

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР ВИЩОЇ ОСВІТИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

*Присвячується 75-річчю
Харківського національного
університету радіоелектроніки*

Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ

Частина 2

Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом «Радіотехніка»

Харків 2006

УДК 621. 3.011.1(07)
ББК 31.211
К 56

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист від 09.12.2005 р. № 14/18.2-2810)*

Рецензенти:

Лахно В.І., професор кафедри проектування радіоелектронних систем літальних апаратів Харківського національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», д.т.н., професор.

Бабаєв М.М., завідувач кафедри електротехніки та електричних машин Української державної академії залізничного транспорту, д.т.н., професор.

Гімнілевич Ю.Б., завідувач кафедри радіотехніки Севастопольського національного технічного університету, д.т.н.

К.56 Коваль Ю.О., Гринченко Л.В., Милютченко І.О., Рибін О.І. Основи теорії кіл: Підручник для студентів ВНЗ. Ч.2. Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2006. 668 с.

За загальною редакцією проф. В.М. Шокало та проф. В.І. Правди

ISBN 966-8604-21-0

У другій частині підручника розглянуто такі розділи: аналіз перехідних процесів класичним, часовим та операторним методами; багатополіусники; кола з розподіленими параметрами, довгі лінії; основи синтезу кіл; нелінійні кола; методи автоматизованого аналізу кіл.

Вміщено велику кількість ілюстрацій та прикладів розв'язання задач, запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань з кожної розглянутої теми, а також довідкову та історичну інформацію з основних розділів теорії кіл.

Узагальнено багаторічний досвід викладання дисципліни «Основи теорії кіл» на кафедрах «Основи радіотехніки» ХНУРЕ та «Теоретичні основи радіотехніки» НТУУ «КПІ».

Для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей напряму «Радіотехніка», а також студентів, які вивчають споріднені дисципліни за спеціальностями напрямів «Телекомунікації» та «Електронні апарати».

Іл. 348. Табл. 83. Бібліогр. 15 назв.

ISBN 966-8604-21-0

© Коваль Ю.О., Гринченко Л.В., Милютченко І.О.,
Рибін О.І., 2006.

© Харківський національний університет радіоелектроніки, 2006.

© Колегіум, 2006

ЗМІСТ

Перелік скорочень та умовних позначень	8
Вступ	15
1 Класичний метод аналізу перехідних процесів	17
1.1 Основні поняття та означення	17
1.1.1 Закони комутації і початкові умови.....	18
1.1.2 Загальна характеристика методів аналізу перехідних процесів.....	19
1.1.3 Вимушений і вільний режими	19
1.2 Перехідні процеси в колах R, C та R, L	36
1.2.1 Вільний режим у колі R, C	36
1.2.2 Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, C	38
1.2.3 Вільний режим у колі R, L	39
1.2.4 Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L	40
1.3 Перехідні процеси у колі R, L, C	41
1.3.1 Аперіодичний режим.....	42
1.3.2 Критичний (граничний аперіодичний) режим.....	45
1.3.3 Коливальний режим.....	45
1.3.4 Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L, C ...	49
1.4 Перехідні процеси у колах $R, C; R, L; R, L, C$ при синусоїдній дії.....	51
1.4.1 Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, C	51
1.4.2 Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, L	54
1.4.3 Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, L, C	55
1.5 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань.....	60
2 Часовий метод аналізу перехідних процесів.....	64
2.1 Перехідна характеристика кола	64
2.2 Імпульсна характеристика кола.....	79
2.3 Часові характеристики типових кіл $R, L; R, C; R, L, C$	86
2.3.1 Характеристики кіл $R, L; R, C$ першої групи	86
2.3.2 Характеристики кіл $R, L; R, C$ другої групи	90
2.3.3 Часові характеристики типових кіл R, L, C	93
2.4 Часові характеристики зв'язаних коливальних контурів	98
2.5 Визначення відгуку кола на ступінчасту дію за допомогою часових характеристик	104
2.6 Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою перехідної характеристики. Інтеграл Дюамеля	116
2.7 Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою імпульсної характеристики.....	131
2.8 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань.....	148

3	Операторний метод дослідження кіл у нестационарному режимі ...	153
3.1	Пряме перетворення Лапласа. Оригінали і зображення.....	153
3.2	Зображення деяких дій	154
3.3	Співвідношення між зображеннями струмів і напруг в елементах кола.....	157
3.4	Операторна форма закону Ома і законів Кірхгофа за нульових початкових умов	160
3.5	Визначення оригіналу відгуку.....	165
3.6	Урахування ненульових початкових умов	174
3.7	Операторна передатна функція кола, її властивості. Нулі та полюси операторної передатної функції	178
3.8	Операторна вхідна функція кола, її властивості	185
3.9	Зв'язок операторної передатної функції з комплексною передатною функцією. Амплітудно-квадратична характеристика кола, її властивості	187
3.10	Мінімально- та немінимально-фазові кола	190
3.11	Операторна передатна функція неспотворюючого кола	194
3.12	Зв'язок операторної передатної функції з часовими характеристиками	195
3.13	Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	201
4	Багатополіусники.....	205
4.1	Загальні зауваження	205
4.2	Системи рівнянь (моделі) прохідних чотиріполіусників	207
4.3	З'єднання чотиріполіусників	212
4.4	Характеристичні параметри чотиріполіусників	214
4.5	Функції кола	217
4.5.1	Коефіцієнт передачі за напругою	220
4.5.2	Коефіцієнт передачі за струмом	222
4.5.3	Вхідний та передатний опір, вхідна та передатна провідність	223
4.5.4	Обчислення функцій кола в базисі контурних струмів	224
4.6	Функції кола і розрахунки параметрів чотиріполіусників	227
4.7	Приклади обчислення функцій деяких кіл	228
4.8	Спеціальні двобрамники та трибрамники	236
4.8.1	Операційні підсилювачі	236
4.8.2	Гіратори	241
4.8.3	Трибрамні конвертори та конвеєри	247
4.8.4	Кратні реактивні елементи (біцистори)	253
4.8.5	Трансімпедансні та транскондуктивні операційні підсилювачі	257
4.8.6	Елемент CFA (Current Feedback Amplifier)	259
4.9	Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань.....	259

5	Кола з розподіленими параметрами. Довгі лінії.....	264
5.1	Загальні положення	264
5.2	Первинні параметри довгих ліній	268
5.3	Диференціальні (телеграфні) рівняння довгої лінії. Загальний розв'язок рівнянь для лінії без втрат	274
5.4	Аналіз усталеного синусоїдного режиму довгої лінії.....	284
5.5	Лінії з малими втратами при синусоїдній дії	297
5.6	Режим біжних хвиль.....	303
5.7	Режим стійних хвиль.....	310
5.7.1	Холостий хід в ідеальній лінії	310
5.7.2	Коротке замикання в ідеальній лінії	314
5.7.3	Холостий хід і коротке замикання в реальній лінії	316
5.7.4	Ідеальна лінія, навантажена на реактивний опір	320
5.8	Режим змішаних хвиль	332
5.8.1	Режим змішаних хвиль при активному навантаженні в ідеальній лінії	333
5.8.2	Режим змішаних хвиль при комплексному навантаженні ..	336
5.8.3	Режим змішаних хвиль в лінії з втратами	339
5.9	Методи узгодження довгих ліній.....	350
5.9.1	Застосування відрізків ліній як трансформаторів	351
5.9.2	Узгодження паралельно увімкненими шлейфами	357
5.9.3	Узгодження коаксіальних кабелів із симетричними вібраторами	360
5.10	Кругові діаграми ідеальних довгих ліній	365
5.10.1	Принцип побудови і структура кругової діаграми	365
5.10.2	Застосування кругової діаграми для розрахунку параметрів ліній	372
5.11	Комплексні функції та частотні характеристики довгих ліній ..	382
5.11.1	Види КФ ліній та основні співвідношення	382
5.11.2	КФ і частотні характеристики узгодженої лінії	383
5.11.3	КФ і частотні характеристики лінії при короткому замиканні вихідних затискачів і при $R_H \ll R_{XB}$	385
5.11.4	КФ і ЧХ лінії при холостому ході та при $R_H \gg R_{XB}$	390
5.11.5	КФ і ЧХ лінії, навантаженої на реактивний опір	393
5.12	Перехідні процеси в довгих лініях	405
5.12.1	Основні теоретичні положення для аналізу напруги і струму операторним методом	405
5.12.2	Лінії, узгоджені з навантаженням	410
5.12.3	Розімкнені лінії	413
5.12.4	Замкнені лінії	419
5.12.5	ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ при активних опорі навантаження і внутрішньому опорі джерела	420
5.12.6	ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ з реактивним навантаженням	423

5.13	Операторні функції і часові характеристики довгих ліній	434
5.13.1	Лінії, узгоджені з навантаженням	435
5.13.2	Лінії, навантажені на активний опір, при активному внутрішньому опорі джерела	436
5.13.3	Розімкнені та замкнені лінії	439
5.13.4	ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, навантажені на реактивні опори та узгоджені з джерелами	439
5.14	Застосування кіл з розподіленими параметрами.....	449
5.14.1	Передача високочастотної енергії та радіосигналів	449
5.14.2	Затримка сигналів	451
5.14.3	Використання вибірних властивостей відрізків довгих ліній	454
5.14.4	Трансформатори та узгоджувальні пристрої	458
5.14.5	Вимірювальні пристрої	461
5.14.6	Імпульсна техніка	463
5.15	Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань.....	468
6	Основи синтезу електричних кіл.....	476
6.1	Етапи розв'язання задачі синтезу.....	476
6.2	Частотна залежність ослаблення та вимоги до неї	476
6.3	Операторна передатна функція поліномного фільтра	478
6.4	Фільтри з характеристиками Баттерворта	479
6.5	Фільтри з характеристиками Чебишова.....	487
6.6	Фільтри верхніх частот.....	495
6.7	Смугові фільтри з симетричними характеристиками	503
6.8	Загороджувальні фільтри з симетричними характеристиками ..	512
6.9	Частотні залежності реактансних функцій	520
6.10	Реалізація реактансних функцій за Фостером	525
6.11	Реалізація реактансних функцій за Кауером	532
6.12	Реалізація ОПФ східцевими реактивними колами, навантаженими з обох боків	540
6.13	Перетворення схеми ФП у схеми інших типів. Денормування елементів перетворених схем	548
6.14	Синтез фільтрів на операційних підсилювачах	553
6.15	Синтез фільтрів на нетрадиційних операційних підсилювачах	555
6.15.1	Фільтри з інтегральним підсилювачем струму	556
6.15.2	Фільтри з трансїмпедансними операційними підсилювачами	560
6.15.3	Модифіковані активні ФНЧ другого порядку в базисі струмів	563
6.16	Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	567

7	Нелінійні кола.....	575
7.1	Особливості теорії нелінійних кіл	575
7.2	Характеристики і параметри нелінійних елементів.....	575
7.3	Класифікація нелінійних елементів.....	578
7.4	Диференціальні рівняння нелінійних кіл.....	581
7.5	Нелінійні кола постійного струму.....	583
7.6	Апроксимація характеристик нелінійних елементів.....	587
7.7	Нелінійний активний опір при синусоїдній дії.....	589
7.8	Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	598
8	Методи автоматизованого аналізу кіл	602
8.1	Вступні положення	602
8.2	Класифікація методів аналізу електронних кіл	603
8.3	Похибки обчислень та їх класифікація	604
8.4	Чисельні методи розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь ...	606
8.5	Оцінка точності розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь	610
8.5.1	Норми	610
8.5.2	Зумовленість систем рівнянь рівноваги кола	612
8.5.3	Дублікації та еквівалентні перетворення	618
8.6	Символьні та символічно-чисельні методи аналізу лінійних електронних кіл	621
8.6.1	Вступні зауваження	621
8.6.2	Білінійне розкладання	622
8.6.3	Граф матриці	627
8.6.4	Теоретико-множинні методи	633
8.6.5	Метод взаємних похідних	637
8.6.6	Метод модифікацій	640
8.7	Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань	651
	Бібліографічний список	655
	Іменний покажчик	656
	Предметний покажчик	657

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ССІ, ССІІ – струмові конвеєри із підсумовуванням напруги
ССІІІ – струмовий конвеєр із підсумовуванням струму
СФА – Current Feedback Amplifier – підсилювач зі струмовим зворотним зв'язком
ОТА – трансадмітансний ОП
VCI, VCIІ – напругові конвеєри із підсумовуванням струму
VCIІІ – напруговий конвеєр із підсумовуванням напруги
АКХ – амплітудно-квадратична характеристика
АФХ – амплітудно-фазова характеристика
АЧХ – амплітудно-частотна характеристика
ВАХ – вольт-амперна характеристика
ДДФ – додатна дійсна функція
ДЛМВ – довга лінія з малими втратами
ДНКН – джерело напруги, кероване напругою
ДНКС – джерело напруги, кероване струмом
ДСКН – джерело струму, кероване напругою
ДСКС – джерело струму, кероване струмом
ДЛ – довга лінія
ДРФ – дробово-раціональна функція
ЕЛ – експоненційна лінія
ЕМС – електромагнітна сумісність
ЕОМ – електронно-обчислювальна машина
ЕРС – електрорушійна сила
ЗДЛ – збалансована ДЛ
ЗФ – загороджувальний фільтр
ІДЛ – ідеальна довга лінія
К – контур
КД – кругова діаграма
КЗ – коротке замикання
КБХ – коефіцієнт біжної хвилі
КВФ – комплексна вхідна функція
ККД – коефіцієнт корисної дії
КПФ – комплексна передатна функція
КСХ – коефіцієнт стійкої хвилі
КФ – комплексна функція
ЛЕК – лінійне електричне коло
НБ – напруговий базис
ОВФ – операторна вхідна функція кола
ОП – операційний підсилювач
ОПФ – операторна передатна функція кола
ОТП – транскондуктивний (трансадмітансний) ОП

РФ – режекторний фільтр
 РФНЧ – ФНЧ з режекцією
 РФВЧ – ФВЧ з режекцією
 СБ – струмовий базис
 СЗ – смуга затримання
 СП – смуга пропускання
 СФ – смуговий фільтр
 $S_k(t_k)$ – k -й стрибок функції $s_{\text{вх}}(t)$ у момент часу $t = t_k$;
 ТОП – трансїмпедансний ОП
 ФБ – фільтр Баттерворта
 ФНЧ, ФВЧ – фільтр нижніх, верхніх частот
 ФП – фільтр-прототип
 ФЧ – фільтр Чебишова
 ФЧХ – фазочастотна характеристика
 ХХ – холостий хід
 ЧХ – частотна характеристика
 (\underline{A}) – матриця A -параметрів кола
 $A(\omega)$ – ослаблення
 $A_p(\omega)$ – частотна характеристика ослаблення за потужністю
 B_L, B_C – індуктивна, ємнісна провідність
 (\underline{B}) – матриця B -параметрів кола
 C – ємність
 C_1 – первинна (погонна) ємність
 C_e – еквівалентна ємність
 $C_d(u)$ – динамічна ємність
 $\cos \varphi$ – коефіцієнт потужності
 $\text{cond}_s A$ – числа зумовленості систем рівнянь
 d – загасання контуру
 (\underline{D}) – матриця D -параметрів кола
 $D_1^{(n)}$ – кратна індуктивність
 $D_2^{(n)}$ – кратна ємність
 E – постійна ЕРС, діюче значення синусоїдної ЕРС
 $e(t), e$ – миттєве значення ЕРС
 (\underline{E}) – матриця-стовпець контурних ЕРС
 E_e – еквівалентна ЕРС
 $E(U_{\text{вх}})$ – джерело напруги, кероване напругою (ДНКН)
 $E(I_{\text{вх}})$ – джерело напруги, кероване струмом (ДНКС)
 E_m – амплітуда синусоїдної ЕРС
 $E(p)$ – операторна ЕРС

f – циклічна частота синусоїдного коливання
 $f_{\text{рез}}$ – резонансна частота циклічна
 $f(t)$ – функція дійсної змінної t (оригінал)
 $\underline{E}_{m_{\text{вх}}}$ – комплексна амплітуда вхідної дії
 $\underline{E}_{m_{\text{вих}}}$ – комплексна амплітуда відгуку на виході кола
 $F(p)$ – зображення функції $f(t)$ за Лапласом
 G – активна провідність
 G_1 – первинна (погонна) провідність
 G_i – внутрішня провідність джерела струму
 G_e – еквівалентна провідність
 $G_{\text{вх}}$ – вхідна провідність
 $G_{\text{н}}$ – провідність навантаження
 $g(t)$ – перехідна характеристика
 $H(\omega)$ – модуль КПФ, або АЧХ
 $H^2(\omega)$ – амплітудно-квадратична характеристика (АКХ)
 $H_P(\omega)$ – передатна функція кола за потужністю
 $H(j\omega)$ – КПФ кола
 $H_U(j\omega)$, \underline{H}_U – комплексний коефіцієнт передачі за напругою
 $H_I(j\omega)$, \underline{H}_I – комплексний коефіцієнт передачі за струмом
 H_{max} – максимальне значення АЧХ
 H_0 – значення АЧХ на нульовій частоті
 $H_{\text{норм}}$ – нормоване значення АЧХ
 $H(p)$ – ОПФ кола
 (\underline{H}) – матриця H -параметрів кола
 $h(t)$ – імпульсна характеристика
 I – постійний струм, діюче значення синусоїдного струму
 $i(t)$, i – миттєве значення змінного струму
 $i_{\text{пад}}(t, x)$, $i_{\text{від}}(t, x)$ – падаюча, відбита хвилі струму
 $I_{\text{н}}$ – струм навантаження
 $I_{\text{дж}}$ – струм джерела
 $I_{\text{к.з}}$ – струм короткого замикання
 (\underline{I}) – матриця-стовпець контурних струмів
 $I_{\text{дж}}(I_{\text{вх}})$ – джерело струму, кероване струмом (ДСКС)
 $I_{\text{дж}}(U_{\text{вх}})$ – джерело струму, кероване напругою (ДСКН)
 $(\underline{I}_{\text{вз}})$ – матриця-стовпець вузлових струмів незалежних джерел
 $I_{\text{вх}}$, $i_{\text{вх}}$ ($I_{\text{вих}}$, $i_{\text{вих}}$) – вхідний (вихідний) струм

I_m – амплітуда синусоїдного струму
 I_{mk} – k -та гармоніка змінного струму
 I_H – діюче значення синусоїдного струму в навантаженні
 I_0 – постійна складова змінного струму
 $\underline{I}_{дж}$ – комплексне діюче значення струму джерела
 \underline{I}_H – комплексне діюче значення струму навантаження
 $I(p)$ – операторний струм
 k – коефіцієнт зв'язку
 $k_{пр}$ – коефіцієнт прямокутності
 $k_{бх}, k_{сх}$ – коефіцієнт біжної (стійної) хвилі
 L – індуктивність
 L_1 – первинна (погонна) індуктивність
 $L_d(i)$ – динамічна індуктивність
 L_e – еквівалентна індуктивність
 $L[f(t)]$ – перетворення за Лапласом функції $f(t)$
 M – взаємна індуктивність
 N – порядок кола
 N_B – кількість віток схеми
 $N_{вз}$ – кількість вузлів схеми
 $\bar{p}, \tilde{p}, \check{p}$ – нормовані комплексні змінні
 p_k, p_{0k} – нулі та полюси ОПФ
 $p(t), p$ – миттєве значення потужності
 P_H – потужність навантаження
 P – постійна потужність
 P_A – активна потужність
 P_Q – реактивна потужність
 P_S – повна потужність
 \underline{P}_S – комплексна потужність
 $Q, q(t)$ – заряд
 Q – добротність
 R – активний опір
 R_1 – первинний (погонний) опір
 $R_{вх}, R_{вих}$ – вхідний (вихідний) опір
 R_i – внутрішній опір джерела
 R_e – еквівалентний опір
 R_H – опір навантаження
 $R_d(i)$ – динамічний опір

$R(i)$ – нелінійний опір
 $s_{\text{вх}}, s_{\text{вих}}$ – миттєві значення дії та відгуку
 S – крутість
 T – період
 T_0 – період биттів
 $t_{\text{пер}}$ – тривалість перехідного процесу
 t_3 – час затримки
 $T_n(\Omega)$ – поліном Чебишова
 U – постійна напруга, діюче значення синусоїдної напруги
 $u(t), u$ – миттєве значення змінної напруги
 $u_{\text{пад}}(t, x), u_{\text{від}}(t, x)$ – миттєві значення падаючої, відбитої хвиль напруги
 $U_{\text{н}}$ – напруга навантаження
 $U_{\text{х.х}}$ – напруга холостого ходу
 U_0 – постійна складова змінної напруги
 (\underline{U}) – матриця-стовпець вузлових напруг
 U_m – амплітуда синусоїдної напруги
 $\underline{U}_{\text{вх}}, \underline{U}_{\text{вих}}$ – комплексні діючі значення напруг на вхідних і вихідних затискачах кола
 $U(p)$ – операторна напруга
 $V(p)$ – поліном Гурвіца (Баттерворта)
 $v(t), v$ – миттєве значення змінного потенціалу
 v – швидкість поширення хвиль
 W – енергія
 $W(p)$ – провідність
 $w(t), w$ – миттєве значення енергії
 w_i – ваги факторів графа
 $\underline{x}(t)$ – комплексне миттєве значення синусоїдної дії
 X – реактивний опір
 $X_{\text{н}}$ – реактивний опір навантаження
 X_M – опір взаємоіндукції
 X_L, X_C – індуктивний, ємнісний опір
 (\underline{Y}) – матриця комплексних провідностей кола; матриця Y -параметрів
 $(\underline{Y})^{-1}$ – обернена матриця комплексних провідностей;
 \underline{Y} – комплексна провідність
 Y – повна провідність
 $\underline{Y}_L, \underline{Y}_C$ – комплексна провідність індуктивності, ємності
 $Y_{\text{пер}}(j\omega)$ – комплексна передатна провідність
 $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ – комплексна вхідна провідність

$Y_{\text{вх}}(p)$ – операторна вхідна провідність
 $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$ – нормована операторна вхідна провідність
 $Y(p)$ – операторна провідність
 $(Y(p))$ – матриця операторних провідностей
 $Y_L(p), Y_C(p)$ – операторна провідність індуктивності, ємності
 $y_{\text{вл}}(t)$ – вільна складова відгуку кола
 $y_{\text{вм}}(t), y(\infty)$ – вимушена складова відгуку кола
 \underline{Z}_c – характеристичний опір чотиріполюсника
 $\underline{Z}_L, \underline{Z}_C$ – комплексний опір індуктивності, ємності
 (\underline{Z}) – матриця комплексних опорів кола; матриця Z -параметрів
 $(\underline{Z})^{-1}$ – обернена матриця комплексних опорів;
 $\underline{Z}_\text{н}$ – комплексний опір навантаження
 \underline{Z}_e – комплексний опір кола еквівалентний
 \underline{Z}_M – комплексний опір взаємоіндукції
 $Z_{\text{пер}}(j\omega)$ – комплексний передатний опір
 $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ – комплексний вхідний опір
 $Z_{\text{вх}}(p)$ – операторний вхідний опір
 $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ – нормований операторний вхідний опір
 $Z(p)$ – операторний опір
 $Z_L(p), Z_C(p)$ – операторний опір індуктивності, ємності
 $\underline{Z}_{\text{хв}}$ – хвильовий опір
 A_c – характеристична стала ослаблення
 α – коефіцієнт ослаблення
 α – вектор нев'язок
 $\|\alpha\|$ – норма вектора нев'язок
 α_k – коефіцієнти Берга
 B_c – характеристична стала фази
 β – коефіцієнт фази
 β_m – матричне число
 $\beta(k)$ – деревне число
 $\beta(m/l)$ – контурне число
 Γ_c – характеристична стала передачі чотиріполюсника
 $\underline{\gamma}$ – коефіцієнт поширення
 Δ, D – визначник матриці
 $\Delta f, \Delta\omega$ – абсолютна розстройка контуру
 $2\Delta\omega_{\text{П}}$ – смуга пропускання високодобротного контуру

$\Delta\omega_3$ – смуга затримання фільтра
 δ – коефіцієнт загасання
 δ_a – гранична відносна похибка
 δ_i – декремент підстановки
 $\delta(t)$ – дельта-функція
 ε – коефіцієнт нерівномірності ослаблення
 ε – відносна діелектрична проникність
 ε_0 – електрична стала вакуума
 ε_a – гранична абсолютна похибка
 η – коефіцієнт корисної дії (ККД)
 θ – логарифмічний декремент загасання; кут відсікання
 λ – довжина хвилі
 μ – коефіцієнт підсилення ОП
 μ – магнітна стала вакуума
 μ_0 – відносна магнітна проникність
 ξ_{ii}, ξ_{ij} – власні та взаємні похідні визначника
 Π_ω, Π_f – смуга пропускання кола
 ρ – характеристичний опір резонансного контуру
 ρ – коефіцієнт відбиття
 σ – питома об'ємна провідність
 τ – стала часу кола
 τ_i – тривалість імпульсу
 φ – зсув фаз
 φ – аргумент комплексного опору
 $\varphi(\omega)$ – аргумент КПФ, або ФЧХ
 $\varphi(p)$ – функція фільтрації
 $\Omega, \tilde{\Omega}, \check{\Omega}$ – нормовані частоти фільтра
 ω – кутова частота синусоїдного коливання
 ω_0 – центральна частота фільтра
 $\omega_{вл}$ – кутова частота вільних загасаючих коливань
 $\omega_{рез}$ – резонансна частота кутова
 $\omega_{гр}$ – гранична частота фільтра
 ω_I, ω_{II} – частоти зв'язку індуктивно зв'язаних контурів
 $\psi(t)$ – повна фаза
 ψ_0 – початкова фаза
 $\psi_{0i}; \psi_{0u}; \psi_{0e}$ ($\psi_i; \psi_u, \psi_e$) – початкові фази струму, напруги та ЕРС
 Ψ – потокозчеплення
 $1(t)$ – одинична функція

*«Прекрасне досягається вивченням і великими зусиллями,
погане засвоюється само собою, без клопоту».*

Демокрит

ВСТУП

За сучасних умов інтенсивного розвитку та ускладнення принципів дії радіоелектронних пристроїв і систем значно зростає обсяг знань і, відповідно, кількість навчальних дисциплін, якими повинен оволодіти сучасний фахівець. Засвоєння спеціальних дисциплін стає можливим лише за наявності фундаментальної теоретичної підготовки.

Однією з таких фундаментальних дисциплін для студентів, котрі навчаються за напрямом «Радіотехніка», є «Основи теорії кіл» (ОТК), яка ґрунтується на дисциплінах «Вища математика», «Фізика» і є основою для засвоєння спеціальних курсів у вищому навчальному закладі та подальшої інженерної діяльності спеціаліста з радіотехніки та електрозв'язку.

Метою вивчення дисципліни ОТК є засвоєння основних законів та положень теорії електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами, оволодіння методами аналізу та синтезу електричних кіл.

Підручник з «Основ теорії кіл» складено згідно з Освітньо-професійною програмою Міністерства освіти і науки України за напрямом «Радіотехніка» та відповідною робочою програмою дисципліни. У першій частині книги (2004) розглянуто основні поняття і закони електричних кіл; методи розрахунку лінійних електричних кіл; усталений режим в колах синусоїдного струму; кола синусоїдного струму із взаємними індуктивностями; комплексні передатні функції та частотні характеристики електричних кіл; електричні фільтри.

Друга частина підручника містить такі розділи: аналіз перехідних процесів класичним, часовим та операторним методами; багатополіусники; кола з розподіленими параметрами, довгі лінії; основи синтезу електричних кіл; нелінійні кола; методи автоматизованого аналізу кіл.

Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю ілюстрацій та прикладів розв'язання задач, запитаннями та завданнями для самоперевірки з кожної теми, необхідною довідковою та історичною інформацією з основних розділів теорії кіл. Наявність іменного та предметного покажчиків полегшує користування книгою.

Готуючи це видання, автори узагальнили багаторічний досвід викладання дисципліни «Основи теорії кіл» на кафедрах «Основи радіотехніки» ХНУРЕ та «Теоретичні основи радіотехніки» НТУУ «КПІ».

Ю.О. Ковалем написано розд. 2 і 5 (підрозд. 5.11 разом з Ю.М. Роздоловським); Л.В. Гринченко – розд. 3 і 6; І.О. Милютченком – розд. 1 і 7, підрозд. 4.3, 4.4, 6.14; О.І. Рибіним – розд. 4 і 8, підрозд. 6.15.

Підручник орієнтовано на студентів ВНЗ денної та заочної форм навчання спеціальностей напрямку «Радіотехніка», він також може бути корисним для студентів, які вивчають споріднені дисципліни за спеціальностями напрямів «Телекомунікації» та «Електронні апарати».

1 Класичний метод аналізу перехідних процесів

- Основні поняття та означення
Закони комутації і початкові умови
Вимушений і вільний режими
- Перехідні процеси в колах R, L та R, C
- Перехідні процеси у колі R, L, C
Аперіодичний режим
Критичний режим
Коливальний режим
- Перехідні процеси у колах $R, L; R, C; R, L, C$ при синусоїдній дії

$$i_L(-0) = i_L(+0)$$

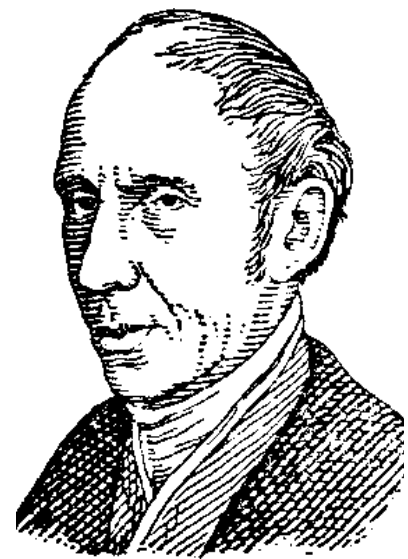
$$u_C(-0) = u_C(+0)$$

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = f(t)$$

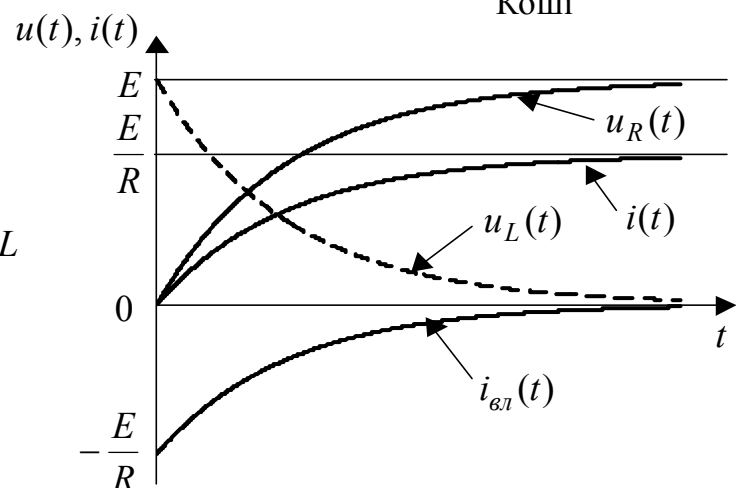
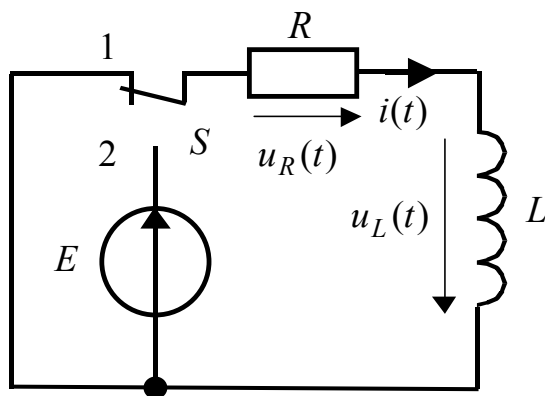
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

$$i(t) = i_{\text{вл}}(t) + i_{\text{зм}}(t)$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



Коші



1 КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Основні поняття та означення

В першій частині дисципліни ОТК були вивчені усталені (стаціонарні) процеси в лінійних електричних колах (ЛЕК). Стаціонарний режим (процес) характеризується тим, що струми і напруги або незмінні у часі (кола постійного струму), або є періодичними функціями часу (кола змінного струму).

Реальні електричні процеси завжди відрізняються від стаціонарних, тому що будь-яка неперіодична зміна типу дії, параметрів кола або структури схеми викликає порушення стаціонарності режиму.

Перехідним зветься процес, який виникає в електричному колі при переході від одного усталеного режиму до іншого. Перехідні процеси виникають за певних умов, наприклад, при комутації.

Комутація – це зміна параметрів або схеми кола, підключення або відключення джерела електричної енергії, зміна напруги на вході кола. Якщо коло містить тільки активні опори, то комутація "миттєво" викликає відповідні зміни струмів і напруг у вітках. За наявності реактивних елементів комутація супроводжується появою перехідних процесів. Теоретично тривалість перехідного процесу нескінченна, а практично залежить від параметрів кола і вимірюється для низькочастотних кіл мілісекундами або мікросекундами. Застосовуючи спеціальні схеми і підбираючи параметри кола, можна прискорити чи уповільнити перехідний процес.

Умовні графічні позначення деяких комутаційних пристроїв в електричних колах показані на рис.1.1.

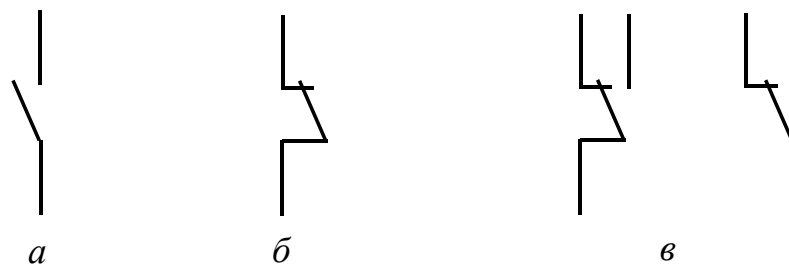


Рисунок 1.1 – Графічні позначення комутаційних пристроїв:
а – вимикач із замикаючим контактом, б – розмикаючим;
в – перемикач однополюсний

Отже, умовами виникнення перехідних процесів є: 1) комутація; 2) наявність у колі реактивних елементів.

Перехідні процеси в деяких електричних колах пристроїв зв'язку, автоматики, імпульсної та телевізійної техніки є робочими процесами при нормальній експлуатації цих пристроїв. Іноді перехідні процеси супроводжуються небажа-

ними явищами: на певних ділянках кола виникають перенапруги і так звані надструми.

Тому розрахунок і дослідження перехідних процесів є важливою інженерною задачею.

1.1.1 Закони комутації і початкові умови

Виникнення перехідних процесів пов'язано з особливостями змінювання енергії електромагнітного поля у реактивних елементах. З фізичних міркувань зрозуміло, що енергія поля в індуктивностях $w_L = Li_L^2 / 2$ та ємностях $w_C = Cu_C^2 / 2$ не може змінюватися миттєво: енергія може змінюватися безперервно, без стрибків, тому що інакше потужність $p = \frac{dw}{dt}$, яка дорівнює похідній енергії за часом, досягала б нескінченного значення, що фізично неможливо.

Це твердження виражає принцип неперервності у часі сумарного магнітного потокозчеплення індуктивності Ψ і сумарного електричного заряду ємності q . Якщо момент комутації розглядати як початок відліку часу $t_0 = 0$, то момент безпосередньо перед комутацією позначається $t = -0$, а момент безпосередньо після комутації $t = +0$. Враховуючи ці позначення, можна записати:

$$\sum_i q_i(-0) = \sum_i q_i(+0); \quad \sum_i \Psi_i(-0) = \sum_i \Psi_i(+0).$$

Оскільки $\Psi = Li$, $Q = Cu$, то

$$\sum_i L_i i_L(-0) = \sum_i L_i i_L(+0); \quad \sum_i C_i u_C(-0) = \sum_i C_i u_C(+0).$$

З цих рівнянь, вважаючи сумарні значення L і C незмінними, отримують так звані **закони комутації**:

$$i_L(-0) = i_L(+0) \text{ – перший закон комутації;}$$

$$u_C(-0) = u_C(+0) \text{ – другий закон комутації.}$$

Отже, у початковий момент після комутації струм в індуктивності (напряга на ємності) залишається саме таким, яким він був безпосередньо перед комутацією, а потім плавно змінюється. При цьому слід пам'ятати, що в колах з ідеальними елементами стрибкоподібно можуть змінюватися: 1) струми в опорах та ємностях; 2) напруги на опорах та індуктивностях.

Значення струму в індуктивності та напруги на ємності до моменту комутації звуться **початковими умовами**. Оскільки початок перехідного процесу звичайно вважають таким, що збігається з початком відліку часу, то початкові умови для струму в індуктивності та напруги на ємності k -ї вітки позначають $i_{Lk}(-0)$, $u_{Ck}(-0)$.

Розрізняють нульові та ненульові початкові умови. Якщо первинний запас енергії у всіх реактивних елементах кола дорівнює нулю, початкові умови називаються **нульовими**. Якщо хоча б в одному накопичувальному елементі первинний запас енергії ненульовий, початкові умови називають **ненульовими**.

Наприклад, кола, зображені на рис.1.2 і 1.3, а, мають нульові початкові умови, а коло (рис.1.3, б) – ненульові.

За нульових початкових умов, коли $i_L(-0) = 0$, $u_C(-0) = 0$, індуктивність у початковий момент часу після комутації еквівалентна розриву кола, а ємність – короткому замиканню. У випадку **ненульових** початкових умов, тобто коли $i_L(-0) \neq 0$, $u_C(-0) \neq 0$, індуктивність в перший момент після комутації еквівалентна джерелу струму $i_L(-0)$, а ємність – джерелу ЕРС $u_C(-0)$.

Початковими значеннями називають значення всіх електричних величин та їх похідних безпосередньо після комутації, тобто в момент часу $t = +0$. Використовують поняття **незалежних початкових значень**: $i_L(+0)$, $u_C(+0)$. Аналізуючи перехідні процеси у розгалужених колах, поряд з незалежними використовують так звані **залежні початкові значення**, а саме: значення всіх струмів і напруг, крім i_L , u_C , а також їх похідних при $t = +0$. Залежні початкові значення обчислюють за незалежними, виходячи з законів Кірхгофа.

При розрахунку перехідних процесів в електричних колах початкові значення мають бути відомими – заданими або додатково знайденими з урахуванням законів комутації.

1.1.2 Загальна характеристика методів аналізу перехідних процесів

Розрахунок перехідних процесів в будь-якій ЛЕК складається з таких основних операцій:

- 1) вибір позитивного напрямку струмів у вітках;
- 2) визначення значень струмів та напруг безпосередньо перед комутацією;
- 3) складання характеристичного рівняння і визначення його коренів;
- 4) одержання виразів для шуканих струмів і напруг як функцій часу.

Широко розповсюдженими методами розрахунку перехідних процесів є: 1) класичний, 2) часовий, 3) операторний, 4) спектральний. Для всіх методів перші три операції проводяться однаково, тому їх слід розглядати як спільну частину всіх методів. Різниця полягає у заключній операції, особливості якої розглядаються для кожного методу окремо.

1.1.3 Вимушений і вільний режими

Аналіз електричних процесів в ЛЕК, як відомо, базується на розв'язанні рівнянь Кірхгофа для миттєвих значень напруг і струмів в елементах кола. Оскільки дані миттєві значення пов'язані диференціальними залежностями, рівняння, які описують перехідні процеси, є диференціальними.

У ЛЕК з постійними зосередженими параметрами процеси описуються лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами, методику складання якого можна розглянути на прикладі кола

(рис.1.2) з нульовими початковими умовами, де треба знайти струм в індуктивності.

Система рівнянь за законами Кірхгофа з урахуванням диференціального співвідношення між напругою і струмом в елементі L $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ матиме вигляд:

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_L(t); \\ e(t) = i_1(t)R_1 + i_2(t)R_2; \\ 0 = L \frac{di_L(t)}{dt} - i_2(t)R_2. \end{cases}$$

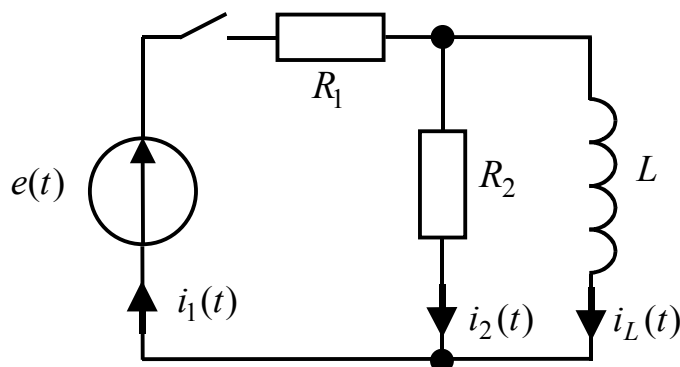


Рисунок 1.2 – Електричне коло з нульовими початковими умовами

Розв'язуючи систему методом підстановки, можна підставити значення $i_1(t)$ з першого рівняння до другого:

$$e(t) = i_2(t)R_1 + i_L(t)R_1 + i_2(t)R_2; \quad i_2(t) = \frac{e(t) - i_L(t)R_1}{R_1 + R_2},$$

а далі вираз для струму $i_2(t)$ – до третього рівняння:

$$0 = L \frac{di_L(t)}{dt} - \frac{e(t)R_2}{R_1 + R_2} + i_L(t) \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

В результаті виходить шукане диференціальне рівняння відносно струму $i_L(t)$:

$$L \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{e(t)}{R_1}. \quad (1.1)$$

У загальному вигляді процеси в ЛЕК описуються лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку:

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = f(t), \quad (1.2)$$

де $y(t)$ – шукана функція (струм, напруга) – відгук кола на вхідну дію;

$f(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$ – відома функція, яка залежить від дії $x(t)$; $a_0, a_1, \dots, a_m; b_0, b_1, \dots, b_n$ – постійні коефіцієнти.

Важливо зазначити, що вигляд лівої частини рівняння (1.2) не залежить від того, для якої змінної воно складається, а залежить тільки від схеми кола і параметрів його елементів. В цьому легко переконатися, записавши рівняння (1.1) відносно напруги на індуктивності та врахувавши зв'язок $i_L(t)$ та $u_L(t)$:

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} u_L(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = \frac{e(t)}{R_1}.$$

Якщо продиференціювати останнє рівняння за часом та помножити його на L , виходить вираз:

$$L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{du_L(t)}{dt} + u_L(t) = \frac{L}{R_1} \frac{de(t)}{dt}, \quad (1.3)$$

який відрізняється від рівняння (1.1) тільки правою частиною.

Стосовно ж до (1.1),

$$x(t) = e(t); y(t) = i_L(t); n = 1; b_0 = 1; b_1 = L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}; f(t) = \frac{e(t)}{R_1}; a_0 = \frac{1}{R_1}.$$

У математиці існують різні способи розв'язання рівняння (1.2).

Згідно з класичним методом розв'язок (1.2) слід шукати у вигляді суми двох функцій – загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y(t) = y_{\text{вл}}(t) + y_{\text{вм}}(t), \quad (1.4)$$

де $y_{\text{вл}}(t)$ – загальний розв'язок рівняння (1.2) без правої частини, який характеризує електричні явища за відсутністю зовнішньої дії; $y_{\text{вм}}(t)$ – частинний розв'язок (1.2) з правою частиною.

Відомо, що задача про знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння при заданій початковій умові має назву задачі Коші¹.

Класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах полягає у складанні диференціального рівняння, що описує стан кола, розв'язанні цього рівняння і фізичному трактуванні розв'язку. Перевагою класичного методу є його відносна простота, якщо порядок кола не перевищує двох.

У колі з реактивними елементами енергія джерела частково розсіюється на опорах, а частково накопичується в реактивних елементах. Процеси, які

¹ **Коші Огюстен Луї**, Cauchy (1789–1857) – французький математик, член Паризької АН (1816) і Петербурзької АН (1831). Автор більше 800 праць з арифметики і теорії чисел; алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, тригонометрії, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики, теорії пружності, оптики тощо. Коші належать терміни «модуль» комплексного числа, «спряжені» комплексні числа та ін.

існують у колі за рахунок цього запасу енергії після відключення джерела, називають **вільними**. Тобто, якщо дія $x(t) = 0$, коло перебуває у вільному режимі. Функції, що визначаються за загальним розв'язком, зветься **вільними складовими** (струмів, напруг тощо). Характер вільного процесу визначається схемою кола і параметрами його елементів.

Функція $y_{\text{вм}}(t)$ характеризує **вимушений** режим, обумовлений зовнішнім джерелом. Характер змінювання електричних величин у колі у вимушеному режимі визначається не тільки схемою і параметрами кола, але й законом змінювання дії. Якщо дія $x(t)$ – постійна функція або періодична за часом, то вимушений струм (напруга) буде одночасно і усталеним.

Існує універсальний метод визначення вільної складової, згідно з яким оператор диференціювання в однорідному для (1.2) рівнянні

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = 0 \quad (1.5)$$

замінюють алгебраїчним оператором p :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = p^n; \quad \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} = p^{n-1} \quad \dots \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = p^2; \quad \frac{dy(t)}{dt} = p; \quad y(t) = 1.$$

Після цієї заміни вираз (1.5) перетворюється у **характеристичне рівняння** кола:

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (1.6)$$

Степінь характеристичного полінома – лівої частини виразу (1.6) – визначається порядком диференціального рівняння (1.2) і зветься **порядком кола**.

Примітка. Диференціальне рівняння кола можна отримати, не складаючи вихідної системи рівнянь Кірхгофа. Достатньо визначити **комплексну передатну функцію (КПФ)** кола $H(j\omega)$.

Щоб довести це твердження, доцільно скористатись комплексними миттєвими значеннями дії та відгуку. Якщо дія

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t},$$

то для лінійного кола відгук змінюється з такою самою частотою, але має іншу комплексну амплітуду

$$\underline{y}(t) = H(j\omega) \underline{X}_m e^{j\omega t}.$$

Функція $\underline{y}(t)$ є частинним розв'язком рівняння (1.2). Підстановка $\underline{x}(t)$ і $\underline{y}(t)$ до (1.2) призводить до тотожності:

$$\begin{aligned} H(j\omega) \underline{X}_m e^{j\omega t} [b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0] = \\ = \underline{X}_m e^{j\omega t} [a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Множник $(j\omega)^n$ здобутий внаслідок n -кратного диференціювання $e^{j\omega t}$. Після скорочення на $e^{j\omega t}$ та \underline{X}_m з виразу (1.7) виходить, що

$$H(j\omega) = \frac{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1j\omega + a_0}{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}. \quad (1.8)$$

Порівнюючи формули (1.2) і (1.8), неважко помітити, що коефіцієнти a_k і b_k відповідно однакові, $j\omega$ – символ першої похідної, а $(j\omega)^k$ – символ k -ї похідної.

Добуток $b_k(j\omega)^k$ відповідає члену $b_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}$ диференціального рівняння, а $a_k(j\omega)^k$ – $a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$. Отже, за знаменником дробу (1.8) можна скласти ліву частину рівняння (1.2), а за чисельником (1.8) – праву.

Використання КПФ кола для складання підсумкового рівняння дещо спрощує класичний метод аналізу, оскільки зведення системи рівнянь до одного рівняння – задача досить громіздка, простіше визначити КПФ.

Знаменник виразу (1.8) після заміни $(j\omega)^k$ на p^k утворює характеристичний поліном. Якщо цей поліном прирівняти до нуля, виходить характеристичне рівняння.

Як зазначено вище, вигляд лівої частини рівняння (1.2) не залежить від того, для якої змінної воно складається. Тому для здобуття рівняння кола можна скористатись комплексною функцією (КФ) будь-якого виду, зокрема **КВФ – комплексною вхідною функцією** – $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ чи $Y_{\text{вх}}(j\omega)$, а для складання характеристичного рівняння застосувати такий спосіб: а) записати формулу вхідного опору або провідності кола в комплексній формі; б) у формулі $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ чи $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ замінити множник $j\omega$ на p ; в) отриманий вираз прирівняти до нуля: $Z_{\text{вх}}(p) = 0$, $Y_{\text{вх}}(p) = 0$.

Характеристичне рівняння можна отримати, прирівнюючи до нуля вхідний опір $Z_{\text{вх}}(p)$ відносно будь-якої вітки кола. У тих випадках, коли розгалужене коло має єдиний накопичувач енергії, зручніше розглядати формулу вхідного опору відносно вітки з накопичувачем енергії. Якщо у схемі є джерело струму, для здобуття характеристичного рівняння рекомендуються виконати одну з двох дій: розрахувати опір $Z_{\text{вх}}(p)$ не відносно вітки з джерелом (вважаючи її розімкненою), а відносно будь-якої іншої вітки кола; або розрахувати провідність відносно вітки з джерелом і прирівняти її до нуля: $Y_{\text{вх}}(p) = 0$.

Як скласти диференціальне та характеристичне рівняння кола за допомогою КПФ і $Z_{\text{вх}}(p)$, розглянуто у прикладі 1.2.

Вигляд вільної складової визначається характером коренів характеристичного рівняння p_k ($k=1,2,\dots,n$).

Корені p_k рівняння (1.6) можуть бути дійсними, комплексними, простими і кратними. Оскільки в ЛЕК параметри елементів додатні, а коефіцієнти рівняння (1.6) визначаються схемою кола і параметрами її елементів, то $b_i > 0$. Тому корені p_k – від’ємні дійсні або комплексні-спряжені, які мають від’ємну дійсну частину ($\text{Re } p_k < 0$).

Якщо серед коренів характеристичного рівняння немає кратних, тоді

$$y_{\text{вл}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (1.9)$$

де A_k – сталі інтегрування.

Якщо є комплексно-спряжені корені, наприклад $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_{\text{вл}k}$, то вираз $A_k e^{p_k t} + A_{k+1} e^{p_{k+1} t}$ перетворюється у

$$\begin{aligned} e^{-\delta_k t} (A_k e^{j\omega_{\text{вл}k} t} + A_{k+1} e^{-j\omega_{\text{вл}k} t}) &= e^{-\delta_k t} (M \cos \omega_{\text{вл}k} t + N \sin \omega_{\text{вл}k} t) = \\ &= A e^{-\delta_k t} \sin(\omega_{\text{вл}k} t + \psi), \end{aligned} \quad (1.10)$$

де A, ψ – сталі інтегрування.

Якщо серед n коренів p_k l коренів є кратними дійсному кореню, наприклад p_1 , то

$$y_{\text{вл}}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_l t^{l-1}) e^{p_1 t} + \sum_{k=l+1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (1.11)$$

Якщо є m -кратні спряжені комплексні корені, тоді

$$y_{\text{вл}}(t) = e^{-\delta_1 t} \sum_{i=1}^m t^{i-1} (M_i \cos \omega_{\text{вл}1} t + N_i \sin \omega_{\text{вл}1} t) + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (1.12)$$

З огляду на те, що в ЛЕК корені або їх дійсна частина є від'ємними,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{вл}}(t) = 0.$$

Оскільки вільні процеси в ЛЕК загасають, розв'язок диференціального рівняння $y(t)$ з часом прямує до $y_{\text{вм}}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\text{вм}}(t). \quad (1.13)$$

Теоретично перехідний процес продовжується нескінченно і вимушена складова $y_{\text{вм}}(t)$ є розв'язком рівняння для $t \rightarrow \infty$. Ця обставина дозволяє у випадку постійної або синусоїдної дії визначати $y_{\text{вм}}(t)$ методами теорії кіл, викладеними у першій частині підручника.

Кількість сталих інтегрування A_k у розв'язку рівняння кола збігається з його порядком n . Щоб визначити n сталих A_k , необхідно n рівнянь і n початкових умов. Необхідну кількість рівнянь можна отримати $n-1$ кратним диференціюванням розв'язку (1.4). Початкові значення знаходять, розглядаючи вихідну систему рівнянь Кірхгофа при $t=+0$, в якій незалежні початкові значення відомі з законів комутації.

Нехай розв'язок рівняння кола порядку n має вигляд:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} + y_{\text{вм}}(t). \quad (1.14)$$

Якщо продиференціювати (1.14) послідовно $n-1$ разів, вийде система:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \sum_{k=1}^n p_k A_k e^{p_k t} + y'_{\text{BM}}(t); \\
y''(t) &= \sum_{k=1}^n p_k^2 A_k e^{p_k t} + y''_{\text{BM}}(t); \\
&\dots\dots\dots \\
y^{(n-1)}(t) &= \sum_{k=1}^n p_k^{n-1} A_k e^{p_k t} + y_{\text{BM}}^{(n-1)}(t).
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

Для $t = +0$ співвідношення (1.14) і (1.15) призводять до системи рівнянь відносно A_k :

$$\begin{aligned}
y(+0) &= \sum_{k=1}^n A_k + y_{\text{BM}}(+0); \\
y'(+0) &= \sum_{k=1}^n p_k A_k + y'_{\text{BM}}(+0); \\
y''(+0) &= \sum_{k=1}^n p_k^2 A_k + y''_{\text{BM}}(+0); \\
&\dots\dots\dots \\
y^{(n-1)}(+0) &= \sum_{k=1}^n p_k^{n-1} A_k + y_{\text{BM}}^{(n-1)}(+0).
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

Знаючи початкові значення, тобто ліві частини рівнянь (1.16), знаходять A_k . Наприклад, для кола першого порядку

$$y(0+) = A_1 + y_{\text{BM}}(+0), \text{ звідки } A_1 = y(+0) - y_{\text{BM}}(+0).$$

Отже, аналіз перехідних процесів класичним методом складається з таких етапів:

1. Розрахунок режиму до комутації – визначення початкових умов $i_{Lk}(-0)$, $u_{Ck}(-0)$.
2. Визначення незалежних початкових значень $i_L(+0)$, $u_C(+0)$, використовуючи закони комутації.
3. Складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для моменту часу $t = +0$ (після комутації), отримання диференціального рівняння кола відносно шуканої змінної.
4. Визначення характеристичного рівняння (1.6) і його коренів, розрахунок вільного режиму за формулами (1.9) – (1.12).
5. Знаходження частинного розв'язку рівняння (1.2), тобто розрахунок вимушеного режиму.
6. Визначення залежних початкових значень.
7. Розрахунок сталих інтегрування, виходячи зі співвідношень (1.16).
8. Підсумовування вільних та вимушених складових за формулою (1.4).

Слід пам'ятати, що фізично існують тільки повні струми (напруги), які дорівнюють сумі вимушеної та вільної складових. Саме їх можна вимірювати або спостерігати за допомогою приладів (осцилографа, вольтметра тощо). Щодо них слушні закони комутації. Вимушена та вільна складові є розрахункови-

ми величинами (інакше кажучи, математичною абстракцією), сума яких дає реальні (фізичні) струми і напруги.

Приклад 1.1. Скласти диференціальне рівняння для кола з нульовим (рис.1.3, *a*) і ненульовим (рис.1.3, *б*) первинним запасом енергії.

Розв'язання. Рівняння, що описують процеси в колі, складаються для режиму після комутації. Складемо для схеми (рис.1.3, *a*) систему рівнянь за методом Кірхгофа, наприклад для вузла 1 та контурів K_1 і K_2 :

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0; \\ R_1 i_1(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_3(t) dt + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t); \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t). \end{cases} \quad (1.17)$$

Щоб розв'язати систему (1.17), зведемо її до рівняння відносно якої-небудь однієї змінної, наприклад струму $i_1(t)$. Для цього продиференціюємо друге рівняння системи (1.17):

$$R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i_3(t) = \frac{de(t)}{dt}. \quad (1.18)$$

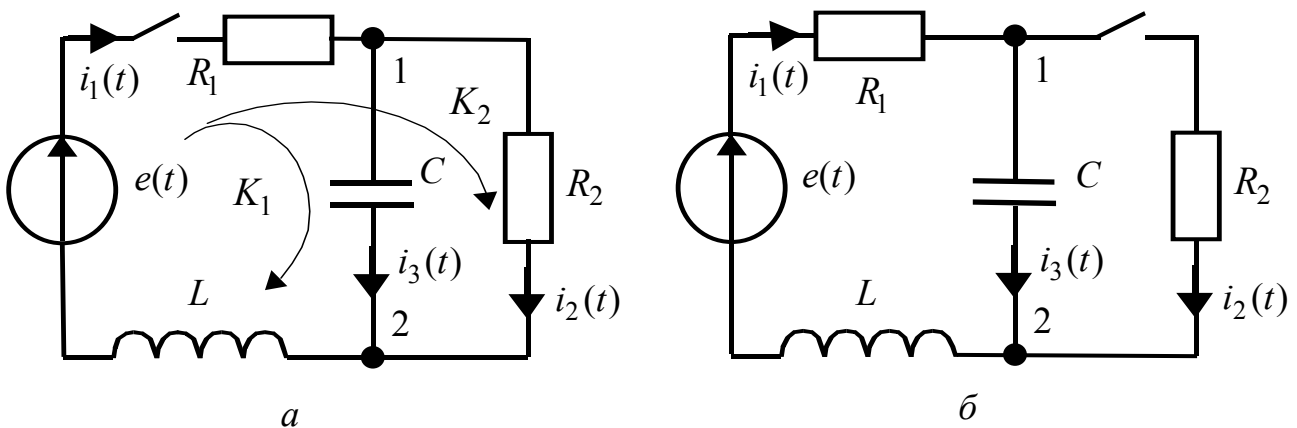


Рисунок 1.3 – Електричні кола: *a* – з нульовими; *б* – з ненульовими початковими умовами

Далі знайдемо з першого рівняння системи (1.17)

$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t), \quad (1.19)$$

а з третього –

$$i_2(t) = \frac{e(t)}{R_2} - \frac{L}{R_2} \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{R_1}{R_2} i_1(t). \quad (1.20)$$

Підставивши (1.20) до (1.19), а далі вираз для $i_3(t)$ до (1.18), здобудемо підсумкове рівняння для струму $i_1(t)$:

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{L + R_1 R_2 C}{R_2 LC} \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} i_1(t) = \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{R_2 LC} e(t). \quad (1.21)$$

Оскільки порядок рівняння (1.21) другий, коло (рис.1.3, а) є колом другого порядку.

Якщо первинний запас енергії кола ненульовий (рис.1.3, б), після комутації схема виглядатиме так само, як і для кола з нульовими початковими умовами, а система рівнянь за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0; \\ R_1 i_1(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_3(t) dt + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t); \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} = e(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

буде аналогічною системі (1.17). Системи (1.17) і (1.22) відрізняються лише нижньою межею інтеграла у другому рівнянні, який можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_3(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_3(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_3(t) dt = U_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i_3(t) dt,$$

де U_{C0} – початкова напруга на ємності в момент комутації.

Оскільки U_{C0} – постійна величина, її похідна за часом дорівнює нулю. Тому перетворення системи (1.22), подібні перетворенням системи (1.17), призводять до рівняння (1.21).

Приклад 1.2. Скласти диференціальне та характеристичне рівняння для кола (рис.1.2), вважаючи відгуком напругу на індуктивності.

Розв’язання. Використовуючи формулу для КПФ

$$H(j\omega) = \frac{U_L}{E} = \frac{I_1 Z_{RL}}{I_1 Z_{вх}} = \frac{\frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L}}{R_1 + \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L}} = \frac{R_2 j\omega L}{j\omega L(R_1 + R_2) + R_1 R_2}, \quad (1.23)$$

за знаменником виразу (1.23) запишемо ліву, а за чисельником (1.23) – праву частину диференціального рівняння кола відносно напруги $u_L(t)$:

$$L(R_1 + R_2) \frac{du_L(t)}{dt} + R_1 R_2 u_L(t) = L R_2 \frac{de(t)}{dt}.$$

Поділивши останнє рівняння на $R_1 R_2$, отримуємо вираз (1.3).

Щоб здобути характеристичне рівняння, замінимо у лівій частині диференціального рівняння (1.3) оператор диференціювання на оператор p :

$$L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} p + 1 = 0. \quad (1.24)$$

Знайдемо характеристичне рівняння в іншій спосіб – прирівнявши до нуля вхідний опір кола $Z_{вх}(j\omega)$ відносно затискачів джерела:

$$R_1 + \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} = 0; \quad j\omega L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + 1 = 0.$$

Після заміни $j\omega$ на p , отримуємо вираз (1.24).

Приклад 1.3. Знайти струм $i_2(t)$ електричного кола, схема якого зображена на рис.1.4, а.

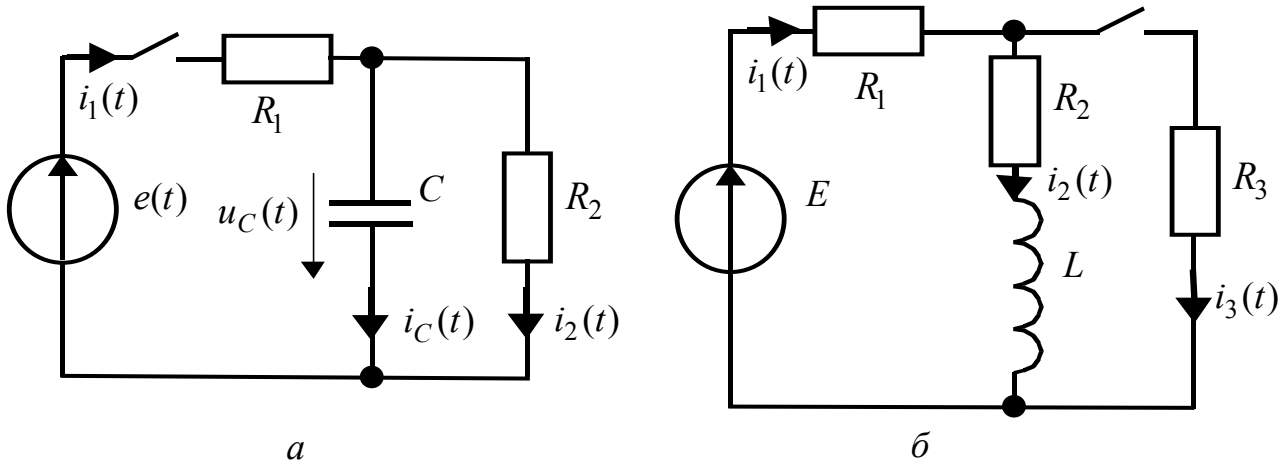


Рисунок 1.4 – Схеми електричних кіл до прикладів 1.3 і 1.4

Розв’язання. Початкові умови у колі нульові. Запишемо систему рівнянь Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_C(t) = 0; \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = e(t); \\ u_C(t) - R_2 i_2(t) = 0; \end{cases} \quad (1.25)$$

та зведемо її до одного рівняння відносно струму $i_2(t)$:

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_2(t) = \frac{1}{R_1 R_2 C} e(t). \quad (1.26)$$

Складемо характеристичне рівняння

$$p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = 0,$$

знайдемо його корінь:

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

Розв’язок рівняння (1.26) згідно з класичним методом має вигляд:

$$i_2(t) = A_1 e^{p_1 t} + i_{2\text{вм}}(t), \quad (1.27)$$

де вимушена складова струму $i_{2\text{вм}}(t)$ може бути записана конкретно, якщо буде заданий закон змінювання вхідної дії. Визначення вимушеної складової відгуку в режимі постійної та синусоїдної дії розглянуто в прикладі 1.4 та під-розд. 1.2, 1.4.

Знайдемо сталу інтегрування з рівняння (1.27), підставивши $t = +0$:

$$i_2(+0) = A_1 + i_{2\text{ВМ}}(+0). \quad (1.28)$$

Початкове значення струму $i_2(+0)$ визначимо з третього рівняння системи (1.25) при $t = +0$:

$$u_C(+0) - R_2 i_2(+0) = 0.$$

Оскільки початкові умови нульові, то $u_C(-0) = 0$. За другим законом комутації $u_C(+0) = u_C(-0)$. Отже, $i_2(+0) = 0$ і з виразу (1.28) знаходимо:

$$A_1 = -i_{2\text{ВМ}}(+0); \quad i_2(t) = -i_{2\text{ВМ}}(+0)e^{p_1 t} + i_{2\text{ВМ}}(t).$$

Приклад 1.4. Електричне коло (рис.1.4, б) увімкнено до джерела постійної ЕРС. Визначити струм $i_3(t)$. Параметри кола: $E = 12$ В, $R_1 = R_3 = 10$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $L = 2$ мГн.

Розв'язання.

1. Розглядуване коло має ненульові початкові умови. За законами Кірхгофа складемо систему рівнянь для миттєвих значень напруг та струмів для моменту часу $t = +0$:

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t); \\ R_1 i_1(t) + R_3 i_3(t) = E; \\ R_3 i_3(t) - L \frac{di_2(t)}{dt} - R_2 i_2(t) = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Розв'язуючи цю систему відносно струму $i_3(t)$, знаходимо диференціальне рівняння:

$$L(R_1 + R_3) \frac{di_3(t)}{dt} + i_3(t)[R_1 R_3 + R_2(R_1 + R_3)] = ER_2, \quad (1.30)$$

з якого визначаємо характеристичне рівняння:

$$L(R_1 + R_3)p + (R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2) = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння становить:

$$p_1 = -\frac{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2}{L(R_1 + R_3)} = 4000 \text{ с}^{-1}. \quad (1.31)$$

Примітка. Зазначимо, що іноді задачу аналізу перехідного процесу у колі першого порядку розв'язують, виключаючи етап складання диференціального рівняння. При цьому корінь характеристичного рівняння знаходять за допомогою сталої часу $\tau = -1/p_1$ (див. підрозд.1.2). Оскільки характеристичне рівняння кола (як ліва частина диференціального) не залежить від зовнішньої дії, сталу часу можна визначати, розглядаючи вільний процес у колі. При цьому передбачається, що джерела напруги розімкнено, джерела струму – замкнено, а в реактивному елементі накопичено деякий запас енергії. Накопичувальний елемент розглядається як джерело енергії, а інша частина кола – як його навантаження.

Для кола R, C (див. п.1.2.1) стала часу $\tau_C = R_e C$, для кола R, L (див. п.1.2.3) стала часу $\tau_L = L/R_e$, де R_e – еквівалентний опір кола відносно затискачів накопичувального елемента.

Оскільки джерелом вільних процесів у схемі є індуктивність, знайдемо значення еквівалентного опору відносно затискачів індуктивності:

$$R_e = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}{R_1 + R_3};$$

$$p_1 = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R_e}{L} = -\frac{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_3 R_2}{L(R_1 + R_3)}.$$

Як бачимо, отриманий результат збігається з виразом (1.31).

Розв'язок рівняння (1.30) шукаємо у вигляді:

$$i_3(t) = A_1 e^{p_1 t} + i_{3\text{ВМ}}(t). \quad (1.32)$$

Щоб знайти вимушену складову, розглянемо момент часу $t \rightarrow \infty$. В установленому режимі постійного струму опір індуктивності дорівнює нулю. За еквівалентною схемою (рис.1.5, а) знаходимо шуканий струм $i_{3\text{ВМ}}(t) = i_3(\infty)$, користуючись законом Ома та формулою розподілу струмів у паралельних вітках:

$$i_3(\infty) = i_1(\infty) \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{ER_2}{[R_1 + (R_2 R_3)/(R_2 + R_3)](R_2 + R_3)} = \frac{12 \cdot 3}{(10 + 30/13) \cdot 13} = 0,225 \text{ А}.$$

3. Щоб визначити сталу інтегрування A_1 , розглянемо рівняння (1.32) при $t = +0$:

$$i_3(+0) = A_1 + i_{3\text{ВМ}}(+0), \text{ звідки}$$

$$A_1 = i_3(+0) - i_{3\text{ВМ}}(+0). \quad (1.33)$$

Оскільки шуканий струм $i_3(t)$ не є струмом в індуктивному елементі, до нього не можна безпосередньо застосувати закон комутації. У цьому випадку $i_3(+0)$ є залежним початковим значенням, яке можна знайти двома способами:

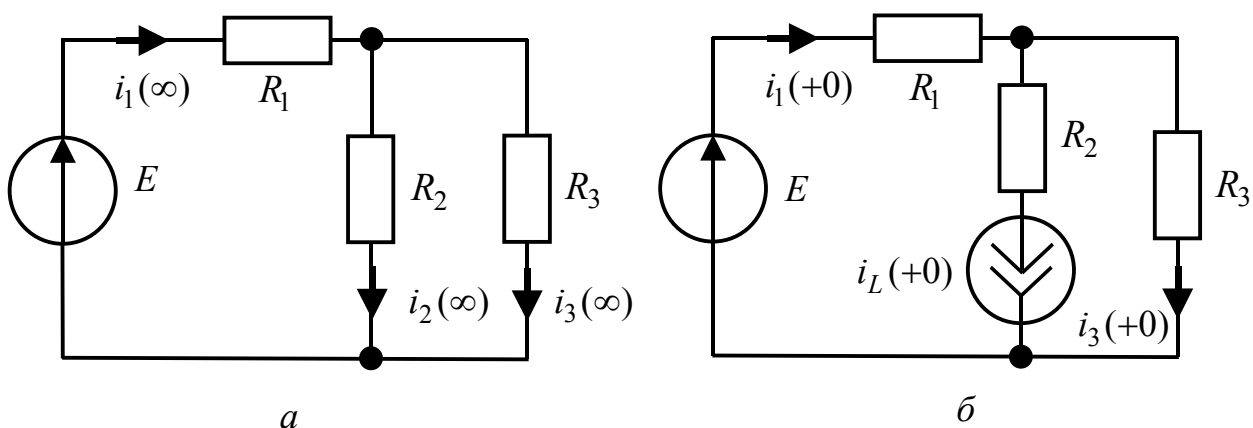


Рисунок 1.5 – Еквівалентні схеми кола (рис.1.4, б) для моментів часу: а – $t \rightarrow \infty$; б – $t = +0$

а) для моменту $t = +0$, підставивши перше рівняння системи (1.29) до другого, матимемо:

$$R_1[i_2(+0) + i_3(+0)] + R_3 i_3(+0) = E, \quad \text{звідки } i_3(+0) = \frac{E - R_1 i_2(+0)}{R_1 + R_3}.$$

Струм $i_2(+0)$ можна визначити з першого закону комутації як струм в індуктивності:

$$i_2(+0) = i_2(-0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12}{10 + 3} = 0,923 \text{ А.}$$

Тоді
$$i_3(+0) = \frac{12 - 10 \cdot 0,923}{10 + 10} = 0,139 \text{ А;}$$

б) складемо схему кола для моменту $t = +0$ (рис.1.5, б), враховуючи, що за ненульових початкових умов індуктивність еквівалентна джерелу струму $i_2(+0)$. Оскільки в цій схемі є два джерела, скористуємось методом накладання:

$$i_3(+0) = i_{3a}(+0) - i_{3б}(+0) = \frac{E}{R_1 + R_3} - i_2(+0) \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0,6 - 0,462 = 0,139 \text{ А.}$$

Отже, з формули (1.33) $A_1 = 0,139 - 0,225 = -0,086 \text{ А}$, а кінцевий вираз для струму матиме вигляд:

$$i_3(t) = -0,086e^{-4000t} + 0,225 \text{ А.}$$

Приклад 1.5. До замикання контакту в колі (рис.1.6, а) був усталений режим постійного струму. Знайти: 1) струми в усталеному режимі при $t \rightarrow \infty$; 2) струми та їх перші похідні за часом для моменту замикання контакту $t = +0$. Дано: $R_1 = R_2 = R_4 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = R_5 = 200 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $E_1 = 120 \text{ В}$.

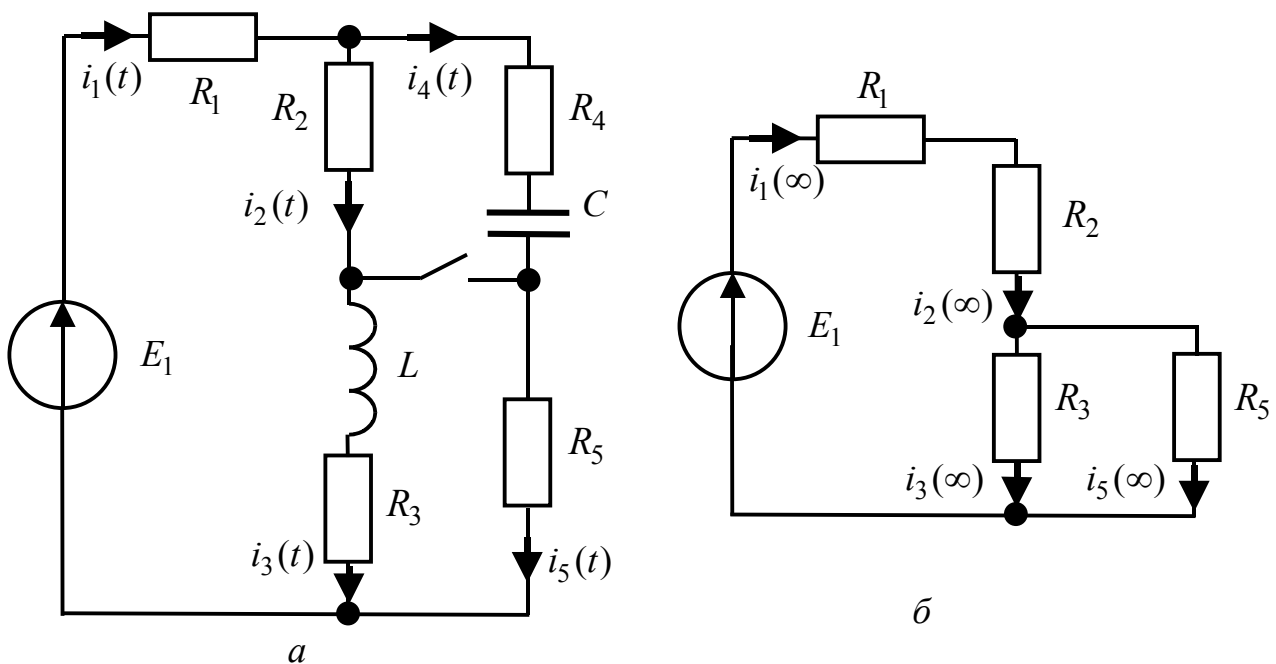


Рисунок 1.6 – Схеми кола для моментів часу: а – $t = -0$; б – $t \rightarrow \infty$

Розв'язання.

1. В усталеному режимі при $t \rightarrow \infty$ опір індуктивності прямує до нуля, а опір ємності – до нескінченності. Виходячи з еквівалентної схеми (рис.1.6, б), знаходимо:

$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3 R_5 / (R_3 + R_5)} = \frac{120}{100 + 100 + 100} = 0,4 \text{ А};$$
$$i_3(\infty) = i_5(\infty) = i_1(\infty) \frac{R_5}{R_3 + R_5} = 0,4 \frac{1}{2} = 0,2 \text{ А}; \quad i_4(\infty) = 0.$$

2. Розрахунок режиму для $t = +0$ почнемо з визначення незалежних початкових значень, користуючись усталеними значеннями струмів та напруг до комутації і законами комутації:

$$i_3(+0) = i_3(-0) = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120}{100 + 100 + 200} = 0,3 \text{ А};$$
$$u_C(+0) = u_C(-0) = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120 \cdot (100 + 200)}{100 + 100 + 200} = 90 \text{ В}.$$

За ненульових початкових умов індуктивність еквівалентна джерелу струму $i_3(+0)$, а ємність – джерелу ЕРС $u_C(+0)$. Еквівалентна схема кола при $t = +0$ показана на рис.1.7, а. Щоб розрахувати струми, скористуємось методом контурних струмів, попередньо перетворивши джерело струму $i_3(+0)$ до джерела ЕРС $E_e = i_3(+0)R_5 = 0,3 \cdot 200 = 60 \text{ В}$ (рис.1.7, б).

Запишемо матриці опорів та контурних ЕРС:

$$(R) = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 100 \\ 100 & 200 \end{pmatrix} \text{ Ом}; \quad (E) = \begin{pmatrix} E_1 + E_e \\ u_C(0+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix} \text{ В}.$$

Обчислимо контурні струми:

$$I_I = \frac{1}{\Delta_R} (180 \cdot \Delta_{11} + 90 \cdot \Delta_{21}) = \frac{180 \cdot 200 + 90 \cdot (-100)}{70000} = 0,386 \text{ А};$$
$$I_{II} = \frac{1}{\Delta_R} (180 \cdot \Delta_{12} + 90 \cdot \Delta_{22}) = \frac{180 \cdot (-100) + 90 \cdot 400}{70000} = 0,257 \text{ А}$$

та шукані струми віток: $i_1(+0) = I_I = 0,386 \text{ А}; \quad i_2(+0) = I_I + I_{II} = 0,643 \text{ А};$
 $i_4(+0) = -I_{II} = -0,257 \text{ А}; \quad i_5(+0) = I_I - i_3(+0) = 0,086 \text{ А}.$

Похідні струмів знайдемо, продиференціювавши за часом систему рівнянь Кірхгофа для схеми (рис.1.7, б):

$$\begin{cases} i_1'(t) = i_2'(t) + i_4'(t); \\ (R_1 + R_5)i_1'(t) + R_2 i_2'(t) = 0; \\ R_2 i_2'(t) - R_4 i_4'(t) = u_C'(t). \end{cases} \quad (1.34)$$

Враховуючи, що $u_C'(t) = \frac{i_4(+0)}{C}$, і розв'язуючи систему (1.34) для моменту $t = +0$ відносно похідної струму $i_4'(+0)$, отримаємо:

$$i_4'(+0) = -\frac{i_4(+0)}{C \left[R_4 + \frac{R_2(R_1 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_5} \right]} = -\frac{-0,257}{10^{-6} \cdot (100 + 100 \cdot 300 / 400)} = 1468 \text{ A} \cdot \text{c}^{-1};$$

$$i_2'(+0) = -\frac{i_4'(+0)(R_1 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_5} = -\frac{1468 \cdot 300}{400} = -1101 \text{ A} \cdot \text{c}^{-1};$$

$$i_1'(+0) = i_2'(+0) + i_4'(+0) = -1101 + 1468 = 367 \text{ A} \cdot \text{c}^{-1}.$$

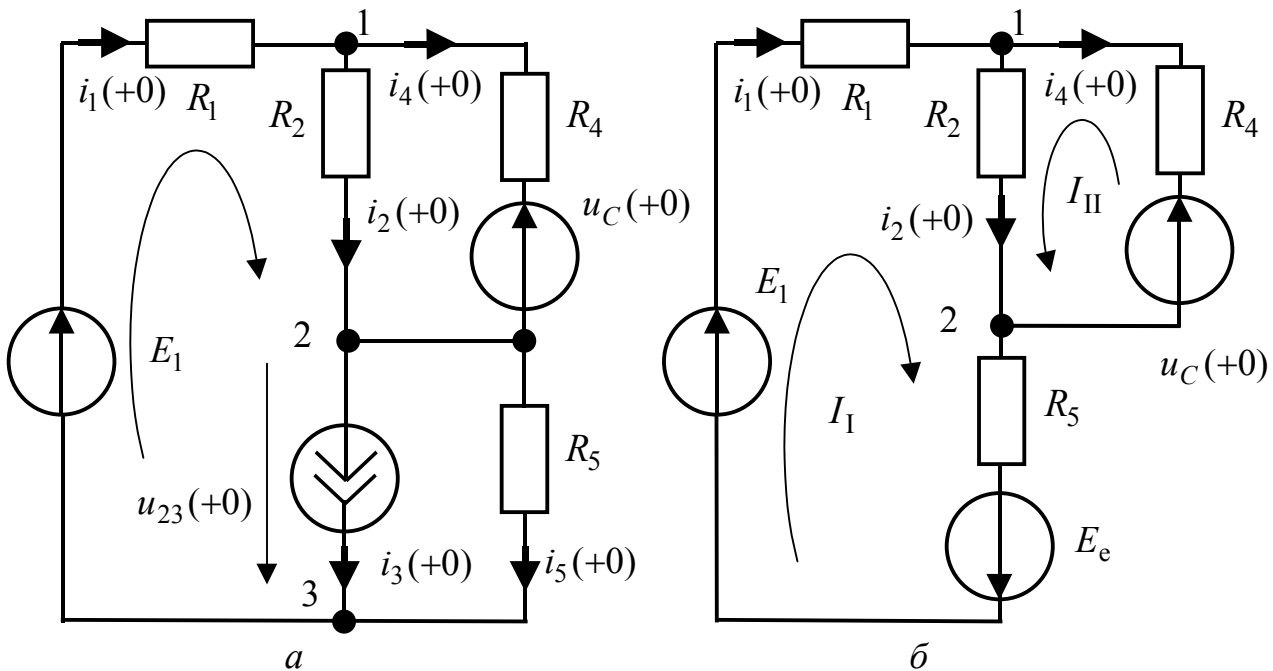


Рисунок 1.7 – Еквівалентні схеми кола при $t = +0$

Обчисливши напругу $u_{23}(+0)$ за другим законом Кірхгофа для першого контуру (див. рис.1.7, а):

$$u_{23}(+0) = E - R_1 i_1(+0) - R_2 i_2(+0) = 120 - 100 \cdot 0,386 - 100 \cdot 0,643 = 17 \text{ В},$$

розрахуємо похідну струму в індуктивності $i_3'(+0)$ як

$$i_3'(+0) = \frac{u_{23}(+0)}{L} = \frac{17}{0,01} = 1700 \text{ A} \cdot \text{c}^{-1},$$

а похідну струму $i_5'(+0)$ – за першим законом Кірхгофа для вузла 3 (див. рис.1.7, а): $i_5'(+0) = i_1'(+0) - i_3'(+0) = 367 - 1700 = -1333 \text{ A} \cdot \text{c}^{-1}$.

Приклад 1.6. До електричного кола, яке утворюють послідовно з'єднані елементи $L = 40$ мГн, R та C (рис.1.8, а), прикладено постійну напругу $U = 120$ В. Конденсатор замкнено. Раптовим розімкненням контакту конденсатор вводиться у коло. Знайти напругу на обкладинках конденсатора та струм у двох випадках: 1) $R = 100$ Ом, $C = 25$ мкФ; 2) $R = 80$ Ом, $C = 5$ мкФ. Накреслити криву $u_C(t)$.

Розв'язання.

Розв'яжемо задачу, виключаючи етап складання диференціального рівняння. Напругу на конденсаторі знайдемо у вигляді суми вимушеного та вільного значень: $u_C(t) = u_{CВл}(t) + u_{CВМ}(t)$.

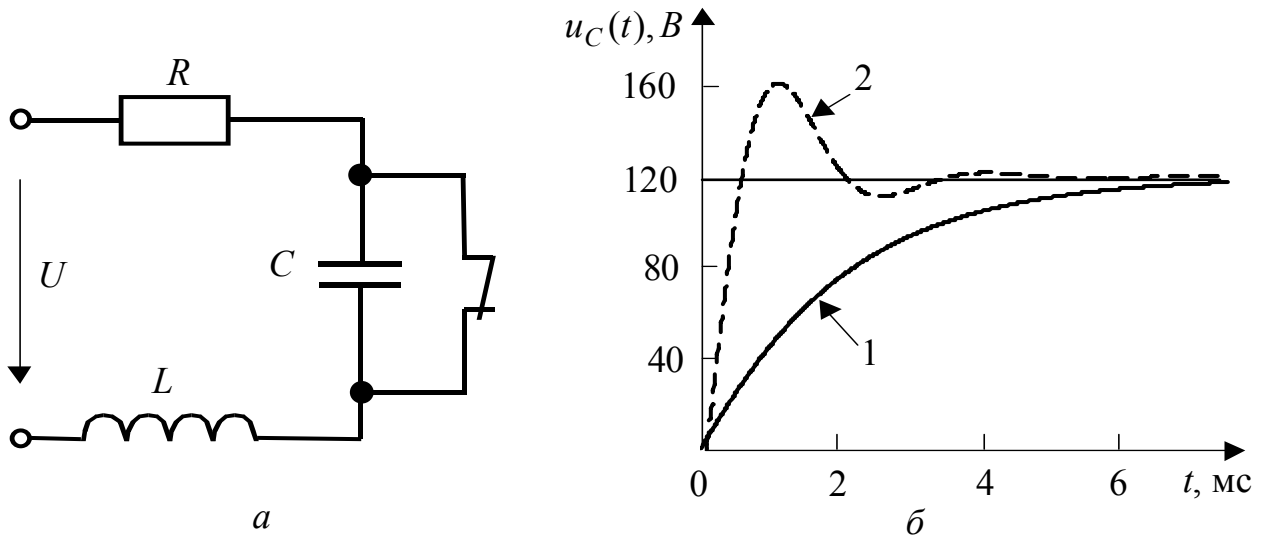


Рисунок 1.8 – До прикладу 1.6: *a* – схема; *б* – графіки часової залежності напруги на ємності

Вимушена складова напруги в усталеному режимі $u_{CВМ}(t) = 120$ В, оскільки після розмикання ключа по закінченні перехідного процесу конденсатор буде заряджений до рівня прикладеної до кола постійної напруги.

Щоб визначити вільну складову, прирівняємо до нуля вхідний опір кола $Z_{ВХ}(j\omega)$, замінивши $j\omega$ на p :

$$R + pL + 1/pC = 0; \quad p^2LC + pRC + 1 = 0.$$

Здобує характеристичне рівняння має два корені:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (1.35)$$

Для кожного з двох заданих випадків обчислимо корені $p_{1,2}$, а також вільну складову шуканої напруги.

1. За формулою (1.35) знаходимо: $p_1 = -2000 \text{ с}^{-1}$, $p_2 = -500 \text{ с}^{-1}$. Для різних дійсних коренів характеристичного рівняння вільна складова має вигляд (1.9):

$$u_{CВл}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

де A_1, A_2 – сталі інтегрування.

Підсумовуючи вільну та вимушену складові, матимемо:

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + u_{CВМ}(t).$$

Щоб розрахувати A_1, A_2 , скористаємось формулами (1.15), (1.16):

$$\begin{cases} u_C(+0) = A_1 + A_2 + 120; \\ u'_C(+0) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases} \quad (1.36)$$

Згідно з законом комутації за нульових початкових умов $u_C(-0) = u_C(+0) = 0$. Щоб знайти значення похідної $u'_C(+0)$, запишемо диференціальне співвідношення між напругою і струмом в ємності:

$$\frac{du_C(+0)}{dt} = \frac{i_C(+0)}{C}.$$

Оскільки в момент $t = +0$ за нульових початкових умов ємність еквівалентна короткому замиканню, а індуктивність була замкнена в усталеному режимі до комутації, струм $i_C(+0) = U / R$.

Тоді система (1.36) матиме вигляд:

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + 120; \\ \frac{U}{RC} = p_1 A_1 + p_2 A_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -A_1 - 120; \\ 48000 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $A_1 = 8 \text{ В}$, $A_2 = -128 \text{ В}$.

Отже, $u_C(t) = 120 + 8e^{-2000t} - 128e^{-500t} \text{ В}$ (рис.1.8, б, крива 1);

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -0,4e^{-2000t} + 1,6e^{-500t} \text{ А}.$$

2. За формулою (1.35) $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{вл}} = -1000 \pm j2000 \text{ с}^{-1}$. Для комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння вільна складова має вигляд (1.10):

$$u_{C_{\text{вл}}}(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{вл}} t + \psi),$$

де A , ψ – сталі інтегрування.

Підсумовуючи вільну та вимушену складові, матимемо:

$$u_C(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{вл}} t + \psi) + u_{C_{\text{вм}}}(t).$$

Складемо систему рівнянь аналогічно системі (1.36):

$$\begin{cases} 0 = A \sin \psi + 120; \\ \frac{U}{RC} = -\delta A \sin \psi + A\omega_{\text{вл}} \cos \psi. \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння $A = -\frac{120}{\sin \psi}$ та підставимо до другого:

$$3 \cdot 10^5 = 120\delta - 120\omega_{\text{вл}} \text{ctg} \psi, \text{ звідки } \psi = \text{arcctg}(-3/4) = -53^\circ; A = 150 \text{ В}.$$

Запишемо кінцевий вираз напруги на конденсаторі:

$$u_C(t) = 120 + 150e^{-1000t} \sin(2000t - 53^\circ) \text{ В} \text{ (рис.1.8, б, крива 2)}.$$

Зазначимо, що вільну складову також можна знайти, використовуючи функцію косинус:

$$u_{C_{\text{вл}}}(t) = A_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t + \psi_1).$$

Розраховуючи аналогічно сталі інтегрування A_1 , ψ_1 , отримаємо:

$$u_C(t) = 120 - 150e^{-1000t} \cos(2000t + 37^\circ) \text{ В}.$$

Диференціюючи $u_C(t)$ і помножуючи на C , знаходимо струм;

$$i_C(t) = 0,75 \cdot 10^{-3} e^{-1000t} [1000 \cos(2000t + 37^\circ) + 2000 \sin(2000t + 37^\circ)] = \\ = 0,75 e^{-1000t} \sqrt{5} \sin(2000t + 37^\circ + \arctg 0,5) = 1,68 e^{-1000t} \sin(2000t + 64^\circ) \text{ А.}$$

1.2 Перехідні процеси в колах R, L та R, C

1.2.1 Вільний режим у колі R, C

Нехай коло R, C (рис.1.9, а) має ненульові початкові умови: $u_C(-0) = E$.

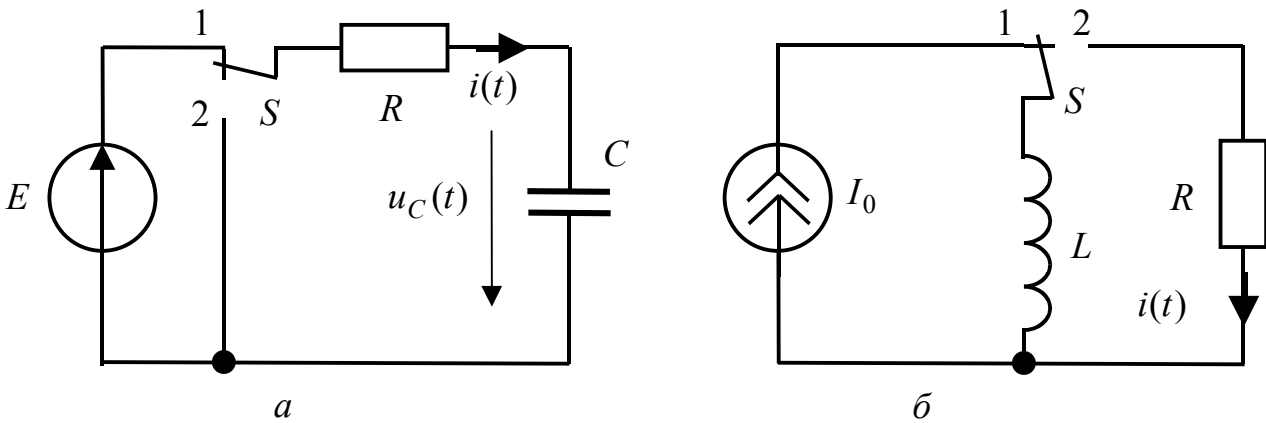


Рисунок 1.9 – Схеми електричних кіл: а – R, C ; б – R, L

Напруги на ємності $u_{C_{\text{вл}}}(t)$ та опорі $u_{R_{\text{вл}}}(t) = Ri_{\text{вл}}(t) = RC \frac{du_{C_{\text{вл}}}(t)}{dt}$ задовольняють другому закону Кірхгофа, згідно з яким

$$u_{R_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вл}}}(t) = 0, \quad \text{або} \quad RC \frac{du_{C_{\text{вл}}}(t)}{dt} + u_{C_{\text{вл}}}(t) = 0. \quad (1.37)$$

Диференціальному рівнянню (1.37) відповідає характеристичне $pCR + 1 = 0$.

Це рівняння має єдиний корінь $p = -1/RC$, який є дійсним від'ємним числом. Інакше, $p_1 = -1/\tau$, де стала $\tau = RC$ має вимірність часу: $[\tau] = [RC] = \text{Ом} \times \text{Ф} = \text{Ом} \times \text{А} \times \text{с} / \text{В} = \text{с}$. Вона зветься **сталюю часу** кола.

Отже, загальний розв'язок рівняння (1.37) такий:

$$u_{C_{\text{вл}}}(t) = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.38)$$

Стала A_1 розраховується з початкових умов з використанням закону комутації. При $t = +0$ за формулою (1.38) $u_C(+0) = A_1 e^0 = A_1$; згідно з законом комутації за ненульових початкових умов $u_C(+0) = u_C(-0) = E$. Тобто $A_1 = E$, і

вираз (1.38) приймає вигляд: $u_{C_{\text{вл}}}(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Струм у колі та напругу на опорі можна знайти за законом Ома:

$$i_{\text{вЛ}}(t) = C \frac{du_{\text{СВЛ}}(t)}{dt} = -\frac{C}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; u_{R_{\text{ВЛ}}}(t) = R i_{\text{вЛ}}(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ де } \tau = RC.$$

Відповідні графіки зображено на рис.1.10, а. З рисунку видно, що згідно з другим законом Кірхгофа в будь-який момент часу алгебраїчна сума напруг у колі дорівнює нулю.

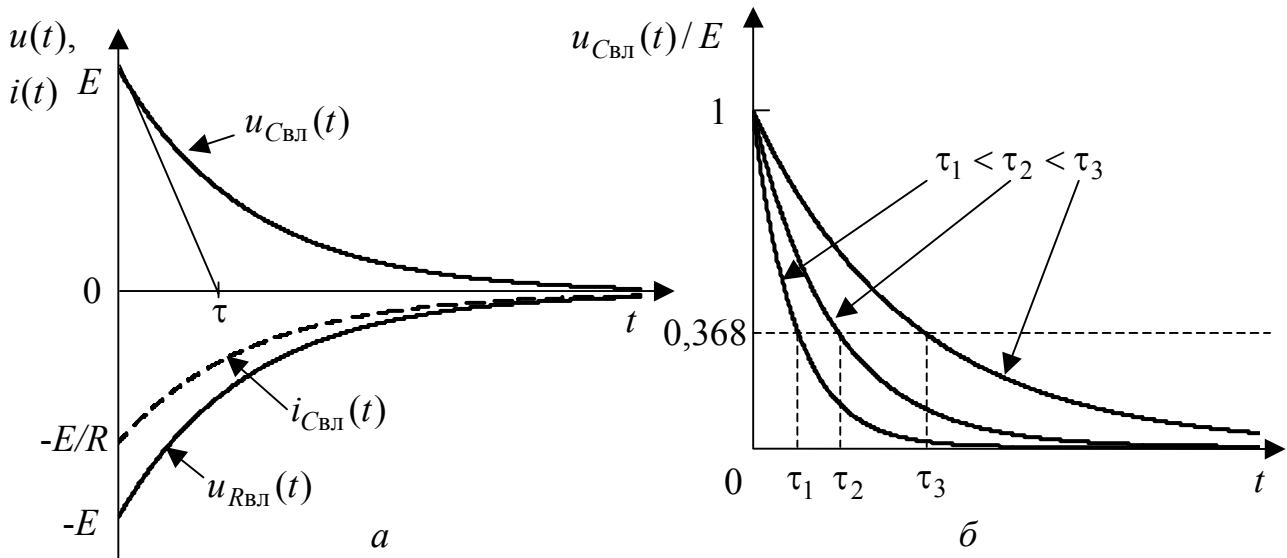


Рисунок 1.10 – Графіки часових залежностей струму і напруг кола R, C в режимі вільних коливань

З'ясувати зміст сталої часу можна, поклавши $t = \tau$. Тоді $u_{\text{С}}(\tau) = -u_{\text{R}}(\tau) = E/e$; $i(\tau) = -\frac{E}{R \cdot e}$. Отже, стала часу τ дорівнює часовому інтервалу, за який напруга або струм в колі R, C зменшуються за абсолютною величиною у вільному режимі в $e = 2,718$ рази (37% від початкового значення).

Інакше, стала часу електричного кола – величина, що характеризує електричне коло з одним інерційним елементом (індуктивністю чи ємністю) і дорівнює довжині піддотичної до кривої вільної складової перехідного струму (рис.1.10, а). Дійсно, $\frac{du_{\text{СВЛ}}(t)}{dt} = -\frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{u_{\text{СВЛ}}(t)}{\tau}$. Графік функції $u_{\text{СВЛ}}(t)/E$ для різних значень τ наведено на рис.1.10, б, а числові значення – у табл.1.1.

Таблиця 1.1 – Числові значення функції $u_{\text{СВЛ}}(t)$

t/τ	1	2	2,3	3	4,6
$u_{\text{СВЛ}}(t)/E$	0,368	0,136	0,1	0,05	0,01

Із знайденого розв'язку виходить, що процес зменшення напруги та струму продовжується нескінченно, і лише при $t \rightarrow \infty$ коло переходить до режиму спокою, коли вся енергія $CE^2/2$, що накопичена у ємності, буде виділена в опорі R у вигляді теплової енергії, тобто коли $\int_0^{\infty} p(t)dt = CE^2/2$, де $p = i^2(t)R$ – потужність.

В інженерній діяльності користуються різними критеріями практичної тривалості перехідного процесу $t_{\text{пер}}$. Наприклад, в техніці сильних струмів вона приймається рівною $t_{\text{пер}} = (5...6)\tau$. В радіотехніці вільні процеси вважають закінченими при $t > 4,6\tau$, коли $u_C(t) < 0,01E$, тобто **тривалість перехідного процесу** становить $t_{\text{пер}} = 4,6\tau$.

1.2.2 Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, C

У колі R, C , яке зображено на рис.1.9, *a*, увімкненню джерела E відповідає зміна положення перемикача S : $2 \rightarrow 1$. При цьому існують нульові початкові умови: $u_C(-0) = 0$. Згідно з другим законом Кірхгофа:

$$Ri(t) + u_C(t) = E; \quad RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E. \quad (1.39)$$

За класичним методом розв'язок диференціального рівняння (1.39) представляють у вигляді: $u_C(t) = u_{C_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вм}}}(t)$.

Характеристичне рівняння $pRC + 1 = 0$ має корінь $p_1 = -1/RC = -1/\tau$. Загальний розв'язок рівняння (1.39) (або вільна складова) збігається з (1.38). Оскільки при $t \rightarrow \infty$ конденсатор заряджається до рівня E , то вимушена складова $u_{C_{\text{вм}}} = E$. Тоді

$$u_C(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + E. \quad (1.40)$$

Сталу інтегрування A_1 знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} u_C(+0) = A_1 + E; \\ u_C(-0) = 0. \end{cases}$$

Згідно з законом комутації $u_C(-0) = u_C(+0)$. Тоді $A_1 + E = 0$, $A_1 = -E$.

Отже, за нульових початкових умов можна записати:

$$u_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}});$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{EC}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad u_R(t) = Ri(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Графіки отриманих залежностей зображені на рис.1.11, *a*. Слід звернути увагу на те, що в момент комутації струм кола, а отже, і напруга $u_R(t)$ зростають стрибкоподібно.

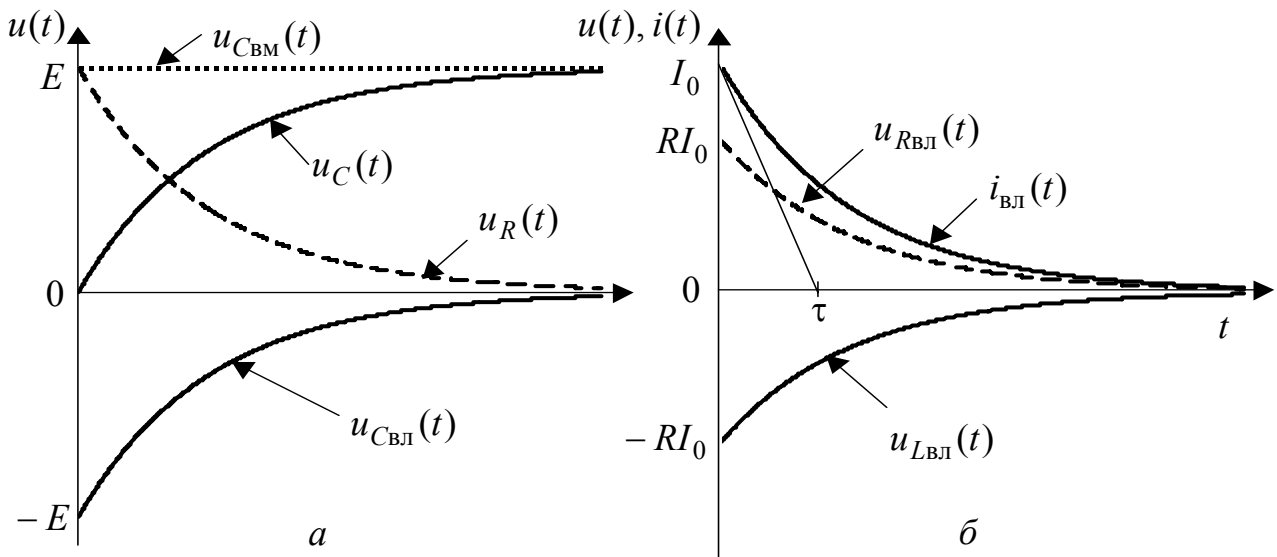


Рисунок 1.11 – Графіки часових залежностей: *a* – напруг кола R, C ; *б* – вільних складових струму і напруг кола R, L

1.2.3 Вільний режим у колі R, L

Вільний режим у колі R, L виникає за рахунок енергії, накопиченої в магнітному полі індуктивності. Схема, зображена на рис.1.9, *б*, має ненульові початкові умови: $i_L(-0) = I_0$. Тому при замиканні перемикача у вітці R, L виникає вільний процес.

Згідно з другим законом Кірхгофа:

$$u_{RВЛ}(t) + u_{LВЛ}(t) = 0; \quad Ri_{ВЛ}(t) + L \frac{di_{ВЛ}(t)}{dt} = 0. \quad (1.41)$$

Рівняння (1.41) аналогічне і дуальне до (1.37) відносно шуканої змінної. Відповідне характеристичне рівняння $pL + R = 0$ має єдиний корінь $p_1 = -R/L = -1/\tau$ ($\tau = L/R$), який є дійсним від'ємним числом. Тому загальний розв'язок рівняння (1.41) матиме вигляд:

$$i_{ВЛ}(t) = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.42)$$

Значення сталої A_1 отримують з початкових умов і рівняння (1.42): $i(+0) = A_1$, $i(-0) = I_0$, отже $A_1 = I_0$.

Тоді

$$i_{ВЛ}(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad u_{RВЛ}(t) = Ri_{ВЛ}(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad u_{LВЛ}(t) = L \frac{di_{ВЛ}(t)}{dt} = -\frac{L}{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Стала часу τ має той самий зміст, що й у колі RC . Тривалість вільного процесу $t_{пер}$ тим більше, чим більше індуктивність L і менше опір R (рис.1.11, *б*).

1.2.4 Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L

Схема аналізованого кола зображена на рис.1.12, *a*. Початкові умови нульові: $i_L(-0) = 0$. Згідно з другим законом Кірхгофа після переведення перемикача до положення "2" алгебраїчна сума напруг на елементах кола дорівнюватиме E :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E. \quad (1.43)$$

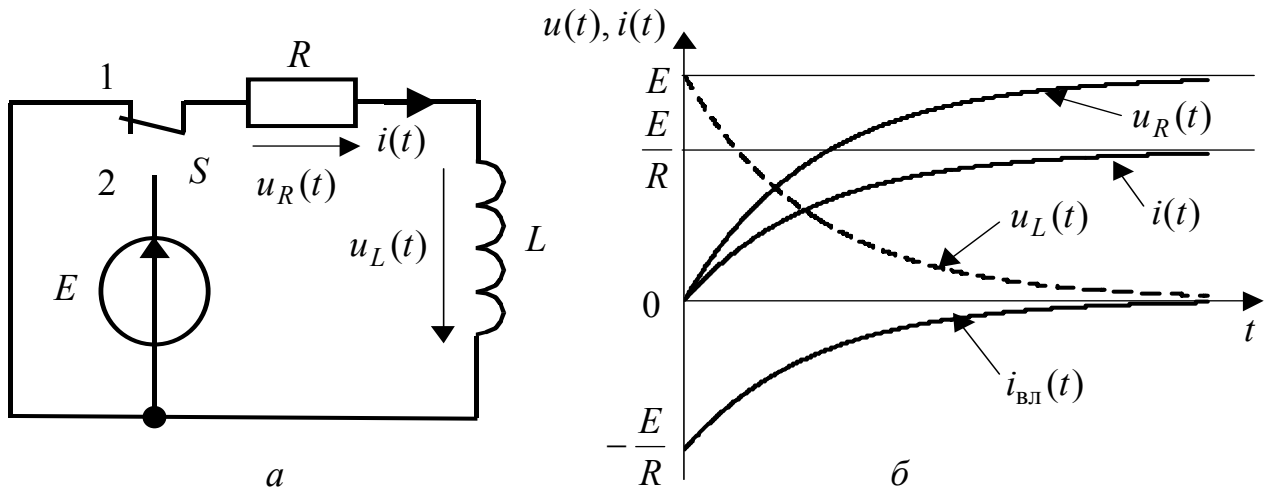


Рисунок 1.12 – Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L :
a – схема; *б* – графіки струму і напруг

За класичним методом розв'язок (1.43) має вигляд:

$$i(t) = i_{\text{ВЛ}}(t) + i_{\text{ВМ}}(t).$$

Характеристичне рівняння $Lp + R = 0$ має корінь $p_1 = -R/L = -1/\tau$. Тому вільна складова збігається з виразом (1.42). Оскільки при $t \rightarrow \infty$ струм у колі становить $i(t) = E/R$ (для постійного струму індуктивність еквівалентна короткому замиканню), то вимушена складова $i_{L_{\text{ВМ}}}(t) = E/R$.

Тоді $i(t) = A_1 e^{p_1 t} + E/R$. Визначивши сталу A_1 :

$$i_L(+0) = A_1 + E/R; \quad i_L(-0) = 0; \quad A_1 = -E/R,$$

можна записати:

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right);$$

$$u_R(t) = Ri(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{LE}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Відповідні графіки зображені на рис.1.12, *б*.

Порівняння розв'язків для кіл R, C і R, L показує, що за нульових початкових умов і ступінчастої дії струм у колі R, L і напруга на ємності у колі R, C змінюються за однаковим законом. Струм $i_L(t)$, поступово зростаючи від нуля при $t=0$, асимптотично наближається до значення $I = E/R$. Напруга на індуктивності $u_L(t)$ в момент комутації змінюється стрибком. У колі при $t \rightarrow \infty$ встановлюється режим постійного струму: $i(\infty) = E/R$, $u_L(\infty) = 0$, $u_R(\infty) = E$. Тривалість перехідного процесу практично оцінюється за тими ж критеріями, що й у колі R, C .

1.3 Перехідні процеси у колі R, L, C

З особливостями перехідних процесів у колі R, L, C доцільно ознайомитись, розглянувши послідовне з'єднання елементів (рис.1.13, *a*) і припустивши, що у попередній момент до короткого замикання кола електромагнітна енергія зосереджена в ємності, а струм в індуктивності дорівнює нулю: $u_C(-0) = E$, $i_L(-0) = 0$.

Щоб проаналізувати вільний режим, складають рівняння

$$u_{C_{\text{вл}}}(t) + R i_{\text{вл}}(t) + L \frac{di_{\text{вл}}(t)}{dt} = 0$$

і розв'язують його відносно будь-якої напруги або струму кола, наприклад, відносно напруги на ємності, скориставшись співвідношенням

$$i_{\text{вл}}(t) = C \frac{du_{C_{\text{вл}}}(t)}{dt}.$$

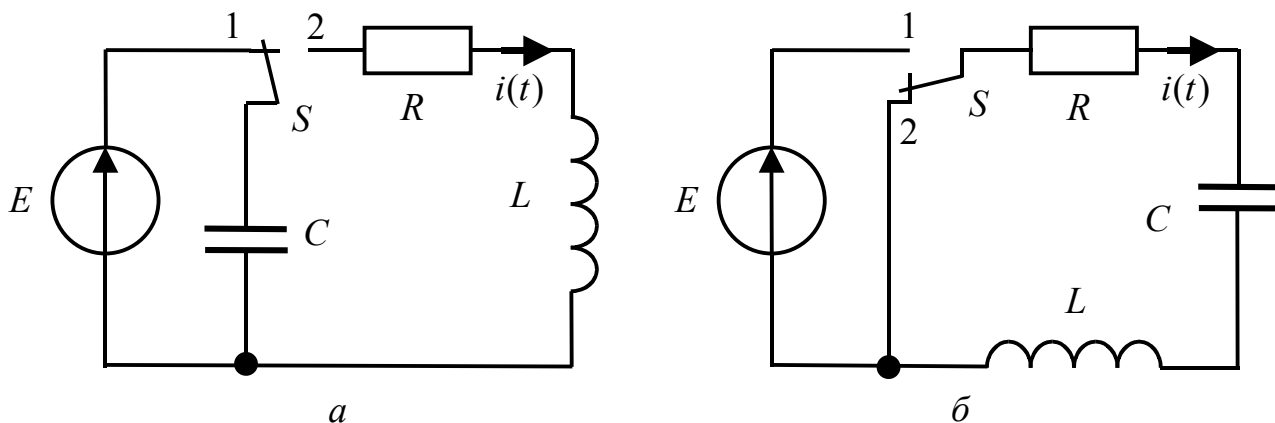


Рисунок 1.13 – Схеми кола R, L, C в режимах: *a* – вільних; *б* – вимушених коливань

В результаті виходить диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{du_{C_{\text{вл}}}^2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{C_{\text{вл}}}(t)}{dt} + \frac{u_{C_{\text{вл}}}(t)}{LC} = 0, \quad (1.44)$$

або
$$\frac{du_{C_{\text{вл}}}^2(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{du_{C_{\text{вл}}}(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 u_{C_{\text{вл}}}(t) = 0,$$

де $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\delta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт загасання.

Диференціальному рівнянню (1.44) відповідає характеристичне рівняння

$$p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2 = 0, \quad (1.45)$$

яке має два корені $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_{\text{рез}}^2} = \delta \pm j\omega_{\text{вл}}$,

де $\omega_{\text{рез}}$ – кутова частота незагасаючих коливань (резонансна частота);

$\omega_{\text{вл}}$ – кутова частота вільних загасаючих коливань.

На відміну від кіл першого порядку в послідовному колі R, L, C характер перехідного процесу може бути різним. Залежно від значення параметрів кола можливі три основні режими:

1) корені $p_{1,2}$ – дійсні різні (рис.1.14, а). При цьому $\delta > \omega_{\text{рез}}$, $R > 2\rho$ ($\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ - характеристичний опір), $Q < 0,5$ (аперіодичний вільний режим);

2) корені $p_{1,2}$ – дійсні рівні (кратні). При цьому $\delta = \omega_{\text{рез}}$, $p_1 = p_2 = -\delta$ (рис.1.14, б), $R = 2\rho$, $Q = 0,5$ (критичний режим);

3) корені $p_{1,2}$ – комплексно-спряжені (рис.1.14, в). При цьому $\delta < \omega_{\text{рез}}$, $R < 2\rho$, $Q > 0,5$ (коливальний режим).

Отже, характер вільних процесів у контурі залежить від вигляду коренів характеристичного рівняння.

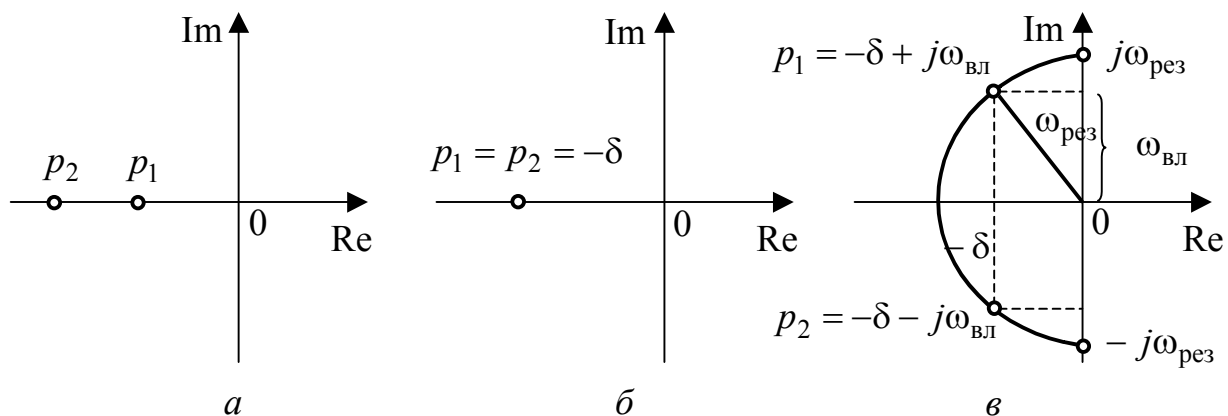


Рисунок 1.14 – Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині

1.3.1 Аперіодичний режим

Якщо корені $p_{1,2}$ – різні (варіант 1 і 3), тобто не утворюють кратного кореня, то згідно з виразом (1.9) загальний розв’язок (1.44) записується так:

$$u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.46)$$

Щоб визначити струм у колі, можна скористатись співвідношенням $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$:

$$i_{\text{ВЛ}}(t) = C \frac{du_{C_{\text{ВЛ}}}(t)}{dt} = CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (1.47)$$

Для визначення A_1 та A_2 підставляють $+0$ у вирази (1.46), (1.47):

$$\begin{cases} u_{C_{\text{ВЛ}}}(+0) = A_1 + A_2; \\ i_{\text{ВЛ}}(+0) = CA_1 p_1 + CA_2 p_2. \end{cases} \quad (1.48)$$

Враховуючи початкові умови $u_C(-0) = E$, $i(-0) = i_L(-0) = 0$, а також закони комутації, можна записати:

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2; \\ 0 = CA_1 p_1 + CA_2 p_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = E - A_1; \\ A_1 p_1 + (E - A_1) p_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи виходить: $A_1 = -\frac{Ep_2}{p_1 - p_2}$; $A_2 = \frac{Ep_1}{p_1 - p_2}$. Підстановка значень A_1 і A_2 у співвідношення (1.46) і (1.47) призводить до виразів:

$$u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) = \frac{Ep_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{Ep_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}; \quad (1.49)$$

$$i_{\text{ВЛ}}(t) = \frac{CEp_1 p_2}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

$$\text{Оскільки } p_1 p_2 = \omega_{\text{рез}}^2 = \frac{1}{LC}, \text{ то } i_{\text{ВЛ}}(t) = \frac{E}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (1.50)$$

$$\text{Оскільки } u_L(t) = L \frac{di_{\text{ВЛ}}(t)}{dt},$$

$$u_{L_{\text{ВЛ}}}(t) = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (1.51)$$

Як видно з графіків (рис.1.15, а-в), побудованих згідно з виразами (1.49) – (1.51), перехідні процеси мають аперіодичний характер. Графіки побудовано для випадку, коли обидва корені від'ємні, а другий корінь p_2 за абсолютною величиною більший першого.

Напруга на ємності монотонно зменшується, починаючи з початкового значення E . При $t=0$ дотична до $u_C(t)$ паралельна осі абсцис, оскільки

$$i(+0) = Cu'_C(+0). \text{ Струм } i(t) \text{ буде максимальним при } t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}, \text{ тобто в}$$

точці перегину кривої $u_C(t)$, в подальшому струм прямує до нуля.

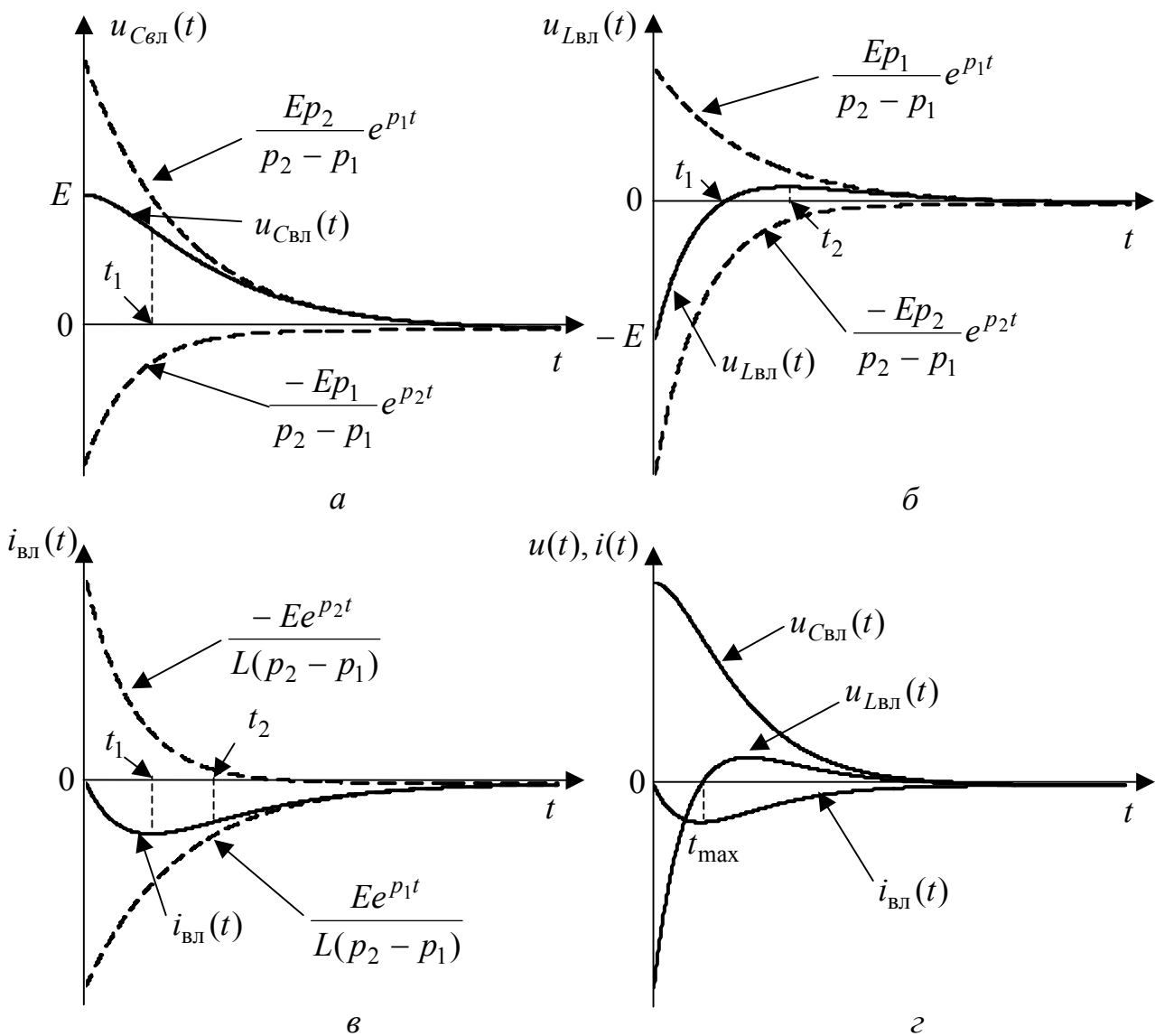


Рисунок 1.15 – Графіки струмів і напруг у колі R, L, C :
 $a, б, в$ – аперіодичний режим; $г$ – критичний режим

Оскільки при $t = +0$ струм кола дорівнює нулю, а отже, $u_R(t) = 0$, напруги на ємності та індуктивності однакові за величиною, але протилежні за знаком. Напруга на індуктивності дорівнює нулю, коли струм досягає максимуму. В момент часу $t_2 = 2t_1$, коли крива струму має точку перегину, напруга на індуктивності досягає максимального значення, а далі зменшується до нуля.

При розрядженні ємності енергія електричного поля в моменти часу $t < t_1$ частково перетворюється в тепло в опорі, а частково переходить у магнітне поле індуктивності. При $t > t_1$ енергія електричного і магнітного полів перетворюється в теплову (оскільки при $t < t_1$ струм кола зростає за модулем, що відповідає збільшенню запаса енергії магнітного струму, а при $t > t_1$ струм, і відповідно, запас енергії зменшується).

1.3.2 Критичний (граничний аперіодичний) режим

На межі між коливальним і аперіодичним режимами існує критичний вільний режим. Він відповідає кратним кореням характеристичного рівняння, коли $R = 2\rho$, $Q = 0,5$, $p_1 = p_2 = -\delta$. У цьому режимі $\delta \rightarrow \omega_{\text{рез}}$, частота вільних коливань $\omega_{\text{вл}} = \sqrt{\delta^2 - \omega_{\text{рез}}^2} \rightarrow 0$, а період вільних коливань $T_{\text{вл}} \rightarrow \infty$.

Загальний розв'язок рівняння (1.44) для кратних коренів має вигляд (1.11):

$$u_{C_{\text{вл}}}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}. \quad (1.52)$$

Сталі інтегрування A_1 і A_2 визначають з початкових умов. Якщо підставити значення $t = +0$ до виразу (1.52), тоді $u_{C_{\text{вл}}}(+0) = A_1$. Друге рівняння отримують із співвідношення:

$$i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(-\delta A_1 e^{-\delta t} + A_2 e^{-\delta t} - A_2 t \delta e^{-\delta t}); \quad i_L(+0) = C(-\delta A_1 + A_2).$$

Оскільки $u_C(+0) = u_C(-0) = E$, $i_L(+0) = i_L(-0) = 0$, то

$$\begin{cases} E = A_1; \\ 0 = -\delta A_1 + A_2; \end{cases} \quad A_2 = \delta A_1 = \delta E.$$

Тоді $u_{C_{\text{вл}}}(t) = E(1 + \delta t)e^{-\delta t}; \quad (1.53)$

$$i_{\text{вл}}(t) = C(-\delta E e^{-\delta t} + \delta E e^{-\delta t} - E t \delta^2 e^{-\delta t}) = -CE\delta^2 t e^{-\delta t}.$$

З огляду на те, що у критичному режимі $\delta^2 = \omega_{\text{рез}}^2 = \frac{1}{LC}$,

$$i_{\text{вл}}(t) = -\frac{E}{L} t e^{-\delta t}; \quad (1.54)$$

$$u_{L_{\text{вл}}}(t) = L \frac{di_{\text{вл}}(t)}{dt} = -E(e^{-\delta t} - \delta t e^{-\delta t}) = E e^{-\delta t} (\delta t - 1). \quad (1.55)$$

Криві змінювання напруги на ємності та індуктивності і струму у колі, які визначаються за формулами (1.53) – (1.55), зображено на рис.1.15, з. Ці залежності аналогічні кривим, показаним на рис.1.15, а-в. Струм буде максимальним за абсолютною величиною при $t_{\text{мах}} = 1/\delta$. Аналізуючи графіки, можна стверджувати, що власні процеси у даному випадку також мають аперіодичний характер. Тобто умова $\omega_{\text{рез}} = \delta$ є граничною умовою існування аперіодичного процесу в контурі.

1.3.3 Коливальний режим у колі R, L, C

Якщо $\delta < \omega_{\text{рез}}$ ($R < 2\rho$), то корені характеристичного рівняння (1.45) утворюють пару комплексно-спряжених чисел $p_1 = -\delta + j\omega_{\text{вл}}$; $p_2 = -\delta - j\omega_{\text{вл}}$. Розташування коренів на комплексній площині показано на рис.1.14, в. У цьому

випадку справедливий розв'язок (1.10) або аналогічний запис з використанням функції косинус:

$$u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ВЛ}}t + \psi).$$

Струм у колі визначається співвідношенням:

$$i_{\text{ВЛ}}(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -CA\delta e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ВЛ}}t + \psi) - CAe^{-\delta t} \omega_{\text{ВЛ}} \sin(\omega_{\text{ВЛ}}t + \psi).$$

Підставивши значення +0 в отримані вирази і враховуючи початкові умови $u_C(-0) = E$; $i(-0) = i_L(-0) = 0$, а також закони комутації, аналогічно рівнянням (1.48), записують систему для визначення сталих A та ψ :

$$\begin{cases} E = A \cos \psi; \\ 0 = \delta A \cos \psi + A \omega_{\text{ВЛ}} \sin \psi, \end{cases}$$

звідки виходить:

$$\text{tg} \psi = -\frac{\delta}{\omega_{\text{ВЛ}}}; \quad A = \frac{E}{\cos \psi} = E \sqrt{1 + \text{tg}^2 \psi} = E \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_{\text{ВЛ}}^2}} = E \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{ВЛ}}},$$

$$\text{де } \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_{\text{ВЛ}}^2 + \delta^2}; \quad (-\psi) = \text{arctg} \frac{\delta}{\omega_{\text{ВЛ}}}.$$

Підстановка значень A та ψ у вираз для напруги на ємності дає:

$$u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) = \frac{E \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{ВЛ}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ВЛ}}t - \psi). \quad (1.56)$$

Аналогічно, підставляючи A та ψ до виразу для струму та використовуючи відому з математики формулу

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + \gamma) = r \cos(90^\circ - x - \gamma); \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \gamma = \text{arctg} \frac{b}{a},$$

можна записати:

$$i_{\text{ВЛ}}(t) = -\frac{E}{L \omega_{\text{ВЛ}}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{ВЛ}}t. \quad (1.57)$$

Напругу на індуктивності визначають диференціюванням виразу (1.57):

$$\begin{aligned} u_{L_{\text{ВЛ}}}(t) &= L \frac{di_{\text{ВЛ}}(t)}{dt} = -\frac{E}{\omega_{\text{ВЛ}}} \left(-\delta e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{ВЛ}}t + \omega_{\text{ВЛ}} e^{-\delta t} \cos \omega_{\text{ВЛ}}t \right) = \\ &= \frac{E}{\omega_{\text{ВЛ}}} e^{-\delta t} (\delta \sin \omega_{\text{ВЛ}}t - \omega_{\text{ВЛ}} \cos \omega_{\text{ВЛ}}t) = -\frac{E}{\omega_{\text{ВЛ}}} e^{-\delta t} \sqrt{\omega_{\text{ВЛ}}^2 + \delta^2} \cos(\omega_{\text{ВЛ}}t + \psi); \end{aligned}$$

$$u_{L_{\text{ВЛ}}}(t) = -\frac{E \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{ВЛ}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ВЛ}}t + \psi). \quad (1.58)$$

Криві, побудовані згідно з формулами (1.56) – (1.58), зображено на рис.1.16. Аналіз цих графіків показує наступне:

1. Оскільки процес відбувається за рахунок власної енергії кола, він викликає вільні коливання, які були б синусоїдними, якби амплітуда була по-

стійною за часом. В даному випадку амплітуда зменшується за експоненціальним законом, тому ці коливання зветься загасаючими. Періодом загасаючих коливань слід вважати $T_{\text{вл}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{вл}}}$, де $\omega_{\text{вл}}$ – частота вільних коливань.

2. Відповідно, такий розряд ємності зветься коливальним. Для добротного кола значення кута ψ наближається до 0° , тому розряд починається майже з величини E (хоча невеличкий зсув відносно осі ординат таки є). Напряга на ємності зменшується і змінює знак, тобто відбувається перезарядження ємності. Розряд ємності супроводжується втратою енергії, яка переходить до індуктивності. Отже, з енергетичної точки зору, процес власних коливань в контурі можна розглядати як результат неперервного перерозподілу енергії між L і C , між електричним і магнітним полями.

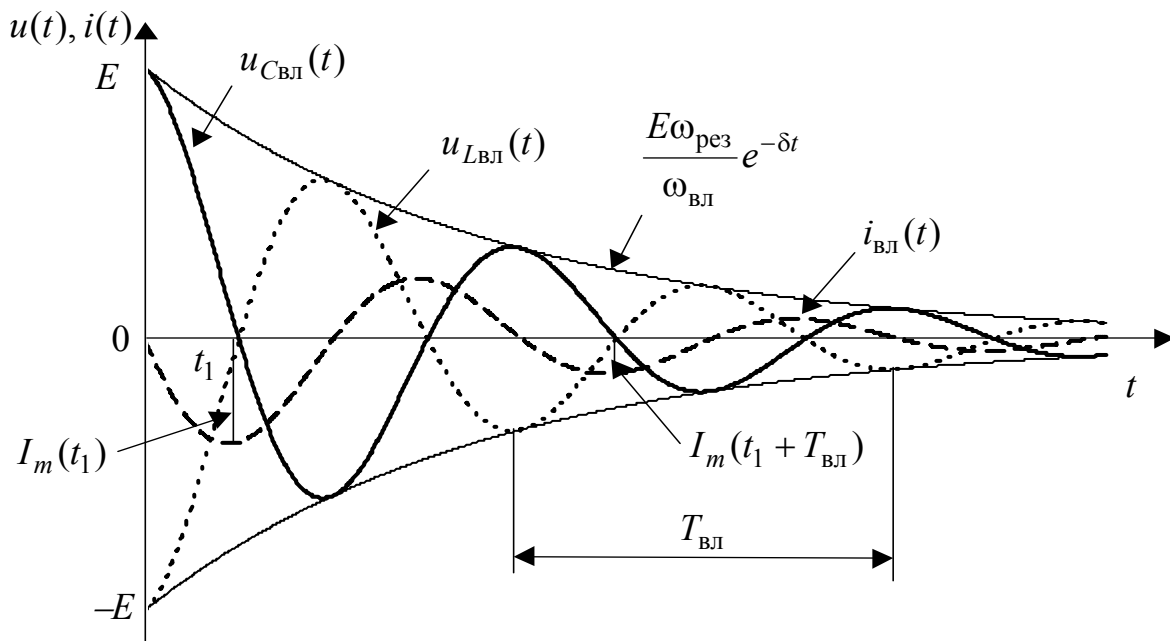


Рисунок 1.16 – Графіки струму і напруг у колі R, L, C в режимі вільних коливань

3. Графік $u_{R_{\text{вл}}}(t)$ збігається з графіком $i_{\text{вл}}(t)$ з точністю до постійного коефіцієнта. У будь-який момент часу сума напруг у вільному режимі дорівнює нулю: $u_{L_{\text{вл}}}(t) + u_{R_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вл}}}(t) = 0$.

Деякий зсув між синусоїдами $u_{L_{\text{вл}}}(t)$ та $u_{C_{\text{вл}}}(t)$ непомітний, тому що коло в коливальному режимі має високу добротність.

4. Якщо $R \ll 2\rho$, коливання існують довго, і коло є послідовним коливальним контуром. Швидкість загасання вільних коливань характеризується коефіцієнтом δ , тому він зветься **коефіцієнтом загасання**. Чим менше значення δ , тим довше продовжуються коливання.

Швидкість загасання вільних процесів характеризується також **логарифмічним декрементом загасання** θ , який визначається як натуральний логарифм відношення амплітуд напруг $u_{C_{\text{ВЛ}}}(t)$, $u_{L_{\text{ВЛ}}}(t)$ або струму $i_{\text{ВЛ}}(t)$ у моменти часу t_1 і $t_1 + T_{\text{ВЛ}}$.

Щоб пояснити зміст величини θ , слід записати співвідношення (1.57) у вигляді:

$$i_{\text{ВЛ}}(t) = I_0 e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{ВЛ}} t = I_m(t) \sin \omega_{\text{ВЛ}} t.$$

Тоді зрозуміло, що

$$\theta = \ln \frac{I_m(t_1)}{I_m(t_1 + T_{\text{ВЛ}})} = \ln \frac{I_0 e^{-\delta t_1}}{I_0 e^{-\delta(t_1 + T_{\text{ВЛ}})}} = \ln e^{\delta T_{\text{ВЛ}}} = \delta T_{\text{ВЛ}}.$$

Величини δ , $\omega_{\text{ВЛ}}$, θ визначаються параметрами кола:

$$\omega_{\text{ВЛ}} = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 - \delta^2} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_{\text{рез}}^2}} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2L\omega_{\text{рез}}}\right)^2} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}; \quad Q = \frac{\omega_{\text{рез}} L}{R}.$$

Якщо добротність $Q \gg 1$, $\omega_{\text{ВЛ}} \rightarrow \omega_{\text{рез}}$. Тоді

$$\theta = \delta T_{\text{ВЛ}} = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_{\text{ВЛ}}} = \frac{\pi R}{L\omega_{\text{рез}}} = \frac{\pi}{Q} = \pi d,$$

де d – загасання. Наприклад, при добротності $Q = 40$, $d = 0,025$; $\theta = 0,08$.

Коефіцієнт загасання контуру δ пов'язаний з його добротністю Q та загасанням d :

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{R\omega_{\text{рез}}}{2\omega_{\text{рез}}L} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2Q} = \frac{1}{2} \omega_{\text{рез}} d.$$

5. При $t = 1/\delta$ ордината обвідної (крива, яка характеризує змінювання амплітуди коливань за часом, зветься **обвідною**) $I_0 e^{-\delta t}$ у $e = 2,718$ рази менша, ніж початкове значення I_0 . Тому величину $1/\delta$ можна вважати сталою часу коливального контуру: $\tau = 1/\delta = 2L/R$. Крім того,

$$\tau = \frac{2L}{R} = \frac{2L\omega_{\text{рез}}}{R\omega_{\text{рез}}} = \frac{2Q}{\omega_{\text{рез}}} = \frac{2}{2\Delta\omega_{\text{П}}}.$$

З останнього виразу можна зробити важливі висновки:

а) $\tau \cdot 2\Delta\omega_{\text{П}} = 2$. Аналогічно, для кола першого порядку $\tau \cdot \Pi_{\omega} = 1$. Отже, стала часу жорстко пов'язана з шириною смуги пропускання (СП). Якщо добротність Q велика (СП – вузька), коливання продовжуються довго, і навпаки, якщо Q низька (СП – широка), коливання швидко загасають;

б) оскільки $Q = \frac{\omega_{\text{рез}} \tau}{2}$, можна експериментально визначати добротність контуру за обвідною загасаючих коливань.

1.3.4 Увімкнення джерела постійної напруги до кола R, L, C

Схема кола R, L, C , до якого вмикається джерело E , зображена на рис.1.13, б. Диференціальне рівняння для даної схеми відрізняється від (1.44) тим, що є неоднорідним (тобто правою частиною):

$$\frac{du_C^2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{E}{LC}. \quad (1.59)$$

За класичним методом розв'язок рівняння (1.59) шукають у вигляді:

$$u_C(t) = u_{C_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вм}}}(t).$$

Вираз для вільної складової $u_{C_{\text{вл}}}(t)$ збігається з формулою (1.46), а вимушена складова $u_{C_{\text{вм}}}(t)$ дорівнює E : $u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + E$.

Вираз для струму можна знайти за формулою:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

Якщо скласти систему рівнянь для моменту часу $t = +0$:

$$\begin{cases} u_C(+0) = A_1 + A_2 + E; \\ i_C(+0) = CA_1 p_1 + CA_2 p_2, \end{cases}$$

та врахувати нульові початкові умови, тоді

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + E; \\ 0 = CA_1 p_1 + CA_2 p_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -E - A_1; \\ 0 = p_1 A_1 - p_2 (E + A_1); \end{cases}$$

$$A_1 = E \frac{p_2}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = -E \frac{p_1}{p_1 - p_2}.$$

Визначивши значення сталих A_1 і A_2 , можна записати:

$$u_C(t) = E \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - E \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} + E; \quad (1.60)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{E p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Оскільки $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$, то

$$i_C(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad (1.61)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = E \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - E \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (1.62)$$

Порівняння виразів (1.60) – (1.62) і (1.49) – (1.51) призводить до висновку:

- 1) коефіцієнти A_1 і A_2 змінюють знак;
- 2) з'являється вимушена складова: $u_{C_{\text{вм}}}(t) = E$, $u_{L_{\text{вм}}}(t) = 0$, $i_{\text{вм}}(t) = 0$.

Отже, при увімкненні джерела постійної напруги E можна скористатись виразами, які було отримано для вільного режиму, але змінити знак вільної складової на протилежний і додати вимушену складову.

Так, для критичного режиму з формул (1.53) – (1.55) виходить:

$$u_C(t) = E - E(1 + \delta t)e^{-\delta t}; \quad (1.63)$$

$$i(t) = \frac{E}{L}te^{-\delta t}; \quad (1.64)$$

$$u_L(t) = Ee^{-\delta t}(1 - \delta t). \quad (1.65)$$

Згідно з формулами (1.60) – (1.62) на рис.1.17, *a* побудовано криві для аперіодичного режиму ($R > 2\rho$, $p_{1,2} < 0$), а згідно з виразами (1.63) – (1.65) на рис.1.17 *б* – для граничного аперіодичного режиму ($R = 2\rho$, $p_1 = p_2 = -\delta$). Для обох режимів напруга на ємності плавно зростає від нуля до значення E . Ана-

логічно вільному режиму, струм досягає максимуму при $t = t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$, а напруга на індуктивності – при $t_2 = 2t_1$.

Аналогічно, змінюючи знак вільної складової та додаючи вимушену складову, з формул (1.56) – (1.58) можна здобути вирази для напруг на ємності та індуктивності і струму у колі для коливального режиму:

$$u_C(t) = E - \frac{E\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}}e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}}t - \psi); \quad (1.66)$$

$$i(t) = \frac{E}{L\omega_{\text{вл}}}e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{вл}}t; \quad (1.67)$$

$$u_L(t) = \frac{E\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}}e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}}t + \psi). \quad (1.68)$$

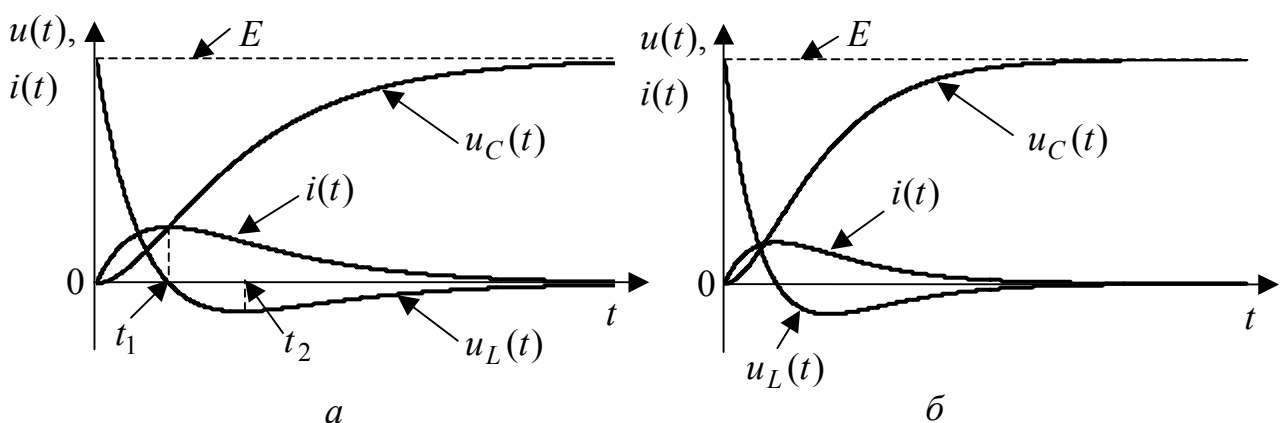


Рисунок 1.17 – Графіки струмів і напруг у колі R, L, C при увімкненні до джерела постійної напруги:
a – аперіодичний режим; *б* – критичний режим

Відповідні графіки зображено на рис.1.18. Аналіз цих залежностей показує:

1) що у будь-який момент часу сума напруг на елементах кола дорівнює E ;

2) коливання є загасаючими, стала часу визначається аналогічно вільному режиму: $\tau = 1/\delta = 2L/R$;

3) якщо значення сталої часу велике, коливання загасають повільно. Тому через інтервал часу $T_{\text{вл}}/2$ напруга на ємності $u_C \cong 2E$, тобто можливе явище перенапруги в режимі комутації. Це явище практично використовується тоді, коли необхідно отримати напругу, яка майже у два рази перевищує напругу джерела енергії (наприклад, в імпульсній техніці, радіопередавальних пристроях тощо).

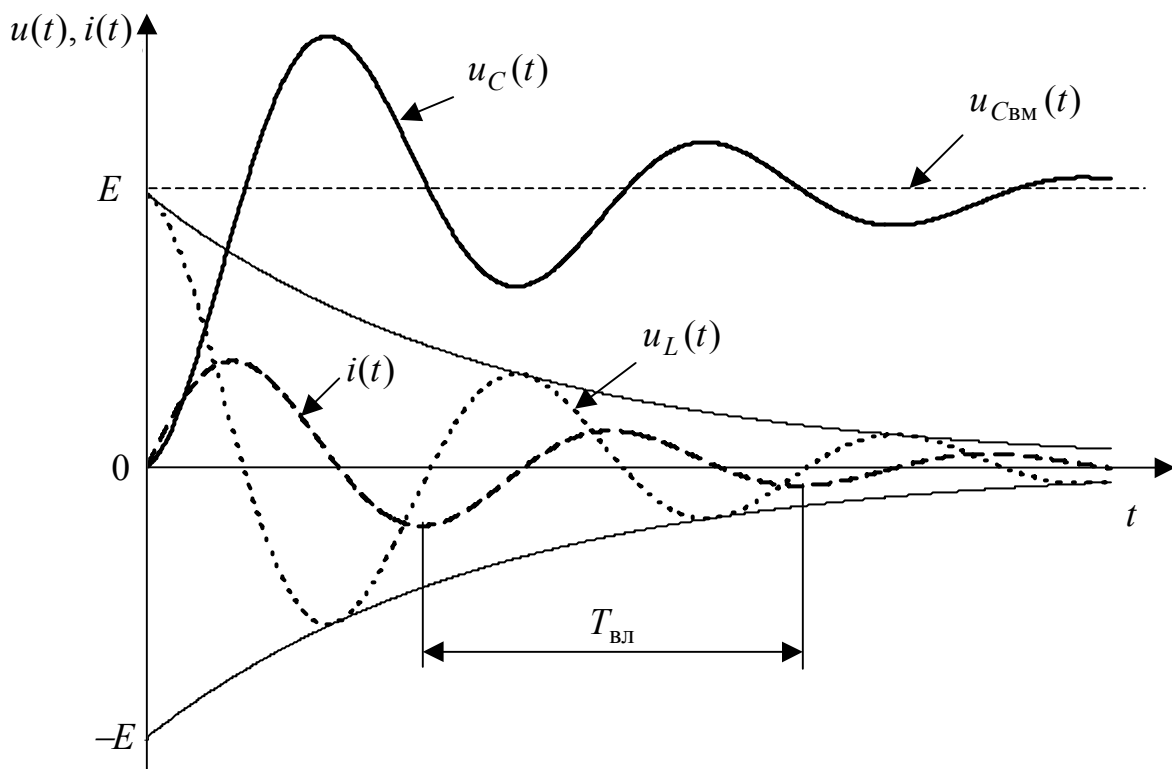


Рисунок 1.18 – Графіки струму і напруг у колі R, L, C при увімкненні джерела постійної напруги (коливальний режим)

1.4 Перехідні процеси у колах $R, L; R, C; R, L, C$ при синусоїдній дії

1.4.1 Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, C

При увімкненні синусоїдної дії в колі також виникають перехідні процеси, які значною мірою залежать від фази напруги (струму) джерела в момент комутації.

Нехай коло R, C (рис.1.19, *a*) підключається до джерела синусоїдної напруги $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E)$ за нульових початкових умов: $u_C(-0) = 0$.

Якщо необхідно визначити закон змінювання напруги на ємності, можна скористатись рівнянням (1.39), яке в даному випадку матиме вигляд:

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E). \quad (1.69)$$

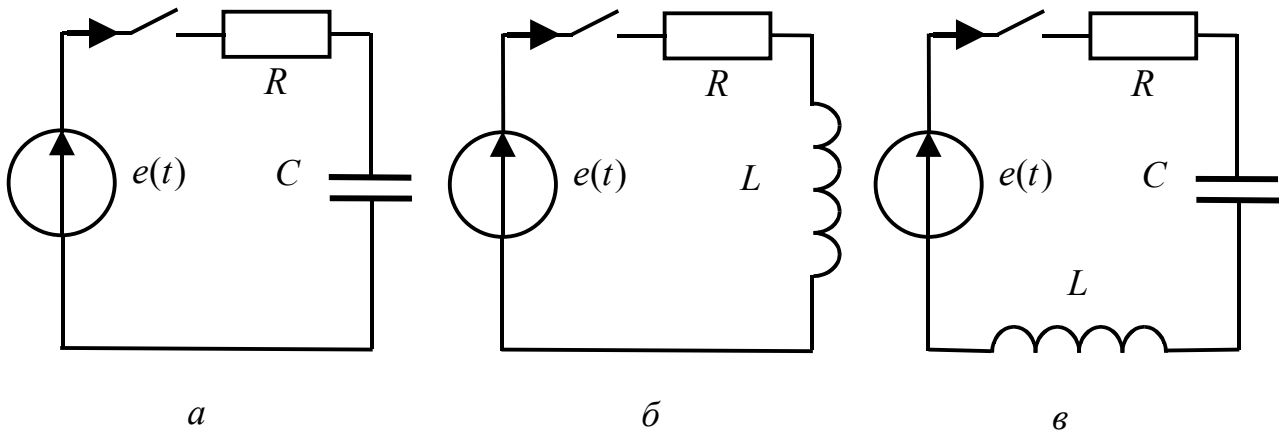


Рисунок 1.19 – Схеми електричних кіл, які вмикаються до джерела синусоїдної напруги

Диференціальному рівнянню (1.69) відповідає характеристичне:

$$RCp + 1 = 0.$$

За класичним методом розв'язок рівняння (1.69) можна знайти, як

$$u_C(t) = u_{C_{\text{вл}}}(t) + u_{C_{\text{вм}}}(t),$$

$$\text{де } u_{C_{\text{вл}}}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad p_1 = -1/RC = -1/\tau.$$

Оскільки дія є синусоїдною, вимушена складова визначається методом комплексних амплітуд:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m = \underline{I}_m \underline{Z}_C &= \frac{\underline{E}_m}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) j\omega C} = \frac{\underline{E}_m}{j\omega RC + 1} = \frac{\underline{E}_m}{j\omega\tau + 1} = \frac{E_m e^{j\psi_E}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} e^{j\varphi}} = \\ &= \frac{E_m e^{j(\psi_E - \varphi)}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \varphi = \text{arctg } \omega\tau. \end{aligned}$$

Перехід від комплексної амплітуди до миттєвого значення дає:

$$u_{C_{\text{вм}}}(t) = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t + \psi_E - \varphi) = U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}),$$

$$\text{де } U_{mC} = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \psi_{U_C} = \psi_E - \varphi = \psi_E - \text{arctg } \omega\tau.$$

Отже, $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C})$.

Стала A обчислюється з початкових умов:

$$\begin{cases} u_C(+0) = A + U_{mC} \cos \psi_{U_C}; & 0 = A + U_{mC} \cos \psi_{U_C}; & A = -U_{mC} \cos \psi_{U_C}. \\ u_C(-0) = 0; \end{cases}$$

Визначивши A , можна записати кінцевий вираз для шуканої напруги:

$$u_C(t) = -U_{mC} \cos \psi_{U_C} e^{-\frac{t}{\tau}} + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.70)$$

Згідно з формулою (1.70), напруга на ємності дорівнює сумі двох складових і залежить від величини ψ_{U_C} . При цьому спостерігаються два характерних випадки.

1. Нехай в момент увімкнення джерела миттєве значення вимушеної складової дорівнює нулю. Це можливо, якщо $\psi_{U_C} = \pm\pi/2$. Тоді $\cos \psi_{U_C} = 0$, $u_{C_{ВЛ}}(t) = 0$, перехідних процесів не виникає, і в колі відразу встановлюється стаціонарний режим.

2. У загальному випадку, коли $\psi_{U_C} \neq \pi/2$; $\cos \psi_{U_C} \neq 0$, напруга на ємності, як це видно з (1.70), може суттєво відрізнитися від напруги вимушених коливань $u_{C_{ВМ}}(t)$. Найхарактернішим у цьому відношенні є перехідний процес, який спостерігається при $\psi_{U_C} = 0, \pi$ (рис.1.20, а).

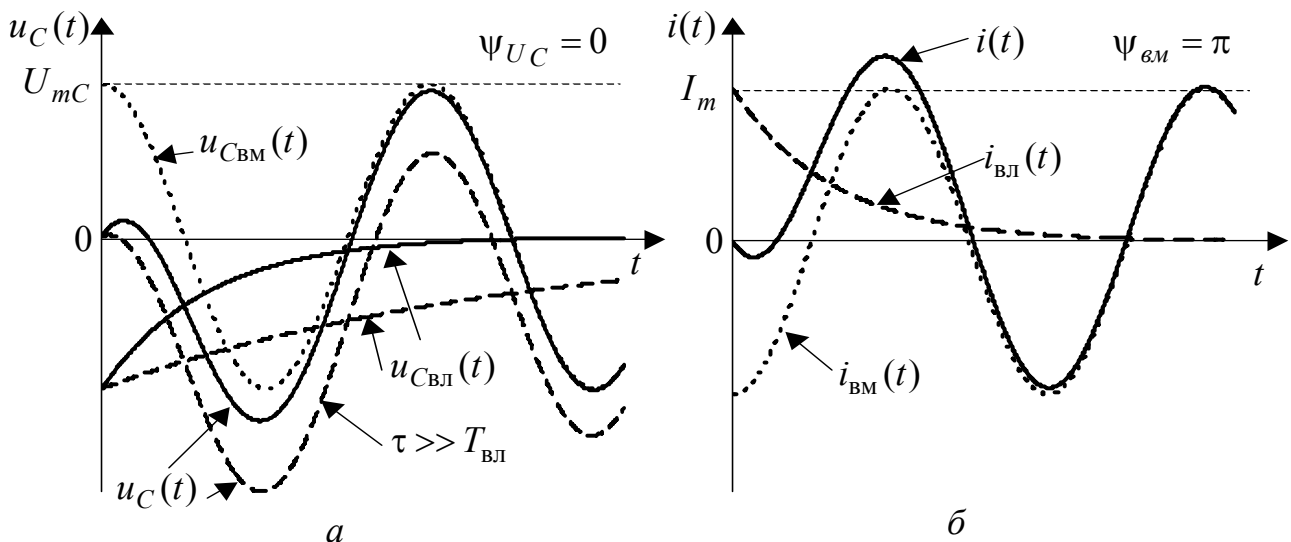


Рисунок 1.20 – Графіки струмів і напруг при увімкненні до джерела синусоїдної напруги кіл: а – R, C ; б – R, L

У нульовий момент часу сума напруг $u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) + u_{C_{\text{ВМ}}}(t) = 0$. Потім виникає перехідний процес, який закінчується через проміжок часу $4,6\tau$ (див. п.1.2.1). При $t > 4,6\tau$ вільна складова практично дорівнює нулю і графік $u_C(t)$ збігається з кривою $u_{C_{\text{ВМ}}}(t)$. Як бачимо, після замикання ключа через проміжок часу, який приблизно дорівнює половині періоду вільних коливань, напруга $u_C(t) > U_{mC}$. Максимальна напруга на ємності може бути більшою, ніж амплітуда вимушеної складової майже у два рази (особливо, якщо стала часу велика).

1.4.2 Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, L

Нехай коло R, L (рис.1.19, б) підключається до джерела синусоїдної дії $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E)$ за нульових початкових умов. Якщо треба знайти струм у колі, можна скористатись рівнянням (1.43), яке в даному випадку матиме вигляд:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_E).$$

Розв'язок цього рівняння:

$$i(t) = i_{\text{ВЛ}}(t) + i_{\text{ВМ}}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + i_{\text{ВМ}}(t).$$

Оскільки дія змінюється за синусоїдним законом, вимушену складову струму знаходять за допомогою методу комплексних амплітуд:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m e^{j\psi_E}}{R + j\omega L} = \frac{E_m e^{j\psi_E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi}} = I_m e^{j\psi_{\text{ВМ}}},$$

$$\text{де } I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \psi_{\text{ВМ}} = \psi_E - \arctg \omega\tau; \quad \tau = L/R.$$

$$\text{Тоді } i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + I_m \cos(\omega t + \psi_{\text{ВМ}}).$$

Сталу A визначають з початкових умов:

$$i_L(+0) = A + I_m \cos \psi_{\text{ВМ}}; \quad i_L(-0) = 0; \quad A = -I_m \cos \psi_{\text{ВМ}}.$$

Отже, кінцевий вираз для струму у колі буде такий:

$$i(t) = -I_m \cos \psi_{\text{ВМ}} e^{-\frac{t}{\tau}} + I_m \cos(\omega t + \psi_{\text{ВМ}}). \quad (1.71)$$

Аналогічно режиму кола R, C (див. п. 1.4.1), залежно від початкової фази вимушеної складової струму можливі два характерні випадки.

1. Відсутність перехідного процесу, коли $\psi_{\text{ВМ}} = \pm \frac{\pi}{2}$. При цьому у початковий момент часу вимушена складова струму дорівнює нулю, вільний струм відсутній, і у колі відразу встановлюється стаціонарний стан.

2. У загальному випадку вимушена складова струму у початковий момент відрізняється від нуля, і у колі спостерігається перехідний процес (рис.1.20, б).

З рисунка видно, що у початковий момент часу перехідний струм помітно відрізняється за формою від вимушеного струму $i_{\text{ВМ}}(t)$, причому у деяких точках його перебільшує.

Максимально можливі значення струму у колі, як це виходить з формули (1.71), спостерігаються за умови, коли вимушена складова у момент часу $t = +0$ досягає максимального значення, тобто при $\psi_E = \varphi$, або $\psi_{\text{ВМ}} = \psi_E - \varphi = 0, \pm \pi$. Якщо стала часу велика, то на інтервалі, де $t \ll \tau$, максимумами струму наближаються до $2I_m$.

1.4.3 Увімкнення джерела синусоїдної дії до кола R, L, C

Нехай послідовне коло R, L, C підключається до джерела синусоїдної дії $e(t) = E_m \cos \omega t$ за нульових початкових умов: $i_L(-0) = 0$; $u_C(-0) = 0$.

Оскільки після комутації утворюється коло (рис.1.19, в), можна скористатись рівнянням (1.59), врахувавши вид вхідної дії $e(t)$:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{E_m}{LC} \cos \omega t. \quad (1.72)$$

Розв'язок рівняння (1.72) має вигляд: $u_C(t) = u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) + u_{C_{\text{ВМ}}}(t)$. Вільна складова залежить від характеру коренів $p_{1,2}$ характеристичного рівняння (1.45). З точки зору забезпечення вибірних властивостей радіотехнічних кіл найцікавішим є випадок комплексно-спряжених коренів, який відповідає високому значенню добротності, а отже, явищу резонанса. Тоді

$$u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ВЛ}} t + \psi_U); \quad u_C(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ВЛ}} t + \psi_U) + u_{C_{\text{ВМ}}}(t).$$

Вимушена складова напруги визначається методом комплексних амплітуд:

$$\underline{U}_{mC} = \frac{\underline{E}_m}{R + jX} \left(-\frac{j}{\omega C} \right) = \frac{E_m e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega C \sqrt{R^2 + X^2}} e^{-j \arctg \frac{X}{R}} = U_{mC} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{X}{R}\right)},$$

$$\text{де } U_{mC} = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + X^2}}; \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Якщо початкову фазу $u_{C_{\text{ВМ}}}(t)$ позначити $\psi_{U_C} = -\left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{X}{R}\right)$, вираз для миттєвого значення вимушеної складової матиме вигляд:

$$u_{C_{\text{ВМ}}}(t) = \text{Re} \left\{ U_{mC} e^{j(\omega t + \psi_{U_C})} \right\} = U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}).$$

Отже, напруга на ємності визначається за формулою:

$$u_C(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ВЛ}} t + \psi_U) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.73)$$

Оскільки при $Q \gg 1$ виконується умова $\omega_{\text{вл}} \rightarrow \omega_{\text{рез}}$ (див. п. 1.3.3), вираз (1.73) матиме вигляд:

$$u_C(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{рез}}t + \psi_U) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.74)$$

Щоб знайти сталі інтегрування A і ψ_U , доцільно використати вираз для струму, врахувавши, що за умови $Q \gg 1$ загасання $\delta \ll \omega_{\text{рез}}$, а отже, вважати при диференціюванні множник $e^{-\delta t}$ незмінним за період коливання з частотою $\omega_{\text{рез}}$:

$$i_C(t) = C \frac{u_C(t)}{dt} = -CAe^{-\delta t} \omega_{\text{рез}} \sin(\omega_{\text{рез}}t + \psi_U) - CU_{mC} \omega \sin(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.75)$$

В результаті підстановки значення $t = +0$ до виразів (1.74), (1.75) виходить система рівнянь:

$$\begin{cases} u_C(+0) = A \cos \psi_U + U_{mC} \cos \psi_{U_C}; \\ i_C(+0) = -CA \omega_{\text{рез}} \sin \psi_U - CU_{mC} \omega \sin \psi_{U_C}, \end{cases}$$

яка з огляду на закони комутації за нульових початкових умов матиме вигляд:

$$\begin{cases} A \cos \psi_U = -U_{mC} \cos \psi_{U_C}; \\ A \omega_{\text{рез}} \sin \psi_U = -U_{mC} \omega \sin \psi_{U_C}. \end{cases} \quad (1.76)$$

Поділивши почленно друге рівняння системи (1.76) на перше, можна записати:

$$\omega_{\text{рез}} \operatorname{tg} \psi_U = \omega \operatorname{tg} \psi_{U_C}; \quad \operatorname{tg} \psi_U = \frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}} \operatorname{tg} \psi_{U_C}.$$

За умови $Q \gg 1$ відношення $\omega / \omega_{\text{рез}} \approx 1$, тоді

$$\operatorname{tg} \psi_U = \operatorname{tg} \psi_{U_C}; \quad \psi_U = \psi_{U_C}. \quad (1.77)$$

За умови (1.77) з першого рівняння системи (1.76) виходить:

$$A = -U_{mC}. \quad (1.78)$$

Насамкінець, з урахуванням умов (1.77), (1.78) вираз (1.74) матиме вигляд:

$$u_C(t) = -U_{mC} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{рез}}t + \psi_{U_C}) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}). \quad (1.79)$$

Отже, $u_C(t)$ є сумою двох коливань з різними частотами. Аналізуючи формулу (1.79), можна зробити висновок, що характер перехідних процесів залежить від співвідношення між частотою коливань зовнішньої дії ω і резонансною частотою $\omega_{\text{рез}}$. Можливі три випадки: 1) $\Delta\omega = 0$, $\delta \neq 0$; 2) $\Delta\omega \neq 0$, $\delta = 0$; 3) $\Delta\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$, де $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{рез}}$ – абсолютна розстройка.

1. При $\Delta\omega = 0$, $\omega = \omega_{\text{рез}}$ вираз (1.79) перетворюється так:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= -U_{mC} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{рез}}t + \psi_{U_C}) + U_{mC} \cos(\omega_{\text{рез}}t + \psi_{U_C}) = \\ &= U_{mC} (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega_{\text{рез}}t + \psi_{U_C}). \end{aligned}$$

Оскільки при $\omega = \omega_{\text{рез}}$ у колі виникає явище резонансу, слушні співвідношення $X = 0$; $Z = R$; $\psi_{U_C} = -\frac{\pi}{2}$; $U_{mC} = E_m \frac{\rho}{R} = E_m Q$.

Тоді

$$u_C(t) = E_m Q (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega_{\text{рез}} t - \frac{\pi}{2}) = E_m Q (1 - e^{-\delta t}) \sin \omega_{\text{рез}} t. \quad (1.80)$$

Вираз (1.80) можна записати ще як

$$u_C(t) = u_{mC}(t) \sin \omega_{\text{рез}} t,$$

де $u_{mC}(t) = E_m Q (1 - e^{-\delta t})$ – рівняння обвідної.

У даному випадку амплітуда коливань напруги на ємності контуру зростає у часі за експоненціальним законом, наближаючись до значення $E_m Q$.

Щоб знайти швидкість зростання амплітуди коливань, необхідно розрахувати похідну $\frac{du_{mC}(t)}{dt} = E_m Q \delta e^{-\delta t}$ у початковий момент часу:

$$\left. \frac{du_{mC}}{dt} \right|_{t=0} = E_m Q \delta = \frac{E_m Q \omega_{\text{рез}}}{2Q} = \frac{E_m \omega_{\text{рез}}}{2}.$$

Отже, швидкість зростання обвідної не залежить від значення добротності. Тому у контурі з вищою добротністю ($Q_2 > Q_1$) для встановлення стаціонарного режиму потрібен більший час ($t_{\text{уст}2} > t_{\text{уст}1}$, рис.1.21, а). Осцилограма напруги на ємності при увімкненні синусоїдної напруги в момент $t = 0$ та при вимкненні в момент $t = t_i$ (що еквівалентно дії прямокутного радіоімпульса тривалістю t_i) зображена на рис.1.21, б.

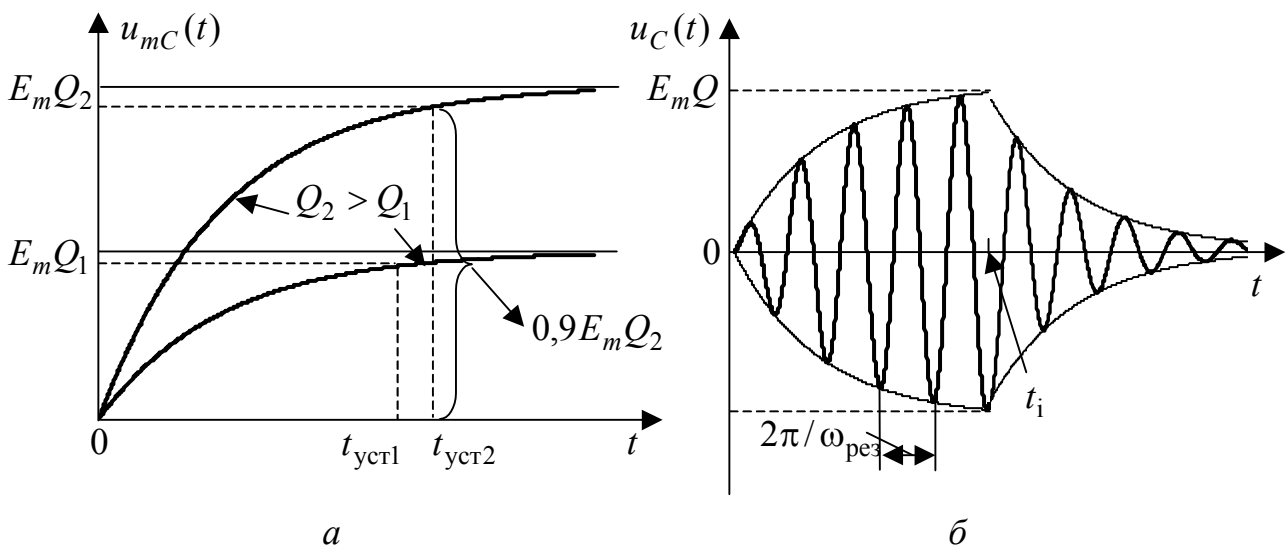


Рисунок 1.21 – Увімкнення синусоїдної дії до кола R, L, C :
 а – графіки обвідної; б – часова діаграма напруги на ємності
 при дії прямокутного радіоімпульса

2. Якщо частота зовнішніх коливань ω не збігається з резонансною частотою і контур не має втрат ($\delta = 0$), напруга на ємності, як це виходить з виразу (1.79), є сукупністю двох гармонічних коливань, котрі мають близькі частоти і приблизно однакові амплітуди. У цьому випадку співвідношення (1.79) перетворюється так:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= -U_{mC} \cos(\omega_{\text{рез}}t + \psi_{U_C}) + U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{U_C}) = \\ &= 2U_{mC} \sin\left(\frac{\omega_{\text{рез}} - \omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_{\text{рез}} + \omega}{2}t + \psi_{U_C}\right). \end{aligned} \quad (1.81)$$

В результаті підсумовування вільної і вимушеної складових виникають так звані **биття** (рис.1.22). З рівняння (1.81) виходить, що обвідна $u_{mC}(t)$ повільно змінюється у часі за законом:

$$u_{mC}(t) = 2U_{mC} \left| \sin \frac{\omega_{\text{рез}} - \omega}{2} t \right|,$$

а частота коливань дорівнює $\frac{\omega + \omega_{\text{рез}}}{2} \cong \omega$.

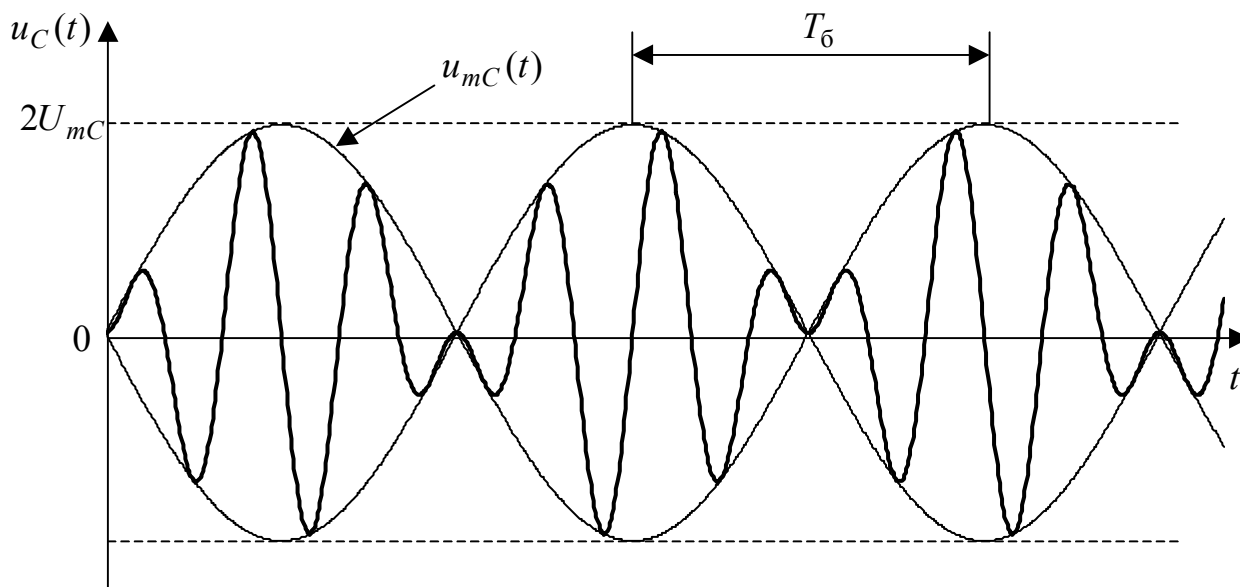


Рисунок 1.22 – Графік напруги на ємності в колі R, L, C за умови $\omega \neq \omega_{\text{рез}}, \delta \rightarrow 0$

Биття матимуть подвоєну амплітуду, оскільки у випадку однакових фаз векторів $U_{C_{\text{вл}}}$ і $U_{C_{\text{вм}}}$, ці вектори спрямовані однаково, і тому їх амплітуди підсумовуються. Період біттів розглядають як величину, що у два рази менша періоду синусоїди, тобто

$$T_{\text{б}} = \frac{2\pi}{|\omega_{\text{рез}} - \omega|}.$$

3. У реальному контурі (коли $\delta \neq 0$) величина вільної складової $u_{C_{\text{вл}}}(t)$ зменшується за експоненційним законом. Внаслідок цього при $\Delta\omega \neq 0$ і $\delta \neq 0$ в результаті підсумовування двох коливань $u_{C_{\text{вм}}}(t)$ і $u_{C_{\text{вл}}}(t)$ з близькими частотами також виникають биття, але обвідна перехідного процесу матиме складніший вигляд (рис.1.23), ніж у попередньому випадку (рис.1.22).

