + 2000 \sin(2000t + 37^\circ)] = \\ &= 0,75e^{-1000t} \sqrt{5} \sin(2000t + 37^\circ + \text{arctg } 0,5) = 1,68e^{-1000t} \sin(2000t + 64^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

1.2. Перехідні процеси в колах R, C та R, L

1.2.1. Вільний режим у колі R, C

Нехай коло R, C (рис. 1.9, а) має ненульові початкові умови: $u_C(-0) = E$. Напруги на ємності $u_{\text{Свл}}(t)$ та опорі $u_{\text{Рвл}}(t) = Ri_{\text{вл}}(t) = RC \frac{du_{\text{Свл}}(t)}{dt}$ задовольняють другому закону Кірхгофа, згідно

з яким

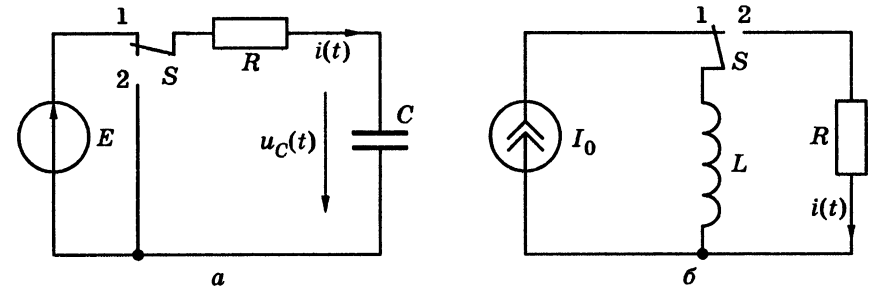


Рис. 1.9. Схеми електричних кіл: а — R, C ; б — R, L

$$u_{\text{Рвл}}(t) + u_{\text{Свл}}(t) = 0, \text{ або } RC \frac{du_{\text{Свл}}(t)}{dt} + u_{\text{Свл}}(t) = 0. \quad (1.37)$$

Диференціальному рівнянню (1.37) відповідає характеристичне $pCR + 1 = 0$.

Це рівняння має єдиний корінь $p = -1/RC$, який є дійсним від'ємним числом. Інакше кажучи, $p_1 = -1/\tau$, де стала $\tau = RC$ має вимірність часу: $[\tau] = [RC] = \text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с}/\text{В} = \text{с}$. Її називають *сталю часу* кола.

Отже, загальний розв'язок рівняння (1.37) такий:

$$u_{\text{Свл}}(t) = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-t/\tau}. \quad (1.38)$$

Стала A_1 розраховується з початкових умов із використанням закону комутації. При $t = +0$ за формулою (1.38) $u_C(+0) = A_1 e^0 = A_1$; згідно з законом комутації за ненульових початкових умов $u_C(+0) = u_C(-0) = E$. Тобто $A_1 = E$, і вираз (1.38) приймає вигляд $u_{\text{Свл}}(t) = E e^{-t/\tau}$.

Струм у колі та напругу на опорі можна визначити за законом Ома:

$$i_{\text{вл}}(t) = C \frac{du_{\text{Свл}}(t)}{dt} = -\frac{C}{\tau} E e^{-t/\tau} = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}; u_{\text{Рвл}}(t) = Ri_{\text{вл}}(t) = -E e^{-t/\tau},$$

де $\tau = RC$.

Відповідні графіки зображено на рис. 1.10, а, з якого видно, що згідно з другим законом Кірхгофа в будь-який момент часу алгебраїчна сума напруг у колі дорівнює нулю.

З'ясувати зміст сталої часу можна, поклавши $t = \tau$. Тоді $u_C(\tau) = -u_R(\tau) = E/e$; $i(\tau) = -E/(R \cdot e)$. Отже, стала часу τ дорівнює часовому інтервалу, за який напруга або струм у колі R, C зменшуються за абсолютною величиною у вільному режимі в $e = 2,718$ рази (37 % від початкового значення).

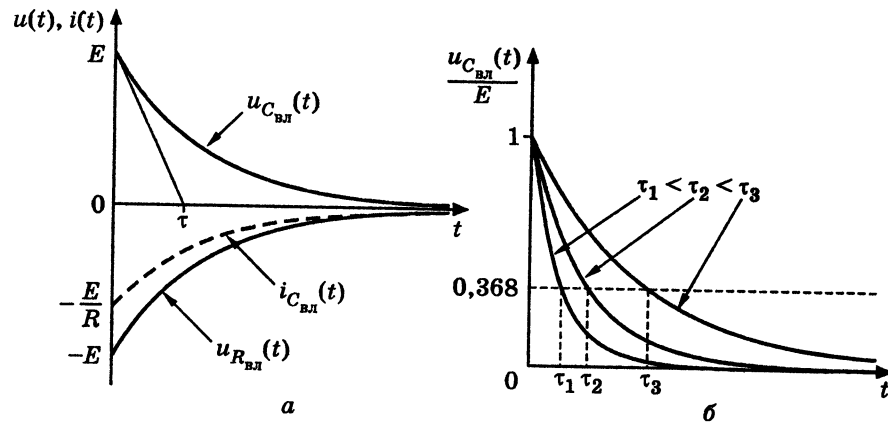


Рис. 1.10. Графіки часових залежностей струму і напруг кола R, C у вільному режимі

Інакше, стала часу електричного кола — величина, що характеризує електричне коло з одним інерційним елементом (індуктивністю чи ємністю) і дорівнює довжині піддотичної до кривої вільної складової перехідного струму (рис. 1.10, а). Дійсно,

$$\frac{du_{C_{\text{вкл}}}(t)}{dt} = -\frac{E}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{u_{C_{\text{вкл}}}(t)}{\tau}.$$

Графік функції для різних значень τ наведено на рис. 1.10, б, а числові значення — в табл.1.1.

Таблиця 1.1

Числові значення функції $u_{C_{\text{вкл}}}(t)$

t/τ	1	2	2,3	3	4,6
$u_{C_{\text{вкл}}}(t)/E$	0,368	0,136	0,1	0,05	0,01

Із добутого розв'язку випливає, що процес зменшення напруги та струму триває нескінченно, і лише при $t \rightarrow \infty$ коло переходить до режиму спокою, коли вся

енергія $CE^2/2$, що накопичена в ємності, буде виділена в опорі R у вигляді теплової енергії, тобто коли $\int_0^{\infty} p(t)dt = CE^2/2$, де $p(t) = i^2(t)R$ — потужність.

В інженерній діяльності користуються різними критеріями практичної тривалості перехідного процесу $t_{\text{пер}}$. Наприклад, у техніці сильних струмів вона приймається рівною $t_{\text{пер}} = (5..6)\tau$. У радіотехніці вільні процеси вважають завершеними при $t > 4,6\tau$,

коли $u_C(t) < 0,01E$, тобто тривалість перехідного процесу становить $t_{\text{пер}} = 4,6\tau$.

1.2.2. Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, C

У колі R, C , яке зображено на рис. 1.9, а, увімкненню джерела E відповідає зміна положення перемикача $S: 2 \rightarrow 1$. При цьому існують нульові початкові умови: $u_C(-0) = 0$. Згідно з другим законом Кірхгофа

$$Ri(t) + u_C(t) = E; RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E. \quad (1.39)$$

За класичним методом розв'язок диференціального рівняння (1.39) представляють у вигляді: $u_C(t) = u_{C_{\text{вкл}}}(t) + u_{C_{\text{вм}}}(t)$.

Характеристичне рівняння $pRC + 1 = 0$ має корінь $p_1 = -1/RC = -1/\tau$. Загальний розв'язок рівняння (1.39) (або вільна складова) збігається з (1.38). Оскільки при $t \rightarrow \infty$ конденсатор заряджається до рівня E , то вимушена складова $u_{C_{\text{вм}}} = E$. Тоді

$$u_C(t) = A_1 e^{-t/\tau} + E. \quad (1.40)$$

Сталу інтегрування A_1 визначають із системи рівнянь:

$$\begin{cases} u_C(+0) = A_1 + E; \\ u_C(-0) = 0. \end{cases}$$

Згідно із законом комутації $u_C(-0) = u_C(+0)$. Тоді $A_1 + E = 0$, $A_1 = -E$. Отже, за нульових початкових умов можна записати:

$$u_C(t) = -E e^{-t/\tau} + E = E(1 - e^{-t/\tau});$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{EC}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}; u_R(t) = Ri(t) = E e^{-t/\tau}.$$

Графіки отриманих залежностей зображені на рис. 1.11, а. Слід звернути увагу на те, що в момент комутації струм кола, а отже, й напруга $u_R(t)$ зростають стрибкоподібно.

1.2.3. Вільний режим у колі R, L

Вільний режим у колі R, L виникає за рахунок енергії, накопиченої в магнітному полі індуктивності. Схема, зображена на рис. 1.9, б, має ненульові початкові умови: $i_L(-0) = I_0$, тому при замиканні перемикача у вітті R, L виникає вільний процес.

Згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_{R_{\text{вл}}}(t) + u_{L_{\text{вл}}}(t) = 0; Ri_{\text{вл}}(t) + L \frac{di_{\text{вл}}(t)}{dt} = 0. \quad (1.41)$$

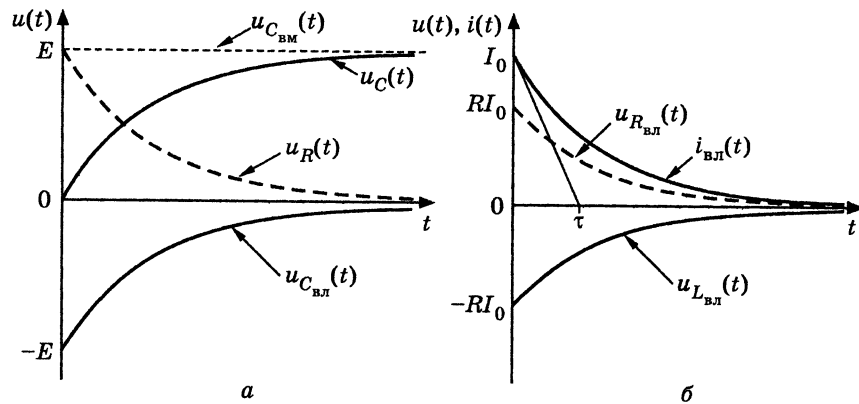


Рис. 1.11. Графіки часових залежностей: *a* — напруг кола R, C ; *б* — вільних складових струму і напруг кола R, L

Рівняння (1.41) аналогічне і дуальне до (1.37) відносно шуканої змінної. Відповідне характеристичне рівняння $pL + R = 0$ має єдиний корінь $p_1 = -R/L = -1/\tau$ ($\tau = L/R$), який є дійсним від'ємним числом. Тому загальний розв'язок рівняння (1.41) матиме вигляд

$$i_{\text{вл}}(t) = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-t/\tau}. \quad (1.42)$$

Значення сталої A_1 отримують із початкових умов і рівняння (1.42): $i(+0) = A_1$, $i(-0) = I_0$, отже $A_1 = I_0$.

Тоді

$$i_{\text{вл}}(t) = I_0 e^{-t/\tau}; \quad u_{R_{\text{вл}}}(t) = R i_{\text{вл}}(t) = R I_0 e^{-t/\tau};$$

$$u_{L_{\text{вл}}}(t) = L \frac{di_{\text{вл}}(t)}{dt} = -\frac{L}{\tau} I_0 e^{-t/\tau} = -R I_0 e^{-t/\tau}.$$

Стала часу τ має той самий зміст, що й у колі RC . Тривалість вільного процесу тим більше, чим більше індуктивність L і менше опір R (рис. 1.11, б).

1.2.4. Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L

Схему аналізованого кола зображено на рис. 1.12, *a*. Початкові умови нульові: $i_L(-0) = 0$. Згідно з другим законом Кірхгофа після переведення перемикача до положення «2» алгебраїчна сума напруг на елементах кола дорівнюватиме E :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E. \quad (1.43)$$

За класичним методом розв'язок (1.43) має вигляд:

$$i(t) = i_{\text{вл}}(t) + i_{\text{вм}}(t).$$

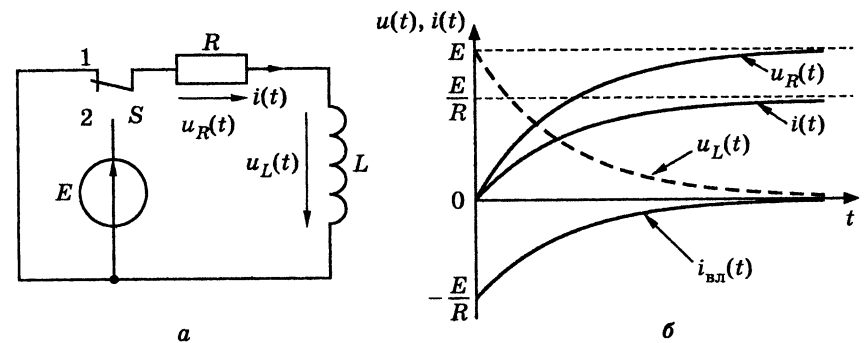


Рис. 1.12. Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L : *a* — схема; *б* — графіки струму і напруг

Характеристичне рівняння $Lp + R = 0$ має корінь $p_1 = -R/L = -1/\tau$. Тому вільна складова збігається з виразом (1.42). Оскільки при $t \rightarrow \infty$ струм у колі становить $i(t) = E/R$ (для постійного струму індуктивність еквівалентна короткому замиканню), то вимушена складова $i_{\text{вм}}(t) = E/R$.

Тоді $i(t) = A_1 e^{p_1 t} + E/R$. Визначивши сталу A_1

$$i_L(+0) = A_1 + E/R; \quad i_L(-0) = 0; \quad A_1 = -E/R,$$

можна записати:

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau});$$

$$u_R(t) = Ri(t) = E(1 - e^{-t/\tau}); \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{LE}{R\tau} e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau}.$$

Відповідні графіки зображені на рис. 1.12, *б*.

Порівняння розв'язків для кіл R, C і R, L показує, що за нульових початкових умов і ступінчастої дії струм у колі R, L і напруга на ємності в колі R, C змінюються за однаковим законом. Струм $i_L(t)$, поступово зростаючи від нуля при $t = 0$, асимптотично наближається до значення $I = E/R$. Напруга на індуктивності $u_L(t)$ в момент комутації змінюється стрибком. У колі при $t \rightarrow \infty$ встановлюється режим постійного струму: $i(\infty) = E/R$, $u_L(\infty) = 0$, $u_R(\infty) = E$. Тривалість перехідного процесу практично оцінюється за тими ж критеріями, що й у колі R, C .

1.3. Перехідні процеси в колі R, L, C

З особливостями перехідних процесів у колі R, L, C доцільно ознайомитись, розглянувши послідовне з'єднання елементів (рис. 1.13, *a*) і припустивши, що в попередній момент до короткого

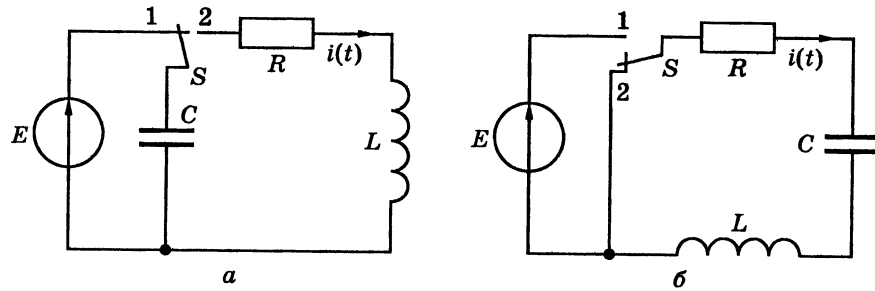


Рис. 1.13. Схеми кола R, L, C у режимах:
 а — вільному; б — вимушеному

замикання кола електромагнітна енергія зосереджена в ємності, а струм в індуктивності дорівнює нулю: $u_C(-0) = E, i_L(-0) = 0$.

Щоб проаналізувати вільний режим, складають рівняння

$$u_{C_{вл}}(t) + Ri_{вл}(t) + L \frac{di_{вл}(t)}{dt} = 0$$

і розв'язують його відносно будь-якої напруги або струму кола, наприклад, відносно напруги на ємності, скориставшись співвідношенням $i_{вл}(t) = C \frac{du_{C_{вл}}(t)}{dt}$. У результаті виходить диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{du_{C_{вл}}^2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{C_{вл}}(t)}{dt} + \frac{u_{C_{вл}}(t)}{LC} = 0, \quad (1.44)$$

$$\text{або } \frac{du_{C_{вл}}^2(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{du_{C_{вл}}(t)}{dt} + \omega_{рез}^2 u_{C_{вл}}(t) = 0,$$

де $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\delta = \frac{R}{2L}$ — коефіцієнт згасання.

Диференціальному рівнянню (1.44) відповідає характеристичне рівняння

$$p^2 + 2\delta p + \omega_{рез}^2 = 0, \quad (1.45)$$

яке має два корені

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_{рез}^2} = -\delta \pm j\omega_{вл},$$

де $\omega_{рез}$ — кутова частота незгасаючих коливань (резонансна частота); $\omega_{вл}$ — кутова частота вільних згасаючих коливань.

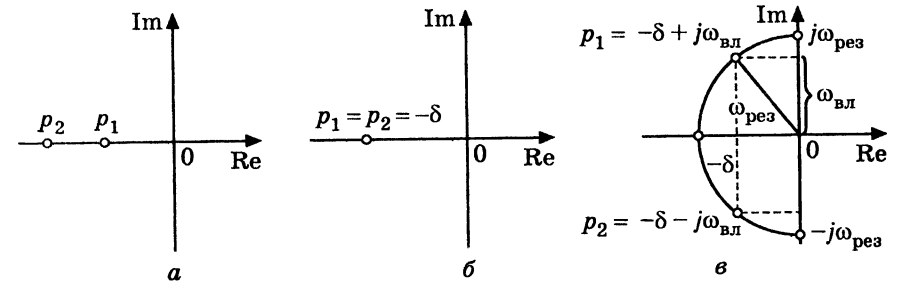


Рис. 1.14. Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині:

а — дійсні різні; б — рівні; в — комплексно-спряжені

На відміну від кіл першого порядку в послідовному колі R, L, C характер перехідного процесу може бути різним. Залежно від значення параметрів кола можливі три основні режими:

1) корені $p_{1,2}$ — дійсні різні (рис. 1.14, а). Тоді $\delta > \omega_{рез}$, $R > 2\rho$ ($\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристичний опір), добротність $Q < 0,5$ (аперіодичний вільний режим);

2) корені $p_{1,2}$ — дійсні рівні (кратні). При цьому $\delta = \omega_{рез}$, $p_1 = p_2 = -\delta$ (рис. 1.14, б), $R = 2\rho$, $Q = 0,5$ (критичний режим);

3) корені $p_{1,2}$ — комплексно-спряжені (рис. 1.14, в). При цьому $\delta < \omega_{рез}$, $R < 2\rho$, $Q > 0,5$ (коливальний режим).

Отже, характер вільних процесів у контурі залежить від вигляду коренів характеристичного рівняння.

1.3.1. Аперіодичний режим

Якщо корені $p_{1,2}$ — різні (варіанти 1 і 3), тобто не утворюють кратного кореня, то згідно з виразом (1.9) загальний розв'язок (1.44) записується в такий спосіб:

$$u_{C_{вл}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.46)$$

Щоб визначити струм у колі, можна скористатися співвідношенням $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$:

$$i_{вл}(t) = C \frac{du_{C_{вл}}(t)}{dt} = CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (1.47)$$

Для визначення A_1 та A_2 підставляють +0 у вирази (1.46), (1.47):

$$\begin{cases} u_{C_{вл}}(+0) = A_1 + A_2; \\ i_{вл}(+0) = CA_1 p_1 + CA_2 p_2. \end{cases} \quad (1.48)$$

Враховуючи початкові умови $u_C(-0) = E$, $i(-0) = i_L(-0) = 0$, а також закони комутації, можна записати:

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2; \\ 0 = CA_1 p_1 + CA_2 p_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = E - A_1; \\ A_1 p_1 + (E - A_1) p_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи виходить: $A_1 = -\frac{Ep_2}{p_1 - p_2}$; $A_2 = \frac{Ep_1}{p_1 - p_2}$. Підстановка значень A_1 і A_2 у співвідношення (1.46) і (1.47) приводить до виразів:

$$u_{C_{вл}}(t) = \frac{Ep_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{Ep_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}; \quad (1.49)$$

$$i_{вл}(t) = \frac{CEp_1 p_2}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Оскільки $p_1 p_2 = \omega_{рез}^2 = \frac{1}{LC}$, то

$$i_{вл}(t) = \frac{E}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (1.50)$$

Виходячи з того, що $u_L(t) = L \frac{di_{вл}(t)}{dt}$,

$$u_{L_{вл}}(t) = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (1.51)$$

Як видно з графіків (рис. 1.15, а-в), побудованих згідно з виразами (1.49)–(1.51), перехідні процеси мають аперіодичний характер. Графіки побудовано для випадку, коли обидва корені від'ємні, а другий корінь p_2 за абсолютною величиною більший від першого.

Напруга на ємності монотонно зменшується, починаючи з початкового значення E . При $t = 0$ дотична до $u_C(t)$ паралельна осі абсцис, оскільки $i(+0) = Cu'_C(+0)$. Струм $i(t)$ буде максимальним при $t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$, тобто в точці перегину кривої $u_C(t)$, у подальшому струм прямує до нуля.

Оскільки при $t = +0$ струм кола дорівнює нулю, а отже, $u_R(t) = 0$, напруги на ємності й індуктивності однакові за величиною, але протилежні за знаком. Напруга на індуктивності дорівнює нулю, коли струм досягає максимуму. У момент часу $t_2 = 2t_1$, коли крива струму має точку перегину, напруга на індуктивності досягає максимального значення, а далі зменшується до нуля.

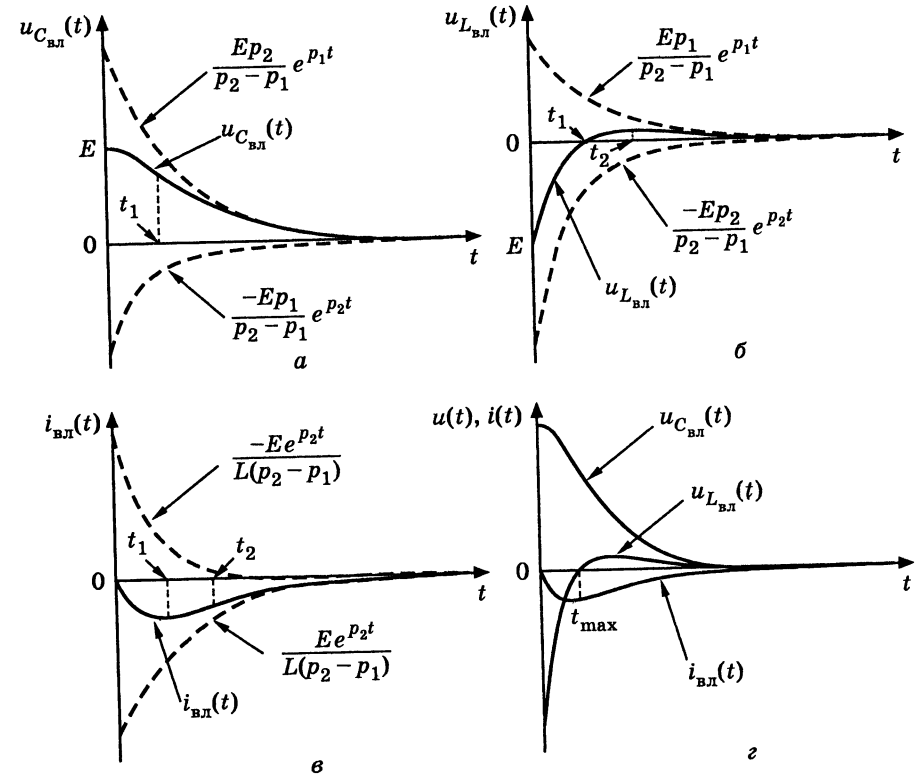


Рис. 1.15. Графіки струмів і напруг у колі R, L, C : а, б, в — аперіодичний режим; г — критичний режим

При розрядженні ємності енергія електричного поля в моменті часу $t < t_1$ частково перетворюється в тепло в опорі, а частково переходить у магнітне поле індуктивності. При $t > t_1$ енергія електричного й магнітного полів перетворюється в теплову (оскільки при $t < t_1$ струм кола зростає за модулем, що відповідає збільшенню запасу енергії магнітного струму, а при $t > t_1$ струм i , відповідно, запас енергії зменшується).

1.3.2. Критичний (граничний аперіодичний) режим

На межі між коливальним і аперіодичним режимами існує критичний вільний режим. Він відповідає кратним кореням характеристичного рівняння, коли $R = 2\rho$, $Q = 0,5$, $p_1 = p_2 = -\delta$. У цьому режимі $\delta \rightarrow \omega_{рез}$, частота вільних коливань $\omega_{вл} = \sqrt{\delta^2 - \omega_{рез}^2} \rightarrow 0$, а період вільних коливань $T_{вл} \rightarrow \infty$.

Загальний розв'язок рівняння (1.44) для кратних коренів має вигляд (1.11)

$$u_{CвЛ}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}. \quad (1.52)$$

Сталі інтегрування A_1 і A_2 визначають із початкових умов. Якщо підставити значення $t = +0$ до виразу (1.52), тоді $u_{CвЛ}(+0) = A_1$. Друге рівняння отримують із співвідношення:

$$i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(-\delta A_1 e^{-\delta t} + A_2 e^{-\delta t} - A_2 t e^{-\delta t});$$

$$i_L(+0) = C(-\delta A_1 + A_2).$$

Оскільки $u_C(+0) = u_C(-0) = E$, $i_L(+0) = i_L(-0) = 0$, то

$$\begin{cases} E = A_1; \\ 0 = -\delta A_1 + A_2; \end{cases} \quad A_2 = \delta A_1 = \delta E.$$

Тоді

$$u_{CвЛ}(t) = E(1 + \delta t)e^{-\delta t};$$

$$i_{вЛ}(t) = C(-\delta E e^{-\delta t} + \delta E e^{-\delta t} - E t \delta^2 e^{-\delta t}) = -CE \delta^2 t e^{-\delta t}. \quad (1.53)$$

З огляду на те, що в критичному режимі $\delta^2 = \omega_{рез}^2 = \frac{1}{LC}$,

$$i_{вЛ}(t) = -\frac{E}{L} t e^{-\delta t}; \quad (1.54)$$

$$u_{LвЛ}(t) = L \frac{di_{вЛ}(t)}{dt} = -E(e^{-\delta t} - \delta t e^{-\delta t}) = E e^{-\delta t} (\delta t - 1). \quad (1.55)$$

Криві змінювання напруги на ємності й індуктивності та струму в колі, які визначаються за формулами (1.53)–(1.55), зображено на рис. 1.15, *г*. Ці залежності аналогічні кривим, показаним на рис. 1.15, *а–в*. Струм буде максимальним за абсолютною величиною при $t_{max} = 1/\delta$. Аналізуючи графіки, можна стверджувати, що власні процеси в даному випадку також мають аперіодичний характер. Тобто вираз $\omega_{рез} = \delta e$ граничною умовою існування аперіодичного процесу в контурі.

1.3.3 Коливальний режим у колі R, L, C

Якщо $\delta < \omega_{рез}$ ($R < 2\rho$), то корені характеристичного рівняння (1.45) утворюють пару комплексно-спряжених чисел $p_1 = -\delta + j\omega_{вЛ}$; $p_2 = -\delta - j\omega_{вЛ}$. Розташування коренів на комплексній площині показано на рис. 1.14, *в*. У цьому випадку справедливий розв'язок (1.10) або аналогічний запис з використанням функції косинус:

$$u_{CвЛ}(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_{вЛ} t + \psi).$$

Струм у колі визначається співвідношенням:

$$i_{вЛ}(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} =$$

$$= -CA \delta e^{-\delta t} \cos(\omega_{вЛ} t + \psi) - CA e^{-\delta t} \omega_{вЛ} \sin(\omega_{вЛ} t + \psi).$$

Підставивши значення $+0$ в отримані вирази і враховуючи початкові умови $u_C(-0) = E$; $i(-0) = i_L(-0) = 0$, а також закони комутації, аналогічно рівнянням (1.48), записують систему для визначення сталих A та ψ :

$$\begin{cases} E = A \cos \psi; \\ 0 = \delta A \cos \psi + A \omega_{вЛ} \sin \psi, \end{cases}$$

звідки випливає:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\delta}{\omega_{вЛ}}; \quad A = \frac{E}{\cos \psi} = E \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = E \sqrt{1 + \delta^2 / \omega_{вЛ}^2} = E \frac{\omega_{рез}}{\omega_{вЛ}},$$

$$\text{де } \omega_{рез} = \sqrt{\omega_{вЛ}^2 + \delta^2}; \quad (-\psi) = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega_{вЛ}}.$$

Підстановка значень A та ψ у вираз для напруги на ємності дає:

$$u_{CвЛ}(t) = \frac{E \omega_{рез}}{\omega_{вЛ}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{вЛ} t - \psi). \quad (1.56)$$

Аналогічно, підставляючи A та ψ до виразу для струму та використовуючи відому з математики формулу

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + \gamma) = r \cos(90^\circ - x - \gamma); \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

можна записати:

$$i_{вЛ}(t) = -\frac{E}{L \omega_{вЛ}} e^{-\delta t} \sin \omega_{вЛ} t. \quad (1.57)$$

Напругу на індуктивності визначають диференціюванням виразу (1.57):

$$u_{LвЛ}(t) = L \frac{di_{вЛ}(t)}{dt} = -\frac{E}{\omega_{вЛ}} (-\delta e^{-\delta t} \sin \omega_{вЛ} t + \omega_{вЛ} e^{-\delta t} \cos \omega_{вЛ} t) =$$

$$= \frac{E}{\omega_{вЛ}} e^{-\delta t} (\delta \sin \omega_{вЛ} t - \omega_{вЛ} \cos \omega_{вЛ} t) = -\frac{E}{\omega_{вЛ}} e^{-\delta t} \sqrt{\omega_{вЛ}^2 + \delta^2} \cos(\omega_{вЛ} t + \psi);$$

$$u_{LвЛ}(t) = -\frac{E \omega_{рез}}{\omega_{вЛ}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{вЛ} t + \psi). \quad (1.58)$$

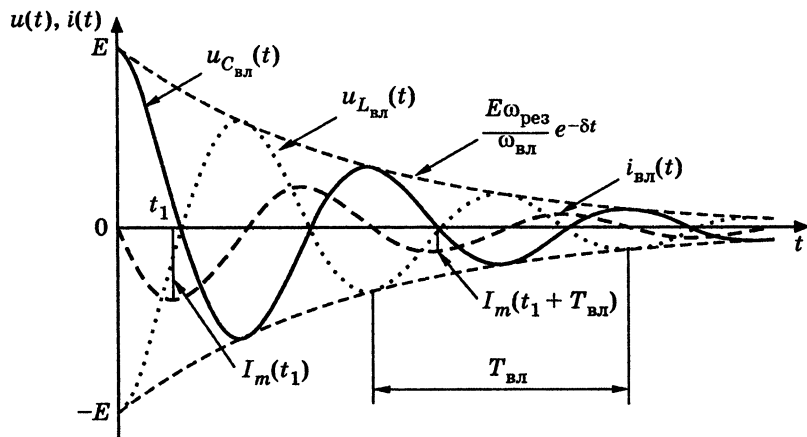


Рис. 1.16. Графіки струму і напруг у колі R, L, C у режимі вільних коливань

Криві, побудовані згідно з формулами (1.56)–(1.58), зображено на рис. 1.16. Аналіз цих графіків свідчить про таке:

1. Оскільки процес відбувається за рахунок власної енергії кола, він викликає вільні коливання, які були б синусоїдними, якби амплітуда була постійною за часом. У даному випадку амплітуда зменшується за експоненційним законом, тому ці коливання називаються *згасаючими*. Періодом згасаючих коливань слід вважати $T_{вл} = 2\pi/\omega_{вл}$, де $\omega_{вл}$ — частота вільних коливань.

2. Відповідно, такий розряд ємності зветься *коливальним*. Для добротного кола значення кута ψ наближається до 0° , тому розряд починається майже з величини E (хоча невеличкий зсув відносно осі ординат таки є). Напруга на ємності зменшується і змінює знак, тобто відбувається перезарядження ємності. Розряд ємності супроводжується втратою енергії, яка переходить до індуктивності. Отже, з енергетичної точки зору, процес власних коливань у контурі можна розглядати як результат неперервного перерозподілу енергії між L і C , між електричним і магнітним полями.

3. Графік $u_{Rвл}(t)$ збігається з графіком $i_{вл}(t)$ з точністю до постійного коефіцієнта. У будь-який момент часу сума напруг у вільному режимі дорівнює нулю: $u_{Lвл}(t) + u_{Rвл}(t) + u_{Cвл}(t) = 0$.

Деякий зсув між синусоїдами $u_{Lвл}(t)$ та $u_{Cвл}(t)$ непомітний, оскільки коло в коливальному режимі має високу добротність.

4. Якщо $R \ll 2r$, коливання існують довго, і коло є послідовним коливальним контуром. Швидкість згасання вільних коливань

характеризується коефіцієнтом δ , тому він зветься *коефіцієнтом згасання*. Чим менше значення δ , тим довше тривають коливання.

Швидкість згасання вільних процесів характеризується також *логарифмічним декрементом згасання* θ , який визначається як натуральний логарифм відношення амплітуд напруг $u_{Cвл}(t)$, $u_{Lвл}(t)$ або струму $i_{вл}(t)$ у моменти часу t_1 і $(t_1 + T_{вл})$.

Для пояснення змісту величини θ слід записати співвідношення (1.57) у вигляді:

$$i_{вл}(t) = I_0 e^{-\delta t} \sin \omega_{вл} t = I_m \sin \omega_{вл} t.$$

Тоді зрозуміло, що

$$\theta = \ln \frac{I_m(t_1)}{I_m(t_1 + T_{вл})} = \ln \frac{I_0 e^{-\delta t_1}}{I_0 e^{-\delta(t_1 + T_{вл})}} = \ln e^{\delta T_{вл}} = \delta T_{вл}.$$

Величини δ , $\omega_{вл}$, θ визначаються параметрами кола

$$\omega_{вл} = \sqrt{\omega_{рез}^2 - \delta^2} = \omega_{рез} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2L\omega_{рез}}\right)^2} = \omega_{рез} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}; \quad Q = \frac{\omega_{рез} L}{R}.$$

Якщо добротність $Q \gg 1$, $\omega_{вл} \rightarrow \omega_{рез}$. Тоді

$$\theta = \delta T_{вл} = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_{вл}} = \frac{\pi R}{L\omega_{рез}} = \frac{\pi}{Q} = \pi d,$$

де d — згасання. Наприклад, при добротності $Q = 40$, $d = 0,025$; $\theta = 0,08$.

Коефіцієнт згасання контуру δ пов'язаний з його добротністю Q та згасанням d :

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{R\omega_{рез}}{2\omega_{рез}L} = \frac{\omega_{рез}}{2Q} = \frac{1}{2}\omega_{рез}d.$$

5. При $t = 1/\delta$ ордината обвідної (крива, яка характеризує змінювання амплітуди коливань за часом, називається *обвідною*) $I_0 e^{-\delta t}$ у $e = 2,718$ рази менша, ніж початкове значення I_0 . Тому величину $1/\delta$ можна вважати сталою часу коливального контуру: $\tau = 1/\delta = 2L/R$. Крім того,

$$\tau = \frac{2L}{R} = \frac{2L\omega_{рез}}{R\omega_{рез}} = \frac{2Q}{\omega_{рез}} = \frac{2}{\Delta\omega_{\Pi}}.$$

З останнього виразу можна зробити важливі висновки:

а) $\tau \cdot 2\Delta\omega_{\Pi} = 2$. Аналогічно, для кола першого порядку $\tau \cdot \Pi_{\omega} = 1$. Отже, стала часу жорстко пов'язана з шириною смуги пропускання

(СП). Якщо добротність Q велика (СП — вузька), коливання тривають довго, і навпаки, якщо Q низька (СП — широка), коливання швидко згасають;

б) оскільки $Q = \frac{\omega_{\text{рез}} \tau}{2}$, можна експериментально визначати добротність контуру за обвідною згасаючих коливань.

1.3.4. Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L, C

Схему кола R, L, C , до якого вмикається джерело E , зображено на рис. 1.13, б. Диференціальне рівняння для даної схеми відрізняється від (1.44) тим, що є неоднорідним (тобто правою частиною):

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{E}{LC}. \quad (1.59)$$

За класичним методом розв'язок рівняння (1.59) шукають у вигляді

$$u_C(t) = u_{\text{СВЛ}}(t) + u_{\text{СВМ}}(t).$$

Вираз для вільної складової $u_{\text{СВЛ}}(t)$ збігається з формулою (1.46), а вимушена складова $u_{\text{СВМ}}(t)$ дорівнює E : $u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + E$.

Вираз для струму можна знайти за формулою

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

Якщо скласти систему рівнянь для моменту часу $t = +0$

$$\begin{cases} u_C(+0) = A_1 + A_2 + E; \\ i_C(+0) = CA_1 p_1 + CA_2 p_2 \end{cases}$$

та врахувати нульові початкові умови, тоді

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + E; \\ 0 = CA_1 p_1 + CA_2 p_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -E - A_1; \\ 0 = p_1 A_1 - p_2 (E + A_1); \end{cases}$$

$$A_1 = E \frac{p_2}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = -E \frac{p_1}{p_1 - p_2}.$$

Визначивши значення сталих A_1 і A_2 , можна записати:

$$u_C(t) = E \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - E \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} + E; \quad (1.60)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{E p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Оскільки $p_1 p_2 = 1/LC$, то

$$i_C(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad (1.61)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = E \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - E \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (1.62)$$

Порівняння виразів (1.60)–(1.62) і (1.49)–(1.51) приводить до висновку:

- 1) коефіцієнти A_1 і A_2 змінюють знак;
- 2) з'являється вимушена складова: $u_{\text{СВМ}}(t) = E$, $u_{\text{ЛВМ}}(t) = 0$, $i_{\text{ВМ}}(t) = 0$.

Отже, при увімкненні джерела постійної напруги E можна скористатися виразами, які було отримано для вільного режиму, але змінити знак вільної складової на протилежний і додати вимушену складову.

Так, для критичного режиму з формул (1.53)–(1.55) виходить:

$$u_C(t) = E - E(1 + \delta t)e^{-\delta t}; \quad (1.63)$$

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\delta t}; \quad (1.64)$$

$$u_L(t) = E e^{-\delta t} (1 - \delta t). \quad (1.65)$$

Згідно з формулами (1.60)–(1.62) на рис. 1.17, а побудовано криві для аперіодичного режиму ($R > 2\rho$; $p_{1,2} < 0$), а згідно з виразами (1.63)–(1.65) на рис. 1.17 б — для граничного аперіодичного режиму ($R = 2\rho$; $p_1 = p_2 = -\delta$). Для обох режимів напруга на ємності плавно зростає від нуля до значення E . Аналогічно вільному

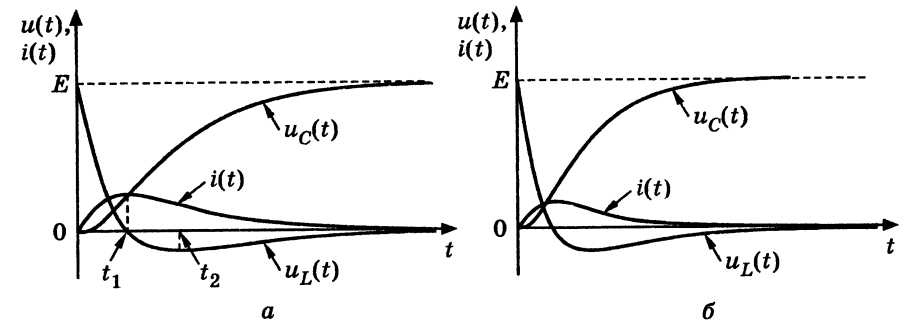


Рис. 1.17. Графіки струмів і напруг у колі R, L, C при увімкненні до джерела постійної напруги: а — аперіодичний режим; б — критичний режим

режиму, струм досягає максимуму при $t = t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$, а напру-
га на індуктивності — при $t_2 = 2t_1$.

Аналогічно, змінюючи знак вільної складової та додаючи виму-
шену складову, з формул (1.56)–(1.58) можна здобути вирази для
напруг на ємності й індуктивності та струму в колі для коливально-
го режиму:

$$u_C(t) = E - \frac{E\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t - \psi); \quad (1.66)$$

$$i(t) = \frac{E}{L\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{вл}} t; \quad (1.67)$$

$$u_L(t) = \frac{E\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t + \psi). \quad (1.68)$$

Відповідні графіки зображено на рис. 1.18. Аналіз цих залеж-
ностей свідчить про таке:

1) у будь-який момент часу сума напруг на елементах кола до-
рівнює E ;

2) коливання є згасаючими, стала часу визначається аналогічно
вільному режиму: $\tau = 1/\delta = 2L/R$;

3) якщо значення сталої часу велике, коливання згасають по-
вільно. Тому через інтервал часу $= T_{\text{вл}}/2$ після моменту комутації

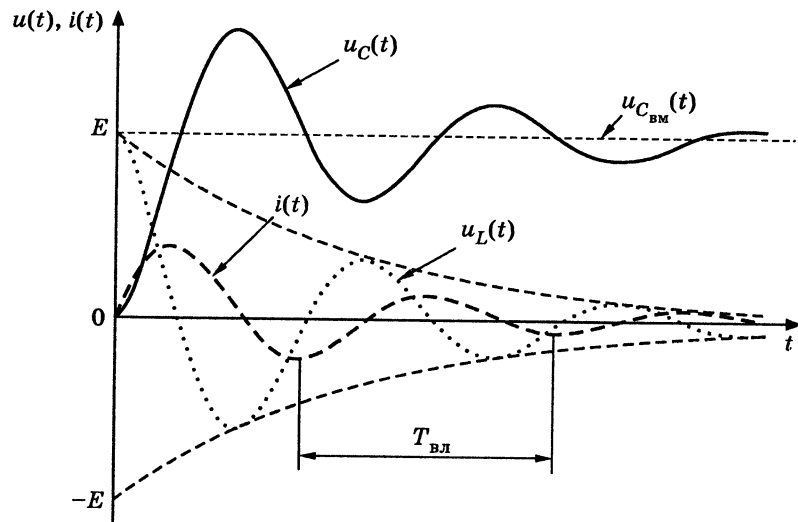


Рис. 1.18. Графіки струму і напруг у колі R, L, C
при ввімкненні джерела постійної напруги (коливальний режим)

напруга на ємності $u_C \cong 2E$, тобто можливе явище перенапруги. Це
явище практично використовується тоді, коли необхідно отримати
напругу, яка майже вдвічі перевищує напругу джерела енергії (на-
приклад, в імпульсній техніці, радіопередавальних пристроях тощо).

1.4. Перехідні процеси в колах $R, C; R, L; R, L, C$ при синусоїдній дії

1.4.1. Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, C

При увімкненні синусоїдної дії в колі також виникають пере-
хідні процеси, які значною мірою залежать від фази напруги (стру-
му) джерела в момент комутації.

Нехай коло R, C (рис. 1.19, а) підключається до джерела сину-
соїдної напруги $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E)$ за нульових початкових
умов: $u_C(-0) = 0$.

Якщо необхідно визначити закон змінювання напруги на єм-
ності, можна скористатись рівнянням (1.39), яке в даному випадку
матиме вигляд:

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E). \quad (1.69)$$

Диференціальному рівнянню (1.69) відповідає характеристичне:

$$RCp + 1 = 0.$$

За класичним методом розв'язок рівняння (1.69) можна знайти
як $u_C(t) = u_{C\text{вл}}(t) + u_{C\text{вм}}(t)$, де $u_{C\text{вл}}(t) = Ae^{-t/\tau}$, $p_1 = -1/RC = -1/\tau$.

Оскільки дія є синусоїдною, вимушена складова визначається
методом комплексних амплітуд:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{I}_m \underline{Z}_C = \frac{\underline{E}_m}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) j\omega C} = \frac{\underline{E}_m}{j\omega RC + 1} = \frac{\underline{E}_m}{j\omega\tau + 1} = \\ &= \frac{E_m e^{j\psi_E}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} e^{j\varphi}} = \frac{E_m e^{j(\psi_E - \varphi)}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \varphi = \arctg \omega\tau \end{aligned}$$

Перехід від комплексної амплітуди до миттєвого значення дає

$$u_{C\text{вм}}(t) = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t + \psi_E - \varphi) = U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}),$$

$$\text{де } U_{mC} = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \psi_{U_C} = \psi_E - \varphi = \psi_E - \arctg \omega\tau.$$

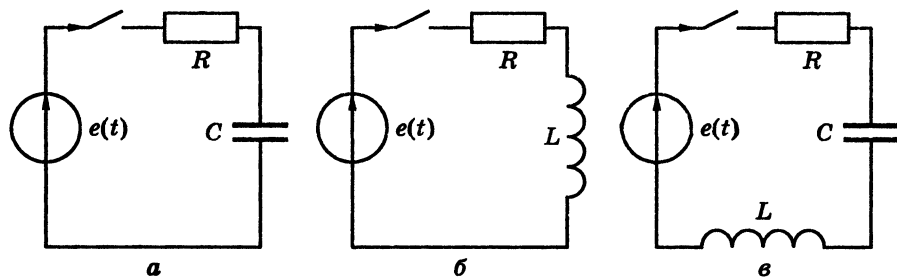


Рис. 1.19. Схеми електричних кіл, які вмикаються до джерела синусоїдної напруги

Отже, $u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C})$.

Стала A обчислюється з початкових умов і закону комутації:

$$\begin{cases} u_C(+0) = A + U_{mC} \cos \psi_{U_C}; & 0 = A + U_{mC} \cos \psi_{U_C}; \\ u_C(-0) = 0; & A = -U_{mC} \cos \psi_{U_C}. \end{cases}$$

Визначивши A , можна записати кінцевий вираз для шуканої напруги:

$$u_C(t) = U_{mC} \cos \psi_{U_C} e^{-t/\tau} + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.70)$$

Згідно з формулою (1.70) напруга на ємності дорівнює сумі двох складових і залежить від величини ψ_{U_C} . При цьому спостерігаються два характерних випадки.

1. Нехай у момент увімкнення джерела миттєве значення вимушеної складової дорівнює нулю. Це можливо, якщо $\psi_{U_C} = \pm \pi/2$. Тоді $\cos \psi_{U_C} = 0$, $u_{C_{вЛ}}(t) = 0$, перехідних процесів не виникає, і в колі відразу встановлюється стаціонарний режим.

2. У загальному випадку, коли $\psi_{U_C} \neq \pi/2$; $\cos \psi_{U_C} \neq 0$, напруга на ємності, як це видно з (1.70), може суттєво відрізнитися від напруги вимушених коливань $u_{C_{вМ}}(t)$. Найхарактернішим у цьому сенсі є перехідний процес, який спостерігається при $\psi_{U_C} = 0, \pi$ (рис. 1.20, а).

У нульовий момент часу сума напруг $u_{C_{вЛ}}(t) + u_{C_{вМ}}(t) = 0$. Потім виникає перехідний процес, який завершується через проміжок часу $4,6\tau$ (див. п. 1.2.1). При $t > 4,6\tau$ вільна складова практично дорівнює нулю і графік $u_C(t)$ збігається з кривою $u_{C_{вМ}}(t)$. Як бачимо, після замикання ключа через проміжок часу, який приблизно дорівнює половині періоду вільних коливань, напруга $u_C(t) > U_{mC}$. Максимальна напруга на ємності може бути більшою, ніж амплітуда вимушеної складової майже вдвічі (особливо якщо стала часу велика).

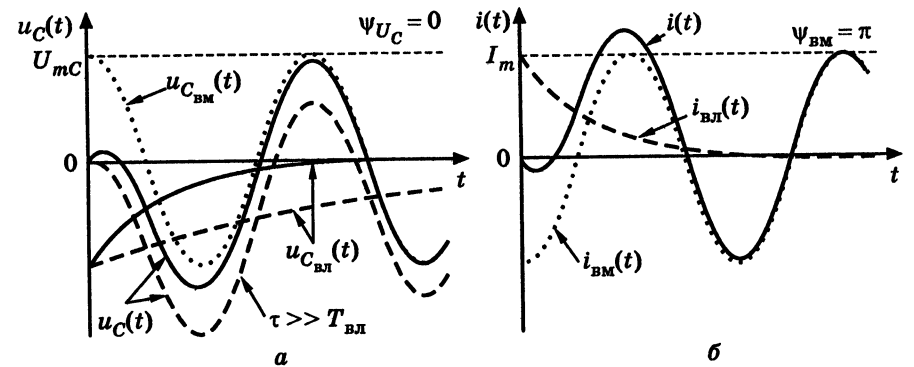


Рис. 1.20. Графіки струмів і напруг при увімкненні до джерела синусоїдної напруги кіл: а — R, C ; б — R, L

1.4.2. Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, L

Нехай коло R, L (рис. 1.19, б) підключається до джерела синусоїдної дії $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E)$ за нульових початкових умов. Якщо необхідно знайти струм у колі, можна скористатися рівнянням (1.43), яке в даному випадку матиме вигляд

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E).$$

Розв'язок цього рівняння

$$i(t) = i_{вЛ}(t) + i_{вМ}(t) = Ae^{-t/\tau} + i_{вМ}(t).$$

Оскільки дія змінюється за синусоїдним законом, вимушену складову струму визначають за допомогою методу комплексних амплітуд:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m e^{j\psi_E}}{R + j\omega L} = \frac{E_m e^{j\psi_E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi}} = I_m e^{j\psi_{вМ}},$$

де

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \psi_{вМ} = \psi_E - \varphi = \psi_E - \arctg \omega\tau; \quad \tau = L/R.$$

Тоді $i(t) = Ae^{-t/\tau} + I_m \cos(\omega t + \psi_{вМ})$.

Сталу A визначають з початкових умов і закону комутації:

$$i_L(+0) = A + I_m \cos \psi_{вМ}; \quad i_L(-0) = 0; \quad A = -I_m \cos \psi_{вМ}.$$

Отже, кінцевий вираз для струму в колі матиме такий вигляд:

$$i(t) = -I_m \cos \psi_{вМ} e^{-t/\tau} + I_m \cos(\omega t + \psi_{вМ}). \quad (1.71)$$

Аналогічно режиму кола R, C (див. п. 1.4.1), залежно від початкової фази вимушеної складової струму можливі два характерні випадки.

1. Відсутність перехідного процесу, коли $\psi_{\text{вм}} = \pm \pi/2$. При цьому в початковий момент часу вимушена складова струму дорівнює нулю, вільний струм відсутній, і в колі відразу встановлюється стаціонарний стан.

2. У загальному випадку вимушена складова струму в початковий момент відрізняється від нуля, й у колі спостерігається перехідний процес (рис. 1.20, б). З рисунка видно, що в початковий момент часу перехідний струм помітно відрізняється за формою від вимушеного струму $i_{\text{вм}}(t)$, причому в деяких точках його перебільшує.

Максимально можливі значення струму в колі, як це випливає з формули (1.71), спостерігаються за умови, коли вимушена складова в момент часу $t = +0$ досягає максимального значення, тобто при $\psi_E = \varphi$, або $\psi_{\text{вм}} = \psi_E - \varphi = 0, \pm \pi$. Якщо стала часу велика, то на інтервалі, де $t \ll \tau$, максимумами струму наближаються до $2I_m$.

1.4.3. Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, L, C

Нехай послідовне коло R, L, C (рис. 1.19, в) підключається до джерела синусоїдної дії $e(t) = E_m \cos \omega t$ за нульових початкових умов: $i_L(-0) = 0; u_C(-0) = 0$.

Оскільки після комутації утворюється коло (див. п. 1.3.4), можна скористатися рівнянням (1.59), врахувавши вид вхідної дії $e(t)$:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{E_m}{LC} \cos \omega t. \quad (1.72)$$

Розв'язок рівняння (1.72) має вигляд: $u_C(t) = u_{C_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вм}}}(t)$. Вільна складова залежить від характеру коренів характеристичного рівняння (1.45). З погляду забезпечення вибірних властивостей радіотехнічних кіл найцікавішим є випадок комплексно-спряжених коренів, який відповідає високому значенню добротності ($Q \gg 1$), а отже, явищу резонанса. Тоді

$$u_{C_{\text{вл}}}(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t + \psi_U); u_C(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t + \psi_U) + u_{C_{\text{вм}}}(t).$$

Вимушена складова напруги визначається методом комплексних амплітуд:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mC} &= \frac{\underline{E}_m}{R + jX} \left(-\frac{j}{\omega C} \right) = \frac{E_m e^{-j\pi/2}}{\omega C \sqrt{R^2 + X^2}} e^{-j \arctg(X/R)} = \\ &= U_{mC} e^{-j(\pi/2 + \arctg(X/R))}, \end{aligned}$$

$$\text{де } U_{mC} = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + X^2}}; X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

$$\text{Якщо початкову фазу } u_{C_{\text{вм}}}(t) \text{ позначити } \psi_{U_C} = \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{X}{R} \right),$$

вираз для миттєвого значення вимушеної складової матиме вигляд

$$u_{C_{\text{вм}}}(t) = \text{Re} \left\{ U_{mC} e^{j(\omega t + \psi_{U_C})} \right\} = U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}).$$

Отже, напруга на ємності визначається за формулою

$$u_C(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t + \psi_U) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.73)$$

Оскільки при $Q \gg 1$ виконується умова $\omega_{\text{вл}} \rightarrow \omega_{\text{рез}}$ (див. п. 1.3.3), вираз (1.73) матиме вигляд

$$u_C(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{рез}} t + \psi_U) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.74)$$

Для визначення сталих інтегрування A і ψ_U доцільно використати вираз для струму, врахувавши, що за умови $Q \gg 1$ згасання $\delta \ll \omega_{\text{рез}}$, а отже, вважати при диференціюванні множник $e^{-\delta t}$ незмінним за період коливання з частотою $\omega_{\text{рез}}$:

$$\begin{aligned} i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} &= -CAe^{-\delta t} \omega_{\text{рез}} \sin(\omega_{\text{рез}} t + \psi_U) - \\ &- CU_{mC} \omega \sin(\omega t + \psi_{U_C}). \end{aligned} \quad (1.75)$$

У результаті підстановки значення $t = +0$ до виразів (1.74), (1.75) виходить система рівнянь:

$$\begin{cases} u_C(+0) = A \cos \psi_U + U_{mC} \cos \psi_{U_C}; \\ i_C(+0) = -CA \omega_{\text{рез}} \sin \psi_U - CU_{mC} \omega \sin \psi_{U_C}, \end{cases}$$

яка з огляду на закони комутації за нульових початкових умов матиме вигляд:

$$\begin{cases} A \cos \psi_U = -U_{mC} \cos \psi_{U_C}; \\ A \omega_{\text{рез}} \sin \psi_U = -U_{mC} \omega \sin \psi_{U_C}. \end{cases} \quad (1.76)$$

Поділивши почленно друге рівняння системи (1.76) на перше, можна записати:

$$\omega_{\text{рез}} \text{tg} \psi_U = \omega \text{tg} \psi_{U_C}; \text{tg} \psi_U = \frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} \text{tg} \psi_{U_C}.$$

За умови $Q \gg 1$ відношення $\omega/\omega_{\text{рез}} \approx 1$, тоді

$$\text{tg} \psi_U = \text{tg} \psi_{U_C}; \psi_U = \psi_{U_C}. \quad (1.77)$$

За умови (1.77) з першого рівняння системи (1.76) виходить:

$$A = -U_{mC}. \quad (1.78)$$

Насамкінець, із урахуванням умов (1.77), (1.78) вираз (1.74) матиме вигляд:

$$u_C(t) = -U_{mC} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{рез}} t + \psi_{U_C}) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.79)$$

Отже, $u_C(t)$ є сумою двох коливань з різними частотами. Аналізуючи формулу (1.79), можна зробити висновок, що характер перехідних процесів залежить від співвідношення між частотою коливань зовнішньої дії ω і резонансною частотою $\omega_{\text{рез}}$. Можливі три випадки: 1) $\Delta\omega = 0$, $\delta \neq 0$; 2) $\Delta\omega \neq 0$, $\delta = 0$; 3) $\Delta\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$, де $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{рез}}$ — абсолютна розстройка.

1. При $\Delta\omega = 0$, $\omega = \omega_{\text{рез}}$ вираз (1.79) перетворюється в такий спосіб:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= -U_{mC} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{рез}} t + \psi_{U_C}) + U_{mC} \cos(\omega_{\text{рез}} t + \psi_{U_C}) = \\ &= U_{mC} (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega_{\text{рез}} t + \psi_{U_C}). \end{aligned}$$

Оскільки при $\omega = \omega_{\text{рез}}$ у колі виникає явище резонансу, слушні співвідношення: $X = 0$; $Z = R$; $\psi_{U_C} = -\pi/2$; $U_{mC} = E_m \rho / R = E_m Q$.

Тоді

$$u_C(t) = E_m Q (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega_{\text{рез}} t - \frac{\pi}{2}) = E_m Q (1 - e^{-\delta t}) \sin \omega_{\text{рез}} t. \quad (1.80)$$

Вираз (1.80) можна записати ще як

$$u_C(t) = u_{mC}(t) \sin \omega_{\text{рез}} t,$$

де $u_{mC}(t) = E_m Q (1 - e^{-\delta t})$ — рівняння обвідної.

У даному випадку амплітуда коливань напруги на ємності контуру зростає в часі за експоненціальним законом, наближаючись до значення $E_m Q$.

Для визначення швидкості зростання амплітуди коливань необхідно розрахувати похідну $\frac{du_{mC}(t)}{dt} = E_m Q \delta e^{-\delta t}$ у початковий момент часу:

$$\left. \frac{du_{mC}(t)}{dt} \right|_{t=0} = E_m Q \delta = \frac{E_m Q \omega_{\text{рез}}}{2Q} = \frac{E_m \omega_{\text{рез}}}{2}.$$

Отже, швидкість зростання обвідної не залежить від значення добротності. Тому в контурі з вищою добротністю ($Q_2 > Q_1$) для встановлення стаціонарного режиму потрібен більший час ($t_{\text{уст2}} > t_{\text{уст1}}$,

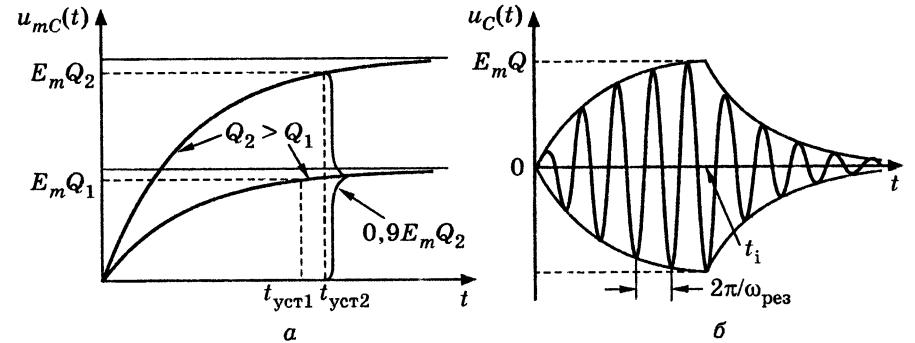


Рис. 1.21. Увімкнення синусоїдної дії до кола R, L, C : а — графіки обвідної; б — часова діаграма напруги на ємності при дії прямокутного радіоімпульсу

рис. 1.21, а). Осцилограму напруги на ємності при увімкненні синусоїдної напруги в момент $t = 0$ та при вимкненні в момент $t = t_i$ (що еквівалентно дії прямокутного радіоімпульсу тривалістю t_i) зображено на рис. 1.21, б.

2. Якщо частота зовнішніх коливань ω не збігається з резонансною частотою і контур не має втрат ($\delta = 0$), напруга на ємності, як це впливає з виразу (1.79), є сукупністю двох гармонічних коливань, котрі мають близькі частоти і приблизно однакові амплітуди. У цьому випадку співвідношення (1.79) перетворюється так:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= -U_{mC} \cos(\omega_{\text{рез}} t + \psi_{U_C}) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}) = \\ &= 2U_{mC} \sin\left(\frac{\omega_{\text{рез}} - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_{\text{рез}} + \omega}{2} t + \psi_{U_C}\right). \end{aligned} \quad (1.81)$$

У результаті підсумовування вільної і вимушеної складових виникають так звані *биття* (рис. 1.22). З рівняння (1.81) впливає, що обвідна $u_{mC}(t)$ повільно змінюється в часі за законом:

$$u_{mC}(t) = 2U_{mC} \left| \sin \frac{\omega_{\text{рез}} - \omega}{2} t \right|,$$

а частота коливань дорівнює $\frac{\omega + \omega_{\text{рез}}}{2} \cong \omega$.

Биття матимуть подвоєну амплітуду, оскільки у випадку однакових фаз векторів $U_{C\text{вл}}$ і $U_{C\text{вм}}$ ці вектори спрямовані однаково,

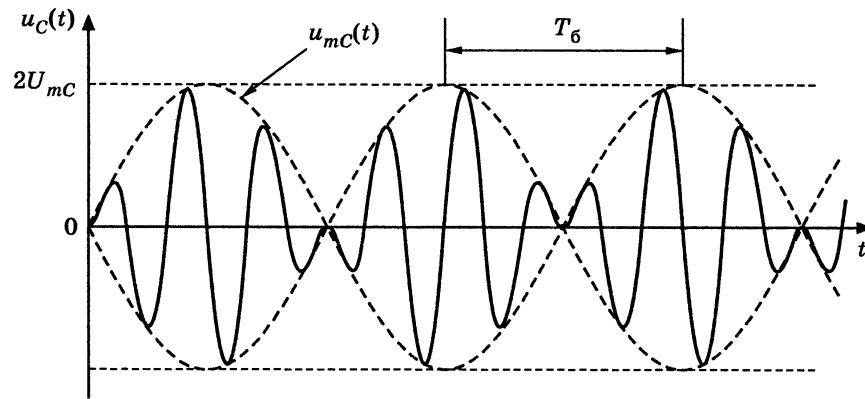


Рис. 1.22. Графік напруги на ємності в колі R, L, C за умови $\omega \neq \omega_{\text{рез}}, \delta \rightarrow 0$

і тому їх амплітуди підсумовуються. Період биттів розглядають як величину, що вдвічі менша періоду синусоїди, тобто

$$T_{\text{б}} = \frac{2\pi}{|\omega_{\text{рез}} - \omega|}$$

3. У реальному контурі (коли $\delta \neq 0$) величина вільної складової $u_{C\text{вл}}(t)$ зменшується за експоненційним законом. Унаслідок цього при $\Delta\omega \neq 0$ і $\delta \neq 0$ у результаті підсумовування двох коливань $u_{C\text{вм}}(t)$ і $u_{C\text{вл}}(t)$ з близькими частотами також виникають биття, але обвідна перехідного процесу матиме складніший вигляд (рис. 1.23), ніж у попередньому випадку (рис. 1.22).

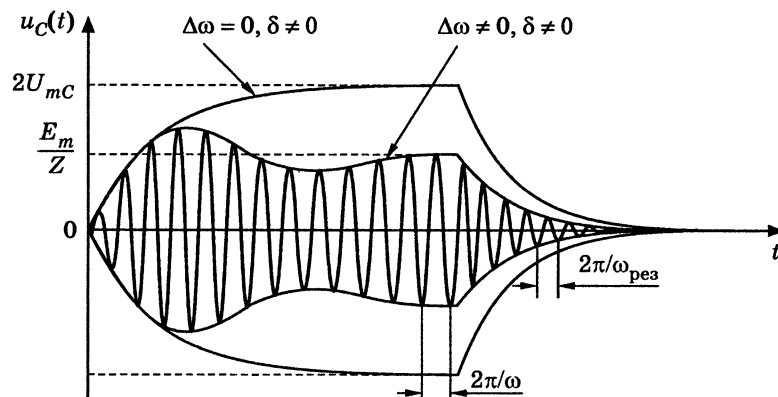


Рис. 1.23. Графік напруги на ємності в колі R, L, C за умови $\omega \neq \omega_{\text{рез}}, \delta \neq 0$ при дії прямокутного радіоімпульсу

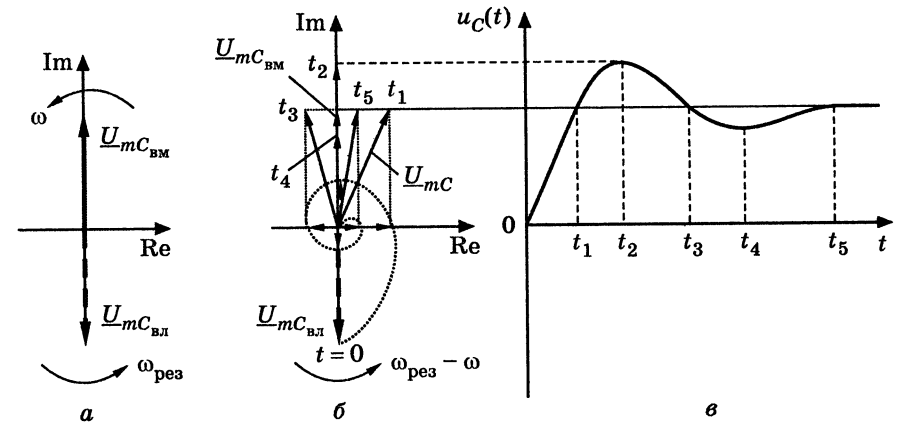


Рис. 1.24. Графіки, які пояснюють процес формування обвідної напруги на ємності R, L, C при $\omega \neq \omega_{\text{рез}}, \delta \neq 0$: а, б — векторна діаграма; в — залежність $u_{mC}(t)$

Щоб пояснити форму обвідної, слід розглянути векторну діаграму напруг (рис. 1.24, а, б). Вектори $\underline{U}_{mC\text{вм}}$ і $\underline{U}_{mC\text{вл}}$ обертаються в комплексній площині проти годинникової стрілки з різними кутівими швидкостями ω і $\omega_{\text{рез}}$ відповідно (нехай $\omega_{\text{рез}} > \omega$). При $t = 0$, як впливає з формули (1.79), ці вектори перебувають у протифазі (рис. 1.24, а).

Якщо обертати систему координат із швидкістю ω за годинниковою стрілкою, то вектор $\underline{U}_{mC\text{вм}}$ буде нерухомим, а вектор $\underline{U}_{mC\text{вл}}$ обертатиметься зі швидкістю $(\omega_{\text{рез}} - \omega)$. Вектор результуючого коливання \underline{U}_{mC} дорівнює геометричній сумі векторів $\underline{U}_{mC\text{вм}}$ і $\underline{U}_{mC\text{вл}}$ (рис. 1.24, б). Його кінець описує на площині згасаючу спіраль (якщо $\delta = 0$, то коло радіуса $U_{mC\text{вл}}$), а сам він коливається, змінюючись як за величиною, так і за початковою фазою (а отже, і за частотою). Проекція вектора \underline{U}_{mC} на вісь ординат відтворює закон змінювання обвідної $u_{mC}(t)$ за часом (рис. 1.24, в).

1.5. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. За яких умов у колі виникають перехідні процеси?
2. Сформулювати закони комутації. Зобразити схеми заміщення індуктивності та ємності за нульових початкових умов.
3. Пояснити фізичний сенс сталої часу для кіл R, L і R, C . Як залежить стала часу від величини R для кожного з цих кіл?
4. Як визначити порядок кола? Чи залежить вигляд характеристичного рівняння від функції, яка діє на вході кола?

5. Які існують способи складання характеристичного рівняння?
6. Який зв'язок існує між КПФ і диференціальним рівнянням кола?
7. У чому полягає класичний метод аналізу перехідних процесів? Пояснити поняття вільної та вимушеної складових струму (напруги).
8. Під час дії джерела постійної напруги $e(t) = E = 120$ В у колі (рис. 1.4, а) після замикання перемикача встановився усталений режим. Визначити напругу на конденсаторі через $t_1 = 0,1$ с після розмикання перемикача, якщо $C = 2$ мкФ, $R_1 = R_2 = 50$ кОм.

Відповідь: $u_C(t_1) = 23$ В.

9. Опір $R = 50$ Ом та незаряджена ємність $C = 5$ мкФ, які з'єднані послідовно, ввімкнено при $t = 0$ до джерела ЕРС $E = 20$ В. Визначити струм у колі.

Відповідь: $i(t) = 0,4e^{-4000t}$ А.

10. Послідовно з'єднані індуктивність $L = 1$ мГн і опір $R = 100$ Ом підключаються при $t = 0$ до джерела синусоїдної напруги $e(t) = 20 \cos(10^5 t + \pi/4)$ В. Знайти напругу $u_L(t)$ та побудувати графік.

Відповідь: $u_L(t) = 14,1e^{-100000t} + 14,1 \cos(10^5 t + \pi/2)$ В.

11. Чи може частота коливального розряду ємності в контурі R, L, C дорівнювати або перевищувати резонансну частоту цього контуру?

12. Обчислити частоту незгасаючих $\omega_{рез}$ та вільних $\omega_{вл}$ коливань послідовного резонансного контуру з параметрами $L = 25$ мГн, $C = 25$ нФ, $R = 4$ кОм.

Відповідь: $\omega_{рез} = 40\,000$ рад/с; $\omega_{вл} = 69\,382$ рад/с.

13. Скільки потрібно періодів коливань, щоб у послідовному резонансному контурі з логарифмічним декрементом згасання $\theta = 0,02$ амплітуда струму зменшилася до одного відсотка свого початкового значення?

Відповідь: 230,3.

14. Джерело синусоїдної напруги $e(t) = 100 \sin(100t + \psi_E)$ В увімкнено до електричного кола (рис. 1.25, а) з параметрами: $L = 0,4$ Гн, $C = 83,33$ мкФ, $R_1 = R_2 = 30$ Ом. У момент проходження струму через додатний максимум замикається ключ. Визначити струм в індуктивності та напругу на ємності.

Відповідь: $i_L(t) = e^{-75t}$ А; $u_C(t) = 97 \sin(100t + 23^\circ) + 38e^{-400t}$ В.

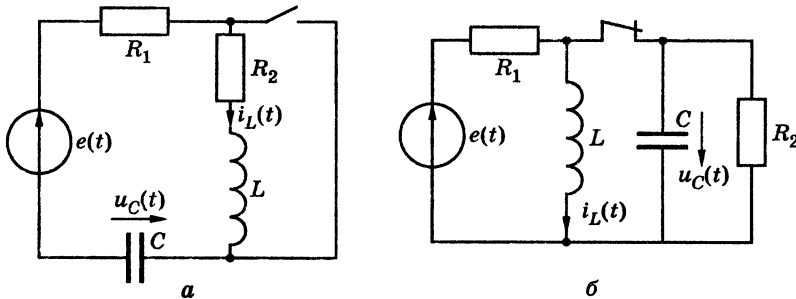


Рис. 1.25. Схеми електричних кіл

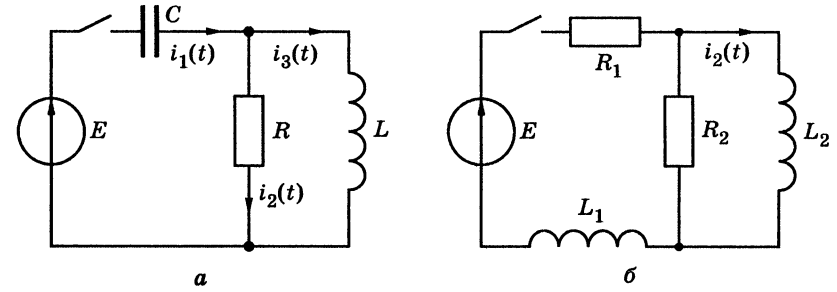


Рис. 1.26. Схеми електричних кіл

15. В електричному колі (рис. 1.25, б) діє джерело синусоїдної напруги $e(t) = 200 \sin(1000t + \psi_E)$ В. У момент $t = 0$, коли напруга джерела, збільшуючись, досягає додатного значення, що дорівнює діючому, розмикається перемикач. Знайти струм в індуктивності та напругу на ємності за таких умов: $L = 50$ мГн, $C = 20$ мкФ, $R_1 = R_2 = 50$ Ом.

Відповідь: $i_L(t) = -1,41e^{-1000t} + 2,82 \sin 1000t$ А; $u_C(t) = 70,7e^{-1000t}$ В.

16. Вважати, що в схемі (рис. 1.4, б) ключ перенесено до індуктивної гілки. Дано: $E = 30$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $L = 2$ мГн. Знайти після замикання контакту: початкове значення струму $i_3(t)$, його вільну і вимушену складові. Накреслити графік $i_3(t)$.

Відповідь: $i_3(+0) = 0,75$ А; $i_{3вл} = 0,45e^{-6250t}$ А; $i_{3вм} = 0,3$ А.

17. Коло (рис. 1.26, а) підключається до джерела постійної напруги $E = 30$ В. Знайти вирази для всіх струмів і напруги на ємності, якщо $L = 1$ Гн, $C = 16$ мкФ, $R_1 = 100$ Ом. Побудувати графіки часових залежностей цих струмів і напруги. З'ясувати граничне значення опору, за якого перехідний процес у колі має коливальний характер.

Відповідь: $u_C(t) = 30 + 10e^{-125t} - 40e^{-500t}$ В; $i_1(t) = -0,02e^{-125t} + 0,32e^{-500t}$ А; $i_2(t) = -0,1e^{-125t} + 0,4e^{-500t}$ А; $i_3(t) = 0,08e^{-125t} - 0,08e^{-500t}$ А; $R_{гр} = 125$ Ом.

18. До кола (рис. 1.26, б) підключається джерело постійної напруги $E = 48$ В. Знайти закон змінювання струму $i_2(t)$ та зобразити його графічно. Параметри кола: $L_1 = 100$ мГн, $R_1 = 160$ Ом, $L_2 = 36$ мГн, $R_2 = 90$ Ом.

Відповідь: $i_2(t) = 0,3 - 0,4e^{-1000t} + 0,1e^{-4000t}$ А.

19. Схему кола (рис. 1.6, а) змінено так: $R_3 = R_4 = 0$, $C = C_1 = 1$ мкФ, а замість опору R_5 увімкнена ємність $C_2 = 2$ мкФ. Знайти при $t = +0$ початкові значення струму в індуктивності та напруг на ємностях та їх перших похідних.

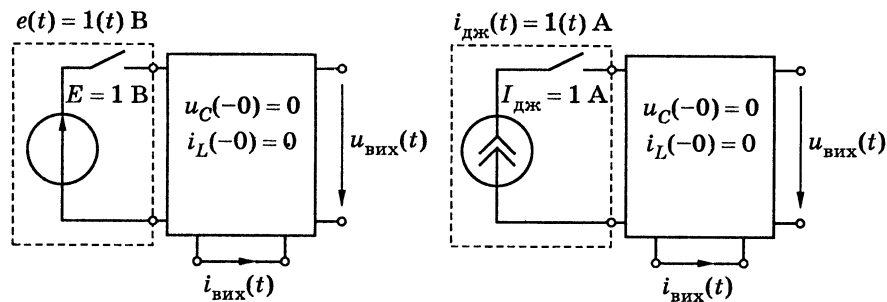
Вказівка. Напруги на ємностях до комутації визначаються з умови рівності їх зарядів і рівності сумарної напруги на ємностях напрузі на опорі R_2 .

Відповідь: $i_3(+0) = 0,6$ А; $u_{C1}(+0) = 40$ В; $u_{C2}(+0) = 20$ В; $u'_{C1}(+0) = 2 \cdot 10^5$ В · с⁻¹; $u'_{C2}(+0) = 0$; $i'_3(+0) = 2 \cdot 10^3$ А · с⁻¹.

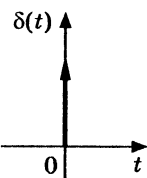
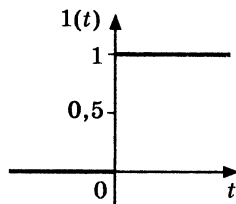


ЧАСОВИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

- Перехідна характеристика кола
- Імпульсна характеристика кола
- Часові характеристики типових кіл R, C ; R, L ; R, L, C
- Визначення відгуку кола на ступінчасту дію за допомогою часових характеристик
- Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою перехідної характеристики. Інтеграли Дюамеля
- Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою імпульсної характеристики



С. Л. Соболев



Поль Дірак

Класичний метод застосовують для аналізу перехідних процесів у колах без джерел (вільні процеси) або за наявності джерел, які дозволяють визначати вимушений (усталений) режим кола. Перелік таких джерел обмежений. Крім джерел постійної і синусоїдної напруг і струмів (див. розд. 1), усталений режим можна розраховувати для джерел, у яких миттєві значення ЕРС (задавальних струмів) змінюються за експоненціальним законом. Цим пояснюється обмежене використання класичного методу в радіотехніці для аналізу проходження через кола сигналів, які є складними функціями часу. Однак це не зменшує значення класичного методу, оскільки його подальшим розвитком є часовий метод аналізу перехідних процесів.

Часовий метод ґрунтується на принципі накладання і дозволяє розраховувати перехідні процеси для ЛЕК з вхідними джерелами коливальної довільної форми та відгуки на дію складних сигналів. Для цього миттєве значення ЕРС (задавального струму) джерела або вхідного сигналу подається як сума так званих типових дій, для яких є чинним класичний метод аналізу. Згідно з принципом накладання відгук кола (вихідні напруга чи струм) визначається підсумовуванням відгуків на кожен з вибраних типових дій. Якщо тривалість типових дій стає нескінченно малою, сума переходить в інтеграл.

Прикладом типової дії є «ступінчаста дія», що формується постійним джерелом, яке підключається в різні моменти часу. Апроксимацію миттєвого значення напруги або струму вхідного джерела, умовно позначеного $s_{вх}(t)$, за допомогою ступінчастих дій показано на рис. 2.1, а. Рис. 2.1, б ілюструє підвищення якості апроксимації із зменшенням рівня типових дій $\Delta s_{вх}(t)$ та збільшенням їх кількості (порівняно з рис. 2.1, а кількість «сходинок» зростає більше, ніж утричі). Перевагою ступінчастих дій є простота визначення відгуків ЛЕК на них класичним методом.

Математичний апарат часового методу аналізу ґрунтується на аналітичному описі типових дій та часових характеристик кола — перехідної й імпульсної, які є відгуками ЛЕК на ці дії.

2.1. Перехідна характеристика кола

Перехідна характеристика ЛЕК пов'язана із ступінчастою типовою дією (рис. 2.1), для аналітичного опису якої застосовується

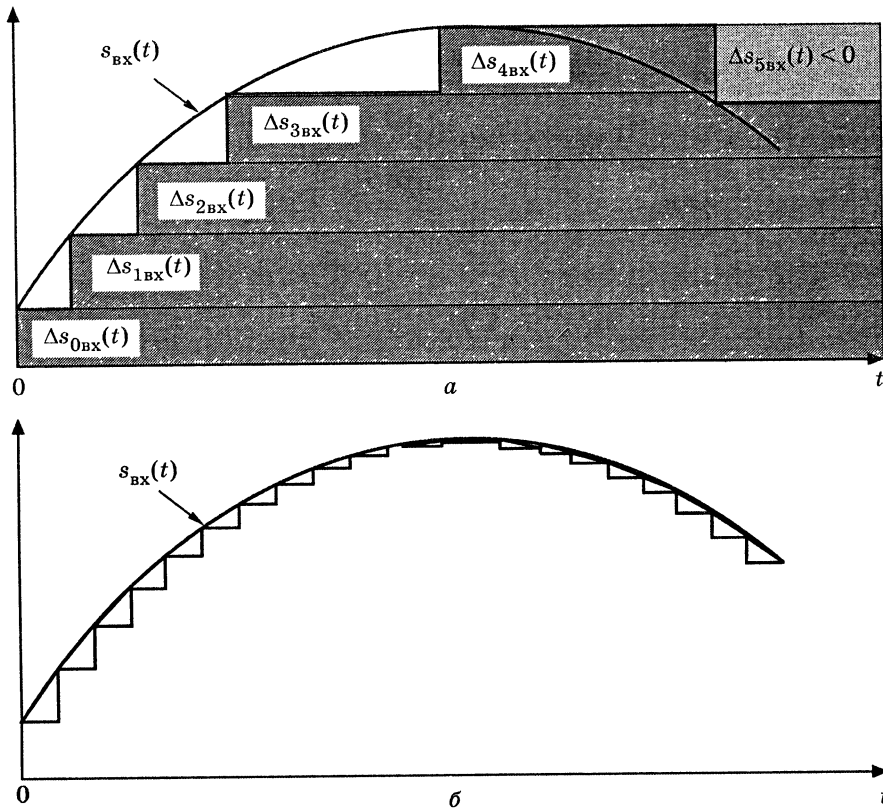


Рис. 2.1. Апроксимація миттєвого значення параметра вхідного джерела $s_{\text{вх}}(t)$ за допомогою типових ступінчастих дій $\Delta s_{k\text{вх}}(t)$ одинична функція, що називають також функцією Хевісайда¹, або функцією ввімкнення.

Одинична функція позначається $1(t)$ або $\sigma(t)$ і аналітично описується (рис. 2.2) одним із двох способів:

¹ Хевісайд Олівер, Oliver Heaviside (1850–1925) — англійський інженер і фізик, член Лондонської королівської спілки. Основні праці, що належать до теорії електрики й електротехніки, опубліковані в тритомній монографії «Електромагнітна теорія» (1893–1912). У 1902 р. одночасно з А. Е. Кеннелі вказав на існування іонізованого шару атмосфери (іоносфери), який відбиває електромагнітні хвилі. Припустив, що цей шар спільно з поверхнею Землі дозволяє електромагнітним хвилям огинати земну кулю. Подальші фундаментальні дослідження іоносфери виконав Е. Еплтон (Нобелівська премія з фізики, 1947). Хевісайд є одним із творців операторного методу аналізу, який широко застосовується в математичній фізиці й електрорадіотехніці (див. розд. 3).

1) $1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(t, \Delta t)$, де $F(t, \Delta t)$ — спеціальні функції часу і параметра Δt , прикладами яких є (рис. 2.2, а, б),

$$F_1(t, \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq \Delta t/2; \\ 0,5 + t/\Delta t & \text{при } \Delta t/2 < t < \Delta t/2; \\ 0 & \text{при } t \leq \Delta t/2; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$F_2(t, \Delta t) = 0,5 + \frac{\arctg(t/\Delta t)}{\pi}; \quad (2.2)$$

$$2) 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 0,5 & \text{при } t = 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (\text{рис. 2.2, в}).$$

Одинична функція, зсунута за часом на t_0 , записується у вигляді $1(t - t_0)$ й умовно позначається, як показано на рис. 2.2 г.

Стрибокподібний характер змінювання одиничної функції при $t = 0$ ($1(-0) = 0$; $1(+0) = 1$) та її рівність одиниці при $t > 0$ дозволяють трактувати $1(t)$ стосовно перехідних процесів як поєднання постійного джерела (напруги або струму) одиничної величини та комутатора (ділянки, позначені на рис. 2.3 пунктиром).

Перехідна характеристика чисельно дорівнює відгуку пасивної (без внутрішніх джерел) ЛЕК на дію джерела типу одиничної функції за нульових початкових умов $u_C(-0) = 0$; $i_L(-0) = 0$ для всіх ємностей та індуктивностей.

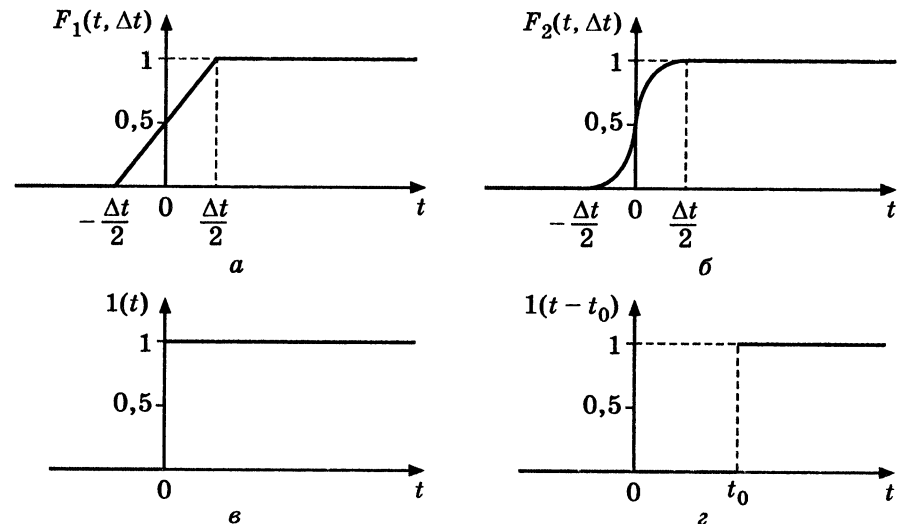


Рис. 2.2. До аналітичного запису одиничної функції

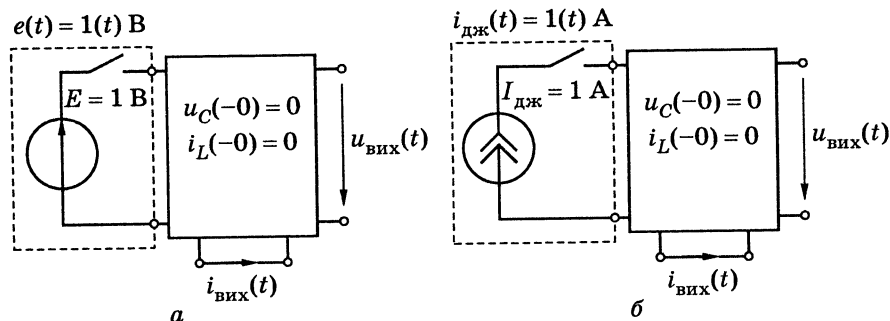


Рис. 2.3. Фізичне трактування одиничної функції та перехідної характеристики кола

Перехідну характеристику позначають $g(t)$ і визначають її розмірність як відношення розмірностей відгуку (вихідного струму або напруги) і дії (напруги або струму джерела на вході кола). Тому $g(t)$ може бути безрозмірною, мати розмірність провідності або опору.

Перехідна характеристика фізично відповідає перехідному процесу для вихідного струму $i_{\text{вих}}(t)$ або напруги $u_{\text{вих}}(t)$ при ввімкненні постійного одиничного джерела до входу пасивної ЛЕК (рис. 2.3) із розрядженими ємностями й індуктивностями без струму.

Якщо дія — напруга (рис. 2.3, а), то перехідна характеристика безрозмірна, коли відгук — напруга $u_{\text{вих}}(t)$, та має розмірність провідності (См), коли відгук — струм $i_{\text{вих}}(t)$. При цьому перехідні характеристики описуються виразами

$$g_u(t) = u_{\text{вих}}(t)/E; \quad (2.3)$$

$$g_i(t) = i_{\text{вих}}(t)/E. \quad (2.4)$$

Якщо дією є струм (рис. 2.3, б), перехідні характеристики:

$$g_i(t) = i_{\text{вих}}(t)/I_{\text{дж}}; \quad (2.5)$$

$$g_u(t) = u_{\text{вих}}(t)/I_{\text{дж}}. \quad (2.6)$$

Очевидно, що характеристика (2.5) безрозмірна, а функція (2.6) має розмірність опору (Ом).

Вирази (2.3)–(2.6) дозволяють використовувати для визначення перехідних характеристик отримані класичним методом розв'язки задач, у яких до кола за нульових початкових умов вмикаються постійні джерела (див. розд. 1).

Для того щоб експериментально визначити перехідну характеристику, до входу кола підключають генератор прямокутних

імпульсів тривалістю τ_1 , яка значно перевищує практичну тривалість перехідного процесу в даному колі (для кіл першого порядку $\tau_1 \gg t_{\text{пер}} = 4,6\tau$). На екрані осцилографа, ввімкненого до виходу кола, спостерігається осцилограма, пропорційна $g(t)$.

Перехідні характеристики мають розмірності, однакові з КПФ кола $H(j\omega)$. Крім того, для $g(t)$ та $H(j\omega)$ справедливі рівності граничних значень

$$g(\infty) = H(j0); \quad (2.7)$$

$$g(+0) = H(j\infty). \quad (2.8)$$

Рівність (2.7) безпосередньо виходить з диференціального рівняння кола (1.2) при $t \rightarrow \infty$ для $x(t) = 1(t)$, $y(t) = g(t)$:

$$b_0 g(\infty) = a_0, \text{ звідки } g(\infty) = \frac{a_0}{b_0},$$

і виразу (1.8) для КПФ кола при $\omega = 0$

$$H(j0) = \frac{a_0}{b_0}.$$

З фізичної точки зору, справедливість співвідношення (2.7) пояснюється однаковою поведінкою реактивних (накопичувальних) елементів кола L, C у режимі синусоїдної дії з частотою $\omega = 0$ та в установившому режимі ($t \rightarrow \infty$) при дії постійного джерела. В обох режимах ємності заряджені до постійної напруги (тобто розімкнені), а через індуктивності проходить постійний струм (тому вони замкнені).

Аналогічно можна обґрунтувати співвідношення (2.8). При дії синусоїдного джерела з частотою $\omega \rightarrow \infty$ у момент часу $t = +0$ при перехідному процесі в колі з нульовими початковими умовами ємності замкнені, а індуктивності розімкнені. Можна показати (пропонується виконати самостійно), що

$$g(+0) = H(j\infty) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m < n \\ a_m / b_n, & \text{якщо } m = n. \end{cases}$$

Приклад 2.1. Знайти перехідні характеристики кола (рис. 2.4, а), вважаючи дією напругу джерела, а відгукми — струми $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_C(t)$ та напругу $u_C(t)$. Побудувати графіки перехідних характеристик.

Розв'язання. У прикладі 1.3 розглянуті перехідні процеси для аналогічної схеми (рис. 1.4, а). Скористуємося знайденим там коренем характеристичного рівняння, спільного для всіх процесів даного кола,

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C},$$

якому відповідає однакова для всіх процесів стала часу кола

$$\tau = -\frac{1}{p_1} = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}. \quad (2.9)$$

Виходячи з фізичного значення перехідних характеристик, проаналізуємо перехідний режим кола при ввімкненні його до джерела постійної напруги (рис. 2.4, а) за нульової початкової умови $u_C(-0) = 0$. Струми кола і напруги на ємності згідно з класичним методом запишемо у вигляді

$$i(t) = A_i e^{-t/\tau} + i_{\text{ВМ}}(t); u_C(t) = A_{u_C} e^{-t/\tau} + u_{\text{ВМ}}(t), \quad (2.10)$$

де стала часу кола τ визначається за формулою (2.9).

Вимушені складові, які входять до розв'язку (2.10), визначаємо, розглядаючи ustalений режим з постійним джерелом E :

$$i_{1\text{ВМ}}(t) = i_{2\text{ВМ}}(t) = \frac{E}{R_1 + R_2}; u_{C\text{ВМ}} = 0; u_{C\text{ВМ}} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

Для того щоб знайти сталі інтегрування A_i , A_{u_C} у рівняннях (2.10), визначимо початкові значення струмів і напруг на ємності за еквівалентною схемою кола для $t = +0$ (рис. 2.4, б)

$$i_1(+0) = i_C(+0) = \frac{E}{R_1}; i_2(+0) = 0; u_C(+0) = u_C(-0) = 0.$$

Сталі інтегрування знайдемо, підставивши до рівняння (2.10) вимушені та початкові значення струмів і напруги на ємності для моменту часу $t = +0$:

$$A_{i1} = i_1(+0) - i_{1\text{ВМ}} = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{ER_2}{R_1(R_1 + R_2)}; A_{i2} = i_2(+0) - i_{2\text{ВМ}} = \frac{E}{R_1 + R_2};$$

$$A_{i_C} = i_C(+0) - i_{C\text{ВМ}} = \frac{E}{R_1}; A_{u_C} = u_C(+0) - u_{C\text{ВМ}} = -\frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

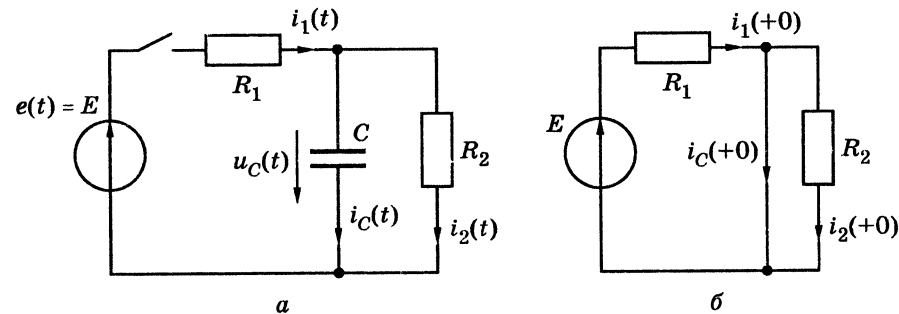


Рис. 2.4. До прикладу 2.1: а — схема кола; б — режим кола для $t = +0$

Складемо кінцеві вирази для шуканих миттєвих значень:

$$i_1(t) = A_{i1} e^{-t/\tau} + i_{1\text{ВМ}}(t) = \frac{ER_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad (2.11)$$

$$i_2(t) = A_{i2} e^{-t/\tau} + i_{2\text{ВМ}}(t) = -\frac{E}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}); \quad (2.12)$$

$$i_C(t) = A_{i_C} e^{-t/\tau} + i_{C\text{ВМ}}(t) = \frac{E}{R_1} e^{-t/\tau}; \quad (2.13)$$

$$u_C(t) = A_{u_C} e^{-t/\tau} + u_{C\text{ВМ}}(t) = -\frac{ER_2}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau} + \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.14)$$

Побудуємо графіки миттєвих значень струмів $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_C(t)$ (рис. 2.5, а) і напруги $u_C(t)$ (рис. 2.5, б).

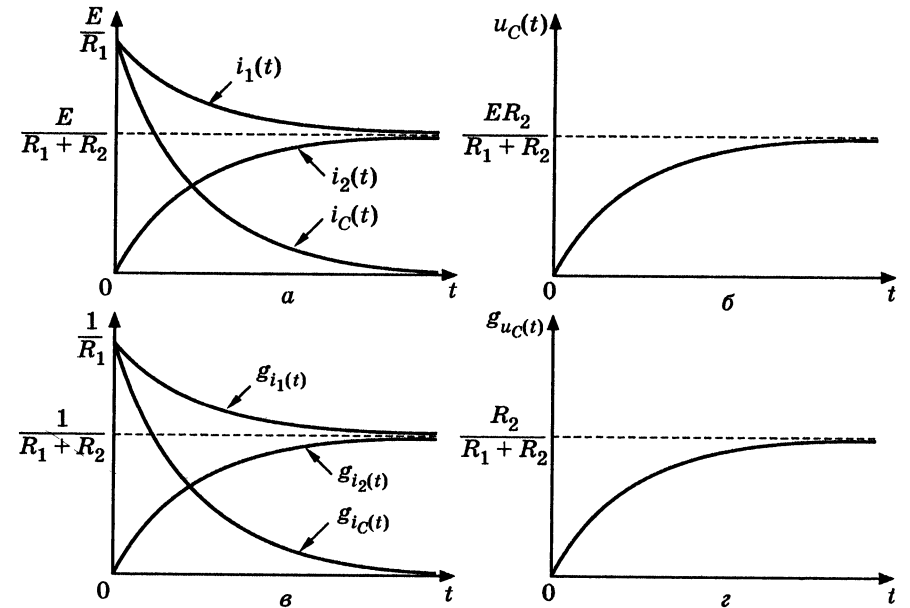


Рис. 2.5. Графіки до прикладу 2.1: а, б — перехідні процеси при ввімкненні джерела $e(t) = E$; в, г — перехідні характеристики

За визначенням, перехідні характеристики чисельно дорівнюють виразам (2.11)–(2.14) при $E=1$. Для того щоб при $t < 0$ забезпечити рівність $g(t)=0$, прийнято, записуючи перехідні характеристики, використовувати множник $1(t)$:

$$g_{i1}(t) = \left[\frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-t/\tau} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right] \cdot 1(t); \quad g_{i2}(t) = \left[\frac{1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) \right] \cdot 1(t);$$

$$g_{i3}(t) = \left[\frac{1}{R_1} e^{-t/\tau} \right] \cdot 1(t); \quad g_{u_C}(t) = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) \right] \cdot 1(t).$$

Перехідні характеристики $g_{i1}(t)$, $g_{i2}(t)$, $g_{i3}(t)$ мають розмірність провідності (См), а перехідна характеристика $g_{u_C}(t)$ безрозмірна. Графіки перехідних характеристик показані на рис. 2.5, в, з.

Приклад 2.2. Перевірити граничні співвідношення (2.7) і (2.8) для перехідної характеристики $g_{i1}(t)$ і КПФ $H_{i1}(j\omega)$ у колі, розглянутому в прикладі 2.1 (рис. 2.4, а).

Розв'язання. Використовуючи знайдений у прикладі 2.1 вираз для перехідної характеристики $g_{i1}(t)$, запишемо її граничні значення для $t = +0$ і $t \rightarrow \infty$:

$$g_{i1}(+0) = \frac{1}{R_1}; \quad g_{i1}(\infty) = \frac{1}{R_1 + R_2}.$$

Визначимо в загальному вигляді КПФ $H_{i1}(j\omega)$, яка є комплексною входною провідністю даного кола, й подамо її у стандартній формі (1.8):

$$H_{i1}(j\omega) = \frac{I_1}{E} = \left(R_1 + \frac{R_2/j\omega C}{R_2 + 1/j\omega C} \right)^{-1} = \frac{R_2 + 1/j\omega C}{R_1 R_2 + R_1/j\omega C + R_2/j\omega C} =$$

$$= \frac{R_2 j\omega C + 1}{R_1 R_2 j\omega C + R_1 + R_2}. \quad (2.15)$$

Знайдемо граничні значення КПФ, використовуючи вираз (2.15):

$$H_{i1}(j0) = \frac{1}{R_1 + R_2}; \quad H_{i1}(j\infty) = \frac{1}{R_1}.$$

Перевіримо справедливість граничних співвідношень:

$$g_{i1}(\infty) = H_{i1}(j0) = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{b_0}{a_0}; \quad g_{i1}(+0) = H_{i1}(j\infty) = \frac{1}{R_1} = \frac{b_1}{a_1},$$

де $a_0 = R_1 + R_2$, $a_1 = R_1 R_2$, $b_0 = 1$, $b_1 = R_2$ — відповідні коефіцієнти при $j\omega$ у знаменнику і чисельнику стандартних форм запису КПФ (1.8) і (2.15).

Приклад 2.3. Визначити перехідні характеристики кола (рис. 2.6, а), вважаючи дією напругу $u_{вх}(t)$, а відгукими — струми $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ та напругу $u_L(t)$. Записати вирази для перехідних характеристик, якщо $R_1 = R_2 = R_3 = R$, та побудувати їх графіки для $R = 2$ кОм, $L = 30$ мкГн.

Розв'язання. Поклавши $u_{вх}(t) = 1(t)$ (рис. 2.6, а), розрахуємо режим кола, який характеризує шукані перехідні характеристики.

Оскільки дане R, L коло має перший порядок, сталу часу знайдемо (див. п. 1.2.3) у вигляді:

$$\tau = L/R_e,$$

де $R_e = R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)$ — еквівалентний опір кола (рис. 2.6, б) відносно затискачів індуктивності при замкнених входних затискачах ($u_{вх} = 0$).

Перехідні характеристики визначаємо аналогічно виразу (1.4) у вигляді

$$g(t) = [g_{вл}(t) + g_{вм}] \cdot 1(t) = (Ae^{-t/\tau} + g_{вм}) \cdot 1(t), \quad (2.16)$$

де $g_{вл}(t) = Ae^{-t/\tau}$, $g_{вм}$ — відповідно вільні та вимушені складові розв'язку; A — сталі інтегрування.

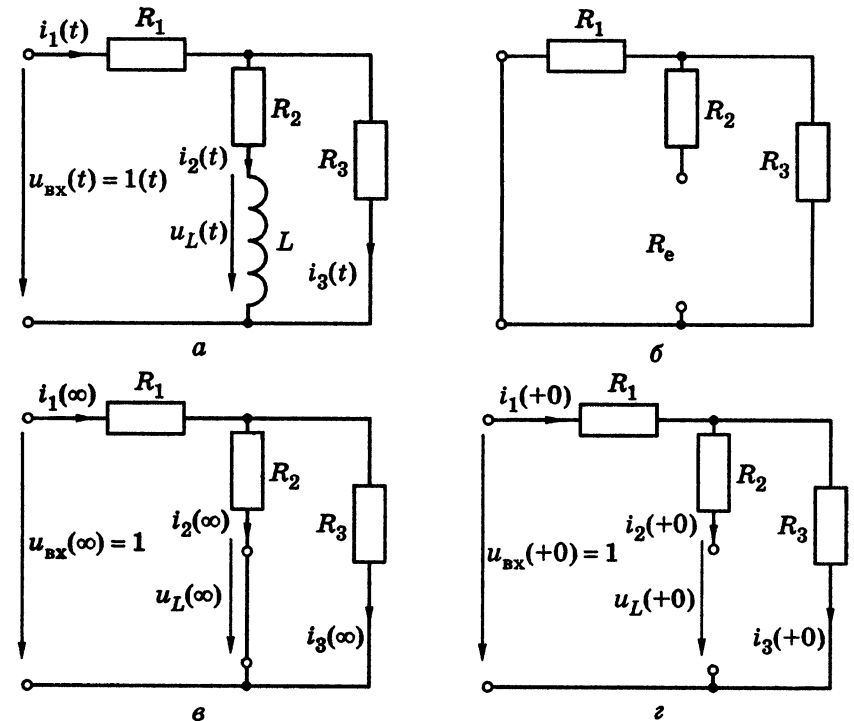


Рис. 2.6. До прикладу 2.3: а — схема кола; б — еквівалентна схема для визначення R_e ; в — режим кола при $t \rightarrow \infty$; з — режим кола при $t = +0$

Вимушені складові розв'язку знайдемо, розглядаючи усталений режим ($t \rightarrow \infty$) при постійній одиничній напрузі на вході (рис. 2.6, а):

$$g_{i1\text{ВМ}} = i_1(\infty) = \frac{1}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$g_{i2\text{ВМ}} = i_2(\infty) = \frac{R_3}{[R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)](R_2 + R_3)} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$g_{i3\text{ВМ}} = i_3(\infty) = \frac{R_2}{[R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)](R_2 + R_3)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$g_{u_L\text{ВМ}} = u_L(\infty) = 0.$$

Для визначення необхідних для знаходження сталих інтегрування початкових значень перехідних характеристик розглянемо режим кола для $t = +0$ (рис. 2.6, з):

$$g_{i1}(+0) = i_1(+0) = g_{i3}(+0) = i_3(+0) = \frac{1}{R_1 + R_2}; \quad g_{i2}(+0) = i_2(+0) = 0;$$

$$g_{u_L}(+0) = i_L(+0) = \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$

З рівнянь (2.16) для $t = +0$ знаходимо сталі інтегрування:

$$A_{i1} = g_{i1}(+0) - g_{i1\text{ВМ}} = \frac{1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} =$$

$$= \frac{R_3^2}{(R_1 + R_3)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)};$$

$$A_{i2} = g_{i2}(+0) - g_{i2\text{ВМ}} = -\frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$A_{i3} = g_{i3}(+0) - g_{i3\text{ВМ}} = \frac{1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} =$$

$$= \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)};$$

$$A_{u_L} = g_{u_L}(+0) - g_{u_L\text{ВМ}} = \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$

Значення вимушених складових, сталих інтегрування та кінцеві вирази для перехідних характеристик у випадку $R_1 = R_2 = R_3 = R$ і для заданих значень L, R зведемо до табл. 2.1.

Згідно з виразами для $g(t)$ (табл. 2.1) побудуємо графіки перехідних характеристик (рис. 2.7).

Таблиця 2.1

Розв'язки до прикладу 2.3

Відгук	$g_{\text{ВМ}}$	A	$g(t)$
$i_1(t)$	$\frac{2}{3R}$	$-\frac{1}{6R}$	$\left(-\frac{1}{6R} e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}} + \frac{2}{3R} \right) \cdot 1(t) \approx$ $\approx \left(-0,833 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{t}{10^{-2}}} + 3,33 \cdot 10^{-4} \right) \cdot 1(t), \text{ См}$
$i_2(t)$	$\frac{1}{3R}$	$-\frac{1}{3R}$	$\frac{1}{3R} \left(1 - e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}} + \frac{2}{3R} \right) \cdot 1(t) \approx 1,66 \cdot 10^{-4} \left(1 - e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \right) \cdot 1(t), \text{ См}$
$i_3(t)$	$\frac{1}{3R}$	$\frac{1}{6R}$	$\left(-\frac{1}{6R} e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}} + \frac{1}{3R} \right) \cdot 1(t) \approx$ $\approx \left(-0,833 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{t}{10^{-2}}} + 1,66 \cdot 10^{-4} \right) \cdot 1(t), \text{ См}$
$u_L(t)$	0	0,5	$0,5 e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}} \cdot 1(t) = 0,5 e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \cdot 1(t)$

Перехідні характеристики $g_{i1}(t), g_{i2}(t), g_{i3}(t)$ мають розмірність провідності (См), а перехідна характеристика $g_{u_L}(t)$ безрозмірна.

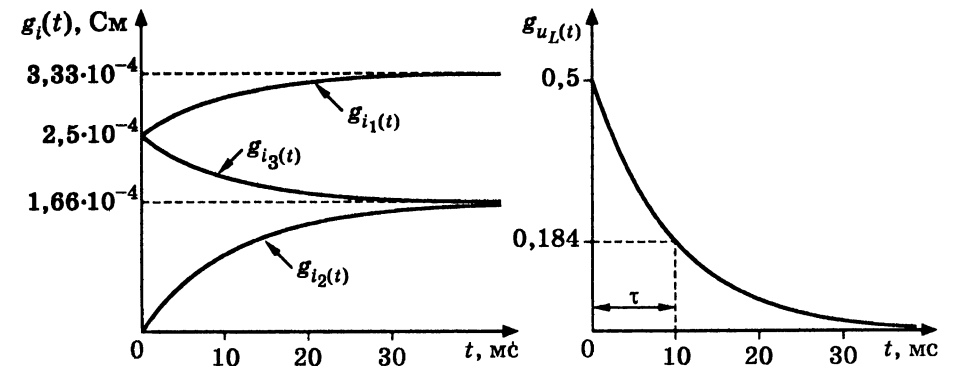


Рис. 2.7. Графіки перехідних характеристик до прикладу 2.3

Приклад 2.4. Визначити перехідну характеристику кола (рис. 2.8, а), вважаючи дією струм $i(t)$, а відгуком — напругу $u(t)$. Записати вираз для перехідної характеристики і побудувати її графік для $R_2 = R_3 = R; R_1 = 2R$.

Розв'язання. Визначимо основні параметри для розрахунку шуканої перехідної характеристики:

1) сталу часу кола $\tau = CR_e$, де $R_e = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$ — еквівалентний опір кола

(рис. 2.8, б) відносно затискачів ємності при розімкнених вхідних затискачах ($i = 0$);

2) вимушену складову перехідної характеристики (рис. 2.8, в)

$$g_{\text{взм}} = u(\infty) = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3};$$

3) початкове значення перехідної характеристики (рис. 2.8, г)

$$g_u(+0) = u(+0) = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3};$$

4) сталу інтегрування

$$A_u = g_u(+0) - g_{\text{взм}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} - \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_3^2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3)}.$$

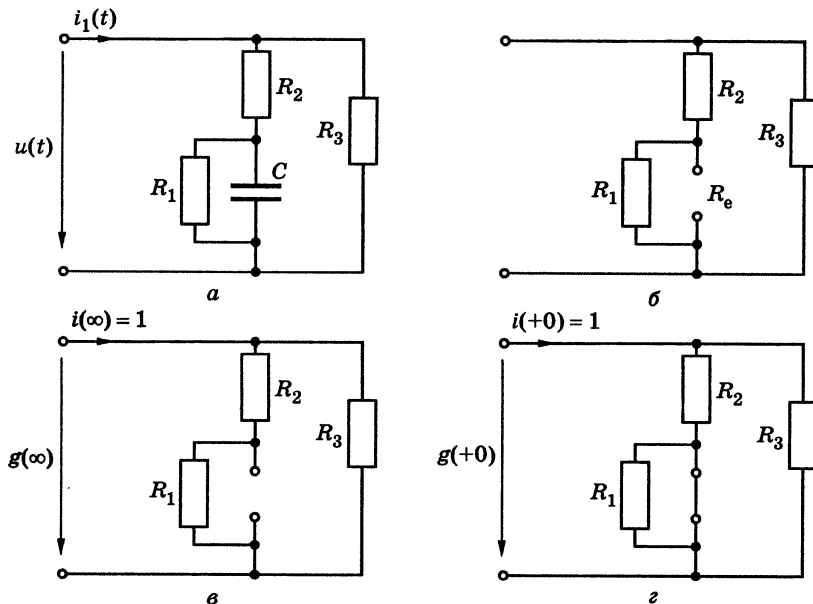


Рис. 2.8. До прикладу 2.4: а — схема кола; б — еквівалентна схема для визначення R_e ; в — режим кола при $t \rightarrow \infty$; г — режим кола при $t = +0$

Використовуючи вираз (2.16) і розраховані параметри перехідної характеристики, запишемо кінцевий вираз для $g_u(t)$ за умови $R_2 = R_3 = R; R_1 = 2R$:

$$g_u(t) = (g_{\text{взм}} + A_u e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) = (0,75R - 0,25R e^{-t/\tau}) \cdot 1(t), \quad (2.17)$$

де $\tau = CR_e$.

Згідно із співвідношенням (2.17) побудуємо графік (рис. 2.9). Очевидно, що перехідна характеристика має розмірність опору (Ом).

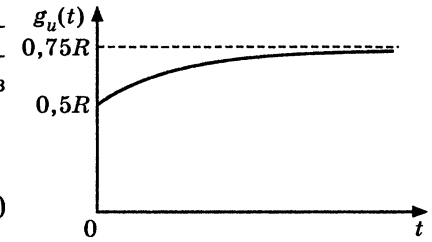


Рис. 2.9. Графік перехідної характеристики до прикладу 2.4

Приклад 2.5. Визначити перехідну характеристику кола для вказаних на схемі (рис. 2.10, а) дії $u_{\text{вх}}$ та відгуку $u_{\text{вих}}$. Записати вираз для перехідної характеристики і зобразити її графік для $R_1 = R_2 = R; C_1 = C_2 = C$.

Розв'язання. Для заданих дії та відгуку складемо диференціальне рівняння, використовуючи його зв'язок з КПФ $H(j\omega)$ (див. п. 1.1.3).

Для визначення КПФ зобразимо схему, позначивши комплексні діючі значення струмів і напруг (рис. 2.10, б). У вибраному контурі K за другим законом Кірхгофа виразимо комплексне діюче значення вихідної напруги:

$$\underline{U}_{\text{вих}} + \frac{1}{j\omega C_1} I_1 - R_2 I_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\text{вих}} &= -\frac{1}{j\omega C_1} I_1 + R_2 I_2 = -\left(\frac{1}{j\omega C_1}\right) \frac{\underline{U}_{\text{вх}}}{1/(j\omega C_1) + R_1} + \frac{R_2 \underline{U}_{\text{вх}}}{1/(j\omega C_2) + R_2} = \\ &= \frac{\underline{U}_{\text{вх}} [-1 - j\omega C_2 R_2 + j\omega C_2 R_2 (1 + j\omega C_1 R_1)]}{(1 + j\omega C_1 R_1)(1 + j\omega C_2 R_2)} = \\ &= \frac{\underline{U}_{\text{вх}} [(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 - 1]}{(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2) + 1}. \end{aligned}$$

Запишемо співвідношення для КПФ:

$$\begin{aligned} H_U(j\omega) &= \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = \frac{(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 - 1}{(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2) + 1} = \\ &= \frac{(j\omega)^2 \tau_1 \tau_2 - 1}{(j\omega)^2 \tau_1 \tau_2 + j\omega(\tau_1 + \tau_2) + 1} = \frac{(j\omega)^2 - 1/\tau_1 \tau_2}{(j\omega)^2 + j\omega(\tau_1 + \tau_2)/\tau_1 \tau_2 + 1/\tau_1 \tau_2}, \end{aligned}$$

де $\tau_1 = R_1 C_1; \tau_2 = R_2 C_2$ — сталі часу відповідних віток схеми.

За знаменником КПФ запишемо ліву, а за чисельником — праву частину диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 u_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \frac{du_{\text{вих}}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} u_{\text{вих}} = \frac{d^2 u_{\text{вх}}(t)}{dt^2} - \frac{1}{\tau_1 \tau_2} u_{\text{вх}}.$$

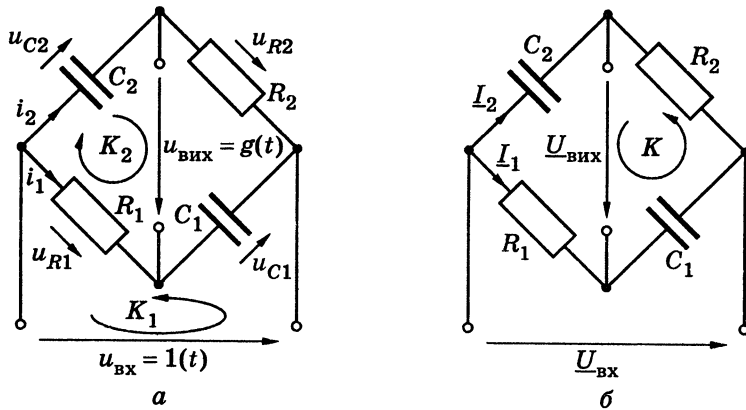


Рис. 2.10. Схеми кола до прикладу 2.5 для визначення: а — $g(t)$; б — $H(j\omega)$

Для отриманого диференціального рівняння другого порядку складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$p^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} p = 0;$$

$$p_{1,2} = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1 \tau_2}\right)^2 - \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1 \tau_2} \pm \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\tau_1 \tau_2};$$

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1}; p_2 = -\frac{1}{\tau_2}.$$

За співвідношенням (2.7) визначимо вимушене значення $g(t)$:

$$g_{\text{вм}} = g(\infty) = H(j0) = -1.$$

Значення $g_{\text{вм}}$ можна також знайти, розглядаючи ustalений режим кола (рис. 2.10, а) при його ввімкненні до постійного джерела $u_{\text{вх}} = 1(t)$, коли ємності заряджені, а струм у них дорівнює нулю.

Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння у вигляді суми вільної та вимушеної складових:

$$g(t) = g_{\text{вл}}(t) + g_{\text{вм}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} - 1,$$

де A_1, A_2 — сталі інтегрування.

Для того щоб визначити значення A_1, A_2 , знайдемо початкові значення перехідної характеристики $g(+0)$ та її похідної $g'(+0)$.

Початкове значення знайдемо за співвідношенням (2.8):

$$g(+0) = H(j\infty) = 1.$$

Правильність знайденого значення $g(+0) = 1$ можна перевірити в режимі кола для $t = +0$, коли ємності замкнені, а $u_{\text{вх}} = 1$ В.

Похідну $g'(+0)$ знайдемо в такий спосіб:

1) складемо систему рівнянь за другим законом Кірхгофа для контурів K_1 і K_2 :

у контурі K_1 $1(t) = u_{R1}(t) + u_{C1}(t)$; у контурі K_2 $g(t) = u_{R1}(t) - u_{C2}(t)$;

2) продиференціюємо ці рівняння:

$$\delta(t) = u'_{R1}(t) + u'_{C1}(t) = u'_{R1}(t) + \frac{i_1(t)}{C_1},$$

де $\delta(t) = 1'(t)$ — дельта-функція (див. підрозділ 2.2);

$$g'(t) = u'_{R1}(t) - u'_{C2}(t) = u'_{R1}(t) + \frac{i_2(t)}{C_2}.$$

3) розглядаючи доданки отриманих після диференціювання рівнянь при $t = +0$, знайдемо $g'(+0)$:

$$\delta(+0) = 0 = u'_{R1}(0+) + \frac{i_1(0+)}{C_1} = u'_{R1}(0+) + \frac{1}{R_1 C_1}; u'_{R1}(0+) = -\frac{1}{R_1 C_1};$$

$$g'(+0) = u'_{R1}(+0) - \frac{i_2(+0)}{C_2} = -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} = -\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} = p_1 + p_2.$$

Визначимо сталі інтегрування, складаючи і розв'язуючи систему рівнянь:

$$A_1 + A_2 - 1 = g(+0); A_1 + A_2 = 2; p_1 A_1 + p_2 A_2 = g'(+0) = p_1 + p_2;$$

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ p_1 + p_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}} = 1; A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ p_1 & p_1 + p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}} = 1.$$

Підставляючи знайдені сталі інтегрування в загальний розв'язок для $g(t)$, запишемо вираз для перехідної характеристики:

$$g(t) = (e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} - 1) \cdot 1(t).$$

Якщо $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$, то $\tau_1 = \tau_2 = \tau = RC$; $p_1 = p_2 = -1/\tau$ і перехідна характеристика набуде вигляду

$$g(t) = (2e^{-t/\tau} - 1) \cdot 1(t).$$

Побудуємо графік $g(t)$ для випадку $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$ (рис. 2.11). Характерною точкою графіка є момент часу t_0 , для якого

$$g(t_0) = (2e^{-t_0/\tau} - 1) \cdot 1(t) = 0,$$

$$\text{звідки } t_0 = \tau \ln 2 \approx 0,7\tau.$$

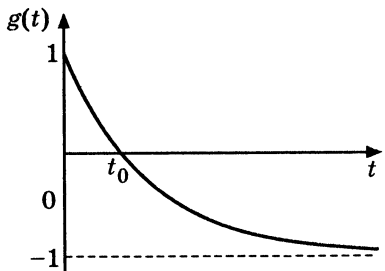


Рис. 2.11. Графік перехідної характеристики до прикладу 2.5

2.2. Імпульсна характеристика кола

Для імпульсної характеристики типовою дією є дельта-функція (функція Дірака², або одиничний імпульс).

Спрощено $\delta(t)$ можна записати в такий спосіб:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^0 \delta(t) dt = 1. \quad (2.18)$$

Про дельта-функцію, враховуючи запис (2.18), є жартівливе висловлювання: «до нуля її ще немає, а після нуля її вже немає». Рівність площі дельта-функції одиниці обумовила ще одну з її назв — одиничний імпульс.

Дельта-функцію, подібно одиничній функції, можна подати аналітично як границю спеціальних функцій $\Phi(t, \Delta t)$ часу і параметра Δt , які мають одиничну площу:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Phi(t, \Delta t); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, \Delta t) dt = 1.$$

Прикладами таких функцій є (рис. 2.12, а, б):

$$\Phi_1(t, \Delta t) = \begin{cases} 1/\Delta t & \text{при } |t| < \Delta t/2; \\ 0 & \text{при } |t| > \Delta t/2; \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\Phi_2(t, \Delta t) = \frac{\Delta t}{\pi(t^2 + \Delta t^2)}. \quad (2.20)$$

Графічно дельта-функція зображається по-різному, наприклад, як показано на рис. 2.12, в. На рис. 2.12, з дельта-функція $\delta(t - t_0)$ зсунута за часом на t_0 .

Із формули (2.18) виходить так звана фільтрувальна властивість $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x) \delta(x) dx = y(0); \quad \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \delta(x - t) dx = y(t), \quad (2.21)$$

² Дірак Поль Адрієн Моріс, Dirac (1902–1984) — англійський фізик, член Лондонської королівської спілки. Очолював кафедру в Кембріджському університеті, яку свого часу посідав І. Ньютон. Один із засновників квантової механіки. Сформулював закони статичної механіки системи електронів. Побудував релятивістську теорію руху електронів, застосував у квантовій механіці теорію відносності. Лауреат Нобелівської премії (1933) спільно з Шредингером за створення нових плідних варіантів квантової теорії. Увів у математичну фізику названі його ім'ям: функцію $\delta(t)$, рівняння (Дірака — Лоренца), матриці.

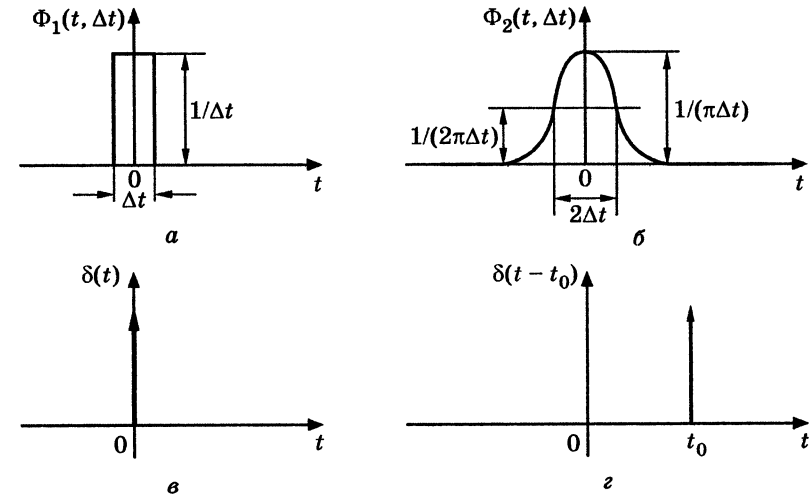


Рис. 2.12. До визначення поняття дельта-функції:
а, б — приклади функцій, що прямують до дельта-функції;
в, з — умовне графічне зображення дельта-функції

тобто дельта-функція як співмножник функції $y(x)$ визначає інтеграл як величину $y(x)$ для того значення змінної x , при якому дельта-функція прямує до нескінченності.

Дельта-функція $\delta(t)$ належить до класу узагальнених функцій, які дорівнюють нулю поза деякої обмеженої області змінної та мають неперервні похідні всіх порядків. У нестрогій формі ці функції спочатку були застосовані у фізиці (Дірак). Уперше строги обґрунтування узагальнених функцій зробив С. Л. Соболев³.

Порівняння, відповідно, виразів (2.1) з (2.19), (2.2) з (2.20) і графіків $F_1(t, \Delta t)$ і $\Phi_1(t, \Delta t)$, $F_2(t, \Delta t)$ і $\Phi_2(t, \Delta t)$ свідчить, що

$$\Phi_1(t, \Delta t) = \frac{\partial [F_1(t, \Delta t)]}{\partial t}; \quad \Phi_2(t, \Delta t) = \frac{\partial [F_2(t, \Delta t)]}{\partial t}.$$

Тому аналогічно пов'язані дельта-функція й одинична функція:

$$\delta(t) = \frac{d[1(t)]}{dt} = 1'(t), \quad (2.22)$$

³ Соболев Сергій Львович (1908–1989) — видатний математик, академік. Народився у Петербурзі. З 1957 р. — директор інституту математики Сибірського відділення АН СРСР. Основні праці належать до динаміки твердого тіла і математичної фізики. Вперше (1936) строго визначив узагальнені функції, за допомогою яких розглянув деякі крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. Зробив внесок у розвиток обчислювальної математики та впровадження електронно-обчислювальної техніки.

звідки випливає, що

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx. \quad (2.23)$$

Принципово важливе співвідношення (2.22) можна обґрунтувати інакше, якщо подати прямокутний імпульс $\Phi_1(t, \Delta t)$ (рис. 2.12, а) за допомогою двох одиничних функцій (рис. 2.13) та зробити граничний перехід до $\delta(t)$:

$$\Phi_1(t, \Delta t) = \frac{1(t + \Delta t/2) - 1(t - \Delta t/2)}{\Delta t} = \frac{1(t + \Delta t/2) - 1(t - \Delta t/2)}{\Delta t} = \frac{\Delta[1(t)]}{\Delta t}; \quad (2.24)$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Phi_1(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta[1(t)]}{\Delta t} \right\} = \frac{d[1(t)]}{dt} = 1'(t).$$

Імпульсна характеристика пасивної ЛЕК чисельно дорівнює відгуку на дію джерела типу дельта-функції за нульових початкових умов. Імпульсну характеристику позначають $h(t)$.

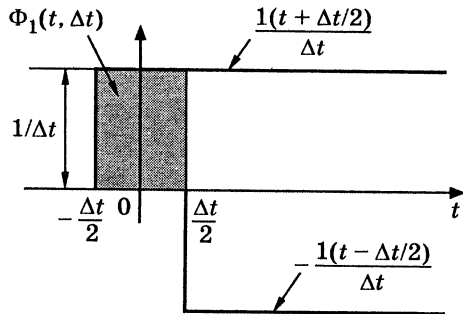


Рис. 2.13. Подання функцій $\Phi_1(t, \Delta t)$ за допомогою двох одиничних функцій

напруги, пропорційні $\delta(t)$. У результаті початкові значення в колі стануть ненульовими:

$$u_C(+0) = \frac{1}{C} \int_{-0}^{+0} k_{i_C} \delta(t) dt = \frac{k_{i_C}}{C} \neq 0; \quad i_L(+0) = \frac{1}{L} \int_{-0}^{+0} k_{u_L} \delta(t) dt = \frac{k_{u_L}}{L} \neq 0,$$

де k_{i_C} (А·с), k_{u_L} (В·с) — розмірні коефіцієнти відповідно для струмів у ємностях і напруг на індуктивностях у момент часу $t=0$.

Вимушені складові відгуків кіл при дії дельта-функції дорівнюють нулю, оскільки $\delta(t)=0$ при $t \neq 0$.

Отже, імпульсні характеристики фізично відповідають вільним процесам у колі (рис. 2.14) за рахунок запасу енергії, яку ємності

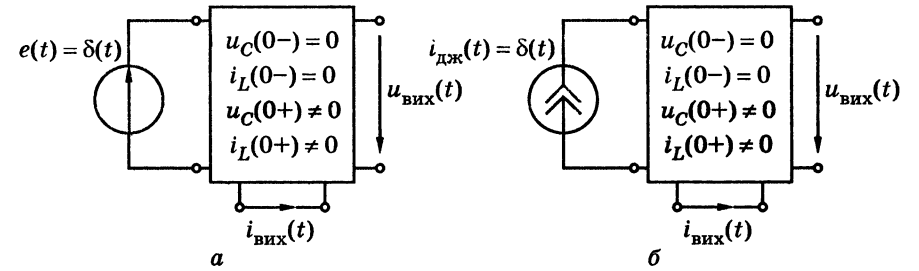


Рис. 2.14. Фізичне трактування імпульсної характеристики як вільного процесу в колі

й індуктивності миттєво накопичують від вхідного джерела напруги (рис. 2.14, а) або струму (рис. 2.14, б) типу дельта-функції.

Для експериментального визначення імпульсних характеристик до входу кіл підключають генератори імпульсів з тривалістю τ_i значно меншою, ніж часові параметри кіл (у колах першого порядку $\tau_i \ll \tau$; у коливальних колах другого порядку $\tau_i \ll T_{\text{ВМ}} = 2\pi/\omega_{\text{ВМ}}$). За допомогою осцилографа на виході кола досліджують вільні процеси, пропорційні $h(t)$.

Розмірність і методика розрахунку імпульсної характеристики обумовлені її зв'язком з перехідною характеристикою. Щоб встановити цей зв'язок, використовують подання $\Phi_1(t, \Delta t)$ за допомогою двох одиничних функцій (2.24) та принцип накладання.

Якщо ввімкнути до входу кола джерело з миттєвим значенням $\Phi_1(t, \Delta t)$, відгук кола можна описати приблизним виразом для імпульсної характеристики $\tilde{h}(t, \Delta t)$, який записують на підставі принципу накладання за допомогою перехідної характеристики цього кола у вигляді

$$\tilde{h}(t, \Delta t) = \frac{g(t + \Delta t/2) - g(t - \Delta t/2)}{\Delta t} = \frac{\Delta[g(t)]}{\Delta t}. \quad (2.25)$$

Імпульсна характеристика є границею виразу (2.25):

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{h}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta[g(t)]}{\Delta t} \right\} = \frac{d[g(t)]}{dt} = g'(t). \quad (2.26)$$

Співвідношення (2.26) засвідчує, що імпульсна характеристика кола є похідною перехідної характеристики, а розмірність імпульсної характеристики дорівнює розмірності перехідної характеристики, поділеної на секунду. Тому розмірностями $h(t)$ можуть бути 1/с, Ом/с, См/с.

З виразу (2.26) випливає також зв'язок перехідної характеристики з імпульсною характеристикою:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx. \quad (2.27)$$

Формально, на підставі принципу накладання вирази (2.26) і (2.27) виходять з аналогічних співвідношень (2.22) і (2.23) для $\delta(t)$ та $1(t)$.

Співвідношення (2.26) широко застосовується для визначення імпульсної характеристики, коли перехідна характеристика вже знайдена класичним методом. При цьому, щоб уникнути помилок, необхідно записувати перехідну характеристику в такий спосіб (див. приклад 2.1):

$$g(t) = g_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t), \quad (2.28)$$

де $g_{\text{анал}}(t)$ — аналітичний вираз імпульсної характеристики при $t > 0$ (у прикладі 2.1 аналітичні вирази для $g_{i1}(t)$, $g_{i2}(t)$, $g_{iC}(t)$, $g_{uC}(t)$ взяті у квадратні дужки).

Враховуючи співвідношення (2.28), результат диференціювання перехідної характеристики становитиме:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d[g(t)]}{dt} = \frac{d[g_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t)]}{dt} = g'_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t) + g_{\text{анал}}(t) \cdot \delta(t) = \\ &= g'_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t) + g_{\text{анал}}(+0) \cdot \delta(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Якщо $g_{\text{анал}}(+0) = 0$, то імпульсна характеристика не містить дельтоподібного доданка.

Приклад 2.6. Визначити імпульсні характеристики кола (приклад 2.1, рис. 2.4), вважаючи дією напругу джерела, а відгуками — струми $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_C(t)$ та напругу $u_C(t)$. Побудувати графіки імпульсних характеристик.

Розв'язання. Скористаємося знайденими у прикладі 2.1 перехідними характеристиками даного кола $g_{i1}(t)$, $g_{i2}(t)$, $g_{iC}(t)$, $g_{uC}(t)$, та співвідношеннями (2.28) і (2.29):

$$\begin{aligned} h_{i1}(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-t/\tau} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right] \cdot 1(t) \right\} = \\ &= -\frac{R_2}{\tau R_1(R_1 + R_2)} e^{-t/\tau} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t); \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$h_{i2}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) \right\} = \frac{1}{\tau(R_1 + R_2)} e^{-t/\tau} \cdot 1(t); \quad (2.31)$$

$$h_{iC}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{R_1} e^{-t/\tau} \cdot 1(t) \right\} = -\frac{1}{\tau R_1} e^{-t/\tau} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t); \quad (2.32)$$

$$h_{uC}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) \right\} = \frac{R_2}{\tau(R_1 + R_2)} e^{-t/\tau} \cdot 1(t). \quad (2.33)$$

Запишемо кінцеві вирази, підставивши до формул (2.30)–(2.33) співвідношення для сталої часу (2.9):

$$h_{i1}(t) = -\frac{1}{CR_1^2} \exp\left\{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t\right\} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t);$$

$$h_{i2}(t) = \frac{1}{CR_1 R_2} \exp\left\{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t\right\} \cdot 1(t);$$

$$h_{iC}(t) = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1^2 R_2} \exp\left\{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t\right\} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t);$$

$$h_{uC}(t) = \frac{1}{CR_1} \exp\left\{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t\right\} \cdot 1(t).$$

Імпульсні характеристики $h_{i1}(t)$, $h_{i2}(t)$, $h_{iC}(t)$ мають розмірності См/с, а характеристика $h_{uC}(t)$ — 1/с. Побудуємо графіки імпульсних характеристик (рис. 2.15).

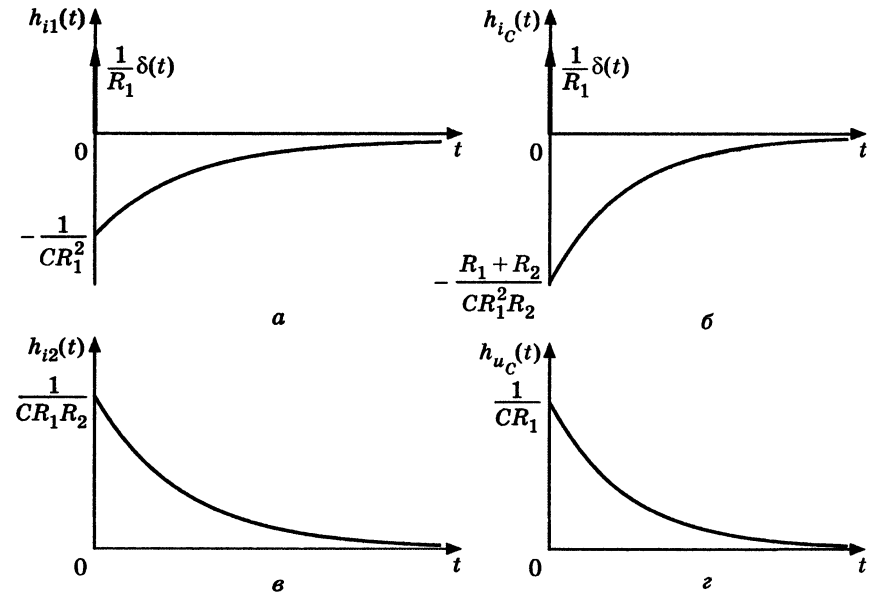


Рис. 2.15. Графіки імпульсних характеристик до прикладу 2.6

Приклад 2.7. Визначити імпульсні характеристики кола, розглянутого у прикладі 2.3. Накреслити графіки імпульсних характеристик.

Розв'язання. Диференціюючи, згідно з виразами (2.28) і (2.29), знайдені у прикладі 2.3 перехідні характеристики (див. табл. 2.1), отримуємо:

$$h_{i1}(t) = \frac{dg_{i1}(t)}{dt} \approx \frac{d}{dt} \left[(-0,833 \cdot 10^{-4} e^{-t/10^{-2}} + 3,33 \cdot 10^{-4}) \cdot 1(t) \right] =$$

$$= -0,833 \cdot 10^{-2} e^{-t/10^{-2}} \cdot 1(t) + 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot \delta(t), \text{ См/с;}$$

$$h_{i2}(t) = \frac{dg_{i2}(t)}{dt} \approx \frac{d}{dt} \left[1,66 \cdot 10^{-4} (1 - e^{-t/10^{-2}}) \cdot 1(t) \right] =$$

$$= 1,66 \cdot 10^{-2} e^{-t/10^{-2}} \cdot 1(t), \text{ См/с;}$$

$$h_{i3}(t) = \frac{dg_{i3}(t)}{dt} \approx \frac{d}{dt} \left[(-0,833 \cdot 10^{-4} e^{-t/10^{-2}} + 1,66 \cdot 10^{-4}) \cdot 1(t) \right] =$$

$$= -0,833 \cdot 10^{-2} e^{-t/10^{-2}} \cdot 1(t) + 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot \delta(t), \text{ См/с;}$$

$$h_{u_L}(t) = \frac{dg_{u_L}(t)}{dt} \approx \frac{d[0,5e^{-t/10^{-2}} \cdot 1(t)]}{dt} = -50e^{-t/10^{-2}} \cdot 1(t) + 0,5 \cdot \delta(t), \text{ 1/с.}$$

Зобразимо графіки імпульсних характеристик (рис. 2.16). Дельта-функція присутня на графіках $h_{i1}(t)$, $h_{i3}(t)$ і $h_{u_L}(t)$ (рис. 2.16, а, в, з). У виразі та на графіку $h_{i2}(t)$ (рис. 2.16, б) дельтоподібна складова відсутня.

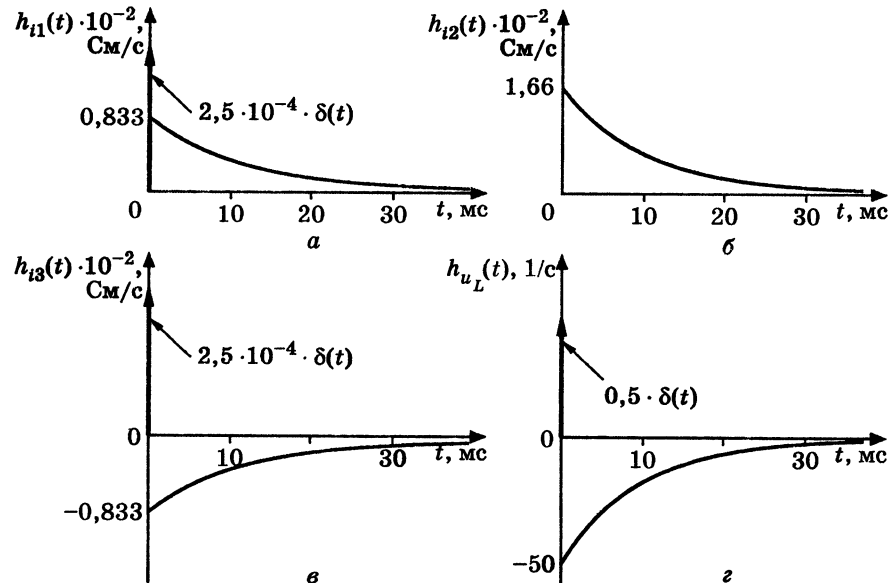


Рис. 2.16. Графіки імпульсних характеристик у прикладі 2.7

2.3. Часові характеристики типових кіл $R, C; R, L; R, L, C$

Кола першого порядку ($R, C; R, L$) застосовують як міжкаскадні розділові кола, диференціювальні та інтегрувальні ланки, прості фільтри та ін.

До типових кіл $R, C; R, L$ також належать кола, які є подільниками напруги (рис. 2.17, а, б і 2.18, а, б) або струму (рис. 2.17, в, г і 2.18, в, г). Діями та відгуками в подільників напруги є напруги, а в подільників струму — струми. Умовно такі кола поділяють на дві групи (рис. 2.17 і 2.18), до кожної з яких входять кола з однотипними часовими і частотними характеристиками. Однотипність характеристик пояснюється дуальністю кіл кожної групи.

Типовими колами R, L, C вважають також одиночні послідовний і паралельний резонансні контури.

2.3.1. Характеристики кіл $R, C; R, L$ першої групи

У перехідних характеристик кіл першої групи (рис. 2.17) вимушене і початкове значення дорівнюють відповідно: $g_{вм1} = 1; g_1(+0) = 0$.

При цьому сталу інтегрування і загальний вираз для перехідних характеристик кіл першої групи визначають за формулами:

$$A_1 = g_1(+0) - g_{вм1} = -1;$$

$$g_1(t) = [g_{вл1}(t) + g_{вм1}] \cdot 1(t) = (A_1 e^{-t/\tau} + 1) \cdot 1(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t), \quad (2.34)$$

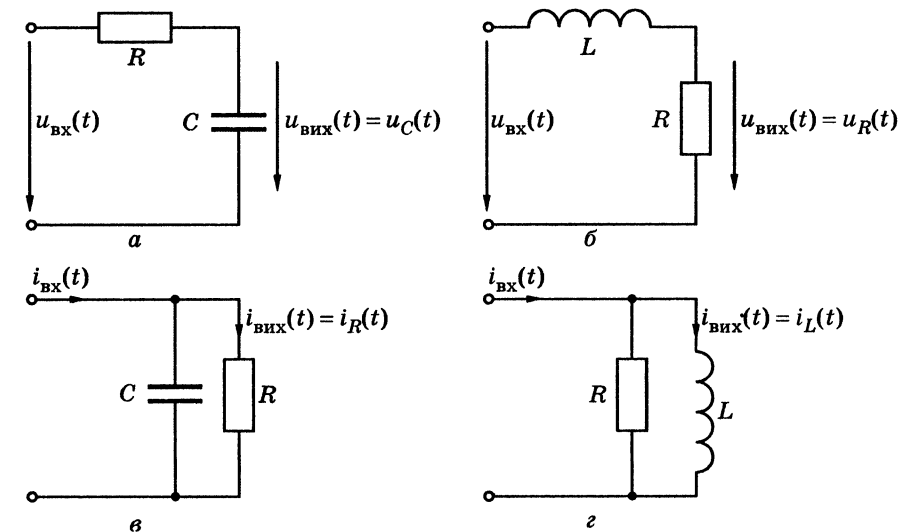


Рис. 2.17. Схеми кіл $R, C; R, L$ першої групи

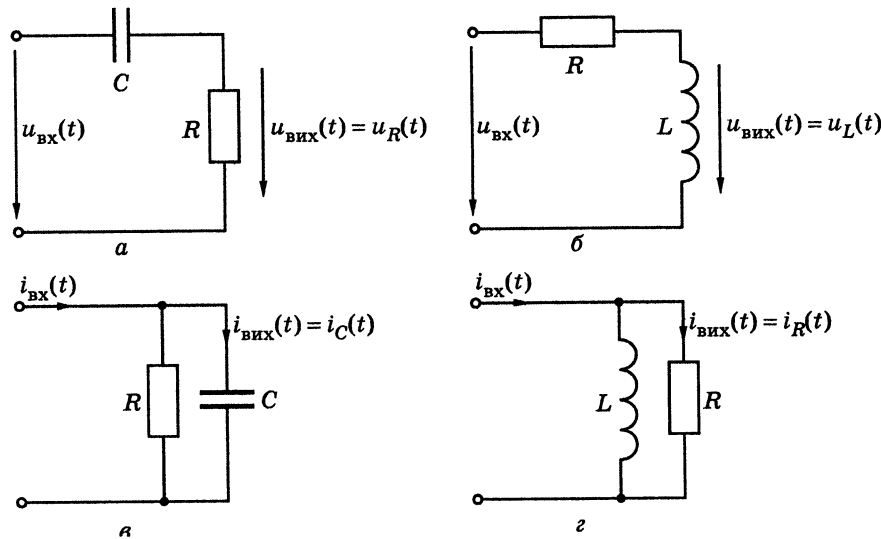


Рис. 2.18. Схеми кіл R, C ; R, L другої групи

де τ — сталі часу кіл, які становлять $\tau_C = RC$ для кіл R, C (рис. 2.17, а, в) і $\tau_L = L/R$ — для кіл R, L (рис. 2.17, б, г).

Імпульсні характеристики кіл першої групи як результат диференціювання виразу (2.34) отримують у вигляді:

$$h_1(t) = \frac{d[g_1(t)]}{dt} = \frac{d[(1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t)]}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot 1(t). \quad (2.35)$$

Перехідні характеристики (2.34) безрозмірні, а імпульсні (2.35) мають розмірність $1/c$. Імпульсні характеристики (2.34) не містять дельтоподібного доданку, оскільки $g_{\text{анал}}(+0) = 0$.

Графіки часових характеристик кіл першої групи показані на рис. 2.19.

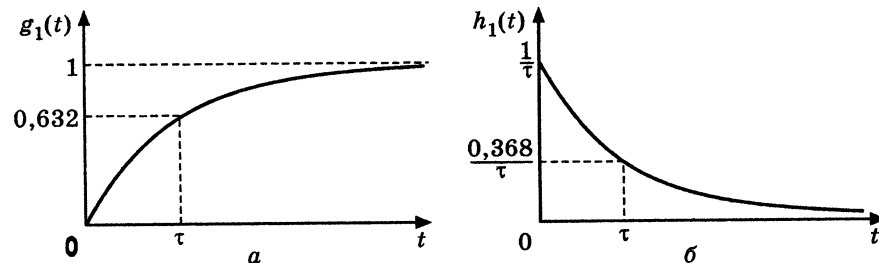


Рис. 2.19. Графіки часових характеристик кіл R, C ; R, L першої групи

Щоб встановити зв'язок часових і частотних характеристик, а також оцінити можливості застосування досліджуваних кіл, доцільно розглянути їхні КПФ.

Для кіл першої групи, складених з елементів R, C (рис. 2.17, а, в), КПФ становлять:

$$H_{1RC}(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вих}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_C},$$

а для кіл з елементів R, L (рис. 2.17, б, г)

$$H_{1RL}(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вих}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega(L/R)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_L}.$$

Оскільки вирази для $H_{1RC}(j\omega)$ і $H_{1RL}(j\omega)$ є однотипними, для КПФ, АЧХ і ФЧХ кіл першої групи можна застосувати однакові формули:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j\arctg(\omega\tau)} = H_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)},$$

де $H_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ — АЧХ; $\varphi_1(\omega) = -\arctg \omega\tau$ — ФЧХ; τ — сталі ча-

су, які дорівнюють τ_L для кіл R, L та τ_C для кіл R, C .

Графіки АЧХ і ФЧХ даних кіл зображені на рис. 2.20.

Гранична частота СП АЧХ є коренем рівняння

$$H_1(\omega_{\text{гр}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{\text{гр}}\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707,$$

звідки

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\tau} = \Pi_{1\omega}; \quad \tau\Pi_{1\omega} = 1, \quad (2.36)$$

де $\Pi_{1\omega}$ — СП АЧХ (рис. 2.20, а), яка відповідає діапазону частот $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{гр}}$.

Крім справедливості співвідношень (2.7) і (2.8) між граничними значеннями $g_1(t)$ і $H_1(j\omega)$:

$$g_1(\infty) = H_1(j0) = 1; \quad g_1(+0) = H_1(j\infty) = 0,$$

між частотними і часовими характеристиками розглядуваних кіл існує фундаментальний зв'язок, який впливає з формули (2.36): чим менша стала часу кола, тим ширша смуга пропускання і навпаки.

Особливості часових і частотних характеристик кіл R, C ; R, L першої групи обумовлюють галузі їх практичного застосування.

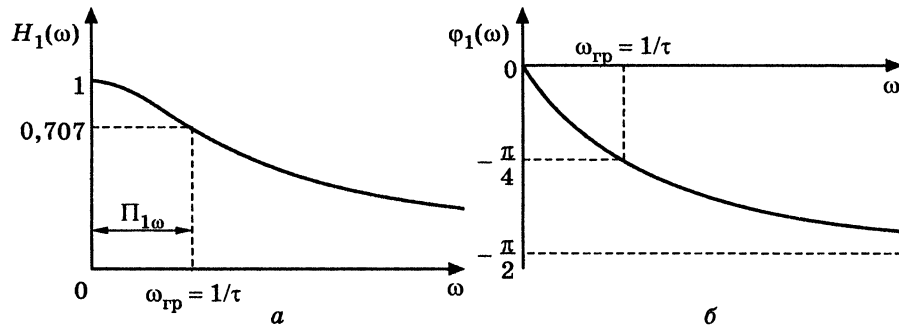


Рис. 2.20. Графіки частотних характеристик кіл $R, C; R, L$ першої групи: a — АЧХ; b — ФЧХ

Якщо стала часу значно менше часових параметрів дії (наприклад, тривалості вхідного сигналу), для частотних характеристик це відповідає діапазону частот $\omega \ll \Pi_{1\omega} = 1/\tau$ ($\omega\tau \ll 1$). Тоді вхідні та вихідні коливання мають близькі амплітуди $H_1(\omega) \approx 1$ та початкові фази $\varphi_1(\omega) \approx 0$, і тому відгук і дія збігаються, наприклад, при $\tau \rightarrow 0$:

$$g_1(t) \rightarrow 1(t); h_1(t) \rightarrow \delta(t).$$

Цей режим відповідає неспотвореній передачі сигналу.

Коли $\omega \gg \Pi_{1\omega} = 1/\tau$ ($\omega\tau \gg 1$), що відповідає більшому (порівняно з часовими параметрами дії) значенню сталої часу, АЧХ $H_1(\omega) \approx 1/\omega$, ФЧХ $\varphi_1(\omega) \approx -\pi/2$. При цьому відбувається інтегрування вхідних коливань з точністю до коефіцієнта $1/\tau$. Тому кола $R, C; R, L$ першої групи за умови $\omega\tau \gg 1$ називають *інтегрувальними*.

Виконання операції інтегрування підтверджується розглядом приблизних значень перехідної (2.34) та імпульсної (2.35) характеристик при порівняно великому значенні τ . Розкладаючи в ряд Тейлора ці характеристики поблизу $t = +0$ і нехтуючи малими величинами вищого порядку, можна записати як

$$g_1(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) = \left[\frac{t}{\tau} - 0,5 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots \right] \cdot 1(t) \approx \frac{t}{\tau} 1(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t 1(t) dt;$$

$$h_1(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} 1(t) = \frac{1}{\tau} \left[1 - \frac{t}{\tau} + 0,5 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots \right] \cdot 1(t) \approx \frac{1}{\tau} 1(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t \delta(t) dt.$$

Отримані приблизні значення $g_1(t)$ і $h_1(t)$ пропорційні інтегралам від відповідних дій $1(t)$ та $\delta(t)$. Коефіцієнтом пропорційності є множник $1/\tau$.

Вигляд АЧХ пояснює застосування розглянутих кіл ще як простих ФНЧ. Перевагою таких фільтрів є простота, а недоліком — досить великий коефіцієнт прямокутності АЧХ порівняно з граничним значенням $k_{\text{пр}} = 1$ для ідеального фільтра. Коефіцієнт прямокутності $H_1(\omega)$ становить [7, приклад 5.4]:

$$k_{\text{пр}} \approx n_1,$$

де $n_1 \gg \sqrt{2}$ (зазвичай $n_1 = 10$) — рівень відліку для оцінки коефіцієнта прямокутності АЧХ.

2.3.2. Характеристики кіл $R, C; R, L$ другої групи

Основні параметри та співвідношення для перехідних характеристик кіл другої групи (рис. 2.18) мають вигляд

$$g_{\text{вм}2} = 0; g_2(+0) = 1; A_2 = g_2(+0) - g_{\text{вм}2} = 1;$$

$$g_2(t) = [g_{\text{вл}2}(t) + g_{\text{вм}2}] \cdot 1(t) = (A_2 e^{-t/\tau} + 1) \cdot 1(t) = e^{-t/\tau} \cdot 1(t), \quad (2.37)$$

де τ — сталі часу: τ_C для кіл R, C (рис. 2.18, a, θ); τ_L — для кіл R, L (рис. 2.18, b, ε).

У результаті диференціювання співвідношення (2.37) отримують вирази для імпульсних характеристик кіл другої групи:

$$h_2(t) = \frac{d[g_2(t)]}{dt} = \frac{d[e^{-t/\tau} \cdot 1(t)]}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot 1(t) + \delta(t). \quad (2.38)$$

Графіки часових характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи зображені на рис. 2.21.

Розмірності часових характеристик кіл другої групи такі самі, як і в кіл першої групи. Імпульсні характеристики (2.38) містять дельта-функцію (рис. 2.21, b), оскільки $g_{\text{анал}1}(+0) = 1$.

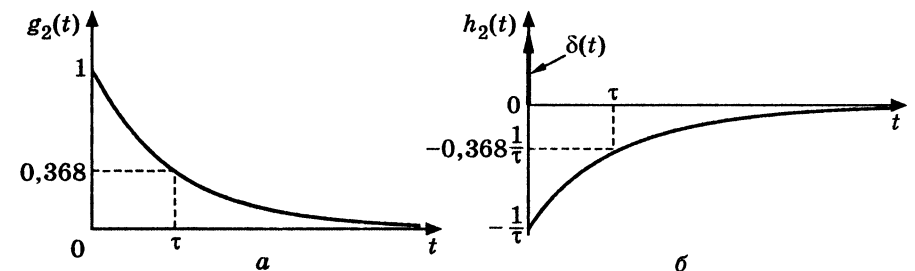


Рис. 2.21. Графіки часових характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи

КПФ окремо для кіл $R, C; R, L$ та загальні для кіл другої групи відповідно описуються виразами:

$$H_{2LC}(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вих}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{j\omega\tau_C}{1 + j\omega\tau_C};$$

$$H_{2RL}(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вих}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega(L/R)}{1 + j\omega(L/R)} = \frac{j\omega\tau_L}{1 + j\omega\tau_L};$$

$$H_2(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{j[\pi/2 - \arctg(\omega\tau)]} = H_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)},$$

де $H_2(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ — АЧХ; $\varphi_2(\omega) = \pi/2 - \arctg \omega\tau$ — ФЧХ; τ — сталі

часу кіл, які дорівнюють τ_C або τ_L залежно від типу реактивного елемента.

Графіки частотних характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи показані на рис. 2.22.

Гранична частота СП АЧХ визначається з рівняння

$$H_2(\omega_{\text{гр}}) = \frac{\omega_{\text{гр}}\tau}{\sqrt{1 + (\omega_{\text{гр}}\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707,$$

звідки

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\tau}; \tau\omega_{\text{гр}} = 1. \quad (2.39)$$

Смуга пропускання даних кіл — $\Pi_{2\omega}$ (рис. 2.22, а) — відповідає діапазону частот $\omega_{\text{гр}} \leq \omega < \infty$.

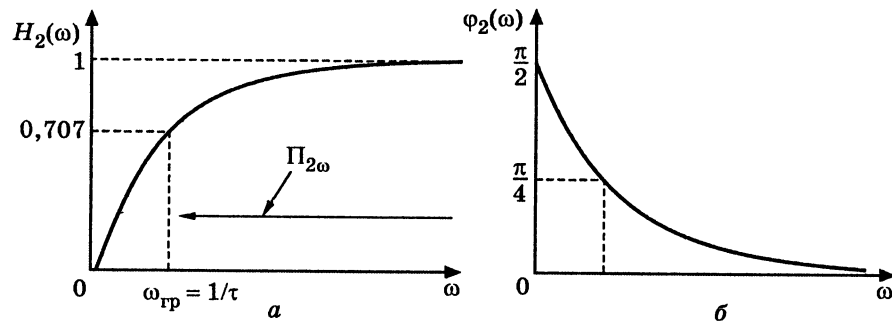


Рис. 2.22. Графіки частотних характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи: а — АЧХ; б — ФЧХ

Рівність (2.39) означає, що чим менша стала часу кола, тим більша гранична частота смуги пропускання і навпаки.

Для розглянутих кіл співвідношення (2.7) і (2.8) між граничними значеннями $g_2(t)$ і $H_2(j\omega)$ становлять

$$g_2(\infty) = H_2(j0) = 0; g_2(+0) = H_2(j\infty) = 1.$$

Неспотвореній передачі сигналу через дані кола відповідає режим, коли стала часу значно більша часових параметрів дії (наприклад, тривалості вхідного сигналу). Цей режим означає роботу в діапазоні частот $\omega \gg \omega_{\text{гр}} = 1/\tau$, для яких $H_2(j\omega) \approx 1$, $\varphi_2(\omega) \approx 0$. Тому вхідні та вихідні коливання мають майже однакові амплітуди та початкові фази, а отже, відгук та дія сходяться. При $\tau \rightarrow \infty$ часові характеристики (2.37), (2.38) збігаються з дією:

$$g_2(t) \rightarrow 1(t); h_2(t) \rightarrow \delta(t).$$

При малій величині τ порівняно з часовими параметрами дії, що відповідає частотам $\omega \ll \omega_{\text{гр}} = 1/\tau$, кола другої групи виконують операцію диференціювання дії. У цьому режимі частотні характеристики мають приблизні значення $H_2(j\omega) \approx \omega\tau$, $\varphi_2(\omega) \approx \pi/2$, що з точністю до коефіцієнта τ відповідає диференціюванню вхідних коливань. Зокрема при $\tau \rightarrow 0$ перехідна характеристика (рис. 2.21, а) прямує до нескінченно короткого імпульсу, який є аналогом дельта-функції, тобто похідною від прикладеної на вході одиничної функції.

Розглянуті кола, як і кола першої групи, застосовують також як прості фільтри, однак іншого типу — ФВЧ, властивості яких аналогічні властивостям фільтрів на основі кіл першої групи.

2.3.3. Часові характеристики типових кіл R, L, C

Кола другого порядку R, L, C зазвичай використовують як смугові фільтри й узгоджувальні ланки. Такі кола реалізують у вигляді одиночних послідовного і паралельного контурів [7, розд. 6].

Для спрощення аналізу часових характеристик одиночних контурів можна обмежитись розглядом двох дуальних схем (рис. 2.23). Одна із схем (рис. 2.23, а) є традиційною схемою заміщення послідовного контуру, а інша (рис. 2.23, б) — одним із варіантів схеми заміщення паралельного контуру, в якій втрати в котушці та конденсаторі перераховані в один паралельно ввімкнений опір R_2 .

У першій схемі (рис. 2.23, а) дією $u_{\text{вх}}$ і відгукми $u_{\text{вих1}}(t) = u_C(t)$; $u_{\text{вих2}}(t) = u_R(t)$; $u_{\text{вих3}}(t) = u_L(t)$ є напруги. Дія і відгукми у другій схемі (рис. 2.23, б) — відповідно вхідний струм $i_{\text{вх}}$ та струми у вітках — $i_{\text{вих1}}(t) = i_L(t)$; $i_{\text{вих2}}(t) = i_R(t)$; $i_{\text{вих3}}(t) = u_C(t)$.

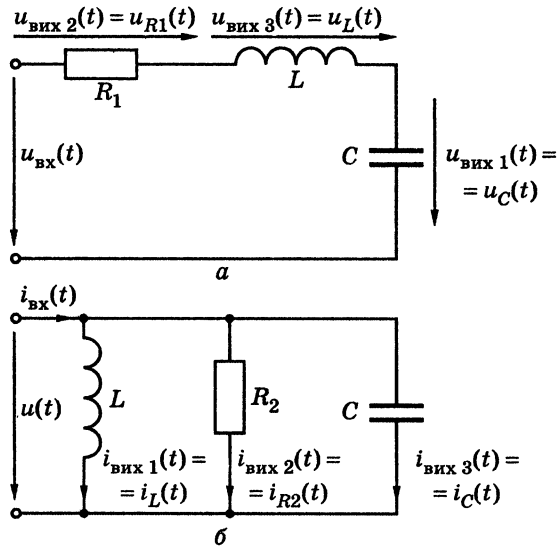


Рис. 2.23. Схеми дуальних R, L, C кіл

Дуальність даних кіл виявляється в однотипності відповідних диференціальних рівнянь. Це підтверджують, наприклад, диференціальні рівняння, складені для $u_{вих1}(t) = u_C(t)$ та $i_{вих1}(t) = i_L(t)$ відповідно в послідовному та паралельному колах.

Перше з рівнянь згідно зі співвідношенням (1.59) та з урахуванням прийнятих позначень має вигляд

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R_1}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{u_{вх}(t)}{LC} \quad (2.40)$$

Щоб скласти друге рівняння, використовують перший закон Кірхгофа і співвідношення між миттєвими значеннями струмів і напруги $u(t)$ на затискачах кола (рис. 2.23, б):

$$i_C(t) + i_{R2}(t) + i_L(t) = i_{вх}(t);$$

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_{R2}(t) = \frac{u(t)}{R_2} = \frac{L}{R_2} \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} = LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2};$$

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_{вх}(t);$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_2 C} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{LC} = \frac{i_{вх}(t)}{LC} \quad (2.41)$$

Диференціальні рівняння (2.40) і (2.41) при визначенні перехідних характеристик перетворюються на однотипні рівняння:

$$\frac{d^2 u_{вих1}(t)}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{du_{вих1}(t)}{dt} + \omega_{рез}^2 u_{вих1}(t) = \omega_{рез}^2 \cdot 1(t);$$

де $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — резонансна частота; $\delta_1 = \frac{R_1}{2L}$, $\delta_2 = \frac{1}{2R_2 C}$ — коефіцієнти згасання відповідно для послідовного і паралельного кіл. Отже, рівняння (2.40) і (2.41), а також аналогічні рівняння для дуальних відгуків кіл відрізняються тільки співвідношеннями для коефіцієнтів згасання, причому якщо $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, дуальні часові характеристики однакові:

$$g_1(t) = u_{вих1}(t)/1(t) = i_{вих1}(t)/1(t); \quad h_1(t) = \frac{d[g_1(t)]}{dt};$$

$$g_2(t) = u_{вих2}(t)/1(t) = i_{вих2}(t)/1(t); \quad h_2(t) = \frac{d[g_2(t)]}{dt};$$

$$g_3(t) = u_{вих3}(t)/1(t) = i_{вих3}(t)/1(t); \quad h_3(t) = \frac{d[g_3(t)]}{dt}.$$

Очевидно, що перехідні характеристики $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ безрозмірні, а імпульсні — $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$ — мають розмірність 1/с.

Слід зазначити, що активний опір R_2 паралельного кола інакше впливає на характер перехідних процесів і часових характеристик, ніж опір послідовного кола (див. підрозділ 1.3):

1) аперіодичний режим спостерігається, якщо $\delta_2 > \omega_{рез}$, $R_2 < 0,5\sqrt{L/C} = 0,5\rho$ (ρ — характеристичний опір), добротність $Q_2 = R_2/\rho < 0,5$;

2) критичний режим відповідає випадку, коли $\delta_2 = \omega_{рез}$, $R_2 = 0,5\rho$, $Q_2 = 0,5$;

3) при коливальному режимі $\delta_2 < \omega_{рез}$, $R_2 > 0,5\rho$, $Q_2 > 0,5$.

Виведення виразів для перехідних характеристик спрощується, якщо використати результати аналізу перехідних процесів у послідовному колі R, L, C при ввімкненні постійного джерела E (див. п. 1.3.4) і підставити в отримані там співвідношення $E = 1(t)$. Знайдені в такий спосіб вирази для перехідних характеристик із застосуванням формул (1.60)–(1.62), (1.63)–(1.65), (1.66)–(1.68), а також співвідношення $u_R(t) = i(t)R$ відповідно для аперіодичного, критичного і коливального режимів зведені до табл. 2.2 і 2.3. Тут же наведені отримані згідно з виразом (2.29) формули для імпульсних характеристик розглянутих кіл.

Таблиця 2.2

Часові характеристики аперіодичних кіл R, L, C

Характеристика	Аперіодичний режим ($Q < 0,5$)	Критичний режим ($p_1 = p_2 = -\delta; Q = 0,5$)
$g_1(t)$	$\left[\frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + 1 \right] \cdot 1(t)$	$[1 - (1 + \delta t)e^{-\delta t}] \cdot 1(t)$
$h_1(t)$	$\frac{1}{LC(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$\delta^2 t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$
$g_2(t)$	$\frac{2\delta}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$2\delta t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$
$h_2(t)$	$\frac{2\delta}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$2\delta(1 - \delta t)e^{-\delta t} \cdot 1(t)$
$g_3(t)$	$\frac{1}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$e^{-\delta t} (1 - \delta t) \cdot 1(t)$
$h_3(t)$	$\frac{1}{p_1 - p_2} (p_1^2 e^{p_1 t} - p_2^2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t) + \delta(t)$	$e^{-\delta t} (\delta^2 t - 2\delta) \cdot 1(t) + \delta(t)$

Таблиця 2.3

Часові характеристики коливальних кіл R, L, C

Характеристика	Коливальний режим ($Q > 0,5$)	Приблизні вирази для $Q \gg 1$ ($\omega_{вл} \approx \omega_{рез} \gg \delta; \psi = 0$)
$g_1(t)$	$\left[1 - \frac{\omega_{рез}}{\omega_{вл}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{вл} t - \psi) \right] \cdot 1(t)$	$[1 - e^{-\delta t} \cos \omega_{рез} t] \cdot 1(t)$
$h_1(t)$	$\frac{\omega_{рез}^2}{\omega_{вл}} e^{-\delta t} \sin \omega_{вл} t \cdot 1(t)$	$\omega_{рез} e^{-\delta t} \sin \omega_{рез} t \cdot 1(t)$
$g_2(t)$	$\frac{2\delta}{\omega_{вл}} e^{-\delta t} \sin \omega_{вл} t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{Q} e^{-\delta t} \sin \omega_{рез} t \cdot 1(t)$
$h_2(t)$	$\frac{2\delta \omega_{рез}}{\omega_{вл}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{вл} t + \psi) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega_{рез}}{Q} e^{-\delta t} \cos \omega_{рез} t \cdot 1(t)$
$g_3(t)$	$\frac{\omega_{рез}}{\omega_{вл}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{вл} t + \psi) \cdot 1(t)$	$e^{-\delta t} \cos \omega_{рез} t \cdot 1(t)$
$h_3(t)$	$-\frac{\omega_{рез}^2}{\omega_{вл}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{вл} t + 2\psi) \cdot 1(t) + \delta(t)$	$-\omega_{рез} e^{-\delta t} \sin \omega_{рез} t \cdot 1(t) + \delta(t)$

У табл. 2.3, крім точних формул для розрахунку часових характеристик коливальних кіл R, L, C , наведені приблизні вирази для характеристик резонансних контурів з високою добротністю ($Q \gg 1$).

Правильність співвідношень табл. 2.2 і 2.3 підтверджується розмірностями часових характеристик (перехідні — безрозмірні, а імпульсні — мають розмірність $1/c$), початковими та вимушеними значеннями перехідних характеристик $g_1(+0) = g_2(+0) = 0; g_3(+0) = 1; g_1(\infty) = 1; g_2(\infty) = g_3(\infty) = 0$, а також сумарними значеннями характеристик відповідно до законів Кірхгофа (другого — для послідовного кола і першого — для паралельного):

$$g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = 1(t); \quad h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) = \delta(t).$$

На рис. 2.24–2.26 зображені графіки часових характеристик для основних режимів. Дельта-функцію містять тільки імпульсні характеристики $h_3(t)$, оскільки $g_3(+0) = 1$, а $g_1(+0) = g_2(+0) = 0$. Графіки часових характеристик $g_3(t)$ і $h_3(t)$, а також умовне зображення дельта-функції, яка входить до складу $h_3(t)$, показані пунктирними лініями.

Імпульсні характеристики з фізичної точки зору описують вільні процеси, які проходять за рахунок запасу енергії, отриманого від вхідної дельта-функції.

У момент часу $t = +0$ послідовне коло є розімкненою ділянкою за рахунок індуктивності ($i_L(-0) = 0$), а паралельне — коротким

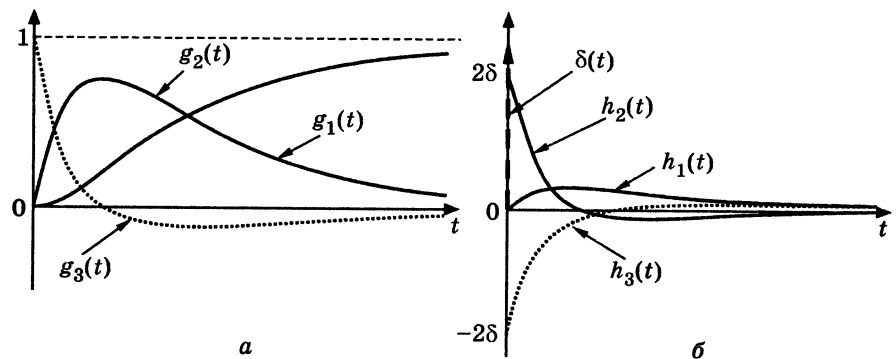


Рис. 2.24. Графіки часових характеристик аперіодичних кіл R, L, C ($Q=0,4$): а — перехідні; б — імпульсні

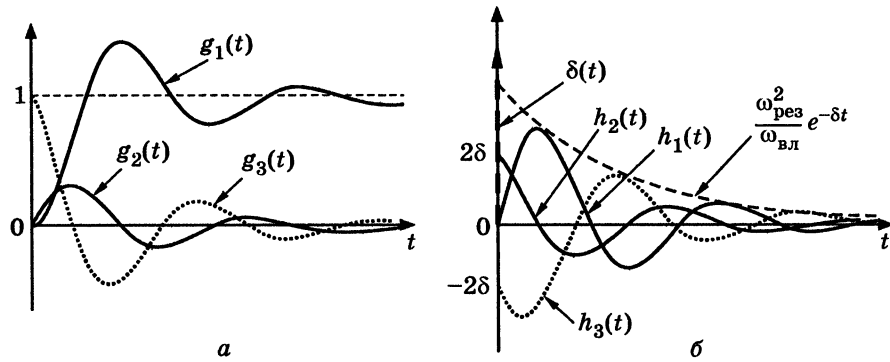


Рис. 2.25. Графіки часових характеристик коливальних кіл R, L, C ($Q=2$): а — перехідні; б — імпульсні

замиканням, оскільки $u_C(-0) = 0$. Дія $\delta(t)$ у першому випадку призводить до появи стрибка струму і початкового значення $h_2(t)$:

$$i(+0) = \frac{1}{L} \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \frac{1}{L}; \quad h_2(+0) = u_{\text{вих}2}(+0) = R_1 i(+0) = \frac{R_1}{L} = 2\delta_1,$$

а у другому — стрибка напруги на ємності та початкового значення $h_2(t)$:

$$u(+0) = \frac{1}{C} \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \frac{1}{C}; \quad h_2(+0) = i_2(+0) = \frac{u(+0)}{R_2} = \frac{1}{R_2 C} = 2\delta_2.$$

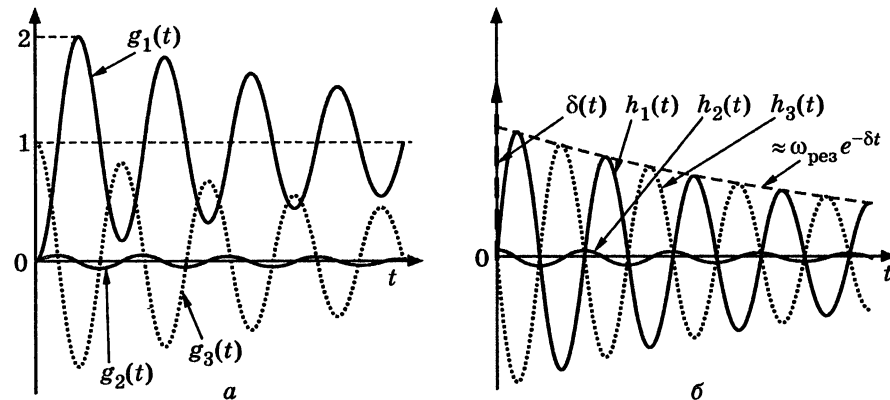


Рис. 2.26. Графіки часових характеристик кіл R, L, C з високою добротністю ($Q=15$): а — перехідні; б — імпульсні

2.4. Визначення відгуку кола на ступінчасту дію за допомогою часових характеристик

Ступінчасті дії (рис. 2.27, а) відповідають квантованим (у часі та за рівнями) сигналам, які широко використовуються в радіотехніці. Окремим випадком таких сигналів є прямокутний відеоімпульс (рис. 2.27, б).

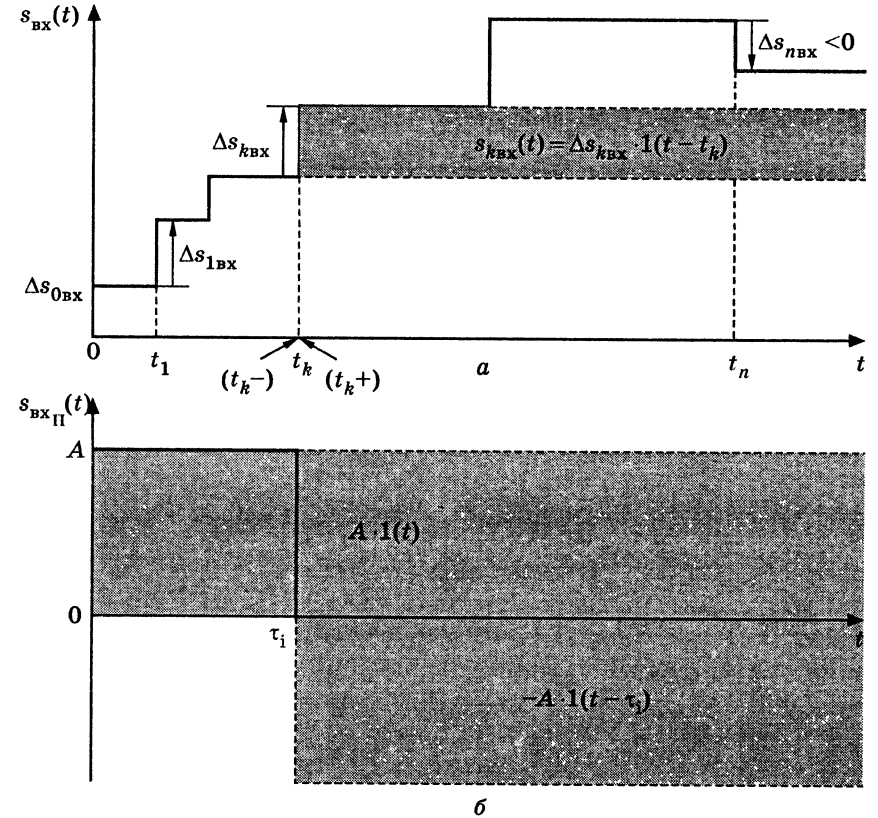


Рис. 2.27. Ступінчасті дії та їх подання за допомогою одиничних функцій:

а — довільна ступінчаста дія; б — прямокутний відеоімпульс

Зображену на рис. 2.27, а ступінчасту дію ($s_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < 0$) можна записати аналітично, використовуючи одиничну функцію та її властивості:

$$s_{\text{вх}}(t) = \sum_{k=0}^n s_{\text{квх}}(t) = \sum_{k=0}^n \Delta s_{\text{квх}} \cdot 1(t - t_k), \quad (2.42)$$

де $\Delta s_{k\text{вх}} = s_{\text{вх}}(t_k +) - s_{\text{вх}}(t_k -)$ — величина k -го стрибка; $(t_k +), (t_k -)$ — відповідно моменти часу безпосередньо передуючий t_k та наступний після t_k (аналогічно до часових понять, пов'язаних з комутацією в момент часу $t = t_k$); $\Delta s_{k\text{вх}}(t) = \Delta s_{k\text{вх}} \cdot 1(t - t_k)$ — аналітичний опис k -ї «сходинки» $s_{\text{вх}}(t)$; n — максимальний номер стрибка, який входить до інтервалу спостереження.

Вираз, подібний (2.42), можна застосувати і для подання дій $s_{\text{вх}}(t) \neq 0$, якщо ввести значення $k < 0$.

Дію у вигляді прямокутного відеоімпульсу (рис. 2.27, б), згідно з виразом (2.42), можна записати за допомогою двох «сходинок»:

$$s_{\text{вх}\Pi}(t) = A \cdot 1(t) - A \cdot 1(t - \tau_i), \quad (2.43)$$

де A — максимальне значення (висота) імпульсу; τ_i — тривалість імпульсу.

Основною перевагою запису ступінчастих дій (2.42) і (2.43), окрім компактності (порівняно з описом таких функцій за інтервалами часу) та однотипності доданків, є можливість визначення за допомогою принципу накладання і відомої перехідної характеристики $g(t)$ відгуку кола у вигляді:

$$s_{\text{вих}}(t) = \sum_{k=0}^n s_{k\text{вих}}(t) = \sum_{k=0}^n \Delta s_{k\text{вх}} \cdot g(t - t_k); \quad (2.44)$$

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = A \cdot g(t) - A \cdot g(t - \tau_i), \quad (2.45)$$

де $s_{k\text{вих}}(t) = \Delta s_{k\text{вх}} \cdot g(t - t_k)$ — відгук кола на k -ту «сходинку» $s_{\text{вх}}(t)$.

Практичне значення має проходження через кола $R, C; R, L$ (рис. 2.17 і 2.18) прямокутних відеоімпульсів, які мають вигляд:

$$u_{\text{вх}\Pi}(t) = U_0 \cdot 1(t) - U_0 \cdot 1(t - \tau_i); \quad i_{\text{вх}\Pi}(t) = I_0 \cdot 1(t) - I_0 \cdot 1(t - \tau_i),$$

де U_0, I_0 — максимальні значення вхідних імпульсів напруги та струму відповідно.

Згідно із співвідношенням (2.45) відгуки послідовних і паралельних кіл $R, C; R, L$ першої групи (рис. 2.17) становитимуть, відповідно:

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}\Pi}(t) &= U_0 \cdot g_1(t) - U_0 \cdot g_1(t - \tau_i) = \\ &= U_0(1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) - U_0(1 - e^{-(t-\tau_i)/\tau}) \cdot 1(t - \tau_i); \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} i_{\text{вих}\Pi}(t) &= I_0 \cdot g_1(t) - I_0 \cdot g_1(t - \tau_i) = \\ &= I_0(1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) - I_0(1 - e^{-(t-\tau_i)/\tau}) \cdot 1(t - \tau_i), \end{aligned} \quad (2.47)$$

де $g_1(t)$ — перехідна характеристика (2.34).

Аналогічні співвідношення для кіл другої групи (рис. 2.18) мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}\Pi}(t) &= U_0 \cdot g_2(t) - U_0 \cdot g_2(t - \tau_i) = \\ &= U_0 e^{-t/\tau} \cdot 1(t) - U_0(1 - e^{-(t-\tau_i)/\tau}) \cdot 1(t - \tau_i); \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} i_{\text{вих}\Pi}(t) &= I_0 \cdot g_2(t) - I_0 \cdot g_2(t - \tau_i) = \\ &= I_0 e^{-t/\tau} \cdot 1(t) - I_0(1 - e^{-(t-\tau_i)/\tau}) \cdot 1(t - \tau_i), \end{aligned} \quad (2.49)$$

де $g_2(t)$ — перехідна характеристика кіл цієї групи (2.37).

Для послідовних кіл першої та другої груп, схеми яких показані на рис. 2.17, а, б і 2.18, а, б, графіки відгуків (2.46) і (2.48) зображені відповідно на рис. 2.28 і 2.29.

Очевидно, що для паралельних кіл (рис. 2.17, в, з і 2.18, в, з) графіки, відповідні виразам (2.47) і (2.49), відрізняються лише

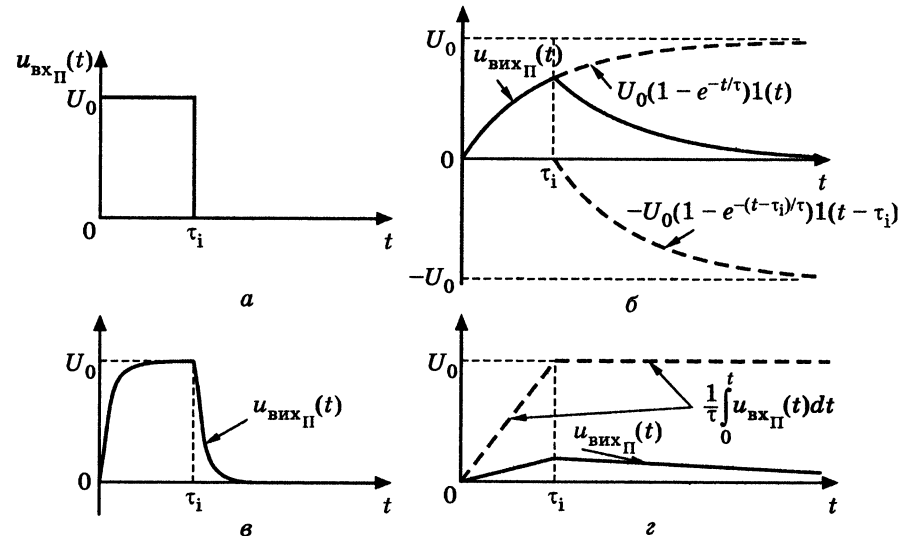


Рис. 2.28. Вихідні напруги послідовних кіл $R, C; R, L$ першої групи при дії прямокутного відеоімпульсу:

а — дія; відгуки; б — $\tau \approx \tau_i$; в — $\tau = 0,1\tau_i$; з — $\tau = 3\tau_i$

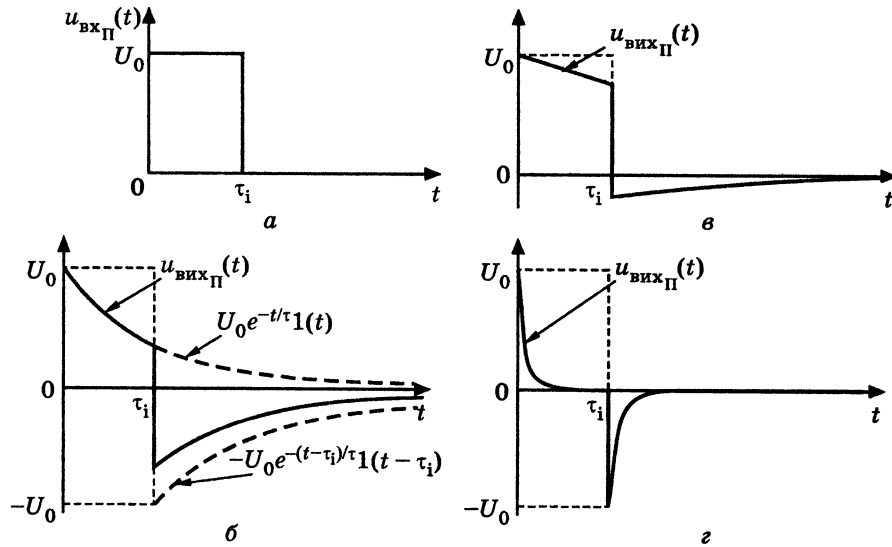


Рис. 2.29. Вихідні напруги послідовних кіл $R, C; R, L$ другої групи при дії прямокутного відеоімпульсу:
 a — дія; відгуки; $б$ — $\tau \approx \tau_i$; $в$ — $\tau = 3\tau_i$; $г$ — $\tau = 0,1\tau_i$

величинами та розмірностями дії $i_{\text{вихП}}(t)$, відгуків $i_{\text{вихП}}(t)$ і висотою вхідного імпульсу струму I_0 . Графіки (рис. 2.28, 2.29) показано для трьох характерних співвідношень між сталими часу кола і тривалостями імпульсів.

