

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

О. В. Осадчук, О. С. Звягін

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ І СИГНАЛІВ

ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2015

УДК 621.3.01
ББК 32
О 72

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №6 від 29.01.2015 р.)

Рецензенти:

В. Ю. Кучерук, доктор технічних наук, професор

В. Г. Петрук, доктор технічних наук, професор

Б. В. Павлик, доктор фізико-математичних наук, професор

Осадчук, О. В.

О 72 Теорія електричних кіл і сигналів. Частина 1 : навчальний посібник / О. В. Осадчук, О. С. Звягін. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 153 с.

ISBN

У навчальному посібнику розглянуто основні поняття теорії електричних кіл і сигналів, зокрема: методи розрахунку електричних кіл, лінійні електричні кола в режимі гармонічних коливань, частотні характеристики електричних кіл, нелінійні електричні кола в режимі постійного струму, а також лінійні електричні кола в режимі періодичних негармонічних сигналів. Навчальний посібник підготовлено у відповідності з планом кафедри радіотехніки та програми до дисципліни "Теорія електричних кіл і сигналів" для студентів бакалаврського напрямку 6.050903 – «Телекомунікації» денної та заочної форм навчання і буде корисним для студентів суміжних спеціальностей.

УДК 621.3.01
ББК 32

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ.....	6
1.1 Електричний струм, напруга, потужність, енергія та одиниці їх вимірювання	6
1.2 Електричне коло, його елементи і моделі. Пасивні елементи	7
1.3 Заміщення фізичних пристроїв ідеалізованими елементами електричного кола	12
1.4 Активні елементи. Незалежні і залежні джерела.....	13
1.5 Електрична схема. Топологія електричного кола.....	17
1.6 Закони Ома і Кірхгофа	19
1.7 Принцип еквівалентності. Перетворення електричних схем	22
1.8 Принцип накладання. Теорема заміщення. Теорема взаємності ...	27
1.9 Теорема про активний двополюсник. Теорема Тевеніна і Нортона.....	29
1.10 Принцип дуальності. Теорема Телледжена. Баланс потужності .	30
1.11 Запитання та задачі для закріплення	32
2 МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ В РЕЖИМІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	34
2.1 Метод струмів гілок	34
2.2 Метод контурних струмів	37
2.3 Метод вузлових напруг	40
2.4 Метод еквівалентного генератора	43
2.5 Метод накладання (суперпозиції).....	45
2.6 Запитання та задачі для закріплення	48
3 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА В РЕЖИМІ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ.....	49
3.1 Гармонічні коливання. Основні поняття і визначення.....	49
3.2 Способи представлення гармонічних коливань	51
3.3 Гармонічні коливання в резистивних, індуктивних і ємнісних елементах	54
3.4 Гармонічні коливання в колі при послідовному з'єднанні R, L, C – елементів.....	58
3.5 Гармонічні коливання в колі при паралельному з'єднанні R, L, C – елементів.....	61
3.6 Закон Ома в комплексній формі для елементів R, L і C	63
3.7 Аналіз послідовно з'єднаних RL, RC, RLC – елементів символьним методом розрахунків.....	66
3.8 Аналіз паралельно з'єднаних RL, RC, RLC – елементів символьним методом розрахунків.....	69
3.9 Потужність в електричному колі при гармонічному впливі. Баланс потужності	72

3.10	Методи розрахунків лінійних електричних кіл при гармонічному впливі	76
3.11	Електричні кола з індуктивними зв'язками. Основні поняття	83
3.12	Послідовне з'єднання котушок індуктивності. Види включення	85
3.13	Паралельне з'єднання котушок індуктивності. Види включення	88
3.14	Методи аналізу індуктивно-зв'язаних електричних кіл	91
3.15	Аналіз повітряного електричного трансформатора	95
3.16	Аналіз трифазних електричних кіл	98
3.17	Запитання та задачі для закріплення	100
4	ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	102
4.1	Комплексна частотна характеристика, амплітудно-частотна і фазо-частотна характеристики	102
4.2	Послідовний коливальний контур. Основні поняття і визначення	106
4.3	Частотні характеристики послідовного коливального контуру ..	108
4.4	Комплексна передатна характеристика по провідності послідовного коливального контуру. Абсолютне, відносне і узагальнене розстроювання, смуга пропускання	111
4.5	Паралельний коливальний контур. Основні поняття і визначення. Частотні характеристики паралельного коливального контуру	113
4.6	Комплексна передатна характеристика по опорі паралельного коливального контуру	117
4.7	Паралельний коливальний контур із втратами	118
4.8	Збудження паралельного коливального контуру із втратами	121
4.9	Методика розрахунку резонансної частоти коливальних контурів	123
4.10	Загальні відомості про зв'язані коливальні контури. Контури із трансформаторним і автотрансформаторним зв'язком	124
4.11	Зв'язані коливальні контури із зовнішнім індуктивним зв'язком, із внутрішнім і зовнішнім ємнісним зв'язком	127
4.12	Настроювання зв'язаних коливальних контурів	131
4.13	Частотні характеристики зв'язаних коливальних контурів	134
4.14	Запитання та задачі для закріплення	136
5	НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА В РЕЖИМІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	138
5.1	Нелінійні резистивні елементи	138
5.2	Нелінійні реактивні елементи	141
5.3	Еквівалентні перетворення нелінійних елементів і методи розрахунку нелінійних електричних кіл	143
5.4	Аналітичне представлення ВАХ	146
5.5	Запитання та задачі для закріплення	151
	ЛІТЕРАТУРА	152

ВСТУП

Життя сучасного суспільства практично неможливе без радіоелектронних засобів. Телебачення, радіомовлення, телефонія, радіолокація, радіонавігація, промислова, медична та аграрна електроніка – далеко не повний перелік радіоелектронних засобів, які широко використовуються у нашому житті.

Будь-яка система забезпечується сукупністю електричних і електронних засобів різної складності, які складаються з елементів, до яких прикладені електричні напруги або протікають електричні струми. Таким чином, щоб розробляти, виготовляти, правильно експлуатувати різноманітну радіоелектронну апаратуру, необхідно, перш за все, знати процеси, які протікають в електричних колах за певних умов, а також закони, за якими ці процеси протікають. Основні з таких законів вивчаються в дисципліні «Теорія електричних кіл і сигналів».

Дисципліна «Теорія електричних кіл і сигналів» — фахова загальнотехнічна дисципліна, яка є базовою для бакалаврів, спеціалістів, магістрів за напрямками підготовки «Телекомунікації», «Радіотехніка», а також інженерів у галузі зв'язку.

В наслідок скорочення аудиторного навчального навантаження особливу увагу слід приділяти самоосвіті фахівців і насамперед їхній роботі з підручниками, навчальними посібниками та іншою допоміжною літературою. Сучасний бібліотечний фонд налічує багато фахової літератури для інженерів у галузі зв'язку. Стан її дуже зношений, залишкова кількість недостатня для широкого використання в навчальному процесі. Тому посібник, що охоплює основні розділи з дисципліни, обсяг яких більший за передбачений аудиторним навантаженням, є основною складовою позааудиторної роботи студентів.

У зв'язку з обмеженим обсягом посібника усі питання, пов'язані з програмою дисципліни, подано у повному обсязі, але стисло. У посібнику розглянуто основи теорії електричних кіл постійного і гармонічного струмів, перетворення електричних схем і методи їх розрахунку, нелінійні кола в режимі постійного струму, а також лінійні електричні кола в режимі періодичних негармонічних сигналів.

При підготовці розділів навчального посібника значну увагу приділено наочності та єдності їх викладення. З метою кращого засвоєння матеріалу більша частина теоретичного матеріалу супроводжується прикладами. Кожен розділ містить перелік питань та задач, що дозволяють закріпити вивчений матеріал.

Рівень викладеного матеріалу потребує попередніх знань студентами вищої математики та фізики, зокрема, операцій з комплексними числами, диференціальних рівнянь, рядів Фур'є, перетворень Лапласа, векторного аналізу тощо. Посібник розрахований на студентів денної та заочної форм навчання.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Основне завдання теорії електричних кіл і сигналів – це вивчення методів аналізу і синтезу електричних кіл. Завдання аналізу полягає у розрахунках електричних величин для заданого кола. В свою чергу завдання синтезу полягає в створенні електричного кола із заданими властивостями.

1.1 Електричний струм, напруга, потужність, енергія та одиниці їх вимірювання

Електричним струмом називають впорядкований рух електричних зарядів під впливом електричного поля. **Миттєвим значенням струму $i(t)$** називають швидкість зміни заряду q у часі:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

де Δq – електричний заряд, що пройшов за час Δt через поперечний переріз провідника.

Заряд вимірюється в кулонах (Кл), час – у секундах (с), електричний струм – в амперах (А).

Нехай є провідник (рис. 1.1, а). Позитивний напрямок струму, що протікає в провіднику вибирається довільно і вказується стрілкою. Як функція часу струм $i(t)$ може приймати позитивні і негативні значення. Якщо в результаті розрахунків струму, що виконані з умовно обраним позитивним напрямком, струм має знак плюс, то це означає, що його напрямок збігається з обраним позитивним напрямком. А якщо струм має знак мінус, то він спрямований протилежно обраному напрямку.

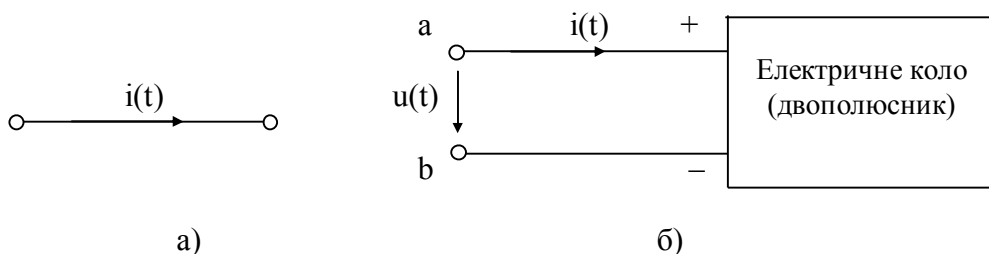


Рисунок 1.1 – Позначення електричного струму і напруги

Електрична напруга $u(t)$ між двома точками a і b (рис. 1.1, б) електричного кола визначається кількістю енергії W , що затрачається на переміщення одиничного заряду із точки a у точку b . Одиниця вимірювання напруги – вольт (В).

$$u(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq}. \quad (1.2)$$

Позитивний напрямок відліку напруги $u(t)$ відповідає напрямку переміщення позитивно заряджених часток від більш високого потенціалу точки a до більш низького потенціалу точки b .

Електрична енергія, витрачена на переміщення одиничного заряду між двома точками з напругою $u(t)$ до моменту часу t визначається рівнянням виду:

$$W = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt, \quad (1.3)$$

оскільки $W = \int_0^q u(t)dq$, а $dq = i(t)dt$.

Енергія, що надійшла в коло за проміжок часу від t_1 до t_2 , визначається інтегралом:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt. \quad (1.4)$$

Одиниця виміру енергії – джоуль (Дж).

Миттєва потужність визначається похідною енергії за часом:

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = u(t) \cdot i(t), \text{ звідки } W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt. \quad (1.5)$$

Потужність вимірюється у ватах – (Вт). Якщо $p(t) > 0$, то відбувається процес поглинання енергії, якщо $p(t) < 0$ – процес віддачі.

1.2 Електричне коло, його елементи і моделі. Пасивні елементи

Електричне коло - сукупність електротехнічних пристроїв, що складається з відповідним чином з'єднаних джерел і приймачів електричної енергії, призначених для генерації, передачі, розподілу і перетворення електричної енергії. **Джерелами** електричного кола є пристрої, які створюють (генерують) струми і напруги. **Приймачами** електричного кола називають пристрої, що споживають або перетворюють електричну енергію в інші види енергії.

В основі аналізу електричних кіл лежить принцип **моделювання**: при аналізі електричного кола створюється **фізична модель**, що містить деяку основну інформацію про це коло. Далі формується **математична модель** – система рівнянь, за допомогою яких описується фізична модель.

У електричному колі виділяють пасивні та активні елементи. До **пасивних** елементів належать: резистивний опір, індуктивність і ємність.

Резистивним опором називають ідеалізований елемент кола, що володіє властивістю необоротного розсіювання енергії (рис. 1.2).

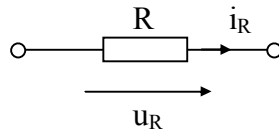


Рисунок 1.2 – Умовне позначення резистивного опору

Математична модель резистивного опору визначається законом Ома:

$$u_R = Ri_R, \quad i_R = Gu_R, \quad (1.6)$$

де R – опір (Ом), G – провідність, одиниця вимірювання – сименс (См).

Опір і провідність є взаємооберненими величинами $G = \frac{1}{R}$.

Закон Ома визначає вольт-амперну характеристику (ВАХ) резистивного опору.

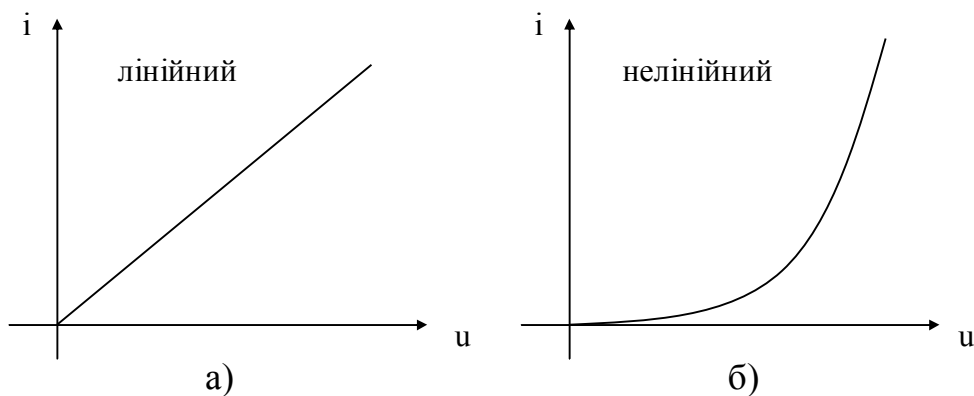


Рисунок 1.3 – ВАХ резистивного опору

Якщо резистивний опір не залежить від величини і напрямку струму, то має місце пряма пропорційність між напругою і струмом. У цьому випадку резистивний опір називається **лінійним** (рис. 1.3, а). А якщо ні, то резистивний опір називається **нелінійним** (рис. 1.4).

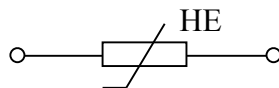


Рисунок 1.4 – Умовне позначення нелінійного резистивного опору

ВАХ нелінійного резистивного опору наведена на (рис. 1.3, б).

Миттєва потужність, що надходить у резистивний опір, визначається співвідношенням виду:

$$p_R = u_R i_R = R i_R^2 = G u_R^2. \quad (1.7)$$

Електрична енергія, що надійшла в резистивний опір і перетворена в тепло, починаючи з деякого моменту часу, наприклад $t_0 = 0$, до розглянутого моменту t , рівна:

$$W_R = \int_0^t p_R dt = \int_0^t R i_R^2 dt = \int_0^t G u_R^2 dt. \quad (1.8)$$

У випадку постійного струму ($i_R(t) = I_R = const$) або напруги ($u_R(t) = U_R = const$) отримаємо закон Джоуля-Ленца:

$$W_R = R I_R^2 t = G U_R^2 t. \quad (1.9)$$

Індуктивним елементом називають ідеалізований елемент електричного кола, що наближається по властивостях до котушки індуктивності, у якій накопичується енергія магнітного поля (рис. 1.5).

При цьому термін «індуктивність» і відповідна йому умовна позначка L застосовуються для позначення, як самого елемента кола, так і для кількісної оцінки. Одиниця вимірювання – генрі (Гн).

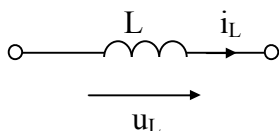


Рисунок 1.5 – Умовне позначення індуктивного елемента

Математична модель індуктивного елемента визначається співвідношенням виду:

$$\Psi = L i_L, \quad \Psi = \sum_{k=1}^w \Phi_k, \quad (1.10)$$

де Ψ – **потокозчеплення**, Φ – **магнітний потік** одиниці їх виміру вебер (Вб), w – число витків у котушці.

Рівняння (1.10) визначає вебер-амперну характеристику. Зв'язок між напругою і струмом на індуктивному елементі визначається співвідношенням виду:

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di_L}{dt}, \quad (1.11)$$

$$\text{звідки } i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt.$$

З виразу (1.11) видно, що якщо через індуктивний елемент протікає постійний струм, то напруга на ньому дорівнює нулю, а це можливо у випадку, коли опір на індуктивному елементі дорівнює нулю. Тому індуктивність еквівалентна коротко замкненій (КЗ) ділянці (рис. 1.6).

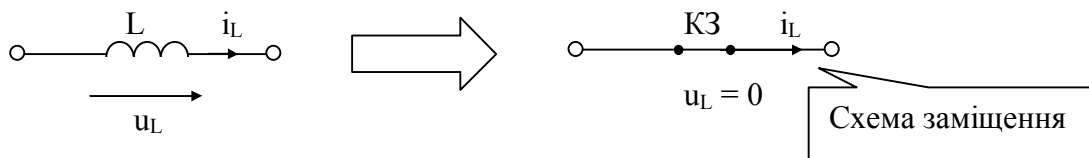


Рисунок 1.6 – Еквівалентне позначення індуктивного елемента по постійному струму

Миттєва потужність, що надходить в індуктивний елемент, визначається як:

$$p_L = u_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt}. \quad (1.12)$$

Це рівняння показує, що потужність пов'язана із процесом накопичення або втрати енергії магнітного поля. **Енергія магнітного поля**, накопичена в індуктивному елементі до моменту t , визначається у вигляді:

$$W_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_0^{i_L} L i_L \frac{di_L}{dt} dt = \frac{L i_L^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (1.13)$$

Якщо частина магнітного потоку, пов'язаного з індуктивним елементом L_1 , зв'язана одночасно і з іншим індуктивним елементом L_2 , то ці два елементи, окрім індуктивностей L_1 і L_2 мають параметр M , що називається **взаємна індуктивність**, вимірюється так само як індуктивність у генрі (Гн).

Ємнісним елементом називають ідеалізований елемент електричного кола, що наближено заміняє конденсатор, у якому накопичується енергія електричного поля (рис. 1.7). При цьому термін «ємність» і відповідна йо-

му умовна позначка C застосовуються для позначення, як самого елемента кола, так і для кількісної оцінки. Одиниця вимірювання – фарад (Φ).

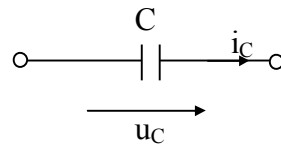


Рисунок 1.7 – Умовне позначення ємнісного елемента

Математична модель ємнісного елемента визначається співвідношенням виду:

$$q = C u_C. \quad (1.14)$$

Це рівняння визначає вольт-кулону характеристику. Зв'язок між струмом і напругою на ємнісному елементі визначається як:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \quad (1.15)$$

звідки
$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt.$$

З виразу (1.15) видно, що при постійній напрузі струм дорівнює нулю, тобто ємнісний елемент еквівалентний розриву кола (рис. 1.8) або холостому ходу (XX).

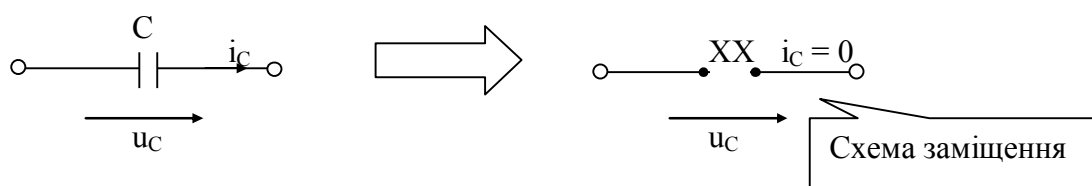


Рисунок 1.8 – Еквівалентне позначення ємнісного елемента по постійному струму

Потужність, що надходить у ємнісний елемент, визначається як:

$$p_C = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.16)$$

Рівняння (1.16) показує, що потужність пов'язана з процесом накопичення або втрати енергії електричного поля. Енергія накопичена у ємнісному елементі до моменту t визначається співвідношенням вигляду:

$$W_C = \int_{-\infty}^t p_C dt = \int_0^{u_C} C u_C \frac{du_C}{dt} dt = \frac{C u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.17)$$

1.3 Заміщення фізичних пристроїв ідеалізованими елементами електричного кола

Розглянуті ідеалізовані резистивний, індуктивний і ємнісний елементи можуть бути найпростішими моделями реальних фізичних пристроїв. До реальних фізичних пристроїв можна віднести: резистор, котушку індуктивності, конденсатор.

При постійному і змінному струмі в області нижніх частот **резистор** можна розглядати як ідеалізований резистивний елемент (рис. 1.9).

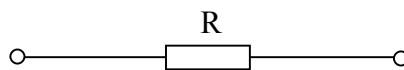


Рисунок 1.9 – Модель резистора при постійному і змінному струмі

Розглянемо **конденсатор**, який складається із двох паралельних пластин, що розділені шаром діелектрика. При постійній напрузі та ідеальному діелектрику конденсатор пропускати струм не буде (розрив у колі). При змінній напрузі в області нижніх частот модель конденсатора, крім ємнісного елемента, може містити паралельну провідність G_n , що враховує втрати енергії в діелектрику (рис. 1.10).

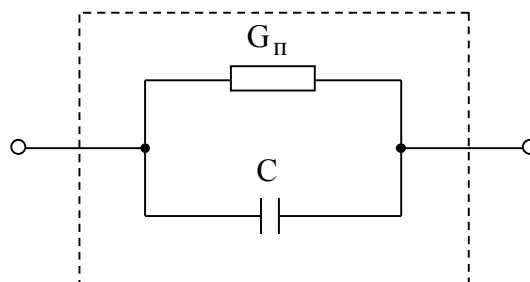


Рисунок 1.10 – Модель конденсатора при змінній напрузі

Тепер уявімо собі найпростішу **котушку індуктивності** у вигляді декількох кругових витків провідника, по якому протікає струм. При постійному струмі котушка індуктивності може бути зображена як опір R_k , який враховує опір витків провідника. При змінному струмі в області нижніх частот котушка індуктивності може бути зображена як індуктивність L із послідовно підключеним опором R_k (рис. 1.11).

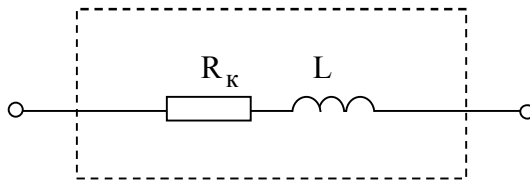


Рисунок 1.11 – Модель котушки індуктивності при змінному струмі

В області більш високих частот моделі резисторів, котушок індуктивності і конденсаторів стають більш складними. Наприклад, на надвисоких частотах (НВЧ) у резисторі починає проявлятися поверхневий ефект, що виражається в нерівномірному розподілі струму по перерізу провідника (скін-ефект). У результаті цього опір провідника починає рости зі збільшенням частоти.

1.4 Активні елементи. Незалежні і залежні джерела

Активними елементами є залежні і незалежні джерела енергії. До залежних джерел відносять: електронні лампи, транзистори, операційні підсилювачі. До незалежних джерел відносять: акумулятори, електрогенератори, термоелементи. Незалежні джерела підрозділяються на джерела напруги і джерела струму.

Незалежним джерелом напруги (ЕРС) називають ідеалізований двополіусник, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через нього (рис. 1.12).

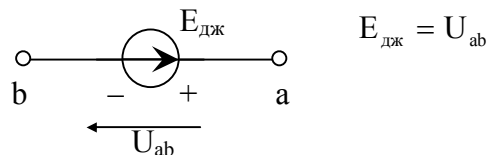


Рисунок 1.12 – Умовне позначення ідеального незалежного джерела напруги

Внутрішній опір **ідеального незалежного джерела напруги (ЕРС)** дорівнює нулю. ВАХ такого джерела представляється у вигляді суцільної лінії (рис. 1.13).

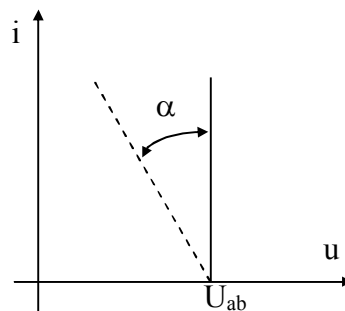


Рисунок 1.13 – ВАХ ідеального та реального незалежного джерела напруги

Реальне незалежне джерело напруги (ЕРС) має внутрішній опір $R_{дж}$ (рис.1.14).

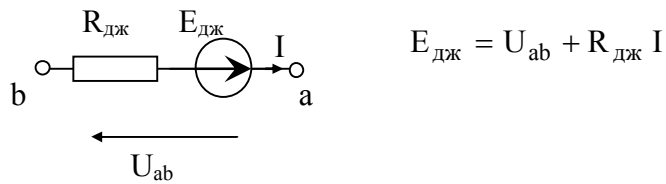


Рисунок 1.14 – Умовне позначення реального незалежного джерела напруги

ВАХ реального незалежного джерела напруги представлена пунктирною лінією (рис. 1.13).

Незалежним джерелом струму називають ідеалізований двополіусний елемент, струм якого не залежить від напруги на його затискачах (рис. 1.15).

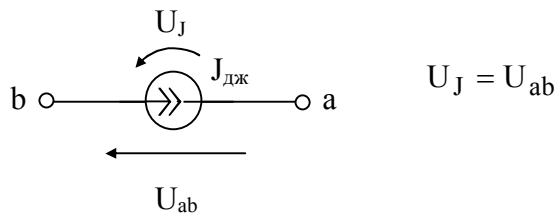


Рисунок 1.15 – Умовне позначення ідеального незалежного джерела струму

Внутрішній опір **ідеального незалежного джерела струму** дорівнює нескінченності. ВАХ ідеального джерела струму представлена у вигляді суцільної лінії (рис. 1.16).

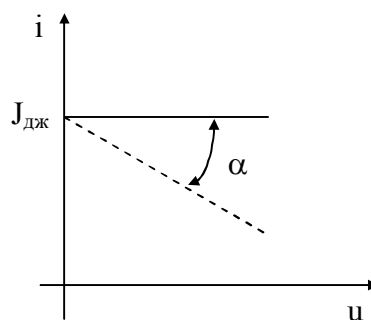


Рисунок 1.16 – ВАХ ідеального та реального незалежного джерела струму

Реальне незалежне джерело струму має внутрішню провідність $G_{дж}$ (рис.1.17).

ВАХ реального незалежного джерела струму представлена пунктирною лінією (рис. 1.16).

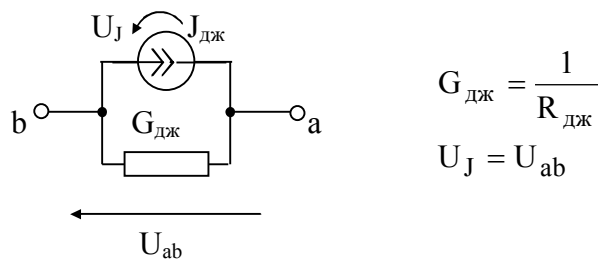


Рисунок 1.17 – Умовне позначення реального незалежного джерела струму

ВАХ реального незалежного джерела струму представлена пунктирною лінією (рис. 1.16).

Можливий перехід від схеми незалежного джерела напруги (ЕРС) до еквівалентної схеми незалежного джерела струму по формулах:

$$J_{дж} = \frac{E_{дж}}{R_{дж}}, \quad E_{дж} = \frac{J_{дж}}{G_{дж}}, \quad R_{дж} = \frac{1}{G_{дж}}. \quad (1.18)$$

Залежне джерело являє собою чотирьополосник із двома парами затискачів: вхідних (1, 1') і вихідних (2, 2'). Розрізняють чотири типи залежних джерел:

1. Джерело напруги, кероване напругою (ДНКН).
2. Джерело напруги, кероване струмом (ДНКС).
3. Джерело струму, кероване напругою (ДСКН).
4. Джерело струму, кероване струмом (ДСКС).

Покажемо умовні позначення залежних джерел різного типу.

В **ДНКН** (рис. 1.18) вхідний опір дорівнює нескінченності, вхідний струм дорівнює нулю, а вихідна напруга пов'язана із вхідною рівністю виду $u_2 = H_u u_1$. Коефіцієнт H_u характеризує підсилення по напрузі.

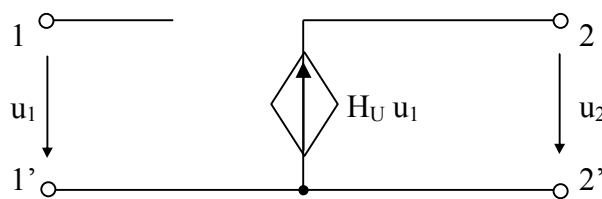


Рисунок 1.18 – Джерело напруги, кероване напругою

В **ДНКС** (рис. 1.19) вхідний струм i_1 керує вихідною напругою u_2 , тобто $u_2 = H_R i_1$. Вхідна провідність дорівнює нескінченності, вхідна напруга дорівнює нулю. Коефіцієнт H_R має розмірність опору.

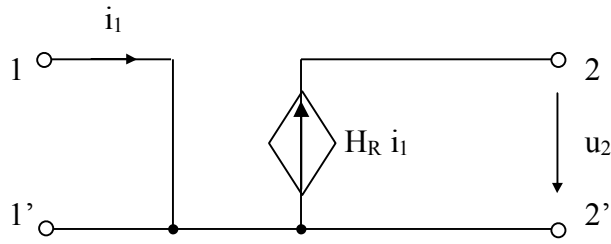


Рисунок 1.19 – Джерело напруги, кероване струмом

В ДСКН (рис. 1.20) вхідна напруга u_1 керує вихідним струмом i_2 , тобто $i_2 = H_G u_1$. Вхідний струм дорівнює нулю, вхідний опір дорівнює нескінченності. Коефіцієнт H_G має розмірність провідності.

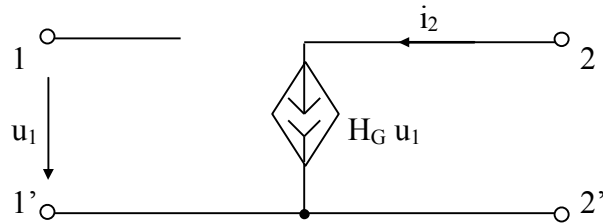


Рисунок 1.20 – Джерело струму, кероване напругою

В ДСКС (рис. 1.21) керуючим струмом є вхідний струм i_1 , тобто $i_2 = H_I i_1$. Вхідна провідність дорівнює нескінченності, вхідна напруга дорівнює нулю. Коефіцієнт H_I характеризує підсилення по струму.

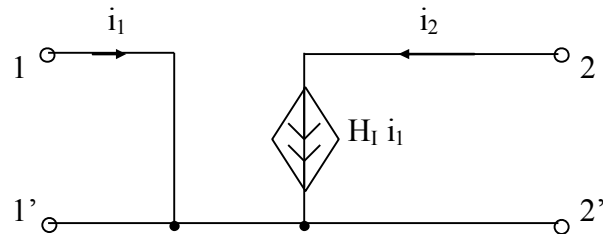


Рисунок 1.21 – Джерело струму, кероване струмом

Прикладом залежного джерела є **операційний підсилювач (ОП)**. Операційний підсилювач (рис. 1.22) має два входи: 1 – неінвертуючий і 2 – інвертуючий. Ідеальний ОП являє собою ДНКН з нескінченно великим коефіцієнтом підсилення H_U та з нескінченно великим вхідним опором і вихідною провідністю.

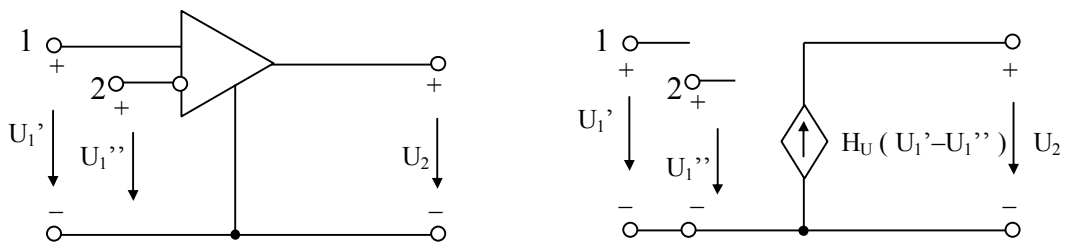


Рисунок 1.22 – Схема операційного підсилювача

1.5 Електрична схема. Топологія електричного кола

Електричною схемою називають графічне зображення електричного кола. Мікросхемою (інтегральною схемою) називають інтегральне електричне коло, що містить сотні і тисячі найпростіших активних і пасивних елементів.

Для аналізу електричних кіл останнім часом застосовують топологічні методи, що полягають у представленні електричного кола у вигляді графа. **Граф** – геометрична система ліній (**гілок**), що з'єднують задані точки (**вузли**). Граф, у якого гілки орієнтовані по напрямку струмів у гілках, є **орієнтованим** (напрямленим).

Нехай дана електрична схема у вигляді (рис. 1.23):

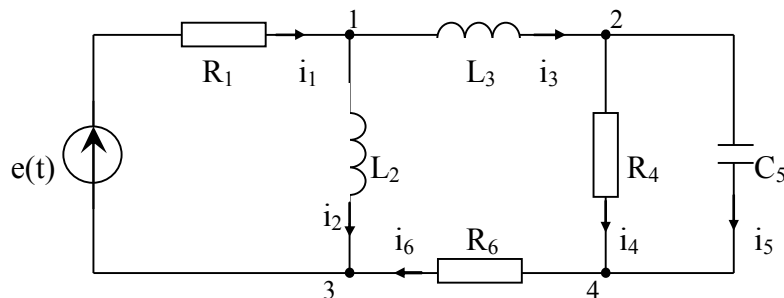


Рисунок 1.23 – Схема електричного кола

Для цього кола орієнтований граф буде мати вигляд (рис. 1.24):

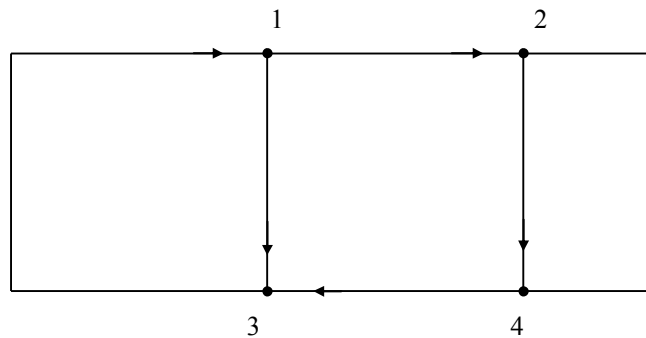


Рисунок 1.24 – Орієнтований граф електричного кола

Основні поняття і визначення в топології кіл:

1. **Вузол** – місце з'єднання затискачів трьох і більш елементів (рис. 1.25). Для зручності вузол може відображатись не однією, а декількома точками, які зображають один і той самий вузол.

2. **Гілка** (вітка) – це частина кола (схеми), що включається між двома вузлами, через які вона обмінюється енергією з колом. Найпростішою гілкою є двополосний елемент. Гілки, приєднані до однієї пари вузлів, утворюють паралельне з'єднання.

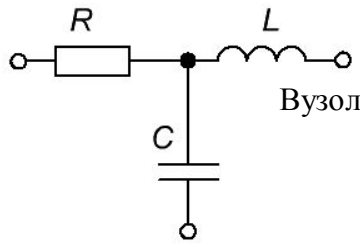


Рисунок 1.25 – Зображення вузла електричного кола

3. **Шлях** – послідовне з'єднання гілок кола.

4. **Контур** – будь-який замкнений шлях, що починається та закінчується в одній точці і вздовж якого кожен вузол проходить не більше ніж один раз (рис. 1.26).

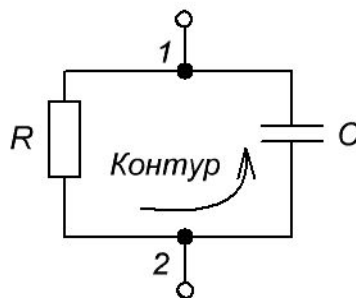
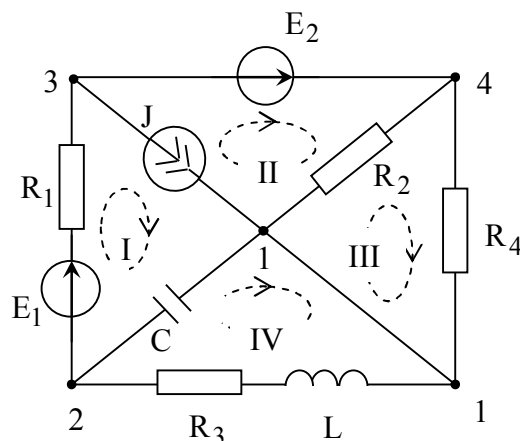


Рисунок 1.26 – Зображення контуру електричного кола

Залежно від числа контурів у схемі, розрізняють **одноконтурні** (нерозгалужені) і **багатоконтурні** (розгалужені) **схеми**. У ряді випадків зручно замінити багатоконтурну схему одноконтурною, що спрощує розрахунки.

5. **Система незалежних контурів** - це сукупність контурів, кожен з яких відрізняється від будь-якого іншого хоча б одним елементом.

Приклад. Проведемо топологічний аналіз наступної схеми:



Кількість вузлів $N_{\text{вуз}} = 4$. Для зручності вузол 1 відображається не однією, а декількома точками.

Кількість гілок $N_2 = 7$. Так гілка, що з'єднує вузли 2 і 3 складається з резистора 1 та джерела ЕРС E_1 , а гілка, що з'єднує вузли 1 і 2 складається з резистора R_3 та котушки індуктивності L .

Кількість джерел напруги $N_E = 2$. Кількість джерел струму $N_J = 1$.

Контури I, II, III та IV є прикладом системи незалежних контурів.

На практиці при аналізі електричних схем розрізняють послідовне, паралельне та змішане з'єднання елементів.

Послідовним називають з'єднання двополюсних елементів та гілок, якщо струм на всіх компонентах з'єднання змінюється за одним і тим самим законом, а загальна напруга на його зовнішніх виводах у будь-який момент часу дорівнює алгебраїчній сумі напруг його компонентів.

Характерним для послідовного з'єднання (рис. 1.27) є розміщення його елементів один за одним і відсутність відгалуження частини струму, який через них проходить на інші елементи.

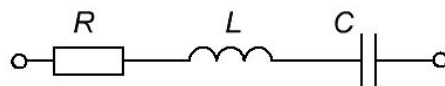


Рисунок 1.27 – Послідовне з'єднання елементів

Паралельним називають з'єднання, якщо елементи та гілки приєднані до однієї пари вузлів, напруга на всіх компонентах з'єднання змінюється за одним і тим самим законом, а загальний струм на його зовнішніх виводах у будь-який момент часу дорівнює алгебраїчній сумі струмів його компонентів (рис. 1.28).

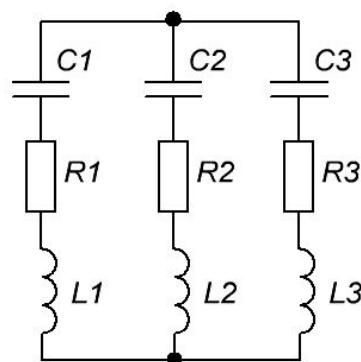


Рисунок 1.28 – Паралельне з'єднання елементів

Змішане з'єднання елементів включає в себе послідовне та паралельне з'єднання елементів.

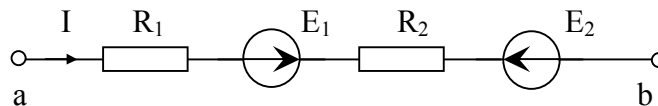
1.6 Закони Ома і Кірхгофа

Закон Ома: сила електричного струму I прямо пропорційна напрузі U , що діє на ділянці кола і обернено пропорційна опорі R цієї ділянки.

$$I = \frac{U}{R} = G \cdot U. \quad (1.19)$$

Застосовується закон Ома для гілок або для одноконтурного замкненого кола. При написанні закону Ома слід вибрати довільно позитивний напрямок струму.

Приклад. Закон Ома для гілки, що містить джерела ЕРС і резистори:



$$I = \frac{V_a - V_b + E_1 - E_2}{R_1 + R_2}.$$

У загальному випадку закон Ома записується:

$$I = \frac{V_a - V_b + \sum E}{\sum R_{ab}}. \quad (1.20)$$

Для замкненого контуру вираз (1.20) запишеться у наступному вигляді:

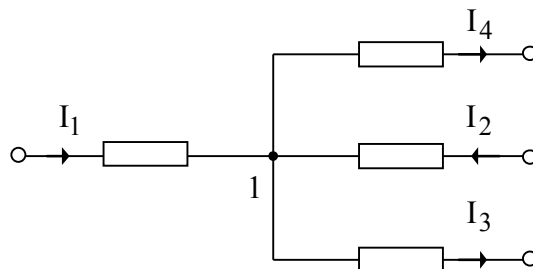
$$I = \frac{\sum E}{\sum R}. \quad (1.21)$$

I закон Кірхгофа: алгебраїчна сума всіх струмів, що сходяться в будь-якому вузлі, дорівнює нулю. При цьому знаки струмів беруться з урахуванням обраних напрямків струмів: усім струмам, спрямованим від вузла, умовно приписується знак «плюс», і відповідно усім струмам спрямованим до вузла умовно приписується знак «мінус».

Математичний запис I закону Кірхгофа:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (1.22)$$

Приклад. Записати рівняння по першому закону Кірхгофа для вузла 1.



Для вузла 1 за першим законом Кірхгофа запишемо:

$$I_3 + I_4 - I_1 - I_2 = 0, \text{ звідки } I_3 + I_4 = I_1 + I_2.$$

Остання рівність показує закон збереження енергії.