Щоб пояснити форму обвідної, слід розглянути векторну діаграму напруг (рис.1.24, а, б). Вектори $\underline{U}_{mC_{\text{вм}}}$ і $\underline{U}_{mC_{\text{вл}}}$ обертаються в комплексній площині проти годинникової стрілки з різними кутовими швидкостями ω і $\omega_{\text{рез}}$ відповідно (нехай $\omega_{\text{рез}} > \omega$). При $t = 0$, як виходить з формули (1.79), ці вектори перебувають у протифазі (рис.1.24, а).

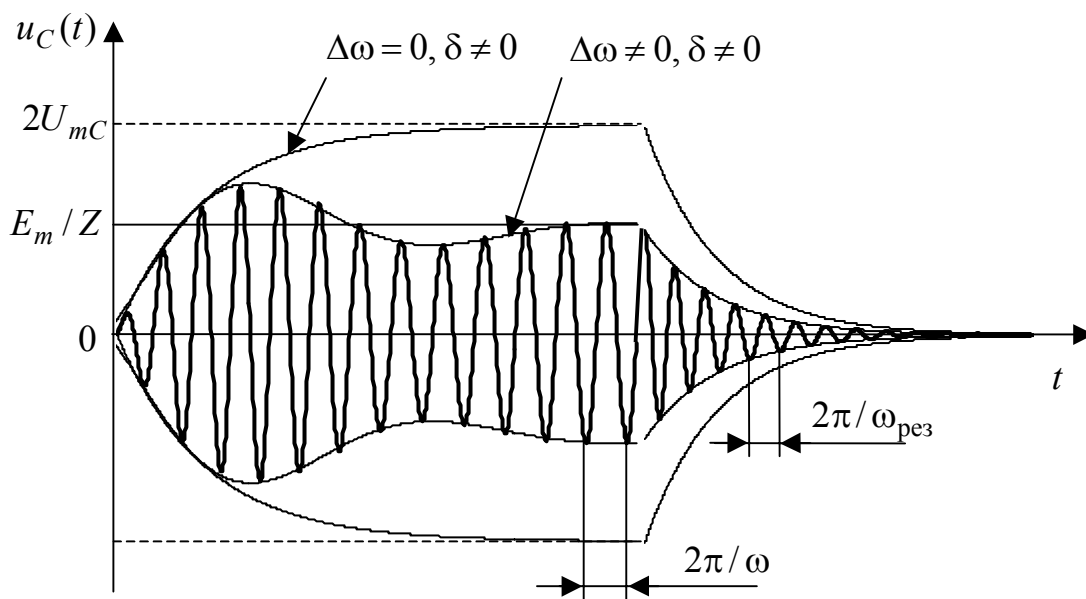


Рисунок 1.23 – Графік напруги на ємності в колі R, L, C за умови $\omega \neq \omega_{\text{рез}}, \delta \neq 0$ при дії прямокутного радіоімпульса

Якщо обернути систему координат із швидкістю ω за годинниковою стрілкою, то вектор $\underline{U}_{mC_{\text{вм}}}$ буде нерухомим, а вектор $\underline{U}_{mC_{\text{вл}}}$ – обертатиметься із швидкістю $\omega_{\text{рез}} - \omega$. Вектор результуючого коливання \underline{U}_{mC} дорівнює геометричній сумі векторів $\underline{U}_{mC_{\text{вм}}}$ і $\underline{U}_{mC_{\text{вл}}}$ (рис.1.24, б). Його кінець описує на площині загасаючу спіраль (якщо $\delta = 0$, то – коло радіуса $U_{mC_{\text{вл}}}$), а сам він качається, змінюючись як за величиною, так і за початковою фазою (а отже, і за частотою). Проекція вектора \underline{U}_{mC} на вісь ординат відтворює закон змінювання обвідної $u_{mC}(t)$ за часом (рис.1.24, в).

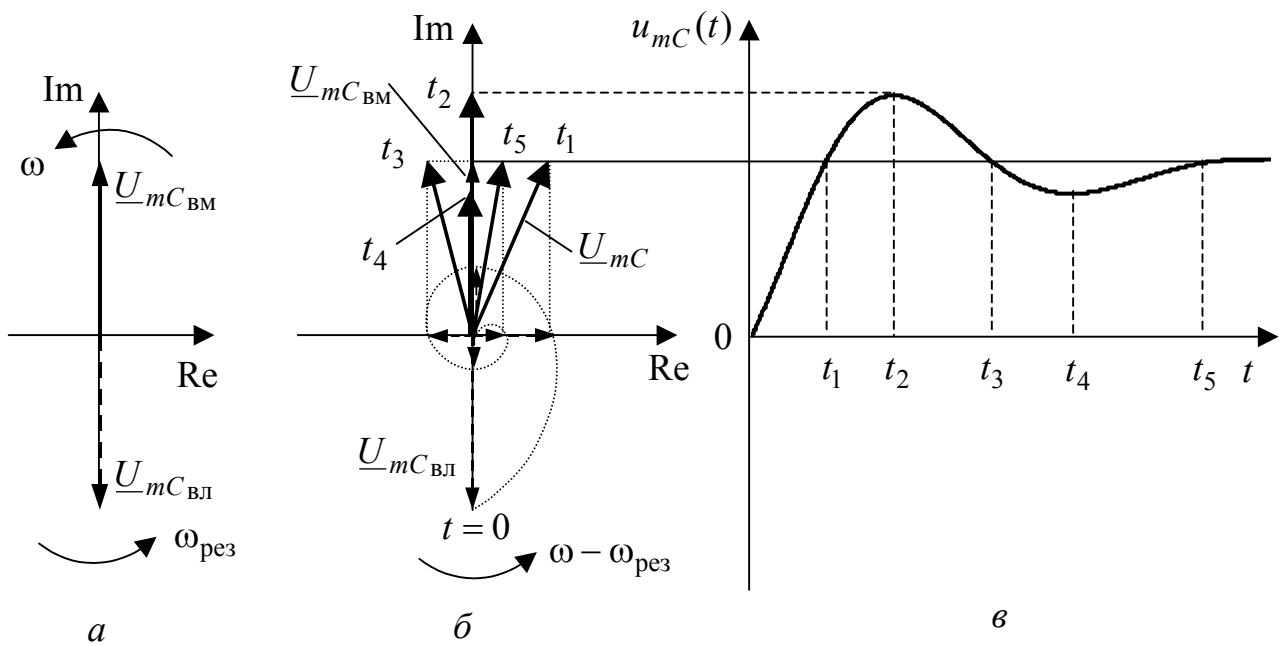


Рисунок 1.24 – Графіки, які пояснюють процес формування обвідної напруги на ємності кола R, L, C при $\omega \neq \omega_{рез}$, $\delta \neq 0$:
 $a, б$ – векторна діаграма; $в$ – залежність $u_{mC}(t)$

1.5 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. За яких умов у колі виникають перехідні процеси?
2. Сформулювати закони комутації. Зобразити схеми заміщення індуктивності та ємності за нульових початкових умов.
3. Пояснити фізичний зміст сталої часу для R, L і R, C кіл. Як залежить стала часу від величини R для кожного з цих кіл?
4. Як визначити порядок кола? Чи залежить вигляд характеристичного рівняння від функції, яка діє на вході кола?
5. Які існують способи складання характеристичного рівняння?
6. Який зв'язок існує між КПФ і диференціальним рівнянням кола?
7. У чому полягає класичний метод аналізу перехідних процесів? Пояснити поняття вільної та вимушеної складових струму (напруги).
8. При дії джерела постійної напруги $e(t) = E = 120 \text{ В}$ у колі (рис.1.4, a) після замикання перемикача встановився усталений режим. Визначити напругу на конденсаторі через $t_1 = 0,1 \text{ с}$ після розмикання перемикача, якщо $C = 2 \text{ мкФ}$, $R_1 = R_2 = 50 \text{ кОм}$.

Відповідь: $u_C(t_1) = 23 \text{ В}$.

9. Опір $R = 50 \text{ Ом}$ та незаряджена ємність $C = 5 \text{ мкФ}$, які з'єднані послідовно, увімкнено при $t = 0$ до джерела ЕРС $E = 20 \text{ В}$. Знайти струм у колі.

Відповідь: $i(t) = 0,4e^{-4000t} \text{ А}$.

10. Послідовно з'єднані індуктивність $L = 1 \text{ мГн}$ і опір $R = 100 \text{ Ом}$ підключаються при $t = 0$ до джерела синусоїдної напруги $e(t) = 20 \cos(10^5 t + \pi/4) \text{ В}$. Знайти напругу $u_L(t)$ та побудувати графік.

Відповідь: $u_L(t) = 14,1e^{-100000t} + 14,1 \cos(10^5 t + \pi/2) \text{ В}$.

11. Чи може частота коливального розряду ємності в контурі R, L, C дорівнювати або перевищувати резонансну частоту цього контуру?

12. Обчислити частоту незагасаючих $\omega_{\text{рез}}$ та вільних $\omega_{\text{вл}}$ коливань послідовного резонансного контуру з параметрами $L = 25 \text{ мГн}$, $C = 25 \text{ нФ}$, $R = 4 \text{ кОм}$.

Відповідь: $\omega_{\text{рез}} = 40000 \text{ рад/с}$; $\omega_{\text{вл}} = 69382 \text{ рад/с}$.

13. Скільки потрібно періодів коливань, щоб у послідовному резонансному контурі з логарифмічним декрементом загасання $\theta = 0,02$ амплітуда струму зменшилася до одного відсотка свого початкового значення?

Відповідь: 230,3.

14. Джерело синусоїдної напруги $e(t) = 100 \sin(100t + \psi_E) \text{ В}$ увімкнено до електричного кола (рис.1.25, а) з параметрами: $L = 0,4 \text{ Гн}$, $C = 83,33 \text{ мкФ}$, $R_1 = R_2 = 30 \text{ Ом}$. В момент проходження струму через додатний максимум замикається ключ. Визначити струм в індуктивності та напругу на ємності.

Відповідь: $i_L(t) = e^{-75t} \text{ А}$; $u_C(t) = 97 \sin(100t + 23^\circ) + 38e^{-400t} \text{ В}$.

15. В електричному колі (рис.1.25, б) діє джерело синусоїдної напруги $e(t) = 200 \sin(1000t + \psi_E) \text{ В}$. У момент $t = 0$, коли напруга джерела, збільшуючись, досягає додатного значення, що дорівнює діючому, розмикається перемикач. Знайти струм в індуктивності та напругу на ємності, якщо: $L = 50 \text{ мГн}$, $C = 20 \text{ мкФ}$, $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$.

Відповідь: $i_L(t) = -1,41e^{-1000t} + 2,82 \sin 1000t \text{ А}$; $u_C(t) = 70,7e^{-1000t} \text{ В}$.

16. Вважати, що в схемі (рис.1.4, б) ключ перенесено до індуктивної вітки. Дано: $E = 30 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$, $L = 2 \text{ мГн}$. Знайти після замикання контакту: початкове значення струму $i_3(t)$, його вільну і вимушену складові. Накреслити графік $i_3(t)$.

Відповідь: $i_3(+0) = 0,75 \text{ А}$; $i_{3\text{вл}}(t) = 0,45e^{-6250t} \text{ А}$; $i_{3\text{вм}}(t) = 0,3 \text{ А}$.

17. Коло (рис.1.26, а) підключається до джерела постійної напруги $E = 30 \text{ В}$. Знайти вирази для всіх струмів і напруги на ємності, якщо $L = 1 \text{ Гн}$, $C = 16 \text{ мкФ}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$. Побудувати графіки часових залежностей цих струмів і напруги. З'ясувати граничне значення опору, за якого перехідний процес у колі має коливальний характер.

Відповідь: $u_C(t) = 30 + 10e^{-125t} - 40e^{-500t} \text{ В}$; $i_1(t) = -0,02e^{-125t} + 0,32e^{-500t} \text{ А}$;
 $i_2(t) = -0,1e^{-125t} + 0,4e^{-500t} \text{ А}$; $i_3(t) = 0,08e^{-125t} - 0,08e^{-500t} \text{ А}$; $R_{\text{крит}} = 125 \text{ Ом}$.

18. До кола (рис.1.26, б) підключається джерело постійної напруги $E = 48\text{В}$. Знайти закон змінювання струму $i_2(t)$ та зобразити його графічно. Параметри кола: $L_1 = 100\text{ мГн}$, $R_1 = 160\text{ Ом}$, $L_2 = 36\text{ мГн}$, $R_2 = 90\text{ Ом}$.

Відповідь: $i_2(t) = 0,3 - 0,4e^{-1000t} + 0,1e^{-4000t}\text{ А}$.

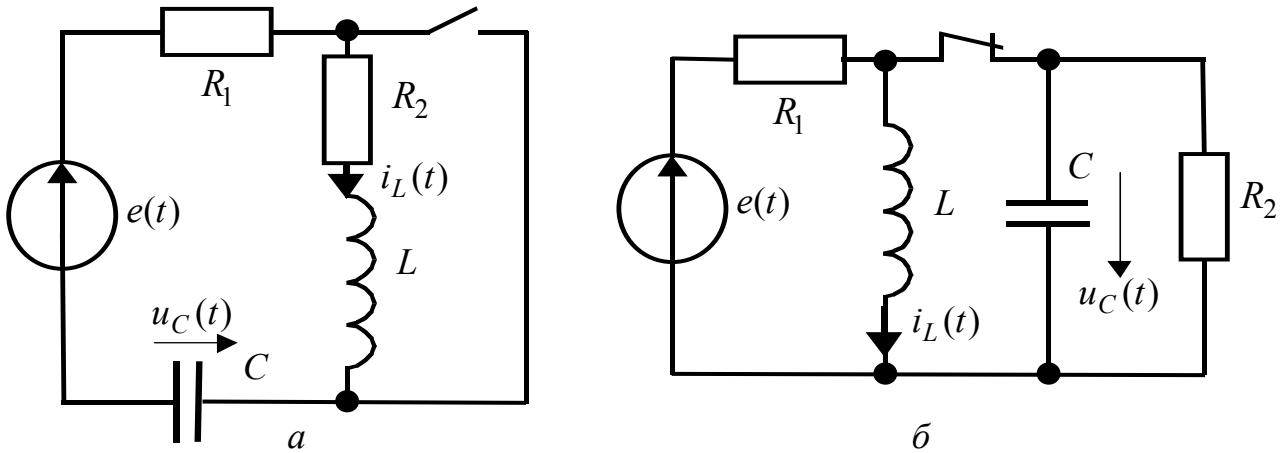


Рисунок 1.25 – Схеми електричних кіл

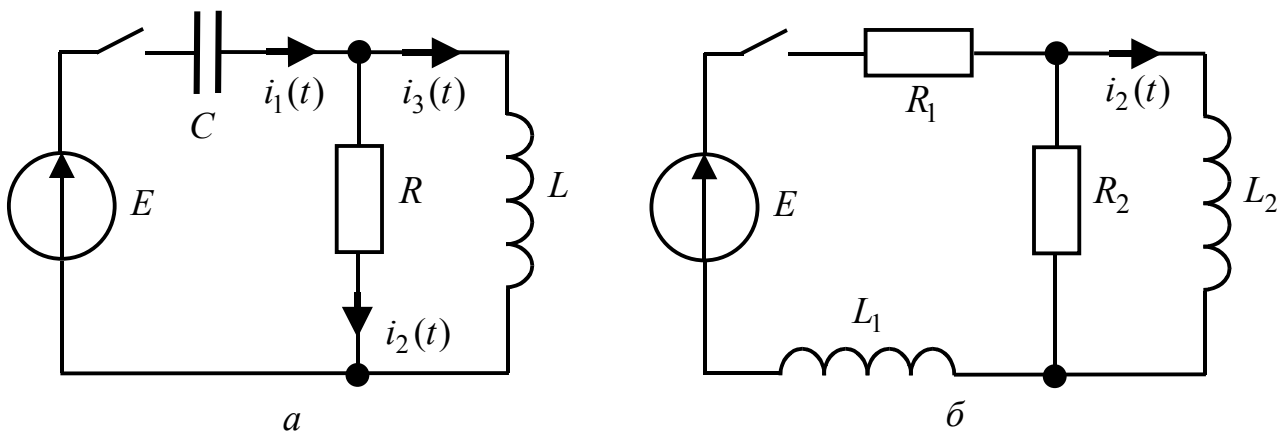


Рисунок 1.26 – Схеми електричних кіл

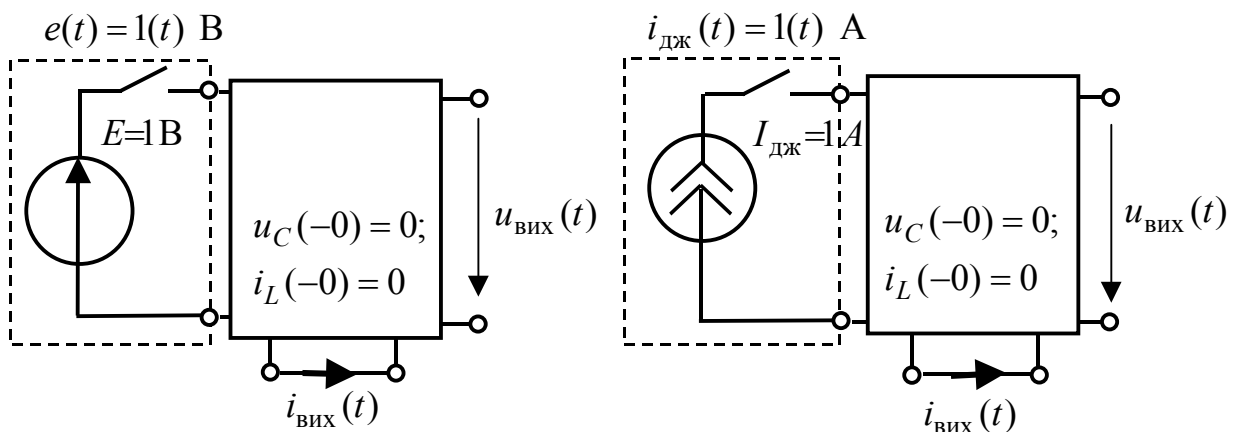
19. Схему кола (рис.1.6, а) змінено так: $R_3 = R_4 = 0$, $C = C_1 = 1\text{ мкФ}$, а замість опору R_5 увімкнена ємність $C_2 = 2\text{ мкФ}$. Знайти при $t = +0$ початкові значення струму в індуктивності та напруг на ємностях та їх перших похідних.

Вказівка. Напруги на ємностях до комутації визначаються з умови рівності їх зарядів і рівності сумарної напруги на ємностях напрузі на опорі R_2 .

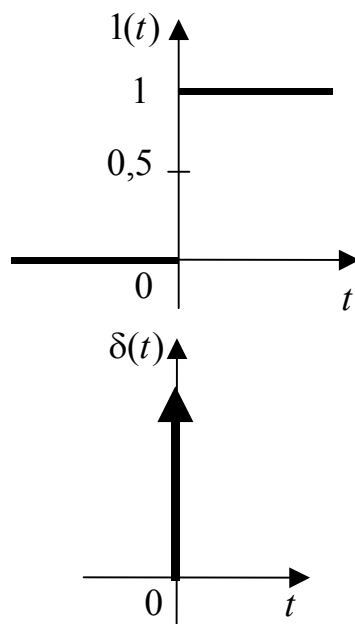
Відповідь. $i_3(+0) = 0,6\text{ А}$; $u_{C1}(+0) = 40\text{ В}$; $u_{C2}(+0) = 20\text{ В}$;
 $u'_{C1}(+0) = 2 \cdot 10^5\text{ В} \cdot \text{с}^{-1}$; $u'_{C2}(+0) = 0$; $i'_3(+0) = 2 \cdot 10^3\text{ А} \cdot \text{с}^{-1}$.

2 Часовий метод аналізу перехідних процесів

- Перехідна характеристика кола
- Імпульсна характеристика кола
- Часові характеристики типових кіл $R, L; R, C; R, L, C$
- Часові характеристики зв'язаних коливальних контурів
- Визначення відгуку кола на ступінчасту дію за допомогою часових характеристик
- Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою перехідної характеристики. Інтеграли Дюамеля
- Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою імпульсної характеристики



Соболев



Дірак

2 ЧАСОВИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Класичний метод застосовують для аналізу перехідних процесів у колах без джерел (вільні процеси) або за наявності джерел, які дозволяють визначати вимушений (усталений) режим кола. Перелік таких джерел вельми обмежений. Крім джерел постійної і синусоїдної напруг і струмів (див. розд. 1), усталений режим можна розраховувати для джерел, у яких миттєві значення ЕРС (задавальних струмів) змінюються за експоненційним законом. Цим пояснюється обмежене використання класичного методу в радіотехніці для аналізу проходження через кола сигналів, які є складними функціями часу. Однак це не зменшує значення класичного методу, оскільки його подальшим розвитком є часовий метод аналізу перехідних процесів.

Часовий метод ґрунтується на принципі накладання і дозволяє розраховувати перехідні процеси для ЛЕК з вхідними джерелами коливальних довольної форми та відгуків на дію складних сигналів. Для цього миттєве значення ЕРС (задавального струму) джерела або вхідного сигналу подається як сума так званих типових дій, для яких є чинним класичний метод аналізу. Згідно з принципом накладання відгук кола (вихідні напруга чи струм) визначається підсумовуванням відгуків на кожен з вибраних типових дій. Якщо тривалість типових дій стає нескінченно малою, сума переходить в інтеграл.

Прикладом типової дії є «ступінчаста дія», що формується постійним джерелом, яке підключається в різні моменти часу. Апроксимація миттєвого значення напруги або струму вхідного джерела, умовно позначеного $s_{\text{вх}}(t)$, за допомогою ступінчастих дій $\Delta s_{\text{квх}}(t)$ показана на рис.2.1, а. Рис.2.1, б ілюструє підвищення якості апроксимації із зменшенням рівня типових дій та збільшенням їх кількості (порівняно з рис.2.1, а кількість «сходинок» зросла більше, ніж у три рази). Перевагою ступінчастих дій є простота визначення відгуків ЛЕК на них класичним методом.

Математичний апарат часового методу аналізу ґрунтується на аналітичному описі типових дій та часових характеристик кола – перехідної та імпульсної, які є відгуками ЛЕК на ці дії.

2.1 Перехідна характеристика кола

Перехідна характеристика ЛЕК пов'язана із ступінчастою типовою дією (рис.2.1), для аналітичного опису якої застосовується одинична функція, звана також функцією Хевісайда¹, або функцією увімкнення.

¹ **Хевісайд Олівер**, Oliver Heaviside (1850–1925) – англійський інженер і фізик, член Лондонської королівської спілки. Основні праці, що належать до теорії електрики та електротехніки, опубліковані у тритомній монографії «Електромагнітна теорія» (1893–1912). У 1902 р. одночасно з А. Е. Кеннелі вказав на існування іонізованого шару атмосфери (іоносфери), який відбиває електромагнітні хвилі. Припустив, що

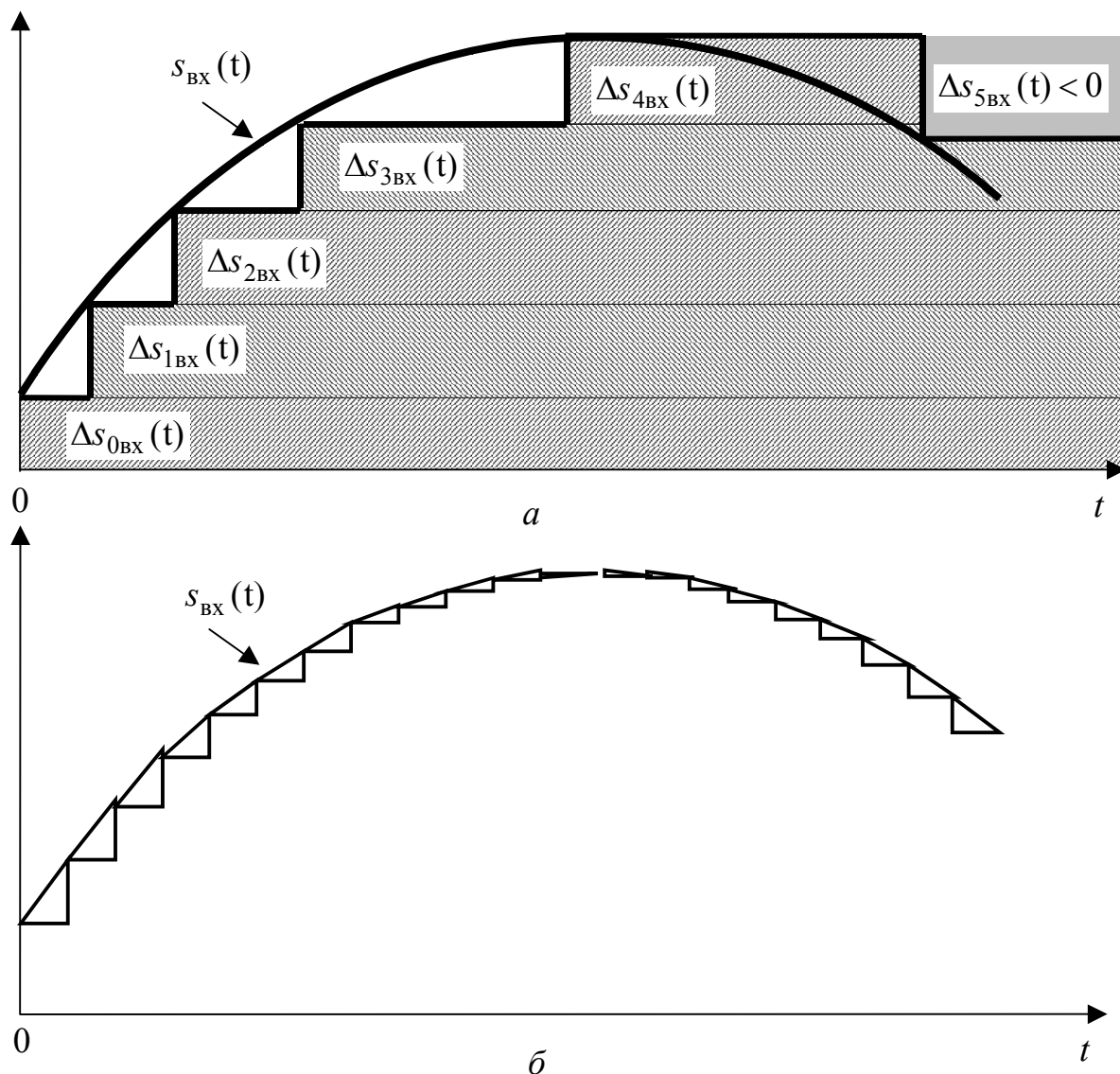


Рисунок 2.1 – Апроксимація миттєвого значення параметра вхідного джерела $s_{BX}(t)$ за допомогою типових ступінчастих дій $\Delta s_{kBX}(t)$

Одинична функція позначається $1(t)$ або $\sigma(t)$ і аналітично описується (рис.2.2) одним з двох способів:

$$1) \quad 1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(t, \Delta t),$$

де $F(t, \Delta t)$ – спеціальні функції часу і параметра Δt , прикладами яких є (рис.2.2, а, б),

цей шар спільно з поверхнею Землі дозволяє електромагнітним хвилям огинати земну кулю. Подальші фундаментальні дослідження іоносфери виконав Е. Еплтон (Нобелівська премія з фізики, 1947). Хевісайд є одним з творців операторного методу аналізу, який широко застосовується у математичній фізиці й електрорадіотехніці (див. розд. 3).

$$F_1(t, \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq \Delta t / 2; \\ 0,5 + t / \Delta t & \text{при } -\Delta t / 2 < t < \Delta t / 2; \\ 0 & \text{при } t \leq -\Delta t / 2; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$F_2(t, \Delta t) = 0,5 + \frac{\operatorname{arctg}(t / \Delta t)}{\pi}; \quad (2.2)$$

$$2) \quad 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 0,5 & \text{при } t = 0; \text{ (рис.2.2, в).} \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Одинична функція, зсунута за часом на t_0 , записується у вигляді $1(t - t_0)$ і умовно позначається, як показано на рис.2.2 з.

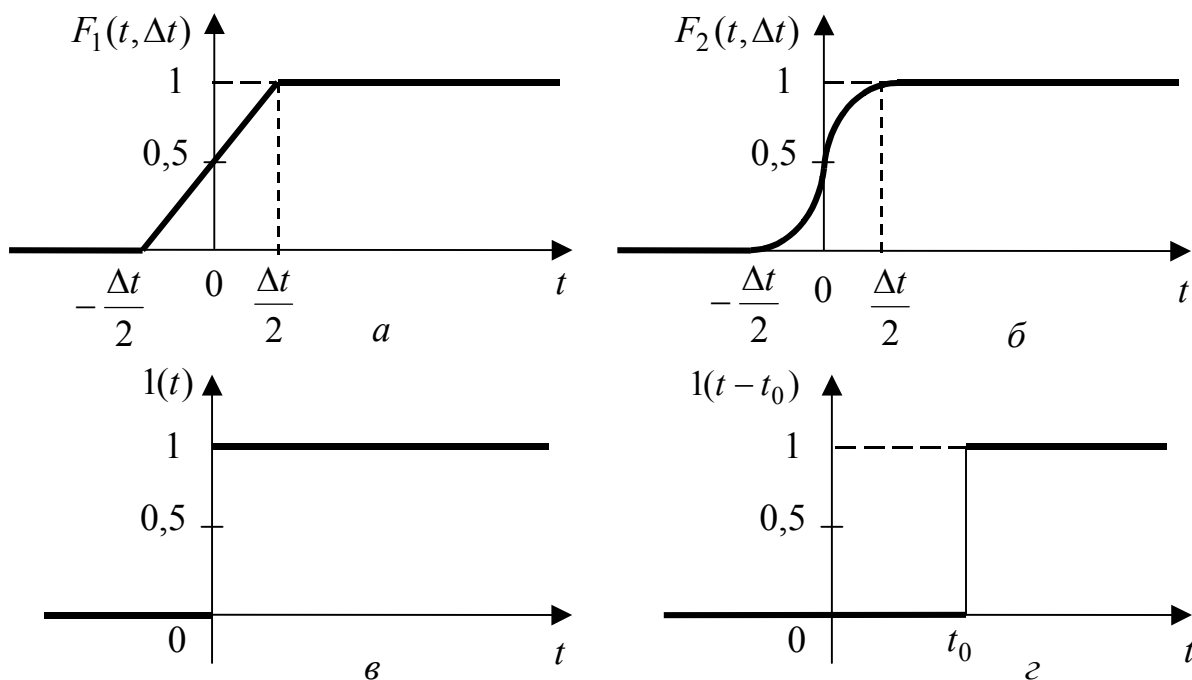


Рисунок 2.2 – До аналітичного запису одиничної функції

Стрибкоподібний характер змінювання одиничної функції при $t = 0$ ($1(-0) = 0$; $1(+0) = 1$) та її рівність одиниці при $t > 0$ дозволяють трактувати $1(t)$ стосовно перехідних процесів як поєднання постійного джерела (напруги або струму) одиничної величини та комутатора (ділянки, позначені на рис.2.3 пунктиром).

Перехідна характеристика чисельно дорівнює відгуку пасивної (без внутрішніх джерел) ЛЕК на дію джерела типу одиничної функції за нульових початкових умов $u_C(-0) = 0$; $i_L(-0) = 0$ для всіх ємностей та індуктивностей.

Перехідну характеристику позначають $g(t)$ і визначають її розмірність як відношення розмірностей відгуку (вихідного струму або напруги) і дії (напруги

або струму джерела на вході кола). Тому $g(t)$ може бути безрозмірною, мати розмірність провідності або опору.

Перехідна характеристика фізично відповідає переходному процесу для вихідного струму $i_{\text{вих}}(t)$ або напруги $u_{\text{вих}}(t)$ при увімкненні постійного одиничного джерела до входу пасивної ЛЕК (рис.2.3) з розрядженими ємностями та індуктивностями без струму.

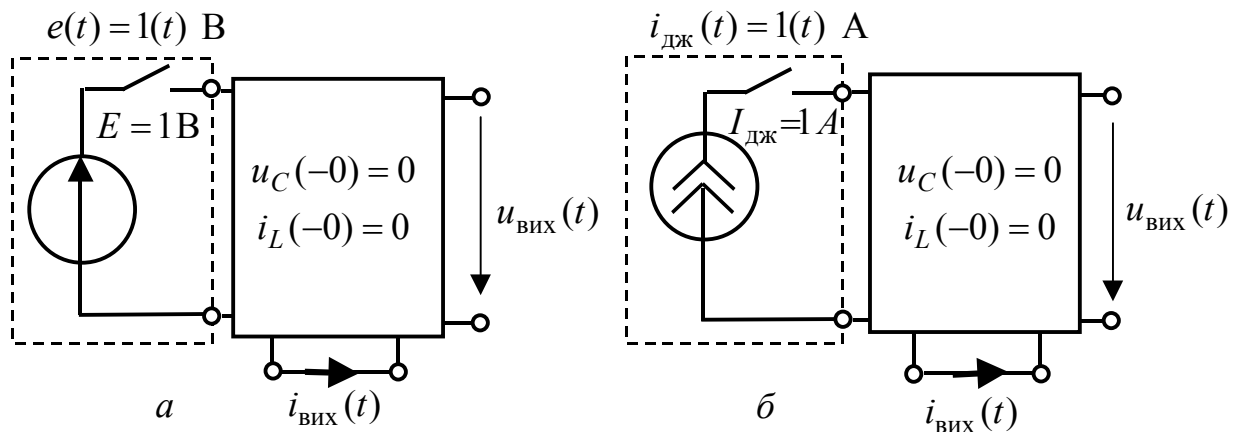


Рисунок 2.3 – Фізичне трактування одиничної функції та перехідної характеристики кола

Якщо дія – напруга (рис.2.3, а), то перехідна характеристика безрозмірна, коли відгук – напруга $u_{\text{вих}}(t)$, та має розмірність провідності (См), коли відгук – струм $i_{\text{вих}}(t)$. При цьому перехідні характеристики описуються виразами:

$$g_u(t) = u_{\text{вих}}(t) / E; \quad (2.3)$$

$$g_i(t) = i_{\text{вих}}(t) / E. \quad (2.4)$$

Якщо дією є струм (рис.2.3, б), перехідні характеристики:

$$g_i(t) = i_{\text{вих}}(t) / I_{\text{джк}}; \quad (2.5)$$

$$g_u(t) = u_{\text{вих}}(t) / I_{\text{джк}}. \quad (2.6)$$

Очевидно, що характеристика (2.5) безрозмірна, а функція (2.6) має розмірність опору (Ом).

Вирази (2.3) – (2.6) дозволяють використовувати для визначення перехідних характеристик отримані класичним методом розв'язки задач, у яких до кола за нульових початкових умов вмикаються постійні джерела (див. розд. 1).

Щоб експериментально визначити перехідну характеристику, до входу кола підключають генератор прямокутних імпульсів тривалістю τ_1 , яка значно перевищує практичну тривалість переходного процесу в даному колі (для кіл першого порядку $\tau_1 \gg t_{\text{пер}} = 4,6\tau$). На екрані осцилографа, увімкненого до входу кола, спостерігається осцилограма, пропорційна $g(t)$.

Перехідні характеристики мають розмірності, однакові з КПФ кола

$H(j\omega)$. Крім того, для $g(t)$ та $H(j\omega)$ справедливі рівності граничних значень:

$$g(\infty) = H(j0); \quad (2.7)$$

$$g(+0) = H(j\infty). \quad (2.8)$$

Рівність (2.7) безпосередньо виходить з диференціального рівняння кола (1.2) при $t \rightarrow \infty$ для $x(t) = 1(t)$, $y(t) = g(t)$

$$b_0 g(\infty) = a_0, \text{ звідки } g(\infty) = \frac{a_0}{b_0},$$

і виразу (1.8) для КПФ кола при $\omega = 0$

$$H(j0) = \frac{a_0}{b_0}.$$

З фізичної точки зору, слушність співвідношення (2.7) пояснюється однаковою поведінкою реактивних (накопичувальних) елементів кола L, C в режимі синусоїдної дії з частотою $\omega = 0$ та в усталеному режимі ($t \rightarrow \infty$) при дії постійного джерела. В обох режимах ємності заряджені до постійної напруги (тобто розімкнені), а через індуктивності проходить постійний струм (тому вони замкнені).

Аналогічно можна обґрунтувати співвідношення (2.8). При дії синусоїдного джерела з частотою $\omega \rightarrow \infty$ в момент часу $t = +0$ при перехідному процесі у колі з нульовими початковими умовами ємності замкнені, а індуктивності розімкнені. Можна показати (пропонується виконати самостійно), що

$$g(+0) = H(j\infty) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m < n; \\ a_m / b_n, & \text{якщо } m = n. \end{cases}$$

Приклад 2.1. Знайти перехідні характеристики кола (рис.2.4, а), вважаючи дією напругу джерела, а відгуками – струми $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_C(t)$ та напругу $u_C(t)$. Побудувати графіки перехідних характеристик.

Розв’язання. У прикладі 1.3 розглянуті перехідні процеси для аналогічної схеми (рис.1.4, а). Скористуємось знайденим там коренем характеристичного рівняння, спільного для всіх процесів даного кола,

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C},$$

якому відповідає однакова для всіх процесів стала часу кола

$$\tau = -\frac{1}{p_1} = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}. \quad (2.9)$$

Виходячи з фізичного значення перехідних характеристик, проаналізуємо перехідний режим кола при увімкненні його до джерела постійної напруги (рис.2.4, а) за нульової початкової умови $u_C(-0) = 0$. Струми кола і напруги на ємності згідно з класичним методом запишемо у вигляді:

$$i(t) = A_i e^{-\frac{t}{\tau}} + i_{\text{ВМ}}(t); \quad u_C(t) = A_{u_C} e^{-\frac{t}{\tau}} + u_{\text{СВМ}}(t), \quad (2.10)$$

де стала часу кола τ визначається за формулою (2.9).

Вимушені складові, які входять до розв'язку (2.10), знаходимо, розглядаючи ustalений режим з постійним джерелом E :

$$i_{1\text{ВМ}} = i_{2\text{ВМ}} = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad i_{C\text{ВМ}} = 0; \quad u_{C\text{ВМ}} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

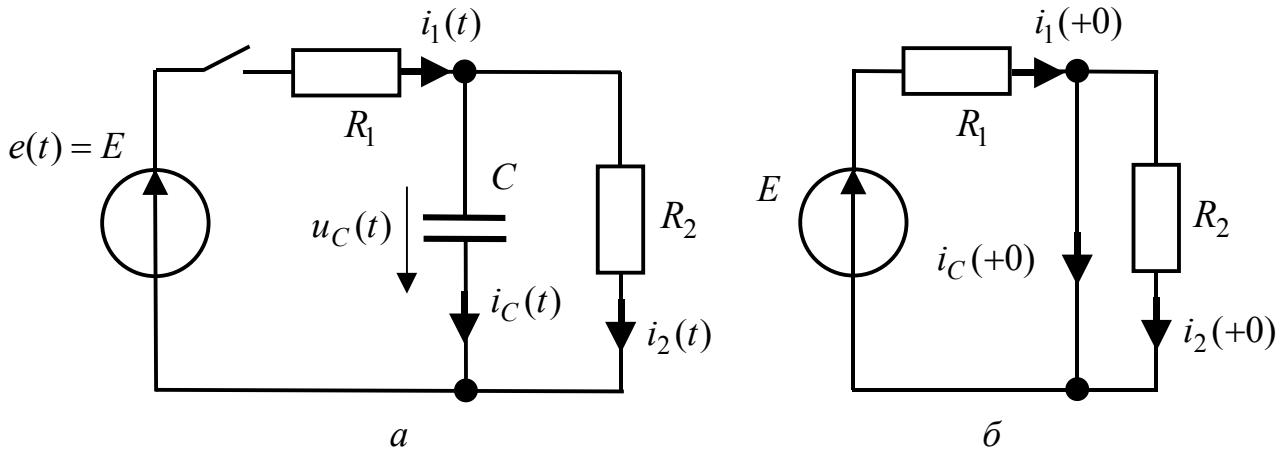


Рисунок 2.4 – До прикладу 2.1: *a* – схема кола; *б* – режим кола для $t = +0$

Щоб знайти сталі інтегрування A_i , A_{u_C} у рівняннях (2.10), визначимо початкові значення струмів і напруг на ємності за еквівалентною схемою кола для $t = +0$ (рис.2.4, *б*)

$$i_1(+0) = i_C(+0) = \frac{E}{R_1}; \quad i_2(+0) = 0; \quad u_C(+0) = u_C(-0) = 0.$$

Сталі інтегрування знайдемо, підставивши до рівняння (2.10) вимушені та початкові значення струмів і напруги на ємності для моменту часу $t = +0$:

$$A_{i_1} = i_1(+0) - i_{1\text{ВМ}} = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{ER_2}{R_1(R_1 + R_2)}; \quad A_{i_2} = i_2(+0) - i_{2\text{ВМ}} = -\frac{E}{R_1 + R_2};$$

$$A_{i_C} = i_C(+0) - i_{C\text{ВМ}} = \frac{E}{R_1}; \quad A_{u_C} = u_C(+0) - u_{C\text{ВМ}} = -\frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

Складемо кінцеві вирази для шуканих миттєвих значень:

$$i_1(t) = A_{i_1} e^{-\frac{t}{\tau}} + i_{1\text{ВМ}}(t) = \frac{ER_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad (2.11)$$

$$i_2(t) = A_{i_2} e^{-\frac{t}{\tau}} + i_{2\text{ВМ}}(t) = -\frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); \quad (2.12)$$

$$i_C(t) = A_{i_C} e^{-\frac{t}{\tau}} + i_{C\text{ВМ}}(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (2.13)$$

$$u_C(t) = A_{u_C} e^{-\frac{t}{\tau}} + u_{C\text{ВМ}}(t) = -\frac{ER_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (2.14)$$

Побудуємо графіки миттєвих значень струмів $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_C(t)$ (рис.2.5, а) і напруги $u_C(t)$ (рис.2.5, б).

За визначенням, перехідні характеристики численно дорівнюють виразам (2.11) – (2.14) при $E = 1$. Для того, щоб при $t < 0$ забезпечити рівність $g(t) = 0$, прийнято, записуючи перехідні характеристики, використовувати множник $1(t)$:

$$g_{i1}(t) = \left[\frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right] \cdot 1(t); \quad g_{i2}(t) = \left[\frac{1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] \cdot 1(t);$$

$$g_{iC}(t) = \left[\frac{1}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot 1(t); \quad g_{u_C}(t) = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] \cdot 1(t).$$

Перехідні характеристики $g_{i1}(t)$, $g_{i2}(t)$, $g_{iC}(t)$ мають розмірність провідності (См), а перехідна характеристика $g_{u_C}(t)$ безрозмірна. Графіки перехідних характеристик показані на рис.2.5, в, г.

Приклад 2.2. Перевірити граничні співвідношення (2.7) і (2.8) для перехідної характеристики $g_{i1}(t)$ і КПФ $H_{i1}(j\omega)$ у колі, розглянутому у прикладі 2.1 (рис.2.4, а).

Розв'язання. Використовуючи знайдений у прикладі 2.1 вираз для перехідної характеристики $g_{i1}(t)$, запишемо її граничні значення для $t = +0$ і $t \rightarrow \infty$:

$$g_{i1}(+0) = \frac{1}{R_1}; \quad g_{i1}(\infty) = \frac{1}{R_1 + R_2}.$$

Визначимо у загальному вигляді КПФ $H_{i1}(j\omega)$, яка є комплексною вхідною провідністю даного кола, і подамо її у стандартній формі (1.8):

$$H_{i1}(j\omega) = \frac{I_1}{E} = \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 / j\omega C}{R_2 + 1 / j\omega C}} = \frac{R_2 + 1 / j\omega C}{R_1 R_2 + R_1 / j\omega C + R_2 / j\omega C} =$$

$$= \frac{R_2 j\omega C + 1}{R_1 R_2 j\omega C + R_1 + R_2}. \quad (2.15)$$

Знайдемо граничні значення КПФ, використовуючи вираз (2.15):

$$H_{i1}(j0) = \frac{1}{R_1 + R_2}; \quad H_{i1}(j\infty) = \frac{1}{R_1}.$$

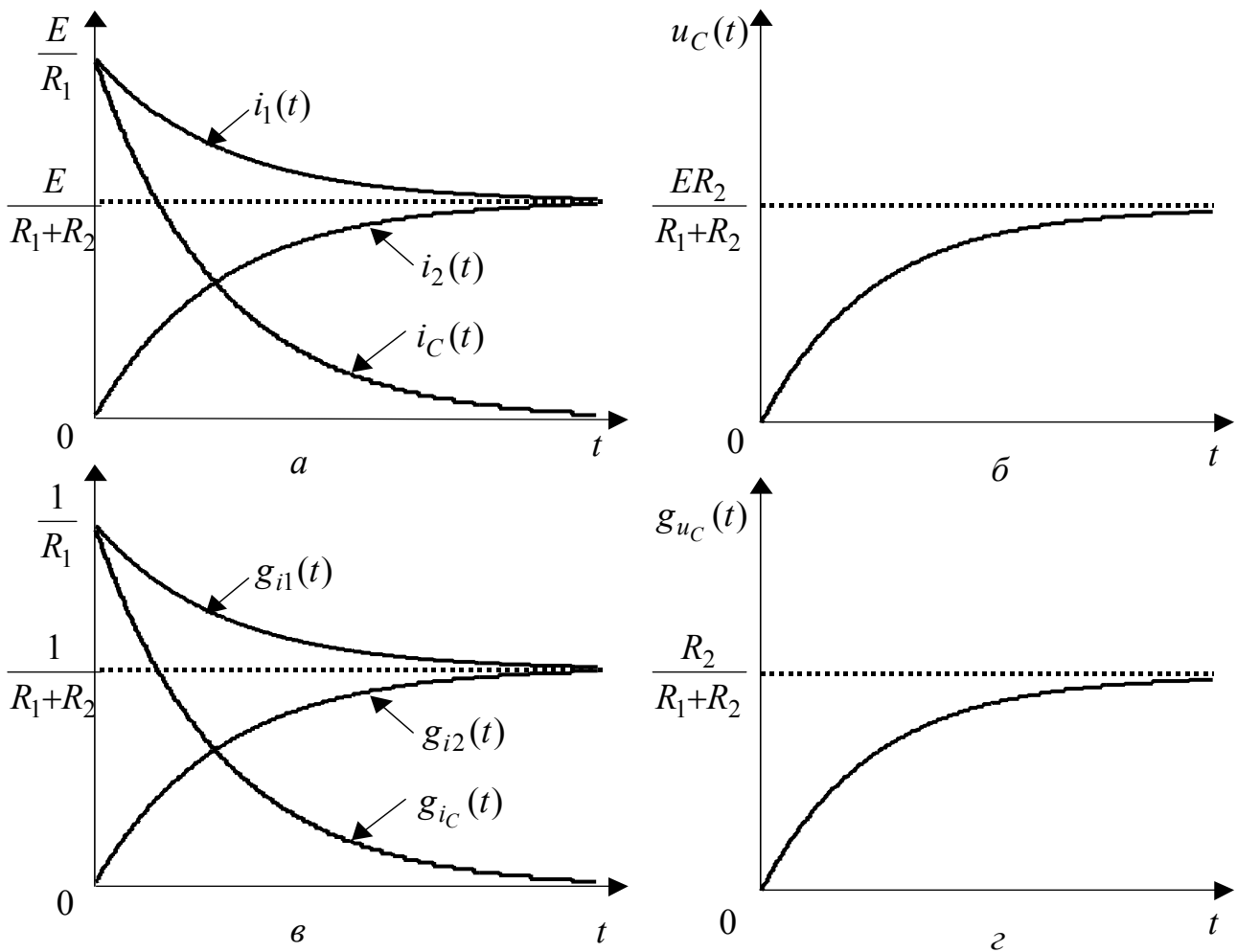


Рисунок 2.5 – Графіки до прикладу 2.1: *a*, *б* – перехідні процеси при увімкненні джерела $e(t) = E$; *в*, *г* – перехідні характеристики

Перевіримо слушність граничних співвідношень:

$$g_{i1}(\infty) = H_{i1}(j0) = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{b_0}{a_0};$$

$$g_{i1}(+0) = H_{i1}(j\infty) = \frac{1}{R_1} = \frac{b_1}{a_1},$$

де $a_0 = R_1 + R_2$, $a_1 = R_1 R_2$, $b_0 = 1$, $b_1 = R_2$ – відповідні коефіцієнти при $j\omega$ у знаменнику і чисельнику стандартних форм запису КПФ (1.8) і (2.15).

Приклад 2.3. Визначити перехідні характеристики кола (рис.2.6, *a*), вважаючи дією напругу $u_{\text{вх}}(t)$, а відгуками – струми $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ та напругу $u_L(t)$. Записати вирази для перехідних характеристик, якщо $R_1 = R_2 = R_3 = R$, та побудувати їх графіки для $R = 2$ кОм, $L = 30$ мкГн.

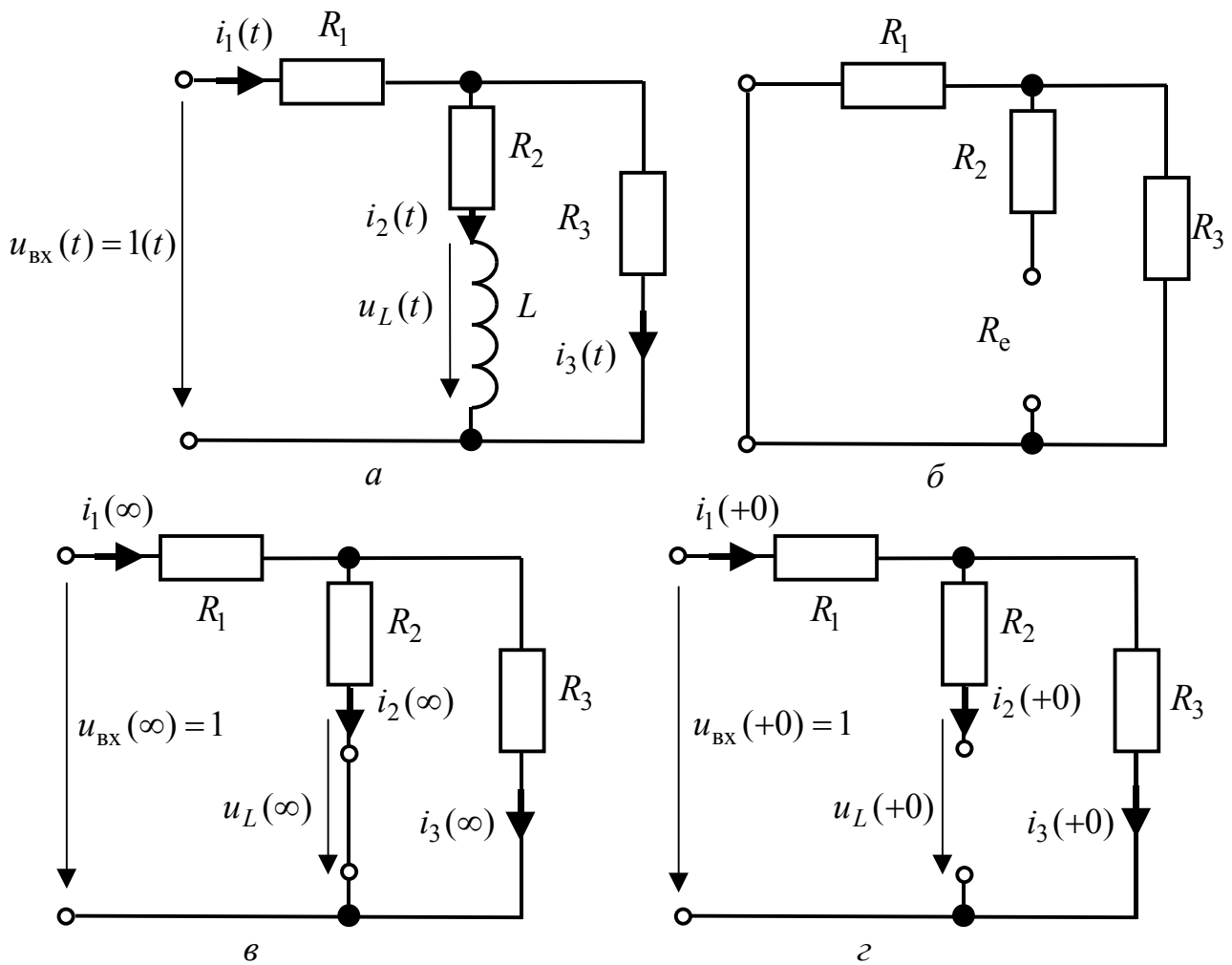


Рисунок 2.6 – До прикладу 2.3: *а* – схема кола; *б* – еквівалентна схема для визначення R_e ; *в* – режим кола при $t \rightarrow \infty$; *г* – режим кола при $t = +0$

Розв’язання. Поклавши $u_{\text{BX}}(t) = 1(t)$ (рис.2.6, *а*), розрахуємо режим кола, який характеризує шукані перехідні характеристики.

Оскільки дане R, L коло має перший порядок, сталу часу знайдемо (див. п.1.2.3) у вигляді:

$$\tau = L / R_e,$$

де $R_e = R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)$ – еквівалентний опір кола (рис.2.6, *б*) відносно затискачів індуктивності при замкнених входних затискачах ($u_{\text{BX}} = 0$).

Перехідні характеристики знаходимо аналогічно виразу (1.4) у вигляді:

$$g(t) = [g_{\text{вл}}(t) + g_{\text{вм}}] \cdot 1(t) = (Ae^{-\frac{t}{\tau}} + g_{\text{вм}}) \cdot 1(t), \quad (2.16)$$

де $g_{\text{вл}}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, $g_{\text{вм}}$ – відповідно вільні та вимушені складові розв’язку; A – сталі інтегрування.

Вимушені складові розв'язку знайдемо, розглядаючи усталений режим ($t \rightarrow \infty$) при постійній одиничній напрузі на вході (рис.2.6, в):

$$g_{i1\text{ВМ}} = i_1(\infty) = \frac{1}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$g_{i2\text{ВМ}} = i_2(\infty) = \frac{R_3}{[R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)](R_2 + R_3)} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$g_{i3\text{ВМ}} = i_3(\infty) = \frac{R_2}{[R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)](R_2 + R_3)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$g_{u_L\text{ВМ}} = u_L(\infty) = 0.$$

Щоб визначити необхідні для знаходження сталих інтегрування початкові значення перехідних характеристик, розглянемо режим кола для $t = +0$ (рис.2.6, з):

$$g_{i1}(+0) = i_1(+0) = g_{i3}(+0) = i_3(+0) = \frac{1}{R_1 + R_3}; \quad g_{i2}(+0) = i_2(+0) = 0;$$

$$g_{u_L}(+0) = u_L(+0) = \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$

З рівнянь (2.16) для $t = +0$ знаходимо сталі інтегрування:

$$A_{i1} = g_{i1}(+0) - g_{i1\text{ВМ}} = \frac{1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} =$$

$$= -\frac{R_3^2}{(R_1 + R_3)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)};$$

$$A_{i2} = g_{i2}(+0) - g_{i2\text{ВМ}} = -\frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$A_{i3} = g_{i3}(+0) - g_{i3\text{ВМ}} = \frac{1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)};$$

$$A_{u_L} = g_{u_L}(+0) - g_{u_L\text{ВМ}} = \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$

Значення вимушених складових, сталих інтегрування та кінцеві вирази для перехідних характеристик у випадку $R_1 = R_2 = R_3 = R$ і для заданих значень L, R зведемо до табл.2.1.

Згідно з виразами для $g(t)$ (табл.2.1) побудуємо графіки перехідних характеристик (рис.2.7).

Перехідні характеристики $g_{i1}(t)$, $g_{i2}(t)$, $g_{i3}(t)$ мають розмірність провідності (См), а перехідна характеристика $g_{u_L}(t)$ безрозмірна.

Таблиця 2.1 – Розв’язки у прикладі 2.3

Відгук	$g_{\text{ВМ}}$	A	$g(t)$
$i_1(t)$	$\frac{2}{3R}$	$-\frac{1}{6R}$	$\left(-\frac{1}{6R}e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}} + \frac{2}{3R}\right) \cdot 1(t) \approx \left(-0,833 \cdot 10^{-4}e^{-\frac{t}{10^{-2}}} + 3,33 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 1(t), \text{См}$
$i_2(t)$	$\frac{1}{3R}$	$-\frac{1}{3R}$	$\frac{1}{3R} \left(1 - e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}}\right) \cdot 1(t) \approx 1,66 \cdot 10^{-4} \left(1 - e^{-\frac{t}{10^{-2}}}\right) \cdot 1(t), \text{См}$
$i_3(t)$	$\frac{1}{3R}$	$\frac{1}{6R}$	$\left(\frac{1}{6R}e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}} + \frac{1}{3R}\right) \cdot 1(t) \approx \left(0,833 \cdot 10^{-4}e^{-\frac{t}{10^{-2}}} + 1,66 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 1(t), \text{См}$
$u_L(t)$	0	0,5	$0,5e^{-\frac{t}{L/(1,5R)}} \cdot 1(t) = 0,5e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \cdot 1(t)$

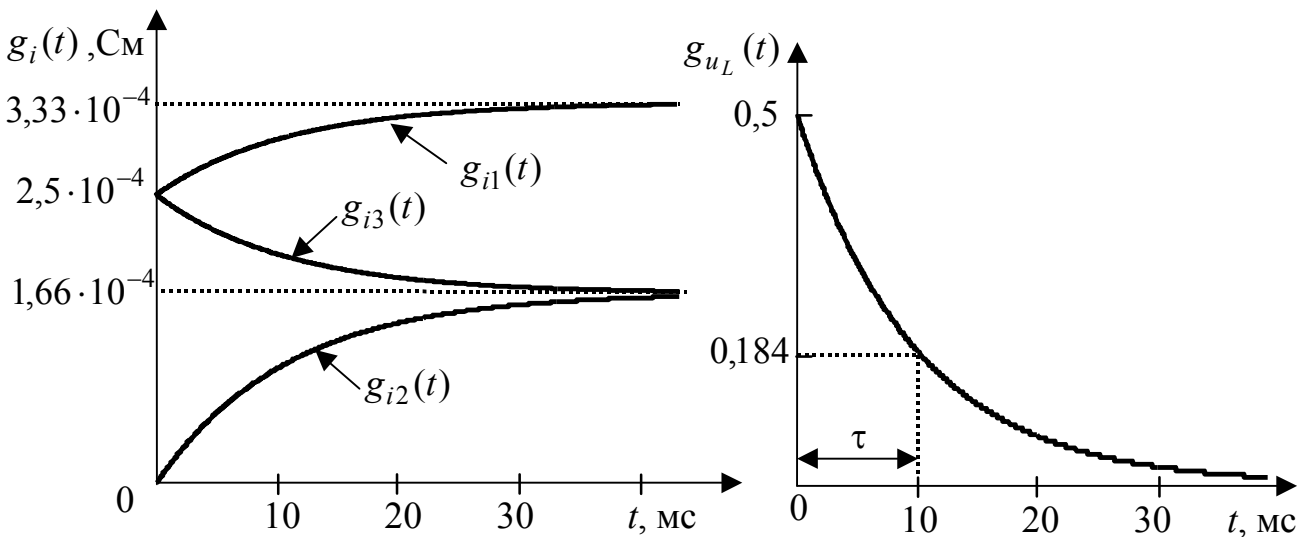


Рисунок 2.7 – Графіки перехідних характеристик у прикладі 2.3

Приклад 2.4. Визначити перехідну характеристику кола (рис.2.8, а), вважаючи дією струм $i(t)$, а відгуком – напругу $u(t)$. Записати вираз для перехідної характеристики і побудувати її графік для $R_2 = R_3 = R$; $R_1 = 2R$.

Розв’язання. Визначимо основні параметри для розрахунку шуканої перехідної характеристики:

1) сталу часу кола $\tau = CR_e$,

де $R_e = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$ – еквівалентний опір кола (рис.2.8, б) відносно затисків ємності при розімкнених вхідних затискачах ($i = 0$);

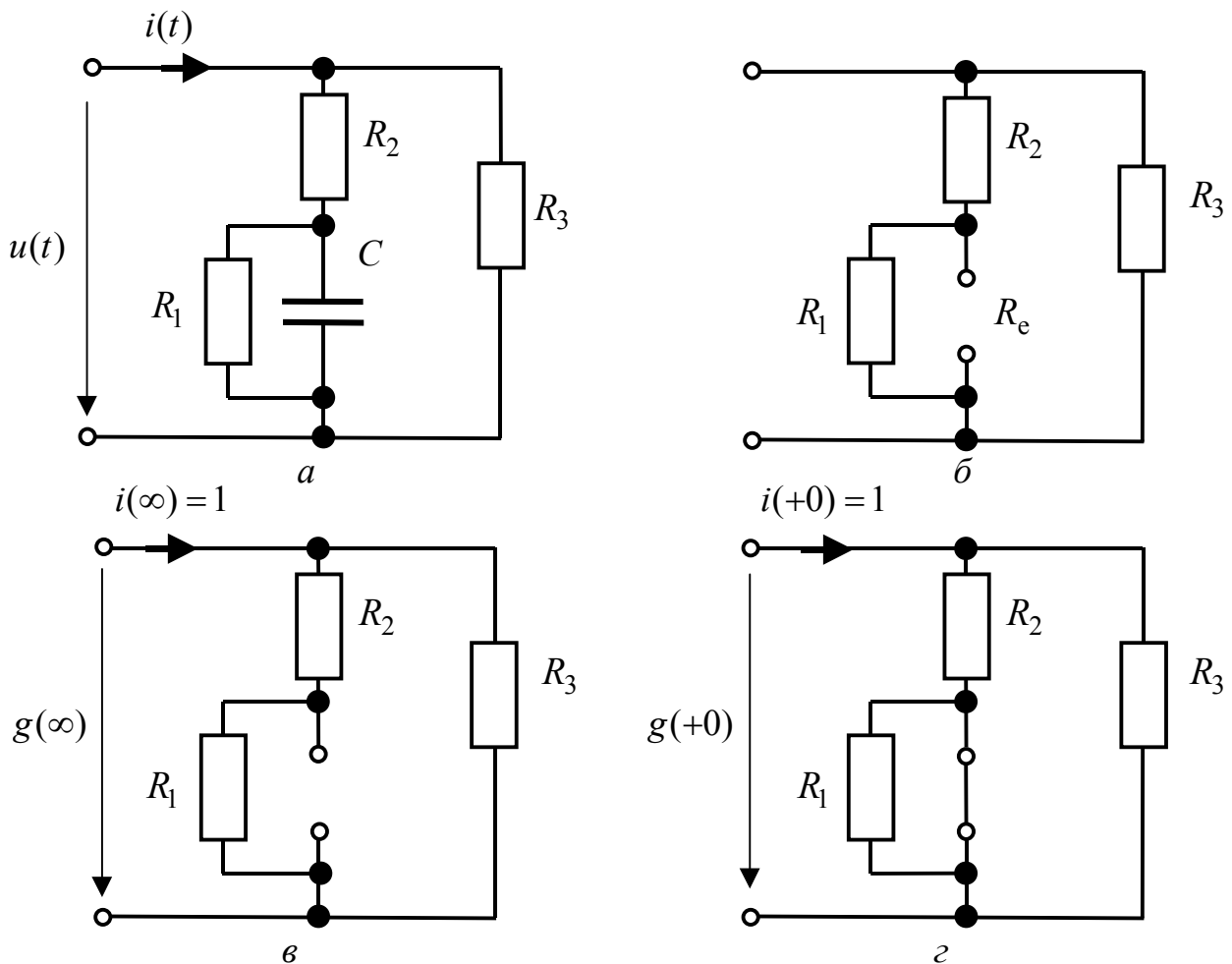


Рисунок 2.8 – До прикладу 2.4: *а* – схема кола; *б* – еквівалентна схема для визначення R_e ; *в* – режим кола при $t \rightarrow \infty$; *г* – режим кола при $t = +0$

2) вимушену складову перехідної характеристики (рис.2.8, *в*)

$$g_{uBM} = u(\infty) = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3};$$

3) початкове значення перехідної характеристики (рис.2.8, *г*)

$$g_u(+0) = u(+0) = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3};$$

4) сталу інтегрування

$$A_u = g_u(+0) - g_{uBM} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} - \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = -\frac{R_1 R_3^2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3)}.$$

Використовуючи вираз (2.16) і розраховані параметри перехідної характеристики, запишемо кінцевий вираз для $g_u(t)$ за умови $R_2 = R_3 = R$; $R_1 = 2R$:

$$g_u(t) = (g_{uBM} + A_u e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) = (0,75R - 0,25R e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t), \quad (2.17)$$

де $\tau = CR_e$.

Згідно із співвідношенням (2.17) побудуємо графік (рис.2.9). Очевидно, що перехідна характеристика має розмірність опору (Ом).

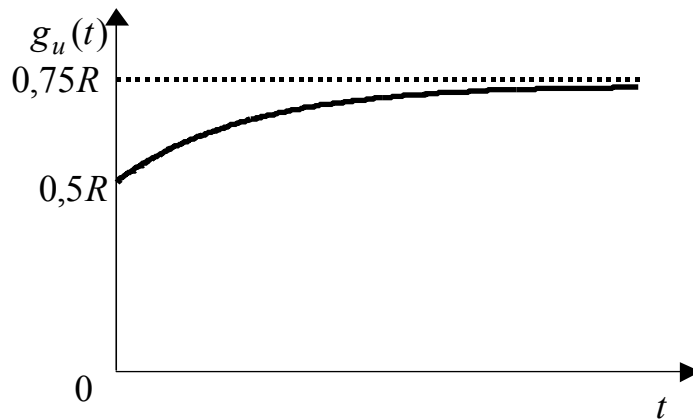


Рисунок 2.9 – Графік перехідної характеристики у прикладі 2.4

Приклад 2.5. Визначити перехідну характеристику кола для вказаних на схемі (рис.2.10, а) дії $u_{\text{вх}}$ та відгуку $u_{\text{вих}}$. Записати вираз для перехідної характеристики і зобразити її графік для $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$.

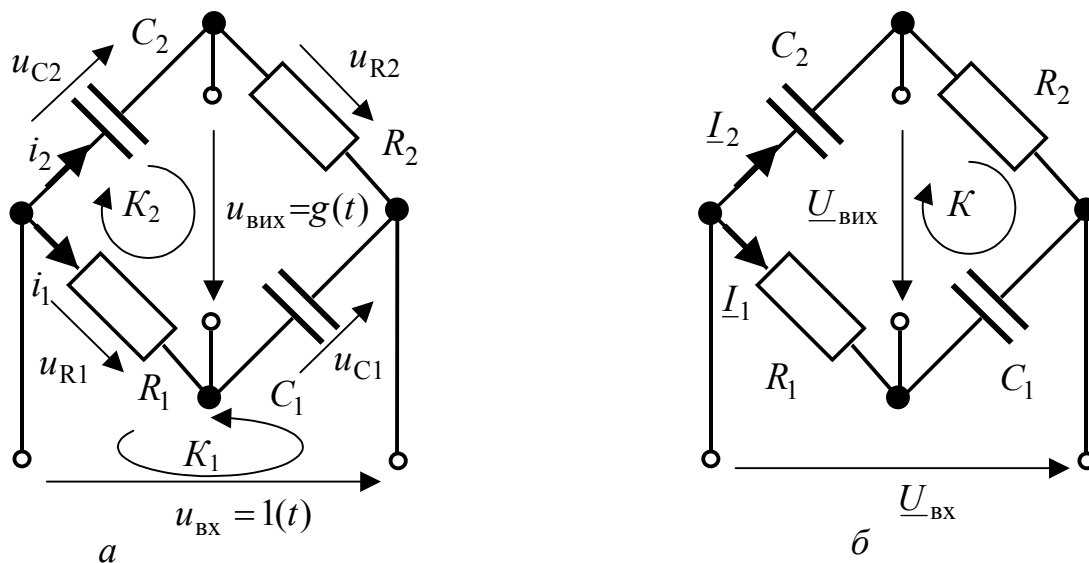


Рисунок 2.10 – Схеми кола у прикладі 2.5 для визначення: а – $g(t)$; б – $H(j\omega)$

Розв’язання. Для заданих дії та відгуку складемо диференціальне рівняння, використовуючи його зв’язок з КПФ $H(j\omega)$ (див. п.1.1.3).

Щоб визначити КПФ, зобразимо схему, позначивши комплексні діючі значення струмів і напруг (рис.2.10, б). У вибраному контурі K за другим законом Кірхгофа виразимо комплексне діюче значення вихідної напруги:

$$\underline{U}_{\text{вих}} + \frac{1}{j\omega C_1} \underline{I}_1 - R_2 \underline{I}_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\text{ВИХ}} &= -\frac{1}{j\omega C_1} \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2 = -\left(\frac{1}{j\omega C_1}\right) \frac{\underline{U}_{\text{ВХ}}}{\frac{1}{j\omega C_1} + R_1} + \frac{R_2 \underline{U}_{\text{ВХ}}}{\frac{1}{j\omega C_2} + R_2} = \\ &= \frac{\underline{U}_{\text{ВХ}} [-1 - j\omega C_2 R_2 + j\omega C_2 R_2 (1 + j\omega C_1 R_1)]}{(1 + j\omega C_1 R_1)(1 + j\omega C_2 R_2)} = \frac{\underline{U}_{\text{ВХ}} [(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 - 1]}{(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2) + 1}. \end{aligned}$$

Запишемо співвідношення для КПФ:

$$\begin{aligned} H_U(j\omega) &= \frac{\underline{U}_{\text{ВИХ}}}{\underline{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 - 1}{(j\omega)^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2) + 1} = \\ &= \frac{(j\omega)^2 \tau_1 \tau_2 - 1}{(j\omega)^2 \tau_1 \tau_2 + j\omega(\tau_1 + \tau_2) + 1} = \frac{(j\omega)^2 - 1/(\tau_1 \tau_2)}{(j\omega)^2 + j\omega(\tau_1 + \tau_2)/(\tau_1 \tau_2) + 1/(\tau_1 \tau_2)}, \end{aligned}$$

де $\tau_1 = R_1 C_1$; $\tau_2 = R_2 C_2$ – сталі часу відповідних віток схеми.

За знаменником КПФ запишемо ліву, а за чисельником – праву частину диференціального рівняння:

$$\frac{du_{\text{ВИХ}}^2(t)}{dt^2} + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \frac{du_{\text{ВИХ}}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} u_{\text{ВИХ}} = \frac{du_{\text{ВХ}}^2(t)}{dt^2} - \frac{1}{\tau_1 \tau_2} u_{\text{ВХ}}.$$

Для отриманого диференціального рівняння другого порядку складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\begin{aligned} p^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} p &= 0; \\ p_{1,2} &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1 \tau_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1 \tau_2}\right)^2 - \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1 \tau_2} \pm \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\tau_1 \tau_2}; \\ p_1 &= -\frac{1}{\tau_1}; \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2}. \end{aligned}$$

За співвідношенням (2.7) визначимо вимушене значення $g(t)$:

$$g_{\text{ВМ}} = g(\infty) = H(j0) = -1.$$

Значення $g_{\text{ВМ}}$ можна також знайти, розглядаючи усталений режим кола (рис.2.10, а) при його увімкненні до постійного джерела $u_{\text{ВХ}} = 1(t)$, коли ємності заряджені, а струм в них дорівнює нулю.

Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння у вигляді суми вільної та вимушеної складових:

$$g(t) = g_{\text{ВЛ}}(t) + g_{\text{ВМ}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} - 1,$$

де A_1, A_2 – сталі інтегрування.

Щоб визначити значення A_1, A_2 , знайдемо початкові значення перехідної характеристики $g(+0)$ та її похідної $g'(+0)$.

Початкове значення знайдемо за співвідношенням (2.8):

$$g(+0) = H(j\infty) = 1.$$

Правильність знайденого значення $g(+0) = 1$ можна перевірити в режимі кола для $t = +0$, коли ємності замкнені, а $u_{\text{вх}} = 1$ В.

Похідну $g'(+0)$ знайдемо у такий спосіб:

1) складемо систему рівнянь за другим законом Кірхгофа для контурів K_1 і K_2 :

$$\text{у контурі } K_1 \quad l(t) = u_{R1}(t) + u_{C1}(t);$$

$$\text{у контурі } K_2 \quad g(t) = u_{R1}(t) - u_{C2}(t);$$

2) продиференціюємо рівняння:

$$\delta(t) = u'_{R1}(t) + u'_{C1}(t) = u'_{R1}(t) + \frac{i_1(t)}{C_1};$$

$$g'(t) = u'_{R1}(t) - u'_{C2}(t) = u'_{R1}(t) - \frac{i_2(t)}{C_2};$$

3) розглядаючи доданки отриманих після диференціювання рівнянь при $t = +0$, знаходимо $g'(+0)$:

$$\delta(+0) = 0 = u'_{R1}(0+) + \frac{i_1(0+)}{C_1} = u'_{R1}(0+) + \frac{1}{R_1 C_1}; \quad u'_{R1}(0+) = -\frac{1}{R_1 C_1};$$

$$g'(+0) = u'_{R1}(+0) - \frac{i_2(+0)}{C_2} = -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} = -\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} = p_1 + p_2.$$

Визначимо сталі інтегрування, складаючи і розв'язуючи систему рівнянь:

$$A_1 + A_2 - 1 = g(+0) = 1; \quad A_1 + A_2 = 2;$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = g'(+0) = -p_1 - p_2;$$

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ p_1 + p_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}} = 1; \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ p_1 & p_1 + p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}} = 1.$$

Підставляючи знайдені сталі інтегрування у загальний розв'язок для $g(t)$, запишемо вираз для перехідної характеристики:

$$g(t) = (e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}} - 1) \cdot 1(t).$$

Якщо $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$, то $\tau_1 = \tau_2 = \tau = RC$; $p_1 = p_2 = -\frac{1}{\tau}$ і перехідна характеристика прийме вигляд:

$$g(t) = (2e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) \cdot 1(t).$$

Побудуємо графік $g(t)$ для випадку $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$ (рис.2.11).

Характерною точкою графіка є момент часу t_0 , для якого

$$g(t_0) = (2e^{-\frac{t_0}{\tau}} - 1) \cdot 1(t) = 0, \quad \text{звідки } t_0 = \tau \ln 2 \approx 0,7\tau.$$

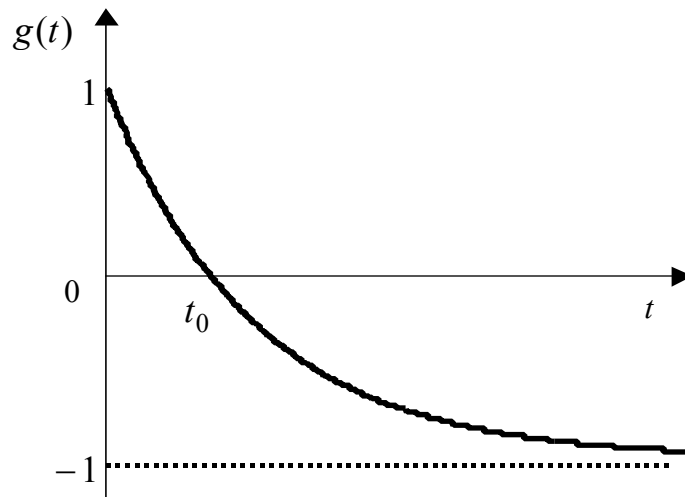


Рисунок 2.11 – Графік перехідної характеристики у прикладі 2.5

2.2 Імпульсна характеристика кола

Для імпульсної характеристики типовою дією є дельта-функція $\delta(t)$ (функція Дірака², або одиничний імпульс).

Спрощено $\delta(t)$ можна записати так:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1. \quad (2.18)$$

Про дельта-функцію, враховуючи запис (2.18), є жартівливе висловлювання – «до нуля її ще немає, а після нуля її вже немає». Рівність одиниці площі дельта-функції обумовила ще одну з її назв – одиничний імпульс.

Дельта-функцію, подібно одиничній функції, можна подати аналітично як границю спеціальних функцій $\Phi(t, \Delta t)$ часу і параметра Δt , які мають одиничну площу:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Phi(t, \Delta t); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, \Delta t) dt = 1.$$

Прикладами таких функцій є (рис.2.12, а, б):

$$\Phi_1(t, \Delta t) = \begin{cases} 1/\Delta t & \text{при } |t| < \Delta t / 2; \\ 0 & \text{при } |t| > \Delta t / 2; \end{cases} \quad (2.19)$$

² **Дірак Поль Адрієн Моріс**, Dirac (1902–1984) – англійський фізик, член Лондонської королівської спілки. Очолював кафедру в Кембріджському університеті, яку у свій час займав І. Ньютон. Один із засновників квантової механіки. Сформулював закони статичної механіки системи електронів. Побудував релятивістську теорію руху електронів, застосував у квантовій механіці теорію відносності. Лауреат Нобелівської премії (1933) спільно з Шредингером за створення нових, плідних варіантів квантової теорії. Увів у математичну фізику названі його ім'ям: функцію $\delta(t)$, рівняння (Дірака-Лоренца), матриці.

$$\Phi_2(t, \Delta t) = \frac{\Delta t}{\pi(t^2 + \Delta t^2)}. \quad (2.20)$$

Графічно дельта-функція зображається по-різному, наприклад, як показано на рис.2.12, в. На рис.2.12, г дельта-функція $\delta(t - t_0)$ зсунута за часом на t_0 .

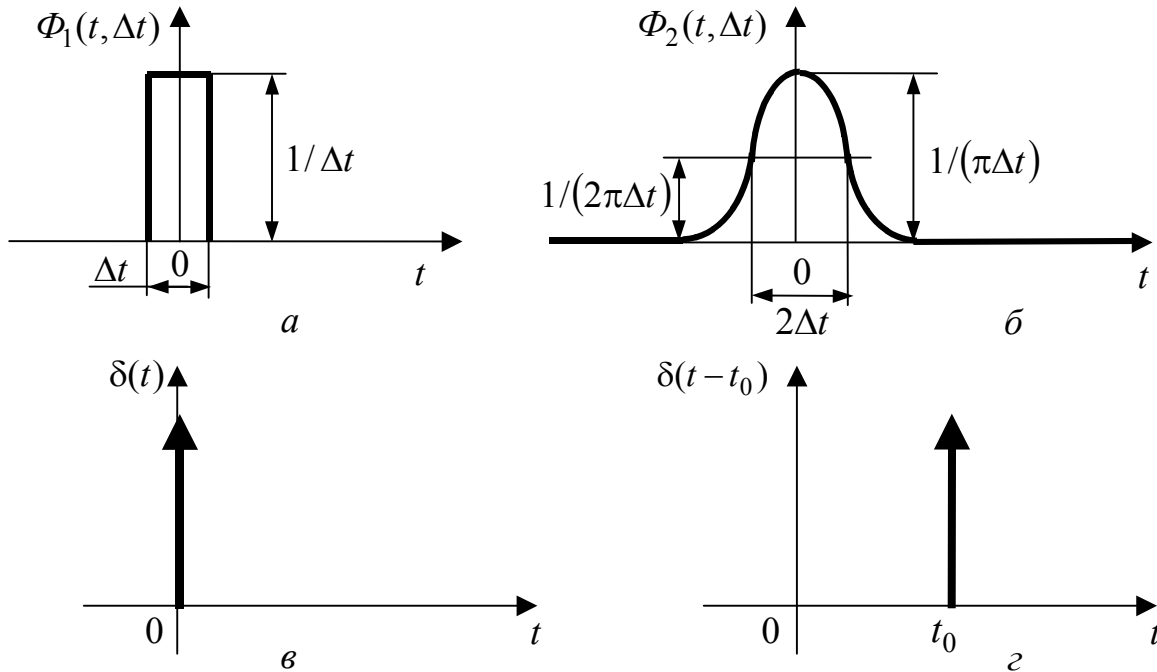


Рисунок 2.12 – До визначення поняття дельта-функції:
a, б – приклади функцій, що прямують до дельта-функції;
в, г – умовне графічне зображення дельта-функції

Із формули (2.18) виходить так звана фільтрувальна властивість $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\delta(x)dx = y(0); \quad \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\delta(x - t)dx = y(t). \quad (2.21)$$

Це значить, що дельта-функція як співмножник функції $y(x)$ визначає інтеграл як величину $y(x)$ для того значення змінної x , при якому дельта-функція прямує до нескінченності.

Дельта-функція $\delta(t)$ належить до класу узагальнених функцій, які дорівнюють нулю поза деякої обмеженої області змінної та мають неперервні похідні усіх порядків. У нестрогій формі ці функції спочатку були застосовані у фізиці (Дірак). Вперше строги обґрунтування узагальнених функцій зробив С.Л. Соболев³.

³ **Соболев Сергій Львович** (1908–1989) – видатний математик, академік. Народився у Петербурзі. З 1957 р. – директор інституту математики Сибірського відділення АН СРСР. Основні праці належать до динаміки твердого тіла і математичної фізики. Вперше (1936) строго визначив узагальнені функції, за допомогою яких розглянув

Порівняння, відповідно, виразів (2.1) з (2.19), (2.2) з (2.20) і графіків $F_1(t, \Delta t)$ і $\Phi_1(t, \Delta t)$, $F_2(t, \Delta t)$ і $\Phi_2(t, \Delta t)$ показує, що:

$$\Phi_1(t, \Delta t) = \frac{\partial[F_1(t, \Delta t)]}{\partial t}; \quad \Phi_2(t, \Delta t) = \frac{\partial[F_2(t, \Delta t)]}{\partial t}.$$

Тому аналогічно пов'язані дельта-функція та одинична функція:

$$\delta(t) = \frac{d[1(t)]}{dt} = 1'(t), \tag{2.22}$$

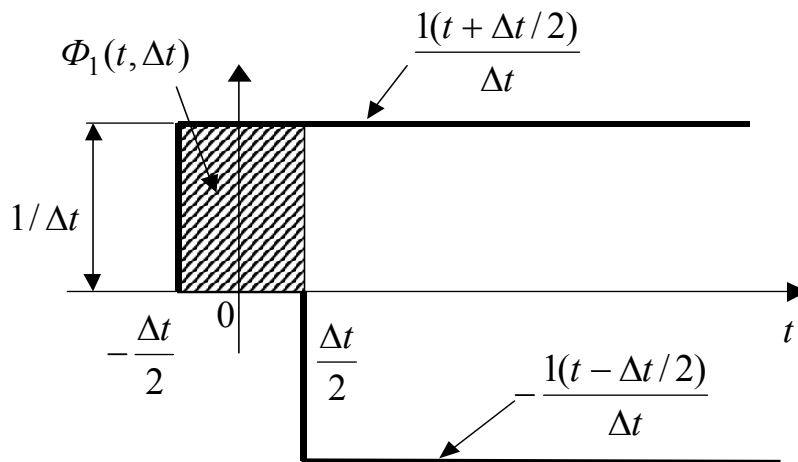
звідки виходить, що

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx. \tag{2.23}$$

Вельми важливе співвідношення (2.22) можна обґрунтувати інакше, якщо подати прямокутний імпульс $\Phi_1(t, \Delta t)$ (рис.2.12, *a*) за допомогою двох одиничних функцій (рис.2.13) та зробити граничний перехід до $\delta(t)$:

$$\Phi_1(t, \Delta t) = \frac{1(t + \Delta t/2)}{\Delta t} - \frac{1(t - \Delta t/2)}{\Delta t} = \frac{1(t + \Delta t/2) - 1(t - \Delta t/2)}{\Delta t} = \frac{\Delta[1(t)]}{\Delta t}; \tag{2.24}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Phi_1(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta[1(t)]}{\Delta t} \right\} = \frac{d[1(t)]}{dt} = 1'(t).$$



Рисунк 2.13 – Подання функції $\Phi_1(t, \Delta t)$ за допомогою двох одиничних функцій

Імпульсна характеристика пасивної ЛЕК чисельно дорівнює відгуку на дію джерела типу дельта-функції за нульових початкових умов. Імпульсну характеристику позначають $h(t)$.

Нескінченна потужність функції $\delta(t)$ при $t = 0$ призводить до порушення законів комутації. Пов'язано це з тим, що у момент часу $t = 0$ внаслідок дії дель-

деякі крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. Зробив внесок у розвиток обчислювальної математики та впровадження електронно-обчислювальної техніки.

та-функції через незаряджені ємності ($u_C(-0) = 0$) протікатимуть струми, а до розімкнених індуктивностей ($i_L(-0) = 0$) прикладатимуться напруги, пропорційні $\delta(t)$. В результаті початкові значення у колі стануть ненульовими:

$$u_C(+0) = \frac{1}{C} \int_{-0}^{+0} k_{i_C} \delta(t) dt = \frac{k_{i_C}}{C} \neq 0; \quad i_L(+0) = \frac{1}{L} \int_{-0}^{+0} k_{u_L} \delta(t) dt = \frac{k_{u_L}}{L} \neq 0,$$

де k_{i_C} (А·с), k_{u_L} (В·с) – розмірні коефіцієнти відповідно для струмів у ємностях і напруг на індуктивностях у момент часу $t = 0$.

Вимушені складові відгуків кіл при дії дельта-функції дорівнюють нулю, оскільки $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$.

Отже, імпульсні характеристики фізично відповідають вільним процесам у колі (рис.2.14) за рахунок запасу енергії, яку ємності та індуктивності миттєво накопичують від вхідного джерела напруги (рис.2.14, а) або струму (рис.2.14, б) типу дельта-функції.

Щоб експериментально визначити імпульсні характеристики, до входу кіл підключають генератори імпульсів з тривалістю τ_i значно меншою, ніж часові параметри кіл (у колах першого порядку $\tau_i \ll \tau$; у коливальних колах другого порядку $\tau_i \ll T_{\text{вм}} = 2\pi/\omega_{\text{вм}}$). За допомогою осцилографа на виході кола досліджують вільні процеси, пропорційні $h(t)$.

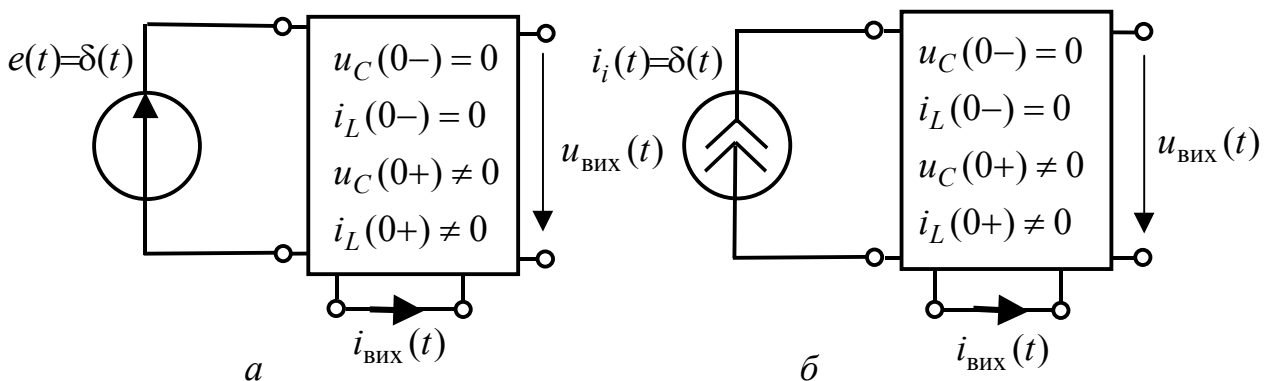


Рисунок 2.14 – Фізичне трактування імпульсної характеристики як вільного процесу у колі

Розмірність і методика розрахунку імпульсної характеристики обумовлені її зв'язком з перехідною характеристикою. Щоб встановити цей зв'язок, використовують подання $\Phi_1(t, \Delta t)$ за допомогою двох одиничних функцій (2.24) та принцип накладання.

Якщо увімкнути до входу кола джерело з миттєвим значенням $\Phi_1(t, \Delta t)$, відгук кола можна описати приблизним виразом для імпульсної характеристики $\tilde{h}(t, \Delta t)$, який записують на підставі принципу накладання за допомогою перехідної характеристики цього кола у вигляді:

$$\tilde{h}(t, \Delta t) = \frac{g(t + \Delta t / 2) - g(t - \Delta t / 2)}{\Delta t} = \frac{\Delta[g(t)]}{\Delta t}. \quad (2.25)$$

Імпульсна характеристика є границею виразу (2.25):

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{h}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta[g(t)]}{\Delta t} \right\} = \frac{d[g(t)]}{dt} = g'(t). \quad (2.26)$$

Співвідношення (2.26) показує, що **імпульсна характеристика кола є похідною перехідної характеристики, а розмірність імпульсної характеристики дорівнює розмірності перехідної характеристики, поділеної на секунду.** Тому розмірностями $h(t)$ можуть бути 1/с, Ом/с, См/с.

З виразу (2.26) виходить також зв'язок перехідної характеристики з імпульсною характеристикою:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx. \quad (2.27)$$

Формально, на підставі принципу накладання вирази (2.26) і (2.27) виходять з аналогічних співвідношень (2.22) і (2.23) для $\delta(t)$ та $1(t)$.

Співвідношення (2.26) широко застосовується для визначення імпульсної характеристики, коли перехідна характеристика вже знайдена класичним методом. При цьому, щоб уникнути помилок, необхідно записувати перехідну характеристику у вигляді (див. приклад 2.1):

$$g(t) = g_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t), \quad (2.28)$$

де $g_{\text{анал}}(t)$ – аналітичний вираз імпульсної характеристики при $t > 0$ (у прикладі 2.1 аналітичні вирази для $g_{i_1}(t)$, $g_{i_2}(t)$, $g_{i_C}(t)$, $g_{u_C}(t)$ взяті у квадратні дужки).

Враховуючи співвідношення (2.28), результат диференціювання перехідної характеристики становитиме:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d[g(t)]}{dt} = \frac{d[g_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t)]}{dt} = g'_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t) + g_{\text{анал}}(t) \cdot \delta(t) = \\ &= g'_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t) + g_{\text{анал}}(+0) \cdot \delta(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Якщо $g_{\text{анал}}(+0) = 0$, то імпульсна характеристика не містить дельтоподібного доданку.

Приклад 2.6. Визначити імпульсні характеристики кола (приклад 2.1, рис.2.4), вважаючи дією напругу джерела, а відгуками – струми $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_C(t)$ та напругу $u_C(t)$. Побудувати графіки імпульсних характеристик.

Розв'язання. Скористаємось знайденими у прикладі 2.1 перехідними характеристиками даного кола $g_{i_1}(t)$, $g_{i_2}(t)$, $g_{i_C}(t)$, $g_{u_C}(t)$ та співвідношеннями (2.28) і (2.29):

$$h_{i1}(t) = \frac{d \left\{ \left[\frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right] \cdot 1(t) \right\}}{dt} = -\frac{R_2}{\tau R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t); \quad (2.30)$$

$$h_{i2}(t) = \frac{d \left\{ \frac{1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) \right\}}{dt} = \frac{1}{\tau(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t); \quad (2.31)$$

$$h_{iC}(t) = \frac{d \left\{ \frac{1}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) \right\}}{dt} = -\frac{1}{\tau R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t); \quad (2.32)$$

$$h_{uC}(t) = \frac{d \left\{ \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) \right\}}{dt} = \frac{R_2}{\tau(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t). \quad (2.33)$$

Запишемо кінцеві вирази, підставивши до формул (2.30) – (2.33) співвідношення для сталої часу (2.9):

$$h_{i1}(t) = -\frac{1}{CR_1^2} e^{-\frac{t}{CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)}} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t); \quad h_{i2}(t) = \frac{1}{CR_1 R_2} e^{-\frac{t}{CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)}} \cdot 1(t);$$

$$h_{iC}(t) = -\frac{(R_1 + R_2)}{CR_1^2 R_2} e^{-\frac{t}{CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)}} \cdot 1(t) + \frac{1}{R_1} \delta(t); \quad h_{uC}(t) = \frac{1}{CR_1} e^{-\frac{t}{CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)}} \cdot 1(t).$$

Імпульсні характеристики $h_{i1}(t)$, $h_{i2}(t)$, $h_{iC}(t)$ мають розмірності См/с, а характеристика $h_{uC}(t)$ – 1/с. Побудуємо графіки імпульсних характеристик (рис.2.15).

Приклад 2.7. Визначити імпульсні характеристики кола, розглянутого у прикладі 2.3. Накреслити графіки імпульсних характеристик.

Розв'язання. Диференціюючи, згідно з виразами (2.28) і (2.29), знайдені у прикладі 2.3 перехідні характеристики (див. табл.2.1), отримуємо:

$$h_{i1}(t) = \frac{d[g_{i1}(t)]}{dt} \approx \frac{d[(-0,833 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{t}{10^{-2}}} + 3,33 \cdot 10^{-4}) \cdot 1(t)]}{dt} =$$

$$= 0,833 \cdot 10^{-2} e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \cdot 1(t) + 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot \delta(t), \text{ См/с};$$

$$h_{i2}(t) = \frac{d[g_{i2}(t)]}{dt} \approx \frac{d[1,66 \cdot 10^{-4} (1 - e^{-\frac{t}{10^{-2}}}) \cdot 1(t)]}{dt} = 1,66 \cdot 10^{-2} e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \cdot 1(t), \text{ См/с};$$

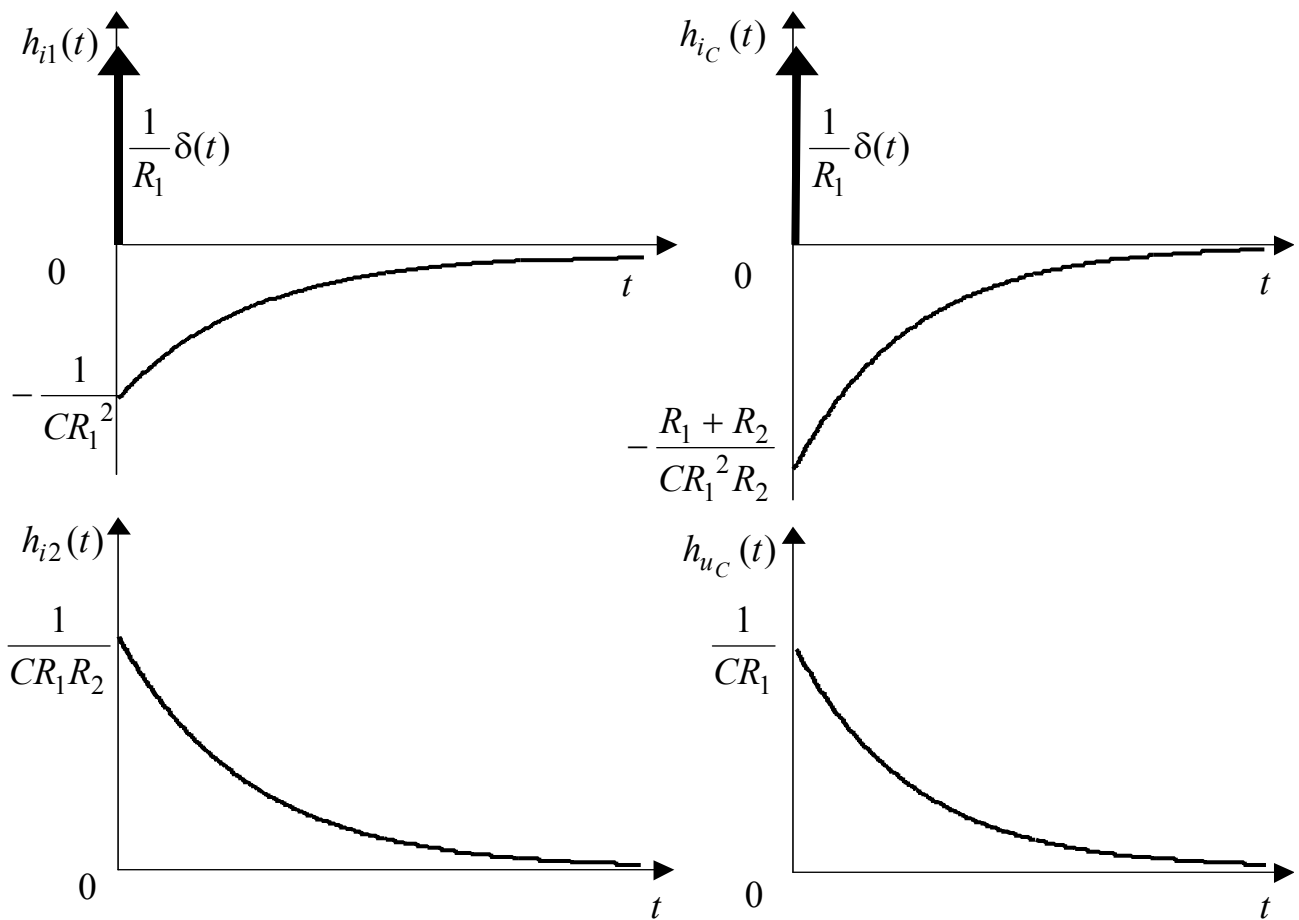


Рисунок 2.15 – Графіки імпульсних характеристик у прикладі 2.6

$$\begin{aligned}
 h_{i3}(t) &= \frac{d[g_{i3}(t)]}{dt} \approx \frac{d[(0,833 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{t}{10^{-2}}} + 1,66 \cdot 10^{-4}) \cdot 1(t)]}{dt} = \\
 &= -0,833 \cdot 10^{-2} e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \cdot 1(t) + 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot \delta(t), \text{См/с};
 \end{aligned}$$

$$h_{u_L}(t) = \frac{d[g_{u_L}(t)]}{dt} = \frac{d[0,5 e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \cdot 1(t)]}{dt} = -50 e^{-\frac{t}{10^{-2}}} \cdot 1(t) + 0,5 \cdot \delta(t), \text{1/с}.$$

Зобразимо графіки імпульсних характеристик (рис.2.16). Дельта-функція присутня на графіках $h_{i1}(t)$, $h_{i3}(t)$ і $h_{u_L}(t)$ (рис.2.16, а, в, з). У виразі та на графіку $h_{i2}(t)$ (рис.2.16, б) дельтоподібна складова відсутня.

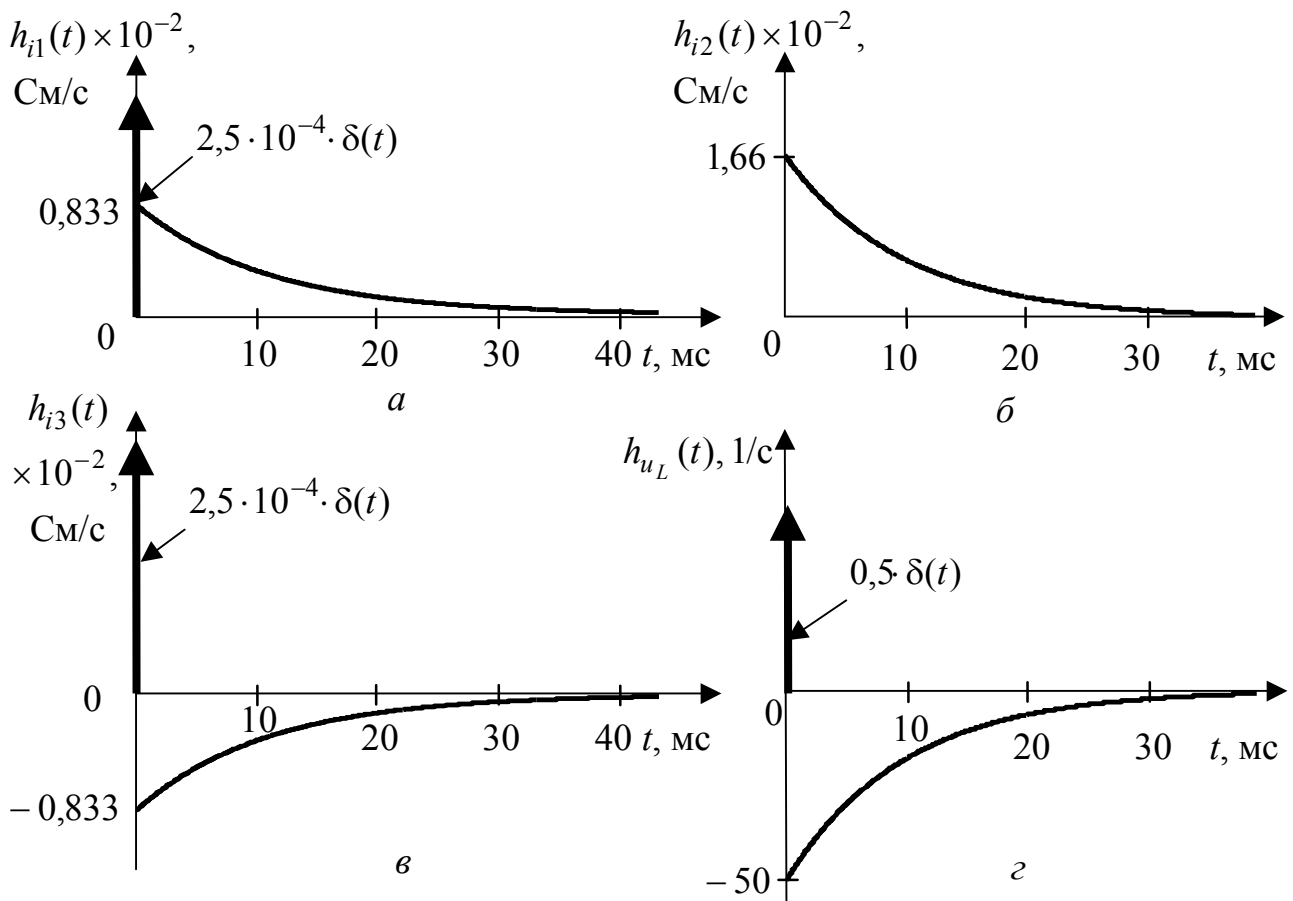


Рисунок 2.16 – Графіки імпульсних характеристик у прикладі 2.7

2.3 Часові характеристики типових кіл $R, L; R, C; R, L, C$

Кола першого порядку ($R, L; R, C$) застосовують як міжкаскадні розділові кола, диференціальні та інтегральні ланки, прості фільтри та ін.

До типових кіл $R, L; R, C$ також належать кола, які є подільниками напруги (рис.2.17, а, б і 2.18, а, б) або струму (рис.2.17, в, г і 2.18, в, г). Діями та відгуками у подільників напруги є напруги, а у подільників струму – струми. Умовно такі кола поділяють на дві групи (рис.2.17 і 2.18), до кожної з яких входять кола з однотипними часовими і частотними характеристиками. Однотипність характеристик пояснюється дуальністю кіл кожної групи.

Типовими колами R, L, C вважають також одиночні послідовний і паралельний резонансні контури.

2.3.1 Характеристики кіл $R, L; R, C$ першої групи

У перехідних характеристик кіл першої групи (рис.2.17) вимушене і початкове значення дорівнюють відповідно: $g_{\text{вм}1} = 1; g_1(0+) = 0$.

При цьому стали інтегрування і загальний вираз для перехідних характеристик кіл першої групи визначають за формулами:

$$A_1 = g_1(+0) - g_{\text{ВМ1}} = -1;$$

$$g_1(t) = [g_{\text{ВЛ1}}(t) + g_{\text{ВМ1}}] \cdot 1(t) = (A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + 1) \cdot 1(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t), \quad (2.34)$$

де τ – сталі часу кіл, які становлять $\tau_C = RC$ для кіл R, C (рис.2.17, а, в) і $\tau_L = L/R$ – для кіл R, L (рис.2.17, б, з).

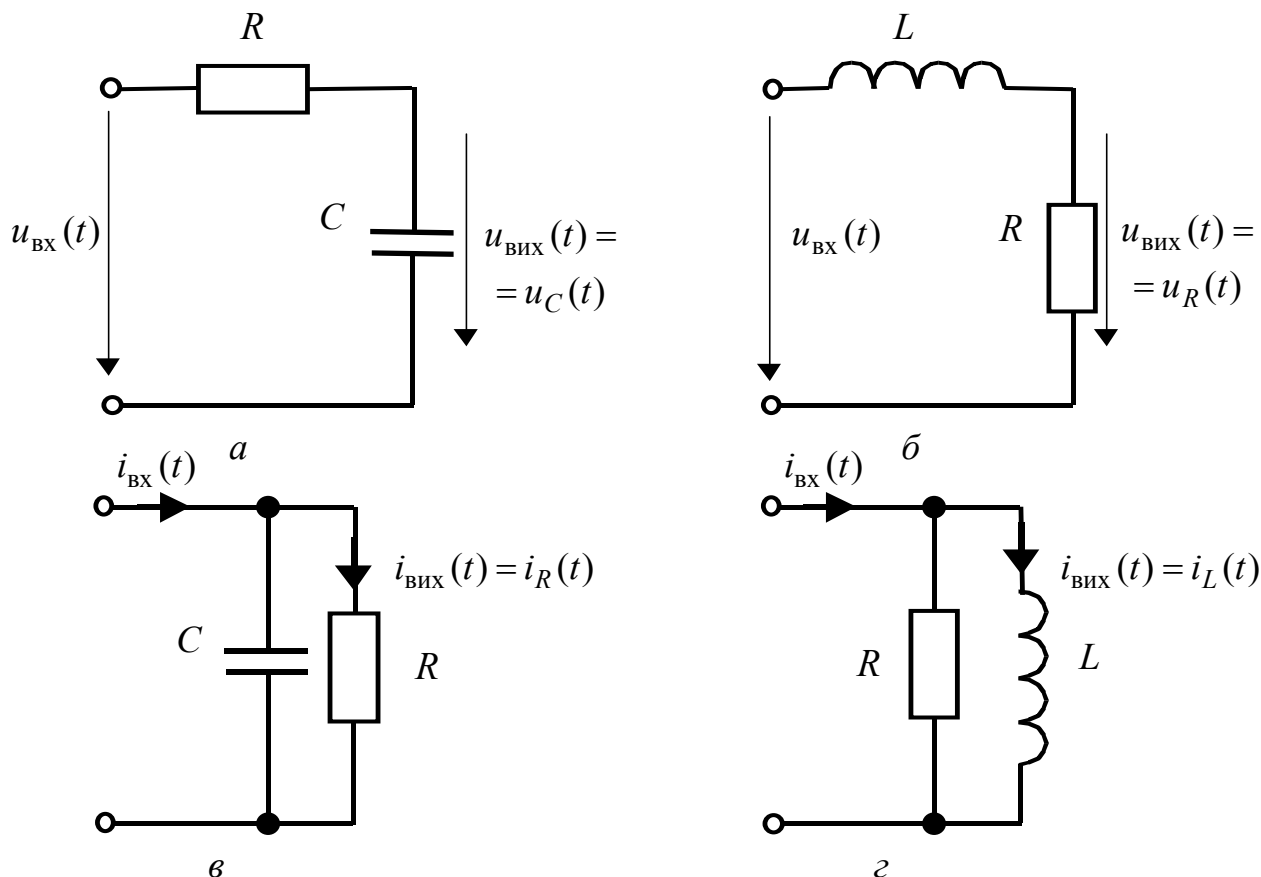


Рисунок 2.17 – Схеми кіл $R, C; R, L$ першої групи

Імпульсні характеристики кіл першої групи як результат диференціювання виразу (2.34) отримують у вигляді:

$$h_1(t) = \frac{d[g_1(t)]}{dt} = \frac{d[(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t)]}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t). \quad (2.35)$$

Перехідні характеристики (2.34) безрозмірні, а імпульсні (2.35) – мають розмірність $1/\text{с}$. Імпульсні характеристики (2.34) не містять дельтоподібного доданку, оскільки $g_{\text{анал1}}(+0) = 0$.

Графіки часових характеристик кіл першої групи показані на рис.2.19.

Щоб встановити зв'язок часових і частотних характеристик, а також оцінити можливості застосування досліджуваних кіл, доцільно розглянути їхні КПФ.

Для кіл першої групи, складених з елементів R, C (рис.2.17, а, в), КПФ становлять:

$$H_{1RC}(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_C},$$

а для кіл з елементів R, L (рис.2.17, б, з):

$$H_{1RL}(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega(L/R)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_L}.$$

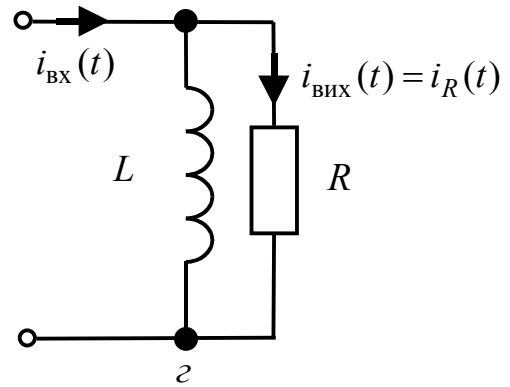
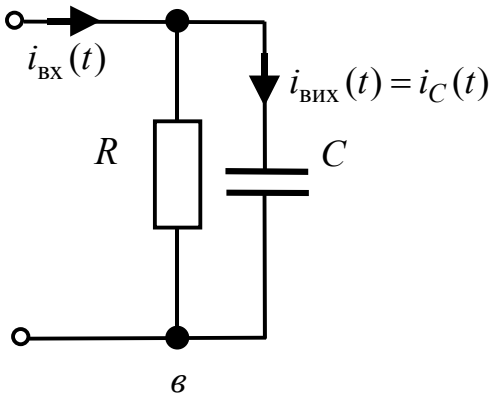
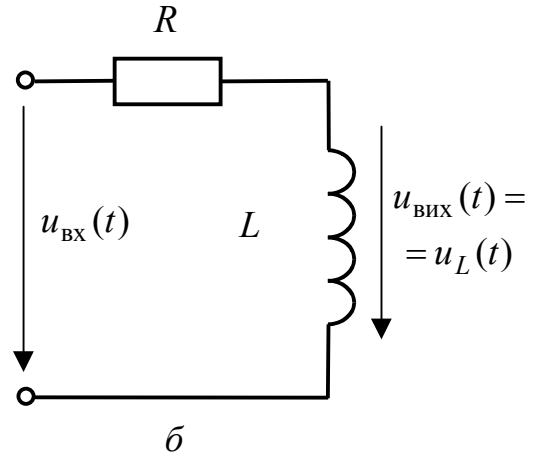
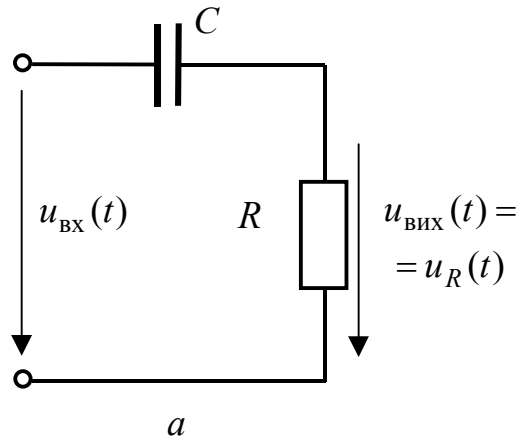


Рисунок 2.18 – Схеми кіл R, C ; R, L другої групи

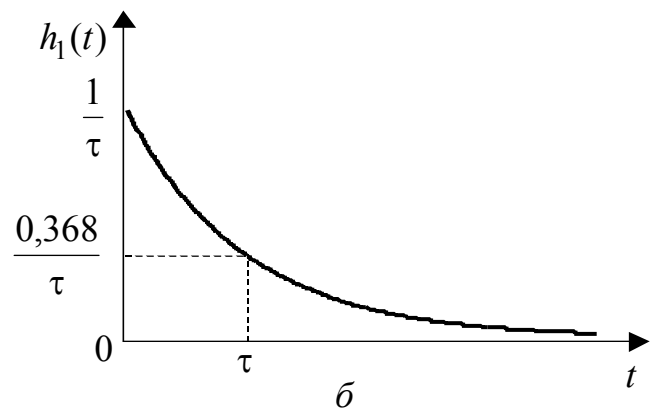
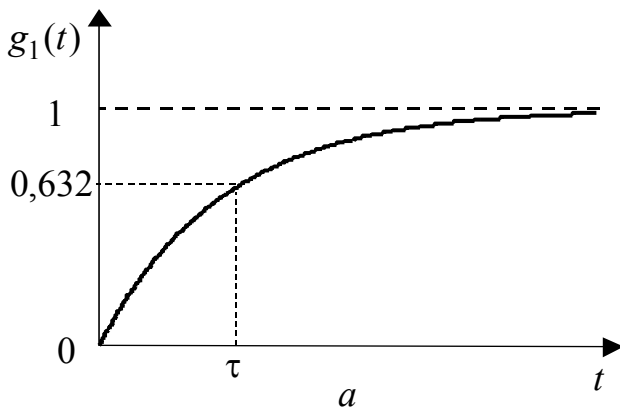


Рисунок 2.19 – Графіки часових характеристик кіл R, C ; R, L першої групи

Оскільки вирази для $H_{1RC}(j\omega)$ і $H_{1RL}(j\omega)$ однотипні, для КПФ, АЧХ і ФЧХ кіл першої групи можна застосувати однакові формули:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j\arctg(\omega\tau)} = H_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)},$$

де $H_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ – АЧХ; $\varphi_1(\omega) = -\arctg \omega\tau$ – ФЧХ; τ – сталі часу, які

дорівнюють τ_L для кіл R, L та τ_C для кіл R, C .

Графіки АЧХ і ФЧХ даних кіл зображені на рис.2.20.

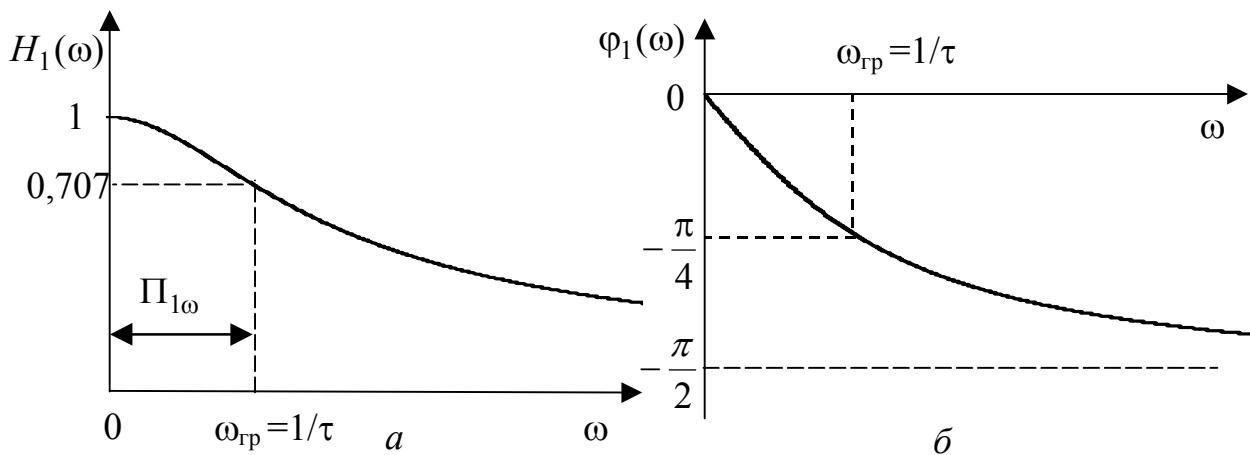


Рисунок 2.20 – Графіки частотних характеристик кіл $R, C; R, L$ першої групи: a – АЧХ; b – ФЧХ

Гранична частота СП є коренем рівняння

$$H_1(\omega_{гр}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{гр}\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707,$$

звідки

$$\omega_{гр} = \frac{1}{\tau} = \Pi_{1\omega}; \quad \tau \Pi_{1\omega} = 1, \quad (2.36)$$

де $\Pi_{1\omega}$ – СП АЧХ (рис.2.20, a), яка відповідає діапазону частот $0 \leq \omega \leq \omega_{гр}$.

Крім слушності співвідношень (2.7) і (2.8) між граничними значеннями $g_1(t)$ і $H_1(j\omega)$:

$$g_1(\infty) = H_1(j0) = 1; \quad g_1(+0) = H_1(j\infty) = 0,$$

між частотними і часовими характеристиками розглядуваних кіл існує фундаментальний зв'язок, який виходить з формули (2.36): **чим менша стала часу кола, тим ширша смуга пропускання і навпаки.**

Особливості часових і частотних характеристик кіл $R, C; R, L$ першої групи обумовлюють області їх практичного застосування.

Якщо стала часу значно менше часових параметрів дії (наприклад, тривалості вхідного сигналу), для частотних характеристик це відповідає діапазону

частот $\omega \ll \Pi_{1\omega} = 1/\tau$ ($\omega\tau \ll 1$). Тоді вхідні та вихідні коливання мають близькі амплітуди $H_1(\omega) \approx 1$ та початкові фази $\varphi_1(\omega) \approx 0$, і тому відгук і дія збігаються, наприклад, при $\tau \rightarrow 0$:

$$g_1(t) \rightarrow 1(t); h_1(t) \rightarrow \delta(t).$$

Цей режим відповідає неспотвореній передачі сигналу.

Коли $\omega \gg \Pi_{1\omega} = 1/\tau$ ($\omega\tau \gg 1$), що відповідає більшому (порівняно з часовими параметрами дії) значенню сталої часу, АЧХ $H_1(\omega) \approx 1/\omega$, ФЧХ $\varphi_1(\omega) \approx -\pi/2$. При цьому відбувається інтегрування вхідних коливань з точністю до коефіцієнта $1/\tau$. Тому кола $R, C; R, L$ першої групи за умови $\omega\tau \gg 1$ називають **інтегрувальними**.

Виконання операції інтегрування підтверджується розглядом приблизних значень перехідної (2.34) та імпульсної (2.35) характеристик при порівняно великому значенні τ . Розкладаючи в ряд Тейлора ці характеристики поблизу $t = +0$ і нехтуючи малими величинами вищого порядку, можна записати:

$$g_1(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) 1(t) = \left[\frac{t}{\tau} - 0,5 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots \right] \cdot 1(t) \approx \frac{t}{\tau} 1(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t 1(t) dt;$$

$$h_1(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} 1(t) = \frac{1}{\tau} \left[1 - \frac{t}{\tau} + 0,5 \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots \right] \cdot 1(t) \approx \frac{1}{\tau} 1(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t \delta(t) dt.$$

Отримані приблизні значення $g_1(t)$ і $h_1(t)$ пропорційні інтегралам від відповідних дій $1(t)$ та $\delta(t)$. Коефіцієнтом пропорційності є множник $1/\tau$.

Вигляд АЧХ пояснює застосування розглянутих кіл ще як простих ФНЧ. Перевагою таких фільтрів є простота, а недоліком – досить великий коефіцієнт прямокутності АЧХ порівняно з граничним значенням $k_{\text{пр}} = 1$ для ідеального фільтра. Коефіцієнт прямокутності $H_1(\omega)$ становить [7, приклад 5.4]:

$$k_{\text{пр}} \approx n_1,$$

де $n_1 \gg \sqrt{2}$ (звичайно $n_1 = 10$) – рівень відліку для оцінки коефіцієнта прямокутності АЧХ.

2.3.2 Характеристики кіл $R, L; R, C$ другої групи

Основні параметри та співвідношення для перехідних характеристик кіл другої групи (рис.2.18) мають вигляд:

$$g_{\text{вм}2} = 0; g_2(+0) = 1; A_2 = g_2(+0) - g_{\text{вм}2} = 1;$$

$$g_2(t) = [g_{\text{вл}2}(t) + g_{\text{вм}2}] \cdot 1(t) = (A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} + 1) \cdot 1(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t), \quad (2.37)$$

де τ – сталі часу: τ_C для кіл R, C (рис.2.18, а, в); τ_L – для кіл R, L (рис.2.18, б, з).

В результаті диференціювання співвідношення (2.37) отримують вирази

для імпульсних характеристик кіл другої групи:

$$h_2(t) = \frac{d[g_2(t)]}{dt} = \frac{d[e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)]}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) + \delta(t). \quad (2.38)$$

Графіки часових характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи зображені на рис.2.21.

Розмірності часових характеристик кіл другої групи такі самі, як і у кіл першої групи. Імпульсні характеристики (2.38) містять дельта-функцію (рис.2.21, б), оскільки $g_{\text{анал1}}(+0) = 1$.

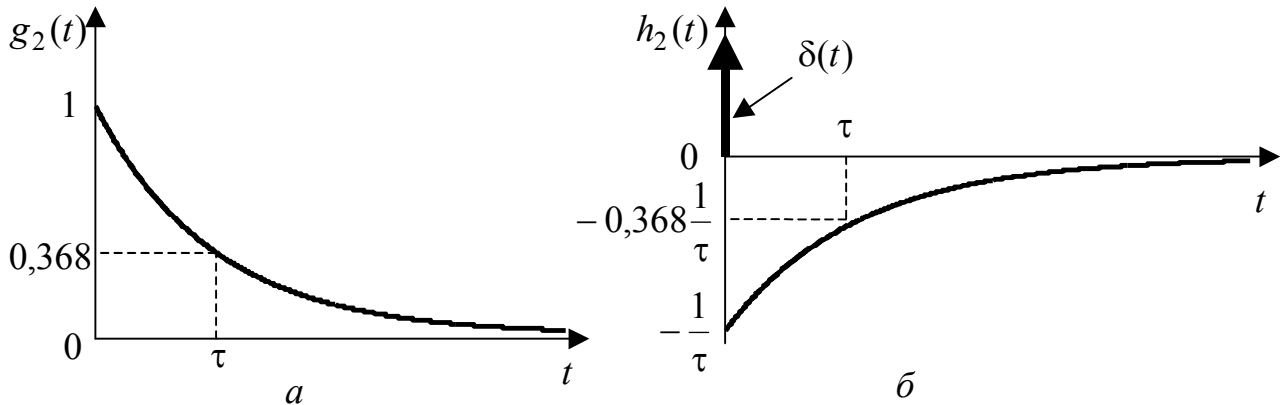


Рисунок 2.21 – Графіки часових характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи

КПФ окремо для кіл $R, C; R, L$ та загальні для кіл другої групи відповідно описуються виразами:

$$H_{2LC}(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{j\omega\tau_C}{1 + j\omega\tau_C};$$

$$H_{2RL}(j\omega) = \frac{U_{\text{ВИХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega(L/R)}{1 + j\omega(L/R)} = \frac{j\omega\tau_L}{1 + j\omega\tau_L};$$

$$H_2(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{j[\pi/2 - \text{arctg}(\omega\tau)]} = H_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)},$$

де $H_2(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ – АЧХ; $\varphi_2(\omega) = \pi/2 - \text{arctg} \omega\tau$ – ФЧХ; τ – сталі ча-

су кіл, які дорівнюють τ_C або τ_L залежно від типу реактивного елемента.

Графіки частотних характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи показані на рис.2.22.

Гранична частота СП визначається з рівняння

$$H_2(\omega_{\text{гр}}) = \frac{\omega_{\text{гр}}\tau}{\sqrt{1 + (\omega_{\text{гр}}\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707,$$

звідки

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\tau}; \tau\omega_{\text{гр}} = 1. \quad (2.39)$$

СП даних кіл – $\Pi_{2\omega}$ (рис.2.22, *a*) відповідає діапазону частот $\omega_{\text{гр}} \leq \omega < \infty$.

Рівність (2.39) означає, що **чим менша стала часу кола, тим більша гранична частота смуги пропускання і навпаки.**

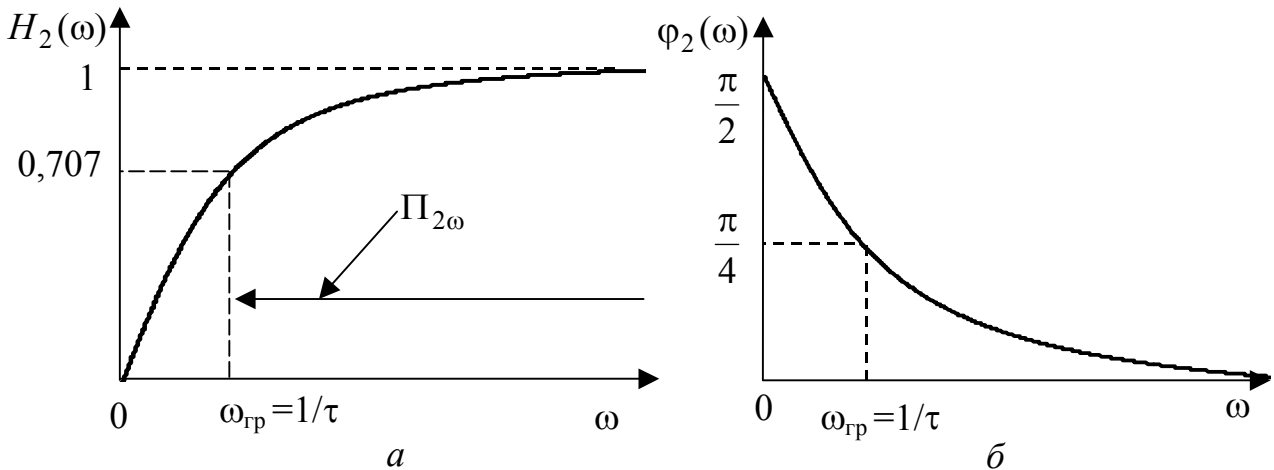


Рисунок 2.22 – Графіки частотних характеристик кіл $R, C; R, L$ другої групи: *a* – АЧХ; *б* – ФЧХ

Для розглянутих кіл співвідношення (2.7) і (2.8) між граничними значеннями $g_2(t)$ і $H_2(j\omega)$ становлять:

$$g_2(\infty) = H_2(j0) = 0; \quad g_2(+0) = H_2(j\infty) = 1.$$

Неспотвореній передачі сигналу через дані кола відповідає режим, коли стала часу значно більша часових параметрів дії (наприклад, тривалості вхідного сигналу). Цей режим означає роботу в діапазоні частот $\omega \gg \omega_{\text{гр}} = 1/\tau$, для яких $H_2(\omega) \approx 1$, $\varphi_2(\omega) \approx 0$. Тому вхідні та вихідні коливання мають майже однакові амплітуди та початкові фази, а отже, відгук та дія сходяться. При $\tau \rightarrow \infty$ часові характеристики (2.37), (2.38) збігаються з дією:

$$g_2(t) \rightarrow 1(t); \quad h_2(t) \rightarrow \delta(t).$$

При малій величині τ порівняно з часовими параметрами дії, що відповідає частотам $\omega \ll \omega_{\text{гр}} = 1/\tau$, кола другої групи виконують операцію **диференціювання** дії. У цьому режимі частотні характеристики мають приблизні значення $H_2(\omega) \approx \omega\tau$, $\varphi_2(\omega) \approx \pi/2$, що з точністю до коефіцієнта τ відповідає диференціюванню вхідних коливань. Зокрема при $\tau \rightarrow 0$, перехідна характеристика (рис.2.21, *a*) прямує до нескінченно короткого імпульсу, який є аналогом дельта-функції, тобто похідною від прикладеної на вході одиничної функції.

Розглянуті кола, як і кола першої групи, застосовують також як прості фільтри, однак іншого типу – ФВЧ, властивості яких аналогічні властивостям фільтрів на основі кіл першої групи.

2.3.3 Часові характеристики типових кіл R, L, C

Кола другого порядку R, L, C зазвичай використовують як смугові фільтри та узгоджувальні ланки. Такі кола реалізують у вигляді одиночних послідовного і паралельного контурів [7, розд.6].

Щоб спростити аналіз часових характеристик одиночних контурів, можна обмежитись розглядом двох дуальних схем (рис.2.23). Одна з схем (рис.2.23, а) є традиційною схемою заміщення послідовного контуру, а інша (рис.2.23, б) – одним з варіантів схеми заміщення паралельного контуру, в якій втрати в котушці та конденсаторі перераховані в один паралельно увімкнений опір R_2 .

У першій схемі (рис.2.23, а) дією $u_{\text{вх}}(t)$ і відгуками $u_{\text{вих1}}(t) = u_C(t)$; $u_{\text{вих2}}(t) = u_R(t)$; $u_{\text{вих3}}(t) = u_L(t)$ є напруги. Дія і відгуки у другій схемі (рис.2.23, б) – відповідно вхідний струм $i_{\text{вх}}(t)$ та струми у вітках – $i_{\text{вих1}}(t) = i_L(t)$; $i_{\text{вих2}}(t) = i_R(t)$; $i_{\text{вих3}}(t) = i_C(t)$.

Дуальність даних кіл виявляється в однотипності відповідних диференціальних рівнянь. Це підтверджують, наприклад, диференціальні рівняння, складені для $u_{\text{вих1}}(t) = u_C(t)$ та $i_{\text{вих1}}(t) = i_L(t)$ відповідно у послідовному та паралельному колах.

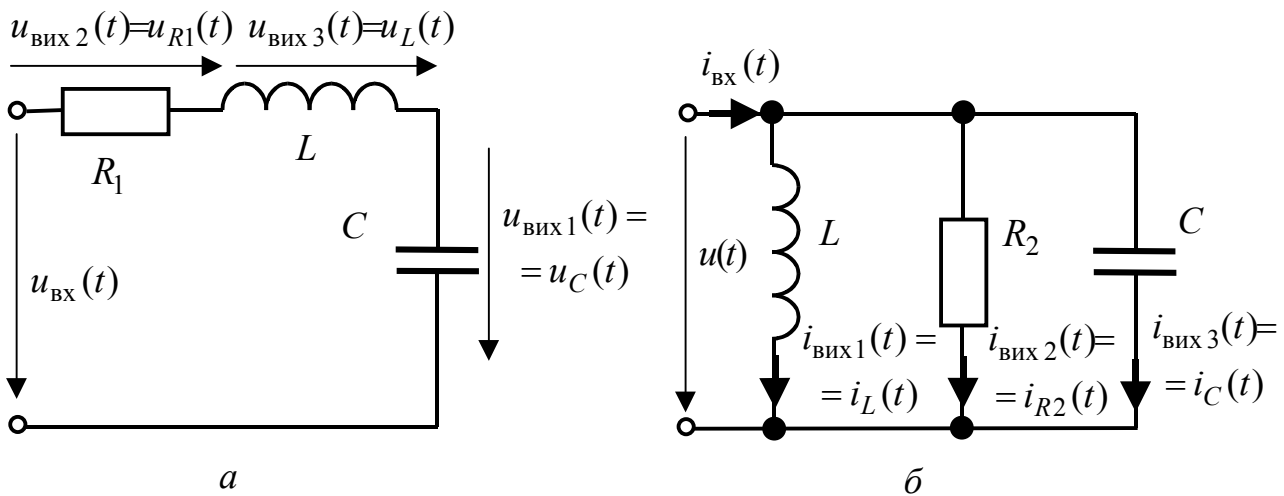


Рисунок 2.23 – Схеми дуальних R, L, C кіл

Перше з рівнянь згідно з співвідношенням (1.59) та з урахуванням прийнятих позначень має вигляд:

$$\frac{du_C^2(t)}{dt^2} + \frac{R_1}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{u_{\text{вх}}(t)}{LC}. \quad (2.40)$$

Щоб скласти друге рівняння, використовують перший закон Кірхгофа і співвідношення між миттєвими значеннями струмів і напруги $u(t)$ на затискачах кола (рис.2.23, б):

$$i_C(t) + i_{R_2}(t) + i_L(t) = i_{\text{вх}}(t);$$

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_{R_2}(t) = \frac{u(t)}{R_2} = \frac{L}{R_2} \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} = LC \frac{di_L^2(t)}{dt^2};$$

$$LC \frac{di_L^2(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_{\text{вх}}(t); \quad \frac{di_L^2(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_2 C} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{LC} = \frac{i_{\text{вх}}(t)}{LC}. \quad (2.41)$$

Диференціальні рівняння (2.40) і (2.41) при визначенні перехідних характеристик перетворюються до однотипних рівнянь:

$$\frac{du_{\text{вих1}}^2(t)}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{du_{\text{вих1}}(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 u_{\text{вих1}}(t) = \omega_{\text{рез}}^2 \cdot 1(t);$$

$$\frac{di_{\text{вих1}}^2(t)}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{di_{\text{вих1}}(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 i_{\text{вих1}}(t) = \omega_{\text{рез}}^2 \cdot 1(t),$$

де $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансна частота; $\delta_1 = \frac{R_1}{2L}$, $\delta_2 = \frac{1}{2R_2 C}$ – коефіцієнти

загасання відповідно для послідовного і паралельного кіл.

Отже, рівняння (2.40) і (2.41), а також аналогічні рівняння для дуальних відгуків кіл відрізняються тільки співвідношеннями для коефіцієнтів загасання, причому якщо $\delta_1 = \delta_1 = \delta$, дуальні часові характеристики однакові:

$$g_1(t) = u_{\text{вих1}}(t)/1(t) = i_{\text{вих1}}(t)/1(t); \quad h_1(t) = \frac{d[g_1(t)]}{dt};$$

$$g_2(t) = u_{\text{вих2}}(t)/1(t) = i_{\text{вих2}}(t)/1(t); \quad h_2(t) = \frac{d[g_2(t)]}{dt};$$

$$g_3(t) = u_{\text{вих3}}(t)/1(t) = i_{\text{вих3}}(t)/1(t); \quad h_3(t) = \frac{d[g_3(t)]}{dt}.$$

Очевидно, що перехідні характеристики $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ безрозмірні, а імпульсні – $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$ мають розмірність 1/с.

Слід зазначити, що активний опір R_2 паралельного кола інакше впливає на характер перехідних процесів і часових характеристик, ніж опір послідовного кола (див. підрозд. 1.3):

1) аперіодичний режим спостерігається, якщо $\delta_2 > \omega_{\text{рез}}$, $R_2 < 0,5\sqrt{\frac{L}{C}} = 0,5\rho$ (ρ – характеристичний опір), добротність $Q_2 = \frac{R_2}{\rho} < 0,5$;

2) критичний режим відповідає випадку, коли $\delta_2 = \omega_{\text{рез}}$, $R_2 = 0,5\rho$, $Q_2 = 0,5$;

3) при коливальному режимі $\delta_2 < \omega_{\text{рез}}$, $R_2 > 0,5\rho$, $Q_2 > 0,5$.

Виведення виразів для перехідних характеристик спрощується, якщо використати результати аналізу перехідних процесів у послідовному колі R, L, C при увімкненні постійного джерела E (див. п. 1.3.4) і підставити в отримані там

співвідношення $E = 1(t)$. Знайдені у такий спосіб вирази для перехідних характеристик із застосуванням формул (1.60) – (1.62), (1.63) – (1.65), (1.66) – (1.68), а також співвідношення $u_R(t) = i(t)R$ відповідно для аперіодичного, критичного і коливального режимів, зведені до табл.2.2 і 2.3. Тут же наведені отримані згідно з виразом (2.29) формули для імпульсних характеристик розглянутих кіл.

У табл.2.3, крім точних формул для розрахунку часових характеристик коливальних кіл R, L, C , наведені приблизні вирази для характеристик резонансних контурів з високою добротністю ($Q \gg 1$).

Правильність співвідношень табл.2.2 і 2.3 підтверджується розмірностями часових характеристик (перехідні – безрозмірні, а імпульсні – мають розмірність 1/с), початковими та вимушеними значеннями перехідних характеристик $g_1(+0) = g_2(+0) = 0$; $g_3(+0) = 1$; $g_1(\infty) = 1$; $g_2(\infty) = g_3(\infty) = 0$, а також сумарними значеннями характеристик відповідно до законів Кірхгофа (другого – для послідовного кола і першого – для паралельного):

$$g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = 1(t); \quad h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) = \delta(t).$$

Таблиця 2.2 – Часові характеристики аперіодичних кіл R, L, C

Характеристика	Аперіодичний режим ($Q < 0,5$)	Критичний режим ($p_1 = p_2 = -\delta$; $Q = 0,5$)
$g_1(t)$	$\left[\frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + 1 \right] \cdot 1(t)$	$\left[1 - (1 + \delta t) e^{-\delta t} \right] \cdot 1(t)$
$h_1(t)$	$\frac{1}{LC(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$\delta^2 t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$
$g_2(t)$	$\frac{2\delta}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$2\delta t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$
$h_2(t)$	$\frac{2\delta}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$2\delta(1 - \delta t) e^{-\delta t} \cdot 1(t)$
$g_3(t)$	$\frac{1}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$	$e^{-\delta t} (1 - \delta t) \cdot 1(t)$
$h_3(t)$	$\frac{1}{p_1 - p_2} (p_1^2 e^{p_1 t} - p_2^2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t) + \delta(t)$	$e^{-\delta t} (\delta^2 t - 2\delta) \cdot 1(t) + \delta(t)$

На рис.2.24 – 2.26 зображені графіки часових характеристик для основних режимів. Дельта-функцію містять тільки імпульсні характеристики $h_3(t)$, оскільки $g_3(+0) = 1$, а $g_1(+0) = g_2(+0) = 0$. Графіки часових характеристик $g_3(t)$ і $h_3(t)$, а також умовне зображення дельта-функції, яка входить до складу $h_3(t)$, показані пунктирними лініями.

Імпульсні характеристики з фізичної точки зору описують вільні процеси, які проходять за рахунок запасу енергії, отриманого від вхідної дельта-функції.

В момент часу $t = +0$ послідовне коло є розімкненою ділянкою за рахунок індуктивності ($i_L(-0) = 0$), а паралельне – коротким замиканням, оскільки $u_C(-0) = 0$. Дія $\delta(t)$ у першому випадку призводить до появи стрибка струму і початкового значення $h_2(t)$:

$$i(+0) = \frac{1}{L} \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \frac{1}{L}; \quad h_2(+0) = u_{\text{вих}2}(+0) = R_1 i(+0) = \frac{R_1}{L} = 2\delta_1,$$

а у другому – стрибка напруги на ємності та початкового значення $h_2(t)$:

$$u(+0) = \frac{1}{C} \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \frac{1}{C}; \quad h_2(+0) = i_2(+0) = \frac{u(+0)}{R_2} = \frac{1}{R_2 C} = 2\delta_2.$$

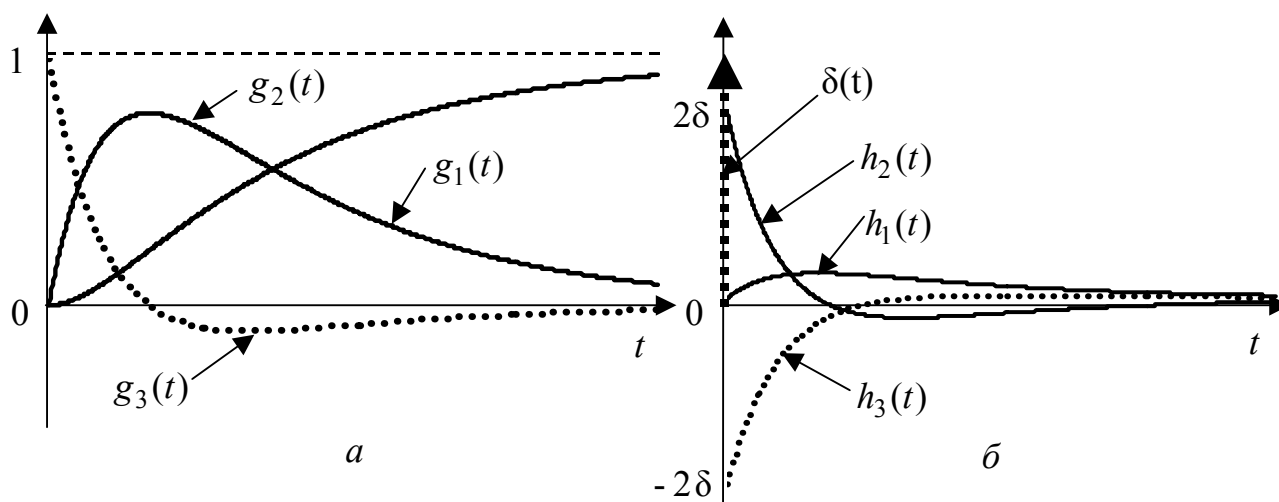


Рисунок 2.24 – Графіки часових характеристик аперіодичних кіл R, L, C ($Q = 0,4$): a – перехідні; b – імпульсні

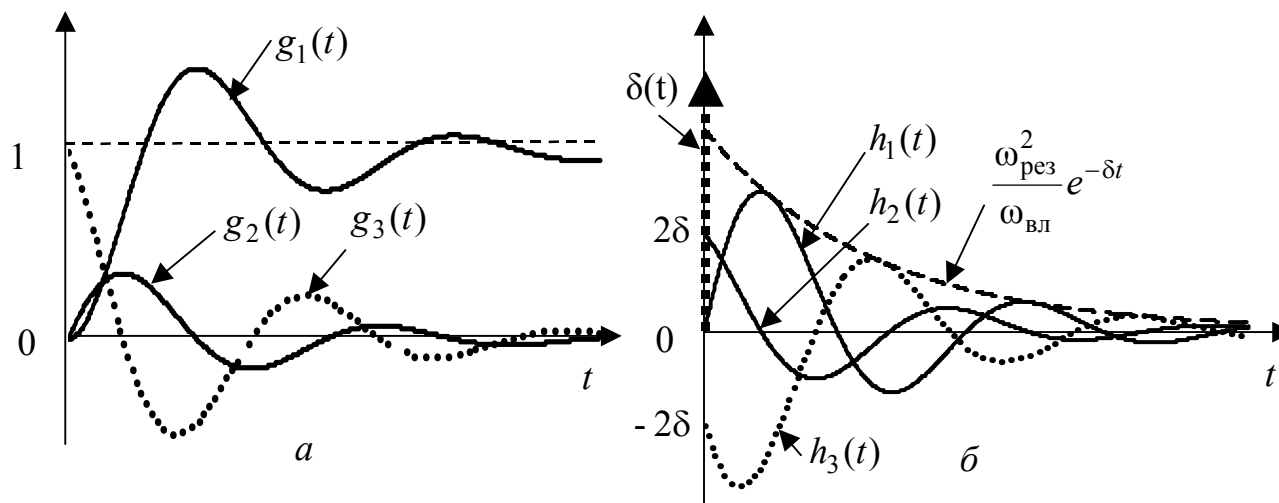


Рисунок 2.25 – Графіки часових характеристик коливальних кіл R, L, C ($Q = 2$): a – перехідні; b – імпульсні

Таблиця 2.3 – Часові характеристики коливальних кіл R, L, C

Характеристика	Коливальний режим ($Q > 0,5$)	Приблизні вирази для $Q \gg 1$ ($\omega_{\text{вЛ}} \approx \omega_{\text{рез}} \gg \delta; \psi = 0$)
$g_1(t)$	$\left[1 - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вЛ}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вЛ}} t - \psi) \right] \cdot 1(t)$	$\left[1 - e^{-\delta t} \cos \omega_{\text{рез}} t \right] \cdot 1(t)$
$h_1(t)$	$\frac{\omega_{\text{рез}}^2}{\omega_{\text{вЛ}}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{вЛ}} t \cdot 1(t)$	$\omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$
$g_2(t)$	$\frac{2\delta}{\omega_{\text{вЛ}}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{вЛ}} t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{Q} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$
$h_2(t)$	$\frac{2\delta\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вЛ}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вЛ}} t + \psi) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} e^{-\delta t} \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$
$g_3(t)$	$\frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вЛ}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вЛ}} t + \psi) \cdot 1(t)$	$e^{-\delta t} \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$
$h_3(t)$	$-\frac{\omega_{\text{рез}}^2}{\omega_{\text{вЛ}}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{вЛ}} t + 2\psi) \cdot 1(t) + \delta(t)$	$-\omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t) + \delta(t)$

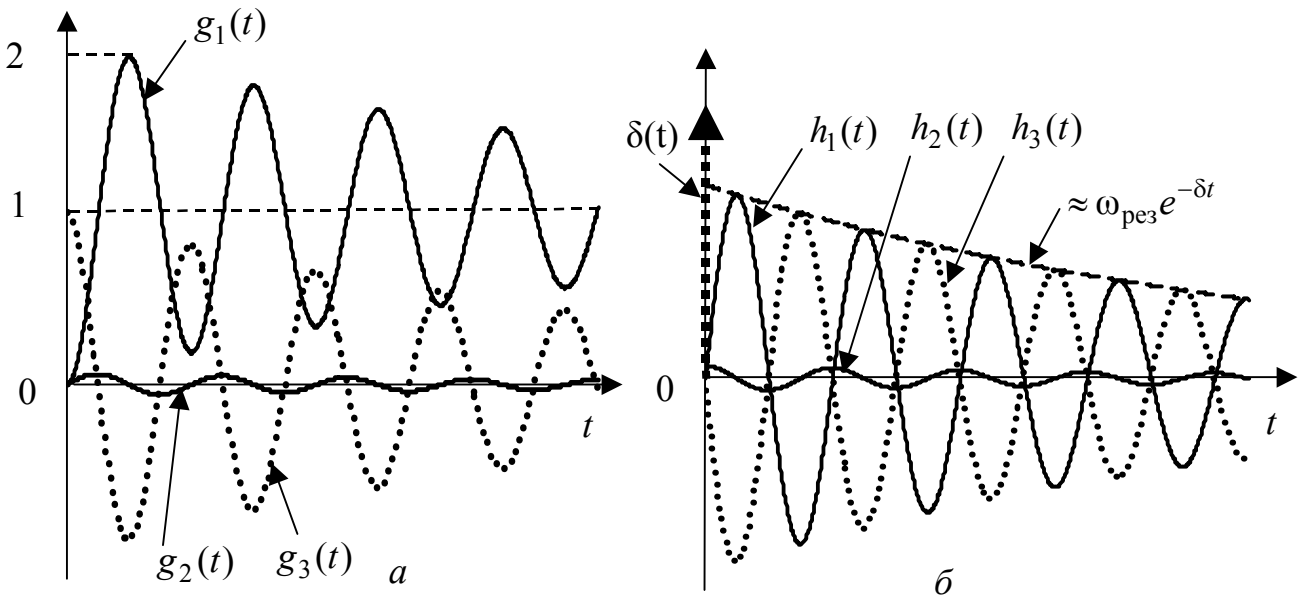


Рисунок 2.26 – Графіки часових характеристик кіл R, L, C з високою добротністю ($Q = 15$): a – перехідні; b – імпульсні

2.4 Часові характеристики зв'язаних коливальних контурів

Окрім кіл $R, L; R, C$ та одиночних коливальних контурів R, L, C , типовими прийнято вважати і зв'язані коливальні контури. Частотні властивості та переваги зв'язаних контурів (краща вибірність завдяки прямокутнішій форми АЧХ; плавне регулювання смуги пропускання; простота узгодження з джерелом) розглянуті у першій частині підручника [7, розд. 5]. Тому доцільно проаналізувати часові характеристики кіл цього класу.

Враховуючи широке практичне застосування і відносну простоту аналізу двох ідентичних індуктивно зв'язаних коливальних контурів з високою добротністю, нижче розглядаються часові характеристики саме такої схеми (рис.2.27). Вхідною величиною є напруга на затискачах першого контуру $u_{\text{вх}}$, а відгуками – напруги на елементах. Напруги та струми позначено індексами, які збігаються з номером контуру.

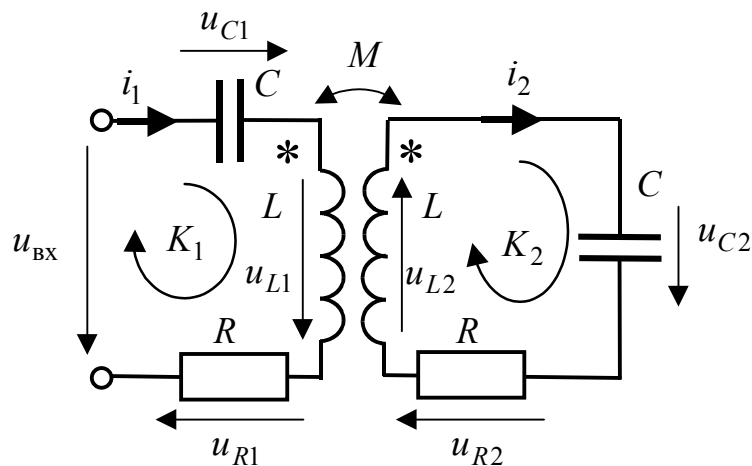


Рисунок 2.27 – Схема для аналізу часових характеристик індуктивно зв'язаних коливальних контурів

Процеси в даному колі описуються рівняннями, складеними за другим законом Кірхгофа:

$$\text{для контуру } K_1 - u_{L1} + u_{R1} + u_{C1} + u_{M12} = u_{\text{вх}}; \quad (2.42)$$

$$\text{для контуру } K_2 - u_{L2} + u_{R2} + u_{C2} + u_{M21} = 0, \quad (2.43)$$

де $u_{M12} = -M \frac{di_2}{dt}$; $u_{M21} = -M \frac{di_1}{dt}$ – напруги взаємоіндукції, від'ємний

знак яких пояснюється зустрічним увімкненням індуктивно зв'язаних елементів.

Щоб перетворити систему (2.42), (2.43) до рівняння відносно одного з відгуків, використовують відомі співвідношення між струмами і напругами в елементах R, L, C :

$$i_1 = C \frac{du_{C1}}{dt}; \quad i_2 = C \frac{du_{C2}}{dt}; \quad u_{L1} = L \frac{di_1}{dt}; \quad u_{L2} = L \frac{di_2}{dt}; \quad u_{R1} = Ri_1; \quad u_{R2} = Ri_2.$$

Якщо відгуками є напруги на ємностях, рівняння (2.42), (2.43) перетворюють у такий спосіб:

1) всі напруги, крім напруг на ємностях, виражають через відповідні струми:

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + u_{C1} - M \frac{di_2}{dt} &= u_{\text{вх}}; \\ L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + u_{C2} - M \frac{di_1}{dt} &= 0; \end{aligned}$$

2) в отриманих рівняннях струми виражають через напруги на ємностях:

$$\begin{aligned} LC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + RC \frac{du_{C1}}{dt} + u_{C1} - MC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} &= u_{\text{вх}}; \\ LC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + RC \frac{du_{C2}}{dt} + u_{C2} - MC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} &= 0; \end{aligned}$$

3) рівняння записують у стандартній формі:

$$\frac{du_{C1}^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{C1}}{dt} + \frac{u_{C1}}{LC} - \frac{M}{L} \frac{du_{C2}^2}{dt^2} = \frac{u_{\text{вх}}}{LC}, \quad \frac{du_{C2}^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{C2}}{dt} + \frac{u_{C2}}{LC} - \frac{M}{L} \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{du_{C1}^2}{dt^2} + 2\delta \frac{du_{C1}}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 u_{C1} - k \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} = \omega_{\text{рез}}^2 u_{\text{вх}}; \quad (2.44)$$

$$\frac{du_{C2}^2}{dt^2} + 2\delta \frac{du_{C2}}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 u_{C2} - k \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} = 0, \quad (2.45)$$

де $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота контурів; $\delta = R/2L$ – коефіцієнт загасання; $k = M/L$ – коефіцієнт зв'язку.

Подальше розв'язання системи (2.44) – (2.45) відносно напруги u_{C1} чи u_{C2} призводить до диференціального рівняння четвертого порядку, що відповідає порядку кола. Щоб уникнути громіздкої процедури розв'язання такого рівняння, можна скористатись прийомом переходу від співвідношень (2.44), (2.45) до двох рівнянь другого порядку відносно комбінованих напруг:

$$u_{C(1+2)} = u_{C1} + u_{C2}; \quad u_{C(1-2)} = u_{C1} - u_{C2}.$$

Шукані напруги u_{C1} та u_{C2} пов'язані з $u_{C(1+2)}$ та $u_{C(1-2)}$ очевидними співвідношеннями:

$$u_{C1} = \frac{u_{C(1+2)} + u_{C(1-2)}}{2}; \quad (2.46)$$

$$u_{C2} = \frac{u_{C(1+2)} - u_{C(1-2)}}{2}. \quad (2.47)$$

Після підсумовування виразів (2.44) і (2.45) виходить рівняння відносно $u_{C(1+2)}$, а після віднімання – відносно $u_{C(1-2)}$:

$$(1-k) \frac{d^2 u_{C(1+2)}}{dt^2} + 2\delta \frac{du_{C(1+2)}}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 u_{C(1+2)} = \omega_{\text{рез}}^2 u_{\text{вх}}; \quad (2.48)$$

$$(1+k) \frac{d^2 u_{C(1-2)}}{dt^2} + 2\delta \frac{du_{C(1-2)}}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 u_{C(1-2)} = \omega_{\text{рез}}^2 u_{\text{вх}}. \quad (2.49)$$

Перетворення рівнянь (2.48) і (2.49) дозволяє подати їх у вигляді:

$$\frac{d^2 u_{C(1+2)}}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{du_{C(1+2)}}{dt} + \omega_{\text{I}}^2 u_{C(1+2)} = \omega_{\text{I}}^2 u_{\text{вх}}; \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 u_{C(1-2)}}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{du_{C(1-2)}}{dt} + \omega_{\text{II}}^2 u_{C(1-2)} = \omega_{\text{II}}^2 u_{\text{вх}}, \quad (2.51)$$

$$\text{де } \omega_{\text{I}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\sqrt{1-k}}; \omega_{\text{II}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\sqrt{1+k}}; \delta_1 = \frac{\delta}{1-k}; \delta_2 = \frac{\delta}{1+k}.$$

Рівняння (2.50), (2.51) збігаються з диференціальними рівняннями (1.44), (1.59) для напруги на ємності одиночного коливального контуру. При великій добротності контурів ($Q \gg 1$) і значенні фактора зв'язку в інтервалі $3 > A = kQ > 1$, яке зазвичай використовується, коефіцієнт зв'язку $k \ll 1$. Тому при подальшому аналізі без суттєвої втрати точності можна вважати, що:

1) частоти

$$\omega_{\text{I}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\sqrt{1-k}} \approx \frac{\omega_{\text{рез}}}{1-k/2} \approx \omega_{\text{рез}}(1+k/2); \quad (2.52)$$

$$\omega_{\text{II}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\sqrt{1+k}} \approx \frac{\omega_{\text{рез}}}{1+k/2} \approx \omega_{\text{рез}}(1-k/2) \quad (2.53)$$

збігаються з частотами зв'язку;

2) значення коефіцієнтів загасання однакові: $\delta_1 \approx \delta_2 \approx \delta$.

Визначаючи перехідні характеристики, рівняння (2.50), (2.51) розв'язують за умови, що $u_{\text{вх}} = 1(t)$, а початкові умови у колі нульові:

$$u_{C1}(-0) = 0; i_1(-0) = 0; u_{C2}(-0) = 0; i_2(-0) = 0.$$

Необхідні для розв'язання рівнянь (2.50), (2.51) значення шуканих і комбінованих напруг, а також їх перших похідних у момент часу $t = +0$ на підставі законів комутації становитимуть:

$$u_{C1}(+0) = 0; i_1(+0) = 0; u'_{C1}(+0) = \frac{i_1(+0)}{C} = 0;$$

$$u_{C2}(+0) = 0; i_2(+0) = 0; u'_{C2}(+0) = \frac{i_2(+0)}{C} = 0;$$

$$u_{C(1+2)}(+0) = u_{C1}(+0) + u_{C2}(+0) = 0; u'_{C(1+2)}(+0) = u'_{C1}(+0) + u'_{C2}(+0) = 0;$$

$$u_{C(1-2)}(+0) = u_{C1}(+0) - u_{C2}(+0) = 0; u'_{C(1-2)}(+0) = u'_{C1}(+0) - u'_{C2}(+0) = 0.$$

Вимушені значення шуканих і комбінованих напруг визначають в усталеному режимі постійного струму в колі:

$$u_{C1\text{ВМ}} = 1; u_{C2\text{ВМ}} = 0; u_{C(1+2)\text{ВМ}} = u_{C1\text{ВМ}} + u_{C2\text{ВМ}} = 1; u_{C(1-2)\text{ВМ}} = u_{C1\text{ВМ}} - u_{C2\text{ВМ}} = 1.$$

Отже, розв'язання кожного з рівнянь (2.50), (2.51) для знайдених початкових значень за умови $u_{\text{вх}} = 1(t)$ збігається з наведеним у табл.2.3 приблизним виразом для перехідної характеристики $g_1(t)$ при $Q \gg 1$. З огляду на прийняті у (2.50), (2.51) позначення, розв'язки рівнянь матимуть вигляд:

$$u_{C(1+2)} \approx 1 - e^{-\delta t} \cos \omega_I t; \quad (2.54)$$

$$u_{C(1-2)} \approx 1 - e^{-\delta t} \cos \omega_{II} t. \quad (2.55)$$

Підстановка виразів (2.54), (2.55) у формули (2.46), (2.47) дає шукані напруги:

$$u_{C1} = \frac{u_{C(1+2)} + u_{C(1-2)}}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\delta t} (\cos \omega_I t + \cos \omega_{II} t) = 1 - e^{-\delta t} \cos \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t; \quad (2.56)$$

$$u_{C2} = \frac{u_{C(1+2)} - u_{C(1-2)}}{2} = \frac{1}{2} e^{-\delta t} (\cos \omega_{II} t - \cos \omega_I t) = e^{-\delta t} \sin \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t, \quad (2.57)$$

$$\text{де } \Omega = \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2}; \quad \omega_{\text{рез}} = \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}.$$

Оскільки $u_{\text{вх}} = 1(t)$, миттєві значення u_{C1} та u_{C2} фізично відповідають перехідним характеристикам, а співвідношення (2.56) і (2.57) є аналітичними виразами цих характеристик. Отже, стандартна форма запису перехідних характеристик має вигляд:

$$g_{u_{C1}}(t) \approx (1 - e^{-\delta t} \cos \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t) \cdot 1(t); \quad (2.58)$$

$$g_{u_{C2}}(t) \approx e^{-\delta t} \sin \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t). \quad (2.59)$$

Функції $e^{-\delta t}$, $\cos \Omega t$ та $\sin \Omega t$ суттєво повільніше змінюються у часі порівняно з коливаннями, які мають частоту $\omega_{\text{рез}}$. Тому, визначаючи імпульсні характеристики за формулою (2.26), диференціювання виразів (2.58), (2.59) можна виконувати приблизно:

$$h_{u_{C1}}(t) = \frac{dg_{u_{C1}}(t)}{dt} \approx \omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \cos \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t); \quad (2.60)$$

$$h_{u_{C2}}(t) = \frac{dg_{u_{C2}}(t)}{dt} \approx \omega_0 e^{-\delta t} \sin \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t). \quad (2.61)$$

Імпульсні характеристики (2.60), (2.61) не містять дельтоподібних складових, оскільки $u_{C1}(+0) = 0$, $u_{C2}(+0) = 0$.

Графіки часових характеристик, побудованих згідно з формулами (2.58) – (2.61), зображені на рис.2.28 і 2.29.

Використовуючи співвідношення між струмами і напругами на елементах і приблизне диференціювання, можна знайти вирази для інших часових характеристик розглядуваного кола (табл.2.4).

Таблиця 2.4 – Приблизні вирази для часових характеристик індуктивно зв'язаних контурів з високою добротністю

Відгук	$g(t)$	$h(t)$
u_{C1}	$(1 - e^{-\delta t} \cos \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t) \cdot 1(t)$	$\omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \cos \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$
u_{R1}	$(1/Q) e^{-\delta t} \cos \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$	$2\delta e^{-\delta t} \cos \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t$
u_{L1}	$e^{-\delta t} \cos \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$	$-\omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \cos \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t) + \delta(t)$
u_{C2}	$e^{-\delta t} \sin \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$	$\omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \sin \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$
u_{R2}	$(1/Q) e^{-\delta t} \sin \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$	$-2\delta e^{-\delta t} \sin \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$
u_{L2}	$-e^{-\delta t} \sin \Omega t \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$	$-\omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \sin \Omega t \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t)$

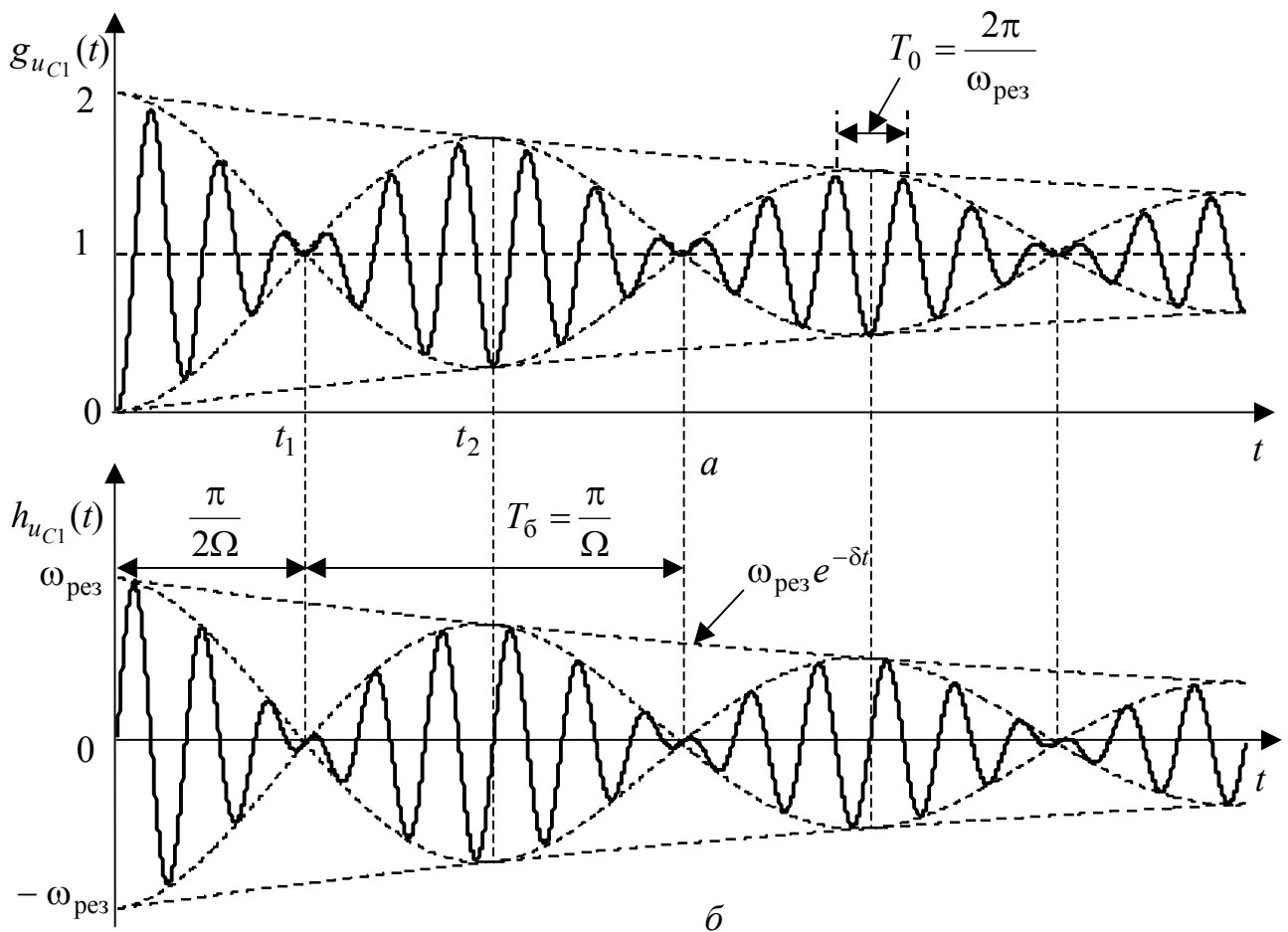


Рисунок 2.28 – Графіки часових характеристик за напругою на ємності у першому із зв'язаних коливальних контурів: a – перехідна; b – імпульсна

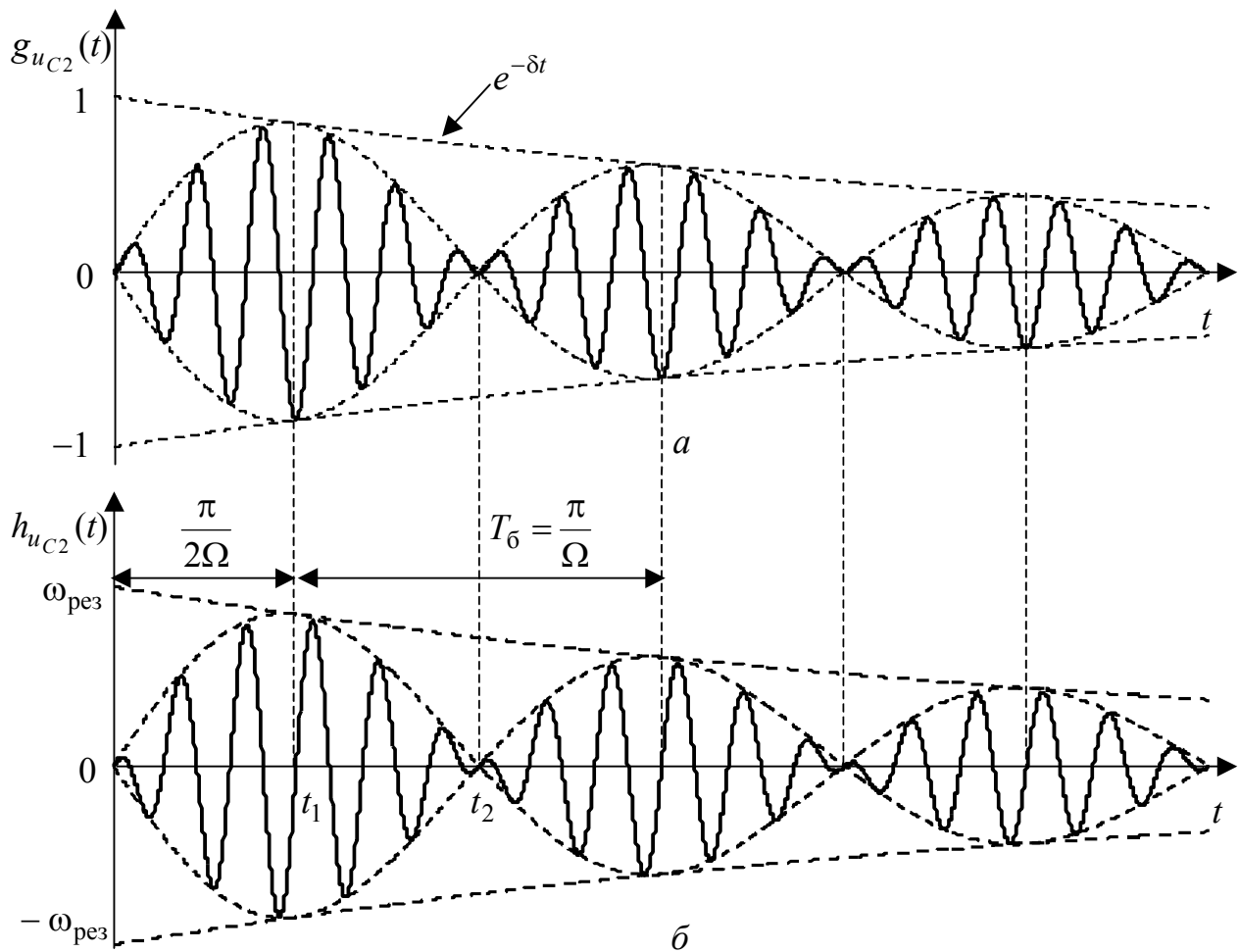


Рисунок 2.29 – Графіки часових характеристик за напругою на ємності у другому із зв'язаних коливальних контурів: *a* – перехідна; *б* – імпульсна

Аналіз графіків часових характеристик (рис.2.28 і 2.29), формул (табл.2.4) та енергетичних процесів, які відбуваються у зв'язаних контурах при типових діях $1(t)$ та $\delta(t)$, призводить до таких висновків:

1) часові характеристики зв'язаних контурів у випадку $Q \gg 1$, $3 > A > 1$ та $k \ll 1$ є сукупністю двох коливань, амплітуда яких зменшується за експоненційним законом $e^{-\delta t}$, з близькими частотами, що практично збігаються з частотами зв'язку $\omega_{I,II}$; тому часові характеристики мають вигляд **биттів**, подібних до записаних у виразі (1.81) для перехідного процесу при увімкненні одиночного високочастотного контуру до синусоїдного джерела (див. п.1.4.3, рис.1.22);

2) частота биттів Ω визначається різницею частот зв'язку $\omega_{I,II}$, а як період биттів прийнято мінімальний інтервал часу між нульовими значеннями обвідних амплітуд високочастотних коливань з частотою $\omega_{рез}$ – $T_6 = \pi/\Omega = 2\pi/(\omega_I - \omega_{II})$; при зростанні зв'язку частота биттів збільшується, а період зменшується і навпаки; більш строгий аналіз показує, що при зв'язку

менше критичного ($A = kQ < 1$), биття відсутні і часові характеристики мають вигляд коливань з однією частотою $\omega_{рез}$, амплітуда яких зменшується;

3) імпульсні характеристики з фізичної точки зору відповідають вільному процесу, який спричинено початковим стрибком струму $i_1(+0)$ при дії $\delta(t)$; через половину періоду биттів $\pi/(2\Omega) = \pi/(\omega_I - \omega_{II})$ має місце обмін енергією між контурами; у момент часу t_1 енергія в першому контурі дорівнює нулю (рис.2.28), а у другому – максимальна (рис.2.29); після половини періоду биттів у момент часу t_2 енергія у першому контурі досягає чергового максимуму (рис.2.28), а у другому – нуля (рис.2.29);

4) обмін енергією електричного і магнітного полів ємностей $Cu_C^2/2$ та індуктивностей $Li^2/2$ у кожному з контурів відбувається через чверть періоду $T_{рез} = 2\pi/\omega_{рез}$ високочастотних коливань, оскільки миттєві значення напруг на ємностях, які збігаються з $h_{u_{C1}}(t)$ та $h_{u_{C2}}(t)$, і миттєві значення відповідних струмів, пропорційні $h_{u_{R1}}(t)$ та $h_{u_{R2}}(t)$, зсунуті між собою за фазою на $\pi/2$.