У випадку $\tau \approx \tau_i$ (рис. 2.28, б і 2.29, б) графіки побудовані у вигляді суми доданків, які утворюють рівняння (2.46) і (2.48). В інтервалі часу $0 \leq t < \tau_i$ тільки перший доданок не дорівнює нулю, а в інтервалі $\tau_i < t < \infty$ — обидва доданки. Протягом першого інтервалу часу елементи L або C накопичують енергію, а протягом другого — в колах відбуваються вільні процеси.

Відгук за формою наближається до вхідного імпульсу, тобто має місце неспотворена передача сигналу: при $\tau \ll \tau_i$ у колах першої групи (рис. 2.28, в) і при $\tau \gg \tau_i$ у колах другої групи (рис. 2.29, г).

Якщо $\tau \gg \tau_i$, вихідні напруги (2.46) кіл першої групи протягом імпульсу можна приблизно записати у вигляді:

$$u_{\text{вихП}}(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) \approx U_0 \frac{t}{\tau}, \quad (2.50)$$

а для $t > \tau_i$ приблизні вирази для $u_{\text{вихП}}(t)$ становитимуть

$$u_{\text{вихП}}(t) = U_0(e^{-(t-\tau_i)/\tau} - e^{-t/\tau}) = U_0(1 - e^{-\tau_i/\tau})e^{-(t-\tau_i)/\tau} \approx U_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-(t-\tau_i)/\tau}. \quad (2.51)$$

Із збільшенням величини τ функція $u_{\text{вихП}}(t)$, згідно із співвідношеннями (2.50) і (2.51), стає пропорційною (з коефіцієнтом $1/\tau$) визначеному інтегралу від $u_{\text{вихП}}(t)$:

$$\int_0^t u_{\text{вихП}}(t) dt = \int_0^t U_0[1(t) - 1(t - \tau_i)] dt = \begin{cases} U_0 t & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_i; \\ U_0 \tau_i & \text{при } t > \tau_i. \end{cases}$$

Цей випадок ілюструють графіки, побудовані на рис. 2.28, г.

Отже, даний режим кіл $R, C; R, L$ першої групи є окремим випадком розглянутого в п. 2.3.1 інтегрування вхідного сигналу.

За умови $\tau \ll \tau_i$ кола $R, C; R, L$ другої групи є диференціальними (див. п. 2.3.2), а відгуки (рис. 2.29, г) мають вигляд двох порівняно коротких імпульсів з різною полярністю. Площа кожного з імпульсів становить

$$\int_0^{\infty} U_0 e^{-t/\tau} dt = -U_0 \tau e^{-t/\tau} \Big|_0^{\infty} = U_0 \tau.$$

Якщо $\tau \rightarrow 0$, імпульси відрізняються від дельта-функцій тільки площею, а вихідні напруги кіл другої групи

$$u_{\text{вихП}}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} [U_0 e^{-t/\tau} \cdot 1(t) - U_0 e^{-(t-\tau_i)/\tau} \cdot 1(t - \tau_i)] = U_0 \tau \delta(t) - U_0 \tau \delta(t - \tau_i)$$

пропорційні (з коефіцієнтом τ) похідній вхідного імпульсу

$$\frac{d[u_{\text{вихП}}(t)]}{dt} = \frac{d\{U_0[1(t) - 1(t - \tau_i)]\}}{dt} = U_0 \delta(t) - U_0 \delta(t - \tau_i).$$

Порівняно короткі ($\tau_i \ll \tau$) прямокутні відеоімпульси з великим значенням U_0 (I_0) практично використовують як сигнали для експериментального вимірювання імпульсних характеристик кіл першого порядку. Цей висновок пояснюють графіки для послідовних кіл $R, C; R, L$ (рис. 2.30) та приблизне подання відгуків при $\tau_i \ll \tau$.

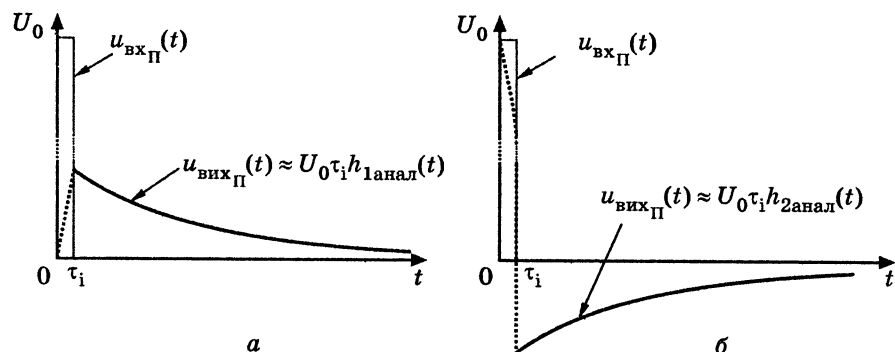


Рис. 2.30. Вихідні напруги послідовних кіл R, C, R, L при дії прямокутного відеоімпульсу тривалістю $\tau_i = 0,1\tau$ для кіл: a — першої групи; b — другої групи

Якщо використовувати у співвідношеннях (2.46)–(2.49) приблизне подання експоненти при $x = \tau_i/\tau \ll 1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \approx 1 + x = 1 + \frac{\tau_i}{\tau},$$

то вирази, які описують відгуки кіл першої групи для $t > \tau_i$, становитимуть:

$$\begin{aligned} u_{\text{вихП}}(t) &= U_0 e^{-(t-\tau_i)/\tau} - U_0 e^{-t/\tau} = U_0 e^{-t/\tau} (e^{\tau_i/\tau} - 1) \approx \\ &\approx U_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-t/\tau} = U_0 \tau_i h_{1\text{анал}}(t); \\ i_{\text{вихП}}(t) &= I_0 e^{-(t-\tau_i)/\tau} - I_0 e^{-t/\tau} = I_0 e^{-t/\tau} (e^{\tau_i/\tau} - 1) \approx \\ &\approx I_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-t/\tau} = I_0 \tau_i h_{1\text{анал}}(t), \end{aligned}$$

де $h_{1\text{анал}}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$ — аналітична частина імпульсної характеристики $h_1(t)$ (2.35).

Аналогічні виведення дають приблизний опис відгуків кіл другої групи для $t > \tau_i$:

$$\begin{aligned} u_{\text{вихП}}(t) &= U_0 e^{-t/\tau} - U_0 e^{-(t-\tau_i)/\tau} = U_0 e^{-t/\tau} (1 - e^{\tau_i/\tau}) \approx \\ &\approx -U_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-t/\tau} \approx -U_0 \tau_i h_{2\text{анал}}(t); \\ i_{\text{вихП}}(t) &= I_0 e^{-t/\tau} - I_0 e^{-(t-\tau_i)/\tau} = I_0 e^{-t/\tau} (1 - e^{\tau_i/\tau}) \approx \\ &\approx -I_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-t/\tau} \approx -I_0 \tau_i h_{2\text{анал}}(t), \end{aligned}$$

де $h_{2\text{анал}}(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$ — аналітична частина імпульсної характеристики $h_2(t)$ (2.38).

Отже, відгуки на дію коротких ($\tau_i \ll \tau$) імпульсів при $t > \tau_i$ пропорційні імпульсним характеристикам кіл. Коефіцієнтами пропорційності є величини $U_0 \tau_i$ ($I_0 \tau_i$). Ділянки графіків при $t > \tau_i$ побудовані на рис. 2.30 суцільними лініями.

В інтервалі $0 < t < \tau_i$ відгуки пропорційні початковим ділянкам перехідних характеристик і визначаються особливостями імпульсних характеристик в області $t = 0$. Так, показані на рис. 2.30 пунктирними лініями ділянки графіків відгуків цього інтервалу відповідають наявності: стрибка $h_1(t)$ при $t = +0$ для кіл першої групи; дельта-функції в імпульсній характеристиці $h_2(t)$ кіл другої групи.

Для більшої наочності при побудові графіків на рис. 2.30 масштаби по осях ординат для $u_{\text{вхП}}(t)$ та $u_{\text{вихП}}(t)$ вибрані різними, з огляду на значну різницю між величинами U_0 та $U_0 \tau_i/\tau$.

Приклад 2.8. Знайти напругу на затискачах кола, розглянутого у прикладі 2.4, при дії імпульсу струму $i_{\text{вхП}}(t)$ з параметрами I_0, τ_i (рис. 2.31, a). Побудувати графіки $u(t)$ для значень $\tau \approx \tau_i$; $\tau \ll \tau_i$; $\tau \gg \tau_i$.

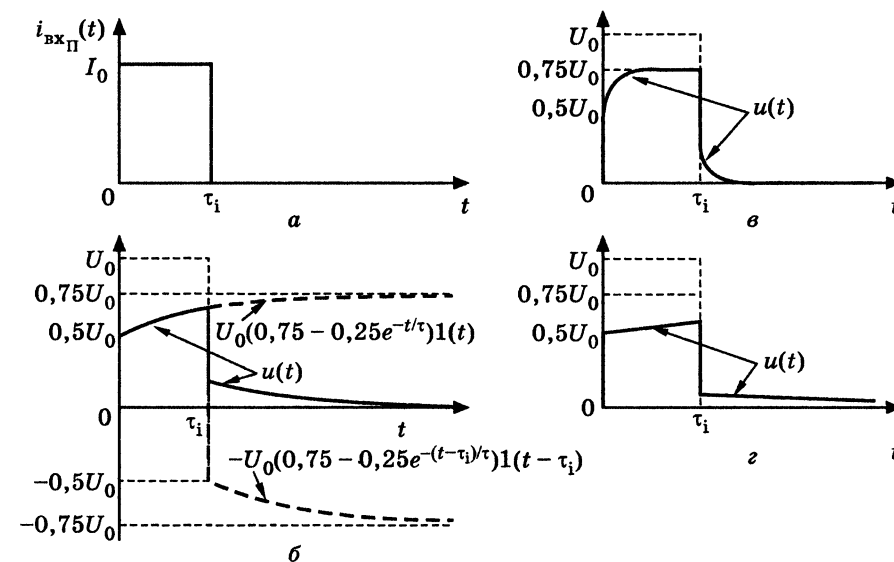


Рис. 2.31. Графіки до прикладу 2.8: a — дія; відгуки; $б$ — $\tau \approx \tau_i$; $в$ — $\tau \ll \tau_i$; $з$ — $\tau \gg \tau_i$

Розв'язання. Використовуючи співвідношення (2.45) і знайдену у прикладі 2.4 перехідну характеристику $g_u(t)$ (2.17), визначимо шукану напругу:

$$\begin{aligned} u(t) &= I_0 g_u(t) - I_0 g_u(t - \tau_i) = \\ &= I_0(0,75R - 0,25R e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) - I_0(0,75R - 0,25R e^{-(t-\tau_i)/\tau}) \cdot 1(t - \tau_i) = \\ &= U_0(0,75 - 0,25 e^{-t/\tau}) \cdot 1(t) - U_0(0,75 - 0,25 e^{-(t-\tau_i)/\tau}) \cdot 1(t - \tau_i), \end{aligned} \quad (2.52)$$

де $U_0 = RI_0$.

Побудуємо графік $u(t)$ для $\tau \approx \tau_i$ (рис. 2.31, б) як різницю двох доданків рівняння (2.52). На рис. 2.31, в, з зображені графіки відповідно для випадків $\tau \ll \tau_i$ і $\tau \gg \tau_i$.

Приклад 2.9. Визначити відгук кола $s_{\text{вих}\Pi}(t)$ на дію $s_{\text{вх}\Pi}(t)$, якщо дія та імпульсна характеристика кола $h(t)$ мають вигляд прямокутних відеоімпульсів однакової тривалості (рис. 2.32, а). Побудувати графік $s_{\text{вих}\Pi}(t)$.

Розв'язання. За формулою (2.27) знайдемо перехідну характеристику кола:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^t h(x) dx = \int_{-\infty}^t [h_0 \cdot 1(x) - h_0 \cdot 1(x - \tau_i)] dx = \\ &= \int_0^t h_0 \cdot 1(x) dx - \int_{\tau_i}^t h_0 \cdot 1(x - \tau_i) dx = h_0 t \cdot 1(t) - h_0 \cdot (t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) \end{aligned}$$

та побудуємо її графік (рис. 2.33, а).

Підставляючи отриманий вираз для $g(t)$ у формулу (2.45), отримуємо відгук кола

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}\Pi}(t) &= A \cdot g(t) - A \cdot g(t - \tau_i) = \\ &= Ah_0 \{ t \cdot 1(t) - (t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) - (t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) + (t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) \} = \\ &= Ah_0 \{ t \cdot 1(t) - 2(t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) + (t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) \}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

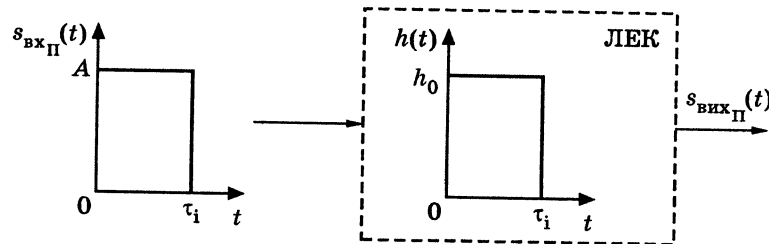


Рис. 2.32. До прикладу 2.9

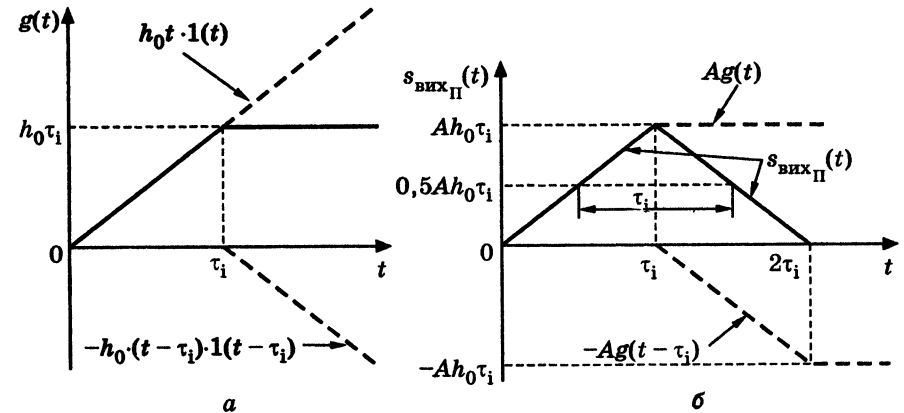


Рис. 2.33. Графіки до прикладу 2.9:
а — перехідна характеристика; б — відгук кола

Вираз (2.53) показує, що $s_{\text{вих}\Pi}(t)$ описується такими функціями у різні інтервали часу:

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = \begin{cases} Ah_0 t & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ Ah_0 t(2\tau_i - t) & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 2\tau_i. \end{cases} \quad (2.53a)$$

Графік відгуку кола (рис. 2.33, б), побудований згідно з виразом (2.45), підтверджує часове подання (2.53a). Відгук кола має форму трикутного імпульсу з максимальним значенням $Ah_0\tau_i$ і тривалістю: $2\tau_i$ за основою; τ_i — на відносному рівні 0,5.

Розглянутий режим кола відповідає оптимальній обробці прямокутних відеоімпульсів, яка забезпечує максимальне відношення сигнал — завада та накопичення енергії вхідного сигналу (максимальне значення вихідного сигналу пропорційне енергії вхідної дії). У даному випадку цей висновок підтверджується тим, що енергія вхідного імпульсу, яка виділяється на одиничному активному опорі, становить $A^2\tau_i$.

Приклад 2.10. Коло має перехідну характеристику, зображену на рис. 2.34, а. Вхідна дія є кодом, складеним із трьох прямокутних відеоімпульсів різної полярності (рис. 2.34, б). Знайти відгук кола й імпульсну характеристику, а також побудувати їхні графіки. Проаналізувати режим кола з точки зору оптимальної обробки вхідного сигналу (див. приклад 2.9).

Розв'язання. Складемо аналітичний вираз для заданих графічним способом перехідної характеристики кола і дії (рис. 2.34):

$$g(t) = \frac{g_0}{\tau_i} [t \cdot 1(t) - 2(t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) + (t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i)]; \quad (2.54)$$

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = -A \cdot 1(t) + 2A \cdot 1(t - \tau_i) - A \cdot 1(t - 3\tau_i). \quad (2.55)$$

Запишемо загальний вираз для відгуку кола, використовуючи формулу (2.44) і значення трьох «сходинок» у складі дії (2.55):

$$s_{\text{вих.П}}(t) = -Ag(t) + 2Ag(t - \tau_i) - Ag(t - 3\tau_i). \quad (2.56)$$

Підставивши у формулу (2.56) вираз (2.54) для $g(t)$, отримаємо:

$$s_{\text{вих.П}}(t) = \frac{Ag_0}{\tau_i} [-t \cdot 1(t) + 2(t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) - (t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) - 4(t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - 4\tau_i) \cdot 1(t - 4\tau_i) - (t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - 5\tau_i) \cdot 1(t - 5\tau_i) - (t - 6\tau_i) \cdot 1(t - 6\tau_i)]. \quad (2.57)$$

Зведемо подібні члени у співвідношенні (2.57) і запишемо його двома способами:

у вигляді єдиного виразу

$$s_{\text{вих.П}}(t) = \frac{Ag_0}{\tau_i} [-t \cdot 1(t) + 2(t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) + 2(t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) - 6(t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - 4\tau_i) \cdot 1(t - 4\tau_i) + 2(t - 5\tau_i) \cdot 1(t - 5\tau_i) - (t - 6\tau_i) \cdot 1(t - 6\tau_i)]$$

та за допомогою опису функцій за інтервалами часу:

$$s_{\text{вих.П}}(t) = \begin{cases} \frac{Ag_0}{\tau_i} t & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (t - 2\tau_i) & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (3t - 6\tau_i) & \text{при } 2\tau_i < t \leq 3\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (-3t + 12\tau_i) & \text{при } 3\tau_i < t \leq 4\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (-t + 4\tau_i) & \text{при } 4\tau_i < t \leq 5\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (t - 6\tau_i) & \text{при } 5\tau_i < t \leq 6\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 6\tau_i. \end{cases} \quad (2.58)$$

Побудуємо графік відгуку кола (рис. 2.35) за формулою (2.56), використовуючи графік перехідної характеристики (рис. 2.34, а). Правильність графіка $s_{\text{вих.П}}(t)$ перевіримо за виразом (2.58).

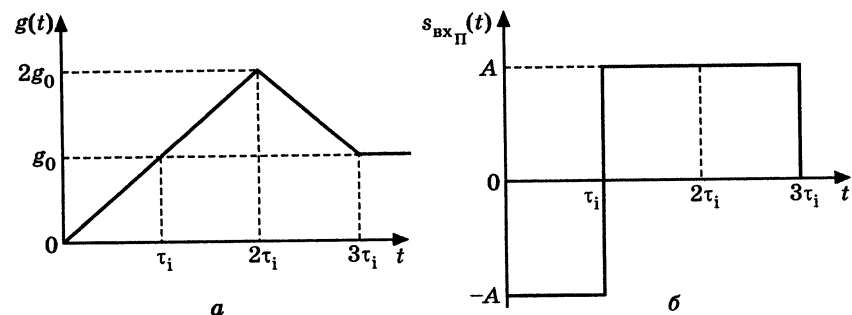


Рис. 2.34. До прикладу 2.10: а — перехідна характеристика; б — дія

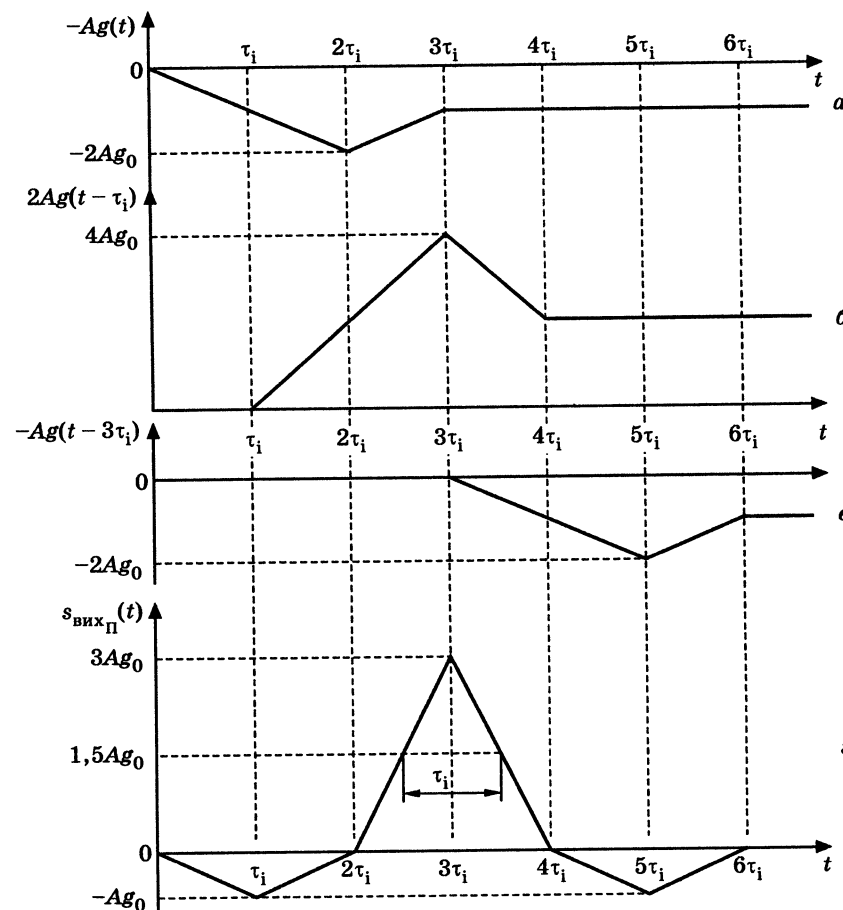


Рис. 2.35. Побудова графіка відгуку до прикладу 2.10: а, б, в — доданки рівняння (2.56); з — відгук кола

Знайдемо імпульсну характеристику кола, використовуючи її зв'язок з перехідною характеристикою (2.26):

$$h(t) = \frac{d[g(t)]}{dt} = \frac{g_0}{\tau_i} [1(t) - 2 \cdot 1(t - 2\tau_i) + 1(t - 3\tau_i)] = h_0 [1(t) - 2 \cdot 1(t - 2\tau_i) + 1(t - 3\tau_i)],$$

де $h_0 = g_0/\tau_i$.

Побудуємо графік імпульсної характеристики (рис. 2.36).

Даний режим, як і у прикладі 2.9, відповідає оптимальній обробці вхідного сигналу, що обумовлено наступним:

1) відгук кола (рис. 2.35, з) складений з трьох трикутних імпульсів — центрального додатного з висотою $3Ag_0 = 3Ah_0\tau_i$ і двох бічних від'ємних з висотою $Ag_0 = Ah_0\tau_i$; імпульси мають однакову тривалість (за основою — $2\tau_i$; за відносним рівнем 0,5 — τ_i);

2) максимальне значення центрального (основного) імпульсу пропорційне енергії вхідного сигналу $3A^2\tau_i$;

3) імпульсна характеристика кола (рис. 2.36) і дія дзеркальні в часі, оскільки $h_0 s_{\text{вх II}}(t) = Ag(3\tau_i - t)$.

Порівняння у прикладах 2.9 і 2.10 оптимально оброблених сигналів показує, що форма і тривалість відгуків практично (якщо знехтувати бічними імпульсами у прикладі 2.10) збігаються. Однак максимальне значення відгуку у прикладі 2.10 більше втричі, що обумовлює широке застосування кодованих (складних) сигналів у радіолокації, радіонавігації і зв'язку. У складних радіосигналіх елементарні імпульси відрізняються початковими фазами, а кількість елементарних імпульсів n може досягати $n = 10^3$ і більше. Сигнал у прикладі 2.10 є окремим випадком кодів Баркера⁴, у яких $n \leq 13$, а рівень бічних імпульсів становить $1/n$ від основного.

Приклад 2.11. Знайти напругу на виході кола, розглянутого у прикладі 2.5, якщо вхідною напругою є прямокутний імпульс $u_{\text{вх II}}(t)$ (рис. 2.28, а) з параметрами U_0 , $\tau_i = t_0 \approx 0,7\tau$ для випадку $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$. Побудувати графік $u_{\text{вих}}(t)$.

⁴ Баркер, Р. Н. Barker — запропонував код, названий згодом його ім'ям, у роботі «Group Synchronization of Binary Digital Systems», опублікованій у Нью-Йорку (1953).

Розв'язання. Використовуючи знайдену у прикладі 2.5 перехідну характеристику для $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$ і співвідношення (2.45), визначимо вихідну напругу:

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= U_0 g(t) - U_0 g(t - \tau_i) = \\ &= U_0 (2e^{-t/\tau} - 1) \cdot 1(t) - U_0 (2e^{-(t-\tau_i)/\tau} - 1) \cdot 1(t - \tau_i) = \\ &= U_0 (2e^{-t/\tau} - 1) \cdot 1(t) - U_0 (2e^{-(t-t_0)/\tau} - 1) \cdot 1(t - t_0). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Підсумовуючи дві функції (показані пунктиром на рис. 2.37), з яких складається вираз (2.59), побудуємо графік $u_{\text{вих}}(t)$ (суцільна лінія на рис. 2.37). Оскільки $\tau_i = t_0 \approx 0,7\tau$, у момент часу $t = t_0$ вихідна напруга змінюється стрибком від нуля до $-U_0$.

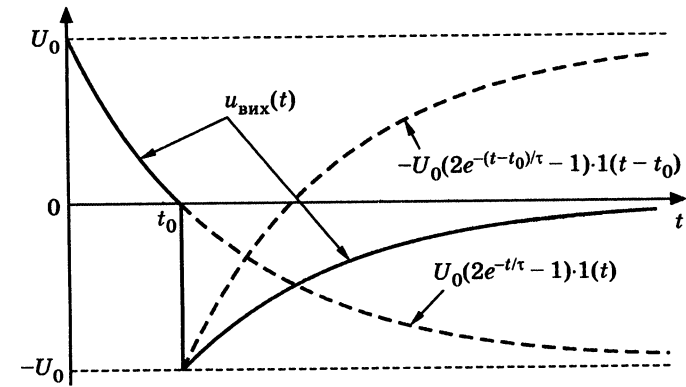


Рис. 2.37. Графік вихідної напруги у прикладі 2.11

2.5. Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою перехідної характеристики. Інтеграли Дюамеля

Нехай вхідна дія $s_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < 0$, $s_{\text{вх}}(0) \neq 0$, а на інтервалі $0 \leq t < \infty$ задана неперервною або кусково-неперервною функцією з кінцевою кількістю точок розриву першого роду (тобто задовольняє умовам Діріхле).

Для інтервалу $t \geq 0$ неперервну вхідну дію приблизно можна подати як суму початкового «стрибка» (ступінчастій дії) і множини нескінченно малих «сходинок» (рис. 2.38), послідовно зсунутих одна відносно одної в часі на однакові інтервали Δx :

$$s_{\text{вх}}(t) \approx s_{\text{вх}}(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta s_{k\text{вх}}(t), \quad (2.60)$$

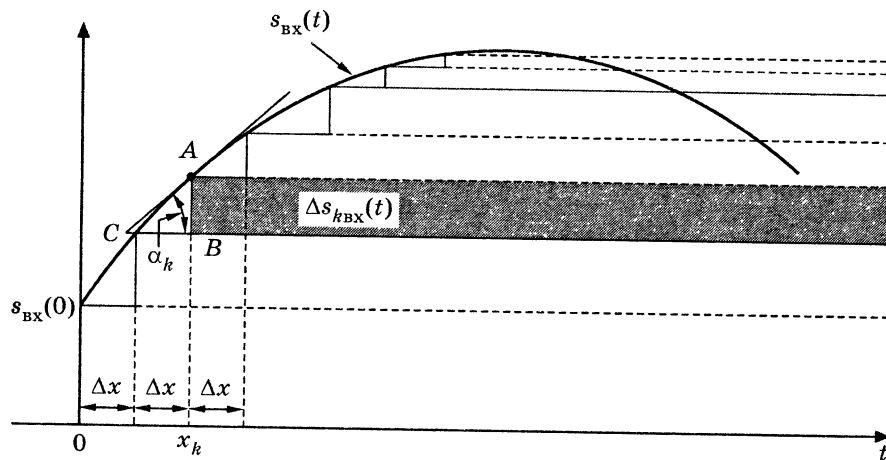


Рис. 2.38. До виведення першої форми інтеграла накладання із застосуванням перехідної характеристики

де $\Delta s_{kBX}(t) = [s_{BX}(x_k) - s_{BX}(x_k - \Delta x)] \cdot 1(t - x_k)$ — аналітичне подання k -ї «сходинок» (показане на рис. 2.38 штрихуванням); $s_{BX}(0) \cdot 1(t)$ — початкова ступінчаста дія; n — округлене до цілого числа значення дробу $t/\Delta x$.

Висота k -ї сходинок є катетом AB прямокутного трикутника ABC (рис. 2.38), гіпотенуза якого AC лежить на дотичній до кривої $s_{BX}(t)$ у точці A :

$$s_{BX}(x_k) - s_{BX}(x_k - \Delta x) = AB = BC \operatorname{tg} \alpha_k. \quad (2.61)$$

За визначенням похідної $s'_{BX}(x_k) = \operatorname{tg} \alpha_k$, враховуючи наближення $BC \approx \Delta x$, співвідношення (2.61) можна приблизно подати в такий спосіб:

$$s_{BX}(x_k) - s_{BX}(x_k - \Delta x) \approx \Delta x s'_{BX}(x_k), \quad (2.62)$$

де $s'_{BX}(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s_{BX}(x_k) - s_{BX}(x_k - \Delta x)}{\Delta x}$ — значення похідної функції $s_{BX}(t)$ при $t = x_k$.

Підстановка співвідношення (2.62) до (2.60) дозволяє записати:

$$s_{BX}(t) \approx s_{BX}(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n s'_{BX}(x_k) \Delta x \cdot 1(t - x_k). \quad (2.63)$$

За принципом накладання відгук кола, яке має перехідну характеристику $g(t)$, приблизно дорівнює сумі відгуків на кожному з ступінчастих дій, що входять у формулу (2.63):

$$s_{\text{вих}}(t) \approx s_{\text{вх}}(0)g(t) + \sum_{k=1}^n s'_{\text{вх}}(x_k) \Delta x g(t - x_k). \quad (2.64)$$

Для того щоб точно описати $s_{\text{вих}}(t)$, слід спрямувати $\Delta x \rightarrow 0$, а кількість «сходинок» $n = t/\Delta x \rightarrow \infty$. При цьому x_k перетворюється в поточну змінну x , Δx — у dx , сума (2.64) — у визначений інтеграл по x , і в результаті відгук кола визначатиметься співвідношенням

$$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_{+0}^t s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx. \quad (2.65)$$

Вираз (2.65) називається *першою формою інтеграла накладання з використанням перехідної характеристики (інтеграла Дюамеля⁵)*.

Нижня межа інтеграла $x = +0$ обумовлена тим, що відгук кола на початкову ступінчасту дію $s_{\text{вх}}(0) \cdot 1(t)$ врахований першим доданком у виразах (2.64), (2.65). Верхня межа інтеграла дорівнює моменту часу $t > 0$, для якого визначається відгук. Такі межі інтегрування дозволяють використовувати під інтегралом тільки аналітичні вирази перехідної характеристики і похідної функції, яка описує вхідну дію, при $t > 0$.

Перша форма інтеграла Дюамеля записується інакше:

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx, \quad (2.66)$$

якщо дію і перехідну характеристику подати у вигляді:

$$s_{\text{вх}}(t) = s_{\text{вх анал}}(t) \cdot 1(t); \quad (2.67)$$

$$g(t) = g_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t), \quad (2.68)$$

де $s_{\text{вх анал}}(t)$, $g_{\text{анал}}(t)$ — аналітичні вирази відповідно вхідної дії і перехідної характеристики, якими вони описуються при $t > 0$.

⁵ Дюамель або Дюгамель, Жан Марі Констан (1797–1872) — французький математик, член Паризької академії наук. Суттєво покращив викладення аналізу нескінченно малих. Основні роботи стосуються переважно математичної фізики. Підготовлені ним курси аналізу і механіки (1845–1846) багато разів видавалися у Франції та були перекладені іншими мовами.

Для того щоб обґрунтувати співвідношення (2.66), достатньо використати формули (2.67), (2.68), продиференціювати одиничну функцію та врахувати фільтрувальну властивість дельта-функції:

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s_{\text{вх анал}}(x) \cdot 1(x)]' g_{\text{анал}}(t-x) \cdot 1(t-x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s'_{\text{вх анал}}(x) \cdot 1(x)] + s_{\text{вх анал}}(0) \cdot \delta(x) g_{\text{анал}}(t-x) \cdot 1(t-x)dx = \\ &= s_{\text{вх анал}}(0)g_{\text{анал}}(t) + \int_{+0}^t s'_{\text{вх анал}}(x)g_{\text{анал}}(t-x)dx. \quad (2.69) \end{aligned}$$

У підсумку вираз (2.69) збігається з (2.65). Нижня і верхня межі інтеграла у формулі (2.69) відповідно обумовлені значеннями одиничних функцій:

$$1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad 1(t-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < t; \\ 0 & \text{при } x > t. \end{cases}$$

Першу форму інтеграла Дюамеля (2.66) застосовують у таких випадках:

- 1) якщо дія неперервна на інтервалі $-\infty < t < \infty$;
- 2) якщо дія $s_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < t_1$, $s_{\text{вх}}(t_1) \neq 0$, а на інтервалі $t_1 < t < \infty$ задана неперервною функцією.

У другому випадку застосування виразу (2.66) аналогічно (2.69) призведе до визначення відгуку у вигляді

$$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх анал}}(t_1)g_{\text{анал}}(t) + \int_{t_1+0}^t s'_{\text{вх анал}}(x)g_{\text{анал}}(t-x)dx.$$

Першу форму інтеграла Дюамеля (2.66) можна записати компактно у вигляді відомого у математиці інтеграла Стілтєса⁶:

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)d[s_{\text{вх}}(x)]. \quad (2.70)$$

⁶ Стілтєс Томас Іоаннес, Stieltjes (1856–1894) — нідерландський математик, чл.-кор. Петербурзької академії наук. Основні роботи присвячені теорії моментів, функціональним неперервним дробам, ортогональним многочленам, наближеному інтегруванню та ін. Започаткував узагальнене поняття інтеграла, яке має важливе значення в математиці і назване його ім'ям. У 1936 р. його праця «Дослідження неперервних дробів» перекладена й опублікована в Україні (Харків — Київ).

Відомі інші форми запису інтеграла Дюамеля (табл. 2.4), які отримують заміною змінної, інтегруванням частинами та диференціюванням визначеного інтеграла за параметром. Залежно від вигляду функцій, якими описують $s_{\text{вх}}(t)$ і $g(t)$, з точки зору обчислень зручнішою є та чи інша форма інтеграла Дюамеля.

Таблиця 2.4

Форми запису інтегралів Дюамеля

Форма	Запис	Спосіб визначення
1	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_{+0}^t s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx$ $s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx$ $s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)d[s_{\text{вх}}(x)]$	Безпосереднє виведення
2	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_0^{t-0} s'_{\text{вх}}(t-x)g(x)dx$	З першої форми заміною змінної $y = t - x$
3	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(t)g(0) + \int_0^{t-0} s_{\text{вх}}(x)g'(t-x)dx$	З першої форми інтегруванням частинами
4	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(t)g(0) + \int_{+0}^t s_{\text{вх}}(t-x)g'(x)dx$	З третьої форми заміною змінної $y = t - x$
5	$s_{\text{вих}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t s_{\text{вх}}(t-x)g(x)dx \right)$	Скорочений запис першої і другої форм із застосуванням операції диференціювання визначеного інтеграла за параметром
6	$s_{\text{вих}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t s_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx \right)$	Скорочений запис третьої і четвертої форм із застосуванням операції диференціювання визначеного інтеграла за параметром

Дію (рис. 2.39), яка описується кусково-неперервною функцією з кінцевою кількістю стрибків (точок розриву першого роду), можна записати у вигляді:

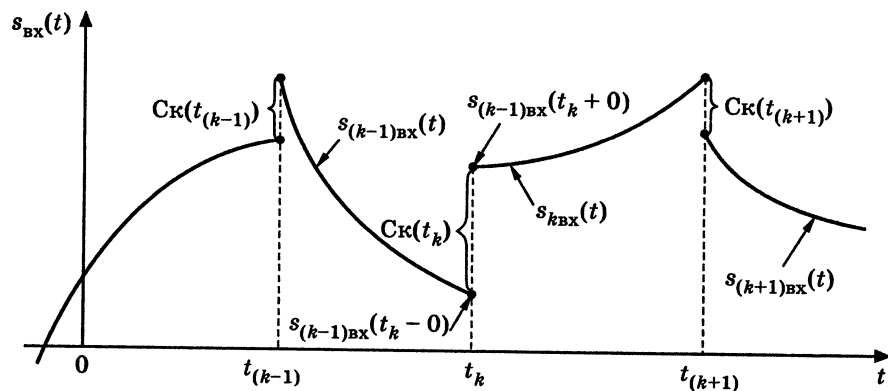


Рис. 2.39. Графік кусково-неперервної дії

$$s_{вх}(t) = \sum_k s_{kвх}(t) \cdot [1(t-t_k) - 1(t-t_{k+1})] = \sum_k СК(t_k) \cdot 1(t-t_k) + \sum_k s_{kвх \text{ непр}}(t) \cdot [1(t-t_k) - 1(t-t_{k+1})], \quad (2.71)$$

де $СК(t_k) = s_{kвх}(t_k + 0) - s_{(k-1)вх}(t_k - 0)$ — k -й стрибок $s_{вх}(t)$ у момент часу $t = t_k$; $s_{kвх \text{ непр}}(t)$ — неперервна функція, яка описує дію на інтервалі $(t_k + 0) \leq t \leq (t_{k+1} - 0)$.

Застосування принципу накладання до дії (2.71) дозволяє визначити відгук:

$$s_{вих}(t) = \sum_k СК(t_k) \cdot g(t-t_k) + \sum_k \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} s'_{kвх \text{ непр}}(x) g(t-x) dx = \sum_k СК(t_k) \cdot g(t-t_k) + \int_{-\infty}^{\infty} s'_{вх \text{ непр}}(x) g(t-x) dx, \quad (2.72)$$

де $s_{вх \text{ непр}}(t)$ — неперервна (гладка або кусково-гладка) функція (рис. 2.40), яка відрізняється від кусково-неперервної дії $s_{вх}(t)$ (рис. 2.39) тільки відсутністю стрибків.

Можна показати, що вираз (2.72) отримують, застосовуючи до дії (2.71) першу форму інтеграла Дюамеля (2.66). Використання інших форм інтеграла Дюамеля (табл. 2.4) для кусково-неперервних дій принципово можливе, однак потребує коригування меж інтегрування з урахуванням математичних перетворень, які призводять до цих форм. Тому для розривних дій краще використовувати першу форму інтеграла Дюамеля (2.66), яка є найуніверсальнішою формою інтеграла накладання для визначення відгуку із застосуванням перехідної характеристики.

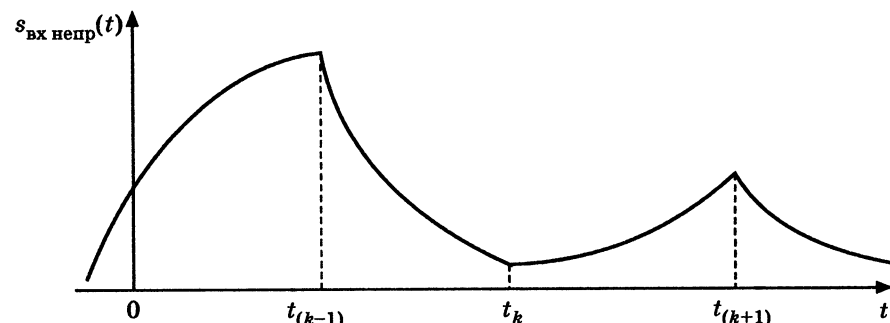


Рис. 2.40. Графік неперервної дії, яка відповідає кусково-неперервній дії $s_{вх}(t)$, зображеній на рис. 2.39

Приклад 2.12. На вхід послідовного кола R, C другої групи (рис. 2.18, а) подано напругу

$$u_{вх}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_0 e^{-t/\tau_{вх}} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Знайти напругу на виході. Проаналізувати режим кола та побудувати графіки для різних співвідношень між сталими часу кола $\tau = RC$ і дії $\tau_{вх}$.

Розв'язання. Скористаємося знайденим у підрозділі 2.3 виразом (2.37) для перехідної характеристики даного кола і першою формою інтеграла Дюамеля (2.65). З огляду на позначення, прийняті в даному прикладі, запишемо загальний вираз для визначення відгуку кола:

$$u_{вих}(t) = u_{вх}(0)g(t) + \int_{+0}^t u'_{вх}(x)g(t-x)dx, \quad (2.73)$$

а також знайдемо значення $u_{вх}(0)$ і функцій, які складають вираз (2.73):

$$u_{вх}(0) = U_0; \quad g(t) = e^{-t/\tau}; \quad u'_{вх}(x) = -\frac{U_0}{\tau_{вх}} e^{-x/\tau_{вх}}; \quad g(t-x) = e^{-(t-x)/\tau}.$$

Після підстановки отримуємо:

$$\begin{aligned} u_{вих}(t) &= U_0 e^{-t/\tau} + \int_{+0}^t -\frac{U_0}{\tau_{вх}} e^{-x/\tau_{вх}} e^{-(t-x)/\tau} dx = \\ &= U_0 e^{-t/\tau} - \frac{U_0}{\tau_{вх}} e^{-t/\tau} \int_{+0}^t e^{-x/\tau_{вх}} e^{x/\tau} dx = U_0 e^{-t/\tau} - \frac{U_0}{\tau_{вх}} e^{-t/\tau} \int_{+0}^t e^{-(1/\tau_{вх} - 1/\tau)x} dx = \\ &= U_0 e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{\tau_{вх}(1/\tau_{вх} - 1/\tau)} e^{-t/\tau} \left[e^{-(1/\tau_{вх} - 1/\tau)x} \right]_{+0}^t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_0 e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau} e^{-t/\tau} \left[e^{-(1/\tau_{\text{вх}} - 1/\tau)x} - 1 \right] = \\
&= U_0 e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau} \left[e^{-t/\tau_{\text{вх}}} - e^{-t/\tau} \right] = \frac{U_0}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} + \frac{U_0}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau} e^{-t/\tau} = \\
&= \frac{U_0 \tau}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} - \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau}. \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Кінцевий вираз (2.74) складається з вимушеної $u_{\text{вм}}(t) = \frac{U_0 \tau}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau_{\text{вх}}}$ та

вільної $u_{\text{вл}}(t) = -\frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau}$ складових: $u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вм}}(t) + u_{\text{вл}}(t)$.

Аналіз виразів (2.74) і графіків відгуків (рис. 2.41–2.43) для різних співвідношень між τ та $\tau_{\text{вх}}$ дозволяє зробити такі висновки:

- 1) якщо $\tau = \tau_{\text{вх}}$, відбувається повне відтворення вхідної напруги на виході кола;
- 2) якщо τ та $\tau_{\text{вх}}$ є величинами одного порядку (рис. 2.41 і 2.42), але $\tau \neq \tau_{\text{вх}}$, то вихідна напруга спотворюється більше при $\tau < \tau_{\text{вх}}$ (рис. 2.42, б);
- 3) коли $\tau \gg \tau_{\text{вх}}$, напруга на виході кола практично повторює форму вхідної напруги (рис. 2.43, а);
- 4) коли $\tau \ll \tau_{\text{вх}}$, напруга на виході кола (рис. 2.43, б) приблизно дорівнює

$$u_{\text{вих}}(t) \approx -\tau \frac{U_0}{\tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} + U_0 e^{-t/\tau} \approx \tau u'_{\text{вх}}(t) + U_0 \tau \delta(t), \quad (2.75)$$

перший доданок у (2.75) пропорційний з коефіцієнтом τ похідній вхідної напруги для $t > 0$, а другий є порівняно коротким імпульсом, який

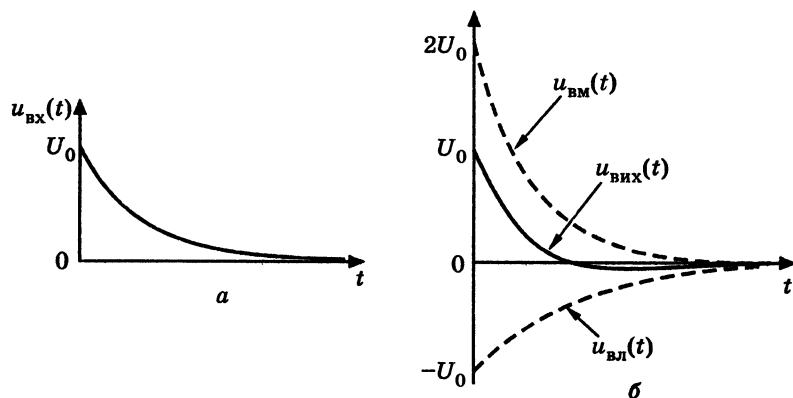


Рис. 2.41. Графіки до прикладу 2.12 для $\tau = 2\tau_{\text{вх}}$: а — дія; б — відгук; пунктир — вільна та вимушена складові

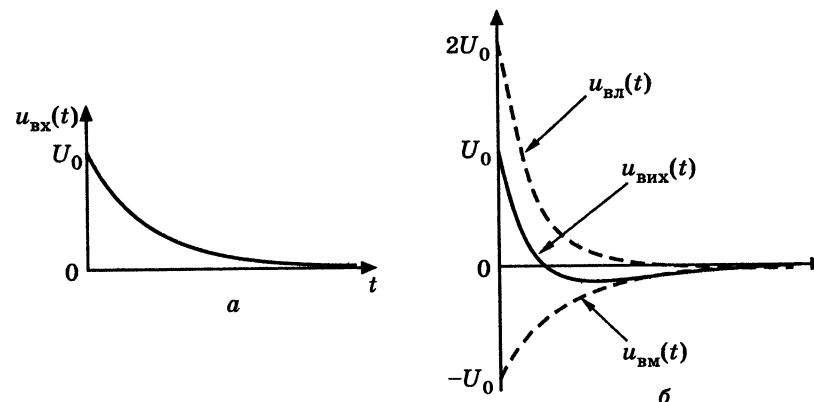


Рис. 2.42. Графіки до прикладу 2.12 для $\tau = 0,5\tau_{\text{вх}}$: а — дія; б — відгук; пунктир — вільна та вимушена складові

відповідає дельта-функції, що виходить унаслідок диференціювання стрибка $u_{\text{вх}}(t)$ при $t = 0$.

Отже, в даному прикладі для конкретної дії підтверджені розглянуті в підрозділах 2.3 і 2.4 властивості кола R, C другої групи: диференціювати дію ($\tau \ll \tau_{\text{вх}}$) чи виконувати функцію неспотворювального кола ($\tau \gg \tau_{\text{вх}}$).

Приклад 2.13. Вхідною напругою послідовного кола R, C першої групи (рис. 2.17, а) є експоненційний імпульс, заданий у прикладі 2.12. Знайти відгук кола і побудувати графіки вихідної напруги для різних співвідношень між τ та $\tau_{\text{вх}}$. Оцінити ступінь спотворення дії при проходженні через дане коло.

Розв'язання. Враховуючи особливості функції (2.34), яка описує перехідну характеристику кола:

$$g(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \cdot 1(t); \quad g(0) = 0,$$

слід використовувати третю або четверту форми запису інтеграла Дюамеля (табл. 2.4).

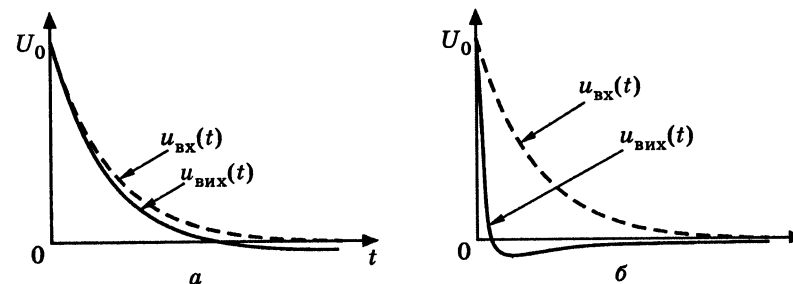


Рис. 2.43. Графіки дії (пунктир) і відгуків до прикладу 2.12: а — $\tau \gg \tau_{\text{вх}}$ ($\tau = 10\tau_{\text{вх}}$); б — $\tau \ll \tau_{\text{вх}}$ ($\tau = 0,1\tau_{\text{вх}}$)

Скористаємося четвертою формою інтеграла Дюамеля, яку, відповідно до прийнятих для даного прикладу позначень, запишемо у вигляді:

$$u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх}}(t)g(0) + \int_{+0}^t u_{\text{вх}}(t-x)g'(x)dx. \quad (2.76)$$

Підставимо до виразу (2.76) функції

$$u_{\text{вх}}(t-x) = U_0 e^{-(t-x)/\tau_{\text{вх}}}; \quad g'(x) = \frac{1}{\tau} e^{-x/\tau}$$

та виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= \int_{+0}^t U_0 e^{-(t-x)/\tau_{\text{вх}}} \frac{1}{\tau} e^{-x/\tau} dx = \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} \int_{+0}^t e^{-(1/\tau - 1/\tau_{\text{вх}})x} dx = \\ &= -\frac{U_0 e^{-t/\tau_{\text{вх}}}}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{\text{вх}})} e^{-(1/\tau - 1/\tau_{\text{вх}})x} \Big|_{+0}^t = -\frac{U_0}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{\text{вх}})} e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{\text{вх}})} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} = \\ &= -\frac{U_0}{1 - \tau/\tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{1 - \tau/\tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} = \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau} - \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau_{\text{вх}}}. \quad (2.77) \end{aligned}$$

Як і в прикладі 2.12, отриманий вираз (2.77) для $u_{\text{вих}}(t)$ складений із вільної $u_{\text{вл}}(t) = \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau}$ та вимушеної $u_{\text{вм}}(t) = -\frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-t/\tau_{\text{вх}}}$ складових:

$$u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вм}}(t) + u_{\text{вл}}(t).$$

Графіки відгуків для різних співвідношень між τ та $\tau_{\text{вх}}$ зображені на рис. 2.44.

Аналіз графіків (рис. 2.44) і виразу (2.77) дозволяють зробити такі висновки:

- 1) при $\tau = \tau_{\text{вх}}$ напруга на виході кола дорівнює нулю;
- 2) якщо τ та $\tau_{\text{вх}}$ є величинами одного порядку (рис. 2.44, а, б), але $\tau \neq \tau_{\text{вх}}$, то вихідна напруга менше спотворюється при $\tau < \tau_{\text{вх}}$ (рис. 2.44, а);
- 3) якщо $\tau \ll \tau_{\text{вх}}$, напруга на виході кола практично повторює форму вхідної напруги (рис. 2.44, в);
- 4) якщо $\tau \gg \tau_{\text{вх}}$, напруга на виході кола (рис. 2.47, з) на інтервалі $0 < t < \tau$ приблизно становить:

$$u_{\text{вих}}(t) \approx \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau} e^{-t/\tau} - \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} \approx \frac{1}{\tau} \left(U_0 \tau_{\text{вх}} - U_0 \tau_{\text{вх}} e^{-t/\tau_{\text{вх}}} \right) \approx \frac{1}{\tau} \int_0^t u_{\text{вх}}(x) dx,$$

тобто відгук кола пропорційний (з коефіцієнтом $1/\tau$) визначеному інтегралу від дії.

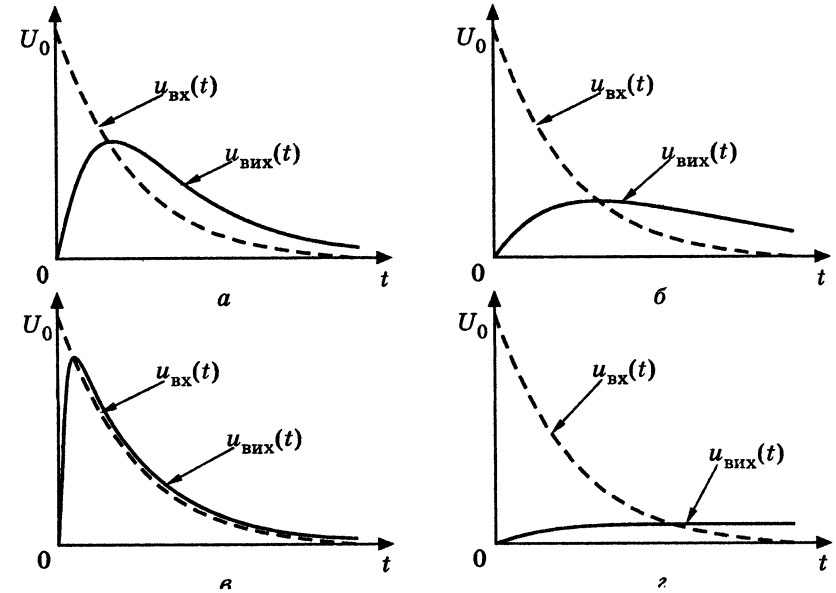


Рис. 2.44. Графіки дії (пунктир) і відгуків до прикладу 2.13:
а — $\tau = 0,5\tau_{\text{вх}}$; б — $\tau = 2\tau_{\text{вх}}$; в — $\tau \ll \tau_{\text{вх}}$ ($\tau = 0,1\tau_{\text{вх}}$);
з — $\tau \gg \tau_{\text{вх}}$ ($\tau = 10\tau_{\text{вх}}$)

Отже, даний приклад підтверджує відзначені у підрозділах 2.3 і 2.4 властивості кола R, C першої групи: не спотворювати дію при $\tau \ll \tau_{\text{вх}}$ або виконувати функцію інтегрувального кола при $\tau \gg \tau_{\text{вх}}$.

2.6. Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою імпульсної характеристики

Неперервну або кусково-неперервну дію $s_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < 0$ можна приблизно подати на інтервалі $t \geq 0$ сукупністю порівняно коротких прямокутних імпульсів з однаковою тривалістю Δx (рис. 2.45). Висота кожного з імпульсів дорівнює значенню дії для момента часу, який відповідає осі симетрії імпульсу. Використовуючи таку апроксимувальну функцію, дію приблизно можна записати у вигляді:

$$s_{\text{вх}}(t) \approx \sum_{k=0}^n \Delta s_{k\text{вх}}(t), \quad (2.78)$$

де $\Delta s_{k\text{вх}}(t) = s_{\text{вх}}(x_k) [1(t - x_k + \Delta x/2) - 1(t - x_k - \Delta x/2)]$ — аналітичне подання k -го імпульсу; n — округлене до цілого числа значення дробу $t/\Delta x$.

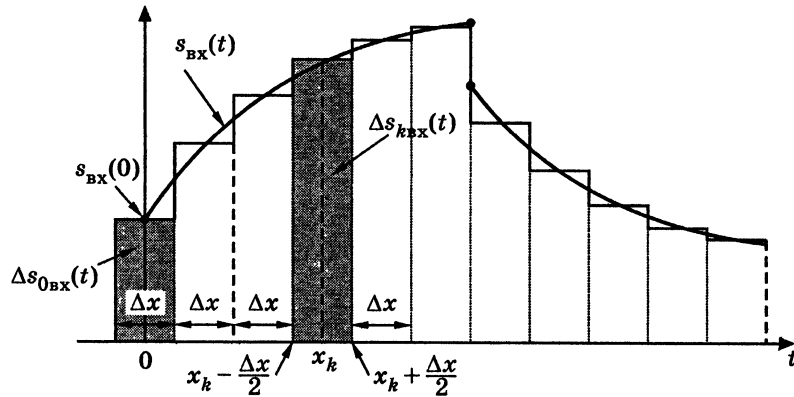


Рис. 2.45. До виведення першої форми інтеграла накладання з використанням імпульсної характеристики

Перший імпульс ($k=0, x_k=0$), який входить до формули (2.78), становить

$$\Delta s_{0Bx}(t) = s_{Bx}(0) \left[1\left(t + \frac{\Delta x}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\Delta x}{2}\right) \right].$$

Перший та k -й імпульси позначені на рис. 2.45 штрихуванням.

Порівняно короткий прямокутний імпульс з одиничною висотою (рис. 2.12, а) в даному випадку записується у вигляді $1(t - x_k + \Delta x/2) - 1(t - x_k - \Delta x/2)$, а за формулою (2.24) приблизно виражається через дельта-функцію:

$$1\left(t - x_k + \frac{\Delta x}{2}\right) - 1\left(t - x_k - \frac{\Delta x}{2}\right) \approx \Delta x \delta(t - x_k). \quad (2.79)$$

Підстановка (2.79) до виразу (2.78) призводить останній до вигляду:

$$s_{Bx}(t) \approx \sum_{k=0}^n s_{Bx}(x_k) \delta(t - x_k) \Delta x. \quad (2.80)$$

За принципом накладання відгук кола, яке має імпульсну характеристику $h(t)$, приблизно дорівнює сумі відгуків на кожний з імпульсних доданків (2.80):

$$s_{Bx}(t) \approx \sum_{k=0}^n s_{Bx}(x_k) h(t - x_k) \Delta x. \quad (2.81)$$

Для того щоб точно описати $s_{Bx}(t)$, слід спрямувати $\Delta x \rightarrow 0$, а кількість імпульсів — $n = t/\Delta x \rightarrow \infty$. Це перетворить x_k у поточну

змінну x , $\Delta x \rightarrow dx$, сума (2.81) буде визначеним інтегралом по x , і в результаті відгук кола визначатиметься співвідношенням

$$s_{Bx}(t) = \int_{-0}^{t+0} s_{Bx}(x) h(t-x) dx. \quad (2.82)$$

Вираз (2.82) є першою формою інтеграла накладання із застосуванням імпульсної характеристики. Нижня межа інтеграла (2.82) обумовлена тим, що відгук кола на початковий стрибок дії $s_{Bx}(0)$ врахований першим членом суми (2.78) $\Delta s_{0Bx}(t)$. Верхня межа ($t+0$) необхідна у випадку, коли імпульсна характеристика $h(t-x)$ у підінтегральному виразі містить дельта-функцію $\delta(t-x)$.

Після заміни у виразі (2.82) змінної x на $y = t - x$:

$$s_{Bx}(t) = - \int_{t+0}^{-0} s_{Bx}(t-y) h(y) dy,$$

зміни порядку інтегрування

$$s_{Bx}(t) = \int_{-0}^{t+0} s_{Bx}(t-y) h(y) dy$$

та повернення до початкового позначення для змінної виходить друга форма інтеграла накладання із застосуванням імпульсної характеристики:

$$s_{Bx}(t) = \int_{-0}^{t+0} s_{Bx}(t-x) h(x) dx. \quad (2.83)$$

Межі інтегрування в інтегралах (2.82) і (2.83) можна розширити:

$$s_{Bx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{Bx}(x) h(t-x) dx; \quad (2.84)$$

$$s_{Bx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{Bx}(t-x) h(x) dx, \quad (2.85)$$

якщо для дії та імпульсної характеристики застосувати вирази:

$$s_{Bx}(t) = s_{Bx \text{ анал}}(t) \cdot 1(t); \quad h(t) = g'_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t) + g(0) \delta(t),$$

де $s_{Bx \text{ анал}}(t)$, $g_{\text{анал}}(t)$ — аналітичні вирази відповідно вхідної дії для $t \geq 0$ і перехідної характеристики.

Інтеграли (2.84) і (2.85) називають згорткою⁷ (або згортанням) двох функцій. Отже, відгук кола є згорткою вхідної дії та імпульсної характеристики.

Термін «згортка» пояснює характер перетворень, яким піддаються функції $s_{\text{вх}}(t)$ та $h(t)$ при обчисленні визначених інтегралів (2.84) і (2.85), — обчислення площі фігури, утвореної внаслідок перемноження однієї з функцій на дзеркально обернену другу (рис. 2.46). Цей термін застосовується також до інтегралів накладання, записаних за допомогою перехідної характеристики (табл. 2.4). У математиці інтеграл накладання, записаний у вигляді (2.70), називають згорткою за Стілтєсом функцій $s_{\text{вх}}(t)$ та $g(t)$.

Операцію згортки умовно позначають знаком «*», і тоді інтеграли накладання (2.84) і (2.85) записують скорочено:

$$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(t) * h(t) = h(t) * s_{\text{вх}}(t).$$

У радіотехніці широко використовують дії, які мають вигляд коливань із частотою $\omega_{\text{вх}}$ та «амплітудами» $S_{m_{\text{вх}}}(t)$ і «початковими фазами» $\psi_{\text{вх}}(t)$, що повільно змінюються. Ці дії називають радіосигналами і записують у вигляді:

$$\begin{aligned} s_{\text{вх}}(t) &= S_{m_{\text{вх}}}(t) \cos[\omega_{\text{вх}} t + \psi_{\text{вх}}(t)] = \text{Re}[S_{m_{\text{вх}}}(t) e^{j\omega_{\text{вх}} t + j\psi_{\text{вх}}(t)}] = \\ &= \text{Re}[S_{m_{\text{вх}}}(t) e^{j\omega_{\text{вх}} t}], \end{aligned} \quad (2.86)$$

де $S_{m_{\text{вх}}}(t) = S_{m_{\text{вх}}}(t) e^{j\psi_{\text{вх}}(t)}$ — комплексна обвідна (змінна комплексна амплітуда) дії.

Як правило, радіосигнал діє на коливальне коло (одиначний контур, зв'язані контури тощо) з імпульсною характеристикою, яка має загальний вигляд:

$$\begin{aligned} h(t) &= H_m(t) \cos[\omega_h t + \psi_h(t)] \cdot 1(t) = \\ &= \text{Re}[H_m(t) e^{j\omega_h t + j\psi_h(t)}] \cdot 1(t) = \text{Re}[H_m(t) e^{j\omega_h t}], \end{aligned} \quad (2.87)$$

де $H_m(t)$, $\psi_h(t)$, $H_m(t) = H_m(t) e^{j\psi_h(t)} \cdot 1(t)$ — відповідно обвідна амплітуда, закон змінювання початкової фази та комплексна обвідна імпульсної характеристики.

⁷ У радіотехніці згортку двох сигналів називають їх кореляційною функцією. Залежно від того, розглядається згортка різних сигналів або одного й того ж сигналу, вводяться поняття взаємо- або автокореляційної функцій.

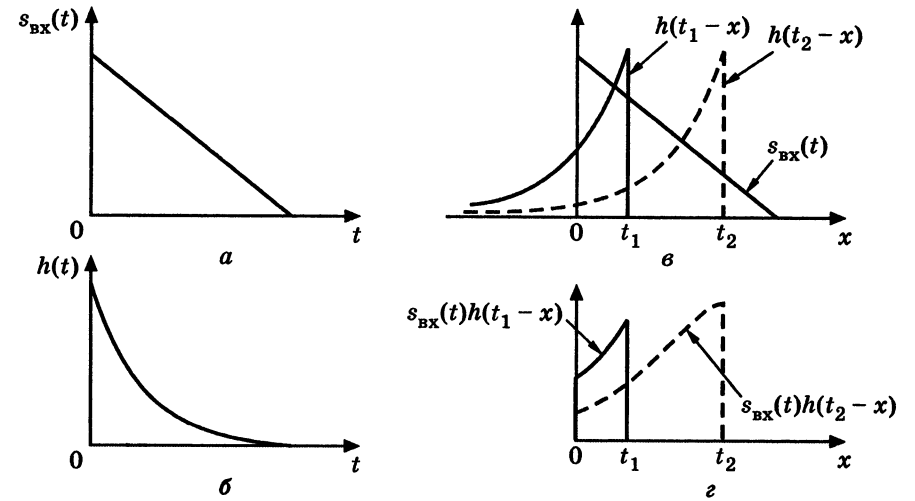


Рис. 2.46. Графіки, які пояснюють поняття згортки $s_{\text{вх}}(t)$ та $h(t)$:
 а — дія; б — перехідна характеристика;
 в — функції у складі інтеграла накладання (2.84);
 г — фігури, площі яких дорівнюють відгуку

З урахуванням співвідношень (2.86) і (2.87) застосування інтеграла накладання (2.85) дозволяє записати загальний вираз для відгуку коливального кола на дію радіосигналу у вигляді

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[S_{m_{\text{вх}}}(t-x) e^{j\omega_{\text{вх}}(t-x)}] \cdot \text{Re}[H_m(x) e^{j\omega_h x}] dx. \quad (2.88)$$

Підінтегральний вираз у формулі (2.88) можна перетворити, застосувавши такі прийоми:

$$1) \text{Re}[S_{m_{\text{вх}}}(t-x) e^{j\omega_{\text{вх}}(t-x)}] \cdot \text{Re}[H_m(x) e^{j\omega_h x}] = \text{Re} \underline{A} \cdot \text{Re} \underline{B},$$

де $\underline{A} = A e^{j\alpha} = S_{m_{\text{вх}}}(t-x) e^{j\omega_{\text{вх}}(t-x)}$; $\underline{B} = B e^{j\beta} = H_m(x) e^{j\omega_h x}$;

2) згідно з відповідними перетвореннями⁸,

$$\begin{aligned} \text{Re} \underline{A} \cdot \text{Re} \underline{B} &= AB \cos \alpha \cos \beta = \\ &= 0,5 \text{Re}(\underline{AB} + \underline{A}^* \underline{B}) = 0,5 \text{Re}(\underline{AB} + \underline{AB}^*); \end{aligned} \quad (2.89)$$

⁸ $0,5 \text{Re}(\underline{AB} + \underline{AB}^*) = 0,5 \text{Re}(A e^{j\alpha} B e^{j\beta} + A e^{j\alpha} B e^{-j\beta}) = 0,5 AB \text{Re}[e^{j(\alpha+\beta)} + e^{j(\alpha-\beta)}] =$
 $= 0,5 AB \text{Re}[e^{j(\alpha+\beta)}] + 0,5 AB \text{Re}[e^{j(\alpha-\beta)}] = 0,5 AB [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] =$
 $= 0,5 AB (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = AB \cos \alpha \cos \beta.$

3) на підставі формули (2.89)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[\underline{S}_{m\text{вх}}(t-x)e^{j\omega_{\text{вх}}(t-x)}] \cdot \operatorname{Re}[\underline{H}_m(x)e^{j\omega_h x}] = \\ & = 0,5 \operatorname{Re}[\underline{S}_{m\text{вх}}(t-x)e^{j\omega_{\text{вх}}(t-x)} \underline{H}_m(x)e^{j\omega_h x} + \\ & + \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x)e^{j\omega_{\text{вх}}(t-x)} \underline{H}_m^*(x)e^{j\omega_h x}] = \\ & = 0,5 \operatorname{Re} \{ [\underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m(x)e^{j(\omega_h - \omega_{\text{вх}})x} + \\ & + \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x)e^{-j(\omega_h + \omega_{\text{вх}})x}] e^{j\omega_{\text{вх}}t} \}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Після підстановки виразу (2.90) до (2.88) останній набуде вигляду:

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[0,5 \int_{-\infty}^{\infty} [\underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m(x)e^{j(\omega_h - \omega_{\text{вх}})x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x)e^{-j(\omega_h + \omega_{\text{вх}})x} dx] e^{j\omega_{\text{вх}}t} \right\} = \\ = \operatorname{Re}[\underline{S}_{m\text{вих}}(t)e^{j\omega_{\text{вх}}t}], \end{aligned} \quad (2.91)$$

де

$$\begin{aligned} \underline{S}_{m\text{вих}}(t) = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} [\underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m(x)e^{j(\omega_h - \omega_{\text{вх}})x} + \\ + \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x)e^{-j(\omega_h + \omega_{\text{вх}})x}] dx \end{aligned}$$

комплексна обвідна вихідного радіосигналу (відгуку кола).

Практичне значення мають випадки збігу частот вхідного радіосигналу й імпульсної характеристики кола ($\omega_{\text{вх}} = \omega_h$), а також малих розстройок цих частот ($\omega_{\text{вх}} \approx \omega_h$; $\omega_h - \omega_{\text{вх}} = \Delta\omega$; $\omega_h + \omega_{\text{вх}} \approx 2\omega_{\text{вх}}$). Комплексні обвідні вихідних радіосигналів при цьому становитимуть:

1) при $\omega_{\text{вх}} = \omega_h$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{m\text{вих}}(t) = 0,5 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j2\omega_{\text{вх}}x} dx \right]; \end{aligned} \quad (2.92)$$

2) при малих розстройках

$$\begin{aligned} \underline{S}_{m\text{вих}}(t) \approx 0,5 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m(x) e^{j\Delta\omega x} dx + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j2\omega_{\text{вх}}x} dx \right]; \end{aligned} \quad (2.93)$$

Другі інтеграли в формулах (2.92) і (2.93) однакові і практично дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j2\omega_{\text{вх}}x} dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) [\cos(2\omega_{\text{вх}}x) - j \sin(2\omega_{\text{вх}}x)] dx \approx 0. \end{aligned}$$

Цей факт пояснюється тим, що оскільки підінтегральний вираз складається з коливань, обвідна яких $|\underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x)|$ змінюється повільно, площі додатних і від'ємних півхвиль цих коливань при обчисленні визначеного інтеграла взаємно скорочуються.

Якщо знехтувати другими інтегралами в (2.92) і (2.93), ці вирази набудуть такого вигляду:

$$\underline{S}_{m\text{вих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m(x) dx; \quad (2.94)$$

$$\underline{S}_{m\text{вих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(t-x) \underline{H}_m(x) e^{j\Delta\omega x} dx. \quad (2.95)$$

Зміна змінної в інтегралах (2.94) і (2.95) приводить до співвідношень:

$$\underline{S}_{m\text{вих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(x) \underline{H}_m(t-x) dx; \quad (2.96)$$

$$\underline{S}_{m\text{вих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{вх}}(x) \underline{H}_m(t-x) e^{j\Delta\omega(t-x)} dx. \quad (2.97)$$

Отже, комплексна обвідна вихідного радіосигналу за умови збігу частот вхідного радіосигналу та імпульсної характеристики кола визначається згортокою комплексних обвідних вхідного радіосигналу й імпульсної характеристики.

Вирази (2.95) і (2.97) свідчать, що при малих розстройках вихідний сигнал характеризується биттям з частотою $\Delta\omega_{\sigma} = |\Delta\omega| = |\omega_h - \omega_{вх}|$.

Приклад 2.14. Знайти вихідну напругу у прикладі 2.12, використовуючи імпульсну характеристику кола. Зіставити результати прикладів 2.14 і 2.12.

Розв'язання. Скористуємося знайденим у підрозділі 2.3 виразом (2.38) для імпульсної характеристики даного кола та другою формою інтеграла накладання (2.85). Враховуючи нескінченні межі в інтегралі (2.85), подамо вирази для вхідної напруги й імпульсної характеристики у вигляді:

$$u_{вх}(t-x) = U_0 e^{-(t-x)/\tau_{вх}} \cdot 1(t-x); \quad h(x) = -\frac{1}{\tau} e^{-x/\tau} \cdot 1(x) + \delta(x).$$

Складемо вираз для визначення відгуку кола:

$$u_{вих}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(t-x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 e^{-(t-x)/\tau_{вх}} \cdot 1(t-x) \left[-\frac{1}{\tau} e^{-x/\tau} \cdot 1(x) + \delta(x) \right] dx. \quad (2.98)$$

Використовуючи фільтрувальну властивість дельта-функції та значення одиничних функцій у підінтегральному виразі (2.98), обчислимо інтеграл накладання:

$$\begin{aligned} u_{вих}(t) &= U_0 e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau_{вх}} \int_0^t e^{x/\tau_{вх}} e^{-x/\tau} dx = \\ &= U_0 e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau_{вх}} \frac{1}{1/\tau_{вх} - 1/\tau} e^{(1/\tau_{вх} - 1/\tau)x} \Big|_0^t = \\ &= U_0 e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau_{вх}} \frac{\tau\tau_{вх}}{\tau - \tau_{вх}} \left[e^{(1/\tau_{вх} - 1/\tau)t} - 1 \right] = \\ &= U_0 e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0\tau_{вх}}{\tau - \tau_{вх}} \left(e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau_{вх}} \right) = \\ &= \frac{U_0(\tau - \tau_{вх} + \tau_{вх})}{\tau - \tau_{вх}} e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0\tau_{вх}}{\tau - \tau_{вх}} e^{-t/\tau} = \frac{U_0\tau}{\tau - \tau_{вх}} e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0\tau_{вх}}{\tau - \tau_{вх}} e^{-t/\tau}. \quad (2.99) \end{aligned}$$

Отже, вирази (2.99) і (2.74) для вихідної напруги, знайдені в даному прикладі і прикладі 2.12, збігаються.

Приклад 2.15. Розв'язати приклад 2.13, використовуючи інтеграл накладання із застосуванням імпульсної характеристики кола. Порівняти результат з відгуком кола у прикладі 2.13.

Розв'язання. Підставляючи $u_{вх}(t)$ з прикладу 2.13 і аналітичний вираз для імпульсної характеристики кола (2.35) (підрозд. 2.3) у першу форму інтеграла накладання (2.82), отримуємо:

$$\begin{aligned} u_{вих}(t) &= \int_{-0}^{t+0} u_{вх}(x)h(t-x)dx = \int_0^t U_0 e^{-x/\tau_{вх}} \frac{1}{\tau} e^{-(t-x)/\tau} dx = \\ &= \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t e^{(1/\tau - 1/\tau_{вх})x} dx = \frac{U_0 e^{-t/\tau}}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{вх})} e^{(1/\tau - 1/\tau_{вх})x} \Big|_0^t = \\ &= \frac{U_0}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{вх})} e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{вх})} e^{-t/\tau} = \\ &= \frac{U_0\tau_{вх}}{\tau_{вх} - \tau} e^{-t/\tau_{вх}} - \frac{U_0\tau_{вх}}{\tau_{вх} - \tau} e^{-t/\tau}. \quad (2.100) \end{aligned}$$

Знайдений відгук (2.100) збігається з виразом (2.77) у прикладі 2.13.

Приклад 2.16. На вході послідовного кола R, C першої групи (рис. 2.17, а) прикладено напругу експоненційної форми (рис. 2.47):

$$u_{вх}(t) = U_0 e^{t/\tau_{вх}} \cdot 1(-t).$$

Визначити відгук кола, застосовуючи імпульсну характеристику. Побудувати графіки вихідної напруги для $\tau_{вх} \ll \tau$, $\tau_{вх} \gg \tau$, $\tau_{вх} = \tau$. Оцінити міру спотворення даної дії при проходженні через коло.

Розв'язання. Використовуючи в першій формі інтеграла накладання (2.84) заданий вираз для $u_{вх}(t)$ та імпульсну характеристику кола (2.35) (див. підрозд. 2.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} u_{вих}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(x)h(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 e^{x/\tau_{вх}} \cdot 1(-x) \frac{1}{\tau} e^{-(t-x)/\tau} \cdot 1(t-x)dx = \\ &= \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1/\tau_{вх} + 1/\tau)x} \cdot 1(-x) \cdot 1(t-x)dx. \quad (2.101) \end{aligned}$$

Межі інтегрування у виразі (2.101) визначаємо, виходячи з граничних значень змінної x , в інтервалі між якими добуток одиничних функцій $1(-x) \cdot 1(t-x)$ не дорівнює нулю (рис. 2.48). Для $t < 0$ межі інтегрування становлять: від $-\infty$ до t , а для $t \geq 0$ — від $-\infty$ до 0.

Підставляючи значення меж до інтегралу (2.101), визначаємо відгук кола:

1) для $t < 0$

$$u_{вих}(t) = \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_{-\infty}^t e^{(1/\tau_{вх} + 1/\tau)x} dx = \frac{U_0 e^{-t/\tau}}{\tau(1/\tau + 1/\tau_{вх})} e^{(1/\tau_{вх} + 1/\tau)x} \Big|_{-\infty}^t = \frac{U_0\tau_{вх}}{\tau_{вх} + \tau} e^{t/\tau_{вх}}; \quad (2.102)$$

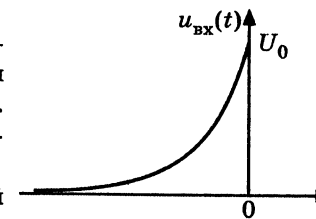


Рис. 2.47. Графік дії до прикладу 2.16

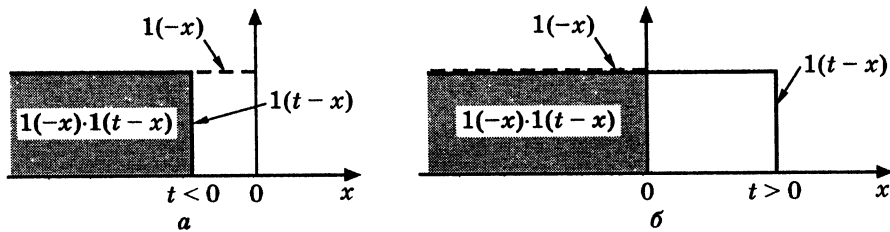


Рис. 2.48. До визначення меж інтегрування у прикладі 2.16:
 $a - t < 0; \delta - t > 0$

2) для $t \geq 0$

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_{-\infty}^0 e^{(1/\tau_{\text{вх}} + 1/\tau)x} dx = \frac{U_0 e^{-t/\tau}}{\tau(1/\tau + 1/\tau_{\text{вх}})} e^{(1/\tau_{\text{вх}} + 1/\tau)x} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau_{\text{вх}} + \tau} e^{-t/\tau}. \quad (2.103)$$

На підставі формул (2.102) і (2.103) запишемо $u_{\text{вих}}(t)$ єдиним виразом:

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau_{\text{вх}} + \tau} \left[e^{t/\tau_{\text{вх}}} \cdot 1(-t) + e^{-t/\tau} \cdot 1(t) \right]. \quad (2.104)$$

Використовуючи вираз (2.104), отримаємо формули для заданих співвідношень між τ та $\tau_{\text{вх}}$ і зведемо їх до табл. 2.5. За цими формулами побудуємо графіки (рис. 2.49).

Таблиця 2.5

Вирази для $u_{\text{вих}}(t)$ до прикладу 2.16

Співвідношення між τ та $\tau_{\text{вх}}$	$u_{\text{вих}}(t)$
$\tau_{\text{вх}} \ll \tau$	$\approx \frac{\tau_{\text{вх}} U_0}{\tau} [e^{t/\tau_{\text{вх}}} \cdot 1(-t) + e^{-t/\tau} \cdot 1(t)]$
$\tau_{\text{вх}} \gg \tau$	$\approx U_0 [e^{t/\tau_{\text{вх}}} \cdot 1(-t) + e^{-t/\tau} \cdot 1(t)]$
$\tau_{\text{вх}} = \tau$	$0,5 U_0 [e^{t/\tau_{\text{вх}}} \cdot 1(-t) + e^{-t/\tau_{\text{вх}}} \cdot 1(t)]$

Аналіз формул і графіків для $u_{\text{вих}}(t)$ дозволяє зробити такі висновки:

- 1) при $\tau_{\text{вх}} \ll \tau$ відгук відповідає імпульсній характеристиці кола, а при $t \geq 0$ — пропорційний її аналітичному виразу (рис. 2.49, а);
- 2) при $\tau_{\text{вх}} \gg \tau$ спостерігається практично неспотворене відтворення вхідної напруги на виході кола (рис. 2.49, б);
- 3) випадок $\tau_{\text{вх}} = \tau$ (рис. 2.49, в) відповідає оптимальному обробленню $u_{\text{вих}}(t)$, розглянутому у прикладах 2.9 і 2.10.

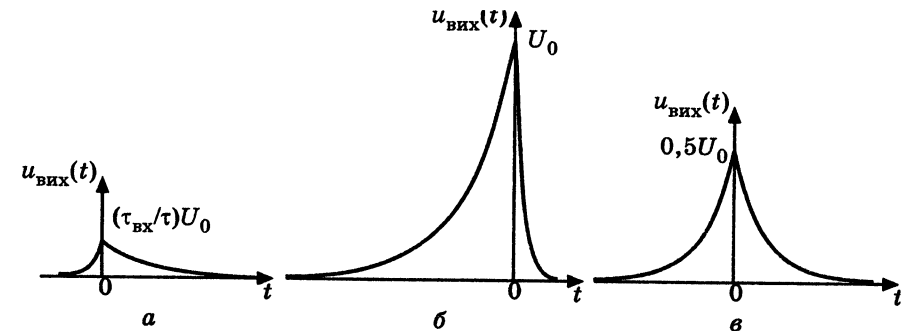


Рис. 2.49. Графіки $u_{\text{вих}}(t)$ до прикладу 2.16:
 $a - \tau_{\text{вх}} \ll \tau; \delta - \tau_{\text{вх}} \gg \tau; \epsilon - \tau_{\text{вх}} = \tau$

Приклад 2.17. Вхідною напругою послідовного високодобротного коливального контуру є радіоімпульс експоненційної форми (рис. 2.50):

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{m0} e^{\delta t} \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(-t). \quad (2.105)$$

Визначити миттєве значення напруги на ємності контуру $u_c(t)$, застосовуючи його імпульсну характеристику (табл. 2.3)

$$h_{u_c}(t) \approx \omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t), \quad (2.106)$$

за умови, що $\omega_{\text{рез}} \gg \delta$. Побудувати графік вихідної напруги та оцінити характер змінювання форми радіоімпульсу.

Розв'язання. Оскільки вхідна напруга (2.105) й імпульсна характеристика кола (2.106) є коливанням з однаковими частотами та обвідними, що повільно змінюються, застосуємо інтеграл накладання для комплексних обвідних, які для заданих $u_{\text{вх}}(t)$ та $h_{u_c}(t)$ запишемо, за визначенням, у вигляді:

$$\underline{U}_{m \text{ вх}}(t) = U_{m0} e^{\delta t} \cdot 1(-t); \quad (2.107)$$

$$\underline{H}_{mu_c}(t) \approx \omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} e^{-j\pi/2} \cdot 1(t). \quad (2.108)$$

Використовуючи вирази (2.107) і (2.108), складемо й обчислимо інтеграл накладання (2.96) для комплексних обвідних:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mC}(t) &\approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_{m \text{ вх}}(x) \underline{H}_{mu_c}(t-x) dx \approx \\ &\approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} U_{m0} e^{\delta x} \cdot 1(-x) \omega_{\text{рез}} e^{-[\delta(t-x) + j\pi/2]} \cdot 1(t-x) dx = \end{aligned}$$

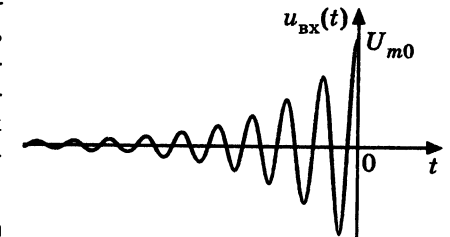


Рис. 2.50. Графік вхідної напруги до прикладу 2.17

$$\begin{aligned}
&= 0,5\omega_{\text{рез}}U_{m0}e^{-(\delta t + j\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\delta x} \cdot 1(-x) \cdot 1(t-x) dx = \\
&= \frac{0,5\omega_{\text{рез}}U_{m0}e^{-j\pi/2}}{2\delta} [e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t)] = \\
&= 0,5QU_{m0}[e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t)]e^{-j\pi/2} \quad (2.109)
\end{aligned}$$

За комплексною обвідною напруги на ємності (2.109) згідно з формулою (2.91) знайдемо миттєве значення цієї напруги:

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= \text{Re}(U_{mC}e^{j\omega_{\text{рез}}t}) \approx \text{Re}\left\{0,5QU_{m0}[e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t)]e^{j(\omega_{\text{рез}}t - \pi/2)}\right\} = \\
&= 0,5QU_{m0}[e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t)] \cos(\omega_{\text{рез}}t - \pi/2). \quad (2.110)
\end{aligned}$$

На підставі виразу (2.110) побудуємо графік $u_C(t)$ (рис. 2.51). Вигляд графіка та дзеркальність обвідних $u_{\text{вх}}(t)$ та $h_{u_C}(t)$ показують, що даний випадок наближається до оптимальної обробки вхідного радіоімпульсу.

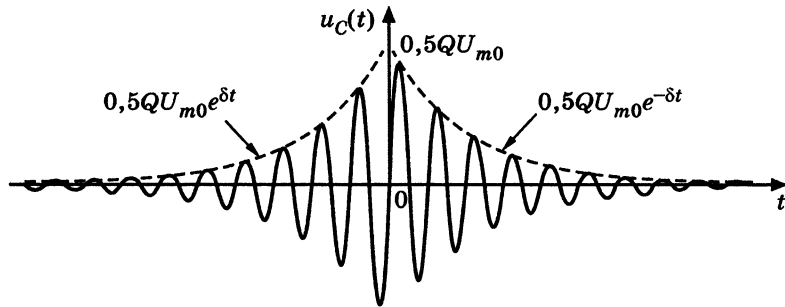


Рис. 2.51. Графік $u_C(t)$ до прикладу 2.17

Приклад 2.18. До входу послідовного коливального контуру з резонансною частотою $f_{\text{рез}} = 1$ МГц і добротністю $Q = 20$ прикладена напруга у вигляді прямокутного радіоімпульсу висотою $U_{m0} = 1$ В (рис. 2.52, а), частота заповнення якого змінюється за лінійним законом $f(t) = f_{\text{рез}} + \alpha t$ у діапазоні $2\Delta f_m = 0,5$ МГц (рис. 2.52, б). Визначити обвідні амплітуд напруги на ємності для трьох значень швидкості змінювання частоти: $\alpha_1 = 10^9$ Гц/с; $\alpha_2 = 5 \cdot 10^9$ Гц/с; $\alpha_3 = 25 \cdot 10^9$ Гц/с.

⁹ При виведенні формули (2.109) використано розв'язання у прикладі 2.16 щодо визначення меж інтегрування і способу запису результату єдиним виразом. Крім того, застосовані співвідношення для вторинних параметрів контуру:

$$\frac{\omega_{\text{рез}}}{2\delta} = \frac{\omega_{\text{рез}}L}{R} = Q.$$

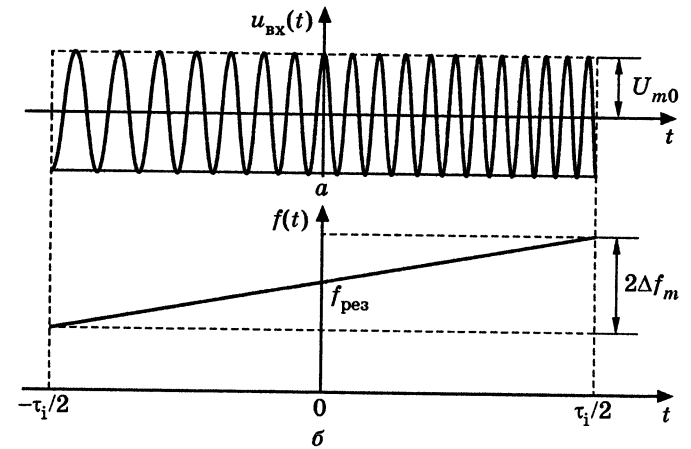


Рис. 2.52. Графік вхідної напруги до прикладу 2.18

Розв'язання. Використовуючи задані параметри вхідної напруги, запишемо в загальному вигляді її миттєве значення:

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{m0} \cos \psi(t) \left[1\left(t + \frac{\tau_i}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\tau_i}{2}\right) \right], \quad (2.111)$$

де $\psi(t) = \int 2\pi f(t) dt = 2\pi(f_{\text{рез}}t + \alpha t^2/2)$ — повна фаза у межах імпульсу; $\tau_i = 2\Delta f_m/\alpha$ — тривалість імпульсу.

На підставі виразу (2.111) запишемо комплексну обвідну $u_{\text{вх}}(t)$:

$$\underline{U}_{m \text{ вх}}(t) = U_{m0} \left[1\left(t + \frac{\tau_i}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\tau_i}{2}\right) \right] e^{j\pi \alpha t^2}. \quad (2.112)$$

Складемо інтеграл накладання для комплексних обвідних (2.96), використовуючи вираз (2.112) і співвідношення для комплексної обвідної імпульсної характеристики (2.108):

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{mC}(t) &\approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_{m \text{ вх}}(x) \underline{H}_{mu_C}(t-x) dx \approx \\
&\approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} U_{m0} \left[1\left(x + \frac{\tau_i}{2}\right) - 1\left(x - \frac{\tau_i}{2}\right) \right] e^{j\pi \alpha x^2} \omega_{\text{рез}} e^{-\delta(t-x)} e^{-j\pi/2} \cdot 1(t-x) dx, \quad (2.113)
\end{aligned}$$

де $\delta = \frac{R}{2L} = \frac{R\omega_{\text{рез}}}{2L\omega_{\text{рез}}} = \frac{\pi f_{\text{рез}}}{Q} = \frac{\pi \cdot 10^6}{20} = \pi \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ — коефіцієнт згасання даного контуру.

Враховуючи інтервали для змінної x , у яких одиничні функції під інтегралом у (2.113) не дорівнюють нулю, уточнюємо межі інтегрування

й отримуємо остаточні вирази для комплексних обвідних та обвідних амплітуд відгуку:

$$1) \text{ для } -\frac{\tau_i}{2} < t < \frac{\tau_i}{2}$$

$$\underline{U}_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-(\delta t + j\pi/2)} \int_{-\tau_i/2}^t e^{\delta x + j\pi \alpha x^2} dx;$$

$$U_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-\delta t} \left| \int_{-\tau_i/2}^t e^{\delta x + j\pi \alpha x^2} dx \right|; \quad (2.114)$$

$$2) \text{ для } t > \frac{\tau_i}{2};$$

$$\underline{U}_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-(\delta t + j\pi/2)} \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} e^{\delta x + j\pi \alpha x^2} dx;$$

$$U_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-\delta t} \left| \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} e^{\delta x + j\pi \alpha x^2} dx \right|. \quad (2.115)$$

Оскільки інтеграл, який входить у вирази (2.114) і (2.115), елементарно не береться, для його обчислення застосуємо метод чисельного інтегрування на ЕОМ, підставивши у (2.114) і (2.115) чисельні значення і звівши ці вирази до табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Кількісні співвідношення для розрахунку $U_{mC}(t)$ у прикладі 2.18

Значення α	$U_{mC}(t)$	
	$-\tau_i/2 < t < \tau_i/2$	$t > \tau_i/2$
$\alpha_1 = 10^9 \text{ Гц/с}$	$\pi \cdot 10^6 e^{-\pi \cdot 5 \cdot 10^4 t} \times \left \int_{-2,5 \cdot 10^{-4}}^t e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j \cdot 10^9 x^2)} dx \right $	$\pi \cdot 10^6 e^{-\pi \cdot 5 \cdot 10^4 t} \times \left \int_{-2,5 \cdot 10^{-4}}^{2,5 \cdot 10^{-4}} e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j \cdot 10^9 x^2)} dx \right $
$\alpha_2 = 5 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$	$\pi \cdot 10^6 e^{-\pi \cdot 5 \cdot 10^4 t} \times \left \int_{-5 \cdot 10^{-5}}^t e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j \cdot 5 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $	$\pi \cdot 10^6 e^{-\pi \cdot 5 \cdot 10^4 t} \times \left \int_{-5 \cdot 10^{-5}}^{5 \cdot 10^{-5}} e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j \cdot 5 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $
$\alpha_3 = 25 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$	$\pi \cdot 10^6 e^{-\pi \cdot 5 \cdot 10^4 t} \times \left \int_{-10^{-5}}^t e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j \cdot 25 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $	$\pi \cdot 10^6 e^{-\pi \cdot 5 \cdot 10^4 t} \times \left \int_{-10^{-5}}^{10^{-5}} e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j \cdot 25 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $

За формулами табл. 2.6 виконаємо розрахунки і побудуємо графіки (рис. 2.53), аналіз яких свідчить, що в межах $-\tau_i/2 < t < \tau_i/2$ обвідні амплітуд максимальні в центральній частині імпульсу ($t \approx 0$), де миттєве значення частоти дорівнює $f_{\text{рез}}$ (рис. 2.52). При порівняно повільному змінюванні частоти ($\alpha_1 = 10^9 \text{ Гц/с}$) графік $U_{mC}(t)$ приблизно повторює АЧХ

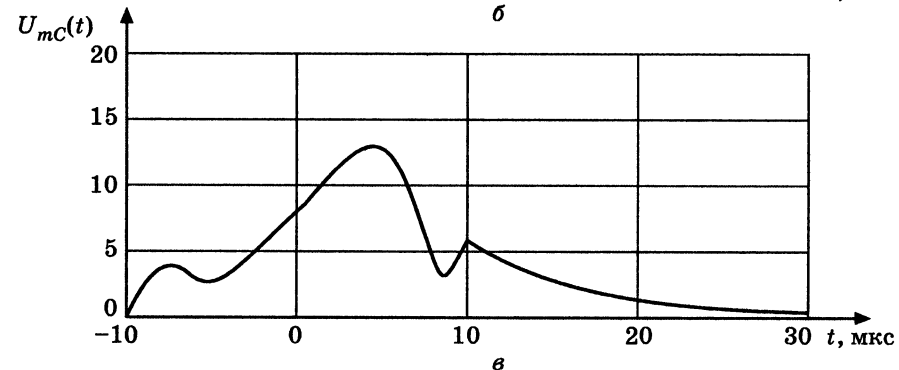
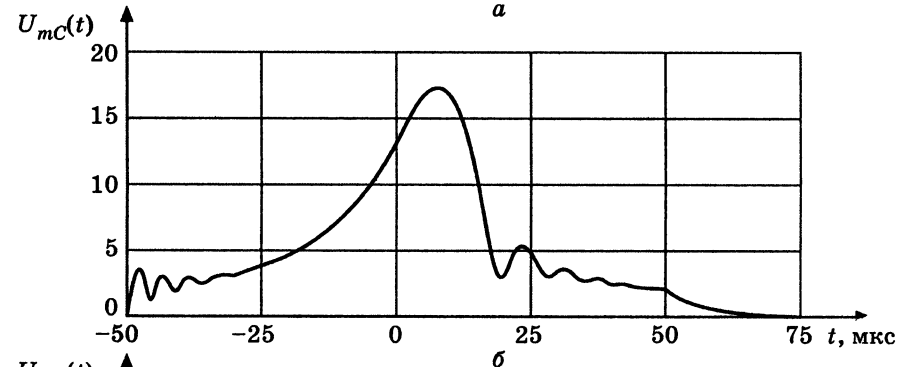
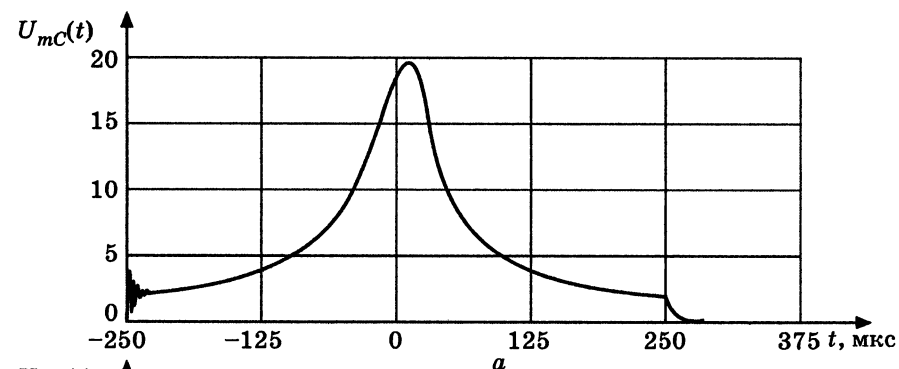


Рис. 2.53. Обвідні амплітуд відгуку у прикладі 2.18:
а — $\alpha_1 = 10^9 \text{ Гц/с}$; б — $\alpha_2 = 5 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$; в — $\alpha_3 = 25 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$

даного контуру не тільки за формою, але й кількісно — максимальне значення становить $Q \approx 20$.

За межами радіоімпульсу ($t > \tau_i/2$) при будь-якому значенні α відбувається вільний процес з обвідною, пропорційною експоненті $e^{-\delta t}$.

Перехідні процеси, подібні до розглянутих, використовують у приладах для автоматичного вимірювання АЧХ. Отримані на виході цих приладів характеристики називають *динамічними*. На відміну від динамічних, АЧХ, визначені теоретично, називають *статичними* АЧХ, оскільки вони знайдені в стаціонарному режимі.

Скористаємося розрахованими значеннями $U_{mC}(t)$ для побудови динамічних АЧХ. Для цього на графіках $U_{mC}(t)$ (рис. 2.53) замінимо змінну t на $\Delta f = f - f_{рез} = \alpha t$ і побудуємо графіки $H(\Delta f) \approx U_{mC}(\alpha t)$ (рис. 2.54, б, в, г), використовуючи інтервал $-\tau_i/2 < t < \tau_i/2$. Для порівняння там же зобразимо графік статичної АЧХ (рис. 2.54, а), застосувавши приблизний вираз для контуру високої добротності:

$$H(\Delta f) \approx \frac{Q}{\sqrt{1 + (2Q\Delta f/f_{рез})^2}}$$

З розгляду рис. 2.54 можна зробити такі висновки:

1) найбільше наближається до статичної динамічна АЧХ, отримана при мінімальному значенні α (рис. 2.54, б);

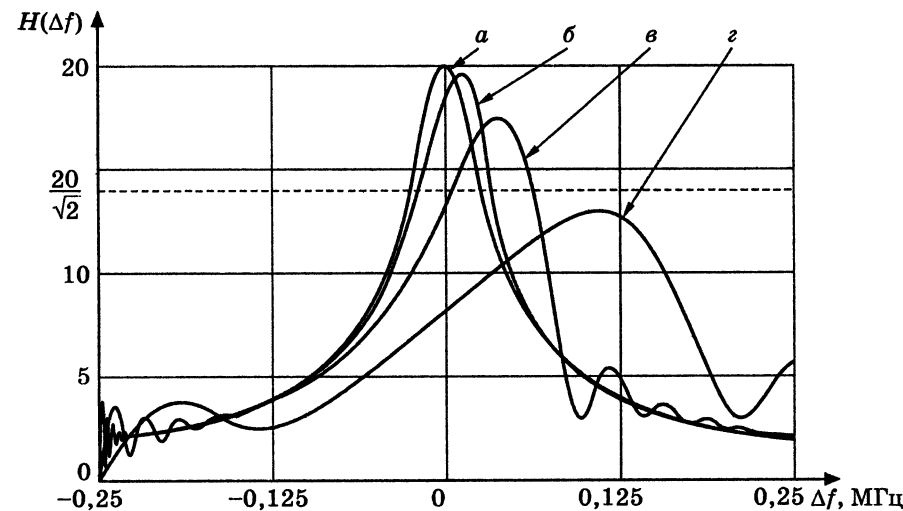


Рис. 2.54. АЧХ у прикладі 2.18: статична (а); динамічні (б — $\alpha_1 = 10^9$ Гц/с; в — $\alpha_2 = 5 \cdot 10^9$ Гц/с; г — $\alpha_3 = 25 \cdot 10^9$ Гц/с)

2) максимуми динамічних АЧХ зсунуті відносно частоти $f_{рез}$ в область вищих частот, а за величиною ці максимуми менше, ніж у статичних АЧХ;

3) унаслідок асиметрії динамічних АЧХ (спадна вітка крутіша висхідної) середина СП не збігається з частотою максимуму, а ширина СП більша, ніж у статичної АЧХ;

4) у динамічних АЧХ з порівняно великими значеннями α за межами СП спостерігаються биття коливань із власною частотою контуру і коливань з частотою вхідної напруги (рис. 2.54, в, г).

Щоб оцінити швидкість змінювання частоти, за якої динамічна АЧХ наближається до статичної, використовують безрозмірний параметр $p = \alpha / (2\Delta f_{\Pi})^2$, де $2\Delta f_{\Pi}$ — СП кола.

Чим менше параметр p порівняно з одиницею, тим ближче динамічна АЧХ до статичної. Розрахуємо цей параметр для заданих параметрів кола і значень α :

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{(2\Delta f_{\Pi})^2} = \frac{10^9}{(5 \cdot 10^4)^2} = 0,4; \quad p_2 = \frac{\alpha_2}{(2\Delta f_{\Pi})^2} = \frac{5 \cdot 10^9}{(5 \cdot 10^4)^2} = 2;$$

$$p_3 = \frac{\alpha_3}{(2\Delta f_{\Pi})^2} = \frac{25 \cdot 10^9}{(5 \cdot 10^4)^2} = 10,$$

де $2\Delta f_{\Pi} = \frac{f_{рез}}{Q} = \frac{10^6}{20} = 5 \cdot 10^4$ Гц — СП даного контуру.

Графіки динамічних АЧХ (рис. 2.54, б, в, г) і відповідні значення параметра p підтверджують справедливість зазначеного критерію для вибору швидкості змінювання частоти.

2.7. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. У чому полягає обмеженість застосування класичного методу для аналізу проходження сигналів у лінійних радіотехнічних колах?
2. На якому принципі ЛЕК ґрунтується часовий метод аналізу перехідних процесів?
3. У який спосіб визначається і які властивості має типова дія у вигляді одиничної функції?
4. Дати визначення перехідної характеристики кола $g(t)$ і пояснити її фізичне значення. Яку розмірність має $g(t)$? Як експериментально знайти перехідну характеристику?

5. Які співвідношення існують між $g(t)$ і $H(j\omega)$ для граничних значень t та ω ? Як пов'язані ці граничні значення з коефіцієнтами диференціального рівняння кола?

6. Знайти перехідну характеристику кола (рис. 2.55) для вказаних на схемі дії $u_{вх}$ і відгуку $u_{вих}$. Перевірити для даного кола граничні співвідношення (2.7) і (2.8) між $g(t)$ і $H(j\omega)$. Побудувати графік перехідної характеристики за умови $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$.

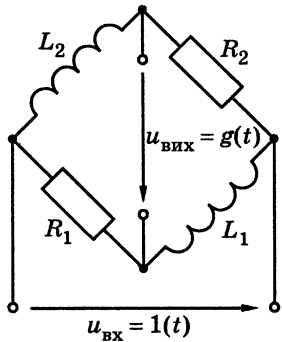


Рис. 2.55. Схема електричного кола

Відповідь: $g(t) = (1 - e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \cdot 1(t)$, де

$$\tau_1 = L_1/R_1; \tau_2 = L_2/R_2;$$

$$g(\infty) = H(j0) = 1; g(+0) = H(j\infty) = -1.$$

7. У який спосіб визначається і які властивості має типова дія у вигляді дельта-функції? Чи порушуються при цій дії закони комутації?

8. Дати визначення імпульсної характеристики кола $h(t)$. Які її розмірність і фізичне значення? Як експериментально визначити імпульсну характеристику?

9. Який аналітичний зв'язок існує між імпульсною і перехідною характеристиками кола? Коли імпульсна характеристика містить дельтоподібний доданок?

10. Визначити імпульсну характеристику кола (рис. 2.55), використовуючи її зв'язок з перехідною характеристикою.

Відповідь: $h(t) = \left(\frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \cdot 1(t) - \delta(t)$.

11. Яким співвідношенням для кіл $R, C; R, L$ першої групи між сталими часу і часовими параметрами дії відповідає неспотворена передача та інтегрування дії?

12. За яких співвідношень між сталими часу кіл $R, C; R, L$ другої групи і часовими параметрами дії спостерігається неспотворене відтворення і диференціювання дії?

13. Як пов'язані стала часу і гранична частота смуги пропускання типових кіл $R, C; R, L$?

14. Перевірити для імпульсних характеристик високооборотних коливальних контурів виконання співвідношення $2\Delta\omega_{\Pi}\tau = 2$, де $\tau = 1/\delta$ — стала часу.

15. Знайти відгук кола з імпульсною характеристикою, наведеною у прикладі 2.9, на дію прямокутних відеоімпульсів $s_{вх\Pi}(t)$ висотою A і тривалостями $0,5\tau_i; 2\tau_i$. Побудувати графіки $s_{вх\Pi}(t)$.

Відповідь: 1) $s_{вх\Pi}(t) = \begin{cases} Ah_0 t & \text{при } 0 < t \leq 0,5\tau_i; \\ 0,5Ah_0\tau_i & \text{при } 0,5\tau_i < t \leq \tau_i; \\ Ah_0(1,5\tau_i - t) & \text{при } \tau_i < t \leq 1,5\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 1,5\tau_i; \end{cases}$

2) $s_{вх\Pi}(t) = \begin{cases} Ah_0 t & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ Ah_0\tau_i & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ Ah_0(3\tau_i - t) & \text{при } 2\tau_i < t \leq 3\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 3\tau_i. \end{cases}$

16. Визначити напругу на виході кола (рис. 2.55) при вхідній дії у вигляді прямокутного імпульсу $u_{вх\Pi}(t)$ з параметрами: висота — U_0 ; тривалість — τ_i . Побудувати графік $u_{вих}(t)$ за умов $\tau_i = t_0 \approx 0,7\tau$; $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$.

Відповідь:

$$u_{вих}(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \cdot 1(t) - U_0(1 - e^{-(t-\tau_i)/\tau_1} - e^{-(t-\tau_i)/\tau_2}) \cdot 1(t - \tau_i).$$

17. Чи можна застосувати інтеграл накладання для аналізу перехідних процесів за ненульових початкових умов у колі?

18. Пояснити термін «зортка» стосовно інтегралів накладання з використанням імпульсної характеристики кола.

19. Розв'язати приклад 2.9, застосовуючи інтеграл накладання з використанням імпульсної характеристики кола.

20. Знайти відгук кола $s_{вих}(t)$ на дію $s_{вх}(t)$, якщо дія $s_{вх}(t)$ та імпульсна характеристика кола $h(t)$ дзеркальні одна відносно одної (рис. 2.56). Побудувати графік $s_{вих}(t)$.

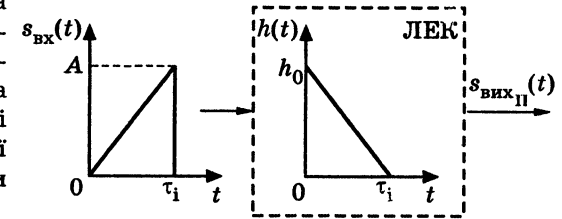


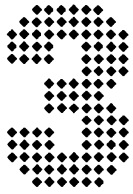
Рис. 2.56. До завдання 20

Відповідь:

$$s_{вих}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ Ah_0 \left(\frac{t^2}{2\tau_i} - \frac{t^3}{6\tau_i^2} \right) & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ Ah_0 \left(\frac{2\tau_i}{3} - \frac{t^2}{2\tau_i} + \frac{t^3}{6\tau_i^2} \right) & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 2\tau_i. \end{cases}$$

21. За яких умов можна застосовувати інтеграл накладання для комплексних обвідних дії та імпульсної характеристики кола?

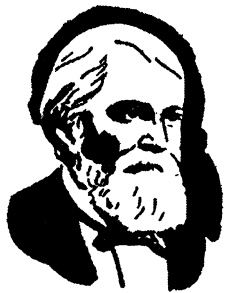
22. Розв'язати приклад 2.18 за умови, коли частота вхідного радіоімпульсу зменшується за лінійним законом $f(t) = f_{рез} - at$.



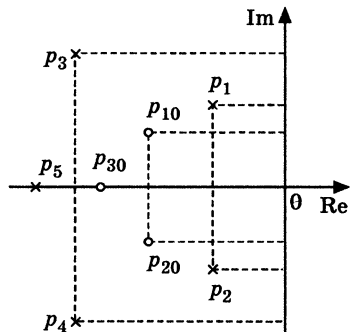
ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КІЛ У НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

- Пряме перетворення Лапласа. Оригінали і зображення
- Зображення деяких дій
- Співвідношення між зображеннями струмів і напруг в елементах кола
- Операторна форма закону Ома і законів Кірхгофа за нульових початкових умов
- Визначення оригіналу відгуку
- Урахування ненульових початкових умов
- Операторна передатна функція кола, її властивості. Нулі та полюси операторної передатної функції
- Операторна вхідна функція кола, її властивості
- Зв'язок операторної передатної функції з комплексною передатною функцією. Амплітудно-квадратична характеристика кола, її властивості
- Мініміально- та немініміально-фазові кола
- Операторна передатна функція неспотворювального кола
- Зв'язок операторної передатної функції з часовими характеристиками

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp$$



М. С. Ващенко-Захарченко



П'єр Лаплас

Класичний метод дослідження кіл у нестационарному режимі є ефективним за наявності в колі не більше двох незалежних накопичувачів енергії та за умови, що коло живиться в усталеному режимі від джерела постійної чи синусоїдної напруги (струму). При цьому вільна і вимушена складові мають певне фізичне значення, а їхні параметри можна дослідити безпосередньо за схемою кола. Збільшення порядку кола суттєво ускладнює обчислення сталих інтегрування, які визначають вільні коливання. Крім того, при дії джерела коливань довільної форми визначення вимушеної складової стає громіздкою задачею. За цих умов ефективнішим є розв'язання диференціального рівняння кола за допомогою *операційного числення*. Одним із перших вітчизняних учених, хто застосував операційне числення для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь, був М. С. Ващенко-Захарченко¹.

Метод аналізу кіл у нестационарному режимі з використанням операційного числення має назву *операторного методу*.

Операторний метод не потребує визначення сталих інтегрування і початкових значень відгуку, а дозволяє, розв'язуючи алгебраїчні рівняння, складені на підставі закону Ома та законів Кірхгофа, отримати функцію, однозначно пов'язану з відгуком.

3.1. Пряме перетворення Лапласа. Оригінали і зображення

Операторний метод ґрунтується на перетворенні функції $f(t)$ дійсної змінної t (миттєвого значення струму чи напруги) у функцію $F(p)$ комплексної змінної p (оператор $p = \sigma + j\omega$ має назву комплексної частоти) за допомогою прямого перетворення Лапласа²:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (3.1)$$

¹ Ващенко-Захарченко Михайло Єгорович (1825–1912) — український математик. Народився в Полтавській області, навчався в Київському університеті, потім у Парижі. Монографія «Символічне числення та його застосування до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь» (1862) була однією з перших робіт з операційного числення. Надрукував низку посібників з математики (елементарна геометрія, короткий курс теорії визначників, аналітична геометрія й алгебраїчний аналіз).

² Лаплас П'єр Сімон, Laplace (1749–1827) — французький математик, фізик і астроном, член Паризької, Петербурзької та інших АН. Автор багатьох фундаментальних робіт з математики, експериментальної і математичної фізики та небесної механіки. Розвинув теорію диференціальних рівнянь, теорію ймовірностей, теорію помилок. Займався питаннями теплопровідності, електродинаміки. Запропонував новий метод обчислення орбіт небесних тіл, розробив теорію руху супутників Юпітера, визначив величину стиснення Землі біля полюсів тощо.

Функція дійсної змінної $f(t)$ називається *оригіналом*, а відповідна їй функція комплексної змінної $F(p)$ — зображенням за Лапласом або просто *зображенням*. До простору оригіналів належать такі функції:

1) які мають нульове значення при від'ємних значеннях аргументу: $f(t) = 0, t < 0$ (з огляду на це, нижня межа інтеграла (3.1) дорівнює нулю, а перетворення (3.1) має назву *однобічного*);

2) що мають обмежене зростання: $|f(t)| < Me^{\sigma t}$, де M, σ — дійсні додатні величини;

3) котрі належать до кусково-неперервних функцій, що зі своїми похідними досить високого порядку є неперервними при всіх значеннях $t > 0$, крім скінченної кількості точок розриву першого роду.

Слід зазначити, що всі дії, які генеруються реальними джерелами, — це функції, що задовольняють наведеним вимогам, тобто належать до простору оригіналів. Відповідність зображення оригіналу позначається: $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ і є однозначною. Функції $F(p)$ утворюють простір зображень і мають низку властивостей, що полегшують зворотний перехід до оригіналу.

3.2. Зображення деяких дій

Нижче розглянуті деякі дії, які описуються простими функціями і часто зустрічаються на практиці. Як і раніше (див. розділи 1 і 2), вважається, що комутація (перехід кола в нестационарний режим) відбувається в момент часу $t = 0$.

Увімкнення до кола джерела постійної напруги чи струму можна описати функцією

$$f(t) = A \cdot \mathbf{1}(t),$$

де A — константа, яка залежно від типу джерела вимірюється у вольтах чи амперах; $\mathbf{1}(t), t \geq 0$ — функція Хевісайда.

Зображення функції $\mathbf{1}(t)$ визначають за формулою (3.1):

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_0^{\infty} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p};$$

отже

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{p}, \quad (3.2)$$

тоді

$$\mathcal{L}[A \cdot \mathbf{1}(t)] = \frac{A}{p}. \quad (3.3)$$

Якщо дією є експоненційний імпульс (рис. 3.1), оригінал, що йому відповідає, записується як $f(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t)$, де $A = f(0)$; коефіцієнт α (одиниця вимірювання s^{-1}) визначає швидкість спаду імпульсу.

Перетворення Лапласа від цієї функції визначається за формулою

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-pt} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} dt = \\ &= \frac{Ae^{-(p+\alpha)t}}{p+\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p+\alpha}, \end{aligned}$$

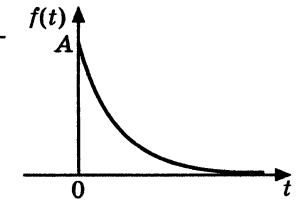


Рис. 3.1.
Експоненційний імпульс

на підставі якої можна записати:

$$\mathcal{L}[Ae^{\pm \alpha t}] = \frac{A}{p \mp \alpha}. \quad (3.4)$$

Ідеалізацією прямокутного імпульсу з тривалістю τ , висотою $1/\tau$ й одиничною площею, як показано вище (див. підрозділ 2.2), є дельта-функція $\delta(t)$ — одиничний імпульс, зображення якого визначається виразом:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt.$$

Добуток двох функцій $\delta(t)$ та e^{-pt} відрізнятиметься від нуля тільки при $t = 0$, оскільки $\delta(t) \neq 0$, якщо $t = 0$. Другий множник у цей момент часу становить $e^{-pt} \Big|_{t=0} = 1$. Тоді $\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$, бо інтеграл від дельта-функції — це площа, обмежена $\delta(t)$ і віссю t , отже

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (3.5)$$

Співвідношення для деяких складніших функцій, що належать до простору оригіналів, наведені в табл. 3.1.

Переходячи від оригіналів до зображень, доцільно використувати властивості прямого перетворення Лапласа. Більшість з цих властивостей формулюється у вигляді теорем, наведених у табл. 3.2.

Таблиця 3.1

Відповідності зображень і оригіналів

№	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{p}$	$1(t)$
3	$\frac{1}{p^2}$	t
4	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ($n=1, 2, \dots$)
5	$\frac{A}{p \pm \alpha}$	$Ae^{\mp at}$
6	$\frac{A}{p(p + \alpha)}$	$\frac{A}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$
7	$\frac{A}{(p + \alpha)^2}$	$Ate^{-\alpha t}$
8	$\frac{p + \alpha}{p + \beta}$	$\delta(t) + (\alpha - \beta)e^{-\beta t}$
9	$\frac{A}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{A}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$
10	$\frac{Ap}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{A}{\alpha - \beta}(ae^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t})$
11	$A \frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$	$A \cos(\omega t + \psi)$
12	$A \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$	$A \sin(\omega t + \psi)$
13	$\frac{A(p + \delta) \cos \psi - A\omega \sin \psi}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$	$Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi)$
14	$\frac{A(p + \delta) \sin \psi + A\omega \cos \psi}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$	$Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)$
15	$\frac{A}{p[(p + \delta)^2 + \omega^2]}$	$\frac{A}{\delta^2 + \omega^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\delta t} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\delta}{\omega}\right) \right]$

Таблиця 3.2

Властивості перетворення Лапласа

№	Теорема	Математичне формулювання
1	Лінійності	$\mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^n A_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n A_k \mathcal{L}\{f_k(t)\}$
2	Диференціювання	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(+0);$ $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(+0)$
3	Інтегрування	$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty f(t) dt\right] = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{p}$
4	Запізнення	$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} e^{-pt_0}$
5	Згортки	$\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$
6	Граничні співвідношення, якщо існує $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} p\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow +0} f(t);$ $\lim_{p \rightarrow +0} p\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

3.3. Співвідношення між зображеннями струмів і напруг в елементах кола

Опір. Нехай струм $i_R(t)$, який протікає в опорі, описується функцією, що належить до простору оригіналів, тобто $\mathcal{L}\{i_R(t)\} = I_R(p)$, тоді

$$I_R(p) = \int_0^\infty i_R(t) e^{-pt} dt. \quad (3.6)$$

Позначивши зображення напруги $U_R(p)$, на підставі закону Ома можна записати:

$$U_R(p) = \int_0^\infty Ri_R(t) e^{-pt} dt = R \int_0^\infty i_R(t) e^{-pt} dt = RI_R(p);$$

$$U_R(p) = RI_R(p). \quad (3.7)$$

Рівняння (3.7) є операторною формою закону Ома. Отже, зображення напруги дорівнює добутку зображення струму й операторного опору, який збігається зі звичайним опором R .

Індуктивність. Якщо напруга і струм в індуктивності — функції часу, які належать до простору оригіналів, їх зображення становитимуть відповідно

$$\mathcal{L}[u_L(t)] = U_L(p); \mathcal{L}[i_L(t)] = I_L(p).$$

Миттєве значення струму в індуктивності визначається через миттєве значення напруги $u_L(t)$:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt.$$

Якщо поділити інтервал інтегрування на два півінтервали: до і після комутації, останній вираз матиме вигляд:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+0} u_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_{+0}^t u_L(t) dt.$$

Щоб знайти струм в індуктивності для $t \geq 0$ (після комутації), слід врахувати перший доданок (частину струму), пропорційний (з коефіцієнтом $1/L$) площі, яка обмежена функцією $u_L(t)$ і віссю часу на півінтервалі $(-\infty, +0]$. Ця постійна величина є струмом в індуктивності у момент комутації і позначається $i_L(+0)$. Тоді

$$i_L(t) = i_L(+0) + \frac{1}{L} \int_{+0}^t u_L(t) dt. \quad (3.8)$$

Струм $i_L(+0)$ можна вважати струмом постійного джерела струму, який у момент комутації умовно приєднується до індуктивності. Дію цього джерела враховують функцією $i_L(+0) \cdot 1(t)$, зображення якої визначають за формулою (3.3)

$$\mathcal{L}[i_L(+0) \cdot 1(t)] = \frac{i_L(+0)}{p}. \quad (3.9)$$

Другий доданок у виразі (3.8), тобто зображення тієї частини струму в індуктивності, що змінюється в часі для $t \geq 0$, можна знайти за теоремою інтегрування (табл. 3.2):

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt\right] = \frac{1}{pL} U_L(p). \quad (3.10)$$

З урахуванням співвідношень (3.9) і (3.10) рівність (3.8), перетворена за Лапласом, має вигляд

$$I_L(p) = \frac{i_L(+0)}{p} + \frac{1}{pL} U_L(p). \quad (3.11)$$

За нульових початкових умов ($i_L(-0) = 0$) на підставі першого закону комутації $i_L(-0) = i_L(+0) = 0$ рівняння (3.11) набуває вигляду

$$I_L(p) = \frac{U_L(p)}{pL}. \quad (3.12)$$

Комплексну величину

$$Z_L(p) = pL \quad (3.13)$$

називають *операторним опором індуктивності*.

Рівняння (3.12) є операторною формою закону Ома для індуктивності за нульових початкових умов.

Ємність. Припустимо, що струм $i_C(t)$ у ємності має зображення $\mathcal{L}[i_C(t)] = I_C(p)$, а напруга $u_C(t)$ — зображення $\mathcal{L}[u_C(t)] = U_C(p)$. Миттєве значення напруги на ємності становить

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt.$$

Якщо поділити інтервал інтегрування на два півінтервали: $(-\infty, +0]$ та $(+0, t]$, тоді

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+0} i_C(t) dt + \frac{1}{C} \int_{+0}^t i_C(t) dt.$$

Тобто напруга на ємності для $t \geq +0$ складається з двох доданків, перший з яких враховує напругу в момент комутації і дорівнює постійній величині $u_C(+0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+0} i_C(t) dt$, яка пропорційна площі, обмеженій кривою струму $i_C(t)$ та віссю t на півінтервалі $(-\infty, +0]$.

Тоді попереднє рівняння записується у вигляді:

$$u_C(t) = u_C(+0) + \frac{1}{C} \int_{+0}^t i_C(t) dt. \quad (3.14)$$

Напругу $u_C(+0)$ можна також вважати напругою на затискачах ідеального джерела напруги, яке умовно приєднується послідовно

з ємністю в момент комутації. Дію цієї напруги на коло для $t \geq 0$ враховують функцією $u_C(+0) \cdot 1(t)$, зображення якої за формулою (3.3) становить

$$\mathcal{L}[u_C(+0) \cdot 1(t)] = \frac{u_C(+0)}{p}$$

Другий доданок у виразі (3.14) відповідає змінній напрузі на ємності для $t \geq 0$. Ця напруга обумовлена струмом $i_C(t)$, який належить до простору оригіналів. Згідно з табл. 3.2 визначають зображення цього доданка:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt\right] = \frac{I_C(p)}{pC}$$

Остаточно перетворення за Лапласом виразу (3.14) матиме вигляд

$$U_C(p) = \frac{u_C(+0)}{p} + \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (3.15)$$

Якщо початкові умови нульові: $u_C(-0) = 0$, з урахуванням другого закону комутації $u_C(+0) = u_C(-0) = 0$ рівняння (3.15) буде таким:

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (3.16)$$

Коефіцієнт при зображенні струму у формулі (3.16) називають *операторним опором ємності* та позначають

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC}. \quad (3.17)$$

Вираз (3.16) є операторною формою закону Ома для ємності за нульових початкових умов. Слід зазначити, що операторні опори можна перетворити в комплексні опори формальною заміною оператора p на $j\omega$. Функція комплексної змінної p , обернена операторному опору, є *операторною провідністю*. Відповідні формули операторних опорів і провідностей елементів кола наведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Операторні опори і провідності

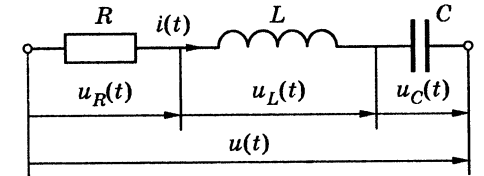
Елемент кола	Операторний опір	Операторна провідність
R	R	$G = 1/R$
L	$Z_L(p) = pL$	$Y_L(p) = 1/pL$
C	$Z_C(p) = 1/pC$	$Y_C(p) = pC$

3.4. Операторна форма закону Ома і законів Кірхгофа за нульових початкових умов

На рис. 3.2 зображене коло, утворене *послідовним з'єднанням* елементів R, L, C , до якого прикладена напруга $u(t)$. Функція $u(t)$ належить до простору оригіналів.

Для цієї схеми рівняння за другим законом Кірхгофа при $t \geq 0$ має вигляд

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t).$$



У просторі зображень це рівняння згідно з теоремою лінійності (див. табл. 3.2, п. 1) набуває вигляду

$$U(p) = U_R(p) + U_L(p) + U_C(p). \quad (3.18)$$

Вираз (3.18) є *другим законом Кірхгофа в операторній формі*. Якщо врахувати співвідношення (3.7), (3.12) і (3.16), за нульових початкових умов:

$$\begin{cases} i_L(-0) = 0; \\ u_C(-0) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

рівняння (3.18) матиме такий вигляд (оскільки на підставі законів комутації $i_L(+0) = 0, u_C(+0) = 0$):

$$U(p) = RI_R(p) + pLI_L(p) + \frac{1}{pC} I_C(p).$$

Зважаючи на те, що струм при послідовному з'єднанні однаковий для всіх елементів, можна записати:

$$U(p) = RI(p) + pLI(p) + \frac{1}{pC} I(p)$$

або

$$U(p) = I(p) \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right). \quad (3.20)$$

Опір, який дорівнює сумі операторних опорів послідовно з'єднаних елементів, є *операторним опором кола* (рис. 3.2):

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}. \quad (3.21)$$

Тоді вираз (3.20) матиме вигляд:

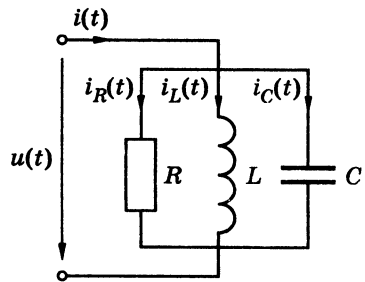
$$U(p) = I(p)Z(p),$$

або

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (3.22)$$

Формула (3.22) є найзагальнішим записом закону Ома в операторній формі. Її можна використовувати для складного кола при складній дії за нульових початкових умов.

Для паралельного з'єднання елементів R, L, C (рис. 3.3) за першим законом Кірхгофа можна записати:



$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t). \quad (3.23)$$

Якщо загальний струм $i(t)$ є складною функцією, яка належить до простору оригіналів, враховуючи співвідношення (табл. 3.2, п. 1), пряме перетворення за Лапласом рівняння (3.23) матиме вигляд

$$I(p) = I_R(p) + I_L(p) + I_C(p). \quad (3.24)$$

Рис. 3.3. Схема паралельного з'єднання елементів R, L, C

Вираз (3.24) є першим законом Кірхгофа в операторній формі. Оскільки з'єднання паралельне, напруга на всіх елементах кола однакова і становить: $u(t), \mathcal{L}[u(t)] = U(p)$.

Виходячи із співвідношень (3.7), (3.12), (3.16), з огляду на нульові початкові умови (3.19), можна записати:

$$I(p) = \frac{U(p)}{R} + \frac{U(p)}{pL} + \frac{U(p)}{1/pC},$$

або

$$I(p) = U(p) \left(G + \frac{1}{pL} + pC \right). \quad (3.25)$$

У формулі (3.25) вираз у дужках — це сума операторних провідностей елементів кола (див. табл. 3.3), яка утворює операторну провідність кола $Y(p)$:

$$Y(p) = G + \frac{1}{pL} + pC. \quad (3.26)$$

З огляду на співвідношення (3.26), рівняння (3.25) матиме вигляд:

$$I(p) = U(p)Y(p). \quad (3.27)$$

Рівняння (3.22), (3.27) є законом Ома в операторній формі відносно затискачів двополюсника. Залежно від типу джерела, що вмикається до двополюсника, відгук в операторній формі визначають через операторні опір або провідність, які встановлюють залежність між зображеннями напруги та струму. Операторні опір і провідність двополюсника є оберненими функціями:

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)}. \quad (3.28)$$

Отже, при складних діях, тобто в нестационарному режимі, коло можна описати рівняннями, складеними за законами Ома і Кірхгофа в операторній формі, які аналогічні відповідним законам у комплексній формі для усталеного режиму при синусоїдній дії. Тому всі методи розрахунку кіл для комплексних амплітуд (або комплексних діючих значень) — метод еквівалентних перетворень, накладання, еквівалентного джерела, контурних струмів, вузлових напруг тощо — справедливі для зображень струмів і напруг. Елементи кола при цьому визначаються операторними опором або операторними провідностями. Єдине обмеження при застосуванні перелічених методів — наявність нульових початкових умов.

Приклад 3.1. Знайти зображення струму в колі (рис. 3.4, а), якщо діє напруга $u(t)$, причому $\mathcal{L}[u(t)] = U(p)$.

Розв'язання. Зображення струму визначимо за законом Ома в операторній формі (3.22):

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

де $Z(p) = R_2 + 1/Y_1(p)$ — вхідний опір пасивного двополюсника; $Y_1(p) = 1/R_1 + pC = (1 + pR_1C)/R_1$ — операторна провідність паралельно з'єднаних опор R_1 і ємності C .

Після підстановки отримаємо:

$$Z(p) = R_2 + \frac{R_1}{1 + pR_1C},$$

або

$$Z(p) = \frac{R_1 + R_2 + pR_1R_2C}{1 + pR_1C}. \quad (3.29)$$

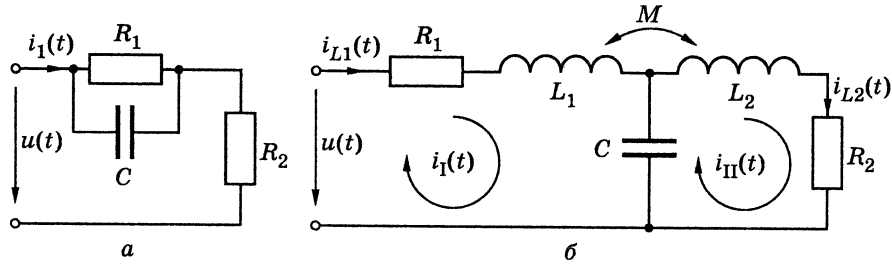


Рис. 3.4. Схеми кіл у прикладах: а — 3.1; б — 3.2

Шукане зображення струму становитиме:

$$I(p) = \frac{U(p)(1 + pR_1C)}{R_1 + R_2 + pR_1R_2C} = \frac{U(p)(p + 1/CR_1)}{R_2(p + 1/\tau)}, \quad (3.30)$$

де $\tau = CR_1R_2/(R_1 + R_2)$ — стала часу, яка визначається при замкнених вхідних затискачах двополюсника.

Приклад 3.2. Вважаючи відомим зображення напруги, що діє на затискачах двополюсника (рис. 3.4, б), визначити зображення $I_{L1}(p)$ струму $i_{L1}(t)$ у котушці L_1 , яка індуктивно зв'язана з котушкою L_2 . Взаємна індуктивність M ; початкові умови нульові: $i_{L1}(-0) = 0$, $i_{L2}(-0) = 0$.

Розв'язання. Операторний опір індуктивності pL отримуємо з комплексного опору $j\omega L$ заміною $j\omega$ на p . Аналогічно знаходимо операторний опір взаємної індуктивності $Z_M(p) = pM$ ($Z_M(j\omega) = j\omega M$). Після комутації (ввімкнення дії) в колі виникають струми, які визначимо методом контурних струмів.

Вважаючи, що існують відповідності: $\mathcal{L}[i_1(t)] = I_1(p)$, $\mathcal{L}[i_2(t)] = I_2(p)$, складемо рівняння за другим законом Кірхгофа відносно зображень контурних струмів:

$$\begin{cases} I_1(p) \left(R_1 + pL_1 + \frac{1}{pC} \right) - I_2(p) \left(\frac{1}{pC} \mp pM \right) = U(p), \\ -I_1(p) \left(\frac{1}{pC} \mp pM \right) + I_2(p) \left(R_2 + pL_2 + \frac{1}{pC} \right) = 0. \end{cases}$$

Знак « \mp » операторного опору взаємної індуктивності відповідає узгодженому ввімкненню індуктивно зв'язаних котушок L_1 і L_2 (при цьому напруги само- і взаємоіндукції мають однакові знаки), знак « \mp » відповідає зустрічному ввімкненню. Матрична форма розглянутих рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} R_1 + pL_1 + \frac{1}{pC} & -\frac{1}{pC} \pm pM \\ -\frac{1}{pC} \pm pM & R_2 + pL_2 + \frac{1}{pC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(p) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Розв'язуючи систему (3.31) відносно зображення першого контурного струму, яке збігається із зображенням струму індуктивності $I_{L1}(p)$, отримуємо:

$$I_1(p) = \frac{U(p)(R_2 + pL_2 + 1/pC)}{p^2(L_1L_2 - M^2) + p(L_1R_2 + L_2R_1) + (L_1 + L_2 \pm 2M)/C + R_1R_2 + (R_1 + R_2)/pC},$$

або

$$I_1(p) = \frac{U(p)(p^2L_2C + pCR_2 + 1)}{p^3C(L_1L_2 - M^2) + p^2C(L_1R_2 + L_2R_1) + p(L_e + CR_1R_2) + R_1 + R_2}, \quad (3.32)$$

де $L_e = L_1 + L_2 \pm 2M$ — еквівалентна індуктивність, причому для реальних кіл завжди виконуються нерівності: $L_1L_2 - M^2 > 0$ і $L_1 + L_2 - 2M > 0$.

Отже, в розглянутих прикладах рівняння відносно зображень струмів, напруг, ЕРС складаються за законами Ома і Кірхгофа в операторній формі безпосередньо за схемою кола. Ці рівняння — алгебраїчні, на відміну від рівнянь для оригіналів, які є інтегродиференціальними. Розв'язок алгебраїчних рівнянь відносно шуканого зображення відгуку — нескладна алгебраїчна задача.

Так, у прикладах 3.1 і 3.2 зображення шуканих струмів (3.30), (3.32) становлять добуток зображення дії $\mathcal{L}[f_1(t)] = U(p)$ і дробово-раціональної функції (ДРФ) комплексної змінної p , яка визначає передатні властивості кола. Тобто зображення відгуку $\mathcal{L}[f_2(t)]$ утворює функцію комплексної змінної $F_2(p)$, яка також є дробово-раціональною:

$$F_2(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

де $P(p)$ і $Q(p)$ — поліноми комплексної змінної p , коефіцієнти яких — дійсні числа, що залежать від параметрів елементів кола, способу з'єднання елементів, а також від зображення дії.

Тобто $F_2(p)$ є функцією, складнішою за $F_1(p)$, що перетворює перехід до оригіналу відгуку в найскладніший етап аналізу кола у нестационарному режимі операторним методом. Існує декілька способів визначення оригіналу відгуку.

3.5. Визначення оригіналу відгуку

Оригінал відгуку можна знайти трьома способами.

Перший спосіб. Необхідно перетворити отримане зображення $F_2(p)$ до вигляду однієї з функцій $F(p)$, які попередньо розраховані та наведені в довідкових таблицях, що містять деякі відповідності зображень і оригіналів (див. наприклад, табл. 3.1, де зображення

записане в лівому стовпчику, а шуканий оригінал — у тому ж рядку праворуч).

Другий спосіб. Якщо $F_2(p)$ — правильний дріб (варіант неправильного дробу розглядатиметься нижче), його слід розкласти на прості дроби (цей прийом застосовують у математиці при інтегруванні) і, виходячи з властивості лінійності перетворення Лапласа, для кожного простого дробу знайти відповідні оригінали, сума яких і утворить відгук $f_2(t)$.

Щоб розкласти $F_2(p)$ на прості дроби, слід визначити корені полінома $Q(p)$, тобто розв'язати рівняння

$$Q(p) = 0. \quad (3.33)$$

Це дозволяє подати поліном n -го порядку $Q(p)$ у вигляді

$$Q(p) = b_n(p-p_1)(p-p_2) \cdots (p-p_n),$$

де b_n — коефіцієнт при p у найвищому степені.

Якщо поліном $Q(p)$ має прості корені, вони обов'язково будуть дійсними від'ємними числами (у цьому можна переконатися, розв'язуючи рівняння (3.30), (3.32), нижче це буде обгрунтовано). Тоді зображення відгуку матиме вигляд

$$F_2(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}, \quad (3.34)$$

де A_1, A_2, \dots, A_n — константи, які визначають за методом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях чисельників лівої і правої частин виразу (3.34) або за формулою:

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{P(p)}{Q(p)}(p-p_k). \quad (3.35)$$

Кожному дробу у виразі (3.34) відповідає оригінал $A_k e^{-\alpha_k t}$ (табл. 3.1, п. 5), причому знак « \rightarrow » у показнику степеня обумовлений від'ємними значеннями коренів p_k .

За наявності кратних дійсних коренів p_k функція $F_2(p)$ містить прості дроби:

$$\frac{A_v}{(p-p_k)^v} + \frac{A_{v-1}}{(p-p_k)^{v-1}} + \dots + \frac{A_1}{p-p_k}, \quad (3.36)$$

де v — кратність кореня p_k .

Якщо поліном $Q(p)$ має комплексно-спряжені прості корені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$, кожній парі таких коренів відповідає простий дріб

$$\frac{Bp+D}{p^2+b_1p+b_0}. \quad (3.37)$$

Слід зауважити, що коефіцієнти b_1, b_0 — дійсні й додатні, а коефіцієнти полінома $Q(p)$ — дійсні. Це можливо за умови $\text{Re } p < 0$. Знаменник дробу (3.37) можна записати як $(p+\delta-j\omega)(p+\delta+j\omega) = p^2 + 2\delta p + \delta^2 + \omega^2$, тобто $b_1 = 2\delta, b_0 = \delta^2 + \omega^2$. Тоді можна скористатися відповідністю (табл. 3.1, п.13):

$$\mathcal{L}[Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi)] = \frac{Ap \cos \psi + A(\delta \cos \psi - \omega \sin \psi)}{(p+\delta)^2 + \omega^2}.$$

Щоб визначити коефіцієнти A і ψ , слід розв'язати систему:

$$\begin{cases} A \cos \psi = B; \\ A(\delta \cos \psi - \omega \sin \psi) = D. \end{cases}$$

Якщо поліном $Q(p)$ має комплексно-спряжені корені $p_k = -\delta_k \pm j\omega_k$, кратність яких v , тоді зображення $F_2(p)$ містить прості дроби:

$$\frac{B_v p + D_v}{(p^2 + b_1 p + b_0)^v} + \frac{B_{v-1} p + D_{v-1}}{(p^2 + b_1 p + b_0)^{v-1}} + \dots + \frac{B_1 p + D_1}{p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (3.38)$$

Як правило, кратність коренів не перевищує двох.

Якщо дріб $F_2(p)$ — неправильний, необхідно виділити цілу частину, тобто подати його як суму многочлена і правильного дробу. Так, якщо функція $F_2(p) = (p+a)/(p+b)$, діленням чисельника на знаменник знаходять зображення

$$F_2(p) = 1 - \frac{b-a}{p+b}, \quad (3.39)$$

якому відповідає оригінал $f_2(t) = \delta(t) - (b-a)e^{-bt}$.

Третій спосіб. Перехід від зображення $F_2(p)$ до оригіналу можна виконати за оберненим перетворенням Лапласа, яке для відповідності $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ має вигляд:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (3.40)$$

У теорії функцій комплексної змінної формула (3.40) має назву формули обернення Рімана³ — Мелліна⁴. Обернене перетворення Лапласа визначають, обчислюючи лишки функції $F_2(p)$ в особливих точках, які збігаються зі значеннями коренів p_k полінома $Q(p)$ (3.33). Якщо кількість особливих точок дорівнює s , можна записати:

$$f_2(t) = \sum_{k=1}^s \text{res}_k F_2(p) e^{pt}. \quad (3.41)$$

Значення лишку визначається за формулою:

$$\text{res}_k F_2(p) e^{pt} = \left. \frac{P(p)}{Q(p)} e^{pt} \right|_{p=p_k}. \quad (3.42)$$

Якщо корені — комплексно-спряжені, лишки теж комплексно-спряжені, а їх сума дорівнює $2\text{Re}[\text{res}]$. Формула (3.41) дозволяє визначити лишки для простих коренів. За наявності кратних коренів p_k з кратністю s лишок визначається як

$$\text{res}_k F_2(p) e^{pt} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \left[\frac{P(p)}{Q(p)} (p-p_k)^s e^{pt} \right] \Bigg|_{p=p_k}. \quad (3.43)$$

Нижче наведені приклади визначення оригіналів відгуків.

Приклад 3.3. Знайти оригінал відгуку $i(t)$ у схемі з прикладу 3.1 (рис. 3.4, а), якщо дією є напруга $u(t) = U_0 e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$

Розв'язання. Зображення дії на підставі виразу (3.4) становить

$$U(p) = \frac{U_0}{p + \alpha}. \quad (3.44)$$

За формулою (3.30) з урахуванням співвідношення (3.44) запишемо зображення відгуку:

³ Ріман Георг Фрідріх Бернгард, Riemann (1826–1866) — німецький математик. Створив і застосував для розв'язання фізичних задач нові методи інтегрування диференціальних рівнянь із частинними похідними. Його ім'ям названі: теорема про алгебраїчні функції (теорема Рімана — Роха), матриця в теорії абелевих функцій, метод розв'язання гіперболічних рівнянь, функції та ін. Увів так звані Ріманові поверхні, важливі при дослідженнях аналітичних функцій. Його роботи відіграли значну роль у розвитку теорії функцій комплексної змінної й аналітичної теорії чисел.

⁴ Меллін Роберт Хільмар (1854–1933) — фінський математик. Професор, а згодом директор Політехнічної школи у Гельсінкі. Основні праці присвячені диференціальним та інтегральним рівнянням. Інтегральне перетворення Мелліна широко застосовують у математичній фізиці та теорії функцій.

$$I(p) = \frac{U_0(p + 1/CR_1)}{R_2(p + \alpha)(p + 1/\tau)} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Використовуючи значення коренів знаменника $Q(p)$ $p_1 = -\alpha$, $p_2 = -1/\tau$, розкладемо $I(p)$ на прості дробі:

$$I(p) = \frac{A_1}{p + \alpha} + \frac{A_2}{p + 1/\tau}. \quad (3.45)$$

Коефіцієнти A_1 , A_2 знайдемо за формулою (3.35):

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} I(p)(p - p_1) = \left. \frac{U_0(p + 1/CR_1)}{R_2(p + 1/\tau)} \right|_{p=-\alpha} = \frac{U_0(1/CR_1 - \alpha)}{R_2(1/\tau - \alpha)}, \quad (3.46)$$

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} I(p)(p - p_2) = \left. \frac{U_0(p + 1/CR_1)}{R_2(p + \alpha)} \right|_{p=-1/\tau} = \frac{U_0(1/\tau - 1/CR_1)}{R_2(1/\tau - \alpha)}.$$

Отже, коефіцієнти A_1 і A_2 визначені через параметри кола та дії. Враховуючи вираз (3.4), перетворимо зображення струму (3.45) до оригіналу:

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-t/\tau}. \quad (3.47)$$

Вигляд часової діаграми відгуку залежить від співвідношення між α і $1/\tau$. Спочатку розглянемо варіант $\alpha < 1/\tau$. Нехай $\alpha = 1/4\tau$. Для спрощення візьмемо $R_1 = R_2 = R$ ($\tau = CR/2$), тоді з урахуванням виразу (3.46) матимемо

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{CR}, \quad \alpha = \frac{1}{2CR}, \quad \frac{1}{\tau} - \alpha = \frac{3}{2CR}, \quad A_1 = \frac{U_0}{3R}, \quad A_2 = \frac{2U_0}{3R},$$

а шуканий струм становитиме

$$i(t) = \frac{U_0}{3R} (e^{-t/2RC} + 2e^{-2t/RC}).$$

Графік миттєвого значення струму зображено на рис. 3.5, а. Струм, як і дія, має імпульсну форму, але імпульс відгуку «гостріший» і прямує до нуля, залишаючись додатним.

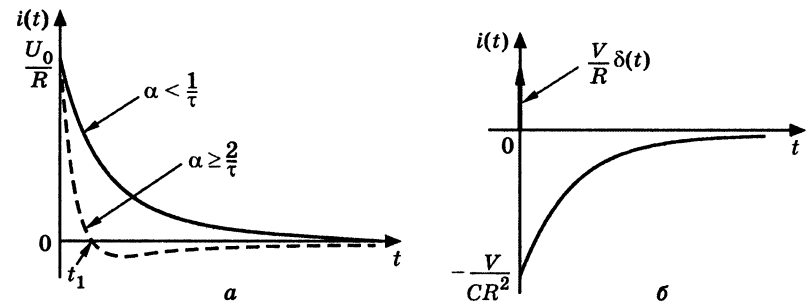


Рис. 3.5. Часова залежність струму у прикладах: а — 3.3; б — 3.4

Знайдемо струм при $\alpha \geq 2/\tau$. Нехай $\alpha = 2/\tau$, $R_1 = R_2 = R$, тоді

$$\frac{1}{\tau} - \alpha = -\frac{2}{RC}, \quad A_1 = \frac{3U_0}{2R}, \quad A_2 = -\frac{U_0}{2R},$$

а шуканий струм становитиме

$$i(t) = \frac{U_0}{2R} (3e^{-4t/RC} - e^{-2t/RC}).$$

З графіка $i(t)$, зображеного на рис. 3.5, а, видно, що струм також має імпульсну форму, але на відміну від попереднього випадку в момент часу t_1 змінює свій напрямок унаслідок розрядження ємності.

Приклад 3.4. Визначити оригінал струму у прикладі 3.3 за умови дії $u(t) = V\delta(t)$ (постійна величина V має розмірність [В·с]).

Розв'язання. Зображення дії знайдемо, враховуючи формулу (3.5): $\mathcal{L}[V \cdot \delta(t)] = V$.

Згідно з виразом (3.30) зображення відгуку має вигляд:

$$I(p) = \frac{V(p + 1/CR_1)}{R_2(p + 1/\tau)}.$$

Оскільки зображення струму — неправильний дріб, виділимо цілу частину аналогічно виразу (3.39):

$$I(p) = \frac{V}{R_2} \left(1 + \frac{1/CR_1 - 1/\tau}{p + 1/\tau} \right).$$

З урахуванням перетворень $\frac{1}{CR_1} - \frac{1}{\tau} = \frac{1}{CR_1} - \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} = -\frac{1}{CR_2}$ запишемо оригінал відгуку:

$$i(t) = \frac{V}{R_2} \left[\delta(t) - \frac{1}{CR_2} e^{-t/\tau} \right], \quad (3.48)$$

що збігається з відповідністю (табл. 3.1, п. 8).

Часова діаграма відгуку, як і дії, містить дельта-функцію (рис. 3.5, б). Наявність «від'ємної» експоненти у відгуку пояснюється тим, що за час дії ємність спочатку заряджається, а потім починає розряджатися, що й зумовлює протилежний напрям струму $i(t)$.

Приклад 3.5. Визначити оригінал відгуку $u_C(t)$ у колі, схема якого наведена на рис. 3.2, якщо дією є напруга $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$, за умови $R < 2\sqrt{L/C}$.

Розв'язання. Знаючи значення зображення (3.22) струму у колі, а також загального операторного опору кола (3.21), знайдемо зображення напруги на ємності за формулою (3.16):

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} \frac{U(p)}{R + pL + 1/pC},$$

або

$$U_C(p) = \frac{U(p)}{p^2 LC + pCR + 1}. \quad (3.49)$$

Зображення дії знайдемо за формулою (3.3): $U(p) = U_0/p$. Тоді

$$U_C(p) = \frac{U_0}{p(p^2 LC + pCR + 1)}.$$

Використовуючи введені вище (див. підрозділ 1.3) позначення $\delta = R/2L$; $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$, запишемо зображення відгуку:

$$U_C(p) = \frac{U_0 \omega_{\text{рез}}^2}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2)}. \quad (3.50)$$

З виразу (3.50) видно, що зображення напруги на ємності є ДРФ, тобто $U_C(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$. Отже, визначимо корені полінома $Q(p)$:

$$p(p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2) = 0; \quad p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -\delta \pm j\omega_{\text{вл}},$$

де

$$\omega_{\text{вл}} = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 - \delta^2}. \quad (3.51)$$

Якщо розкласти вираз $p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2$ на множники

$$(p - p_2)(p - p_3) = (p + \delta - j\omega_{\text{вл}})(p + \delta + j\omega_{\text{вл}}) = (p + \delta)^2 + \omega_{\text{вл}}^2,$$

вираз (3.50) матиме такий вигляд:

$$U_C(p) = \frac{U_0 \omega_{\text{рез}}^2}{p[(p + \delta)^2 + \omega_{\text{вл}}^2]}.$$

Скориставшись відповідністю (табл. 3.1, п. 15), запишемо оригінал відгуку:

$$u_C(t) = \frac{U_0 \omega_{\text{рез}}^2}{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t - \psi) \right],$$

де $\psi = \text{arctg}(\delta/\omega_{\text{вл}})$, або остаточно з урахуванням співвідношення (3.51):

$$u_C(t) = U_0 \left[1 - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t - \psi) \right]. \quad (3.52)$$

Вираз (3.52) збігається з результатом, отриманим вище в розділі 1, п. 1.3.4 (формула (1.66)).

Приклад 3.6. У колі, розглянутому у прикладі 3.1 (рис. 3.4, а), діє напруга $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \cdot 1(t)$. Визначити оригінал відгуку операторним методом.

Розв'язання. Згідно з табл. 3.1, п. 11 запишемо зображення дії:

$$U(p) = U_m \frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.53)$$

Знаменник виразу (3.53) містить поліном другого степеня від p . Оскільки степінь полінома у зображенні відгуку ще вищий (*див.* формулу (3.30)), щоб його знизити і відповідно спростити перетворення, скористаємося відомим співвідношенням:

$$u(t) = \operatorname{Re}[U_m e^{j(\omega t + \psi u)}] = \operatorname{Re}[U_m e^{j\omega t}]; \quad U_m = U_m e^{j\psi u}$$

і знайдемо зображення не миттєвого значення $u(t)$, а комплексної функції, яка стоїть під знаком реальної частини, згідно з формулою (табл. 3.1, п. 5):

$$\mathcal{L}[U_m e^{j\omega t}] = \frac{U_m}{p - j\omega}. \quad (3.54)$$

Враховуючи комутативність операції взяття реальної частини, після визначення комплексного оригіналу відгуку від нього слід взяти реальну частину.

Підставимо в зображення струму (3.30) замість зображення дії (3.53) вираз (3.54):

$$I(p) = \frac{U_m}{p - j\omega} \frac{p + 1/CR_1}{R_2(p + 1/\tau)} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Визначимо комплексний оригінал за допомогою лишків (*див.* формулу (3.42)). Корені полінома $Q(p)$ становлять: $p_1 = j\omega$, $p_2 = -1/\tau$; похідна $Q'(p) = R_2(2p + 1/\tau - j\omega)$. Тоді перший лиск має вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_1 I(p) e^{pt} &= \left. \frac{U_m (p + 1/CR_1)}{R_2(2p + 1/\tau - j\omega)} e^{pt} \right|_{p=j\omega} = \\ &= \frac{U_m (j\omega + 1/CR_1)}{R_2(2j\omega + 1/\tau - j\omega)} e^{j\omega t} = \frac{U_m (j\omega CR_1 + 1)\tau}{CR_1 R_2 (j\omega\tau + 1)} e^{j\omega t} = \\ &= \frac{U_m e^{j\psi u} \sqrt{(\omega CR_1)^2 + 1} e^{j\varphi_1}}{(R_1 + R_2) \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} e^{j\varphi}} e^{j\omega t} = \frac{U_m}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{(\omega CR_1)^2 + 1}{(\omega\tau)^2 + 1}} e^{j(\omega t + \psi u + \varphi_1 - \varphi)}, \end{aligned}$$

де $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \omega CR_1$, $\varphi = \operatorname{arctg} \omega\tau$.

Другий лиск

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_2 I(p) e^{pt} &= \left. \frac{U_m (p + 1/CR_1)}{R_2(2p + 1/\tau - j\omega)} e^{pt} \right|_{p=-1/\tau} = \\ &= \frac{U_m (1/CR_1 - 1/\tau)}{R_2(-2/\tau + 1/\tau - j\omega)} e^{-t/\tau} = \frac{U_m \tau/CR_2}{R_2(1 + j\omega\tau)} e^{-t/\tau} = \end{aligned}$$

$$= \frac{U_m e^{j\psi u} R_1}{R_2(R_1 + R_2) \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-t/\tau} = \frac{U_m R_1 e^{-t/\tau}}{R_2(R_1 + R_2) \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{j(\psi u - \varphi)}.$$

Остаточний оригінал визначимо як реальну частину суми лишків:

$$\begin{aligned} i(t) = \operatorname{Re}[\operatorname{res}_1 + \operatorname{res}_2] &= \frac{U_m}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{(\omega CR_1)^2 + 1}{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos(\omega t + \psi u + \varphi_1 - \varphi) + \\ &+ \frac{U_m R_1 e^{-t/\tau}}{R_2(R_1 + R_2) \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\psi u - \varphi) = \\ &= \frac{U_m}{(R_1 + R_2) \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \times \\ &\times \left[\sqrt{(\omega CR_1)^2 + 1} \cos(\omega t + \psi u + \varphi_1 - \varphi) + \frac{R_1}{R_2} \cos(\psi u - \varphi) e^{-t/\tau} \right]. \end{aligned}$$

Приклад 3.7. Знайти відгук у прикладі 3.3 при $\alpha = 1/\tau$.

Розв'язання. За даної умови зображення струму матиме вигляд:

$$I(p) = \frac{U_0(p + 1/CR_1)}{R_2(p + \alpha)^2}. \quad (3.55)$$

Оскільки знаменник дробу має корінь другої кратності, скористаємося розкладанням зображення $I(p)$ на прості дроби вигляду (3.36):

$$I(p) = \frac{A_1}{(p + \alpha)^2} + \frac{A_2}{p + \alpha}. \quad (3.56)$$

Якщо вираз (3.56) привести до загального знаменника, чисельник дробу утворить поліном: $P(p) = A_1 + A_2(p + \alpha)$. Константи A_1 , A_2 знайдемо з умови рівності чисельників правої частини виразу (3.55) і полінома $P(p)$:

$$A_1 + A_2(p + \alpha) = \frac{U_0}{R_2} \left(p + \frac{1}{CR_1} \right).$$

Очевидно, що рівність виконується, коли збігаються коефіцієнти при однакових степенях p :

$$\begin{cases} A_1 + A_2\alpha = \frac{U_0}{CR_1 R_2}; \\ A_2 = \frac{U_0}{R_2}. \end{cases} \quad (3.57)$$

Друге рівняння безпосередньо визначає константу A_2 , а підстановка A_2 у перше дозволяє знайти A_1 .

Відповідно до табл. 3.1 (п. 5, п. 7) оригінал, який відповідає зображенню (3.56), становить $i(t) = A_1 t e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t}$.

Якщо $R_1 = R_2 = R$, $\alpha = 1/\tau = 2/RC$; $A_1 = -U_0/CR^2$; $A_2 = U_0/R$, тоді шуканий струм

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-2t/RC} \left(1 - \frac{t}{CR} \right). \quad (3.58)$$

Графік часової залежності струму має такий самий вигляд, як і пунктирна крива на рис. 3.5, а, але значення t_1 буде меншим.

Приклад 3.8. Знайти оригінал зображення (3.56) за допомогою лишку. Розв'язання. Скористаємося формулою (3.43) для кореня кратності $s = 2$.

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{d}{dp} \left[\frac{U_0(p + 1/CR_1)}{R_2(p + \alpha)^2} (p + \alpha)^2 e^{pt} \right]_{p=-\alpha} = \\ &= \frac{d}{dp} \left[\frac{U_0(p + 1/CR_1)}{R_2} e^{pt} \right]_{p=-\alpha} = \frac{U_0}{R_2} \left[e^{pt} + t e^{pt} \left(p + \frac{1}{CR_1} \right) \right]_{p=-\alpha} = \\ &= \frac{U_0}{R_2} e^{-\alpha t} \left[1 + t \left(\frac{1}{CR_1} - \alpha \right) \right]. \end{aligned}$$

Якщо $R_1 = R_2 = R$, $\alpha = 2/RC$, тоді

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-2t/RC} \left(1 - \frac{t}{CR} \right),$$

що збігається з результатом (3.58).

3.6. Урахування ненульових початкових умов

Операторний метод порівняно з іншими вважається найпотужнішим, але всі рівняння в операторній формі передбачають наявність нульових початкових умов, і це є суттєвим обмеженням. Щоб його уникнути, слід розглянути схеми індуктивного та ємнісного елементів, які визначають початкові умови в момент $t = 0$.

Якщо в індуктивності до комутації ($t < 0$) існував струм, зв'язок між струмом і напругою після комутації ($t \geq 0$) відображає вираз (3.8), якому в просторі зображень відповідає рівняння (3.11). Якщо врахувати перший закон комутації $i_L(-0) = i_L(+0)$, рівняння (3.11) можна переписати в такий спосіб:

$$I_L(p) = \frac{i_L(-0)}{p} + \frac{U_L(p)}{pL}. \quad (3.59)$$

Перший доданок у формулі (3.59) визначає зображення струму ідеального залежного джерела, яке умовно підключається до індуктивності в момент $t = +0$ (згідно з виразом (3.9)), але величину струму цього джерела визначено в докомутаційний момент часу $t = -0$, тобто в усталеному режимі. Другий доданок — це зображення струму у знеструмленій на момент комутації індуктивності, яка характеризується операторним опором pL . Цей доданок обумовлений напругою $u_L(t)$, якій відповідає зображення $U_L(p)$. Сума цих зображень — це зображення струму $I_L(p)$ після комутації. Отже, рівняння (3.59) є першим законом Кірхгофа в операторній формі, складеним для операторної схеми (рис. 3.6, а).

З виразу (3.59) можна визначити операторну напругу

$$U_L(p) = pL I_L(p) - Li_L(-0). \quad (3.60)$$

Рівнянню (3.60) відповідає друга операторна схема заміщення індуктивності з ненульовими початковими умовами (рис. 3.6, б), оскільки $U_L(p)$ відповідно до другого закону Кірхгофа в операторній формі дорівнює алгебраїчній сумі зображень напруг на двох елементах.

У виразі (3.60) перший доданок $pL I_L(p)$ — це зображення напруги, зумовлене післякомутаційним струмом в індуктивності, яка умовно знеструмлена на момент комутації, другий — зображення напруги на затискачах ідеального джерела напруги, яке дорівнює $Li_L(-0)$ і має напрям, протилежний напрузі на затискачах індуктивності. Тобто це джерело, відповідно до закону електромагнітної індукції, протидіє зміні струму, який існував до комутації.

Операторні схеми індуктивності з ненульовими початковими умовами (рис. 3.6, а, б) — це схеми із залежними джерелами, внутрішнім опором яких є операторний опір індуктивності pL . Перехід від однієї схеми до іншої виконують за відомими правилами еквівалентних перетворень джерел [7, табл. 2.1].

Якщо на момент комутації коло містить заряджену ємність ($u_C(-0) \neq 0$),

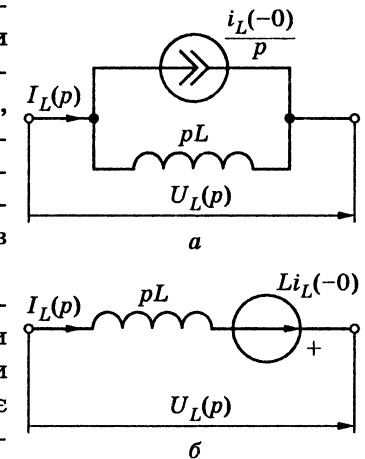


Рис. 3.6. Операторні схеми заміщення індуктивності зі струмом:

а — із джерелом струму;
б — із джерелом напруги

залежність між струмом і напругою для $t \geq +0$ описується рівністю (3.14), якій у просторі зображень відповідає вираз (3.15). У цьому рівнянні на підставі другого закону комутації $u_C(+0)$ можна замінити на $u_C(-0)$:

$$U_C(p) = \frac{u_C(-0)}{p} + \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (3.61)$$

Така заміна спрощує визначення $u_C(-0)$, оскільки момент часу $t = -0$ належить до усталеного режиму.

Рівнянню (3.61) відповідає операторна схема, яку подано на рис. 3.7, а. Зображення напруги на ємності $U_C(p)$ складається з двох доданків. Перший визначає зображення напруги на затискачах ідеального залежного джерела напруги, яке умовно (згідно з виразом (3.14)) підключається до незарядженої ємності в момент $t = +0$. Величину ЕРС цього джерела визначають в усталеному режимі в момент часу $t = -0$. Другий доданок — це зображення напруги на незарядженій ємності з операторним опором $1/pC$, викликаной струмом, який має зображення $I_C(p)$. Слід звернути увагу, що на відміну від схеми індуктивності зі струмом (рис. 3.6, б), для зарядженої ємності напрями напруги $U_C(p)$ і зображення ЕРС протилежні.

Формула (3.61) відповідає другому закону Кірхгофа в операторній формі, складеному для операторної схеми (рис. 3.7, а).

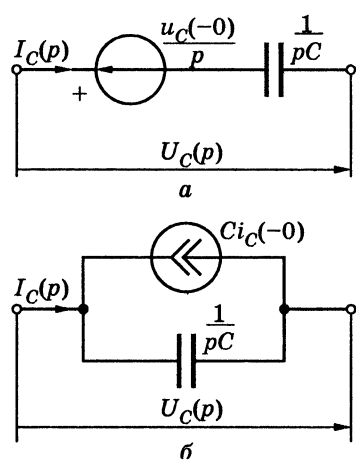


Рис. 3.7. Операторні схеми заміщення зарядженої ємності: а — із джерелом напруги; б — із джерелом струму

Якщо з (3.61) визначити зображення струму, матимемо рівняння, яке є операторною формою першого закону Кірхгофа для схеми (рис. 3.7, б):

$$I_C(p) = pC U_C(p) - C u_C(-0), \quad (3.62)$$

де $C u_C(-0)$ — зображення струму джерела, що враховує ненульові початкові умови; напрями джерел (рис. 3.7) збігаються.

Подібно до схем на рис. 3.6 схеми (рис. 3.7, а і рис. 3.7, б) також є еквівалентними.

Отже, за наявності в колі в момент комутації індуктивностей, у яких є струм, а також ємностей, на яких є напруга, в операторній схемі такого кола з'являються додаткові джерела, які враховують ненульові початкові умови.

Струми і напруги для $t \geq 0$ обчислюють за законами Кірхгофа й Ома в операторній формі. За наявності декількох джерел відгук визначають методом накладання. Якщо коло розгалужене, розрахунок доцільно виконувати, використовуючи матричні операторні рівняння (методом контурних струмів або вузлових напруг).

Приклад 3.9. Визначити струм $i_2(t)$ після комутації в колі, схему якого зображено на рис. 3.8, а.

Розв'язання. До комутації струм в індуктивності становив $i_L(-0) = E/R_1$, отже початкові умови — ненульові. Щоб розрахувати операторним методом струм $i_2(t)$ після комутації, необхідно скласти операторну схему, яка містить додаткове джерело напруги, ввімкнене послідовно з індуктивністю (рис. 3.6, б), зображення ЕРС якого на підставі формули (3.60) становить $L i_L(-0) = LE/R_1$. Еквівалентна операторна схема з додатковою ЕРС, яка враховує ненульові початкові умови, показана на рис. 3.8, б. Зображення ЕРС джерела постійної напруги дорівнює E/p .

Визначимо зображення струму $I_L(p)$ за законом Ома в операторній формі:

$$I_L(p) = \frac{E/p + LE/R_1}{Z_e(p)},$$

де $Z_e(p) = pL + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

Зображення струму $I_2(p)$ знайдемо за правилом розподілу струмів ($I_2(p) = I_L(p) R_1 / (R_1 + R_2)$):

$$I_2(p) = \frac{(E/p + LE/R_1) R_1}{pL(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{ER_1}{L(R_1 + R_2)p(p + 1/\tau)} + \frac{E}{(R_1 + R_2)(p + 1/\tau)},$$

де $\tau = L/R_e$; $R_e = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

Відповідно до табл. 3.1 (п. 6, п. 5) оригінал шуканого струму становить

$$i_2(t) = \frac{ER_1 \tau}{L(R_1 + R_2)} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau},$$

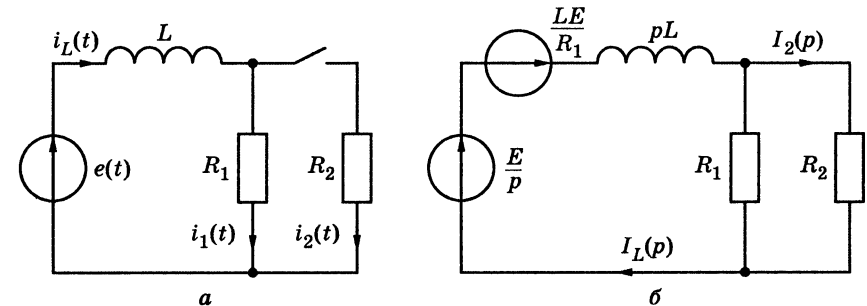


Рис. 3.8. Схеми кіл до прикладу 3.9:

а — початкова; б — еквівалентна операторна

а після підстановки τ :

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2}(1 - e^{-t/\tau}) + \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R_2} \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau} \right).$$

3.7. Операторна передатна функція кола, її властивості. Нулі та полюси операторної передатної функції

Диференціальне рівняння (1.2) для кола другого порядку з відгуком $f_2(t)$ і дією $f_1(t)$ має вигляд

$$b_2 f_2''(t) + b_1 f_2'(t) + b_0 f_2(t) = a_2 f_1''(t) + a_1 f_1'(t) + a_0 f_1(t). \quad (3.63)$$

Характеристичне рівняння, відповідно до виразу (3.63), становить

$$b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0,$$

де ліва частина — це характеристичний поліном

$$b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = V(p). \quad (3.64)$$

Відомо, що корені характеристичного рівняння $V(p) = 0$ обумовлюють згасаючий характер вільних коливань. Тому в колі із втраченими ці корені розташовані в лівій частині комплексної площини.

Нехай дії $f_1(t)$ відповідає зображення $F_1(p)$, а відгук кола належить до простору оригіналів: $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(p)$. Щоб перевести рівняння (3.63) у простір зображень, необхідно скористатися теоремою диференціювання (табл. 3.2, п. 2):

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(+0); \quad \mathcal{L}[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0).$$

Вираз (3.63) після підстановки зображення дії, відгуку та їхніх похідних матиме вигляд

$$\begin{aligned} b_2 [p^2 F_2(p) - pf_2(+0) - f_2'(+0)] + b_1 [pF_2(p) - f_2(+0)] + b_0 F_2(p) = \\ = a_2 [p^2 F_1(p) - pf_1(+0) - f_1'(+0)] + a_1 [pF_1(p) - f_1(+0)] + a_0 F_1(p). \end{aligned}$$

Групування доданків, які містять зображення відгуку і дії, дає:

$$\begin{aligned} F_2(p)(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) - f_2'(+0)b_2 - f_2(+0)(b_2 p + b_1) = \\ = F_1(p)(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) - f_1'(+0)a_2 - f_1(+0)(a_2 p + a_1). \quad (3.65) \end{aligned}$$

Доцільно ввести такі позначення:

$$\begin{cases} A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0; \\ B(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0; \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\begin{cases} A_0(p) = f_1'(+0)a_2 + f_1(+0)(a_2 p + a_1); \\ B_0(p) = f_2'(+0)b_2 + f_2(+0)(b_2 p + b_1). \end{cases} \quad (3.67)$$

Слід звернути увагу на те, що поліном $B(p)$ збігається з характеристичним поліномом $V(p)$ (3.64):

$$B(p) = V(p).$$

Тоді з урахуванням позначень (3.66)–(3.67) рівняння (3.65) набуває вигляду:

$$F_2(p)V(p) - B_0(p) = F_1(p)A(p) - A_0(p),$$

звідки зображення відгуку

$$F_2(p) = F_1(p) \frac{A(p)}{V(p)} + \frac{B_0(p) - A_0(p)}{V(p)}. \quad (3.68)$$

У реальних колах відгук не може випереджати дію за нульових початкових умов. Для інтервалу часу $t < 0$ за умови $f_1(t) = 0$ (перше обмеження для функцій, які належать до простору оригіналів) відгук має бути нульовим: $f_2(t) = 0$. Це можливо, коли в рівнянні (3.68) відсутній другий доданок, тобто виконується умова

$$B_0(p) - A_0(p) = 0. \quad (3.69)$$

Тоді $F_2(p) = F_1(p) \frac{A(p)}{V(p)}$. Функцію, яка є відношенням двох поліномів комплексної змінної p , позначають:

$$H(p) = \frac{A(p)}{V(p)}. \quad (3.70)$$

Отже, $F_2(p) = F_1(p)H(p)$, звідки

$$H(p) = \frac{F_2(p)}{F_1(p)}. \quad (3.71)$$

Функція $H(p)$ комплексної змінної p , яка дорівнює відношенню зображення відгуку до зображення дії, має назву *операторної передатної функції* (ОПФ), або *операторної характеристики* кола, а ще *системної функції*.

ОПФ характеризує вплив кола на зображення дії. Для лінійного кола $H(p)$ не залежить від параметрів дії, а визначається структурою і параметрами кола, а також типом дії. Так, у розглянутому

вище прикладі 3.1 згідно з формулою (3.71), виходячи з виразу (3.30), ОПФ кола (рис. 3.4, а) становить

$$H(p) = \frac{p + 1/CR_1}{R_2(p + 1/\tau)}. \quad (3.72)$$

У прикладі 3.2 (рис. 3.4, б) ОПФ кола згідно з виразом (3.32) дорівнює

$$H(p) = \frac{p^2 L_2 C + pCR_2 + 1}{p^3 C(L_1 L_2 - M^2) + p^2 C(L_1 R_2 + L_2 R_1) + p(L_e + CR_1 R_2) + R_1 + R_2}.$$

Для визначення ОПФ слід задатись зображенням дії $F_1(p)$, потім за законами Ома і Кірхгофа в операторній формі знайти зображення відгуку $F_2(p)$, визначене через $F_1(p)$, і підставити його до формули (3.71). Для складних кіл можна використовувати метод контурних струмів і вузлових напруг в операторній формі, а також узагальнений метод вузлових напруг для кіл, що містять невзаємні елементи.

Приклад 3.10. Знайти ОПФ кола з операційним підсилювачем (рис. 3.9).

Розв'язання. У першій частині підручника [7, приклад 6.1] визначено комплексний коефіцієнт передачі за напругою даного кола

$$H_U(j\omega) = \frac{U_4}{U_1} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}}.$$

ОПФ визначимо за формулою

$$H_U(p) = \frac{U_4(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}},$$

яка, на відміну від попереднього виразу, містить відношення алгебраїчних доповнень матриці не комплексних, а операторних провідностей:

$$(Y(p)) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 + pC_1 & -G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_3 & G_3 + pC_2 & -pC_2 \\ 0 & -G_2 & -pC_2 & G_2 + pC_2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Відповідні алгебраїчні доповнення отримуємо, враховуючи відомі правила визначення знаків [7, підрозд. 6.4] та викреслюючи в чисельнику й знаменнику 1 і 4-й рядки, 4 і 3-й стовпці — в чисельнику та 1 і 3-й — у знаменнику:

$$\Delta_{14,43} = -G_1 G_3; \quad \Delta_{11,43} = p^2 C_1 C_2 + pC_2(G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3.$$

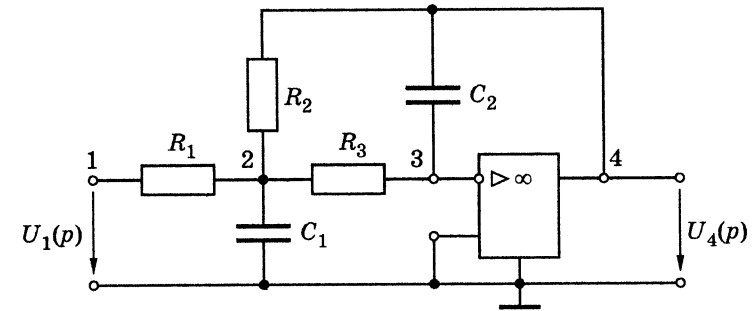


Рис. 3.9. Схема кола до прикладу 3.10

Остаточно матимемо:

$$H_U(p) = -\frac{G_1 G_3}{p^2 C_1 C_2 + pC_2(G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3}. \quad (3.73)$$

Наведений вище аналіз і розглянуті приклади дозволяють сформулювати властивості ОПФ.

1. Згідно з формулою (3.70) ОПФ — це відношення поліномів $A(p)$ і $V(p)$, до яких p входить раціонально (див. розглянуті вище приклади) і тому $H(p)$ має назву *дробово-раціональної функції* комплексної змінної p .

2. Поліноми $A(p)$ і $V(p) = B(p)$ згідно з виразами (3.66) мають такі самі коефіцієнти, як і коефіцієнти диференціального рівняння кола (3.63), які залежать від порядку кола, способу з'єднання його елементів і параметрів самих елементів. Тобто коефіцієнти a_k ($k = 0 \dots m$) і b_k ($k = 0 \dots n$) є дійсними числами, які можуть бути в кожному з поліномів усі додатні або всі від'ємні. Якщо наприклад, $a_k > 0$, а $b_k < 0$, тоді

$$H(p) = -\frac{A(p)}{V(p)},$$

що можливо за умови, коли коло містить активні невзаємні елементи і змінює початкову фазу дії на протилежну ($-1 = 1e^{\pm j\pi}$).

3. Якщо максимальний степінь полінома чисельника m , а знаменника n , то між ними зазвичай існує співвідношення: $m \leq n$.

4. Знаменник ОПФ є $V(p)$ — характеристичним поліномом (3.64), який утворює характеристичне рівняння, що має дійсні від'ємні або комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною ($\text{Re } p_k < 0$). Для забезпечення цієї умови всі коефіцієнти

полінома $V(p)$ мають бути ненульовими ($b_k \neq 0, k=0, 1, \dots, n$) і обов'язково з однаковим знаком. Такий поліном називають *поліномом Гурвіца*⁵.

5. Порядок полінома $V(p)$ визначає *порядок кола* й ОПФ.

6. Значення p_{0k} , які відповідають кореням $V(p)$, перетворюють $|H(p)|$ у нескінченність і мають назву *полюсів ОПФ*. Усі полюси ОПФ кола із втратами розташовані на комплексній площині зліва від уявної осі.

7. При значеннях p_k , які відповідають кореням $A(p)$, функція $H(p)$ дорівнює нулю. Корені полінома $A(p)$ називають *нулями ОПФ*.

Коло, ОПФ якого має зазначені властивості, можна фізично реалізувати.

Рисунок, що відображає розташування нулів і полюсів $H(p)$, має назву *карти нулів і полюсів*, яка з точністю до постійного множника k_1 визначає ОПФ $H(p)$. Якщо полюси p_k ОПФ позначити хрестиками (x), а нулі p_{0k} — колами (o), карта нулів і полюсів деякого кола матиме вигляд (рис. 3.10, a).

Відповідно до наведеної карти нулів і полюсів можна записати ОПФ у вигляді

$$\tilde{H}(p) = \frac{(p-p_{01})(p-p_{02})(p-p_{03})}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)}. \quad (3.74)$$

Чисельник $\tilde{H}(p)$ є поліномом третього порядку ($m=3$), а знаменник — п'ятого ($n=5$). Якщо у формулі (3.70), яка визначає ОПФ $H(p)$ даного кола, пронормувати поліноми чисельника

$$A(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = a_3 (p-p_{01})(p-p_{02})(p-p_{03})$$

і знаменника

$$V(p) = b_5 p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = \\ = b_5 (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5),$$

можна встановити зв'язок між виразами (3.70) і (3.74):

$$H(p) = \frac{a_3}{b_5} \frac{(p-p_{01})(p-p_{02})(p-p_{03})}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)}. \quad (3.75)$$

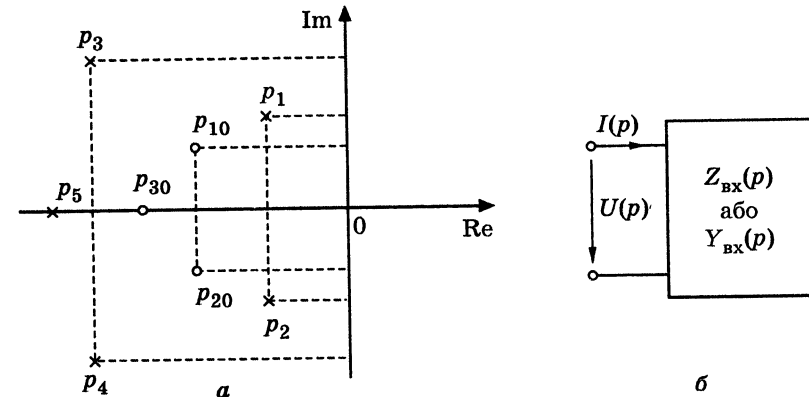


Рис. 3.10. До визначення властивостей ОПФ: а — карта нулів і полюсів; б — узагальнена операторна схема пасивного двополюсника

Якщо константу a_3/b_5 позначити k_1 , формула (3.75) з урахуванням рівності (3.74) матиме вигляд

$$H(p) = k_1 \tilde{H}(p),$$

а загалом

$$H(p) = k_1 \frac{\prod_{i=1}^m (p-p_{0i})}{\prod_{i=1}^n (p-p_i)}, \quad k_1 = \frac{a_m}{b_n}. \quad (3.76)$$

Отже, рівняння (3.76) свідчить, що карта нулів і полюсів дозволяє відтворити ОПФ кола з точністю до постійного множника.

Важливо, що корені характеристичного полінома $V(p)$ можна обчислити, не складаючи диференціального рівняння, навіть без визначення $H(p)$. Зазначимо, що аналогічний висновок можна отримати, аналізуючи перехідні процеси класичним методом (див. п. 1.1.3).

Операторна передатна функція — функція комплексної змінної p , причому комплексна частота $p = -\delta \pm j\omega$ належить лівій комплексній півплощині, оскільки дійсна частина p — від'ємна (оскільки розглядаються ОПФ кіл, які можна реалізувати фізично). Модуль ОПФ $|H(p)|$ — це поверхня, яка розташована над лівою півплощиною. Як приклад на рис. 3.11, а зображено $|H(p)|$ за умови: $A(p) = p^3$ і $V(p) = (p+\delta)(p+\delta_1-j\omega_1)(p+\delta_1+j\omega_1)$, тобто ОПФ має нуль ($p_0=0$) з кратністю 3 і три полюси ($p_1 = -\delta$; $p_{2,3} = -\delta_1 \pm j\omega_1$).

⁵ Гурвіц Адольф, Hurwitz (1859–1919) — німецький математик. Професор політехнічного інституту в Цюриху. Основні праці належать до математичного аналізу, теорії функцій, алгебри та теорії чисел. У теорії функцій комплексної змінної відомі теореми Гурвіца. Широко застосовується його критерій від'ємності дійсних частин коренів алгебраїчних рівнянь. Зробив внесок у геометрію. Російською мовою перекладено його працю «Теорія аналітичних та еліптичних функцій» (1933).

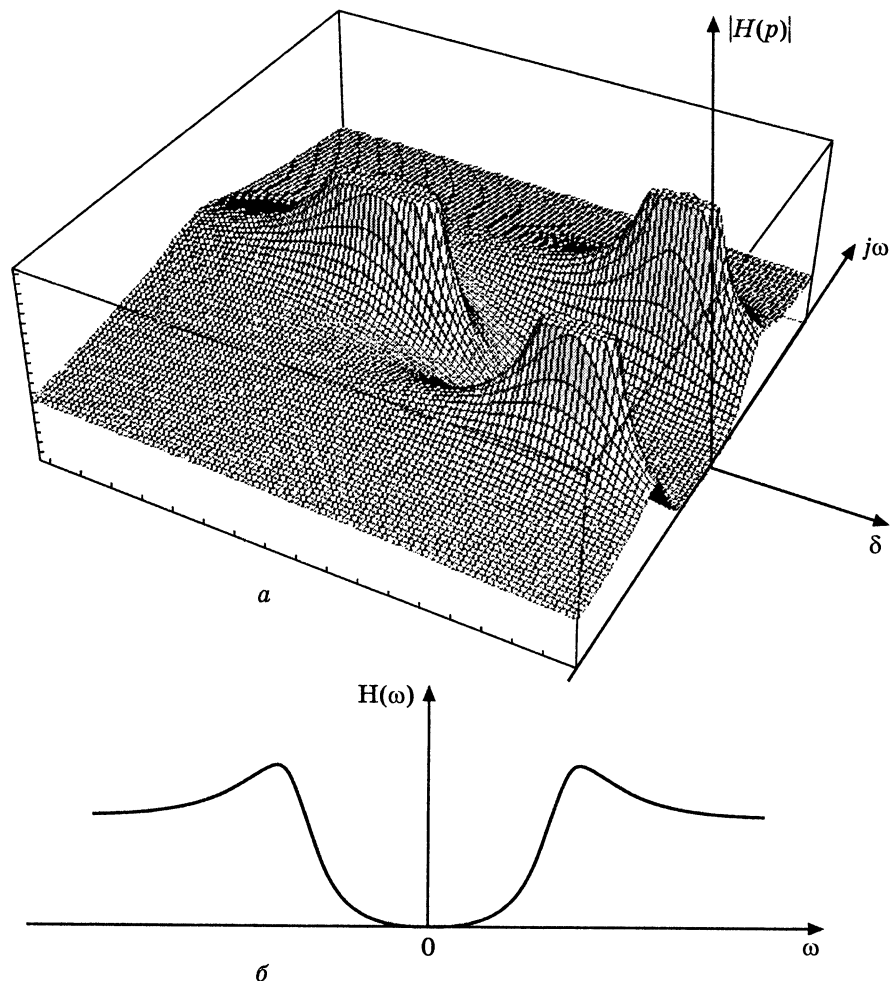


Рис. 3.11. До визначення властивостей ОПФ:

a — характер поверхні $|H(p)|$, яка має один нуль третьої кратності та три полюси; *б* — АЧХ кола — вертикальний переріз поверхні $|H(p)|$ через вісь $j\omega$ ($\delta=0$)

У точці p_0 поверхня $|H(p)|$ має нульовий мінімум, а в точках, координати яких збігаються зі значеннями полюсів $p_1; p_2, 3$, поверхня наближається до максимального нескінченного значення (на рисунку обмежено вибраним масштабом за вертикальною віссю).