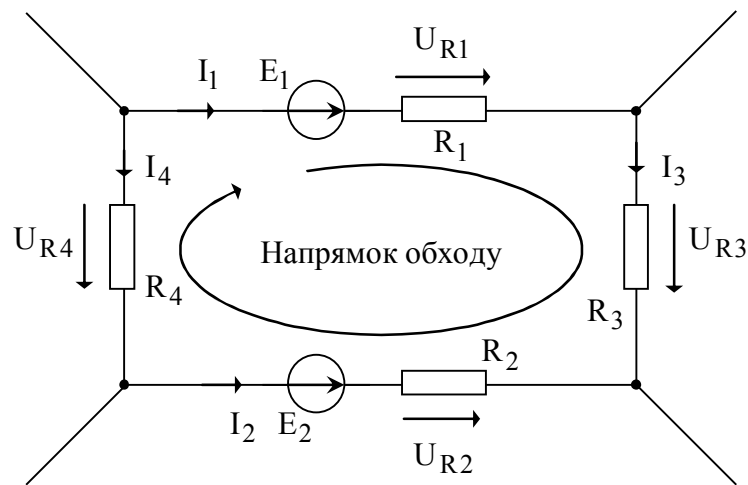
II закон Кірхгофа: алгебраїчна сума ЕРС замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг на ньому.

Математичний запис II закону Кірхгофа:

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n R_k I_k. \quad (1.23)$$

Напрямок обходу контуру вибирають довільно. У лівій частині рівняння ЕРС, напрямки яких збігаються з напрямком контуру беруться позитивними. При записі правої частини рівності зі знаком «+» беруться падіння напруги в тих гілках, у яких обраний позитивний напрямок струму збігається з напрямком обходу контуру.

Приклад. Для заданого контуру записати рівняння за другим законом Кірхгофа.



Для контура за другим законом Кірхгофа запишемо:

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_4 I_4.$$

Напруги на резистивних елементах визначаються наступним чином:

$$U_{R1} = R_1 I_1, U_{R2} = R_2 I_2, U_{R3} = R_3 I_3, U_{R4} = R_4 I_4$$

Закон збереження енергії: у будь-який момент часу сума миттєвих потужностей усіх пасивних гілок кола дорівнює сумі миттєвих потужностей, що генеруються джерелами напруги і струму.

1.7 Принцип еквівалентності. Перетворення електричних схем

Принцип еквівалентності: напруги та струми в гілках схеми, яких не торкнулось перетворення, залишаються незмінними.

Перетворення електричних схем включає в себе спрощення послідовно, паралельно та змішано з'єднаних елементів.

Послідовне з'єднання елементів:

1. Розглянемо послідовне з'єднання резистивних елементів (рис. 1.29).

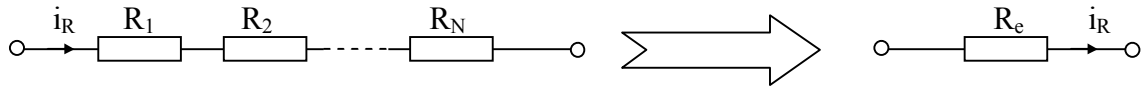


Рисунок 1.29 – Перетворення послідовного з'єднання резистивних елементів

Еквівалентний опір R_e у такому випадку визначається з виразу:

$$R_e = \sum_{n=1}^N R_n. \quad (1.24)$$

2. Розглянемо послідовне з'єднання індуктивних елементів (рис. 1.30).

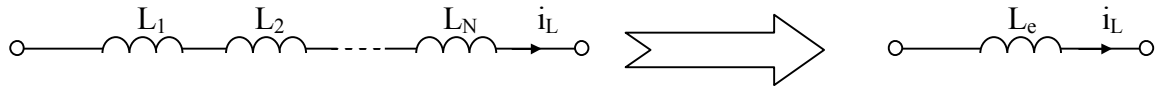


Рисунок 1.30 – Перетворення послідовного з'єднання індуктивних елементів

Еквівалентна індуктивність L_e у такому випадку визначається з виразу:

$$L_e = \sum_{n=1}^N L_n. \quad (1.25)$$

3. Розглянемо послідовне з'єднання ємнісних елементів (рис. 1.31).

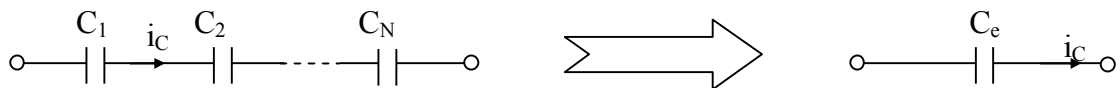


Рисунок 1.31 – Перетворення послідовного з'єднання ємнісних елементів

Еквівалентна ємність C_e у такому випадку визначається з виразу:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}. \quad (1.26)$$

Паралельне з'єднання елементів:

1. Розглянемо паралельне з'єднання резистивних елементів (рис. 1.32).

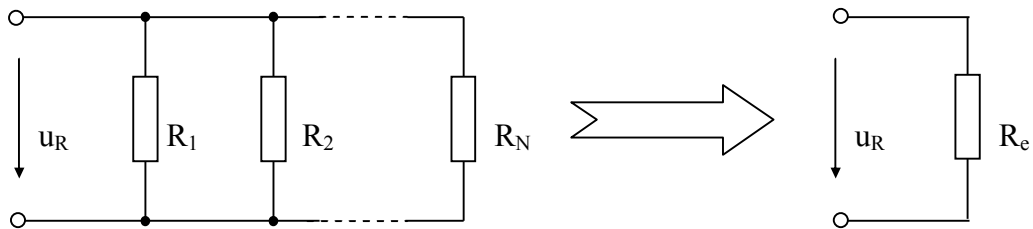


Рисунок 1.32 – Перетворення паралельного з'єднання резисторів

Еквівалентний опір R_e у такому випадку визначається з виразу:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}. \quad (1.27)$$

2. Розглянемо паралельне з'єднання індуктивних елементів (рис. 1.33).

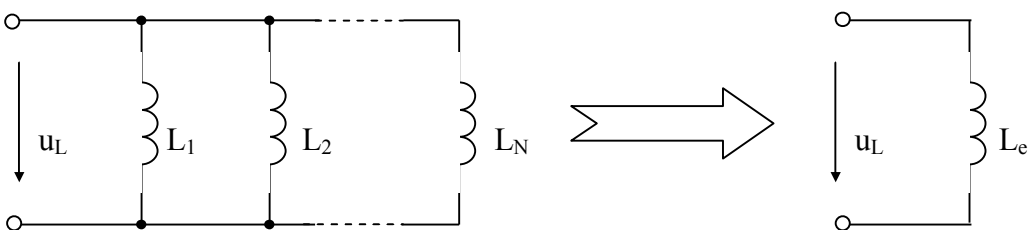


Рисунок 1.33 – Перетворення паралельного з'єднання індуктивностей

Еквівалентна індуктивність L_e у такому випадку визначається з виразу:

$$\frac{1}{L_e} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n}. \quad (1.28)$$

3. Розглянемо паралельне з'єднання ємнісних елементів (рис. 1.34).

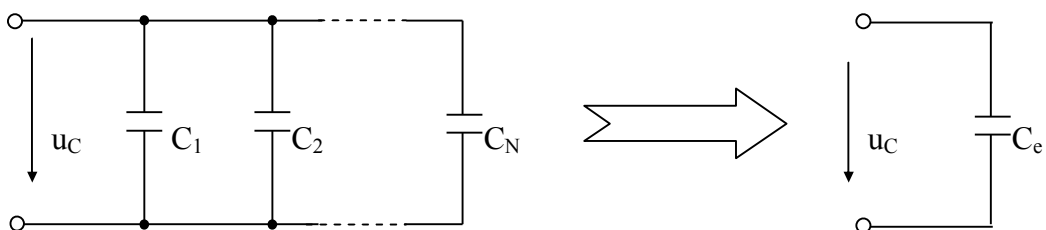


Рисунок 1.34 – Перетворення паралельного з'єднання ємнісних елементів

Еквівалентна ємність C_e у такому випадку визначається з виразу:

$$C_e = \sum_{n=1}^N C_n. \quad (1.29)$$

Змішане з'єднання резистивних елементів представлено на (рис. 1.35).

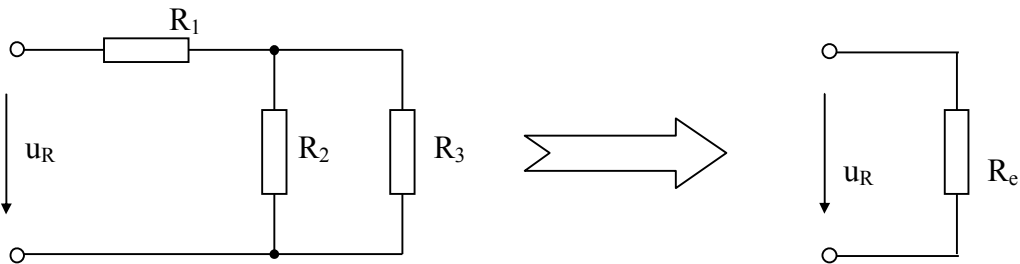


Рисунок 1.35 – Перетворення змішаного з'єднання резистивних елементів

Еквівалентний опір R_e у такому випадку визначається з виразу:

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (1.30)$$

Перетворення з'єднання «трикутника» в «зірку» наведено на (рис. 1.36).

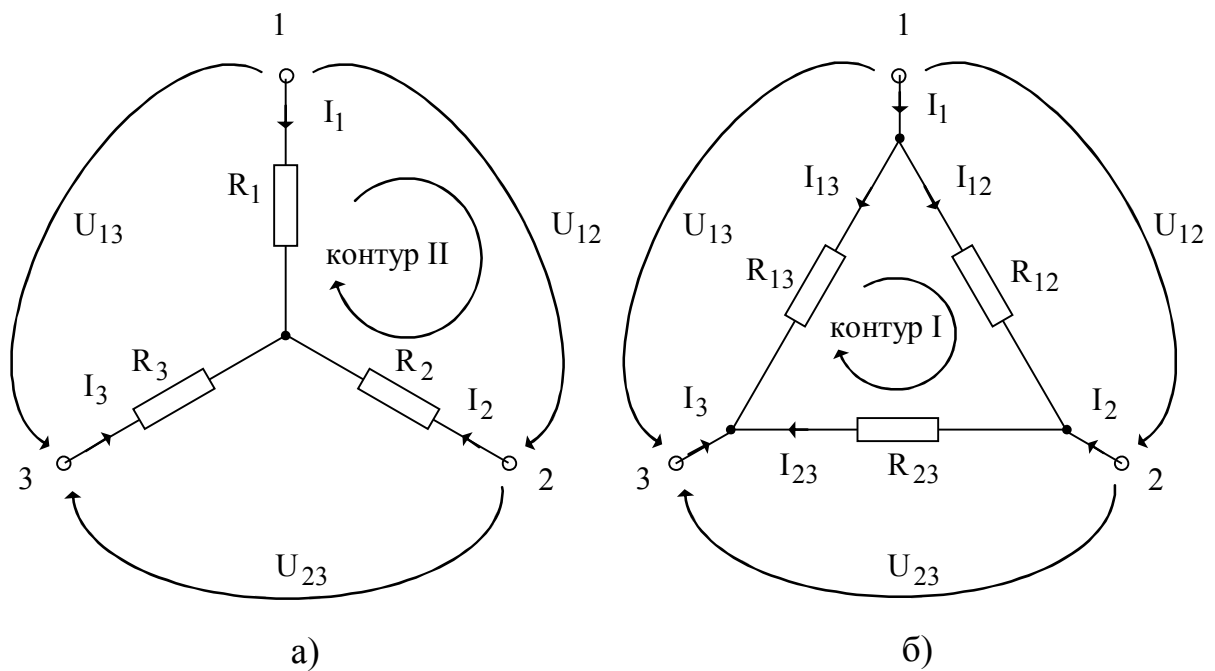


Рисунок 1.36 – З'єднання резисторів зіркою а) і трикутником б)

Складемо рівняння Кірхгофа для схеми (рис. 1.36, а).

$$\begin{cases} -I_1 + I_{12} + I_{13} = 0, \\ -I_2 - I_{12} + I_{23} = 0, \\ 0 = I_{12} R_{12} + I_{23} R_{23} - I_{13} R_{13}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Перші два рівняння системи (1.31) складені для вузлів 1 і 2, а третє - для контура I. Проведемо деякі перетворення:

$$\begin{cases} I_{13} = I_1 - I_{12}, \\ I_{23} = I_2 + I_{12}, \\ I_{12} R_{12} = I_{13} R_{13} - I_{23} R_{23}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_{13} = I_1 - I_{12}, \\ I_{23} = I_2 + I_{12}, \\ U_{12} = I_{13} R_{13} - I_{23} R_{23}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Перше та друге рівняння підставимо у третє, одержимо:

$$U_{12} = (I_1 - I_{12}) R_{13} - (I_2 + I_{12}) R_{23} = I_1 R_{13} - I_{12} R_{13} - I_2 R_{23} - I_{12} R_{23},$$

оскільки $I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}}$, то $U_{12} = I_1 R_{13} - \frac{U_{12}}{R_{12}} R_{13} - I_2 R_{23} - \frac{U_{12}}{R_{12}} R_{23}$,

$$U_{12} + \frac{U_{12}}{R_{12}} R_{13} + \frac{U_{12}}{R_{12}} R_{23} = I_1 R_{13} - I_2 R_{23},$$

$$U_{12} \left(1 + \frac{1}{R_{12}} R_{13} + \frac{1}{R_{12}} R_{23}\right) = I_1 R_{13} - I_2 R_{23},$$

$$U_{12} \frac{R_{12} + R_{13} + R_{23}}{R_{12}} = I_1 R_{13} - I_2 R_{23}, \text{ звідки}$$

$$U_{12} = I_1 \frac{R_{13} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} - I_2 \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.33)$$

З іншого боку напругу U_{12} можна визначити по контуру II (рис. 1.36, а).

$$0 = U_{12} + I_2 R_2 - I_1 R_1, \text{ звідки } U_{12} = I_1 R_1 - I_2 R_2. \quad (1.34)$$

Таким чином прирівнявши вирази (1.33) і (1.34), одержимо:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = I_1 \frac{R_{13} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} - I_2 \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.35)$$

З виразу (1.35) видно, що опори в лівій частині рівності дорівнюють відповідним опорам у правій частині, тобто

$$R_1 = \frac{R_{13} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (1.36)$$

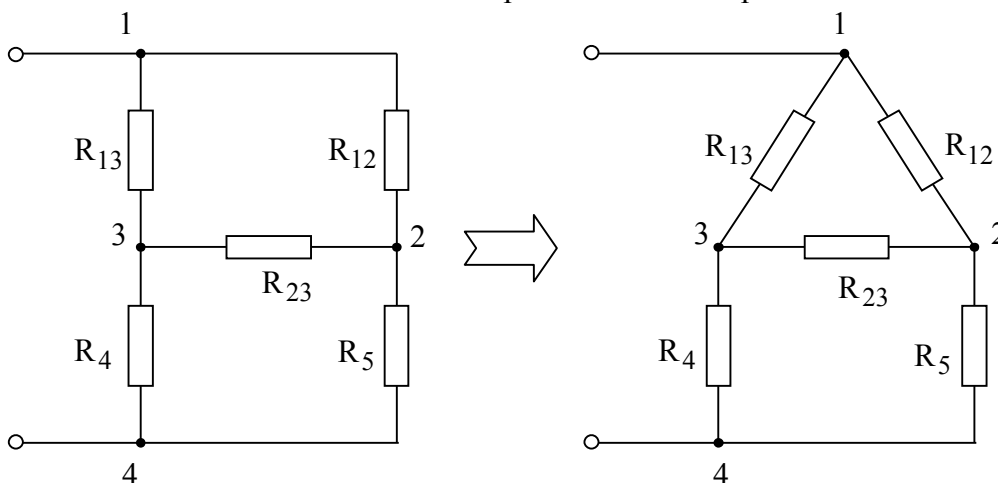
$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.37)$$

За аналогією можна знайти і опір R_3 :

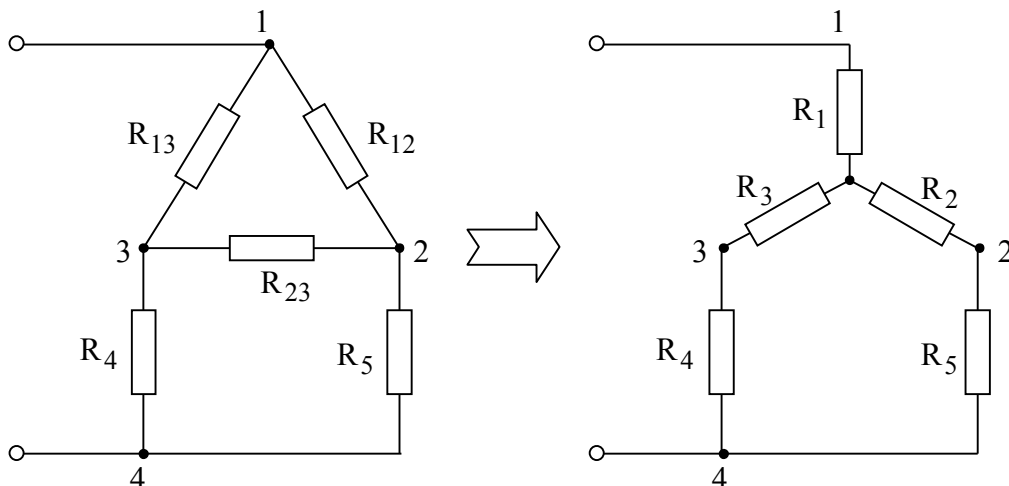
$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.38)$$

Отримані формульні перетворення (1.36) – (1.38) будуть досить корисні при визначенні еквівалентного опору лінійного електричного кола, що містить з'єднання типу «трикутник».

Приклад. Визначимо еквівалентний опір лінійного електричного кола:



Проведемо еквівалентне перетворення з «трикутника» в «зірку»:



По формулах перетворення одержуємо:

$$R_1 = \frac{R_{13} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}},$$

$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}},$$

$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

З останньої схеми видно, що опори R_3 та R_4 , як і опори R_2 та R_5 з'єднані послідовно. У свою чергу, гілки з опорами R_3 , R_4 та R_2 , R_5 з'єднані паралельно. Отже, еквівалентний опір усього кола визначається з виразу:

$$R_e = R_1 + \frac{(R_3 + R_4)(R_2 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}.$$

Для перетворення з'єднання «зірка» в «трикутник» застосовують вирази:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad (1.39)$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}, \quad (1.40)$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}. \quad (1.41)$$

1.8 Принцип накладання. Теорема заміщення. Теорема взаємності

Якщо розглядати напруги і струми джерел електричної енергії, як задаючі **впливи** (дії), а напруги і струми в окремих гілках кола як **реакцію** (відгук) кола на ці впливи, то **принцип накладання** можна сформулювати в такий спосіб: реакція лінійного електричного кола (ЛЕК) на суму впливів дорівнює сумі реакцій від кожного впливу окремо.

Принцип накладання можна використовувати для знаходження реакції в лінійному колі, що перебуває як під впливом декількох джерел, так і при складному довільному впливі одного джерела.

Якщо у ЛЕК діє кілька джерел електричної енергії, то для знаходження струму i або напруги u в якій-небудь гілці необхідно здійснити по черговий вплив кожним джерелом та знайти відповідні часткові реакції i_k й u_k

на ці впливи. Тоді результуюча реакція відповідно до принципу накладання визначається як:

$$i = \sum_{k=1}^N i_k, \quad u = \sum_{k=1}^N u_k, \quad (1.42)$$

де N – загальне число джерел електричної енергії.

При цьому джерела електричної енергії, які не враховуються при почерговому впливі, а саме джерела напруги (ЕРС) замінюються закоротками, а джерела струму – розривами.

Якщо у ЛЕК прикладена напруга складної форми, тоді необхідно розкласти цей складний вплив на суму простих впливів та визначити реакцію кола на кожний простий вплив з наступним накладанням отриманих результатів.

Для нелінійних кіл принцип накладання не застосовується – і ця обставина часто служить критерієм оцінки лінійності або нелінійності електричного кола. Для оцінки лінійності електричного кола подамо на його вхід вплив $x(t)$ у вигляді напруги або струму (рис. 1.37) і будемо спостерігати реакцію $y(t)$ на виході кола.



Рисунок 1.37 – Зображення ЛЕК у вигляді чотиріполюсника

Якщо на вхід кола поданий вплив виду: $kx(t)$, а реакція на цей вплив $ky(t)$, то коло **лінійне**. А якщо ні, то коло є **нелінійним**.

Теорема заміщення: будь-яку гілку ЛЕК із напругою u та струмом i можна замінити джерелом напруги з $E_{дж} = u$ та джерелом струму з $J_{дж} = i$ (рис. 1.38).

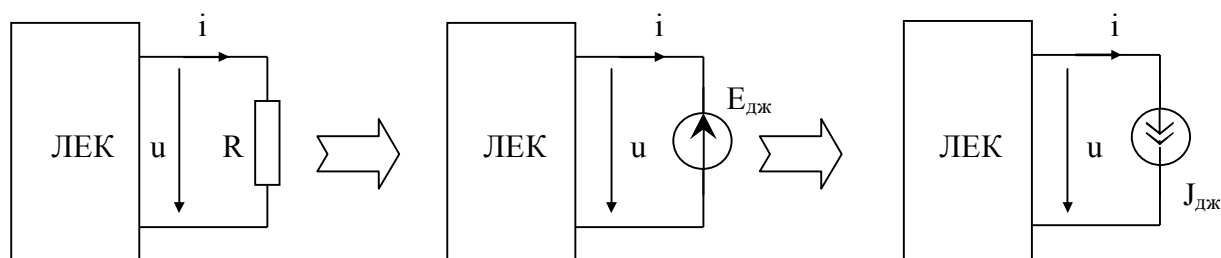


Рисунок 1.38 – Ілюстрація до теореми заміщення

Теорема взаємності: якщо джерело напруги (ЕРС), увімкнене у деяку гілку m ЛЕК (рис. 1.39), що складається із пасивних двополюсників, викликає в іншій гілці n цього кола частковий струм I , то це джерело напруги (ЕРС), будучи перенесене у гілку n , викличе в гілці m той самий частковий струм I .

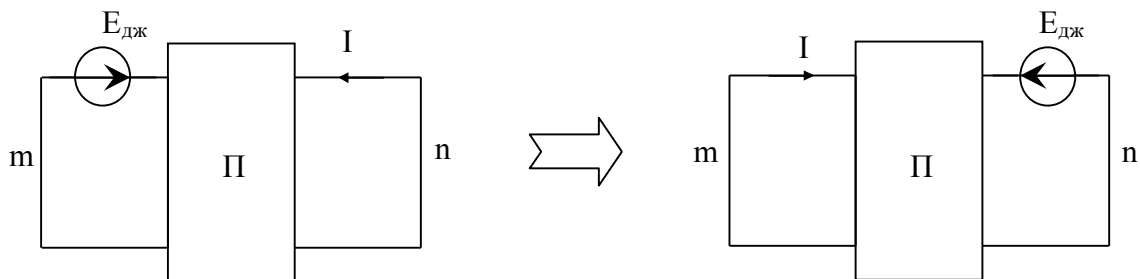


Рисунок 1.39 – Ілюстрація до теореми взаємності

1.9 Теорема про активний двополюсник. Теорема Тевеніна і Нортонна

Теорема про активний двополюсник використовується у випадку, коли треба знайти реакцію кола (струм або напругу) в одній гілці. При цьому іншу частину кола, до якого підключена дана гілка, зручно розглядати у вигляді двополюсника.

Активний двополюсник – містить джерела електричної енергії, які не компенсуються взаємно усередині двополюсника, в протилежному випадку двополюсник **пасивний**.

Розрізняють дві модифікації теореми про активний двополюсник:

Теорема про еквівалентне джерело напруги (Теорема Тевеніна): струм у будь-якій гілці ЛЕК не зміниться, якщо активний двополюсник, до якого підключена дана гілка, замінити еквівалентним джерелом напруги (ЕРС) з напругою (ЕРС), рівною напрузі холостого ходу на затискачах розімкнутої гілки та внутрішнім опором джерела, рівним еквівалентному вхідному опору пасивного двополюсника з боку розімкнутої гілки.

При перетворенні активного двополюсника у пасивний необхідно джерела напруги (ЕРС) замінити закортками, а джерела струму – розривами.

Теорема про еквівалентне джерело струму (Теорема Нортонна): струм у будь-якій гілці ЛЕК не зміниться, якщо активний двополюсник, до якого підключена дана гілка, замінити еквівалентним джерелом струму зі струмом, рівним струму короткого замикання цієї гілки, та внутрішньою провідністю, рівною еквівалентній вхідній провідності з боку розімкнутої гілки.

Зв'язок між еквівалентним джерелом напруги і струму виражається співвідношеннями:

$$E_{дж} = J_{дж} R_{дж}, \quad J_{дж} = G_{дж} E_{дж}, \quad G_{дж} = 1/R_{дж}. \quad (1.43)$$

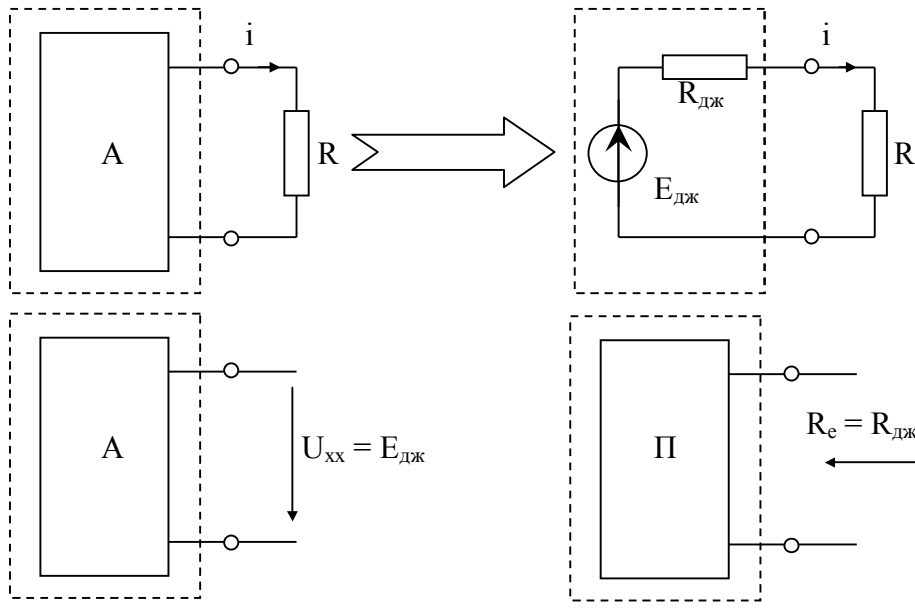


Рисунок 1.40 – Ілюстрація до теореми про еквівалентне джерело напруги

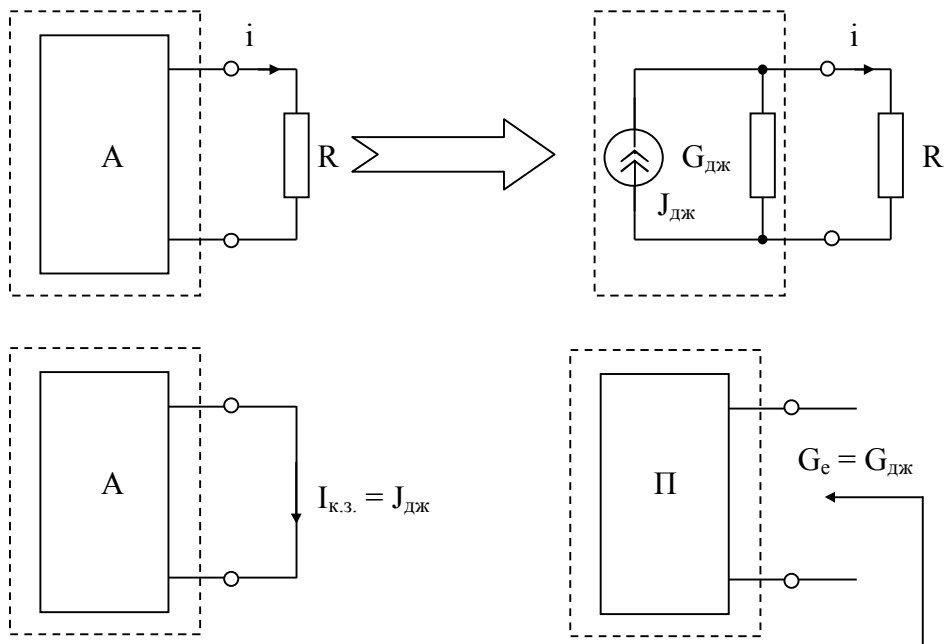


Рисунок 1.41 – Ілюстрація до теореми про еквівалентне джерело струму

1.10 Принцип дуальності. Теорема Телледжена. Баланс потужності

Принцип дуальності: якщо для даного електричного кола справедливі деякі закони, рівняння або співвідношення, то вони будуть справедливі і для дуальних величин у дуальному колі.

Використання принципу дуальності в ряді випадків дозволяє суттєво спростити розрахунки. Так, якщо знайдені рівняння для одного кола, то, використовуючи дуальні співвідношення можна відразу записати закони зміни дуальних величин у дуальному колі.

Таблиця 1.1 - Основні дуальні поняття і співвідношення

Вихідні поняття	Дуальні поняття
Напруга	Струм
Опір	Провідність
Індуктивність	Ємність
I закон Кірхгофа	II закон Кірхгофа
$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$i_R(t) = G \cdot u_R(t)$
$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$
$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) dt$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt$
Теорема про еквівалентне джерело напруги	Теорема про еквівалентне джерело струму
Послідовне з'єднання	Паралельне з'єднання
$R = \sum_k R_k$	$G = \sum_k G_k$
$L = \sum_k L_k$	$C = \sum_k C_k$
$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$	$\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}$

Теорема Телледжена: сума добутків напруг і струмів усіх гілок кола, що задовольняють законам Кірхгофа, дорівнює нулю.

$$\sum_{n=1}^{N_T} u_n i_n = 0. \quad (1.44)$$

Баланс потужності: для будь-якого замкненого електричного кола сума потужностей, що віддаються джерелами електричної енергії $P_{дж}$, дорівнює сумі потужностей, що витрачаються (споживаються) в прийमाх енергії $P_{спож}$.

$$\sum P_{дж} = \sum P_{спож}. \quad (1.45)$$

Рівняння балансу потужності описується виразом:

$$\sum (E_k I_k + U_{Jk} J_k) = \sum I_k^2 R_k. \quad (1.46)$$

Слід звернути увагу на розміщення знаків при складанні рівняння балансу потужності. Якщо напрямок напруги на джерелі протилежний напрямку струму, то доданок записується зі знаком «плюс», якщо співнапря-

влені, то зі знаком «мінус». При записі правої частини рівняння балансу потужності всі доданки беруться зі знаком «плюс».

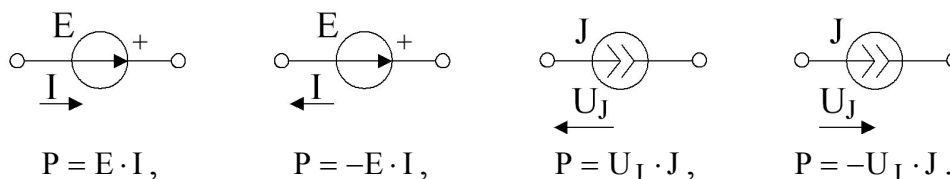
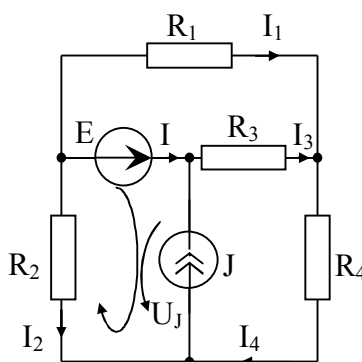


Рисунок 1.42 - Ілюстрація до визначення знаків доданків у рівнянні балансу потужності

Приклад. Скласти рівняння балансу потужності для резистивного електричного кола.



$$E I + U_J J = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4,$$

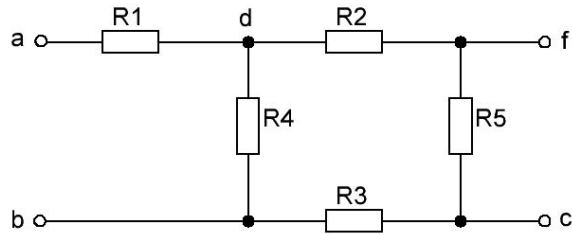
де $U_J = E + I_2 R_2$ – напруга на джерелі струму.

1.11 Запитання та задачі для закріплення

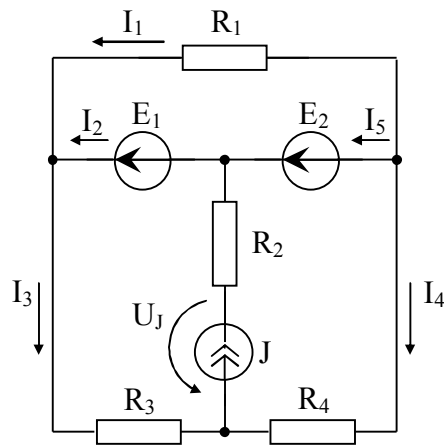
1. Дайте визначення електричному струму, напрузі, енергії і потужності.
2. Що називається електричним колом?
3. Які елементи електричного кола є пасивними?
4. У чому відмінність лінійного резистивного опору від нелінійного?
5. Який зв'язок між напругою і струмом, що протікає через індуктивний елемент?
6. Які елементи електричного кола є активними?
7. Що називається незалежним джерелом напруги?
8. У чому відмінність ідеального джерела струму від реального?
9. Назвіть основні поняття і визначення в топології електричних кіл.
10. Запишіть у загальному виді Закон Ома для гілки, що містить джерела ЕРС і резистори.
11. Сформулюйте I та II закони Кірхгофа.
12. У чому полягає принцип еквівалентності?
13. Сформулюйте принцип накладання.

14. Сформулюйте теорему про еквівалентне джерело напруги.

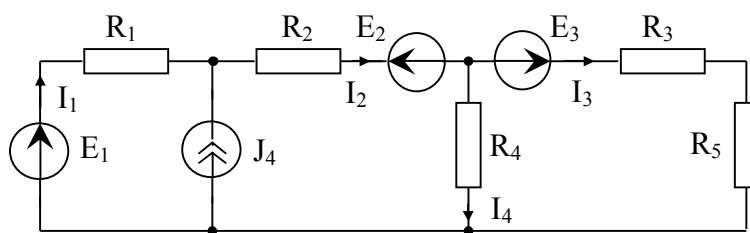
15. Для заданого електричного кола знайти еквівалентний опір між за- тискачами ab , ac , af , bf та df якщо: $R_1 = 100(\text{Ом})$, $R_2 = R_4 = 200(\text{Ом})$, $R_3 = R_5 = 400(\text{Ом})$.



16. Скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа для заданого елект- ричного кола.



17. Визначити баланс потужності для заданого електричного кола.



2 МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ В РЕЖИМІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Якщо відома конфігурація складного електричного кола і задані параметри елементів, то розрахунки такого кола звичайно зводяться до визначення струмів у гілках та потенціалів вузлів. Кількість невідомих струмів збігається із кількістю m гілок. Якщо в деяких гілках містяться джерела струму, то невідомими для цих гілок є відповідні напруги джерел струму U_J . Таким чином, для розрахунків кола у загальному випадку слід скласти систему з m незалежних рівнянь.

2.1 Метод струмів гілок

Метод струмів гілок (МСГ), який ще називають методом рівнянь Кірхгофа заснований на законах Кірхгофа. Число рівнянь за МСГ дорівнює кількості невідомих струмів гілок і визначається як:

$$N_{мсг} = N_2 - N_J, \quad (2.1)$$

де N_2 - кількість гілок, N_J - кількість джерел струму.

Кількість рівнянь N_I , що складаються по I закону Кірхгофа рівна:

$$N_I = N_{вуз} - 1, \quad (2.2)$$

де $N_{вуз}$ - кількість вузлів.

Кількість рівнянь N_{II} , що складаються по II закону Кірхгофа рівна:

$$N_{II} = N_2 - N_{вуз} + 1 - N_J. \quad (2.3)$$

З виразу (2.3) видно, що при складанні рівнянь по II закону Кірхгофа слід вибрати незалежні контури, що не містять джерел струму.

МСГ на практиці застосовується для розрахунку електричних кіл, що містять не більше трьох вузлів, так як електричне коло з більшою кількістю вузлів вимагає більшої кількості рівнянь, що в свою чергу значно ускладнює розрахунки.

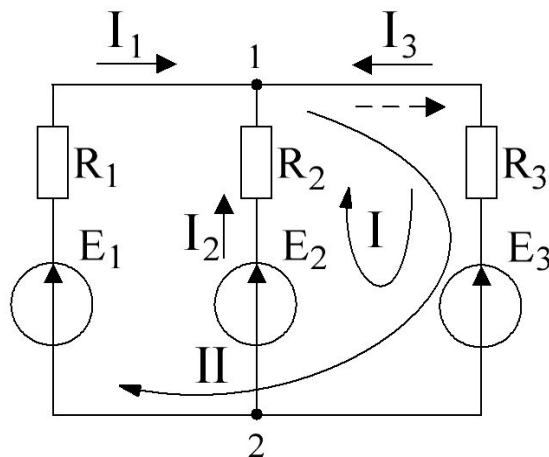
Для розрахунку лінійного електричного кола по постійному струму за МСГ необхідно:

1. Позначити струми гілок і довільно вибрати їх позитивний напрям.

2. Позначити усі вузли електричного кола і за виразом (2.2) визначити кількість рівнянь за I законом Кірхгофа.
3. Визначити за виразом (2.3) кількість рівнянь за II законом Кірхгофа.
4. Довільно обрати напрямки обходу незалежних контурів, для яких будуть складатись рівняння за II законом Кірхгофа .
5. Скласти рівняння за I законом Кірхгофа.
6. Скласти рівняння за II законом Кірхгофа.
7. Об'єднати складені рівняння за I і II законом Кірхгофа та отримати n систему рівнянь з n невідомими струмами гілок. Розв'язавши дану систему, отримати числові значення струмів гілок.
8. Якщо необхідно, то за допомогою узагальненого закону Ома розрахувати напруги гілок.

Якщо на практиці, в результаті розрахунків, деякі струми мають від'ємне значення, то це означає, що вони насправді напрямлені протилежно до відповідно обраного їм позитивного напрямку струму.

Приклад. В заданому колі визначити струми гілок, якщо $R_1 = 200$ (Ом), $R_2 = 100$ (Ом), $R_3 = 10$ (Ом), $E_1 = 60$ (В), $E_2 = 48$ (В), $E_3 = 6$ (В).



Позначивши струми гілок та вузли у колі визначимо кількість рівнянь за I законом Кірхгофа:

$$N_I = N_{\text{вуз}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Визначимо кількість рівнянь за II законом Кірхгофа:

$$N_{II} = N_2 - N_{\text{вуз}} + 1 - N_J = 3 - 2 + 1 - 0 = 2.$$

Позначимо напрямки обходу I та II контурів.

Складемо рівняння за I законом Кірхгофа для вузла 2:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Складемо рівняння за II законом Кірхгофа для контурів I та II:

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2 - E_3,$$

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 - E_3.$$

Об'єднавши складені рівняння, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2 - E_3, \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 - E_3. \end{cases}$$

Таким чином, визначення струмів гілок зводиться до розв'язку системи рівнянь з трьома невідомими.

З першого рівняння системи виразимо струм I_2 і підставимо його значення у друге рівняння:

$$\begin{cases} I_2 = -I_1 - I_3, \\ -R_2(I_1 + I_3) - R_3 I_3 = E_2 - E_3, \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 - E_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2 = -I_1 - I_3, \\ -R_2 I_1 - I_3(R_2 + R_3) = E_2 - E_3, \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 - E_3. \end{cases}$$

З третього рівняння системи виразимо струм I_1 і підставимо його значення у друге рівняння та визначимо струм I_3 :

$$\begin{cases} I_2 = -I_1 - I_3, \\ \frac{R_2(-E_1 + E_3 - R_3 I_3)}{R_1} - I_3(R_2 + R_3) = E_2 - E_3, \\ I_1 = \frac{E_1 - E_3 + R_3 I_3}{R_1}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2 = -I_1 - I_3, \\ I_3 = \frac{R_1(E_2 - E_3) - R_2(E_3 - E_1)}{-R_2 R_3 - R_1(R_2 + R_3)}, \\ I_1 = \frac{E_1 - E_3 + R_3 I_3}{R_1}. \end{cases}$$

Підставивши значення опорів і ЕРС отримаємо:

$$\begin{cases} I_1 = 0,24 \text{ (A)}, \\ I_2 = 0,36 \text{ (A)}, \\ I_3 = -0,6 \text{ (A)}. \end{cases}$$

Струми I_1 та I_2 мають додатне значення, а струм I_3 - від'ємне, відповідно, напрямки перших двох струмів були обрані вірно, а напрямок третього струму - невірно. Таким чином, струм I_3 насправді напрямлений протилежно до відповідно обраного йому позитивного напрямку струму і на схемі позначається пунктирною стрілкою.

$\sum_n E_{kk}$ – алгебраїчна сума ЕРС, включених у гілки, що утворюють контур k ,

причому, зі знаком «плюс» у цю суму входять ЕРС джерел, що діють згідно з обходом контуру, зі знаком «мінус» входять ЕРС джерел, що діють зустрічно,

I_{kk} – невідомі контурні струми,

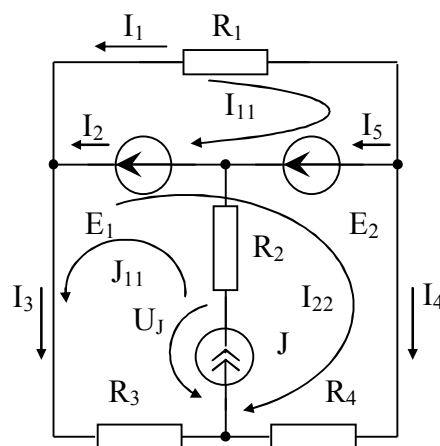
J_n – відомі контурні струми у контурах, що містять джерела струму,

R_n – загальний опір гілки контуру n з контуром, що містять джерело струму.