2.5 Визначення відгуку кола на ступінчасту дію за допомогою часових характеристик

Ступінчасті дії (рис.2.30, а) відповідають квантованим (у часі та за рівнями) сигналам, які широко використовуються у радіотехніці. Окремим випадком таких сигналів є прямокутний відеоімпульс (рис.2.30, б).

Зображену на рис.2.30, а ступінчасту дію ($s_{вх}(t) = 0$ при $t < 0$) можна записати аналітично, використовуючи одиничну функцію та її властивості:

$$s_{вх}(t) = \sum_{k=0}^n s_{квх}(t) = \sum_{k=0}^n \Delta s_{квх} \cdot 1(t - t_k), \quad (2.62)$$

де $\Delta s_{квх} = s_{вх}(t_k+) - s_{вх}(t_k-)$ – величина k -го стрибка; (t_k+) , (t_k-) – відповідно моменти часу безпосередньо передуючий t_k та наступний після t_k (аналогічно до часових понять, пов'язаних з комутацією у момент часу $t = t_k$); $s_{квх}(t) = \Delta s_{квх} \cdot 1(t - t_k)$ – аналітичний опис k -ї «сходинки» $s_{вх}(t)$; n – максимальний номер стрибка, який входить до інтервалу спостереження.

Вираз, подібний (2.62), можна застосувати і для подання дій $s_{вх}(t) \neq 0$ при $t < 0$, якщо ввести значення $k < 0$.

Дію у вигляді прямокутного відеоімпульсу (рис.2.30, б), згідно з виразом (2.62), можна записати за допомогою двох «сходинок»:

$$s_{вхП}(t) = A \cdot 1(t) - A \cdot 1(t - \tau_i), \quad (2.63)$$

де A – максимальне значення (висота) імпульсу; τ_i – тривалість імпульсу.

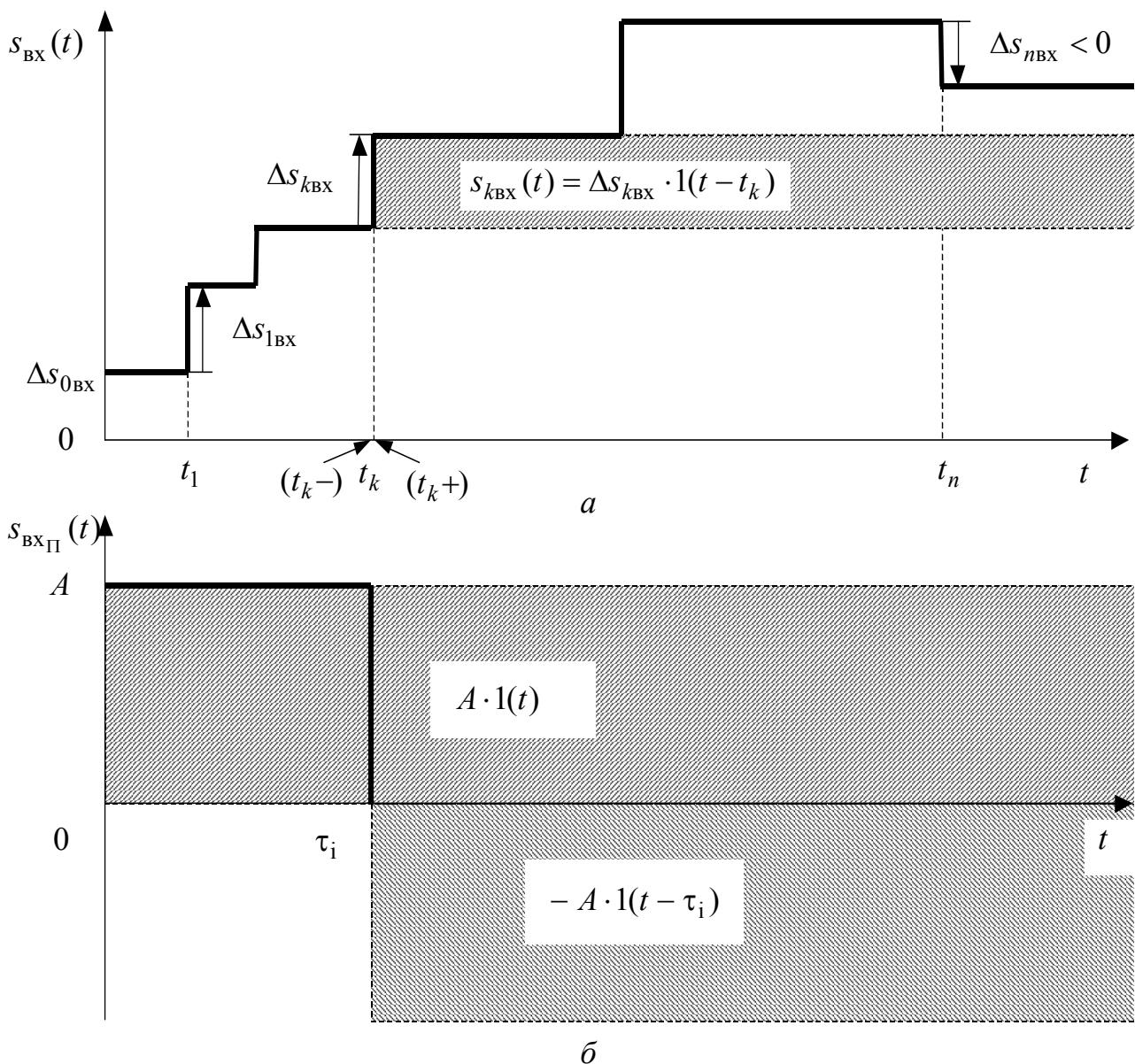


Рисунок 2.30 – Ступінчасті дії та їх подання за допомогою одиничних функцій: *a* – довільна ступінчаста дія; *б* – прямокутний відеоімпульс

Основною перевагою запису ступінчастих дій (2.62) і (2.63), окрім компактності (порівняно з описом таких функцій за інтервалами часу) та однотипності доданків, є можливість визначення за допомогою принципу накладання і відомої перехідної характеристики $g(t)$ відгуку кола у вигляді:

$$s_{\text{вих}}(t) = \sum_{k=0}^n s_{k \text{ вих}}(t) = \sum_{k=0}^n \Delta s_{k \text{ вх}} \cdot g(t - t_k); \quad (2.64)$$

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = A \cdot g(t) - A \cdot g(t - \tau_i), \quad (2.65)$$

де $s_{k \text{ вих}}(t) = \Delta s_{k \text{ вх}} \cdot g(t - t_k)$ – відгук кола на k -ту «сходишку» $s_{\text{вх}}(t)$.

Практичне значення має проходження через кола R, C ; R, L (рис.2.17 і 2.18) прямокутних відеоімпульсів, які мають вигляд:

$$u_{\text{вих}\Pi}(t) = U_0 \cdot 1(t) - U_0 \cdot 1(t - \tau_i); \quad i_{\text{вих}\Pi}(t) = I_0 \cdot 1(t) - I_0 \cdot 1(t - \tau_i),$$

де U_0, I_0 – максимальні значення вхідних імпульсів напруги і струму відповідно.

Згідно із співвідношенням (2.65) відгуки послідовних і паралельних кіл $R, C; R, L$ першої групи (рис.2.17) становитимуть, відповідно:

$$u_{\text{вих}\Pi}(t) = U_0 \cdot g_1(t) - U_0 \cdot g_1(t - \tau_i) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) - U_0(1 - e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}}) \cdot 1(t - \tau_i); \quad (2.66)$$

$$i_{\text{вих}\Pi}(t) = I_0 \cdot g_1(t) - I_0 \cdot g_1(t - \tau_i) = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) - I_0(1 - e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}}) \cdot 1(t - \tau_i), \quad (2.67)$$

де $g_1(t)$ – перехідна характеристика (2.34).

Аналогічні співвідношення для кіл другої групи (рис.2.18) мають вигляд:

$$u_{\text{вих}\Pi}(t) = U_0 \cdot g_2(t) - U_0 \cdot g_2(t - \tau_i) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) - U_0 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} \cdot 1(t - \tau_i); \quad (2.68)$$

$$i_{\text{вих}\Pi}(t) = I_0 \cdot g_2(t) - I_0 \cdot g_2(t - \tau_i) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) - I_0 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} \cdot 1(t - \tau_i), \quad (2.69)$$

де $g_2(t)$ – перехідна характеристика кіл цієї групи (2.37).

Для послідовних кіл першої та другої груп, схеми яких показані на рис.2.17, а, б і 2.18, а, б, графіки відгуків (2.66) і (2.68) зображені відповідно на рис.2.31 і 2.32.

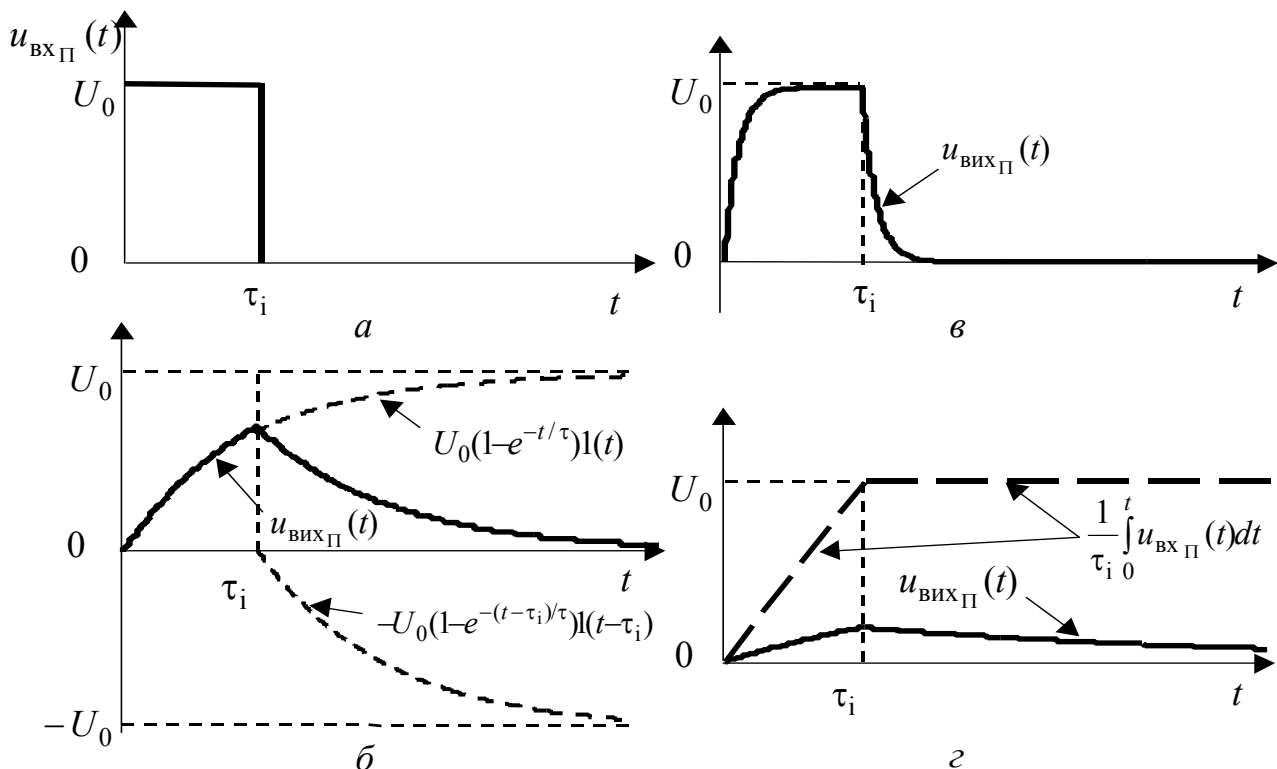


Рисунок 2.31 – Вихідні напруги послідовних кіл $R, C; R, L$ першої групи при дії прямокутного відеоімпульсу:

а – дія; відгуки: б – $\tau \approx \tau_i$; в – $\tau = 0,1 \tau_i$; г – $\tau = 3 \tau_i$

Очевидно, що для паралельних кіл (рис.2.17, в, з і 2.18, в, з) графіки, відповідні виразам (2.67) і (2.69), відрізняються лише величинами та розмірностями дії $i_{\text{вх}\Pi}(t)$, відгуків $i_{\text{вих}\Pi}(t)$ і висотою вхідного імпульсу струму I_0 . Графіки (рис.2.31, 2.32) показано для трьох характерних співвідношень між сталими часу кола і тривалостями імпульсів.

У випадку $\tau \approx \tau_i$ (рис.2.31, б і 2.32, б) графіки побудовані у вигляді суми доданків, які утворюють рівняння (2.66) і (2.68). В інтервалі часу $0 \leq t < \tau_i$ тільки перший доданок не дорівнює нулю, а в інтервалі $\tau_i < t < \infty$ – обидва доданки. Протягом першого інтервалу часу елементи L або C накопичують енергію, а протягом другого – у колах відбуваються вільні процеси.

Відгук за формою наближається до вхідного імпульсу, тобто має місце неспотворена передача сигналу: при $\tau \ll \tau_i$ у колах першої групи (рис.2.31, в) і при $\tau \gg \tau_i$ у колах другої групи (рис.2.32, в).

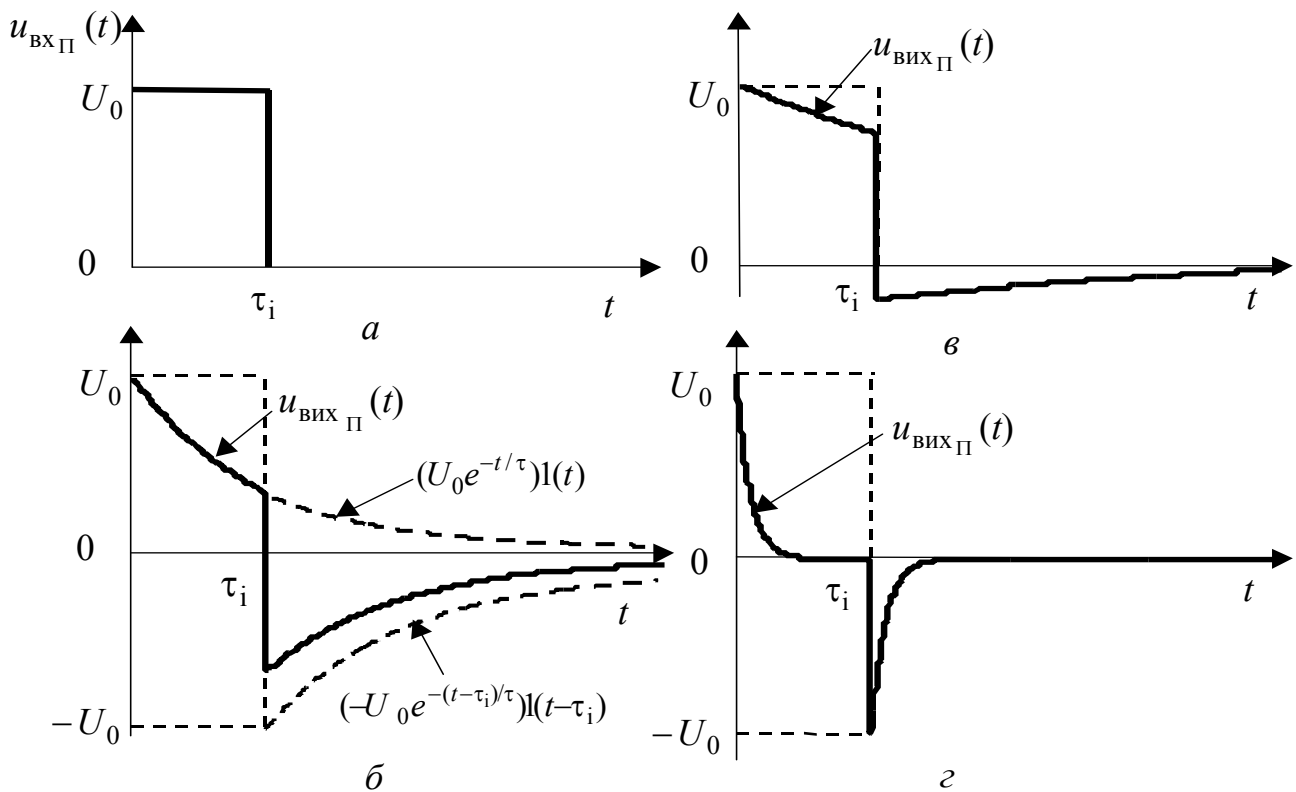


Рисунок 2.32 – Вихідні напруги послідовних кіл $R, C; R, L$ другої групи при дії прямокутного відеоімпульсу:

a – дія; відгуки: $б - \tau \approx \tau_i$; $в - \tau = 3\tau_i$; $з - \tau = 0,1\tau_i$

Якщо $\tau \gg \tau_i$, вихідні напруги (2.66) кіл першої групи протягом імпульсу можна приблизно записати у вигляді:

$$u_{\text{вих}\Pi}(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot l(t) \approx U_0 \frac{t}{\tau}, \quad (2.70)$$

а для $t > \tau_i$ приблизні вирази для $u_{\text{вих}\Pi}(t)$ становитимуть:

$$u_{\text{вих}\Pi}(t) = U_0(e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_0(1 - e^{-\frac{\tau_i}{\tau}})e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} \approx U_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}}. \quad (2.71)$$

Із збільшенням величини τ функція $u_{\text{вих}\Pi}(t)$, згідно із співвідношеннями (2.70) і (2.71), стає пропорційною (з коефіцієнтом $1/\tau$) визначеному інтегралу від $u_{\text{вх}\Pi}(t)$:

$$\int_0^t u_{\text{вх}\Pi}(t) dt = \int_0^t U_0[1(t) - 1(t - \tau_i)] dt = \begin{cases} U_0 t & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_i; \\ U_0 \tau_i & \text{при } t > \tau_i. \end{cases}$$

Цей випадок ілюструють графіки, побудовані на рис.2.31, з.

Отже, даний режим кіл $R, C; R, L$ першої групи є окремим випадком розглянутого в п.2.3.1 інтегрування вхідного сигналу.

За умови $\tau \ll \tau_i$ кола $R, C; R, L$ другої групи є диференціювальними (див. п.2.3.2), а відгуки (рис.2.32, з) мають вигляд двох порівняно коротких імпульсів з різною полярністю. Площа кожного з імпульсів становить:

$$\int_0^{\infty} U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -U_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = U_0 \tau.$$

Якщо $\tau \rightarrow 0$ імпульси відрізняються від дельта-функцій тільки площею, а вихідні напруги кіл другої групи

$$u_{\text{вих}\Pi}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} [U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) - U_0 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} \cdot 1(t - \tau_i)] = U_0 \tau \delta(t) - U_0 \tau \delta(t - \tau_i)$$

пропорційні (з коефіцієнтом τ) похідній вхідного імпульсу

$$\frac{d[u_{\text{вх}\Pi}(t)]}{dt} = \frac{d\{U_0[1(t) - 1(t - \tau_i)]\}}{dt} = U_0 \delta(t) - U_0 \delta(t - \tau_i).$$

Порівняно короткі ($\tau_i \ll \tau$) прямокутні відеоімпульси з великим значенням U_0 (I_0) практично використовують як сигнали для експериментального вимірювання імпульсних характеристик кіл першого порядку. Цей висновок пояснюють графіки для послідовних кіл $R, C; R, L$ (рис.2.33) та приблизне подання відгуків при $\tau_i \ll \tau$.

Якщо використовувати у співвідношеннях (2.66) – (2.69) приблизне подання експоненти при $x = \frac{\tau_i}{\tau} \ll 1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \approx 1 + x = 1 + \frac{\tau_i}{\tau},$$

то вирази, які описують відгуки кіл першої групи для $t > \tau_i$, становитимуть:

$$u_{\text{вих}\Pi}(t) = U_0 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} - U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} (e^{\frac{\tau_i}{\tau}} - 1) \approx U_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \approx U_0 \tau_i h_{1\text{анал}}(t);$$

$$i_{\text{вих.П}}(t) = I_0 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{\frac{\tau_i}{\tau}} - 1 \right) \approx I_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \approx I_0 \tau_i h_{1\text{анал}}(t),$$

де $h_{1\text{анал}}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ – аналітична частина імпульсної характеристики $h_1(t)$

(2.35).

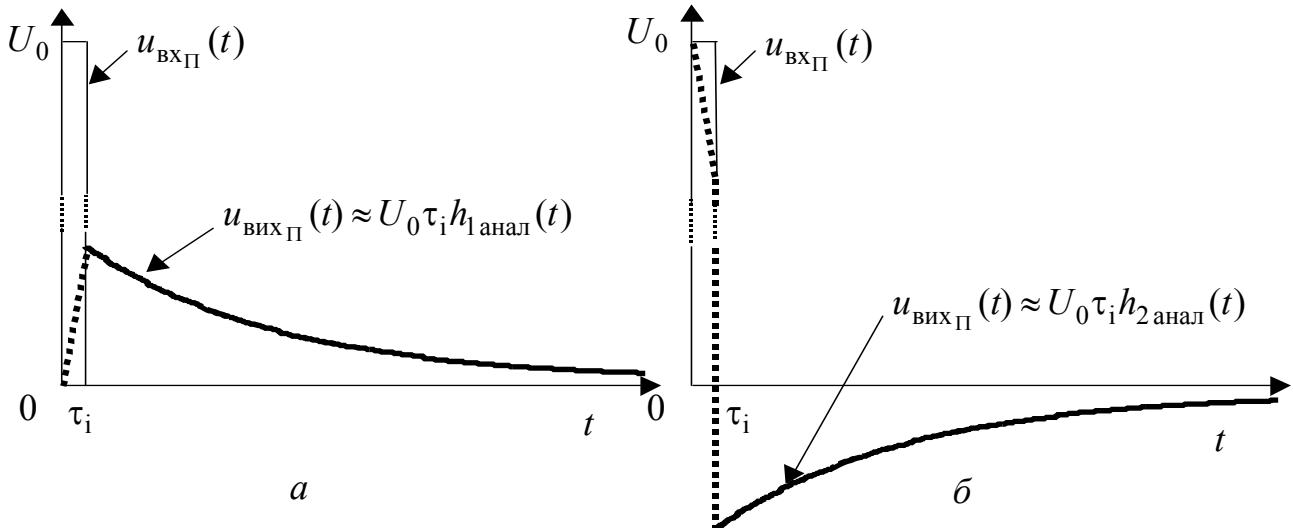


Рисунок 2.33 – Вихідні напруги послідовних кіл $R, C; R, L$ при дії прямокутного відеоімпульсу тривалістю $\tau_i = 0,1\tau$ для кіл : a – першої групи; b – другої групи

Аналогічні виведення дають приблизний опис відгуків кіл другої групи для $t > \tau_i$:

$$u_{\text{вих.П}}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - U_0 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{\frac{\tau_i}{\tau}}) \approx -U_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \approx U_0 \tau_i h_2(t);$$

$$i_{\text{вих.П}}(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - I_0 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{\frac{\tau_i}{\tau}}) \approx -I_0 \frac{\tau_i}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \approx I_0 \tau_i h_2(t),$$

де $h_{2\text{анал}}(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ – аналітична частина імпульсної характеристики $h_2(t)$ (2.38).

Отже, відгуки на дію коротких ($\tau_i \ll \tau$) імпульсів при $t > \tau_i$ пропорційні імпульсним характеристикам кіл. Коефіцієнтами пропорційності є величини $U_0 \tau_i$ ($I_0 \tau_i$). Ділянки графіків при $t > \tau_i$ побудовані на рис.2.33 суцільними лініями.

В інтервалі $0 < t < \tau_i$ відгуки пропорційні початковим ділянкам перехідних характеристик і визначаються особливостями імпульсних характеристик в області $t = 0$. Так, показані на рис.2.33 пунктирними лініями ділянки

графіків відгуків цього інтервалу відповідають наявності: стрибка $h_1(t)$ при $t = +0$ для кіл першої групи; дельта-функції в імпульсній характеристиці $h_2(t)$ кіл другої групи.

Для більшої наочності при побудові графіків на рис.2.33 масштаби по осях ординат для $u_{\text{вхП}}(t)$ та $u_{\text{вихП}}(t)$ вибрані різними, з огляду на значну різницю між величинами U_0 та $U_0 \tau_i/\tau$.

Приклад 2.8. Знайти напругу на затискачах кола, розглянутого у прикладі 2.4, при дії імпульсу струму $i_{\text{вхП}}(t)$ з параметрами I_0 , τ_i (рис.2.34, а). Побудувати графіки $u(t)$ для значень $\tau \approx \tau_i$; $\tau \ll \tau_i$; $\tau \gg \tau_i$.

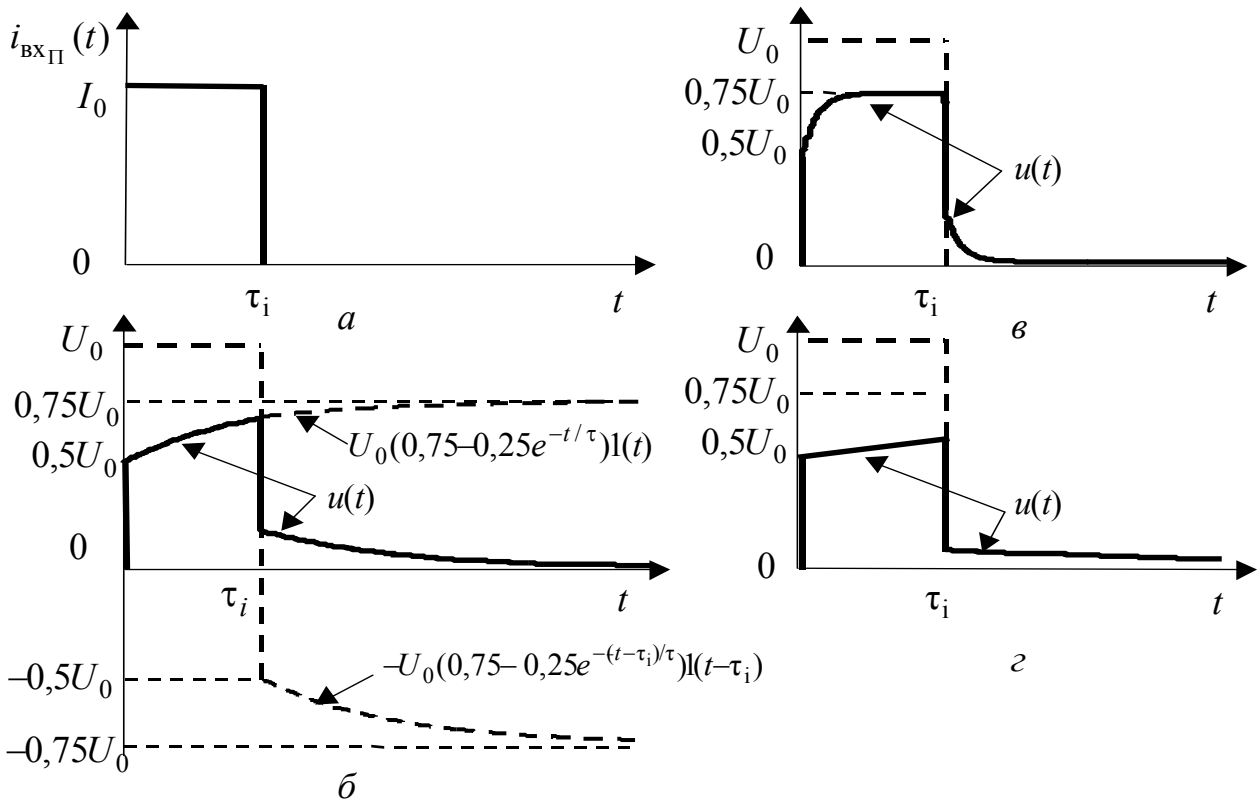


Рисунок 2.34 – Графіки до прикладу 2.8:
 а – дія; відгуки: б – $\tau \approx \tau_i$; в – $\tau \ll \tau_i$; з – $\tau \gg \tau_i$

Розв’язання. Використовуючи співвідношення (2.65) і знайдену у прикладі 2.4 перехідну характеристику $g_u(t)$ (2.17), визначимо шукану напругу:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= I_0 g_u(t) - I_0 g_u(t - \tau_i) = \\
 &= I_0 (0,75R - 0,25R e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) - I_0 (0,75R - 0,25R e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}}) \cdot 1(t - \tau_i) = \\
 &= U_0 (0,75 - 0,25 e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t) - U_0 (0,75 - 0,25 e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}}) \cdot 1(t - \tau_i), \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

де $U_0 = RI_0$.

Побудуємо графік $u(t)$ для $\tau \approx \tau_i$ (рис.2.34, б) як різницю двох доданків рівняння (2.72). На рис.2.34, в, г зображені графіки відповідно для випадків $\tau \ll \tau_i$ і $\tau \gg \tau_i$.

Приклад 2.9. Визначити відгук кола $s_{\text{вих}\Pi}(t)$ на дію $s_{\text{вх}\Pi}(t)$, якщо дія та імпульсна характеристика кола $h(t)$ мають вигляд прямокутних відеоімпульсів однакової тривалості (рис.2.35, а). Побудувати графік $s_{\text{вих}\Pi}(t)$.

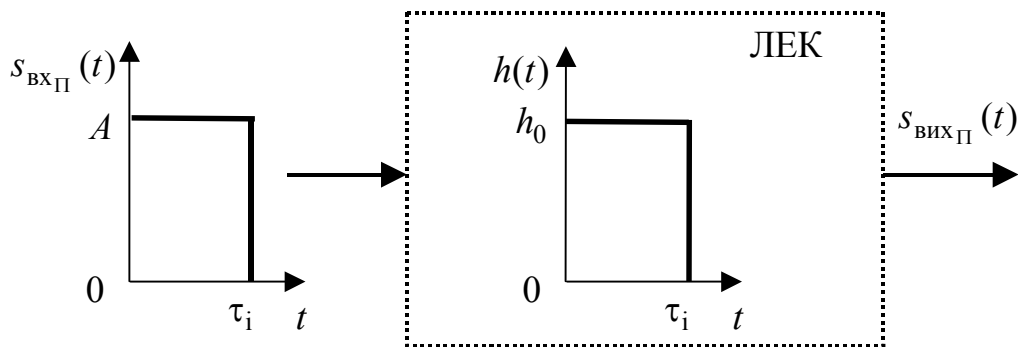


Рисунок 2.35 – До прикладу 2.9

Розв’язання. За формулою (2.27) знайдемо перехідну характеристику кола:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx = \int_{-\infty}^t [h_0 \cdot 1(x) - h_0 \cdot 1(x - \tau_i)] dx = \int_0^t h_0 \cdot 1(x) dx - \int_{\tau_i}^t h_0 \cdot 1(x - \tau_i) dx =$$

$$= h_0 t \cdot 1(t) - h_0 \cdot (t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i)$$

та побудуємо її графік (рис.2.36, а).

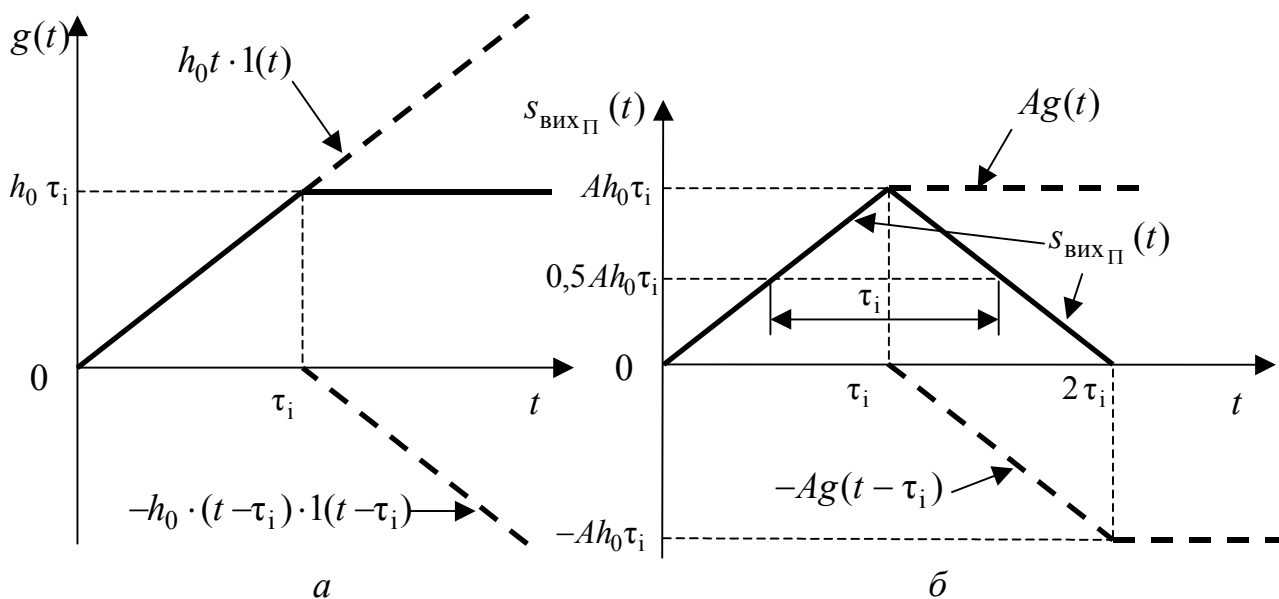


Рисунок 2.36 – Графіки у прикладі 2.9:
а – перехідна характеристика; б – відгук кола

Підставляючи знайдений вираз для $g(t)$ у формулу (2.65), отримуємо відгук кола

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}\Pi}(t) &= A \cdot g(t) - A \cdot g(t - \tau_i) = \\ &= Ah_0 \{t \cdot 1(t) - (t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) - (t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) + (t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i)\} = \\ &= Ah_0 \{t \cdot 1(t) - 2(t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) + (t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i)\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Вираз (2.72) показує, що $s_{\text{вих}\Pi}(t)$ описується такими функціями у різні інтервали часу:

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = \begin{cases} Ah_0 t & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ Ah_0 \cdot (2\tau_i - t) & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 2\tau_i. \end{cases} \quad (2.73)$$

Графік відгуку кола (рис.2.36, б), побудований згідно з виразом (2.65), підтверджує часове подання (2.73). Відгук кола має форму трикутного імпульсу з максимальним значенням $Ah_0\tau_i$ і тривалістю: $2\tau_i$ за основою; τ_i – на відносному рівні 0,5.

Розглянутий режим кола відповідає оптимальній обробці прямокутних відеоімпульсів, яка забезпечує максимальне відношення сигнал–завада та накопичення енергії вхідного сигналу (максимальне значення вихідного сигналу пропорційне енергії вхідної дії). У даному випадку цей висновок підтверджується тим, що енергія вхідного імпульсу, яка виділяється на одиничному активному опорі, становить $A^2 \tau_i$.

Приклад 2.10. Коло має перехідну характеристику, зображену на рис.2.37, а. Вхідна дія є кодом, складеним з трьох прямокутних відеоімпульсів різної полярності (рис.2.37, б). Знайти відгук кола та імпульсну характеристику, а також побудувати їхні графіки. Проаналізувати режим кола з точки зору оптимальної обробки вхідного сигналу (див. приклад 2.9).

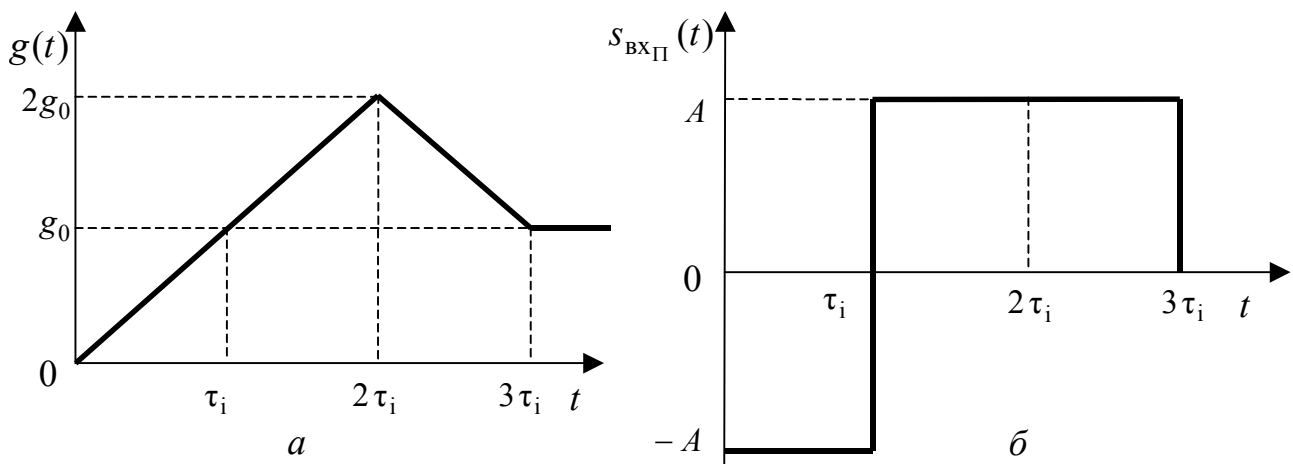


Рисунок 2.37 – До прикладу 2.10: а – перехідна характеристика; б – дія

Розв'язання. Складемо аналітичний вираз для заданих графічним способом перехідної характеристики кола і дії (рис.2.37):

$$g(t) = \frac{g_0}{\tau_i} [t \cdot 1(t) - 2(t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) + (t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i)]; \quad (2.74)$$

$$s_{\text{вх}\Pi}(t) = -A \cdot 1(t) + 2A \cdot 1(t - \tau_i) - A \cdot 1(t - 3\tau_i). \quad (2.75)$$

Запишемо загальний вираз для відгуку кола, використовуючи формулу (2.64) і значення трьох «сходинок» у складі дії (2.75):

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = -Ag(t) + 2Ag(t - \tau_i) - Ag(t - 3\tau_i). \quad (2.76)$$

Підставивши у формулу (2.76) вираз (2.74) для $g(t)$, отримуємо:

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = \frac{Ag_0}{\tau_i} [-t \cdot 1(t) + 2(t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) - (t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) - 4(t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - 4\tau_i) \cdot 1(t - 4\tau_i) - (t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - 5\tau_i) \cdot 1(t - 5\tau_i) - (t - 6\tau_i) \cdot 1(t - 6\tau_i)]. \quad (2.77)$$

Зведемо подібні члени у співвідношенні (2.77) і запишемо його двома способами: у вигляді єдиного виразу

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = \frac{Ag_0}{\tau_i} [-t \cdot 1(t) + 2(t - \tau_i) \cdot 1(t - \tau_i) + 2(t - 2\tau_i) \cdot 1(t - 2\tau_i) - 6(t - 3\tau_i) \cdot 1(t - 3\tau_i) + 2(t - 4\tau_i) \cdot 1(t - 4\tau_i) + 2(t - 5\tau_i) \cdot 1(t - 5\tau_i) - (t - 6\tau_i) \cdot 1(t - 6\tau_i)];$$

за допомогою опису функцій за інтервалами часу:

$$s_{\text{вих}\Pi}(t) = \begin{cases} -\frac{Ag_0}{\tau_i} t & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (t - 2\tau_i) & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (3t - 6\tau_i) & \text{при } 2\tau_i < t \leq 3\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (-3t + 12\tau_i) & \text{при } 3\tau_i < t \leq 4\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (-t + 4\tau_i) & \text{при } 4\tau_i < t \leq 5\tau_i; \\ \frac{Ag_0}{\tau_i} (t - 6\tau_i) & \text{при } 5\tau_i < t \leq 6\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 6\tau_i. \end{cases} \quad (2.78)$$

Побудуємо графік відгуку кола (рис.2.38) за формулою (2.76), використовуючи графік перехідної характеристики (рис.2.37, а). Правильність графіка $s_{\text{вих}\Pi}(t)$ перевіримо за виразом (2.78).

Знайдемо імпульсну характеристику кола, використовуючи її зв'язок з перехідною характеристикою (2.26):

$$h(t) = \frac{d[g(t)]}{dt} = \frac{g_0}{\tau_i} [1(t) - 2 \cdot 1(t - 2\tau_i) + 1(t - 3\tau_i)] = h_0 [1(t) - 2 \cdot 1(t - 2\tau_i) + 1(t - 3\tau_i)],$$

$$\text{де } h_0 = \frac{g_0}{\tau_i}.$$

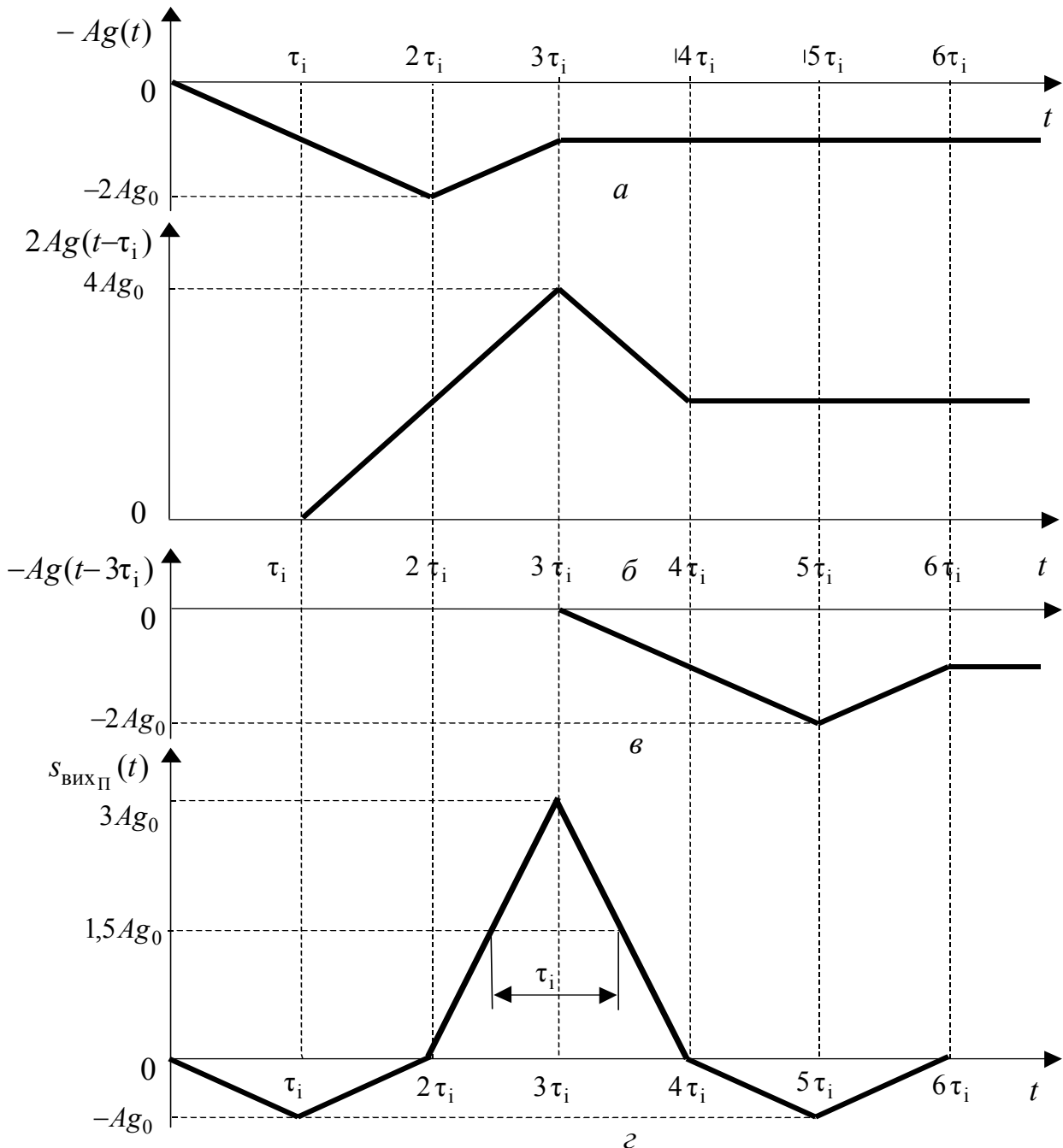


Рисунок 2.38 – Побудова графіка відгуку у прикладі 2.10:
a, б, в – доданки рівняння (2.76) ; *г* – відгук кола

Побудуємо графік імпульсної характеристики (рис.2.39).

Даний режим, як і у прикладі 2.9, відповідає оптимальній обробці вхідного сигналу, що обумовлено наступним:

1) відгук кола (рис.2.38, з) складений з трьох трикутних імпульсів – центрального додатного з висотою $3Ag_0 = 3Ah_0\tau_i$ і двох бічних від’ємних з висотою $Ag_0 = Ah_0\tau_i$; імпульси мають однакову тривалість (за основою – $2\tau_i$; за відносним рівнем $0,5 - \tau_i$);

2) максимальне значення центрального (основного) імпульсу пропорційне енергії вхідного сигналу $3A^2\tau_i$;

3) імпульсна характеристика кола (рис.2.39) і дія дзеркальні у часі, оскільки $h_0s_{\text{вхП}}(t) = Ag(3\tau_i - t)$.

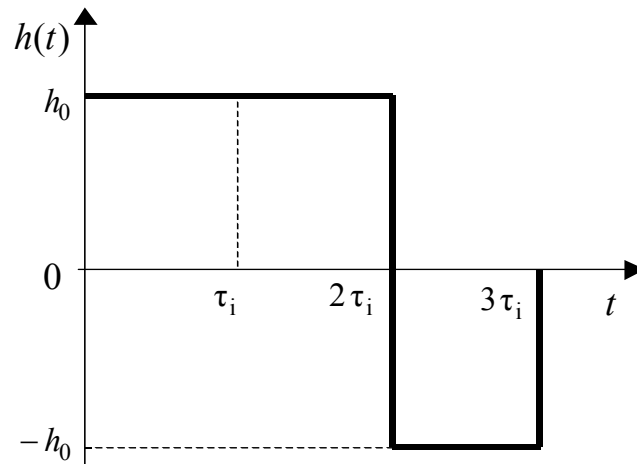


Рисунок 2.39 – Імпульсна характеристика кола у прикладі 2.10

Порівняння у прикладах 2.9 і 2.10 оптимально оброблених сигналів показує, що форма і тривалість відгуків практично (якщо знехтувати бічними імпульсами у прикладі 2.10) збігаються. Однак максимальне значення відгуку у прикладі 2.10 більше у три рази, що обумовлює широке застосування кодованих (складних) сигналів у радіолокації, радіонавігації і зв'язку. У складних радіосигналів елементарні імпульси відрізняються початковими фазами, а кількість елементарних імпульсів n може досягати $n = 10^3$ і більше. Сигнал у прикладі 2.10 є окремим випадком кодів Баркера⁴, у яких $n \leq 13$, а рівень бічних імпульсів становить $1/n$ від основного.

Приклад 2.11. Знайти напругу на виході кола, розглянутого у прикладі 2.5, якщо вхідною напругою є прямокутний імпульс $u_{\text{вхП}}(t)$ (рис.2.31, а) з параметрами U_0 , $\tau_i = t_0 \approx 0,7\tau$ для випадку $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$. Побудувати графік $u_{\text{вих}}(t)$.

⁴ Баркер, R. H. Barker – запропонував код, названий згодом його ім'ям, у роботі "Group Synchronization of Binary Digital Systems", опублікованій у Нью-Йорку (1953).

Розв’язання. Використовуючи знайдену у прикладі 2.5 перехідну характеристику для $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$ і співвідношення (2.65), визначимо вихідну напругу:

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= U_0 g(t) - U_0 g(t - \tau_i) = U_0 (2e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) \cdot 1(t) - U_0 (2e^{-\frac{t-\tau_i}{\tau}} - 1) \cdot 1(t - \tau_i) = \\ &= U_0 (2e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) \cdot 1(t) - U_0 (2e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - 1) \cdot 1(t - t_0). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Підсумовуючи дві функції (показані пунктиром на рис.2.40), з яких складається вираз (2.79), побудуємо графік $u_{\text{вих}}(t)$ (суцільна лінія на рис.2.40). Оскільки $\tau_i = t_0 \approx 0,7\tau$, в момент часу $t = t_0$ вихідна напруга змінюється стрибком від нуля до $-U_0$.

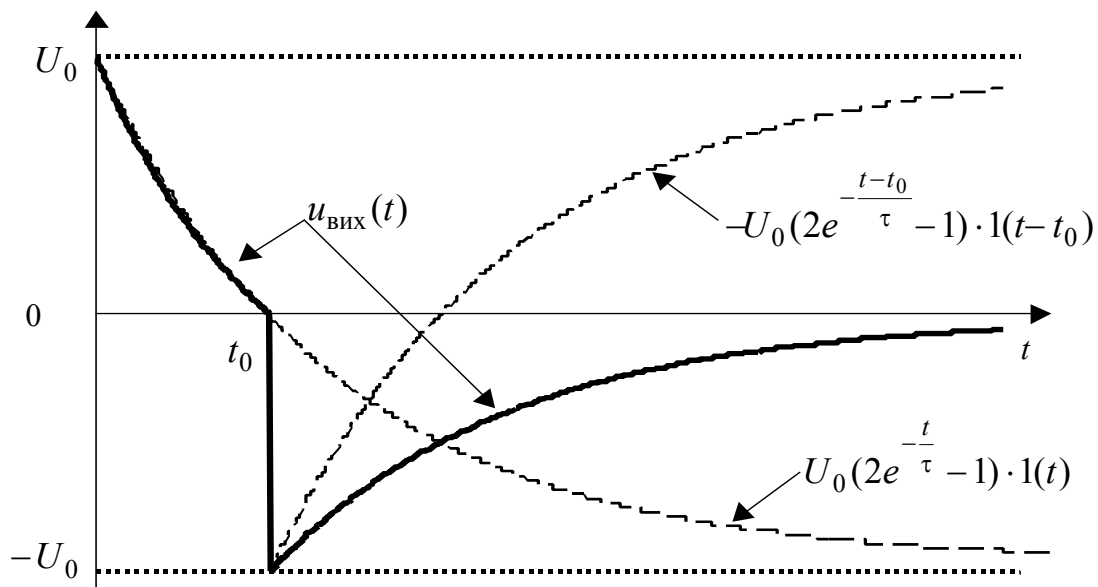


Рисунок 2.40 – Графік вихідної напруги у прикладі 2.11

2.6 Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою перехідної характеристики. Інтеграли Дюамеля

Нехай вхідна дія

$$s_{\text{вх}}(t) = 0 \text{ при } t < 0, s_{\text{вх}}(0) \neq 0,$$

а на інтервалі $0 \leq t < \infty$ задана неперервною або кусково-неперервною функцією з кінцевою кількістю точок розриву першого роду (тобто задовольняє умовам Діріхле).

Для інтервалу $t \geq 0$ неперервну вхідну дію приблизно можна подати як суму початкового "стрибка" (ступінчастої дії) і множини нескінченно малих "сходинок" (рис.2.41), послідовно зсунутих одна відносно одної у часі на однакові інтервали Δx :

$$s_{\text{BX}}(t) \approx s_{\text{BX}}(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta s_{k\text{BX}}(t), \quad (2.80)$$

де $\Delta s_{k\text{BX}}(t) = [s_{\text{BX}}(x_k) - s_{\text{BX}}(x_k - \Delta x)] \cdot 1(t - x_k)$ – аналітичне подання k -ї «сходинок» (показане на рис.2.41 штрихуванням); $s_{\text{BX}}(0) \cdot 1(t)$ – початкова ступінчаста дія; n – округлене до цілого числа значення дробу $t/\Delta x$.

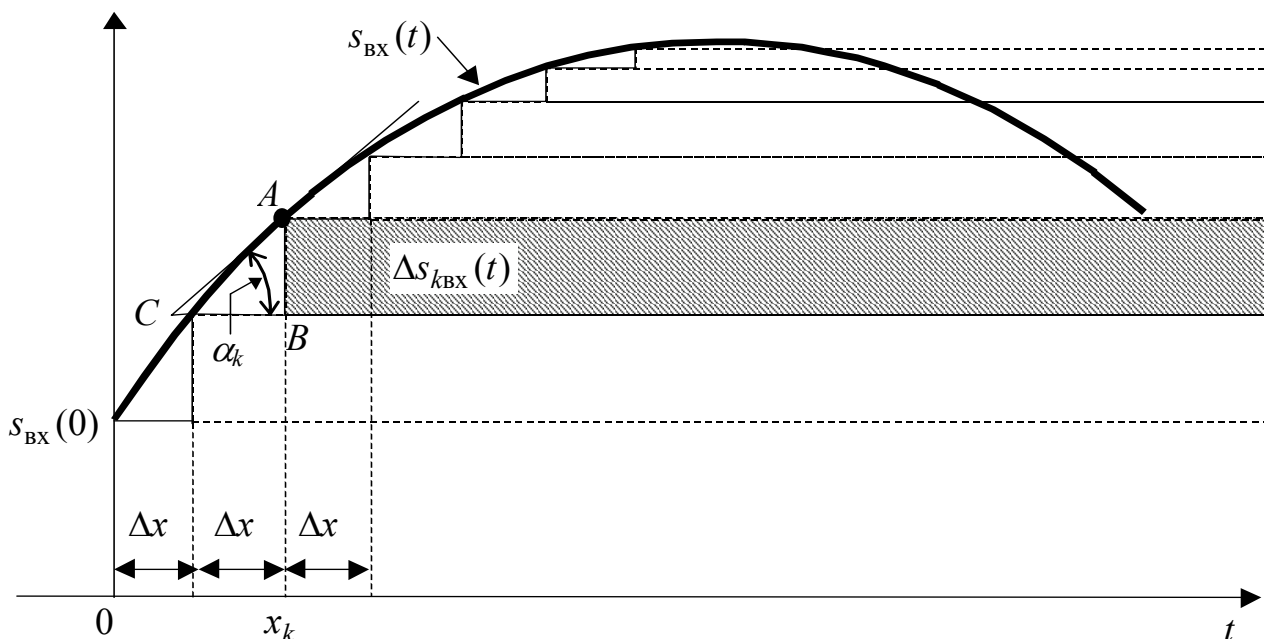


Рисунок 2.41 – До виведення першої форми інтеграла накладання із застосуванням перехідної характеристики

Висота k -ї сходинок є катетом AB прямокутного трикутника ABC (рис.2.41), гіпотенуза якого AC лежить на дотичній до кривої $s_{\text{BX}}(t)$ в точці A :

$$s_{\text{BX}}(x_k) - s_{\text{BX}}(x_k - \Delta x) = AB = BC \operatorname{tg} \alpha_k. \quad (2.81)$$

За визначенням похідної $s'_{\text{BX}}(x_k) = \operatorname{tg} \alpha_k$, враховуючи наближення $BC \approx \Delta x$, співвідношення (2.81) можна приблизно подати у такий спосіб:

$$s_{\text{BX}}(x_k) - s_{\text{BX}}(x_k - \Delta x) \approx \Delta x s'_{\text{BX}}(x_k), \quad (2.82)$$

де $s'_{\text{BX}}(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s_{\text{BX}}(x_k) - s_{\text{BX}}(x_k - \Delta x)}{\Delta x}$ – значення похідної функції $s_{\text{BX}}(t)$

при $t = x_k$.

Підстановка співвідношення (2.82) до (2.80) дозволяє записати:

$$s_{\text{BX}}(t) \approx s_{\text{BX}}(0) \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n s'_{\text{BX}}(x_k) \Delta x \cdot 1(t - x_k). \quad (2.83)$$

За принципом накладання відгук кола, яке має перехідну характеристику $g(t)$, приблизно дорівнює сумі відгуків на кожен з ступінчастих дій, що входять у формулу (2.83):

$$s_{\text{вих}}(t) \approx s_{\text{вх}}(0)g(t) + \sum_{k=1}^n s'_{\text{вх}}(x_k)\Delta x g(t-x_k). \quad (2.84)$$

Щоб точно описати $s_{\text{вих}}(t)$, слід спрямувати $\Delta x \rightarrow 0$, а кількість «сходинок» $n = t/\Delta x \rightarrow \infty$. При цьому x_k перетворюється у поточну змінну x , $\Delta x -$ у dx , сума (2.84) – у визначений інтеграл по x , і в результаті відгук кола визначається співвідношенням:

$$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_{+0}^t s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx. \quad (2.85)$$

Вираз (2.85) називається **першою формою інтеграла накладання з використанням перехідної характеристики або інтеграла Дюамеля**⁵.

Нижня межа інтеграла $x = +0$ обумовлена тим, що відгук кола на початкову ступінчасту дію $s_{\text{вх}}(0) \cdot 1(t)$ врахований першим доданком у виразах (2.84), (2.85). Верхня межа інтеграла дорівнює моменту часу $t > 0$, для якого визначається відгук. Такі межі інтегрування дозволяють використовувати під інтегралом тільки аналітичні вирази перехідної характеристики і похідної функції, яка описує вхідну дію, при $t > 0$.

Перша форма інтеграла Дюамеля записується інакше:

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx, \quad (2.86)$$

якщо дію і перехідну характеристику подати у вигляді:

$$s_{\text{вх}}(t) = s_{\text{вх анал}}(t) \cdot 1(t); \quad (2.87)$$

$$g(t) = g_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t), \quad (2.88)$$

де $s_{\text{вх анал}}(t)$, $g_{\text{анал}}(t)$ – аналітичні вирази відповідно вхідної дії і перехідної характеристики, якими вони описуються при $t > 0$.

Щоб обґрунтувати співвідношення (2.86), достатньо використати формули (2.87), (2.88), продиференціювати одиничну функцію та врахувати фільтрувальну властивість дельта-функції:

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [s_{\text{вх анал}}(x) \cdot 1(x)]' g_{\text{анал}}(t-x) \cdot 1(t-x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s'_{\text{вх анал}}(x) \cdot 1(x) + s_{\text{вх анал}}(0) \cdot \delta(x)] g_{\text{анал}}(t-x) \cdot 1(t-x)dx = \\ &= s_{\text{вх анал}}(0)g_{\text{анал}}(t) + \int_{+0}^t s'_{\text{вх анал}}(x)g_{\text{анал}}(t-x)dx. \end{aligned} \quad (2.89)$$

⁵ **Дюамель або Дюгамель, Жан Марі Констан** (1797 – 1872) – французький математик, член Паризької Академії наук. Суттєво покращив викладення аналізу нескінченно малих. Основні роботи належать переважно до математичної фізики. Підготовлені ним курси аналізу і механіки (1845 – 1846) багато разів видавалися у Франції та були перекладені іншими мовами.

У підсумку вираз (2.89) сходиться з (2.85). Нижня і верхня межі інтеграла у формулі (2.89) відповідно обумовлені значеннями одиничних функцій:

$$1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad 1(t-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < t; \\ 0 & \text{при } x > t. \end{cases}$$

Першу форму інтеграла Дюамеля (2.86) застосовують у таких випадках:

1) якщо дія неперервна на інтервалі $-\infty < t < \infty$;

2) якщо дія $s_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < t_1$, $s_{\text{вх}}(t_1) \neq 0$, а на інтервалі $t_1 < t < \infty$ задана неперервною функцією.

У другому випадку застосування виразу (2.86) аналогічно (2.89) призведе до визначення відгуку у вигляді:

$$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх анал}}(t_1)g_{\text{анал}}(t) + \int_{t_1+0}^t s'_{\text{вх анал}}(x)g_{\text{анал}}(t-x)dx.$$

Першу форму інтеграла Дюамеля (2.86) можна записати компактно у вигляді відомого у математиці інтеграла Стілтєса⁶:

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)d[s_{\text{вх}}(x)]. \quad (2.90)$$

Відомі інші форми запису інтеграла Дюамеля (табл.2.5), які отримують заміною змінної, інтегруванням частинами та диференціюванням визначеного інтеграла за параметром. Залежно від вигляду функцій, якими описують $s_{\text{вх}}(t)$ і $g(t)$, з точки зору обчислень зручнішою є та чи інша форма інтеграла Дюамеля.

Дію (рис.2.42), яка описується кусково-неперервною функцією з кінцевою кількістю стрибків (точок розриву першого роду), можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} s_{\text{вх}}(t) &= \sum_k s_{k \text{ вх}}(t) \cdot [1(t-t_k) - 1(t-t_{(k+1)})] = \\ &= \sum_k C_k(t_k) \cdot 1(t-t_k) + \sum_k s_{k \text{ вх непер}}(t) \cdot [1(t-t_k) - 1(t-t_{(k+1)})], \end{aligned} \quad (2.91)$$

де $C_k(t_k) = s_{k \text{ вх}}(t_k+0) - s_{(k-1) \text{ вх}}(t_k-0)$ – k -й стрибок $s_{\text{вх}}(t)$ у момент часу $t = t_k$; $s_{k \text{ вх непер}}(t)$ – неперервна функція, яка описує дію на інтервалі $(t_k+0) \leq t \leq (t_{(k+1)}-0)$.

Застосування принципу накладання до дії (2.90) дозволяє визначити відгук:

⁶ **Стілтєс Томас Іоаннес**, Stieltjes (1856–1894) – нідерландський математик, чл.-кор. Петербурзької Академії наук. Основні роботи присвячені теорії моментів, функціональним неперервним дробам, ортогональним многочленам, наближеному інтегруванню та ін. Започаткував узагальнене поняття інтеграла, яке має важливе значення в математиці і назване його ім'ям. В 1936 р. його праця «Дослідження неперервних дробів» перекладена і опублікована в Україні (Харків–Київ).

$$\begin{aligned}
s_{\text{ВНХ}}(t) &= \sum_k C_K(t_k) \cdot g(t-t_k) + \sum_k \int_{t_k+0}^{t_{(k+1)}-0} s'_{k \text{ ВХ непер}}(x) g(t-x) dx = \\
&= \sum_k C_K(t_k) \cdot g(t-t_k) + \int_{-\infty}^{\infty} s'_{\text{ВХ непер}}(x) g(t-x) dx,
\end{aligned} \tag{2.92}$$

де $s_{\text{ВХ непер}}(t)$ – неперервна (гладка або кусково-гладка) функція (рис.2.43), яка відрізняється від кусково-неперервної дії $s_{\text{ВХ}}(t)$ (рис.2.42) тільки відсутністю стрибків.

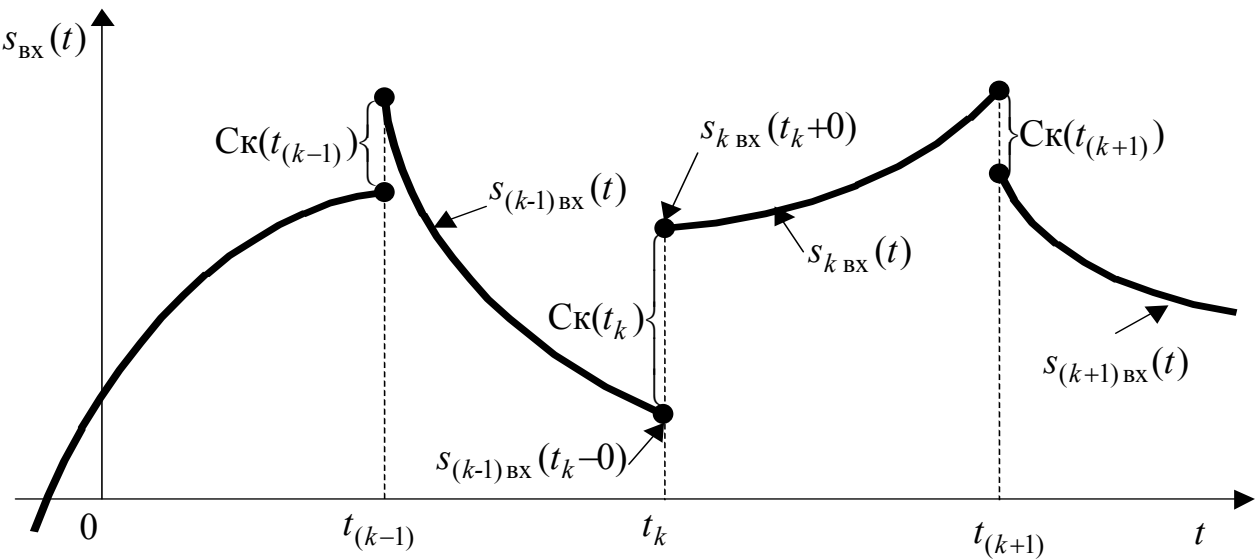


Рисунок 2.42 – Графік кусково-неперервної дії

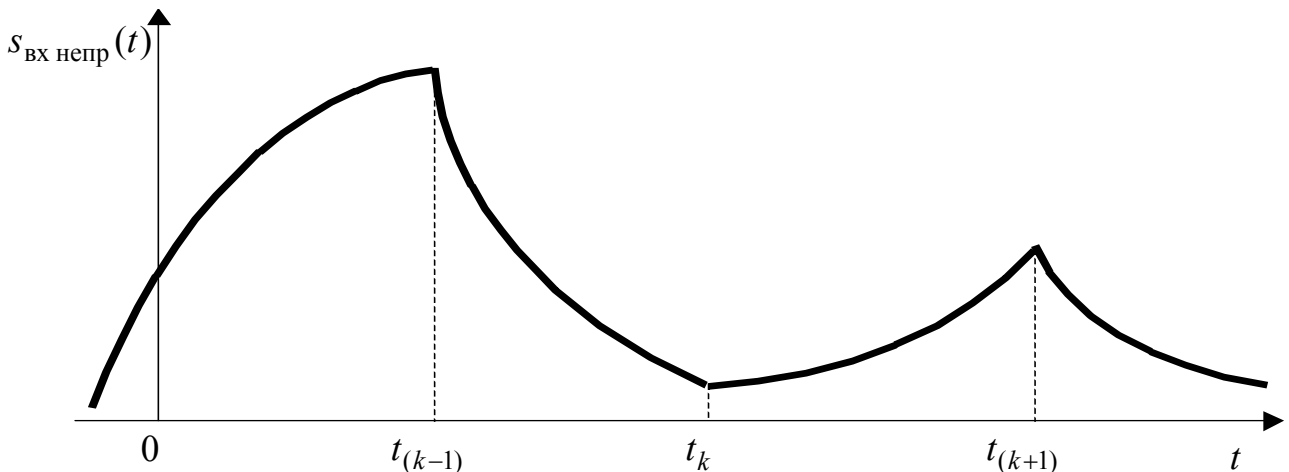


Рисунок 2.43 – Графік неперервної дії, яка відповідає кусково-неперервній дії $s_{\text{ВХ}}(t)$, зображеній на рис.2.42

Можна показати, що вираз (2.92) отримують, застосовуючи до дії (2.91) першу форму інтеграла Дюамеля (2.86). Використання інших форм інтеграла

Дюамеля (табл.2.5) для кусково-неперервних дій принципово можливе, однак потребує коригування меж інтегрування з урахуванням математичних перетворень, які призводять до цих форм. Тому для розривних дій краще використовувати першу форму інтеграла Дюамеля (2.86), яка є найуніверсальнішою формою інтеграла накладання для знаходження відгуку із застосуванням перехідної характеристики.

Таблиця 2.5 – Форми запису інтегралів Дюамеля

Форма	Запис	Спосіб визначення
1	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_{+0}^t s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx;$ $s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx;$ $s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)d[s_{\text{вх}}(x)]$	Безпосереднє виведення
2	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_0^{t-0} s'_{\text{вх}}(t-x)g(x)dx$	З першої форми заміною змінної $y = t - x$
3	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(t)g(0) + \int_0^{t-0} s_{\text{вх}}(x)g'(t-x)dx$	З першої форми інтегруванням частинами
4	$s_{\text{вих}}(t) = s_{\text{вх}}(t)g(0) + \int_{+0}^t s_{\text{вх}}(t-x)g'(x)dx$	З третьої форми заміною змінної $y = t - x$
5	$s_{\text{вих}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t s_{\text{вх}}(t-x)g(x)dx \right)$	Скорочений запис першої і другої форм із застосуванням операції диференціювання визначеного інтеграла за параметром
6	$s_{\text{вих}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t s_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx \right)$	Скорочений запис третьої і четвертої форм із застосуванням операції диференціювання визначеного інтеграла за параметром

Приклад 2.12. На вхід послідовного кола R, C другої групи (рис.2.18, а) подано напругу

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_0 e^{-t/\tau_{\text{вх}}} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Знайти напругу на виході. Проаналізувати режим кола та побудувати графіки для різних співвідношень між сталими часу кола $\tau = RC$ і дії $\tau_{\text{вх}}$.

Розв'язання. Скористаємось знайденим у підрозд. 2.3 виразом (2.37) для перехідної характеристики даного кола і першою формою інтеграла Дюамеля (2.85). З огляду на позначення, прийняті у даному прикладі, запишемо загальний вираз для визначення відгуку кола:

$$u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_{+0}^t u'_{\text{вх}}(x)g(t-x)dx, \quad (2.93)$$

а також знайдемо значення $u_{\text{вх}}(0)$ і функцій, які складають вираз (2.93):

$$u_{\text{вх}}(0) = U_0; \quad g(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad u'_{\text{вх}}(x) = -\frac{U_0}{\tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{x}{\tau_{\text{вх}}}}; \quad g(t-x) = e^{-\frac{t-x}{\tau}}.$$

Після підстановки отримуємо:

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_{+0}^t -\frac{U_0}{\tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{x}{\tau_{\text{вх}}}} e^{-\frac{t-x}{\tau}} dx = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_0}{\tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{+0}^t e^{-\frac{x}{\tau_{\text{вх}}} - \frac{x}{\tau}} dx = \\ &= U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_0}{\tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{+0}^t e^{-\left(\frac{1}{\tau_{\text{вх}}} + \frac{1}{\tau}\right)x} dx = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{\tau_{\text{вх}} \left(\frac{1}{\tau_{\text{вх}}} - \frac{1}{\tau}\right)} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{-\left(\frac{1}{\tau_{\text{вх}}} - \frac{1}{\tau}\right)x} \right) \Big|_{+0}^t = \\ &= U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{-\left(\frac{1}{\tau_{\text{вх}}} - \frac{1}{\tau}\right)t} - 1 \right) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau} \left(e^{-\frac{t}{\tau_{\text{вх}}}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \\ &= \frac{U_0}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{вх}}}} + \frac{U_0}{1 - \tau/\tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0 \tau}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{вх}}}} - \frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Кінцевий вираз (2.94) складається з вимушеної $u_{\text{вм}}(t) = \frac{U_0 \tau}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{вх}}}}$ та

вільної $u_{\text{вл}}(t) = -\frac{U_0 \tau_{\text{вх}}}{\tau - \tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t}{\tau}}$ складових:

$$u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вм}}(t) + u_{\text{вл}}(t).$$

Аналіз виразів (2.94) і графіків відгуків (рис.2.44 – 2.46) для різних співвідношень між τ та $\tau_{\text{вх}}$ дозволяє зробити такі висновки:

- 1) якщо $\tau = \tau_{\text{вх}}$, відбувається неспотворене відтворення вхідної напруги на виході кола;
- 2) якщо τ та $\tau_{\text{вх}}$ є величинами одного порядку (рис.2.44 і 2.45), але $\tau \neq \tau_{\text{вх}}$, то вихідна напруга спотворюється більше при $\tau < \tau_{\text{вх}}$ (рис.2.45, б);
- 3) коли $\tau \gg \tau_{\text{вх}}$, напруга на виході кола практично повторює форму вхідної напруги (рис.2.46, а);
- 4) коли $\tau \ll \tau_{\text{вх}}$, напруга на виході кола (рис.2.46, б) приблизно дорівнює

$$u_{\text{ВИХ}}(t) \approx -\tau \frac{U_0}{\tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \approx \tau u'_{\text{ВХ}}(t) + U_0 \tau \delta(t), \quad (2.95)$$

перший доданок у (2.95) пропорційний з коефіцієнтом τ похідній вхідної напруги для $t > 0$, а другий – є порівняно коротким імпульсом, який відповідає дельта-функції, що виходить внаслідок диференціювання стрибка $u_{\text{ВХ}}(t)$ при $t = 0$.

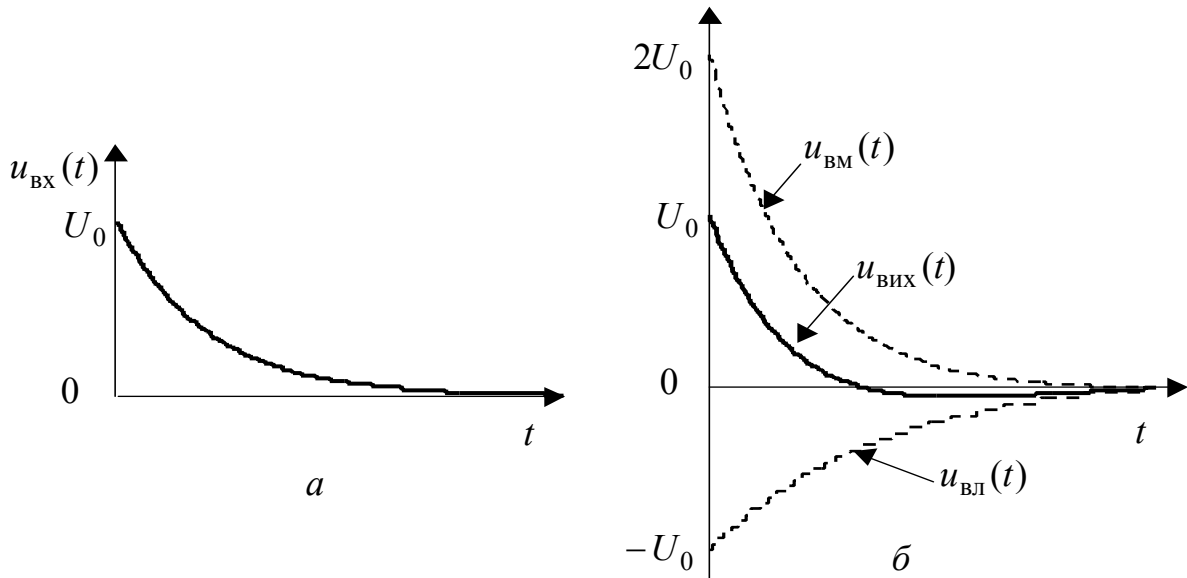


Рисунок 2.44 – Графіки до прикладу 2.12 для $\tau = 2\tau_{\text{ВХ}}$: *a* – дія; *б* – відгук, пунктир – вільна та вимушена складові

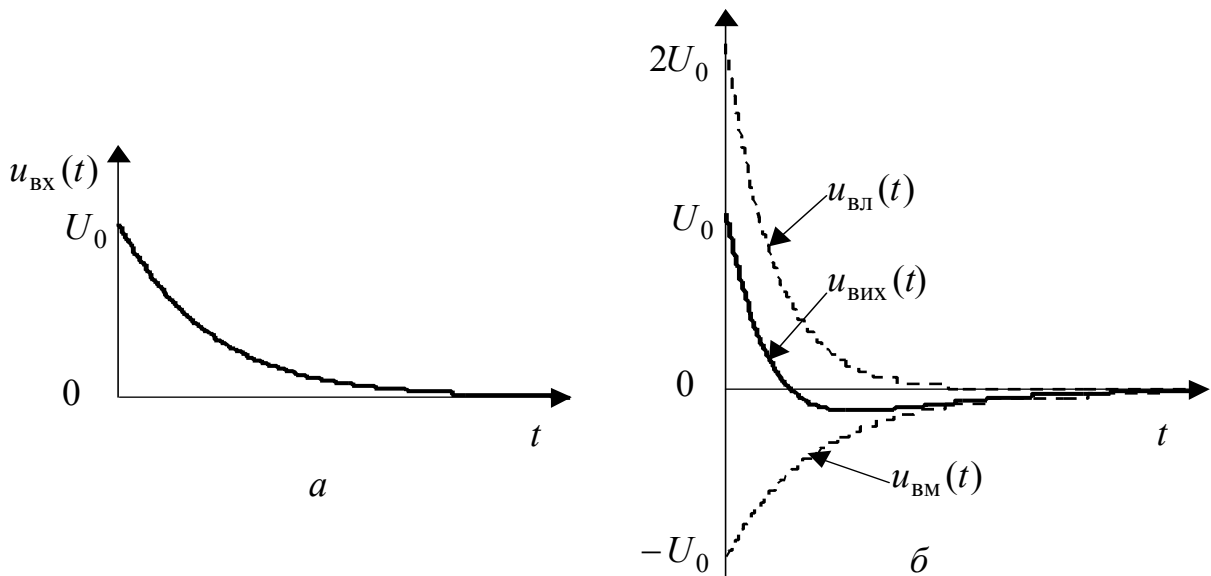


Рисунок 2.45 – Графіки до прикладу 2.12 для $\tau = 0,5\tau_{\text{ВХ}}$: *a* – дія; *б* – відгук, пунктир – вільна та вимушена складові

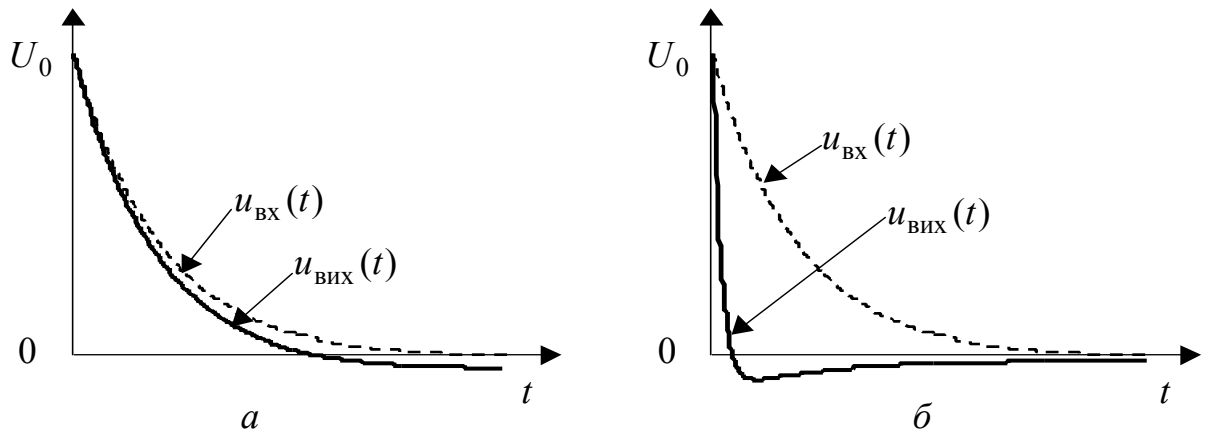


Рисунок 2.46 – Графіки дії (пунктир) і відгуків у прикладі 2.12:
 $a - \tau \gg \tau_{\text{BX}} (\tau = 10\tau_{\text{BX}})$; $b - \tau \ll \tau_{\text{BX}} (\tau = 0,1\tau_{\text{BX}})$

Отже, у даному прикладі для конкретної дії підтверджені розглянуті у підрозд. 2.3 і 2.5 властивості кола R, C другої групи: диференціювати дію ($\tau \ll \tau_{\text{BX}}$) чи виконувати функцію неспотворюючого кола ($\tau \gg \tau_{\text{BX}}$).

Приклад 2.13. Вхідною напругою послідовного кола R, C першої групи (рис.2.17, a) є експоненційний імпульс, заданий у прикладі 2.12. Знайти відгук кола і побудувати графіки вихідної напруги для різних співвідношень між τ та τ_{BX} . Оцінити ступінь спотворення дії при проходженні через дане коло.

Розв’язання. Враховуючи особливості функції (2.34), яка описує перехідну характеристику кола:

$$g(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t); \quad g(0) = 0,$$

слід використовувати третю або четверту форми запису інтеграла Дюамеля (табл.2.5).

Скористаємось четвертою формою інтеграла Дюамеля, яку, відповідно до прийнятих для даного прикладу позначень, запишемо у вигляді:

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = u_{\text{ВХ}}(t)g(0) + \int_{+0}^t u_{\text{ВХ}}(t-x)g'(x)dx. \quad (2.96)$$

Підставимо до виразу (2.96) функції:

$$u_{\text{ВХ}}(t-x) = U_0 e^{-\frac{t-x}{\tau_{\text{BX}}}}; \quad g'(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$$

та виконаємо перетворення:

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = \int_{+0}^t U_0 e^{-\frac{t-x}{\tau_{\text{BX}}}} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{BX}}}} \int_{+0}^t e^{-\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\text{BX}}}\right)x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}}}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{\text{ВХ}})} e^{-\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}}\right)x} \Big|_{+0}^t = -\frac{U_0}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{\text{ВХ}})} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{\tau(1/\tau - 1/\tau_{\text{ВХ}})} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} = \\
&= -\frac{U_0}{1 - \tau/\tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{1 - \tau/\tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} = \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}}. \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Як і у прикладі 2.12, отриманий вираз (2.97) для $u_{\text{ВИХ}}(t)$ складений з

вільної $u_{\text{ВЛ}}(t) = \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau}}$ та вимушеної $u_{\text{ВМ}}(t) = -\frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}}$ складових :

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = u_{\text{ВЛ}}(t) + u_{\text{ВМ}}(t).$$

Графіки відгуків для різних співвідношень між τ та $\tau_{\text{ВХ}}$ зображені на рис.2.47.

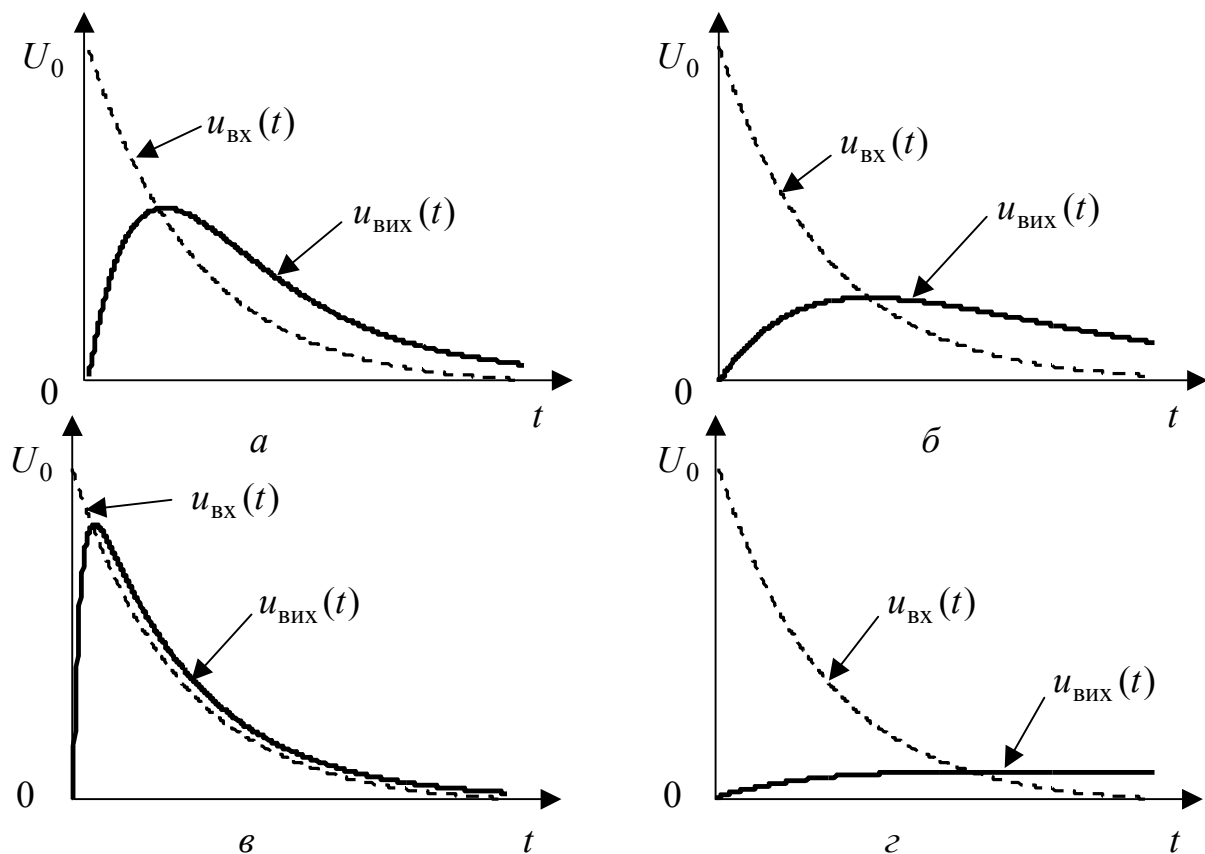


Рисунок 2.47 – Графіки дії (пунктир) і відгуків у прикладі 2.13:
 а – $\tau = 0,5\tau_{\text{ВХ}}$; б – $\tau = 2\tau_{\text{ВХ}}$; в – $\tau \ll \tau_{\text{ВХ}}$ ($\tau = 0,1\tau_{\text{ВХ}}$); г – $\tau \gg \tau_{\text{ВХ}}$ ($\tau = 10\tau_{\text{ВХ}}$)

Аналіз графіків (рис.2.47) і виразу (2.97) дозволяють зробити такі висновки:

- 1) при $\tau = \tau_{\text{ВХ}}$ напруга на виході кола дорівнює нулю;

2) якщо τ та τ_{BX} є величинами одного порядку (рис.2.47, а, б), але $\tau \neq \tau_{\text{BX}}$, то вихідна напруга менше спотворюється при $\tau < \tau_{\text{BX}}$ (рис.2.47, а);

3) якщо $\tau \ll \tau_{\text{BX}}$, напруга на виході кола практично повторює форму вхідної напруги (рис.2.47, в);

4) якщо $\tau \gg \tau_{\text{BX}}$, напруга на виході кола (рис.2.47, з) на інтервалі $0 < t < \tau$ приблизно становить:

$$u_{\text{вих}}(t) \approx \frac{U_0 \tau_{\text{BX}}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{U_0 \tau_{\text{BX}}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{BX}}}} \approx \frac{1}{\tau} \left(U_0 \tau_{\text{BX}} - U_0 \tau_{\text{BX}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{BX}}}} \right) \approx \frac{1}{\tau} \int_0^t u_{\text{BX}}(x) dx,$$

тобто відгук кола пропорційний (з коефіцієнтом $1/\tau$) визначеному інтегралу від дії.

Отже, даний приклад підтверджує відзначені у підрозд. 2.3 і 2.5 властивості кола R, C першої групи: не спотворювати дію при $\tau \ll \tau_{\text{BX}}$ або виконувати функцію інтегрувального кола при $\tau \gg \tau_{\text{BX}}$.

Приклад 2.14. Вхідною напругою аперіодичного послідовного контуру (рис.2.23, а) є кусково-неперервна дія (рис.2.48). Знайти струм у колі і побудувати його графік.

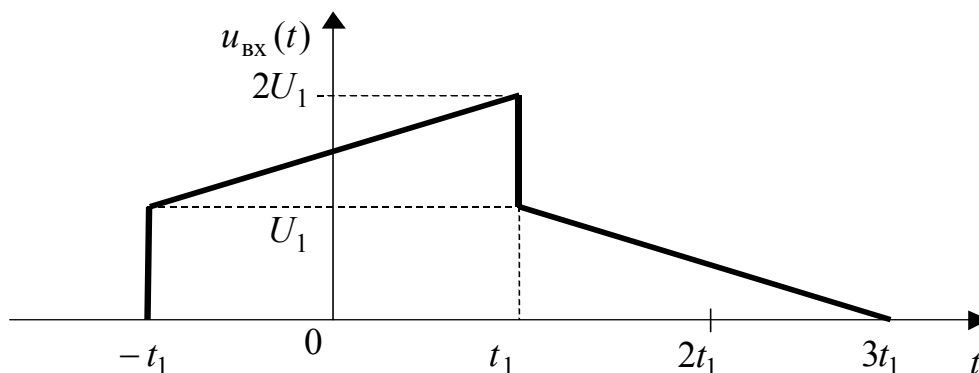


Рисунок 2.48 – Графік вхідної напруги у прикладі 2.14

Розв’язання. Запишемо вираз для $u_{\text{вих}}(t)$ двома способами:

1) за інтервалами часу

$$u_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -t_1; \\ 1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1}t & \text{при } -t_1 \leq t < t_1; \\ 1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1}t & \text{при } t_1 < t \leq 3t_1; \\ 0 & \text{при } t > 3t_1; \end{cases} \quad (2.98)$$

2) єдиним виразом за допомогою одиничних функцій (рис.2.49):

$$u_{\text{вих}}(t) = (1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1}t) \cdot [1(t+t_1) - 1(t-t_1)] + (1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1}t) \cdot [1(t-t_1) - 1(t-3t_1)]. \quad (2.99)$$

Вхідна напруга містить два стрибки:

$$C_k(-t_1) = U_1; \quad C_k(t_1) = -U_1.$$

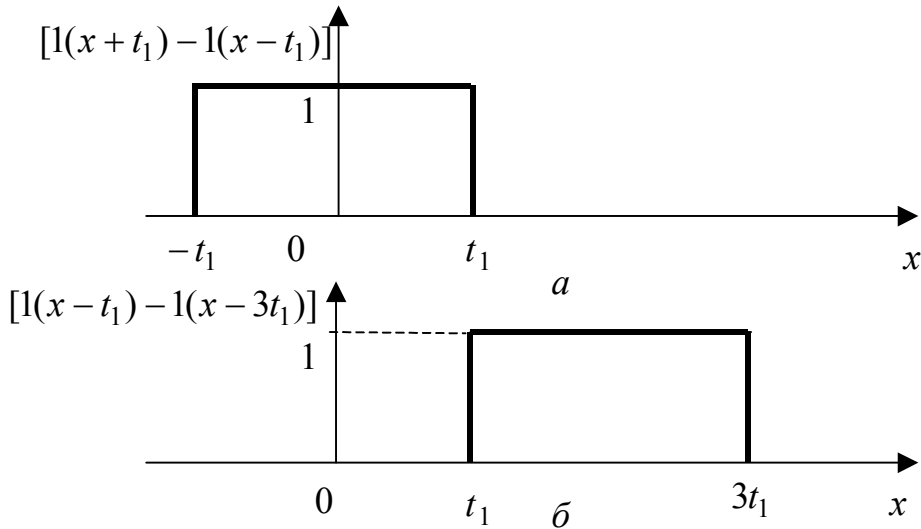


Рисунок 2.49 – Графіки, які у прикладі 2.14 пояснюють подання $u_{\text{вх}}(t)$ єдиним виразом (2.99)

Щоб знайти перехідну характеристику за струмом, скористаємось формулою для перехідної характеристики за напругою на опорі аперіодичного контуру (табл.2.2):

$$g_2(t) = \frac{2\delta(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})}{p_1 - p_2} \cdot 1(t),$$

яка пов'язана з шуканою характеристикою очевидним співвідношенням:

$$g_2(t) = R g_i(t).$$

З огляду на це, запишемо перехідну характеристику у вигляді:

$$g_i(t) = \frac{g_2(t)}{R} = \frac{2\delta(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})}{R(p_1 - p_2)} \cdot 1(t) = \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{L(p_1 - p_2)} \cdot 1(t), \quad (2.100)$$

де $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_{\text{рез}}^2}$ – корені характеристичного рівняння; $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота; $\delta = R/2L$ – коефіцієнт загасання (для заданого аперіодичного режиму $\delta > \omega_{\text{рез}}$).

Якщо записати $u_{\text{вх}}(t)$ у вигляді (2.98), щоб знайти струм, краще використувати першу форму інтеграла Дюамеля (2.92). Подання $u_{\text{вх}}(t)$ єдиним виразом (2.99) дозволяє застосувати універсальний запис першої форми інтеграла Дюамеля (2.86). Виконаємо обидва варіанти розв'язання.

Варіант 1. Підставляючи вираз (2.98) у формулу (2.92) і враховуючи стрибки $u_{\text{вх}}(t)$, запишемо загальні співвідношення для струму:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -t_1; \\ U_1 g_i(t+t_1) + \int_{-t_1}^t (1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1} x)' g_i(t-x) dx & \text{при } -t_1 \leq t < t_1; \\ U_1 g_i(t+t_1) + \int_{-t_1}^{t_1} (1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1} x)' g_i(t-x) dx - \\ - U_1 g_i(t-t_1) + \int_{t_1}^t (1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1} x)' g_i(t-x) dx & \text{при } t_1 < t \leq 3t_1; \\ U_1 g_i(t+t_1) + \int_{-t_1}^{t_1} (1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1} x)' g_i(t-x) dx - \\ - U_1 g_i(t-t_1) + \int_{t_1}^{3t_1} (1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1} x)' g_i(t-x) dx & \text{при } t > 3t_1. \end{cases} \quad (2.101)$$

Продиференціювавши $u_{\text{вх}}(x)$ у підінтегральних виразах, зведемо (2.101) до вигляду:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -t_1; \\ U_1 g_i(t+t_1) + \frac{U_1}{2t_1} \int_{-t_1}^t g_i(t-x) dx & \text{при } -t_1 \leq t < t_1; \\ U_1 g_i(t+t_1) + \frac{U_1}{2t_1} \int_{-t_1}^{t_1} g_i(t-x) dx - U_1 g_i(t-t_1) - \frac{U_1}{2t_1} \int_{t_1}^t g_i(t-x) dx & \text{при } t_1 < t \leq 3t_1; \\ U_1 g_i(t+t_1) + \frac{U_1}{2t_1} \int_{-t_1}^{t_1} g_i(t-x) dx - U_1 g_i(t-t_1) - \frac{U_1}{2t_1} \int_{t_1}^{3t_1} g_i(t-x) dx & \text{при } t > 3t_1. \end{cases} \quad (2.102)$$

Інтеграл у виразі (2.102) відрізняються тільки межами, які враховують часові інтервали інтегрування. Тому, використовуючи аналітичний вираз перехідної характеристики (2.100), обчислимо невизначений інтеграл:

$$\begin{aligned} \int g_{i\text{анал}}(t-x) dx &= \frac{1}{L(p_1 - p_2)} \int [e^{p_1(t-x)} - e^{p_2(t-x)}] dx = \\ &= \frac{1}{L(p_1 - p_2)} \left(e^{p_1 t} \int e^{-p_1 x} dx - e^{p_2 t} \int e^{-p_2 x} dx \right) = \frac{1}{L(p_1 - p_2)} \left(-\frac{e^{p_1 t} e^{-p_1 x}}{p_1} + \frac{e^{p_2 t} e^{-p_2 x}}{p_2} \right) = \\ &= \frac{p_1 e^{p_2 t} e^{-p_2 x} - p_2 e^{p_1 t} e^{-p_1 x}}{L(p_1 - p_2) p_1 p_2} = \frac{C(p_1 e^{p_2 t} e^{-p_2 x} - p_2 e^{p_1 t} e^{-p_1 x})}{p_1 - p_2}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Підставивши вираз (2.103) у формулу (2.102) і виконавши перетворення, отримуємо кінцевий вираз для $i(t)$ (табл.2.6).

Таблиця 2.6 – Вираз для $i(t)$ кола у прикладі 2.14

0 при $t < -t_1$	
$\frac{U_1 C}{2t_1} + \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \left(\frac{1}{L} + \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1 t_1} e^{p_1 t} - \left(\frac{1}{L} + \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2 t_1} e^{p_2 t} \right\}$ при $-t_1 \leq t < t_1$	
$\frac{U_1 C}{2t_1} + \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \left[\frac{2\text{sh}(p_1 t_1)}{L} + \frac{Cp_2(e^{p_1 t_1} - 2e^{-p_1 t_1})}{2t_1} \right] e^{p_1 t} - \left[\frac{2\text{sh}(p_2 t_1)}{L} + \frac{Cp_1(e^{p_2 t_1} - 2e^{-p_2 t_1})}{2t_1} \right] e^{p_2 t} \right\}$ при $t_1 < t < 3t_1$	
$\frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \left[\frac{2\text{sh}(p_1 t_1)}{L} + \frac{Cp_2(e^{p_1 t_1} - 2e^{-p_1 t_1} + e^{-p_1 3t_1})}{2t_1} \right] e^{p_1 t} - \left[\frac{2\text{sh}(p_2 t_1)}{L} + \frac{Cp_1(e^{p_2 t_1} - 2e^{-p_2 t_1} + e^{-p_2 3t_1})}{2t_1} \right] e^{p_2 t} \right\}$ при $t > 3t_1$	

Щоб скоротити запис виразів у табл.2.6 (на інтервалах $t_1 < t < 3t_1$ та $t > 3t_1$), використані гіперболічні функції:

$$\text{sh}(p_1 t_1) = \frac{e^{p_1 t_1} - e^{-p_1 t_1}}{2}; \quad \text{sh}(p_2 t_1) = \frac{e^{p_2 t_1} - e^{-p_2 t_1}}{2}.$$

За формулами з табл.2.6, побудуємо графік $i(t)$ (рис.2.50), вибравши співвідношення:

$$p_1 = -\frac{1}{3t_1}; \quad p_2 = -\frac{1}{t_1}.$$

Доказом того, що розв'язання вірне, є відсутність розривів у функції $i(t)$ та склад виразів для різних інтервалів часу (табл.2.6). Відсутність стрибків струму обумовлена неперервним характером перехідної характеристики. Вирази для інтервалів $-t_1 < t < t_1$ та $t_1 < t < 3t_1$, коли $u_{\text{вх}}(t) \neq 0$, містять вимушені складові $\frac{U_1 C}{2t_1}$ та $-\frac{U_1 C}{2t_1}$ відповідно і вільні складові (експоненційні функції з показниками $p_1 t$ та $p_2 t$), а для інтервалу $t > 3t_1$ – тільки вільні складові.

Варіант 2. Запишемо універсальну форму інтеграла Дюамеля (2.86), враховуючи позначення для даної задачі:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u'_{\text{вх}}(x) g(t-x) dx. \quad (2.104)$$

Продиференціюємо вхідну напругу за x :

$$u'_{\text{вх}}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \left(1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1} x \right) [1(x+t_1) - 1(x-t_1)] + \left(1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1} x \right) [1(x-t_1) - 1(x-3t_1)] \right\} =$$

$$= \left. \begin{aligned} & \frac{U_1}{2t_1} [1(x+t_1) - 1(x-t_1)] + (1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1}x) [\delta(x+t_1) - \delta(x-t_1)] - \\ & - \frac{U_1}{2t_1} [1(x-t_1) - 1(x-3t_1)] - (1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1}x) [\delta(x-t_1) - \delta(x-3t_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

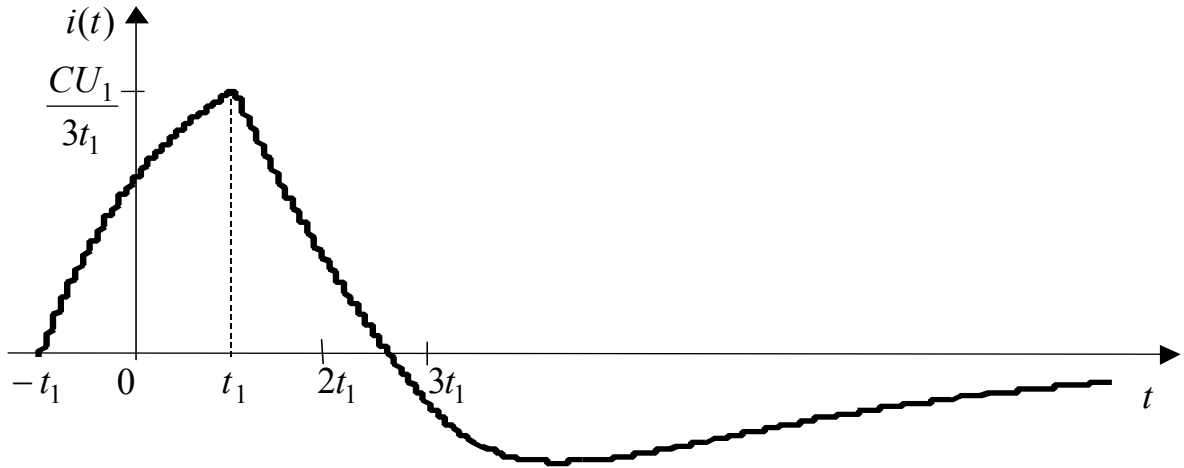


Рисунок 2.50 – Графік струму кола у прикладі 2.14

Підставляючи вираз (2.105) у формулу (2.104), отримуємо:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_1}{2t_1} \int_{-\infty}^{\infty} [1(x+t_1) - 1(x-t_1)]g(t-x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1}x) [\delta(x+t_1) - \delta(x-t_1)]g(t-x)dx - \\ & - \frac{U_1}{2t_1} \int_{-\infty}^{\infty} [1(x-t_1) - 1(x-3t_1)]g(t-x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1}x) [\delta(x-t_1) - \delta(x-3t_1)]g(t-x)dx = \\ & = \left. \begin{aligned} & \frac{U_1}{2t_1} \int_{-\infty}^{\infty} [1(x+t_1) - 1(x-t_1)]g(t-x)dx + U_1 g_{\text{анал}}(t+t_1) \cdot 1(t+t_1) - \\ & - U_1 g_{\text{анал}}(t-t_1) \cdot 1(t-t_1) - \frac{U_1}{2t_1} \int_{-\infty}^{\infty} [1(x-t_1) - 1(x-3t_1)]g(t-x)dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.106) \end{aligned}$$

У перетвореннях, які призводять до виразу (2.106), використана «фільтрувальна» властивість дельта-функції (2.21).

Вираз (2.106) дозволяє уточнити межі інтегрування і склад доданків залежно від інтервалу часу, для якого виконують розрахунки.

Перший з позаінтегральних доданків (2.106),

$$U_1 g_{\text{анал}}(t+t_1) \cdot 1(t+t_1)$$

відмінний від нуля при $t > -t_1$, а другий

$$-U_1 g_{\text{анал}}(t-t_1) \cdot 1(t-t_1)$$

– при $t > t_1$.

Межі інтегрування обумовлені значенням (нуль чи одиниця) різниць одиничних функцій, які складають підінтегральні вирази. Використовуючи графіки цих функцій (рис.2.49), отримуємо значення меж інтегрування, які зведемо до табл.2.7.

Таблиця 2.7 – Межі інтегрування у виразі (2.106)

Інтервал часу	Перший інтеграл		Другий інтеграл	
	Нижня межа	Верхня межа	Нижня межа	Верхня межа
$-t_1 < t < t_1$	$-t_1$	t	Інтеграл дорівнює нулю	
$t_1 < t < 3t_1$	$-t_1$	t_1	t_1	t
$t > 3t_1$	$-t_1$	t_1	t_1	$3t_1$

Порівняння складу і меж інтегрування у формулі (2.106) із співвідношеннями (2.102) показує повний збіг виразів для відповідних інтервалів часу.

2.7 Визначення відгуку кола на довільну дію за допомогою імпульсної характеристики

Неперервну або кусково-неперервну дію $s_{\text{вх}}(t) = 0$ при $t < 0$ можна приблизно подати на інтервалі $t \geq 0$ сукупністю порівняно коротких прямокутних імпульсів з однаковою тривалістю Δx (рис.2.51). Висота кожного з імпульсів дорівнює значенню дії для моменту часу, який відповідає осі симетрії імпульсу. Використовуючи таку апроксимувальну функцію, дію приблизно можна записати у вигляді:

$$s_{\text{вх}}(t) \approx \sum_{k=0}^n \Delta s_{\text{квх}}(t), \quad (2.107)$$

де $\Delta s_{\text{квх}}(t) = s_{\text{вх}}(x_k) \left[1\left(t - x_k + \frac{\Delta x}{2}\right) - 1\left(t - x_k - \frac{\Delta x}{2}\right) \right]$ – аналітичне подання

k -го імпульсу; n – округлене до цілого числа значення дробу $t/\Delta x$.

Перший імпульс ($k = 0$, $x_k = 0$), який входить до формули (2.107), становить:

$$\Delta s_{0\text{вх}}(t) = s_{\text{вх}}(0) \left[1\left(t + \frac{\Delta x}{2}\right) - 1\left(t - \frac{\Delta x}{2}\right) \right].$$

Перший та k -й імпульси позначені на рис.2.51 штрихуванням.

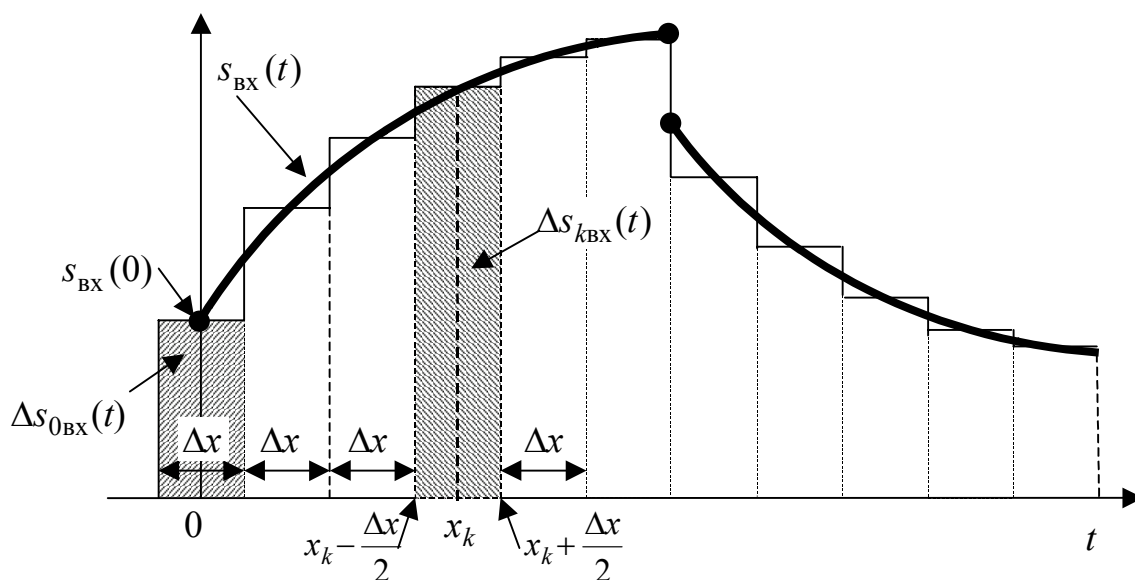


Рисунок 2.51 – До виведення першої форми інтеграла накладання з використанням імпульсної характеристики

Порівняно короткий прямокутний імпульс з одиничною висотою (рис.2.12, а) у даному випадку записується у вигляді:

$$1(t - x_k + \frac{\Delta x}{2}) - 1(t - x_k - \frac{\Delta x}{2}),$$

а за формулою (2.24) приблизно виражається через дельта-функцію:

$$1(t - x_k + \frac{\Delta x}{2}) - 1(t - x_k - \frac{\Delta x}{2}) \approx \Delta x \delta(t - x_k). \quad (2.108)$$

Підстановка (2.108) до виразу (2.107) призводить останній до вигляду:

$$s_{\text{ВХ}}(t) \approx \sum_{k=1}^n s_{\text{ВХ}}(x_k) \delta(t - x_k) \Delta x. \quad (2.109)$$

За принципом накладання відгук кола, яке має імпульсну характеристику $h(t)$, приблизно дорівнює сумі відгуків на кожний з імпульсних доданків (2.109):

$$s_{\text{ВИХ}}(t) \approx \sum_{k=1}^n s_{\text{ВХ}}(x_k) h(t - x_k) \Delta x. \quad (2.110)$$

Щоб точно описати $s_{\text{ВИХ}}(t)$, слід спрямувати $\Delta x \rightarrow 0$, а кількість імпульсів $n = t / \Delta x \rightarrow \infty$. Це перетворить x_k у поточну змінну x , Δx – у dx , сума (2.110) буде визначеним інтегралом по x , і в результаті відгук кола визначатиметься співвідношенням:

$$s_{\text{ВИХ}}(t) = \int_{-0}^{t+0} s_{\text{ВХ}}(x) h(t - x) dx. \quad (2.111)$$

Вираз (2.111) є **першою формою інтеграла накладання із застосуванням імпульсної характеристики**. Нижня межа інтеграла (2.111) обумовлена тим, що відгук кола на початковий стрибок дії $s_{\text{ВХ}}(0)$ врахований першим чле-

ном суми (2.107) $\Delta s_{0\text{ВХ}}(t)$. Верхня межа $t+0$ необхідна у випадку, коли імпульсна характеристика $h(t-x)$ у підінтегральному виразі містить дельта-функцію $\delta(t-x)$.

Після заміни у виразі (2.111) змінної x на $y = (t-x)$:

$$s_{\text{ВІХ}}(t) = - \int_{t+0}^{-0} s_{\text{ВХ}}(t-y)h(y)dy,$$

зміни порядку інтегрування

$$s_{\text{ВІХ}}(t) = \int_{-0}^{t+0} s_{\text{ВХ}}(t-y)h(y)dy$$

та повернення до початкового позначення для змінної виходить друга форма **інтеграла накладання із застосуванням імпульсної характеристики:**

$$s_{\text{ВІХ}}(t) = \int_{-0}^{t+0} s_{\text{ВХ}}(t-x)h(x)dx. \quad (2.112)$$

Межі інтегрування в інтегралах (2.111) і (2.112) можна розширити:

$$s_{\text{ВІХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(x)h(t-x)dx; \quad (2.113)$$

$$s_{\text{ВІХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(t-x)h(x)dx, \quad (2.114)$$

якщо для дії та імпульсної характеристики застосувати вирази:

$$s_{\text{ВХ}}(t) = s_{\text{ВХ анал}}(t) \cdot 1(t); \quad h(t) = g'_{\text{анал}}(t) \cdot 1(t) + g(0)\delta(t),$$

де $s_{\text{ВХ анал}}(t)$, $g_{\text{анал}}(t)$ – аналітичні вирази відповідно вхідної дії для $t \geq 0$ і перехідної характеристики.

Інтегралі (2.113) і (2.114) називають згорткою⁷ (або згортанням) двох функцій. Отже, **відгук кола є згорткою вхідної дії та імпульсної характеристики.**

Термін «згортка» пояснює характер перетворень, яким піддаються функції $s_{\text{ВХ}}(t)$ та $h(t)$ при обчисленні визначених інтегралів (2.113) і (2.114), – обчислення площі фігури, утвореної внаслідок перемноження однієї з функцій на дзеркально обернену другу (рис.2.52).

Термін згортка застосовується також до інтегралів накладання, записаних за допомогою перехідної характеристики (табл.2.5). У математиці інтеграл накладання, записаний у вигляді (2.90), називають згорткою за Стілтєсом функцій $s_{\text{ВХ}}(t)$ та $g(t)$.

⁷ У радіотехніці згортку двох сигналів називають їх кореляційною функцією. Залежно від того, розглядається згортка різних сигналів або одного й того ж сигналу, вводяться поняття взаємо- або автокореляційної функцій.

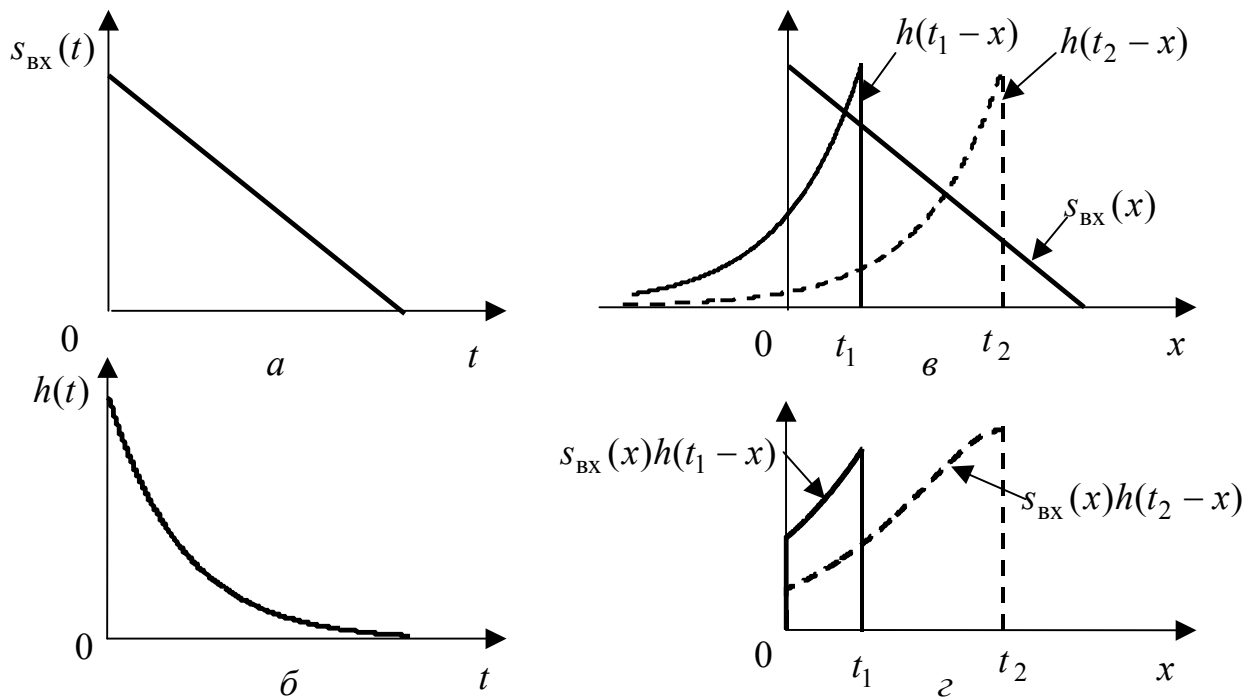


Рисунок 2.52 – Графіки, які пояснюють поняття згортки $s_{\text{BX}}(t)$ та $h(t)$:
 a – дія; b – перехідна характеристика; e – функції у складі інтеграла накладання (2.113); z – фігури, площі яких дорівнюють відгуку

Операцію згортки умовно позначають знаком «*», і тоді інтеграли накладання (2.113) і (2.114) записують скорочено:

$$s_{\text{Вих}}(t) = s_{\text{BX}}(t) * h(t) = h(t) * s_{\text{BX}}(t).$$

У радіотехніці широко використовують дії, які мають вигляд коливань з частотою ω_{BX} та «амплітудами» $S_{\text{mBX}}(t)$ і «початковими фазами» $\psi_{\text{BX}}(t)$, що повільно змінюються. Ці дії називають радіосигналами і записують у вигляді:

$$s_{\text{BX}}(t) = S_{\text{mBX}}(t) \cos[\omega_{\text{BX}} t + \psi_{\text{BX}}(t)] = \text{Re} \left[S_{\text{mBX}}(t) e^{j[\omega_{\text{BX}} t + \psi_{\text{BX}}(t)]} \right] = \text{Re} \left[\underline{S}_{\text{mBX}}(t) e^{j\omega_{\text{BX}} t} \right], \quad (2.115)$$

де $\underline{S}_{\text{mBX}}(t) = S_{\text{mBX}}(t) e^{j\psi_{\text{BX}}(t)}$ – комплексна обвідна (змінна комплексна амплітуда) дії.

Як правило, радіосигнал діє на коливальне коло (одиначний контур, зв'язані контури тощо) з імпульсною характеристикою, яка має загальний вигляд:

$$h(t) = H_m(t) \cos[\omega_h t + \psi_h(t)] \cdot 1(t) = \text{Re} \left[H_m(t) e^{j[\omega_h t + \psi_h(t)]} \cdot 1(t) \right] = \text{Re} \left[\underline{H}_m(t) e^{j\omega_h t} \right], \quad (2.116)$$

де $H_m(t)$, $\psi_h(t)$, $\underline{H}_m(t) = H_m(t) e^{j\psi_h(t)} \cdot 1(t)$ – відповідно обвідна амплітуди, закон змінювання початкової фази та комплексна обвідна імпульсної характеристики.

З урахуванням співвідношень (2.115) і (2.116) застосування інтеграла накладання (2.114) дозволяє записати загальний вираз для відгуку коливального кола на дію радіосигналу у вигляді:

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left[\underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) e^{j\omega_{\text{BX}}(t-x)} \right] \cdot \text{Re} \left[\underline{H}_m(x) e^{j\omega_h x} \right] dx. \quad (2.117)$$

Підінтегральний вираз у формулі (2.117) можна перетворити, застосувавши такі прийоми:

$$1) \quad \text{Re} \left[\underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) e^{j\omega_{\text{BX}}(t-x)} \right] \cdot \text{Re} \left[\underline{H}_m(x) e^{j\omega_h x} \right] = \text{Re} \underline{A} \cdot \text{Re} \underline{B},$$

де $\underline{A} = A e^{j\alpha} = \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) e^{j\omega_{\text{BX}}(t-x)}$; $\underline{B} = B e^{j\beta} = \underline{H}_m(x) e^{j\omega_h x}$;

2) згідно з відповідними перетвореннями⁸,

$$\text{Re} \underline{A} \cdot \text{Re} \underline{B} = AB \cos \alpha \cos \beta = 0,5 \text{Re}(\underline{A}\underline{B} + \underline{A}^* \underline{B}) = 0,5 \text{Re}(\underline{A}\underline{B} + \underline{A}\underline{B}^*); \quad (2.118)$$

3) на підставі формули (2.118)

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[\underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) e^{j\omega_{\text{BX}}(t-x)} \right] \cdot \text{Re} \left[\underline{H}_m(x) e^{j\omega_h x} \right] = \\ & = 0,5 \text{Re} \left[\underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) e^{j\omega_{\text{BX}}(t-x)} \underline{H}_m(x) e^{j\omega_h x} + \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) e^{j\omega_{\text{BX}}(t-x)} \underline{H}_m^*(x) e^{-j\omega_h x} \right] = \\ & = 0,5 \text{Re} \left\{ \left[\underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m(x) e^{j(\omega_h - \omega_{\text{BX}})x} + \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j(\omega_h + \omega_{\text{BX}})x} \right] e^{j\omega_{\text{BX}} t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Після підстановки виразу (2.119) до (2.117) останній прийме вигляд:

$$\begin{aligned} s_{\text{вих}}(t) &= \text{Re} \left\{ \left[0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m(x) e^{j(\omega_h - \omega_{\text{BX}})x} + \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j(\omega_h + \omega_{\text{BX}})x} \right] dx \right] e^{j\omega_{\text{BX}} t} \right\} = \\ & = \text{Re} \left[\underline{S}_{m\text{вих}}(t) e^{j\omega_{\text{BX}} t} \right], \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\text{де } \underline{S}_{m\text{вих}}(t) = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m(x) e^{j(\omega_h - \omega_{\text{BX}})x} + \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j(\omega_h + \omega_{\text{BX}})x} \right] dx$$

– комплексна обвідна вихідного радіосигналу (відгуку кола).

Практичне значення мають випадки збігу частот вхідного радіосигналу та імпульсної характеристики кола ($\omega_{\text{BX}} = \omega_h$), а також малих розстройок цих частот ($\omega_{\text{BX}} \approx \omega_h$; $\omega_h - \omega_{\text{BX}} = \Delta\omega$; $\omega_h + \omega_{\text{BX}} \approx 2\omega_{\text{BX}}$). Комплексні обвідні вихідних радіосигналів при цьому становитимуть:

1) при $\omega_{\text{BX}} = \omega_h$

$$\underline{S}_{m\text{вих}}(t) = 0,5 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j2\omega_{\text{BX}}x} dx \right]; \quad (2.121)$$

2) при малих розстройках

$$\underline{S}_{m\text{вих}}(t) \approx 0,5 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m(x) e^{j\Delta\omega x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{m\text{BX}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j2\omega_{\text{BX}}x} dx \right]. \quad (2.122)$$

⁸ $0,5 \text{Re}(\underline{A}\underline{B} + \underline{A}\underline{B}^*) = 0,5 \text{Re}(A e^{j\alpha} B e^{j\beta} + A e^{j\alpha} B e^{-j\beta}) = 0,5 AB \text{Re} \left[e^{j(\alpha+\beta)} + e^{j(\alpha-\beta)} \right] =$
 $= 0,5 AB \text{Re} \left[e^{j(\alpha+\beta)} \right] + 0,5 AB \text{Re} \left[e^{j(\alpha-\beta)} \right] = 0,5 AB [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] =$
 $= 0,5 AB (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = AB \cos\alpha \cos\beta.$

Другі інтеграли в формулах (2.121) і (2.122) однакові і практично дорівнюють нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{\text{мвх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) e^{-j2\omega_{\text{вх}}x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{\text{мвх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x) [\cos(2\omega_{\text{вх}}x) - j \sin(2\omega_{\text{вх}}x)] dx \approx 0.$$

Цей факт пояснюється тим, що оскільки підінтегральний вираз складається з коливань, обвідна яких $|\underline{S}_{\text{мвх}}(t-x) \underline{H}_m^*(x)|$ змінюється повільно, площі додатних і від'ємних півхвиль цих коливань при обчисленні визначеного інтеграла взаємно скорочуються.

Якщо знехтувати другими інтегралами у (2.121) і (2.122), ці вирази приймуть вигляд:

$$1) \quad \underline{S}_{\text{мвих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{\text{мвх}}(t-x) \underline{H}_m(x) dx; \quad (2.123)$$

$$2) \quad \underline{S}_{\text{мвих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{\text{мвх}}(t-x) \underline{H}_m(x) e^{j\Delta\omega x} dx. \quad (2.124)$$

Зміна змінної в інтегралах (2.123) і (2.124) призводить до співвідношень:

$$\underline{S}_{\text{мвих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{\text{мвх}}(x) \underline{H}_m(t-x) dx; \quad (2.125)$$

$$\underline{S}_{\text{мвих}}(t) \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{\text{мвх}}(x) \underline{H}_m(t-x) e^{j\Delta\omega(t-x)} dx. \quad (2.126)$$

Отже, **комплексна обвідна вихідного радіосигналу за умови збігу частот вхідного радіосигналу та імпульсної характеристики кола визначається згорткою комплексних обвідних вхідного радіосигналу та імпульсної характеристики.**

Вирази (2.124) і (2.126) свідчать, що при малих розстройках вихідний сигнал характеризується биттям з частотою $\Delta\omega_{\text{б}} = |\Delta\omega| = |\omega_h - \omega_{\text{вх}}|$.

Приклад 2.15. Знайти вихідну напругу у прикладі 2.12, використовуючи імпульсну характеристику кола. Співставити результати прикладів 2.15 і 2.12.

Розв'язання. Скористуємось знайденим у підрозд. 2.3 виразом (2.38) для імпульсної характеристики даного кола та другою формою інтеграла накладання (2.114). Враховуючи нескінченні межі в інтегралі (2.114), подамо вирази для вхідної напруги та імпульсної характеристики у вигляді:

$$u_{\text{вх}}(t-x) = U_0 e^{-\frac{t-x}{\tau_{\text{вх}}}} \cdot 1(t-x); \quad h(x) = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} \cdot 1(x) + \delta(x).$$

Складемо вираз для визначення відгуку кола:

$$u_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t-x) h(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 e^{-\frac{t-x}{\tau_{\text{вх}}}} \cdot 1(t-x) \left[-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} \cdot 1(x) + \delta(x) \right] dx. \quad (2.127)$$

Використовуючи фільтрувальну властивість дельта-функції та значення

одиничних функцій у підінтегральному виразі (2.127), обчислимо інтеграл накладання:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ВИХ}}(t) &= U_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \int_0^t e^{\frac{x}{\tau_{\text{ВХ}}}} e^{-\frac{x}{\tau}} dx = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \frac{1}{1/\tau_{\text{ВХ}} - 1/\tau} e^{\left(\frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} - \frac{1}{\tau}\right)x} \Bigg|_0^t = \\
 &= U_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \frac{\tau \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} \left[e^{\left(\frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} - \frac{1}{\tau}\right)t} - 1 \right] = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \right) = \\
 &= \frac{U_0 (\tau - \tau_{\text{ВХ}} + \tau_{\text{ВХ}})}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0 \tau}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau - \tau_{\text{ВХ}}} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.128)
 \end{aligned}$$

Отже, вирази (2.128) і (2.94) для вихідної напруги, знайдені у даному прикладі і прикладі 2.12, сходяться.

Приклад 2.16. Розв'язати приклад 2.13, використовуючи інтеграл накладання із застосуванням імпульсної характеристики кола. Порівняти результат з відгуком кола у прикладі 2.13.

Розв'язання. Підставляючи $u_{\text{ВХ}}(t)$ з прикладу 2.13 і аналітичний вираз для імпульсної характеристики кола (2.35) (підрозд. 2.3) у першу форму інтеграла накладання (2.111), отримаємо:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ВИХ}}(t) &= \int_{-0}^{t+0} u_{\text{ВХ}}(x) h(t-x) dx = \int_0^t U_0 e^{-\frac{x}{\tau_{\text{ВХ}}}} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-x}{\tau}} dx = \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}}\right)x} dx = \\
 &= \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} \right)} e^{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}}\right)x} \Bigg|_0^t = \frac{U_0}{\tau \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} \right)} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0}{\tau \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} \right)} e^{-\frac{t}{\tau}} = \\
 &= \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau_{\text{ВХ}} - \tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} - \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau_{\text{ВХ}} - \tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.129)
 \end{aligned}$$

Знайдений відгук (2.129) сходиться з виразом (2.97) у прикладі 2.13.

Приклад 2.17. Знайти струм кола (див. приклад 2.14) за допомогою інтеграла накладання, використовуючи імпульсну характеристику. Порівняти результати прикладів 2.17 і 2.14.

Розв'язання. Використовуючи вираз (2.100) для перехідної характеристики даного кола, визначимо його імпульсну характеристику:

$$h_i(t) = \frac{d[g_i(t)]}{dt} = \left[\frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{L(p_1 - p_2)} \cdot 1(t) \right]' = \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{L(p_1 - p_2)} \cdot 1(t). \quad (2.130)$$

Запишемо задану у прикладі 2.14 дію (2.99) компактніше:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = (1,5U_1 + \frac{U_1}{2t_1} t) \cdot 1(t + t_1) - \frac{U_1}{t_1} t \cdot 1(t - t_1) - (1,5U_1 - \frac{U_1}{2t_1} t) \cdot 1(t - 3t_1). \quad (2.131)$$

Підставимо вирази (2.131) і (2.130) у першу форму інтеграла накладання (2.113):

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{BX}}(x)h(t-x)dx =$$

$$= \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1,5 + \frac{x}{2t_1}\right) \cdot 1(x+t_1) - \frac{x}{t_1} \cdot 1(x-t_1) - \left(1,5 - \frac{x}{2t_1}\right) \cdot 1(x-3t_1) \right] \times$$

$$\times \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] \cdot 1(t-x) dx. \quad (2.132)$$

Враховуючи часові інтервали, в яких одиничні функції, що входять до виразу (2.132), не дорівнюють нулю, уточнимо межі інтегрування та підінтегральний вираз для різних інтервалів:

1) $-t_1 < t < t_1$

$$i(t) = \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \left\{ \int_{-t_1}^t 1,5 \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx + \int_{-t_1}^t \frac{x}{2t_1} \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx \right\}; \quad (2.133)$$

2) $t_1 < t < 3t_1$

$$i(t) = \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \left\{ \int_{-t_1}^t 1,5 \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx - \int_{t_1}^t \frac{x}{2t_1} \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx + \int_{-t_1}^{t_1} \frac{x}{2t_1} \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx \right\}; \quad (2.134)$$

3) $t > 3t_1$

$$i(t) = \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \left\{ \int_{-t_1}^{t_1} \frac{x}{2t_1} \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx - \int_{t_1}^{3t_1} \frac{x}{2t_1} \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx + \int_{-t_1}^{3t_1} 1,5 \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx \right\}. \quad (2.135)$$

Оскільки співвідношення (2.133) – (2.135) містять однотипні підінтегральні вирази, попередньо обчислимо два невизначені інтеграли:

$$F_1(t, x) = 1,5 \int \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx = 1,5 \left[e^{p_2(t-x)} - e^{p_1(t-x)} \right]; \quad (2.136)$$

$$F_2(t, x) = \frac{1}{2t_1} \int x \left[p_1 e^{p_1(t-x)} - p_2 e^{p_2(t-x)} \right] dx = \frac{1}{2t_1} \left[e^{p_1 t} \int x p_1 e^{-p_1 x} dx - e^{p_2 t} \int x p_2 e^{-p_2 x} dx \right] =$$

$$= \frac{LC}{2t_1} \left[\left(\frac{x}{LC} + p_1 \right) e^{p_2(t-x)} - \left(\frac{x}{LC} + p_2 \right) e^{p_1(t-x)} \right].^9 \quad (2.136a)$$

⁹ При обчисленні $F_2(t, x)$ використано табличний інтеграл $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}(ax-1)}{a^2}$, у слушності якого можна впевнитися, інтегруючи частинами.

Використовуюючи вирази (2.136) і (2.136а), знаходимо миттєві значення струму кола:

1) для $-t_1 < t < t_1$

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \left[F_1(t, x) \Big|_{x=-t_1}^{x=t} + F_2(t, x) \Big|_{x=-t_1}^{x=t} \right] = \\
 &= \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \frac{1,5}{L} \left[e^{p_2(t-x)} - e^{p_1(t-x)} \right] \Big|_{-t_1}^t + \frac{C}{2t_1} \left[\left(\frac{x}{LC} + p_1 \right) e^{p_2(t-x)} - \left(\frac{x}{LC} + p_2 \right) e^{p_1(t-x)} \right] \Big|_{-t_1}^t \right\} = \\
 &= \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \frac{1,5}{L} \left[e^{p_1(t+t_1)} - e^{p_2(t+t_1)} \right] + \left[\frac{C(p_1-p_2)}{2t_1} + \left(\frac{1}{2L} - \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t+t_1)} - \left(\frac{1}{2L} - \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t+t_1)} \right] \right\} = \\
 &= \frac{U_1 C}{2t_1} + \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \left(\frac{1}{L} + \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1 t_1} e^{p_1 t} - \left(\frac{1}{L} + \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2 t_1} e^{p_2 t} \right\}. \quad (2.137)
 \end{aligned}$$

2) для $t_1 < t < 3t_1$

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \left[F_1(t, x) \Big|_{x=-t_1}^{x=t} - F_2(t, x) \Big|_{x=t_1}^{x=t} + F_2(t, x) \Big|_{x=-t_1}^{x=t_1} \right] = \\
 &= \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \frac{1,5}{L} \left[e^{p_1(t+t_1)} - e^{p_2(t+t_1)} \right] + \left[\frac{C(p_1-p_2)}{2t_1} - \left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t-t_1)} + \left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t-t_1)} \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[\left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t-t_1)} - \left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t-t_1)} + \left(\frac{1}{2L} - \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t+t_1)} - \left(\frac{1}{2L} - \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t-t_1)} \right] \right\} = \\
 &= -\frac{U_1 C}{2t_1} + \\
 &+ \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \left[\frac{2\text{sh}(p_1 t_1)}{L} + \frac{Cp_2(e^{p_1 t_1} - 2e^{-p_1 t_1})}{2t_1} \right] e^{p_1 t} - \left[\frac{2\text{sh}(p_2 t_1)}{L} + \frac{Cp_1(e^{p_2 t_1} - 2e^{-p_2 t_1})}{2t_1} \right] e^{p_2 t} \right\}. \quad (2.137a)
 \end{aligned}$$

3) $t > 3t_1$

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \left[F_1(t, x) \Big|_{x=-t_1}^{x=3t_1} - F_2(t, x) \Big|_{x=t_1}^{x=3t_1} + F_2(t, x) \Big|_{x=-t_1}^{x=t_1} \right] = \\
 &= \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)} \left\{ \frac{1,5}{L} \left[e^{p_2(t-3t_1)} - e^{p_1(t-3t_1)} - e^{p_2(t+t_1)} + e^{p_1(t+t_1)} \right] - \right. \\
 &- \left[\left(\frac{3}{2L} + \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t-3t_1)} + \left(\frac{3}{2L} + \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t-3t_1)} - \left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t-t_1)} + \left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t-t_1)} \right] + \\
 &+ \left. \left[\left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t-t_1)} - \left(\frac{1}{2L} + \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t-t_1)} + \left(\frac{1}{2L} - \frac{Cp_1}{2t_1} \right) e^{p_2(t+t_1)} - \left(\frac{1}{2L} - \frac{Cp_2}{2t_1} \right) e^{p_1(t+t_1)} \right] \right\} = \\
 &= \frac{U_1}{p_1 - p_2} \left\{ \left[\frac{2\text{sh}(p_1 t_1)}{L} + \frac{Cp_2(e^{p_1 t_1} - 2e^{-p_1 t_1} + e^{-p_1 3t_1})}{2t_1} \right] e^{p_1 t} - \right. \\
 &- \left. \left[\frac{2\text{sh}(p_2 t_1)}{L} + \frac{Cp_1(e^{p_2 t_1} - 2e^{-p_2 t_1} + e^{-p_2 3t_1})}{2t_1} \right] e^{p_2 t} \right\}. \quad (2.138)
 \end{aligned}$$

Отже, вирази (2.137) – (2.138) збігаються з отриманими у прикладі 2.14

(див. табл.2.6).

Приклад 2.18. На вході послідовного кола R, C першої групи (рис.2.17, а) прикладено напругу експоненційної форми (рис.2.53):

$$u_{\text{ВХ}}(t) = U_0 e^{\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \cdot 1(-t).$$

Знайти відгук кола, застосовуючи імпульсну характеристику. Побудувати графіки вихідної напруги для $\tau_{\text{ВХ}} \ll \tau$, $\tau_{\text{ВХ}} \gg \tau$, $\tau_{\text{ВХ}} = \tau$. Оцінити міру спотворення даної дії при проходженні через коло.

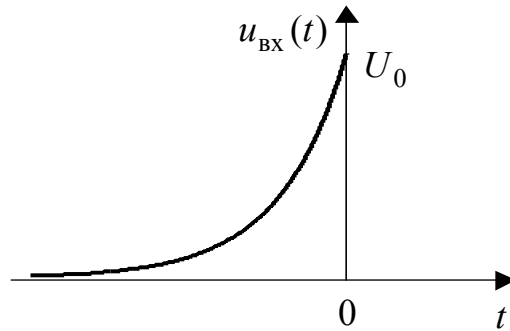


Рисунок 2.53 – Графік дії у прикладі 2.18

Розв’язання. Використовуючи у першій формі інтеграла накладання (2.113) заданий вираз для $u_{\text{ВХ}}(t)$ та імпульсну характеристику кола (2.35) (див. підрозд. 2.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} u_{\text{ВИХ}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(x) h(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 e^{\frac{x}{\tau_{\text{ВХ}}}} \cdot 1(-x) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-x}{\tau}} \cdot 1(t-x) dx = \\ &= \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} + \frac{1}{\tau}\right)x} \cdot 1(-x) \cdot 1(t-x) dx. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Межі інтегрування у виразі (2.139) визначаємо, виходячи з граничних значень змінної x , в інтервалі між якими добуток одиничних функцій $1(-x) \cdot 1(t-x)$ не дорівнює нулю (рис.2.54). Для $t < 0$ межі інтегрування становлять: від $-\infty$ до t , а для $t \geq 0$: від $-\infty$ до 0 .

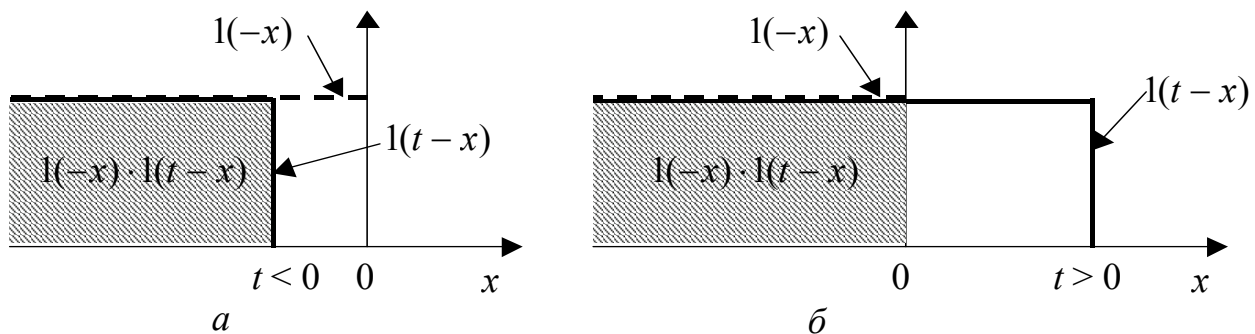


Рисунок 2.54 – До визначення меж інтегрування у прикладі 2.18:

$$a - t < 0; \quad б - t > 0$$

Підставляючи значення меж до інтегралу (2.139), визначасмо відгук кола:

1) для $t < 0$

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} + \frac{1}{\tau}} x dx = \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} \right)} e^{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} \right) x} \Big|_{-\infty}^t = \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau_{\text{ВХ}} + \tau} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}}; \quad (2.140)$$

2) для $t \geq 0$

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} + \frac{1}{\tau}} x dx = \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} \right)} e^{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}}} \right) x} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau_{\text{ВХ}} + \tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.141)$$

На підставі формул (2.140) і (2.141) запишемо $u_{\text{вих}}(t)$ єдиним виразом:

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{U_0 \tau_{\text{ВХ}}}{\tau_{\text{ВХ}} + \tau} \left[e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \cdot 1(-t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) \right]. \quad (2.142)$$

Використовуючи вираз (2.142), отримаємо формули для заданих співвідношень між τ та $\tau_{\text{ВХ}}$ і зведемо їх до табл.2.7. За цими формулами побудуємо графіки (рис.2.55).

Таблиця 2.7 – Вирази для $u_{\text{вих}}(t)$ у прикладі 2.18

Співвідношення між τ та $\tau_{\text{ВХ}}$	$u_{\text{вих}}(t)$
$\tau_{\text{ВХ}} \ll \tau$	$\approx \frac{\tau_{\text{ВХ}} U_0}{\tau} [e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \cdot 1(-t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)]$
$\tau_{\text{ВХ}} \gg \tau$	$\approx U_0 [e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \cdot 1(-t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)]$
$\tau_{\text{ВХ}} = \tau$	$0,5 U_0 [e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \cdot 1(-t) + e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ВХ}}}} \cdot 1(t)]$

Аналіз формул і графіків для $u_{\text{вих}}(t)$ дозволяє зробити такі висновки:

1) при $\tau_{\text{ВХ}} \ll \tau$ відгук відповідає імпульсній характеристиці кола, а при $t \geq 0$ – пропорційний її аналітичному виразу (рис.2.55, а);

2) при $\tau_{\text{ВХ}} \gg \tau$ спостерігається практично неспотворене відтворення вхідної напруги на виході кола (рис.2.55, б);

3) випадок $\tau_{\text{ВХ}} = \tau$ (рис.2.55, в) відповідає оптимальному обробленню $u_{\text{вих}}(t)$, розглянутому у прикладах 2.9 і 2.10.

Приклад 2.19. Вхідною напругою послідовного високодобротного коливального контуру є радіоімпульс експоненційної форми (рис.2.56):

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{m0} e^{\delta t} \cos \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(-t). \quad (2.143)$$

Визначити миттєве значення напруги на ємності контуру $u_C(t)$, застосовуючи його імпульсну характеристику (табл.2.3)

$$h_{u_C}(t) \approx \omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{рез}} t \cdot 1(t), \quad (2.144)$$

за умови, що $\omega_{\text{рез}} \gg \delta$. Побудувати графік вихідної напруги та оцінити характер змінювання форми радіоімпульсу.

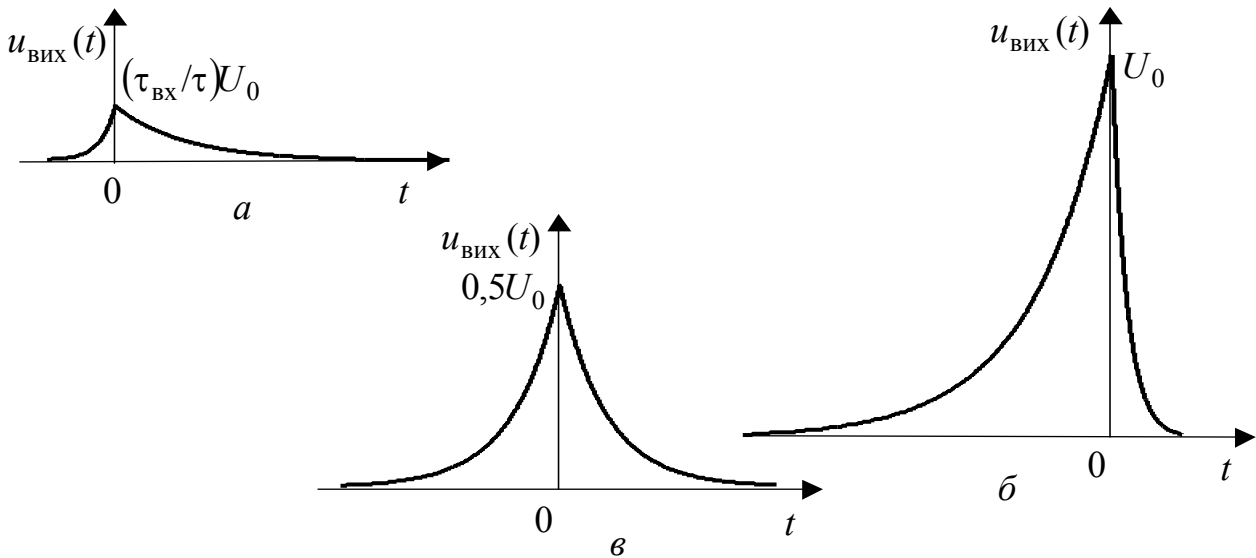


Рисунок 2.55 – Графіки $u_{\text{вих}}(t)$ у прикладі 2.18:

$$a - \tau_{\text{вих}} \ll \tau; \quad б - \tau_{\text{вих}} \gg \tau; \quad в - \tau_{\text{вих}} = \tau$$

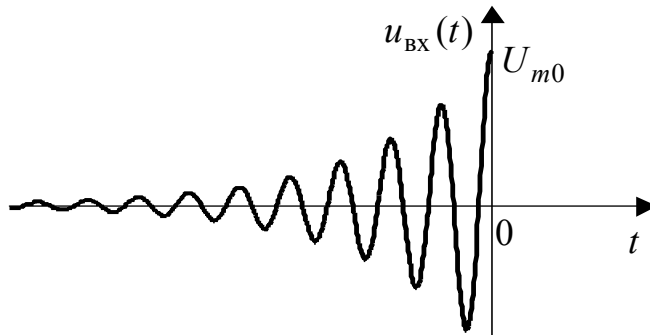


Рисунок 2.56 – Графік вхідної напруги у прикладі 2.19

Розв’язання. Оскільки вхідна напруга (2.143) та імпульсна характеристика кола (2.144) є коливанням з однаковими частотами та обвідними, які повільно змінюються, застосуємо інтеграл накладання для комплексних обвідних, котрі для заданих $u_{\text{вх}}(t)$ та $h_{u_C}(t)$ запишемо, за визначенням, у вигляді:

$$\underline{U}_{\text{мвх}}(t) = U_{m0} e^{\delta t} \cdot 1(-t); \quad (2.145)$$

$$\underline{H}_{\text{ми}_C}(t) \approx \omega_{\text{рез}} e^{-\delta t} e^{-j\pi/2} \cdot 1(t). \quad (2.146)$$

Використовуюючи вирази (2.145) і (2.146), складемо та обчислимо інтеграл накладання (2.125) для комплексних обвідних:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mC}(t) &\approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_{mВХ}(x) \underline{H}_{mu_C}(t-x) dx \approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} U_{m0} e^{\delta x} \cdot 1(-x) \omega_{\text{рез}} e^{-[\delta(t-x)+j\pi/2]} \cdot 1(t-x) dx = \\ &= 0,5 \omega_{\text{рез}} U_{m0} e^{-(\delta t + j\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\delta x} \cdot 1(-x) \cdot 1(t-x) dx = \frac{0,5 \omega_{\text{рез}} U_{m0} e^{-j\pi/2}}{2\delta} \left[e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t) \right] = \\ &= 0,5 Q U_{m0} \left[e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t) \right] e^{-j\pi/2} \cdot^{10} \end{aligned} \quad (2.147)$$

За комплексною обвідною напруги на ємності (2.147) згідно з формулою (2.120) знайдемо миттєве значення цієї напруги:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \text{Re} \left(\underline{U}_{mC} e^{j\omega_{\text{рез}} t} \right) \approx \text{Re} \left\{ 0,5 Q U_{m0} \left[e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t) \right] e^{j(\omega_{\text{рез}} t - \pi/2)} \right\} = \\ &= 0,5 Q U_{m0} \left[e^{\delta t} \cdot 1(-t) + e^{-\delta t} \cdot 1(t) \right] \cos(\omega_{\text{рез}} t - \pi/2). \end{aligned} \quad (2.148)$$

На підставі виразу (2.148) побудуємо графік $u_C(t)$ (рис.2.57). Вигляд графіка та дзеркальність обвідних $u_{ВХ}(t)$ та $h_{u_C}(t)$ показують, що даний випадок наближається до оптимальної обробки вхідного радіоімпульсу.

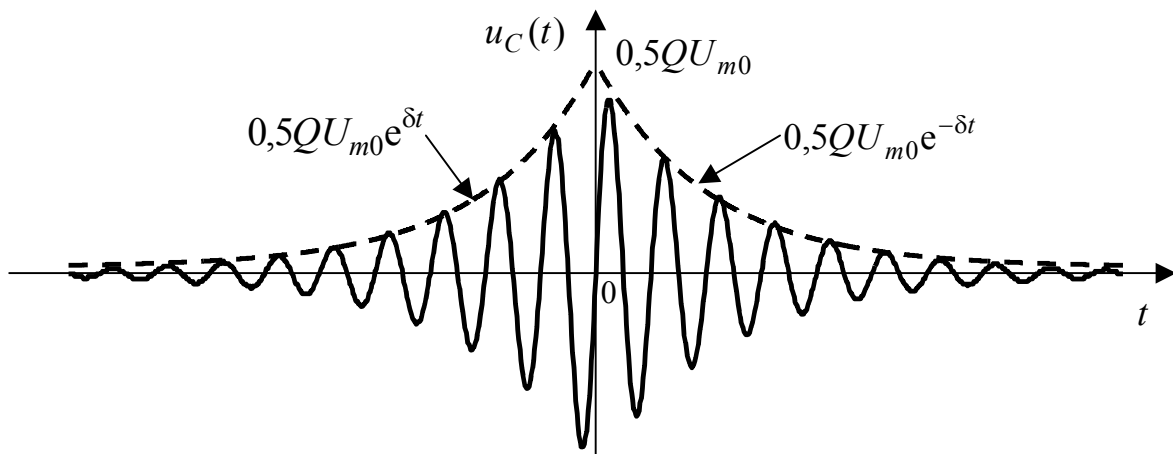


Рисунок 2.57 – Графік $u_C(t)$ у прикладі 2.19

Приклад 2.20. До входу послідовного коливального контуру з резонансною частотою $f_{\text{рез}} = 1 \text{ МГц}$ і добротністю $Q = 20$, прикладена напруга у вигляді прямокутного радіоімпульсу висотою $U_{m0} = 1 \text{ В}$ (рис.2.58, а), частота заповнення якого змінюється за лінійним законом $f(t) = f_{\text{рез}} + \alpha t$ у діапазоні

¹⁰ При виведенні формули (2.147) використано розв’язання у прикладі 2.18 щодо визначення меж інтегрування і способу запису результату одним виразом. Крім того, застосовані співвідношення для вторинних параметрів контуру:

$$\frac{\omega_{\text{рез}}}{2\delta} = \frac{\omega_{\text{рез}} L}{R} = Q.$$

$2\Delta f_m = 0,5 \text{ МГц}$ (рис.2.58, б). Визначити обвідні амплітуд напруги на ємності для трьох значень швидкості змінювання частоти: $\alpha_1 = 10^9 \text{ Гц/с}$; $\alpha_2 = 5 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$; $\alpha_3 = 25 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$.

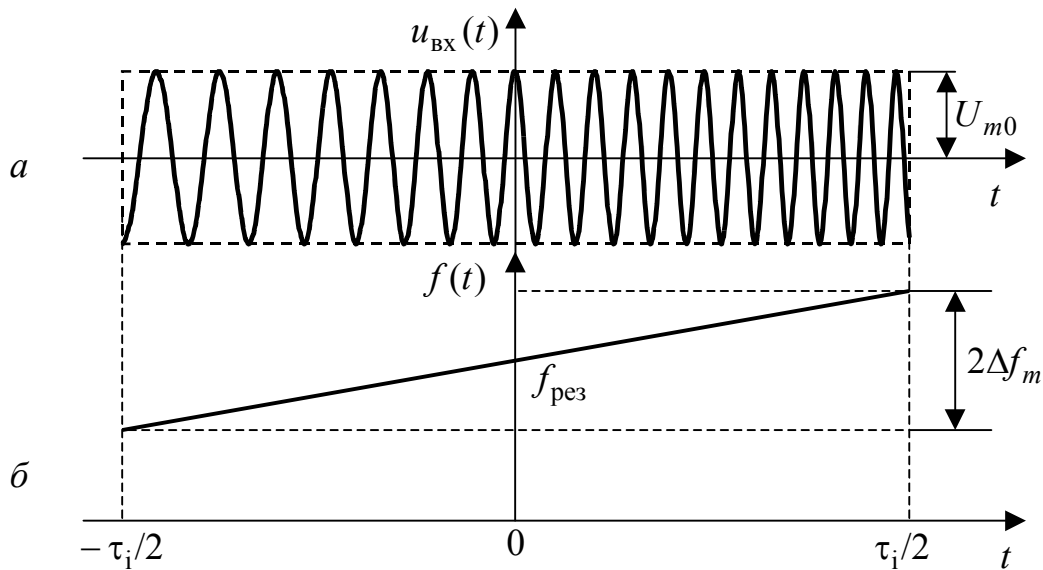


Рисунок 2.58 – Вхідна напруга у прикладі 2.20

Розв’язання. Використовуючи задані параметри вхідної напруги, запишемо у загальному вигляді її миттєве значення:

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{m0} \cos \psi(t) [1(t + \tau_i / 2) - 1(t - \tau_i / 2)], \quad (2.149)$$

де $\psi(t) = \int 2\pi f(t) dt = 2\pi(f_{\text{рез}} t + \alpha t^2 / 2)$ – повна фаза у межах імпульсу; $\tau_i = 2\Delta f_m / \alpha$ – тривалість імпульсу.

На підставі виразу (2.149) запишемо комплексну обвідну $u_{\text{вх}}(t)$:

$$\underline{U}_{\text{мвх}}(t) = U_{m0} [1(t + \tau_i / 2) - 1(t - \tau_i / 2)] e^{j\pi\alpha t^2}. \quad (2.150)$$

Складемо інтеграл накладання для комплексних обвідних (2.125), використовуючи вираз (2.150) і співвідношення для комплексної обвідної імпульсної характеристики (2.146):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\text{мс}}(t) &\approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_{\text{мвх}}(x) \underline{H}_{\text{мис}}(t-x) dx \approx \\ &\approx 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} U_{m0} [1(x + \tau_i / 2) - 1(x - \tau_i / 2)] e^{j\pi\alpha x^2} \omega_{\text{рез}} e^{-\delta(t-x)} e^{-j\pi/2} \cdot 1(t-x) dx, \end{aligned} \quad (2.151)$$

$$\text{де } \delta = \frac{R}{2L} = \frac{R\omega_{\text{рез}}}{2L\omega_{\text{рез}}} = \frac{\pi f_{\text{рез}}}{Q} = \frac{\pi 10^6}{20} = \pi \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1} \text{ – коефіцієнт загасання да-}$$

ного контуру.

Враховуючи інтервали для змінної x , в яких одиничні функції під інтегралом в (2.151) не дорівнюють нулю, уточнюємо межі інтегрування і от-

римуємо остаточні вирази для комплексних обвідних та обвідних амплітуд відгуку:

1) для $-\tau_i/2 < t < \tau_i/2$

$$\underline{U}_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-(\delta t + j\pi/2)} \int_{-\tau_i/2}^t e^{\delta x + j\pi\alpha x^2} dx; U_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-\delta t} \left| \int_{-\tau_i/2}^t e^{\delta x + j\pi\alpha x^2} dx \right|; \quad (2.152)$$

2) для $t > \tau_i/2$
$$\underline{U}_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-(\delta t + j\pi/2)} \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} e^{\delta x + j\pi\alpha x^2} dx;$$

$$U_{mC}(t) \approx \pi f_{\text{рез}} U_{m0} e^{-\delta t} \left| \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} e^{\delta x + j\pi\alpha x^2} dx \right|. \quad (2.153)$$

Оскільки інтеграл, який входить у вирази (2.152) і (2.153), елементарно не береться, щоб його обчислити, застосуємо метод чисельного інтегрування на ЕОМ. Для цього підставимо у (2.152) і (2.153) чисельні значення і зведемо ці вирази до табл.2.8.

Таблиця 2.8 – Кількісні співвідношення для розрахунку $U_{mC}(t)$ у прикладі 2.20

Значення α	$U_{mC}(t)$	
	$-\tau_i/2 < t < \tau_i/2$	$t > \tau_i/2$
$\alpha_1 = 10^9 \text{ Гц/с}$	$\pi 10^6 e^{-\pi 5 \cdot 10^4 t} \left \int_{-2,5 \cdot 10^{-4}}^t e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j 10^9 x^2)} dx \right $	$\pi 10^6 e^{-\pi 5 \cdot 10^4 t} \left \int_{-2,5 \cdot 10^{-4}}^{2,5 \cdot 10^{-4}} e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j 10^9 x^2)} dx \right $
$\alpha_2 = 5 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$	$\pi 10^6 e^{-\pi 5 \cdot 10^4 t} \left \int_{-5 \cdot 10^{-5}}^t e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j 5 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $	$\pi 10^6 e^{-\pi 5 \cdot 10^4 t} \left \int_{-5 \cdot 10^{-5}}^{5 \cdot 10^{-5}} e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j 5 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $
$\alpha_3 = 25 \cdot 10^9 \text{ Гц/с}$	$\pi 10^6 e^{-\pi 5 \cdot 10^4 t} \left \int_{-10^{-5}}^t e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j 25 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $	$\pi 10^6 e^{-\pi 5 \cdot 10^4 t} \left \int_{-10^{-5}}^{10^{-5}} e^{\pi(5 \cdot 10^4 x + j 25 \cdot 10^9 x^2)} dx \right $

За формулами табл.2.8 виконаємо розрахунки і побудуємо графіки (рис.2.59), аналіз яких показує, що у межах $-\tau_i/2 < t < \tau_i/2$ обвідні амплітуд максимальні у центральній частині імпульсу ($t \approx 0$), де миттєве значення частоти дорівнює $f_{\text{рез}}$ (рис.2.58). При порівняно повільному змінюванні частоти ($\alpha_1 = 10^9 \text{ Гц/с}$) графік $U_{mC}(t)$ приблизно повторює АЧХ даного контуру не

тільки за формою, але й кількісно – максимальне значення становить $Q \approx 20$.

За межами радіоімпульсу ($t > \tau_i/2$) при будь-якому значенні α відбувається вільний процес з обвідною, пропорційною експоненті $e^{-\delta t}$.

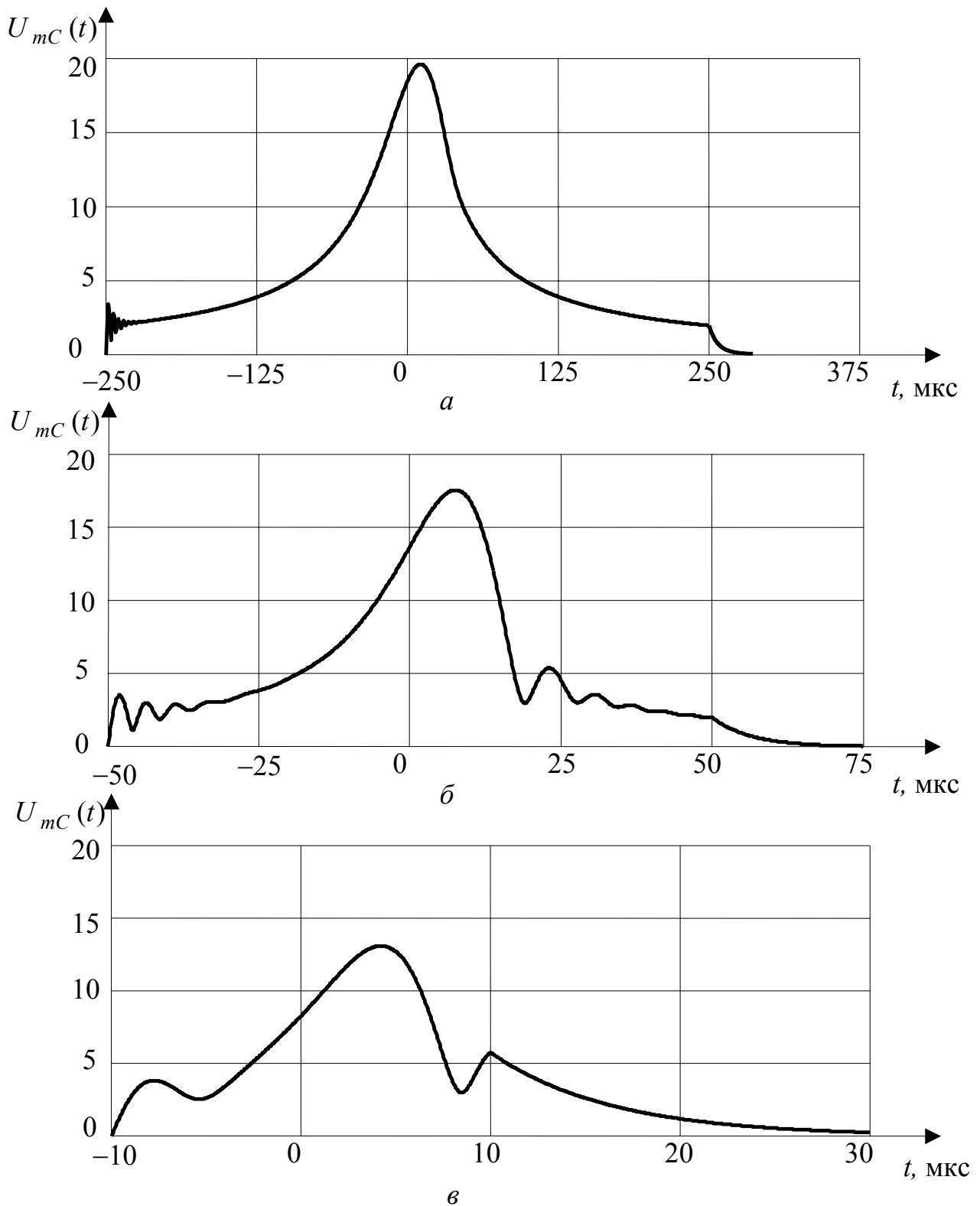


Рисунок 2.59 – Обвідні амплітуд відгуку у прикладі 2.20:

$a - \alpha_1 = 10^9$ Гц/с; $б - \alpha_2 = 5 \cdot 10^9$ Гц/с; $в - \alpha_3 = 25 \cdot 10^9$ Гц/с

Перехідні процеси, подібні до розглянутих, використовують у приладах для автоматичного вимірювання АЧХ. Отримані на виході цих приладів характеристики називають динамічними. На відміну від динамічних, АЧХ, визначені теоретично, називають статичними АЧХ, оскільки вони знайдені у стаціонарному режимі.

Скористаємось розрахованими значеннями $U_{mC}(t)$ для побудови динамічних АЧХ. Для цього на графіках $U_{mC}(t)$ (рис.2.59) замінимо змінну t на $\Delta f = f - f_{рез} = \alpha t$ та побудуємо графіки $H(\Delta f) \approx U_{mC}(\alpha t)$ (рис.2.60, б, в, з), використовуючи інтервал $-\tau_i/2 < t < \tau_i/2$. Для порівняння там же зобразимо графік статичної АЧХ (рис.2.60, а), застосувавши приблизний вираз для контуру високої добротності:

$$H(\Delta f) \approx \frac{Q}{\sqrt{1 + (2Q\Delta f / f_{рез})^2}}.$$

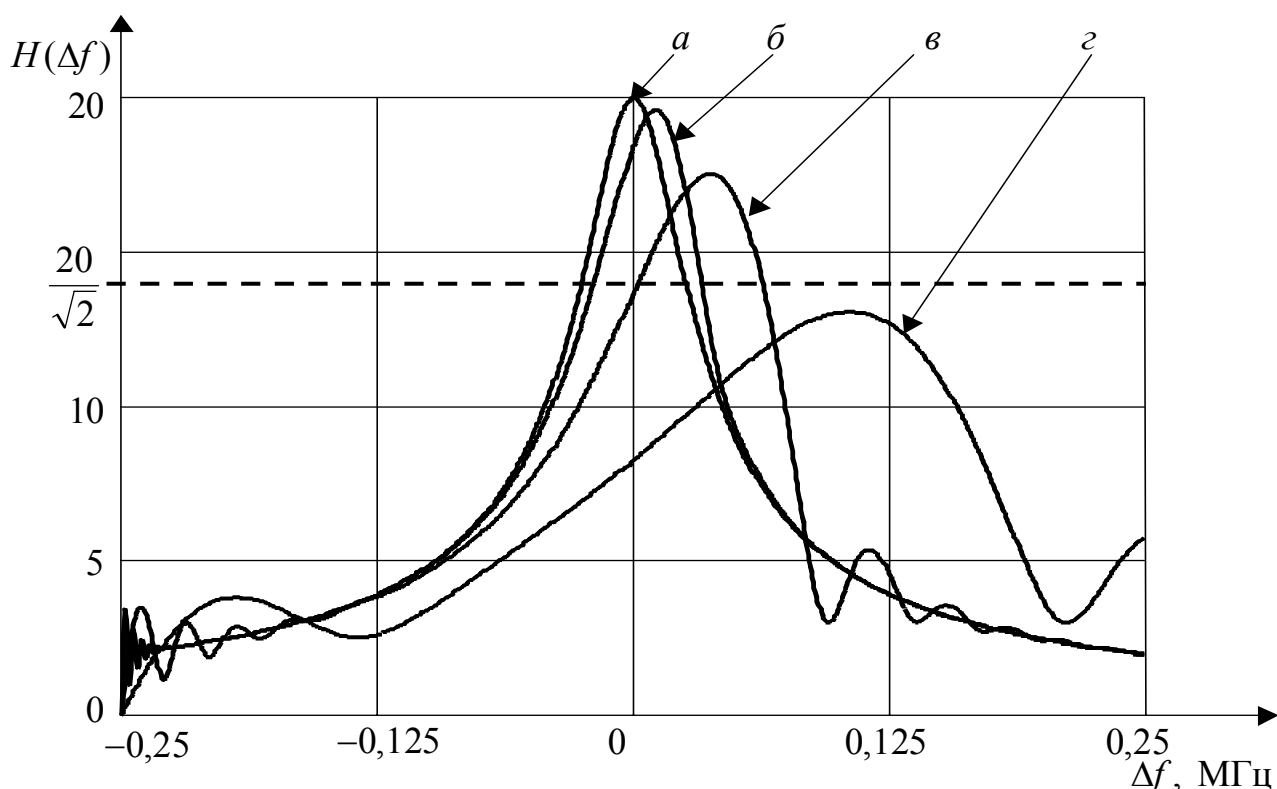


Рисунок 2.60 – АЧХ у прикладі 2.20: а – статична; динамічні: б – $\alpha_1=10^9$ Гц/с; в – $\alpha_2=5 \cdot 10^9$ Гц/с; з – $\alpha_3=25 \cdot 10^9$ Гц/с

З розгляду рис.2.60 можна зробити такі висновки:

- 1) найбільше наближається до статичної динамічна АЧХ, отримана при мінімальному значенні α (рис.2.60, б);
- 2) максимуми динамічних АЧХ зсунуті відносно частоти $f_{рез}$ в область вищих частот, а за величиною ці максимуми менше, ніж у статичних АЧХ;
- 3) внаслідок асиметрії динамічних АЧХ (спадна вітка крутіша висхідної)

середина СП не збігається з частотою максимуму, а ширина СП більша, ніж у статичної АЧХ;

4) у динамічних АЧХ з порівняно великими значеннями α за межами СП спостерігаються биття коливань з власною частотою контуру і коливань з частотою вхідної напруги (рис.2.60, в, з).

Щоб оцінити швидкість змінювання частоти, при якій динамічна АЧХ наближається до статичної, використовують безрозмірний параметр

$$p = \frac{\alpha}{(2\Delta f_{\Pi})^2},$$

де $2\Delta f_{\Pi}$ – СП кола.