Якщо коло живиться джерелом напруги, а зображення дії $F_1(p) = U(p)$, тоді відгук, що є струмом на затискачах двополюсника

(рис. 3.10, б), можна визначити за законом Ома в операторній формі:

$$F_2(p) = I(p) = \frac{U(p)}{Z_{\text{вх}}(p)},$$

де $Z_{\text{вх}}(p)$ — операторний вхідний опір двополюсника. Виходячи з виразу (3.71), ОПФ має вигляд:

$$H(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}(p)}. \quad (3.77)$$

Якщо прирівняти праві частини рівнянь (3.70) і (3.77), виходить співвідношення

$$\frac{1}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{V(p)},$$

з якого видно, що характеристичне рівняння збігається з рівнянням

$$Z_{\text{вх}}(p) = 0. \quad (3.78)$$

Так, операторний вхідний опір послідовного контуру R, L, C , який живиться від джерела напруги, згідно з виразом (3.21) становить

$$Z_{\text{вх}}(p) = R + pL + \frac{1}{pC}.$$

Приведення цієї рівності до загального знаменника дозволяє записати:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{LCp^2 + pRC + 1}{pC}, \quad (3.79)$$

звідки, прирівнявши праву частину до нуля, отримують характеристичне рівняння: $LCp^2 + pRC + 1 = 0$, яке збігається з формулою (1.45), знайденою класичним методом (див. розділ 1).

Якщо коло живиться від джерела струму, тоді зображення дії $F_1(p) = I(p)$, а відгуком є напруга на затискачах узагальненої схеми двополюсника (рис. 3.10, б):

$$F_2(p) = U(p) = \frac{I(p)}{Y_{\text{вх}}(p)},$$

тоді

$$H(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{1}{Y_{\text{вх}}(p)}, \quad (3.80)$$

звідки $\frac{1}{Y_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{V(p)}$ і характеристичне рівняння матиме вигляд

$$Y_{\text{вх}}(p) = 0. \quad (3.81)$$

Отже, рівняння (3.78), (3.81) дозволяють методом еквівалентних перетворень знайти операторні вхідні функції кола $Z_{\text{вх}}(p)$ чи $Y_{\text{вх}}(p)$ (залежно від типу джерела) і, прирівнявши їх до нуля, отримати характеристичне рівняння кола.

3.8. Операторна вхідна функція кола, її властивості

Операторні вхідні функції (ОВФ) — окремих випадок операторних передатних функцій, і їм притаманні деякі властивості ОПФ.

1. ОВФ теж є ДРФ комплексної змінної p (наприклад, див. формули (3.29), (3.79)). Отже, операторний вхідний опір двополюсника (рис. 3.10, б) можна записати у вигляді:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (3.82)$$

де $M(p)$ і $N(p)$ — раціональні функції комплексної змінної p .

У пасивного двополюсника операторна вхідна провідність — функція, обернена опорю:

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{N(p)}{M(p)}. \quad (3.83)$$

2. Оскільки функції $Z_{\text{вх}}(p)$ і $Y_{\text{вх}}(p)$ — окремих випадок ОПФ, знаменник яких — поліном Гурвіца, можна зробити висновок, що чисельник і знаменник ОВФ $M(p)$ і $N(p)$ також є поліномами Гурвіца.

Виходячи з властивостей поліномів Гурвіца, формулюють третю і четверту властивості ОВФ.

3. Коефіцієнти поліномів чисельника a_k і знаменника b_k ОВФ — дійсні додатні числа.

4. Нулі та полюси ОВФ розташовані в лівій півплощині комплексної площини.

Такі функції з переліченими вище властивостями для кіл із втратами належать до класу *додатних дійсних функцій (ДДФ)* комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$. Ознаками ДДФ є рівність нулю уявної частини за умови $\omega = 0$ і додатність дійсної частини за умови $\sigma > 0$.

Ілюстрацією даного твердження є підстановка до виразу (3.21) змінної $p = \sigma + j\omega$:

$$Z_{\text{вх}}(p) = R + (\sigma + j\omega)L + \frac{1}{(\sigma + j\omega)C}.$$

Взяття дійсної й уявної частин дає:

$$\text{Re}[Z_{\text{вх}}(p)] = R + \sigma L + \frac{\sigma}{|p|^2 C}; \quad (3.84)$$

$$\text{Im}[Z_{\text{вх}}(p)] = \omega L - \frac{\omega}{|p|^2 C}, \quad (3.85)$$

де $|p|^2 = \sigma^2 + \omega^2$.

Отже, з виразу (3.84) видно, що $\text{Re}[Z_{\text{вх}}(p)] > 0$ при $\sigma > 0$ (ОВФ додатна), а з формули (3.85) випливає, що $\text{Im}[Z_{\text{вх}}(p)] = 0$ при $\omega = 0$ (ОВФ дійсна).

5. Вважається, що точка $p \rightarrow \infty$ належить уявній осі, їй відповідає простий нуль або полюс. За умови, що $p \rightarrow \infty$, співвідношення (3.76) набуває вигляду

$$H(p) \rightarrow k_1 p^{m-n}, \quad k_1 = \frac{a_m}{b_n}. \quad (3.86)$$

При цьому можливі такі випадки:

а) $m - n = 1$, що відповідає простому полюсу в нескінченності; наприклад, коли ОПФ збігається з операторним вхідним опором: $H(p) = Z_{\text{вх}}(p) = k_1 p$, а характер кола — індуктивний;

б) $m - n = -1$, що відповідає простому нулю в нескінченності; ОПФ становить: $H(p) = Z_{\text{вх}}(p) = k_1 / p$; характер кола — ємнісний;

в) $m - n = 0$, вхідна функція в нескінченності не має нулів і полюсів; характер кола — резистивний ($k_1 > 0$).

Отже, аналіз значень величини $(m - n)$ дозволяє сформулювати ще одну властивість: максимальні степені чисельника і знаменника ОВФ не можуть відрізнятись більше, ніж на одиницю.

6. Ця властивість стосується кіл, втрати в яких прямують до нуля.

При зменшенні втрат у колі зменшується значення дійсної частини полюсів і вони наближаються до уявної осі комплексної площини. Коли ж втратами кола можна знехтувати, полюси кола будуть розташовані безпосередньо на уявній осі. Слід зазначити, що полюси, розташовані на уявній осі, не можуть бути кратними. Оскільки полюси ОВФ збігаються з коренями характеристичного полінома, вони обумовлюють характер вільних процесів. За наявності кратних коренів ($p_{1,2} = j\omega_1$) вільні коливання визначаються як $(A_1 + A_2 t)e^{j\omega t}$ і з часом зростають, що неприйнятно для стійких кіл. Ці висновки стосуються не лише полюсів, але й нулів ОВФ (на підставі першої властивості).

Отже, ДДФ не мають на уявній осі кратних нулів і полюсів.

ОВФ кола, яке не має втрат, називається *реактансною*, оскільки коло містить тільки реактивні елементи L, C . Реактансні функції належать до класу ДДФ, але утворюють підклас з додатковими властивостями.

Оскільки всі нулі та полюси реактансних функцій розташовані на уявній осі, вони чергуються. Невиконання цієї умови призвело б до утворення кратних нулів або полюсів, що неможливо. Чергування нулів і полюсів обумовлює зростаючий характер реактивного вхідного опору (провідності). Особливість реактансних функцій полягає в тому, що до виразів (3.82), (3.83) входять не поліноми Гурвіца, а їх парні (непарні) частини. Якщо $M(p)$ — парна частина полінома Гурвіца, то $N(p)$ — непарна і навпаки, що й обумовлює відповідне розташування коренів цих поліномів на уявній осі, а також відмінність на одиницю їхніх максимальних степенів.

3.9. Зв'язок операторної передатної функції з комплексною передатною функцією.

Амплітудно-квадратична характеристика кола, її властивості

Комплексна змінна $p = \sigma + j\omega$ має значення комплексної частоти. Вона обумовлює характер коливань, що відтворюють функцію дійсної змінної t . Згідно з виразом (3.40) функція $F(p)e^{pt} dp$ для комплексно-спряжених значень p утворює коливання з нескінченно малою амплітудою, яке змінюється в часі за законом

$$2|F(p)dp|e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$

і може зростати ($\sigma > 0$) або згасати ($\sigma < 0$). Якщо $\sigma = 0$, комплексна частота стає уявною величиною $p = j\omega$ і обернене перетворення Лапласа переходить у перетворення Фур'є, яке дозволяє відтворити функцію дійсної змінної у вигляді незгасаючих синусоїдних (гармонічних) коливань. При синусоїдній дії характеристикою кола є комплексна передатна функція. Отже, ОПФ перетворюється у КПФ за умови $p = j\omega$

$$H(p)|_{p=j\omega} = H(j\omega), \quad (3.87)$$

і навпаки,

$$H(j\omega)|_{j\omega=p} = H(p). \quad (3.88)$$

Із співвідношення (3.87) виходить:

$$|H(p)|_{p=j\omega} = H(\omega).$$

Тобто АЧХ $H(\omega)$ збігається зі значеннями поверхні $|H(p)|$, зображеної на рис. 3.11, а за умови $p = j\omega$ ($\delta = 0$). Значення АЧХ належать кривій, яка є вертикальним перерізом поверхні $|H(p)|$ площиною, що проходить через вісь $j\omega$. На рис. 3.11, б показано графік АЧХ,

яка є парною функцією ω . Для додатних значень частоти розглядається права (відносно нуля) частина графіка.

На підставі виразів (3.70), (3.87) КПФ матиме вигляд

$$H(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{V(j\omega)}, \quad (3.89)$$

де $A(j\omega) = A(p)|_{p=j\omega}$; $V(j\omega) = V(p)|_{p=j\omega}$, а $V(p)$ — поліном Гурвіца.

Наприклад, для кола третього порядку поліном Гурвіца становить

$$V(p) = b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0. \quad (3.90)$$

За умови $p = j\omega$ $V(j\omega) = -j\omega b_3 \omega^2 - b_2 \omega^2 + j\omega b_1 + b_0$, або

$$V(j\omega) = V_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega V_{\text{Im}}(\omega^2), \quad (3.91)$$

де $V_{\text{Re}}(\omega^2) = b_0 - b_2 \omega^2$; $V_{\text{Im}}(\omega^2) = b_1 - b_3 \omega^2$.

Поліноми, які утворюють дійсну й уявну частини $V(j\omega)$, — парні функції дійсної змінної ω .

Якщо максимальні степені поліномів чисельника і знаменника збігаються (наприклад, $m = n = 3$), аналогічно виразу (3.91) можна записати:

$$A(j\omega) = A_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega A_{\text{Im}}(\omega^2). \quad (3.92)$$

Підстановка до формули (3.89) виразів (3.91), (3.92) дає

$$H(j\omega) = \frac{A_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega A_{\text{Im}}(\omega^2)}{V_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega V_{\text{Im}}(\omega^2)}. \quad (3.93)$$

Тоді аналітичний вираз АЧХ матиме вигляд

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{A_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 A_{\text{Im}}^2(\omega^2)}}{\sqrt{V_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 V_{\text{Im}}^2(\omega^2)}}. \quad (3.94)$$

Вираз (3.94) є ірраціональною функцією частоти ω , що ускладнює розв'язання задачі синтезу. Тому розглядають квадрат модуля АЧХ, який є раціональною функцією ω

$$H^2(\omega) = \frac{A_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 A_{\text{Im}}^2(\omega^2)}{V_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 V_{\text{Im}}^2(\omega^2)}. \quad (3.95)$$

Функція $H^2(\omega)$ називається *амплітудно-квадратичною характеристикою* (АКХ) і має такі основні ознаки:

1) АКХ — це ДРФ дійсної змінної ω з дійсними додатними коефіцієнтами;

2) АКХ — парна функція дійсної змінної ω

3) граничні значення АКХ скінченні та невід'ємні.

АКХ можна визначити як добуток двох комплексно-спряжених функцій:

$$H^2(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega). \quad (3.96)$$

Заміна $j\omega = p$ згідно з виразом (3.88) призводить до співвідношення:

$$H^2(\omega) \Big|_{j\omega=p} = |H(p)|^2. \quad (3.97)$$

Тоді, зважаючи на формулу (3.96), можна записати:

$$|H(p)|^2 = H(p)H(-p). \quad (3.98)$$

На рис. 3.12 зображена карта нулів і полюсів функції $H(p)$, які лежать у лівій півплощині комплексної площини p . Нулі та полюси функції $H(-p)$ у цьому випадку будуть розташовані праворуч від уявної осі. Функція, яка є квадратом модуля ОПФ, містить усі нулі та полюси функцій $H(p)$ і $H(-p)$. Прийнято, що нулі та полюси функції $|H(p)|^2$ мають квадратну симетрію або утворюють квадруплет.

Функція $|H(p)|^2$ — парна ДРФ комплексної змінної p з дійсними коефіцієнтами. А функція $H^2(\omega)$ — парна ДРФ дійсної змінної ω з дійсними коефіцієнтами.

Вона пов'язана з передатною функцією кола за потужністю, яку можна ввести як

$$H_p(\omega) = \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вих}}^2 / R_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}^2 / R_{\text{вх}}},$$

або

$$H_p(\omega) = k_R H_U^2(\omega), \quad (3.99)$$

де константа $k_R = R_{\text{вх}} / R_{\text{вих}}$ визначається відношенням вхідного і вихідного опорів кола.

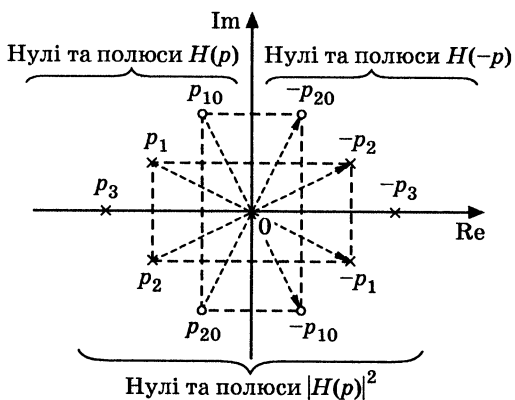


Рис. 3.12. Карта нулів і полюсів функцій $H(p)$, $H(-p)$, $|H(p)|^2$

З рівності (3.99) виходить висновок, що передатна функція кола за потужністю збігається з квадратом модуля КПФ за напругою $H_U(\omega)$ з точністю до константи. Відношення потужностей $P_{\text{вих}} / P_{\text{вх}}$ визначають у децибелах (дБ), які є логарифмічними одиницями:

$$H_p(\omega), \text{ дБ} = 10 \lg \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = 10 \lg H_U^2(\omega), \quad (3.100)$$

де для спрощення взято $k_R = 1$.

Отже, враховуючи вимоги до $H_p(\omega)$, дБ, можна визначити $|H(p)|^2$ за формулою (3.97). Оскільки $H_p(\omega)$ — дійсна функція, перехід до функції $|H(p)|^2$ комплексної змінної p можна здійснити підстановкою: $\omega = p/j$. Щоб перейти до ОПФ, слід визначити нулі та полюси функції $|H(p)|^2$ і взяти тільки ті, що лежать у лівій півплощині. Такий спосіб дозволяє отримати схемні структури певного типу кіл.

3.10. Мініміально- та немініміально-фазові кола

Коло з ОПФ (3.70), нулі якої розташовані в лівій півплощині та на її межі — уявній осі, має назву кола *мініміально-фазового типу*. Коло, частина нулів ОПФ якого лежить у правій півплощині, називається колом *немініміально-фазового типу*. Доцільність таких назв пояснюється нижче.

Для кола третього порядку поліном Гурвіца (3.90) можна переписати у вигляді

$$V(p) = b_3(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3).$$

У випадку одного дійсного $p_1 = -\delta_1$ і двох комплексно-спряжених коренів $p_2, p_3 = -\delta \pm j\omega_{\text{вл}}$, розташованих у лівій півплощині, та за умови $p = j\omega$ можна записати:

$$V(j\omega) = b_3(j\omega + \delta_1)[(j\omega)^2 + j\omega 2\delta + \delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2],$$

або

$$V(j\omega) = b_3(j\omega + \delta_1)(j\omega 2\delta + \delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2 - \omega^2). \quad (3.101)$$

Аргумент $V(j\omega)$ становить

$$\arg[V(j\omega)] = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega), \quad (3.102)$$

де $\varphi_1(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\delta_1}$, $\varphi_2(\omega) = \arctg \frac{2\delta\omega}{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2 - \omega^2}$.

Граничні значення функцій $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ мають такий вигляд:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_1(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_1(\omega) = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_2(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_2(\omega) = \pi.$$

Граничне значення функції $\varphi_2(\omega)$ при нескінченній частоті обумовлене тим, що $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\delta^2 + \omega_{\text{вд}}^2 - \omega^2) \rightarrow -\infty$, тобто дійсна частина функції у дужках виразу (3.101)

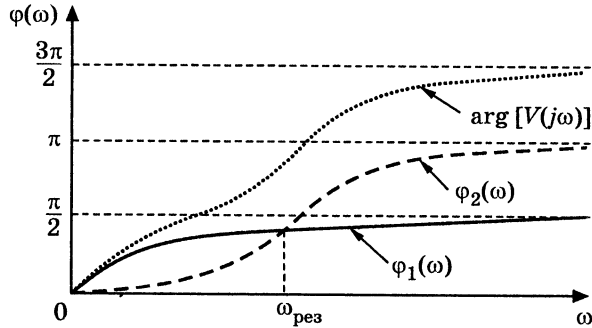


Рис. 3.13. Частотні залежності $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\arg[V(j\omega)]$

є від'ємною. Графіки частотних залежностей функцій $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\arg[V(j\omega)]$ зображені на рис. 3.13. Вони мають зростаючий характер.

Для кола третього порядку при наближенні частоти до нескінченності аргумент $V(p)$ прямує до величини $3\pi/2$. Загалом, якщо поліном Гурвіца має порядок n , його аргумент зростає від нуля до границі:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg[V(p)] = n \frac{\pi}{2}. \quad (3.103)$$

Чисельник кола мінімально-фазового типу $A(p)$ має корені (вони ж є нулями $H(p)$) у лівій півплощині, як і поліном $V(p)$ (рис. 3.14, а). Отже, $A(p)$ — теж поліном Гурвіца, його корені показані на рис. 3.14, б для $n = 5$.

У виразі для ОПФ кола немінімально-фазового типу

$$H_1(p) = \frac{A_1(p)}{V(p)} \quad (3.104)$$

знаменник $V(p)$ такий самий, як у співвідношенні (3.70), а чисельник $A_1(p)$ має корені, розташовані як ліворуч, так і праворуч від уявної осі.

Нехай корені, які розташовані ліворуч і збігаються з частиною коренів $A(p)$, утворюють поліном $A_0(p)$, а корені, розташовані

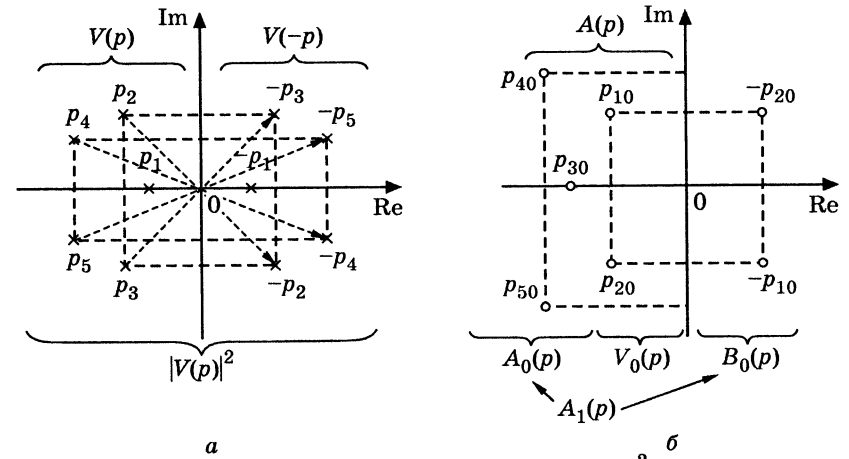


Рис. 3.14. Корені поліномів: а — $V(p)$, $V(-p)$, $|V(p)|^2$; б — $A(p)$, $A_1(p)$

праворуч, — поліном $B_0(p)$ (див. рис. 3.14, б). Решта коренів $A(p)$, що не ввійшла до $A_0(p)$, утворює поліном $V_0(p)$, тоді

$$A(p) = A_0(p)V_0(p); \quad (3.105)$$

$$A_1(p) = A_0(p)B_0(p). \quad (3.106)$$

Якщо для спрощення вважати поліноми $B_0(p)$ і $V_0(p)$ спряженими ($B_0(p) = V_0(-p)$), тоді

$$A_1(p) = A_0(p)V_0(-p). \quad (3.107)$$

Підстановка виразів (3.106) і (3.107) до формули (3.104) і подальші перетворення дозволяють записати:

$$H_1(p) = \frac{A_0(p) \cdot V_0(-p)}{V(p)} \frac{V_0(p)}{V_0(p)} = \frac{A_0(p)V_0(p)}{V(p)} \frac{V_0(-p)}{V_0(p)}.$$

Тоді на підставі виразу (3.105) справедливе співвідношення

$$H_1(p) = \frac{A(p)}{V(p)} \frac{V_0(-p)}{V_0(p)},$$

а з урахуванням формули (3.70)

$$H_1(p) = H(p) \frac{V_0(-p)}{V_0(p)}. \quad (3.108)$$

Заміна в останньому виразі p на $j\omega$ приводить до співвідношення

$$H_1(j\omega) = H(j\omega) \frac{V_0(-j\omega)}{V_0(j\omega)}, \quad (3.109)$$

яке встановлює зв'язок між КПФ кіл немінімально- і мінімально-фазового типу $H_1(j\omega)$ і $H(j\omega)$ відповідно. Оскільки модуль дробу у формулі (3.109) дорівнює одиниці, справедлива рівність:

$$H_1(\omega) = H(\omega). \quad (3.110)$$

Як видно з виразу (3.110), АЧХ кіл немінімально- і мінімально-фазового типів за умов (3.105) і (3.107) однакові. З рівності (3.109) випливає, що аргументи функцій $H_1(j\omega)$ і $H(j\omega)$, які визначають ФЧХ відповідних кіл, відрізняються між собою аргументом дробу $V_0(-j\omega)/V_0(j\omega)$:

$$\arg[H_1(j\omega)] = \arg[H(j\omega)] + \arg\left[\frac{V_0(-j\omega)}{V_0(j\omega)}\right], \quad (3.111)$$

який можна знайти за формулою:

$$\arg\left[\frac{V_0(-j\omega)}{V_0(j\omega)}\right] = \arg[V_0(-j\omega)] - \arg[V_0(j\omega)]. \quad (3.112)$$

Згідно з виразом (3.102) аргумент полінома $V_0(j\omega)$ є непарною функцією:

$$\arg[V_0(-j\omega)] = -\arg[V_0(j\omega)].$$

Тоді вираз (3.111) можна переписати так:

$$\arg[H_1(j\omega)] = \arg[H(j\omega)] - 2\arg[V_0(j\omega)]. \quad (3.113)$$

Тобто при однакових АЧХ фазочастотна характеристика кола немінімально-фазового типу $\arg[H_1(j\omega)]$ відрізняється від ФЧХ кола мінімально-фазового типу $\arg[H(j\omega)]$ на величину $-2\arg[V_0(j\omega)]$.

Крива $\arg[V(j\omega)]$, зображена на рис. 3.13, зростає із збільшенням частоти ω (слід зауважити, що поліноми $V(p)$ і $V_0(p)$ відрізняються порядком, який впливає тільки на швидкість такого зростання). Тоді графік залежності $-2\arg[V_0(j\omega)]$ матиме спадний характер (подібно графікам ФЧХ кіл мінімально-фазового типу, які розглядалися раніше).

З формули (3.113) можна зробити висновок, що ФЧХ кіл немінімально-фазового типу в інтервалі частот $\omega > 0$ спадатимуть швидше порівняно з ФЧХ кіл мінімально-фазового типу, тобто немінімально-фазові кола вносять більший фазовий зсув. Саме ця обставина й обумовила відповідні назви кіл.

На підставі співвідношення (3.113) і з урахуванням границі (3.103) різниця між ФЧХ кіл немінімально- і мінімально-фазового типів для нескінченної частоти становитиме

$$\arg[H_1(j\infty)] = \arg[H(j\infty)] - 2k\frac{\pi}{2} = \arg[H(j\infty)] - k\pi, \quad (3.114)$$

де k — кількість нулів ОПФ у правій півплощині.

На відміну від кіл мінімально-фазового типу, які є невірноваженими прохідними чотириполіусниками (тобто в парі вхідних і вихідних затискачів є один спільний), кола немінімально-фазового типу — це мостові чотириполіусники або їх еквіваленти — прохідні чотириполіусники з T -подібними перекритими структурами. Щоб реалізувати немінімально-фазові кола, потрібно вдвічі більше реактивних елементів, ніж для мінімально-фазових.

В окремому випадку ОПФ немінімально-фазових кіл можна записати у вигляді:

$$H_1(p) = H_0 \frac{V_0(-p)}{V_0(p)}. \quad (3.115)$$

АЧХ такого кола становить $H_1(\omega) = H_0$, тобто не змінюється, а ФЧХ визначається як

$$\arg[H_1(j\omega)] = -2\arg[V_0(j\omega)]. \quad (3.116)$$

Якщо $V_0(p)$ є поліномом Гурвіца другого порядку, немінімально-фазове коло має частотні характеристики, графіки яких зображені на рис. 3.15, а. На рис. 3.15, б показана карта нулів і полюсів цього кола, причому його нулі — спряжені полюсам.

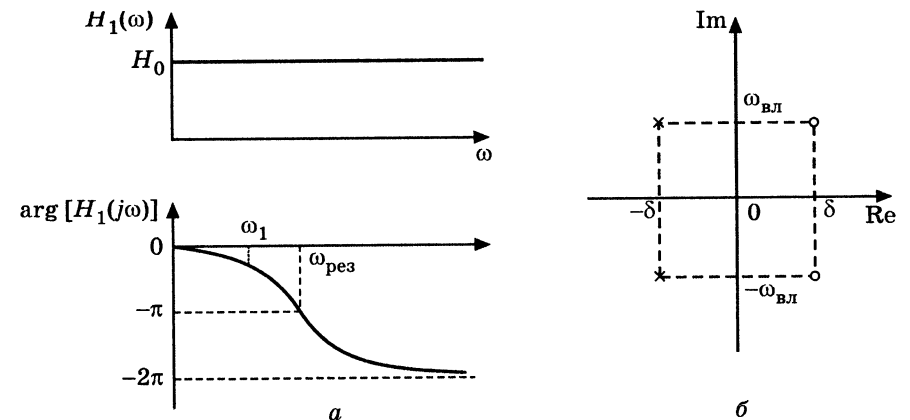


Рис. 3.15. Немінімально-фазове коло:

а — частотні характеристики; б — нулі та полюси $H_1(p)$ (3.115)

3.11. Операторна передатна функція неспотворювального кола

Вважають, що коло не вносить спотворення, якщо відгук $f_2(t)$ у масштабі повторює дію $f_1(t)$ із затримкою на час t_0 (рис. 3.16):

$$f_2(t) = H_0 f_1(t - t_0), \quad (3.117)$$

де H_0 — постійна величина.

Переведення виразу (3.117) у простір зображень з урахуванням властивості перетворення Лапласа (табл. 3.2, п. 4) приводить до рівності:

$$F_2(p) = H_0 F_1(p) e^{-pt_0}. \quad (3.118)$$

Підстановка зображення (3.118) до виразу (3.71) дозволяє отримати ОПФ неспотворювального кола:

$$H(p) = H_0 e^{-pt_0}. \quad (3.119)$$

Заміна $p = j\omega$ дозволяє перейти до КПФ неспотворювального кола:

$$H(j\omega) = H_0 e^{-j\omega t_0},$$

частотні характеристики якого визначаються модулем і аргументом $H(j\omega)$:

$$\begin{cases} H(\omega) = H_0; \\ \arg [H(j\omega)] = -\omega t_0. \end{cases}$$

Графіки частотних характеристик неспотворювального кола зображені на рис. 3.17.

Неспотворювальне коло в діапазоні частот $0 \dots \omega_1$ має незмінну АЧХ і лінійну ФЧХ, причому із збільшенням кута нахилу ФЧХ зростає час затримки відгуку відносно дії ($\text{tg } \varphi \sim t_0$). У реального кола частотні характеристики, починаючи з частоти ω_1 , відрізняються від ідеальних. Щодо частотних характеристик немінимально-фазового кола (рис. 3.15, а), вони теж відповідають умовам

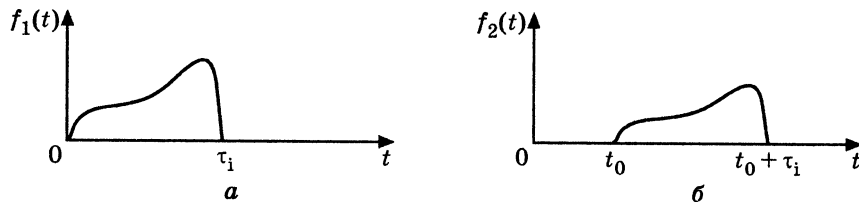


Рис. 3.16. Часові залежності в неспотворювальному колі:
а — дії; б — відгуку

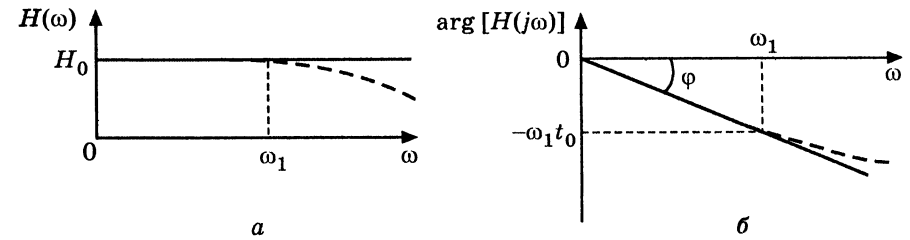


Рис. 3.17. Частотні характеристики неспотворювального кола:
а — АЧХ; б — ФЧХ

неспотвореної передачі в діапазоні частот $0 \dots \omega_1$, де ФЧХ майже лінійна. Тому коло з передатною функцією (3.119) ще має назву *лінії затримки*.

3.12. Зв'язок операторної передатної функції з часовими характеристиками

Диференціальне рівняння (3.63) для кола другого порядку пов'язує дію $f_1(t)$ з відгуком $f_2(t)$. Якщо дія належить до простору оригіналів, має виконуватись умова (3.69), яку можна переписати згідно з формулою (3.67) так:

$$\begin{aligned} B_0(p) - A_0(p) &= \\ = f_2'(+0)b_2 + f_2(+0)(b_2 p + b_1) - f_1'(+0)a_2 - f_1(+0)(a_2 p + a_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Прирівнявши в рівнянні (3.120) коефіцієнти при однакових степенях p нулю, можна записати:

$$\begin{cases} b_2 f_2(+0) = a_2 f_1(+0); \\ b_2 f_2'(+0) + b_1 f_2(+0) = a_2 f_1'(+0) + a_1 f_1(+0). \end{cases} \quad (3.121)$$

Розв'язання цієї системи відносно початкових значень відгуку дає

$$\begin{cases} f_2(+0) = k_0 f_1(+0); \\ f_2'(+0) = k_0 f_1'(+0) + k_1 f_1(+0), \end{cases} \quad (3.122)$$

де $k_0 = a_2/b_2$, $k_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)/b_2^2$.

Якщо диференціальне рівняння (3.63) продиференціювати і перевести у простір зображень, аналогічно можна визначити:

$$f_2''(+0) = k_0 f_1''(+0) + k_1 f_1'(+0) + k_2 f_1(+0), \quad (3.123)$$

де $k_2 = (a_0 b_2 - a_2 b_0)/b_2^2 - k_1 b_1/b_0$.

Початкові значення часових характеристик та їх похідних

Часові характеристики та їх похідні	Розрахункові співвідношення	Примітка	
		$n = 1$	$n = 2$
$g(+0)$	k_0	$k_0 = \frac{a_1}{b_1}$	$k_0 = \frac{a_2}{b_2}$
$g'(+0) = h(+0)$	$k_0 \delta(t) + k_1$	$k_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1^2}$	$k_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2^2}$
$g''(+0) = h'(+0)$	$k_0 \delta'(t) + k_1 \delta(t) + k_2$	$k_2 = \frac{b_0}{b_1} k_1$	$k_2 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2^2} - \frac{b_1}{b_2} k_1$

На підставі формули (3.124) можна зробити висновок, що перехідна характеристика — це оригінал, зображення якого є відношенням ОПФ до оператора p , тобто

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right]. \quad (3.125)$$

У теорії функцій комплексної змінної для відповідності $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ доведені граничні співвідношення (див. табл. 3.2, п. 6):

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} pF(p) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} f(t). \quad (3.126)$$

Для $G(p)$ вираз (3.126) записують у вигляді

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} pG(p) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} g(t),$$

або з урахуванням співвідношення (3.124)

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} H(p) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} g(t). \quad (3.127)$$

Рівність (3.127) можна переписати у вигляді двох рівнянь, попередньо замінивши p на $j\omega$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t); \quad (3.128)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t). \quad (3.129)$$

Формула (3.128) свідчить, що перехідна характеристика в установленому режимі ($t \rightarrow \infty$) має постійне значення, якщо АЧХ кола при

Отже, як видно з рівнянь (3.122), (3.123), відгуки, що належать до простору оригіналів, мають початкові значення, зумовлені початковими значеннями дії та коефіцієнтами диференціального рівняння. Аналогічно визначають початкові значення відгуку для кіл інших порядків. У табл. 3.4 наведені початкові значення відгуку та його похідних у колах першого і другого порядків ($n = 1, 2$).

Таблиця 3.4

Початкові значення відгуку та його похідних

Відгук і його похідні	Розрахункові співвідношення	Примітка	
		$n = 1$	$n = 2$
$f_2(+0)$	$k_0 f_1(+0)$	$k_0 = \frac{a_1}{b_1}$	$k_0 = \frac{a_2}{b_2}$
$f_2'(+0)$	$k_0 f_1'(+0) + k_1 f_1(+0)$	$k_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1^2}$	$k_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2^2}$
$f_2''(+0)$	$k_0 f_1''(+0) + k_1 f_1'(+0) + k_2 f_1(+0)$	$k_2 = \frac{b_0}{b_1} k_1$	$k_2 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2^2} - \frac{b_1}{b_2} k_1$

Якщо дією є одинична функція $f_1(t) = 1(t)$, відгуком, за визначенням, виявиться перехідна характеристика $f_2(t) = g(t)$. Тоді, з урахуванням зв'язку між перехідною й імпульсною характеристиками, відповідно можна записати:

$$f_1(+0) = 1; f_1'(+0) = \delta(t); f_1''(+0) = \delta'(t);$$

$$f_2(+0) = g(+0); f_2'(+0) = g'(+0) = h(+0); f_2''(+0) = g''(+0) = h'(+0).$$

Початкові значення перехідної й імпульсної характеристик та їх похідних, записані на підставі співвідношень (табл. 3.4), зведені до табл. 3.5.

Зрозуміло, що вирази, які визначають початкові значення, спрощуються, якщо дорівнюють нулю деякі коефіцієнти правої частини диференціального рівняння кола.

Між зображеннями часових характеристик і ОПФ існує певний зв'язок. З відгуком на дію $f_1(t) = 1(t)$; $F_1(p) = 1/p$ пов'язана, за визначенням, перехідна характеристика — вони чисельно збігаються, тобто $f_2(t) = g(t)$; $F_2(p) = \mathcal{L}[g(t)]$. Підстановка зображень відгуку і дії до виразу (3.71) призводить до співвідношення:

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}[g(t)]}{1/p}, \text{ або } \mathcal{L}[g(t)] = G(p) = \frac{H(p)}{p}. \quad (3.124)$$

$\omega \rightarrow 0$ відмінна від нуля (коло «пропускає» постійний струм). Рівність (3.129) означає наявність стрибка у відгуку на одиничну функцію (або ступінчасту дію), якщо АЧХ ненульова при $\omega \rightarrow \infty$ (тобто коло «пропускає» коливання верхніх частот).

Отже, рівняння (3.128) і (3.129) встановлюють зв'язок між КПФ та перехідною характеристикою на межах частотного і часового діапазонів. Ці вирази відповідають аналогічним співвідношеннями (2.7), (2.8), отриманим часовим методом у розділі 2.

Частотні та часові характеристики пов'язані між собою не лише на межах відповідних діапазонів. Якщо дією є дельта-функція $f_1(t) = \delta(t)$, відповідно $F_1(p) = 1$, відгук чисельно збігається з імпульсною характеристикою: $f_2(t) = h(t)$, а його зображення $F_2(p) = \mathcal{L}[h(t)]$. Підстановка відповідних зображень до виразу (3.71) дає

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}[h(t)]}{1}, \text{ або } H(p) = \mathcal{L}[h(t)]. \quad (3.130)$$

Рівність (3.130) свідчить, що імпульсна характеристика є оригіналом ОПФ:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)],$$

або згідно з виразом (3.40):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(p)e^{pt} dp. \quad (3.131)$$

Якщо комплексну змінну $p = \sigma + j\omega$ перетворити в уявну: $p = j\omega$ ($\sigma = 0$), $dp = d(j\omega) = j d\omega$, тоді вираз (3.131) набуває вигляду:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Оскільки інтегрування тепер необхідно виконувати за дійсною змінною ω , межі інтегрування позначають як дійсні:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.132)$$

Отже, імпульсна характеристика кола визначається як обернене перетворення Фур'є від КПФ, відповідно КПФ — це пряме перетворення Фур'є від імпульсної характеристики:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.133)$$

У виразі (3.133) нижня межа інтегрування — нульова, оскільки $h(t) = 0$ при $t < 0$. Враховуючи, що пряме перетворення Фур'є від функції $f(t)$ визначає її спектральну густину, можна стверджувати, що КПФ $H(j\omega)$ — спектральна густина імпульсної характеристики $h(t)$. Співвідношення (3.132) дозволяє однозначно визначити імпульсну характеристику $h(t)$, якщо відома частотна характеристика $H(j\omega)$ і навпаки, знайти $H(j\omega)$ за формулою (3.133) або згідно з даними табл. 3.1 за умови $p = j\omega$.

Приклад 3.11. Визначити граничні співвідношення між перехідною й амплітудно-частотною характеристиками в колі (рис. 3.2), якщо дія — напруга $u(t)$, відгук — напруга $u_C(t)$.

Розв'язання. У прикладі 3.5 знайдено зображення відгуку $F_2(p) = U_C(p)$ за умови, що зображення дії $F_1(p) = U_0/p$. Якщо підставити зображення відгуку і дії до формули (3.71), отримаємо ОПФ:

$$H(p) = \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2}.$$

На підставі виразу (3.88) КПФ становитиме:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{(j\omega)^2 + 2\delta j\omega + \omega_{\text{рез}}^2}. \quad (3.134)$$

З формули (3.134) видно, що за умови нульової частоти $H(0) = 1$, а при $\omega \rightarrow \infty$ значення $H(\infty) = 0$. У прикладі 3.5 також знайдено відгук $u_C(t)$ на дію $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$. Якщо покласти, що $U_0 = 1$ В, відгук (3.52) чисельно збігатиметься з перехідною характеристикою:

$$g(t) = 1 - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t - \psi), \quad (3.135)$$

де $\psi = \arctg(\delta/\omega_{\text{вл}})$.

Зазначимо, що вираз (3.135) збігається з результатами, отриманими в попередньому розділі (див. табл. 2.3).

Визначимо граничні значення часової (перехідної) характеристики. Скориставшись відомою тригонометричною формулою, отримаємо:

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \psi}} = \frac{\omega_{\text{вл}}}{\sqrt{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2}} = \frac{\omega_{\text{вл}}}{\omega_{\text{рез}}}.$$

Тоді $g(0) = 1 - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} \cdot \cos \psi = 0$, що збігається зі значенням $H(\infty)$ і підтверджує співвідношення (3.129).

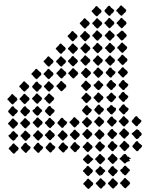
Якщо час прямує до нескінченності, виконується співвідношення $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} = 0$, і тоді за формулою (3.135) значення $g(\infty) = 1$, що збігається із значенням $H(0)$, а отже, підтверджує формулу (3.128).

Розглянутий приклад підкреслює зв'язок частотних і часових характеристик кола і підтверджує висновок, отриманий вище класичним (п. 1.3.3) і часовим методами (п. 2.3.1): чим вужча (ширша) смуга частот, які пропускаються колом, тим повільніше (швидше) відбуваються в ньому перехідні процеси.

3.13. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

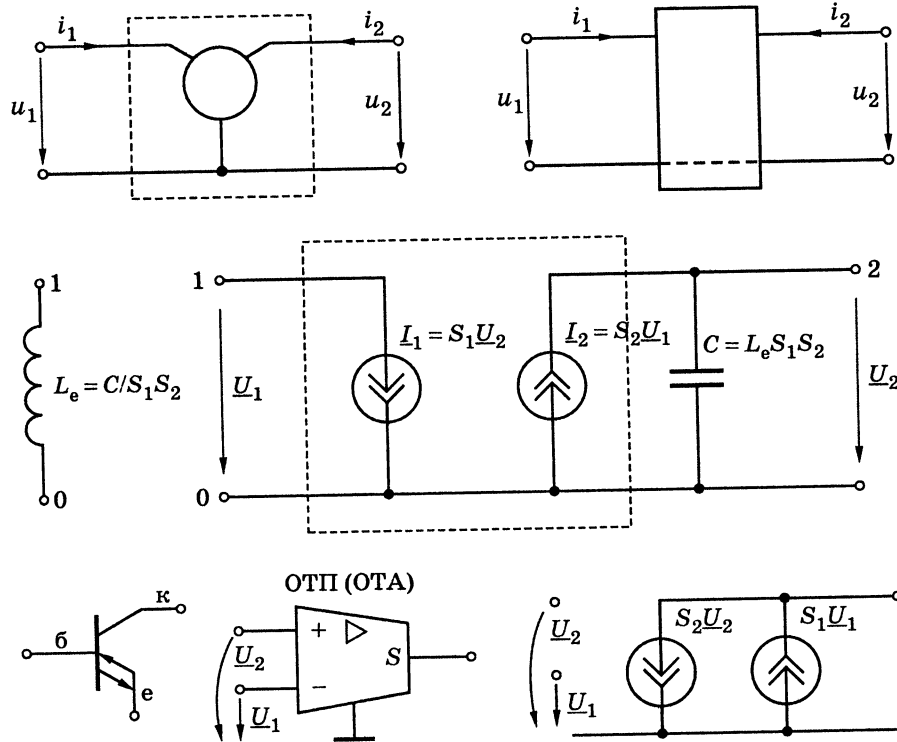
1. У чому полягає ідея операторного методу? Які функції можуть бути перетворені за Лапласом?
2. Записати формулу прямого перетворення Лапласа, назвати його основні властивості.
3. Які існують способи переходу від оригіналу до зображення? Сформулювати основні теореми щодо властивостей перетворення Лапласа.
4. Які існують способи переходу від зображення до оригіналу? Пояснити, як визначити оригінал, користуючись способом розкладання зображення на прості дроби.
5. Знайти оригінали зображень: $\frac{3p}{(p^2+1)(p^2+4)}$; $\frac{p+1}{p^2+2p}$; $\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$.
Відповідь: $\cos t - \cos 2t$; $\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$; $\frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t$.
6. Сформулювати закони Ома і Кірхгофа в операторній формі. Пояснити поняття операторних опорів та провідності кола. Як визначити операторний опір розгалуженого кола?
7. Як врахувати ненульові початкові умови, переходячи до операторної схеми заміщення кола?
8. Електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 2 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$, у момент $t = 0$ підключається до джерела ЕРС $e(t) = t \text{ В}$. Визначити струм $i(t)$.
Відповідь: $i(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} \text{ А}$.
9. Електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, у момент $t = 0$ підключається до джерела ЕРС $e(t) = 10e^{-4t} \text{ В}$. Визначити струм $i(t)$.
Відповідь: $i(t) = 1,04(e^{-4t} - e^{-100t}) \text{ А}$.
10. Електричне коло складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 1 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ мкФ}$. Визначити струм $i(t)$, якщо до кола при $t = 0$ підключається вхідна напруга $u(t) = 25(1 - e^{-4t}) \text{ мВ}$.
Відповідь: $i(t) = 1,04(e^{-4t} - e^{-100t}) \text{ мА}$.

11. Коло, яке складається з послідовно з'єднаних опорів $R = 2 \text{ Ом}$, індуктивності $L = 1 \text{ Гн}$ та ємності $C = 0,5 \text{ Ф}$, підключається при $t = 0$ до джерела ЕРС $e(t) = \sin t \text{ В}$. Визначити струм у колі.
Відповідь: $i(t) = 0,2[\sqrt{5} \cos(t - 63,4^\circ) - \sqrt{10} e^{-t} \cos(t - 71,6^\circ)] \text{ А}$.
12. Знайти оригінал зображення $\frac{p^2 - p + 10}{(p+1)^2(p^2+100)}$.
Відповідь: $0,119te^{-t} - 0,027e^{-t} + 0,027 \cos 10t + 0,086 \sin 10t$.
13. У колі, складеному з опорів 40 Ом та індуктивності $0,1 \text{ Гн}$, при усталеному режимі діє ЕРС $e(t) = 100 \cos 400t \text{ В}$. Знайти $i(t)$ при $t > 0$, якщо, починаючи з моменту $t = 0$, амплітуда ЕРС дорівнює 40 В .
Відповідь: $i(t) = 0,707 \cos\left(400t - \frac{\pi}{4}\right) + 0,75e^{-400t} \text{ А}$.
14. Дати визначення операторній передатній функції. Чому вона належить до класу ДРФ?
15. Назвати властивості ОПФ. Як пов'язане характеристичне рівняння кола з ОПФ?
16. Що таке карта нулів і полюсів ОПФ? Як аналітично визначити ОПФ, користуючись цією картою?
17. Зобразити карту нулів і полюсів кола, розглянутого у прикладі 3.1.
18. Пояснити поняття операторної вхідної функції. За яких умов ОВФ належить до класу ДДФ?
19. Які особливості мають реактансні ОВФ?
20. Який зв'язок існує між операторною і комплексною передатними функціями?
21. Чому вводять поняття амплітудно-квадратичної характеристики кола? Які властивості має АКХ?
22. Пояснити поняття мінімально- і немінимально-фазових кіл. Чим відрізняються ФЧХ цих кіл?
23. Яке коло називають неспотворювальним? Які частотні характеристики воно має?
24. Який зв'язок існує між операторною передатною функцією і часовими характеристиками?
25. Знайти ОПФ, КПФ і перехідну характеристику кола, утвореного послідовним з'єднанням елементів R , L , якщо дією є вхідна напруга, а відгуком — напруга на опорі. Перевірити виконання граничних співвідношень між частотними і часовими характеристиками.
Відповідь: $g(t) = 1 - e^{t/\tau}$; $H(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau}$.



БАГАТОПОЛЮСНИКИ

- Загальні зауваження
- Системи рівнянь (моделі) прохідних чотиріполіусників
- З'єднання чотиріполіусників
- Характеристичні параметри чотиріполіусників
- Функції кола
- Функції кола та розрахунки параметрів чотиріполіусників
- Приклади обчислення функцій деяких кіл
- Спеціальні двобрамники та трибрамники



4.1. Загальні зауваження

Подання складних кіл у вигляді з'єднаних між собою багатополіусників є потужним сучасним методом їх моделювання.

Так, проектування радіотехнічних кіл складається з трьох основних етапів: синтез, аналіз, оптимізація. На етапі синтезу задають структуру і ваги (величини параметрів) віток еквівалентної схеми. На етапі аналізу визначають реакцію кола на надану дію і порівнюють її з бажаною (наданою в технічному завданні) реакцією. Якщо одержана і надана реакції не збігаються, параметри елементів кола оптимізують, тобто змінюють їх ваги так, щоб забезпечити максимальний збіг. Оптимізація — це ітераційна процедура, тобто кроків наближення одержаних характеристик до очікуваних буде багато (десятки — тисячі). Отже, в процесі оптимізації задачу аналізу радіотехнічного кола слід розв'язувати багато разів. Усе це висуває жорсткі вимоги до простоти і швидкодії процедури розв'язання задачі аналізу, особливо для сучасних складних кіл, схеми яких налічують сотні — тисячі вузлів і тисячі — десятки тисяч елементів.

З іншого боку, кількість віток, що відповідають окремим елементам кола, є значно меншою, ніж кількість можливих з'єднань між окремими вузлами. У середньому в радіотехнічному колі кожен з вузлів схеми з'єднаний не з усіма N (сотні—тисячі), а лише 3–7 вузлами. Тому й матриця провідностей системи рівнянь вузлових напруг містить у кожному своєму рядку (розміру $1 \times N$) лише 4–8 ненульових елементів, тобто є *розрідженою*.

Отже, аналіз радіотехнічних кіл — це розв'язання систем рівнянь рівноваги з розрідженими матрицями. Ці питання належать до окремого розділу сучасної обчислювальної математики. У даному розділі підручника (на відміну від абстрактної математики) важливим є ще й той факт, що ці схеми радіотехнічних кіл є жорстко структурованими. Останнє є невід'ємною властивістю радіотехнічних кіл обробки інформації і лежить в основі теорії кіл.

Очевидно, що при згаданій розрідженості схеми кола в ній можна виділити окремі блоки, які з'єднуються між собою двома, трьома, ..., k вузлами ($k \ll N$). З іншого боку, весь досвід проектування пристроїв засновано на проектуванні окремих функціональних блоків (або компонентів кола), які в подальшому об'єднують за принциповою схемою.

Компонентами кола називають зазвичай уже готові вироби, з яких ці кола складають: резистори, транзистори, конденсатори,

операційні підсилювачі (ОП), конвеєри струмів і напруг, складніші функціональні блоки тощо.

Точки, в яких елементи кола (й елементи еквівалентних схем, що цим колам відповідають) об'єднують, називають *вузлами*, а вузли, за допомогою яких розглядуване коло ввімкнене до інших кіл, — *полюсами* (затискачами).

Полюсами можна вважати й ті внутрішні вузли, в яких обчислюють (або вимірюють) струми та напруги.

Схему, в якій виділено N полюсів, називають *багатополюсником* або *N -полюсником* (рис. 4.1). Довільну пару полюсів багатополюсника можна розглядати як його вхід, хоча термін «вхід» не є зручним, оскільки відповідає напрямку всередину багатополюсника.

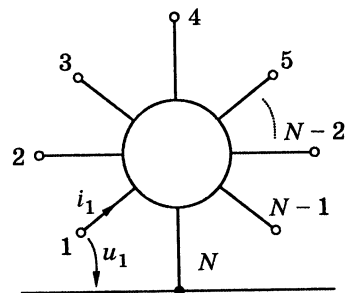


Рис. 4.1.

Позначення N -полюсника

Багатополюсник, у якого всі залежні входи мають *спільний (базисний) вузол*, називають $(n + 1)$ -полюсником, а системи координат, що відповідають вибору таких незалежних входів, називають *канонічними*. Оскільки струми і напруги на входах багатополюсника характеризують його внутрішній стан, який визначає реакцію на зовнішню дію, то відповідний вибір сукупностей струмів і напруг на цих входах визначає *вибір системи координат у n -вимірному просторі*.

Прикладом систем координат і відповідних до них *канонічних систем* рівнянь рівноваги є системи рівнянь контурних струмів та вузлових напруг (див. [7, розд. 2]).

Так, для кола, схема (модель) якого містить n незалежних контурів (усі дії — ідеальні джерела напруги, а реакції — контурні струми) така система координат дає канонічну систему рівнянь контурних струмів:

$$(\underline{Z})(\underline{I}) = (\underline{E}), \quad (4.1)$$

де (\underline{Z}) — матриця опорів порядку n ; (\underline{I}) , (\underline{E}) — стовпці реакцій (контурних струмів) і дій (ЕРС незалежних джерел напруги) розміру $n \times 1$.

Якщо схема кола містить n незалежних вузлів, а реакціями та діями є відповідно вузлові напруги та струми незалежних джерел струму, використовують інший координатний базис (систему координат у n -вимірному просторі), тобто канонічну систему рівнянь вузлових напруг:

$$(\underline{Y})(\underline{U}) = (\underline{I}_{вз}), \quad (4.2)$$

де (\underline{Y}) — матриця провідностей порядку n ; (\underline{U}) , $(\underline{I}_{вз})$ — стовпці вузлових напруг і струмів незалежних джерел струму розміру $n \times 1$.

Будь-який багатополюсник з n незалежними входами можна розглядати як $2n$ -полюсник (n -брамник¹) незалежно від способу об'єднання входів у середині.

4.2. Системи рівнянь (моделі) прохідних чотириполюсників

Чотириполюсник (двобрамник) з двома незалежними входами (описується системою рівнянь рівноваги порядку $n = 2$), які мають спільний вузол, називають *прохідним* (рис. 4.2).

На рис. 4.2 показаний (прийнятий у подальшому викладенні) так званий зустрічний напрям первинного i_1 та вторинного i_2 струмів. Загалом, використовують варіанти прямої (додатні напрями

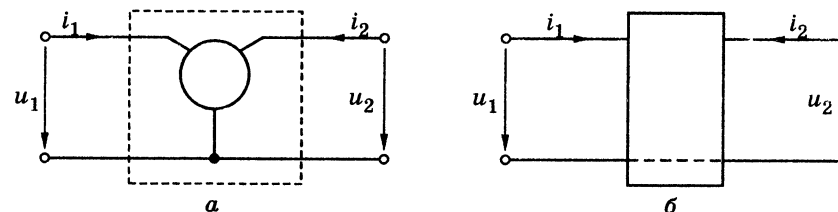


Рис. 4.2. Подання багатополюсного компонента кола прохідним чотириполюсником

¹ Нині в російськомовній літературі за 2×2 -полюсником закріпилася назва «чотирьохполюсник», яка стосується будь-якого багатополюсника з чотирма полюсами (тобто відповідно до такого визначення кількість незалежних входів може дорівнювати і двом, і трьом, і чотирьом). Це вносить плутанину в назви багатополюсників (особливо, коли кількість полюсів більша ніж чотири). В англійській літературі визначення зручніші, оскільки класифікація багатополюсників ґрунтується на понятті «незалежний вхід» (port). У технічній літературі Чехії, Словаччини та Польщі слово port має слов'янський аналог брама (брама). Тому в українській літературі доцільним є використання поряд із поняттям «багатополюсник» поняття «багатобрамник». Отже, чотириполюсник, тобто частина кола з двома незалежними входами за наявності трьох, чотирьох, п'яти полюсів (один з яких є «заземленим»), називатиметься ще двобрамником.

i_1, i_2 обрано зліва направо) та зворотної передачі (додатні напрями i_1, i_2 — справа наліво).

Залежно від вибору пар дії та реакцій (із сукупності величин u_1, i_1, u_2, i_2) чотириполосник можна описати однією з систем диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} di_1 \\ di_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3a)$$

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} di_1 \\ di_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3б)$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} di_1 \\ du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ di_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3в)$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_1 \\ di_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} di_1 \\ du_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3г)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_2 \\ di_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ di_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3д)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_1 \\ di_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_2 \\ di_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3е)$$

Рівняння чотириполосника (4.3) справедливі за будь-яких форм дії (синусоїдна чи довільна) та виду кола (зокрема, лінійне чи нелінійне). Проте відомо, що співвідношення, аналогічні рівнянням (4.3) стосовно функцій часу u_1, i_1, u_2, i_2 , можна встановити для комплексних амплітуд (діючих значень) синусоїдних дій та реакцій $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$ [7, розд. 3] або для операторних зображень $U_1(p), I_1(p), U_2(p), I_2(p)$ довільних дій та реакцій (див. розд. 3). Тому, не порушуючи загального принципу, можна аналізувати комплексну форму співвідношень (4.3), оскільки розгляд лінійного кола при синусоїдній дії має особливе значення в радіотехнічних колах.

Коефіцієнти при напругах і струмах у рівняннях (4.3) називають *параметрами чотириполосника*.

Розмірність параметрів чотириполосника у виразах (4.3) легко встановити за розмірністю відповідних дій і реакцій. Зазвичай зручним є вимірювання параметрів прохідного чотириполосника в одному з наведених шести базисів, оскільки, наприклад, основні компоненти (ОП, транзистори тощо) є вже готовими виробами, а їх еквівалентні електричні схеми занадто складні.

Так, з першого рівняння (4.3а) в комплексному вигляді

$$\underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \quad (4.4a)$$

зрозуміло, що $\underline{Y}_{11} = \underline{I}_1/\underline{U}_1$, якщо $\underline{U}_2 = 0$, тобто в разі короткого замикання виходу 2.

Аналогічно можна знайти \underline{Y}_{22} . Параметр \underline{Y}_{12} аналогічно знайти не можна, оскільки для цього слід виконати умову $\underline{U}_1 = 0$ (див. формулу 4.4а), тобто забезпечити коротке замикання входу 1 і при цьому ж на вхід 1 подати струм \underline{I}_1 , який з джерела протікатиме лише шляхом короткого замикання і не відгалужуватиметься у чотириполосник. Якщо забезпечити холостий хід на вході 1 ($\underline{I}_1 = 0$), тоді

$$\underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 = 0; \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}. \quad (4.4б)$$

Якщо значення \underline{Y}_{11} вже обчислене, то можна визначити й \underline{Y}_{12} . Але непрямі вимірювання (з використанням результатів оцінки інших параметрів) призводять до великих похибок і тому не рекомендовані. У той самий час параметр \underline{H}_{12} у виразі (4.3в) може бути виміряним безпосередньо, оскільки система H -параметрів (4.3в) дозволяє оцінити кожен з параметрів за одне вимірювання.

Так, комплексний вираз (4.3в) можна записати в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2 = \underline{U}_1; \\ \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2 = \underline{I}_2. \end{cases} \quad (4.4в)$$

Тоді

$$\underline{H}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0}; \quad \underline{H}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}; \quad \underline{H}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0}; \quad \underline{H}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}. \quad (4.4г)$$

Із виразів (4.4г), які використовують для прямого вимірювання H -параметрів, можна зробити висновок, що система (4.3в) є дуже зручною. Але, як свідчить досвід, для обчислень найкращим є базис канонічних рівнянь вузлових напруг. Тому важливою є можливість проводити вимірювання в одному з обраних базисів, а обчислення — в іншому. Зв'язок між параметрами систем рівнянь (4.3) наведено в табл. 4.1 і 4.2.

Для кожної з наведених у табл. 4.2 систем параметрів прохідного чотириполосника можна побудувати еквівалентну схему, яка складається з ідеальних залежних джерел. Тобто один (той самий)

Таблиця 4.1

Формули зв'язку між визначниками рівнянь
прохідного чотириполюсника

$ Z $	$ Z $	$\frac{1}{ Y }$	$\frac{H_{11}}{H_{22}}$	$\frac{D_{22}}{D_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{21}}$	$\frac{B_{12}}{B_{21}}$
$ Y $	$\frac{1}{ Z }$	$ Y $	$\frac{H_{22}}{H_{11}}$	$\frac{D_{11}}{D_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{12}}$	$\frac{B_{21}}{B_{12}}$
$ H $	$\frac{Z_{11}}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}}$	$ H $	$\frac{1}{ D }$	$\frac{A_{11}}{A_{22}}$	$\frac{B_{22}}{B_{11}}$
$ D $	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{ H }$	$ D $	$\frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{B_{11}}{B_{22}}$
$ A $	$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{21}}$	$\frac{H_{12}}{H_{21}}$	$\frac{D_{12}}{D_{21}}$	$ A $	$\frac{1}{ B }$
$ B $	$\frac{Z_{21}}{Z_{12}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{12}}$	$\frac{H_{21}}{H_{12}}$	$\frac{D_{21}}{D_{12}}$	$\frac{1}{ A }$	$ B $

Таблиця 4.2

Формули зв'язку між коефіцієнтами систем рівнянь
чотириполюсника

Z	Z_{11}	Z_{12}	$\frac{Y_{22}}{ Y }$	$\frac{Y_{12}}{ Y }$	$\frac{ H }{H_{22}}$	$\frac{H_{12}}{H_{22}}$	$\frac{1}{D_{11}}$	$\frac{D_{12}}{D_{11}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$	$\frac{ A }{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}$	$\frac{1}{B_{21}}$
	Z_{21}	Z_{22}	$\frac{Y_{21}}{ Y }$	$\frac{Y_{11}}{ Y }$	$\frac{H_{21}}{H_{22}}$	$\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{D_{21}}{D_{11}}$	$\frac{ D }{D_{11}}$	$\frac{1}{A_{21}}$	$\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{ B }{B_{21}}$	$\frac{B_{11}}{B_{21}}$
Y	$\frac{Z_{22}}{ Z }$	$\frac{Z_{12}}{ Z }$	Y_{11}	Y_{12}	$\frac{1}{H_{11}}$	$\frac{H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{D_{22}}{D_{22}}$	$\frac{D_{12}}{D_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}$	$\frac{ A }{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}$	$\frac{1}{B_{12}}$
	$\frac{Z_{21}}{ Z }$	$\frac{Z_{11}}{ Z }$	Y_{21}	Y_{22}	$\frac{H_{21}}{H_{11}}$	$\frac{ H }{H_{11}}$	$\frac{D_{21}}{D_{22}}$	$\frac{1}{D_{22}}$	$\frac{1}{A_{12}}$	$\frac{A_{11}}{A_{12}}$	$\frac{ B }{B_{12}}$	$\frac{B_{22}}{B_{12}}$
H	$\frac{ Z }{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	H_{11}	H_{12}	$\frac{D_{22}}{ D }$	$\frac{D_{12}}{ D }$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}$	$\frac{ A }{A_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{11}}$	$\frac{1}{B_{11}}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{11}}$	H_{21}	H_{22}	$\frac{D_{21}}{ D }$	$\frac{D_{11}}{ D }$	$\frac{1}{A_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{ B }{B_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{11}}$
D	$\frac{1}{Z_{11}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{H_{22}}{ H }$	$\frac{H_{12}}{ H }$	D_{11}	D_{12}	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$	$\frac{ A }{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}$	$\frac{1}{B_{22}}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{ Z }{Z_{11}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{H_{21}}{ H }$	$\frac{H_{11}}{ H }$	D_{21}	D_{22}	$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{ B }{B_{22}}$	$\frac{B_{11}}{B_{22}}$

Закінчення табл. 4.2

A	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{ Z }{Z_{21}}$	$\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Y_{21}}$	$\frac{ H }{H_{21}}$	$\frac{H_{11}}{H_{21}}$	$\frac{1}{D_{21}}$	$\frac{D_{22}}{D_{21}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$	$\frac{A_{12}}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{ B }$	$\frac{B_{12}}{ B }$
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{ Z }{Z_{21}}$	$\frac{ Y }{Y_{21}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{1}{H_{21}}$	$\frac{D_{11}}{D_{21}}$	$\frac{ D }{D_{21}}$	$\frac{A_{21}}{A_{21}}$	$\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{B_{21}}{ B }$	$\frac{B_{11}}{ B }$
	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{ Z }{Z_{12}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$	$\frac{H_{11}}{H_{12}}$	$\frac{ D }{D_{12}}$	$\frac{D_{22}}{D_{12}}$	$\frac{A_{22}}{ A }$	$\frac{A_{12}}{ A }$	B_{11}	B_{12}
B	$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$	$\frac{ Z }{Z_{21}}$	$\frac{ Y }{Y_{21}}$	$\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{H_{22}}{H_{12}}$	$\frac{ H }{H_{12}}$	$\frac{D_{11}}{D_{12}}$	$\frac{1}{D_{12}}$	$\frac{A_{21}}{ A }$	$\frac{A_{11}}{ A }$	B_{21}	B_{22}
	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{ Z }{Z_{12}}$	$\frac{ Y }{Y_{12}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{H_{12}}{H_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$	$\frac{D_{11}}{D_{12}}$	$\frac{1}{D_{12}}$	$\frac{A_{21}}{ A }$	$\frac{A_{11}}{ A }$	B_{21}	B_{22}
	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{ Z }{Z_{12}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$	$\frac{H_{11}}{H_{12}}$	$\frac{ D }{D_{12}}$	$\frac{D_{22}}{D_{12}}$	$\frac{A_{22}}{ A }$	$\frac{A_{12}}{ A }$	B_{11}	B_{12}

чотириполюсник можна описати як однією з систем (4.3), так і множиною еквівалентних схем, деякі з яких зображено на рис. 4.3.

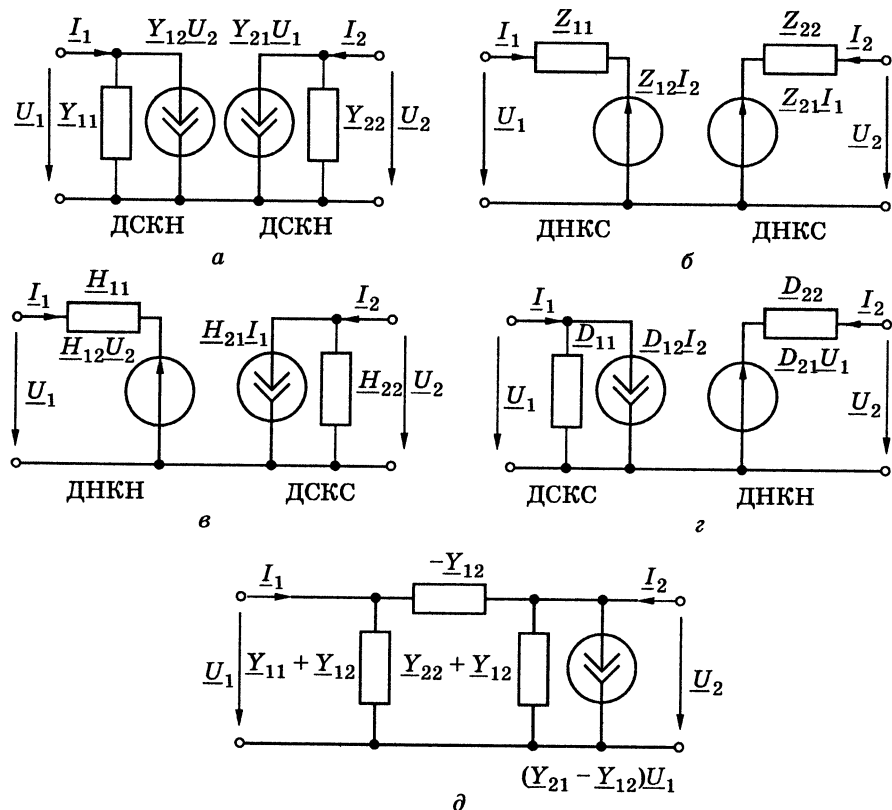


Рис. 4.3. Канонічні еквівалентні схеми прохідних чотириполюсників

Так, системі рівнянь з Y -параметрами (4.3а) відповідає схема з двома залежними джерелами типу ДСКН (рис. 4.3, а). Якщо класти $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{22} = 0$ та $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{\text{пер}}$, отримаємо ідеальне джерело струму, кероване напругою [7, рис. 2.56, з]. Отже, матриця (\underline{Y}) ідеального ДСКН має вигляд:

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{Y}_{\text{пер}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Користуючись табл. 4.2, можна записати його A -матрицю:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\underline{Y}_{\text{пер}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, системі рівнянь (4.4в) згідно з першим законом Кірхгофа можна співставити схему з двома залежними джерелами: ДНКН і ДСКС (рис. 4.3, в). За умови $\underline{H}_{11} = \underline{H}_{12} = \underline{H}_{22} = 0$ та $\underline{H}_{21} = \underline{H}_I$ виходить ідеальне джерело струму, кероване струмом [7, рис. 2.56, б]. Його H -матриця має вигляд

$$(\underline{H}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{H}_I & 0 \end{pmatrix},$$

а перехід за табл. 4.3 до A -матриці дає

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\underline{H}_I \end{pmatrix}.$$

Якщо використати систему рівнянь із Z -параметрами (4.3б), виходить схема з двома джерелами напруги, керованими струмом (ДНКС, рис. 4.3, в). За умови $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{22} = 0$ та $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{\text{пер}}$ виходить ідеальне ДНКС [7, рис. 2.56, в], відповідні матриці якого записуються у вигляді:

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{Z}_{\text{пер}} & 0 \end{pmatrix}; (\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\underline{Z}_{\text{пер}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему рівнянь чотириполюсника з D -параметрами можна представити схемою (рис. 4.3, з). За умови $\underline{D}_{11} = \underline{D}_{12} = \underline{D}_{22} = 0$ та $\underline{D}_{21} = \underline{H}_U$ ця схема перетворюється в ідеальне джерело напруги, кероване напругою ДНКН [7, рис. 2.56, а], відповідні матриці якого мають вигляд

$$(\underline{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{H}_U & 0 \end{pmatrix}; (\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1/\underline{H}_U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

До найпростіших активних лінійних чотириполюсників із залежними джерелами належать транзистори й електронні лампи, які працюють у лінійному режимі. Для транзисторів частіше використовують рівняння з H - та Y -параметрами.

4.3. З'єднання чотириполюсників

Певну форму запису рівнянь (4.3) застосовують, виходячи з конкретної постановки задачі. Так, синтезуючи кола, зазвичай використовують Y - або Z -форми. Параметри транзисторів для сигнальних складових надають в Y -, H - або Z -формах, оскільки в такий спосіб ці параметри зручніше визначати експериментально.

Щоб знайти зв'язок між вхідними і вихідними величинами по-різному з'єднаних чотириполюсників, визначаючи параметри еквівалентного (складеного) чотириполюсника, використовують Z -, H -, D -, Y - і A -форми.

При послідовному з'єднанні чотириполюсників A і B (рис. 4.4, а) застосовують Z -форму, при паралельному з'єднанні (рис. 4.4, б) — Y -форму, при послідовно-паралельному (рис. 4.4, в) — H -форму, при паралельно-послідовному (рис. 4.4, з) — D -форму, при каскадному (рис. 4.4, д) — A -форму.

Отже, форму запису рівнянь (4.3) вибирають, враховуючи зручність отримання відповідної матриці еквівалентного чотириполюсника. Так, при послідовному з'єднанні чотириполюсників A і B матриця $(\underline{Z})_e = (\underline{Z})_A + (\underline{Z})_B$, оскільки напруга на вході (виході) еквівалентного чотириполюсника дорівнює сумі напруг на входах (виходах) чотириполюсників, які його складають, а струми відповідно на входах (виходах) послідовно з'єднаних чотириполюсників однакові.

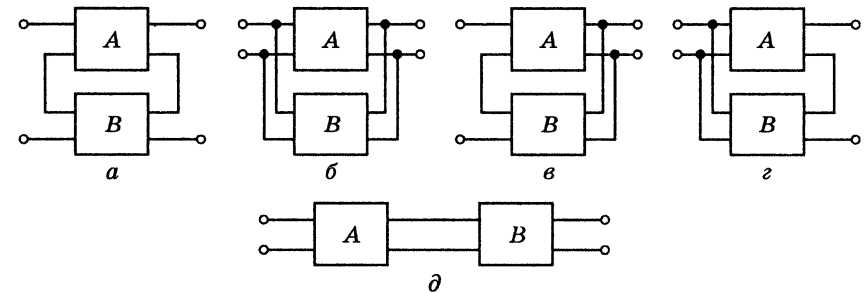


Рис. 4.4. З'єднання чотириполюсників:

а — послідовне; б — паралельне; в — послідовно-паралельне; з — паралельно-послідовне; д — каскадне

При паралельному з'єднанні чотириполіусників A і B матриця $(\underline{Y})_e = (\underline{Y})_A + (\underline{Y})_B$, оскільки струм на вході (виході) еквівалентного чотириполіусника дорівнює сумі струмів на входах (виходах) чотириполіусників A і B , а напруги відповідно на входах (виходах) у них однакові.

Аналогічні висновки справедливі стосовно матриці $(\underline{H})_e = (\underline{H})_A + (\underline{H})_B$ при послідовно-паралельному і матриці $(\underline{D})_e = (\underline{D})_A + (\underline{D})_B$ при паралельно-послідовному з'єднанні чотириполіусників.

При каскадному з'єднанні струм і напруга на виході чотириполіусника A дорівнюють вхідним струму і напрузі чотириполіусника B , тому

$$(\underline{A})_e = (\underline{A})_A \times (\underline{A})_B = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11a}\underline{A}_{11b} + \underline{A}_{12a}\underline{A}_{21b} & \underline{A}_{11a}\underline{A}_{12b} + \underline{A}_{12a}\underline{A}_{22b} \\ \underline{A}_{21a}\underline{A}_{11b} + \underline{A}_{22a}\underline{A}_{21b} & \underline{A}_{21a}\underline{A}_{12b} + \underline{A}_{22a}\underline{A}_{22b} \end{pmatrix}.$$

Наведені правила визначення матриць еквівалентних чотириполіусників справедливі за будь-якої кількості чотириполіусників, що їх складають. Але, підсумовуючи матриці, слід дотримуватися умови регулярності з'єднання чотириполіусників — через обидва вхідних затискачі кожного чотириполіусника мають протікати однакові за величиною і протилежні за напрямом струми; те ж саме має бути щодо вихідних затискачів кожного чотириполіусника. При регулярному з'єднанні матриця кожного з чотириполіусників має бути такою самою, якою вона була перед з'єднанням.

4.4. Характеристичні параметри чотириполіусників

Характеристичними параметрами чотириполіусника називають його вхідні опори і передатні функції в режимі узгодження чотириполіусника з навантаженням за повною потужністю.

Для взаємного несиметричного² чотириполіусника $(\underline{A}_{11} \neq \underline{A}_{22})$ розглядають два характеристичні опори: \underline{Z}_{c1} і \underline{Z}_{c2} . Опір \underline{Z}_{c1} — це вхідний опір з боку затискачів a, b , коли навантаження ввімкнено до затискачів c, d і дорівнює \underline{Z}_{c2} (рис. 4.5, а). Скориставшись комплексною формою запису системи (4.3д)

$$\begin{cases} \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 = \underline{U}_1; \\ \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 = \underline{I}_1, \end{cases} \quad (4.5)$$

² Чотириполіусник називають *взаємним (зворотним)*, якщо він задовольняє принципу взаємності [7, підрозділ 2.9], тобто його передатний опір (провідність) інваріантний до зміни місць його входів ($\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$). Для взаємного чотириполіусника $|A|=1$. Пасивні лінійні та симетричні чотириполіусники завжди взаємні. Чотириполіусник називають *симетричним*, якщо зміна місць його входів не змінює струмів і напруг у зовнішньому колі. При цьому $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$.

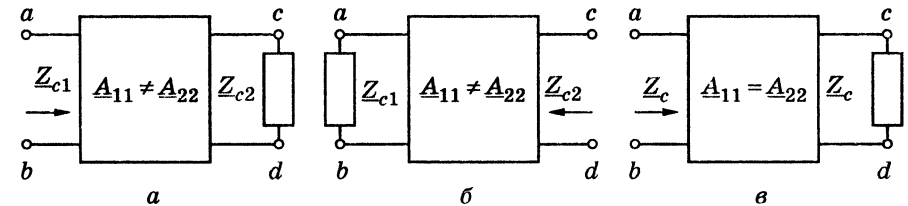


Рис. 4.5. Визначення характеристичного опору: а, б — несиметричний чотириполіусник; в — симетричний

можна записати:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{c1} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{c2}\underline{I}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c2}\underline{I}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \\ &= \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{22}}. \end{aligned} \quad (4.6a)$$

Опір \underline{Z}_{c2} — це вхідний опір з боку затискачів c, d , коли опір навантаження \underline{Z}_{c1} ввімкнено до затискачів a, b (рис. 4.5, б). Аналогічно, записавши рівняння (4.3е) у комплексному вигляді та використавши формули зв'язку між коефіцієнтами A і B (табл. 4.2), можна визначити:

$$\underline{Z}_{c2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1}{\underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{c1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c1} + \underline{A}_{11}}. \quad (4.6b)$$

Отже, *характеристичним* називається опір, який будучи навантаженням з одного входу чотириполіусника, встановлює його опір з іншого входу таким, що дорівнює характеристичному. Умова, за якої чотириполіусник навантажено відповідним характеристичним опором, називається *умовою узгодженого навантаження (ввімкнення)*.

Спільне розв'язання рівнянь (4.6a) і (4.6b) дає:

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}; \quad \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}. \quad (4.7a)$$

Характеристичні опори можна виразити через параметри холостого ходу і короткого замикання. Так, скориставшись системою (4.5), можна записати:

$$\underline{Z}_{1x.x} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{1к.з} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}.$$

Аналогічно, з системи В-параметрів випливає:

$$\underline{Z}_{2x.x} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{A_{22}}{A_{21}}; \underline{Z}_{2k.3} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Тоді

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_{1x.x} \underline{Z}_{1k.3}}; \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{2x.x} \underline{Z}_{2k.3}}.$$

Якщо чотириполюсник симетричний ($A_{11} = A_{22}$), тоді

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_{x.x} \underline{Z}_{k.3}}, \quad (4.76)$$

де \underline{Z}_c дорівнює вхідному опору чотириполюсника, коли його навантажено опором \underline{Z}_c (рис. 4.5, в).

За узгодженого ввімкнення на стиках «генератор — чотириполюсник» і «чотириполюсник — генератор» електрична енергія розсіюватиметься тільки в чотириполюснику. Щоб врахувати ці втрати, вводять міру передачі енергії — *характеристичну (власну) сталу передачі*, яка визначається у вигляді

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}, \quad (4.8)$$

причому всі струми і напруги обчислюють у режимі узгодження.

Оскільки $\underline{U}_1 = I_1 \underline{Z}_{вх} = I_1 \underline{Z}_{c1}$ і $\underline{U}_2 = I_2 \underline{Z}_{вх2} = I_2 \underline{Z}_{c2}$, вираз (4.8) можна записати інакше:

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}} \right) = \ln \left(\frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}}} \right). \quad (4.9)$$

Так само, як і характеристичний опір, характеристичну сталу передачі можна виразити через параметри чотириполюсника. Врахувавши, що в режимі узгодження $\underline{U}_2 = I_2 \underline{Z}_н = I_2 \underline{Z}_{c2}$, з другого рівняння (4.5) можна знайти:

$$I_1 = (A_{21} \underline{Z}_{c2} + A_{22}) I_2.$$

Підставивши цей вираз до формули (4.9) та враховуючи співвідношення (4.7а), можна записати:

$$\Gamma_c = \ln \left[\left(A_{21} \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}} + A_{22} \right) \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \right] = \ln (\sqrt{A_{12} A_{21}} + \sqrt{A_{11} A_{22}}). \quad (4.10)$$

Якщо чотириполюсник симетричний ($\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c$), формула (4.9) матиме вигляд:

$$\Gamma_c = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{U_1}{U_2},$$

або через А-параметри:

$$\Gamma_c = \ln (A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}).$$

Загалом характеристична стала є комплексною величиною:

$$\Gamma_c = A_c + jB_c. \quad (4.11)$$

Представивши відношення комплексних діючих значень U_1/U_2 у показниковій формі, можна записати:

$$\ln \frac{U_1 e^{j\psi_{u1}}}{U_2 e^{j\psi_{u2}}} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}). \quad (4.12)$$

З порівняння виразів (4.12) і (4.11) випливає:

$$A_c = \ln \frac{U_1}{U_2}; B_c = \psi_{u1} - \psi_{u2}.$$

Коефіцієнт A_c називається *характеристичною сталою (коефіцієнтом) ослаблення*, вимірюється в логарифмічних одиницях (Нп, Б, дБ). Він характеризує міру змінювання амплітуд напруги і струму узгодженого чотириполюсника при переході від його входу до виходу.

Коефіцієнт B_c називається *характеристичною сталою (коефіцієнтом) фази*, вимірюється в радіанах (град). Він дорівнює зсуву фаз між вхідною і вихідною напругами (струмами) узгодженого чотириполюсника.

Характеристична стала пов'язана з комплексним коефіцієнтом передачі за напругою узгодженого чотириполюсника. Очевидно, що

$$H_U(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = H_U(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = e^{-\Gamma_c},$$

звідки

$$\ln H_U(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = -\Gamma_c, \text{ або } \ln H_U(\omega) + j\varphi(\omega) = -A_c - jB_c.$$

Тоді

$$A_c = -\ln H_U(\omega) = \ln \frac{1}{H_U(\omega)}; B_c = -\varphi(\omega).$$

4.5. Функції кола

Отже, при проходженні синусоїдного коливання через узгоджений чотириполосник, амплітуда коливання зменшується в e^{Λ_c} разів, а початкова фаза — на кут V_c .

Здобуті вище формули (4.7а), (4.7б), (4.10) дозволяють не тільки обчислювати характеристичні параметри чотириполосника через його А-параметри. За цими формулами можна встановити й обернені співвідношення.

Так, із виразу (4.10) отримуємо:

$$e^{\Gamma_c} = \sqrt{A_{12} A_{21}} - \sqrt{A_{11} A_{22}}; e^{-\Gamma_c} = \sqrt{A_{11} A_{22}} - \sqrt{A_{12} A_{21}}.$$

Скориставшись відомими математичними формулами, можна записати:

$$\operatorname{ch} \Gamma_c = \frac{e^{\Gamma_c} + e^{-\Gamma_c}}{2} = \sqrt{A_{11} A_{22}}; \operatorname{sh} \Gamma_c = \frac{e^{\Gamma_c} - e^{-\Gamma_c}}{2} = \sqrt{A_{12} A_{21}}. \quad (4.13)$$

Далі, з формули (4.7а) випливає:

$$\sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}}; \sqrt{Z_{c1} Z_{c2}} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}. \quad (4.14)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (4.13) і (4.14), неважко знайти А-параметри, підставивши які до системи (4.5), отримують рівняння передачі чотириполосника в характеристичних параметрах:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \operatorname{ch} \Gamma_c U_2 + \sqrt{Z_{c1} Z_{c2}} \operatorname{sh} \Gamma_c I_2 = U_1; \\ \frac{1}{\sqrt{Z_{c1} Z_{c2}}} \operatorname{sh} \Gamma_c U_2 + \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \operatorname{ch} \Gamma_c I_2 = I_1. \end{cases}$$

Для симетричного чотириполосника ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} U_2 \operatorname{ch} \Gamma_c + I_2 Z_c \operatorname{sh} \Gamma_c = U_1; \\ \frac{U_2}{Z_c} \operatorname{sh} \Gamma_c + I_2 \operatorname{ch} \Gamma_c = I_1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Запис рівнянь чотириполосника у формі (4.15) широко застосовують, описуючи кола з розподіленими параметрами (див. розділ 5).

Розв'язання рівнянь рівноваги радіотехнічного кола у вигляді канонічної системи контурних струмів (4.1) або вузлових напруг (4.2) дозволяє знайти реакції (контурні струми або вузлові напруги) на незалежні дії (напруги або струми джерел, відповідно) на будь-яких входах кола (парах вузлів). Кількість незалежних входів (до яких можуть бути ввімкнені джерела незалежних дій) для будь-якого реального радіотехнічного кола зазвичай значно менша, ніж загальна кількість вузлів (або контурів) його еквівалентної схеми. Тому розв'язувати загальну систему рівнянь (4.1), (4.2) у діапазоні частот немає необхідності. Інакше кажучи, немає необхідності обчислювати всі елементи оберненої матриці $(Z)^{-1}$ або $(Y)^{-1}$ у розв'язках рівнянь (4.1), (4.2), які в загальному випадку мають вигляд:

$$(I) = (Z)^{-1}(E); \quad (4.16a)$$

$$(U) = (Y)^{-1}(I_{вз}). \quad (4.16б)$$

Для розв'язання задачі аналізу достатньо обчислити лише деякі елементи обернених матриць $(Z)^{-1}$ та $(Y)^{-1}$. Це обумовлено тим, що еквівалентним перетворенням схеми кола, пов'язаним зі зменшенням кількості незалежних внутрішніх вузлів або контурів в оберненому базисі, відповідає просте викреслення з обернених матриць $(Z)^{-1}$ та $(Y)^{-1}$ рядків і стовпців, номери яких дорівнюють номерам внутрішніх вузлів (внутрішні вузли та контури — це такі, до яких не можуть бути ввімкнені джерела незалежної дії).

Отже, розв'язуючи задачу аналізу складного кола з довільною кількістю вузлів ($n > 4$), його можна представити еквівалентним чотириполосником та обчислювати *комплексні функції* (КФ) відносно двох вхідних та двох вихідних полюсів. Використання такого прийому лежить в основі методу *еквівалентного чотириполосника*.

Пояснення цього методу дає простий приклад. Нехай надано схему кола (рис. 4.6), яка містить внутрішні вузли з номерами 2, 3. У результаті складання та розв'язання системи рівнянь вузлових напруг для цієї схеми одержана обернена матриця $(Z) = (Y)^{-1}$.

Тоді вираз (4.16б) матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{вз1} \\ 0 \\ 0 \\ I_{вз2} \end{pmatrix}, \quad (4.16в)$$

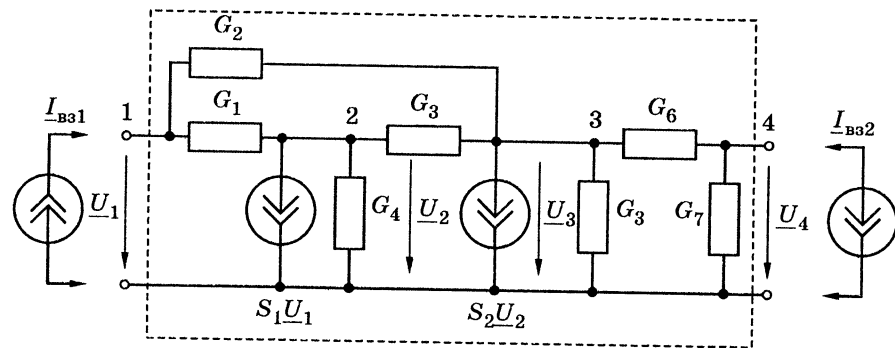


Рис. 4.6. Приклад для пояснення методу еквівалентного чотиріполюсника

де Z_{ij} — елементи матриці $(Z) = (Y)^{-1}$; $I_{вз1}, I_{вз2}$ — вузлові струми незалежних джерел струму, які можна ввімкнути до зовнішніх вузлів еквівалентного прохідного чотиріполюсника, позначеного на схемі (рис. 4.6) пунктиром. Нулі у стовпці струмів системи (4.16в) вказують, що вузли 2, 3 внутрішні, тому й напруги на внутрішніх вузлах U_2, U_3 недоцільно вимірювати. Отже, рівняння (4.16в) для напруг U_1, U_4 на зовнішніх вузлах чотиріполюсника можна замінити на таке:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{14} \\ Z_{41} & Z_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{вз1} \\ I_{вз2} \end{pmatrix}. \quad (4.16г)$$

Оскільки комплексні амплітуди (діючі значення) реакції F_j і дії F_i (на даній частоті) в лінійному (слабосигнальному) колі на входах j та i відповідно пов'язані співвідношенням

$$H(j\omega) = \frac{F_j}{F_i},$$

то $H(j\omega)$, яку називають *комплексною передатною функцією (КПФ) кола* [7, розд. 5], збігається з елементом Z_{ji} оберненої матриці провідностей $(Z) = (Y)^{-1}$, якщо F_j має зміст вузлової напруги U_j , а F_i — вузлового струму $I_{взi}$ незалежних джерел струму.

Аналогічно, якщо обрати базовою канонічну систему контурних струмів, то F_j має зміст контурного струму I_j , а F_i — напруги (ЕРС) незалежного джерела E_i . Тоді $H(j\omega)$ — це елемент Y_{ji} оберненої матриці опорів $(Y) = (Z)^{-1}$ у виразі (4.16а).

Отже, в канонічній системі вузлових напруг КПФ кола є елементом оберненої матриці $(Y)^{-1} = (Z)$. Загалом функції кола

є комбінаціями елементів оберненої матриці $(Y)^{-1} = (Z)$ (або, якщо коло описане канонічною системою рівнянь контурних струмів, — матриці $(Z)^{-1} = (Y)$).

Комплексні функції (або коротше — функції) кола пов'язують між собою дії та реакції на двох входах. Отже, наведені системи (Z, Y, H, D, A, B) параметрів прохідного чотиріполюсника визначають відповідні КФ. Будь-який чотиріполюсник може бути повністю описаний своїми КФ. Оскільки чотиріполюсник має два входи, а дії і реакції на його входах мають зміст струмів та (або) напруг, існує всього шість типів таких функцій (див. [7, підрозд. 5.1, 6.1]):

- КПФ: коефіцієнт передачі за напругою (зі входу i до входу j), коефіцієнт передачі за струмом (зі входу i до входу j), передатний опір (зі входу i до входу j), передатна провідність (зі входу i до входу j);
- КВФ: вхідний опір (відносно обраного входу i або j), вхідна провідність (відносно обраного входу i або j).

Унаслідок широкого застосування базису вузлових напруг у сучасній практиці аналізу електричних кіл у подальшому методи обчислення функцій кола розглядатимуться переважно саме в цьому базисі.

4.5.1. Коефіцієнт передачі за напругою

Нехай коло є чотиріполюсником з двома входами a, b і c, d (рис. 4.7, а).

Хоча схема (рис. 4.7) має два входи (чотири вхідні полюси), загальна кількість її вузлів n (враховуючи внутрішні) може бути значно більшою, ніж 4 зовнішні вузли.

Для вимірювання в діапазоні частот коефіцієнта передачі за напругою кола від входу a, b до входу c, d необхідно до входу a, b

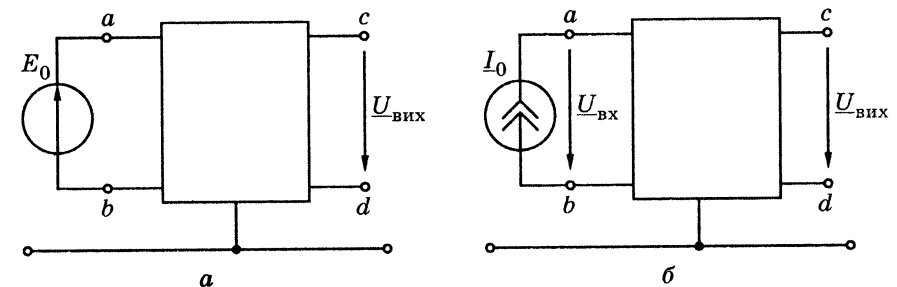


Рис. 4.7. Схеми: а — вимірювання; б — обчислення коефіцієнта передачі за напругою

ввімкнути незалежне джерело \underline{E}_0 (рис. 4.7, а) і на кожній з частот виміряти комплексні амплітуди (діючі значення) реакцій. Тоді коефіцієнт передачі за напругою можна обчислити за формулою

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\underline{U}_{(c+d)}}{\underline{E}_{(a+b)}}, \quad (4.17a)$$

де індекси $(c+d)$ означають номери вузлів, які утворюють вихід (потенціал вузла c вважається більшим потенціалу вузла d); $(a+b)$ — індекси номерів вузлів входу (потенціал вузла a більше потенціалу вузла b).

Проте для системи рівнянь вузлових напруг зазвичай використовують лише незалежні джерела струму. Тому для обчислень коефіцієнта передачі за напругою $\underline{H}_{U(c+d)(a+b)}$ необхідно утворити нову схему (рис. 4.7, б). Ввімкнене до чотириполюсника незалежне джерело струму \underline{I}_0 утворює на вході $(a+b)$ напругу $\underline{U}_{(a+b)}$, а на вході $(c+d)$ — напругу $\underline{U}_{(c+d)}$. У базисі вузлових напруг

$$\underline{U}_{(a+b)} = \underline{U}_a - \underline{U}_b; \quad \underline{U}_{(c+d)} = \underline{U}_c - \underline{U}_d, \quad (4.17б)$$

де $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c, \underline{U}_d$ — вузлові напруги рівняння (4.2).

Розв'язавши канонічну систему рівнянь вузлових напруг для кола (рис. 4.7, б), складену за схемою еквівалентного чотириполюсника, одержують (при наданій незалежній дії, ввімкненій до вузлів a, b) такі співвідношення:

$$\underline{U}_a = \underline{Z}_{aa} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{ab} \underline{I}_0; \quad \underline{U}_b = \underline{Z}_{ba} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{bb} \underline{I}_0;$$

$$\underline{U}_c = \underline{Z}_{ca} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{cb} \underline{I}_0; \quad \underline{U}_d = \underline{Z}_{da} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{db} \underline{I}_0,$$

де \underline{Z}_{ij} — елементи оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$ у виразі (4.16б).

Тоді

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\underline{U}_c - \underline{U}_d}{\underline{U}_a - \underline{U}_b} = \frac{\underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb} - \underline{Z}_{da} + \underline{Z}_{db}}{\underline{Z}_{aa} - \underline{Z}_{ab} - \underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb}}, \quad (4.18a)$$

або у скороченому запису:

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\underline{Z}_{(c+d)(a+b)}}{\underline{Z}_{(a+b)(a+b)}}, \quad (4.18б)$$

де $\underline{Z}_{(i+j)(k+l)} = \underline{Z}_{ik} - \underline{Z}_{il} - \underline{Z}_{jk} + \underline{Z}_{jl}$.

Якщо врахувати, що $\underline{Z}_{ij} = \Delta_{ji} / \Delta_Y$, то вираз (4.18б) можна привести до вигляду:

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{bc} - \Delta_{ad} + \Delta_{bd}}{\Delta_{aa} - \Delta_{ba} - \Delta_{ab} + \Delta_{bb}} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}, \quad (4.18в)$$

де Δ_Y — визначник; Δ_{ij} — алгебраїчні доповнення; $\Delta_{(k+l)(i+j)} = \Delta_{ki} - \Delta_{kj} - \Delta_{li} + \Delta_{lj}$ — сумарне алгебраїчне доповнення матриці (\underline{Y}) у виразі (4.2).

Із формули (4.18) випливає, що для визначення коефіцієнта передачі за напругою необхідно обчислити не всі n^2 елементи оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$ (n — порядок матриці), а лише вісім (або вісім алгебраїчних доповнень). Тому в радіотехніці набули поширення спеціальні методи розкриття визначників (алгебраїчних доповнень) матриці коефіцієнтів системи рівнянь рівноваги складних схем.

Формули (4.18) належать до найзагальнішого випадку обчислення коефіцієнтів передачі за напругою чотириполюсника, коли кожен з вузлів, що утворюють вхід, не з'єднаний зі спільним («землею»).

Якщо будь-який з вузлів a, b, c, d увімкнути до спільного, елементи оберненої матриці (або алгебраїчного доповнення) у формулах (4.18) з індексами, відповідними номеру заземленого вузла, дорівнюють нулю. Наприклад, якщо визначати коефіцієнт передачі за напругою для прохідного чотириполюсника ($b=0, d=0$), то формули (4.18) перетворюються в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{U(c+0)(a+0)} &= \underline{H}_{Uca} = \frac{\underline{Z}_{(c+0)(a+0)}}{\underline{Z}_{(a+0)(a+0)}} = \frac{\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{aa}} = \\ &= \frac{\Delta_{(c+0)(a+0)}}{\Delta_{(a+0)(a+0)}} = \frac{\Delta_{ac}}{\Delta_{aa}}. \end{aligned} \quad (4.18г)$$

Формула (4.18г) збігається з результатом, отриманим у [7, формула (6.3)] з урахуванням позначення вихідного вузла.

Якщо необхідно знайти коефіцієнт передачі за напругою зі входу $(c+d)$ на вхід $(a+b)$, тоді джерело струму слід увімкнути до вузлів c, d . Обернена матриця не зміниться, а стовпець (\underline{I}_0) матиме ненульові елементи тільки в рядках c, d (відповідно $+\underline{I}_0, -\underline{I}_0$). Тоді коефіцієнт передачі за напругою становитиме

$$\underline{H}_{U(a+b)(c+d)} = \frac{\underline{Z}_{(a+b)(c+d)}}{\underline{Z}_{(c+d)(c+d)}} = \frac{\Delta_{(c+d)(a+b)}}{\Delta_{(c+d)(c+d)}}. \quad (4.18д)$$

При цьому, порівнюючи вирази (4.18д) і (4.18в), можна помітити, що формулу (4.18д) з дією на вході $(c+d)$ і реакцією на виході $(a+b)$ можна одержати з виразів (4.18б), (4.18в) простим переставленням індексів.

Із наведених формул також зрозуміло, що коефіцієнти передачі за напругою в різних напрямках, але відносно тієї самої пари входів загалом різні.

4.5.2. Коефіцієнт передачі за струмом

Для обчислення цієї функції кола слід надати або виділити в наданій схемі (рис. 4.8, а) та винести ззовні на вхід вітку G_H , через яку протікатиме струм $I_{\text{вих}}$ — реакція на надану дію — струм I_0 (рис. 4.8, б).

Коефіцієнт передачі за струмом — це відношення комплексних амплітуд (діючих значень) $I_{\text{вих}}$ та I_0 , що в базисі вузлових напруг можна записати:

$$\underline{H}_{I(c+d)(a+b)} = \frac{I_{\text{вих}}}{I_0} = \frac{U_{\text{вих}} G_H}{I_0} = \frac{U_c - U_d}{I_0} G_H.$$

Із розв'язку системи рівнянь рівноваги (4.166), де вектор-стовпець незалежних струмів має той самий вигляд, що й для схеми (рис. 4.7, б), випливає:

$$\begin{aligned} U_c &= (\underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb}) I_0; \quad U_d = (\underline{Z}_{da} - \underline{Z}_{db}) I_0; \\ \underline{H}_{I(c+d)(a+b)} &= (\underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb} - \underline{Z}_{da} + \underline{Z}_{db}) G_H = \underline{Z}_{(c+d)(a+b)} G_H = \\ &= \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{bc} - \Delta_{ad} + \Delta_{bd}}{\Delta_Y} G_H = G_H \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_Y}, \end{aligned} \quad (4.19a)$$

де $\underline{Z}_{(c+d)(a+b)}$ — функція кола, що має сенс передатного опору зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$, як це буде показано нижче; \underline{Z}_{ij} — елементи оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$ у виразі (4.166); Δ_Y ; Δ_{ij} — визначник та алгебраїчні доповнення матриці (\underline{Y}) у формулі (4.2).

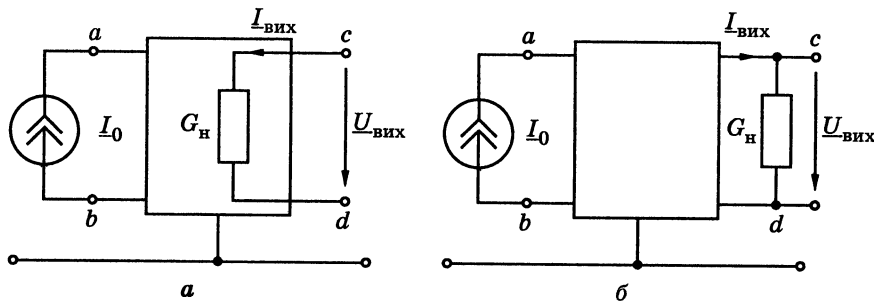


Рис. 4.8. Схема вимірювання й обчислення коефіцієнта передачі за струмом: а — зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$; б — з винесеною за чотириполюсник вихідною віткою G_H

Отже, щоб обчислити коефіцієнт передачі за струмом, слід розрахувати лише чотири елементи \underline{Z}_{ij} оберненої матриці $(\underline{Y})^{-1}$ або чотири доповнення Δ_{ij} і визначник матриці (\underline{Y}) .

Слід також зазначити, що провідність G_H врахована в матриці (\underline{Y}) при складанні рівняння (4.2).

У зворотному напрямку коефіцієнт передачі за струмом

$$\underline{H}_{I(a+b)(c+d)} = \underline{Z}_{(a+b)(c+d)} G_H = G_H \frac{\Delta_{(c+d)(a+b)}}{\Delta_Y} \quad (4.19б)$$

і також відрізняється від коефіцієнта передачі в напрямку зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$, причому провідність G_H , у якій протікає вихідний струм, увімкнено між вузлами a, b .

4.5.3. Вхідний і передатний опір, вхідна та передатна провідність

Передатну провідність зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$ визначають як відношення комплексних амплітуд (діючих значень) струму — реакції на вході $(c+d)$ та напруги — дії на вході $(a+b)$ (рис. 4.8):

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(c+d)(a+b)} &= \frac{I_{\text{вих}(c+d)}}{U_{\text{вх}(a+b)}} = \frac{U_{(c+d)} G_H}{U_{(a+b)}} = \\ &= \underline{H}_{U(c+d)(a+b)} G_H = \frac{\underline{Z}_{(c+d)(a+b)}}{\underline{Z}_{(a+b)(a+b)}} G_H. \end{aligned} \quad (4.20a)$$

Аналогічно перетворенням функції (4.186), вираз передатної провідності, записаний за допомогою алгебраїчних доповнень, має вигляд:

$$\underline{Y}_{(c+d)(a+b)} = \frac{G_H \Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}. \quad (4.20б)$$

Отже, щоб обчислити передатну провідність між двома входами складної схеми з n вузлами, слід обчислити лише вісім елементів \underline{Z}_{ij} оберненої матриці $(\underline{Y})^{-1}$ або вісім алгебраїчних доповнень матриці (\underline{Y}) у рівнянні (4.2).

Передатний опір зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$ обчислюють за схемою (рис. 4.8, а) у базисі вузлових напруг за формулою:

$$\underline{Z}_{(c+d)(a+b)} = \frac{U_{\text{вих}(c+d)}}{I_0} = \frac{U_c - U_d}{I_0} = \underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb} - \underline{Z}_{da} + \underline{Z}_{db}, \quad (4.21a)$$

або використовуючи алгебраїчні доповнення:

$$\underline{Z}_{(c+d)(a+b)} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_Y} = \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{ad} - \Delta_{bc} + \Delta_{bd}}{\Delta_Y}. \quad (4.216)$$

Як видно з формул (4.20), (4.21),

$$\underline{Z}_{(c+d)(a+b)} \neq \frac{1}{\underline{Y}_{(c+d)(a+b)}}, \quad (4.22)$$

тобто передатні опір і провідність не є взаємно оберненими функціями.

Вхідний опір відносно одного із входів, наприклад $(a+b)$, визначають як

$$\underline{Z}_{(a+b)(a+b)} = \frac{\underline{U}_{(a+b)}}{\underline{I}_{0(a+b)}}, \quad (4.23a)$$

що за схемою (рис. 4.8) після розрахунків, аналогічних попереднім, дає:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(a+b)(a+b)} &= \underline{Z}_{aa} - \underline{Z}_{ab} - \underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb} = \\ &= \frac{\Delta_{aa} - \Delta_{ba} - \Delta_{ab} + \Delta_{bb}}{\Delta_Y} = \frac{\Delta_{(a+b)(a+b)}}{\Delta_Y}. \end{aligned} \quad (4.236)$$

Аналогічно формулі (4.23a) вхідна провідність становить

$$\underline{Y}_{(a+b)(a+b)} = \frac{\underline{I}_{0(a+b)}}{\underline{U}_{(a+b)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{(a+b)(a+b)}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}. \quad (4.24)$$

Із формул (4.23), (4.24) випливає, що на відміну від виразу (4.22)

$$\underline{Z}_{(a+b)(a+b)} = \frac{1}{\underline{Y}_{(a+b)(a+b)}}. \quad (4.25)$$

Для прохідного чотириполосника, коли вузли b та d увімкнені до спільного вузла ($b=0, d=0$), передатний опір

$$\underline{Z}_{(a+b)(c+d)} = \underline{Z}_{(b+0)(a+0)} = \underline{Z}_{ab}.$$

Отже, будь-який елемент оберненої матриці, що не лежить на її головній діагоналі, має зміст передатного опору зі входу $(b+0)$, тобто між вузлами b і спільним («землею»), на вхід $(a+0)$, тобто між вузлами a і спільним.

Вхідний опір прохідного чотириполосника

$$\underline{Z}_{(a+b)(a+b)} = \underline{Z}_{(a+0)(a+0)} = \underline{Z}_{aa},$$

тобто еквівалентний опір між вузлом a і спільним вузлом дорівнює елементу головної діагоналі оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$.

4.5.4. Обчислення функцій кола в базисі контурних струмів

Для моделювання електричних кіл і відповідних функцій кола в базисі контурних струмів використовують систему рівнянь рівноваги (4.1) та її розв'язок (4.16a). Як вхід у цьому базисі розглядають вітку, яка (в загальному випадку) лежить між двома контурами з номерами A, B , як вихід — вітку між двома контурами з номерами C, D (рис. 4.9).

Тоді, склавши систему рівнянь рівноваги (4.1) для єдиного джерела та розв'язавши її (4.16a), отримують такі функції кола.

Коефіцієнт передачі за напругою становить:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{U(C+D)(A+B)} &= \frac{\underline{U}_{(C+D)}}{\underline{E}} = \frac{(\underline{I}_C - \underline{I}_D)R_H}{\underline{E}} = \\ &= \frac{(\underline{Y}_{CA} - \underline{Y}_{CB} - \underline{Y}_{DA} + \underline{Y}_{DB})\underline{E}}{\underline{E}} R_H = R_H \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} = \\ &= \frac{R_H \Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_Z} = R_H \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BC} + \Delta_{BD}}{\Delta_Z}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для обчислення коефіцієнта передачі за струмом враховують, що струм у вітці з джерелом \underline{E} дорівнює різниці контурних струмів контурів A і B , тобто

$$\begin{aligned} \underline{H}_{I(C+D)(A+B)} &= \frac{\underline{I}_C - \underline{I}_D}{\underline{I}_A - \underline{I}_B} = \frac{(\underline{Y}_{CA} - \underline{Y}_{CB} - \underline{Y}_{DA} + \underline{Y}_{DB})\underline{E}}{(\underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB} - \underline{Y}_{BA} + \underline{Y}_{BB})\underline{E}} = \\ &= \frac{\underline{Y}_{(C+D)(A+B)}}{\underline{Y}_{(A+B)(A+B)}} = \frac{\Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_{(A+B)(A+B)}} = \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BC} + \Delta_{BD}}{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

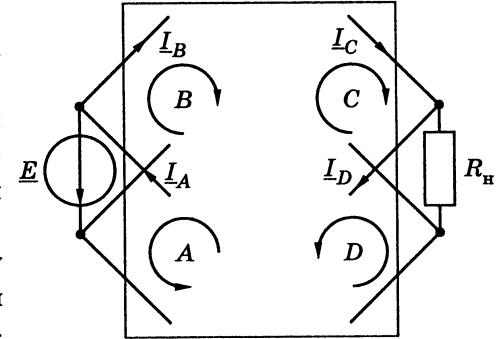


Рис. 4.9. Схема ввімкнення джерела \underline{E} та навантаження R_H для визначення функцій кола в базисі контурних струмів

Передачний опір

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(C+D)(A+B)} &= \frac{U_{(C+D)}}{I_{(A+B)}} = \frac{(I_C - I_D)R_H}{I_A - I_B} = \\ &= R_H \frac{Y_{CA} - Y_{CB} - Y_{DA} + Y_{DB}}{Y_{AA} - Y_{AB} - Y_{BA} + Y_{BB}} = R_H \frac{Y_{(C+D)(A+B)}}{Y_{(A+B)(A+B)}} = \\ &= \frac{R_H \Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_{(A+B)(A+B)}} = R_H \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BC} + \Delta_{BD}}{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Передачна провідність

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} &= \frac{I_C - I_D}{E} = Y_{CA} - Y_{CB} - Y_{DA} + Y_{DB} = \\ &= \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} = \frac{\Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_Z} = \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BA} + \Delta_{BD}}{\Delta_Z}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Вхідний опір на вході $(A+B)$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(A+B)(A+B)} &= \frac{E}{I_{(A+B)}} = \frac{E}{(Y_{AA} - Y_{AB} - Y_{BA} + Y_{BB})E} = \\ &= \frac{1}{Y_{(A+B)(A+B)}} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{(A+B)(A+B)}} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Вхідна провідність

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(A+B)(A+B)} &= \frac{I_{(A+B)}}{E} = Y_{AA} - Y_{AB} - Y_{BA} + Y_{BB} = \\ &= \underline{Y}_{(A+B)(A+B)} = \frac{\Delta_{(A+B)(A+B)}}{\Delta_Z} = \frac{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}{\Delta_Z}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

У формулах (4.26)–(4.31) \underline{Y}_{ij} — елементи оберненої матриці $(\underline{Y}) = (\underline{Z})^{-1}$ у виразі (4.16а), Δ_Z ; Δ_{ij} — визначник і алгебраїчні доповнення матриці опорів (\underline{Z}) у виразі (4.1). Якщо будь-яка вхідна вітка є власною для контуру (тобто належить лише цьому контуру, а не двом A , B чи C , D), тоді один з індексів B , D , або обидва разом дорівнюють нулю і з формул (4.26)–(4.31) одержують скорочений запис, аналогічно формулам у базисі вузлових напруг. Нехай, наприклад, вхідна вітка належить тільки контуру A ($B=0$), а вихідна

R_H — тільки контуру C ($D=0$). Тоді формули (4.26)–(4.31) матимуть такий вигляд:

$$\underline{H}_{U(C+0)(A+0)} = R_H \underline{Y}_{CA} = R_H \frac{\Delta_{AC}}{\Delta_Z}; \quad (4.32a)$$

$$\underline{H}_{I(C+0)(A+0)} = \frac{Y_{CA}}{Y_{AA}} = \frac{\Delta_{AC}}{\Delta_{AA}}; \quad (4.32б)$$

$$\underline{Z}_{(C+0)(A+0)} = R_H \frac{Y_{CA}}{Y_{AA}} = R_H \frac{\Delta_{AC}}{\Delta_{AA}}; \quad (4.32в)$$

$$\underline{Y}_{(C+0)(A+0)} = \underline{Y}_{CA} = \frac{\Delta_{AC}}{\Delta_Z}; \quad (4.32г)$$

$$\underline{Z}_{(A+0)(A+0)} = \frac{1}{Y_{AA}} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{AA}}; \quad (4.32д)$$

$$\underline{Y}_{(A+0)(A+0)} = \underline{Y}_{AA} = \frac{\Delta_{AA}}{\Delta_Z}. \quad (4.32e)$$

Окрім того, слід зауважити, що

$$\underline{Z}_{(C+D)(A+B)} \neq \underline{Z}_{(A+B)(C+D)}; \quad \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} \neq \underline{Y}_{(A+B)(C+D)}.$$

Якщо порівняти формули (4.26)–(4.31) з виразами для функцій кола, обчислених у базисі вузлових напруг, легко помітити формальний збіг формул (4.18в) для коефіцієнта передачі за напругою в базисі вузлових напруг і (4.27) для коефіцієнта передачі за струмом, обчисленого в базисі контурних струмів; коефіцієнта передачі за струмом (4.19а) в базисі вузлових напруг і коефіцієнта передачі за напругою (4.26) у базисі контурних струмів; вхідного (4.23б) і передачного (4.21) опорів у базисі вузлових напруг і вхідної (4.31) і передачної провідності (4.29) у базисі контурних струмів. Цей формальний збіг для елементів обернених матриць провідностей у виразах (4.16б) та опорів у (4.16а) та їх алгебраїчних доповнень у рівняннях (4.2) і (4.1) є проявом *принципу дуальності* в теорії кіл, коли властивості, методи, формули моделювання кіл формально математично збігаються. Перейти від відповідних понять, методів, властивостей до їх дуальних пар можна формальною заміною понять напруга — струм; контур — вузол; джерело струму — джерело напруги; паралельний — послідовний тощо. Тобто формули (4.26)–(4.31) для обчислення дуальних функцій кіл у дуальному базисі (відносно базису вузлових напруг) можна було б одержати з (4.18)–(4.25) формально на основі принципу дуальності.

Прикладом прояву цього принципу також є дуальність послідовного і паралельного R , L , C кіл [7, підрозд. 3.7].

4.6. Функції кола та розрахунки параметрів чотиріполюсників

З наведених у попередньому підрозділі формул обчислення функцій чотиріполюсника зрозуміло, що для чотирьох зовнішніх вузлів a, b, c, d у загальному випадку моделювання кола, схема якого має n вузлів ($n > 4$), слід обчислити лише 16 елементів оберненої матриці провідностей $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$, тобто підматрицю (\tilde{Z}) четвертого порядку:

$$(\tilde{Z}) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} & \underline{Z}_{ad} \\ b & \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_{bb} & \underline{Z}_{bd} \\ c & \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_{cc} & \underline{Z}_{cd} \\ d & \underline{Z}_{da} & \underline{Z}_{db} & \underline{Z}_{dc} & \underline{Z}_{dd} \end{pmatrix}, \quad (4.33a)$$

або, оскільки $\underline{Z}_{ij} = \Delta_{ji} / \Delta_Y$, матрицю (\underline{A}) алгебраїчних доповнень Δ_{ij} матриці (\underline{Y}) і визначник $\Delta_Y = |\underline{Y}|$:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \Delta_{aa} & \Delta_{ab} & \Delta_{ac} & \Delta_{ad} \\ b & \Delta_{ba} & \Delta_{bb} & \Delta_{bd} \\ c & \Delta_{ca} & \Delta_{cb} & \Delta_{cc} & \Delta_{cd} \\ d & \Delta_{da} & \Delta_{db} & \Delta_{dc} & \Delta_{dd} \end{pmatrix}. \quad (4.33b)$$

Для прохідного чотиріполюсника ($b = 0, d = 0$) отримуємо матрицю другого порядку:

$$(\tilde{Z}) = \begin{pmatrix} a & c \\ \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ac} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cc} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{pmatrix} a & c \\ \Delta_{aa} & \Delta_{ac} \\ \Delta_{ca} & \Delta_{cc} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Параметри \underline{Z}_{ij} матриці (\tilde{Z}) у формулі (4.34) є елементами матриці Z -параметрів прохідного чотиріполюсника. Параметри \underline{Y} цього чотиріполюсника (з точністю до знака у взаємних комірках матриці) можна отримати оберненням матриці (\tilde{Z}) :

$$(\underline{Y}) = (\tilde{Z})^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ \underline{Y}_{aa} & -\underline{Y}_{ac} \\ -\underline{Y}_{ca} & \underline{Y}_{cc} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Загалом, інші параметри прохідного чотиріполюсника можна знайти за відомими значеннями Z -параметрів, користуючись співвідношеннями, наведеними в табл. 4.2.

4.7. Приклади обчислення функцій деяких кіл

Приклад 4.1. Для схеми (рис. 4.10) знайти всі функції кола відносно входів $(a_1 + b_1)$ та $(a_2 + b_2)$. Схема складається з підсхем, уже згорнутих до еквівалентних трибрамників A, B, C і додаткових віток $G_1 = 0, G_2 = G_3 = G_4 = 1$ См.

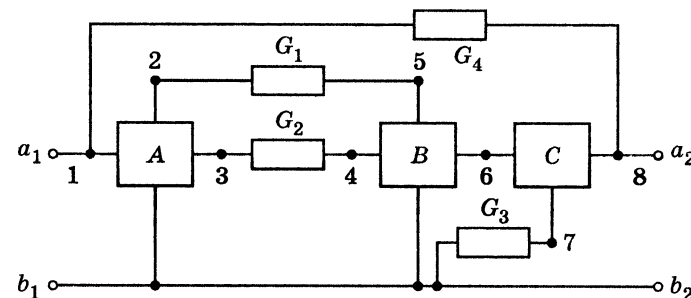


Рис. 4.10. Схема для прикладу аналізу чотиріполюсника $(1+0), (8+0)$ методом згортки підсхем

Розв'язання. Нехай матриці провідностей часткових канонічних систем рівнянь рівноваги вже знайдені (так само, як вони будуть знайдені для схеми рис. 4.10).

$$(\underline{Y})_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\underline{Y})_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (\underline{Y})_C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $G_1 = 0$ (це означає, що до входу $(2+0)$ трибрамника A не ввімкнена жодна вітка), цей трибрамник зведемо до чотиріполюсника (двобрамника) виключенням вузла 2. Часткова система рівнянь рівноваги трибрамника A має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Еквівалентне перетворення виключенням внутрішнього вузла призведе до еквівалентної системи рівнянь, у якій будуть відсутніми вузлова напруга \underline{U}_2 і рівняння першого закону Кірхгофа відносно вузла 2, тобто друге рівняння. Саме тому, що другий вузол внутрішній, у стовпці джерел струмів $\underline{I}_2 = 0$.

Отже, з другого рівняння системи (4.36) $-\underline{U}_1 + 2\underline{U}_2 = 0$ знайдемо $\underline{U}_2 = \frac{1}{2}\underline{U}_1$ і підставимо це значення в перше та третє рівняння (4.36). Отримуємо:

$$2\underline{U}_1 - \frac{1}{2}\underline{U}_1 = \underline{I}_1; \quad 2\underline{U}_1 + \underline{U}_3 = \underline{I}_3,$$

звідки в матричному вигляді виходить

$${}^1_3 \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix},$$

де нове (перетворене) значення матриці провідностей для підсхеми A становить

$$(\tilde{Y})_A = {}^1_3 \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Об'єднаємо тепер чотириполюсник A з віткою G_2 , тобто вважатимемо, що входами нового чотириполюсника A' є вузли $(1+0)$, $(4+0)$. Система рівнянь рівноваги для підсхеми A' має вигляд:

$${}^1_4 \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 2 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_4 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Тепер внутрішнім є вузол 3, який виключимо, аналогічно тому, як це було зроблено вище для вузла 2, тобто знайдемо U_3 з третього рівняння і підставимо його до першого і четвертого рівнянь. Одержимо:

$${}^1_4 \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно ввімкнемо чотириполюсник A' до підсхеми B , у якій заздалегідь виключимо вузол 5:

$$(\tilde{Y})_B = {}^4_6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1,5 \end{pmatrix}; \quad (Y)_{A'B} = {}^4_6 \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5+1 & 0 \\ 0 & 2 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

З матриці $(Y)_{A'B}$, виключивши внутрішній четвертий вузол, одержимо матрицю нового чотириполюсника:

$$(\tilde{Y})_{A'B} = {}^1_6 \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ -4/3 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Для об'єднання цього чотириполюсника з підсхемою C' (підсхема C разом із віткою G_3) спочатку обчислимо еквівалентні параметри чотириполюсника C' . При цьому врахуємо, що елементи матриці провідностей $(Y)_C$ обчислені (або виміряні за умови, що вузол 7 був ввімкнений до спільного вузла (інакше вимірювання були б неможливі). Тому спочатку

відімкнемо вузол 7 від землі та сформуємо плаваючу матрицю (з нульовим визначником):

$$(Y)_{C_n} = \begin{matrix} & 6 & 8 & 7 \\ \begin{matrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -7 \\ -7 & -2 & 9 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

визначник якої має дорівнювати нулю. Значення елементів 7-го рядка і 7-го стовпця вибрано так, щоб сума елементів будь-якого рядка чи стовпця дорівнювала нулю, що й забезпечує нульове значення визначника.

Увімкнувши між вузлом 7 і спільним вузлом вітку $G_3 = 1$, отримуємо:

$$(Y)_{C'} = \begin{matrix} & 6 & 8 & 7 \\ \begin{matrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -7 \\ -7 & -2 & 10 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

звідки виключенням вузла 7 знайдемо:

$$(\tilde{Y})_{C'} = \begin{matrix} & 6 & 8 \\ \begin{matrix} 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Нарешті, склавши систему рівнянь провідностей для двох чотириполюсників $A'B$ і C' :

$$(Y)_{A'C'} = \begin{matrix} & 1 & 6 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1,5+0,6 & -0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

і виключивши вузол 6, отримуємо підсумкову матрицю $(Y)_\Sigma$ еквівалентного чотириполюсника відносно входів $(1+0)$, $(8+0)$ у вигляді

$$(Y)_\Sigma = \begin{matrix} & 1 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 4/63 & 13/21 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Враховувши зовнішню вітку $G_4 = 1$ См, матимемо

$$(\tilde{Y})_\Sigma = \begin{matrix} & 1 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2,5 & -1 \\ -59/63 & 34/21 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Очевидно, що обчислення параметрів системи рівнянь рівноваги кола, приведенного до входів $(1+0)$, $(8+0)$, є простішою процедурою, ніж пряме розв'язання системи рівнянь рівноваги схеми (рис. 4.10), яка мала б вигляд

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 10 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \\ \underline{U}_7 \\ \underline{U}_8 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{I}_8 \end{pmatrix}. \end{matrix} \quad (4.39)$$

Використаний у даному прикладі метод поступового перетворення окремих блоків до чотириполіусників та їх об'єднання називають *методом еквівалентних підсхем*. Окремі підсхеми A , B , C теж є складними, тому їх можна відносно двох або більшої кількості зовнішніх входів звести до простіших (які описують системами рівнянь рівноваги невеликих порядків) так само, як це було зроблено для схеми (рис. 4.10).

За знайденою матрицею $(\tilde{Y})_Z$ обчислимо необхідну і достатню кількість функцій кола, а саме:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(1+0)(1+0)} &= \underline{Z}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} = \frac{34/21}{28/9} = \frac{51}{98} \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{(8+0)(8+0)} &= \underline{Z}_{88} = \frac{\Delta_{88}}{\Delta_Y} = \frac{5/2}{28/9} = \frac{45}{56} \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{(8+0)(1+0)} &= \underline{Z}_{81} = \frac{\Delta_{18}}{\Delta_Y} = \frac{59/63}{28/9} = \frac{59}{196} \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{(1+0)(8+0)} &= \underline{Z}_{18} = \frac{\Delta_{81}}{\Delta_Y} = \frac{1}{28/9} = \frac{9}{28} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Крім того, можна знайти (тут уже надлишкові) інші функції кола:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \frac{1}{\underline{Z}_{11}}; \quad \underline{Y}_{88} = \frac{1}{\underline{Z}_{88}}; \\ \underline{H}_{U(8+0)(1+0)} &= \frac{\Delta_{18}}{\Delta_{11}} = \frac{59/63}{34/21} = \frac{59}{102}; \\ \underline{H}_{U(1+0)(8+0)} &= \frac{\Delta_{81}}{\Delta_{88}} = \frac{1}{5/2} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Для визначення передатних провідностей та коефіцієнта передачі за струмом не вистачає інформації про структуру схеми, оскільки не виділено паралельних до входів $(1+0)$, $(8+0)$ опорів навантаження.

Метод еквівалентних підсхем

Метод еквівалентного генератора [7, підрозд. 2.7, 3.10], як і метод еквівалентного чотириполіусника, є окремими випадками методу

еквівалентних підсхем. Різниця лише в тому, що використовуючи метод еквівалентного генератора і чотириполіусника, довільну частину схеми (підсхему) згортають до одного або двох входів відповідно.

Але іноді розбиття складної схеми на елементарні підсхеми з одним або двома входами неможливе. Тоді схему розбивають на складніші підсхеми, які мають три і більше входів.

Процедура згортання підсхем аналогічна процедурі згортання еквівалентних двополіусників та чотириполіусників.

Детальне вивчення цієї проблеми виходить за межі даної навчальної дисципліни, тому доцільно продемонструвати згортання підсхем на прикладі.

Приклад 4.2. Для схеми (рис. 4.10), у якій всі параметри мають однакові значення з попереднім прикладом, крім $G_1 = 2 \text{ См}$, виконати згортання підсхем.

Розв'язання. У даному прикладі еквівалентне виключення вузла 2 у підсхемі A неможливе. До цього вузла ввімкнено вітку G_1 , і тому вузол 2 треба вважати (разом зі спільним вузлом) незалежним входом, а підсхему A — трибрамником.

Об'єднаємо підсхему A та вітку G_1 , після чого система рівнянь для отриманого чотирибрамника $((1+0)$, $(2+0)$, $(3+0)$, $(5+0))$ матиме вигляд

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2+2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_5 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_5 \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

Щоб виключити вузол 2 (після цього у трибрамнику залишаться входи $(1+0)$, $(3+0)$, $(5+0)$), знайдемо з другого рівняння \underline{U}_2 і підставимо у 1, 3 і 5-те рівняння. У підсумку отримаємо для трибрамника A'

$$(\tilde{Y})_{A'} = \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 \\ 1 & \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -0,5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Після ввімкнення до вузла 3 трибрамника A' вітки з провідністю G_2 та виключення внутрішнього вузла 3 одержимо трибрамник відносно входів $(1+0)$, $(5+0)$, $(4+0)$, матриця провідностей якого має вигляд

$$(\tilde{Y})_{A'G_2} = \begin{matrix} & 1 & 5 & 4 \\ 1 & \begin{pmatrix} 7/4 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Об'єднання трибрамника $A'G_2$ з підсхемою B дає систему рівнянь:

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & -0,5 & 1+2 & 4 & -1 \\ 4 & 0,5 & 1 & 0,5+1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{matrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ I_6 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Рівняння (4.40) відповідає чотириполоснику із входами (1+0), (6+0). Для визначення матриці провідностей цього чотириполосника з рівняння (4.40) вилучимо внутрішні вузли 5, 4.

Систему (4.40) можна подати в іншому вигляді:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & (Y_{1N}) & Y_{16} \\ (Y_{N1}) & (Y_{NN}) & (Y_{N6}) \\ Y_{61} & (Y_{6N}) & Y_{66} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ (U_N) \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ (0) \\ I_6 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

де $Y_{11}, Y_{16}, Y_{61}, Y_{66}$ — матриці 1-го порядку; $(Y_{1N}), (Y_{6N})$ — рядки розміру $1 \times N$; $(Y_{N1}), (Y_{N6})$ — стовпці розміру $N \times 1$; (Y_{NN}) — квадратна матриця порядку N ; (U_N) — стовпець вузлових напруг розміру $N \times 1$; (0) — стовпець нулів (нульових значень вектора незалежних струмів) розміру $N \times 1$.

Для розглянутого прикладу $N=2$, хоча алгоритм виключення (згортання) вірний для довільного значення N .

Із формули (4.41) знайдемо (U_N) , для чого запишемо матричне рівняння:

$$(Y_{N1})U_1 + (Y_{NN})(U_N) + (Y_{N6})U_6 = (0),$$

звідки

$$(U_N) = -(Y_{NN})^{-1}[(Y_{N1})U_1 + (Y_{N6})U_6].$$

Підставивши (U_N) у перше та шосте рівняння системи (4.41), одержимо рівняння другого порядку:

$$\begin{matrix} 1 & 6 \\ 6 & \end{matrix} \begin{pmatrix} Y_{11} - (Y_{1N})(Y_{NN})^{-1}(Y_{N1}) & Y_{16} - (Y_{1N})(Y_{NN})^{-1}(Y_{N6}) \\ Y_{61} - (Y_{6N})(Y_{NN})^{-1}(Y_{N1}) & Y_{66} - (Y_{6N})(Y_{NN})^{-1}(Y_{N6}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_6 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Рівняння (4.42) відповідає загальному алгоритму зведення чотириполосника з внутрішніми вузлами (у нашому випадку це вузли 4, 5) до еквівалентного чотириполосника, приведенного до своїх входів (1+0), (6+0).

У даному прикладі

$$(Y)_{NN} = \begin{matrix} 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1,5 \end{matrix}; \quad (Y)_{NN}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Далі, відповідно до виразу (4.42), одержимо:

$$(\tilde{Y})_{A'B'} = \begin{matrix} 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 7/4 & 0 & 1 & 11/4 & 1,5 \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 11/2 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1,5 \\ 6 & -11/2 & -1 \end{matrix}.$$

Подальші обчислення аналогічні обчисленням прикладу 4.1.

4.8. Спеціальні двобрамники та трибрамники

4.8.1. Операційні підсилювачі

Класичні операційні підсилювачі історично є першими і найпоширенішими у схемотехнічній практиці, починаючи з кінця 60-х років ХХ століття. Використання таких ОП пов'язане з обробкою сигналів у базисі напруг, тобто коли інформація передається у вигляді закону зміни напруги в часі.

Операційним підсилювачем (рис. 4.11, а) є складне коло, ідеалізовані параметри якого, приведені до входів, мають значення, подані на рис. 4.11, б.

У реально існуючих ОП на входах (1+0) та (2+0) опір становить одиниці-десятки мегаом, опір на виході (3+0) — одиниці-тисячі ом, коефіцієнт передачі за напругою (коефіцієнт підсилення) $\mu \geq 10^4 \dots 10^7$.

Якщо зовнішнє коло, що навантажує входи (3+0), (2+0), (1+0), у діапазоні робочих частот має вхідний опір (на цих входах), що дорівнює одиницям-сотням кілоом, то вхідні опори (на входах (1+0), (2+0)) можна вважати нескінченно великими, а вихідний (на вході (3+0)) — нескінченно малим. Наведені значення μ порівняно з коефіцієнтами передачі пасивних підкіл можна теж вважати нескінченними.

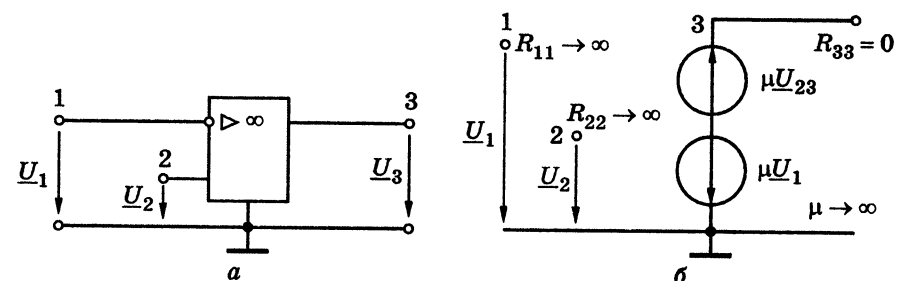


Рис. 4.11. Операційний підсилювач:

а — схемне зображення; б — ідеалізована еквівалентна схема

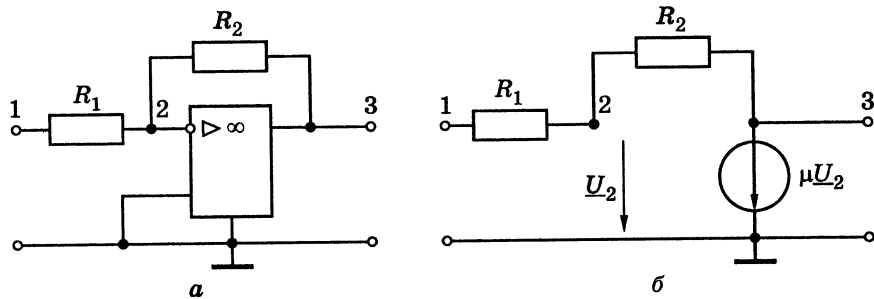


Рис. 4.12. Стабілізація коефіцієнта передачі за напругою ОП:
а — схема; б — еквівалентна схема

Очевидно, що за такої ідеалізації моделлю ОП слід вважати джерело напруги на вході (3+0), кероване напругою на входах (1+0), (2+0), як це показано на рис. 4.11, б (див. також [7, підрозд. 6.4]).

Великий діапазон значень μ у тій самій партії ОП потребує (для забезпечення однакових параметрів радіотехнічних кіл у серії) його стабілізації, що можна забезпечити схмотехнічно (рис. 4.12, а).

Нехай один із входів, наприклад прямий (2+0) (на схемі рис. 4.11, а), ввімкнено до спільного вузла (рис. 4.12, а).

Еквівалентну схему кола (рис. 4.12, а) зображено на рис. 4.12, б.

Для того щоб описати схему (рис. 4.12, б) канонічною системою рівнянь вузлових напруг, джерело напруги μU_2 слід перетворити у джерело струму (рис. 4.13, б), для чого спочатку за вузол 3 слід винести джерело напруги μU_2 (рис. 4.13, а).

Для остаточного перетворення схеми (рис. 4.13, б) необхідно надати схмотехнічний зміст джерелу струму $\mu U_2/R_2$, керованого вузловою напругою U_2 , прикладеною до цього ж джерела, передатна провідність якого $S = \mu/R_2$. Таке джерело струму (рис. 4.14, а)

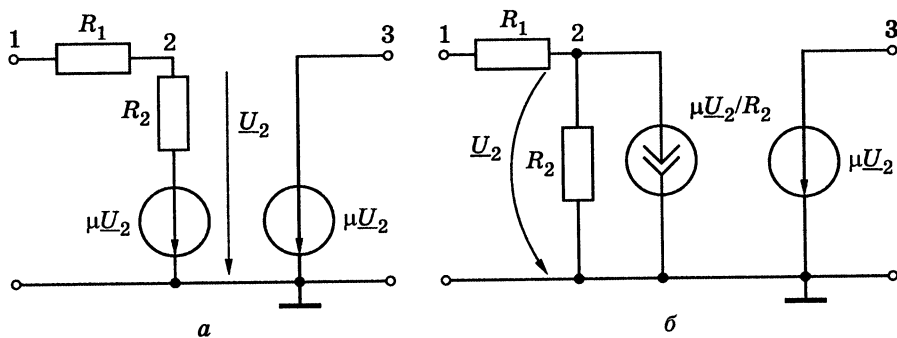


Рис. 4.13. Еквівалентні перетворення схем ОП

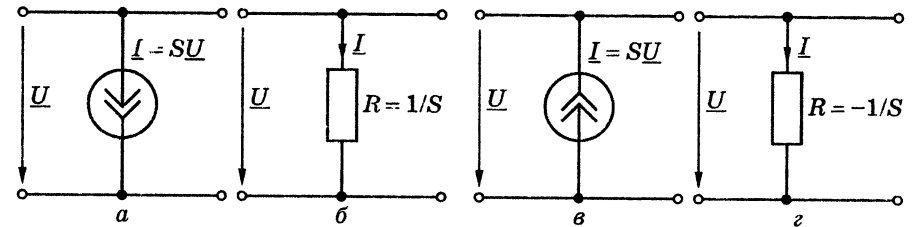


Рис. 4.14. Еквівалентні перетворення джерела струму, керованого напругою на цьому джерелі:
а, б — інвертувальний ОП; в, г — неінвертувальний ОП

є ідеальною резистивною віткою з провідністю $G = \mu/R_2 = \mu G_2$ (опором R_2/μ , рис. 4.14, б).

Якщо джерело струму відповідає неінвертувальному підсилювачу (напрямок струму є протилежний такому, який забезпечується напрямком прикладеної напруги — рис. 4.14, в), то таке джерело еквівалентно заміщують від'ємним опором (рис. 4.14, г).

З огляду на еквівалентні перетворення, показані на рис. 4.14, схему (рис. 4.13, б) можна привести до вигляду (рис. 4.15, а) або, після підсумування провідностей паралельних віток, до вигляду (рис. 4.15, б).

Коефіцієнт передачі за напругою \underline{H}_{U31} кола (рис. 4.15, б) дорівнює коефіцієнту передачі \underline{H}_{U21} (зі входу (1+0) на вхід (2+0)), помноженому на μ :

$$\underline{H}_{U21} = \frac{R_2/(\mu+1)}{R_1 + R_2/(\mu+1)}; \quad \underline{H}_{U31} = \frac{\mu R_2/(\mu+1)}{R_1 + R_2/(\mu+1)}. \quad (4.43)$$

Якщо $\mu > 10^3$, а опори R_1 та R_2 відрізняються у межах $1 \dots 10^2$, то з виразу (4.43) отримаємо:

$$\underline{H}_{U31} \approx R_2/R_1. \quad (4.44)$$

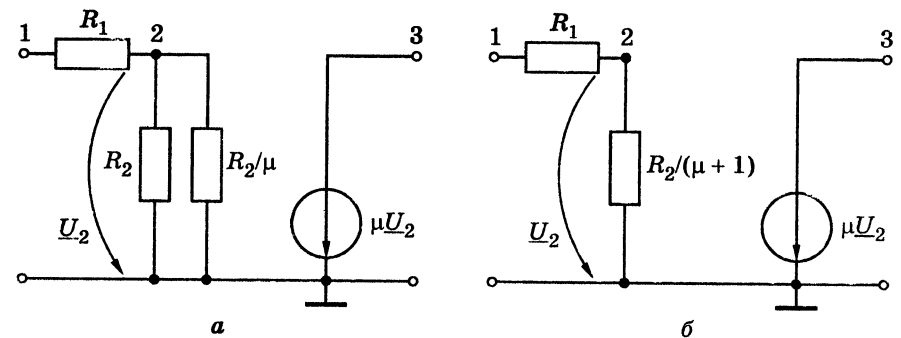


Рис. 4.15. Еквівалентні схеми ОП, зображеного на рис. 4.13, а

Стабільність коефіцієнта передачі залежить від стабільності опорів R_1 та R_2 (R_2 зазвичай роблять регульованим). Дійсно, нехай $\mu = 10^4$, тоді $R_1 \gg R_2/(\mu + 1)$ і в знаменнику (4.43) залишається лише доданок R_1 . У чисельнику (4.43) множник $\mu/(\mu + 1)$ має значення $10^4/(10^4 + 1) = 0,9999$. Якщо $\mu = 10^7$, то $\mu/(\mu + 1) = 0,9999999$.

Чим більше коефіцієнт підсилення кожного окремого ОП з партії, тим вище точність виконання рівняння (4.44). Тому для найменшого значення μ_{\min} з партії необхідно, щоб виконувалася нерівність:

$$\mu_{\min} \gg R_2/R_1. \quad (4.45a)$$

На практиці нерідко обирають значення $R_1 = R_2$. Тоді коефіцієнт передачі за напругою кола (рис. 4.12, а) дорівнює одиниці.

Розповсюдженою схемою ввімкнення ОП є така, коли на одному із входів (наприклад, прямому (2+0)) забезпечують стабільність коефіцієнта передачі за напругою, а на іншому (інверсному (1+0)) — відповідну селективну функцію (рис. 4.16, а).

Еквівалентну схему такого підсилювача зображено на рис. 4.16, б. Після еквівалентних перетворень, аналогічних попереднім, отримуємо схему (рис. 4.17, а).

Вхідна напруга подається до входу (1+0). Коефіцієнт передачі за напругою зі входу (1+0) на вхід (3+0) містить дві складові: μ та $\underline{H}_{U21}\mu$ (обумовлену джерелом струму $(\mu/R_2)\underline{U}_1$ і утвореною ним напругою \underline{U}_2). Для обчислення \underline{H}_{U21} слід скласти матрицю провідностей для частини схеми з вузлами 1 та 2:

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu/R_2 & 1/R_1 + (1-\mu)/R_2 \end{pmatrix} \end{matrix}, \text{ звідки } \underline{H}_{U21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = -\frac{\mu G_2}{G_1 + G_2(1-\mu)}.$$

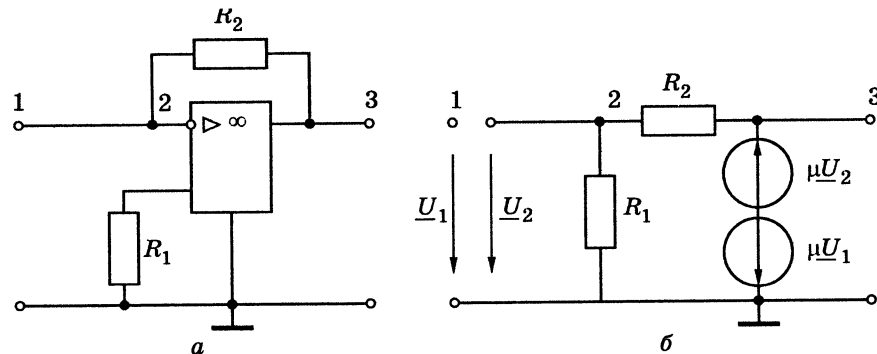


Рис. 4.16. Увімкнення стабілізуючого кола до прямого входу ОП:
а — схема ОП; б — еквівалентна схема

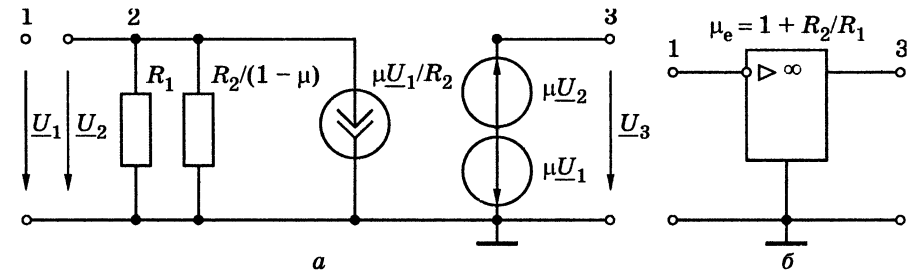


Рис. 4.17. Еквівалентне перетворення схеми (рис. 4.16, б)

Напруга на вході (3+0) становить

$$\underline{U}_3 = \mu \underline{U}_1 - \mu \underline{U}_2 = \mu \underline{U}_1 - \mu \underline{H}_{U21} \underline{U}_1 = \mu \left[\frac{\mu G_2}{G_1 + G_2(1-\mu)} + 1 \right] \underline{U}_1,$$

звідки

$$\underline{H}_{U31} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \mu \frac{G_1 + G_2 - \mu G_2 + \mu G_2}{G_1 + G_2(1-\mu)} \cong -\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = -\mu_e. \quad (4.45b)$$

Зазвичай на схемах вхід, на якому організують стабільний коефіцієнт передачі за напругою μ_e , не зазначають, і схему (рис. 4.17, а) подають у вигляді (рис. 4.17, б). Крім того, у випадках, коли згадана ідеалізація ОП доцільна, ОП реалізує коефіцієнт передачі за напругою зі входу на вихід. Зворотна передача напруги дорівнює нулю, вхідний опір дорівнює нескінченності, а вихідний — нулю.

4.8.2. Гіратори

Одним з елементів сучасної схемотехніки є гіратор (рис. 4.18), який широко використовують для перетворень параметрів елементів кола в дуальні (струм–напруга, опір–провідність, ємність–індуктивність).

Гіратор — це чотириполюсник, у якому джерела струму, ввімкнені протилежно за напрямком відносно спільного вузла, керуються напругами на інших входах. Для ідеального гіратора його провідності S_1, S_2 — дійсні числа.

У базисі вузлових напруг система рівнянь, що описує гіратор (рис. 4.18), має вигляд

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & S_1 & -S_1 \\ -S_2 & 0 & S_2 \\ S_2 & -S_1 & S_1 - S_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.46a)$$

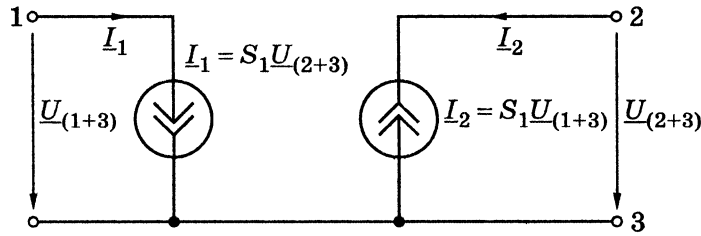


Рис. 4.18. Еквівалентна схема гіратора

Якщо вважати потенціал вузла 3 нульовим, система (4.46а) перетворюється до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & S_1 \\ -S_2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \quad (4.466)$$

Вхідний опір ненавантаженого гіратора (рис. 4.18)

$$\underline{Z}_{(1+0)(1+0)} = \underline{Z}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{0}{S_1 S_2} = 0, \quad (4.47)$$

тобто холостий хід на вході (2+0), відповідає короткому замиканню на вході (1+0).

Вхідна напруга становить

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{12} I_2 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} I_2 = -\frac{S_1}{S_1 S_2} I_2 = -\frac{I_2}{S_2}, \quad (4.48)$$

тобто напруга \underline{U}_1 пропорційна струму I_2 . Це вірно для будь-якої функції часу $i_2(t)$.

Якщо до входу (2+0) ввімкнено провідність навантаження \underline{Y}_H , опір на вході (1+0) визначають з рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & S_1 \\ -S_2 & \underline{Y}_H \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.49a)$$

і він має вигляд:

$$\underline{Z}_{(1+0)(1+0)} = \underline{Z}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\underline{Y}_H}{S_1 S_2}, \quad (4.496)$$

тобто є пропорційним провідності навантаження.

Нехай тепер гіратор навантажено на вході (2+0) ємнісною віткою $\underline{Y}_H = j\omega C$. Тоді

$$\underline{Z}_{11} = \frac{j\omega C}{S_1 S_2} = j\omega \frac{C}{S_1 S_2}, \quad (4.50)$$

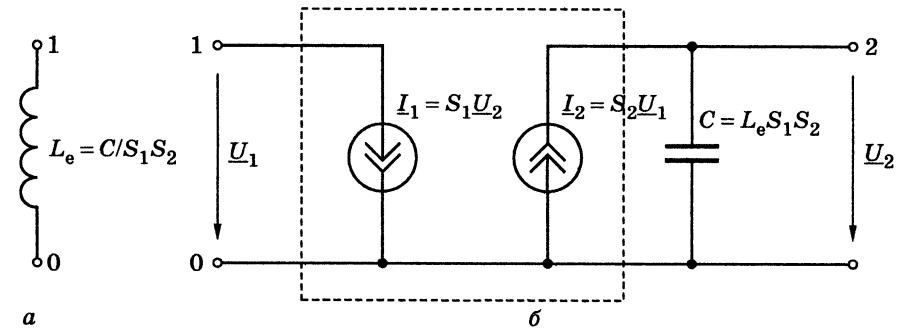


Рис. 4.19. Використання гіратора для заміщення індуктивності: а — індуктивна вітка; б — її імітація відносно входу (1+0) за допомогою гіратора та ємності на вході (2+0)

тобто вхідний опір має індуктивний характер і відносно входу (1+0) гіратор можна замінити еквівалентною індуктивністю $L_e = C/S_1 S_2$ (рис. 4.19). У подальшому на рисунках гіратор виділений штрихованим контуром.

Якщо до входу (2+0) ввімкнуті індуктивну вітку з провідністю $\underline{Y}_L = 1/j\omega L$, опір на вході (1+0)

$$\underline{Z}_{11} = \frac{1}{j\omega L S_1 S_2} \quad (4.51)$$

матиме ємнісний характер і гіратор відносно цього входу можна замінити ємнісною віткою $C_e = L S_1 S_2$ (рис. 4.20).

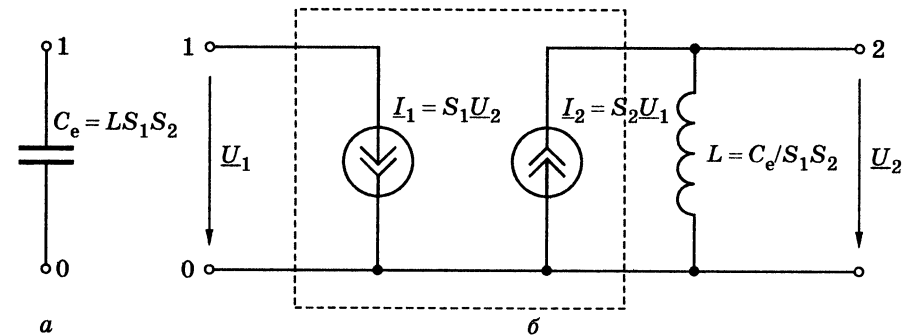


Рис. 4.20. Застосування гіратора для заміщення ємності: а — ємнісна вітка; б — її імітація відносно входу (1+0) за допомогою гіратора та індуктивності на вході (2+0)

Якщо на вході (2+0) встановити режим короткого замикання ($Y_H \rightarrow \infty$), то на вході (1+0) буде режим холостого ходу:

$$Z_{11} = \frac{Y_H}{S_1 S_2} \Big|_{Y_H \rightarrow \infty} \rightarrow \infty. \quad (4.52)$$

Якщо до входу (2+0) гіратора ввімкнуте джерело напруги E , то на вході (1+0) виникне джерело струму

$$I_1 = -ES_1. \quad (4.53)$$

Нехай тепер провідність Y_H утворено двома паралельними вітками — ємнісною C і резистивною $R = 1/G$, тоді відповідно до виразу (4.496) вхідний опір становитиме

$$Z_{11} = \frac{Y_H}{S_1 S_2} = j\omega \frac{C}{S_1 S_2} + \frac{G}{S_1 S_2}, \quad (4.54)$$

тобто гіратор (рис. 4.21) перетворює паралельне ввімкнення віток R, C на вході (2+0) у послідовне ввімкнення віток $L_e = C/S_1 S_2$ та $R_e = G/S_1 S_2$ на вході (1+0).

З наведених властивостей гіратора видно, що він виконує дuality перетворення віток, якими (за методом еквівалентного генератора) можна представити входи двополюсних кіл. Тому каскадне з'єднання двох гіраторів (рис. 4.22) з передатними провідностями $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}$ перетворює вітки, ввімкнені до входу (b+c), у такі самі з коефіцієнтом перетворення $S_1^{(2)} S_2^{(2)} / S_1^{(1)} S_2^{(1)}$.

Використання гіраторів є дуже зручним прийомом при організації обчислень. Так, наприклад, аналізуючи нелінійні кола

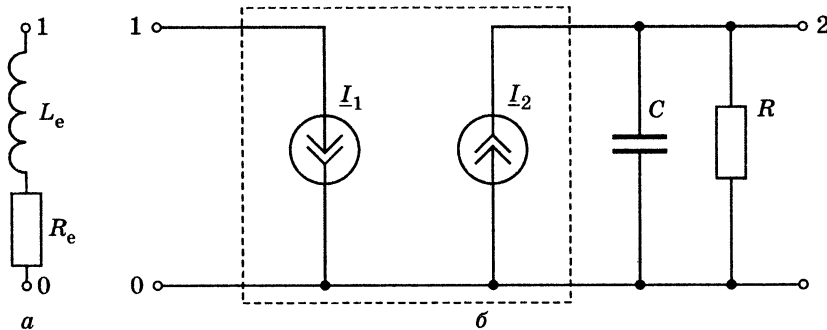


Рис. 4.21. Використання гіратора для заміщення послідовної вітки: а — L_e, R_e -вітка; б — її імітація паралельними R - і C -вітками

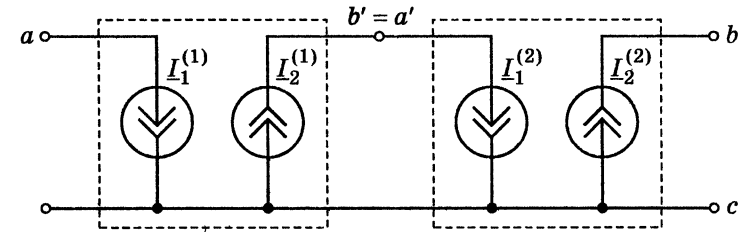


Рис. 4.22. Каскадне з'єднання двох гіраторів

з параметрами, що описані неоднозначною S -подібною ампер-вольтною характеристикою (рис. 4.23, а), її зазвичай заміняють однозначною N -подібною (рис. 4.23, б), змінюючи місцями функцію й аргумент. Але це призводить до переходу до іншого координатного базису (наприклад, від опису в базисі вузлових напруг до базису контурних струмів та ін.), що дуже незручно, беручи до уваги розповсюженість та переваги базису вузлових напруг при аналізі складних непланарних кіл.

Для забезпечення однозначності функції (рис. 4.23, а) слід до входу (2+0) гіратора (рис. 4.18) ввімкнути провідність з N -подібною характеристикою (рис. 4.23, б). Це забезпечить на вході (1+0) опір у вигляді (рис. 4.23, а), якщо ввести для характеристики (рис. 4.23, б) ваговий коефіцієнт $1/S_1 S_2$ або прийняти $S_1 = S_2 = 1$.

За умови обчислення в базисі канонічної системи вузлових напруг активні компоненти кола (підсилювачі) мають бути представлені як джерела струму, керовані напругою. Проте, вимірюючи параметри таких активних чотириполіусників, їх зручніше представляти у вигляді джерел струму, керованих струмом, джерел напруги, керованих напругою, та джерел напруги, керованих струмом. Відповідні таким чотириполіусникам сучасні елементи (класичні ОП, струмові повторювачі) мають такі вхідні та вихідні опори, які (як і для класичного ОП) при розрахунках доцільно вважати нульовими або нескінченними. Тому стандартні еквівалентні перетворення таких чотириполіусників часто є неможливими.

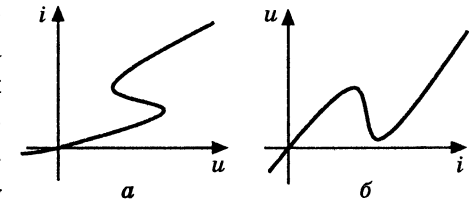


Рис. 4.23. Нелінійні S -подібні характеристики: а — ампер-вольтна; б — відповідна їй вольт-амперна

Усі ці труднощі легко подолати, якщо відповідні «нестандартні» для базису вузлових напруг вітки керованого джерела привести до «стандартного» вигляду за допомогою гіраторів (рис. 4.24–4.26).

Так, на рис. 4.24 показано перетворення ідеального джерела напруги (рис. 4.24, а), керованого напругою (без опорів на входах $(\alpha + \beta)$, $(\gamma + \delta)$) до джерела струму, керованого напругою (рис. 4.24, б).

Якщо передатні провідності гіратора $S_1 = S_2 = 1 \text{ См}$, то коефіцієнт μ у схемі (рис. 4.24, б) чисельно дорівнює μ у схемі (рис. 4.24, а), але вимірюється в сименсах.

Аналогічно, на рис. 4.25 показано перетворення джерела струму, керованого струмом (рис. 4.25, а), у джерело струму, керованого напругою (рис. 4.25, б). Коефіцієнт k у схемі (рис. 4.25, б) теж

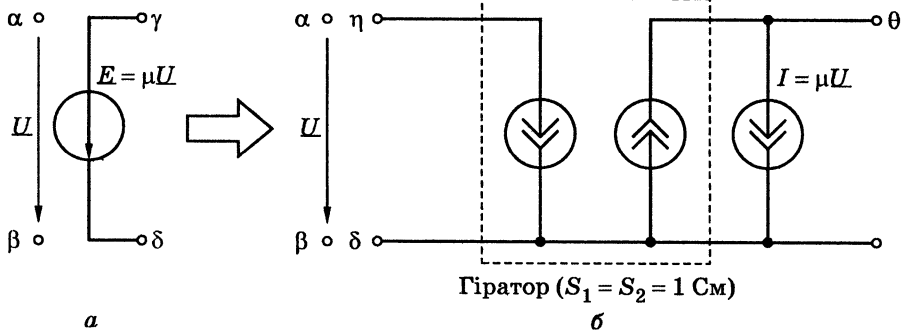


Рис. 4.24. Перетворення джерел за допомогою гіратора:
а — джерело напруги, кероване напругою;
б — джерело струму, кероване напругою

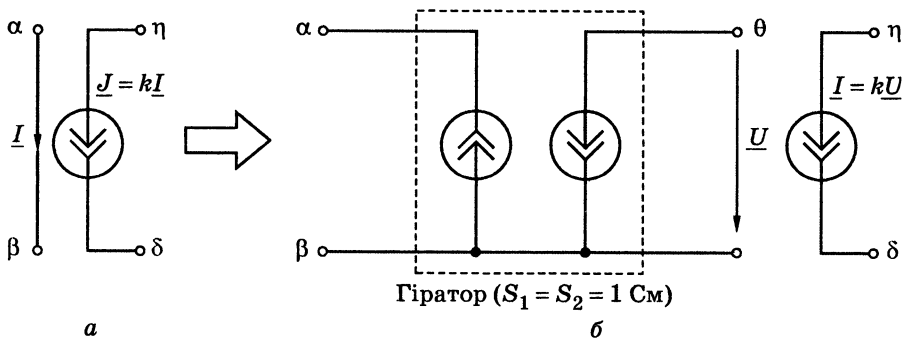


Рис. 4.25. Перетворення джерел за допомогою гіратора:
а — джерело струму, кероване струмом;
б — джерело струму, кероване напругою

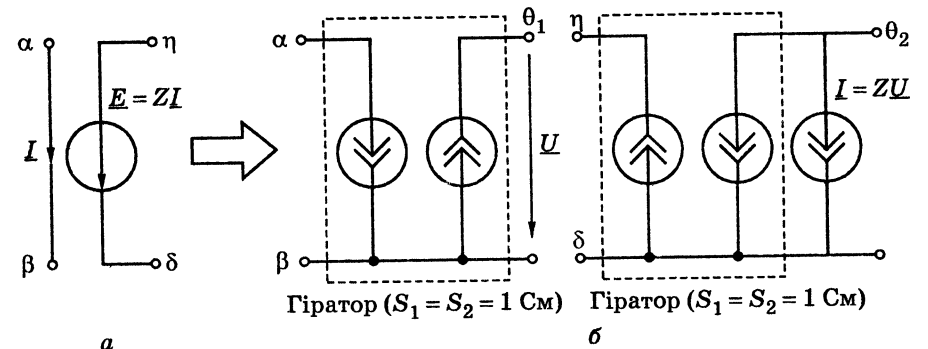


Рис. 4.26. Перетворення джерел за допомогою гіраторів:
а — джерело напруги, кероване струмом;
б — джерело струму, кероване напругою

вимірюється в сименсах, у схемі (рис. 4.25, а) k — безрозмірна величина.

Нарешті, на рис. 4.26 показано перетворення джерела напруги, керованого струмом (рис. 4.26, а), до джерела струму, керованого напругою. У схемі (рис. 4.26, а) Z вимірюють в омах, у той час як у схемі (рис. 4.26, б) Z має те саме чисельне значення, але в сименсах.

4.8.3. Трибрамні конвертори та конвеєри

У сучасній схемотехніці велике значення мають трибрамні імітансні³ конвертори (рис. 4.27).

Нині найпоширенішими є базові види конверторів: із підсумуванням струму та з підсумуванням напруги. Схемні моделі обох видів конверторів зображено на рис. 4.28.

Трибрамний конвертор із підсумуванням струму — це трибрамник, який описують системою рівнянь

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.55)$$

Трибрамний конвертор із підсумуванням напруги — це трибрамник, який описують системою рівнянь

$$\begin{pmatrix} \mu_{21} & \mu_{21} & \mu_{21} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & 0 \\ N_{31} & 0 & N_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.56)$$

³ Імітанс — термін, спільний для комплексного опору й комплексної провідності.

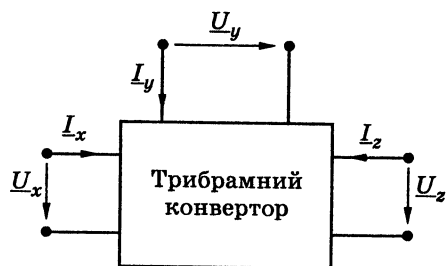


Рис. 4.27. Трибрамний конвертор

Згідно з виразом (4.55) коефіцієнти передачі за напругою A_i та струмом B_j моделі (рис. 4.28, а) мають значення:

$$\begin{aligned} -A_1 &= \frac{\mu_{21}}{\mu_{22}}; \quad -A_2 = \frac{\mu_{31}}{\mu_{33}}; \\ -B_1 &= \frac{N_{12}}{N_{11}}; \quad -B_2 = \frac{N_{13}}{N_{11}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Для моделі (рис. 4.28, б) за формулою (4.56):

$$-A_1 = \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}; \quad -A_2 = \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}; \quad -B_1 = \frac{N_{21}}{N_{22}}; \quad -B_2 = \frac{N_{31}}{N_{33}}. \quad (4.58)$$

Зазвичай входи конвертора об'єднують так, що кожен із входів з'єднують зі спільним вузлом. Тоді рівняння (4.55), (4.56) з урахуванням формул (4.57), (4.58) набувають вигляду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_2 \\ B_1 & B_2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_y \\ I_z \\ U_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_y \\ U_z \\ I_x \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

для конверторів із підсумуванням струму та

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & A_2 \\ B_1 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

для конверторів із підсумуванням напруги.

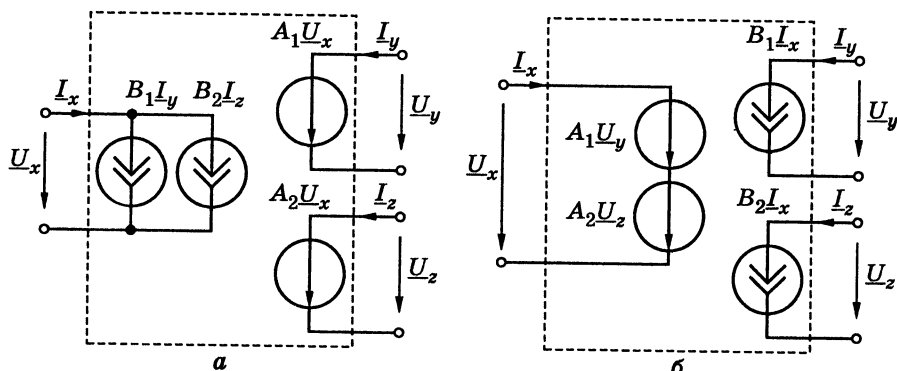


Рис. 4.28. Конвертори з підсумуванням: а — струму; б — напруги

Окремим випадком трибрамного конвертора є *конвеєр*, який набув широкого розповсюдження в сучасній аналоговій техніці у вигляді елементів в інтегрованому або гібридному виконанні, що їх виготовляють численні західні фірми. Окрім того, конвеєр став основним «будувальним блоком» у багатьох галузях схемотехніки.

Загалом *конвеєром* називають кожен частковий випадок трибрамного імітансного конвертора, у якого хоча б один із коефіцієнтів передачі за напругою або струмом (A_i, B_j) дорівнює нулю.

Якщо нулю дорівнює деякий з коефіцієнтів передачі за напругою, такий конвертор має назву *струмовий конвеєр*, якщо ж коефіцієнт передачі за струмом дорівнює нулю — *конвеєр напруги*.

Відповідно до прийнятих визначень, у табл. 4.3 наведено відомості про всі шість типів існуючих нині конвеєрів (трьох поколінь — I, II, III). Їхні умовні графічні позначення показані на рис. 4.29, а еквівалентні схеми — на рис. 4.30, відповідно.

Таблиця 4.3

Типи конвеєрів

Конвеєр	Тип	Параметр	Рисунок				
			A_1	A_2	B_1	B_2	
Струмовий	CCI	Із підсумуванням напруги	A_1	0	B_1	B_2	4.29, а 4.30, а
	CCII	напруги	A_1	0	0	B_2	4.29, б 4.30, б
	CCIII	струму	A_1	0	B_1	B_2	4.29, в 4.30, в
Напруговий	VCI	Із підсумуванням струму	A_1	A_2	B_1	0	4.29, г 4.30, г
	VSCII	струму	0	A_2	B_1	0	4.29, д 4.30, д
	VCSIII	напруги	A_1	A_2	B_1	0	4.29, е 4.30, е

Струмові конвеєри CCII другого покоління (рис. 4.29, б; 4.30, б) є найпоширенішими в сучасній практиці серед наведених вище шести типів конвеєрів. Ці конвеєри описують системою рівнянь

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

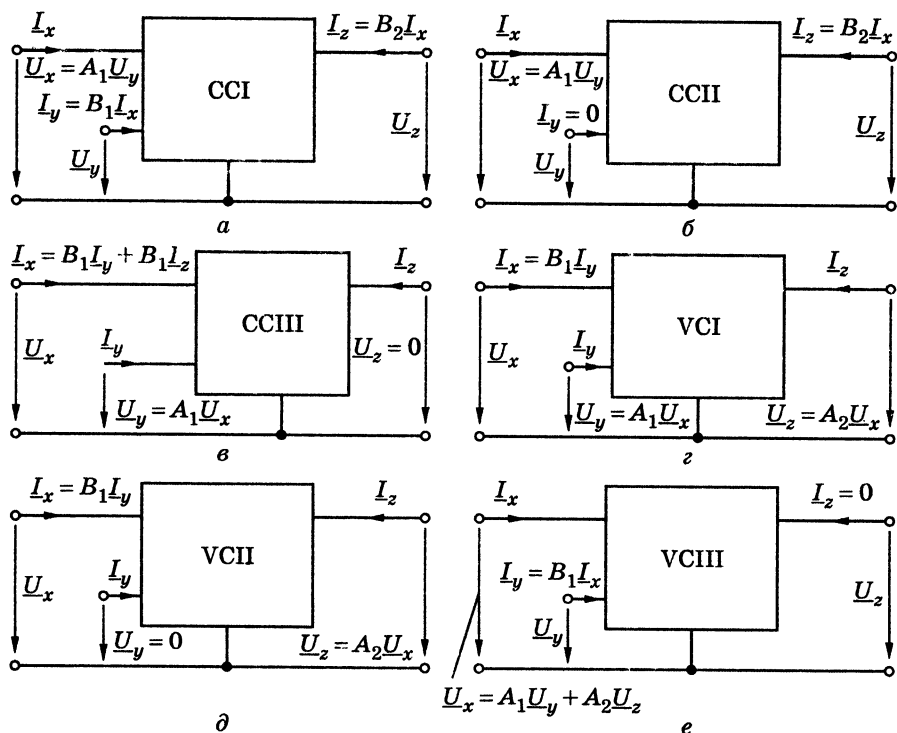


Рис. 4.29. Умовні позначення конвеєрів струму та напруги трьох поколінь

При цьому $A_1 = +1$; $B_2 = +1$ для CCI(+), та $A_1 = -1$; $B_2 = -1$ для CCI(-). На сьогодні західні фірми випускають спеціальні інтегровані аналогові кола, які відповідають конвеєрам CCI. Раніше виготовлялися гібридні кола на двох класичних ОП (принципову схему такого конвеєра в гібридному виконанні зображено на рис. 4.31). При цьому коефіцієнти передачі за напругою кожного ОП $A = 1$.

Додатково слід виконати такі умови:

- для CCI(+):

$$(R_1^+ + R_2^+)(R_5^+ + R_6^+) = R_3^+ R_4^+;$$

- для CCI(-):

$$R_4^- (R_1^- + R_3^-) = R_2^- (R_5^- + R_6^-).$$

З аналізу кіл (рис. 4.31) для коефіцієнта передачі за струмом конвеєра виходять такі вирази:

$$B_2^+ = \frac{R_1^+ [R_2^+ R_6^+ + R_5^+ (R_2^+ + R_4^+)]}{R_6^+ [R_2^+ R_3^+ + R_5^+ (R_1^+ + R_2^+)]}; \quad B_2^- = \frac{-R_1^- R_2^-}{R_2^- R_6^-}.$$

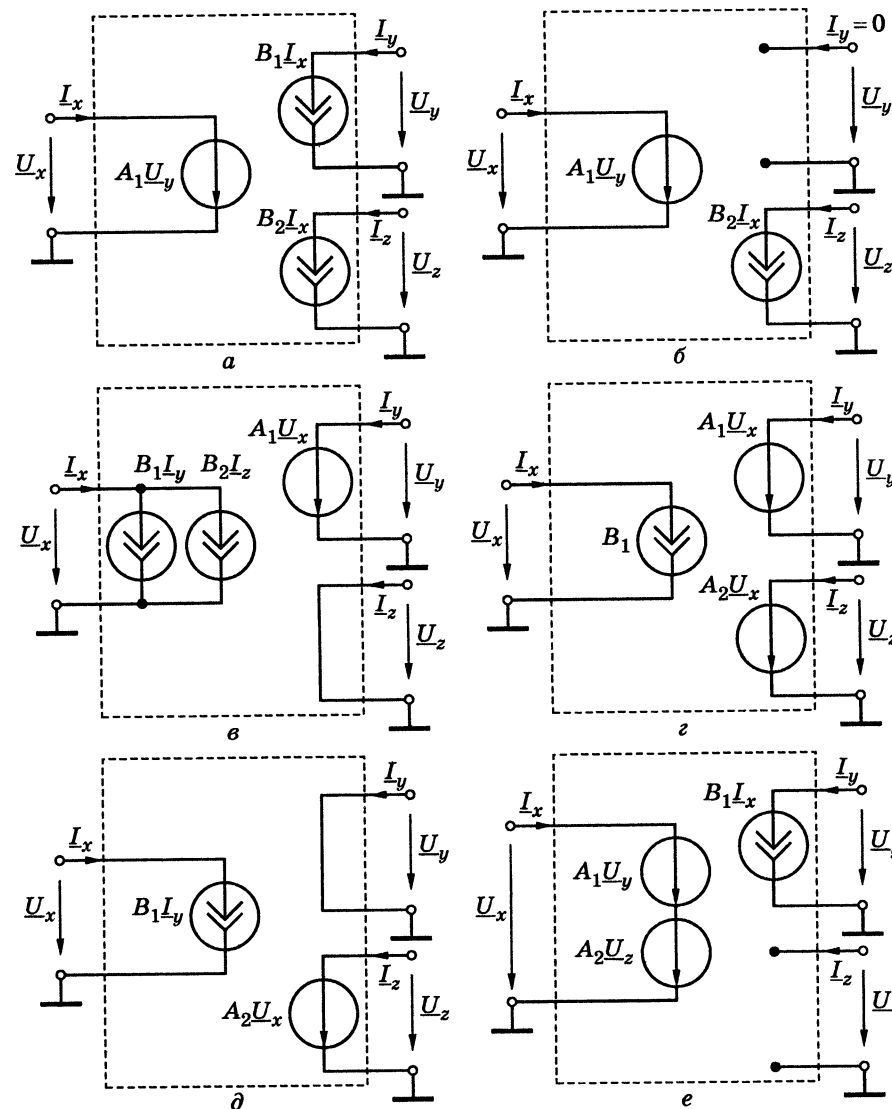


Рис. 4.30. Еквівалентні схеми конвеєрів

Коефіцієнти передачі за напругою для обох типів конвеєрів (рис. 4.31) дорівнюють одиниці ($A = 1$).

На базі струмового конвеєра проектують численні блоки сучасних аналогових кіл. У розділі 6 аналізуватимуться схемні реалізації фільтрів. У даному підрозділі як приклад доцільно розглянути схему джерела струму, керованого напругою, на базі CCI.

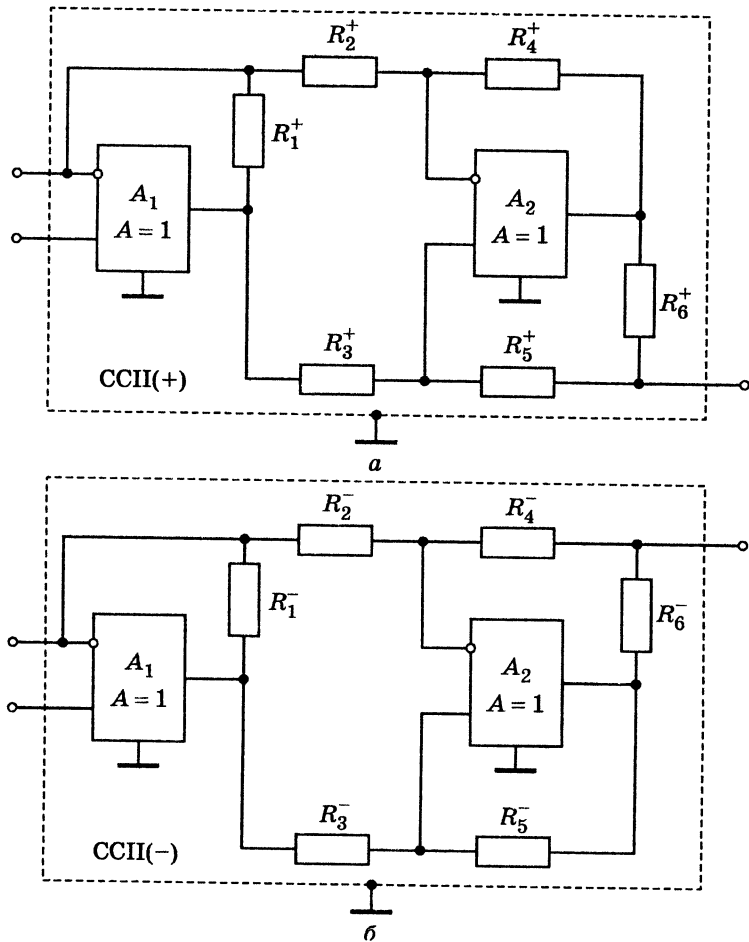


Рис. 4.31. Принципові схеми конвеєрів струму другого покоління: а — ССІІ(+); б — ССІІ(-)

На рис. 4.32, а зображено принципову схему такого джерела.

З рис. 4.32, б видно, що струм у вітці Z , викликаний напругою U_y , керує струмом $B_2 I_x$ керованого джерела, тобто результуюча передатна провідність становить

$$S = -\frac{A_1 B_2}{Z},$$

звідки для ССІІ(+) $S = -1/Z$, а для ССІІ(-) $S = 1/Z$, причому значення можна регулювати підстроюванням опору Z .

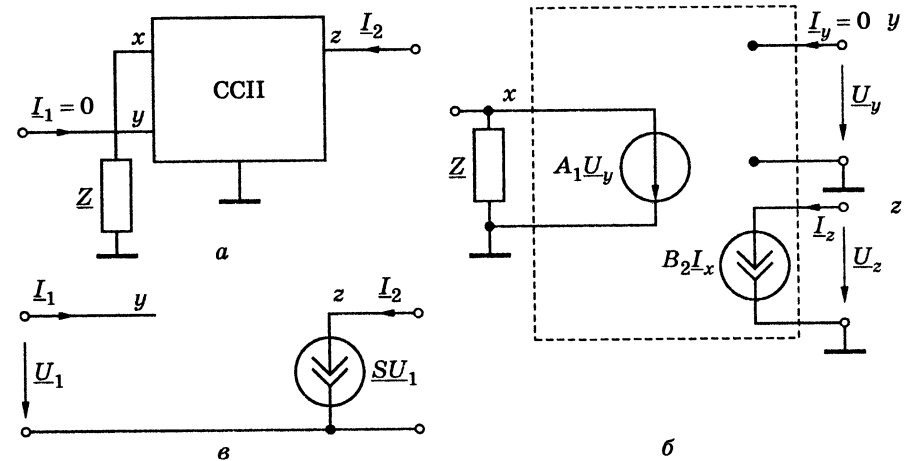


Рис. 4.32. Схеми джерела струму, керованого напругою, на конвеєрі ССІІ: а — принципова; б — еквівалентна; в — еквівалентна з виключенням контуру на вході ($x+0$)

4.8.4. Кратні реактивні елементи (біцистори)

Нерідко у схемотехнічному проектуванні необхідні елементи (двополюсники), частотнозалежні параметри яких змінюються за законом $\omega^2 D_1$ або D_2/ω^2 . Пасивних реактивних елементів з такими параметрами не існує (для ємності $X_C = 1/\omega C$, для індуктивності $X_L = \omega L$), але їх нескладно реалізувати на керованих джерелах, які, в свою чергу, отримують за допомогою класичних ОП, конвеєрів, суматорів. Якщо залежність одержуваного параметра від частоти квадратична, то елемент з таким параметром називають *біцистором*.

Базою для потрібних перетворень частотнозалежних опорів або провідностей (імітансів) є трибражник (рис. 4.33) з входами ($a+0$), ($b+0$), ($c+0$), до двох з яких ($(b+0)$ і ($c+0$)) увімкнені частотнозалежні вітки з лінійною частотною залежністю їхніх імітансів.

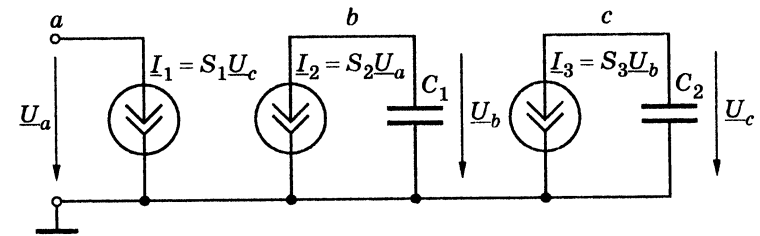


Рис. 4.33. Схема біцистора

Вхідний опір $Z_{(a+0)(a+0)}$ для кола (рис. 4.33) можна визначити за формулою

$$\underline{Z}_{(a+0)(a+0)} = \underline{Z}_{aa} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta_Y},$$

де Δ_{aa} , Δ_Y — доповнення та визначник матриці провідностей:

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_1 \\ S_2 & j\omega C_1 & 0 \\ 0 & S_3 & j\omega C_2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Тоді

$$\Delta_{aa} = -\omega^2 C_1 C_2; \Delta_Y = S_1 S_2 S_3; \underline{Z}_{aa} = \frac{-\omega^2 C_1 C_2}{S_1 S_2 S_3} = -\omega^2 D_1^{(2)},$$

$$\text{де } D_1^{(2)} = \frac{C_1 C_2}{S_1 S_2 S_3}.$$

Аналогічно можна отримати вхідний опір $\pm j\omega^3 D_1^{(3)}$, реалізувавши чотирибрамник, схему якого зображено на рис. 4.34. У цьому випадку матриця провідностей має вигляд

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & S_1 \\ S_2 & j\omega C_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_3 & j\omega C_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_4 & j\omega C_3 \end{pmatrix} \end{matrix};$$

$$\Delta_{aa} = (j\omega)^3 C_1 C_2 C_3; \Delta_Y = -S_1 S_2 S_3 S_4; \underline{Z}_{aa} = \frac{j\omega^3 C_1 C_2 C_3}{S_1 S_2 S_3 S_4} = j\omega^3 D_1^{(3)}.$$

Для того щоб змінити знак $D_1^{(3)}$, достатньо змінити знак однієї з передатних провідностей S_i . Якщо потрібно отримати дійсний опір (уявну кратну індуктивність), слід забезпечити уявну передатну провідність, що легко зробити, використавши в схемі (рис. 4.32) реактивну вітку \underline{Z} .

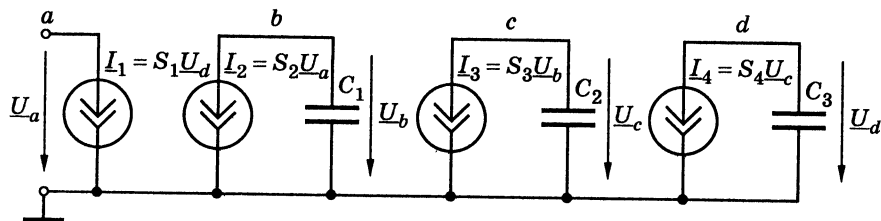


Рис. 4.34. Трикратна індуктивність $D_1^{(3)}$

Кратні ємності й індуктивності застосовують, розв'язуючи задачі синтезу кіл за їх операторними передатними функціями (див. розд. 3 і 6) за умови $p = j\omega$. При цьому кожен з елементів полінома, який входить до ОПФ, реалізується окремо, що значно полегшує процедуру синтезу.

Але сучасні методи синтезу спираються на реалізацію підкіл другого порядку, в яких поліноми знаменника та (або) чисельника ОПФ мають не більше, ніж другий порядок. Тому найширше розповсюджені саме біцистори, у яких кратність ємності або індуктивності дорівнює двом.

У сучасній схемотехніці кратні ємності (внаслідок широкого застосування R, C кіл у цьому підрозділі розглядатимуться схеми тільки для них) реалізують за допомогою універсального трибрамника, який можна одержати зі струмових конвеєрів ССІІ.

Сам універсальний трибрамник — це елемент кола («будівельний блок»), який описують системою рівнянь

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ B & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_\alpha \\ \underline{U}_\beta \\ \underline{U}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_\alpha \\ \underline{I}_\beta \\ \underline{I}_\gamma \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Тобто в рівняння (4.61) додана ще передатна провідність S та змінений порядок нумерації ($\alpha = x, \beta = z, \gamma = y$). Інакше кажучи, в системі (4.62) додане джерело струму (на вході $y = \gamma$, кероване напругою на вході $z = \beta$). Умовне позначення й еквівалентну схему такого трибрамника показано на рис. 4.35.

З порівняння еквівалентних схем (рис. 4.35, б і рис. 4.32, б) видно, що для реалізації універсального трибрамника до входу ($y+0$)

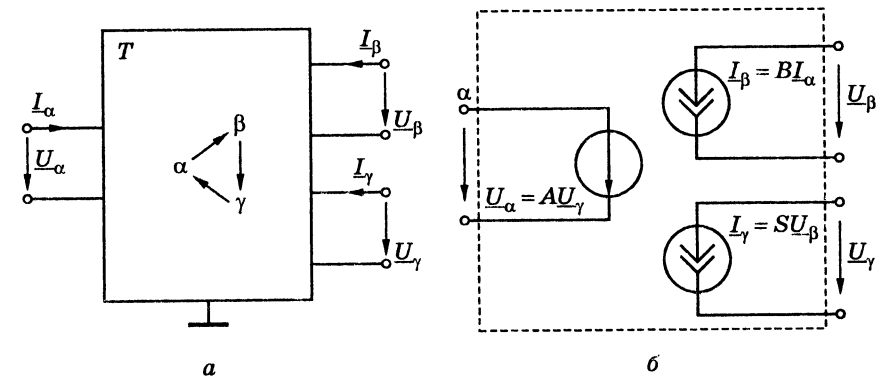


Рис. 4.35. Універсальний трибрамник:
а — умовне позначення; б — еквівалентна схема

у схемі (рис. 4.32, б) слід ввімкнути джерело струму SU_z , кероване напругою.

На базі трибрамних елементів (рис. 4.36) легко реалізувати кратну ємність $D_2^{(2)}$ (рис. 4.37).