Для розрахунку лінійного електричного кола по постійному струму за МКС необхідно:

1. Позначити всі струми гілок і довільно вибрати їх позитивний напрямки.
2. Довільно вибрати сукупність незалежних контурів і нанести на схему позитивний напрямок (відомих і невідомих) контурних струмів, що проходять в обраних контурах.
3. Визначити за виразом (2.4) кількість рівнянь за II законом Кірхгофа.
4. Скласти систему рівнянь виду (2.5) для контурних струмів.
5. Визначити власні, загальні опори і контурні ЕРС та підставити їх у систему рівнянь (2.5).
6. Розв'язати отриману систему рівнянь щодо контурних струмів.
7. Визначити струми гілок через контурні струми за I законом Кірхгофа.
8. Якщо необхідно, то за допомогою узагальненого закону Ома розрахувати потенціали вузлів.

Приклад. В заданому колі визначити струми гілок методом контурних струмів, якщо $R_1 = 10$ (Ом), $R_2 = 50$ (Ом), $R_3 = 1$ (Ом), $R_4 = 4$ (Ом), $E_1 = 30$ (В), $E_2 = 1$ (В), $J = 1$ (А).



Позначивши струми гілок і контурні струми у колі визначимо кількість рівнянь за II законом Кірхгофа:

$$N_{\text{мкс}} = N_z - N_{\text{вуз}} + 1 - N_J = 6 - 4 + 1 - 1 = 2.$$

Складемо систему рівнянь для контурних струмів:

$$\begin{cases} R_{11} I_{11} + R_{12} I_{22} + \sum_1 R J = E_{11}, \\ R_{21} I_{11} + R_{22} I_{22} + \sum_2 R J = E_{22}, \end{cases}$$

де I_{11} , I_{22} – невідомі контурні струми,

$J_{11} = J$ – відомий контурний струм.

Визначимо власні, загальні опори і контурні ЕРС:

$R_{11} = R_1$, $R_{22} = R_3 + R_4$ – власні опори першого та другого контурів,

$R_{12} = R_{21} = 0$ – загальний (спільний) опір між першим і другим контуром,

$E_{11} = E_1 + E_2$, $E_{22} = -E_1 - E_2$ – алгебраїчна сума ЕРС в першому і другому контурі,

$\sum_1 R J = 0$, $\sum_2 R J = -R_3 J_{11}$ – алгебраїчна сума добутків відомого контурного струму (в контурі, що містить джерело струму) та загального опору між першим (другим) контуром і контуром, що містить джерело струму.

Підставимо отримані значення в систему рівнянь:

$$\begin{cases} R_1 I_{11} = E_1 + E_2, \\ [R_3 + R_4] I_{22} - R_3 J_{11} = -E_1 - E_2. \end{cases}$$

Визначимо з системи рівнянь контурні струми I_{11} і I_{22} та підставимо значення елементів:

$$\begin{cases} I_{11} = \frac{E_1 + E_2}{R_1} = \frac{30 + 1}{10} = 3,1 \text{ (A)}, \\ I_{22} = \frac{R_3 J_{11} - E_1 - E_2}{R_3 + R_4} = \frac{1 - 30 - 1}{5} = -6 \text{ (A)}. \end{cases}$$

Розрахуємо невідомі струми в гілках I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 , які визначаються через контурні струми у вигляді:

$$I_1 = -I_{11}, \quad I_2 = I_{11} + J_{11} - I_{22}, \quad I_3 = J_{11} - I_{22}, \quad I_4 = I_{22}, \quad I_5 = I_{11} - I_{22}.$$

Таким чином, одержимо:

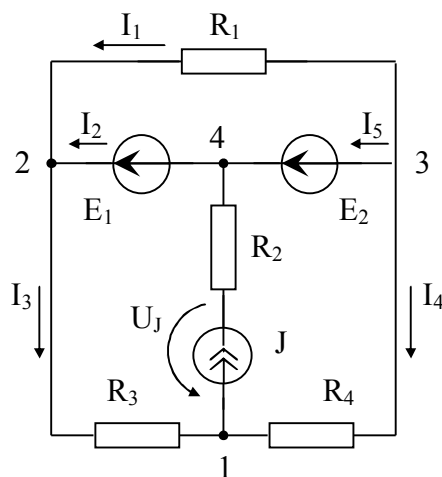
$$I_1 = -I_{11} = -3,1 \text{ (A)}, \quad I_2 = I_{11} + J_{11} - I_{22} = 10,1 \text{ (A)}, \quad I_3 = J_{11} - I_{22} = 7 \text{ (A)},$$

$$I_4 = I_{22} = -6 \text{ (A)}, \quad I_5 = I_{11} - I_{22} = 9,1 \text{ (A)}.$$

Для розрахунку лінійного електричного кола по постійному струму за МВН необхідно:

1. Позначити всі струми гілок та вибрати їх позитивний напрямок.
2. Довільно вибрати базовий вузол та позначити усі інші вузли кола.
3. Визначити за виразом (2.6) кількість рівнянь для МВН.
4. Скласти систему рівнянь виду (2.7) для знаходження потенціалів вузлів.
5. Визначити власні, загальні провідності і вузлові струми ($\sum_s E \cdot G$, $\sum_s J$) та підставити їх у систему рівнянь (2.7).
6. Розв'язати отриману систему рівнянь щодо потенціалів вузлів.
7. Визначити невідомі струми гілок через потенціали вузлів за узагальненим законом Ома.

Приклад. В заданому колі визначити струми гілок методом вузлових напруг, якщо $R_1 = 10$ (Ом), $R_2 = 50$ (Ом), $R_3 = 1$ (Ом), $R_4 = 4$ (Ом), $E_1 = 30$ (В), $E_2 = 1$ (В), $J = 1$ (А).



Позначимо струми гілок у колі. За базисний вузол оберемо вузол 4 ($V_4 = 0$ (В)) і визначимо кількість рівнянь по МВН:

$$N_{\text{МВН}} = N_{\text{вуз}} - 1 - N_E = 4 - 1 - 2 = 1,$$

де $N_E = 2$, так як джерела ЕРС E_1 і E_2 безпосередньо ввімкнені між двома вузлами, між 2 та 4, і між 3 та 4 відповідно.

Складемо рівняння для визначення потенціалу V_1 :

$$V_1 G_{11} - V_2 G_{12} - V_3 G_{13} = \sum_1 E G + \sum_1 J,$$

де V_1 – потенціал вузла 1,

$V_2 = V_4 + E_1 = E_1$ – потенціал вузла 2,

$V_3 = V_4 - E_2 = -E_2$ – потенціал вузла 3.

Визначимо невідомі коефіцієнти нашого рівняння:

$$G_{11} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} - \text{власна провідність гілок, приєднаних до вузла 1,}$$

$$G_{12} = \frac{1}{R_3} - \text{загальна провідність гілки, що з'єднує вузли 1 і 2,}$$

$$G_{13} = \frac{1}{R_4} - \text{загальна провідність гілки, що з'єднує вузли 1 і 3,}$$

$$\sum_1 EG = 0, \text{ оскільки немає гілок з ЕРС, що примикають до вузла 1,}$$

$$\sum_1 J = -J, \text{ оскільки струм джерела струму спрямований від вузла.}$$

Після підстановки всіх коефіцієнтів одержимо рівняння у вигляді:

$$V_1 \left[\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] - E_1 \left[\frac{1}{R_3} \right] + E_2 \left[\frac{1}{R_4} \right] = -J.$$

Визначимо з рівняння невідомий потенціал V_1 і підставимо значення елементів:

$$V_1 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \cdot \left[\frac{E_1}{R_3} - \frac{E_2}{R_4} - J \right] = \frac{4}{5} \cdot \left[\frac{30}{1} - \frac{1}{4} - 1 \right] = 0,8 \cdot 28,75 = 23 \text{ (В).}$$

За допомогою узагальненого закону Ома визначимо невідомі струми в гілках:

$$I_1 = \frac{V_3 - V_2}{R_1} = \frac{-E_2 - E_1}{R_1}, \quad I_3 = \frac{V_2 - V_1}{R_3} = \frac{E_1 - V_1}{R_3}, \quad I_4 = \frac{V_3 - V_1}{R_4} = \frac{-E_2 - V_1}{R_4},$$

а струми I_2 , I_5 визначимо за I законом Кірхгофа:

$$I_2 = I_3 - I_1, \quad I_5 = -I_4 - I_1.$$

Таким чином, одержимо:

$$I_1 = \frac{-E_2 - E_1}{R_1} = \frac{-1 - 30}{10} = -3,1 \text{ (А),}$$

$$I_3 = \frac{E_1 - V_1}{R_3} = \frac{30 - 23}{1} = 7 \text{ (А),}$$

$$I_4 = \frac{-E_2 - V_1}{R_4} = \frac{-1 - 23}{4} = -6 \text{ (A)},$$

$$I_2 = I_3 - I_1 = 7 + 3,1 = 10,1 \text{ (A)},$$

$$I_5 = -I_4 - I_1 = 6 + 3,1 = 9,1 \text{ (A)}.$$

2.4 Метод еквівалентного генератора

Метод еквівалентного генератора заснований на теоремі про активний двополюсник. Застосування даного методу доцільно для визначення струму в якій-небудь одній гілці складного електричного кола.

Для розрахунку лінійного електричного кола по постійному струму методом еквівалентного генератора необхідно:

1. Розділити електричне коло на дві частини, таким чином, щоб отримати гілку в якій будемо визначати струм і активний двополюсник від якого живиться дана гілка.

2. В отриманому активному двополюснику на затискачах позначити напругу холостого ходу U_{xx} за напрямком струму.

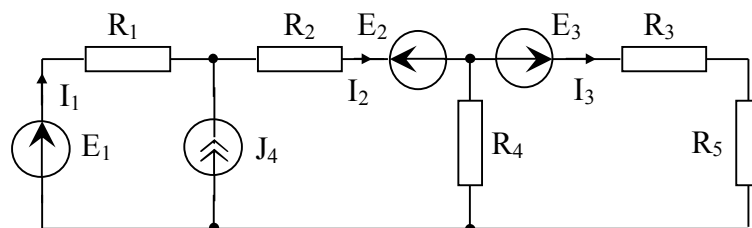
3. В отриманому активному двополюснику, за допомогою рівняння за II законом Кірхгофа визначити напругу холостого ходу U_{xx} , що дорівнює ЕРС еквівалентного джерела напруги $U_{xx} = E_{дж}$. Причому рівняння складається для будь-якого контуру, що містить U_{xx} .

4. Розрахувати струми у гілках активного двополюсника будь-яким відомим методом.

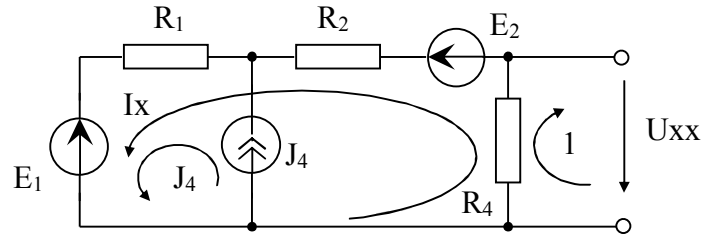
5. Визначити опір еквівалентного джерела. Для цього в активному двополюснику гілки, де були включені джерела струму, замінюються розривом, а гілки з ЕРС – перемичкою. В отриманому пасивному колі користуються правилами еквівалентних перетворень визначається еквівалентний опір, що дорівнює опору на джерелі $R_{екв} = R_{дж}$.

4. За знайденими напругою холостого ходу і еквівалентним опором визначити струм у шуканій гілці.

Приклад. В заданому колі визначити струм I_3 методом еквівалентного генератора, якщо $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 10 \text{ (Ом)}$, $R_4 = 5 \text{ (Ом)}$, $E_1 = 5 \text{ (В)}$, $E_2 = 10 \text{ (В)}$, $E_3 = 47 \text{ (В)}$, $J_4 = 1 \text{ (А)}$.



Розділимо електричне коло таким чином, щоб відокремити гілку де протікає струм I_3 . В отриманому активному двополюснику на затискачах позначаємо напругу холостого ходу U_{xx} за напрямком струму.



Знаходимо U_{xx} по другому закону Кірхгофа, для цього розглядаємо контур 1 у даній схемі:

$$U_{xx} + I_x R_4 = 0, \text{ звідки } U_{xx} = -I_x R_4 .$$

Знаходимо I_x по методу контурних струмів, для цього розглядаємо контур зі струмом I_x з урахуванням впливу джерела струму J_4 .

$$I_x (R_1 + R_2 + R_4) + J_4 R_1 = E_2 - E_1 ,$$

$$I_x = \frac{E_2 - E_1 - J_4 R_1}{R_1 + R_2 + R_4} .$$

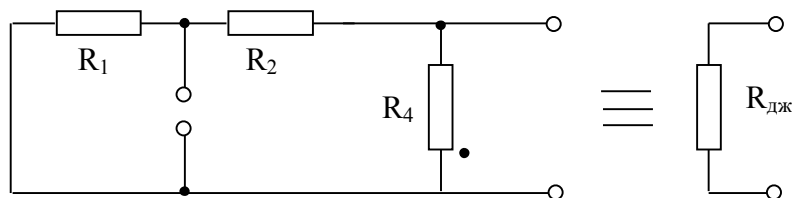
Відповідно напруга холостого ходу:

$$U_{xx} = E_{дж} = -I_x R_4 ,$$

звідки

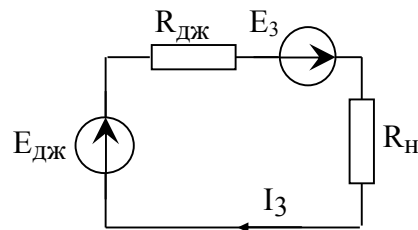
$$E_{дж} = -R_4 \cdot \frac{E_2 - E_1 - J_4 R_1}{R_1 + R_2 + R_4} = -5 \cdot \frac{10 - 5 - 10}{25} = 1 \text{ (В)} .$$

Визначимо опір еквівалентного джерела. Для цього перетворимо активний двополюсник у пасивний і за допомогою еквівалентних перетворень визначимо опір джерела $R_{дж} = R_{екв}$.



$$R_{дж} = \frac{(R_1 + R_2) R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{20 \cdot 5}{25} = 4 \text{ (Ом)} .$$

Для знаходження струму I_3 будемо еквівалентну схему заміщення, що складається з гілки де протікає даний струм і еквівалентного джерела напруги з ЕРС рівною $E_{дж}$ та внутрішнім опором $R_{дж}$.



$$I_3 = \frac{E_{дж} + E_3}{R_{дж} + R_н},$$

де $R_н = R_3 + R_5$.

Підставимо значення елементів:

$$I_3 = \frac{E_{дж} + E_3}{R_{дж} + R_н} = \frac{1 + 47}{4 + 20} = 2 \text{ (A)}.$$

2.5 Метод накладання (суперпозиції)

Метод накладання базується на принципі накладання. Для знаходження невідомих струмів (напруг) в колі спочатку знаходять часткові струми (напруги), а невідомі струми (напруги) визначаються шляхом алгебраїчного підсумовування часткових струмів (напруг).

При використанні цього методу завдання розрахунків розгалуженого електричного кола з кількістю джерел рівною N зводиться до спільного розв'язку N кіл з одним джерелом.

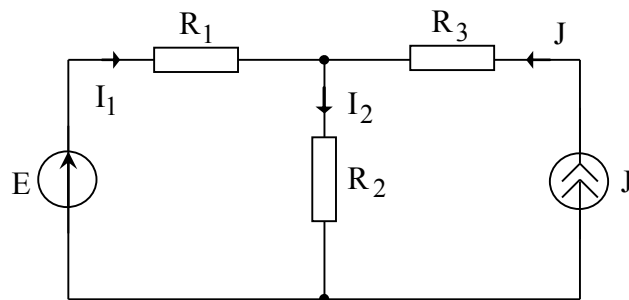
Для розрахунку лінійного електричного кола по постійному струму методом накладання необхідно:

1. Позначити всі струми гілок та вибрати їх позитивний напрям.
2. Вихідне коло, що містить кількість джерел рівну N , перетворити в N підсхем, кожна з яких містить тільки одне із джерел, інші джерела вмикаються у такий спосіб: джерело напруги замінюється закорткою, а гілки із джерелами струму обриваються. При цьому необхідно пам'ятати, що внутрішні опори реальних джерел відіграють роль споживачів і вони залишаються в підсхемах.
3. Визначити часткові струми кожної з підсхем, задавшись їх напрямком відповідно до полярності джерела, за допомогою відомих методів. У більшості випадків розрахунки проводяться за законом Ома з використанням методу еквівалентних перетворень пасивних кіл.
4. Визначити невідомі струми як алгебраїчні суми струмів допоміжних підсхем, причому при додаванні зі знаком «плюс» беруться струми

підсхем, напрямком яких збігається з напрямком струму у вихідному колі, зі знаком «мінус» – інші.

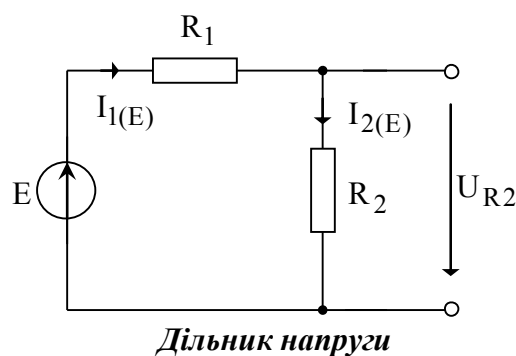
До переваг методу накладання відносять ту обставину, що розрахунки проводяться частинами, де складові струми і напруги визначаються досить просто. Однак при великій кількості джерел струму і напруги даний метод краще не використовувати.

Приклад. В заданому колі визначити методом накладання струми I_1 та I_2 , якщо $R_1 = R_3 = 10$ (Ом), $R_2 = 5$ (Ом), $E = 30$ (В), $J = 12$ (А).



Позначимо всі струми гілок у колі та складемо дві схеми заміщення, так як маємо два джерела енергії (джерело ЕРС E і джерело струму J).

Складемо спочатку схему заміщення, що містить лише одне джерело – це джерело ЕРС, при цьому на місці, де перебувало джерело струму, утворюється розрив (струму немає). Логічно припустити, що і в опорі R_3 струм дорівнює нулю. Позначимо часткові струми на місці струмів гілок та визначимо їх.



Так у гілці де був струму I_1 буде частковий струм $I_{1(E)}$, що співпадає з ним за напрямком, а у гілці з струмом I_2 - частковий струм $I_{2(E)}$. Дану схему заміщення називають дільником напруги.

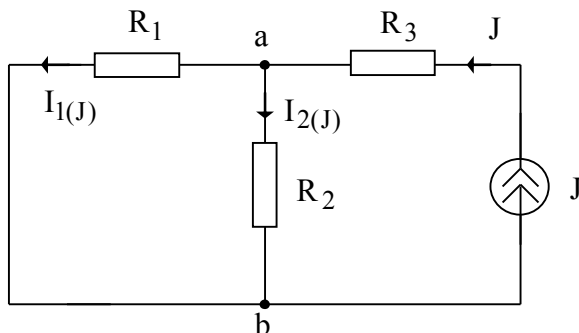
Визначимо часткові струми $I_{1(E)}$ та $I_{2(E)}$:

$$I_{2(E)} = I_{1(E)} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{30}{15} = 2 \text{ (А)}.$$

Так, як $U_{R2} = I_{2(E)} \cdot R_2$, отримаємо **формулу дільника напруги**:

$$U_{R2} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.8)$$

Тепер складемо схему заміщення, що містить джерело струму, при цьому на місці, де перебувало джерело ЕРС, утворюється коротке замикання (напруга дорівнює нулю). Позначимо часткові струми на місці струмів гілок та визначимо їх. Для різноманітності візьмемо напрямок часткового струму $I_{1(J)}$ протилежним до струму I_1 . Отриману схему заміщення називають дільником струму.

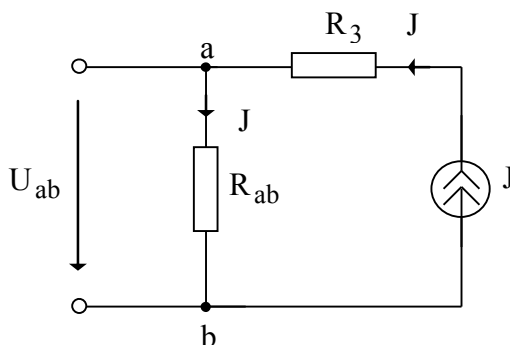


Дільник струму

По схемі видно, що опори R_1 і R_2 з'єднані паралельно. Визначимо еквівалентний опір паралельного з'єднання:

$$R_{ab} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

З урахуванням еквівалентного перетворення спростимо схему розрахунків:



На цій схемі видно, що опори R_3 і R_{ab} з'єднані послідовно, відповідно, через них протікає однаковий струм J . По закону Ома визначимо напругу U_{ab} :

$$U_{ab} = J \cdot R_{ab}.$$

За схемою дільника струму, враховуючи, що при паралельному з'єднанні напруга залишається однакою, одержимо формули по визначенню струмів $I_{1(J)}$ та $I_{2(J)}$.

$$I_{1(J)} = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{J \cdot R_{ab}}{R_1} = \frac{J \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot (R_1 + R_2)} = J \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{5}{15} = 4 \text{ (A)},$$

$$I_{2(J)} = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{J \cdot R_{ab}}{R_2} = \frac{J \cdot R_1 \cdot R_2}{R_2 \cdot (R_1 + R_2)} = J \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{10}{15} = 8 \text{ (A)}.$$

Отже, **формули дільника струму** запишуться:

$$I_{1(J)} = J \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_{2(J)} = J \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2.9)$$

На останньому етапі визначимо істинні струми в гілках I_1 та I_2 :

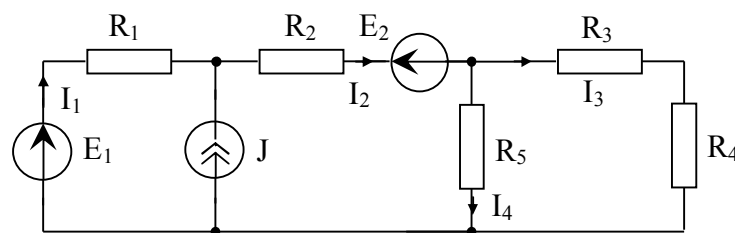
$$I_1 = I_{1(E)} - I_{1(J)} = 2 - 4 = -2 \text{ (A)},$$

$$I_2 = I_{2(E)} + I_{2(J)} = 2 + 8 = 10 \text{ (A)}.$$

У першому виразі присутній знак «мінус», оскільки струм $I_{1(J)}$ спрямований протилежно струмам I_1 та $I_{1(E)}$.

2.6 Запитання та задачі для закріплення

1. У чому суть методу струмів гілок?
2. Яка послідовність розрахунку електричного кола по методу контурних струмів?
3. Чим метод вузлових напруг відрізняється від методу контурних струмів?
4. Які теореми використовуються при визначенні струму окремо взятої гілки кола методом еквівалентного генератора?
5. Що таке напруга холостого ходу?
6. У чому суть методу суперпозиції (накладання)?
7. Що називається дільником напруги?
8. Що називається дільником струму?
9. Зобразити електричну схему дільника напруги та розрахувати значення опорів, якщо на вході дільника напруги діє напруга $U_1 = 10 \text{ (В)}$, а на виході $U_2 = 3 \text{ (В)}$ і протікає струм $I = 0,1 \text{ (А)}$.
10. Розрахувати струми гілок у колі методами струмів гілок, контурних струмів, вузлових напруг та еквівалентного генератора, якщо відомо, що: $E_1 = 12 \text{ (В)}$, $E_2 = 7 \text{ (В)}$, $R_1 = 5 \text{ (Ом)}$, $J = 1 \text{ (А)}$, $R_2 = R_4 = 20 \text{ (Ом)}$, $R_3 = R_5 = 10 \text{ (Ом)}$.



3 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА В РЕЖИМІ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

3.1 Гармонічні коливання. Основні поняття і визначення

Гармонічні коливання – коливання, що відбуваються за законом синуса або косинуса. Графічно гармонічні коливання представлені на рис. 3.1.

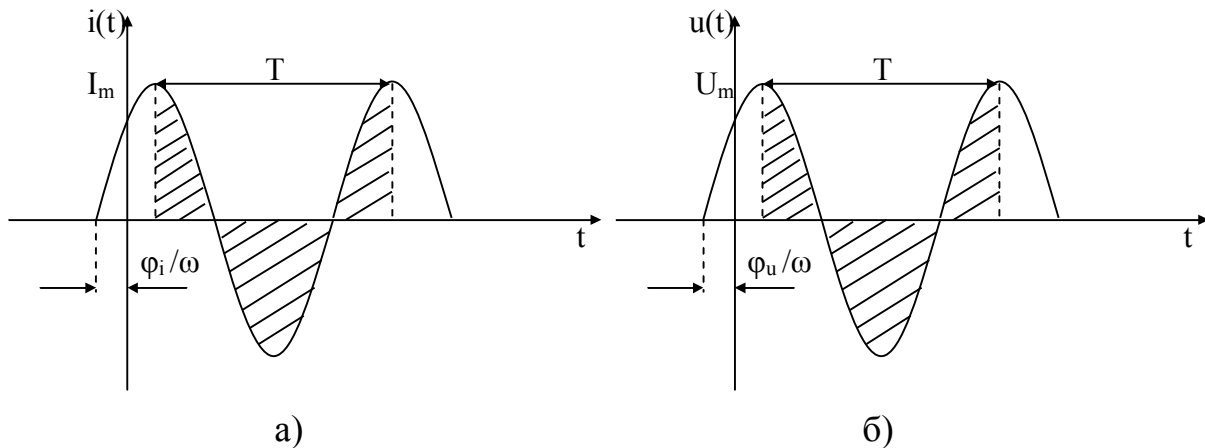


Рисунок 3.1 – Гармонічне коливання струму а) та напруги б)

Гармонічне коливання характеризується амплітудою, періодом, частотою і фазою.

Амплітуда змінного сигналу – максимальне по модулю значення напруги U_m або струму I_m .

Період – інтервал часу, після закінчення якого миттєві значення $i(t)$ або $u(t)$ повторюються. Позначається літерою T і вимірюється в секундах (с).

Циклічна частота – число періодів в одиницю часу. Позначається літерою f і вимірюється в герцах (Гц). Циклічна частота пов'язана з періодом наступним виразом:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (3.1)$$

Кутова частота – швидкість зміни кута (аргументу). Позначається літерою ω і вимірюється в радіанах за секунду (рад/с). Кутова частота пов'язана з циклічною частотою співвідношенням:

$$\omega = 2\pi f. \quad (3.2)$$

Аналітично гармонічний струм можна представити у вигляді:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \text{ або } i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \quad (3.3)$$

де $i(t)$ – миттєве значення струму (А),

φ_i – **початкова фаза** струму (рад).

Аналогічно для гармонічної напруги:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u), \text{ або } u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \quad (3.4)$$

де $u(t)$ – миттєве значення напруги (В),

φ_u – **початкова фаза** напруги (рад).

Номінальні струми і напруги електротехнічних пристроїв визначаються так званими діючими значеннями. **Діюче (середньоквадратичне) значення** гармонічного струму і напруги:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}. \quad (3.5)$$

Знайдемо зв'язок між амплітудними і діючими значеннями струму і напруги. Задамо гармонічний струм у вигляді:

$$i(t) = I_m \cdot \cos \omega t. \quad (3.6)$$

З виразу (3.6) видно, що початкова фаза струму дорівнює нулю. Здійснимо підстановку виразу (3.6) у вираз (3.5):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \cos^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos 2\omega t dt},$$

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\omega} \cdot \sin 2\omega T} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} T} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.7)$$

Такі ж викладення можна показати і для напруги. У такий спосіб одержуємо зв'язок між амплітудними і діючими значеннями струму і напруги:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

Середнє значення гармонічного струму і напруги дорівнює нулю. Це можна довести, якщо скористатися формулами по визначенню середнього значення періодичного негармонічного струму і напруги:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (3.9)$$

3.2 Способи представлення гармонічних коливань

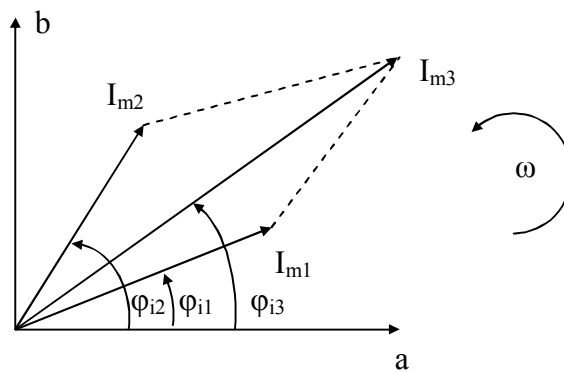
Гармонічні коливання представляють у вигляді: часових діаграм, векторних діаграм, комплексних чисел, амплітудних і фазових спектрів.

Часове представлення є наглядним (рис. 3.1), але важке при розв'язку завдань, оскільки вимагає проведення громіздких тригонометричних перетворень.

Векторною діаграмою називають сукупність векторів, що зображують гармонічні коливання в електричному колі. Векторні діаграми будують для амплітудних або діючих значень.

Представлення гармонічних коливань векторними діаграмами є більш зручним, при цьому кожному коливанню ставиться у відповідність обертовий вектор певної довжини із заданою початковою фазою.

Приклад. Нехай маємо гармонічні коливання струмів: $i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{i1})$ та $i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{i2})$. Визначимо суму цих струмів: $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$.



Результуючий струм буде рівний: $i_3(t) = I_{m3} \sin(\omega t + \varphi_{i3})$.

Із геометрії рисунка видно, що $I_{m3} = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2} \cos(\varphi_{i2} - \varphi_{i1})}$,

$$\varphi_{i3} = \arctg \frac{I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2}}{I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2}}.$$

Представлення гармонічних коливань за допомогою **комплексних чисел** лежить в основі символічного методу розрахунків електричних кіл (ме-

тод комплексних амплітуд). Комплексне число \underline{c} представляється за допомогою дійсної a і уявної частини b .

$$\underline{c} = a + jb, \quad (3.10)$$

де $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Комплексне число також може позначатись крапкою зверху \dot{c} .

Якщо гармонічне коливання представлене функцією синуса, то можна записати його комплексну амплітуду:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}, \quad (3.11)$$

де \underline{I}_m – комплексна амплітуда струму.

Комплекс діючого значення з врахуванням виразу (3.8) запишеться:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi_i} \quad (3.12)$$

де \underline{I} – комплекс діючого значення струму.

У виразах (3.11), (3.12) комплексна амплітуда і комплекс діючого значення струму представлені у **показниковій формі**. Для запису в **алгебраїчній формі** скористаємось формулою Ейлера:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x). \quad (3.13)$$

Застосуємо вираз (3.13) до виразу (3.11) отримаємо:

$$\underline{I}_m = I_m \cos(\varphi_i) + j I_m \sin(\varphi_i) = a + jb, \quad (3.14)$$

де $a = I_m \cos(\varphi_i)$, $b = I_m \sin(\varphi_i)$.

Приклад. Нехай маємо гармонічні коливання струмів: $i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{i1})$ та $i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{i2})$. Визначимо суму цих струмів: $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$ за допомогою символного методу.

Кожному гармонічному коливанню струму ставимо у відповідність комплекс діючого значення струму:

$$i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{i1}) \Leftrightarrow \underline{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_{i1}} = I_1 \cos(\varphi_{i1}) + j I_1 \sin(\varphi_{i1}),$$

$$i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{i2}) \Leftrightarrow \underline{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_{i2}} = I_2 \cos(\varphi_{i2}) + j I_2 \sin(\varphi_{i2}).$$

Слід помітити, що комплекс діючого значення струму ми представили як у показниковій, так і в алгебраїчній формі. З теорії комплексних чисел відомо, що якщо відбувається операція додавання (віднімання) комплексне число зручно представляти в алгебраїчній формі, якщо відбувається операція множення (ділення) комплексне число зручно представляти в показниковій формі. У даному прикладі здійснюється операція додавання двох гармонічних коливань, тому комплекси струмів зручно представити в алгебраїчній формі. Визначаємо сумарний струм:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \{I_1 \cos(\varphi_{i1}) + I_2 \cos(\varphi_{i2})\} + j \{I_1 \sin(\varphi_{i1}) + I_2 \sin(\varphi_{i2})\}.$$

Останній вираз представлений в алгебраїчній формі, його необхідно перевести в показникову. Використаємо співвідношення, яке дозволяє комплексне число перевести з алгебраїчної форми в показову форму:

$$\underline{c} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j \operatorname{arctg} \frac{b}{a}} = |\underline{c}| \cdot e^{j \varphi_c}, \quad (3.15)$$

де $|\underline{c}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа,

$\varphi_c = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ – аргумент комплексного числа.

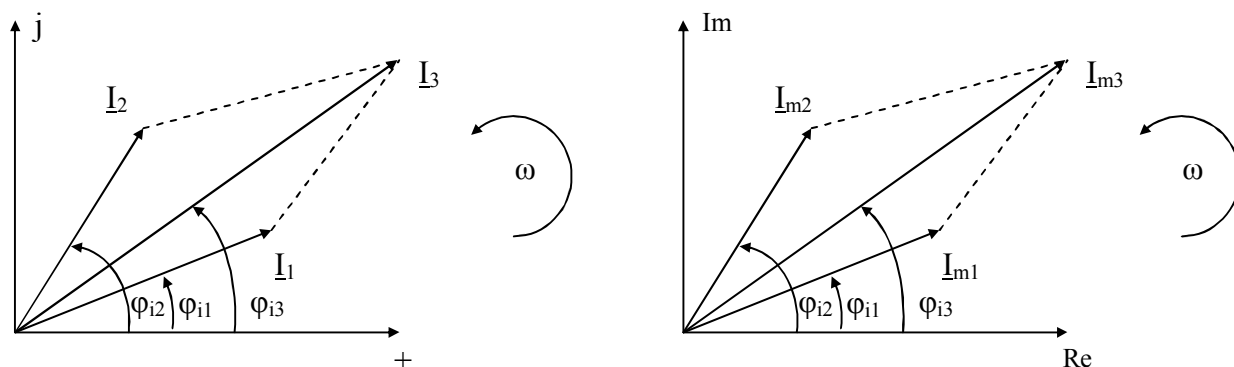
Таким чином, сумарний струм у показниковій формі можна записати у вигляді:

$$\underline{I}_3 = I_3 e^{j \varphi_{i3}},$$

де $I_3 = \sqrt{\{I_1 \cos(\varphi_{i1}) + I_2 \cos(\varphi_{i2})\}^2 + \{I_1 \sin(\varphi_{i1}) + I_2 \sin(\varphi_{i2})\}^2}$ – модуль (діюче значення струму),

$\varphi_{i3} = \operatorname{arctg} \frac{I_1 \sin \varphi_{i1} + I_2 \sin \varphi_{i2}}{I_1 \cos \varphi_{i1} + I_2 \cos \varphi_{i2}}$ – аргумент (початкова фаза струму).

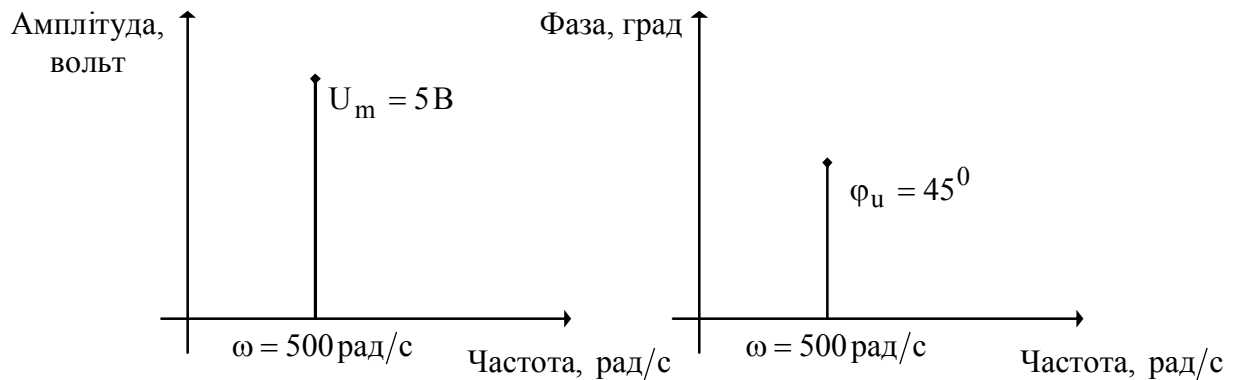
Отримані комплекси струмів зручно представити у вигляді векторної діаграми на комплексній площині:



Четвертий спосіб представлення гармонічних коливань – за допомогою амплітудних і фазових спектрів. **Амплітудним спектром** називається залежність амплітуди від частоти. **Фазовим спектром** називається залежність фази від частоти.

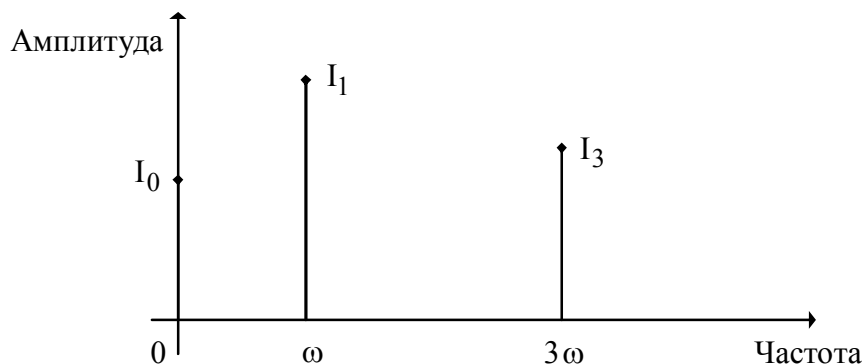
Приклад. Побудувати амплітудний і фазовий спектр гармонічної напруги $u(t) = 5 \cdot \cos(500 \cdot t + 45^\circ)$, (В).

З умови завдання зрозуміло, що амплітуда напруги $U_m = 5$ (В), початкова фаза напруги $\varphi_u = 45^\circ$, кутова частота $\omega = 500$ (рад/с). Побудуємо амплітудний і фазовий спектр:



Приклад. Побудувати амплітудний спектр періодичного негармонічного коливання струму $i(t) = I_0 + I_1 \cdot \sin \omega t + I_3 \cdot \sin 3\omega t$.

З умови завдання зрозуміло, що I_0 , I_1 , та I_3 є діючими значеннями струму нульової, першої і третьої гармоніки, кутові частоти яких дорівнюють відповідно $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_3 = 3\omega$. Побудуємо амплітудний спектр:



3.3 Гармонічні коливання в резистивних, індуктивних і ємнісних елементах

Нехай до резистивного елемента прикладена гармонічна напруга:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (3.16)$$

Згідно із законом Ома через резистор протікає гармонічний струм:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (3.17)$$

На основі виразів (3.16), (3.17) побудуємо векторні діаграми амплітудних та діючих значень напруги і струму для резистивного елемента (рис. 3.2).

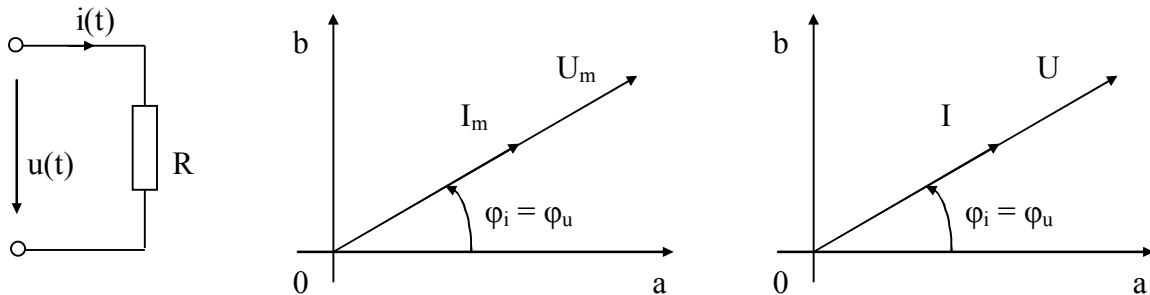


Рисунок 3.2 – Векторні діаграми амплітудних і діючих значень напруги та струму для резистивного елемента

Видно, що $I_m = \frac{U_m}{R}$, $I = \frac{U}{R}$ та $\varphi_u = \varphi_i$ – початкові фази напруги і струму рівні.

Зсув фаз між вхідною напругою і струмом, що протікають у колі резистивного елемента дорівнює:

$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0. \quad (3.18)$$

З виразу (3.18) можна зробити висновок, що у резистивному елементі зсув фаз між напругою і струмом дорівнює нулю.

На векторній діаграмі зсув фаз відкладається від вектора струму до вектора напруги!

Нехай в індуктивному елементі протікає струм:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (3.19)$$

Враховуючи зв'язок між струмом і напругою на індуктивності, одержимо:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = I_m \omega L \cos(\omega t + \varphi_i),$$

$$u(t) = I_m \omega L \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (3.20)$$

З виразу (3.20) видно:

$$U_m = I_m \omega L = I_m X_L \text{ та } U = I \omega L = I X_L, \quad (3.21)$$

де $X_L = \omega L$ – реактивний опір на індуктивності (Ом),

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L} \text{ – реактивна провідність в індуктивності (См),}$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \text{ - початкова фаза напруги.}$$

Зсув фаз між вхідною напругою і струмом, що протікають у колі індуктивного елемента дорівнює:

$$\varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}. \quad (3.22)$$

З виразу (3.22) можна зробити висновок, що у індуктивному елементі зсув фаз між напругою і струмом дорівнює 90° .