Чим менше параметр p порівняно з одиницею, тим ближче динамічна АЧХ до статичної.

Розрахуємо цей параметр для заданих параметрів кола і значень α :

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{(2\Delta f_{\Pi})^2} = \frac{10^9}{(5 \cdot 10^4)^2} = 0,4; \quad p_2 = \frac{\alpha_2}{(2\Delta f_{\Pi})^2} = \frac{5 \cdot 10^9}{(5 \cdot 10^4)^2} = 2; \quad p_3 = \frac{\alpha_3}{(2\Delta f_{\Pi})^2} = \frac{25 \cdot 10^9}{(5 \cdot 10^4)^2} = 10,$$

$$\text{де } 2\Delta f_{\Pi} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q} = \frac{10^6}{20} = 5 \cdot 10^4 \text{ Гц} = 0,05 \text{ МГц} \text{ – СП даного контуру.}$$

Графіки динамічних АЧХ (рис.2.60, б, в, з) і відповідні значення параметра p підтверджують слушність вказаного критерію для вибору швидкості змінювання частоти.

2.8 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. У чому полягає обмеженість застосування класичного методу для аналізу проходження сигналів у лінійних радіотехнічних колах?

2. На якому принципі ЛЕК ґрунтується часовий метод аналізу перехідних процесів?

3. Як визначається і які властивості має типова дія у вигляді одиничної функції?

4. Дати визначення перехідної характеристики кола $g(t)$ і пояснити її фізичне значення. Яку розмірність має $g(t)$? Як експериментально знайти перехідну характеристику?

5. Які співвідношення існують між $g(t)$ і $H(j\omega)$ для граничних значень t та ω ? Як пов'язані ці граничні значення з коефіцієнтами диференціального рівняння кола?

6. Знайти перехідну характеристику кола (рис.2.61) для вказаних на схемі дії $u_{\text{вх}}$ і відгуку $u_{\text{вих}}$. Перевірити для даного кола граничні співвідношення (2.7) і (2.8) між $g(t)$ і $H(j\omega)$. Побудувати графік перехідної характеристики за умови $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$.

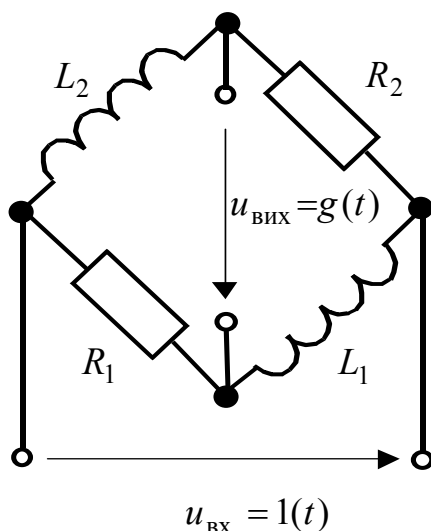


Рисунок 2.61 – Схема електричного кола

Відповідь: $g(t) = (1 - e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \cdot 1(t)$, де $\tau_1 = L_1 / R_1$, $\tau_2 = L_2 / R_2$;
 $g(\infty) = H(j0) = 1$; $g(+0) = H(j\infty) = -1$.

7. Як визначається і які властивості має типова дія у вигляді дельта-функції? Чи порушуються при цій дії закони комутації?

8. Дати визначення імпульсної характеристики кола $h(t)$. Які її розмірність і фізичне значення? Як експериментально знайти імпульсну характеристику?

9. Який аналітичний зв'язок існує між імпульсною і перехідною характеристиками кола? Коли імпульсна характеристика містить дельтаподібний доданок?

10. Знайти імпульсну характеристику кола (рис.2.61), використовуючи її зв'язок з перехідною характеристикою.

Відповідь: $h(t) = \left(\frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \cdot 1(t) - \delta(t)$.

11. Яким співвідношенням для кіл R, C ; R, L першої групи між сталими часу і часовими параметрами дії відповідає неспотворена передача та інтегрування дії?

12. За яких співвідношень між сталими часу кіл R, C ; R, L другої групи і часовими параметрами дії спостерігається неспотворене відтворення і диференціювання дії?

13. Як пов'язані стала часу і гранична частота смуги пропускання типових кіл R, C ; R, L ?

14. Перевірити для імпульсних характеристик високочастотних коливальних контурів виконання співвідношення

$$2\Delta\omega_{\text{п}}\tau = 2,$$

де $\tau = 1/\delta$ – стала часу.

15. Які особливості мають часові характеристики високодобротних індуктивно зв'язаних контурів?

16. Яку з часових характеристик доцільно використовувати для аналізу відгуку кола на ступінчасту дію?

17. Знайти відгук кола з імпульсною характеристикою, наведеною у прикладі 2.9, на дію прямокутних відеоімпульсів $s_{\text{вх}\Pi}(t)$ висотою A і тривалостями $0,5\tau_i$; $2\tau_i$. Побудувати графіки $s_{\text{вих}\Pi}(t)$.

$$\text{Відповідь: 1) } s_{\text{вих}\Pi}(t) = \begin{cases} Ah_0 t & \text{при } 0 < t \leq 0,5\tau_i; \\ 0,5Ah_0\tau_i & \text{при } 0,5\tau_i < t \leq \tau_i; \\ Ah_0(1,5\tau_i - t) & \text{при } \tau_i < t \leq 1,5\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 1,5\tau_i; \end{cases}$$

$$2) s_{\text{вих}\Pi}(t) = \begin{cases} Ah_0 t & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ Ah_0\tau_i & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ Ah_0(3\tau_i - t) & \text{при } 2\tau_i < t \leq 3\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 3\tau_i. \end{cases}$$

18. Знайти напругу на виході кола (рис.2.61) при вхідній дії у вигляді прямокутного імпульсу $u_{\text{вх}\Pi}(t)$ з параметрами: висота – U_0 ; тривалість – τ_i . Побудувати графік $u_{\text{вих}}(t)$ за умов $\tau_i = t_0 \approx 0,7\tau$; $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$.

Відповідь:

$$u_{\text{вих}}(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right) \cdot 1(t) - U_0 \left(1 - e^{-(t-\tau_i)/\tau_1} - e^{-(t-\tau_i)/\tau_2} \right) \cdot 1(t - \tau_i).$$

19. Чи можна застосувати інтеграл накладання для аналізу перехідних процесів за ненульових початкових умов у колі?

20. Пояснити термін **згортка** стосовно інтегралів накладання з використанням імпульсної характеристики кола.

21. Розв'язати приклад 2.9, застосовуючи інтеграл накладання з використанням імпульсної характеристики кола.

22. Знайти відгук кола $s_{\text{вих}}(t)$ на дію $s_{\text{вх}}(t)$, якщо дія $s_{\text{вх}}(t)$ та імпульсна характеристика кола $h(t)$ дзеркальні одна відносно одної (рис.2.62). Побудувати графік $s_{\text{вих}}(t)$.

Відповідь:

$$s_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ Ah_0 \left(\frac{t^2}{2\tau_i} - \frac{t^3}{6\tau_i^2} \right) & \text{при } 0 < t \leq \tau_i; \\ Ah_0 \left(\frac{2\tau_i}{3} - \frac{t^2}{2\tau_i} + \frac{t^3}{6\tau_i^2} \right) & \text{при } \tau_i < t \leq 2\tau_i; \\ 0 & \text{при } t > 2\tau_i. \end{cases}$$

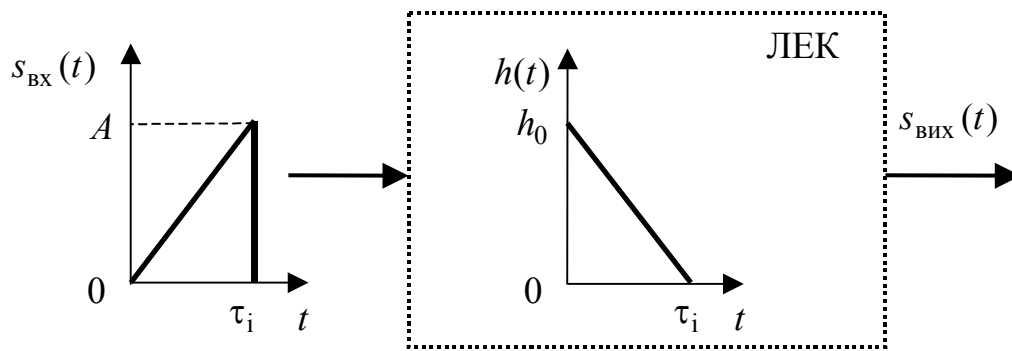


Рисунок 2.62 – До завдання 22

23. За яких умов можна застосовувати інтеграли накладання для комплексних обвідних дії та імпульсної характеристики кола?

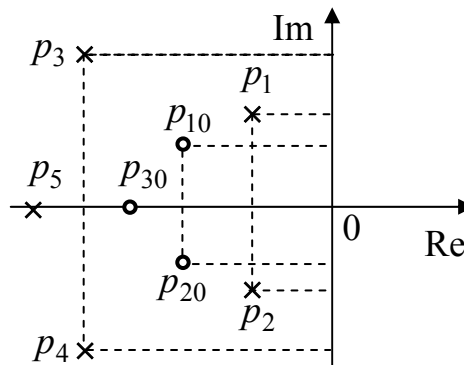
24. Розв'язати приклад 2.20 за умови, коли частота вхідного радіоімпульсу зменшується за лінійним законом $f(t) = f_{\text{рез}} - \alpha t$.

3 Операторний метод дослідження кіл у нестационарному режимі

- ❑ Пряме перетворення Лапласа. Оригінали і зображення
- ❑ Зображення деяких дій
- ❑ Співвідношення між зображеннями струмів і напруг в елементах кола
- ❑ Операторна форма закону Ома і законів Кірхгофа за нульових початкових умов $I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}$
- ❑ Визначення оригіналу відгуку
- ❑ Урахування ненульових початкових умов $H(p) = \frac{A(p)}{V(p)}$
- ❑ Операторна передатна функція кола, її властивості. Нулі та полюси операторної передатної функції
- ❑ Операторна вхідна функція кола, її властивості
- ❑ Зв'язок операторної передатної функції з комплексною передатною функцією. Амплітудно-квадратична характеристика кола, її властивості
- ❑ Мініміально- та немініміально-фазові кола
- ❑ Операторна передатна функція неспотворюючого кола
- ❑ Зв'язок операторної передатної функції з часовими характеристиками

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp$$



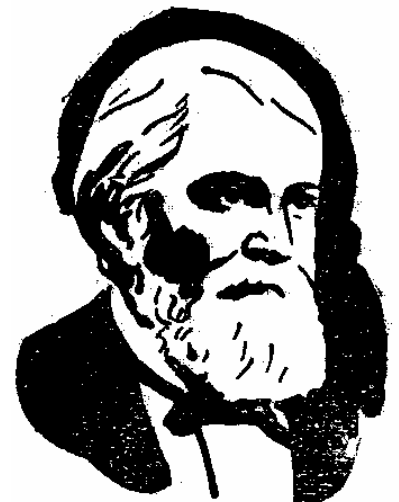
$$H(p) = k_1 \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_{0i})}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$



Лаплас



Ріман



Ващенко-Захарченко

3 ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КІЛ У НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

Класичний метод дослідження кіл у нестационарному режимі є ефективним за наявності у колі не більше двох незалежних накопичувачів енергії та за умови, що коло живиться в усталеному режимі від джерела постійної чи синусоїдної напруги (струму). При цьому вільна і вимушена складові мають певне фізичне значення, а їхні параметри можна дослідити безпосередньо за схемою кола. Збільшення порядку кола суттєво ускладнює обчислення сталих інтегрування, які визначають вільні коливання. Крім того, при дії джерела коливань довільної форми визначення вимушеної складової стає громіздкою задачею. За цих умов ефективнішим є розв'язання диференціального рівняння кола за допомогою **операційного числення**. Одним з перших вітчизняних вчених, хто застосував операційне числення для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь, був М.Є. Ващенко-Захарченко¹.

Метод аналізу кіл у нестационарному режимі з використанням операційного числення має назву **операторного методу**.

Операторний метод не потребує визначення сталих інтегрування і початкових значень відгуку, а дозволяє, розв'язуючи алгебраїчні рівняння, складені на підставі закону Ома та законів Кірхгофа, отримати функцію, однозначно пов'язану з відгуком.

3.1 Пряме перетворення Лапласа. Оригінали і зображення

Операторний метод ґрунтується на перетворенні функції $f(t)$ дійсної змінної t (миттєвого значення струму чи напруги) у функцію $F(p)$ комплексної змінної p (оператор $p = \sigma + j\omega$ має назву комплексної частоти) за допомогою прямого перетворення Лапласа²:

¹ **Ващенко-Захарченко Михайло Єгорович** (1825–1912) – український математик. Народився у Полтавській області, навчався у Київському університеті, потім у Парижі. Монографія «Символічне числення та його застосування до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь» (1862) була однією з перших робіт з операційного числення. Надрукував низку посібників з математики (елементарна геометрія, короткий курс теорії визначників, аналітична геометрія та алгебраїчний аналіз).

² **Лаплас П'єр Сімон**, Laplace (1749–1827) – французький математик, фізик і астроном, член Паризької, Петербурзької та інших АН. Автор багатьох фундаментальних робіт з математики, експериментальної і математичної фізики та небесної механіки. Розвинув теорію диференціальних рівнянь, теорію ймовірностей, теорію помилок. Займався питаннями теплопровідності, електродинаміки. Запропонував новий метод обчислення орбіт небесних тіл, розробив теорію руху супутників Юпітера, визначив величину стиснення Землі біля полюсів тощо.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (3.1)$$

Функція дійсної змінної $f(t)$ називається **оригіналом**, а відповідна їй функція комплексної змінної $F(p)$ – зображенням за Лапласом або просто **зображенням**. До простору оригіналів належать функції, які:

1) мають нульове значення при від'ємних значеннях аргументу: $f(t) = 0, t < 0$ (з огляду на це, нижня межа інтеграла (3.1) дорівнює нулю, а перетворення (3.1) має назву однобічного);

2) мають обмежене зростання: $|f(t)| < Me^{\sigma t}$, де M, σ – дійсні додатні величини;

3) належать до кусково-неперервних функцій, котрі зі своїми похідними досить високого порядку є неперервними при всіх значеннях $t > 0$, крім скінченної кількості точок розриву першого роду.

Слід зазначити, що всі дії, які генеруються реальними джерелами, – це функції, що задовольняють наведеним вимогам, тобто належать до простору оригіналів. Відповідність зображення оригіналу позначається: $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ і є однозначною. Функції $F(p)$ утворюють простір зображень і мають низку властивостей, що полегшує зворотній перехід до оригіналу.

3.2 Зображення деяких дій

Нижче розглянуті деякі дії, які описуються простими функціями і часто зустрічаються на практиці. Як і раніше (див. розд.1 і 2), вважається, що комутація (перехід кола у нестационарний режим) відбувається у момент часу $t = 0$.

Увімкнення до кола джерела постійної напруги чи струму можна описати функцією

$$f(t) = A \cdot 1(t),$$

де A – константа, яка залежно від типу джерела вимірюється у вольтах чи амперах; $1(t) = 1, t \geq 0$ – функція Хевісайда.

Зображення функції $1(t)$ визначають за формулою (3.1):

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left. \frac{-e^{-pt}}{p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p};$$

отже
$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{p}, \quad (3.2)$$

тоді
$$\mathcal{L}[A \cdot 1(t)] = \frac{A}{p}. \quad (3.3)$$

Якщо дією є експоненційний імпульс (рис.3.1), оригінал, що йому відповідає, записується як $f(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot 1(t)$, де $A = f(0)$; коефіцієнт α (одиниця вимірювання s^{-1}) визначає швидкість спаду імпульсу.

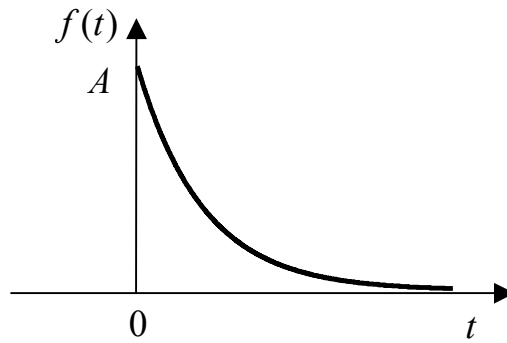


Рисунок 3.1 – Експоненційний імпульс

Перетворення Лапласа від цієї функції визначається за формулою:

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} dt = -\frac{A e^{-(p+\alpha)t}}{p+\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p+\alpha},$$

на підставі якої можна записати:

$$\mathcal{L}[A e^{\pm \alpha t}] = \frac{A}{p \mp \alpha}. \quad (3.4)$$

Ідеалізацією прямокутного імпульсу з тривалістю τ , висотою $\frac{1}{\tau}$ і одиничною площею, як показано вище (див. підрозд.2.2), є дельта-функція $\delta(t)$ – одиничний імпульс, зображення якої визначається виразом:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt.$$

Добуток двох функцій $\delta(t)$ та e^{-pt} відрізнятиметься від нуля тільки при $t = 0$, оскільки $\delta(t) \neq 0$, якщо $t = 0$. Другий множник у цей момент часу становить $e^{-pt} \Big|_{t=0} = 1$. Тоді $\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$, бо інтеграл від дельта-функції – це площа, обмежена $\delta(t)$ і віссю t , отже

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (3.5)$$

Співвідношення для деяких складніших функцій, що належать до простору оригіналів, наведені у табл.3.1.

Переходячи від оригіналів до зображень, доцільно використовувати властивості прямого перетворення Лапласа. Більшість з цих властивостей формулюється у вигляді теорем, наведених у табл.3.2.

Таблиця 3.1 – Відповідності зображень і оригіналів

№	$\mathcal{L}[f(t)]$	$f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{p}$	1(t)
3	$\frac{1}{p^2}$	t
4	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ($n = 1, 2, \dots$)
5	$\frac{A}{p \pm \alpha}$	$Ae^{\mp \alpha t}$
6	$\frac{A}{p(p + \alpha)}$	$\frac{A}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$
7	$\frac{A}{(p + \alpha)^2}$	$Ate^{-\alpha t}$
8	$\frac{p + \alpha}{p + \beta}$	$\delta(t) + (\alpha - \beta)e^{-\beta t}$
9	$\frac{A}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{A}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$
10	$\frac{Ap}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{A}{\alpha - \beta}(\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t})$
11	$A \frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$	$A \cos(\omega t + \psi)$
12	$A \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$	$A \sin(\omega t + \psi)$
13	$\frac{A(p + \delta) \cos \psi - A\omega \sin \psi}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$	$Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi)$
14	$\frac{A(p + \delta) \sin \psi + A\omega \cos \psi}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$	$Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)$
15	$\frac{A}{p[(p + \delta)^2 + \omega^2]}$	$\frac{A}{\delta^2 + \omega^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\delta t} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\delta}{\omega}\right) \right]$

Таблиця 3.2 – Властивості перетворення Лапласа

№	Теорема	Математичне формулювання
1	Лінійності	$\mathcal{L}[\sum_{k=1}^n A_k f_k(t)] = \sum_{k=1}^n A_k \mathcal{L}[f_k(t)]$
2	Диференціювання	$\mathcal{L}[f'(t)] = p\mathcal{L}[f(t)] - f(+0);$ $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(+0)$
3	Інтегрування	$\mathcal{L}[\int_0^{\infty} f(t)dt] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p}$
4	Запізнення	$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = \mathcal{L}[f(t)] e^{-pt_0}$
5	Згортки	$\mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[\phi(t)] = \int_0^t f(\tau)\phi(t-\tau)d\tau$
6	Граничні співвідношення, якщо існує $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} p\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ $\lim_{p \rightarrow +0} p\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

3.3 Співвідношення між зображеннями струмів і напруг в елементах кола

Опір. Нехай струм $i_R(t)$, який протікає в опорі, описується функцією, що належить до простору оригіналів, тобто $\mathcal{L}[i_R(t)] = I_R(p)$, тоді

$$I_R(p) = \int_0^{\infty} i_R(t) e^{-pt} dt. \quad (3.6)$$

Позначивши зображення напруги $U_R(p)$, на підставі закону Ома можна записати:

$$U_R(p) = \int_0^{\infty} R i_R(t) e^{-pt} dt = R \int_0^{\infty} i_R(t) e^{-pt} dt = R I_R(p);$$

$$U_R(p) = R I_R(p). \quad (3.7)$$

Рівняння (3.7) є операторною формою закону Ома. Отже, зображення напруги дорівнює добутку зображення струму і операторного опору, який збігається зі звичайним опором R .

Індуктивність. Якщо напруга і струм в індуктивності – функції часу, які належать до простору оригіналів, їх зображення становитимуть відповідно:

$$\mathcal{L}[u_L(t)] = U_L(p); \quad \mathcal{L}[i_L(t)] = I_L(p).$$

Миттєве значення струму в індуктивності визначається через миттєве значення напруги $u_L(t)$:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt.$$

Якщо поділити інтервал інтегрування на два півінтервали: до і після комутації, останній вираз матиме вигляд:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+0} u_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_{+0}^t u_L(t) dt.$$

Щоб знайти струм в індуктивності для $t \geq 0$ (після комутації), слід врахувати перший доданок (частину струму), пропорційний (з коефіцієнтом $1/L$) площі, яка обмежена функцією $u_L(t)$ і віссю часу на півінтервалі $(-\infty, +0]$. Ця постійна величина є струмом в індуктивності у момент комутації і позначається $i_L(+0)$. Тоді

$$i_L(t) = i_L(+0) + \frac{1}{L} \int_{+0}^t u_L(t) dt. \quad (3.8)$$

Струм $i_L(+0)$ можна вважати струмом постійного джерела струму, який в момент комутації умовно приєднується до індуктивності. Дію цього джерела враховують функцією $i_L(+0) \cdot 1(t)$, зображення якої визначають за формулою (3.3):

$$\mathcal{L}[i_L(+0) \cdot 1(t)] = \frac{i_L(+0)}{p}. \quad (3.9)$$

Другий доданок у виразі (3.8), тобто зображення тієї частини струму в індуктивності, що змінюється у часі для $t \geq 0$, можна знайти за теоремою інтегрування (табл.3.2):

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt\right] = \frac{1}{pL} U_L(p). \quad (3.10)$$

З урахуванням співвідношень (3.9) і (3.10) рівність (3.8), перетворена за Лапласом, має вигляд:

$$I_L(p) = \frac{i_L(+0)}{p} + \frac{1}{pL} U_L(p). \quad (3.11)$$

За нульових початкових умов ($i_L(-0) = 0$) на підставі першого закону комутації $i_L(-0) = i_L(+0) = 0$ рівняння (3.11) набуває вигляду:

$$I_L(p) = \frac{U_L(p)}{pL}. \quad (3.12)$$

Комплексну величину

$$Z_L(p) = pL \quad (3.13)$$

називають **операторним опором індуктивності**.

Рівняння (3.12) є операторною формою закону Ома для індуктивності за нульових початкових умов.

Ємність. Припустимо, що струм $i_C(t)$ в ємності має зображення $\mathcal{L}[i_C(t)] = I_C(p)$, а напруга $u_C(t)$ – зображення $\mathcal{L}[u_C(t)] = U_C(p)$. Миттєве значення напруги на ємності становить:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt.$$

Якщо поділити інтервал інтегрування на два півінтервали: $(-\infty, +0]$ та $(+0, t]$, тоді

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+0} i_C(t) dt + \frac{1}{C} \int_{+0}^t i_C(t) dt.$$

Тобто напруга на ємності для $t \geq +0$ складається з двох доданків, перший з яких враховує напругу в момент комутації і дорівнює постійній величині $u_C(+0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{+0} i_C(t) dt$, яка пропорційна площі, обмеженій кривою струму $i_C(t)$ та віссю t на півінтервалі $(-\infty, +0]$.

Тоді попереднє рівняння записується у вигляді:

$$u_C(t) = u_C(+0) + \frac{1}{C} \int_{+0}^t i_C(t) dt. \quad (3.14)$$

Напругу $u_C(+0)$ можна також вважати напругою на затискачах ідеального джерела напруги, яке умовно приєднується послідовно з ємністю в момент комутації. Дію цієї напруги на коло для $t \geq 0$ враховують функцією $u_C(+0) \cdot 1(t)$, зображення якої за формулою (3.3) становить:

$$\mathcal{L}[u_C(+0) \cdot 1(t)] = \frac{u_C(+0)}{p}.$$

Другий доданок у виразі (3.14) відповідає змінній напрузі на ємності для $t \geq 0$. Ця напруга обумовлена струмом $i_C(t)$, який належить до простору оригіналів. Згідно з табл.3.2 визначають зображення цього доданку:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int_{+0}^t i_C(t) dt\right] = \frac{I_C(p)}{pC}.$$

Остаточно перетворення за Лапласом виразу (3.14) матиме вигляд:

$$U_C(p) = \frac{u_C(+0)}{p} + \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (3.15)$$

Якщо початкові умови нульові: $u_C(-0) = 0$, з урахуванням другого закону комутації $u_C(+0) = u_C(-0) = 0$ рівняння (3.15) буде таким:

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (3.16)$$

Коефіцієнт при зображенні струму у формулі (3.16) називають **операторним опором ємності** та позначають

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC}. \quad (3.17)$$

Вираз (3.16) є операторною формою закону Ома для ємності за нульових початкових умов. Слід зазначити, що операторні опори можна перетворити в комплексні опори формальною заміною оператора p на $j\omega$. Функція комплексної змінної p , обернена операторному опору, є **операторною провідністю**. Відповідні формули операторних опорів і провідностей елементів кола наведені у табл.3.3.

Таблиця 3.3 – Операторні опори і провідності

Елемент кола	Операторний опір	Операторна провідність
R	R	$G = 1/R$
L	$Z_L(p) = pL$	$Y_L(p) = 1/pL$
C	$Z_C(p) = 1/pC$	$Y_C(p) = pC$

3.4 Операторна форма закону Ома і законів Кірхгофа за нульових початкових умов

На рис.3.2 зображене коло, утворене **послідовним з'єднанням** елементів R, L, C , до якого прикладена напруга $u(t)$. Функція $u(t)$ належить до простору оригіналів.

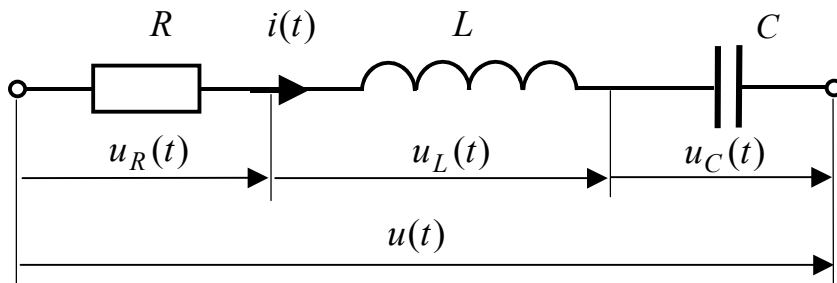


Рисунок 3.2 – Схема послідовного з'єднання елементів R, L, C

Для цієї схеми рівняння за другим законом Кірхгофа при $t \geq 0$ таке:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t).$$

У просторі зображень це рівняння згідно з теоремою лінійності (див. табл.3.2, п.1) набуває вигляду:

$$U(p) = U_R(p) + U_L(p) + U_C(p). \quad (3.18)$$

Вираз (3.18) є **другим законом Кірхгофа в операторній формі**. Якщо врахувати співвідношення (3.7), (3.12) і (3.16), за нульових початкових умов:

$$\begin{cases} i_L(-0) = 0; \\ u_C(-0) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

рівняння (3.18) буде таким (оскільки на підставі законів комутації $i_L(+0) = 0$, $u_C(+0) = 0$):

$$U(p) = RI_R(p) + pLI_L(p) + \frac{1}{pC}I_C(p).$$

Зважаючи на те, що струм при послідовному з'єднанні однаковий для усіх елементів, можна записати:

$$U(p) = RI(p) + pLI(p) + \frac{1}{pC}I(p),$$

або
$$U(p) = I(p)\left(R + pL + \frac{1}{pC}\right). \quad (3.20)$$

Опір, який дорівнює сумі операторних опорів послідовно з'єднаних елементів, є **операторним опором кола** (рис.3.2):

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}. \quad (3.21)$$

Тоді вираз (3.20) матиме вигляд:

$$U(p) = I(p)Z(p), \text{ або}$$

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (3.22)$$

Формула (3.22) є найзагальнішим записом **закону Ома в операторній формі**. Її можна використовувати для складного кола при складній дії за нульових початкових умов.

Для **паралельного з'єднання** елементів R, L, C (рис.3.3) за першим законом Кірхгофа можна записати:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t). \quad (3.23)$$

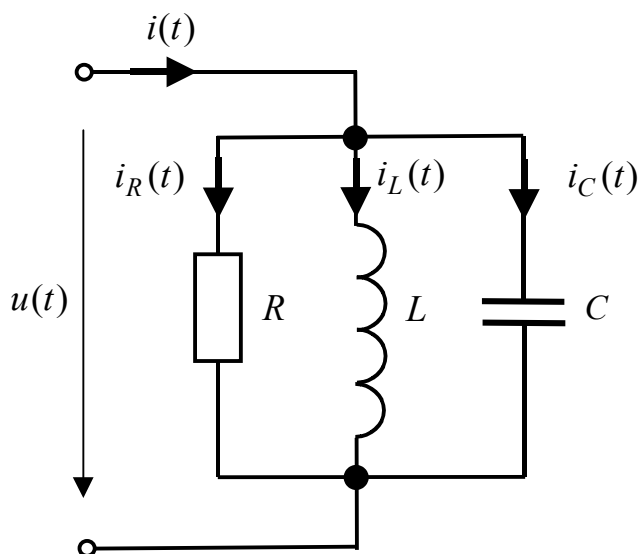


Рисунок 3.3 – Схема паралельного з'єднання елементів R, L, C

Якщо загальний струм $i(t)$ є складною функцією, яка належить до простору оригіналів, враховуючи співвідношення (табл.3.2, п.1) пряме перетворення за Лапласом рівняння (3.23) буде таким:

$$I(p) = I_R(p) + I_L(p) + I_C(p). \quad (3.24)$$

Вираз (3.24) є **першим законом Кірхгофа в операторній формі**. Оскільки з'єднання паралельне, напруга на всіх елементах кола однакова і становить: $u(t)$, $\mathcal{L}[u(t)] = U(p)$.

Виходячи із співвідношень (3.7), (3.12), (3.16), з огляду на нульові початкові умови (3.19), можна записати:

$$I(p) = \frac{U(p)}{R} + \frac{U(p)}{pL} + \frac{U(p)}{1/pC}, \text{ або}$$

$$I(p) = U(p)\left(G + \frac{1}{pL} + pC\right). \quad (3.25)$$

У формулі (3.25) вираз у дужках – це сума операторних провідностей елементів кола (див. табл.3.3), яка утворює **операторну провідність кола** $Y(p)$:

$$Y(p) = G + \frac{1}{pL} + pC. \quad (3.26)$$

З огляду на співвідношення (3.26), рівняння (3.25) матиме вигляд:

$$I(p) = U(p)Y(p). \quad (3.27)$$

Рівняння (3.22), (3.27) є законом Ома в операторній формі відносно затисків двополюсника. Залежно від типу джерела, що вмикається до двополюсника, відгук в операторній формі визначають через операторні опір або провідність, які встановлюють залежність між зображеннями напруги та струму. Операторні опір і провідність двополюсника є оберненими функціями:

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)}. \quad (3.28)$$

Отже, при складних діях, тобто у нестационарному режимі, коло можна описати рівняннями, складеними за законами Ома і Кірхгофа в операторній формі, які аналогічні відповідним законам у комплексній формі для усталеного режиму при синусоїдній дії. Тому усі методи розрахунку кіл для комплексних амплітуд (або комплексних діючих значень) – метод еквівалентних перетворень, накладання, еквівалентного джерела, контурних струмів, вузлових напруг тощо – справедливі для зображень струмів і напруг. Елементи кола при цьому визначаються операторними опорами або операторними провідностями. Єдине обмеження при застосуванні перелічених методів – наявність нульових початкових умов.

Приклад 3.1. Знайти зображення струму у колі (рис.3.4, а), якщо дією є напруга $u(t)$, причому $\mathcal{L}[u(t)] = U(p)$.

Розв'язання. Зображення струму визначимо за законом Ома в операторній формі (3.22):

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

де $Z(p) = R_2 + \frac{1}{Y_1(p)}$ – вхідний опір пасивного двополюсника;

$Y_1(p) = \frac{1}{R_1} + pC = \frac{1 + pR_1C}{R_1}$ – операторна провідність паралельно

з'єднаних опорів R_1 і ємності C .

Після підстановки $Y_1(p)$ виходить:

$$Z(p) = R_2 + \frac{R_1}{1 + pR_1C}, \text{ або}$$

$$Z(p) = \frac{R_1 + R_2 + pR_1R_2C}{1 + pR_1C}. \quad (3.29)$$

Шукане зображення струму становитиме:

$$I(p) = \frac{U(p)(1 + pR_1C)}{R_1 + R_2 + pR_1R_2C} = \frac{U(p)(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(p + \frac{1}{\tau})}, \quad (3.30)$$

де $\tau = C \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ – стала часу, яка визначається при замкнених вхідних за-

тискачах двополюсника.

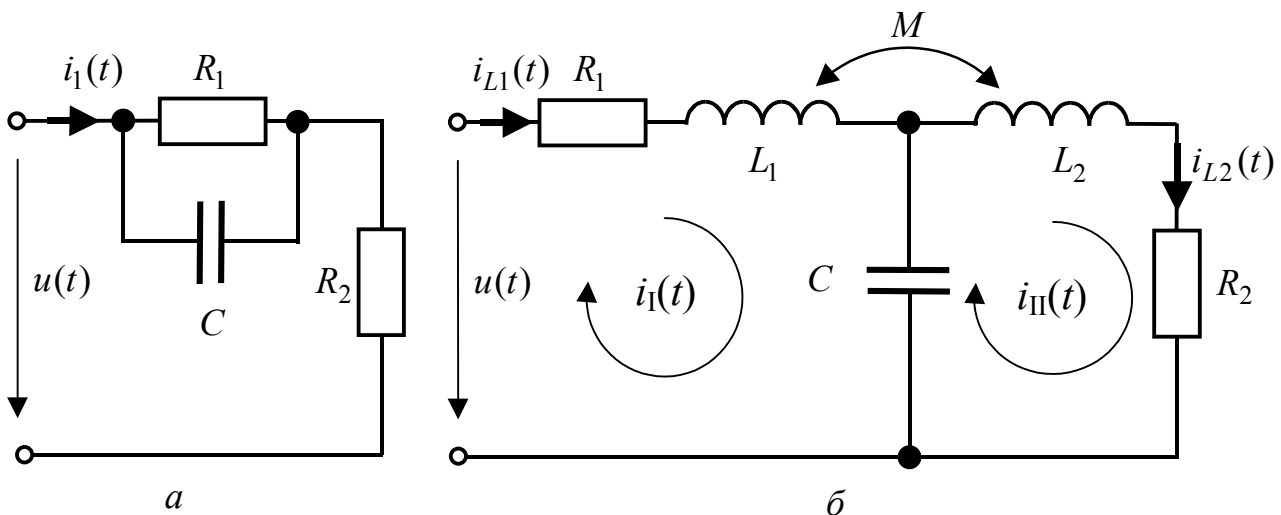


Рисунок 3.4 – Схеми кіл у прикладах: *а* – 3.1; *б* – 3.2

Приклад 3.2. Вважаючи відомим зображення напруги, що діє на затискачах двополюсника (рис.3.4, *б*), визначити зображення $I_{L1}(p)$ струму $i_{L1}(t)$ у котушці L_1 , яка індуктивно зв'язана з котушкою L_2 . Взаємна індуктивність M ; початкові умови нульові: $i_{L1}(-0) = 0$, $i_{L2}(-0) = 0$.

Розв'язання. Операторний опір індуктивності pL отримаємо з комплексного опору $j\omega L$ заміною p на $j\omega$. Аналогічно знаходимо операторний опір взаємної індуктивності $Z_M(p) = pM$ ($Z_M(j\omega) = j\omega M$). Після комутації (увімкнення дії) у колі виникають струми, які визначимо методом контурних струмів.

Вважаючи, що існують відповідності: $\mathcal{L}[i_1(t)] = I_1(p)$, $\mathcal{L}[i_{II}(t)] = I_2(p)$, складемо рівняння за другим законом Кірхгофа відносно зображень контурних струмів:

$$\begin{cases} I_1(p)(R_1 + pL_1 + \frac{1}{pC}) - I_2(p)(\frac{1}{pC} \mp pM) = U(p), \\ -I_1(p)(\frac{1}{pC} \mp pM) + I_2(p)(R_2 + pL_2 + \frac{1}{pC}) = 0. \end{cases}$$

Знак “-” операторного опору взаємної індуктивності відповідає узгодженому увімкненню індуктивно зв'язаних котушок L_1 і L_2 (при цьому напруги само- і взаєміндукції мають однакові знаки), знак “+” відповідає зустрічному увімкненню. Матрична форма розглянутих рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} R_1 + pL_1 + \frac{1}{pC} & -\frac{1}{pC} \pm pM \\ -\frac{1}{pC} \pm pM & R_2 + pL_2 + \frac{1}{pC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(p) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Розв'язуючи систему (3.31) відносно зображення першого контурного струму, яке збігається із зображенням струму індуктивності $I_{L1}(p)$, отримуємо:

$$I_1(p) = \frac{U(p)(pL_2 + R_2 + \frac{1}{pC})}{p^2(L_1L_2 - M^2) + p(L_1R_2 + L_2R_1) + \frac{L_1 + L_2 \pm 2M}{C} + R_1R_2 + \frac{R_1 + R_2}{pC}}, \text{ або}$$

$$I_1(p) = \frac{U(p)(p^2L_2C + pCR_2 + 1)}{p^3C(L_1L_2 - M^2) + p^2C(L_1R_2 + L_2R_1) + p(L_e + CR_1R_2) + R_1 + R_2}, \quad (3.32)$$

де $L_e = L_1 + L_2 \pm 2M$ – еквівалентна індуктивність, причому для реальних кіл завжди виконуються нерівності: $L_1L_2 - M^2 > 0$ і $L_1 + L_2 - 2M > 0$.

Отже, у розглянутих прикладах рівняння відносно зображень струмів, напруг, ЕРС складаються за законами Ома і Кірхгофа в операторній формі безпосередньо за схемою кола. Ці рівняння – алгебраїчні, на відміну від рівнянь для оригіналів, які є інтегро-диференціальними. Розв'язок алгебраїчних рівнянь відносно шуканого зображення відгуку – нескладна алгебраїчна задача.

Так, у прикладах 3.1 і 3.2, зображення шуканих струмів (3.30), (3.32) становлять добуток зображення дії $\mathcal{L}[f_1(t)] = U(p)$ і дробово-раціональної функції

(ДРФ) комплексної змінної p , яка визначає передатні властивості кола. Тобто зображення відгуку $\mathcal{L}[f_2(t)]$ утворює функцію комплексної змінної $F_2(p)$, яка також дробово-раціональна:

$$F_2(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

де $P(p)$ і $Q(p)$ – поліноми комплексної змінної p , коефіцієнти яких – дійсні числа, що залежать від параметрів елементів кола, способу з'єднання елементів, а також від зображення дії.

Тобто $F_2(p)$ є функцією, складнішою за $F_1(p)$, що перетворює перехід до оригіналу відгуку у найскладніший етап аналізу кола у нестационарному режимі операторним методом. Є декілька способів визначення оригіналу відгуку.

3.5 Визначення оригіналу відгуку

Оригінал відгуку можна знайти трьома способами.

Перший спосіб. Необхідно перетворити отримане зображення $F_2(p)$ до вигляду однієї з функцій $F(p)$, які попередньо розраховані та наведені у довідкових таблицях, що містять деякі відповідності зображень і оригіналів (див. наприклад, табл.3.1, де зображення записане у лівому стовпчику, а шуканий оригінал – у тому ж рядку праворуч).

Другий спосіб. Якщо $F_2(p)$ – правильний дріб (варіант неправильного дроби розглядатиметься нижче), його треба розкласти на прості дроби (цей прийом застосовують у математиці при інтегруванні) і, виходячи з властивості лінійності перетворення Лапласа, для кожного простого дроби знайти відповідні оригінали, сума яких і утворить відгук $f_2(t)$.

Щоб розкласти $F_2(p)$ на прості дроби, слід визначити корені полінома $Q(p)$, тобто розв'язати рівняння:

$$Q(p) = 0. \quad (3.33)$$

Це дає можливість подати поліном n -го порядку $Q(p)$ у вигляді:

$$Q(p) = b_n(p - p_1)(p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n),$$

де b_n – коефіцієнт при p у найвищому степені.

Якщо поліном $Q(p)$ має прості корені, вони обов'язково будуть дійсними від'ємними числами (у цьому можна переконатись, розв'язуючи рівняння (3.30), (3.32), нижче це буде обгрунтовано). Тоді зображення відгуку матиме вигляд:

$$F_2(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}, \quad (3.34)$$

де A_1, A_2, \dots, A_n – константи, які визначають за методом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях чисельників лівої і правої частин виразу (3.34) або за формулою:

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{P(p)}{Q(p)} (p - p_k). \quad (3.35)$$

Кожному дробу у виразі (3.34) відповідає оригінал $A_k e^{-\alpha_k t}$ (табл.3.1, п.5), причому знак « \rightarrow » у показнику степеня обумовлений від'ємними значеннями коренів p_k .

За наявності кратних дійсних коренів p_k функція $F_2(p)$ містить прості дроби:

$$\frac{A_v}{(p - p_k)^v} + \frac{A_{v-1}}{(p - p_k)^{v-1}} + \dots + \frac{A_1}{p - p_k}, \quad (3.36)$$

де v – кратність кореня p_k .

Якщо поліном $Q(p)$ має комплексно-спряжені прості корені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$, кожній парі таких коренів відповідає простий дріб

$$\frac{Bp + D}{p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (3.37)$$

Слід зауважити, що коефіцієнти b_1, b_0 – дійсні та додатні, а коефіцієнти полінома $Q(p)$ – дійсні. Це можливо за умови: $\text{Re } p < 0$. Знаменник дроби (3.37) можна записати, як $(p + \delta - j\omega)(p + \delta + j\omega) = p^2 + 2\delta p + \delta^2 + \omega^2$, тобто $b_1 = 2\delta$, $b_0 = \delta^2 + \omega^2$. Тоді можна скористатись відповідністю (табл.3.1, п.13):

$$\mathcal{L}[Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi)] = \frac{A \cos \psi p + A(\delta \cos \psi - \omega \sin \psi)}{(p + \delta)^2 + \omega^2}.$$

Щоб визначити коефіцієнти A і ψ , треба розв'язати систему:

$$\begin{cases} A \cos \psi = B; \\ A(\delta \cos \psi - \omega \sin \psi) = D. \end{cases}$$

Якщо поліном $Q(p)$ має комплексно-спряжені корені $p_k = -\delta_k \pm j\omega_k$, кратність яких v , тоді зображення $F_2(p)$ містить прості дроби:

$$\frac{B_v p + D_v}{(p^2 + b_1 p + b_0)^v} + \frac{B_{v-1} p + D_{v-1}}{(p^2 + b_1 p + b_0)^{v-1}} + \dots + \frac{B_1 p + D_1}{p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (3.38)$$

Як правило, кратність коренів не перевищує двох.

Якщо дріб $F_2(p)$ – неправильний, необхідно виділити цілу частину, тобто подати його як суму многочлена і правильного дроби. Так, якщо функція

$F_2(p) = \frac{p + a}{p + b}$, діленням чисельника на знаменник знаходять зображення:

$$F_2(p) = 1 - \frac{b - a}{p + b}, \quad (3.39)$$

якому відповідає оригінал $f_2(t) = \delta(t) - (b - a)e^{-bt}$.

Третій спосіб. Перехід від зображення $F_2(p)$ до оригіналу можна виконати за оберненим перетворенням Лапласа, яке для відповідності $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ має вигляд:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (3.40)$$

В теорії функцій комплексної змінної формула (3.40) має назву формули обернення Рімана³ – Мелліна⁴. Обернене перетворення Лапласа визначають, обчислюючи лишки функції $F_2(p)$ в особливих точках, які збігаються зі значеннями коренів p_k полінома $Q(p)$ (3.33). Якщо кількість особливих точок дорівнює s , можна записати:

$$f_2(t) = \sum_{k=1}^s \text{res}_k F_2(p) e^{pt}. \quad (3.41)$$

Значення лишку визначається за формулою:

$$\text{res}_k F_2(p) e^{pt} = \left. \frac{P(p)}{Q'(p)} e^{pt} \right|_{p=p_k}. \quad (3.42)$$

Якщо корені – комплексно-спряжені, лишки теж комплексно-спряжені, а їх сума дорівнює $2\text{Re}[\text{res}]$. Формула (3.41) дозволяє визначити лишки для простих коренів. За наявності кратних коренів p_k з кратністю s лишок визначається як

$$\text{res}_k F_2(p) e^{pt} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \left[\frac{P(p)}{Q(p)} (p-p_k)^s e^{pt} \right] \Bigg|_{p=p_k}. \quad (3.43)$$

Нижче наведені приклади визначення оригіналів відгуків.

Приклад 3.3. Знайти оригінал відгуку $i(t)$ в схемі з прикладу 3.1 (рис.3.4, а), якщо дією є напруга $u(t) = U_0 e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$.

Розв'язання. Зображення дії на підставі виразу (3.4) становить:

$$U(p) = \frac{U_0}{p + \alpha}. \quad (3.44)$$

³ **Ріман Георг Фрідріх Бернгард**, Riemann (1826–1866) – німецький математик. Створив і застосував для розв'язання фізичних задач нові методи інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними. Його ім'ям названі: теорема про алгебраїчні функції (теорема Рімана-Роха), матриця у теорії абелевих функцій, метод розв'язання гіперболічних рівнянь, функції Рімана та ін. Увів так звані Ріманові поверхні, важливі при дослідженнях аналітичних функцій. Його роботи відіграли значну роль у розвитку теорії функцій комплексної змінної та аналітичної теорії чисел.

⁴ **Меллін Роберт Хільмар** (1854–1933) – фінський математик. Професор, а згодом директор Політехнічної школи у Гельсинкі. Основні праці присвячені диференціальним та інтегральним рівнянням. Інтегральне перетворення Мелліна широко застосовують у математичній фізиці та теорії функцій.

За формулою (3.30) з урахуванням співвідношення (3.44) запишемо зображення відгуку:

$$I(p) = \frac{U_0(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(p + \alpha)(p + \frac{1}{\tau})} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Використовуючи значення коренів знаменника $Q(p)$ $p_1 = -\alpha$, $p_2 = -\frac{1}{\tau}$, розкладемо $I(p)$ на прості дроби:

$$I(p) = \frac{A_1}{p + \alpha} + \frac{A_2}{p + \frac{1}{\tau}}. \quad (3.45)$$

Коефіцієнти A_1, A_2 знайдемо за формулою (3.35):

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} I(p)(p - p_1) = \frac{U_0(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(p + \frac{1}{\tau})} \Bigg|_{p = -\alpha} = \frac{U_0(\frac{1}{CR_1} - \alpha)}{R_2(\frac{1}{\tau} - \alpha)};$$

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} I(p)(p - p_2) = \frac{U_0(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(p + \alpha)} \Bigg|_{p = -\frac{1}{\tau}} = \frac{U_0(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{CR_1})}{R_2(\frac{1}{\tau} - \alpha)}. \quad (3.46)$$

Отже, коефіцієнти A_1 і A_2 визначені через параметри кола та дії. Враховуючи вираз (3.4), перетворимо зображення струму (3.45) до оригіналу:

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.47)$$

Вигляд часової діаграми відгуку залежить від співвідношення між α і $1/\tau$. Спочатку розглянемо варіант $\alpha < \frac{1}{\tau}$. Нехай $\alpha = \frac{1}{4\tau}$. Для спрощення візьмемо $R_1 = R_2 = R$ ($\tau = CR/2$), тоді з урахуванням виразу (3.46) матимемо:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{CR}, \quad \alpha = \frac{1}{2CR}, \quad \frac{1}{\tau} - \alpha = \frac{3}{2CR}, \quad A_1 = \frac{U_0}{3R}, \quad A_2 = \frac{2U_0}{3R},$$

а шуканий струм становитиме:

$$i(t) = \frac{U_0}{3R} (e^{-\frac{t}{2RC}} + 2e^{-\frac{2t}{RC}}).$$

Графік миттєвого значення струму зображено на рис.3.5, а. Струм, як і дія, має імпульсну форму, але імпульс відгуку “гостріший” і прямує до нуля, залишаючись додатним.

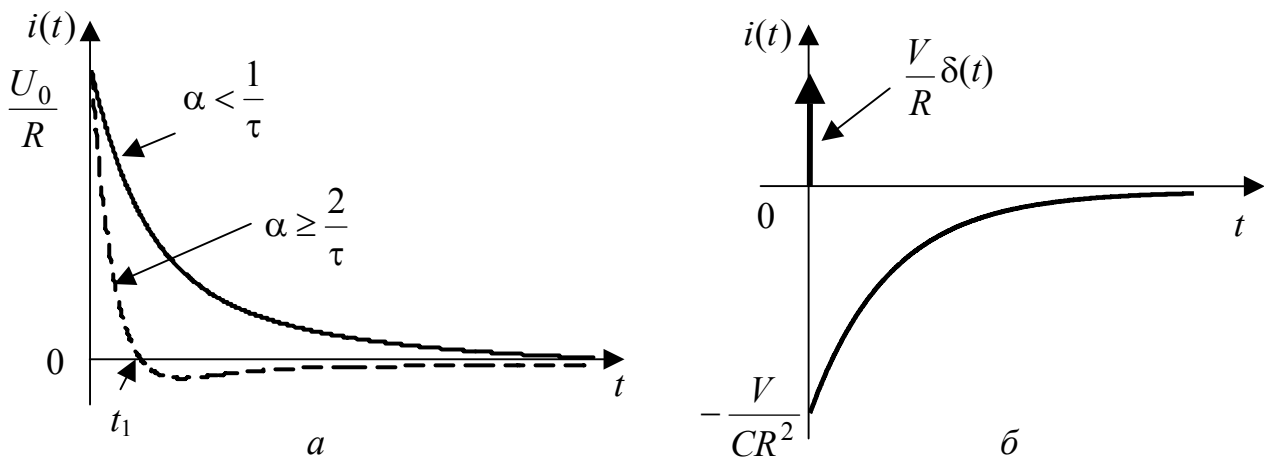


Рисунок 3.5 – Часова залежність струму у прикладах: *a* – 3.3; *б* – 3.4

Знайдемо струм при $\alpha \geq \frac{2}{\tau}$. Нехай $\alpha = \frac{2}{\tau}$, $R_1 = R_2 = R$, тоді

$\frac{1}{\tau} - \alpha = -\frac{2}{RC}$, $A_1 = \frac{3U_0}{2R}$, $A_2 = -\frac{U_0}{2R}$, а шуканий струм становитиме:

$$i(t) = \frac{U_0}{2R} \left(3e^{-\frac{4t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}} \right).$$

З графіка $i(t)$, зображеного на рис.3.5, *a*, видно, що струм також має імпульсну форму, але на відміну від попереднього випадку в момент часу t_1 змінює свій напрямок внаслідок розрядження ємності.

Приклад 3.4. Визначити оригінал струму у прикладі 3.3 за умови дії $u(t) = V\delta(t)$ (постійна величина V має розмірність В·с).

Розв'язання. Зображення дії знайдемо, враховуючи формулу (3.5): $\mathcal{L}[V \cdot \delta(t)] = V$.

Згідно з виразом (3.30) зображення відгуку має вигляд:

$$I(p) = \frac{V(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(p + \frac{1}{\tau})}.$$

Оскільки зображення струму – неправильний дріб, виділимо цілу частину аналогічно виразу (3.39):

$$I(p) = \frac{V}{R_2} \left(1 + \frac{\frac{1}{CR_1} - \frac{1}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}} \right).$$

З урахуванням перетворень $\frac{1}{CR_1} - \frac{1}{\tau} = \frac{1}{CR_1} - \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} = -\frac{1}{CR_2}$ запишемо оригінал відгуку:

$$i(t) = \frac{V}{R_2} \left[\delta(t) - \frac{1}{CR_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \quad (3.48)$$

що збігається з відповідністю (табл.3.1, п.8).

Часова діаграма відгуку, як і дії, містить дельта-функцію (рис.3.5, б). Наявність “від’ємної” експоненти у відгуку пояснюється тим, що за час дії ємність спочатку заряджається, а потім починає розряджатися, що й зумовлює протилежний напрям струму $i(t)$.

Приклад 3.5. Визначити оригінал відгуку $u_C(t)$ у колі, схема якого наведена на рис.3.2, якщо дією є напруга $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$, за умови $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Розв’язання. Знаючи значення зображення (3.22) струму у колі, а також загального операторного опору кола (3.21), знайдемо зображення напруги на ємності за формулою (3.16):

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} \cdot \frac{U(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}}, \text{ або}$$

$$U_C(p) = \frac{U(p)}{p^2 LC + pCR + 1}. \quad (3.49)$$

Зображення дії знайдемо за формулою (3.3): $U(p) = \frac{U_0}{p}$. Тоді

$$U_C(p) = \frac{U_0}{p(p^2 LC + pCR + 1)}.$$

Використовуючи введені вище (див. підрозд.1.3) позначення $\delta = \frac{R}{2L}$; $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, запишемо зображення відгуку:

$$U_C(p) = \frac{U_0 \omega_{\text{рез}}^2}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2)}. \quad (3.50)$$

З виразу (3.50) видно, що зображення напруги на ємності є ДРФ, тобто $U_C(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$. Отже, визначимо корені полінома $Q(p)$:

$$p(p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2) = 0; \quad p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -\delta \pm j\omega_{\text{вл}}, \text{ де}$$

$$\omega_{\text{вл}} = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 - \delta^2}. \quad (3.51)$$

Якщо розкласти вираз $p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2$ на множники:

$$(p - p_2)(p - p_3) = (p + \delta - j\omega_{\text{вл}})(p + \delta + j\omega_{\text{вл}}) = (p + \delta)^2 + \omega_{\text{вл}}^2,$$

вираз (3.50) матиме вигляд:

$$U_C(p) = \frac{U_0 \omega_{\text{рез}}^2}{p[(p + \delta)^2 + \omega_{\text{вл}}^2]}.$$

Скориставшись відповідністю (табл.3.1, п.15), запишемо оригінал відгуку:

$$u_C(t) = \frac{U_0 \omega_{\text{рез}}^2}{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t - \psi) \right],$$

$$\text{де } \psi = \text{arctg} \frac{\delta}{\omega_{\text{вл}}},$$

або остаточно з урахуванням співвідношення (3.51):

$$u_C(t) = U_0 \left[1 - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t - \psi) \right]. \quad (3.52)$$

Вираз (3.52) збігається з результатом, отриманим вище в п.1.3.4 (формула (1.66)).

Приклад 3.6. У колі, розглянутому у прикладі 3.1 (рис.3.4, а), діє напруга $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \cdot 1(t)$. Визначити оригінал відгуку операторним методом.

Розв'язання. Згідно з табл. 3.1, п.11 запишемо зображення дії:

$$U(p) = U_m \frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.53)$$

Знаменник виразу (3.53) містить поліном другого степеня від p . Оскільки степінь полінома у зображенні відгуку ще вищий (див. формулу (3.30), щоб його понизити і відповідно спростити перетворення, скористаємось відомим співвідношенням:

$$u(t) = \text{Re}[U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}] = \text{Re}[\underline{U}_m e^{j\omega t}]; \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$$

і знайдемо зображення не миттєвого значення $u(t)$, а комплексної функції, яка стоїть під знаком реальної частини, згідно з формулою (табл.3.1, п.5):

$$\mathcal{L}[\underline{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{\underline{U}_m}{p - j\omega}. \quad (3.54)$$

Враховуючи комутативність операції взяття реальної частини, після визначення комплексного оригіналу відгуку від нього слід взяти реальну частину.

Підставимо у зображення струму (3.30) замість зображення дії (3.53) вираз (3.54):

$$I(p) = \frac{\underline{U}_m}{p - j\omega} \cdot \frac{p + \frac{1}{CR_1}}{R_2(p + \frac{1}{\tau})} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Визначимо комплексний оригінал за допомогою лишків (див. формулу (3.42)). Корені полінома $Q(p)$ становлять: $p_1 = j\omega$, $p_2 = -\frac{1}{\tau}$; похідна $Q'(p) = R_2(2p + \frac{1}{\tau} - j\omega)$. Тоді перший лишок матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \text{res}_1 I(p)e^{pt} &= \left. \frac{\underline{U}_m(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(2p + \frac{1}{\tau} - j\omega)} e^{pt} \right|_{p=j\omega} = \\ &= \frac{\underline{U}_m(j\omega + \frac{1}{CR_1})}{R_2(2j\omega + \frac{1}{\tau} - j\omega)} e^{j\omega t} = \frac{\underline{U}_m(j\omega CR_1 + 1)\tau}{CR_1 R_2(j\omega\tau + 1)} e^{j\omega t} = \frac{U_m e^{j\psi_u} \sqrt{(\omega CR_1)^2 + 1} e^{j\varphi_1}}{(R_1 + R_2)\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} e^{j\varphi}} e^{j\omega t} = \\ &= \frac{U_m}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{(\omega CR_1)^2 + 1}{(\omega\tau)^2 + 1}} e^{j(\omega t + \psi_u + \varphi_1 - \varphi)}, \end{aligned}$$

де $\varphi_1 = \text{arctg } \omega CR_1$, $\varphi = \text{arctg } \omega\tau$.

$$\begin{aligned} \text{Другий лишок} \quad \text{res}_2 I(p)e^{pt} &= \left. \frac{\underline{U}_m(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(2p + \frac{1}{\tau} - j\omega)} e^{pt} \right|_{p=-\frac{1}{\tau}} = \\ &= \frac{\underline{U}_m(\frac{1}{CR_1} - \frac{1}{\tau})}{R_2(-\frac{2}{\tau} + \frac{1}{\tau} - j\omega)} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\underline{U}_m \frac{\tau}{CR_2}}{R_2(1 + j\omega\tau)} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_m e^{j\psi_u} R_1}{R_2(R_1 + R_2)\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-\frac{t}{\tau}} = \\ &= \frac{U_m R_1 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_2(R_1 + R_2)\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{j(\psi_u - \varphi)}. \end{aligned}$$

Остаточню оригінал визначимо як реальну частину суми лишків:

$$\begin{aligned} i(t) = \text{Re}[\text{res}_1 + \text{res}_2] &= \frac{U_m}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{(\omega CR_1)^2 + 1}{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos(\omega t + \psi_u + \varphi_1 - \varphi) + \\ &+ \frac{U_m R_1 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_2(R_1 + R_2)\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\psi_u - \varphi) = \\ &= \frac{U_m}{(R_1 + R_2)\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \left[\sqrt{(\omega CR_1)^2 + 1} \cos(\omega t + \psi_u + \varphi_1 - \varphi) + \frac{R_1}{R_2} \cos(\psi_u - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \end{aligned}$$

Приклад 3.7. Знайти відгук у прикладі 3.3 при $\alpha = \frac{1}{\tau}$.

Розв'язання. За даної умови зображення струму матиме вигляд:

$$I(p) = \frac{U_0(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(p + \alpha)^2}. \quad (3.55)$$

Оскільки знаменник дробу має корінь другої кратності, скористаємось розкладанням зображення $I(p)$ на прості дробу вигляду (3.36):

$$I(p) = \frac{A_1}{(p + \alpha)^2} + \frac{A_2}{p + \alpha}. \quad (3.56)$$

Якщо вираз (3.56) привести до загального знаменника, чисельник дробу утворить поліном: $P(p) = A_1 + A_2(p + \alpha)$. Константи A_1, A_2 знайдемо з умови рівності чисельників правої частини виразу (3.55) і полінома $P(p)$:

$$A_1 + A_2(p + \alpha) = \frac{U_0}{R_2} \left(p + \frac{1}{CR_1} \right).$$

Очевидно, що рівність виконується, коли збігаються коефіцієнти при однакових степенях p :

$$\begin{cases} A_1 + A_2\alpha = \frac{U_0}{CR_1R_2}; \\ A_2 = \frac{U_0}{R_2}. \end{cases} \quad (3.57)$$

Друге рівняння безпосередньо визначає константу A_2 , а підстановка A_2 у перше дозволяє знайти A_1 .

Відповідно до табл.3.1 (п.5, п.7) оригінал, який відповідає зображенню (3.56), становить: $i(t) = A_1te^{-\alpha t} + A_2e^{-\alpha t} = (A_1t + A_2)e^{-\alpha t}$.

Якщо $R_1 = R_2 = R$: $\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{2}{RC}$; $A_1 = -\frac{U_0}{CR^2}$; $A_2 = \frac{U_0}{R}$, тоді шуканий струм

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 - \frac{t}{CR} \right). \quad (3.58)$$

Графік часової залежності струму має такий самий вигляд, як і пунктирна крива на рис.3.5, а, але значення t_1 буде меншим.

Приклад 3.8. Знайти оригінал зображення (3.56) за допомогою лишку.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.43) для кореня кратності $s = 2$.

$$i(t) = \frac{d}{dp} \left[\frac{U_0(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2(p + \alpha)^2} (p + \alpha)^2 e^{pt} \right] \Bigg|_{p=-\alpha} = \frac{d}{dp} \left[\frac{U_0(p + \frac{1}{CR_1})}{R_2} e^{pt} \right] \Bigg|_{p=-\alpha} =$$

$$= \frac{U_0}{R_2} \left[e^{pt} + te^{pt} \left(p + \frac{1}{CR_1} \right) \right] \Big|_{p=-\alpha} = \frac{U_0}{R_2} e^{-\alpha t} \left[1 + t \left(\frac{1}{CR_1} - \alpha \right) \right] .$$

Якщо $R_1 = R_2 = R$, $\alpha = \frac{2}{RC}$, тоді $i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 - \frac{t}{RC} \right)$, що сходиться з результатом (3.58).

3.6. Урахування ненульових початкових умов

Операторний метод порівняно з іншими вважається найпотужнішим, але всі рівняння в операторній формі передбачають наявність нульових початкових умов, і це є суттєвим обмеженням. Щоб його уникнути, слід розглянути схеми індуктивного та ємнісного елементів, які визначають початкові умови в момент $t = 0$.

Якщо в індуктивності до комутації ($t < 0$) існував струм, зв'язок між струмом і напругою після комутації ($t \geq 0$) відображає вираз (3.8), якому у просторі зображень відповідає рівняння (3.11). Якщо врахувати перший закон комутації $i_L(-0) = i_L(+0)$, рівняння (3.11) можна переписати у такий спосіб:

$$I_L(p) = \frac{i_L(-0)}{p} + \frac{U_L(p)}{pL} . \quad (3.59)$$

Перший доданок у формулі (3.59) визначає зображення струму ідеального залежного джерела, яке умовно підключається до індуктивності в момент $t = +0$ (згідно з виразом (3.9)), але величину струму цього джерела визначено у докомутаційний момент часу $t = -0$, тобто в усталеному режимі. Другий доданок – це зображення струму у знеструмленій на момент комутації індуктивності, яка характеризується операторним опором pL . Цей доданок обумовлений напругою $u_L(t)$, якій відповідає зображення $U_L(p)$. Сума цих зображень – це зображення струму $I_L(p)$ після комутації. Отже, рівняння (3.59) є першим законом Кірхгофа в операторній формі, складеним для операторної схеми (рис.3.6, а).

З виразу (3.59) можна визначити операторну напругу

$$U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(-0) . \quad (3.60)$$

Рівнянню (3.60) відповідає друга операторна схема заміщення індуктивності з ненульовими початковими умовами (рис.3.6, б), оскільки $U_L(p)$ відповідно до другого закону Кірхгофа в операторній формі дорівнює алгебраїчній сумі зображень напруг на двох елементах.

У виразі (3.60) перший доданок $pLI_L(p)$ – це зображення напруги, зумовлене післякомутаційним струмом в індуктивності, яка умовно знеструмлена на момент комутації, другий – зображення напруги на затискачах ідеального джерела напруги, яке дорівнює $Li_L(-0)$ і має напрям, протилежний напрузі на затискачах індуктивності. Тобто це джерело, відповідно до закону електромагнітної індукції, протидіє зміні струму, який існував до комутації.

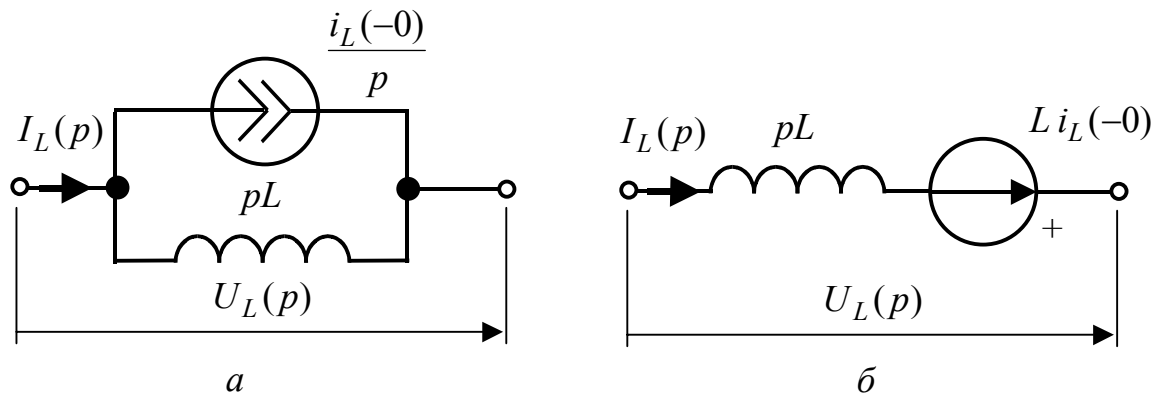


Рисунок 3.6 – Операторні схеми заміщення індуктивності зі струмом: *a* – з джерелом струму; *б* – з джерелом напруги

Операторні схеми індуктивності з ненульовими початковими умовами (рис.3.6, *a*, *б*) – це схеми з залежними джерелами, внутрішнім опором яких є операторний опір індуктивності pL . Перехід від однієї схеми до іншої виконують за відомими правилами еквівалентних перетворень джерел [7, табл.2.1].

Якщо на момент комутації коло містить заряджену ємність ($u_C(-0) \neq 0$), залежність між струмом і напругою для $t \geq +0$ описується рівністю (3.14), якій у просторі зображень відповідає вираз (3.15). У цьому рівнянні на підставі другого закону комутації $u_C(+0)$ можна замінити на $u_C(-0)$:

$$U_C(p) = \frac{u_C(-0)}{p} + \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (3.61)$$

Така заміна спрощує визначення $u_C(-0)$, оскільки момент часу $t = -0$ належить до усталеного режиму.

Рівнянню (3.61) відповідає операторна схема, показана на рис.3.7, *a*. Зображення напруги на ємності $U_C(p)$ складається з двох доданків. Перший визначає зображення напруги на затискачах ідеального залежного джерела напруги, яке умовно (згідно з виразом (3.14)) підключається до незарядженої ємності в момент $t = +0$. Величину ЕРС цього джерела визначають в усталеному режимі в момент часу $t = -0$. Другий доданок – це зображення напруги на незарядженій ємності з операторним опором $\frac{1}{pC}$, викликаній струмом, який має зображення $I(p)$. Слід звернути увагу, що на відміну від схеми індуктивності зі струмом (рис.3.6, *б*), для зарядженої ємності напрями напруги $U_C(p)$ і зображення ЕРС протилежні.

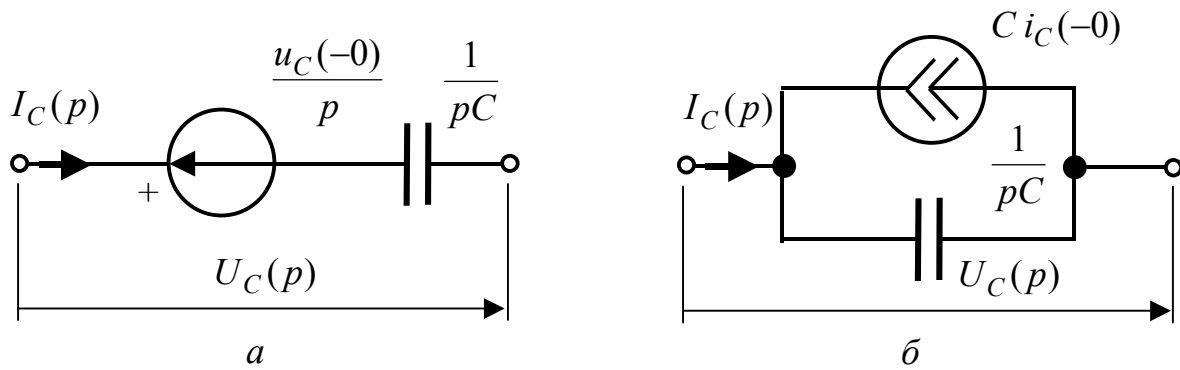


Рисунок 3.7 – Операторні схеми заміщення зарядженої ємності:
a – з джерелом напруги; *б* – з джерелом струму

Формула (3.61) відповідає другому закону Кірхгофа в операторній формі, складеному для операторної схеми (рис.3.7, *a*). Якщо з (3.61) визначити зображення струму, матимемо рівняння, яке є операторною формою першого закону Кірхгофа для схеми (рис.3.7, *б*):

$$I_C(p) = pCU_C(p) - C u_C(-0), \quad (3.62)$$

де $C u_C(-0)$ – зображення струму джерела, що враховує ненульові початкові умови; напрями джерел (рис.3.7) збігаються.

Подібно схемам (рис.3.6) схеми (рис.3.7, *a* і 3.7, *б*) також є еквівалентними.

Отже, за наявності у колі в момент комутації індуктивностей, в яких є струм, а також ємностей, на яких є напруга, в операторній схемі такого кола з'являються додаткові джерела, які враховують ненульові початкові умови. Струми і напруги для $t \geq 0$ обчислюють за законами Кірхгофа і Ома в операторній формі. За наявності декількох джерел відгук визначають методом накладання. Якщо коло розгалужене, розрахунок доцільно виконувати, використовуючи матричні операторні рівняння (методом контурних струмів або вузлових напруг).

Приклад 3.9. Визначити струм $i_2(t)$ після комутації у колі, схема якого зображена на рис.3.8, *a*.

Розв'язання. До комутації струм в індуктивності $i_L(-0) = \frac{E}{R_1}$, отже початкові умови – ненульові. Щоб розрахувати операторним методом струм $i_2(t)$ після комутації, необхідно скласти операторну схему, яка містить додаткове джерело напруги, увімкнене послідовно з індуктивністю (рис.3.6, *б*), зображення ЕРС якого на підставі формули (3.60) становить $Li_L(-0) = \frac{LE}{R_1}$. Еквівалентна операторна схема з додатковою ЕРС, яка враховує ненульові початкові умови,

показана на рис.3.8, б. Зображення ЕРС джерела постійної напруги дорівнює $\frac{E}{p}$.

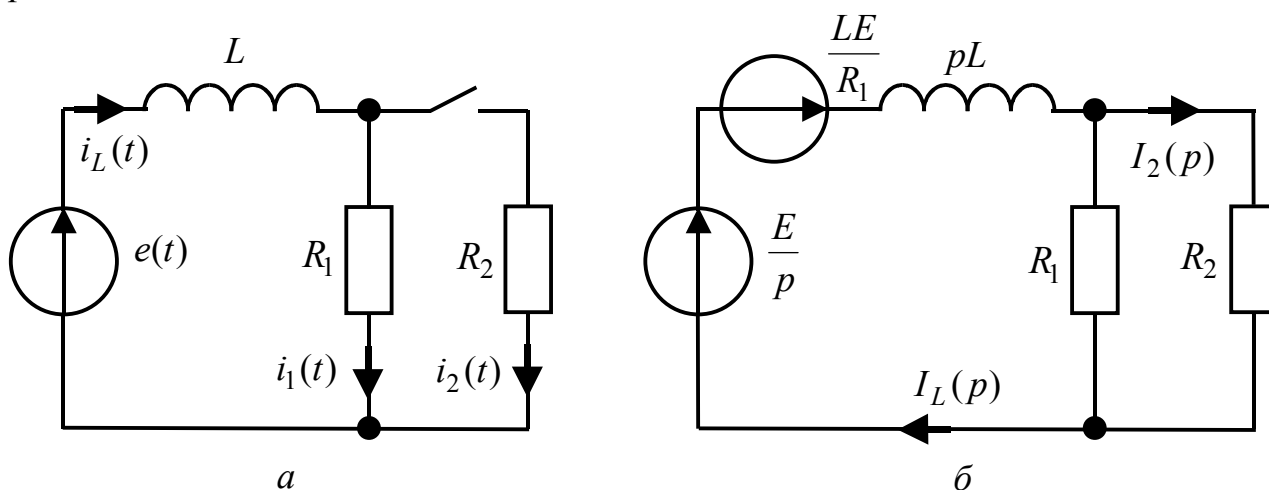


Рисунок 3.8 – Схеми кіл до прикладу 3.9: а – початкова; б – еквівалентна операторна

Визначимо зображення струму $I_L(p)$ за законом Ома в операторній формі:

$$I_L(p) = \frac{E/p + LE/R_1}{Z_e(p)},$$

$$\text{де } Z_e(p) = pL + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Зображення струму $I_2(p)$ знайдемо за правилом розподілу струмів:

$$I_2(p) = I_L(p) \frac{R_1}{R_1 + R_2}:$$

$$I_2(p) = \frac{\left(\frac{E}{p} + \frac{LE}{R_1}\right) R_1}{pL(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{ER_1}{L(R_1 + R_2)p\left(p + \frac{1}{\tau}\right)} + \frac{E}{(R_1 + R_2)\left(p + \frac{1}{\tau}\right)},$$

$$\text{де } \tau = \frac{L}{R_e}; \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Відповідно до табл. 3.1 (п.6, п.5) оригінал шуканого струму становить:

$$i_2(t) = \frac{ER_1 \tau}{L(R_1 + R_2)} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{а після підстановки } \tau:$$

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R_2} \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

3.7 Операторна передатна функція кола, її властивості. Нулі та полюси операторної передатної функції

Диференціальне рівняння (1.2) для кола другого порядку з відгуком $f_2(t)$ і дією $f_1(t)$ має вигляд:

$$b_2 f_2''(t) + b_1 f_2'(t) + b_0 f_2(t) = a_2 f_1''(t) + a_1 f_1'(t) + a_0 f_1(t). \quad (3.63)$$

Характеристичне рівняння, відповідно до виразу (3.63), становить:

$$b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0,$$

де ліва частина – це характеристичний поліном:

$$b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = V(p). \quad (3.64)$$

Відомо, що корені характеристичного рівняння $V(p) = 0$ обумовлюють загасаючий характер вільних коливань. Тому у колі з втратами ці корені розташовані в лівій частині комплексної площини.

Нехай дії $f_1(t)$ відповідає зображення $F_1(p)$, а відгук кола належить до простору оригіналів: $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(p)$. Щоб перевести рівняння (3.63) у простір зображень, необхідно скористатись теоремою диференціювання (табл.3.2, п.2):

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(+0); \quad \mathcal{L}[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0).$$

Вираз (3.63) після підстановки зображення дії, відгуку та їхніх похідних матиме вигляд:

$$\begin{aligned} b_2 [p^2 F_2(p) - pf_2(+0) - f_2'(+0)] + b_1 [pF_2(p) - f_2(+0)] + b_0 F_2(p) = \\ = a_2 [p^2 F_1(p) - pf_1(+0) - f_1'(+0)] + a_1 [pF_1(p) - f_1(+0)] + a_0 F_1(p). \end{aligned}$$

Групування доданків, які містять зображення відгуку і дії, дає:

$$\begin{aligned} F_2(p)(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) - f_2'(+0)b_2 - f_2(+0)(b_2 p + b_1) = \\ = F_1(p)(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) - f_1'(+0)a_2 - f_1(+0)(a_2 p + a_1). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Доцільно ввести такі позначення:

$$\begin{cases} A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0; \\ B(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0; \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\begin{cases} A_0(p) = f_1'(+0)a_2 + f_1(+0)(a_2 p + a_1); \\ B_0(p) = f_2'(+0)b_2 + f_2(+0)(b_2 p + b_1). \end{cases} \quad (3.67)$$

Слід звернути увагу на те, що поліном $B(p)$ збігається з характеристичним поліномом $V(p)$ (3.64):

$$B(p) = V(p).$$

Тоді з урахуванням позначень (3.66) – (3.67) рівняння (3.65) набуває вигляду:

$$F_2(p)V(p) - B_0(p) = F_1(p)A(p) - A_0(p),$$

звідки зображення відгуку

$$F_2(p) = F_1(p) \frac{A(p)}{V(p)} + \frac{B_0(p) - A_0(p)}{V(p)}. \quad (3.68)$$

У реальних колах відгук не може випереджати дію за нульових початкових умов. Для інтервалу часу $t < 0$ за умови $f_1(t) = 0$ (перше обмеження для функцій, які належать до простору оригіналів) відгук має бути нульовим: $f_2(t) = 0$. Це можливо, коли у рівнянні (3.68) відсутній другий доданок, тобто виконується умова

$$B_0(p) - A_0(p) = 0. \quad (3.69)$$

Тоді $F_2(p) = F_1(p) \frac{A(p)}{V(p)}$. Функцію, яка є відношенням двох поліномів комплексної змінної p , позначають:

$$H(p) = \frac{A(p)}{V(p)}. \quad (3.70)$$

Отже, $F_2(p) = F_1(p)H(p)$, звідки

$$H(p) = \frac{F_2(p)}{F_1(p)}. \quad (3.71)$$

Функція $H(p)$ комплексної змінної p , яка дорівнює відношенню зображення відгуку до зображення дії, має назву **операторної передатної функції** (ОПФ), або **операторної характеристики** кола, а ще **системної функції**.

ОПФ характеризує вплив кола на зображення дії. Для лінійного кола $H(p)$ не залежить від параметрів дії, а визначається структурою і параметрами кола, а також типом дії. Так, у розглянутому вище прикладі 3.1 згідно з формулою (3.71), виходячи з виразу (3.30), ОПФ кола (рис.3.4, а) становить:

$$H(p) = \frac{p + \frac{1}{CR_1}}{R_2(p + \frac{1}{\tau})}. \quad (3.72)$$

У прикладі 3.2 (рис.3.4, б) ОПФ кола згідно з виразом (3.32) дорівнює:

$$H(p) = \frac{p^2 L_2 C + p C R_2 + 1}{p^3 C (L_1 L_2 - M^2) + p^2 C (L_1 R_2 + L_2 R_1) + p (L_e + C R_1 R_2) + R_1 + R_2}.$$

Щоб визначити ОПФ, слід задатись зображенням дії $F_1(p)$, потім за законами Ома і Кірхгофа в операторній формі знайти зображення відгуку $F_2(p)$, визначене через $F_1(p)$, і підставити його до формули (3.71). Для складних кіл можна використовувати метод контурних струмів і вузлових напруг в операторній формі, а також узагальнений метод вузлових напруг для кіл, що містять невзаємні елементи.

Приклад 3.10. Знайти ОПФ кола з операційним підсилювачем (рис.3.9). У першій частині підручника [7, приклад 6.1] визначено комплексний коефіцієнт передачі за напругою даного кола:

$$H_U(j\omega) = \frac{U_4}{U_1} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}}.$$

ОПФ визначимо за формулою:

$$H_U(p) = \frac{U_4(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}},$$

яка, на відміну від попереднього виразу, містить відношення алгебраїчних доповнень матриці не комплексних, а операторних провідностей:

$$(Y(p)) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 + pC_1 & -G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_3 & G_3 + pC_2 & -pC_2 \\ 0 & -G_2 & -pC_2 & G_2 + pC_2 \end{pmatrix}.$$

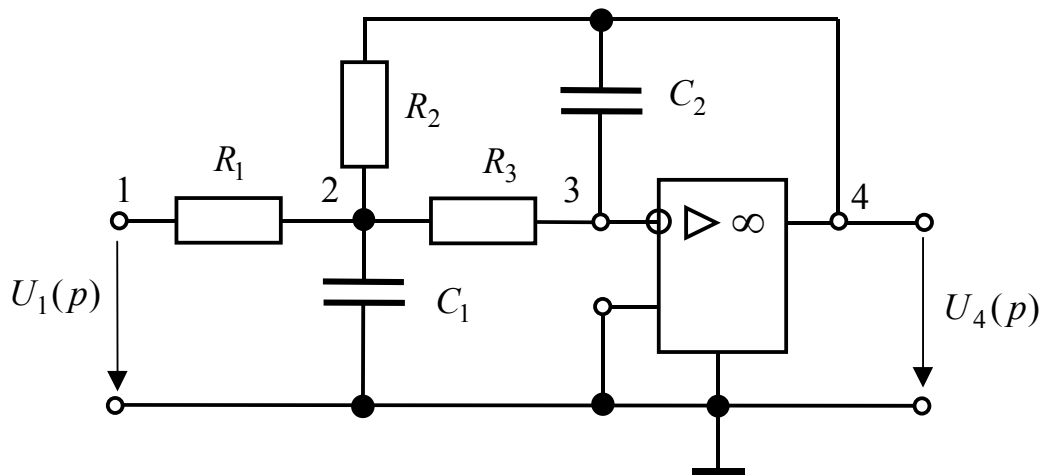


Рисунок 3.9 – Схема кола у прикладі 3.10

Відповідні алгебраїчні доповнення отримуємо, враховуючи відомі правила визначення знаків [7, підрозд. 6.4] та викреслюючи у чисельнику і знаменнику 1 і 4-й рядки, 4 і 3-й стовпці – у чисельнику та 1 і 3-й – у знаменнику:

$$\Delta_{14,43} = -G_1 G_3; \quad \Delta_{11,43} = p^2 C_1 C_2 + p C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3.$$

Остаточно матимемо:

$$H_U(p) = -\frac{G_1 G_3}{p^2 C_1 C_2 + p C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3}. \quad (3.73)$$

Наведений вище аналіз та розглянуті приклади дозволяють сформулювати властивості ОПФ.

1. Згідно з формулою (3.70) ОПФ – це відношення поліномів $A(p)$ і $V(p)$, до яких p входить раціонально (див. розглянуті вище приклади) і тому $H(p)$ має назву **дробово-раціональної функції** комплексної змінної p .

2. Поліноми $A(p)$ і $V(p) = B(p)$ згідно з виразами (3.66) мають такі самі коефіцієнти, як і коефіцієнти диференціального рівняння кола (3.63), які залежать від порядку кола, способу з'єднання його елементів та параметрів самих елементів. Тобто коефіцієнти a_k ($k = 0 \dots m$) і b_k ($k = 0 \dots n$) є дійсними числами, які можуть бути в кожному з поліномів усі додатні або усі від'ємні. Якщо наприклад, $a_k > 0$, а $b_k < 0$, тоді

$$H(p) = -\frac{A(p)}{V(p)},$$

що можливо за умови, коли коло містить активні невзаємні елементи і змінює початкову фазу дії на протилежну ($-1 = 1e^{\pm j\pi}$).

3. Якщо максимальний степінь полінома чисельника m , а знаменника n , то між ними, як правило, існує співвідношення: $m \leq n$.

4. Знаменник ОПФ є $V(p)$ – характеристичним поліномом (3.64), який утворює характеристичне рівняння, що має дійсні від'ємні або комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною ($\text{Re } p_k < 0$). Щоб забезпечити цю умову, всі коефіцієнти полінома $V(p)$ мають бути ненульовими ($b_k \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, n$) і обов'язково однакового знаку. Такий поліном називають **поліномом Гурвіца**⁵.

5. Порядок полінома $V(p)$ визначає **порядок кола** і ОПФ.

6. Значення p_{0k} , які відповідають кореням $V(p)$, перетворюють $|H(p)|$ у нескінченність і мають назву **полюсів ОПФ**. Усі полюси ОПФ кола з втратами розташовані на комплексній площині зліва від уявної осі.

7. При значеннях p_k , які відповідають кореням $A(p)$, функція $H(p)$ дорівнює нулю. Корені полінома $A(p)$ називають **нулями ОПФ**.

Коло, ОПФ якого має зазначені властивості, можна фізично реалізувати.

Рисунок, що відображає розташування нулів і полюсів $H(p)$, має назву **карти нулів і полюсів**, яка з точністю до постійного множника k_1 визначає ОПФ $H(p)$. Якщо полюси p_k ОПФ позначити хрестиками (\times), а нулі p_{0k} – колами (\circ), карта нулів і полюсів деякого кола матиме вигляд (рис.3.10, а).

Відповідно до наведеної карти нулів і полюсів можна записати ОПФ у вигляді:

$$\tilde{H}(p) = \frac{(p - p_{01})(p - p_{02})(p - p_{03})}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5)}. \quad (3.74)$$

⁵ **Гурвіц Адольф**, Hurwitz (1859–1919) – німецький математик. Професор політехнічного інституту в Цюриху. Основні праці належать до математичного аналізу, теорії функцій, алгебри та теорії чисел. У теорії функцій комплексної змінної відомі теореми Гурвіца. Широко застосовується його критерій від'ємності дійсних частин коренів алгебраїчних рівнянь. Зробив внесок у геометрію. Російською перекладено його працю “Теорія аналітичних та еліптичних функцій” (1933).

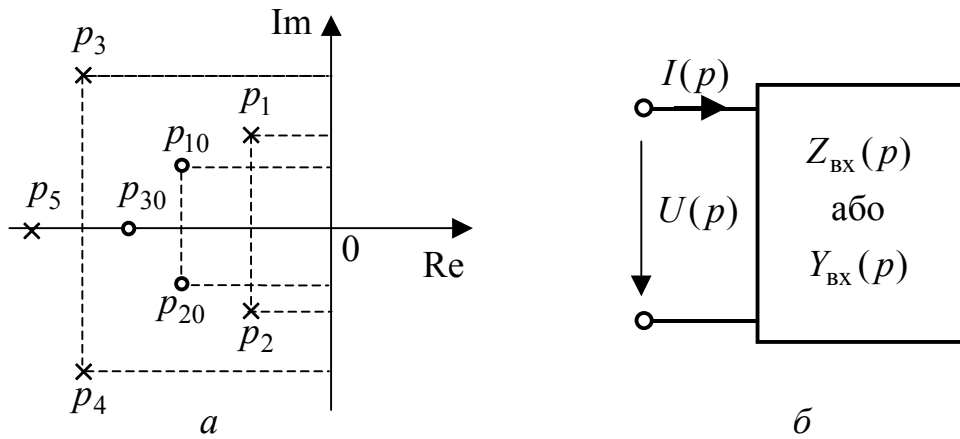


Рисунок 3.10 – До визначення властивостей ОПФ: *a* – карта нулів і полюсів; *б* – узагальнена операторна схема пасивного двополюсника

Чисельник $\tilde{H}(p)$ є поліномом третього порядку ($m = 3$), а знаменник – п'ятого ($n = 5$). Якщо у формулі (3.70), яка визначає ОПФ $H(p)$ даного кола, пронормувати поліноми чисельника

$$A(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = a_3 (p - p_{01})(p - p_{02})(p - p_{03})$$

і знаменника

$$V(p) = b_5 p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = b_5 (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5),$$

можна встановити зв'язок між виразами (3.70) і (3.74):

$$H(p) = \frac{a_3}{b_5} \cdot \frac{(p - p_{01})(p - p_{02})(p - p_{03})}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5)}. \quad (3.75)$$

Якщо константу $\frac{a_3}{b_5}$ позначити k_1 , формула (3.75) з урахуванням рівності

(3.74) матиме вигляд:

$$H(p) = k_1 \tilde{H}(p),$$

а загалом:

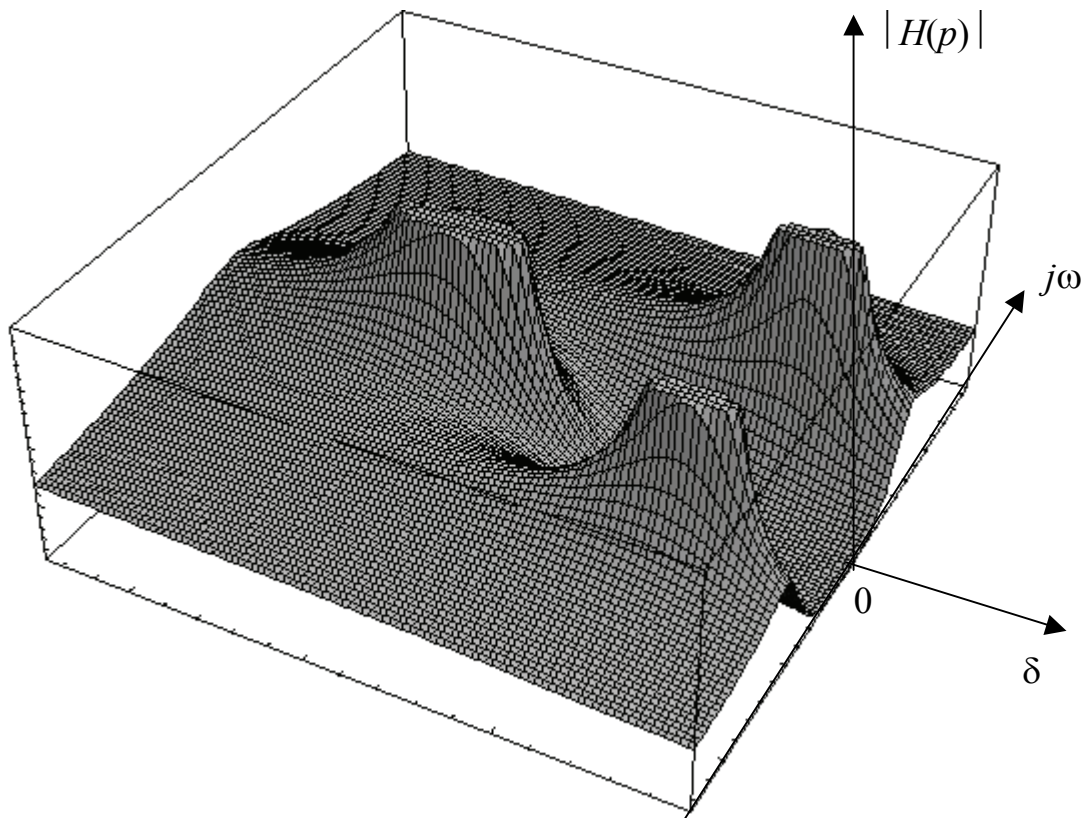
$$H(p) = k_1 \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_{0i})}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}, \quad k_1 = \frac{a_m}{b_n}. \quad (3.76)$$

Отже, рівняння (3.76) свідчить, що карта нулів і полюсів дозволяє відтворити ОПФ кола з точністю до постійного множника.

Важливо, що корені характеристичного полінома $V(p)$ можна обчислити, не складаючи диференціального рівняння, навіть без визначення $H(p)$. Зазначимо, що аналогічний висновок можна отримати, аналізуючи перехідні процеси класичним методом (див. п.1.1.3).

ОПФ – функція комплексної змінної p , причому комплексна частота $p = -\delta \pm j\omega$ належить лівій комплексної півплощині, бо дійсна частина p –

від'ємна (оскільки розглядаються ОПФ кіл, які можна реалізувати фізично). Модуль ОПФ $|H(p)|$ – це поверхня, яка розташована над лівою півплощиною. Як приклад на рис.3.11, *a* зображено $|H(p)|$ за умови: $A(p) = p^3$ і $V(p) = (p + \delta)(p + \delta_1 - j\omega_1)(p + \delta_1 + j\omega_1)$, тобто ОПФ має нуль ($p_0 = 0$) з кратністю 3 і три полюси ($p_1 = -\delta$; $p_{2,3} = -\delta_1 \pm j\omega_1$).



a

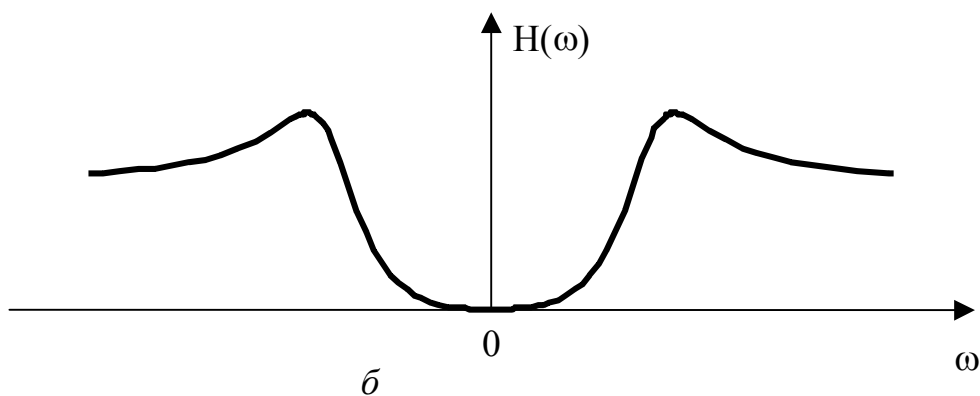


Рисунок 3.11 – До визначення властивостей ОПФ: *a* – характер поверхні $|H(p)|$, яка має один нуль третьої кратності та три полюси; *b* – АЧХ кола – вертикальний переріз поверхні $|H(p)|$ через вісь $j\omega$ ($\delta = 0$)

У точці p_0 поверхня $|H(p)|$ має нульовий мінімум, а в точках, координати яких збігаються зі значеннями полюсів $p_1, p_{2,3}$, поверхня наближається до максимального нескінченного значення (на рисунку обмежено вибраним масштабом за вертикальною віссю).

Якщо коло живиться джерелом напруги, а зображення дії $F_1(p) = U(p)$, тоді відгук, що є струмом на затискачах двополюсника (рис.3.10, б), можна визначити за законом Ома в операторній формі:

$$F_2(p) = I(p) = \frac{U(p)}{Z_{\text{вх}}(p)},$$

де $Z_{\text{вх}}(p)$ – операторний вхідний опір двополюсника. Виходячи з виразу (3.71), ОПФ має вигляд:

$$H(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}(p)}. \quad (3.77)$$

Якщо прирівняти праві частини рівнянь (3.70) і (3.77), виходить співвідношення: $\frac{1}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{V(p)}$, з якого видно, що характеристичне рівняння збігається з рівнянням:

$$Z_{\text{вх}}(p) = 0. \quad (3.78)$$

Так, операторний вхідний опір послідовного контуру R, L, C , який живиться від джерела напруги, згідно з виразом (3.21) становить:

$$Z_{\text{вх}}(p) = R + pL + \frac{1}{pC}.$$

Приведення цієї рівності до загального знаменника дозволяє записати:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{LCp^2 + pRC + 1}{pC}, \quad (3.79)$$

звідки, прирівнявши праву частину до нуля, отримують характеристичне рівняння: $LCp^2 + pRC + 1 = 0$, яке сходиться з формулою (1.45), знайденою класичним методом (див. розд.1).

Якщо коло живиться від джерела струму, тоді зображення дії $F_1(p) = I(p)$, а відгуком є напруга на затискачах узагальненої схеми двополюсника (рис.3.10, б):

$$F_2(p) = U(p) = \frac{I(p)}{Y_{\text{вх}}(p)}, \text{ тоді:}$$

$$H(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{1}{Y_{\text{вх}}(p)}, \quad (3.80)$$

звідки $\frac{1}{Y_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{V(p)}$ і характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$Y_{\text{вх}}(p) = 0. \quad (3.81)$$

Отже, рівняння (3.78), (3.81) дозволяють методом еквівалентних перетворень знайти операторні вхідні функції кола $Z_{\text{вх}}(p)$ чи $Y_{\text{вх}}(p)$ (залежно від типу джерела) і, прирівнявши їх до нуля, отримати характеристичне рівняння кола.

3.8. Операторна вхідна функція кола, її властивості

Операторні вхідні функції (ОВФ) – окремий випадок операторних передатних функцій. ОВФ притаманні деякі властивості ОПФ.

1. ОВФ теж є ДРФ комплексної змінної p (наприклад, див. формули (3.29), (3.79)). Отже, операторний вхідний опір двополюсника (рис.3.10, б) можна записати у вигляді:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (3.82)$$

де $M(p)$ і $N(p)$ – раціональні функції комплексної змінної p .

У пасивного двополюсника операторна вхідна провідність – функція, обернена опору:

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{N(p)}{M(p)}. \quad (3.83)$$

2. Оскільки функції $Z_{\text{вх}}(p)$ і $Y_{\text{вх}}(p)$ – окремий випадок ОПФ, знаменник яких – поліном Гурвіца, можна зробити висновок, що чисельник і знаменник ОВФ $M(p)$ і $N(p)$ також є поліномами Гурвіца.

Виходячи з властивостей поліномів Гурвіца, формулюють третю і четверту властивості ОВФ.

3. Коефіцієнти поліномів чисельника a_k і знаменника b_k ОВФ – дійсні додатні числа.

4. Нулі та полюси ОВФ розташовані у лівій півплощині комплексної площини.

ОВФ з переліченими вище властивостями для кіл з втратами належать до класу **додатних дійсних функцій (ДДФ)** комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$. Ознаками ДДФ є рівність нулю уявної частини за умови $\omega = 0$ і додатність дійсної частини за умови $\sigma > 0$.

Ілюстрацією даного твердження є підстановка до виразу (3.21) змінної $p = \sigma + j\omega$:

$$Z_{\text{вх}}(p) = R + (\sigma + j\omega)L + \frac{1}{(\sigma + j\omega)C}.$$

Взяття дійсної та уявної частин дає:

$$\text{Re}[Z_{\text{вх}}(p)] = R + \sigma L + \frac{\sigma}{|p|^2 C}; \quad (3.84)$$

$$\operatorname{Im}[Z_{\text{вх}}(p)] = \omega L - \frac{\omega}{|p|^2 C}, \quad (3.85)$$

де $|p|^2 = \sigma^2 + \omega^2$.

Отже, з виразу (3.84) видно, що $\operatorname{Re}[Z_{\text{вх}}(p)] > 0$ при $\sigma > 0$ (ОВФ додатна), а з формули (3.85) виходить, що $\operatorname{Im}[Z_{\text{вх}}(p)] = 0$ при $\omega = 0$ (ОВФ дійсна).

5. Вважається, що точка $p \rightarrow \infty$ належить уявній осі, їй відповідає простий нуль або полюс. За умови, що $p \rightarrow \infty$, співвідношення (3.76) набуває вигляду:

$$H(p) \rightarrow k_1 p^{m-n}, \quad k_1 = \frac{a_m}{b_n}. \quad (3.86)$$

При цьому можливі такі випадки:

а) $m - n = 1$, що відповідає простому полюсу в нескінченності; наприклад, коли ОПФ збігається з операторним входним опором: $H(p) = Z_{\text{вх}}(p) = k_1 p$, а характер кола – індуктивний;

б) $m - n = -1$, що відповідає простому нулю в нескінченності; ОПФ становить: $H(p) = Z_{\text{вх}}(p) = \frac{k_1}{p}$; характер кола – ємнісний;

в) $m - n = 0$, входна функція в нескінченності не має нулів і полюсів; характер кола – резистивний ($k_1 > 0$).

Отже, аналіз значень величини $m - n$ дозволяє сформулювати ще одну властивість: максимальні степені чисельника і знаменника ОВФ не можуть відрізнятись більше, ніж на одиницю.

6. Дана властивість стосується кіл, втрати в яких прямують до нуля.

При зменшенні втрат у колі зменшується значення дійсної частини полюсів і вони наближаються до уявної осі комплексної площини. Коли ж втратами кола можна знехтувати, полюси кола будуть розташовані безпосередньо на уявній осі. Слід зазначити, що полюси, розташовані на уявній осі, не можуть бути кратними. Оскільки полюси ОВФ сходяться з коренями характеристичного полінома, вони обумовлюють характер вільних процесів. За наявності кратних коренів ($p_{1,2} = j\omega_1$) вільні коливання визначаються як $(A_1 + A_2 t)e^{j\omega t}$ і з часом зростають, що неприйнятно для стійких кіл. Ці висновки стосуються не тільки полюсів, але й (на підставі першої властивості) нулів ОВФ.

Отже, ДДФ не мають на уявній осі кратних нулів і полюсів.

ОВФ кола, яке не має втрат, називається **реактансною**, бо коло містить тільки реактивні елементи L, C . Реактансні функції належать до класу ДДФ, але утворюють підклас з додатковими властивостями.

Оскільки усі **нули та полюси реактансних** функцій розташовані на уявній осі, вони **чергуються**. Невиконання цієї умови призвело б до утворення кратних нулів або полюсів, що неможливо. Чергування нулів і полюсів обумовлює зростаючий характер реактивного входного опору (провідності). Особливість

реактансних функцій полягає у тому, що до виразів (3.82), (3.83) входять не поліноми Гурвіца, а їх парні (непарні) частини. Якщо $M(p)$ – парна частина полінома Гурвіца, то $N(p)$ – непарна і навпаки, що й обумовлює відповідне розташування коренів цих поліномів на уявній осі, а також відмінність на одиницю їхніх максимальних степенів.

3.9 Зв'язок операторної передатної функції з комплексною передатною функцією. Амплітудно-квадратична характеристика кола, її властивості

Комплексна змінна $p = \sigma + j\omega$ має значення комплексної частоти. Вона обумовлює характер коливань, що відтворюють функцію дійсної змінної t . Згідно з виразом (3.40) функція $F(p)e^{pt}$ для комплексно-спряжених значень p утворює коливання з нескінченно малою амплітудою, яке змінюється у часі за законом

$$2|F(p)dp|e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$

і може зростати ($\sigma > 0$) або загасати ($\sigma < 0$). Якщо $\sigma = 0$, комплексна частота стає уявною величиною $p = j\omega$ і обернене перетворення Лапласа переходить у перетворення Фур'є, яке дозволяє відтворити функцію дійсної змінної t у вигляді незагасаючих синусоїдних (гармонічних) коливань. При синусоїдній дії характеристикою кола є комплексна передатна функція. Отже, ОПФ перетворюється у КПФ за умови $p = j\omega$:

$$H(p)|_{p=j\omega} = H(j\omega), \quad (3.87)$$

і навпаки,

$$H(j\omega)|_{j\omega=p} = H(p). \quad (3.88)$$

Із співвідношення (3.87) виходить:

$$|H(p)|_{p=j\omega} = H(\omega).$$

Тобто АЧХ $H(\omega)$ збігається зі значеннями поверхні $|H(p)|$, зображеної на рис.3.11, а за умови $p = j\omega$ ($\delta = 0$). Значення АЧХ належать кривій, яка є вертикальним перерізом поверхні $|H(p)|$ площиною, що проходить через вісь $j\omega$. На рис.3.11, б показано графік АЧХ, яка є парною функцією ω . Для додатних значень частоти розглядається права (відносно нуля) частина графіка.

На підставі виразів (3.70), (3.87) КПФ матиме вигляд:

$$H(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{V(j\omega)}, \quad (3.89)$$

де $A(j\omega) = A(p)|_{p=j\omega}$; $V(j\omega) = V(p)|_{p=j\omega}$, причому $V(p)$ – поліном Гурвіца.

Наприклад, для кола третього порядку поліном Гурвіца становить:

$$V(p) = b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0. \quad (3.90)$$

За умови $p = j\omega$: $V(j\omega) = -j\omega b_3 \omega^2 - b_2 \omega^2 + j\omega b_1 + b_0$,
або

$$V(j\omega) = V_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega V_{\text{Im}}(\omega^2), \quad (3.91)$$

де $V_{\text{Re}}(\omega^2) = b_0 - b_2 \omega^2$; $V_{\text{Im}}(\omega^2) = b_1 - b_3 \omega^2$.

Поліноми, які утворюють дійсну та уявну частини $V(j\omega)$ – парні функції дійсної змінної ω .

Якщо максимальні степені поліномів чисельника і знаменника збігаються (наприклад, $m = n = 3$), аналогічно виразу (3.91) можна записати:

$$A(j\omega) = A_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega A_{\text{Im}}(\omega^2). \quad (3.92)$$

Підстановка до формули (3.89) виразів (3.91), (3.92) дає:

$$H(j\omega) = \frac{A_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega A_{\text{Im}}(\omega^2)}{V_{\text{Re}}(\omega^2) + j\omega V_{\text{Im}}(\omega^2)}. \quad (3.93)$$

Тоді аналітичний вираз АЧХ матиме вигляд:

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{A_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 A_{\text{Im}}^2(\omega^2)}}{\sqrt{V_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 V_{\text{Im}}^2(\omega^2)}}. \quad (3.94)$$

Вираз (3.94) є ірраціональною функцією частоти ω , що ускладнює розв'язання задачі синтезу. Тому розглядають квадрат модуля АЧХ, який є раціональною функцією ω :

$$H^2(\omega) = \frac{A_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 A_{\text{Im}}^2(\omega^2)}{V_{\text{Re}}^2(\omega^2) + \omega^2 V_{\text{Im}}^2(\omega^2)}. \quad (3.95)$$

Функція $H^2(\omega)$ називається **амплітудно-квадратичною характеристикою** (АКХ) і має такі основні ознаки:

- 1) АКХ – це ДРФ дійсної змінної ω з дійсними додатними коефіцієнтами;
- 2) АКХ – парна функція дійсної змінної ω ;
- 3) граничні значення АКХ скінченні та невід'ємні.

АКХ можна визначити як добуток двох комплексно-спряжених функцій:

$$H^2(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega). \quad (3.96)$$

Заміна $j\omega = p$ згідно з виразом (3.88) призводить до співвідношення:

$$H^2(\omega) \Big|_{j\omega=p} = |H(p)|^2. \quad (3.97)$$

Тоді, зважаючи на формулу (3.96), можна записати:

$$|H(p)|^2 = H(p)H(-p). \quad (3.98)$$

На рис.3.12 зображена карта нулів і полюсів функції $H(p)$, які лежать у лівій півплощині комплексної площини p . Нулі та полюси функції $H(-p)$ у цьому випадку будуть праворуч від уявної осі. Функція, яка є квадратом модуля

ОПФ, містить усі нулі та полюси функцій $H(p)$ і $H(-p)$. Кажуть, що нулі та полюси функції $|H(p)|^2$ мають квадратну симетрію, або утворюють квадруплет.

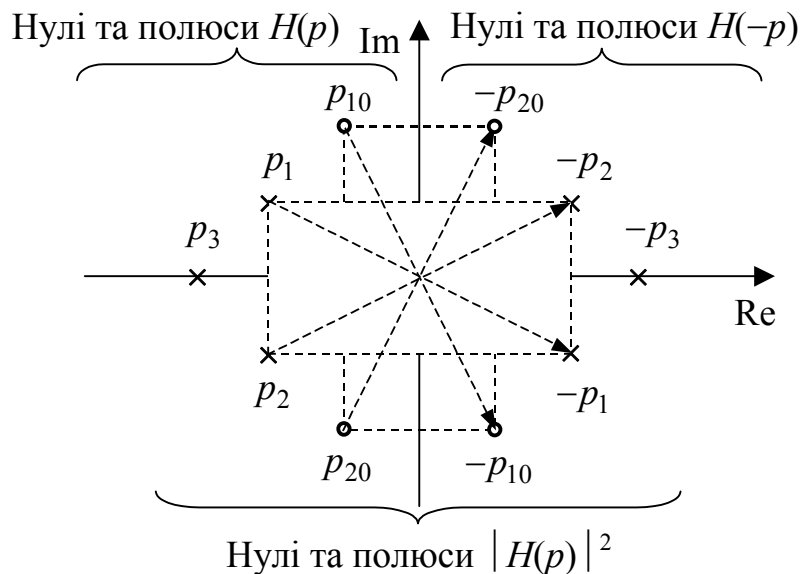


Рисунок 3.12 – Карта нулів та полюсів функцій $H(p)$, $H(-p)$, $|H(p)|^2$

Функція $|H(p)|^2$ – парна ДРФ комплексної змінної p з дійсними коефіцієнтами. А функція $H^2(\omega)$ – парна ДРФ дійсної змінної ω з дійсними коефіцієнтами. Вона пов’язана з передатною функцією кола за потужністю, яку можна ввести як

$$H_P(\omega) = \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вих}}^2 / R_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}^2 / R_{\text{вх}}}, \quad \text{або } H_P(\omega) = k_R H_U^2(\omega), \quad (3.99)$$

де константа $k_R = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{вих}}}$ визначається відношенням вхідного і вихідного опорів кола.

З рівності (3.99) виходить висновок, що передатна функція кола за потужністю збігається з квадратом модуля КПФ за напругою $H_U(\omega)$ з точністю до константи. Відношення потужностей $\frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}}$ визначають у децибелах (дБ), які є логарифмічними одиницями:

$$H_P(\omega), \text{ дБ} = 10 \lg \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = 10 \lg H_U^2(\omega), \quad (3.100)$$

де для спрощення взято $k_R = 1$.

Отже, враховуючи вимоги до $H_P(\omega)$, дБ, можна визначити $|H(p)|^2$ за формулою (3.97). Оскільки $H_P(\omega)$ – дійсна функція, перехід до функції $|H(p)|^2$

комплексної змінної p можна зробити підстановкою: $\omega = p / j$. Щоб перейти до ОПФ, слід визначити нулі та полюси функції $|H(p)|^2$ і взяти тільки ті, що лежать у лівій півплощині. Такий спосіб дозволяє отримати схемні структури певного типу кіл.

3.10 Мінімально- та немінімально-фазові кола

Коло з ОПФ (3.70), нулі якої розташовані у лівій півплощині та на її межі – уявній осі, має назву кола **мінімально-фазового типу**. Коло, частина нулів ОПФ якого лежить у правій півплощині, називається колом **немінімально-фазового типу**. Доцільність таких назв пояснюється нижче у цьому підрозділі.

Для кола третього порядку поліном Гурвіца (3.90) можна переписати у вигляді:

$$V(p) = b_3(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3).$$

У випадку одного дійсного $p_1 = -\delta_1$ і двох комплексно-спряжених коренів $p_{2,3} = -\delta \pm j\omega_{\text{вл}}$, розташованих у лівій півплощині, та за умови $p = j\omega$, можна записати:

$$V(j\omega) = b_3(j\omega + \delta_1)[(j\omega)^2 + j\omega 2\delta + \delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2], \text{ або}$$

$$V(j\omega) = b_3(j\omega + \delta_1)(j\omega 2\delta + \delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2 - \omega^2). \quad (3.101)$$

Аргумент $V(j\omega)$ становить:

$$\arg[V(j\omega)] = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega), \quad (3.102)$$

$$\text{де } \varphi_1(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\delta_1}, \quad \varphi_2(\omega) = \arctg \frac{2\delta\omega}{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2 - \omega^2}.$$

Граничні значення функцій $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ такі:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_1(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_1(\omega) = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_2(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_2(\omega) = \pi.$$

Граничне значення функції $\varphi_2(\omega)$ при нескінченній частоті обумовлене тим, що $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2 - \omega^2) \rightarrow -\infty$, тобто дійсна частина функції у других дужках виразу (3.101) від'ємна. Графіки частотних залежностей функцій $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\arg[V(j\omega)]$ зображені на рис.3.13. Вони мають зростаючий характер.

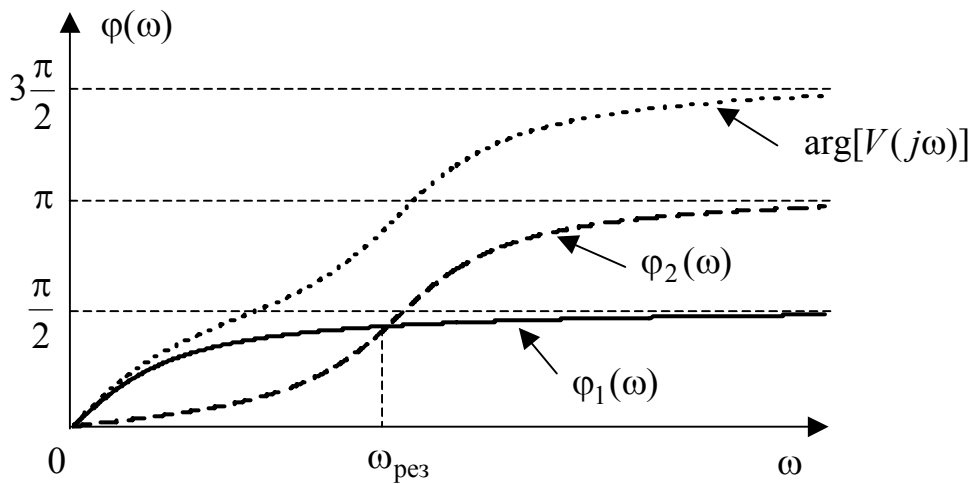


Рисунок 3.13 – Частотні залежності $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\arg[V(j\omega)]$

Для кола третього порядку при наближенні частоти до нескінченності аргумент $V(p)$ прямує до величини $3\frac{\pi}{2}$. Загалом, якщо поліном Гурвіца має порядок n , його аргумент зростає від нуля до границі:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg[V(p)] = n \frac{\pi}{2}. \quad (3.103)$$

Чисельник кола мінімально-фазового типу $A(p)$ має корені (вони ж є нулями $H(p)$) у лівій півплощині, як і поліном $V(p)$ (рис.3.14, а). Отже, $A(p)$ – теж поліном Гурвіца, його корені показані на (рис.3.14, б) для $n = 5$.

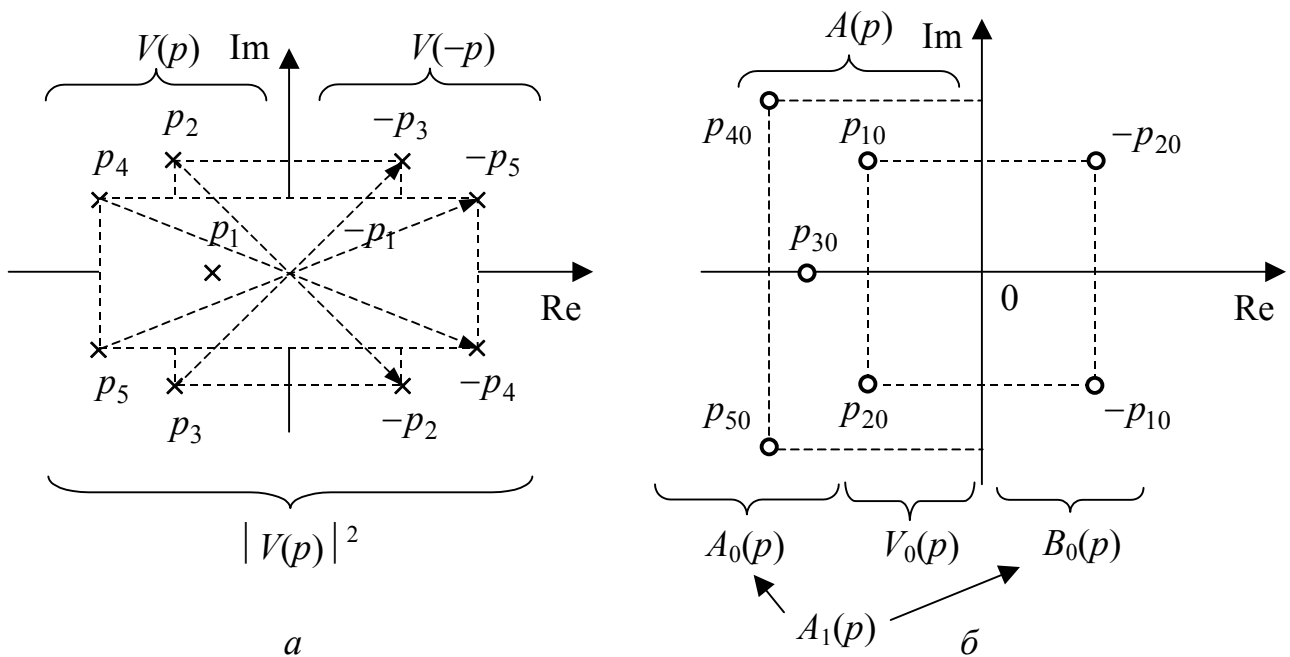


Рисунок 3.14 – Корені поліномів: а – $V(p)$, $V(-p)$, $|V(p)|^2$; б – $A(p)$, $A_1(p)$

У виразі для ОПФ кола немінімально-фазового типу

$$H_1(p) = \frac{A_1(p)}{V(p)}, \quad (3.104)$$

знаменник $V(p)$ такий самий, як у співвідношенні (3.70), а чисельник $A_1(p)$ має корені, розташовані як ліворуч, так праворуч від уявної осі.

Нехай корені, які розташовані ліворуч і збігаються з частиною коренів $A(p)$, утворюють поліном $A_0(p)$, а корені, розташовані праворуч, – утворюють поліном $B_0(p)$ (див. рис.3.14, б). Решта коренів $A(p)$, що не увійшла до $A_0(p)$, утворює поліном $V_0(p)$, тоді

$$A(p) = A_0(p)V_0(p); \quad (3.105)$$

$$A_1(p) = A_0(p)B_0(p). \quad (3.106)$$

Якщо для спрощення вважати поліноми $B_0(p)$ і $V_0(p)$ спряженими:

$$B_0(p) = V_0(-p),$$

тоді

$$A_1(p) = A_0(p)V_0(-p). \quad (3.107)$$

Підстановка виразів (3.106) і (3.107) до формули (3.104) і подальші перетворення дозволяють записати:

$$H_1(p) = \frac{A_0(p) \cdot V_0(-p)}{V(p)} \cdot \frac{V_0(p)}{V_0(p)} = \frac{A_0(p)V_0(p)}{V(p)} \cdot \frac{V_0(-p)}{V_0(p)}.$$

Тоді на підставі виразу (3.105) справедливе співвідношення

$$H_1(p) = \frac{A(p)}{V(p)} \cdot \frac{V_0(-p)}{V_0(p)}, \text{ а з урахуванням формули (3.70)}$$

$$H_1(p) = H(p) \frac{V_0(-p)}{V_0(p)}. \quad (3.108)$$

Заміна в останньому виразі p на $j\omega$ призводить до співвідношення

$$H_1(j\omega) = H(j\omega) \cdot \frac{V_0(-j\omega)}{V_0(j\omega)}, \quad (3.109)$$

яке встановлює зв'язок між КПФ кіл немінімально- і мінімально-фазового типу $H_1(j\omega)$ і $H(j\omega)$, відповідно. Оскільки модуль дробу у формулі (3.109) дорівнює одиниці, справедлива рівність:

$$H_1(\omega) = H(\omega). \quad (3.110)$$

Як видно з виразу (3.110), АЧХ кіл немінімально- і мінімально-фазового типів за умов (3.105) і (3.107) однакові. З рівності (3.109) виходить, що аргументи функцій $H_1(j\omega)$ і $H(j\omega)$, які визначають ФЧХ відповідних кіл, відрізняються між собою аргументом дробу $V_0(-j\omega)/V_0(j\omega)$:

$$\arg[H_1(j\omega)] = \arg[H(j\omega)] + \arg\left[\frac{V_0(-j\omega)}{V_0(j\omega)}\right], \quad (3.111)$$

який можна знайти за формулою:

$$\arg\left[\frac{V_0(-j\omega)}{V_0(j\omega)}\right] = \arg[V_0(-j\omega)] - \arg[V_0(j\omega)]. \quad (3.112)$$

Згідно з виразом (3.102) аргумент полінома $V_0(j\omega)$ є непарною функцією:

$$\arg[V_0(-j\omega)] = -\arg[V_0(j\omega)].$$

Тоді вираз (3.111) можна переписати так:

$$\arg[H_1(j\omega)] = \arg[H(j\omega)] - 2\arg[V_0(j\omega)]. \quad (3.113)$$

Тобто при однакових АЧХ фазочастотна характеристика кола немінімально-фазового типу $\arg[H_1(j\omega)]$ відрізняється від ФЧХ кола мінімально-фазового типу $\arg[H(j\omega)]$ на величину $-2\arg[V_0(j\omega)]$. Графіки ФЧХ кіл мінімально-фазового типу, які розглядалися раніше, мають, як правило, спадаючий характер. Крива $\arg[V(j\omega)]$, зображена на рис.3.13, зростає із збільшенням частоти ω (слід зауважити, що поліноми $V(p)$ і $V_0(p)$ відрізняються порядком, який впливає тільки на швидкість такого зростання). Тоді графік залежності $-2\arg[V_0(j\omega)]$ також матиме спадаючий характер.

З формули (3.113) можна зробити висновок, що ФЧХ кіл немінімально-фазового типу в інтервалі частот $\omega > 0$ спадатимуть швидше порівняно з ФЧХ кіл мінімально-фазового типу, тобто немінімально-фазові кола вносять більший фазовий зсув. Саме ця обставина і обумовила відповідні назви кіл.

На підставі співвідношення (3.113) і з урахуванням границі (3.103) різниця між ФЧХ кіл немінімально- і мінімально-фазового типів для нескінченної частоти становитиме:

$$\arg[H_1(j\infty)] = \arg[H(j\infty)] - 2k \frac{\pi}{2} = \arg[H(j\infty)] - k\pi, \quad (3.114)$$

де k – кількість нулів ОПФ у правій півплощині.

На відміну від кіл мінімально-фазового типу, які є неврівноваженими прохідними чотиріполюсниками (тобто у пари вхідних і вихідних затискачів є один спільний), кола немінімально-фазового типу – це мостові чотиріполюсники або їх еквіваленти – прохідні чотиріполюсники з T -подібними перекритими структурами. Щоб реалізувати немінімально-фазові кола, потрібно вдвічі більше реактивних елементів, ніж для мінімально-фазових.

В окремому випадку ОПФ немінімально-фазових кіл можна записати у вигляді:

$$H_1(p) = H_0 \frac{V_0(-p)}{V_0(p)}. \quad (3.115)$$

АЧХ такого кола становить $H_1(\omega) = H_0$, тобто не змінюється, а ФЧХ визначається як

$$\arg[H_1(j\omega)] = -2\arg[V_0(j\omega)]. \quad (3.116)$$

Якщо $V_0(p)$ є поліномом Гурвіца другого порядку, немінімально-фазове коло має частотні характеристики, графіки яких зображені на рис.3.15, *a*. На

рис.3.15, б показана карта нулів і полюсів цього кола, причому його нулі – спряжені полюсам.

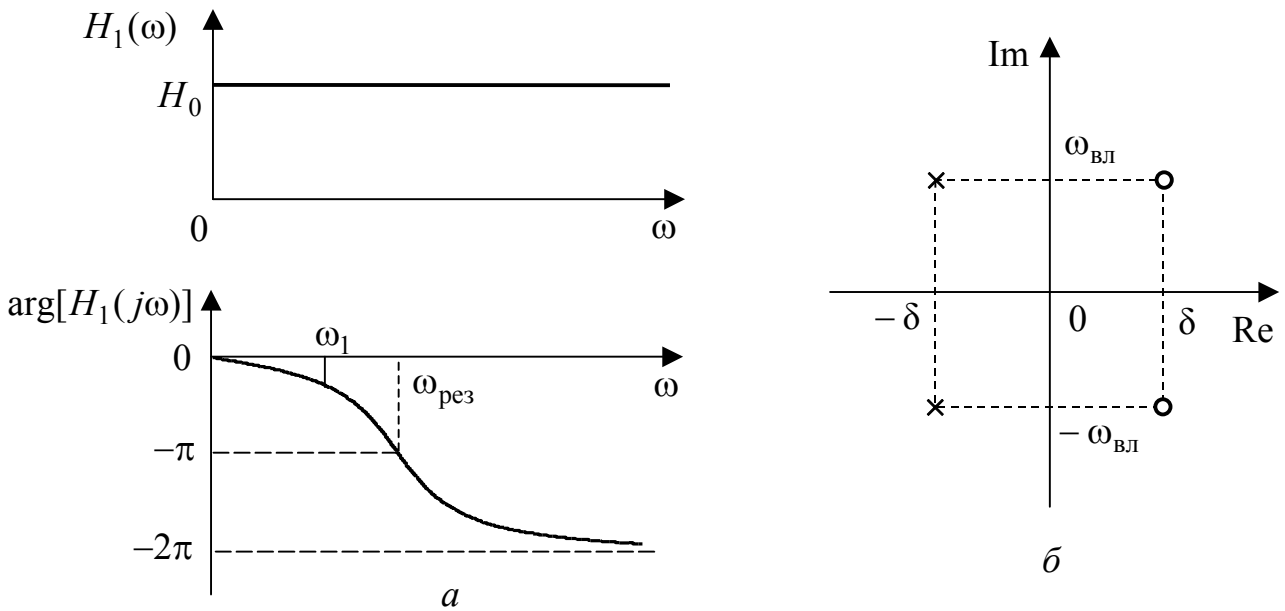


Рисунок 3.15 – Немінімально-фазове коло: а – частотні характеристики; б – нулі та полюси $H_1(p)$ (3.115)

3.11 Операторна передатна функція неспотворюючого кола

Вважають, що коло не вносить спотворення, якщо відгук $f_2(t)$ у масштабі повторює дію $f_1(t)$ із затримкою на час t_0 (рис.3.16):

$$f_2(t) = H_0 f_1(t - t_0), \quad (3.117)$$

де H_0 – постійна величина.

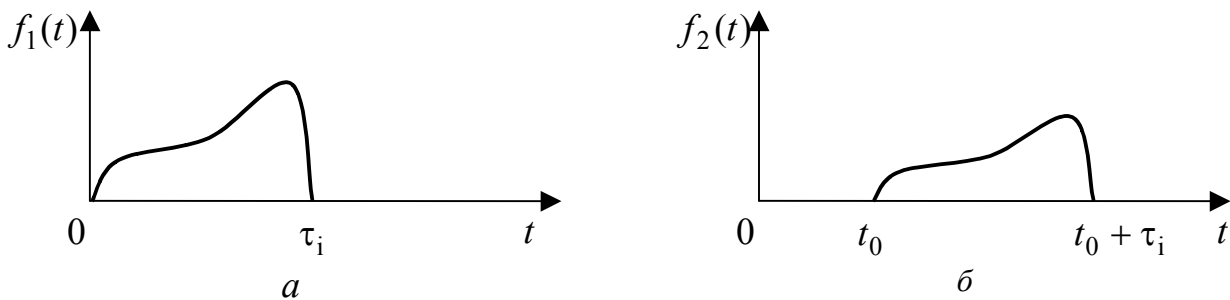


Рисунок 3.16 – Часові залежності у неспотворюючому колі: а – дії; б – відгуку

Переведення виразу (3.117) у простір зображень з урахуванням властивості перетворення Лапласа (табл.3.2, п. 4) призводить до рівності:

$$F_2(p) = H_0 F_1(p) e^{-pt_0}. \quad (3.118)$$

Підстановка зображення (3.118) до виразу (3.71) дозволяє отримати ОПФ неспотворюючого кола:

$$H(p) = H_0 e^{-pt_0} . \quad (3.119)$$

Заміна $p = j\omega$ дозволяє перейти до КПФ неспотворюючого кола:

$$H(j\omega) = H_0 e^{-j\omega t_0} ,$$

частотні характеристики якого визначаються модулем і аргументом $H(j\omega)$:

$$\begin{cases} H(\omega) = H_0 ; \\ \arg[H(j\omega)] = -\omega t_0 . \end{cases}$$

Графіки частотних характеристик неспотворюючого кола зображені на рис.3.17.

Неспотворююче коло у діапазоні частот $0 \dots \omega_1$ має незмінну АЧХ і лінійну ФЧХ, причому із збільшенням кута нахилу ФЧХ зростає час затримки відгуку відносно дії ($\text{tg } \varphi \sim t_0$). У реального кола частотні характеристики, починаючи з частоти ω_1 , відрізняються від ідеальних. Щодо частотних характеристик немінімально-фазового кола (рис.3.15, а), вони теж відповідають умовам неспотвореної передачі у діапазоні частот $0 \dots \omega_1$, де ФЧХ майже лінійна. Тому коло з передатною функцією (3.119) ще має назву лінії затримки.

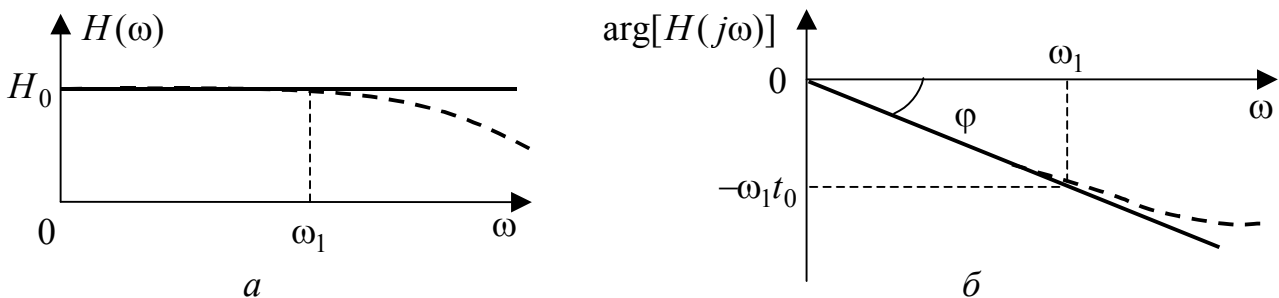


Рисунок 3.17 – Частотні характеристики неспотворюючого кола:
а – АЧХ; б – ФЧХ

3.12 Зв'язок операторної передатної функції з часовими характеристиками

Диференціальне рівняння (3.63) для кола другого порядку пов'язує дію $f_1(t)$ з відгуком $f_2(t)$. Якщо дія належить до простору оригіналів, має виконуватись умова (3.69), яку можна переписати згідно з формулою (3.67) так:

$$B_0(p) - A_0(p) = f_2'(+0)b_2 + f_2(+0)(b_2 p + b_1) - f_1'(+0)a_2 - f_1(+0)(a_2 p + a_1) = 0 . \quad (3.120)$$

Прирівнявши у рівнянні (3.120) коефіцієнти при однакових степенях p нулю, можна записати:

$$\begin{cases} b_2 f_2(+0) = a_2 f_1(+0); \\ b_2 f_2'(+0) + b_1 f_2(+0) = a_2 f_1'(+0) + a_1 f_1(+0). \end{cases} \quad (3.121)$$

Розв'язання цієї системи відносно початкових значень відгуку дає:

$$\begin{cases} f_2(+0) = k_0 f_1(+0); \\ f_2'(+0) = k_0 f_1'(+0) + k_1 f_1(+0), \end{cases} \quad (3.122)$$

$$\text{де } k_0 = \frac{a_2}{b_2}, \quad k_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2^2}.$$

Якщо диференціальне рівняння (3.63) продиференціювати і перевести у простір зображень, аналогічно можна визначити:

$$f_2''(+0) = k_0 f_1''(+0) + k_1 f_1'(+0) + k_2 f_1(+0), \quad (3.123)$$

$$\text{де } k_2 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2^2} - k_1 \frac{b_1}{b_0}.$$

Отже, як видно з рівнянь (3.122), (3.123), відгуки, що належать до простору оригіналів, мають початкові значення, зумовлені початковими значеннями дії та коефіцієнтами диференціального рівняння. Аналогічно визначають початкові значення відгуку для кіл інших порядків. В табл.3.4 наведені початкові значення відгуку та його похідних у колах першого і другого порядків ($n = 1, 2$).

Якщо дією є одинична функція $f_1(t) = 1(t)$, відгуком, за визначенням, буде перехідна характеристика $f_2(t) = g(t)$. Тоді, з урахуванням зв'язку між перехідною та імпульсною характеристиками, відповідно можна записати:

$$\begin{aligned} f_1(+0) &= 1; \quad f_1'(+0) = \delta(t); \quad f_1''(+0) = \delta'(t); \\ f_2(+0) &= g(+0); \quad f_2'(+0) = g'(+0) = h(+0); \quad f_2''(+0) = g''(+0) = h'(+0). \end{aligned}$$

Початкові значення перехідної та імпульсної характеристик та їх похідних, записані на підставі співвідношень (табл.3.4), зведені до табл.3.5.

Таблиця 3.4 – Початкові значення відгуку та його похідних

Відгук і його похідні	Розрахункові співвідношення	Примітка	
		$n = 1$	$n = 2$
$f_2(+0)$	$k_0 f_1(+0)$	$k_0 = \frac{a_1}{b_1}$	$k_0 = \frac{a_2}{b_2}$
$f_2'(+0)$	$k_0 f_1'(+0) + k_1 f_1(+0)$	$k_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1^2}$	$k_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2^2}$
$f_2''(+0)$	$k_0 f_1''(+0) + k_1 f_1'(+0) + k_2 f_1(+0)$	$k_2 = \frac{b_0}{b_1} k_1$	$k_2 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2^2} - \frac{b_1}{b_2} k_1$

Зрозуміло, що вирази, які визначають початкові значення, спрощуються, якщо дорівнюють нулю деякі коефіцієнти правої частини диференціального рівняння кола.

Таблиця 3.5 – Початкові значення часових характеристик та їх похідних

Часові характеристики та їх похідні	Розрахункові співвідношення	Примітка	
		$n = 1$	$n = 2$
$g(+0)$	k_0	$k_0 = \frac{a_1}{b_1}$	$k_0 = \frac{a_2}{b_2}$
$g'(+0) = h(+0)$	$k_0 \delta(t) + k_1$	$k_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1^2}$	$k_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2^2}$
$g''(+0) = h'(+0)$	$k_0 \delta'(t) + k_1 \delta(t) + k_2$	$k_2 = \frac{b_0}{b_1} k_1$	$k_2 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2^2} - \frac{b_1}{b_2} k_1$

Між зображеннями часових характеристик і ОПФ існує певний зв'язок. З відгуком на дію $f_1(t) = 1(t)$; $F_1(p) = \frac{1}{p}$, пов'язана, за визначенням, перехідна характеристика – вони чисельно збігаються, тобто $f_2(t) = g(t)$; $F_2(p) = \mathcal{L}[g(t)]$. Підстановка зображень відгуку і дії до виразу (3.71) призводить до співвідношення:

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}[g(t)]}{1/p}, \text{ або } \mathcal{L}[g(t)] = G(p) = \frac{H(p)}{p}. \quad (3.124)$$

На підставі формули (3.124) можна зробити висновок, що перехідна характеристика – це оригінал, зображення якого є відношенням ОПФ до оператора p , тобто:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right]. \quad (3.125)$$

У теорії функцій комплексної змінної для відповідності $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ доведені граничні співвідношення (див. табл.3.2, п.6):

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} pF(p) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} f(t). \quad (3.126)$$

Для $G(p)$ вираз (3.126) записують у вигляді:

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} pG(p) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} g(t), \text{ або з урахуванням співвідношення (3.124)}$$

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} H(p) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} g(t). \quad (3.127)$$

Рівність (3.127) можна переписати у вигляді двох рівнянь, попередньо замінивши p на $j\omega$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t); \quad (3.128)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t). \quad (3.129)$$

Формула (3.128) показує, що перехідна характеристика в усталеному режимі ($t \rightarrow \infty$) має постійне значення, якщо АЧХ кола при $\omega \rightarrow 0$ відмінна від нуля (коло „пропускає” постійний струм). Рівність (3.129) означає наявність стрибка у відгуку на одиничну функцію (або ступінчасту дію), якщо АЧХ ненульова при $\omega \rightarrow \infty$ (тобто коло „пропускає” коливання верхніх частот).

Отже, рівняння (3.128) і (3.129) встановлюють зв'язок між КПФ та перехідною характеристикою на межах частотного і часового діапазонів. Ці вирази відповідають аналогічним співвідношенням (2.7), (2.8), отриманим часовим методом у розд.2.

Частотні та часові характеристики пов'язані між собою не тільки на межах відповідних діапазонів. Якщо дією є дельта-функція $f_1(t) = \delta(t)$, відповідно $F_1(p) = 1$, відгук чисельно збігається з імпульсною характеристикою: $f_2(t) = h(t)$, а його зображення $F_2(p) = \mathcal{L}[h(t)]$. Підстановка відповідних зображень до виразу (3.71) дає:

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}[h(t)]}{1}, \quad \text{або } H(p) = \mathcal{L}[h(t)]. \quad (3.130)$$

Рівність (3.130) свідчить, що імпульсна характеристика є оригіналом ОПФ:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)],$$

або згідно з виразом (3.40):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(p)e^{pt} dp. \quad (3.131)$$

Якщо комплексну змінну $p = \sigma + j\omega$ перетворити в уявну: $p = j\omega$ ($\sigma = 0$), $dp = d(j\omega) = j d\omega$, тоді вираз (3.131) набуває вигляду:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Оскільки інтегрування тепер треба виконувати за дійсною змінною ω , межі інтегрування позначають як дійсні:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.132)$$

Отже, імпульсна характеристика кола визначається як обернене перетворення Фур'є від КПФ, відповідно КПФ – це пряме перетворення Фур'є від імпульсної характеристики:

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.133)$$

У виразі (3.133) нижня межа інтегрування – нульова, оскільки $h(t) = 0$ при $t < 0$. Враховуючи, що пряме перетворення Фур'є від функції $f(t)$ визначає її спектральну густину, можна стверджувати, що КПФ $H(j\omega)$ – спектральна густина імпульсної характеристики $h(t)$. Співвідношення (3.132) дозволяє однозначно визначити імпульсну характеристику $h(t)$, якщо відома частотна характеристика $H(j\omega)$ і навпаки, знайти $H(j\omega)$ за формулою (3.133) або згідно з даними табл.3.1 за умови $p = j\omega$.

Приклад 3.11. Визначити граничні співвідношення між перехідною та амплітудно-частотною характеристиками у колі (рис.3.2), якщо дія – напруга $u(t)$, відгук – напруга $u_C(t)$.

Розв'язання. У прикладі 3.5 знайдено зображення відгуку $F_2(p) = U_C(p)$ за умови, що зображення дії $F_1(p) = \frac{U_0}{p}$. Якщо підставити зображення відгуку і дії до формули (3.71), отримаємо ОПФ:

$$H(p) = \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_{\text{рез}}^2}.$$

На підставі виразу (3.88) КПФ становитиме:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{(j\omega)^2 + 2\delta j\omega + \omega_{\text{рез}}^2}. \quad (3.134)$$

З формули (3.134) видно, що за умови нульової частоти $H(0) = 1$, а при $\omega \rightarrow \infty$ значення $H(\infty) = 0$. У прикладі 3.5 також знайдено відгук $u_C(t)$ на дію $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$. Якщо покласти, що $U_0 = 1$ В, відгук (3.52) чисельно збігатиметься з перехідною характеристикою:

$$g(t) = 1 - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{вл}} t - \psi), \quad (3.135)$$

$$\text{де } \psi = \arctg \frac{\delta}{\omega_{\text{вл}}}.$$

Зазначимо, що вираз (3.135) збігається з результатами, отриманими у попередньому розділі (див. табл.2.3).

Визначимо граничні значення часової (перехідної) характеристики. Скориставшись відомою тригонометричною формулою, отримаємо:

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \psi}} = \frac{\omega_{\text{вл}}}{\sqrt{\delta^2 + \omega_{\text{вл}}^2}} = \frac{\omega_{\text{вл}}}{\omega_{\text{рез}}}.$$

Тоді $g(0) = 1 - \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{вл}}} \cdot \cos \psi = 0$, що сходиться із значенням $H(\infty)$ і

підтверджує співвідношення (3.129).

Якщо час прямує до нескінченності, виконується співвідношення $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} = 0$, і тоді за формулою (3.135) значення $g(\infty) = 1$, що збігається із значенням $H(0)$, а отже, підтверджує формулу (3.128).

Розглянутий приклад підкреслює зв'язок частотних і часових характеристик кола і підтверджує висновок, отриманий вище класичним (п.1.3.3) і часовим методами (п.2.31): чим вужче (ширше) смуга частот, які пропускаються колом, тим повільніше (швидше) відбуваються у ньому перехідні процеси. Для пояснення цієї тези на рис.3.18 зображено графіки модуля КПФ та перехідної характеристики послідовного резонансного контуру для двох значень смуги пропускання: $Q_1 > Q_2$ ($\delta_1 < \delta_2$); $2\Delta\omega_{\text{п1}} < 2\Delta\omega_{\text{п2}}$; $\tau_1 > \tau_2$).

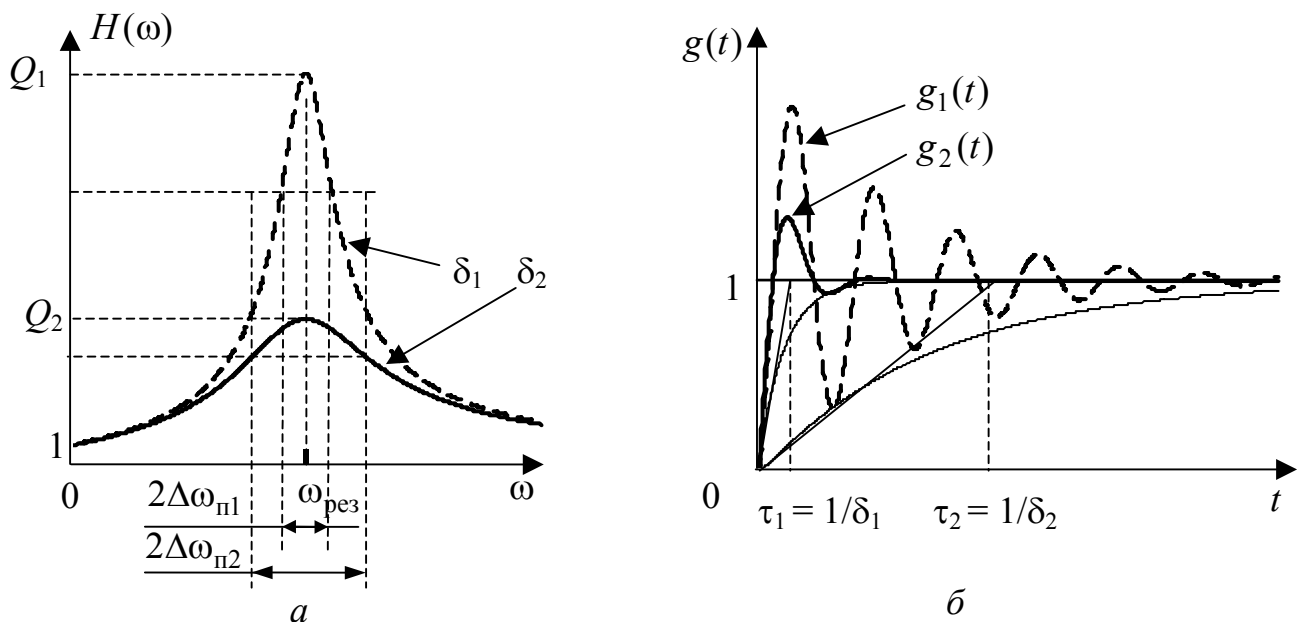


Рисунок 3.18 – Вплив параметрів коливального контуру на характеристики кола: *a* – частотні; *б* – часові

Приклад 3.12. Знайти КПФ кола (див. рис.3.4, *a*), якщо відома імпульсна характеристика кола, дія – напруга $u(t)$, відгук – струм $i(t)$.

Розв'язання. У прикладі 3.4 для цього кола визначено струм (3.48), якщо дією є $u(t) = V \cdot \delta(t)$. За умови $V = 1$ В відгук чисельно збігатиметься з

імпульсною характеристикою:

$$h_i(t) = \frac{1}{R_2} \left[\delta(t) - \frac{1}{CR_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

Підставимо $h_i(t)$ до формули (3.133):

$$H(j\omega) = \frac{1}{R_2} \int_0^{\infty} \left[\delta(t) - \frac{1}{CR_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{R_2} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt - \frac{1}{R_2} \int_0^{\infty} \frac{1}{CR_2} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt;$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2^2 C} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t}}{\frac{1}{\tau} + j\omega} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2^2 C \left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)},$$

де $\tau = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Підставивши значення τ , матимемо:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{CR_1} + j\omega}{R_2 \left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)}. \quad (3.136)$$

Вираз (3.136) збігається з функцією (3.72), якщо згідно з формулою (3.87) зробити заміну p на $j\omega$.

3.13 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. У чому полягає ідея операторного методу? Які функції можуть бути перетворені за Лапласом?
2. Записати формулу прямого перетворення Лапласа, назвати його основні властивості.
3. Які існують способи переходу від оригіналу до зображення? Сформулювати основні теореми щодо властивостей перетворення Лапласа.
4. Які існують способи переходу від зображення до оригіналу? Пояснити, як визначити оригінал, користуючись способом розкладання зображення на прості дроби.

5. Знайти оригінали зображень: $\frac{3p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$; $\frac{p + 1}{p^2 + 2p}$; $\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$.

Відповідь: $\cos t - \cos 2t$; $\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$; $\frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t$.

6. Сформулювати закони Ома і Кірхгофа в операторній формі. Пояснити поняття операторних опору та провідності кола. Як знайти операторний опір розгалуженого кола?
7. Як врахувати ненульові початкові умови, переходячи до операторної схеми заміщення кола?

8. Електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 2 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$, в момент $t = 0$ підключається до джерела ЕРС $e(t) = t \text{ В}$. Знайти струм $i(t)$.

$$\text{Відповідь: } i(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} \text{ А.}$$

9. Електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, в момент $t = 0$ підключається до джерела ЕРС $e(t) = 10e^{-4t} \text{ В}$. Знайти струм $i(t)$.

$$\text{Відповідь: } i(t) = 1,04(e^{-4t} - e^{-100t}) \text{ А.}$$

10. Електричне коло складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 1 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ мкФ}$. Знайти струм $i(t)$, якщо до кола при $t = 0$ підключається вхідна напруга $u(t) = 25(1 - e^{-4t}) \text{ мВ}$.

$$\text{Відповідь: } i(t) = 1,04(e^{-4t} - e^{-100t}) \text{ мА.}$$

11. Коло, яке складається з послідовно з'єднаних опору $R = 2 \text{ Ом}$, індуктивності $L = 1 \text{ Гн}$ та ємності $C = 0,5 \text{ Ф}$, підключається при $t = 0$ до джерела ЕРС $e(t) = \sin t \text{ В}$. Знайти струм у колі.

$$\text{Відповідь: } i(t) = 0,2(\sqrt{5} \cos(t - 63,4^{\circ}) - \sqrt{10}e^{-t} \cos(t - 71,6^{\circ})) \text{ А.}$$

12. Знайти оригінал зображення $\frac{p^2 - p + 10}{(p+1)^2(p^2 + 100)}$.

$$\text{Відповідь: } 0,119te^{-t} - 0,027e^{-t} + 0,027 \cos 10t + 0,086 \sin 10t.$$

13. У колі, складеному з опору 40 Ом та індуктивності $0,1 \text{ Гн}$, при усталеному режимі діє ЕРС $e(t) = 100 \cos 400t \text{ В}$. Знайти $i(t)$ при $t > 0$, якщо, починаючи з моменту $t = 0$, амплітуда ЕРС дорівнює 40 В .

$$\text{Відповідь: } i(t) = 0,707 \cos(400t - \pi/4) + 0,75e^{-400t} \text{ А.}$$

14. Дати визначення операторній передатній функції. Чому вона належить до класу ДРФ?

15. Перелічити властивості ОПФ. Як пов'язане характеристичне рівняння кола з ОПФ?

16. Що таке карта нулів і полюсів ОПФ? Як аналітично визначити ОПФ, користуючись цією картою?

17. Зобразити карту нулів і полюсів кола, розглянутого у прикладі 3.1.

18. Пояснити поняття операторної вхідної функції. За яких умов ОВФ належить до класу ДДФ?

19. Які особливості мають реактансні ОВФ?

20. Який зв'язок існує між операторною і комплексною передатними функціями?

21. Чому вводять поняття амплітудно-квадратичної характеристики кола. Які властивості має АКХ?

22. Пояснити поняття мінімально- і немінімально-фазових кіл. Чим відрізняються ФЧХ цих кіл?

23. Яке коло називають неспотворюючим? Які частотні характеристики воно має?

24. Який зв'язок існує між операторною передатною функцією і часовими характеристиками?

25. Знайти ОПФ, КПФ та перехідну характеристику кола, утвореного послідовним з'єднанням елементів R , L , якщо дією є вхідна напруга, а відгуком – напруга на опорі. Перевірити виконання граничних співвідношень між частотними і часовими характеристиками.

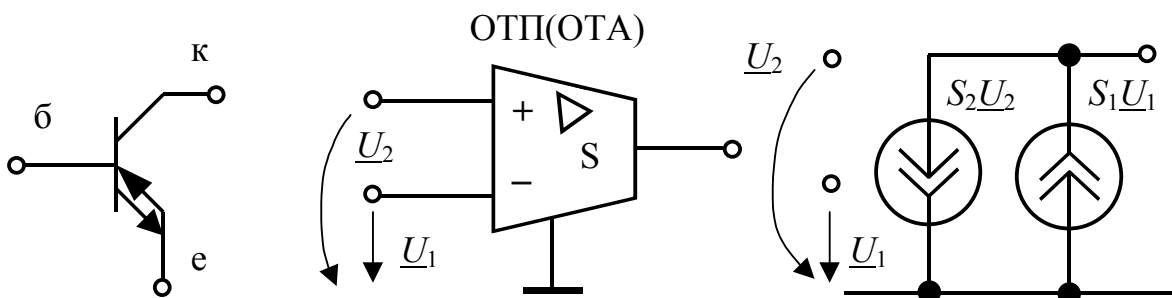
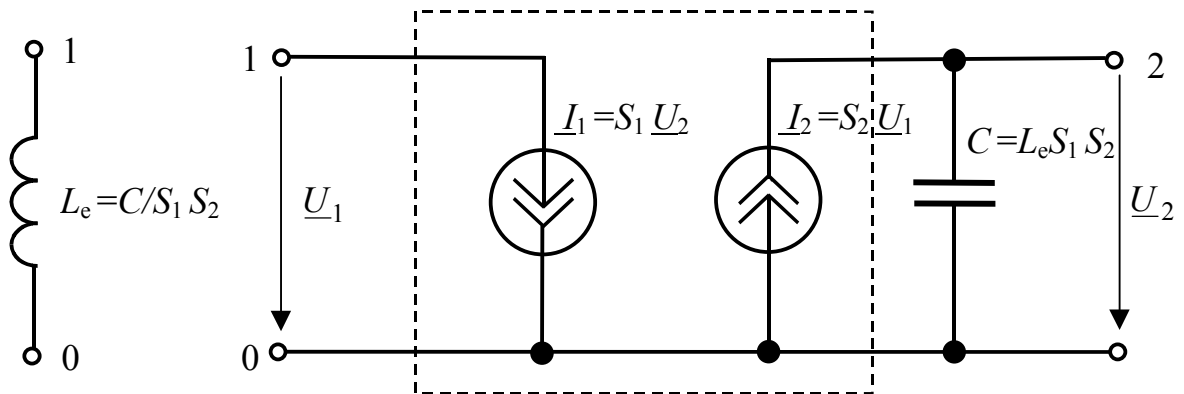
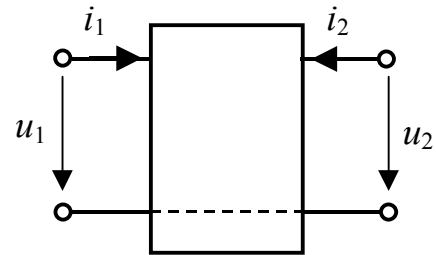
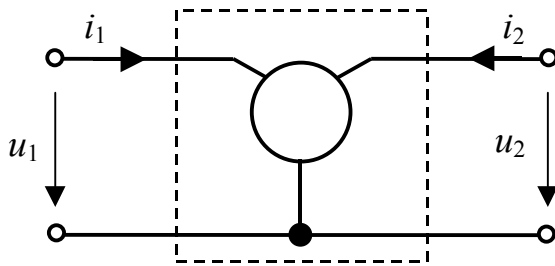
$$\text{Відповідь: } g(t) = 1 - e^{-t/\tau}; H(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau}.$$

4

Багатополюсники

- Загальні зауваження
- Системи рівнянь (моделі) прохідних чотирьохполюсників
- З'єднання чотирьохполюсників
- Характеристичні параметри чотирьохполюсників
- Функції кола
- Функції кола і розрахунки параметрів чотирьохполюсників
- Приклади обчислення функцій деяких кіл
- Метод еквівалентних підсхем
- Спеціальні двобрамники та трибрамники

$$\begin{cases} Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 = I_1; \\ Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 = I_2. \end{cases}$$



4 БАГАТОПОЛЮСНИКИ

4.1 Загальні зауваження

Подання складних кіл у вигляді з'єднаних між собою багатополіусників є потужним сучасним методом їх моделювання.

Так, проектування радіотехнічних кіл складається з трьох основних етапів: синтез, аналіз, оптимізація. На етапі синтезу задають структуру і ваги (величини параметрів) віток еквівалентної схеми. На етапі аналізу визначають реакцію кола на надану дію і порівнюють її з бажаною (наданою у технічному завданні) реакцією. Якщо одержана і надана реакції не збігаються, параметри елементів кола оптимізують, тобто змінюють їх ваги так, щоб забезпечити максимальний збіг. Оптимізація – це ітераційна процедура, тобто кроків наближення одержаних характеристик до очікуваних буде багато (десятки – тисячі). Отже, в процесі оптимізації задачу аналізу радіотехнічного кола слід розв'язувати багато разів. Усе це ставить жорсткі вимоги до простоти і швидкодії процедури розв'язання задачі аналізу, особливо для сучасних складних кіл, схеми яких налічують сотні–тисячі вузлів і тисячі–десятки тисяч елементів.

З іншого боку, кількість віток, що відповідають окремим елементам кола, є значно меншою, ніж кількість можливих з'єднань між окремими вузлами. У середньому в радіотехнічному колі кожен з вузлів схеми з'єднаний не з усіма N (сотні – тисячі), а лише 3 – 7 вузлами. Тому й матриця провідностей системи рівнянь вузлових напруг містить в кожному своєму рядку (розміру $1 \times N$) лише 4 - 8 ненульових елементів, тобто є **розрідженою**.

Отже, аналіз радіотехнічних кіл – це розв'язання систем рівнянь рівноваги з розрідженими матрицями. Ці питання належать до окремого розділу сучасної обчислювальної математики. В даному розділі підручника для нас (на відміну від абстрактної математики) є важливим ще й той факт, що ці схеми радіотехнічних кіл є жорстко структурованими. Останнє є невід'ємною властивістю радіотехнічних кіл обробки інформації і лежить в основі теорії кіл.

Ясно, що при згаданій розрідженості схеми кола в ній можна виділити окремі блоки, які з'єднуються між собою двома, трьома, ..., k - вузлами ($k \ll N$). З іншого боку, весь досвід проектування пристроїв оснований на проектуванні окремих функціональних блоків (або компонентів кола), які у подальшому об'єднують за принциповою схемою.

Компонентами кола називають, зазвичай, вже готові вироби, з яких ці кола складають: резистори, транзистори, конденсатори, операційні підсилювачі (ОП), конвеєри струмів та напруг, складніші функціональні блоки тощо.

Точки, в яких елементи кола (та елементи еквівалентних схем, що цим колам відповідають) об'єднують, називають вузлами, а вузли, за допомогою яких розглядуване коло увімкнене до інших кіл, – полюсами (затискачами).

Полюсами можна вважати й ті внутрішні вузли, в яких обчислюють (або вимірюють) струми та напруги.

Схему, в якій виділено N полюсів, називають багатополюсником або N -полюсником (рис.4.1). Довільну пару полюсів багатополюсника можна розглядати як його вхід, хоча термін “вхід” не є зручним, оскільки відповідає напрямку усередину багатополюсника. Тому входи, на яких вимірюють (обчислюють) реакції, називають виходами.

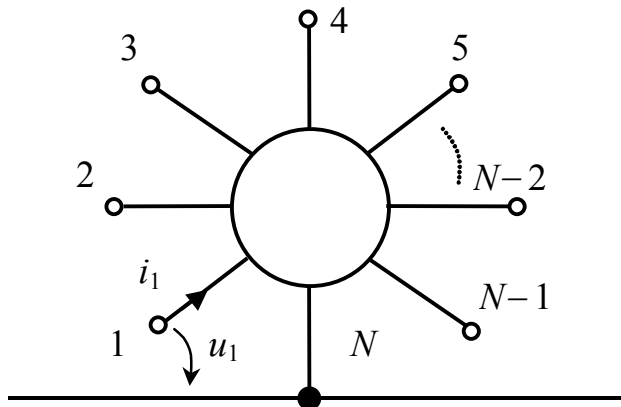


Рисунок 4.1 – Позначення N -полюсника

З N полюсів багатополюсника можна утворити $N(N-1)/2$ входів, але з них тільки $n = N-1$ сукупностей, що не утворюють замкнених контурів, є незалежними, тобто такими, що на них вхідні напруги або струми не можна виразити через алгебраїчну суму напруг або струмів інших незалежних входів.

Багатополюсник, у якого усі залежні входи мають **спільний (базисний) вузол**, називають $(n+1)$ -полюсником, а системи координат, що відповідають вибору таких незалежних входів, називають **канонічними**. Оскільки струми і напруги на входах багатополюсника характеризують його внутрішній стан, який визначає реакцію на зовнішню дію, то відповідний вибір сукупностей струмів та напруг на цих входах визначає **вибір системи координат в n -вимірному просторі**.

Прикладом систем координат і відповідних до них **канонічних систем рівнянь рівноваги** є системи рівнянь контурних струмів та вузлових напруг (див. першу частину підручника [7, розд.2]).

Так, для кола, схема (модель) якого містить n незалежних контурів (усі дії – ідеальні джерела напруги, а реакції – контурні струми) така система координат дає канонічну систему рівнянь контурних струмів:

$$(\underline{Z})(\underline{I}) = (\underline{E}), \quad (4.1)$$

де (\underline{Z}) – матриця опорів порядку n ; (\underline{I}) , (\underline{E}) – стовпці реакцій (контурних струмів) та дій (ЕРС незалежних джерел напруги) розміру $n \times 1$.

Якщо схема кола містить n незалежних вузлів, а реакціями та діями є відповідно вузлові напруги та струми незалежних джерел струму, використовують інший координатний базис (систему координат в n -вимірному просторі), тобто канонічну систему рівнянь вузлових напруг:

$$(\underline{Y})(\underline{U}) = (\underline{I}_{\text{вз}}), \quad (4.2)$$

де (\underline{Y}) – матриця провідностей порядку n ; $(\underline{U}), (\underline{I}_{\text{вз}})$ – стовпці вузлових напруг та струмів незалежних джерел струму розміру $n \times 1$.

Будь-який багатополіусник з n незалежними входами можна розглядати як $2n$ -поліусник (n -брамник¹) незалежно від способу об'єднання входів у середині.

4.2 Системи рівнянь (моделі) прохідних чотириполіусників

Чотириполіусник (двобрамник) з двома незалежними входами (описується системою рівнянь рівноваги порядку $n = 2$), які мають спільний вузол, називають прохідним (рис.4.2).

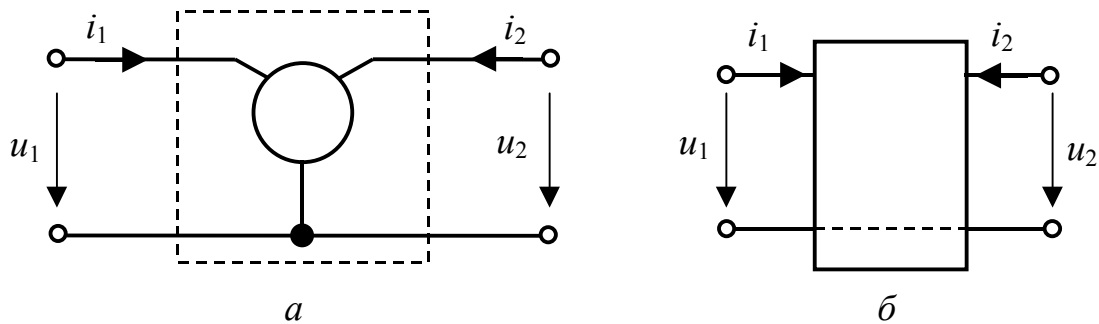


Рисунок 4.2 – Подання багатополіусних компонент кола прохідним чотириполіусником

На рис.4.2 показаний (прийнятий у подальшому викладенні) так званий зустрічний напрям первинного i_1 та вторинного i_2 струмів. Загалом, використовують варіанти прямої (додатні напрями i_1, i_2 обрано зліва направо) та зворотної передачі (додатні напрями i_1, i_2 – справа наліво).

Залежно від вибору пар дії та реакцій (з сукупності величин u_1, i_1, u_2, i_2) чотириполіусник можна описати однією з систем диференціальних рівнянь:

¹ Нині в російсько-мовній літературі за 2×2 -поліусником закріпилася назва “чотириполіусник”, яка стосується будь-якого багатополіусника з чотирма полюсами (тобто відповідно до такого визначення кількість незалежних входів може дорівнювати і двом, і трьом, і чотирьом). Це вносить плутанину в назви багатополіусників (особливо, коли кількість полюсів більша ніж чотири). В англійській літературі визначення зручніші, оскільки класифікація багатополіусників оснований на понятті “незалежний вхід” (port). У технічній літературі Чехії, Словаччини та Польщі слово port має слов'янський аналог брама (брама). Тому в українській літературі доцільним є використання поряд з поняттям “багатополіусник” поняття “багатобрамник”. Отже чотириполіусник, тобто частина кола з двома незалежними входами за наявності трьох, чотирьох, п'яти полюсів (один з яких є “заземленим”), буде називатися двобрамником.

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} di_1 \\ di_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3a)$$

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} di_1 \\ di_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3б)$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} di_1 \\ du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ di_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3в)$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_1 \\ di_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} di_1 \\ du_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3г)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_2 \\ di_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ di_1 \end{pmatrix}; \quad (4.3д)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du_1 \\ di_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_2 \\ di_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3ж)$$

Рівняння чотириполюсника (4.3) справедливі за будь-яких форм дії (синусоїдна чи довільна) та виду кола (зокрема, лінійне чи нелінійне). Але відомо, що співвідношення, аналогічні рівнянням (4.3) стосовно функцій часу u_1, i_1, u_2, i_2 , можна встановити для комплексних амплітуд (діючих значень) синусоїдних дій та реакцій $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$ [7, розд.3] або для операторних зображень $U_1(p), I_1(p), U_2(p), I_2(p)$ довільних дій та реакцій (див. розд.3). Тому, не порушуючи загальний підхід, можна аналізувати комплексну форму співвідношень (4.3), оскільки розгляд лінійного кола при синусоїдній дії має особливе значення у радіотехнічних колах.

Коефіцієнти при напругах і струмах у рівняннях (4.3) називаються **параметрами чотириполюсника**.

Розмірність параметрів чотириполюсника у виразах (4.3) легко встановити за розмірністю відповідних дій та реакцій. Зазвичай зручним є вимірювання параметрів прохідного чотириполюсника в одному з наведених шести базисів, оскільки наприклад, основні компоненти (ОП, транзистори тощо) є вже готовими виробами, а їх еквівалентні електричні схеми занадто складні.

Так, наприклад, з першого рівняння (4.3а) у комплексному вигляді

$$\underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \quad (4.4a)$$

ясно, що $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}$, якщо $\underline{U}_2 = 0$, тобто в разі короткого замикання виходу 2.

Аналогічно можна знайти \underline{Y}_{22} . Параметр \underline{Y}_{12} аналогічно знайти не можна, оскільки для цього слід виконати умову $\underline{U}_1 = 0$ (див. формулу 4.4а), тобто забезпечити коротке замикання входу 1 і при цьому ж на вхід 1 подати струм \underline{I}_1 , який з джерела буде протікати лише шляхом короткого замикання і не буде

відгалужуватися у чотириполіусник. Якщо забезпечити холостий хід на вході 1 ($I_1 = 0$), тоді
$$\underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 = 0; \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}.$$

Якщо значення \underline{Y}_{11} вже обчислене, то можна визначити і \underline{Y}_{12} . Але непрямі вимірювання (з використанням результатів оцінки інших параметрів) призводять до великих похибок і тому не рекомендовані. У той самий час параметр \underline{H}_{12} у виразі (4.3в) може бути вимірним безпосередньо, оскільки система H -параметрів (4.3в) дозволяє оцінити кожен з параметрів за одне вимірювання.

Так, комплексний вираз (4.3в) можна записати в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2 = \underline{U}_1; \\ \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2 = \underline{I}_2. \end{cases} \quad (4.4в)$$

Тоді

$$\underline{H}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0}; \quad \underline{H}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}; \quad \underline{H}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0}; \quad \underline{H}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}. \quad (4.4г)$$

З виразів (4.4г), які використовують для прямого вимірювання H -параметрів, ясно, що система (4.3в) є дуже зручною. Але, як показує досвід, для обчислень найкращим є базис канонічних рівнянь вузлових напруг. Тому важливою є можливість проводити вимірювання в одному з обраних базисів, а обчислення – в іншому. Зв'язок між параметрами систем рівнянь (4.3) наведено в табл.4.1 і 4.2.