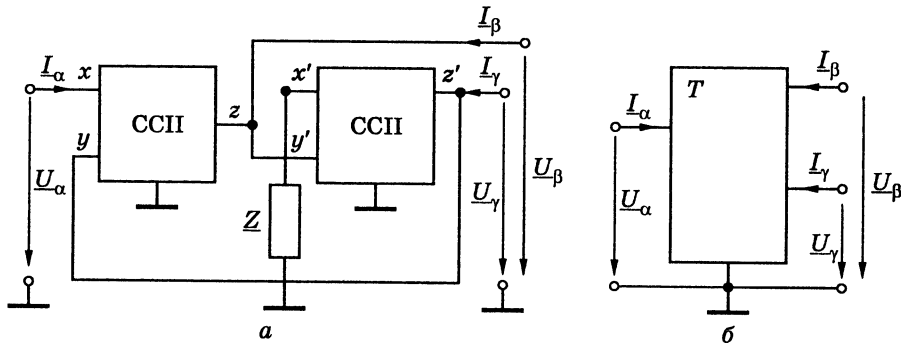


Рис. 4.36. Універсальний трибрамник

із входами, з'єднаними зі спільним вузлом на двох конвеєрах ССІІ:

а — схема; б — умовне позначення

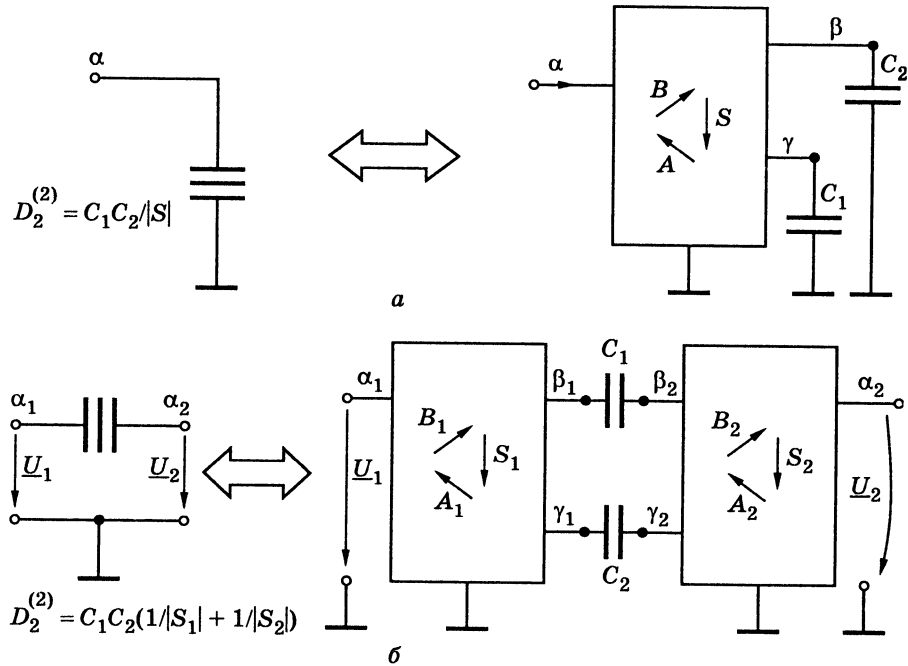


Рис. 4.37. Схеми і умовні позначення біцисторів:

а — заземленого; б — «плаваючого»

Так, для схеми заземленого біцистора (рис. 4.37, а), де кратну ємність $D^{(2)}$ увімкнено до входу ($\alpha + 0$), за умови $A = 1, B = \pm 1$ можна записати:

$$D_2^{(2)} = \frac{C_1 C_2}{|S|},$$

де $S = \pm |S|$.

Для схеми плаваючого біцистора (рис. 4.37, б) за умови $A_1 = A_2 = 1, B_1 = B_2 = \pm 1$:

$$D_2^{(2)} = C_1 C_2 \left(\frac{1}{|S_1|} + \frac{1}{|S_2|} \right),$$

де $S_1 = S_2 = \pm |S|$.

4.8.5. Трансїмпедансні та транскондуктивні операційні підсилювачі

У 80-х роках ХХ століття на ринку з'явилися *трансїмпедансні операційні підсилювачі* (ТОП) у монолітному інтегральному виконанні. Їх ще називають ОП із струмовим зворотним зв'язком. За своїми параметрами та властивостями вони значно переважають класичні ОП. Насамперед, ТОП мають значно більші робочі частоти, більші значення коефіцієнтів передачі, менший час затримки та встановлення, більшу лінійність при обробці великих за амплітудою сигналів, менші втрати (більший коефіцієнт корисної дії).

Як зразок можна навести ТОП фірми Analog Devices AD844 або AD846. Ці підсилювачі мають компенсаційний вхід Z. На рис. 4.38, а показано умовне позначення ТОП, а на рис. 4.38, б — його

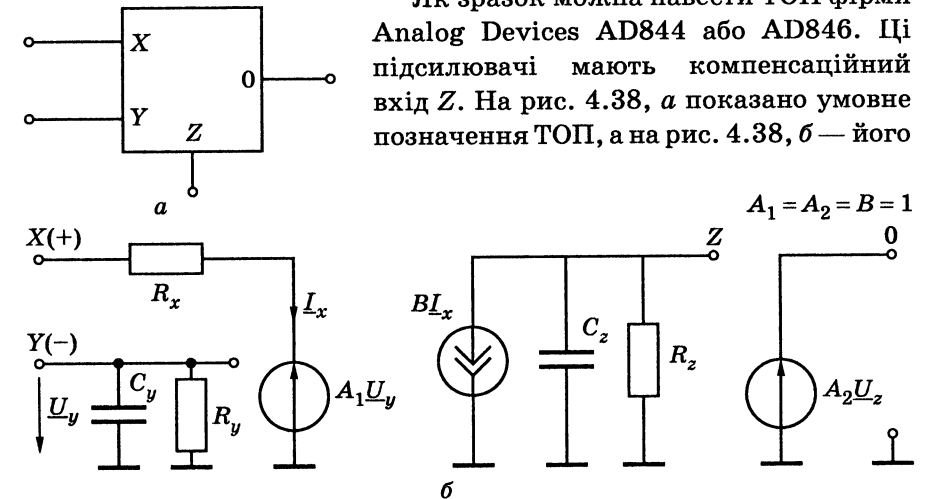


Рис. 4.38. Трансїмпедансний підсилювач (ТОП)

із двома входами x, y та виходом 0 :

а — умовне позначення; б — еквівалентна схема

еквівалентну схему з урахуванням паразитних параметрів ($R_x = 50 \text{ Ом}$; $R_z = 4 \text{ МОм}$; $C_z = 4 \text{ пФ}$).

Трансїмпедансний ОП є джерелом напруги, керованим струмом (відносно входів $x, 0$).

Транскондуктивні операційні підсилювачі теж мають значно більші, ніж класичні ОП, робочі частоти. Вдалим прикладом *транс-адмітансного* (транскондуктивного) підсилювача (ОТП — в англійській літературі ОТА) є виріб фірми National Semiconductor LM/3700, або, як його ще називають, «діамантовий транзистор» (фірми Burr-Brown — ОР660). Ці ОТП працюють у діапазоні відео-частот і є джерелами струму, керованими напругою. Такий «діамантовий транзистор» має єдиний регульований параметр $G = S$ (у діапазоні $40 \text{ мкСм} \dots 40 \text{ мСм}$), який і є передатною провідністю. Умовне позначення елементів ОТП показано на рис. 4.39.

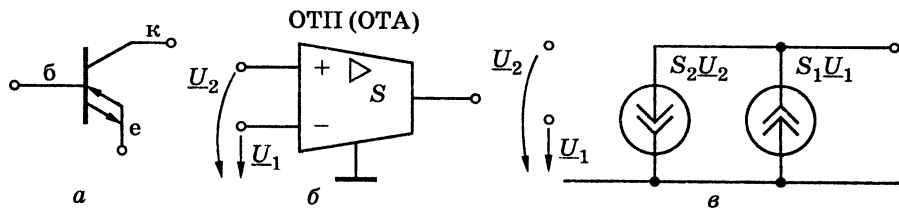


Рис. 4.39. Транскондуктивний операційний підсилювач (ОТП):
а — умовне позначення «діамантового транзистора»;
б — елемент ОТП із двома входами; в — еквівалентна схема

4.8.6. Елемент CFA (Current Feedback Amplifier)

Ці «будівельні» елементи сучасної аналогової схемотехніки є чотирибрамниками, що їх виготовляє фірма Analog Devices, описуваними системою рівнянь

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_x \\ U_y \\ U_z \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x \\ I_y \\ I_z \\ U_0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

На рис. 4.40 зображено умовні позначення такого елемента та схема його синтезу на двох конвеєрах струму ССІІ.

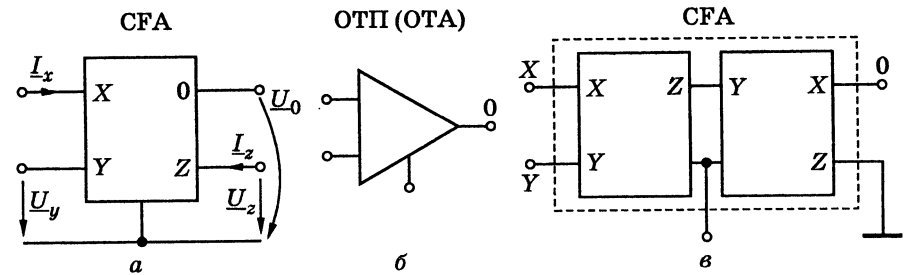


Рис. 4.40. Підсилювач із струмовим зворотним зв'язком (CFA):
а, б — умовні позначення;
в — схема на базі двох конвеєрів струму ССІІ

4.9. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Які схеми називають багатополосником (багатобрамником), чотириполосником (двобрамником)?
2. Записати шість форм рівнянь чотириполосника. Пояснити, в яких випадках кожна з форм запису має переваги перед іншими.
3. Які чотириполосники називають прохідними, активними, симетричними?
4. Як експериментально визначити параметри чотириполосника?
5. Як, знаючи коефіцієнти однієї системи параметрів, визначити коефіцієнти іншої?
6. Яке з'єднання чотириполосників називають регулярним?
7. Довести, що матриця біполярного транзистора зі спільним емітером (рис. 4.41) має вигляд:

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} 1/R_{6e} & 0 \\ \underline{Y}_{\text{пер}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці (\underline{A}) та (\underline{H}) .

Відповідь:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\underline{Y}_{\text{пер}} \\ 0 & 1/(\underline{Y}_{\text{пер}} R_{6e}) \end{pmatrix};$$

$$(\underline{H}) = \begin{pmatrix} R_{6e} & 0 \\ \underline{Y}_{\text{пер}} R_{6e} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Обчислити А-параметри Т-подібного чотириполосника, поперечну вітку якого утворює

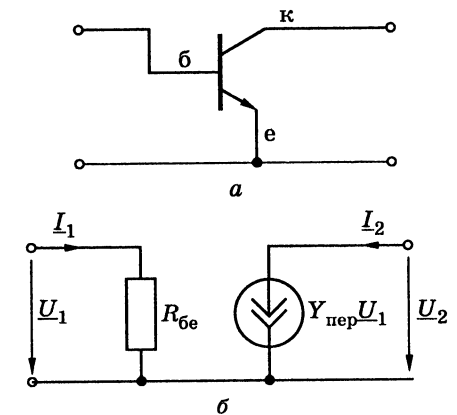


Рис. 4.41. Транзистор n-p-n-типу:
а — схема зі спільним емітером;
б — схема заміщення в області нижніх частот

ємність C , а кожна з подовжніх віток — індуктивність L . Дано: $X_C = 20 \text{ Ом}$, $X_L = 10 \text{ Ом}$.

Відповідь: $A_{11} = A_{22} = -1$; $A_{12} = 0$; $A_{21} = -j0,1 \text{ См}$.

9. Знайти коефіцієнт передачі за напругою при холостому ході та коефіцієнт передачі за струмом при короткому замиканні для Π -подібного чотириполюсника, подовжня вітка якого утворена індуктивністю L , а кожна з поперечних віток — ємністю C .

Відповідь: $\frac{1}{1 - \omega^2 LC}$.

10. Несиметричний чотириполюсник навантажений опором Z_2 . Користуючись Z -параметрами, довести, що комплексні коефіцієнти передачі за струмом і напругою становлять, відповідно:

$$\underline{H}_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_2}; \quad \underline{H}_U = -\frac{Z_{21}Z_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} + Z_{11}Z_2}$$

11. Досліди холостого ходу і короткого замикання для симетричного чотириполюсника дали такі результати: $U_{x,x} = 10 \text{ В}$; $I_{x,x} = 0,477 \text{ А}$; $P_{x,x} = 2 \text{ Вт}$ ($\varphi_{x,x} > 0$); $U_{к.з} = 10 \text{ В}$; $I_{к.з} = 0,5 \text{ А}$; $P_{к.з} = 3 \text{ Вт}$ ($\varphi_{к.з} > 0$). Обчислити його характеристичні параметри.

Відповідь: $Z_c = 20,47 e^{j59,3^\circ} \text{ Ом}$; $A_c = 1,46 \text{ Нп}$; $B_c = 0,63 \text{ рад}$.

12. Резистивний Γ -подібний чотириполюсник з елементами $Z_1 = 1600 \text{ Ом}$ (подовжня вітка), $Z_2 = 900 \text{ Ом}$ (поперечна вітка) ввімкнено узгоджено з генератором і навантаженням. Знайти внутрішній опір генератора й опір навантаження.

Відповідь: $Z_r = 1600 \text{ Ом}$; $Z_n = 720 \text{ Ом}$.

13. Назвати шість типів комплексних функцій кола. Який зв'язок існує між КФ чотириполюсника й елементами матриць його параметрів різних форм (Y , Z , H , D , A , B)?
14. Пояснити принцип дуальності в теорії кіл. Як можна застосувати цей принцип, визначаючи функції кола в базисі контурних струмів і вузлових напруг?
15. У чому полягають схожість та різниця методів: еквівалентного двополюсника, еквівалентного чотириполюсника, еквівалентних підсхем?
16. Користуючись методом еквівалентних підсхем, знайти для схеми, розглянутої у прикладі 4.3, комплексний коефіцієнт передачі за напругою. Записати результуючу матрицю еквівалентного чотириполюсника відносно входів $(1+0)$, $(8+0)$.

Відповідь: $\underline{H}_{U(8+0)(1+0)} = -1,583$; $(\underline{Y})_\Sigma = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 165/8 & 1/2 \\ -95/40 & 3/2 \end{pmatrix}$.

17. Дати характеристику операційного підсилювача як елемента електричного кола.
18. Яким розрахунковим схемним еквівалентом може бути заміщений ОП?
19. Дати характеристику властивостей керованих джерел напруги і струму.

20. Який елемент кола називають гіратором? Які його властивості та функції? Чому гіратор є незв'язним чотириполюсником?

21. Пояснити, як за допомогою гіратора можна зімітувати індуктивний елемент. Зобразити схему моделі паралельного резонансного контуру на базі гіратора.

22. Записати матрицю (Y) ідеального гіратора з провідністю G . Довести, що матриці (Z), (A) можна записати у вигляді:

$$(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -1/G \\ 1/G & 0 \end{pmatrix}; \quad (A) = \begin{pmatrix} 0 & 1/G \\ G & 0 \end{pmatrix}$$

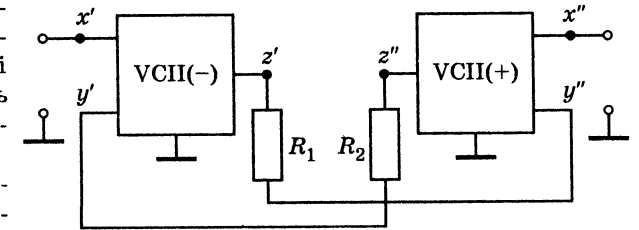
23. Який елемент кола називають трибрамним конвертором? Назвати базові види конверторів.

24. Записати системи рівнянь конверторів за умови, що кожен із його входів з'єднано зі спільним вузлом.

25. Який елемент кола називають конвеєром? За якою ознакою розрізняють конвеєри струму та напруги? Назвати типи конвеєрів.

26. Записати систему рівнянь, яка описує конвеєри ССІІ.

27. Зобразити еквівалентну схему конвеєра ССІІ (+). Які значення мають коефіцієнти передачі цієї схеми?



28. На рис. 4.42 зображено схему реалізації гіратора на двох конвеєрах напруги. Побудувати еквівалентну схему цієї реалізації і впевнитися, що вона відповідає схемі гіратора.

Рис. 4.42. Принципова схема гіратора на двох конвеєрах напруги другого покоління

29. Які характеристики мають кратні реактивні елементи?
30. Чому серед кратних елементів найбільше розповсюджені біцистори? Як залежать їхні параметри від частоти?
31. Якою системою рівнянь описують універсальний трибрамник? Як реалізувати цей елемент кола за допомогою конвеєрів ССІІ?
32. Навести умовні позначення трансїмпедансного і транскондуктивного операційних підсилювачів. Назвати їхні особливості та переваги порівняно з класичним ОП.
33. Дати характеристику підсилювачу зі струмовим зворотнім зв'язком (СФА).



КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ. ДОВГІ ЛІНІЇ

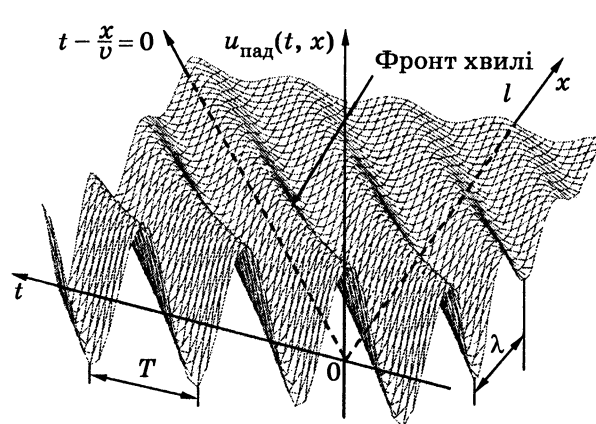
- Загальні положення
- Первинні параметри довгих ліній
- Диференціальні (телеграфні) рівняння довгої лінії. Загальний розв'язок рівнянь для лінії без втрат
- Аналіз усталеного синусоїдного режиму довгої лінії
- Лінії з малими втратами при синусоїдній дії
- Режим біжних хвиль
- Режим стійних хвиль
- Режим змішаних хвиль
- Методи узгодження довгих ліній
- Кругові діаграми ідеальних довгих ліній
- Комплексні функції та частотні характеристики довгих ліній
- Перехідні процеси в ДЛ
- Операторні функції і часові характеристики ДЛ
- Застосування кіл із розподіленими параметрами



В. І. Коваленков



Д. Бернуллі



$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$



Ж. Даламбер

5.1. Загальні положення

У попередніх розділах розглядалися кола із зосередженими параметрами, яким притаманні такі властивості:

- 1) наявність скінченної кількості ідеальних пасивних елементів¹ $R, L (M), C$;
- 2) струми в кожній вітці та напруги між даними точками схеми залежать тільки від часу, тобто повністю описуються миттєвими значеннями $i(t), u(t)$ відповідно;
- 3) значення $i(t)$ однакове для будь-якого перерізу вітки схеми;
- 4) напруга $u(t)$ між даними точками схеми визначається як різниця їхніх потенціалів;
- 5) процеси описуються звичайними диференціальними рівняннями, які ґрунтуються на законах Кірхгофа для $i(t), u(t), e(t)$.

Наприклад, усі подані особливості стосуються реального кола із зосередженими параметрами (рис. 5.1, а), складеного з послідовно з'єднаних генератора, резистора, котушки самоіндукції і конденсатора, та схеми заміщення цього кола (рис. 5.1, в). Для синусоїдного джерела $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_e)$ миттєве значення струму кола в усталеному режимі становить

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i), \quad (5.1)$$

де $I_m = \frac{E_m}{Z}$; $\psi_i = \psi_e - \varphi$; $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\varphi = \arctg \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) / R \right]$.

Струм (5.1) у будь-який момент часу однаковий у кожному перерізі кола за умови, що час затримки перенесених зарядів між будь-якими двома перерізами нехтовно малий. Можна показати, що для виконання даної умови максимальні геометричні розміри реального кола x_m, y_m, z_m мають бути значно меншими довжини хвилі (рис. 5.1, а):

$$\lambda = v/f,$$

де $v \leq c$ — швидкість переміщення зарядів; c — швидкість світла; $f = \omega/2\pi = 1/T$ — циклічна частота.

¹ Згідно з ДСТУ 2815-94. Електричні й магнітні кола та пристрої. Терміни та визначення (п. 4.10), коло із зосередженими параметрами визначається як таке, що може бути подане сукупністю скінченної кількості ідеальних елементів.

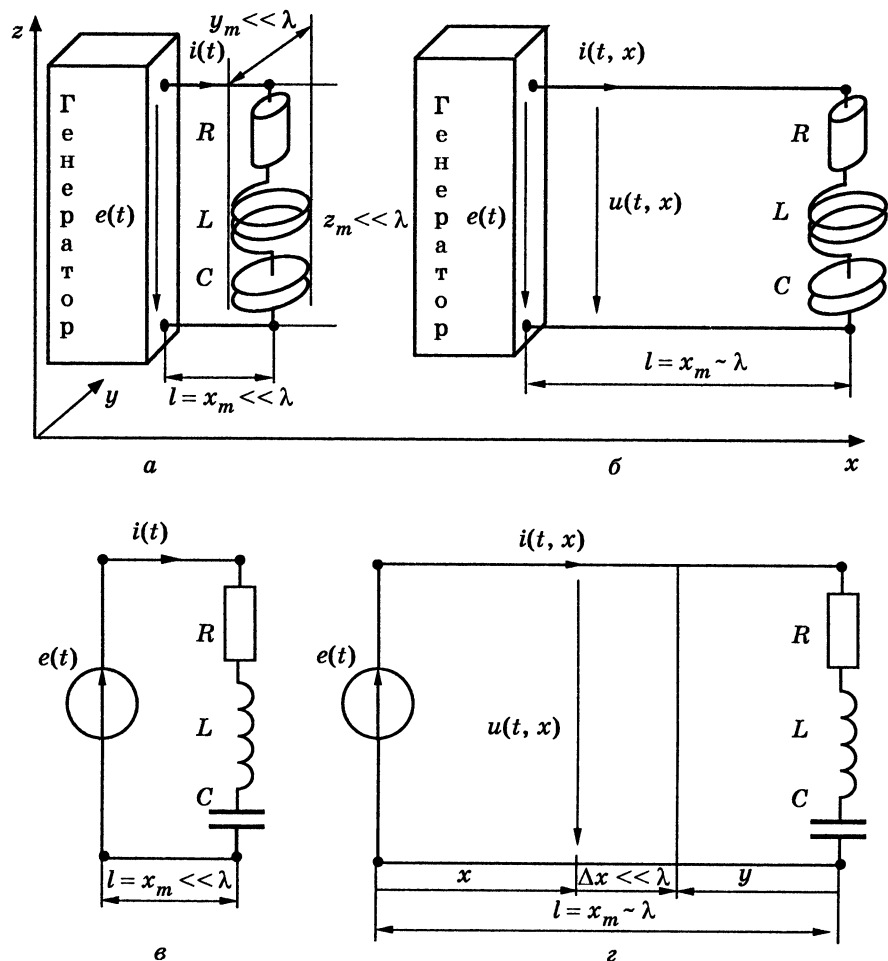


Рис. 5.1. Пояснення головного критерію щодо застосування теорії кіл із зосередженими і розподіленими параметрами:
 а, в — реальне коло із зосередженими параметрами та його схема;
 б, г — реальне коло з розподіленими параметрами та його схема

Якщо один із розмірів кола, наприклад довжина $x_m = l$, буде сумірною з довжиною хвилі за рахунок довжини провідників, які з'єднують затискачі генератора з пасивними елементами (рис. 5.1, б), це призведе до затримки зарядів на час, сумірний із періодом змінювання струму:

$$t_3(l) = \frac{l}{v} = \frac{l}{\lambda f} = \frac{l}{\lambda} T. \quad (5.2)$$

Вважаючи амплітуду струму постійною² і враховуючи формулу (5.2), миттєве значення струму в перерізі провідників із координатою x можна записати у вигляді:

$$i(t, x) = I_m \cos \{ \omega [t - t_3(x)] + \psi_i \} = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{\lambda f} + \psi_i \right) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \psi_i \right), \quad (5.3)$$

де $t_3(x) = x/v = x/\lambda f$ — час затримки зарядів у перерізі кола з координатою x , записаний аналогічно виразу (5.2).

Миттєве значення струму (5.3) стає функцією двох змінних — часу t і координати x . При цьому функція $i(t, x)$ періодична як у часі з періодом T , так і у просторі за координатою x з періодом λ . Ця властивість притаманна в загальнофізичному значенні однимимірним хвильовим процесам, а в електрорадіотехніці — колам із розподіленими параметрами.

Отже, сумірність одного з геометричних розмірів кола і довжини хвилі є головним критерієм застосування теорії кіл із розподіленими параметрами для даного кола. У розглянутому прикладі (рис. 5.1, б, г) ця умова задовольняється, оскільки $l = x_m \sim \lambda$; $y_m \ll \lambda$; $z_m \ll \lambda$.

Можна сформулювати ще й часовий критерій щодо застосування теорії кіл із розподіленими параметрами — в колах з розподіленими параметрами часова затримка за однією з координат сумірна з часовими параметрами діючих у колі сигналів.

Теорія кіл із розподіленими параметрами почала інтенсивно розвиватися з середини XIX століття у зв'язку з необхідністю вирішення практичних задач створення довгих телеграфних і телефонних ліній. Перші теоретичні праці належать Кірхгофу і Томсону (Кельвіну).

Отже, наведений вище спрощений аналіз процесів у колах із розподіленими параметрами дозволяє встановити тільки одну відмінність кіл цього класу від кіл із зосередженими параметрами — залежність миттєвих значень процесів від двох змінних t, x та головний критерій приналежності реальних кіл до кіл із розподіленими параметрами — сумірність одного з геометричних розмірів

² Як покаже подальший аналіз, умова постійності амплітуди у будь-якому перерізі кола з розподіленими параметрами не завжди виконується.

із довжиною хвилі. Докладніший аналіз, наведений нижче, дозволить встановити інші властивості цих кіл:

1) подання кола у вигляді нескінченної кількості розподілених за однією з координат ідеальних пасивних елементів³, для кількісної оцінки яких вводиться поняття первинних (погонних) параметрів (див. підрозд. 5.2);

2) затримку струмів і напруг у часі та хвильовий характер процесів;

3) опис процесів, у загальному випадку, диференціальними рівняннями в частинних похідних для $i(t, x)$ та $u(t, x)$ (див. підрозд. 5.3).

Найважливішим окремим випадком кіл із розподіленими параметрами є довгі лінії (лінії передачі). До довгих ліній (ДЛ) належать кола у вигляді двох провідників, розділених непровідним середовищем і працюючих у режимі, коли довжина провідників сумірна, а поперечні розміри значно менші довжини хвилі. Прикладами ДЛ є провідники, які з'єднують джерело з елементами R, L, C у колах, показаних на рис. 5.1, б, г.

Довгі лінії практично застосовують у діапазонах метрових (30—300 МГц) і дециметрових хвиль (300—3000 МГц). Конструктивно лінії передачі зазвичай виготовляють у вигляді двопровідних повітряних ліній (рис. 5.2, а), коаксіальних кабелів (рис. 5.2, б) і стрічкових ліній (рис. 5.2, в). Крім провідного шару «3» у стрічкових лініях (рис. 5.2, в), інші геометричні розміри наведених конструкцій ліній передачі у поперечних перерізах є значно меншими довжини хвилі: $d \ll \lambda$; $D \ll \lambda$; $h \ll \lambda$.

Окрім головного призначення — каналізації енергії без втрат або передачі сигналів без спотворення форми — ДЛ у вказаних діапазонах частот використовують, створюючи резонансні контури, трансформатори, фільтри, лінії затримки, антенні пристрої, формувачі, ізолятори, вимірювальні лінії, комутатори, атенюатори. Для різних галузей застосування розроблені спеціальні ДЛ: резистивні; R, C лінії; спіральні лінії затримки; штучні лінії тощо.

З огляду на практичне значення ДЛ і порівняну простоту їх теоретичного аналізу, подальше викладення присвячено саме цим колам із розподіленими параметрами.

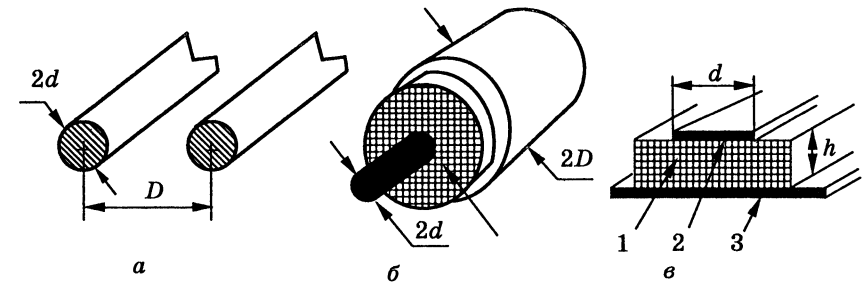


Рис. 5.2. Конструкції основних видів ліній передачі:

- а — симетрична двопровідна повітряна лінія ($2d$ — діаметр провідників, D — відстань між провідниками);
 б — коаксіальний кабель ($2d$ — діаметр внутрішнього (центрального) провідника, $2D$ — діаметр зовнішнього провідника (оплетення),
 1 — ізолюючий шар діелектрика);
 в — мікροстрічкова лінія (1 — діелектрична підкладка товщиною h ;
 2 — провідна лінія шириною d ; 3 — провідний шар)

5.2. Первинні параметри довгих ліній

Елементарну ділянку ДЛ довжиною $\Delta x \ll \lambda$ (рис. 5.1, г) можна розглядати як коло із зосередженими параметрами і подати її у вигляді чотиріполюсника з ідеальними пасивними елементами $\Delta L, \Delta C, \Delta R, \Delta G$. Елементи ΔL і ΔC враховують накопичення енергій відповідно електричного і магнітного поля за рахунок струму у провідниках і ємності між провідниками, а елементи ΔR і ΔG — втрати енергії у провідниках та ізоляції між ними (тому $\Delta R \neq 1/\Delta G$).

Різні схеми заміщення елементарної ділянки ДЛ зображені на рис. 5.3. Загалом лінію довжиною l можна подати як каскадне з'єднання кількох чотиріполюсних схем заміщення кожної з ділянок $\Delta x \ll \lambda$. З фізичної точки зору найбільш прийнятними є схеми заміщення у вигляді симетричних врівноважених чотиріполюсників (рис. 5.3, а, б). Для теоретичного аналізу краще використовувати несиметричні неуврівноважені⁴ Г-подібні чотиріполюсники (рис. 5.3, в, г).

Чим менша довжина елементарної ділянки Δx , тим менші значення параметрів $\Delta L, \Delta C, \Delta R, \Delta G$. Тому розглядають відносні величини:

$$L_1 = \frac{\Delta L}{\Delta x}; C_1 = \frac{\Delta C}{\Delta x}; R_1 = \frac{\Delta R}{\Delta x}; G_1 = \frac{\Delta G}{\Delta x},$$

⁴ Врівноваженість обумовлюється симетрією схеми відносно горизонтальної осі.

³ Згідно з ДСТУ 2815-94 (п. 4.11) визначення кола з розподіленими параметрами ґрунтується на його поданні як сукупності нескінченної кількості ідеальних елементів.

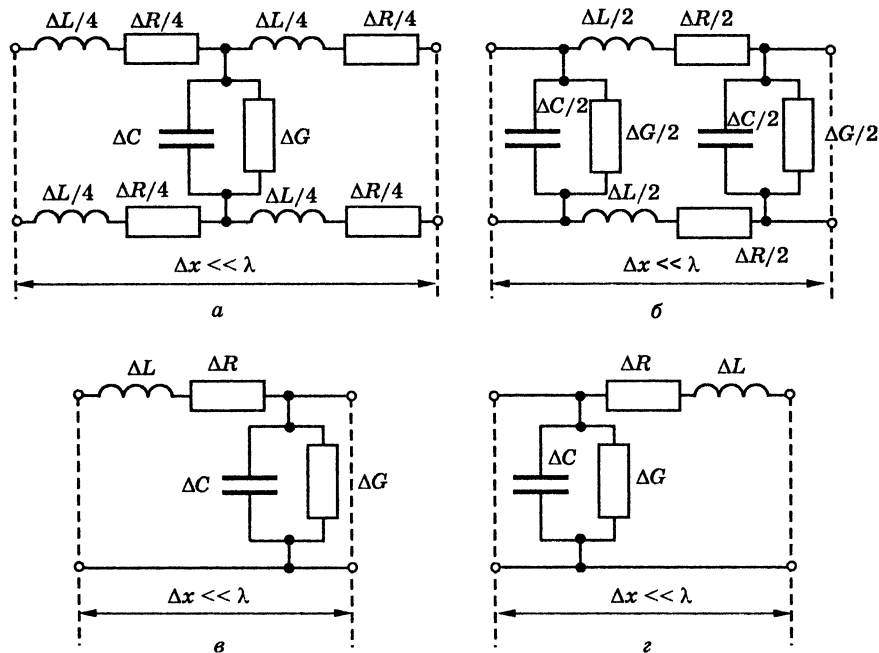


Рис. 5.3. Схеми заміщення елементарної ділянки лінії:
 а, б — симетричні врівноважені чотириполюсники;
 в, г — несиметричні нерівноважені чотириполюсники

які називають *первинними (погонними) параметрами* ДЛ і вимірюють у таких одиницях⁵:

- 1) погонну індуктивність L_1 — Гн/м;
- 2) погонну ємність C_1 — Ф/м;
- 3) погонний активний опір R_1 — Ом/м;
- 4) погонну активну провідність G_1 — См/м.

Більш строго первинні параметри ДЛ визначають у такий спосіб:

$$L_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{dL}{dx}; \quad C_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx};$$

$$R_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{dR}{dx}; \quad G_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = \frac{dG}{dx}.$$

Отже, первинні параметри мають зміст лінійних щільностей розподілу елементів L , C , R , G уздовж лінії.

⁵ Вимірюючи первинні параметри, зазвичай використовують часткові одиниці (мкГн/м, пФ/м та ін.), але в телекомунікаційних лініях як одиницю довжини застосовують не метр, а кілометр.

Характер і особливості первинних параметрів ДЛ обумовлюють класифікацію ліній.

Довгі лінії є *лінійними*, якщо всі первинні параметри не залежать від часу, а також від струмів і напруг. Якщо хоча б один з первинних параметрів залежить від часу, лінія називається *параметричною*. Коли один з первинних параметрів залежить від струму чи напруги, лінія є *нелінійною*.

Якщо первинні параметри не залежать від координати x , лінія називається *однорідною*. У *неоднорідній* лінії первинні параметри залежать від поперечного розміру лінії: $L_1(x)$; $C_1(x)$; $R_1(x)$; $G_1(x)$.

Основну увагу в подальшому викладенні приділено лінійним однорідним ДЛ. Неоднорідну лінію розглянуто у прикладі 5.4.

Первинні параметри реальних ДЛ визначаються особливостями їхньої конструкції, геометричними розмірами, параметрами матеріалів і діапазоном робочих частот.

Для того щоб розраховувати первинні параметри, слід використовувати методи теорії електромагнітного поля. У табл. 5.1 наведені довідкові формули для розрахунку первинних параметрів типових конструкцій ліній передачі (рис. 5.2), у табл. 5.2 і 5.3 — властивості діелектриків і металів, які найчастіше застосовують у лініях передачі. У цих формулах використано ті ж позначення геометричних розмірів ліній, що й на рис. 5.2.

Приклад 5.1. Обчислити первинні параметри симетричної двопровідної повітряної лінії (рис. 5.2, а) для частоти $f = 100$ МГц, якщо розміри латунних провідників становлять: $2d = 2$ мм; $D = 10$ мм.

Розв'язання. За формулами для первинних параметрів симетричної двопровідної повітряної лінії (табл. 5.1), використовуючи параметри латуні з табл. 5.3, виконаємо розрахунки:

$$L_1 = 4 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D-d}{d} = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 1,011 \cdot \ln \frac{10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-3}} = 8,886 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} =$$

$$= 0,8886 \text{ мкГн/м};$$

$$C_1 = \frac{10^{-9}}{36 \ln[(D-d)/d]} = \frac{10^{-9}}{36 \ln[(10^{-2} - 10^{-3})/10^{-3}]} =$$

$$= 1,264 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м} = 12,64 \text{ пФ/м};$$

$$R_1 = \frac{1}{\pi d} \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \omega}{2\sigma}} = \frac{1}{\pi \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^8}{2 \cdot 1,55 \cdot 10^7}} = 1,615 \text{ Ом/м}.$$

Оскільки лінія має повітряну ізоляцію, приймаємо $G_1 = 0$.

Таблиця 5.1

Первинні параметри типових ліній передачі⁶

Позначення, одиниці виміру	Лінія		
	Симетрична двопровідна повітряна (рис. 5.2, а)	Коаксіальний кабель (рис. 5.2, б)	Стрічкова (рис. 5.2, в)
$L_1, \text{Гн/м}$	$\frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-d}{d} =$ $= 4 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D-d}{d}$	$\frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{d} =$ $= 2 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D}{d}$	$\frac{\mu\mu_0 h}{d}$
$C_1, \text{Ф/м}$	$\frac{\pi\epsilon_0}{\ln[(D-d)/d]} =$ $\frac{10^{-9}}{36 \ln[(D-d)/d]}$	$\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(D/d)} = \frac{10^{-9} \epsilon}{18 \ln(D/d)}$	$\frac{\epsilon\epsilon_0 d}{h}$
$R_1, \text{Ом/м}$	$\frac{1}{\pi d} \sqrt{\frac{\mu\mu_0 \omega}{2\sigma}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu\mu_0 \omega}{2\sigma} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d}\right)}$	$\frac{1}{d} \sqrt{\frac{2\mu\mu_0 \omega}{\sigma}}$
$G_1, \text{См/м}$	0	$\omega C_1 \text{tg } \delta$	$\omega C_1 \text{tg } \delta$

Таблиця 5.2

Параметри діелектриків

Матеріал	ϵ	$\text{tg } \delta$ для $f = 1000 \text{ МГц}$
Поліетилен	2,25	$2 \cdot 10^{-4}$
Полістирол	2,56	$2 \cdot 10^{-4}$
Фторопласт	2,08	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Плавлений кварц	3,85	$3 \cdot 10^{-5}$
Окис алюмінію	9,6	$4 \cdot 10^{-5}$
Плексиглас	3,4	$2 \cdot 10^{-3}$

Таблиця 5.3

Параметри металів

Метал	Питома об'ємна провідність $\sigma, \text{См/м}$	Відносна магнітна проникність μ
Срібло	$6,17 \cdot 10^7$	1,016
Мідь	$5,81 \cdot 10^7$	1,017
Золото	$4,13 \cdot 10^7$	1,013
Цинк	$1,69 \cdot 10^7$	1,011
Латунь	$1,55 \cdot 10^7$	1,011
Олово	$0,88 \cdot 10^7$	1,013

⁶ Формули стосуються діелектриків без магнітних властивостей. У табл. 5.1, 5.2 використано такі позначення: $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \text{ Ф/м}$ — електрична стала вакууму; ϵ — відносна діелектрична проникність ізоляції; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ — магнітна стала вакууму; μ — відносна магнітна проникність металу; $\text{tg } \delta$ — тангенс кута втрат ізоляції; $\omega, \text{ рад/с}$ — робоча кутова частота; $\sigma, \text{ См/м}$ — питома об'ємна провідність металу.

Приклад 5.2. Для частоти $f = 1000 \text{ МГц}$ знайти первинні параметри коаксіального кабелю (рис. 5.2, б) з розмірами: $2d = 2 \text{ мм}$; $2D = 20 \text{ мм}$, якщо провідники кабелю латунні, ізолятор — поліетилен.

Розв'язання. За формулами з табл. 5.1, використовуючи значення параметрів матеріалів (табл. 5.2 і 5.3), отримуємо:

$$L_1 = 2 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,011 \cdot \ln \frac{10^{-2}}{10^{-3}} =$$

$$= 4,656 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 0,4656 \text{ мкГн/м};$$

$$C_1 = \frac{10^{-9} \epsilon}{18 \ln(D/d)} = \frac{10^{-9} \cdot 2,25}{18 \ln(10^{-2}/10^{-3})} = 5,429 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м} = 54,29 \text{ пФ/м};$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu\mu_0 \omega}{2\sigma} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d}\right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^9}{2 \cdot 1,55 \cdot 10^7} \left(\frac{1}{10^{-2}} + \frac{1}{10^{-3}}\right)} =$$

$$= 2,809 \text{ Ом/м};$$

$$G_1 = \omega C_1 \text{tg } \delta = 2\pi \cdot 10^9 \cdot 5,429 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 6,822 \cdot 10^{-5} \text{ См/м} = 68,22 \text{ мкСм/м}.$$

Приклад 5.3. Визначити первинні параметри стрічкової лінії (рис. 5.2, в) з розмірами $d = 2 \text{ мм}$; $h = 1 \text{ мм}$, якщо лінію виготовлено з латуні та фторопласту, а частота становить $f = 1000 \text{ МГц}$.

Розв'язання. Використовуючи відповідні формули та значення параметрів матеріалів, матимемо:

$$L_1 = \frac{\mu\mu_0 h}{d} = \frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 6,352 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 0,6352 \text{ мкГн/м};$$

$$C_1 = \frac{\epsilon\epsilon_0 d}{h} = \frac{2,08 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{36\pi \cdot 10^{-3}} = 3,678 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м} = 36,78 \text{ пФ/м};$$

$$R_1 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2\mu\mu_0 \omega}{\sigma}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^9}{1,55 \cdot 10^7}} = 16,047 \text{ Ом/м};$$

$$G_1 = \omega C_1 \text{tg } \delta = 2\pi \cdot 10^9 \cdot 3,678 \cdot 10^{-11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 5,778 \cdot 10^{-5} \text{ См/м} = 57,78 \text{ мкСм/м}.$$

Приклад 5.4. Розрахувати первинні параметри неоднорідного коаксіального кабелю для частоти $f = 1000 \text{ МГц}$. Побудувати графіки $L_1(x)$; $C_1(x)$; $R_1(x)$; $G_1(x)$. Подовжній переріз кабелю показаний на рис. 5.4. Довжина кабелю $l = 1 \text{ м}$; діаметр центрального та зовнішнього латунних

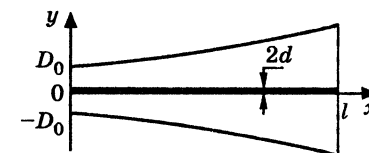


Рис. 5.4. Подовжній переріз коаксіального кабелю до прикладу 5.4

провідників $2d = 2 \text{ мм}$ та $2D(x) = 2D_0 e^{x/l}$ ($D_0 = 10 \text{ мм}$) відповідно; ізолятор — поліетилен.

Розв'язання. Підставляючи в розрахункові співвідношення прикладу 5.2 замість величини D вираз для $D(x)$, отримуємо:

$$L_1(x) = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D(x)}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,011 \cdot \ln \frac{10^{-2} e^{x/1}}{10^{-3}} =$$

$$= 2,022 \cdot 10^{-7} \cdot (2,303 + x) \text{ Гн/м} = 0,2022 \cdot (2,303 + x) \text{ мкГн/м};$$

$$C_1(x) = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln[D(x)/d]} = \frac{10^{-9} \cdot 2,25}{18 \ln(10^{-2} e^{x/1}/10^{-3})} = \frac{1,25 \cdot 10^{-10}}{2,303 + x} \text{ Ф/м} = \frac{125}{2,303 + x} \text{ пФ/м};$$

$$R_1(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu\mu_0\omega}{2\sigma} \left(\frac{1}{D(x)} + \frac{1}{d} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^9}{2 \cdot 1,55 \cdot 10^7} \left(\frac{10^2}{e^{x/1}} + 10^3 \right)} =$$

$$= 2,542(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом/м};$$

$$G_1(x) = \omega C_1(x) \text{tg} \delta = \frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot 1,25 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2,303 + x} =$$

$$= \frac{1,571 \cdot 10^{-4}}{2,303 + x} \text{ См/м} = \frac{157,1}{2,303 + x} \text{ мкСм/м}.$$

Графіки $L_1(x)$; $C_1(x)$; $R_1(x)$; $G_1(x)$ зображені на рис. 5.5.

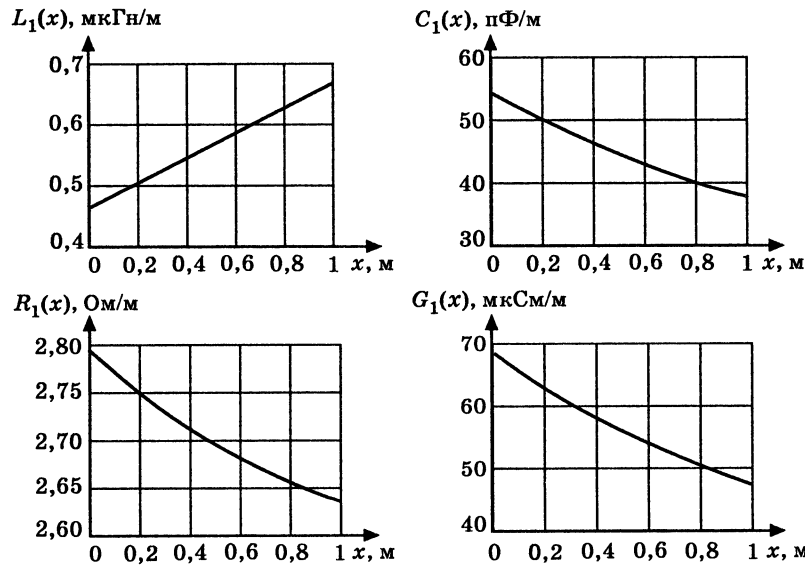


Рис. 5.5. Графіки розподілу первинних параметрів уздовж кабелю до прикладу 5.4

5.3. Диференціальні (телеграфні) рівняння довгої лінії. Загальний розв'язок рівнянь для лінії без втрат

Диференціальні рівняння ДЛ встановлюють аналітичний зв'язок між первинними параметрами L_1, C_1, R_1, G_1 , струмом $i(t, x)$ і напругою $u(t, x)$ у довільному перерізі лінії у будь-який момент часу.

Для того щоб отримати диференціальні рівняння ДЛ, достатньо розглянути схеми заміщення елементарної ділянки $\Delta x \ll \lambda$ на відстані x від джерела (входу лінії) у вигляді Γ -подібних чотириполіусників (рис. 5.3, в, г). Подання елементів цих чотириполіусників $\Delta L, \Delta C, \Delta R, \Delta G$ через первинні параметри $\Delta L = L_1 \Delta x, \Delta C = C_1 \Delta x, \Delta R = R_1 \Delta x, \Delta G = G_1 \Delta x$ призводить до схем (рис. 5.6, а, б), аналіз яких із застосуванням законів Кірхгофа і дозволяє отримати диференціальні рівняння ДЛ.

Рівняння за другим законом Кірхгофа для вибраних напрямів обходу контуру K і напрямів напруг для схеми (рис. 5.6, а) має вигляд:

$$u(t, x + \Delta x) - u(t, x) + R_1 \Delta x i(t, x) + L_1 \Delta x \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} = 0, \quad (5.4)$$

де $R_1 \Delta x i(t, x)$ — напруга на елементі ΔR ; $L_1 \Delta x \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}$ — напруга на елементі ΔL .

У рівнянні (5.4) і подальших виразах застосовують частинні похідні, оскільки струм і напруга є функціями двох змінних t, x .

Унаслідок перенесення доданків зі струмом у праву частину рівності (5.4) і ділення лівої та правої частин на Δx виходить рівняння

$$\frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} = -R_1 i(t, x) - L_1 \frac{\partial i(t, x)}{\partial t},$$

яке після граничного переходу $\Delta x \rightarrow 0$ перетворюється до одного з диференціальних рівнянь ДЛ:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -R_1 i(t, x) - L_1 \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Рівняння, складене за першим законом Кірхгофа для вузла 1 у другій із розглянутих схем (рис. 5.6, б), становить

$$i(t, x + \Delta x) - i(t, x) + G_1 \Delta x u(t, x) + C_1 \Delta x \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = 0, \quad (5.6)$$

де $G_1 \Delta x u(t, x)$; $C_1 \Delta x \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ — відповідно струми в паралельних вітках з елементами ΔG та ΔC .

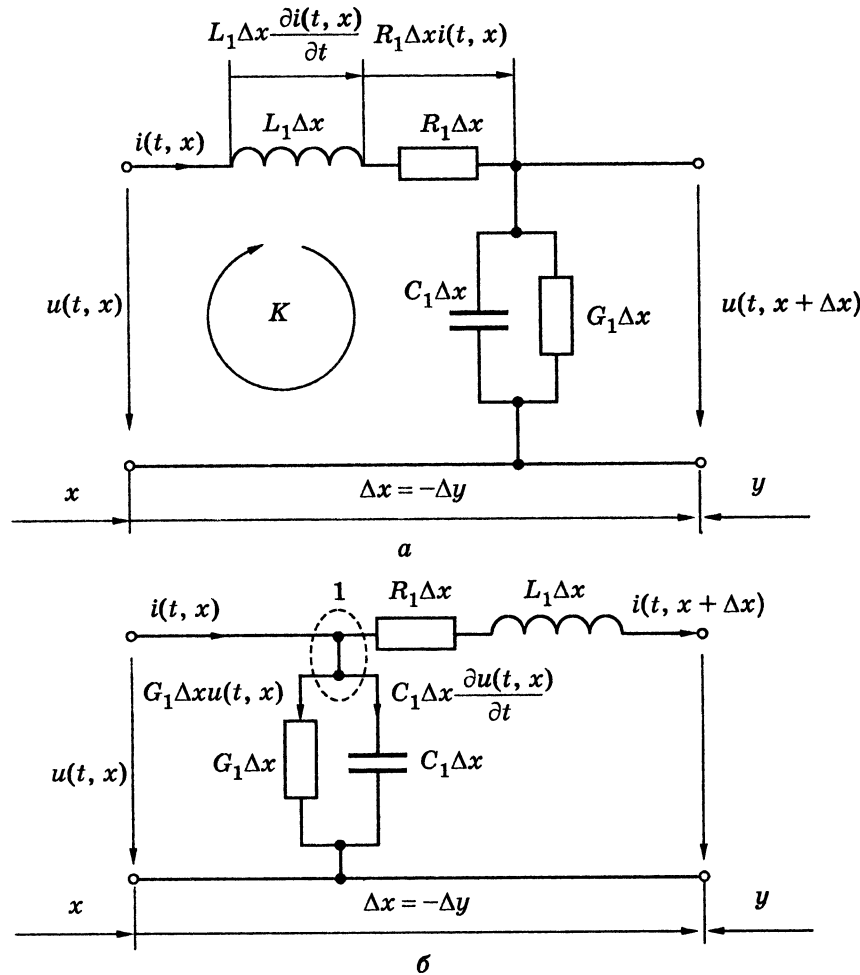


Рис. 5.6. До виведення диференціальних рівнянь довгої лінії

Перетворення рівності (5.6), подібні тим, які застосовано вище до виразу (5.4), дозволяють отримати друге диференціальне рівняння ДЛ:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i(t, x + \Delta x) - i(t, x)}{\Delta x} = \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} = -G_1 u(t, x) - C_1 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}. \quad (5.7)$$

Диференціальні рівняння (5.5) і (5.7) можна записати також у функції координати $y = l - x$ (рис. 5.1, з), яку відлічують від навантаження (кінця) лінії.

Оскільки $\Delta y = -\Delta x$; $\partial y = -\partial x$, рівняння матимуть вигляд

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} = R_1 i(t, y) + L_1 \frac{\partial i(t, y)}{\partial t}; \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial i(t, y)}{\partial y} = G_1 u(t, y) + C_1 \frac{\partial u(t, y)}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Використовують також спрощену форму запису диференціальних рівнянь ДЛ:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad \frac{\partial i}{\partial y} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Рівняння (5.10) і (5.11) називають також *телеграфними*, оскільки вони були отримані та досліджені під час створення перших ліній телеграфного зв'язку.

Від цих рівнянь, кожне з яких містить струм і напругу, можна перейти до рівнянь відносно напруги чи струму. Наприклад, щоб отримати вираз відносно напруги, в системі (5.10) слід продиференціювати перше рівняння за x , а друге — за t , а потім виключити струм у першому рівнянні:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= R_1 \frac{\partial i}{\partial x} + L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}; \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= G_1 \frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R_1 C_1 + G_1 L_1) \frac{\partial u}{\partial t} + R_1 G_1 u. \quad (5.12)$$

Аналогічно складається рівняння відносно струму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= R_1 \frac{\partial i}{\partial t} + L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= G_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (R_1 C_1 + G_1 L_1) \frac{\partial i}{\partial t} + R_1 G_1 i. \quad (5.13)$$

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку (5.12) і (5.13) мають однакову структуру і називаються *одновимірними хвильовими рівняннями*.

Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних (5.12) і (5.13) для реальної лінії та довільного джерела є досить складним. Простіше розв'язувати ці рівняння для довільного джерела в ідеальній ДЛ (ІДЛ) — лінії без втрат ($R_1 = 0; G_1 = 0$) або для синусоїдного джерела в реальній лінії (див. підрозд. 5.4). Для ІДЛ хвильові рівняння мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (5.15)$$

Диференціальні рівняння (5.14) і (5.15) вперше були досліджені Ейлером, Бернуллі⁷ і Даламбером⁸ стосовно задачі математичної фізики, пов'язаної з коливаннями пружної струни. Розв'язати ці рівняння можна за допомогою рядів Фур'є заміною змінних (метод Даламбера) або операторним методом.

Розв'язуючи рівняння операторним методом, замість шуканих функцій $u(t, x)$ та $i(t, x)$ використовують їхні зображення за Лапласом за змінною t :

$$U(x, p) = \mathcal{L}[u(t, x)]; \quad I(x, p) = \mathcal{L}[i(t, x)]. \quad (5.16)$$

⁷ Бернуллі Данієл, Bernoulli (1700–1782) — видатний математик і фізик, представник відомої династії швейцарських вчених. Протягом 1725–1733 рр. працював у Петербурзькій АН. Йому належать важливі праці з алгебри, теорії ймовірностей, числення нескінченно малих, теорії рядів, теорії диференціальних рівнянь. Уперше ввів до теорії помилок нормальний розподіл і поняття випадкових і систематичних похибок. У галузі математичної фізики розв'язав (1755) за допомогою тригонометричних рядів диференціальне рівняння коливання струни та вивів основне рівняння гідро- і газової динаміки (монографія «Гідродинаміка», 1738).

⁸ Даламбер Жан Лерон, D'Alembert (1717–1783) — французький математик і філософ, член Паризької і Петербурзької АН. Уперше довів основну теорему алгебри (лема Даламбера). Сформулював загальні правила складання диференціальних рівнянь руху будь-яких матеріальних систем, зводячи задачі динаміки до статички (принцип Даламбера). Застосував цей принцип до гідродинаміки. Розв'язав диференціальне рівняння, яке описує коливання струни. Розглядав час як четвертий вимір. Деякі праці, присвячені філософії, астрономії, естетиці та музиці, опубліковані в «Енциклопедії наук, мистецтв і ремесел», яку Даламбер готував разом із Д. Дідро (1751–1757).

Використовуючи властивості перетворення Лапласа і вважаючи початкові умови нульовими ($i(x, 0) = 0; u(x, 0) = 0$), рівняння (5.14), (5.15) для зображень (5.16) можна подати у вигляді:

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - L_1 C_1 p^2 U(x, p) = 0; \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2 I(x, p)}{dx^2} - L_1 C_1 p^2 I(x, p) = 0. \quad (5.18)$$

Рівняння (5.17) і (5.18) є лінійними однорідними диференціальними рівняннями тільки за змінною x (диференціювання за p не виконується). З огляду на це, похідні за x є не частинними, а звичайними.

Оскільки рівняння (5.17) і (5.18) є однотипними, можна обмежитися аналізом одного из них, наприклад (5.17). Загальний розв'язок цього рівняння такий:

$$U(x, p) = U_{\text{пад}}(p) e^{-px\sqrt{L_1 C_1}} + U_{\text{від}}(p) e^{px\sqrt{L_1 C_1}}, \quad (5.19)$$

де $U_{\text{пад}}(p)$, $U_{\text{від}}(p)$ — сталі інтегрування, індекси яких відповідають фізичному значенню оригіналів цих доданків розв'язку — *падаючий* (прямій) та *відбитий* (зворотній) хвилям; $\mp p\sqrt{L_1 C_1}$ — корені характеристичного рівняння, складеного за виразом (5.18).

Для визначення сталих $U_{\text{пад}}(p)$, $U_{\text{від}}(p)$ використовують граничні значення (аналогічні початковим значенням для перехідних процесів) зображення $U(x, p)$ і його першої похідної за x при $x = 0$.

Якщо позначити оригінали сталих інтегрування $u_{\text{пад}}(t)$, $u_{\text{від}}(t)$ і застосувати теорему запізнення перетворення Лапласа (див. табл. 3.2, п. 4), можна подати оригінал зображення (5.19) як

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_{\text{пад}}(t - x\sqrt{L_1 C_1}) + u_{\text{від}}(t + x\sqrt{L_1 C_1}) = \\ &= u_{\text{пад}}(t - x/v) + u_{\text{від}}(t + x/v) = u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta), \end{aligned} \quad (5.20)$$

де $v = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ — вимірювана швидкість поширення хвиль, м/с; $\xi = t - x/v$, $\eta = t + x/v$ — узагальнені змінні при відповідних доданках розв'язку.

Справедливість розв'язку (5.20) можна підтвердити безпосередньою перевіркою диференціального рівняння (5.14), яке з урахуванням позначення швидкості v матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial t^2}. \quad (5.21)$$

Подвійне диференціювання в лівій частині рівності (5.21) виконують у два етапи, застосовуючи правило диференціювання складних функцій:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial x} &= \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\
 &= -\frac{1}{v} \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{v} \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta}; \\
 2) \quad \frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial x^2} &= \frac{1}{v} \frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\
 &= \frac{1}{v^2} \left[\frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \right]. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Аналогічні перетворення правої частини рівняння (5.21) приводять до кінцевого результату, тотожного виразу (5.22):

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial t} &= \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\
 &= \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} + \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta}; \\
 2) \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial t^2} &= \frac{1}{v^2} \left[\frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\
 &= \frac{1}{v^2} \left[\frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \right]. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

При виведенні співвідношень (5.22) і (5.23) враховані значення похідних узагальнених змінних ξ і η за t і x :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial(t-x/v)}{\partial t} &= 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial(t-x/v)}{\partial x} = -\frac{1}{v}; \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial(t+x/v)}{\partial t} &= 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial(t+x/v)}{\partial x} = \frac{1}{v}.
 \end{aligned}$$

Фізичне значення падаючої та відбитої хвиль напруги у ДЛ ілюструє рис. 5.7, на якому зображені графіки довільно вибраних функцій $u_{\text{пад}}(\xi)$ (рис. 5.7, а) та $u_{\text{від}}(\eta)$ (рис. 5.7, б), а також побудовані

два види графіків: $u_{\text{пад}}(t, x)$ (рис. 5.7, в) та $u_{\text{від}}(t, x)$ (рис. 5.7, г) у функції t і x .

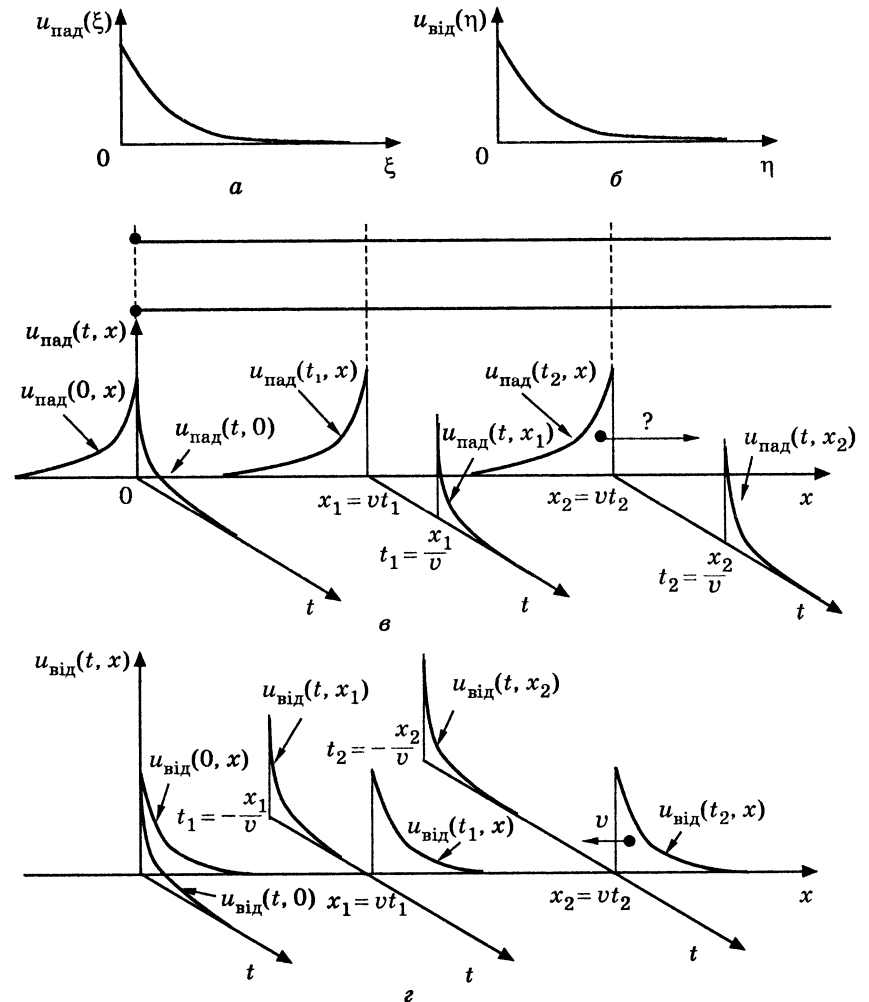


Рис. 5.7. Падаюча та відбита хвилі напруги в лінії:
а, б — графіки функцій $u_{\text{пад}}(\xi)$, $u_{\text{від}}(\eta)$; в — графіки падаючої хвилі;
г — графіки відбитої хвилі

Графіки першого виду для падаючої та відбитої хвиль побудовані в функції координати x для трьох фіксованих моментів часу ($t=0$; $t=t_1$; $t=t_2$), а графіки другого — в функції часу для трьох перерізів лінії ($x=0$; $x=x_1=vt_1$; $x=x_2=vt_2$). Моменти часу і перерізи

лінії вибрані такими, щоб вони відповідали нульовим значенням узагальнених змінних (5.20) ($\xi=0$; $\eta=0$) і тому — максимальним значенням падаючої та відбитої хвиль.

Одним із цих моментів часу є $t=0$, за якого максимуми падаючої та відбитої хвиль спостерігаються в перерізі $x=0$ (рис. 5.7, в, з).

Два інших моменти часу для падаючої хвилі вибрані додатними (рис. 5.7, в):

$$t_1 = x_1/v < t_2 = x_2/v,$$

а для відбитої — від'ємними (рис. 5.7, з):

$$t_1 = -x_1/v > t_2 = -x_2/v.$$

Аналіз графіків (рис. 5.7) дозволяє зробити такі висновки:

1) кожний з доданків розв'язку (5.20) є процесом, який повторює свої значення через певний час в іншому перерізі, що характерно для хвилеподібних процесів;

2) складова розв'язку $u_{\text{пад}}(\xi) = u_{\text{пад}}(t-x/v)$ є хвилею, яка пересувається від джерела до навантаження зі швидкістю v , що обумовлює назву *падаюча* (пряма) хвиля;

3) хвиля $u_{\text{від}}(\eta) = u_{\text{від}}(t+x/v)$ пересувається від навантаження до джерела зі швидкістю v ; ця хвиля називається *відбитою* (зворотною), оскільки фізичною причиною її появи є відбиття від навантаження;

4) у лінії без втрат падаюча та відбита хвилі пересуваються вздовж лінії, не змінюючи форми й інтенсивності.

Струм $i(t, x)$ можна записати через напругу $u(t, x)$, використовуючи перше рівняння системи (5.10). Для ідеальної лінії це рівняння має вигляд

$$-\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = L_1 \frac{\partial i(t, x)}{\partial t},$$

звідки

$$\begin{aligned} i(t, x) &= -\frac{1}{L_1} \int \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dt = -\frac{1}{L_1} \int \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} dt - \frac{1}{L_1} \int \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} dt = \\ &= \frac{1}{L_1 v} \int \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} dt - \frac{1}{L_1 v} \int \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} dt = \frac{1}{L_1 v} \int du_{\text{пад}}(\xi) - \frac{1}{L_1 v} \int du_{\text{від}}(\eta) = \\ &= \frac{u_{\text{пад}}(\xi)}{R_{\text{хв}}} - \frac{u_{\text{від}}(\eta)}{R_{\text{хв}}} = \frac{u_{\text{пад}}(t-x/v)}{R_{\text{хв}}} - \frac{u_{\text{від}}(t+x/v)}{R_{\text{хв}}} = \\ &= i_{\text{пад}}(t-x/v) - i_{\text{від}}(t+x/v), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\text{де } i_{\text{пад}}(t-x/v) = \frac{u_{\text{пад}}(t-x/v)}{R_{\text{хв}}}; \quad i_{\text{від}}(t+x/v) = \frac{u_{\text{від}}(t+x/v)}{R_{\text{хв}}} \text{ — відповідно}$$

падаюча (пряма) та відбита (зворотня) хвилі струму; $R_{\text{хв}} = L_1 v = L_1 / \sqrt{L_1 C_1} = \sqrt{L_1 / C_1}$ — хвильовий опір.

Співвідношення для струму (5.24) дозволяє зробити висновок, що в ідеальній лінії:

1) струм $i(t, x)$, подібно напрузі $u(t, x)$, є сумою падаючої та відбитої хвиль;

2) відповідні хвилі напруги та струму пов'язані між собою за законом Ома через хвильовий опір $R_{\text{хв}}$; оскільки $R_{\text{хв}}$ має активний характер, хвилі напруги і струму одного й того ж типів збігаються за формою;

3) від'ємний знак відбитої хвилі струму показує, що фактичний напрям цього струму є протилежним вибраному на рис. 5.7, тобто напрям пересування енергії відбитої хвилі — від навантаження лінії до вхідного джерела.

Отже, розв'язок одновимірних хвильових рівнянь (5.14) і (5.15) для лінії без втрат засвідчує, що в лінії існує інтерференція двох зустрічних хвиль — падаючої та відбитої, причому це стосується не тільки напруги і струму, але й енергії.

Швидкість пересування хвиль v і хвильовий опір $R_{\text{хв}}$ є *вторинними* параметрами ідеальних ліній:

$$v = 1/\sqrt{L_1 C_1}; \quad (5.25)$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{L_1 / C_1}. \quad (5.26)$$

У табл. 5.4 наведені формули для вторинних параметрів ідеальних ліній основних типів. Формули отримані на підставі співвідношень (5.25) і (5.26), а також наведених у табл. 5.1 виразів для L_1 і C_1 типових конструкцій ліній передачі. У формулах використані ті ж позначення геометричних розмірів ліній передачі, що й на рис. 5.2. Відносна магнітна проникність провідників прийнята $\mu = 1$, оскільки провідники й ізоляція ідеальні ($R_1 = 0$; $G_1 = 0$).

Приклад 5.5. Розрахувати швидкість пересування хвиль і хвильовий опір симетричної ідеальної двопровідної повітряної лінії (рис. 5.2, а) з розмірами, наведеними у прикладі 5.1.

Розв'язання. Швидкість хвилі в ідеальній двопровідній повітряній лінії дорівнює швидкості світла c , а хвильовий опір залежить від геометричних

Таблиця 5.4

Вторинні параметри типових ліній без втрат

Лінія	$v, \text{ м/с}$	$R_{\text{хв}}, \text{ Ом}$
Симетрична двопровідна повітряна (рис. 5.2, а)	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 = c$	$\frac{1}{\pi} \ln \frac{D-d}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \ln \frac{D-d}{d}$
Коаксіальний кабель (рис. 5.2, б)	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$	$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{D}{d}$
Стрічкова (рис. 5.2, в)		$\frac{h}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = \frac{120\pi h}{\sqrt{\epsilon} d}$

розмірів лінії (див. табл. 5.4). Розрахуємо хвильовий опір за заданими розмірами:

$$R_{\text{хв}} = 120 \ln \frac{D-d}{d} = 120 \ln \frac{10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-3}} = 263,67 \text{ Ом.}$$

Перевіримо отриманий результат за знайденими у прикладі 5.1 первинними параметрами:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{8,886 \cdot 10^{-7} \cdot 1,264 \cdot 10^{-11}}} = 2,984 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{8,886 \cdot 10^{-7}}{1,264 \cdot 10^{-11}}} = 265,14 \text{ Ом.}$$

Результати практично збігаються. Незначна різниця пов'язана з тим, що у прикладі 5.1 при визначенні L_1 і C_1 враховано відносну магнітну проникність латуні $\mu = 1.011$.

Приклад 5.6. Обчислити вторинні параметри ідеального коаксіального кабелю (рис. 5.2, б). Матеріал діелектрика і розміри кабелю наведені у прикладі 5.2.

Розв'язання. Визначимо швидкість поширення хвилі та хвильовий опір за формулами табл. 5.4:

$$v = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,25}} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{D}{d} = \frac{60}{\sqrt{2,25}} \ln \frac{10^{-2}}{10^{-3}} = 92,1 \text{ Ом.}$$

Перевіримо розраховані вторинні параметри ідеального коаксіального кабелю за знайденими у прикладі 5.2 первинними параметрами та співвідношеннями (5.25) і (5.26):

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{4,656 \cdot 10^{-7} \cdot 5,429 \cdot 10^{-11}}} = 1,99 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{4,656 \cdot 10^{-7}}{5,429 \cdot 10^{-11}}} = 92,608 \text{ Ом.}$$

Причина розбіжності результатів та сама, як і у прикладі 5.5.

Приклад 5.7. Розрахувати значення v і $R_{\text{хв}}$ ідеальної стрічкової лінії (рис. 5.2, в). Розміри лінії і тип діелектрика наведені у прикладі 5.3.

Розв'язання. Обчислимо швидкість хвилі та хвильовий опір за формулами для ідеальної стрічкової лінії з табл. 5.4:

$$v = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,08}} = 2,08 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \frac{120\pi h}{\sqrt{\epsilon} d} = \frac{120\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2,08} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 130,698 \text{ Ом.}$$

Використовуючи дані прикладу 5.3, перевіримо знайдені вторинні параметри. Подібно прикладам 5.4 і 5.5 існують незначні розбіжності результатів:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{6,352 \cdot 10^{-7} \cdot 3,678 \cdot 10^{-11}}} = 2,069 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{6,352 \cdot 10^{-7}}{3,678 \cdot 10^{-11}}} = 131,416 \text{ Ом.}$$

Приклад 5.8. Знайти вторинні параметри неоднорідного коаксіального кабелю (рис. 5.4). Розміри лінії і тип діелектрика наведені у прикладі 5.4. Побудувати графік $R_{\text{хв}}(x)$.

Розв'язання. Використовуючи співвідношення для $L_1(x)$ (для $\mu = 1$) і $C_1(x)$ з прикладу 5.4, виведемо формули для розрахунку розподілу вторинних параметрів уздовж лінії:

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1(x)}{C_1(x)}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \ln \frac{D(x)}{d}}{2\pi \ln[D(x)/d]} \cdot \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln[D(x)/d]}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D(x)}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{D(x)}{d}; \quad (5.27)$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{L_1(x) C_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \ln \frac{D(x)}{d}}{2\pi \ln[D(x)/d]} \cdot \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln[D(x)/d]}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (5.28)$$

Вираз (5.28) засвідчує, що в неоднорідній лінії швидкість пересування хвиль є постійною в будь-якому перерізі лінії й відрізняється на величину $\sqrt{\epsilon}$ від швидкості світла, як в ідеальних лініях інших типів.

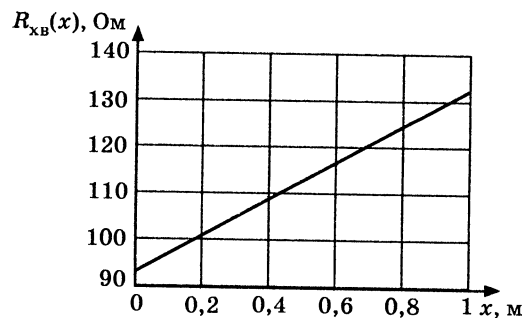


Рис. 5.8. Графік розподілу хвильового опору вздовж неоднорідного кабелю у прикладі 5.8

Підставляючи до формули (5.27) геометричні параметри лінії (див. приклад 5.4) і значення $\varepsilon = 2,25$ відносної діелектричної проникності діелектрика (поліетилену), розрахуємо залежність $R_{xв}(x)$:

$$R_{xв}(x) = \frac{60}{\sqrt{2,25}} \ln \frac{10^{-2} e^{x/1}}{10^{-3}} =$$

$$= 40 \cdot (2,303 + x) \text{ Ом.}$$

Графік $R_{xв}(x)$ зображений на рис. 5.8.

5.4. Аналіз усталеного синусоїдного режиму довгої лінії

При синусоїдній дії з частотою ω усталений струм і напруга у будь-якому перерізі ДЛ змінюються в часі за синусоїдним законом з тією ж частотою ω . Загалом, у кожному перерізі лінії амплітуди та початкові фази цих коливань різні. Якщо відраховувати координату від входу лінії, миттєві значення струму і напруги мають вигляд:

$$i(t, x) = I_m(x) \cos[\omega t + \psi_i(x)] = \text{Re}[\underline{I}_m(x) e^{j\omega t}]; \quad (5.29)$$

$$u(t, x) = U_m(x) \cos[\omega t + \psi_u(x)] = \text{Re}[\underline{U}_m(x) e^{j\omega t}], \quad (5.30)$$

де $\underline{I}_m(x) = I_m e^{j\psi_i(x)}$; $\underline{U}_m(x) = U_m e^{j\psi_u(x)}$ — комплексні амплітуди відповідно струму і напруги в перерізі лінії з координатою x .

Як правило, відомі первинні параметри лінії R_1, G_1, L_1, C_1 , довжина l та опір навантаження \underline{Z}_H . Крім цього, задаються значення струму і напруги на вході (затискачі 1–1' на рис. 5.9):

$$u(t, 0) = u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \psi_{u1}) = \text{Re}[\underline{U}_{m1} e^{j\omega t}]; \quad (5.31)$$

$$i(t, 0) = i_1(t) = I_{m1} \cos(\omega t + \psi_{i1}) = \text{Re}[\underline{I}_{m1} e^{j\omega t}] \quad (5.32)$$

або на виході лінії (затискачі 2–2' на рис. 5.9):

$$u(t, l) = u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \psi_{u2}) = \text{Re}[\underline{U}_{m2} e^{j\omega t}]; \quad (5.33)$$

$$i(t, l) = i_2(t) = I_{m2} \cos(\omega t + \psi_{i2}) = \text{Re}[\underline{I}_{m2} e^{j\omega t}]. \quad (5.34)$$

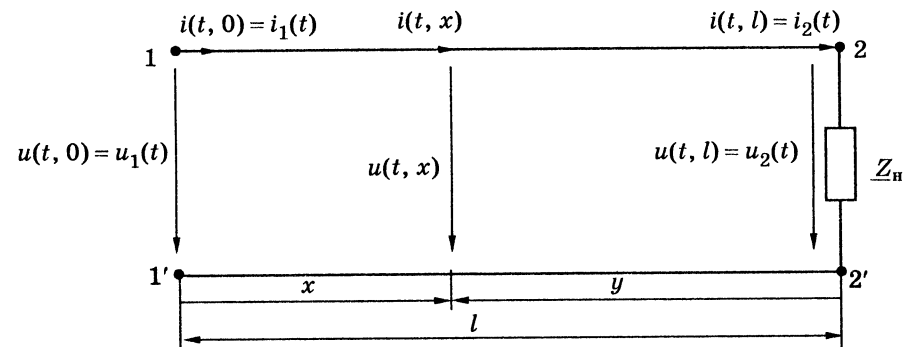


Рис. 5.9. Схема ДЛ для синусоїдного усталеного процесу

Підстановка миттєвих значень струму і напруги (5.29), (5.30) у диференціальні рівняння (5.10) приводить останні до вигляду (в комплексній формі запису):

$$-\text{Re} \left[\frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} e^{j\omega t} \right] = R_1 \text{Re}[\underline{I}_m(x) e^{j\omega t}] + L_1 \text{Re}[j\omega \underline{I}_m(x) e^{j\omega t}]; \quad (5.35)$$

$$-\text{Re} \left[\frac{d\underline{I}_m(x)}{dx} e^{j\omega t} \right] = G_1 \text{Re}[\underline{U}_m(x) e^{j\omega t}] + C_1 \text{Re}[j\omega \underline{U}_m(x) e^{j\omega t}]. \quad (5.36)$$

Якщо праві частини рівнянь (5.35) і (5.36) перетворити, використовуючи властивість комутативності векторів, виходить:

$$-\text{Re} \left[\frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} e^{j\omega t} \right] = \text{Re}[(R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_m(x) e^{j\omega t}]; \quad (5.37)$$

$$-\text{Re} \left[\frac{d\underline{I}_m(x)}{dx} e^{j\omega t} \right] = \text{Re}[(G_1 + j\omega C_1) \underline{U}_m(x) e^{j\omega t}]. \quad (5.38)$$

З рівності дійсних частин векторів, що обертаються з однаковою частотою і складають рівняння (5.37) і (5.38), випливає рівність відповідних векторів:

$$-\frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} = R_1 \underline{I}_m(x) + j\omega L_1 \underline{I}_m(x) = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_m(x) = \underline{Z}_1 \underline{I}_m(x); \quad (5.39)$$

$$\frac{d\underline{I}_m(x)}{dx} = G_1 \underline{U}_m(x) + j\omega C_1 \underline{U}_m(x) = (G_1 + j\omega C_1) \underline{U}_m(x) = \underline{Y}_1 \underline{U}_m(x); \quad (5.40)$$

де $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1$ — первинні (погонні) комплексні опір і провідність лінії відповідно.

Від системи рівнянь (5.39), (5.40) можна перейти до єдиного рівняння відносно $\underline{U}_m(x)$ або $\underline{I}_m(x)$. Так, щоб скласти рівняння для $\underline{U}_m(x)$, достатньо продиференціювати вираз (5.39) за x :

$$\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} = \underline{Z}_1 \frac{d \underline{I}_m(x)}{dx},$$

а праву частину отриманого рівняння перетворити на підставі співвідношення (5.40):

$$\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} = -\underline{Z}_1 \underline{Y}_1 \underline{U}_m(x). \quad (5.41)$$

Рівняння (5.41) зазвичай записують у стандартній формі:

$$\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U}_m(x) = 0, \quad (5.42)$$

де $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \alpha + j\beta$ — коефіцієнт поширення; α — коефіцієнт ослаблення (згасання); β — коефіцієнт фази.

Слід зазначити, що загалом в лінії з втратами коефіцієнт ослаблення залежить від частоти, а коефіцієнт фази є нелінійною функцією частоти.

Однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку (5.42) в теорії хвильових процесів є одновимірним випадком відомого в математичній фізиці рівняння Гельмгольца⁹.

Аналогічний вигляд має диференціальне рівняння для $\underline{I}_m(x)$:

$$\frac{d^2 \underline{I}_m(x)}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{I}_m(x) = 0. \quad (5.43)$$

Для рівнянь (5.42) і (5.43) характеристичні рівняння однакові: $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$ і мають комплексні корені $\underline{p}_{1,2} = \mp \underline{\gamma} = \mp \alpha \mp j\beta$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (5.42) має такий вигляд:

$$\underline{U}_m(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} = \underline{A}_1 e^{-\alpha x - j(\beta x - \psi_{A1})} + \underline{A}_2 e^{\alpha x + j(\beta x + \psi_{A2})}, \quad (5.44)$$

де $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_{A1}}$; $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_{A2}}$ — сталі інтегрування.

Від комплексної амплітуди напруги можна перейти до її миттєвого значення в довільному перерізі:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \text{Re}[\underline{U}_m(x) e^{j\omega t}] = \\ &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{A1}) + A_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_{A2}). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Запис (5.45) відрізняється від виразу (5.20) тільки наявністю експоненційних множників. Тому перший доданок у виразі (5.45) є миттєвим значенням падаючої $u_{\text{пад}}(t, x)$, а другий — відбитої $u_{\text{від}}(t, x)$ хвиль у довільному перерізі лінії.

Запис $u_{\text{пад}}(t, x)$ та $u_{\text{від}}(t, x)$ у різних формах:

$$\begin{aligned} u_{\text{пад}}(t, x) &= A_1 e^{-\alpha x} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \psi_{A1}\right) = \\ &= A_1 e^{-\alpha x} \cos[\alpha(t - x/v) + \psi_{A1}]; \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$u_{\text{від}}(t, x) = A_2 e^{\alpha x} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \psi_{A2}\right) = A_2 e^{\alpha x} \cos[\alpha(t + x/v) + \psi_{A2}] \quad (5.47)$$

дозволяє ввести вельми важливі вторинні параметри лінії:

- 1) довжину хвилі $\lambda = 2\pi/\beta$;
- 2) фазову швидкість поширення хвилі $v = \omega/\beta$.

Графіки падаючої та відбитої хвиль напруги зображені відповідно на рис. 5.10 і 5.11. Аналіз графіків дозволяє зробити такі висновки:

1) у довільний фіксований момент часу t_k падаюча (рис. 5.10, б) і відбита (рис. 5.11, б) хвилі є коливаннями з експоненційним законом змінювання амплітуд уздовж лінії та періодом, який дорівнює довжині хвилі λ ;

2) падаюча хвиля з часом пересувається від входу лінії до навантаження з фазовою швидкістю v (рис. 5.10, б), при цьому амплітуда хвилі зменшується в напрямку навантаження;

3) відбита хвиля з часом пересувається від навантаження до входу лінії зі швидкістю v (рис. 5.11, б), причому амплітуда хвилі зменшується при наближенні до входу лінії;

⁹ Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд, Helmholtz (1821–1894) — німецький учений, працював у галузі фізики, математики, фізіології та психології. Дав перше математичне трактування закону збереження енергії. Вперше застосував принцип найменшої дії до теплових, електромагнітних та оптичних явищ. Обґрунтував особливості вихрового руху рідини, який покладено в основу гідро- й аеродинаміки. В математиці досліджував геометричні аксіоми і ріманів простір. Увів у математичну фізику рівняння, назване його ім'ям. У галузі фізіології вивчав нервову і м'язову системи, органи зору та слуху. Для цього сконструював декілька оригінальних вимірвальних приладів.

4) у будь-якому перерізі лінії x_k ці процеси змінюються в часі за синусоїдним законом (рис. 5.10, в і рис. 5.11, в) із частотою ω (періодом $T = 2\pi/\omega$) і мають різні амплітуди і початкові фази в різних перерізах x_k ;

5) процеси $u_{\text{пад}}(t, x)$ та $u_{\text{від}}(t, x)$ як функції часу і координати наочно подають їхні аксонометричні відображення (рис. 5.10, а

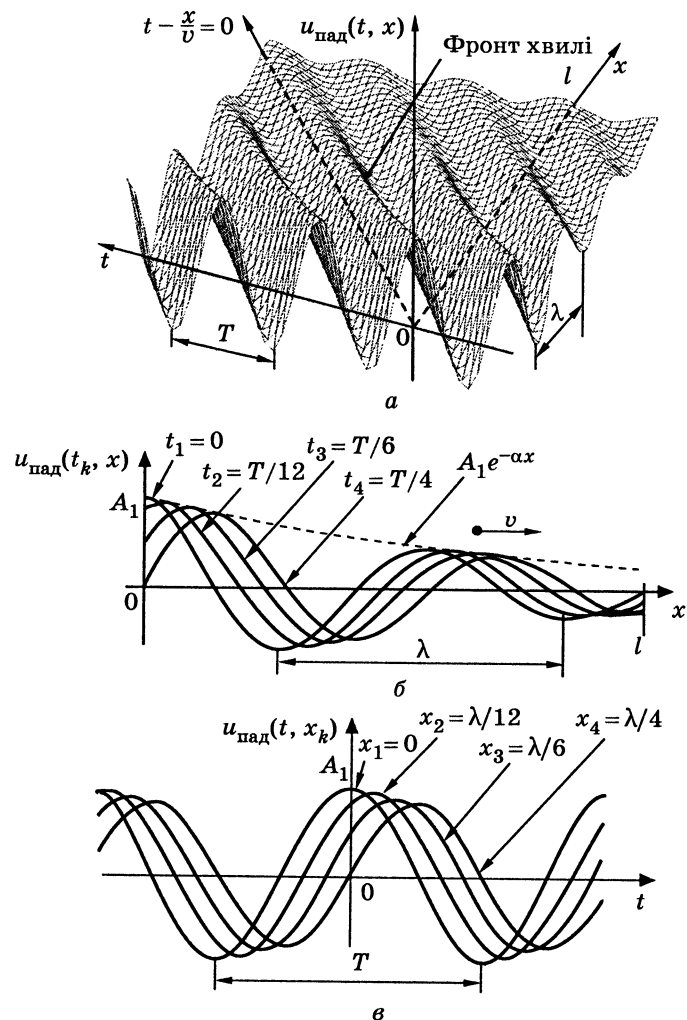


Рис. 5.10. Графіки падаючої хвилі напруги у ДЛ при $\psi_{A1}=0$:
а — аксонометричне подання; б — розподіл уздовж лінії
для моментів часу t_k ; в — залежність від часу в перерізах лінії x_k

і рис. 5.11, а); таке подання, крім перерізів $t = t_k$ та $x = x_k$, дозволяє показати фронт (гребінь¹⁰) хвилі, за якого аргумент $u_{\text{пад}}(t, x)$ чи $u_{\text{від}}(t, x)$ є цілим числом 2π .

Сталі інтегрування визначають із початкових (граничних) умов для $x=0$:

$$\begin{cases} \underline{U}_m(0) = \underline{U}_{m1} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \left. \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} \right|_{x=0} = -\underline{Z}_1 I_m(0) = -\underline{Z}_1 I_{m1} = -\underline{\gamma} \underline{A}_1 + \underline{\gamma} \underline{A}_2. \end{cases} \quad (5.48)$$

Складаючи перше рівняння системи (5.48), використовують формулу (5.44), а друге — формулу (5.39) при $x=0$.

Розв'язання системи (5.48) дозволяє знайти сталі $\underline{A}_1, \underline{A}_2$:

$$\underline{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{U}_{m1} & 1 \\ -\underline{Z}_1 I_{m1} & \underline{\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\underline{\gamma} & \underline{\gamma} \end{vmatrix}} = \frac{\underline{\gamma} \underline{U}_{m1} + \underline{Z}_1 I_{m1}}{2\underline{\gamma}} = \frac{\underline{U}_{m1} + \sqrt{\underline{Z}_1/\underline{Y}_1} I_{m1}}{2} = \frac{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m1}}{2}, \quad (5.49)$$

$$\underline{A}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \underline{U}_{m1} \\ \underline{\gamma} & -\underline{Z}_1 I_{m1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\underline{\gamma} & \underline{\gamma} \end{vmatrix}} = \frac{-\underline{Z}_1 I_{m1} + \underline{\gamma} \underline{U}_{m1}}{2\underline{\gamma}} = \frac{\underline{U}_{m1} - \sqrt{\underline{Z}_1/\underline{Y}_1} I_{m1}}{2} = \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m1}}{2}, \quad (5.50)$$

де $\underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\underline{Z}_1/\underline{Y}_1}$ — хвильовий опір лінії.

Підстановка виразів (5.49) і (5.50) до рівняння (5.44) дозволяє подати комплексну амплітуду напруги в довільному перерізі лінії як суму комплексних амплітуд падаючої та відбитої хвиль:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m(x) &= \underline{U}_{\text{мпад}}(x) + \underline{U}_{\text{мвід}}(x) = \\ &= \frac{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m1}}{2} e^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m1}}{2} e^{\underline{\gamma}x}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

або коротше, застосовуючи гіперболічні функції:

$$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m1} \text{ch} \underline{\gamma}x - \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m1} \text{sh} \underline{\gamma}x, \quad (5.52)$$

¹⁰ На рис. 5.10, а і рис. 5.11, а показані осі, які відповідають гребням з нульовими значеннями аргументів.

де $\text{ch}\gamma x = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$; $\text{sh}\gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$ — відповідно гіперболічні косинус і синус аргументу γx .

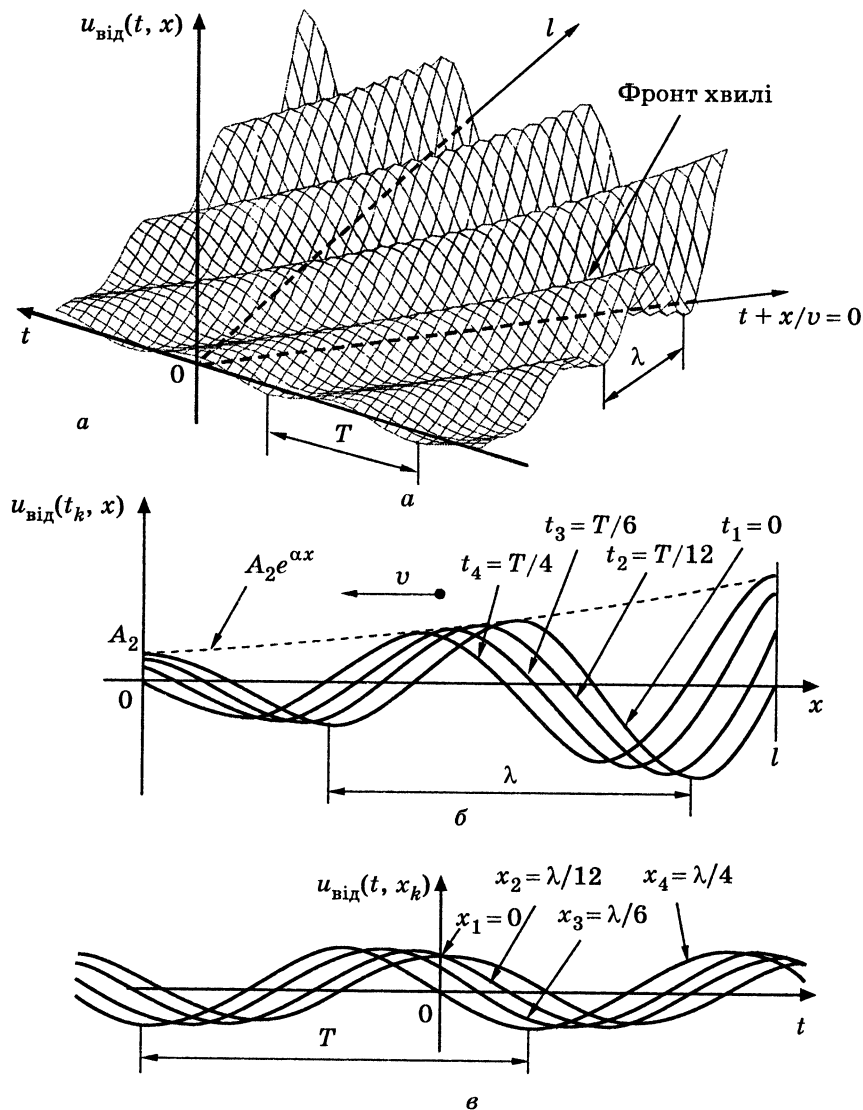


Рис. 5.11. Графіки відбитої хвилі напруги у ДЛ при $\psi_{A_2} = 0$:
 а — аксонометричне подання; б — розподіл уздовж лінії
 для моментів часу t_k ; в — залежність від часу в перерізах лінії x_k

Використовуючи отримані співвідношення для напруги, з рівняння (5.39) визначають комплексну амплітуду струму:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m(x) &= -\frac{1}{Z_1} \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} = \\ &= \frac{\gamma}{Z_1} \frac{\underline{U}_{m1} + Z_{xв} \underline{I}_{m1}}{2} e^{-\gamma x} - \frac{\gamma}{Z_1} \frac{\underline{U}_{m1} - Z_{xв} \underline{I}_{m1}}{2} e^{\gamma x} = \\ &= \frac{\underline{U}_{m1} + Z_{xв} \underline{I}_{m1}}{2Z_{xв}} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_{m1} - Z_{xв} \underline{I}_{m1}}{2Z_{xв}} e^{\gamma x} = \frac{\underline{U}_{mпад}(x)}{Z_{xв}} - \frac{\underline{U}_{mвід}(x)}{Z_{xв}} = \\ &= \underline{I}_{mпад}(x) + \underline{I}_{mвід}(x), \end{aligned} \quad (5.53)$$

де $Z_{xв} = \frac{Z_1}{\gamma} = \sqrt{Z_1/Y_1}$ — хвильовий опір лінії; $\underline{I}_{mпад}(x) = \frac{\underline{U}_{mпад}(x)}{Z_{xв}}$,

$\underline{I}_{mвід}(x) = -\frac{\underline{U}_{mвід}(x)}{Z_{xв}}$ — комплексні амплітуди, відповідно, падаючої та відбитої хвиль струму.

Вираз (5.53) показує, що комплексна амплітуда струму є сумою комплексних амплітуд падаючої та відбитої хвиль, які пов'язані з відповідними хвилями напруги за законом Ома через комплексний хвильовий опір $Z_{xв}$. Від'ємний знак $\underline{I}_{mвід}(x)$ свідчить, що енергія відбитої хвилі пересувається від навантаження лінії до її вхідних затискачів.

Подібно виразу (5.52) рівняння (5.53) можна перетворити в такий спосіб:

$$\underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m1} \text{ch}\gamma x - \frac{\underline{U}_{m1}}{Z_{xв}} \text{sh}\gamma x. \quad (5.54)$$

Розподіл комплексних амплітуд струму і напруги вздовж лінії можна також отримати, відраховуючи координату y вздовж лінії від навантаження. При цьому як граничні умови використовують значення струму і напруги на виході лінії (див. формули (5.33) і (5.34)). Основні етапи розв'язання цієї задачі та отримані при цьому співвідношення наведені в табл. 5.5. До формул табл. 5.5 входять ті самі вторинні параметри, що й до співвідношень, які отримані при відліку відстані x від входу лінії. Ці вторинні параметри зведені до табл. 5.6.

Таблиця 5.5

Основні етапи аналізу при відліку координати від навантаження

Етап виведення і тип виразу	Формула
Складання диференціальних рівнянь	$\frac{d^2 \underline{U}_m(y)}{dy^2} - \gamma^2 \underline{U}_m(y) = 0; \frac{d^2 \underline{I}_m(y)}{dy^2} - \gamma^2 \underline{I}_m(y) = 0$
Характеристичне рівняння та його корені	$p^2 - \gamma^2 = 0; p_{1,2} = \pm \gamma = \pm \alpha \pm j\beta$
Загальний розв'язок для напруги	$\underline{U}_m(y) = \underline{A}_1 e^{\gamma y} + \underline{A}_2 e^{-\gamma y} = A_1 e^{\alpha y + j(\beta y + \psi_{A1})} + A_2 e^{-\alpha y - j(\beta y + \psi_{A2})} = \underline{U}_{\text{мпад}}(y) + \underline{U}_{\text{мвід}}(y)$
Миттєві значення падаючої та відбитої хвиль напруги в довільному перерізі лінії	$u_{\text{пад}}(t, y) = \text{Re}[\underline{U}_{\text{мпад}}(y) e^{j\omega t}] = A_1 e^{\alpha y} \cos(\omega t + \beta y + \psi_{A1}) = A_1 e^{\alpha y} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}y + \psi_{A1}\right) = A_1 e^{\alpha y} \cos\left[\omega\left(t + \frac{y}{v}\right) + \psi_{A1}\right];$ $u_{\text{від}}(t, y) = \text{Re}[\underline{U}_{\text{мвід}}(y) e^{j\omega t}] = A_2 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \beta y + \psi_{A2}) = A_2 e^{-\alpha y} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}y + \psi_{A2}\right) = A_2 e^{-\alpha y} \cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{v}\right) + \psi_{A2}\right]$
Складання та розв'язання рівнянь для визначення сталих інтегрування	$\begin{cases} \underline{U}_m(0) = \underline{U}_{m2} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \left. \frac{d\underline{U}_m(y)}{dy} \right _{y=0} = \underline{Z}_1 \underline{I}_m(0) = \underline{Z}_1 \underline{I}_{m2} = \gamma \underline{A}_1 - \gamma \underline{A}_2; \end{cases}$ $\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2}; \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2}$
Вираз для комплексної амплітуди напруги	$\underline{U}_m(y) = \frac{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2} e^{\gamma y} + \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2} e^{-\gamma y} = \underline{U}_{\text{мпад}}(y) + \underline{U}_{\text{мвід}}(y)$
Розв'язок для комплексної амплітуди струму	$\underline{I}_m(y) = \frac{1}{\underline{Z}_1} \frac{d\underline{U}_m(y)}{dy} = \frac{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2 \underline{Z}_{\text{хв}}} e^{\gamma y} - \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2 \underline{Z}_{\text{хв}}} e^{-\gamma y} = \frac{\underline{U}_{\text{мпад}}(y)}{\underline{Z}_{\text{хв}}} - \frac{\underline{U}_{\text{мвід}}(y)}{\underline{Z}_{\text{хв}}} = \underline{I}_{\text{мпад}}(y) + \underline{I}_{\text{мвід}}(y)$
Запис рівнянь за допомогою гіперболічних функцій	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \text{ch } \gamma y + \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2} \text{ sh } \gamma y;$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \text{ch } \gamma y + \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{\text{хв}}} \text{ sh } \gamma y$

Таблиця 5.6
Вторинні параметри лінії при синусоїдній дії

Параметр	Позначення і формула	Одиниця вимірювання	
		Назва	Позначення
Погонний комплексний опір	$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$	ом на метр	Ом/м
Погонна комплексна провідність	$\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1$	сименс на метр	См/м
Коефіцієнт поширення	$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \alpha + j\beta$	метр у мінус першому степені	1/м
Коефіцієнт ослаблення	$\alpha = \text{Re}(\underline{\gamma})$	непер на метр	Нп/м
Коефіцієнт фази	$\beta = \text{Im}(\underline{\gamma})$	радіан на метр	рад/м
Довжина хвилі	$\lambda = 2\pi/\beta$	метр	м
Фазова швидкість	$v = \omega/\beta$	метр за секунду	м/с
Хвильовий опір	$\underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1} = R_{\text{хв}} + jX_{\text{хв}}$	ом	Ом

Використовуючи формули (5.52) і (5.54), на підставі закону Ома можна отримати вираз для комплексного опору лінії в довільному перерізі x :

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}_m(x)}{\underline{I}_m(x)} = \frac{\underline{U}_{m1} \text{ch } \underline{\gamma} x - \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m1} \text{ sh } \underline{\gamma} x}{\underline{I}_{m1} \text{ ch } \underline{\gamma} x - (\underline{U}_{m1} / \underline{Z}_{\text{хв}}) \text{ sh } \underline{\gamma} x} = \underline{Z}_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{вх}} \text{ ch } \underline{\gamma} x - \underline{Z}_{\text{хв}} \text{ sh } \underline{\gamma} x}{\underline{Z}_{\text{хв}} \text{ ch } \underline{\gamma} x - \underline{Z}_{\text{вх}} \text{ sh } \underline{\gamma} x}, \quad (5.55)$$

де $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{U}_{m1} / \underline{I}_{m1}$ — комплексний вхідний опір лінії.

Комплексний опір у довільному перерізі y можна записати, використовуючи відповідні формули для $\underline{U}_m(y)$ та $\underline{I}_m(y)$ з табл. 5.5:

$$\underline{Z}(y) = \frac{\underline{U}_m(y)}{\underline{I}_m(y)} = \frac{\underline{U}_{m2} \text{ch } \underline{\gamma} y + \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2} \text{ sh } \underline{\gamma} y}{\underline{I}_{m2} \text{ ch } \underline{\gamma} y + (\underline{U}_{m2} / \underline{Z}_{\text{хв}}) \text{ sh } \underline{\gamma} y} = \underline{Z}_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \text{ ch } \underline{\gamma} y + \underline{Z}_{\text{хв}} \text{ sh } \underline{\gamma} y}{\underline{Z}_{\text{хв}} \text{ ch } \underline{\gamma} y + \underline{Z}_{\text{н}} \text{ sh } \underline{\gamma} y}. \quad (5.56)$$

З формули (5.56) випливає, що вхідний комплексний опір лінії становить

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{I}_{m1}} = \underline{Z}_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \text{ ch } \underline{\gamma} l + \underline{Z}_{\text{хв}} \text{ sh } \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_{\text{хв}} \text{ ch } \underline{\gamma} l + \underline{Z}_{\text{н}} \text{ sh } \underline{\gamma} l}, \quad (5.57)$$

де $\underline{Z}_{\text{н}}$ — опір навантаження;

при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{XB}$

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_{XB}; \underline{Z}(x) = \underline{Z}(y) = \underline{Z}_{XB}.$$

Отже, якщо лінія навантажена на хвильовий опір, вхідний опір лінії та опір у будь-якому перерізі дорівнює хвильовому. При цьому відбита хвиля відсутня, оскільки стала інтегрування $\underline{A}_2 = 0$ для розв'язків за координатами x та y . Такий режим називають узгодженим або режимом біжних хвиль.

Міру непогодженості лінії при $\underline{Z}_{BX} \neq \underline{Z}_{XB}$ оцінюють відношенням комплексних амплітуд відбитої та падаючої хвиль у вигляді безрозмірного комплексного коефіцієнта відбиття:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}(x) &= \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(x)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(x)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{від}}(x)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(x)} = \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{m1}}{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{m1}} e^{2\gamma x} = \\ &= \frac{\underline{Z}_{BX} - \underline{Z}_{XB}}{\underline{Z}_{BX} + \underline{Z}_{XB}} e^{2\gamma x} = \rho(x) e^{j\varphi_\rho(x)}; \\ \underline{\rho}(y) &= \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(y)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(y)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{від}}(y)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(y)} = \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{m2}}{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{m2}} e^{-2\gamma y} = \\ &= \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_{XB}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{XB}} e^{-2\gamma y} = \rho(y) e^{j\varphi_\rho(y)}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

де $\rho(x)$; $\rho(y)$; $\varphi_\rho(x)$; $\varphi_\rho(y)$ — залежності модулів та аргументів комплексного коефіцієнта відбиття при відліку координат від початку та від кінця лінії відповідно.

У режимі узгодження ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_{XB} = \underline{Z}_{BX}$) коефіцієнт відбиття дорівнює нулю:

$$\underline{\rho}(x) = \underline{\rho}(y) = 0.$$

За допомогою комплексного коефіцієнта відбиття виходять наочні співвідношення для енергетичних параметрів лінії. Так, можна отримати вираз для комплексної потужності в будь-якому перерізі лінії при відліку координати від навантаження:

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(y) &= P_A(y) + jP_Q(y) = \underline{U}(y) \underline{I}^*(y) = [\underline{U}_{\text{пад}}(y) + \underline{U}_{\text{від}}(y)] [\underline{I}_{\text{пад}}^*(y) + \\ &+ \underline{I}_{\text{від}}^*(y)] = \underline{U}_{\text{пад}}(y) \underline{I}_{\text{пад}}^*(y) [1 + \underline{\rho}(y)] [1 - \underline{\rho}^*(y)] = \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{\text{пад}}^2(y) [1 - \rho^2(y) + \\ &+ \rho(y) - \rho^*(y)] = \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{\text{пад}}^2(y) [1 - \rho^2(y) + j2\rho(y) \sin \varphi_\rho(y)], \end{aligned} \quad (5.59)$$

де $P_A(y) = \text{Re}[\underline{P}_S(y)]$; $P_Q(y) = \text{Im}[\underline{P}_S(y)]$ — відповідно активна і реактивна потужності в лінії.

Аналогічний вигляд має співвідношення для комплексної потужності у разі відліку координати від входу лінії:

$$\underline{P}_S(x) = P_A(x) + jP_Q(x) = \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{\text{пад}}^2(x) [1 - \rho^2(x) + j2\rho(x) \sin \varphi_\rho(x)].$$

Приклад 5.9. Знайти вторинні параметри симетричної двопровідної повітряної лінії, розглянутої у прикладі 5.1 (рис. 5.2, а), для частоти $f = 100$ МГц.

Розв'язання. Скористаємося знайденими у прикладі 5.1 первинними параметрами лінії:

$$L_1 = 8,886 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}; C_1 = 1,264 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}; R_1 = 1,615 \text{ Ом/м}; G_1 = 0.$$

За формулами (табл. 5.6) розрахуємо вторинні параметри лінії:

1) погонний комплексний опір

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 0,162 + j2\pi \cdot 10^8 \cdot 8,886 \cdot 10^{-7} = 1,615 + j558,324 \text{ Ом/м};$$

2) погонну комплексну провідність

$$\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1 = j2\pi \cdot 10^8 \cdot 1,264 \cdot 10^{-11} = j7,942 \cdot 10^{-3} \text{ См/м};$$

3) коефіцієнт поширення

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \sqrt{(1,615 + j558,324)j7,942 \cdot 10^{-3}} = 3,046 \cdot 10^{-3} + j2,106 \text{ 1/м};$$

4) коефіцієнт ослаблення

$$\alpha = \text{Re}(\underline{\gamma}) = 3,046 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/м};$$

5) коефіцієнт фази

$$\beta = \text{Im}(\underline{\gamma}) = 2,106 \text{ рад/м};$$

6) довжину хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2,106} = 2,983 \text{ м};$$

7) фазову швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{2,106} = 2,983 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

8) хвильовий опір

$$\underline{Z}_{XB} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}} = R_{XB} + jX_{XB} = \sqrt{\frac{1,615 + j558,324}{j7,942 \cdot 10^{-3}}} = 265,143 - j0,383 \text{ Ом}.$$

Приклад 5.10. Визначити для частоти $f = 1000$ МГц вторинні параметри коаксіального кабелю і стрічкової лінії, первинні параметри яких розраховані відповідно у прикладах 5.2 і 5.3.

Розв'язання. Розрахунки виконаємо за формулами, наведеними у табл. 5.6. Результати зведемо до табл. 5.7.

Таблиця 5.7

Первинні та вторинні параметри ліній у прикладі 5.10

Параметр	Результати	
	Коаксіальний кабель	Стрічкова лінія
Первинні параметри (з прикладів 5.2 і 5.3)	$L_1 = 4,656 \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $C_1 = 5,429 \cdot 10^{-11}$ Ф/м; $R_1 = 2,809$ Ом/м; $G_1 = 6,822 \cdot 10^{-5}$ См/м	$L_1 = 6,352 \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $C_1 = 3,678 \cdot 10^{-11}$ Ф/м; $R_1 = 16,047$ Ом/м; $G_1 = 5,778 \cdot 10^{-5}$ См/м
Погонний комплексний опір Z_1 , Ом/м	$2,809 + j2,925 \cdot 10^3$	$16,047 + j3,991 \cdot 10^3$
Погонна комплексна провідність Y_1 , См/м	$6,822 \cdot 10^{-5} + j0,341$	$5,778 \cdot 10^{-5} + j0,231$
Коефіцієнт поширення γ , 1/м	$0,018 + j31,59$	$0,065 + j30,37$
Коефіцієнт ослаблення α , Нп/м	$0,018$	$0,065$
Коефіцієнт фази β , рад/м	$31,59$	$30,37$
Довжина хвилі λ , м	$0,199$	$0,207$
Фазова швидкість v , м/с	$1,989 \cdot 10^8$	$2,069 \cdot 10^8$
Хвильовий опір $Z_{хв} = R_{хв} + jX_{хв}$, Ом	$92,61 - j0,035$	$131,417 - j0,248$

Приклад 5.11. Визначити для частоти $f = 1000$ МГц розподіл вторинних параметрів уздовж неоднорідного коаксіального кабеля, розглянутого у прикладі 5.4. Побудувати графіки $\alpha(x)$; $R_{хв}(x)$; $X_{хв}(x)$.

Розв'язання. Скористаємося знайденими у прикладі 5.4 функціональними залежностями первинних параметрів неоднорідного кабелю від координати x :

$$L_1(x) = 2,022 \cdot 10^{-7} \cdot (2,303 + x) \text{ Гн/м}; R_1(x) = 2,554(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом/м};$$

$$C_1(x) = \frac{1,25 \cdot 10^{-10}}{2,303 + x} \text{ Ф/м}; G_1(x) = \frac{1,571 \cdot 10^{-4}}{2,303 + x} \text{ См/м}.$$

Визначимо розподіл погонних комплексних опор та провідності вздовж кабелю:

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= R_1(x) + j\omega L_1(x) = 2,554(0,1e^{-x} + 1) + j2\pi \cdot 10^9 \cdot 2,022 \cdot 10^{-7}(2,303 + x) = \\ &= 2,554(0,1e^{-x} + 1) + j1,27 \cdot 10^3(2,303 + x) \text{ Ом/м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= G_1(x) + j\omega C_1(x) = \frac{1,571 \cdot 10^{-4}}{2,303 + x} + j2\pi \cdot 10^9 \cdot \frac{1,25 \cdot 10^{-10}}{2,303 + x} = \\ &= \frac{1,571 \cdot 10^{-4} + j0,785}{2,303 + x} \approx \frac{j0,785}{2,303 + x} \text{ См/м} \end{aligned}$$

Розрахуємо залежність коефіцієнта поширення від координати x :

$$\gamma(x) = \sqrt{Z_1(x)Y_1(x)} \approx \sqrt{[2,554(0,1e^{-x} + 1) + j1,27 \cdot 10^3(2,303 + x)] \frac{j0,785}{2,303 + x}} =$$

$$= \sqrt{-1,27 \cdot 10^3 \cdot 0,785 + \frac{j[0,785 \cdot 2,554(0,1e^{-x} + 1)]}{2,303 + x}} \text{ 1/м}.$$

Підкореневий вираз має вигляд $A + jB$; при цьому $A < 0$, $B \ll |A|$. Тому кінцевий вираз для $\gamma(x)$ запишемо приблизно, врахувавши, що $\sqrt{-A} = j\sqrt{|A|}$:

$$\sqrt{A + jB} = \sqrt{A \left(1 + \frac{jB}{A}\right)} \approx \sqrt{A} \left[1 + \frac{jB}{2A}\right] = j\sqrt{|A|} + \frac{B}{2\sqrt{|A|}}; \quad (5.60)$$

$$\gamma(x) = \alpha(x) + j\beta(x) \approx \frac{0,0315(0,1e^{-x} + 1)}{2,303 + x} + j31,575 \text{ 1/м}.$$

Отже, коефіцієнт ослаблення залежить від координати:

$$\alpha(x) \approx \frac{0,0315(0,1e^{-x} + 1)}{2,303 + x} \text{ Нп/м}$$

а коефіцієнт фази — ні: $\beta = 31,575$ рад/м.

Розрахуємо швидкість і довжину хвилі в кабелі:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{31,575} = 1,99 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{31,575} = 1,99 \text{ м}.$$

Визначимо розподіл уздовж кабелю хвильового опору, його дійсної й уявної частин, враховуючи формулу (5.60):

$$\begin{aligned} Z_{хв}(x) &= R_{хв}(x) + jX_{хв}(x) = \sqrt{\frac{Z_1(x)}{Y_1(x)}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{2,554(0,1e^{-x} + 1) + j1,27 \cdot 10^3(2,303 + x)}{j0,785/(2,303 + x)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1,27 \cdot 10^3}{0,785} (2,303 + x)^2 - j \frac{2,554(0,1e^{-x} + 1)(2,303 + x)}{0,785}} \approx \\ &\approx 40,224(2,303 + x) - j0,04(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$R_{хв}(x) \approx 40,224(2,303 + x) \text{ Ом}; X_{хв}(x) \approx -0,04(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом}.$$

Побудуємо графіки $\alpha(x)$; $R_{хв}(x)$; $X_{хв}(x)$ (рис. 5.12).

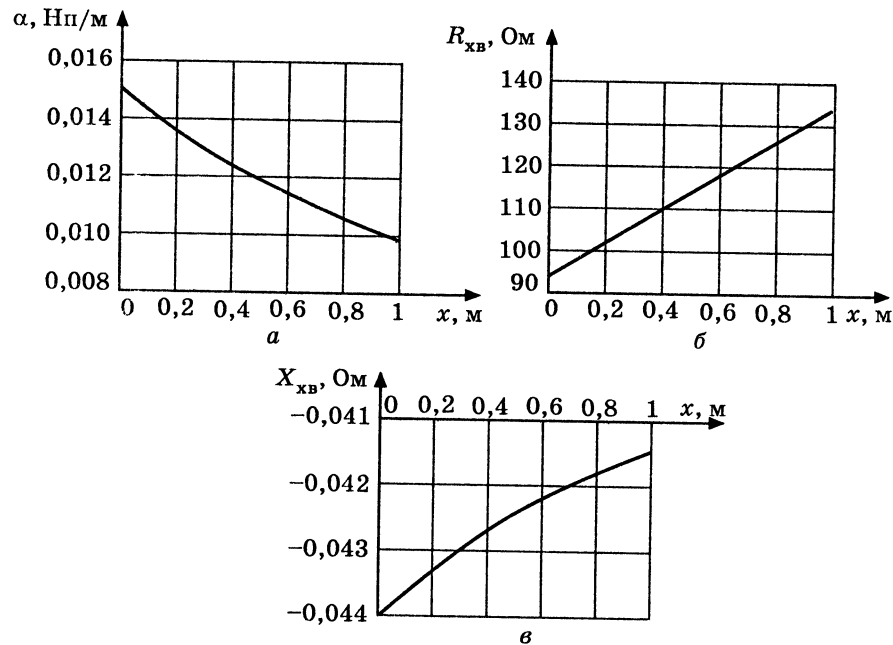


Рис. 5.12. Графіки розподілу вторинних параметрів вздовж кабелю до прикладу 5.11: а — ослаблення; б — активної складової хвильового опору; в — реактивної складової хвильового опору

5.5. Лінії з малими втратами при синусоїдній дії

Для довгих ліній, які використовують у практиці, активні первинні опори і провідності значно менші за відповідні реактивні (див. приклади 5.9–5.11):

$$R_1 \ll \omega L_1; G_1 \ll \omega C_1. \quad (5.61)$$

За умов (5.61) втратами у першому наближенні можна знехтувати і вважати лінії ідеальними:

$$R_1 = 0; G_1 = 0.$$

В ідеальних ліній первинні комплексні опір і провідність, а також коефіцієнт поширення будуть уявними:

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1; \underline{Y}_1 = j\omega C_1; \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = j\omega \sqrt{L_1 C_1} = j\beta, \quad (5.62)$$

де $\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$ — коефіцієнт фази.

Отже, коефіцієнт ослаблення ідеальної лінії дорівнює нулю:

$$\alpha = 0.$$

З огляду на формули (5.62), вирази для фазової швидкості, довжини хвилі та хвильового опору, наведені у табл. 5.6, матимуть вигляд:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad (5.63)$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{f \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{T}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad (5.64)$$

$$\underline{Z}_{xb} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}} = \sqrt{\frac{j\omega L_1}{j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = R_{xb}. \quad (5.65)$$

Отже, фазова швидкість і хвильовий опір в ідеальній лінії не залежать від частоти, а довжина хвилі — обернено пропорційна частоті. Хвильовий опір, на відміну від реальної лінії, є активним, а співвідношення (5.65) для його розрахунку збігається з виразом (5.26), отриманим у підрозділі 5.3 для довільної дії в ідеальній лінії. Також збігаються вирази (5.63) і (5.25).

Не розв'язуючи знову диференціальні рівняння (5.42) і (5.43) для ідеальної лінії, можна на підставі формул (5.62)–(5.65) використати розв'язки цих рівнянь (див. вирази (5.44)–(5.59) і табл. 5.5). Отримані при цьому співвідношення наведені в табл. 5.8, аналіз яких дозволяє зробити такі висновки:

1) падаючі та відбиті хвилі не змінюються за амплітудою вздовж лінії (рис. 5.13 і 5.14);

2) щоб записати розрахункові формули для комплексних амплітуд напруги та струму, а також комплексного опору в будь-якому перерізі лінії, використовують не гіперболічні, як у ліній із втратами, а тригонометричні функції;

3) оскільки хвильовий опір активний, падаючі хвилі напруги і струму у довільному перерізі лінії перебувають у фазі, а відбиті — у протифазі;

4) модуль комплексного коефіцієнта відбиття в будь-якому перерізі лінії постійний і може приймати значення від нуля до одиниці:

$$\rho(x) = \frac{\underline{Z}_{bx} - R_{xb}}{\underline{Z}_{bx} + R_{xb}} = \frac{\sqrt{(R_{bx} - R_{xb})^2 + X_{bx}^2}}{\sqrt{(R_{bx} + R_{xb})^2 + X_{bx}^2}}; \quad (5.66)$$

$$\rho(y) = \frac{\underline{Z}_{by} - R_{yb}}{\underline{Z}_{by} + R_{yb}} = \frac{\sqrt{(R_{by} - R_{yb})^2 + X_{by}^2}}{\sqrt{(R_{by} + R_{yb})^2 + X_{by}^2}};$$

Основні співвідношення для аналізу ліній без втрат
при синусоїдній дії

При відліку координати від входу лінії	При відліку координати від навантаження
Комплексні амплітуди напруги та струму	
$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m\text{пад}}(x) + \underline{U}_{m\text{від}}(x) =$ $= \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{j\beta x};$	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m\text{пад}}(y) + \underline{U}_{m\text{від}}(y) =$ $= \underline{A}_1 e^{j\beta y} + \underline{A}_2 e^{-j\beta y};$
$\underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m\text{пад}}(x) + \underline{I}_{m\text{від}}(x) =$ $= \frac{\underline{A}_1}{R_{\text{хв}}} e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{R_{\text{хв}}} e^{j\beta x};$	$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m\text{пад}}(y) + \underline{I}_{m\text{від}}(y) =$ $= \frac{\underline{A}_1}{R_{\text{хв}}} e^{j\beta y} - \frac{\underline{A}_2}{R_{\text{хв}}} e^{-j\beta y};$
$\underline{A}_1 = \underline{A}_1 e^{j\psi_{A1}} = \frac{\underline{U}_{m1} + R_{\text{хв}} \underline{I}_{m1}}{2};$	$\underline{A}_1 = \underline{A}_1 e^{j\psi_{A1}} = \frac{\underline{U}_{m2} + R_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2};$
$\underline{A}_2 = \underline{A}_2 e^{j\psi_{A2}} = \frac{\underline{U}_{m1} - R_{\text{хв}} \underline{I}_{m1}}{2}$	$\underline{A}_2 = \underline{A}_2 e^{j\psi_{A2}} = \frac{\underline{U}_{m2} - R_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}}{2}$
$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m1} \cos \beta x - j \underline{I}_{m1} R_{\text{хв}} \sin \beta x;$	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \cos \beta y + j \underline{I}_{m2} R_{\text{хв}} \sin \beta y;$
$\underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m1} \cos \beta x - j \frac{\underline{U}_{m1}}{R_{\text{хв}}} \sin \beta x$	$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \cos \beta y + j \frac{\underline{U}_{m2}}{R_{\text{хв}}} \sin \beta y$
Миттєві значення падаючих і відбитих хвиль напруги і струму в довільному перерізі лінії	
$u_{\text{пад}}(t, x) = A_1 \cos(\omega t - \beta x + \psi_{A1}) =$ $= A_1 \cos[\omega(t - x/v) + \psi_{A1}];$	$u_{\text{пад}}(t, y) = A_1 \cos(\omega t + \beta y + \psi_{A1}) =$ $= A_1 \cos[\omega(t + y/v) + \psi_{A1}];$
$i_{\text{пад}}(t, x) = \frac{A_1}{R_{\text{хв}}} \cos[\omega(t - x/v) + \psi_{A1}]$	$i_{\text{пад}}(t, y) = \frac{A_1}{R_{\text{хв}}} \cos[\omega(t + y/v) + \psi_{A1}]$
$u_{\text{від}}(t, x) = A_2 \cos(\omega t + \beta x + \psi_{A2}) =$ $= A_2 \cos[\omega(t + x/v) + \psi_{A2}];$	$u_{\text{від}}(t, y) = A_2 \cos(\omega t - \beta y + \psi_{A2}) =$ $= A_2 \cos[\omega(t - y/v) + \psi_{A2}];$
$i_{\text{від}}(t, x) = -\frac{A_2}{R_{\text{хв}}} \cos[\omega(t + x/v) + \psi_{A2}]$	$i_{\text{від}}(t, y) = -\frac{A_2}{R_{\text{хв}}} \cos[\omega(t - y/v) + \psi_{A2}]$
Комплексний опір лінії	
$\underline{Z}(x) = R_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{вх}} \cos \beta x - j R_{\text{хв}} \sin \beta x}{R_{\text{хв}} \cos \beta x - j \underline{Z}_{\text{вх}} \sin \beta x} =$ $= R_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{вх}} - j R_{\text{хв}} \operatorname{tg} \beta x}{R_{\text{хв}} - j \underline{Z}_{\text{вх}} \operatorname{tg} \beta x}$	$\underline{Z}(y) = R_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \cos \beta y + j R_{\text{хв}} \sin \beta y}{R_{\text{хв}} \cos \beta y + j \underline{Z}_{\text{н}} \sin \beta y} =$ $= R_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} + j R_{\text{хв}} \operatorname{tg} \beta y}{R_{\text{хв}} + j \underline{Z}_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta y}$

При відліку координати від входу лінії	При відліку координати від навантаження
Коефіцієнт відбиття	
$\rho(x) = \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(x)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(x)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{від}}(x)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(x)} =$ $= \frac{\underline{Z}_{\text{вх}} - R_{\text{хв}}}{\underline{Z}_{\text{вх}} + R_{\text{хв}}} e^{j2\beta x}$	$\rho(y) = \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(y)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(y)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{від}}(y)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(y)} =$ $= \frac{\underline{Z}_{\text{н}} - R_{\text{хв}}}{\underline{Z}_{\text{н}} + R_{\text{хв}}} e^{-j2\beta y}$
Активна й реактивна потужності	
$P_A(x) = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] =$ $= P_{A\text{пад}} - P_{A\text{від}};$	$P_A(y) = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] =$ $= P_{A\text{пад}} - P_{A\text{від}};$
$P_Q(x) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 \rho(0) \sin \varphi_\rho(x)$	$P_Q(y) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 \rho(y) \sin \varphi_\rho(y)$

5) аргумент коефіцієнта відбиття змінюється вздовж лінії за лінійним законом $2\beta x$ при відліку координати від початку лінії та $-2\beta y$ при відліку від навантаження.

В ідеальних ліній, як і в реальних, у режимі біжних хвиль ($\underline{Z}_{\text{н}} = R_{\text{хв}}$) відбиті хвилі відсутні, коефіцієнт відбиття дорівнює нулю, а вхідний опір і опір у будь-якому перерізі дорівнюють хвильовому.

Модуль коефіцієнта відбиття (5.66) у будь-якому перерізі лінії дорівнює одиниці (тобто $\underline{U}_{m\text{від}} = \underline{U}_{m\text{пад}}; \underline{I}_{m\text{від}} = \underline{I}_{m\text{пад}}$) за таких умов:

- 1) вихідні затискачі лінії замкнені ($\underline{Z}_{\text{н}} = 0$);
- 2) вихідні затискачі лінії розімкнені ($\underline{Z}_{\text{н}} \rightarrow \infty$);
- 3) лінія навантажена на індуктивність ($\underline{Z}_{\text{н}} = j\omega L$);
- 4) лінія навантажена на ємність ($\underline{Z}_{\text{н}} = 1/j\omega C$).

Такий режим повного відбиття енергії від навантаження називається *режимом стійких хвиль*.

Якщо лінію навантажено на активний $R_{\text{н}} \neq R_{\text{хв}}$ або комплексний $\underline{Z}_{\text{н}} = R_{\text{н}} + jX_{\text{н}}$ ($R_{\text{н}} \neq 0; -\infty < X_{\text{н}} < \infty$) опір, модуль коефіцієнта відбиття лежить у межах:

$$0 < \rho(x) < 1; 0 < \rho(y) < 1.$$

У цьому випадку, званому *режимом змішаних хвиль*, спостерігається часткове відбиття енергії падаючої хвилі від навантаження:

$$\underline{U}_{m\text{від}} < \underline{U}_{m\text{пад}}; \underline{I}_{m\text{від}} < \underline{I}_{m\text{пад}}.$$

Якщо зважати на втрати, для розрахунку вторинних параметрів ДЛ із малими втратами (ДЛМВ) застосовують приблизні

співвідношення. Виводячи ці співвідношення, використовують нерівності (5.61), нехтують малими величинами другого порядку $(G_1/\omega C_1)^2$; $R_1 G_1/\omega^2 L_1 C_1$ і записують приблизні значення квадратного кореня від виразів вигляду $1 \pm jA$, $A \ll 1$:

$$\sqrt{1 \pm jA} \approx 1 \pm j0,5A.$$

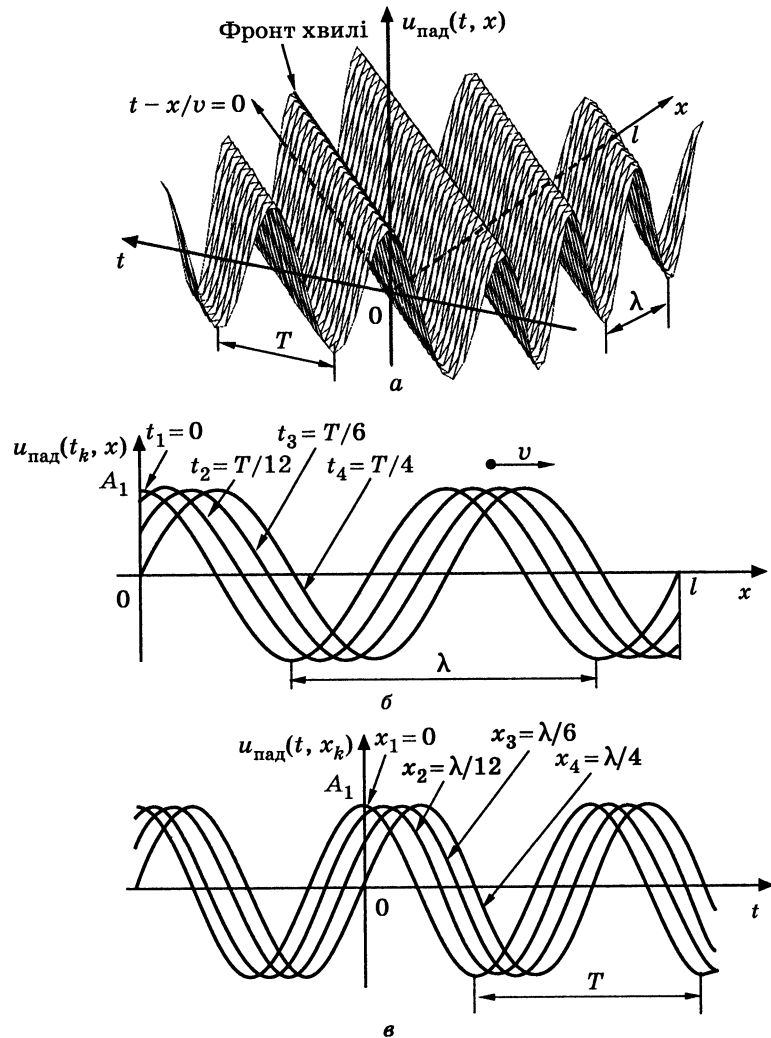


Рис. 5.13. Графіки падаючої хвилі напруги в ідеальній довгій лінії ($\psi_{A1}=0$): а — аксонометричне подання; б — розподіл уздовж лінії для моментів часу t_k ; в — залежність від часу в перерізах лінії x_k

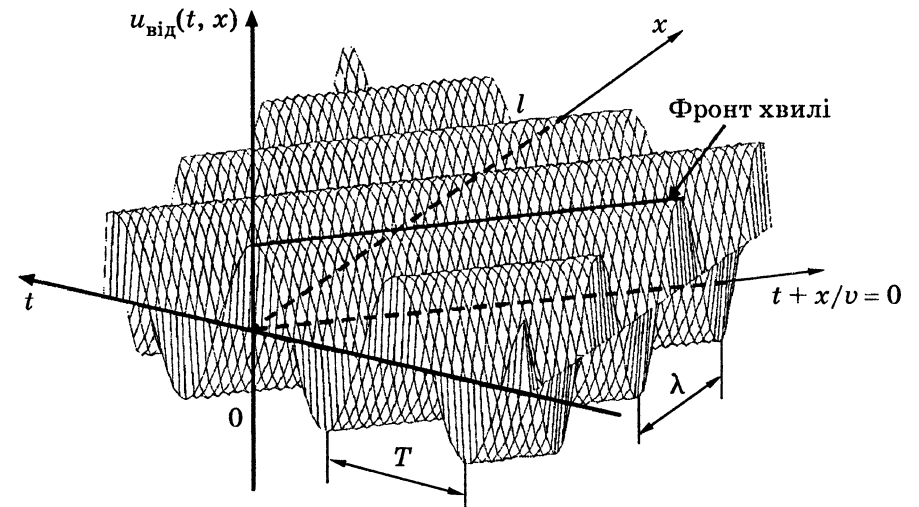


Рис. 5.14. Аксонометричне подання відбитої хвилі напруги в ідеальній довгій лінії ($\psi_{A2}=0$)

Нижче наведені виведення формул для приблизних значень хвильового опору і коефіцієнта поширення ДЛМВ:

$$\underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 - j\omega C_1)}{G_1^2 + (\omega C_1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{R_1 G_1 + \omega^2 L_1 C_1 + j\omega(L_1 G_1 - C_1 R_1)}{G_1^2 + (\omega C_1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2 L_1 C_1 (R_1 G_1/\omega^2 L_1 C_1 + 1) + j\omega(L_1 G_1 - C_1 R_1)/\omega^2 L_1 C_1}{(G_1/\omega C_1)^2 + 1}} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sqrt{1 + j \left(\frac{G_1}{\omega C_1} - \frac{R_1}{\omega L_1} \right)} \approx R_{\text{хв}} \left[1 + j0,5 \left(\frac{G_1}{\omega C_1} - \frac{R_1}{\omega L_1} \right) \right];$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{\left(1 - \frac{jR_1}{\omega L_1}\right) \left(1 - \frac{jG_1}{\omega C_1}\right)} =$$

$$= j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{\left(1 - \frac{R_1 G_1}{\omega^2 L_1 C_1}\right) - j \left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1} \right)} \approx$$

$$\approx j\omega\sqrt{L_1 C_1} \sqrt{1 - j\left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1}\right)} \approx j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left[1 - j0,5\left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1}\right)\right] =$$

$$= 0,5\left(\frac{R_1}{R_{\text{хв}}} + G_1 R_{\text{хв}}\right) + j\omega\sqrt{L_1 C_1} = \alpha + j\beta,$$

де $R_{\text{хв}} = \sqrt{L_1/C_1}$ — хвильовий опір ідеальної лінії; $\alpha \approx 0,5(R_1/R_{\text{хв}} + G_1 R_{\text{хв}})$, $\beta \approx \omega\sqrt{L_1 C_1}$ — приблизні вирази для коефіцієнтів ослаблення і фази відповідно.

Для ліній з повітряною ізоляцією $G_1 = 0$, і тому приблизні співвідношення для коефіцієнта ослаблення і хвильового опору спрощуються:

$$\alpha \approx 0,5 \frac{R_1}{R_{\text{хв}}}; \quad Z_{\text{хв}} \approx R_{\text{хв}} \left(1 - j0,5 \frac{R_1}{\omega L_1}\right).$$

Формули для розрахунку вторинних параметрів ідеальних ліній і ДЛМВ зведені до табл. 5.9.

Таблиця 5.9

Параметри ідеальних ліній і ДЛМВ

Параметр	Ідеальна ДЛ	ДЛМВ
Хвильовий опір	$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$	$Z_{\text{хв}} \approx R_{\text{хв}} \left[1 + j0,5\left(\frac{G_1}{\omega C_1} - \frac{R_1}{\omega L_1}\right)\right]$ $Z_{\text{хв}} \approx R_{\text{хв}} \left(1 - j0,5 \frac{R_1}{\omega L_1}\right)$, якщо $G_1 = 0$
Коефіцієнт ослаблення	$\alpha = 0$	$\alpha \approx 0,5\left(\frac{R_1}{R_{\text{хв}}} + G_1 R_{\text{хв}}\right)$; $\alpha \approx 0,5 \frac{R_1}{R_{\text{хв}}}$, якщо $G_1 = 0$
Коефіцієнт фази	$\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1}$	$\beta \approx \omega\sqrt{L_1 C_1}$
Довжина хвилі	$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{T}{\sqrt{L_1 C_1}}$	$\lambda \approx \frac{1}{f\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{T}{\sqrt{L_1 C_1}}$
Фазова швидкість	$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$	$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$

Приклад 5.12. Розрахувати приблизні значення коефіцієнта ослаблення і хвильового опору симетричної двопровідної повітряної ДЛМВ, розглянутої у прикладах 5.1 і 5.9, для частоти $f = 100$ МГц.

Розв'язання. Скористаємося знайденими у прикладах 5.1 і 5.9 значеннями первинних параметрів даної лінії:

$$L_1 = 8,886 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}; \quad C_1 = 1,264 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}; \quad R_1 = 1,615 \text{ Ом/м}; \quad G_1 = 0;$$

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = 1,615 + j558,324 \text{ Ом/м}; \quad Y_1 = j\omega C_1 = j7,942 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}.$$

Знайдемо хвильовий опір ідеальної лінії з такими самими, як у даної лінії, значеннями первинної індуктивності та ємності:

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{8,886 \cdot 10^{-7}}{1,264 \cdot 10^{-11}}} = 265,1 \text{ Ом}.$$

За приблизними формулами, наведеними у табл. 5.6 для $G_1 = 0$, знайдемо:

1) коефіцієнт ослаблення

$$\alpha \approx 0,5 \frac{R_1}{R_{\text{хв}}} = 0,5 \cdot \frac{1,615}{265,1} = 3,046 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/м};$$

2) хвильовий опір

$$Z_{\text{хв}} \approx R_{\text{хв}} \left(1 - j0,5 \frac{R_1}{\omega L_1}\right) = 265,1 \left(1 - j0,5 \cdot \frac{1,615}{558,324}\right) = 265,1 - j0,383 \text{ Ом}.$$

Порівнюючи отримані результати з точними розрахунками прикладу 5.9, бачимо доцільність застосування приблизних співвідношень.

Приклад 5.13. За приблизними формулами визначити коефіцієнт ослаблення і хвильовий опір для частоти $f = 1000$ МГц коаксіального кабелю і стрічкової лінії, розглянутих у прикладах 5.2, 5.3 і 5.10.

Розв'язання. Скористаємося значеннями первинних параметрів, погонних комплексних опорів і провідностей цих ліній (див. табл. 5.7). Результати розрахунків за відповідними приблизними співвідношеннями з табл. 5.9 зведемо до табл. 5.10.

Таблиця 5.10

Результати розрахунків (до прикладу 5.13)

Параметр і розрахункова формула	Результати розрахунків	
	Коаксіальний кабель	Стрічкова лінія
Хвильовий опір ідеальної лінії, $R_{\text{хв}} = \sqrt{L_1/C_1}$, Ом	92,6	131,4
Коефіцієнт ослаблення $\alpha \approx 0,5(R_1/R_{\text{хв}} + G_1 R_{\text{хв}})$, Нп/м	0,018	0,065
Хвильовий опір лінії з урахуванням втрат $Z_{\text{хв}} \approx R_{\text{хв}}[1 + j0,5(G_1/\omega C_1 - R_1/\omega L_1)]$, Ом	92,6 - j0,035	131,4 - j0,248

Оцінка отриманих результатів свідчить про досить повний збіг розрахованих вторинних параметрів з даними прикладу 5.10 (табл. 5.7).

5.6. Режим біжних хвиль

Режим біжних хвиль (режим узгодження) існує, коли лінію навантажено на хвильовий опір ($Z_H = Z_{ХВ}$ — для реальної; $Z_H = R_{ХВ}$ — для ідеальної лінії). У підрозділі 5.4 показано, що в цьому режимі відбита хвиля відсутня (коефіцієнт відбиття дорівнює нулю), а опір у будь-якому перерізі лінії та вхідний опір дорівнюють хвильовому.

Аналізуючи режим біжних хвиль у реальній лінії (рис. 5.15, а), вважають заданими комплексні амплітуди напруги $\underline{U}_{m2} = U_{m2} e^{j\psi_{u2}}$ і струму $\underline{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\psi_{i2}}$ у кінці лінії, пов'язані між собою за законом Ома:

$$\underline{U}_{m2} = Z_{ХВ} \underline{I}_{m2}; \quad U_{m2} = Z_{ХВ} I_{m2}; \quad \psi_{u2} - \psi_{i2} = \varphi_{ХВ}, \quad (5.67)$$

де $Z_{ХВ}$ — повний хвильовий опір; $\varphi_{ХВ}$ — аргумент комплексного хвильового опору.

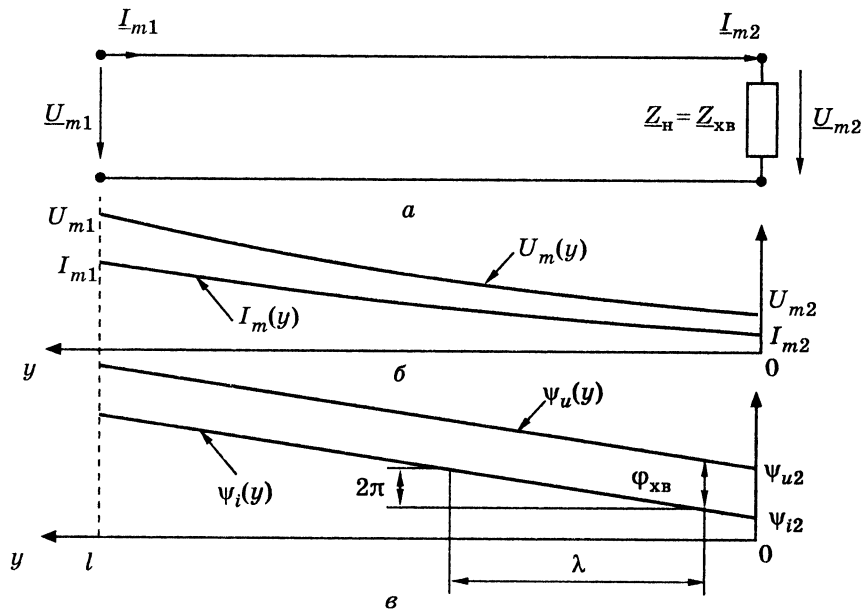


Рис. 5.15. Режим біжних хвиль у лінії з втратами: а — схема лінії; б — розподіл амплітуд напруги та струму; в — розподіл початкових фаз напруги та струму ($\varphi_{ХВ} > 0$)

З огляду на вираз (5.67) і співвідношення для гіперболічних функцій

$$\operatorname{ch} \gamma y + \operatorname{sh} \gamma y = \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} + \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} = e^{\gamma y},$$

система рівнянь для комплексних амплітуд напруги і струму в довільному перерізі лінії з координатою y (див. табл. 5.5)

$$\begin{cases} \underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \operatorname{ch} \gamma y + Z_{ХВ} \underline{I}_{m2} \operatorname{sh} \gamma y; \\ \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \operatorname{ch} \gamma y + \frac{\underline{U}_{m2}}{Z_{ХВ}} \operatorname{sh} \gamma y \end{cases} \quad (5.68)$$

приймає вигляд

$$\begin{cases} \underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} (\operatorname{ch} \gamma y + \operatorname{sh} \gamma y) = \underline{U}_{m2} e^{\gamma y} = U_{m2} e^{j\psi_{u2}} e^{(\alpha + j\beta)y} = U_m(y) e^{j\psi_u(y)}; \\ \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} (\operatorname{ch} \gamma y + \operatorname{sh} \gamma y) = \underline{I}_{m2} e^{\gamma y} = I_{m2} e^{j\psi_{i2}} e^{(\alpha + j\beta)y} = I_m(y) e^{j\psi_i(y)}, \end{cases} \quad (5.69)$$

де $U_m(y) = U_{m2} e^{\alpha y}$, $I_m(y) = I_{m2} e^{\alpha y}$, $\psi_u(y) = \psi_{u2} + \beta y$, $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \beta y$ — закони змінювання амплітуд і початкових фаз відповідно напруги і струму в довільному перерізі лінії.

Графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги і струму вздовж лінії побудовані на рис. 5.15, б, в. На рис. 5.16 показано векторне подання $\underline{U}_m(y)$ на комплексній площині. Ці графіки ілюструють збільшення амплітуд і початкових фаз у напрямку до входу лінії. Амплітуди змінюються за експоненціальним, а початкові фази — за лінійним законом. Початкові фази у перерізах лінії на відстані $n\lambda/4$ один від одного відрізняються на $n\pi/4$.

Система рівнянь (5.69) дозволяє записати миттєві значення напруги і струму в перерізі лінії з координатою y :

$$u(t, y) = \operatorname{Re}[\underline{U}_m(y) e^{j\omega t}] = U_{m2} e^{\alpha y} \cos(\omega t + \beta y + \psi_{u2});$$

$$i(t, y) = \operatorname{Re}[\underline{I}_m(y) e^{j\omega t}] = I_{m2} e^{\alpha y} \cos(\omega t + \beta y + \psi_{i2}).$$

Енергетичним показником режиму роботи довгої лінії є коефіцієнт корисної дії (ККД):

$$\eta = \frac{P_{A_H}}{P_{A_1}} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_1 I_1 \cos \varphi_1},$$

де P_{A_H} , P_{A_1} — активні потужності в навантаженні та на вході лінії, відповідно; φ_1 , φ_2 — зсув фаз між напругою і струмом на вході та виході лінії, відповідно.

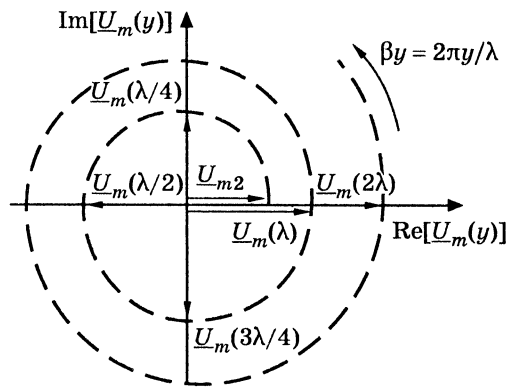


Рис. 5.16. Векторне подання комплексної амплітуди напруги (при $\psi_{u2} = 0$) у різних перерізах узгодженої лінії з втратами

У режимі біжних хвиль значення ККД становитиме:

$$\eta = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_{хв}}{U_1 I_1 \cos \varphi_{хв}} = \frac{U_2 I_2}{U_2 e^{\alpha l} I_2 e^{\alpha l}} = e^{-2\alpha l} \quad (5.70)$$

Для ДЛІМВ, з огляду на приблизний вираз для коефіцієнта ослаблення (див. табл. 5.9) $\alpha \approx 0,5(R_1/R_{хв} + G_1 R_{хв})$, співвідношення (5.70) запишеться у вигляді

$$\eta \approx e^{-(R_1/R_{хв} + G_1 R_{хв})l}$$

Якщо $2\alpha l \ll 1$, вираз (5.70) спрощується:

$$\eta = e^{-2\alpha l} \approx 1 - 2\alpha l \quad (5.71)$$

Якщо знехтувати втратами ($\alpha = 0$; $\gamma = j\beta$), то ККД дорівнюватиме одиниці, а система рівнянь (5.69) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} e^{j\beta y} = \underline{U}_{m2} e^{j\psi_{u2}} e^{j\beta y} = \underline{U}_{m2} e^{j(\beta y + \psi_{u2})} = \underline{U}_{m2} e^{j\psi_u(y)}; \\ \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} e^{j\beta y} = \underline{I}_{m2} e^{j\psi_{i2}} e^{j\beta y} = \underline{I}_{m2} e^{j(\psi_{i2} + \beta y)} = \underline{I}_{m2} e^{j\psi_i(y)}, \end{cases} \quad (5.72)$$

де $\psi_u(y) = \psi_{u2} + \beta y$, $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \beta y$ — закони змінювання початкових фаз напруги і струму в довільному перерізі лінії.

З системи (5.72) випливає, що амплітуди напруги і струму в будь-якому перерізі ідеальної лінії однакові (рис. 5.17, б):

$$U_m(y) = U_{m2}; \quad I_m(y) = I_{m2}.$$

Хвильовий опір $R_{хв}$ ідеальної лінії має суто активний характер і є навантаженням лінії для даного режиму (рис. 5.17, а). Тому $\psi_{u2} = \psi_{i2}$ і закони змінювання початкових фаз напруги і струму в будь-якому перерізі збігаються (рис. 5.17, в).

Приклад 5.14. Розрахувати і побудувати графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги і струму для узгодженої симетричної повітряної двопровідної лінії (див. приклади 5.1 і 5.9) на частоті $f = 100$ МГц, якщо

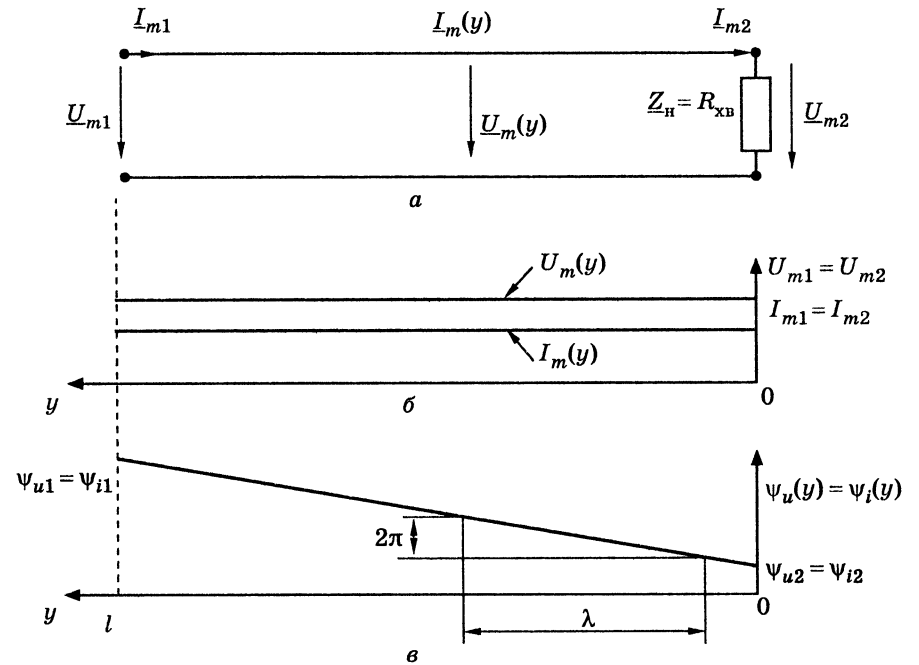


Рис. 5.17. Режим біжних хвиль в ідеальній лінії: а — схема лінії; б — розподіл амплітуд напруги та струму; в — розподіл початкових фаз напруги та струму

довжина лінії $l = 50$ м, а комплексна амплітуда напруги в кінці лінії $\underline{U}_{m2} = 10$ В. Знайти розв'язок: 1) для ідеальної лінії; 2) лінії з урахуванням втрат, визначити ККД.

Розв'язання. Скористаємося значеннями вторинних параметрів лінії з прикладу 5.9:

- 1) коефіцієнт ослаблення $\alpha = 3,046 \cdot 10^{-3}$ Нп/м;
- 2) коефіцієнт фази $\beta = \text{Im}(\underline{\gamma}) = 2,106$ рад/м;
- 3) хвильовий опір
 - для ідеальної лінії $R_{хв} = 265,1$ Ом;
 - з урахуванням втрат у лінії $Z_{хв} \approx 265,1 - j0,383$ Ом.

Для того щоб визначити розподіл амплітуд і початкових фаз напруги та струму, нехтуючи втратами, скористаємося співвідношенням (5.72):

$$U_m(y) = U_{m2} = 10 \text{ В}; \quad I_m(y) = I_{m2} = \frac{U_{m2}}{R_{хв}} = \frac{10}{265,1} = 0,038 \text{ А};$$

$$\psi_u(y) = \psi_i(y) = \beta y = 2,106 y \text{ рад.}$$

Розрахунки для лінії з втратами виконаємо за формулою (5.69):

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} e^{\gamma y} = \underline{U}_{m2} e^{(\alpha + j\beta)y} = 10e^{3,046 \cdot 10^{-3} y} e^{j2,106 y} \text{ В};$$

$$U_m(y) = 10e^{3,046 \cdot 10^{-3} y} \text{ В}; \quad \psi_u(y) = 2,106 y \text{ рад};$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} e^{\gamma y} = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{\text{хв}}} e^{(\alpha + j\beta)y} = \frac{10e^{3,046 \cdot 10^{-3} y} e^{j2,106 y}}{265,1 - j0,383} =$$

$$= 0,038e^{3,046 \cdot 10^{-3} y} e^{j(1,444 \cdot 10^{-3} + 2,106 y)} \text{ А};$$

$$I_m(y) = 0,038e^{3,046 \cdot 10^{-3} y} \text{ А}; \quad \psi_i(y) = 1,444 \cdot 10^{-3} + 2,106 y \approx 2,106 y \text{ рад}.$$

Побудуємо графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги та струму в лінії (рис. 5.18). Суцільними лініями показані графіки для амплітуд у разі нехтування втратами, а пунктиром — враховуючи втрати.

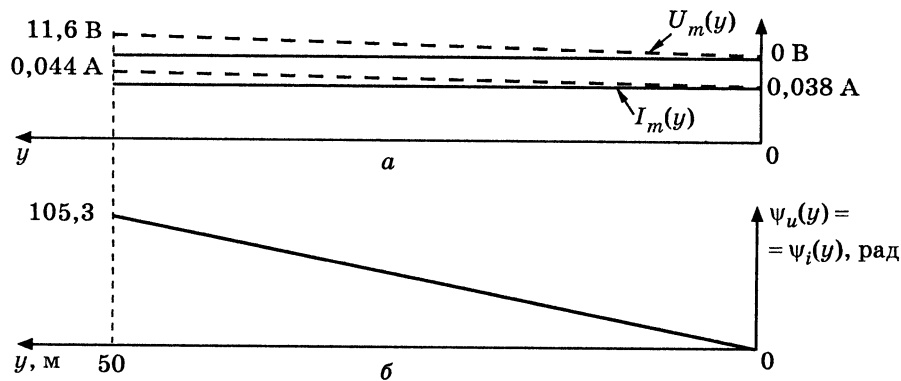


Рис. 5.18. До прикладу 5.14: *a* — розподіл амплітуд напруги та струму; *b* — розподіл початкових фаз напруги та струму

За формулою (5.70) визначимо ККД лінії з урахуванням втрат:

$$\eta = e^{-2\alpha l} = e^{-2 \cdot 3,044 \cdot 10^{-3} \cdot 50} = 0,737 = 73,7\%.$$

Приклад 5.15. Розрахувати режим біжних хвиль у коаксіальному кабелі та стрічковій лінії, розглянутих у прикладі 5.10, враховуючи втрати, на частоті $f = 1000$ МГц. Побудувати графіки розподілу $U_m(y)$, $I_m(y)$. Задано довжину лінії $l = 12$ м і комплексну амплітуду вхідного струму $\underline{I}_{m1} = 15e^{j\pi/4}$ мА.

Розв'язання. Використаємо значення вторинних параметрів ліній (табл. 5.7). Основні співвідношення і розрахунки зведемо до табл. 5.11. Графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$ побудовано на рис. 5.19.

Таблиця 5.11

Результати розрахунків (до прикладу 5.15)

Параметр, формула	Результати розрахунку	
	Коаксіальний кабель	Стрічкова лінія
Комплексна амплітуда струму на виході лінії $\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{m1} e^{-\gamma l}$	$12,086e^{-j378,3}$	$6,876e^{-j363,7}$
Комплексна амплітуда напруги на виході лінії $\underline{U}_{m2} = \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2}$	$1119e^{-j378,3}$	$903,6e^{-j363,7}$
Закон розподілу амплітуди напруги $U_m(y) = U_{m2} e^{\alpha y}$	$1119e^{0,018y}$	$903,6e^{0,065y}$
Закон розподілу амплітуди струму $I_m(y) = I_{m2} e^{\alpha y}$	$12,086e^{0,018y}$	$6,876e^{0,065y}$
Закон розподілу початкових фаз напруги $\psi_u(y) = \psi_{u2} + \beta y$	$-378,3 + 31,59y$	$-363,7 + 30,37y$
Закон розподілу початкових фаз струму $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \beta y$	$-378,3 + 31,59y$	$-363,7 + 30,37y$
ККД η , %	64,9	21

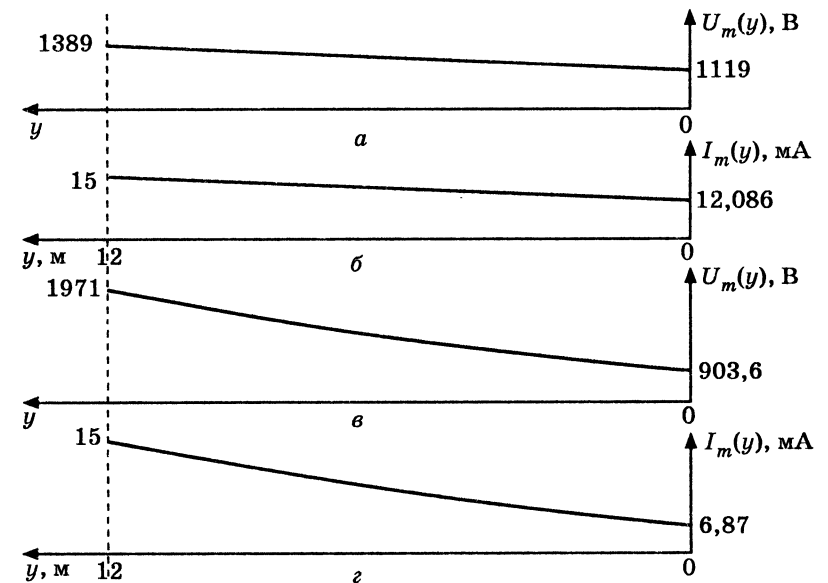


Рис. 5.19. Розподіл амплітуд напруги і струму до прикладу 5.15: *a*, *b* — коаксіальна лінія; *в*, *г* — стрічкова лінія

5.7. Режим стійних хвиль

У режимі стійних хвиль енергія повністю відбивається від навантаження, тобто модуль комплексного коефіцієнта відбиття (5.58) у кінці лінії дорівнює одиниці:

$$\rho(0) = \left| \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_{XB}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{XB}} \right| = 1. \quad (5.73)$$

У лінії з втратами умова (5.73) виконується тоді, коли $\underline{Z}_H \rightarrow \infty$ або $\underline{Z}_H = 0$, що відповідає холостому ходу або короткому замиканню в кінці лінії.

В ідеальній лінії ($\underline{Z}_{XB} = R_{XB}$) даний режим, окрім холостого ходу і короткого замикання, спостерігається також, якщо лінію навантажено на реактивний опір (індуктивність або ємність). Так, після підстановки $\underline{Z}_H = jX_2$ ($X_2 > 0$ — індуктивність, $X_2 < 0$ — ємність) і $\underline{Z}_{XB} = R_{XB}$ у формулу (5.73), виходить:

$$\rho(0) = \left| \frac{jX_2 - R_{XB}}{jX_2 + R_{XB}} \right| = \frac{\sqrt{R_{XB}^2 + X_2^2}}{\sqrt{R_{XB}^2 + X_2^2}} = 1.$$

5.7.1. Холостий хід в ідеальній лінії

При розімкнених вихідних затискачах (рис. 5.20, а) $\underline{I}_{m2} = 0$, $\underline{U}_{m2} \neq 0$ і рівняння для ідеальної лінії (див. табл. 5.8) запишуться у вигляді:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \cos \beta y + j \underline{I}_{m2} R_{XB} \sin \beta y = \underline{U}_{m2} \cos \beta y; \quad (5.74)$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \cos \beta y + j \frac{\underline{U}_{m2}}{R_{XB}} \sin \beta y = j \frac{\underline{U}_{m2}}{R_{XB}} \sin \beta y, \quad (5.75)$$

де $\beta = 2\pi/\lambda$ — коефіцієнт фази; $\underline{U}_{m2} \neq 0$ — комплексна амплітуда напруги на виході лінії.

З рівнянь (5.74) і (5.75) випливають вирази для розрахунку:

- миттєвих значень напруги (рис. 5.21) і струму в будь-якому перерізі лінії:

$$\begin{aligned} u(t, y) &= \text{Re}[\underline{U}_m(y)e^{j\omega t}] = U_{m2} \cos \beta y \cos(\omega t + \psi_{u2}); \\ i(t, y) &= \text{Re}[\underline{I}_m(y)e^{j\omega t}] = \frac{U_{m2}}{R_{XB}} \sin \beta y \cos\left(\omega t + \psi_{u2} + \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned} \quad (5.76)$$

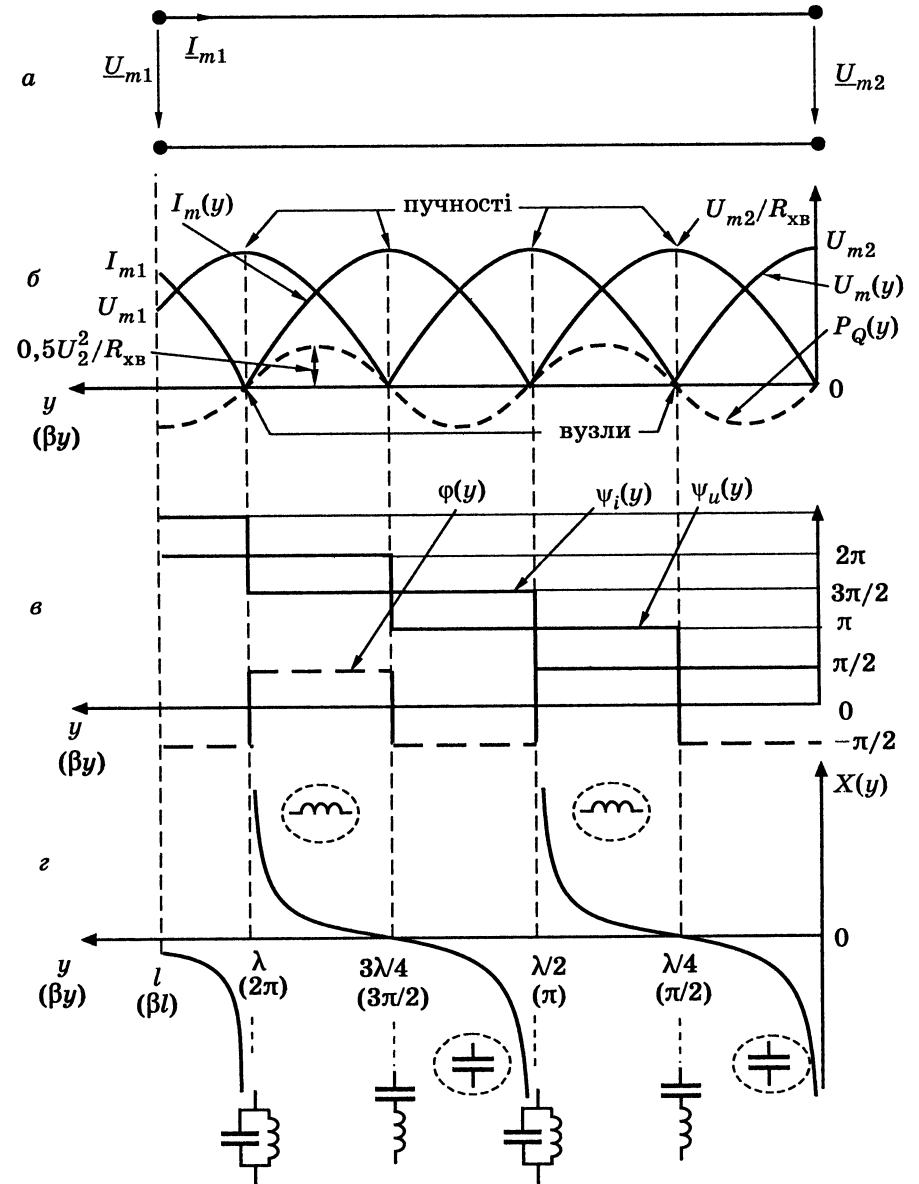


Рис. 5.20. Режим стійних хвиль у розімкненій ідеальній лінії: а — схема лінії; розподіли: б — амплітуд напруги та струму, реактивної потужності; в — початкових фаз і зсуву фаз між напругою ($\psi_{u2} = 0$) і струмом; г — реактивного опору

- амплітуд напруги і струму в лінії (рис. 5.20, б):

$$U_m(y) = U_{m2} |\cos \beta y|; \quad (5.77)$$

$$I_m(y) = \frac{U_{m2}}{R_{\text{хв}}} |\sin \beta y|; \quad (5.78)$$

- початкових фаз напруги і струму в лінії (рис. 5.20, в):

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos \beta y > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos \beta y < 0; \end{cases} \quad (5.79)$$

$$\psi_i(y) = \psi_{i2} + \frac{\pi}{2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sin \beta y > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \sin \beta y < 0. \end{cases} \quad (5.80)$$

Вираз для комплексного опору в довільному перерізі лінії можна знайти як за загальною формулою (табл. 5.8):

$$\begin{aligned} \underline{Z}(y) &= \lim_{\underline{Z}_H \rightarrow \infty} R_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_H \cos \beta y + jR_{\text{хв}} \sin \beta y}{R_{\text{хв}} \cos \beta y + j\underline{Z}_H \sin \beta y} = \\ &= R_{\text{хв}} \frac{\cos \beta y}{j \sin \beta y} = -jR_{\text{хв}} \operatorname{ctg} \beta y = jX(y), \end{aligned} \quad (5.81)$$

так і діленням виразу (5.74) на (5.75):

$$\underline{Z}(y) = \frac{U_m(y)}{I_m(y)} = -jR_{\text{хв}} \operatorname{ctg} \beta y = jX(y).$$

Співвідношення (5.81) для $\underline{Z}(y)$ свідчить, що опір у довільному перерізі лінії є уявним, тобто має реактивний характер. Графік функції $X(y) = -R_{\text{хв}} \operatorname{ctg} \beta y$ зображено на рис. 5.20, з.

Комплексний коефіцієнт відбиття в будь-якому перерізі з огляду на загальну формулу (див. табл. 5.8) для даного випадку становить:

$$\rho(y) = \frac{U_{\text{мвід}}(y)}{U_{\text{мпад}}(y)} = -\frac{I_{\text{мвід}}(y)}{I_{\text{мпад}}(y)} = \lim_{\underline{Z}_H \rightarrow \infty} \frac{\underline{Z}_H - R_{\text{хв}}}{\underline{Z}_H + R_{\text{хв}}} e^{-j2\beta y} = e^{-j2\beta y}. \quad (5.82)$$

Оскільки $\rho(0) = 1$, вирази для активної та реактивної потужностей, використовуючи формули з табл. 5.8, можна записати у вигляді:

$$P_A = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] = 0; \quad (5.83)$$

$$P_Q(y) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 \sin(-2\beta y) = -2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 \sin(2\beta y).$$

Графік реактивної потужності показаний на рис. 5.20, б.

Аналіз співвідношень (5.76)–(5.83) і графіків (рис. 5.20 і 5.21) дозволяє зробити такі висновки щодо розімкненої ідеальної лінії:

1) реактивний характер опору лінії в будь-якому її перерізі й аксонометричне подання процесів у функції часу і координати (рис. 5.21, а) свідчать, що енергія джерела не споживається

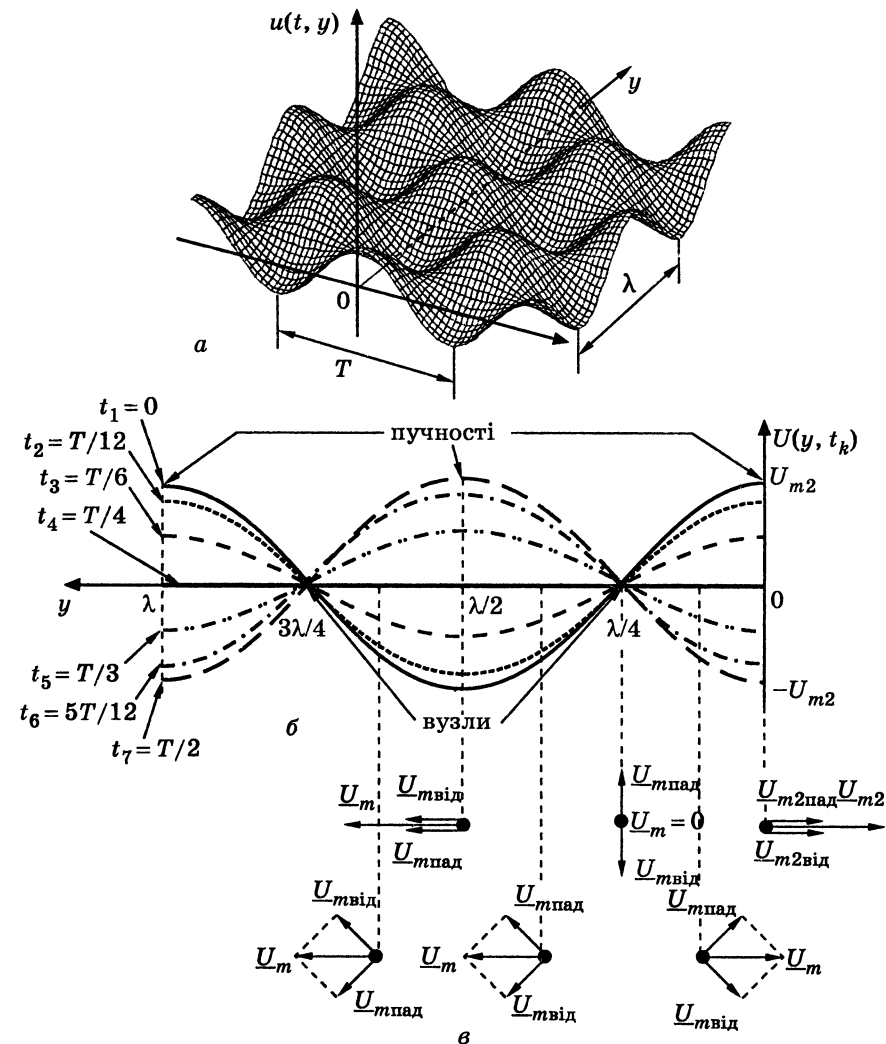


Рис. 5.21. Напруга в розімкненій ідеальній ДЛ ($\psi_{u2} = 0$):

а — аксонометричне подання;

б — розподіл уздовж лінії для моментів часу t_k ; в — векторні діаграми

і не переміщується до виходу лінії, отже, існує тільки реактивна потужність;

2) з формули (5.82) випливає, що амплітуди падаючих і відбитих хвиль напруги і струму в будь-якому перерізі становлять, відповідно:

$$U_{\text{тпад}}(y) = U_{\text{твід}}(y); I_{\text{твід}}(y) = I_{\text{тпад}}(y),$$

а фазові зсуви, які визначають залежність амплітуд напруги і струму від координати вздовж лінії (рис. 5.20, б), дорівнюють:

$$\psi_{\text{ипад}}(y) - \psi_{\text{ивід}}(y) = 2\beta y = \frac{4\pi}{\lambda}y; \psi_{\text{ипад}}(y) - \psi_{\text{ивід}}(y) = 2\beta y - \pi = \frac{4\pi}{\lambda}y - \pi;$$

3) у кінці лінії ($y=0$) і на відстанях від кінця лінії, кратних $\lambda/2$ ($\beta y = n\pi, n=1, 2, 3, \dots$), падаюча і відбита хвиля напруги перебувають у фазі (рис. 5.21, в), а струму — у протифазі; тому в цих перерізах лінії мають місце максимальні значення амплітуд напруги і нульові значення струму (рис. 5.20, б);

4) на відстанях від кінця лінії, кратних непарній кількості $\lambda/4$ ($\beta y = n\pi - \pi/2, n=1, 2, 3, \dots$), падаюча і відбита хвиля напруги перебувають у протифазі (рис. 5.21, в), а струму — у фазі; в цих перерізах лінії спостерігаються нульові значення напруги і максимальні значення амплітуди струму (рис. 5.20, б);

5) перерізи лінії, в яких амплітуди напруги або струму максимальні, називають *пучностями* (рис. 5.20, б);

6) перерізи з нульовими значеннями амплітуд напруги або струму називають *вузлами* (рис. 5.20, б); у вузлах початкова фаза змінюється стрибком на кут π (рис. 5.20, в);

7) у кінці лінії наявні пучність напруги і вузол струму;

8) пучності, як і вузли, спостерігаються в лінії періодично з інтервалом $\lambda/2$; пучності напруги збігаються з вузлами струму, а вузли напруги — з пучностями струму;

9) опір у будь-якому перерізі лінії є реактивним — індуктивним чи ємнісним (рис. 5.20, г); характер реактивності змінюється через $\lambda/4$; опір є індуктивним ($\psi_u - \psi_i = \pi/2$) у перерізах, для яких $(n\pi - \pi/2) < \beta y < n\pi$ ($n=1, 2, 3, \dots$); у перерізах лінії, які відповідають $(n-1)\pi < \beta y < (n\pi - \pi/2)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) опір — ємнісний ($\psi_u - \psi_i = -\pi/2$); опір розімкненої лінії довжиною $l < \lambda/4$ також має ємнісний характер;

10) лінія, довжина якої кратна непарній кількості $\lambda/4$, має нульовий вхідний опір; вона еквівалентна ідеальному послідовному контуру, який настроєно в резонанс (рис. 5.20, г);

11) вхідний опір лінії, довжина якої кратна $\lambda/2$, прямує до нескінченності, що відповідає ідеальному паралельному контуру, настроєному в резонанс (рис. 5.20, г).

5.7.2. Коротке замикання в ідеальній лінії

При короткому замиканні (рис. 5.22, а) основні формули для аналізу можна отримати, використовуючи наведені у табл. 5.8 співвідношення для лінії без втрат, а також граничні умови на вихідних затискачах лінії ($U_{m2} = 0; I_{m2} \neq 0$) і аналогічну п.5.7.1 методикою виведення. Підсумкові формули зведено до табл. 5.12.

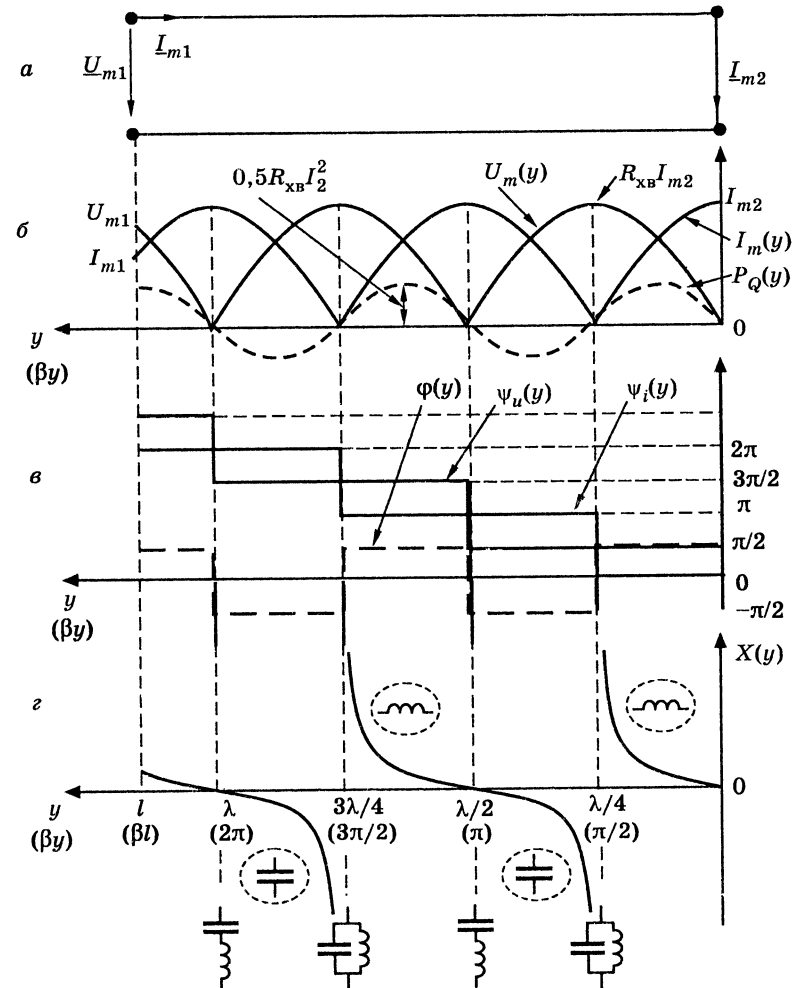


Рис. 5.22. Режим стійних хвиль у короткозамкненій ідеальній лінії: а — схема лінії; розподіли вздовж лінії: б — амплітуд напруги та струму, реактивної потужності; в — початкових фаз і зсуву фаз між напругою і струмом ($\psi_{i2} = 0$); г — реактивного опору

Таблиця 5.12

**Співвідношення для режиму стійних хвиль
у короткозамкненій лінії без втрат**

Параметри	Співвідношення
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = jI_{m2}R_{\text{хв}} \sin \beta y;$ $\underline{I}_m(y) = I_{m2} \cos \beta y$
Миттєві значення	$u(t, y) = R_{\text{хв}} I_{m2} \cos \beta y \cos(\omega t + \pi/2 + \psi_{i2});$ $i(t, y) = I_{m2} \cos \beta y \sin(\omega t + \psi_{i2});$
Амплітуди	$U_m(y) = I_{m2} R_{\text{хв}} \sin \beta y ;$ $I_m(y) = I_{m2} \cos \beta y $
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{i2} + \frac{\pi}{2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sin \beta y > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \sin \beta y < 0. \end{cases}$ $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos \beta y > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos \beta y < 0; \end{cases}$
Комплексний опір	$\underline{Z}(y) = jR_{\text{хв}} \operatorname{tg} \beta y$
Реактивний опір	$X(y) = R_{\text{хв}} \operatorname{tg} \beta y$
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\rho(y) = e^{-j2\beta y}; \rho(0) = 1; \varphi_\rho(y) = \pi - 2\beta y$
Активна і реактивна потужності	$P_A = 0; P_Q(y) = 0,5R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 \sin(2\beta y)$

Аналіз співвідношень (табл. 5.12) і побудованих на їх основі графіків (рис. 5.22) показує типові особливості режиму стійних хвиль: наявність вузлів і пучностей (рис. 5.22, б), змінювання амплітуд напруги і струму вздовж лінії за законом модуля синуса або косинуса (рис. 5.22, в), стрибкоподібна (на π) зміна початкових фаз напруги і струму (рис. 5.22, г), реактивний характер опору в довільному перерізі (рис. 5.22, з). Однак існують певні відмінності режимів короткого замикання і холостого ходу в ідеальній лінії:

1) розподіл для амплітуд струму і напруги ніби міняються місцями;

2) розподіл реактивного опору відрізняється від аналогічного розподілу для розімкненої лінії зсувом на $\lambda/4$; опір короткозамкненої лінії довжиною $l < \lambda/4$ має індуктивний характер;

3) короткозамкнена лінія, довжина якої кратна непарній кількості $\lambda/4$, має нескінченно великий вхідний опір і еквівалентна

ідеальному паралельному контуру, який настроєно в резонанс (рис. 5.22, з);

4) вхідний опір короткозамкненої лінії, довжина якої кратна $\lambda/2$, дорівнює нулю, що відповідає ідеальному послідовному контуру, який настроєно в резонанс (рис. 5.22, з).

Отже, короткозамкнена і розімкнена лінії є прикладом дуальних кіл.

5.7.3. Холостий хід і коротке замикання в реальній лінії

У реальній лінії співвідношення для комплексного коефіцієнта відбиття (5.58) і його модуля при холостому ході та короткому замиканні матимуть вигляд, відповідно:

$$\rho_{\text{х.х}}(y) = \lim_{Z_{\text{н}} \rightarrow \infty} \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{хв}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{хв}}} e^{-2\gamma y} = e^{-2\gamma y} = e^{-2\alpha y} e^{-j2\beta y};$$

$$\rho_{\text{х.х}}(y) = \frac{U_{\text{мвід}}(y)}{U_{\text{тпад}}(y)} = \frac{I_{\text{мвід}}(y)}{I_{\text{тпад}}(y)} = e^{-2\alpha y}; \quad (5.84)$$

$$\rho_{\text{к.з}}(y) = \left. \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{хв}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{хв}}} e^{-2\gamma y} \right|_{Z_{\text{н}}=0} = -e^{-2\gamma y} = -e^{-2\alpha y} e^{-j2\beta y};$$

$$\rho_{\text{к.з}}(y) = \frac{U_{\text{мвід}}(y)}{U_{\text{тпад}}(y)} = \frac{I_{\text{мвід}}(y)}{I_{\text{тпад}}(y)} = e^{-2\alpha y}, \quad (5.85)$$

де $\gamma = \alpha + j\beta$ — коефіцієнт поширення; α — коефіцієнт ослаблення; β — коефіцієнт фази.

Із формул (5.84) і (5.85) випливає, що модуль коефіцієнта відбиття дорівнює одиниці тільки в кінці лінії. Тому в розподілах амплітуд напруги і струму вздовж лінії відсутні нульові значення (вузли), а максимальні значення амплітуд не є постійними і зростають при наближенні до входу лінії.

Ці загальні висновки підтверджуються кількісними розрахунками за формулами, отриманими в результаті підстановки в рівняння реальної лінії (табл. 5.5) граничних умов.

Рівняння для комплексних амплітуд струму і напруги, а також комплексного опору матимуть вигляд:

- при холостому ході ($I_{m2} = 0$):

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \operatorname{ch} \gamma y; \underline{I}_m(y) = \frac{\underline{U}_{m2}}{Z_{\text{хв}}} \operatorname{sh} \gamma y; \underline{Z}(y) = Z_{\text{хв}} \operatorname{cth} \gamma y; \quad (5.86)$$

- при короткому замиканні ($U_{m2} = 0$):

$$\underline{U}_m(y) = \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m2} \text{sh}\gamma y; \quad I_m(y) = I_{m2} \text{ch}\gamma y; \quad \underline{Z}(y) = \underline{Z}_{\text{хв}} \text{th}\gamma y. \quad (5.87)$$

Для обчислення потужностей застосовують вираз (5.59), який при малих втратах, коли $\underline{Z}_{\text{хв}} \approx R_{\text{хв}}$, призводить до формул:

а) при холостому ході

$$P_A(y) = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2(y) [1 - \rho^2(y)] = 0,25 \frac{U_2^2}{R_{\text{хв}}} e^{2\alpha y} (1 - e^{-4\alpha y});$$

$$P_Q(y) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2(y) \rho(y) \sin \varphi_\rho(y) = -0,5 \frac{U_2^2}{R_{\text{хв}}} \sin(2\beta y); \quad (5.88)$$

б) при короткому замиканні

$$P_A(y) = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2(y) [1 - \rho^2(y)] = 0,25 R_{\text{хв}} I_2^2 e^{2\alpha y} (1 - e^{-4\alpha y});$$

$$P_Q(y) = 0,5 R_{\text{хв}} I_2^2 \sin(2\beta y).$$

Як приклад на рис. 5.23 побудовані на підставі виразів (5.86) і (5.88) графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги і струму, а також опорів і потужностей для розімкненої ДЛМВ ($\alpha\lambda = 0,35$; $\underline{Z}_{\text{хв}} \approx R_{\text{хв}}$).

Графіки ілюструють отримані вище висновки щодо розподілів амплітуд напруги і струму: мінімальні та максимальні значення амплітуд чергуються вздовж лінії з інтервалом $\lambda/4$ (рис. 5.23, а); початкові фази і зсув фаз між напругою і струмом у перерізах лінії з мінімумами амплітуд змінюються на π не стрибком, як в ідеальній лінії, а неперервно (рис. 5.23, б). Оскільки опір лінії у довільному перерізі має як активну, так і реактивну складову (рис. 5.23, в), активна потужність у лінії відрізняється від нуля (рис. 5.23, г).

При малих втратах ($\alpha y \ll 1$) вирази (5.85) і (5.86) можна спростити, використовуючи приблизне співвідношення $e^{\pm \alpha y} \approx 1 \pm \alpha y$ для гіперболічних функцій:

$$\text{ch}\gamma y = \frac{e^{\alpha y} e^{j\beta y} + e^{-\alpha y} e^{-j\beta y}}{2} \approx \cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y;$$

$$\text{sh}\gamma y = \frac{e^{\alpha y} e^{j\beta y} - e^{-\alpha y} e^{-j\beta y}}{2} \approx \alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y. \quad (5.89)$$

У табл. 5.13 наведено отримані на підставі формул (5.86)–(5.89) приблизні співвідношення для аналізу розімкнених і короткозамкнених ДЛМВ. Ступінь наближення ілюструють графіки амплітуд напруги і струму (криві $\approx U_m(y)$ та $\approx I_m(y)$ на рис. 5.23, а), побудовані за формулами з табл. 5.13.