На основі виразів (3.19 – 3.22) побудуємо векторні діаграми амплітудних та діючих значень напруги і струму для індуктивного елемента (рис. 3.3).

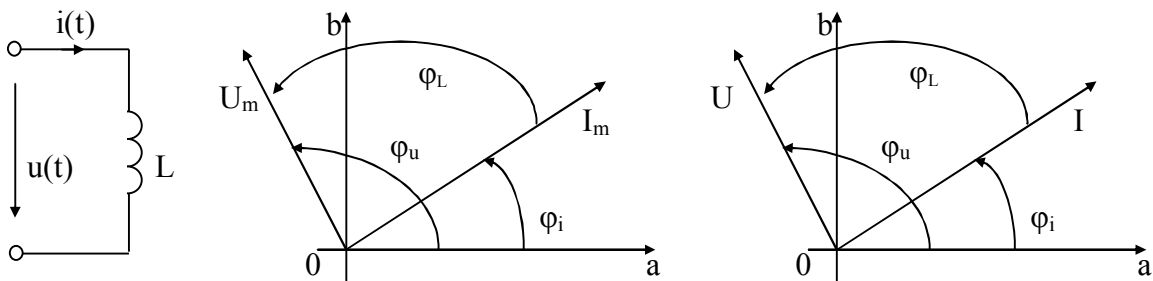


Рисунок 3.3 - Векторні діаграми амплітудних і діючих значень напруги та струму для індуктивного елемента

Нехай до ємнісного елемента прикладена напруга $u(t)$, як у виразі (3.16):

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u),$$

Враховуючи зв'язок між струмом і напругою на ємності, одержуємо:

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = U_m C \omega \cos(\omega t + \varphi_u),$$

$$i(t) = U_m C \omega \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Отже:

$$I_m = U_m \omega C = U_m B_C \text{ та } I = U \omega C = U B_C, \quad (3.23)$$

де $B_C = \omega C$ – реактивна провідність у ємності (См),

$X_C = 1/B_C = 1/\omega C$ – реактивний опір на ємності (Ом),

$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$ - початкова фаза струму.

Зсув фаз між вхідною напругою і струмом, що протікають у колі ємнісного елемента дорівнює:

$$\varphi_C = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.24)$$

З виразу (3.24) можна зробити висновок, що у ємнісному елементі зсув фаз між напругою і струмом дорівнює -90° .

На основі виразів (3.16), (3.23), (3.24) побудуємо векторні діаграми амплітудних та діючих значень напруги і струму для ємнісного елемента (рис. 3.4).

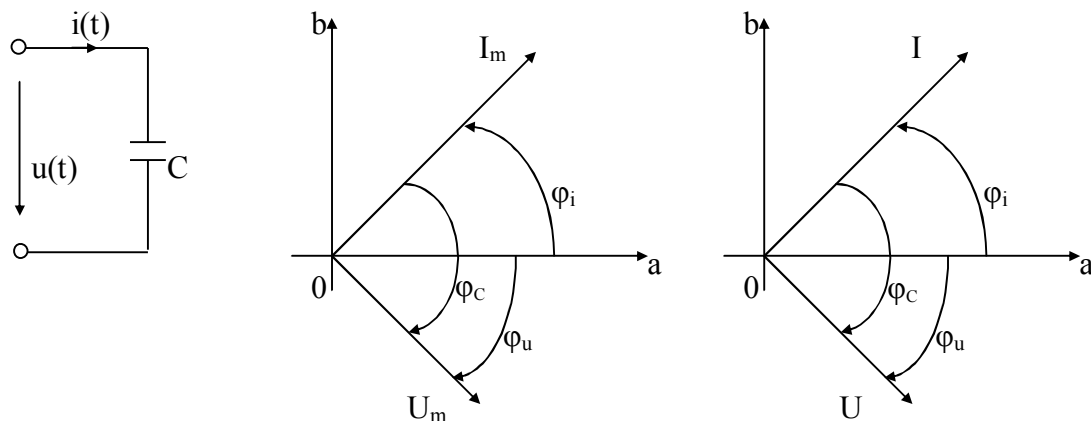


Рисунок 3.4 - Векторні діаграми амплітудних і діючих значень напруги та струму для ємнісного елемента

3.4 Гармонічні коливання в колі при послідовному з'єднанні R, L, C – елементів

Розглянемо послідовне з'єднання R, L, C – елементів, що наведене на (рис. 3.5).

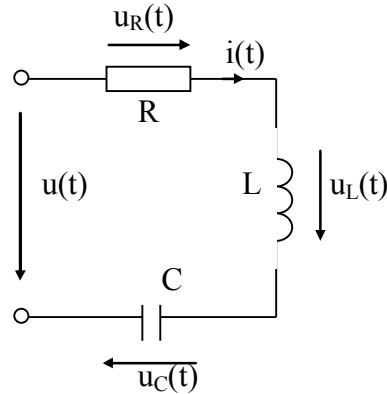


Рисунок 3.5 - Послідовне з'єднання R, L, C – елементів

Припустимо, що у послідовному RLC-колі протікає струм $i(t)$, як у виразі (3.19):

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Згідно з II законом Кірхгофа:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt. \quad (3.25)$$

Підставимо вираз (3.19) у (3.25):

$$u(t) = I_m R \sin(\omega t + \varphi_i) + I_m \omega L \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) + I_m \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.26)$$

Запишемо вираз (3.26) в більш компактному виді:

$$u(t) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_R) + U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_L) + U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_C), \quad (3.27)$$

де $U_{mR} = I_m R$ – амплітудне значення напруги на резистивному елементі, $U_{mL} = I_m \omega L = I_m X_L$ – амплітудне значення напруги на індуктивному елементі,

$U_{mC} = I_m \frac{1}{\omega C} = I_m X_C$ – амплітудне значення напруги на ємнісному елементі,

$\varphi_R = \varphi_i$, $\varphi_L = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$, $\varphi_C = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ – початкові фази напруги на резисторі, індуктивності та ємності відповідно.

На основі виразів (3.19), (3.25 – 3.27) побудуємо векторну діаграму амплітудних значень напруг і струму для послідовного з'єднання R, L, C – елементів (рис. 3.6).

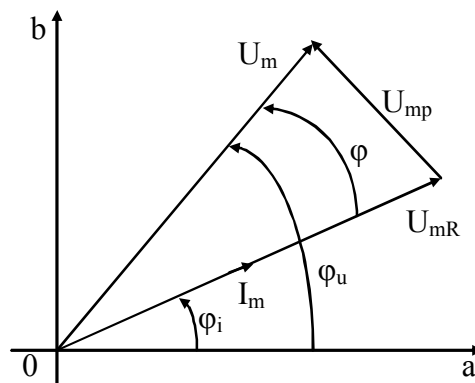


Рисунок 3.6 – Векторна діаграма амплітудних значень напруг і струму при послідовному з'єднанні R, L, C – елементів

З (рис. 3.6) видно, що активна складова напруги рівна:

$$U_{ma} = U_{mR}, \quad (3.28)$$

а реактивна складова напруги дорівнює:

$$U_{mp} = U_{mL} - U_{mC} = I_m (X_L - X_C) = I_m X, \quad (3.29)$$

де $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – **реактивний опір**.

Для зручного аналізу послідовного RLC –кола використовують **трикутник опорів** (рис. 3.7).

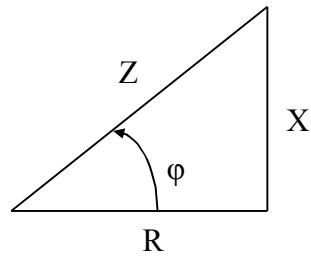


Рисунок 3.7 – Трикутник опорів

Визначимо з (рис. 3.7) повний опір кола Z та зсув фаз між вхідною напругою і струмом φ :

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (3.30)$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (3.31)$$

Якщо $\varphi > 0$, то коло має індуктивний характер, якщо $\varphi < 0$ – ємнісний характер. При $\varphi = 0$ в колі відбувається **резонанс напруг**.

Резонанс – це явище, коли зсув фаз між вхідною напругою і струмом дорівнює нулю.

При резонансі напруг повний опір послідовного RLC -кола рівний резистивному опору, тому що реактивний опір дорівнює нулю. Визначимо частоту, на якій відбувається явище резонансу з умови:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \text{ звідки } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (рад/с)}, \quad (3.32)$$

де ω_0 – кутова частота резонансу.

Підставимо вираз (3.2) у (3.32), отримаємо:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ (Гц)}, \quad (3.33)$$

де f_0 – циклічна частота резонансу.

3.5 Гармонічні коливання в колі при паралельному з'єднанні R, L, C – елементів

Розглянемо паралельне з'єднання R, L, C – елементів, що наведене на (рис. 3.8).

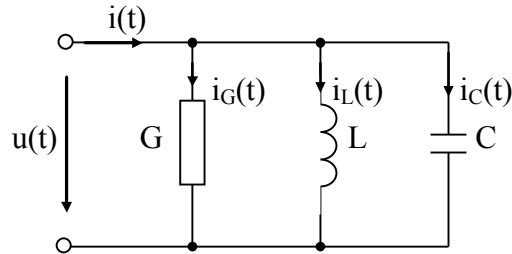


Рисунок 3.8 - Паралельне з'єднання R, L, C – елементів

Припустимо, що на вхід паралельного RLC –кола прикладена напруга $u(t)$, як у виразі (3.16):

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u).$$

Згідно з I законом Кірхгофа:

$$i(t) = i_G(t) + i_L(t) + i_C(t). \quad (3.34)$$

Використовуючи зв'язок між струмами і напругами на резисторі, індуктивності та ємності, одержимо, так зване, інтегрально-диференціальне рівняння виду:

$$i(t) = G u(t) + C \frac{d u(t)}{d t} + \frac{1}{L} \int u(t) dt. \quad (3.35)$$

Підставимо вираз (3.16) у (3.35) отримаємо:

$$i(t) = G U_m \sin(\omega t + \varphi_u) + \omega C U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega L} U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.36)$$

Запишемо вираз (3.36) в більш компактному виді:

$$i(t) = I_{mG} \sin(\omega t + \varphi_G) + I_{mC} \sin(\omega t + \varphi_C) + I_{mL} \sin(\omega t + \varphi_L), \quad (3.37)$$

де $I_{mG} = GU_m$ – амплітуда струму, що протікає через резистор,
 $I_{mC} = \omega CU_m = B_C U_m$ – амплітуда струму, що протікає через ємність,
 $I_{mL} = \frac{1}{\omega L} U_m = B_L U_m$ – амплітуда струму, що протікає через індуктив-
 ність,

$\varphi_G = \varphi_u$, $\varphi_L = \varphi_u - \frac{\pi}{2}$, $\varphi_C = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$ – початкові фази струму, що протікає
 через резистор, індуктивність та ємність відповідно.

На основі виразів (3.16), (3.34 – 3.37) побудуємо векторну діаграму амплітудних значень напруги і струмів для паралельного з'єднання R, L, C – елементів (рис. 3.9).

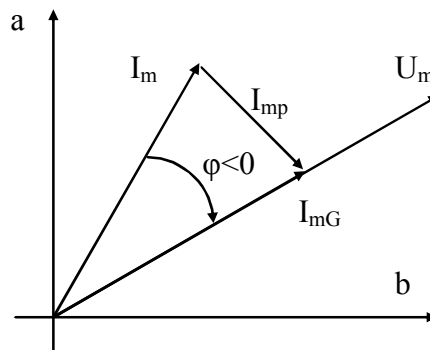


Рисунок 3.9 - Векторна діаграма амплітудних значень напруги і струмів при послідовному з'єднанні R, L, C – елементів

З (рис. 3.9) видно, що активна складова струму рівна:

$$I_{ma} = I_{mG}, \quad (3.38)$$

а реактивна складова струму дорівнює:

$$I_{mp} = I_{mC} - I_{mL} = (B_C - B_L)U_m = BU_m, \quad (3.39)$$

де $B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L}$ – **реактивна провідність**.

За аналогією із трикутником опорів для зручності аналізу паралельного кола вводиться поняття **трикутника провідностей** (рис. 3.10).

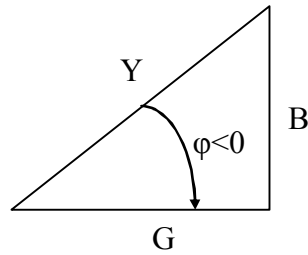


Рисунок 3.10 – Трикутник провідностей

Визначимо з (рис. 3.10) **повну провідність** кола Y та зсув фаз між вхідною напругою і струмом φ :

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad (3.40)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{B}{G} = -\arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}. \quad (3.41)$$

Якщо $\varphi > 0$, то коло має ємнісний характер, якщо $\varphi < 0$ – індуктивний характер. При $\varphi = 0$ наступає **резонанс струмів**.

При резонансі струмів повна провідність паралельного RLC -кола дорівнює активній провідності, тому що реактивна провідність дорівнює нулю. Визначимо частоту, на якій відбувається явище резонансу струмів з умови:

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0, \text{ звідки } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.42)$$

3.6 Закон Ома в комплексній формі для елементів R , L і C

Символьний метод розрахунків дозволяє тригонометричні та геометричні операції звести до алгебраїчних операцій над комплексними числами, що значно спрощує розрахунки електричних кіл при гармонічному впливі.

Припустимо, що струм $i(t)$ дорівнює:

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}. \quad (3.43)$$

Запишемо комплексну амплітуду струму $\underline{i}(t)$:

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}, \quad (3.44)$$

де $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$ - комплексна амплітуда струму.

Припустимо, що напруга $u(t)$ дорівнює:

$$u(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}. \quad (3.45)$$

Запишемо комплексну амплітуду напруги $u(t)$:

$$u(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}, \quad (3.46)$$

де $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ – комплексна амплітуда напруги.

Комплексні діючі значення струму $i(t)$ і напруги $u(t)$ визначаються як:

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_i}, \quad \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u}. \quad (3.47)$$

Запишемо закон Ома в комплексній формі для елементів R , L і C .

1. Для резистивного елемента закон Ома записується:

$$u(t) = R i(t) \text{ або } i(t) = G u(t). \quad (3.48)$$

Перепишемо вираз (3.48) через комплексні амплітуди та комплексні діючі значення напруг і струмів:

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m \text{ або } \underline{I}_m = G \underline{U}_m, \quad (3.49)$$

$$\underline{U} = R \underline{I} \text{ або } \underline{I} = G \underline{U}. \quad (3.50)$$

Отримані вирази (3.49), (3.50) – закон Ома в комплексній формі для резистивного елемента.

2. Для індуктивного елемента закон Ома записується:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = j\omega L I_m e^{j\omega t} \text{ або } i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{j\omega L} U_m e^{j\omega t}. \quad (3.51)$$

Перепишемо вираз (3.51) через комплексні амплітуди та комплексні діючі значення напруг і струмів:

$$\underline{U}_m = j\omega L \underline{I}_m = \underline{Z}_L \underline{I}_m, \text{ або } \underline{I}_m = \frac{1}{j\omega L} \underline{U}_m = \underline{Y}_L \underline{U}_m, \quad (3.52)$$

$$\underline{U} = j \omega L \underline{I} = \underline{Z}_L \underline{I}, \text{ або } \underline{I} = \frac{1}{j \omega L} \underline{U} = \underline{Y}_L \underline{U}, \quad (3.53)$$

де $\underline{Z}_L = j \omega L$ – комплексний опір індуктивності (алгебраїчна форма),

$\underline{Y}_L = \frac{1}{j \omega L}$ – комплексна провідність індуктивності (алгебраїчна форма).

Отримані вирази (3.52), (3.53) – закон Ома в комплексній формі для індуктивного елемента.

Представимо комплексний опір і провідність індуктивності у показниковій формі:

$$\underline{Z}_L = \omega L e^{j \frac{\pi}{2}} = X_L e^{j \frac{\pi}{2}}, \quad (3.54)$$

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\omega L} e^{-j \frac{\pi}{2}} = B_L e^{-j \frac{\pi}{2}}. \quad (3.55)$$

З виразів (3.54), (3.55) видно:

$$|\underline{Z}_L| = X_L, \quad |\underline{Y}_L| = B_L. \quad (3.56)$$

3. Для ємнісного елемента закон Ома записується:

$$i(t) = C \frac{d u}{d t} = j \omega C \underline{U}_m e^{j \omega t} \text{ або } u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{j \omega C} \underline{I}_m e^{j \omega t}. \quad (3.57)$$

Перепишемо вираз (3.57) через комплексні амплітуди та комплексні діючі значення напруг і струмів:

$$\underline{I}_m = j \omega C \underline{U}_m = \underline{Y}_C \underline{U}_m, \quad \underline{U}_m = \frac{1}{j \omega C} \underline{I}_m = \underline{Z}_C \underline{I}_m, \quad (3.58)$$

$$\underline{I} = j \omega C \underline{U} = \underline{Y}_C \underline{U}, \quad \underline{U} = \frac{1}{j \omega C} \underline{I} = \underline{Z}_C \underline{I}, \quad (3.59)$$

де $\underline{Z}_C = \frac{1}{j \omega C}$ – комплексний опір ємності (алгебраїчна форма),

$\underline{Y}_C = j \omega C$ – комплексна провідність на ємності (алгебраїчна форма).

Отримані вирази (3.58), (3.59) – закон Ома в комплексній формі для ємнісного елемента.

Представимо комплексний опір і провідність індуктивності у показниковій формі:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (3.60)$$

$$\underline{Y}_C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} = B_C e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (3.61)$$

З виразів (3.60), (3.61) видно:

$$|\underline{Z}_C| = X_C, \quad |\underline{Y}_C| = B_C. \quad (3.62)$$

3.7 Аналіз послідовно з'єднаних RL , RC , RLC – елементів символьним методом розрахунків

Проведемо аналіз послідовного RL -кола (рис. 3.11).



Рисунок 3.11 – Послідовне RL -коло і комплексна схема заміщення

На підставі II закону Кірхгофа в комплексній формі запишемо:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R \underline{I} + \underline{Z}_L \underline{I} = (R + j \omega L) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}, \quad (3.63)$$

де \underline{Z} – повний комплексний опір кола.

Визначимо повний комплексний опір RL -кола:

$$\underline{Z} = R + j \omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}} = |\underline{Z}| e^{j \varphi_z}, \quad (3.64)$$

де $|\underline{Z}|$ – модуль комплексного опору,

φ_z – аргумент комплексного опору.

Визначимо зсув фаз між вхідною напругою і струмом RL -кола:

$$\varphi = \varphi_z = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R}. \quad (3.65)$$

Побудуємо векторну діаграму комплексних діючих значень напруг і струму для послідовного RL -кола (рис. 3.12).

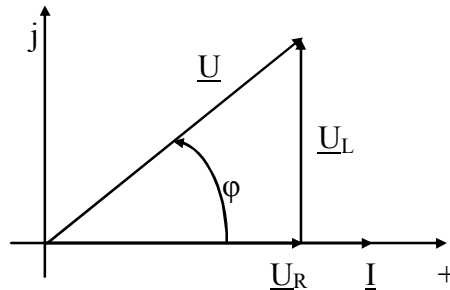


Рисунок 3.12 - Векторна діаграма комплексних діючих значень напруг і струму для послідовного RL -кола

З векторної діаграми (рис. 3.12) видно, що зсув фаз між напругою і струмом більше нуля, отже коло носить індуктивний характер.

Проведемо аналіз послідовного RC -кола (рис. 3.13)



Рисунок 3.13 – Послідовне RC -коло і комплексна схема заміщення

На підставі II закону Кірхгофа в комплексній формі:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = R \underline{I} + \underline{Z}_C \underline{I} = \left(R + \frac{1}{j \omega C} \right) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}. \quad (3.66)$$

Визначимо повний комплексний опір та зсув фаз між вхідною напругою і струмом RC -кола:

$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{1}{R \omega C}} = |\underline{Z}| e^{j \varphi_z}, \quad (3.67)$$

$$\varphi = \varphi_z = -\arctg \frac{1}{R \omega C} = -\arctg \frac{X_C}{R}. \quad (3.68)$$

Побудуємо векторну діаграму комплексних діючих значень напруг і струму для послідовного RC -кола (рис. 3.14).

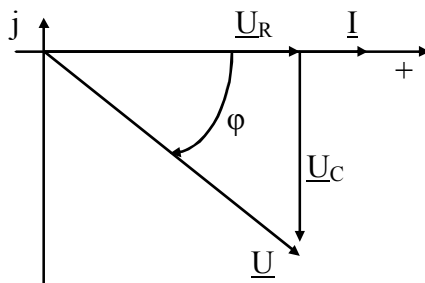


Рисунок 3.14 - Векторна діаграма комплексних діючих значень напруг і струму для послідовного RC -кола

З векторної діаграми (рис. 3.14) видно, що зсув фаз між напругою і струмом менше нуля, отже коло носить ємнісний характер.

Проведемо аналіз послідовного RLC -кола (рис. 3.15).



Рисунок 3.15 – Послідовне RLC -коло і комплексна схема заміщення

На підставі II закону Кірхгофа в комплексній формі:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R \underline{I} + \underline{Z}_L \underline{I} + \underline{Z}_C \underline{I} = \left(R + j \omega L + \frac{1}{j \omega C} \right) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}. \quad (3.69)$$

Визначимо повний комплексний опір та зсув фаз між вхідною напругою і струмом RLC -кола:

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} = |\underline{Z}| e^{j \varphi_z}, \quad (3.70)$$

$$\varphi = \varphi_z = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg \frac{X}{R}. \quad (3.71)$$

Повний опір послідовного RLC -кола дорівнює модулю повного комплексного опору:

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (3.72)$$

3.8 Аналіз паралельно з'єднаних RL , RC , RLC – елементів символьним методом розрахунків

Проведемо аналіз паралельного RL -кола (рис. 3.16).



Рисунок 3.16 – Паралельне RL -коло і комплексна схема заміщення

На підставі I закону Кірхгофа в комплексній формі:

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_L = G \underline{U} + \underline{Y}_L \underline{U} = \left(G + \frac{1}{j \omega L}\right) \underline{U} = \underline{Y} \underline{U} \quad (3.73)$$

де \underline{Y} – повна комплексна провідність кола.

Визначимо повну комплексну провідність RL -кола:

$$\underline{Y} = G - j \frac{1}{\omega L} = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{-j \arctg \frac{1}{G \omega L}} = |\underline{Y}| e^{j \varphi_y}, \quad (3.74)$$

де $|\underline{Y}|$ – модуль комплексної провідності,

φ_y – аргумент комплексної провідності.

Визначимо зсув фаз між вхідною напругою і струмом RL -кола:

$$\varphi = -\varphi_y = \arctg \frac{1}{G \omega L} = \arctg \frac{B_L}{G}. \quad (3.75)$$

Побудуємо векторну діаграму комплексних діючих значень напруги і струмів для паралельного RL -кола (рис. 3.17).

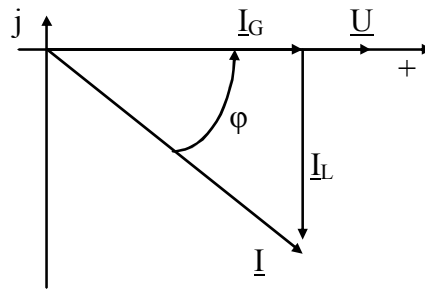


Рисунок 3.17 - Векторна діаграма комплексних діючих значень напруги і струмів для паралельного RL -кола

З векторної діаграми (рис. 3.17) видно, що зсув фаз між напругою і струмом більше нуля, отже коло носить індуктивний характер.

Проведемо аналіз послідовного RC -кола (рис. 3.18).



Рисунок 3.18 – Паралельне RC -коло і комплексна схема заміщення

На підставі I закону Кірхгофа в комплексній формі:

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C = G \underline{U} + \underline{Y}_C \underline{U} = (G + j \omega C) \underline{U} = \underline{Y} \underline{U}. \quad (3.76)$$

Визначимо повну комплексну провідність та зсув фаз між вхідною напругою і струмом паралельного RC -кола:

$$\underline{Y} = G + j \omega C = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} e^{j \arctg \frac{\omega C}{G}} = |\underline{Y}| e^{j \varphi_y}, \quad (3.77)$$

$$\varphi = -\varphi_y = -\arctg \frac{\omega C}{G} = -\arctg \frac{B_C}{G}. \quad (3.78)$$

Побудуємо векторну діаграму комплексних діючих значень напруги і струмів для паралельного RC -кола (рис. 3.19).

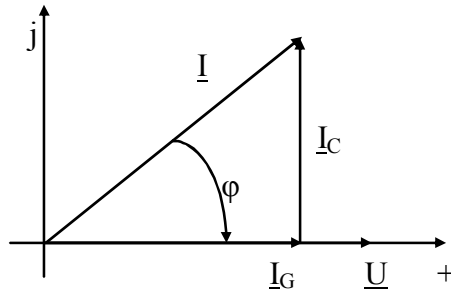


Рисунок 3.19 - Векторна діаграма комплексних діючих значень напруги і струмів для паралельного RC -кола

З векторної діаграми (рис. 3.19) видно, що зсув фаз між напругою і струмом менше нуля, отже коло носить ємнісний характер.

Проведемо аналіз паралельного RLC -кола (рис. 3.20).



Рисунок 3.20 – Паралельне RLC -коло і комплексна схема заміщення

На підставі I закону Кірхгофа в комплексній формі:

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_L + \underline{I}_C = G\underline{U} + \underline{Y}_L \underline{U} + \underline{Y}_C \underline{U} = \left(G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) \underline{U} = \underline{Y} \underline{U}. \quad (3.79)$$

Визначимо повну комплексну провідність та зсув фаз між вхідною напругою і струмом паралельного RLC -кола:

$$\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}} = |\underline{Y}| e^{j\varphi_y}, \quad (3.80)$$

$$\varphi = -\varphi_y = -\arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} = -\arctg \frac{B}{G}. \quad (3.81)$$

Повна провідність паралельного RLC -кола дорівнює модулю повної комплексної провідності:

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}. \quad (3.82)$$

3.9 Потужність в електричному колі при гармонічному впливі. Баланс потужності

Нехай на вхід лінійного електричного кола (рис. 3.21) подана гармонічна напруга:

$$u(t) = U_m \sin \omega t. \quad (3.83)$$



Рисунок 3.21 – Лінійне електричне коло

На вході кола гармонічний струм описується виразом виду:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (3.84)$$

Зсув фаз в колі дорівнює:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\varphi_i. \quad (3.85)$$

Визначимо середню за період потужність, що споживає коло:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt. \quad (3.86)$$

З врахуванням того, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$ отримаємо вираз для **активної потужності** кола при гармонічному впливі:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi. \quad (3.87)$$

Активна потужність вимірюється у ватах (Вт).

Оскільки повний опір кола з одного боку $Z = \frac{U}{I}$, з іншого $Z = \frac{R}{\cos \varphi}$, то

$$U = \frac{RI}{\cos \varphi}.$$

$$P = \frac{RI}{\cos \varphi} I \cos \varphi = RI^2, \text{ або } P = GU^2. \quad (3.88)$$

Введемо поняття **реактивної потужності** при гармонічному впливі:

$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 = BU^2. \quad (3.89)$$

Реактивна потужність вимірюється у вольт-амперах реактивних (ВАр). Крім активної і реактивної потужності використовують поняття **комплексної потужності**:

$$\underline{S} = P + jQ = |\underline{S}| e^{j\varphi}, \quad (3.90)$$

де $|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ – модуль комплексної потужності,

$\varphi = \arctg \frac{Q}{P}$ – зсув фаз в колі.

Таким чином, активну і реактивну потужність можна визначити як $P = \operatorname{Re}(\underline{S})$ і $Q = \operatorname{Im}(\underline{S})$.

Введемо поняття **повної потужності**, яка дорівнює модулю комплексної потужності:

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI. \quad (3.91)$$

Комплексна і повна потужність вимірюються у вольт-амперах (ВА). Потужності P , Q і \underline{S} можна виразити іншим способом:

$$\underline{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = UI e^{j\varphi}. \quad (3.92)$$

Оскільки $\varphi_u = 0$, $\varphi = -\varphi_i$, то вираз (3.92) запишеться:

$$\underline{S} = U e^{j0} I e^{-j\varphi_i} = \underline{U} \underline{I}^*, \quad (3.93)$$

де \underline{I}^* – комплексно-спряжений струм.

Важливим поняттям є **коефіцієнт потужності**:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (3.94)$$

Чим вище $\cos \varphi$, тим менше втрат енергії в лінії передачі і вище ступінь використання електричних машин. Якщо $\cos \varphi = 1$ (зсув фаз між напругою і струмом дорівнює нулю), то $P = S$, а $Q = 0$, тобто коло носить чисто активний характер.

Розглянемо **узгодження передавача (генератора) і приймача (навантаження) енергії**. Передавачем може бути генератор, а в якості навантаження – антена (рис. 3.22). Метою такого узгодження є створення умов, за яких максимальна потужність енергії буде віддаватись приймачеві (навантаженню).

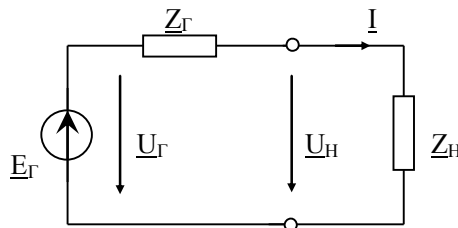


Рисунок 3.22 – Узгодження генератора і навантаження

Визначимо умову виділення максимальної потужності в навантаженні.

Для цього запишемо значення комплексного опору генератора \underline{Z}_g і навантаження \underline{Z}_H :

$$\underline{Z}_g = R_g + j X_g, \quad (3.95)$$

$$\underline{Z}_H = R_H + j X_H. \quad (3.96)$$

Комплекс струму в колі:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_H} = \frac{\underline{U}_g}{R_g + R_H + j(X_g + X_H)}. \quad (3.97)$$

Діюче значення струму визначимо у вигляді:

$$I = |\underline{I}| = \frac{U_g}{\sqrt{(R_g + R_H)^2 + (X_g + X_H)^2}}. \quad (3.98)$$

Активна потужність, що споживається навантаженням, визначається у вигляді:

$$P_H = I^2 R_H = \frac{U_2^2}{(R_2 + R_H)^2 + (X_2 + X_H)^2} R_H. \quad (3.99)$$

Отже, максимальна потужність у навантаженні виділяється при умовах:

$$X_2 = -X_H, R_2 = R_H, \text{ тобто } \underline{Z}_2 = R_H - jX_H = \underline{Z}_H^*, \quad (3.100)$$

де \underline{Z}_H^* – комплексно-спряжене навантаження.

Таким чином, можна зробити висновок, що найбільша активна потужність виділяється при роботі генератора на комплексно-спряжене навантаження.

Максимальна потужність, споживана навантаженням дорівнює:

$$P_{H\max} = \frac{U_2^2}{4R_2}. \quad (3.101)$$

За аналогією із трикутниками опорів і провідностей уведемо **трикутник потужностей**. Згідно з виразами (3.91) і (3.92) побудуємо трикутник потужностей для кола, що носить індуктивний характер (рис. 3.23, а), а також для кола, що носить ємнісний характер (рис. 3.23, б).

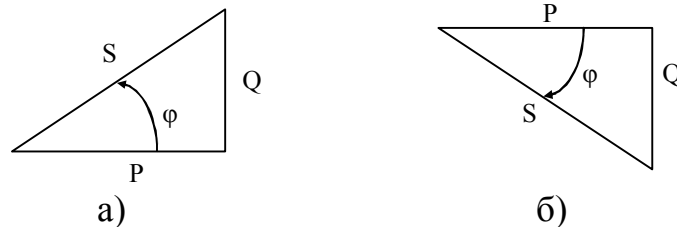


Рисунок 3.23 – Трикутники потужностей

На підставі теореми Телледжена в комплексній формі:

$$\sum \underline{S} = \sum \underline{U} \underline{I}^* = 0, \quad (3.102)$$

запишемо **баланс комплексної потужності**:

$$\sum \underline{S}_{дж} = \sum \underline{S}_H, \quad (3.103)$$

де $\underline{S}_{дж}$ – комплексна потужність джерела енергії,

\underline{S}_H – комплексна потужність навантаження.

На практиці більш зручна наступна формула:

$$\sum_{k=1}^n [\underline{E}_k \underline{I}_k^*] + \sum_{k=1}^m [\underline{U}_{Jk} \underline{J}_k^*] = \sum_{k=1}^p [I_k^2 R_k + j I_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck})], \quad (3.104)$$

де $\underline{E}_k \underline{I}_k^*$ – комплексна потужність джерела ЕРС (напруги),

$\underline{U}_{Jk} \underline{J}_k^*$ – комплексна потужність джерела струму,

$I_k^2 R_k$ – активна потужність навантаження,

$I_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck})$ – реактивна потужність навантаження.

Наслідком умови балансу комплексної потужності є умови балансу активної і реактивної потужностей:

$$\sum P_{дж} = \sum P_n, \quad (3.105)$$

$$\sum Q_{дж} = \sum Q_n. \quad (3.106)$$

3.10 Методи розрахунків лінійних електричних кіл при гармонічному впливі

Методика розрахунків лінійних електричних кіл при гармонічному впливі така ж, як і при постійному струмі, тільки у відповідних рівняннях необхідно підставити комплекси напруг і струмів та скласти комплексні схеми заміщення.

Наведемо основні відмінності методів розрахунку лінійних електричних кіл (методу струмів гілок, методу контурних струмів і методу вузлових напруг) по постійному та гармонічному струму.

Так МСГ заснований на законах Кірхгофа, записаних у комплексній формі. Запишемо I та II закони Кірхгофа в комплексній формі:

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0, \quad (3.107)$$

$$\sum_{k=1}^n \underline{E}_k = \sum_{k=1}^m \underline{Z}_k \underline{I}_k, \quad (3.108)$$

де \underline{I}_k – комплекс діючого значення струму,

\underline{E}_k – комплекс діючого значення ЕРС,

\underline{Z}_k – комплексний опір.

Канонічна система рівнянь по МКС складається у вигляді:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \underline{I}_{22} + \dots + \underline{Z}_{1k} \underline{I}_{kk} + \dots + \sum_1 \underline{J}_n \underline{Z}_n = \sum_1 \underline{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{22} + \dots + \underline{Z}_{2k} \underline{I}_{kk} + \dots + \sum_2 \underline{J}_n \underline{Z}_n = \sum_2 \underline{E}_{22}, \\ \dots \\ \underline{Z}_{k1} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{k2} \underline{I}_{22} + \dots + \underline{Z}_{kk} \underline{I}_{kk} + \dots + \sum_n \underline{J}_n \underline{Z}_n = \sum_n \underline{E}_{kk}, \end{cases} \quad (3.109)$$

де \underline{Z}_{kk} – власний комплексний опір контуру k ,

$\underline{Z}_{km} = \underline{Z}_{mk}$ – загальний комплексний опір контурів k і m ,

$\sum_n \underline{E}_{kk}$ – алгебраїчна сума комплексних ЕРС, включених у гілки, що утво-

рюють контур k ,

\underline{I}_{kk} – невідомі комплексні контурні струми,

\underline{J}_n – відомі комплексні контурні струми у контурах, що містять джерела струму,

\underline{Z}_n – загальний комплексний опір гілки контуру n з контуром, що містять джерело струму.

Канонічна система рівнянь по МВН складається у вигляді:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 \underline{Y}_{11} - \underline{V}_2 \underline{Y}_{12} - \dots - \underline{V}_s \underline{Y}_{1s} - \dots - \underline{V}_n \underline{Y}_{1n} = \sum_1 \underline{EY} + \sum_1 \underline{J}, \\ -\underline{V}_1 \underline{Y}_{21} + \underline{V}_2 \underline{Y}_{22} - \dots - \underline{V}_s \underline{Y}_{2s} - \dots - \underline{V}_n \underline{Y}_{2n} = \sum_2 \underline{EY} + \sum_2 \underline{J}, \\ \dots \\ -\underline{V}_1 \underline{Y}_{n1} - \underline{V}_2 \underline{Y}_{n2} - \dots - \underline{V}_s \underline{Y}_{ns} - \dots + \underline{V}_n \underline{Y}_{nn} = \sum_n \underline{EY} + \sum_n \underline{J}, \end{cases} \quad (3.110)$$

де \underline{Y}_{ss} – власна комплексна провідність вузла s ,

$\underline{Y}_{sq} = \underline{Y}_{qs}$ – загальна комплексна провідність вузлів s і q ,

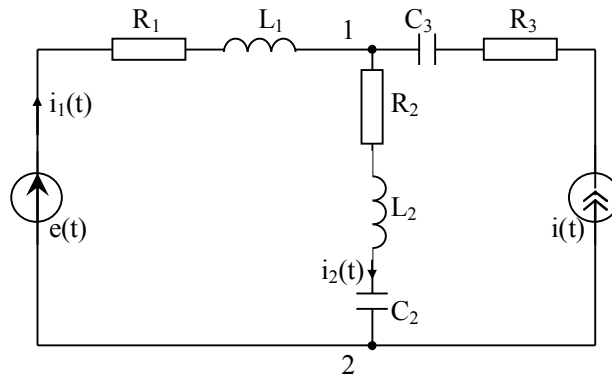
$\sum_s \underline{EY}$ – алгебраїчна сума добутків комплексних ЕРС гілок, що примика-

ють до вузла s , на їхні комплексні провідності,

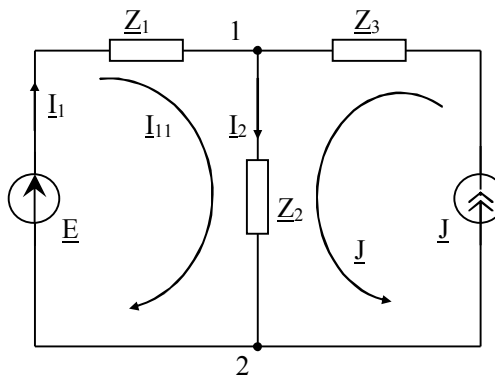
$\sum_s \underline{J}$ – алгебраїчна сума комплексних струмів джерел струму, приєднаних

до вузла s .

Приклад. Визначити струми $i_1(t)$ та $i_2(t)$ в електричному колі за допомогою МСГ, МКС і МВН, якщо $e(t) = 20\sqrt{2} \sin(50t + 30^\circ)$ (В), $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(50t + 60^\circ)$ (А), $C_2 = 100$ (мкФ), $C_3 = 10$ (мФ), $R_1 = R_2 = R_3 = 5$ (Ом), $L_1 = L_2 = 1$ (Гн).



Складемо комплексну схему заміщення для заданого електричного кола.



Для комплексної схеми заміщення визначимо комплексні значення опорів та джерел електричної енергії:

$$\underline{E} = E e^{j\varphi_e} = 20 e^{j30^\circ} = 17,32 + j10 \text{ (В)},$$

$$\underline{J} = J e^{j\varphi_i} = 5 e^{j60^\circ} = 2,5 + j4,33 \text{ (А)}.$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 5 + j50 = 50,25 e^{j84,3^\circ} \text{ (Ом)},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = 5 - j150 = 150,1 e^{-j88,1^\circ} \text{ (Ом)},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = 5 - j2 = 5,39 e^{-j21,8^\circ} \text{ (Ом)}.$$

По МСГ складається система рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{J}, \\ \underline{E} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2. \end{cases}$$

Визначимо комплексні струми гілок \underline{I}_1 та \underline{I}_2 :

$$\begin{cases} \underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{J}, \\ \underline{E} = \underline{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{J}\underline{Z}_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{J}, \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{E} - \underline{J}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \end{cases}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{(17,32 + j10) - 5e^{j60^\circ} \cdot 150,1e^{-j88,1^\circ}}{5 + j50 + 5 - j150} = \frac{(17,32 + j10) - 750,5e^{-j28,1^\circ}}{10 - j100} =$$

$$\frac{-644,7 + j363,5}{100,5e^{-j84,3^\circ}} = \frac{740,1e^{j150,6^\circ}}{100,5e^{-j84,3^\circ}} = 7,36e^{j234,9^\circ} = -4,23 - j6,02 \text{ (A)},$$

$$\underline{I}_2 = -4,23 - j6,02 + 2,5 + j4,33 = -1,73 - j1,69 = 2,42e^{-j135,6^\circ} \text{ (A)}.$$

По МКС складається 1 рівняння:

$$\underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{J}\underline{Z}_2 = \underline{E}.$$

Визначимо невідомий контурний струм \underline{I}_{11} :

$$\underline{I}_{11} = \frac{\underline{E} - \underline{J}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = 7,36e^{j234,9^\circ} \text{ (A)}.$$

Визначимо комплексні струми гілок через контурні струми:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 7,36e^{j234,9^\circ} = -4,23 - j6,02 \text{ (A)},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{11} + \underline{J} = -4,23 - j6,02 + 2,5 + j4,33 = -1,73 - j1,69 = 2,42e^{-j135,6^\circ} \text{ (A)}.$$

По МВН складається 1 рівняння:

$$\underline{V}_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) = \underline{E} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \underline{J}.$$

Визначимо потенціал вузла \underline{V}_1 :

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \left(\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} + \underline{J} \right),$$

$$\underline{V}_1 = \frac{50,25e^{j84,3^\circ} \cdot 150,1e^{-j88,1^\circ}}{10 - j100} \left(\frac{20e^{j30^\circ}}{50,25e^{j84,3^\circ}} + 2,5 + j4,33 \right) = \frac{7542,5e^{-j3,8^\circ}}{100,5e^{-j84,3^\circ}} \times$$

$$\times (0,23 - j0,32 + 2,5 + j4,33) = 75,05e^{j80,5^\circ} \cdot 4,85e^{j55,8^\circ} = 364e^{j136,3^\circ} = -263,2 + j251,5 \text{ (B)}.$$

Визначимо струми гілок через потенціали вузлів за узагальненим законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E} - \underline{V}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{17,32 + j10 + 263,2 - j251,5}{50,25e^{j84,3^0}} = \frac{280,52 - j241,5}{50,25e^{j84,3^0}},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{370,15e^{-j40,8^0}}{50,25e^{j84,3^0}} = 7,36e^{-j125,1^0} = 7,36e^{j234,9^0} \text{ (А)},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{364e^{j136,3^0}}{150,1e^{-j88,1^0}} = 2,42e^{j224,4^0} \text{ (А)},$$

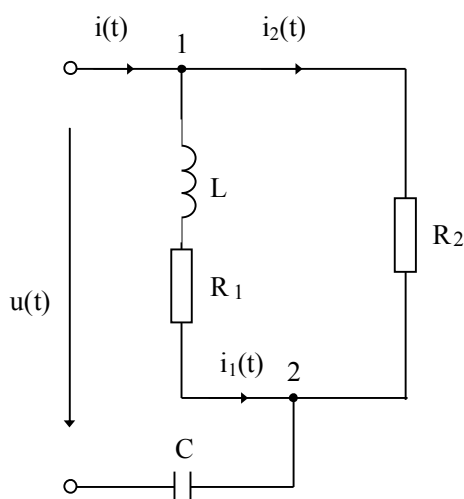
$$\underline{I}_2 = 2,42e^{j224,4^0} = 2,42e^{-j135,6^0} \text{ (А)}.$$

Від розрахованих комплексних струмів гілок \underline{I}_1 та \underline{I}_2 у показниковій формі перейдемо до їх миттєвих значень $i_1(t)$ та $i_2(t)$:

$$i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_{i1}) = 7,36 \cdot \sqrt{2} \sin(50t - 125,1^0) = 10,4 \sin(50t - 125,1^0) \text{ (А)},$$

$$i_2(t) = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_{i2}) = 2,42 \cdot \sqrt{2} \sin(50t - 135,6^0) = 3,42 \sin(50t - 135,6^0) \text{ (А)}.$$

Приклад. Провести повний аналіз електричного кола символьним методом, якщо на вході кола діє напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = 60 \sin(4398 \cdot t + 135^0)$ (В) і опори мають наступні чисельні значення: $R_1 = R_2 = 15$ (Ом), $X_L = 20$ (Ом), $X_C = 25$ (Ом).