Таблиця 4.1 – Формули зв'язку між визначниками рівнянь прохідного чотириполіусника

$ Z $	$ Z $	$\frac{1}{ Y }$	$\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{\underline{D}_{22}}{\underline{D}_{11}}$	$-\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}$	$-\frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{21}}$
$ Y $	$\frac{1}{ Z }$	$ Y $	$\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{11}}$	$\frac{\underline{D}_{11}}{\underline{D}_{22}}$	$-\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{12}}$	$-\frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{12}}$
$ H $	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11}}$	$ H $	$\frac{1}{ D }$	$-\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}$	$-\frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{11}}$
$ D $	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{1}{ H }$	$ D $	$-\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}$	$-\frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{22}}$
$ A $	$-\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{21}}$	$-\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}}$	$\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{\underline{D}_{12}}{\underline{D}_{21}}$	$ A $	$\frac{1}{ B }$
$ B $	$-\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{12}}$	$-\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{12}}$	$\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{12}}$	$\frac{\underline{D}_{21}}{\underline{D}_{12}}$	$\frac{1}{ A }$	$ B $

Таблиця 4.2 – Формули зв'язку між коефіцієнтами систем рівнянь чотириполосника

Z	\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{12}	$\frac{\underline{Y}_{22}}{ \underline{Y} }$ $-\frac{\underline{Y}_{12}}{ \underline{Y} }$	$\frac{ H }{\underline{H}_{22}}$ $\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{D}_{11}}$ $-\frac{\underline{D}_{12}}{\underline{D}_{11}}$	$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$ $-\frac{ A }{\underline{A}_{21}}$	$\frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{B}_{21}}$
	\underline{Z}_{21} \underline{Z}_{22}	$\frac{\underline{Y}_{21}}{ \underline{Y} }$ $\frac{\underline{Y}_{11}}{ \underline{Y} }$	$\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}}$ $\frac{1}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{\underline{D}_{21}}{\underline{D}_{11}}$ $\frac{ D }{\underline{D}_{11}}$	$\frac{1}{\underline{A}_{21}}$ $-\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{ B }{\underline{B}_{21}}$ $\frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{21}}$
Y	$\frac{\underline{Z}_{22}}{ \underline{Z} }$ $-\frac{\underline{Z}_{12}}{ \underline{Z} }$	\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{12}	$\frac{1}{\underline{H}_{11}}$ $-\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$	$\frac{ D }{\underline{D}_{22}}$ $\frac{\underline{D}_{12}}{\underline{D}_{22}}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}}$ $-\frac{ A }{\underline{A}_{12}}$	$\frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{12}}$ $\frac{1}{\underline{B}_{12}}$
	$\frac{\underline{Z}_{21}}{ \underline{Z} }$ $\frac{\underline{Z}_{11}}{ \underline{Z} }$	\underline{Y}_{21} \underline{Y}_{22}	$\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}}$ $\frac{ H }{\underline{H}_{11}}$	$\frac{\underline{D}_{21}}{\underline{D}_{22}}$ $\frac{1}{\underline{D}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{A}_{12}}$ $-\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$	$\frac{ B }{\underline{B}_{12}}$ $\frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{12}}$
H	$\frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{22}}$ $\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}}$ $-\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$	\underline{H}_{11} \underline{H}_{12}	$\frac{\underline{D}_{22}}{ D }$ $-\frac{\underline{D}_{12}}{ D }$	$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$ $\frac{ A }{\underline{A}_{22}}$	$\frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{11}}$ $\frac{1}{\underline{B}_{11}}$
	$\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}$ $\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{11}}$	\underline{H}_{21} \underline{H}_{22}	$\frac{\underline{D}_{21}}{ D }$ $\frac{\underline{D}_{11}}{ D }$	$\frac{1}{\underline{A}_{22}}$ $-\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}$	$\frac{ B }{\underline{B}_{11}}$ $\frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{11}}$
D	$\frac{1}{\underline{Z}_{11}}$ $-\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{22}}$ $\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{\underline{H}_{22}}{ H }$ $-\frac{\underline{H}_{12}}{ H }$	\underline{D}_{11} \underline{D}_{12}	$\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}$ $\frac{ A }{\underline{A}_{11}}$	$\frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{22}}$ $\frac{1}{\underline{B}_{22}}$
	$\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}}$ $\frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}}$ $\frac{1}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{\underline{H}_{21}}{ H }$ $\frac{\underline{H}_{11}}{ H }$	\underline{D}_{21} \underline{D}_{22}	$\frac{1}{\underline{A}_{11}}$ $-\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$	$\frac{ B }{\underline{B}_{22}}$ $\frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{22}}$
A	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}$ $-\frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{21}}$	$\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{Y}_{21}}$	$\frac{ H }{\underline{H}_{21}}$ $\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{D}_{21}}$ $-\frac{\underline{D}_{22}}{\underline{D}_{21}}$	\underline{A}_{11} \underline{A}_{12}	$\frac{\underline{B}_{22}}{ B }$ $-\frac{\underline{B}_{12}}{ B }$
	$\frac{1}{\underline{Z}_{21}}$ $-\frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{21}}$	$\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{21}}$ $\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$	$\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{\underline{D}_{11}}{\underline{D}_{21}}$ $-\frac{ D }{\underline{D}_{21}}$	\underline{A}_{21} \underline{A}_{22}	$\frac{\underline{B}_{21}}{ B }$ $\frac{\underline{B}_{11}}{ B }$
B	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}}$ $-\frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{12}}$	$\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}$ $\frac{1}{\underline{Y}_{12}}$	$\frac{1}{\underline{H}_{12}}$ $-\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{12}}$	$\frac{ D }{\underline{D}_{12}}$ $\frac{\underline{D}_{22}}{\underline{D}_{12}}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{ A }$ $-\frac{\underline{A}_{12}}{ A }$	\underline{B}_{11} \underline{B}_{12}
	$\frac{1}{\underline{Z}_{12}}$ $-\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}}$	$\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{12}}$ $\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}$	$\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{12}}$ $-\frac{ H }{\underline{H}_{12}}$	$\frac{\underline{D}_{11}}{\underline{D}_{12}}$ $\frac{1}{\underline{D}_{12}}$	$\frac{\underline{A}_{21}}{ A }$ $\frac{\underline{A}_{11}}{ A }$	\underline{B}_{21} \underline{B}_{22}

Для кожної з наведених у табл.4.2 систем параметрів прохідного чотириполюсника можна побудувати еквівалентну схему, яка складається з ідеальних залежних джерел. Тобто один (той самий) чотириполюсник можна описати як однією з систем (4.3), так і множиною еквівалентних схем, деякі з яких зображено на рис.4.3.

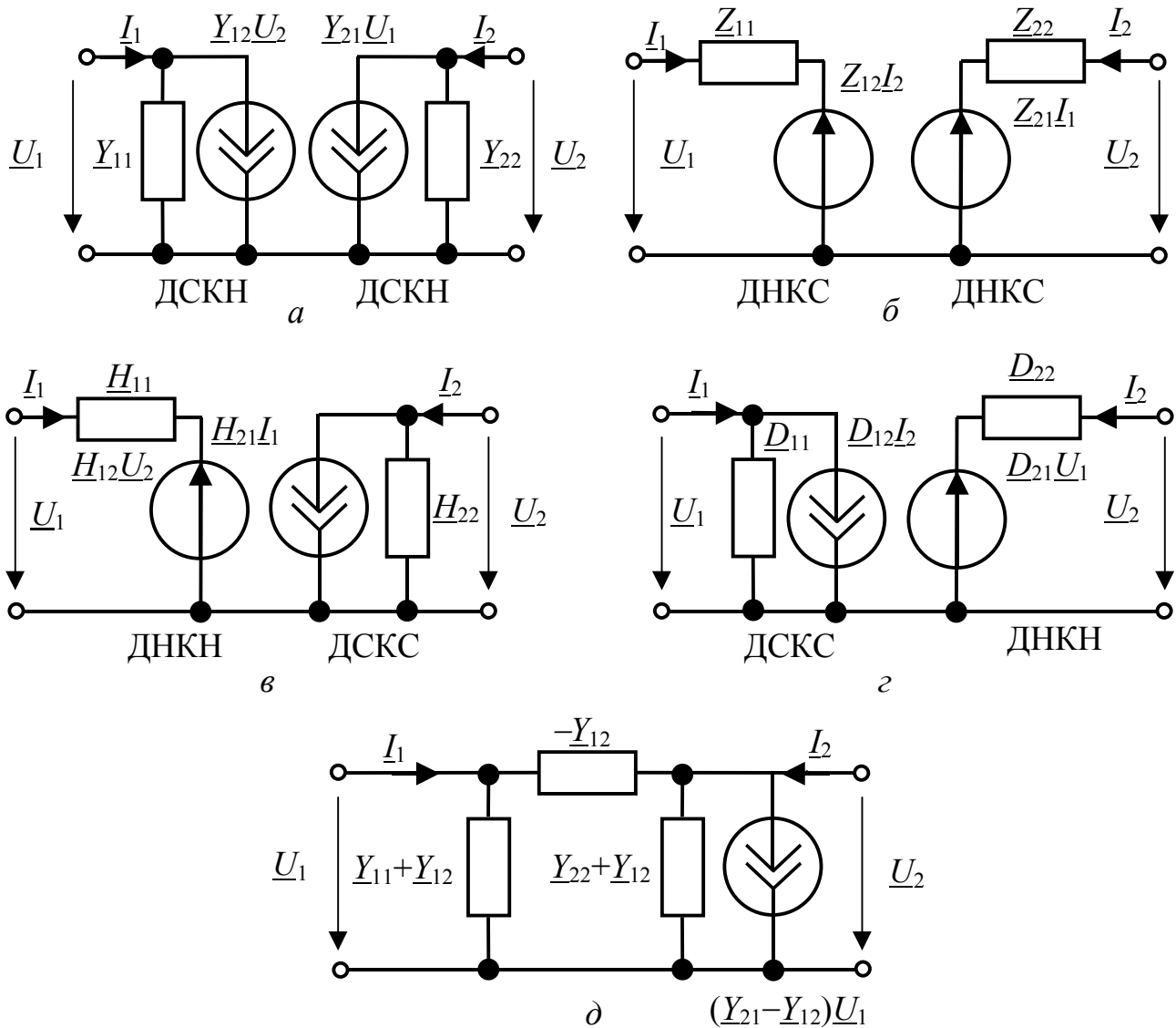


Рисунок 4.3 – Канонічні еквівалентні схеми прохідних чотириполюсників

Так, системі рівнянь з Y -параметрами (4.3а) відповідає схема з двома залежними джерелами типу ДСКН (рис.4.3, а). Якщо покласти $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{22} = 0$ та $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{пер}$, виходить ідеальне джерело струму, кероване напругою [7, рис.2.56, з]. Отже, матриця (\underline{Y}) ідеального ДСКН має вигляд:

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{Y}_{пер} & 0 \end{pmatrix}.$$

Користуючись табл.4.2, можна записати його A -матрицю:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/Y_{\text{пер}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно системі рівнянь (4.4в) згідно з першим законом Кірхгофа можна співставити схему з двома залежними джерелами: ДНКН і ДСКС (рис.4.3, в). За умови $\underline{H}_{11} = \underline{H}_{12} = \underline{H}_{22} = 0$ та $\underline{H}_{21} = \underline{H}_I$, виходить ідеальне джерело струму, кероване струмом [7, рис.2.56, б]. Його H -матриця має вигляд:

$$(\underline{H}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{H}_I & 0 \end{pmatrix},$$

а перехід за табл.4.3 до A -матриці дає:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\underline{H}_I \end{pmatrix}.$$

Якщо використати систему рівнянь з Z -параметрами (4.3б), виходить схема з двома джерелами напруги, керованими струмом (ДНКС, рис.4.3, в). За умови $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{22} = 0$ та $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{\text{пер}}$, виходить ідеальне ДНКС [7, рис.2.56, в], відповідні матриці якого записуються у вигляді:

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{Z}_{\text{пер}} & 0 \end{pmatrix}; \quad (\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\underline{Z}_{\text{пер}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему рівнянь чотириполюсника з D -параметрами можна представити схемою (рис.4.3, з). При $\underline{D}_{11} = \underline{D}_{12} = \underline{D}_{22} = 0$ та $\underline{D}_{21} = \underline{H}_U$, ця схема перетворюється в ідеальне джерело напруги, кероване напругою ДНКН [7, рис.2.56, а], відповідні матриці якого мають вигляд:

$$(\underline{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{H}_U & 0 \end{pmatrix}; \quad (\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1/\underline{H}_U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

До найпростіших активних лінійних чотириполюсників із залежними джерелами належать транзистори та електронні лампи, які працюють у лінійному режимі. Для транзисторів частіше використовують рівняння з H - та Y -параметрами.

4.3 З'єднання чотириполюсників

Певну форму запису рівнянь (4.3) застосовують, виходячи з конкретної постановки задачі. Так, синтезуючи кола, зазвичай використовують Y - або Z -форми. Параметри транзисторів для сигнальних складових надають в Y -, H - або Z -формах, оскільки в цих формах такі параметри зручніше визначати експериментально.

Щоб знайти зв'язок між вхідними і вихідними величинами по-різному з'єднаних чотириполюсників, визначаючи параметри еквівалентного (складеного) чотириполюсника, використовують Z -, H -, D -, Y - і A -форми.

При послідовному з'єднанні чотириполюсників А і В (рис.4.4, а) застосовують Z -форму, при паралельному з'єднанні (рис.4.4, б) – Y -форму, при

послідовно-паралельному (рис.4.4, в) – H -форму, при паралельно-послідовному (рис.4.4, г) – D -форму, при каскадному (рис.4.4, д) – A -форму.

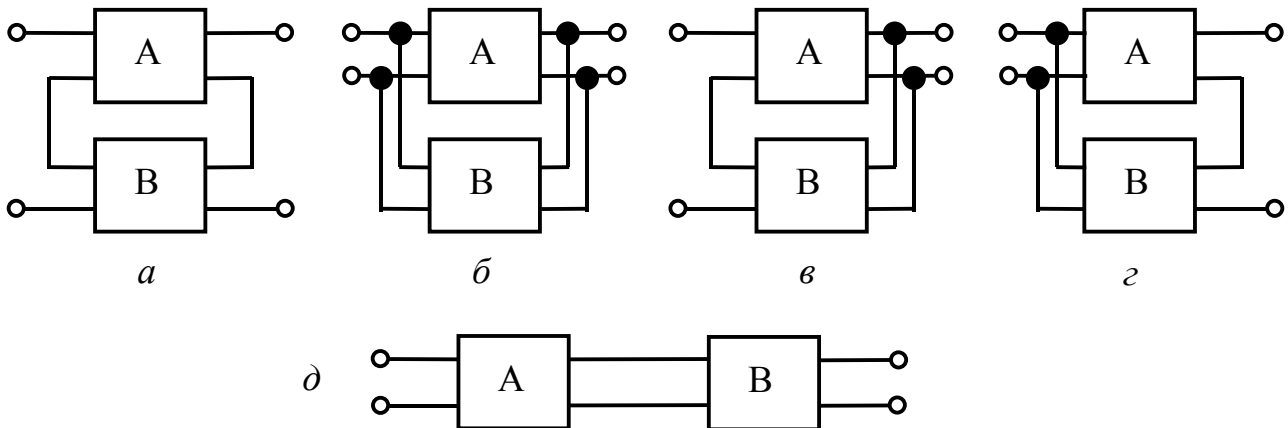


Рисунок 4.4 – З'єднання чотириполіусників: a – послідовне; b – паралельне; $в$ – послідовно-паралельне; $г$ – паралельно-послідовне; $д$ – каскадне

Отже, форму запису рівнянь (4.3) вибирають, враховуючи зручність отримання відповідної матриці еквівалентного чотириполіусника.

Так, при послідовному з'єднанні чотириполіусників A і B матриця $(\underline{Z})_e = (\underline{Z})_A + (\underline{Z})_B$, оскільки напруга на вході (виході) еквівалентного чотириполіусника дорівнює сумі напруг на входах (виходах) чотириполіусників, які його складають, а струми відповідно на входах (виходах) послідовно з'єднаних чотириполіусників однакові.

При паралельному з'єднанні чотириполіусників A і B матриця $(\underline{Y})_e = (\underline{Y})_A + (\underline{Y})_B$, оскільки струм на вході (виході) еквівалентного чотириполіусника дорівнює сумі струмів на входах (виходах) чотириполіусників A і B , а напруги відповідно на входах (виходах) у них однакові.

Аналогічні висновки справедливі стосовно матриці $(\underline{H})_e = (\underline{H})_A + (\underline{H})_B$ при послідовно-паралельному і матриці $(\underline{D})_e = (\underline{D})_A + (\underline{D})_B$ при паралельно-послідовному з'єднанні чотириполіусників.

При каскадному з'єднанні струм і напруга на виході чотириполіусника A дорівнюють вхідним струму і напрузі чотириполіусника B , тому

$$(\underline{A})_e = (\underline{A})_A \times (\underline{A})_B = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11a} \underline{A}_{11b} + \underline{A}_{12a} \underline{A}_{21b} & \underline{A}_{11a} \underline{A}_{12b} + \underline{A}_{12a} \underline{A}_{22b} \\ \underline{A}_{21a} \underline{A}_{11b} + \underline{A}_{22a} \underline{A}_{21b} & \underline{A}_{21a} \underline{A}_{12b} + \underline{A}_{22a} \underline{A}_{22b} \end{pmatrix}.$$

Наведені правила визначення матриць еквівалентних чотириполіусників справедливі за будь-якої кількості чотириполіусників, що їх складають. Але, підсумовуючи матриці, слід дотримуватися **умови регулярності з'єднання чотириполіусників** – через обидва вхідних затискачі кожного чотириполіусника мають протікати однакові за величиною і протилежні за напрямом струми; те ж саме має бути щодо вихідних затискачів кожного чотириполіусника. При ре-

гулярному з'єднанні матриця кожного з чотириполіусників має бути такою самою, якою вона була перед з'єднанням.

4.4 Характеристичні параметри чотириполіусників

Характеристичними параметрами чотириполіусника називають його вхідні опори і передатні функції в режимі узгодження чотириполіусника з навантаженням за повною потужністю.

Для взаємного несиметричного² чотириполіусника ($\underline{A}_{11} \neq \underline{A}_{22}$) розглядають два характеристичні опори: \underline{Z}_{c1} і \underline{Z}_{c2} . Опір \underline{Z}_{c1} – це вхідний опір з боку затискачів a, b , коли навантаження увімкнено до затискачів c, d і дорівнює \underline{Z}_{c2} (рис.4.5, а). Скориставшись комплексною формою запису системи (4.3д)

$$\begin{cases} \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 = \underline{U}_1; \\ \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 = \underline{I}_1, \end{cases} \quad (4.5)$$

можна записати:

$$\underline{Z}_{c1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{c2}\underline{I}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c2}\underline{I}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{22}}. \quad (4.6a)$$

Опір \underline{Z}_{c2} – це вхідний опір з боку затискачів c, d , коли опір навантаження \underline{Z}_{c1} увімкнено до затискачів a, b (рис.4.5, б). Аналогічно, записавши рівняння (4.3ж) у комплексному вигляді та використавши формули зв'язку між коефіцієнтами A і B (табл.4.2), можна знайти:

$$\underline{Z}_{c2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1}{\underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{c1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c1} + \underline{A}_{11}}. \quad (4.6б)$$

Отже, **характеристичним** називається опір, який будучи навантаженням з одного входу чотириполіусника, встановлює його опір з іншого входу таким, що дорівнює характеристичному. Умова, за якої чотириполіусник навантажено відповідним характеристичним опором, називається умовою **узгодженого навантаження** (увімкнення).

Спільне розв'язання рівнянь (4.6а) і (4.6б) дає:

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12})/(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22})}; \quad \underline{Z}_{c2} = \sqrt{(\underline{A}_{22}\underline{A}_{12})/(\underline{A}_{21}\underline{A}_{11})}. \quad (4.7a)$$

² Чотириполіусник називають взаємним (зворотним), якщо він задовольняє принципу взаємності [7, підр.2.9], тобто його передатний опір (провідність) інваріантний до зміни місць його брам ($\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$). Для взаємного чотириполіусника $|A| = 1$. Пасивні лінійні та симетричні чотириполіусники завжди взаємні.

Чотириполіусник називають симетричним, якщо зміна місць його брам не змінює струмів і напруг у зовнішньому колі. При цьому $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$.

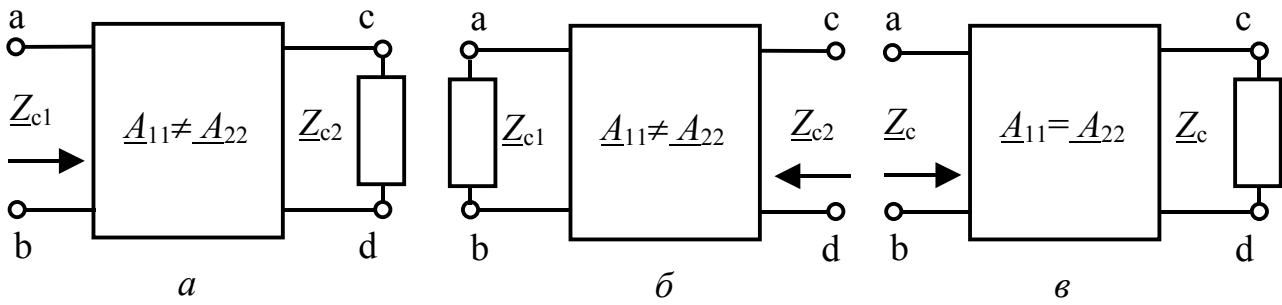


Рисунок 4.5 – Визначення характеристичного опору:
a, б – несиметричний чотириполюсник; *в* – симетричний

Характеристичні опори можна виразити через параметри холостого ходу і короткого замикання. Так, скориставшись системою (4.5), можна записати:

$$\underline{Z}_{1x.x} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad \underline{Z}_{1к.з} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

Аналогічно, з системи *B*-параметрів виходить:

$$\underline{Z}_{2x.x} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{A_{22}}{A_{21}}; \quad \underline{Z}_{2к.з} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Тоді

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_{1x.x} \underline{Z}_{1к.з}}; \quad \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{2x.x} \underline{Z}_{2к.з}}.$$

Якщо чотириполюсник симетричний ($A_{11} = A_{22}$), тоді

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c = \sqrt{A_{12} / A_{21}} = \sqrt{\underline{Z}_{x.x} \underline{Z}_{к.з}}, \quad (4.76)$$

де \underline{Z}_c дорівнює вхідному опору чотириполюсника, коли його навантажено опором \underline{Z}_c (рис.4.5, *в*).

За узгодженого увімкнення на стиках “генератор–чотириполюсник” і “чотириполюсник–генератор” електрична енергія розсіюватиметься тільки у чотириполюснику. Щоб врахувати ці втрати, вводять міру передачі енергії – **характеристичну (власну) сталу передачі**, яка визначається у вигляді:

$$\underline{\Gamma}_c = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2}, \quad (4.8)$$

причому всі струми і напруги обчислюють в режимі узгодження.

Оскільки $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{вх} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{c1}$ і $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{вх2} = \underline{I}_2 \underline{Z}_{c2}$, вираз (4.8) можна записати інакше:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \left(\frac{\underline{I}_1 \sqrt{\underline{Z}_{c1}}}{\underline{I}_2 \sqrt{\underline{Z}_{c2}}} \right) = \ln \left(\frac{\underline{U}_1 \sqrt{\underline{Z}_{c2}}}{\underline{U}_2 \sqrt{\underline{Z}_{c1}}} \right). \quad (4.9)$$

Так само, як і характеристичний опір, характеристичну сталу передачі можна виразити через параметри чотириполюсника. Врахувавши, що в режимі узгодження $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H = \underline{I}_2 \underline{Z}_{c2}$, з другого рівняння (4.5) можна знайти:

$$\underline{I}_1 = (A_{21} \underline{Z}_{c2} + A_{22}) \underline{I}_2.$$

Підставивши цей вираз до формули (4.9) та враховуючи співвідношення (4.7а), можна записати:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \left[\left(\underline{A}_{21} \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{A}_{11}}} + \underline{A}_{22} \right) \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} \right] = \ln \left(\sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} + \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} \right). \quad (4.10)$$

Якщо чотириполюсник симетричний ($\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c$), формула (4.9) матиме вигляд:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2},$$

або через A -параметри:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right).$$

Загалом характеристична стала є комплексною величиною:

$$\underline{\Gamma}_c = \underline{A}_c + j\underline{B}_c. \quad (4.11)$$

Представивши відношення комплексних діючих значень $\underline{U}_1 / \underline{U}_2$ у показниковій формі, можна записати:

$$\ln \frac{\underline{U}_1 e^{j\Psi_{u1}}}{\underline{U}_2 e^{j\Psi_{u2}}} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + j(\Psi_{u1} - \Psi_{u2}). \quad (4.12)$$

З порівняння виразів (4.12) і (4.11) виходить, що

$$\underline{A}_c = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}; \quad \underline{B}_c = \Psi_{u1} - \Psi_{u2}.$$

Коефіцієнт \underline{A}_c називається **характеристичною сталою (коефіцієнтом) ослаблення**, вимірюється в логарифмічних одиницях (Нп, Б, дБ). Він характеризує міру змінювання амплітуд напруги і струму узгодженого чотириполюсника при переході від його входу до виходу.

Коефіцієнт \underline{B}_c називається **характеристичною сталою (коефіцієнтом) фази**, вимірюється в радіанах (град). Він дорівнює зсуву фаз між вхідною і вихідною напругами (струмами) узгодженого чотириполюсника.

Характеристична стала пов'язана з комплексним коефіцієнтом передачі за напругою узгодженого чотириполюсника. Очевидно, що

$$H_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = H_U(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = e^{-\underline{\Gamma}_c},$$

звідки

$$\ln H_U(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = -\underline{\Gamma}_c, \quad \text{або} \quad \ln H_U(\omega) + j\varphi(\omega) = -\underline{A}_c - j\underline{B}_c.$$

Тоді

$$\underline{A}_c = -\ln H_U(\omega) = \ln \frac{1}{H_U(\omega)}; \quad \underline{B}_c = -\varphi(\omega).$$

Отже, при проходженні синусоїдного коливання через узгоджений чотириполюсник, амплітуда коливання зменшується в $e^{\underline{A}_c}$ разів, а початкова фаза – на кут \underline{B}_c .

Здобуті вище формули (4.7а), (4.7б), (4.10) дозволяють не тільки обчислювати характеристичні параметри чотириполюсника через його A -параметри. За цими формулами можна встановити й обернені співвідношення.

Так, з виразу (4.10) виходить:

$$e^{\Gamma_c} = \sqrt{A_{12}A_{21}} + \sqrt{A_{11}A_{22}}; \quad e^{-\Gamma_c} = \sqrt{A_{11}A_{21}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}.$$

Скориставшись відомими математичними формулами, можна записати:

$$\operatorname{ch}\Gamma_c = \frac{e^{\Gamma_c} + e^{-\Gamma_c}}{2} = \sqrt{A_{11}A_{22}}; \quad \operatorname{sh}\Gamma_c = \frac{e^{\Gamma_c} - e^{-\Gamma_c}}{2} = \sqrt{A_{12}A_{21}}. \quad (4.13)$$

Далі, з формули (4.7а) виходить:

$$\sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}} = \sqrt{A_{11}/A_{22}}; \quad \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} = \sqrt{A_{12}/A_{21}}. \quad (4.14)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (4.13) і (4.14), неважко знайти A -параметри, підставивши які до системи (4.5), отримують рівняння передачі чотириполюсника в характеристичних параметрах:

$$\begin{cases} \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}} \operatorname{ch}\Gamma_c U_2 + \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} \operatorname{sh}\Gamma_c I_2 = U_1; \\ \frac{1}{\sqrt{Z_{c1}Z_{c2}}} \operatorname{sh}\Gamma_c U_2 + \sqrt{Z_{c2}/Z_{c1}} \operatorname{ch}\Gamma_c I_2 = I_1. \end{cases}$$

Для симетричного чотириполюсника ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} U_2 \operatorname{ch}\Gamma_c + I_2 Z_c \operatorname{sh}\Gamma_c = U_1; \\ (U_2 / Z_c) \operatorname{sh}\Gamma_c + I_2 \operatorname{ch}\Gamma_c = I_1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Запис рівнянь чотириполюсника у формі (4.15) широко застосовують, описуючи кола з розподіленими параметрами (див. розд.5).

4.5 Функції кола

Розв'язання рівнянь рівноваги радіотехнічного кола у вигляді канонічної системи контурних струмів (4.1) або вузлових напруг (4.2) дозволяє знайти реакції (контурні струми або вузлові напруги) на незалежні дії (напруги або струми джерел, відповідно) на будь-яких входах кола (парах вузлів). Кількість незалежних входів (до яких можуть бути увімкнені джерела незалежних дій) для будь-якого реального радіотехнічного кола зазвичай значно менша, ніж загальна кількість вузлів (або контурів) його еквівалентної схеми. Тому розв'язувати загальну систему рівнянь (4.1), (4.2) у діапазоні частот немає необхідності. Інакше кажучи, немає необхідності обчислювати усі елементи оберненої матриці $(Z)^{-1}$ або $(Y)^{-1}$ у розв'язках рівнянь (4.1), (4.2), які у загальному випадку мають вигляд:

$$(I) = (Z)^{-1}(E); \quad (4.16a)$$

$$(U) = (Y)^{-1}(I_{в3}). \quad (4.16б)$$

Щоб розв'язати задачу аналізу, досить обчислити лише деякі елементи обернених матриць $(Z)^{-1}$ та $(Y)^{-1}$. Це обумовлено тим, що еквівалентним пере-

творенням схеми кола, пов'язаним зі зменшенням кількості незалежних внутрішніх вузлів або контурів в оберненому базисі, відповідає просте викреслення з обернених матриць $(\underline{Z})^{-1}$ та $(\underline{Y})^{-1}$ рядків та стовпців, номери яких дорівнюють номерам внутрішніх вузлів (внутрішні вузли та контури – це такі, до яких не можуть бути увімкнені джерела незалежної дії).

Отже, розв'язуючи задачу аналізу складного кола з довільною кількістю вузлів ($n > 4$), його можна представити еквівалентним чотиріполюсником та обчислювати **комплексні функції (КФ)** відносно двох вхідних та двох вихідних полюсів. Використання такого прийому лежить в основі методу **еквівалентного чотиріполюсника**.

Пояснення цього методу дає простий приклад. Нехай надана схема кола (рис.4.6), яка містить внутрішні вузли з номерами 2, 3. В результаті складання та розв'язання системи рівнянь вузлових напруг для цієї схеми одержана обернена матриця $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$.

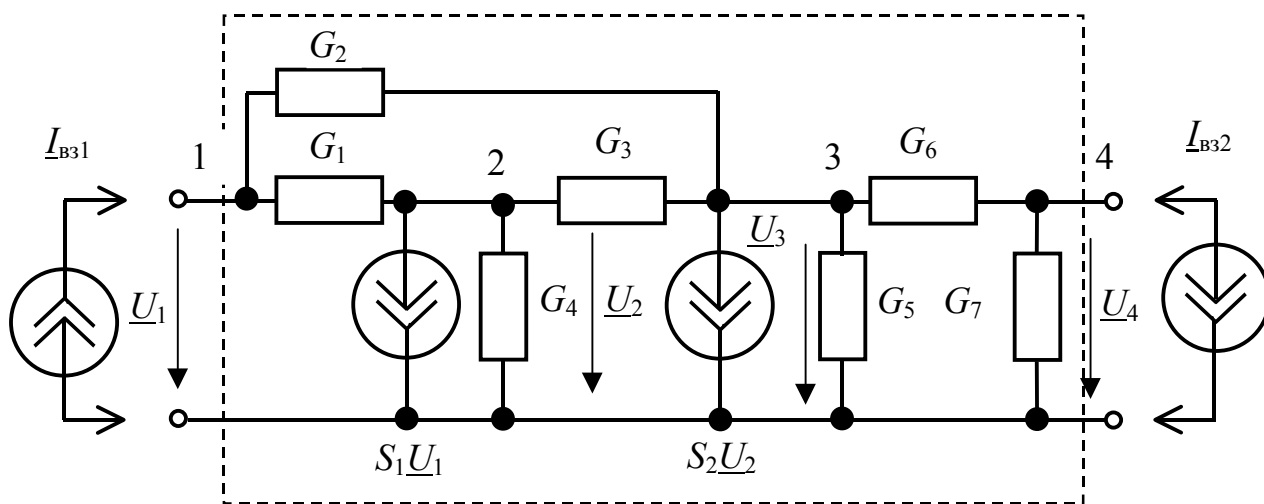


Рисунок 4.6 – Приклад для пояснення методу еквівалентного чотиріполюсника

Тоді вираз (4.16б) матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{14} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{24} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} & \underline{Z}_{34} \\ \underline{Z}_{41} & \underline{Z}_{42} & \underline{Z}_{43} & \underline{Z}_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_{B31} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{I}_{B32} \end{pmatrix}, \quad (4.16в)$$

де \underline{Z}_{ij} – елементи матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$, \underline{I}_{B31} , \underline{I}_{B32} – вузлові струми незалежних джерел струму, які можна увімкнути до зовнішніх вузлів еквівалентного прохідного чотиріполюсника, позначеного на схемі (рис.4.6) пунктиром. Нулі у стовпці струмів системи (4.16в) вказують, що вузли 2, 3 внутрішні, тому й напруги на внутрішніх вузлах $\underline{U}_2, \underline{U}_3$ недоцільно вимірювати. Отже, рівняння

(4.16в) для напруг $\underline{U}_1, \underline{U}_4$ на зовнішніх вузлах чотиріполюсника можна замінити на таке:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 4 \\ \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{14} \\ \underline{Z}_{41} & \underline{Z}_{44} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_{\text{вз1}} \\ \underline{I}_{\text{вз2}} \end{pmatrix}. \quad (4.16г)$$

Оскільки комплексні амплітуди (діючі значення) реакції \underline{F}_j і дії \underline{F}_i (на даній частоті) у лінійному (слабосигнальному) колі на входах j та i відповідно пов'язані співвідношенням

$$H(j\omega) = \underline{F}_j / \underline{F}_i,$$

то $H(j\omega)$, яку називають комплексною передатною функцією (КПФ) кола [7, розд.5], збігається з елементом \underline{Z}_{ji} оберненої матриці провідностей $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$, якщо \underline{F}_j має сенс вузлової напруги \underline{U}_j , а \underline{F}_i – вузлового струму $\underline{I}_{\text{вз}i}$ незалежних джерел струму.

Аналогічно, якщо обрати базовою канонічну систему контурних струмів, то \underline{F}_j має сенс контурного струму \underline{I}_i , а \underline{F}_i – напруги (ЕРС) незалежного джерела \underline{E}_i . Тоді $H(j\omega)$ – це елемент \underline{Y}_{ji} оберненої матриці опорів $(\underline{Y}) = (\underline{Z})^{-1}$ у виразі (4.16а).

Отже, в канонічній системі вузлових напруг КПФ кола є елементом оберненої матриці $(\underline{Y})^{-1} = (\underline{Z})$. Загалом функції кола є комбінаціями елементів оберненої матриці $(\underline{Y})^{-1} = (\underline{Z})$ (або, якщо коло описане канонічною системою рівнянь контурних струмів, – матриці $(\underline{Z})^{-1} = (\underline{Y})$).

Комплексні функції (або коротше – функції) кола пов'язують між собою дії та реакції на двох входах. Отже, наведені системи (Z, Y, H, D, A, B) параметрів прохідного чотиріполюсника визначають відповідні КФ. Будь-який чотиріполюсник може бути повністю описаний своїми КФ. Оскільки чотиріполюсник має два входи, а дії і реакції на його входах мають сенс струмів та (або) напруг, існує всього шість типів таких функцій (див. першу частину підручника [7, підрозд.5.1, 6.1]):

КПФ: коефіцієнт передачі за напругою (зі входу i до входу j), коефіцієнт передачі за струмом (зі входу i до входу j), передатний опір (зі входу i до входу j), передатна провідність (зі входу i до входу j);

КВФ: вхідний опір (відносно обраного входу i або j), вхідна провідність (відносно обраного входу i або j).

Внаслідок широкого застосування базису вузлових напруг у сучасній практиці аналізу електричних кіл у подальшому методи обчислення функцій кола розглядатимуться переважно саме у цьому базисі.

4.5.1 Коефіцієнт передачі за напругою

Нехай коло є чотириполусником з двома входами a, b та c, d (рис.4.7, a).

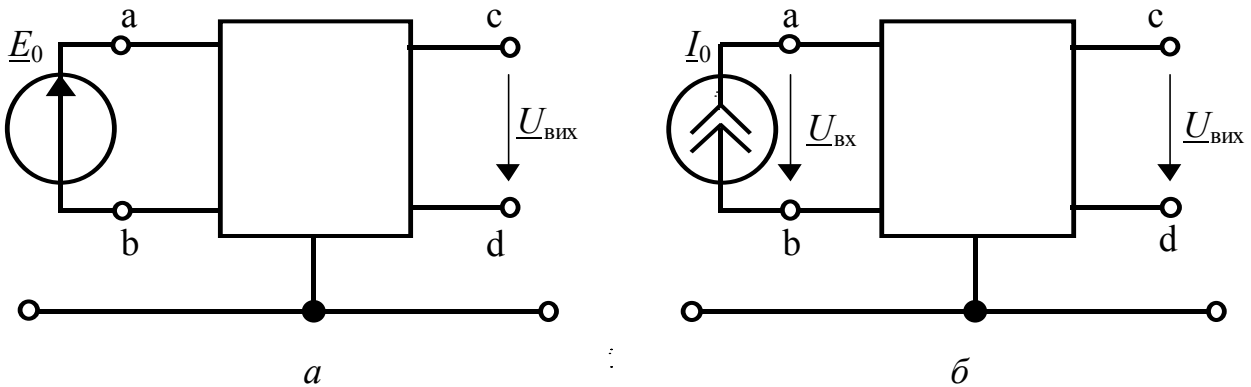


Рисунок 4.7 – Схеми: a – вимірювання;
 b – обчислення коефіцієнта передачі за напругою

Хоча схема (рис.4.7) має два входи (чотири вхідні полюси), загальна кількість її вузлів n (враховуючи внутрішні) може бути значно більшою, ніж 4 зовнішні вузли.

Для вимірювання у діапазоні частот коефіцієнта передачі за напругою кола від входу a, b до входу c, d треба до входу a, b увімкнути незалежне джерело \underline{E}_0 (рис.4.7, a) і на кожній з частот ω виміряти комплексні амплітуди (діючі значення) реакцій. Тоді коефіцієнт передачі за напругою можна обчислити за формулою:

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\underline{U}_{(c+d)}}{\underline{E}_{(a+b)}}, \quad (4.17a)$$

де індекси $(c+d)$ означають номери вузлів, які утворюють вихід (потенціал вузла c вважається більшим потенціалу вузла d); $(a+b)$ – індекси номерів вузлів входу (потенціал вузла a більше потенціалу вузла b).

Але для системи рівнянь вузлових напруг, як правило, використовують лише незалежні джерела струму. Тому для обчислень коефіцієнта передачі за напругою $\underline{H}_{U(c+d)(a+b)}$ необхідно утворити нову схему (рис.4.7, b). Увімкнене до чотириполусника незалежне джерело струму \underline{I}_0 утворює на вході $(a+b)$ напругу $\underline{U}_{(a+b)}$, а на вході $(c+d)$ – напругу $\underline{U}_{(c+d)}$. У базисі вузлових напруг

$$\underline{U}_{(a+b)} = \underline{U}_a - \underline{U}_b; \quad \underline{U}_{(c+d)} = \underline{U}_c - \underline{U}_d, \quad (4.17б)$$

де $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c, \underline{U}_d$ – вузлові напруги рівняння (4.2).

Розв'язавши канонічну систему рівнянь вузлових напруг для кола (рис.4.7, b), складену за схемою еквівалентного чотириполусника, одержують (при наданій незалежній дії, увімкненій до вузлів a, b) такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{Z}_{aa} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{ab} \underline{I}_0; & \underline{U}_b &= \underline{Z}_{ba} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{bb} \underline{I}_0; \\ \underline{U}_c &= \underline{Z}_{ca} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{cb} \underline{I}_0; & \underline{U}_d &= \underline{Z}_{da} \underline{I}_0 - \underline{Z}_{db} \underline{I}_0, \end{aligned}$$

де \underline{Z}_{ij} – елементи оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$ у виразі (4.16б).

Тоді

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\underline{U}_c - \underline{U}_d}{\underline{U}_a - \underline{U}_b} = \frac{\underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb} - \underline{Z}_{da} + \underline{Z}_{db}}{\underline{Z}_{aa} - \underline{Z}_{ab} - \underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb}}, \quad (4.18a)$$

або у скороченому запису:

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\underline{Z}_{(c+d)(a+b)}}{\underline{Z}_{(a+b)(a+b)}}, \quad (4.18б)$$

де $\underline{Z}_{(i+j)(k+l)} = \underline{Z}_{ik} - \underline{Z}_{il} - \underline{Z}_{jk} + \underline{Z}_{jl}$.

Якщо врахувати, що $\underline{Z}_{ij} = \Delta_{ji} / \Delta_Y$, то вираз (4.18б) можна привести до вигляду:

$$\underline{H}_{U(c+d)(a+b)} = \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{bc} - \Delta_{ad} + \Delta_{bd}}{\Delta_{aa} - \Delta_{ba} - \Delta_{ab} + \Delta_{bb}} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}, \quad (4.18в)$$

де Δ_Y – визначник; Δ_{ij} – алгебраїчні доповнення; $\Delta_{(k+l)(i+j)} = \Delta_{ki} - \Delta_{kj} - \Delta_{li} + \Delta_{lj}$ – сумарне алгебраїчне доповнення матриці (\underline{Y}) у виразі (4.2).

Формули (4.18) показують, що для визначення коефіцієнта передачі за напругою треба обчислити не всі n^2 елементи оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$ (n – порядок матриці), а лише вісім (або вісім алгебраїчних доповнень).

Тому в радіотехніці широке розповсюдження знайшли спеціальні методи розкриття визначників (алгебраїчних доповнень) матриці коефіцієнтів системи рівнянь рівноваги складних схем.

Формули (4.18) належать до найзагальнішого випадку обчислення коефіцієнтів передачі за напругою чотириполюсника, коли кожен з вузлів, що утворюють вхід, не з'єднаний зі спільним (“землею”).

Якщо будь-який з вузлів a, b, c, d увімкнути до спільного, елементи оберненої матриці (або алгебраїчного доповнення) у формулах (4.18) з індексами, відповідними номеру заземленого вузла, дорівнюють нулю. Наприклад, якщо визначати коефіцієнт передачі за напругою для прохідного чотириполюсника ($b = 0, d = 0$), то формули (4.18) перетворюються так:

$$\underline{H}_{U(c+0)(a+0)} = \underline{H}_{Uca} = \frac{\underline{Z}_{(c+0)(a+0)}}{\underline{Z}_{(a+0)(a+0)}} = \frac{\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{aa}} = \frac{\Delta_{(c+0)(a+0)}}{\Delta_{(a+0)(a+0)}} = \frac{\Delta_{ac}}{\Delta_{aa}}. \quad (4.18г)$$

Формула (4.18г) збігається з результатом, отриманим у першій частині підручника [7, формула (6.3)] з урахуванням позначення вихідного вузла.

Якщо необхідно знайти коефіцієнт передачі за напругою зі входу $(c + d)$ на вхід $(a + b)$, тоді джерело струму слід увімкнути до вузлів c, d . Обернена матриця не зміниться, а стовпець (\underline{I}_0) буде мати ненульові елементи тільки в рядках c, d (відповідно $+ \underline{I}_0, - \underline{I}_0$). Тоді коефіцієнт передачі за напругою становитиме:

$$\underline{H}_{U(a+b)(c+d)} = \frac{\underline{Z}_{(a+b)(c+d)}}{\underline{Z}_{(c+d)(c+d)}} = \frac{\Delta_{(c+d)(a+b)}}{\Delta_{(c+d)(c+d)}}. \quad (4.18д)$$

При цьому, порівнюючи вирази (4.18д) і (4.18в), можна помітити, що формулу (4.18д) з дією на вході $(c+d)$ і реакцією на виході $(a+b)$ можна одержати з виразів (4.18б), (4.18в) простим переставленням індексів.

З наведених формул також ясно, що коефіцієнти передачі за напругою в різних напрямках, але відносно тієї самої пари входів загалом різні.

4.5.2 Коефіцієнт передачі за струмом

Щоб обчислити цю функцію кола, треба надати або виділити у наданій схемі (рис.4.8, а) та винести ззовні на вхід вітку G_H , через яку протікатиме струм $\underline{I}_{\text{вих}}$ – реакція на надану дію – струм \underline{I}_0 (рис.4.8, б).

Коефіцієнт передачі за струмом – це відношення комплексних амплітуд (діючих значень) $\underline{I}_{\text{вих}}$ та \underline{I}_0 , що у базисі вузлових напруг можна записати:

$$\underline{H}_{I(c+d)(a+b)} = \frac{\underline{I}_{\text{вих}}}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{U}_{\text{вих}} G_H}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{U}_c - \underline{U}_d}{\underline{I}_0} G_H.$$

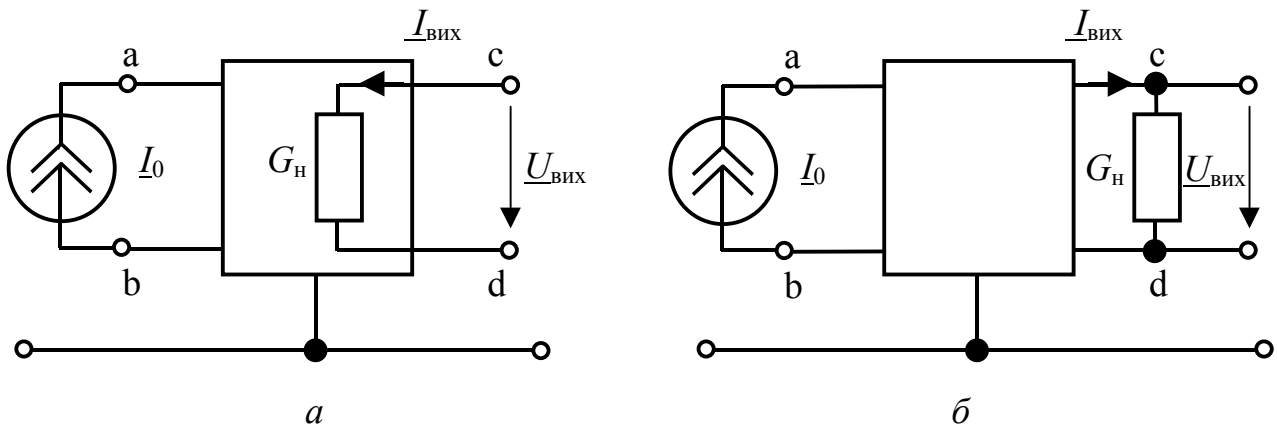


Рисунок 4.8 – Схема вимірювання та обчислення коефіцієнта передачі за струмом: а – зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$; б – з винесеною за чотириполюсник вихідною віткою G_H

З розв'язку системи рівнянь рівноваги (4.16б), де вектор-стовпець незалежних струмів має той самий вигляд, що й для рис.4.7, б, виходить:

$$\begin{aligned} \underline{U}_c &= (\underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb})\underline{I}_0; & \underline{U}_d &= (\underline{Z}_{da} - \underline{Z}_{db})\underline{I}_0; \\ \underline{H}_{I(c+d)(a+b)} &= (\underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb} - \underline{Z}_{da} + \underline{Z}_{db})G_H = \underline{Z}_{(c+d)(a+b)}G_H = \\ &= \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{bc} - \Delta_{ad} + \Delta_{bd}}{\Delta_Y} G_H = G_H \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_Y}, \end{aligned} \quad (4.19а)$$

де $\underline{Z}_{(c+b)(a+b)}$ – функція кола, що має сенс передатного опору зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$, як це буде показано нижче; \underline{Z}_{ij} – елементи оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$ у виразі (4.16б); Δ_Y ; Δ_{ij} – визначник та алгебраїчні доповнення матриці (\underline{Y}) у формулі (4.2).

Отже, щоб обчислити коефіцієнт передачі за струмом, слід розрахувати лише чотири елементи \underline{Z}_{ij} оберненої матриці $(\underline{Y})^{-1}$ або чотири доповнення Δ_{ij} і визначник матриці (\underline{Y}) .

Слід також зазначити, що провідність G_H врахована в матриці (\underline{Y}) при складанні рівняння (4.2).

У зворотному напрямку коефіцієнт передачі за струмом

$$\underline{H}_{I(a+b)(c+d)} = \underline{Z}_{(a+b)(c+d)} G_H = G_H \Delta_{(c+d)(a+b)} / \Delta_Y \quad (4.19б)$$

і також відрізняється від коефіцієнта передачі у напрямку зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$, причому провідність G_H , в якій протікає вихідний струм, увімкнено між вузлами a, b .

4.5.3 Вхідний та передатний опір, вхідна та передатна провідність

Передатну провідність зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$ визначають як відношення комплексних амплітуд (діючих значень) струму – реакції на вході $(c+d)$ та напруги – дії на вході $(a+b)$ (рис.4.8):

$$\underline{Y}_{(c+d)(a+b)} = \frac{I_{\text{вих}(c+d)}}{U_{\text{вх}(a+b)}} = \frac{U_{(c+d)} G_H}{U_{(a+b)}} = \underline{H}_{U(c+d)(a+b)} G_H = \frac{\underline{Z}_{(c+d)(a+b)}}{\underline{Z}_{(a+b)(a+b)}} G_H. \quad (4.20а)$$

Аналогічно перетворенням функції (4.18б), вираз передатної провідності, записаний за допомогою алгебраїчних доповнень, має вигляд:

$$\underline{Y}_{(c+d)(a+b)} = \frac{G_H \Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}. \quad (4.20б)$$

Отже, щоб обчислити передатну провідність між двома входами складної схеми з n вузлами, слід обчислити лише вісім елементів \underline{Z}_{ij} оберненої матриці $(\underline{Y})^{-1}$ або вісім алгебраїчних доповнень матриці (\underline{Y}) у рівнянні (4.2).

Передатний опір зі входу $(a+b)$ на вхід $(c+d)$ обчислюють за схемою (рис.4.8, а) у базисі вузлових напруг за формулою:

$$\underline{Z}_{(c+d)(a+b)} = \frac{U_{\text{вих}(c+d)}}{I_0} = \frac{U_c - U_d}{I_0} = \underline{Z}_{ca} - \underline{Z}_{cb} - \underline{Z}_{da} + \underline{Z}_{db}, \quad (4.21а)$$

або використовуючи алгебраїчні доповнення:

$$\underline{Z}_{(c+d)(a+b)} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_Y} = \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{ad} - \Delta_{bc} + \Delta_{bd}}{\Delta_Y}. \quad (4.21б)$$

Як видно з формул (4.20), (4.21),

$$\underline{Z}_{(c+d)(a+b)} \neq \frac{1}{\underline{Y}_{(c+d)(a+b)}}, \quad (4.22)$$

тобто передатні опір та провідність не є взаємно оберненими функціями.

Вхідний опір відносно одного із входів, наприклад $(a+b)$, визначають як

$$\underline{Z}_{(a+b)(a+b)} = \frac{U_{(a+b)}}{I_{0(a+b)}}, \quad (4.23a)$$

що за схемою (рис.4.8) після розрахунків, аналогічних попереднім, дає:

$$\underline{Z}_{(a+b)(a+b)} = \underline{Z}_{aa} - \underline{Z}_{ab} - \underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb} = \frac{\Delta_{aa} - \Delta_{ba} - \Delta_{ab} + \Delta_{bb}}{\Delta_Y} = \frac{\Delta_{(a+b)(a+b)}}{\Delta_Y}. \quad (4.23b)$$

Аналогічно формулі (4.23a) **вхідна провідність** становить:

$$\underline{Y}_{(a+b)(a+b)} = \frac{I_{0(a+b)}}{U_{(a+b)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{(a+b)(a+b)}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}. \quad (4.24)$$

З формул (4.23), (4.24) виходить, що на відміну від виразу (4.22)

$$\underline{Z}_{(a+b)(a+b)} = \frac{1}{\underline{Y}_{(a+b)(a+b)}}. \quad (4.25)$$

Для прохідного чотириполюсника, коли вузли b та d увімкнені до спільного вузла ($b=0$, $d=0$), передатний опір

$$\underline{Z}_{(a+b)(c+d)} = \underline{Z}_{(b+0)(a+0)} = \underline{Z}_{ab}.$$

Отже, будь-який елемент оберненої матриці, що не лежить на її головній діагоналі, має сенс передатного опору зі входу $(b+0)$, тобто між вузлом b і спільним (“землею”), на вхід $(a+0)$, тобто між вузлом a і спільним.

Вхідний опір прохідного чотириполюсника

$$\underline{Z}_{(a+b)(a+b)} = \underline{Z}_{(a+0)(a+0)} = \underline{Z}_{aa},$$

тобто еквівалентний опір між вузлом a і спільним вузлом дорівнює елементу головної діагоналі оберненої матриці $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$.

4.5.4 Обчислення функцій кола в базисі контурних струмів

Для моделювання електричних кіл та відповідних функцій кола в базисі контурних струмів використовують систему рівнянь рівноваги (4.1) та її розв’язок (4.16a).

Як вхід в цьому базисі розглядають вітку, яка (у загальному випадку) лежить між двома контурами з номерами A , B , як вихід – вітку між двома контурами з номерами C , D (рис.4.9).

Тоді, склавши систему рівнянь рівноваги (4.1) для єдиного джерела \underline{E} та розв’язавши її (4.16б), одержують такі функції кола.

Коефіцієнт передачі за напругою:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{U(C+D)(A+B)} &= \frac{\underline{U}_{(C+D)}}{\underline{E}} = \frac{(\underline{I}_C - \underline{I}_D)R_H}{\underline{E}} = \frac{(\underline{Y}_{CA} - \underline{Y}_{CB} - \underline{Y}_{DA} + \underline{Y}_{DB})\underline{E}}{\underline{E}} R_H = \\ &= R_H \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} = \frac{R_H \Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_Z} = R_H \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BC} + \Delta_{BD}}{\Delta_Z}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

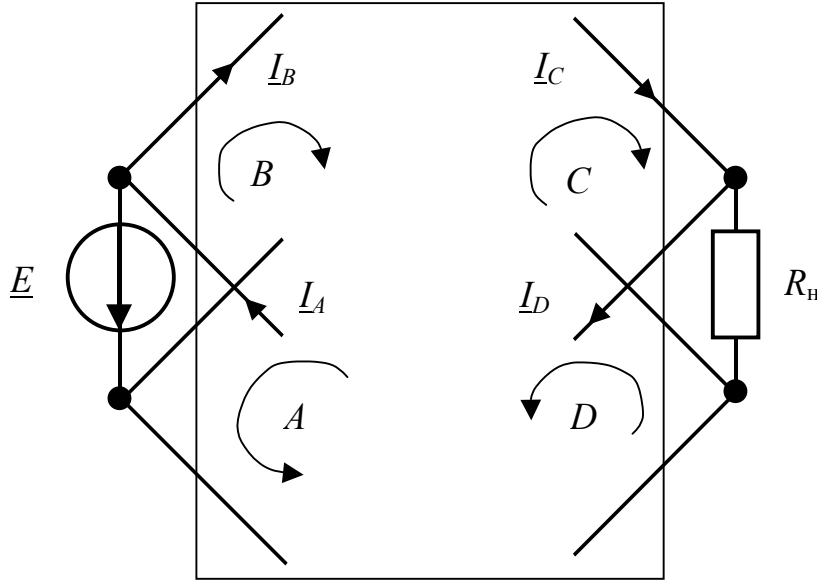


Рисунок 4.9 – Схема увімкнення джерела \underline{E} та навантаження R_H для визначення функцій кола в базисі контурних струмів

Щоб обчислити **коефіцієнт передачі за струмом**, враховують, що струм у вітці з джерелом \underline{E} дорівнює різниці контурних струмів контурів A і B , тобто:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{I(C+D)(A+B)} &= \frac{\underline{I}_C - \underline{I}_D}{\underline{I}_A - \underline{I}_B} = \frac{(\underline{Y}_{CA} - \underline{Y}_{CB} - \underline{Y}_{DA} + \underline{Y}_{DB})\underline{E}}{(\underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB} - \underline{Y}_{BA} + \underline{Y}_{BB})\underline{E}} = \frac{\underline{Y}_{(C+D)(A+B)}}{\underline{Y}_{(A+B)(A+B)}} = \\ &= \frac{\Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_{(A+B)(A+B)}} = \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BC} + \Delta_{BD}}{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Передатний опір

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(C+D)(A+B)} &= \frac{\underline{U}_{(C+D)}}{\underline{I}_{(A+B)}} = \frac{(\underline{I}_C - \underline{I}_D)R_H}{\underline{I}_A - \underline{I}_B} = R_H \frac{\underline{Y}_{CA} - \underline{Y}_{CB} - \underline{Y}_{DA} + \underline{Y}_{DB}}{\underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB} - \underline{Y}_{BA} + \underline{Y}_{BB}} = \\ &= R_H \frac{\underline{Y}_{(C+D)(A+B)}}{\underline{Y}_{(A+B)(A+B)}} = \frac{R_H \Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_{(A+B)(A+B)}} = R_H \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BC} + \Delta_{BD}}{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Передатна провідність

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} &= \frac{\underline{I}_C - \underline{I}_D}{\underline{E}} = \underline{Y}_{CA} - \underline{Y}_{CB} - \underline{Y}_{DA} + \underline{Y}_{DB} = \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} = \\ &= \frac{\Delta_{(A+B)(C+D)}}{\Delta_Z} = \frac{\Delta_{AC} - \Delta_{AD} - \Delta_{BA} + \Delta_{BD}}{\Delta_Z}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Вхідний опір на вході $(A+B)$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(A+B)(A+B)} &= \frac{\underline{E}}{\underline{I}_{(A+B)}} = \frac{\underline{E}}{(\underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB} - \underline{Y}_{BA} + \underline{Y}_{BB})\underline{E}} = \frac{1}{\underline{Y}_{(A+B)(A+B)}} = \\ &= \frac{\Delta_Z}{\Delta_{(A+B)(A+B)}} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Вхідна провідність

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(A+B)(A+B)} &= \frac{\underline{I}_{(A+B)}}{\underline{E}} = \underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB} - \underline{Y}_{BA} + \underline{Y}_{BB} = \underline{Y}_{(A+B)(A+B)} = \\ &= \frac{\Delta_{(A+B)(A+B)}}{\Delta_Z} = \frac{\Delta_{AA} - \Delta_{AB} - \Delta_{BA} + \Delta_{BB}}{\Delta_Z}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

У формулах (4.26) – (4.31) \underline{Y}_{ij} – елементи оберненої матриці $(\underline{Y}) = (\underline{Z})^{-1}$ у виразі (4.16а), Δ_Z ; Δ_{ij} – визначник і алгебраїчні доповнення матриці опорів (\underline{Z}) у виразі (4.1). Якщо будь-яка вхідна вітка є власною для контуру (тобто належить лише цьому контуру, а не двом A, B чи C, D), тоді один з індексів B, D , або обидва разом дорівнюють нулю і з формул (4.26) – (4.31) одержують скорочений запис, аналогічно формулам у базисі вузлових напруг. Нехай, наприклад, вхідна вітка належить тільки контуру A ($B = 0$), а вихідна R_n – тільки контуру C ($D = 0$). Тоді формули (4.26) – (4.31) матимуть вигляд:

$$\underline{H}_{U(C+0)(A+0)} = R_n \underline{Y}_{CA} = R_n \Delta_{AC} / \Delta_Z; \quad (4.32а)$$

$$\underline{H}_{I(C+0)(A+0)} = \underline{Y}_{CA} / \underline{Y}_{AA} = \Delta_{AC} / \Delta_{AA}; \quad (4.32б)$$

$$\underline{Z}_{(C+0)(A+0)} = R_n \underline{Y}_{CA} / \underline{Y}_{AA} = R_n \Delta_{AC} / \Delta_{AA}; \quad (4.32в)$$

$$\underline{Y}_{(C+0)(A+0)} = \underline{Y}_{CA} = \Delta_{AC} / \Delta_Z; \quad (4.32г)$$

$$\underline{Z}_{(A+0)(A+0)} = 1 / \underline{Y}_{AA} = \Delta_Z / \Delta_{AA}; \quad (4.32д)$$

$$\underline{Y}_{(A+0)(A+0)} = \underline{Y}_{AA} = \Delta_{AA} / \Delta_Z. \quad (4.32е)$$

Крім того, важливо зауважити, що

$$\underline{Z}_{(C+D)(A+B)} \neq \underline{Z}_{(A+B)(C+D)}; \quad \underline{Y}_{(C+D)(A+B)} \neq \underline{Y}_{(A+B)(C+D)}.$$

Якщо порівняти формули (4.26) – (4.31) з виразами для функцій кола, обчислених у базисі вузлових напруг, легко помітити формальний збіг формул (4.18в) для коефіцієнта передачі за напругою в базисі вузлових напруг та (4.27) для коефіцієнта передачі за струмом, обчисленого в базисі контурних струмів; коефіцієнта передачі за струмом (4.19а) в базисі вузлових напруг та коефіцієнта передачі за напругою (4.26) в базисі контурних струмів; вхідного (4.23а) та передатного (4.21) опорів у базисі вузлових напруг та вхідної (4.31) і передатної провідності (4.29) в базисі контурних струмів. Цей формальний збіг для елементів обернених матриць провідностей у виразах (4.16б) та опорів в (4.16а) та їх алгебраїчних доповнень у рівняннях (4.2) і (4.1) є проявом **принципу дуальності** в теорії кіл, коли властивості, методи, формули моделювання кіл формально математично збігаються. Перейти від відповідних понять, методів, вла-

стивостей до їх дуальних пар можна формальною заміною понять напруга – струм; контур – вузол; джерело струму – джерело напруги; паралельний – послідовний і так далі. Тобто формули (4.26) – (4.31) для обчислення дуальних функцій кіл в дуальному базисі (відносно базису вузлових напруг) можна було б одержати з (4.18) – (4.25) формально на основі принципу дуальності.

Прикладом прояву цього принципу також є дуальність послідовного і паралельного R, L, C кіл [7, підрозд. 3.7].

4.6 Функції кола і розрахунки параметрів чотиріполюсника

З наведених у попередньому підрозділі формул обчислення функцій чотиріполюсника ясно, що для чотирьох зовнішніх вузлів a, b, c, d у загальному випадку моделювання кола, схема якого має n вузлів ($n > 4$), слід обчислити лише 16 елементів оберненої матриці провідностей $(\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1}$, тобто підматрицю $(\tilde{\underline{Z}})$ четвертого порядку:

$$(\tilde{\underline{Z}}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} & \underline{Z}_{ad} \\ \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_{bb} & \underline{Z}_{bc} & \underline{Z}_{bd} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_{cc} & \underline{Z}_{cd} \\ \underline{Z}_{da} & \underline{Z}_{db} & \underline{Z}_{dc} & \underline{Z}_{dd} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.33a)$$

або, оскільки $\underline{Z}_{ij} = \Delta_{ji} / \Delta_Y$, матрицю (\underline{A}) алгебраїчних доповнень Δ_{ij} матриці (\underline{Y}) і визначник $\Delta_Y = |\underline{Y}|$:

$$(\underline{A}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} & \Delta_{ac} & \Delta_{ad} \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} & \Delta_{bc} & \Delta_{bd} \\ \Delta_{ca} & \Delta_{cb} & \Delta_{cc} & \Delta_{cd} \\ \Delta_{da} & \Delta_{db} & \Delta_{dc} & \Delta_{dd} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (4.33b)$$

Для прохідного чотиріполюсника ($b = 0, d = 0$) виходить матриця другого порядку:

$$(\tilde{\underline{Z}}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ac} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cc} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{matrix} a & c \\ \begin{matrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ca} \\ \Delta_{ac} & \Delta_{cc} \end{matrix} \end{matrix}. \quad (4.34)$$

Параметри \underline{Z}_{ij} матриці $(\tilde{\underline{Z}})$ у формулі (4.34) є елементами матриці Z -параметрів прохідного чотиріполюсника. Параметри \underline{Y} цього чотиріполюсника (з точністю до знака у взаємних комірках матриці) можна одержати оберненням матриці $(\tilde{\underline{Z}})$:

$$(\tilde{Y}) = (\tilde{Z})^{-1} = {}^a_c \begin{pmatrix} Y_{aa} & -Y_{ac} \\ -Y_{ca} & Y_{cc} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Загалом, інші параметри прохідного чотирьохполосника можна знайти за відомими значеннями Z -параметрів, користуючись співвідношеннями, наведеними у табл.4.2.

4.7 Приклади обчислення функцій деяких кіл

Приклад 4.1. Обчислити операторні та комплексні функції T -подібного RC -моста (рис.4.10).

Розв'язання. RC -мости є прохідними чотирьохполосниками, які широко використовують в сучасних радіотехнічних селективних колах.

Оберемо як базис канонічну систему вузлових напруг.

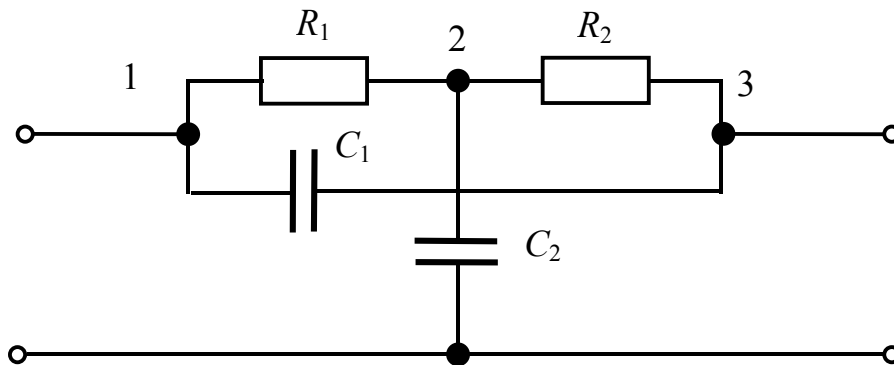


Рисунок 4.10 – T -подібний RC -міст

Операторна матриця провідностей схеми у цій системи має вигляд:

$$(Y(p)) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} pC_1 + G_1 & -G_1 & -pC_1 \\ -G_1 & pC_2 + G_1 + G_2 & -G_2 \\ -pC_1 & -G_2 & pC_1 + G_2 \end{pmatrix}.$$

Операторний коефіцієнт передачі за напругою (4.18г) має вигляд ($a = 1$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 0$)

$$H_{U(c+0)(a+0)}(p) = \frac{\Delta_{ac}}{\Delta_{aa}} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}.$$

За матрицею $(Y(p))$ обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_{11} = p^2 C_1 C_2 + p[C_1(G_1 + G_2) + C_2 G_2] + G_1 G_2; \quad \Delta_{13} = p^2 C_1 C_2 + p C_1(G_1 + G_2) + G_1 G_2.$$

Тоді операторний коефіцієнт передачі за напругою становитиме:

$$H_{U31}(p) = \frac{p^2 C_1 C_2 + p C_1 (G_1 + G_2) + G_1 G_2}{p^2 C_1 C_2 + p [C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2] + G_1 G_2}.$$

Знайдемо комплексний коефіцієнт передачі, зробивши заміну $p = j\omega$:

$$H_{U31}(j\omega) = \frac{(G_1 G_2 - \omega^2 C_1 C_2) + j\omega C_1 (G_1 + G_2)}{(G_1 G_2 - \omega^2 C_1 C_2) + j\omega [C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2]}.$$

Щоб побудувати АЧХ цього коефіцієнта передачі, знайдемо її характерні точки.

Так, існує деяка частота ω_ϕ , для якої дійсні частини чисельника і знаменника коефіцієнта передачі за напругою дорівнюватимуть нулю, тобто

$$\omega_\phi^2 C_1 C_2 - G_1 G_2 = 0,$$

звідки

$$\omega_\phi = \sqrt{G_1 G_2 / C_1 C_2}.$$

На цій частоті коефіцієнт передачі

$$H_{U31}(j\omega_\phi) = \frac{j\omega_\phi C_1 (G_1 + G_2)}{j\omega_\phi [C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2]} = \frac{C_1 (G_1 + G_2)}{C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2}$$

є дійсною величиною. Таким він є також на частотах $\omega = 0$, $\omega = \infty$:

$$H_{U31}(j0) = \frac{G_1 G_2}{G_1 G_2} = 1; \quad H_{U31}(j\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-\omega^2 C_1 C_2}{-\omega^2 C_1 C_2} = 1.$$

Якщо для визначеності надати значення параметрів $G_1 = G_2 = G$; $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, одержимо:

$$H_{U31}(j\omega_\phi) = 1/2; \quad \omega_\phi = G/(\sqrt{2}C).$$

Графік модуля функції $H_{U31}(j\omega)$ показаний на рис.4.11.

Операторний коефіцієнт передачі за напругою зі входу (3+0) на вхід (1+0) становитиме:

$$H_{U(1+0)(3+0)}(p) = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{33}} = \frac{p^2 C_1 C_2 + pC(G_1 + G_2) + G_1 G_2}{p^2 C_1 C_2 + p[C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_1] + G_1 G_2}.$$

За умови $G_2 = G_1$ одержимо таку саму функцію кола, як і $H_{U31}(p)$.

Операторний вхідний опір входу (1+0)

$$Z_{(1+0)(1+0)}(p) = Z_{11}(p) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{p^2 C_1 C_2 + p[C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2] + G_1 G_2}{p^2 C_1 C_2 (G_1 + G_2) + p C_2 G_1 G_2}.$$

Підставивши $p = j\omega$, одержимо:

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{G_1 G_2 - \omega^2 C_1 C_2 + j\omega [C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2]}{-\omega^2 C_1 C_2 (G_1 + G_2) + j\omega C_2 G_1 G_2}.$$

Для прийнятих вище значень G_1 , G_2 , C_1 , C_2 запишемо:

$$Z_{11}(0) = \infty; \quad Z_{11}(\infty) = R/2; \quad Z_{11}\left(j\frac{G}{\sqrt{2}C}\right) = \frac{2}{3}(1 - j\sqrt{2})R = \frac{2\sqrt{3}R}{3}e^{-j\arctg\sqrt{2}}.$$

Аналогічно можна знайти вхідний опір на вході (3+0), який при $G_1 = G_2 = G$ буде таким самим, як $Z_{11}(j\omega)$.

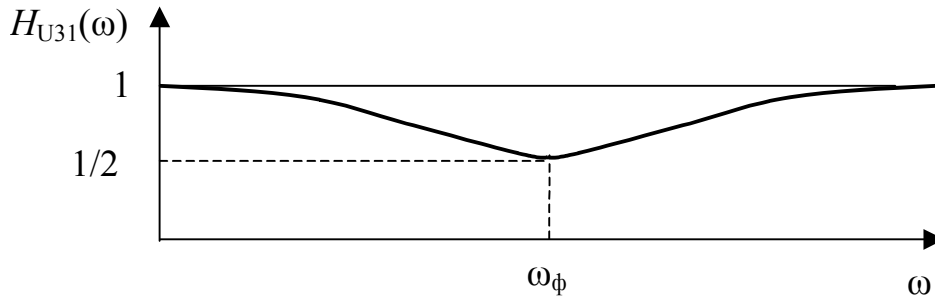


Рисунок 4.11 – Графік АЧХ $H_{U31}(\omega)$

Приклад 4.2. Для схеми (рис.4.12) знайти усі функції кола відносно входів $(a_1 + b_1)$ та $(a_2 + b_2)$. Схема складається з підсхем, вже згорнутих до еквівалентних трибрамників A, B, C та додаткових віток $G_1 = 0$, $G_2 = G_3 = G_4 = 1 \text{ См}$.

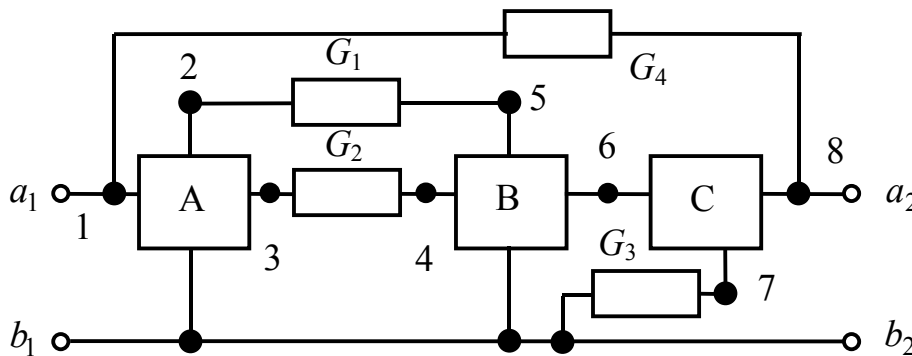


Рисунок 4.12 – Схема для прикладу аналізу чотириполюсника (1+0), (8+0) методом згортки підсхем

Розв'язання. Нехай матриці провідностей часткових канонічних систем рівнянь рівноваги вже знайдені (так само, як вони будуть знайдені для схеми рис.4.12).

$$(\underline{Y})_A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}; \quad (\underline{Y})_B = \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}; \quad (\underline{Y})_C = \begin{matrix} 6 & 8 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{matrix}.$$

Оскільки $G_1 = 0$ (це означає, що до входу (2+0) трибрамника A не увімкнена жодна вітка), цей трибрамник зведемо до чотириполюсника виключенням вузла 2. Часткова система рівнянь рівноваги трибрамника A має вигляд:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} \\ \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} \\ \end{matrix}. \quad (4.36)$$

Еквівалентне перетворення виключенням внутрішнього вузла призведе до еквівалентної системи рівнянь, в якій будуть відсутніми вузлова напруга \underline{U}_2 і рівняння першого закону Кірхгофа відносно вузла 2, тобто друге рівняння. Саме тому, що другий вузол внутрішній, у стовпці джерел струмів $\underline{I}_2 = 0$.

Отже, з другого рівняння системи (4.36)

$$-\underline{U}_1 + 2\underline{U}_2 = 0$$

знайдемо

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{2}\underline{U}_1$$

і підставимо це значення у перше та третє рівняння (4.36).

Одержимо:

$$2\underline{U}_1 - \frac{1}{2}\underline{U}_1 = \underline{I}_1;$$

$$2\underline{U}_1 + \underline{U}_3 = \underline{I}_3,$$

звідки у матричному вигляді виходить:

$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} \\ \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} \\ \end{matrix},$$

де нове (перетворене) значення матриці провідностей для підсхеми A становить:

$$\left(\tilde{\underline{Y}}\right)_A = \begin{matrix} 1 & 3 \\ \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \end{matrix}. \quad (4.37)$$

Об'єднаємо тепер чотириполюсник A з віткою G_2 , тобто вважатимемо, що входами нового чотириполюсника A' є вузли (1+0), (4+0). Система рівнянь рівноваги для підсхеми A' має вигляд:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 2 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} \\ \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix} \\ \end{matrix}. \quad (4.38)$$

Тепер внутрішнім є вузол 3, який виключимо, аналогічно тому, як це було зроблено вище для вузла 2, тобто знайдемо \underline{U}_3 з третього рівняння і підставимо його до першого і четвертого рівнянь.

Одержимо:

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 1,5 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{matrix} \times \begin{matrix} U_1 \\ U_4 \end{matrix} = \begin{matrix} I_1 \\ I_4 \end{matrix}.$$

Аналогічно увімкнемо чотириполіусник A' до підсхеми B , в якій заздалегідь виключимо вузол 5:

$$\begin{matrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1,5 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ 1,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5+1 & 0 \\ 0 & 2 & 1,5 \end{matrix}.$$

З матриці $(\underline{Y})_{A'B}$, виключивши внутрішній четвертий вузол, одержимо матрицю нового чотириполіусника:

$$\begin{matrix} 1 & 6 \\ 1,5 & 0 \\ -4/3 & 1,5 \end{matrix}.$$

Щоб об'єднати цей чотириполіусник з підсхемою C' (підсхема C разом з віткою G_3), спочатку обчислимо еквівалентні параметри чотириполіусника C' . При цьому врахуємо, що елементи матриці провідностей $(\underline{Y})_C$ обчислені (або виміряні за умови, що вузол 7 був увімкнений до спільного вузла (інакше вимірювання були б неможливі). Тому спочатку відімкнемо вузол 7 від землі та сформуємо плаваючу матрицю (з нульовим визначником):

$$\begin{matrix} 6 & 8 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -7 \\ -7 & -2 & 9 \end{matrix},$$

визначник якої має дорівнювати нулю. Значення елементів 7-го рядка і 7-го стовпця вибрано так, щоб сума елементів будь-якого рядка чи стовпця дорівнювала нулю, що й забезпечує нульове значення визначника.

Увімкнувши між вузлом 7 і спільним вузлом вітку $G_3 = 1$, одержимо:

$$\begin{matrix} 6 & 8 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -7 \\ -7 & -2 & 10 \end{matrix},$$

звідки виключенням вузла 7 знайдемо:

$$\begin{matrix} 6 & 8 \\ 0,6 & -0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{matrix}.$$

Нарешті, склавши систему рівнянь провідностей для двох чотириполіусників $A'B$ і C' :

$$(\underline{Y})_{A'C'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1,5+0,6 & -0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

і виключивши вузол 6, одержимо підсумкову матрицю $(\underline{Y})_{\Sigma}$ еквівалентного чотириполюсника відносно входів (1+0), (8+0) у вигляді:

$$(\underline{Y})_{\Sigma} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 4/63 & 13/21 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Враховавши зовнішню вітку $G_4 = 1 \text{ См}$, матимемо:

$$(\tilde{Y})_{\Sigma} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2,5 & -1 \\ -59/63 & 34/21 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Очевидно, що обчислення параметрів системи рівнянь рівноваги кола, приведенного до входів (1+0), (8+0), є простішою процедурою, ніж пряме розв'язання системи рівнянь рівноваги схеми (рис.4.12), яка мала б вигляд:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 10 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \\ \underline{U}_7 \\ \underline{U}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{I}_8 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.39)$$

Використаний у даному прикладі метод поступового перетворення окремих блоків до чотириполюсників та їх об'єднання називають **методом еквівалентних підсхем**. Окремі підсхеми A , B , C теж є складними, тому їх можна відносно (двох або більшої кількості) зовнішніх входів звести до простіших (які описують системами рівнянь рівноваги невеликих порядків) так само, як це було зроблено для схеми (рис.4.12).

За знайденою матрицею $(\tilde{Y})_{\Sigma}$ обчислимо необхідну і достатню кількість функцій кола, а саме:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(1+0)(1+0)} &= \underline{Z}_{11} = \Delta_{11} / \Delta_Y = (34/21) / (28/9) = 51/98 \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{(8+0)(8+0)} &= \underline{Z}_{88} = \Delta_{88} / \Delta_Y = (5/2) / (28/9) = 45/56 \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{(8+0)(1+0)} &= \underline{Z}_{81} = \Delta_{18} / \Delta_Y = (59/63) / (28/9) = 59/196 \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{(1+0)(8+0)} &= \underline{Z}_{18} = \Delta_{81} / \Delta_Y = 1 / (28/9) = 9/28 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Крім того, можна знайти (тут вже надлишкові) інші функції кола:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= 1/\underline{Z}_{11}; \quad \underline{Y}_{88} = 1/\underline{Z}_{88}; \\ \underline{H}_{U(8+0)(1+0)} &= \Delta_{18}/\Delta_{11} = (59/63)/(34/21) = 59/102; \\ \underline{H}_{U(1+0)(8+0)} &= \Delta_{81}/\Delta_{88} = 1/(5/2) = 2/5. \end{aligned}$$

Щоб знайти передатні провідності та коефіцієнт передачі за струмом, не вистачає інформації про структуру схеми, оскільки не виділено паралельних до входів (1+0), (8+0) опорів навантаження.

Метод еквівалентних підсхем

Метод еквівалентного генератора [7, підрозд.2.7, 3.10], як і метод еквівалентного чотириполюсника, є окремими випадками методу еквівалентних підсхем. Різниця лише в тому, що використовуючи метод еквівалентного генератора і чотириполюсника, довільну частину схеми (підсхему) згортають до одного або двох входів відповідно.

Але іноді розбиття складної схеми на елементарні підсхеми з єдиним або двома входами неможливе. Тоді схему розбивають на складніші підсхеми, які мають три і більше входів.

Процедура згортання підсхем аналогічна процедурі згортання еквівалентних двополюсників та чотириполюсників.

Детальне вивчення цієї проблеми виходить за межі даної навчальної дисципліни, тому доцільно продемонструвати згортання підсхем на наступному прикладі.

Приклад 4.3. Для схеми (рис.4.12), в якій всі параметри мають однакові значення з попереднім прикладом, крім $G_1 = 2 \text{ См}$, виконати згортання підсхем.

Розв'язання. У даному прикладі еквівалентне виключення вузла 2 у підсхемі A неможливе. До цього вузла увімкнена вітка G_1 , і тому вузол 2 треба вважати (разом зі спільним вузлом) незалежним входом, а підсхему A – трибрамником.

Об'єднаємо підсхему A і вітку G_1 , після чого система рівнянь для одержаного чотирибрамника ((1+0), (2+0), (3+0), (5+0)) матиме вигляд:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2+2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_5 \end{pmatrix}.$$

Щоб виключити вузол 2 (після цього у трибрамнику залишаться входи (1+0), (3+0), (5+0)), знайдемо з другого рівняння \underline{U}_2 і підставимо у 1, 3 і 5-те рівняння. У підсумку одержимо для трибрамника A'

$$(\tilde{Y})_{A'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -0,5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Після увімкнення до вузла 3 трибрамника A' вітки з провідністю G_2 та виключення внутрішнього вузла 3 одержимо трибрамник відносно входів (1+0), (5+0), (4+0), матриця провідностей якого має вигляд:

$$(\tilde{Y})_{A'G_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 5 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 7/4 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Об'єднання трибрамника $A'G_2$ з підсхемою B дає систему рівнянь:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 5 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 7/4 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1+2 & 4 & -1 \\ 0,5 & 1 & 0,5+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{I}_6 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Рівняння (4.40) відповідає чотиріполюснику із входами (1+0), (6+0). Щоб знайти матрицю провідностей цього чотиріполюсника, з рівняння (4.40) виключимо внутрішні вузли 5, 4.

Систему (4.40) можна подати в іншому вигляді:

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & (\underline{Y}_{1N}) & \underline{Y}_{16} \\ (\underline{Y}_{N1}) & (\underline{Y}_{NN}) & (\underline{Y}_{N6}) \\ \underline{Y}_{61} & (\underline{Y}_{6N}) & \underline{Y}_{66} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ (\underline{U}_N) \\ \underline{U}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ (0) \\ \underline{I}_6 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

де \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{16} , \underline{Y}_{61} , \underline{Y}_{66} – матриці 1-го порядку, (\underline{Y}_{1N}) , (\underline{Y}_{6N}) – рядки розміру $1 \times N$, (\underline{Y}_{N1}) , (\underline{Y}_{N6}) – стовпці розміру $N \times 1$, (\underline{Y}_{NN}) – квадратна матриця порядку N ; (\underline{U}_N) – стовпець вузлових напруг розміру $N \times 1$; (0) – стовпець нулів (нульових значень вектора незалежних струмів) розміру $N \times 1$.

Для розглянутого прикладу $N = 2$, хоча алгоритм виключення (згортання) вірний для довільного значення N .

З формули (4.41) знайдемо (\underline{U}_N) , для чого запишемо матричне рівняння:

$$(\underline{Y}_{N1})\underline{U}_1 + (\underline{Y}_{NN})(\underline{U}_N) + (\underline{Y}_{N6})\underline{U}_6 = (0),$$

звідки

$$(\underline{U}_N) = -(\underline{Y}_{NN})^{-1}[(\underline{Y}_{N1})\underline{U}_1 + (\underline{Y}_{N6})\underline{U}_6].$$

Підставивши (\underline{U}_N) у перше та шосте рівняння системи (4.41), одержимо рівняння другого порядку:

$${}^1_6 \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} - (\underline{Y}_{1N})(\underline{Y}_{NN})^{-1}(\underline{Y}_{N1}) & \underline{Y}_{16} - (\underline{Y}_{1N})(\underline{Y}_{NN})^{-1}(\underline{Y}_{N6}) \\ \underline{Y}_{61} - (\underline{Y}_{6N})(\underline{Y}_{NN})^{-1}(\underline{Y}_{N1}) & \underline{Y}_{66} - (\underline{Y}_{6N})(\underline{Y}_{NN})^{-1}(\underline{Y}_{N6}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_6 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Рівняння (4.42) відповідає загальному алгоритму зведення чотириполюсника з внутрішніми вузлами (у нашому випадку це вузли 4, 5) до еквівалентного чотириполюсника, приведеного до своїх входів (1+0), (6+0).

У даному прикладі:

$$(\underline{Y})_{NN} = {}^4_5 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}; \quad (\underline{Y})^{-1}_{NN} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Далі, відповідно до виразу (4.42), одержимо:

$$(\tilde{\underline{Y}})_{A'B'} = {}^1_6 \begin{pmatrix} 7/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - {}^1_6 \begin{pmatrix} 11/4 & 1,5 \\ 11/2 & 3 \end{pmatrix} = {}^1_6 \begin{pmatrix} -1 & -1,5 \\ -11/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Подальші обчислення аналогічні обчисленням прикладу 4.2.

4.8 Спеціальні двобрамники та трибрамники

4.8.1 Операційні підсилювачі

Класичні операційні підсилювачі історично є першими і найпоширенішими у схемотехнічній практиці, починаючи з кінця 60-х років ХХ століття. Використання таких ОП пов'язане з обробкою сигналів у базисі напруг, тобто коли інформація передається у вигляді закону зміни напруги у часі.

Операційним підсилювачем (рис.4.13, а) є складне коло, ідеалізовані параметри якого, приведені до входів, мають значення, наведені на рис.4.13, б.

У реально існуючих ОП на входах (1+0) та (2+0) опір становить одиниці-десятки МОм, опір на виході (3+0) – одиниці-тисячі Ом, коефіцієнт передачі за напругою (коефіцієнт підсилення) $\mu \geq 10^4 \div 10^7$.

Якщо зовнішнє коло, що навантажує входи (3+0), (2+0), (1+0), у діапазоні робочих частот має вхідний опір (на цих входах), що дорівнює одиницям-сотням кОм, то вхідні опори (на входах (1+0), (2+0)) можна вважати нескінченно великими, а вихідний (на вході (3+0)) – нескінченно малим. Наведені значення μ порівняно з коефіцієнтами передачі пасивних підкіл можна теж вважати нескінченними.

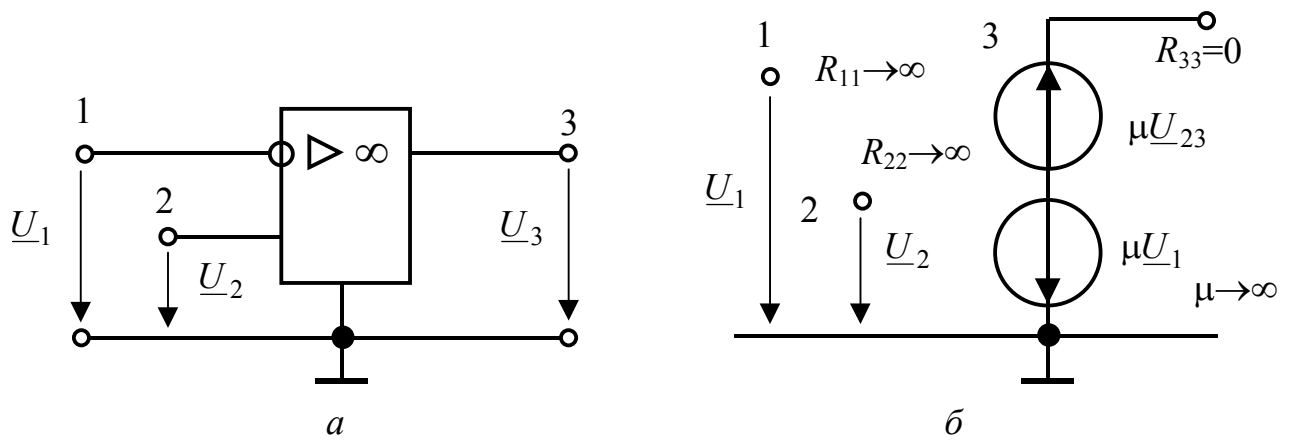


Рисунок 4.13 – Операційний підсилювач: *a* – схемне зображення; *б* – ідеалізована еквівалентна схема

Ясно, що за такої ідеалізації моделлю ОП слід вважати джерело напруги на вході (3+0), кероване напругою на входах (1+0), (2+0), як це показано на рис.4.13, *б* (див. також [7, підрозд. 6.4]).

Великий діапазон значень μ у тій самій партії ОП потребує (для забезпечення однакових параметрів радіотехнічних кіл у серії) його стабілізації, що можна забезпечити схемотехнічно (рис.4.14, *a*).

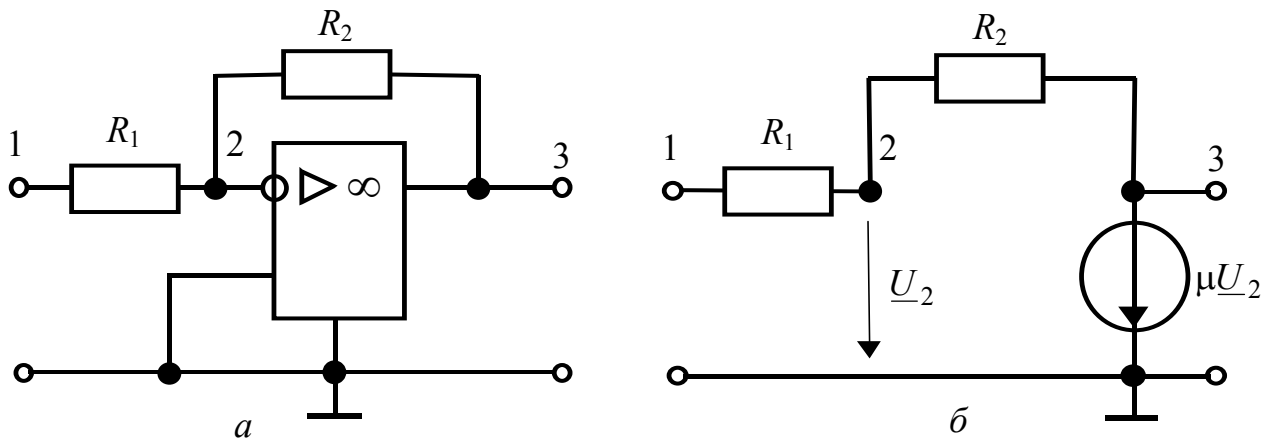


Рисунок 4.14 – Стабілізація коефіцієнта передачі за напругою ОП: *a* – схема; *б* – еквівалентна схема

Нехай один з входів, наприклад прямиий (2+0) (на схемі рис.4.13, *a*) увімкнено до спільного вузла (рис.4.14, *a*).

Еквівалентну схему кола (рис.4.14, *a*) зображено на рис.4.14, *б*.

Щоб описати схему (рис.4.14, *б*) канонічною системою рівнянь вузлових напруг, джерело напруги μU_2 слід перетворити у джерело струму (рис.4.15, *б*), для чого спочатку за вузол 3 слід винести джерело напруги μU_2 (рис.4.15, *a*).

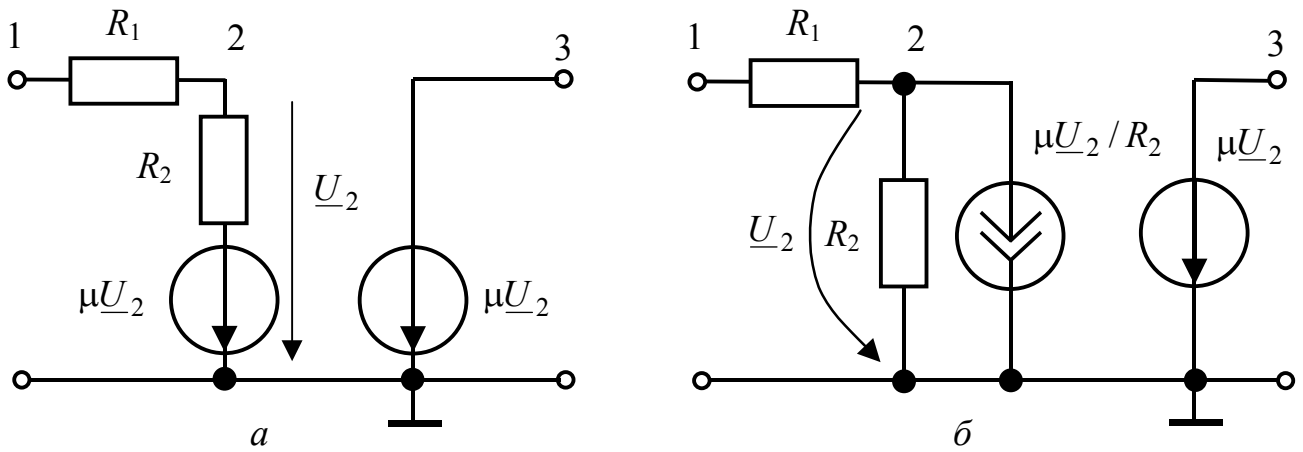


Рисунок 4.15 – Еквівалентні перетворення схем ОП

Для остаточного перетворення схеми (рис.4.15, б) необхідно надати схемотехнічний сенс джерелу струму $\mu U_2 / R_2$, керованого вузловою напругою U_2 , прикладеною до цього ж джерела, передатна провідність якого $S = \mu / R_2$. Таке джерело струму (рис.4.16, а) є ідеальною резистивною віткою з провідністю $G = \mu / R_2 = \mu G_2$ (опором R_2 / μ , рис.4.16, б).

Якщо джерело струму відповідає неінвертувальному підсилювачу (напрямок струму є протилежний такому, який забезпечується напрямком прикладеної напруги – рис.4.16, в), то таке джерело еквівалентно заміщують від'ємним опором (рис.4.16, з).

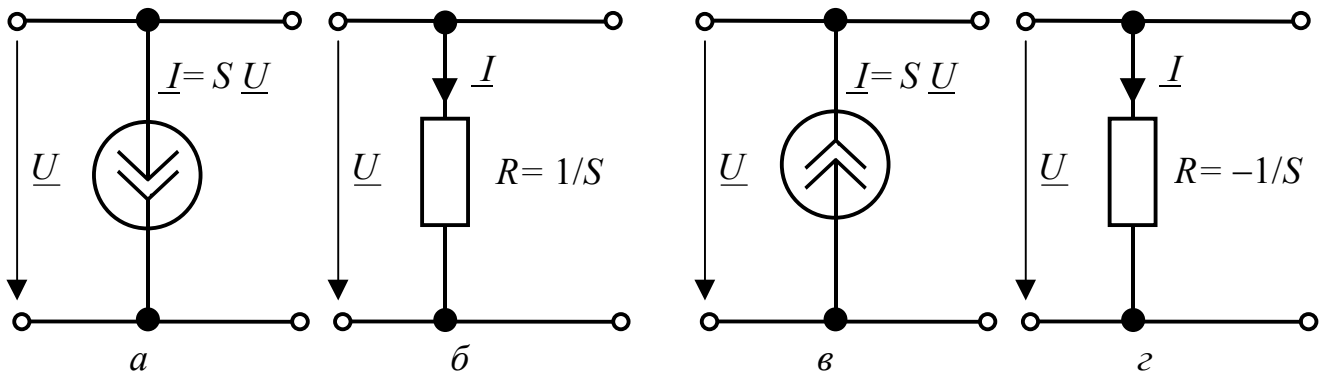


Рисунок 4.16 – Еквівалентні перетворення джерела струму, керованого напругою на цьому джерелі:
 а, б – інвертувальний ОП; в, з – неінвертувальний ОП

З огляду на еквівалентні перетворення, показані на рис.4.16, схему (рис.4.15, б) можна привести до вигляду (рис.4.17, а) або (після підсумування провідностей паралельних віток) – до вигляду (рис.4.17, б).

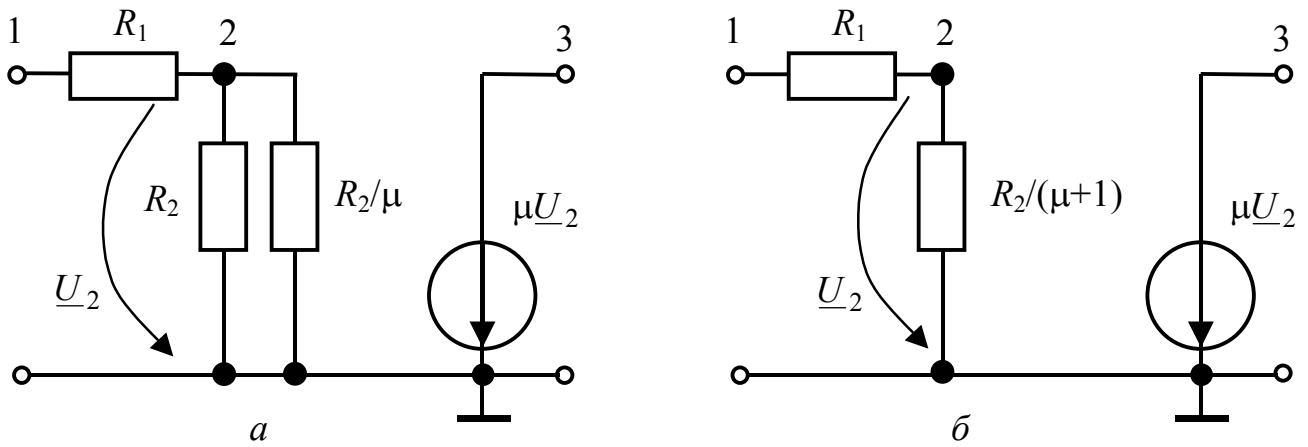


Рисунок 4.17 – Еквівалентні схеми ОП, зображеного на рис.4.15, *a*

Коефіцієнт передачі за напругою \underline{H}_{U31} кола (рис.4.17, *б*) дорівнює коефіцієнту передачі \underline{H}_{U21} (зі входу (1+0) на вхід (2+0)), помноженому на μ :

$$\underline{H}_{U21} = \frac{R_2 / (\mu + 1)}{R_1 + R_2 / (\mu + 1)}; \quad \underline{H}_{U31} = \frac{\mu R_2 / (\mu + 1)}{R_1 + R_2 / (\mu + 1)}. \quad (4.43)$$

Якщо $\mu > 10^3$, а опори R_1 та R_2 відрізняються у межах $1 \div 10^2$, то з виразу (4.43) одержимо:

$$\underline{H}_{U31} \approx \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.44)$$

Стабільність коефіцієнта передачі залежить від стабільності опорів R_1 та R_2 (R_2 зазвичай роблять регульованим). Дійсно, нехай $\mu = 10^4$, тоді $R_1 \gg R_2 / (\mu + 1)$ і в знаменнику (4.43) залишається лише доданок R_1 . У чисельнику (4.43) множник $\mu / (\mu + 1)$ має значення $10^4 / (10^4 + 1) = 0,9999$. Якщо $\mu = 10^7$, то $\mu / (\mu + 1) = 0,9999999$.

Чим більше коефіцієнт підсилення кожного окремого ОП з партії, тим вище точність виконання рівняння (4.44). Тому для найменшого значення μ_{\min} з партії треба, щоб виконувалася нерівність:

$$\mu_{\min} \gg \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.45)$$

На практиці часто обирають значення $R_1 = R_2$. Тоді коефіцієнт передачі за напругою кола (рис.4.14, *a*) дорівнює одиниці.

Розповсюдженою схемою увімкнення ОП є така, коли на одному з входів (наприклад, прямому (2+0)) забезпечують стабільність коефіцієнта передачі за напругою, а на іншому (інверсному (1+0)) – відповідну селективну функцію (рис.4.18, *a*).

Еквівалентну схему такого підсилювача зображено на рис.4.18, б. Після еквівалентних перетворень, аналогічних попереднім, виходить схема (рис.4.19, а).

Вхідна напруга подається до входу (1+0). Коефіцієнт передачі за напругою зі входу (1+0) на вхід (3+0) містить дві складові: μ та $\underline{H}_{U21}\mu$ (обумовлену джерелом струму $(\mu/R_2)\underline{U}_1$ і утвореною ним напругою \underline{U}_2). Щоб обчислити \underline{H}_{U21} , слід скласти матрицю провідностей для частини схеми з вузлами 1 та 2:

$$(\underline{Y})=2 \begin{matrix} 1 & 2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \mu/R_2 & 1/R_1 + (1-\mu)/R_2 \end{array} \right), \end{matrix} \text{ звідки } \underline{H}_{U21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = -\frac{\mu G_2}{G_1 + G_2(1-\mu)}.$$

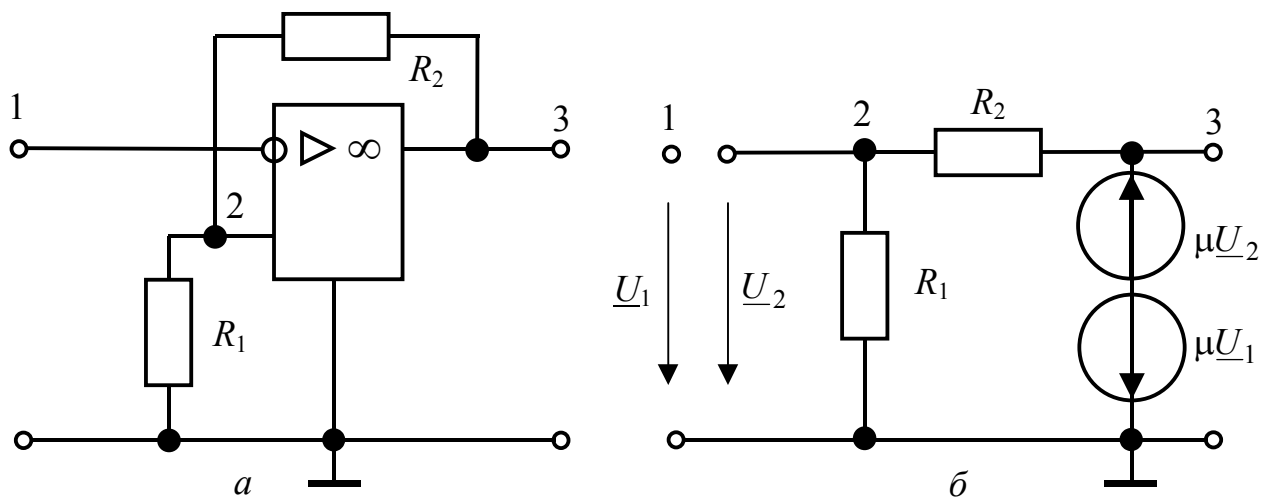


Рисунок 4.18 – Увімкнення стабілізуючого кола до прямого входу ОП:
а – схема ОП; б – еквівалентна схема

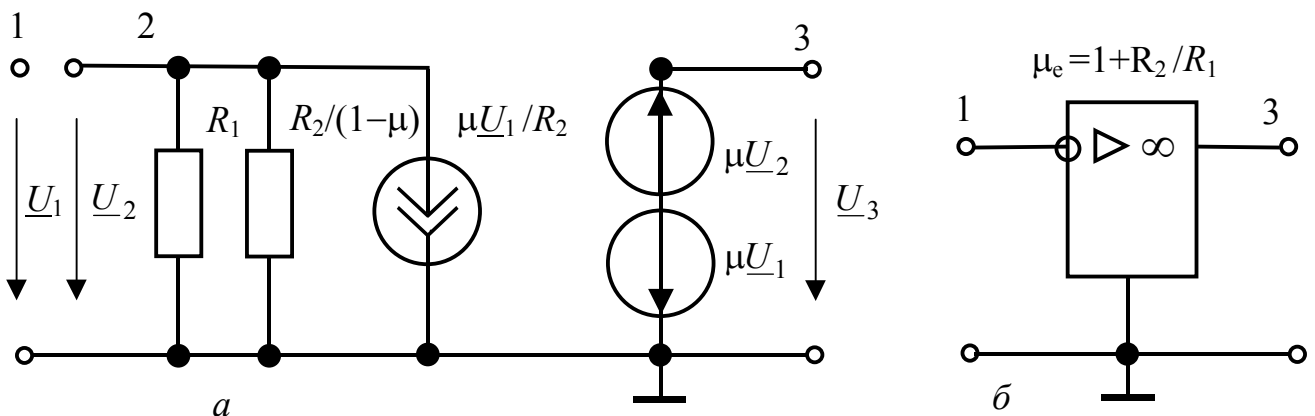


Рисунок 4.19 – Еквівалентне перетворення схеми (рис.4.18, б)

Напруга на вході (3+0) становить:

$$\underline{U}_3 = \mu \underline{U}_1 - \mu \underline{U}_2 = \mu \underline{U}_1 - \mu \underline{H}_{U21} \underline{U}_1 = \mu \left[\frac{\mu G_2}{G_1 + G_2(1-\mu)} + 1 \right] \underline{U}_1,$$

звідки

$$\underline{H}_{U31} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \mu \frac{G_1 + G_2 - \mu G_2 + \mu G_2}{G_1 + G_2(1-\mu)} = - \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = \mu_e. \quad (4.45a)$$

Зазвичай на схемах вхід, на якому організують стабільний коефіцієнт передачі за напругою μ_e , не вказують, і схему (рис.4.19, а) подають у вигляді (рис.4.19, б). Крім того, у випадках, коли згадана ідеалізація ОП доцільна, ОП реалізує коефіцієнт передачі за напругою зі входу на вихід. Зворотна передача напруги дорівнює нулю, вхідний опір дорівнює нескінченності, а вихідний – нулю.

4.8.2 Гіратори

Одним з елементів сучасної схемотехніки є гіратор (рис.4.20), який широко використовують для перетворень параметрів елементів кола у дуальні (струм–напруга, опір–провідність, ємність–індуктивність).

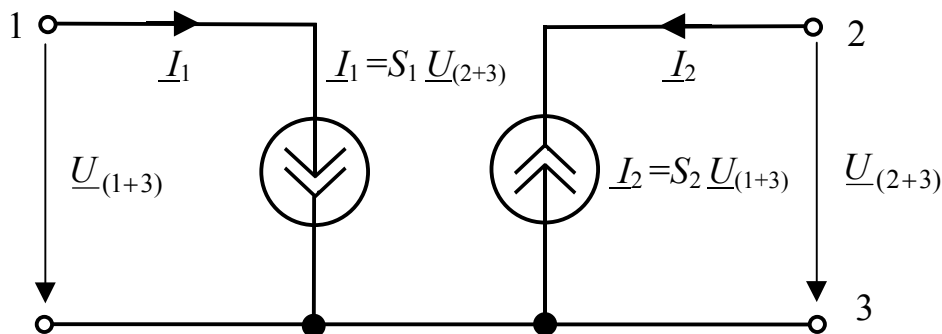


Рисунок 4.20 – Еквівалентна схема гіратора

Гіратор – це чотириполусник, в якому джерела струму, увімкнені протилежно напрямку відносно спільного вузла, керуються напругами на інших входах. Для ідеального гіратора його провідності S_1 , S_2 – дійсні числа.

У базисі вузлових напруг система рівнянь, що описує гіратор (рис.4.20), має вигляд:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & S_1 & -S_1 \\ -S_2 & 0 & S_2 \\ S_2 & -S_1 & S_1 - S_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.46a)$$

Якщо вважати потенціал вузла 3 нульовим, система (4.46a) перетворюється до вигляду:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & S_1 \\ -S_2 & 0 \end{array} \right) \times \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.46\text{б})$$

Вхідний опір ненавантаженого гіратора (рис.4.20)

$$\underline{Z}_{(1+0)(1+0)} = \underline{Z}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{0}{S_1 S_2} = 0, \quad (4.47)$$

тобто холостий хід на вході (2+0), відповідає короткому замиканню на вході (1+0). Вхідна напруга становить:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \underline{I}_2 = -\frac{S_1}{S_1 S_2} \underline{I}_2 = -\frac{\underline{I}_2}{S_2}, \quad (4.48)$$

тобто напруга \underline{U}_1 пропорційна струму \underline{I}_2 . Це вірно для будь-якої функції часу $i_2(t)$.

Якщо до входу (2+0) увімкнено провідність навантаження \underline{Y}_H , опір на вході (1+0) визначають з рівняння:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & S_1 \\ -S_2 & \underline{Y}_H \end{array} \right) \times \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.49\text{а})$$

і він має вигляд:

$$\underline{Z}_{(1+0)(1+0)} = \underline{Z}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\underline{Y}_H}{S_1 S_2}, \quad (4.49\text{б})$$

тобто є пропорційним провідності навантаження.

Нехай тепер гіратор навантажено на вході (2+0) ємнісною віткою $\underline{Y}_H = j\omega C$. Тоді

$$\underline{Z}_{11} = \frac{j\omega C}{S_1 S_2} = j\omega \frac{C}{S_1 S_2}, \quad (4.50)$$

тобто вхідний опір має індуктивний характер і відносно входу (1+0) гіратор можна замінити еквівалентною індуктивністю $L_e = C / S_1 S_2$ (рис.4.21). У подальшому на рисунках гіратор виділений штрихованим контуром.

Якщо до входу (2+0) увімкнути індуктивну вітку з провідністю $\underline{Y}_L = 1 / j\omega L$, опір на вході (1+0)

$$\underline{Z}_{11} = \frac{1}{j\omega L S_1 S_2} \quad (4.51)$$

матиме ємнісний характер і гіратор відносно цього входу можна замінити ємнісною віткою $C_e = L S_1 S_2$ (рис.4.22).

Якщо на вході (2+0) встановити режим короткого замикання ($\underline{Y}_H \rightarrow \infty$), то на вході (1+0) буде режим холостого ходу:

$$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{\underline{Y}_H}{S_1 S_2} \right|_{\underline{Y}_H \rightarrow \infty} \rightarrow \infty. \quad (4.52)$$

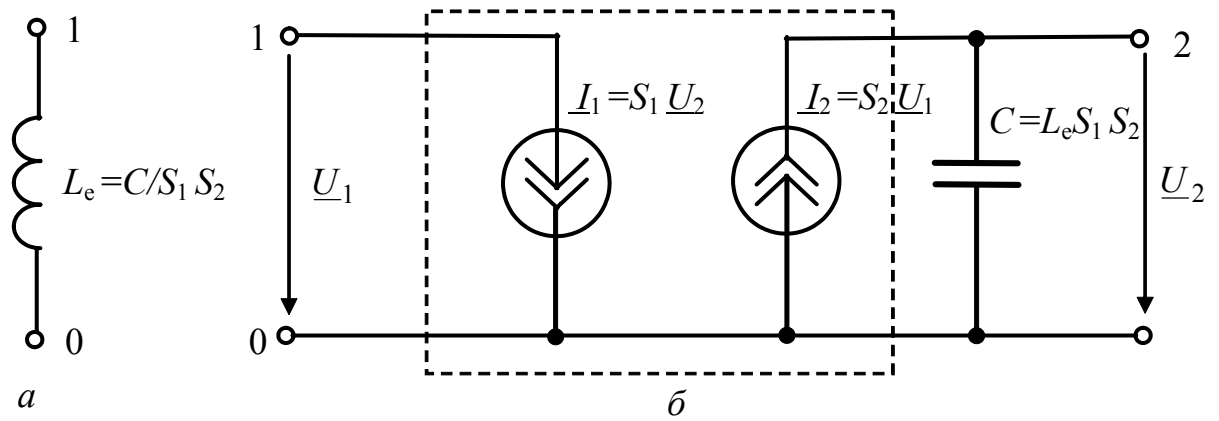


Рисунок 4.21 – Використання гіратора для заміщення індуктивності:
a – індуктивна вітка; *б* – її імітація відносно входу (1+0)
за допомогою гіратора і ємності на вході (2+0)

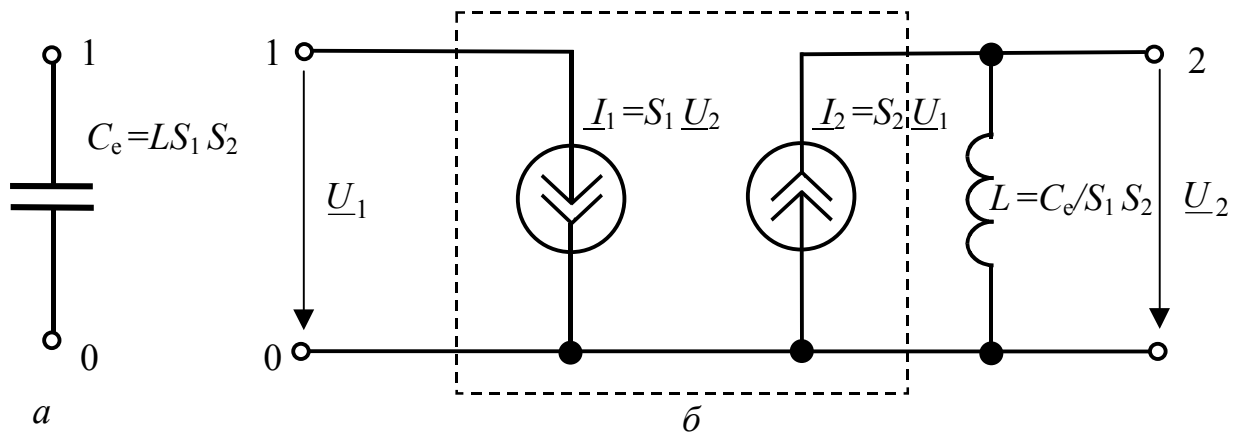


Рисунок 4.22 – Застосування гіратора для заміщення ємності:
a – ємнісна вітка; *б* – її імітація відносно брами (1+0)
за допомогою гіратора та індуктивності на брамі (2+0)

Якщо до входу (2+0) гіратора увімкнуте джерело напруги \underline{E} , то на вході (1+0) виникне джерело струму:

$$\underline{I}_1 = -\underline{E}S_1. \quad (4.53)$$

Нехай тепер провідність \underline{Y}_H утворено двома паралельними вітками – ємнісною C і резистивною $R = 1/G$, тоді відповідно до виразу (4.49б) вхідний опір становитиме:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_H}{S_1 S_2} = j\omega \frac{C}{S_1 S_2} + \frac{G}{S_1 S_2}, \quad (4.54)$$

тобто гіратор (рис.4.23) перетворює паралельне увімкнення віток R, C на вході (2+0) у послідовне увімкнення віток $L_e = C/S_1 S_2$ та $R_e = G/S_1 S_2$ на вході (1+0).

З наведених властивостей гіратора ясно, що він виконує дуальні перетворення віток, якими (за методом еквівалентного генератора) можна представити входи двополусних кіл. Тому каскадне з'єднання двох гіраторів (рис.4.24) з пе-

редатними провідностями $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ перетворює вітки, увімкнені до входу $(b+c)$, у такі самі з коефіцієнтом перетворення $S_1^{(2)}S_2^{(2)} / S_1^{(1)}S_2^{(1)}$.

Використання гіраторів є дуже зручним прийомом при організації обчислень. Так, наприклад, аналізуючи нелінійні кола з параметрами, що описані неоднозначною S -подібною ампер-вольтною характеристикою (рис.4.25, а), її зазвичай заміняють однозначною N -подібною (рис.4.25, б), змінюючи місцями функцію та аргумент. Але це призводить до переходу до іншого координатного базису (наприклад від опису в базисі вузлових напруг до базису контурних струмів та ін.), що дуже незручно, приймаючи до уваги розповсюдженість та переваги базису вузлових напруг при аналізі складних непланарних кіл.

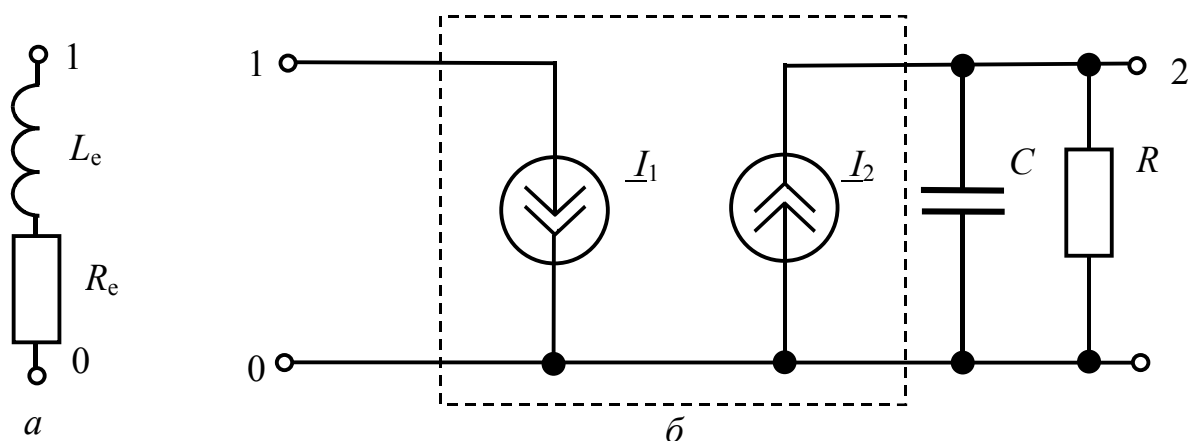


Рисунок 4.23 – Використання гіратора для заміщення послідовної вітки:
а – L_e, R_e вітка; б – її імітація паралельними R і C вітками

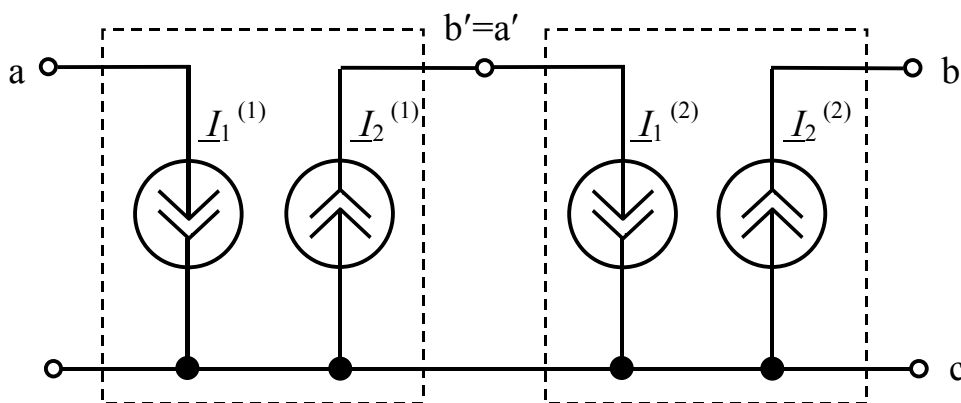


Рисунок 4.24 – Каскадне з'єднання двох гіраторів

Щоб забезпечити однозначність функції (рис.4.25, а), слід до входу $(2+0)$ гіратора (рис.4.20) увімкнути провідність з N -подібною характеристикою (рис.4.25, б). Це забезпечить на вході $(1+0)$ опір у вигляді (рис.4.25, а), якщо ввести для характеристики (рис.4.25, б) ваговий коефіцієнт $1/S_1S_2$ або прийняти $S_1 = S_2 = 1$.

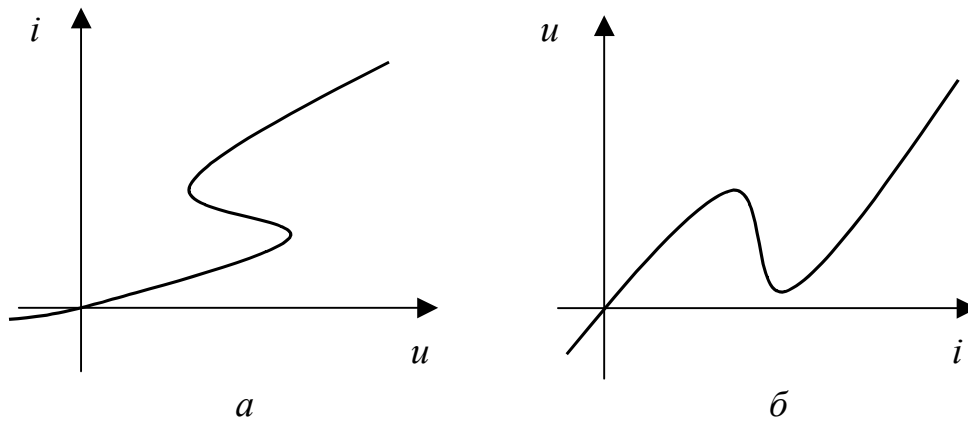


Рисунок 4.25 – Нелінійні S-подібні характеристики:
a – ампер-вольтна; *б* – відповідна їй вольт-амперна

При обчисленні в базисі канонічної системи вузлових напруг активні компоненти кола (підсилювачі) мають бути представлені як джерела струму, керовані напругою. Але вимірюючи параметри таких активних чотириполіусників, їх зручніше представляти у вигляді джерел струму, керованих струмом, джерел напруги, керованих напругою та джерел напруги, керованих струмом. Відповідні таким чотириполіусникам сучасні елементи (класичні ОП, струмові повторювачі) мають такі вхідні та вихідні опори, які (як і для класичного ОП) при розрахунках доцільно вважати нульовими або нескінченними. Тому стандартні еквівалентні перетворення таких чотириполіусників часто є неможливими.

Усі ці труднощі легко подолати, якщо відповідні “нестандартні” для базису вузлових напруг вітки керованого джерела привести до “стандартного” вигляду за допомогою гіраторів (рис.4.26–4.28).

Так, на рис.4.26 показане перетворення ідеального джерела напруги (рис.4.26, *a*), керованого напругою (без опорів на входах $(\alpha+\beta)$, $(\gamma+\delta)$) до джерела струму, керованого напругою (рис.4.26, *б*).

Якщо передатні провідності гіратора $S_1 = S_2 = 1 \text{ См}$, то коефіцієнт μ в схемі (рис.4.26, *б*) чисельно дорівнює μ в схемі (рис.4.26, *a*), але вимірюється в сіменсах.

Аналогічно, на рис.4.27 показане перетворення джерела струму, керованого струмом (рис.4.27, *a*), у джерело струму, керованого напругою (рис.4.27, *б*). Коефіцієнт k у схемі (рис.4.27, *б*) теж вимірюється в сіменсах, у схемі (рис.4.27, *a*) k – безрозмірна величина.

Нарешті, на рис.4.28 показане перетворення джерела напруги, керованого струмом (рис.4.28, *a*), до джерела струму, керованого напругою. В схемі (рис.4.28, *a*) Z вимірюють в омах, в той час, як в схемі (рис.4.28, *б*) Z має те саме чисельне значення, але в сіменсах.

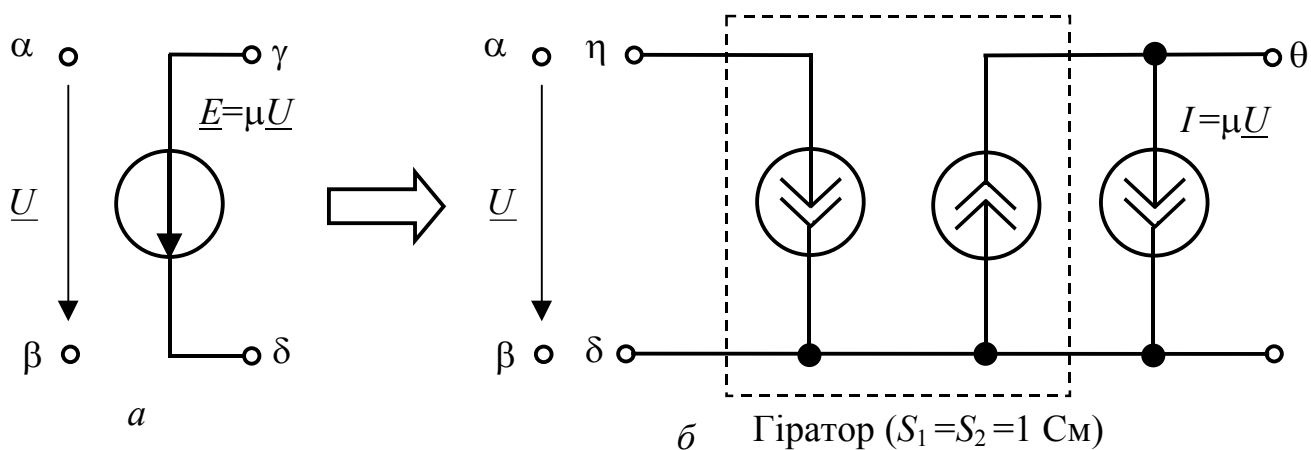


Рисунок 4.26 – Перетворення джерел за допомогою гіратора: *a* – джерело напруги, кероване напругою; *б* – джерело струму, кероване напругою

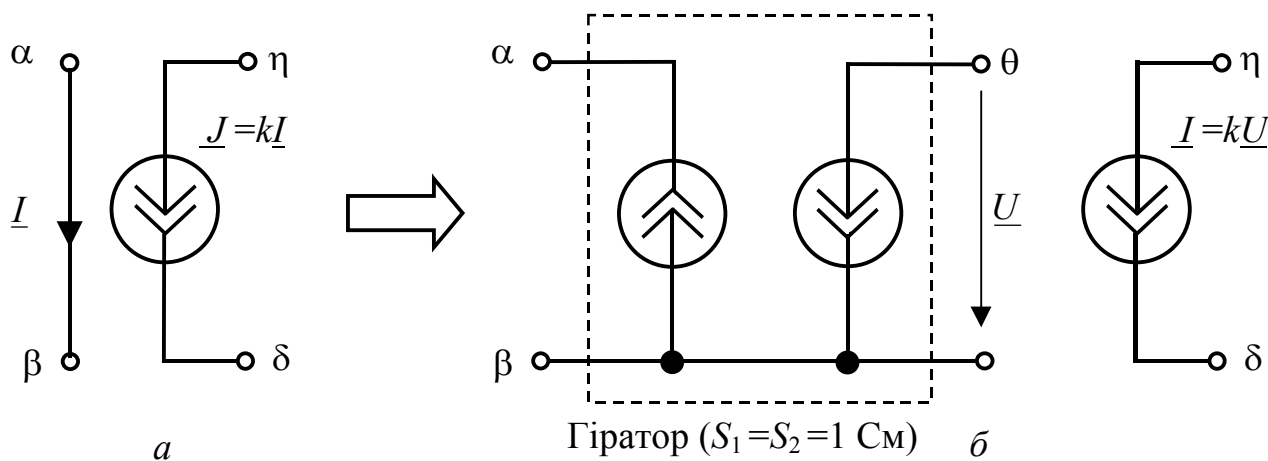


Рисунок 4.27 – Перетворення джерел за допомогою гіратора: *a* – джерело струму, кероване струмом; *б* – джерело струму, кероване напругою

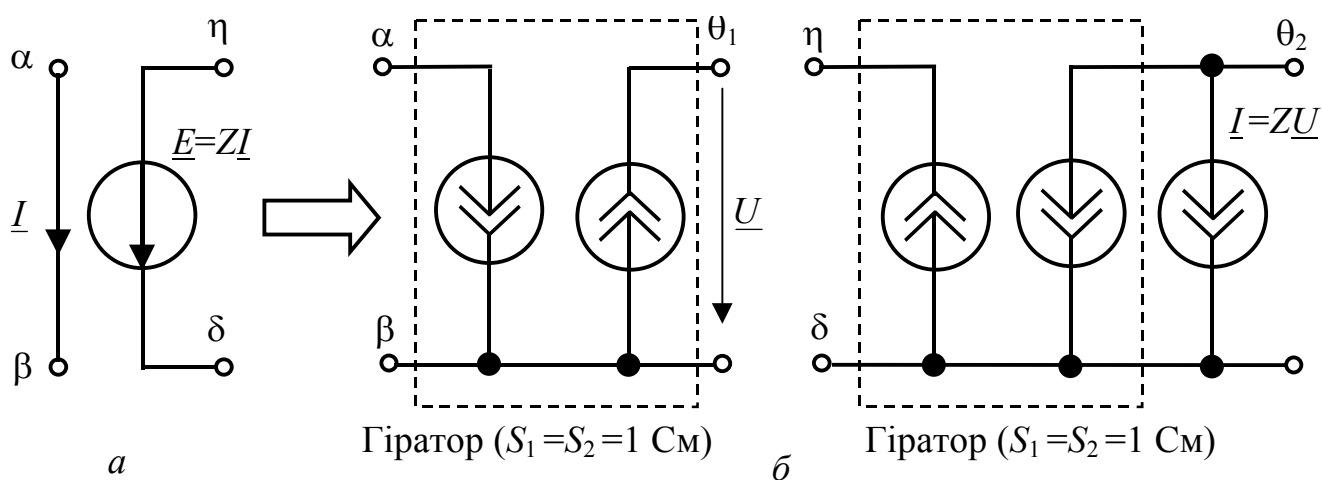


Рисунок 4.28 – Перетворення джерел за допомогою гіраторів: *a* – джерело напруги, кероване струмом; *б* – джерело струму, кероване напругою

4.8.3 Трибрамні конвертори та конверси

У сучасній схемотехніці велике значення мають трибрамні імітансні³ конвертори (рис.4.29).

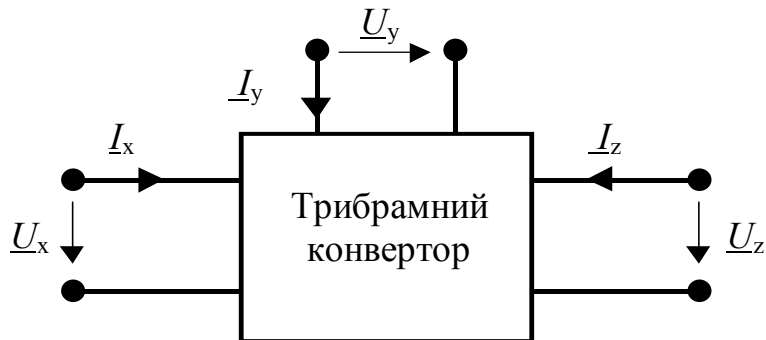


Рисунок 4.29 – Трибрамний конвертор

Нині найширше розповсюджені два базові види конверторів: з підсумуванням струму та з підсумуванням напруги. Схемні моделі обох видів конверторів зображено на рис.4.30.

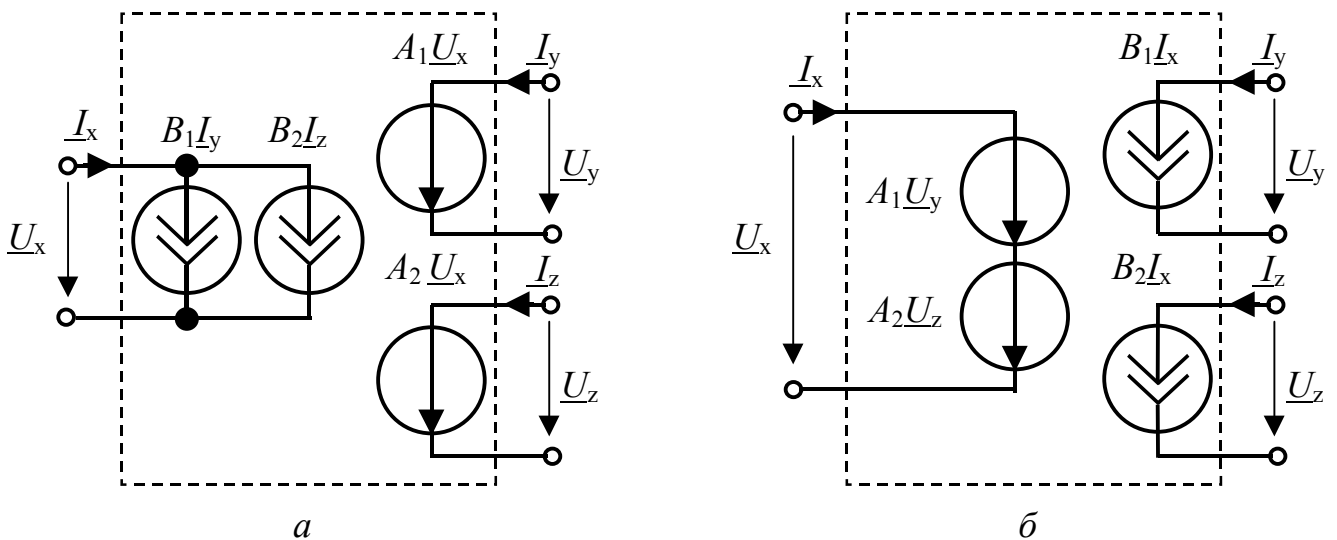


Рисунок 4.30 – Конвертори з підсумуванням: *а* – струму; *б* – напруги

Трибрамний конвертор із підсумуванням струму – це трибрамник, який описують системою рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.55)$$

³ Імітанс – термін, спільний для комплексного опору і комплексної провідності

Трибрамний конвертор із підсумуванням напруги – це трибрамник, який описують системою рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & 0 \\ N_{31} & 0 & N_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.56)$$

Згідно з виразом (4.55) коефіцієнти передачі за напругою A_i та струмом B_j моделі (рис.4.30, а) мають значення:

$$-A_1 = \frac{\mu_{21}}{\mu_{22}}; \quad -A_2 = \frac{\mu_{31}}{\mu_{33}}; \quad -B_1 = \frac{N_{12}}{N_{11}}; \quad -B_2 = \frac{N_{13}}{N_{11}}. \quad (4.57)$$

Для моделі (рис.4.30, б) за формулою (4.56):

$$-A_1 = \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}; \quad -A_2 = \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}; \quad -B_1 = \frac{N_{21}}{N_{22}}; \quad -B_2 = \frac{N_{31}}{N_{33}}. \quad (4.58)$$

Як правило, входи конвертора об'єднують так, що кожен з входів з'єднують із спільним вузлом. Тоді рівняння (4.55) – (4.56) з урахуванням формул (4.57) – (4.58) набувають вигляду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_2 \\ B_1 & B_2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \\ \underline{U}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \\ \underline{I}_x \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

для конверторів з підсумуванням струму та

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & A_2 \\ B_1 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

для конверторів з підсумуванням напруги.

Окремим випадком трибрамного конвертора є **конвеєр**, який набув широкого розповсюдження в сучасній аналоговій техніці у вигляді елементів в інтегрованому або гібридному виконанні, що їх виготовляють численні західні фірми. Більш того, конвеєр став основним “будувальним блоком” у багатьох галузях схемотехніки.

Загалом **конвеєром** називають кожен **частковий випадок трибрамного імітансного конвертора, у якого хоча б один з коефіцієнтів передачі за напругою або струмом (A_i, B_j) дорівнює нулю.**

Якщо нулю дорівнює деякий з коефіцієнтів передачі за напругою, такий конвертор має назву **струмовий конвеєр**, якщо ж коефіцієнт передачі за струмом дорівнює нулю – **конвеєр напруги**.

Відповідно до прийнятих визначень, у табл.4.3 наведено відомості про усі шість типів існуючих нині конвеєрів (трьох “поколінь” I, II, III). Їхні умовні графічні позначення показані на рис.4.31, а еквівалентні схеми – на рис.4.32.

Таблиця 4.3 – Типи конвеєрів

Конвеєр		Тип		Параметр			
				A_1	A_2	B_1	B_2
Струмовий	ССІ	Із підсумуванням	напруги	A_1	0	B_1	B_2
	ССІІ		напруги	A_1	0	0	B_2
	ССІІІ		струму	A_1	0	B_1	B_2
Напруговий	ВСІ	Із підсумуванням	струму	A_1	A_2	B_1	0
	ВСІІ		струму	0	A_2	B_1	0
	ВСІІІ		напруги	A_1	A_2	B_1	0

Струмові конвеєри ССІІ другого покоління (рис.4.31, б; 4.32, б) є найпоширенішими у сучасній практиці серед наведених вище шести типів конвеєрів. Ці конвеєри описують системою рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

При цьому $A_1 = +1$; $B_2 = +1$ для ССІІ(+), та $A_1 = -1$; $B_2 = -1$ для ССІІ(-). Нині західні фірми випускають спеціальні інтегровані аналогові кола, які відповідають конвеєрам ССІІ. Раніше виготовлялися гібридні кола на двох класичних ОП (принципову схему такого конвеєра у гібридному виконанні зображено на рис.4.33). При цьому коефіцієнти передачі за напругою кожного ОП $A = 1$.

Додатково слід виконати такі умови:

для ССІІ(+):

$$(R_1^+ + R_2^+)(R_5^+ + R_6^+) = R_3^+ R_4^+,$$

для ССІІ(-):

$$R_4^-(R_1^- + R_3^-) = R_2^-(R_5^- + R_6^-).$$

З аналізу кіл (рис.4.33) для коефіцієнта передачі за струмом конвеєра виходять такі вирази:

$$B_2^+ = \frac{R_1^+ [R_2^+ R_6^+ + R_5^+ (R_2^+ + R_4^+)]}{R_6^+ [R_2^+ R_3^+ + R_5^+ (R_1^+ + R_2^+)]}; \quad B_2^- = \frac{-R_1^- R_2^-}{R_2^- R_6^-}.$$

Коефіцієнти передачі за напругою для обох типів конвеєрів (рис.4.33) дорівнюють одиниці ($A = 1$).

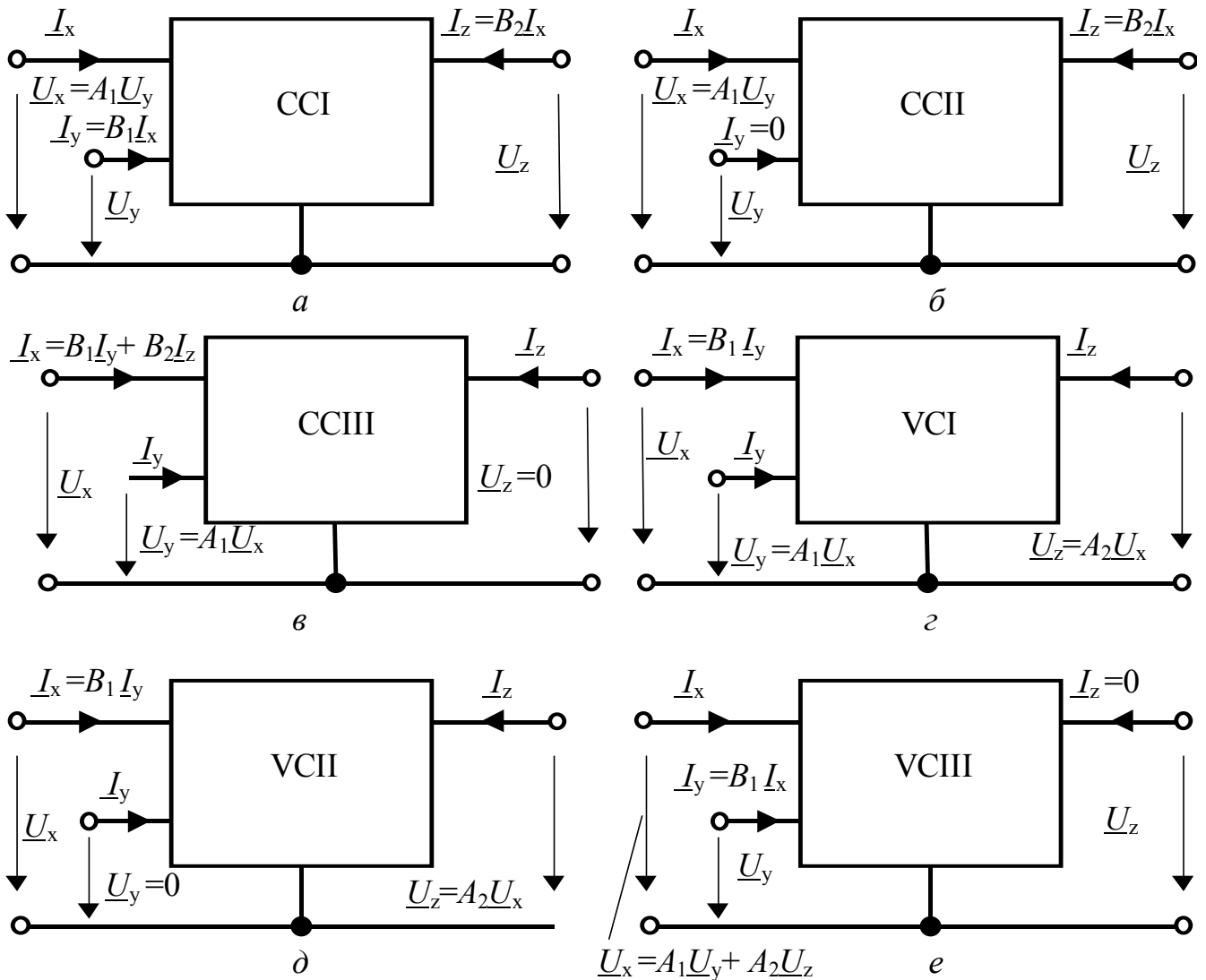


Рисунок 4.31 – Умовні позначення конвеєрів струму та напруги трьох поколінь

На базі струмового конвеєра проектують численні блоки сучасних аналогових кіл. У розд. 6 аналізуватимуться схемні реалізації фільтрів. В даному підрозділі як приклад доцільно розглянути схему джерела струму, керованого напругою, на базі ССІІ.

На рис.4.34, а зображена принципова схема такого джерела.

З рис.4.34, б видно, що струм у вітці \underline{Z} , викликаний напругою \underline{U}_y , керує струмом $B_2 \underline{I}_x$ керованого джерела, тобто результуюча передатна провідність становить:

$$\underline{S} = -A_1 B_2 / \underline{Z},$$

звідки для ССІІ(+):

$$\underline{S} = -1 / \underline{Z},$$

а для ССІІ(-):

$$\underline{S} = 1 / \underline{Z},$$

причому значення \underline{S} можна регулювати підстроюванням опору \underline{Z} .

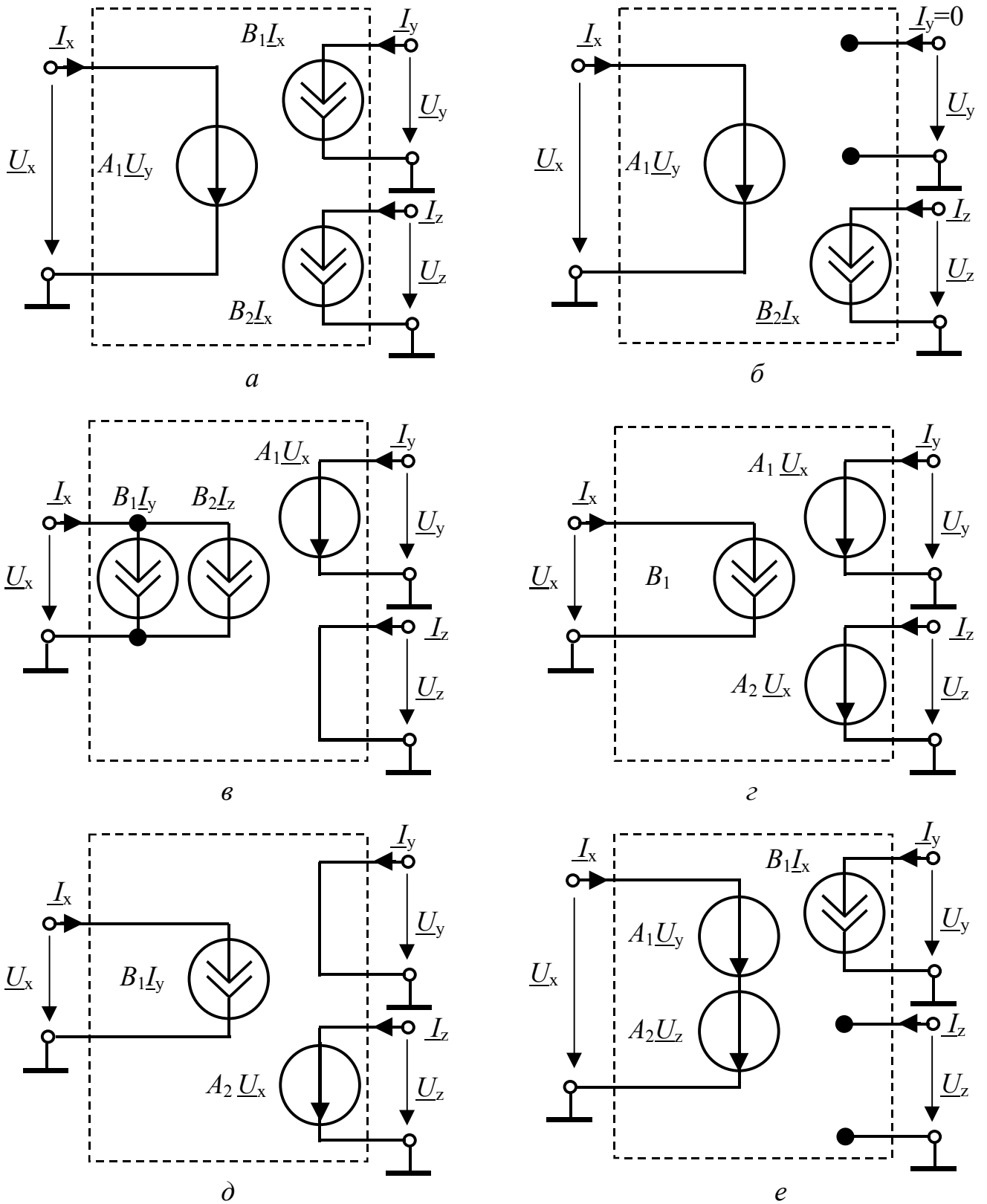


Рисунок 4.32 – Еквівалентні схеми конверсів

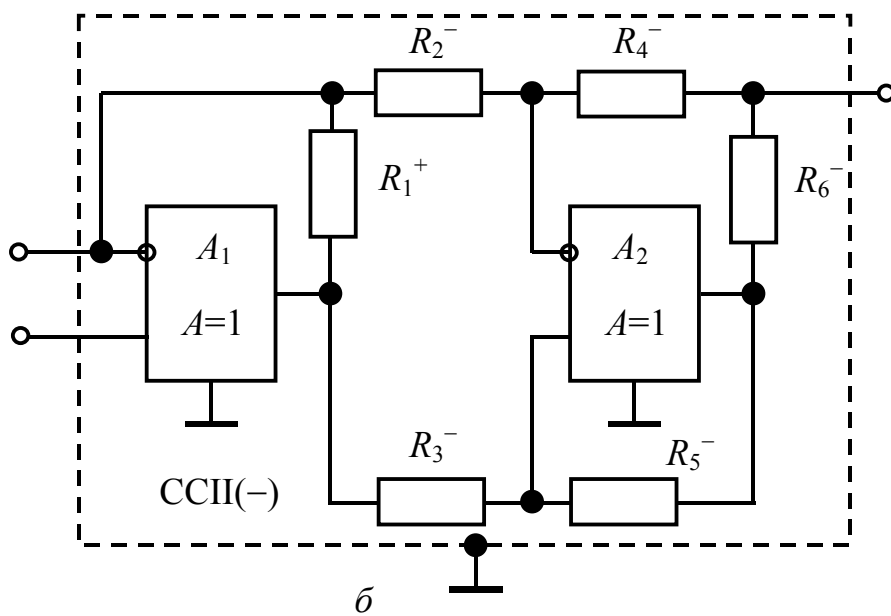
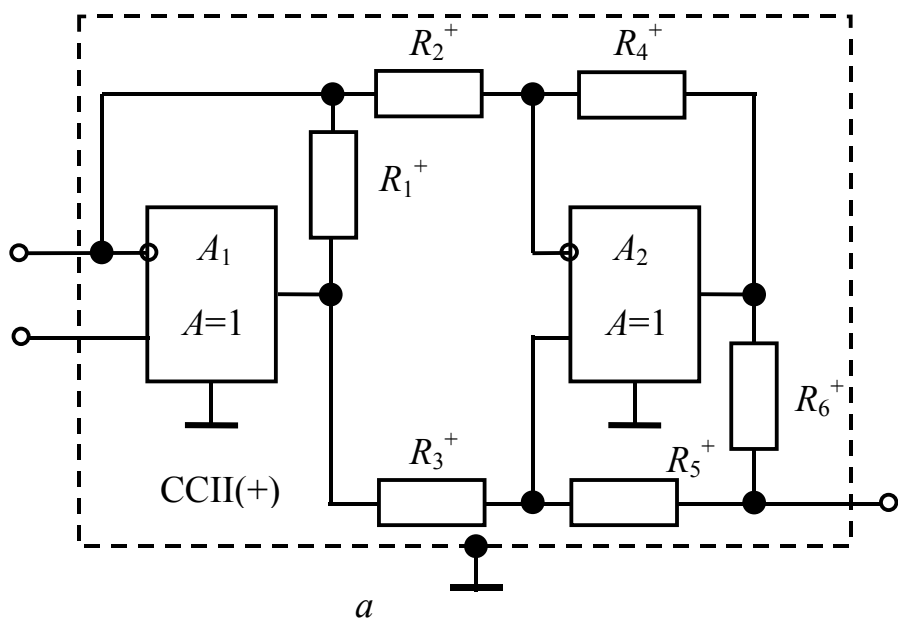


Рисунок 4.33 – Принципові схеми конвеєрів струму другого покоління:
 a – ССІІ(+); b – ССІІ(-)

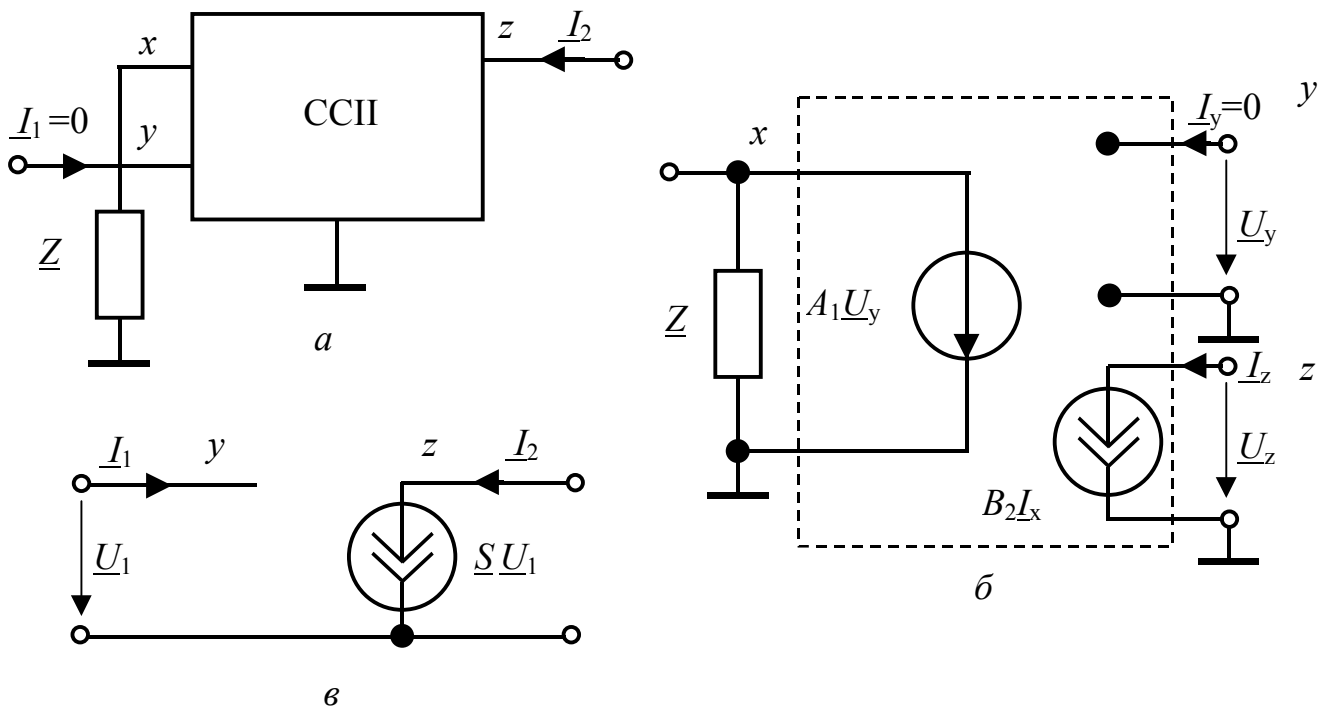


Рисунок 4.34 – Схеми джерела струму, керованого напругою, на конвеєрі ССІІ: *a* – принципова; *б* – еквівалентна; *в* – еквівалентна з виключенням контуру на вході ($x+0$)

4.8.4 Кратні реактивні елементи (біцистори)

Часто в схемотехнічному проектуванні необхідні елементи (двополюсники), частотнозалежні параметри яких змінюються за законом $\omega^2 D_1$ або D_2 / ω^2 . Пасивних реактивних елементів з такими параметрами не існує (для ємності $X_C = 1 / \omega C$, для індуктивності $X_L = \omega L$), але їх нескладно реалізувати на керованих джерелах, які, в свою чергу, отримують за допомогою класичних ОП, конвеєрів, суматорів. Якщо залежність одержуваного параметра від частоти квадратична, то елемент з таким параметром називають **біцистором**.

Базою для потрібних перетворень частотнозалежних опорів або провідностей (імітансів) є трибражник (рис.4.35) з входами ($a+0$), ($b+0$), ($c+0$), до двох з яких ($b+0$) і ($c+0$) увімкнені частотнозалежні вітки з лінійною частотною залежністю їхніх імітансів.

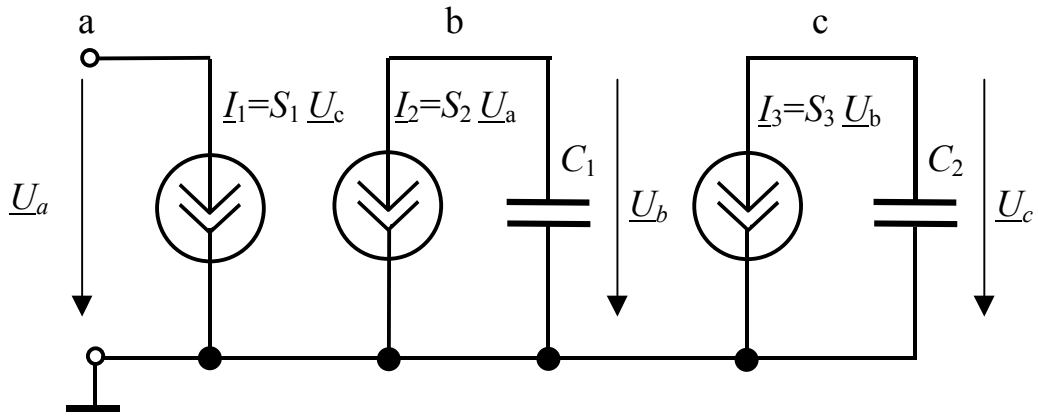


Рисунок 4.35 – Схема біцистора

Вхідний опір $Z_{(a+0)(a+0)}$ для кола (рис.4.35) можна знайти за формулою

$$Z_{(a+0)(a+0)} = Z_{aa} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta_Y},$$

де Δ_{aa} , Δ_Y – доповнення та визначник матриці провідностей:

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_1 \\ S_2 & j\omega C_1 & 0 \\ 0 & S_3 & j\omega C_2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Тоді

$$\Delta_{aa} = -\omega^2 C_1 C_2; \quad \Delta = S_1 S_2 S_3; \quad Z_{aa} = \frac{-\omega^2 C_1 C_2}{S_1 S_2 S_3} = -\omega^2 D_1^{(2)},$$

$$\text{де } D_1^{(2)} = \frac{C_1 C_2}{S_1 S_2 S_3}.$$

Аналогічно можна одержати вхідний опір $\pm j\omega^3 D_1^{(3)}$, для чого достатньо реалізувати чотирибрамник, схему якого зображено на рис.4.36.

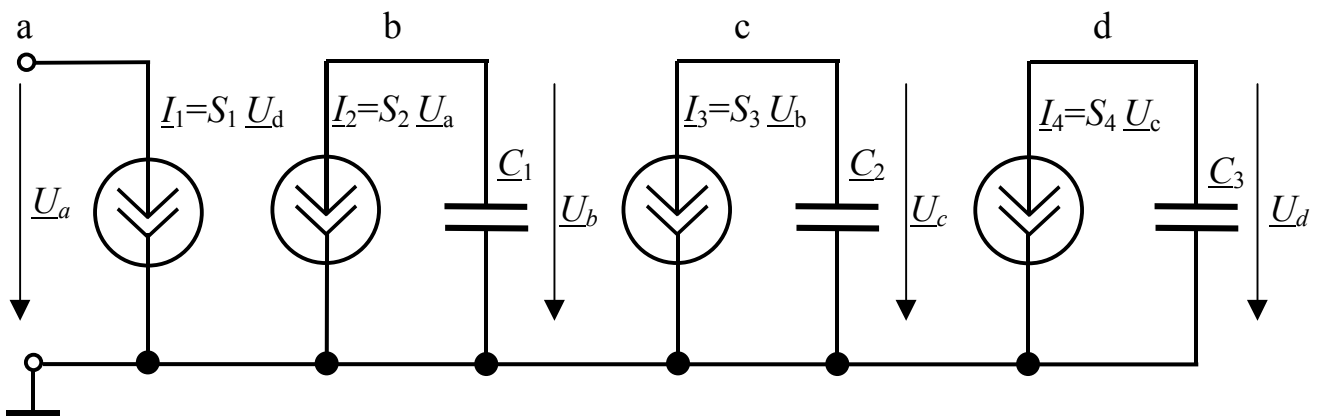


Рисунок 4.36 – Трикратна індуктивність $D_1^{(3)}$

У цьому випадку матриця провідностей має вигляд:

$$(\underline{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & S_1 \\ S_2 & j\omega C_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_3 & j\omega C_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_4 & j\omega C_3 \end{pmatrix} \end{matrix};$$

$$\Delta_{aa} = (j\omega)^3 C_1 C_2 C_3; \quad \Delta_Y = -S_1 S_2 S_3 S_4; \quad \underline{Z}_{aa} = \frac{j\omega^3 C_1 C_2 C_3}{S_1 S_2 S_3 S_4} = j\omega^3 D_1^{(3)}.$$

Щоб змінити знак $D_1^{(3)}$, достатньо змінити знак однієї з передатних провідностей S_i . Якщо потрібно одержати дійсний опір (уявну кратну індуктивність), треба забезпечити уявну передатну провідність, що легко зробити, використавши в схемі (рис.4.34) реактивну вітку \underline{Z} .

Кратні ємності та індуктивності застосовують, розв'язуючи задачі синтезу кіл за їх операторними передатними функціями (див. розд. 3 і 6) за умови $p = j\omega$. При цьому кожен з елементів полінома, який входить до ОПФ, реалізується окремо, що значно полегшує процедуру синтезу.

Але сучасні методи синтезу спираються на реалізацію підкіл другого порядку, в яких поліноми знаменника та (або) чисельника ОПФ мають не більш, ніж другий порядок. Тому найширше розповсюджені саме біцистори, у яких кратність ємності або індуктивності дорівнює двом.

У сучасній схемотехніці кратні ємності (внаслідок широкого застосування R, C кіл, у цьому підрозділі розглядатимуться схеми тільки для них) реалізують за допомогою універсального трибрамника, який можна одержати із струмових конвеєрів ССІІ.

Сам універсальний трибрамник – це елемент кола (“будівельний блок”), який описують системою рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ B & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_\alpha \\ \underline{U}_\beta \\ \underline{U}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_\alpha \\ \underline{I}_\beta \\ \underline{I}_\gamma \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Тобто у рівняння (4.61) додана ще передатна провідність S та змінений порядок нумерації ($\alpha = x, \beta = z, \gamma = y$). Інакше кажучи, в системі (4.62) додане джерело струму (на вході $y = \gamma$, кероване напругою на вході $z = \beta$). Умовне позначення та еквівалентну схему такого трибрамника показано на рис.4.37.

З порівняння еквівалентних схем (рис.4.37, б і рис.4.34, б) видно, що для реалізації універсального трибрамника до входу ($y + 0$) в схемі (рис.4.34, б) слід увімкнути джерело струму $S\underline{U}_z$, кероване напругою.

На базі трибрамних елементів (рис.4.38) легко реалізувати кратну ємність $D_2^{(2)}$ (рис.4.39).

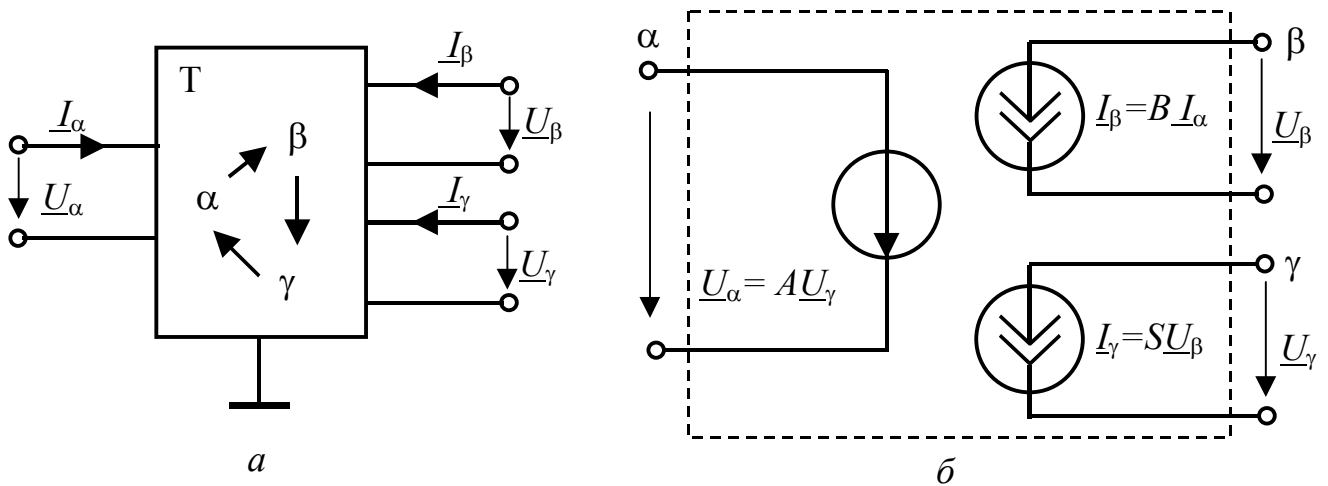


Рисунок 4.37 – Універсальний трибрамник: *a* – умовне позначення; *б* – еквівалентна схема

Так, для схеми заземленого біцистора (рис.4.39, *a*), де кратну ємність $D^{(2)}$ увімкнено до входу ($\alpha + 0$), за умови $A = 1$, $B = \pm 1$ можна записати:

$$D_2^{(2)} = \frac{C_1 C_2}{|S|},$$

де $S = \pm|S|$.

Для схеми плаваючого біцистора (рис.4.39, *б*) за умови $A_1 = A_2 = 1$, $B_1 = B_2 = \pm 1$:

$$D_2^{(2)} = C_1 C_2 \left(\frac{1}{|S_1|} + \frac{1}{|S_2|} \right),$$

де $S_1 = S_2 = \pm|S|$.

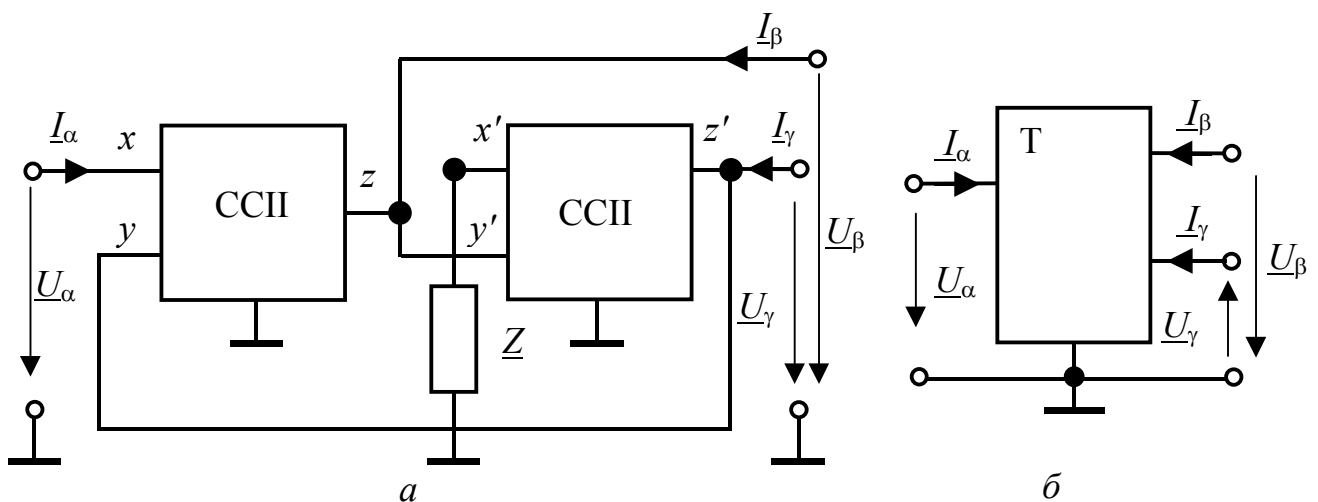


Рисунок 4.38 – Універсальний трибрамник з входами, з'єднаними із спільним вузлом на двох конвеєрах ССІІ: *a* – схема; *б* – умовне позначення

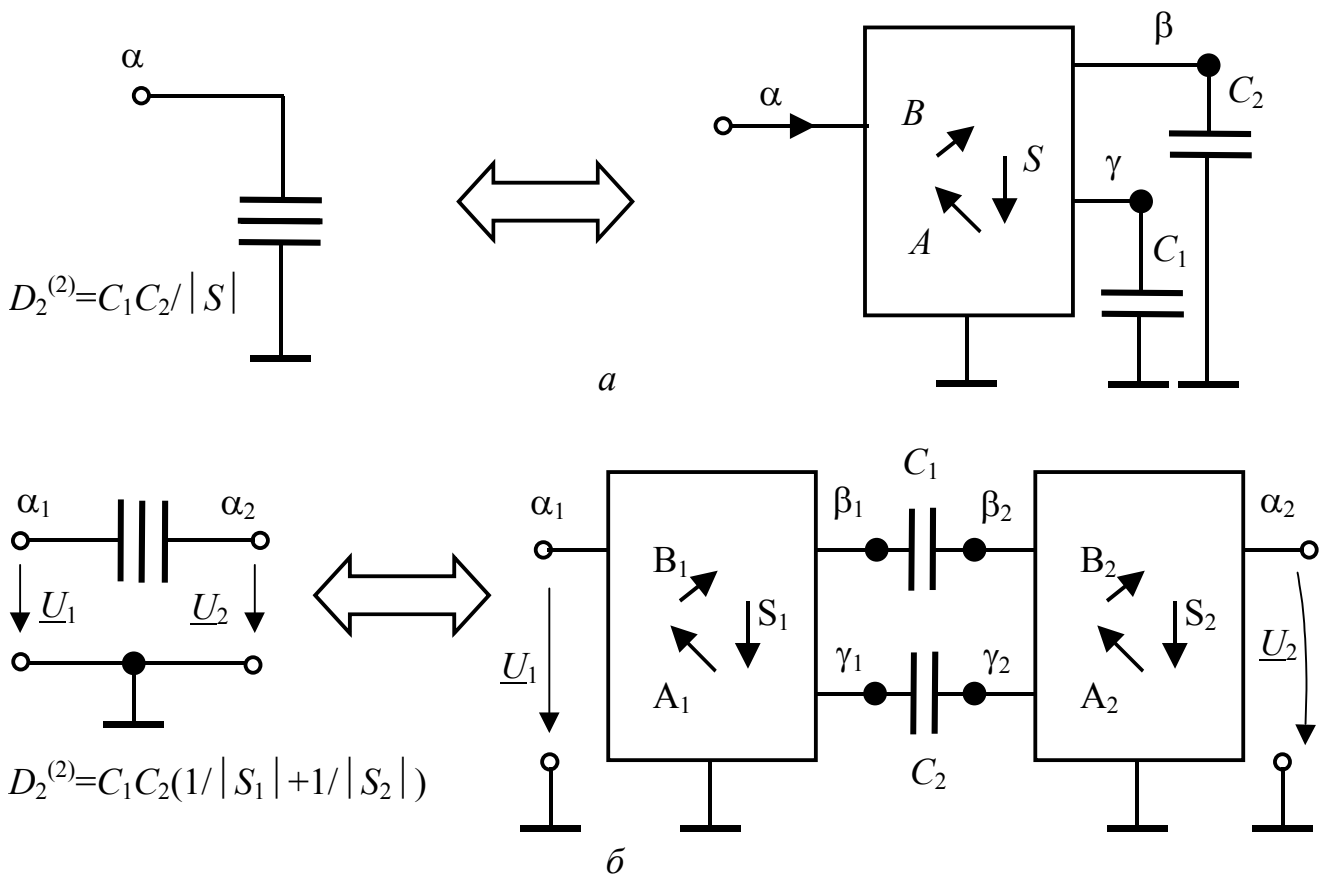


Рисунок 4.39 – Схеми і умовні позначення біцисторів:
a – заземленого; *б* – “плаваючого”

4.8.5 Трансїмпедансні та транскондуктивні операційні підсилювачі

В 80-х роках ХХ століття на ринку з'явилися **трансїмпедансні операційні підсилювачі** (ТОП) в монолітному інтегральному виконанні. Їх ще називають ОП із струмовим зворотним зв'язком. За своїми параметрами та властивостями вони значно переважають класичні ОП. Насамперед, ТОП мають значно більші робочі частоти, більші значення коефіцієнтів передачі, менший час затримки та встановлення, більшу лінійність при обробці великих за амплітудою сигналів, менші втрати (більший коефіцієнт корисної дії).