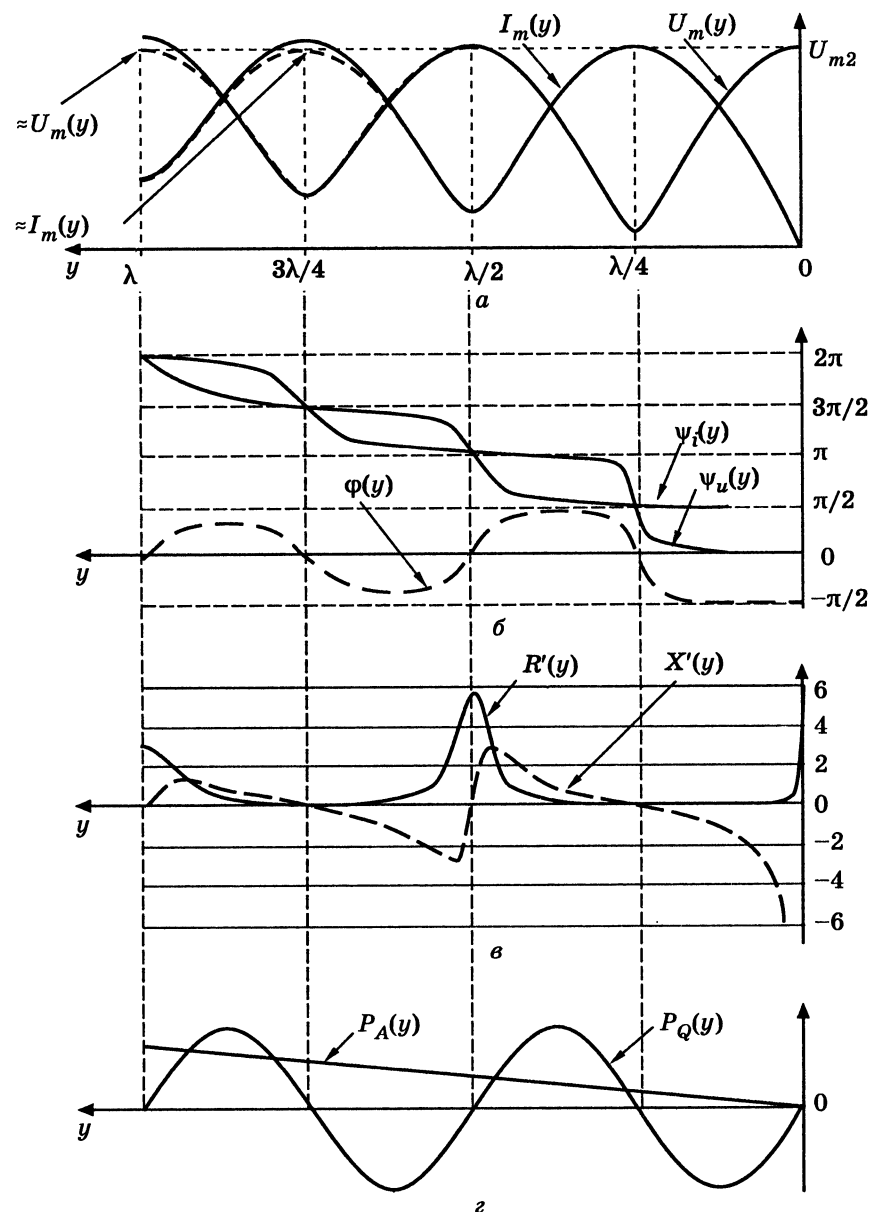


Рис. 5.23. Режим стійних хвиль у розімкненій лінії з малими втратами: а — амплітуди напруги і струму; б — початкові фази і зсув фаз між напругою ($\psi_{u2} = 0$) і струмом; в — опори, нормовані до значення $R_{\text{хв}}$; г — потужності

Таблиця 5.13

Приблизні співвідношення для аналізу ДЛМВ
($\alpha y \ll 1$, $\underline{Z}_{\text{ХВ}} \approx R_{\text{ХВ}}$) при холостому ході та короткому замиканні

Параметри	Холостий хід	Коротке замикання	
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y)$	$\underline{U}_{m2}(\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y)$	$R_{\text{ХВ}} \underline{I}_{m2}(\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y)$
	$\underline{I}_m(y)$	$\frac{\underline{U}_{m2}}{R_{\text{ХВ}}}(\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y)$	$\underline{I}_{m2}(\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y)$
Амплітуди	$U_m(y)$	$U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (\alpha y \sin \beta y)^2}$	$\frac{R_{\text{ХВ}} I_{m2} \times}{\times \sqrt{(\alpha y \cos \beta y)^2 + (\alpha y \sin \beta y)^2}}$
	$I_m(y)$	$\frac{U_{m2}}{R_{\text{ХВ}}} \sqrt{(\alpha y \cos \beta y)^2 + \sin^2 \beta y}$	$I_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (\alpha y \sin \beta y)^2}$
Початкові фази	$\psi_u(y)$	$\psi_{u2} + \arctg(\alpha y \operatorname{tg} \beta y)$	$\psi_{i2} + \varphi_{\underline{Z}_{\text{ХВ}}} + \arctg \frac{\operatorname{tg} \beta y}{\alpha y}$
	$\psi_i(y)$	$\psi_{u2} - \varphi_{\underline{Z}_{\text{ХВ}}} + \arctg \frac{\operatorname{tg} \beta y}{\alpha y}$	$\psi_{i2} + \arctg(\alpha y \operatorname{tg} \beta y)$
Комплексний опір, $\underline{Z}(y)$	$R_{\text{ХВ}} \frac{\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y}{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y}$	$R_{\text{ХВ}} \frac{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y}{\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y}$	
Модуль коефіцієнта відбиття, $\rho(y)$	$1 - 2\alpha y$		
Активна потужність, $P_A(y)$	$R_{\text{ХВ}} I_{m2}^2 \alpha y$		

5.7.4. Ідеальна лінія, навантажена на реактивний опір

Якщо ідеальну лінію навантажено на реактивний опір $\underline{Z}_H = jX_2$, загальний вираз для комплексного коефіцієнта відбиття (табл. 5.8) набуває вигляду:

$$\underline{\rho}(y) = \frac{jX_2 - R_{\text{ХВ}}}{jX_2 + R_{\text{ХВ}}} e^{-j2\beta y} = e^{-j2[\beta y + \arctg(X_2/R_{\text{ХВ}})]}. \quad (5.90)$$

Модуль і аргумент комплексного коефіцієнта відбиття (5.90) в кінці лінії ($y=0$) відповідно становитимуть:

$$\rho(0) = 1; \varphi_\rho(0) = -2\arctg \frac{X_2}{R_{\text{ХВ}}} \neq 0.$$

Рівність одиниці модуля комплексного коефіцієнта відбиття свідчить (як і при розімкненій та короткозамкненій лінії), що

енергія повністю відбивається від навантаження, а відмінність аргументу від нуля обумовлена тим, що в кінці лінії $\underline{U}_{m2} \neq 0$; $\underline{I}_{m2} \neq 0$.

Отже, при реактивному навантаженні спостерігається режим стійних хвиль ($\rho(0) = 1$), однак у кінці лінії немає ані вузла, ані пучності напруги чи струму. Розподіл амплітуд, початкових фаз і реактивних опорів уздовж лінії можна отримати відповідним зсувом графіків (рис. 5.20 і 5.22) по осі y . Такий підхід можна застосувати також для кількісного аналізу, якщо замінити реактивність відрізком розімкненої або замкненої лінії з вхідним комплексним опором, який дорівнює комплексному опору реактивного навантаження.

Навантаження лінії на ємність. Режим лінії, яку навантажено на ємність C_2 з комплексним опором $1/\omega C_2$ і граничними умовами \underline{U}_{m2} і \underline{I}_{m2} , не зміниться, якщо ємність замінити відрізком розімкненої лінії з таким самим вхідним комплексним опором (рис. 5.24, а). Довжину $l_{\text{Х.Х}}$ цього відрізка можна визначити з рівняння:

$$\underline{Z}(l_{\text{Х.Х}}) = -jR_{\text{ХВ}} \operatorname{ctg} \beta l_{\text{Х.Х}} = \frac{1}{j\omega C_2}, \text{ звідки } l_{\text{Х.Х}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arccotg} \frac{1}{\omega C_2 R_{\text{ХВ}}}.$$

Співвідношення для аналізу даної лінії при цьому можна знайти, замінивши y в виразах (5.77)–(5.83) для розімкненої лінії змінну y на $y + l_{\text{Х.Х}}$. Тоді вираз (5.77) для розподілу амплітуд напруги набуде вигляду:

$$U_m(y) = U_{m\text{Х.Х}} |\cos [\beta(y + l_{\text{Х.Х}})]|, \quad (5.91)$$

де $U_{m\text{Х.Х}}$ — амплітуда напруги на затискачах розімкненої лінії, увімкненої замість ємності (рис. 5.24, а).

Значення $U_{m\text{Х.Х}}$ можна виразити через U_{m2} після підстановки до формули (5.91) $y=0$:

$$U_m(0) = U_{m2} = U_{m\text{Х.Х}} \cos \beta l_{\text{Х.Х}},$$

звідки

$$U_{m\text{Х.Х}} = \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{\text{Х.Х}}}. \quad (5.92)$$

Із урахуванням виразу (5.92) рівняння (5.91) матиме вигляд

$$U_m(y) = \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{\text{Х.Х}}} |\cos [\beta(y + l_{\text{Х.Х}})]|, \quad (5.93)$$

зручний для аналізу та побудови графіка (рис. 5.24, б).

Отримані аналогічно інші співвідношення для навантаженої на ємність лінії зведені до табл. 5.14.

Співвідношення для ідеальної лінії,
яку навантажено на ємність

Параметри	Співвідношення
Довжина розімкненої лінії, яка еквівалентна ємності C_2	$l_{x,x} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C_2 R_{xв}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{X_{C2}}{R_{xв}}$
Амплітуди	$U_m(y) = \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{x,x}} \cos [\beta(y + l_{x,x})] ;$ $I_m(y) = \frac{U_{m2}}{R_{xв} \cos \beta l_{x,x}} \sin [\beta(y + l_{x,x})] $
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos [\beta(y + l_{x,x})] > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos [\beta(y + l_{x,x})] < 0; \end{cases}$ $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \frac{\pi}{2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sin [\beta(y + l_{x,x})] > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \sin [\beta(y + l_{x,x})] < 0 \end{cases}$
Комплексний опір	$Z(y) = -jR_{xв} \operatorname{ctg} [\beta(y + l_{x,x})]$
Реактивний опір	$X(y) = -R_{xв} \operatorname{ctg} [\beta(y + l_{x,x})]$
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\rho(y) = e^{-j2\beta(y + l_{x,x})}$
Реактивна потужність	$P_Q(y) = -0,5 \frac{U_2^2}{R_{xв} \cos \beta l_{x,x}} \sin [2\beta(y + l_{x,x})]$

Співвідношення (табл. 5.14) і графіки (рис. 5.24) показують, що розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $X(y)$ вздовж лінії при навантаженні на ємність відрізняються від холостого ходу в цій самій лінії зсувом на величину $l_{x,x}$. У результаті найближчі до навантаження вузол напруги і пучність струму лежатимуть у перерізі $\lambda/4 - l_{x,x}$, а вузол струму і пучність напруги — у перерізі $\lambda/2 - l_{x,x}$.

Навантаження лінії на індуктивність. Для того щоб проаналізувати цей режим, індуктивність L_2 замінюють еквівалентним відрізком короткозамкненої лінії довжиною $l_{к.з}$ (рис. 5.25, а):

$$Z(l_{к.з}) = jR_{xв} \operatorname{tg} \beta l_{к.з} = j\omega L_2; \quad l_{к.з} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2}{R_{xв}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{X_{L2}}{R_{xв}}.$$

Отже, щоб здобути співвідношення для ідеальної лінії, яку навантажено на індуктивність, слід замінити змінну y на $(y + l_{к.з})$ у формулах для короткозамкненої лінії (табл. 5.12) і виразити

Слід зазначити, що рівняння (5.93) і формули з табл. 5.14 справедливі тільки для $l > y > -l_{x,x}$. При цьому безпосередньо лінії відповідає $l > y > 0$, а увімкненому відрітку розімкненої лінії $0 > y > -l_{x,x}$.

На рис. 5.24, б, в, г графіки зображено товстими лініями в межах від входу лінії до навантаження і тонкими лініями — для розімкненої лінії, яку увімкнено замість ємності C_2 .

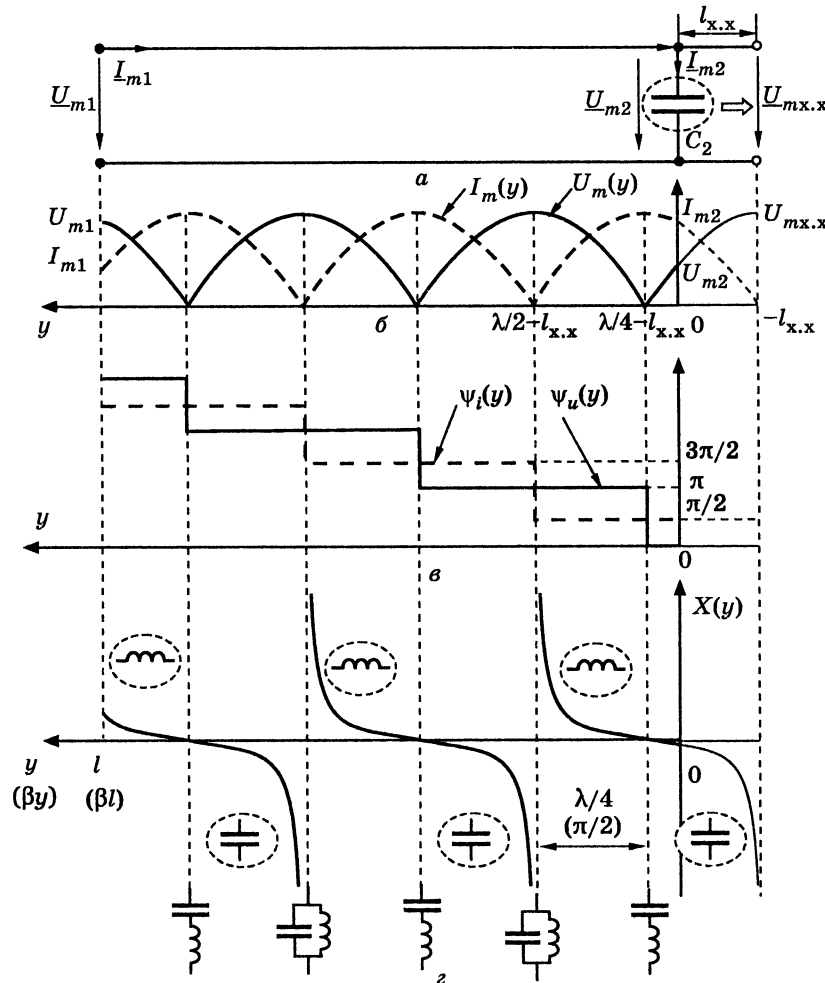


Рис. 5.24. Режим стійких хвиль в ідеальній лінії, яку навантажено на ємність: а — схема лінії; розподіли: б — амплітуд напруги і струму; в — початкових фаз напруги ($\psi_{u2} = 0$) і струму; г — реактивного опору

струм $I_{mk.3}$ на її виході через струм I_{m2} в індуктивності L_2 . Зв'язок між $I_{mk.3}$ та I_{m2} впливає із співвідношень:

$$I_m(y) = I_{mk.3} |\cos [\beta(y + l_{к.з})]|; I_m(0) = I_{m2} = I_{mk.3} \cos \beta l_{к.з}; I_{mk.3} = \frac{I_{m2}}{\cos \beta l_{к.з}}$$

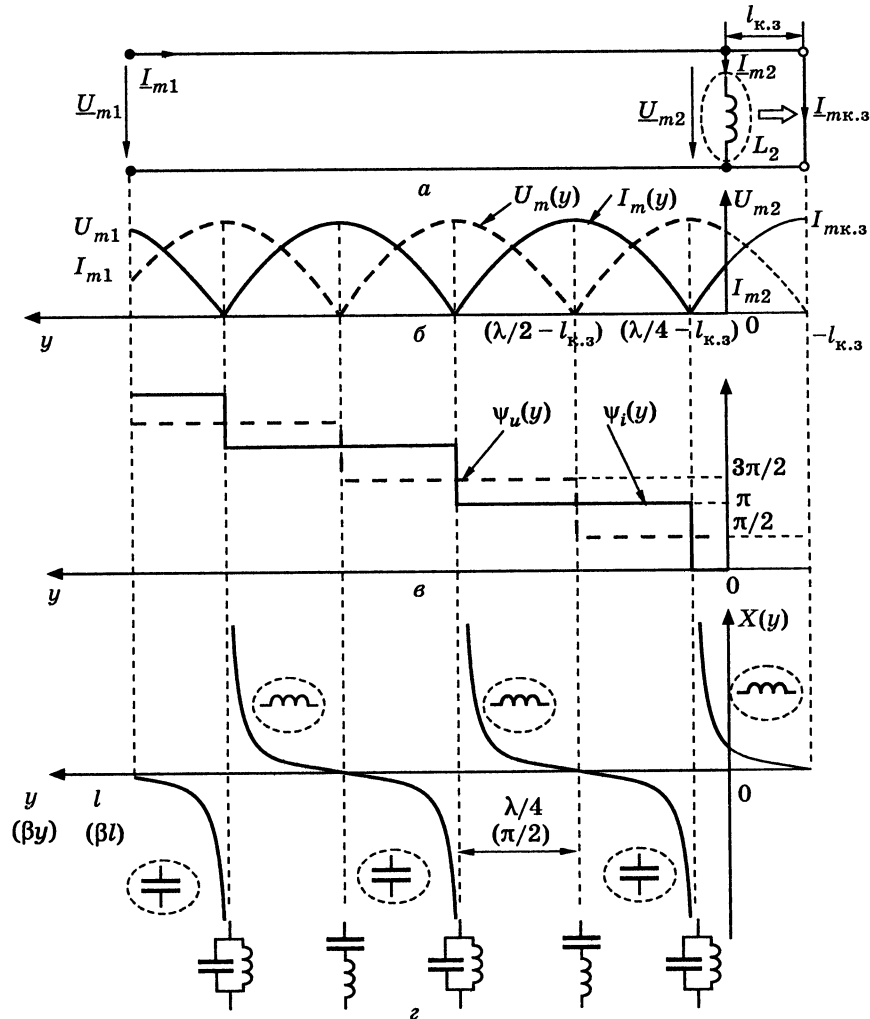


Рис. 5.25. Режим стійних хвиль в ідеальній лінії, яку навантажено на індуктивність: а — схема лінії; розподіли: б — амплітуд напруги та струму; в — початкових фаз напруги та струму ($\psi_{i2} = 0$); г — реактивного опору

Підсумкові формули для даного випадку (табл. 5.15), а також відповідні графіки (рис. 5.25, б, в, г) дозволяють зробити висновок, що при навантаженні на індуктивність розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $X(y)$ відрізняються від відповідних розподілів для короткозамкненої лінії зсувом на $l_{к.з}$. Найближчі до навантаження вузол струму і пучність напруги при цьому лежатимуть у перерізі $\lambda/4 - l_{к.з}$, а вузол напруги і пучність струму — у перерізі $\lambda/2 - l_{к.з}$.

Таблиця 5.15

Співвідношення для ідеальної лінії, яку навантажено на індуктивність

Параметри	Співвідношення
Довжина замкненої лінії, яка еквівалентна індуктивності L_2	$l_{к.з} = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\omega L_2}{R_{хв}} = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{X_{L2}}{R_{хв}}$
Амплітуди	$U_m(y) = \frac{I_{m2} R_{хв}}{\cos \beta l_{к.з}} \sin [\beta(y + l_{к.з})] ;$ $I_m(y) = \frac{I_{m2}}{\cos \beta l_{к.з}} \cos [\beta(y + l_{к.з})] $
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{i2} + \frac{\pi}{2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sin [\beta(y + l_{к.з})] > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \sin [\beta(y + l_{к.з})] < 0; \end{cases}$ $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos [\beta(y + l_{к.з})] > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos [\beta(y + l_{к.з})] < 0 \end{cases}$
Комплексний опір	$Z(y) = j R_{хв} \operatorname{tg} [\beta(y + l_{к.з})]$
Реактивний опір	$X(y) = R_{хв} \operatorname{tg} [\beta(y + l_{к.з})]$
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\underline{\rho}(y) = -e^{-j2\beta(y + l_{к.з})}; \varphi_\rho(y) = \pi - \beta(y + l_{к.з})$
Реактивна потужність	$P_Q(y) = 0,5 \frac{R_{хв} I_2^2}{\cos \beta l_{к.з}} \sin [2\beta(y + l_{к.з})]$

Приклад 5.16. Розрахувати і побудувати графіки розподілів амплітуд і початкових фаз напруги і струму, а також реактивного опору в ідеальній симетричній повітряній двопровідній лінії з параметрами, наведеними у прикладі 5.1. Довжина лінії $l = \lambda/4$, комплексна амплітуда напруги в кінці лінії $U_{m2} = 10$ В, частота джерела $f = 100$ МГц. Розглянути два випадки (рис. 5.26, а): 1) холостого ходу; 2) навантаження лінії на ємність з опором $X_{C2} = R_{хв}$.

Розв'язання. Вторинні параметри лінії для частоти $f = 100$ МГц становлять: коефіцієнт фази $\beta = 2,106$ рад/м; хвильовий опір $R_{\text{хв}} \approx 265$ Ом.

1. **Холостий хід.** Підставивши у формули (5.77) і (5.78) параметри лінії та значення амплітуди $U_{m2} = 10$ В, запишемо рівняння розподілів амплітуд напруги і струму:

$$U_m(y) = U_{m2} |\cos \beta y| = 10 |\cos 2,106y| \text{ В;}$$

$$I_m(y) = \frac{U_{m2}}{R_{\text{хв}}} |\sin \beta y| = \frac{10}{265} |\sin 2,106y| = 0,038 |\sin 2,106y| \text{ мА.}$$

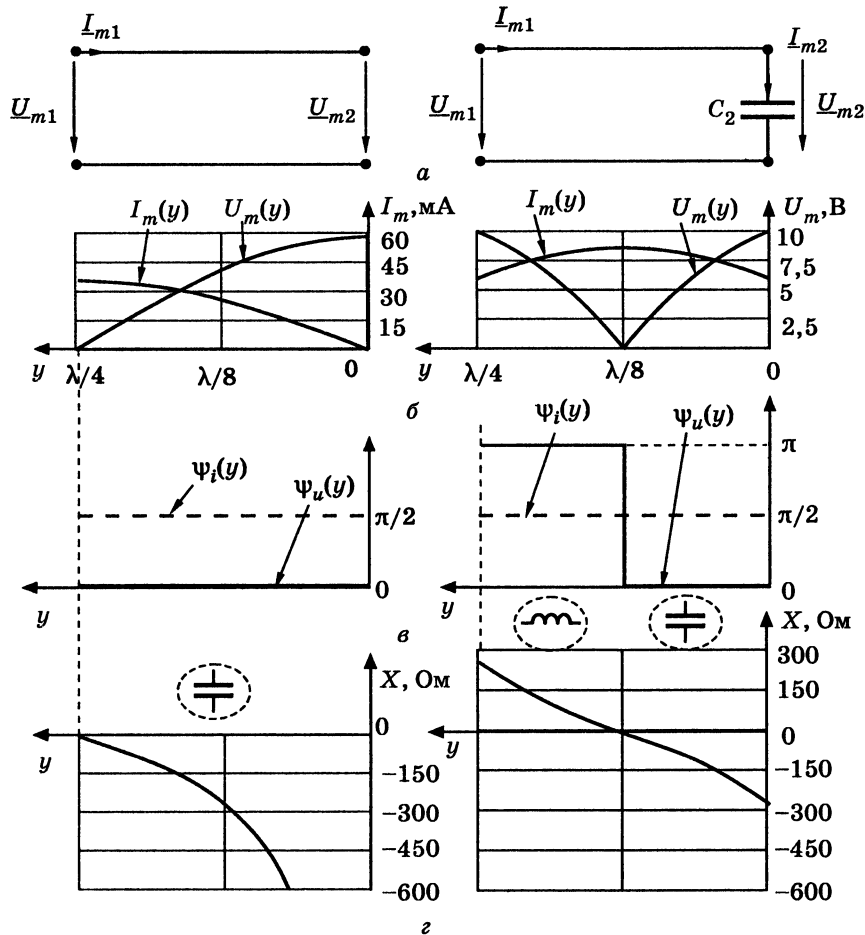


Рис. 5.26. До прикладу 5.16: *a* — схеми; розподіли: *б* — амплітуд напруги та струму; *в* — початкових фаз напруги та струму; *г* — реактивного опору

Оскільки в межах лінії $\lambda/4 > l > 0$

$$\pi/2 > \beta y > 0; \cos \beta y > 0; \sin \beta y > 0,$$

вирази (5.79) і (5.80) для початкових фаз напруги і струму з урахуванням заданого значення початкової фази $\psi_{u2} = 0$ матимуть вигляд:

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} = 0; \psi_i(y) = \psi_{u2} + \pi/2 = \pi/2.$$

Використовуючи вираз (5.81), запишемо співвідношення для реактивного опору:

$$X(y) = -R_{\text{хв}} \operatorname{ctg} \beta y = -265 \operatorname{ctg} 2,106y \text{ Ом.}$$

На підставі виразів для $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $X(y)$ побудуємо графіки (ліворуч на рис. 5.26, *б*, *в*, *г*).

2. **Навантаження на ємність.** Відповідно до співвідношень для ідеальної лінії (табл. 5.14) визначимо:

а) довжину розімкненої лінії, що еквівалентна ємності C_2 :

$$l_{\text{х.х}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \frac{X_{C2}}{R_{\text{хв}}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \frac{265}{265} = \frac{\pi}{4\beta} \text{ м;}$$

б) закони розподілів амплітуд напруги і струму:

$$U_m(y) = \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{\text{х.х}}} |\cos [\beta(y + l_{\text{х.х}})]| = \frac{10}{\cos \pi/4} \left| \cos \left[\beta \left(y + \frac{\pi}{4\beta} \right) \right] \right| = 14,1 |\cos (2,106y + \pi/4)| \text{ В;}$$

$$I_m(y) = \frac{U_{m2}}{R_{\text{хв}} \cos \beta l_{\text{х.х}}} |\sin [\beta(y + l_{\text{х.х}})]| = \frac{10}{265 \cos \pi/4} \left| \sin \left[\beta \left(y + \frac{\pi}{4\beta} \right) \right] \right| = 0,053 |\sin (2,106y + \pi/4)| \text{ А} = 53 |\sin (2,106y + \pi/4)| \text{ мА;}$$

в) вираз для реактивного опору:

$$X(y) = -R_{\text{хв}} \operatorname{ctg} [\beta(y + l_{\text{х.х}})] = -265 \operatorname{ctg} (2,106y + \pi/4) \text{ Ом.}$$

Побудуємо відповідні графіки (праворуч на рис. 5.26, *б*, *в*, *г*).

Приклад 5.17. Ідеальна симетрична повітряна двопровідна лінія з параметрами, наведеними у прикладі 5.16, довжиною $l = 3\lambda/8$ працює в режимах (рис. 5.27, *а*): 1) короткого замикання вихідних затискачів; 2) навантаження на індуктивність з опором $X_{L2} = R_{\text{хв}}$. Миттєве значення струму в кінці лінії $i_2(t) = 0,1 \cos (2\pi \cdot 10^8 t - \pi/4)$ А. Розрахувати і побудувати графіки розподілів амплітуд і початкових фаз напруги і струму, а також реактивного опору. Визначити миттєві значення напруги і струму на вході лінії.

Розв'язання. Оскільки задана кутова частота джерела $\omega = 2\pi \cdot 10^8$ рад/с відповідає частоті $f = 100$ МГц з прикладу 5.16, скористаємося розрахованими вище вторинними параметрами лінії ($\beta = 2,106$ рад/м; $R_{\text{хв}} \approx 265$ Ом). Запишемо також комплексну амплітуду струму в кінці лінії $I_{m2} = 0,1 e^{-j\pi/4}$ А.

Співвідношення для побудови графіків (до прикладу 5.17)

Параметри	Співвідношення	
	Коротке замикання	Навантаження на індуктивність
Амплітуди	$U_m(y) = 26,5 \sin(2,106y) $ В $I_m(y) = 100 \cos(2,106y) $ мА	$U_m(y) = 37,48 \sin(2,106y + \pi/4) $ В $I_m(y) = 141 \cos(2,106y + \pi/4) $ мА
Початкові фази	$\psi_i(y) = \begin{cases} -\pi/4 & \text{для } \lambda/4 > y > 0; \\ 3\pi/4 & \text{для } l > y > \lambda/4; \end{cases}$ $\psi_u(y) = \pi/4$	$\psi_i(y) = \begin{cases} -\pi/4 & \text{для } \lambda/4 > y > 0; \\ 3\pi/4 & \text{для } l > y > \lambda/4; \end{cases}$ $\psi_u(y) = \pi/4$
Реактивний опір	$X(y) = 265 \operatorname{tg}(2,106y)$ Ом	$X(y) = 265 \operatorname{tg}(2,106y + \pi/4)$ Ом

Визначимо миттєві значення напруг і струмів на вході лінії:

1) при короткому замиканні

$$u_1(t) = 18,74 \cos(2\pi \cdot 10^8 t + \pi/4) \text{ В}; \quad i_1(t) = 70,7 \cos(2\pi \cdot 10^8 t + 3\pi/4) \text{ мА};$$

2) при індуктивному навантаженні

$$u_1(t) = 0; \quad i_1(t) = 141 \cos(2\pi \cdot 10^8 t + 3\pi/4) \text{ мА}.$$

Приклад 5.18. Розрахувати режим стійних хвиль на частоті $f = 1000$ МГц у розімкненому коаксимальному кабелі (рис. 5.28, а), параметри якого наведені у прикладі 5.10. Довжина лінії $l = 75\lambda$, комплексна амплітуда вхідної напруги $\underline{U}_{m1} = 15e^{j\pi/4}$ В. Побудувати графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$ на ділянках довжиною λ від кінця і від початку лінії. Обчислення виконати, враховуючи втрати, за точними і приблизними формулами (табл. 5.13).

Розв'язання. Скористаємося знайденими у прикладі 5.10 значеннями вторинних параметрів кабелю (див. табл. 5.7): $\alpha = 0,018$ Нп/м; $\beta = 31,59$ рад/м; $\lambda = 0,199$ м; $\underline{Z}_{\text{хв}} = 92,61 - j0,035 \approx 92,61$ Ом.

Знаючи комплексну амплітуду вхідної напруги, визначимо комплексну амплітуду вхідного струму \underline{I}_{m1} . Для цього, застосовуючи вираз (5.57), спочатку розрахуємо комплексний вхідний опір лінії:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}(l) = \lim_{\underline{Z}_{\text{хв}} \rightarrow \infty} \underline{Z}_{\text{хв}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_{\text{хв}} \operatorname{sh} \gamma l}{\underline{Z}_{\text{хв}} \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_{\text{н}} \operatorname{sh} \gamma l} = \underline{Z}_{\text{хв}} \operatorname{cth} \gamma l = \underline{Z}_{\text{хв}} \operatorname{cth}[(\alpha + j\beta)l] \approx$$

$$\approx 92,61 \operatorname{cth}[(0,018 + j31,59) \cdot 75 \cdot 0,199] = 92,61 \operatorname{cth}(0,269 + j471,48) \approx 353,42 \text{ Ом},$$

а потім:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} \approx \frac{15e^{j\pi/4}}{353,42} = 0,042e^{j\pi/4} \text{ А} = 42e^{j\pi/4} \text{ мА}.$$

Для режиму короткого замикання застосуємо формули з табл. 5.12. При навантаженні на індуктивність, перед використанням співвідношень із табл. 5.15, обчислимо довжину замкненої лінії, еквівалентної індуктивності L_2 :

$$l_{\text{к.з}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{X_{L2}}{R_{\text{хв}}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{265}{265} = \frac{\pi}{4\beta} \text{ м}.$$

Отримані результати зведено до табл. 5.16, а графіки побудовано на рис. 5.27, б, в, г.

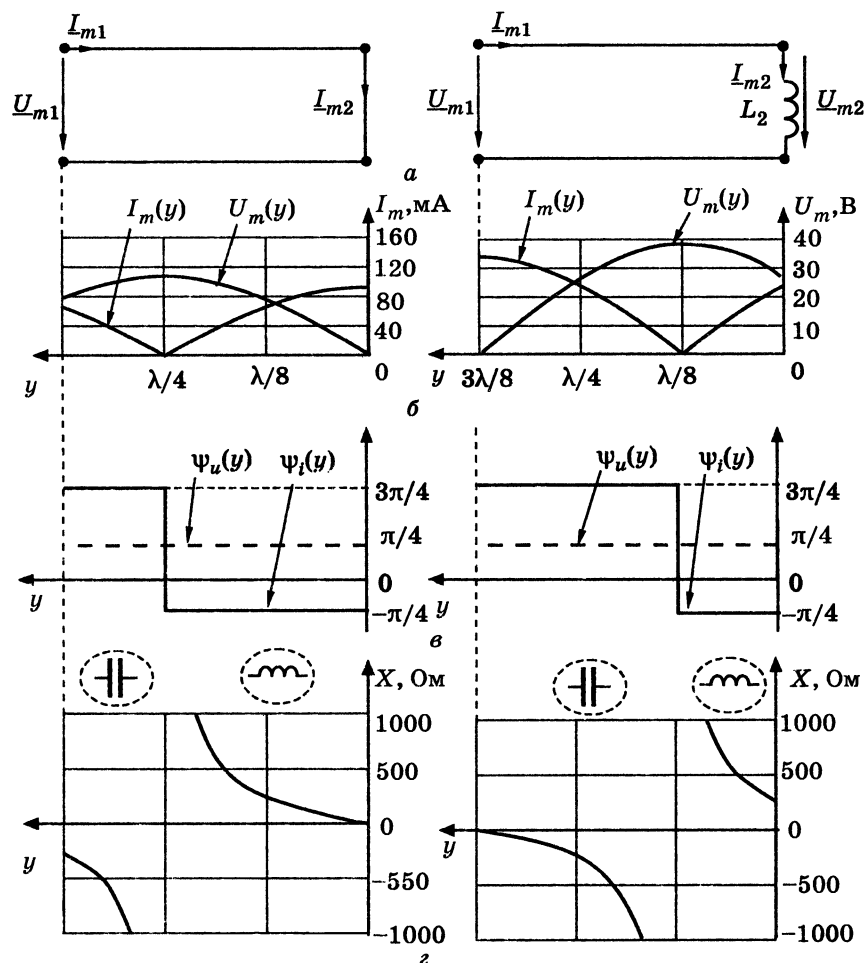


Рис. 5.27. До прикладу 5.17: а — схеми; розподіли: б — амплітуд напруги та струму; в — початкових фаз напруги та струму; г — реактивного опору

Використовуючи вирази (5.52) і (5.54), а також знайдене значення I_{m1} , визначимо комплексну амплітуду вихідної напруги:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{m2} &= \underline{U}_m(l) = \underline{U}_{m1} \operatorname{ch} \gamma l - \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m1} \operatorname{sh} \gamma l \approx \\ &\approx 15e^{j\pi/4} \operatorname{ch}(0,269 + j471,48) - 92,61 \cdot 0,042e^{j\pi/4} \operatorname{sh}(0,269 + j471,48) = \\ &= 14,475e^{j(\pi/4 - 2\pi \cdot 75)} = 14,475e^{-j470,45} \text{ В} \end{aligned}$$

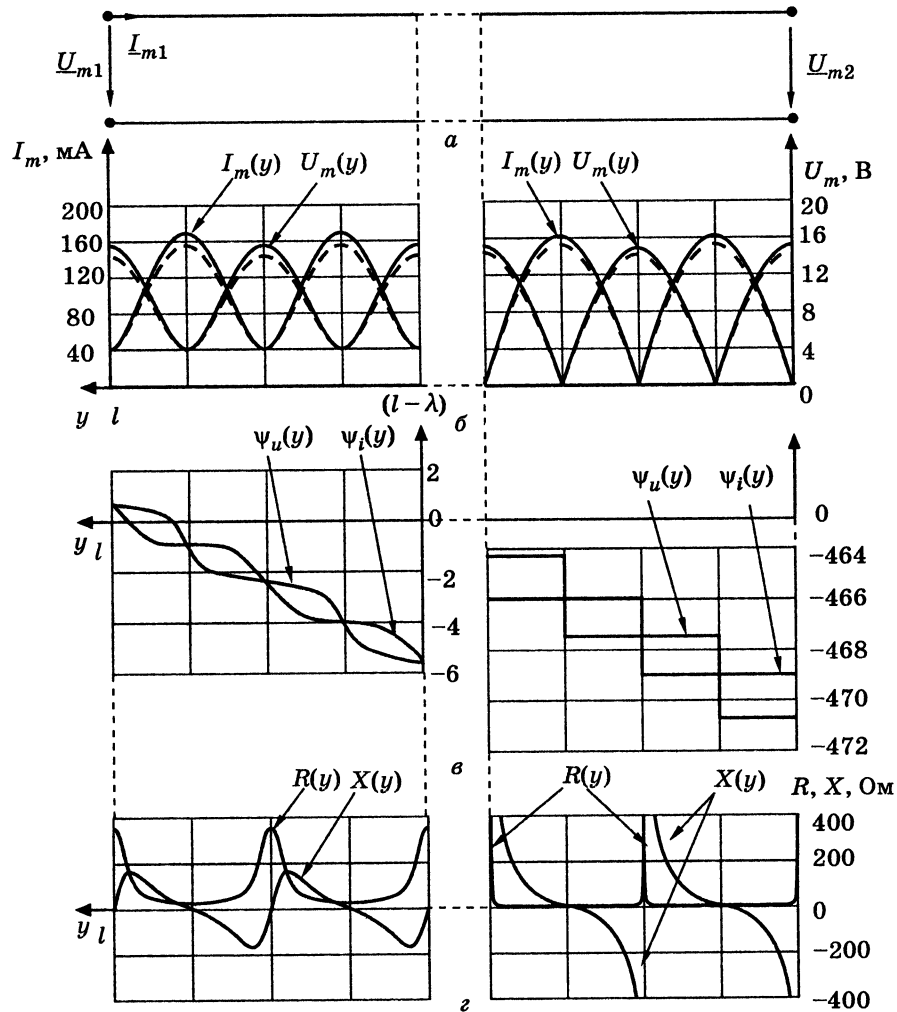


Рис. 5.28. До прикладу 5.18: а — схема лінії; б — $U_m(y)$, $I_m(y)$; в — $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$; г — $R(y)$, $X(y)$

і перевіримо нульове значення струму на виході лінії:

$$\begin{aligned} I_{m2} &= I_m(l) = I_{m1} \operatorname{ch} \gamma l - \frac{U_{m1}}{Z_{\text{хв}}} \operatorname{sh} \gamma l \approx \\ &\approx 0,042e^{j\pi/4} \operatorname{ch}(0,269 + j471,48) - \frac{15e^{j\pi/4}}{92,61} \operatorname{sh}(0,269 + j471,48) = 0. \end{aligned}$$

Записуючи початкову фазу вихідної напруги, врахуємо фазовий зсув $-2\pi \cdot 75$, обумовлений довжиною лінії. Цей фазовий зсув віднімається від головного значення $\pi/4$ аргументу \underline{U}_{m2} .

Для того щоб побудувати точні графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$, застосуємо відповідні рівняння та програму Mathcad:

$$U_m(y) = |U_m(y)| = |U_{m2} \operatorname{ch} \gamma y| = |14,47e^{-j470,45} \operatorname{ch}[(0,018 + j31,59)y]| \text{ В};$$

$$I_m(y) = |I_m(y)| = \left| \frac{U_{m2} \operatorname{sh} \gamma y}{Z_{\text{хв}}} \right| = |156e^{-j470,45} \operatorname{sh}[(0,018 + j31,59)y]| \text{ мА};$$

$$R(y) = \operatorname{Re}[Z(y)] = \operatorname{Re}[Z_{\text{хв}} \operatorname{cth} \gamma y] = \operatorname{Re}\{92,61 \operatorname{cth}[(0,018 + j31,59)y]\} \text{ Ом};$$

$$X(y) = \operatorname{Im}[Z(y)] = \operatorname{Im}[Z_{\text{хв}} \operatorname{cth} \gamma y] = \operatorname{Im}\{92,61 \operatorname{cth}[(0,018 + j31,59)y]\} \text{ Ом}.$$

За тією самою методикою виконаємо приблизні розрахунки, використовуючи вирази (5.86), (5.89) і формули з табл. 5.13:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}(l) = \underline{Z}_{\text{хв}} \frac{\cos \beta l + j \sin \beta l}{\alpha \cos \beta l + j \sin \beta l} \approx$$

$$\approx \operatorname{Im} \left[92,61 \cdot \frac{\cos 471,48 + j0,269 \cdot \sin 471,48}{0,269 \cdot \cos 471,48 + j \sin 471,48} \right] \approx 345,16 \text{ Ом};$$

$$I_{m1} = \frac{U_{m1}}{Z_{\text{вх}}} \approx \frac{15e^{j\pi/4}}{345,16} = 0,043e^{j\pi/4} \text{ А} = 43e^{j\pi/4} \text{ мА};$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{m2} &\approx \underline{U}_{m1} [\cos \beta l + j \alpha \cos \beta l] - \underline{Z}_{\text{хв}} I_{m1} [\alpha \cos \beta l + j \cos \beta l] = \\ &= 15e^{j\pi/4} (\cos 471,48 + j0,269 \cdot \cos 471,48) - \\ &- 24,88e^{j\pi/4} (0,269 \cdot \cos 471,48 + j \cos 471,48) \approx 13,919e^{j(\pi/4 - 2\pi \cdot 75)} = \\ &= 13,919e^{-j470,45} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_m(y) &\approx U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (\alpha \sin \beta y)^2} = \\ &= 13,919 \sqrt{\cos^2 (31,59y) + [0,018y \sin (31,59y)]^2} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_m(y) &\approx \frac{U_{m2}}{Z_{\text{хв}}} \sqrt{(\alpha \cos \beta y)^2 + \sin^2 \beta y} = \\ &= 150 \sqrt{[0,018y \cos (31,59y)]^2 + \sin^2 (31,59y)} \text{ мА}; \end{aligned}$$

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \arctg(\alpha y \operatorname{tg} \beta y) = -470,45 + \arctg[0,018y \operatorname{tg}(31,59y)];$$

$$\psi_i(y) = \psi_{u2} - \varphi_{Z_{XB}} + \arctg \frac{\operatorname{tg} \beta y}{\alpha y} \approx -470,45 + \arctg \frac{\operatorname{tg}(31,59y)}{0,018y};$$

$$R(y) = \operatorname{Re} \left[Z_{XB} \frac{\cos \beta y + j \alpha y \sin \beta y}{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y} \right] \approx \\ \approx \operatorname{Re} \left[92,61 \cdot \frac{\cos(31,59y) + j 0,018y \sin(31,59y)}{0,018y \cos(31,59y) + j \sin(31,59y)} \right] \text{ Ом};$$

$$X(y) \approx \operatorname{Im} \left[Z_{XB} \frac{\cos \beta y + j \alpha y \sin \beta y}{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y} \right] \approx \\ \approx \operatorname{Im} \left[92,61 \cdot \frac{\cos(31,59y) + j 0,018y \sin(31,59y)}{0,018y \cos(31,59y) + j \sin(31,59y)} \right] \text{ Ом}.$$

Графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, побудовані за точними і приблизними формулами, показані на рис. 5.28, б відповідно суцільними і пунктирними лініями. Достатній збіг точних і приблизних графіків $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$ дозволяє зобразити їх на рис. 5.28, в, г однією кривою.

Будуючи графіки $\psi_u(y)$ та $\psi_i(y)$, розраховані значення коригують на ціле число 2π при зміні змінної y на ціле число довжин хвиль.

Розрахунки показали, що похибки приблизних обчислень становлять не більше 5 %, причому для опорів і початкових фаз вони найменші, а для амплітуд — найбільші.

5.8. Режим змішаних хвиль

У цьому режимі спостерігається часткове відбиття енергії від навантаження і тому модуль комплексного коефіцієнта відбиття (5.58) у кінці лінії набуває значення в межах:

$$0 < \rho(0) < 1. \quad (5.94)$$

Режим змішаних хвиль є проміжним між режимами біжних ($\rho(0) = 0$) і стійних ($\rho(0) = 1$) хвиль.

В ідеальній лінії ($Z_{XB} = R_{XB}$) умові (5.94) відповідає нерівність

$$0 < \left| \frac{Z_H - R_{XB}}{Z_H + R_{XB}} \right| < 1, \quad (5.95)$$

яка виконується у двох випадках:

а) опір навантаження є активним, але не дорівнює хвильовому:

$$R_H \neq R_{XB}; X_H = 0;$$

б) опір навантаження — комплексний ($Z_H = R_H + jX_H$), крім того $R_H \neq 0; X_H \neq 0$.

При цьому нерівність (5.95) підтверджується аналізом співвідношень, які отримують після підстановки у формули (5.58) відповідних виразів для Z_H :

$$\text{а) } \rho(0) = \left| \frac{R_H - R_{XB}}{R_H + R_{XB}} \right|;$$

$$\text{б) } \rho(0) = \left| \frac{R_H + jX_H - R_{XB}}{R_H + jX_H + R_{XB}} \right| = \frac{\sqrt{(R_H - R_{XB})^2 + X_H^2}}{\sqrt{(R_H + R_{XB})^2 + X_H^2}}.$$

На відміну від режиму стійних хвиль, коли амплітуди падаючих і відбитих хвиль однакові, в режимі змішаних хвиль амплітуди відбитих хвиль менше амплітуд падаючих. Тому в цьому режимі спостерігаються не вузли і пучності (характерні для режиму стійних хвиль), а мінімуми і максимуми амплітуд напруги та струму:

$$U_{m \max} = U_{m \text{пад}} + U_{m \text{від}} = U_{m \text{пад}} [1 + \rho(0)];$$

$$U_{m \min} = U_{m \text{пад}} - U_{m \text{від}} = U_{m \text{пад}} [1 - \rho(0)];$$

$$I_{m \max} = I_{m \text{пад}} + I_{m \text{від}} = I_{m \text{пад}} [1 + \rho(0)];$$

$$I_{m \min} = I_{m \text{пад}} - I_{m \text{від}} = I_{m \text{пад}} [1 - \rho(0)].$$

Для кількісної оцінки режиму змішаних хвиль вводять коефіцієнти біжної та стійної хвиль.

Коефіцієнт біжної хвилі (КБХ) — це відношення мінімальних значень амплітуд напруги або струму до їхніх максимальних значень:

$$k_{\text{бх}} = \frac{U_{m \min}}{U_{m \max}} = \frac{I_{m \min}}{I_{m \max}} = \frac{1 - \rho(0)}{1 + \rho(0)}. \quad (5.96)$$

Величина, обернена КБХ, тобто відношення максимальних значень амплітуд напруги або струму до їхніх мінімальних значень, називають коефіцієнтом стійної хвилі (КСХ):

$$k_{\text{сх}} = \frac{U_{m \max}}{U_{m \min}} = \frac{I_{m \max}}{I_{m \min}} = \frac{1 + \rho(0)}{1 - \rho(0)}. \quad (5.97)$$

Ці коефіцієнти застосовують також для режимів біжних і стійних хвиль. Із формул (5.96) і (5.97) випливає, що в режимі біжних хвиль $k_{\text{бх}} = k_{\text{сх}} = 1$ ($\rho(0) = 0$; $U_{m \max} = U_{m \min}$; $I_{m \max} = I_{m \min}$), а в режимі стійних хвиль $k_{\text{бх}} = 0$; $k_{\text{сх}} \rightarrow \infty$ ($\rho(0) = 1$; $U_{m \min} = 0$; $I_{m \min} = 0$).

У режимі змішаних хвиль КБХ і КСХ змінюються в межах: $0 < k_{\text{бх}} < 1$; $k_{\text{сх}} > 1$.

5.8.1. Режим змішаних хвиль при активному навантаженні в ідеальній лінії

Якщо лінія навантажена на активний опір $R_{\text{н}} \neq R_{\text{хв}}$ (рис. 5.29, а), то $\underline{U}_{m2} = R_{\text{н}} \underline{I}_{m2}$ і рівняння для ідеальної лінії (див. табл. 5.8) набудуть вигляду:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \cos \beta y + j \underline{I}_{m2} R_{\text{хв}} \sin \beta y = \underline{U}_{m2} \left[\cos \beta y + j \frac{R_{\text{хв}}}{R_{\text{н}}} \sin \beta y \right]; \quad (5.98)$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \cos \beta y + j \frac{\underline{U}_{m2}}{R_{\text{хв}}} \sin \beta y = \underline{I}_{m2} \left[\cos \beta y + j \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{хв}}} \sin \beta y \right]. \quad (5.99)$$

Вирази (5.98) і (5.99) можна записати, використовуючи безрозмірний нормований опір навантаження $R'_{\text{н}} = R_{\text{н}}/R_{\text{хв}} \neq 1$:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \left[\cos \beta y + j \frac{1}{R'_{\text{н}}} \sin \beta y \right]; \quad (5.100)$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \left[\cos \beta y + j R'_{\text{н}} \sin \beta y \right]. \quad (5.101)$$

Рівняння (5.100) і (5.101) дозволяють отримати такі вирази для обчислення:

- амплітуд напруги і струму в лінії

$$U_m(y) = U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + \left(\frac{1}{R'_{\text{н}}} \right)^2 \sin^2 \beta y}; \quad (5.102)$$

$$I_m(y) = I_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (R'_{\text{н}})^2 \sin^2 \beta y}; \quad (5.103)$$

- початкових фаз напруги та струму в лінії

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \arctg \frac{\text{tg } \beta y}{R'_{\text{н}}}; \quad (5.104)$$

$$\psi_i(y) = \psi_{i2} + \arctg (R'_{\text{н}} \text{tg } \beta y); \quad (5.105)$$

- комплексного опору лінії та його нормованих значень

$$\underline{Z}(y) = \frac{\underline{U}_m(y)}{\underline{I}_m(y)} = R_{\text{н}} \frac{\cos \beta y + j(1/R'_{\text{н}}) \sin \beta y}{\cos \beta y + j R'_{\text{н}} \sin \beta y} = R_{\text{хв}} \frac{R'_{\text{н}} + j \text{tg } \beta y}{1 + j R'_{\text{н}} \text{tg } \beta y}; \quad (5.106)$$

$$\underline{Z}'(y) = R'(y) + j X'(y) = Z'(y) e^{j\varphi(y)} = \frac{R'_{\text{н}} + j \text{tg } \beta y}{1 + j R'_{\text{н}} \text{tg } \beta y}, \quad (5.107)$$

де $\underline{Z}'(y) = \underline{Z}(y)/R_{\text{хв}}$; $R'(y) = R(y)/R_{\text{хв}}$; $X'(y) = X(y)/R_{\text{хв}}$; $Z'(y) = \underline{Z}(y)/R_{\text{хв}}$ — відповідно нормовані комплексний, активний, реактивний і повний опір; $\varphi(y) = \psi_u(y) - \psi_i(y)$ — аргумент комплексного опору.

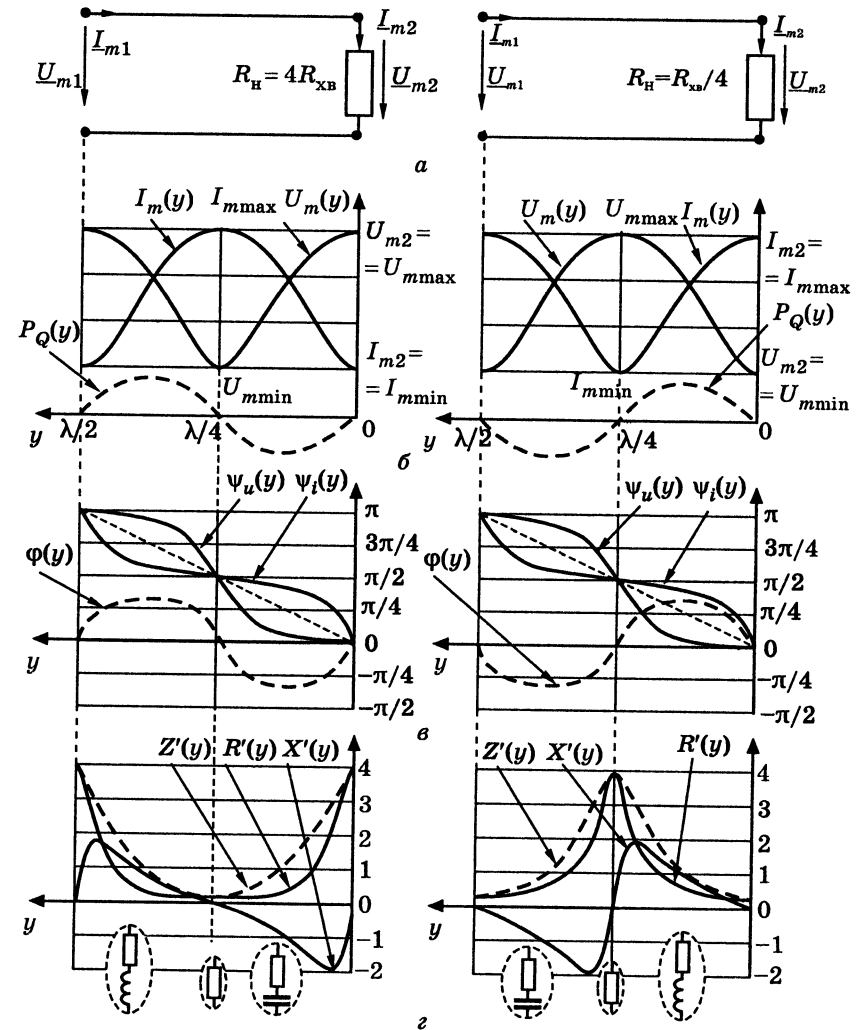


Рис. 5.29. Режим змішаних хвиль при навантаженні ідеальної лінії на активний опір $R_{\text{н}} \neq R_{\text{хв}}$: а — схеми; розподіли: б — амплітуд напруги та струму, реактивної потужності; в — початкових фаз напруги та струму ($\psi_{u2} = \psi_{i2} = 0$) і зсуву фаз між ними; г — нормованих опорів

Комплексний коефіцієнт відбиття на підставі загальної формули (див. табл. 5.8) для даного випадку становить

$$\rho(y) = \frac{U_{m\text{від}}(y)}{U_{m\text{пад}}(y)} = \frac{I_{m\text{від}}(y)}{I_{m\text{пад}}(y)} = \frac{R_{\text{н}} - R_{\text{хв}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}} e^{-j2\beta y} = \rho(0) e^{j\varphi_{\rho}(y)}, \quad (5.108)$$

$$\text{де } \rho(0) = \rho(0) = \frac{|R_{\text{н}} - R_{\text{хв}}|}{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}}; \quad \varphi_{\rho}(y) = -2\beta y + \begin{cases} 0, & R_{\text{н}} > R_{\text{хв}} \\ \pi, & R_{\text{н}} < R_{\text{хв}} \end{cases} \text{ — відповідно мо-$$

дуль і аргумент комплексного коефіцієнта відбиття.

Активна і реактивна потужності в довільному перерізі ідеальної лінії становлять (див. табл. 5.8):

$$P_A(y) = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] = P_{A\text{пад}} - P_{A\text{від}}; \quad (5.109)$$

$$P_Q(y) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 \rho(0) \sin \varphi_{\rho}(y) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}} I_{\text{від}} \sin \varphi_{\rho}(y), \quad (5.110)$$

де $P_{A\text{пад}} = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2$; $P_{A\text{від}} = R_{\text{хв}} I_{\text{від}}^2$ — активні потужності падаючої та відбитої хвиль відповідно.

Згідно з рівнянням (5.109) активна потужність у будь-якому перерізі лінії постійна, а отже, дорівнює потужності на вході лінії та в навантаженні:

$$P_A = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = R_{\text{н}} I_2^2, \quad (5.111)$$

де φ_1 — зсув фаз між входними напругою і струмом.

Формула (5.111) показує, що ККД даного режиму становить 100%.

Використовуючи вирази (5.108)–(5.111), можна подати діюче значення струму падаючої хвилі та реактивну потужність через параметри режиму навантаження:

$$I_{\text{пад}} = I_2 \sqrt{\frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{хв}} [1 - \rho^2(0)]}} = \frac{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}}{2R_{\text{хв}}} I_2; \\ P_Q(y) = \frac{|R_{\text{н}}^2 + R_{\text{хв}}^2|}{2R_{\text{хв}}} I_2^2 \sin \varphi_{\rho}(y). \quad (5.112)$$

На рис. 5.29 зображено графіки розподілу вздовж лінії реактивної потужності, амплітуд напруги та струму (рис. 5.29, б), їхніх початкових фаз і взаємного зсуву (рис. 5.29, в), а також нормованих опорів (рис. 5.29, г). Графіки побудовані за результатами обчислень за формулами (5.102)–(5.110) для двох значень нормованих опорів навантаження $R'_{\text{н}} = 4$ ($R_{\text{н}} = 4R_{\text{хв}}$, ліворуч на рис. 5.29) і $R'_{\text{н}} = 0,25$ ($R_{\text{н}} = R_{\text{хв}}/4$, праворуч).

Аналіз співвідношень (5.100)–(5.112) і графіків (рис. 5.29) дозволяє зробити такі висновки:

1) розподіл амплітуд напруги та струму має періодичність $\lambda/2$; у перерізах лінії, де амплітуда напруги максимальна, амплітуда струму мінімальна і навпаки (ці перерізи повторюються через $\lambda/4$), струм і напруга в них перебувають у фазі (опір лінії суто активний);

2) у кінці лінії при $R'_{\text{н}} > 1$ спостерігаються максимуми амплітуди напруги та опору, але мінімум амплітуди струму; при $R'_{\text{н}} < 1$, навпаки, амплітуда струму максимальна, а амплітуда напруги й опір — мінімальні;

3) розподіл активного і повного опорів мають максимуми і мінімуми, які чергуються через $\lambda/4$;

4) відрізок лінії довжиною $\lambda/4$ має згідно з виразом (5.107) суто активний опір $R_{\lambda/4} = Z_{\lambda/4} = R_{\text{хв}}^2 / R_{\text{н}}$; $R'_{\lambda/4} = Z'_{\lambda/4} = 1/R'_{\text{н}}$;

5) на ділянках лінії $(n-1)\lambda/2 < l < (2n-1)\lambda/4$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) при $R'_{\text{н}} > 1$ опір лінії має ємнісний характер ($\varphi(y) < 0$), а при $R'_{\text{н}} < 1$ — індуктивний ($\varphi(y) > 0$); у перерізах лінії, для яких $(2n-1)\lambda/4 < l < n\lambda/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), при $R'_{\text{н}} > 1$ характер опору індуктивний ($\varphi(y) > 0$), а при $R'_{\text{н}} < 1$ — ємнісний ($\varphi(y) < 0$); зокрема, при $R'_{\text{н}} > 1$ лінія довжиною $l < \lambda/4$ має ємнісний, а при $R'_{\text{н}} < 1$ — індуктивний характер;

6) при $R'_{\text{н}} > 1$ КБХ і КСХ становлять $k_{\text{бх}} = 1/R'_{\text{н}}$; $k_{\text{сх}} = R'_{\text{н}}$, а при $R'_{\text{н}} < 1$, навпаки, $k_{\text{бх}} = R'_{\text{н}}$; $k_{\text{сх}} = 1/R'_{\text{н}}$;

7) активна потужність у навантаженні в режимі змішаних хвиль при однаковій потужності $P_{\text{пад}}$ буде меншою, ніж у режимі узгодження;

8) реактивна потужність у режимі змішаних хвиль, як і в режимі стійких хвиль, змінюється за синусоїдним законом, але її амплітуда менша в $\rho(0)$ разів.

5.8.2. Режим змішаних хвиль при комплексному навантаженні

Якщо ідеальну лінію навантажено на комплексний опір $Z_{\text{н}} = U_{m2}/I_{m2}$ (рис. 5.30, а), рівняння (5.98), (5.99), (5.107) набудуть вигляду:

$$U_m(y) = U_{m2} [\cos \beta y + j \frac{R_{\text{хв}}}{Z_{\text{н}}} \sin \beta y] = U_{m2} [\cos \beta y + j \frac{1}{Z'_{\text{н}}} \sin \beta y]; \quad (5.113)$$

$$I_m(y) = I_{m2} [\cos \beta y + j \frac{Z_{\text{н}}}{R_{\text{хв}}} \sin \beta y] = I_{m2} (\cos \beta y + j Z'_{\text{н}} \sin \beta y). \quad (5.114)$$

$$Z'(y) = R'(y) + jX'(y) = Z'(y) e^{j\varphi(y)} = \frac{Z'_{\text{н}} + j \operatorname{tg} \beta y}{1 + j Z'_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta y}, \quad (5.115)$$

де $\underline{Z}'_H = \underline{Z}_H / R_{XB} = R'_H + jX'_H$ — нормований комплексний опір навантаження; $R'_H = R_H / R_{XB}$; $X'_H = X_H / R_{XB}$ — нормовані активний та реактивний опори навантаження, відповідно.

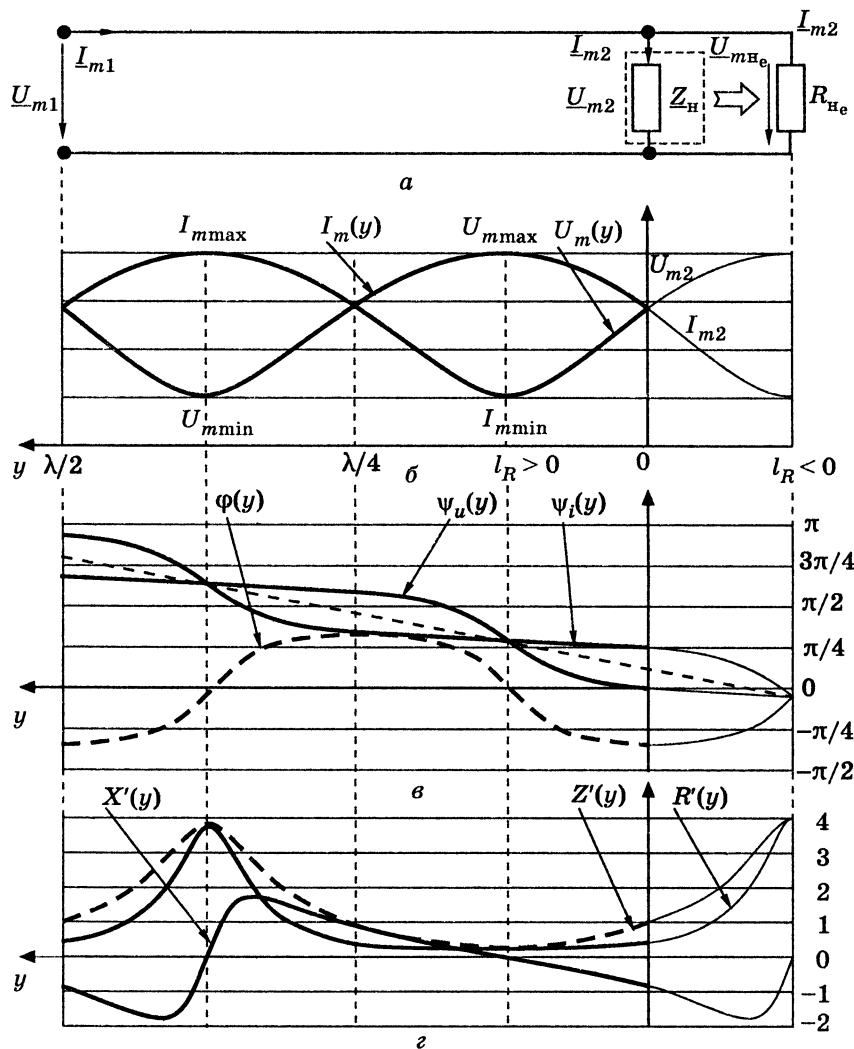


Рис. 5.30. Режим змішаних хвиль при навантаженні ідеальної лінії на комплексний опір: а — схема; розподіли: б — амплітуд напруги і струму; в — початкових фаз і зсуву фаз між напругою ($\psi_{u2}=0$) і струмом; г — нормованих опорів

Для того щоб проаналізувати даний режим, використовують чисельні методи згідно з формулами (5.113)–(5.115) або методику, подібну тій, яка була застосована при аналізі режиму стійних хвиль при навантаженні лінії на реактивний опір (див. п. 5.7.4).

Як приклад на рис. 5.30 зображені графіки, що ілюструють режим змішаних хвиль при навантаженні ідеальної лінії на нормований комплексний опір $\underline{Z}'_H = 0,47 - j0,88$. Графіки побудовано як за результатами обчислень на підставі формул (5.113)–(5.115), так і за допомогою заміни комплексного навантаження еквівалентним (за опором) відрізком лінії довжиною $l_R = \lambda/8$, яку навантажено нормованим активним опором $R'_{He} = 4$ (рис. 5.30, а). На рис. 5.30, б, в, г графіки в межах лінії від входу до навантаження зображені товстими, а для ввімкненого відрізка еквівалентної лінії — тоншими лініями.

Довжину й опір активного навантаження можна визначити з умови активного характеру опору (5.115):

$$\underline{Z}'(l_R) = R'_{He} = \frac{(R'_H + jX'_H) + j \operatorname{tg} \beta l_R}{1 + j(R'_H + jX'_H) \operatorname{tg} \beta l_R} = \frac{R'_H + j(X'_H + \operatorname{tg} \beta l_R)}{(1 - X'_H \operatorname{tg} \beta l_R) + jR'_H \operatorname{tg} \beta l_R}. \quad (5.116)$$

Якщо помножити чисельник і знаменник правої частини рівняння (5.116) на комплексно-спряжений вираз знаменника, рівняння набуває вигляду

$$R'_{He} = \frac{R'_H(1 + \operatorname{tg} \beta l_R)}{1 - 2X'_H \operatorname{tg} \beta l_R + (Z'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R} - j \frac{X'_H \operatorname{tg}^2 \beta l_R + \operatorname{tg} \beta l_R [(Z'_H)^2 - 1] - X'_H}{1 - 2X'_H \operatorname{tg} \beta l_R + (Z'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R}. \quad (5.117)$$

Прирівнюючи уявну частину виразу (5.117) до нуля:

$$\frac{X'_H \operatorname{tg}^2 \beta l_R + \operatorname{tg} \beta l_R [(Z'_H)^2 - 1] - X'_H}{1 - 2X'_H \operatorname{tg} \beta l_R + (Z'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R} = 0,$$

можна визначити l_R :

$$\operatorname{tg}^2 \beta l_R + \operatorname{tg} \beta l_R \frac{(Z'_H)^2 - 1}{X'_H} - 1 = 0; \operatorname{tg} \beta l_R = \frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} \pm \sqrt{\frac{[(Z'_H)^2 - 1]^2}{4(X'_H)^2} + 1};$$

$$l_R = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left\{ -\frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} \pm \sqrt{\frac{[(Z'_H)^2 - 1]^2}{4(X'_H)^2} + 1} \right\}. \quad (5.118)$$

Із двох розв'язків (5.118), виходячи з постановки задачі, вибирають від'ємний (знак мінус перед квадратним коренем). Додатний розв'язок (знак плюс перед квадратним коренем) відповідає найближчому до Z_n перерізу лінії з активним опором (рис. 5.30, з).

Опір навантаження еквівалентного відрізка лінії визначають, підставляючи знайдене значення l_R у формулу (5.117):

$$R'_{ne} = \frac{R'_n(1 + \operatorname{tg}^2 \beta l_R)}{1 - 2X'_n \operatorname{tg} \beta l_R + (Z'_n)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R}. \quad (5.119)$$

Якщо увімкнути замість комплексного навантаження еквівалентний відрізок лінії з активним опором, можна застосувати співвідношення (5.102)–(5.110), замінивши в них \underline{U}_{m2} на \underline{U}_{mne} , \underline{I}_{m2} на \underline{I}_{mne} , R_n на R_{ne} , а змінну y на $y_e = y + l_R$. Отримані вирази наведені в табл. 5.17.

Таблиця 5.17

Співвідношення для режиму змішаних хвиль в ідеальній лінії при комплексному навантаженні

Параметри	Співвідношення
Комплексні амплітуди напруги та струму на виході відрізка еквівалентної лінії	$\underline{U}_{mne} = \frac{\underline{U}_{m2}}{\cos \beta l_R - j(1/R'_{ne}) \sin \beta l_R};$ $\underline{I}_{mne} = \frac{\underline{I}_{m2}}{\cos \beta l_R - jR'_{ne} \sin \beta l_R}$
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{mne} [\cos \beta y_e + j(1/R'_{ne}) \sin \beta y_e];$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{mne} (\cos \beta y_e + jR'_{ne} \sin \beta y_e)$
Амплітуди	$U_m(y) = U_{mne} \sqrt{\cos^2 \beta y_e + (1/R'_{ne})^2 \sin^2 \beta y_e};$ $I_m(y) = I_{mne} \sqrt{\cos^2 \beta y_e + R'_{ne} \sin^2 \beta y_e}$
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{u_{ne}} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \beta y_e}{R'_{ne}};$ $\psi_i(y) = \psi_{i_{ne}} + \operatorname{arctg} (R'_{ne} \operatorname{tg} \beta y_e)$
Нормований комплексний опір	$\underline{Z}'(y) = \frac{R'_{ne} + j \operatorname{tg} \beta y_e}{1 + jR'_{ne} \operatorname{tg} \beta y_e}$
Модуль і аргумент комплексного коефіцієнта відбиття	$\rho(y) = \left \frac{R_{ne} - R_{xв}}{R_{ne} + R_{xв}} \right ; \varphi_\rho(y) = -2\beta y_e + \begin{cases} 0, R_{ne} > R_{xв} \\ \pi, R_{ne} < R_{xв} \end{cases}$

Аналіз співвідношень у табл. 5.17 і графіків на рис. 5.30 свідчать, що при комплексному навантаженні розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R'(y)$, $X'(y)$, $Z'(y)$ мають характерні для режиму змішаних хвиль особливості (див. висновки до п. 5.8.1), які різняться від режиму навантаження на активний опір тільки зсувом на величину $l_R < 0$. Тому в кінці лінії амплітуди напруги та струму не мають максимумів і мінімумів, а найближчі від навантаження максимуми або мінімуми (рис. 5.30, б) лежать у перерізі, який відповідає додатному значенню l_R з виразу (5.118).

Слід зазначити, що для $y_e > l_R$ формули в табл. 5.17 відповідають розглянутій лінії, а для $y_e < l_R$ — увімкненому відрізку лінії.

5.8.3. Режим змішаних хвиль у лінії з втратами

Для аналізу режиму змішаних хвиль у лінії з втратами загалом необхідно застосовувати чисельні методи з використанням формул (5.52)–(5.59), а також співвідношень, наведених у табл. 5.5.

На практиці широко застосовують лінії з втратами, хвильовий опір і опір навантаження яких мають чисто активний характер. Зазвичай ці лінії мають також малі втрати ($\alpha y \ll 1$). У табл. 5.18 наведені точні та приблизні співвідношення для аналізу таких ліній при відліку координати від навантаження.

Як приклад на рис. 5.31 для лінії з параметрами $R'_n = 4$; $\alpha \lambda = 0,3$ Нп; $l = \lambda$ побудовано графіки розподілу амплітуд напруги і струму (рис. 5.31, б), їхніх початкових фаз і взаємного зсуву фаз (рис. 5.31, в), а також нормованих опорів (рис. 5.31, з). Проаналізувавши графіки, можна зробити висновок, що в реальній лінії (на відміну від ідеальної) при наближенні до її входу максимуми амплітуд напруги та струму збільшуються, а відношення значень максимумів і мінімумів зменшуються. Зменшуються також максимуми активного і реактивного опорів.

Можна показати, що при $\alpha y \rightarrow \infty$ $X(y) \rightarrow 0$; $R(y) \rightarrow R_{xв}$, $R'(y) \rightarrow 1$.

Рис. 5.32 ілюструє енергетичні показники режиму змішаних хвиль у лінії з втратами. Графіки розподілу в лінії активної та реактивної потужностей (рис. 5.32, а) показують, що активна потужність зменшується при наближенні до навантаження, а реактивна потужність змінюється за синусоїдним законом з періодом $\lambda/2$, зберігаючи вздовж лінії однаковий рівень максимальних і мінімальних значень. Остання обставина не є очевидною і пояснюється тим, що при віддаленні від навантаження максимуми реактивного опору зменшуються, а максимуми амплітуд струму,

Співвідношення для режиму змішаних хвиль у реальній лінії
з активними хвильовим опором і опором навантаження

Параметри	$Z_{XB} = R_{XB}; Z_H = R_H$	Приблизні співвідношення при $Z_{XB} = R_{XB}; Z_H = R_H; \alpha y \ll 1$
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \left(\operatorname{ch} \gamma y + \frac{\operatorname{sh} \gamma y}{R'_H} \right)$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} (\operatorname{ch} \gamma y + R'_H \operatorname{sh} \gamma y)$	$\underline{U}_m(y) \approx \underline{U}_{m2} \left[\left(1 + \frac{\alpha y}{R'_H} \right) \cos \beta y + j \left(\alpha y + \frac{1}{R'_H} \right) \sin \beta y \right];$ $\underline{I}_m(y) \approx \underline{I}_{m2} [(1 + \alpha y R'_H) \cos \beta y + j(\alpha y + R'_H) \sin \beta y]$ $\underline{Z}(y) \approx \frac{(R'_H + \alpha y) \cos \beta y + j(\alpha y R'_H + 1) \sin \beta y}{(1 + \alpha y R'_H) \cos \beta y + j(\alpha y + R'_H) \sin \beta y}$
Нормований комплексний опір	$\underline{Z}(y) = \frac{R'_H \operatorname{ch} \gamma y + \operatorname{sh} \gamma y}{\operatorname{ch} \gamma y + R'_H \operatorname{sh} \gamma y}$	
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\rho(y) = \frac{R_H - R_{XB} e^{-2\gamma y}}{R_H + R_{XB}}$ $\rho(y) = \frac{ R_H - R_{XB} e^{-2\alpha y}}{R_H + R_{XB}}; \varphi_\rho(y) = -2\beta y + \begin{cases} 0, \text{ якщо } R_H > R_{XB} \\ \pi, \text{ якщо } R_H < R_{XB} \end{cases}$	$\rho(y) = \frac{R_H - R_{XB} e^{-2\alpha y}}{R_H + R_{XB}} e^{-j2\beta y} = \rho(y) e^{j\varphi_\rho(y)};$
Активна потужність	$P_A(y) = \frac{(R_H^2 + R_{XB}^2) \operatorname{sh}(2\alpha y) + 4R_H R_{XB} \operatorname{ch}(2\alpha y)}{2R_{XB}} I_2^2 =$ $= 0,25 R_{XB} [(R'_H + 1)^2 e^{2\alpha y} - (R'_H - 1)^2 e^{-2\alpha y}] I_2^2$	$P_A(y) \approx \frac{R_H R_{XB} + (R_H^2 + R_{XB}^2) \alpha y}{R_{XB}} I_2^2 =$ $= (R'_H + [(R'_H)^2 + 1] \alpha y) R_{XB} I_2^2$
Реактивна потужність	$P_Q(y) = \frac{ R_H - R_{XB} ^2}{2R_{XB}} I_2^2 \sin \varphi_\rho(y) = 0,5 R_{XB} [(R'_H)^2 - 1] I_2^2 \sin \varphi_\rho(y)$	
ККД	$\eta = \frac{P_{AH}}{P_A(l)} = \frac{4R'_H}{(R'_H + 1)^2 e^{2\alpha l} - (R'_H - 1)^2 e^{-2\alpha l}}$	$\eta = \frac{P_{AH}}{P_A(l)} \approx \frac{1}{1 + (R'_H + 1/R'_H) \alpha l}$

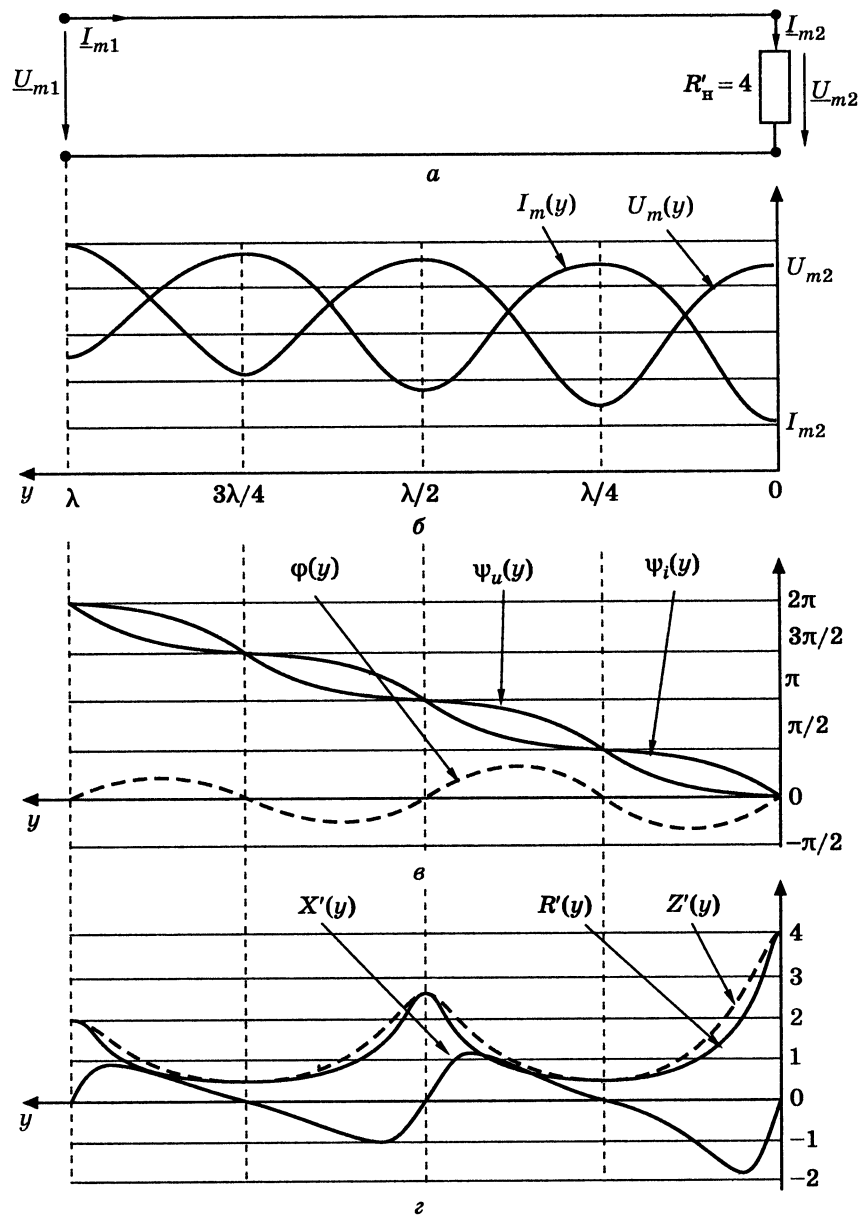


Рис. 5.31. Режим змішаних хвиль у лінії з втратами ($\alpha l = 0,3$ Нп; $Z_{XB} = R_{XB}$): а — схема; розподіли: б — амплітуд напруги та струму; в — початкових фаз і зсуву фаз між напругою ($\psi_{u2} = 0$) і струмом; г — нормованих опорів

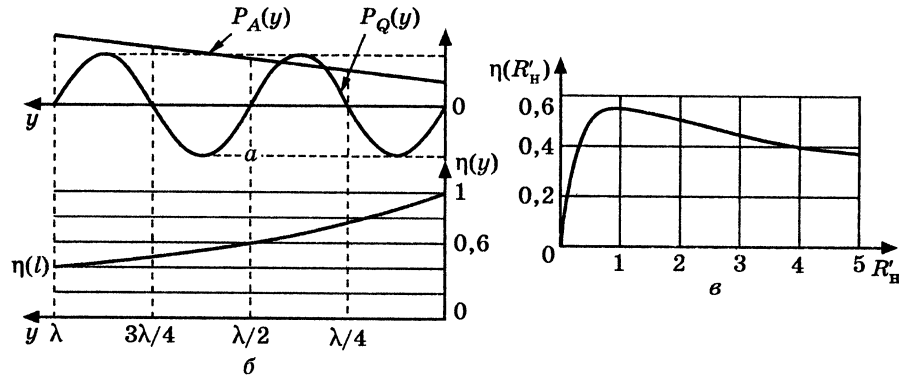


Рис. 5.32. Енергетичні параметри лінії з втратами ($\alpha\lambda = 0,3$ Нп; $Z_{\text{хв}} = R_{\text{хв}}$): а — активна та реактивна потужності; б — залежність ККД від координати ($R'_H = 4$); в — залежність ККД від R'_H ($l = \lambda$)

навіпаки, зростають. У результаті максимальні та мінімальні значення реактивної потужності не змінюються.

Розрахунок ККД за формулою (див. табл. 5.18) для лінії з параметрами, які були вибрані вище для побудови графіків (рис. 5.31), дає значення:

$$\eta = \frac{P_{Aн}}{P_A(l)} \approx 0,4,$$

що підтверджується графіком залежності ККД від координати (рис. 5.32, б):

$$\eta(y) = \frac{P_{Aн}}{P_A(y)} = \frac{4}{(R'_H + 1)^2 e^{2\alpha y} - (R'_H - 1)^2 e^{-2\alpha y}}.$$

Як і очікувалося, функція $\eta(y)$ приймає максимальне значення $\eta(0) = 1$ у навантаженні, а мінімальне $\eta(l) \approx 0,4$ — на вході лінії.

Оскільки ККД є головним енергетичним показником для реальних ліній передачі сигналів, у радіопередавальних пристроях важливо знати значення опору навантаження лінії, яке забезпечує максимум ККД. Розв'язання цієї задачі приводить до рівняння:

$$\frac{\partial \eta(R'_H, l)}{\partial R'_H} = \frac{4[(R'_H + 1)^2 e^{2\alpha l} - (R'_H - 1)^2 e^{-2\alpha l}]}{[(R'_H + 1)^2 e^{2\alpha l} - (R'_H - 1)^2 e^{-2\alpha l}]^2} - \frac{4R'_H [2(R'_H + 1)e^{2\alpha l} - 2(R'_H - 1)e^{-2\alpha l}]}{[(R'_H + 1)^2 e^{2\alpha l} - (R'_H - 1)^2 e^{-2\alpha l}]^2} = 0,$$

яке після перетворень матиме такий вигляд:

$$[1 - (R'_H)^2]e^{2\alpha l} + [(R'_H)^2 - 1]e^{-2\alpha l} = 0. \quad (5.120)$$

Рівнянню (5.120) задовольняють два корені $R'_H = \pm 1$, з яких фізичний сенс має значення $R'_H = 1$ ($R_H = R_{\text{хв}}$).

Отже, максимальний ККД у лінії перебуватиме в режимі узгодження. При цьому величина ККД становить:

$$\eta(R'_H)|_{R'_H=1} = \frac{P_{Aн}}{P_A(l)}|_{R'_H=1} = \frac{1}{e^{2\alpha l}} = e^{-2\alpha l},$$

що збігається з отриманим у підрозділі 5.6 співвідношенням (5.70).

Наведений на рис. 5.32, в графік $\eta(R'_H)$ свідчить, що для розглядуваної лінії максимальне значення ККД при $R'_H = 1$ становить $\eta \approx 0,55$, що приблизно на 40 % більше, ніж при $R'_H = 4$.

Якщо лінію з втратами навантажено на комплексний опір $Z_H = R_H + jX_H$, $R_H \neq 0$, то, як показує аналіз (аналогічний застосованому для ідеальної лінії в п.5.8.2), основні співвідношення і графіки різняться від режиму навантаження на активний опір тільки зсувом за координатою на певне значення l_{He} .

Приклад 5.19. Розрахувати режим змішаних хвиль на частоті $f = 1000$ МГц у кабелі, параметри якого наведені у прикладі 5.10. Відомі довжина лінії $l = 0,25$ м, комплексна амплітуда вихідної напруги $U_{m2} = 10e^{j\pi/4}$ В, опір навантаження $R_H = 277,8$ Ом. Побудувати графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$, $Z(y)$, $P_Q(y)$. Визначити режим на вході лінії (U_{m1} ; I_{m1} ; Z_1 ; P_{A1}), КБХ і КСХ. Втрати в лінії не враховувати.

Розв'язання. Скористаємося співвідношеннями (5.102)–(5.106), (5.111), (5.112) і значеннями параметрів лінії (див. табл. 5.7): $\lambda = 0,199$ м; $R_{\text{хв}} = 92,6$ Ом.

Обчислимо струм у навантаженні та нормований опір лінії:

$$I_{m2} = \frac{U_{m2}}{R_H} = \frac{10e^{j\pi/4}}{277,8} = 0,036e^{j\pi/4} \text{ А} = 36e^{j\pi/4} \text{ мА}; \quad R'_H = \frac{R_H}{R_{\text{хв}}} = \frac{277,8}{92,6} = 3.$$

Оскільки $R'_H > 1$, КСХ і КБХ становитимуть: $k_{\text{сх}} = R'_H = 3$; $k_{\text{бх}} = 1/R'_H = 0,33$. Складемо рівняння для побудови графіків:

$$U_m(y) = U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (1/R'_H)^2 \sin^2 \beta y} = 10 \sqrt{\cos^2(31,59y) + 0,11 \sin^2(31,59y)} \text{ В};$$

$$I_m(y) = I_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (R'_H)^2 \sin^2 \beta y} = 36 \sqrt{\cos^2(31,59y) + 9 \sin^2(31,59y)} \text{ мА};$$

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \arctg \frac{\text{tg } \beta y}{R'_H} = \frac{\pi}{4} + \arctg[0,33 \text{tg}(31,59y)];$$

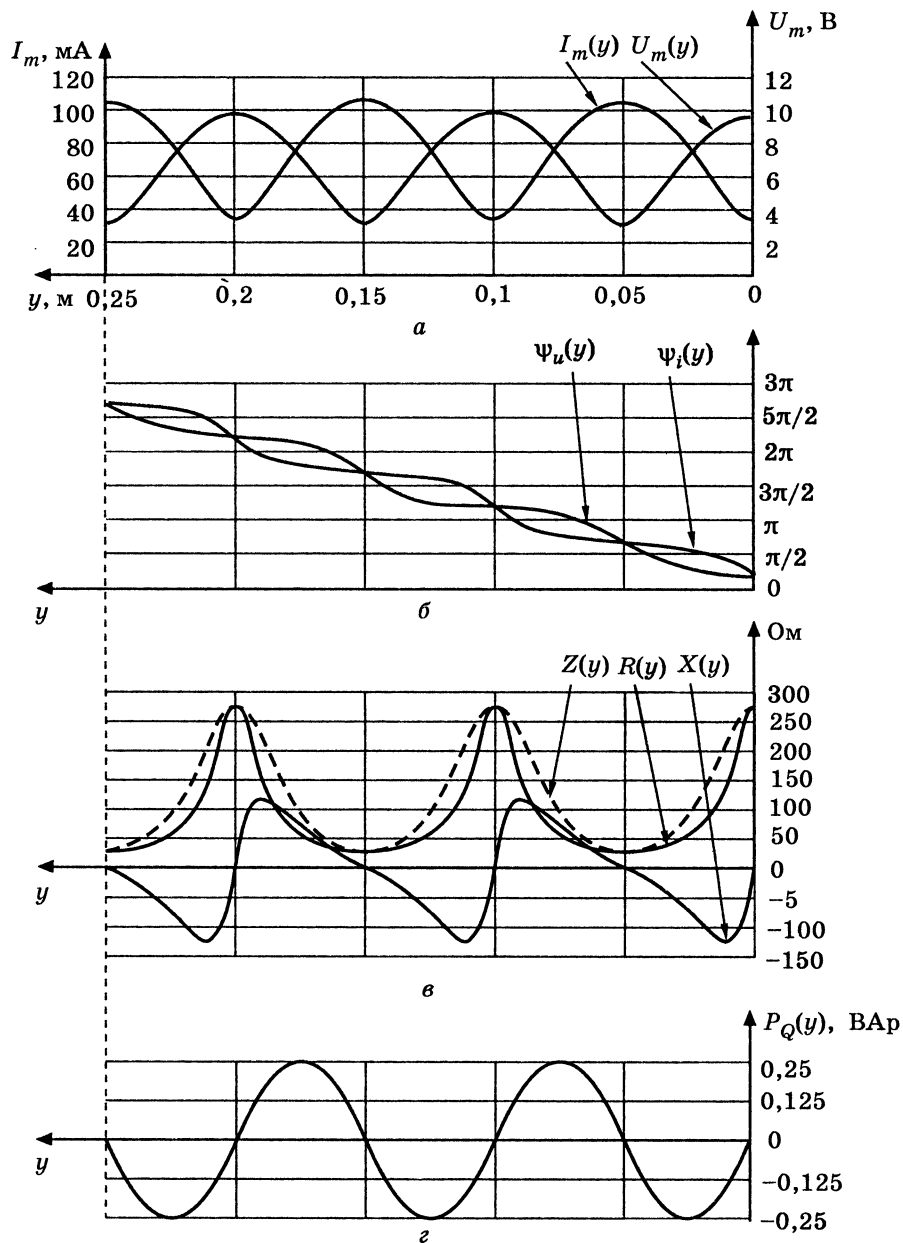


Рис. 5.33. Розподіли у прикладі 5.19:
 а — амплітуд напруги та струму; б — початкових фаз;
 в — опорів; з — реактивної потужності

$$\psi_i(y) = \psi_{u2} + \arctg(R'_H \operatorname{tg} \beta y) = \frac{\pi}{4} + \arctg[3 \operatorname{tg}(31,59y)];$$

$$\underline{Z}(y) = R_{\text{хв}} \frac{R'_H + j \operatorname{tg} \beta y}{1 + j R'_H \operatorname{tg} \beta y} = 92,6 \frac{3 + j \operatorname{tg}(31,59y)}{1 + j 3 \operatorname{tg}(31,59y)} \text{ Ом};$$

$$P_Q(y) = \frac{|R'_H - R_{\text{хв}}^2|}{2R_{\text{хв}}} I_2^2 \sin(-2\beta y) = \frac{277,8^2 - 92,6^2}{2 \cdot 92,6} \left(\frac{0,036}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin(-63,18y) = -0,24 \sin(63,18y) \text{ ВАр.}$$

Відповідно до складених рівнянь побудуємо графіки (рис. 5.33) і визначимо електричний режим на вході лінії:

$$\underline{U}_{m1} = U_m(l) e^{j\psi_u(l)} = 3,342 e^{-j0,654} \text{ В}; \quad \underline{I}_{m1} = I_m(l) e^{j\psi_i(l)} = 107,9 e^{-j0,771} \text{ мА};$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}(l) = 30,92 + j3,58 \text{ Ом};$$

$$P_{A1} = P_H = R_H I_2^2 = 0,5 R_H I_{m2}^2 = 0,5 \cdot 277,83 \cdot 0,036^2 = 0,18 \text{ Вт.}$$

Приклад 5.20. Розрахувати режим змішаних хвиль у кабелі, розглянутому у прикладі 5.19, при комплексному навантаженні $\underline{Z}_H = 92,6 + j92,6 \text{ Ом}$.

Розв'язання. Обчислимо струм у навантаженні та нормований опір лінії:

$$\underline{I}_{m2} = \frac{U_{m2}}{\underline{Z}_H} = \frac{10 e^{j\pi/4}}{92,6 + j92,6} = 0,0764 \text{ А} = 76,4 \text{ мА}; \quad \underline{Z}'_H = \frac{\underline{Z}_H}{R_{\text{хв}}} = 1 + j = \sqrt{2} e^{j\pi/4}.$$

Розв'язання виконаємо двома способами: 1) за формулами (5.113)–(5.115) для комплексних амплітуд і комплексного опору; 2) замінюючи комплексне навантаження еквівалентним (за опором) відрізком лінії довжиною l_R , навантаженим на активний опір R_{H_e} (див. п. 5.8.2).

Після підстановки числових значень параметрів рівняння (5.113)–(5.115) матимуть вигляд:

$$\underline{U}_m(y) = 10 e^{j\pi/4} [\cos(31,59y) + j0,707 e^{-j\pi/4} \sin(31,59y)] \text{ В};$$

$$\underline{I}_m(y) = 0,0764 [\cos(31,59y) + j\sqrt{2} e^{j\pi/4} \sin(31,59y)] \text{ А};$$

$$\underline{Z}(y) = \underline{Z}(y) e^{j\psi(y)} = R(y) + jX(y) = R_{\text{хв}} \underline{Z}'(y) = 92,6 \frac{\sqrt{2} e^{j\pi/4} + j \operatorname{tg}(31,59y)}{1 + j\sqrt{2} e^{j\pi/4} \operatorname{tg}(31,59y)} \text{ Ом.}$$

Згідно з отриманими рівняннями побудуємо графіки (рис. 5.34):

- модулів $U_m(y)$, $I_m(y)$ і аргументів $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$ відповідних комплексних амплітуд;
- модуля $Z(y)$, дійсної $R(y)$ й уявної $X(y)$ частин комплексного опору;
- реактивної потужності $P_Q(y) = X(y) I_m^2(y) = 0,5 X(y) I_m^2(y)$.

Визначимо параметри електричного режиму на вході лінії:

$$\underline{U}_{m1} = U_m(l) = 6,805 e^{j1,61} \text{ В}; \quad \underline{I}_{m1} = I_m(l) = 109,96 e^{j2,375} \text{ мА};$$

$$Z_1 = Z(l) = 44,65 - j42,85 \text{ Ом};$$

$$P_{A1} = P_H = R_H I_2^2 = 0,5 R_H I_{m2}^2 = 0,5 \cdot 92,6 \cdot 0,0764^2 = 0,27 \text{ Вт.}$$

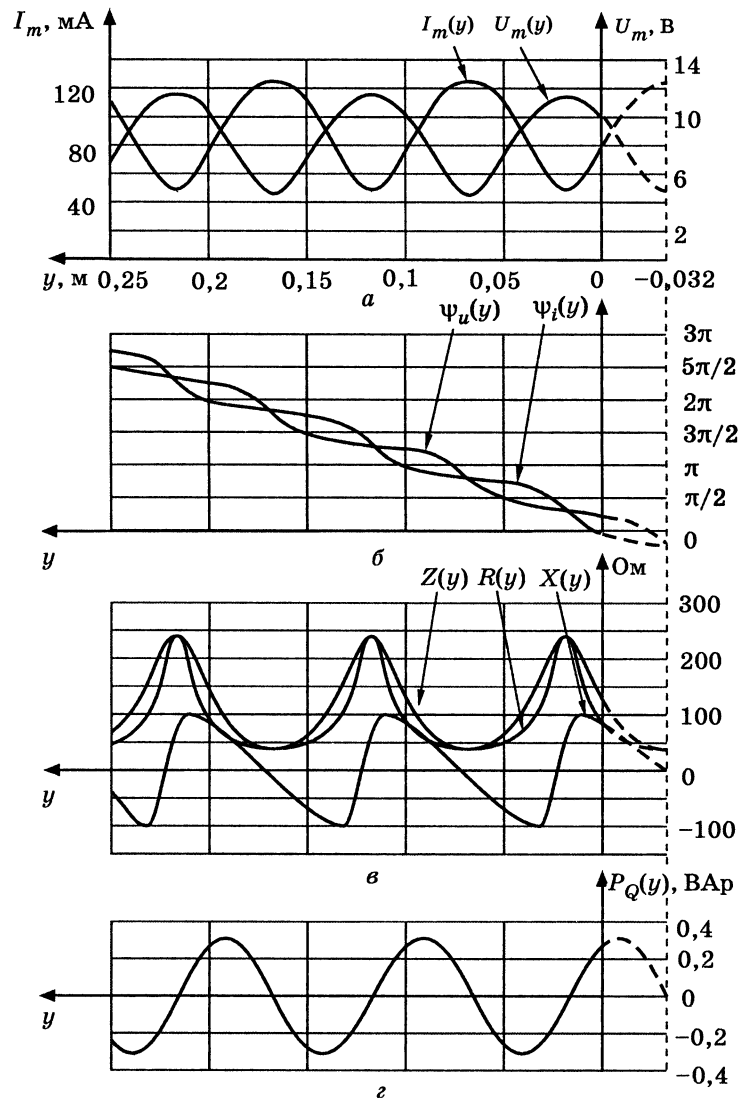


Рис. 5.34. Розподіли у прикладі 5.20:

a — амплітуд напруги та струму; *б* — початкових фаз; *в* — опорів;
г — реактивної потужності

Для того щоб замінити комплексне навантаження еквівалентним відрізком лінії, попередньо обчислимо за формулою (5.118) довжину цього відрізка:

$$l_R = \frac{0,199}{2\pi} \arctg \left(-\frac{2-1}{2} - \sqrt{\frac{(2-1)^2}{4} + 1} \right) = -0,032 \text{ м.}$$

Опір навантаження відрізка лінії розрахуємо за формулою (5.119):

$$R'_{He} = \frac{1 + 1,618^2}{1 + 2 \cdot 1,618 + 2 \cdot 1,618^2} = 0,382;$$

$$R_{He} = R'_{He} R_{xB} = 0,382 \cdot 92,6 = 35,37 \text{ Ом.}$$

Отримані параметри еквівалентного відрізка лінії з активним навантаженням дозволяють виконувати обчислення за формулами, наведеними в табл. 5.17. Результати розрахунків збігаються з результатами, одержаними на підставі рівнянь (5.113)–(5.115).

На рис. 5.34 графіки у межах лінії від входу до навантаження зображено суцільними лініями, а для ввімкненого відрізка еквівалентної лінії — пунктиром.

КБХ і КСХ обчислимо згідно з виразами (5.96) і (5.97), попередньо розрахувавши модуль комплексного коефіцієнта відбиття (5.58):

$$\rho(0) = \frac{\sqrt{(R_H - R_{xB})^2 + X_H^2}}{\sqrt{(R_H + R_{xB})^2 + X_H^2}} = \frac{\sqrt{(92,6 - 92,6)^2 + 92,6^2}}{\sqrt{(92,6 + 92,6)^2 + 92,6^2}} = 0,447;$$

$$k_{бх} = \frac{1 - \rho(0)}{1 + \rho(0)} = \frac{1 - 0,447}{1 + 0,447} = 0,382; \quad k_{сх} = \frac{1 + \rho(0)}{1 - \rho(0)} = \frac{1 + 0,447}{1 - 0,447} = 2,618.$$

Правильність розрахунку КБХ підтверджується збігом отриманого значення з величиною нормованого еквівалентного опору R'_{He} .

Приклад 5.21. Змінивши довжину кабелю до величини $l = 75\lambda$ і врахувавши втрати ($\alpha = 0,018$ Нп/м), розв'язати приклад 5.19. Побудувати графіки розподілів $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$, $P_A(y)$, $P_Q(y)$ на ділянках довжиною λ від кінця і від початку лінії. Визначити режим на вході лінії (U_{m1} ; I_{m1} ; Z_1 ; P_{A1} , P_{Q1}), ККД, КСХ і КБХ.

Розв'язання. Використовуючи знайдені у прикладі 5.19 параметри ($I_{m2} = 0,036e^{j\pi/4}$ А; $P_{Aн} = 0,18$ Вт; $R'_H = 3$) і формули з табл. 5.18, складемо необхідні рівняння (табл. 5.19) і побудуємо графіки (рис. 5.35).

Підставивши до рівнянь (табл. 5.19) значення $y = l = 75 \cdot 0,199 = 14,925$ м, знаходимо параметри режиму на вході лінії:

$$U_{m1} = U_m(l) e^{j\psi_u(l)} = 11,27 e^{j0,785} \text{ В}; \quad I_{m1} = I_m(l) e^{j\psi_i(l)} = 66,66 e^{j0,785} \text{ мА};$$

$$Z_1 = Z(l) = R_1 = 169,06 \text{ Ом}; \quad P_{Q1} = 0; \quad P_{A1} = 0,3756 \text{ Вт.}$$

Таблиця 5.19

Рівняння для побудови графіків (до прикладу 5.21)

Параметри	Рівняння
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = 10e^{j\pi/4} \left[\text{ch}(0,018 + j31,59)y + \frac{\text{sh}(0,018 + j31,59)y}{3} \right] \text{ В}$ $\underline{I}_m(y) = 36e^{j\pi/4} [\text{ch}(0,018 + j31,59)y + 3 \text{sh}(0,018 + j31,59)y] \text{ мА}$
Комплексний опір	$\underline{Z}(y) = 92,6 \frac{3 \text{ch}(0,018 + j31,59)y + \text{sh}(0,018 + j31,59)y}{\text{ch}(0,018 + j31,59)y + 3 \text{sh}(0,018 + j31,59)y} \text{ Ом}$
Активна і реактивна потужності	$P_A(y) = 0,015 [16e^{(0,036 + j63,18)y} - 4e^{-(0,036 + j63,18)y}] \text{ Вт}$ $P_Q(y) = 0,24 \sin(63,18y) \text{ Вар}$

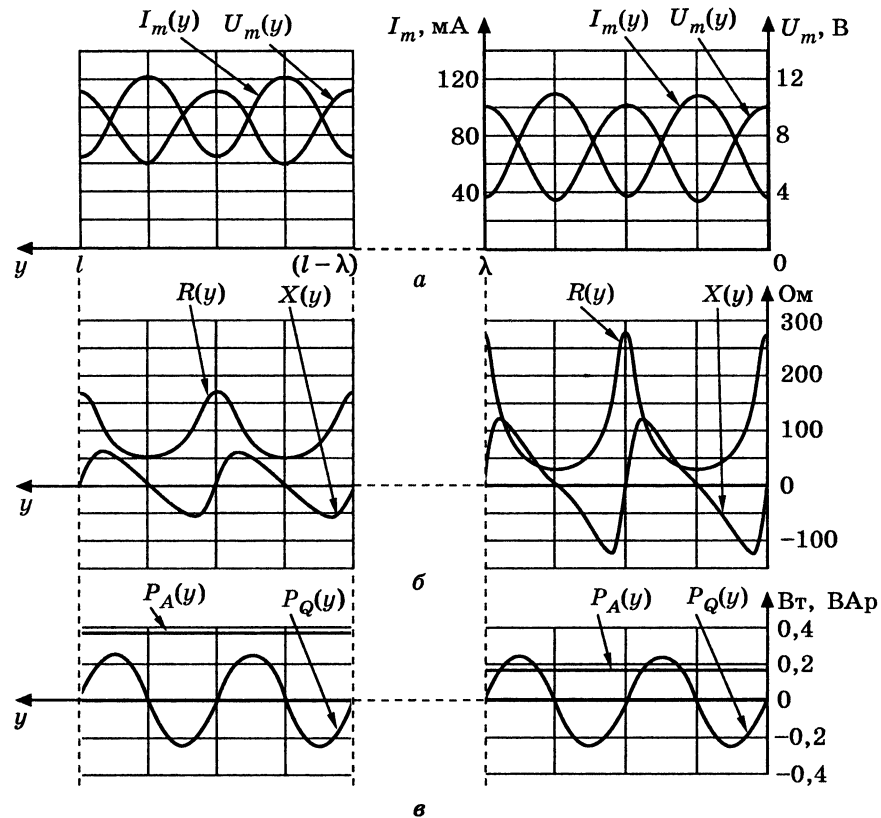


Рис. 5.35. Розподіли до прикладу 5.21: а — амплітуд напруги та струму; б — опорів; в — активної та реактивної потужностей

Обчислимо ККД:

$$\eta = \frac{P_{\text{Ан}}}{P_{\text{А1}}} = \frac{0,18}{0,3756} = 0,48.$$

Оскільки модуль комплексного коефіцієнта відбиття змінюється вздовж лінії, змінюються також КСХ і КБХ. Тому обмежимося оцінками КСХ і КБХ на виході та вході лінії, які визначимо за значеннями нормованих активних опорів у цих перерізах:

$$k_{\text{схн}} = R'_n = 3; k_{\text{бхн}} = 1/R'_n = 1/3 = 0,33;$$

$$k_{\text{сх1}} = R'_1 = \frac{R_1}{R_{\text{хв}}} = \frac{169,06}{92,6} = 1,826; k_{\text{бх1}} = \frac{1}{k_{\text{сх1}}} = \frac{1}{1,826} = 0,548.$$

5.9. Методи узгодження довгих ліній

Режим біжних хвиль, який потребує узгодження навантаження з хвильовим опором лінії, широко застосовують у радіотехніці й енергетиці. Так, у радіотехніці використовують переваги цього режиму, а саме неспотворену передачу сигналів, а в енергетиці — мінімальні втрати і максимальний ККД. Однак не завжди можна підібрати стандартні кабелі для заданого навантаження або навпаки, змінити опір навантаження відповідно до заданого хвильового опору лінії. Тоді слід використовувати узгоджувальні пристрої лінії з навантаженням (рис. 5.36; а).

Окрім узгодження лінії з навантаженням, також узгоджують джерело з лінією (рис. 5.36, б). При цьому, залежно від критерію узгодження, узгоджувальні пристрої забезпечують виконання таких умов:

- 1) $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_i^*$ — передачу максимальної активної потужності до навантаження;
- 2) $R_{\text{вх}} \gg R_i$ — максимальний ККД;
- 3) $\underline{Z}_{\text{вих}} = \underline{Z}_{\text{хв}}$ — усунення відбиття сигналу від входу лінії.

Для того щоб зменшити власні активні втрати, узгоджувальні пристрої мають містити високодобротні, а в першому наближенні — реактивні елементи.

В інженерній практиці вважають, що хвильовий опір є активним ($\underline{Z}_{\text{хв}} = R_{\text{хв}}$). Тому одним із основних параметрів радіочастотних кабелів є величина $R_{\text{хв}}$ (типові значення 75 і 50 Ом). При цьому втратами нехтують або застосовують спеціальні заходи для балансування ліній (забезпечення активного характеру хвильового опору в заданому частотному діапазоні).

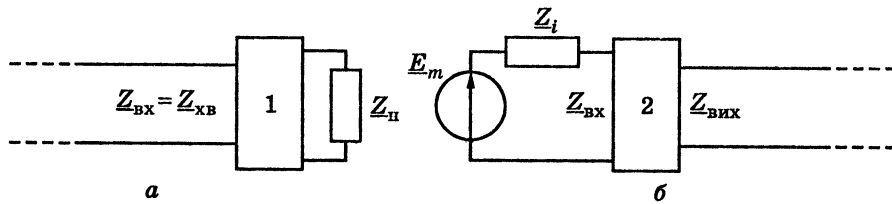


Рис. 5.36. Узгодження лінії: *a* — з навантаженням; *б* — із джерелом (1 — узгоджувальний пристрій лінії з навантаженням, 2 — узгоджувальний пристрій джерела з лінією)

Для збалансованих довгих ліній (ЗДЛ) виконується умова

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{G_1}{C_1}, \quad (5.121)$$

за якої хвильовий опір лінії (див. табл. 5.6) є активним:

$$\underline{Z}_{хв} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1(R_1/L_1 + j\omega)}{C_1(G_1/C_1 + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = R_{хв}. \quad (5.122)$$

Оскільки в реальних ліній зазвичай $R_1/L_1 > G_1/C_1$, щоб задовольнити умові (5.121), збільшують індуктивність L_1 шляхом послідовного ввімкнення додаткових індуктивних котушок рівномірно вздовж лінії (вперше такий прийом запропонував Пупін¹¹) або застосовують магнітопровідні матеріали (автор — Краруп¹²). Тому ці способи балансування називають «пупенізація» і «крарупізація», за прізвищами вчених.

Перевагою збалансованих ліній також є те, що коефіцієнт ослаблення (див. табл. 5.9) $\alpha \approx 0,5(R_1/R_{хв} + G_1/R_{хв})$, з огляду на формулу (5.122), приймає найменше значення (при всіх можливих значеннях $R_{хв}$): $\alpha \approx \sqrt{R_1 G_1}$.

¹¹Пупін Михайле (1858–1935) — американський фізик та електротехнік. Серб за походженням. Емігрував у США (1874), де закінчив Колумбійський університет (1883). Навчався в Кембриджському і Берлінському університетах (1885–1889). З 1889 р. професор теоретичної фізики заснованого ним електротехнічного факультету Колумбійського університету, декан цього факультету (1891–1931). Розрахував і дослідив підтвердив можливість збільшення дальності телеграфного та телефонного зв'язку по кабельних лініях. Йому належать також дослідження з фізики рентгенівських променів і розробка методів їх застосування.

¹²Краруп Карл, С. Е. Крагур — датський інженер, запропонував спосіб збільшення дальності передачі по кабелях зв'язку, штучно збільшуючи їхню індуктивність (1902).

У діапазоні порівняно низьких частот як узгоджувальні пристрої використовують трансформатори, в тому числі зв'язані резонансні контури. Із зростанням частоти застосування трансформаторів стає неефективним через вплив міжвиткових і міжобмоткових ємностей і збільшення втрат. Тому в узгоджувальних пристроях на вищих частотах як трансформатори або як реактивні елементи застосовують відрізки ДЛ.

Враховуючи вищезгадане, головну увагу в подальшому розгляді приділено методам узгодження за допомогою відрізків ДЛ. При цьому для спрощення аналізу узгоджувані відрізки і лінії вважаються ідеальними, а для скорочення викладення розглядаються тільки методи узгодження ліній з навантаженням.

5.9.1. Застосування відрізків ліній як трансформаторів

Використання ліній як трансформаторів (рис. 5.37) базується на тому, що вхідний опір відрізка лінії, довжина якого не кратна половині довжини хвилі, відрізняється від опору навантаження. Загальний вираз для вхідного опору лінії (див. табл. 5.8), використовуючи прийняті на рис. 5.37 позначення, можна записати у вигляді:

$$\underline{Z}_{вх} = R_{хв.тр} \frac{\underline{Z}_н + jR_{хв.тр} \operatorname{tg}(2\pi l_{тр}/\lambda_{тр})}{R_{хв.тр} + j\underline{Z}_н \operatorname{tg}(2\pi l_{тр}/\lambda_{тр})}. \quad (5.123)$$

Найширше практичне застосування мають так звані *чверть-хвильові трансформатори* ($\lambda/4$ -трансформатори), довжина яких дорівнює непарній кількості $\lambda_{тр}/4$: $l_{тр} = (2n + 1)\lambda_{тр}/4$. При цьому $2\pi l_{тр}/\lambda_{тр} = (2n + 1)\pi/2$ і вхідний опір (5.123) становить

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{R_{хв.тр}^2}{\underline{Z}_н}. \quad (5.124)$$

Співвідношення (5.124) засвідчує, що $\lambda/4$ -трансформатор аналогічний ідеальному трансформатору. Оскільки коефіцієнт трансформації в даному випадку дорівнює $R_{хв.тр}$ і має розмірність опору, $\lambda/4$ -трансформатор, на відміну від ідеального, змінює характер опору (індуктивний на ємнісний і навпаки).

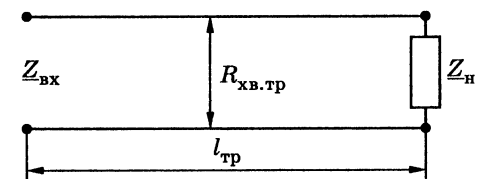


Рис. 5.37. Відрізок лінії як трансформатор

В окремому випадку, коли навантаження є активним ($Z_H = R_H$), вхідний опір $\lambda/4$ -трансформатора також активний:

$$R_{вх} = \frac{R_{хв.тр}^2}{R_H} \quad (5.125)$$

Вираз (5.125) дозволяє обґрунтувати принцип і виконати розрахунок $\lambda/4$ -трансформатора для узгодження активного навантаження R_H з лінією, яка має хвильовий опір $R_{хв.л}$. Для цього $\lambda/4$ -трансформатор вмикається між лінією та навантаженням і забезпечує рівність $R_{вх} = R_{хв.л}$, яка дозволяє визначити з формули (5.125) шуканий хвильовий опір трансформатора:

$$R_{хв.тр} = \sqrt{R_{хв.л} R_H} \quad (5.126)$$

Отже, для узгодження лінії та активного навантаження хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора має дорівнювати середньому геометричному опору навантаження і хвильового опору лінії.

На рис. 5.38 зображені схеми ввімкнення $\lambda/4$ -трансформаторів для узгодження ліній при двох активних навантаженнях $R_{H1} = 4R_{хв.л}$ і $R_{H2} = R_{хв.л}/4$, а також графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$.

За умови $R_{H1} = 4R_{хв.л}$ хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора $R_{хв.тр} = 2R_{хв.л}$, а за $R_{H2} = R_{хв.л}/4$ опір $R_{хв.тр} = 0,5R_{хв.л}$. Різницю хвильових опорів ліній та $\lambda/4$ -трансформаторів на схемах позначають різницею відстаней між провідниками: чим більша ця відстань, тим менша погонна емність і більший хвильовий опір і навпаки (див. рис. 5.38, а). Практично, у випадку $R_{хв.тр} < R_{хв.л}$ трансформуючу лінію створюють з основної лінії, збільшуючи її товщину за допомогою трубок.

Аналіз графіків (рис. 5.38) показує, що в $\lambda/4$ -трансформаторі спостерігається режим змішаних, а в лінії — біжних хвиль. Можна показати, що КСХ, який був би в лінії з тим самим навантаженням без узгодження $k_{сх.л}$, і КСХ у $\lambda/4$ -трансформаторі $k_{сх.тр}$ пов'язані співвідношенням

$$k_{сх.тр} = \sqrt{k_{сх.л}}$$

Відносно малі розміри і зменшене значення КСХ $\lambda/4$ -трансформатора обумовлює широке застосування цього способу узгодження

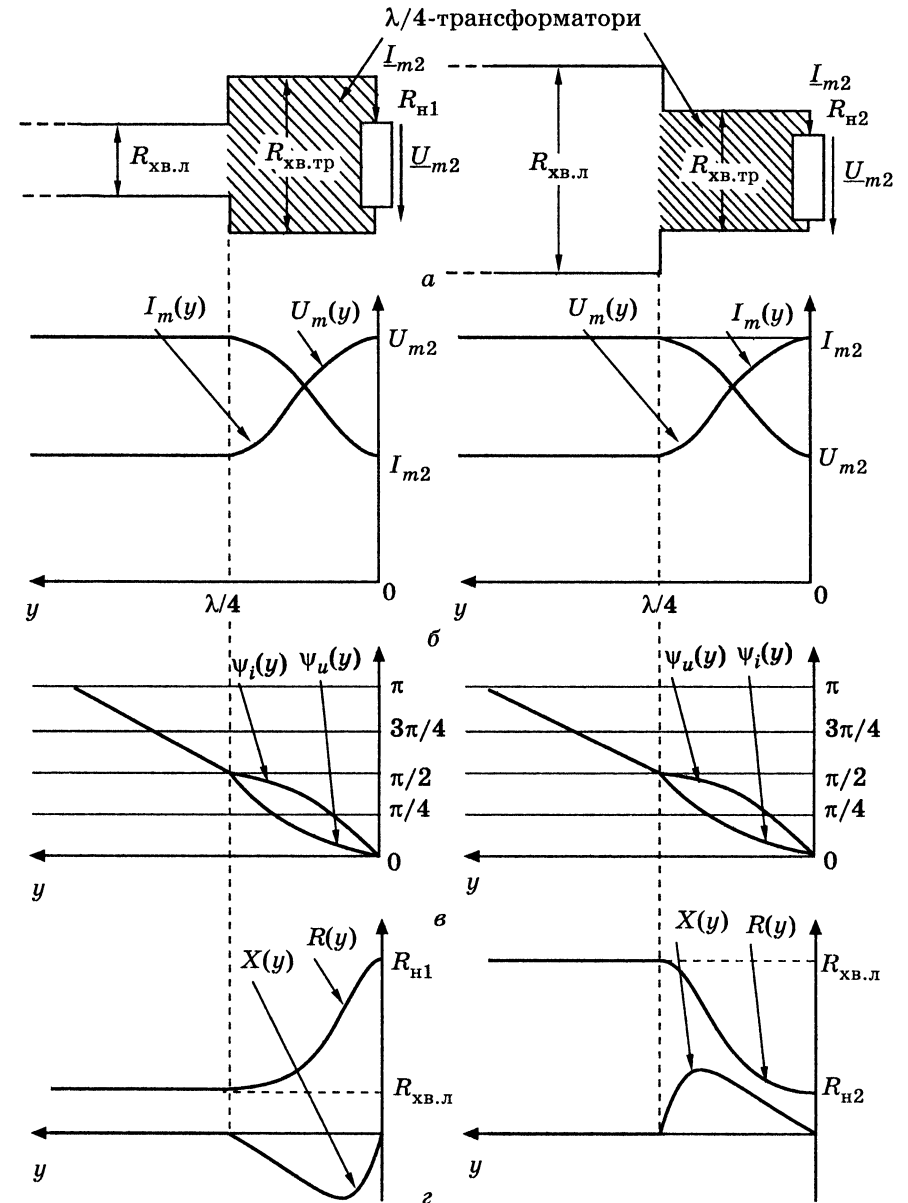


Рис. 5.38. Узгодження ідеальної лінії з активним навантаженням ($R_{H1} = 4R_{хв.л}$; $R_{H2} = R_{хв.л}/4$) $\lambda/4$ -трансформатором:

а — схеми; розподіли: б — амплітуд напруги та струму;

в — початкових фаз напруги та струму ($\psi_{u2} = \psi_{i2} = 0$); г — опорів

реальних ліній як з навантаженням, так і між двома лініями за умови різних значень хвильових опорів¹³.

Трансформуючі властивості відрізків ДЛ використовують для узгодження ліній при комплексному опорі. Застосовують такі способи узгодження (рис. 5.39):

1) увімкнення $\lambda/4$ -трансформатора у переріз лінії з активним опором (рис. 5.39, а);

2) компенсація реактивної складової провідності навантаження за допомогою паралельно увімкненого відрізка короткозамкненої або розімкненої лінії з подальшою трансформацією активної провідності навантаження $\lambda/4$ -трансформатором (рис. 5.39, б);

3) вибір довжини трансформуючого відрізка $l_{тр}$ (загалом $l_{тр} \neq \lambda/4$) і його хвильового опору $R_{хв.тр}$, щоб забезпечити рівність вхідного опору трансформатора хвильовому опорі лінії (рис. 5.39, в).

Координату перерізу лінії АБ з активним опором можна визначити експериментально за максимумом або мінімумом амплітуди напруги. Щоб знайти відстань l_R від навантаження до цього перерізу і значення опору R_{AB} у ньому (рис. 5.39, а), можна застосувати співвідношення (5.118) і (5.119), отримані при розгляді режиму змішаних хвиль для комплексного навантаження. Враховуючи додатний знак величини l_R і прийняті вище позначення, ці співвідношення матимуть вигляд:

$$l_R = \frac{1}{\beta} \arctg \left\{ \frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} + \sqrt{\left[\frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} \right]^2 + 1} \right\}; \quad (5.127)$$

$$R_{AB} = R_{хв.л} \frac{R'_H (1 + \operatorname{tg}^2 \beta l_R)}{1 - 2X'_H \operatorname{tg} \beta l_R + (Z'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R} = \frac{R_{хв.л}^2 R'_H (1 + \operatorname{tg}^2 \beta l_R)}{R_{хв.л}^2 - 2X'_H R_{хв.л} \operatorname{tg} \beta l_R + Z_H^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R}, \quad (5.128)$$

де $R'_H = R_H / R_{хв.л}$; $X'_H = X_H / R_{хв.л}$; $Z'_H = Z_H / R_{хв.л}$ — нормовані опори навантаження лінії.

¹³Аналогічний принцип застосований у так званій «освітленій» оптиці, де для зменшення відбиття від лінз використовують шар матеріалу товщиною $\lambda/4$, у якого коефіцієнт заломлення світла дорівнює середньому геометричному коефіцієнтів заломлення у склі та повітрі.

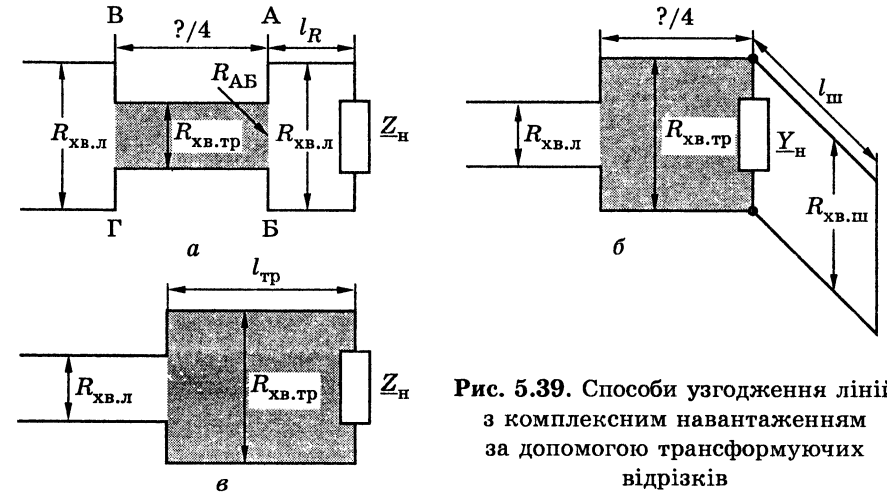


Рис. 5.39. Способи узгодження ліній з комплексним навантаженням за допомогою трансформуючих відрізків

Для узгодження R_{AB} з $R_{хв.л}$ хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора (рис. 5.39, а) на підставі виразу (5.126) має становити

$$R_{хв.тр} = \sqrt{R_{хв.л} R_{AB}}. \quad (5.129)$$

У колі (рис. 5.39, а) в $\lambda/4$ -трансформаторі та ділянці лінії від комплексного навантаження до перерізу АБ буде режим змішаних, а в іншій частині лінії — режим біжних хвиль.

Відрізки короткозамкнених чи розімкнених ліній (рис. 5.39, б), які увімкнено до лінії паралельно, називають *шлейфами*.

Ідеальні шлейфи мають тільки реактивні комплексні опори $jX_{ш}$ (провідності $-jB_{ш}$). Тому, якщо увімкнути паралельно навантаженню з комплексною провідністю $Y_H = G_H - jB_H$ (рис. 5.39, б) шлейф, у якого $B_{ш} = -B_H$, еквівалентна провідність навантаження стає активною G_H . Далі для узгодження достатньо увімкнути в лінію $\lambda/4$ -трансформатор із хвильовим опором:

$$R_{хв.тр} = \sqrt{\frac{R_{хв.л}}{G_H}}. \quad (5.130)$$

У шлейфі встановлюється режим стійних хвиль, а в $\lambda/4$ -трансформаторі та лінії — відповідно режими змішаних і біжних хвиль. Слід також враховувати, що такий спосіб узгодження застосовують тільки тоді, коли є можливість змінювати параметри навантаження (загалом $G_H \neq 1/R_H$).

При узгодженні комплексного навантаження за допомогою трансформуючого відрізка лінії (рис. 5.39, в) параметри цього

відрізку ($l_{\text{тр}}$ та $R_{\text{хв.тр}}$) можна визначити з виразу (5.123) за умови $Z_{\text{вх}} = R_{\text{хв.л}}$:

$$R_{\text{хв.л}} = R_{\text{хв.тр}} \frac{Z_{\text{н}} + jR_{\text{хв.тр}} \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})}{R_{\text{хв.тр}} + jZ_{\text{н}} \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})} = R_{\text{хв.тр}} \frac{R_{\text{н}} + j[X_{\text{н}} + R_{\text{хв.тр}} \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})]}{R_{\text{хв.тр}} - X_{\text{н}} \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}}) + jR_{\text{н}} \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})}. \quad (5.131)$$

Після перетворень із виразу (5.131) виходять два незалежних рівняння:

$$\operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}}) = \frac{R_{\text{хв.тр}} R_{\text{хв.л}} - R_{\text{н}} R_{\text{хв.тр}}}{R_{\text{хв.л}} X_{\text{н}}}; \quad \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}}) = \frac{R_{\text{хв.тр}} X_{\text{н}}}{R_{\text{н}} R_{\text{хв.л}} - R_{\text{хв.тр}}^2},$$

розв'язання яких приводить до співвідношень для розрахунку параметрів трансформуючого відрізку лінії:

$$R_{\text{хв.тр}} = \sqrt{R_{\text{хв.л}} \frac{Z_{\text{н}}^2 - R_{\text{н}} R_{\text{хв.л}}}{R_{\text{н}} - R_{\text{хв.л}}}} = R_{\text{хв.л}} \sqrt{\frac{(Z'_{\text{н}})^2 - R'_{\text{н}}}{R'_{\text{н}} - 1}}; \quad (5.132)$$

$$l_{\text{тр}} = \frac{1}{\beta_{\text{тр}}} \arctg \frac{R_{\text{хв.тр}} (R_{\text{хв.л}} - R_{\text{н}})}{R_{\text{хв.л}} X_{\text{н}}} = \frac{1}{\beta_{\text{тр}}} \arctg \left(\frac{R_{\text{хв.тр}}}{R_{\text{хв.л}}} \frac{1 - R'_{\text{н}}}{X'_{\text{н}}} \right). \quad (5.133)$$

Якщо параметри навантаження і хвильовий опір лінії такі, що підкореневий вираз у формулі (5.132) від'ємний або прямує до нескінченності (якщо $R'_{\text{н}} = 1$), даний спосіб узгодження фізично не можна реалізувати. В окремому випадку, коли навантаження активне ($X_{\text{н}} = 0$), параметри трансформуючого відрізку лінії збігаються з параметрами $\lambda/4$ -трансформатора ($R_{\text{хв.тр}} = \sqrt{R_{\text{хв.л}} R_{\text{н}}}$; $l_{\text{тр}} = \lambda_{\text{тр}}/4$).

Доцільність вибору певного способу узгодження із застосуванням трансформуючих відрізків ліній визначається конкретною задачею. Однак ці способи мають спільний недолік — необхідність забезпечити потрібний хвильовий опір трансформуючої лінії, що призводить до необхідності іноді використовувати інші методи узгодження. Зазначеного недоліку не мають методи узгодження за допомогою паралельно ввімкнених шлейфів, конструктивні й електричні параметри яких $R_{\text{хв}}$ і β такі ж самі, як і в основній лінії. Різновиди даного способу узгодження показані на рис. 5.40.

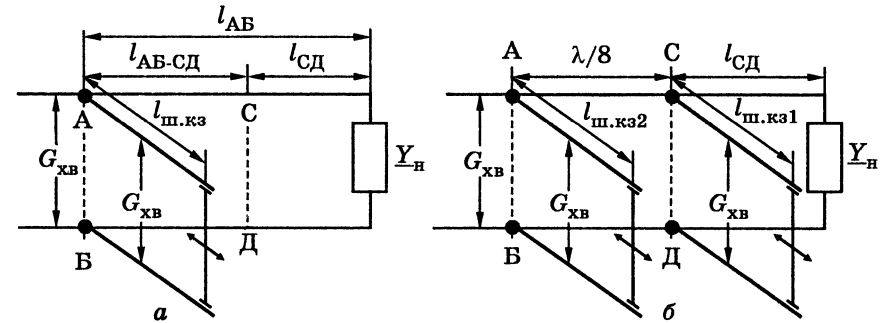


Рис. 5.40. Узгодження ліній за допомогою короткозамкнених паралельних шлейфів: а — одним; б — двома

5.9.2. Узгодження паралельно ввімкненими шлейфами

Оскільки шлейфи ввімкнено паралельно (рис. 5.39), для аналізу використовують і на схемах позначають саме провідності відповідних елементів. Принципово можна використовувати як короткозамкнені, так і розімкнені шлейфи. На практиці частіше використовують короткозамкнені шлейфи через більш жорстку конструкцію та можливості підстроювання переміщенням перемички на кінці шлейфа, як це умовно показано на рис. 5.40.

Спосіб узгодження одним шлейфом (одношлейфове узгодження) (рис. 5.40, а) вперше запропонований Татаріновим¹⁴.

Для узгодження одним шлейфом мають виконуватися умови:

1) активна складова комплексної провідності лінії в місці ввімкнення шлейфа (переріз АБ) дорівнює хвильовій:

$$\underline{Y}(l_{\text{АБ}}) = G_{\text{хв}} - jB(l_{\text{АБ}}); \quad (5.134)$$

2) реактивна провідність шлейфа відрізняється від реактивної складової комплексної провідності лінії у перерізі АБ:

$$\underline{Y}_{\text{ш}} = -jB_{\text{ш}} = jB(l_{\text{АБ}}); \quad B_{\text{ш}} = -B(l_{\text{АБ}}). \quad (5.135)$$

Якщо виконуються умови (5.134) і (5.135), перша з яких забезпечується величиною $l_{\text{АБ}}$, а друга — довжиною шлейфа $l_{\text{ш}}$,

¹⁴ Татарінов Володимир Васильович (1878–1941) — відомий радянський радіотехнік. Закінчив Московський університет (1904). Працював у Нижегородській і Центральній ленинградській радіолабораторіях. Основні праці присвячені розвитку зв'язку на коротких хвилях (принцип застосування хвиль різної довжини для роботи вдень і вночі; нова система спрямованих антен; способи узгодження антен; розрахунок комплексних опорів складних антен; розроблення антен метрових і дециметрових хвиль).

еквівалентна провідність кола в перерізі АБ після ввімкнення шлейфа становитиме

$$\underline{Y}_e(l_{AB}) = \underline{Y}(l_{AB}) + \underline{Y}_{ш} = G_{хв}. \quad (5.136)$$

На ділянці лінії від входу до перерізу АБ буде режим біжних хвиль, від перерізу АБ до навантаження — режим змішаних, а в шлейфі — режим стійних хвиль.

Для аналізу одношлейфового узгодження доцільно використовувати нормовану комплексну провідність лінії, аналітичний вираз якої отримують із загального співвідношення для опору лінії (див. табл. 5.8):

$$\begin{aligned} \underline{Y}'(y) &= \frac{1}{\underline{Z}'(y)} = \frac{\underline{Y}'_н + j \operatorname{tg} \beta y}{1 + j \underline{Y}'_н \operatorname{tg} \beta y} = \frac{G'_н + j(\operatorname{tg} \beta y - B'_н)}{1 + B'_н \operatorname{tg} \beta y + j G'_н \operatorname{tg} \beta y} = G'(y) - j B'(y) = \\ &= \frac{G'_н (1 + \operatorname{tg}^2 \beta y)}{1 + 2 B'_н \operatorname{tg} \beta y + (Y'_н)^2 \operatorname{tg}^2 \beta y} - j \frac{B'_н + [(Y'_н)^2 - 1] \operatorname{tg} \beta y - B'_н \operatorname{tg}^2 \beta y}{1 + 2 B'_н \operatorname{tg} \beta y + (Y'_н)^2 \operatorname{tg}^2 \beta y}, \quad (5.137) \end{aligned}$$

де $\underline{Y}'(y) = \underline{Y}(y)/G_{хв}$; $G'(y) = G(y)/G_{хв}$; $B'(y) = B(y)/G_{хв}$; $\underline{Y}'_н = \underline{Y}_н/G_{хв} = G'_н - j B'_н$; $B'_н = B_н/G_{хв}$; $G'_н = G_н/G_{хв}$; $Y'_н = Y_н/G_{хв} = \sqrt{(G'_н)^2 + (B'_н)^2}$ — відповідні нормовані провідності; $G_{хв}$ — активна хвильова провідність ідеальної лінії.

Співвідношення для l_{AB} і $l_{ш}$, які впливають з виразів (5.134)–(5.137), при комплексному навантаженні $\underline{Y}_н$ є досить громіздкими. Тому використовують метод розрахунку, що полягає в попередньому визначенні перерізу лінії СД (рис. 5.40, а) з чисто активною провідністю. Режим активного навантаження має і самостійне значення. В табл. 5.20 і 5.21 наведено порядок операцій і довідкові формули в режимах навантаження лінії на активну та довільну комплексну провідності.

Враховуючи багатозначність розв'язків щодо місця ввімкнення і довжини (табл. 5.20 і 5.21), на практиці вибирають значення цих величин, виходячи з умов фізичної реалізації ємності ($l_{AB} > 0$; $l_{ш.кз} > 0$; $l_{ш.хх} > 0$) і конструктивних вимог.

Недоліком методу узгодження одним шлейфом є складність налаштування, що виникає при регулюванні величини l_{AB} . Цього недоліку практично не має метод узгодження, що використовує два паралельні шлейфи. Перший шлейф вмикають паралельно навантаженню або на певній відстані $l_{СД}$ від нього в перерізі СД (рис. 5.40, б), а другий — у перерізі АБ на відстані $\lambda/8$ або $3\lambda/8$ від першого шлейфа.

Таблиця 5.20

Порядок операцій і довідкові формули для розрахунку режиму одношлейфового узгодження лінії з активним навантаженням

Параметр	Формула
Місце ввімкнення шлейфа $l_{СД}$ з умови $G'(l_{AB}) = 1$	$\operatorname{tg}(\beta l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'_н} = \pm \sqrt{G_{хв}/G_н}$; $l_{AB} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}(\pm \sqrt{1/G'_н})$
Реактивна провідність у місці ввімкнення шлейфа	$B'(l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'_н} (G'_н - 1)$
Реактивна провідність шлейфа	$B'_{ш} = -B'(l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'_н} (1 - G'_н)$
Довжина короткозамкненого шлейфа	$l_{ш.кз} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left[\pm \frac{1}{\sqrt{1/G'_н} (1 - G'_н)} \right]$
Довжина розімкненого шлейфа	$l_{ш.хх} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} [\pm \sqrt{1/G'_н} (1 - G'_н)]$

Довжину першого шлейфа $l_{ш1}$ вибирають такою, щоб у перерізі АБ активна провідність лінії дорівнювала хвильовій, тобто виконувалась умова (5.134).

Довжину другого шлейфа $l_{ш2}$ визначають з умови (5.135), тобто його реактивна провідність відрізняється від реактивної провідності лінії у перерізі АБ тільки знаком.

Отже, внаслідок увімкнення двох паралельних шлейфів лінія буде узгодженою на ділянці від входу до перерізу АБ. На ділянках від перерізу АБ до навантаження спостерігається режим змішаних, а в шлейфах — режим стійних хвиль.

Співвідношення для розрахунку двошлейфового узгоджувального пристрою досить складні. Тому для приблизних оцінок довжин шлейфів застосовують кругову діаграму (підрозд. 5.10), а після виготовлення та ввімкнення шлейфів настройку здійснюють, змінюючи розташування перемичок, які замикають шлейфи.

5.9.3. Узгодження коаксіальних кабелів із симетричними вібраторами

У діапазонах метрових і дециметрових хвиль як антени широко застосовують так звані симетричні вібратори — два провідника ДЛ, які розведено під кутом 180° один відносно одного. Симетричний вібратор довжиною $\lambda/2$ (рис. 5.41, а) має еквівалентний опір (опір випромінення) $R_A \approx 75$ Ом. Різновидом напівхвильового

Таблиця 5.21

Порядок операцій і довідкові формули
для розрахунку режиму одношлейфового узгодження
лінії з комплексним навантаженням

Параметр	Формула
Довжина $l_{\text{СД}}$ з умови $B'(l_{\text{СД}}) = 0$	$l_{\text{СД}} = \frac{1}{\beta} \arctg \left[\frac{(Y'_H)^2 - 1}{2B'_H} \pm \frac{\sqrt{(Y'_H)^4 + 2[(B'_H)^2 - (G'_H)^2] + 1}}{2B'_H} \right]$
Активна провідність лінії у перерізі СД	$G'(l_{\text{СД}}) = \frac{G'_H (1 + \text{tg}^2 \beta l_{\text{СД}})}{1 + 2B'_H \text{tg} \beta l_{\text{СД}} + (Y'_H)^2 \text{tg}^2 \beta l_{\text{СД}}}$
Довжина $l_{\text{АБ-СД}}$ з умови $G'(l_{\text{СД}}) = 1$	$l_{\text{АБ-СД}} = \frac{1}{\beta} \arctg \left(\pm \sqrt{1/G'(l_{\text{СД}})} \right)$
Реактивна провідність у місці ввімкнення шлейфа	$B'(l_{\text{АБ}}) = \pm \sqrt{1/G'(l_{\text{СД}})} [G'(l_{\text{СД}}) - 1]$
Реактивна провідність шлейфа	$B'_ш = -B'(l_{\text{АБ}}) = \pm \sqrt{1/G'(l_{\text{СД}})} [1 - G'(l_{\text{СД}})]$
Довжина короткозамкненого шлейфа	$l_{\text{ш.кз}} = \frac{1}{\beta} \arctg \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{1/G'(l_{\text{СД}})} [1 - G'(l_{\text{СД}})]} \right\}$
Довжина розімкненого шлейфа	$l_{\text{ш.хх}} = \frac{1}{\beta} \arctg \left\{ \pm \sqrt{1/G'(l_{\text{СД}})} [1 - G'(l_{\text{СД}})] \right\}$

вібратора, який має опір $R_A \approx 300$ Ом, ширшу смугу частот і застосовується в телебаченні, є петльовий, або шлейф-вібратор (рис. 5.41, в). Петльовий вібратор запропонував Пістолькорс¹⁵.

Симетрія вібраторів полягає в тому, що комплексні амплітуди струмів і напруг у симетричних перерізах по осі x відрізняються тільки знаком (рис. 5.41, а), тобто зсунуті за фазою на π . З цієї

¹⁵Пістолькорс Олександр Олександрович (1896–1996) — член-кореспондент АН СРСР. Закінчив Московське вище технічне училище (1927). Працював у Нижегородській та Центральній ленинградській радіолабораторіях, а також викладав у вищих навчальних закладах Ленінграда і Москви. Наукові праці присвячені теорії антен і фідерних ліній (розрахунок опорів випромінювання складних антен; теорія двопровідних несиметричних ліній; розрахунок антен за діаграмою спрямованості; теорія щілинних антен). Запропонував нові типи антен, зокрема петльовий вібратор (1936).

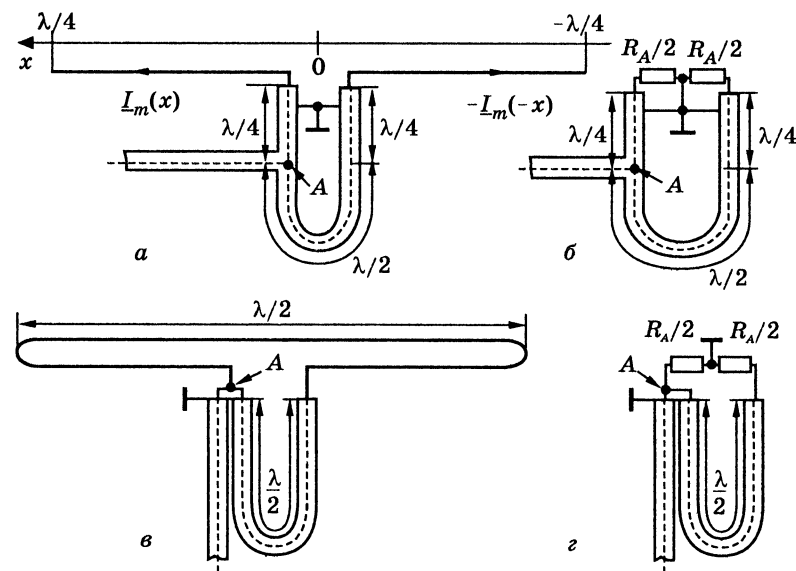


Рис. 5.41. Узгодження вібраторів з коаксіальним кабелем:
а, б — напівхвильового; в, г — петльового

точки зору доцільно підключати такі вібратори до симетричної двопровідної лінії. Однак симетричні ДЛ мають небажане випромінювання і тому переважно використовують коаксіальні кабелі, які є несиметричними лініями.

Для того щоб забезпечити симетрію та режим узгодження при ввімкненні коаксіальних кабелів до симетричних вібраторів, які є навантаженням, використовують $\lambda/4$ -трансформатори і фазообертачі на π (виготовлені з коаксіальних кабелів).

На рис. 5.41, а показано схему симетрувального й узгоджувального пристрою для напівхвильового вібратора. Пристрій складається з двох трансформаторів і відрізка лінії довжиною $\lambda/2$, який виконує функцію фазообертача на π . Для того щоб проаналізувати роботу пристрою, вібратор можна замінити еквівалентною схемою з двох послідовно ввімкнених активних опорів $R_A/2$, які є навантаженням $\lambda/4$ -трансформаторів. Тоді опір на вході кожного трансформатора становитиме $R_{\text{вх}} = 2R_{\text{хв}}^2/R_A$, де $R_{\text{хв}}$ — хвильовий опір кабелю.

Оскільки вхідний і навантажувальний опір відрізка лінії довжиною $\lambda/2$ однакові, в точці А кабелю ввімкнено два паралельно з'єднаних опори $R_{\text{вх}}$, тобто, кабель буде навантажено на опір:

$$R_H = 0,5R_{\text{вх}} = R_{\text{хв}}^2/R_A.$$

Отже, для узгодження слід виконати умову

$$R_{\text{хв}} = R_{\text{н}} = R_A \approx 75 \text{ Ом.}$$

Для того щоб увімкнути петльовий вібратор до коаксіального кабелю, необхідний тільки відрізок лінії довжиною $\lambda/2$, який змінює фазу (рис. 5.41, в). Схема заміщення (рис. 5.41, з) показує, що в точці А кабель буде навантажений на два паралельно з'єднаних опори величиною $R_A/2$ кожний, і тому опір навантаження становитиме $R_{\text{н}} = 0,25R_A \approx 75 \text{ Ом.}$

Як і для напівхвильового, щоб узгодити петльовий вібратор, використовують кабель із хвильовим опором $R_{\text{хв}} = R_{\text{н}} \approx 75 \text{ Ом.}$ Тому це значення хвильового опору є стандартним для коаксіальних кабелів.

Відрізки кабелю, з яких конструюють розглянуті пристрої, схожі на латинську літеру U і тому називаються «U-коліно».

Приклад 5.22. Розрахувати параметри $\lambda/4$ -трансформаторів для узгодження системи з двох послідовно з'єднаних ідеальних симетричних двопровідних ліній і навантаження на частоті $f=100 \text{ МГц.}$ Перша лінія має хвильовий опір $R_{\text{хв.л1}}=200 \text{ Ом,}$ а друга — $R_{\text{хв.л2}}=300 \text{ Ом.}$ Навантаженням другої лінії є комплексний опір $Z_{\text{н}}=600-j900 \text{ Ом.}$ Побудувати графіки розподілу амплітуд напруги і струму в лініях і $\lambda/4$ -трансформаторах після узгодження, якщо амплітуда вхідної напруги $U_{m1}=9 \text{ В.}$

Розв'язання. Складемо схему, яка містить дві лінії, два узгоджувальних $\lambda/4$ -трансформатори й опір навантаження (рис. 5.42, а).

Для визначення місця ввімкнення другого $\lambda/4$ -трансформатора (відстань l_R до перерізу АВ) та його хвильового опору $R_{\text{хв.тр2}}$ застосуємо формули (5.127) і (5.128), попередньо обчисливши значення нормованих опорів і коефіцієнта фази:

$$Z'_{\text{н}} = \frac{Z_{\text{н}}}{R_{\text{хв.л1}}} = \frac{\sqrt{R_{\text{н}}^2 + X_{\text{н}}^2}}{R_{\text{хв.л1}}} = \frac{\sqrt{600^2 + 900^2}}{300} = 3,606; R'_{\text{н}} = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{хв.л1}}} = \frac{600}{300} = 2;$$

$$X'_{\text{н}} = \frac{X_{\text{н}}}{R_{\text{хв.л1}}} = \frac{-900}{300} = -3; \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 2,094 \text{ рад/м;}$$

$$l_R = \frac{1}{2,094} \arctg \left\{ -\frac{3,606^2 - 1}{2 \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{(3,606^2 - 1)^2}{4 \cdot (-3)^2} + 1} \right\} = 0,639 \text{ м;}$$

$$R_{\text{АВ}} = \frac{300 \cdot [1 + \text{tg}^2(2,094 \cdot 0,639)]}{1 - 2 \cdot (-3) \cdot \text{tg}(2,094 \cdot 0,639) + 3,606^2 \text{tg}^2(2,094 \cdot 0,639)} = 43,769 \text{ Ом.}$$

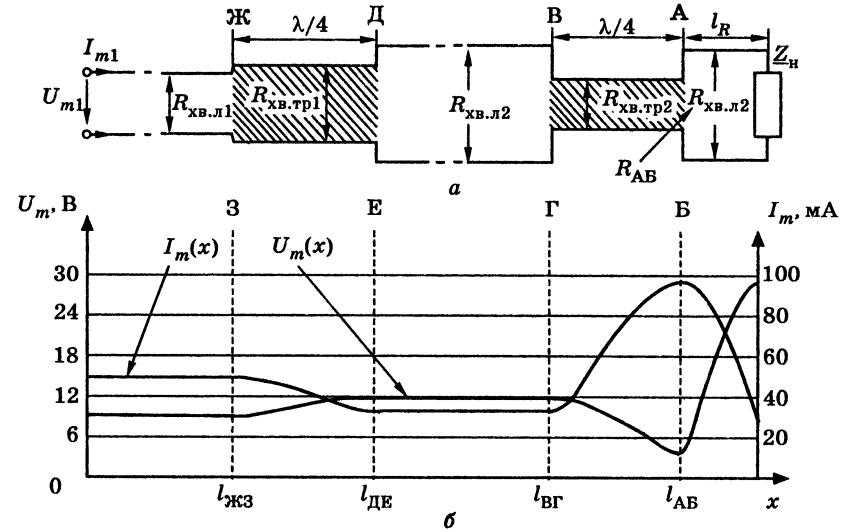


Рис. 5.42. До прикладу 5.22:

а — схема; б — графіки розподілів амплітуд напруги та струму

За формулою (5.126) визначимо хвильові опори $\lambda/4$ -трансформаторів:

$$R_{\text{хв.тр2}} = \sqrt{R_{\text{хв.л2}} R_{\text{АВ}}} = \sqrt{300 \cdot 43,769} = 114,59 \text{ Ом;}$$

$$R_{\text{хв.тр1}} = \sqrt{R_{\text{хв.л1}} R_{\text{хв.л2}}} = \sqrt{200 \cdot 300} = 244,95 \text{ Ом.}$$

Враховуючи задану амплітуду на вході першої лінії, розрахунок розподілу амплітуд напруги та струму виконаємо за координатою x . Перша лінія узгоджена, тому на ділянці $0 \leq x \leq l_{\text{ЖЗ}}$ до перерізу ЖЗ

$$U_m(x) = U_{m1} = 9 \text{ В; } I_m(x) = \frac{U_{m1}}{R_{\text{хв.л1}}} = \frac{9}{200} = 0,045 \text{ А} = 45 \text{ мА.}$$

Для визначення розподілів $U_m(x)$ і $I_m(x)$ у межах першого $\lambda/4$ -трансформатора ($l_{\text{ЖЗ}} \leq x \leq l_{\text{ДЕ}}$) застосуємо загальні співвідношення з табл. 5.8, враховуючи значення амплітуд напруги та струму на його вході $U_m(l_{\text{ЖЗ}}) = 9 \text{ В; } I_m(l_{\text{ЖЗ}}) = 45 \text{ мА:}$

$$U_m(x) = \sqrt{U_m^2(l_{\text{ЖЗ}}) \cos^2[\beta(x-l_{\text{ЖЗ}})] + I_m^2(l_{\text{ЖЗ}}) R_{\text{хв.тр1}}^2 \sin^2[\beta(x-l_{\text{ЖЗ}})]}; \quad (5.138)$$

$$I_m(x) = \sqrt{I_m^2(l_{\text{ЖЗ}}) \cos^2[\beta(x-l_{\text{ЖЗ}})] + \frac{U_m^2(l_{\text{ЖЗ}}) \sin^2[\beta(x-l_{\text{ЖЗ}})]}{R_{\text{хв.тр1}}^2}}. \quad (5.138a)$$

Використовуючи вирази (5.138) і (5.138a), побудуємо графіки (рис. 5.42, б) і визначимо амплітуди напруги і струму $U_m(l_{\text{ДЕ}})$; $I_m(l_{\text{ДЕ}})$ на вході другої лінії, в якій на ділянці ДЕ-ВГ буде режим біжних хвиль.

Таблиця 5.22 Амплітуди напруги та струму в перерізах лінії

Переріз	ЖЗ	ДЕ	ВГ	АБ	Z_H
$U_m, В$	9	11,02	11,02	4,21	28,1
$I_m, мА$	45	37	37	96	26

У другому $\lambda/4$ -трансформаторі та на ділянці другої лінії від перерізу АБ до навантаження розрахунки проведемо за співвідношеннями, аналогічними виразам (5.138) і (5.138а), враховуючи значення відповідних вхідних амплітуд напруги та струму, а також хвильових опорів ($R_{хв.тр2}$ і $R_{хв.2}$ відповідно). Підсумкові графіки зображені на рис. 5.42, б, а значення амплітуд напруги та струму в перерізах лінії наведені в табл. 5.22.

Приклад 5.23. Визначити параметри трансформуючої лінії (рис. 5.39, в) для узгодження комплексного навантаження $Z_H = 600 - j900$ Ом з ідеальною симетричною двопровідною лінією, параметри якої збігаються з параметрами другої лінії у прикладі 5.22 ($R_{хв.л} = 300$ Ом; $\beta = 2,094$ рад/м). Перевірити якість узгодження за значенням вхідного опору трансформатора.

Розв'язання. Параметри трансформуючої лінії $l_{тр}$, $R_{хв.тр}$ обчислимо за формулами (5.132) і (5.133):

$$R_{хв.тр} = 300 \sqrt{\frac{3,606^2 - 2}{2 - 1}} = 994,987 \text{ Ом}; \quad l_{тр} = \frac{1}{2,094} \arctg \left(\frac{995}{300} \cdot \frac{1 - 2}{-3} \right) = 0,399 \text{ м.}$$

Для того щоб перевірити розв'язок, знайдемо вхідний опір трансформатора за формулою (5.123):

$$Z_{вх} = 994,987 \frac{600 - j900 + j994,987 \operatorname{tg}(2,094 \cdot 0,399)}{994,987 + j(600 - j900) \operatorname{tg}(2,094 \cdot 0,399)} = 300 + j0,022 \text{ Ом.}$$

Отже, розрахунки вірні, оскільки $Z_{вх} \approx R_{хв.л}$.

Приклад 5.24. Обчислити параметри одношлейфового пристрою (рис. 5.40, а) для узгодження лінії з комплексним навантаженням $Z_H = 600 - j900$ Ом (параметри лінії наведені у прикладі 5.23: $R_{хв} = 300$ Ом; $\beta = 2,094$ рад/м). Розрахунки виконати для короткозамкненого і розімкненого шлейфів з тими ж самими параметрами, що й основна лінія.

Розв'язання. Визначимо нормовані провідності навантаження, необхідні для подальших розрахунків за формулами з табл. 5.21:

$$\frac{Y'_H}{Z_H} = \frac{R_{хв}}{600 - j900} = 0,154 + j0,231;$$

$$G'_H = 0,154; \quad B'_H = 0,231; \quad Y'_H = \sqrt{(G'_H)^2 + (B'_H)^2} = 0,277.$$

Порядок розрахунків та отримані результати зведемо до табл. 5.23.

Таблиця 5.23 Одношлейфове узгодження (до прикладу 5.24)

Розрахунок	Результати	
	Варіант 1	Варіант 2
Довжини $l_{СД}$	$l_{СД} = 0,639$ м	$l_{СД} = -0,111$ м
Активної провідності лінії в перерізі СД	$G'(l_{СД}) = 6,854$	$G'(l_{СД}) = 0,146$
Довжини $l_{АБ-СД}$	$l_{АБ-СД} = 0,174$ м	$l_{АБ-СД} = 0,576$ м
$l_{АБ} = l_{АБ-СД} + l_{СД}$	$l_{АБ} = 0,81$ м	$l_{АБ} = 0,465$ м
Реактивної провідності в місці ввімкнення шлейфа	$B'(l_{АБ}) = -2,236$	$B'(l_{АБ}) = 2,236$
Реактивної провідності шлейфа	$B'_{ш} = 2,236$	$B'_{ш} = -2,236$
Довжини короткозамкненого шлейфа	$l_{ш.кз} = 1,29$ м	$l_{ш.кз} = 0,201$ м
Довжини розімкненого шлейфа	$l_{ш.хх} = 0,549$ м	$l_{ш.хх} = 0,951$ м

Два варіанти результатів обумовлені багатозначністю формул у табл. 5.21. Доцільніше використовувати другий варіант, у якому короткозамкнений шлейф ввімкнено найближче до навантаження і він має мінімальну довжину.

5.10. Кругові діаграми ідеальних довгих ліній

Кругові діаграми (КД) — це номограми, які дозволяють графічно виконувати основні розрахунки для усталених гармонічних процесів в ідеальних ДЛ і ДЛМВ. Найбільш поширені КД для опорів і провідностей. Перші праці, пов'язані із застосуванням КД для розрахунку чотириполюсників і ДЛ належать Коваленкову¹⁶, Вольперту¹⁷ і Сміту¹⁸.

¹⁶ Коваленков Валентин Іванович (1884–1960) — учений у галузі електров'язку, член-кореспондент АН СРСР, генерал-майор. Закінчив Петербурзький електротехнічний інститут (1909) і Петербурзький університет (1911). Головні праці стосуються дровотних ліній зв'язку, магнітних кіл і телефонної передачі. Автор кількох винаходів у галузі електров'язку і звукового кіно.

¹⁷ Вольперт Аміель Рафаїлович (1908–1988) — відомий радянський радіоспеціаліст, доктор технічних наук, професор. Працював у провідних радіотехнічних наукових установах НДІ-9 (Ленінград), ЯРТІ (Москва). Напрями досліджень — антенно-фідерні пристрої та фазова радіолокація. Один з авторів кругових діаграм (Производственно-технический бюллетень НКЭП, 1940, № 2).

¹⁸ Сміт, Philip H. Smith (1905–1987) — американський інженер-електрик, член технічної ради телефонної лабораторії Бела, автор винаходів у галузі антенної техніки, створив діаграму, названу його ім'ям (1939), за допомогою якої визначають комплексний опір кола.

5.10.1. Принцип побудови і структура кругової діаграми

Основою КД є подання комплексного коефіцієнта відбиття в довільному перерізі лінії на комплексній площині. При цьому використовують як показникову, так і алгебраїчну форми запису:

$$\underline{\rho} = \rho e^{j\varphi_\rho} = \rho_{\text{Re}} + j\rho_{\text{Im}},$$

де $\rho_{\text{Re}}, \rho_{\text{Im}}$ — відповідно дійсна й уявна частини комплексного коефіцієнта відбиття.

Вище, розглядаючи комплексний коефіцієнт відбиття, застосовувалася показникова форма запису $\underline{\rho}(x)$ та $\underline{\rho}(y)$. Відповідні формули з використанням нормованих (відносних) опорів і координат ($y' = y/\lambda; x' = x/\lambda$) зведено до табл. 5.24.

Таблиця 5.24

Співвідношення для комплексного коефіцієнта відбиття та його складових в ідеальній лінії

Параметр	Позначення	Співвідношення
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\underline{\rho}(y)$	$\frac{U_{\text{мвід}}(y)}{U_{\text{мпад}}(y)} = -\frac{I_{\text{мвід}}(y)}{I_{\text{мпад}}(y)} = \frac{Z'_H - 1}{Z'_H + 1} e^{-j2\beta y} = \rho(y) e^{j\varphi_\rho(y)}$
	$\underline{\rho}(x)$	$\frac{U_{\text{мвід}}(x)}{U_{\text{мпад}}(x)} = -\frac{I_{\text{мвід}}(x)}{I_{\text{мпад}}(x)} = \frac{Z'_{\text{ВХ}} - 1}{Z'_{\text{ВХ}} + 1} e^{-j2\beta x} = \rho(x) e^{j\varphi_\rho(x)}$
Модуль	$\rho(y)$	$\left \frac{Z'_H - 1}{Z'_H + 1} \right = \frac{\sqrt{(R'_H - 1)^2 + (X'_H)^2}}{\sqrt{(R'_H + 1)^2 + (X'_H)^2}} = \text{const}$
	$\rho(x)$	$\left \frac{Z'_{\text{ВХ}} - 1}{Z'_{\text{ВХ}} + 1} \right = \frac{\sqrt{(R'_{\text{ВХ}} - 1)^2 + (X'_{\text{ВХ}})^2}}{\sqrt{(R'_{\text{ВХ}} + 1)^2 + (X'_{\text{ВХ}})^2}} = \text{const}$
Аргумент	$\varphi_\rho(y)$	$\varphi_\rho(0) - 2\beta y = \varphi_\rho(0) - 2\pi y', \text{ де } y' = y/\lambda;$ $\varphi_\rho(0) = \arctg \frac{X'_H}{R'_H - 1} - \arctg \frac{X'_H}{R'_H + 1}$
	$\varphi_\rho(x)$	$\varphi_\rho(0) + 2\beta x = \varphi_\rho(0) + 2\pi x', \text{ де } x' = x/\lambda;$ $\varphi_\rho(0) = \arctg \frac{X'_{\text{ВХ}}}{R'_{\text{ВХ}} - 1} - \arctg \frac{X'_{\text{ВХ}}}{R'_{\text{ВХ}} + 1}$

Оскільки модуль $\rho(x)$ або $\rho(y)$ при заданому навантаженні Z'_H є постійною величиною (див. табл. 5.24), траєкторія кінця вектора комплексного коефіцієнта відбиття, тобто годограф вектора $\underline{\rho}$, при

змінюванні відстані вздовж лінії по x чи y є колом (ρ -коло). Радіус ρ -кола дорівнює модулю ρ . Максимальний радіус ρ -кола ($\rho = 1$) відповідає режиму стійких, мінімальний ($\rho = 0$) — режиму біжних, а інші концентричні ρ -кола — режиму змішаних хвиль (рис. 5.43, а).

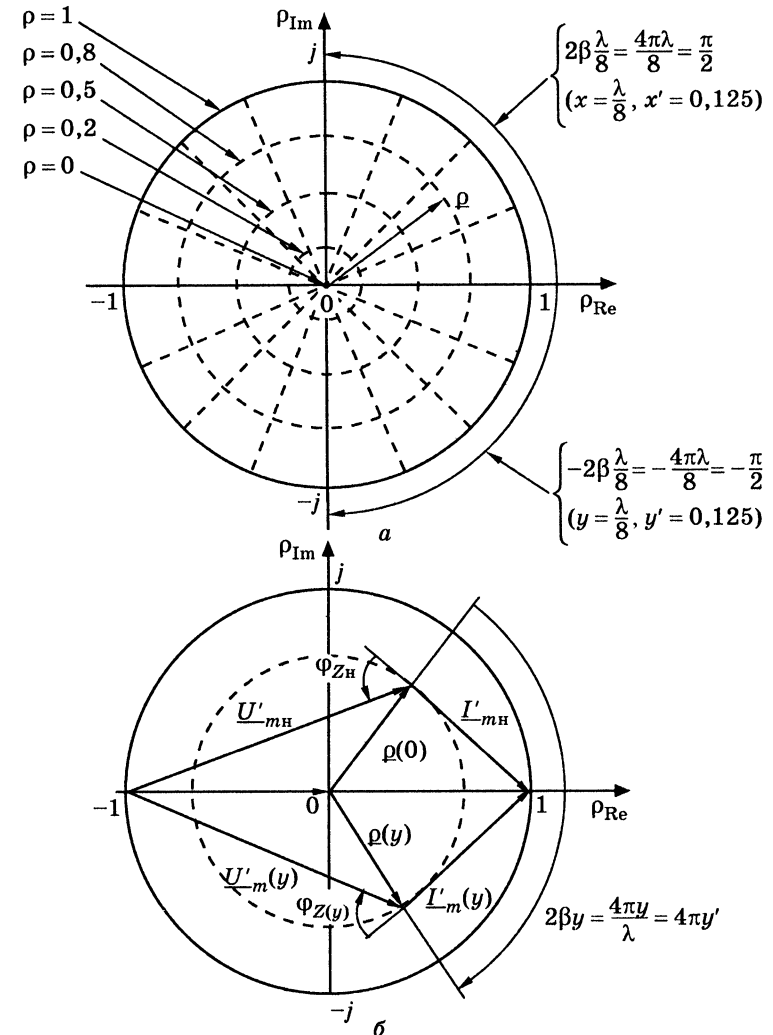


Рис. 5.43. Подання комплексного коефіцієнта відбиття ідеальних ліній на комплексній площині: а — ρ -кола і лінії постійних аргументів φ ; б — зв'язок векторів нормованих комплексних амплітуд напруги та струму з годографом $\underline{\rho}$

Руху вздовж лінії за координатою y відповідає обертання вектора ρ за годинниковою стрілкою, а руху за координатою x — проти годинникової стрілки (рис. 5.43). При зміні відстані вздовж лінії по y або x на $\lambda/2$ вектор $\underline{\rho}(y)$ або $\underline{\rho}(x)$ обертається на кут -2π або 2π , відповідно.

З годографом вектора $\underline{\rho}$ можна пов'язати нормовані вектори комплексних амплітуд напруги і струму в довільному перерізі ДЛ (рис. 5.43, б). Для того щоб обґрунтувати цю тезу, достатньо поділити вирази для комплексних амплітуд (табл. 5.5 і співвідношення (5.51) і (5.53)) на їхні падаючі складові. Оскільки вирази для y та x однотипні, ці координати в отриманих рівняннях не пишуть, щоб узагальнити запис:

$$\frac{\underline{U}'_m}{\underline{U}_{\text{пада}}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{U}_{\text{пада}}} = 1 + \frac{\underline{U}_{\text{мвід}}}{\underline{U}_{\text{пада}}} = 1 + \underline{\rho}; \quad \frac{\underline{I}'_m}{\underline{I}_{\text{пада}}} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{I}_{\text{пада}}} = 1 + \frac{\underline{I}_{\text{мвід}}}{\underline{I}_{\text{пада}}} = 1 - \underline{\rho}. \quad (5.139)$$

З рівнянь (5.139) випливає принципове для подальшої побудови КД співвідношення:

$$\frac{\underline{Z}'_m}{\underline{I}'_m} = \frac{\underline{U}'_m}{\underline{I}'_m} = \frac{\underline{Z}}{R_{\text{хв}}} = \frac{1 + \underline{\rho}}{1 - \underline{\rho}} = \frac{(1 + \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}}{(1 - \rho_{\text{Re}}) - j\rho_{\text{Im}}}. \quad (5.140)$$

У свою чергу, вираз (5.140) дозволяє отримати загальніший, ніж окремі формули в табл. 5.24, вираз для комплексного коефіцієнта відбиття:

$$\underline{\rho} = \frac{\underline{Z}}{R_{\text{хв}}} = \frac{\underline{Z}' - 1}{\underline{Z}' + 1}.$$

Вважаючи в рівнянні (5.140) ρ_{Re} та ρ_{Im} змінними, а $\underline{Z}' = R' + jX'$ — постійними параметрами, можна виконати перетворення, які приводять до двох рівнянь для побудови годографів, що відповідають постійним значенням R' та X' . Основні етапи цих перетворень є такими:

$$\begin{aligned} \underline{Z}' = R' + jX' &= \frac{[(1 + \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}][(1 - \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}]}{[(1 - \rho_{\text{Re}}) - j\rho_{\text{Im}}][(1 - \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}]} = \\ &= \frac{1 - \rho_{\text{Re}}^2 - \rho_{\text{Im}}^2}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2} + j \frac{2\rho_{\text{Im}}}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2}; \\ R' &= \frac{1 - \rho_{\text{Re}}^2 - \rho_{\text{Im}}^2}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2}; \quad X' = \frac{2\rho_{\text{Im}}}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2}; \end{aligned}$$

$$\left(\rho_{\text{Re}} - \frac{R'}{R' + 1}\right) + \rho_{\text{Im}}^2 = \frac{1}{(R' + 1)^2}; \quad (5.141)$$

$$(\rho_{\text{Re}} - 1)^2 + \left(\rho_{\text{Im}} - \frac{1}{X'}\right)^2 = \frac{1}{(X')^2}. \quad (5.142)$$

Вирази (5.141) і (5.142) є рівняннями кіл у координатах ρ_{Re} та ρ_{Im} .

Центри кіл постійних нормованих активних опорів (R -кола) відповідно до рівняння (5.141) лежать на дійсній осі і мають координати: $\rho_{\text{Re}} = R'/(R' + 1)$; $\rho_{\text{Im}} = 0$. Радіуси R -кіл становлять $1/(R' + 1)$. Граничним значенням R' відповідають:

1) значенню $R' = 0$ — R -коло одиничного радіуса з центром на початку координат, яке є границею кругової діаграми;

2) при $R' \rightarrow \infty$ R -коло перетворюється в точку з координатами $\rho_{\text{Re}} = 1$; $\rho_{\text{Im}} = 0$.

Як приклад на рис. 5.44, а наведено сукупність R -кіл.

Рівняння (5.142) залежить від параметра X' і описує X -кола з радіусами $1/|X'|$ та координатами центрів $\rho_{\text{Re}} = 1$; $\rho_{\text{Im}} = 1/X'$. Отже, центри X -кіл розташовані на прямій, яка паралельна осі ρ_{Im} і проходить через точку $\rho_{\text{Re}} = 1$.

Сукупність X -кіл побудовано на рис. 5.44, б. X -кола індуктивних опорів ($X' > 0$) розташовані вище, а X -кола ємнісних опорів ($X' < 0$) — нижче дійсної осі.

Фізичний зміст має тільки та частина кожного X -кола (X -дуга), яка лежить у межах діаграми. X -дуги зображені на рис. 5.44, б суцільними лініями. Величині $X' = 0$ відповідає дуга з нескінченно великим радіусом, яка збігається з дійсною віссю (ρ_{Re}). При $X' \rightarrow \infty$ X -коло вироджується в точку з координатами $\rho_{\text{Re}} = 1$; $\rho_{\text{Im}} = 0$.

Для зручності користування КД повертають на кут 90° так, щоб дійсну вісь було розташовано вертикально, а уявну — горизонтально (рис. 5.45). При цьому R -кола та X -дуги разом зі шкалами R' та X' розміщують у полі діаграми. Шкала для R -кіл нанесена на вертикальній осі діаграми, а шкала X -дуг — поблизу точок перетину дуг з граничним колом діаграми.

Будь-який переріз ДЛ на діаграмі відображується точкою, яка з одного боку є перетином певних R -кіл (з величиною R') та X -дуги (зі значенням X'), а з іншого — належить годографу $\underline{\rho}$. Нормований комплексний опір у цьому перерізі становить $\underline{Z}' = R' + jX'$. При переміщенні вздовж лінії від цього перерізу модуль комплексного

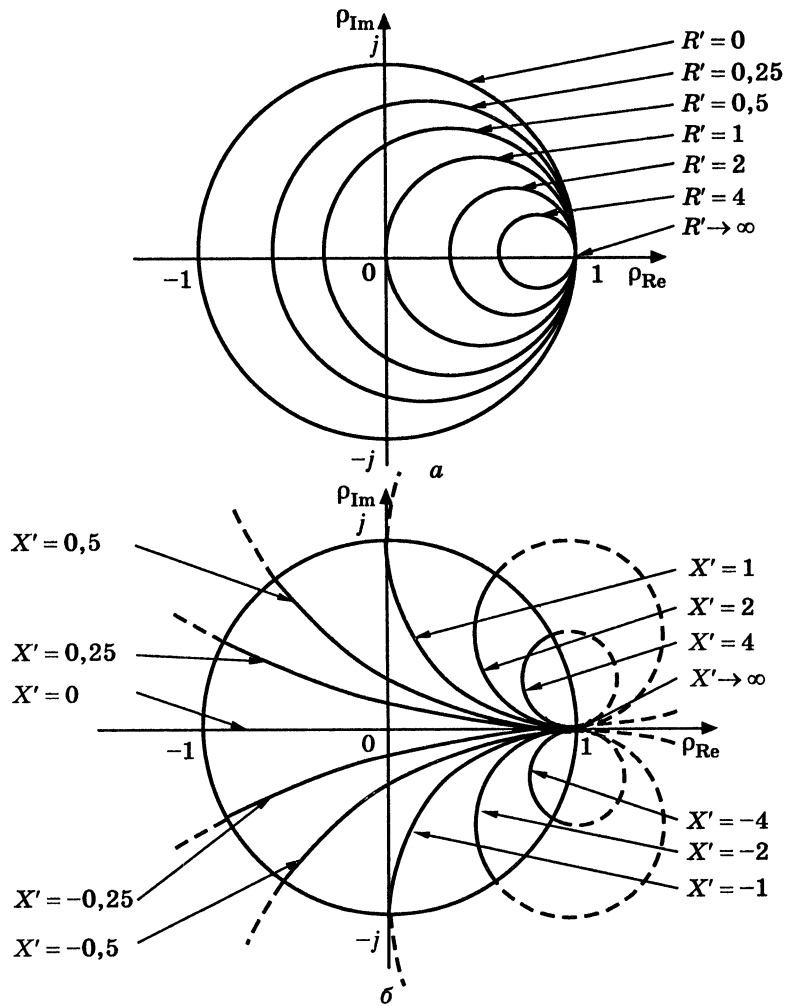


Рис. 5.44. Кола постійних нормованих опорів на комплексній площині:
а — активних; б — реактивних

коефіцієнта відбиття залишається незмінним, а Z' , U'_m та I'_m змінюються. На рис. 5.45 як приклад наведено точки, які відповідають навантаженню лінії ($Z'_H = 1 + j1$) та її входу ($Z'_{вх} = 1 - j1$), а також побудовано вектори нормованих напруг (U'_{mH} і U'_{mvx}) і струмів (I'_{mH} та I'_{mvx}) у цих перерізах лінії.

На діаграмі ρ -кола зазвичай зображують пунктирними лініями і для спрощення не градуюють. Оскільки коефіцієнт відбиття ρ

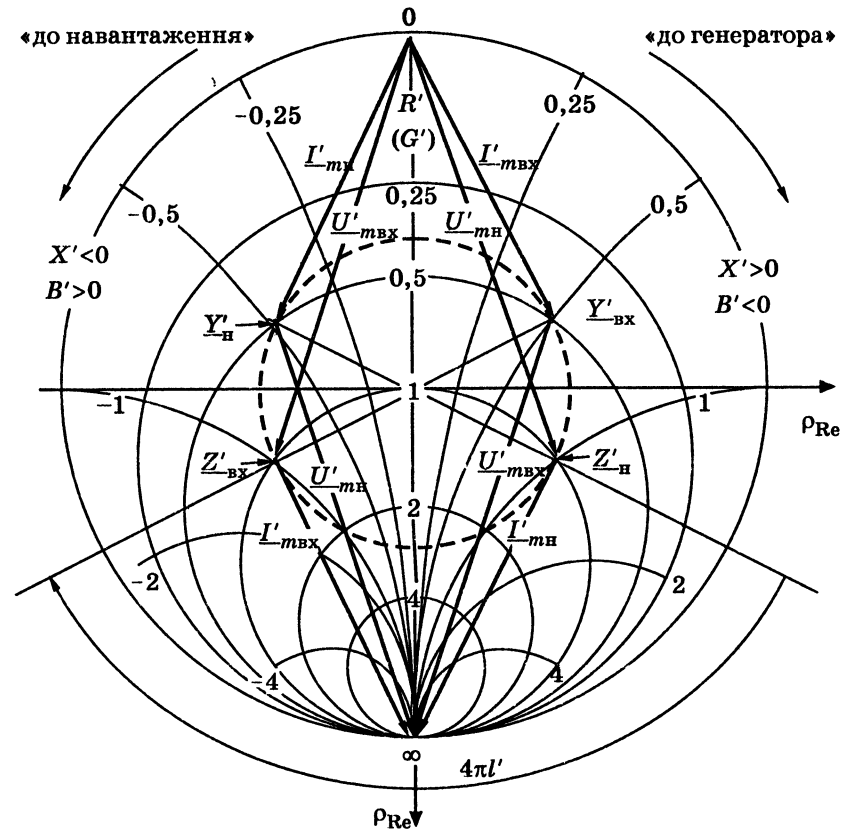


Рис. 5.45. Стандартне подання R -кіл та X -дуг на КД ідеальної ДЛ

згідно з виразами (5.96) і (5.97) однозначно пов'язаний з коефіцієнтами k_{6x} та k_{cx} , ρ -кола також називають колами постійних КБХ і КСХ. Значення k_{6x} та k_{cx} легко визначити за діаграмою, використовуючи перетин ρ -кіл зі шкалою R' :

$$k_{cx} = R' > 1; k_{6x} = R' < 1.$$

Для зазначених на рис. 5.45 точок діаграми (Z'_H та $Z'_{вх}$): $k_{cx} = R' \approx 2,6$; $k_{6x} = R' \approx 0,38$; $\rho \approx 0,45$.

КД також застосовують для розрахунків із провідностями. Обґрунтувати принцип цього застосування можна, якщо перетворити вираз (5.140) щодо нормованої комплексної провідності:

$$\underline{Y}' = \frac{1}{Z'} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} = \frac{1 + \rho e^{j\pi}}{1 - \rho e^{j\pi}}. \quad (5.143)$$

Порівняння співвідношень (5.140) і (5.143) дозволяє зробити висновок, що вони різняться тільки знаком комплексного коефіцієнта відбиття, тобто значенням його аргументу на π . Це означає, що, переходячи від діаграми опорів до діаграми провідностей, достатньо повернути всі вектори $\underline{\rho}$ на кут π . При цьому числові значення R -кіл стануть величинами G -кіл ($R' = G'$), а значення X -дуг відрізняться від значень B -дуг ($X' = -B'$) тільки знаками. Тому B -дуги емнісних провідностей ($B' < 0$) розташовані у правій, а індуктивних ($B' > 0$) — у лівій півплощинах КД.

Для діаграми провідностей рівняння (5.139) матимуть вигляд

$$\underline{U}'_m = 1 - \underline{\rho}; \underline{I}'_m = 1 + \underline{\rho}. \quad (5.144)$$

Порівняння виразів (5.144) і (5.139) показує, що на діаграмі провідностей нормовані вектори комплексних амплітуд напруг і струмів міняються місцями порівняно з діаграмою опорів. При цьому відповідні вектори залишаються однаковими, але переносяться паралельно самим собі.

Приклади переходу від \underline{Z}'_n до \underline{Y}'_n , $\underline{Z}'_{вх}$ до $\underline{Y}'_{вх}$ і побудови векторів комплексних амплітуд напруг і струмів у цих перерізах показано на рис. 5.45.

Робочий зразок КД, який застосовують для практичних розрахунків, зображено на рис. 5.46. Окрім сукупності R -кіл (вони ж G -кола) і X -дуг (B -дуги) з їхніми шкалами, на робочих КД позначають шкали відносних координат за довжиною лінії ($y' = y/\lambda$; $x' = x/\lambda$), а також наносять пояснювальні написи і позначки (стрілки напрямку руху «до навантаження», «до генератора»). Осі ρ_{Re} та ρ_{Im} на діаграмі зазвичай не вказують. Іноді на КД наводять шкали кутів комплексного коефіцієнта відбиття ($2\beta y$ і $2\beta x$) у градусах (від 0 до 180°). Професійна діаграма, яку додають до технічної документації на апаратуру, виконують як жорсткий планшет, а ρ -кола — як прозору планку (що обертається відносно центра діаграми) зі шкалами ρ , R' (КСХ або КБХ).

Існують такі характерні точки КД:

- 1) точка перетину осей ρ_{Re} та ρ_{Im} (центр діаграми) — відповідає режиму біжних хвиль;
- 2) верхня точка перетину осі ρ_{Re} з граничним R -колом — відповідає короткому замиканню для діаграми опорів і холостому ходу для діаграми провідностей;
- 3) нижня точка перетину осі ρ_{Re} з граничним R -колом — відповідає холостому ходу для діаграми опорів і короткому замиканню для діаграми провідностей.

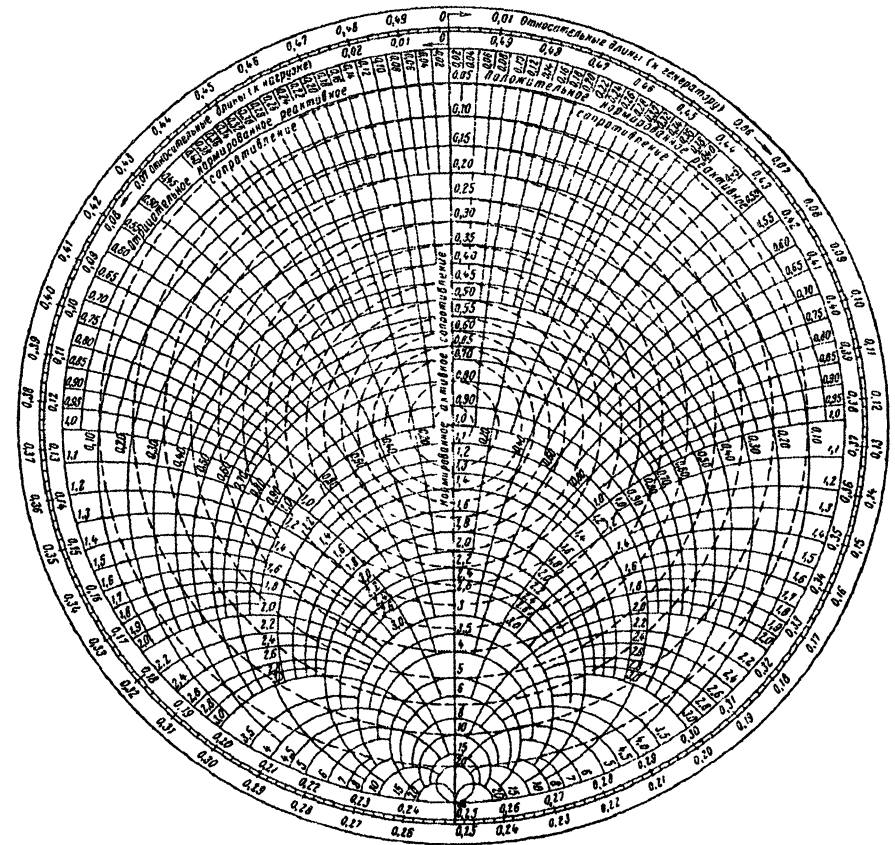


Рис. 5.46. Робочий зразок КД

5.10.2. Застосування кругової діаграми для розрахунку параметрів лінії

Кругова діаграма дозволяє розв'язувати такі основні задачі:

- 1) обчислення опорів (провідностей) у довільному перерізі лінії за заданим значенням опору (провідності) в одному з перерізів, наприклад опору (провідності) навантаження;
- 2) розрахунок розподілів уздовж лінії рівнів (амплітуд або діючих значень) напруг і струмів за заданим режимом в одному з перерізів, зокрема в навантаженні;
- 3) визначення розташування характерних перерізів лінії та параметрів цього перерізу (R' , \underline{U}'_m , \underline{I}'_m та ін.); обчислення за цими даними опору навантаження, КСХ, КБХ тощо;
- 4) розрахунок узгоджувальних пристроїв.

Обчислення опорів можна здійснити в такий спосіб:

1) визначити необхідні для нормування параметри ($R_{\text{хв}}, \lambda$), знайти нормовані задані опори ($Z' = R' + jX'$) та відносні значення відстані (x', y', l'); якщо $x' > 0,5$; $y' > 0,5$; $l' > 0,5$, від відносної відстані відкинути число, кратне 0,5;

2) на діаграмі знайти переріз лінії із заданим опором $Z' = R' + jX'$ як точку перетину R -кола та X -дуги з величинами R' і X' відповідно (наприклад точка $Z'_H = 1 + j1$ на рис. 5.45); визначити ρ -коло, яке проходить через цю точку;

3) пересуваючись за ρ -колом від точки із заданим Z' до шуканого перерізу лінії та використовуючи шкалу відносних координат (x', y', l'), визначити нормовані опори в цих перерізах (зокрема на вході лінії); напрям руху згідно зі стрілками «до генератора» або «до навантаження» обумовлюється постановкою задачі; приклад визначення $Z'_{\text{вх}} = 1 - j1$ показано на рис. 5.45;

4) перемножуючи здобуті нормовані опори на значення хвильового опору лінії, обчислити абсолютні значення опорів у шуканих перерізах; за необхідності побудувати графіки розподілів усіх або деяких видів опорів (Z, R, X) за координатами (x або y).

Розрахунок провідностей виконують аналогічно. Якщо в даному перерізі лінії задано опір, перехід до провідності здійснюють аналітично ($Y' = 1/Z'$) або безпосередньо за КД. Приклад визначення нормованої провідності $Y'_H = 0,5 - j0,5$ як точки, діаметрально протилежної точці $Z'_H = 1 + j1$, показаний на рис. 5.45.

Розрахунок рівнів напруги та струму. Принцип обчислення рівнів напруги і струму базується на співвідношеннях (5.139) і проілюстрований прикладами побудови нормованих комплексних амплітуд на рис. 5.43, б і рис. 5.45.