Визначимо комплексні опори гілок \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 і еквівалентний опір усього кола \underline{Z}_e .

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 15 + j20 = 25 \cdot e^{j53,1^0} \text{ (Ом)},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 15 = 15 \cdot e^{j0^0} \text{ (Ом)},$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_C = -j25 = 25 \cdot e^{-j90^0} \text{ (Ом)}.$$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_3 = \frac{25 \cdot e^{j53,1^0} \cdot 15 \cdot e^{j0^0}}{15 + j20 + 15} - j25 = 9,81 - j21,5 = 23,63 \cdot e^{-j65,5^0} \text{ (Ом)}.$$

Розрахуємо комплекси діючих значень струму і напруги на вході кола:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u} = \frac{60}{\sqrt{2}} \cdot e^{j135^0} = 42,43 \cdot e^{j135^0} = -30 + j30 \text{ (В)},$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{42,43 \cdot e^{j135^0}}{23,63 \cdot e^{-j65,5^0}} = 1,8 \cdot e^{j200,5^0} = -1,686 - j0,63 \text{ (А)},$$

Розрахуємо напругу між вузлами 1 і 2:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I} \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = 1,8 \cdot e^{j200,5^0} \cdot 10,4 \cdot e^{j19,4^0} = 18,72 \cdot e^{j219,9^0} = -14,36 - j12 \text{ (В)}.$$

За законом Ома в комплексній формі визначимо струми \underline{I}_1 та \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1} = \frac{18,72 \cdot e^{j219,9^0}}{25 \cdot e^{j53,1^0}} = 0,75 \cdot e^{j166,8^0} = -0,73 + j0,17 \text{ (А)},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_2} = \frac{18,72 \cdot e^{j219,9^0}}{15 \cdot e^{j0^0}} = 1,25 \cdot e^{j219,9^0} = -0,96 - j0,8 \text{ (А)}.$$

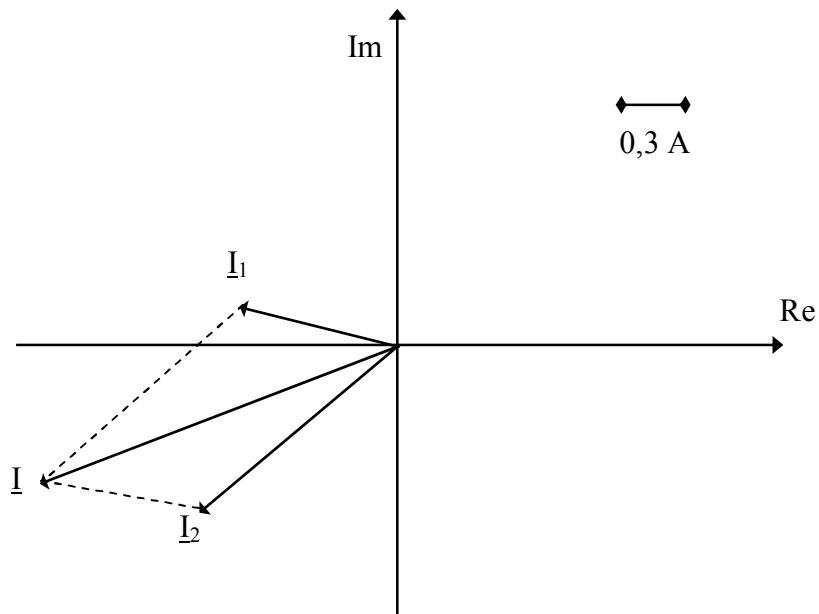
Запишемо вирази для миттєвих значень струмів $i(t)$, $i_1(t)$ та $i_2(t)$.

$$i(t) = 1,8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4398 \cdot t + 200,5^0) \text{ (А)},$$

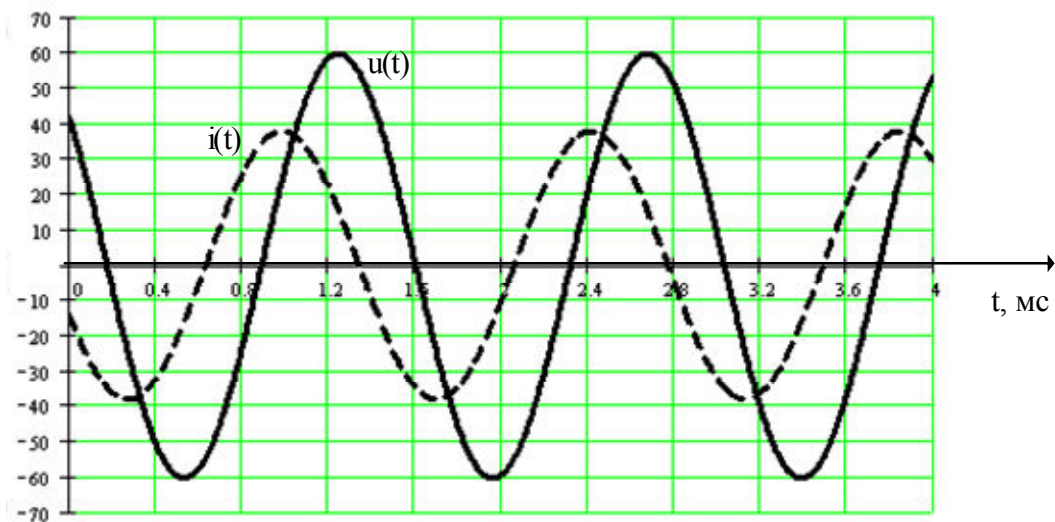
$$i_1(t) = 0,75 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4398 \cdot t + 166,8^0) \text{ (А)},$$

$$i_2(t) = 1,25 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4398 \cdot t + 219,9^0) \text{ (А)}.$$

Побудуємо векторну діаграму струмів на комплексній площині:



Побудуємо на одному графіку залежності $u(t)$ та $i(t)$, причому для оптимального порівняння збільшимо амплітуду струму.



Визначимо період коливань T :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4398} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ (с)} = 1,43 \text{ (мс)}.$$

Визначимо активну P і реактивну Q потужності, що споживаються колом.

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 31,875 \text{ (Вт)},$$

$$Q = -X_C I^2 + X_L I_1^2 = -69,75 \text{ (ВАр)}.$$

Розрахуємо величини реактивних елементів L і C , скориставшись формулами їх реактивних опорів:

$$X_L = \omega L, \text{ тобто } L = \frac{X_L}{\omega} = 4,547 \cdot 10^{-3} \text{ (Гн)} = 4,547 \text{ (мГн)},$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \text{ тобто } C = \frac{1}{\omega X_C} = 9,095 \cdot 10^{-6} \text{ (Ф)} = 9,095 \text{ (мкФ)}.$$

3.11 Електричні кола з індуктивними зв'язками. Основні поняття

Раніше ми розглядали електричні кола без врахування явища взаємоіндукції. При протіканні змінного струму i_1 через котушку індуктивності L_1 у навколишньому просторі, згідно із законом про електромагнітну індукцію (закон Фарадея), створюється магнітний потік Φ_{11} (рис. 3.24, а). Якщо яка-небудь частина цього потоку Φ_{12} пронизує витки іншої котушки L_2 , то в ній виникає **напряга взаємоіндукції** u_{M2} .

$$u_{M2} = M_{12} \frac{di_1}{dt}. \quad (3.111)$$

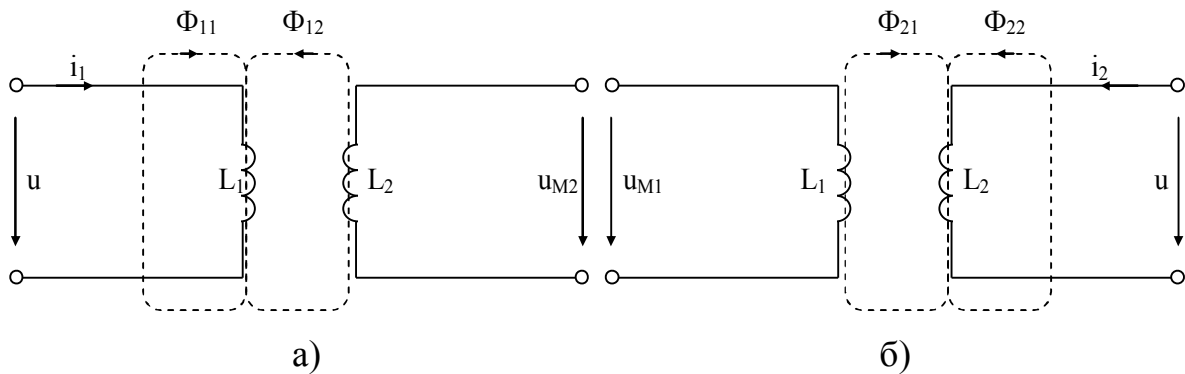


Рисунок 3.24 – Ілюстрація явища взаємоіндукції

Якщо напряга u прикладена до котушки індуктивності L_2 , то напряга взаємоіндукції u_{M1} виникає на затискачах котушки L_1 (рис. 3.24, б).

$$u_{M1} = M_{21} \frac{di_2}{dt}. \quad (3.112)$$

Згідно із принципом взаємності:

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad (3.113)$$

де M – **взаємоіндуктивність** (Гн).

Розглянутий індуктивний зв'язок (рис. 3.24) носить однобічний характер, оскільки струм i_1 викликає напругу взаємоіндукції u_{M2} , а струм i_2 – напругу взаємоіндукції u_{M1} .

У випадку замикання однієї з котушок на опір R проявляється **двосторонній індуктивний зв'язок** (рис. 3.25).

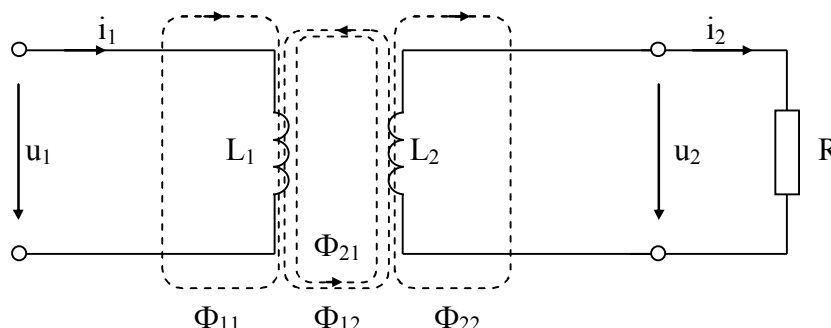


Рисунок 3.25 – Двосторонній індуктивний зв'язок

У котушці L_1 індукується напруга u_1 :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}. \quad (3.114)$$

У котушці L_2 індукується напруга u_2 :

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (3.115)$$

Включення котушок називається **узгодженим** (рис. 3.26), якщо потоки самоіндукції і взаємоіндукції складаються. У протилежному випадку включення називається **зустрічним** (рис. 3.27). Приклад узгодженого включення котушок індуктивності наведено на (рис. 3. 25)

Ступінь зв'язку між котушками індуктивності L_1 і L_2 оцінюється **коефіцієнтом зв'язку**:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (3.116)$$

Якщо $k = 1$ маємо жорсткий індуктивний зв'язок, якщо $k = 0$ – відсутність індуктивного зв'язку.

Для компактності та зручності зображення схем електричних кіл із взаємною індуктивністю вводять поняття **однойменних затискачів** – вузлів, щодо яких однаково орієнтовані струми створюють суму потоків само-

індукції і взаєміндукції. Однойменні затискачі на схемі електричного кола позначаються зіркою або крапкою.

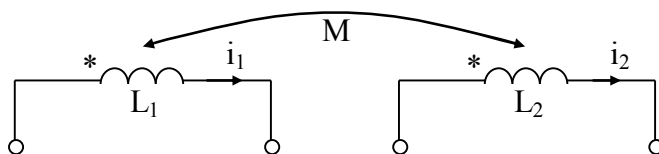


Рисунок 3.26 – Узгоджене включення котушок індуктивності

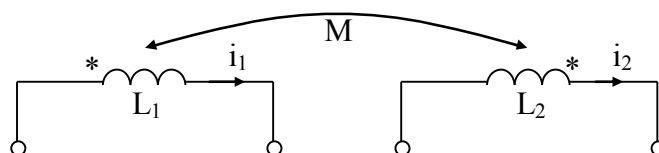


Рисунок 3.27 – Зустрічне включення котушок індуктивності

3.12 Послідовне з'єднання котушок індуктивності. Види включення

Розглянемо **послідовне узгоджене включення** котушок індуктивності L_1 і L_2 (рис. 3.28).

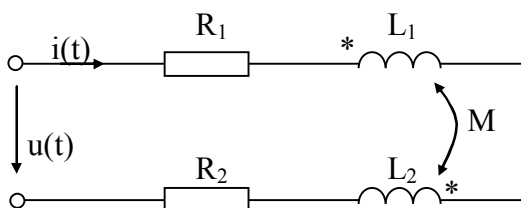


Рисунок 3.28 – Послідовне узгоджене включення котушок індуктивності

Опори R_1 і R_2 є внутрішніми опорами котушок індуктивності L_1 та L_2 .

Для електричного кола (рис. 3.28) на підставі II закону Кірхгофа одержуємо рівняння виду:

$$u(t) = u_{R1}(t) + u_{L1}(t) + u_M(t) + u_{R2}(t) + u_{L2}(t) + u_M(t) \quad (3.117)$$

Перепишемо вираз (3.117) підставивши значення напруг:

$$u(t) = (R_1 + R_2)i(t) + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}. \quad (3.118)$$

У комплексній формі можна записати:

$$\underline{U} = (R_1 + R_2)\underline{I} + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\underline{I}. \quad (3.119)$$

Визначимо комплексний повний опір кола:

$$\underline{Z} = R_1 + R_2 + j \omega(L_1 + L_2 + 2M). \quad (3.120)$$

Зсув фаз між вхідним струмом і напругою визначається:

$$\varphi = \text{arctg} \left[\frac{\omega(L_1 + L_2 + 2M)}{R_1 + R_2} \right]. \quad (3.121)$$

Напруга на котушці L_1 із втратами R_1 :

$$\underline{U}_1 = [R_1 + j \omega(L_1 + M)] \underline{I}. \quad (3.122)$$

Напруга на котушці L_2 із втратами R_2 :

$$\underline{U}_2 = [R_2 + j \omega(L_2 + M)] \underline{I}. \quad (3.123)$$

Побудуємо векторну діаграму напруг і струму при послідовному узгодженому включенні котушок індуктивності (рис. 3.29).

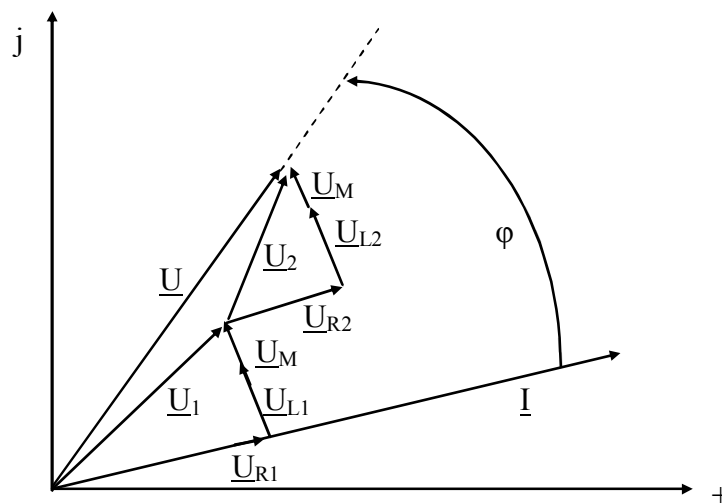


Рисунок 3.29 – Векторна діаграма напруг і струму при узгодженому включенні котушок

Розглянемо **послідовне зустрічне включення** котушок індуктивності (рис. 3.30).

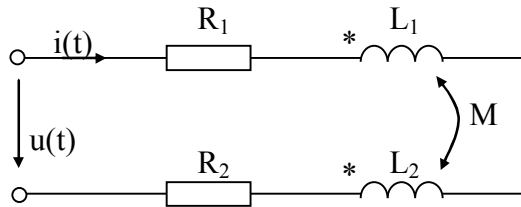


Рисунок 3.30 – Послідовне зустрічне включення котушок індуктивності

Для електричного кола (рис. 3.30) на підставі II закону Кірхгофа одержуємо рівняння виду:

$$u(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) - u_M(t) + u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) - u_M(t), \quad (3.124)$$

Перепишемо вираз (3.124) підставивши значення напруг:

$$u(t) = (R_1 + R_2)i(t) + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}. \quad (3.125)$$

У комплексній формі можна записати:

$$\underline{U} = (R_1 + R_2)\underline{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\underline{I}. \quad (3.126)$$

Визначимо комплексний повний опір кола:

$$\underline{Z} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M). \quad (3.127)$$

Зсув фаз між вхідним струмом і напругою визначається:

$$\varphi = \text{arctg} \left[\frac{\omega(L_1 + L_2 - 2M)}{R_1 + R_2} \right]. \quad (3.128)$$

Напруга на котушці L_1 із втратами R_1 :

$$\underline{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - M)]\underline{I}. \quad (3.129)$$

Напруга на котушці L_2 із втратами R_2 :

$$\underline{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 - M)]\underline{I}. \quad (3.130)$$

3.13 Паралельне з'єднання котушок індуктивності. Види включення

Розглянемо паралельне узгоджене включення котушок індуктивності L_1 і L_2 (рис. 3.31).

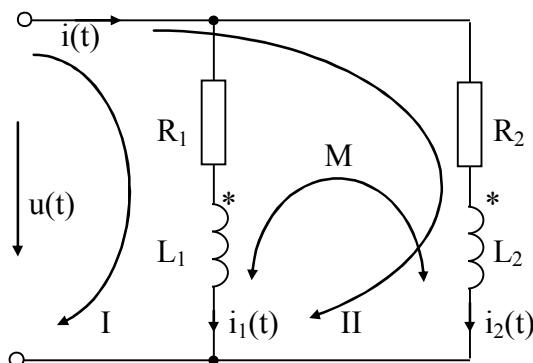


Рисунок 3.31 – Паралельне узгоджене включення котушок індуктивності

Опори R_1 і R_2 є внутрішніми опорами котушок індуктивності L_1 та L_2 .

Для електричного кола (рис. 3.31) складемо систему рівняння для комплексів струмів і напруг на підставі законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \\ \underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_{36}, \\ \underline{U} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_{36}, \end{cases} \quad (3.131)$$

де $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ – комплексний опір першої котушки,

$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ – комплексний опір другої котушки,

$\underline{Z}_{36} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j\omega M$ – комплексний опір індуктивного зв'язку.

З системи рівнянь (3.131) визначаємо комплекси струмів:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{36}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{1e3}}, \quad (3.132)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{36}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{2e3}}. \quad (3.133)$$

З іншої сторони у виразах (3.132), (3.133) еквівалентні комплексні опори індуктивно зв'язаних гілок \underline{Z}_{1e3} і \underline{Z}_{2e3} можна представити:

$$\underline{Z}_{1e3} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1вн.о.}, \quad (3.134)$$

$$\underline{Z}_{2e3} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2вн.о.}, \quad (3.135)$$

де $\underline{Z}_{1вн.о.}$, $\underline{Z}_{2вн.о.}$ – внесені комплексні опори за рахунок індуктивного зв'язку.

Опори $\underline{Z}_{1вн.о.}$ і $\underline{Z}_{2вн.о.}$ можна легко визначити із виразів (3.132) – (3.135).

Визначимо струм у нерозгалуженій частині кола:

$$\underline{I} = \underline{U} \left[\frac{1}{\underline{Z}_{1e3}} + \frac{1}{\underline{Z}_{2e3}} \right] = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{36}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{e3}}, \quad (3.136)$$

де \underline{Z}_{e3} - комплексний еквівалентний опір кола при узгодженому включенні.

Побудуємо векторну діаграму струмів і напруги при паралельному узгодженому включенні котушок індуктивності (рис. 3.32).

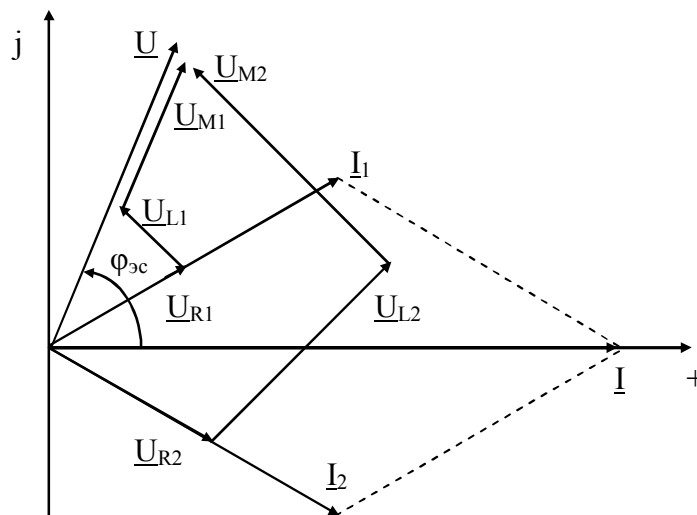


Рисунок 3.32 – Векторна діаграма струмів і напруги при узгодженому включенні котушок

Розглянемо **паралельне зустрічне включення** котушок індуктивності (рис. 3.33).

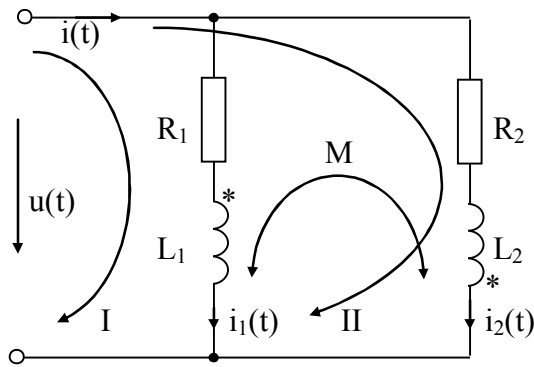


Рисунок 3.33 – Паралельне зустрічне включення котушок індуктивності

Для електричного кола (рис. 3.33) складемо систему рівняння для комплексів струмів і напруг на підставі законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \\ \underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_{3\phi}, \\ \underline{U} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_{3\phi}, \end{cases} \quad (3.137)$$

де $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ – комплексний опір першої котушки,

$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ – комплексний опір другої котушки,

$\underline{Z}_{3\phi} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -j\omega M$ – комплексний опір зв'язку.

Видно, що по аналогії з узгодженим включенням можна легко визначити комплекси струмів, еквівалентні та внесені комплексні опори. При цьому лише необхідно перед комплексним опором зв'язку $\underline{Z}_{3\phi}$ поставити знак мінус.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{3\phi}^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{3\phi}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{1e3}}, \quad (3.138)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{3\phi}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{3\phi}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{2e3}}. \quad (3.139)$$

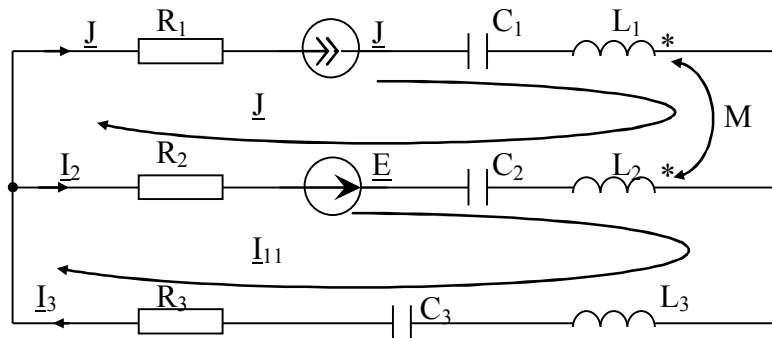
$$\underline{I} = \underline{U} \left[\frac{1}{\underline{Z}_{1e3}} + \frac{1}{\underline{Z}_{2e3}} \right] = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{3\phi}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_{3\phi}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{e3}}, \quad (3.140)$$

де \underline{Z}_{e3} – комплексний еквівалентний опір кола при зустрічному включенні.

3.14 Методи аналізу індуктивно-зв'язаних електричних кіл

Для аналізу індуктивно-зв'язаних електричних кіл зазвичай користуються методом струмів гілок (МСГ) і методом контурних струмів (МКС). Інші методи не використовуються через велику кількість розрахунків або їх не можливо застосувати через наявність індуктивного зв'язку (МВН, метод еквівалентного генератора).

Приклад. Провести аналіз індуктивно-зв'язаного кола по МСГ і МКС, якщо $\underline{E} = 50e^{j30^\circ}$ (В), $\underline{J} = 10e^{j0^\circ}$ (А), $C_1 = C_2 = C_3 = 100$ (мкФ), $R_1 = R_2 = R_3 = 20$ (Ом), $L_1 = L_2 = L_3 = 5$ (Гн), $M = 4$ (Гн), $\omega = 628$ (рад/с).



По МСГ складається система рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{J}, \\ \underline{E} = \underline{I}_2 \left(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + j\omega M \underline{J} + \underline{I}_3 \left(R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right). \end{cases}$$

Підставимо значення елементів у систему рівнянь і визначимо комплексні струми гілок \underline{I}_2 та \underline{I}_3 :

$$\begin{cases} \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{J}, \\ 50e^{j30^\circ} = \underline{I}_2 (20 + j3140 - j15,9) + j2512 \cdot 10e^{j0^\circ} + \underline{I}_3 (20 + j3140 - j15,9). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{J}, \\ 50e^{j30^\circ} = \underline{I}_2 (20 + j3124,1) + j25120 + (\underline{I}_2 + 10e^{j30^\circ}) (20 + j3124,1). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{J}, \\ 50e^{j30^\circ} = 2\underline{I}_2 (20 + j3124,1) + j25120 + 10e^{j30^\circ} (20 + j3124,1). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{J}, \\ 43,3 + j25 = \underline{I}_2 \cdot 6248,3e^{j89,6^\circ} + 218,1 + j56360,8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{J}, \\ \underline{I}_2 = \frac{56336,1e^{-j90,2^\circ}}{6248,3e^{j89,6^\circ}} = 9,016e^{-j179,8^\circ}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_3 = 9,016e^{-j179,8^\circ} + 10e^{j0^\circ} = 0,984e^{-j1,9^\circ} \text{ (A)}, \\ \underline{I}_2 = 9,016e^{-j179,8^\circ} \text{ (A)}. \end{cases}$$

По МКС складається 1 рівняння:

$$\underline{I}_{11} \left[R_2 + R_3 + j \left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right] - \underline{J} \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] + \underline{J} j \omega M = \underline{E}.$$

Підставимо значення елементів і визначимо невідомий контурний струм \underline{I}_{11} :

$$\underline{I}_{11} [40 + j(6280 - 31,8)] - 10[20 + j(3140 - 15,9)] + j25120 = 50e^{j30^\circ},$$

$$\underline{I}_{11} (40 + j6248,2) - 200 - j31241 + j25120 = 43,3 + j25,$$

$$\underline{I}_{11} = \frac{243,3 + j6146}{40 + j6248,2} = \frac{6150,8e^{j87,7^\circ}}{6248,3e^{j89,6^\circ}} = 0,984e^{-j1,9^\circ} \text{ (A)}.$$

Визначимо комплексні струми гілок через контурні струми:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{11} = 0,984e^{-j1,9^\circ} \text{ (A)},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{11} - \underline{J} = 0,984e^{-j1,9^\circ} - 10e^{j0^\circ} = 9,016e^{-j179,8^\circ} \text{ (A)}.$$

Для можливості застосування усіх розглянутих методів розрахунку електричних кіл для кіл з індуктивними зв'язками користуються **розв'язкою індуктивних зв'язків**. Розв'язка полягає в складанні еквівалентних схем, що не містять індуктивних зв'язків.

Так на (рис. 3.34) наведено розв'язку індуктивного зв'язку, коли котушки індуктивності з'єднані одноіменними затискачами, а на (рис. 3.35) – різноіменними затискачами.

Після розв'язки індуктивного зв'язку можна застосовувати такі методи як: МВН і метод еквівалентного генератора.

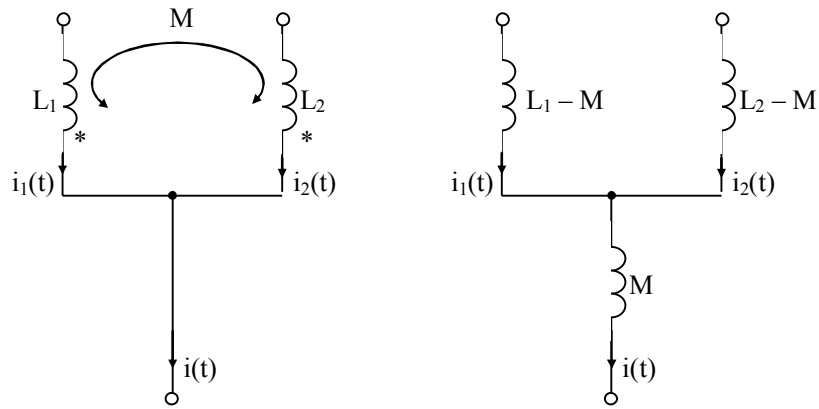


Рисунок 3.34 – Розв’язка індуктивного зв’язку, коли котушки індуктивності з’єднані одноіменними затискачами

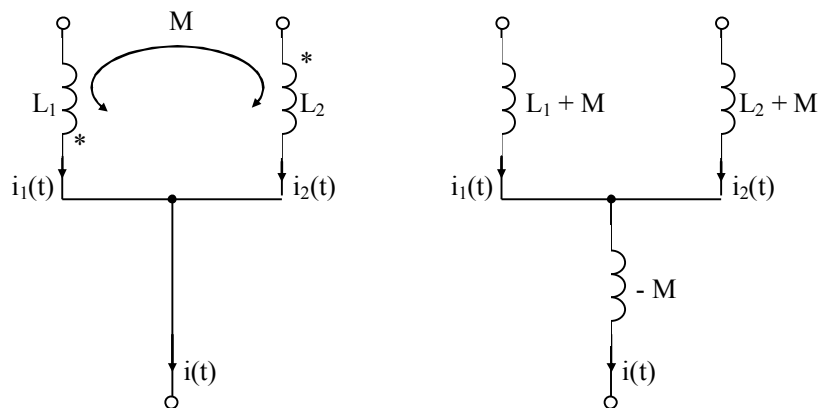
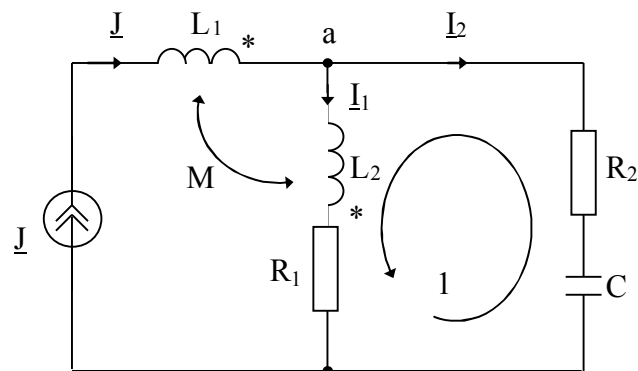


Рисунок 3.35 – Розв’язка індуктивного зв’язку, коли котушки індуктивності з’єднані різноіменними затискачами

Приклад. Провести повний аналіз заданого індуктивно-зв’язаного кола, що перебуває під дією джерела струму $i(t) = 20 \sin(628t - 200^\circ)$ (мА), якщо $R_1 = 40$ (Ом), $R_2 = 20$ (Ом), $X_{L1} = X_{L2} = 40$ (Ом), $X_C = 60$ (Ом), $X_M = \omega M = 40$ (Ом).



Знайдемо комплексне діюче значення джерела струму \underline{J} :

$$\underline{J} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_i} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{-j200^\circ} = 14,142 e^{-j200^\circ} \text{ (мА)}.$$

Для розрахунків \underline{I}_1 та \underline{I}_2 складемо для 1 контуру рівняння по II закону Кірхгофа і рівняння по I закону Кірхгофа для вузла а. При складанні першого рівняння треба врахувати, що струм \underline{J} у першій індуктивності викликає ЕРС взаємної індукції на другій індуктивності. Ця ЕРС враховується як падіння напруги на опорі взаємоіндукції $j X_M$. Так як \underline{J} у першій індуктивності і \underline{I}_1 у другій індуктивності щодо однойменних затисків, відзначених зірочками, протікають однаконо, то ця додаткова напруга береться зі знаком плюс. У результаті одержимо:

$$-\underline{I}_2 (R_2 - j X_C) + \underline{I}_1 (R_1 + j X_{L2}) + \underline{J} j X_M = 0, \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{J}.$$

Розв'язуючи рівняння, одержимо:

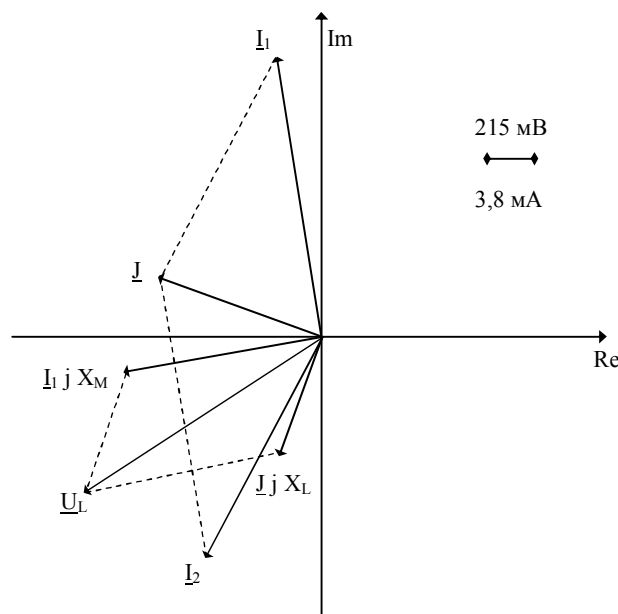
$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{\underline{J} (R_1 + j (X_{L2} + X_M))}{R_1 + R_2 + j (X_{L2} - X_C)} = \frac{14,142 e^{-j200^\circ} \cdot (40 + j80)}{60 - j20} = \\ &= \frac{14,142 e^{-j200^\circ} 89,44 e^{j63,4^\circ}}{63,25 e^{-j18,4^\circ}} = 20 e^{-j118,2^\circ} \text{ (мА)}, \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{J} - \underline{I}_2 = -3,84 + j22,47 = 22,8 e^{j99,7^\circ} \text{ (мА)}.$$

Розрахуємо напругу на індуктивності, що з'єднана із джерелом струму. З урахуванням взаємоіндукції вона буде визначатися напругою самоіндукції $\underline{J} j X_{L1}$ і напругою взаємоіндукції $\underline{I}_1 j X_M$, яку треба записати зі знаком плюс, тому що струми \underline{I}_1 і \underline{J} щодо однойменних затисків спрямовані однаконо.

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1} &= \underline{J} j X_{L1} + \underline{I}_1 j X_M = 565,68 e^{-j110^\circ} + 912 e^{j189,7^\circ} = -193,47 - j531,57 - \\ &- 898,96 - j153,7 = -1092,43 - j685,27 = 1289,6 e^{-j147,9^\circ} \text{ (мВ)}. \end{aligned}$$

Представимо векторну діаграму струмів і напруг.



3.15 Аналіз повітряного електричного трансформатора

Трансформатором називають статичний пристрій, призначений для перетворення значень змінних напруг і струмів. Трансформатор може складатися із двох і більше обмоток (катушок). Розглянемо трансформатор, що складається з двох розділених обмоток L_1 і L_2 без феромагнітного осердя із втратами R_1 та R_2 відповідно (повітряний трансформатор), схема якого подана на (рис. 3.36). Обмотка, до якої підключається джерело називається **первинна**, а до якої підключається навантаження – **вторинна**. Напруги між затискачами обмоток і струми в цих обмотках називають відповідно первинними та вторинними напругами і струмами трансформатора.

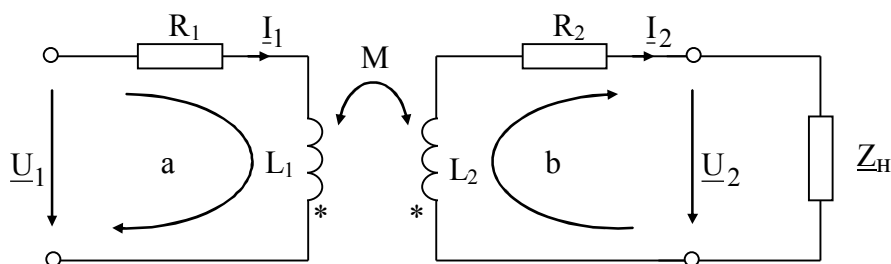


Рисунок 3.36 – Повітряний електричний трансформатор

Опір навантаження в загальному випадку в комплексній формі запишеться:

$$\underline{Z}_H = R_H + j X_H. \quad (3.141)$$

Для контурів a і b на основі II закону Кірхгофа складемо рівняння для комплексів струмів і напруг:

$$0 = -\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega \cdot L_1) - j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_2, \quad (3.142)$$

$$0 = \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot (R_2 + j\omega \cdot L_2) - j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_1. \quad (3.143)$$

Введемо поняття **струму намагнічування**, який визначається за умови $\underline{Z}_H = \infty$ (тобто $\underline{I}_2 = 0$):

$$\underline{I}_{HM} = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + j\omega \cdot L_1}. \quad (3.144)$$

Якщо струм намагнічування $\underline{I}_{HM} = 0$, а індуктивність катушки $L_1 \rightarrow \infty$, то ми отримуємо **ідеальний трансформатор**.

Якщо відсутні втрати у обмотках трансформатора $R_1 = R_2 = 0$ і коефіцієнт зв'язку $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$, то ми отримуємо **досконалий трансформатор**.

тор.

Струм намагнічування досконалого трансформатора:

$$\underline{I}_{nm} = \frac{\underline{U}_1}{j\omega \cdot L_1}. \quad (3.145)$$

Для досконалого трансформатора вирази (3.142), (3.143) переписуться у вигляді:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot j\omega \cdot L_1 - j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_2, \quad (3.146)$$

$$-\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot j\omega \cdot L_2 - j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_1. \quad (3.147)$$

Виразимо з виразу (3.146) струм \underline{I}_1 , а з виразу (3.147) напругу \underline{U}_2 .

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1 + j\omega \cdot M \cdot \underline{I}_2}{j\omega \cdot L_1} = \underline{I}_2 \cdot \frac{M}{L_1} + \frac{\underline{U}_1}{j\omega \cdot L_1} = \\ &= \underline{I}_2 \cdot \frac{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}{L_1} + \frac{\underline{U}_1}{j\omega \cdot L_1} = \underline{I}_2 \cdot \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + \frac{\underline{U}_1}{j\omega \cdot L_1}, \\ -\underline{U}_2 &= \underline{I}_2 \cdot j\omega \cdot L_2 - j\omega \cdot M \cdot \left[\underline{I}_2 \cdot \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + \frac{\underline{U}_1}{j\omega \cdot L_1} \right] = \\ &= \underline{I}_2 \cdot j\omega \cdot L_2 - j\omega \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \cdot \underline{I}_2 \cdot \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} - j\omega \cdot M \cdot \frac{\underline{U}_1}{j\omega \cdot L_1}, \\ -\underline{U}_2 &= \underline{I}_2 \cdot j\omega \cdot L_2 - \underline{I}_2 \cdot j\omega \cdot L_2 - M \cdot \frac{\underline{U}_1}{L_1} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot \underline{U}_1. \end{aligned}$$

Після перетворень можна записати:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cdot \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + \underline{I}_{nm}, \quad (3.148)$$

$$\underline{U}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot \underline{U}_1. \quad (3.149)$$

Введемо поняття **коефіцієнта трансформації**:

$$k_{mp} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad (3.150)$$

Якщо досконалий трансформатор є ідеальним, тобто $\underline{I}_{nm} = 0$, то рівняння (3.148), (3.149) переписуться:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cdot k_{mp}, \quad (3.151)$$

$$\underline{U}_2 = k_{mp} \cdot \underline{U}_1. \quad (3.152)$$

Із рівнянь (3.151), (3.152) легко визначити коефіцієнт трансформації.

$$k_{mp} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}. \quad (3.153)$$

Для комплексно-спряжених значень:

$$k_{mp} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{I}_1^*}{\underline{I}_2^*}. \quad (3.154)$$

З виразу (3.154) визначимо комплексну потужність споживану первинною і вторинною обмотками:

$$\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* \text{ або } \underline{S}_1 = \underline{S}_2. \quad (3.155)$$

Отже комплексна потужність, споживана первинною обмоткою дорівнює комплексній потужності, що споживається вторинною обмоткою. Таким чином, ККД ідеального трансформатора буде дорівнює одиниці (або 100 %).