Як зразок можна навести ТОП фірми Analog Devices AD844 або AD846. Ці підсилювачі мають компенсаційний вхід Z. На рис.4.40, *a* показано умовне позначення ТОП, а на рис.4.40, *б* – його еквівалентну схему з урахуванням паразитних параметрів ($R_x = 50 \text{ Ом}$; $R_z = 4 \text{ МОм}$; $C_z = 4 \text{ пФ}$).

ТОП є джерелом напруги, керованим струмом (відносно входів x , 0).

Транскондуктивні операційні підсилювачі теж мають значно більші, ніж класичні ОП, робочі частоти. Вдалим прикладом **трансадмітансного** (транскондуктивного) підсилювача (ОТП – в англійській літературі ОТА) є

виріб фірми National Semikondactor LM/3700, або, як його ще називають, „діамантовий транзистор” (фірми Burr-Brown – ОР660). Ці ОТП працюють в області відеочастот і є джерелами струму, керованими напругою. Такий „діамантовий транзистор” має єдиний регульований параметр $G = S$ (у діапазоні 40 мкСм ...40 мСм), який і є передатною провідністю. Умовне позначення елементів ОТП показано на рис.4.41.

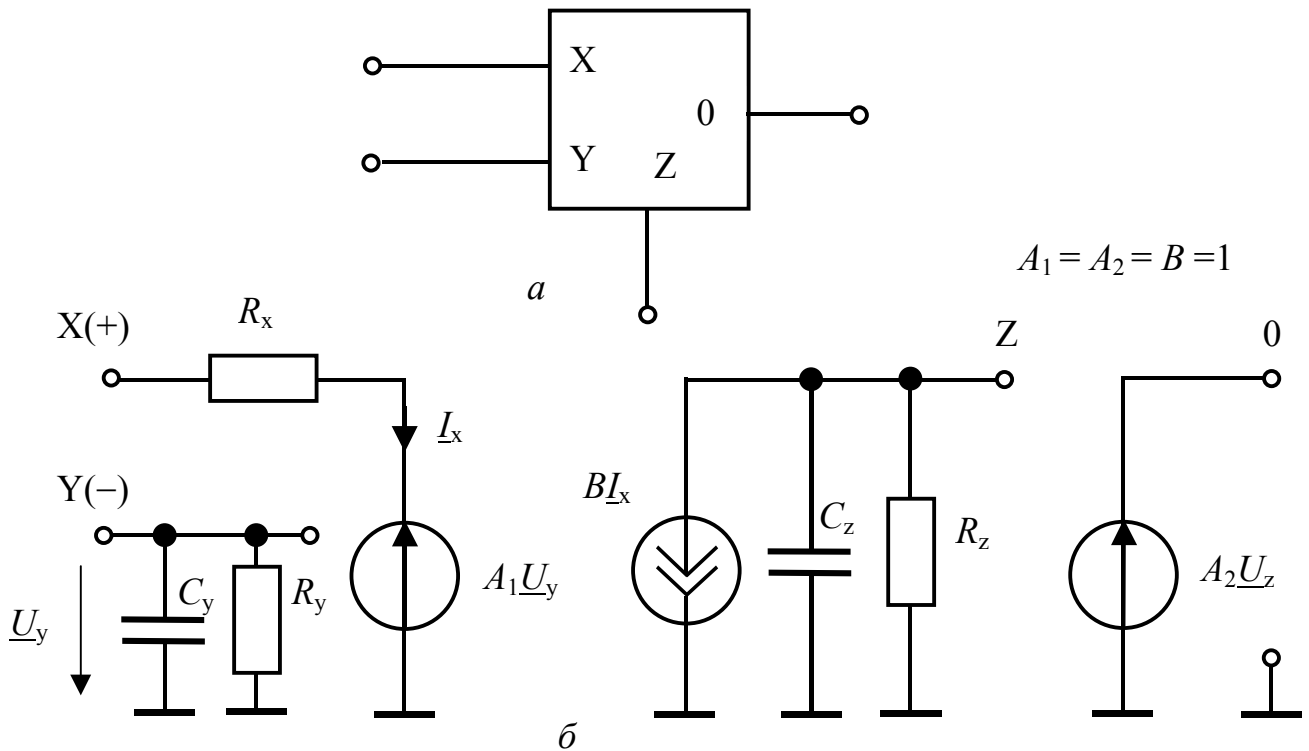


Рисунок 4.40 – Трансімпедансний підсилювач (ТОП) з двома входами x, y та виходом 0: a – умовне позначення; b – еквівалентна схема

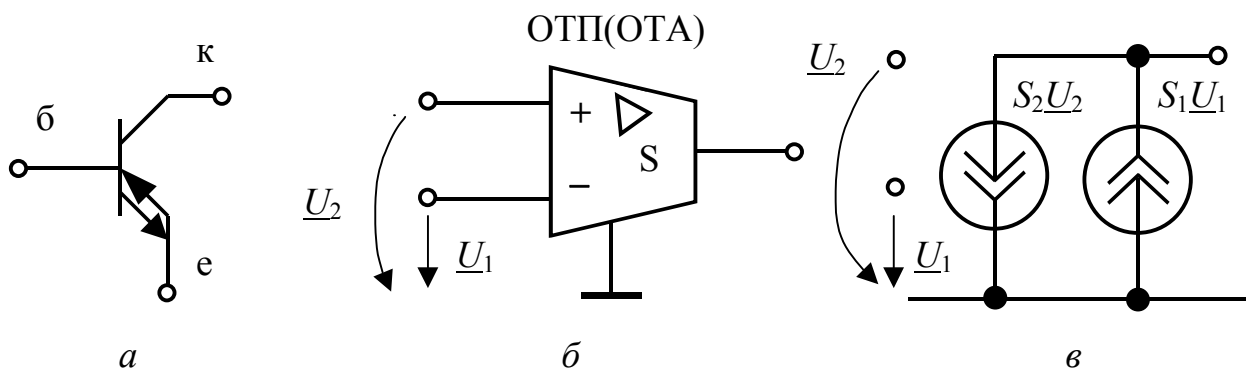


Рисунок 4.41 – Транскондуктивний операційний підсилювач (ОТП):
 a – умовне позначення „діамантового транзистора”;
 b – елемент ОТП з двома входами; v – еквівалентна схема

4.8.6 Елемент CFA (Current Feedback Amplifier)

Ці «будівельні» елементи сучасної аналогової схмотехніки є чотирибрамниками, що їх виготовляє фірма Analog Devices, описуваними системою рівнянь:

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{U}_y \\ \underline{U}_z \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{I}_y \\ \underline{I}_z \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

На рис.4.42 зображено умовні позначення такого елемента та схема його синтезу на двох конвеєрах струму ССІІ.

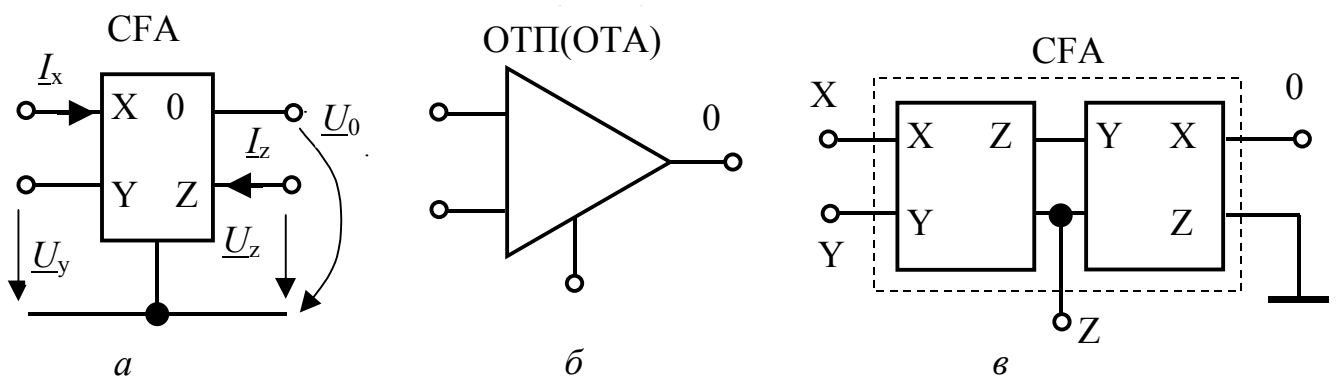


Рисунок 4.42 – Підсилювач із струмовим зворотним зв'язком (CFA):
а, б – умовні позначення; в – схема на базі двох конвеєрів струму ССІІ

4.9 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Які схеми називають багатополюсником (багатобрамником), чотириполюсником (двобрамником)?
2. Записати шість форм рівнянь чотириполюсника. Пояснити, в яких випадках кожна з форм запису має переваги перед іншими.
3. Які чотириполюсники називають прохідними, активними, симетричними?
4. Як експериментально визначити параметри чотириполюсника?
5. Як, знаючи коефіцієнти однієї системи параметрів, визначити коефіцієнти іншої?
6. Яке з'єднання чотириполюсників називають регулярним?
7. Довести, що матриця (\underline{Y}) біполярного транзистора із спільним емітером (рис.4.43) має вигляд:

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} 1/R_{\text{бе}} & 0 \\ \underline{Y}_{\text{пер}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці (\underline{A}) та (\underline{H}) .

$$\text{Відповідь: } (\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\underline{Y}_{\text{пер}} \\ 0 & 1/(\underline{Y}_{\text{пер}}R_{\text{бе}}) \end{pmatrix}; (\underline{H}) = \begin{pmatrix} R_{\text{бе}} & 0 \\ \underline{Y}_{\text{пер}}R_{\text{бе}} & 0 \end{pmatrix}.$$

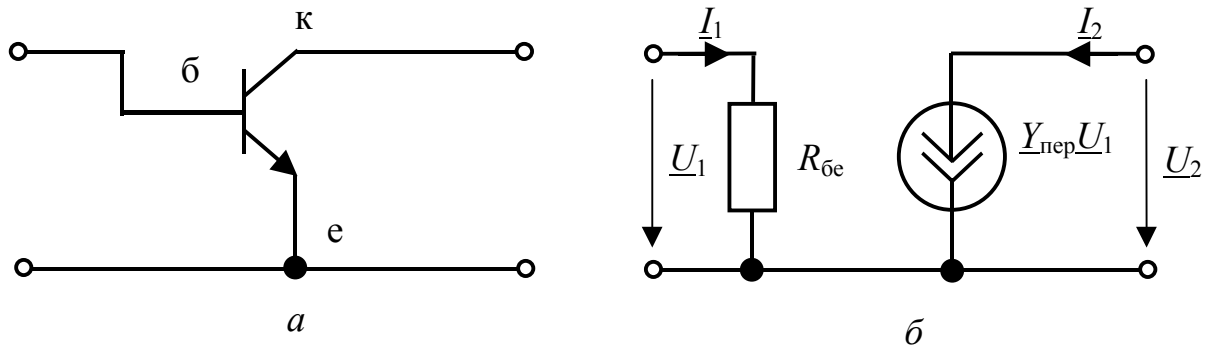


Рисунок 4.43 – Транзистор $n-p-n$ типу: a – схема із спільним емітером; $б$ – схема заміщення в області нижніх частот

8. Обчислити Y -параметри T -подібного чотириполіусника (рис.4.10), якщо замість ємності C_2 увімкнено індуктивність $L = 0,1$ Гн. Дано: $R_1 = R_2 = R = 100$ Ом, $C_1 = C = 10$ мкФ, $\omega = 1000$ Рад/с.

$$\text{Відповідь: } \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = 0,01j \text{ См}; \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -1,26 \cdot 10^6 e^{j1,25} \text{ См}.$$

9. Знайти операторний і комплексний коефіцієнт передачі за напругою для кола, розглянутого у задачі 8.

$$\text{Відповідь: } H_{U31}(p) = \frac{p(LG^2 + C) + 2LCG}{2p^2 LCG + p(LG^2 + C) + G}.$$

10. Обчислити A -параметри T -подібного чотириполіусника, поперечну вітку якого утворює ємність C , а кожну з подовжніх віток – індуктивність L . Дано: $X_C = 20$ Ом, $X_L = 10$ Ом.

$$\text{Відповідь: } \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = -1; \underline{A}_{12} = 0; \underline{A}_{21} = -j0,1 \text{ См}.$$

11. Знайти коефіцієнт передачі за напругою при холостому ході та коефіцієнт передачі за струмом при короткому замиканні для Π -подібного чотириполіусника, подовжня вітка якого утворена індуктивністю L , а кожна з поперечних віток – ємністю C .

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{1 - \omega^2 LC}.$$

12. Несиметричний чотириполіусник навантажений опором \underline{Z}_2 . Користуючись Z -параметрами, довести, що комплексні коефіцієнти передачі за струмом та напругою становлять, відповідно:

$$\underline{H}_I = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_2}; \quad \underline{H}_U = -\frac{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{11}\underline{Z}_2}.$$

13. Досліди холостого ходу і короткого замикання для симетричного чотириполюсника дали такі результати: $U_{x,x} = 10 \text{ В}$; $I_{x,x} = 0,477 \text{ А}$; $P_{x,x} = 2 \text{ Вт}$ ($\varphi_{x,x} > 0$); $U_{к.з} = 10 \text{ В}$; $I_{к.з} = 0,5 \text{ А}$; $P_{к.з} = 3 \text{ Вт}$ ($\varphi_{к.з} > 0$). Обчислити його характеристичні параметри.

Відповідь: $\underline{Z}_c = 20,47e^{j59,3^\circ} \text{ Ом}$; $A_c = 1,46 \text{ Нп}$; $B_c = 0,63 \text{ Рад}$.

14. Резистивний Γ -подібний чотириполюсник з елементами $\underline{Z}_1 = 1600 \text{ Ом}$ (подовжня вітка), $\underline{Z}_2 = 900 \text{ Ом}$ (поперечна вітка) увімкнено узгоджено з генератором і навантаженням. Знайти внутрішній опір генератора та опір навантаження.

Відповідь: $\underline{Z}_Г = 1600 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_Н = 720 \text{ Ом}$.

15. Назвати шість типів комплексних функцій кола. Який зв'язок існує між КФ чотириполюсника та елементами матриць його параметрів різних форм (Y, Z, H, D, A, B)?

16. Пояснити принцип дуальності у теорії кіл. Як можна застосувати цей принцип, визначаючи функції кола в базисі контурних струмів і вузлових напруг?

17. У чому полягають схожість та різниця методів: еквівалентного двополюсника, еквівалентного чотириполюсника, еквівалентних підсхем?

18. Користуючись методом еквівалентних підсхем, знайти для схеми, розглянутої у прикладі 4.3, комплексний коефіцієнт передачі за напругою. Записати результуючу матрицю еквівалентного чотириполюсника відносно входів (1+0), (8+0).

Відповідь: $\underline{H}_{U(8+0)(1+0)} = -1,583$; $(\underline{Y})_\Sigma = \begin{matrix} 1 & 8 \\ 165/8 & 1/2 \\ -95/40 & 3/2 \end{matrix}$.

19. Дати характеристику операційному підсилювачу як елемента електричного кола.

20. Яким розрахунковим схемним еквівалентом може бути заміщений ОП?

21. Дати характеристику властивостей керованих джерел напруги і струму.

22. Який елемент кола називають гіратором? Які його властивості та функції? Чому гіратор є незв'язаним чотириполюсником?

23. Пояснити, як за допомогою гіратора можна зімітувати індуктивний елемент. Зобразити схему моделі паралельного резонансного контуру на базі гіратора.

24. Записати матрицю (Y) ідеального гіратора з провідністю G . Довести, що матриці (Z), (A) можна записати у вигляді:

$$(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -1/G \\ 1/G & 0 \end{pmatrix}; \quad (A) = \begin{pmatrix} 0 & 1/G \\ G & 0 \end{pmatrix}.$$

25. Який елемент кола називають трибрамним конвертором? Назвати базові види конверторів.

26. Записати системи рівнянь конверторів за умови, що кожен з його входів з'єднано із спільним вузлом.

27. Який елемент кола називають конвеєром? За якою ознакою розрізняють конвеєри струму та напруги? Назвати типи конвеєрів.

28. Записати систему рівнянь, яка описує конвеєри ССІІ.

29. Зобразити еквівалентну схему конвеєра ССІІ (+). Які значення мають коефіцієнти передачі цієї схеми?

30. На рис.4.44 зображено схему реалізації гіратора на двох конвеєрах напруги. Побудувати еквівалентну схему цієї реалізації і впевнитися, що вона відповідає схемі гіратора.

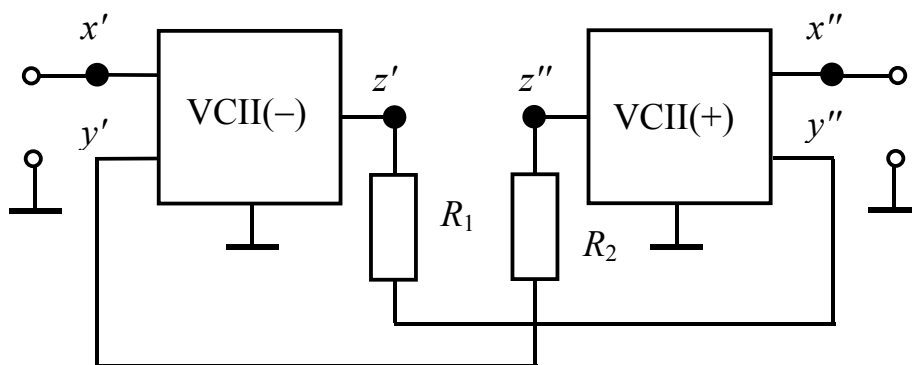


Рисунок 4.44 – Принципова схема гіратора на двох конвеєрах напруги другого покоління

31. Які характеристики мають кратні реактивні елементи?

32. Чому серед кратних елементів найбільше розповсюджені біцистори? Як залежать від частоти їхні параметри?

33. Якою системою рівнянь описують універсальний трибрамник? Як реалізувати цей елемент кола за допомогою конвеєрів ССІІ?

34. Навести умовні позначення трансїмпедансного і транскондуктивного операційних підсилювачів. Назвати їхні особливості та переваги порівняно з класичним ОП.

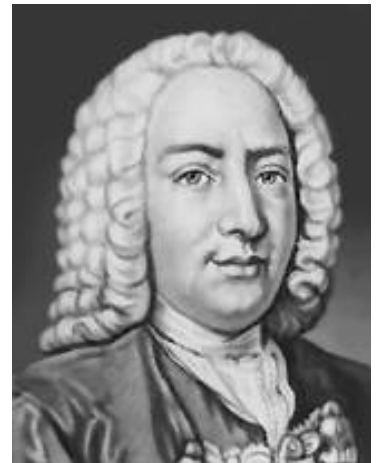
35. Дати характеристику підсилювачу зі струмовим зворотнім зв'язком (СФА).

5 Кола з розподіленими параметрами. Довгі лінії

- ❑ Загальні положення
- ❑ Первинні параметри довгих ліній
- ❑ Диференціальні (телеграфні) рівняння довгої лінії
Загальний розв'язок рівнянь для лінії без втрат
- ❑ Аналіз усталеного синусоїдного режиму довгої лінії
- ❑ Лінії з малими втратами при синусоїдній дії
- ❑ Режим біжних хвиль
- ❑ Режим стійних хвиль
- ❑ Режим змішаних хвиль
- ❑ Методи узгодження довгих ліній
- ❑ Кругові діаграми ідеальних довгих ліній
- ❑ Комплексні функції та ЧХ довгих ліній
- ❑ Перехідні процеси в ДЛ
- ❑ Операторні функції і часові характеристики довгих ліній
- ❑ Застосування кіл з розподіленими параметрами

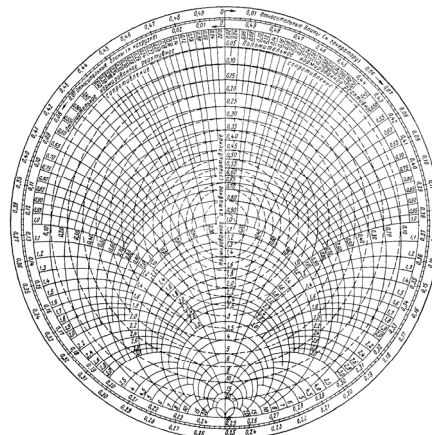


Коваленков

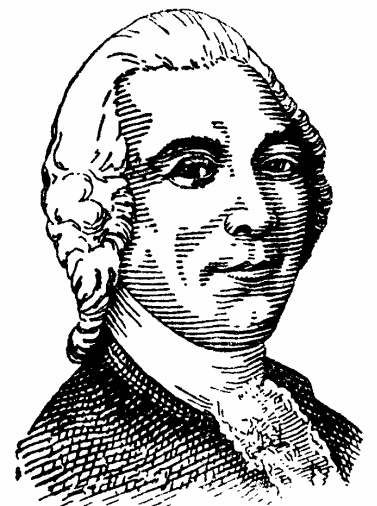
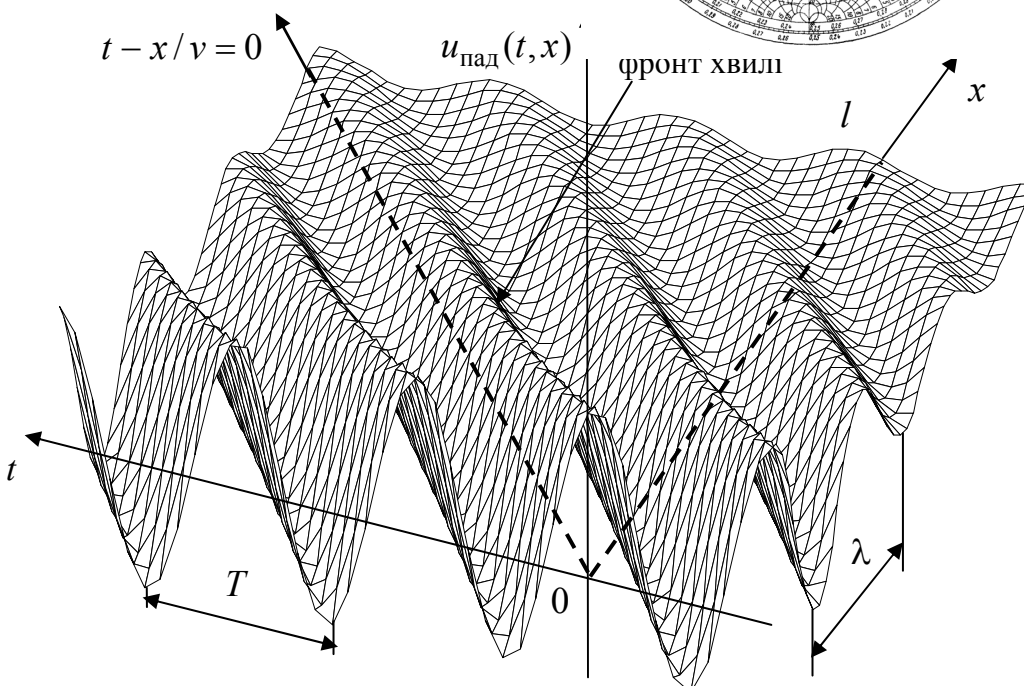


Бернуллі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$



Даламбер

5 КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ. ДОВГІ ЛІНІЇ

5.1 Загальні положення

У попередніх розділах розглядалися кола із зосередженими параметрами. Цим колам притаманні такі властивості:

1) Наявність скінченної кількості ідеальних пасивних елементів¹ $R, L (M), C$;

2) струми у кожній вітці та напруги між даними точками схеми залежать тільки від часу, тобто повністю описуються миттєвими значеннями – $i(t), u(t)$ відповідно;

3) значення $i(t)$ однакове для будь-якого перерізу вітки схеми;

4) напруга $u(t)$ між даними точками схеми визначається як різниця їхніх потенціалів;

5) процеси, загалом, описуються звичайними диференціальними рівняннями, які ґрунтуються на законах Кірхгофа для $i(t), u(t), e(t)$.

Наприклад, усі перелічені особливості стосуються реального кола із зосередженими параметрами (рис.5.1, *a*), складеного з послідовно з'єднаних генератора, резистора, котушки самоіндукції і конденсатора, та схеми заміщення цього кола (рис.5.1, *б*). Для синусоїдного джерела $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi_e)$ миттєве значення струму кола в усталеному режимі становить:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i), \quad (5.1)$$

$$\text{де } I_m = \frac{E_m}{Z}; \psi_i = \psi_e - \varphi; Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}; \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Струм (5.1) у будь-який момент часу однаковий у кожному перерізі кола за умови, що час затримки перенесених зарядів між будь-якими двома перерізами нехтовно малий. Можна показати, що для виконання даної умови максимальні геометричні розміри реального кола x_m, y_m, z_m мають бути значно меншими довжини хвилі (рис.5.1, *a*):

$$\lambda = v / f,$$

де $v \leq c$ – швидкість переміщення зарядів; c – швидкість світла; $f = \omega / 2\pi = 1/T$ – циклічна частота.

Якщо один з розмірів кола, наприклад довжина $x_m = l$, буде сумірною з довжиною хвилі за рахунок довжини провідників, які з'єднують затискачі генератора з пасивними елементами (рис.5.1, *б*), це призведе до затримки зарядів на час, сумірний з періодом змінювання струму:

¹ Згідно з ДСТУ 2815-94. Електричні й магнітні кола та пристрої. Терміни та визначення (п. 4.10) коло із зосередженими параметрами визначається як таке, що може бути подане сукупністю скінченної кількості ідеальних елементів.

$$t_3(l) = l/v = \frac{l}{\lambda f} = \frac{l}{\lambda} T. \quad (5.2)$$

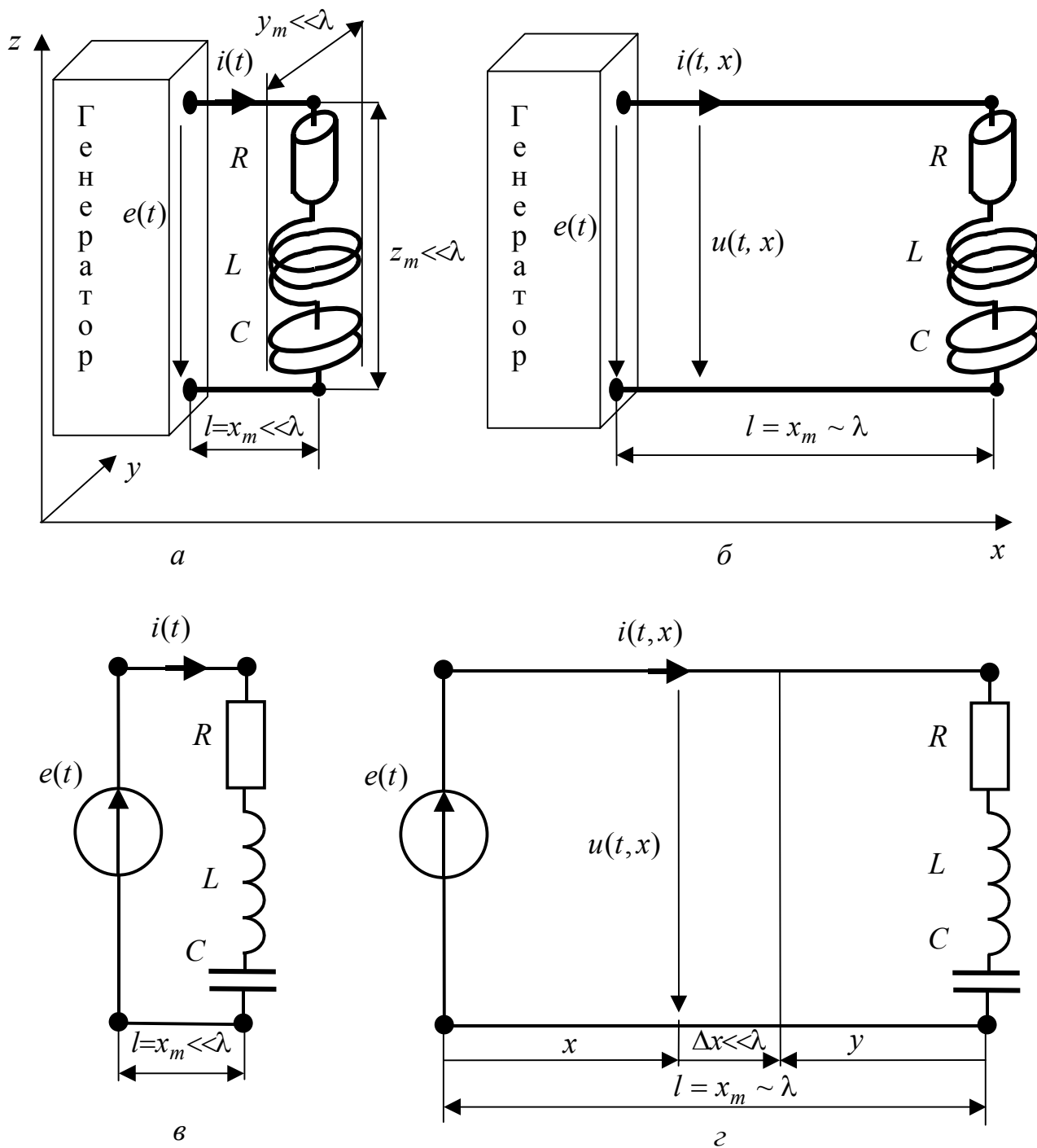


Рисунок 5.1 – Пояснення головного критерію щодо застосування теорії кіл із зосередженими і розподіленими параметрами:
 а, в – реальне коло із зосередженими параметрами і його схема;
 б, з – реальне коло з розподіленими параметрами і його схема

Вважаючи амплітуду струму постійною² і враховуючи формулу (5.2), миттєве значення струму у перерізі провідників з координатою x можна записати у вигляді:

$$i(t, x) = I_m \cos \{ \omega [t - t_3(x)] + \psi_i \} = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{\lambda f} + \psi_i \right) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \psi_i \right), \quad (5.3)$$

де $t_3(x) = x/v = \frac{x}{\lambda f}$ – час затримки зарядів у перерізі кола з координатою x , записаний аналогічно виразу (5.2).

Миттєве значення струму (5.3) стає функцією двох змінних – часу t і координати x . При цьому функція $i(t, x)$ періодична як у часі з періодом T , так і у просторі за координатою x з періодом λ . Ця властивість притаманна у загальнофізичному значенні одновимірним хвильовим процесам, а в електро-радіотехніці – колам з розподіленими параметрами.

Отже, **сумірність одного з геометричних розмірів кола і довжини хвилі є головним критерієм застосування теорії кіл з розподіленими параметрами для даного кола.** У розглянутому прикладі (рис.5.1, б, з) ця умова задовольняється, оскільки $l = x_m \sim \lambda$; $y_m \ll \lambda$; $z_m \ll \lambda$.

Можна сформулювати ще й часовий критерій щодо застосування теорії кіл з розподіленими параметрами – **у колах з розподіленими параметрами часова затримка за однією з координат сумірна з часовими параметрами діючих у колі сигналів.**

Теорія кіл з розподіленими параметрами почала інтенсивно розвиватися із середини ХІХ століття у зв'язку з необхідністю вирішення практичних задач створення довгих телеграфних і телефонних ліній. Перші теоретичні праці належать Кірхгофу і Томсону (Кельвіну).

Отже, наведений вище спрощений аналіз процесів у колах з розподіленими параметрами дозволяє встановити тільки одну відмінність кіл цього класу від кіл із зосередженими параметрами – залежність миттєвих значень процесів від двох змінних t , x та головний критерій приналежності реальних кіл до кіл з розподіленими параметрами – сумірність одного з геометричних розмірів з довжиною хвилі. Докладніший аналіз, наведений нижче у даному розділі, дозволить встановити інші властивості цих кіл:

1) подання кола у вигляді нескінченної кількості розподілених за однією з координат ідеальних пасивних елементів³, для кількісної оцінки яких вводиться поняття первинних (погонних) параметрів (див. підрозд. 5.2);

2) затримку струмів і напруг у часі та хвильовий характер процесів;

3) опис процесів, у загальному випадку, диференціальними рівняннями у

² Як покаже подальший аналіз, умова постійності амплітуди у будь-якому перерізі кола з розподіленими параметрами не завжди виконується.

³ Згідно з ДСТУ 2815-94 (п. 4.11) визначення кола з розподіленими параметрами ґрунтується на його поданні як сукупності нескінченної кількості ідеальних елементів.

частинних похідних для $i(t, x)$ та $u(t, x)$ (див. підрозд. 5.3).

Найважливішим окремим випадком кіл з розподіленими параметрами є довгі лінії (лінії передачі). До довгих ліній (ДЛ) належать кола у вигляді двох провідників, розділених непровідним середовищем і працюючих у режимі, коли довжина провідників сумірна, а поперечні розміри значно менше довжини хвилі. Прикладами ДЛ є провідники, які з'єднують джерело з елементами R , L , C у колах, показаних на рис.5.1, б, з.

ДЛ практично застосовують у діапазонах метрових (30-300 МГц) і дециметрових хвиль (300-3000 МГц). Конструктивно лінії передачі зазвичай виготовляють у вигляді двопровідних повітряних ліній (рис.5.2, а), коаксіальних кабелів (рис.5.2, б) і стрічкових ліній (рис.5.2, в). Крім провідного шару «3» у стрічкових лініях (рис.5.2, в), інші геометричні розміри наведених конструкцій ліній передачі у поперечних перерізах є значно меншими довжини хвилі:

$$d \ll \lambda; D \ll \lambda; h \ll \lambda.$$

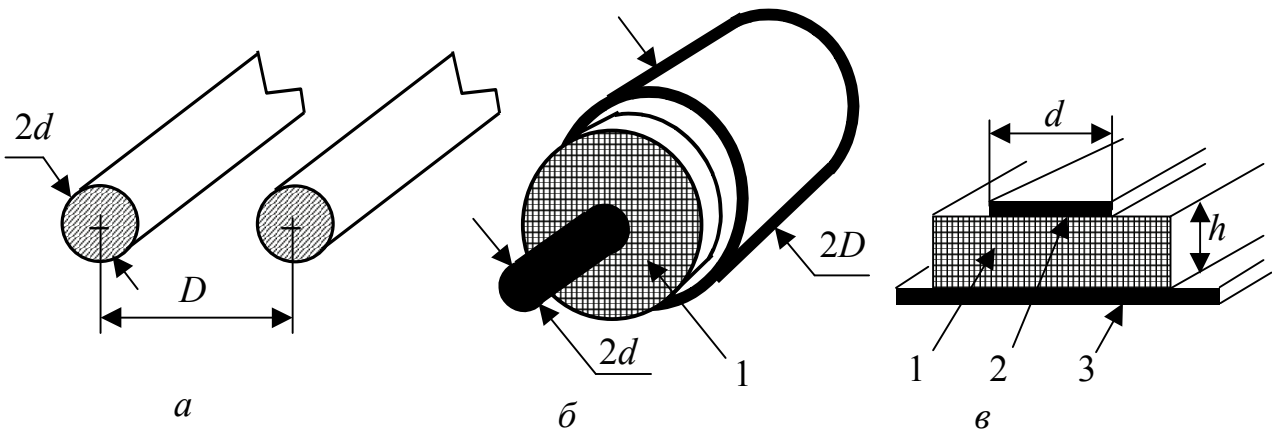


Рисунок 5.2 – Конструкції основних видів ліній передачі:

- а – симетрична двопровідна повітряна лінія, $2d$ – діаметр провідників, D – відстань між провідниками;
- б – коаксіальний кабель, $2d$ – діаметр внутрішнього (центрального) провідника, $2D$ – діаметр зовнішнього провідника (оплетення), 1 – ізолюючий шар діелектрика;
- в – мікροстрічкова лінія, 1 – діелектрична підкладка товщиною h ; 2 – провідна лінія шириною d ; 3 – провідний шар

Крім головного призначення – каналізації енергії без втрат або передачі сигналів без спотворення форми – ДЛ у вказаних діапазонах частот використовують, створюючи резонансні контури, трансформатори, фільтри, лінії затримки, антенні пристрої, формувачі, ізолятори, вимірювальні лінії, комутатори, атенюатори. Для різних областей застосування розроблені спеціальні ДЛ: резистивні; R , C лінії; спіральні лінії затримки; штучні лінії тощо.

З огляду на практичне значення ДЛ і порівняну простоту їх теоретичного аналізу, подальше викладення присвячено саме цим колам з розподіленими параметрами.

5.2 Первинні параметри довгих ліній

Елементарну ділянку ДЛ довжиною $\Delta x \ll \lambda$ (рис.5.1, з) можна розглядати як коло із зосередженими параметрами і подати її у вигляді чотириполюсника з ідеальними пасивними елементами ΔL , ΔC , ΔR , ΔG . Елементи ΔL і ΔC враховують накопичення енергій відповідно електричного і магнітного поля за рахунок струму у провідниках і ємності між провідниками, а елементи ΔR і ΔG – втрати енергії у провідниках та ізоляції між ними (тому $\Delta R \neq 1/\Delta G$).

Різні схеми заміщення елементарної ділянки ДЛ зображені на рис.5.3. Загалом лінію довжиною l можна подати як каскадне з'єднання кількох чотириполюсних схем заміщення кожної з ділянок $\Delta x \ll \lambda$. З фізичної точки зору найбільш прийнятними є схеми заміщення у вигляді симетричних врівноважених чотириполюсників (рис.5.3, а, б). Для теоретичного аналізу краще використовувати несиметричні неуврівноважені⁴ Γ -подібні чотириполюсники (рис.5.3, в, з).

Чим менша довжина елементарної ділянки Δx , тим менші значення параметрів ΔL , ΔC , ΔR , ΔG . Тому розглядають відносні величини:

$$L_1 = \frac{\Delta L}{\Delta x}; C_1 = \frac{\Delta C}{\Delta x}; R_1 = \frac{\Delta R}{\Delta x}; G_1 = \frac{\Delta G}{\Delta x},$$

які називають **первинними (погонними) параметрами** ДЛ і вимірюють у таких одиницях⁵:

- 1) погонну індуктивність L_1 – Гн/м;
- 2) погонну ємність C_1 – Ф/м;
- 3) погонний активний опір R_1 – Ом/м;
- 4) погонну активну провідність G_1 – См/м.

Більш строго первинні параметри ДЛ визначають так:

$$L_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{dL}{dx}; C_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}; R_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{dR}{dx}; G_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = \frac{dG}{dx}.$$

Отже, первинні параметри мають зміст лінійних щільностей розподілу елементів L , C , R , G вздовж лінії.

Характер і особливості первинних параметрів ДЛ обумовлюють класифікацію ліній.

ДЛ є **лінійними**, якщо усі первинні параметри не залежать від часу, а також від струмів і напруг. Якщо хоча б один з первинних параметрів залежить від часу, лінія називається **параметричною**. Коли один з первинних параметрів залежить від струму чи напруги, лінія є нелінійною.

⁴ Врівноваженість обумовлюється симетрією схеми відносно горизонтальної осі.

⁵ Вимірюючи первинні параметри, зазвичай використовують дольні одиниці (мкГн/м, пФ/м та ін.), але у телекомунікаційних лініях як одиницю довжини застосовують не метр, а кілометр.

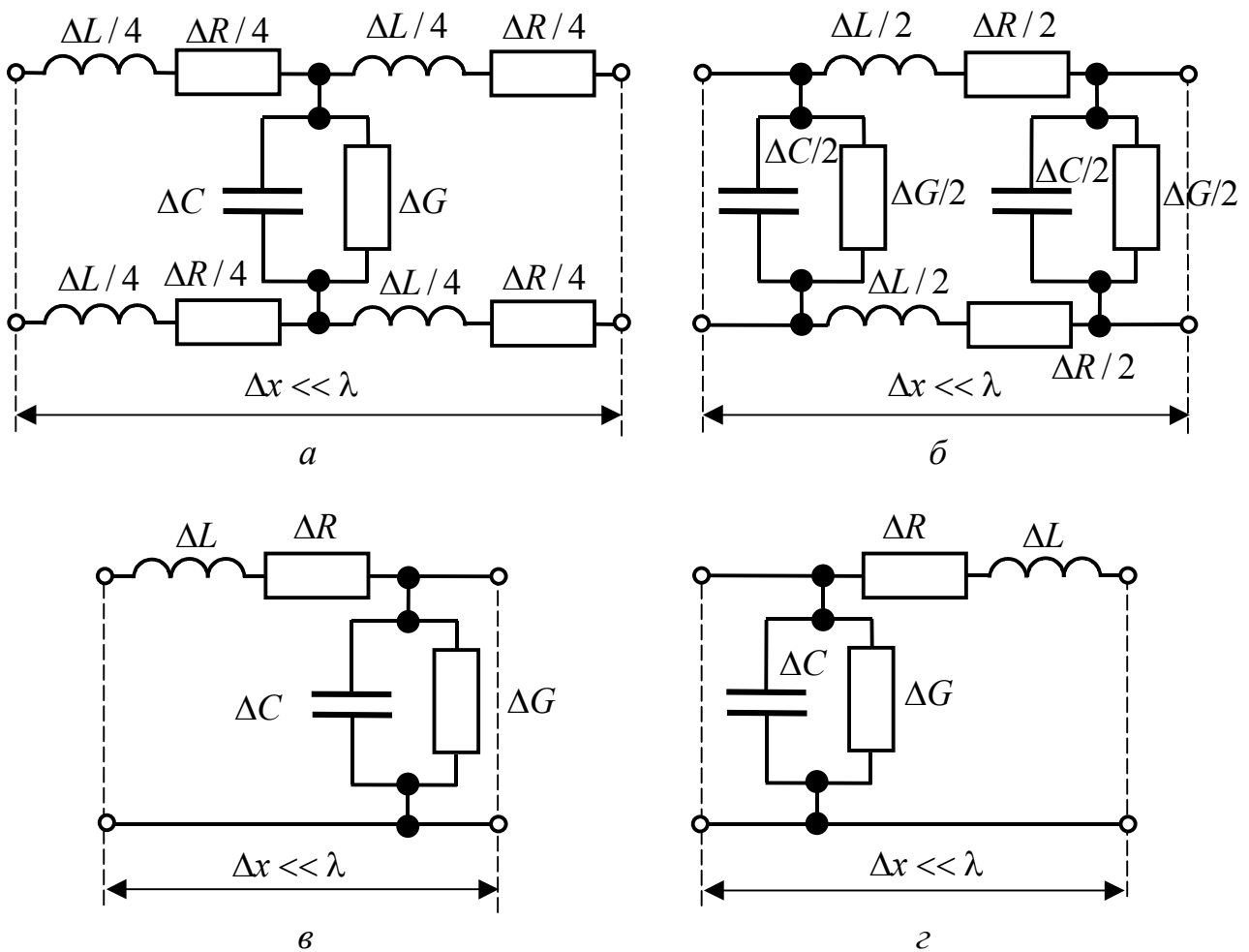


Рисунок 5.3 – Схеми заміщення елементарної ділянки лінії:
a, б – симетричні врівноважені чотириполюсники;
в, г – несиметричні неуврівноважені чотириполюсники

Якщо первинні параметри не залежать від координати x , лінія називається **однорідною**. У **неоднорідній** лінії первинні параметри залежать від поперечного розміру лінії:

$$L_1(x); C_1(x); R_1(x); G_1(x).$$

Головна увага у подальшому викладенні приділена лінійним однорідним ДЛ. Неоднорідна лінія розглянута у прикладі 5.4.

Первинні параметри реальних ДЛ визначаються особливостями їхньої конструкції, геометричними розмірами, параметрами матеріалів і діапазоном робочих частот.

Щоб розраховувати первинні параметри, слід використовувати методи теорії електромагнітного поля. В табл.5.1 наведені довідкові формули для розрахунку первинних параметрів типових конструкцій ліній передачі (рис.5.2), в табл.5.2 і 5.3 – властивості діелектриків і металів, які найчастіше застосовують у лініях передачі. У цих формулах використано ті ж позначення геометричних розмірів ліній, що й на рис.5.2.

Таблиця 5.1 – Первинні параметри типових ліній передачі⁶

Лінія	L_1 , Гн/м	C_1 , Ф/м	R_1 , Ом/м	G_1 , См/м
Симетрична двопровідна повітряна (рис.5.2, а)	$\frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-d}{d} = 4 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D-d}{d}$	$\frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D-d}{d}} = \frac{10^{-9}}{36 \ln \frac{D-d}{d}}$	$\frac{1}{\pi d} \sqrt{\frac{\mu\mu_0\omega}{2\sigma}}$	0
Коаксіальний кабель (рис.5.2, б)	$\frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D}{d}$	$\frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{D}{d}} = \frac{10^{-9}\epsilon}{18 \ln \frac{D}{d}}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu\mu_0\omega}{2\sigma}} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right)$	$\omega C_1 \operatorname{tg} \delta$
Стрічкова (рис.5.2, в)	$\frac{\mu\mu_0 h}{d}$	$\frac{\epsilon\epsilon_0 d}{h}$	$\frac{1}{d} \sqrt{\frac{2\mu\mu_0\omega}{\sigma}}$	$\omega C_1 \operatorname{tg} \delta$

Таблиця 5.2 – Параметри діелектриків

Матеріал	ϵ	$\operatorname{tg} \delta$ для $f = 1000$ МГц
Поліетилен	2,25	$2 \cdot 10^{-4}$
Полістирол	2,56	$2 \cdot 10^{-4}$
Фторопласт	2,08	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Плавлений кварц	3,85	$3 \cdot 10^{-5}$
Окис алюмінію	9,6	$4 \cdot 10^{-5}$
Плексиглас	3,4	$2 \cdot 10^{-3}$

⁶ Формули стосуються діелектриків без магнітних властивостей. У табл.5.1, 5.2 використано такі позначення: $\epsilon_0 = 10^{-9} / 36\pi$ Ф/м – електрична стала вакууму; ϵ – відносна діелектрична проникність ізоляції; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала вакууму; μ – відносна магнітна проникність металу; $\operatorname{tg} \delta$ – тангенс кута втрат ізоляції; ω , рад/с – робоча кутова частота; σ , См/м – питома об’ємна провідність металу.

Таблиця 5.3 – Параметри металів

Метал	Питома об'ємна провідність σ , См/м	Відносна магнітна проникність μ
Срібло	$6,17 \cdot 10^7$	1,016
Мідь	$5,81 \cdot 10^7$	1,017
Золото	$4,13 \cdot 10^7$	1,013
Цинк	$1,69 \cdot 10^7$	1,011
Латунь	$1,55 \cdot 10^7$	1,011
Олово	$0,88 \cdot 10^7$	1,013

Приклад 5.1. Обчислити первинні параметри симетричної двопровідної повітряної лінії (рис.5.2, а) для частоти $f = 100$ МГц, якщо розміри латунних провідників становлять: $2d = 2$ мм; $D = 10$ мм.

Розв'язання. За формулами для первинних параметрів симетричної двопровідної повітряної лінії (табл.5.1), використовуючи параметри латуні з табл.5.3, виконаємо розрахунки:

$$L_1 = 4 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D-d}{d} = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 1,011 \cdot \ln \frac{10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-3}} = 8,886 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} =$$

$$= 0,8886 \text{ мкГн/м};$$

$$C_1 = \frac{10^{-9}}{36 \ln \frac{D-d}{d}} = \frac{10^{-9}}{36 \ln \frac{10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-3}}} = 1,264 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м} = 12,64 \text{ пФ/м};$$

$$R_1 = \frac{1}{\pi d} \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \omega}{2\sigma}} = \frac{1}{\pi \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^8}{2 \cdot 1,55 \cdot 10^7}} = 1,615 \text{ Ом/м}.$$

Оскільки лінія має повітряну ізоляцію, приймаємо $G_1 = 0$.

Приклад 5.2. Для частоти $f = 1000$ МГц знайти первинні параметри коаксіального кабелю (рис.5.2, б) з розмірами: $2d = 2$ мм; $2D = 20$ мм, якщо провідники кабелю латунні, ізолятор – поліетилен.

Розв'язання. За формулами з табл.5.1, використовуючи значення параметрів матеріалів (табл.5.2 і 5.3), отримуємо:

$$L_1 = 2 \cdot 10^{-7} \mu \ln \frac{D}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,011 \cdot \ln \frac{10^{-2}}{10^{-3}} = 4,656 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 0,4656 \text{ мкГн/м};$$

$$C_1 = \frac{10^{-9} \varepsilon}{18 \ln \frac{D}{d}} = \frac{10^{-9} \cdot 2,25}{18 \ln \frac{10^{-2}}{10^{-3}}} = 5,429 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м} = 54,29 \text{ пФ/м};$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu\mu_0\omega}{2\sigma}} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^9}{2 \cdot 1,55 \cdot 10^7}} \left(\frac{1}{10^{-2}} + \frac{1}{10^{-3}} \right) = 2,809 \text{ Ом/м};$$

$$G_1 = \omega C_1 \operatorname{tg} \delta = 2\pi \cdot 10^9 \cdot 5,429 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 6,822 \cdot 10^{-5} \text{ См/м} = 68,22 \text{ мкСм/м}.$$

Приклад 5.3. Визначити первинні параметри стрічкової лінії (рис.5.2, в) з розмірами $d = 2$ мм; $h = 1$ мм, якщо лінію виготовлено з латуні та фторопласту, а частота становить $f = 1000$ МГц.

Розв'язання. Використовуючи відповідні формули та значення параметрів матеріалів, матимемо:

$$L_1 = \frac{\mu\mu_0 h}{d} = \frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 6,352 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 0,6352 \text{ мкГн/м};$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 d}{h} = \frac{2,08 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{36\pi \cdot 10^{-3}} = 3,678 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м} = 36,78 \text{ пФ/м};$$

$$R_1 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2\mu\mu_0\omega}{\sigma}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^9}{1,55 \cdot 10^7}} = 16,047 \text{ Ом/м};$$

$$G_1 = \omega C_1 \operatorname{tg} \delta = 2\pi \cdot 10^9 \cdot 3,678 \cdot 10^{-11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} = 5,778 \cdot 10^{-5} \text{ См/м} = 57,78 \text{ мкСм/м}.$$

Приклад 5.4. Розрахувати первинні параметри неоднорідного коаксіального кабелю для частоти $f = 1000$ МГц. Побудувати графіки $L_1(x)$; $C_1(x)$; $R_1(x)$; $G_1(x)$. Подовжній переріз кабелю показаний на рис.5.4. Довжина кабелю $l = 1$ м; діаметр центрального та зовнішнього латунних провідників $2d = 2$ мм та $2D(x) = 2D_0 e^{x/l}$ ($D_0 = 10$ мм) відповідно; ізолятор – поліетилен.

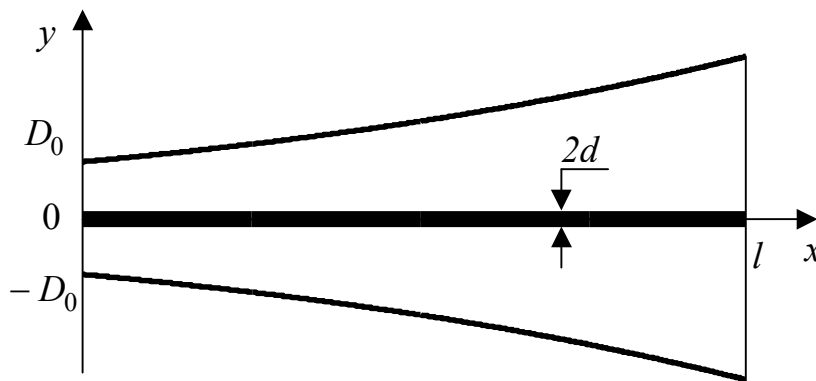


Рисунок 5.4 – Подовжній переріз коаксіального кабелю у прикладі 5.4

Розв'язання. Підставляючи у розрахункові співвідношення прикладу 5.2 замість величини D вираз для $D(x)$, отримуємо:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \ln \frac{D(x)}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,011 \cdot \ln \frac{10^{-2} e^{x/l}}{10^{-3}} = 2,022 \cdot 10^{-7} \cdot (2,303 + x) \text{ Гн/м} = \\ &= 0,2022 \cdot (2,303 + x) \text{ мкГн/м}; \end{aligned}$$

$$C_1(x) = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln \frac{D(x)}{d}} = \frac{10^{-9} \cdot 2,25}{18 \ln \frac{10^{-2} e^{x/1}}{10^{-3}}} = \frac{1,25 \cdot 10^{-10}}{2,303 + x} \text{ Ф/м} = \frac{125}{2,303 + x} \text{ пФ/м};$$

$$R_1(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu\mu_0\omega}{2\sigma}} \left(\frac{1}{D(x)} + \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,011 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^9}{2 \cdot 1,55 \cdot 10^7}} \left(\frac{10^2}{e^{x/1}} + 10^3 \right) =$$

$$= 2,542(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом/м};$$

$$G_1(x) = \omega C_1(x) \text{tg}\delta = \frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot 1,25 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2,303 + x} = \frac{1,571 \cdot 10^{-4}}{2,303 + x} \text{ СМ/м} =$$

$$= \frac{157,1}{2,303 + x} \text{ мкСМ/м}.$$

Графіки $L_1(x)$; $C_1(x)$; $R_1(x)$; $G_1(x)$ зображені на рис.5.5.

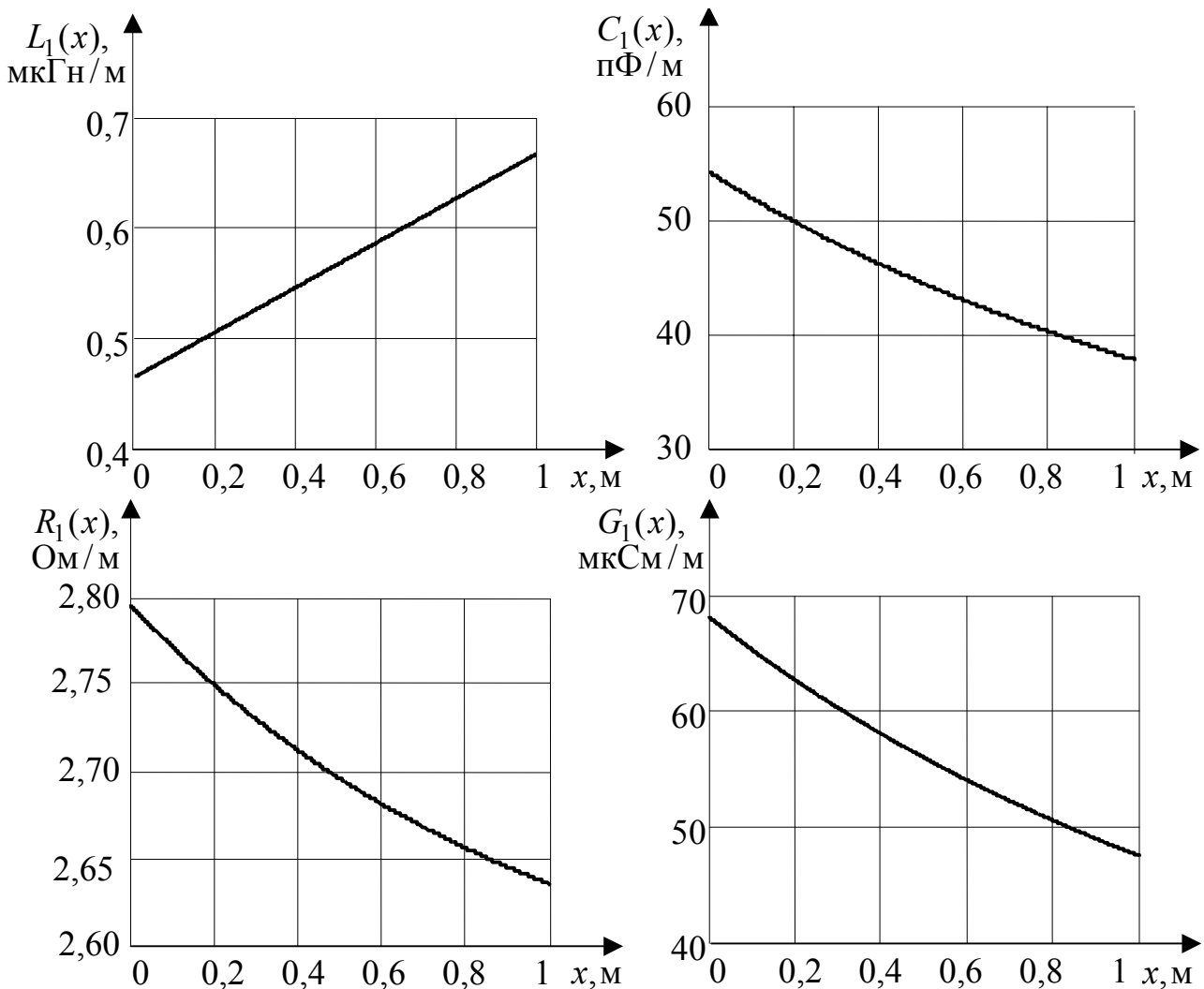


Рисунок 5.5 – Графіки розподілу первинних параметрів вдовж кабелю у прикладі 5.4

5.3 Диференціальні (телеграфні) рівняння довгої лінії. Загальний розв'язок рівнянь для лінії без втрат

Диференціальні рівняння ДЛ встановлюють аналітичний зв'язок між первинними параметрами L_1, C_1, R_1, G_1 , струмом $i(t, x)$ і напругою $u(t, x)$ у довільному перерізі лінії у будь-який момент часу.

Щоб отримати диференціальні рівняння ДЛ, достатньо розглянути схеми заміщення елементарної ділянки $\Delta x \ll \lambda$ на відстані x від джерела (входу лінії) у вигляді Γ -подібних чотиріполіусників (рис.5.3, в, з). Подання елементів цих чотиріполіусників $\Delta L, \Delta C, \Delta R, \Delta G$ через первинні параметри

$$\Delta L = L_1 \Delta x; \Delta C = C_1 \Delta x; \Delta R = R_1 \Delta x; \Delta G = G_1 \Delta x$$

призводить до схем (рис.5.6, а, б), аналіз яких із застосуванням законів Кірхгофа і дозволяє отримати диференціальні рівняння ДЛ.

Рівняння за другим законом Кірхгофа для вибраних напрямів обходу контуру K і напрямів напруг для схеми (рис.5.6, а) має вигляд:

$$u(t, x + \Delta x) - u(t, x) + R_1 \Delta x i(t, x) + L_1 \Delta x \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} = 0, \quad (5.4)$$

де $R_1 \Delta x i(t, x)$ – напруга на елементі ΔR ; $L_1 \Delta x \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}$ – напруга на елементі ΔL .

У рівнянні (5.4) і подальших виразах застосовують частинні похідні, оскільки струм і напруга є функціями двох змінних t, x .

Внаслідок перенесення доданків зі струмом у праву частину рівності (5.4) і ділення лівої та правої частин на Δx виходить рівняння

$$\frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} = -R_1 i(t, x) - L_1 \frac{\partial i(t, x)}{\partial t},$$

яке після граничного переходу $\Delta x \rightarrow 0$ перетворюється до одного з диференціальних рівнянь ДЛ:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -R_1 i(t, x) - L_1 \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Рівняння, складене за першим законом Кірхгофа для вузла 1 у другій з розглянутих схем (рис.5.6, б), становить:

$$i(t, x + \Delta x) - i(t, x) + G_1 \Delta x u(t, x) + C_1 \Delta x \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = 0, \quad (5.6)$$

де $G_1 \Delta x u(t, x)$; $C_1 \Delta x \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ – відповідно струми в паралельних вітках з елементами ΔG та ΔC .

Перетворення рівності (5.6), подібні тим, які застосовано вище до виразу (5.4), дозволяють отримати друге диференціальне рівняння ДЛ:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i(t, x + \Delta x) - i(t, x)}{\Delta x} = \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} = -G_1 u(t, x) - C_1 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}. \quad (5.7)$$

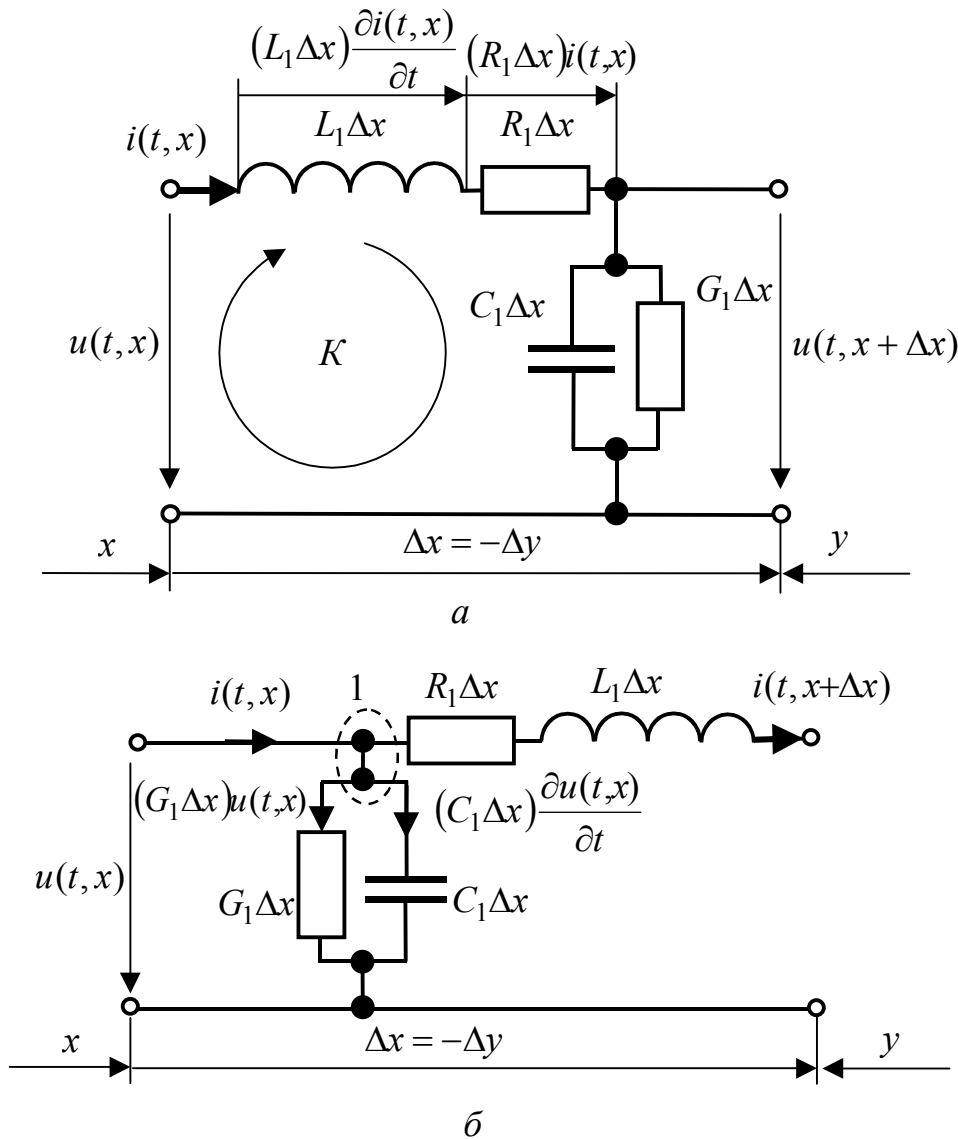


Рисунок 5.6 – До виведення диференціальних рівнянь довгої лінії

Диференціальні рівняння (5.5) і (5.7) можна записати також у функції координати $y = l - x$ (рис.5.1, з), яку відлічують від навантаження (кінця) лінії.

Оскільки

$$\Delta y = -\Delta x; \quad \partial y = -\partial x,$$

рівняння матимуть вигляд:

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} = R_1 i(t, y) + L_1 \frac{\partial i(t, y)}{\partial t}; \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial i(t, y)}{\partial y} = G_1 u(t, y) + C_1 \frac{\partial u(t, y)}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Використовують також спрощену форму запису диференціальних рівнянь ДЛ:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad \frac{\partial i}{\partial y} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Рівняння (5.10) і (5.11) називають також **телеграфними**, оскільки вони були отримані та досліджені при створенні перших ліній телеграфного зв'язку.

Від цих рівнянь, кожне з яких містить струм і напругу, можна перейти до рівнянь відносно напруги чи струму. Наприклад, щоб отримати вираз відносно напруги, у системі (5.10) слід продиференціювати перше рівняння за x , а друге – за t , а потім виключити струм у першому рівнянні:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= R_1 \frac{\partial i}{\partial x} + L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}; \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= G_1 \frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R_1 C_1 + G_1 L_1) \frac{\partial u}{\partial t} + R_1 G_1 u. \quad (5.12)$$

Аналогічно складається рівняння відносно струму:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= R_1 \frac{\partial i}{\partial t} + L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}; \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= G_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}; \\ -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (R_1 C_1 + G_1 L_1) \frac{\partial i}{\partial t} + R_1 G_1 i. \quad (5.13)$$

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку (5.12) і (5.13) мають однакову структуру і називаються **одновимірними хвильовими рівняннями**.

Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних (5.12) і (5.13) для реальної лінії та довільного джерела є досить складним. Простіше розв'язувати ці рівняння для довільного джерела в ідеальній ДЛ (ІДЛ) – лінії без втрат ($R_1 = 0$; $G_1 = 0$) або для синусоїдного джерела в реальній лінії (див. підрозд. 5.4). Для ІДЛ хвильові рівняння мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (5.15)$$

Диференціальні рівняння (5.14) і (5.15) вперше були досліджені Ейлером, Бернуллі⁷ і Даламбером⁸ стосовно задачі математичної фізики, пов'язаної з ко-

⁷ **Бернуллі Данііл**, Bernoulli (1700–1782) – видатний математик і фізик, представник відомої династії швейцарських вчених. Протягом 1725–1733 рр. працював у Петербурзькій АН. Йому належать важливі праці з алгебри, теорії ймовірностей, численню нескінченно малих, теорії рядів, теорії диференціальних рівнянь. Уперше увів до

ливаннями пружної струни. Розв'язати ці рівняння можна за допомогою рядів Фур'є заміною змінних (метод Даламбера) або операторним методом.

Розв'язуючи рівняння операторним методом, замість шуканих функцій $u(t, x)$ та $i(t, x)$ використовують їхні зображення за Лапласом за змінною t :

$$U(x, p) = \mathcal{L}[u(t, x)]; \quad I(x, p) = \mathcal{L}[i(t, x)]. \quad (5.16)$$

Використовуючи властивості перетворення Лапласа і вважаючи початкові умови нульовими ($i(x, 0) = 0; u(x, 0) = 0$), рівняння (5.14), (5.15) для зображень (5.16) можна подати у вигляді:

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - L_1 C_1 p^2 U(x, p) = 0; \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2 I(x, p)}{dx^2} - L_1 C_1 p^2 I(x, p) = 0. \quad (5.18)$$

Рівняння (5.17) і (5.18) є лінійними однорідними диференціальними рівняннями тільки за змінною x (диференціювання за p не виконується). З огляду на це, похідні за x є не частинними, а звичайними.

Оскільки рівняння (5.17) і (5.18) є однотипними, можна обмежитися аналізом одного из них, наприклад (5.17). Загальний розв'язок цього рівняння такий:

$$U(x, p) = U_{\text{пад}}(p)e^{-px\sqrt{L_1 C_1}} + U_{\text{від}}(p)e^{px\sqrt{L_1 C_1}}, \quad (5.19)$$

де $U_{\text{пад}}(p), U_{\text{від}}(p)$ – сталі інтегрування, індекси яких відповідають фізичному значенню оригіналів цих доданків розв'язку – **падаючий** (прямий) та **відбитий** (зворотній) хвилям; $\mp p\sqrt{L_1 C_1}$ – корені характеристичного рівняння, складеного за виразом (5.18).

Щоб визначити сталі $U_{\text{пад}}(p), U_{\text{від}}(p)$, використовують граничні значення (аналогічні початковим значенням для перехідних процесів) зображення $U(x, p)$ і його першої похідної за x при $x = 0$.

Якщо позначити оригінали сталих інтегрування $u_{\text{пад}}(t), u_{\text{від}}(t)$ і застосувати теорему запізнення перетворення Лапласа (див.табл.3.2, п.4), можна пода-

теорії помилок нормальний розподіл і поняття випадкових і систематичних похибок. В області математичної фізики розв'язав (1755) за допомогою тригонометричних рядів диференціальне рівняння коливання струни та вивів основне рівняння гідро- і газової динаміки (монографія «Гідродинаміка», 1738).

⁸ **Даламбер Жан Лерон, D'Alembert** (1717–1783) – французький математик і філософ, член Паризької і Петербурзької АН. Вперше довів основну теорему алгебри (лема Даламбера). Сформулював загальні правила складання диференціальних рівнянь руху будь-яких матеріальних систем, зводячи задачі динаміки до статички (принцип Даламбера). Застосував цей принцип до гідродинаміки. Розв'язав диференціальне рівняння, яке описує коливання струни. Розглядав час як четвертий вимір. Деякі праці, присвячені філософії, астрономії, естетиці та музиці, опубліковані в «Енциклопедії наук, мистецтв і ремесел», яку Даламбер готував разом з Д. Дідро (1751–1757).

ти оригінал зображення (5.19) як

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_{\text{пад}}(t - x\sqrt{L_1 C_1}) + u_{\text{від}}(t + x\sqrt{L_1 C_1}) = u_{\text{пад}}(t - x/v) + u_{\text{від}}(t + x/v) = \\ &= u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta), \end{aligned} \quad (5.20)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ – вимірювана швидкість поширення хвиль, м/с; $\xi = t - x/v$,

$\eta = t + x/v$ – узагальнені змінні при відповідних доданках розв’язку.

Справедливість розв’язку (5.20) можна підтвердити безпосередньою перевіркою диференціального рівняння (5.14), яке з урахуванням позначення швидкості v матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial t^2}. \quad (5.21)$$

Подвійне диференціювання у лівій частині рівності (5.21) виконують у два етапи, застосовуючи правило диференціювання складних функцій:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial x} &= \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{v} \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta}; \\ 2) \quad \frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial x^2} &= -\frac{1}{v} \frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{v^2} \left[\frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Аналогічні перетворення правої частини рівняння (5.21) призводять до кінцевого результату, тотожного виразу (5.22):

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial t} &= \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} + \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta}; \\ 2) \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [u_{\text{пад}}(\xi) + u_{\text{від}}(\eta)]}{\partial t^2} &= \frac{1}{v^2} \left[\frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{1}{v^2} \left[\frac{d^2 u_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_{\text{від}}(\eta)}{d\eta^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

При виведенні співвідношень (5.22) і (5.23) враховані значення похідних узагальнених змінних ξ і η за t і x :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial(t - x/v)}{\partial t} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial(t - x/v)}{\partial x} = -\frac{1}{v}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial(t + x/v)}{\partial t} = 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial(t + x/v)}{\partial x} = \frac{1}{v}.$$

Фізичне значення падаючої та відбитої хвиль напруги у ДЛ ілюструє рис.5.7, на якому зображені графіки довільно вибраних функцій $u_{\text{пад}}(\xi)$ (рис.5.7, а) та $u_{\text{від}}(\eta)$ (рис.5.7, б), а також побудовані два види графіків: $u_{\text{пад}}(t, x)$ (рис.5.7, в) та $u_{\text{від}}(t, x)$ (рис.5.7, г) у функції t і x .

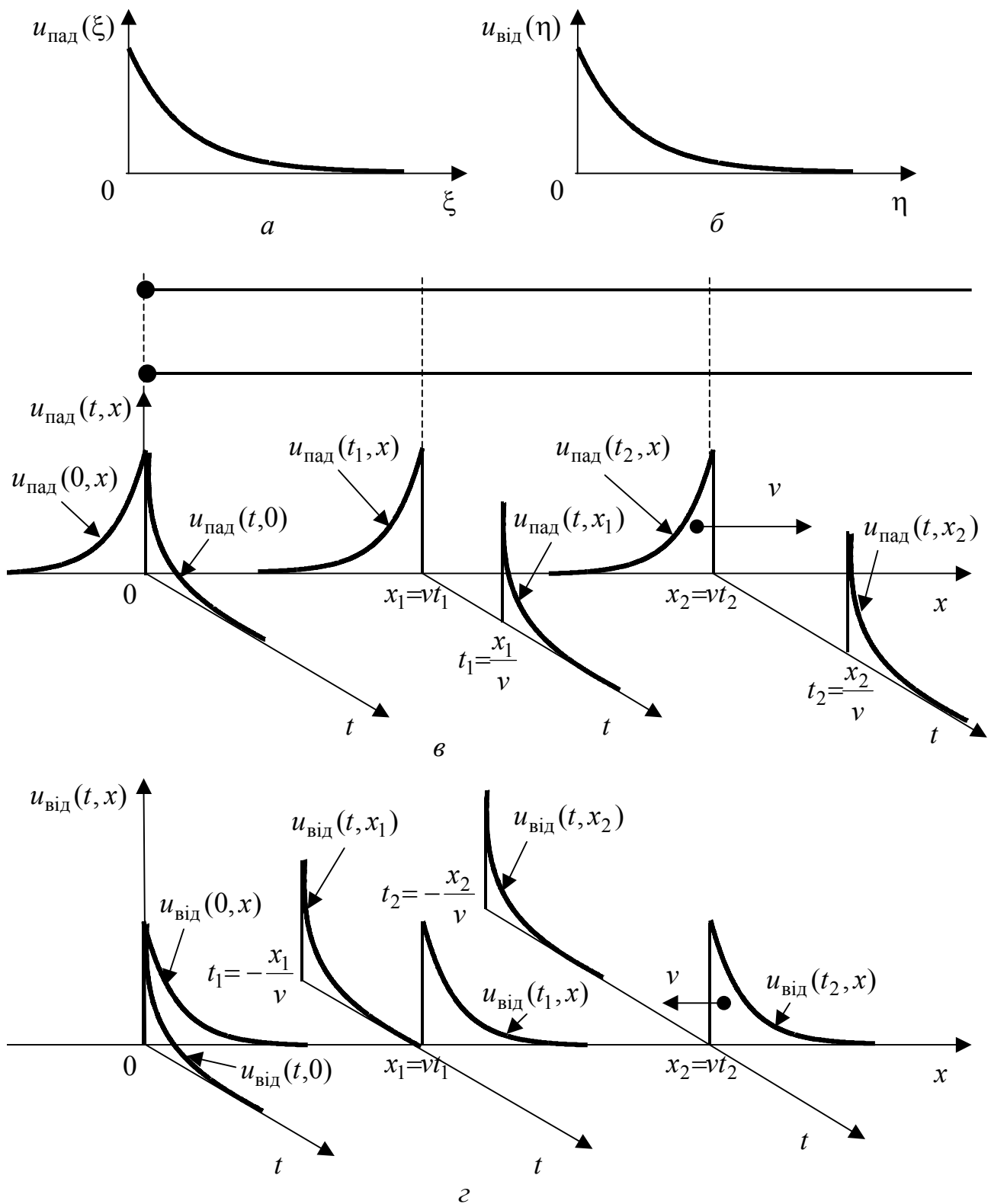


Рисунок 5.7 – Падаюча та відбита хвилі напруги в лінії:
 а, б – графіки функцій $u_{\text{пад}}(\xi)$, $u_{\text{від}}(\eta)$; в – графіки падаючої хвилі;
 г – графіки відбитої хвилі

Графіки першого виду для падаючої та відбитої хвиль побудовані в функції координати x для трьох фіксованих моментів часу ($t=0$; $t=t_1$; $t=t_2$), а

графіки другого – в функції часу для трьох перерізів лінії ($x = 0$; $x = x_1 = vt_1$; $x = x_2 = vt_2$). Моменти часу і перерізи лінії вибрані такими, щоб вони відповідали нульовим значенням узагальнених змінних (5.20) ($\xi = 0$; $\eta = 0$) і тому – максимальним значенням падаючої та відбитої хвиль.

Одним з цих моментів часу є $t = 0$, за якого максимуми падаючої та відбитої хвиль спостерігаються у перерізі $x = 0$ (рис.5.7, в, з).

Два інших моменти часу для падаючої хвилі вибрані додатними (рис.5.7, в):

$$t_1 = x_1 / v < t_2 = x_2 / v,$$

а для відбитої – від'ємними (рис.5.7, з):

$$t_1 = -x_1 / v > t_2 = -x_2 / v.$$

Аналіз графіків (рис.5.7) дозволяє зробити такі висновки:

1) кожний з доданків розв'язку (5.20) є процесом, який повторює свої значення через певний час в іншому перерізі, що характерно для хвилеподібних процесів;

2) складова розв'язку $u_{\text{пад}}(\xi) = u_{\text{пад}}(t - x/v)$ є хвилею, яка пересувається від джерела до навантаження зі швидкістю v , що обумовлює назву **падаюча** (пряма) хвиля;

3) хвиля $u_{\text{від}}(\eta) = u_{\text{від}}(t + x/v)$ пересувається від навантаження до джерела зі швидкістю v ; ця хвиля називається **відбитою** (зворотньою), оскільки фізичною причиною її появи є відбиття від навантаження;

4) в лінії без втрат падаюча та відбита хвилі пересуваються вздовж лінії, не змінюючи форми та інтенсивності.

Струм $i(t, x)$ можна записати через напругу $u(t, x)$, використовуючи перше рівняння системи (5.10). Для ідеальної лінії це рівняння має вигляд:

$$-\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = L_1 \frac{\partial i(t, x)}{\partial t},$$

звідки

$$\begin{aligned} i(t, x) &= -\frac{1}{L_1} \int \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dt = -\frac{1}{L_1} \int \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} dt - \frac{1}{L_1} \int \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} dt = \\ &= \frac{1}{L_1 v} \int \frac{du_{\text{пад}}(\xi)}{d\xi} dt - \frac{1}{L_1 v} \int \frac{du_{\text{від}}(\eta)}{d\eta} dt = \frac{1}{L_1 v} \int du_{\text{пад}}(\xi) - \frac{1}{L_1 v} \int du_{\text{від}}(\eta) = \\ &= \frac{u_{\text{пад}}(\xi)}{R_{\text{хв}}} - \frac{u_{\text{від}}(\eta)}{R_{\text{хв}}} = \frac{u_{\text{пад}}(t - x/v)}{R_{\text{хв}}} - \frac{u_{\text{від}}(t + x/v)}{R_{\text{хв}}} = i_{\text{пад}}(t - x/v) - i_{\text{від}}(t + x/v), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\text{де } i_{\text{пад}}(t - x/v) = \frac{u_{\text{пад}}(t - x/v)}{R_{\text{хв}}}; \quad i_{\text{від}}(t + x/v) = \frac{u_{\text{від}}(t + x/v)}{R_{\text{хв}}} \quad - \text{відповідно па-}$$

даюча (пряма) та відбита (зворотня) хвилі струму;

$$R_{\text{хв}} = L_1 v = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad - \text{хвильовий опір.}$$

Співвідношення для струму (5.24) дозволяє зробити висновок, що в ідеальній лінії:

1) струм $i(t, x)$, подібно напрузі $u(t, x)$, є сумою падаючої та відбитої хвиль;

2) відповідні хвилі напруги та струму пов'язані між собою за законом Ома через хвильовий опір $R_{\text{хв}}$; оскільки $R_{\text{хв}}$ має активний характер, хвилі напруги і струму одного й того ж типів збігаються за формою;

3) від'ємний знак відбитої хвилі струму показує, що фактичний напрям цього струму є протилежним вибраному на рис.5.7, тобто напрям пересування енергії відбитої хвилі – від навантаження лінії до вхідного джерела.

Отже, розв'язок одновимірних хвильових рівнянь (5.14) і (5.15) для лінії без втрат показує, що в лінії існує інтерференція двох зустрічних хвиль – падаючої та відбитої, причому це стосується не тільки напруги і струму, але й енергії.

Швидкість пересування хвиль v і хвильовий опір $R_{\text{хв}}$ є **вторинними** параметрами ідеальних ліній:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad (5.25)$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}. \quad (5.26)$$

У табл.5.4 наведені формули для вторинних параметрів ідеальних ліній основних типів. Формули отримані на підставі співвідношень (5.25) і (5.26), а також наведених у табл.5.1 виразів для L_1 і C_1 типових конструкцій ліній передачі. У формулах використані ті ж позначення геометричних розмірів ліній передачі, що й на рис.5.2. Відносна магнітна проникність провідників прийнята $\mu = 1$, оскільки провідники та ізоляція ідеальні ($R_1 = 0$; $G_1 = 0$).

Таблиця 5.4 – Вторинні параметри типових ліній без втрат

Лінія	v , м/с	$R_{\text{хв}}$, Ом
Симетрична двопровідна повітряна лінія (рис.5.2, а)	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 = c$	$\frac{1}{\pi} \ln \frac{D-d}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \ln \frac{D-d}{d}$
Коаксіальний кабель (рис.5.2, б)	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$	$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{D}{d}$
Стрічкова лінія (рис.5.2, в)	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$	$\frac{h}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = \frac{120\pi h}{\sqrt{\epsilon} d}$

Приклад 5.5. Розрахувати швидкість пересування хвиль і хвильовий опір симетричної ідеальної двопровідної повітряної лінії (рис.5.2, а) з розмірами, наведеними у прикладі 5.1.

Розв'язання. Швидкість хвилі в ідеальній двопровідній повітряній лінії дорівнює швидкості світла c , а хвильовий опір залежить від геометричних розмірів лінії (див. табл.5.4). Розрахуємо хвильовий опір за заданими розмірами:

$$R_{\text{хв}} = 120 \ln \frac{D-d}{d} = 120 \ln \frac{10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-3}} = 263,67 \text{ Ом.}$$

Перевіримо отриманий результат за знайденими у прикладі 5.1 первинними параметрами:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{8,886 \cdot 10^{-7} \cdot 1,264 \cdot 10^{-11}}} = 2,984 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{8,886 \cdot 10^{-7}}{1,264 \cdot 10^{-11}}} = 265,14 \text{ Ом.}$$

Результати практично сходяться. Незначна різниця пов'язана з тим, що у прикладі 5.1 при визначенні L_1 і C_1 враховано відносну магнітну проникність латуні $\mu = 1,011$.

Приклад 5.6. Обчислити вторинні параметри ідеального коаксіального кабелю (рис.5.2, б). Матеріал діелектрика і розміри кабелю наведені у прикладі 5.2.

Розв'язання. Знайдемо швидкість поширення хвилі та хвильовий опір за формулами табл.5.4:

$$v = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,25}} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{D}{d} = \frac{60}{\sqrt{2,25}} \ln \frac{10^{-2}}{10^{-3}} = 92,1 \text{ Ом.}$$

Перевіримо розраховані вторинні параметри ідеального коаксіального кабелю за знайденими у прикладі 5.2 первинними параметрами та співвідношеннями (5.25) і (5.26):

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{4,656 \cdot 10^{-7} \cdot 5,429 \cdot 10^{-11}}} = 1,99 \cdot 10^8 \text{ м/с;}$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{4,656 \cdot 10^{-7}}{5,429 \cdot 10^{-11}}} = 92,608 \text{ Ом.}$$

Причина розбіжності результатів та ж сама, як і у прикладі 5.5.

Приклад 5.7. Розрахувати значення v і $R_{\text{хв}}$ ідеальної стрічкової лінії (рис.5.2, в). Розміри лінії і тип діелектрика наведені у прикладі 5.3.

Розв'язання. Обчислимо швидкість хвилі та хвильовий опір за формулами для ідеальної стрічкової лінії з табл.5.4:

$$v = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,08}} = 2,08 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$R_{\text{хв}} = \frac{120\pi h}{\sqrt{\varepsilon} d} = \frac{120\pi}{\sqrt{2,08}} \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 130,698 \text{ Ом.}$$

Використовуючи дані прикладу 5.3, перевіримо знайдені вторинні параметри. Подібно прикладам 5.4 і 5.5 існують незначні розбіжності результатів:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{6,352 \cdot 10^{-7} \cdot 3,678 \cdot 10^{-11}}} = 2,069 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$R_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{6,352 \cdot 10^{-7}}{3,678 \cdot 10^{-11}}} = 131,416 \text{ Ом.}$$

Приклад 5.8. Знайти вторинні параметри неоднорідного коаксіального кабелю (рис.5.4). Розміри лінії і тип діелектрика наведені у прикладі 5.4. Побудувати графік $R_{\text{хв}}(x)$.

Розв'язання. Використовуючи співвідношення для $L_1(x)$ (для $\mu = 1$) і $C_1(x)$ з прикладу 5.4, виведемо формули для розрахунку розподілу вторинних параметрів вздовж лінії:

$$R_{\text{хв}}(x) = \sqrt{\frac{L_1(x)}{C_1(x)}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0 \ln \frac{D(x)}{d}}{2\pi}}{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln \frac{D(x)}{d}}}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D(x)}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon}} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{D(x)}{d}; \quad (5.27)$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{L_1(x)C_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \ln \frac{D(x)}{d}}{2\pi} \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln \frac{D(x)}{d}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (5.28)$$

Вираз (5.28) показує, що в неоднорідній лінії швидкість пересування хвиль постійна у будь-якому перерізі лінії і відрізняється на величину $\sqrt{\varepsilon}$ від швидкості світла, як в ідеальних лініях інших типів.

Підставляючи до формули (5.27) геометричні параметри лінії (див. приклад 5.4) і значення $\varepsilon = 2,25$ відносної діелектричної проникності діелектрика (поліетилену), розрахуємо залежність $R_{\text{хв}}(x)$:

$$R_{\text{хв}}(x) = \frac{60}{\sqrt{2,25}} \ln \frac{10^{-2} e^{x/1}}{10^{-3}} = 40 \cdot (2,303 + x) \text{ Ом.}$$

Графік $R_{\text{хв}}(x)$ зображений на рис.5.8.

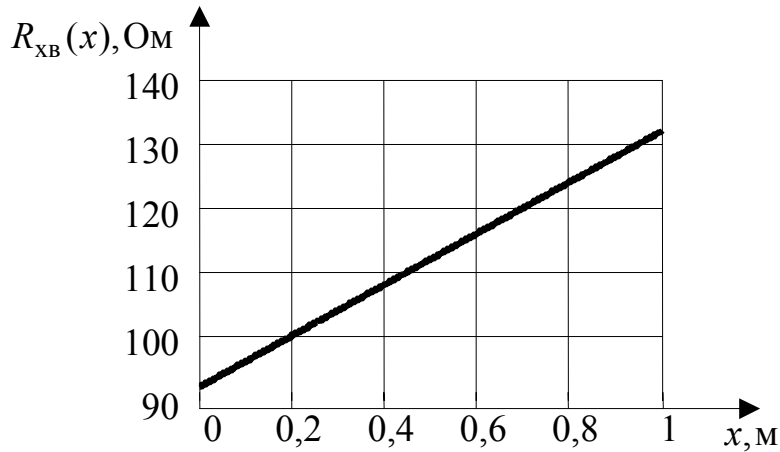


Рисунок 5.8 – Графік розподілу хвильового опору вздовж неоднорідного кабелю у прикладі 5.8

5.4 Аналіз усталеного синусоїдного режиму довгої лінії

При синусоїдній дії з частотою ω усталений струм і напруга у будь-якому перерізі ДЛ змінюються у часі за синусоїдним законом з тією ж частотою ω . Загалом, у кожному перерізі лінії амплітуди та початкові фази цих коливань різні. Якщо відраховувати координату від входу лінії, миттєві значення струму і напруги мають вигляд:

$$i(t, x) = I_m(x) \cos[\omega t + \psi_i(x)] = \operatorname{Re}[\underline{I}_m(x) e^{j\omega t}] ; \quad (5.29)$$

$$u(t, x) = U_m(x) \cos[\omega t + \psi_u(x)] = \operatorname{Re}[\underline{U}_m(x) e^{j\omega t}] , \quad (5.30)$$

де $\underline{I}_m(x) = I_m(x) e^{j\psi_i(x)}$; $\underline{U}_m(x) = U_m(x) e^{j\psi_u(x)}$ – комплексні амплітуди відповідно струму і напруги у перерізі лінії з координатою x .

Як правило, відомі первинні параметри лінії R_1, G_1, L_1, C_1 , довжина l та опір навантаження \underline{Z}_H . Крім цього, задаються значення струму і напруги на вході (затискачі 1-1' на рис.5.9):

$$u(t, 0) = u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \psi_{u1}) = \operatorname{Re}[\underline{U}_{m1} e^{j\omega t}] ; \quad (5.31)$$

$$i(t, 0) = i_1(t) = I_{m1} \cos(\omega t + \psi_{i1}) = \operatorname{Re}[\underline{I}_{m1} e^{j\omega t}] \quad (5.32)$$

або на виході лінії (затискачі 2-2' на рис.5.9):

$$u(t, l) = u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \psi_{u2}) = \operatorname{Re}[\underline{U}_{m2} e^{j\omega t}] ; \quad (5.33)$$

$$i(t, l) = i_2(t) = I_{m2} \cos(\omega t + \psi_{i2}) = \operatorname{Re}[\underline{I}_{m2} e^{j\omega t}] . \quad (5.34)$$

Підстановка миттєвих значень струму і напруги (5.29), (5.30) у диференціальні рівняння (5.10) призводить останні до вигляду (у комплексній формі запису):

$$-\operatorname{Re}\left[\frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} e^{j\omega t}\right] = R_1 \operatorname{Re}[\underline{I}_m(x) e^{j\omega t}] + L_1 \operatorname{Re}[j\omega \underline{I}_m(x) e^{j\omega t}] ; \quad (5.35)$$

$$-\operatorname{Re}\left[\frac{d\underline{I}_m(x)}{dx}e^{j\omega t}\right] = G_1 \operatorname{Re}\left[\underline{U}_m(x)e^{j\omega t}\right] + C_1 \operatorname{Re}\left[j\omega\underline{U}_m(x)e^{j\omega t}\right]. \quad (5.36)$$

Якщо праві частини рівнянь (5.35) і (5.36) перетворити, використовуючи властивість комутативності векторів, виходить:

$$-\operatorname{Re}\left[\frac{d\underline{U}_m(x)}{dx}e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[(R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_m(x)e^{j\omega t}\right]; \quad (5.37)$$

$$-\operatorname{Re}\left[\frac{d\underline{I}_m(x)}{dx}e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[(G_1 + j\omega C_1)\underline{U}_m(x)e^{j\omega t}\right]. \quad (5.38)$$

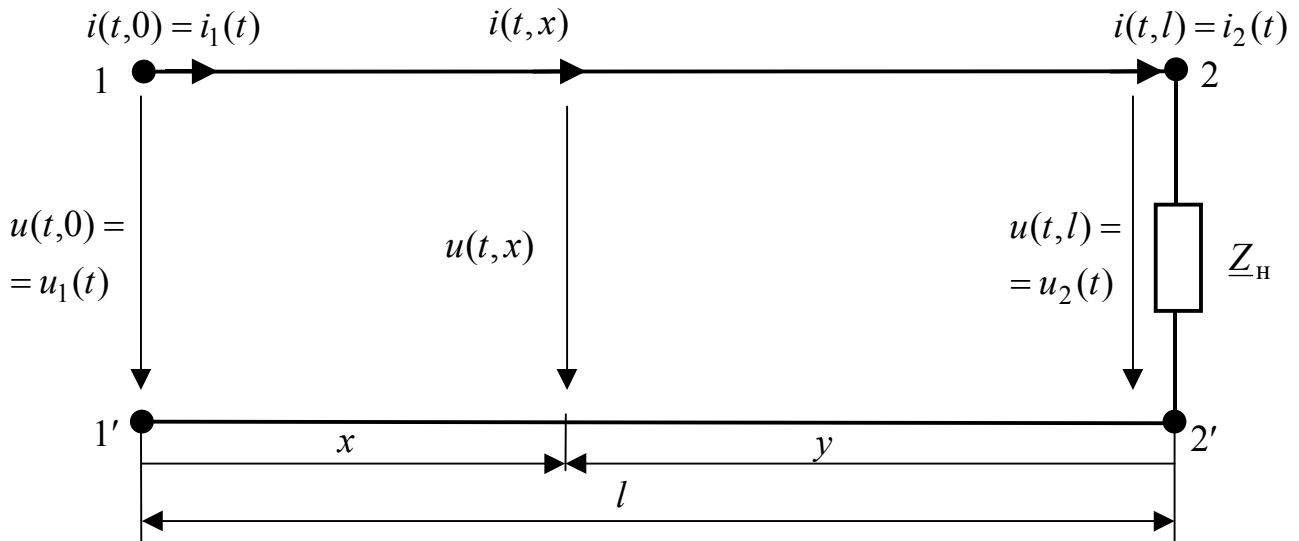


Рисунок 5.9 – Схема ДЛ для синусоїдного усталеного процесу

З рівності дійсних частин векторів, що обертаються з однаковою частотою і складають рівняння (5.37) і (5.38), виходить рівність відповідних векторів:

$$-\frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} = R_1 \underline{I}_m(x) + j\omega L_1 \underline{I}_m(x) = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_m(x) = \underline{Z}_1 \underline{I}_m(x); \quad (5.39)$$

$$-\frac{d\underline{I}_m(x)}{dx} = G_1 \underline{U}_m(x) + j\omega C_1 \underline{U}_m(x) = (G_1 + j\omega C_1) \underline{U}_m(x) = \underline{Y}_1 \underline{U}_m(x), \quad (5.40)$$

де $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1$ – **первинні (погонні) комплексні опір і провідність лінії, відповідно.**

Від системи рівнянь (5.39), (5.40) можна перейти до єдиного рівняння відносно $\underline{U}_m(x)$ або $\underline{I}_m(x)$. Так, щоб скласти рівняння для $\underline{U}_m(x)$, достатньо продиференціювати вираз (5.39) за x :

$$-\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} = \underline{Z}_1 \frac{d\underline{I}_m(x)}{dx},$$

а праву частину отриманого рівняння перетворити на підставі співвідношення (5.40):

$$-\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} = -\underline{Z}_1 \underline{Y}_1 \underline{U}_m(x). \quad (5.41)$$

Рівняння (5.41) зазвичай записують у стандартній формі:

$$\frac{d^2 \underline{U}_m(x)}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U}_m(x) = 0, \quad (5.42)$$

де $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \alpha + j\beta$ – коефіцієнт поширення; α – коефіцієнт ослаблення (загасання); β – коефіцієнт фази.

Слід зазначити, що загалом в лінії з втратами коефіцієнт ослаблення залежить від частоти, а коефіцієнт фази є нелінійною функцією частоти.

Однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку (5.42) в теорії хвильових процесів є одновимірним випадком відомого у математичній фізиці рівняння Гельмгольца⁹.

Аналогічний вигляд має диференціальне рівняння для $\underline{I}_m(x)$:

$$\frac{d^2 \underline{I}_m(x)}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{I}_m(x) = 0. \quad (5.43)$$

Для рівнянь (5.42) і (5.43) характеристичні рівняння однакові: $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$ і мають комплексні корені $\underline{p}_{1,2} = \mp \underline{\gamma} = \mp \alpha \mp j\beta$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (5.42) має вигляд:

$$\underline{U}_m(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} = A_1 e^{-\alpha x - j(\beta x - \psi_{A1})} + A_2 e^{\alpha x + j(\beta x + \psi_{A2})}, \quad (5.44)$$

де $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_{A1}}$; $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_{A2}}$ – сталі інтегрування.

Від комплексної амплітуди напруги можна перейти до її миттєвого значення у довільному перерізі:

$$u(t,x) = \text{Re} \left[\underline{U}_m(x) e^{j\omega t} \right] = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{A1}) + A_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_{A2}). \quad (5.45)$$

Запис (5.45) відрізняється від виразу (5.20) тільки наявністю експоненційних множників. Тому перший доданок у виразі (5.45) є миттєвим значенням падаючої $u_{\text{пад}}(t,x)$, а другий – відбитої $u_{\text{від}}(t,x)$ хвиль у довільному перерізі лінії.

Запис $u_{\text{пад}}(t,x)$ та $u_{\text{від}}(t,x)$ у різних формах:

⁹ Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд, Helmholtz (1821–1894) – німецький вчений, працював в області фізики, математики, фізіології та психології. Дав першу математичну трактовку закону збереження енергії. Вперше застосував принцип найменшої дії до теплових, електромагнітних та оптичних явищ. Обґрунтував особливості вихрового руху рідини, який покладено до основи гідро- та аеродинаміки. В математиці досліджував геометричні аксіоми і ріманів простір. Увів у математичну фізику рівняння, назване його ім'ям. В області фізіології вивчав нервову і м'язову системи, органи зору та слуху. Для цього сконструював декілька оригінальних вимірювальних приладів.

$$u_{\text{пад}}(t, x) = A_1 e^{-\alpha x} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \psi_{A1}\right) = A_1 e^{-\alpha x} \cos[\omega(t - x/v) + \psi_{A1}]; \quad (5.46)$$

$$u_{\text{від}}(t, x) = A_2 e^{\alpha x} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \psi_{A2}\right) = A_2 e^{\alpha x} \cos[\omega(t + x/v) + \psi_{A2}] \quad (5.47)$$

дозволяє ввести вельми важливі вторинні параметри лінії:

- 1) довжину хвилі $\lambda = 2\pi/\beta$;
- 2) фазову швидкість поширення хвилі $v = \omega/\beta$.

Графіки падаючої та відбитої хвиль напруги зображені відповідно на рис.5.10 і 5.11. Аналіз графіків дозволяє зробити такі висновки:

1) у довільний фіксований момент часу t_k падаюча (рис.5.10, б) і відбита (рис.5.11, б) хвилі є коливаннями з експоненційним законом змінювання амплітуд вздовж лінії та періодом, який дорівнює довжині хвилі λ ;

2) падаюча хвиля з часом пересувається від входу лінії до навантаження з фазовою швидкістю v (рис.5.10, б), при цьому амплітуда хвилі зменшується у напрямку навантаження;

3) відбита хвиля з часом пересувається від навантаження до входу лінії зі швидкістю v (рис.5.11, б), причому амплітуда хвилі зменшується при наближенні до входу лінії;

4) у будь-якому перерізі лінії x_k ці процеси змінюються у часі за синусоїдним законом (рис.5.10, в і 5.11, в) з частотою ω (періодом $T = 2\pi/\omega$) і мають різні амплітуди і початкові фази у різних перерізах x_k ;

5) процеси $u_{\text{пад}}(t, x)$ та $u_{\text{від}}(t, x)$ як функції часу і координати наочно подають їхні аксонометричні відображення (рис.5.10, а і 5.11, а); таке подання, крім перерізів $t = t_k$ та $x = x_k$, дозволяє показати фронт (гребінь¹⁰) хвилі, за якого аргумент $u_{\text{пад}}(t, x)$ чи $u_{\text{від}}(t, x)$ є цілим числом 2π .

Сталі інтегрування визначають з початкових (граничних) умов для $x = 0$:

$$\begin{cases} \underline{U}_m(0) = \underline{U}_{m1} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \left. \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} \right|_{x=0} = -\underline{Z}_1 \underline{I}_m(0) = -\underline{Z}_1 \underline{I}_{m1} = -\underline{\gamma} \underline{A}_1 + \underline{\gamma} \underline{A}_2. \end{cases} \quad (5.48)$$

Складаючи друге рівняння системи (5.48), використовують формулу (5.39) при $x = 0$.

Розв'язання системи (5.48) дозволяє знайти сталі \underline{A}_1 , \underline{A}_2 :

$$\underline{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{U}_{m1} & 1 \\ -\underline{Z}_1 \underline{I}_{m1} & \underline{\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\underline{\gamma} & \underline{\gamma} \end{vmatrix}} = \frac{\underline{\gamma} \underline{U}_{m1} + \underline{Z}_1 \underline{I}_{m1}}{2\underline{\gamma}} = \frac{\underline{U}_{m1} + \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1} \underline{I}_{m1}}{2} = \frac{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2}; \quad (5.49)$$

¹⁰ На рис.5.10, а і 5.11, а показані осі, які відповідають гребеням з нульовими значеннями аргументів.

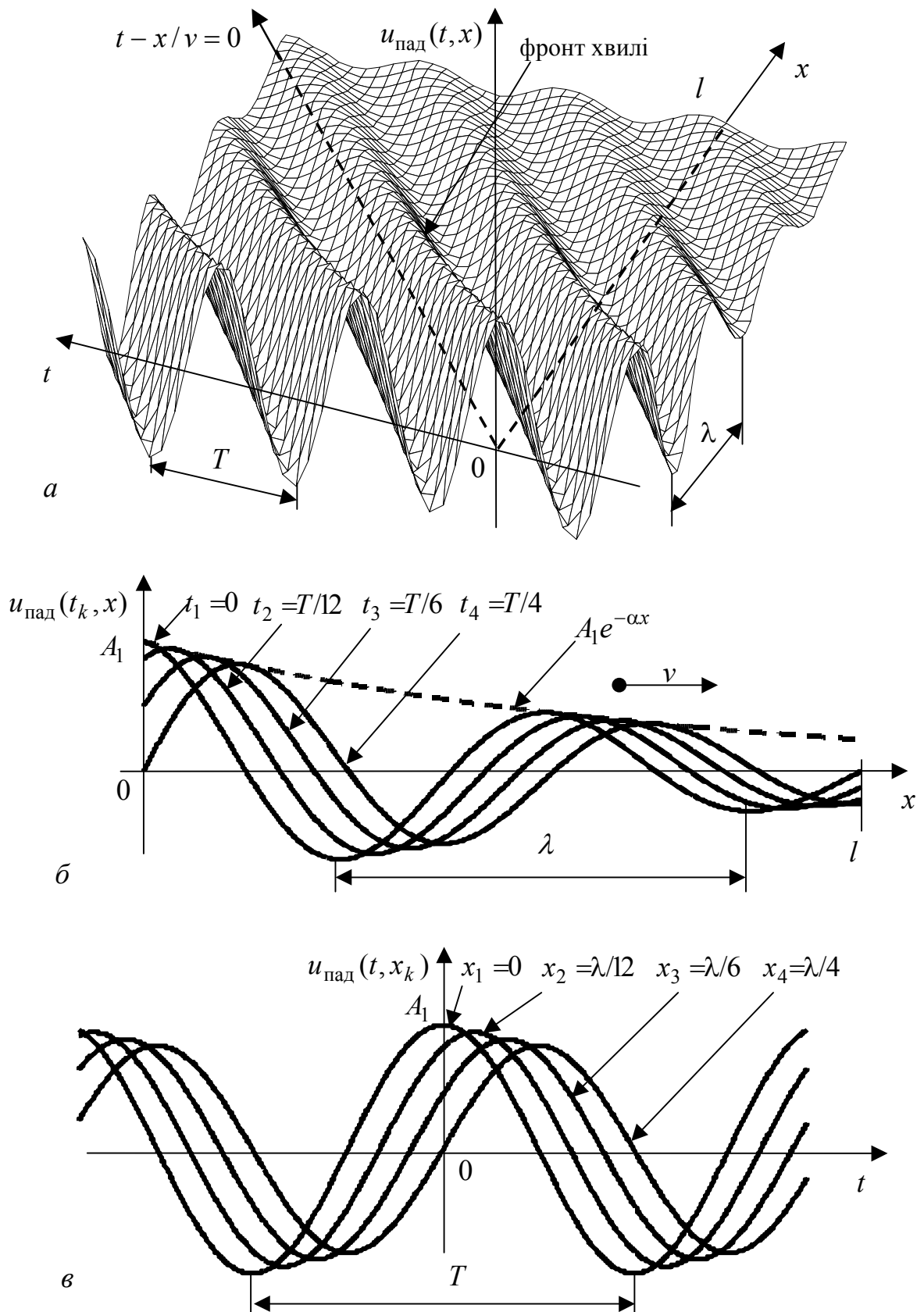


Рисунок 5.10 – Графіки падаючої хвилі напруги у ДЛ при $\Psi_{A1} = 0$:
 а – аксонометричне подання; б – розподіл вздовж лінії для моментів часу t_k ;
 в – залежність від часу в перерізах лінії x_k

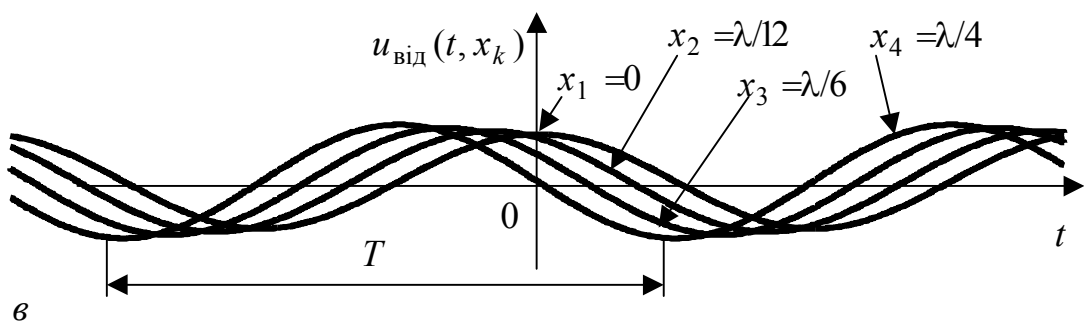
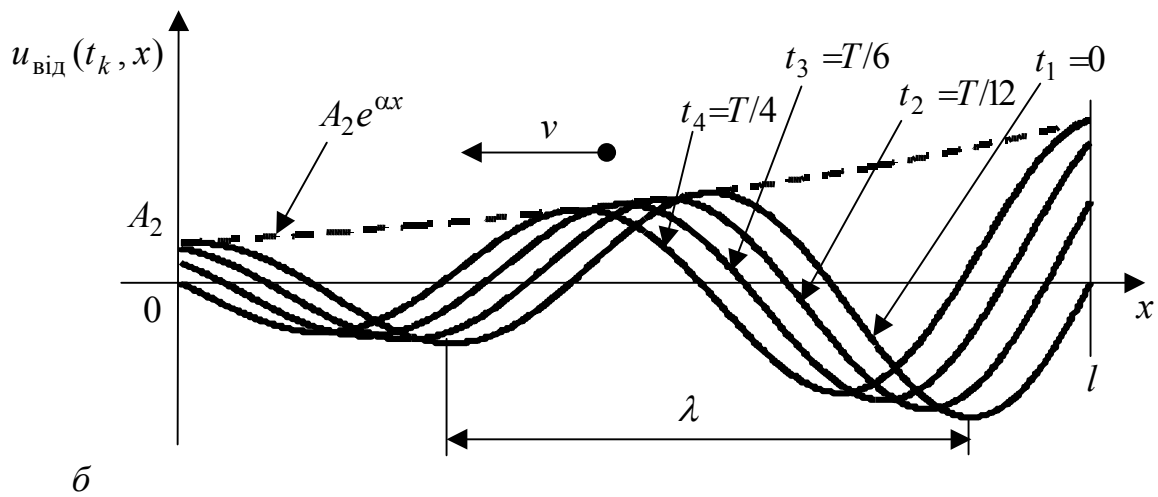
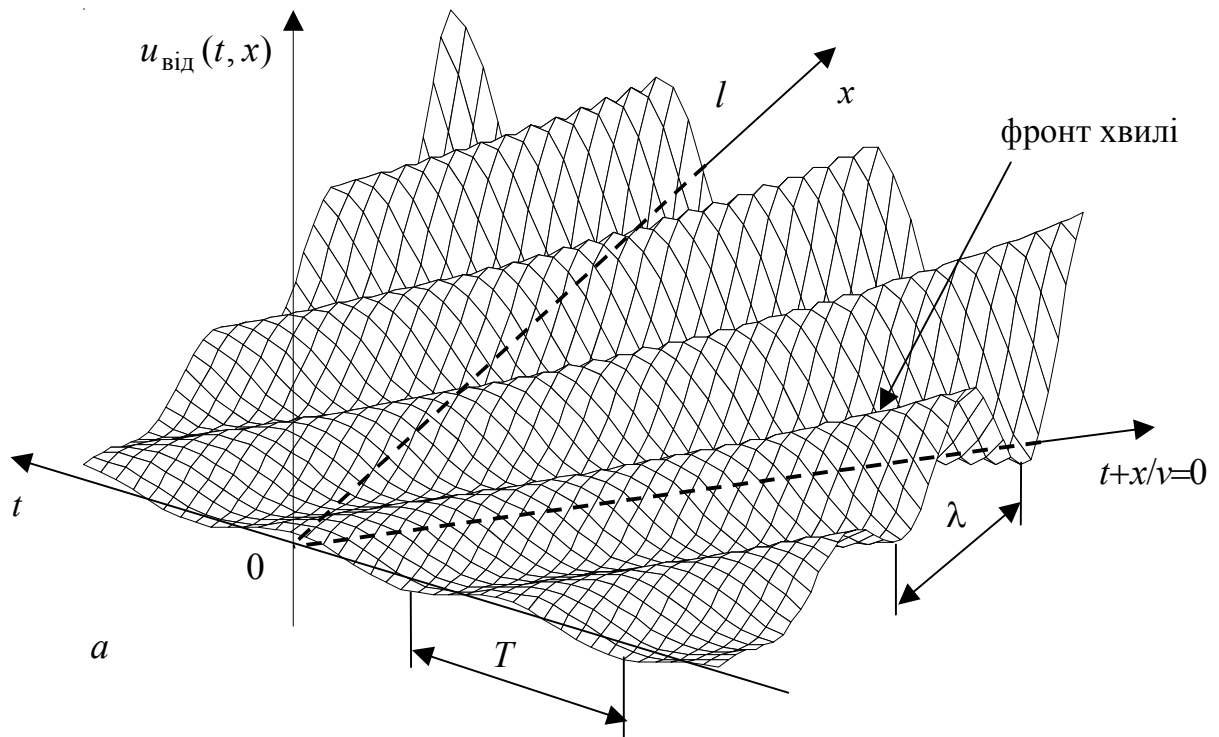


Рисунок 5.11 – Графіки відбитої хвилі напруги у ДЛ при $\Psi_{A_2} = 0$:
 а – аксонометричне подання; б – розподіл вздовж лінії для моментів часу t_k ;
 в – залежність від часу у перерізах лінії x_k

$$\underline{A}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \underline{U}_{m1} \\ -\underline{\gamma} & -\underline{Z}_1 \underline{I}_{m1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\underline{\gamma} & \underline{\gamma} \end{vmatrix}} = \frac{-\underline{Z}_1 \underline{I}_{m1} + \underline{\gamma} \underline{U}_{m1}}{2\underline{\gamma}} = \frac{\underline{U}_{m1} - \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1} \underline{I}_{m1}}{2} = \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2}, \quad (5.50)$$

де $\underline{Z}_{\text{XB}} = \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1}$ – **хвильовий опір лінії**.

Підстановка виразів (5.49) і (5.50) до рівняння (5.44) дозволяє подати комплексну амплітуду напруги у довільному перерізі лінії як суму комплексних амплітуд падаючої та відбитої хвиль:

$$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m\text{пад}}(x) + \underline{U}_{m\text{від}}(x) = \frac{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2} e^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2} e^{\underline{\gamma}x}, \quad (5.51)$$

або коротше, застосовуючи гіперболічні функції:

$$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m1} \text{ch} \underline{\gamma}x - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1} \text{sh} \underline{\gamma}x, \quad (5.52)$$

де $\text{ch} \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2}$; $\text{sh} \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2}$ – відповідно гіперболічний косинус і синус аргумента $\underline{\gamma}x$.

Використовуючи отримані співвідношення для напруги, з рівняння (5.39) визначають комплексну амплітуду струму:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m(x) &= -\frac{1}{\underline{Z}_1} \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_1} \frac{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_1} \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2} e^{\underline{\gamma}x} = \\ &= \frac{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2\underline{Z}_{\text{XB}}} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2\underline{Z}_{\text{XB}}} e^{\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{U}_{m\text{пад}}(x)}{\underline{Z}_{\text{XB}}} - \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(x)}{\underline{Z}_{\text{XB}}} = \\ &= \underline{I}_{m\text{пад}}(x) + \underline{I}_{m\text{від}}(x), \end{aligned} \quad (5.53)$$

де $\underline{Z}_{\text{XB}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1}$ – **хвильовий опір** лінії; $\underline{I}_{m\text{пад}}(x) = \frac{\underline{U}_{m\text{пад}}(x)}{\underline{Z}_{\text{XB}}}$,

$\underline{I}_{m\text{від}}(x) = -\frac{\underline{U}_{m\text{від}}(x)}{\underline{Z}_{\text{XB}}}$ – комплексні амплітуди, відповідно, падаючої та відбитої хвиль струму.

Вираз (5.53) показує, що комплексна амплітуда струму є сумою комплексних амплітуд падаючої та відбитої хвиль, які пов'язані з відповідними хвилями напруги за законом Ома через комплексний хвильовий опір $\underline{Z}_{\text{XB}}$. Від'ємний знак $\underline{I}_{m\text{від}}(x)$ свідчить, що енергія відбитої хвилі пересувається від навантаження лінії до її вхідних затискачів.

Подібно виразу (5.52) рівняння (5.53) можна перетворити так:

$$\underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m1} \text{ch} \underline{\gamma}x - (\underline{U}_{m1} / \underline{Z}_{\text{XB}}) \text{sh} \underline{\gamma}x. \quad (5.54)$$

Розподіл комплексних амплітуд струму і напруги вздовж лінії можна також отримати, відряховуючи координату u вздовж лінії від навантаження. При цьому як граничні умови використовують значення струму і напруги на виході

лінії (див. формули (5.33) і (5.34)). Основні етапи розв'язання цієї задачі та отримані при цьому співвідношення наведені у табл.5.5. До формул табл.5.5 входять ті самі вторинні параметри, що й до співвідношень, які отримані при відліку відстані x від входу лінії. Ці вторинні параметри зведені до табл.5.6.

Використовуючи формули (5.52) і (5.54), на підставі закону Ома можна отримати вираз для комплексного опору лінії у довільному перерізі x :

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}_m(x)}{\underline{I}_m(x)} = \frac{\underline{U}_{m1} \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1} \operatorname{sh} \gamma x}{\underline{I}_{m1} \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{Z}_{\text{XB}}} \operatorname{sh} \gamma x} = \underline{Z}_{\text{XB}} \frac{\underline{Z}_{\text{BX}} \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_{\text{XB}} \operatorname{sh} \gamma x}{\underline{Z}_{\text{XB}} \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_{\text{BX}} \operatorname{sh} \gamma x}, \quad (5.55)$$

де $\underline{Z}_{\text{BX}} = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{I}_{m1}}$ – комплексний вхідний опір лінії.

Комплексний опір у довільному перерізі y можна записати, використовуючи відповідні формули для $\underline{U}_m(y)$ та $\underline{I}_m(y)$ з табл.5.5:

$$\underline{Z}(y) = \frac{\underline{U}_m(y)}{\underline{I}_m(y)} = \frac{\underline{U}_{m2} \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2} \operatorname{sh} \gamma y}{\underline{I}_{m2} \operatorname{ch} \gamma y + \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{\text{XB}}} \operatorname{sh} \gamma y} = \underline{Z}_{\text{XB}} \frac{\underline{Z}_{\text{H}} \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_{\text{XB}} \operatorname{sh} \gamma y}{\underline{Z}_{\text{XB}} \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_{\text{H}} \operatorname{sh} \gamma y}. \quad (5.56)$$

З формули (5.56) виходить, що вхідний комплексний опір лінії становить:

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{I}_{m1}} = \underline{Z}_{\text{XB}} \frac{\underline{Z}_{\text{H}} \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_{\text{XB}} \operatorname{sh} \gamma l}{\underline{Z}_{\text{XB}} \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_{\text{H}} \operatorname{sh} \gamma l}, \quad (5.57)$$

а при $\underline{Z}_{\text{H}} = \underline{Z}_{\text{XB}}$

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_{\text{XB}}; \quad \underline{Z}(x) = \underline{Z}(y) = \underline{Z}_{\text{XB}}.$$

Отже, якщо лінія навантажена на хвильовий опір, вхідний опір лінії та опір у будь-якому перерізі дорівнює хвильовому. При цьому відбита хвиля відсутня, оскільки стала інтегрування $\underline{A}_2 = 0$ для розв'язків за координатами x та y . Такий режим називають узгодженим або режимом біжних хвиль.

Міру розузгодження лінії при $\underline{Z}_{\text{BX}} \neq \underline{Z}_{\text{XB}}$ оцінюють відношенням комплексних амплітуд відбитої та падаючої хвиль у вигляді безрозмірного **комплексного коефіцієнта відбиття**:

$$\underline{\rho}(x) = \frac{\underline{U}_{m\text{в\iд}}(x)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(x)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{в\iд}}(x)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(x)} = \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{\underline{U}_{m1} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}} e^{2\gamma x} = \frac{\underline{Z}_{\text{BX}} - \underline{Z}_{\text{XB}}}{\underline{Z}_{\text{BX}} + \underline{Z}_{\text{XB}}} e^{2\gamma x} = \rho(x) e^{j\varphi_\rho(x)};$$

$$\underline{\rho}(y) = \frac{\underline{U}_{m\text{в\iд}}(y)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(y)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{в\iд}}(y)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(y)} = \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}} e^{-2\gamma y} = \frac{\underline{Z}_{\text{H}} - \underline{Z}_{\text{XB}}}{\underline{Z}_{\text{H}} + \underline{Z}_{\text{XB}}} e^{-2\gamma y} = \rho(y) e^{j\varphi_\rho(y)}, \quad (5.58)$$

де $\rho(x)$; $\rho(y)$; $\varphi_\rho(x)$; $\varphi_\rho(y)$ – залежності модулів та аргументів комплексного коефіцієнта відбиття при відліку координат від початку та від кінця лінії, відповідно.

Таблиця 5.5 – Основні етапи аналізу при відліку координати від навантаження

Етап виведення і тип виразу	Формула
Складання диференціальних рівнянь	$\frac{d^2 \underline{U}_m(y)}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U}_m(y) = 0; \quad \frac{d^2 \underline{I}_m(y)}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{I}_m(y) = 0$
Характеристичне рівняння та його корені	$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0; \quad p_{1,2} = \pm \underline{\gamma} = \pm \alpha \pm j\beta$
Загальний розв'язок для напруги	$\underline{U}_m(y) = \underline{A}_1 e^{\underline{\gamma}y} + \underline{A}_2 e^{-\underline{\gamma}y} =$ $= \underline{A}_1 e^{\alpha y + j(\beta y + \psi_{A1})} + \underline{A}_2 e^{-\alpha y - j(\beta y + \psi_{A2})} = \underline{U}_{m\text{пад}}(y) + \underline{U}_{m\text{від}}(y)$
Миттєві значення падаючої та відбитої хвиль напруги у довільному перерізі лінії	$u_{\text{пад}}(t, y) = \text{Re}[\underline{U}_{m\text{пад}}(y) e^{j\omega t}] = \underline{A}_1 e^{\alpha y} \cos(\omega t + \beta y + \psi_{A1}) =$ $= \underline{A}_1 e^{\alpha y} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}y + \psi_{A1}\right) = \underline{A}_1 e^{\alpha y} \cos[\omega(t + y/v) + \psi_{A1}];$ $u_{\text{від}}(t, y) = \text{Re}[\underline{U}_{m\text{від}}(y) e^{j\omega t}] = \underline{A}_2 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \beta y + \psi_{A2}) =$ $= \underline{A}_2 e^{-\alpha y} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}y + \psi_{A2}\right) = \underline{A}_2 e^{-\alpha y} \cos[\omega(t - y/v) + \psi_{A2}]$
Складання та розв'язання рівнянь для визначення сталих інтегрування	$\begin{cases} \underline{U}_m(0) = \underline{U}_{m2} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \left. \frac{d\underline{U}_m(y)}{dy} \right _{y=0} = \underline{Z}_1 \underline{I}_m(0) = \underline{Z}_1 \underline{I}_{m2} = \underline{\gamma} \underline{A}_1 - \underline{\gamma} \underline{A}_2; \end{cases}$ $\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2}$
Вираз для комплексної амплітуди напруги	$\underline{U}_m(y) = \frac{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2} e^{\underline{\gamma}y} + \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2} e^{-\underline{\gamma}y} =$ $= \underline{U}_{m\text{пад}}(y) + \underline{U}_{m\text{від}}(y)$
Розв'язок для комплексної амплітуди струму	$\underline{I}_m(y) = \frac{1}{\underline{Z}_1} \frac{d\underline{U}_m(y)}{dy} = \frac{\underline{U}_{m2} + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2\underline{Z}_{\text{XB}}} e^{\underline{\gamma}y} - \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2\underline{Z}_{\text{XB}}} e^{-\underline{\gamma}y} =$ $= \frac{\underline{U}_{m\text{пад}}(y)}{\underline{Z}_{\text{XB}}} - \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(y)}{\underline{Z}_{\text{XB}}} = \underline{I}_{m\text{пад}}(y) + \underline{I}_{m\text{від}}(y)$
Запис рівнянь за допомогою гіперболічних функцій	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \text{ch} \underline{\gamma}y + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2} \text{sh} \underline{\gamma}y;$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \text{ch} \underline{\gamma}y + \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{\text{XB}}} \text{sh} \underline{\gamma}y$

У режимі узгодження ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_{ХВ} = \underline{Z}_{ВХ}$) коефіцієнт відбиття дорівнює нулю:

$$\underline{\rho}(x) = \underline{\rho}(y) = 0.$$

За допомогою комплексного коефіцієнта відбиття виходять наочні співвідношення для енергетичних параметрів лінії. Так, можна отримати вираз для комплексної потужності у будь-якому перерізі лінії при відліку координати від навантаження:

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(y) &= P_A(y) + jP_Q(y) = \underline{U}(y)\underline{I}^*(y) = [\underline{U}_{\text{пад}}(y) + \underline{U}_{\text{від}}(y)][\underline{I}_{\text{пад}}^*(y) + \underline{I}_{\text{від}}^*(y)] = \\ &= \underline{U}_{\text{пад}}(y)\underline{I}_{\text{пад}}^*(y)[1 + \underline{\rho}(y)][1 - \underline{\rho}^*(y)] = \underline{Z}_{ХВ}I_{\text{пад}}^2(y)[1 - \rho^2(y) + \underline{\rho}(y) - \underline{\rho}^*(y)] = \\ &= \underline{Z}_{ХВ}I_{\text{пад}}^2(y)[1 - \rho^2(y) + j2\rho(y)\sin\varphi_\rho(y)], \end{aligned} \quad (5.59)$$

де $P_A(y) = \text{Re}[\underline{P}_S(y)]$; $P_Q(y) = \text{Im}[\underline{P}_S(y)]$ – відповідно активна і реактивна потужності в лінії.

Аналогічний вигляд має співвідношення для комплексної потужності у разі відліку координати від входу лінії:

$$\underline{P}_S(x) = P_A(x) + jP_Q(x) = \underline{Z}_{ХВ}I_{\text{пад}}^2(x)[1 - \rho^2(x) + j2\rho(x)\sin\varphi_\rho(x)].$$

Таблиця 5.6 – Вторинні параметри лінії при синусоїдній дії

Параметр	Позначення і формула	Одиниця вимірювання	
		Назва	Позначення
Погонний комплексний опір	$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$	ом на метр	Ом/м
Погонна комплексна провідність	$\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1$	сименс на метр	См/м
Коефіцієнт поширення	$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \alpha + j\beta$	метр у мінус першому степені	1/м
Коефіцієнт ослаблення	$\alpha = \text{Re}(\underline{\gamma})$	непер на метр	Нп/м
Коефіцієнт фази	$\beta = \text{Im}(\underline{\gamma})$	радіан на метр	рад/м
Довжина хвилі	$\lambda = 2\pi/\beta$	метр	м
Фазова швидкість	$v = \omega/\beta$	метр за секунду	м/с
Хвильовий опір	$\underline{Z}_{ХВ} = \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1} = R_{ХВ} + jX_{ХВ}$	ом	Ом

Приклад 5.9. Знайти вторинні параметри симетричної двопровідної повітряної лінії, розглянутої у прикладі 5.1 (рис.5.2, а), для частоти $f = 100$ МГц.

Розв'язання. Скористуємось знайденими у прикладі 5.1 первинними параметрами лінії:

$$L_1 = 8,886 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}; C_1 = 1,264 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}; R_1 = 1,615 \text{ Ом/м}; G_1 = 0.$$

За формулами (табл.5.6) розрахуємо вторинні параметри лінії:

1) погонний комплексний опір

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 0,162 + j2\pi \cdot 10^8 \cdot 8,886 \cdot 10^{-7} = 1,615 + j558,324 \text{ Ом/м};$$

2) погонну комплексну провідність

$$\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1 = j2\pi \cdot 10^8 \cdot 1,264 \cdot 10^{-11} = j7,942 \cdot 10^{-3} \text{ См/м};$$

3) коефіцієнт поширення

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \sqrt{(1,615 + j558,324)j7,942 \cdot 10^{-3}} = 3,046 \cdot 10^{-3} + j2,106 \text{ 1/м};$$

4) коефіцієнт ослаблення $\alpha = \text{Re}(\underline{\gamma}) = 3,046 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/м};$

5) коефіцієнт фази $\beta = \text{Im}(\underline{\gamma}) = 2,106 \text{ рад/м};$

6) довжину хвилі $\lambda = 2\pi / \beta = 2\pi / 2,106 = 2,983 \text{ м};$

7) фазову швидкість $v = \omega / \beta = 2\pi \cdot 10^8 / 2,106 = 2,983 \cdot 10^8 \text{ м/с};$

8) хвильовий опір

$$\underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1} = R_{\text{хв}} + jX_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{1,615 + j558,324}{j7,942 \cdot 10^{-3}}} = 265,143 - j0,383 \text{ Ом}.$$

Приклад 5.10. Знайти для частоти $f = 1000$ МГц вторинні параметри коаксіального кабеля і стрічкової лінії, первинні параметри яких розраховані відповідно у прикладах 5.2 і 5.3.

Розв'язання. Розрахунки виконаємо за формулами, наведеними у табл.5.6. Результати зведемо до табл.5.7.

Приклад 5.11. Визначити для частоти $f = 1000$ МГц розподіл вторинних параметрів вздовж неоднорідного коаксіального кабеля, розглянутого у прикладі 5.4. Побудувати графіки $\alpha(x)$; $R_{\text{хв}}(x)$; $X_{\text{хв}}(x)$.

Розв'язання. Скористуємось знайденими у прикладі 5.4 функціональними залежностями первинних параметрів неоднорідного кабеля від координати x :

$$L_1(x) = 2,022 \cdot 10^{-7} \cdot (2,303 + x) \text{ Гн/м}; R_1(x) = 2,554(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом/м};$$

$$C_1(x) = \frac{1,25 \cdot 10^{-10}}{2,303 + x} \text{ Ф/м}; G_1(x) = \frac{1,571 \cdot 10^{-4}}{2,303 + x} \text{ См/м}.$$

Визначимо розподіл погонних комплексних опору та провідності вздовж кабеля:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1(x) &= R_1(x) + j\omega L_1(x) = 2,554(0,1e^{-x} + 1) + j2\pi \cdot 10^9 \cdot 2,022 \cdot 10^{-7} (2,303 + x) = \\ &= 2,554(0,1e^{-x} + 1) + j1,27 \cdot 10^3 (2,303 + x) \text{ Ом/м}; \end{aligned}$$

$$\underline{Y}_1(x) = G_1(x) + j\omega C_1(x) = 1,571 \cdot 10^{-4} / (2,303 + x) + j2\pi \cdot 10^9 \cdot 1,25 \cdot 10^{-10} / (2,303 + x) = \\ = (1,571 \cdot 10^{-4} + j0,785) / (2,303 + x) \approx j0,785 / (2,303 + x) \text{ См/м.}$$

Таблиця 5.7 – Первинні та вторинні параметри ліній у прикладі 5.10

Параметр	Результати	
	Коаксіальний кабель	Стрічкова лінія
Первинні параметри (з прикладів 5.2 і 5.3)	$L_1 = 4,656 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м};$ $C_1 = 5,429 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$ $R_1 = 2,809 \text{ Ом/м};$ $G_1 = 6,822 \cdot 10^{-5} \text{ См/м}$	$L_1 = 6,352 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м};$ $C_1 = 3,678 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$ $R_1 = 16,047 \text{ Ом/м};$ $G_1 = 5,778 \cdot 10^{-5} \text{ См/м}$
Погонний комплексний опір \underline{Z}_1 , Ом/м	$2,809 + j2,925 \cdot 10^3$	$16,047 + j3,991 \cdot 10^3$
Погонна комплексна провідність \underline{Y}_1 , См/м	$6,822 \cdot 10^{-5} + j0,341$	$5,778 \cdot 10^{-5} + j0,231$
Коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$, 1/м	$0,018 + j31,59$	$0,065 + j30,37$
Коефіцієнт ослаблення α , Нп/м	0,018	0,065
Коефіцієнт фази β , рад/м	31,59	30,37
Довжина хвилі λ , м	0,199	0,207
Фазова швидкість v , м/с	$1,989 \cdot 10^8$	$2,069 \cdot 10^8$
Хвильовий опір $\underline{Z}_{\text{ХВ}} = R_{\text{ХВ}} + jX_{\text{ХВ}}$, Ом	$92,61 - j0,035$	$131,417 - j0,248$

Розрахуємо залежність коефіцієнта поширення від координати x :

$$\underline{\gamma}(x) = \sqrt{\underline{Z}_1(x)\underline{Y}_1(x)} \approx \sqrt{[2,554(0,1e^{-x} + 1) + j1,27 \cdot 10^3(2,303 + x)]j0,785 / (2,303 + x)} = \\ = \sqrt{-1,27 \cdot 10^3 \cdot 0,785 + j[0,785 \cdot 2,554(0,1e^{-x} + 1)] / (2,303 + x)} \text{ 1/м.}$$

Підкореневий вираз має вигляд $A + jB$; при цьому $A < 0$, $B \ll |A|$. Тому кінцевий вираз для $\underline{\gamma}(x)$ запишемо приблизно, врахувавши, що $\sqrt{-A} = j\sqrt{|A|}$:

$$\sqrt{A + jB} = \sqrt{A(1 + jB/A)} \approx \sqrt{A}[1 + jB/(2A)] = j\sqrt{|A|} + B/(2\sqrt{|A|}); \quad (5.60)$$

$$\underline{\gamma}(x) = \alpha(x) + j\beta(x) \approx 0,0315(0,1e^{-x} + 1) / (2,303 + x) + j31,575 \text{ 1/м.}$$

Отже, коефіцієнт ослаблення залежить від координати:

$$\alpha(x) \approx 0,0315(0,1e^{-x} + 1) / (2,303 + x) \text{ Нп/м,}$$

а коефіцієнт фази – ні: $\beta \approx 31,575 \text{ рад/м.}$

Розрахуємо швидкість і довжину хвилі у кабелі:

$$v = \omega/\beta = 2\pi \cdot 10^9 / 31,575 = 1,99 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \quad \lambda = 2\pi/\beta = 2\pi/31,575 = 1,99 \text{ м.}$$

Визначимо розподіл вздовж кабелю хвильового опору, його дійсної та уявної частин, враховуючи формулу (5.60):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{XB}}(x) &= R_{\text{XB}}(x) + jX_{\text{XB}}(x) \approx \\ &\approx \sqrt{[2,554(0,1e^{-x} + 1) + j1,27 \cdot 10^3(2,303 + x)]/[j0,785/(2,303 + x)]} = \\ &= \sqrt{\frac{1,27 \cdot 10^3}{0,785}(2,303 + x)^2 - j \frac{2,554(0,1e^{-x} + 1)(2,303 + x)}{0,785}} \approx \\ &\approx 40,224(2,303 + x) - j0,04(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$R_{\text{XB}}(x) \approx 40,224(2,303 + x) \text{ Ом}; \quad X_{\text{XB}}(x) \approx -0,04(0,1e^{-x} + 1) \text{ Ом.}$$

Побудуємо графіки $\alpha(x)$; $R_{\text{XB}}(x)$; $X_{\text{XB}}(x)$ (рис.5.12).

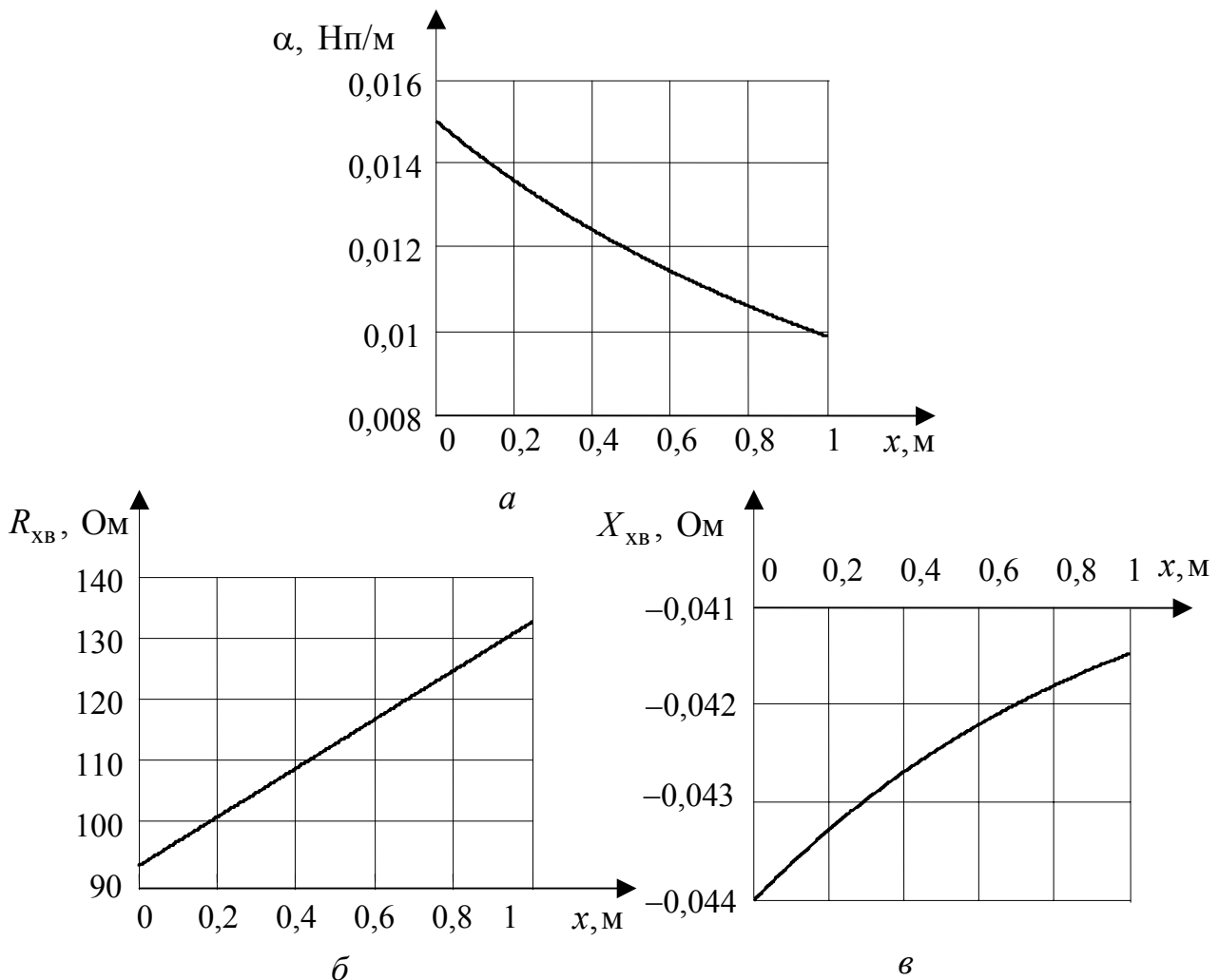


Рисунок 5.12 – Графіки розподілу вторинних параметрів вздовж кабелю у прикладі 5.11: *а* – ослаблення; *б* – активної складової хвильового опору; *в* – реактивної складової хвильового опору

5.5 Лінії з малими втратами при синусоїдній дії

Для довгих ліній, які використовують у практиці, активні первинні опори і провідності значно менші відповідних реактивних (див. приклади 5.9–5.11):

$$R_1 \ll \omega L_1; G_1 \ll \omega C_1. \quad (5.61)$$

За умов (5.61) втратами у першому наближенні можна знехтувати і вважати лінії ідеальними:

$$R_1 = 0; G_1 = 0.$$

У ідеальних ліній первинні комплексні опір і провідність, а також коефіцієнт поширення будуть уявними:

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1; \underline{Y}_1 = j\omega C_1; \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = j\omega \sqrt{L_1 C_1} = j\beta, \quad (5.62)$$

де $\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$ – коефіцієнт фази.

Отже, коефіцієнт **ослаблення ідеальної лінії дорівнює нулю**:

$$\alpha = 0.$$

З огляду на формули (5.62), вирази для фазової швидкості, довжини хвилі та хвильового опору, наведені у табл.5.6, матимуть вигляд:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad (5.63)$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{f \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{T}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad (5.64)$$

$$\underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1} = \sqrt{j\omega L_1 / j\omega C_1} = \sqrt{L_1 / C_1} = R_{\text{хв}}. \quad (5.65)$$

Отже, фазова швидкість і хвильовий опір в ідеальній лінії не залежать від частоти, а довжина хвилі – обернено пропорційна частоті. Хвильовий опір, на відміну від реальної лінії, є активним, а співвідношення (5.65) для його розрахунку сходиться з виразом (5.26), отриманим у підрозд. 5.3 для довільної дії в ідеальній лінії. Також збігаються вирази (5.63) і (5.25).

Не розв'язуючи знову диференціальні рівняння (5.42) і (5.43) для ідеальної лінії, можна на підставі формул (5.62)–(5.65) використати розв'язки цих рівнянь (див. вирази (5.44)–(5.59) і табл.5.5). Отримані при цьому співвідношення наведені у табл.5.8, аналіз яких дозволяє зробити такі висновки:

1) падаючі та відбиті хвилі не змінюються за амплітудою вздовж лінії (рис.5.13 і 5.14);

2) щоб записати розрахункові формули для комплексних амплітуд напруги та струму, а також комплексного опору в будь-якому перерізі лінії, використовують не гіперболічні, як у ліній з втратами, а тригонометричні функції;

3) оскільки хвильовий опір активний, падаючі хвилі напруги і струму у довільному перерізі лінії перебувають у фазі, а відбиті – у протифазі;

4) модуль комплексного коефіцієнта відбиття у будь-якому перерізі лінії постійний і може приймати значення від нуля до одиниці:

$$\rho(x) = \frac{\left| \underline{Z}_{\text{BX}} - R_{\text{XB}} \right|}{\left| \underline{Z}_{\text{BX}} + R_{\text{XB}} \right|} = \frac{\sqrt{(R_{\text{BX}} - R_{\text{XB}})^2 + X_{\text{BX}}^2}}{\sqrt{(R_{\text{BX}} + R_{\text{XB}})^2 + X_{\text{BX}}^2}};$$

$$\rho(y) = \frac{\left| \underline{Z}_{\text{H}} - R_{\text{XB}} \right|}{\left| \underline{Z}_{\text{H}} + R_{\text{XB}} \right|} = \frac{\sqrt{(R_{\text{H}} - R_{\text{XB}})^2 + X_{\text{H}}^2}}{\sqrt{(R_{\text{H}} + R_{\text{XB}})^2 + X_{\text{H}}^2}}; \quad (5.66)$$

5) аргумент коефіцієнта відбиття змінюється вздовж лінії за лінійним законом $2\beta x$ при відліку координати від початку лінії та $-2\beta y$ при відліку від навантаження.

У ідеальних ліній, як і у реальних, в режимі біжних хвиль ($\underline{Z}_{\text{H}} = R_{\text{XB}}$) відбиті хвилі відсутні, коефіцієнт відбиття дорівнює нулю, а вхідний опір і опір у будь-якому перерізі дорівнюють хвильовому.

Модуль коефіцієнта відбиття (5.66) у будь-якому перерізі лінії дорівнює одиниці (тобто $U_{m\text{від}} = U_{m\text{пад}}; I_{m\text{від}} = I_{m\text{пад}}$) за таких умов:

- 1) вихідні затискачі лінії замкнені ($\underline{Z}_{\text{H}} = 0$);
- 2) вихідні затискачі лінії розімкнені ($\underline{Z}_{\text{H}} \rightarrow \infty$);
- 3) лінія навантажена на індуктивність ($\underline{Z}_{\text{H}} = j\omega L$);
- 4) лінія навантажена на ємність ($\underline{Z}_{\text{H}} = 1/j\omega C$).

Такий режим повного відбиття енергії від навантаження називається режимом стійних хвиль.

Якщо лінію навантажено на активний $R_{\text{H}} \neq R_{\text{XB}}$ або комплексний $\underline{Z}_{\text{H}} = R_{\text{H}} + jX_{\text{H}}$ ($R_{\text{H}} \neq 0; -\infty < X_{\text{H}} < \infty$) опір, модуль коефіцієнта відбиття лежить у межах:

$$0 < \rho(x) < 1; 0 < \rho(y) < 1.$$

У цьому випадку, званому **режимом змішаних хвиль**, спостерігається часткове відбиття енергії падаючої хвилі від навантаження:

$$U_{m\text{від}} < U_{m\text{пад}}; I_{m\text{від}} < I_{m\text{пад}}.$$

Якщо зважати на втрати, для розрахунку вторинних параметрів ДЛ з малими втратами (ДЛМВ) застосовують приблизні співвідношення. Виводячи ці співвідношення, використовують нерівності (5.61), нехтують малими величинами другого порядку $(G_1/\omega C_1)^2; R_1 G_1/(\omega^2 L_1 C_1)$ і записують приблизні значення квадратного кореня від виразів вигляду $1 \pm jA$, $A \ll 1$:

$$\sqrt{1 \pm jA} \approx 1 \pm j0,5A.$$

Таблиця 5.8 – Основні співвідношення для аналізу ліній без втраг при синусоїдній дії

При відліку координати від входу лінії	При відліку координати від навантаження
Комплексні амплітуди напруги і струму	
$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m\text{пад}}(x) + \underline{U}_{m\text{від}}(x) = \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{j\beta x};$	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m\text{пад}}(y) + \underline{U}_{m\text{від}}(y) = \underline{A}_1 e^{j\beta y} + \underline{A}_2 e^{-j\beta y};$
$\underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m\text{пад}}(x) + \underline{I}_{m\text{від}}(x) = (\underline{A}_1 / R_{\text{XB}}) e^{-j\beta x} - (\underline{A}_2 / R_{\text{XB}}) e^{j\beta x};$	$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m\text{пад}}(y) + \underline{I}_{m\text{від}}(y) = (\underline{A}_1 / R_{\text{XB}}) e^{j\beta y} - (\underline{A}_2 / R_{\text{XB}}) e^{-j\beta y};$
$\underline{A}_1 = \underline{A}_1 e^{j\nu_{A1}} = \frac{\underline{U}_{m1} + R_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2}; \quad \underline{A}_2 = \underline{A}_2 e^{j\nu_{A2}} = \frac{\underline{U}_{m1} - R_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}}{2}$	$\underline{A}_1 = \underline{A}_1 e^{j\nu_{A1}} = \frac{\underline{U}_{m2} + R_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2}; \quad \underline{A}_2 = \underline{A}_2 e^{j\nu_{A2}} = \frac{\underline{U}_{m2} - R_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}}{2}$
$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m1} \cos \beta x - j \underline{I}_{m1} R_{\text{XB}} \sin \beta x;$ $\underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m1} \cos \beta x - j (\underline{U}_{m1} / R_{\text{XB}}) \sin \beta x$	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \cos \beta y + j \underline{I}_{m2} R_{\text{XB}} \sin \beta y;$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \cos \beta y + j (\underline{U}_{m2} / R_{\text{XB}}) \sin \beta y$
Миттєві значення падаючих і відбитих хвиль напруги і струму у довільному перерізі лінії	
$u_{\text{пад}}(t, x) = A_1 \cos(\omega t - \beta x + \psi_{A1}) = A_1 \cos[\omega(t - x/\nu) + \psi_{A1}];$	$u_{\text{пад}}(t, y) = A_1 \cos(\omega t + \beta y + \psi_{A1}) = A_1 \cos[\omega(t + y/\nu) + \psi_{A1}];$
$i_{\text{пад}}(t, x) = (A_1 / R_{\text{XB}}) \cos[\omega(t - x/\nu) + \psi_{A1}]$	$i_{\text{пад}}(t, y) = (A_1 / R_{\text{XB}}) \cos[\omega(t + y/\nu) + \psi_{A1}]$
$u_{\text{від}}(t, x) = A_2 \cos(\omega t + \beta x + \psi_{A2}) = A_2 \cos[\omega(t + x/\nu) + \psi_{A2}];$	$u_{\text{від}}(t, y) = A_2 \cos(\omega t - \beta y + \psi_{A2}) = A_2 \cos[\omega(t - y/\nu) + \psi_{A2}];$
$i_{\text{від}}(t, x) = -(A_2 / R_{\text{XB}}) \cos[\omega(t + x/\nu) + \psi_{A2}]$	$i_{\text{від}}(t, y) = -(A_2 / R_{\text{XB}}) \cos[\omega(t - y/\nu) + \psi_{A2}]$
Комплексний опір лінії	
$\underline{Z}(x) = R_{\text{XB}} \frac{\underline{Z}_{\text{BX}} \cos \beta x - j R_{\text{XB}} \sin \beta x}{R_{\text{XB}} \cos \beta x - j \underline{Z}_{\text{BX}} \sin \beta x} = R_{\text{XB}} \frac{\underline{Z}_{\text{BX}} - j R_{\text{XB}} \operatorname{tg} \beta x}{R_{\text{XB}} - j \underline{Z}_{\text{BX}} \operatorname{tg} \beta x}$	$\underline{Z}(y) = R_{\text{XB}} \frac{\underline{Z}_{\text{H}} \cos \beta y + j R_{\text{XB}} \sin \beta y}{R_{\text{XB}} \cos \beta y + j \underline{Z}_{\text{H}} \sin \beta y} = R_{\text{XB}} \frac{\underline{Z}_{\text{H}} + j R_{\text{XB}} \operatorname{tg} \beta y}{R_{\text{XB}} + j \underline{Z}_{\text{H}} \operatorname{tg} \beta y}$
Коефіцієнт відбиття	
$\underline{\rho}(x) = \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(x)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(x)} = - \frac{\underline{I}_{m\text{від}}(x)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(x)} = \frac{\underline{Z}_{\text{BX}} - R_{\text{XB}}}{\underline{Z}_{\text{BX}} + R_{\text{XB}}} e^{j2\beta x}$	$\underline{\rho}(y) = \frac{\underline{U}_{m\text{від}}(y)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(y)} = - \frac{\underline{I}_{m\text{від}}(y)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(y)} = \frac{\underline{Z}_{\text{H}} - R_{\text{XB}}}{\underline{Z}_{\text{H}} + R_{\text{XB}}} e^{-j2\beta y}$
Активна і реактивна потужності	
$P_A(x) = R_{\text{XB}} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] = P_{A\text{пад}} - P_{A\text{від}};$ $P_Q(x) = 2 R_{\text{XB}} I_{\text{пад}}^2 \rho(0) \sin \varphi_\rho(x)$	$P_A(y) = R_{\text{XB}} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] = P_{A\text{пад}} - P_{A\text{від}};$ $P_Q(y) = 2 R_{\text{XB}} I_{\text{пад}}^2 \rho(y) \sin \varphi_\rho(y)$

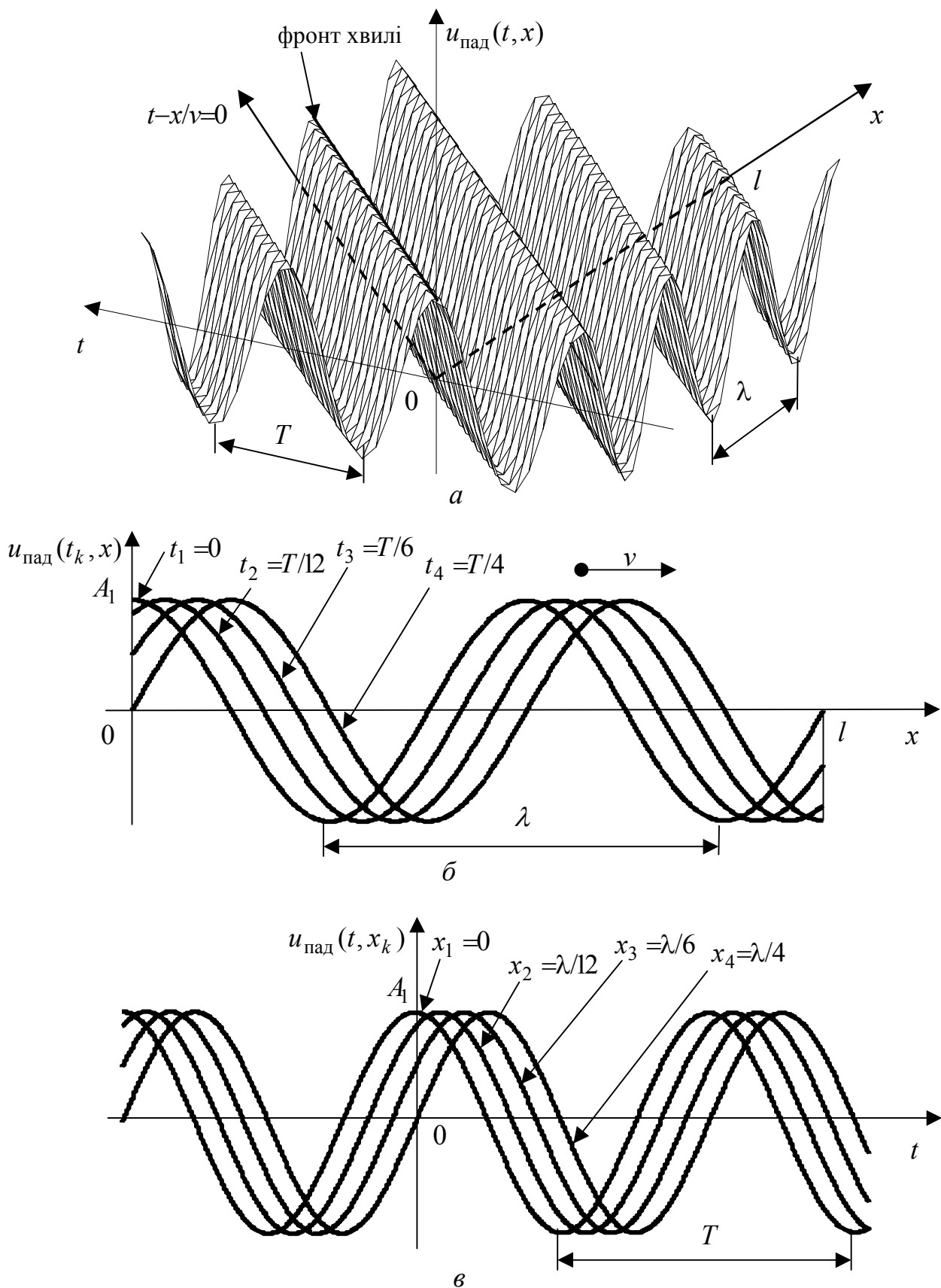


Рисунок 5.13 – Графіки падаючої хвилі напруги в ідеальній довгій лінії ($\psi_{A1} = 0$): *a* – аксонометричне подання; *б* – розподіл вздовж лінії для моментів часу t_k ; *в* – залежність від часу у перерізах лінії x_k

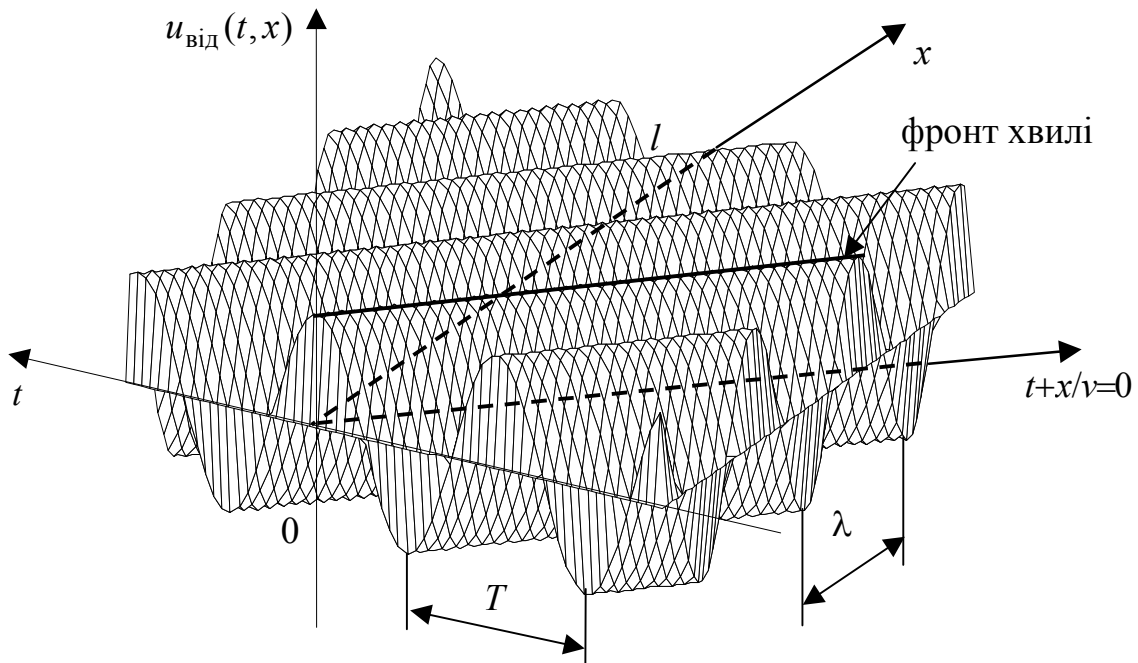


Рисунок 5.14 – Аксонометричне подання відбитої хвилі напруги в ідеальній довгій лінії ($\psi_{A2} = 0$)

Нижче наведені виведення формул для приблизних значень хвильового опору і коефіцієнта поширення ДЛМВ:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{XB}} &= \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 - j\omega C_1)}{G_1^2 + (\omega C_1)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{R_1 G_1 + \omega^2 L_1 C_1 + j\omega(L_1 G_1 - C_1 R_1)}{G_1^2 + (\omega C_1)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2 L_1 C_1 [R_1 G_1 / (\omega^2 L_1 C_1) + 1] + j\omega(L_1 G_1 - C_1 R_1) / (\omega^2 L_1 C_1)}{[G_1 / (\omega C_1)]^2 + 1}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sqrt{1 + j[G_1 / (\omega C_1) - R_1 / (\omega L_1)]} \approx R_{\text{XB}} \{1 + j0,5[G_1 / (\omega C_1) - R_1 / (\omega L_1)]\}; \\ \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{[1 - jR_1 / (\omega L_1)][1 - jG_1 / (\omega C_1)]} = \\ &= j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{[1 - R_1 G_1 / (\omega^2 L_1 C_1)] - j[R_1 / (\omega L_1) + G_1 / (\omega C_1)]} \approx \\ &\approx j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{[1 - j[R_1 / (\omega L_1) + G_1 / (\omega C_1)]]} \approx j\omega \sqrt{L_1 C_1} \{1 - j0,5[R_1 / (\omega L_1) + G_1 / (\omega C_1)]\} = \\ &= 0,5(R_1 / R_{\text{XB}} + G_1 R_{\text{XB}}) + j\omega \sqrt{L_1 C_1} = \alpha + j\beta, \end{aligned}$$

де $R_{\text{XB}} = \sqrt{L_1 / C_1}$ – хвильовий опір ідеальної лінії; $\alpha \approx 0,5(R_1 / R_{\text{XB}} + G_1 R_{\text{XB}})$,
 $\beta \approx \omega \sqrt{L_1 C_1}$ – приблизні вирази для коефіцієнтів ослаблення і фази, відповідно.

Для ліній з повітряною ізоляцією $G_1 = 0$, і тому приблизні співвідношення для коефіцієнта ослаблення і хвильового опору спрощуються:

$$\alpha \approx 0,5R_1 / R_{\text{XB}}; \quad \underline{Z}_{\text{XB}} \approx R_{\text{XB}} [1 - j0,5(R_1 / \omega L_1)].$$

Формули для розрахунку вторинних параметрів ідеальних ліній і ДЛМВ зведені до табл.5.9.

Приклад 5.12. Розрахувати приблизні значення коефіцієнта ослаблення і хвильового опору симетричної двопровідної повітряної ДЛМВ, розглянутої у прикладах 5.1 і 5.9, для частоти $f = 100$ МГц.

Розв'язання. Скористуємось знайденими у прикладах 5.1 і 5.9 значеннями первинних параметрів даної лінії:

$$L_1 = 8,886 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}; \quad C_1 = 1,264 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}; \quad R_1 = 1,615 \text{ Ом/м}; \quad G_1 = 0;$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 1,615 + j558,324 \text{ Ом/м}; \quad \underline{Y}_1 = j\omega C_1 = j7,942 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}.$$

Знайдемо хвильовий опір ідеальної лінії з такими самими, як у даної лінії, значеннями первинної індуктивності та ємності:

$$R_{\text{XB}} = \sqrt{L_1 / C_1} = \sqrt{8,886 \cdot 10^{-7} / 1,264 \cdot 10^{-11}} = 265,1 \text{ Ом}.$$

За приблизними формулами, наведеними у табл.5.6 для $G_1 = 0$, знайдемо:

1) коефіцієнт ослаблення

$$\alpha \approx 0,5R_1 / R_{\text{XB}} = 0,5 \cdot 1,615 / 265,1 = 3,046 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/м};$$

2) хвильовий опір

$$\underline{Z}_{\text{XB}} \approx R_{\text{XB}} [1 - j0,5(R_1 / \omega L_1)] = 265,1(1 - j0,5 \cdot 1,615 / 558,324) = 265,1 - j0,383 \text{ Ом}.$$

Порівнюючи отримані результати з точними розрахунками прикладу 5.9, бачимо доцільність застосування приблизних співвідношень.

Таблиця 5.9 – Параметри ідеальних ліній і ДЛМВ

Параметр	Ідеальна ДЛ	ДЛМВ
Хвильовий опір	$R_{\text{XB}} = \sqrt{L_1 / C_1}$	$\underline{Z}_{\text{XB}} \approx R_{\text{XB}} [1 + j0,5 (G_1 / \omega C_1 - R_1 / \omega L_1)];$ $\underline{Z}_{\text{XB}} \approx R_{\text{XB}} [1 - j0,5(R_1 / \omega L_1)],$ якщо $G_1 = 0$
Коефіцієнт ослаблення	$\alpha = 0$	$\alpha \approx 0,5(R_1 / R_{\text{XB}} + G_1 R_{\text{XB}});$ $\alpha \approx 0,5R_1 / R_{\text{XB}},$ якщо $G_1 = 0$
Коефіцієнт фази	$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$	$\beta \approx \omega \sqrt{L_1 C_1}$
Довжина хвилі	$\lambda = \frac{1}{f \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{T}{\sqrt{L_1 C_1}}$	$\lambda \approx \frac{1}{f \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{T}{\sqrt{L_1 C_1}}$
Фазова швидкість	$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$	$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$

Приклад 5.13. За приблизними формулами визначити коефіцієнт ослаблення і хвильовий опір для частоти $f = 1000$ МГц коаксіального кабеля і стрічкової лінії, розглянутих у прикладах 5.2, 5.3 і 5.10.

Розв'язання. Скористуємось значеннями первинних параметрів, погонних комплексних опорів і провідностей цих ліній (див. табл. 5.7). Результати розрахунків за відповідними приблизними співвідношеннями з табл.5.9 зведемо до табл.5.10.

Таблиця 5.10 – До прикладу 5.13

Параметр і розрахункова формула	Результати розрахунків	
	Коаксіальний кабель	Стрічкова лінія
Хвильовий опір ідеальної лінії, $R_{\text{ХВ}} = \sqrt{L_1 / C_1}$, Ом	92,6	131,4
Коефіцієнт ослаблення $\alpha \approx 0,5(R_1 / R_{\text{ХВ}} + G_1 R_{\text{ХВ}})$, Нп/м	0,018	0,065
Хвильовий опір лінії з урахуванням втрат $\underline{Z}_{\text{ХВ}} \approx R_{\text{ХВ}}[1 + j0,5(G_1 / \omega C_1 - R_1 / \omega L_1)]$, Ом	$92,6 - j0,035$	$131,4 - j0,248$

Оцінка отриманих результатів вказує на досить повний збіг розрахованих вторинних параметрів з даними прикладу 5.10 (табл. 5.7).

5.6 Режим біжних хвиль

Режим біжних хвиль (режим узгодження) існує, коли лінію навантажено на хвильовий опір ($\underline{Z}_{\text{н}} = \underline{Z}_{\text{ХВ}}$ – для реальної; $\underline{Z}_{\text{н}} = R_{\text{ХВ}}$ – для ідеальної лінії). У підрозд. 5.4 показано, що в цьому режимі відбита хвиля відсутня (коефіцієнт відбиття дорівнює нулю), а опір у будь-якому перерізі лінії та вхідний опір дорівнюють хвильовому.

Аналізуючи режим біжних хвиль у реальній лінії (рис.5.15, а), вважають заданими комплексні амплітуди напруги $\underline{U}_{m2} = U_{m2} e^{j\psi_{u2}}$ і струму $\underline{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\psi_{i2}}$ у кінці лінії, пов'язані між собою за законом Ома:

$$\underline{U}_{m2} = \underline{Z}_{\text{ХВ}} \underline{I}_{m2}; \quad U_{m2} = Z_{\text{ХВ}} I_{m2}; \quad \psi_{u2} - \psi_{i2} = \varphi_{\text{ХВ}}, \quad (5.67)$$

де $Z_{\text{ХВ}}$ – повний хвильовий опір; $\varphi_{\text{ХВ}}$ – аргумент комплексного хвильового опору.

З огляду на вираз (5.67) і співвідношення для гіперболічних функцій

$$\text{ch} \underline{\gamma} y + \text{sh} \underline{\gamma} y = \frac{e^{\underline{\gamma} y} + e^{-\underline{\gamma} y}}{2} + \frac{e^{\underline{\gamma} y} - e^{-\underline{\gamma} y}}{2} = e^{\underline{\gamma} y},$$

система рівнянь для комплексних амплітуд напруги і струму у довільному пе-

перізі лінії з координатою y (див. табл.5.5)

$$\begin{cases} \underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2} \operatorname{sh} \underline{\gamma} y; \\ \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{\text{XB}}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} y \end{cases} \quad (5.68)$$

приймає вигляд

$$\begin{cases} \underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} (\operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \operatorname{sh} \underline{\gamma} y) = \underline{U}_{m2} e^{\underline{\gamma} y} = U_{m2} e^{j\psi_{u2}} e^{(\alpha+j\beta)y} = U_m(y) e^{j\psi_u(y)}; \\ \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} (\operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \operatorname{sh} \underline{\gamma} y) = \underline{I}_{m2} e^{\underline{\gamma} y} = I_{m2} e^{j\psi_{i2}} e^{(\alpha+j\beta)y} = I_m(y) e^{j\psi_i(y)}, \end{cases} \quad (5.69)$$

де $U_m(y) = U_{m2} e^{\alpha y}$, $I_m(y) = I_{m2} e^{\alpha y}$, $\psi_u(y) = \psi_{u2} + \beta y$, $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \beta y$ – закони змінювання амплітуд і початкових фаз відповідно напруги і струму у довільному перерізі лінії.

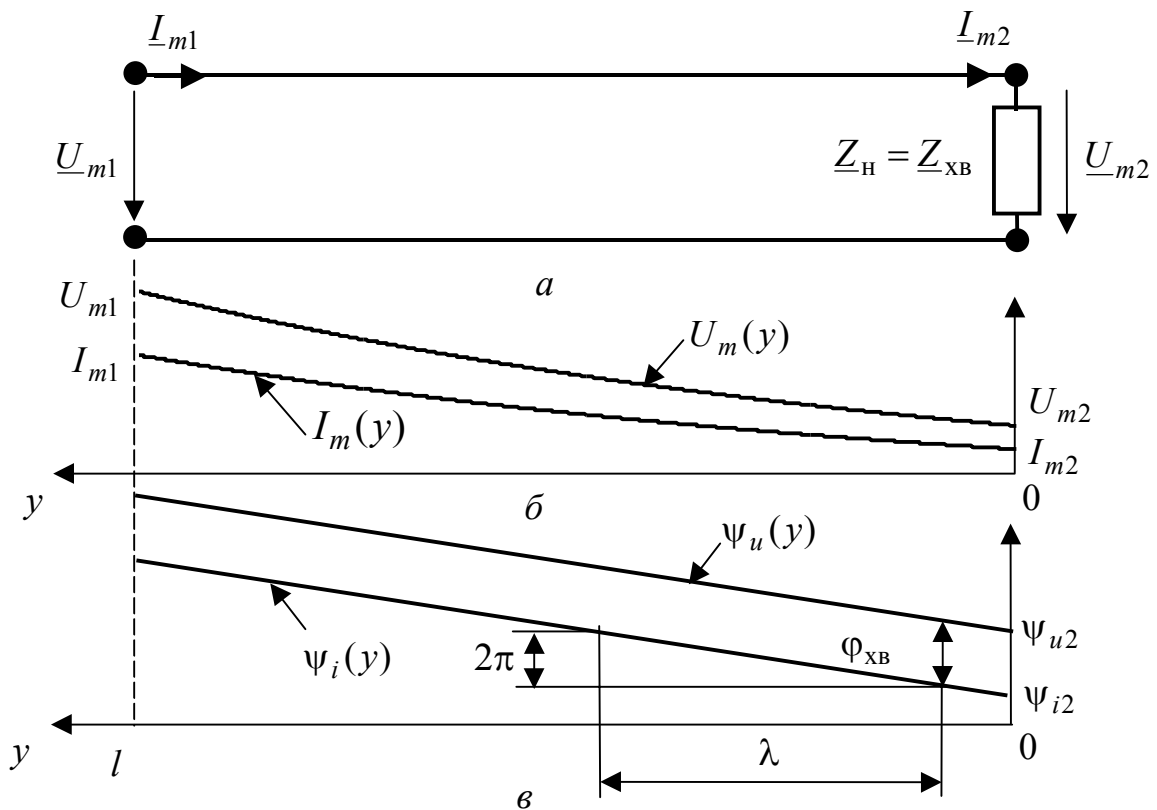


Рисунок 5.15 – Режим біжних хвиль в лінії з втратами: *a* – схема лінії; *б* – розподіл амплітуд напруги і струму; *в* – розподіл початкових фаз напруги і струму ($\varphi_{\text{XB}} > 0$)

Графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги і струму вздовж лінії побудовані на рис.5.15, *б*, *в*. На рис.5.16 показане векторне подання $\underline{U}_m(y)$ на комплексній площині. Ці графіки ілюструють збільшення амплітуд і початкових фаз у напрямку до входу лінії. Амплітуди змінюються за експоненціальним, а початкові фази – за лінійним законом. **Початкові фази у пе-**

перізах лінії на відстані $n\lambda/4$ один від одного відрізняються на $n\pi/2$.