Нормування комплексних значень у формулах (5.139) здійснюють за комплексними значеннями відповідних падаючих хвиль, розрахунок яких є окремою задачею. Тому, побудувавши відповідні вектори, наприклад вектори комплексних діючих значень на рис. 5.47, оцінюють масштабні коефіцієнти m_U, m_I модулів цих векторів за відомими значеннями рівнів напруги та струму в одному з перерізів лінії. Наприклад, для заданих діючих значень напруги та струму в навантаженні U_H, I_H та виміряних за КД довжин векторів s_{U_H} і s_{I_H} (рис. 5.47) масштабні коефіцієнти для розрахунків напруг і струмів в інших перерізах становитимуть

$$m_U = \frac{U_H}{s_{U_H}}; m_I = \frac{I_H}{s_{I_H}}. \quad (5.145)$$

Для того щоб побудувати графіки розподілу рівнів напруг і струмів уздовж лінії, розрахунки слід виконувати з певним кроком $\Delta x'$ або $\Delta y'$ за координатою, включаючи перерізи з екстремальними значеннями: $U_{\min}, I_{\min}, U_{\max}, I_{\max}$ (рис. 5.47).

За допомогою КД можна обчислювати не тільки рівні, але й початкові фази напруг і струмів. Для цього до знайдених за діаграмою початкових фаз нормованих комплексних значень напруг і струмів слід додати початкову фазу відповідного комплексного значення падаючої хвилі. Однак початкові фази за діаграмою розраховують досить рідко.

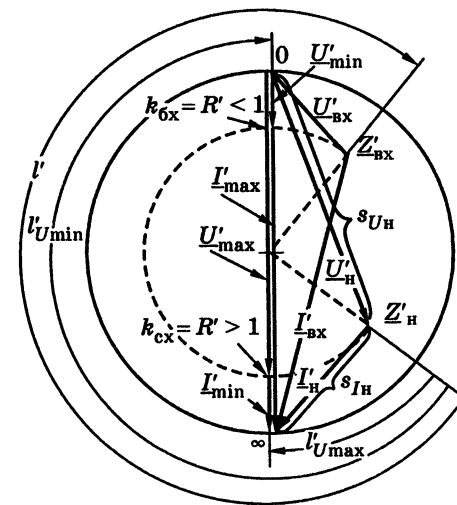


Рис. 5.47. Побудова векторів для визначення рівнів напруг і струмів

Аналіз характерних перерізів лінії. У цих перерізах відбуваються такі процеси:

- 1) спостерігається максимум чи мінімум рівня напруги або струму;
- 2) опір має чисто активний характер;
- 3) активна складова провідності дорівнює хвильовій.

Перші два випадки відповідають одним і тим самим точкам перетину ρ -кола з вертикальною віссю R' діаграми. Такі перерізи з відносними відстанями від навантаження $l'_{U_{\max}}$ і $l'_{U_{\min}}$ показані на рис. 5.47.

Перерізи з активним опором та екстремальними значеннями рівнів напруг і струмів дозволяють оцінити КСХ і КБХ (рис. 5.47).

Параметри $l'_{U_{\min}}$ і k_{6x} , які знайдені експериментально за допомогою вимірювальної лінії (див. підрозд. 5.13), дозволяють визначити комплексний опір навантаження розрахунковим шляхом або за КД.

Співвідношення для обчислення Z_H виходить із загальної формули для $Z(x)$ (див. табл. 5.8) після підстановки параметрів перерізу $l'_{U_{\min}}$ і $k_{6x} = R' < 1$:

$$Z_H = R_{\text{хв}} \frac{R_{\text{хв}} R' - j R_{\text{хв}} \operatorname{tg}(2\pi l'_{U_{\min}})}{R_{\text{хв}} - j R_{\text{хв}} R' \operatorname{tg}(2\pi l'_{U_{\min}})} = R_{\text{хв}} \frac{k_{6x} - j \operatorname{tg}(2\pi l'_{U_{\min}})}{1 - j k_{6x} \operatorname{tg}(2\pi l'_{U_{\min}})}. \quad (5.146)$$

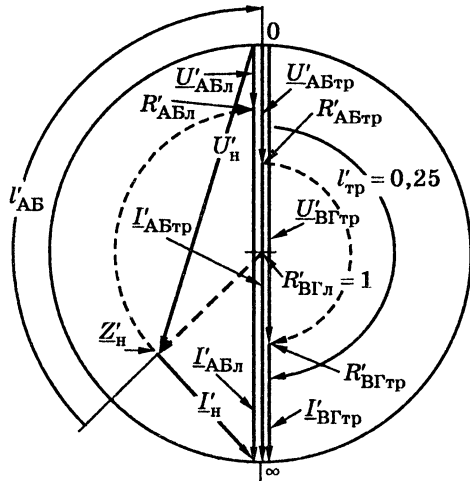


Рис. 5.48. Розрахунок місця ввімкнення $\lambda/4$ -трансформатора і параметрів режиму в лінії та трансформаторі при узгодженні лінії з комплексним навантаженням

у цьому перерізі R_{AB} , а також, за необхідності, розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $R(y)$, $X(y)$ в лінії і трансформаторі. Методику таких розрахунків ілюструє рис. 5.48.

Відстань l_{AB} від навантаження до перерізу АБ, де ввімкнено $\lambda/4$ -трансформатор, визначають, виходячи з умови активного характеру опору лінії в цьому перерізі.

Якщо задано опір навантаження, то відстань l_{AB} визначають за відносною відстанню l'_{AB} від точки Z'_n до найближчої точки перетину ρ -кола з вертикальною віссю КД, рухаючись «до генератора». Параметром цієї точки є нормоване до хвильового опору лінії значення $R'_{ABл}$, яке дозволяє розрахувати абсолютну величину опору $R_{AB} = R'_{ABл} R_{хв.л}$ і за формулою (5.129) — хвильовий опір трансформатора $R_{хв.тр}$.

Визначення рівнів напруги і струму, а також опорів на ділянці лінії від навантаження до перерізу АБ здійснюється за точками дуги ρ -кола лінії від Z'_n до $R'_{ABл}$. Для аналогічних обчислень у трансформаторі слід нормувати опір R_{AB} до хвильового опору трансформатора $R'_{ABтр} = R_{AB}/R_{хв.тр}$, що дозволяє побудувати дугу ρ -кола для трансформатора між точками $R'_{ABтр}$ і $R'_{ВГтр}$.

За допомогою КД опір Z'_n визначають, рухаючись від точки $k_{бх} = R' < 1$ за ρ -колом на відстань $l'_{U\min}$ у напрямі «до навантаження», тобто у зворотному, показаному на рис. 5.47.

Перерізи з активною провідністю, яка дорівнює хвильовій, використовують, узгоджуючи лінію паралельними шлейфами.

Розрахунок узгодження за допомогою $\lambda/4$ -трансформатора. При узгодженні лінії з комплексним навантаженням (рис. 5.39, а) КД дозволяє визначити місце ввімкнення трансформатора l_{AB} , опір

На рис. 5.48 ділянки ρ -кіл лінії та трансформатора, які використано для розрахунків, показані пунктирними лініями. Там же побудовано вектори нормованих комплексних значень напруг і струмів у характерних перерізах лінії та трансформатора.

На діаграмі масштаби для напруг і струмів у лінії ($m_{Uл}$, $m_{Iл}$) та в трансформаторі ($m_{Uтр}$, $m_{Iтр}$) різняться. Масштабні коефіцієнти в лінії обчислюють за формулами (5.145), а в трансформаторі — за очевидними пропорціями, які випливають з рівності напруг і струмів у перерізі ввімкнення трансформатора:

$$\frac{m_{Uл}}{m_{Uтр}} = \frac{s_{UABл}}{s_{UABтр}}; \quad \frac{m_{Iл}}{m_{Iтр}} = \frac{s_{IABл}}{s_{IABтр}},$$

де $s_{UABл}$, $s_{UABтр}$, $s_{IABл}$, $s_{IABтр}$ — довжини векторів відповідних комплексних напруг і струмів, які виміряні за допомогою КД.

При узгодженні з активним навантаженням (рис. 5.38, а) КД дозволяє визначити режим у будь-якому перерізі трансформатора та (за необхідності) побудувати графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $R(y)$, $X(y)$, подібні зображенням на рис. 5.38, б, г.

Розрахунок одношлейфового узгоджувального пристрою. Для узгодження одним паралельним шлейфом (рис. 5.40, а) визначають координату ввімкнення шлейфа (відстань l_{AB} до перерізу АБ лінії) і довжину $l_{ш}$.

Розраховуючи параметри одношлейфового узгодження, КД використовують як діаграму провідностей. Визначення величин l_{AB} і $l_{ш}$ за діаграмою виконують у такій послідовності (рис. 5.49):

1) на діаграмі визначають точку Y'_n згідно з розрахованим значенням комплексної провідності навантаження або графічно як діаметрально протилежну точці Z'_n ;

2) виконують переміщення із точки Y'_n у напрямі «до генератора» за ρ -колом до точки його перетину з G -колом, яке відповідає

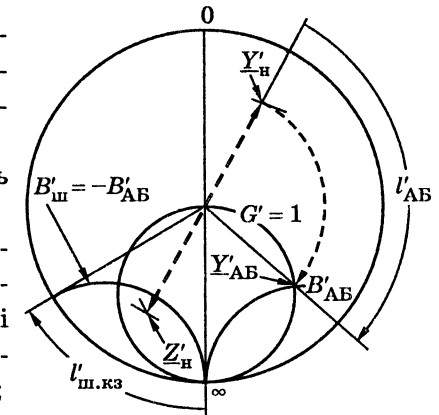


Рис. 5.49. Розрахунок параметрів одношлейфового узгоджувального пристрою за допомогою КД

значенню $G' = 1$; ця точка згідно з виразом (5.134) відповідає перерізу АБ лінії;

3) визначають відносну відстань l'_{AB} і нормовану реактивну провідність B'_{AB} у перерізі АБ;

4) згідно з формулою (5.135) обчислюють нормовану реактивну провідність $B'_{ш} = -B'_{AB}$, позначають відповідну B -дугу і за її допомогою визначають відносну довжину шлейфа (на рис. 5.49 показано побудову для здобуття відносної довжини короткозамкненого шлейфа $l'_{ш.кз}$);

5) за знайденими відносними значеннями розраховують абсолютні значення довжин l_{AB} і $l_{ш}$.

З огляду на те, що існують дві точки перетину ρ -кола з G -колом ($G' = 1$) і два можливі типи шлейфа (короткозамкнений і розімкнений), кінцевий варіант розв'язку залежить від конкретної задачі.

Розрахунок двошлейфового узгоджувального пристрою. При даному способі узгодження (див. рис. 5.40, б) обчислюють довжини шлейфів $l_{ш1}$ і $l_{ш2}$ при заданій відстані (зазвичай $\lambda/8$ або $3\lambda/8$) між точками їхнього ввімкнення до лінії.

Провідність лінії в точці ввімкнення першого шлейфа Y_{CD} розраховують аналітично або за допомогою КД за заданими значеннями Y_n і l_{CD} . Далі визначають нормовану провідність $Y'_{CD} = G'_{CD} - jB'_{CD}$ і відповідну їй точку діаграми.

Перший шлейф з провідністю $Y_{ш1}$, увімкнений паралельно лінії в перерізі СД, змінює тільки реактивну провідність цього перерізу. Тому після ввімкнення першого шлейфа перерізу СД відповідатиме одна з точок, розташованих на G -колі з номіналом G'_{CD} . Визначення цієї точки ($Y'_{CD} + Y'_{ш1}$), рух від якої вздовж лінії у напрямі «до генератора» на відстань $\lambda/8$ або $3\lambda/8$ призведе до перерізу АБ, у якому $G' = 1$ ($G = G_{хв}$), є головною задачею розрахунку двошлейфового узгоджувального пристрою за допомогою КД.

Шукану точку « $Y'_{CD} + Y'_{ш1}$ » знаходять як точку перетину G -кола « G'_{CD} » і одиничного G -кола ($G' = 1$), поверненого проти годинникової стрілки на 90° ($l' = 0,125$) або 270° ($l' = 0,375$) залежно від відстані між шлейфами ($\lambda/8$ чи $3\lambda/8$). Загалом може бути дві точки перетину, що й дає два варіанти розв'язку.

Для відстані між точками ввімкнення шлейфів, яка дорівнює $\lambda/8$ ($l' = 0,125$), на рис. 5.50 показано визначення на діаграмі двох точок « $Y'_{CD} + Y'_{ш1}$ », з яких для подальших розрахунків вибраний варіант № 1.

Вибрана точка « $Y'_{CD} + Y'_{ш1}$ » дозволяє знайти значення $Y'_{ш1} = -jB'_{ш1}$ і довжину першого шлейфа за розрахунковими співвідношеннями для провідностей короткозамкнених і розімкнених ліній або за діаграмою (див. рис. 5.49).

Визначивши довжину першого шлейфа, переходять від точки « $Y'_{CD} + Y'_{ш1}$ » за ρ -колом (якому належить дана точка) до перерізу АБ (точка Y'_{AB}). Реактивна провідність у перерізі АБ становить B'_{AB} , активна — $G' = 1$. Це підтверджує правильність попередніх розрахунків і дозволяє обчислити довжину другого шлейфа.

На рис. 5.50 показано всі етапи визначення основних параметрів двошлейфового пристрою узгодження, а також заштриховане коло ($G' = 2$), приналежність якому точки Y'_{CD} не дозволяє здійснити двошлейфове узгодження для відстаней між шлейфами, що дорівнюють $\lambda/8$ або $3\lambda/8$. Якщо активна складова нормованої комплексної провідності в перерізі СД $G'_{CD} = 2$, узгодження ще можливе для єдиної точки « $Y'_{CD} + Y'_{ш1}$ ». Якщо $G'_{CD} > 2$, щоб реалізувати режим узгодження, слід змінити відстань між шлейфами — зробити її менше $\lambda/8$ або більше $3\lambda/8$.

Вибір потрібного варіанта розрахунку визначається конструктивними вимогами.

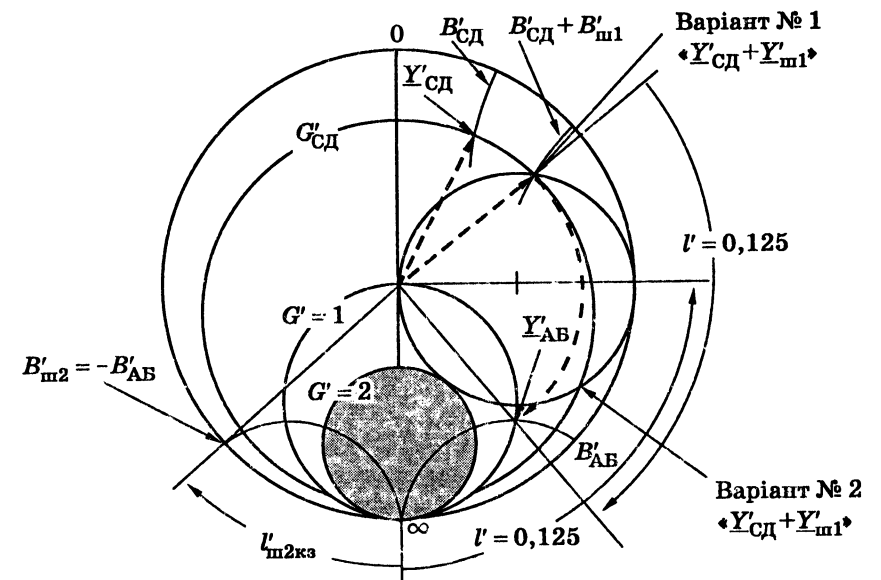


Рис. 5.50. Розрахунок параметрів двошлейфового узгоджувального пристрою за допомогою КД

Приклад 5.25. Визначити параметри двошлейфового пристрою для узгодження лінії з комплексним навантаженням (рис. 5.40, б), параметри яких наведені у прикладах 5.23 і 5.24 ($Z_H = 600 - j900$ Ом; $R_{XB} = 300$ Ом; $\lambda = 3$ м). Виконати два варіанти розрахунків для короткозамкнених шлейфів, які ввімкнені до лінії на відстані $\lambda/8$ і мають ті ж самі параметрами, що і лінія. Відстань становить $l_{CD} = \lambda/2$.

Розв'язання. Оскільки $l_{CD} = \lambda/2$, опір навантаження і лінії в перерізі СД однакові. Визначимо їх комплексний нормований опір:

$$\underline{Z}'_H = \underline{Z}'_{CD} = \frac{Z_H}{R_{XB}} = \frac{600 - j900}{300} = 2 - j3.$$

Комплексну нормовану провідність у перерізі СД визначимо за допомогою КД як точку, діаметрально протилежну точці \underline{Z}'_{CD} :

$$\underline{Y}'_{CD} = G'_{CD} - jB'_{CD} = 0,15 + j0,23.$$

Таблиця 5.25

Результати розрахунків (до прикладу 5.25)

Параметр	Варіант №1	Варіант №2
$\underline{Y}'_{CD} + \underline{Y}'_{ш1}$	0,15 + j0,475	0,15 + j1,53
$\underline{Y}'_{ш1}$	j0,245	j1,3
$B'_{ш1}$	-0,245	-1,3
$l'_{ш1}$	0,254	0,396
$l_{ш1}$, м	0,762	1,188
\underline{Y}'_{AB}	1 + j2,4	1 - j4
$\underline{Y}'_{ш2}$	-j2,4	j4
$B'_{ш2}$	2,4	-4
$l'_{ш2}$	0,063	0,46
$l_{ш2}$, м	0,189	1,38

Значення цієї провідності з прикладу 5.24 становить

$$\underline{Y}'_{CD} = 0,15385 + j0,23077.$$

Порівняння результатів показує, що відносна похибка визначення провідності не більша 3,5 %.

Використовуючи рекомендації з обчислення параметрів двошлейфового узгоджувального пристрою (див. п. 5.10.2 і рис. 5.50), виконаємо розрахунки для двох точок перетину: G -кола ($G'_{CD} = 0,15$) і G -кола ($G' = 1$), яке повернене на 90° проти годинникової стрілки. Результати розрахунків зведені до табл. 5.25.

З точки зору менших довжин шлейфів кращі показники має варіант № 1.

5.11. Комплексні функції та частотні характеристики довгих ліній

5.11.1. Види КФ лінії та основні співвідношення

Комплексні передатні функції (КПФ) лінії можна ввести, якщо вважати лінію чотириполосником (рис. 5.51), у якого діями є комплексні амплітуди \underline{U}_{m1} або \underline{I}_{m1} , а відгуками — комплексні амплітуди \underline{U}_{m2} або \underline{I}_{m2} . Для ДЛ використовують такі основні види КПФ:

1) комплексний коефіцієнт передачі за напругою $H_U(j\omega) = \underline{U}_{m2} / \underline{U}_{m1}$;

2) комплексний коефіцієнт передачі за струмом $H_I(j\omega) = \underline{I}_{m2} / \underline{I}_{m1}$.

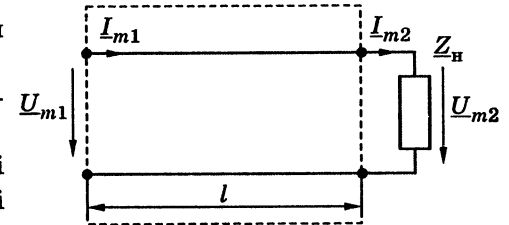
Розглядаючи лінію як двополосник, застосовують комплексні вхідні функції (КВФ):

3) комплексний вхідний опір $Z_{вх}(j\omega) = \underline{U}_{m1} / \underline{I}_{m1}$;

4) комплексну вхідну провідність $Y_{вх}(j\omega) = \underline{I}_{m1} / \underline{U}_{m1}$.

Аналізуючи комплексні функції (КФ) лінії — КПФ і КВФ, вважають відомими основні параметри лінії: довжину l ; хвильовий опір Z_{XB} (реальна лінія) або R_{XB} (ідеальна лінія); фазову швидкість поширення хвиль v ; коефіцієнт ослаблення для реальної лінії $\alpha = \text{const}$ або $\alpha(\omega)$.

Рис. 5.51. Схема для аналізу КФ і частотних характеристик ДЛ



Щоб вивести співвідношення, які описують КФ, використовують системи рівнянь (див. табл. 5.5 і 5.8):

1) для реальної лінії

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} = \underline{U}_{m2} \text{ch} \gamma l + Z_{XB} \underline{I}_{m2} \text{sh} \gamma l = \underline{U}_{m2} [\text{ch} \gamma l + \frac{1}{Z'_H} \text{sh} \gamma l]; \\ \underline{I}_{m1} = \underline{I}_{m2} \text{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_{m2}}{Z_{XB}} \text{sh} \gamma l = \underline{I}_{m2} (\text{ch} \gamma l + \frac{Z'_H}{Z_{XB}} \text{sh} \gamma l); \end{cases} \quad (5.147)$$

2) для ідеальної лінії

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} = \underline{U}_{m2} \cos \beta l + jR_{XB} \sin \beta l = \underline{U}_{m2} [\cos \beta l + j \frac{1}{Z'_H} \sin \beta l]; \\ \underline{I}_{m1} = \underline{I}_{m2} \cos \beta l + j \frac{\underline{U}_{m2}}{R_{XB}} \sin \beta l = \underline{I}_{m2} (\cos \beta l + j Z'_H \sin \beta l). \end{cases} \quad (5.148)$$

У рівняннях (5.147) і (5.148) від частоти залежать:

1) для ідеальної лінії

$$\beta(\omega) = \alpha/v; \quad (5.149)$$

2) для реальної лінії $\alpha(\omega)$, якщо враховувати частотні залежності первинних параметрів R_1 і (або) G_1

$$\beta(\omega) \approx \alpha/v. \quad (5.150)$$

З огляду на співвідношення (5.149) і (5.150), вираз βl , який входить до аргументів гіперболічних і тригонометричних функцій рівнянь (5.147) і (5.148), можна записати у вигляді:

$$\beta l = \frac{\omega l}{v} = \omega \tau_3, \quad (5.151)$$

де $\tau_3 = l/v$ — затримка синусоїдного коливання в лінії.

Вирази для основних КФ ДЛ, отримані із застосуванням рівнянь (5.147), (5.148) і (5.151), наведені в табл. 5.26.

Таблиця 5.26

Комплексні функції довгих ліній

КФ	Ідеальна ДЛ	Реальна ДЛ ($\alpha = \text{const}$)
$H_U(j\omega)$	$\frac{Z'_H}{Z'_H \cos \omega \tau_3 + j \sin \omega \tau_3}$	$\frac{Z'_H}{Z'_H \text{ch}(a l + j \omega \tau_3) + \text{sh}(a l + j \omega \tau_3)}$
$H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos \omega \tau_3 + j Z'_H \sin \omega \tau_3}$	$\frac{1}{\text{ch}(a l + j \omega \tau_3) + Z'_H \text{sh}(a l + j \omega \tau_3)}$
$Z_{\text{вх}}(j\omega)$	$R_{\text{хв}} \frac{Z'_H + j \text{tg } \omega \tau_3}{1 + j Z'_H \text{tg } \omega \tau_3}$	$Z_{\text{хв}} \frac{Z'_H + \text{th}(a l + j \omega \tau_3)}{1 + Z'_H \text{th}(a l + j \omega \tau_3)}$
$Y_{\text{вх}}(j\omega)$	$G_{\text{хв}} \frac{Y'_H + j \text{tg } \omega \tau_3}{1 + j Y'_H \text{tg } \omega \tau_3}$	$Y_{\text{хв}} \frac{Y'_H + \text{th}(a l + j \omega \tau_3)}{1 + Y'_H \text{th}(a l + j \omega \tau_3)}$

Як видно з формул (табл. 5.26), КФ залежать не тільки від параметрів лінії, але й від опору навантаження. У практиці найважливішими є такі режими: навантаження лінії на хвильовий опір (режим узгодження); коротке замикання вихідних затискачів ДЛ і варіант $R_H \ll R_{\text{хв}}$ ($R'_H \ll 1$); холостий хід і варіант $R_H \gg R_{\text{хв}}$ ($R'_H \gg 1$); навантажування лінії на реактивний опір (L чи C).

Головну увагу при цьому надають ідеальним ДЛ і ДЛІМВ, у яких ослаблення $a l \ll 1$.

5.11.2. Комплексні функції і частотні характеристики узгодженої лінії

У режимі узгодження $Z'_H = 1$, тому КПФ $H_U(j\omega)$ і $H_I(j\omega)$ збігаються, а вхідні опори і провідності дорівнюють хвильовим. Перетворені вирази для КПФ, КВФ, АЧХ і ФЧХ наведені в табл. 5.27, а графіки — на рис. 5.52.

Графіки АЧХ (рис. 5.52, а) відповідають ідеальній лінії ($\alpha = 0$), а також — реальним лініям з постійним коефіцієнтом ослаблення

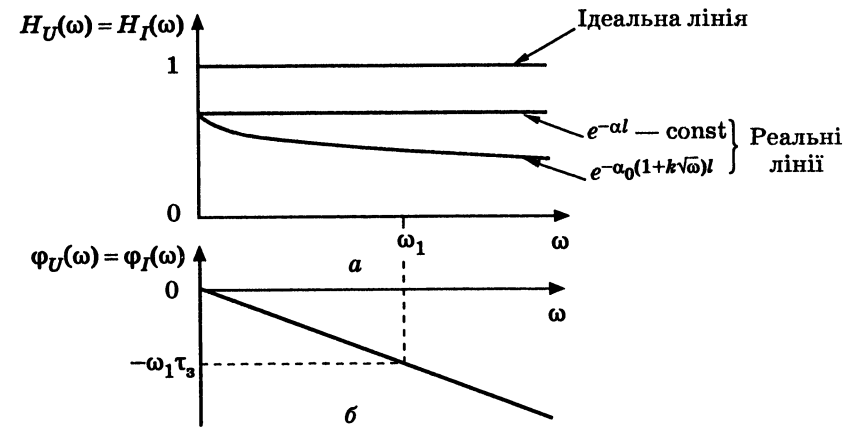


Рис. 5.52. Графіки ЧХ узгоджених ліній: а — АЧХ; б — ФЧХ

Таблиця 5.27

КФ, АЧХ і ФЧХ узгоджених ДЛ

КФ, ЧХ	Ідеальна ДЛ	Реальна лінія ($\alpha = \text{const}$)
$H_U(j\omega) = H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos \omega \tau_3 + j \sin \omega \tau_3} = e^{-j\omega \tau_3}$	$\frac{1}{\text{ch}(a l + j \omega \tau_3) + \text{sh}(a l + j \omega \tau_3)} = e^{-(a l + j \omega \tau_3)}$
АЧХ, $H_U(\omega) = H_I(\omega)$	1	$e^{-a l}$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega) = \varphi_I(\omega)$	$-\omega \tau_3$	
$Z_{\text{вх}}(j\omega)$	$R_{\text{хв}}$	$Z_{\text{хв}}$
$Y_{\text{вх}}(j\omega)$	$G_{\text{хв}}$	$Y_{\text{хв}}$

($\alpha = \text{const}$) і з коефіцієнтом ослаблення, який змінюється за частотою за типовим законом $\alpha(\omega) = \alpha_0(1 + k\sqrt{\omega})$.

Фазочастотні характеристики (рис. 5.52, б) узгоджених ліній змінюються за лінійним законом, що забезпечує однаковий час затримки τ_3 синусоїдних коливань із різними частотами в лінії:

$$u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t - \omega \tau_3) = U_{m2} \cos[\alpha(t - \tau_3)].$$

Незмінність АЧХ ідеальної та реальної лінії з $\alpha = \text{const}$ разом із лінійністю ФЧХ обумовлюють практичне застосування режиму узгодження завдяки неспотвореній передачі сигналів у лінії. У деяких випадках допустимою є наявність спотворень сигналів і за умови $\alpha(\omega)$.

5.11.3. Комплексні функції і частотні характеристики лінії при короткому замиканні вихідних затискачів і при $R_H \ll R_{XB}$

Оскільки при короткому замиканні лінії (див. рис. 5.22, а) $Z'_H = 0$, то КПФ $H_I(j\omega)$ (див. табл. 5.26) позбавлена сенсу. У цьому випадку розглядають КПФ $H_I(j\omega)$, а також КВФ $Z_{BX}(j\omega)$, причому частотні характеристики (ЧХ) замкненої на кінці лінії подібні ЧХ паралельного резонансного контуру.

Здобути після підстановки $Z'_H = 0$ у формули (табл. 5.26) точні співвідношення для $H_I(j\omega)$, $Z_{BX}(j\omega)$, АЧХ і ФЧХ ідеальної ДЛ, а також приблизні вирази, одержані з використанням формул (5.89), тих самих КФ, АЧХ і ФЧХ для ДЛМВ ($al \ll 1$) зведено до табл. 5.28.

Таблиця 5.28

КФ, АЧХ і ФЧХ короткозамкненої ДЛ

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($al \ll 1$)
$H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos \omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos \omega\tau_3 + j al \sin \omega\tau_3}$
АЧХ, $H_I(\omega)$	$\frac{1}{ \cos \omega\tau_3 }$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \omega\tau_3 + (al \sin \omega\tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_I(\omega)$	$\begin{cases} 0, \text{ якщо } \cos \omega\tau_3 > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \cos \omega\tau_3 < 0 \end{cases}$	$-\arctg(al \operatorname{tg} \omega\tau_3)$
$Z_{BX}(j\omega)$	$jR_{XB} \operatorname{tg} \omega\tau_3$	$R_{XB} \frac{al + j \operatorname{tg} \omega\tau_3}{1 + jal \operatorname{tg} \omega\tau_3}$
АЧХ, $Z_{BX}(\omega)$	$R_{XB} \operatorname{tg} \omega\tau_3 $	$R_{XB} \frac{\sqrt{(al)^2 + \operatorname{tg}^2 \omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (al \operatorname{tg} \omega\tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_Z(\omega)$	$\begin{cases} \pi/2, \text{ якщо } \operatorname{tg} \omega\tau_3 > 0; \\ -\pi/2, \text{ якщо } \operatorname{tg} \omega\tau_3 < 0 \end{cases}$	$\arctg \frac{\operatorname{tg} \omega\tau_3}{al} - \arctg(al \operatorname{tg} \omega\tau_3)$

Графіки ЧХ ідеальної ДЛ і ДЛМВ, побудовані за формулами (табл. 5.28), зображено відповідно на рис. 5.53 і 5.54.

Аналіз АЧХ (рис. 5.53, а, в і 5.54, а, в) свідчить, що короткозамкнені лінії є багаторезонансними (багатохвильовими) системами з кратними значеннями резонансних частот:

$$\omega_{резn} = n\pi/2\tau_3, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (5.152)$$

Для частоти першого резонанса $\omega_{рез1}$ співвідношення між довжиною лінії та довжиною хвилі становлять:

$$l_{рез1} = \tau_3 v = \frac{\pi v}{2\omega_{рез1}} = \frac{v}{4f_{рез1}} = \frac{\lambda_{рез1}}{4}; \quad l_{резn} = \frac{n\lambda_{рез1}}{4}. \quad (5.153)$$

Із формули (5.153) випливає, що на резонансних частотах довжина короткозамкненої лінії кратна чверті довжини хвилі резонансної частоти.

На резонансних частотах $\omega_{резn}$ АЧХ коефіцієнта передачі за струмом і повний опір мають максимуми (рис. 5.53, а, в і рис. 5.54, а, в).

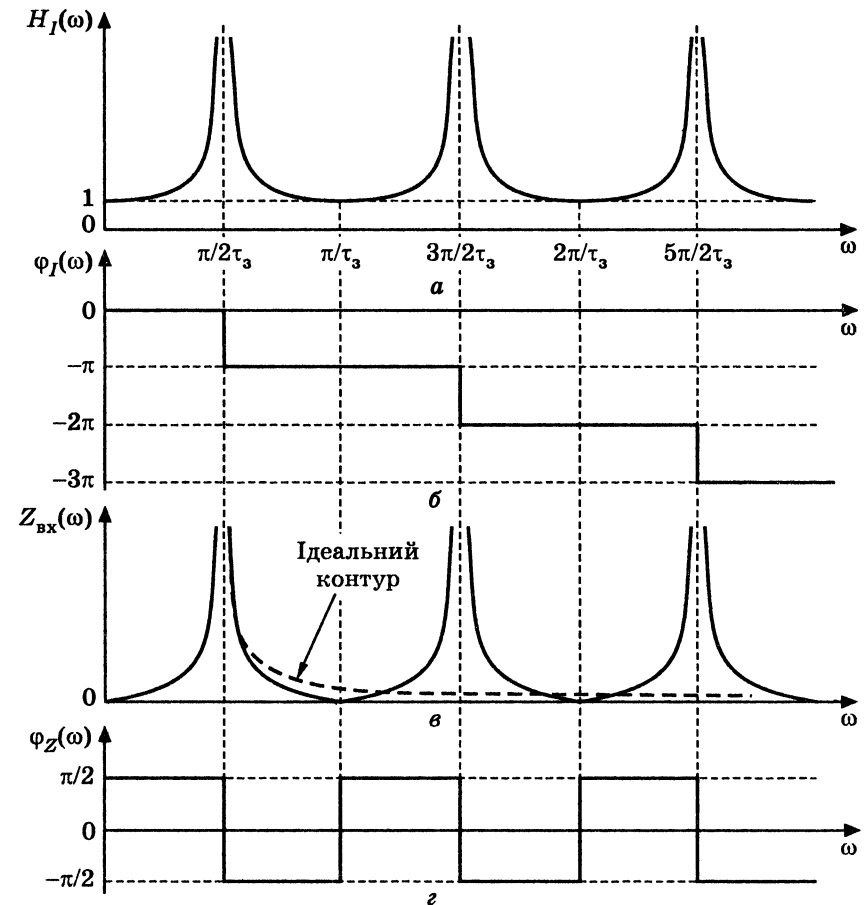


Рис. 5.53. ЧХ замкненої на кінці ІДЛ: а, б — АЧХ і ФЧХ $H_I(j\omega)$; в, з — АЧХ і ФЧХ $Z_{BX}(j\omega)$

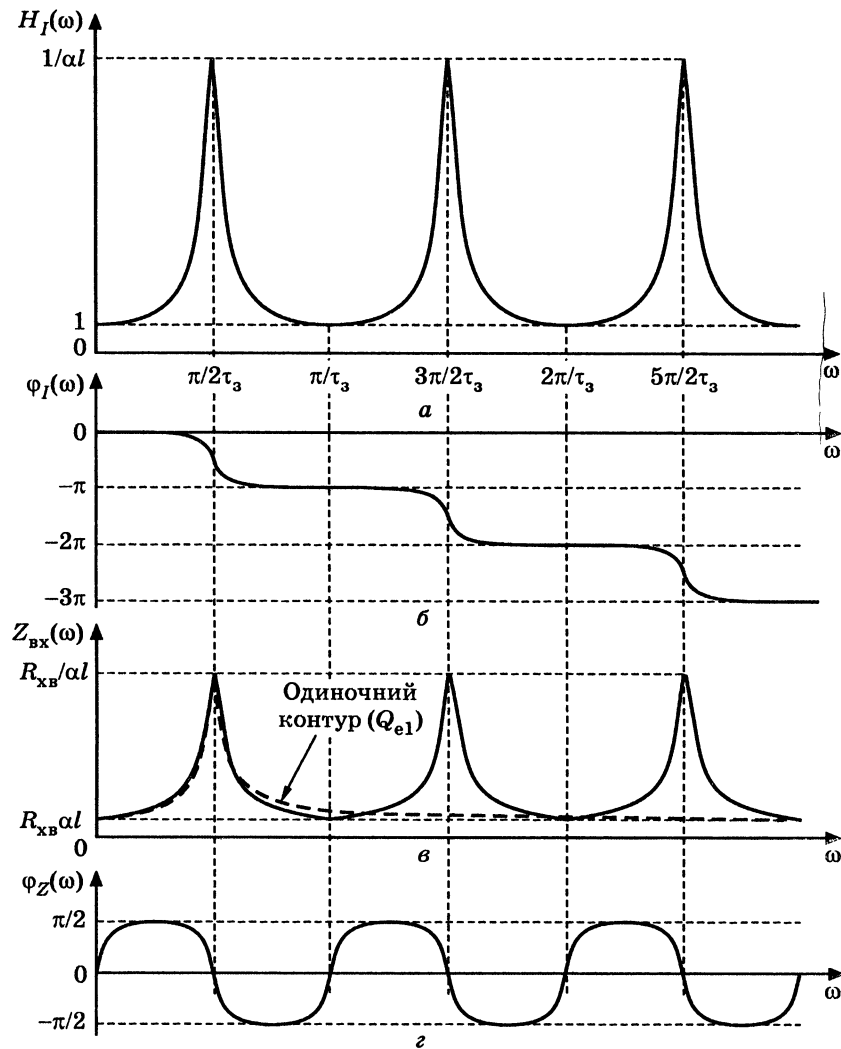


Рис. 5.54. ЧХ замкненої на кінці ДЛМВ ($\alpha l = 0,1$):
 а, б — АЧХ і ФЧХ $H_I(j\omega)$; в, г — АЧХ і ФЧХ $Z_{вх}(j\omega)$

В ідеальній ДЛ ці екстремуми прямують до нескінченності, а у ДЛМВ становлять

$$Z(\omega_{резn}) = R_{рез} = \frac{R_{хв}}{\alpha l}; H_I(\omega_{резn}) = \frac{1}{\alpha l}. \quad (5.154)$$

Аналогічні характеристики для повного опору та струму в індуктивній вітці мають паралельні резонансні контури. Схожість

ЧХ лінії та контуру підтверджується також виглядом ФЧХ (рис. 5.53, б, г і рис. 5.54, б, г).

Визначити параметри еквівалентного паралельного контуру можна, прирівнявши його смугу пропускання і значення еквівалентного резонансного опору аналогічним параметрам лінії на частоті $\omega_{рез1}$.

Для того щоб оцінити смугу пропускання АЧХ $H_I(\omega)$, використовують абсолютну розстройку $\Delta\omega = \omega - \omega_{рез1}$, що дозволяє записати змінну $\omega\tau_3$ і рівняння для визначення СП:

$$\omega\tau_3 = (\omega_{рез1} + \Delta\omega)\tau_3 = \pi/2 + \Delta\omega\tau_3;$$

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\pi/2 + \Delta\omega\tau_3) + (\alpha l)^2 \sin^2(\pi/2 + \Delta\omega\tau_3)}} = \frac{1}{\alpha l\sqrt{2}}, \quad (5.155)$$

де ω_{π} — абсолютна розстройка на границях СП.

Приблизний розв'язок рівняння (5.155) з використанням перших членів розкладання функцій синус (косинус) поблизу значення аргументу $\pi/2$ дає приблизні співвідношення для СП АЧХ:

$$\Delta\omega_{\pi} \approx \frac{\alpha l}{\tau_3} = \frac{2\alpha l}{\pi} \omega_{рез1}; 2\Delta\omega_{\pi} \approx \frac{4\alpha l}{\pi} \omega_{рез1}. \quad (5.156)$$

Із формул (5.154) і (5.156) випливають співвідношення для добротності та характеристичного опору еквівалентного паралельного контуру:

$$Q_{e1} = \frac{\omega_{рез1}}{2\Delta\omega_{\pi}} \approx \frac{\pi}{4\alpha l}; \rho_{e1} = \frac{R_{рез}}{Q_{e1}} \approx \frac{4}{\pi} R_{хв}. \quad (5.157)$$

Завдяки періодичності тригонометричних функцій, які входять у вирази для АЧХ ДЛМВ, значення СП $2\Delta\omega_{\pi}$ однакові для всіх резонансних частот. Тому добротності та характеристичні опори еквівалентних контурів на цих частотах становлять

$$Q_{en} = \frac{\omega_{резn}}{2\Delta\omega_{\pi}} = \frac{n\omega_{рез1}}{2\Delta\omega_{\pi}} = nQ_{e1} = \frac{n\pi}{4\alpha l}; \rho_{en} = \frac{R_{рез}}{Q_{en}} \approx \frac{4}{n\pi} R_{хв}. \quad (5.158)$$

Поблизу частот, кратних π/τ_3 (довжина лінії кратна $\lambda/2$), характер змінювання $Z_{вх}(\omega)$ і $\varphi_Z(\omega)$ (рис. 5.53, в; г; рис. 5.54, в, г) подібний характеристикам послідовного резонансного контуру. На

¹⁹Зв'язок між ρ_{e1} і $R_{хв}$ непрямо підтверджується однотипністю вихідних розрахункових співвідношень для цих вторинних параметрів: $R_{хв} = \sqrt{L_1/C_1}$; $\rho = \sqrt{L/C}$.

пих частотах, як і в послідовному контурі, опір ІДЛ дорівнює нулю, а опір ДЛМВ мінімальний і становить $R_{\text{хв}} \alpha l$. Характеристики $H_I(\omega)$ і $\varphi_I(\omega)$ не властиві послідовному контуру, оскільки дією і відгуком для нього є напруги.

Слід зазначити, що ЧХ ліній та одиночних контурів аналогічні тільки поблизу резонансних частот (див. рис. 5.53, в і 5.54, в, де АЧХ контурів показані пунктиром). При значних розстройках ($\omega \gg \omega_{\text{рез1}}$) характеристики контуру і лінії суттєво різняться і, насамперед, тим, що одиночний контур має тільки одну, а лінії — теоретично нескінченний ряд резонансних частот.

Для аналізу КФ і ЧХ, коли ослаблення в лінії залежить від частоти за відомим законом $\alpha(\omega)$, причому $\alpha(\omega)l \ll 1$, справедливі співвідношення з табл. 5.28, у яких слід замінити α на $\alpha(\omega)$. Графіки АЧХ (рис. 5.55) показують, що при цьому зберігаються багатократні резонанси, однак максимуми АЧХ зменшуються, а СП розширюються із збільшенням номера резонансної частоти.

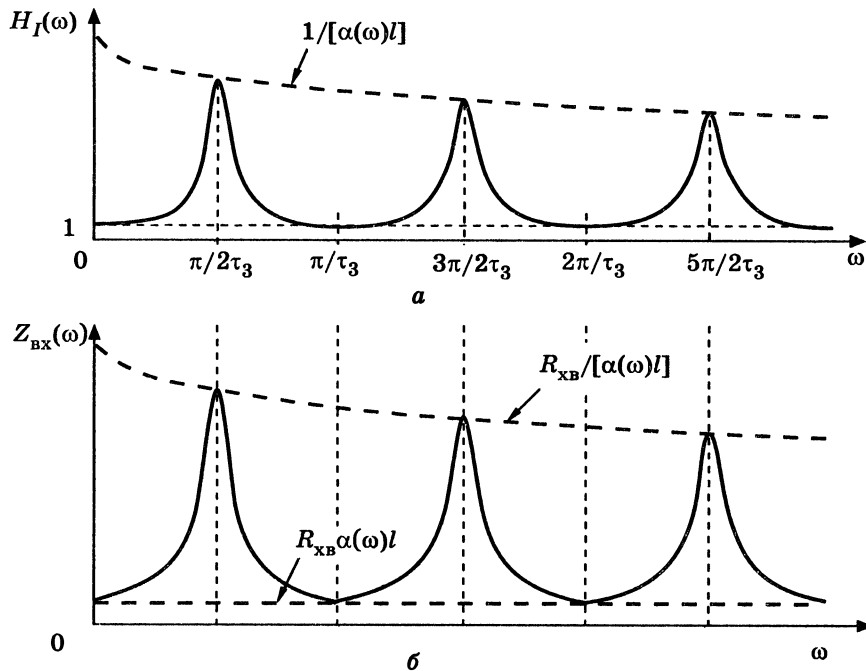


Рис. 5.55. АЧХ замкненої на кінці лінії з ослабленням, яке залежить від частоти за законом $\alpha(\omega) = \alpha_0(1 + k\sqrt{\omega})$: а — АЧХ $H_I(\omega)$; б — АЧХ $Z_{\text{вх}}(\omega)$

Аналогічно співвідношенням (5.157) і (5.158) можна ввести приблизні оцінки добротностей еквівалентних контурів для резонансних частот:

$$Q_{e1} \approx \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha(\omega_{\text{рез1}})l}; \quad Q_{en} \approx \frac{n\pi}{4} \frac{1}{\alpha(\omega_{\text{резn}})l}. \quad (5.159)$$

З фізичної точки зору характеристики лінії, навантаженої на опір $R_H \ll R_{\text{хв}}$, наближаються до режиму короткого замикання лінії. Цей висновок підтверджують аналітичні вирази (табл. 5.29), здобуті внаслідок підстановки значення $R'_H \ll 1$ у загальні вирази (табл. 5.26) для $H_I(j\omega)$ і $Z_{\text{вх}}(j\omega)$.

Таблиця 5.29

КФ, АЧХ і ФЧХ лінії при $R_H \ll R_{\text{хв}}$ ($R'_H \ll 1$)

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$)
$H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos \omega\tau_3 + jR'_H \sin \omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos \omega\tau_3 + j(\alpha l + R'_H) \sin \omega\tau_3}$
АЧХ, $H_I(\omega)$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \omega\tau_3 + (R'_H \sin \omega\tau_3)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \omega\tau_3 + (\alpha l + R'_H)^2 \sin^2 \omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_I(\omega)$	$-\arctg(R'_H \operatorname{tg} \omega\tau_3)$	$-\arctg[(\alpha l + R'_H) \operatorname{tg} \omega\tau_3]$
$Z_{\text{вх}}(j\omega)$	$R_{\text{хв}} \frac{R'_H + j \operatorname{tg} \omega\tau_3}{1 + jR'_H \operatorname{tg} \omega\tau_3}$	$R_{\text{хв}} \frac{(\alpha l + R'_H) + j \operatorname{tg} \omega\tau_3}{1 + j(\alpha l + R'_H) \operatorname{tg} \omega\tau_3}$
АЧХ, $Z_{\text{вх}}(\omega)$	$R_{\text{хв}} \frac{\sqrt{(R'_H)^2 + \operatorname{tg}^2 \omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (R'_H \operatorname{tg} \omega\tau_3)^2}}$	$R_{\text{хв}} \frac{\sqrt{(\alpha l + R'_H)^2 + \operatorname{tg}^2 \omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (\alpha l + R'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_Z(\omega)$	$\arctg \frac{\operatorname{tg} \omega\tau_3}{R'_H} - \arctg(R'_H \operatorname{tg} \omega\tau_3)$	$\arctg \frac{\operatorname{tg} \omega\tau_3}{\alpha l + R'_H} - \arctg[(\alpha l + R'_H) \operatorname{tg} \omega\tau_3]$

Порівняння виразів (табл. 5.28 і 5.29) показує, що за умови $R_H \ll R_{\text{хв}}$ КФ, АЧХ і ФЧХ ідеальної ДЛ та ДЛМВ збігаються з аналогічними характеристиками короткозамкненої ДЛМВ. Кількісна різниця є тільки в тому, що замість безрозмірної величини αl (входить у формули табл. 5.28) у виразах для ідеальної та реальної ліній, навантажених на $R_H \ll R_{\text{хв}}$, записано відповідно R'_H і $(\alpha l + R'_H)$. Отже, КФ, АЧХ і ФЧХ лінії з малими втратами і $R_H \ll R_{\text{хв}}$, з одного боку, відповідають характеристикам лінії з еквівалентними

втратами $\alpha_e l = \alpha l + R'_H$, а з іншого боку, — ідеальної лінії з еквівалентним навантаженням $R'_H = \alpha l + R'_H$. Тому графіки ЧХ лінії, навантаженої на $R_H \ll R_{ХВ}$, аналогічні графікам АЧХ і ФЧХ замкненої на кінці ДЛМВ (рис. 5.54).

5.11.4. КФ і ЧХ лінії при холостому ході та при $R_H \gg R_{ХВ}$

Оскільки в розімкненій лінії (рис. 5.20, а) $Z'_H \rightarrow \infty$ та $I_{m2} = 0$, із сукупності КПФ доцільно розглядати $H_U(j\omega)$, а з КВФ — $Y_{ВХ}(j\omega)$.

Отримані в результаті підстановки значення $Z'_H \rightarrow \infty$ ($Y'_H = 0$) до формул (табл. 5.26) точні для ІДЛ та приблизні для ДЛМВ співвідношення для $H_U(j\omega)$, $H_U(\omega)$ і $\varphi_U(\omega)$ (табл. 5.30) цілком збігаються відповідно з $H_I(j\omega)$, $H_I(\omega)$ і $\varphi_I(\omega)$ для короткозамкненої лінії (табл. 5.28). Здобуті аналогічно вирази для $Y_{ВХ}(j\omega)$ і $Y_{ВХ}(\omega)$ (табл. 5.30) відрізняються від $Z_{ВХ}(j\omega)$ і $Z_{ВХ}(\omega)$ замкненої лінії (табл. 5.28) тільки множниками — $R_{ХВ}$ (замкнена) і $G_{ХВ}$ (розімкнена). ФЧХ комплексної провідності розімкненої лінії $\varphi_Y(\omega)$ і ФЧХ комплексного опору замкненої лінії $\varphi_Z(\omega)$ також збігаються (див. табл. 5.28 і 5.30).

Таблиця 5.30

КФ, АЧХ і ФЧХ розімкненої лінії

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$)
$H_U(j\omega)$	$\frac{1}{\cos \omega \tau_3}$	$\frac{1}{\cos \omega \tau_3 + j \alpha l \sin \omega \tau_3}$
АЧХ, $H_U(\omega)$	$\frac{1}{ \cos \omega \tau_3 }$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \omega \tau_3 + (\alpha l \sin \omega \tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega)$	$\begin{cases} 0, \text{ якщо } \cos \omega \tau_3 > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \cos \omega \tau_3 < 0 \end{cases}$	$-\arctg(\alpha l \operatorname{tg} \omega \tau_3)$
$Y_{ВХ}(j\omega)$	$jG_{ХВ} \operatorname{tg} \omega \tau_3$	$G_{ХВ} \frac{\alpha l + j \operatorname{tg} \omega \tau_3}{1 + j \alpha l \operatorname{tg} \omega \tau_3}$
АЧХ, $Y_{ВХ}(\omega)$	$G_{ХВ} \operatorname{tg} \omega \tau_3 $	$G_{ХВ} \frac{\sqrt{(\alpha l)^2 + \operatorname{tg}^2 \omega \tau_3}}{\sqrt{1 + (\alpha l \operatorname{tg} \omega \tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_Y(\omega)$	$\begin{cases} \pi/2, \text{ якщо } \operatorname{tg} \omega \tau_3 > 0; \\ -\pi/2, \text{ якщо } \operatorname{tg} \omega \tau_3 < 0 \end{cases}$	$\arctg \frac{\operatorname{tg} \omega \tau_3}{\alpha l} - \arctg(\alpha l \operatorname{tg} \omega \tau_3)$

Отже, характеристики ДЛ із замкненими і розімкненими вхідними затискачами є дуальними. Це дозволяє використовувати для аналізу режиму холостого ходу ЧХ лінії в режимі короткого замикання (рис. 5.53–5.55).

З аналізу АЧХ і ФЧХ розімкненої лінії як характеристик, дуальних зображеним на рис. 5.53 і 5.54, випливають такі висновки:

1) подібно до замкненої, розімкнена лінія має резонанси з кратними частотами;

2) поблизу частот $\omega_{резn}$ (5.152) ЧХ аналогічні характеристикам послідовного резонансного контуру; на цих частотах АЧХ $H_U(\omega)$ і повна провідність ідеальної лінії прямує до нескінченності, а для ДЛМВ становлять

$$H(\omega_{резn}) = \frac{1}{\alpha l}; Y(\omega_{резn}) = \frac{G_{ХВ}}{\alpha l};$$

3) на резонансних частотах $\omega_{резn}$ довжина лінії кратна чверті довжини хвилі резонансної частоти;

4) щоб розрахувати вторинні параметри еквівалентних послідовних контурів (добротність, СП, характеристичний опір), можна застосовувати співвідношення (5.155)–(5.159) для замкненої лінії;

5) поблизу частот, кратних π/τ_3 (довжина лінії кратна $\lambda/2$), характер змінювання $Y_{ВХ}(\omega)$ і $\varphi_Y(\omega)$ подібний ЧХ паралельного контуру; на цих частотах вхідна провідність ідеальної ДЛ дорівнює нулю (опір прямує до нескінченності), а вхідна провідність ДЛМВ мінімальна ($G_{ХВ} \alpha l$), відповідно опір максимальний ($R_{ХВ}/\alpha l$).

Порівняння виразів, отриманих у п. 5.11.3 за умови $R_H \ll R_{ХВ}$ (табл. 5.29), і співвідношень, здобутих для $R_H \gg R_{ХВ}$ ($G'_H \ll 1$) (табл. 5.31), свідчить про їхню дуальність, а відповідно, і дуальність висновків:

1) характеристики ідеальної ДЛ, навантаженої на $R_H \gg R_{ХВ}$, і розімкненої на кінці ДЛМВ $\alpha l = G'_H$ аналогічні;

2) КФ, АЧХ і ФЧХ ДЛМВ при навантаженні на $R_H \gg R_{ХВ}$ відповідають тим самим характеристикам розімкненої ДЛ з еквівалентними втратами $\alpha_e l = \alpha l + G'_H$;

3) аналіз ЧХ ДЛМВ при її навантаженні на $R_H \gg R_{ХВ}$ можна звести до аналізу характеристик ідеальної ДЛ з еквівалентною нормованою провідністю навантаження $G'_H = \alpha l + G'_H$.

Таблиця 5.31

КФ, АЧХ і ФЧХ лінії при $R_H \gg R_{xb}$ ($G'_H \ll 1$)

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha \ll 1$)
$H_U(j\omega)$	$\frac{1}{\cos \omega\tau_3 + jG'_H \sin \omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos \omega\tau_3 + j(\alpha + G'_H) \sin \omega\tau_3}$
АЧХ, $H_U(\omega)$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \omega\tau_3 + (G'_H \sin \omega\tau_3)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \omega\tau_3 + (\alpha + G'_H)^2 \sin^2 \omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega)$	$-\text{arctg}(G'_H \text{tg} \omega\tau_3)$	$-\text{arctg}[(\alpha + G'_H) \text{tg} \omega\tau_3]$
$Y_{вх}(j\omega)$	$G_{xb} \frac{G'_H + j\text{tg} \omega\tau_3}{1 + jG'_H \text{tg} \omega\tau_3}$	$G_{xb} \frac{(\alpha + G'_H) + j\text{tg} \omega\tau_3}{1 + j(\alpha + G'_H) \text{tg} \omega\tau_3}$
АЧХ, $Y_{вх}(\omega)$	$G_{xb} \frac{\sqrt{(G'_H)^2 + \text{tg}^2 \omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (G'_H \text{tg} \omega\tau_3)^2}}$	$G_{xb} \frac{\sqrt{(\alpha + G'_H)^2 + \text{tg}^2 \omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (\alpha + G'_H)^2 \text{tg}^2 \omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_Y(\omega)$	$\text{arctg} \frac{\text{tg} \omega\tau_3}{G'_H} - \text{arctg}(G'_H \text{tg} \omega\tau_3)$	$\text{arctg} \frac{\text{tg} \omega\tau_3}{\alpha + G'_H} - \text{arctg}[(\alpha + G'_H) \text{tg} \omega\tau_3]$

5.12. Перехідні процеси в довгих лініях

Для обчислення координатно-часових значень напруги і струму $u(x, t)$; $i(x, t)$ в довгій лінії при довільній дії джерела напруги (ЕРС) $e(t)$ (рис. 5.56) або джерела струму $i_{дж}(t)$ зазвичай використовують операторний метод.

Аналізуючи перехідні процеси в лінії, яку розглядають як чотириполюсник (позначений пунктиром на рис. 5.56), визначають миттєве значення відгуку — напруги або струму на зовнішніх застискачах. Для того щоб знайти відгук, крім безпосереднього застосування операторного методу, використовують ОПФ (чи ОВФ) або інтеграли накладання (при цьому необхідно попередньо знайти часові характеристики). Розгляду операторних функцій і часових характеристик присвячений підрозділ 5.13.

5.12.1. Основні теоретичні положення для аналізу напруги та струму операторним методом

Приклад розв'язання одновимірних хвильових рівнянь ідеальної ДЛ (5.12) і (5.13) операторним методом наведений вище у підрозділі 5.3.

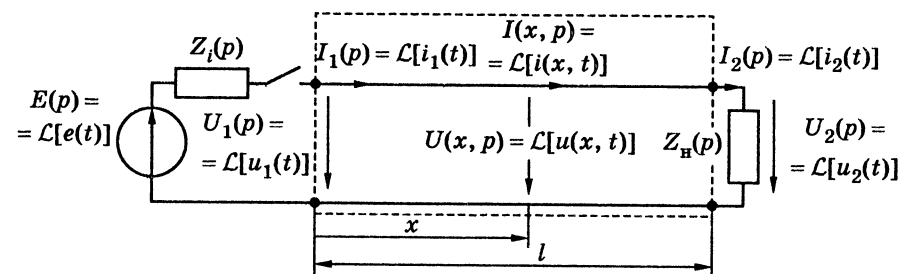


Рис. 5.56. До постановки задачі аналізу нестационарного режиму ДЛ операторним методом

Застосування до диференціальних рівнянь (5.10) для реальних ліній перетворення Лапласа за змінною t дозволяє перейти до алгебраїчних рівнянь стосовно зображень $U(x, p)$; $I(x, p)$:

$$\begin{cases} \frac{dU(x, p)}{dx} = (R_1 + pL_1)I(x, p) = Z_1(p)I(x, p); \\ \frac{dI(x, p)}{dx} = (G_1 + pC_1)U(x, p) = Y_1(p)U(x, p), \end{cases} \quad (5.160)$$

де $Z_1(p) = R_1 + pL_1$; $Y_1(p) = G_1 + pC_1$ — первинні (погонні) операторні опір і провідність відповідно.

Система (5.160) є аналогічною рівнянням (5.39) і (5.40) із підрозділу 5.4, де розглянуто усталений синусоїдний режим. Тому можна скористатися здобутими там співвідношеннями, замінюючи в них комплексні амплітуди напруг і струмів зображеннями і вводячи аналогічні (див. табл. 5.6 і співвідношення (5.58)) операторні вторинні параметри:

1) операторний коефіцієнт поширення

$$\gamma(p) = \sqrt{Z_1(p)Y_1(p)} = \sqrt{(R_1 + pL_1)(G_1 + pC_1)}; \quad (5.161)$$

2) операторний хвильовий опір (провідність) лінії

$$Z_{xb}(p) = \frac{1}{Y_{xb}(p)} = \sqrt{\frac{Z_1(p)}{Y_1(p)}}; \quad (5.162)$$

3) операторний коефіцієнт відбиття

$$\rho(x, p) = \frac{U_{від}(x, p)}{U_{пад}(x, p)} = -\frac{I_{від}(x, p)}{I_{пад}(x, p)} = \frac{Z_{вх}(p) - Z_{xb}(p)}{Z_{вх}(p) + Z_{xb}(p)} e^{2\gamma(p)x} = \frac{Z_H(p) - Z_{xb}(p)}{Z_H(p) + Z_{xb}(p)} e^{-2\gamma(p)(l-x)}. \quad (5.163)$$

Операторні вторинні параметри (5.161) і (5.162) дозволяють на підставі формул (5.52), (5.54) і (5.57) скласти вирази для зображень напруги, струму і вхідного опору лінії:

$$\begin{cases} U(x, p) = U_1(p) \operatorname{ch}[\gamma(p)x] - Z_{\text{хв}} I_1(p) \operatorname{sh}[\gamma(p)x]; \\ I(x, p) = I_1(p) \operatorname{ch}[\gamma(p)x] - \frac{U_1(p)}{Z_{\text{хв}}(p)} \operatorname{sh}[\gamma(p)x]; \end{cases} \quad (5.164)$$

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{U_1(p)}{I_1(p)} = Z_{\text{хв}}(p) \frac{Z_{\text{н}}(p) + Z_{\text{хв}}(p) \operatorname{th}[\gamma(p)l]}{Z_{\text{хв}}(p) + Z_{\text{н}}(p) \operatorname{th}[\gamma(p)l]}. \quad (5.165)$$

Система (5.164) не повністю відповідає поставленій задачі, оскільки шукані зображення в ній пов'язані з $U_1(p)$ та $I_1(p)$, а не із зображенням дії $E(p)$. Для того щоб усунути цю невідповідність, до системи (5.164) підставляють очевидні співвідношення, які випливають з аналізу схеми кола (рис. 5.56):

$$U_1(p) = \frac{E(p)Z_{\text{вх}}(p)}{Z_i(p) + Z_{\text{вх}}(p)}; \quad I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_i(p) + Z_{\text{вх}}(p)}.$$

У результаті перетворень рівнянь (5.164) і підстановки до них виразу (5.165) ці рівняння матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{E(p)\{Z'_{\text{н}}(p) \operatorname{ch}[\gamma(p)(l-x)] + \operatorname{sh}[\gamma(p)(l-x)]\}}{[1 + Z'_{\text{н}}(p)Z'_i(p)] \operatorname{sh}[\gamma(p)l] + [Z'_i(p) + Z'_{\text{н}}(p)] \operatorname{ch}[\gamma(p)l]}; \\ I(x, p) = \frac{E(p) \operatorname{ch}[\gamma(p)(l-x)] + Z'_{\text{н}}(p) \operatorname{sh}[\gamma(p)(l-x)]}{Z_{\text{хв}}(p) [1 + Z'_{\text{н}}(p)Z'_i(p)] \operatorname{sh}[\gamma(p)l] + [Z'_i(p) + Z'_{\text{н}}(p)] \operatorname{ch}[\gamma(p)l]}. \end{cases} \quad (5.166)$$

де $Z'_i(p) = Z_i(p)/Z_{\text{хв}}(p)$; $Z'_{\text{н}}(p) = Z_{\text{н}}(p)/Z_{\text{хв}}(p)$ — операторні нормовані опори джерела і навантаження відповідно.

Для спрощення переходу від зображень до оригіналів гіперболічні функції в системі (5.166) доцільно виразити через експоненти:

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{E(p)\{[Z'_{\text{н}}(p) + 1]e^{\gamma(p)(l-x)} + [Z'_{\text{н}}(p) - 1]e^{-\gamma(p)(l-x)}\}}{[Z'_{\text{н}}(p) + 1][Z'_i(p) + 1]e^{\gamma(p)l} - [Z'_{\text{н}}(p) - 1][Z'_i(p) - 1]e^{-\gamma(p)l}}; \\ I(x, p) = \frac{E(p) [Z'_{\text{н}}(p) + 1]e^{\gamma(p)(l-x)} - [Z'_{\text{н}}(p) - 1]e^{-\gamma(p)(l-x)}}{Z_{\text{хв}}(p) [Z'_i(p) + 1][Z'_{\text{н}}(p) + 1]e^{\gamma(p)l} - [Z'_{\text{н}}(p) - 1][Z'_i(p) - 1]e^{-\gamma(p)l}}. \end{cases} \quad (5.167)$$

Систему (5.167) можна записати коротше і наочніше, якщо ввести:

1) операторний коефіцієнт відбиття від джерела

$$\rho_{Z_i}(p) = \frac{U_{\text{від}Z_i}(p)}{U_{\text{пад}Z_i}(p)} = \frac{I_{\text{від}Z_i}(p)}{I_{\text{пад}Z_i}(p)} = \frac{Z'_i(p) - 1}{Z'_i(p) + 1} = \frac{1 - Y'_i(p)}{1 + Y'_i(p)}; \quad (5.168)$$

2) операторний коефіцієнт відбиття від навантаження

$$\rho_{Z_{\text{н}}}(p) = \frac{U_{\text{від}Z_{\text{н}}}(p)}{U_{\text{пад}Z_{\text{н}}}(p)} = \frac{I_{\text{від}Z_{\text{н}}}(p)}{I_{\text{пад}Z_{\text{н}}}(p)} = \frac{Z'_{\text{н}}(p) - 1}{Z'_{\text{н}}(p) + 1} = \frac{1 - Y'_{\text{н}}(p)}{1 + Y'_{\text{н}}(p)}, \quad (5.169)$$

де $Y'_i(p) = Y_i(p)/Y_{\text{хв}}(p)$; $Y'_{\text{н}}(p) = Y_{\text{н}}(p)/Y_{\text{хв}}(p)$ — операторні нормовані провідності джерела і навантаження лінії відповідно.

Операторні нормовані опори джерела і навантаження виражають через відповідні операторні коефіцієнти відбиття:

$$Z'_i(p) = \frac{1 + \rho_{Z_i}(p)}{1 - \rho_{Z_i}(p)}; \quad Z'_{\text{н}}(p) = \frac{1 + \rho_{Z_{\text{н}}}(p)}{1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)}. \quad (5.170)$$

З огляду на формули (5.168)–(5.170) рівняння (5.167) запишуться у вигляді

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]e^{-\gamma(p)x} + \rho_{Z_{\text{н}}}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}}{2[1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}; \\ I(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]e^{-\gamma(p)x} - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}}{2Z_{\text{хв}}(p)[1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}. \end{cases} \quad (5.171)$$

Окремими значеннями (5.171) є зображення відгуків:

$$U_2(p) = U(l, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_{\text{н}}}(p)]e^{-\gamma(p)l}}{2[1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}; \quad (5.172)$$

$$I_2(p) = I(l, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)]e^{-\gamma(p)l}}{2Z_{\text{хв}}(p)[1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}; \quad (5.173)$$

$$I_1(p) = I(0, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)]e^{-2\gamma(p)l}}{2Z_{\text{хв}}(p)[1 - \rho_{Z_{\text{н}}}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}. \quad (5.174)$$

Зображення (5.171)–(5.174) суттєво спрощуються для важливого у практиці режиму узгодження опору навантаження й (або)

Зображення відгуків для різних варіантів узгодження лінії

Відгук	Варіанти узгодження		
	$Z_i(p) = Z_{\text{хв}}(p);$ $Z'_i(p) = 1; \rho_{Z_i}(p) = 0$	$Z_{\text{н}}(p) = Z_{\text{хв}}(p);$ $Z'_n(p) = 1; \rho_{Z_n}(p) = 0$	$Z'_i(p) = 1;$ $Z'_n(p) = 1$
$U_2(x, p)$	$\frac{E(p)}{2} [e^{-\gamma(p)x} + \rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} e^{-\gamma(p)x}$	$\frac{E(p)}{2} e^{-\gamma(p)x}$
$I_2(x, p)$	$\frac{E(p)}{2Z_{\text{хв}}(p)} [e^{-\gamma(p)x} + \rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{\text{хв}}(p)} e^{-\gamma(p)x}$	$\frac{E(p)}{2Z_{\text{хв}}(p)} e^{-\gamma(p)x}$
$U_2(p)$	$\frac{E(p)}{2} [1 + \rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)l}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} e^{-\gamma(p)l}$	$\frac{E(p)}{2} e^{-\gamma(p)l}$
$I_2(p)$	$\frac{E(p)}{2Z_{\text{хв}}(p)} [1 - \rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)l}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{\text{хв}}(p)} e^{-\gamma(p)l}$	$\frac{E(p)}{2Z_{\text{хв}}(p)} e^{-\gamma(p)l}$
$I_1(p)$	$\frac{E(p)}{2Z_{\text{хв}}(p)} [1 - \rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)2l}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{\text{хв}}(p)}$	$\frac{E(p)}{2Z_{\text{хв}}(p)}$

опору джерела з хвильовим опором лінії (табл. 5.32). Так, при узгодженні тільки з джерелом ($Z_i(p) = Z_{\text{хв}}(p)$) зображення містять два доданки. Перші з них обумовлені падаючою, а другі — відбитою хвилею від навантаження.

Зображення (5.171)–(5.174) набудуть наочнішого і зручнішого для переходу до оригіналів вигляду, якщо дріб, який вони містять,

$$\frac{1}{1 - \rho_{Z_n}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}} \quad (5.175)$$

розвинути у біномний ряд вигляду

$$1/(1-y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \dots,$$

де $y = \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_n}(p)e^{-2\gamma(p)l}$.

Зображення (5.171) після розвинення функції (5.175) у ряд набудуть вигляду:

$$U(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} \left[\underbrace{e^{-\gamma(p)x}}_1 + \underbrace{\rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}}_2 + \underbrace{\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)}}_3 + \underbrace{\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_n}^2(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)}}_4 + \dots \right]; \quad (5.176)$$

$$I(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{\text{хв}}(p)} \left[\underbrace{e^{-\gamma(p)x}}_1 - \underbrace{\rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}}_2 + \underbrace{\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)}}_3 - \underbrace{\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_n}^2(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)}}_4 + \dots \right]. \quad (5.177)$$

Кожен із доданків у виразах (5.176) і (5.177) відповідає оригіналу, що має фізичний зміст хвилі²⁰, яка рухається вздовж лінії. Так, наведені перші чотири доданки відповідають чотирьом типам хвиль напруги і струму:

- 1) хвилі № 1 пересуваються від входу лінії до виходу ($x=l$) і при $t = \tau_3 = l/v$ досягають навантаження;
- 2) хвилі № 2 спричинені відбиттям від навантаження і поширюються від виходу до входу лінії, досягаючи його в момент часу $t = 2\tau_3$;
- 3) хвилі № 3 — це відбиті від входу лінії хвилі № 2; вони рухаються від входу лінії до виходу і при $t = 3\tau_3$ досягають навантаження;

²⁰Слід відзначити умовність терміна «хвиля» стосовно збудження довільної форми, яке рухається вздовж лінії зі швидкістю v .

4) хвилі № 4 утворюються при відбитті від виходу лінії хвиль № 3; ці хвилі поширюються від виходу до входу лінії і при $t = 4\tau_3$ його досягають.

Зображення відбитих хвиль містять співмножники, складені з операторних коефіцієнтів відбиття. Склад множника кожної з хвиль визначається «історією» її відбиття. Від'ємні знаки окремих доданків у зображеннях для хвиль струму обумовлені знаком мінус, яким коефіцієнти відбиття за визначенням (5.168), (5.169) пов'язують падаючу та відбиту хвилі струму.

Наступні доданки, які не ввійшли до запису (5.176) і (5.177), відповідають хвилям, що повторюють процеси поширення і відбиття від входу лінії до навантаження і навпаки.

Застосування рядів можливе і для запису відгуків у лінії:

$$U_2(p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_n}(p)] [e^{-\gamma(p)l} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)3l} + \dots]}{2}; \quad (5.178)$$

$$I_2(p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_n}(p)] [e^{-\gamma(p)l} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_n}(p)e^{-\gamma(p)3l} + \dots]}{2Z_{\text{хв}}(p)}; \quad (5.179)$$

$$I_1(p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{xв}(p)} \times \frac{1 - \rho_{Z_H}(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-\gamma(p)2l} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)4l} + \dots]}{2Z_{xв}(p)}. \quad (5.180)$$

Загалом, $\gamma(p)$ і $Z_{xв}(p)$ є нелінійними функціями оператора p , що ускладнює перехід від зображень до оригіналів.

Розв'язки суттєво спрощуються для ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, у яких: операторний хвильовий опір і коефіцієнт ослаблення є дійсними числами ($Z_{xв}(p) = \sqrt{L_1/C_1} = R_{xв}$, $\alpha = 0$ — ІДЛ; $\alpha = 0,5(R_1/R_{xв} + C_1R_{xв})$ — ДЛМВ; $\alpha = R_1/R_{xв}$ — ЗДЛ); коефіцієнт поширення лінійно залежить від оператора p ($\gamma(p) = p\sqrt{L_1C_1} = p/v$ — ІДЛ; $\gamma(p) = \alpha + p/v$ — ДЛМВ і ЗДЛ); швидкість поширення хвиль не залежить від частоти і становить $v = 1/\sqrt{L_1C_1}$. Отримані з урахуванням згаданих спрощень операторні вирази наведені в табл. 5.33 (величини $\tau_x = x/v$, $\tau_3 = l/v$ означають час затримки хвиль у перерізі x і в усій лінії).

Таблиця 5.33

Операторні співвідношення для ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ

Параметр	Лінія	Зображення
$U(x, p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} [e^{-p\tau_x} + \rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} + \rho_{Z_i}^2(p)\rho_{Z_H}^2(p)e^{-p(4\tau_3 - \tau_x)} + \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} [e^{-\alpha x} e^{-p\tau_x} + \rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l-x)} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l+x)} e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} + \dots]$
$I(x, p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2R_{xв}} [e^{-p\tau_x} - \rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} - \rho_{Z_i}^2(p)\rho_{Z_H}^2(p)e^{-p(4\tau_3 - \tau_x)} + \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2R_{xв}} [e^{-\alpha x} e^{-p\tau_x} - \rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l-x)} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l+x)} e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} + \dots]$

Параметр	Лінія	Зображення
$U_2(p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_H}(p)]}{2} \times [e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]$
$I_2(p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2R_{xв}}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)]}{2R_{xв}} \times [e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]$
$I_1(p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2R_{xв}} \times \{1 - \rho_{Z_H}(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4p\tau_3} + \dots]\}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2R_{xв}} \left\{ 1 - \rho_{Z_H}(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-2\alpha l} e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4\alpha l} e^{-4p\tau_3} + \dots] \right\}$

В ІДЛ рівень хвиль при пересуванні вздовж лінії не змінюється, а в ДЛМВ і ЗДЛ зменшується за експоненціальним законом з коефіцієнтом ослаблення α (див. табл. 5.33).

При дії джерела струму з параметрами $I_{дж}(p)$ і $Z_i(p)$ слід у згаданих співвідношеннях, згідно з умовою еквівалентності джерел, замінити $E(p)$ на $I_{дж}(p)Z_i(p)$.

Нижче розглянуто ДЛ з тими самими навантаженнями, що й у підрозділі 5.11. Як приклади аналізуються перехідні процеси при ввімкненні постійних джерел. Це спрощує інтерпретацію результатів і використання їх для здобуття перехідних характеристик (підрозділ 5.13). Початкові умови вважаються нульовими:

$$i(x, -0) = 0; u(x, -0) = 0.$$

5.12.2. Лінії, узгоджені з навантаженням

У режимі узгодження лінії з навантаженням ($Z_H(p) = Z_{XB}(p)$) коефіцієнт відбиття від навантаження $\rho_{Z_H}(p) = 0$, і тому зображення відбитих хвиль відсутні. Співвідношення для зображень струму і напруги в узгоджених з навантаженням ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, увімкнених до ідеального джерела ($Z_i(p) = 0$), а також формули для миттєвих значень $u(x, t)$; $i(x, t)$; $u_2(t)$; $i_2(t)$ зведені в табл. 5.34. Ці зображення отримані внаслідок підстановки операторних параметрів згаданих ліній у відповідні формули табл. 5.32. Для переходу від зображень до оригіналів (миттєві значення) використано теореми щодо перетворень Лапласа (лінійності та запізнення) і типові операторні відповідності (див. табл. 3.1, 3.2).

Таблиця 5.34

Співвідношення для узгоджених з навантаженням ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, увімкнених до ідеального джерела ЕРС

Зображення та оригінали	ІДЛ	ДЛМВ і ЗДЛ
$U(x, p)$	$E(p)e^{-px/v} = E(p)e^{-p\tau x}$	$E(p)e^{-(\alpha x + px/v)} = E(p)e^{-\alpha x}e^{-p\tau x}$
$I(x, p)$	$E(p)e^{-p\tau x} / R_{XB}$	$E(p)e^{-\alpha x}e^{-p\tau x} / R_{XB}$
$u(x, t)$	$e(t - x/v) = e(t - \tau_x)$	$e(t - x/v)e^{-\alpha x} = e(t - \tau_x)e^{-\alpha x}$
$i(x, t)$	$e(t - \tau_x) / R_{XB}$	$e(t - \tau_x)e^{-\alpha x} / R_{XB}$
$u_2(t) = u(l, t)$	$e(t - l/v) = e(t - \tau_3)$	$e(t - l/v)e^{-\alpha l} = e(t - \tau_3)e^{-\alpha l}$
$i_2(t) = i(l, t)$	$e(t - \tau_3) / R_{XB}$	$e(t - \tau_3)e^{-\alpha l} / R_{XB}$

З аналізу виразів (табл. 5.34) випливають такі висновки:

- 1) напруга і струм у довільному перерізі містять тільки падаючі хвилі, які збігаються за формою (у часі та за координатою) з ЕРС;
- 2) у ДЛМВ і ЗДЛ рівень хвилі зменшується за законом $e^{-\alpha x}$;
- 3) миттєві значення напруги і струму $u_2(t)$ та $i_2(t)$ на виході ІДЛ різняться від вхідних $u_1(t)$ та $i_1(t)$ тільки зсувом на час $\tau_3 = l/v$;
- 4) $u_2(t)$ та $i_2(t)$ в ДЛМВ і ЗДЛ відрізняються від $u_1(t)$ та $i_1(t)$ не тільки зсувом на час τ_3 , але й множителем $e^{-\alpha l}$.

На рис. 5.57 зображено схему, динаміку формування $u(x, t)$ і графік $u_2(t)$ при ввімкненні узгодженої ІДЛ до ідеального джерела постійної ЕРС.

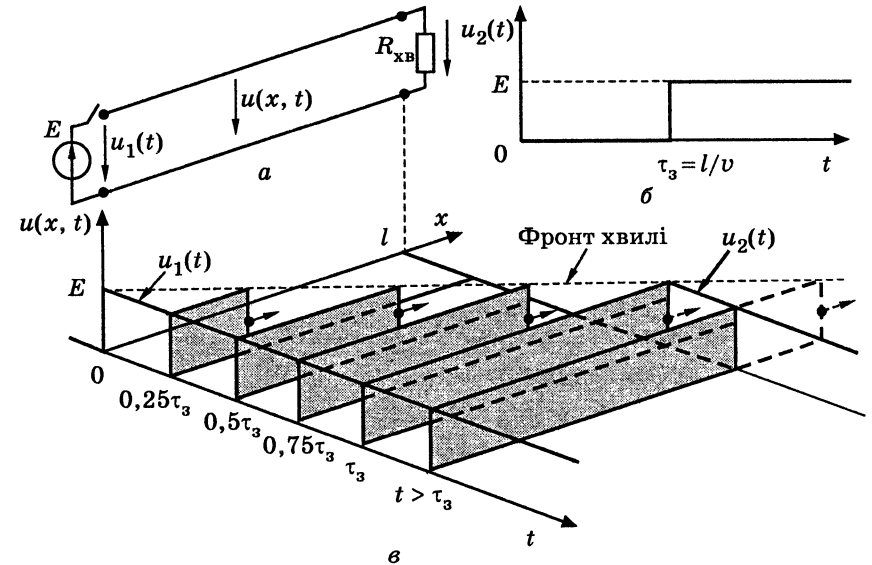


Рис. 5.57. Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до узгодженої ІДЛ: а — схема; б — вихідна напруга; в — динаміка формування напруги $u(x, t)$

5.12.3. Розімкнені лінії

Для розімкненої лінії $Z_H(p) \rightarrow \infty$, тому операторний коефіцієнт відбиття від навантаження (5.169) становить $\rho_{Z_H}(p) = 1$, що (як і для усталеного синусоїдного режиму) означає повне відбиття від навантаження.

Зображення струму та напруги загалом для лінії з втратами і довільному значенні опору джерела напруги виходять у результаті підстановки $\rho_{Z_H}(p) = 1$ у формули (5.176) і (5.177):

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} [e^{-\gamma(p)x} + e^{-\gamma(p)(2l-x)} + \\ + \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} + \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} + \dots]; \\ I(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{XB}(p)} [e^{-\gamma(p)x} - e^{-\gamma(p)(2l-x)} + \\ + \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} - \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} + \dots]. \end{cases} \quad (5.181)$$

Система (5.181) дозволяє розв'язувати конкретні задачі, в яких задаються параметри лінії та значення внутрішнього опору джерела.

Уявлення про процеси в розімкнених ДЛ можна скласти, обмежившись розглядом ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, ввімкнених до ідеального джерела напруги з внутрішнім опором $R_i = R_{\text{хв}}$.

Ідеальне джерело напруги. В ідеального джерела напруги $Z_i(p) = 0$, тому хвилі повністю відбиваються від джерела, що відповідає значенню операторного коефіцієнта відбиття від джерела (5.168) $\rho_{Z_i}(p) = -1$.

Для ІДЛ підстановка у формули (табл. 5.33) значень $\rho_{Z_{\text{н}}}(p) = 1$ і $\rho_{Z_i}(p) = -1$ приводить до зображень:

$$\begin{cases} U(x, p) = E(p)[e^{-p\tau_x} + e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} - e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} - e^{-p(4\tau_3 - \tau_x)} + \dots]; \\ I(x, p) = \frac{E(p)}{R_{\text{хв}}}[e^{-p\tau_x} - e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} - e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} + e^{-p(4\tau_3 - \tau_x)} + \dots]; \end{cases} \quad (5.182)$$

$$\begin{cases} U_2(p) = E(p)[2e^{-p\tau_3} - 2e^{-3p\tau_3} + 2e^{-5p\tau_3} - 2e^{-7p\tau_3} \dots]; \\ I_1(p) = \frac{E(p)}{R_{\text{хв}}}[1 - 2e^{-2p\tau_3} + 2e^{-4p\tau_3} - 2e^{-6p\tau_3} + 2e^{-8p\tau_3} - \dots]. \end{cases} \quad (5.183)$$

Перехід від зображень (5.182) до оригіналів дає миттєві значення напруги і струму в довільному перерізі лінії:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \underbrace{e(t - \tau_x)}_1 + \underbrace{e(t - 2\tau_3 + \tau_x)}_2 - \underbrace{e(t - 2\tau_3 - \tau_x)}_3 - \underbrace{e(t - 4\tau_3 + \tau_x)}_4 + \dots; \\ i(x, t) &= \frac{e(t - \tau_x)}{R_{\text{хв}}} - \frac{e(t - 2\tau_3 + \tau_x)}{R_{\text{хв}}} - \frac{e(t - 2\tau_3 - \tau_x)}{R_{\text{хв}}} + \frac{e(t - 4\tau_3 + \tau_x)}{R_{\text{хв}}} + \dots, \end{aligned} \quad (5.184)$$

де $e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(p)]$ — миттєве значення ЕРС.

Співвідношення (5.184) наочно підтверджують розглянуте у п. 5.12.1 фізичне подання перехідного процесу в лінії як накладання кількох хвиль. Доданки у виразі (5.184) є хвилями, які (за часом і координатою) збігаються за формою з миттєвими значеннями ЕРС джерела. Записані перші чотири хвилі мають такі особливості:

1) хвилі № 1 у часовому інтервалі $0 < t < \tau_3$ пересуваються до виходу лінії і при $t = \tau_3$ ($\tau_x = \tau_3$) їхній фронт досягає розімкнених застискачів лінії зі значеннями $e(0)$, $e(0)/R_{\text{хв}}$;

2) при $t < \tau_3$ хвилі № 2 дорівнюють нулю, а при $t > \tau_3$ вони формуються за рахунок повного відбиття хвиль № 1 від виходу лінії (напруга змінює знак, а струм — ні) і поширюються до входу лінії, досягаючи його при $t = 2\tau_3$;

3) хвилі № 3 при $t < 2\tau_3$ дорівнюють нулю, а при $t > 2\tau_3$ — це повністю відбиті (напруга змінює знак, а струм — ні) від входу лінії хвилі № 2; в інтервалі $2\tau_3 < t < 3\tau_3$ хвилі № 3 рухаються від входу до виходу лінії;

4) хвилі № 4 утворюються внаслідок відбиття від виходу лінії хвиль № 3 і поширюються протягом $3\tau_3 < t < 4\tau_3$ від виходу до входу лінії; при $t = 4\tau_3$ хвилі № 4 досягають входу лінії.

Аналіз доданків, не зазначених у виразі (5.184), свідчить, що процеси відбиття і поширення хвиль повторюються.

Оригіналами (5.183) є миттєві значення напруги на виході та струму на вході лінії:

$$\begin{cases} u_2(t) = 2e(t - \tau_3) - 2e(t - 3\tau_3) + 2e(t - 5\tau_3) - 2e(t - 7\tau_3) + \dots; \\ i_1(t) = \frac{e(t) - 2e(t - 2\tau_3) + 2e(t - 4\tau_3) - 2e(t - 6\tau_3) + \dots}{R_{\text{хв}}}. \end{cases} \quad (5.185)$$

На рис. 5.58 і 5.59 зображено схему (рис. 5.58, а і 5.59, а) та графіки $u_2(t)$, $u(x, t)$, $i_1(t)$, $i(x, t)$ для розімкненої ІДЛ, яку ввімкнено до ідеального джерела постійної ЕРС. Графіки миттєвих значень вихідної напруги $u_2(t)$ (рис. 5.58, б) і вхідного струму $i_1(t)$ (рис. 5.59, б) побудовані відповідно за формулами (5.185). Процеси формування миттєвих значень напруги і струму ілюструють рис. 5.58, в і 5.59, в.

Аналогічний аналіз для розімкнених ДЛМВ і ЗДЛ, ввімкнених до ідеального джерела напруги, дозволяє записати:

1) миттєві значення напруги та струму в перерізі x лінії

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \underbrace{e^{-\alpha x} e(t - \tau_x)}_1 + \underbrace{e^{-\alpha(2l-x)} e(t - 2\tau_3 + \tau_x)}_2 - \\ &- \underbrace{e^{-\alpha(2l+x)} e(t - 2\tau_3 - \tau_x)}_3 - \underbrace{e^{-\alpha(4l-x)} e(t - 4\tau_3 + \tau_x)}_4 + \dots; \\ i(x, t) &= \frac{\underbrace{e^{-\alpha x} e(t - \tau_x)}_1}{R_{\text{хв}}} - \frac{\underbrace{e^{-\alpha(2l-x)} e(t - 2\tau_3 + \tau_x)}_2}{R_{\text{хв}}} - \\ &- \frac{\underbrace{e^{-\alpha(2l+x)} e(t - 2\tau_3 - \tau_x)}_3}{R_{\text{хв}}} + \frac{\underbrace{e^{-\alpha(4l-x)} e(t - 4\tau_3 + \tau_x)}_4}{R_{\text{хв}}} + \dots \quad (5.186) \end{aligned}$$

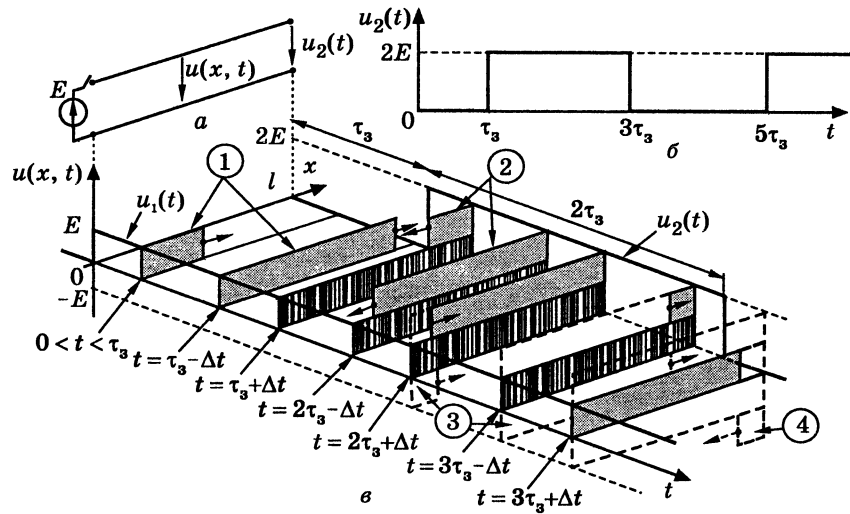


Рис. 5.58. Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до розімкненої ІДЛ: а — схема; б — часова діаграма вихідної напруги; в — динаміка формування напруги $u(x, t)$

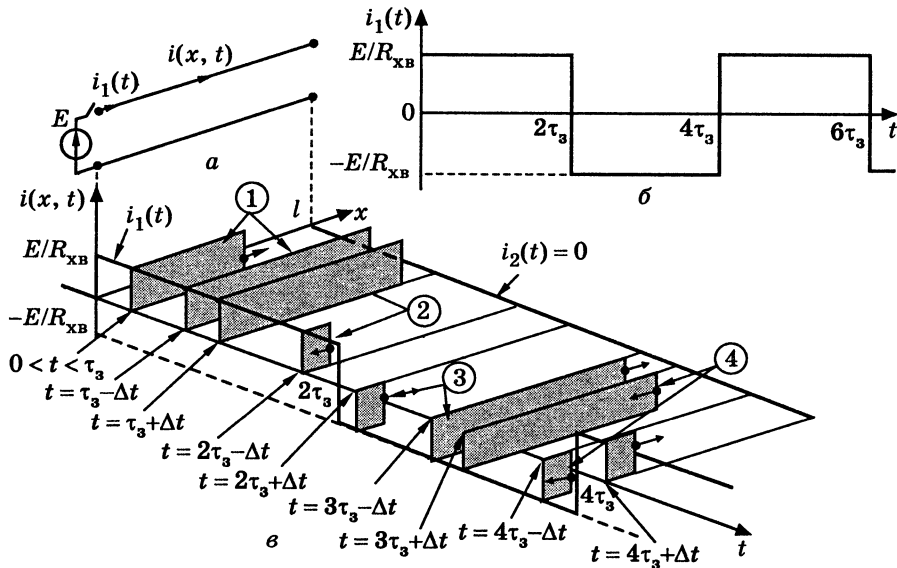


Рис. 5.59. Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до розімкненої ІДЛ: а — схема; б — часова діаграма вихідного струму; в — динаміка формування струму $i(x, t)$

2) миттєві значення вихідної напруги та вхідного струму

$$\begin{cases} u_2(t) = e^{-\alpha l} e(t - \tau_s) - 2e^{-3\alpha l} e(t - 3\tau_s) + 2e^{-5\alpha l} e(t - 5\tau_s) - \dots; \\ i_1(t) = \frac{e(t) - 2e^{-2\alpha l} e(t - 2\tau_s) + 2e^{-4\alpha l} e(t - 4\tau_s) - 2e^{-6\alpha l} e(t - 6\tau_s) \dots}{R_{\text{хв}}} \end{cases} \quad (5.187)$$

Оригінали струму та напруги (5.186) описуються кількома доданками, що мають, як і в ІДЛ, фізичне значення багаторазово відбитих хвиль. Пронумеровані у виразі (5.186) хвилі характеризують ті самі стадії формування напруги та струму в лінії, як і описані вище для ІДЛ. Відмінність полягає у зменшенні за експоненціальним законом $e^{-\alpha x}$ рівня хвилі під час руху в лінії.

Побудовані на підставі рівнянь (5.187) для $\alpha l = 0,1$ графіки $u_2(t)$ та $i_1(t)$ (рис. 5.60, а, б) відрізняються від аналогічних для ІДЛ (рис. 5.58, б і 5.59, б) зменшенням з часом рівня імпульсів. Враховуючи втрати у ДЛІМВ і ЗДЛ, $u_2(t)$ та $i_1(t)$ в усталеному режимі становлять:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = E; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = 0.$$

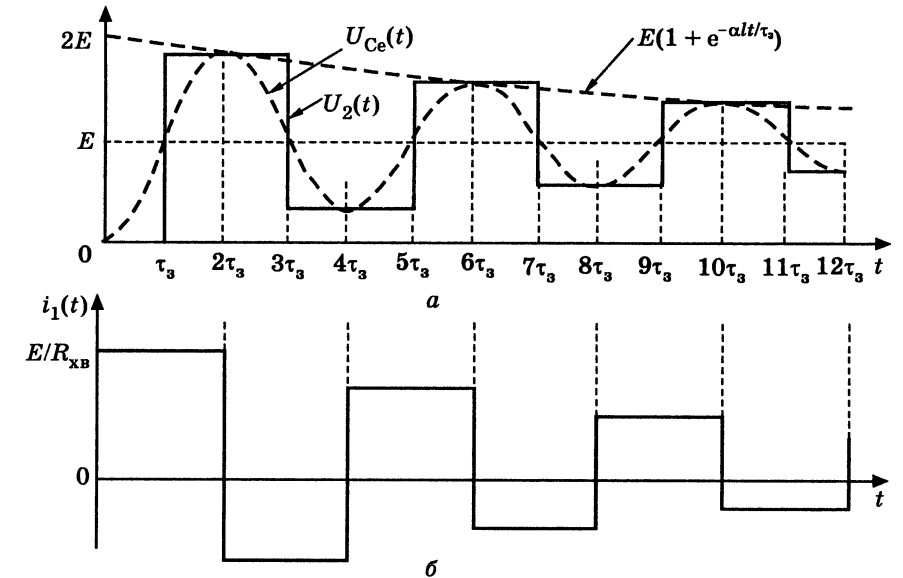


Рис. 5.60. Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до розімкнених ДЛІМВ і ЗДЛ ($\alpha l = 0,1$): а — часові діаграми вихідної напруги та відгуку еквівалентного контуру на $f_{\text{рез}}$; б — часова діаграма вихідного струму

Практична тривалість перехідного процесу (див. підрозділ 1.2) стосовно $u_2(t)$ та $i_1(t)$ становить

$$t_{\text{пер}} = (4..5)\tau_3 / \alpha l.$$

Періодичний характер функцій $u_2(t)$ та $i_1(t)$ в ІДЛ і квазіперіодичний — у ДЛМВ і ЗДЛ обумовлений параметрами частотних характеристик розімкнених ліній (п. 5.11.4). Період $u_2(t)$ та $i_1(t)$ становить $T = 4\tau_3$, що збігається з періодом першої резонансної частоти $f_{\text{рез1}}$ (5.152). Наявність кратних резонансних частот ($n = 1, 3, 5, \dots$) пояснює кратність періоду ($4\tau_3$) і тривалості імпульсів ($2\tau_3$). Взаємозв'язок розглядуваного перехідного процесу з частотними властивостями розімкнених ліній підтверджує також порівняння графіків $u_2(t)$ та $u_{\text{Се}}(t)$ — миттєвого значення напруги на ємності еквівалентного послідовного контуру для частоти $f_{\text{рез1}}$ (рис. 5.60, а).

Джерело ЕРС із внутрішнім опором, який дорівнює хвильовому. Схему розімкненої лінії, до якої ввімкнено джерело ЕРС з $R_i = R_{\text{хв}}$, зображено на рис. 5.61, а. При цьому операторний коефіцієнт відбиття від джерела $\rho_{Z_i}(p) = 0$. Отже, хвилі, які рухаються до джерела, не відбиваються від нього, внаслідок чого у виразах усіх зображень і оригіналів кількість доданків є обмеженою: відсутні хвилі, затримані на $3\tau_3$ і більше.

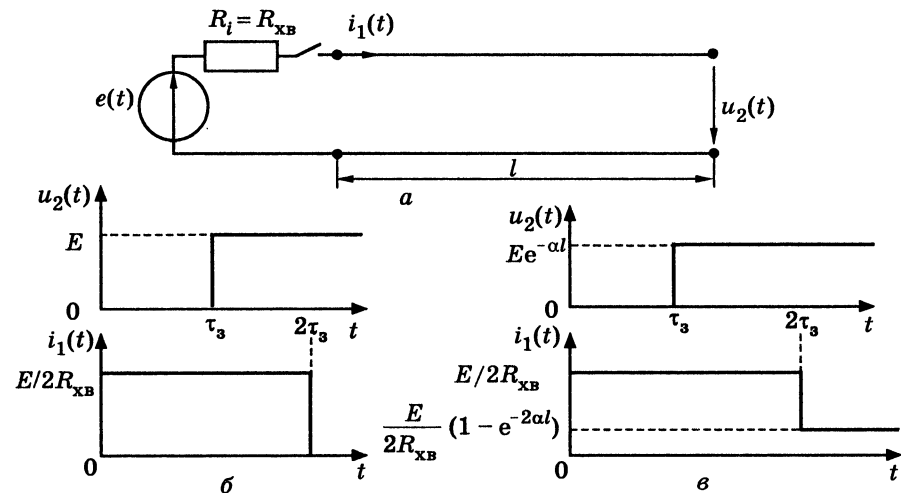


Рис. 5.61. Увімкнення джерела ЕРС з узгодженим внутрішнім опором до розімкнених ліній: а — схема; відгуки при $e(t) = E$: б — ІДЛ; в — ДЛМВ і ЗДЛ

Не розглядаючи докладно даний режим, достатньо обмежитись аналізом відгуків, що мають вигляд:

1) для ІДЛ

$$u_2(t) = e(t - \tau_3); i_1(t) = \frac{e(t) - e(t - 2\tau_3)}{2R_{\text{хв}}}; \quad (5.188)$$

2) для ДЛМВ і ЗДЛ

$$u_2(t) = e^{-\alpha l} e(t - \tau_3); i_1(t) = \frac{e(t) - e^{-2\alpha l} e(t - 2\tau_3)}{2R_{\text{хв}}}. \quad (5.189)$$

Графіки відгуків (5.188) і (5.189) зображені на рис. 5.61, б, в.

5.12.4. Замкнені лінії

У замкненій лінії операторний коефіцієнт відбиття від навантаження (5.169) становить $\rho_{Z_n}(p) = -1$, оскільки $Z_n(p) = 0$.

Зазвичай перехідні процеси в замкнених лініях аналізують за умови ввімкнення до джерела струму (рис. 5.62, а).

У результаті підстановки у вирази (5.176) і (5.177) $\rho_{Z_n}(p) = -1$, $E(p) = I_{\text{дж}}(p)Z_i(p)$ і подальших перетворень, зображення напруги і струму в перерізі x набудуть вигляду:

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{I_{\text{дж}}(p)[1 + \rho_{Y_i}(p)]}{2Y_{\text{хв}}(p)} [e^{-\gamma(p)x} - e^{-\gamma(p)(2l-x)} - \\ - \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} + \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} - \dots]; \\ I(x, p) = \frac{I_{\text{дж}}(p)[1 + \rho_{Y_i}(p)]}{2} [e^{-\gamma(p)x} + e^{-\gamma(p)(2l-x)} - \\ - \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} - \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} + \dots], \end{cases} \quad (5.190)$$

де $\rho_{Y_i}(p) = [1 - Y_i'(p)] / [1 + Y_i'(p)]$ — операторний коефіцієнт відбиття від джерела; $Y_i'(p) = Y_i(p) / Y_{\text{хв}}(p)$ — операторна нормована провідність джерела струму.

За умови рівності операторних нормованих опор джерела напруги (для розімкненої лінії) і провідності джерела струму (для замкненої)

$$Z_i'(p) = Y_i'(p) \quad (5.191)$$

операторні коефіцієнти відбиття від джерел напруги та струму згідно з формулою (5.168) різняться тільки знаком:

$$\rho_{Z_i}(p) = -\rho_{Y_i}(p).$$

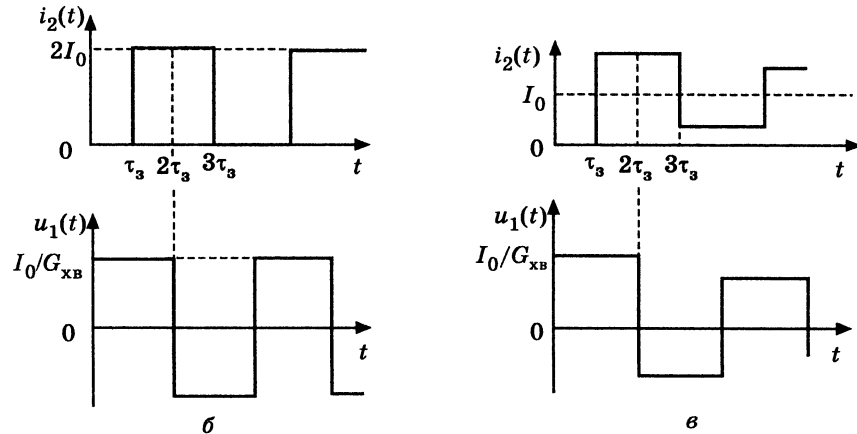
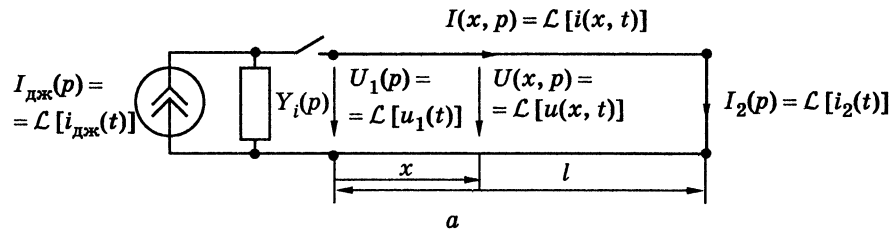


Рис. 5.62. Увімкнення ідеального джерела постійного струму ($i_{дж}(t) = I_0$; $Y_i(p) = 0$) до замкненої лінії: *a* — схема; відгуки: *б* — ІДЛ; *в* — ДЛМВ і ЗДЛ

Отже, виконання умови (5.191) приводить до того, що зображення $U(x, p)$ та $I(x, p)$ у системі (5.181) для розімкненої лінії є дуальними зображенням $I(x, p)$ і $U(x, p)$ відповідно в рівняннях (5.190) для замкненої лінії з тими самими вторинними параметрами.

Дуальність вихідних зображень (5.181) і (5.190) є обґрунтуванням дуальності інших зображень та оригіналів для розімкненої і замкненої ліній (табл. 5.35). На рис. 5.62, б, в побудовані графіки відгуків для замкнених ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ на підставі дуальних відповідностей з виразами (5.185) і (5.187) для розімкнених ліній.

Таблиця 5.35

Дуальні відповідності розімкненої та замкненої ліній

Розімкнена лінія	$Z'_i(p)$	$E(p)$	$U(x, p)$	$I(x, p)$	$u(x, t)$	$i(x, t)$	$u_2(t)$	$i_1(t)$
Замкнена лінія	$Y'_i(p)$	$I_{дж}(p)$	$I(x, p)$	$U(x, p)$	$i(x, t)$	$u(x, t)$	$i_2(t)$	$u_1(t)$

5.12.5. Ідеальні ДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ

при активних опорах навантаження і внутрішньому опорі джерела

Визначальну роль у процесі аналізу цього режиму відіграє той факт, що операторні коефіцієнти відбиття (5.168), (5.169) є дійсними числами:

$$\rho_{R_i} = \frac{R'_i - 1}{R'_i + 1}; \rho_{R_n} = \frac{R'_n - 1}{R'_n + 1}, \quad (5.192)$$

значення яких лежать у межах: $-1 \leq \rho_{R_i} \leq 1$; $-1 \leq \rho_{R_n} \leq 1$.

Коефіцієнти відбиття від'ємні при опорах, менших хвильового, і додатні, якщо опори — більше хвильового.

Граничні та нульові значення коефіцієнтів відбиття відповідають:

- 1) $\rho_{R_n} = 1$; $R'_n \rightarrow \infty$ — розімкненій лінії;
- 2) $\rho_{R_n} = -1$; $R'_n = 0$ — замкненій лінії;
- 3) $\rho_{R_n} = 0$; $R'_n = 1$ — узгодженню лінії з навантаженням;
- 4) $\rho_{R_i} = -1$; $R'_i = 0$ — ідеальному джерелу напруги;
- 5) $\rho_{R_i} = 1$; $R'_i \rightarrow \infty$ — ідеальному джерелу струму;
- 6) $\rho_{R_i} = 0$; $R'_i = 1$ — узгодженню лінії з джерелом.

Підставляючи у формули (табл. 5.33) коефіцієнти відбиття (5.192) і переходячи від зображень до оригіналів, здобувають вирази (табл. 5.36) для миттєвих значень напруги та струму в лінії, а також відгуків.

На рис. 5.63 зображені графіки відгуків ліній на дію ідеального джерела постійної напруги, побудовані за формулами з табл. 5.36 для двох значень коефіцієнтів відбиття від навантаження ($\rho_{R_{n1}} = 0,6$; $\rho_{R_{n2}} = -0,6$) і відповідних нормованих активних опорів ($R'_{n1} = 4$; $R'_{n2} = 0,25$).

Таблиця 5.36

Співвідношення для ліній з активними опорами навантаження та джерела напруги

Параметр	Лінія	Співвідношення
$u(x, t)$	ІДЛ	$\frac{1 - \rho_{R_i}}{2} [e^{-(t - \tau_x)} + \rho_{R_n} e^{-(t - 2\tau_3 + \tau_x)} + \rho_{R_i} \rho_{R_n} e^{-(t - 2\tau_3 - \tau_x)} - \rho_{R_i} \rho_{R_n}^2 e^{-(t - 4\tau_3 + \tau_x)} + \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{R_i}}{2} [e^{-\alpha x} e^{-(t - \tau_x)} + \rho_{R_n} e^{-\alpha(2l-x)} e^{-(t - 2\tau_3 + \tau_x)} + \rho_{R_i} \rho_{R_n} e^{-\alpha(2l+x)} e^{-(t - 2\tau_3 - \tau_x)} + \dots]$

Закінчення табл. 5.36

Параметр	Лінія	Співвідношення
$i(x, t)$	ІДЛ	$\frac{1 - \rho_{R_i}}{2R_{\text{хв}}} [e^{(t - \tau_x)} - \rho_{R_H} e^{(t - 2\tau_3 + \tau_x)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{(t - 2\tau_3 - \tau_x)} - \rho_{R_i} \rho_{R_H}^2 e^{(t - 4\tau_3 + \tau_x)} + \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{R_i}}{2R_{\text{хв}}} [e^{-\alpha x} e^{(t - \tau_x)} + \rho_{R_H} e^{-\alpha(2l-x)} e^{(t - 2\tau_3 + \tau_x)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{-\alpha(2l+x)} e^{(t - 2\tau_3 - \tau_x)} - \dots]$
$u_2(t)$	ІДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 + \rho_{R_H})}{2} \times [e^{(t - \tau_x)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{(t - 3\tau_3)} + \rho_{R_i}^2 \rho_{R_H}^2 e^{(t - 5\tau_3)} \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 + \rho_{R_H})}{2} [e^{-\alpha l} e^{(t - \tau_3)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{-3\alpha l} e^{(t - 3\tau_3)} + \dots]$
$i_2(t)$	ІДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 - \rho_{R_H})}{2R_{\text{хв}}} \times [e^{(t - \tau_3)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{(t - 3\tau_3)} + \rho_{R_i}^2 \rho_{R_H}^2 e^{(t - 5\tau_3)} \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 - \rho_{R_H})}{2R_{\text{хв}}} [e^{-\alpha l} e^{(t - \tau_3)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{-3\alpha l} e^{(t - 3\tau_3)} + \dots]$
$i_1(t)$	ІДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i}) \{ e^{(t)} - \rho_{R_H} [e^{(t - 2\tau_3)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{(t - 4\tau_3)} + \dots] \}}{2R_{\text{хв}}}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})}{2R_{\text{хв}}} \left\{ e^{(t)} - \rho_{R_H} (1 - \rho_{R_i}) [e^{-2\alpha l} e^{(t - 2\tau_3)} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{-4\alpha l} e^{(t - 4\tau_3)} + \dots] \right\}$

Аналіз співвідношень (табл. 5.36) і графіків (рис. 5.63) приводить до таких висновків:

- 1) при активному характері навантаження лінії та внутрішнього опору джерела форма хвиль, які формують миттєві значення напруги і струму в лінії, збігається з миттєвим значенням напруги джерела;
- 2) при ввімкненні лінії до ідеального джерела напруги перехідний процес має імпульсно-коливальний характер при $R_H > R_{\text{хв}}$ ($\rho_{R_H} > 0$) і ступінчасто-аперіодичний — при $R_H < R_{\text{хв}}$ ($\rho_{R_H} < 0$);

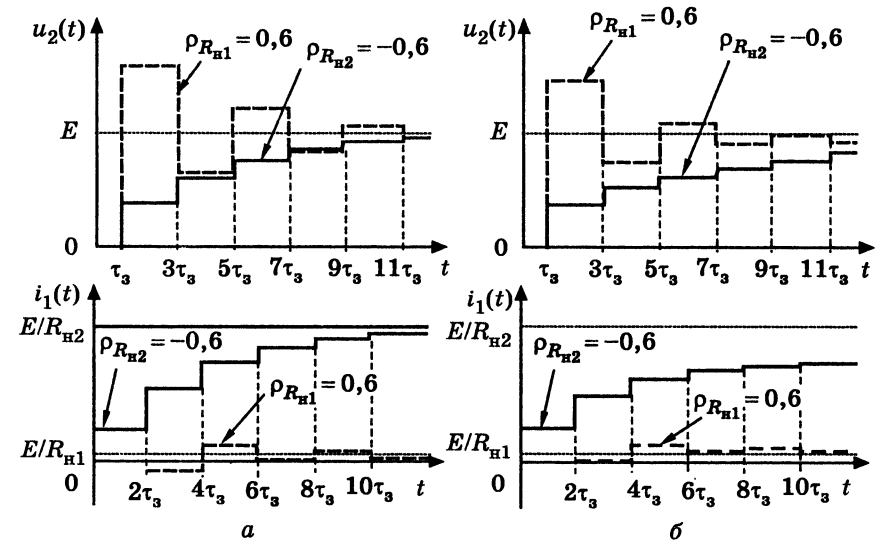


Рис. 5.63. Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до ліній з активним навантаженням: а — відгуки ІДЛ; б — відгуки ДЛМВ і ЗДЛ ($\alpha l = 0,1$)

3) усталені значення відгуків ІДЛ при ввімкненні до джерела напруги становлять:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = \frac{R_H E}{R_H + R_i}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R_H + R_i}.$$

5.13. Операторні функції і часові характеристики ДЛ

Загалом операторні функції (ОПФ і ОВФ) для ліній з втратами визначають з огляду на співвідношення (5.172)–(5.174) або (5.178)–(5.180), а для ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ — використовуючи зображення відгуків (табл. 5.33).

Оскільки подальше викладення обмежене розглядом характеристик ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, вирази для операторних функцій саме цих ліній зведено до табл. 5.37.

Застосування ОПФ або ОВФ для визначення відгуків ліній на довільні дії принципово не відрізняється від подібних розрахунків для кіл із зосередженими параметрами (див. розд. 3). Так, виходячи з визначення ОПФ (3.71), зображення відгуку лінії становить:

$$F_2(p) = F_1(p)H(p), \quad (5.193)$$

де $F_1(p)$ — зображення дії.

Таблиця 5.37

Операторні функції ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ

ОПФ, ОВФ	Лінія	Співвідношення
$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)}$	ІДЛ	$\frac{[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_H}(p)]}{2} \times [e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]$
$H_I(p) = \frac{I_2(p)}{I_{дж}(p)}$	ІДЛ	$\frac{[1 + \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{[1 + \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)]}{2} \times [e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]$
$Y_{вх}(p) = \frac{1}{Z_{вх}(p)}$	ІДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2Z_{хв}(p)} \left\{ 1 - \rho_{Z_H}(p) [1 - \rho_{Z_i}(p)] \times [e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4p\tau_3} + \dots] \right\}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2Z_{хв}(p)} \left\{ 1 - \rho_{Z_H}(p) [1 - \rho_{Z_i}(p)] \times [e^{-2\alpha l} e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4\alpha l} e^{-4p\tau_3} + \dots] \right\}$

Якщо для визначення відгуку ДЛ на довільну дію застосовують інтеграли накладання, тоді попередньо обчислюють одну з часових характеристик: перехідна характеристика $g(t)$ є оригіналом зображення, що дорівнює відношенню ОПФ (ОВФ) до оператора p (3.125); а імпульсна $h(t)$ — оригіналом ОПФ (ОВФ) (3.130).

Для переходу до оригіналів (часових характеристик) використовують типові операторні відповідності та властивості перетворення Лапласа (лінійності та запізнення) (див. табл. 3.1, 3.2).

5.13.1. Лінії, узгоджені з навантаженням

У цьому режимі $\rho_{Z_H}(p) = 0$, $Z_{хв}(p) = R_{хв}$, отже, вирази операторних функцій і часових характеристик спрощуються (табл. 5.38).

У табл. 5.38 вирази для часових характеристик наведені для активного внутрішнього опору джерела: $Z_i(p) = R_i$. При цьому ОПФ

Таблиця 5.38

Операторні функції та часові характеристики ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, узгоджених із навантаженням

ОПФ, ОВФ, $g(t), h(t)$	Лінія	Співвідношення
$H_U(p) = H_I(p)$	ІДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2} e^{-p\tau_3} = \frac{R_{хв}}{Z_i(p) + R_{хв}} e^{-p\tau_3}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2} e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} = \frac{R_{хв}}{Z_i(p) + R_{хв}} e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3}$
$Y_{вх}(p) = \frac{1}{Z_{вх}(p)}$	ІДЛ, ДЛМВ, ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2R_{хв}} = \frac{1}{Z_i(p) + R_{хв}}$
$g_u(t) = g_i(t)$	ІДЛ	$\frac{R_{хв}}{R_i + R_{хв}} \cdot 1(t - \tau_3)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{R_{хв}}{R_i + R_{хв}} e^{-\alpha l} \cdot 1(t - \tau_3)$
$h_u(t) = h_i(t)$	ІДЛ	$\frac{R_{хв}}{R_i + R_{хв}} \cdot \delta(t - \tau_3)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{R_{хв}}{R_i + R_{хв}} e^{-\alpha l} \cdot \delta(t - \tau_3)$
$g_Y(t)$	ІДЛ, ДЛМВ, ЗДЛ	$\frac{1}{R_i + R_{хв}} \cdot 1(t)$
$h_Y(t)$		$\frac{1}{R_i + R_{хв}} \cdot \delta(t)$

і ОВФ відповідають операторним функціям неспотворювального кола (3.119):

$$H(p) = H_0 e^{-pt_0},$$

де $H_0 = \frac{R_{хв}}{R_i + R_{хв}}$, $t_0 = \tau_3$ — для ОПФ; $H_0 = \frac{1}{R_i + R_{хв}}$, $t_0 = 0$ — для ОВФ.

Часові характеристики узгоджених ліній при дії ідеального джерела напруги становлять:

1) для ІДЛ

$$g_u(t) = g_i(t) = 1(t - \tau_3); \quad h_u(t) = h_i(t) = \delta(t - \tau_3);$$

$$g_Y(t) = \frac{1}{R_{хв}} \cdot 1(t - \tau_3); \quad h_Y(t) = \frac{1}{R_{хв}} \cdot \delta(t - \tau_3); \quad (5.194)$$

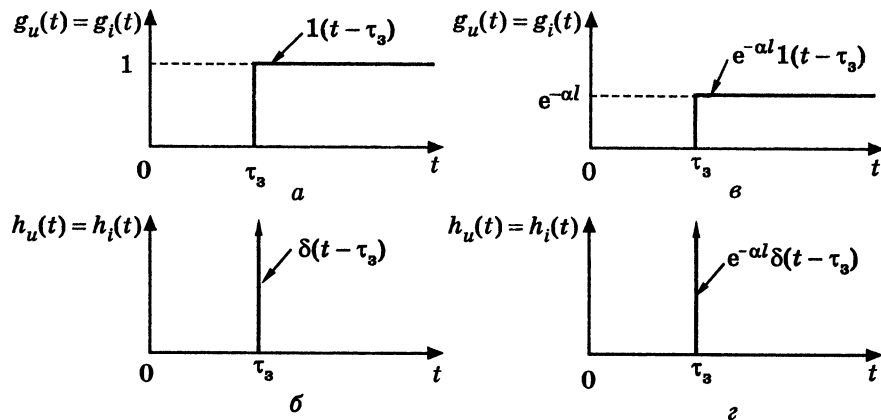


Рис. 5.64. Графіки часових характеристик узгоджених ліній:
а, б — ІДЛ; в, г — ДЛМВ і ЗДЛ

2) для ДЛМВ і ЗДЛ

$$g_u(t) = g_i(t) = e^{-\alpha l} \cdot 1(t - \tau_3); \quad h_u(t) = h_i(t) = e^{-\alpha l} \cdot \delta(t - \tau_3);$$

$$g_Y(t) = \frac{1}{R_{\text{хв}}} e^{-\alpha l} \cdot 1(t - \tau_3); \quad h_Y(t) = \frac{1}{R_{\text{хв}}} e^{-\alpha l} \cdot \delta(t - \tau_3); \quad (5.195)$$

Графіки часових характеристик (5.194) і (5.195) підтверджують неспотворювальний характер узгоджених ліній (рис. 5.64).

5.13.2. Лінії, навантажені на активний опір, при активному внутрішньому опорі джерела

Підстановка у формули (табл. 5.37) дійсних значень коефіцієнтів відбиття від навантаження і джерела (5.192) призводить до виразів ОПФ і ОВФ для даного режиму ліній (табл. 5.39). Співвідношення з табл. 5.39 підтверджуються також результатами п. 5.12.5.

Часові характеристики, здобуті як оригінали ОПФ і ОВФ, наведені в табл. 5.40.

Як приклад на рис. 5.65 зображені графіки перехідних характеристик для навантажених на активний опір ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, які ввімкнено до ідеального джерела напруги. Параметри навантаження такі ж самі, як у п. 5.12.5 (див. рис. 5.63).

Аналіз виразів для часових характеристик (табл. 5.40) і графіків (рис. 5.65) дозволяє зробити такі висновки:

1) перехідні характеристики мають ступінчастий характер, висоти і знаки «сходинок» визначаються величинами і знаками коефіцієнтів відбиття ρ_{R_H} і ρ_{R_i} , а тривалість дорівнює $2\tau_3$;

Таблиця 5.39

Операторні функції ліній з активними опорами навантаження і джерела		
ОПФ, ОВФ	Лінія	Співвідношення
$H_U(p)$	ІДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 + \rho_{R_H})(e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5p\tau_3} + \dots)}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 + \rho_{R_H})}{2} \times (e^{-\alpha l}e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5\alpha l}e^{-5p\tau_3} + \dots)$
$H_I(p)$	ІДЛ	$\frac{(1 + \rho_{R_i})(1 - \rho_{R_H})(e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5p\tau_3} + \dots)}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{(1 + \rho_{R_i})(1 - \rho_{R_H})}{2} \times (e^{-\alpha l}e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5\alpha l}e^{-5p\tau_3} + \dots)$
$Y_{\text{вх}}(p)$	ІДЛ	$\frac{1 - \rho_{R_i}}{2R_{\text{хв}}} [1 - \rho_{R_H}(1 - \rho_{R_i}) \times (e^{-2p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-6p\tau_3} + \dots)]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{R_i}}{2R_{\text{хв}}} [1 - \rho_{R_H}(1 - \rho_{R_i}) \times (e^{-2\alpha l}e^{-2p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4\alpha l}e^{-4p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-6\alpha l}e^{-6p\tau_3} + \dots)]$

Таблиця 5.40

Часові характеристики ліній з активними опорами навантаження і джерела		
$g(t), h(t)$	Лінія	Співвідношення
$g_u(t)$	ІДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 + \rho_{R_H})}{2} \times [1(t - \tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}1(t - 3\tau_3) + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^21(t - 5\tau_3) + \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{(1 - \rho_{R_i})(1 + \rho_{R_H})}{2} \times [e^{-\alpha l} \cdot 1(t - \tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l} \cdot 1(t - 3\tau_3) + \dots]$

Закінчення табл. 5.40

$g(t), h(t)$	Лінія	Співвідношення
$h_u(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})}{2} \times [\delta(t-\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}\delta(t-3\tau_3) + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2\delta(t-5\tau_3) + \dots]$
	ДЛІМВ і ЗДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})}{2} \times [e^{-\alpha t} \cdot \delta(t-\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha t} \cdot \delta(t-3\tau_3) + \dots]$
$g_i(t)$	ІДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})}{2R_{ХВ}} \times [1(t-\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}1(t-3\tau_3) + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^21(t-5\tau_3) + \dots]$
	ДЛІМВ і ЗДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})}{2R_{ХВ}} \times [e^{-\alpha t} \cdot 1(t-\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha t} \cdot 1(t-3\tau_3) + \dots]$
$h_i(t)$	ІДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})}{2} \times [\delta(t-\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}\delta(t-3\tau_3) + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2\delta(t-5\tau_3) + \dots]$
	ДЛІМВ і ЗДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})}{2} \times [e^{-\alpha t} \cdot \delta(t-\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha t} \cdot \delta(t-3\tau_3) + \dots]$
$g_Y(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i}))[1(t-2\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}1(t-4\tau_3) + \dots]}{2R_{ХВ}}$
	ДЛІМВ і ЗДЛ	$\frac{1-\rho_{R_i}}{2R_{ХВ}} \{1(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i}) \times [e^{-2\alpha t} \cdot 1(t-2\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4\alpha t} \cdot 1(t-4\tau_3) + \dots]\}$
$h_Y(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})\{\delta(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i})[\delta(t-2\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}\delta(t-4\tau_3) + \dots]\}}{2R_{ХВ}}$
	ДЛІМВ і ЗДЛ	$\frac{1-\rho_{R_i}}{2R_{ХВ}} \{\delta(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i}) \times [e^{-2\alpha t} \cdot \delta(t-2\tau_3) + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4\alpha t} \cdot \delta(t-4\tau_3) + \dots]\}$

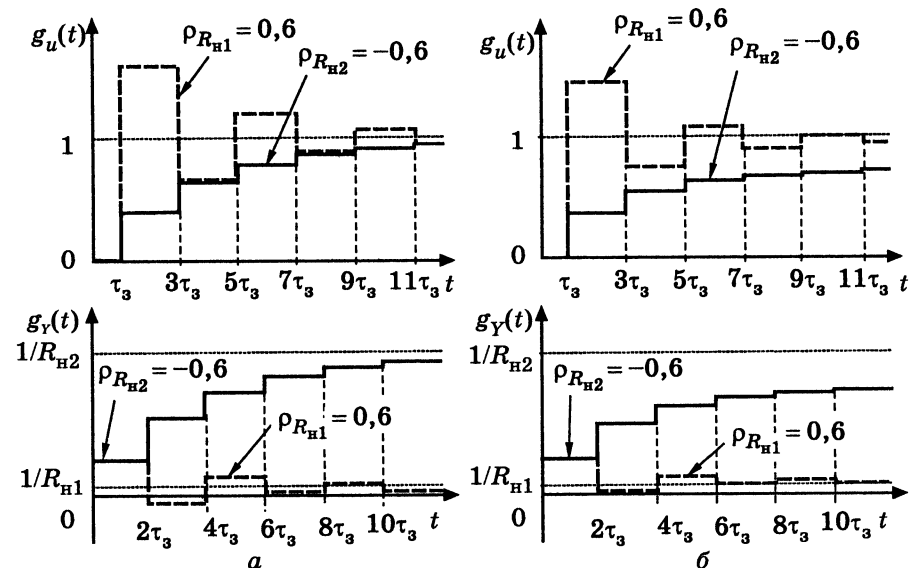


Рис. 5.65. Перехідні характеристики ліній з активним навантаженням та ідеальним джерелом: а — ІДЛ; б — ДЛІМВ і ЗДЛ ($\alpha l = 0,1$)

2) імпульсні характеристики є сукупністю дельта-функцій, інтервал між якими становить $2\tau_3$, а множники дорівнюють висотам відповідних «сходинок» $g(t)$ з урахуванням їхніх знаків;

3) усталені значення перехідних характеристик ІДЛ становлять:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_u(t) = \frac{R_H}{R_H + R_i}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_Y(t) = \frac{1}{R_H + R_i}.$$

Граничні значення опору навантаження відповідають розімкненій ($R_H \rightarrow \infty$) і замкненій ($R_H = 0$) лініям.

5.13.3. Розімкнені та замкнені лінії

Операторні функції та часові характеристики розімкнених ІДЛ, ДЛІМВ і ЗДЛ отримуємо з формул (табл. 5.39 і 5.40) при $\rho_{R_H} = 1$. Для ІДЛ операторні функції можна здобути, користуючись формулами (5.183).

Вирази для ОПФ і ОВФ, а також часові характеристики при дії ідеального джерела напруги ($\rho_{R_i} = -1$) наведені в табл. 5.41.

Графіки перехідних характеристик (рис. 5.66, а, в і 5.67, а, в) збігаються з графіками відгуків на дію ідеального постійного джерела (рис. 5.58–5.60), якщо покласти $E = 1(t)$. Графіки імпульсних характеристик зображені на рис. 5.66, б, г і 5.67, б, г.

Таблиця 5.41

Операторні функції та часові характеристики розімкнених ліній при дії ідеального джерела

$g(t), h(t)$	Лінія	Співвідношення
$H_u(p)$	ІДЛ ДЛІМВ і ЗДЛ	$2(e^{-p\tau_3} - e^{-3p\tau_3} + e^{-5p\tau_3} - \dots)$ $2(e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} - e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + e^{-5\alpha l} e^{-5p\tau_3} - \dots)$
$\frac{Y_{вх}(p)}{G_{хв}}$	ІДЛ ДЛІМВ і ЗДЛ	$1 - 2e^{-2p\tau_3} + 2e^{-4p\tau_3} - 2e^{-6p\tau_3} + \dots$ $1 - 2e^{-2\alpha l} e^{-2p\tau_3} + 2e^{-4\alpha l} e^{-4p\tau_3} - \dots$
$g_u(t)$	ІДЛ ДЛІМВ і ЗДЛ	$2[1(t - \tau_3) - 1(t - 3\tau_3) + 1(t - 5\tau_3) - \dots]$ $2[e^{-\alpha l} 1(t - \tau_3) - e^{-3\alpha l} 1(t - 3\tau_3) + e^{-5\alpha l} 1(t - 5\tau_3) - \dots]$
$h_u(t)$	ІДЛ ДЛІМВ і ЗДЛ	$2[\delta(t - \tau_3) - \delta(t - 3\tau_3) + \delta(t - 5\tau_3) - \dots]$ $2[e^{-\alpha l} \delta(t - \tau_3) - e^{-3\alpha l} \delta(t - 3\tau_3) + e^{-5\alpha l} \delta(t - 5\tau_3) - \dots]$
$\frac{g_Y(t)}{G_{хв}}$	ІДЛ ДЛІМВ і ЗДЛ	$1(t) - 2 \cdot 1(t - 2\tau_3) + 2 \cdot 1(t - 4\tau_3) - 2 \cdot 1(t - 6\tau_3) + \dots$ $1(t) - 2e^{-2\alpha l} \cdot 1(t - 2\tau_3) + 2e^{-4\alpha l} \cdot 1(t - 4\tau_3) - \dots$
$\frac{h_Y(t)}{G_{хв}}$	ІДЛ ДЛІМВ і ЗДЛ	$\delta(t) - 2 \cdot \delta(t - 2\tau_3) + 2 \cdot \delta(t - 4\tau_3) - 2 \cdot \delta(t - 6\tau_3) + \dots$ $\delta(t) - 2e^{-2\alpha l} \cdot \delta(t - 2\tau_3) + 2e^{-4\alpha l} \cdot \delta(t - 4\tau_3) - \dots$

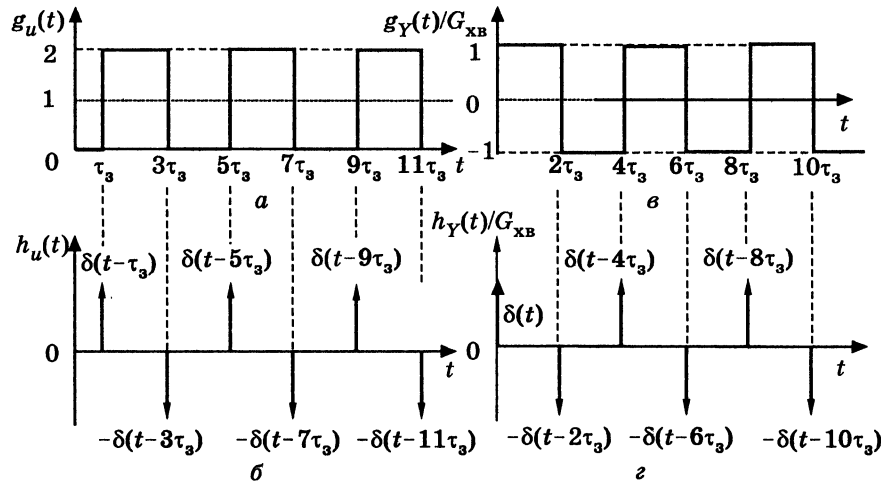


Рис. 5.66. Перехідні й імпульсні характеристики розімкненої ІДЛ:
а, б — за напругою; в, г — входної провідності

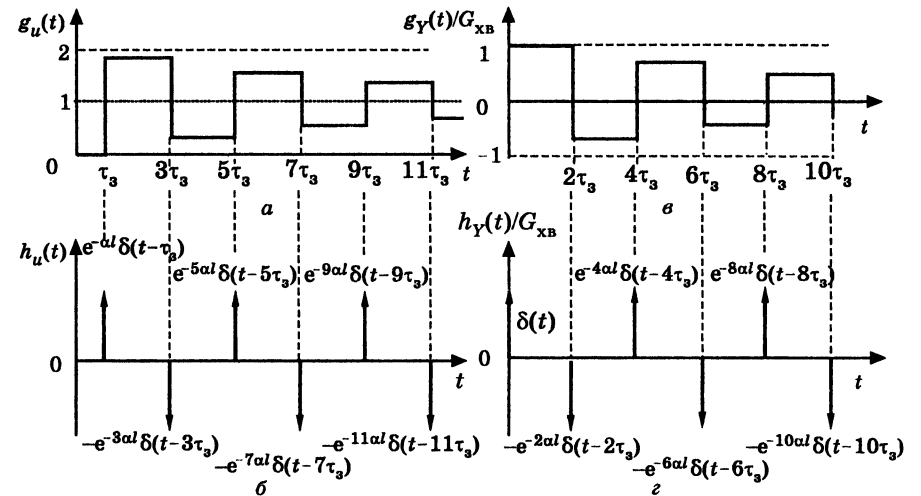


Рис. 5.67. Перехідні й імпульсні характеристики розімкнених ДЛІМВ і ЗДЛ:
а, б — за напругою; в, г — входної провідності

Операторні функції та часові характеристики замкнених ліній можна отримати за співвідношеннями з табл. 5.39 і 5.40 при $\rho_{R_n} = -1$ або на підставі дуальних відповідностей із розімкненими лініями.

5.14. Застосування кіл із розподіленими параметрами

Основні застосування довгих ліній (без розгляду галузей та особливостей практичного використання) зазначені в підрозд. 5.1. Окремі питання використання кіл з розподіленими параметрами розглянуто в підрозд. 5.9 (трансформатори і способи узгодження ДЛ) і 5.11 (резонансні властивості відрізків ДЛ). У цьому, заключному, підрозділі стисло розглянуті питання практичного застосування кіл з розподіленими параметрами, оскільки докладно їх вивчають у спеціальних технічних дисциплінах.

5.14.1. Передача високочастотної енергії та радіосигналів

Це застосування кіл із розподіленими параметрами зазвичай пов'язують із термінами *фідер* (від слова *feed* — жити) або *фідерна лінія*. Прикладами використання фідерів є антенно-фідерні пристрої (з'єднання передавальних і приймальних пристроїв з антенами), міжблокові з'єднання, з'єднання з радіовимірювальними приладами тощо.

У діапазоні довжин хвиль до сантиметрових значень як фідери використовують промислові радіочастотні кабелі, зазвичай коаксіальної конструкції (рис. 5.2, б). На вищих частотах застосовують стрічкові лінії (рис. 5.2, в) і хвилеводи.

Радіочастотні кабелі мають такі переваги:

- 1) порівняно малий рівень ослаблення і спотворення сигналів у відносно широкому діапазоні частот;
- 2) високі показники електромагнітної сумісності (ЕМС) з іншими пристроями (мале випромінення і надійне екранування);
- 3) простота конструкції та монтажу, що поєднується з широкою номенклатурою й уніфікацією промислових зразків;
- 4) економічність.

Зважаючи на різноманіття літератури (у тому числі довідкової), присвяченої кабельній продукції, та постійне її вдосконалення, доцільно обмежитися розглядом лише деяких головних положень.

Конструюючи й експлуатуючи радіотехнічні пристрої та системи, слід враховувати класифікацію радіочастотних кабелів за основними ознаками (табл. 5.42), а також їхні конструктивні й електричні параметри.

Таблиця 5.42

Класифікація радіочастотних кабелів

Ознака	Різновиди
Загальна конструкція	Коаксіальна Симетрична Спіральна
Тип ізоляції	Суцільна Напівповітряна (повітряно-пластмасова) Повітряна
Тип зовнішнього проводу (екрана)	Суцільний (трубка) Одинарне оплетення Подвійне оплетення
Рівень потужності	Обмотування пласкою стрічкою Мала потужність — до 0,5 кВт Середня потужність — до 5 кВт Велика потужність — понад 5 кВт

Для передачі високочастотної енергії та радіосигналів використовують коаксіальні та симетричні кабелі. Спіральні кабелі застосовують для затримки сигналів (див. п. 5.14.2).

До конструктивних параметрів належать: параметри внутрішнього проводу (діаметр одножильного проводу або кількість жил і діаметр кожної — для багатожильного); тип діелектрика і діаметр ізоляції; тип і матеріал зовнішнього проводу; товщина і матеріал зовнішньої захисної оболонки; розрахункова погонна вага (г/м); мінімальні радіуси згину і намотування на барабан.

Електричні характеристики радіочастотних кабелів:

- 1) хвильовий опір (у коаксіальних кабелів — 50 або 75 Ом; у симетричних — 75, 150, 200 Ом);
- 2) погонна ємність (у кабелів із суцільною ізоляцією — 50...100 пФ/м; з напівповітряною — 20...50 пФ/м);
- 3) відносна (до швидкості світла) швидкість поширення коливань (для кабелів із суцільною ізоляцією становить $\approx 0,66$);
- 4) погонне ослаблення (дБ/м або Нп/км) на різних частотах;
- 5) показники ЕМС (наприклад, для коаксіального кабелю із зовнішнім оплетенням рівень випромінення становить близько 30 дБ);
- 6) максимальна робоча частота;
- 7) гранично допустимі значення напруг і струмів.

За необхідності слід враховувати зв'язок умов експлуатації кабелю (температурний діапазон, тиск, рівень вібрації тощо) з його допустимими фізико-механічними характеристиками, які пов'язані з параметрами середовища.

Максимальна робоча частота визначається двома чинниками: допустимим ослабленням у робочому діапазоні частот і так званою критичною частотою, довжина хвилі якої сумірна з поперечним розміром кабелю. Для коаксіального кабелю критична частота визначається співвідношенням:

$$f_{кр} = \frac{c}{\pi(d + D\sqrt{\epsilon})}$$

де c — швидкість світла у вільному просторі; d, D — поперечні розміри внутрішнього і зовнішнього провідників (див. рис. 5.2, б); ϵ — відносна діелектрична проникність ізоляції (див. табл. 5.2).

У кабелів із розподіленими за довжиною елементами кріплення внутрішнього проводу (повітряна і напівповітряна ізоляції) частотний діапазон обмежений довжинами хвиль, сумірних із відстанню між елементами кріплення.

Для ввімкнення кабелів до пристроїв та з'єднання між собою використовують з'єднувачі (спроцено їх ще називають рознімами та фішками). Існують з'єднувачі трьох типів:

- 1) вільні (кабельні), які монтують на кінцях кабелю;

- 2) фіксовані (приладові), які розташовані на пристроях;
- 3) перехідні, призначені для злучення і розгалуження кабелів.

Геометричні розміри розніму мають відповідати розмірам кабелю. Для забезпечення узгодження величина хвильового опору з'єднувача має збігатися з хвильовим опором кабелю. Виходячи з умов експлуатації, вибирають конструкцію затискової частини з'єднувача (різьбова, байонетна тощо).

Для ослаблення сигналів без спотворення їхньої форми у пристроях передачі використовують *резистивні лінії*, первинні параметри яких становлять

$$L_1 \approx 0; C_1 \approx 0; R_1 \neq 0; G_1 \neq 0,$$

а вторинні —

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1} \approx \sqrt{R_1 G_1}; \alpha \approx \sqrt{R_1 G_1}; \beta \approx 0; Z_{xв} = \sqrt{Z_1 / Y_1} \approx \sqrt{R_1 / G_1} = R_{xв}.$$

Отже, резистивні лінії мають практично активні хвильові опори, кінцеву (яка не залежить від частоти) величину погонного ослаблення і нульову затримку сигналів. Ці властивості обумовлюють застосування резистивних ДЛ як ослаблювачів (атенюаторів) сигналів. Аналогічні характеристики мають атенюатори (рис. 5.68), які складені з активних опорів і забезпечують стрибкоподібне (дискретне) ослаблення.

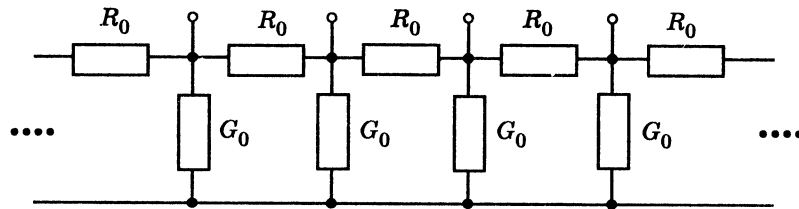


Рис. 5.68. Схема дискретного атенюатора

5.14.2. Затримка сигналів

Часова затримка сигналів використовується в телевізійних приймачах, осцилографах, імпульсних пристроях, підсилювачах коливань НВЧ та ін.

Значення затримки порядку одиниць і десятків мікросекунд забезпечують коаксіальні та симетричні кабелі, однак через їхню велику довжину (погонна затримка $\tau_3 / l = 1/v = \sqrt{L_1 C_1} \approx 5$ нс/м) ефективніше застосовувати *спіральні кабелі* (кабелі затримки). Для реалізації більших значень часу затримки розроблені ультразвукові та цифрові лінії.

Яскравим прикладом реалізації ефекту затримки сигналів є узгоджені (оптимальні) фільтри для обробки складних імпульсних сигналів, уперше застосовані в радіолокації, а згодом — в інших радіотехнічних системах для зв'язку, навігації тощо. Пріоритетні вітчизняні дослідження з розробки оптимальних фільтрів на базі коаксіальних кабелів, спеціальних спіральних ліній та ультразвукових ліній затримки проведені під керівництвом Ширмана²¹.

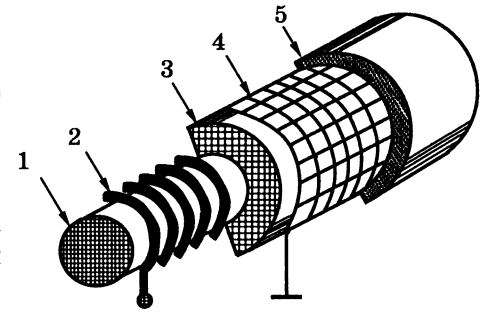


Рис. 5.69. Конструкція коаксіального спірального кабелю:

- 1 — осердя для внутрішнього проводу;
- 2 — спіральний внутрішній провід;
- 3 — ізоляція;
- 4 — зовнішній провід (екран);
- 5 — зовнішня оболонка

Спіральні кабелі мають внутрішній провід у вигляді спіралі. Переважно застосовують коаксіальні кабелі затримки (рис. 5.69). Зовнішній провід виконують як оплетення або (щоб зменшити втрати) ізольованими провідниками, які спрямовано вздовж осі кабелю.

Відмінною особливістю спіральних кабелів є підвищена погонна індуктивність L_1 , яка перевищує цей показник для звичайних кабелів у тисячі разів. Це забезпечує як спіралеподібний внутрішній провід, так і застосовані у деяких типах кабелів затримки як осердя 1 (рис. 5.69) матеріали з підвищеною магнітною проникністю (магнітодіелектрики). Зниження товщини ізоляції 2 (рис. 5.69) між внутрішнім і зовнішнім провідниками, а також збільшення площі між ними сприяють збільшенню погонної ємності C_1 .

Збільшення як L_1 , так і C_1 приводить до зменшення швидкості поширення коливань і зростання погонної затримки до величин 0,1...3 мкс/м. За рахунок переважного збільшення L_1 порівняно

²¹ Ширман Яков Давидович (народ. 1919 р.) — відомий учений у галузі радіолокації, доктор технічних наук, професор. Закінчив Військово-повітряну академію ім. Можайського та ад'юнктуру (військову аспірантуру). З 1949 р. працює в Харкові (Артилерійська радіотехнічна академія ім. Говорова, нині — Харківський військовий університет). Зробив значний внесок у теорію і практику сучасної радіолокації (складні сигнали та методи їхньої обробки, автокомпенсатори завад тощо). Удостоєний двох Державних премій. Автор кількох підручників і монографій. Засновник наукової школи, яка виховала цілу плеяду вчених.

з C_1 хвильовий опір зростає до 0,3...3 кОм. Змінюючи «крок» намотування, можна регулювати основні параметри — погонну затримку і хвильовий опір.

Порівняно зі звичайними у кабелів затримки менший робочий діапазон частот (до 10 МГц) і більше ослаблення (1...5 дБ/мкс). Для згаданих вище оптимальних фільтрів розроблено спіральні лінії з більшим частотним діапазоном і меншими втратами. Спіраль у цих ДЛ розташована ззовні, а екран — усередині. Цей прийом дозволяє виконувати довільне за рівнем і затримкою «зняття» сигналу за допомогою ємнісних або індуктивних давачів. У ХНУРЕ такі лінії використовуються в навчальному процесі при проведенні лабораторних робіт із дослідження ДЛ.

Як аналог кабелів затримки використовують змонтовані на елементах із зосередженими параметрами так звані штучні лінії затримки. Спрощену схему такої лінії без елементів, які враховують втрати, зображено на рис. 5.70. Час затримки штучної лінії затримки, яка містить n елементів, становить

$$\tau_3 \approx n\sqrt{L_0 C_0}.$$

До спеціальних ліній затримки належать достатньо технологічні розподілені R, C структури, які легко реалізуються сучасними методами мікроелектроніки. Це ДЛ, у яких $L_1 \approx 0$; $G_1 \approx 0$, і тому їхні вторинні параметри становлять

$$\underline{\gamma} = \sqrt{Z_1 Y_1} \approx \sqrt{R_1 j\omega C_1} = \sqrt{\omega R_1 C_1} e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega R_1 C_1}{2}} (1 + j); \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega R_1 C_1}{2}};$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{R_1 C_1}}; Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} \approx \sqrt{\frac{R_1}{j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{R_1}{\omega C_1}} e^{-j\pi/4}.$$

До відмінних особливостей R, C ліній належать нелінійне змінування швидкості поширення коливань від частоти та комплексний характер хвильового опору, який має постійне значення аргументу ($-\pi/4$) і частотно залежний модуль.

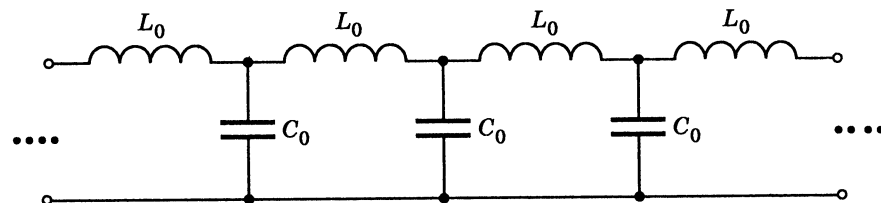


Рис. 5.70. Схема штучної лінії затримки

Залежність від частоти швидкості поширення сигналу в лінії називають *частотною дисперсією*. Кола з частотною дисперсією, включаючи R, C лінії, використовують для формування й обробки складних сигналів.

Недоліком R, C структур є відносно велике ослаблення (при довжині лінії $l = \lambda = 2\pi/\beta$ ослаблення становить $\alpha l \approx 2\pi$ Нп або приблизно 55 дБ).

Кола затримки використовують також як фазообертачі. Затримці синусоїдного коливання з частотою ω на час t_3 відповідає його зсув за фазою на ωt_3 . У ліній затримки без дисперсії ($t_3 = \text{const}$) фазовий зсув лінійно залежить від частоти, а у дисперсійних ліній $t_3(\omega)$ є нелінійною функцією частоти.

5.14.3. Використання вибірних властивостей відрізків довгих ліній

Вибірні властивості ДЛ у режимах короткого замикання, холостого ходу, розглянуті в п. 5.11.3, 5.11.4, та навантаження на реактивність є теоретичним підґрунтям практичних застосувань ліній як резонансних контурів, смугових і загороджувальних фільтрів, ізоляторів, антенних комутаторів.

Резонансні контури. Головним достоїнством контурів у вигляді відрізків ДЛ є те, що значення добротності близько $10^3 \dots 10^4$ реалізуються в дециметровому діапазоні довжин хвиль. Для забезпечення низького рівня випромінювання використовують лінії коаксіального типу. Підстроювання поблизу резонансної частоти здійснюється пересувним поршнем або конденсатором змінної ємності.

Найбільшу добротність має контур, складений із замкнутого відрізка коаксіального кабелю довжиною $l < \lambda/4$ як індуктивності та підстроювального конденсатора C_k . На рис. 5.71, а зображено схему ввімкнення такого контуру до входу 2 дециметрового приймача; антенний кабель ввімкнено до перерізу 1 контурного кабелю на відстані l_1 від його замкнутого кінця.

Еквівалентна схема розглянутої конструкції (рис. 5.71, б) без урахування втрат відповідає складному паралельному контуру з розподіленою індуктивністю. До приймача з великим входним опором контур ввімкнено повністю, а до антенного кабелю — частково з коефіцієнтом ввімкнення

$$p = \sqrt{L_1 / (L_1 + L_2)} = \sqrt{L_1 / L},$$

де $L_1 = (R_{\text{хв}} \text{tg } \beta l_1) / \omega_0$; $L = L_1 + L_2 = (R_{\text{хв}} \text{tg } \beta l) / \omega_0$ — індуктивності, показані на рис. 5.71, б; $R_{\text{хв}}$, β — відповідно хвильовий опір і коефіцієнт фази кабелю; ω_0 — робоча частота.

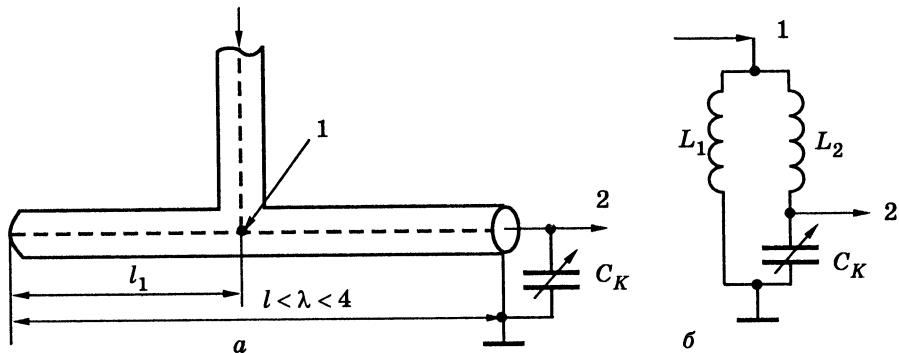


Рис. 5.71. Схеми ввімкнення коаксіального паралельного контуру: а — принципова; б — еквівалентна

Коефіцієнт ввімкнення вибирають з умови узгодження антенного кабелю у перерізі 1:

$$R_{\text{хв}} = p^2 R_{\text{рез}},$$

де $R_{\text{рез}}$ — резонансний опір еквівалентного контуру, який визначають за формулою (5.154).

Використовуючи відрізки ліній як контури, слід запобігати впливу коливань кратних резонансних частот.

Смугові та загороджувальні фільтри. Тут використовують ті самі принципи побудови, що й у фільтрів на елементах L, C [7, підрозд. 6.4].

Як приклад на рис. 5.72 зображені принципові схеми T -подібних смугового (рис. 5.72, а) і загороджувального (рис. 5.72, в) фільтрів. Як паралельний і послідовний контури в них вибрано замкнені відрізки ліній відповідно довжиною $\lambda/4$ і $\lambda/2$. На рис. 5.72, б, г показано також еквівалентні схеми цих фільтрів на елементах L, C .

Фільтри (рис. 5.72) реалізують, застосовуючи симетричні лінії у подовжньому плечі (у ПФ — послідовний контур, у ЗФ — паралельний). Для побудови контурів у поперечному плечі можна використовувати симетричний або коаксіальний кабелі.

При реалізації T -подібних фільтрів на відрізках ліній необхідно, як і у звичайних фільтрів, забезпечити режим узгодження й усунути паразитні взаємні зв'язки між лініями. В інших типах фільтрів, навпаки, елементи взаємного зв'язку (як зосередженого, так і розподіленого) необхідні для здобуття заданих характеристик. Це — фільтри, аналогічні зв'язаним контурам, а також фільтри із зосередженою селекцією.

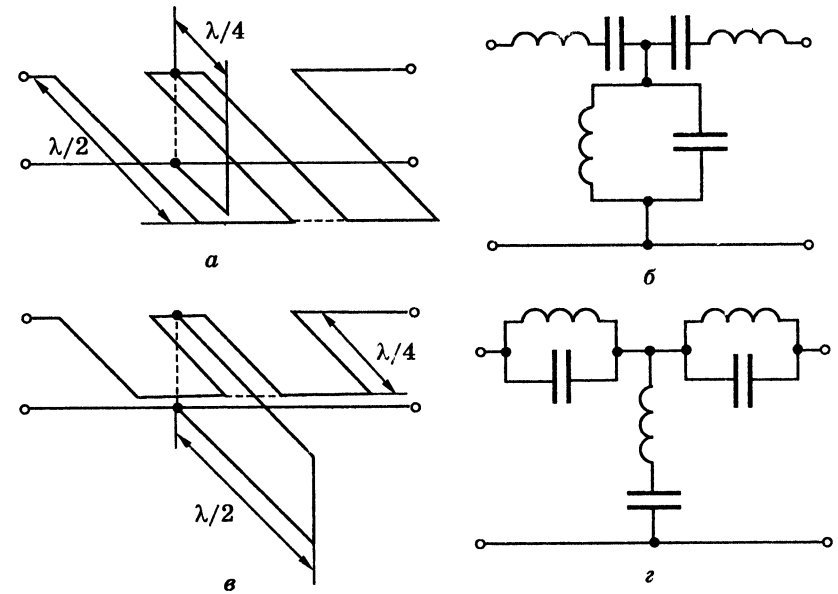


Рис. 5.72. Смугові та загороджувальні фільтри: а — СФ; б — еквівалентна схема СФ; в — ЗФ; г — еквівалентна схема ЗФ

Ізолятори. Як «металевий» ізолятор використовують замкнений відрізок лінії довжиною $\lambda/4$, що має тим більший вхідний опір, чим менші втрати в лінії. Такі ізолятори застосовують для кріплення провідників симетричної лінії (рис. 5.73, а) та внутрішнього провідника коаксіального кабелю (рис. 5.73, б). Оскільки на кінці замкненої лінії довжиною $\lambda/4$ існує вузол напруги, цей кінець має бути заземлений.

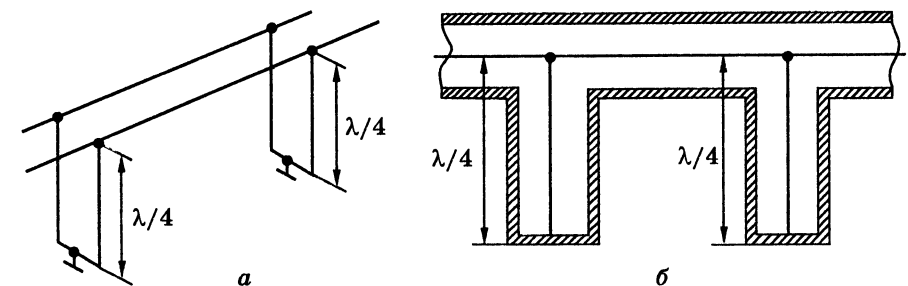


Рис. 5.73. Ізолятори з відрізків ліній: а — симетричної; б — коаксіальної

«Металеві» ізолятори на резонансній частоті мають кращі характеристики ніж діелектричні, однак є вузькосмуговими. При розстроєнні за частотою на 5 % відбувається різке зменшення вхідного опору $\lambda/4$ -ізолятора.

Антенні комутатори. У радіолокаційних та інших системах для випромінювання та приймання сигналів використовують одну й ту

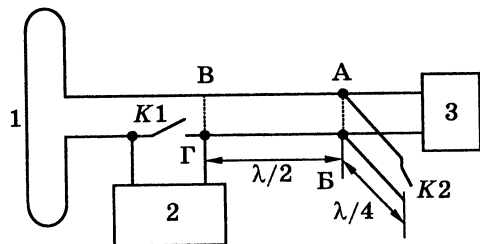


Рис. 5.74. Антенний комутатор:
1 — антена; 2 — приймач;
3 — передавач; K1, K2 — комутатори

саму антену. Для захисту приймального пристрою від потрапляння на його вхід потужних імпульсних сигналів, що випромінює передавач, використовують антенні комутатори, до складу яких входять комутаційні елементи та відрізки ДЛ (рис. 5.74), а іноді — спрямовані відгалужувачі (рис. 5.75).

Як елементи комутації (K1 і K2 на рис. 5.74) використовують газорозрядні вакуумні прилади (розрядники) і спеціальні діоди. Під дією імпульсів, що випромінюються, елементи комутації замикаються. Внаслідок цього в схемі антенного комутатора (рис. 5.74) вхід приймача 2 шунтується, а відрізок лінії довжиною $\lambda/4$ виконує роль ізолятора.

Після завершення випромінювання комутатори K1 і K2 розмикаються. Лінія довжиною $\lambda/4$ розмикається, що призводить до короткого замикання у перерізі АБ на вході передавача 3 і перерізі ВГ, розташованому на відстані $\lambda/2$. Це забезпечує проходження сигналів від антени 1 на вхід приймача 2.

Спрямовані відгалужувачі забезпечують передачу енергії або сигналів з однієї лінії до іншої лише в одному напрямку. У відгалужувачі, показаному як приклад на рис. 5.75, для цього служать дві точки зв'язку між лініями, позначені цифрами 1 і 2. Оскільки відстань між точками 1 і 2 становить $\lambda/4$, коливання з нижньої лінії проходять до точки 1 верхньої лінії у фазі, а до точки 2 — у протифазі. Отже, у верхній лінії

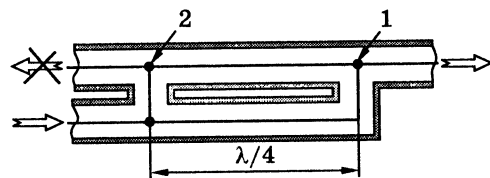


Рис. 5.75. Спрямований відгалужувач

енергія (сигнали) поширюється тільки у напрямку, позначеному стрілкою.

Подібні принципи покладено в основу побудови антенних комутаторів більш високочастотних діапазонів, де замість ДЛ використовують хвилеводи.

5.14.4. Трансформатори й узгоджувальні пристрої

Розглянуті у підрозділі 5.9 способи узгодження лінії з навантаженням і застосування відрізків ДЛ довжиною $\lambda/4$ як трансформаторів мають суттєвий недолік — вузькосмуговість. Цього недоліку позбавлені узгоджувальні пристрої і трансформатори, створені на базі неоднорідних ліній експоненційного типу (рис. 5.76, а).

Термін *експоненційна лінія* (ЕЛ) обумовлений експоненційним законом змінювання первинних параметрів від координати x (рис. 5.76, б, в):

$$L_1(x) = L_{10}e^{-kx}; C_1(x) = C_{10}e^{kx}, \quad (5.196)$$

де L_{10}, C_{10} — значення первинних параметрів на початку лінії; k — параметр, який визначає швидкість змінювання первинних параметрів уздовж ЕЛ і має розмірність [Нп/м].

Параметр k може бути додатним або від'ємним. Значення $k = 0$ відповідає однорідній лінії.

Конструктивно коло з параметрами, які відповідають функції (5.196), можна реалізувати за допомогою коаксимальної спіральної лінії зі змінним кроком намотування і відстанню між спіраллю й екраном (рис. 5.76, а).

Для аналізу усталеного синусоїдного режиму в ЕЛ без втрат можна використати систему рівнянь, аналогічну (5.39) і (5.40):

$$\begin{cases} \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} = j\omega L_1(x)\underline{I}_m(x); \\ \frac{d\underline{I}_m(x)}{dx} = j\omega C_1(x)\underline{U}_m(x). \end{cases} \quad (5.197)$$

Перетворюючи систему (5.197), здобувають рівняння відносно $\underline{U}_m(x)$ або $\underline{I}_m(x)$. Так, рівняння для $\underline{U}_m(x)$ має вигляд:

$$\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} - \frac{1}{L_1(x)} \frac{dL_1(x)}{dx} \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} + \omega^2 L_1(x) C_1(x) \underline{U}_m(x) = 0. \quad (5.198)$$

Підстановка до рівняння (5.198) співвідношення (5.196) дає:

$$\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} + k \frac{d \underline{U}_m(x)}{dx} + \beta_0^2 \underline{U}_m(x) = 0, \quad (5.199)$$

де $\beta_0 = \omega \sqrt{L_1(x)C_1(x)} = \omega \sqrt{L_{10}C_{10}}$ — коефіцієнт фази ідеальної однорідної лінії з первинними параметрами $L_1 = L_{10}$, $C_1 = C_{10}$.

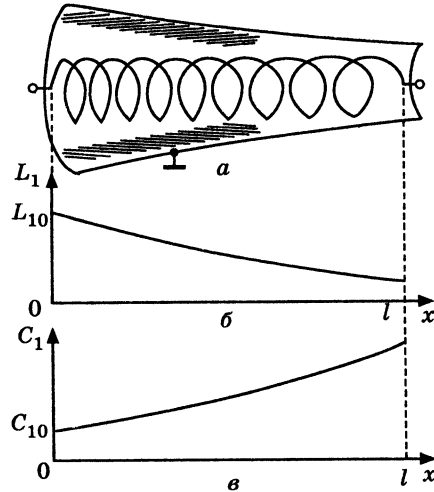


Рис. 5.76. Експоненційна лінія:
а — варіант конструкції;
б — залежність від координати:
погонної індуктивності;
в — погонної ємності

Характеристичне рівняння, яке відповідає диференціальному (5.199):

$$p^2 + kp + \beta_0^2 = 0,$$

має корені

$$p_{1,2} = -0,5k \mp j\sqrt{\beta_0^2 - (0,5k)^2}. \quad (5.200)$$

У діапазоні частот

$$0 < \omega < \frac{0,5|k|}{\sqrt{L_{10}C_{10}}} \quad (5.201)$$

підкореневий вираз у формулі (5.200) є від'ємною величиною, корені характеристичного рівняння дійсні, і тому процеси в лінії є аперіодичними. Отже, ЕЛ, подібно до ФНЧ, не пропускає коливання в частотному діапазоні (5.201).

Поза діапазоном частот

(5.201) коефіцієнт фази і швидкість поширення коливань залежать від частоти нелінійно:

$$\beta(\omega) = \sqrt{\beta_0^2 - (0,5k)^2} = \sqrt{\omega^2 L_{10}C_{10} - (0,5k)^2};$$

$$v(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 L_{10}C_{10} - (0,5k)^2}}.$$

Експоненційну лінію використовують як трансформатори й узгоджувальні пристрої для частот

$$\omega \gg \frac{0,5|k|}{\sqrt{L_{10}C_{10}}}, \quad (5.202)$$

де частотна дисперсія в ЕЛ практично відсутня.

За умови (5.202) коефіцієнт фази лінійно залежить від частоти:

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 = \sqrt{\omega^2 L_{10}C_{10}}, \quad (5.203)$$

швидкість поширення буде постійною

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_{10}C_{10}}},$$

а саму умову (5.202) можна записати наочніше:

$$|k| \ll 4\pi/\lambda.$$

З урахуванням виразу (5.203) загальний розв'язок рівняння (5.199)

$$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m \text{ пад}} e^{-0,5kx} e^{-j\beta_0 x} + \underline{U}_{m \text{ від}} e^{-0,5kx} e^{j\beta_0 x}, \quad (5.204)$$

такий самий, як і розв'язок для однорідної ДЛ, утворений сумою падаючої та відбитої хвиль.

Якщо використати вираз (5.204) і перше рівняння системи (5.197), виходить приблизне співвідношення для комплексної амплітуди струму в ЕЛ:

$$\underline{I}_m(x) = \frac{1}{j\omega L_1(x)} \frac{d \underline{U}_m(x)}{dx} \approx$$

$$\approx \frac{j\beta_0 \underline{U}_{m \text{ пад}} e^{-0,5kx} e^{-j\beta_0 x} - j\beta_0 \underline{U}_{m \text{ від}} e^{-0,5kx} e^{j\beta_0 x}}{j\omega L_{10} e^{-kx}} =$$

$$= \frac{\underline{U}_{m \text{ пад}} e^{0,5kx} e^{-j\beta_0 x}}{R_{\text{хв}0}} - \frac{\underline{U}_{m \text{ від}} e^{0,5kx} e^{j\beta_0 x}}{R_{\text{хв}0}}, \quad (5.205)$$

де $R_{\text{хв}0} = \sqrt{L_{10}/C_{10}}$ — хвильовий опір на початку лінії.

Опір лінії в перерізі x становить

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}_m(x)}{\underline{I}_m(x)} = R_{\text{хв}0} e^{-kx} \frac{\underline{U}_{m \text{ пад}} e^{-j\beta_0 x} + \underline{U}_{m \text{ від}} e^{j\beta_0 x}}{\underline{U}_{m \text{ пад}} e^{-j\beta_0 x} - \underline{U}_{m \text{ від}} e^{j\beta_0 x}}. \quad (5.206)$$

Опір $R_{\text{хв}0} e^{-kx}$, який входить до складу рівняння (5.206), слід розглядати як хвильовий опір у перерізі x :

$$R_{\text{хв}}(x) = R_{\text{хв}0} e^{-kx} = \sqrt{L_1(x)/C_1(x)}. \quad (5.207)$$

Якщо лінію навантажено на $R_{\text{хв}}(l) = R_{\text{хв}0} e^{-kl}$, вона буде узгодженою, оскільки рівність (5.206) при $x=l$ можлива тільки за відсутності відбитої хвилі ($\underline{U}_{m \text{ від}} = 0$).

Узгоджена ідеальна ЕЛ має унікальні властивості розподілено-го за довжиною ідеального трансформатора:

1) опір у довільному перерізі є активним і змінюється за експоненційним законом:

$$\underline{Z}(x) = R_{\text{хв}}(x) = R_{\text{хв}0} e^{-kx};$$

2) комплексні амплітуди напруги та струму описуються виразами

$$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m1} e^{-0,5kx} e^{-j\beta_0 x}; \quad \underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m1} e^{0,5kx} e^{-j\beta_0 x},$$

що відповідає змінюванню амплітуд за експоненційним законом:

$$U_m(x) = U_{m1} e^{-0,5kx}; \quad I_m(x) = I_{m1} e^{0,5kx};$$

3) комплексні амплітуди напруги та струму на виході та вході лінії, як і в ідеальному трансформаторі, пов'язані коефіцієнтом трансформації:

$$n = e^{-0,5kl} = \frac{\underline{U}_m(l)}{\underline{U}_{m1}} = \frac{\underline{I}_{m1}}{\underline{I}_m(l)};$$

4) активна потужність є незмінною в будь-якому перерізі:

$$P(x) = \text{Re}[\underline{U}(x)\underline{I}^*(x)] = U(x)I(x) = U_1 I_1 = U(l)I(l).$$

Приблизно такі ж властивості мають реальні ЕЛ з малими втратами.

Смуга робочих частот узгоджувальних пристроїв і трансформаторів на базі ЕЛ обмежується з боку нижніх частот нерівністю (5.202), а зверху — загасанням коливань у лінії. У цьому є перевага ЕЛ порівняно з вузькосмуговими методами, в яких використовують відрізки однорідних ліній ($\lambda/4$ -трансформатори або шлейфи).

Для того щоб узгодити однорідну лінію, яка має хвильовий опір $R_{\text{хв.л}}$, з активним навантаженням $R_{\text{н}}$, необхідна ЕЛ з хвильовим опором на початку лінії:

$$R_{\text{хв}0} = R_{\text{хв.л}} = \sqrt{L_{10}/C_{10}}.$$

Для заданої довжини l ЕЛ співвідношення (5.240) записують у вигляді:

$$R_{\text{н}} = R_{\text{хв.л}} e^{-kl},$$

звідки шуканий параметр k становитиме:

$$k = \frac{1}{l} \ln \frac{R_{\text{хв.л}}}{R_{\text{н}}}.$$

Перш ніж остаточно вибрати параметри ЕЛ, слід перевірити, чи виконується нерівність (5.202) для мінімальної робочої частоти. Інакше необхідно збільшити довжину лінії та перерахувати параметр k або (за можливості) зменшити величину $\sqrt{L_{10}C_{10}}$, змінюючи значення первинних параметрів.

5.14.5. Вимірювальні пристрої

Для вимірювання параметрів режиму на вході та виході ДЛ (струму, напруги, зсуву фаз тощо) використовують стандартні прилади (вольтметри, амперметри, осцилографи та ін.) і типові методи їхнього ввімкнення. Однак ці методи не коректні для вимірювань у перерізах лінії, оскільки безпосереднє ввімкнення приладів у лінію змінює її параметри, а іноді обмежене через конструктивні особливості. Тому розроблені спеціальні методи, які передбачають застосування вимірювальних шлейфів і ліній.

Вимірювальний шлейф. Призначений для визначення напруги в місці його ввімкнення. Шлейф навантажують на амперметр з малим внутрішнім опором. Якщо довжину шлейфа вибрати такою, щоб на його вході спостерігався максимум напруги, то показання амперметра будуть пропорційні напрузі на вході шлейфа, а отже, і напрузі в лінії в точці ввімкнення шлейфа.

Вимірювальний шлейф, складений з відрізка лінії без втрат довжиною $\lambda/4$ амперметра з нульовим внутрішнім опором, називається *ідеальним* (рис. 5.77).

Вихідний струм ідеального шлейфа (показання амперметра I_A) відповідає пучності струму, а вхідна напруга шлейфа (дорівнює напрузі в лінії $U_{\text{л}}$) — пучності напруги. Струм, що показує амперметр, і напруга в лінії пов'язані очевидним співвідношенням:

$$I_A = \frac{U_{\text{л}}}{R_{\text{хв.ш}}},$$

де $R_{\text{хв.ш}}$ — хвильовий опір лінії, з якої виконано шлейф.

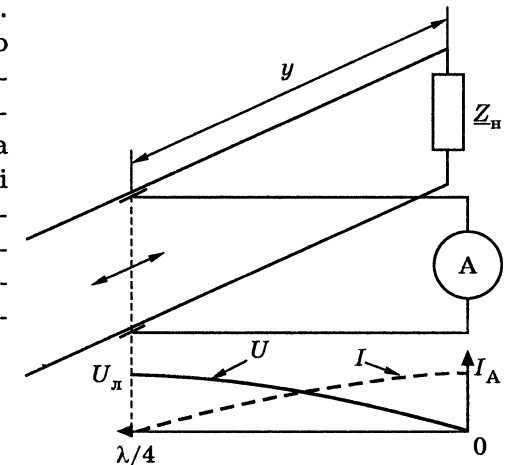


Рис. 5.77. Ідеальний вимірювальний шлейф

Ідеальний вимірювальний шлейф має нескінченно великий опір і не спотворює режим лінії, параметри якої вимірюються. Спотворення, які вносить реальний шлейф у лінію, тим менші, чим більший його вхідний опір.

Окрім вимірювань напруги в лінії, вимірювальний шлейф дозволяє визначати параметри лінії (λ , $k_{сх}$, $k_{бх}$, α) і навантаження. Комплексний опір навантаження обчислюють за формулою (5.146) або за круговою діаграмою після вимірювання $k_{бх}$ і відстані до найближчого мінімуму напруги лінії $l'_{U \min}$.

Застосування вимірювального шлейфа має два недоліки: вузькосмуговість і необхідність безпосереднього ввімкнення шлейфа до лінії.

Вимірювальна лінія — це високоякісна однорідна коаксіальна лінія, вздовж якої рухається каретка з вимірювальним зондом і каналом вимірювання. Конструкцію вимірювальної лінії пояснює рис. 5.78.

Вимірювальний зонд через подовжній виріз у зовнішньому проводі лінії введений у лінію і може пересуватися вздовж внутрішнього проводу разом із кареткою. Зонд виконує функцію ємнісного безконтактного «зняття», сигнал у якому пропорційний напрузі в перерізі лінії, де розташований зонд. Для того щоб визначити місце розташування зонда, вимірювальна лінія обладнана точною лінійною шкалою, а для ввімкнення генератора і досліджуваних кіл (лінії або комплексного навантаження) передбачені вхідний і вихідний коаксіальні розніми.

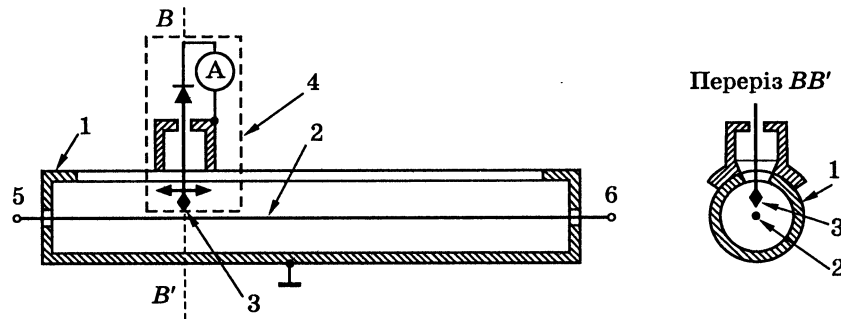


Рис. 5.78. Вимірювальна лінія:

- 1 — зовнішній провід (екран) із подовжнім вирізом;
- 2 — внутрішній провід; 3 — вимірювальний зонд;
- 4 — рухома коаксіальна каретка із зондом, діодним випрямлячем і амперметром; 5 — вхід лінії; 6 — вихід лінії

Вимірювальна лінія дозволяє виконувати ті самі вимірювання, що й вимірювальний шлейф, однак не має його недоліків. Це обумовлено тим, що ємнісний вимірювальний зонд працює у широкій смузі частот, а оцінювання режиму і параметрів лінії виконують непрямо — шляхом її послідовного й узгодженого з'єднання з вимірювальною лінією.

5.14.6. Імпульсна техніка

Більшість з численних застосувань ДЛ в імпульсній техніці пов'язано з формуванням та обробкою імпульсних сигналів.

У п. 5.14.2 мова йшла про застосування ліній затримки для формування й обробки складних імпульсних сигналів. Формування здійснюють, подаючи на вхід лінії (яка має кілька дискретних або одне розподілене «зняття» певної конфігурації), короткого імпульсу, який відповідає дельта-функції. За рахунок вибору часових та амплітудних параметрів «зняття» утворюється імпульсна характеристика, яка збігається з сигналом, що формується. Такий самий пристрій, складений з лінії затримки і «зняття», використовують і для обробки сигналів. У цьому випадку сигнал подається на вхід лінії, а виходом є «зняття». Для обробки конкретного сигналу формується відповідна імпульсна характеристика.

Довгі лінії в імпульсній техніці є накопичувачами енергії при формуванні керувальних імпульсів у модуляторах передавальних пристроїв радіолокаційних систем.

Спрощену схему формувача потужних імпульсів для модулятора передавача зображено на рис. 5.79, а. Формувач містить розімкнений відрізок лінії довжиною l та затримкою $\tau_3 = l/v$, джерело постійної напруги E , індуктивну котушку L , комутатор K . Вихідні імпульси формуються на активному опорі, який дорівнює хвильовому опору лінії $R_{хв}$. Діаграми, які пояснюють принцип роботи формувача, побудовані на рис. 5.79, б, в, г.

Комутатор у строго визначені моменти часу вмикає лінію до кола заряду (джерело E і котушка L) і до опору $R_{хв}$.

Припустимо, що в момент часу $-t_1$ лінію ввімкнено до кола заряду при нульовому початковому значенні струму в котушці $i_L(-t_1) = 0$. При цьому утворюється коло, де лінію можна розглядати як незаряджену ємність. У випадку малих втрат у лінії та котушці перехідний процес буде коливальним, напруга на вході лінії $u_{д}(t)$ і струм $i_L(t)$ описуватимуться виразами (1.63) і (1.64), а графіки матимуть вигляд, як показано на рис. 5.79, в, г.

У момент часу, коли напруга на лінії максимальна ($u_L(-0) \approx 2E$), а струм $i_L(-0) = 0$, лінія підключається до опору $R_{хв}$. Оскільки в цей момент струм на вході лінії дорівнює нулю, напруга в лінії дорівнює $2E$ не тільки на вході, але й в інших перерізах лінії:

$$u(x, -0) = 2E. \quad (5.208)$$

Отже, при $t > 0$ існує перехідний процес, спричинений розрядом лінії на активний опір, який дорівнює хвильовому.

Зважаючи на ненульову початкову умову (5.208), рівняння (5.10) для ідеальної ДЛІ в операторній формі набудуть вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dU(x, p)}{dx} = pL_1 I(x, p); \\ \frac{dI(x, p)}{dx} = pC_1 U(x, p) - C_1 u(x, -0) = pC_1 U(x, p) - C_1 2E. \end{cases} \quad (5.209)$$

Перетворивши систему (5.209), можна здобути рівняння для напруги в лінії:

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - L_1 C_1 p^2 U(x, p) = pL_1 C_1 2E. \quad (5.210)$$

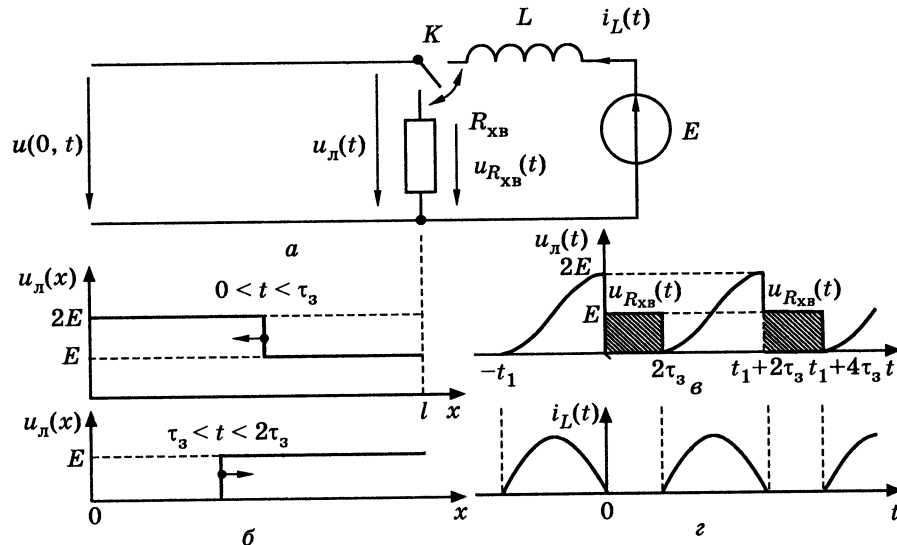


Рис. 5.79. Формування прямокутних імпульсів у модуляторі передавача: а — схема; б — динаміка напруги в лінії для $0 < t < 2\tau_3$; в — напруга на затискачах лінії та в навантаженні; г — струм в індуктивності

Рівняння (5.210), на відміну від виразу (5.17) для нульових початкових умов, є неоднорідним диференціальним рівнянням за змінною x . Розв'язок рівняння (5.210) є сумою загального розв'язку однорідного рівняння (5.17) і частинного розв'язку, який визначається правою частиною рівняння (5.210):

$$U(x, p) = U_{пад}(p)e^{-px/v} + U_{від}(p)e^{px/v} + \frac{2E}{p}. \quad (5.211)$$

Підстановка виразу (5.211) у перше рівняння системи (5.209) дає розв'язок для струму:

$$I(x, p) = -\frac{1}{pL_1} \frac{dU(x, p)}{dx} = \frac{U_{пад}(p)}{R_{хв}} e^{-px/v} + \frac{U_{від}(p)}{R_{хв}} e^{px/v}. \quad (5.212)$$

Для того щоб визначити сталі інтегрування $U_{пад}(p)$, $U_{від}(p)$ у розв'язках (5.211) і (5.212) використовують граничні умови для $x = 0$ та $x = l$:

$$I(0, p) = 0; \quad \frac{U(l, p)}{I(l, p)} = R_{хв}. \quad (5.213)$$

Слід зазначити, що застосування умов (5.213) до рівнянь (5.211) і (5.212) дає:

$$\begin{aligned} U_{пад}(p) &= U_{від}(p) = -\frac{E}{p} e^{-pl/v}; \\ U(x, p) &= -\frac{E}{p} e^{-p(x+l)/v} - \frac{E}{p} e^{-p(x-l)/v} + \frac{2E}{p}. \end{aligned} \quad (5.214)$$

Обернене перетворення Лапласа від виразу (5.214) дає миттєве значення напруги в будь-якому перерізі лінії:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}[U(x, p)] = -E \cdot \mathbf{1}\left(t - \frac{x+l}{v}\right) - E \cdot \mathbf{1}\left(t + \frac{x-l}{v}\right) + 2E \cdot \mathbf{1}(t) = \\ &= 2E \cdot \mathbf{1}(t) - E \cdot \mathbf{1}\left(t - \tau_3 - \frac{x}{v}\right) - E \cdot \mathbf{1}\left(t - \tau_3 + \frac{x}{v}\right) \end{aligned} \quad (5.215)$$

За умови $0 < t < \tau_3$ третій доданок у сумі (5.215) дорівнює нулю і розподіл напруги в лінії має вигляд, показаний на верхньому графіку рис. 5.79, б. Для інтервалу часу $\tau_3 < t < 2\tau_3$ у формуванні напруги беруть участь усі доданки (5.215), що відповідає нижньому графіку на рис. 5.79, б. За $t = 2\tau_3$ напруга в лінії дорівнює нулю, що означає її повний розряд.

Із формули (5.215) випливають вирази для напруги на затискачах лінії:

$$u(0, t) = 2E[1(t) - 1(t - \tau_3)]; \quad u(l, t) = u_{\text{л}}(t) = E[1(t) - 1(t - 2\tau_3)]. \quad (5.216)$$

Вираз (5.216) для напруги на опорі $R_{\text{хв}}$ відповідає прямокутному імпульсу тривалістю $2\tau_3$ (заштриховано на рис. 5.79, в).

Із завершенням формування прямокутного імпульсу лінії за допомогою комутатора знову підключається до кола заряду і процеси повторюються.

На відміну від конденсатора, який також іноді використовують у модуляторах як накопичувальний елемент, ДЛ забезпечує постійний рівень і стабільну тривалість імпульсів, що формуються.

Прикладом ще одного із застосувань відрізків ДЛ є диференціувальне коло на базі узгодженої на вході замкненої лінії (рис. 5.80, а).

Дане коло є диференціувальним для вхідного джерела $e(t)$, якщо виходом є $u_1(t)$, а подвоєний час затримки лінії $2\tau_3$ значно менший тривалості оброблюваного імпульсу.

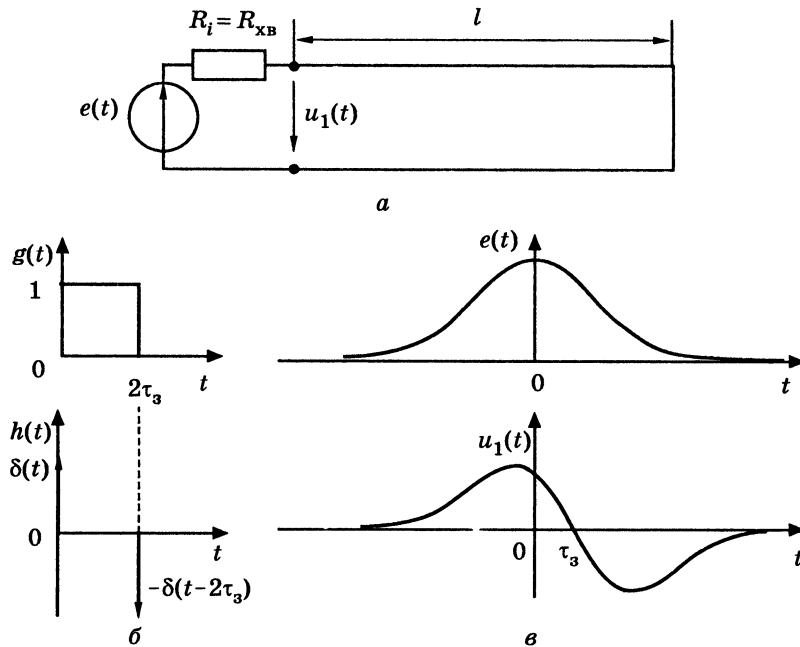


Рис. 5.80. Диференціувальне коло:
а — схема; б — часові характеристики;
в — проходження дзвоноподібного імпульсу

Часові характеристики диференціувального кола для ідеальної ДЛ зображені на рис. 5.80, б. Приклад проходження через коло імпульсу дзвоноподібної форми ілюструє рис. 5.80, в, який показує, що напруга $u_1(t)$ за формою практично збігається з похідною вхідної напруги, відрізняючись тільки масштабом по осі ординат і зсувом у часі на величину τ_3 .