Якщо до ідеального трансформатора підключається навантаження з комплексним опором $\underline{Z}_n = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$, то вхідний опір трансформатора \underline{Z}_{ex} визначається у вигляді:

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{k_{mp}} \cdot \frac{U_2}{k_{mp} \cdot I_2} = \frac{1}{k_{mp}^2} \cdot \underline{Z}_n. \quad (3.156)$$

Вхідний опір трансформатора має такий же характер, як і навантаження, а відрізняється від нього по модулю в k_{mp}^2 раз.

3.16 Аналіз трифазних електричних кіл

Генератор трифазної системи виробляє три гармонічні напруги з однаковою амплітудою. Фази цих напруг зсунуті відносно одна одної на кут 120° (рис. 3.37). Трифазне електричне коло може бути подане сукупністю трьох однофазних кіл, які називають фазами та позначають літерами A , B , C .

Значення гармонічних напруг записуються:

$$\begin{aligned} u_A(t) &= U_{Am} \cos(\omega t + \varphi), \\ u_B(t) &= U_{Bm} \cos(\omega t + \varphi - 2\pi/3), \\ u_C(t) &= U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi - 4\pi/3). \end{aligned} \quad (3.157)$$

Діючі значення **фазних напруг** рівні між собою:

$$U_A = U_B = U_C = U_\phi. \quad (3.158)$$

Випадок, коли $\varphi = \pi/2$ наведений на (рис. 3.37).

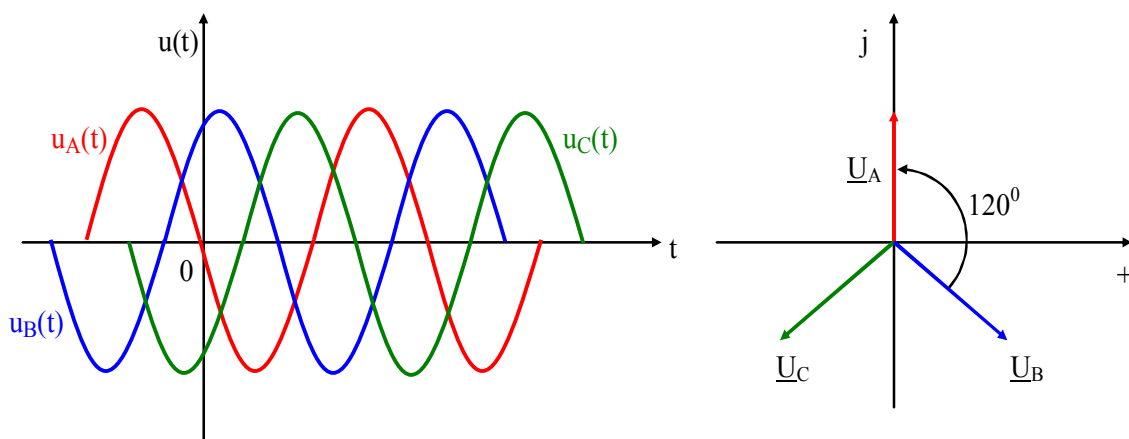


Рисунок 3.37 – Часова та векторна діаграми напруг трифазного генератора

Три обмотки генератора можуть з'єднуватися між собою двома способами: зіркою та трикутником (рис. 3.38).

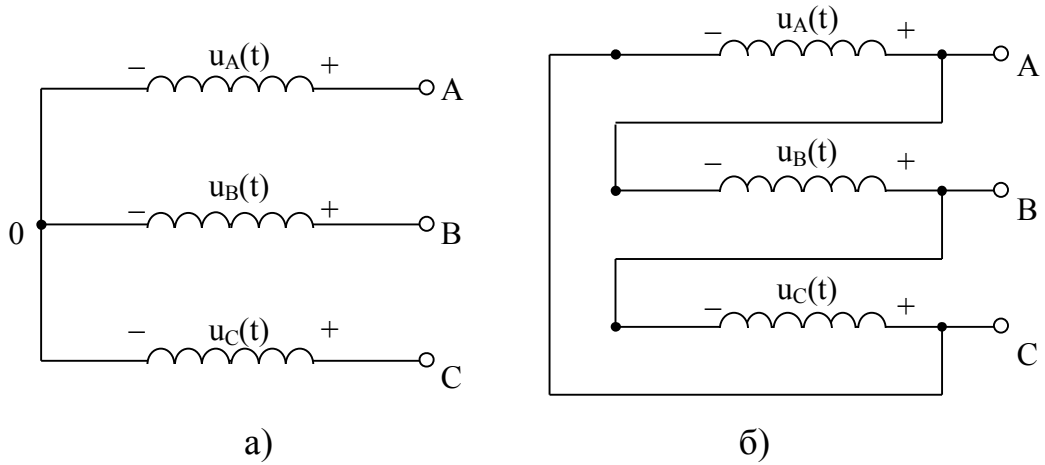


Рисунок 3.38 – Трифазне коло з'єднання зіркою а), з'єднання трикутником б)

Визначимо напруги на затискачах:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B, \underline{U}_{AC} = \underline{U}_A - \underline{U}_C, \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C, \quad (3.159)$$

де $U_{AB} = U_{AC} = U_{BC} = U_l$ – лінійні напруги.

При з'єднанні зіркою:

$$U_l = \sqrt{3} U_\phi. \quad (3.160)$$

Наприклад якщо $U_\phi = 127(\text{В})$, тоді $U_l = \sqrt{3} \cdot 127 = 220(\text{В})$.

При з'єднанні трикутником:

$$U_l = U_\phi. \quad (3.161)$$

Представимо схему трифазного кола, у якого обмотки генератора і навантаження з'єдані зіркою (рис. 3.39).

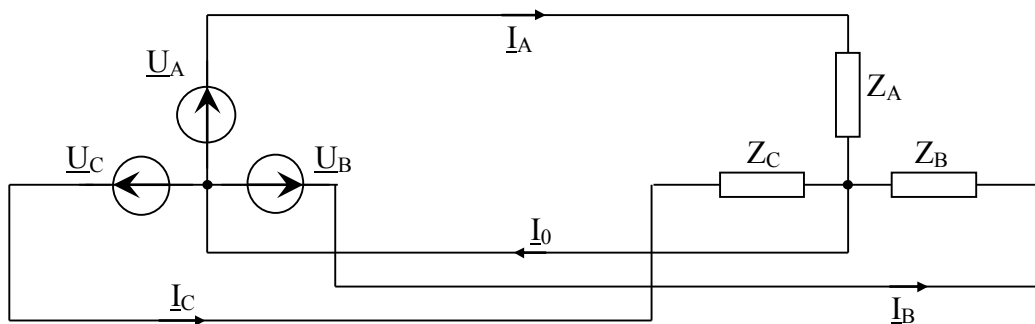


Рисунок 3.39 – Трифазне коло при з'єднанні зіркою

Визначимо лінійні струми:

$$\underline{I}_A = \frac{U_A}{Z_A}, \underline{I}_B = \frac{U_B}{Z_B}, \underline{I}_C = \frac{U_C}{Z_C}. \quad (3.162)$$

З іншої сторони з (рис. 3.39) видно:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C, \quad (3.163)$$

де \underline{I}_0 – струм у нейтральному проводі.

У режимі **симетричного навантаження**:

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z, \quad (3.164)$$

одержуємо

$$\underline{I}_0 = \frac{U_A}{Z} + \frac{U_B}{Z} + \frac{U_C}{Z},$$

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{Z}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \frac{U_A}{Z} (1 + e^{-j2\pi/3} + e^{-j4\pi/3}) = 0. \quad (3.165)$$

Струм у нейтральному проводі дорівнює нулю, отже, його наявність у схемі необов'язкова.

3.17 Запитання та задачі для закріплення

1. Що називається гармонічним коливанням?
2. Дайте визначення періоду і частоті гармонійного коливання?
3. Який зв'язок між кутовою і циклічною частотою?
4. Як визначаються діючі значення струму і напруги?
5. Який зв'язок між діючим значенням і амплітудним?
6. Які способи представлення гармонійних коливань Ви знаєте?
7. Що називається векторною діаграмою?
8. У чому сутність символічного методу розрахунку електричних кіл?
9. Як перевести комплексне число з показової форми в алгебраїчну форму?
10. Що таке модуль і аргумент комплексного числа?
11. Що називають амплітудним і фазовим спектром?
12. Як визначається реактивний опір на індуктивності?
13. Як визначається реактивна провідність у ємності?
14. Як визначається повний опір послідовного RLC -кола?
15. Яке явище відбувається в послідовному RLC -колі, коли зсув фаз дорівнює нулю?

16. Що таке активна, реактивна і комплексна потужності кола? Одиниці виміру?

17. Як визначається повна потужність кола?

18. Запишіть умову передачі максимуму активної потужності від джерела до приймача.

19. Що Ви розумієте під напругою самоіндукції і взаємоіндукції?

20. Які види включення котушок індуктивності Ви знаєте?

21. Що таке електричний трансформатор?

22. Представити комплексне діюче значення напруги в тригонометричній і показниковій формах. Записати миттєве значення напруги. $\underline{U} = 5 - j15$ (В).

23. Дві індуктивності $L_1 = 12$ (мГн) і $L_2 = 35$ (мГн) ввімкнені послідовно. Визначити їх еквівалентний опір на частоті $f = 1000$ (Гц).

24. В послідовному RLC-колі до входу прикладена напруга $U = 15$ (В), падіння напруги на індуктивності $u_L = 3$ (В), на ємності $u_C = 12$ (В). Визначити падіння напруг на резисторі u_R .

25. З миттєвого значення струму $i(t) = -8\sin(\omega t + 30^\circ)$ (А), записати комплексну амплітуду струму в показниковій, тригонометричній та алгебраїчній формах.

26. Електричне коло утворене послідовним включенням резистора з опором $R = 100$ (Ом) і конденсатора з ємністю $C = 4$ (мкФ). На вхід кола подається змінна напруга $U = 5$ (В) з частотою $f = 100$ (Гц). Визначити струм у колі I , зсув фаз між напругою і струмом φ , напруги на елементах кола U_R та U_C .

27. В послідовному RLC-колі до входу прикладена напруга $U = 10$ (В), падіння напруги на індуктивності $u_L = 5$ (В), на ємності $u_C = 11$ (В), опір резистора $R = 40$ (Ом). Визначити комплексну потужність, що споживається колом.

4 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

4.1 Комплексна частотна характеристика, амплітудно-частотна і фазо-частотна характеристики

Залежність величин, що характеризують процеси в електричному колі, від частоти називають **частотними характеристиками** кола.

Будь-яка схема може бути подана у вигляді багатополюсника (рис. 4.1), який містить джерела зовнішньої дії та пасивні елементи, на яких необхідно дослідити відгуки (реакції) на ці дії.

Полюси 1-1', до яких під'єднане джерело зовнішньої дії, називаються **вхідними**.

Полюси 2-2', 3-3', n-n', на яких визначається відгук, називаються **вихідними**.

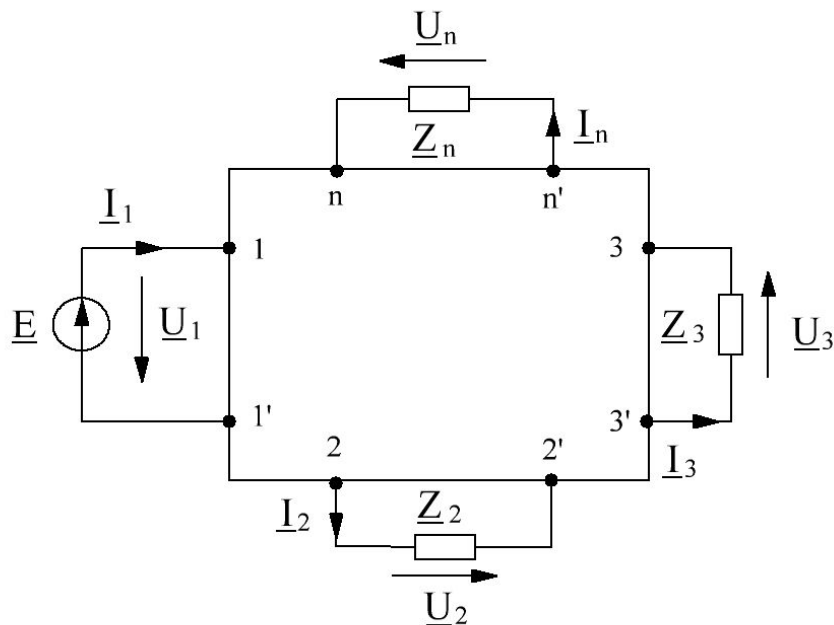


Рис. 4.1 – Узагальнене зображення електричного кола у вигляді багатополюсника

Розглянемо чотиріпольосник рис. 4.2. На вхідні затискачі 1-1' якого подається сигнал у вигляді напруги з комплексною амплітудою \underline{U}_{m1} , або струму з комплексною амплітудою \underline{I}_{m1} , а реакція знімається з вихідних затискачів 2-2', також у вигляді напруги або струму з комплексними амплітудами \underline{U}_{m2} , \underline{I}_{m2} .

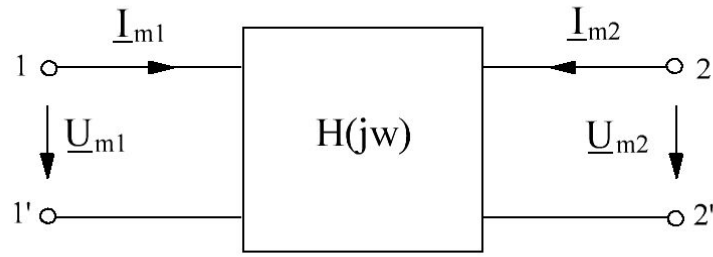


Рис. 4.2 – Зображення електричного кола у вигляді чотирьохполюсника

Комплексною частотною характеристикою (КЧХ) називається відношення комплексної амплітуди (діючого значення) реакції кола до комплексної амплітуди (діючого значення) вхідного впливу.

Комплексні частотні характеристики діляться на вхідні і передатні. Якщо відгуком на вхідну напругу \underline{U}_{m1} в діапазоні частот є вхідний струм \underline{I}_{m1} , тоді комплексна частотна характеристика, називається вхідною провідністю кола:

$$H_{Y_{ex}}(j\omega) = \frac{\underline{I}_{m1}}{\underline{U}_{m1}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \underline{Y}_{ex}. \quad (4.1)$$

У випадку, коли відгуком є вхідна напруга \underline{U}_{m1} при заданому вхідному струмі \underline{I}_{m1} , тоді маємо характеристику, яка називається вхідним опором кола.

$$H_{Z_{ex}}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{I}_{m1}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{ex} \quad (4.2)$$

Передатні КЧХ бувають чотирьох видів:

$$H_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{U}_{m1}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \text{ – КЧХ по напрузі,} \quad (4.3)$$

$$H_I(j\omega) = \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{I}_{m1}} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \text{ – КЧХ по струму,} \quad (4.4)$$

$$H_Z(j\omega) = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{I}_{m1}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \text{ – КЧХ по опору,} \quad (4.5)$$

$$H_Y(j\omega) = \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{U}_{m1}} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \text{ – КЧХ по провідності.} \quad (4.6)$$

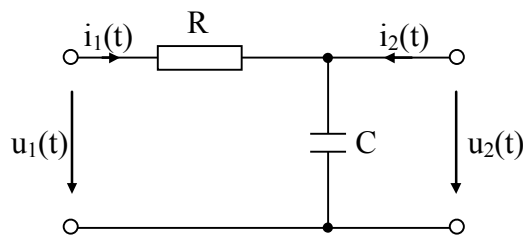
У загальному виді КЧХ можна представити як:

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega)\cos\varphi(\omega) + jH(\omega)\sin\varphi(\omega), \quad (4.7)$$

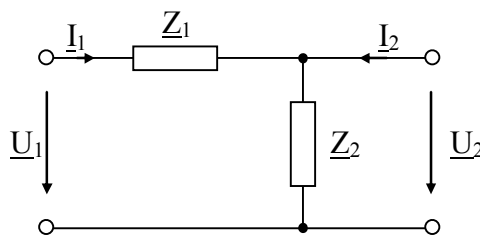
де $H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}]^2 + [\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}]^2}$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ),

$\varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}}$ – фазо-частотна характеристика (ФЧХ).

Приклад. Визначимо КЧХ по напрузі, а також АЧХ і ФЧХ заданого кола.



Зобразимо комплексну схему заміщення:



Вираз для КЧХ по напрузі запишеться:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1 Z_2}{I_1 (Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_2}{(Z_1 + Z_2)} = \frac{1}{j\omega C \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

КЧХ можна представити в показовій формі:

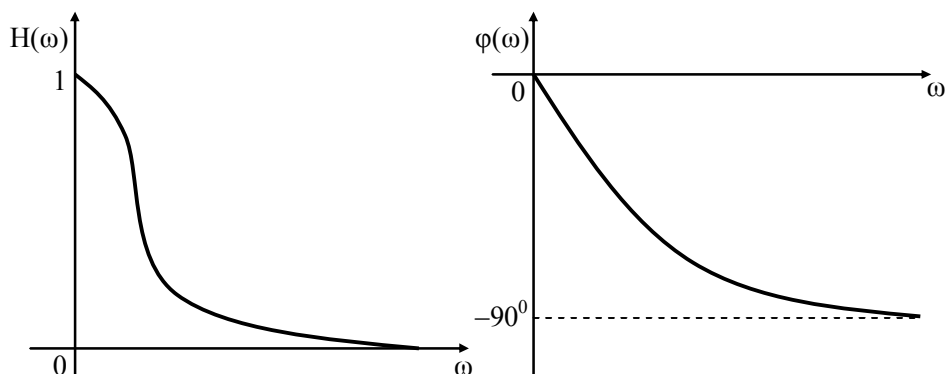
$$H_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j \operatorname{arctg}(\omega RC)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j \operatorname{arctg}(\omega RC)}.$$

З останнього виразу отримаємо вирази для АЧХ та ФЧХ:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC).$$

На основі отриманих виразів побудуємо графіки АЧХ та ФЧХ.



Для зручності аналізу кіл на практиці використовують нормовану КЧХ:

$$T(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{H(j\omega)_{\max}}, \quad (4.8)$$

а також нормовану АЧХ:

$$T(\omega) = \frac{H(\omega)}{H(\omega)_{\max}}. \quad (4.9)$$

Уведемо поняття **підсилення**:

$$D(\omega) = \ln H(\omega) \text{ (Нп)}; \quad D(\omega) = 20 \lg H(\omega) \text{ (дБ)}, \quad (4.10)$$

та **ослаблення**:

$$A(\omega) = \ln \frac{1}{H(\omega)} \text{ (Нп)}; \quad A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H(\omega)} \text{ (дБ)}, \quad (4.11)$$

де (Нп) – непер, (дБ) – децибел, причому $1 \text{ (дБ)} = 0,115 \text{ (Нп)}$, а $1 \text{ (Нп)} = 8,69 \text{ (дБ)}$.

Для оцінки частотних інтервалів вводять поняття **октава** і **декада**. В інтервалі частот $[\omega_1, \omega_2]$ число октав і декад розраховуються відповідно:

$$N_{\text{октав}} = \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (4.12)$$

$$N_{\text{декад}} = \lg \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (4.13)$$

Тобто 1 октава = 0,301 декади, а 1 декада = 3,32 октави.

Приклад. Визначити число октав і декад, якщо $\omega_1 = 230$ (рад/с), а $\omega_2 = 920$ (рад/с).

Розрахуємо спочатку число октав і на основі результату визначимо число декад.

$$N_{\text{октав}} = \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = \log_2 4 = 2.$$

$$N_{\text{декад}} = 0,301 \cdot N_{\text{октав}} = 0,301 \cdot 2 = 0,602.$$

4.2 Послідовний коливальний контур. Основні поняття і визначення

У послідовному коливальному контурі (рис. 4.3) має місце резонанс напруг із частотою:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (4.14)$$

При цьому повний опір контуру при резонансі є повністю активний $Z = R$.

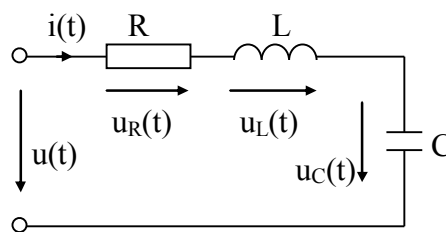


Рис. 4.3 – Послідовний коливальний контур

Визначимо реактивні опори на індуктивності і ємності при резонансі:

$$X_{L_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (4.15)$$

$$X_{C_0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.16)$$

Із виразів (4.15), (4.16) видно, що реактивні опори на індуктивності і ємності рівні та визначають **характеристичний опір** контуру:

$$X_{L_0} = X_{C_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (4.17)$$

Резонансні властивості контуру характеризуються **добротністю**:

$$Q = 2\pi \frac{W_p}{W_{aT}}, \quad (4.18)$$

де W_p – максимальне значення реактивної енергії, що запасується в контурі при резонансі,

W_{aT} – активна енергія, що поглинається в контурі за період T .

Величина обернена до добротності називається **згасання**:

$$d = \frac{1}{Q}. \quad (4.19)$$

У контурі відбувається періодичний обмін енергії електричного і магнітного полів, тобто

$$W_p = \frac{L I_{m_0}^2}{2} = \frac{C U_{m_0}^2}{2} = const. \quad (4.20)$$

Значення активної енергії, що розсіюється в контурі, визначається як:

$$W_{aT} = I_0^2 RT = \frac{I_{m_0}^2 RT}{2}. \quad (4.21)$$

З врахуванням виразів (4.20) і (4.21) визначимо добротність послідовного коливального контуру:

$$Q = 2\pi \frac{L I_{m_0}^2}{I_{m_0}^2 RT} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R},$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R \omega_0 C} = \frac{\rho}{R}. \quad (4.22)$$

4.3 Частотні характеристики послідовного коливального контуру

Електричні кола проявляють свої частотні властивості за рахунок наявності в них реактивних елементів, опори яких залежать від частоти.

Для послідовного коливального контуру можна записати:

$$X_L(\omega) = \omega L, \quad (4.23)$$

$$X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}, \quad (4.24)$$

$$X(\omega) = X_L(\omega) - X_C(\omega), \quad (4.25)$$

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + X^2(\omega)}. \quad (4.26)$$

На основі виразів (4.23) – (4.26) побудуємо залежності опорів від частоти.

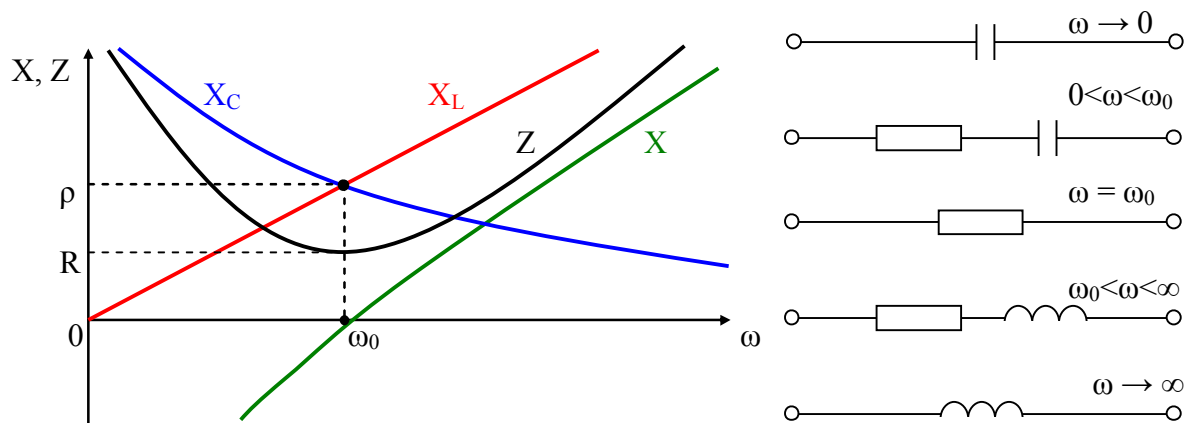


Рис. 4.4 – Залежності опорів від частоти

З рис. 4.4 видно, що при частоті $\omega < \omega_0$ коло має ємнісний характер, а при частоті $\omega > \omega_0$ — індуктивний характер.

Визначимо частотну залежність струму в послідовному контурі та побудуємо її графік (рис. 4.5).

$$I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2(\omega)}}. \quad (4.27)$$

При резонансі $X(\omega) = 0$ і струм досягає максимального значення:

$$I_0 = \frac{U}{R}. \quad (4.28)$$

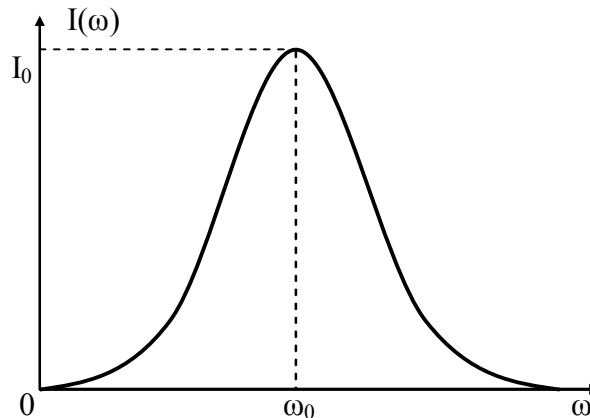


Рис. 4.5 – Частотна залежність струму в послідовному коливальному контурі

Визначимо частотні залежності напруг на опорі, індуктивності та ємності контуру:

$$U_R(\omega) = I(\omega)R = \frac{UR}{\sqrt{R^2 + X^2(\omega)}}, \quad (4.29)$$

$$U_L(\omega) = I(\omega)X_L(\omega) = \frac{UX_L(\omega)}{\sqrt{R^2 + X^2(\omega)}}, \quad (4.30)$$

$$U_C(\omega) = I(\omega)X_C(\omega) = \frac{UX_C(\omega)}{\sqrt{R^2 + X^2(\omega)}}, \quad (4.31)$$

При резонансі частотні залежності напруг на елементах контуру визначаються:

$$U_R(\omega_0) = I_0 R = U, \quad (4.32)$$

$$U_L(\omega_0) = U_C(\omega_0) = I_0 \rho = U \frac{\rho}{R} = UQ. \quad (4.33)$$

На основі виразу (4.33) визначимо добротність:

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = Q. \quad (4.34)$$

Побудуємо частотні залежності напруг на елементах контуру на основі виразів (4.29) – (4.31).

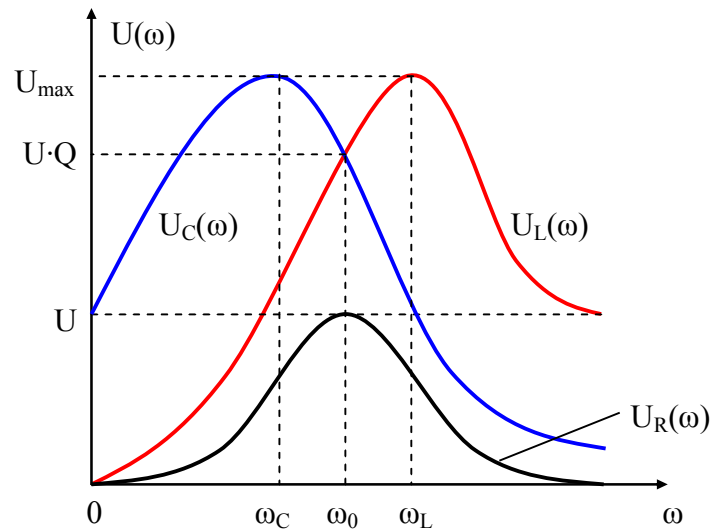


Рис. 4.6 – Частотні залежності напруг на опорі, індуктивності та ємності послідовного контуру

Визначимо частоти ω_C і ω_L , на яких досягають максимальні значення напруги на ємності та індуктивності $U_C(\omega_C) = U_L(\omega_L) = U_{\max}$. Для цього скористаємось наступними умовами:

$$\left. \frac{dU_C}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_C} = 0, \quad \left. \frac{dU_L}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_L} = 0. \quad (4.35)$$

Підставивши вирази (4.30) і (4.31) у вираз (4.35) та спростивши отримаємо рівняння:

$$2L^2 C \omega_C^2 + R^2 C - 2L = 0, \quad (4.36)$$

$$2 + \omega_L^2 (R^2 C^2 - 2LC) = 0. \quad (4.37)$$

Виразимо з рівнянь (4.36), (4.37) частоти ω_C і ω_L :

$$\omega_C = \sqrt{\frac{2L - R^2 C}{2L^2 C}}, \quad (4.38)$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2 C^2}}. \quad (4.39)$$

Розрахуємо частоти максимумів ω_C і ω_L через добротність та резонансну частоту контуру:

$$\omega_C = \sqrt{\frac{2L - R^2C}{2L^2C}} = \sqrt{\frac{R^2C \left(2\frac{L}{C} \frac{1}{R^2} - 1\right)}{2L^2C}} = \sqrt{\frac{2\frac{\rho^2}{R^2} - 1}{2\frac{\rho^2}{R^2} \frac{1}{\omega_0^2}}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}}, \quad (4.40)$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} = \sqrt{\frac{2}{R^2C^2 \left(2\frac{L}{CR^2} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{2\frac{\rho^2}{R^2} \omega_0^2}{2\frac{\rho^2}{R^2} - 1}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}. \quad (4.41)$$

Визначимо фазо-частотні характеристики послідовного коливального контуру:

$$\varphi_R(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R}, \quad (4.42)$$

$$\varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X(\omega)}{R}, \quad (4.43)$$

$$\varphi_L(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X(\omega)}{R}. \quad (4.44)$$

4.4 Комплексна передатна характеристика по провідності послідовного коливального контуру. Абсолютне, відносне і узагальнене розстроювання, смуга пропускання

Визначимо комплексну передатну характеристику по провідності послідовного коливального контуру на основі виразу (4.6):

$$H_Y(j\omega) = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + j \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]}. \quad (4.45)$$

Ступінь відхилення режиму коливального контуру від резонансу оцінюють по абсолютному $\Delta\omega$, відносному δ і узагальненому ξ розстроюванню контурів:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad \text{або} \quad \Delta f = f - f_0, \quad (4.46)$$

$$\delta = \Delta\omega/\omega_0 = \frac{\Delta f}{f_0}, \quad (4.47)$$

$$\xi = \frac{X(\omega)}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right] = \frac{\rho}{R} \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] = Qv. \quad (4.48)$$

У теорії часто використовується узагальнене розстроювання, тому що його використання спрощує розрахунки. З врахуванням виразу (4.48) вираз (4.45) перепишеться:

$$H_Y(j\xi) = \frac{1}{R(1+j\xi)} = H_Y(\xi) e^{j\phi_Y(\xi)}, \quad (4.49)$$

де $H_Y(\xi) = \frac{1}{R\sqrt{1+\xi^2}}$ – АЧХ,

$\phi_Y(\xi) = -\arctg \xi$ – ФЧХ.

Для більшого спрощення розрахунків використаємо нормовану АЧХ:

$$T_Y(\xi) = \frac{H_Y(\xi)}{H_Y(\xi=0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (4.50)$$

де $H_Y(\xi=0)$ – значення АЧХ при $\xi=0$.

Вираз (4.50) ще називають коефіцієнтом передачі по провідності. Побудуємо частотну характеристику коефіцієнта передачі по провідності (рис. 4.7)

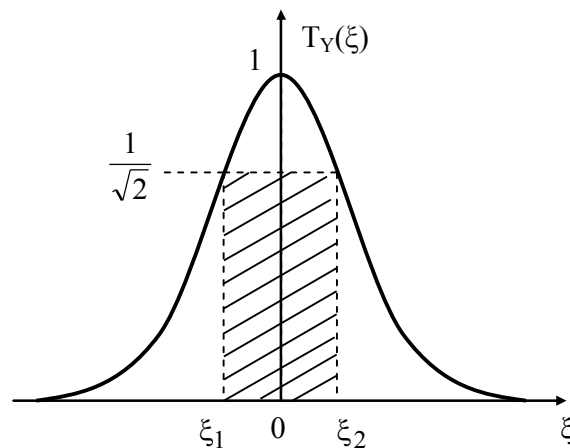


Рис. 4.7 – Частотна характеристика коефіцієнта передачі по провідності

На рис. 4.7 смуга пропускання показана заштрихованою областю. **Смуга пропускання** – діапазон частот у межах якого коефіцієнт передачі зменшується в $\sqrt{2}$ раз.

Визначимо граничні частоти смуги пропускання з умови:

$$T_Y(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (4.51)$$

звідки $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$.

З іншого боку на основі виразу (4.48) узагальнене розстроювання дорівнює:

$$\xi = Q \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]. \quad (4.52)$$

На основі виразу (4.52) підставляючи значення узагальненого розстроювання $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$ визначимо істинні граничні частоти смуги пропускання ω_1 і ω_2 :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left[\sqrt{1+4Q^2} - 1 \right], \quad (4.53)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left[\sqrt{1+4Q^2} + 1 \right]. \quad (4.54)$$

Визначимо **ширину смуги пропускання**:

$$\Delta\omega_{np} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}, \text{ або } \Delta f_{np} = \frac{f_0}{Q}. \quad (4.55)$$

На основі проведених розрахунків видно, що зі збільшенням втрат у контурі, його добротність зменшується. Зменшення добротності сприяє збільшенню смуги пропускання, що веде до зменшення **вибірності** (здатності контуру виділяти коливання певної частоти).

4.5 Паралельний коливальний контур. Основні поняття і визначення. Частотні характеристики паралельного коливального контуру

Принцип дуальності дозволяє поширити частотні характеристики послідовного коливального контуру на частотні характеристики паралельного контуру. У паралельному коливальному контурі (рис. 4.8) має місце резонанс струмів із частотою, як і у виразі (4.14):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Повна провідність паралельного коливального контуру при резонансі є повністю активною $Y = G$.

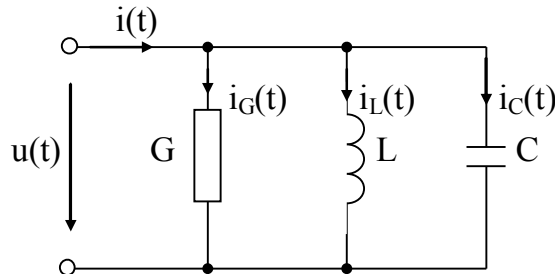


Рис. 4.8 – Паралельний коливальний контур

Визначимо реактивні провідності ємності та індуктивності при резонансі:

$$B_{C_0} = \omega_0 C = \frac{1}{\sqrt{LC}} C = \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (4.56)$$

$$B_{L_0} = \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (4.57)$$

Із виразів (4.56), (4.57) видно, що реактивні провідності індуктивності і ємності рівні та визначають **характеристичну провідність** контуру:

$$B_{L_0} = B_{C_0} = \sqrt{\frac{C}{L}} = g. \quad (4.58)$$

Визначимо добротність паралельного коливального контуру:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G \omega_0 L} = \frac{g}{G}. \quad (4.59)$$

Для визначення частотних характеристик паралельного коливального контуру запишемо залежності провідностей контуру від частоти:

$$B_C(\omega) = \omega C, \quad (4.60)$$

$$B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}, \quad (4.61)$$

$$B(\omega) = B_C(\omega) - B_L(\omega), \quad (4.62)$$

$$Y(\omega) = \sqrt{G^2 + B^2(\omega)}. \quad (4.63)$$

На основі виразів (4.60) - (4.63) побудуємо залежності провідностей від частоти.

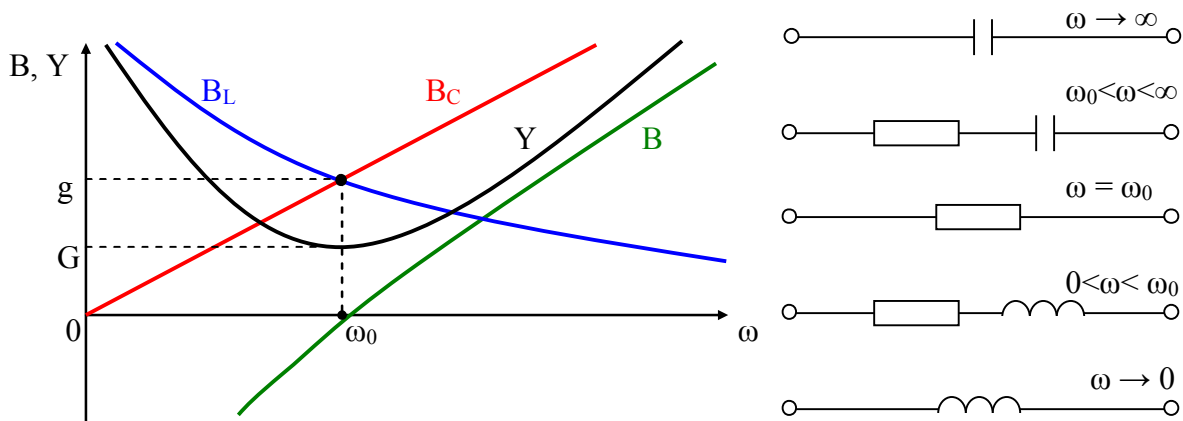


Рис. 4.9 – Залежності провідностей від частоти

З рис. 4.9 видно, що при частоті $\omega < \omega_0$ коло має індуктивний характер, а при частоті $\omega > \omega_0$ — ємнісний характер.

Визначимо частотну залежність напруги в паралельному контурі та побудуємо її графік (рис. 4.10).

$$U(\omega) = \frac{I}{Y(\omega)} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + B^2(\omega)}}. \quad (4.64)$$

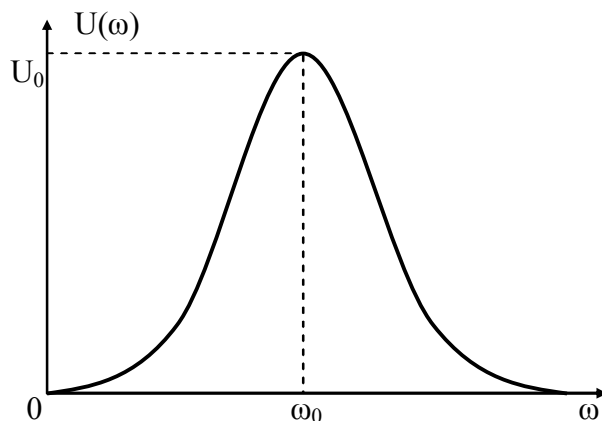


Рис. 4.10 – Частотна залежність напруги в паралельному коливальному контурі

При резонансі $B(\omega) = 0$ і напруга буде рівна:

$$U_0 = \frac{I}{G}. \quad (4.65)$$

Визначимо частотні залежності струмів в опорі, індуктивності та ємності:

$$I_G(\omega) = U(\omega)G = \frac{IG}{\sqrt{G^2 + B^2(\omega)}}, \quad (4.66)$$

$$I_C(\omega) = U(\omega)B_C(\omega) = \frac{IB_C(\omega)}{\sqrt{G^2 + B^2(\omega)}}, \quad (4.67)$$

$$I_L(\omega) = U(\omega)B_L(\omega) = \frac{IB_L(\omega)}{\sqrt{G^2 + B^2(\omega)}}. \quad (4.68)$$

При резонансі частотні залежності струмів визначаються:

$$I_G(\omega_0) = U_0 G = I, \quad (4.69)$$

$$I_C(\omega_0) = I_L(\omega_0) = U_0 g = I \frac{g}{G} = IQ. \quad (4.70)$$

На основі виразу (4.70) визначимо добротність:

$$\frac{I_C(\omega_0)}{I} = \frac{I_L(\omega_0)}{I} = Q. \quad (4.71)$$

Провівши розрахунок АЧХ паралельного коливального контуру, визначимо ФЧХ:

$$\varphi_R(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{G}, \quad (4.72)$$

$$\varphi_L(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{G}, \quad (4.73)$$

$$\varphi_C(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{G}. \quad (4.74)$$

4.6 Комплексна передатна характеристика по опору паралельного коливального контуру

Визначимо комплексну передатну характеристику по опору паралельного коливального контуру на основі виразу (4.5):

$$H_Z(j\omega) = \frac{U}{I} = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]}. \quad (4.75)$$

Ступінь відхилення режиму коливального контуру від резонансу оцінюють по узагальненому розстроюванню контуру:

$$\xi = \frac{B(\omega)}{G} = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right] = \frac{g}{G} \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] = Qv. \quad (4.76)$$

З врахуванням виразу (4.76) вираз (4.75) перепишеться:

$$H_Z(j\xi) = \frac{1}{G(1 + j\xi)} = H_Z(\xi) e^{j\varphi_Z(\xi)}, \quad (4.77)$$

де $H_Z(\xi) = \frac{1}{G\sqrt{1 + \xi^2}}$ – АЧХ,

$\varphi_Z(\xi) = -\arctg \xi$ – ФЧХ.

Для спрощення розрахунків використаємо нормовану АЧХ:

$$T_Z(\xi) = \frac{H_Z(\xi)}{H_Z(\xi = 0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (4.78)$$

де $H_Z(\xi = 0)$ – значення АЧХ при $\xi = 0$.

Вираз (4.78) ще називають коефіцієнтом передачі по опору.