Система рівнянь (5.69) дозволяє записати миттєві значення напруги і струму у перерізі лінії з координатою y :

$$u(t, y) = \operatorname{Re}[\underline{U}_m(y)e^{j\omega t}] = U_{m2}e^{\alpha y} \cos(\omega t + \beta y + \psi_{u2});$$

$$i(t, y) = \operatorname{Re}[\underline{I}_m(y)e^{j\omega t}] = I_{m2}e^{\alpha y} \cos(\omega t + \beta y + \psi_{i2}).$$

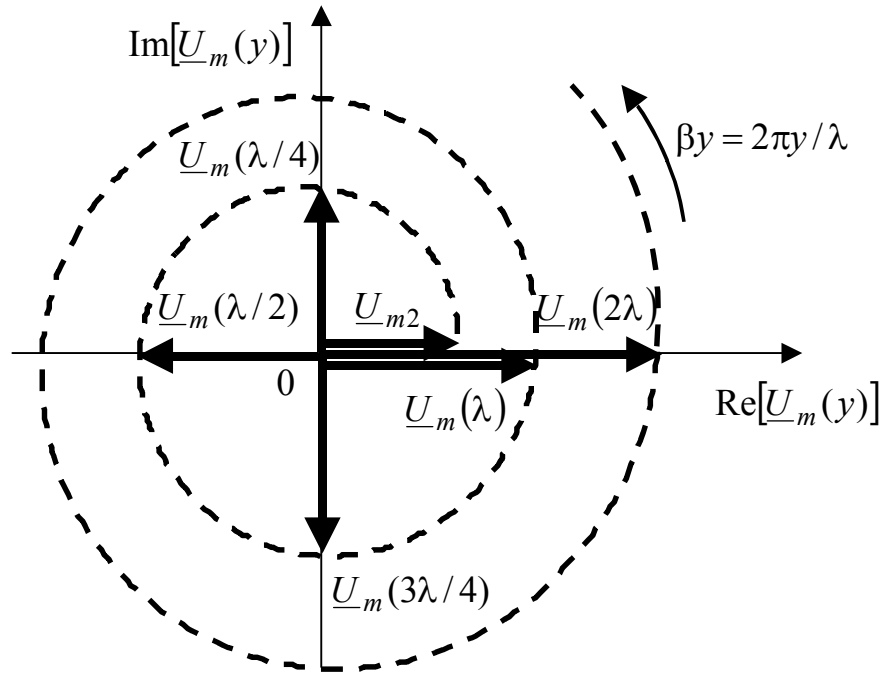


Рисунок 5.16 – Векторне подання комплексної амплітуди напруги (при $\psi_{u2}=0$) у різних перерізах узгодженої лінії з втратами

Енергетичним показником режиму роботи довгої лінії є коефіцієнт корисної дії (ККД):

$$\eta = \frac{P_{\text{Ан}}}{P_{\text{А1}}} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_1 I_1 \cos \varphi_1},$$

де $P_{\text{Ан}}, P_{\text{А1}}$ – активні потужності у навантаженні та на вході лінії, відповідно; φ_1, φ_2 – зсув фаз між напругою і струмом на вході та виході лінії, відповідно.

У режимі біжних хвиль значення ККД становитиме:

$$\eta = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_{\text{ХВ}}}{U_1 I_1 \cos \varphi_{\text{ХВ}}} = \frac{U_2 I_2}{U_2 e^{\alpha l} I_2 e^{\alpha l}} = e^{-2\alpha l}. \quad (5.70)$$

Для ДЛМВ, з огляду на приблизний вираз для коефіцієнта ослаблення (див. табл.5.9) $\alpha \approx 0,5(R_1/R_{\text{ХВ}} + G_1 R_{\text{ХВ}})$, співвідношення (5.70) запишеться у вигляді:

$$\eta \approx e^{-(R_1/R_{\text{ХВ}} + G_1 R_{\text{ХВ}})l}.$$

Якщо $2\alpha l \ll 1$, вираз (5.70) спрощується:

$$\eta = e^{-2\alpha l} \approx 1 - 2\alpha l. \quad (5.71)$$

Якщо знехтувати втратами ($\alpha = 0$; $\underline{\gamma} = j\beta$), то ККД дорівнюватиме одиниці, а система рівнянь (5.69) прийме вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} e^{j\beta y} = U_{m2} e^{j\psi_{u2}} e^{j\beta y} = U_{m2} e^{j(\beta y + \psi_{u2})} = U_{m2} e^{j\psi_u(y)}; \\ \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} e^{j\beta y} = I_{m2} e^{j\psi_{i2}} e^{j\beta y} = I_{m2} e^{j(\psi_{i2} + \beta y)} = I_{m2} e^{j\psi_i(y)}, \end{cases} \quad (5.72)$$

де $\psi_u(y) = \psi_{u2} + \beta y$, $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \beta y$ – закони змінювання початкових фаз напруги і струму у довільному перерізі лінії.

З системи (5.72) виходить, що амплітуди напруги і струму у будь-якому перерізі ідеальної лінії однакові (рис.5.17, б):

$$U_m(y) = U_{m2}; \quad I_m(y) = I_{m2}.$$

Хвильовий опір $R_{\text{хв}}$ ідеальної лінії має чисто активний характер і є навантаженням лінії для даного режиму (рис.5.17, а). Тому $\psi_{u2} = \psi_{i2}$ і закони змінювання початкових фаз напруги і струму у будь-якому перерізі збігаються (рис.5.17, в).

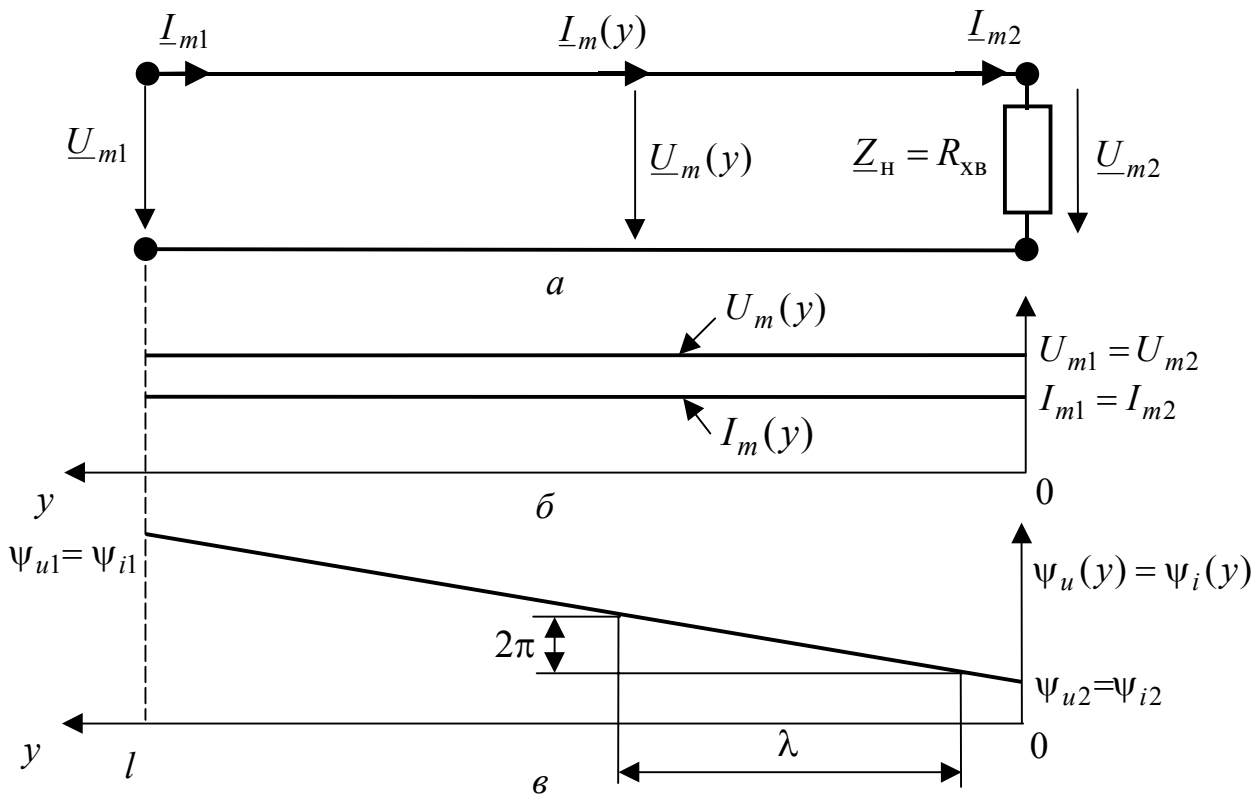


Рисунок 5.17 – Режим біжних хвиль в ідеальній лінії:
 а – схема лінії; б – розподіл амплітуд напруги і струму;
 в – розподіл початкових фаз напруги і струму

Приклад 5.14. Розрахувати і побудувати графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги і струму для узгодженої симетричної повітряної дво-провідної лінії (див. приклади 5.1 і 5.9) на частоті $f = 100$ МГц, якщо довжина лінії $l = 50$ м, а комплексна амплітуда напруги у кінці лінії $\underline{U}_{m2} = 10$ В. Знайти розв'язок: 1) для ідеальної лінії; 2) лінії з урахуванням втрат, визначити ККД.

Розв'язання. Скористуємось значеннями вторинних параметрів лінії з прикладу 5.9:

- 1) коефіцієнт ослаблення $\alpha \approx 3,046 \cdot 10^{-3}$ Нп/м;
- 2) коефіцієнт фази $\beta = \text{Im}(\underline{\gamma}) = 2,106$ рад/м;
- 3) хвильовий опір
 - для ідеальної лінії $R_{\text{ХВ}} = 265,1$ Ом;
 - з урахуванням втрат у лінії $\underline{Z}_{\text{ХВ}} \approx 265,1 - j0,383$ Ом.

Щоб визначити розподіл амплітуд і початкових фаз напруги і струму, нехтуючи втратами, скористуємось співвідношенням (5.72):

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} = 10 \text{ В}; \quad \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} = \underline{U}_{m2} / R_{\text{ХВ}} = 10 / 265,1 = 0,038 \text{ А};$$

$$\psi_u(y) = \psi_i(y) = \beta y = 2,106y \text{ рад.}$$

Розрахунки для лінії з втратами виконаємо за формулою (5.69):

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} e^{\underline{\gamma}y} = \underline{U}_{m2} e^{(\alpha + j\beta)y} = 10 e^{3,046 \cdot 10^{-3}y} e^{j2,106y} \text{ В};$$

$$\underline{U}_m(y) = 10 e^{3,046 \cdot 10^{-3}y} \text{ В}; \quad \psi_u(y) = 2,106y \text{ рад};$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} e^{\underline{\gamma}y} = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{\text{ХВ}}} e^{(\alpha + j\beta)y} = \frac{10 e^{3,046 \cdot 10^{-3}y} e^{j2,106y}}{265,1 - j0,383} =$$

$$= 0,038 e^{3,046 \cdot 10^{-3}y} e^{j(1,444 \cdot 10^{-3} + 2,106)y} \text{ А};$$

$$\underline{I}_m(y) = 0,038 e^{3,046 \cdot 10^{-3}y} \text{ А}; \quad \psi_i(y) = 1,444 \cdot 10^{-3} + 2,106y \approx 2,106y \text{ рад.}$$

Побудуємо графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги і струму в лінії (рис.5.18). Суцільними лініями показані графіки для амплітуд у разі нехтування втратами, а пунктиром – враховуючи втрати.

За формулою (5.70) знайдемо ККД лінії з урахуванням втрат:

$$\eta = e^{-2\alpha l} = e^{-2 \cdot 3,044 \cdot 10^{-3} \cdot 50} = 0,737 = 73,7 \text{ \%}.$$

Приклад 5.15. Розрахувати режим біжних хвиль у коаксіальному кабелі та стрічковій лінії, розглянутих у прикладі 5.10, враховуючи втрати, на частоті $f = 1000$ МГц. Побудувати графіки розподілу $\underline{U}_m(y)$, $\underline{I}_m(y)$. Задано довжину лінії $l = 12$ м і комплексну амплітуду вхідного струму $\underline{I}_{m1} = 15 e^{j\pi/4}$ мА.

Розв'язання. Використаємо значення вторинних параметрів ліній (табл.5.7). Основні співвідношення і розрахунки зведемо до табл.5.11. Графіки $\underline{U}_m(y)$, $\underline{I}_m(y)$ побудовано на рис.5.19.

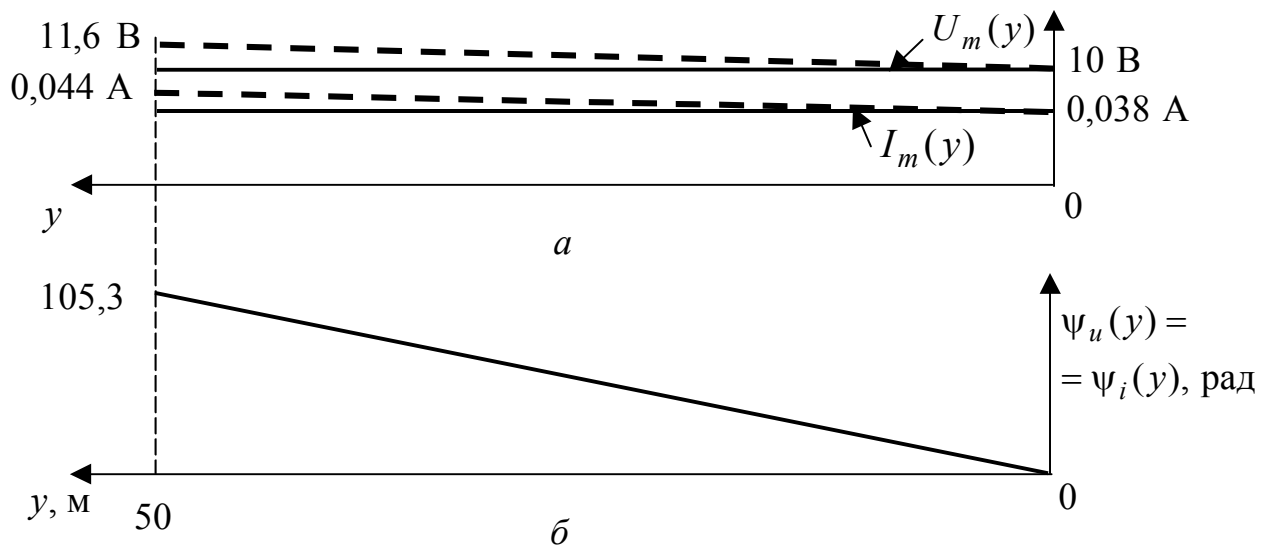


Рисунок 5.18 – До прикладу 5.14: *a* – розподіл амплітуд напруги і струму; *б* – розподіл початкових фаз напруги і струму

Таблиця 5.11 – Результати розрахунків у прикладі 5.15

Параметр, формула	Результати розрахунку	
	Коаксіальний кабель	Стрічкова лінія
Комплексна амплітуда струму на виході лінії $\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{m1} e^{-\gamma l}$	$12,086e^{-j378,3}$	$6,876e^{-j363,7}$
Комплексна амплітуда напруги на виході лінії $\underline{U}_{m2} = \underline{Z}_{\text{ХВ}} \underline{I}_{m2}$	$1119e^{-j378,3}$	$903,6e^{-j363,7}$
Закон розподілу амплітуди напруги $U_m(y) = U_{m2} e^{\alpha y}$	$1119e^{0,018y}$	$903,6e^{0,065y}$
Закон розподілу амплітуди струму $I_m(y) = I_{m2} e^{\alpha y}$	$12,086e^{0,018y}$	$6,876e^{0,065y}$
Закон розподілу початкових фаз напруги $\psi_u(y) = \psi_{u2} + \beta y$	$-378,3 + 31,59y$	$-363,7 + 30,37y$
Закон розподілу початкових фаз струму $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \beta y$	$-378,3 + 31,59y$	$-363,7 + 30,37y$
ККД η , %	64,9	21

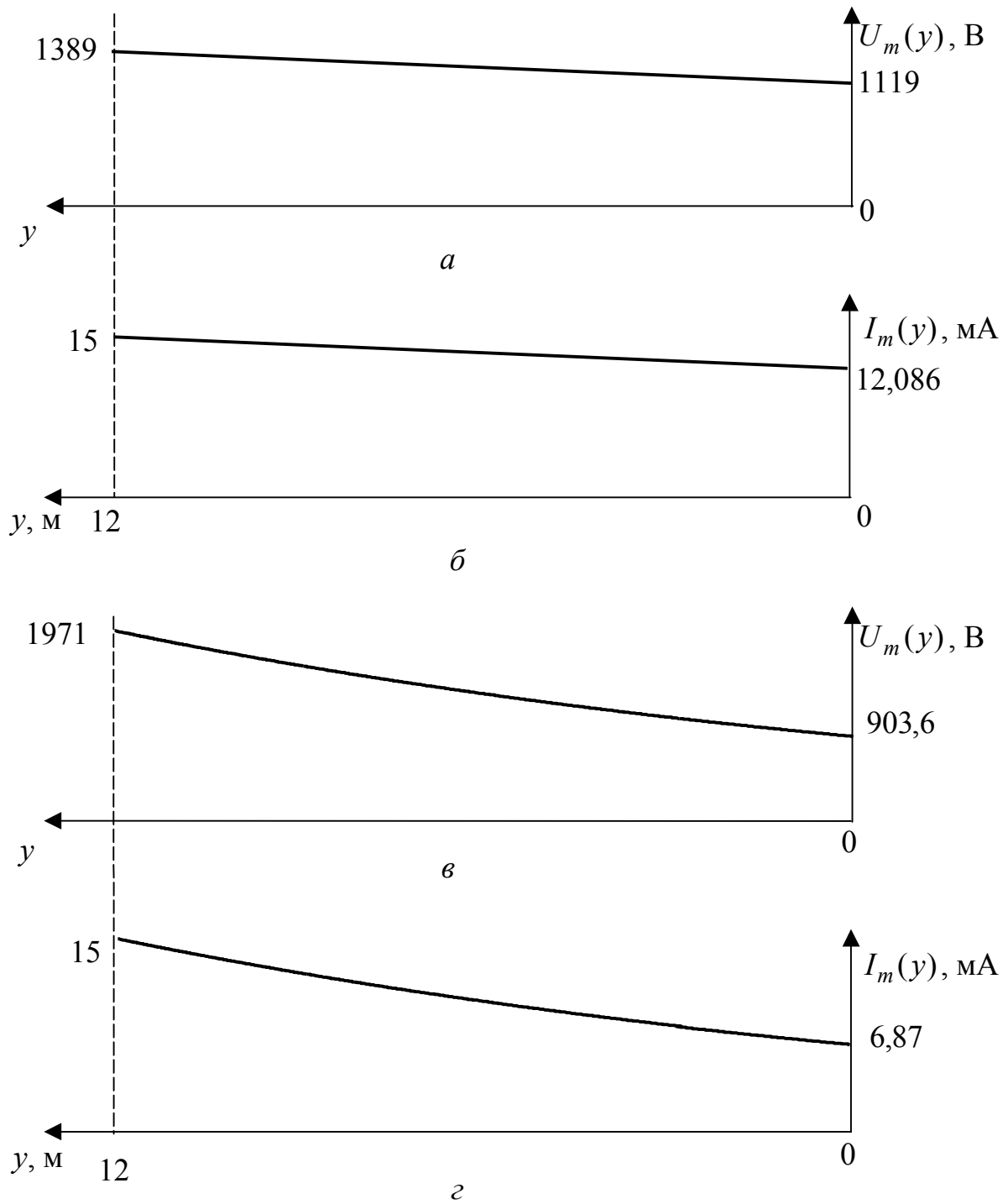


Рисунок 5.19 – Розподіл амплітуд напруги і струму до прикладу 5.15:
a, б – коаксіальна лінія; *в, г* – стрічкова лінія

5.7 Режим стійних хвиль

В режимі стійних хвиль енергія повністю відбивається від навантаження, тобто модуль комплексного коефіцієнта відбиття (5.58) у кінці лінії дорівнює одиниці:

$$\rho(0) = \left| \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_{XB}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{XB}} \right| = 1. \quad (5.73)$$

В лінії з втратами умова (5.73) виконується тоді, коли $\underline{Z}_H \rightarrow \infty$ або $\underline{Z}_H = 0$, що відповідає холостому ходу або короткому замиканню у кінці лінії.

В ідеальній лінії ($\underline{Z}_{XB} = R_{XB}$) даний режим, окрім холостого ходу і короткого замикання, спостерігається також, якщо лінію навантажено на реактивний опір (індуктивність або ємність). Так, після підстановки $\underline{Z}_H = jX_2$ ($X_2 > 0$ – індуктивність, $X_2 < 0$ – ємність) і $\underline{Z}_{XB} = R_{XB}$ у формулу (5.73), виходить:

$$\rho(0) = \left| \frac{jX_2 - R_{XB}}{jX_2 + R_{XB}} \right| = \frac{\sqrt{R_{XB}^2 + X_2^2}}{\sqrt{R_{XB}^2 + X_2^2}} = 1.$$

5.7.1 Холостий хід в ідеальній лінії

При розімкнених вихідних затискачах (рис.5.20, а) $\underline{I}_{m2} = 0$, $\underline{U}_{m2} \neq 0$ і рівняння для ідеальної лінії (див. табл.5.8) запишуться у вигляді:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \cos \beta y + j \underline{I}_{m2} R_{XB} \sin \beta y = \underline{U}_{m2} \cos \beta y; \quad (5.74)$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \cos \beta y + j(\underline{U}_{m2}/R_{XB}) \sin \beta y = j(\underline{U}_{m2}/R_{XB}) \sin \beta y, \quad (5.75)$$

де $\beta = 2\pi/\lambda$ – коефіцієнт фази; $\underline{U}_{m2} \neq 0$ – комплексна амплітуда напруги на виході лінії.

З рівнянь (5.74) і (5.75) виходять вирази для розрахунку:

– миттєвих значень напруги (рис.5.21) і струму у будь-якому перерізі лінії:

$$u(t, y) = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_m(y) e^{j\omega t} \right] = U_{m2} \cos \beta y \cos(\omega t + \psi_{u2}); \quad (5.76)$$

$$i(t, y) = \operatorname{Re} \left[\underline{I}_m(y) e^{j\omega t} \right] = (U_{m2}/R_{XB}) \sin \beta y \cos(\omega t + \psi_{u2} + \pi/2);$$

– амплітуд напруги і струму в лінії (рис.5.20, б):

$$U_m(y) = U_{m2} |\cos \beta y|; \quad (5.77)$$

$$I_m(y) = (U_{m2}/R_{XB}) |\sin \beta y|; \quad (5.78)$$

– початкових фаз напруги і струму в лінії (рис.5.20, в):

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos \beta y > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos \beta y < 0; \end{cases} \quad (5.79)$$

$$\psi_i(y) = \psi_{u2} + \pi/2 + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sin \beta y > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \sin \beta y < 0. \end{cases} \quad (5.80)$$

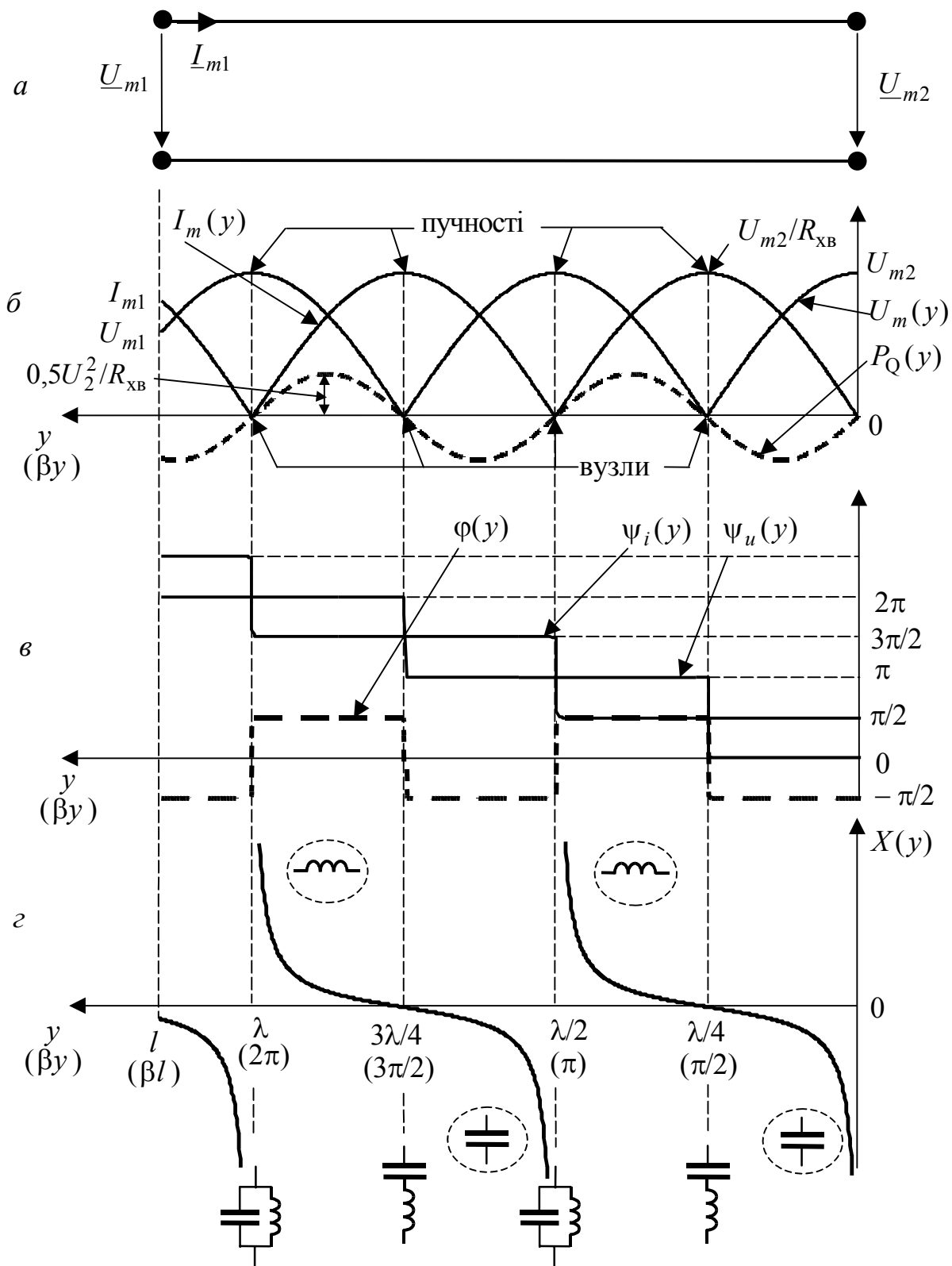


Рисунок 5.20 – Режим стійних хвиль у розімкненій ідеальній лінії: *a* – схема лінії; розподіли: *b* – амплітуд напруги і струму, реактивної потужності; *c* – початкових фаз і зсуву фаз між напругою ($\psi_{u2} = 0$) і струмом; *d* – реактивного опору

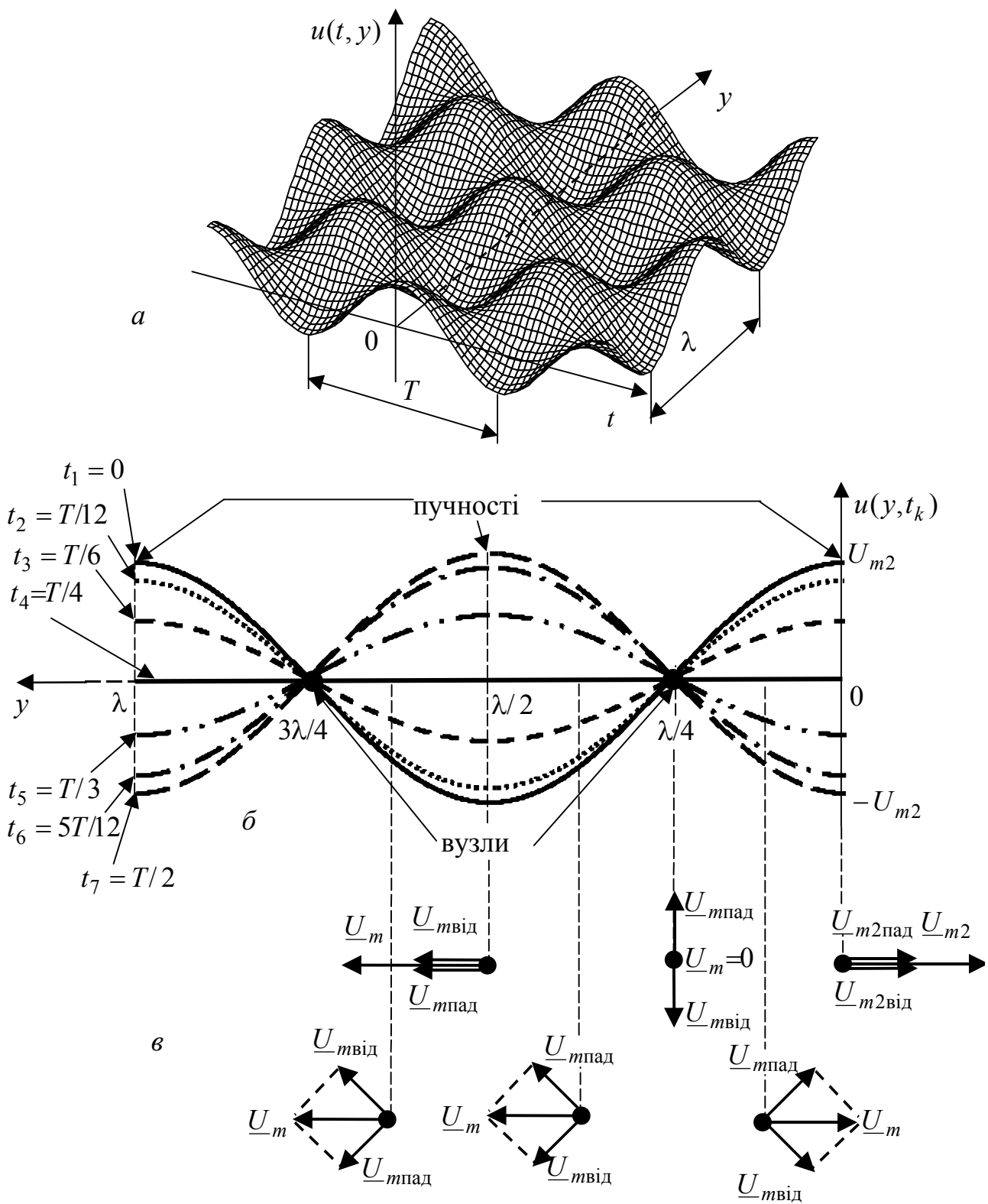


Рисунок 5.21 – Напряга у розімкненій ідеальній ДЛ ($\psi_{u2} = 0$):
 а – аксонометричне подання; б – розподіл вздовж лінії для моментів часу t_k ;
 в – векторні діаграми

Вираз для комплексного опору у довільному перерізі лінії можна знайти як за загальною формулою (табл.5.8):

$$\begin{aligned} \underline{Z}(y) &= \lim_{Z_H \rightarrow \infty} R_{XB} \frac{Z_H \cos \beta y + jR_{XB} \sin \beta y}{R_{XB} \cos \beta y + jZ_H \sin \beta y} = \\ &= R_{XB} \frac{\cos \beta y}{j \sin \beta y} = -jR_{XB} \operatorname{ctg} \beta y = jX(y), \end{aligned} \quad (5.81)$$

так і діленням виразу (5.74) на (5.75):

$$\underline{Z}(y) = \frac{U_m(y)}{I_m(y)} = -jR_{XB} \operatorname{ctg} \beta y = jX(y).$$

Співвідношення (5.81) для $\underline{Z}(y)$ свідчить, що опір у довільному перерізі лінії є уявним, тобто має реактивний характер. Графік функції $X(y) = -R_{XB} \operatorname{ctg} \beta y$ зображено на рис.5.20, з.

Комплексний коефіцієнт відбиття у будь-якому перерізі з огляду на загальну формулу (див. табл.5.8) для даного випадку становить:

$$\underline{\rho}(y) = \frac{U_{m\text{від}}(y)}{U_{m\text{пад}}(y)} = -\frac{I_{m\text{від}}(y)}{I_{m\text{пад}}(y)} = \lim_{Z_H \rightarrow \infty} \frac{Z_H - R_{XB}}{Z_H + R_{XB}} e^{-j2\beta y} = e^{-j2\beta y}. \quad (5.82)$$

Оскільки $\rho(0) = 1$, вирази для активної та реактивної потужностей, використовуючи формули з табл.5.8, можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} P_A &= R_{XB} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] = 0; \\ P_Q(y) &= 2R_{XB} I_{\text{пад}}^2 \sin(-2\beta y) = -2R_{XB} I_{\text{пад}}^2 \sin(2\beta y). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Графік реактивної потужності показаний на рис.5.20, б.

Аналіз співвідношень (5.76) – (5.83) і графіків (рис.5.20 і 5.21) дозволяє зробити такі висновки щодо розімкненої ідеальної лінії:

1) реактивний характер опору лінії у будь-якому її перерізі та аксонометричне подання процесів у функції часу і координати (рис.5.21, а) свідчать, що енергія джерела не споживається і не переміщується до виходу лінії, отже існує тільки реактивна потужність;

2) з формули (5.82) виходить, що амплітуди падаючих і відбитих хвиль напруги і струму у будь-якому перерізі становлять, відповідно:

$$U_{m\text{пад}}(y) = U_{m\text{від}}(y); \quad I_{m\text{від}}(y) = I_{m\text{пад}}(y),$$

а фазові зсуви, які визначають залежність амплітуд напруги і струму від координати вздовж лінії (рис.5.20, б), дорівнюють:

$$\psi_{u\text{пад}}(y) - \psi_{u\text{від}}(y) = 2\beta y = \frac{4\pi}{\lambda} y; \quad \psi_{i\text{пад}}(y) - \psi_{i\text{від}}(y) = 2\beta y - \pi = \frac{4\pi}{\lambda} y - \pi;$$

3) у кінці лінії ($y=0$) і на відстанях від кінця лінії, кратних $\lambda/2$ ($\beta y = n\pi$, $n=1,2,3,\dots$), падаюча і відбита хвилі напруги перебувають у фазі (рис.5.21, в), а струму – у протифазі; тому в цих перерізах лінії мають місце максимальні значення амплітуд напруги і нульові значення струму (рис.5.20, б);

4) на відстанях від кінця лінії, кратних непарній кількості $\lambda/4$ ($\beta y = n\pi - \pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$), падаюча і відбита хвилі напруги перебувають у протифазі (рис.5.21, в), а струму – у фазі; в цих перерізах лінії спостерігаються нульові значення напруги і максимальні значення амплітуди струму (рис.5.20, б);

5) перерізи лінії, в яких амплітуди напруги або струму максимальні, називають **пучностями** (рис.5.20, б);

6) перерізи з нульовими значеннями амплітуд напруги або струму називають **вузлами** (рис.5.20, б); у вузлах початкова фаза змінюється стрибком на кут π (рис.5.20, в);

7) у кінці лінії наявні пучність напруги і вузол струму;

8) пучності, як і вузли, спостерігаються в лінії періодично з інтервалом $\lambda/2$; пучності напруги збігаються з вузлами струму, а вузли напруги – з пучностями струму;

9) опір у будь-якому перерізі лінії є реактивним – індуктивним чи ємнісним (рис.5.20, з); характер реактивності змінюється через $\lambda/4$; опір є індуктивним ($\psi_u - \psi_i = \pi/2$) у перерізах, для яких $(n\pi - \pi/2) < \beta y < n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$); у перерізах лінії, які відповідають $(n-1)\pi < \beta y < (n\pi - \pi/2)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) опір – ємнісний ($\psi_u - \psi_i = -\pi/2$); опір розімкненої лінії довжиною $l < \lambda/4$ також має ємнісний характер;

10) лінія, довжина якої кратна непарній кількості $\lambda/4$, має нульовий вхідний опір; вона еквівалентна ідеальному послідовному контуру, який настроєно в резонанс (рис.5.20, з);

11) вхідний опір лінії, довжина якої кратна $\lambda/2$, прямує до нескінченності, що відповідає ідеальному паралельному контуру, настроєному в резонанс (рис.5.20, з).

5.7.2 Коротке замикання в ідеальній лінії

При короткому замиканні (рис.5.22, а) основні формули для аналізу можна отримати, використовуючи наведені у табл.5.8 співвідношення для лінії без втрат, а також граничні умови на вихідних затискачах лінії ($\underline{U}_{m2} = 0; \underline{I}_{m2} \neq 0$) і аналогічну п.5.7.1 методику виведення. Підсумкові формули зведено до табл.5.12.

Аналіз співвідношень (табл.5.12) і побудованих на їх основі графіків (рис.5.22) показує типові особливості режиму стійних хвиль: наявність вузлів і пучностей (рис.5.22, б), змінювання амплітуд напруги і струму вздовж лінії за законом модуля синуса або косинуса (рис.5.22, б), стрибкоподібна (на π) зміна початкових фаз напруги і струму (рис.5.22, в), реактивний характер опору у довільному перерізі (рис.5.22, з). Однак існують певні відмінності режимів короткого замикання і холостого ходу в ідеальній лінії:

1) розподіл для амплітуд струму і напруги ніби міняються місцями;

2) розподіл реактивного опору відрізняється від аналогічного розподілу

для розімкненої лінії зсувом на $\lambda/4$; опір короткозамкненої лінії довжиною $l < \lambda/4$ має індуктивний характер;

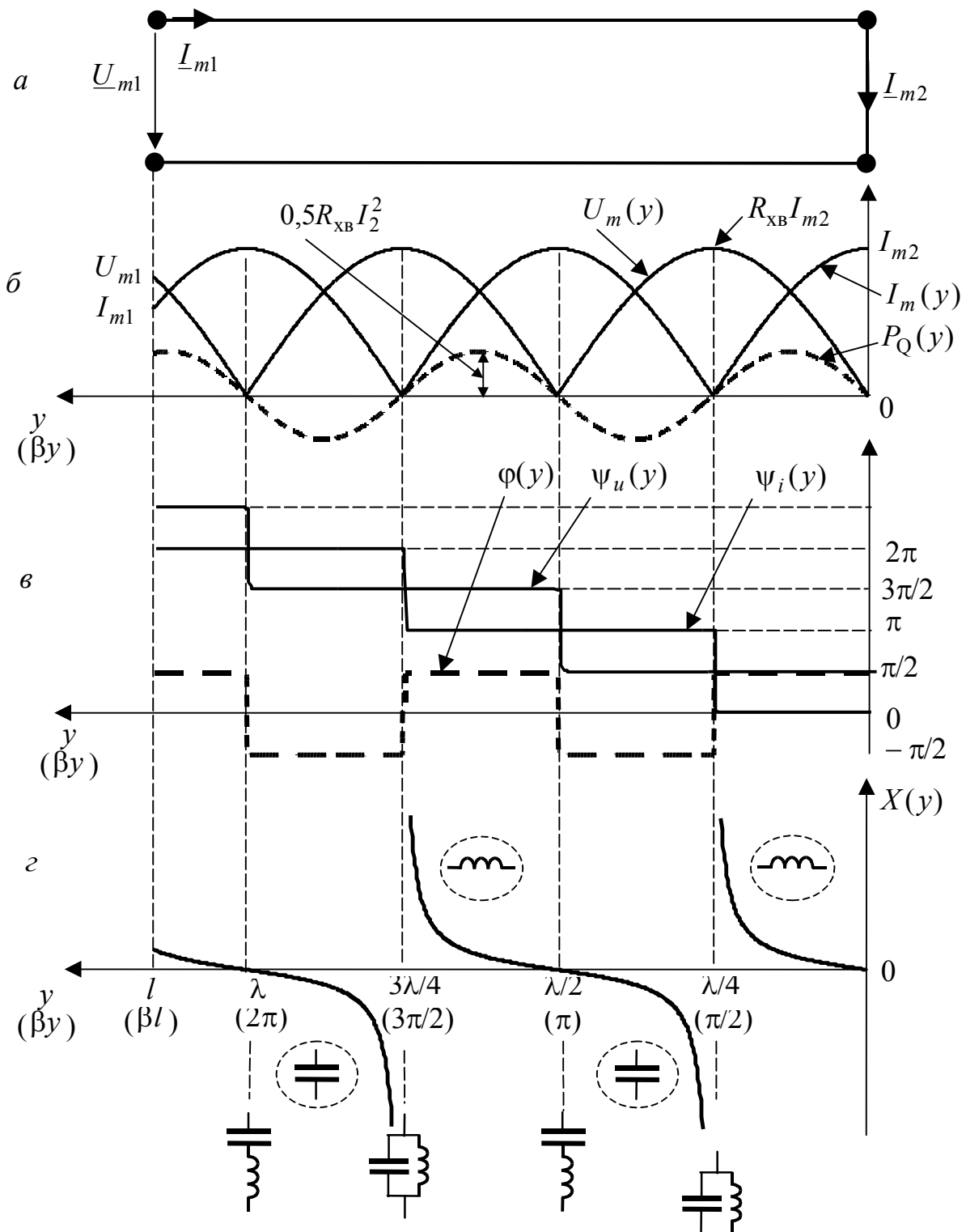


Рисунок 5.22 – Режим стійних хвиль у короткозамкненій ідеальній лінії: a – схема лінії; розподіли вздовж лінії: $б$ – амплітуд напруги і струму, реактивної потужності; $в$ – початкових фаз і зсуву фаз між напругою і струмом ($\psi_{i2} = 0$); $г$ – реактивного опору

3) короткозамкнена лінія, довжина якої кратна непарній кількості $\lambda/4$, має нескінченно великий вхідний опір і еквівалентна ідеальному паралельному контуру, який настроєно в резонанс (рис.5.22, з);

4) вхідний опір короткозамкненої лінії, довжина якої кратна $\lambda/2$, дорівнює нулю, що відповідає ідеальному послідовному контуру, який настроєно в резонанс (рис.5.22, з).

Отже, короткозамкнена і розімкнена лінії є прикладом дуальних кіл.

Таблиця 5.12 – Співвідношення для режиму стійних хвиль у короткозамкненій лінії без втрат

Параметри	Співвідношення
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = j\underline{I}_{m2}R_{\text{ХВ}}\sin\beta y;$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2}\cos\beta y$
Миттєві значення	$u(t, y) = R_{\text{ХВ}}I_{m2}\cos\beta y\cos(\omega t + \pi/2 + \psi_{i2});$ $i(t, y) = I_{m2}\cos\beta y\sin(\omega t + \psi_{i2})$
Амплітуди	$U_m(y) = I_{m2}R_{\text{ХВ}} \sin\beta y ;$ $I_m(y) = I_{m2} \cos\beta y $
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{i2} + \pi/2 + \begin{cases} 0, \text{ якщо } \sin\beta y > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \sin\beta y < 0; \end{cases}$ $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \begin{cases} 0, \text{ якщо } \cos\beta y > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \cos\beta y < 0 \end{cases}$
Комплексний опір	$\underline{Z}(y) = jR_{\text{ХВ}}\text{tg}\beta y$
Реактивний опір	$X(y) = R_{\text{ХВ}}\text{tg}\beta y$
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\underline{\rho}(y) = -e^{-j2\beta y}; \rho(0) = 1; \varphi_\rho(y) = \pi - 2\beta y$
Активна і реактивна потужності	$P_A = 0; P_Q(y) = 0,5R_{\text{ХВ}}I_2^2\sin(2\beta y)$

5.7.3 Холостий хід і коротке замикання в реальній лінії

У реальній лінії співвідношення для комплексного коефіцієнта відбиття (5.58) і його модуля при холостому ході та короткому замиканні матимуть вигляд, відповідно:

$$\underline{\rho}_{\text{х.х}}(y) = \lim_{Z_{\text{Н}} \rightarrow \infty} \frac{Z_{\text{Н}} - Z_{\text{ХВ}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ХВ}}} e^{-2\gamma y} = e^{-2\gamma y} = e^{-2\alpha y} e^{-j2\beta y};$$

$$\rho_{\text{х.х}}(y) = \frac{U_{\text{мвід}}(y)}{U_{\text{мпад}}(y)} = \frac{I_{\text{мвід}}(y)}{I_{\text{мпад}}(y)} = e^{-2\alpha y}; \quad (5.84)$$

$$\underline{\rho}_{\text{к.з}}(y) = \left. \frac{Z_{\text{Н}} - Z_{\text{ХВ}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ХВ}}} e^{-2\gamma y} \right|_{Z_{\text{Н}}=0} = -e^{-2\gamma y} = -e^{-2\alpha y} e^{-j2\beta y};$$

$$\rho_{к.з}(y) = \frac{U_{m\text{вiд}}(y)}{U_{m\text{пад}}(y)} = \frac{I_{m\text{вiд}}(y)}{I_{m\text{пад}}(y)} = e^{-2\alpha y}, \quad (5.85)$$

де $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ – коефіцієнт поширення; α – коефіцієнт ослаблення; β – коефіцієнт фази.

З формул (5.84) і (5.85) виходить, що модуль коефіцієнта відбиття дорівнює одиниці тільки в кінці лінії. Тому у розподілах амплітуд напруги і струму вздовж лінії відсутні нульові значення (вузли), а максимальні значення амплітуд не є постійними і зростають при наближенні до входу лінії.

Ці загальні висновки підтверджуються кількісними розрахунками за формулами, отриманими в результаті підстановки у рівняння реальної лінії (табл.5.5) граничних умов.

Рівняння для комплексних амплітуд струму і напруги, а також комплексного опору матимуть вигляд:

- при холостому ході ($I_{m2} = 0$):

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \text{ch} \underline{\gamma} y; \quad \underline{I}_m(y) = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{\text{XB}}} \text{sh} \underline{\gamma} y; \quad \underline{Z}(y) = \underline{Z}_{\text{XB}} \text{cth} \underline{\gamma} y; \quad (5.86)$$

- при короткому замиканні ($\underline{U}_{m2} = 0$):

$$\underline{U}_m(y) = \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m2} \text{sh} \underline{\gamma} y; \quad \underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \text{ch} \underline{\gamma} y; \quad \underline{Z}(y) = \underline{Z}_{\text{XB}} \text{th} \underline{\gamma} y. \quad (5.87)$$

Для обчислення потужностей застосовують вираз (5.59), який при малих втратах, коли $\underline{Z}_{\text{XB}} \approx R_{\text{XB}}$, призводить до формул:

- а) при холостому ході

$$P_A(y) = R_{\text{XB}} I_{\text{пад}}^2(y) [1 - \rho^2(y)] = 0,25 \frac{U_2^2}{R_{\text{XB}}} e^{2\alpha y} (y) (1 - e^{-4\alpha y}); \quad (5.88)$$

$$P_Q(y) = 2R_{\text{XB}} I_{\text{пад}}^2(y) \rho(y) \sin \varphi_\rho(y) = -0,5 \frac{U_2^2}{R_{\text{XB}}} \sin(2\beta y);$$

- б) при короткому замиканні

$$P_A(y) = R_{\text{XB}} I_{\text{пад}}^2(y) [1 - \rho^2(y)] = 0,25 R_{\text{XB}} I_2^2 e^{2\alpha y} (y) (1 - e^{-4\alpha y});$$

$$P_Q(y) = 0,5 R_{\text{XB}} I_2^2 \sin(2\beta y).$$

Як приклад на рис.5.23 побудовані на підставі виразів (5.86) і (5.88) графіки розподілу амплітуд і початкових фаз напруги і струму для розімкненої ДЛМВ ($\alpha\lambda = 0,35$; $\underline{Z}_{\text{XB}} \approx R_{\text{XB}}$).

Графіки ілюструють отримані вище висновки щодо розподілів амплітуд напруги і струму: мінімальні та максимальні значення амплітуд чергуються вздовж лінії з інтервалом $\lambda/4$ (рис.5.23, а); початкові фази і зсув фаз між напругою і струмом у перерізах лінії з мінімумами амплітуд змінюються на π не стрибком, як в ідеальній лінії, а неперервно (рис.5.23, б). Оскільки опір лінії у довільному перерізі має як активну, так і реактивну складову (рис.5.23, в), активна потужність в лінії відрізняється від нуля (рис.5.23, г).

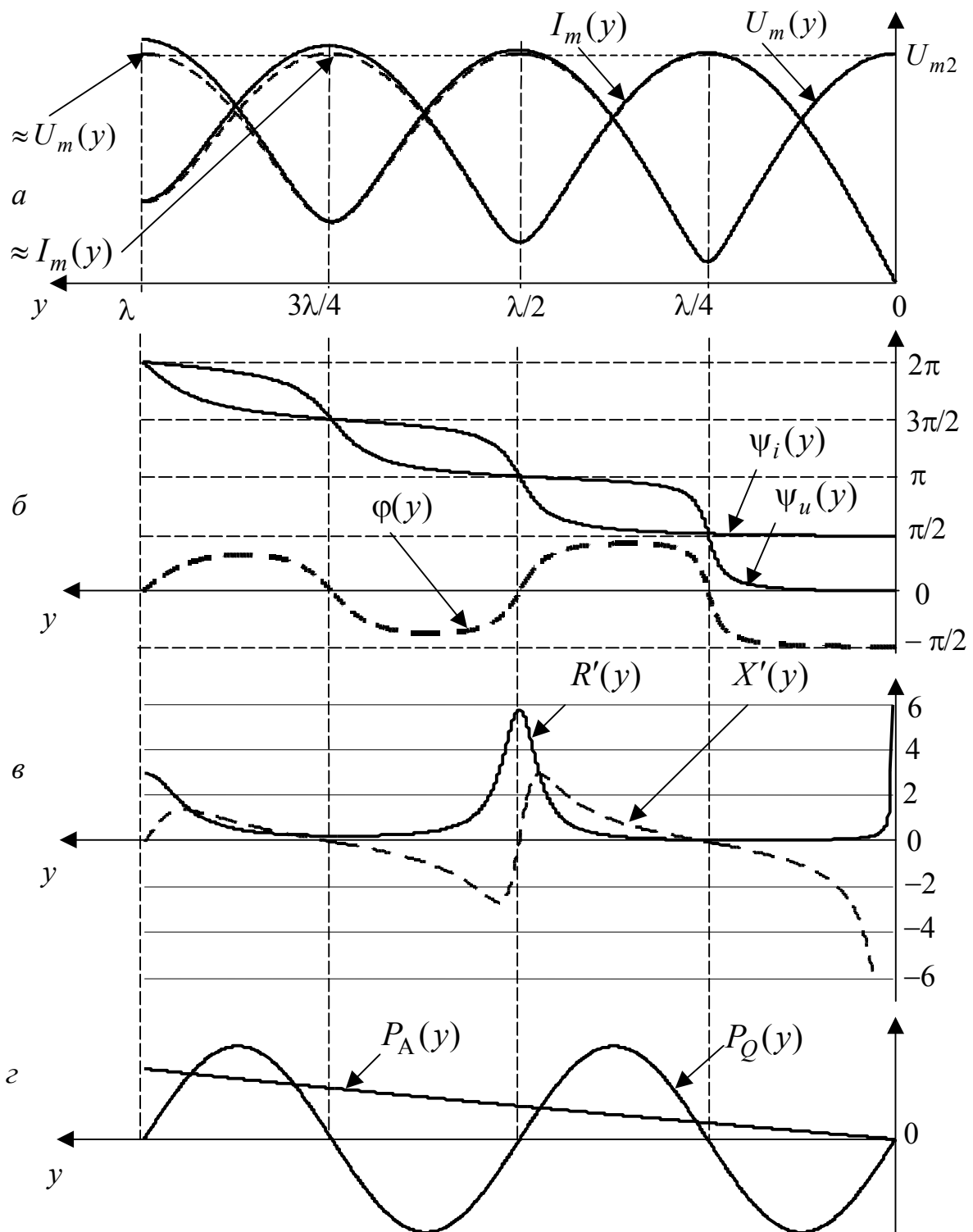


Рисунок 5.23 – Режим стійних хвиль у розімкненій лінії з малими втратами: *a* – амплітуди напруги і струму; *б* – початкові фази і зсув фаз між напругою ($\psi_{u2} = 0$) і струмом; *в* – опори, нормовані до значення $R_{\text{хв}}$; *г* – потужності

При малих втратах ($\alpha y \ll 1$) вирази (5.85) і (5.86) можна спростити, використовуючи приблизне співвідношення $e^{\pm\alpha y} \approx 1 \pm \alpha y$ для гіперболічних функцій:

$$\begin{aligned} \text{ch}\underline{y} &= \frac{e^{\alpha y} e^{j\beta y} + e^{-\alpha y} e^{-j\beta y}}{2} \approx \cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y; \\ \text{sh}\underline{y} &= \frac{e^{\alpha y} e^{j\beta y} - e^{-\alpha y} e^{-j\beta y}}{2} \approx \alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y. \end{aligned} \quad (5.89)$$

У табл.5.13 наведено отримані на підставі формул (5.86)–(5.89) приблизні співвідношення для аналізу розімкнених і короткозамкнених ДЛМВ. Ступінь наближення ілюструють графіки амплітуд напруги і струму (криві « $\approx U_m(y)$ » та « $\approx I_m(y)$ » на рис.5.23, а), побудовані за формулами з табл.5.13.

Таблиця 5.13 – Наближені співвідношення для аналізу ДЛМВ ($\alpha y \ll 1$, $\underline{Z}_{\text{XB}} \approx R_{\text{XB}}$) при холостому ході та короткому замиканні

Параметри		Наближені співвідношення	
		Холостий хід	Коротке замикання
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y)$	$\underline{U}_{m2}(\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y)$	$R_{\text{XB}} \underline{I}_{m2}(\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y)$
	$\underline{I}_m(y)$	$\frac{\underline{U}_{m2}}{R_{\text{XB}}}(\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y)$	$\underline{I}_{m2}(\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y)$
Амплітуди	$U_m(y)$	$U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (\alpha y \sin \beta y)^2}$	$R_{\text{XB}} I_{m2} \sqrt{(\alpha y \cos \beta y)^2 + (\alpha y \sin \beta y)^2}$
	$I_m(y)$	$\frac{U_{m2}}{R_{\text{XB}}} \sqrt{(\alpha y \cos \beta y)^2 + \sin^2 \beta y}$	$I_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (\alpha y \sin \beta y)^2}$
Початкові фази	$\psi_u(y)$	$\psi_{u2} + \arctg(\alpha y \tg \beta y)$	$\psi_{i2} + \varphi_{\underline{Z}_{\text{XB}}} + \arctg \frac{\tg \beta y}{\alpha y}$
	$\psi_i(y)$	$\psi_{u2} - \varphi_{\underline{Z}_{\text{XB}}} + \arctg \frac{\tg \beta y}{\alpha y}$	$\psi_{i2} + \arctg(\alpha y \tg \beta y)$
Комплексний опір, $\underline{Z}(y)$		$R_{\text{XB}} \frac{\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y}{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y}$	$R_{\text{XB}} \frac{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y}{\cos \beta y + j\alpha y \sin \beta y}$
Модуль коефіцієнта відбиття, $\rho(y)$		$1 - 2\alpha y$	
Активна потужність, $P_A(y)$		$R_{\text{XB}} I_2^2 \alpha y$	

5.7.4 Ідеальна лінія, навантажена на реактивний опір

Якщо ідеальну лінію навантажено на реактивний опір $Z_{\text{н}} = jX_2$, загальний вираз для комплексного коефіцієнта відбиття (табл.5.8) набуває вигляду:

$$\underline{\rho}(y) = \frac{jX_2 - R_{\text{XB}}}{jX_2 + R_{\text{XB}}} e^{-j2\beta y} = e^{-j2\left(\beta y + \text{arctg} \frac{X_2}{R_{\text{XB}}}\right)}. \quad (5.90)$$

Модуль і аргумент комплексного коефіцієнта відбиття (5.90) в кінці лінії ($y = 0$) відповідно становитимуть:

$$\rho(0) = 1; \varphi_{\rho}(0) = -2\text{arctg} \frac{X_2}{R_{\text{XB}}} \neq 0.$$

Рівність одиниці модуля комплексного коефіцієнта відбиття свідчить (як і при розімкненій та короткозамкненій лінії), що енергія повністю відбивається від навантаження, а відмінність аргумента від нуля обумовлена тим, що у кінці лінії $\underline{U}_{m2} \neq 0$; $\underline{I}_{m2} \neq 0$.

Отже, при реактивному навантаженні спостерігається режим стійних хвиль ($\rho(0) = 1$), однак у кінці лінії немає ані вузла, ані пучності напруги чи струму. Розподіл амплітуд, початкових фаз і реактивних опорів вздовж лінії можна отримати відповідним зсувом графіків (рис.5.20 і 5.22) по осі y . Такий підхід можна застосувати також для кількісного аналізу, якщо замінити реактивність відрізком розімкненої або замкненої лінії з вхідним комплексним опором, який дорівнює комплексному опору реактивного навантаження.

Навантаження лінії на ємність. Режим лінії, яку навантажено на ємність C_2 з комплексним опором $1/j\omega C_2$ і граничними умовами \underline{U}_{m2} і \underline{I}_{m2} , не зміниться, якщо ємність замінити відрізком розімкненої лінії з таким самим вхідним комплексним опором (рис.5.24, а). Довжину $l_{\text{X.X}}$ цього відрізка можна визначити з рівняння:

$$\underline{Z}(l_{\text{X.X}}) = -jR_{\text{XB}} \text{ctg} \beta l_{\text{X.X}} = \frac{1}{j\omega C_2}, \text{ звідки } l_{\text{X.X}} = \frac{1}{\beta} \text{arcctg} \frac{1}{\omega C_2 R_{\text{XB}}}.$$

Співвідношення для аналізу даної лінії при цьому можна знайти, замінивши y в виразах (5.77)–(5.83) для розімкненої лінії змінну y на $y + l_{\text{X.X}}$. Тоді вираз (5.77) для розподілу амплітуд напруги прийме вигляд:

$$U_m(y) = U_{\text{mx.X}} |\cos[\beta(y + l_{\text{X.X}})]|, \quad (5.91)$$

де $U_{\text{mx.X}}$ – амплітуда напруги на затискачах розімкненої лінії, увімкненої замість ємності (рис.5.24, а).

Значення $U_{\text{mx.X}}$ можна виразити через U_{m2} після підстановки до формули (5.91) $y = 0$:

$$U_m(0) = U_{m2} = U_{\text{mx.X}} \cos \beta l_{\text{X.X}},$$

звідки

$$U_{\text{mx.X}} = \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{\text{X.X}}}. \quad (5.92)$$

З урахуванням виразу (5.92) рівняння (5.91) матиме вигляд:

$$U_m(y) = \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{x,x}} |\cos[\beta(y + l_{x,x})]|, \quad (5.93)$$

зручний для аналізу та побудови графіка (рис.5.24, б).

Отримані аналогічно інші співвідношення для навантаженої на ємність лінії зведені до табл.5.14.

Слід зазначити, що рівняння (5.93) і формули з табл.5.14 слушні тільки для $l > y > -l_{x,x}$. При цьому безпосередньо лінії відповідає $l > y > 0$, а увімкненому відрізку розімкненої лінії $0 > y > -l_{x,x}$.

На рис.5.24, б, в, г графіки зображено товстими лініями у межах від входу лінії до навантаження і тонкими лініями – для розімкненої лінії, яку увімкнено замість ємності C_2 .

Таблиця 5.14 – Співвідношення для ідеальної лінії, яку навантажено на ємність

Параметри	Співвідношення
Довжина розімкненої лінії, яка еквівалентна ємності C_2	$l_{x,x} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arccctg} \frac{1}{\omega C_2 R_{xв}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arccctg} \frac{X_{C2}}{R_{xв}}$
Амплітуди	$U_m(y) = \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{x,x}} \cos[\beta(y + l_{x,x})] ;$ $I_m(y) = \frac{U_{m2}}{R_{xв} \cos \beta l_{x,x}} \sin[\beta(y + l_{x,x})] $
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \begin{cases} 0, \text{ якщо } \cos[\beta(y + l_{x,x})] > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \cos[\beta(y + l_{x,x})] < 0; \end{cases}$ $\psi_i(y) = \psi_{u2} + \pi/2 + \begin{cases} 0, \text{ якщо } \sin[\beta(y + l_{x,x})] > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \sin[\beta(y + l_{x,x})] < 0 \end{cases}$
Комплексний опір	$Z(y) = -jR_{xв} \operatorname{ctg}[\beta(y + l_{x,x})]$
Реактивний опір	$X(y) = -R_{xв} \operatorname{ctg}[\beta(y + l_{x,x})]$
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\underline{\rho}(y) = e^{-j2\beta(y+l_{x,x})}$
Реактивна потужність	$P_Q(y) = -0,5 \frac{U_2^2}{R_{xв} \cos \beta l_{x,x}} \sin[2\beta(y + l_{x,x})]$

Співвідношення (табл.5.14) і графіки (рис.5.24) показують, що розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $X(y)$ вздовж лінії при навантаженні на ємність відрізняються від холостого ходу в цій самій лінії зсувом на величину $l_{x,x}$. В результаті найближчі до навантаження вузол напруги і пучність струму будуть

у перерізі $\lambda/4 - l_{x,x}$, а вузол струму і пучність напруги – у перерізі $\lambda/2 - l_{x,x}$.

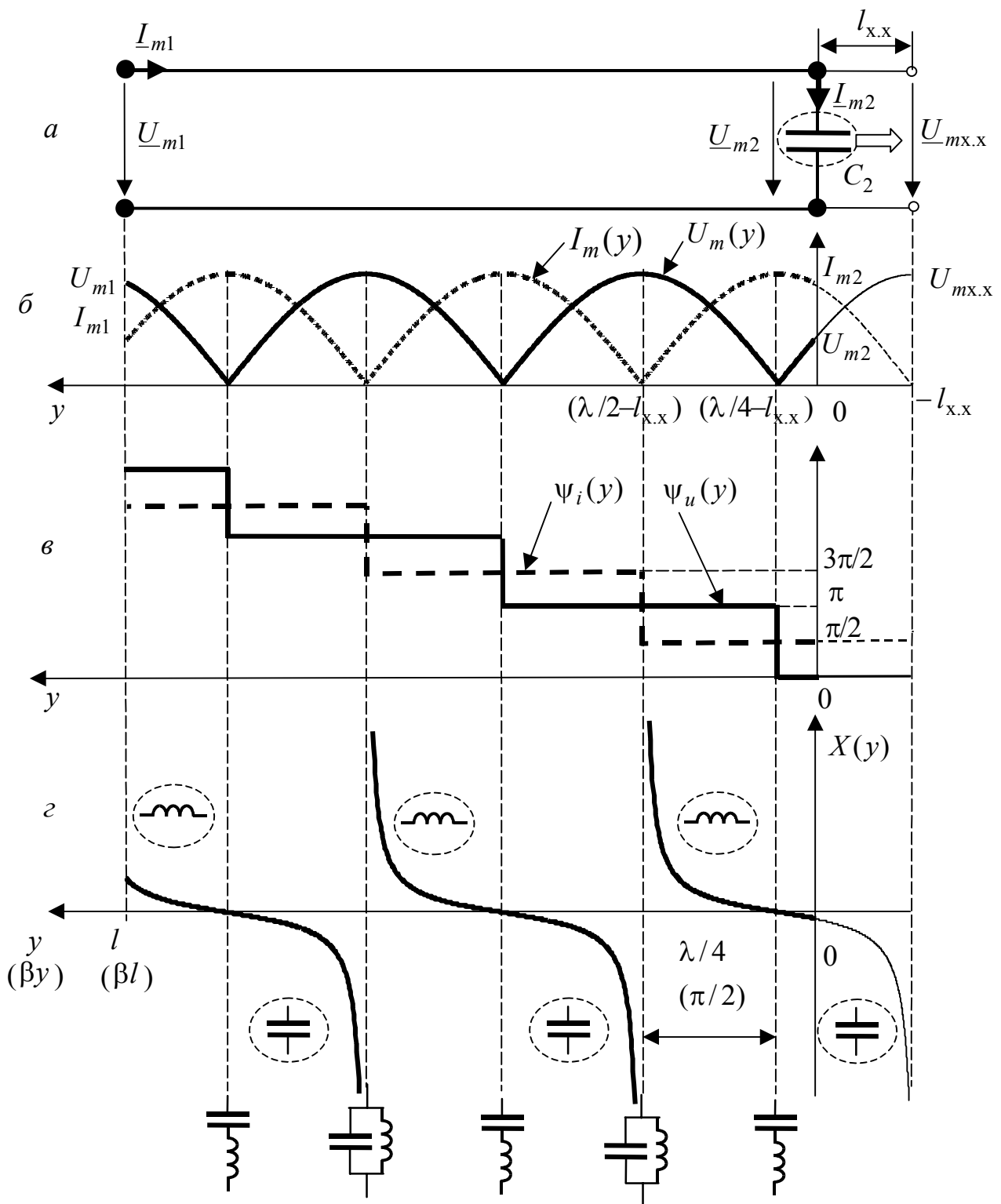


Рисунок 5.24 – Режим стійних хвиль в ідеальній лінії, яку навантажено на ємність: *a* – схема лінії; розподіли: *б* – амплітуд напруги і струму; *в* – початкових фаз напруги ($\psi_{u2} = 0$) і струму; *г* – реактивного опору

Навантаження лінії на індуктивність. Щоб проаналізувати цей режим, індуктивність L_2 замінюють еквівалентним відрізком короткозамкненої лінії довжиною $l_{к.3}$ (рис.5.25, а):

$$\underline{Z}(l_{к.3}) = jR_{XB} \operatorname{tg} \beta l_{к.3} = j\omega L_2; l_{к.3} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2}{R_{XB}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{X_{L2}}{R_{XB}}.$$

Отже, щоб здобути співвідношення для ідеальної лінії, яку навантажено на індуктивність, слід замінити змінну y на $y + l_{к.3}$ в формулах для короткозамкненої лінії (табл.5.12) і виразити струм $I_{мк.3}$ на її виході через струм I_{m2} в індуктивності L_2 . Зв'язок між $I_{мк.3}$ та I_{m2} виходить із співвідношень:

$$I_m(y) = I_{мк.3} |\cos[\beta(y + l_{к.3})]|; I_m(0) = I_{m2} = I_{мк.3} \cos \beta l_{к.3}; I_{мк.3} = \frac{I_{m2}}{\cos \beta l_{к.3}}.$$

Підсумкові формули для даного випадку (табл.5.15), а також відповідні графіки (рис.5.25, б, в, г) дозволяють зробити висновок, що при навантаженні на індуктивність розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $X(y)$ відрізняються від відповідних розподілів для короткозамкненої лінії зсувом на $l_{к.3}$. Найближчі до навантаження вузол струму і пучність напруги при цьому будуть у перерізі $\lambda/4 - l_{к.3}$, а вузол напруги і пучність струму – у перерізі $\lambda/2 - l_{к.3}$.

Таблиця 5.15 – Співвідношення для ідеальної лінії, яку навантажено на індуктивність

Параметри	Співвідношення
Довжина замкненої лінії, яка еквівалентна індуктивності L_2	$l_{к.3} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2}{R_{XB}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{X_{L2}}{R_{XB}}$
Амплітуди	$U_m(y) = \frac{I_{m2} R_{XB}}{\cos \beta l_{к.3}} \sin[\beta(y + l_{к.3})] ;$ $I_m(y) = \frac{I_{m2}}{\cos \beta l_{к.3}} \cos[\beta(y + l_{к.3})] $
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{i2} + \pi/2 + \begin{cases} 0, \text{ якщо } \sin[\beta(y + l_{к.3})] > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \sin[\beta(y + l_{к.3})] < 0; \end{cases}$ $\psi_i(y) = \psi_{i2} + \begin{cases} 0, \text{ якщо } \cos[\beta(y + l_{к.3})] > 0; \\ \pi, \text{ якщо } \cos[\beta(y + l_{к.3})] < 0 \end{cases}$
Комплексний опір	$\underline{Z}(y) = jR_{XB} \operatorname{tg}[\beta(y + l_{к.3})]$
Реактивний опір	$X(y) = R_{XB} \operatorname{tg}[\beta(y + l_{к.3})]$
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\underline{\rho}(y) = -e^{-j2\beta(y+l_{к.3})}; \varphi_\rho(y) = \pi - \beta(y + l_{к.3})$
Реактивна потужність	$P_Q(y) = 0,5 \frac{R_{XB} I_2^2}{\cos \beta l_{к.3}} \sin[2\beta(y + l_{к.3})]$

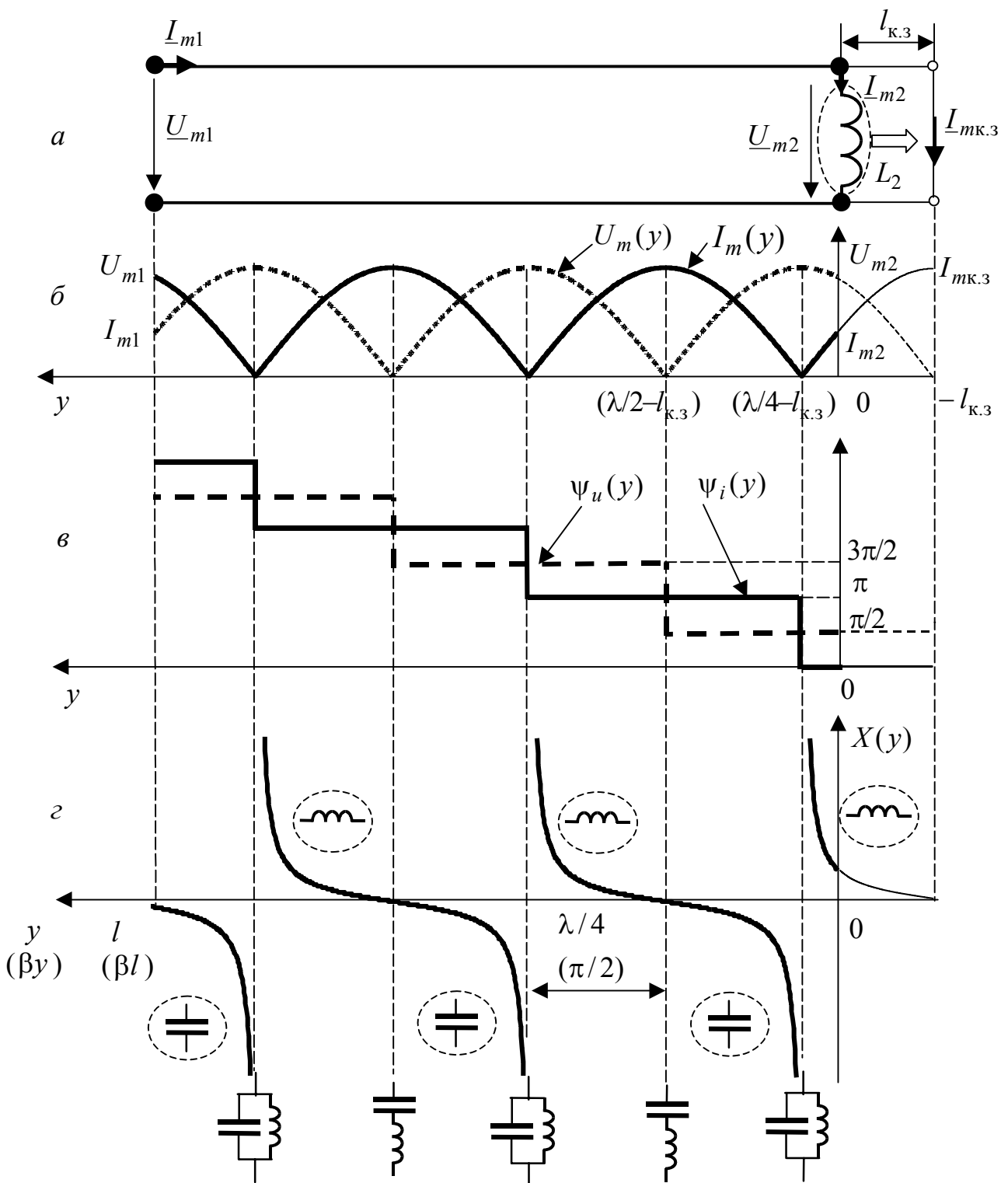


Рисунок 5.25 – Режим стійних хвиль в ідеальній лінії, яку навантажено на індуктивність: *a* – схема лінії; розподіли: *б* – амплітуд напруги і струму; *в* – початкових фаз напруги і струму ($\psi_{i2} = 0$); *г* – реактивного опору

Приклад 5.16. Розрахувати і побудувати графіки розподілів амплітуд і початкових фаз напруги і струму, а також реактивного опору в ідеальній симетричній повітряній двопровідній лінії з параметрами, наведеними у прикладі 5.1. Довжина лінії $l = \lambda/4$, комплексна амплітуда напруги в кінці лінії $\underline{U}_{m2} = 10$ В, частота джерела $f = 100$ МГц. Розглянути два випадки (рис.5.26, а): 1) холостого ходу; 2) навантаження лінії на ємність з опором $X_{C2} = R_{XB}$.

Розв'язання. Вторинні параметри лінії для частоти $f = 100$ МГц становлять: коефіцієнт фази $\beta = 2,106$ рад/м; хвильовий опір $R_{XB} \approx 265$ Ом.

1. Холостий хід. Підставивши у формули (5.77) і (5.78) параметри лінії та значення амплітуди $U_{m2} = 10$ В, запишемо рівняння розподілів амплітуд напруги і струму:

$$U_m(y) = U_{m2} |\cos \beta y| = 10 |\cos 2,106y| \text{ В};$$

$$I_m(y) = (U_{m2} / R_{XB}) |\sin \beta y| = (10 / 265) |\sin 2,106y| = 0,038 |\sin 2,106y| \text{ мА}.$$

Оскільки у межах лінії $\lambda/4 > l > 0$

$$\pi/2 > \beta y > 0; \cos \beta y > 0; \sin \beta y > 0,$$

вирази (5.79) і (5.80) для початкових фаз напруги і струму з урахуванням заданого значення початкової фази $\psi_{u2} = 0$ матимуть вигляд:

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} = 0; \psi_i(y) = \psi_{u2} + \pi/2 = \pi/2.$$

Використовуючи вираз (5.81), запишемо співвідношення для реактивного опору:

$$X(y) = -R_{XB} \operatorname{ctg} \beta y = -265 \operatorname{ctg} 2,106y \text{ Ом}.$$

На підставі виразів для $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $X(y)$ побудуємо графіки (ліворуч на рис.5.26, б, в, г).

2. Навантаження на ємність. Відповідно до співвідношень для ідеальної лінії (табл.5.14) знайдемо:

а) довжину розімкненої лінії, що еквівалентна ємності C_2 :

$$l_{x,x} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \frac{X_{C2}}{R_{XB}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \frac{265}{265} = \frac{\pi}{4\beta} \text{ м};$$

б) закони розподілів амплітуд напруги і струму:

$$\begin{aligned} U_m(y) &= \frac{U_{m2}}{\cos \beta l_{x,x}} |\cos[\beta(y + l_{x,x})]| = \frac{10}{\cos \pi/4} \left| \cos\left[\beta\left(y + \frac{\pi}{4\beta}\right)\right] \right| = \\ &= 14,1 |\cos(2,106y + \pi/4)| \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_m(y) &= \frac{U_{m2}}{R_{XB} \cos \beta l_{x,x}} |\sin[\beta(y + l_{x,x})]| = \frac{10}{265 \cos \pi/4} \left| \sin\left[\beta\left(y + \frac{\pi}{4\beta}\right)\right] \right| = \\ &= 0,053 |\sin(2,106y + \pi/4)| \text{ А} = 53 |\sin(2,106y + \pi/4)| \text{ мА}; \end{aligned}$$

в) вираз для реактивного опору:

$$X(y) = -R_{XB} \operatorname{ctg}[\beta(y + l_{x,x})] = -265 \operatorname{ctg}(2,106y + \pi/4) \text{ Ом}.$$

Побудуємо відповідні графіки (праворуч на рис.5.26, б, в, г).

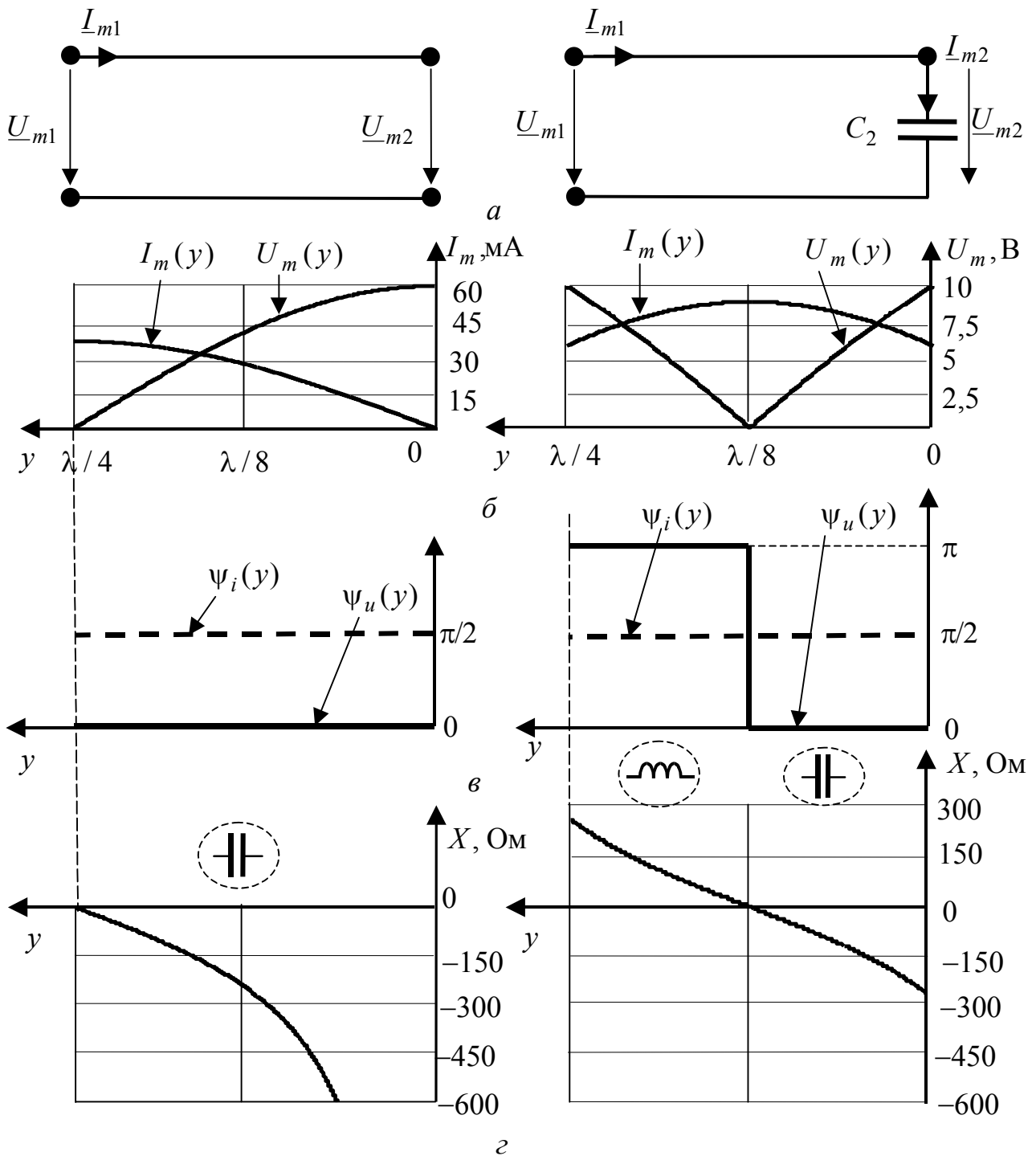


Рисунок 5.26 – До прикладу 5.16: а – схеми; розподіли: б – амплітуд напруги і струму; в – початкових фаз напруги і струму; г – реактивного опору

Приклад 5.17. Ідеальна симетрична повітряна двопровідна лінія з параметрами, наведеними у прикладі 5.16, довжиною $l = 3\lambda/8$ працює у режимах (рис.5.27, а): 1) короткого замикання вихідних затискачів; 2) навантаження на індуктивність з опором $X_{L2} = R_{XB}$. Миттєве значення струму в кінці лінії $i_2(t) = 0,1\cos(2\pi 10^8 t - \pi/4)$ А. Розрахувати і побудувати графіки розподілів амплітуд і початкових фаз напруги і струму, а також реактивного опору. Визначити миттєві значення напруги і струму на вході лінії.

Розв'язання. Оскільки задана кутова частота джерела $\omega = 2\pi \cdot 10^8$ рад/с відповідає частоті $f = 100$ МГц з прикладу 5.16, скористаємось розрахованими вище вторинними параметрами лінії ($\beta = 2,106$ рад/м; $R_{XB} \approx 265$ Ом). Запишемо також комплексну амплітуду струму в кінці лінії $I_{m2} = 0,1e^{-j\pi/4}$ А.

Для режиму короткого замикання застосуємо формули з табл.5.12.

При навантаженні на індуктивність, перед використанням співвідношень з табл.5.15, обчислимо довжину замкненої лінії, еквівалентної індуктивності L_2 :

$$l_{к.з} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{X_{L2}}{R_{XB}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{265}{265} = \frac{\pi}{4\beta} \text{ м.}$$

Отримані результати зведено до табл.5.16, а графіки побудовано на рис.5.27, б, в, г.

Таблиця 5.16 – Співвідношення для побудови графіків у прикладі 5.17

Параметри	Співвідношення	
	Коротке замикання	Навантаження на індуктивність
Амплітуди	$U_m(y) = 26,5 \sin(2,106y) $ В; $I_m(y) = 100 \cos(2,106y) $ мА	$U_m(y) = 37,48 \sin(2,106y + \pi/4) $ В; $I_m(y) = 141 \cos(2,106y + \pi/4) $ мА
Початкові фази	$\psi_i(y) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{для } \frac{\lambda}{4} > y > 0; \\ \frac{3\pi}{4} & \text{для } l > y > \frac{\lambda}{4}; \end{cases}$ $\psi_u(y) = \frac{\pi}{4}$	$\psi_i(y) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{для } \frac{\lambda}{8} > y > 0; \\ \frac{3\pi}{4} & \text{для } l > y > \frac{\lambda}{8}; \end{cases}$ $\psi_u(y) = \frac{\pi}{4}$
Реактивний опір	$X(y) = 265\operatorname{tg}(2,106y)$ Ом	$X(y) = 265\operatorname{tg}(2,106y + \pi/4)$ Ом

Визначимо миттєві значення напруг і струмів на вході лінії:

1) при короткому замиканні

$$u_1(t) = 18,74 \cos(2\pi 10^8 t + \pi/4) \text{ В}; \quad i_1(t) = 70,7 \cos(2\pi 10^8 t + 3\pi/4) \text{ мА};$$

2) при індуктивному навантаженні

$$u_1(t) = 0; \quad i_1(t) = 141 \cos(2\pi 10^8 t + 3\pi/4) \text{ мА.}$$

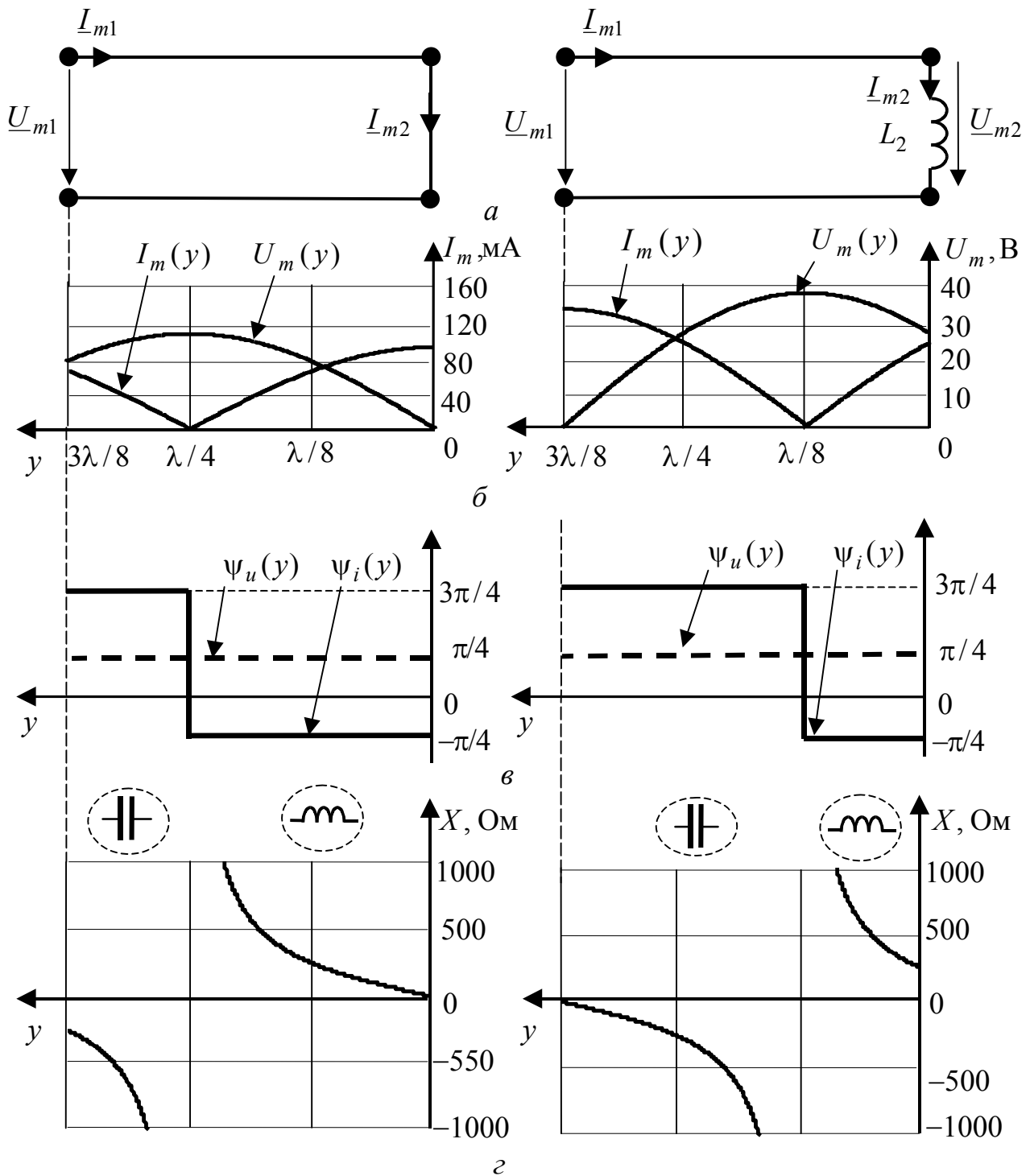


Рисунок 5.27 – До прикладу 5.17: *a* – схеми; розподіли: *б* – амплітуд напруги і струму; *в* – початкових фаз напруги і струму; *г* – реактивного опору

Приклад 5.18. Розрахувати режим стійних хвиль на частоті $f = 1000$ МГц у розімкненому коаксіальному кабелі (рис.5.28, *a*), параметри якого наведені у прикладі 5.10. Довжина лінії $l = 75\lambda$, комплексна амплітуда вхідної напруги

$\underline{U}_{m1} = 15e^{j\pi/4}$ В. Побудувати графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$ на ділянках довжиною λ від кінця і від початку лінії. Обчислення виконати, враховуючи втрати, за точними і приблизними формулами (табл.5.13).

Розв'язання. Скористаємось знайденими у прикладі 5.10 значеннями вторинних параметрів кабеля (див. табл.5.7): $\alpha = 0,018$ Нп/м; $\beta = 31,59$ рад/м; $\lambda = 0,199$ м; $\underline{Z}_{XB} = 92,61 - j0,035 \approx 92,61$ Ом.

Знаючи комплексну амплітуду вхідної напруги, визначимо комплексну амплітуду вхідного струму \underline{I}_{m1} . Для цього, застосовуючи вираз (5.57), спочатку розрахуємо комплексний вхідний опір лінії:

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}(l) = \lim_{\underline{Z}_H \rightarrow \infty} \underline{Z}_{XB} \frac{\underline{Z}_H \text{ch}\underline{\gamma}l + \underline{Z}_{XB} \text{sh}\underline{\gamma}l}{\underline{Z}_{XB} \text{ch}\underline{\gamma}l + \underline{Z}_H \text{sh}\underline{\gamma}l} = \underline{Z}_{XB} \text{cth}\underline{\gamma}l = \underline{Z}_{XB} \text{cth}[(\alpha + j\beta)l] \approx$$

$$\approx 92,61 \text{cth}[(0,018 + j31,59) \cdot 75 \cdot 0,199] = 92,61 \text{cth}(0,269 + j471,48) \approx 353,42 \text{ Ом},$$

а потім:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{Z}_{BX}} \approx \frac{15e^{j\pi/4}}{353,42} = 0,042e^{j\pi/4} \text{ А} = 42e^{j\pi/4} \text{ мА}.$$

Використовуючи вирази (5.52) і (5.54), а також знайдене значення \underline{I}_{m1} , визначимо комплексну амплітуду вихідної напруги:

$$\underline{U}_{m2} = \underline{U}_m(l) = \underline{U}_{m1} \text{ch}\underline{\gamma}l - \underline{Z}_{XB} \underline{I}_{m1} \text{sh}\underline{\gamma}l \approx$$

$$\approx 15e^{j\pi/4} \text{ch}(0,269 + j471,48) - 92,61 \cdot 0,042e^{j\pi/4} \text{sh}(0,269 + j471,48) =$$

$$= 14,475e^{j(\pi/4 - 2\pi \cdot 75)} = 14,475e^{-j470,45} \text{ В}$$

і перевіримо нульове значення струму на виході лінії:

$$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_m(l) = \underline{I}_{m1} \text{ch}\underline{\gamma}l - (\underline{U}_{m1} / \underline{Z}_{XB}) \text{sh}\underline{\gamma}l \approx$$

$$\approx 0,042e^{j\pi/4} \text{ch}(0,269 + j471,48) - \frac{15e^{j\pi/4}}{92,61} \text{sh}(0,269 + j471,48) = 0.$$

Записуючи початкову фазу вихідної напруги, врахуємо фазовий зсув $-2\pi \cdot 75$, обумовлений довжиною лінії. Цей фазовий зсув віднімається від головного значення $\pi/4$ аргумента \underline{U}_{m2} .

Щоб побудувати точні графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$, застосуємо відповідні рівняння та програму Mathcad:

$$U_m(y) = |\underline{U}_m(y)| = |\underline{U}_{m2} \text{ch}\underline{\gamma}y| = |14,47e^{-j470,45} \text{ch}[(0,018 + j31,59)y]| \text{ В};$$

$$I_m(y) = |\underline{I}_m(y)| = \left| \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{XB}} \text{sh}\underline{\gamma}y \right| = |156e^{-j470,45} \text{sh}[(0,018 + j31,59)y]| \text{ мА};$$

$$R(y) = \text{Re}[\underline{Z}(y)] = \text{Re}[\underline{Z}_{XB} \text{cth}\underline{\gamma}y] = \text{Re}\{92,61 \text{cth}[(0,018 + j31,59)y]\} \text{ Ом};$$

$$X(y) = \text{Im}[\underline{Z}(y)] = \text{Im}[\underline{Z}_{XB} \text{cth}\underline{\gamma}y] = \text{Im}\{92,61 \text{cth}[(0,018 + j31,59)y]\} \text{ Ом}.$$

За тією самою методикою виконаємо приблизні розрахунки, використо-

вуючи вирази (5.86), (5.89) і формули з табл.5.13:

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}(l) \approx \underline{Z}_{\text{XB}} \frac{\cos \beta l + j \alpha y \sin \beta l}{\alpha l \cos \beta l + j \sin \beta l} \approx$$

$$\approx \text{Im} \left[92,61 \cdot \frac{\cos 471,48 + j 0,269 \cdot \sin 471,48}{0,269 \cdot \cos 471,48 + j \sin 471,48} \right] \approx 345,16 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{Z}_{\text{BX}}} \approx \frac{15e^{j\pi/4}}{345,16} = 0,043e^{j\pi/4} \text{ А} = 43e^{j\pi/4} \text{ мА};$$

$$\underline{U}_{m2} \approx \underline{U}_{m1}[\cos \beta l + j \alpha l \cos \beta l] - \underline{Z}_{\text{XB}} \underline{I}_{m1}[\alpha l \cos \beta l + j \cos \beta l] =$$

$$= 15e^{j\pi/4}(\cos 471,48 + j 0,269 \cdot \cos 471,48) -$$

$$- 24,88e^{j\pi/4}(0,269 \cos 471,48 + j \cos 471,48) \approx 13,919e^{j(\pi/4 - 2\pi \cdot 75)} = 13,919e^{-j470,45} \text{ В};$$

$$U_m(y) \approx U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (\alpha y \sin \beta y)^2} = 13,919 \sqrt{\cos^2(31,59y) + [0,018y \sin(31,59y)]^2} \text{ В};$$

$$I_m(y) \approx \frac{U_{m2}}{Z_{\text{XB}}} \sqrt{(\alpha y \cos \beta y)^2 + \sin^2 \beta y} = 150 \sqrt{[0,018y \cos(31,59y)]^2 + \sin^2(31,59y)} \text{ мА};$$

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \arctg(\alpha y \text{tg} \beta y) = -470,45 + \arctg[0,018y \text{tg}(31,59y)];$$

$$\psi_i(y) \approx \psi_{u2} - \varphi_{Z_{\text{XB}}} + \arctg \frac{\text{tg} \beta y}{\alpha y} \approx -470,45 + \arctg \frac{\text{tg}(31,59y)}{0,018y};$$

$$R(y) \approx \text{Re} \left[\underline{Z}_{\text{XB}} \frac{\cos \beta y + j \alpha y \sin \beta y}{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y} \right] \approx \text{Re} \left[92,61 \frac{\cos(31,59y) + j 0,018y \sin(31,59y)}{0,018y \cos(31,59y) + j \sin(31,59y)} \right] \text{ Ом};$$

$$X(y) \approx \text{Im} \left[\underline{Z}_{\text{XB}} \frac{\cos \beta y + j \alpha y \sin \beta y}{\alpha y \cos \beta y + j \sin \beta y} \right] \approx \text{Im} \left[92,61 \frac{\cos(31,59y) + j 0,018y \sin(31,59y)}{0,018y \cos(31,59y) + j \sin(31,59y)} \right] \text{ Ом}.$$

Графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, побудовані за точними і приблизними формулами, показані на рис.5.28, б відповідно суцільними і пунктирними лініями. Достатній збіг точних і приблизних графіків $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$ дозволяє зобразити їх на рис.5.28, в, г однією кривою.

Будуючи графіки $\psi_u(y)$ та $\psi_i(y)$, розраховані значення коригують на ціле число 2π при зміні змінної y на ціле число довжин хвиль.

Розрахунки показали, що похибки приблизних обчислень становлять не більше 5 %, причому для опорів і початкових фаз вони найменші, а для амплітуд – найбільші.

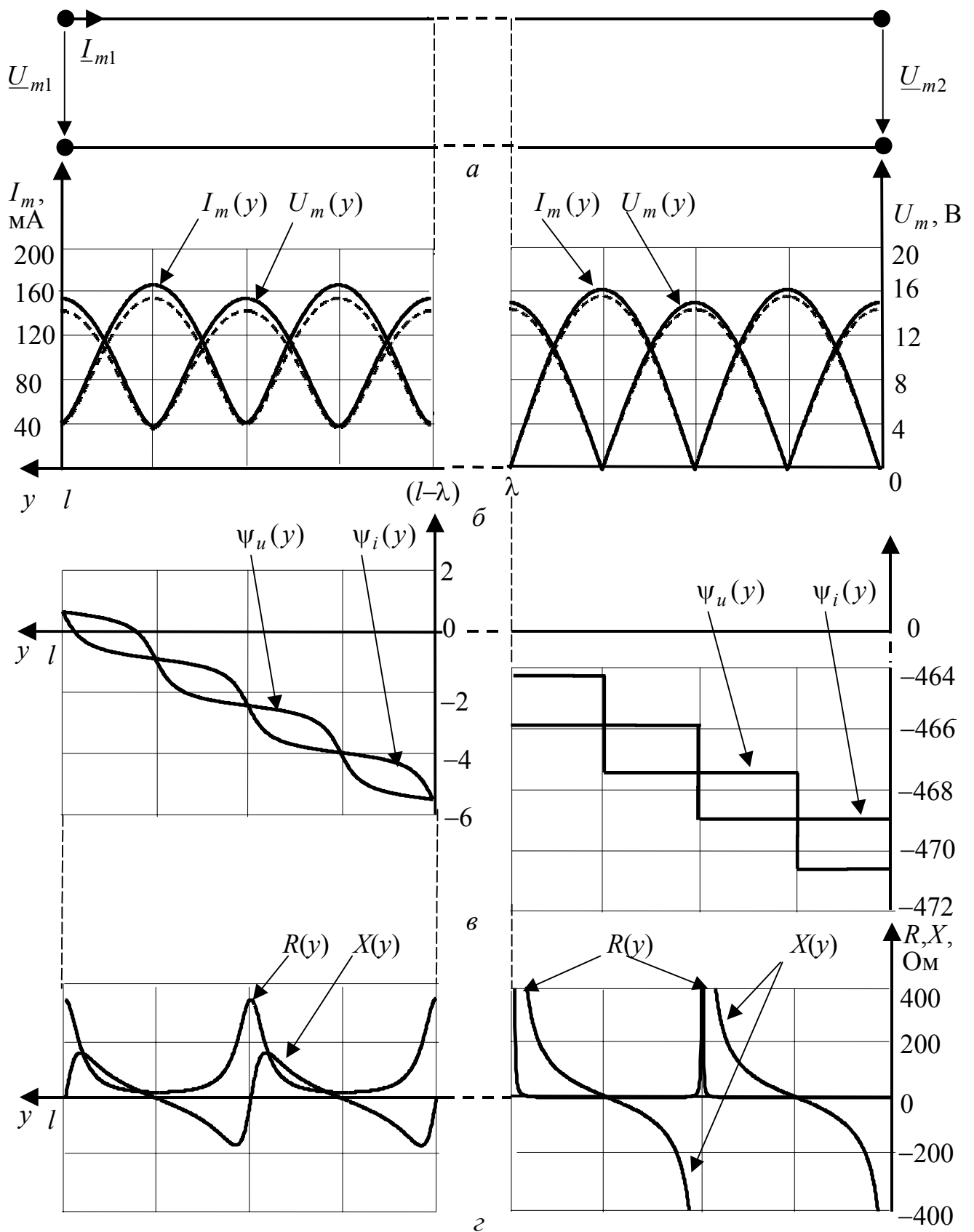


Рисунок 5.28 – До прикладу 5.18: а – схема лінії; б – $U_m(y)$, $I_m(y)$; в – $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$; г – $R(y)$, $X(y)$

5.8 Режим змішаних хвиль

У цьому режимі спостерігається часткове відбиття енергії від навантаження і тому модуль комплексного коефіцієнта відбиття (5.58) в кінці лінії приймає значення у межах:

$$0 < \rho(0) < 1. \quad (5.94)$$

Режим змішаних хвиль є проміжним між режимами біжних ($\rho(0) = 0$) і стійних ($\rho(0) = 1$) хвиль.

В ідеальній лінії ($Z_{\text{XB}} = R_{\text{XB}}$) умові (5.94) відповідає нерівність

$$0 < \left| \frac{Z_{\text{H}} - R_{\text{XB}}}{Z_{\text{H}} + R_{\text{XB}}} \right| < 1, \quad (5.95)$$

яка виконується у двох випадках:

а) опір навантаження є активним, але не дорівнює хвильовому:

$$R_{\text{H}} \neq R_{\text{XB}}; \quad X_{\text{H}} = 0;$$

б) опір навантаження – комплексний ($Z_{\text{H}} = R_{\text{H}} + jX_{\text{H}}$), крім того

$$R_{\text{H}} \neq 0; \quad X_{\text{H}} \neq 0.$$

При цьому нерівність (5.95) підтверджується аналізом співвідношень, які отримують після підстановки у формули (5.58) відповідних виразів для Z_{H} :

$$\text{а) } \rho(0) = \left| \frac{R_{\text{H}} - R_{\text{XB}}}{R_{\text{H}} + R_{\text{XB}}} \right|;$$

$$\text{б) } \rho(0) = \left| \frac{R_{\text{H}} + jX_{\text{H}} - R_{\text{XB}}}{R_{\text{H}} + jX_{\text{H}} + R_{\text{XB}}} \right| = \frac{\sqrt{(R_{\text{H}} - R_{\text{XB}})^2 + X_{\text{H}}^2}}{\sqrt{(R_{\text{H}} + R_{\text{XB}})^2 + X_{\text{H}}^2}}.$$

На відміну від режиму стійних хвиль, коли амплітуди падаючих і відбитих хвиль однакові, в режимі змішаних хвиль амплітуди відбитих хвиль менше амплітуд падаючих. Тому в цьому режимі спостерігаються не вузли і пучності (характерні для режиму стійних хвиль), а мінімуми і максимуми амплітуд напруги і струму:

$$U_{m\text{max}} = U_{m\text{пад}} + U_{m\text{від}} = U_{m\text{пад}}[1 + \rho(0)]; \quad U_{m\text{min}} = U_{m\text{пад}} - U_{m\text{від}} = U_{m\text{пад}}[1 - \rho(0)];$$

$$I_{m\text{max}} = I_{m\text{пад}} + I_{m\text{від}} = I_{m\text{пад}}[1 + \rho(0)]; \quad I_{m\text{min}} = I_{m\text{пад}} - I_{m\text{від}} = I_{m\text{пад}}[1 - \rho(0)].$$

Для кількісної оцінки режиму змішаних хвиль вводять **коефіцієнти біжної та стійної хвиль**.

Коефіцієнт біжної хвилі (КБХ) – це відношення мінімальних значень амплітуд напруги або струму до їхніх максимальних значень:

$$k_{\text{бх}} = \frac{U_{m\text{min}}}{U_{m\text{max}}} = \frac{I_{m\text{min}}}{I_{m\text{max}}} = \frac{1 - \rho(0)}{1 + \rho(0)}. \quad (5.96)$$

Величина, обернена КБХ, тобто відношення максимальних значень амплітуд напруги або струму до їхніх мінімальних значень, називають **коефіцієнтом стійної хвилі (КСХ)**:

$$k_{cx} = \frac{U_{m\max}}{U_{m\min}} = \frac{I_{m\max}}{I_{m\min}} = \frac{1 + \rho(0)}{1 - \rho(0)}. \quad (5.97)$$

Ці коефіцієнти застосовують також для режимів біжних і стійних хвиль. З формул (5.96) і (5.97) виходить, що в режимі біжних хвиль $k_{\text{бх}} = k_{\text{cx}} = 1$ ($\rho(0) = 0$; $U_{m\max} = U_{m\min}$; $I_{m\max} = I_{m\min}$), а в режимі стійних хвиль $k_{\text{бх}} = 0$; $k_{\text{cx}} \rightarrow \infty$ ($\rho(0) = 1$; $U_{m\min} = 0$; $I_{m\min} = 0$).

В режимі змішаних хвиль КБХ і КСХ змінюються у межах: $0 < k_{\text{бх}} < 1$; $k_{\text{cx}} > 1$.

5.8.1 Режим змішаних хвиль при активному навантаженні в ідеальній лінії

Якщо лінія навантажена на активний опір $R_H \neq R_{\text{ХВ}}$ (рис.5.29, а), то $\underline{U}_{m2} = R_H \underline{I}_{m2}$ і рівняння для ідеальної лінії (див. табл.5.8) приймуть вигляд:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \cos \beta y + j \underline{I}_{m2} R_{\text{ХВ}} \sin \beta y = \underline{U}_{m2} [\cos \beta y + j(R_{\text{ХВ}} / R_H) \sin \beta y]; \quad (5.98)$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} \cos \beta y + j(\underline{U}_{m2} / R_{\text{ХВ}}) \sin \beta y = \underline{I}_{m2} [\cos \beta y + j(R_H / R_{\text{ХВ}}) \sin \beta y]. \quad (5.99)$$

Вирази (5.98) і (5.99) можна записати, використовуючи безрозмірний нормований опір навантаження $R'_H = R_H / R_{\text{ХВ}} \neq 1$:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} [\cos \beta y + j(1 / R'_H) \sin \beta y]; \quad (5.100)$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} (\cos \beta y + j R'_H \sin \beta y). \quad (5.101)$$

Рівняння (5.100) і (5.101) дозволяють отримати вирази для обчислення:

– амплітуд напруги і струму в лінії

$$U_m(y) = U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (1 / R'_H)^2 \sin^2 \beta y}; \quad (5.102)$$

$$I_m(y) = I_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (R'_H)^2 \sin^2 \beta y}; \quad (5.103)$$

– початкових фаз напруги і струму в лінії

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \arctg \frac{\text{tg} \beta y}{R'_H}; \quad (5.104)$$

$$\psi_i(y) = \psi_{u2} + \arctg (R'_H \text{tg} \beta y); \quad (5.105)$$

– комплексного опору лінії та його нормованих значень

$$\underline{Z}(y) = \frac{\underline{U}_m(y)}{\underline{I}_m(y)} = R_H \frac{\cos \beta y + j(1 / R'_H) \sin \beta y}{\cos \beta y + j R'_H \sin \beta y} = R_{\text{ХВ}} \frac{R'_H + j \text{tg} \beta y}{1 + j R'_H \text{tg} \beta y}; \quad (5.106)$$

$$\underline{Z}'(y) = R'(y) + jX'(y) = \underline{Z}'(y) e^{j\varphi(y)} = \frac{R'_H + j \text{tg} \beta y}{1 + j R'_H \text{tg} \beta y}, \quad (5.107)$$

де $\underline{Z}'(y) = \underline{Z}(y) / R_{\text{ХВ}}$; $R'(y) = R(y) / R_{\text{ХВ}}$; $X'(y) = X(y) / R_{\text{ХВ}}$; $Z' = Z(y) / R_{\text{ХВ}}$ – нормовані комплексний, активний, реактивний і повний опір, відповідно; $\varphi(y) = \psi_u(y) - \psi_i(y)$ – аргумент комплексного опору.

Комплексний коефіцієнт відбиття на підставі загальної формули (див. табл.5.8) для даного випадку становить:

$$\underline{\rho}(y) = \frac{U_{m\text{в\ddot{и}д}}(y)}{U_{m\text{пад}}(y)} = -\frac{I_{m\text{в\ddot{и}д}}(y)}{I_{m\text{пад}}(y)} = \frac{R_{\text{н}} - R_{\text{хв}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}} e^{-j2\beta y} = \rho(y) e^{j\varphi_{\rho}(y)}, \quad (5.108)$$

$$\text{де } \rho(y) = \rho(0) = \frac{|R_{\text{н}} - R_{\text{хв}}|}{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}}; \quad \varphi_{\rho}(y) = -2\beta y + \begin{cases} 0, & R_{\text{н}} > R_{\text{хв}} \\ \pi, & R_{\text{н}} < R_{\text{хв}} \end{cases} \text{ - відповідно мо-}$$

дуль і аргумент комплексного коефіцієнта відбиття.

Активна і реактивна потужності у довільному перерізі ідеальної лінії становлять (див. табл.5.8):

$$P_{\text{А}}(y) = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 [1 - \rho^2(0)] = P_{\text{Апад}} - P_{\text{Ав\ddot{и}д}}; \quad (5.109)$$

$$P_{\text{Q}}(y) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2 \rho(0) \sin \varphi_{\rho}(y) = 2R_{\text{хв}} I_{\text{пад}} I_{\text{в\ddot{и}д}} \sin \varphi_{\rho}(y), \quad (5.110)$$

де $P_{\text{Апад}} = R_{\text{хв}} I_{\text{пад}}^2$; $P_{\text{Ав\ddot{и}д}} = R_{\text{хв}} I_{\text{в\ddot{и}д}}^2$ – активні потужності падаючої та відбитої хвиль, відповідно.

Згідно з рівнянням (5.109) активна потужність у будь-якому перерізі лінії постійна, а отже дорівнює потужності на вході лінії та в навантаженні:

$$P_{\text{А}} = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = R_{\text{н}} I_2^2, \quad (5.111)$$

де φ_1 – зсув фаз між вхідними напругою і струмом.

Формула (5.111) показує, що ККД даного режиму становить 100 %.

Використовуючи вирази (5.108) – (5.111), можна подати діюче значення струму падаючої хвилі та реактивну потужність через параметри режиму навантаження:

$$I_{\text{пад}} = I_2 \sqrt{\frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{хв}} [1 - \rho^2(0)]}} = \frac{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}}{2R_{\text{хв}}} I_2;$$

$$P_{\text{Q}}(y) = \frac{|R_{\text{н}}^2 - R_{\text{хв}}^2|}{2R_{\text{хв}}} I_2^2 \sin \varphi_{\rho}(y). \quad (5.112)$$

На рис.5.29 зображено графіки розподілу вздовж лінії реактивної потужності, амплітуд напруги та струму (рис.5.29, б), їхніх початкових фаз і взаємного зсуву (рис.5.29, в), а також нормованих опорів (рис.5.29, г). Графіки побудовані за результатами обчислень за формулами (5.102) – (5.110) для двох значень нормованих опорів навантаження $R'_{\text{н}} = 4$ ($R_{\text{н}} = 4R_{\text{хв}}$, ліворуч на рис.5.29) і $R'_{\text{н}} = 0,25$ ($R_{\text{н}} = R_{\text{хв}}/4$, праворуч).

Аналіз співвідношень (5.100) – (5.112) і графіків (рис.5.29) дозволяє зробити такі висновки:

1) розподіл амплітуд напруги та струму має періодичність $\lambda/2$; у перерізах лінії, де амплітуда напруги максимальна, амплітуда струму мінімальна і навпаки (ці перерізи повторюються через $\lambda/4$), струм і напруга в них перебувають у фазі (опір лінії чисто активний);

2) у кінці лінії при $R'_{\text{н}} > 1$ спостерігаються максимуми амплітуди напруги та опору, але мінімум амплітуди струму; при $R'_{\text{н}} < 1$, навпаки, амплітуда струму максимальна, а амплітуда напруги і опір – мінімальні;

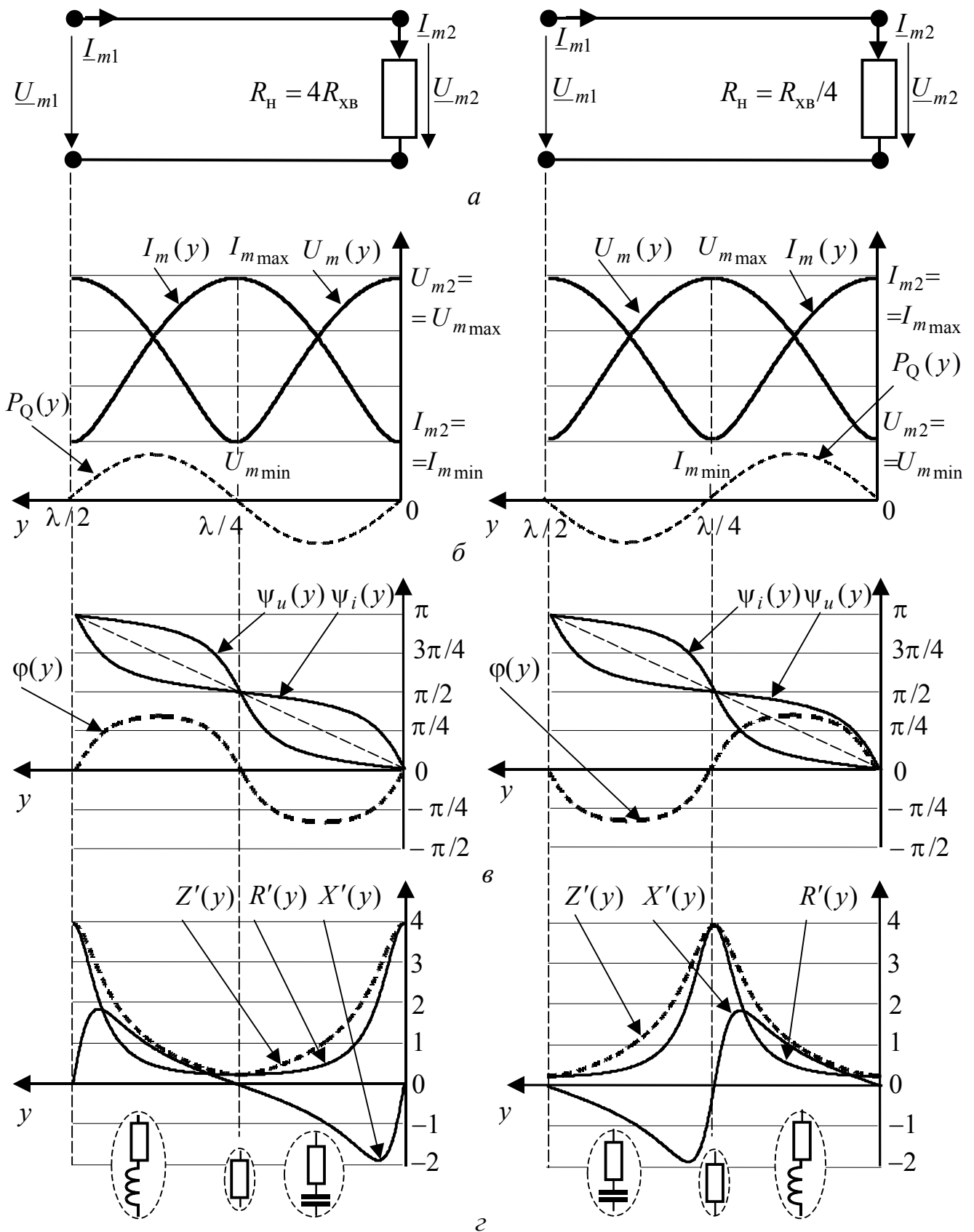


Рисунок 5.29 – Режим змішаних хвиль при навантаженні ідеальної лінії на активний опір $R_H \neq R_{XB}$: а – схеми; розподіли: б – амплітуд напруги та струму, реактивної потужності; в – початкових фаз напруги та струму ($\psi_{u2} = \psi_{i2} = 0$) і зсуву фаз між ними; г – нормованих опорів

3) розподіл активного і повного опорів мають максимуми і мінімуми, які чергуються через $\lambda/4$;

4) відрізок лінії довжиною $l = \lambda/4$ має згідно з виразом (5.107) чисто активний опір $R_{\lambda/4} = Z_{\lambda/4} = R_{\text{ХВ}}^2 / R_{\text{Н}}$; $R'_{\lambda/4} = Z'_{\lambda/4} = 1 / R'_{\text{Н}}$;

5) на ділянках лінії $(n-1)\lambda/2 < l < (2n-1)\lambda/4$ ($n=1, 2, 3, \dots$) при $R'_{\text{Н}} > 1$ опір лінії має ємнісний характер ($\varphi(y) < 0$), а при $R'_{\text{Н}} < 1$ – індуктивний ($\varphi(y) > 0$); у перерізах лінії, для яких $(2n-1)\lambda/4 < l < n\lambda/2$ ($n=1, 2, 3, \dots$), при $R'_{\text{Н}} > 1$ характер опору індуктивний ($\varphi(y) > 0$), а при $R'_{\text{Н}} < 1$ – ємнісний ($\varphi(y) < 0$); зокрема, при $R'_{\text{Н}} > 1$ лінія довжиною $l < \lambda/4$ має ємнісний, а при $R'_{\text{Н}} < 1$ – індуктивний характер;

6) при $R'_{\text{Н}} > 1$ КБХ і КСХ становлять $k_{\text{бх}} = 1 / R'_{\text{Н}}$; $k_{\text{сх}} = R'_{\text{Н}}$, а при $R'_{\text{Н}} < 1$, навпаки, $k_{\text{бх}} = R'_{\text{Н}}$; $k_{\text{сх}} = 1 / R'_{\text{Н}}$;

7) активна потужність у навантаженні в режимі змішаних хвиль при однаковій потужності $P_{\text{пад}}$ буде меншою, ніж в режимі узгодження;

8) реактивна потужність в режимі змішаних хвиль, як і в режимі стійних хвиль, змінюється за синусоїдним законом, але її амплітуда менша в $\rho(0)$ разів.

5.8.2 Режим змішаних хвиль при комплексному навантаженні

Якщо ідеальну лінію навантажено на комплексний опір $\underline{Z}_{\text{Н}} = \underline{U}_{m2} / \underline{I}_{m2}$ (рис.5.30, а), рівняння (5.98), (5.99), (5.107) приймуть вигляд:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} [\cos \beta y + j(R_{\text{ХВ}} / \underline{Z}_{\text{Н}}) \sin \beta y] = \underline{U}_{m2} [\cos \beta y + j(1 / \underline{Z}'_{\text{Н}}) \sin \beta y]; \quad (5.113)$$

$$\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} [\cos \beta y + j(\underline{Z}_{\text{Н}} / R_{\text{ХВ}}) \sin \beta y] = \underline{I}_{m2} (\cos \beta y + j \underline{Z}'_{\text{Н}} \sin \beta y). \quad (5.114)$$

$$\underline{Z}'(y) = R'(y) + jX'(y) = Z'(y) e^{j\varphi(y)} = \frac{\underline{Z}'_{\text{Н}} + j \text{tg} \beta y}{1 + j \underline{Z}'_{\text{Н}} \text{tg} \beta y}, \quad (5.115)$$

де $\underline{Z}'_{\text{Н}} = \underline{Z}_{\text{Н}} / R_{\text{ХВ}} = R'_{\text{Н}} + jX'_{\text{Н}}$ – нормований комплексний опір навантаження; $R'_{\text{Н}} = R_{\text{Н}} / R_{\text{ХВ}}$; $X'_{\text{Н}} = X_{\text{Н}} / X_{\text{ХВ}}$ – нормовані активний та реактивний опори навантаження, відповідно.

Щоб проаналізувати даний режим, використовують чисельні методи згідно з формулами (5.113) – (5.115) або методу, подібну тій, яка була застосована при аналізі режиму стійних хвиль при навантаженні лінії на реактивний опір (див. п. 5.7.4).

Як приклад на рис.5.30 зображені графіки, що ілюструють режим змішаних хвиль при навантаженні ідеальної лінії на нормований комплексний опір $\underline{Z}'_{\text{Н}} = 0,47 - j0,88$. Графіки побудовано як за результатами обчислень на підставі формул (5.113) – (5.115), так і за допомогою заміни комплексного навантаження еквівалентним (за опором) відрізком лінії довжиною $l_{\text{R}} = \lambda/8$, яку навантажено нормованим активним опором $R'_{\text{Нe}} = 4$ (рис.5.30, а). На рис.5.30, б, в, г графіки у межах лінії від входу до навантаження зображені товстими, а для увімкненого відрізка еквівалентної лінії – тоншими лініями.

Довжину та опір активного навантаження можна визначити з умови активного характеру опору (5.115):

$$\underline{Z}'(l_R) = R'_{\text{He}} = \frac{(R'_H + jX'_H) + j\text{tg}\beta l_R}{1 + j(R'_H + jX'_H)\text{tg}\beta l_R} = \frac{R'_H + j(X'_H + \text{tg}\beta l_R)}{(1 - X'_H \text{tg}\beta l_R) + jR'_H \text{tg}\beta l_R}. \quad (5.116)$$

Якщо помножити чисельник і знаменник правої частини рівняння (5.116) на комплексно-спряжений вираз знаменника, рівняння приймає вигляд:

$$R'_{\text{He}} = \frac{R'_H(1 + \text{tg}^2\beta l_R)}{1 - 2X'_H \text{tg}\beta l_R + (Z'_H)^2 \text{tg}^2\beta l_R} - j \frac{X'_H \text{tg}^2\beta l_R + \text{tg}\beta l_R[(Z'_H)^2 - 1] - X'_H}{1 - 2X'_H \text{tg}\beta l_R + (Z'_H)^2 \text{tg}^2\beta l_R}, \quad (5.117)$$

Прирівнюючи уявну частину виразу (5.117) до нуля:

$$\frac{X'_H \text{tg}^2\beta l_R + \text{tg}\beta l_R[(Z'_H)^2 - 1] - X'_H}{1 - 2X'_H \text{tg}\beta l_R + (Z'_H)^2 \text{tg}^2\beta l_R} = 0, \quad \text{можна визначити } l_R:$$

$$\text{tg}^2\beta l_R + \text{tg}\beta l_R \frac{(Z'_H)^2 - 1}{X'_H} - 1 = 0; \quad \text{tg}\beta l_R = -\frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} \pm \sqrt{\frac{[(Z'_H)^2 - 1]^2}{4(X'_H)^2} + 1};$$

$$l_R = \frac{1}{\beta} \arctg \left\{ -\frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} \pm \sqrt{\frac{[(Z'_H)^2 - 1]^2}{4(X'_H)^2} + 1} \right\}. \quad (5.118)$$

З двох розв'язків (5.118), виходячи з постановки задачі, вибирають від'ємний (знак мінус перед квадратним коренем). Додатний розв'язок (знак плюс перед квадратним коренем) відповідає найближчому до \underline{Z}_H перерізу лінії з активним опором (рис.5.30, *з*).

Опір навантаження еквівалентного відрізка лінії визначають, підставляючи знайдене значення l_R у формулу (5.117):

$$R'_{\text{He}} = \frac{R'_H(1 + \text{tg}^2\beta l_R)}{1 - 2X'_H \text{tg}\beta l_R + (Z'_H)^2 \text{tg}^2\beta l_R}. \quad (5.119)$$

Якщо увімкнути замість комплексного навантаження еквівалентний відрізок лінії з активним опором, можна застосувати співвідношення (5.102) – (5.110), замінивши в них \underline{U}_{m2} на $\underline{U}_{\text{mHe}}$, \underline{I}_{m2} на $\underline{I}_{\text{mHe}}$, R_H на R_{He} , а змінну y на $y_e = y + l_R$. Отримані вирази наведені в табл.5.17.

Аналіз співвідношень у табл.5.17 і графіків на рис.5.30 показують, що при комплексному навантаженні розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R'(y)$, $X'(y)$, $Z'(y)$ мають характерні для режиму змішаних хвиль особливості (див. висновки до п. 5.8.1), які відрізняються від режиму навантаження на активний опір тільки зсувом на величину $l_R < 0$. Тому в кінці лінії амплітуди напруги та струму не мають максимумів і мінімумів, а найближчі від навантаження максимуми або мінімуми (рис.5.30, *б*) лежать у перерізі, який відповідає додатному значенню l_R з виразу (5.118).

Слід зазначити, що для $y_e > l_R$ формули в табл.5.17 відповідають розглянутій лінії, а для $y < l_R$ – увімкненому відрізку лінії.

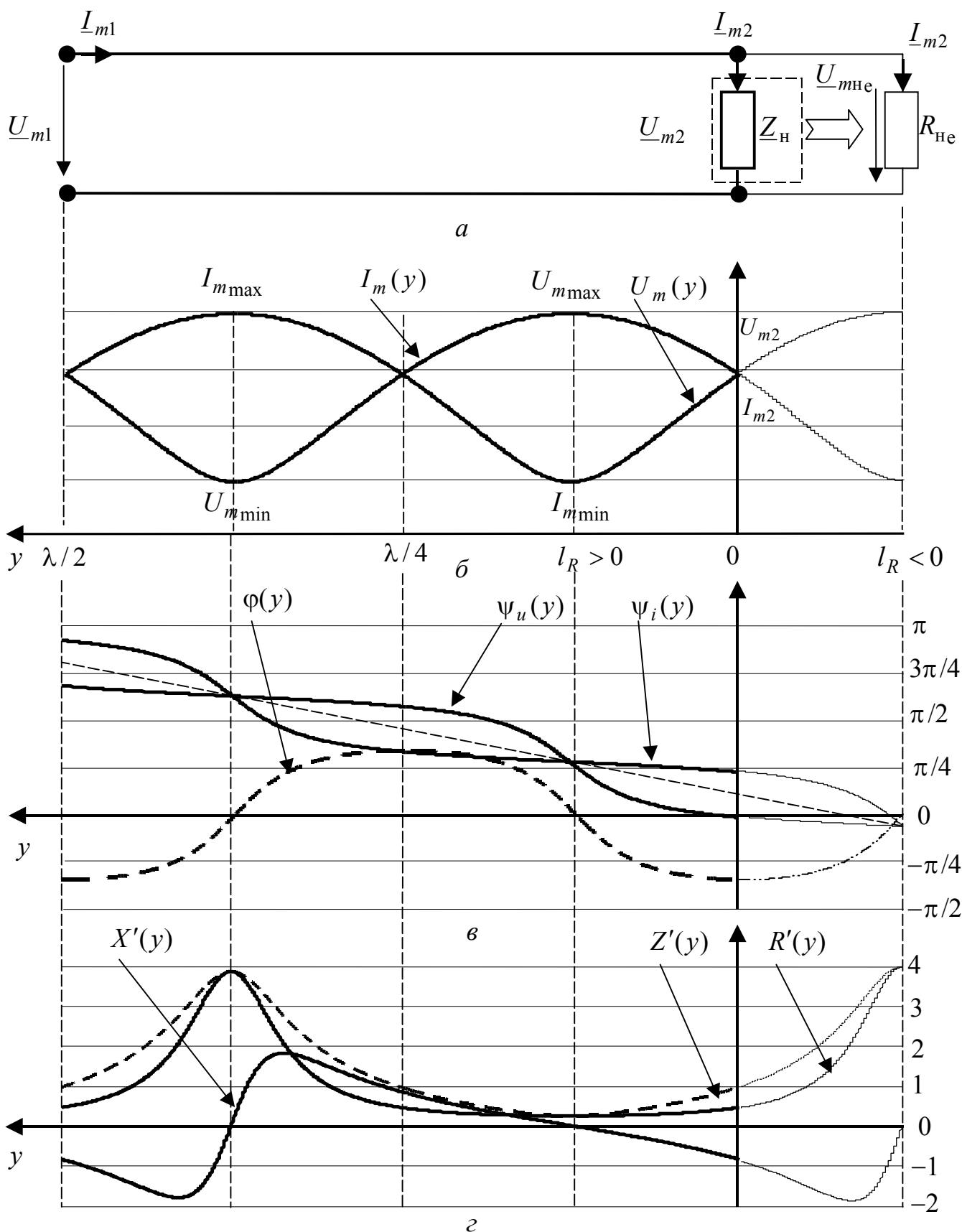


Рисунок 5.30 – Режим змішаних хвиль при навантаженні ідеальної лінії на комплексний опір: *a* – схема; розподіли: *б* – амплітуд напруги і струму; *в* – початкових фаз і зсуву фаз між напругою ($\psi_{u2} = 0$) і струмом; *г* – нормованих опорів

Таблиця 5.17 – Співвідношення для режиму змішаних хвиль в ідеальній лінії при комплексному навантаженні

Параметри	Співвідношення
Комплексні амплітуди напруги і струму на виході відрізка еквівалентної лінії	$\underline{U}_{mHe} = \frac{\underline{U}_{m2}}{\cos \beta l_R - j(1/R'_{He})\sin \beta l_R};$ $\underline{I}_{mHe} = \frac{\underline{I}_{m2}}{\cos \beta l_R - jR'_{He}\sin \beta l_R}$
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{mHe}[\cos \beta y_e + j(1/R'_{He})\sin \beta y_e];$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{mHe}(\cos \beta y_e + jR'_{He}\sin \beta y_e)$
Амплітуди	$U_m(y) = U_{mHe} \sqrt{\cos^2 \beta y_e + (1/R'_{He})\sin^2 \beta y_e};$ $I_m(y) = I_{mHe} \sqrt{\cos^2 \beta y_e + R'_{He}\sin^2 \beta y_e}$
Початкові фази	$\psi_u(y) = \psi_{uHe} + \arctg \frac{\operatorname{tg} \beta y_e}{R'_{He}};$ $\psi_i(y) = \psi_{iHe} + \arctg (R'_{He} \operatorname{tg} \beta y_e)$
Нормований комплексний опір	$\underline{Z}'(y) = \frac{R'_{He} + j \operatorname{tg} \beta y_e}{1 + jR'_{He} \operatorname{tg} \beta y_e}$
Модуль і аргумент комплексного коефіцієнта відбиття	$\rho(y) = \left \frac{R_{He} - R_{xB}}{R_{He} + R_{xB}} \right ; \varphi_\rho(y) = -2\beta y_e + \begin{cases} 0, & R_{He} > R_{xB} \\ \pi, & R_{He} < R_{xB} \end{cases}$

5.8.3 Режим змішаних хвиль в лінії з втратами

Для аналізу режиму змішаних хвиль в лінії з втратами загалом необхідно застосовувати чисельні методи з використанням формул (5.52) – (5.59), а також співвідношень, наведених у табл.5.5.

На практиці широко застосовують лінії з втратами, хвильовий опір і опір навантаження яких мають чисто активний характер. Зазвичай ці лінії мають також малі втрати ($\alpha y \ll 1$). В табл.5.18 наведені точні та наближені співвідношення для аналізу таких ліній при відліку координати від навантаження.

Як приклад на рис.5.31 для лінії з параметрами $R'_H = 4$; $\alpha\lambda = 0,3$ Нп; $l = \lambda$ побудовано графіки розподілу амплітуд напруги і струму (рис.5.31, б), їхніх початкових фаз та взаємного зсуву фаз (рис.5.31, в), а також нормованих опорів (рис.5.31, з). Як показує аналіз графіків, в реальній лінії (на відміну від ідеальної) при наближенні до її входу максимумами амплітуд напруги і струму збільшуються, а відношення значень максимумів і мінімумів зменшуються. Зменшуються також максимумами активного і реактивного опорів.

Таблиця 5.18 – Співвідношення для режиму змішаних хвиль в реальній лінії з активними хвильовим опором і опором навантаження

Параметри	$\underline{Z}_{\text{XB}} = R_{\text{XB}}; \underline{Z}_{\text{H}} = R_{\text{H}}$	Наближені співвідношення при $\underline{Z}_{\text{XB}} = R_{\text{XB}}; \underline{Z}_{\text{H}} = R_{\text{H}};$ $\alpha y \ll 1$
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{m2} \left(\text{ch} \gamma y + \frac{\text{sh} \gamma y}{R_{\text{H}}'} \right);$ $\underline{I}_m(y) = \underline{I}_{m2} (\text{ch} \gamma y + R_{\text{H}}' \text{sh} \gamma y)$	$\underline{U}_{m2}(y) \approx \underline{U}_{m2} [(1 + \alpha y / R_{\text{H}}') \cos \beta y + j(\alpha y + 1 / R_{\text{H}}') \sin \beta y];$ $\underline{I}_m(y) \approx \underline{I}_{m2} [(1 + \alpha y R_{\text{H}}') \cos \beta y + j(\alpha y + R_{\text{H}}') \sin \beta y]$
Нормований комплексний опір	$\underline{Z}'(y) = \frac{R_{\text{H}}' \text{ch} \gamma y + \text{sh} \gamma y}{\text{ch} \gamma y + R_{\text{H}}' \text{sh} \gamma y}$	$\underline{Z}'(y) \approx \frac{(R_{\text{H}}' + \alpha y) \cos \beta y + j(\alpha y R_{\text{H}}' + 1) \sin \beta y}{(1 + \alpha y R_{\text{H}}') \cos \beta y + j(\alpha y + R_{\text{H}}') \sin \beta y}$
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\underline{\rho}(y) = \frac{R_{\text{H}} - R_{\text{XB}} e^{-2\gamma y}}{R_{\text{H}} + R_{\text{XB}}}$ $\rho(y) = \frac{ R_{\text{H}} - R_{\text{XB}} e^{-2\alpha y}}{R_{\text{H}} + R_{\text{XB}}}$	$\underline{\rho}(y) = \frac{R_{\text{H}} - R_{\text{XB}} e^{-2\alpha y} e^{-j2\beta y}}{R_{\text{H}} + R_{\text{XB}}} = \rho(y) e^{j\varphi_{\rho}(y)};$ $\rho(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } R_{\text{H}} > R_{\text{XB}} \\ \pi, & \text{якщо } R_{\text{H}} < R_{\text{XB}} \end{cases}$
Активна потужність	$P_{\text{A}}(y) = \frac{(R_{\text{H}}^2 + R_{\text{XB}}^2) \text{sh}(2\alpha y) + 4R_{\text{H}} R_{\text{XB}} \text{ch}(2\alpha y)}{2R_{\text{XB}}} I_2^2 =$ $= 0,25 R_{\text{XB}} [(R_{\text{H}}' + 1)^2 e^{2\alpha y} - (R_{\text{H}}' - 1)^2 e^{-2\alpha y}] I_2^2$	$P_{\text{A}}(y) \approx \frac{R_{\text{H}} R_{\text{XB}} + (R_{\text{H}}^2 + R_{\text{XB}}^2) \alpha y}{R_{\text{XB}}} I_2^2 = \{R_{\text{H}}' + [(R_{\text{H}}')^2 + 1] \alpha y\} R_{\text{XB}} I_2^2$
Реактивна потужність	$P_{\text{Q}}(y) = \frac{ R_{\text{H}}^2 - R_{\text{XB}}^2 }{2R_{\text{XB}}} I_2^2 \sin \varphi_{\rho}(y)$	$P_{\text{Q}}(y) = 0,5 R_{\text{XB}} (R_{\text{H}}')^2 - 1 I_2^2 \sin \varphi_{\rho}(y)$
ККД	$\eta = \frac{P_{\text{AH}}}{P_{\text{A}}(l)} = \frac{4R_{\text{H}}'}{(R_{\text{H}}' + 1)^2 e^{2\alpha l} - (R_{\text{H}}' - 1)^2 e^{-2\alpha l}}$	$\eta = \frac{P_{\text{AH}}}{P_{\text{A}}(l)} \approx \frac{1}{1 + (R_{\text{H}}' + 1 / R_{\text{H}}') \alpha l}$

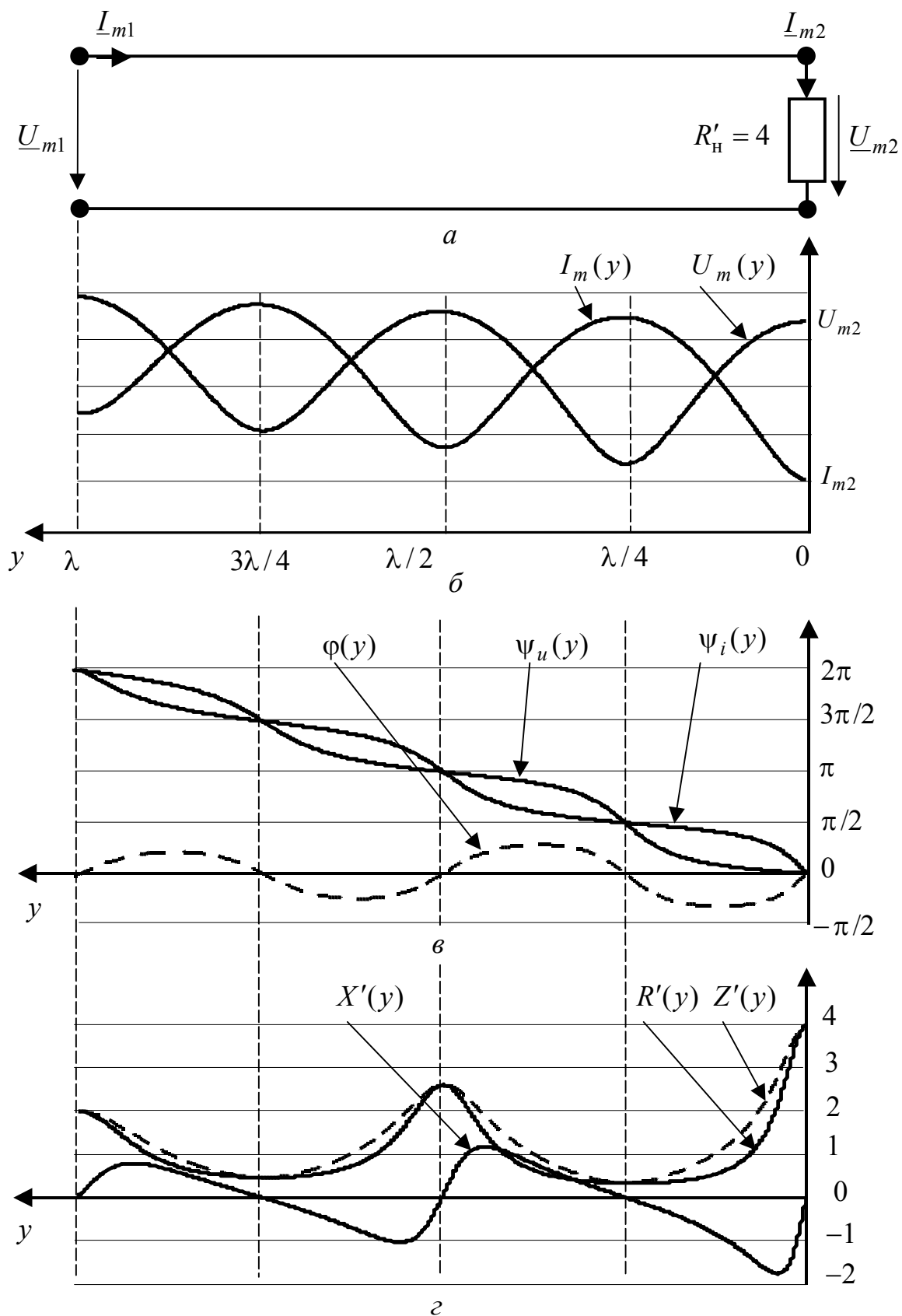


Рисунок 5.31 – Режим змішаних хвиль в лінії з втратами ($\alpha\lambda = 0,3$ Нп; $Z_{XB} = R_{XB}$): *a* – схема; розподіли: *б* – амплітуд напруги і струму; *в* – початкових фаз і зсуву фаз між напругою ($\psi_{u2} = 0$) і струмом; *г* – нормованих опорів

Можна показати, що при $\alpha y \rightarrow \infty$ $X(y) \rightarrow 0$; $R(y) \rightarrow R_{\text{XB}}$, $R'(y) \rightarrow 1$.

Рис.5.32 ілюструє енергетичні показники режиму змішаних хвиль в лінії з втратами. Графіки розподілу в лінії активної та реактивної потужностей (рис.5.32, а) показують, що активна потужність зменшується при наближенні до навантаження, а реактивна потужність змінюється за синусоїдним законом з періодом $\lambda/2$, зберігаючи вздовж лінії однаковий рівень максимальних і мінімальних значень. Остання обставина не є очевидною і пояснюється тим, що при віддаленні від навантаження максимумами реактивного опору зменшуються, а максимумами амплітуд струму, навпаки, зростають. В результаті максимальні та мінімальні значення реактивної потужності не змінюються.

Розрахунок ККД за формулою (див. табл.5.18) для лінії з параметрами, які були вибрані вище для побудови графіків (рис.5.31), дає значення:

$$\eta = \frac{P_{\text{Ан}}}{P_{\text{А}}(l)} \approx 0,4,$$

що підтверджується графіком залежності ККД від координати (рис.5.32, б):

$$\eta(y) = \frac{P_{\text{Ан}}}{P_{\text{А}}(y)} = \frac{4}{(R'_{\text{H}} + 1)^2 e^{2\alpha y} - (R'_{\text{H}} - 1)^2 e^{-2\alpha y}}.$$

Як і очікувалося, функція $\eta(y)$ приймає максимальне значення $\eta(0) = 1$ у навантаженні, а мінімальне $\eta(l) \approx 0,4$ – на вході лінії.

Оскільки ККД є головним енергетичним показником для реальних ліній передачі сигналів, у радіопередавальних пристроях важливо знати значення опору навантаження лінії, яке забезпечує максимум ККД. Розв'язання цієї задачі призводить до рівняння:

$$\frac{\partial \eta(R'_{\text{H}}, l)}{\partial R'_{\text{H}}} = \frac{4[(R'_{\text{H}} + 1)^2 e^{2\alpha l} - (R'_{\text{H}} - 1)^2 e^{-2\alpha l}] - 4R'_{\text{H}}[2(R'_{\text{H}} + 1)e^{2\alpha l} - 2(R'_{\text{H}} - 1)e^{-2\alpha l}]}{[(R'_{\text{H}} + 1)^2 e^{2\alpha l} - (R'_{\text{H}} - 1)^2 e^{-2\alpha l}]^2} = 0,$$

яке після перетворень буде таким:

$$[1 - (R'_{\text{H}})^2]e^{2\alpha l} + [(R'_{\text{H}})^2 - 1]e^{-2\alpha l} = 0. \quad (5.120)$$

Рівнянню (5.120) задовольняють два корені $R'_{\text{H}} = \pm 1$, з яких фізичний сенс має значення $R'_{\text{H}} = 1$ ($R_{\text{H}} = R_{\text{XB}}$).

Отже, **максимальний ККД в лінії буде в режимі узгодження**. При цьому величина ККД становить:

$$\eta(R'_{\text{H}})|_{R'_{\text{H}}=1} = \frac{P_{\text{Ан}}}{P_{\text{А}}(l)}|_{R'_{\text{H}}=1} = \frac{1}{e^{2\alpha l}} = e^{-2\alpha l},$$

що сходиться з отриманим у підрозд. 5.6 співвідношенням (5.70).

Наведений на рис.5.32, в графік $\eta(R'_{\text{H}})$ свідчить, що для розглядуваної лінії максимальне значення ККД при $R'_{\text{H}} = 1$ становить $\eta \approx 0,55$, що приблизно на 40 % більше, ніж при $R'_{\text{H}} = 4$.

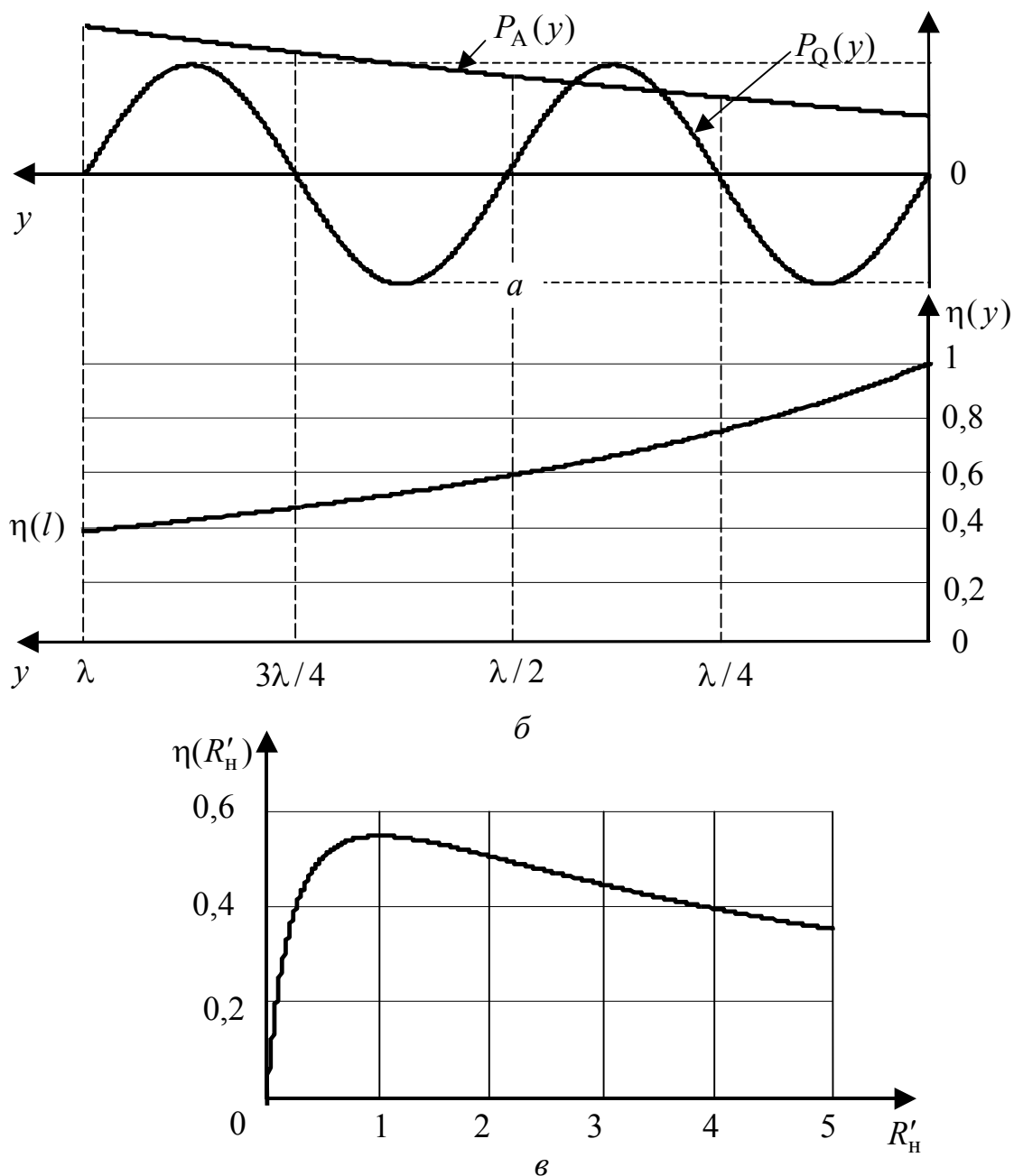


Рисунок 5.32 – Енергетичні параметри лінії з втратами ($\alpha\lambda = 0,3$; $\underline{Z}_{\text{XB}} = R_{\text{XB}}$):
 a – активна та реактивна потужності; \bar{b} – залежність ККД від координати ($R'_H = 4$); \bar{v} – залежність ККД від R'_H ($l = \lambda$)

Якщо лінію з втратами навантажено на комплексний опір $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$; $R_H \neq 0$, то, як показує аналіз (аналогічний застосованому для ідеальної лінії в п.5.8.2), основні співвідношення і графіки відрізняються від режиму навантаження на активний опір тільки зсувом за координатою на певне значення $l_{\text{не}}$.

Приклад 5.19. Розрахувати режим змішаних хвиль на частоті $f = 1000$ МГц у кабелі, параметри якого наведені у прикладі 5.10. Відомі дов-

жина лінії $l = 0,25$ м, комплексна амплітуда вихідної напруги $\underline{U}_{m2} = 10e^{j\pi/4}$ В, опір навантаження $R_H = 277,8$ Ом. Побудувати графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$, $Z(y)$, $P_Q(y)$. Визначити режим на вході лінії (\underline{U}_{m1} ; \underline{I}_{m1} ; \underline{Z}_1 ; P_{A1}), КБХ і КСХ. Втрати в лінії не враховувати.

Розв'язання. Скористуємось співвідношеннями (5.102) – (5.106), (5.111), (5.112) і значеннями параметрів лінії (див. табл.5.7): $\lambda = 0,199$ м; $R_{XB} = 92,6$ Ом.

Обчислимо струм у навантаженні та нормований опір лінії:

$$\underline{I}_{m2} = \frac{\underline{U}_{m2}}{R_H} = \frac{10e^{j\pi/4}}{277,8} = 0,036e^{j\pi/4} \text{ А} = 36e^{j\pi/4} \text{ мА}; \quad R'_H = \frac{R_H}{R_{XB}} = \frac{277,8}{92,6} = 3.$$

Оскільки $R'_H > 1$, КСХ і КБХ становитимуть: $k_{CX} = R'_H = 3$; $k_{BX} = 1/R'_H = 0,33$.

Складемо рівняння для побудови графіків:

$$U_m(y) = U_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (1/R'_H)^2 \sin^2 \beta y} = 10 \sqrt{\cos^2(31,59y) + 0,1 \sin^2(31,59y)} \text{ В};$$

$$I_m(y) = I_{m2} \sqrt{\cos^2 \beta y + (R'_H)^2 \sin^2 \beta y} = 36 \sqrt{\cos^2(31,59y) + 9 \sin^2(31,59y)} \text{ мА};$$

$$\psi_u(y) = \psi_{u2} + \arctg \frac{\tg \beta y}{R'_H} = \pi/4 + \arctg [0,33 \tg(31,59y)];$$

$$\psi_i(y) = \psi_{u2} + \arctg (R'_H \tg \beta y) = \pi/4 + \arctg [3 \tg(31,59y)];$$

$$\underline{Z}(y) = R_{XB} \frac{R'_H + j \tg \beta y}{1 + j R'_H \tg \beta y} = 92,6 \frac{3 + j \tg(31,59y)}{1 + j 3 \tg(31,59y)} \text{ Ом};$$

$$P_Q(y) = \frac{|R_H^2 - R_{XB}^2|}{2R_{XB}} I_2^2 \sin(-2\beta y) = \frac{(277,8^2 - 92,6^2)}{2 \cdot 92,6} \left(\frac{0,036}{\sqrt{2}} \right)^2 \sin(-63,18y) = -0,24 \sin(63,18y) \text{ ВАр.}$$

Відповідно до складених рівнянь побудуємо графіки (рис.5.33) і визначимо електричний режим на вході лінії:

$$\underline{U}_{m1} = U_m(l) e^{j\psi_u(l)} = 3,342 e^{-j0,654} \text{ В}; \quad \underline{I}_{m1} = I_m(l) e^{j\psi_i(l)} = 107,9 e^{-j0,771} \text{ мА};$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}(l) = 30,92 + j3,58 \text{ Ом};$$

$$P_{A1} = P_H = R_H I_2^2 = 0,5 R_H I_{m2}^2 = 0,5 \cdot 277,83 \cdot 0,036^2 = 0,18 \text{ Вт.}$$

Приклад 5.20. Розрахувати режим змішаних хвиль в кабелі, розглянутому у прикладі 5.19, при комплексному навантаженні $\underline{Z}_H = 92,6 + j92,6$ Ом.

Розв'язання. Обчислимо струм у навантаженні та нормований опір лінії:

$$\underline{I}_{m2} = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_H} = \frac{10e^{j\pi/4}}{92,6 + j92,6} = 0,0764 \text{ А} = 76,4 \text{ мА}; \quad \underline{Z}'_H = \frac{\underline{Z}_H}{R_{XB}} = 1 + j = \sqrt{2} e^{j\pi/4}.$$

Розв'язання виконаємо двома способами: 1) за формулами (5.113) – (5.115) для комплексних амплітуд і комплексного опору; 2) замінюючи комплексне навантаження еквівалентним (за опором) відрізком лінії довжиною l_R , навантаженим на активний опір R_{He} (див. п.5.8.2).

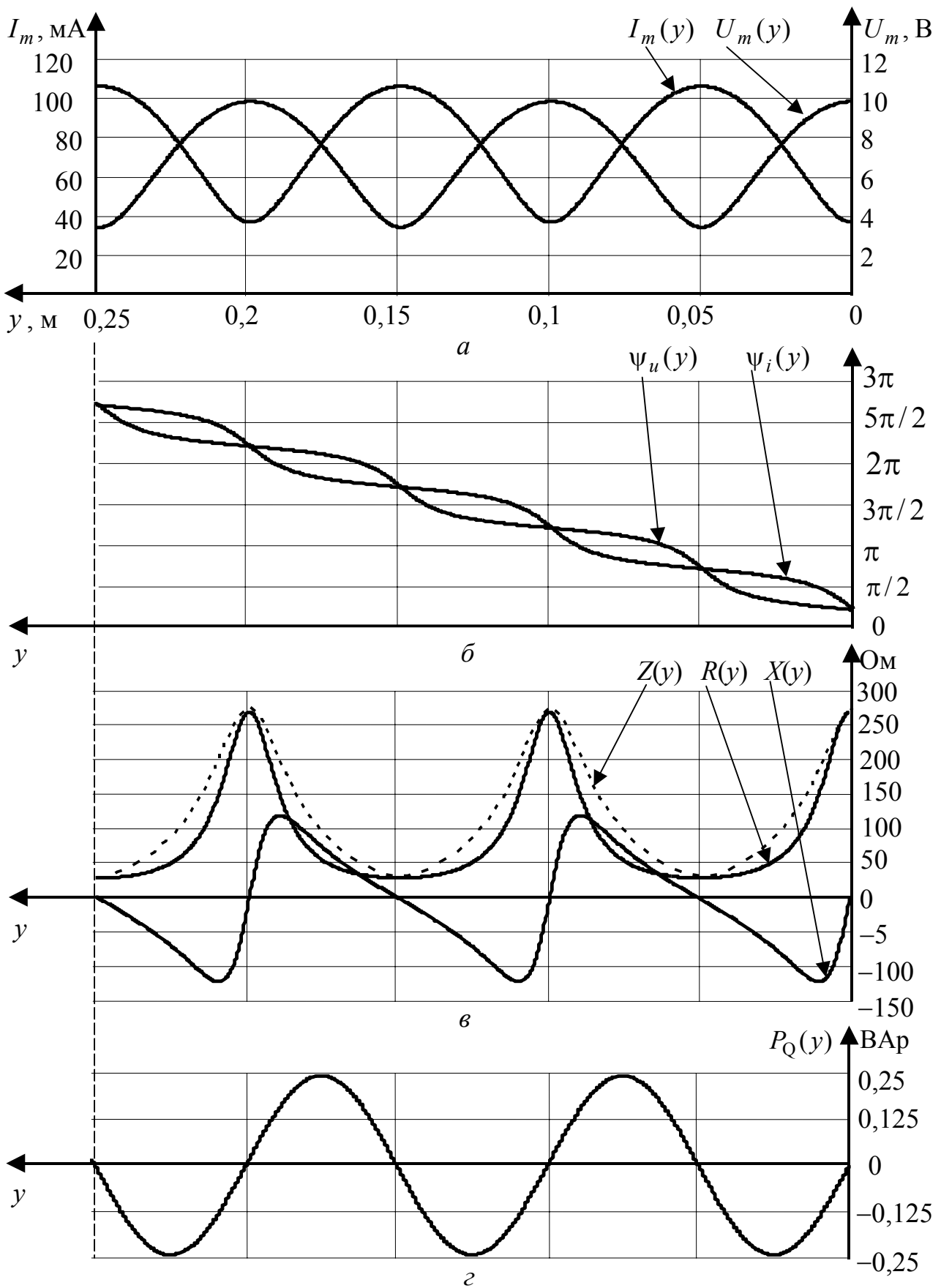


Рисунок 5.33 – Розподіли у прикладі 5.19: *a* – амплітуд напруги і струму; *б* – початкових фаз; *в* – опорів; *г* – реактивної потужності

Після підстановки числових значень параметрів рівняння (5.113) – (5.115) матимуть вигляд:

$$\underline{U}_m(y) = 10e^{j\pi/4}[\cos(31,59y) + j0,707e^{-j\pi/4}\sin(31,59y)] \text{ В};$$

$$\underline{I}_m(y) = 0,0764[\cos(31,59y) + j\sqrt{2}e^{j\pi/4}\sin(31,59y)] \text{ А};$$

$$\underline{Z}(y) = Z(y)e^{j\varphi(y)} = R(y) + jX(y) = R_{\text{хв}}\underline{Z}'(y) = 92,6 \frac{\sqrt{2}e^{j\pi/4} + jt\text{g}(31,59y)}{1 + j\sqrt{2}e^{j\pi/4}\text{tg}(31,59y)} \text{ Ом.}$$

Згідно з отриманими рівняннями побудуємо графіки (рис.5.34):

- модулів $U_m(y)$, $I_m(y)$ і аргументів $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$ відповідних комплексних амплітуд;
- модуля $Z(y)$, дійсної $R(y)$ та уявної $X(y)$ частин комплексного опору;
- реактивної потужності $P_Q(y) = X(y)I_m^2(y) = 0,5X(y)I_m^2(y)$.

Визначимо параметри електричного режиму на вході лінії:

$$\underline{U}_{m1} = \underline{U}_m(l) = 6,805e^{j1,61} \text{ В}; \quad \underline{I}_{m1} = \underline{I}_m(l) = 109,96e^{j2,375} \text{ мА};$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}(l) = 44,65 - j42,85 \text{ Ом};$$

$$P_{A1} = P_H = R_H I_2^2 = 0,5R_H I_{m2}^2 = 0,5 \cdot 92,6 \cdot 0,0764^2 = 0,27 \text{ Вт.}$$

Щоб замінити комплексне навантаження еквівалентним відрізком лінії, попередньо обчислимо за формулою (5.118) довжину цього відрізка:

$$l_R = \frac{0,199}{2\pi} \arctg\left(-\frac{2-1}{2} - \sqrt{\frac{(2-1)^2}{4} + 1}\right) = -0,032 \text{ м.}$$

Опір навантаження відрізка лінії розрахуємо за формулою (5.119):

$$R'_{\text{не}} = \frac{1 + 1,618^2}{1 + 2 \cdot 1,618 + 2 \cdot 1,618^2} = 0,382;$$

$$R_{\text{не}} = R'_{\text{не}} R_{\text{хв}} = 0,382 \cdot 92,6 = 35,37 \text{ Ом.}$$

Отримані параметри еквівалентного відрізка лінії з активним навантаженням дозволяють виконувати обчислення за формулами, наведеними в табл.5.17. Результати розрахунків збігаються з результатами, одержаними на підставі рівнянь (5.113) – (5.115).

На рис.5.34 графіки у межах лінії від входу до навантаження зображено суцільними лініями, а для увімкненого відрізка еквівалентної лінії – пунктиром.

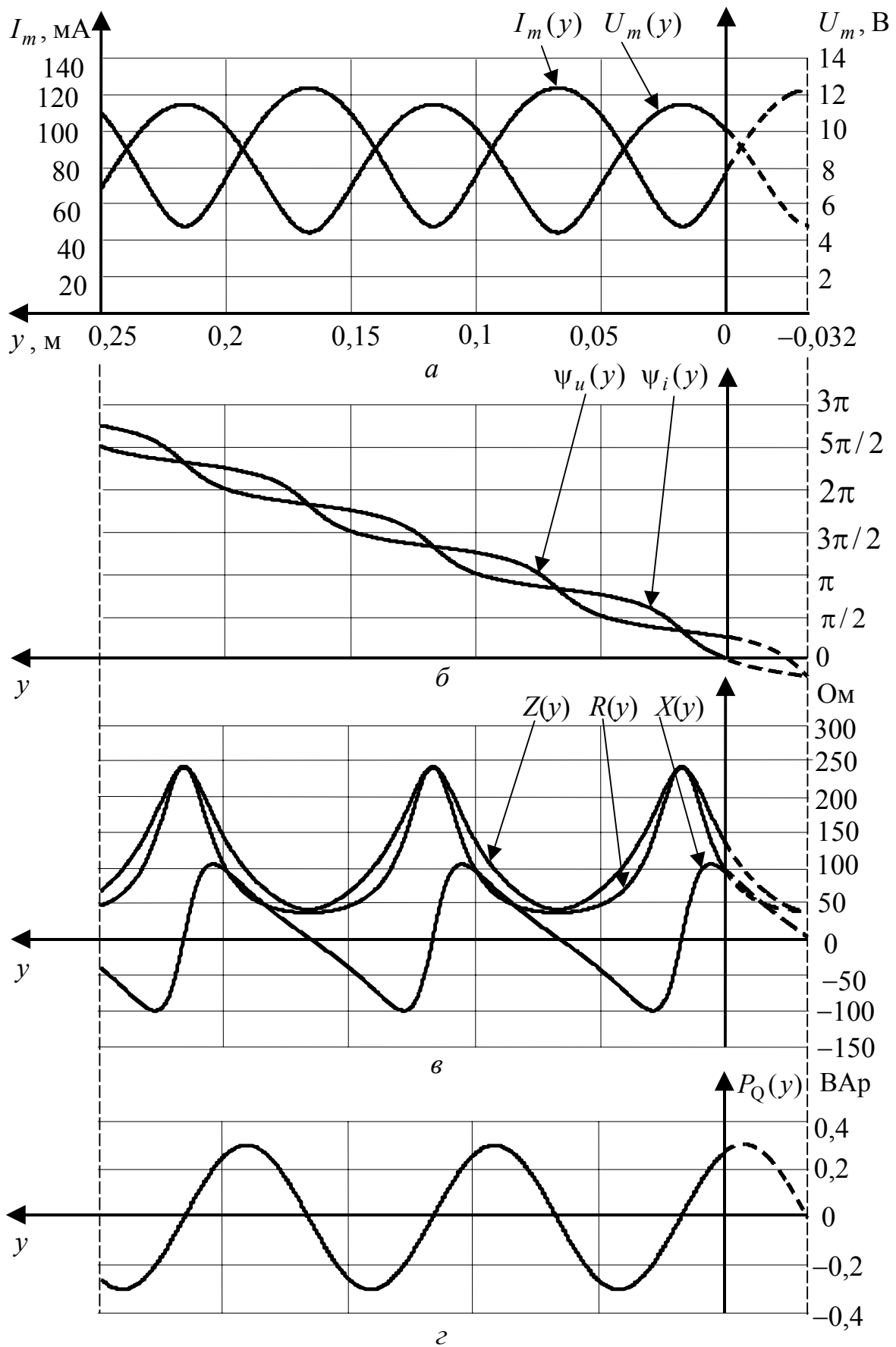


Рисунок 5.34 – Розподіли у прикладі 5.20: *a* – амплітуд напруги і струму; *б* – початкових фаз; *в* – опорів; *г* – реактивної потужності

КБХ і КСХ обчислимо згідно з виразами (5.96) і (5.97), попередньо розраховувавши модуль комплексного коефіцієнта відбиття (5.58):

$$\rho(0) = \frac{\sqrt{(R_H - R_{XB})^2 + X_H^2}}{\sqrt{(R_H + R_{XB})^2 + X_H^2}} = \frac{\sqrt{(92,6 - 92,6)^2 + 92,6^2}}{\sqrt{(92,6 + 92,6)^2 + 92,6^2}} = 0,447;$$

$$k_{\text{бх}} = \frac{1 - \rho(0)}{1 + \rho(0)} = \frac{1 - 0,447}{1 + 0,447} = 0,382; \quad k_{\text{сх}} = \frac{1 + \rho(0)}{1 - \rho(0)} = \frac{1 + 0,447}{1 - 0,447} = 2,618.$$

Правильність розрахунку КБХ підтверджується збігом отриманого значення з величиною нормованого еквівалентного опору $R'_{\text{не}}$.

Приклад 5.21. Змінивши довжину кабеля до величини $l = 75\lambda$ і врахувавши втрати ($\alpha = 0,018$ Нп/м), розв'язати приклад 5.19. Побудувати графіки розподілів $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$, $P_A(y)$, $P_Q(y)$, $X(y)$ на ділянках довжиною λ від кінця і від початку лінії. Визначити режим на вході лінії (\underline{U}_{m1} , \underline{I}_{m1} , \underline{Z}_1 , P_{Q1} , P_{A1}), ККД, КСХ і КБХ.

Розв'язання. Використовуючи знайдені у прикладі 5.19 параметри ($\underline{I}_{m2} = 0,036e^{j\pi/4}$ А; $P_{\text{Ан}} = 0,18$ Вт; $R'_H = 3$) і формули з табл.5.18, складемо необхідні рівняння (табл.5.19) і побудуємо графіки (рис.5.35).

Таблиця 5.19 – Рівняння для побудови графіків у прикладі 5.21

Параметри	Рівняння
Комплексні амплітуди	$\underline{U}_m(y) = 10e^{j\pi/4} \left[\text{ch}(0,018 + j31,59)y + \frac{\text{sh}(0,018 + j31,59)y}{3} \right] \text{ В};$ $\underline{I}_m(y) = 36e^{j\pi/4} [\text{ch}(0,018 + j31,59)y + 3\text{sh}(0,018 + j31,59)y] \text{ мА}$
Комплексний опір	$\underline{Z}(y) = 92,6 \frac{3\text{ch}(0,018 + j31,59)y + \text{sh}(0,018 + j31,59)y}{\text{ch}(0,018 + j31,59)y + 3\text{sh}(0,018 + j31,59)y} \text{ Ом}$
Активна і реактивна потужності	$P_A(y) = 0,015 [16e^{(0,036 + j63,18)y} - 4e^{-(0,036 + j63,18)y}] \text{ Вт};$ $P_Q(y) = 0,24 \sin(63,18y) \text{ Вар}$

Підставивши до рівнянь (табл.5.19) значення $y = l = 75 \cdot 0,199 = 14,925$ м, знаходимо параметри режиму на вході лінії:

$$\underline{U}_{m1} = U_m(l)e^{j\psi_u(l)} = 11,27e^{j0,785} \text{ В}; \quad \underline{I}_{m1} = I_m(l)e^{j\psi_i(l)} = 66,66e^{j0,785} \text{ мА};$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}(l) = R_1 = 169,06 \text{ Ом}; \quad P_{Q1} = 0; \quad P_{A1} = 0,3756 \text{ Вт}.$$

Обчислимо ККД:

$$\eta = \frac{P_{\text{Ан}}}{P_{\text{А1}}} = \frac{0,18}{0,3756} = 0,48.$$

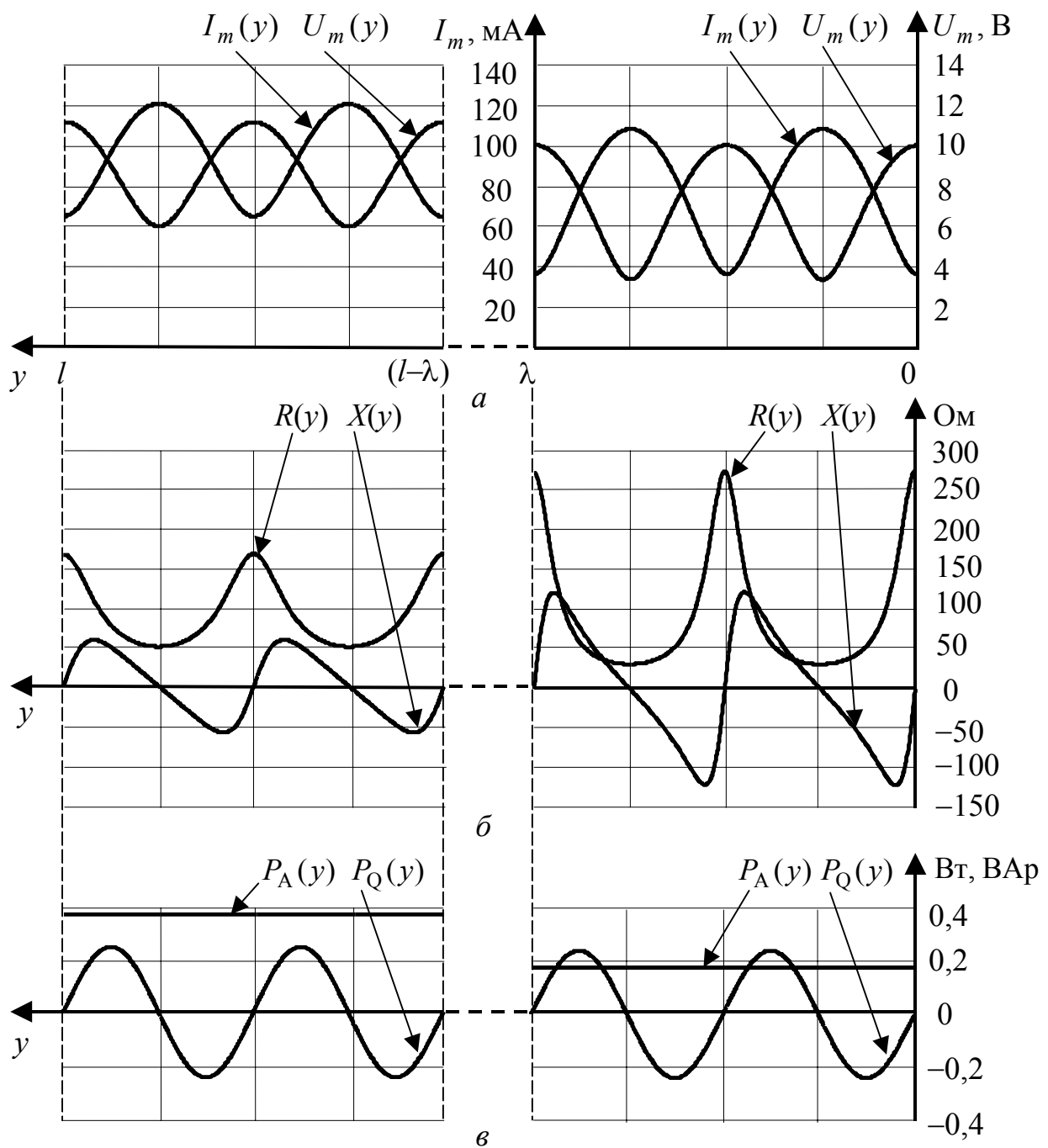


Рисунок 5.35 – Розподіли у прикладі 5.21: *a* – амплітуд напруги і струму; *б* – опорів; *в* – активної та реактивної потужностей

Оскільки модуль комплексного коефіцієнта відбиття змінюється вздовж лінії, змінюються також КСХ і КБХ. Тому обмежимося оцінками КСХ і КБХ на виході та вході лінії, які визначимо за значеннями нормованих активних опорів у цих перерізах:

$$k_{\text{схн}} = R'_\text{н} = 3; \quad k_{\text{бхн}} = 1/R'_\text{н} = 1/3 = 0,333;$$

$$k_{\text{сх1}} = R'_1 = \frac{R_1}{R_{\text{XB}}} = \frac{169,06}{92,6} = 1,826; \quad k_{\text{бх1}} = 1/k_{\text{сх1}} = 1/1,826 = 0,548.$$

5.9 Методи узгодження довгих ліній

Режим біжних хвиль, який потребує узгодження навантаження з хвильовим опором лінії, широко застосовують у радіотехніці та енергетиці. Так, в радіотехніці використовують переваги цього режиму, а саме, неспотворену передачу сигналів, а в енергетиці – мінімальні втрати і максимальний ККД. Однак не завжди можна підібрати стандартні кабелі для заданого навантаження або навпаки, змінити опір навантаження відповідно до заданого хвильового опору лінії. Тоді слід використовувати узгоджувальні пристрої лінії з навантаженням (рис.5.36, а).