5.15. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Сформулювати головний критерій, за яким коло слід вважати колом з розподіленими параметрами. Які принципи відмінності існують між колами з розподіленими та зосередженими параметрами?
2. Які кола з розподіленими параметрами належать до довгих ліній? Назвати галузі застосування ДЛ.
3. Назвати та пояснити різновиди конструкції ДЛ.
4. Дати визначення та пояснити значення первинних (погонних) параметрів ДЛ. Якою є розмірність первинних параметрів?
5. Як, використовуючи характер і особливості первинних параметрів, класифікують довгі лінії?
6. Чому в диференціальних (телеграфних) рівняннях ДЛ застосовують частинні похідні?
7. Який фізичний зміст мають падаюча та відбита хвилі, що входять до складу розв'язку диференціальних (телеграфних) рівнянь ІДЛ? Чому дорівнюють вторинні параметри ІДЛ — швидкість поширення хвиль і хвильовий опір?
8. Як зміниться хвильовий опір ідеального коаксіального кабелю з поліетиленовою ізоляцією, якщо діаметр внутрішнього провідника зменшити вдвічі?
Відповідь: хвильовий опір збільшиться на 27,7 Ом.
9. Який вигляд мають диференціальні рівняння для усталеного процесу в ДЛ при синусоїдній дії, якщо використовувати комплексний метод? Яке значення в цих рівняннях мають комплексні первинні опір і провідність ДЛ?
10. Пояснити структуру розв'язків для струму та напруги в лінії при синусоїдній дії. Яке значення в цих розв'язках мають вторинні параметри: коефіцієнти поширення, ослаблення, фази; комплексний хвильовий опір?
11. Який фізичний зміст мають довжина хвилі та фазова швидкість поширення хвиль? Як ці параметри пов'язані з коефіцієнтом фази?
12. Записати рівняння ДЛ із втратами при синусоїдній дії за допомогою гіперболічних функцій.
13. Що таке комплексний коефіцієнт відбиття?
14. Які особливості мають розв'язки для струму і напруги в ІДЛ та ДЛМВ при синусоїдній дії? Записати за допомогою тригонометричних функцій рівняння ІДЛ із втратами при синусоїдній дії.

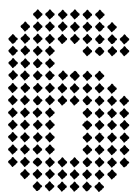
15. Ідеальну ДЛ увімкнено до джерела з частотою $f = 25$ МГц. Первинні параметри лінії: $C_1 = 16$ пФ/м; $L_1 = 1$ мкГн/м. Обчислити фазову швидкість і довжину хвилі в лінії.
Відповідь: $v = 2,5 \cdot 10^8$ м/с; $\lambda = 10$ м.
16. Розрахувати хвильовий опір, коефіцієнт поширення і фазову швидкість хвиль в однорідній ДЛ на частоті $f_1 = 1$ кГц. Первинні параметри лінії: $R_1 = 6,5 \cdot 10^{-3}$ Ом/м, $L_1 = 2,29 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, $C_1 = 5,22 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $G_1 = 0,5 \cdot 10^{-9}$ См/м.
Відповідь: $Z_{\text{хв}} = 694e^{-j0,205}$ Ом; $\gamma = (49,6 + j222) \cdot 10^{-7}$ 1/м; $v = 2,83 \cdot 10^8$ м/с.
17. Лінію, розглянуту в попередньому завданні, навантажено на активний опір $R_H = 200$ Ом. Визначити комплексний коефіцієнт відбиття в навантаженні ρ_H .
Відповідь: $\rho_H = 0,561e^{j3,015}$.
18. Назвати режими роботи ДЛ при синусоїдній дії. За яких значень опору навантаження існує кожен з цих режимів?
19. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ідеальної та реальної ліній у режимі біжних хвиль? Яке значення має хвильовий опір у цьому перерізі?
20. Як зміняться графіки розподілу амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ у режимі біжних хвиль, якщо змінити частоту коливань?
21. Обчислити амплітуду напруги на виході узгодженої лінії, якщо амплітуда синусоїдної напруги на вході дорівнює 100 В, коефіцієнт ослаблення $\alpha = 0,05$ Нп/м, довжина лінії $l = 8$ м, довжина хвилі $\lambda = 10$ м. Знайти зсув фаз φ між напругами на вході та виході лінії.
Відповідь: $U_m = 67,03$ В; $\varphi = 5,027$ рад.
22. Які особливості має режим стійних хвиль? Пояснити поняття «вузол» і «пучність».
23. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у будь-якому перерізі розімкненої ідеальної лінії? Який характер має і як змінюється опір уздовж лінії в даному режимі?
24. Як змінюються графіки розподілів амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі розімкненої ІДЛ, якщо змінювати частоту коливань?
25. Чим відрізняються розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі розімкнених ліній: із втратами й ідеальної?
26. Хвильовий опір лінії без втрат становить 50 Ом. Визначити амплітуди напруги та струму на відстані $\lambda/8$ від розімкненого кінця, якщо діюче значення напруги в кінці лінії дорівнює 10 В. Визначити комплексний опір у даному перерізі.
Відповідь: $U_m = 10$ В; $I_m = 200$ мА; $Z = -j50$ Ом.
27. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі замкненої ІДЛ? Який має характер і як змінюється опір уздовж лінії у даному режимі?
28. Як змінюються графіки розподілів амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі замкненої ІДЛ, якщо змінювати частоту коливань?
29. Хвильовий опір лінії без втрат дорівнює 50 Ом. Обчислити амплітуди напруги та струму на відстані $\lambda/8$ від замкненого кінця лінії, якщо діюче значення струму в кінці становить 10 мА. Визначити комплексний опір у даному перерізі.
Відповідь: $U_m = 0,5$ В; $I_m = 10$ мА; $Z = j50$ Ом.
30. Розрахувати вхідний опір лінії без втрат довжиною 0,5 м у режимах короткого замикання та холостого ходу її вихідних затискачів. Довжина хвилі в лінії 4 м, хвильовий опір 50 Ом.
Відповідь: $Z_{1к.з} = 50e^{j\pi/2}$ Ом; $Z_{1х.х} = 50e^{-j\pi/2}$ Ом.
31. Чим відрізняються розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі лінії з втратами й ідеальної лінії, замкнених на кінці?
32. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ, навантаженої на сміність? Який характер має і як змінюється опір уздовж лінії в даному режимі?
33. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ, навантаженої на індуктивність? Який характер має і як змінюється опір уздовж лінії в даному режимі?
34. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ у режимі змішаних хвиль?
35. Пояснити поняття коефіцієнтів біжної та стійної хвиль. У який спосіб ці коефіцієнти пов'язані один з одним і з коефіцієнтом відбиття?
36. В ідеальній лінії з хвильовим опором 200 Ом поширюється синусоїдне коливання з довжиною хвилі 2 м у режимі змішаних хвиль. Максимальна амплітуда струму становить 0,6 А, мінімальна — 0,2 А. Найближчий мінімум струму спостерігається на відстані 0,17 м від навантаження. Визначити комплексний опір навантаження й амплітуду струму в ньому.
Відповідь: $Z_H = 195,25 + j228,13$ Ом; $I_{mH} = 0,353$ А.
37. Визначити вхідний опір і КСХ лінії довжиною $\lambda/4$ і хвильовим опором 75 Ом, послідовно з якою увімкнено узгоджену лінію з хвильовим опором 50 Ом. Лінії вважати ідеальними.
Відповідь: $R_{\text{вх}} = 112,5$ Ом; $k_{\text{сх}} = 1,5$.
38. Визначити комплексний коефіцієнт трансформації за напругою $\underline{n} = \underline{U}_{m2}/\underline{U}_{m1}$ відрізка ідеальної ДЛ з параметрами $l = \lambda/4$ і $R_{\text{хв}} = 50$ Ом, навантаженого на активний опір $R_H = 75$ Ом.
Відповідь: $\underline{n} = -j1,5$.
39. Які ДЛ називають збалансованими? Які переваги таких ліній?
40. У чому полягає принцип узгодження ідеальної ДЛ та активного навантаження за допомогою $\lambda/4$ -трансформатора? Який режим має місце в $\lambda/4$ -трансформаторі?

41. Розрахувати хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора для узгодження лінії ($R_{\text{хв}} = 75 \text{ Ом}$) з активним навантаженням $R_{\text{н}} = 50 \text{ Ом}$.
Відповідь: $R_{\text{хв.тр}} \approx 61,24 \text{ Ом}$.
42. Чи можна застосувати $\lambda/4$ -трансформатор для узгодження ІДЛ із комплексним навантаженням?
43. У чому полягає принцип узгодження ІДЛ єдиним шлейфом? Який режим існує на ділянках лінії й у шлейфі?
44. Які особливості має узгодження ІДЛ двома шлейфами? Який режим існує на ділянках узгодженої лінії й у шлейфах?
45. Для чого призначені відрізки ліній довжиною $\lambda/2$, які застосовують у пристроях узгодження симетричних вібраторів із коаксіальними кабелями?
46. Який параметр лежить в основі побудови кругової діаграми ліній? Якою є структура КД?
47. Які задачі дозволяє розв'язувати кругова діаграма?
48. Чи можна застосовувати КД при розрахунках реальних ліній?
49. Розв'язати, використовуючи КД, завдання 17, 26, 29, 30, 36, 37, 38. Оцінити відносну похибку результатів порівняно з аналітичними розрахунками.
50. Яке практичне застосування мають узгоджені лінії, з огляду на характер їхніх АЧХ і ФЧХ?
51. Як впливає значення довжини узгоджених ідеальної та реальної ліній на їхні АЧХ і ФЧХ за напругою і струмом?
52. Назвати спільні та відмінні риси ЧХ послідовного резонансного контуру, складеного з елементів із зосередженими параметрами, і замкненої ДЛ.
53. Замкнена ідеальна повітряна ДЛ з хвильовим опором $R_{\text{хв}} = 100 \text{ Ом}$ з'єднана послідовно з ємністю $C = 20 \text{ пФ}$. Обчислити довжину лінії, за якої перша резонансна частота становитиме 100 МГц .
Відповідь: $l = 0,32 \text{ м}$.
54. Які параметри замкненої ДЛ із втратами (як послідовного резонансного контуру) впливають на резонансну частоту, добротність і смугу пропускання цього контуру?
55. До входу замкненої ІДЛ із заданим значенням часу затримки τ_3 увімкнено джерело напруги \underline{U}_m дж з внутрішнім опором, який дорівнює хвильовому опору лінії $R_{\text{хв}}$. Визначити в загальному вигляді КВФ $Y_{\text{вх}}(j\omega) = I_m / \underline{U}_m$ дж, а також АЧХ і ФЧХ.
Відповідь: $Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{G_{\text{хв}} \cos \omega \tau_3}{\cos \omega \tau_3 + j \sin \omega \tau_3}$; $Y_{\text{вх}}(\omega) = G_{\text{хв}} |\cos \omega \tau_3|$;
 $\varphi_Y(\omega) = -\omega \tau_3 + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos \omega \tau_3 \geq 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos \omega \tau_3 < 0. \end{cases}$
56. Назвати спільні та відмінні риси ЧХ паралельного резонансного контуру, складеного з елементів із зосередженими параметрами, та відрізка розімкненої ДЛ.

57. Які параметри розімкненої ДЛ із втратами (як паралельного резонансного контуру) впливають на резонансну частоту, добротність і смугу пропускання цього контуру?
58. Як впливає ємність, увімкнена до вихідних затискачів ДЛ, на її резонансні частоти? Чи можна використати це явище у практиці?
59. Навести приклади дуальних КДФ, КВФ і частотних характеристик ДЛ.
60. Який фізичний зміст мають доданки, з яких у загальному випадку складені миттєві значення струму та напруги в довільному перерізі лінії при перехідному процесі? Чим визначається форма цих доданків у ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ?
61. Чим відрізняються миттєві значення струму (напруги) на виході та вході узгодженої ІДЛ при перехідному процесі?
62. Чим відрізняються миттєві значення струму (напруги) на виході та вході узгодженої ДЛМВ при перехідному процесі?
63. Чим відрізняються миттєві значення струму (напруги) на виході та вході узгодженої ЗДЛ при перехідному процесі?
64. Дати фізичне пояснення ступінчастого (імпульсного) характеру вихідної напруги розімкненої ІДЛ при увімкненні її до ідеального джерела постійної напруги.
65. Дати фізичне пояснення ступінчастого (імпульсного) характеру вихідного струму замкненої ІДЛ при увімкненні її до ідеального джерела постійного струму.
66. Навести приклади використання ДЛ для передавання високочастотної енергії та радіосигналів.
67. У яких радіотехнічних пристроях ДЛ застосовують для реалізації часової затримки?
68. Які характерні властивості мають спіральні кабелі?
69. Навести приклади застосування резонансних властивостей відрізків ДЛ.
70. Які основні характеристики та властивості експоненціальних ліній? з якою метою використовують експоненціальні лінії?
71. У яких вимірювальних пристроях застосовують ДЛ?
72. Навести приклади використання ДЛ в імпульсній техніці.
73. У момент часу $t=0$ заряджену до напруги $u(x, -0) = U_0$ розімкнену ІДЛ з довжиною l , хвильовим опором $R_{\text{хв}}$ і швидкістю поширення хвиль v увімкнено до опору навантаження $R_{\text{н}} \neq R_{\text{хв}}$. Визначити миттєве значення напруги на опорі навантаження $u_{\text{н}}(t)$ для $t > 0$.

$$\text{Відповідь: } u_{\text{н}}(t) = \frac{U_0 R_{\text{н}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}} \left[1(t) - (1 - \rho_{\text{н}}) \cdot 1\left(t - \frac{2l}{v}\right) - \rho_{\text{н}}(1 - \rho_{\text{н}}) \cdot 1\left(t - \frac{4l}{v}\right) - \rho_{\text{н}}^2(1 - \rho_{\text{н}}) \cdot 1\left(t - \frac{6l}{v}\right) - \dots \right],$$

$$\text{де } \rho_{\text{н}} = \frac{R_{\text{н}} - R_{\text{хв}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}} \text{ — коефіцієнт відбиття від навантаження.}$$



ОСНОВИ СИНТЕЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

- Етапи розв'язання задачі синтезу
- Частотна залежність ослаблення та вимоги до неї
- Операторна передатна функція поліномного фільтра
- Фільтри з характеристиками Баттерворта
- Фільтри з характеристиками Чебишова
- Фільтри верхніх частот
- Смугові фільтри з симетричними характеристиками
- Загороджувальні фільтри з симетричними характеристиками
- Частотні залежності реактансних функцій
- Реалізація реактансних функцій за Фостером і Кауером
- Реалізація ОПФ східчастими реактивними колами, навантаженими з обох боків
- Перетворення схеми ФП у схеми інших типів
- Синтез фільтрів на операційних підсилювачах
- Синтез фільтрів на нетрадиційних ОП



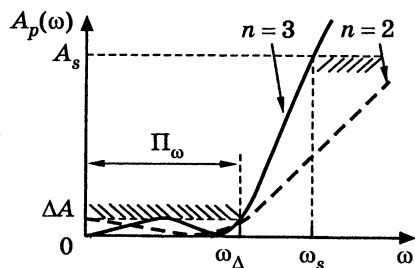
С. Дарлінгтон

$$T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega)$$

$$A_p(\Omega) = 10 \lg [1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)]$$



П. Л. Чебишов



Є. І. Золотар'єв

6.1. Етапи розв'язання задачі синтезу

У задачах аналізу кіл, розглянутих у попередніх розділах, відомою була структура кола та, як правило, його параметри. За різних умов визначалися відгуки на задану дію або характеристики кіл при типових діях. На відміну від аналізу, задача синтезу полягає у визначенні структури і параметрів кола, яке має певні частотні або часові характеристики. Задачу аналізу можна розв'язувати в різний спосіб, але результат буде завжди однозначний, чого не можна сказати про задачу синтезу. Найчастіше у практиці синтезують кола (електричні фільтри, лінії затримки, амплітудні та фазові коректори тощо), формулюючи вимоги до їх передатних частотних характеристик.

Загалом розв'язання задачі синтезу кола поділяють на три етапи.

Перший — визначення операторної передатної функції, яка задовольняє певним вимогам до частотних характеристик кола і відповідає умовам фізичної реалізації. У цьому полягає задача *апроксимації*. Отримувати ОПФ з ідеальною АЧХ не має сенсу, бо таку ОПФ неможливо фізично реалізувати.

Другий — побудова в заданій елементній базі схемної структури, що має визначену ОПФ. Це так звана задача *структурного синтезу*.

Третій — визначення параметрів елементів, що утворюють синтезоване коло, — це задача *параметричного синтезу*.

Слід зауважити, що на всіх цих етапах не має однозначного результату і вибір конкретної схеми кола визначається додатковими вимогами (кількістю елементів кола, допустимими значеннями їхніх параметрів, масогабаритними, конструктивними та іншими показниками).

6.2. Частотна залежність ослаблення та вимоги до неї

Розв'язання задачі апроксимації доцільно розглянути за певних обмежень: по-перше, кола, ОПФ яких визначатимуться, належать до кіл мінімально-фазового типу; по-друге, вимоги до частотних характеристик стосуються тільки АЧХ, тобто ніяких вимог до ФЧХ не висувається (мова йде про синтез за умови заданої АЧХ).

Згідно з виразом (3.100) передатна функція кола за потужністю $H_p(\omega)$ визначається за допомогою амплітудно-квадратичної характеристики кола $H_U^2(\omega)$, тобто квадрата модуля КПФ за напругою. Для електричних фільтрів переважно виконується умова $P_{\text{вих}} < P_{\text{вх}}$, тоді

$P_{\text{вих}}/P_{\text{вх}} < 1; \lg[P_{\text{вих}}/P_{\text{вх}}] < 0$. Задля уникнення цього обмеження вимоги до частотної характеристики фільтрів формують не до функції $H_P(\omega)$, а до логарифмічної оберненої функції $A_P(\omega)$, яка має назву *частотної характеристики ослаблення за потужністю*:

$$A_P(\omega), \text{ Дб} = 10 \lg \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = 10 \lg \frac{1}{H_P(\omega)}$$

З урахуванням формули (3.99) виходить:

$$A_P(\omega), \text{ Дб} = 10 \lg \frac{1}{k_R H_U^2(\omega)} = 10 \lg \frac{1}{H_U^2(\omega)} - 10 \lg k_R$$

Постійна величина k_R не впливає на частотну залежність ослаблення, а тільки визначає рівень її відліку, тому константа $10 \lg k_R$ може мати довільне значення. За умови $k_R = 1$ виходить нульовий рівень відліку $A_P(\omega)$, якщо $k_R < 1$, крива $A_P(\omega)$ зміщується вгору, якщо $k_R > 1$, навпаки — вниз. Опускаючи надалі для спрощення одиниці вимірювання ослаблення, можна записати:

$$A_P(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H_U^2(\omega)} \quad (6.1)$$

На рис. 6.1, а зображено АЧХ, а на рис. 6.1, б — частотну залежність ослаблення $A_P(\omega)$ ідеального ФНЧ.

У смузі пропускання (СП) ідеальний ФНЧ має одиничне значення АЧХ ($H_U(\omega) = 1$), згідно з формулою (6.1) ослаблення $A_P(\omega) = 0$. У смузі затримання (СЗ), яку відділяє від СП гранична частота $\omega_{\text{гр}}$, АЧХ набуває нульового значення ($H_U(\omega) = 0$), а ослаблення — нескінченного, що умовно показано вертикальною лінією із штрихуванням справа.

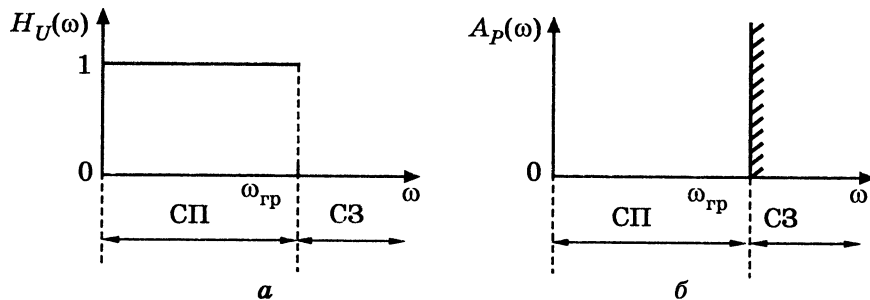


Рис. 6.1. Частотні характеристики ідеального ФНЧ: а — коефіцієнт передачі за напругою; б — ослаблення

Ослаблення $A_P(\omega)$ реальних фільтрів у смузі пропускання — ненульове, але не має перевищувати задане значення A_Δ . Частоту, для якої ця умова ще виконується, позначають ω_Δ , тобто $A(\omega_\Delta) = A_\Delta$ (рис. 6.2). Ліва межа СП — нульова частота, а права визначається граничною частотою $\omega_{\text{гр}}$: $A(\omega_{\text{гр}}) = A_{\text{гр}}$. Якщо рівень $A_{\text{гр}}$ збігається з A_Δ , тоді $\omega_{\text{гр}} = \omega_\Delta$. У смузі затримання ослаблення $A_P(\omega)$ не може бути меншим, ніж задане значення $A_s = A(\omega_s)$. Частота ω_s визначає ліву межу СЗ, а права прямує до нескінченності. Між частотами $\omega_{\text{гр}}$ і ω_s лежить смуга переходу.

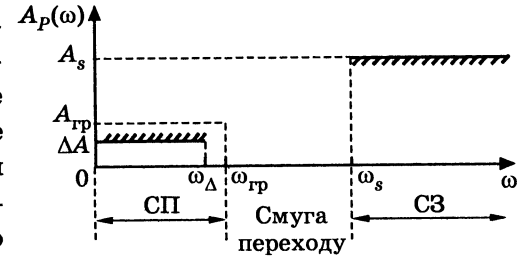


Рис. 6.2. Вимоги до частотної залежності ослаблення неідеального ФНЧ

6.3. Операторна передатна функція поліномного фільтра

Фільтри з ОПФ вигляду

$$H_U(p) = \frac{k'}{V(p)}, \quad (6.2)$$

мають назву *поліномних фільтрів*, оскільки їх частотні властивості визначаються поліномом Гурвіца $V(p)$. До значення константи k' ніяких вимог не ставиться, тобто поліномні фільтри відтворюють задану АЧХ з точністю до константи. Для того щоб перейти до функції ослаблення $A_P(\omega)$, спочатку слід визначити амплітудно-квадратичну характеристику $H_U^2(\omega)$ на підставі формули (3.97). Враховуючи співвідношення (6.2), можна записати:

$$H_U^2(\omega) = \frac{k_R}{V^2(\omega)}, \quad (6.3)$$

де k_R — константа (причому $k' = \sqrt{k_R}$), значення якої можна вибрати довільно. За умови $k_R = 1$ вирази (6.1) і (6.3) набувають вигляду:

$$A_P(\omega) = 10 \lg V^2(\omega); \quad (6.4)$$

$$H_U^2(\omega) = \frac{1}{V^2(\omega)}. \quad (6.5)$$

Виходячи з формули (3.91), дійсна й уявна частини полінома $V(j\omega)$ — це парні функції частоти ω . Отже, квадрат модуля $V(j\omega)$ також є парною функцією частоти ω

$$V^2(\omega) = V_{\text{Re}}^2(\omega) + \omega^2 V_{\text{Im}}^2(\omega),$$

яку можна подати як поліном змінної ω^2 :

$$V^2(\omega) = C_n \omega^{2n} + C_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + C_2 \omega^4 + C_1 \omega^2 + C_0. \quad (6.6)$$

На підставі виразів (6.4) і (6.5) $A_P(\omega)$ та $H_U^2(\omega)$ — також парні функції ω

Задача апроксимації полягає у визначенні, по-перше, таких коефіцієнтів полінома (6.6), які б задовольняли вимогам:

$$\begin{cases} A_P(\omega_\Delta) \leq A_\Delta; \\ A_P(\omega_s) \geq A_s, \end{cases} \quad (6.7)$$

а по-друге, ОПФ за допомогою $A_P(\omega)$. Оскільки ця задача є неоднозначною, доцільно розглянути деякі способи її розв'язання.

6.4. Фільтри з характеристиками Баттерворта

З огляду на співвідношення (6.4) вимоги до частотної характеристики ослаблення (рис. 6.2) можна застосувати до функції $V^2(\omega)$ (6.6): чим менше у смузі пропускання відрізняється від нуля ослаблення $A_P(\omega)$, тим менше від одиниці має відрізнятися функція $V^2(\omega)$ у цій смузі. Така поведінка притаманна функціям, що представлені рядом Маклорена¹ поблизу точки $\omega=0$, якщо виконуються вимоги

$$V^2(\omega) \Big|_{\omega=0} = 1; \quad (6.8)$$

$$V^{2'}(0) = 0; \quad V^{2''}(0) = 0; \quad \dots; \quad V^{2^{(n-1)'}}(0) = 0. \quad (6.9)$$

¹ Маклорен Колін, Maclaurin (1698–1746) — шотландський математик, професор, член Лондонської королівської спілки (1719), учень Ньютона. Працював у Шотландії (Абердін, Единбург), Франції. Лауреат премії Паризької АН за роботи з фізики (1740) у співавторстві з Д. Бернуллі, Л. Ейлером. У галузі аналізу встановив інтегральну ознаку збіжності числових рядів і формулу їх підсумовування. Кілька його теорем увійшли до сучасної теорії плоских кривих та проективної геометрії. Першим оприлюднив працю про розкладання функцій у степеневі ряди.

Для врахування умов (6.9) визначають похідні $V^2(\omega)$ за ω^2 :

$$\begin{cases} V^{2'}(\omega) = nC_n \omega^{2(n-1)} + (n-1)C_{n-1} \omega^{2(n-2)} + \dots + 2C_2 \omega^2 + C_1; \\ V^{2''}(\omega) = n(n-1)C_n \omega^{2(n-2)} + (n-1)(n-2)C_{n-1} \omega^{2(n-4)} + \dots + 2C_2; \\ \dots \\ V^{2^{(n-1)'}}(\omega) = n(n-1) \dots \cdot 2C_n \omega^2 + (n-1)(n-2) \dots \cdot 2C_{n-1}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} V^{2'}(0) = C_1; \\ V^{2''}(0) = 2C_2; \\ \dots \\ V^{2^{(n-1)'}}(0) = n(n-1) \dots \cdot 2C_{n-1}. \end{cases} \quad (6.10)$$

За умови (6.8) на підставі співвідношення (6.6) отримуємо:

$$V^2(0) = C_0 = 1. \quad (6.11)$$

З урахуванням рівнянь (6.10) виконання умов (6.9) приводить до вимог:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = 0. \quad (6.12)$$

За умов (6.11) і (6.12), рівняння (6.6) перетворюється до вигляду:

$$V^2(\omega) = 1 + C_n \omega^{2n}.$$

При $C_n = 1$ виходить:

$$V^2(\omega) = 1 + \omega^{2n}. \quad (6.13)$$

З метою узагальнення запису доцільно ввести нормовану частоту:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}}, \quad (6.14)$$

тоді вирази (6.13), (6.4), (6.5) відповідно матимуть вигляд:

$$V^2(\Omega) = 1 + \Omega^{2n}; \quad (6.15)$$

$$A_P(\Omega) = 10 \lg(1 + \Omega^{2n}); \quad (6.16)$$

$$H_U^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}. \quad (6.17)$$

Слід зауважити, що частотна характеристика ослаблення й АКХ — парні функції частоти Ω . Фільтри із залежностями (6.16),

(6.17) мають назву фільтрів із характеристиками Баттерворта² (ФБ), причому n є порядком фільтра. За умови $\Omega = 1$ (на частоті $\omega = \omega_{гр}$) функція $V^2(1) = 2$, ослаблення ФБ становитиме $10 \lg 2 \cong 3$ дБ. Отже, $A_P(\omega_{гр}) \cong 3$ дБ; $H_U(\omega_{гр}) = 1/\sqrt{2}$ на підставі виразу (6.17).

Оскільки для ФБ виконуються умови (6.9), які при відході від частоти $\Omega = 0$ забезпечують повільне зростання функцій $V^2(\Omega)$, $A_P(\Omega)$ і, як наслідок, повільний спад $H_U(\Omega)$, ФБ мають ще назву фільтрів із *максимально плоскими характеристиками ослаблення*. Графіки залежностей $A_P(\omega)$ і $H_U(\omega)$ для різних значень n зображені на рис. 6.3.

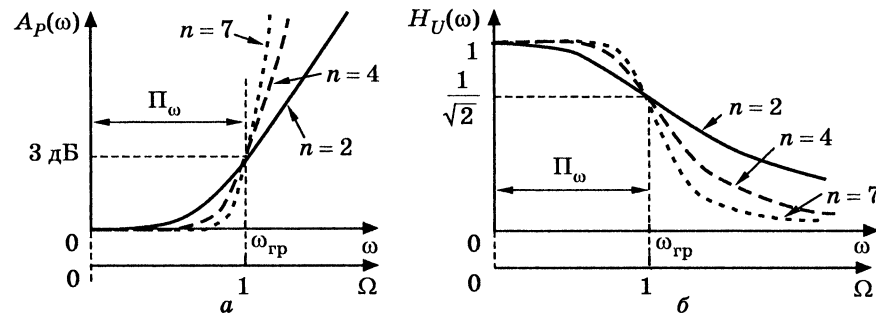


Рис. 6.3. Частотні залежності ФНЧ Баттерворта:

a — ослаблення; b — коефіцієнта передачі за напругою

У смугі затримання для частот $\Omega \gg 1$ одиницею у виразі (6.16) можна знехтувати, і тоді ослаблення визначиться як $A_P(\Omega) = 20n \lg \Omega$. При збільшенні частоти вдвічі ($\Omega_2 = 2\Omega_1$; $\lg(\Omega_2/\Omega_1) \cong 0,3$), або на октаву, приріст ослаблення становитиме

$$A_P(\Omega_2) - A_P(\Omega_1) = 20n \lg(\Omega_2/\Omega_1) \cong 6n \text{ дБ.} \quad (6.18)$$

Отже, необхідний приріст ослаблення у СЗ можна забезпечити, збільшуючи значення n .

Оскільки від доданка Ω^{2n} у знаменнику формули (6.17) за умови $\Omega > 1$ залежить швидкість спадання АЧХ, його пов'язують ще з функцією фільтрації і вводять позначення:

$$H_U^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)}, \quad (6.19)$$

де $\varphi^2(\Omega)$ — квадрат модуля функції фільтрації.

² Баттерворт Стивен, S. Butterworth — англійський інженер, уперше описав максимально плоску частотну характеристику фільтра в статті «On the Theory of Filter Amplifiers» (1930).

Тоді з урахуванням виразу (6.15) знаменник АКФ (6.19) можна записати:

$$V^2(\Omega) = 1 + \varphi^2(\Omega). \quad (6.20)$$

Функція фільтрації $\varphi(p)$ є функцією комплексного змінного p .

Порівнюючи вирази (6.17) і (6.19), можна зробити висновок, що для ФБ квадрат модуля функції фільтрації

$$\varphi^2(\Omega) = \Omega^{2n}. \quad (6.21)$$

Тоді частотна залежність ослаблення (6.16) становитиме

$$A_P(\Omega) = 10 \lg [1 + \varphi^2(\Omega)]. \quad (6.22)$$

Порядок фільтра n визначається кількістю ланок фільтра, тобто може бути тільки цілим числом. Для визначення n до системи (6.7) слід підставити вираз (6.16) для відповідних частот:

$$\begin{cases} A_P(\Omega_\Delta) = 10 \lg(1 + \Omega_\Delta^{2n}) \leq A_\Delta; \\ A_P(\Omega_s) = 10 \lg(1 + \Omega_s^{2n}) \geq A_s. \end{cases} \quad (6.23)$$

Унаслідок переходу від нерівностей до рівностей система (6.23) набуде вигляду

$$\begin{cases} 10 \lg(1 + \Omega_\Delta^{2n}) = A_\Delta; \\ 10 \lg(1 + \Omega_s^{2n}) = A_s. \end{cases} \quad (6.24)$$

Якщо поділити обидва рівняння системи (6.24) на 10 і прологарифмувати, виходить:

$$\begin{cases} 10^{0,1A_\Delta} = 1 + \Omega_\Delta^{2n}; \\ 10^{0,1A_s} = 1 + \Omega_s^{2n} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \Omega_\Delta^{2n} = 10^{0,1A_\Delta} - 1; \\ \Omega_s^{2n} = 10^{0,1A_s} - 1. \end{cases} \quad (6.25)$$

Оскільки $\Omega_s > \Omega_\Delta$ (див. рис. 6.2), $\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Delta}\right)^{2n} = \frac{10^{0,1A_s} - 1}{10^{0,1A_\Delta} - 1}$, або після логарифмування:

$$2n \lg \frac{\Omega_s}{\Omega_\Delta} = \lg(10^{0,1A_s} - 1) - \lg(10^{0,1A_\Delta} - 1),$$

звідки

$$n^* = \frac{\lg(10^{0,1A_s} - 1) - \lg(10^{0,1A_\Delta} - 1)}{2 \lg(\Omega_s/\Omega_\Delta)}. \quad (6.26)$$

Як правило, отримане з цього рівняння значення орієнтовного порядку фільтра n^* — число дробове. Для того щоб визначити порядок фільтра, n^* слід збільшити до цілого значення:

$$n \geq n^*, \quad (6.27)$$

при цьому рівняння (6.24) перетворюються на вихідні нерівності (6.23).

Слід зауважити, що для визначення n^* не потрібно знати нормовані частоти, оскільки

$$\frac{\Omega_\Delta}{\Omega_s} = \frac{\omega_\Delta}{\omega_s} = \frac{f_\Delta}{f_s}. \quad (6.28)$$

Денормування частотних характеристик потребує визначення граничної частоти, яку можна знайти, користуючись саме дробовим значенням n^* з будь-якого рівняння системи (6.24). З огляду на формули (6.14) і (6.25) виходить:

$$\frac{\omega_\Delta}{\omega_{\text{гр}}} = (10^{0,1A_\Delta} - 1)^{1/2n^*}, \text{ або } \frac{\omega_s}{\omega_{\text{гр}}} = (10^{0,1A_s} - 1)^{1/2n^*},$$

звідки

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{\omega_\Delta}{(10^{0,1A_\Delta} - 1)^{1/2n^*}} = \frac{\omega_s}{(10^{0,1A_s} - 1)^{1/2n^*}}. \quad (6.29)$$

Для того щоб отримати залежність ослаблення від абсолютних значень частоти, слід нормовану безрозмірну частоту Ω , що відкладена на осі абсцис (рис. 6.3), замінити частотою $\omega = \Omega \omega_{\text{гр}}$ на підставі співвідношення (6.14).

Для визначення ОПФ на підставі виразу (3.88) записують аналогічне рівняння, яке встановлює зв'язок між комплексним коефіцієнтом передачі за напругою й ОПФ для нормованих значень аргументів:

$$H_U(j\Omega)|_{j\Omega=\bar{p}} = H_U(\bar{p}), \quad (6.30)$$

де \bar{p} — нормоване значення комплексної змінної:

$$\bar{p} = j\Omega = j \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}}; \quad (6.31)$$

звідки

$$\Omega = \frac{\bar{p}}{j} = -j\bar{p}. \quad (6.32)$$

Зв'язок між модулями лівої та правої частин рівняння (6.30) встановлюють, враховуючи вирази (6.5) і (6.32):

$$H_U^2(j\Omega)|_{\Omega=-j\bar{p}} = \frac{1}{V^2(\Omega)|_{\Omega=-j\bar{p}}} = |H_U(\bar{p})|^2 = \frac{1}{|V(\bar{p})|^2}. \quad (6.33)$$

З огляду на формули (6.19), (6.20) і (6.32) отримуємо:

$$|V(\bar{p})|^2 = 1 + \varphi^2(\Omega)|_{\Omega=-j\bar{p}}. \quad (6.34)$$

Для того щоб визначити полюси $|H_U(\bar{p})|^2$, прирівнюють нулю знаменник (6.33):

$$|V(\bar{p})|^2 = 1 + (-j\bar{p})^{2n} = 0, \quad (6.35)$$

звідки

$$-j\bar{p}_k = \sqrt[2n]{-1} = e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

або

$$-j\bar{p}_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + j \sin \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

Поділивши обидві частини останнього виразу на $-j$, можна знайти нормоване значення кореня \bar{p} :

$$\bar{p}_k = -\sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \quad (6.36)$$

Визначені за формулою (6.36) нормовані корені ФБ лежать на колі одиничного радіуса на однаковій відстані один від одного. Як приклад на рис. 6.4 показано розташування коренів \bar{p} на комплексній площині для $n = 3$.

Як видно з рис. 6.4, кути між радіусами, проведеними в точки полюсів, однакові й загалом становлять величину $\varphi = \pi/n$; числові значення полюсів визначені нижче у прикладі 6.1 для $n = 3$.

Якщо у виразі (6.36) удвічі зменшити верхню межу значення k , тобто $k = 1, 2, \dots, n$, корені \bar{p}_k належатимуть тільки лівій півплощині й утворять

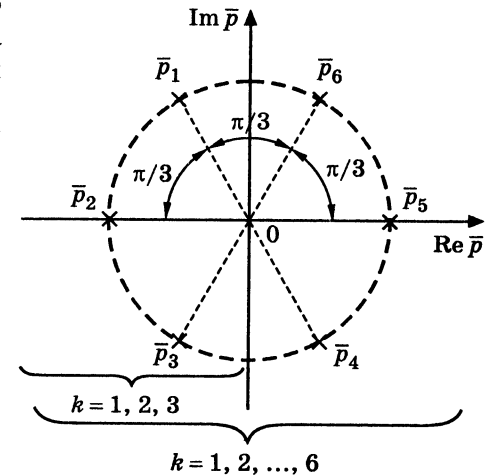


Рис. 6.4. Полюси ФБ третього порядку

поліном Гурвіца, який, враховуючи визначений спосіб розташування коренів, має ще назву полінома Баттерворта і може бути поданий у вигляді:

$$V(\bar{p}) = \prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k). \quad (6.37)$$

Це дозволяє на підставі виразу (6.2) за умови $k' = 1$ визначити ОПФ поліномного фільтра:

$$H_U(\bar{p}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k)}. \quad (6.38)$$

Для двох комплексно-спряжених коренів $\bar{p}_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$, які лежать на колі одиничного радіуса ($\sigma^2 + \omega^2 = 1$), поліном $V(\bar{p})$ має вигляд:

$$V(\bar{p}) = (\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_2), \text{ або } V(\bar{p}) = \bar{p}^2 + 2\sigma\bar{p} + 1. \quad (6.39)$$

З виразу (6.39) видно, що визначення нормованого полінома не потребує обчислення уявної частини комплексно-спряжених коренів.

Тому поліном Баттерворта (6.37) можна подати у вигляді

$$V(\bar{p}) = \prod_{k=1}^m (\bar{p}^2 + 2\sigma_k \bar{p} + 1); \quad m = \frac{n}{2}, \quad (6.40)$$

де $\sigma_k = \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$ — реальна частина виразу (6.36).

Це дозволяє реалізовувати ОПФ (6.38) ланками другого порядку для парного n . Поліном Баттерворта для непарного містить, крім m ланок другого, ще одну ланку першого (або $(m-1)$ другого та одну третього) порядку:

$$V(\bar{p}) = \prod_{k=1}^m (\bar{p}^2 + 2\sigma_k \bar{p} + 1)(\bar{p} + \sigma); \quad m = \frac{n-1}{2}. \quad (6.41)$$

Отже, залежно від того, парним чи непарним є порядок n ФНЧ Баттерворта, його ОПФ визначається на підставі виразу (6.38), до знаменника якого слід підставити добуток (6.40) або (6.41).

Загалом поліном Баттерворта має такий вигляд:

$$V(\bar{p}) = \bar{p}^n + b_{n-1} \bar{p}^{n-1} + \dots + b_1 \bar{p} + 1. \quad (6.42)$$

Коефіцієнти поліномів Баттерворта для різних n наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Коефіцієнти поліномів Баттерворта ($b_0 = 1; b_n = 1$)

n	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
2	1,4142136								
3	2,0000000	2,0000000							
4	2,6131259	3,4142136	2,6131259						
5	3,2360680	5,2360680	5,2360680	3,2360680					
6	3,8637033	7,4641016	9,1416202	7,4641016	3,8637033				
7	4,4939592	10,0978347	14,5917939	14,5917939	10,0978347	4,4939592			
8	5,1258309	13,1370712	21,8461510	25,6883559	21,8461510	13,1370712	5,1258309		
9	5,7587705	16,5817187	31,1634375	41,9863857	41,9863857	31,1634375	16,5817187	5,7587705	
10	6,3924532	20,4317291	42,8020611	64,8823963	74,2334292	64,8823963	42,8020611	20,4317291	6,3924532

Визначення денормованої ОПФ потребує підстановки до виразу (6.38) нормованого значення \bar{p} з урахуванням (6.14):

$$\bar{p} = j\Omega = j \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{p}{\omega_{\text{гр}}}, \quad (6.43)$$

тобто

$$H_U(p) = H_U(\bar{p}) = \frac{1}{V(\bar{p})} \Big|_{\bar{p}=p/\omega_{\text{гр}}}. \quad (6.44)$$

Після такої підстановки знаменник ОПФ ланки другого порядку (6.39) матиме вигляд

$$V(p) = \bar{p}^2 + 2\sigma\bar{p} + 1 \Big|_{\bar{p}=p/\omega_{\text{гр}}} = \frac{p^2 + 2\omega_{\text{гр}}\sigma p + \omega_{\text{гр}}^2}{\omega_{\text{гр}}^2}. \quad (6.45)$$

Приклад 6.1. Визначити нормовані корені й ОПФ ФНЧ Баттерворта третього порядку, якщо гранична частота $\omega_{\text{гр}} = 10^3$ рад/с.

Розв'язання. Виходячи з виразу (6.36), обчислимо нормовані корені $|H_U(\bar{p})|^2$ для $n=3$ при змінюванні величини k у межах $k=1\dots 6$:

$$\bar{p}_1 = -\sin \frac{\pi}{6} + j \cos \frac{\pi}{6} = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \bar{p}_2 = -\sin \frac{\pi}{2} = -1;$$

$$\bar{p}_3 = -\sin \frac{5\pi}{6} + j \cos \frac{5\pi}{6} = -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \bar{p}_4 = -\sin \frac{7\pi}{6} + j \cos \frac{7\pi}{6} = 0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\bar{p}_5 = -\sin \frac{3\pi}{2} = 1; \quad \bar{p}_6 = -\sin \frac{11\pi}{6} + j \cos \frac{11\pi}{6} = 0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рис. 6.4 ілюструє розташування знайдених коренів на комплексній площині, які розміщені на колі одиничного радіуса. Зліва лежать корені, що утворюють поліном Баттерворта ($k=1, 2, 3$). За формулою (6.41) отримуємо:

$$V(\bar{p}) = (\bar{p}^2 + 2\sigma_1\bar{p} + 1)(\bar{p} + \sigma_2) = (\bar{p}^2 + \bar{p} + 1)(\bar{p} + 1) = \bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1.$$

Слід зауважити, що значення коренів відповідають табл. 6.1.

З урахуванням співвідношення (6.44) денормована ОПФ має вигляд:

$$H_U(p) = \frac{10^9}{p^3 + 2 \cdot 10^3 p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 10^9}. \quad (6.46)$$

Приклад 6.2. Визначити ОПФ ФНЧ Баттерворта, якщо на частоті 750 рад/с ослаблення за потужністю $A_p(\omega)$ не має перевищувати 0,85 дБ, а на частоті 2600 рад/с — бути меншим 22 дБ.

Розв'язання. Формалізуємо вимоги до ослаблення за потужністю на підставі виразу (6.23):

$$\begin{cases} A_p(750) = 10 \lg(1 + \Omega_{\Delta}^{2n}) \leq A_{\Delta} = 0,85 \text{ дБ}; \\ A_p(2600) = 10 \lg(1 + \Omega_s^{2n}) \geq A_s = 22 \text{ дБ}. \end{cases} \quad (6.47)$$

Визначимо орієнтовний порядок фільтра n^* за формулою (6.26) для рівностей у системі (6.47):

$$n^* = \frac{\lg(10^{0,122} - 1) - \lg(10^{0,10,85} - 1)}{2 \lg(2600/750)} = 2,6508.$$

Отже, порядок фільтра $n=3$.

Обчислимо граничну частоту ФНЧ за формулою (6.29):

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{750}{(10^{0,10,85} - 1)^{1/2,6508}} = 1001 \approx 10^3 \text{ рад/с}.$$

Оскільки значення n і $\omega_{\text{гр}}$ виявились такими, як у попередньому прикладі, $H_U(p)$ визначатиметься виразом (6.46).

Слід зазначити, що за малої величини A_{Δ} реалізація максимально плоских характеристик ослаблення у смузі пропускання потребує високого порядку n . Уникнути цього можна, використовуючи фільтри з іншою апроксимацією ослаблення за потужністю.

6.5. Фільтри з характеристиками Чебишова

На відміну від виразу (6.20), знаменник АКХ ФНЧ може мати іншу функцію фільтрації $\varphi(\Omega)$ і відповідно інші частотні залежності ослаблення або АЧХ. Частотна залежність ослаблення у смузі пропускання не повинна виходити за межу A_{Δ} , але може мати коливальний характер. Смуга пропускання обмежена частотою ω_{Δ} ($A_p(\omega_{\Delta}) \leq A_{\Delta}$), тобто її гранична частота $\omega_{\text{гр}} = \omega_{\Delta}$. Таку залежність ослаблення A_p можуть забезпечити поліноми Чебишова³:

$$T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega), \quad (6.48)$$

³ **Чебишов Пафнутий Львович** (1821–1894) — російський математик і механік, засновник петербурзької математичної школи, академік (1859), член багатьох іноземних АН. Автор понад 70 наукових праць із теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії наближення функцій, інтегрального числення. Довів так званий постулат Бертрана, встановив асимптотичний закон розподілу простих чисел. Довів загальні форми закону великих чисел, центральну граничну теорему. Заснував новий розділ теорії функцій, складовою якого є теорія найкращих наближень функцій поліномами. Конструював машини та механізми, створив і вдосконалив понад 80 механізмів.

де Ω — нормована частота, причому

$$\Omega = \omega / \omega_{\Delta}. \quad (6.49)$$

Незважаючи на те, що функція $T_n(\Omega)$ визначається з рівняння (6.48) як трансцендентна, вона має всі ознаки полінома. Переконатися в цьому можна, якщо ввести позначення:

$$\arccos \Omega = Z, \quad (6.50)$$

де Z загалом є комплексною величиною:

$$\underline{Z} = u + jv. \quad (6.51)$$

Згідно з виразом (6.50)

$$\cos Z = \Omega. \quad (6.52)$$

Тоді рівняння (6.48) можна представити у вигляді:

$$T_n(\Omega) = \cos nZ. \quad (6.53)$$

Поліноми $T_n(\Omega)$ визначаються для різних значень n ($n = 0, 1, 2, \dots$) з урахуванням співвідношення (6.52):

$$T_0(\Omega) = 1; T_1(\Omega) = \cos Z = \Omega; T_2(\Omega) = \cos 2Z = \cos^2 Z - 1 = 2\Omega^2 - 1.$$

Загалом для поліномів Чебишова справедливою є рекурентна формула:

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega), \quad (6.54)$$

звідки можна визначити $T_3(\Omega)$, $T_4(\Omega)$ тощо, наприклад:

$$T_3(\Omega) = 2\Omega T_2(\Omega) - T_1(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega.$$

Поліноми Чебишова вищих порядків наведено у табл. 6.2.

Слід зауважити, що доданок $C_n \Omega^n$ полінома $T_n(\Omega)$ з аргументом Ω у максимальному степені містить коефіцієнт C_n , який визначається як

$$C_n = 2^{n-1}. \quad (6.55)$$

Графіки частотних залежностей поліномів Чебишова першого, другого і третього порядків зображено на рис. 6.5. Поліноми Чебишова з парним (непарним) n є парними (непарними) функціями Ω .

З аналізу графіків випливає, що на інтервалі $-1 < \Omega < 1$:

- по-перше, графік полінома $T_n(\Omega)$ перетинає вісь абсцис n разів;
- по-друге, максимальні відхилення $T_n(\Omega)$ від нуля за модулем однакові, спостерігаються $(n+1)$ разів і збігаються зі значенням відхилення на межі інтервалу ($T_n(1) = 1$);

Поліноми Чебишова

n	$T_n(\Omega)$
1	Ω
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$
6	$32\Omega^6 - 48\Omega^4 + 18\Omega^2 - 1$
7	$64\Omega^7 - 112\Omega^5 + 56\Omega^3 - 7\Omega$
8	$128\Omega^8 - 256\Omega^6 + 160\Omega^4 - 32\Omega^2 + 1$
9	$256\Omega^9 - 576\Omega^7 + 432\Omega^5 - 120\Omega^3 + 9\Omega$
10	$512\Omega^{10} - 1280\Omega^8 + 1120\Omega^6 - 400\Omega^4 + 50\Omega^2 - 1$

- по-третє, за межами інтервалу $|\Omega| > 1$ значення полінома монотонно зростають.

Перші два висновки впливають з виразу (6.53). У межах СП $\Omega \leq 1$, тоді відповідно до виразу (6.52), можна стверджувати, що Z — дійсна величина, тобто $Z = u$, $nZ = nu$ і змінюється в межах $\pm 2\pi$; $\cos Z = \cos u \leq 1$. На межі СП нерівність перетворюється на рівність.

Для того щоб у межах СП забезпечити відхилення ослаблення за потужністю від нуля на незначну величину $A_{\Delta} \ll 3$ дБ, необхідно, щоб функція фільтрації за модулем не перевищувала значення ε ($\varepsilon \ll 1$), тобто модуль функції фільтрації визначають як добуток полінома Чебишова і величини ε :

$$\varphi(\Omega) = \varepsilon T_n(\Omega). \quad (6.56)$$

Фільтри з такою частотною залежністю модуля функції фільтрації називають *фільтрами Чебишова* (ФЧ), а ε — *коефіцієнтом нерівномірності ослаблення*. Згідно з формулою (6.22) частотна залежність ослаблення фільтра Чебишова становить

$$A_p(\Omega) = 10 \lg [1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)]. \quad (6.57)$$

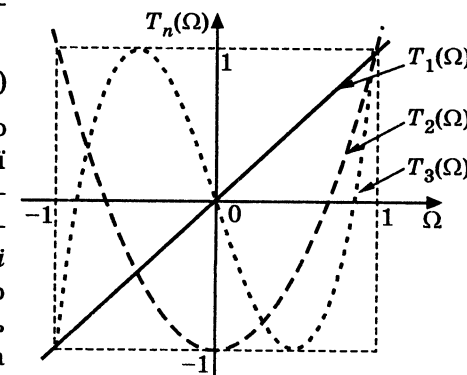


Рис. 6.5. Графіки поліномів $T_n(\Omega)$, $n = 1, 2, 3$

Зменшення значення призводить до зменшення ослаблення не тільки в СП, а й у смугах переходу і затримання, тому не слід зменшувати ослаблення в СП більше, ніж потрібно.

Для того щоб зрозуміти третю властивість поліномів Чебишова, слід усвідомити, що за межею СП ($\Omega > 1$) рівність (6.52) може виконуватись лише за умови комплексного значення \underline{Z} (6.51), точніше суто уявного:

$$\underline{Z} = jv. \quad (6.58)$$

Тоді, виходячи з виразу (6.52) і враховуючи (6.58), можна стверджувати, що

$$\cos \underline{Z} = \cos jv = \operatorname{ch} v = \Omega, \quad (6.59)$$

звідки

$$v = \operatorname{Arch} \Omega. \quad (6.60)$$

З огляду на це поліном Чебишова (6.53) для $\Omega > 1$ з урахуванням виразу (6.58) набуває вигляду:

$$T_n(\Omega) = \operatorname{ch} nv, \quad (6.61)$$

а після підстановки виразу (6.60):

$$T_n(\Omega) = \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} \Omega). \quad (6.62)$$

Отже, враховуючи значення нормованої частоти Ω у різних смугах, частотну залежність ослаблення фільтра Чебишова відповідно до співвідношень (6.48), (6.57), (6.62) можна представити у вигляді:

$$A_P(\Omega) = \begin{cases} 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \cos^2(n \arccos \Omega)], & \Omega \leq 1; \\ 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{Arch} \Omega)], & \Omega > 1. \end{cases} \quad (6.63)$$

Графіки частотних залежностей ослаблення для ФЧ другого і третього порядків, а також відповідні АЧХ зображено на рис. 6.6. Граничну частоту смуги пропускання Π_ω визначено на рівні A_Δ : $\omega_{\text{гр}} = \omega_\Delta$.

Оскільки частотні залежності $A_P(\omega)$ і $H_U(\omega)$ у середині СП мають хвильові відхилення відповідно від нуля й одиниці, причому в однакових межах, ФЧ називають також фільтрами з *рівнохвильовими характеристиками*.

Визначення параметрів ε і n для ФЧ базується на вимогах (6.7):

$$\begin{cases} A_P(1) = A_\Delta; \\ A_P(\Omega_s) = A_s, \end{cases} \quad (6.64)$$

які трансформуються до вимог стосовно полінома $T_n(\Omega)$.

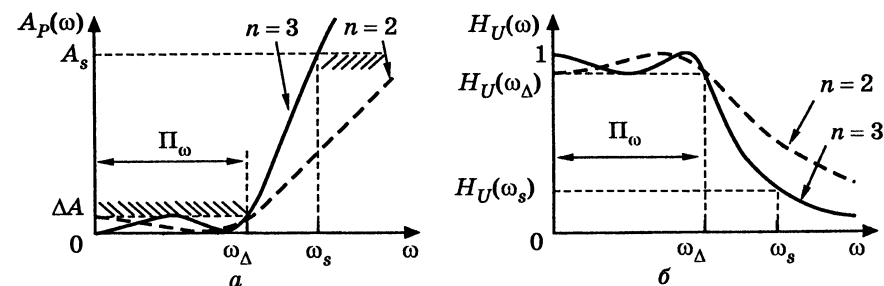


Рис. 6.6. Частотні залежності ФНЧ Чебишова ($n=2, 3$): а — ослаблення; б — коефіцієнта передачі за напругою

З урахуванням співвідношення (6.63) рівності (6.64) набувають вигляду:

$$\begin{cases} 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \cos^2(n \arccos 1) = A_\Delta; \\ 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{Arch} \Omega_s)] = A_s. \end{cases} \quad (6.65)$$

Враховуючи, що $\arccos 1 = 0$, з першого рівняння виходить:

$$\lg(1 + \varepsilon^2) = 0,1A_\Delta, \text{ або } 1 + \varepsilon^2 = 10^{0,1A_\Delta},$$

звідки коефіцієнт нерівномірності ослаблення

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_\Delta} - 1}. \quad (6.66)$$

З другого рівняння системи (6.65) випливає:

$$10^{0,1A_s} = 1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{Arch} \Omega_s), \text{ або } \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} \Omega_s) = \frac{\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}}{\varepsilon},$$

звідки

$$n \operatorname{Arch} \Omega_s = \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}}{\varepsilon}.$$

Остаточно порядок фільтра n можна обчислити за формулою:

$$n \geq \frac{\operatorname{Arch}(\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}/\varepsilon)}{\operatorname{Arch} \Omega_s}. \quad (6.67)$$

Значення n слід округлювати до більшого цілого значення, яке задовольняє вихідним нерівностям (6.7).

Для того щоб знайти полюси ОПФ ФНЧ Чебишова (корені $V(p)$), спочатку визначають полюси АКХ. На підставі формули (6.34) з урахуванням виразу (6.56) виходить:

$$|V(\bar{p})|^2 = 1 + \varphi^2(\Omega) \Big|_{\Omega=-\bar{p}} = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega) \Big|_{\Omega=-\bar{p}}. \quad (6.68)$$

Прирівнявши праву частину виразу (6.68) до нуля, після підстановки (6.53) можна записати рівняння, корені якого збігаються з полюсами АКХ:

$$1 + \varepsilon^2 \cos^2 n\underline{Z} = 0, \quad (6.69)$$

звідки

$$\cos n\underline{Z} = \pm j/\varepsilon. \quad (6.70)$$

Тепер \underline{Z} вважається комплексною величиною (6.51). Саме визначення \underline{Z} дозволяє знайти комплексні нормовані корені рівняння (6.68).

З урахуванням виразу (6.51) можна записати:

$$\cos n(u + jv) = \cos nu \cdot \operatorname{ch} nv - j \sin nu \cdot \operatorname{sh} nv = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

$$(\cos jv = \operatorname{ch} v; \sin jv = j \operatorname{sh} v).$$

Якщо прирівняти дійсні й уявні частини отриманого рівняння, виходить система:

$$\begin{cases} \cos nu \cdot \operatorname{ch} nv = 0; \\ \sin nu \cdot \operatorname{sh} nv = \mp \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Перше рівняння системи виконується за умови $\cos nu_k = 0$, тобто $nu_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k=1, 2, \dots, n$, або

$$u_k = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (6.71)$$

Якщо застосувати умову (6.71) до другого рівняння, виходить $\sin nu_k = \pm 1$, тоді $\operatorname{sh} nv = \mp 1/\varepsilon$, звідки

$$v = \mp \frac{1}{n} \operatorname{Arch} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (6.72)$$

Величина v не має індексу, оскільки не залежить від k . Підставивши вирази (6.71), (6.72) до формули (6.51), можна записати:

$$\underline{Z}_k = u_k + jv = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2} \mp j \frac{1}{n} \operatorname{Arch} \frac{1}{\varepsilon}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (6.73)$$

Нормовану частоту Ω_k , яка пов'язана з нормованим значенням кореня ($\bar{p}_k = j\Omega_k$), можна знайти на підставі співвідношення (6.52): $\cos \underline{Z}_k = \Omega_k$.

Після множення на j виходить:

$$j \cos \underline{Z}_k = j\Omega_k = \bar{p}_k. \quad (6.74)$$

Позначивши дійсну й уявну частини нормованого значення кореня

$$\bar{p}_k = -\Delta_k + j\Omega_k \quad (6.75)$$

і враховуючи формулу (6.51), вираз (6.74) можна записати:

$$-\Delta_k + j\Omega_k = j \cos \underline{Z}_k = j \cos(u_k + jv) =$$

$$= j \cos u_k \operatorname{ch} v - j^2 \sin u_k \operatorname{sh} v, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

звідки виходять співвідношення для дійсної й уявної частин \bar{p}_k :

$$\begin{cases} \Delta_k = -\sin u_k \operatorname{sh} v; \\ \Omega_k = \cos u_k \operatorname{ch} v; \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (6.76)$$

З системи (6.76) визначають

$$\sin u_k = \frac{\Delta_k}{\operatorname{sh} v}; \quad \cos u_k = \frac{\Omega_k}{\operatorname{ch} v}.$$

Після піднесення до квадрата та підсумовування виходить рівняння

$$\frac{\Delta_k^2}{\operatorname{sh}^2 v} + \frac{\Omega_k^2}{\operatorname{ch}^2 v} = 1,$$

з аналізу якого можна зробити висновок, що дійсні й уявні частини нормованих коренів ФЧ (Δ_k, Ω_k) належать до геометричного місця точок, утвореного еліпсом з малою піввіссю $\operatorname{sh} v$ і великою $\operatorname{ch} v$, відповідно (рис. 6.7).

Знаменник нормованої АКХ (6.68) можна перетворити до вигляду:

$$|V(\bar{p})|^2 = \varepsilon^2 C_n^2 \prod_{k=1}^{2n} (\bar{p} - \bar{p}_k), \quad (6.77)$$

де значення коефіцієнта C_n відповідає виразу (6.55). Нормована ОПФ має знаменник з удвічі меншою кількістю коренів з від'ємною дійсною частиною, тобто

$$V(\bar{p}) = 2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k). \quad (6.78)$$

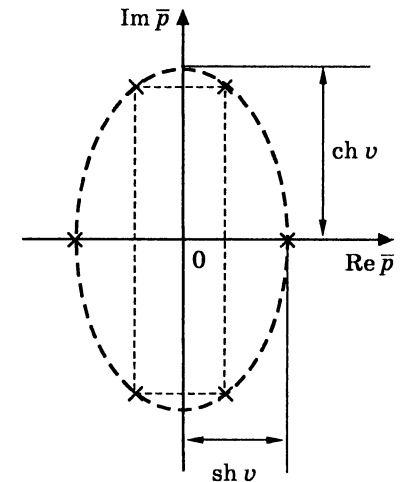


Рис. 6.7. Розташування коренів АКХ ФЧ за умови $n=3$

Добуток у виразі (6.78) за умови двох комплексно-спряжених коренів $\bar{p}_{1,2} = -\Delta \pm j\Omega$ є поліномом другого порядку від \bar{p} з дійсними коефіцієнтами:

$$(\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_2) = \bar{p}^2 + 2\Delta\bar{p} + \Delta^2 + \Omega^2. \quad (6.79)$$

Загалом ОПФ поліномного ФЧ (6.2), згідно з виразом (6.78), матиме вигляд

$$H_U(\bar{p}) = \frac{k_R}{\prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k)}, \quad (6.80)$$

де коефіцієнт $k_R = 1/2^{n-1} \epsilon$, але може мати інше значення, оскільки не змінює форми частотної залежності, а впливає тільки на її рівень.

Корені \bar{p}_k визначаються зі співвідношення (6.76) з урахуванням формул (6.71) і (6.72). Аналогічно фільтрам Баттерворта перехід до денормованої ОПФ ФЧ здійснюється на підставі виразу (6.44).

Фільтри Чебишова з малою смугою переходу ($\omega_\Delta \dots \omega_s$) і значною величиною ослаблення A_s мають ОПФ з великим n . Це пояснюється монотонним зростанням ослаблення у смузі затримання, тобто A_s має полюс за умови $\omega \rightarrow \infty$. Зменшити порядок фільтра, не погіршуючи його характеристики $A_p(\Omega)$, дозволяє використання іншої апроксимації, ніж у виразі (6.57), яка на відміну від поліномних фільтрів має у смузі затримання декілька полюсів. Наявність полюса поблизу частоти ω_s забезпечує різке зростання A_s у смузі переходу. Решта полюсів формує «сплески» ослаблення у СЗ на частотах, що відповідають нулям ОПФ. Графік такої частотної залежності ослаблення показаний на рис. 6.8.

Частотна залежність ослаблення таких фільтрів замість $T^2(\Omega)$ у виразі (6.57) містить $F^2(\Omega)$, де $F(\Omega)$ — дріб Золотарьова⁴. Ці фільтри називають *фільтрами з характеристиками Золотарьова або Кауера*⁵, який першим використав властивості дробу Золотарьова щодо частотних характеристик фільтрів. Такі фільтри ще

⁴ Золотарьов Єгор Іванович (1847–1878) — російський математик, ад'юнкт Петербурзької АН. Закінчив Петербурзький університет (1867). Був приват-доцентом (1868), магістром математики, професором (1876). Займався дослідженням питання про мінімуми додатних квадратичних форм при цілих значеннях змінних. У докторській дисертації (1874) виклав теорію подільності цілих алгебраїчних чисел. Розв'язав кілька окремих проблем з теорії найкращого наближення функцій.

⁵ Кауер Вільгельм, W. Sauer (1900–1945) — німецький учений, математик. Працював у галузі математики, математичної фізики, електротехніки, синтезу електричних кіл.

мають назву *еліптичних фільтрів*, оскільки полюси і нулі їхніх ОПФ визначають еліптичні функції (відомості про ці функції можна знайти у спеціальній літературі).

На відміну від ФНЧ, визначення ОПФ фільтрів верхніх частот, смугових й загороджувальних фільтрів передбачає два етапи.

Спочатку від вимог до ослаблення за потужністю ФВЧ, СФ, ЗФ переходять до відповідних вимог ослаблення за потужністю ФНЧ. Перетворення частотних характеристик фільтрів інших типів до частотних характеристик ФНЧ, який має назву *фільтра-прототипу (ФП)*, здійснюють за допомогою *перетворення частоти*. ОПФ ФП визначають за допомогою розглянутих вище способів. Потім від ОПФ ФП переходять до ОПФ вихідного фільтра. Нижче розглянуто обидва ці етапи для фільтрів різних типів.

6.6. Фільтри верхніх частот

Враховуючи, що корені ОПФ лежать у лівій півплощині комплексної площини, комплексна змінна p має від'ємну дійсну частину: $p = -\delta \pm j\omega$, відповідно, $\bar{p} = -\Delta \pm j\Omega$ — нормована комплексна змінна, $\bar{p} = -\Delta \pm j\tilde{\Omega}$ — нормована комплексна змінна ФП.

Перетворення СП у СЗ і навпаки, тобто трансформацію частотних діапазонів для ФВЧ, виконують, замінюючи нормовану комплексну змінну \bar{p} ФП на нормовану комплексну змінну \bar{p} ФВЧ відповідно до співвідношення:

$$\bar{p} = \frac{1}{p}, \text{ або } j\tilde{\Omega} = \frac{1}{j\Omega}, \text{ або } \tilde{\Omega} = \frac{1}{\Omega}, \quad (6.81)$$

де $\Omega = \omega/\omega_{гр}$ для ФБ ($\omega_{гр}$ відповідає ослабленню 3 дБ, СП визначається діапазоном $\omega_{гр} \dots \infty$); $\Omega = \omega/\omega_\Delta$ для ФБ (на частоті ω_Δ ослаблення $A_p(\Omega) \leq A_\Delta$, СП: $\omega_\Delta \dots \infty$). Перетворення частотних смуг можливо завдяки парності функцій $H_U(\Omega)$ і $A_p(\Omega)$, причому їхні значення не змінюються при заміні частоти Ω на $\tilde{\Omega}$ і навпаки, тобто

$$\begin{cases} H_U(\Omega) = H_U(\tilde{\Omega}); \\ A_p(\Omega) = A_p(\tilde{\Omega}). \end{cases} \quad (6.82)$$

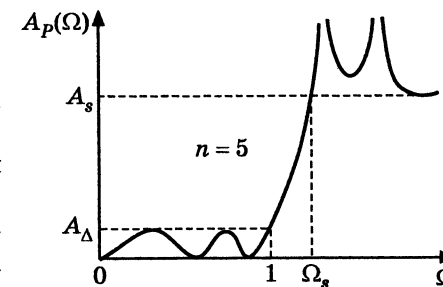


Рис. 6.8. Частотна залежність ослаблення ФНЧ, що має «сплески» у СЗ

Таблиця 6.3
Співвідношення між комплексними нормованими частотами ФНЧ і ФВЧ

\tilde{p}	$-j0$	$-j1$	$-j\infty$
$\tilde{p} = 1/\tilde{p}$	$j\infty$	$j1$	$j0$

У табл. 6.3 наведені значення \tilde{p} , отримані за формулою (6.81) для ФВЧ, які відповідають вибраним значенням \tilde{p} ФП (значення $\tilde{p} = -j0$ ФП означає наближення до нуля з боку від'ємних уявних значень \tilde{p}).

Перетворення частотного діапазону ФНЧ (ліворуч) у частотний діапазон ФВЧ (праворуч) ілюструє рис. 6.9 згідно з даними табл. 6.3.

На рис. 6.10 і 6.11 показано трансформування частотних характеристик $H_U(\tilde{\Omega})$ і $A_P(\tilde{\Omega})$ ФНЧ відповідно в частотні характеристики ФВЧ для ФБ, а на рис. 6.12 і 6.13 — для ФЧ.

Розрахунок ФВЧ передбачає, що задано значення ослаблення за потужністю на частотах f_Δ і f_s (ω_Δ і ω_s) (рис. 6.11 і 6.13):

$$\begin{cases} A_P(f_\Delta) \leq A_\Delta; \\ A_P(f_s) \geq A_s, \end{cases} \quad (6.83)$$

або для нормованих частот:

$$\begin{cases} A_P(\Omega_\Delta) \leq A_\Delta; \\ A_P(\Omega_s) \geq A_s. \end{cases} \quad (6.84)$$

Для того щоб знайти ОПФ ФВЧ Баттерворта, визначають нормовану частоту ФБ $\Omega = \omega/\omega_{гр} = f/f_{гр}$, причому частоті $\omega_{гр}$ відповідає ослаблення 3 дБ. Враховуючи співвідношення (6.81) між

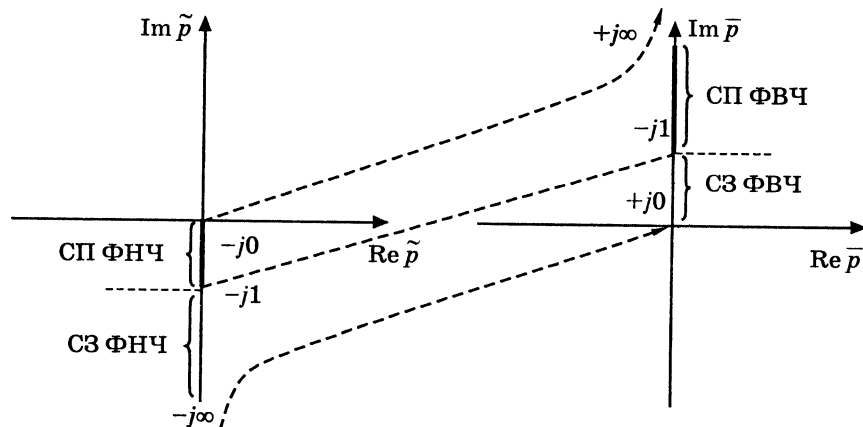


Рис. 6.9. Перетворення частотних діапазонів ФНЧ–ФВЧ

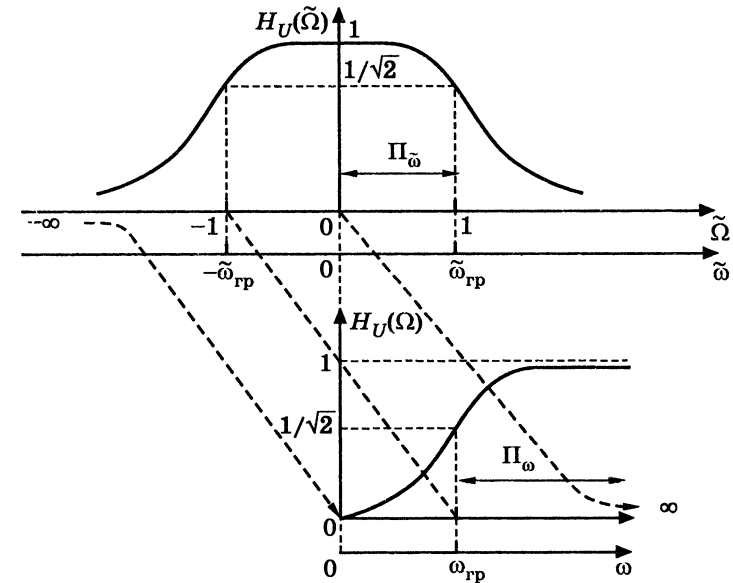


Рис. 6.10 Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФБ: $H_U(\tilde{\Omega}) \rightarrow H_U(\Omega)$

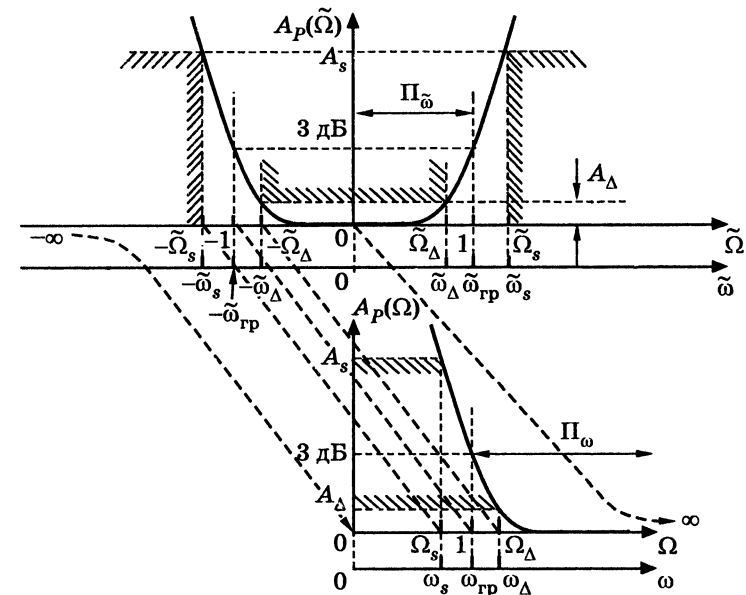


Рис. 6.11. Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФБ: $A_P(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_P(\Omega)$

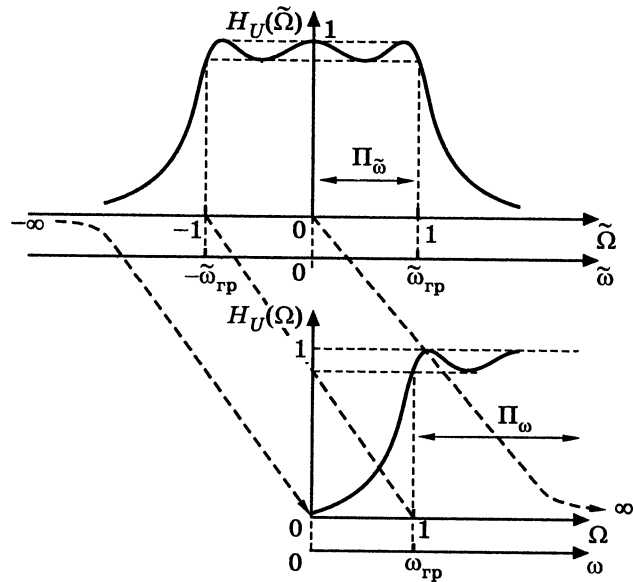


Рис. 6.12. Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФЧ:
 $H_U(\tilde{\Omega}) \rightarrow H_U(\Omega)$

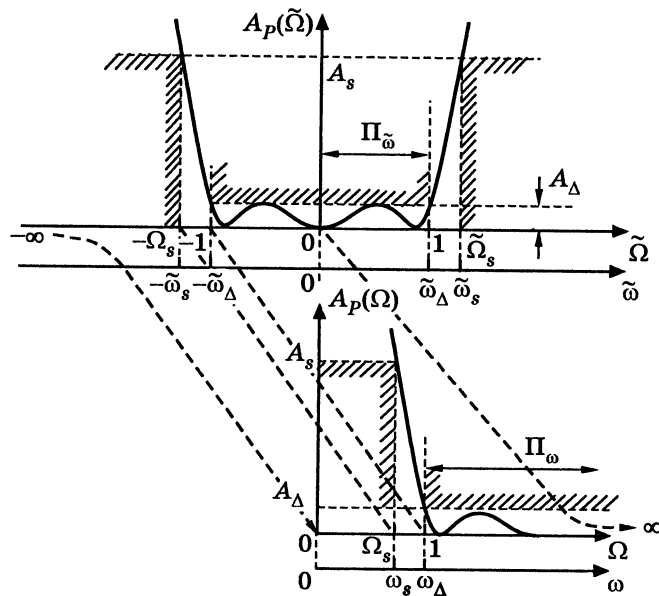


Рис. 6.13. Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФЧ:
 $A_p(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_p(\Omega)$

нормованими частотами ФВЧ і ФП, згідно з рівнянням (6.26) можна обчислити орієнтовний порядок ФВЧ Баттерворта:

$$n^* = \frac{\lg(10^{0,1A_s} - 1) - \lg(10^{0,1A_\Delta} - 1)}{2 \lg(\Omega_\Delta / \Omega_s)}. \quad (6.85)$$

У знаменнику рівняння (6.26) замість відношення частот $\tilde{\Omega}_s / \tilde{\Omega}_\Delta$ для ФП стоїть відношення нормованих частот ФВЧ Ω_Δ / Ω_s , яке можна замінити відношенням ω_Δ / ω_s . Отримане за формулою (6.85) орієнтовне значення порядку фільтра n^* , як правило, число дробове, яке слід округлити до найближчого більшого цілого значення:

$$n \geq n^*. \quad (6.86)$$

Оскільки порядки ФВЧ і ФНЧ збігаються, враховуючи вирази (6.36)–(6.38), можна визначити нормований поліном Гурвіца й ОПФ ФП:

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{1}{V(\tilde{p})}. \quad (6.87)$$

Визначення нормованої ОПФ ФВЧ потребує попереднього розрахунку $\omega_{гр}$. Згідно з виразами (6.81)

$$\frac{\tilde{\omega}_\Delta}{\tilde{\omega}_{гр}} = \frac{\omega_{гр}}{\omega_\Delta}; \quad \frac{\tilde{\omega}_s}{\tilde{\omega}_{гр}} = \frac{\omega_{гр}}{\omega_s}, \quad (6.88)$$

де $\tilde{\omega}_\Delta$, $\tilde{\omega}_s$, $\tilde{\omega}_{гр}$ — частоти ФП; ω_Δ , ω_s , $\omega_{гр}$ — частоти ФВЧ.

Тоді гранична частота ФВЧ, виходячи з формули (6.88), визначається як

$$\omega_{гр} = \frac{\tilde{\omega}_\Delta}{\tilde{\omega}_{гр}} \omega_\Delta,$$

а з урахуванням виразу (6.25)

$$\omega_{гр} = \omega_\Delta (10^{0,1A_\Delta} - 1)^{1/2n^*} = \omega_s (10^{0,1A_s} - 1)^{1/2n^*}, \quad (6.89)$$

де n^* обчислюють за формулою (6.85).

Співвідношення (6.81) дозволяє встановити зв'язок між нормованою частотою ФП \tilde{p} і денормованою частотою \bar{p} ФВЧ:

$$\tilde{p} = \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{j\Omega} \Big|_{\Omega=\omega/\omega_{гр}} = \frac{\omega_{гр}}{j\omega} = \frac{\omega_{гр}}{\bar{p}}. \quad (6.90)$$

Тоді денормовану ОПФ ФВЧ можна отримати за формулою (6.87):

$$H_U(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k)} \Bigg|_{\bar{p} = \omega_{rp}/p}, \quad (6.91)$$

де \bar{p}_k — нормовані значення коренів ФП.

Визначення ОПФ ФВЧ з характеристиками Чебишова здійснюється на підставі співвідношення (6.84), причому частоти нормують за формулою (6.49):

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_\Delta} = \frac{f}{f_\Delta}; \quad \Omega_\Delta = 1; \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_\Delta}. \quad (6.92)$$

Коефіцієнт нерівномірності ослаблення у смузі пропускання визначається за формулою (6.66), яка прийнятна для ФЧ будь-якого типу. Формула (6.67) дозволяє знайти порядок n ФНЧ, тобто ФП. Для того щоб скористатись нею, необхідно перейти до нормованої частоти $\tilde{\Omega}_s$ ФП згідно з виразом (6.81): $\tilde{\Omega}_s = 1/\Omega_s$. До речі, порядки ФВЧ і ФП збігаються, а знайдене n округлюється до більшого цілого значення.

Для отриманого значення n порядку ФП, використовуючи співвідношення (6.75), (6.76), (6.78), записують нормований поліном

Гурвіца, тобто знаменник ОПФ ФП: $V(\bar{p}) = 2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k)$, і саму

ОПФ ФП згідно з виразом (6.80). Денормована ОПФ ФВЧ визначається з урахуванням формул (6.90) і (6.49):

$$H_U(p) = \frac{k_R}{\prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k)} \Bigg|_{\bar{p} = \omega_\Delta/p}, \quad (6.93)$$

де $k_R = \frac{1}{2^{n-1} \varepsilon}$, але може мати довільне значення.

Приклад 6.3. Визначити ОПФ ФВЧ Чебишова, якщо на частоті 5000 рад/с ослаблення за потужністю $A_p(\omega)$ не має перевищувати 0,97 дБ, а на частоті 2500 рад/с — бути меншим 22 дБ.

Розв'язання. Обчислимо нормовану частоту ФП:

$$\tilde{\Omega}_s = \frac{1}{\Omega_s} = \frac{\omega_\Delta}{\omega_s} = \frac{f_\Delta}{f_s} = \frac{5000}{2500} = 2.$$

Коефіцієнт нерівномірності ослаблення у СП і порядок ФП визначимо за формулами (6.66) і (6.67), відповідно:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,10,97} - 1} = 0,500259;$$

$$n \geq \frac{\text{Arch}(\sqrt{10^{0,1A_s} - 1/\varepsilon})}{\text{Arch} \tilde{\Omega}_s} = \frac{\text{Arch}(\sqrt{10^{0,122} - 1/0,500259})}{\text{Arch} 2} = 2,972804.$$

Візьмемо $n=3$, тоді коефіцієнт, що впливає на рівень ОПФ,

$$k_R = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}} = \frac{1}{4\varepsilon} \cong 0,5.$$

Визначення цього коефіцієнта не потребує високої точності.

Для того щоб знайти корені ФП, спочатку за формулою (6.72) обчислимо значення $v = \pm 0,481057$. Дійсні й уявні частини нормованих коренів ФП розрахуємо, виходячи з виразів (6.71), (6.76):

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_k = -\sin u_k \text{ sh}(\pm v); \\ \tilde{\Omega}_k = \cos u_k \text{ ch} v; \end{cases} \quad k = 1, 2, 3.$$

Значення $\tilde{\Delta}$ вибираємо такими:

$$k=1: u_1 = \pi/6; \quad \tilde{\Delta}_1 = 0,249914; \quad \tilde{\Omega}_1 = 0,968179; \quad \tilde{p}_1 = -0,249914 + j0,968179;$$

$$k=2: u_1 = \pi/2; \quad \tilde{\Delta}_2 = 0,5; \quad \tilde{\Omega}_2 = 0; \quad \tilde{p}_2 = -0,5;$$

$$k=3: u_1 = 5\pi/6; \quad \tilde{\Delta}_3 = 0,249914; \quad \tilde{\Omega}_3 = -0,968179; \quad \tilde{p}_3 = -0,249914 - j0,968179.$$

Для всіх k значення v — від'ємне.

При $k=1, 3$ маємо комплексно-спряжені корені. У цьому випадку доцільно скористатися виразом (6.79), тоді для ФП можна записати:

$$(\bar{p} - \tilde{p}_1)(\bar{p} - \tilde{p}_3) = \bar{p}^2 + 2\tilde{\Delta}_1\bar{p} + \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2; \quad 2\tilde{\Delta}_1 = 0,499827; \quad \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2 = 0,999827.$$

Для спрощення запису вважатимемо, що $2\tilde{\Delta}_1 \cong 0,5$; $\tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2 \cong 1$. Загалом обчислення коренів слід виконувати з точністю не менше як до шостого знака включно, оскільки це впливає на можливість фізичної реалізації ОПФ.

Нормовані значення ФП дозволяють визначити нормований поліном Гурвіца і нормовану ОПФ ФП згідно з виразами (6.78) і (6.80), відповідно:

$$V(\bar{p}) = 4\varepsilon(\bar{p} - \tilde{p}_2)(\bar{p}^2 + 2\tilde{\Delta}_1\bar{p} + \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2);$$

$$H_U(\bar{p}) = \frac{k_R}{(\bar{p} - \tilde{p}_2)(\bar{p}^2 + 2\tilde{\Delta}_1\bar{p} + \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2)},$$

або після підстановки числових значень

$$H_U(\bar{p}) = \frac{0,5}{(\bar{p} + 0,5)(\bar{p}^2 + 0,5\bar{p} + 1)}$$

Нормовану ОПФ ФП перетворимо в денормовану ОПФ ФВЧ, використовуючи співвідношення (6.93):

$$H_U(p) = \frac{0,5}{(\bar{p} + 0,5)(\bar{p}^2 + 0,5\bar{p} + 1)} \Big|_{\bar{p}=\omega_\Delta/p} = \frac{0,5}{(\omega_\Delta/p + 0,5)(\omega_\Delta^2/p^2 + 0,5\omega_\Delta/p + 1)}$$

або

$$H_U(p) = \frac{0,5p^3}{(0,5p + \omega_\Delta)(p^2 + 0,5\omega_\Delta p + \omega_\Delta^2)}$$

За умови $\omega_\Delta = 5 \cdot 10^3$ рад/с вираз ОПФ ФВЧ Чебишова має вигляд:

$$H_U(p) = \frac{p^3}{(p + 10^4)(p^2 + 2,5 \cdot 10^3 p + 25 \cdot 10^6)}$$

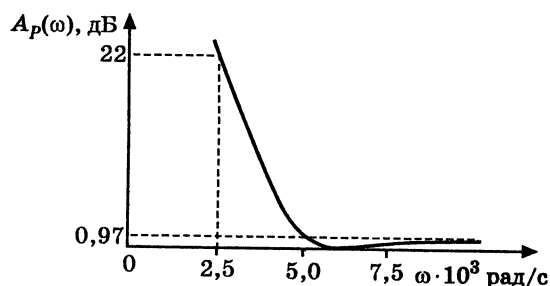


Рис. 6.14. Частотна залежність ослаблення ФВЧ у прикладі 6.3

обчислимо частотну залежність ослаблення за потужністю за формулою (6.1):

$$A_p(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H_U^2(\omega)} = 10 \lg \left| \frac{(j\omega + 10^4)[(j\omega)^2 + 2,5 \cdot 10^3 j\omega + 25 \cdot 10^6]}{(j\omega)^3} \right|^2$$

Після визначення модуля і піднесення його до квадрата отримуємо:

$$A_p(\omega) = 10 \lg \frac{(\omega^2 + 10^8)[(25 \cdot 10^6 - \omega^2)^2 + 6,25 \cdot 10^6 \omega^2]}{\omega^6}$$

Частотна залежність $A_p(\omega)$, розрахована за цією формулою (рис. 6.14), свідчить про відповідність функції $A_p(\omega)$ заданим умовам.

6.7. Смугові фільтри з симетричними характеристиками

Трансформування ФНЧ-прототипу у смуговий фільтр (СФ) виконується за допомогою заміни нормованої комплексної змінної \bar{p} ФП на нормовану комплексну змінну \bar{p} СФ за формулою:

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}}, \text{ або } j\bar{\Omega} = \frac{(j\Omega)^2 + k_\Delta^2}{j\Omega}, \quad (6.94)$$

де нормовані змінні СФ відповідно становлять:

$$\bar{p} = \frac{p}{\Pi_\omega}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\Pi_\omega}, \quad (6.95)$$

де Π_ω — смуга пропускання СФ;

$$k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Pi_\omega}. \quad (6.96)$$

У формулі (6.96) ω_0 — так звана *центральна частота* СФ.

Перетворення виразу (6.94) до вигляду

$$\bar{p}^2 + \bar{p}\bar{p} + k_\Delta^2 = 0 \quad (6.97)$$

дозволяє визначити нормовані корені СФ через нормовані корені ФП:

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)^2 - k_\Delta^2}. \quad (6.98)$$

Підстановка $\bar{p} = j\bar{\Omega}$; $\bar{p} = j\bar{\Omega}$ до виразу (6.98) дозволяє встановити зв'язок між нормованими частотами СФ ($\bar{\Omega}$) і ФП ($\bar{\Omega}$):

$$j\bar{\Omega} = \frac{j\bar{\Omega}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{j\bar{\Omega}}{2}\right)^2 - k_\Delta^2} = \frac{j\bar{\Omega}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{j\bar{\Omega}}{2}\right)^2 + (jk_\Delta)^2} = j\left(\frac{\bar{\Omega}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\Omega}}{2}\right)^2 + k_\Delta^2}\right),$$

звідки виходить:

$$\bar{\Omega} = \frac{\bar{\Omega}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\Omega}}{2}\right)^2 + k_\Delta^2}. \quad (6.99)$$

У виразі (6.99) знак мінуса перед коренем опущено, щоб забезпечити додатне значення $\bar{\Omega}$. На підставі формули (6.94) можна довести, що інтервал $\bar{p} = j0 \dots j\infty$ перетворюється відповідно в інтервал $\bar{p} = -j\infty \dots j\infty$. Діапазон частот ФП $2\bar{\Omega}_i$, межах якого відповідають частоти $\pm\bar{\Omega}_i$, перетворюється в діапазон $\bar{\Omega}_i$ СФ, тобто вдвічі

скорочується. Для того щоб переконатись у цьому, згідно з виразом (6.99) обчислюють частоту СФ, яка відповідає частоті $\tilde{\Omega}_i$ ФП:

$$\Omega_{i2} = \frac{\tilde{\Omega}_i}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{\Omega}_i}{2}\right)^2 + k_{\Delta}^2}, \quad (6.100)$$

тоді у відповідність частоті $-\tilde{\Omega}_i$ можна поставити частоту

$$\Omega_{i1} = -\frac{\tilde{\Omega}_i}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{\Omega}_i}{2}\right)^2 + k_{\Delta}^2}. \quad (6.101)$$

Отже, частотний інтервал СФ

$$\Omega_{i2} - \Omega_{i1} = \tilde{\Omega}_i \quad (6.102)$$

дійсно вдвічі скоротився. Частотному інтервалу ФП у діапазоні від $-j\infty$ до $j\infty$ відповідатиме також удвічі менший частотний інтервал СФ на уявній осі у діапазоні від $j0$ до $j\infty$. У перетворенні $\tilde{p} = j0$ на $\bar{p} = jk_{\Delta}$ можна переконатися підстановкою $\tilde{\Omega} = 0$ до виразу (6.100). Отримані співвідношення зведено у табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Співвідношення між комплексними нормованими частотами ФП і СФ

\tilde{p}	$j\infty$	$j\tilde{\Omega}$	$j0$	$-j\tilde{\Omega}$	$-j\infty$
\bar{p}	$j\infty$	$j\Omega_2$	jk_{Δ}	$j\Omega_1$	$j0$

Перетворення частотного діапазону ФНЧ-прототипу (ліворуч) у частотний діапазон СФ (праворуч) показано на рис. 6.15 відповідно до значень, наведених у табл. 6.4.

Перетворення частотного діапазону ФП у вдвічі менший частотний діапазон СФ відбувається при збереженні відповідних значень ослаблення за потужністю: $A_P(\tilde{\Omega}_i) = A_P(\Omega_i)$. Таке перетворення частотних характеристик ілюстровано графіками (рис. 6.16 для ФБ; рис. 6.17 для ФЧ).

Властивість, визначена співвідношенням (6.102), відображає принцип збереження довжини частотного інтервалу. Це означає, що ФП з нормованою смугою пропускання $\Pi_{\tilde{\Omega}} = 0 \dots \tilde{\Omega}_{гр}$ перетворюється на СФ, який має таку саму нормовану смугу пропускання.

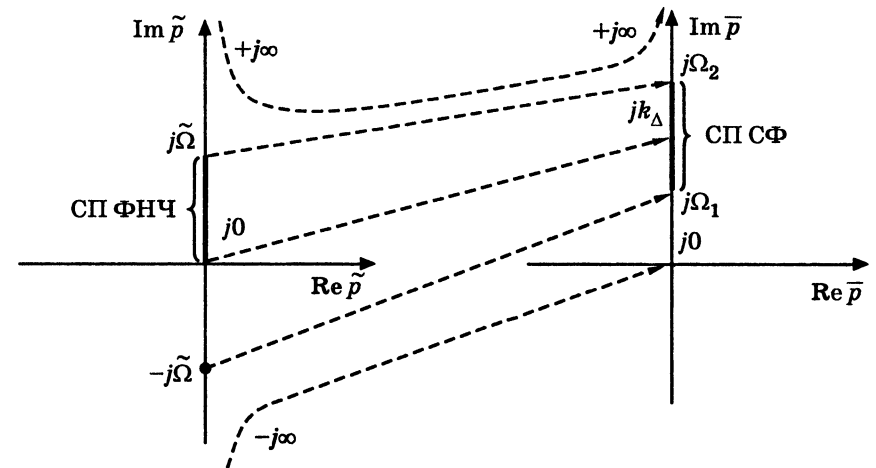


Рис. 6.15. Перетворення частотних діапазонів ФНЧ-СФ

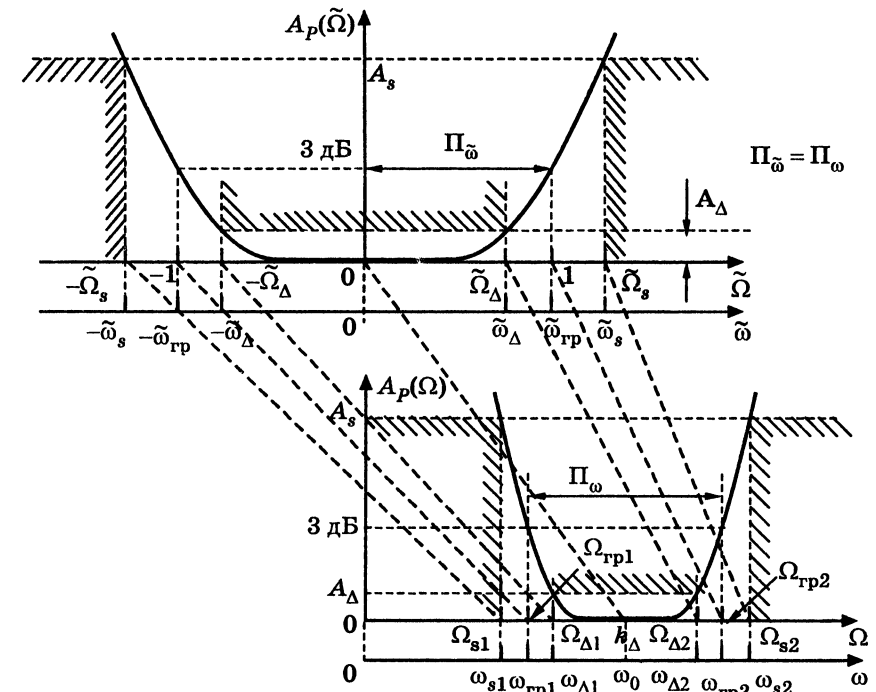


Рис. 6.16. Перетворення частотної характеристики ФНЧ-СФ для ФБ: $A_P(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_P(\Omega)$

Дійсно, частоті $\tilde{\omega}_{\text{гр}}$ ($\tilde{\Omega}_{\text{гр}} = 1$) ФП відповідають частоти $\omega_{\text{гр}2}$ і $\omega_{\text{гр}1}$ СФ, нормовані значення яких $\Omega_{\text{гр}2}$ і $\Omega_{\text{гр}1}$ визначають за формулами (6.100), (6.101), відповідно:

$$\Omega_{\text{гр}2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k_{\Delta}^2}; \quad \Omega_{\text{гр}1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k_{\Delta}^2}.$$

Нормована СП СФ визначається як $\Pi_{\Omega} = \Omega_{\text{гр}2} - \Omega_{\text{гр}1} = 1$.

Отже, смуга Π_{Ω} дійсно не змінилася.

Слід зауважити, що згаданий принцип визначення нормованих частот виконується як для ФБ, так і для ФЧ, різним є тільки рівень ослаблення $A_P(\omega_{\text{гр}})$.

Для дослідження ще однієї важливої властивості необхідно визначити добуток нормованих частот (6.100), (6.101) СФ:

$$\Omega_{i2}\Omega_{i1} = \left(\frac{\tilde{\Omega}_i^2}{4} + k_{\Delta}^2 \right) - \frac{\tilde{\Omega}_i^2}{4} = k_{\Delta}^2.$$

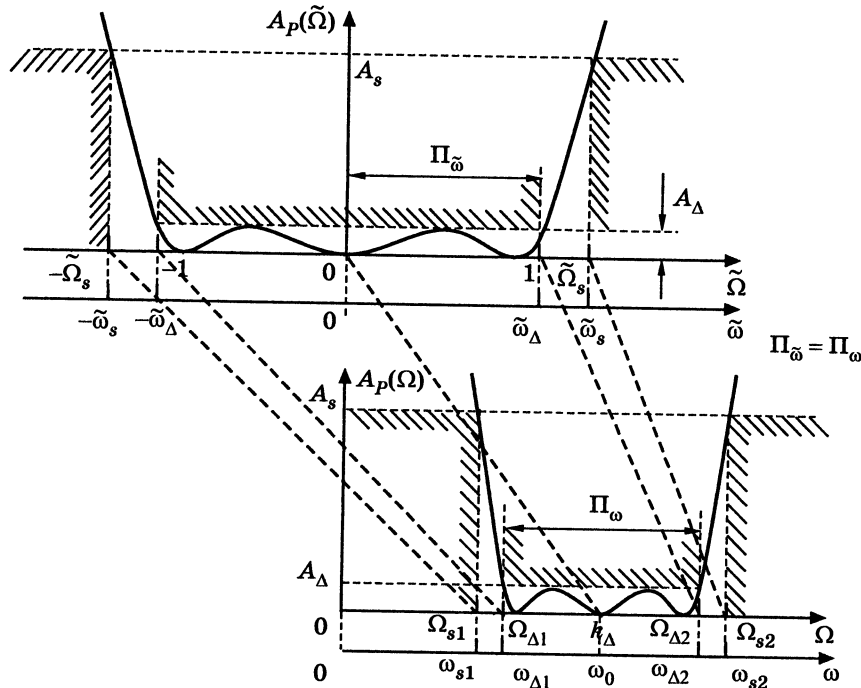


Рис. 6.17. Перетворення частотної характеристики ФНЧ-СФ для ФЧ: $A_P(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_P(\Omega)$

З урахуванням співвідношень (6.95), (6.96) цей добуток набуває вигляду $(\omega_{\text{гр}2}/\Pi_{\omega})(\omega_{\text{гр}1}/\Pi_{\omega}) = \omega_0^2/\Pi_{\omega}^2$, звідки

$$\omega_{\text{гр}1}\omega_{\text{гр}2} = \omega_0^2. \quad (6.103)$$

Рівність (6.103) визначає властивість *геометричної симетрії* частотної залежності A_P СФ відносно центральної частоти ω_0 . Справедливими є також аналогічні добутки для частот $\omega_{\Delta 1,2}$, $\omega_{s1,2}$:

$$\omega_{\Delta 1}\omega_{\Delta 2} = \omega_{s1}\omega_{s2} = \omega_0^2. \quad (6.104)$$

Вихідними даними для розрахунку СФ є смуга пропускання Π_{ω} , центральна частота ω_0 та співвідношення, аналогічні нерівностям (6.7):

$$\begin{cases} A_P(\omega_{\Delta 1}) = A_P(\omega_{\Delta 2}) \leq A_{\Delta}; \\ A_P(\omega_{s1}) = A_P(\omega_{s2}) \geq A_s, \end{cases} \quad (6.105)$$

причому $\omega_{s1} < \omega_{\Delta 1} < \omega_{\Delta 2} < \omega_{s2}$. З двох значень частоти, об'єднаних рівністю (6.104), як правило, відоме тільки одне. Тому симетричні частоти обчислюють, використовуючи умову (6.104), за заданими частотами (наприклад: $\omega_{\Delta 2} = \omega_0^2/\omega_{\Delta 1}$; $\omega_{s1} = \omega_0^2/\omega_{s2}$), що дозволяє перейти до співвідношень (6.7), складених стосовно ФП для тих самих ослаблень:

$$\begin{cases} A_P(\tilde{\omega}_{\Delta}) \leq A_{\Delta}; \\ A_P(\tilde{\omega}_s) \geq A_s, \end{cases} \quad (6.106)$$

де відповідні частоти $\tilde{\omega}$ ФП визначають з огляду на формулу (6.102):

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{\Delta} = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1}; \\ \tilde{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1}. \end{cases} \quad (6.107)$$

Умови (6.106) дозволяють знайти n^* — орієнтовний порядок ФБ (див. формулу (6.26)), а потім і порядок $n \geq n^*$ (n — ціле число), а також граничну частоту $\omega_{\text{гр}}$ за формулою (6.29). Для ФЧ, виходячи з умов (6.106), обчислюють коефіцієнт нерівномірності ослаблення ϵ і порядок фільтра n за формулами (6.66) і (6.67) відповідно.

Для визначення ОПФ необхідно знайти поліном Гурвіца. Спочатку визначають нормований поліном $V(\tilde{p})$. Так, для ФБ згідно з виразом (6.37) записують нормований поліном Гурвіца:

$$V(\tilde{p}) = \prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.108)$$

де \bar{p}_k — нормовані корені ФП, які розраховують за формулою (6.36):

$$\bar{p}_k = -\sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k=1, 2, \dots, 2n. \quad (6.109)$$

Для ФЧ нормований поліном Гурвіца ФП визначають згідно з виразом (6.78):

$$V(\bar{p}) = 2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k), \quad (6.110)$$

де \bar{p}_k — нормовані корені ФП ($\bar{p}_k = -\bar{\Delta}_k \pm j\bar{\Omega}_k$), дійсну й уявну частини яких обчислюють за формулою (6.76):

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_k = -\sin u_k \operatorname{sh} v; \\ \bar{\Omega}_k = \cos u_k \operatorname{ch} v. \end{cases} \quad (6.111)$$

Значення u_k, v розраховують за формулами (6.71), (6.72), відповідно. Додатне значення $\bar{\Delta}_k$ забезпечують вибором знака у виразі (6.72).

Перехід від нормованої ОПФ ФП $H_U(\bar{p}) = 1/V(\bar{p})$ з порядком n до нормованої ОПФ СФ удвічі збільшує порядок. Оскільки нормовані корені \bar{p}_k ФП відомі, ОПФ ФП доцільно подати як добуток ОПФ ланок другого порядку $H_{U_i}^{(2)}(\bar{p})$ для парного n :

$$H_U(\bar{p}) = \prod_{i=1}^{n/2} H_{U_i}^{(2)}(\bar{p}). \quad (6.112)$$

Якщо n — непарне, слід виділити одну ланку з передатною функцією першого порядку $H_U^{(1)}(\bar{p}) = 1/(\bar{p} + \bar{\Delta})$, ($-\bar{\Delta}$ — нормований дійсний корінь ФП). Тоді інші ланки, що ввійдуть до добутку, матимуть другий порядок:

$$H_U(\bar{p}) = H_U^{(1)}(\bar{p}) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} H_{U_i}^{(2)}(\bar{p}). \quad (6.113)$$

У виразі (6.113) ОПФ ФП i -ї ланки другого порядку

$$H_{U_i}^{(2)}(\bar{p}) = \frac{1}{(\bar{p} - \bar{p}_i)(\bar{p} - \bar{p}_i^*)}, \quad (6.114)$$

де \bar{p}_i і \bar{p}_i^* — нормовані комплексно-спряжені корені, а $H_U^{(1)}(\bar{p})$ — ОПФ ФП ланки першого порядку з коренем $-\bar{\Delta}$, яка перетворюється згідно з виразом (6.94) у ОПФ ланки другого порядку СФ з двома комплексно-спряженими коренями (рис. 6.18, а).

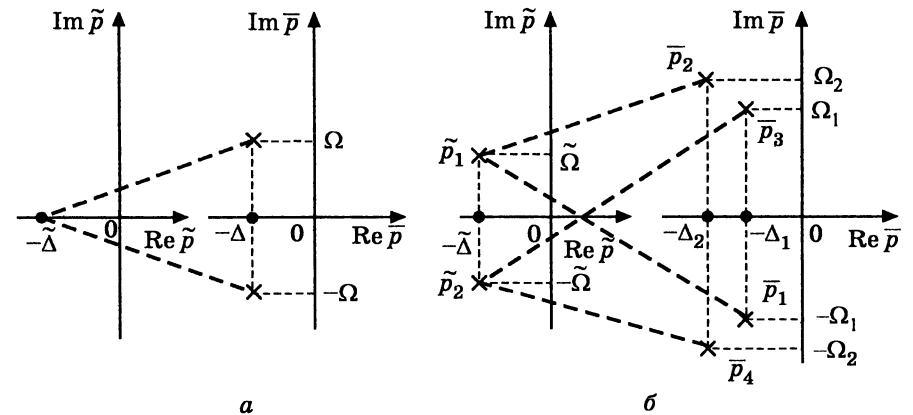


Рис. 6.18. Відповідність між нормованими коренями ФП і СФ: а — дійсний корінь ФП; б — комплексно-спряжені корені ФП

Перетворення ОПФ i -ї ланки ФП (6.114) до ОПФ СФ доцільно виконувати для кожного кореня окремо:

$$H_{U_i}^{(2)}(\bar{p}) = \frac{1}{(\bar{p} - \bar{p}_i)} \Big|_{\bar{p}=(\bar{p}^2 + k_\Delta^2)/\bar{p}} \times \frac{1}{(\bar{p} - \bar{p}_i^*)} \Big|_{\bar{p}=(\bar{p}^2 + k_\Delta^2)/\bar{p}}. \quad (6.115)$$

Перший добуток у виразі (6.115) перетворюється на передатну функцію з двома комплексними коренями \bar{p}_1 і \bar{p}_2 (не комплексно-спряженими), а другий — на ОПФ з комплексними коренями \bar{p}_3 і \bar{p}_4 (також не спряженими), причому пари \bar{p}_1 і \bar{p}_3 , а також \bar{p}_2 і \bar{p}_4 є комплексно-спряженими (рис. 6.18, б), тобто $\bar{p}_{1,3} = -\Delta_1 \mp j\Omega_1$; $\bar{p}_{2,4} = -\Delta_2 \pm j\Omega_2$. Це дозволяє подати ОПФ СФ у вигляді:

$$H_U(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{(\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_3)} \cdot \frac{\bar{p}}{(\bar{p} - \bar{p}_2)(\bar{p} - \bar{p}_4)}, \quad (6.116)$$

причому знаменник кожного співмножника — поліном другого порядку відносно \bar{p} з дійсними додатними коефіцієнтами (6.39) або (6.79). Отже, ланка другого порядку ФП перетворюється на СФ, порядок якого $n = 4$. Для того щоб отримати вираз (6.116), слід безпосередньо від коренів $\bar{p}_{1,2}$ перейти до коренів $\bar{p}_1, \bar{p}_4, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ на підставі співвідношення (6.98).

Денормування ОПФ СФ здійснюється з урахуванням виразу (6.95):

$$H_U(p) = H_U(\bar{p}) \Big|_{\bar{p}=p/\Pi_\omega}. \quad (6.117)$$

Приклад 6.4. Визначити ОПФ СФ Чебишова, якщо на частоті $\omega_{\Delta 1} = 404,75 \cdot 10^3$ рад/с ослаблення за потужністю не має перевищувати 0,97 дБ, а на частоті $\omega_{s2} = 512,68 \cdot 10^3$ рад/с — бути меншим, ніж 24 дБ. Центральна частота СФ становить $424,279 \cdot 10^3$ рад/с, а смуга пропускання — $40 \cdot 10^3$ рад/с.

Розв'язання. На підставі властивості геометричної симетрії частотної залежності A_p (6.104) визначимо частоти $\omega_{\Delta 2}$ і ω_{s1} :

$$\omega_{\Delta 2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\Delta 1}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{404,75 \cdot 10^3} = 444,75 \cdot 10^3 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{s1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{s2}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{512,68 \cdot 10^3} = 351,120 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

За принципом збереження довжини частотного інтервалу визначимо частоти $\tilde{\omega}_\Delta$ і $\tilde{\omega}_s$ (рис. 6.6, а) фільтра-прототипу:

$$\tilde{\omega}_\Delta = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1} = 444,75 \cdot 10^3 - 404,75 \cdot 10^3 = 40 \cdot 10^3 \text{ рад/с},$$

яка дорівнює значенню смуги пропускання СФ, тобто $\Pi_\omega = \tilde{\omega}_\Delta$;

$$\tilde{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1} = 512,68 \cdot 10^3 - 351,12 \cdot 10^3 = 161,56 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

Виходячи з виразу (6.49), обчислимо нормовану частоту ФП:

$$\tilde{\Omega}_s = \frac{\tilde{\omega}_s}{\tilde{\omega}_\Delta} = \frac{161,56 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 4,039.$$

За формулами (6.66) і (6.67) визначимо ε і n :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_\Delta} - 1} = \sqrt{10^{0,10,97} - 1} = 0,500259;$$

$$n \geq \frac{\text{Arch}(\sqrt{10^{0,1A_s} - 1/\varepsilon})}{\text{Arch} \tilde{\Omega}_s} = \frac{\text{Arch}(\sqrt{10^{0,124} - 1/0,500259})}{\text{Arch} 4,039} = 2,000.$$

Нормовані корені ФП визначимо за формулою (6.76) для $k=1, 2$, використовуючи співвідношення (6.71) і (6.72). Якщо $k=1$:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_1 = -\sin u_1 \text{sh } v; \\ \tilde{\Omega}_1 = \cos u_1 \text{ch } v; \end{cases}$$

$$\text{де } u_1 = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2} \Big|_{k=1} = \frac{\pi}{4}; \quad v = -\frac{1}{n} \text{Arch} \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \text{Arch} \frac{1}{0,5} = -0,721818, \quad \text{причому}$$

від'ємний знак v забезпечує від'ємне значення $\tilde{\Delta}_1$.

Отже,

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_1 = -\sin \frac{\pi}{4} \text{sh}(-0,721818) = 0,555893; \\ \tilde{\Omega}_1 = \cos \frac{\pi}{4} \text{ch}(-0,721818) = 0,899454. \end{cases}$$

За умови $k=2$:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_2 = -\sin u_2 \text{sh } v; \\ \tilde{\Omega}_2 = \cos u_2 \text{ch } v; \end{cases}$$

$$\text{де } u_2 = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2} \Big|_{k=2} = \frac{3\pi}{4};$$

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_2 = -\sin \frac{3\pi}{4} \text{sh}(-0,721818) = 0,555893; \\ \tilde{\Omega}_2 = \cos \frac{3\pi}{4} \text{ch}(-0,721818) = -0,899454, \end{cases}$$

тобто $\bar{p}_{1,2} = -\tilde{\Delta}_1 \pm j\tilde{\Omega}_1 = -0,555893 \pm j0,899454$.

Для здобуття нормованих коренів СФ попередньо визначимо згідно з виразом (6.96) коефіцієнт $k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Pi_\omega} = \frac{424,26 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 10,6065$. Нормовані корені СФ обчислимо за формулою (6.98):

$$\bar{p}_{1,2} = \frac{\bar{p}_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\bar{p}_1^2}{4} - k_\Delta^2}; \quad \bar{p}_{3,4} = \frac{\bar{p}_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\bar{p}_2^2}{4} - k_\Delta^2}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -0,266168 - j10,16267 = -\Delta_1 - j\Omega_1; \\ \bar{p}_2 &= -0,289725 + j11,062124 = -\Delta_2 + j\Omega_2; \\ \bar{p}_3 &= -0,266168 + j10,16267 = -\Delta_1 + j\Omega_1; \\ \bar{p}_4 &= -0,289725 - j11,062124 = -\Delta_2 - j\Omega_2, \end{aligned}$$

звідки видно, що корені \bar{p}_1, \bar{p}_3 , а також \bar{p}_2, \bar{p}_4 утворюють комплексно-спряжені пари. Нормовану ОПФ СФ четвертого порядку подамо як добуток двох ОПФ ланок другого порядку (6.116):

$$H_U(\bar{p}) = H_{U_1}^{(2)}(\bar{p}) H_{U_2}^{(2)}(\bar{p}),$$

або спростивши позначення

$$H_U(\bar{p}) = H_1(\bar{p}) H_2(\bar{p}).$$

З урахуванням виразу (6.79) запишемо:

$$H_1(\bar{p}) = \frac{k_R \bar{p}}{\bar{p}^2 + 2\Delta_1 \bar{p} + \Delta_1^2 + \Omega_1^2}; \quad H_2(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + 2\Delta_2 \bar{p} + \Delta_2^2 + \Omega_2^2},$$

де $k_R = 1/2\varepsilon = 1$.

Підставимо значення дійсних і уявних частин коренів:

$$H_1(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + 0,532336\bar{p} + 103,350727}; \quad H_2(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + 0,57945\bar{p} + 122,454527}.$$

Денормовані ОПФ ланок другого порядку отримаємо на підставі співвідношення (6.117):

$$H_1(p) = \frac{p/\Pi_\omega}{p^2/\Pi_\omega^2 + 0,532336 p/\Pi_\omega + 103,350727} = \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,532336\Pi_\omega p + 103,350727\Pi_\omega^2};$$

$$H_2(p) = \frac{p/\Pi_\omega}{p^2/\Pi_\omega^2 + 0,57945 p/\Pi_\omega + 122,45427} = \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,57945\Pi_\omega p + 122,45427\Pi_\omega^2}.$$

Для перевірки отриманих результатів визначимо частотну залежність ослаблення СФ, використовуючи вираз (6.1):

$$A_p(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H_1^2(\omega)H_2^2(\omega)},$$

де $H_1^2(\omega)$ і $H_2^2(\omega)$ — АКХ ланок другого порядку.

Так,

$$H_1^2(\omega) = |H_1(p)|^2 \Big|_{p=j\omega} = \frac{\Pi_\omega^2 \omega^2}{(103,350727\Pi_\omega^2 - \omega^2)^2 + (0,532336\Pi_\omega \omega)^2},$$

аналогічно визначається $H_2^2(\omega)$. Графік частотної залежності $A_p(\omega)$ зображено на рис. 6.19.

З графіка видно, що значення $A_p(\omega_{\Delta 1,2})$ і $A_p(\omega_{\epsilon 1,2})$ задовольняють заданим умовам.

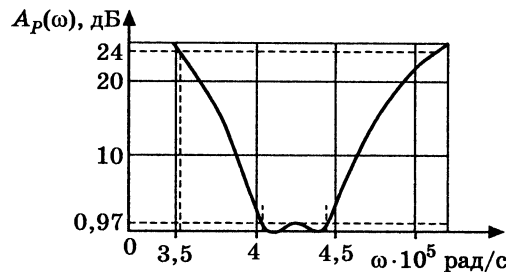


Рис. 6.19. Частотна залежність ослаблення СФ порядку $n=4$:
 $A_p(404750) = 0,962$ дБ;
 $A_p(512680) = 24,001$ дБ

6.8. Загороджувальні фільтри з симетричними характеристиками

Нормовану ОПФ загороджувального фільтра (ЗФ) можна отримати перетворенням ОПФ ФП, оберненим до виразу (6.94):

$$\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}, \text{ або } j\tilde{\Omega} = \frac{j\Omega}{(j\Omega)^2 + k_\Delta^2}, \quad (6.118)$$

де $\tilde{p} = j\tilde{\Omega} = j(\tilde{\omega}/\tilde{\omega}_{гр})$ — нормована комплексна частота ФП; \bar{p} — нормована комплексна частота ЗФ:

$$\bar{p} = j\Omega = j\frac{\omega}{\Delta\omega_3}. \quad (6.119)$$

Нормування здійснюють відносно смуги затримання $\Delta\omega_3$, яка для ФБ визначається на рівні 3 дБ, а для ФЧ — на рівні A_Δ .

Константа k_Δ у виразі (6.118) становить

$$k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_3}, \quad (6.120)$$

де ω_0 — центральна частота ЗФ. Перетворення (6.118) трансформує нормовану частотну характеристику ослаблення ФНЧ у характеристику $A_p(\Omega)$, симетричну відносно центральної частоти ЗФ, із дотриманням принципу збереження довжини частотного інтервалу (6.102).

Якщо до ОПФ ФП спочатку застосувати перетворення (6.81) (тобто перетворити ФНЧ у ФВЧ), а потім використати перетворення (6.94) (ФВЧ—СФ), отримаємо відповідність (6.118). Така послідовність перетворень (рис. 6.20) ілюструє, по-перше, трансформування смуг пропускання і затримання ФП для комплексної змінної $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} < 0$ у відповідні смуги ФВЧ відносно комплексної змінної $\bar{p} = 1/\tilde{p}$, $\bar{p} = j\Omega$ при збереженні рівності: $A_p(\tilde{\Omega}_i) = A_p(\Omega_i)$. Від'ємне значення $\tilde{\Omega}$ не впливає на перетворення частотної залежності A_p , яка є парною функцією частоти. По-друге, на рис. 6.20 показано перетворення СП і СЗ ФВЧ в інші смуги ЗФ для комплексної змінної

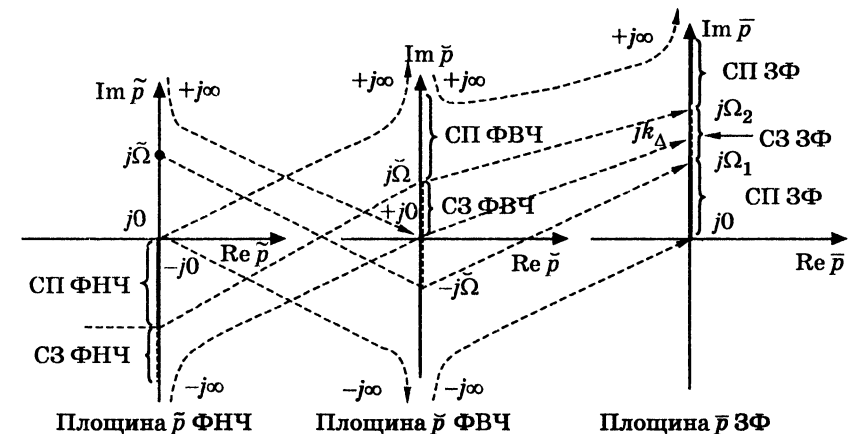


Рис. 6.20. Перетворення частотних діапазонів ФНЧ—ФВЧ і ФВЧ—ЗФ

$\bar{p} = j\Omega, \Omega > 0$, причому зв'язок комплексної змінної \bar{p} ЗФ з комплексною змінною \tilde{p} ФВЧ встановлюється за формулою (6.94):

$$\tilde{p} = \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}}.$$

Це перетворення також передбачає незмінність значень ослаблення ФВЧ і ЗФ на відповідних частотах:

$$A_P(\tilde{\Omega}_i) = A_P(\Omega_i). \quad (6.121)$$

Дані про комплексні змінні різних типів фільтрів наведено у табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Співвідношення між комплексними нормованими частотами ФП, ФВЧ і ЗФ

ФП	\tilde{p}	$j0$	$j\tilde{\Omega}$	$-j\infty$	$-j\tilde{\Omega}$	$-j0$
ФВЧ	$\tilde{p} = 1/\tilde{p}$	$-j\infty$	$-j\tilde{\Omega}$	$j0$	$j\tilde{\Omega}$	$j\infty$
ЗФ	\bar{p}	$j0$	$j\Omega_1$	jk_Δ	$j\Omega_2$	$j\infty$

Оскільки перетворення ОПФ ФВЧ у ОПФ ЗФ здійснюється за умови (6.121) на підставі перетворення (6.94), для якого виконується принцип збереження довжини частотного інтервалу, смуга пропускання ФВЧ збігається зі смугою затримання ЗФ. Крім того, частотні характеристики ЗФ також мають властивість геометричної симетрії (6.104), притаманну перетворенню (6.94). На рис. 6.21 показано трансформацію частотних залежностей A_P для ФБ.

Для визначення ОПФ ЗФ слід від вимог до частотних характеристик ослаблення ЗФ спочатку перейти до вимог A_P ФВЧ, а потім — до ФП (ФНЧ). Вихідними даними для розрахунку ЗФ є смуга затримання $\Delta\omega_3$, центральна частота ω_0 та співвідношення, аналогічні нерівностям (6.7):

$$\begin{cases} A_P(\omega_{\Delta 1}) = A_P(\omega_{\Delta 2}) \leq A_\Delta; \\ A_P(\omega_{s1}) = A_P(\omega_{s2}) \geq A_s. \end{cases} \quad (6.122)$$

Умови (6.122) ЗФ аналогічні умовам (6.105) для СФ, але відрізняються співвідношеннями між частотами: так, для ЗФ виконуються нерівності $\omega_{\Delta 1} < \omega_{s1} < \omega_{s2} < \omega_{\Delta 2}$.

З двох значень частоти ω_{s_i} (ω_{Δ_i}), як правило, відоме тільки одне. Тому, виходячи з геометричної симетрії частотної залежності A_P (6.104), за заданими частотами обчислюють симетричні

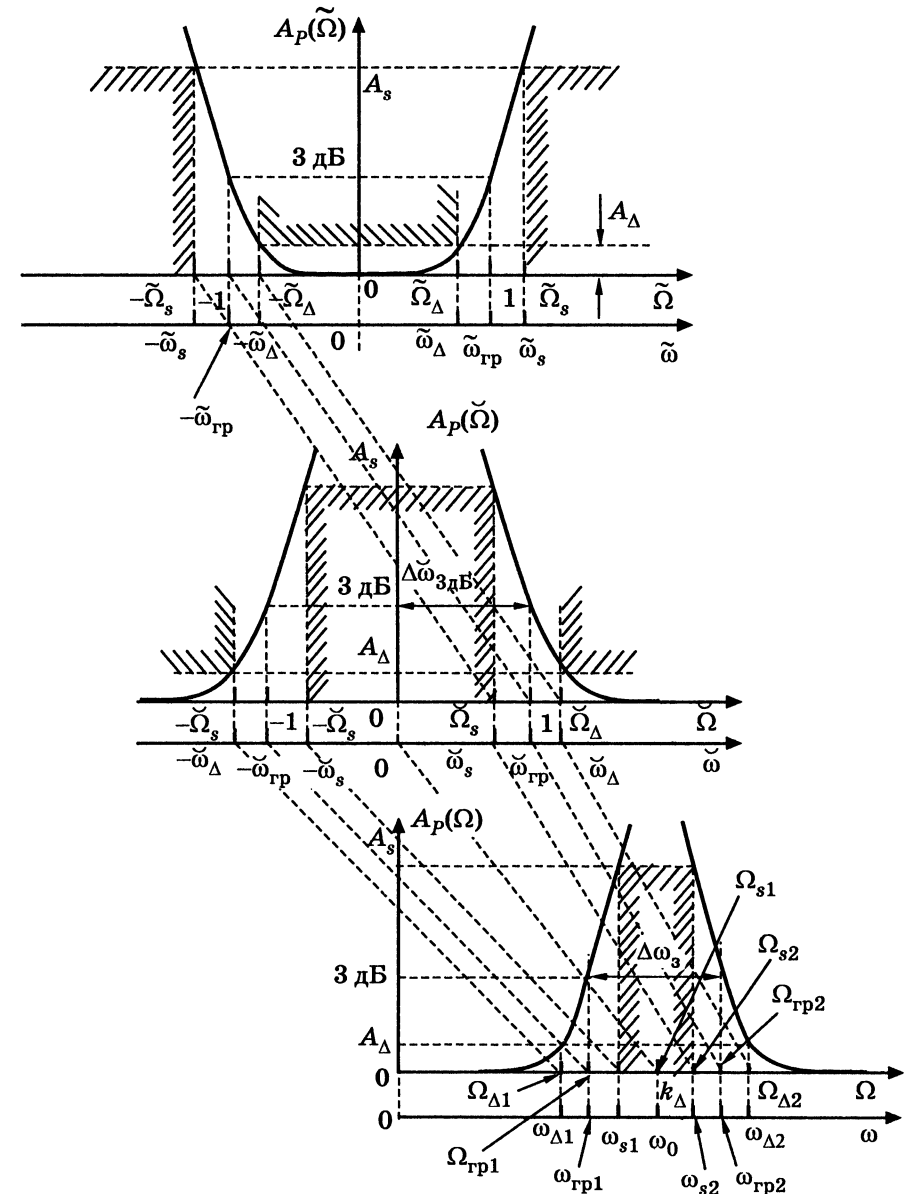


Рис. 6.21. Перетворення частотних характеристик ослаблення ФНЧ-ФВЧ і ФВЧ-ЗФ для ФБ

частоти (наприклад: $\omega_{\Delta 2} = \omega_0^2 / \omega_{\Delta 1}$; $\omega_{s1} = \omega_0^2 / \omega_{s2}$). Далі від вимог (6.122) переходять до співвідношень щодо ФВЧ для тих самих значень ослаблення:

$$\begin{cases} A_P(\tilde{\omega}_\Delta) \leq A_\Delta; \\ A_P(\tilde{\omega}_s) \geq A_s, \end{cases} \quad (6.123)$$

де

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_\Delta = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1}; \\ \tilde{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1}. \end{cases} \quad (6.124)$$

Для ФБ порядок ФВЧ $n \geq n^*$ (n — ціле округлене n^*) визначається на підставі формули (6.85) за умови рівностей у системі (6.123):

$$n^* = \frac{\lg(10^{0.1A_s} - 1) - \lg(10^{0.1A_\Delta} - 1)}{2 \lg(\tilde{\Omega}_\Delta / \tilde{\Omega}_s)}, \quad \frac{\tilde{\Omega}_\Delta}{\tilde{\Omega}_s} = \frac{\tilde{\omega}_\Delta}{\tilde{\omega}_s}. \quad (6.125)$$

Оскільки гранична частота ФВЧ, яка визначається на рівні 3 дБ, збігається із смугою затримання ЗФ, її можна отримати, виходячи з виразу (6.89):

$$\Delta\omega_s = \tilde{\omega}_{гр} = \tilde{\omega}_\Delta (10^{0.1A_\Delta} - 1)^{1/2n^*} = \tilde{\omega}_s (10^{0.1A_s} - 1)^{1/2n^*}, \quad (6.126)$$

де n^* — дробове число (6.125).

Оскільки порядки ФНЧ і ФВЧ однакові, можна записати ОПФ ФП, використовуючи вираз (6.38):

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)}, \quad (6.127)$$

де нормовані корені ФНЧ Баттерворта \tilde{p}_k обчислюють за формулою (6.109).

Для ФЧ порядок n ФВЧ визначають, виходячи з виразів (6.67), (6.81):

$$n \geq \frac{\text{Arch}(\sqrt{10^{0.1A_s} - 1}/\varepsilon)}{\text{Arch} \tilde{\Omega}_s}, \quad (6.128)$$

де $\tilde{\Omega}_s = \tilde{\omega}_s / \tilde{\omega}_\Delta$ — нормована частота ФВЧ, яку розраховують за формулою (6.92); частоти $\tilde{\omega}_\Delta$ і $\tilde{\omega}_s$ — згідно з системою (6.124); коефіцієнт нерівномірності ослаблення ε — за формулою (6.66).

З огляду на збіг порядків ФВЧ і ФП на підставі співвідношення (6.80), ОПФ ФП можна записати у вигляді:

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{k_R}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)},$$

де коефіцієнт $k_R = 1/2^{n-1} \varepsilon$ (загалом k_R може мати довільне значення).

За умови $k_R = 1$ аналітичний вираз ОПФ ФЧ збігається з (6.127), але для ФЧ нормовані корені $\tilde{p}_k = -\tilde{\Delta}_k + j\tilde{\Omega}_k$ визначатимуться з урахуванням формул (6.71) і (6.72) відповідно до співвідношення (6.111).

Перехід від ОПФ ФП (6.127) до нормованої ОПФ ЗФ потребує встановлення відповідності між нормованими коренями ФП і ЗФ згідно із співвідношенням (6.118). Розв'язання рівняння (6.118) відносно \tilde{p} дає:

$$\tilde{p}\tilde{p}^2 - \tilde{p} + k_\Delta^2 \tilde{p} = 0, \quad \text{або} \quad \tilde{p}^2 - \frac{1}{\tilde{p}} + k_\Delta^2 = 0,$$

звідки

$$\tilde{p} = \frac{1}{2\tilde{p}} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tilde{p}^2} - k_\Delta^2}. \quad (6.129)$$

За умови $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$ для двох комплексно-спряжених значень $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$ і $\tilde{p}^* = -j\tilde{\Omega}$, виходячи з виразу (6.129), можна встановити безпосередній зв'язок між нормованими частотами ФП $\tilde{\Omega}$ і ЗФ $\tilde{\Omega}$ (опускаючи знак «мінус» перед коренем, що забезпечує додатне значення частоти $\tilde{\Omega}$):

$$\tilde{\Omega} = \pm \frac{1}{2\tilde{\Omega}} + \sqrt{\frac{1}{4\tilde{\Omega}^2} + k_\Delta^2}. \quad (6.130)$$

Як і у випадку СФ, знайдену нормовану ОПФ ФП $H_U(\tilde{p})$ (6.127) доцільно подати у вигляді (6.112) для парного n або (6.113), якщо n — непарне. За умови непарного n з функції $H_U(\tilde{p})$ виділяється $H_U^{(1)}(\tilde{p})$ — ОПФ ланки першого порядку з коренем $\tilde{p} = -\tilde{\Delta}$, котра перетворюється на нормовану ОПФ ЗФ з двома нулями і полюсами, які відповідно є комплексно-спряженими:

$$H_U^{(2)}(\bar{p}) = H_U^{(1)}(\bar{p}) \Big|_{\bar{p}=\bar{p}/(\bar{p}^2+k_\Delta^2)} = \frac{1}{\bar{p}+\bar{\Delta}} \Big|_{\bar{p}=\bar{p}/(\bar{p}^2+k_\Delta^2)} = \frac{1}{\bar{p}/(\bar{p}^2+k_\Delta^2)+\bar{\Delta}} =$$

$$= \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{\bar{\Delta}\bar{p}^2+\bar{p}+\bar{\Delta}k_\Delta^2} = \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{\bar{\Delta}[\bar{p}^2+(1/\bar{\Delta})\bar{p}+k_\Delta^2]} = \hat{k} \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{\bar{p}^2+(1/\bar{\Delta})\bar{p}+k_\Delta^2},$$

$$\text{де } \hat{k} = \frac{1}{\bar{\Delta}} = \frac{1}{|\bar{p}_n|}.$$

ОПФ $H_{U_i}^{(2)}(\bar{p})$ i -х ланок другого порядку ФП, виділених з функції (6.112), з коренями $\bar{p}_i = -\bar{\Delta}_i \pm j\bar{\Omega}_i$ перетворюються в нормовану ОПФ ЗФ четвертого порядку.

Якщо ОПФ однієї ланки другого порядку подати у вигляді

$$H_{U_i}^{(2)}(\bar{p}) = \frac{1}{(\bar{p}-\bar{p}_i)(\bar{p}-\bar{p}_i^*)}$$

і виконати перетворення для кожного з комплексно-спряжених коренів окремо, виходять ланки ЗФ з ОПФ другого порядку:

$$\frac{1}{\bar{p}-\bar{p}_i} \Big|_{\bar{p}=\bar{p}/(\bar{p}^2+k_\Delta^2)} = -\frac{1}{\bar{p}_i} \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{\bar{p}^2+\bar{p}/\bar{p}_i+k_\Delta^2} = -k_i \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{(\bar{p}-\bar{p}_1)(\bar{p}-\bar{p}_2)}$$

Аналогічно

$$\frac{1}{\bar{p}-\bar{p}_i^*} \Big|_{\bar{p}=\bar{p}/(\bar{p}^2+k_\Delta^2)} = -\frac{1}{\bar{p}_i^*} \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{\bar{p}^2-\bar{p}/\bar{p}_i^*+k_\Delta^2} = -k_i^* \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{(\bar{p}-\bar{p}_3)(\bar{p}-\bar{p}_4)}$$

де $k_i = 1/\bar{p}_i$; $k_i^* = 1/\bar{p}_i^*$, причому $\bar{p}_{1,3}$, а також $\bar{p}_{2,4}$ утворюють комплексно-спряжені пари подібно перетворенням щодо СФ. Тому достатньо визначити тільки корені \bar{p}_1 і \bar{p}_2 , скориставшись формулою (6.129).

З урахуванням зроблених перетворень нормовану ОПФ ланки четвертого порядку ЗФ можна записати у вигляді

$$H_U(\bar{p}) = H_{U_i}^{(2)}(\bar{p}) \Big|_{\bar{p}=\bar{p}/(\bar{p}^2+k_\Delta^2)} = \frac{1}{|\bar{p}_i|^2} \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{(\bar{p}-\bar{p}_1)(\bar{p}-\bar{p}_3)} \frac{\bar{p}^2+k_\Delta^2}{(\bar{p}-\bar{p}_2)(\bar{p}-\bar{p}_4)}, \quad (6.131)$$

де $\frac{1}{|\bar{p}_i|^2} = k_i k_i^* = \frac{1}{\bar{\Delta}_i^2 + \bar{\Omega}_i^2}$, тобто як добуток двох ОПФ ланок другого

порядку з двома комплексно-спряженими полюсами і двома

комплексно-спряженими нулями. Така форма є найбільш прийнятною при каскадній реалізації фільтра.

Враховуючи співвідношення (6.79), знаменник у виразі (6.131) слід подати у вигляді поліномів відносно \bar{p} . Денормування ОПФ ЗФ здійснюється підстановкою (6.119):

$$H_U(p) = H_U(\bar{p}) \Big|_{\bar{p}=p/\Delta\omega_s}. \quad (6.132)$$

Приклад 6.5. Визначити ОПФ ЗФ Чебишова за такими вимогами: центральна частота $\omega_0 = 424,279 \cdot 10^3$ рад/с, смуга затримання $\Delta\omega_s = 161,66 \times 10^3$ рад/с. На частоті $\omega_{s1} = 404,75 \cdot 10^3$ рад/с ослаблення за потужністю не має бути меншим 24 дБ, на частоті $\omega_{\Delta 2} = 512,74 \cdot 10^3$ рад/с — не повинно перевищувати 0,97 дБ.

Розв'язання. Скориставшись властивістю геометричної симетрії частотної залежності A_p (6.104), визначимо частоти $\omega_{\Delta 1}$ і ω_{s2} :

$$\omega_{\Delta 1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\Delta 2}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{512,74 \cdot 10^3} = 351,08 \cdot 10^3 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{s2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{s1}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{404,75 \cdot 10^3} = 444,75 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

За принципом збереження довжини частотного інтервалу визначимо частоти $\tilde{\omega}_\Delta$ і $\tilde{\omega}_s$ (6.124) ФВЧ:

$$\tilde{\omega}_\Delta = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1} = 512,74 \cdot 10^3 - 351,08 \cdot 10^3 = 161,66 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$$

($\tilde{\omega}_\Delta$ така сама, як і смуга затримання);

$$\tilde{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1} = 444,75 \cdot 10^3 - 404,75 \cdot 10^3 = 40 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

За нормованою частотою ФВЧ $\tilde{\Omega}_s = \tilde{\omega}_s / \tilde{\omega}_\Delta$ обчислимо нормовану частоту ФП:

$$\tilde{\Omega}_s = \frac{1}{\tilde{\Omega}_s} = \frac{160,66 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 4,0415 \text{ рад/с}.$$

За формулами (6.66) і (6.67) розрахуємо ε і n ФП:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_\Delta} - 1} = \sqrt{10^{0,10,97} - 1} = 0,500259;$$

$$n \geq \frac{\text{Arch}(\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}/\varepsilon)}{\text{Arch} \tilde{\Omega}_s} = \frac{\text{Arch}(\sqrt{10^{0,124} - 1}/0,500259)}{\text{Arch} 4,0415} = 1,9992.$$

Нехай $n = 2$.

Оскільки значення ε і n ФП збіглися з результатами прикладу 6.4, скористаємось отриманими значеннями нормованих коренів:

$$\bar{p}_{1,2} = -\tilde{\Delta} + j\tilde{\Omega} = -0,555893 \pm j0,899454; |\bar{p}_1|^2 = 1,118035.$$

На підставі виразу (6.129) обчислимо нормовані корені ЗФ:

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= -0,210778 + j2,24152 = -\Delta_1 + j\Omega_1; \\ \bar{p}_2 &= -0,286428 - j3,046015 = -\Delta_2 - j\Omega_2; \\ \bar{p}_3 &= -0,210778 - j2,24152 = -\Delta_1 - j\Omega_1; \\ \bar{p}_4 &= -0,286428 + j3,046015 = -\Delta_2 + j\Omega_2.\end{aligned}$$

Нормована ОПФ ЗФ, виходячи з виразу (6.80) за умови $k_R = 1$ згідно з формулами (6.131) і (6.79), набуває вигляду:

$$H_U(\bar{p}) = \frac{1}{|\tilde{p}_1|^2} \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}^2 + 2\Delta_1\bar{p} + \Delta_1^2 + \Omega_1^2} \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}^2 + 2\Delta_2\bar{p} + \Delta_2^2 + \Omega_2^2}; k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_3} = 2,624514,$$

або після підстановки числових значень

$$H_U(\bar{p}) = 0,894426 \frac{\bar{p}^2 + 6,888076}{\bar{p}^2 + 0,421556\bar{p} + 5,068838} \frac{\bar{p}^2 + 6,888076}{\bar{p}^2 + 0,57945\bar{p} + 9,36215}.$$

Денормовану ОПФ ЗФ отримаємо, використовуючи вираз (6.132).

За знайденою ОПФ визначимо частотну залежність ослаблення (6.1), яку зображено на рис. 6.22.

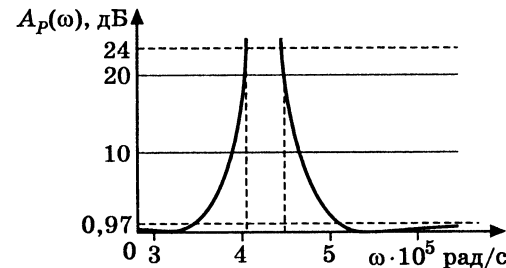


Рис. 6.22. Частотна залежність ЗФ порядку $n = 4$:

$$\begin{aligned}A_p(404750) &= 24,031 \text{ дБ}; \\ A_p(444750) &= 24,057 \text{ дБ}; \\ A_p(351080) &= 0,98 \text{ дБ}; \\ A_p(512740) &= 1,053 \text{ дБ}\end{aligned}$$

Незначні розбіжності A_p із заданими значеннями ослаблення A_Δ обумовлені недостатньою точністю обчислення коренів, вплив якої помітний, оскільки розрахований порядок фільтра n (1,9992) і прийнятий (2) дещо різняться. Для усунення вказаних розбіжностей слід розраховувати значення коренів з більшою точністю (як для ФП, так і ЗФ).

6.9. Частотні залежності реактансних функцій

Властивості реактансних функцій, які належать до класу ОВФ (операторних вхідних функцій комплексного змінного p), розглянуті вище у підрозділі 3.8. Усі подальші докази і висновки щодо

ОВФ двополюсника $Z_{\text{вх}}(p)$ цілком стосуються й операторної вхідної провідності $Y_{\text{вх}}(p)$. Раніше було доведено, що ОВФ (3.82), (3.83) кола з втратами є дробово-раціональною функцією аргументу p , поліноми чисельника і знаменника якої $M(p)$, $N(p)$ — поліноми Гурвіца, отже, їх корені належать лівій півплощині комплексної площини p . Наслідком зменшення втрат у колі є наближення коренів до осі $j\omega$. За умови відсутності втрат (коло з ідеальними реактивними елементами) корені поліномів $M(p)$, $N(p)$ розташовуються на осі $j\omega$, а самі поліноми вироджуються в парну (або непарну) частину полінома Гурвіца $V(p)$ і можуть бути подані у вигляді:

$$\begin{cases} M(p) = V(p) \pm V(-p); \\ N(p) = V(p) \mp V(-p). \end{cases} \quad (6.133)$$

Якщо

$$\begin{aligned}V(p) &= a_{2k}p^{2k} + a_{2k-1}p^{2k-1} + a_{2k-2}p^{2k-2} + \dots \\ &\dots + a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad k = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

тоді

$$V(-p) = a_{2k}p^{2k} - a_{2k-1}p^{2k-1} + a_{2k-2}p^{2k-2} + \dots + a_2p^2 - a_1p + a_0.$$

Після підстановки останнього виразу до системи (6.133) виходить:

$$\begin{cases} M(p) = 2a_{2k}p^{2k} + 2a_{2k-2}p^{2k-2} + \dots + 2a_2p^2 + 2a_0, \quad m = 2k; \\ N(p) = 2a_{2k-1}p^{2k-1} + 2a_{2k-3}p^{2k-3} + \dots + 2a_1p, \quad n = 2k-1. \end{cases} \quad (6.134)$$

Оскільки коефіцієнти полінома $V(p)$ — дійсні додатні величини, які залежать від параметрів кола, такими самими будуть і коефіцієнти поліномів $M(p)$, $N(p)$.

На підставі формули (3.82) реактансну функцію можна подати у вигляді:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2k}p^{2k} + a_{2k-2}p^{2k-2} + \dots + a_2p^2 + a_0}{a_{2k-1}p^{2k-1} + a_{2k-3}p^{2k-3} + \dots + a_1p}. \quad (6.135)$$

Поліноми $M(p)$, $N(p)$ у виразі (6.134) утворені згідно з виразом (6.133) за умови врахування верхніх знаків; якщо взяти нижні — $Z_{\text{вх}}(p)$ стане функцією, оберненою (6.135) з $m = 2k-1$, $n = 2k$. Ця функція матиме інші властивості, ніж ОПФ (6.135), але вони збігатимуться з властивостями провідності кола, вхідний опір якого дорівнює (6.135). Отже, $Z_{\text{вх}}(p)$ — парно-непарна або непарно-парна

функція, максимальні степені чисельника і знаменника якої різняться на одиницю, причому можливе як співвідношення $m > n$, так і $m < n$. Ознаками реактансних функцій вважаються їх значення при $p \rightarrow 0$ і $p \rightarrow \infty$.

Властивості реактансних функцій можна розглянути на прикладі $Z_{\text{вх}}(p)$ (6.135). Це парно-непарна функція із співвідношенням $m > n$. Корені полінома $M(p)$ позначено «0» у нижньому індексі.

Так, за умови додатної уявної частини

$$p_{01} = j\omega_{01}; p_{02} = j\omega_{02}; \dots; p_{0(k-1)} = j\omega_{0(k-1)}; p_{0k} = j\omega_{0k}. \quad (6.136)$$

Корені (6.136) є нулями реактансної функції $Z_{\text{вх}}(p)$:

$$\lim_{p \rightarrow p_{01}} Z_{\text{вх}}(p) = 0. \quad (6.137)$$

Для пари комплексно-спряжених нулів можна записати:

$$(p - j\omega_{01})(p + j\omega_{01}) = p^2 - p_{01}^2,$$

тоді поліном $M(p)$ із системи (6.134) матиме вигляд

$$M(p) = 2a_{2k}(p^2 - p_{01}^2)(p^2 - p_{02}^2) \dots (p^2 - p_{0k}^2). \quad (6.138)$$

Корені полінома $N(p)$ (за умови додатної уявної частоти) позначають у такий спосіб:

$$p_1 = j\omega_1; p_2 = j\omega_2; \dots; p_{k-1} = j\omega_{k-1} \quad (6.139)$$

і вони визначають полюси реактансної функції:

$$\lim_{p \rightarrow p_r} Z_{\text{вх}}(p) \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2, \dots, k-1. \quad (6.140)$$

Як було зазначено вище (див. підрозд. 3.8), нулі та полюси реактансних функцій чергуються.

Аналогічно рівності (6.138) поліном $N(p)$ із системи (6.134) можна записати у вигляді:

$$N(p) = 2a_{2k-1}p(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2) \dots (p^2 - p_{k-1}^2). \quad (6.141)$$

Якщо $M(p)$ — парна функція p ($m = 2k$), вона матиме k пар комплексно-спряжених коренів і не може мати (непарного) кореня в точці $p = 0$. Якщо $N(p)$ — непарна функція p ($n = 2k - 1$), вона має $(k - 1)$ пар комплексно-спряжених коренів і один корінь у точці $p = 0$.

Отже, можна зробити такі висновки:

1. За умови парності поліномів $M(p)$ або $N(p)$ реактансна функція $Z_{\text{вх}}(p)$ не має нулів (або полюсів) у точці $p = 0$.

2. За умови непарності $M(p)$ або $N(p)$ реактансна функція $Z_{\text{вх}}(p)$ має полюси (або нулі) у точці $p = 0$.

Проведений аналіз дає можливість визначити, нуль або полюс має реактансна функція в нулі ($p = 0$). Для того щоб визначити границю функції у точці $p \rightarrow \infty$, достатньо порівняти степені поліномів $M(p)$ і $N(p)$:

$$3. \begin{cases} \lim_{p \rightarrow \infty} Z_{\text{вх}}(p) \rightarrow \infty, m > n; \\ \lim_{p \rightarrow \infty} Z_{\text{вх}}(p) \rightarrow 0, m < n. \end{cases} \quad (6.142)$$

Підстановка виразів (6.138) і (6.141) до формули (6.135) дає:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \alpha \frac{(p^2 - p_{01}^2)(p^2 - p_{02}^2) \dots (p^2 - p_{0k}^2)}{p(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2) \dots (p^2 - p_{k-1}^2)}; \quad \alpha = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}, \quad (6.143)$$

де α — постійний множник, який залежить від параметрів кола, що визначають коефіцієнти a_{2k} , a_{2k-1} .

На підставі узагальнюючих висновків ознаки реактансних функцій зведені до табл. 6.6. Парність функцій $M(p)$ і $N(p)$ позначена як $2k$, а непарність відповідно $(2k \pm 1)$. Під позначкою $2k$ і над нею в таблиці стоїть знак « \rightarrow » як підтвердження висновку 1. Якщо функція не може мати нуля за умови $p = 0$, вона, за методом виключення, повинна мати в цій точці полюс, або навпаки (висновок 2). Наявність протилежної ознаки позначено в табл. 6.6 символом \oplus . Співвідношення між m і n за висновком 3 визначає наявність полюса чи нуля в нескінченності. На підставі двох ознак, позначених символами « $+$ » і « \oplus », заповнюється останній рядок у кожному стовпці таблиці.

Загальна кількість нулів і полюсів реактансної функції, які відповідають скінченним значенням частоти (включаючи точку $p = 0$, тобто нульову частоту), збігається як із порядком того полінома, степеня якого максимальний, так і з кількістю реактивних елементів кола. Значення $p \rightarrow \infty$ не входить до загальної кількості нулів і полюсів. Ця точка, яка умовно належить уявній осі, додає до загальної кількості ще один нуль чи полюс.

Для переходу до частотних характеристик реактансних функцій необхідно до виразу (6.143) підставити $p = j\omega$, а також значення нулів p_{0r} і полюсів p_r відповідно до співвідношень (6.136) і (6.139):

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \alpha \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{j\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_{k-1}^2 - \omega^2)},$$

Таблиця 6.6

Наявність нулів і полюсів $Z_{\text{вх}}(p)$ за умови $p=0$ і $p \rightarrow \infty$
(ознаки ОВФ)

Варіант	1	2	3	4
m, n	$m > n$		$m < n$	
m	$2k$	$2k+1$	$2k$	$2k-1$
Наявність нуля, якщо $p=0$	-	\oplus	-	\oplus
Наявність полюса, якщо $p=0$	\oplus	-	\oplus	-
n	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	$2k$
Наявність нуля, якщо $p \rightarrow \infty$			+	+
Наявність полюса, якщо $p \rightarrow \infty$	+	+		
Ознаки $Z_{\text{вх}}(p)$	$\infty - \infty$	$0 - \infty$	$\infty - 0$	$0 - 0$

або

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = -j\alpha \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{\alpha(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}. \quad (6.144)$$

Зважаючи, що $Z_{\text{вх}}(j\omega) = jX_{\text{вх}}(\omega)$, частотну функцію реактивного опору $X_{\text{вх}}(\omega)$ визначають із формули (6.144):

$$X_{\text{вх}}(\omega) = -\alpha_1 \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{\alpha(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_1 = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}; \quad (6.145)$$

$$X_{\text{вх}}(\omega) = \alpha_2 \frac{\alpha(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_2 = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}; \quad (6.146)$$

$$X_{\text{вх}}(\omega) = -\alpha_3 \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{\alpha(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_3 = \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}; \quad (6.147)$$

$$X_{\text{вх}}(\omega) = \alpha_4 \frac{\alpha(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{0(k-1)}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_4 = \frac{a_{2k-1}}{a_{2k}}. \quad (6.148)$$

Частотні функції відповідно до варіантів 2–4 (табл. 6.6) відображені у формулах (6.146)–(6.148). Графіки залежностей $X_{\text{вх}}(\omega)$ показані на рис. 6.23.

Частотні залежності реактивних провідностей матимуть такий самий вигляд, як на рис. 6.23, якщо провідності $Y_{\text{вх}}(p)$ реактансних функцій матимуть такі ж ознаки, як і розглянуті опори $Z_{\text{вх}}(p)$.

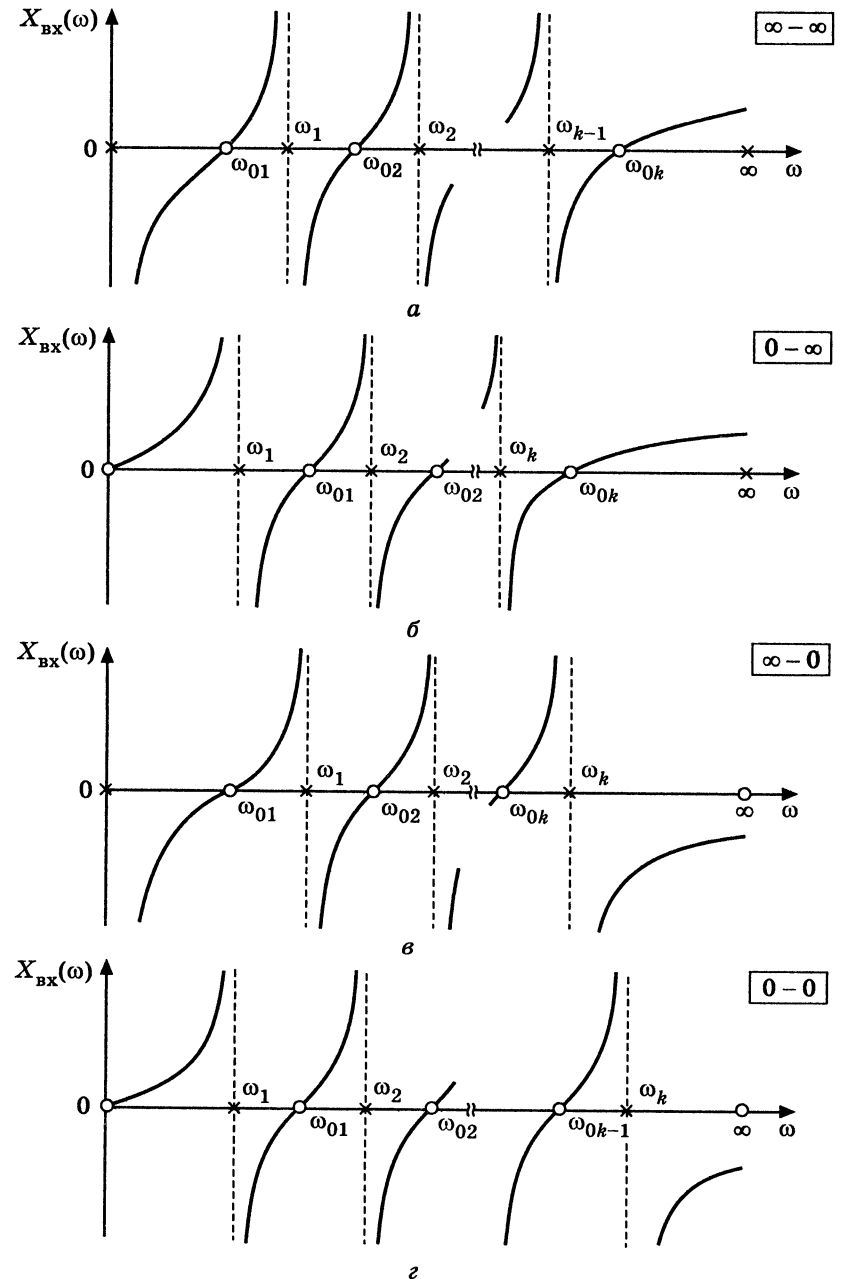


Рис. 6.23. Частотні залежності реактивного опору різних за ознаками реактансних функцій

Пошук схемних структур, які відповідають реактансним функціям $Z_{\text{вх}}(p)$ або $Y_{\text{вх}}(p)$, є задачею структурного синтезу. Цю задачу, як і задачу апроксимації, доцільно розв'язувати стосовно нормованих величин, що дає можливість не лише узагальнити отримані результати, а й підвищити точність розрахунків. Так, поліномні коефіцієнти ненормованих ОВФ, якими не можна нехтувати, можуть відрізнятися один від одного на десятки порядків на відміну від коефіцієнтів нормованих функцій. Так само, як і раніше (наприклад, підрозд. 6.4), від комплексної змінної $p = -\delta \pm j\omega$ переходять до нормованої комплексної частоти $\bar{p} = -\Delta \pm j\Omega$. Оскільки реактансні функції — функції кіл без втрат (дійсна складова комплексного кореня $\delta = 0$), тоді відповідно $p = \pm j\omega$, а $\bar{p} = \pm j\Omega$, де Ω — нормована частота:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{норм}}}. \quad (6.149)$$

Частота $\omega_{\text{норм}}$, за якою виконують нормування, може бути частотою якого-небудь полюса або нуля.

Якщо реактивний двополюсник живиться від джерела з опором R_i , нормування операторних і реактивних опорів здійснюється відносно R_i :

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{Z_{\text{вх}}(\bar{p})}{R_i}; \quad \tilde{X}(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{R_i}. \quad (6.150)$$

Нормовані елементи двополюсника матимуть однаковий порядок і будуть безрозмірними. Так, нормована індуктивність \tilde{L} і нормована ємність \tilde{C} мають відповідно нормовані опори:

$$\Omega \tilde{L} = \frac{\omega L}{R_i}; \quad \frac{1}{\Omega \tilde{C}} = \frac{1/\omega C}{R_i},$$

звідки з урахуванням виразу (6.149) можна визначити денормовані індуктивність та ємність:

$$L = \tilde{L} \frac{R_i}{\omega_{\text{норм}}}; \quad C = \frac{\tilde{C}}{R_i \omega_{\text{норм}}},$$

або

$$L = \tilde{L} k_L; \quad C = \tilde{C} k_C, \quad (6.151)$$

$$\text{де } k_L = \frac{R_i}{\omega_{\text{норм}}}; \quad k_C = \frac{1}{R_i \omega_{\text{норм}}}.$$

Константи k_L і k_C обумовлюються тільки нормувальними параметрами. Денормований опір визначають операцією, оберненою

співвідношенню (6.150). Формули для визначення денормованих елементів зведені до табл. 6.7.

Таблиця 6.7

Визначення денормованих елементів

Нормований елемент	\tilde{R}	\tilde{L}	\tilde{C}
Формула денормування	$R = \tilde{R} R_i$	$L = \tilde{L} k_L$	$C = \tilde{C} k_C$
Нормувальний коефіцієнт	—	$k_L = \frac{R_i}{\omega_{\text{норм}}}$	$k_C = \frac{1}{R_i \omega_{\text{норм}}}$

6.10. Реалізація реактансних функцій за Фостером

Поширеними методами структурної реалізації реактансних функцій є методи, запропоновані Фостером⁶ і відомі як перша і друга форми Фостера. Реалізацію за першою формою Фостера доцільно розглянути на прикладі операторної реактансної функції (6.135), яку відносно нормованої комплексної частоти записують у вигляді:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{a}_{2k} \bar{p}^{2k} + \bar{a}_{2k-2} \bar{p}^{2k-2} + \dots + \bar{a}_2 \bar{p}^2 + \bar{a}_0}{\bar{a}_{2k-1} \bar{p}^{2k-1} + \bar{a}_{2k-3} \bar{p}^{2k-3} + \dots + \bar{a}_1 \bar{p}}, \quad (6.152)$$

$$\text{де } \bar{p} = j\Omega = j \frac{\omega}{\omega_{\text{норм}}}.$$

Слід зазначити, що коефіцієнти поліномів чисельника $M(\bar{p})$ і знаменника $N(\bar{p})$ функції (6.152) мають приблизно однаковий порядок. Оскільки в цієї функції $m > n$ ($m = 2k$, $n = 2k - 1$), можна виділити цілу частину дроби:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_{\infty} \bar{p} + \frac{M_1(\bar{p})}{N(\bar{p})}, \quad (6.153)$$

де $A_{\infty} \bar{p}$ — ціла частина, $M_1(\bar{p})$ — остача, а $N(\bar{p})$ — знаменник функції (6.152), який згідно з виразом (6.141) можна записати у вигляді:

$$N(\bar{p}) = 2\bar{a}_{2k-1} \bar{p}(\bar{p}^2 - \bar{p}_1^2)(\bar{p}^2 - \bar{p}_2^2) \dots (\bar{p}^2 - \bar{p}_{k-1}^2). \quad (6.154)$$

⁶ Фостер, Р.М. Foster — американський учений, співробітник Лабораторії Бела, започаткував систематичні дослідження синтезу фільтрів у роботі «A reactance theorem», Bell System Techn. J., 3: 259–267, 1924.

Правильний дріб $M_1(\bar{p})/N(\bar{p})$ у формулі (6.153) з огляду на вираз (6.154) можна розкласти на прості дроби і тоді функцію (6.153) подати у вигляді

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_\infty \bar{p} + \frac{A_0}{\bar{p}} + \sum_r \frac{A_r \bar{p}}{\bar{p}^2 - \bar{p}_r^2}, \quad r=1, 2, \dots, k-1. \quad (6.155)$$

Цілу частину $A_\infty \bar{p}$ ставлять у відповідність нормованому операторному індуктивному опору $\bar{p} \tilde{L}_\infty$, звідки

$$\tilde{L}_\infty = A_\infty; \quad A_\infty = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})}{\bar{p}}. \quad (6.156)$$

Індекс « ∞ » є доцільним, оскільки наявність коефіцієнта A_∞ вказує на існування полюса функції $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ за умови $\bar{p} \rightarrow \infty$ ($\lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} A_\infty \bar{p} \rightarrow \infty$). Доданок A_0/\bar{p} у виразі (6.155) відповідає операторному опору ємності $1/\bar{p} \tilde{C}_0$, отже:

$$\tilde{C}_0 = \frac{1}{A_0}; \quad A_0 = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \bar{p} \tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}). \quad (6.157)$$

Індекс «0» позначає наявність полюса в точці $\bar{p} = 0$.

Останній доданок під знаком суми $A_r \bar{p}/(\bar{p}^2 - \bar{p}_r^2)$ ($\bar{p}_r = j\Omega_r$) функції (6.155) можна поставити у відповідність операторному опору ідеального паралельного контуру з елементами \tilde{L}_r, \tilde{C}_r :

$$\frac{\bar{p} \tilde{L}_r}{\bar{p}^2 \tilde{L}_r \tilde{C}_r + 1} = \frac{\bar{p} / \tilde{C}_r}{\bar{p}^2 + \Omega_r^2},$$

де Ω_r — резонансна частота ідеального паралельного контуру ($\Omega_r^2 = \frac{1}{\tilde{L}_r \tilde{C}_r}$).

З останнього рівняння виходить:

$$\frac{1}{\tilde{C}_r} = A_r; \quad \tilde{L}_r = \frac{1}{\tilde{C}_r \Omega_r^2}; \quad A_r = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow \bar{p}_r^2} \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_r^2}{\bar{p}} \tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}). \quad (6.158)$$

Отже, на підставі формули (6.155) реактансній функції $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ відповідає схема з послідовним з'єднанням елементів $\tilde{L}_\infty, \tilde{C}_0$ і $(k-1)$ паралельних контурів (рис. 6.24, а відповідно до варіанта 1, табл. 6.6). На рис. 6.24, б, в, г наведено схеми, які реалізують реактансні функції відповідно до варіантів 2, 3, 4 табл. 6.6.

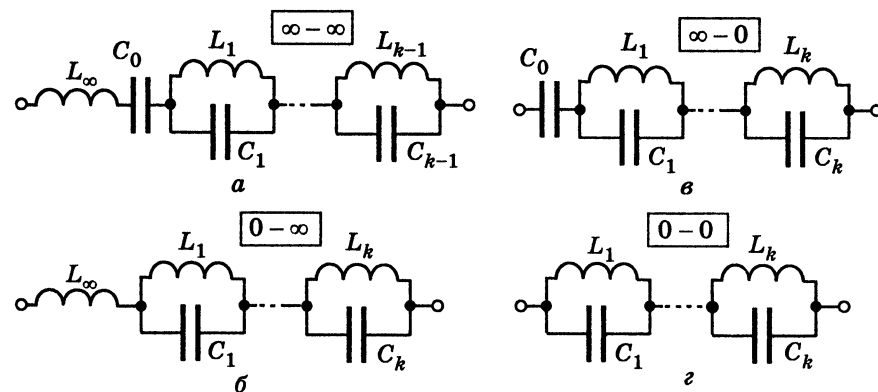


Рис. 6.24. Схеми реалізації за першою формою Фостера

Схеми реалізації реактансних функцій, отримані за першою формою Фостера, мають мінімальну кількість елементів, яка збігається з найбільшим із степенів поліномів $M(\bar{p}), N(\bar{p})$. Ці схеми називають *канонічними*, оскільки вони побудовані за певним канонем (правилом). Проаналізувавши схему, можна визначити ознаки відповідної реактансної функції. Схема реалізує нуль за нульової частоти, якщо до входніх затискачів увімкнено низку послідовно з'єднаних індуктивностей (опір ідеальних індуктивностей за нульової частоти — нульовий). Наявність індуктивності L_∞ забезпечує полюс за нескінченної частоти (опір індуктивності — нескінченна величина). Нуль за нескінченної частоти забезпечує низка послідовно з'єднаних ємностей, які увімкнено між входніми затискачами (опір ідеальної ємності за нескінченної частоти — нульовий). Полюс за нульової частоти реалізує елемент C_0 , завдяки нескінченному опору ємності за цих умов.

Частотну залежність реактивного опору реактансної функції (6.152) отримують з формули (6.155) за умови $\bar{p} = j\Omega$, з огляду на те, що $Z_{\text{вх}}(j\Omega) = jX_{\text{вх}}(\Omega)$:

$$X_{\text{вх}}(\Omega) = A_\infty \Omega - \frac{A_0}{\Omega} + \sum_r \frac{A_r \Omega}{\Omega_r^2 - \Omega^2}, \quad r=1, 2, \dots, k-1. \quad (6.159)$$

Графік залежності $X_{\text{вх}}(\Omega)$ відповідно до формули (6.159) показаний на рис. 6.23, а. Графік (рис. 6.23, б) відповідає частотній залежності (6.159) за умови $A_0 = 0$; графік (рис. 6.23, в) — за умови $A_\infty = 0$, а для графіка (рис. 6.23, г) мають виконуватися умови: $A_\infty = 0, A_0 = 0$.

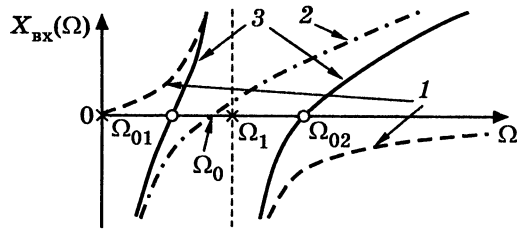


Рис. 6.25. Частотна залежність реактивного опору складного двополюсника

Із графіків видно, що функції $X_{\text{вх}}(\Omega)$ зростають із збільшенням частоти, на частотах паралельних резонансів Ω_r спостерігається розрив частотних характеристик від $+\infty$ (індуктивний характер) до $-\infty$ (ємнісний характер). Частоти нулів ЧХ однозначно визначаються частотами полюсів.

На рис. 6.25 наведено частотну залежність реактивного опору паралельного контуру з резонансною частотою Ω_1 (крива 1) і послідовного контуру, утвореного елементами L_∞ і C_0 , з резонансною частотою Ω_0 (крива 2). Для сумарної частотної залежності складеного двополюсника (крива 3) частота паралельного резонансу (частота полюса) не змінилась, але з'явилось два значення частоти, які відповідають послідовним резонансам: Ω_{01}, Ω_{02} (частоти нулів). Функція $X_{\text{вх}}(\Omega)$ має два полюси (один за нульової частоти) і два нулі, реалізовані чотирма елементами.

Далі розглянуто реалізацію реактансних функцій за другою формою Фостера.

Операторною характеристикою реактивного двополюсника може бути як вхідний опір, так і вхідна провідність, яку аналогічно виразу (6.155) можна подати у вигляді:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_\infty + \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_0} + \sum_r \frac{\bar{p}/\tilde{L}_r}{\bar{p}^2 + \Omega_r^2},$$

$$r = 1, 2, \dots, k, \text{ або } r = 1, 2, \dots, k-1, \quad (6.160)$$

причому верхня межа визначається порядком полінома знаменника ДРФ $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$. Елементи, провідності яких підсумовуються, ввімкнено паралельно вхідним затискачам кола. Елементи \tilde{C}_∞ і \tilde{L}_0 реалізують полюси за умов $\bar{p} \rightarrow \infty$ і $\bar{p} \rightarrow 0$. Під знаком суми у виразі (6.160) записано провідність ідеального послідовного контуру з резонансною частотою $\Omega_r^2 = 1/L_r C_r$ (контур реалізує полюс на цій частоті). Елементи складеного двополюсника визначаються в такий спосіб:

$$\begin{cases} \tilde{C}_\infty = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})}{\bar{p}}; \frac{1}{\tilde{L}_0} = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \bar{p}\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}); \\ \frac{1}{\tilde{L}_r} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -\Omega_r^2} \frac{\bar{p}^2 + \Omega_r^2}{\bar{p}} \tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}); \tilde{C}_r = \frac{1}{\Omega_r^2 \tilde{L}_r}. \end{cases} \quad (6.161)$$

На рис. 6.26 показані схемні реалізації, які відповідають варіантам 1, 2, 3, 4 (табл. 6.6).

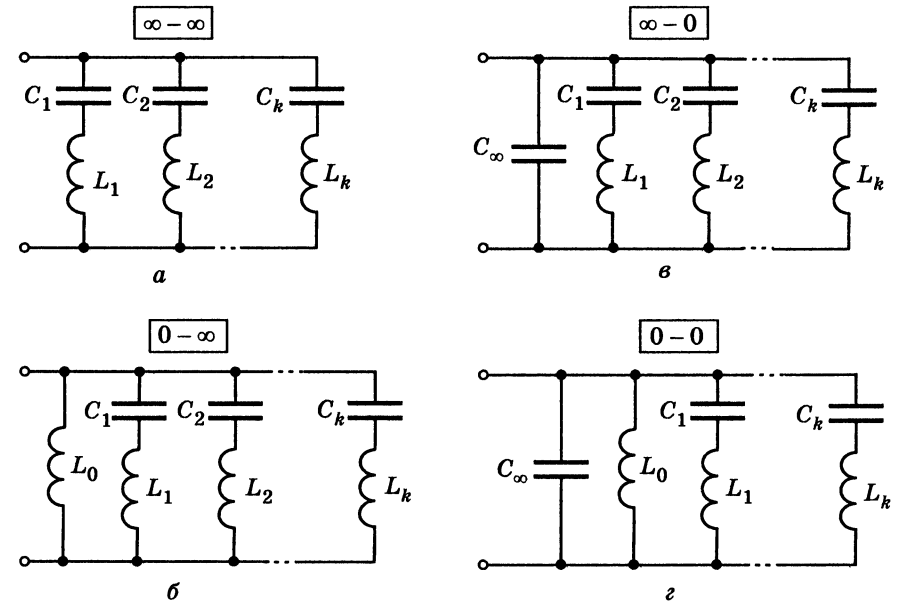


Рис. 6.26. Схемні реалізації за другою формою Фостера

Приклад 6.6. Визначити схемну реалізацію нормованого операторного вхідного опору $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ двополюсника за першою формою Фостера:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{4\bar{p}^3 + 2\bar{p}},$$

причому функція згідно з табл. 6.6 має ознаки $\infty - \infty$.

Розв'язання. Порядок полінома чисельника становить $m=4$, тобто $M(\bar{p})$ — парна функція і не може мати кореня за умови $\omega=0$. Отже, функція $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ не може мати нуля ненульової частоти і, як наслідок, матиме полюс.

Порядок полінома знаменника становить $n=3$, тобто $N(\bar{p})$ — непарна функція і має корінь за умови $\omega=0$, отже, $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ має полюс за нульової

частоти (підтвердження першої ознаки). Оскільки $m > n$, $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ матиме полюс у нескінченності (підтвердження другої ознаки).

Визначимо полюси $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$:

$$4\bar{p}^3 + 2\bar{p} = 0; 2\bar{p}(2\bar{p}^2 + 1) = 0; \bar{p}_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}; \bar{p}_2 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}; \bar{p}_3 = 0.$$

За формулами (6.156)–(6.158) обчислимо:

$$A_\infty = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{\bar{p}(4\bar{p}^3 + 2\bar{p})} = 0,5; A_0 = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \frac{(2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1)\bar{p}}{\bar{p}(4\bar{p} + 2)} = 0,5;$$

$$A_1 = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -0,5} \frac{\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_1^2}{\bar{p}}}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -0,5} \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{4\bar{p}(\bar{p} + 0,5)} \frac{\bar{p}^2 + 0,5}{\bar{p}} = 0,25.$$

Згідно з виразом (6.155) запишемо:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = 0,5\bar{p} + \frac{0,5}{\bar{p}} + \frac{0,25\bar{p}}{\bar{p}^2 + 0,5}.$$

Отже, розглянуту ОВФ можна подати схемою, яка має чотири елементи (рис. 6.27, а), нормовані значення параметрів яких становлять:

$$\tilde{L}_\infty = A_\infty = 0,5; \tilde{C}_0 = \frac{1}{A_0} = 2; \tilde{C}_1 = \frac{1}{A_1} = 4; \Omega_1^2 = -\bar{p}_1^2 = 0,5; \tilde{L}_1 = \frac{1}{\Omega_1^2 \tilde{C}_1} = \frac{1}{0,5 \cdot 4} = 0,5.$$

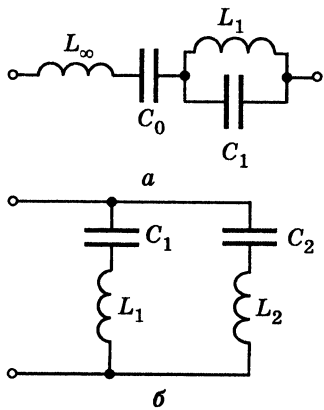


Рис. 6.27.

Схемні реалізації до прикладів: 6.6 (а); 6.7 (б)

Приклад 6.7. За другою формою Фостера визначити схемну реалізацію нормованої ОВФ двополюсника:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}^3 + 2,25\bar{p}}{\bar{p}^4 + 5\bar{p}^2 + 6},$$

яка згідно з табл. 6.6 має ознаки $\infty - \infty$.

Розв'язання. Визначимо корені знаменника $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$:

$$\bar{p}^2 = -2,5 \pm 0,5; \bar{p}_1^2 = -2; \bar{p}_2^2 = -3; \Omega_1^2 = 2; \Omega_2^2 = 3.$$

На підставі співвідношень (6.161) отримаємо значення параметрів елементів схеми:

$$\tilde{C}_\infty = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}^3 + 2,25\bar{p}}{\bar{p}(\bar{p}^4 + 5\bar{p}^2 + 6)} = 0;$$

$$\frac{1}{\tilde{L}_0} = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \bar{p} \tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \frac{\bar{p}^2(\bar{p}^2 + 2,25)}{\bar{p}^4 + 5\bar{p}^2 + 6} = 0;$$

$$\frac{1}{\tilde{L}_1} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow \bar{p}_1^2} \tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_1^2}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -2} \frac{\bar{p}(\bar{p}^2 + 2,25)}{(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 3)} \frac{\bar{p}^2 + 2}{\bar{p}} = 0,25;$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{1}{\Omega_1^2 \tilde{L}_1} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8};$$

$$\frac{1}{\tilde{L}_2} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow \bar{p}_2^2} \tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_2^2}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -3} \frac{\bar{p}(\bar{p}^2 + 2,25)}{(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 3)} \frac{\bar{p}^2 + 3}{\bar{p}} = \frac{3}{4};$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{1}{\Omega_2^2 \tilde{L}_2} = \frac{3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Отже, за відсутності елементів \tilde{C}_∞ і \tilde{L}_0 схема, яка реалізує задану ОВФ $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$, містить чотири елементи (рис. 6.27, б), нормовані значення яких становлять:

$$\tilde{L}_1 = 4; \tilde{C}_1 = \frac{1}{8}; \tilde{L}_2 = \frac{4}{3}; \tilde{C}_2 = \frac{1}{4}.$$

Приклад 6.8. Обчислити денормовані значення елементів схеми (рис. 6.27, б), якщо двополюсник живиться від джерела з внутрішнім опором 1 кОм, а нормувальна частота $\omega_{\text{норм}} = 10^6$ рад/с.

Розв'язання. На підставі формул (табл. 6.7) обчислимо:

$$L_1 = \tilde{L}_1 k_L = 4 \frac{10^3}{10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 4 \text{ мГн}; L_2 = \tilde{L}_2 k_L = \frac{4}{3} \text{ мГн};$$

$$C_1 = \tilde{C}_1 k_C = \frac{1}{8} \frac{1}{10^6 \cdot 10^3} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-9} \text{ нФ}; C_2 = \tilde{C}_2 k_C = \frac{1}{4} \text{ нФ}.$$

6.11. Реалізація реактансних функцій за Кауером

Реалізація за Кауером передбачає перетворення операторної реактансної функції до вигляду неперервного або ланцюгового дробу. Розкладання в ланцюговий дріб відносно \bar{p} з додатними степенями відповідає схемам, які реалізовані за першою формою Кауера. Розглядаючи це перетворення на прикладі операторної реактансної функції (6.135), з якої виділено цілу частину $\bar{p}\tilde{L}_1$, вираз (6.153) можна переписати у вигляді

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_1 + \frac{M_1(\bar{p})}{N(\bar{p})} = \bar{p}\tilde{L}_1 + Z_1(\bar{p}). \quad (6.162)$$

Рівності (6.162) відповідає двополюсник, вхідний опір якого визначається послідовним з'єднанням індуктивності \tilde{L}_1 і операторного опору $Z_1(\bar{p})$ (рис. 6.28, а). Якщо замість $Z_1(\bar{p})$ ввести обернену величину, виходить вираз

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_1 + \frac{1}{Y_1(\bar{p})}; Y_1(\bar{p}) = \frac{N(\bar{p})}{M_1(\bar{p})}. \quad (6.163)$$

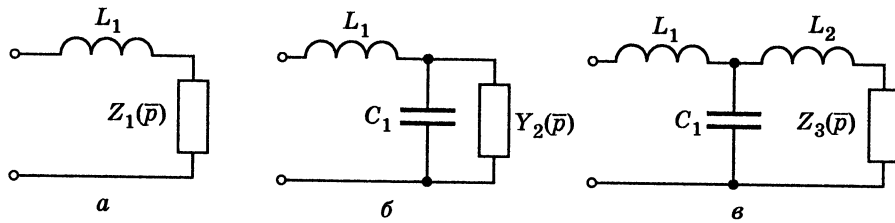


Рис. 6.28. Утворення східчастої схеми з полюсом у нескінченності

Функція $Y_1(\bar{p})$ — неправильний дріб, з якого можна виділити цілу частину $\bar{p}\bar{C}_1$, тоді

$$Y_1(\bar{p}) = \bar{p}\bar{C}_1 + \frac{N_1(\bar{p})}{M_1(\bar{p})} = \bar{p}\bar{C}_1 + Y_2(\bar{p}). \quad (6.164)$$

Провідність ділянки кола з опором $Z_1(\bar{p})$ на підставі рівняння (6.164) відповідає паралельному з'єднанню ємності \bar{C}_1 і ділянки кола, яка має провідність $Y_2(\bar{p})$ (рис. 6.28, б). Від правильного дробу $Y_2(\bar{p})$ можна перейти до оберненої величини — операторного опору $Z_2(\bar{p}) = M_1(\bar{p})/N_1(\bar{p})$, який є неправильним дробом:

$$Y_1(\bar{p}) = \bar{p}\bar{C}_1 + \frac{1}{Z_2(\bar{p})}. \quad (6.165)$$

Підстановка провідності (6.165) до формули (6.163) приведе до виразу:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\bar{L}_1 + \frac{1}{\bar{p}\bar{C}_1 + \frac{1}{Z_2(\bar{p})}}. \quad (6.166)$$

Якщо цілу частину неправильного дробу $Z_2(\bar{p})$ позначити $\bar{p}\bar{L}_2$, тоді

$$Z_2(\bar{p}) = \bar{p}\bar{L}_2 + \frac{1}{Y_3(\bar{p})}. \quad (6.167)$$

Ділянка з опором $Z_2(\bar{p})$ — це послідовне з'єднання індуктивності \bar{L}_2 і опору $Z_3(\bar{p})$ (рис. 6.28, в), від $Z_3(\bar{p})$ знову переходять до $Y_3(\bar{p})$. Якщо підставити опір (6.167) до виразу (6.166), виходить:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\bar{L}_1 + \frac{1}{\bar{p}\bar{C}_1 + \frac{1}{\bar{p}\bar{L}_2 + \frac{1}{Y_3(\bar{p})}}}. \quad (6.168)$$

Отже, на кожному етапі перетворення виділяється ціла частина неправильного дробу. Якщо ціла частина є еквівалентною

нормованому операторному опору, він приєднується до попереднього елемента послідовно, якщо ціла частина — нормована операторна провідність, вона приєднується до попереднього елемента паралельно. У такий спосіб утворюється східчаста схема, а форма подання ОВФ у вигляді (6.168) має назву неперервного або ланцюгового дробу. Східчасті схеми, які починаються з індуктивності в подовжній вітці (рис. 6.29, а, б) мають полюс у нескінченності. Від того, який елемент містить остання ланка, залежить значення вхідного опору за нульової частоти. Якщо остання ланка містить елементи \bar{L}_k, \bar{C}_k , за нульової частоти ОВФ має полюс. Така схема відповідає парно-непарній функції (рис. 6.29, а) з частотною залежністю реактивного опору (рис. 6.23, а). Якщо остання ланка східчастої схеми містить елемент \bar{L}_{k+1} (рис. 6.29, б), ОВФ — непарно-парна функція з частотною залежністю реактивного опору (рис. 6.23, б) — матиме нуль за нульової частоти.

Східчасту схему за першою формою Кауера можна отримати і за умови, коли $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ — правильний дріб ($m > n$). У цьому випадку на першому етапі слід перейти до оберненого дробу — провідності $Y_{\text{вх}}(\bar{p})$, яку аналогічно виразу (6.168) можна подати як ланцюговий дріб:

$$Y_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\bar{C}_1 + \frac{1}{\bar{p}\bar{L}_1 + \frac{1}{\bar{p}\bar{C}_2 + \frac{1}{\bar{p}\bar{L}_2 + \dots}}}. \quad (6.169)$$

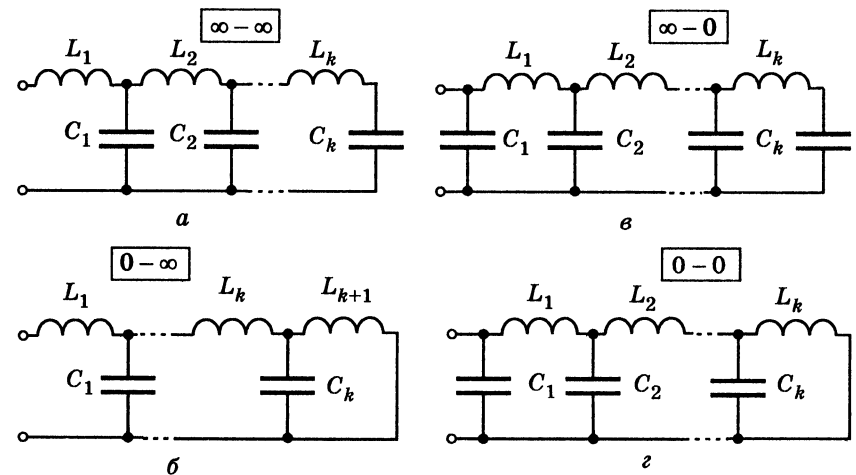


Рис. 6.29. Схемні реалізації за першою формою Кауера

Східчасті схеми, які відповідають виразу (6.169), утворені за принципом, розглянутим вище. Вони починаються з ємності \tilde{C}_1 , яка увімкнена паралельно вхідним затискачам кола і реалізує нуль у нескінченності (рис. 6.29, *в, з*). Схема (рис. 6.29, *в*), яка містить в останній ланці елементи \tilde{L}_k, \tilde{C}_k , має полюс за нульової частоти (частотну залежність реактивного опору зображено на рис. 6.23, *в*). Схема (рис. 6.29, *з*) з індуктивністю \tilde{L}_k в останній ланці має нуль за нульової частоти (частотна залежність реактивного опору зображена на рис. 6.23, *з*).

За другою формою Кауера можна скласти ще чотири схеми. При цьому ОВФ розкладають у ланцюговий дріб за від'ємними степенями \bar{p} ($\bar{p}^{-1} = 1/\bar{p}$). Якщо ОВФ — операторний опір, наприклад парно-непарна функція (6.143), яка має полюс у точці $\bar{p} = 0$, розкладання починають з виділення доданка $1/\bar{p}\tilde{C}_1$:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + Z_1(\bar{p}). \quad (6.170)$$

Схема, яка відповідає виразу (6.170), має у подовжній вітці ємність \tilde{C}_1 , з якою послідовно з'єднується ланка з операторним опором $Z_1(\bar{p})$ (рис. 6.30, *а*). Опір $Z_1(\bar{p})$ — уже непарно-парна функція, а відповідна цьому опорю провідність $Y_1(\bar{p})$ буде знову парно-непарною функцією з простим коренем у нулі:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{Y_1(\bar{p})}. \quad (6.171)$$

Якщо виділити цей корінь, провідність $Y_1(\bar{p})$ можна записати як суму провідностей:

$$Y_1(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + Y_2(\bar{p}). \quad (6.172)$$

На рис. 6.30, *а* ланку з опором $Z_1(\bar{p})$ (провідністю $Y_1(\bar{p})$) на підставі виразу (6.172) слід замінити на паралельне з'єднання

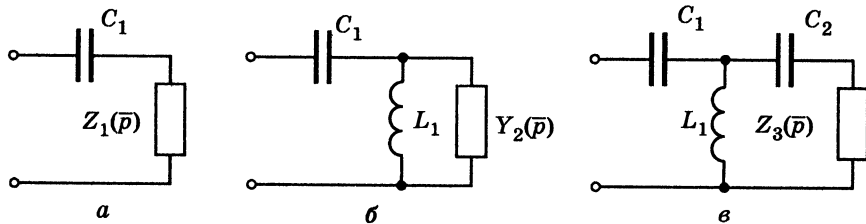


Рис. 6.30. Утворення східчастої схеми з полюсом у точці $\bar{p} = 0$

індуктивності \tilde{L}_1 з провідністю $Y_2(\bar{p})$ (рис. 6.30, *б*). Цій схемі відповідає ОВФ (6.169) з урахуванням рівняння (6.172):

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + Y_2(\bar{p})}. \quad (6.173)$$

Надалі провідність $Y_2(\bar{p})$ (непарно-парну функцію) знову слід подати через обернену парно-непарну функцію $Z_2(\bar{p})$: $Y_2(\bar{p}) = 1/Z_2(\bar{p})$, яку аналогічно формулі (6.171) можна записати як

$$Z_2(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + Z_3(\bar{p}).$$

Тоді замість провідності $Y_2(\bar{p})$ на рис. 6.30, *б* буде послідовне з'єднання ємності \tilde{C}_2 з ланкою, яка має опір $Z_3(\bar{p})$ (рис. 6.30, *в*), а провідність $Y_2(\bar{p})$ матиме вигляд

$$Y_2(\bar{p}) = \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + Z_3(\bar{p})}. \quad (6.174)$$

Якщо провідність (6.174) підставити до формули (6.173), виходить подання ОВФ схеми у вигляді ланцюгового дробу:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + \dots}}. \quad (6.175)$$

Перетворення ОВФ (3.82) з форми (6.135) до форми (6.175) здійснюється у процесі ділення парного полінома $M(\bar{p})$ на непарний $N(\bar{p})$, причому доданки обох поліномів розташовують у порядку за зростаючими степенями \bar{p} . Співвідношення між степенями m і n визначає склад останніх ланок східчастої схеми, які обумовлюють ознаку ОВФ при нескінченній частоті.