Визначимо граничні частоти смуги пропускання з умови:

$$T_Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (4.79)$$

звідки $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$.

На основі виразу (4.52) підставляючи значення узагальненого розстроювання $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$ визначимо істинні граничні частоти смуги пропускання ω_1 і ω_2 :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left[\sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right], \quad (4.80)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left[\sqrt{1 + 4Q^2} + 1 \right]. \quad (4.81)$$

Ширину смуги пропускання визначимо, як у виразі (4.55):

$$\Delta\omega_{np} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}, \text{ або } \Delta f_{np} = \frac{f_0}{Q}.$$

4.7 Паралельний коливальний контур із втратами

Розглянемо найпростіший паралельний коливальний контур із втратами, який зображений на рис. 4.11.

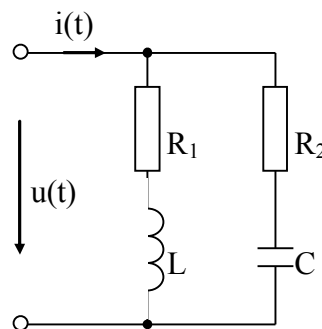


Рис. 4.11 – Паралельний коливальний контур із втратами

Визначимо еквівалентний комплексний опір кола:

$$\underline{Z}_e = \frac{(R_1 + jX_L)(R_2 - jX_C)}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)}. \quad (4.82)$$

У випадку малих втрат, коли $R_1 \ll X_L$, $R_2 \ll X_C$ вираз (4.82) переписується:

$$\underline{Z}_e = \frac{X_L \cdot X_C}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)}. \quad (4.83)$$

Так як $X_L \cdot X_C = \frac{L}{C}$, то

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{\frac{C}{L} \left[R_1 + R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]} = \frac{1}{\frac{C}{L} (R_1 + R_2) + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} = \frac{1}{G' + jB}. \quad (4.84)$$

Резонансну частоту кола визначимо з умови: $B(\omega_0) = 0$, звідки:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Визначимо добротність і смугу пропускання контуру:

$$Q = \frac{g}{G} = \frac{\omega_0 C}{G'} = \frac{\omega_0 C}{\frac{C}{L} (R_1 + R_2)} = \frac{\omega_0 L}{R_1 + R_2}, \quad (4.85)$$

$$\Delta\omega_{np} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R_1 + R_2}{L}. \quad (4.86)$$

Перепишемо вираз для еквівалентного опору (4.83) у наступному вигляді:

$$\underline{Z}_e = \frac{\frac{L}{C}}{R_1 + R_2 + j \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]} = \frac{\rho^2}{R + jX}, \quad (4.87)$$

де $R = R_1 + R_2$.

Визначимо опір через узагальнене розстроювання:

$$\underline{Z}_e = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} = \frac{R_{0e}}{1 + j\xi}, \quad (4.88)$$

де $R_{0e} = \frac{\rho^2}{R}$, $\xi = \frac{X}{R}$.

Визначимо модуль і аргумент комплексного еквівалентного опору:

$$\underline{Z}_e = \frac{R_{0e}}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j \arctg \xi}, \quad (4.89)$$

де $Z_e = \frac{R_{0e}}{\sqrt{1+\xi^2}}$ - модуль комплексного еквівалентного опору (АЧХ),

$\varphi_z = \varphi = -\arctg \xi$ - аргумент комплексного еквівалентного опору (ФЧХ).

Визначимо реактивний опір контуру:

$$X_e = \text{Im} \left\{ \frac{R_{0e}}{1+j\xi} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{R_{0e}(1-j\xi)}{1+\xi^2} \right\} = -\frac{R_{0e}\xi}{1+\xi^2}. \quad (4.90)$$

З виразу (4.90) видно, що при резонансі реактивний опір паралельного коливального контуру із втратами дорівнює нулю, тоді як для контуру без втрат реактивний опір буде прямувати до нескінченності. Представимо частотні характеристики реактивних опорів паралельного коливального контуру із втратами і без втрат (рис. 4.12).

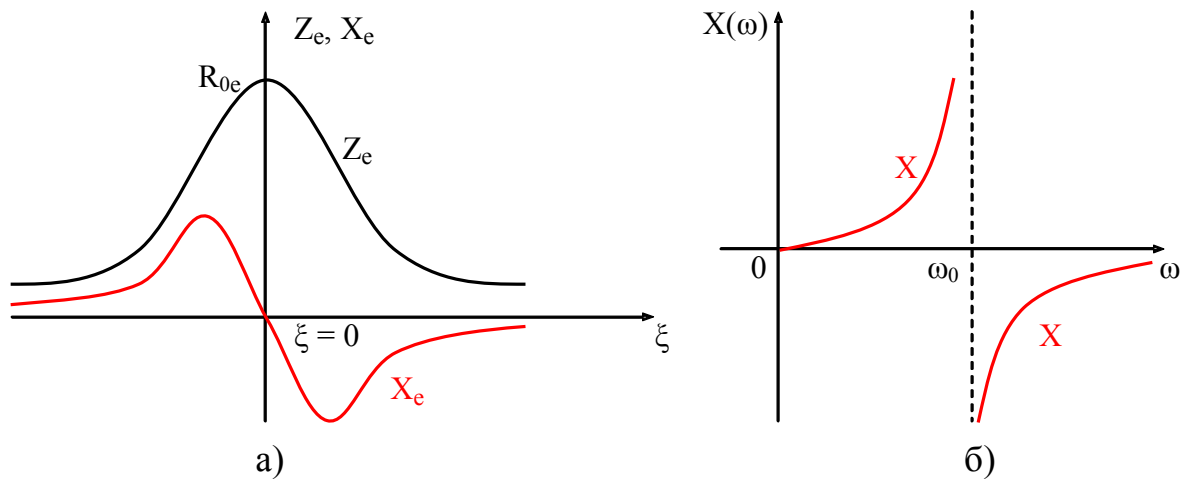


Рис. 4.12 - Частотні характеристики реактивних опорів паралельного коливального контуру із втратами а) і без втрат б)

Визначимо резонансну частоту контуру з урахуванням більших втрат:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{R_1 - jX_L}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2 + jX_C}{R_2^2 + X_C^2}. \quad (4.91)$$

Виділяючи уявну і дійсну частину, одержимо:

$$\underline{Y} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} + j \left[\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} \right] = G_e + jB_e. \quad (4.92)$$

Резонансну частоту кола визначимо з умови $B_e(\omega) = 0$:

$$\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = 0,$$

$$(\omega_p^2 C^2 R_2^2 + 1)L = (R_1^2 + \omega_p^2 L^2)C,$$

$$\omega_p^2 = \frac{L - C R_1^2}{L^2 C - C^2 L R_2^2} = \frac{C}{L C^2} \left(\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2} \right),$$

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (4.93)$$

Із виразу (4.93) видно, що резонанс у паралельному коливальному контурі можливий лише у випадку невід'ємного підкореневого виразу (тобто коли $R_1 < \rho$ і $R_2 < \rho$, або $R_1 > \rho$ і $R_2 > \rho$).

4.8 Збудження паралельного коливального контуру із втратами

Розглянемо, як впливає на резонансні властивості паралельного коливального контуру підключення його до джерела з напругою \underline{E}_e і внутрішнім опором R_e . При цьому вихідна напруга \underline{U}_k знімається з контуру (рис. 4.13).

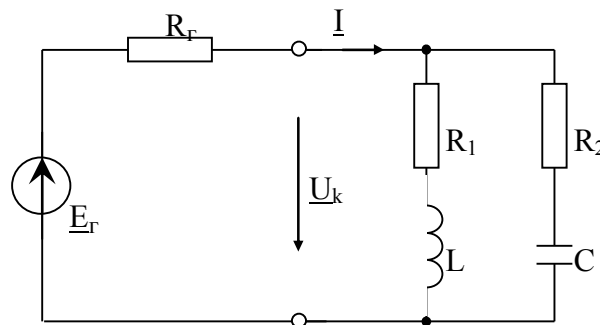


Рис. 4.13 – Паралельний коливальний контур із втратами підключений до джерела напруги

Визначимо комплексну напругу на контурі:

$$\underline{U}_k = \underline{I} \underline{Z}_e = \frac{\underline{E}_e}{R_e + \underline{Z}_e} \underline{Z}_e. \quad (4.94)$$

При резонансі струмів $\underline{Z}_e = R_{0e} = \frac{\rho^2}{R_1 + R_2}$, тому вираз (4.94) переписується:

$$\underline{U}_{k0} = \frac{\underline{E}_2}{R_2 + R_{0e}} R_{0e}. \quad (4.95)$$

Визначимо нормоване значення напруги:

$$\hat{U}_k = \frac{U_k}{U_{k0}} = \frac{\underline{Z}_e (R_2 + R_{0e})}{R_{0e} (R_2 + \underline{Z}_e)}, \quad (4.96)$$

де $\underline{Z}_e = \frac{R_{0e}}{1 + j\xi}$.

Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\hat{U}_k = \frac{1}{1 + j \frac{R_2 \xi}{R_2 + R_{0e}}} = \frac{1}{1 + j \frac{R_2 Q_v}{R_2 + R_{0e}}} = \frac{1}{1 + j Q_e v}, \quad (4.97)$$

де $Q_e = \frac{Q}{1 + \frac{R_{0e}}{R_2}}$ – еквівалентна добротність.

На основі виразу (4.97) визначимо АЧХ і ФЧХ з врахуванням, що $v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$:

$$\hat{U}_k = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}, \quad (4.98)$$

$$\varphi = \text{arctg} \left[Q_e \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (4.99)$$

На рис. 4.14 показано залежність АЧХ при різних значеннях внутрішнього опору R_2 .

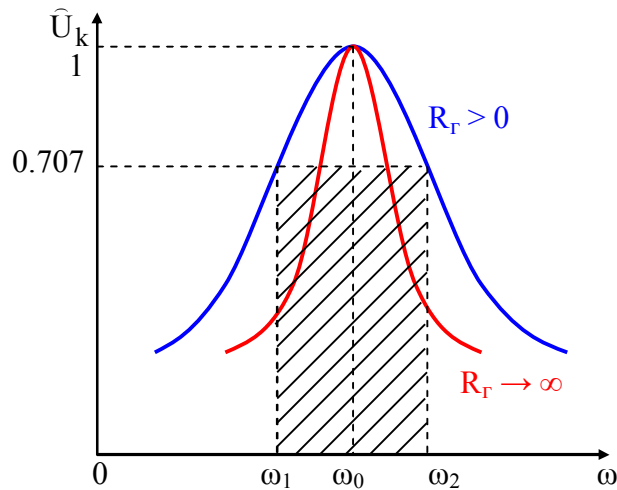


Рис. 4.14 – Залежність АЧХ при різних значеннях внутрішнього опору

Визначимо смугу пропускання з умови:

$$\hat{U}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_e^2 v^2}}, \quad (4.100)$$

звідки

$$\Delta\omega_{np} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_e} = \frac{\omega_0}{Q} \left(1 + \frac{R_{0e}}{R_2} \right). \quad (4.101)$$

Порівнюючи вирази (4.55) і (4.101) можна побачити, що паралельний коливальний контур в загальному випадку має більшу ширину смуги пропускання ніж послідовний при тій самій добротності. І лише при $R_2 = \infty$ їх смуги пропускання рівні.

Зі збільшенням внутрішнього опору джерела напруги збільшується вибірність паралельного коливального контуру із втратами. Однак нескінченно великий внутрішній опір характерний для джерела струму, тому паралельний коливальний контур слід збуджувати джерелом струму.

4.9 Методика розрахунку резонансної частоти коливальних контурів

Припустимо, що необхідно визначити резонансну частоту двополюсника, що містить реактивні елементи L і C (рис. 4.15).

Для цього визначимо спочатку еквівалентний опір кола:

$$\underline{Z} = R + \frac{j\omega L \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (4.102)$$

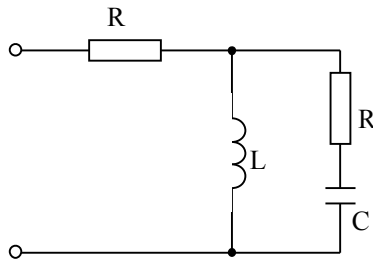


Рис. 4.15 – Електрична схема двополюсника

З виразу (4.102) визначимо уявну частину комплексного опору:

$$\operatorname{Im}\{Z\} = \omega L \frac{R^2}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} - \frac{L}{C} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}. \quad (4.103)$$

Резонансну частоту визначимо з умови $\operatorname{Im}\{Z\} = 0$. Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$R^2 \omega_0^2 C^2 - \omega_0^2 LC + 1 = 0,$$

$$\omega_0^2 (R^2 C^2 - LC) + 1 = 0,$$

$$\omega_0^2 = -\frac{1}{R^2 C^2 - LC},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - R^2 C^2}}, \text{ або } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC - R^2 C^2}}. \quad (4.104)$$

4.10 Загальні відомості про зв'язані коливальні контури. Контури із трансформаторним і автотрансформаторним зв'язком

Два контури називаються зв'язаними, якщо збудження електричних коливальних контурів в одному з них призводить до виникнення коливальних контурів в іншому. Відмінною особливістю зв'язаних коливальних контурів є краща вибірність ніж у одиничних коливальних контурів. Розрізняють внутрішній і зовнішній зв'язок контурів. На рис. 4.16 наведено узагальнену схему двох зв'язаних коливальних контурів: з внутрішнім зв'язком (рис. 4.16, а) та зовнішнім зв'язком (рис. 4.16, б), де Z_1, Z_2 – комплексні опори першого та другого контурів, $Z_{зв}$ – комплексний опір зв'язку між контурами.

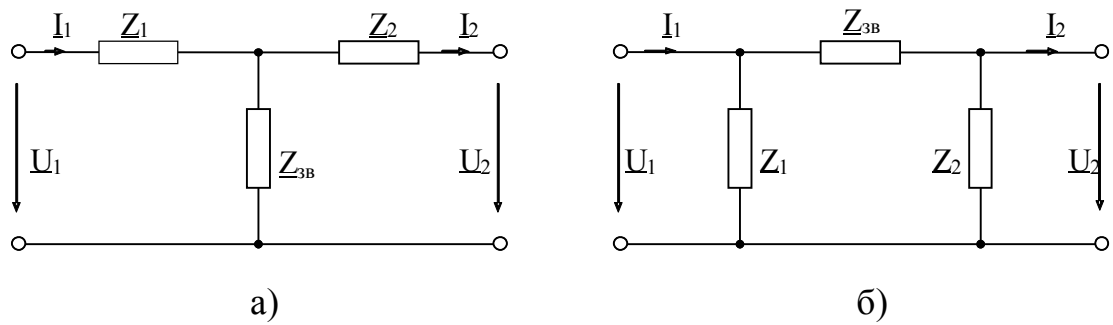


Рис. 4.16 – Узагальнена схема двох зв’язаних коливальних контурів: з внутрішнім зв’язком а) і зовнішнім зв’язком б)

В залежності від виду зв’язку розрізняють контури із трансформаторним, автотрансформаторним, ємнісним та комбінованим зв’язком.

Розглянемо зв’язані коливальні контури із **трансформаторним зв’язком** (рис. 4.17).

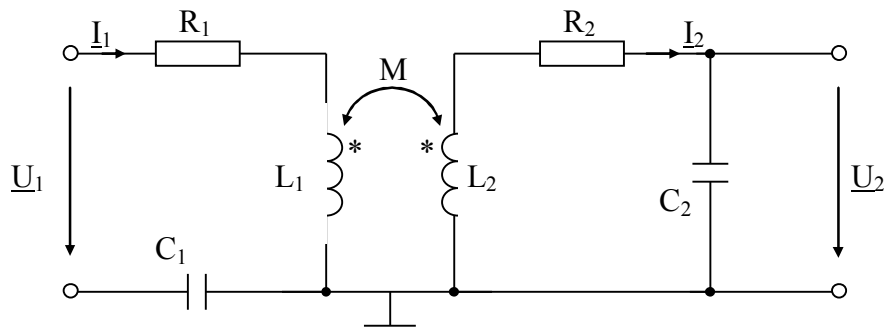


Рис. 4.17 - Зв’язані коливальні контури із трансформаторним зв’язком

Важливою характеристикою зв’язаних коливальних контурів є коефіцієнт зв’язку. Визначимо коефіцієнт зв’язку для контуру із трансформаторним зв’язком:

$$k_{зв} = \sqrt{\underline{H}_{12} \underline{H}_{21}}, \quad (4.105)$$

де $\underline{H}_{12} = \left[\frac{\underline{U}'_2}{\underline{U}'_1} \right]_{I'_2=0}$ – комплексна передатна функція чотиріполюсника

зв’язку по напрузі від вхідних затискачів до вихідних розімкнутих затискачів,

$\underline{H}_{21} = \left[\frac{\underline{U}'_1}{\underline{U}'_2} \right]_{I'_1=0}$ – комплексна передатна функція чотиріполюсника зв’язку

по напрузі від вихідних затискачів до вхідних розімкнутих затискачів.

З рис. 4.17 виділимо чотиріполюсник зв’язку, що зображений на рис. 4.18.

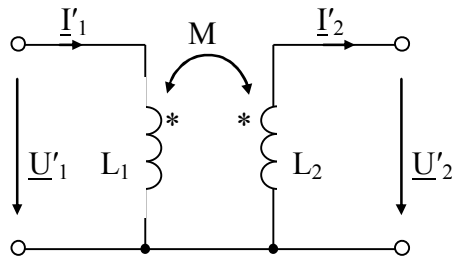


Рис. 4.18 - Чотириполюсник трансформаторного зв'язку

Визначимо в явному виді комплексні передатні функції:

$$\underline{H}_{12} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_2 \\ \underline{U}'_1 \end{array} \right]_{\underline{I}'_2=0} = \frac{-j\omega M \underline{I}'_1}{j\omega L_1 \underline{I}'_1}, \quad (4.106)$$

$$\underline{H}_{21} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{array} \right]_{\underline{I}'_1=0} = \frac{-j\omega M \underline{I}'_2}{j\omega L_2 \underline{I}'_2}. \quad (4.107)$$

З врахуванням виразу (4.105) одержуємо:

$$k_{зв} = \sqrt{\frac{-j\omega M \underline{I}'_1}{j\omega L_1 \underline{I}'_1} \cdot \frac{-j\omega M \underline{I}'_2}{j\omega L_2 \underline{I}'_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (4.108)$$

Розглянемо зв'язані коливальні контури із **внутрішнім індуктивним (автотрансформаторним) зв'язком** (рис. 4.19).

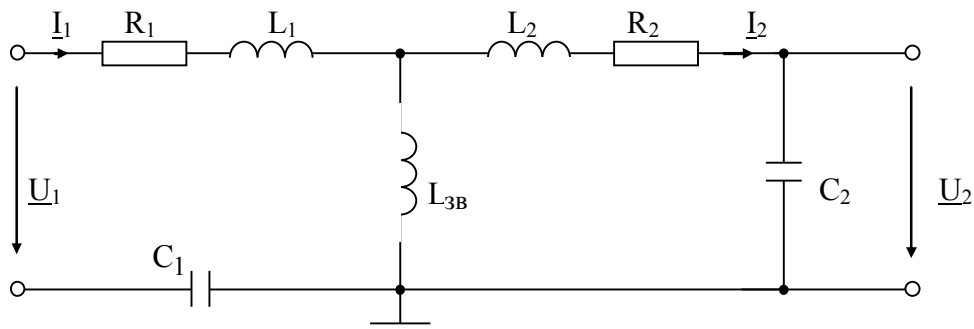


Рис. 4.19 - Зв'язані коливальні контури із автотрансформаторним зв'язком

На основі рис. 4.19 виділимо чотириполюсник зв'язку, що зображений на рис. 4.20.

Визначимо комплексні передатні функції для чотириполюсника автотрансформаторного зв'язку:

$$\underline{H}_{12} = \left[\frac{\underline{U}'_2}{\underline{U}'_1} \right]_{I'_2=0} = \frac{I'_1 j \omega L_{3\phi}}{I'_1 j \omega (L_1 + L_{3\phi})}, \quad (4.109)$$

$$\underline{H}_{21} = \left[\frac{\underline{U}'_1}{\underline{U}'_2} \right]_{I'_1=0} = \frac{I'_2 j \omega L_{3\phi}}{I'_2 j \omega (L_2 + L_{3\phi})}. \quad (4.110)$$

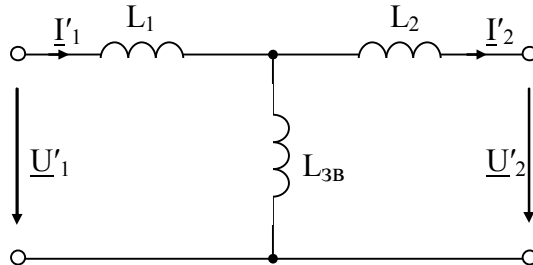


Рис. 4.20 - Чотириполусник автотрансформаторного зв'язку

Підставимо вирази (4.109), (4.110) у вираз (4.105) і визначимо коефіцієнт зв'язку:

$$k_{3\phi} = \sqrt{\frac{I'_1 j \omega L_{3\phi}}{I'_1 j \omega (L_1 + L_{3\phi})} \frac{I'_2 j \omega L_{3\phi}}{I'_2 j \omega (L_2 + L_{3\phi})}} = \frac{L_{3\phi}}{\sqrt{(L_1 + L_{3\phi})(L_2 + L_{3\phi})}}. \quad (4.111)$$

4.11 Зв'язані коливальні контури із зовнішнім індуктивним зв'язком, із внутрішнім і зовнішнім ємнісним зв'язком

Розглянемо зв'язані коливальні контури із зовнішнім індуктивним зв'язком (рис. 4.21).

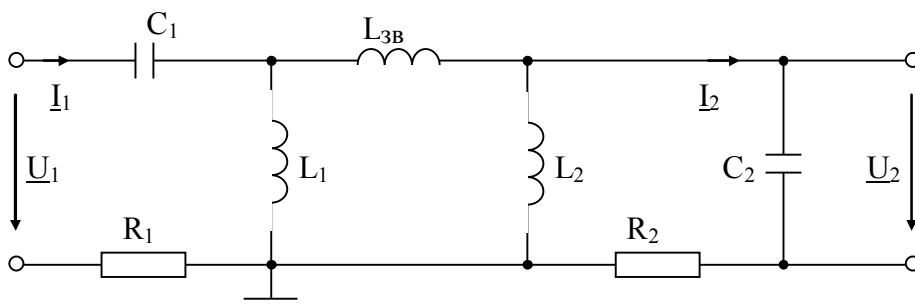


Рис. 4.21 - Зв'язані коливальні контури із зовнішнім індуктивним зв'язком

Подібно до попередніх перетворень виділимо з рис. 4.21 чотириполусник зв'язку, що зображений на рис. 4.22.

Визначимо комплексні передатні функції для чотириполусника зовнішнього індуктивного зв'язку:

$$\underline{H}_{12} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_2 \\ \underline{U}'_1 \end{array} \right]_{I'_2=0} = \frac{\underline{I}'_1 \frac{j\omega L_1}{j\omega(L_1 + L_2 + L_{3\phi})} j\omega L_2}{\underline{I}'_1 \frac{j\omega L_1 (j\omega L_{3\phi} + j\omega L_2)}{j\omega(L_1 + L_2 + L_{3\phi})}} = \frac{L_2}{L_2 + L_{3\phi}}, \quad (4.112)$$

$$\underline{H}_{21} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{array} \right]_{I'_1=0} = \frac{\underline{I}'_2 \frac{j\omega L_2}{j\omega(L_1 + L_2 + L_{3\phi})} j\omega L_1}{\underline{I}'_2 \frac{j\omega L_2 (j\omega L_{3\phi} + j\omega L_1)}{j\omega(L_1 + L_2 + L_{3\phi})}} = \frac{L_1}{L_1 + L_{3\phi}}. \quad (4.113)$$

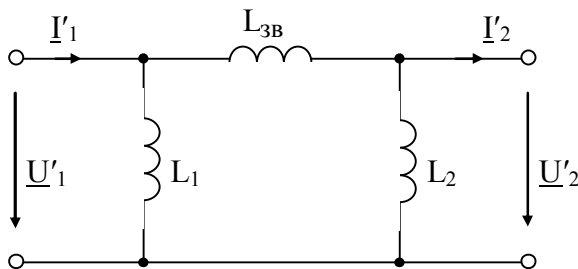


Рис. 4.22 - Чотириполюсник зовнішнього індуктивного зв'язку

Підставимо вирази (4.112), (4.113) у вираз (4.105) і визначимо коефіцієнт зв'язку:

$$k_{3\phi} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{(L_1 + L_{3\phi})(L_2 + L_{3\phi})}}. \quad (4.114)$$

Розглянемо зв'язані коливальні контури із **внутрішнім ємнісним зв'язком** (рис. 4.23).

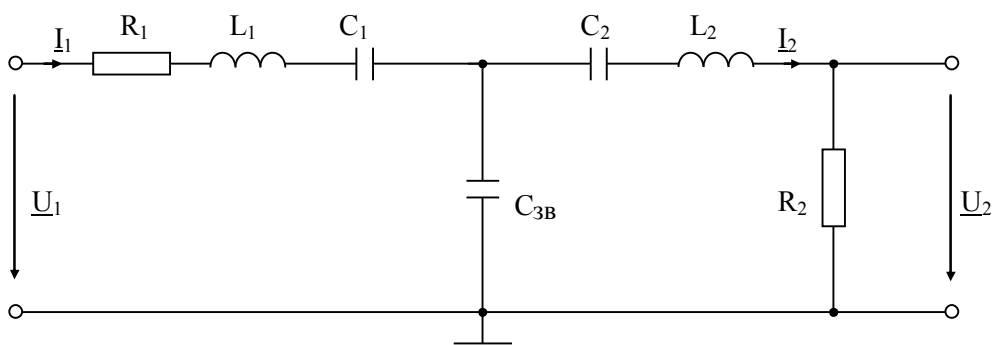


Рис. 4.23 - Зв'язані коливальні контури із внутрішнім ємнісним зв'язком

Виділимо з рис. 4.23 чотириполюсник зв'язку, що зображений на рис. 4.24.

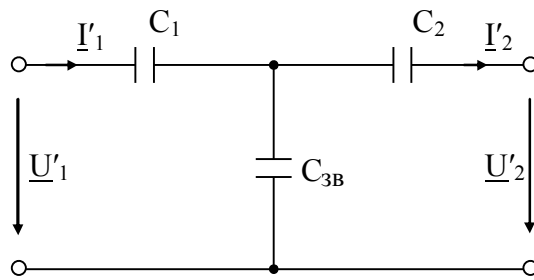


Рис. 4.24 - Чотириполюсник внутрішнього ємнісного зв'язку

Визначимо комплексні передатні функції для чотириполюсника внутрішнього ємнісного зв'язку:

$$\underline{H}_{12} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_2 \\ \underline{U}'_1 \end{array} \right]_{I'_2=0} = \frac{I'_1 \frac{1}{j\omega C_{3B}}}{I'_1 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_{3B}} \right)} = \frac{C_1}{C_1 + C_{3B}}, \quad (4.115)$$

$$\underline{H}_{21} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{array} \right]_{I'_1=0} = \frac{I'_2 \frac{1}{j\omega C_{3B}}}{I'_2 \left(\frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_{3B}} \right)} = \frac{C_2}{C_2 + C_{3B}}. \quad (4.116)$$

Підставимо вирази (4.115), (4.116) у вираз (4.105) і визначимо коефіцієнт зв'язку:

$$k_{3B} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{\sqrt{(C_1 + C_{3B})(C_2 + C_{3B})}}. \quad (4.117)$$

Розглянемо зв'язані коливальні контури із **зовнішнім ємнісним зв'язком** (рис. 4.25).

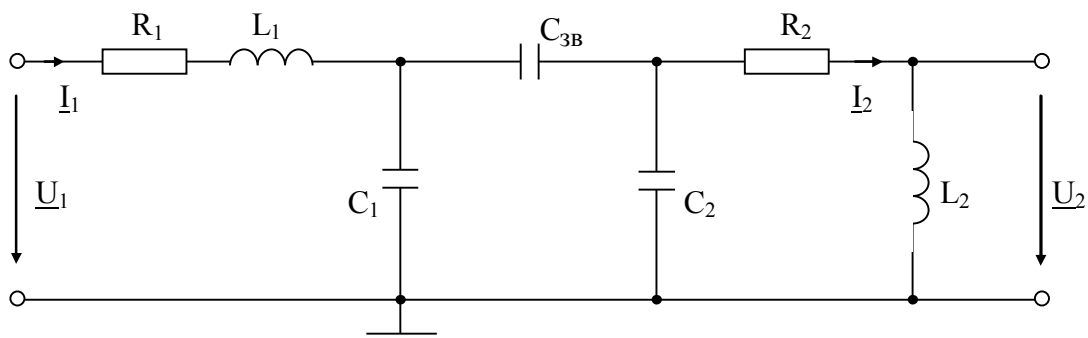


Рис. 4.25 - Зв'язані коливальні контури із зовнішнім ємнісним зв'язком

Виділимо з рис. 4.25 чотириполюсник зв'язку, що зображений на рис. 4.26.

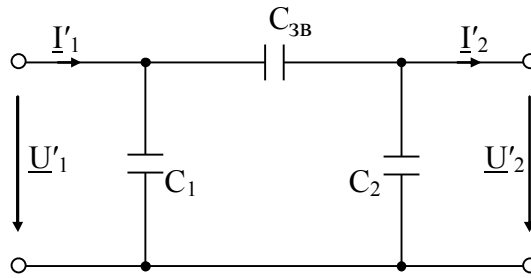


Рис. 4.26 - Чотириполюсник зовнішнього ємнісного зв'язку

Визначимо комплексні передатні функції для чотириполюсника зовнішнього ємнісного зв'язку:

$$H_{12} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_2 \\ \underline{U}'_1 \end{array} \right]_{I'_2=0} = \frac{\underline{I}'_1 \frac{1}{j\omega C_1} \frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_{36}}} = \frac{C_{36}}{C_{36} + C_2}, \quad (4.118)$$

$$\underline{I}'_1 \frac{1}{j\omega C_1} \left(\frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_{36}} \right)$$

$$\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_{36}}$$

$$H_{21} = \left[\begin{array}{c} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{array} \right]_{I'_1=0} = \frac{\underline{I}'_2 \frac{1}{j\omega C_2} \frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_{36}}} = \frac{C_{36}}{C_{36} + C_1}. \quad (4.19)$$

$$\underline{I}'_2 \frac{1}{j\omega C_2} \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_{36}} \right)$$

$$\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_{36}}$$

Підставимо вирази (4.118), (4.19) у вираз (4.105) і визначимо коефіцієнт зв'язку:

$$k_{36} = \frac{C_{36}}{\sqrt{(C_{36} + C_1)(C_{36} + C_2)}}. \quad (4.120)$$

4.12 Настроювання зв'язаних коливальних контурів

Розглянемо зв'язані коливальні контури із трансформаторним зв'язком (рис. 4.27).

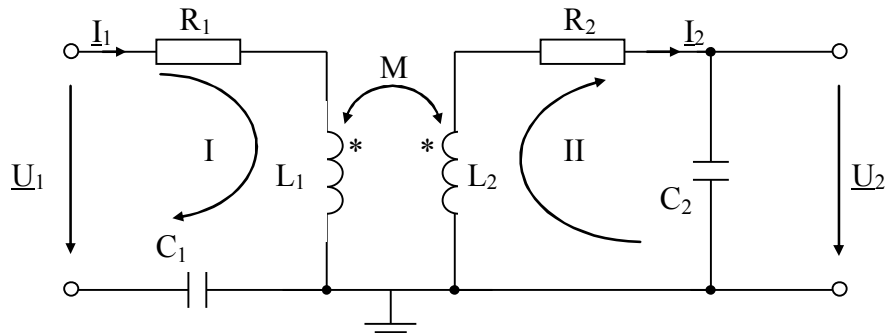


Рис. 4.27 - Зв'язані коливальні контури із трансформаторним зв'язком

Введемо певні позначення:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = R_1 + j X_1, \quad (4.121)$$

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = R_2 + j X_2, \quad (4.122)$$

$$\underline{Z}_{36} = j \omega M = j X_{36}. \quad (4.123)$$

На основі виразів (4.121) – (4.122) складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контурів I та II:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{36} \underline{I}_2, \quad (4.124)$$

$$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{36} \underline{I}_1. \quad (4.125)$$

Із виразу (4.125) визначимо комплексні струми \underline{I}_1 та \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{36}} \underline{I}_2, \quad (4.126)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{36}}{\underline{Z}_{22}} \underline{I}_1. \quad (4.127)$$

Розв'язуючи рівняння (4.124) відносно \underline{I}_1 та \underline{I}_2 з врахуванням виразів (4.126), (4.127) отримаємо:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\left(\underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_{22}} \right)} = \frac{\underline{U}_1}{(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1вн})}, \quad (4.128)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_{36}}} = \frac{\underline{U}_1}{\frac{\underline{Z}_{11}(\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2вн})}{\underline{Z}_{36}}}, \quad (4.129)$$

де $\underline{Z}_{1вн} = -\frac{\underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_{22}} = R_{1вн} + j X_{1вн}$,

$\underline{Z}_{2вн} = -\frac{\underline{Z}_{36}^2}{\underline{Z}_{11}} = R_{2вн} + j X_{2вн}$ - внесені опори.

Із виразів (4.128), (4.129) видно, що дослідження частотних характеристик зв'язаних коливальних контурів зручно вести за допомогою одноконтурних схем заміщення (рис. 4.28).

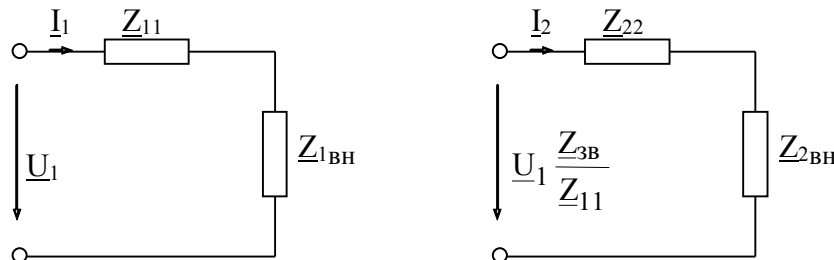


Рис. 4.28 – Одноконтурні схеми заміщення

Резонанс у системі зв'язаних контурів досягається відповідним їхнім настроюванням і вибором оптимального зв'язку між ними. В залежності від виду настроювання розрізняють: перший власний, другий власний, складний і повний резонанси.

Перший власний резонанс забезпечує максимум струму \underline{I}_1 та досягається настроюванням контуру I до забезпечення умови: $X_1 = -X_{1вн}$.

$$\underline{I}_{1\max} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1вн}} \Big|_{X_1 = -X_{1вн}} = \frac{U_1}{R_1 + R_{1вн}}. \quad (4.130)$$

Другий власний резонанс забезпечує максимум струму I_2 та досягається настроюванням контуру II до забезпечення умови: $X_2 = -X_{2вн}$.

$$I_{2\max} = \frac{U_1 \frac{Z_{36}}{Z_{11}}}{Z_{22} + Z_{2вн}} \bigg|_{X_2 = -X_{2вн}} = \frac{U_1 \frac{Z_{36}}{Z_{11}}}{R_2 + R_{2вн}}. \quad (4.131)$$

Складний резонанс здійснюється шляхом настроювання кожного контуру на власний резонанс і підбором оптимального опору зв'язку:

$$X_{36} = Z_{36} = \sqrt{Z_{11} Z_{22}} = Z_{11} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = Z_{22} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}. \quad (4.132)$$

При цьому в контурі II струм досягає максимально можливого значення:

$$I_{2\max\max} = \frac{U_1 \frac{Z_{36}}{Z_{11}}}{R_2 + R_{2вн}} \bigg|_{X_{36} = \sqrt{Z_{11} Z_{22}}}, \quad (4.133)$$

$$\text{З врахуванням, що } R_{2вн} = \operatorname{Re}\{Z_{2вн}\} = \frac{R_1 X_{36}^2}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{R_1 Z_{11} Z_{22}}{Z_{11}^2} = \frac{R_1 Z_{22}}{Z_{11}}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} I_{2\max\max} &= \frac{U_1 \frac{Z_{36}}{Z_{11}}}{R_2 + R_1 \frac{Z_{22}}{Z_{11}}} = \frac{U_1}{\frac{Z_{11}}{Z_{36}} \left[R_2 + R_1 \frac{Z_{22}}{Z_{11}} \right]} = \frac{U_1}{R_2 \frac{Z_{11}}{Z_{36}} + R_1 \frac{Z_{22}}{Z_{36}}} = \\ &= \frac{U_1}{R_2 \frac{Z_{11}}{Z_{11} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}} + R_1 \frac{Z_{22}}{Z_{22} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1 R_2} + \sqrt{R_1 R_2}} = \frac{U_1}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Повний резонанс досягається настроюванням кожного контуру в індивідуальний резонанс, тобто $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ і підбором оптимального зв'язку:

$$X_{3\phi} = Z_{3\phi} = \sqrt{R_1 R_2} . \quad (4.135)$$

З врахуванням умови (4.135), а також, що $X_1 = 0$ та $X_2 = 0$ визначимо максимально можливе значення струму I_2 з виразу (4.129):

$$I_{2\max\max} = \frac{U_1 Z_{3\phi}}{R_1 R_2 + Z_{3\phi}^2} = \frac{U_1}{2\sqrt{R_1 R_2}} . \quad (4.136)$$

Як бачимо з виразів (4.134), (4.136) максимальні значення струмів при складному і повному резонансі рівні, однак при повному резонансі максимальне значення струму досягається при меншому опорі зв'язку.

4.13 Частотні характеристики зв'язаних коливальних контурів

Для знаходження частотних характеристик скористаємось схемою зв'язаних коливальних контурів із трансформаторним зв'язком (рис. 4.27). Зв'язані контури зазвичай використовуються в режимі передачі максимальної потужності у II контур. Отже максимальна потужність виділяється в II контурі ($P_2 = I_2^2 R_2$), тому серед частотних характеристик найбільший інтерес представляє частотна залежність струму $I_2(\omega)$.

Запишемо вираз (4.129) для струму у контурі II з врахуванням узагальненого розстроювання $\xi_1 = \frac{X_1}{R_1}$, $\xi_2 = \frac{X_2}{R_2}$:

$$I_2 = \frac{\underline{U}_1 j X_{3\phi}}{R_1 R_2 (1 + j\xi_1)(1 + j\xi_2) + X_{3\phi}^2} = \frac{\underline{U}_1 j X_{3\phi}}{R_1 R_2 \left[1 - \xi_1 \xi_2 + j(\xi_1 + \xi_2) + \frac{X_{3\phi}^2}{R_1 R_2} \right]} . \quad (4.137)$$

Перепишемо значення коефіцієнту $\frac{X_{3\phi}}{\sqrt{R_1 R_2}}$ з виразу (4.137) у наступний спосіб:

$$\frac{X_{3\phi}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega_0 M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega_0 k_{3\phi} \sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{R_1 R_2}} = k_{3\phi} \sqrt{\frac{\omega_0 L_1}{R_1}} \sqrt{\frac{\omega_0 L_2}{R_2}} = k_{3\phi} \sqrt{Q_1 Q_2} . \quad (4.138)$$

Підставимо вираз (4.138) у (4.137) отримаємо:

$$\underline{I}_2 = \frac{U_1 j k_{36} \sqrt{Q_1 Q_2}}{\sqrt{R_1 R_2} (1 - \xi_1 \xi_2 + j(\xi_1 + \xi_2) + k_{36}^2 Q_1 Q_2)}. \quad (4.139)$$

Визначимо модуль струму в контурі II:

$$I_2(\xi) = \frac{U_1 k_{36} \sqrt{Q_1 Q_2}}{\sqrt{R_1 R_2} \left(\sqrt{(1 - \xi_1 \xi_2 + k_{36}^2 Q_1 Q_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2} \right)}, \quad (4.140)$$

причому $I_{2\max\max} = \frac{U_1}{2\sqrt{R_1 R_2}}$.

Для зручності введемо нормований (безрозмірний) струм у контурі II:

$$\hat{I}_2(\xi) = \frac{I_2(\xi)}{I_{2\max\max}} = \frac{2k_{36} \sqrt{Q_1 Q_2}}{\sqrt{(1 - \xi_1 \xi_2 + k_{36}^2 Q_1 Q_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}},$$

$$\hat{I}_2(\xi) = \frac{2A}{\sqrt{(1 - \xi_1 \xi_2 + A^2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}. \quad (4.141)$$

де $A = k_{36} \sqrt{Q_1 Q_2}$ – фактор зв'язку.

Якщо контури I та II ідентичні, тобто $Q_1 = Q_2 = Q$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ вираз (4.141) запишеться:

$$\hat{I}_2(\xi) = \frac{2A}{\sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2)^2 - 2(1 + A^2)\xi^2 + \xi^4 + 4\xi^2}} =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2)^2 + 2\xi^2(1 - A^2) + \xi^4}}. \quad (4.142)$$

При цьому фактор зв'язку дорівнює:

$$A = k_{36} Q = \frac{k_{36}}{d}, \quad (4.143)$$

де d – загасання.

Залежно від співвідношення між коефіцієнтом зв'язку і загасанням виділяють три зв'язки:

1. $k_{зв} < d$ – слабкий зв'язок ($A < 1$);
2. $k_{зв} = d$ – критичний зв'язок ($A = 1$);
3. $k_{зв} > d$ – сильний зв'язок ($A > 1$).

Від виду зв'язку суттєво змінюється частотна залежність струму в контурі II. Так, при слабкому зв'язку ($A < 1$) АЧХ має вигляд резонансної кривої, як у одиничного контуру з максимумом при $\xi = 0$ (рис. 4.29). На практиці зв'язані коливальні контури зі слабким зв'язком зазвичай не використовуються.