Якщо $m > n$, остання ланка містить \tilde{L}_k, \tilde{C}_k . Завдяки елементу \tilde{L}_k коло має полюс у нескінченності (рис. 6.31, *а*) і частотну залежність реактивного опору (рис. 6.23, *а*).

За умови $m < n$ остання ланка містить тільки ємність \tilde{C}_{k+1} (рис. 6.31, *в*), а низка послідовно з'єднаних ємностей реалізує нуль у нескінченності (залежність $X_{\text{вх}}(\Omega)$ зображено на рис. 6.23, *в*).

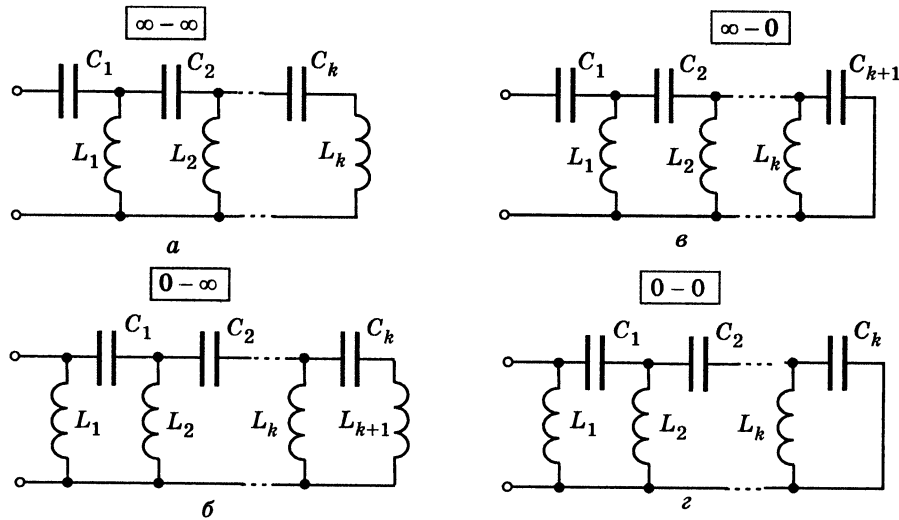


Рис. 6.31. Схемні реалізації за другою формою Кауера

У випадку, коли $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ є непарно-парною функцією, слід одразу перейти до провідності $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$, яка буде парно-непарною, і подати її на зразок дробу (6.175) у вигляді:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_2} + \dots}} \quad (6.176)$$

Індуктивна провідність, яку ввімкнено паралельно вхідним затискачам (поперечна вітка) (рис. 6.31, б, г), реалізує нуль у точці $\bar{p}=0$. Якщо $m > n$, елементами останньої ланки є $\tilde{C}_k, \tilde{L}_{k+1}$ (рис. 6.31, б). Завдяки індуктивності ОВФ має полюс у нескінченності (рис. 6.23, б). За умови $m < n$ до складу останньої ланки входить тільки ємність \tilde{C}_k (рис. 6.31, г). Утворена в такий спосіб низка ємностей реалізує нуль у нескінченності. Відповідну залежність $X_{\text{вх}}(\Omega)$ наведено на рис. 6.23, г.

Розглянуті методи синтезу реактансних ОВФ можна застосовувати і для синтезу ДДФ (для кіл із втратами). Так, вхідний операторний опір R, C -кола аналогічно виразу (6.155) можна подати як суму доданків:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_\infty + \frac{A_0}{\bar{p}} + \sum_r \frac{A_r}{\bar{p} + \sigma_r}, \quad (6.177)$$

де

$$A_\infty = \tilde{R}_\infty; A_0 = \frac{1}{\tilde{C}_0}; A_r = \frac{1}{\tilde{C}_r}; \sigma_r = \frac{1}{\tilde{R}_r \tilde{C}_r}. \quad (6.178)$$

Тут позначення коефіцієнтів такі ж самі, як у формулі (6.155), але вони мають інше значення. Перший доданок у сумі (6.177) відповідає резистивному опору, другий — ємнісному, а вираз під знаком суми еквівалентний операторному опору паралельного з'єднання елементів \tilde{R}_r, \tilde{C}_r (рис. 6.32, а). Сума у виразі (6.177) є еквівалентною послідовному з'єднанню ланок з цими опорамі. Така реалізація є аналогом першої форми Фостера.

R, C -реалізацію за другою формою Фостера виходить, якщо аналогічно виразу (6.160) записати операторну вхідну провідність:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_0 + A_\infty \bar{p} + \sum_r \frac{A_r \bar{p}}{\bar{p} + \sigma_r}, \quad (6.179)$$

де

$$A_0 = \tilde{G}_0; A_\infty = \tilde{C}_\infty; A_r = \frac{1}{\tilde{R}_r}; \sigma_r = \frac{1}{\tilde{R}_r \tilde{C}_r}. \quad (6.180)$$

Оскільки у правій частині рівняння (6.179) підсумовуються провідності, схемна реалізація функції $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$ матиме паралельно з'єднані вітки: перша містить провідність \tilde{G}_0 , друга — ємність \tilde{C}_∞ , а решта — послідовні з'єднання резисторів \tilde{R}_r та ємностей \tilde{C}_r (рис. 6.32, б — аналог другої форми Фостера).

Синтез R, L -структур за першою і другою формами Фостера здійснюється аналогічно.

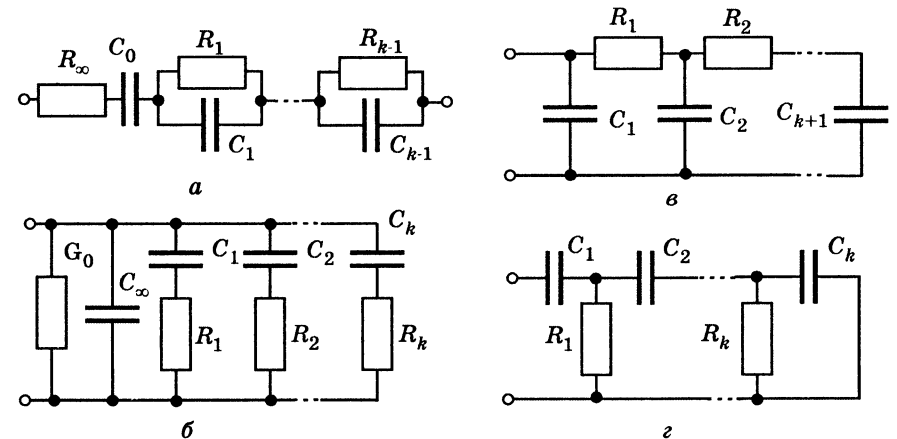


Рис. 6.32. Схемні реалізації складних R, C -двополусників

R, C -реалізація за першою формою Кауера виходить, якщо перетворити дробово-раціональну функцію $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у ланцюговий дріб, виділяючи на кожному етапі перетворення опір \bar{R}_k у подовжній вітці та ємність (операторну провідність $\bar{p}\bar{C}_k$) — у поперечній.

R, L -структури, отримані за першою формою Кауера, містять у подовжній вітці індуктивність (операторний опір $\bar{p}\bar{L}_k$), а в поперечній — опір \bar{R}_k (операторна провідність $1/\bar{R}_k$). При перетворенні на ланцюговий дріб функції $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$ першим елементом схеми R, C буде ємність, яку вмикають у поперечну вітку (рис. 6.32, *в*); схема R, L у поперечній вітці міститиме резистор \bar{R}_k .

Розкладання за другою формою Кауера передбачає виділення ємнісного опору в подовжніх вітках і резистивного — у поперечних (рис. 6.32, *г*) для R, C -структур. Схеми R, L , які утворюють за другою формою Кауера, у подовжніх вітках містять опори, а в поперечних — індуктивності. Схемні реалізації складних R, C -двополюсників (рис. 6.32) отримують з відповідних L, C -двополюсників заміною індуктивностей опорамі. Схеми R, L -двополюсників утворюють з L, C -двополюсників, замінюючи ємності опорамі.

Приклад 6.9. Реалізувати за першою формою Кауера ОВФ $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$, розглянуту в прикладі 6.6.

Розв'язання. Розкладемо $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у ланцюговий дріб за додатними степенями \bar{p} :

$$\begin{aligned} & \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{2\bar{p}^4 + \bar{p}^2} \Bigg| \frac{4\bar{p}^3 + 2\bar{p}}{\bar{p}/2 \rightarrow \bar{p}\bar{L}_1} \\ & \frac{4\bar{p}^3 + 2\bar{p}}{4\bar{p}^3 + 4\bar{p}/3} \Bigg| \frac{3\bar{p}^2 + 1}{4\bar{p}/3 \rightarrow \bar{p}\bar{C}_1} \\ & \frac{3\bar{p}^2 + 1}{3\bar{p}^2} \Bigg| \frac{2\bar{p}/3}{9\bar{p}/2 \rightarrow \bar{p}\bar{L}_2} \\ & \frac{2}{3} \Bigg| \frac{1}{2\bar{p}/3 \rightarrow \bar{p}\bar{C}_2}. \end{aligned}$$

Отже, ОВФ кола матиме вигляд

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{2} + \frac{1}{4\bar{p}/3 + \frac{1}{9\bar{p}/2 + \frac{1}{2\bar{p}/3}}},$$

а нормовані значення елементів відповідної східчастої схеми (рис. 6.33, *а*) становитимуть: $\bar{L}_1 = 1/2$; $\bar{C}_1 = 4/3$; $\bar{L}_2 = 9/2$; $\bar{C}_2 = 2/3$.

Приклад 6.10. Знайти схемну реалізацію нормованої ОВФ двополюсника, якщо

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{4\bar{p}^2 + 8\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 3\bar{p}}.$$

Розв'язання. Задана ОВФ не належить до реактансних функцій, оскільки її чисельник не є парною функцією \bar{p} . Розкладемо $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у ланцюговий дріб за першою формою Кауера:

$$\begin{aligned} & \frac{4\bar{p}^2 + 8\bar{p} + 1}{4\bar{p}^2 + 6\bar{p}} \Bigg| \frac{2\bar{p}^2 + 3\bar{p}}{2 \rightarrow \bar{R}_1} \\ & \frac{2\bar{p}^2 + 3\bar{p}}{2\bar{p}^2 + \bar{p}} \Bigg| \frac{2\bar{p} + 1}{\bar{p} \rightarrow \bar{p}\bar{C}_1} \\ & \frac{2\bar{p} + 1}{2\bar{p}} \Bigg| \frac{2\bar{p}}{1 \rightarrow \bar{R}_2} \\ & 2\bar{p} \Bigg| \frac{1}{2\bar{p} \rightarrow \bar{p}\bar{C}_2}. \end{aligned}$$

Отже, ОВФ кола матиме такий вигляд:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = 2 + \frac{1}{\bar{p} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2\bar{p}}}},$$

а нормовані значення елементів відповідної східчастої схеми (рис. 6.33, *б*) становитимуть: $\bar{R}_1 = 2$; $\bar{R}_2 = 1$; $\bar{C}_1 = 1$; $\bar{C}_2 = 2$.

Приклад 6.11. Реалізувати за другою формою Кауера ОВФ $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$, розглянуту в прикладі 6.6.

Розв'язання. Подамо $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у вигляді ланцюгового дроби, який розкладено за від'ємними степенями \bar{p} . Для цього розташуємо доданки поліномів чисельника і знаменника $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ за зростаючими степенями \bar{p} :

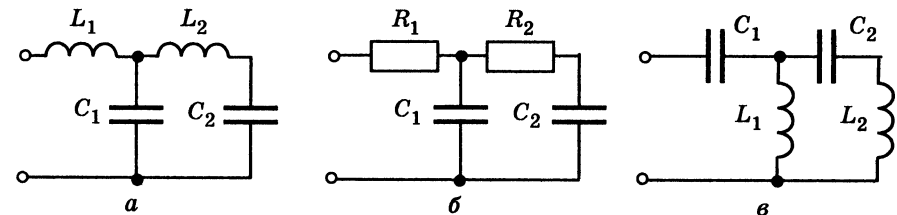


Рис. 6.33. Схемні реалізації до прикладів: 6.9 (*а*); 6.10 (*б*); 6.11 (*в*)

$$\frac{-1 + 4\bar{p}^2 + 2\bar{p}^4}{1 + 2\bar{p}^2} \left| \frac{2\bar{p} + 4\bar{p}^3}{2\bar{p}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} \right.$$

$$\frac{2\bar{p} + 4\bar{p}^3}{2\bar{p} + 2\bar{p}^3} \left| \frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p}^4}{\bar{p}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} \right.$$

$$\frac{-2\bar{p}^2 + 2\bar{p}^4}{2\bar{p}^2} \left| \frac{2\bar{p}^3}{\bar{p}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} \right.$$

$$2\bar{p}^3 \left| \frac{2\bar{p}^4}{\bar{p}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_2} \right.$$

У результаті отримаємо:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{2\bar{p}} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{1/\bar{p}}}} = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + \frac{1}{1/\bar{p}\tilde{L}_2}}}$$

Отже, східчаста схема (рис. 6.33, в), яка реалізує задану ОВФ, містить 4 елементи, нормовані значення яких становлять: $\tilde{L}_1 = 1$; $\tilde{L}_2 = 1$; $\tilde{C}_1 = 2$; $\tilde{C}_2 = 1$.

6.12. Реалізація ОПФ східчастими реактивними колами, навантаженими з обох боків

Вихідними для розв'язання задачі структурного синтезу є нормовані ОПФ, тому пошук схемних реалізацій чотириполіусників виконують відносно нормованих величин. У попередніх підрозділах докладно розглядалися методи синтезу двополіусників за ОВФ. Необхідно встановити зв'язок, який існує між ОПФ і ОВФ. Ця задача розв'язується аналітично за таких умов: по-перше, ОПФ — передатна функція поліномного фільтра; по-друге, фільтр реалізований елементами L , C ; по-третє, з одного боку до фільтра ввімкнено навантаження — активний опір R_2 , а з іншого — джерело напруги з внутрішнім опором R_i . Це один із поширених способів застосування фільтрів. Схему, яка відповідає означеним вимогам, зображено на рис. 6.34, де фільтр умовно позначений як L, C -чотириполіусник. Оскільки даний фільтр містить частотно залежні елементи, його ОПФ буде функцією нормованої частоти Ω .

Припустимо, що вихідна потужність, яка передається до навантаження, $P_{\text{вих}} = P_2$, а потужність джерела $P_{\text{вх}} = P$. Тоді коефіцієнт передачі за потужністю становить

$$H_P(\Omega) = \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{P_2}{P}, \quad (6.181)$$

де

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}. \quad (6.182)$$

За певних умов потужність, яка надходить до навантаження, набуває максимального значення, тоді

$$H_{P_{\text{max}}}(\Omega) = \frac{P_{2_{\text{max}}}}{P}. \quad (6.183)$$

Нормований коефіцієнт передачі за потужністю становить

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{H_P(\Omega)}{H_{P_{\text{max}}}(\Omega)}. \quad (6.184)$$

Підстановка величин (6.181) і (6.183) до формули (6.184) приводить до виразу:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{P_2}{P_{2_{\text{max}}}}, \quad (6.185)$$

тобто нормований коефіцієнт передачі за потужністю залежить тільки від передатних властивостей чотириполіусника за різних умов передачі та не залежить від потужності джерела.

Аналогічно виразу (6.181) можна визначити коефіцієнт передачі за напругою:

$$H_U(j\Omega) = \frac{U_2(j\Omega)}{\underline{E}}. \quad (6.186)$$

Позначивши напругу, що відповідає значенню $P_{2_{\text{max}}}$, як $U_{2_{\text{max}}}$, а коефіцієнт передачі за напругою

$$H_{U_{\text{max}}}(j\Omega) = \frac{U_{2_{\text{max}}}(j\Omega)}{\underline{E}}, \quad (6.187)$$

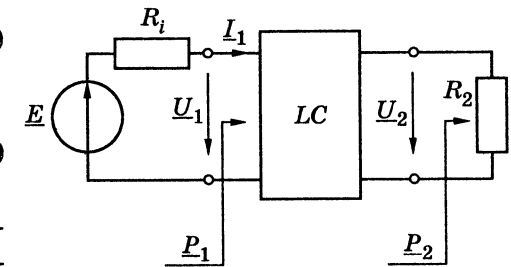


Рис. 6.34. Реактивний чотириполіусник, навантажений з обох боків

можна записати нормований коефіцієнт передачі за напругою:

$$\tilde{H}_U(j\Omega) = \frac{U_2(j\Omega)}{U_{2\max}(j\Omega)}. \quad (6.188)$$

КПФ (6.188) враховує передатні властивості кола за напругою за різних умов. Згідно з виразом (3.99), який встановлює зв'язок між передатними функціями кола за потужністю і за напругою, для нормованих передатних функцій можна записати:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = k_R H_U^2(\Omega). \quad (6.189)$$

З урахуванням співвідношення (6.19) виходить рівність, яка пов'язує нормований коефіцієнт передачі за потужністю з функцією фільтрації навантаженого L, C -чотириполосника:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{k_R}{1 + \varphi^2(\Omega)}.$$

Оскільки задача реалізації розв'язується з точністю до постійного множника, можна взяти $k_R = 1$, тоді

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)}. \quad (6.190)$$

З іншого боку, передатні властивості кола (рис. 6.34) можна дослідити за схемою (рис. 6.35). На рис. 6.35, *a* зображено навантажений L, C -чотириполосник, вхідний опір якого є комплексною величиною:

$$Z_{\text{вх}}(j\Omega) = R_{\text{вх}}(\Omega) + jX_{\text{вх}}(\Omega). \quad (6.191)$$

Якщо замінити навантажений L, C -чотириполосник його вхідним опором, замість кола (рис. 6.34) отримаємо одноконтурне коло (рис. 6.35, *б*), комплексне діюче значення струму I_1 в якому визначається за законом Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)}.$$

Активна потужність P_1 , яка виділяється в опорі $R_{\text{вх}}(\Omega)$ на частоті Ω , визначається квадратом діючого значення струму:

$$P_1 = I_1^2 R_{\text{вх}}(\Omega) = \frac{E^2 R_{\text{вх}}(\Omega)}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}.$$

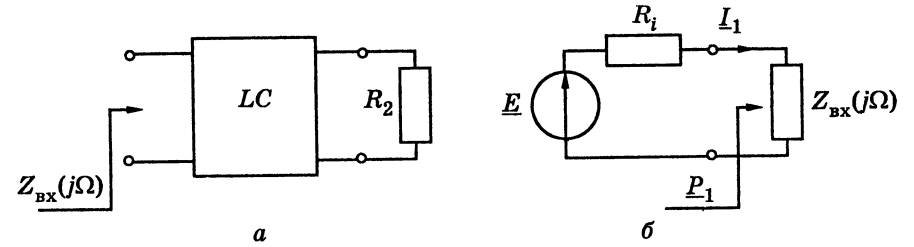


Рис. 6.35. Еквівалентні схеми відносно вхідних затискачів чотириполосника

Якщо вважати, що L, C -чотириполосник не має втрат і тому потужність P_1 , яка надходить до нього, цілком потрапляє до навантаження, тобто $P_2 = P_1$, тоді

$$P_2 = \frac{E^2 R_{\text{вх}}(\Omega)}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}. \quad (6.192)$$

Потужність P_1 (і відповідно P_2) набуває максимального значення за умови узгодження джерела з навантаженням $Z_{\text{вх}}(j\Omega)$ (рис. 6.35, *б*):

$$P_{1\max} = P_{2\max} = \frac{E^2}{4R_i}. \quad (6.193)$$

Вираз для нормованого коефіцієнта передачі за потужністю, визначений через параметри джерела і вхідний опір навантаженого чотириполосника, виходить в результаті підстановки співвідношень (6.192) і (6.193) до формули (6.185):

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{E^2 R_{\text{вх}}(\Omega)}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2} \frac{4R_i}{E^2} = \frac{4R_{\text{вх}}(\Omega)R_i}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}. \quad (6.194)$$

Для перетворення виразу (6.194) використовують рівність:

$$4R_{\text{вх}}(\Omega)R_i = |R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2 - |R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2, \quad (6.195)$$

квадрати модулів у якій, зважаючи на співвідношення (6.191), становлять

$$\begin{cases} |R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2 = (R_i + R_{\text{вх}}(\Omega))^2 + X_{\text{вх}}^2(\Omega); \\ |R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2 = (R_i - R_{\text{вх}}(\Omega))^2 + X_{\text{вх}}^2(\Omega). \end{cases} \quad (6.196)$$

Якщо тепер до чисельника виразу (6.194) підставити співвідношення (6.195), виходить:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2 - |R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2} = 1 - \frac{|R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}. \quad (6.197)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (6.190) і (6.197), можна записати:

$$\frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)} = 1 - \frac{|R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2},$$

або

$$1 - \frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)} = \frac{\varphi^2(\Omega)}{1 + \varphi^2(\Omega)} = \frac{|R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}.$$

Зважаючи на співвідношення (6.20), останнє рівняння набуває вигляду:

$$\left| \frac{\varphi(\Omega)}{V(\Omega)} \right|^2 = \frac{|R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2},$$

або

$$\frac{\varphi(j\Omega)}{V(j\Omega)} = \frac{R_i - Z_{\text{вх}}(j\Omega)}{R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)}. \quad (6.198)$$

Для нормованих опорів рівність (6.198) становитиме

$$\frac{\varphi(j\Omega)}{V(j\Omega)} = \frac{1 - \tilde{Z}_{\text{вх}}(j\Omega)}{1 + \tilde{Z}_{\text{вх}}(j\Omega)}, \quad (6.199)$$

де $\tilde{Z}_{\text{вх}}(j\Omega) = Z_{\text{вх}}(j\Omega)/R_i$ — нормований вхідний опір навантаженого чотириполюсника.

Розв'язок рівняння (6.199) відносно $\tilde{Z}_{\text{вх}}(j\Omega)$ має вигляд:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(j\Omega) = \frac{V(j\Omega) \mp \varphi(j\Omega)}{V(j\Omega) \pm \varphi(j\Omega)}.$$

Підстановка $j\Omega = \bar{p}$ дає:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{V(\bar{p}) \mp \varphi(\bar{p})}{V(\bar{p}) \pm \varphi(\bar{p})}. \quad (6.200)$$

Формула (6.200) дозволяє отримати нормований вхідний операторний опір навантаженого L, C -чотириполюсника через поліном

Гурвіца $V(\bar{p})$ і функцію фільтрації $\varphi(\bar{p})$, які визначаються згідно з вимогами до частотної характеристики ослаблення за потужністю A_p на підставі формул (6.42), (табл. 6.1) і (6.21) для поліномних фільтрів Баттерворта і відповідно (6.78) та (6.56) для фільтрів Чебишова.

Приклад 6.12. Визначити $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ фільтра-прототипу Баттерворта порядку $n=3$.

Розв'язання. На підставі табл. 6.1 для $n=3$

$$V(\bar{p}) = \bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1.$$

За формулою (6.21) визначаємо модуль функції фільтрації:

$$\varphi(\Omega) = \Omega^n, \text{ або } |\varphi(j\Omega)| = \Omega^n.$$

Після заміни $j\Omega = \bar{p}$ і підстановки n отримаємо:

$$\varphi(\bar{p}) = \pm \bar{p}^3. \quad (6.201)$$

Тоді

$$1) \begin{cases} V(\bar{p}) - \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1; \\ V(\bar{p}) + \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1 \end{cases} \text{ за умови } \varphi(\bar{p}) = \bar{p}^3;$$

$$2) \begin{cases} V(\bar{p}) - \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1; \\ V(\bar{p}) + \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1, \end{cases} \text{ якщо } \varphi(\bar{p}) = -\bar{p}^3.$$

Відповідно, отримуємо два варіанти функцій нормованого опору:

$$\tilde{Z}'_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}; \quad (6.202)$$

$$\tilde{Z}''_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}. \quad (6.203)$$

Приклад 6.13. Визначити $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ ФП Чебишова, який має порядок $n=2$, а його нормовані корені $\bar{p}_{1,2} = -0,555893 \pm j0,899454$.

Розв'язання. Для того щоб скористатись формулою (6.79), спочатку визначимо: $2\Delta = 1,111786$; $\Delta^2 + \Omega^2 = 1,118035$, тоді

$$V(\bar{p}) = 2\varepsilon(\bar{p}^2 + 2\Delta\bar{p} + \Delta^2 + \Omega^2) = 2\varepsilon(\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,118035).$$

На підставі формули (6.56) і табл. 6.2 запишемо модуль функції фільтрації:

$$\varphi(\Omega) = \varepsilon T_2(\Omega) = \varepsilon(2\Omega^2 - 1), \text{ або } |\varphi(j\Omega)| = \varepsilon|2\Omega^2 - 1|.$$

Для визначення функції фільтрації $\varphi(\bar{p})$ слід скористатися формулою:

$$\varphi(\bar{p}) = \frac{\varepsilon}{j^n} T_n(\Omega) \Big|_{\Omega=j\bar{p}}, \quad (6.204)$$

на підставі якої для $n=2$

$$\varphi(\bar{p}) = \frac{\varepsilon}{j^2} (2(j\bar{p})^2 - 1) = \varepsilon(2\bar{p}^2 + 1) = 2\varepsilon(\bar{p}^2 + 0,5).$$

Тоді для нижніх знаків у виразі (6.200) матимемо:

$$\begin{cases} V(\bar{p}) + \varphi(\bar{p}) = 2\varepsilon(2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,618035); \\ V(\bar{p}) - \varphi(\bar{p}) = 2\varepsilon(1,111786\bar{p} + 0,618035); \end{cases}$$

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,618035}{1,111786\bar{p} + 0,618035}.$$

Обернену функцію отримаємо, якщо скористаємося верхніми знаками у формулі (6.200).

Здобуті у прикладах 6.12–6.13 ОВФ не реактансні, а мають усі ознаки ДДФ. Отже, доведено, що ОВФ L, C -чотириполосника, навантаженого на активний опір R_2 , це — ДДФ.

Обернене твердження належить Дарлінгтону⁷ і відоме в теорії синтезу як *теорема Дарлінгтона*: ОВФ може бути реалізована реактивним чотириполосником, навантаженим на активний опір. Як і реактансні функції, ОВФ навантаженого ФП можна реалізувати східчастими схемами за першою формою Кауера. Порядок ОВФ визначає кількість реактивних елементів східчастої структури, яка утворює чотириполосник. На кожному етапі розкладання в ланцюговий дріб виділяється або операторний нормований опір індуктивності подовжньої вітки, або операторна нормована провідність ємності поперечної вітки поліномного ФНЧ. На останньому етапі одразу виділяються два доданки: або операторний опір індуктивності з послідовно з'єднаним резистивним навантаженням R_2 , або операторна провідність ємності, до якої паралельно

⁷ Дарлінгтон Сідней, Sidney Darlington (1906–1997) — американський учений, закінчив Гарвардський університет (1928), захистив дисертацію в Колумбійському університеті (1940). Працював (1929–1971) у лабораторії Бела, разом із колегою К. Шеноном заклав підвалини значних досягнень у мережах зв'язку, які сприяли впровадженню інтегральних схем, комп'ютерів і сучасного зв'язку. Розробив методи синтезу електричних кіл. Працював у галузі радіолокації, зокрема запропонував використання радіоімпульсу з лінійною частотною модуляцією (1947). Винайшов спосіб об'єднання кількох транзисторів в одному корпусі, так звану схему Дарлінгтона.

приєднується провідність навантаження G_2 . При реалізації фільтрів з характеристиками Баттерворта, а також з характеристиками Чебишова за умови непарного n , внутрішній опір джерела і навантаження мають однакові значення ($R_i = R_2$). За умови парного n фільтри Чебишова мають різні значення R_2 і R_i .

Наступні два приклади ілюструють реалізацію ОВФ, розглянутих у прикладах 6.12 і 6.13.

Приклад 6.14. Накреслити схему L, C -фільтра, навантаженого з обох боків, зі вхідним опором (6.202).

Розв'язання. Від функції $\tilde{Z}'_{\text{вх}}(\bar{p})$ перейдемо до неправильного дроби:

$$\tilde{Y}'_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1},$$

який запишемо у вигляді ланцюгового дроби:

$$\frac{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + \bar{p}} \Big| \frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{\bar{p}} \rightarrow \tilde{Y}'_1(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_1$$

$$\frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 2\bar{p}} \Big| \frac{\bar{p} + 1}{2\bar{p}} \rightarrow \tilde{Z}'_2(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_2$$

$$\bar{p} + 1 \Big| \frac{1}{\bar{p} + 1} \rightarrow \tilde{Y}'_3(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_3 + G_2.$$

Отже, ОВФ кола матиме такий вигляд:

$$\tilde{Y}'_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p} + \frac{1}{2\bar{p} + \frac{1}{\bar{p} + 1}},$$

а нормовані значення елементів відповідної схеми (рис. 6.36) становитимуть: $\tilde{C}_1 = 1$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{C}_2 = 1$; $\tilde{G}_2 = \tilde{R}_2 = 1$.

Якщо розкласти в ланцюговий дріб функцію (6.203), отримаємо:

$$\tilde{Z}''_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p} + \frac{1}{2\bar{p} + \frac{1}{\bar{p} + 1}},$$

а нормовані значення елементів відповідної схеми (рис. 6.37, а) становитимуть: $\tilde{L}_1 = 1$; $\tilde{C}_2 = 2$; $\tilde{L}_2 = 1$; $\tilde{G}_2 = \tilde{R}_2 = 1$.

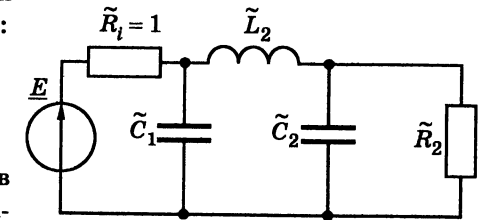


Рис. 6.36.

Схема, реалізована у прикладі 6.14

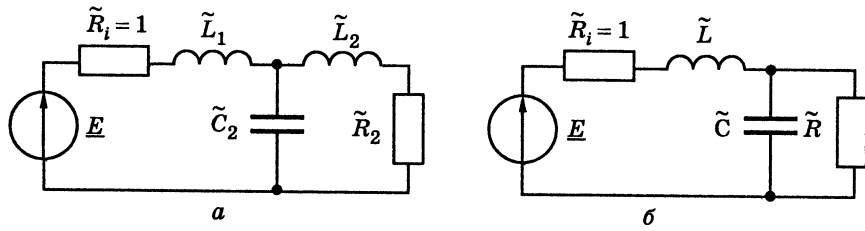


Рис. 6.37. Схеми, реалізовані у прикладах: 6.14 (а); 6.15 (б)

Приклад 6.15. Зобразити схему L, C -фільтра, навантаженого з обох боків, якщо його вхідний опір відповідає виразу, знайденому у прикладі 6.13.

Розв'язання. Запишемо функцію $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у вигляді ланцюгового дробу:

$$\frac{2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,618035}{2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p}} \left| \frac{1,111786\bar{p} + 0,618035}{1,798907\bar{p} \rightarrow \bar{p}\tilde{L}} \right.$$

$$\frac{1,111786\bar{p}^2 + 0,618035}{0,687121\bar{p} + 0,3819664 \rightarrow \bar{p}\tilde{C} + G_2} \left| \frac{1,618035}{0,687121\bar{p} + 0,3819664} \right.$$

Отже, ОВФ кола матиме вигляд:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = 1,798907\bar{p} + \frac{1}{0,687121\bar{p} + 0,3819664},$$

а нормовані значення елементів відповідної схеми (рис. 6.37, б) становитимуть: $\tilde{L} = 1,798907$; $\tilde{C} = 0,687121$; $\tilde{R} = 2,618$.

6.13. Перетворення схеми ФП у схеми інших типів. Денормування елементів перетворених схем

У задачах апроксимації від вимог до частотної характеристики ослаблення фільтрів інших типів переходять до вимог відносно ФНЧ, який вважається прототипом. Саме для ФП визначається нормована ОВФ, а потім і схемна реалізація, від якої переходять до схеми заданого фільтра. У даному підрозділі на прикладі кола (рис. 6.38, а) розглянуто, як вирішується ця задача.

Перехід від схеми ФП до схеми ФВЧ. Перетворення нормованої ОПФ ФВЧ у відповідну ОПФ ФП виконують заміною $j\Omega$ (нормованої комплексної частоти ФВЧ) на $1/j\tilde{\Omega}$ ($j\tilde{\Omega}$ — нормована комплексна частота ФП). Перехід від схеми ФП (рис. 6.38, а) до схеми ФВЧ відбувається зворотною заміною в операторному опорі $j\tilde{\Omega}\tilde{L}$ (\tilde{L} — нормована індуктивність ФП) частоти $j\tilde{\Omega}$ на $1/j\Omega$. При цьому утворюється операторний опір $\tilde{L}/j\Omega$, який можна поставити у відповідність операторному опорі $1/j\Omega\tilde{C}_в$ нормованої ємності $\tilde{C}_в$ ФВЧ

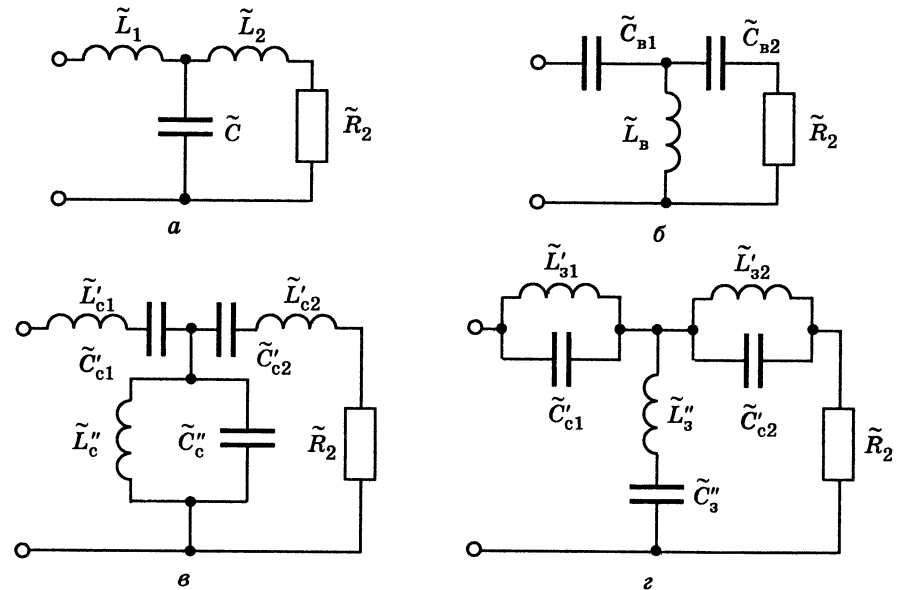


Рис. 6.38. Перетворення схеми ФП у схеми фільтрів інших типів

(індекс «в» означає належність елемента до фільтра верхніх частот). Ємність $\tilde{C}_в$ визначають із рівності $\tilde{L}/j\Omega = 1/j\Omega\tilde{C}_в$, звідки

$$\tilde{C}_в = \frac{1}{\tilde{L}}. \quad (6.205)$$

Нормований ємнісний опір ФП $1/j\tilde{\Omega}\tilde{C}$ перетворюється на нормований опір ФВЧ $j\Omega(1/\tilde{C})$, який відповідає індуктивному опорі $j\Omega\tilde{L}_в$. Із рівності $j\Omega(1/\tilde{C}) = j\Omega\tilde{L}_в$ визначають нормовану індуктивність ФВЧ через нормовану ємність ФП:

$$\tilde{L}_в = \frac{1}{\tilde{C}}. \quad (6.206)$$

Отже, перетворення схеми ФП–ФВЧ відбувається заміною індуктивності \tilde{L} та ємності \tilde{C} відповідно на ємність $\tilde{C}_в$ та індуктивність $\tilde{L}_в$ (рис. 6.38, б).

Перехід від схеми ФП до схеми СФ. Нехай СФ має центральну частоту ω_0 і смугу пропускання Π_{ω} .

Нормовану ОПФ ФП перетворюють у ОПФ СФ за формулою (6.95).

Для того щоб перейти до схеми СФ, необхідно до виразу операторного опору $j\tilde{\Omega}\tilde{L}$ підставити відповідність (6.94):

$$j\tilde{\Omega}\tilde{L} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \tilde{L} = j\Omega\tilde{L} + \frac{k_{\Delta}^2 \tilde{L}}{j\Omega}.$$

Позначивши елементи СФ, операторні опори яких визначено у процесі перетворення, нижнім індексом «с» (смуговий) і одним штрихом зверху, можна записати:

$$j\Omega\tilde{L} + \frac{k_{\Delta}^2 \tilde{L}}{j\Omega} = j\Omega\tilde{L}'_c + \frac{1}{j\Omega\tilde{C}'_c},$$

звідки виходить співвідношення для обчислення нормованих елементів:

$$\tilde{L}'_c = \tilde{L}; \tilde{C}'_c = \frac{1}{k_{\Delta}^2 \tilde{L}}, \quad (6.207)$$

де $k_{\Delta} = \frac{\omega_0}{\Pi_{\omega}}$.

За формулою (6.95) також визначають ємнісну провідність ФП:

$$j\tilde{\Omega}\tilde{C} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \tilde{C} = j\Omega\tilde{C} + \frac{k_{\Delta}^2 \tilde{C}}{j\Omega}.$$

Якщо позначити елементи, провідності яких визначено, нижнім індексом «с» і двома штрихами зверху, виходить:

$$j\Omega\tilde{C} + \frac{k_{\Delta}^2 \tilde{C}}{j\Omega} = j\Omega\tilde{C}''_c + \frac{1}{j\Omega\tilde{L}''_c},$$

звідки нормовані елементи СФ визначають через нормовані елементи ФП:

$$\tilde{C}''_c = \tilde{C}; \tilde{L}''_c = \frac{1}{k_{\Delta}^2 \tilde{C}}. \quad (6.208)$$

Отже, перехід від схеми ФП до схеми СФ супроводжується заміною нормованої індуктивності \tilde{L} у подовжній вітці ідеальним послідовним контуром з нормованими елементами \tilde{L}'_c і \tilde{C}'_c , який також увімкнено у подовжню вітку. Нормована ємність \tilde{C} поперечної вітки ФП перетворюється в ідеальний паралельний контур з нормованими елементами \tilde{L}''_c і \tilde{C}''_c , який також увімкнено у поперечну вітку СФ (рис. 6.38, в).

Перехід від схеми ФП до схеми ЗФ. Нехай ЗФ має центральну частоту ω_0 і смугу затримки $\Delta\omega_3$. Виконуючи перетворення

ФП–ЗФ, слід скористатися співвідношенням (6.118), тоді операторна провідність подовжньої вітки ФП $1/j\tilde{\Omega}\tilde{L}$ становитиме

$$\frac{1}{j\tilde{\Omega}\tilde{L}} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \frac{1}{\tilde{L}} = \frac{j\Omega}{\tilde{L}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{L}}.$$

Доданки у правій частині відповідають ємнісній та індуктивній провідностям. Позначивши елементи, провідності яких визначено, нижнім індексом «з» (загороджувальний) і одним штрихом зверху, можна записати:

$$\frac{j\Omega}{\tilde{L}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{L}} = j\Omega\tilde{C}'_3 + \frac{1}{j\Omega\tilde{L}'_3},$$

звідки

$$\tilde{L}'_3 = \frac{\tilde{L}}{k_{\Delta}^2}; \tilde{C}'_3 = \frac{1}{\tilde{L}}. \quad (6.209)$$

Ємнісний опір поперечної вітки ФП з урахуванням виразу (6.118) набуває вигляду:

$$\frac{1}{j\tilde{\Omega}\tilde{C}} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \frac{1}{\tilde{C}} = \frac{j\Omega}{\tilde{C}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{C}}.$$

Елементи ЗФ, опори яких підсумовують, позначено нижнім індексом «з» і двома штрихами зверху:

$$\frac{j\Omega}{\tilde{C}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{C}} = j\Omega\tilde{L}''_3 + \frac{1}{j\Omega\tilde{C}''_3},$$

тоді

$$\tilde{L}''_3 = \frac{1}{\tilde{C}}; \tilde{C}''_3 = \frac{\tilde{C}}{k_{\Delta}^2}. \quad (6.210)$$

Отже, перехід від схеми ФП до схеми ЗФ супроводжується заміною індуктивності \tilde{L} у подовжній вітці ідеальним паралельним контуром з елементами \tilde{L}'_3 , \tilde{C}'_3 і заміною ємності \tilde{C} ідеальним послідовним контуром з елементами \tilde{L}''_3 , \tilde{C}''_3 (рис. 6.38, з).

Схеми перетворення елементів ФП у відповідні елементи фільтрів інших типів, а також формули, за якими визначають перетворені нормовані параметри елементів, зведені до табл. 6.8.

Денормування параметрів елементів здійснюють за формулами (див. табл. 6.7). Значення нормувальної частоти $\omega_{\text{норм}}$ залежить від типу фільтра. Якщо синтезується фільтр Баттерворта, $\omega_{\text{норм}} = \omega_{\text{гр}}$, а гранична частота визначається за формулами (6.29) для ФНЧ

Перетворення елементів ФП

Тип фільтра	Схема ланки		Розрахункові формули
ФП			\tilde{L}, \tilde{C}
ФВЧ			$\tilde{L}_b = \frac{1}{\tilde{C}}, \tilde{C}_b = \frac{1}{\tilde{L}}$
СФ			$\tilde{L}'_c = \tilde{L}; \tilde{C}'_c = \frac{1}{k_\Delta^2 \tilde{L}}; k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Pi_\omega}$
			$\tilde{C}''_c = \tilde{C}; \tilde{L}''_c = \frac{1}{k_\Delta^2 \tilde{C}}$
ЗФ			$\tilde{L}'_z = \frac{\tilde{L}}{k_\Delta^2}; \tilde{C}'_z = \frac{1}{\tilde{L}}; k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_3}$
			$\tilde{L}''_z = \frac{1}{\tilde{C}}; \tilde{C}''_z = \frac{\tilde{C}}{k_\Delta^2}$

і (6.89) для ФВЧ на рівні 3 дБ ослаблення за потужністю. При синтезуванні фільтра Чебишова гранична частота збігається з частотою ω_Δ , яка відповідає ослабленню за потужністю на рівні A_Δ (це, як правило, вихідні величини).

6.14. Синтез фільтрів на операційних підсилювачах

У розділі 6 розглянуто перший етап синтезу кола — визначення ОПФ, яка задовольняє певним вимогам до частотних характеристик кола і відповідає умовам фізичної реалізації. Не менш важливими є другий і третій етапи — це задачі структурного і параметричного синтезу кола. Розв'язання цих задач за допомогою схем з ОП ілюструє приклад.

Приклад 6.16. Визначити структуру та параметри елементів кола, за допомогою яких можна реалізувати ОПФ СФ Чебишова, отриману в прикладі 6.4.

Розв'язання. У прикладі 6.4 отримано ОПФ СФ четвертого порядку у вигляді:

$$H_U(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,532336\Pi_\omega p + 103,350727\Pi_\omega^2} \times \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,57945\Pi_\omega p + 122,454527\Pi_\omega^2}$$

Підставивши значення смуги пропускання $\Pi_\omega = 40 \cdot 10^3$ рад/с, знайдемо:

$$H_1(p) = \frac{40 \cdot 10^3 p}{p^2 + 21293,44p + 1,6536116 \cdot 10^{11}}; \quad (6.211)$$

$$H_2(p) = \frac{40 \cdot 10^3 p}{p^2 + 23178p + 1,9592724 \cdot 10^{11}}. \quad (6.212)$$

Оскільки функція $H_U(p)$ дорівнює добутку $H_1(p) \times H_2(p)$, вона може бути реалізована у вигляді каскадного з'єднання чотириполюсників (рис. 6.39).

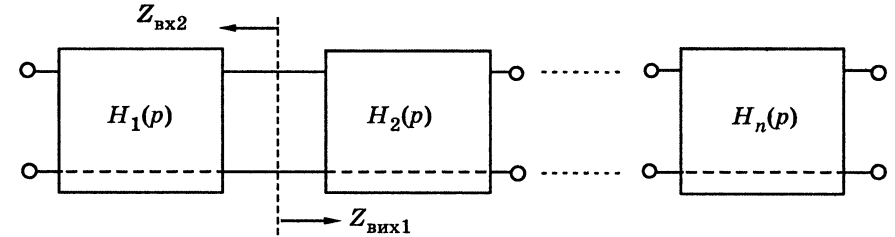


Рис. 6.39. Каскадне з'єднання чотириполюсників

Загалом існує два способи каскадної реалізації:

1) каскадно-узгоджена, коли вхідний опір наступного каскаду збігається з вихідним опором попереднього ($Z_{вх n} = Z_{вих (n-1)}$); цей спосіб застосовують при реалізації мостовими або східчастими реактивними чотириполюсниками;

2) каскадно-розв'язана, коли вхідний опір наступного каскаду значно більший вихідного опору попереднього ($Z_{вх n} \gg Z_{вих (n-1)}$); здійснюється за допомогою схем з ОП (активних R, C-фільтрів), у яких вхідний і вихідний опір різняться на декілька порядків (див. п. 4.8.1).

З аналізу функцій $H_1(p)$ і $H_2(p)$ випливає, що вони відповідають ланкам другого порядку типу СФ

(див. [7, підрозд. 6.2]), кожен з яких можна реалізувати за допомогою активного R, C-фільтра. Згідно з другим способом реалізації шукана ОПФ СФ четвертого порядку забезпечується каскадним з'єднанням двох активних ланок другого порядку.

Користуючись відомою методикою (див. приклад 3.10, а також [7, підрозд. 6.4]), знайдемо ОПФ активного фільтра другого порядку (рис. 6.40).

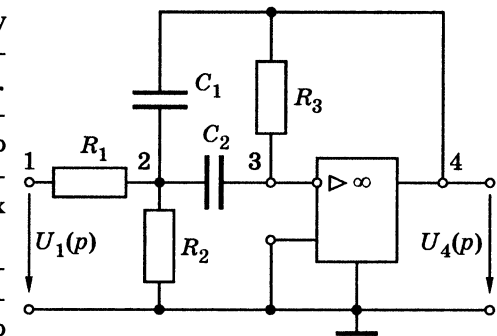


Рис. 6.40. Схема активного СФ другого порядку

ОПФ цього фільтра визначимо за формулою

$$H_1(p) = \frac{U_4(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}},$$

яка містить відношення алгебраїчних доповнень матриці операторних провідностей кола:

$$(Y(p)) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + pC_1 + pC_2 & -pC_2 & -pC_1 \\ 0 & -pC_2 & G_3 + pC_2 & -G_3 \\ 0 & -pC_1 & -G_3 & G_3 + pC_1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Відповідні алгебраїчні доповнення отримаємо, враховуючи відомі правила визначення знаків [7, підрозд. 6.4] та викреслюючи у чисельнику і знаменнику 1 і 4-й рядки, 4 і 3-й стовпці — в чисельнику та 1 і 3-й — у знаменнику:

$$\Delta_{14,43} = -pG_1C_2; \quad \Delta_{11,43} = p^2C_1C_2 + pG_3(C_1 + C_2) + G_3(G_1 + G_2).$$

Остаточно матимемо:

$$H_1(p) = \frac{pG_1C_2}{p^2C_1C_2 + pG_3(C_1 + C_2) + G_3(G_1 + G_2)}. \quad (6.213)$$

Переходячи від провідностей до опорів і вважаючи для спрощення однаковими значення ємностей $C_1 = C_2 = C$, отримаємо:

$$H_1(p) = \frac{p/R_1C}{p^2 + 2p/R_3C + (R_1 + R_2)/R_1R_2R_3C^2}. \quad (6.214)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p у виразах для ОПФ (6.211) і (6.214), можна скласти систему рівнянь для визначення елементів першої ланки СФ:

$$\begin{cases} 1/R_1^{(1)}C^{(1)} = 4 \cdot 10^4; \\ 2/R_3^{(1)}C^{(1)} = 21293,44; \\ (R_1^{(1)} + R_2^{(1)})/R_1^{(1)}R_2^{(1)}R_3^{(1)}(C^{(1)})^2 = 1,6536116 \cdot 10^{11}, \end{cases} \quad (6.215)$$

де верхніми індексами позначено приналежність елементів до першої ланки.

Оскільки в системі (6.215) кількість невідомих більше кількості рівнянь, слід задатися значенням певного параметра, виходячи з додаткових умов, пов'язаних з конструктивною чи схемною реалізацією, типовою схемою ввімкнення каскаду тощо.

Нехай $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = C^{(1)} = 100$ пФ. Тоді з першого рівняння системи (6.215) знайдемо $R_1^{(1)} = 250$ кОм, з другого — $R_3^{(1)} = 939,256$ кОм, з третього — $R_2^{(1)} = 645,5$ Ом.

Аналогічно, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у виразах для ОПФ (6.212) і (6.214), складемо систему рівнянь для другої ланки:

$$\begin{cases} 1/R_1^{(2)}C^{(2)} = 4 \cdot 10^4; \\ 2/R_3^{(2)}C^{(2)} = 23178; \\ (R_1^{(2)} + R_2^{(2)})/R_1^{(2)}R_2^{(2)}R_3^{(2)}(C^{(2)})^2 = 1,9592724 \cdot 10^{11}, \end{cases} \quad (6.216)$$

Якщо вважати (з метою уніфікації елементів), що $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = C_1^{(2)} = C_2^{(2)}$, з системи (6.216) виходить: $R_1^{(2)} = 250$ кОм; $R_2^{(2)} = 593,2$ Ом; $R_3^{(2)} = 862,387$ кОм.

6.15. Синтез фільтрів на нетрадиційних операційних підсилювачах

У розділі 4 розглядалися нові конструктивні елементи сучасних електронних кіл — трибрамні конвертори та конвеєри, трансімпедансні, транскондуктивні підсилювачі та побудовані на їх основі універсальні три-, чотири- та п'ятибрамники. Ці нові елементи (нетрадиційні для класичних методів схемотехнічної реалізації) нині посідають провідне місце в розробленні електронної апаратури, а одержані на їх базі кола мають значно вищі технічні показники, ніж створені на класичних ОП.

6.15.1. Фільтри з інтегральним підсилювачем струму

Недоліком класичних активних R, C -фільтрів з ОП є обмежений діапазон частот, у якому можуть бути використані ці кола. Верхня гранична частота фільтрів на класичних ОП зазвичай обмежується значенням 100 кГц. Нові активні компоненти та функціональні блоки, запропоновані вже в монолітному інтегральному вигляді, дозволяють синтезувати аналогові фільтри, що працюють не в класичному базисі напруг (НБ), а в струмовому базисі (СБ). Кола в струмовому базисі, зокрема трансадмітансний ОП (ОТП, *див.* п. 4.8.5), мають певні переваги. Паразитні полюси активних компонентів у цьому випадку не є домінуючими, оскільки легко компенсуються, що дає можливість оброблення сигналів зі значно вищою частотою. При цьому значно зменшується час затримки

сигналу, втрати енергії, покращуються шумові характеристики, забезпечується більша лінійність АЧХ при більших миттєвих значеннях сигналів. Фільтри у струмовому базисі легше налаштувати та перестроювати.

Синтезуючи фільтри, виходять із класичних, добре розроблених активних R, C -структур у базисі напруг. Для спрощення викладення доцільно обмежитися фільтром 2-го порядку з одним активним компонентом — ідеальним підсилювачем напруги. Для цього фільтра застосовують дуальне перетворення, яке не змінює вигляд ОПФ і чутливість фільтра (при цьому відбувається лише заміна змінних — струмів і напруг).

Дуальне перетворення виконують у такий спосіб:

1. Взаємно поміняти входи кола. Збуджуюче джерело живлення видалити. Вхід прототипу замкнути (в нього потече струм дуального кола). До нового входу (раніше виходу) ввімкнути джерело струму.

2. Підсилювач напруги, керований напругою, замінити підсилювачем струму, керованим струмом, з тими самими значеннями коефіцієнта передачі $B_i = A_i$.

3. Підсумовуючий підсилювач напруги, який описується рівнянням

$$U_{\text{вих}}(p) = A_1 U_1(p) + A_2 U_2(p), \quad (6.217)$$

де A_1, A_2 — коефіцієнти передачі за напругою, замінити зворотно ввімкненим підсилювачем струму з двома виходами:

$$I_1(p) = B_1 I_0(p); \quad I_2(p) = B_2 I_0(p), \quad (6.218)$$

де B_1, B_2 — коефіцієнти передачі за струмом.

4. Коло зворотного зв'язку залишити незмінним.

Наведений алгоритм можна проілюструвати на прикладі ФВЧ другого порядку (рис. 6.41), який має обмежений коефіцієнт підсилення.

У класичному базисі напруг ОПФ фільтра (ФВЧ-НБ) можна визначити за формулою [7, (6.57)]:

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{ab,r(p+q)}}{\Delta_{aa,r(p+q)}} = \frac{\Delta_{14,4(4+3)}}{\Delta_{11,4(4+3)}}.$$

З огляду на відомі з теорії визначників співвідношення: $\Delta_{nm,mt} = 0$; $\Delta_{ab,r(p+q)} = \Delta_{ab,rp} - \Delta_{ab,rq}$, виходить:

$$H_U(p) = \frac{\Delta_{14,44} - \Delta_{14,43}}{\Delta_{11,44} - \Delta_{11,43}} = \frac{-\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,44} - \Delta_{11,43}}. \quad (6.219)$$

Матриця провідностей фільтра має такий вигляд:

$$(Y(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} pC_1 & -pC_1 & 0 & 0 \\ -pC_1 & G_2 + pC_1 + pC_3 & -pC_3 & -G_2 \\ 0 & -pC_3 & G_4 + pC_3 & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 & G_2 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Обчисливши алгебраїчні доповнення (аналогічно підрозд. 6.14) у виразі (6.219), можна записати вираз для ОПФ:

$$H_U(p) = \frac{p^2 C_1 C_3}{p^2 C_1 C_3 + p G_4 (C_1 + C_3) + p C_3 G_2 - p C_3 G_2 + G_2 G_4} = \frac{p^2 H_\infty}{p^2 + p \left(\frac{1}{C_3 R_4} + \frac{1}{C_1 R_4} + \frac{1 - H_\infty}{C_1 R_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_3 R_2 R_4}}.$$

Останній вираз можна записати компактніше, якщо використати відповідні позначення:

$$H_U(p) = \frac{p^2 H_\infty}{p^2 + \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.220)$$

де H_∞ — значення АЧХ фільтра при $\omega \rightarrow \infty$; резонансна частота —

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_3 R_2 R_4}}; \quad (6.221)$$

$Q = H(\omega_{\text{рез}})$ — добротність полюса, причому

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{C_1 R_2}{C_3 R_4}} + \sqrt{\frac{C_3 R_2}{C_1 R_4}} + (1 - H_\infty) \sqrt{\frac{C_3 R_4}{C_1 R_2}}. \quad (6.222)$$

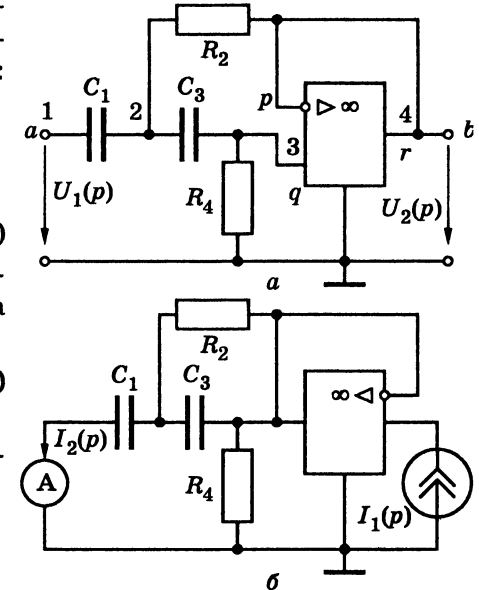


Рис. 6.41. Схеми активного ФВЧ у базисах: a — напруг (ФВЧ-НБ); b — струмів (ФВЧ-СБ)

Вище (див. табл. 6.1) наведені значення коефіцієнтів b_n нормованого полінома Баттерворта (6.42). Якщо пронормувати вираз (6.220) за значенням $\omega_{рез}$, для реалізації фільтра Баттерворта другого порядку необхідно, щоб $1/Q = b_1 = 1,41$. Тоді відповідно до співвідношень (6.221), (6.222) для фільтра Баттерворта ($Q = 0,707$) з параметрами $f_{гр} = 20$ кГц, $H_{гр} = -3$ дБ, $f_{рез} = 2$ кГц, $H_{рез} = -39$ дБ параметри компонентів (при $H_{\infty} = 1$) для схеми (рис. 6.41) становитимуть: $C_1 = C_3 = 2,2$ нФ; $R_2 = 5,085$ кОм; $R_4 = 2,543$ кОм.

Згідно з наведеним вище алгоритмом дуального перетворення необхідно:

- схему ФВЧ-НБ (рис. 6.41, а) перетворити на схему ФВЧ-СБ (рис. 6.41, б);
- підсилювач напруги з коефіцієнтом підсилення A замінити підсилювачем струму з коефіцієнтом підсилення B , причому $B = A = 1$;
- одночасно замінити вхід і вихід підсилювача та всього фільтра; тоді реакція (струм) буде замкненим на виході, при цьому збудження буде також струмовим.

Для коефіцієнта передачі за струмом будуть справедливі ті самі вирази (6.220)–(6.222), що і для коефіцієнта передачі за напругою. Спрощену схему ФВЧ-СБ зображено на рис. 6.42, в якій необхідна величина підсилення за струмом забезпечується навісними резисторами R_1, R_2 .

На рис. 6.43 наведено амплітудно-частотні характеристики ФВЧ-НБ та ФВЧ-СБ. Видно, що в НБ небажано проявляються паразитні полюси підсилювача (LM 741).

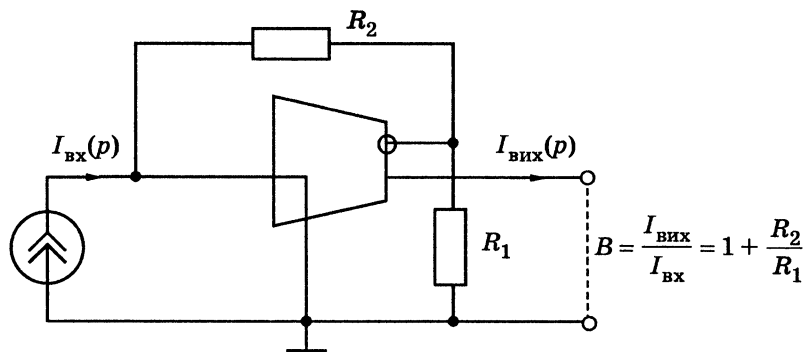


Рис. 6.42. Спрощена схема ФВЧ зі струмовим ОП

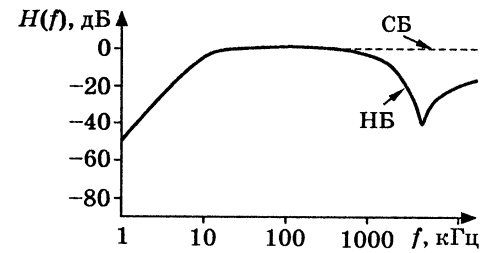


Рис. 6.43. АЧХ ФВЧ-НБ і ФВЧ-СБ

Порівняння амплітудних характеристик в обох базисах підтверджує переваги струмового базису. Струмовий ОП дозволяє також синтезувати складніші фільтри, коли слід використовувати їх багатовходове ввімкнення.

6.15.2. Фільтри з трансімпедансними операційними підсилювачами

У процесі синтезу цих фільтрів також доцільно виходити із класичних, добре розроблених структур, що працюють у НБ, перетворюючи їх за допомогою дуального алгоритму (див. п. 6.15.1). Коефіцієнт передачі за напругою широко розповсюдженої схеми фільтрів другого порядку з двома петлями зворотного зв'язку і звичайними ОП (рис. 6.44, а) описується виразом:

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-Y_1(p)Y_3(p)}{Y_5(p)[Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p)] + Y_2(p)Y_3(p)} \quad (6.223)$$

Вибираючи окремі провідності відповідно до табл. 6.9, отримують необхідний тип фільтра (ФВЧ, СФ, ФНЧ).

Таблиця 6.9

Провідності елементів фільтрів різних типів

Тип фільтра	$Y_1(p)$	$Y_2(p)$	$Y_3(p)$	$Y_4(p)$	$Y_5(p)$
ФВЧ	pC_1	pC_1	pC_3	G_4	G_5
СФ	pC_1	G_2	G_3	pC_4	pC_5
ФНЧ	G_1	G_2	G_3	pC_4	pC_5

Частина кола, позначена на рис. 6.44, а штриховою лінією, є узагальненим (частотно-залежним) джерелом напруги $U_2(p)$, керованим струмом, яке описується передатним опором:

$$Z_{пер}(p) = \frac{U_2(p)}{I_2(p)} = -\frac{1}{Y_5(p)} \quad (6.224)$$

Заміна цієї частини схеми трансімпедансним підсилювачем (ТОП), у якого до компенсацийного входу Z ввімкнено провідність

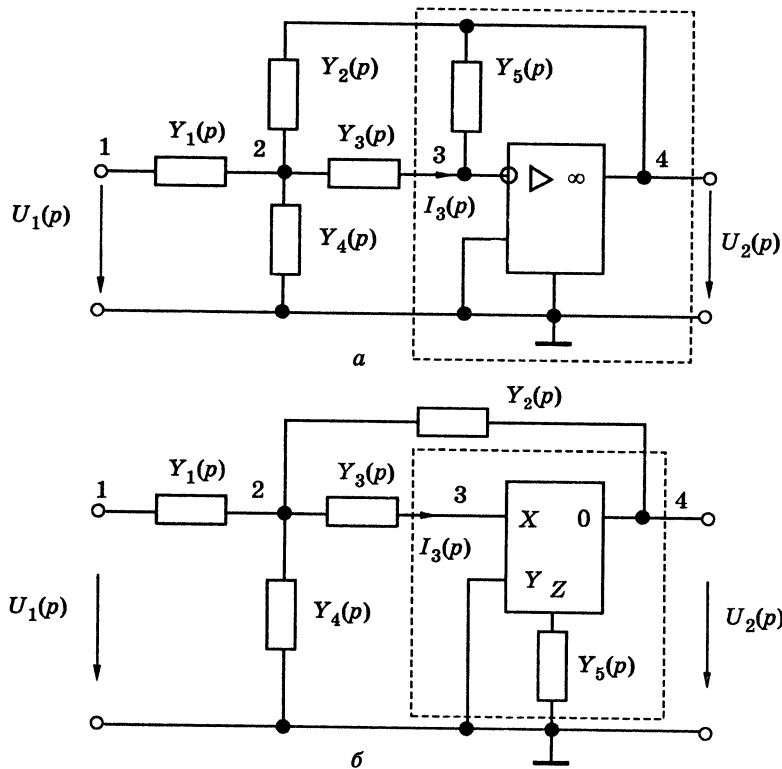


Рис. 6.44. Схеми активних фільтрів другого порядку:
 а — з ОП у НВ; б — з ТОП у С/Н-Б

$Y_5(p)$, дозволяє отримати дуальне коло (рис. 6.44, б), що працює у змішаному базисі С/Н-Б, оскільки сам ТОП працює у СБ.

Дуальне коло в ідеальному випадку має коефіцієнт передачі за струмом (6.223). Реальне коло С/Н-Б доцільніше використовувати в області вищих частот, ніж коло НВ, оскільки ОПФ (6.223) менше залежатиме від зменшення коефіцієнта передачі на верхніх частотах. Коло С/Н-Б (рис. 6.44, б) можна дуальним перетворенням представити у вигляді кола СБ (рис. 6.45, б). Згідно з алгоритмом дуального перетворення необхідно:

- змінити місцями вхід і вихід як ТОП, так і всього фільтра;
- новий вихід фільтра замкнути; через нього потече струм $I_2(p)$, який є новою реакцією.

Дуальне коло у СБ (рис. 6.45, б) має такий самий коефіцієнт передачі за струмом $H_I(p) = I_2(p)/I_1(p)$, як і коефіцієнт передачі за напругою (6.223) у НВ.

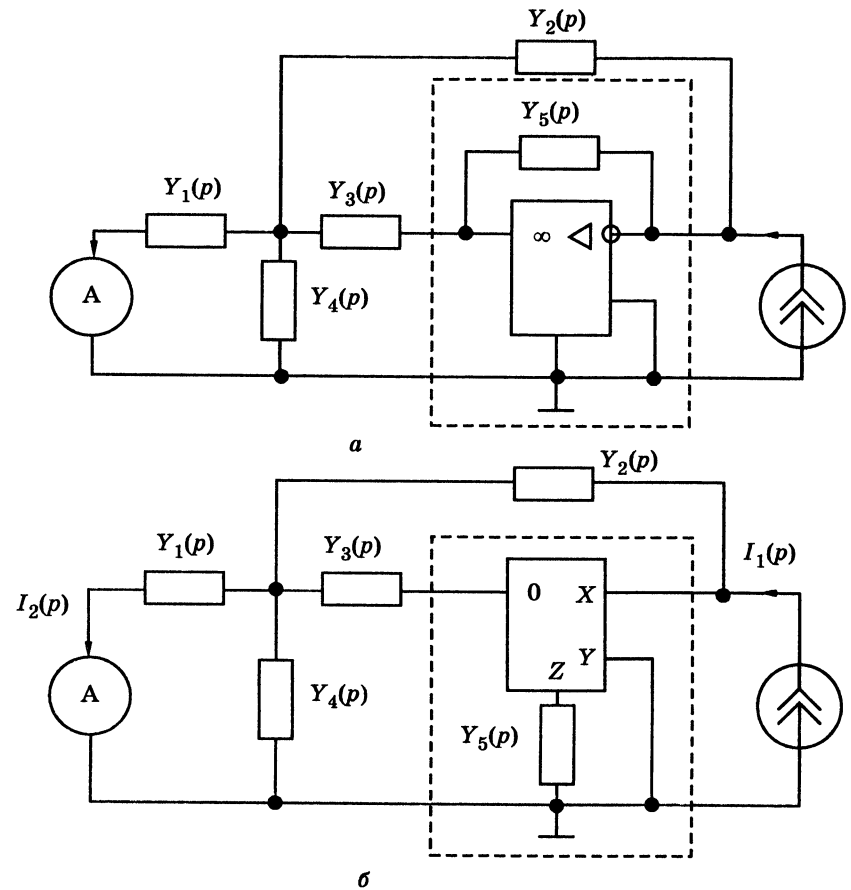


Рис. 6.45. Схеми активних фільтрів другого порядку:
 а — з ОП у С/Н-Б; б — з ТОП у СБ

Аналогічно можна перетворити коло НВ (рис. 6.44, а). Якщо при цьому залишити класичний ОП, вийде дуальне коло (рис. 6.45, а) у змішаному С/Н базисі. Для цього кола коефіцієнт передачі також описується співвідношенням (6.223).

Реалізувати струмовий базис (рис. 6.45, б), зокрема СФ-СБ, можна, вибравши з табл. 6.9 відповідні провідності для смугового фільтра. ОПФ дуальних схем (рис. 6.44, а і 6.45, б) визначають за формулою (6.223) або за відомою методикою (див. приклад 6.16):

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}} = -\frac{p^2 C_1 G_3}{p^2 C_5 (C_1 + C_4) + p C_5 (G_2 + G_3) + G_2 G_3}.$$

Якщо не враховувати ємність C_4 (вона дозволяє коригувати значення H_{\max} АЧХ фільтра на резонансній частоті $\omega = \omega_{\text{рез}}$ та добротність Q), тоді:

$$H_U(p)|_{C_4=0} = \frac{p/C_5 R_3}{p^2 + p(R_2 + R_3)/C_1 R_2 R_3 + 1/C_1 C_5 R_2 R_3} = \frac{-pH_{\max}(\omega_{\text{рез}}/Q)}{p^2 + (\omega_{\text{рез}}/Q)p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.225)$$

де

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_5 R_2 R_3}}; \quad (6.226)$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 R_3 C_1}}{(R_2 + R_3)\sqrt{C_5}}; \quad (6.227)$$

$$H_{\max} = \frac{C_1 R_2}{C_5 (R_2 + R_3)} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} Q^2. \quad (6.228)$$

Параметри розглянутої схеми визначають за формулами (6.225)–(6.228) та коефіцієнтами заданої ОПФ (аналогічно прикладу 6.16).

6.15.3. Модифіковані активні ФНЧ другого порядку в базисі струмів

Еліптичні кола другого порядку дозволяють реалізовувати нулі ОПФ на заданій частоті. Нульові провали АЧХ є найбільш крутими (але при цьому амплітудна характеристика також складніша) при використанні апроксимації Чебишова або Кауера.

У загальному вигляді ОПФ таких кіл задається співвідношенням:

$$H_U(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} = \frac{a'_2 p^2 + a'_1 p + a'_0}{p^2 + b'_1 p + b'_0} = \frac{a'_2 p^2 + (\omega_{\min}/Q_{\min})p + \omega_{\min}^2}{p^2 + (\omega_{\text{рез}}/Q)p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.229)$$

де $a'_k = a_k/b_2$; $b'_k = b_k/b_2$ — коефіцієнти ОПФ, нормовані за значенням b_2 , а в окремому випадку режекторних фільтрів ($a_1 = 0$):

$$H_U(p) = \frac{H_{\max}(p^2 + \omega_{\min}^2)}{p^2 + (\omega_{\text{рез}}/Q)p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.230)$$

де H_{\max} — максимальне значення АЧХ фільтра.

Залежно від співвідношень між частотами полюса $f_{\text{рез}}$ та нуля f_{\min} розрізняють такі типи фільтрів (див. [7, підрозд. 6.3]): РФ ($f_{\text{рез}} = f_{\min}$), ФНЧ із режекцією (РФНЧ) ($f_{\text{рез}} < f_{\min}$) та ФВЧ з режекцією ($f_{\text{рез}} > f_{\min}$).

На рис. 6.46, а зображено широко розповсюджену схему еліптичного фільтра другого порядку з одним ОП, яку можна перевести з класичного НБ у новий СБ, використовуючи струмові конвертери ССП.

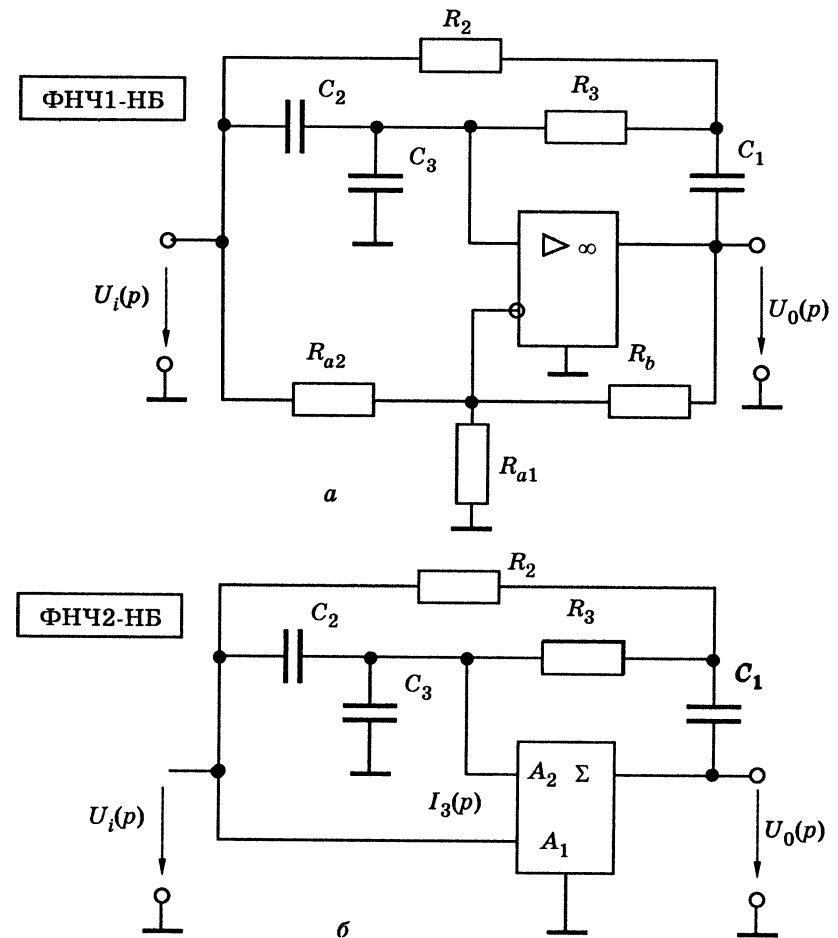


Рис. 6.46. Схеми активних фільтрів другого порядку у НБ: а — з ОП; б — з підсумовуючим підсилювачем напруги

Фільтр (рис. 6.46, а) працює у класичному НБ. Аналіз схеми дає такі співвідношення між її параметрами та коефіцієнтами ОПФ (6.229):

$$b'_0 = \omega_{\text{рез}}^2 = \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_{23}}; \quad b'_1 = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} = \frac{1}{C_1 R_{23}} - \frac{H}{R_3 C_{23}}; \quad (6.231)$$

$$a'_0 = \omega_{\text{мін}}^2 = \frac{1+H-R_b/R_{a2}}{R_2 R_3 C_1 C_{23}}; \quad a'_1 = \frac{(1+H)C_2}{C_{23}} - \frac{R_b}{R_{a2}}; \quad (6.232)$$

$$a'_1 = \frac{\omega_{\text{мін}}}{Q_{\text{мін}}} = \frac{1+H}{R_2 R_3 C_1 C_{23}/C_2} - \frac{R_b}{R_{a2}} \left(\frac{1}{R_3 C_{23}} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1} \right); \quad (6.233)$$

де

$$R_a = \frac{R_{a1} R_{a2}}{R_{a1} + R_{a2}}; \quad H = \frac{R_b}{R_a}; \quad C_{23} = C_2 + C_3; \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (6.234)$$

Для реалізації ОПФ (6.230) коефіцієнт a_1 має дорівнювати нулю. Для фільтра ФНЧ1-НБ із параметрами $f_{\text{рез}} = 100$ кГц; $f_{\text{мін}} = 300$ кГц і $Q = 1$ за умови

$$R_2 = R_3 = R; \quad C_1 = C; \quad C_{23} = \frac{C}{4Q^2}; \quad \frac{1}{RC} = \frac{2Q}{\omega_{\text{рез}}} \quad (6.235)$$

виходять такі значення елементів: $R_2 = R_3 = 1,59$ кОм; $C_1 = 1$ нФ; $C_2 = 270$ пФ; $C_3 = 730$ пФ; $R_{a1} = 15,7$ кОм; $R_{a2} = 27,5$ кОм; $R_b = 9,9$ кОм. У колі використовується класичний ОП типу LM741, а для порівняння — сучасніший LF356. АЧХ фільтра зображено на рис. 6.47. При використанні ОП типу LM741 (крива б) існує суттєва різниця АЧХ порівняно з елементом LF356 (крива а), але значно кращі характеристики має коло, яке працює у струмовому базисі (крива в).

Схему кола у струмовому базисі можна отримати, перетворивши схему ФНЧ1-НБ. Коло ФНЧ1-НБ (рис. 6.46, а) збуджується

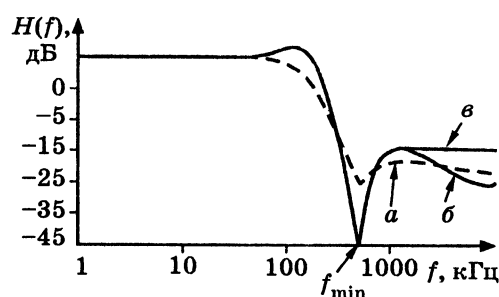


Рис. 6.47. АЧХ ФНЧ-НБ і ФНЧ-СБ у якому підсумовуючий

незалежним джерелом напруги U_i , а реакцією є напруга U_0 . Нехай коефіцієнт передачі за напругою $H_U(p) = U_0/U_i$ цієї схеми задається формулою (6.229). За принципом суперпозиції в тому ж базисі ФНЧ можна перетворити на коло (рис. 6.46, б),

підсилювач напруги замінює ОП з частотно-незалежним зворотним зв'язком. Параметри підсилювача:

$$A_1 = -\frac{R_b}{R_{a2}} = -0,3618; \quad A_2 = 1 + \frac{R_b}{R_a} = 1,9955, \quad (6.236)$$

де R_a визначається співвідношенням (6.234). Підсумовуючий підсилювач заміщує два паралельно з'єднаних джерела напруги, які керуються напругою.

Вихідна напруга підсилювача описується виразом:

$$U_0(p) = A_1 U_1(p) + A_2 U_2(p) = -0,3618 U_1(p) + 1,9955 U_2(p). \quad (6.237)$$

Коло ФНЧ2-НБ (рис. 6.46, б) модифікують за допомогою дуального перетворення. Для цього необхідно поміняти місцями вхід та вихід схеми, збудження у вигляді джерела напруги видалити, вхід прототипу замкнути (через нього потече струм дуального кола), збудження нового входу (раніше виходу) здійснити джерелом струму. Оскільки замість підсилювача напруги (ДНКН) слід ввімкнути підсилювач струму (ДСКС) з однаковими коефіцієнтами підсилення $B_i = A_i$ та поміняти місцями входи, підсумовуючий підсилювач напруги, який описується рівнянням (6.237), замінюють зворотно ввімкненим підсилювачем струму з двома виходами (рис. 6.48), для якого вірні співвідношення:

$$I_1(p) = B_1 I_v(p); \quad I_2(p) = B_2 I_v(p), \quad (6.238)$$

де $B_1 = A_1 = -0,3618$; $B_2 = A_2 = 1,9955$.

Значення елементів R , C -віток зворотного зв'язку не змінюють. В результаті виходить коло ФНЧ-СБ (рис. 6.48).

Отже, проведене дуальне перетворення зберігає незмінними формули ОПФ, включаючи числові значення коефіцієнтів.

Підсилювач струму з двома виходами (рис. 6.48) найближчим часом випускатиметься в інтегральному виконанні. Нині його можна реалізувати двома джерелами

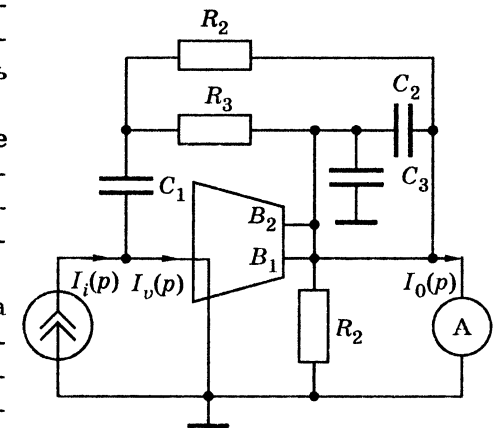


Рис. 6.48. Схема ФНЧ-СБ із підсилювачем струму

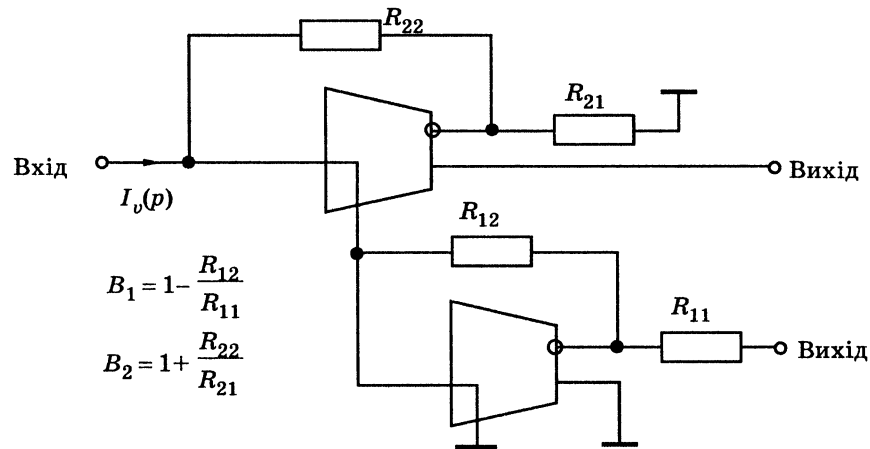


Рис. 6.49. Схема ФНЧ-СБ з двома джерелами струму

струму з навісними резисторами (рис. 6.49), які забезпечують необхідні значення коефіцієнтів B_1 та B_2 .

Аналіз кола (рис. 6.49) підтверджує загальний висновок про переваги струмового базису (рис. 6.47, крива e). Підсилювач струму з багатьма виходами можна також використати при реалізації складніших активних R, C -фільтрів у струмовому базисі.

6.16. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. З яких етапів складається розв'язання задачі синтезу електричного кола? Пояснити зміст кожного етапу.
2. Який зв'язок існує між АКХ кола й ослабленням кола за потужністю? Які вимоги ставлять до частотної залежності ослаблення?
3. Які фільтри називають поліномними?
4. Пояснити особливості частотних характеристик фільтрів Баттерворта. Зобразити якісно графіки цих характеристик для ФНЧ Баттерворта різних порядків.
5. Як розташовані на комплексній площині корені полінома Баттерворта?
6. Які особливості мають частотні характеристики фільтрів Чебишова? Зобразити якісно АЧХ ФВЧ Чебишова другого і третього порядків.
7. Які особливості мають поліноми Чебишова? Розрахувати коефіцієнти полінома Чебишова 11-го порядку.
8. Чим відрізняються частотні характеристики фільтрів Чебишова і Золотарьова?
9. У чому відмінність синтезу ФНЧ від синтезу фільтрів інших типів? Пояснити поняття «фільтр-прототип».

10. Пояснити, як здійснюється перетворення частотних діапазонів ФНЧ-ФВЧ. Яке співвідношення пов'язує комплексні нормовані частоти ФНЧ і ФВЧ?
11. Пояснити, як здійснюється перетворення частотних діапазонів ФНЧ-СФ. У чому полягає принцип збереження довжини частотного інтервалу?
12. Як використовують властивість геометричної симетрії частотної характеристики для синтезу смугового фільтра?
13. Визначити ОПФ ФНЧ Баттерворта, якщо на частоті 750 Гц ослаблення за потужністю $A_p(f)$ не має перевищувати 2 дБ, а на частоті 1600 Гц — бути меншим 20 дБ.

Відповідь:

$$H_U(p) = \frac{2526,62 \cdot 10^4}{p^2 + 3847,32p + 2526,62 \cdot 10^4} \frac{2526,62 \cdot 10^4}{p^2 + 9288,06p + 2526,62 \cdot 10^4}$$

14. Пояснити, чи можна реалізувати ОПФ, знайдену в завданні 13, за допомогою двох касадно-з'єднаних активних ланок другого порядку (рис. 3.10). Знайти значення елементів цих ланок, якщо для кожної з них $R_1 = R_2 = R_3 = 51$ кОм.

Відповідь: $C_1^{(1)} = 15,3$ нФ; $C_2^{(1)} = 1$ нФ; $C_1^{(2)} = 6,33$ нФ; $C_2^{(2)} = 2,4$ нФ.

15. Визначити ОПФ ФВЧ Баттерворта, якщо на частоті 20 кГц ослаблення за потужністю $A_p(f)$ не має перевищувати 1 дБ, а на частоті 4500 Гц — бути меншим 20 дБ.

Відповідь: $H_U(p) = \frac{p^2}{p^2 + 12,58 \cdot 10^4 p + 79,6 \cdot 10^8}$

16. Користуючись відомою методикою (див. приклад 3.10, а також [7, підрозд. 6.4]), знайти ОПФ активного фільтра (рис. 6.50) та порівняти з результатом завдання 15. Реалізувати ОПФ, знайдену у завданні 15, за допомогою активного ФВЧ. Знайти значення елементів активного фільтра, поклавши $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ нФ.

Відповідь: $R_1 = 5,27$ кОм; $R_2 = 23,85$ кОм.

17. Реалізувати ОПФ фільтра Чебишова (див. приклад 6.3) за допомогою диференціувальної ланки першого порядку (рис. 2.18, а) й активної ланки другого порядку (рис. 6.50). Визначити значення опорів цих ланок, поклавши $C_1 = C_2 = C_3 = 2$ нФ.

Відповідь: $R = 50$ кОм; $R_1 = 16,7$ кОм; $R_2 = 600$ кОм.

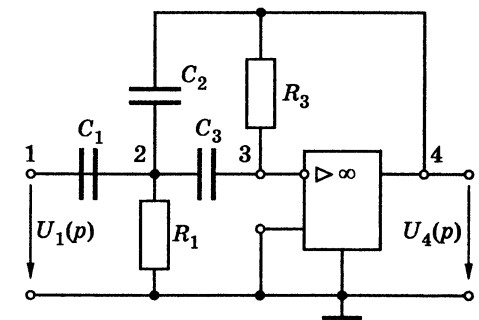


Рис. 6.50. Схема активного ФВЧ другого порядку

18. Визначити ОПФ СФ Баттерворта за такими даними: $f_0 = 40$ кГц; $f_{\Delta 1} = 35$ кГц; $f_{s2} = 54$ кГц; $A_{\Delta} = 1$ дБ; $A_s = 17$ дБ. Знайти порядок і граничну частоту фільтра-прототипу.
Відповідь: $n = 4$; $f_{гп} = 12,68$ кГц;

$$H_U(p) = \frac{6347,4348 \cdot 10^6 p^2}{p^4 + 60980 p^3 + 69512,9 \cdot 10^6 p^2 + 3851,83 \cdot 10^{12} p + 3989,88 \cdot 10^{18}} \times \frac{6347,4348 \cdot 10^6 p^2}{p^4 + 147215,69 p^3 + 69512,9 \cdot 10^6 p^2 + 9298,95 \cdot 10^{12} p + 3989,88 \cdot 10^{18}}$$

19. Якщо значення нулів операторної функції: $p_{01} = j2$; $p_{02} = j4$, а значення полюсів: $p_1 = 0$; $p_2 = j$; $p_3 = j3$, чи належить вона до реактансних функцій? Відповідь аргументувати.
Відповідь: Ні.

20. Пояснити, яка з наведених нижче функцій належить до класу реактансних:

$$1. \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_0}{b_3 p^2 + b_1 p} \quad 2. \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{p^2(b_3 p + b_1)}$$

$$3. \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{b_3 p^3 + b_1 p} \quad 4. \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{p(b_3 p^2 + b_1 p)}$$

Відповідь: 3.

21. Пояснити, яка з наведених нижче функцій може бути ОПФ:

$$1. \frac{a_0}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_1 p + b_0} \quad 2. \frac{a_1 p}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

$$3. \frac{a_2 p^2}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_0} \quad 4. \frac{p}{(p^2 + 2)(p^2 + 3) + 1}$$

Відповідь: 2.

22. Реалізувати за першою та другою формою Фостера операторну вхідну провідність:

$$\tilde{Y}_{вх}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}^2 + 4}{2\bar{p}^3 + 10\bar{p}}$$

Відповідь: 1. $\tilde{L}_{\infty} = 2$; $\tilde{L}_1 = 0,5$; $\tilde{C}_1 = 0,5$ (рис. 6.24, б; $k = 1$);

2. $\tilde{L}_0 = 2,5$; $\tilde{L}_1 = 10$; $\tilde{C}_1 = 0,02$ (рис. 6.26, б; $k = 1$).

23. За першою формою Фостера накреслити схему, яка відповідає нормованому операторному опорі

$$\tilde{Z}_{вх}(\bar{p}) = \frac{19\bar{p}^4 + 64\bar{p}^2 + 32}{20\bar{p}(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 4)}$$

Відповідь: $\tilde{C}_0 = 5$; $\tilde{C}_1 = 4$; $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2 = 0,125$ (рис. 6.24, в; $k = 2$).

24. За відомою нормованою операторною провідністю

$$\tilde{Y}_{вх}(\bar{p}) = \frac{19\bar{p}^4 + 64\bar{p}^2 + 32}{20\bar{p}(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 4)}$$

визначити нормовані елементи та схему кола.

Відповідь: $\tilde{L}_0 = 5$; $\tilde{L}_1 = 4$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0,125$ (рис. 6.26, б; $k = 2$).

25. Визначити схему і нормовані елементи кола за першою формою Кауера, якщо відомий нормований операторний опір

$$\tilde{Z}_{вх}(\bar{p}) = \frac{12\bar{p}^5 + 23\bar{p}^3 + 6\bar{p}}{12\bar{p}^4 + 11\bar{p}^2 + 1}$$

Відповідь: $\tilde{L}_1 = 1$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{L}_3 = 3$; $\tilde{C}_1 = 1$; $\tilde{C}_2 = 2$ (рис. 6.29, б; $k = 2$).

26. Визначити схему і нормовані елементи кола за другою формою Кауера, якщо відомий нормований операторний опір

$$\tilde{Z}_{вх}(\bar{p}) = \frac{18\bar{p}^3 + 3\bar{p}}{12\bar{p}^4 + 9\bar{p}^2 + 1}$$

Відповідь: $\tilde{L}_1 = 3$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{C}_1 = 1$; $\tilde{C}_2 = 2$ (рис. 6.31, з; $k = 2$).

27. За другою формою Кауера синтезувати схему і обчислити нормовані елементи відповідно до заданого нормованого операторного опорі

$$\tilde{Z}_{вх}(\bar{p}) = \frac{12\bar{p}^4 + 9\bar{p}^2 + 1}{18\bar{p}^4 + 3\bar{p}}$$

Відповідь: $\tilde{L}_1 = 1$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{C}_1 = 3$; $\tilde{C}_2 = 2$ (рис. 6.51, а).

28. Визначити схему та параметри елементів ФВЧ Чебишова, який живиться від джерела з внутрішнім опором $R_i = 100$ Ом. На частоті $\omega_{\Delta} = 10^5$ рад/с ослаблення за потужністю становить $A_{\Delta} = 0,5$ дБ, а на частоті $\omega_s = 0,728 \cdot 10^6$ рад/с — $A_s = 30$ дБ.

Відповідь: 1. $C_B = 71,2$ нФ; $L_B = 1,414$ мГн; $R_2 = 198,4$ Ом (рис. 6.51, б).

2. $C_B = 141,42$ нФ; $L_B = 0,712$ мГн; $R_2 = 50,4$ Ом (рис. 6.51, в).

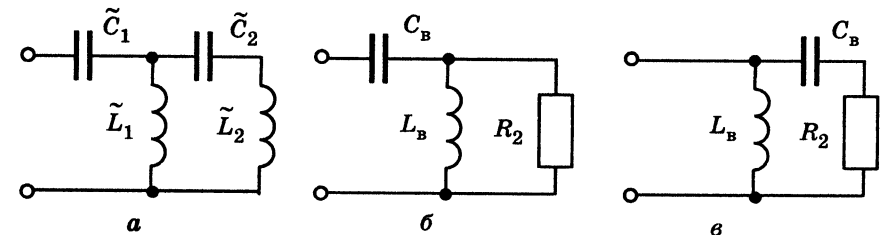
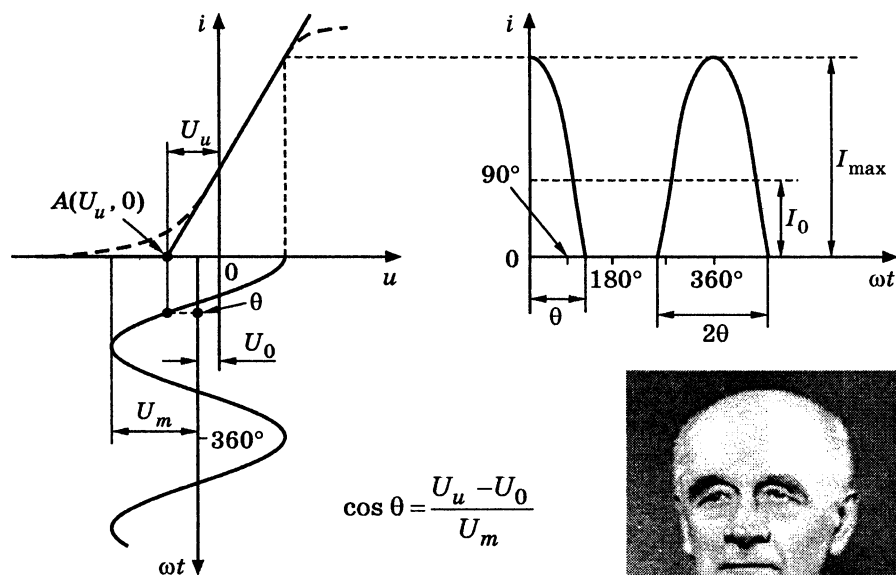


Рис. 6.51. Схемні реалізації до завдань: а — 27; б, в — 28



НЕЛІНІЙНІ КОЛА

- Особливості теорії нелінійних кіл
- Характеристики і параметри нелінійних елементів
- Класифікація нелінійних елементів
- Диференціальні рівняння нелінійних кіл
- Нелінійні кола постійного струму
- Апроксимація характеристик нелінійних елементів
- Нелінійний активний опір при синусоїдній дії



$$\cos \theta = \frac{U_u - U_0}{U_m}$$

$$I_{\max} = S U_m (1 - \cos \theta)$$

$$\alpha_0 = \frac{I_0}{I_{\max}}; \alpha_1 = \frac{I_{m1}}{I_{\max}}; \dots \alpha_k = \frac{I_{mk}}{I_{\max}}$$



А. І. Берг

7.1. Особливості теорії нелінійних кіл

У першій частині підручника [7, підрозд. 1.5, 1.8, 1.9] уже згадувалося про нелінійні елементи і кола, а також про параметричні елементи і кола (слід підкреслити, що параметричні кола не є нелійними, а є лінійними колами зі змінними параметрами). Однак усе подальше викладення стосувалося тільки лінійних кіл з постійними параметрами. У даному розділі розглядатимуться нелінійні елементи і кола.

Загалом задачі аналізу нелінійних і лінійних кіл збігаються, оскільки тут розглядаються способи здобуття та розв'язування системи розрахункових рівнянь. Ці рівняння ґрунтуються на *законах Кірхгофа*, які чинні як для лінійних, так і для нелінійних кіл (чинним залишається і баланс потужностей). Однак для нелінійних кіл складання системи рівнянь ускладнюється тим, що характеристики нелінійних елементів, як правило, задано таблицею чи графіком, отриманими експериментально. Складаючи рівняння кола, такі експериментальні характеристики необхідно апроксимувати, тобто приблизно подавати в аналітичній формі.

Здобуття розв'язку системи розрахункових рівнянь ускладнюється нелінійністю системи, що виключає застосування принципу суперпозиції, який широко використовують для лінійних кіл. Тому для розрахунку нелінійних кіл не можна використовувати метод накладання й інші методи, які базуються на цьому принципі (метод контурних струмів та ін.). Крім того, для нелінійних кіл рідко можна знайти точний аналітичний розв'язок системи рівнянь. Як правило, здобувають приблизний або чисельний розв'язок.

7.2. Характеристики і параметри нелінійних елементів

Нелійними називають такі пасивні елементи електричного кола, параметри яких залежать від напруги на елементі чи від струму в ньому. Існують нелінійні опори, індуктивності та ємності.

До нелінійних опорів належать електронні лампи, напівпровідникові діоди, транзистори, тиристори. Нелінійні індуктивності — це котушки з феромагнітним осердям. Нелінійну ємність мають конденсатори з сегнетодіелектричною ізоляцією (вариконди), а також напівпровідникові діоди — варактори.

Слід зазначити, що будь-який електричний елемент є нелінійним. Наприклад, величина будь-якого опору змінюється через нагрівання струмом. Аналогічна залежність спостерігається від величини струму для індуктивності та від напруги — для ємності.

З іншого боку, іноді можна вважати лінійними (у певних межах) навіть суттєво нелінійні елементи, наприклад індуктивність котушки з феромагнітним осердям.

Електричне коло, яке разом з лінійними елементами має хоча б один нелінійний, називається *нелінійним колом*.

Властивості лінійних і нелінійних елементів електричного кола описуються їх статичними характеристиками, які мають вигляд функціональної залежності

$$y = f(x). \quad (7.1)$$

Функцію y можна розглядати як відгук на дію x .

Статичною характеристикою активного опору є вольт-амперна характеристика, тобто залежність між струмом і напругою в опорі:

$$i = \varphi_R(u) \text{ або } u = f_R(i). \quad (7.2)$$

У першому випадку незалежною змінною (дією) є напруга u , залежною (відгуком) — струм i , у другому — навпаки.

Для індуктивності статичною характеристикою є вебер-амперна (магнітна) характеристика — залежність між потокозчепленням Ψ і струмом i :

$$i = \varphi_L(\Psi) \text{ або } \Psi = f_L(i). \quad (7.3)$$

Властивості ємності визначаються кулон-вольтною (електричною) характеристикою, яка є залежністю між електричним зарядом ємності q і напругою на ємності u :

$$q = \varphi_C(u) \text{ або } u = f_C(q). \quad (7.4)$$

Так само, як для лінійних елементів, для нелінійних можна розглядати параметри — опір, індуктивність та ємність. Проте для нелінійних елементів є параметри двох видів — статичні та динамічні (диференціальні).

Статичним параметром елемента кола з огляду на формулу (7.1) називається відношення $p = y/x$.

Динамічний параметр дорівнює похідній

$$p_d = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Динамічний параметр також називають *крутістю* S , оскільки p_d є крутістю статичної характеристики в даній точці.

Залежність $S = p_d = \frac{dy}{dx} = F(x)$ є диференціальною характеристикою елемента кола.

Оскільки параметри лінійного елемента не залежать від дії x , статична характеристика є прямою, яка проходить через початок координат (рис. 7.1, а), а диференціальна характеристика — це пряма, паралельна осі абсцис. Значення статичного і динамічного параметрів лінійного елемента збігаються:

$$p = p_d = \frac{m_y}{m_x} \operatorname{tg} \alpha,$$

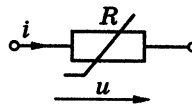
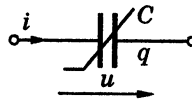
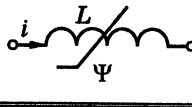
де m_y та m_x — масштаби, в яких відкладено по координатних осях величини x та y відповідно.

Навпаки, параметри нелінійного елемента залежать від режиму роботи, тобто від дії x . Характеристики нелінійного елемента мають той чи інший вигляд залежно від його типу.

В табл. 7.1 наведені величини x та y , статичні та динамічні параметри нелінійних елементів, а також їхні графічні позначення.

Таблиця 7.1

Параметри нелінійних елементів

Схеми	x	y	p	p_d
	u	i	Статична провідність $G = \frac{i}{u} = \frac{1}{R}$	Динамічна провідність (крутість) $G_d = S = \frac{di}{du} = \frac{1}{R_d}$
	u	q	Статична ємність $C = \frac{q}{u}$	Динамічна ємність $C_d = \frac{dq}{du}$
	i	Ψ	Статична індуктивність $L = \frac{\Psi}{i}$	Динамічна індуктивність $L_d = \frac{d\Psi}{di}$

На рис. 7.1, б зображено статичну характеристику деякого нелінійного опору.

У довільній точці статичної характеристики статичний параметр пропорційний тангенсу кута нахилу прямої, проведеної із початку координат у цю точку. Наприклад, у точці a (рис. 7.1, б) величина статичної провідності

$$G = \frac{i_a}{u_a} = \frac{m_i}{m_u} \operatorname{tg} \alpha,$$

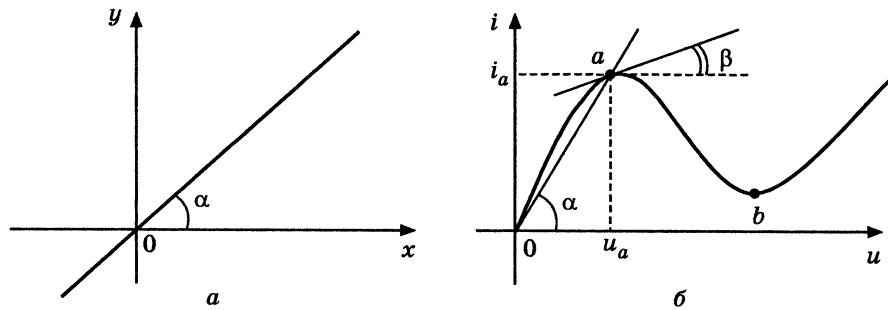


Рис. 7.1. Статичні характеристики:
а — лінійного елемента; б — нелінійного опору

де m_i та m_u — масштабні коефіцієнти графічного побудування по осях струму і напруги.

При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина G змінюється, але вона є завжди додатною.

Динамічний параметр є пропорційним тангенсу кута між дотичною до кривої в даній точці та віссю абсцис:

$$G_d = \frac{di_a}{du_a} = \frac{m_i}{m_u} \operatorname{tg} \beta.$$

Якщо ВАХ нелінійного елемента є монотонно зростаючою, динамічний параметр у будь-якій точці більший за нуль. Однак для деяких елементів, наприклад для тунельного діода, ВАХ містить спадаючу ділянку, як на рис. 7.1, б. Тому на ділянках $0a$ та $b\infty$ параметр $G_d > 0$, а на ділянці ab $G_d < 0$.

Статичні параметри називають також *параметрами постійного струму*, оскільки їх зазвичай використовують, розглядаючи нелінійні кола постійного струму. Статична індуктивність і ємність визначають відповідно запас енергії в магнітному й електричному полі:

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi i = \frac{1}{2} L(i) i^2; \quad W_e = \frac{1}{2} q i = \frac{1}{2} C(u) u^2.$$

Динамічні параметри називають також *параметрами змінного струму*, оскільки їх використовують, розраховуючи змінні в часі процеси в нелінійних колах.

7.3. Класифікація нелінійних елементів

Окрім поділу на нелінійні опори, індуктивності та ємності, нелінійні елементи класифікують на інерційні та безінерційні, а також на керовані та некеровані.

В *інерційних* елементах зміна струму чи напруги змінює стан елемента не миттєво, а з *витримкою у часі*. Наприклад, металева нитка накалу лампи розжарювання є нелінійним опором, величина якого залежить від прикладеної напруги. Чим вища напруга, тим більша потужність перетворюється в тепло, тим більшим є опір нитки накалу. Однак значення опору встановлюється не миттєво, а після певного часу, необхідного для досягнення усталеної температури нитки.

Інерційність нелінійних опорів обумовлюється не лише тепловими процесами, а й запізненням перемагнічування, поляризації тощо.

Інерційність існує також у нелінійних індуктивностях та ємностях. Для індуктивності причинами інерційності є запізнення процесів перемагнічування або вихрові струми у феромагнітних матеріалах, а для ємності — затримка процесів поляризації сегнетодіелектриків¹.

Прикладом практично *безінерційного* нелінійного елемента є напівпровідниковий діод, властивості якого змінюються майже миттєво при змінюванні прикладеної напруги.

Властивості *некерованого* нелінійного елемента залежать тільки від струму в ньому або прикладеної напруги. Некерований елемент повністю визначається однією характеристикою: вольт-амперною — для опору, вебер-амперною — для індуктивності та кулон-вольтною — для ємності. Прикладом некерованого нелінійного елемента є котушка з феромагнітним осердям. Але, додавши на це осердя ще одну обмотку, яка живиться від іншого джерела, можна перетворити першу котушку в керовану нелінійну індуктивність, оскільки при даному значенні струму першої котушки її індуктивність залежатиме від керуючого струму другої котушки.

У *керованих* нелінійних елементах можна змінювати характеристику за рахунок керуючого параметра.

Оскільки в радіотехніці широко застосовують багато видів *нелінійних активних опорів*, які функціонують на різних фізичних принципах і мають різну конструкцію, доцільно розглянути їх класифікацію докладніше.

¹ *Сегнетодіелектриками* називають речовини, діелектрична проникність яких є функцією електричного поля. Назва «сегнетодіелектрики» виникла тому, що вперше цю властивість було знайдено у кристалів сегнетової солі.

За виглядом характеристик опори поділяють на симетричні та несиметричні.

Симетричними називають такі опори, у яких $i(u) = -i(-u)$. Характеристика симетричного опору є непарною функцією, а його параметри залежать тільки від величини (і не залежать від знака) прикладеної напруги.

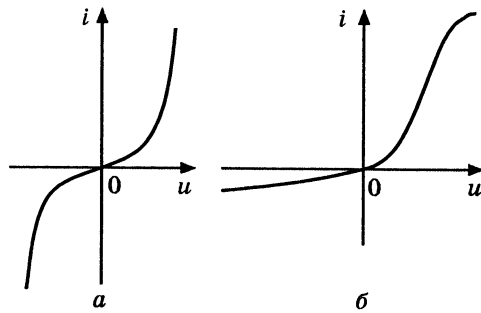


Рис. 7.2. Статичні характеристики нелінійних опорів

Прикладом симетричного опору є варистор, що має характеристику, зображену на рис. 7.2, а. Варистори виготовляють з керамічних напівпровідників на основі карбіду кремнію.

У *несиметричному* опорі $i(u) \neq -i(-u)$. Наприклад у діода, вітки характеристик

(рис. 7.2, б) значно відрізняються при різній полярності прикладеної напруги: при «прямому» знаку напруги провідність є значно більшою, ніж при «зворотному». Характеристика діода в «прямому» напрямі має при малих напругах крутість, що збільшується, а при великих (у стані насичення) — таку, що зменшується.

Електрично керованими називають *нелінійні* опори (багатоелектродні радіолампи, транзистори, тиристри, фоторезистори, фотодіоди), струм через які є функцією однієї чи кількох керуючих напруг (струмів). Так, струм колектора i_k транзистора залежить не тільки від напруги $u_{ке}$ між колектором і емітером, але й від струму бази $i_б$ (рис. 7.3)

$$i_k = f(u_{ке}, i_б).$$

Керовані опори описуються сім'єю характеристик, а отже, сім'єю параметрів, визначаючи котрі беруть як незалежну змінну (дію) ту чи іншу напругу (струм). Так, використовуючи систему g -параметрів для біполярного транзистора,

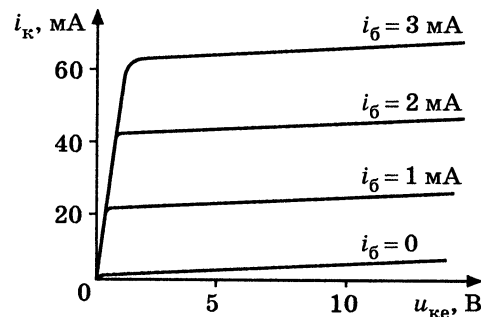


Рис. 7.3. Сім'я вихідних статичних характеристик біполярного транзистора у схемі зі спільним емітером

увімкненого за схемою зі спільним емітером, можна записати динамічні провідності:

$$g_{11} = \left. \frac{di_б}{du_б} \right|_{u_k = \text{const}} ; g_{12} = \left. \frac{di_б}{du_k} \right|_{u_б = \text{const}} ;$$

$$g_{21} = \left. \frac{di_k}{du_б} \right|_{u_k = \text{const}} ; g_{22} = \left. \frac{di_k}{du_k} \right|_{u_б = \text{const}} .$$

Більшість нелінійних опорів можна вважати практично безінерційними. До *інерційних опорів*, окрім розглянутої вище лампи розжарювання, належать так звані *терморезистори* (термістри), які бувають двох видів: напівпровідникові та металеві. У перших опір зменшується із збільшенням температури, у других — навпаки. Приклад металевого термістора — це *баретер*, який конструктивно виконують у вигляді сталеві спіралі, розміщеної у скляному посуді, заповненому воднем під певним тиском.

Якщо ВАХ елемента має ділянку з від'ємною крутістю (аb на рис. 7.1, б), то цей елемент має *від'ємний* опір. Двополюсники, котрі мають характеристики, подібні до зображеної на рис. 7.1, б, широко використовують у генераторах коливань різної частоти і форми.

Загалом, нелінійні опори надають електричним колам властивості, принципово недосяжні в лінійних колах, наприклад, за їх допомогою здійснюють стабілізацію струму, стабілізацію напруги, підсилення постійної напруги тощо.

7.4. Диференціальні рівняння нелінійних кіл

Для отримання системи рівнянь, яка визначає процеси в нелінійних колах, використовують закони Кірхгофа. При цьому справедливі всі правила визначення кількості вузлів і контурів, сформульовані для лінійних кіл.

Методику отримання диференціального рівняння доцільно розглянути на прикладі нелінійного кола з послідовним (рис. 7.4, а) та паралельним (рис. 7.4, б) з'єднанням нелінійних елементів.

Застосувавши другий закон Кірхгофа для кола (рис. 7.4, а), можна записати:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t). \quad (7.5)$$

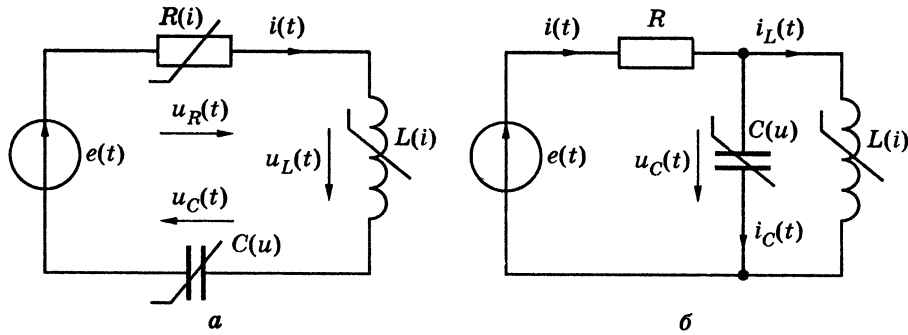


Рис. 7.4. Схеми нелінійних кіл

Якщо вирази (7.2), (7.4), а також співвідношення

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(i)}{dt} = \frac{d\Psi}{di} \frac{di}{dt}$$

підставити до рівняння (7.5), останнє матиме такий вигляд:

$$f_R(i) = \frac{d\Psi}{di} \frac{di}{dt} + f_C(q) = e(t). \quad (7.6)$$

Оскільки $i(t) = dq/dt$, диференціювання (7.6) за часом дозволяє ввести до рівняння струм:

$$\frac{df_R}{di} \frac{di}{dt} + \frac{d^2\Psi}{di^2} \left(\frac{di}{dt}\right)^2 + \frac{d\Psi}{di} \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{df_C}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{de}{dt},$$

і після перетворення отримати диференціальне рівняння відносно струму:

$$\frac{d\Psi}{di} \frac{d^2i}{dt^2} + \left[\frac{df_R}{di} + \frac{d^2\Psi}{di^2} \frac{di}{dt} \right] \frac{di}{dt} + \frac{df_C}{dq} i(t) = \frac{de}{dt}. \quad (7.7)$$

Оскільки

$$\frac{d\Psi}{di} = L_d(i); \quad \frac{d^2\Psi}{di^2} = \frac{dL_d(i)}{di}; \quad \frac{df_R}{di} = R_d(i); \quad \frac{df_C}{dq} = \frac{1}{C_d(u_C)},$$

де $R_d(i)$, $L_d(i)$, $C_d(u_C)$ — відповідно динамічний опір, індуктивність та ємність, то диференціальне рівняння для струму можна записати у вигляді:

$$L_d \frac{d^2i}{dt^2} + \left[R_d + \frac{dL_d}{di} \frac{di}{dt} \right] \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_d} i(t) = \frac{de}{dt}. \quad (7.8)$$

Як у формі (7.7), так і у вигляді (7.8), диференціальне рівняння нелінійне. У вигляді (7.7) нелінійні коефіцієнти визначаються

характеристиками елементів, а у вигляді (7.8) — динамічними параметрами елементів.

Застосувавши закони Кірхгофа до кола з лінійним опором R і паралельним з'єднанням нелінійних L і C (рис. 7.4, б), можна записати:

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t); \quad (7.9)$$

$$Ri(t) + \frac{d\Psi(i_L)}{dt} = e(t); \quad (7.10)$$

$$\frac{d\Psi(i_L)}{dt} - u_C(t) = 0. \quad (7.11)$$

Оскільки $i_C(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \frac{du_C}{dt}$, з урахуванням виразу (7.11) виходить:

$$i_C(t) = \frac{dq}{du_C} \frac{d^2\Psi(i_L)}{dt^2} = \frac{dq}{du_C} \left[\frac{d^2\Psi(i_L)}{di_L^2} \left(\frac{di_L}{dt}\right)^2 + \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \frac{d^2i_L}{dt^2} \right].$$

Підстановка останнього співвідношення до виразу (7.9) приводить до рівняння:

$$i(t) = i_L(t) + \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d^2\Psi(i_L)}{di_L^2} \frac{di_L}{dt} \right) \frac{di_L}{dt} + \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \right) \frac{d^2i_L}{dt^2}. \quad (7.12)$$

Підставивши вираз (7.12) до (7.10), а також враховуючи, що

$$\frac{d\Psi(i_L)}{dt} = \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \frac{di_L}{dt},$$

можна знайти нелінійне диференціальне рівняння відносно струму i_L :

$$R \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \right) \frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[R \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d^2\Psi(i_L)}{di_L^2} \frac{di_L}{dt} \right) + \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \right] \frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = e(t), \quad (7.13)$$

або, використовуючи динамічні параметри нелінійних елементів:

$$RC_d L_d \frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(RC_d \frac{dL_d}{di_L} \frac{di_L}{dt} + L_d \right) \frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = e(t). \quad (7.14)$$

Аналіз розглянутих у даному підрозділі прикладів дозволяє зробити такі висновки:

1. За однакової конфігурації схеми порядок диференціального рівняння кола з нелінійними елементами буде таким самим, як і лінійного кола (вище визначалися рівняння другого порядку).

2. Диференціальне рівняння можна записати у двох формах: за допомогою нелінійних характеристик (7.2)–(7.4) або через динамічні параметри.

3. Нелінійні коефіцієнти диференціального рівняння залежать від того, який аналітичний вигляд мають характеристики нелінійних елементів.

7.5. Нелінійні кола постійного струму

Принципи аналізу стаціонарного режиму нелінійного кола постійного струму доцільно розглянути на прикладі простих схем із послідовним (рис. 7.5, а) та паралельним (рис. 7.5, б) з'єднанням нелінійних опорів.

Напруги та струми позначено в даному підрозділі малими літерами, оскільки цей матеріал справедливий не тільки для постійного струму, але й для миттєвих значень змінного струму.

Нехай відомо значення прикладеної ЕРС e та ВАХ нелінійних опорів (рис. 7.6, а):

$$i = \varphi_1(u); \quad (7.15)$$

$$i = \varphi_2(u). \quad (7.16)$$

Рівняння кола за другим законом Кірхгофа можна записати у вигляді

$$e = u_1 + u_2 \quad (7.17)$$

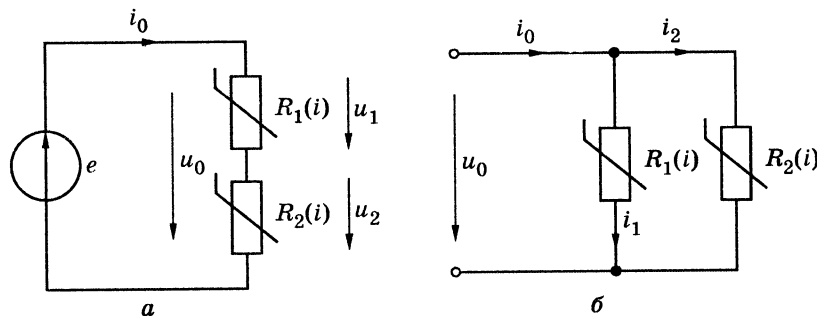


Рис. 7.5. Схеми кіл з послідовним і паралельним з'єднанням нелінійних опорів

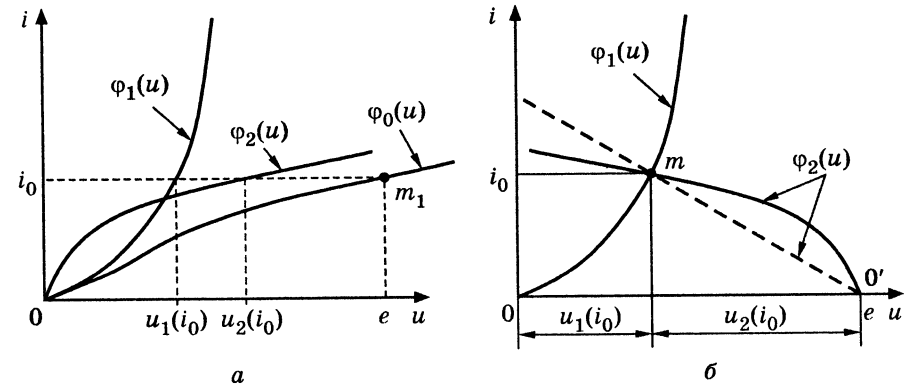


Рис. 7.6. Графічний розрахунок кола послідовно з'єднаних нелінійних опорів

або

$$e = R_1(i_0)i_0 + R_2(i_0)i_0,$$

де $R_1(i_0)$, $R_2(i_0)$ — статичні опори елементів, які є функціями струму i_0 .

З останнього рівняння виходить

$$i_0 = \frac{e}{R_1(i_0) + R_2(i_0)}. \quad (7.18)$$

Визначення струму за формулою (7.18), яка фактично є законом Ома, ускладнене тим, що опори $R_1(i_0)$ та $R_2(i_0)$ є функціями струму, і задача зводиться до розв'язання нелінійного диференціального рівняння. Крім того, як правило, точні аналітичні вирази ВАХ нелінійних опорів невідомі, а тільки апроксимуються з деякою точністю.

Якщо ВАХ елементів задано графічно (рис. 7.6, а), режим кола розраховують у такий спосіб.

Обидві характеристики будують в одній системі координат (i, u) , але для однієї ВАХ $i = \varphi_1(u)$ початком координат є точка 0 і напругу відкладають *вправо* від цієї точки. Для іншої ВАХ $i = \varphi_2(u)$ початком координат є точка 0' осі абсцис, де $u = e$, і значення напруг відкладають *вліво* від цієї точки (рис. 7.6, б). Криві перетинаються в точці m , котра і визначає режим кола.

Дійсно, в цій точці струм i_0 , спільний для двох опорів, задовольняє рівнянням (7.15) і (7.16), а напруги $u_1(i_0)$ та $u_2(i_0)$ — рівнянню (7.17).

Для окремого випадку, коли один з опорів, наприклад R_2 , лінійний, його ВАХ будують як пряму (на рис. 7.6, б позначена пунктиром), проведену з точки O' під кутом, пропорційним опору R_2 .

Зазначимо, що струм i_0 можна знайти в інший спосіб, підсумовуючи, згідно з рівністю (7.17), величини u_1 та u_2 при кожному значенні струму i , тобто додаючи графіки $i = \varphi_1(u)$ та $i = \varphi_2(u)$ за напругою. Точка m_1 перетину сумарної ВАХ $i = \varphi_0(u)$ з вертикаллю, проведену з точки e на осі абсцис, і визначатиме шуканий струм i_0 (рис. 7.6, а).

Аналогічно розв'язують задачу розрахунку паралельного кола (рис. 7.5, б). Згідно з першим законом Кірхгофа

$$i_0 = i_1 + i_2.$$

Якщо заданий загальний струм i_0 , а необхідно знайти загальну напругу u_0 і струми віток i_1 та i_2 , на одному графіку будують ВАХ елементів $u = f_1(i)$ та $u = f_2(i)$, причому для однієї з характеристик початком координат є точка $i = i_0$ (рис. 7.7, а). Точка n перетину двох ВАХ визначає величини u_0 , i_1 , i_2 .

Якщо задано напругу u_0 , доцільніше побудувати характеристики (рис. 7.7, б) $i = \varphi_1(u)$ та $i = \varphi_2(u)$. Ординати цих ВАХ для заданого значення u_0 визначають струми $i_1(u_0)$ та $i_2(u_0)$, а сума цих ординат — загальний струм i_0 . На рис. 7.7, б сумарну ВАХ позначено $i = \varphi_0(u)$.

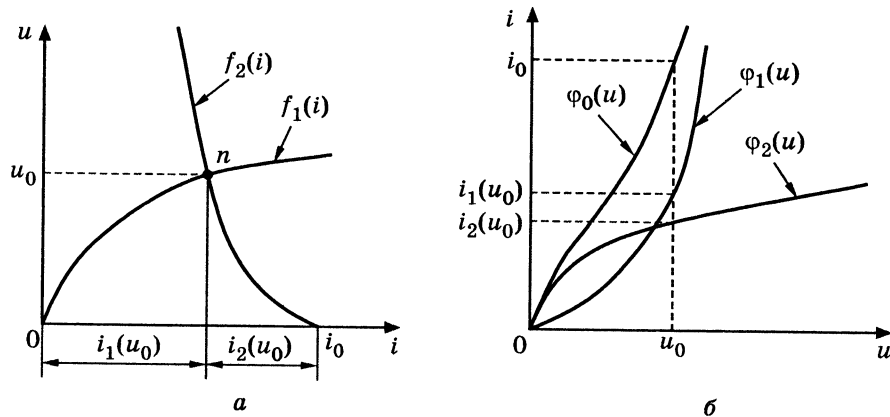


Рис. 7.7. Графічний розрахунок кола паралельно з'єднаних нелінійних опорів

Приклад 7.1. Схему кола постійного струму з нелінійним опором зображено на рис. 7.8, а. Параметри кола є такими: $E = 1,5$ В, $R_1 = 33$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. ВАХ нелінійного елемента $R_3(i)$ наведена в табл. 7.2. Розрахунок струми всіх віток графічним методом.

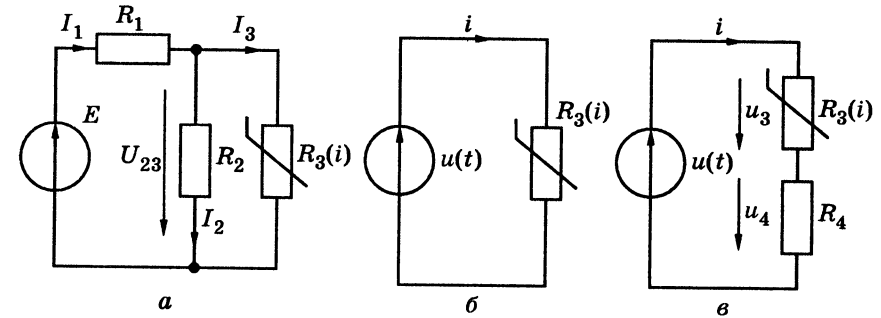


Рис. 7.8. Схеми нелінійних кіл із мішаним і послідовним з'єднанням опорів

Таблиця 7.2

ВАХ нелінійного елемента

u , В	0	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
i , мА	0	0	2	6	13	25	80	135

Розв'язання

1. Будуємо ВАХ нелінійного опору $i_3(u)$ за даними табл. 7.2 і ВАХ лінійного опору $i_2(u) = u/R_2$ (рис. 7.9). Пряма $i_2(u)$ проходить через початок координат. Другу точку для її побудови візьмемо таку: $i_2(1) = 1/20 = 0,05$ А.

2. Підсумовуючи ці характеристики, визначаємо $i_{23}(u)$ — ВАХ еквівалентного нелінійного опору, утвореного лінійним опором R_2 та нелінійним $R_3(i)$.

3. Будуємо ВАХ $i_1(u)$ лінійного опору R_1 як пряму (на рис. 7.9 позначена пунктиром), проведену з точки $u = E$ під кутом, пропорційним опору R_2 , причому значення напруг відкладаємо вліво від цієї точки. Рівняння цієї ВАХ має такий вигляд:

$$i_1(u) = -\frac{1}{R_1}(u - E) = \frac{E - u}{R_1}.$$

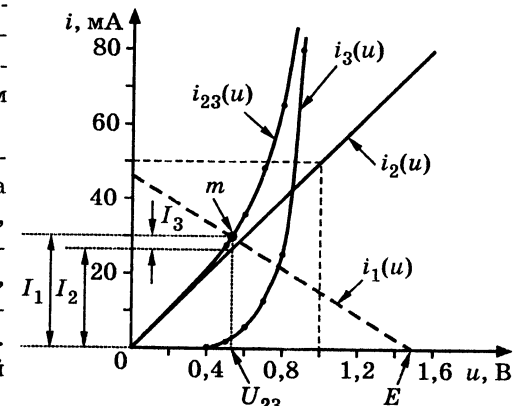


Рис. 7.9. Графічний розрахунок кола у прикладі 7.1

Для того щоб побудувати цю пряму, знайдемо значення

$$i_1(0) = \frac{1,5 - 0}{33} = 0,0454 \text{ А.}$$

4. ВАХ $i_1(u)$ та $i_{23}(u)$ перетинаються в точці m , котра і визначає режим кола: $U_{23} \approx 0,53 \text{ В}$; $I_1 \approx 30 \text{ мА}$; $I_2 \approx 27 \text{ мА}$; $I_3 \approx 3 \text{ мА}$.

7.6. Апроксимація характеристик нелінійних елементів

Зазвичай характеристика $y = f(x)$ нелінійного елемента визначається не теоретично, а експериментально і тому задається графіком чи таблицею. Проте для аналізу кола ці характеристики мають бути подані в аналітичній формі. Зрозуміло, що аналітична залежність лише приблизно визначає фактичну форму характеристики, хоча наближення може бути як завгодно точним. Приблизне подання нелінійної характеристики називають *апроксимацією*.

Вибір способу апроксимації безпосередньо не пов'язаний з фізичною природою елемента; цей спосіб обумовлюється формою нелінійної характеристики та розрахунковими міркуваннями.

Якщо дія на елемент не виходить за певні межі (наприклад, $x_1 \dots x_2$ на рис. 7.10, б), апроксимуюча функція має апроксимувати тільки так звану робочу ділянку характеристики, тобто ділянку, в межах якої може переміщуватися робоча точка (MN на рис. 7.10). Чим менша робоча ділянка кривої, тим простішою може бути апроксимуюча функція.

Існує багато різних методів апроксимації характеристик нелінійних елементів. До найрозповсюдженіших методів належать апроксимація степеневим поліномом та кусково-лінійна (метод Берга²).

Нехай до нелінійного елемента прикладена постійна дія x_0 (рис. 7.10), так зване «зміщення». Тоді $y_0 = f(x_0)$ — значення функції в точці x_0 .

Змінюючи x_0 на Δx , функцію можна розвинути в ряд Тейлора і записати:

$$y = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)\Delta x^3 + \dots \quad (7.19)$$

² Берг Аксель Іванович (1893–1979) — російський учений у галузі радіоелектроніки та кібернетики, академік (1946), інженер-адмірал (1955), Герой Соціалістичної Праці (1963). Основні праці присвячені розробці теорій і методів проектування та розрахунку приймально-передавальних пристроїв, стабілізації частоти генераторів, питанням радіопеленгування і радіолокації. Автор багатьох підручників з радіотехніки.

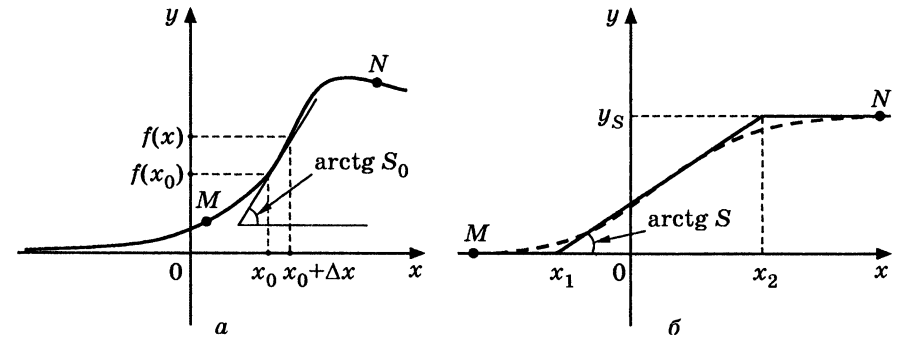


Рис. 7.10. Апроксимація характеристик нелінійних елементів

де $f'(x_0) = S_0$ (крутість), $f''(x_0), \dots$ — значення похідних функції $f(x)$ в точці $x = x_0$.

Оскільки $\Delta x = x - x_0$, вираз (7.19) можна записати в такий спосіб:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (7.20)$$

Формула (7.20) є аналітичним виразом характеристики нелінійного елемента у вигляді степеневого ряду. Якщо обмежитися деяким числом n доданків, отриманий *поліном n -го степеня* приблизно апроксимуватиме цю характеристику:

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k. \quad (7.21)$$

Коефіцієнти a_k не обов'язково мають бути пропорційними похідним функції в точці x_0 . Коефіцієнти a_k добирають так, щоб апроксимуючий поліном (7.21) найкраще відображав робочу ділянку характеристики, а число n було мінімально можливим.

Інший метод апроксимації — кусково-лінійний — ґрунтується на тому, що характеристика $y = f(x)$ поділяється на кілька (у найпростішому випадку — на дві чи три) ділянок, які наближено вважаються прямими. Для характеристики, показаної як приклад на рис. 7.10, б, вираз для апроксимуючої функції матиме вигляд:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ S(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_S, & x > x_2 \end{cases} \quad (7.22)$$

де $S = \frac{y_S}{x_2 - x_1}$ — крутість ділянки функції між точками x_1, x_2 .

Використовувати кусково-лінійну апроксимацію доцільно, якщо робоча ділянка охоплює значну частину характеристики (наприклад, MN на рис. 7.10, б). Застосування степеневого полінома в цьому випадку ускладнюється тим, що для забезпечення апроксимації із заданою точністю необхідне велике значення n .

Залежно від вигляду нелінійної характеристики застосовують також інші методи апроксимації, зокрема, степеневою, показниковою або логарифмічною функціями, але ці методи менш поширені.

7.7. Нелінійний активний опір при синусоїдній дії

Нехай до нелінійного опору $R(i)$ прикладено напругу

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t. \quad (7.23)$$

На рис. 7.11 зображено ВАХ опору і показано побудову кривої струму $i(t)$ через цей опір. Унаслідок нелінійності характеристики форма струму відрізняється від косинусоїдної. Функцію $i(t)$ можна подати рядом Фур'є:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t - \psi_k), \quad (7.24)$$

де I_0 — постійна складова струму; I_{mk} , ψ_k — амплітуди та початкові фази гармонічних складових, причому

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i(\omega t) d\omega t; \quad I_{mk} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i(\omega t) \cos(k\omega t) d\omega t. \quad (7.25)$$

Поява у складі струму вищих ($k \geq 2$) гармонік обумовлена нелінійністю ВАХ. Отже, нелінійні елементи, загалом, і нелінійні опори, зокрема, мають властивість перетворення частоти, оскільки функція відгуку містить коливання з новими частотами, яких немає у складі функції дії. Цим нелінійні кола принципово відрізняються від лінійних, у яких виникнення вищих гармонік неможливе.

У радіотехніці нелінійні перетворення використовують для генерування коливань складної форми, множення частоти тощо.

Розрахунок складових струму при заданих величинах амплітуди змінної напруги U_m та постійного зміщення U_0 виконують різними способами, залежно від методу апроксимації нелінійної характеристики.

1. Якщо ВАХ нелінійного опору можна апроксимувати степеневим поліномом (7.21), тоді поблизу точки $u_0 = U_0$

$$i = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (u - u_0)^k. \quad (7.26)$$

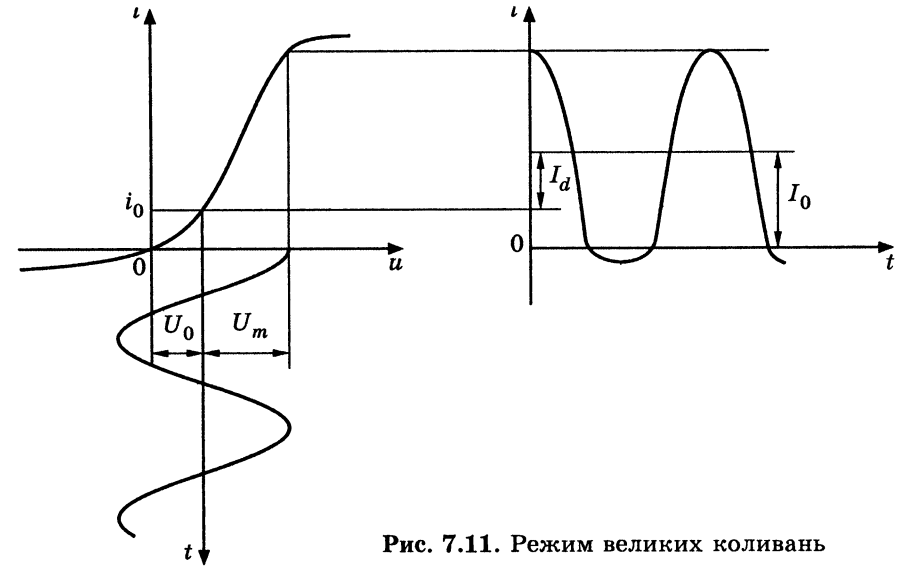


Рис. 7.11. Режим великих коливань

У виразі (7.26) $a_0 = i_0 = u_0 / R(u_0)$, де i_0 — так званий струм спокою, тобто струм, який проходить через нелінійний елемент, коли на нього діє тільки постійна напруга u_0 (рис. 7.11); $R(u_0)$ — статичний опір за умови $u = u_0$.

Коефіцієнт $a_1 = S_0 = 1/R_d(u_0)$ дорівнює крутості у вихідній точці. Оскільки в даному випадку $u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t$ і розвинення в ряд проведене відносно напруги, яка дорівнює зміщенню ($u_0 = U_0$), миттєве значення струму становитиме:

$$\begin{aligned} i &= i_0 + S_0 U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t + \dots + a_n U_m^n \cos^n \omega t = \\ &= i_0 + \sum_{k=1}^n a_k U_m^k \cos^k \omega t. \end{aligned} \quad (7.27)$$

У разі так званих *малих коливань*, коли змінна напруга є настільки малою, що робочу ділянку характеристики можна вважати прямою (ab на рис. 7.12), членами полінома (7.27) другого і вищих степенів можна знехтувати:

$$i \approx i_0 + S_0 U_m \cos \omega t.$$

При цьому постійна складова I_0 у виразі (7.24) дорівнює струму спокою $I_0 = i_0$ як у статичному (за відсутності змінної напруги), так і в динамічному режимах, тобто в обох режимах через опір проходить однаковий постійний струм.

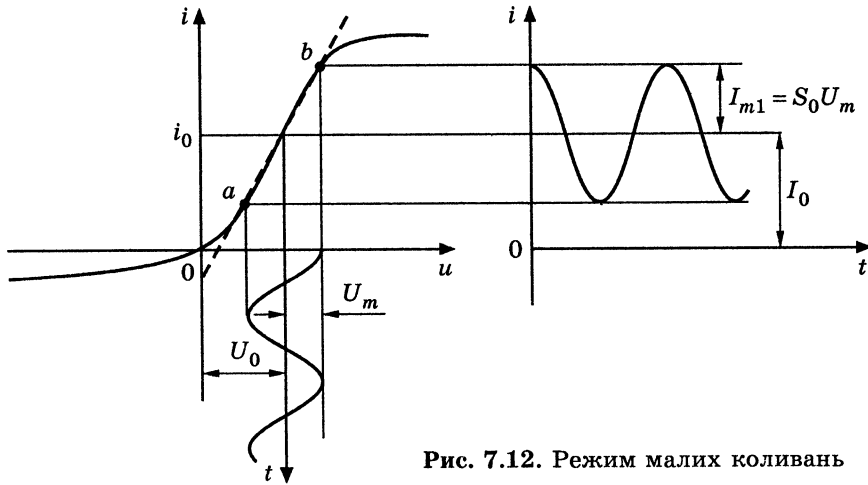


Рис. 7.12. Режим малих коливань

Оскільки $i_0 = u_0 / R(u_0)$, то $I_0 = U_0 / R(u_0)$, і тому статичний опір називають *опором постійному струму*.

Оскільки амплітуда струму основної частоти (першої гармоніки), позначена у формулі (7.24) як I_{m1} , становить

$$I_{m1} = S_0 U_m = U_m / R_d(U_0),$$

то динамічний опір називають *опором змінному струму*.

У режимі малих коливань величина I_{m1} від зміщення U_0 не залежить.

У режимі *великих коливань* (рис. 7.11) складовими вищих степенів ряду (7.27) нехтувати не можна, а отже, форма струму відрізнятиметься від синусоїдальної. Для визначення амплітуд гармонічних складових струму користуються відомими тригонометричними формулами кратних аргументів.

На відміну від режиму малих коливань, режим великих коливань має такі особливості:

- постійна складова I_0 не дорівнює струму спокою i_0 . Загалом величина I_0 може бути як менше, так і більше i_0 . Різниця величин $I_d = |I_0 - i_0|$ залежить за інших однакових умов від амплітуди змінної напруги U_m , і тому дозволяє виявляти (детектувати) цю напругу;
- між амплітудами першої гармоніки струму і прикладеної напруги немає лінійної залежності.

Наведений аналіз використання даного методу апроксимації свідчить, що при заданій дії характер і величина продуктів

нелінійності визначаються коефіцієнтами розкладання a_1, a_2, \dots, a_k , які у свою чергу залежать від напруги зміщення $U_0 = u_0$. Отже, зміна U_0 призводить до зміни характеру відгуку нелінійного кола, хоча сам нелінійний елемент залишається тим самим.

2. Якщо ВАХ нелінійного опору можна апроксимувати двома прямолінійними відрізками за формулою (7.22):

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_u; \\ S(u - U_u), & u \geq U_u, \end{cases} \quad (7.28)$$

зручніше користуватися методом Берга, згідно з яким розрахунок відгуку нелінійного елемента визначається єдиним параметром — абсцисою точки переходу $A(U_u, 0)$ між апроксимуючими відрізками (рис. 7.13).

На рис. 7.13 побудовано криву миттєвих значень струму через нелінійний опір. При заданих значеннях U_0 та U_m струм матиме форму імпульсів, які є «відсіченими» відрізками косинусоїди. Якщо виразити тривалість імпульсів у градусах, тоді кут відсікання θ — це половина тривалості імпульсу струму. Очевидно, що θ змінюється в таких межах: $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

При заданій апроксимації ВАХ (7.28), можна обмежитися розглядом області характеристики правіше точки А. Якщо підставити

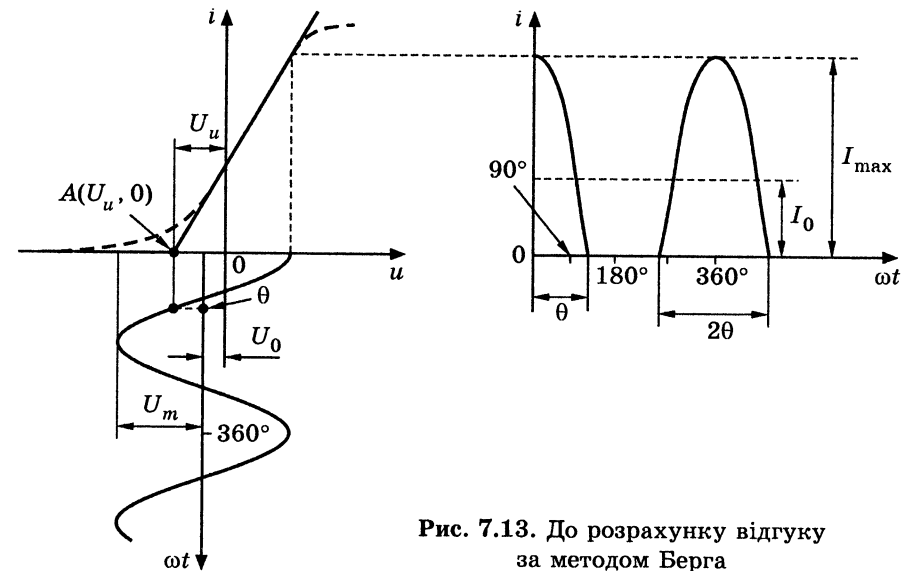


Рис. 7.13. До розрахунку відгуку за методом Берга

миттєве значення напруги (7.23) до виразу (7.28) при $u \geq U_u$, миттєве значення струму

$$i(t) = S(U_m \cos \omega t + U_0 - U_u). \quad (7.29)$$

Згідно з визначенням кута відсікання при $\omega t = \theta$ струм $i = 0$:

$$0 = S(U_m \cos \theta + U_0 - U_u), \quad (7.30)$$

звідки

$$\cos \theta = \frac{U_u - U_0}{U_m}. \quad (7.31)$$

Параметр ВАХ нелінійного опору U_u може бути додатним, від'ємним або нульовим залежно від властивостей нелінійного елемента.

Враховуючи вираз (7.31), миттєве значення струму (7.29) становитиме:

$$i(t) = S(U_m \cos \omega t + U_m \cos \theta) = SU_m (\cos \omega t - \cos \theta). \quad (7.32)$$

Тоді за формулами (7.25) постійна складова й амплітуди гармонічних складових струму дорівнюватимуть:

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta);$$

$$I_{m1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos \omega t d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta);$$

$$I_{mk} = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos(k\omega t) d\omega t =$$

$$= \frac{2SU_m}{\pi} \frac{\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{k(k^2 - 1)}, \quad k > 1.$$

Максимальне значення струму можна отримати з виразу (7.32) за умови $\omega t = 0$:

$$I_{\max} = SU_m (1 - \cos \theta). \quad (7.33)$$

Використовуючи співвідношення (7.33), обчислюють нормовані значення струму, або коефіцієнти Берга:

$$\alpha_0 = \frac{I_0}{I_{\max}}; \quad \alpha_1 = \frac{I_{m1}}{I_{\max}}; \quad \dots \quad \alpha_k = \frac{I_{mk}}{I_{\max}}, \quad (7.34)$$

які залежать (для даної гармоніки) тільки від кута відсікання.

Знаючи коефіцієнти α_k , можна одразу визначати амплітуди гармонік струму. На рис. 7.14 як приклад показані графіки коефіцієнтів Берга.

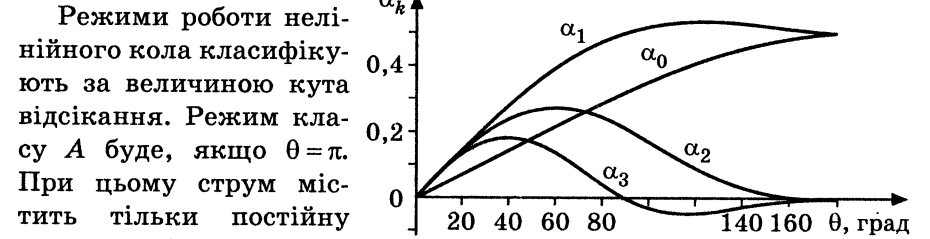


Рис. 7.14. Графіки коефіцієнтів Берга

Режими роботи нелінійного кола класифікують за величиною кута відсікання. Режим класу А буде, якщо $\theta = \pi$. При цьому струм містить тільки постійну складову і коливання основної частоти, подібного до розглянутого вище випадку малих коливань. Інші режими розділяють таким чином: клас АВ відповідає $\pi/2 < \theta < \pi$; для класу В значення $\theta = \pi/2$; для класу С — $\theta < \pi/2$.

Отже, метод Берга дозволяє виразити всі величини, що характеризують режим кола, через кут відсікання, величина якого (при заданій амплітуді дії U_m) визначається зміщенням U_0 . Тобто, варіація кута θ відповідає описаній у попередньому методі зміні виду нелінійності кола за рахунок вибору U_0 .

Існують також інші методи розрахунку нелінійного кола при синусоїдній дії, наприклад, квазілінійний. Відомо, що з усіх гармонічних складових відгуку найбільшу величину зазвичай має перша гармоніка, яка використовується в різних пристроях, наприклад, у генераторах синусоїдної напруги. Тому суттю квазілінійного методу є встановлення зв'язку між амплітудою першої гармоніки струму I_{m1} з амплітудою синусоїдної дії U_m за допомогою так званої коливальної характеристики $I_{m1}(U_m)$. Для того щоб розрахувати середню крутість коливальної характеристики $S_{\text{сер}} = I_{m1}/U_m$, використовують розглянуті вище методи степеневого полінома та Берга.

Приклад 7.2. До нелінійного опору (рис. 7.8, б), ВАХ якого задана в табл. 7.2, прикладена напруга $u(t) = U_0 + U_m \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ В. Визначити графічно залежність струму через нелінійний елемент від часу, якщо $U_0 = 0,8$ В, $U_m = 0,2$ В. Як зміниться $i(t)$, якщо послідовно з нелінійним елементом увімкнути лінійний опір $R_4 = 5,1$ Ом (рис. 7.8, в)?

Розв'язання

1. Згідно з даними табл. 7.2 будемо ВАХ нелінійного опору $i = \varphi_3(u)$, а також графік миттєвого значення напруги $u(t)$, попередньо визначивши період її повторення: $T = 1/f = 1/10^3 = 10^{-3}$ с (рис. 7.15, а).

Будемо часову діаграму струму (рис. 7.15, б), проектуючи відповідні точки ВАХ на вісь ординат $i(t)$ та зберігаючи однаковий масштаб по осі часу для часової діаграми струму і прикладеної напруги (рис. 7.15, а).

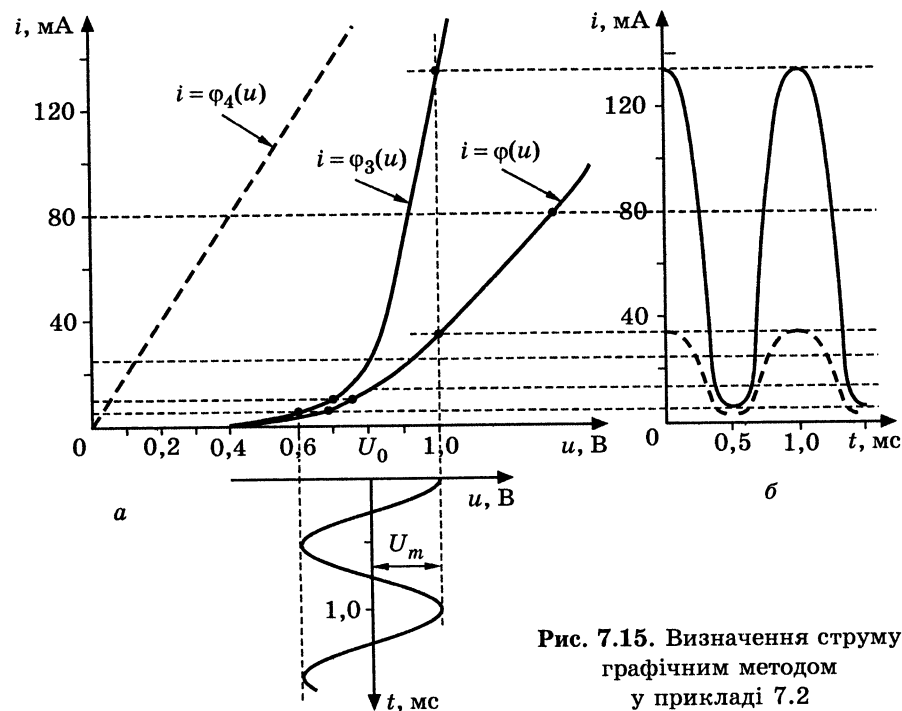


Рис. 7.15. Визначення струму графічним методом у прикладі 7.2

2. Якщо послідовно з нелінійним елементом увімкнено опір $R_4 = 5,1 \text{ Ом}$, струм $i(t)$ знайдемо аналогічно. Для цього використовуємо сумарну ВАХ $i = \varphi(u)$, яку визначимо, підсумовуючи, згідно з другим законом Кірхгофа, величини u_3 та u_4 при кожному значенні струму i (рис. 7.8, е), тобто додаючи графіки $i = \varphi_3(u)$ та $i = \varphi_4(u) = u/R_4$ за напругою. Часову діаграму струму для цього випадку зображено на рис. 7.15, б пунктирною лінією.

Приклад 7.3. Апроксимувати ВАХ нелінійного резистивного елемента (див. табл. 7.2) поблизу робочої точки $U_0 = 0,8 \text{ В}$ поліномом другого степеня, вибравши такі вузли інтерполяції: $U_0 - 0,2 \text{ В}$; $U_0 \text{ В}$; $U_0 + 0,2 \text{ В}$.

Визначити постійну складову й амплітуди гармонічних складових струму через нелінійний елемент, якщо до нього прикладено напругу $u(t)$, параметри якої задані у прикладі 7.2.

Розв'язання

1. Скористаємося формулою (7.26) і запишемо ВАХ нелінійного елемента у вигляді полінома другого степеня:

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2.$$

Використовуючи значення струму в заданих точках інтерполяції, знайдемо коефіцієнти a_0 , a_1 , a_2 з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0,006 = a_0 + a_1(0,6 - 0,8) + a_2(0,6 - 0,8)^2; \\ 0,025 = a_0 + a_1(0,8 - 0,8) + a_2(0,8 - 0,8)^2; \\ 0,135 = a_0 + a_1(1,0 - 0,8) + a_2(1,0 - 0,8)^2. \end{cases}$$

Виконавши перетворення, отримаємо:

$$\begin{cases} 0,006 = a_0 - 0,2a_1 + 0,04a_2; \\ 0,025 = a_0; \\ 0,135 = a_0 + 0,2a_1 + 0,04a_2. \end{cases} \quad (7.35)$$

Підсумовуючи та віднімаючи перше та третє рівняння системи (7.35), знаходимо: $a_2 = 1,1375 \text{ См}$; $a_1 = 0,3225 \text{ См}$.

Отже, апроксимовану ВАХ нелінійного елемента запишемо у вигляді:

$$i = 0,025 + 0,3225(u - 0,8) + 1,1375(u - 0,8)^2 \text{ А.} \quad (7.36)$$

2. Для визначення постійної складової й амплітуд гармонічних складових струму підставимо вираз для напруги $u(t) = 0,8 + 0,2 \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ до рівняння (7.36):

$$\begin{aligned} i &= 0,025 + 0,3225 \cdot 0,2 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + 1,1375 \cdot 0,2^2 \cos^2(2\pi \cdot 10^3 t) = \\ &= 0,025 + 0,0645 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + 0,0455 \cdot 0,5 \cdot [1 + \cos(4\pi \cdot 10^3 t)] = \\ &= 0,04775 + 0,0645 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + 0,02275 \cdot \cos(4\pi \cdot 10^3 t). \end{aligned}$$

Отже, постійна складова струму становить $I_0 = 0,04775 \text{ А}$; амплітуда першої гармоніки $I_{m1} = 0,0645 \text{ А}$; другої — $I_{m2} = 0,02275 \text{ А}$.

Приклад 7.4. Виконати кусково-лінійну апроксимацію ВАХ транзистора КТ315, яку задано таблично (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

ВАХ транзистора КТ315

$u_6, \text{ В}$	0	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
$i_k, \text{ мА}$	0	0,05	0,25	0,6	1,0	1,4

Розв'язання. За даними табл. 7.3 побудуємо ВАХ транзистора (рис. 7.16, а). Провівши дотичну до лінійної ділянки характеристики, знайдемо абсцису точки переходу $A(U_u, 0)$ між апроксимуючими відрізками прямих: $U_u = 0,6 \text{ В}$. За графіком знайдемо крутість ВАХ поблизу робочої точки $B(1,1; 0,75)$ на середині лінійної ділянки:

$$S = \left. \frac{\Delta i_k}{\Delta u_6} \right|_{u_6=1,1} = \frac{1,0 - 0,6}{1,25 - 1,0} = \frac{0,4}{0,25} = 1,6 \text{ мА/В.}$$

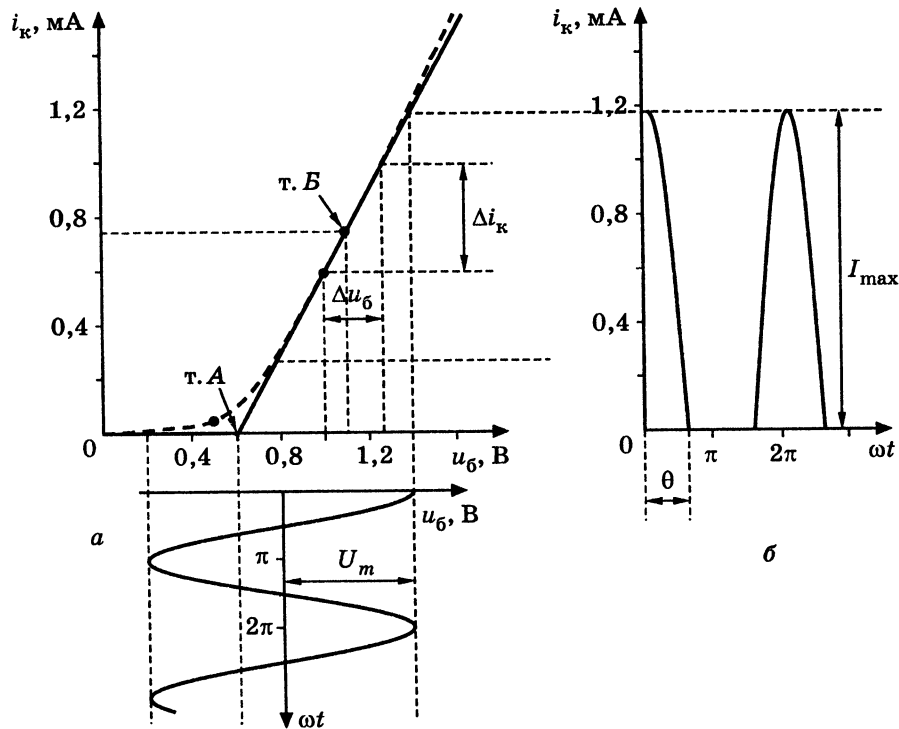


Рис. 7.16. Графіки до прикладів 7.4, 7.5:
 а — кусково-лінійна апроксимація ВАХ;
 б — визначення струму методом Берга

Отже, апроксимовану ВАХ транзистора можна записати у вигляді:

$$i_k(u) = \begin{cases} 0, & u_6 < 0,6 \text{ В} \\ 1,6(u_6 - 0,6) & u_6 \geq 0,6 \text{ В} \end{cases} \text{ мА.}$$

Приклад 7.5. На вхід транзистора з апроксимованою ВАХ (див. приклад 7.4), діє коливання $u(t) = 0,8 + 0,6 \cos \omega_0 t$ В. Знайти постійну складову і амплітуди гармонічних складових струму через нелінійний елемент.

Розв'язання

1. Визначимо кут відсікання за формулою (7.31):

$$\cos \theta = \frac{U_u - U_0}{U_m} = \frac{0,6 - 0,8}{0,6} = -0,33; \theta = 109,5^\circ \approx 110^\circ.$$

2. Визначимо максимальне значення струму за формулою (7.33):

$$I_{\max} = S U_m (1 - \cos \theta) = 1,6 \cdot 0,6 \cdot 1,33 = 1,28 \text{ мА.}$$

3. За графіками (рис. 7.14) здобудемо значення коефіцієнтів Берга:
 $\alpha_0(110^\circ) = 0,38; \alpha_1(110^\circ) = 0,53; \alpha_2(110^\circ) = 0,13; \alpha_3(110^\circ) = -0,05.$

4. За формулами (7.34) розрахуємо амплітуди гармонічних складових струму колектора:

$$\begin{aligned} I_0 &= \alpha_0 I_{\max} = 0,38 \cdot 1,28 = 0,48 \text{ мА;} \\ I_{m1} &= \alpha_1 I_{\max} = 0,53 \cdot 1,28 = 0,68 \text{ мА;} \\ I_{m2} &= \alpha_2 I_{\max} = 0,13 \cdot 1,28 = 0,17 \text{ мА;} \\ I_{m3} &= |\alpha_3| I_{\max} = 0,05 \cdot 1,28 = 0,06 \text{ мА.} \end{aligned}$$

7.8. Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

- Надати визначення поняттям: нелінійне коло, нелінійний елемент, статичний і динамічний параметр нелінійного елемента.
- Які методи розрахунку чинні для нелінійних кіл? Чи можна застосувати до нелінійного кола метод еквівалентного генератора?
- За якими ознаками класифікують нелінійні елементи? Які види нелінійних опорів ви знаєте?
- Назвати властивості нелінійних кіл, які принципово недосяжні в лінійних колах.
- Розрахувати струми всіх віток кола постійного струму з нелінійним опором R_3 графічним методом (рис. 7.8, а). Параметри кола: $E = 1,1$ В, $R_1 = 62$ Ом, $R_2 = 100$ Ом. ВАХ нелінійного елемента $R_3(i)$ наведено в табл. 7.4.

Таблиця 7.4

ВАХ нелінійного елемента

$u, \text{ В}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
$i, \text{ мА}$	0	0	0	0,5	2	5	10	18	28	42	60

Відповідь: $I_1 \approx 8$ мА; $I_2 \approx 5$ мА; $I_3 \approx 3$ мА.

- Міст на рис. 7.17, а складено з лінійних опорів $R_1 = R_3 = 1$ кОм і $R_2 = R_4 = 2$ кОм. На вихід моста ввімкнено нелінійний опір R_5 , ВАХ якого наведено в табл. 7.5. На вході моста діє джерело постійної ЕРС 120 В. Визначити напругу і струм на виході моста.

Таблиця 7.5

ВАХ нелінійного елемента

$u, \text{ В}$	0	8	10	12	14	15	16	17	18	19	20
$i, \text{ мА}$	0	1	3	9	20	30	48	75	120	207	310

Вказівка. Скористатись теоремою про еквівалентне джерело напруги.

Відповідь: $U_{\text{вих}} = 14$ В; $I_{\text{вих}} = 20$ мА.

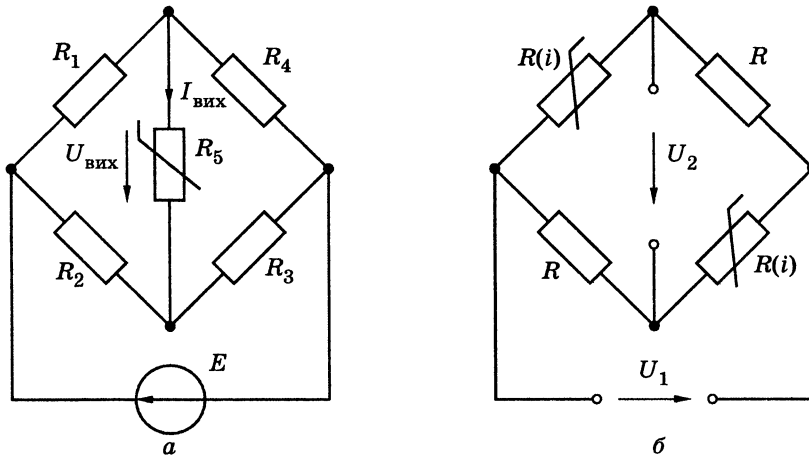


Рис. 7.17. Мостові схеми з нелінійними опорами

7. Чутливим елементом у системі автоматичного регулювання напруги є міст (рис. 7.17, б). У кожному з двох протилежних плеч моста ввімкнений нелінійний опір $R(i)$, ВАХ якого наведено в табл. 7.6. У двох інших плечах моста ввімкнені однакові лінійні опори R . Міст не навантажений.

Визначити: 1) величину опорів R , при яких міст врівноважено, якщо напруга живлення моста $U_1 = 220$ В; 2) напруги на виході моста при змінюванні напруги U_1 на $+20$ та -20 В.

Таблиця 7.6

ВАХ нелінійного елемента

$u, \text{В}$	0	20	40	60	80	100	110	120
$i, \text{мА}$	0	1,5	4,0	7,5	14,0	36,0	63,0	95,0

Відповідь: $R = 1,75$ кОм; $U_2 = \pm 12$ В.

8. Пояснити суть основних методів апроксимації нелінійних характеристик. Як впливає форма характеристики на вибір методу апроксимації?
9. Чим визначається вибір степеня полінома, яким апроксимують ВАХ?
10. Апроксимувати ВАХ нелінійного елемента, задану в табл. 7.7, поліномом другого степеня в діапазоні $u = -5 \dots 0$ В. Визначити похибку апроксимації при значенні напруги -1 В.

Таблиця 7.7

ВАХ нелінійного елемента

$u, \text{В}$	0	-0,5	-1,0	-1,5	-2,0	-2,5	-3,0	-3,5	-4,0	-4,5	-5,0
$i, \text{мА}$	7,5	6,5	5,5	4,5	3,6	2,7	2,0	1,4	0,75	0,4	0,25

Відповідь: $i(u) = 7,5 + 2,37u + 0,1865u^2$ мА; $\Delta i = 3,3\%$.

11. На нелінійний елемент з ВАХ $i(u) = 20 + 5u + 0,2u^2$ мА діє напруга $u(t) = -5 + 5 \cos \omega_0 t$ В. Визначити постійну складову й амплітуди гармонічних складових струму через цей елемент.
Відповідь: $I_0 = 2,5$ мА; $I_{m1} = 15$ мА; $I_{m2} = 2,5$ мА.
12. Чим відрізняють режими великих і малих коливань у нелінійному колі при синусоїдній дії?
13. Пояснити поняття «кут відсікання». У чому полягає суть розрахунку нелінійного кола за методом Берга?
14. Які значення кута відсікання відповідають режимам нелінійного кола А, АВ, В, С?
15. ВАХ нелінійного елемента апроксимована двома відрізками прямих:

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_u; \\ S(u - U_u), & u \geq U_u, \end{cases} U_u = -6 \text{ В}; S = 5 \text{ мА/В}.$$

На вхід подано напругу $u(t) = U_0 + U_m \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ В. Визначити кут відсікання, постійну складову й амплітуди першої, другої і третьої гармонічних складових струму через цей елемент, якщо $U_0 = -10$ В, $U_m = 8$ В. Побудувати часову діаграму струму.

Відповідь: $\theta = 60^\circ$; $I_0 = 4,4$ мА; $I_{m1} = 7,8$ мА; $I_{m2} = 5,6$ мА; $I_{m3} = 2,8$ мА.

16. За яких значень напруги зміщення U_0 і кута відсікання θ струм у попередній задачі міститиме тільки постійну складову I_0 і першу гармоніку I_{m1} ? Визначити I_0 та I_{m1} .

Відповідь: $U_0 = 2$ В; $\theta = 180^\circ$; $I_0 = 40$ мА; $I_{m1} = 40$ мА.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Атабеков, Г. И.* Основы теории цепей : учеб. для вузов. — М. : Энергия, 1969. — 424 с.
2. *Бакалов, В. П.* Основы теории цепей / В. П. Бакалов, В. Ф. Дмитриков, Б. И. Крук. — М. : Радио и связь, 2000. — 592 с.
3. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учеб. для вузов. 10-е изд. — М. : Гардарики, 2002. — 638 с.
4. *Бирюков, В. Н.* Сборник задач по теории цепей / В. Н. Бирюков, В. П. Попов, В. И. Семенов. — М. : Высш. шк., 1998.
5. Задачник по теоретическим основам электротехники. (Теория цепей) / под общ. ред. К. М. Поливанова. — М. : Энергия, 1967. — 256 с.
6. *Зернов, Н. В.* Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — М. : Энергия, 1972. — 816 с.
7. Основы теорії кіл : підручник. Ч. 1 / О. Ю. Коваль, Л. В. Гринченко, О. І. Милютченко, О. І. Рибін. — Х. : ХНУРЕ; Колегіум, 2004. — 436 с.
8. *Лосев, А. К.* Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1985. — 496 с.
9. *Попов, В. П.* Основы теории цепей : учеб. для вузов. Изд. 3-е, испр. — М. : Высш. шк., 2000. — 575 с.
10. Радіотехніка: Енциклопедичний навч. довідник : навч. посібник / за ред. Ю. Л. Мазора, Є. А. Мачуського, В. І. Правди. — К. : Вища шк., 1999. — 838 с.
11. *Соболев, Ю. В.* Теорія електричних і магнітних кіл / Ю. В. Соболев, М. М. Бабаєв, М. Г. Давиденко. — Х. : ХФВ «Транспорт України», 2002. — 264 с.
12. *Татур, Т. А.* Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях : учеб. пособие для вузов / Т. А. Татур, В. Е. Татур. — М. : Высш. шк., 2001. — 407 с.
13. Теория электрорадиотехнических цепей. Ч. 2 / Е. Г. Гринберг, Ю. А. Коваль, Д. С. Колобков и др. / под. ред. Д. С. Колобкова. — Х. : ВИРТА, 1972. — 298 с.
14. *Фриск, В. В.* Основы теории цепей : учеб. пособие. — М. : ИП РадиоСофт, 2002. — 288 с.
15. *Шебес, М. Р.* Задачник по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. — М. : Высш. шк., 1990. — 544 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- А**
- Амплітуда 198
 - комплексна 15, 45, 143, 188, 200, 264, 269, 364
 - Атенуатор 246
- Б**
- Багатополюсник (багатобрамник) 185, 186
 - Базис 186, 511
 - вузлових напруг 201, 209, 225
 - контурних струмів 207, 209, 225
 - Балансування лінії 333, 334
 - Биття 51, 52, 120
 - Біспостор 233, 236
 - Брама (вхід) 187
- В**
- Визначник матриці 203, 204, 213, 234
 - Вібратор:
 - симетричний 343
 - петльовий 344
 - Відгук (реакція) кола 15, 133, 145, 185, 188, 376, 379
 - Вітка 23, 204, 208, 212, 234
 - Властивість:
 - геометричної симетрії 461, 464, 468
 - перетворення Лапласа 135, 396
 - фільтрувальна 72, 106, 120
 - Вузол 185, 296
 - базисний 186
 - внутрішній 200
- Г**
- Гармоніки 542, 546
 - Гіратор 221, 222, 224
 - Густина спектральна 181
- Д**
- Двобрамник *див.* чотириполюсник
 - Двополюсник 143, 166, 215, 233, 365
 - Декремент згасання 41
 - Дельта-функція 72, 95, 97, 135, 180, 401
 - Джерело:
 - залежне 155, 192
 - електричної енергії 22
 - ЕРС 25, 376
 - постійної напруги 31, 32, 42, 134, 157
 - синусоїдної дії 45, 47, 48, 256
 - струму 15, 25, 59, 134, 138, 391
 - Діаграма:
 - векторна 53
 - кругова 349, 357
 - опорів 356
 - провідностей 356
 - Дія:
 - довільна 188, 279
 - постійна 17
 - синусоїдна 17, 45, 143, 168, 188, 264, 278
 - складна 57, 143
 - ступінчаста 57, 91, 103, 180
 - типова 57
 - Добротність 11, 50, 371
 - еквівалентна 373
 - полюса 513
 - Довжина хвилі 243, 245
 - Дріб ланцюговий 487, 489
 - Дуальність 32, 79, 86, 209, 375, 392
- Е**
- Елемент кола 137, 140, 185
 - активний 161
 - ідеальний 243, 247
 - нелінійний 527
 - пасивний 243, 247
 - реактивний 9, 10, 167, 175, 233
 - реактивний кратний 233
- Є**
- Ємність 24, 139, 221, 281, 303
 - кратна 235, 236
 - нелінійна 527
- З**
- Задача:
 - аналізу 185, 199
 - апроксимації 429
 - параметричного синтезу 429
 - синтезу 169, 235, 429
 - структурного синтезу 429, 480
 - Закон Ома 23, 29, 133, 137, 261, 271, 286
 - Закопи:
 - Кірхгофа 12, 17, 19, 86, 133, 141, 243, 253
 - комутації 10, 18, 21, 49
 - Замикання коротке 33, 89, 189, 224, 297, 299, 368
 - Згасання 34, 41, 49
 - Згортка 116, 119, 137
 - З'єднання 193
 - каскадне 194, 224, 247
 - паралельно 142, 194
 - паралельно-послідовне 194
 - послідовне 33, 141

— послідовно-паралельне 194
— регулярне 194
Значення:
— граничні 170, 172
— комплексне діюче 69, 197
— миттєве 11, 21, 45, 133, 138, 243, 245, 264
— початкові 11, 17, 62, 90, 133, 257
— — залежні 11
— — незалежні 11
Зображення 133, 134, 257, 377
Зсув фаз 197, 288, 300, 318

I

Ізолятор 246, 411
Імітанс 227, 233
Імпульс:
— експоненційний 111, 135
— дзвоноподібний 422
— одиничний 72
— прямокутний 74, 113, 422
Індуктивність 18, 30, 138, 235, 281, 305
— кратна 235
— нелінійна 527
Інтеграл Дюамеля 103, 105, 106
— накладання 105, 115

K

Кабель коаксіальний 250, 262, 275, 285
Коефіцієнт:
— Берга 545
— біжної хвилі 315
— відбиття 274, 295
— — операторний 377, 378
— згасання 34, 41
— корисної дії 237, 288, 326
— масштабний 358, 530
— нерівномірності ослаблення 443
— ослаблення 197, 266, 273, 299
— передачі за напругою 160, 197, 201, 207, 365
— — за струмом 201, 204, 365
— підсилення 217, 220
— поширення 266, 273, 299
— стійкої хвилі 315
— трансформації 335
— фази 197, 266, 273, 299
Коло:
— дуальне 299, 512, 516
— лінійне 9, 15, 159
— мінімально-фазове 171
— нелінійне 527
— немінимально-фазове 171
— неспотворювальне 176

Компонент кола 185, 188, 225
Комутатор 246, 419
Комутація 9
Конвеєр 229
— напруговий 185, 229
— струмовий 185, 229
Конвертор 227
Конденсатор 26, 243
Контур 18, 35, 40, 186
— одиночний 79
— паралельний 79, 85, 296, 368, 482
— послідовний 79, 85, 165, 296, 371, 390, 484
— резонансний 246, 409

Корені:

— дійсні 16, 35, 146
— комплексно-спряжені 16, 35, 147
— кратні 16, 35, 146
— прості 16, 35, 146
Краупізація 334
Крутість 528, 541
Кут відсікання 545, 546

L

Ланка:

— диференціувальна 79
— інтегрувальна 79
Лишки 147, 152

Лінія:

— вимірвальна 246, 418
— двопровідна 246, 250
— довга 246
— експоненційна 413
— затримки 246, 408, 419, 429
— збалансована 334
— ідеальна 256, 292, 299
— коаксіальна 246
— лінійна 249
— неоднорідна 249, 263
— однорідна 249
— параметрична 249
— передачі 246, 249
— реальна 299
— резистивна 246, 406
— спіральна 246, 406
— стрічкова 246, 251
— ультразвукова 406
— фідерна 403
— цифрова 406
— штучна 246, 408

M

Матриця:

— обернена 199, 200
— опорів 25, 185

— плаваюча 213
— провідностей 185
— розріджена 185
Метод:
— Берга 540, 545, 547
— вузлових напруг 143, 157
— графічний 539
— еквівалентних перетворень 143, 155, 166
— еквівалентних підсхем 214
— еквівалентного чотириполюсника 199
— класичний 14, 21, 57
— комплексних амплітуд 45, 47
— контурних струмів 25, 143, 157
— накладання 24, 143, 157
— операторний 11, 133, 154, 256
— часовий 11, 57

N

Навантаження 22, 195, 222, 254
Напруга вузлова 186, 199
Нуль функції 162, 167, 477

O

Обвідна 41, 50
— комплексна 116, 119
Опір 137
— активний 9, 87, 279, 316
— внутрішній джерела 386, 390
— вхідний 15, 165, 194, 201, 205, 273, 365
— еквівалентний 22, 65
— ємнісний 296
— індуктивний 296
— комплексний 273, 281, 298
— нелінійний 527, 531
— нормований 316
— операторний 141
— передатний 201, 208
— погонний:
— — активний 248
— — комплексний 265, 273
— реактивний 168, 292, 302
— резонансний 371
— характеристичний 35, 87, 195
— хвильовий 261, 271
Оригінал 134, 257, 378

P

Параметри:

— вторинні 261, 275
— динамічні 528
— енергетичні 274
— зосереджені 243
— короткого замикання 195

— первинні (погонні) 248, 250
— розподілені 198, 245
— статичні 528
— характеристичні 195
— холостого ходу 195
— чотириполюсника 188
Перетворення:
— Лапласа 133, 257, 377
— — обернене 147, 168
— — пряме 133
— Фур'є 168
— — обернене 180
— — пряме 180
— частоти 449
Період 244
Підсилювач:
— операційний 217, 508
— струму (струмовий) 511
— трансадмітансний 238, 511
— трансімідансний 237, 511, 515
— трансдуктивний 238, 511
Підсхема 211, 214
Поле:
— електричне 37, 247, 530
— магнітне 37, 247, 530
Поліном:
— Баттєрворта 438, 514
— Гурвіца 162, 166, 172, 438, 475
— степеневий 540
— характеристичний 14
— Чебишова 441, 442
Полос:
— схеми 185
— функції 162, 167, 476
Порядок:
— кола 14, 162
— фільтра 434
Потужність:
— активна 274, 281, 288, 295, 318
— комплексна 274
— повна 195
— реактивна 274, 295, 318
Принцип:
— дуальності 209
— збереження довжини частотного інтервалу 458, 464, 468
— накладання 57, 75, 92, 105, 108, 114
Провідність 60
— активна 338, 342
— вхідна 15, 166, 201, 206, 365
— ємнісна 356
— індуктивна 356
— комплексна 339
— операторна 142

— передатна 201, 205, 232
 — питома 250
 — погонна активна 248
 — — комплексна 265, 273
 — реактивна 341
 — хвильова 342

Проникність:
 — відносна діелектрична 250
 — магнітна 250, 262

Процес:
 — вільний 57, 74, 167
 — перехідний 9, 57, 163, 376
 — стаціонарний (усталений) 9, 14
 — хвильовий 245, 266

Пупенізація 334

Пучність 296, 305, 315

Р

Радіоімпульс 51, 124

Реалізація функції 493
 — за Кауером 487, 494
 — за Фостером 481, 485
 — каскадно-розв'язана 509
 — каскадно-узгоджена 509

Режим:
 — аперіодичний 35, 87, 88
 — біжних хвиль 274, 286, 336
 — великих коливачів 544
 — вимушений 14
 — вільний 14, 18, 28, 31
 — змішаних хвиль 281, 314, 336
 — коливальний 35, 38, 87, 90
 — короткого замикання 224, 297, 373, 375
 — критичний 35, 37, 87
 — малих коливачів 513
 — нестационарний 133, 143
 — перехідний 62
 — синусоїдний 264
 — стійних хвиль 281, 292, 321
 — узгодження 194, 274, 319, 345, 319, 384
 — усталений 14, 57, 62, 66, 133, 156, 179, 243, 377, 389
 — холостого ходу 224, 297, 375

Рівняння:
 — диференціальне 12, 61, 69, 133, 158, 177, 188, 243, 253, 377, 533
 — передачі 198
 — рівноваги 199, 204, 213
 — телеграфне 255
 — характеристичне 14, 18, 61, 158, 161, 165, 266
 — хвильове 256

Розподіл:
 — амплітуд 298, 303
 — зсуву фаз 318, 323
 — нормованих опорів 323
 — потужностей 318, 323
 — початкових фаз 300, 303

Ряд:
 — біномний 380
 — гармонічний (Фур'є) 256, 542

С

Синтез 185, 238, 429

Складова:
 — вільна 14, 16, 65, 70, 110, 133
 — вимушена 18, 65, 70, 110, 133
 — гармонічна 542, 546, 548
 — дельтоподібна 78
 — струму постійна 542

Смуга:
 — затримання 430, 444
 — переходу 431, 444
 — пропускання 81, 84, 371, 430

Співвідношення граничні 137, 179

Стала:
 — інтегрування 16, 18, 27, 62, 66, 133, 257, 267
 — електрична 250
 — магнітна 250
 — характеристична ослаблення 197
 — — передачі 196
 — — фази 197
 — часу 22, 29, 30, 62, 68, 81, 85, 109, 144

Струм:
 — вузловий 187, 200
 — контурний 25, 144, 186, 207
 — постійний 24, 61, 180

Схема:
 — ввімкнення 220, 336
 — дуальна 85
 — еквівалентна 22, 25, 62, 156
 — заміщення 85, 243, 247, 346
 — канонічна 483
 — операторна 155
 — східчаста 489, 502

Т

Теорема:
 — Дарлінгтона 502
 — диференціювання 137, 158
 — запізнення 137, 257, 384
 — згортки 137
 — інтегрування 137, 138
 — лінійності 137, 141, 384

Трансформатор чвертьхвильовий 335, 413

Трибрамник 215, 511
 — універсальний 227

У

Узгодження 194, 319, 335, 379, 499

Умови:
 — граничні 271, 297, 303
 — початкові 10, 18
 — — ненульові 11, 154
 — — нульові 10, 59, 74, 140, 143, 257

Ф

Фаза 51
 — поточна 198
 — початкова 48, 53, 82, 102, 161, 198, 264, 287

Фазообертач 345

Фільтр 79, 246, 409, 231
 — активний 509, 511
 — Баттерворта 432, 514
 — верхніх частот 85, 449
 — електричний 246, 429
 — еліптичний 449, 519
 — загороджувальний 466
 — Золотарьова 448
 — Кауера 448
 — нижніх частот 83
 — поліномний 431, 438, 448
 — прототип 449
 — режекторний 518
 — смуговий 85, 457
 — Чебишова 441

Формувач 246, 419

Фронт хвилі 269, 386

Функція:
 — ввімкнення 58
 — Дірака 72
 — додатна дійсна 166
 — дробово-раціональна 145, 161, 170
 — комплексна 199, 364, 201
 — — вхідна 15, 201, 364
 — — передатна 14, 201, 364
 — кусково-неперервна 103, 107, 134
 — непарно-парна 475
 — неперервна 108
 — одинична 58, 73, 107, 134
 — операторна 395
 — — вхідна 166, 395, 475
 — — передатна 159, 176, 395, 429
 — — передачі 14, 201
 — реактансна 167, 475
 — спеціальна 59, 72
 — узагальнена 73

— фільтрації 434, 443
 — Хевісайда 58, 134

Х

Характеристика:
 — ампер-вольтна 225
 — амплітудно-квадратична 170
 — амплітудно-частотна 81, 84, 181, 366
 — вебер-амперна 528
 — вольт-амперна 528
 — імпульсна 72, 74, 178, 396
 — коливальна 547
 — кулон-вольтна 528
 — операторна 159
 — ослаблення 430
 — перехідна 59, 178, 396
 — рівнохвильова 444
 — фазочастотна 81, 84, 174, 176, 366
 — часова 59, 79, 176, 182, 396
 — частотна 79, 174, 176, 182, 364

Хвиля 380
 — відбита (зворотна) 257, 260
 — падаюча (пряма) 257, 260

Хід холостий 189, 224, 292, 298, 374

Ч

Частота:
 — вільних коливачів 34, 37
 — гранична 84, 431, 444, 461
 — комплексна 133
 — нормована 433, 442, 450
 — нормувальна 531, 551
 — резонансна 34, 87, 368
 — центральна 457, 467

Чотириполюсник (двобрамник) 187, 364
 — активний 193, 225
 — взаємний 194
 — врівноважений 247
 — еквівалентний 193, 199
 — невірівноважений 175, 247
 — несиметричний 194, 247
 — прохідний 175, 187
 — реактивний 502, 509
 — симетричний 194, 247
 — узгоджений 197

Ш

Швидкість:
 — світла 343
 — фазова 267, 279

Шлейф 339
 — вимірювальний 417

Навчальне видання

КОВАЛЬ Юрій Олександрович
ГРИНЧЕНКО Людмила Василівна
МИЛЮТЧЕНКО Іван Олександрович
РИБІН Олександр Іванович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ
Частина 2

Підручник для студентів
вищих навчальних закладів

*За загальною редакцією
проф. В. М. Шокала та проф. В. І. Правди*

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактор *Ю. В. Статкевич*
Коректор *Т. М. Матвієнко*
Комп'ютерна верстка *В. І. Коряк*
Дизайн обкладинки *О. Л. Герасименюк*

Підписано до друку 21.01.2008. Формат 60x90/16. Папір офсетний.
Гарнітура SchoolBookC. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 35,0.
Обл.-вид. арк. 34,4. Тираж 3500 прим. Зам. №1938/129.

ТОВ «Компанія СМІТ»
61166, м. Харків, просп. Леніна, 14
Тел.: 8(057) 717-54-94, факс: 8(057) 702-13-07
E-mail: book@smit.com.ua
<http://www.smit-book.com>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 435 від 26.04.2001

Віддруковано з готових діапозитивів у ТОВ «Навчальний друк»,
62300, Харківська обл., м. Дергачі, вул. Петровського, 163а.
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК № 58 від 10.06.2002 р.