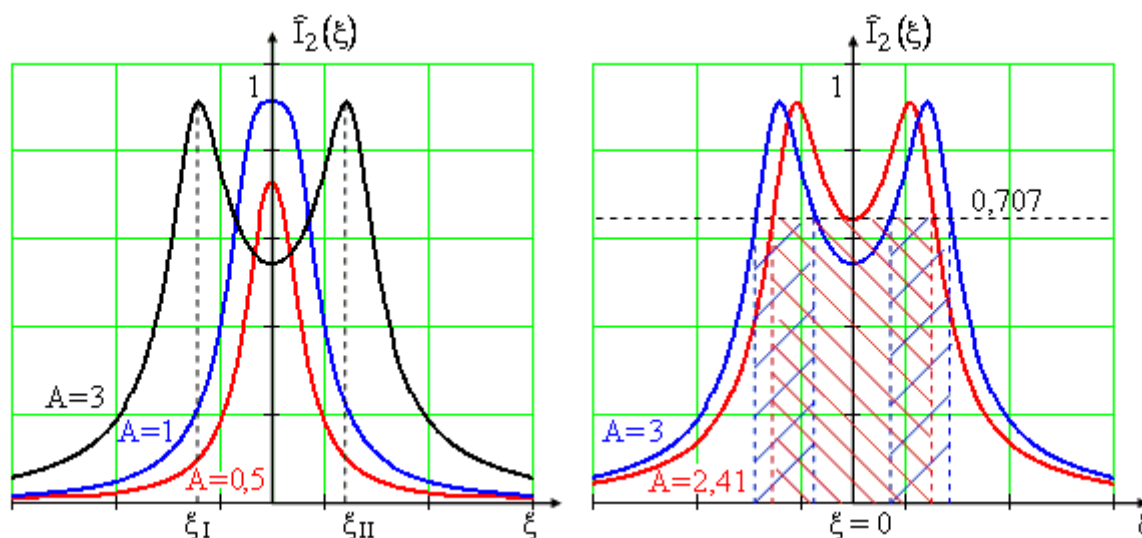


Рис. 4.29 – АЧХ зв'язаних коливальних контурів

Зі збільшенням коефіцієнту зв'язку $k_{зв} > d$ ($A > 1$) характер зміни струму I_2 від частоти суттєво змінюється: АЧХ набуває двогорбого характеру. На частоті $\xi = 0$ утворюється мінімум струму, на частотах ξ_I, ξ_{II} максимум струму (рис. 4.29).

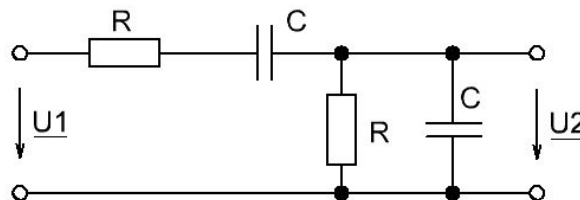
$$\xi_{I, II} = \mp \sqrt{A^2 - 1}. \quad (4.144)$$

У контурів із сильним зв'язком ($A > 1$) при умові, що фактор зв'язку не більше значення $A = 2,41$ смуга пропускання в 3 рази більше, ніж у одиничного контуру при тій же добротності. Зі збільшенням фактору зв'язку смуга пропускання починає роздвоюватись. ФЧХ зв'язаних коливальних контурів може бути отримана із рівняння (4.137).

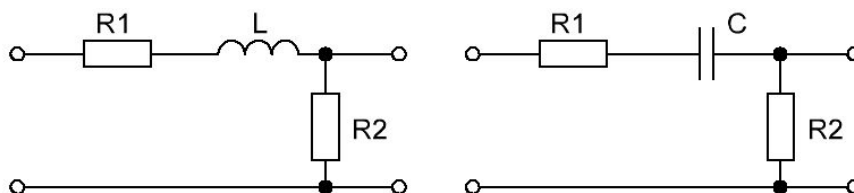
4.14 Запитання та задачі для закріплення

1. Що називається комплексною передатною функцією?
2. Що таке амплітудно-частотна характеристика?
3. Що таке фазо-частотна характеристика?

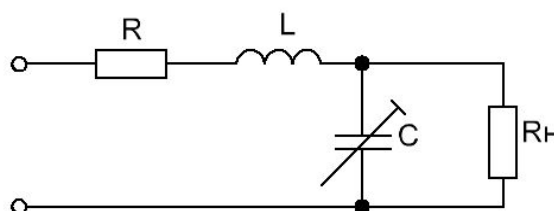
4. Які поняття вводять для оцінки частотних інтервалів?
5. В якому коливальному контурі виникає резонанс напруг?
6. Як визначається резонансна частота коливального контуру?
7. Як визначається характеристичний опір послідовного коливального контуру?
8. Що Ви розумієте під добротністю коливального контуру?
9. Як визначається добротність послідовного коливального контуру?
10. Що таке смуга пропускання коливального контуру?
11. Що Ви розумієте під вибірністю коливального контуру?
12. В якому коливальному контурі виникає резонанс струмів?
13. Які коливальні контури називаються зв'язаними?
14. Які види зв'язку коливальних контурів Ви знаєте?
15. У чому перевага зв'язаних коливальних контурів у порівнянні з одиночним коливальним контуром?
16. Визначити комплексний коефіцієнт передачі по напрузі на кутовій частоті $\omega = 10^6$ (рад/с), якщо відомо, що $R = 1000$ (Ом), $C = 1$ (нФ).



17. Побудувати амплітудно-частотні характеристики для електричних кіл, якщо відомо, що $R_1 = 10$ (Ом), $R_2 = 100$ (Ом), $C = 5$ (мкФ), $L = 20$ (мГн).



18. Визначити межі зміни резонансної частоти і смуги пропускання коливального контуру при зміні ємності від $C_1 = 50$ (пФ) до $C_2 = 500$ (пФ), при цьому $R = 10$ (Ом), $R_H = 100$ (кОм), $L = 50$ (мкГн).



5 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА В РЕЖИМІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

5.1 Нелінійні резистивні елементи

Нелінійними резистивними елементами (діодами) називають всі напівпровідникові і електронні двополюсні безінерційні прилади. Єдиною їхньою характеристикою є залежність миттєвого значення струму від прикладеного миттєвого значення напруги (ВАХ). Відмінні особливості ВАХ деяких діодів і їх умовні позначення наведені на рис. 5.1.

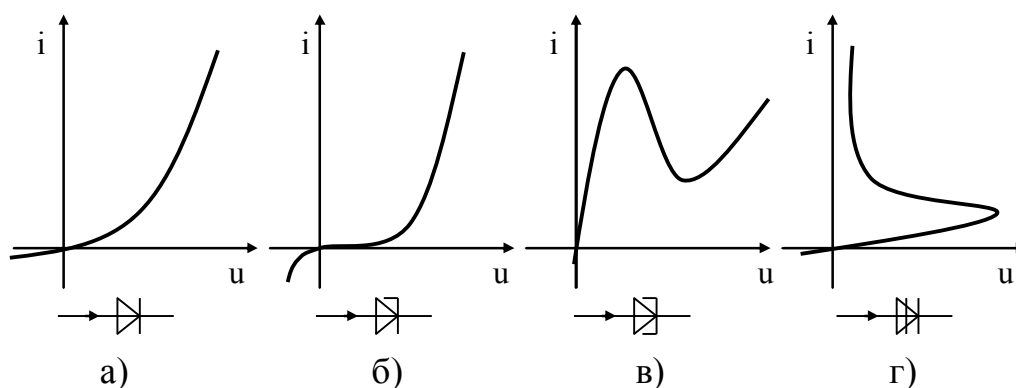


Рис. 5.1. – ВАХ випрямного діода а), стабілітрона б), тунельного діода в), диністора г)

Для зручності двополюсні нелінійні резистивні елементи будемо називати **нелінійними резисторами**. Умовне позначення нелінійного резистора наведено на рис. 5.2. Нелінійні резистори можуть бути керованими елементами від таких величин, наприклад, як вологість, температура, тиск. В такому випадку нелінійний резистор буде мати не одну ВАХ, а сімейство, кожна з яких відповідає різним значенням керуючої величини.

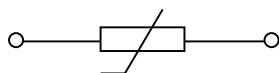


Рис. 5.2. – Умовне позначення нелінійного резистора

Деякі напівпровідникові і електронні прилади зручно розглядати, як **нелінійні резистивні чотириполюсники** (транзистори, електронні лампи, тиристори). На рис. 5.3 наведено біполярний транзистор увімкнений за схемою зі спільним емітером (нелінійний резистивний чотириполюсник) і його входні та вихідні характеристики.

Нелінійний чотириполюсник, як і лінійний, описується двома рівняннями, які пов'язують напруги та струми на його виході і вході.

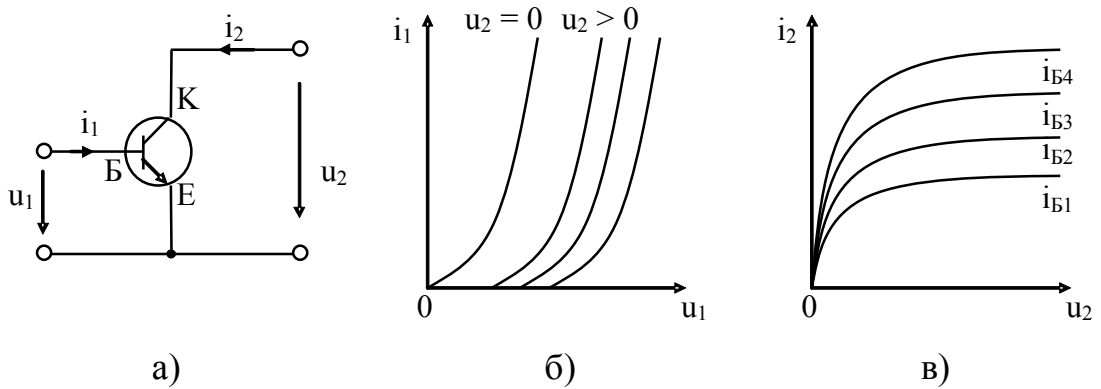


Рис. 5.3 – Нелінійний резистивний чотириполіусник а) та його входні б) і вихідні ВАХ в)

При аналізі транзисторів використовується система рівнянь виду:

$$\begin{cases} u_1 = f_1(i_1, u_2), \\ i_2 = f_2(i_1, u_2). \end{cases} \quad (5.1)$$

Графічне зображення системи рівнянь (5.1) представлено на рис. 5.3 б, в.

Для нелінійних резисторів важливим параметром є опір (провідність). Існують два види опору (провідності) статичний і диференційний.

Статичний опір (статична провідність) – визначається відношенням постійної напруги (струму) до постійного струму (напруги):

$$R_{ст} = \frac{U_0}{I_0}, \quad G_{ст} = \frac{I_0}{U_0}. \quad (5.2)$$

Диференційний опір (диференційна провідність) – відношення збільшення напруги (струму) до збільшення струму (напруги).

$$R_{диф} = \frac{\Delta u}{\Delta i}, \quad G_{диф} = \frac{\Delta i}{\Delta u}. \quad (5.3)$$

Зазвичай переходять до меж цих співвідношень:

$$R_{диф} = \frac{du}{di}, \quad G_{диф} = \frac{di}{du}. \quad (5.4)$$

Іноді використовують поняття диференційна **крутість**:

$$S = G_{диф} = \frac{1}{R_{диф}} = \frac{di}{du}. \quad (5.5)$$

Приклад. Нелінійний резистор має ВАХ виду: $i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$. Визначити статичний і диференційний опір у точці $u = U_0$.

Для знаходження статичного опору визначимо значення струму, якщо $u = U_0$:

$$I_0 = a_0 + a_1 U_0 + a_2 U_0^2.$$

Знаючи значення струму I_0 визначаємо статичний опір:

$$R_{cm} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{a_0 + a_1 U_0 + a_2 U_0^2}.$$

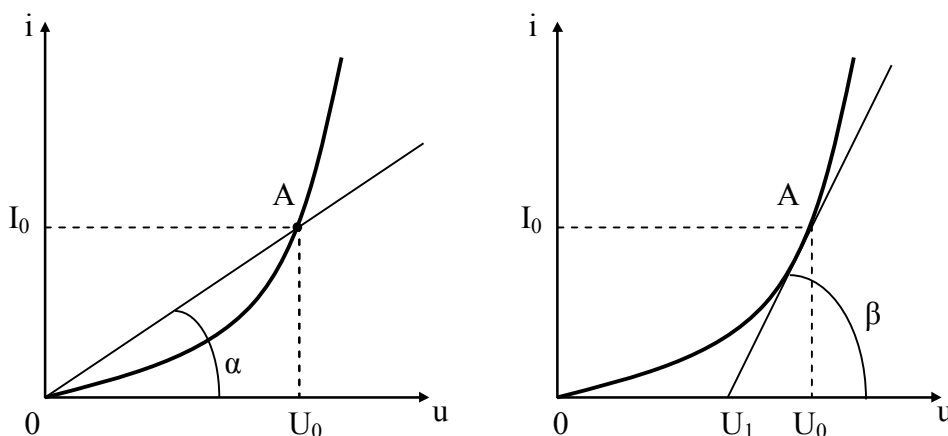
Для знаходження диференційного опору визначимо диференційну провідність:

$$G_{диф} = \left. \frac{di}{du} \right|_{u=U_0} = a_1 + 2a_2 U_0.$$

Визначаємо диференційний опір:

$$R_{диф} = \frac{1}{G_{диф}} = \frac{1}{a_1 + 2a_2 U_0}.$$

Наведений спосіб розрахунку є аналітичним. Розглянемо графічний спосіб визначення статичного і диференційного опору. Для цього через точку A ($u = U_0$) і точку ВАХ при $u = 0$ проведемо пряму для визначення кута α та дотичну для визначення кута β .



Знаючи кути α і β визначимо статичний та диференційний опір (провідності):

$$R_{cm} = \frac{U_0}{I_0} = ctg \alpha, \quad G_{cm} = \frac{I_0}{U_0} = tg \alpha,$$

$$R_{диф} = \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{U_0 - U_1}{I_0} = ctg \beta, \quad G_{диф} = \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{I_0}{U_0 - U_1} = tg \beta.$$

5.2 Нелінійні реактивні елементи

До нелінійних реактивних елементів відносять: нелінійні індуктивні елементи і ємнісні елементи.

Нелінійні індуктивні елементи – котушки з феромагнітними сердечниками. Нелінійність таких елементів обумовлена характеристикою намагніченості матеріалу сердечника:

$$B(H) = \mu\mu_0 H, \quad (5.6)$$

де μ_0 - магнітна проникність вакууму,

μ - магнітна проникність середовища,

H - напруженість магнітного поля.

Оскільки магнітний потік Φ пропорційний індукції B :

$$\Phi = B S, \quad (5.7)$$

а напруженість магнітного поля H пов'язана із струмом i :

$$H = i w / L, \quad (5.8)$$

де S – площа перерізу сердечника,

L - довжина сердечника,

w - кількість витків котушки індуктивності,

то вид залежності $B(H)$ визначає характер **вебер-амперної характеристики** $\Psi(i)$:

$$\Psi = \frac{\mu\mu_0 i w^2 S}{L} = \Phi w. \quad (5.9)$$

Типова вебер-амперна характеристика нелінійного індуктивного елемента наведена на рис. 5.4, а. При циклічному намагнічуванні сердечника вебер-амперна характеристика має гістерезисний характер (рис. 5.4, б).

Нелінійний індуктивний елемент характеризується статичною індуктивністю L_{cm} і диференційною індуктивністю L_{diff} , які залежать від струму намагнічування i :

$$L_{cm} = \frac{\Psi}{i}, \quad (5.10)$$

$$L_{diff} = \frac{d\Psi}{di}. \quad (5.11)$$

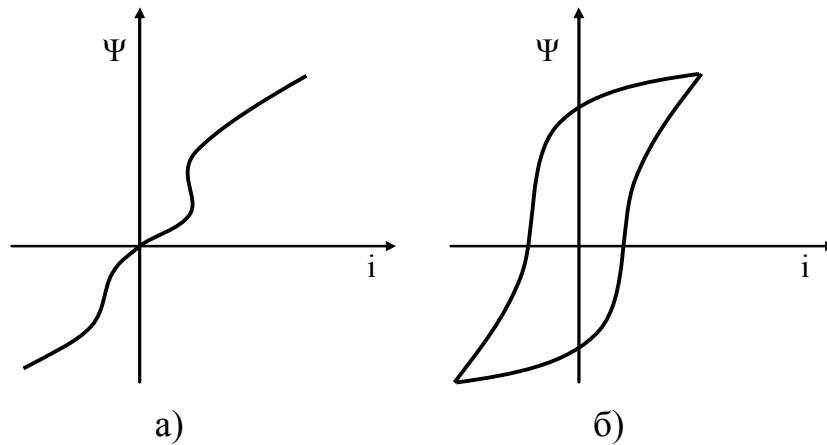


Рис. 5.4 – Вебер-амперні характеристики

Нелінійні ємнісні елементи поділяються на дві групи: а) **вариконди**, нелінійність яких пов'язана із залежністю діелектричної проникності ϵ від напруженості електричного поля E , б) **варикапи** – напівпровідникові діоди, нелінійна ємність яких визначається властивостями $p-n$ -переходу.

Описуються нелінійні ємнісні елементи вольт-кулонною характеристикою (рис. 5.5).

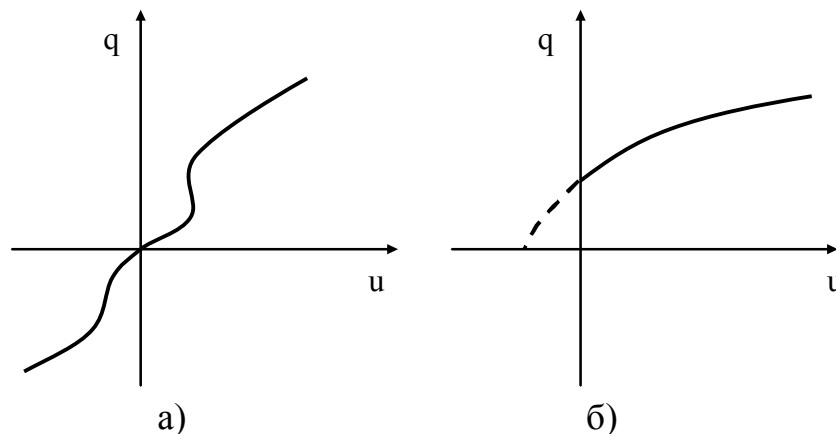


Рис. 5.5 – Вольт-кулонні характеристики: вариконда а), варикапа б)

Нелінійний ємнісний елемент характеризується статичною $C_{ст}$ і диференційною $C_{диф}$ ємністю, які залежать від прикладеної напруги u :

$$C_{ст} = \frac{q}{u}, \quad (5.12)$$

$$C_{диф} = \frac{dq}{du}. \quad (5.13)$$

5.3 Еквівалентні перетворення нелінійних елементів і методи розрахунку нелінійних електричних кіл

Еквівалентні перетворення полягають у заміні послідовно і паралельно з'єднаних нелінійних елементів одним елементом, шляхом додавання їхніх напруг та струмів.

Нехай два нелінійні елементи (НЕ) описуються вольт-амперними характеристиками:

$$i_1 = F_1(u_1), \quad i_2 = F_2(u_2). \quad (5.14)$$

При послідовному з'єднанні нелінійних елементів (рис. 5.6) струми, що протікають через них рівні $i = i_1 = i_2$, а напруги знаходимо по другому закону Кірхгофа: $u = u_1 + u_2$. Виконаємо складання напруг графічно, як показано на рис. 5.7. Вибираємо значення струму i і знаходимо значення напруг першого і другого НЕ, які додаємо між собою і тим самим отримуємо набір точок ВАХ еквівалентного НЕ $F_e(u)$.

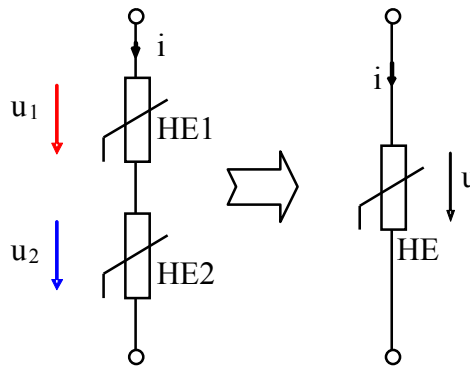


Рис. 5.6 – Еквівалентне перетворення послідовно з'єднаних нелінійних елементів

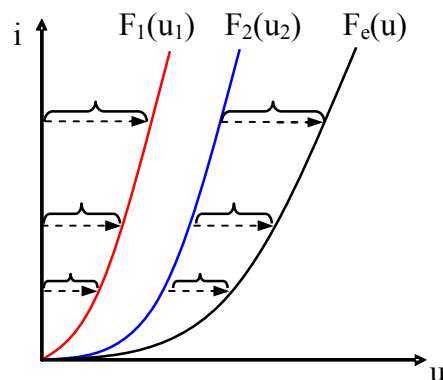


Рис. 5.7 – Визначення ВАХ еквівалентного НЕ при послідовному з'єднанні

Розглянемо паралельне з'єднання НЕ (рис. 5.8). В даному випадку напруги на НЕ рівні $u = u_1 = u_2$, а струми знаходимо по першому закону Кір-

хгофа: $i = i_1 + i_2$. Виконаємо складання струмів графічно, як показано на рис. 5.9. Вибираємо значення напруги і знаходимо значення струмів першого і другого НЕ, які додаємо між собою і тим самим отримуємо набір точок ВАХ еквівалентного НЕ $F_e(u)$.

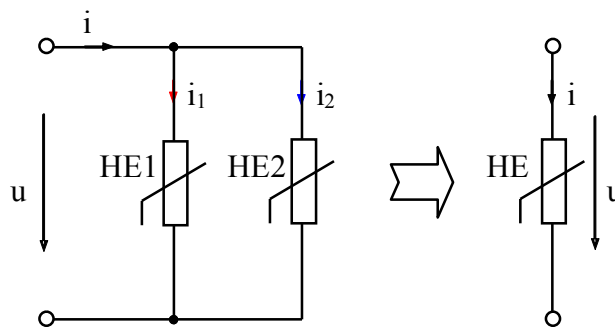


Рис. 5.8 – Еквівалентне перетворення послідовно з'єднаних нелінійних елементів

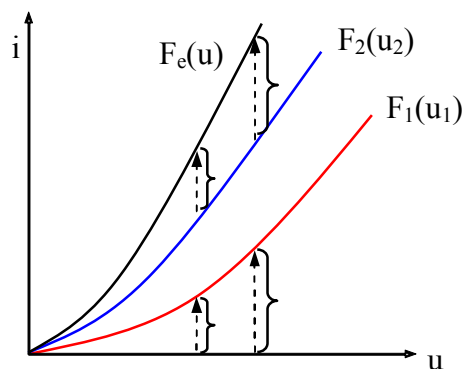


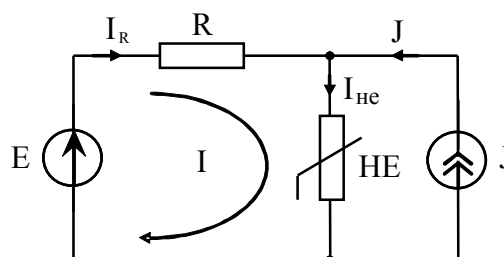
Рис. 5.9 – Визначення ВАХ еквівалентного НЕ при паралельному з'єднанні

Для розрахунку нелінійних резистивних електричних кіл використовують графічний і аналітичний методи.

Графічний метод розрахунку нелінійних електричних кіл дозволяє на основі додавання відомих ВАХ (заданих графічно) визначати робочі точки схеми, а також значення струмів і напруг у колі при заданій входній дії.

Однак трапляються випадки, коли необхідно провести розрахунки струмів і напруг аналітично. Для цього ВАХ повинні бути апроксимовані і задані наближеними виразами (**аналітичний метод розрахунку**).

Приклад. На основі аналітичного методу розрахунку нелінійних електричних кіл визначити струми і напруги в електричному колі.



Вважаючи, що $E = 12$ (В), $R = 900$ (Ом), $J = 20$ (мА), $\alpha = 10^{-5}$ (А/В) і вольт-амперна характеристика НЕ апроксимується виразом: $I_{не} = \begin{cases} 0, & U_{не} < 0; \\ \alpha U_{не}^2, & U_{не} > 0. \end{cases}$

На підставі законів Кірхгофа запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_{не} = I_R + J, \\ E = U_{не} + RI_R. \end{cases}$$

Дана система містить три невідомих, тому для її розв'язку скористаємось ВАХ НЕ, що задана умовою. Як видно з умови задачі ми матимемо два аналітичні розв'язки при $U_{не} > 0$ і при $U_{не} < 0$.

Розглянемо перший випадок, коли $U_{не} > 0$:

$$\begin{cases} I_R = I_{не} - J = \alpha U_{не}^2 - J, \\ E - U_{не} - (\alpha U_{не}^2 - J)R = 0. \end{cases}$$

Після перетворень одержимо:

$$\alpha R U_{не}^2 + U_{не} - (JR + E) = 0.$$

З останнього виразу визначимо напругу на нелінійному елементі:

$$U_{не} = -\frac{1}{2\alpha R} + \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2 R^2} + \frac{JR + E}{\alpha R}}.$$

Визначимо решту невідомих напруг і струмів:

$$U_R = E + \frac{1}{2\alpha R} - \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2 R^2} + \frac{JR + E}{\alpha R}},$$

$$I_R = \frac{E + \frac{1}{2\alpha R} - \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2 R^2} + \frac{JR + E}{\alpha R}}}{R},$$

$$I_{не} = \frac{E + \frac{1}{2\alpha R} - \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2 R^2} + \frac{JR + E}{\alpha R}}}{R} + J.$$

Для чисельного розв'язку підставимо значення елементів, отримаємо:

$$U_{не} = 24,55 \text{ (В)},$$

$$U_R = 12 - 24,55 = -12,55 \text{ (В)},$$

$$I_R = \frac{12 - 24,55}{900} = -14 \text{ (мА)},$$

$$I_{не} = -14 + 20 = 6 \text{ (мА)}.$$

Розглянемо другий випадок, коли $U_{не} < 0$ ($I_{не} = 0$):

$$\begin{cases} I_R = -J, \\ U_{не} = E + J R. \end{cases}$$

Для чисельного розв'язку підставимо значення елементів, отримаємо:

$$\begin{cases} I_R = -20 \cdot 10^{-3} \text{ (А)}, \\ U_{не} = 12 + 20 \cdot 10^{-3} \cdot 900 = 30 \text{ (В)}. \end{cases}$$

Як видно з другого рівняння системи другий розв'язок суперечить умові $U_{не} < 0$, тому вірним є лише перший розв'язок.

В даному прикладі ВАХ описується простою функцією, але при описі ВАХ нелінійного елемента більш складною функцією аналітичний розв'язок одержати вкрай складно.

5.4 Аналітичне представлення ВАХ

Точне представлення ВАХ в аналітичному виді вкрай складне, тому на перше місце виходить наближене представлення ВАХ (**апроксимація**).

Завдання апроксимації полягає у двох етапах: виборі апроксимуючої функції $f(x)$ (наближеної до заданої функції $\xi(x)$) і виборі критерію оцінки «близькості» Λ (знаходження похибки апроксимації) в інтервалі апроксимації $a \leq x \leq b$. Розрізняють лінійний і квадратичний критерії близькості:

$$\Lambda = \max |f(x) - \xi(x)|, \quad (5.15)$$

$$\Lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \xi(x)]^2 dx, \quad (5.16)$$

де $\xi(x)$ – функція, що апроксимується.

Для наближеного представлення ВАХ використовують поліноміальну, кусково-лінійну апроксимацію, а також апроксимацію трансцендентними функціями (експоненти, гіперболічні та інші функції).

При **поліноміальній (степеневій) апроксимації** в якості апроксимуючої функції використовується алгебраїчний поліном:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = 1 - e^{-x_0}, \\ a_0 + a_1 x_1 = 1 - e^{-x_1}. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему визначимо коефіцієнти a_0 і a_1 :

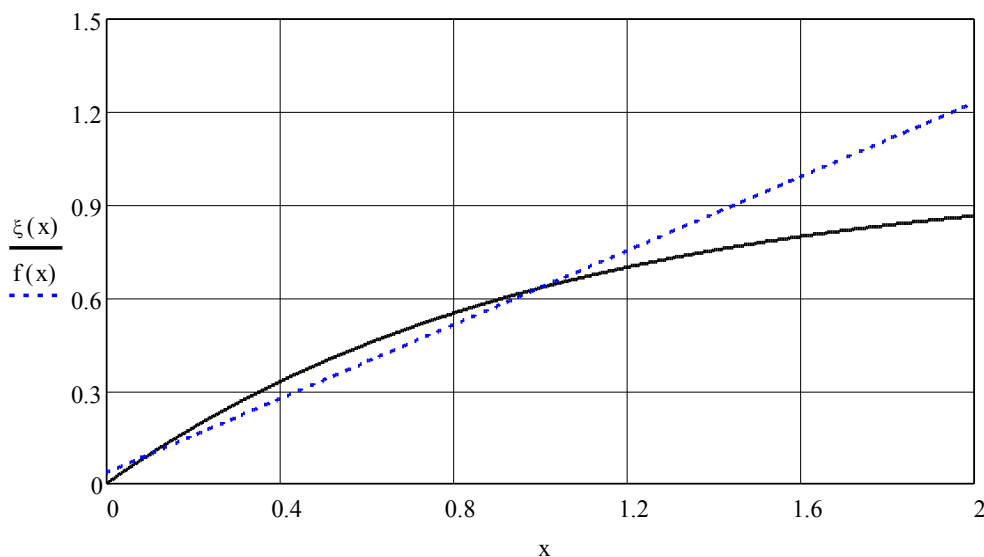
$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0,1 = 1 - e^{-0,1}, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 = 1 - e^{-1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0,036, \\ a_1 = 0,597. \end{cases}$$

Отже апроксимуючий поліном має вигляд:

$$f(x) = 0,036 + 0,597x.$$

Побудуємо функції $f(x)$ і $\xi(x)$.



Найбільше відхилення функцій спостерігаємо в точці $x = 2$, тому лінійний критерій близькості буде рівний:

$$\Lambda = \max |f(x) - \xi(x)| = 0,365.$$

Приклад. Інтерполюємо поліномом $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ в інтервалі $0 \leq x \leq 2$ функцію $\xi(x) = 1 - e^{-x}$.

Визначимо спочатку число вузлів інтерполяції на основі виразу (5.18):

$$N_{\text{вуз.інт.}} = n + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Виберемо значення трьох вузлів інтерполяції в інтервалі $0 \leq x \leq 2$:

$$x_0 = 0,1,$$

$$x_1 = 0,9,$$

$$x_2 = 1,8.$$

Складемо систему лінійних рівнянь на основі виразу (5.19) і визначимо коефіцієнти a_0, a_1, a_2 :

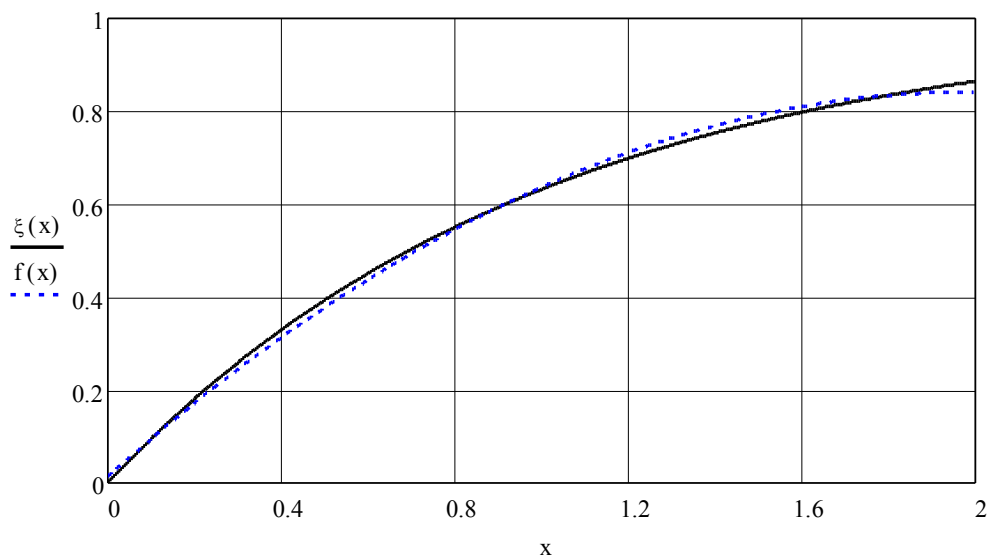
$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0,1 + a_2 \cdot 0,1^2 = 1 - e^{-0,1}, \\ a_0 + a_1 \cdot 0,9 + a_2 \cdot 0,9^2 = 1 - e^{-0,9}, \\ a_0 + a_1 \cdot 1,8 + a_2 \cdot 1,8^2 = 1 - e^{-1,8}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0,014, \\ a_1 = 0,832, \\ a_2 = -0,209. \end{cases}$$

Отже апроксимуючий поліном має вигляд:

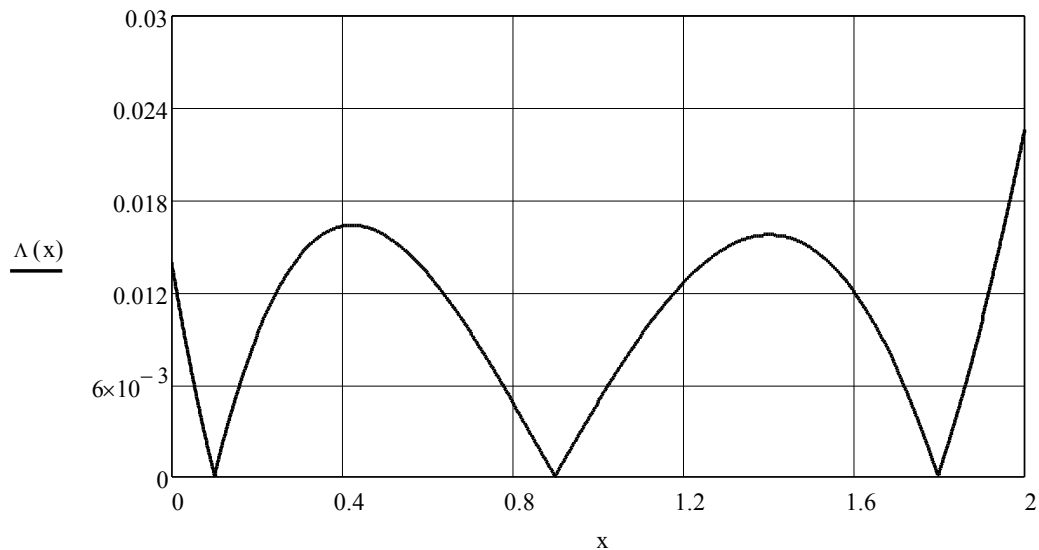
$$f(x) = 0,014 + 0,832x - 0,209x^2.$$

Побудуємо функції $f(x)$ і $\xi(x)$, а також функцію $\Lambda = |f(x) - \xi(x)|$.



Найбільше відхилення функцій спостерігаємо в точці $x = 2$, тому лінійний критерій близькості буде рівний:

$$\Lambda = \max |f(x) - \xi(x)| = 0,023.$$



Як бачимо з даного прикладу точність апроксимації збільшується при збільшенні степеня полінома.

При **кусково-лінійній апроксимації** відбувається заміна реальної ВАХ наближеною, що складається з відрізків прямих ліній, обраних дотичними (рис. 5.10).

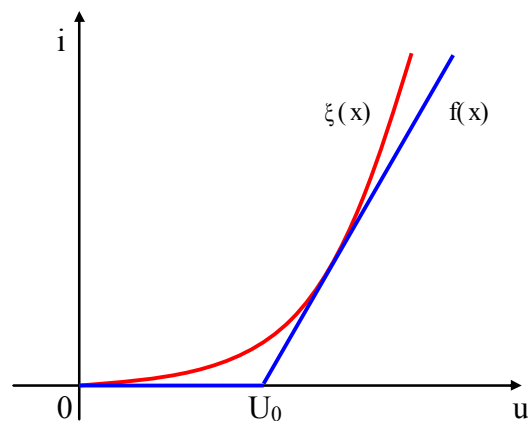


Рис. 5.10 – Заміна реальної ВАХ кусково-лінійною

З рис. 5.10 видно, що апроксимуюча функція описується виразом:

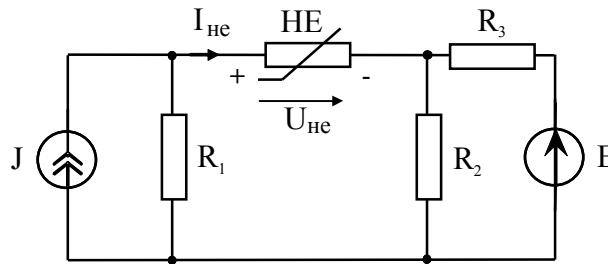
$$f(x) = i(u) = \begin{cases} 0, & \text{при } u \leq U_0, \\ S(u - U_0), & \text{при } u > U_0, \end{cases} \quad (5.20)$$

де S – крутість.

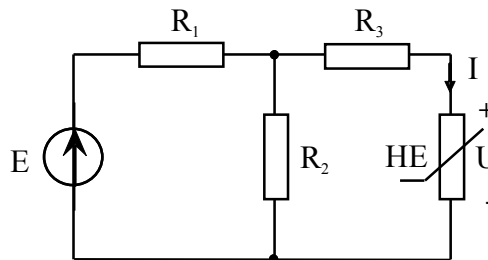
Кусково-лінійна апроксимація ВАХ у більшості випадків дає цілком достатні результати по точності.

5.5 Запитання та задачі для закріплення

1. Приведіть приклади нелінійних резистивних елементів. Як вони позначаються?
2. Що таке вольт-амперна характеристика (ВАХ)?
3. Що Ви розумієте під статичним і диференційним опором?
4. Як визначити графічно статичний і диференційний опори по ВАХ?
5. Які нелінійні реактивні елементи Ви знаєте?
6. Яка причина прояву нелінійності індуктивного елементу?
7. Яка причина прояву нелінійності ємнісного елементу?
8. Які методи розрахунку нелінійних резистивних електричних кіл Ви знаєте?
9. Що Ви розумієте під апроксимацією ВАХ?
10. Які види апроксимації ВАХ Ви знаєте?
11. Від чого залежить точність при поліноміальній апроксимації?
12. Визначте струм $I_{не}$ і напругу $U_{не}$ на нелінійному елементі, якщо відомо, що: $E = 6$ (В), $R_1 = 8$ (Ом), $R_2 = 6$ (Ом), $R_3 = 3$ (Ом), $J = 3$ (А), $i = 0,1u^2$ (А).



13. Визначте величину опору R_3 , при якій $I = 3$ (мА), якщо $E = 16$ (В), $R_1 = R_2 = 2$ (кОм), $I = (2^U - 1) \cdot 10^{-3}$ (А).



ЛІТЕРАТУРА

1. Атабеков Григорий Иосифович. Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. И. Атабеков. – Изд. 2-е испр. – С-Пб. : Лань, 2006. – 432 с. – ISBN 5-8114-0699-1.
2. Белецкий Александр Федорович. Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / А. Ф. Белецкий. – Изд. 2-е стер. – С-Пб. : Лань, 2009. – 544 с. – ISBN 978-5-8114-0905-1.
3. Евдокимов Федор Евдокимович. Теоретические основы электротехники : учеб. для студентов образоват. учреждений сред. проф. образования / Ф. Е. Евдокимов. – Изд. 9-е стер. – М. : Академия, 2004. – 560 с. – ISBN 5-7695-1106-0.
4. Игорь Николаевич Добротворский. Теория электрических цепей : учебник для техникумов / И. Н. Добротворский. – М. : Радио и связь, 1989. – 472 с. – ISBN 5-256-00266-X.
5. Байдак Юрій Вікторович. Основи теорії кіл : навч. посіб. / Ю. В. Байдак. – К. : Вища школа : Слово, 2009. – 271 с. – ISBN 978-966-642-405-4.
6. Основы теории цепей : учеб. для вузов / [Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов]. – Изд. 4-е перераб. – М. : Энергия, 1975. – 752 с.
7. Зернов Николай Викторович. Теория радиотехнических цепей : учеб. для вузов / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. – Изд. 2-е перераб. и доп. – Л. : Энергия, 1972. – 816 с.
8. Лосев Алексей Константинович. Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / А. К. Лосев. – М. : Высшая школа, 1987. – 512 с.
9. Запасный Анатолий Иванович. Основы теории цепей : учеб. пособ. / А. И. Запасный. – М. : РИОР, 2006. – 336 с. – ISBN 5-369-00001-8.
10. Бакалов Валерий Пантелеевич. Основы теории цепей : учеб. для вузов / В.П. Бакалов, В. Ф. Дмитриков, Б. И. Крук. – Изд. 3-е перераб. и доп. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 597 с. – ISBN 5-256-01472-2.
11. Матханов Платон Николаевич. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи : учеб. для вузов / П. Н. Матханов. – Изд. 3-е перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1990. – 399 с. – ISBN 5-06-000679-4.
12. Шебес Михаил Романович. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособие / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – Изд. 4-е перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1990. – 544 с. – ISBN 5-06-000678-6.
13. Баскаков Святослав Иванович. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – Изд. 4-е перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 2003. – 464 с. – ISBN 5-06-003843-2.
14. Попов Вадим Петрович. Основы теории цепей: учеб. для вузов / В. П. Попов. – Изд. 6-е перераб. и испр. – М. : Высшая школа, 2007. – 575 с. – ISBN 978-5-06-003949-8.

Навчальне видання

**Осадчук Олександр Володимирович,
Звягін Олександр Сергійович**

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ І СИГНАЛІВ

ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Редактор

Оригінал-макет підготовлено О. С. Звягіним

Підписано до друку
Формат 29,7×42¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різнографічний. Ум. др. арк.
Наклад 100 прим. Зам № В2014-14

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 2201
Тел. (0432) 59–87–36
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно–видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59–87–38
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.