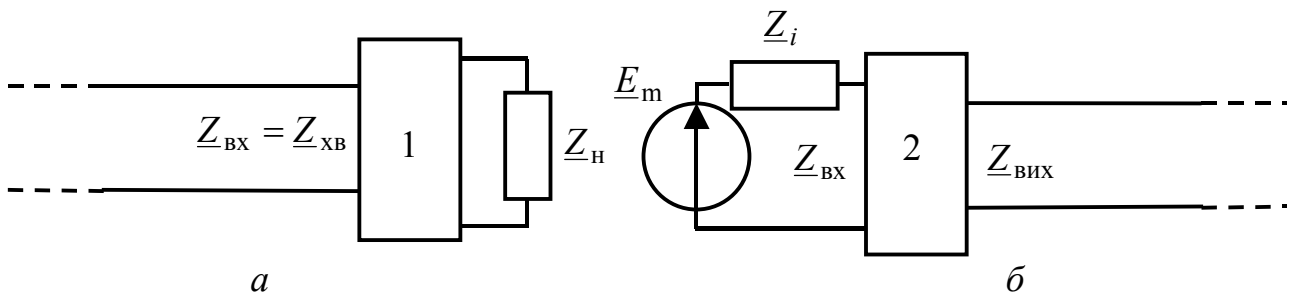


Рисунок 5.36 – Узгодження лінії: а – з навантаженням; б – з джерелом (1 – узгоджувальний пристрій лінії з навантаженням, 2 – узгоджувальний пристрій джерела з лінією)

Крім узгодження лінії з навантаженням, також узгоджують джерело з лінією (рис.5.36, б). При цьому, залежно від критерію узгодження, узгоджувальні пристрої забезпечують виконання таких умов:

- 1) $Z_{BX} = Z_i^*$ – передачу максимальної активної потужності до навантаження;
- 2) $R_{BX} \gg R_i$ – максимальний ККД;
- 3) $Z_{ВИХ} = Z_{XB}$ – усунення відбиття сигналу від входу лінії.

Щоб зменшити власні активні втрати, узгоджувальні пристрої мають містити високодобротні, а в першому наближенні – реактивні елементи.

В інженерній практиці вважають, що хвильовий опір є активним ($Z_{XB} = R_{XB}$). Тому одним з основних параметрів радіочастотних кабелів є величина R_{XB} (типові значення 75 і 50 Ом). При цьому втратами нехтують або застосовують спеціальні заходи для **балансування ліній** (забезпечення активного характеру хвильового опору в заданому частотному діапазоні).

Для збалансованих довгих ліній (ЗДЛ) виконується умова:

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{G_1}{C_1}, \quad (5.121)$$

за якої хвильовий опір лінії (див. табл.5.6) є активним:

$$\underline{Z}_{\text{XB}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1(R_1/L_1 + j\omega)}{C_1(G_1/C_1 + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = R_{\text{XB}}. \quad (5.122)$$

Оскільки у реальних ліній зазвичай $R_1/L_1 > G_1/C_1$, щоб задовольнити умові (5.121), збільшують індуктивність L_1 шляхом послідовного увімкнення додаткових індуктивних котушок рівномірно вздовж лінії (вперше такий прийом запропонував Пупін¹¹) або застосовують магнітопровідні матеріали (автор – Краруп¹²). Тому ці способи балансування називають «пупенізація» і «крарупізація» за прізвищами вчених.

Перевагою збалансованих ліній також є те, що коефіцієнт ослаблення (див. табл. 5.9) $\alpha \approx 0,5(R_1/R_{\text{XB}} + G_1R_{\text{XB}})$, з огляду на формулу (5.122), приймає найменше значення (при всіх можливих значеннях R_{XB}): $\alpha \approx \sqrt{R_1G_1}$.

У діапазоні порівняно низьких частот як узгоджувальні пристрої використовують трансформатори, у тому числі зв'язані резонансні контури. Із зростанням частоти застосування трансформаторів стає неефективним через вплив міжвиткових і міжобмоткових ємностей і збільшення втрат. Тому в узгоджувальних пристроях на вищих частотах як трансформатори або як реактивні елементи застосовують відрізки ДЛ.

Враховуючи вищезгадане, головну увагу у подальшому розгляді приділено методам узгодження за допомогою відрізків ДЛ. При цьому для спрощення аналізу узгоджувані відрізки і лінії вважаються ідеальними, а для скорочення викладення розглядаються тільки методи узгодження ліній з навантаженням.

5.9.1 Застосування відрізків ліній як трансформаторів

Використання ліній як трансформаторів (рис.5.37) базується на тому, що вхідний опір відрізка лінії, довжина якого не кратна половині довжини хвилі, відрізняється від опору навантаження. Загальний вираз для вхідного опору лінії (див. табл.5.8), використовуючи прийняті на рис.5.37 позначення, можна записати у вигляді:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = R_{\text{XB,TP}} \frac{\underline{Z}_{\text{Н}} + jR_{\text{XB,TP}} \operatorname{tg}(2\pi l_{\text{TP}}/\lambda_{\text{TP}})}{R_{\text{XB,TP}} + j\underline{Z}_{\text{Н}} \operatorname{tg}(2\pi l_{\text{TP}}/\lambda_{\text{TP}})}. \quad (5.123)$$

¹¹ **Пупін Михайле** (1858–1935) – американський фізик і електротехнік. Серб за походженням. Емігрував у США (1874), де закінчив Колумбійський ун-т (1883). Навчався у Кембридзькому і Берлінському ун-тах (1885-89). З 1889 р. професор теоретичної фізики заснованого ним електротехнічного ф-ту Колумбійського ун-ту, декан цього ф-ту (1891-1931). Розрахував і дослідами підтвердив можливість збільшення дальності телеграфного та телефонного зв'язку по кабельних лініях. Йому належать також дослідження з фізики рентгенівських променів і розробка методів їх застосування.

¹² **Краруп Карл**, С. Е. Крагур – данський інженер, запропонував спосіб збільшення дальності передачі по кабелях зв'язку, штучно збільшуючи їхню індуктивність (1902).

Найширше практичне застосування мають так звані **чвертьхвильові трансформатори** ($\lambda/4$ -трансформатори), довжина яких дорівнює непарній кількості $\lambda_{\text{тр}}/4$:

$$l_{\text{тр}} = (2n + 1) \frac{\lambda_{\text{тр}}}{4}.$$

При цьому $2\pi l_{\text{тр}}/\lambda_{\text{тр}} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ і вхідний опір (5.123) становить:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{R_{\text{хв.тр}}^2}{\underline{Z}_{\text{н}}}. \quad (5.124)$$

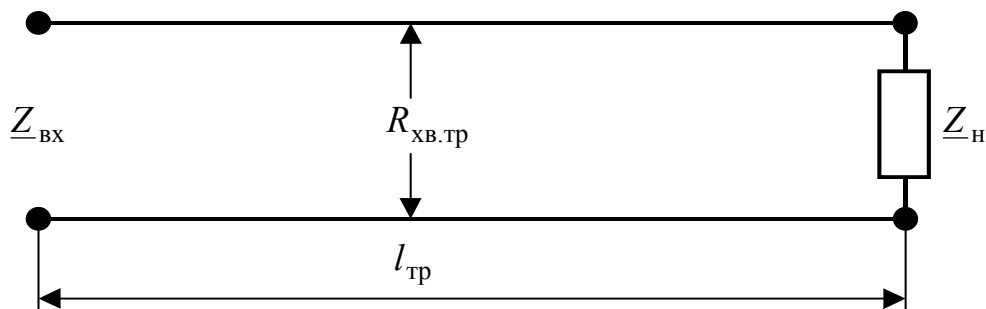


Рисунок 5.37 – Відрізок лінії як трансформатор

Співвідношення (5.124) показує, що $\lambda/4$ -трансформатор аналогічний ідеальному трансформатору. Оскільки коефіцієнт трансформації в даному випадку дорівнює $R_{\text{хв.тр}}$ і має розмірність опору, $\lambda/4$ -трансформатор, на відміну від ідеального, змінює характер опору (індуктивний на ємнісний і навпаки).

В окремому випадку, коли навантаження є активним ($\underline{Z}_{\text{н}} = R_{\text{н}}$), вхідний опір $\lambda/4$ -трансформатора також активний:

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_{\text{хв.тр}}^2}{R_{\text{н}}}. \quad (5.125)$$

Вираз (5.125) дозволяє обґрунтувати принцип і виконати розрахунок $\lambda/4$ -трансформатора для узгодження активного навантаження $R_{\text{н}}$ з лінією, яка має хвильовий опір $R_{\text{хв.л}}$. Для цього $\lambda/4$ -трансформатор включається між лінією та навантаженням і забезпечує рівність $R_{\text{вх}} = R_{\text{хв.л}}$, яка дозволяє визначити з формули (5.125) шуканий хвильовий опір трансформатора:

$$R_{\text{хв.тр}} = \sqrt{R_{\text{хв.л}} R_{\text{н}}}. \quad (5.126)$$

Отже, для узгодження лінії та активного навантаження хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора має дорівнювати середньому геометричному опору навантаження і хвильового опору лінії.

На рис.5.38 зображені схеми увімкнення $\lambda/4$ -трансформаторів для узгодження ліній при двох активних навантаженнях $R_{\text{н1}} = 4R_{\text{хв.л}}$ і $R_{\text{н2}} = R_{\text{хв.л}}/4$, а також графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $\psi_u(y)$, $\psi_i(y)$, $R(y)$, $X(y)$.

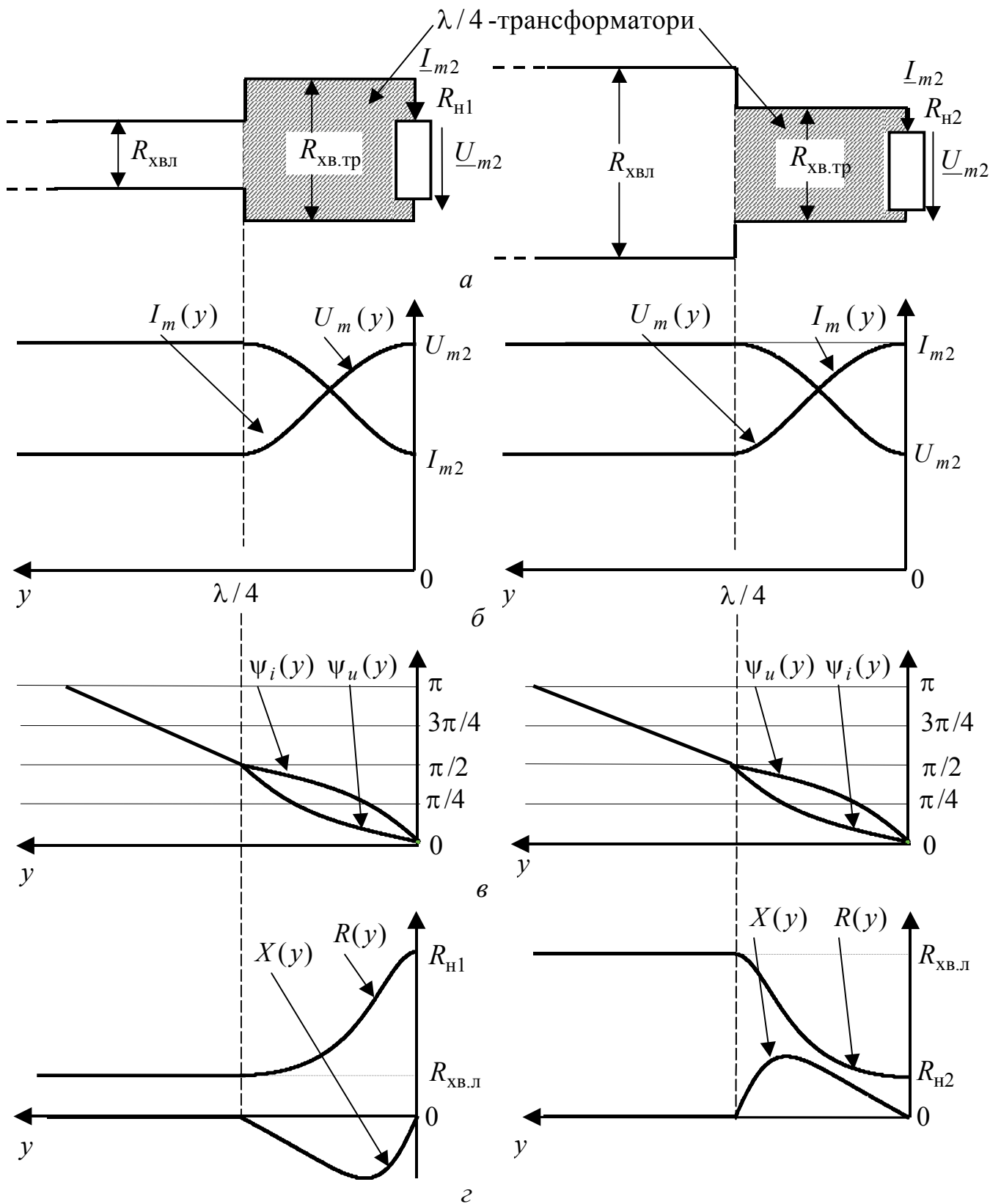


Рисунок 5.38 – Узгодження ідеальної лінії з активним навантаженням ($R_{\text{Н1}} = 4R_{\text{ХВ.л}}$; $R_{\text{Н2}} = R_{\text{ХВ.л}}/4$) $\lambda/4$ -трансформатором: а – схеми; розподіли: б – амплітуд напруги та струму; в – початкових фаз напруги та струму ($\psi_{u2} = \psi_{i2} = 0$); з – опорів

При $R_{н1} = 4R_{хв.л}$ хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора $R_{хв.тр} = 2R_{хв.л}$, а при $R_{н2} = R_{хв.л}/4$ опір $R_{хв.тр} = 0,5R_{хв.л}$. Різницю хвильових опорів ліній та $\lambda/4$ -трансформаторів на схемах позначають різницею відстаней між провідниками: чим більша ця відстань, тим менша погонна ємність і більший хвильовий опір і навпаки (див. рис.5.38, а). Практично, у випадку $R_{хв.тр} < R_{хв.л}$, трансформуючу лінію створюють з основної лінії, збільшуючи її товщину за допомогою трубок.

Аналіз графіків (рис.5.38) показує, що в $\lambda/4$ -трансформаторі спостерігається режим змішаних, а в лінії – біжних хвиль. Можна показати, що КСХ, який був би в лінії з тим самим навантаженням без узгодження $k_{сх.л}$, і КСХ у $\lambda/4$ -трансформаторі $k_{сх.тр}$ пов'язані співвідношенням:

$$k_{сх.тр} = \sqrt{k_{сх.л}}.$$

Відносно малі розміри і зменшене значення КСХ $\lambda/4$ -трансформатора обумовлює широке застосування цього способу узгодження реальних ліній як з навантаженням, так і між двома лініями за умови різних значень хвильових опорів¹³.

Трансформуючі властивості відрізків ДЛ використовують для узгодження ліній при комплексному опорі. Застосовують такі способи узгодження (рис.5.39):

1) увімкнення $\lambda/4$ -трансформатора у переріз лінії з активним опором (рис.5.39, а);

2) компенсація реактивної складової провідності навантаження за допомогою паралельно увімкненого відрізка короткозамкненої або розімкненої лінії з подальшою трансформацією активної провідності навантаження $\lambda/4$ -трансформатором (рис.5.39, б);

3) вибір довжини трансформуючого відрізка $l_{тр}$ (загалом $l_{тр} \neq \lambda/4$) і його хвильового опору $R_{хв.тр}$, щоб забезпечити рівність вхідного опору трансформатора хвильовому опорі лінії (рис.5.39, в).

Координату перерізу лінії AB з активним опором можна визначити експериментально за максимумом або мінімумом амплітуди напруги. Щоб знайти відстань l_R від навантаження до цього перерізу і значення опору R_{AB} у ньому (рис.5.39, а), можна застосувати співвідношення (5.118) і (5.119), отримані при розгляді режиму змішаних хвиль для комплексного навантаження. Враховуючи позитивний знак величини l_R і прийняті вище позначення, ці співвідношення матимуть вигляд:

¹³ Аналогічний принцип застосований у так званій «освітленій» оптиці, де для зменшення відбиття від лінз використовують шар матеріала товщиною $\lambda/4$, у якого коефіцієнт заломлення світла дорівнює середньому геометричному коефіцієнтів заломлення у склі та повітрі.

$$l_R = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left\{ -\frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} + \sqrt{\left[\frac{(Z'_H)^2 - 1}{2X'_H} \right]^2 + 1} \right\}; \quad (5.127)$$

$$R_{AB} = R_{XB.L} \frac{R'_H (1 + \operatorname{tg}^2 \beta l_R)}{1 - 2X'_H \operatorname{tg} \beta l_R + (Z'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R} = \frac{R_{XB.L}^2 R'_H (1 + \operatorname{tg}^2 \beta l_R)}{R_{XB.L}^2 - 2X'_H R_{XB.L} \operatorname{tg} \beta l_R + Z_H^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_R}, \quad (5.128)$$

де $R'_H = R_H / R_{XB.L}$; $X'_H = X_H / R_{XB.L}$; $Z'_H = Z_H / R_{XB.L}$ – нормовані опори навантаження лінії.

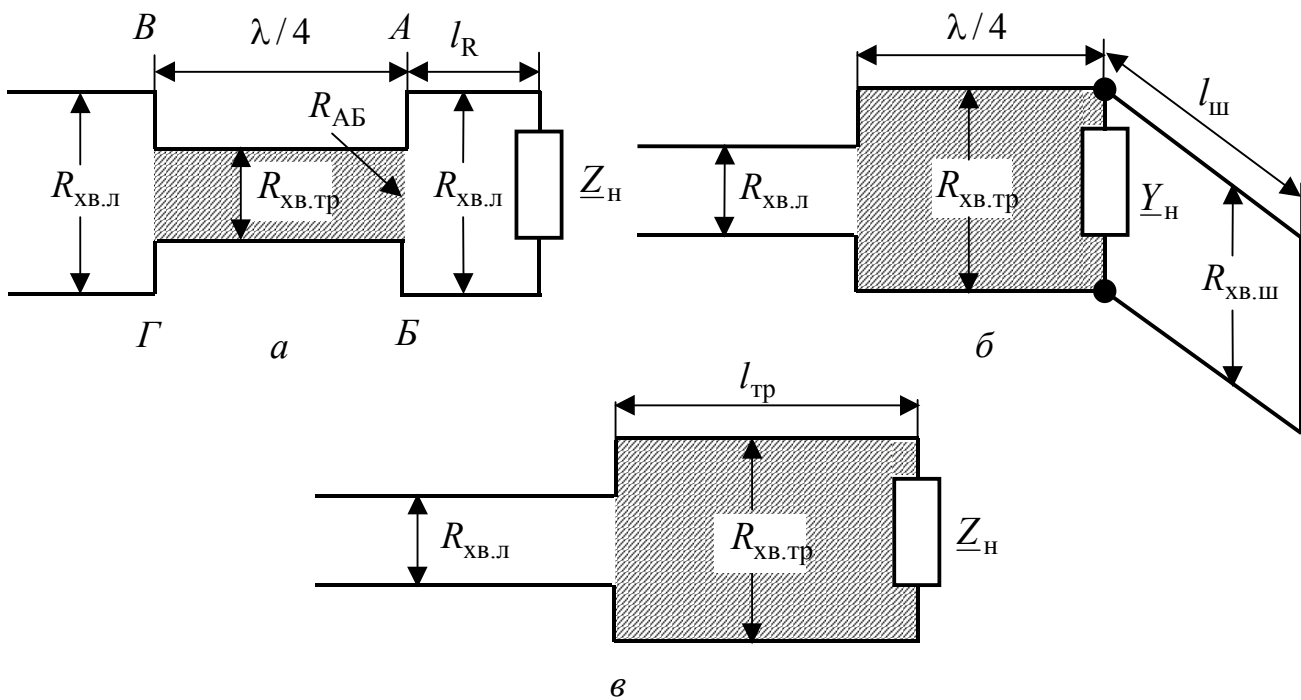


Рисунок 5.39 – Способи узгодження ліній з комплексним навантаженням за допомогою трансформуючих відрізків

Для узгодження R_{AB} з $R_{XB.L}$ хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора (рис.5.39, а) на підставі виразу (5.126) має становити:

$$R_{XB.Тр} = \sqrt{R_{XB.L} R_{AB}}. \quad (5.129)$$

У колі (рис.5.39, а) в $\lambda/4$ -трансформаторі та ділянці лінії від комплексного навантаження до перерізу AB буде режим змішаних, а в іншій частині лінії – режим біжних хвиль.

Відрізки короткозамкнених чи розімкнених ліній (рис.5.39, б), які увімкнено до лінії паралельно, називають **шлейфами**.

Ідеальні шлейфи мають тільки реактивні комплексні опори jX_{III}

(провідності $-jB_{\text{ш}}$). Тому, якщо увімкнути паралельно навантаженню з комплексною провідністю $\underline{Y}_H = G_H - jB_H$ (рис.5.39, б) шлейф, у якого $B_{\text{ш}} = -B_H$, еквівалентна провідність навантаження стає активною G_H . Далі для узгодження достатньо увімкнути в лінію $\lambda/4$ -трансформатор з хвильовим опором:

$$R_{\text{хв.тр}} = \sqrt{R_{\text{хв.л}}/G_H}. \quad (5.130)$$

У шлейфі встановлюється режим стійних хвиль, а в $\lambda/4$ -трансформаторі та лінії – відповідно режими змішаних і біжних хвиль. Слід також враховувати, що такий спосіб узгодження застосовують тільки тоді, коли є можливість змінювати параметри навантаження (загалом $G_H \neq 1/R_H$).

При узгодженні комплексного навантаження за допомогою трансформуючого відрізка лінії (рис.5.39, в) параметри цього відрізка ($l_{\text{тр}}$ та $R_{\text{хв.тр}}$) можна визначити з виразу (5.123) за умови $\underline{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{хв.л}}$:

$$R_{\text{хв.л}} = R_{\text{хв.тр}} \frac{\underline{Z}_H + jR_{\text{хв.тр}} \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})}{R_{\text{хв.тр}} + j\underline{Z}_H \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})} = R_{\text{хв.тр}} \frac{R_H + j[X_H + R_{\text{хв.тр}} \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})]}{R_{\text{хв.тр}} - X_H \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}}) + jR_H \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}})}. \quad (5.131)$$

Після перетворень з виразу (5.131) виходять два незалежних рівняння:

$$\operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}}) = \frac{R_{\text{хв.тр}} R_{\text{хв.л}} - R_H R_{\text{хв.тр}}}{R_{\text{хв.л}} X_H}; \quad \operatorname{tg}(\beta_{\text{тр}} l_{\text{тр}}) = \frac{R_{\text{хв.тр}} X_H}{R_H R_{\text{хв.л}} - R_{\text{хв.тр}}^2},$$

розв'язання яких призводить до співвідношень для розрахунку параметрів трансформуючого відрізка лінії:

$$R_{\text{хв.тр}} = \sqrt{R_{\text{хв.л}} \frac{Z_H^2 - R_H R_{\text{хв.л}}}{R_H - R_{\text{хв.л}}}} = R_{\text{хв.л}} \sqrt{\frac{(Z'_H)^2 - R'_H}{R'_H - 1}}; \quad (5.132)$$

$$l_{\text{тр}} = \frac{1}{\beta_{\text{тр}}} \operatorname{arctg} \frac{R_{\text{хв.тр}} (R_{\text{хв.л}} - R_H)}{R_{\text{хв.л}} X_H} = \frac{1}{\beta_{\text{тр}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{R_{\text{хв.тр}}}{R_{\text{хв.л}}} \cdot \frac{1 - R'_H}{X'_H} \right). \quad (5.133)$$

Якщо параметри навантаження і хвильовий опір лінії такі, що підкореневий вираз у формулі (5.132) від'ємний або прямує до нескінченності (якщо $R'_H = 1$), даний спосіб узгодження фізично не можна реалізувати. В окремому випадку, коли навантаження активне ($X_H = 0$), параметри трансформуючого відрізка лінії збігаються з параметрами $\lambda/4$ -трансформатора ($R_{\text{хв.тр}} = \sqrt{R_{\text{хв.л}} R_H}$; $l_{\text{тр}} = \lambda_{\text{тр}}/4$).

Доцільність вибору певного способу узгодження із застосуванням трансформуючих відрізків ліній визначається конкретною задачею. Однак ці способи мають спільний недолік – необхідність забезпечити потрібний хвильовий опір трансформуючої лінії, що призводить до необхідності іноді використовувати інші методи узгодження. Вказаного недоліку не мають методи узгодження за допомогою паралельно увімкнених шлейфів, конструктивні та електричні параметри яких $R_{\text{хв}}$ і β такі ж самі, як і в основній лінії. Різновиди даного способу узгодження показані на рис.5.40.

5.9.2 Узгодження паралельно увімкненими шлейфами

Оскільки шлейфи увімкнено паралельно (рис.5.39), для аналізу використовують і на схемах позначають саме провідності відповідних елементів. Принципово можна використовувати як короткозамкнені, так і розімкнені шлейфи. На практиці частіше використовують короткозамкнені шлейфи через більш жорстку конструкцію та можливості підстроювання переміщенням перемички на кінці шлейфа, як це умовно показано на рис.5.40.

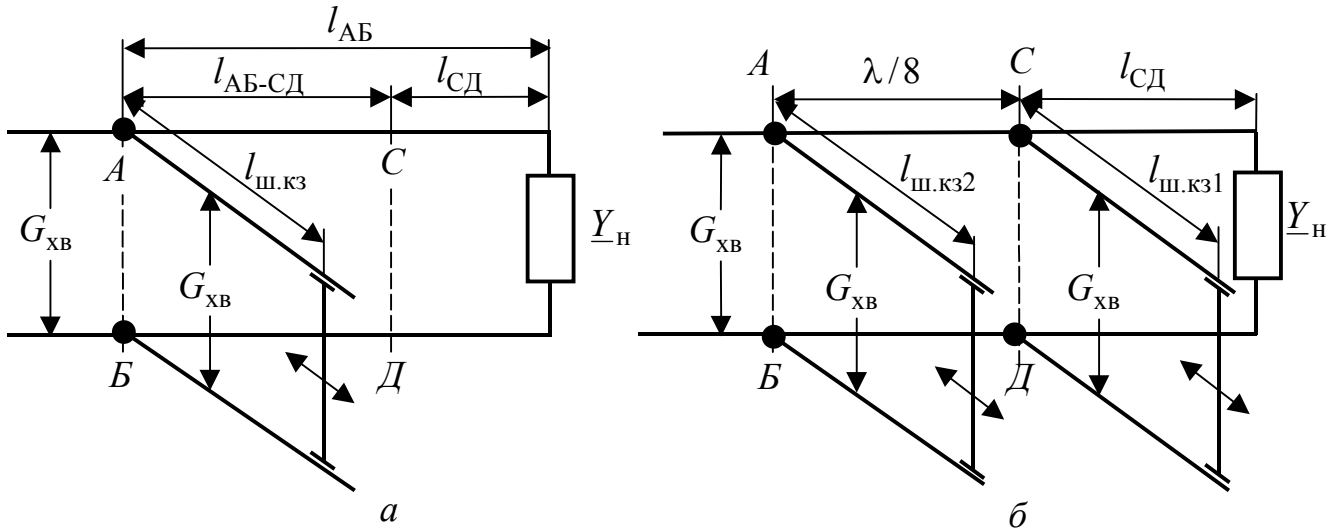


Рисунок 5.40 – Узгодження ліній за допомогою короткозамкнених паралельних шлейфів: *a* – одним; *б* – двома

Спосіб узгодження одним шлейфом (одношлейфове узгодження) (рис.5.40, *a*) вперше запропонований Татаріновим¹⁴.

Для узгодження одним шлейфом мають виконуватися умови:

1) активна складова комплексної провідності лінії в місці увімкнення шлейфа (переріз *АВ*) дорівнює хвильовій:

$$\underline{Y}(l_{AB}) = G_{хв} - jB(l_{AB}); \quad (5.134)$$

2) реактивна провідність шлейфа відрізняється від реактивної складової комплексної провідності лінії у перерізі *АВ*:

$$\underline{Y}_{ш} = -jB_{ш} = jB(l_{AB}); \quad B_{ш} = -B(l_{AB}). \quad (5.135)$$

Якщо виконуються умови (5.134) і (5.135), перша з яких забезпечується величиною l_{AB} , а друга – довжиною шлейфа $l_{ш}$, еквівалентна провідність кола

¹⁴ **Татарінов Володимир Васильович** (1878–1941) – відомий радянський радіотехнік. Закінчив Московський університет (1904). Працював у Нижегородській і Центральній ленинградській радіолабораторіях. Основні праці присвячені розвитку зв'язку на коротких хвилях (принцип застосування хвиль різної довжини для роботи вдень і вночі; нова система спрямованих антен; способи узгодження антен; розрахунок комплексних опорів складних антен; розроблення антен метрових і дециметрових хвиль).

у перерізі AB після увімкнення шлейфа становитиме:

$$\underline{Y}_c(l_{AB}) = \underline{Y}(l_{AB}) + \underline{Y}_{ш} = G_{XB}. \quad (5.136)$$

На ділянці лінії від входу до перерізу AB буде режим біжних хвиль, від перерізу AB до навантаження – режим змішаних, а в шлейфі – режим стійних хвиль.

Для аналізу одношлейфового узгодження доцільно використовувати нормовану комплексну провідність лінії, аналітичний вираз якої отримують із загального співвідношення для опору лінії (див. табл.5.8):

$$\begin{aligned} \underline{Y}'(y) &= \frac{1}{\underline{Z}'(y)} = \frac{\underline{Y}'_H + j \operatorname{tg} \beta y}{1 + j \underline{Y}'_H \operatorname{tg} \beta y} = \frac{G'_H + j(\operatorname{tg} \beta y - B'_H)}{1 + B'_H \operatorname{tg} \beta y + j G'_H \operatorname{tg} \beta y} = G'(y) - j B'(y) = \\ &= \frac{G'_H (1 + \operatorname{tg}^2 \beta y)}{1 + 2 B'_H \operatorname{tg} \beta y + (Y'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta y} - j \frac{B'_H + [(Y'_H)^2 - 1] \operatorname{tg} \beta y - B'_H \operatorname{tg}^2 \beta y}{1 + 2 B'_H \operatorname{tg} \beta y + (Y'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta y}, \quad (5.137) \end{aligned}$$

$$\text{де } \underline{Y}'(y) = \frac{\underline{Y}(y)}{G_{XB}}; \quad G'(y) = \frac{G(y)}{G_{XB}}; \quad B'(y) = \frac{B(y)}{G_{XB}}; \quad \underline{Y}'_H = \frac{Y_H}{G_{XB}} = G'_H - j B'_H;$$

$B'_H = \frac{B_H}{G_{XB}}; \quad G'_H = \frac{G_H}{G_{XB}}, \quad Y'_H = \frac{Y_H}{G_{XB}} = \sqrt{(G'_H)^2 + (B'_H)^2}$ – відповідні нормовані провідності; G_{XB} – активна хвильова провідність ідеальної лінії.

Співвідношення для l_{AB} і $l_{ш}$, які виходять з виразів (5.134) – (5.137), при комплексному навантаженні \underline{Y}_H є досить громіздкими. Тому використовують метод розрахунку, оснований на попередньому визначенні перерізу лінії CD (рис.5.40, *a*) з чисто активною провідністю. Режим активного навантаження має і самостійне значення. В табл.5.20 і 5.21 наведено порядок операцій і довідкові формули в режимах навантаження лінії на активну та довільну комплексну провідності.

Враховуючи багатозначність розв'язків щодо місця увімкнення і довжини (див. табл.5.20 і 5.21), на практиці вибирають значення цих величин, виходячи з умов фізичної реалізації ємності ($l_{AB} > 0; l_{ш.кз} > 0; l_{ш.хх} > 0$) і конструктивних вимог.

Недоліком методу узгодження одним шлейфом є складність настроювання, що виникає при регулюванні величини l_{AB} . Цього недоліку практично не має метод узгодження, що використовує два паралельні шлейфи. Перший шлейф вмикають паралельно навантаженню або на певній відстані l_{CD} від нього у перерізі CD (рис.5.40, *b*), а другий – у перерізі AB на відстані $\lambda/8$ або $3\lambda/8$ від першого шлейфу.

Довжину першого шлейфа $l_{ш1}$ вибирають такою, щоб у перерізі AB активна провідність лінії дорівнювала хвильовій, тобто виконувалася умова (5.134).

Довжину другого шлейфа $l_{ш2}$ визначають з умови (5.135), тобто його реактивна провідність відрізняється від реактивної провідності лінії у перерізі AB тільки знаком.

Таблиця 5.20 – Порядок операцій і довідкові формули для розрахунку режиму одношлейфового узгодження лінії з активним навантаженням

Параметр		Формула
Місце увімкнення шлейфа l_{CD} з умови $G'(l_{AB}) = 1$		$\operatorname{tg}(\beta l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'_H} = \pm \sqrt{G_{XB}/G'_H}$; $l_{AB} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}(\pm \sqrt{1/G'_H})$
Реактивна провідність у місці увімкнення шлейфа		$B'(l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'_H} (G'_H - 1)$
Реактивна провідність шлейфа		$B'_{ш} = -B'(l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'_H} (1 - G'_H)$
Довжина	короткозамкненого шлейфа	$l_{ш.кз} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left[\pm \frac{1}{\sqrt{1/G'_H} (1 - G'_H)} \right]$
	розімкненого шлейфа	$l_{ш.хх} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} [\pm \sqrt{1/G'_H} (1 - G'_H)]$

Таблиця 5.21 – Порядок операцій і довідкові формули для розрахунку режиму одношлейфового узгодження лінії з комплексним навантаженням

Параметр		Формула
Довжина l_{CD} з умови $B'(l_{CD}) = 0$		$l_{CD} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{(Y'_H)^2 - 1 \pm \sqrt{(Y'_H)^4 + 2[(B'_H)^2 - (G'_H)^2] + 1}}{2B'_H}$
Активна провідність лінії у перерізі CD		$G'(l_{CD}) = \frac{G'_H (1 + \operatorname{tg}^2 \beta l_{CD})}{1 + 2B'_H \operatorname{tg} \beta l_{CD} + (Y'_H)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l_{CD}}$
Довжина l_{AB-CD} з умови $G'(l_{CD}) = 1$		$l_{AB-CD} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}(\pm \sqrt{1/G'(l_{CD})})$
Реактивна провідність у місці увімкнення шлейфа		$B'(l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'(l_{CD})} [G'(l_{CD}) - 1]$
Реактивна провідність шлейфа		$B'_{ш} = -B'(l_{AB}) = \pm \sqrt{1/G'(l_{CD})} [1 - G'(l_{CD})]$
Довжина	короткозамкненого шлейфа	$l_{ш.кз} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{1/G'(l_{CD})} [1 - G'(l_{CD})]} \right\}$
	розімкненого шлейфа	$l_{ш.хх} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left\{ \pm \sqrt{1/G'(l_{CD})} [1 - G'(l_{CD})] \right\}$

Отже, внаслідок увімкнення двох паралельних шлейфів лінія буде узгоджена на ділянці від входу до перерізу AB . На ділянках від перерізу AB до навантаження спостерігається режим змішаних, а в шлейфах – режим стійних хвиль.

Співвідношення для розрахунку двошлейфового узгоджувального пристрою досить складні. Тому для приблизних оцінок довжин шлейфів застосовують кругову діаграму (підрозд. 5.10), а після виготовлення та увімкнення шлейфів настройку здійснюють, змінюючи розташування перемичок, які замикають шлейфи.

5.9.3 Узгодження коаксіальних кабелів із симетричними вібраторами

У діапазонах метрових і дециметрових хвиль як антени широко застосовують так звані симетричні вібратори – два провідника ДЛ, які розведено під кутом 180° один відносно одного. Симетричний вібратор довжиною $\lambda/2$ (рис.5.41, а) має еквівалентний опір (опір випромінення) $R_A \approx 75$ Ом. Різновидом напівхвильового вібратора, який має опір $R_A \approx 300$ Ом, ширшу смугу частот і застосовується у телебаченні, є петльовий, або шлейф-вібратор (рис.5.41, в). Петльовий вібратор запропонував Пістолькорс¹⁵.

Симетрія вібраторів полягає у тому, що комплексні амплітуди струмів і напруг у симетричних перерізах по осі x відрізняються тільки знаком (рис.5.41, а), тобто зсунуті за фазою на π . З цієї точки зору доцільно підключати такі вібратори до симетричної двопровідної лінії. Однак симетричні ДЛ мають небажане випромінювання і тому переважно використовують коаксіальні кабелі, які є несиметричними лініями.

Щоб забезпечити симетрію та режим узгодження при увімкненні коаксіальних кабелів до симетричних вібраторів, які є навантаженням, використовують $\lambda/4$ -трансформатори і фазообертачі на π (виготовлені з коаксіальних кабелів).

На рис.5.41, а показана схема симетрувального і узгоджувального пристрою для напівхвильового вібратора. Пристрій складається з двох $\lambda/4$ -трансформаторів і відрізка лінії довжиною $\lambda/2$, який виконує функцію фазообертача на π . Щоб проаналізувати роботу пристрою, вібратор можна замінити еквівалентною схемою з двох послідовно увімкнених активних опорів $R_A/2$, які є навантаженням $\lambda/4$ -трансформаторів. Тоді опір на вході кожного трансформатора становитиме:

$$R_{\text{вх}} = 2 \frac{R_{\text{хв}}^2}{R_A},$$

де $R_{\text{хв}}$ – хвильовий опір кабелю.

¹⁵ **Пістолькорс Олександр Олександрович** (1896–1996) – член-кореспондент АН СРСР. Закінчив Московське вище технічне училище (1927). Працював у Нижегородській та Центральній Ленінградській радіолабораторіях, а також викладав у вищих навчальних закладах Ленінграда і Москви. Наукові праці присвячені теорії антен і фідерних ліній (розрахунок опорів випромінення складних антен; теорія двопровідних несиметричних ліній; розрахунок антен за діаграмою спрямованості; теорія щілинних антен). Запропонував нові типи антен, зокрема петльовий вібратор (1936).

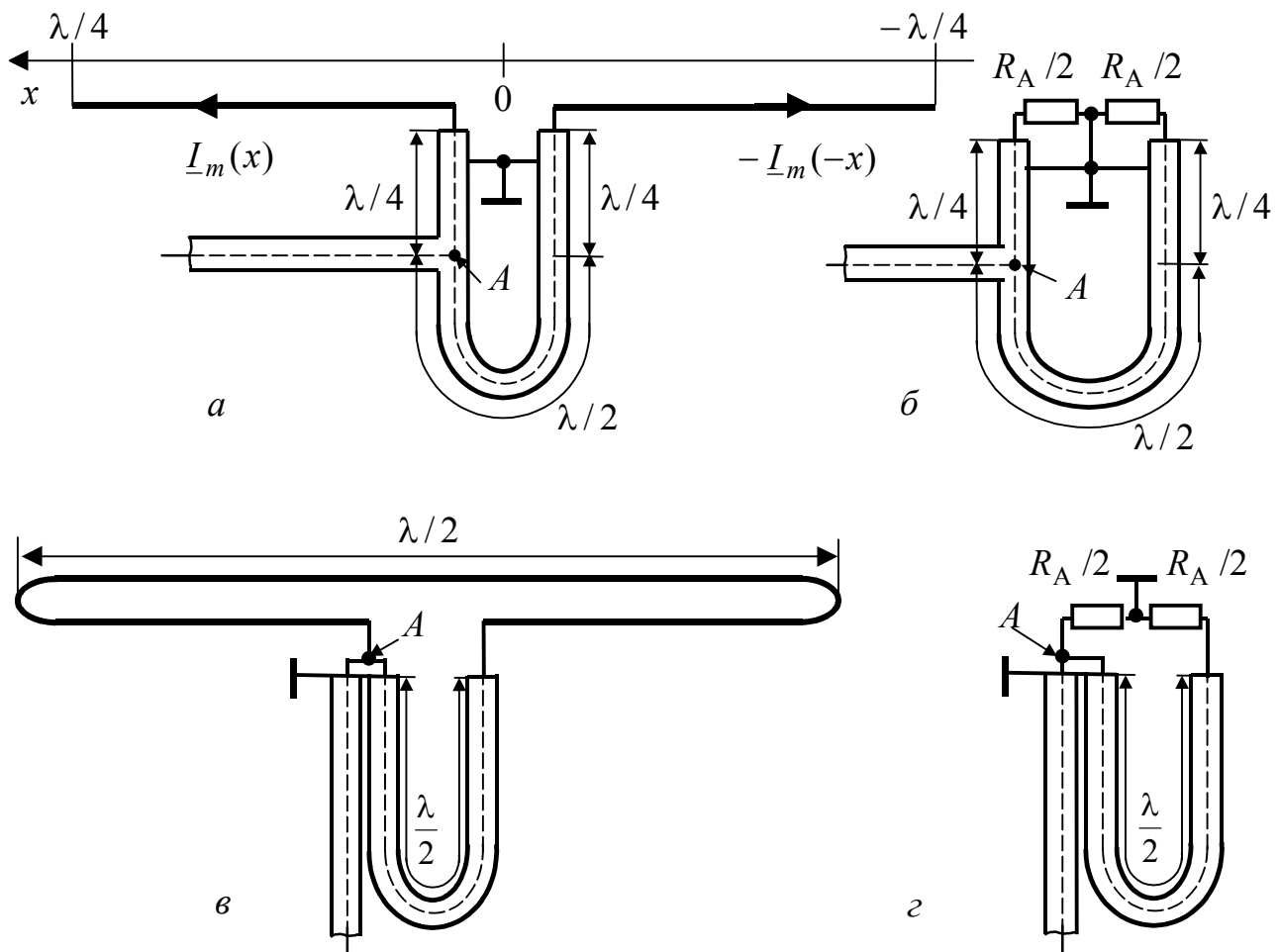


Рисунок 5.41 – Узгодження вібраторів з коаксіальним кабелем:
a, б – напівхвильового; *в, г* – петльового

Оскільки вхідний і навантажувальний опір відрізка лінії довжиною $\lambda/2$ однакові, в точці *A* кабелю увімкнено два паралельно з'єднаних опори $R_{\text{вх}}$, тобто, кабель буде навантажено на опір:

$$R_{\text{н}} = 0,5R_{\text{вх}} = R_{\text{хв}}^2 / R_{\text{А}}.$$

Отже, для узгодження слід виконати умову;

$$R_{\text{хв}} = R_{\text{н}} = R_{\text{А}} \approx 75 \text{ Ом}.$$

Щоб увімкнути петльовий вібратор до коаксіального кабелю, необхідний тільки відрізок лінії довжиною $\lambda/2$, який змінює фазу (рис.5.41, *в*). Схема заміщення (рис.5.41, *г*) показує, що в точці *A* кабель буде навантажений на два паралельно з'єднаних опори величиною $R_{\text{А}}/2$ кожне, і тому опір навантаження становитиме:

$$R_{\text{н}} = 0,25R_{\text{А}} \approx 75 \text{ Ом}.$$

Як і для напівхвильового, щоб узгодити петльовий вібратор, використовують кабель з хвильовим опором $R_{\text{хв}} = R_{\text{н}} \approx 75 \text{ Ом}$. Тому це значення хвильового опору є стандартним для коаксіальних кабелів.

Відрізки кабеля, з яких конструюють розглянуті пристрої, схожі на латинську літеру U і тому називаються « U -коліно».

Приклад 5.22. Розрахувати параметри $\lambda/4$ -трансформаторів для узгодження системи з двох послідовно з'єднаних ідеальних симетричних дво-провідних ліній і навантаження на частоті $f = 100$ МГц. Перша лінія має хвильовий опір $R_{\text{хв.л1}} = 200$ Ом, а друга – $R_{\text{хв.л2}} = 300$ Ом. Навантаженням другої лінії є комплексний опір $Z_{\text{н}} = 600 - j900$ Ом. Побудувати графіки розподілу амплітуд напруги і струму в лініях і $\lambda/4$ -трансформаторах після узгодження, якщо амплітуда входної напруги $U_{m1} = 9$ В.

Розв'язання. Складемо схему, яка містить дві лінії, два узгоджувальних $\lambda/4$ -трансформатори та опір навантаження (рис.5.42, а).

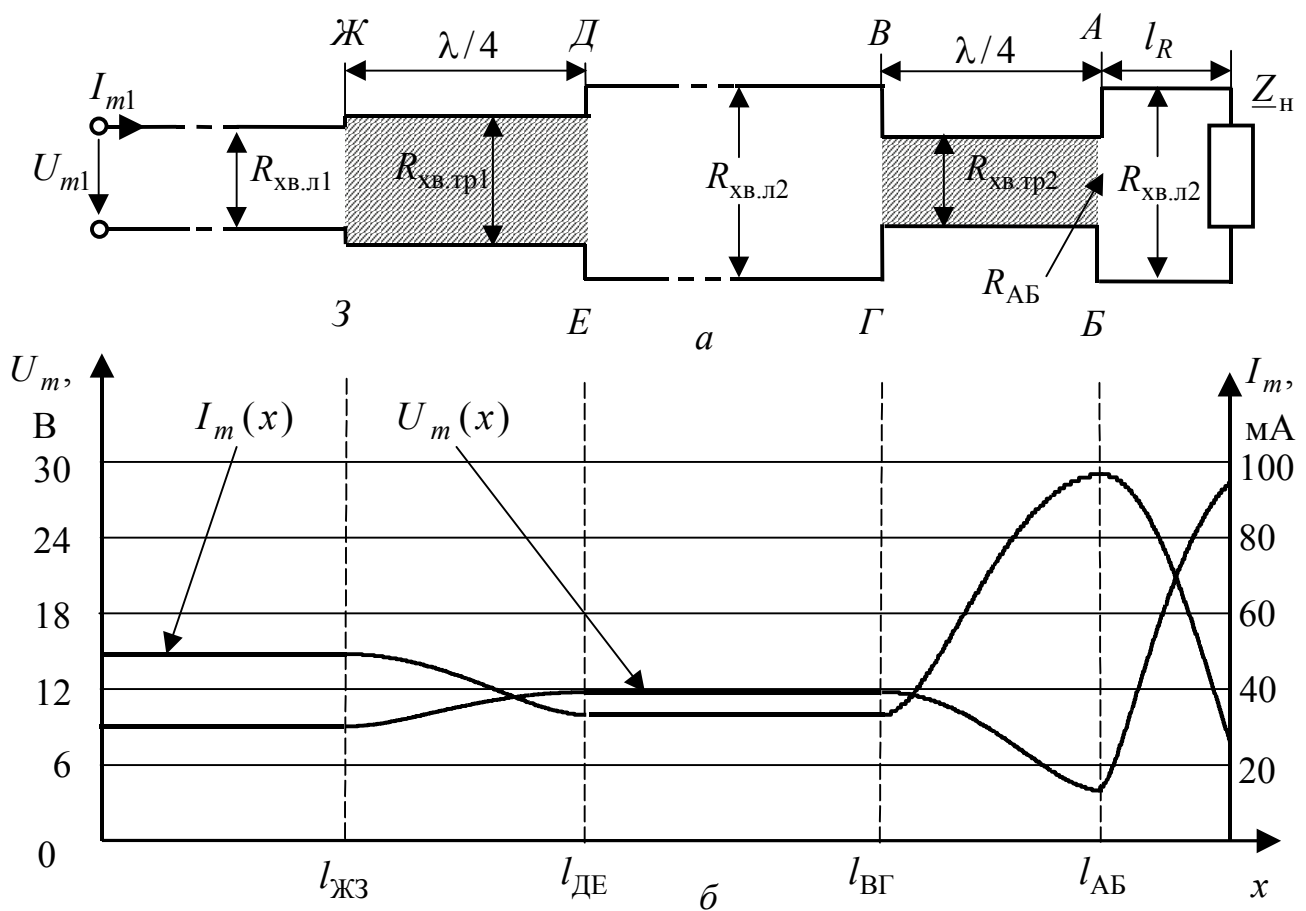


Рисунок 5.42 – До прикладу 5.22: а – схема;
б – графіки розподілів амплітуд напруги і струму

Щоб визначити місце увімкнення другого $\lambda/4$ -трансформатора (відстань l_R до перерізу AB) та його хвильовий опір $R_{\text{хв.тр2}}$, застосуємо формули (5.127) і (5.128), попередньо обчисливши значення нормованих опорів і коефіцієнта фази:

$$Z'_H = \frac{Z_H}{R_{XB.L1}} = \frac{\sqrt{R_H^2 + X_H^2}}{R_{XB.L1}} = \frac{\sqrt{600^2 + 900^2}}{300} = 3,606; R'_H = \frac{R_H}{R_{XB.L1}} = \frac{600}{300} = 2;$$

$$X'_H = \frac{X_H}{R_{B.L1}} = \frac{-900}{300} = -3; \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 2,094 \text{ рад/м};$$

$$l_R = \frac{1}{2,094} \operatorname{arctg} \left\{ -\frac{3,606^2 - 1}{2 \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{(3,606^2 - 1)^2}{4 \cdot (-3)^2} + 1} \right\} = 0,639 \text{ м};$$

$$R_{AB} = \frac{300 \cdot 2 \cdot [1 + \operatorname{tg}^2(2,094 \cdot 0,639)]}{1 - 2 \cdot (-3) \cdot \operatorname{tg}(2,094 \cdot 0,639) + 3,606^2 \operatorname{tg}^2(2,094 \cdot 0,639)} = 43,769 \text{ Ом}.$$

За формулою (5.126) визначимо хвильові опори $\lambda/4$ -трансформаторів:

$$R_{XB.TP2} = \sqrt{R_{XB.L2} R_{AB}} = \sqrt{300 \cdot 43,769} = 114,59 \text{ Ом};$$

$$R_{XB.TP1} = \sqrt{R_{XB.L1} R_{XB.L2}} = \sqrt{200 \cdot 300} = 244,95 \text{ Ом}.$$

Враховуючи задану амплітуду на вході першої лінії, розрахунок розподілу амплітуд напруги та струму виконаємо за координатою x . Перша лінія узгоджена, тому на ділянці $0 \leq x \leq l_{ЖЗ}$ до перерізу ЖЗ

$$U_m(x) = U_{m1} = 9 \text{ В}; I_m(x) = \frac{U_{m1}}{R_{XB.L1}} = \frac{9}{200} = 0,045 \text{ А} = 45 \text{ мА}.$$

Щоб визначити розподіли $U_m(x)$ і $I_m(x)$ у межах першого $\lambda/4$ -трансформатора ($l_{ЖЗ} \leq x \leq l_{ДЕ}$), застосуємо загальні співвідношення з табл.5.8, враховуючи значення амплітуд напруги та струму на його вході $U_m(l_{ЖЗ}) = 9 \text{ В}; I_m(l_{ЖЗ}) = 45 \text{ мА}$:

$$U_m(x) = \sqrt{U_m^2(l_{ЖЗ}) \cos^2[\beta(x - l_{ЖЗ})] + I_m^2(l_{ЖЗ}) R_{XB.TP1}^2 \sin^2[\beta(x - l_{ЖЗ})]}; \quad (5.138)$$

$$I_m(x) = \sqrt{I_m^2(l_{ЖЗ}) \cos^2[\beta(x - l_{ЖЗ})] + \frac{U_m^2(l_{ЖЗ}) \sin^2[\beta(x - l_{ЖЗ})]}{R_{XB.TP1}^2}}. \quad (5.138a)$$

Використовуючи вирази (5.138) і (5.138a), побудуємо графіки (рис.5.42, б) і визначимо амплітуди напруги і струму $U_m(l_{ДЕ}); I_m(l_{ДЕ})$ на вході другої лінії, в якій на ділянці ДЕ–ВГ буде режим біжних хвиль.

У другому $\lambda/4$ -трансформаторі та на ділянці другої лінії від перерізу АБ до навантаження розрахунки проведемо за співвідношеннями, аналогічними виразам (5.138) і (5.138a), враховуючи значення відповідних вхідних амплітуд напруги та струму, а також хвильових опорів ($R_{XB.TP2}$ і $R_{XB.2}$ відповідно). Підсумкові графіки зображені на рис.5.42, б, а значення амплітуд напруги і струму в перерізах лінії наведені в табл.5.22.

Приклад 5.23. Визначити параметри трансформуючої лінії (рис.5.39, в) для узгодження комплексного навантаження $Z_H = 600 - j900 \text{ Ом}$ з ідеальною симетричною двопровідною лінією, параметри якої збігаються з параметрами

другої лінії у прикладі 5.22 ($R_{\text{хв.л}} = 300 \text{ Ом}$; $\beta = 2,094 \text{ рад/м}$). Перевірити якість узгодження за значенням вхідного опору трансформатора.

Розв'язання. Параметри трансформуючої лінії $l_{\text{тр}}$, $R_{\text{хв.тр}}$ обчислимо за формулами (5.132) і (5.133):

$$R_{\text{хв.тр}} = 300 \sqrt{\frac{3,606^2 - 2}{2 - 1}} = 994,987 \text{ Ом};$$

$$l_{\text{тр}} = \frac{1}{2,094} \operatorname{arctg}\left(\frac{995}{300} \cdot \frac{1 - 2}{-3}\right) = 0,399 \text{ м}.$$

Щоб перевірити розв'язок, знайдемо вхідний опір трансформатора за формулою (5.123):

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = 994,987 \frac{600 - j900 + j994,987 \operatorname{tg}(2,094 \cdot 0,399)}{994,987 + j(600 - j900) \operatorname{tg}(2,094 \cdot 0,399)} = 300 + j0,022 \text{ Ом}.$$

Отже, розрахунки вірні, оскільки $\underline{Z}_{\text{вх}} \approx R_{\text{хв.л}}$.

Таблиця 5.22 – Амплітуди напруги і струму у перерізах лінії

Переріз	ЖЗ	ДЕ	ВГ	АБ	$\underline{Z}_{\text{н}}$
$U_m, \text{ В}$	9	11,02	11,02	4,21	28,1
$I_m, \text{ мА}$	45	37	37	96	26

Приклад 5.24. Обчислити параметри одношлейфового пристрою (рис.5.40, а) для узгодження лінії з комплексним навантаженням $\underline{Z}_{\text{н}} = 600 - j900 \text{ Ом}$ (параметри лінії наведені у прикладі 5.23: $R_{\text{хв}} = 300 \text{ Ом}$; $\beta = 2,094 \text{ рад/м}$). Розрахунки виконати для короткозамкненого і розімкненого шлейфів з тими ж самими параметрами, що й основна лінія.

Розв'язання. Визначимо нормовані провідності навантаження, необхідні для подальших розрахунків за формулами з табл.5.21:

$$\underline{Y}'_{\text{н}} = \frac{R_{\text{хв}}}{\underline{Z}_{\text{н}}} = \frac{300}{600 - j900} = 0,154 + j0,231;$$

$$G'_{\text{н}} = 0,154; B'_{\text{н}} = 0,231; Y'_{\text{н}} = \sqrt{(G'_{\text{н}})^2 + (B'_{\text{н}})^2} = 0,277.$$

Порядок розрахунків та отримані результати зведемо до табл.5.23.

Два варіанти результатів обумовлені багатозначністю формул у табл.5.21. Краще використовувати другий варіант, в якому короткозамкнений шлейф увімкнено найближче до навантаження і він шлейф має мінімальну довжину.

Таблиця 5.23 – Одношлейфове узгодження у прикладі 5.24

Розрахунок		Результати	
		Варіант 1	Варіант 2
Довжини l_{CD}		$l_{CD} = 0,639$ м	$l_{CD} = -0,111$ м
Активної провідності лінії у перерізі CD		$G'(l_{CD}) = 6,854$	$G'(l_{CD}) = 0,146$
довжини l_{AB-CD}		$l_{AB-CD} = 0,174$ м	$l_{AB-CD} = 0,576$ м
$l_{AB} = l_{AB-CD} + l_{CD}$		$l_{AB} = 0,81$ м	$l_{AB} = 0,465$ м
Реактивної провідності в місці увімкнення шлейфа		$B'(l_{AB}) = -2,236$	$B'(l_{AB}) = 2,236$
Реактивної провідності шлейфа		$B'_{ш} = 2,236$	$B'_{ш} = -2,236$
Дов- жини	короткозамкненого шлейфа	$l_{ш.кз} = 1,29$ м	$l_{ш.кз} = 0,201$ м
	розімкненого шлейфа	$l_{ш.хх} = 0,549$ м	$l_{ш.хх} = 0,951$ м

5.10 Кругові діаграми ідеальних довгих ліній

Кругові діаграми (КД) – це номограми, які дозволяють графічно виконувати основні розрахунки для усталених гармонічних процесів в ідеальних ДЛ і ДЛМВ. Найбільш поширені КД для опорів і провідностей. Перші праці, пов'язані із застосуванням КД для розрахунку чотириполосників і ДЛ належать Коваленкову¹⁶, Вольперту¹⁷ і Сміту¹⁸.

5.10.1 Принцип побудови і структура кругової діаграми

Основою КД є подання комплексного коефіцієнта відбиття у довільному перерізі лінії на комплексній площині. При цьому використовують як показникову, так і алгебраїчну форми запису:

¹⁶ **Коваленков Валентин Іванович** (1884–1960) – учений в області електрозв'язку, член-кореспондент АН СРСР, генерал-майор. Закінчив Петербурзький електротехнічний інститут (1909) і Петербурзький університет (1911). Головні праці стосуються дротових ліній зв'язку, магнітних кіл і телефонної передачі. Автор кількох винаходів в області електрозв'язку і звукового кіно.

¹⁷ **Вольперт Аміель Рафаїлович** (1908–1988) – відомий радянський радіоспеціаліст, доктор технічних наук, професор. Працював у провідних радіотехнічних наукових установах НДІ-9 (Ленінград), ЯРТІ (Москва). Напрями досліджень – антенно-фідерні пристрої та фазова радіолокація. Один з авторів кругових діаграм (Производственный-технический бюллетень НКЭП. 1940. №2).

¹⁸ **Сміт, Philip H. Smith** (1905–1987) – американський інженер-електрик, член технічної ради телефонної лабораторії Бела, автор винаходів в області антенної техніки, створив діаграму, названу його ім'ям (1939), за допомогою якої визначають комплексний опір кола.

$$\underline{\rho} = \rho e^{j\varphi_\rho} = \rho_{\text{Re}} + j\rho_{\text{Im}},$$

де $\rho_{\text{Re}}, \rho_{\text{Im}}$ – відповідно дійсна та уявна частини комплексного коефіцієнта відбиття.

Вище, розглядаючи комплексний коефіцієнт відбиття, застосовувалася показникова форма запису $\underline{\rho}(x)$ та $\underline{\rho}(y)$. Відповідні формули з використанням нормованих (відносних) опорів і координат ($y' = y/\lambda$; $x' = x/\lambda$) зведено до табл.5.24.

Таблиця 5.24 – Співвідношення для комплексного коефіцієнта відбиття та його складових в ідеальній лінії

Параметр	Позначення	Співвідношення
Комплексний коефіцієнт відбиття	$\underline{\rho}(y)$	$\frac{\underline{U}_{m\text{в\iд}}(y)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(y)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{в\iд}}(y)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(y)} = \frac{\underline{Z}'_{\text{H}} - 1}{\underline{Z}'_{\text{H}} + 1} e^{-j2\beta y} = \rho(y)e^{j\varphi_\rho(y)}$
	$\underline{\rho}(x)$	$\frac{\underline{U}_{m\text{в\iд}}(x)}{\underline{U}_{m\text{пад}}(x)} = -\frac{\underline{I}_{m\text{в\iд}}(x)}{\underline{I}_{m\text{пад}}(x)} = \frac{\underline{Z}'_{\text{ВХ}} - 1}{\underline{Z}'_{\text{ВХ}} + 1} e^{-j2\beta x} = \rho(x)e^{j\varphi_\rho(x)}$
Модуль	$\rho(y)$	$\left \frac{\underline{Z}'_{\text{H}} - 1}{\underline{Z}'_{\text{H}} + 1} \right = \frac{\sqrt{(R'_{\text{H}} - 1)^2 + (X'_{\text{H}})^2}}{\sqrt{(R'_{\text{H}} + 1)^2 + (X'_{\text{H}})^2}} - \text{const}$
	$\rho(x)$	$\left \frac{\underline{Z}'_{\text{ВХ}} - 1}{\underline{Z}'_{\text{ВХ}} + 1} \right = \frac{\sqrt{(R'_{\text{ВХ}} - 1)^2 + (X'_{\text{ВХ}})^2}}{\sqrt{(R'_{\text{ВХ}} + 1)^2 + (X'_{\text{ВХ}})^2}} - \text{const}$
Аргумент	$\varphi_\rho(y)$	$\varphi_\rho(0) - 2\beta y = \varphi_\rho(0) - 2\pi y'$, де $y' = y/\lambda$; $\varphi_\rho(0) = \text{arctg} \frac{X'_{\text{H}}}{R'_{\text{H}} - 1} - \text{arctg} \frac{X'_{\text{H}}}{R'_{\text{H}} + 1}$
	$\varphi_\rho(x)$	$\varphi_\rho(0) + 2\beta x = \varphi_\rho(0) + 2\pi x'$, де $x' = x/\lambda$; $\varphi_\rho(0) = \text{arctg} \frac{X'_{\text{ВХ}}}{R'_{\text{ВХ}} - 1} - \text{arctg} \frac{X'_{\text{ВХ}}}{R'_{\text{ВХ}} + 1}$

Оскільки модуль $\underline{\rho}(x)$ або $\underline{\rho}(y)$ при заданому навантаженні Z'_{H} є постійною величиною (див. табл.5.24), траєкторія кінця вектора комплексного коефіцієнта відбиття, тобто годограф вектора $\underline{\rho}$, при змінюванні відстані вздовж лінії по x чи y є колом (ρ -коло). Радіус ρ -кола дорівнює модулю ρ . Максимальний радіус ρ -кола ($\rho = 1$) відповідає режиму стійних, мінімальний ($\rho = 0$) – режиму біжних, а інші концентричні ρ -кола – режиму змішаних хвиль (рис.5.43, а).

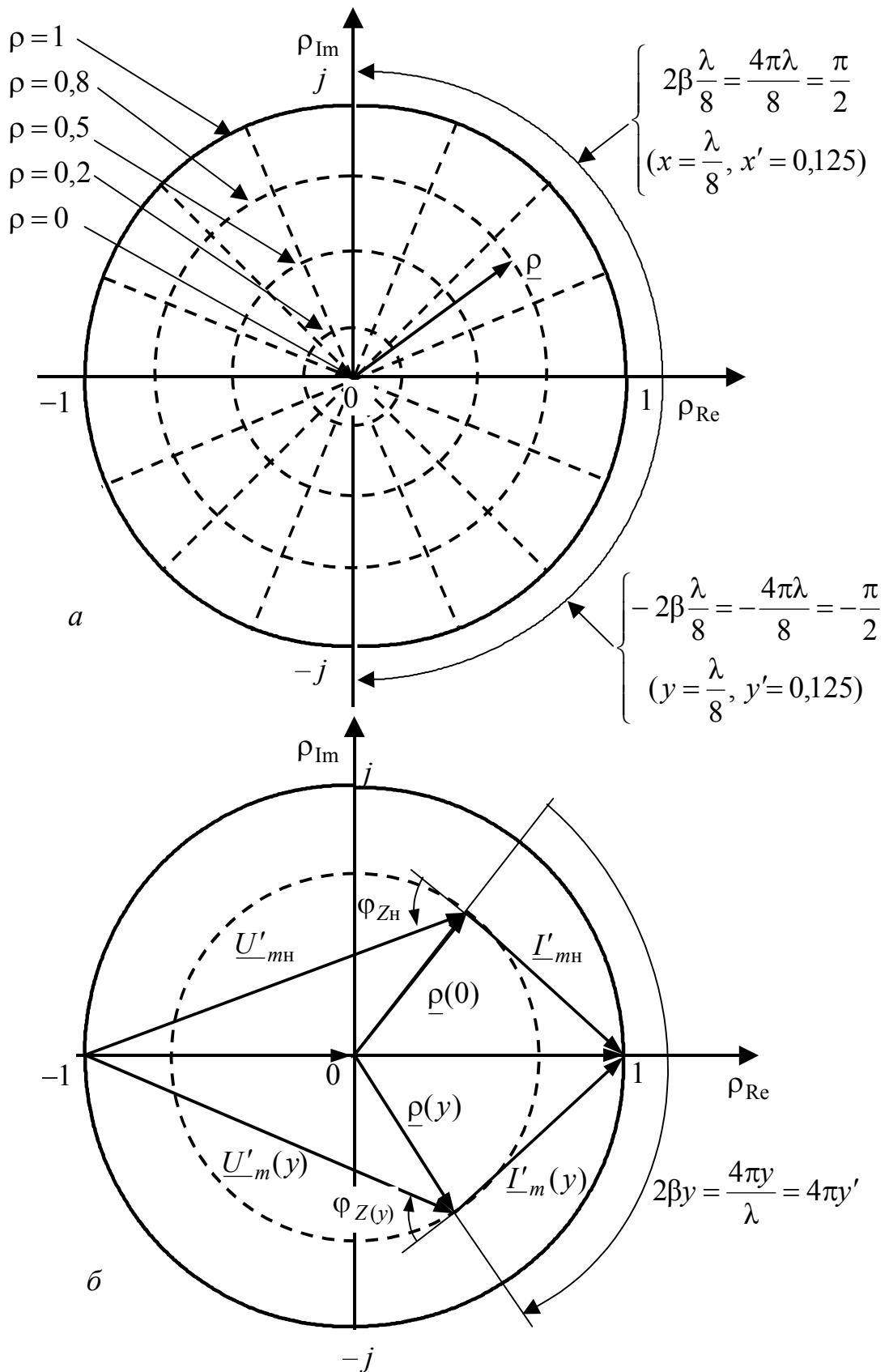


Рисунок 5.43 – Подання комплексного коефіцієнта відбиття ідеальних ліній на комплексній площині: *a* – ρ -кола і лінії постійних аргументів $\underline{\rho}$; *б* – зв'язок векторів нормованих комплексних амплітуд напруги і струму з годографом $\underline{\rho}$

Руху вздовж лінії за координатою y відповідає обертання вектора $\underline{\rho}$ за годинниковою стрілкою, а руху за координатою x – проти годинникової стрілки (рис.5.43). При зміні відстані вздовж лінії по y або x на $\lambda/2$ вектор $\underline{\rho}(y)$ або $\underline{\rho}(x)$ обертається на кут -2π або 2π , відповідно.

З годографом вектора $\underline{\rho}$ можна пов'язати нормовані вектори комплексних амплітуд напруги і струму в довільному перерізі ДЛ (рис.5.43, б). Щоб обґрунтувати цю тезу, достатньо поділити вирази для комплексних амплітуд (табл.5.5 і співвідношення (5.51) і (5.53)) на їхні падаючі складові. Оскільки вирази для y та x однотипні, ці координати в отриманих рівняннях не пишуть, щоб узагальнити запис:

$$\underline{U}'_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{U}_{m\text{пад}}} = 1 + \frac{\underline{U}_{m\text{від}}}{\underline{U}_{m\text{пад}}} = 1 + \underline{\rho}; \quad \underline{I}'_m = \frac{\underline{I}_m}{\underline{I}_{m\text{пад}}} = 1 + \frac{\underline{I}_{m\text{від}}}{\underline{I}_{m\text{пад}}} = 1 - \underline{\rho}. \quad (5.139)$$

З рівнянь (5.139) виходить принципове для подальшої побудови КД співвідношення:

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{U}'_m}{\underline{I}'_m} = \frac{\underline{Z}}{R_{\text{хв}}} = \frac{1 + \underline{\rho}}{1 - \underline{\rho}} = \frac{(1 + \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}}{(1 - \rho_{\text{Re}}) - j\rho_{\text{Im}}}. \quad (5.140)$$

У свою чергу, вираз (5.140) дозволяє отримати загальніший, ніж окремі формули у табл.5.24, вираз для комплексного коефіцієнта відбиття:

$$\underline{\rho} = \frac{\underline{Z}}{R_{\text{хв}}} = \frac{\underline{Z}' - 1}{\underline{Z}' + 1}.$$

Вважаючи у рівнянні (5.140) ρ_{Re} та ρ_{Im} змінними, а $\underline{Z}' = R' + jX'$ – постійними параметрами, можна виконати перетворення, які призводять до двох рівнянь для побудови годографів, що відповідають постійним значенням R' та X' . Основні етапи цих перетворень такі:

$$\underline{Z}' = R' + jX' = \frac{[(1 + \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}][(1 - \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}]}{[(1 - \rho_{\text{Re}}) - j\rho_{\text{Im}}][(1 - \rho_{\text{Re}}) + j\rho_{\text{Im}}]} =$$

$$= \frac{1 - \rho_{\text{Re}}^2 - \rho_{\text{Im}}^2}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2} + j \frac{2\rho_{\text{Im}}}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2};$$

$$1) \quad R' = \frac{1 - \rho_{\text{Re}}^2 - \rho_{\text{Im}}^2}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2}; \quad X' = \frac{2\rho_{\text{Im}}}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2};$$

$$2) \quad \left(\rho_{\text{Re}} - \frac{R'}{R' + 1} \right)^2 + \rho_{\text{Im}}^2 = \frac{1}{(R' + 1)^2}; \quad (5.141)$$

$$3) \quad (\rho_{\text{Re}} - 1)^2 + \left(\rho_{\text{Im}} - \frac{1}{X'} \right)^2 = \frac{1}{(X')^2}. \quad (5.142)$$

Вирази (5.141) і (5.142) є рівняннями кіл у координатах ρ_{Re} та ρ_{Im} .

Центри кіл постійних нормованих активних опорів (R -кола) відповідно до рівняння (5.141) лежать на дійсній осі і мають координати:

$\rho_{Re} = R'/(R'+1)$; $\rho_{Im} = 0$. Радіуси R -кіл становлять $1/(R'+1)$. Граничним значенням R' відповідають:

1) значенню $R' = 0$ – R -коло одиничного радіуса з центром на початку координат, яке є границею кругової діаграми;

2) при $R' \rightarrow \infty$ R -коло перетворюється в точку з координатами $\rho_{Re} = 1$; $\rho_{Im} = 0$.

Як приклад на рис.5.44, *a* наведено сукупність R -кіл.

Рівняння (5.142) залежить від параметра X' і описує X -кола з радіусами $1/|X'|$ та координатами центрів $\rho_{Re} = 1$; $\rho_{Im} = 1/X'$. Отже, центри X -кіл розташовані на прямій, яка паралельна осі ρ_{Im} і проходить через точку $\rho_{Re} = 1$.

Сукупність X -кіл побудовано на рис.5.44, *б*. X -кола індуктивних опорів ($X' > 0$) розташовані вище, а X -кола ємнісних опорів ($X' < 0$) – нижче дійсної вісі.

Фізичний сенс має тільки та частина кожного X -кола (X -дуга), яка лежить у межах діаграми. X -дуги зображені на рис.5.43, *б* суцільними лініями. Величині $X' = 0$ відповідає дуга з нескінченно великим радіусом, яка збігається з дійсною віссю (ρ_{Re}). При $X' \rightarrow \infty$ X -коло вироджується в точку з координатами $\rho_{Re} = 1$; $\rho_{Im} = 0$.

Для зручності користування КД повертають на кут 90° так, щоб дійсну вісь було розташовано вертикально, а уявну – горизонтально (рис.5.45). При цьому R -кола та X -дуги разом зі шкалами R' та X' розміщують у полі діаграми. Шкала для R -кіл нанесена на вертикальній осі діаграми, а шкала X -дуг – поблизу точок перетину дуг з граничним колом діаграми.

Будь-який переріз ДЛ на діаграмі відображується точкою, яка з одного боку є перетином певних R -кіл (з величиною R') та X -дуги (зі значенням X'), а з іншого – належить годографу $\underline{\rho}$. Нормований комплексний опір у цьому перерізі становить: $\underline{Z}' = R' + jX'$. При переміщенні вздовж лінії від цього перерізу модуль комплексного коефіцієнта відбиття залишається незмінним, а \underline{Z}' , \underline{U}'_m та \underline{I}'_m змінюються. На рис.5.45 як приклад наведено точки, які відповідають навантаженню лінії ($\underline{Z}'_H = 1 + j1$) та її входу ($\underline{Z}'_{BX} = 1 - j1$), а також побудовано вектори нормованих напруг (\underline{U}'_{mH} і \underline{U}'_{mBX}) і струмів (\underline{I}'_{mH} та \underline{I}'_{mBX}) у цих перерізах лінії.

На діаграмі ρ -кола зазвичай зображують пунктирними лініями і для спрощення не градуують. Оскільки коефіцієнт відбиття ρ згідно з виразами (5.96) і (5.97) однозначно пов'язаний з коефіцієнтами $k_{\text{бх}}$ та $k_{\text{сх}}$, ρ -кола також називають колами постійних КБХ і КСХ. Значення $k_{\text{бх}}$ та $k_{\text{сх}}$ легко визначити за діаграмою, використовуючи перетин ρ -кіл зі шкалою R' :

$$k_{\text{сх}} = R' > 1; \quad k_{\text{бх}} = R' < 1.$$

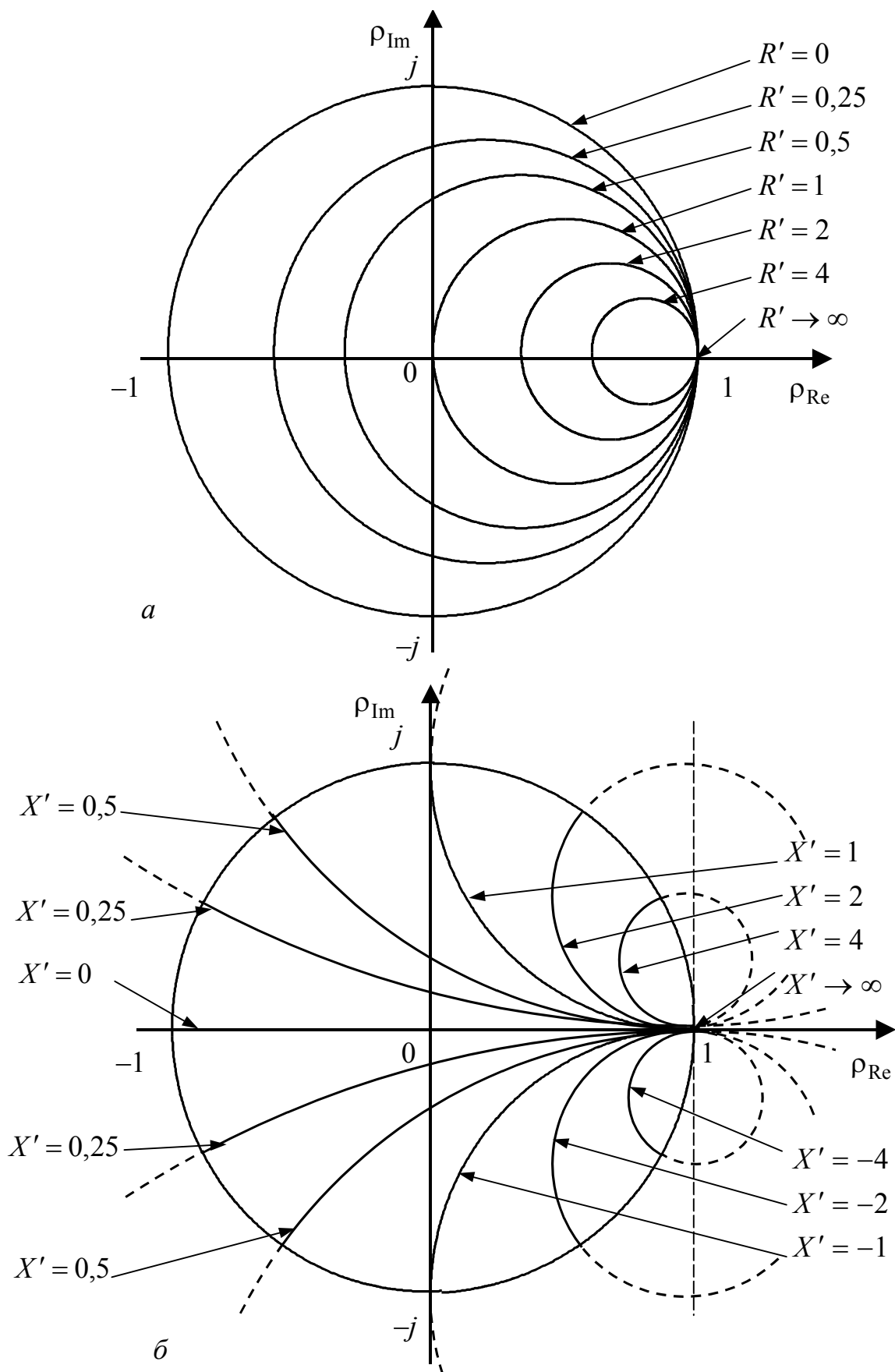


Рисунок 5.44 – Кола постійних нормованих опорів на комплексній площині:
a – активних; *б* – реактивних

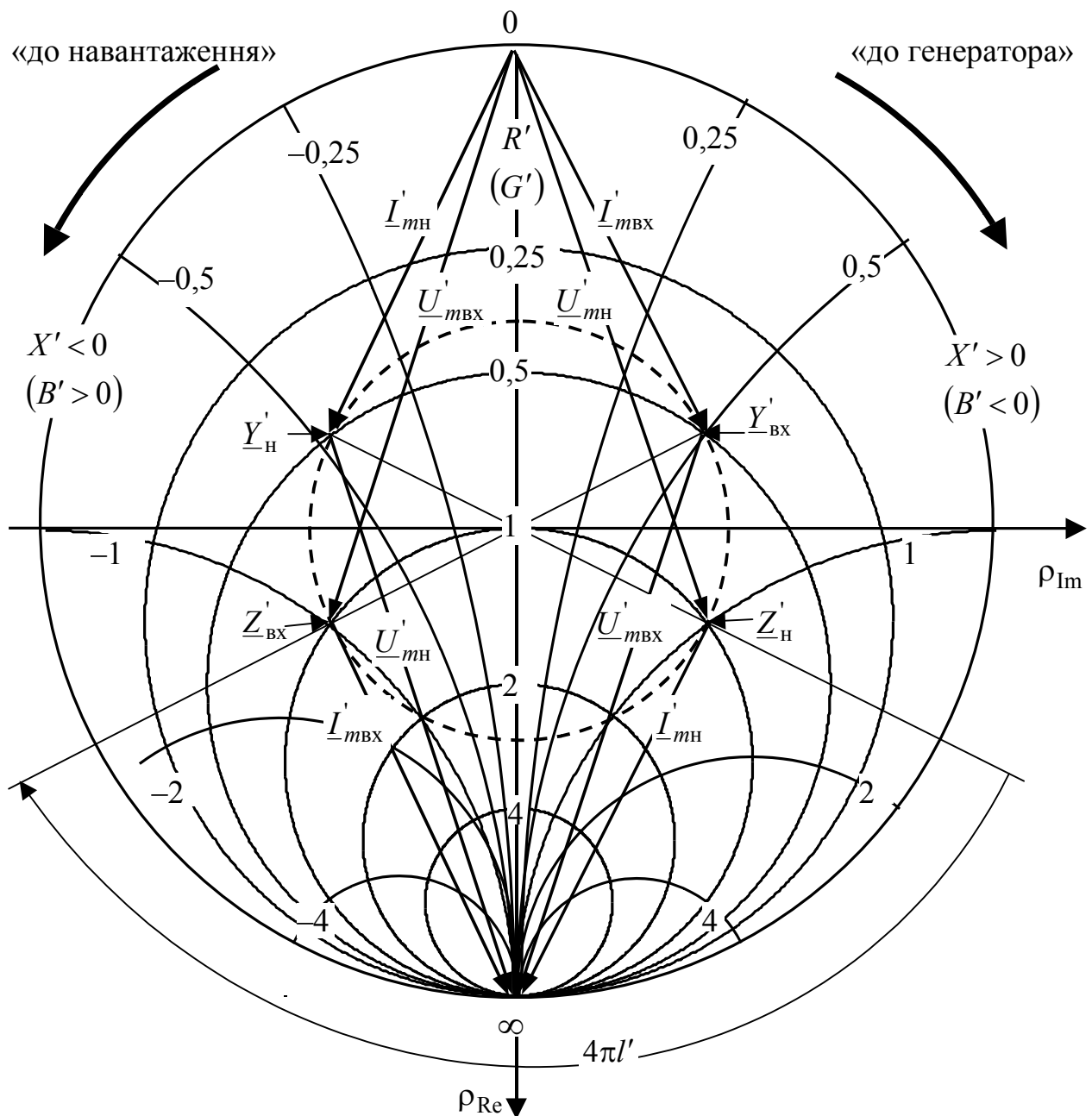


Рисунок 5.45 – Стандартне подання R -кіл та X -дуг на КД ідеальної ДЛ

Для вказаних на рис.5.45 точок діаграми (Z'_{H} та Z'_{BX}): $k_{сх} = R' \approx 2,6$; $k_{\text{бх}} = R' \approx 0,38$; $\rho \approx 0,45$.

КД також застосовують для розрахунків з провідностями. Обґрунтувати принцип цього застосування можна, якщо перетворити вираз (5.140) щодо нормованої комплексної провідності:

$$\underline{Y}' = \frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1+\underline{\rho}e^{j\pi}}{1-\underline{\rho}e^{j\pi}}. \quad (5.143)$$

Порівняння співвідношень (5.140) і (5.143) дозволяє зробити висновок, що вони відрізняються тільки знаком комплексного коефіцієнта відбиття, тобто значенням його аргументу на π . **Це означає, що, переходячи від діаграми опорів до діаграми провідностей, достатньо повернути всі вектори ρ на кут π . При цьому числові значення R -кіл стануть величинами G -кіл ($R' = G'$), а значення X -дуг відрізнятимуться від значень B -дуг ($X' = -B'$) тільки знаками. Тому B -дуги ємнісних провідностей ($B' < 0$) розташовані у правій, а індуктивних ($B' > 0$) – у лівій півплощині КД.**

Для діаграми провідностей рівняння (5.139) матимуть вигляд:

$$\underline{U}'_m = 1 - \underline{\rho}; \quad \underline{I}'_m = 1 + \underline{\rho}. \quad (5.144)$$

Порівняння виразів (5.144) і (5.139) показує, що на діаграмі провідностей нормовані вектори комплексних амплітуд напруг і струмів міняються місцями порівняно з діаграмою опорів. При цьому відповідні вектори залишаються однаковими, але переносяться паралельно самим собі.

Приклади переходу від \underline{Z}'_H до \underline{Y}'_H , $\underline{Z}'_{ВХ}$ до $\underline{Y}'_{ВХ}$ і побудови векторів комплексних амплітуд напруг і струмів у цих перерізах показано на рис.5.45.

Робочий зразок КД, який застосовують для практичних розрахунків, зображено на рис.5.46. Крім сукупності R -кіл (вони ж G -кола) і X -дуг (B -дуги) з їхніми шкалами, на робочих КД позначають шкали відносних координат за довжиною лінії ($y' = y/\lambda$; $x' = x/\lambda$), а також наносять пояснювальні написи і позначки (стрілки на пряму руху «до навантаження», «до генератора»). Осі ρ_{Re} та ρ_{Im} на діаграмі зазвичай не вказують. Іноді на КД наводять шкали кутів комплексного коефіцієнта відбиття ($2\beta y$ і $2\beta x$) у градусах (від 0° до 180°). Професійну діаграму, яку додають до технічної документації на апаратуру, виконують як жорсткий планшет, а ρ -кола – як прозору планку (що обертається відносно центра діаграми) зі шкалами ρ , R' (КСХ або КБХ).

Характерними точками КД є:

- 1) точка перетину осей ρ_{Re} та ρ_{Im} (центр діаграми) – відповідає режиму біжних хвиль;
- 2) верхня точка перетину осей ρ_{Re} з граничним R -колом – відповідає короткому замиканню для діаграми опорів і холостому ходу для діаграми провідностей;
- 3) нижня точка перетину осей ρ_{Re} з граничним R -колом – відповідає холостому ходу для діаграми опорів і короткому замиканню для діаграми провідностей.

5.10.2 Застосування кругової діаграми для розрахунку параметрів ліній

КД дозволяє розв'язувати такі основні задачі:

- 1) обчислення опорів (провідностей) у довільному перерізі лінії за зада-

ним значенням опору (провідності) в одному з перерізів, наприклад опору (провідності) навантаження;

2) розрахунок розподілів вздовж лінії рівнів (амплітуд або діючих значень) напруг і струмів за заданим режимом в одному з перерізів, зокрема у навантаженні;

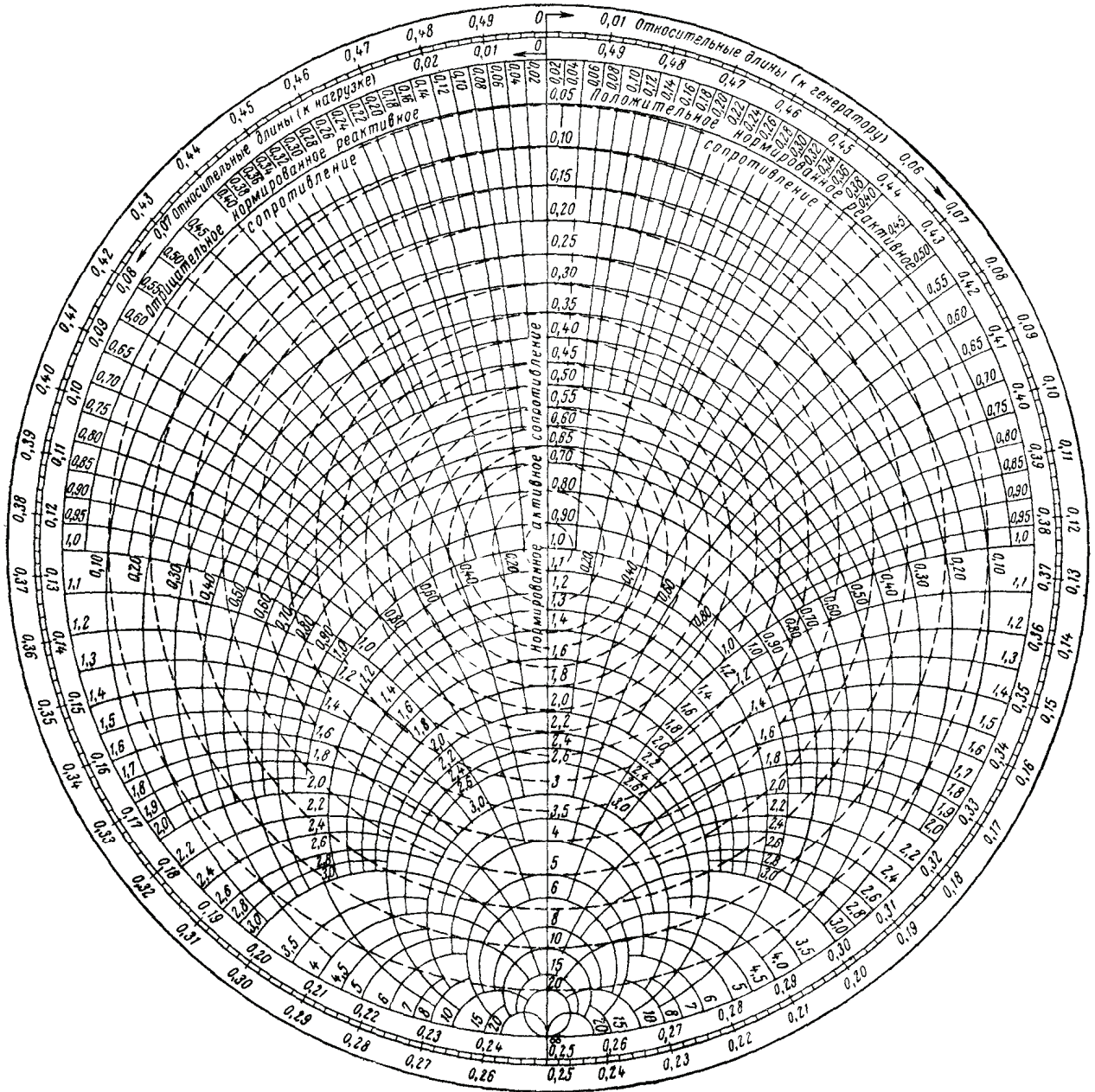


Рисунок 5.46 – Робочий зразок КД

3) визначення розташування характерних перерізів лінії та параметрів цього перерізу (R' , \underline{U}'_m , \underline{I}'_m та ін.); обчислення за цими даними опору навантаження, КСХ, КБХ тощо;

4) розрахунок узгоджувальних пристроїв.

Обчислення опорів:

1) визначити необхідні для нормування параметри ($R_{\text{хв}}, \lambda$), знайти нормовані задані опори ($\underline{Z}' = R' + jX'$) та відносні значення відстані (x', y', l'); якщо $x' > 0,5$; $y' > 0,5$; $l' > 0,5$, від відносної відстані відкинути число, кратне 0,5;

2) на діаграмі знайти переріз лінії із заданим опором $\underline{Z}' = R' + jX'$ як точку перетину R -кола та X -дуги з величинами R' і X' відповідно (наприклад точка $\underline{Z}'_{\text{н}} = 1 + j1$ на рис.5.45); визначити ρ -коло, яке проходить через цю точку;

3) пересуваючись за ρ -колом від точки із заданим \underline{Z}' до шуканого перерізу лінії та використовуючи шкалу відносних координат (x', y', l'), визначити нормовані опори в цих перерізах (зокрема на вході лінії); напрям руху згідно зі стрелками «до генератора» або «до навантаження» обумовлюється постановкою задачі; приклад визначення $\underline{Z}'_{\text{вх}} = 1 - j1$ показано на рис.5.45;

4) перемножуючи знайдені нормовані опори на значення хвильового опору лінії, обчислити абсолютні значення опорів у шуканих перерізах; за необхідності побудувати графіки розподілів усіх або деяких видів опорів (Z, R, X) за координатами (x або y).

Розрахунок провідностей виконують аналогічно. Якщо у даному перерізі лінії задано опір, перехід до провідності здійснюють аналітично ($\underline{Y}' = 1/\underline{Z}'$) або безпосередньо за КД. Приклад визначення нормованої провідності $\underline{Y}'_{\text{н}} = 0,5 - j0,5$ як точки, діаметрально протилежної точці $\underline{Z}'_{\text{н}} = 1 + j1$, показаний на рис.5.45.

Розрахунок рівнів напруги і струму. Принцип обчислення рівнів напруги і струму базується на співвідношеннях (5.139) та проілюстрований прикладами побудови нормованих комплексних амплітуд на рис.5.43, б і 5.45.

Нормування комплексних значень у формулах (5.139) здійснюють за комплексними значеннями відповідних падаючих хвиль, розрахунок яких є окремою задачею. Тому, побудувавши відповідні вектори, наприклад вектори комплексних діючих значень на рис.5.47, оцінюють масштабні коефіцієнти m_U, m_I модулів цих векторів за відомими значеннями рівнів напруги та струму в одному з перерізів лінії. Наприклад, для заданих діючих значень напруги та струму у навантаженні $U_{\text{н}}, I_{\text{н}}$ та вимірених за КД довжин векторів $s_{U_{\text{н}}}$ і $s_{I_{\text{н}}}$ (рис.5.47) масштабні коефіцієнти для розрахунків напруг і струмів в інших перерізах становитимуть:

$$m_U = \frac{U_{\text{н}}}{s_{U_{\text{н}}}}; \quad m_I = \frac{I_{\text{н}}}{s_{I_{\text{н}}}}. \quad (5.145)$$

Щоб побудувати графіки розподілу рівнів напруг і струмів уздовж лінії, розрахунки слід виконувати з певним кроком $\Delta x'$ або $\Delta y'$ за координатою, включаючи перерізи з екстремальними значеннями: $U_{\text{мін}}, I_{\text{мін}}, U_{\text{макс}}, I_{\text{макс}}$ (рис.5.47).

За допомогою КД можна обчислювати не тільки рівні, але й початкові фа-

зи напруг і струмів. Для цього до знайдених за діаграмою початкових фаз нормованих комплексних значень напруг і струмів слід додати початкову фазу відповідного комплексного значення падаючої хвилі. Однак початкові фази за діаграмою розраховують досить рідко.

Аналіз характерних перерізів лінії. У цих перерізах:

- 1) спостерігається максимум чи мінімум рівня напруги або струму;
- 2) опір має чисто активний характер;
- 3) активна складова провідності дорівнює хвильовій.

Перші два випадки відповідають одним і тим самим точкам перетину ρ -кола з вертикальною віссю R' діаграми. Такі перерізи з відносними відстанями від навантаження $l'_{U_{\max}}$ і $l'_{U_{\min}}$ показані на рис.5.47.

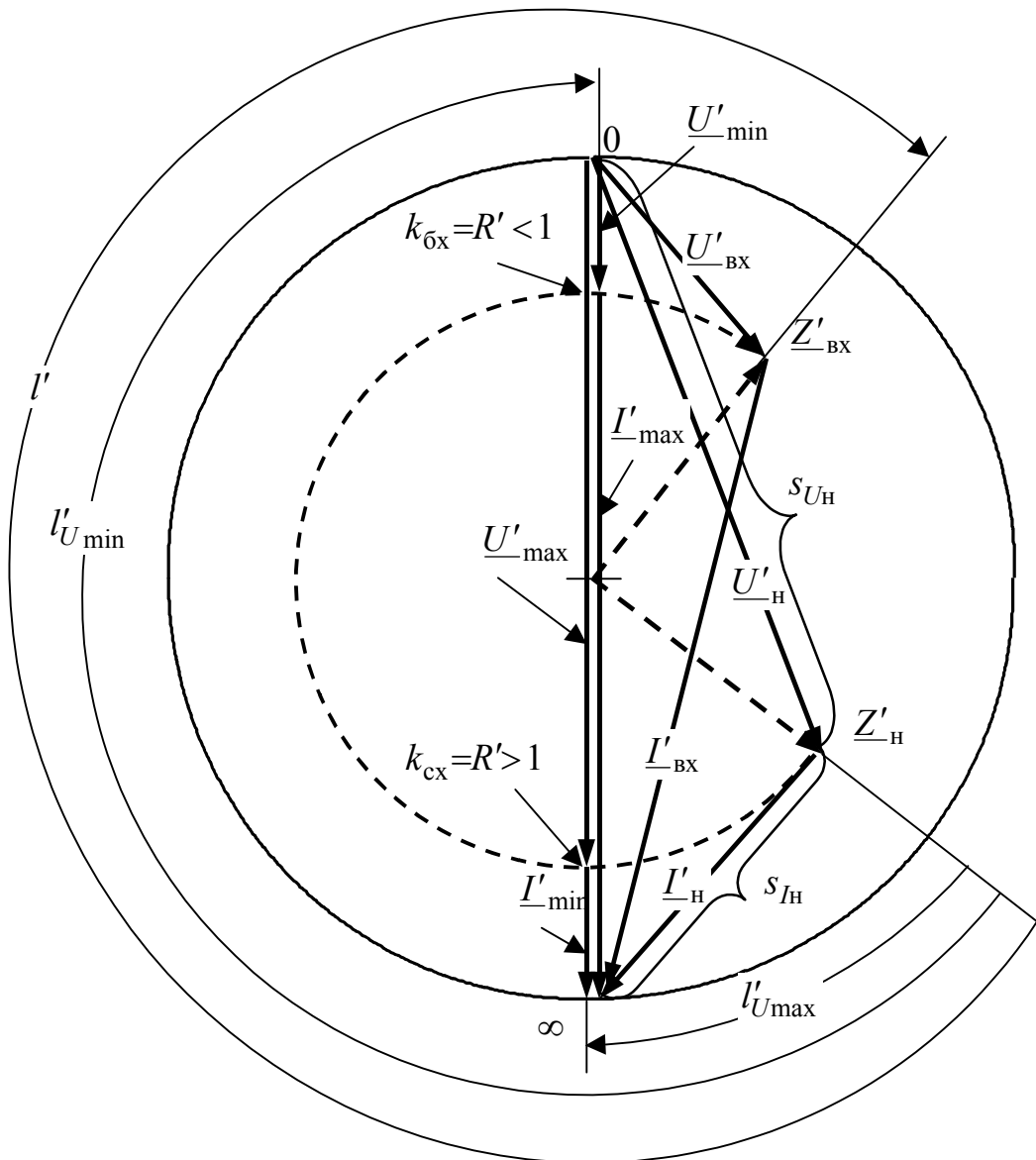


Рисунок 5.47 – Побудова векторів для визначення рівнів напруг і струмів

Перерізи з активним опором та екстремальними значеннями рівнів напруг і струмів дозволяють оцінити КСХ і КБХ (рис.5.47).

Параметри $l'_{U\min}$ і $k_{\sigma x}$, які знайдені експериментально за допомогою вимірювальної лінії (див. підрозд.5.13), дозволяють визначити комплексний опір навантаження розрахунковим шляхом або за КД.

Співвідношення для обчислення \underline{Z}_H виходить із загальної формули для $\underline{Z}(x)$ (див. табл.5.8) після підстановки параметрів перерізу $l'_{U\min}$ і $k_{\sigma x} = R' < 1$:

$$\underline{Z}_H = R_{XB} \frac{R_{XB} R' - jR_{XB} \operatorname{tg}(2\pi l'_{U\min})}{R_{XB} - jR_{XB} R' \operatorname{tg}(2\pi l'_{U\min})} = R_{XB} \frac{k_{\sigma x} - j \operatorname{tg}(2\pi l'_{U\min})}{1 - jk_{\sigma x} \operatorname{tg}(2\pi l'_{U\min})}. \quad (5.146)$$

За допомогою КД опір \underline{Z}'_H визначають, рухаючись від точки $k_{\sigma x} = R' < 1$ за ρ -колом на відстань $l'_{U\min}$ у напрямі «до навантаження», тобто у зворотньому показаному на рис.5.47.

Перерізи з активною провідністю, яка дорівнює хвильовій, використовують, узгоджуючи лінію паралельними шлейфами.

Розрахунок узгодження за допомогою $\lambda/4$ -трансформатора. При узгодженні лінії з комплексним навантаженням (рис.5.39, а) КД дозволяє визначити місце увімкнення трансформатора l_{AB} , опір у цьому перерізі R_{AB} , а також, за необхідності, розподіли $U_m(y)$, $I_m(y)$, $R(y)$, $X(y)$ в лінії і трансформаторі. Методику таких розрахунків ілюструє рис.5.48.

Відстань l_{AB} від навантаження до перерізу AB , де увімкнено $\lambda/4$ -трансформатор, визначають, виходячи з умови активного характеру опору лінії в цьому перерізі.

Якщо задано опір навантаження, то відстань l_{AB} визначають за відносною відстанню l'_{AB} від точки \underline{Z}'_H до найближчої точки перетину ρ -кола з вертикальною віссю КД, рухаючись «до генератора». Параметром цієї точки є нормоване до хвильового опору лінії значення $R'_{AB\text{л}}$, яке дозволяє розрахувати абсолютну величину опору $R_{AB} = R'_{AB\text{л}} R_{XB\text{л}}$ і за формулою (5.129) – хвильовий опір трансформатора $R_{XB\text{тр}}$.

Визначення рівнів напруги і струму, а також опорів на ділянці лінії від навантаження до перерізу AB провадиться за точками дуги ρ -кола лінії від \underline{Z}'_H до $R'_{AB\text{л}}$. Для таких обчислень у трансформаторі слід нормувати опір R_{AB} до хвильового опору трансформатора $R'_{AB\text{тр}} = R_{AB} / R_{XB\text{тр}}$, що дозволяє побудувати дугу ρ -кола для трансформатора між точками $R'_{AB\text{тр}}$ і $R'_{B\Gamma\text{тр}}$.

На рис.5.48 ділянки ρ -кіл лінії та трансформатора, які використано для розрахунків, показані пунктирними лініями. Там же побудовано вектори нормованих комплексних значень напруг і струмів у характерних перерізах лінії та трансформатора.

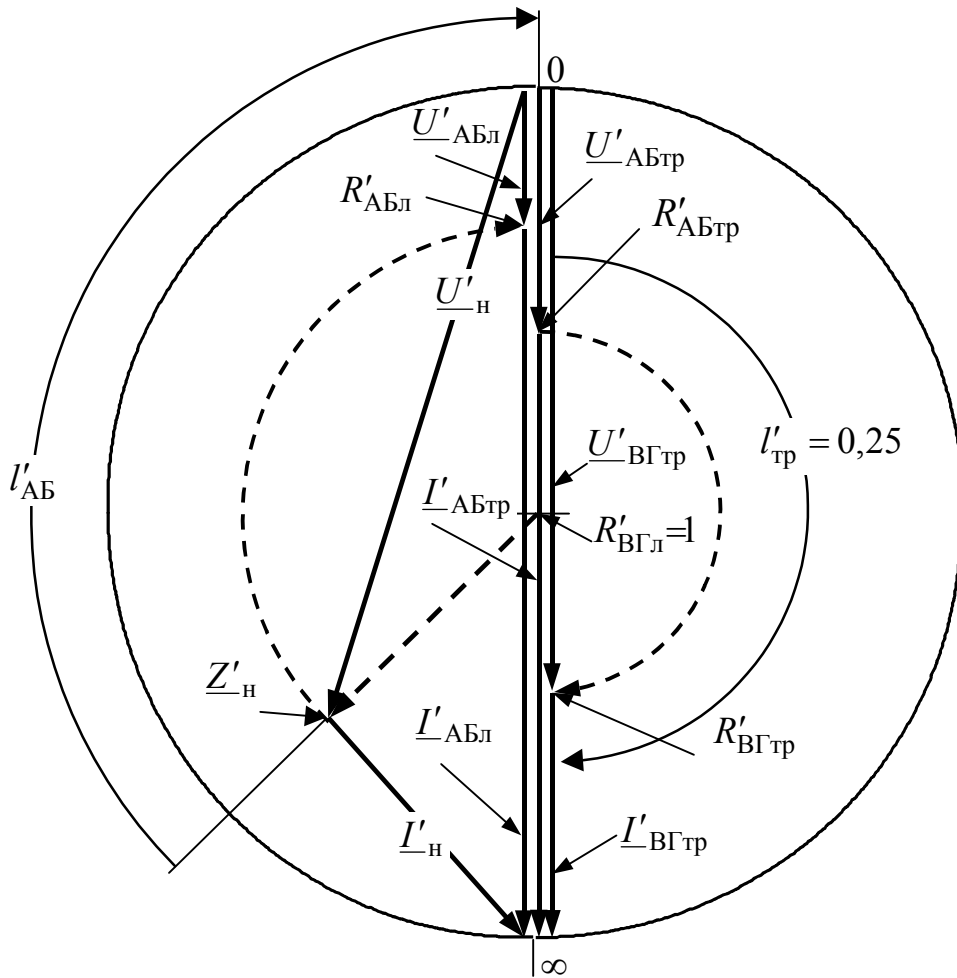


Рисунок 5.48 – Розрахунок місця увімкнення $\lambda/4$ -трансформатора і параметрів режиму в лінії та трансформаторі при узгодженні лінії з комплексним навантаженням

На діаграмі масштаби для напруг і струмів у лінії ($m_{Uл}$, $m_{Iл}$) та у трансформаторі ($m_{Uтр}$, $m_{Iтр}$) відрізняються. Масштабні коефіцієнти в лінії обчислюють за формулами (5.145), а в трансформаторі – за очевидними пропорціями, які виходять з рівності напруг і струмів у перерізі увімкнення трансформатора:

$$\frac{m_{Uл}}{m_{Uтр}} = \frac{s_{UABл}}{s_{UABтр}}; \quad \frac{m_{Iл}}{m_{Iтр}} = \frac{s_{IABл}}{s_{IABтр}},$$

де $s_{UABл}$, $s_{UABтр}$, $s_{IABл}$, $s_{IABтр}$ – довжини векторів відповідних комплексних напруг і струмів, які виміряні за допомогою КД.

При узгодженні з активним навантаженням (рис.5.38, а) КД дозволяє визначити режим у будь-якому перерізі трансформатора та (за необхідності) побудувати графіки $U_m(y)$, $I_m(y)$, $R(y)$, $X(y)$, подібні зображенням на рис.5.38, б, г.

Розрахунок одношлейфового узгоджувального пристрою. Для узгодження одним паралельним шлейфом (рис.5.40, а) визначають координату

увімкнення шлейфа (відстань l_{AB} до перерізу AB лінії) і довжину $l_{ш}$.

Розраховуючи параметри одношлейфового узгодження, КД використовують як діаграму провідностей. Визначення величин l_{AB} і $l_{ш}$ за діаграмою виконують у такій послідовності (рис.5.49):

1) на діаграмі визначають точку $\underline{Y}'_н$ згідно з розрахованим значенням комплексної провідності навантаження або графічно як діаметрально протилежну точці $\underline{Z}'_н$;

2) виконують переміщення із точки $\underline{Y}'_н$ у напрямі «до генератора» за ρ -колом до точки його перетину з G -колом, яке відповідає значенню $G' = 1$; ця точка згідно з виразом (5.134) відповідає перерізу AB лінії;

3) визначають відносну відстань l'_{AB} і відносну реактивну провідність B'_{AB} у перерізі AB ;

4) згідно з формулою (5.135) обчислюють відносну реактивну провідність $B'_{ш} = -B'_{AB}$, позначають відповідну B -дугу і за її допомогою визначають відносну довжину шлейфа (на рис.5.49 показано побудову для знаходження відносної довжини короткозамкненого шлейфа $l'_{ш.кз}$);

5) за знайденими відносними значеннями розраховують абсолютні значення довжин l_{AB} і $l_{ш}$.

З огляду на те, що існують дві точки перетину ρ -кола з G -колом ($G' = 1$) і два можливі типи шлейфа (короткозамкнений і розімкнений), кінцевий варіант розв'язку залежить від конкретної задачі.

Розрахунок двошлейфового узгоджувального пристрою. При даному способі узгодження (рис.5.40, б) обчислюють довжини шлейфів $l_{ш1}$ і $l_{ш2}$ при заданій відстані (зазвичай $\lambda/8$ або $3\lambda/8$) між точками їхнього увімкнення до лінії.

Провідність лінії в точці увімкнення першого шлейфа \underline{Y}_{CD} розраховують аналітично або за допомогою КД за заданими значеннями $\underline{Y}_н$ і l_{CD} . Далі визначають нормовану провідність $\underline{Y}'_{CD} = G'_{CD} - jB'_{CD}$ і відповідну їй точку діаграми.

Перший шлейф з провідністю $\underline{Y}_{ш1}$, увімкнений паралельно лінії у перерізі CD , змінює тільки реактивну провідність цього перерізу. Тому після увімкнення першого шлейфа перерізу CD відповідатиме одна з точок, розташованих на G -колі з номіналом G'_{CD} . Визначення цієї точки ($\underline{Y}'_{CD} + \underline{Y}'_{ш1}$), рух від якої вдовж лінії у напрямі «до генератора» на відстань $\lambda/8$ або $3\lambda/8$ призведе до перерізу AB , в якому $G' = 1$ ($G = G_{хв}$), є головною задачею розрахунку двошлейфового узгоджувального пристрою за допомогою КД.

Шукану точку « $\underline{Y}'_{CD} + \underline{Y}'_{ш1}$ » знаходять як точку перетину G -кола « G'_{CD} » і одиничного G -кола ($G' = 1$), поверненого проти годинникової стрілки на 90° ($l' = 0,125$) або 270° ($l' = 0,375$) залежно від відстані між шлейфами ($\lambda/8$ чи $3\lambda/8$). Загалом може бути дві точки перетину, що й дає два варіанти розв'язку.

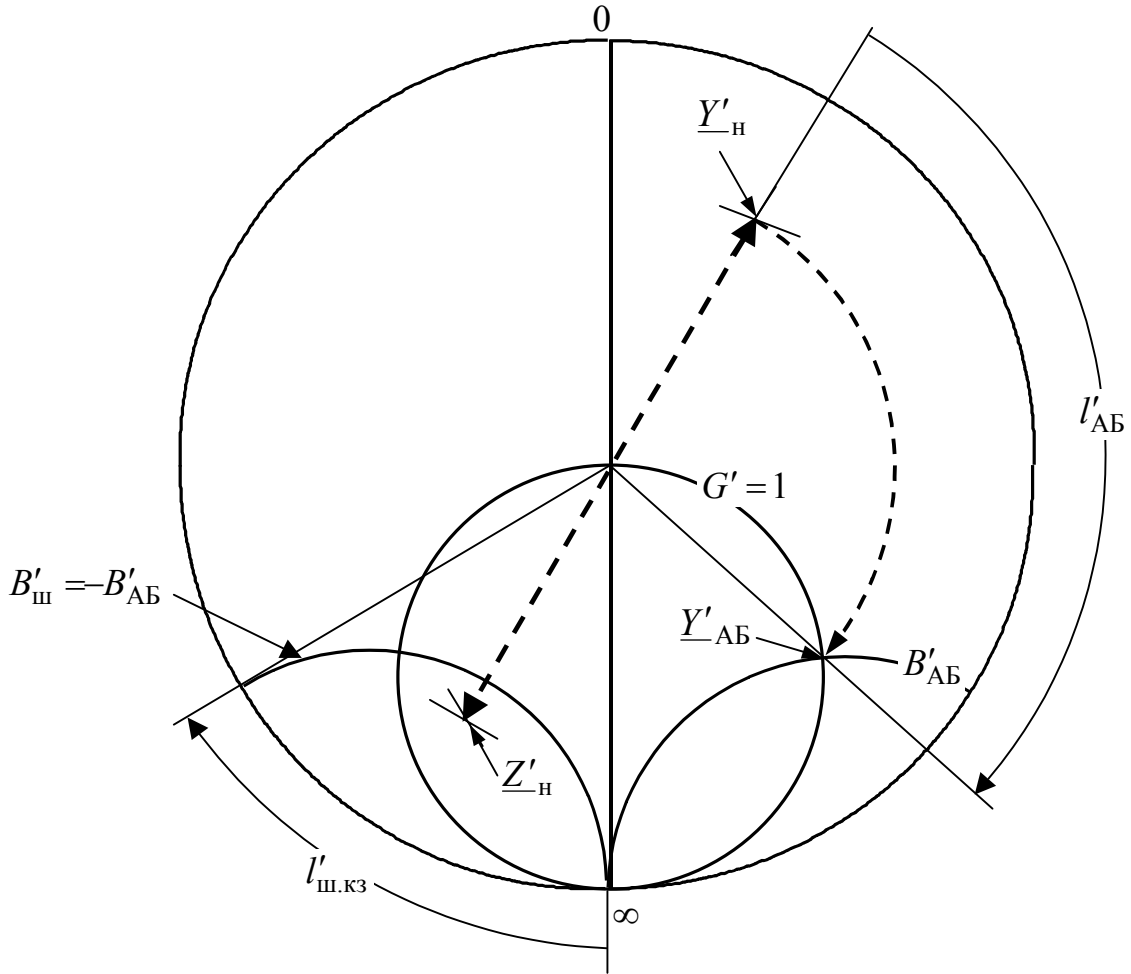


Рисунок 5.49 – Розрахунок параметрів одношлейфового узгоджувального пристрою за допомогою КД

Для відстані між точками увімкнення шлейфів, яка дорівнює $\lambda/8$ ($l' = 0,125$), на рис.5.50 показано визначення на діаграмі двох точок « $\underline{Y}'_{CD} + \underline{Y}'_{ш1}$ », з яких для подальших розрахунків вибраний варіант №1.

Вибрана точка « $\underline{Y}'_{CD} + \underline{Y}'_{ш1}$ » дозволяє знайти значення $\underline{Y}'_{ш1} = -jB'_{ш1}$ і довжину першого шлейфа за розрахунковими співвідношеннями для провідностей короткозамкнених і розімкнених ліній або за діаграмою (див. рис.5.49).

Визначивши довжину першого шлейфа, переходять від точки « $\underline{Y}'_{CD} + \underline{Y}'_{ш1}$ » за ρ -колом (якому належить дана точка) до перерізу AB (точка \underline{Y}'_{AB}). Реактивна провідність у перерізі AB становить B'_{AB} , активна – $G' = 1$. Це підтверджує правильність попередніх розрахунків і дозволяє обчислити довжину другого шлейфа.

На рис.5.50 показано всі етапи визначення основних параметрів двошлейфового пристрою узгодження, а також заштриховане коло ($G' = 2$), приналежність якого до точки \underline{Y}'_{CD} не дозволяє здійснити двошлейфове узгодження для відстаней між шлейфами, що дорівнюють $\lambda/8$ або $3\lambda/8$. Якщо активна складова нормованої комплексної провідності у перерізі CD $G'_{CD} = 2$, узгодження ще можливе для єдиної точки « $\underline{Y}'_{CD} + \underline{Y}'_{ш1}$ ». Якщо $G'_{CD} > 2$, щоб реалізувати режим узгодження, слід змінити відстань між шлейфами – зробити її менше $\lambda/8$ або більше $3\lambda/8$.

Вибір потрібного варіанта розрахунку визначається конструктивними вимогами.

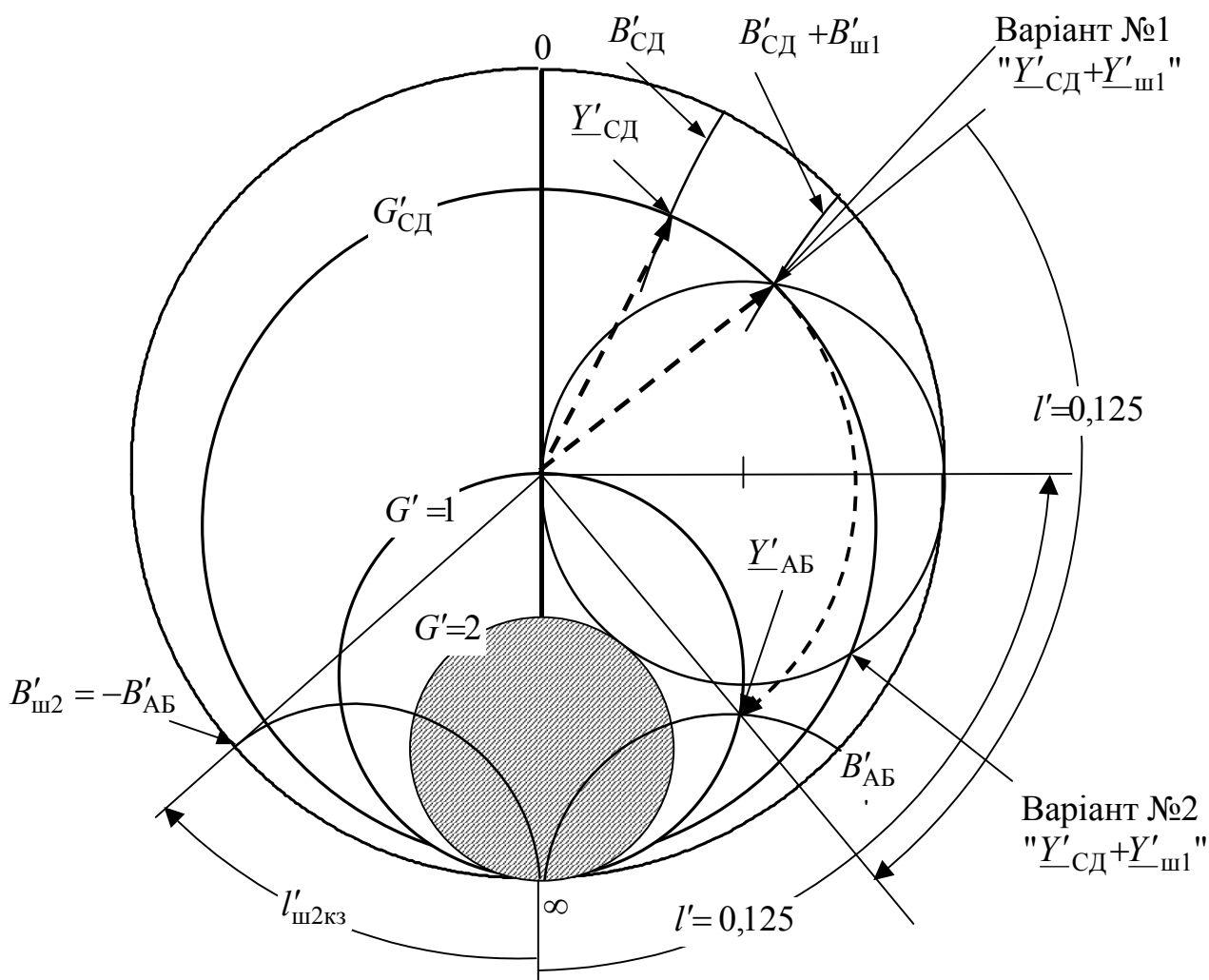


Рисунок 5.50 – Розрахунок параметрів двошлейфового узгоджувального пристрою за допомогою КД

Приклад 5.25. Знайти параметри двошлейфового пристрою для узгодження лінії з комплексним навантаженням (рис.5.40, б), параметри яких наве-

дені у прикладах 5.23 і 5.24 ($Z_{\text{н}} = 600 - j900 \text{ Ом}$; $R_{\text{хв}} = 300 \text{ Ом}$; $\lambda = 3 \text{ м}$). Виконати два варіанти розрахунків для короткозамкнених шлейфів, які увімкнені до лінії на відстані $\lambda/8$ і мають ті ж самі параметрами, що і лінія. Відстань $l_{\text{СД}} = \lambda/2$.

Розв'язання. Оскільки $l_{\text{СД}} = \lambda/2$, опір навантаження і лінії у перерізі *СД* однакові. Визначимо їх комплексний нормований опір:

$$\underline{Z}'_{\text{н}} = \underline{Z}'_{\text{СД}} = \frac{\underline{Z}_{\text{н}}}{R_{\text{хв}}} = \frac{600 - j900}{300} = 2 - j3.$$

Комплексну нормовану провідність у перерізі *СД* знайдемо за допомогою КД як точку, діаметрально протилежну точці $\underline{Z}'_{\text{СД}}$:

$$\underline{Y}'_{\text{СД}} = G'_{\text{СД}} - jB'_{\text{СД}} = 0,15 + j0,23.$$

Значення цієї провідності з прикладу 5.24 становить:

$$\underline{Y}'_{\text{СД}} = 0,15385 + j0,23077.$$

Порівняння результатів показує, що відносна похибка визначення провідності не більша 3,5 %.

Використовуючи рекомендації з обчислення параметрів двошлейфового узгоджувального пристрою (див. п.5.10.2 і рис.5.50), виконаємо розрахунки для двох точок перетину: *G*-кола ($G'_{\text{СД}} = 0,15$) і *G*-кола ($G' = 1$), яке повернене на 90° проти годинникової стрілки. Результати розрахунків зведені до табл.5.25.

З точки зору менших довжин шлейфів кращі показники має варіант № 1.

Таблиця 5.25 – Результати розрахунків у прикладі 5.25

Параметр	Варіант № 1	Варіант № 2
$\underline{Y}'_{\text{СД}} + \underline{Y}'_{\text{ш1}}$	0,15+j0,475	0,15+j1,53
$\underline{Y}'_{\text{ш1}}$	j0,245	j1,3
$B'_{\text{ш1}}$	-0,245	-1,3
$l'_{\text{ш1}}$	0,254	0,396
$l_{\text{ш1}}, \text{ м}$	0,762	1,188
$\underline{Y}'_{\text{АБ}}$	1+j2,4	1 - j4
$\underline{Y}'_{\text{ш2}}$	-j2,4	j4
$B'_{\text{ш2}}$	2,4	-4
$l'_{\text{ш2}}$	0,063	0,46
$l_{\text{ш2}}, \text{ м}$	0,189	1,38

5.11 Комплексні функції та частотні характеристики довгих ліній

5.11.1 Види КФ ліній та основні співвідношення

Комплексні передатні функції (КПФ) лінії можна ввести, якщо вважати лінію чотирьохполюсником (рис.5.51), у якого діями є комплексні амплітуди \underline{U}_{m1} або \underline{I}_{m1} , а відгуками – комплексні амплітуди \underline{U}_{m2} або \underline{I}_{m2} . Для ДЛ використовують такі основні види КПФ:

- 1) комплексний коефіцієнт передачі за напругою $H_U(j\omega) = \underline{U}_{m2} / \underline{U}_{m1}$;
- 2) комплексний коефіцієнт передачі за струмом $H_I(j\omega) = \underline{I}_{m2} / \underline{I}_{m1}$.

Розглядаючи лінію як двополюсник, застосовують комплексні вхідні функції (КВФ):

- 3) комплексний вхідний опір $Z_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{U}_{m1} / \underline{I}_{m1}$;
- 4) комплексна вхідна провідність $Y_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{I}_{m1} / \underline{U}_{m1}$.

Аналізуючи комплексні функції (КФ) лінії – КПФ і КВФ, вважають відомими основні параметри лінії: довжину l ; хвильовий опір $\underline{Z}_{\text{хв}}$ (реальна лінія) або $R_{\text{хв}}$ (ідеальна лінія); фазову швидкість поширення хвиль v ; коефіцієнт ослаблення для реальної лінії $\alpha = \text{const}$ або $\alpha(\omega)$.

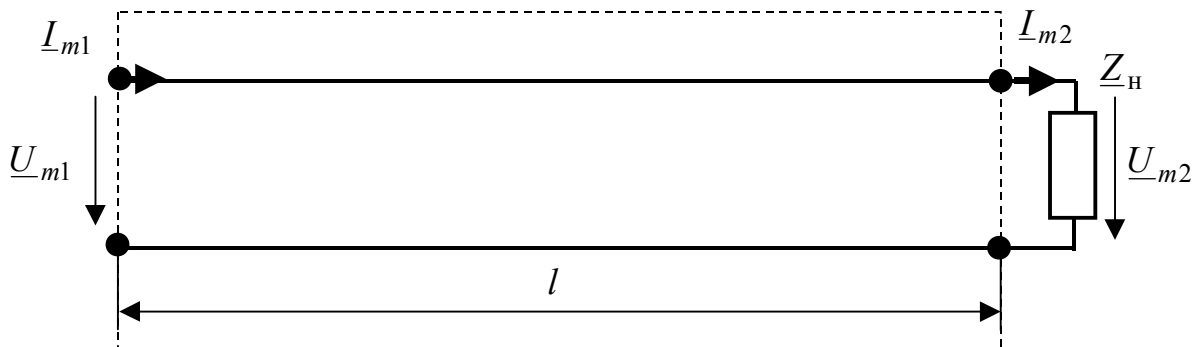


Рисунок 5.51 – Схема для аналізу КФ і частотних характеристик ДЛ

Щоб вивести співвідношення, які описують КФ, використовують системи рівнянь (див. табл.5.5 і 5.8):

- 1) для реальної лінії

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} = \underline{U}_{m2} \text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_{\text{хв}} \underline{I}_{m2} \text{sh} \underline{\gamma} l = \underline{U}_{m2} [\text{ch} \underline{\gamma} l + (1 / \underline{Z}'_{\text{н}}) \text{sh} \underline{\gamma} l]; \\ \underline{I}_{m1} = \underline{I}_{m2} \text{ch} \underline{\gamma} l + (\underline{U}_{m2} / \underline{Z}_{\text{хв}}) \text{sh} \underline{\gamma} l = \underline{I}_{m2} (\text{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}'_{\text{н}} \text{sh} \underline{\gamma} l); \end{cases} \quad (5.147)$$

- 2) для ідеальної лінії

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} = \underline{U}_{m2} \cos \beta l + j R_{\text{хв}} \underline{I}_{m2} \sin \beta l = \underline{U}_{m2} [\cos \beta l + j (1 / \underline{Z}'_{\text{н}}) \sin \beta l]; \\ \underline{I}_{m1} = \underline{I}_{m2} \cos \beta l + j (\underline{U}_{m2} / R_{\text{хв}}) \sin \beta l = \underline{I}_{m2} (\cos \beta l + j \underline{Z}'_{\text{н}} \sin \beta l). \end{cases} \quad (5.148)$$

У рівняннях (5.147) і (5.148) від частоти залежать:

- 1) для ідеальної лінії

$$\beta(\omega) = \omega / v; \quad (5.149)$$

2) для реальної лінії $\alpha(\omega)$, якщо враховувати частотні залежності первинних параметрів R_1 і (або) G_1

$$\beta(\omega) \approx \omega / v. \quad (5.150)$$

З огляду на співвідношення (5.149) і (5.150), вираз βl , який входить до аргументів гіперболічних і тригонометричних функцій рівнянь (5.147) і (5.148), можна записати у вигляді:

$$\beta l = \omega l / v = \omega \tau_3, \quad (5.151)$$

де $\tau_3 = l / v$ – затримка синусоїдного коливання в лінії.

Вирази для основних КФ ДЛ, отримані із застосуванням рівнянь (5.147), (5.148) і (5.151), наведені в табл.5.26.

Таблиця 5.26 – КФ довгих ліній

КФ	Ідеальна ДЛ	Реальна ДЛ ($\alpha = const$)
$H_U(j\omega)$	$\frac{\underline{Z}'_H}{\underline{Z}'_H \cos \omega \tau_3 + j \sin \omega \tau_3}$	$\frac{\underline{Z}'_H}{\underline{Z}'_H \operatorname{ch}(\alpha l + j\omega \tau_3) + \operatorname{sh}(\alpha l + j\omega \tau_3)}$
$H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos \omega \tau_3 + j \underline{Z}'_H \sin \omega \tau_3}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha l + j\omega \tau_3) + \underline{Z}'_H \operatorname{sh}(\alpha l + j\omega \tau_3)}$
$Z_{BX}(j\omega)$	$R_{XB} \frac{\underline{Z}'_H + j \operatorname{tg} \omega \tau_3}{1 + j \underline{Z}'_H \operatorname{tg} \omega \tau_3}$	$\underline{Z}_{XB} \frac{\underline{Z}'_H + \operatorname{th}(\alpha l + j\omega \tau_3)}{1 + \underline{Z}'_H \operatorname{th}(\alpha l + j\omega \tau_3)}$
$Y_{BX}(j\omega)$	$G_{XB} \frac{\underline{Y}'_H + j \operatorname{tg} \omega \tau_3}{1 + j \underline{Y}'_H \operatorname{tg} \omega \tau_3}$	$\underline{Y}_{XB} \frac{\underline{Y}'_H + \operatorname{th}(\alpha l + j\omega \tau_3)}{1 + \underline{Y}'_H \operatorname{th}(\alpha l + j\omega \tau_3)}$

Как видно з формул (табл.5.26), КФ залежать не тільки від параметрів лінії, але й від опору навантаження. У практиці найважливішими є такі режими: навантаження лінії на хвильовий опір (режим узгодження); коротке замикання вихідних затискачів ДЛ і варіант $R_H \ll R_{XB}$ ($R'_H \ll 1$); холостий хід і варіант $R_H \gg R_{XB}$ ($R'_H \gg 1$); навантажування лінії на реактивний опір (L чи C).

Головну увагу при цьому надають ідеальним ДЛ і ДЛІМВ, у яких ослаблення $\alpha l \ll 1$.

5.11.2 КФ і частотні характеристики узгодженої лінії

У режимі узгодження $\underline{Z}'_H = 1$, тому КПФ $H_U(j\omega)$ і $H_I(j\omega)$ збігаються, а вхідні опори і провідності дорівнюють хвильовим. Перетворені вирази для КПФ, КВФ, АЧХ і ФЧХ наведені у табл.5.27, а графіки – на рис.5.52.

Графіки АЧХ (рис.5.52, а) відповідають ідеальній лінії ($\alpha = 0$), а також – реальним лініям з постійним коефіцієнтом ослаблення ($\alpha = const$) і з коефіцієнтом ослаблення, який змінюється за частотою за типовим законом

$$\alpha(\omega) = \alpha_0(1 + k\sqrt{\omega}).$$

ФЧХ (рис.5.52, б) узгоджених ліній змінюються за лінійним законом, що забезпечує однаковий час затримки τ_3 синусоїдних коливань з різними частотами в лінії:

$$u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t - \omega\tau_3) = U_{m2} \cos[\omega(t - \tau_3)].$$

Таблиця 5.27 – КФ, АЧХ і ФЧХ узгоджених ДЛ

КФ, ЧХ	Ідеальна ДЛ	Реальна лінія ($\alpha = const$)
$H_U(j\omega) = H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 + j\sin\omega\tau_3} = e^{-j\omega\tau_3}$	$\frac{1}{\text{ch}(\alpha l + j\omega\tau_3) + \text{sh}(\alpha l + j\omega\tau_3)} = e^{-(\alpha l + j\omega\tau_3)}$
АЧХ, $H_U(\omega) = H_I(\omega)$	1	$e^{-\alpha l}$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega) = \varphi_I(\omega)$	$-\omega\tau_3$	
$Z_{\text{вх}}(j\omega)$	$R_{\text{хв}}$	$\underline{Z}_{\text{хв}}$
$Y_{\text{вх}}(j\omega)$	$G_{\text{хв}}$	$\underline{Y}_{\text{хв}}$

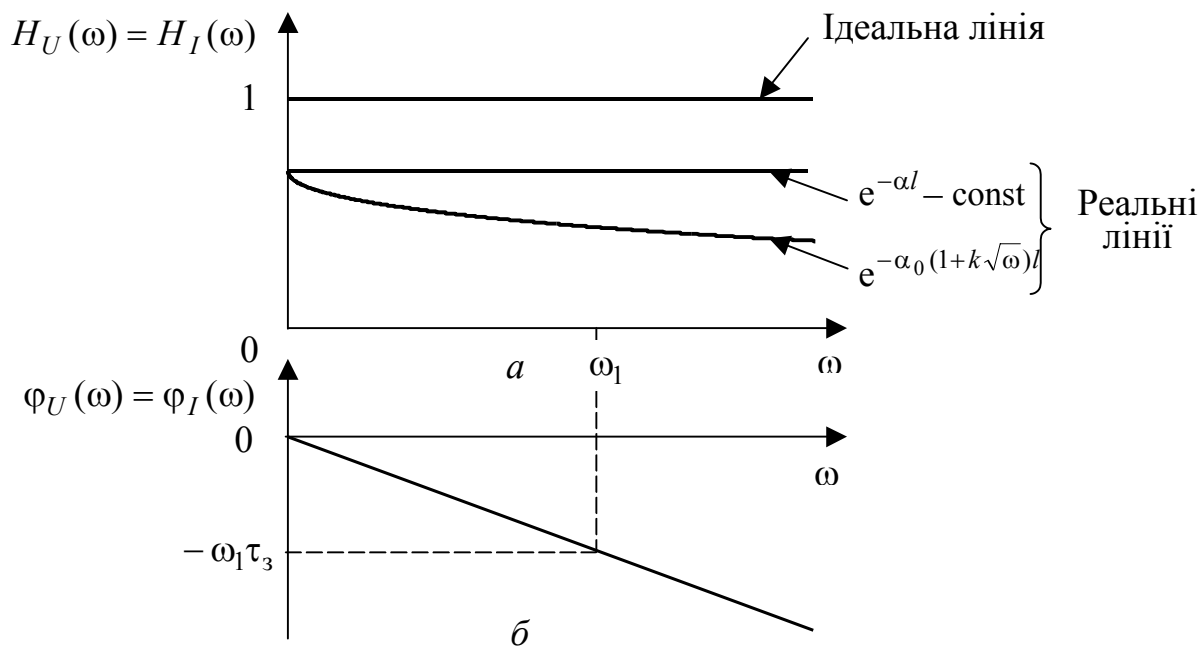


Рисунок 5.52 – Графіки ЧХ узгоджених ліній: а – АЧХ; б – ФЧХ

Незмінність АЧХ ідеальної та реальної лінії з $\alpha = const$ разом з лінійністю ФЧХ обумовлюють практичне застосування режиму узгодження, завдяки неспотвореній передачі сигналів у лінії. Іноді припустимою є наявність спотворень сигналів і у випадку $\alpha(\omega)$.

5.11.3 КФ і частотні характеристики лінії при короткому замиканні вихідних затискачів і при $R_H \ll R_{XB}$

Оскільки при короткому замиканні лінії (рис.5.22, а) $Z'_H = 0$, КПФ $H_U(j\omega)$ (див. табл.5.26) позбавлена сенсу. У цьому випадку розглядають КПФ $H_I(j\omega)$, а також КВФ $Z_{BX}(j\omega)$, причому частотні характеристики (ЧХ) замкненої на кінці лінії подібні ЧХ паралельного резонансного контуру.

Здобуті після підстановки $Z'_H = 0$ у формули (табл.5.26) точні співвідношення для $H_I(j\omega)$, $Z_{BX}(j\omega)$, АЧХ і ФЧХ ідеальної ДЛ, а також приблизні вирази, одержані з використанням формул (5.89), тих самих КФ, АЧХ і ФЧХ для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$) зведено до табл.5.28.

Графіки ЧХ ідеальної ДЛ і ДЛМВ, побудовані за формулами (табл.5.28), зображено відповідно на рис.5.53 і 5.54.

Аналіз АЧХ (рис.5.53, а, в і 5.54, а, в) показує, що короткозамкнені лінії є багаторезонансними (багатохвильовими) системами з кратними значеннями резонансних частот:

$$\omega_{резn} = n\pi / 2\tau_3, \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (5.152)$$

Для частоти першого резонанса $\omega_{рез1}$ співвідношення між довжиною лінії та довжиною хвилі становлять:

$$l_{рез1} = \tau_3 v = \frac{\pi v}{2\omega_{рез1}} = \frac{v}{4f_{рез1}} = \frac{\lambda_{рез1}}{4}; \quad l_{резn} = \frac{n\lambda_{рез1}}{4}. \quad (5.153)$$

З формули (5.153) виходить, що на резонансних частотах довжина короткозамкненої лінії кратна чверті довжини хвилі резонансної частоти.

На резонансних частотах $\omega_{резn}$ АЧХ коефіцієнта передачі за струмом і повний опір мають максимуми (рис.5.53, а, в; і 5.54, а, в). У ідеальної ДЛ ці екстремуми прямують до нескінченності, а у ДЛМВ становлять:

$$Z(\omega_{резn}) = R_{рез} = R_{XB} / \alpha l; \quad H_I(\omega_{резn}) = 1 / \alpha l. \quad (5.154)$$

Аналогічні характеристики для повного опору та струму в індуктивній вітці мають паралельні резонансні контури. Схожість ЧХ лінії та контуру підтверджується також виглядом ФЧХ (рис.5.53, б, г; і 5.54, б, г).

Визначити параметри еквівалентного паралельного контуру можна, прирівнявши його смугу пропускання і значення еквівалентного резонансного опору аналогічним параметрам лінії на частоті $\omega_{рез1}$.

Щоб оцінити смугу пропускання АЧХ $H_I(\omega)$, використовують абсолютну розстройку $\Delta\omega = \omega - \omega_{рез1}$, що дозволяє записати змінну $\omega\tau_3$ і рівняння для визначення СП:

$$\omega\tau_3 = (\omega_{рез1} + \Delta\omega)\tau_3 = \pi/2 + \Delta\omega; \\ \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\pi/2 + \Delta\omega\tau_3) + (\alpha l)^2 \sin^2(\pi/2 + \Delta\omega\tau_3)}} = \frac{1}{\alpha l\sqrt{2}}, \quad (5.155)$$

де $\Delta\omega_{\Pi}$ – абсолютна розстройка на границях СП.

Приблизний розв'язок рівняння (5.155) з використанням перших членів розкладання функцій синус (косинус) поблизу значення аргумента $\pi/2$ дає приблизні співвідношення для СП АЧХ:

$$\Delta\omega_{\Pi} \approx \frac{\alpha l}{\tau_3} = \frac{2\alpha l}{\pi} \omega_{\text{рез}1}; \quad 2\Delta\omega_{\Pi} \approx \frac{4\alpha l}{\pi} \omega_{\text{рез}1}. \quad (5.156)$$

Таблиця 5.28 – КФ, АЧХ і ФЧХ короткозамкненої ДЛ

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$)
$H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 + j\alpha l \sin\omega\tau_3}$
АЧХ, $H_I(\omega)$	$\frac{1}{ \cos\omega\tau_3 }$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega\tau_3 + (\alpha l \sin\omega\tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_I(\omega)$	$\begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos\omega\tau_3 > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos\omega\tau_3 < 0 \end{cases}$	$-\arctg(\alpha l \cdot \text{tg}\omega\tau_3)$
$Z_{\text{BX}}(j\omega)$	$jR_{\text{XB}} \text{tg}\omega\tau_3$	$R_{\text{XB}} \frac{\alpha l + j\text{tg}\omega\tau_3}{1 + j\alpha l \text{tg}\omega\tau_3}$
АЧХ, $Z_{\text{BX}}(\omega)$	$R_{\text{XB}} \text{tg}\omega\tau_3 $	$R_{\text{XB}} \frac{\sqrt{(\alpha l)^2 + \text{tg}^2\omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (\alpha l \text{tg}\omega\tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_Z(\omega)$	$\begin{cases} \pi/2, & \text{якщо } \text{tg}\omega\tau_3 > 0; \\ -\pi/2, & \text{якщо } \text{tg}\omega\tau_3 < 0 \end{cases}$	$\arctg \frac{\text{tg}\omega\tau_3}{\alpha l} - \arctg(\alpha l \cdot \text{tg}\omega\tau_3)$

З формул (5.154) і (5.156) виходять співвідношення для добротності та характеристичного опору еквівалентного паралельного контуру:

$$Q_{e1} = \frac{\omega_{\text{рез}1}}{2\Delta\omega_{\Pi}} \approx \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha l}; \quad \rho_{e1} = \frac{R_{\text{рез}}}{Q_{e1}} \approx \frac{4}{\pi} R_{\text{XB}}. \quad (5.157)$$

Завдяки періодичності тригонометричних функцій, які входять у вирази для АЧХ ДЛМВ, значення СП $2\Delta\omega_{\Pi}$ однакові для всіх резонансних частот. Тому добротності та характеристичні опори еквівалентних контурів на цих частотах становлять:

¹⁹ Зв'язок між ρ_{e1} і R_{XB} непрямо підтверджується однотипністю вихідних розрахункових співвідношень для цих вторинних параметрів: $R_{\text{XB}} = \sqrt{L_1/C_1}$; $\rho = \sqrt{L/C}$.

$$Q_{en} = \frac{\omega_{рез n}}{2\Delta\omega_{п}} = \frac{n\omega_{рез 1}}{2\Delta\omega_{п}} = nQ_{e1} = \frac{n\pi}{4} \frac{1}{\alpha l}; \rho_{en} = \frac{R_{рез}}{Q_{en}} \approx \frac{4}{\pi} nR_{хв}. \quad (5.158)$$

Поблизу частот, кратних π/τ_3 (довжина лінії кратна $\lambda/2$), характер змінювання $Z_{вх}(\omega)$ і $\varphi_Z(\omega)$ (рис.5.53, в; з; і 5.54, в, з) подібний характеристикам послідовного резонансного контуру. На цих частотах, як і в послідовному контурі, опір ІДЛ дорівнює нулю, а опір ДЛМВ мінімальний і становить $R_{хв}\alpha l$. Характеристики $H_I(\omega)$ і $\varphi_I(\omega)$ не властиві послідовному контуру, оскільки дією і відгуком для нього є напруги.

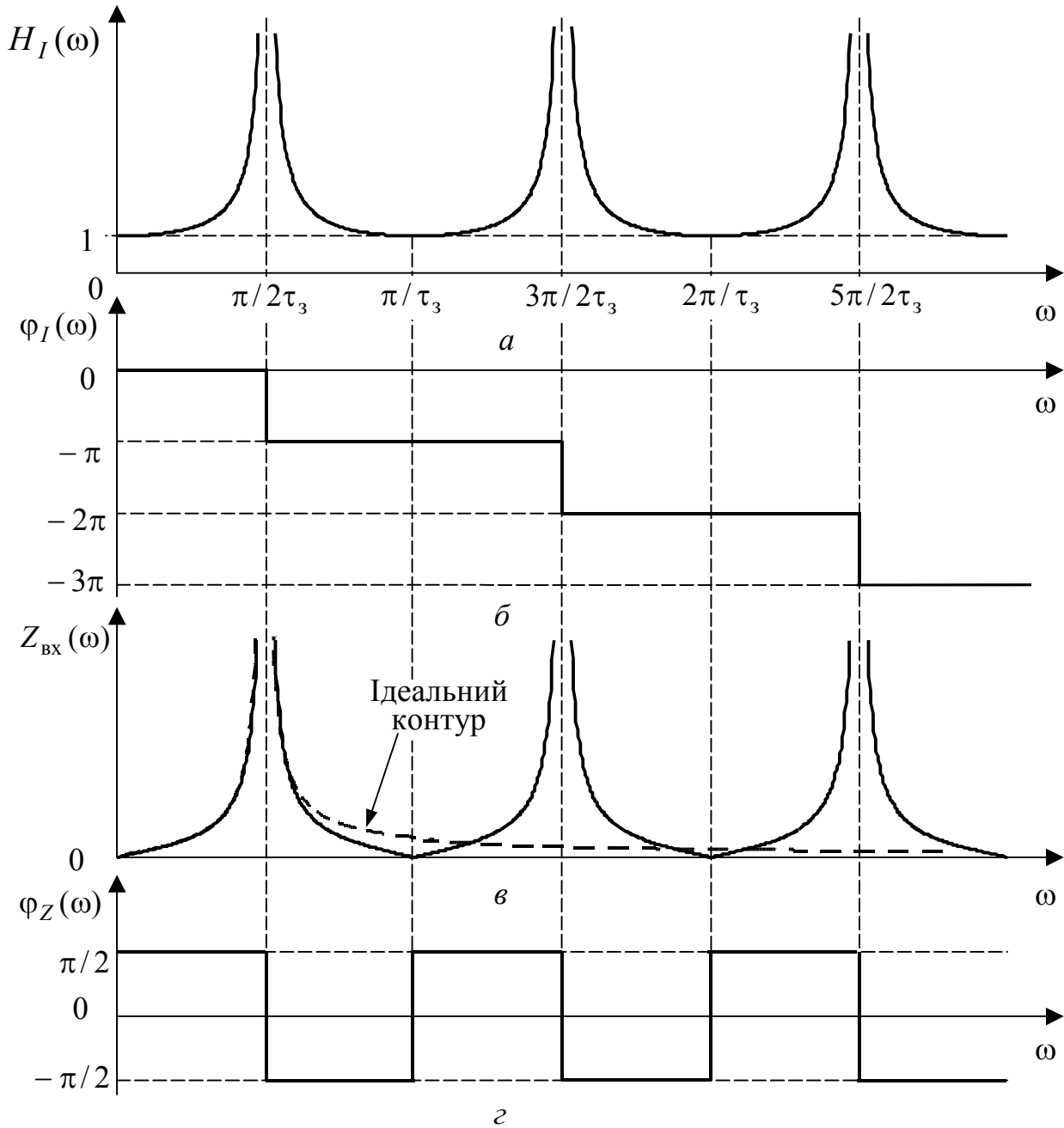


Рисунок 5.53 – ЧХ замкненої на кінці ІДЛ:
а, б – АЧХ і ФЧХ $H_I(j\omega)$; в, з – АЧХ і ФЧХ $Z_{вх}(j\omega)$

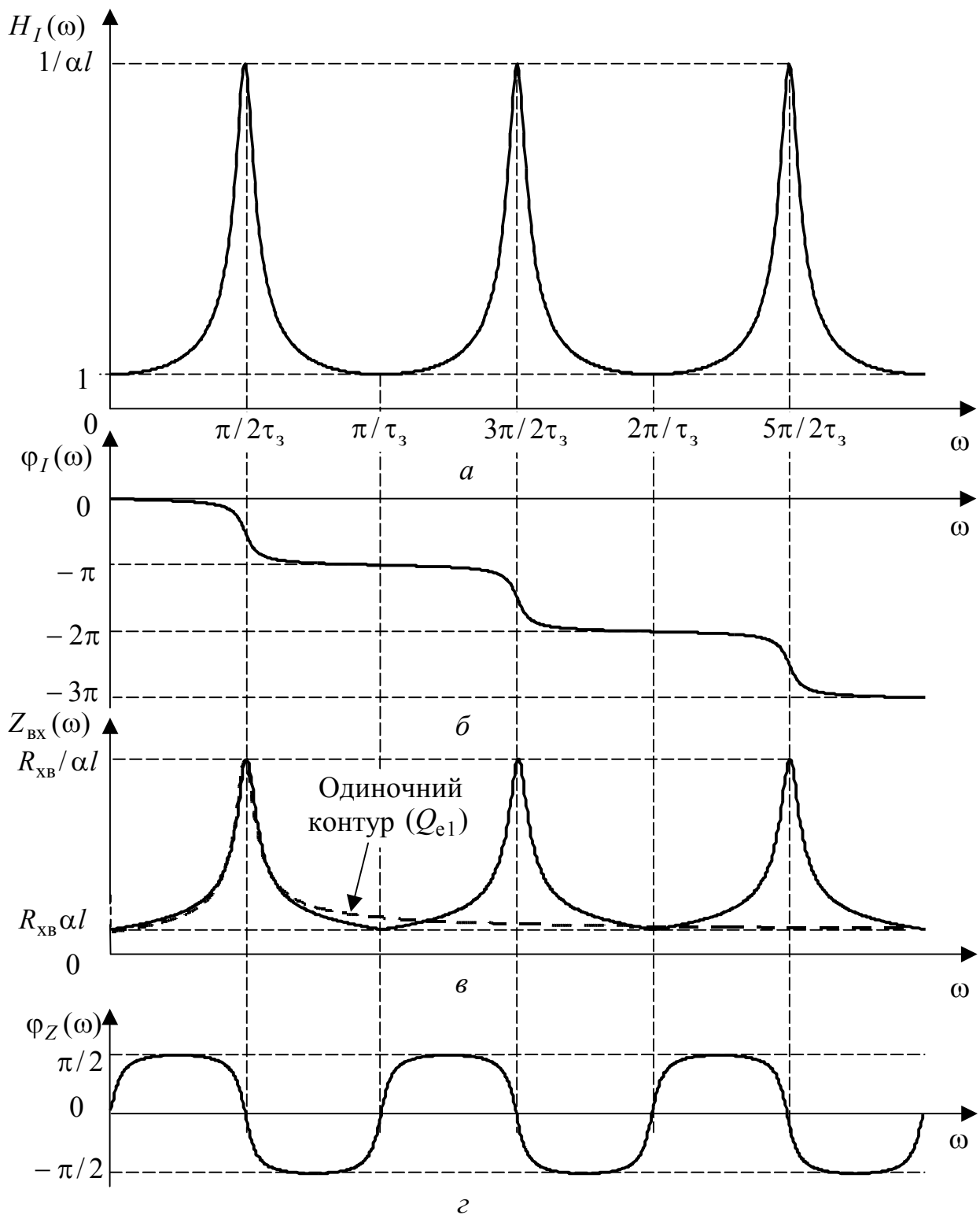


Рисунок 5.54 – ЧХ замкненої на кінці ДЛІМВ ($\alpha l = 0,1$):
a, б – АЧХ і ФЧХ $H_I(j\omega)$; *в, г* – АЧХ і ФЧХ $Z_{\text{вх}}(j\omega)$

Слід зазначити, що ЧХ ліній та одиночних контурів аналогічні тільки поблизу резонансних частот (див. рис.5.53, в і 5.54, в, де АЧХ контурів показані пунктиром). При значних розстройках ($\omega \gg \omega_{\text{рез}1}$) характеристики контуру і

лінії суттєво відрізняються і, насамперед, тим, що одиночний контур має тільки одну, а лінії – теоретично нескінченний ряд резонансних частот.

Для аналізу КФ і ЧХ, коли ослаблення в лінії залежить від частоти за відомим законом $\alpha(\omega)$, причому $\alpha(\omega)l \ll 1$, слушні співвідношення з табл.5.28, в яких слід замінити α на $\alpha(\omega)$. Графіки АЧХ (рис.5.55) показують, що при цьому зберігаються багатократні резонанси, однак максимуми АЧХ зменшуються, а СП розширюються із збільшенням номера резонансної частоти.

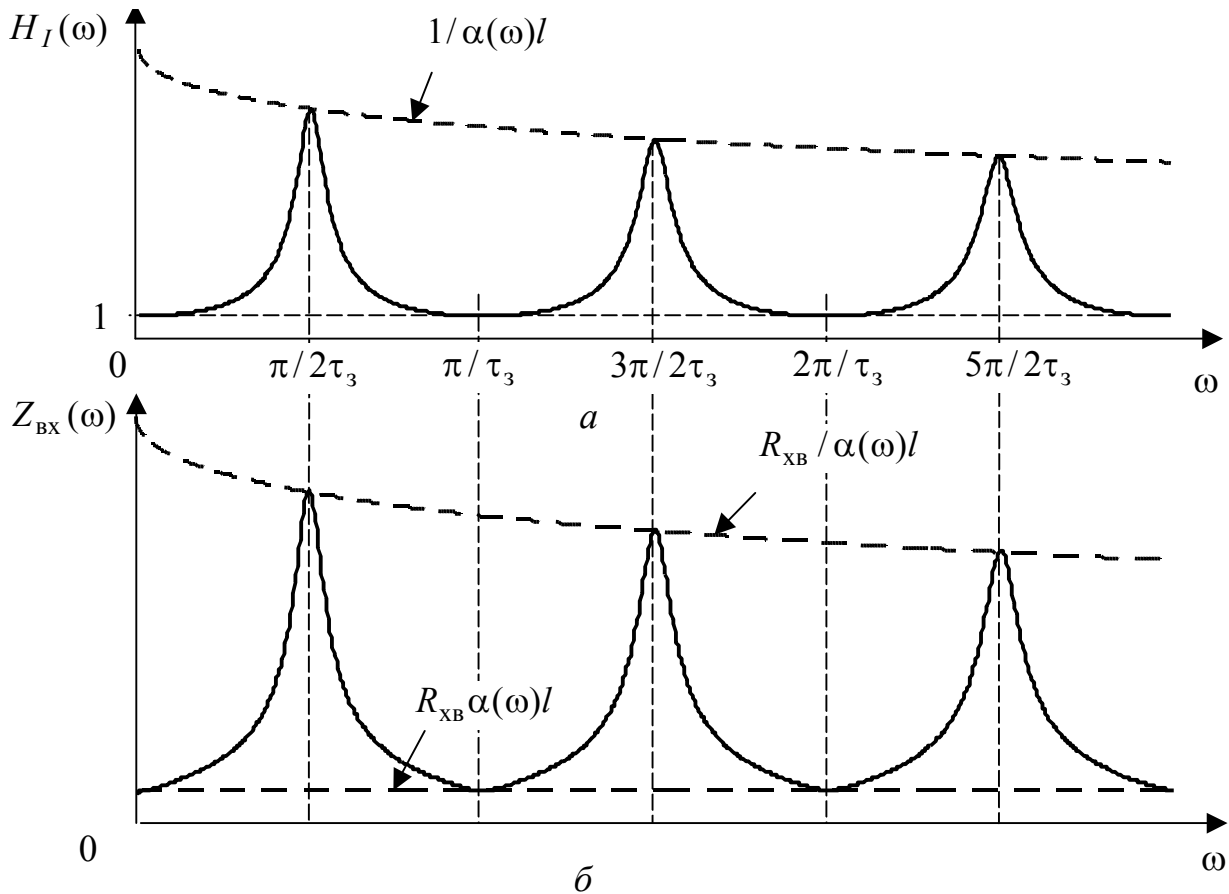


Рисунок 5.55 – АЧХ замкненої на кінці лінії з ослабленням, яке залежить від частоти за законом $\alpha(\omega) = \alpha_0(1 + k\sqrt{\omega})$: *a* – АЧХ $H_I(\omega)$; *б* – АЧХ $Z_{BX}(\omega)$

Аналогічно співвідношенням (5.157) і (5.158) можна ввести приблизні оцінки добротностей еквівалентних контурів для резонансних частот:

$$Q_{e1} \approx \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha(\omega_{рез1})l}; \quad Q_{en} \approx \frac{n\pi}{4} \frac{1}{\alpha(\omega_{резn})l}. \quad (5.159)$$

З фізичної точки зору характеристики лінії, навантаженої на опір $R_H \ll R_{XB}$, наближаються до режиму короткого замикання лінії. Цей висновок підтверджують аналітичні вирази (табл.5.29), здобуті внаслідок підстановки значення $R'_H \ll 1$ у загальні вирази (табл.5.26) для $H_I(j\omega)$ і $Z_{BX}(j\omega)$.

Порівняння виразів (табл.5.28 і 5.29) показує, що за умови $R_H \ll R_{XB}$ КФ,

АЧХ і ФЧХ ідеальної ДЛ та ДЛМВ збігаються з аналогічними характеристиками короткозамкненої ДЛМВ. Кількісна різниця є тільки у тому, що замість безрозмірної величини αl (входить у формули табл.5.28) у виразах для ідеальної та реальної ліній, навантажених на $R_H \ll R_{XB}$, записано відповідно R'_H і $(\alpha l + R'_H)$. Отже, КФ, АЧХ і ФЧХ лінії з малими втратами і $R_H \ll R_{XB}$, з одного боку, відповідають характеристикам лінії з еквівалентними втратами $\alpha_e l = \alpha l + R'_H$, а, з іншого боку, – ідеальній лінії з еквівалентним навантаженням $R'_{He} = \alpha l + R'_H$. Тому графіки ЧХ лінії, навантаженої на $R_H \ll R_{XB}$, аналогічні графікам АЧХ і ФЧХ замкненої на кінці ДЛМВ (рис.5.54).

Таблиця 5.29 – КФ, АЧХ і ФЧХ лінії при $R_H \ll R_{XB}$ ($R'_H \ll 1$)

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$)
$H_I(j\omega)$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 + jR'_H\sin\omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 + j(\alpha l + R'_H)\sin\omega\tau_3}$
АЧХ, $H_I(\omega)$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega\tau_3 + (R'_H\sin\omega\tau_3)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega\tau_3 + (\alpha l + R'_H)^2\sin^2\omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_I(\omega)$	$-\arctg(R'_H\operatorname{tg}\omega\tau_3)$	$-\arctg[(\alpha l + R'_H)\operatorname{tg}\omega\tau_3]$
$Z_{BX}(j\omega)$	$R_{XB}\frac{R'_H + j\operatorname{tg}\omega\tau_3}{1 + jR'_H\operatorname{tg}\omega\tau_3}$	$R_{XB}\frac{(\alpha l + R'_H) + j\operatorname{tg}\omega\tau_3}{1 + j(\alpha l + R'_H)\operatorname{tg}\omega\tau_3}$
АЧХ, $Z_{BX}(\omega)$	$R_{XB}\frac{\sqrt{(R'_H)^2 + \operatorname{tg}^2\omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (R'_H\operatorname{tg}\omega\tau_3)^2}}$	$R_{XB}\frac{\sqrt{(\alpha l + R'_H)^2 + \operatorname{tg}^2\omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (\alpha l + R'_H)^2\operatorname{tg}^2\omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_Z(\omega)$	$\arctg\frac{\operatorname{tg}\omega\tau_3}{R'_H} - \arctg(R'_H\operatorname{tg}\omega\tau_3)$	$\arctg\frac{\operatorname{tg}\omega\tau_3}{\alpha l + R'_H} - \arctg[(\alpha l + R'_H)\operatorname{tg}\omega\tau_3]$

5.11.4 КФ і ЧХ лінії при холостому ході та при $R_H \gg R_{XB}$

Оскільки у розімкненій лінії (рис.5.20, а) $Z'_H \rightarrow \infty$ та $I_{m2} = 0$, із сукупності КПФ доцільно розглядати $H_U(j\omega)$, а з КВФ – $Y_{BX}(j\omega)$.

Отримані в результаті підстановки значення $Z'_H \rightarrow \infty$ ($Y'_H = 0$) до формул (табл.5.26) точні для ІДЛ та приблизні для ДЛМВ співвідношення для $H_U(j\omega)$, $H_U(\omega)$ і $\varphi_U(\omega)$ (табл.5.30) цілком збігаються відповідно з $H_I(j\omega)$, $H_I(\omega)$ і $\varphi_I(\omega)$ для короткозамкненої лінії (табл.5.28). Здобуті аналогічно вирази для $Y_{BX}(j\omega)$ і $Y_{BX}(\omega)$ (табл.5.30) відрізняються від $Z_{BX}(j\omega)$ і $Z_{BX}(\omega)$ замкненої лінії

(табл.5.28) тільки множниками – R_{XB} (замкнена) і G_{XB} (розімкнена). ФЧХ комплексної провідності розімкненої лінії $\varphi_Y(\omega)$ і ФЧХ комплексного опору замкненої лінії $\varphi_Z(\omega)$ також збігаються (див. табл.5.28 і 5.30).

Таблиця 5.30 – КФ, АЧХ і ФЧХ розімкненої лінії

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$)
$H_U(j\omega)$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 + j\alpha l \sin\omega\tau_3}$
АЧХ, $H_U(\omega)$	$\frac{1}{ \cos\omega\tau_3 }$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega\tau_3 + (\alpha l \sin\omega\tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega)$	$\begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos\omega\tau_3 > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos\omega\tau_3 < 0 \end{cases}$	$-\arctg(\alpha l \cdot \operatorname{tg}\omega\tau_3)$
$Y_{BX}(j\omega)$	$jG_{XB} \operatorname{tg}\omega\tau_3$	$G_{XB} \frac{\alpha l + j\operatorname{tg}\omega\tau_3}{1 + j\alpha l \operatorname{tg}\omega\tau_3}$
АЧХ, $Y_{BX}(\omega)$	$G_{XB} \operatorname{tg}\omega\tau_3 $	$G_{XB} \frac{\sqrt{(\alpha l)^2 + \operatorname{tg}^2\omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (\alpha l \operatorname{tg}\omega\tau_3)^2}}$
ФЧХ, $\varphi_Y(\omega)$	$\begin{cases} \pi/2, & \text{якщо } \operatorname{tg}\omega\tau_3 > 0; \\ -\pi/2, & \text{якщо } \operatorname{tg}\omega\tau_3 < 0 \end{cases}$	$\arctg \frac{\operatorname{tg}\omega\tau_3}{\alpha l} - \arctg(\alpha l \cdot \operatorname{tg}\omega\tau_3)$

Отже, характеристики ДЛ із замкненими і розімкненими вихідними затискачами є дуальними. Це дозволяє використовувати для аналізу режиму холостого ходу ЧХ лінії в режимі короткого замикання (рис.5.53–5.55).

З аналізу АЧХ і ФЧХ розімкненої лінії як характеристик, дуальних зображенням на рис.5.53 і 5.54, виходять такі висновки:

1) подібно замкненій, розімкнена лінія має резонанси з кратними частотами;

2) поблизу частот $\omega_{\text{рез } n}$ (5.152) ЧХ аналогічні характеристикам послідовного резонансного контуру; на цих частотах АЧХ $H_U(\omega)$ і повна провідність ідеальної лінії прямують до нескінченності, а для ДЛМВ становлять:

$$H(\omega_{\text{рез } n}) = 1/\alpha l; \quad Y(\omega_{\text{рез } n}) = G_{XB} / \alpha l;$$

3) на резонансних частотах $\omega_{\text{рез } n}$ довжина лінії кратна чверті довжини хвилі резонансної частоти;

4) щоб розрахувати вторинні параметри еквівалентних послідовних контурів (добротність, СП, характеристичний опір) можна застосовувати

співвідношення (5.155)–(5.159) для замкненої лінії;

5) поблизу частот, кратних π/τ_3 (довжина лінії кратна $\lambda/2$), характер змінювання $Y_{\text{вх}}(\omega)$ і $\varphi_Y(\omega)$ подібний ЧХ паралельного контуру; на цих частотах вхідна провідність ідеальної ДЛ дорівнює нулю (опір прямує до нескінченності), а вхідна провідність ДЛМВ мінімальна ($G_{\text{хв}}\alpha l$), відповідно опір максимальний ($R_{\text{хв}}/\alpha l$).

Порівняння виразів, отриманих у п.5.11.3 за умови $R_{\text{н}} \ll R_{\text{хв}}$ (табл. 5.29), і співвідношень, здобутих для $R_{\text{н}} \gg R_{\text{хв}}$ ($G'_{\text{н}} \ll 1$) (див. табл.5.31), показує їхню дуальність, а відповідно, і дуальність висновків:

1) характеристики ідеальної ДЛ, навантаженої на $R_{\text{н}} \gg R_{\text{хв}}$, і розімкненої на кінці ДЛМВ $\alpha l = G'_{\text{н}}$ аналогічні;

2) КФ, АЧХ і ФЧХ ДЛМВ при навантаженні на $R_{\text{н}} \gg R_{\text{хв}}$ відповідають тим самим характеристикам розімкненої ДЛ з еквівалентними втратами $\alpha_e l = \alpha l + G'_{\text{н}}$;

3) аналіз ЧХ ДЛМВ при її навантаженні на $R_{\text{н}} \gg R_{\text{хв}}$ можна звести до аналізу характеристик ідеальної ДЛ з еквівалентною нормованою провідністю навантаження $G'_{\text{не}} = \alpha l + G'_{\text{н}}$.

Таблиця 5.31 – КФ, АЧХ і ФЧХ лінії при $R_{\text{н}} \gg R_{\text{хв}}$ ($G'_{\text{н}} \ll 1$)

КФ, ЧХ	ІДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$)
$H_U(j\omega)$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 + jG'_{\text{н}}\sin\omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 + j(\alpha l + G'_{\text{н}})\sin\omega\tau_3}$
АЧХ, $H_U(\omega)$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega\tau_3 + (G'_{\text{н}}\sin\omega\tau_3)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega\tau_3 + (\alpha l + G'_{\text{н}})^2 \sin^2\omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega)$	$-\arctg(G'_{\text{н}}\text{tg}\omega\tau_3)$	$-\arctg[(\alpha l + G'_{\text{н}})\text{tg}\omega\tau_3]$
$Y_{\text{вх}}(j\omega)$	$G_{\text{хв}} \frac{G'_{\text{н}} + j\text{tg}\omega\tau_3}{1 + jG'_{\text{н}}\text{tg}\omega\tau_3}$	$G_{\text{хв}} \frac{(\alpha l + G'_{\text{н}}) + j\text{tg}\omega\tau_3}{1 + j(\alpha l + G'_{\text{н}})\text{tg}\omega\tau_3}$
АЧХ, $Y_{\text{вх}}(\omega)$	$G_{\text{хв}} \frac{\sqrt{(G'_{\text{н}})^2 + \text{tg}^2\omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (G'_{\text{н}}\text{tg}\omega\tau_3)^2}}$	$G_{\text{хв}} \frac{\sqrt{(\alpha l + G'_{\text{н}})^2 + \text{tg}^2\omega\tau_3}}{\sqrt{1 + (\alpha l + G'_{\text{н}})^2 \text{tg}^2\omega\tau_3}}$
ФЧХ, $\varphi_Y(\omega)$	$\arctg \frac{\text{tg}\omega\tau_3}{G'_{\text{н}}} - \arctg(G'_{\text{н}}\text{tg}\omega\tau_3)$	$\arctg \frac{\text{tg}\omega\tau_3}{\alpha l + G'_{\text{н}}} - \arctg[(\alpha l + G'_{\text{н}})\text{tg}\omega\tau_3]$

5.11.5 КФ і ЧХ лінії, навантаженої на реактивний опір

Якщо лінію навантажено на ємність C_H (рис.5.24, *a*) або на індуктивність L_H (рис.5.25, *a*), додаткових втрат в лінії немає. Тому ЧХ ідеальної ДЛ і ДЛМВ мають характерні резонансні ділянки.

Як показано в п.5.7.4, режим лінії, навантаженої на ємність, не зміниться, якщо останню замінити відрізком розімкненої лінії довжиною $l_{x,x}$ (див. табл.5.14). Цим фактом пояснюється вибір при навантаженні на ємність C_H тих самих КФ, що і в режимі холостого ходу: $H_U(j\omega)$, $Y_{BX}(j\omega)$.

Перехід від лінії, навантаженої на C_H , до розімкненої лінії, довжину якої збільшено на $l_{x,x}$, дозволяє тільки якісно обґрунтувати зменшення резонансних частот, однак не спрощує кількісний аналіз КФ і ЧХ, оскільки величина $l_{x,x}$ є функцією параметрів ω і C_H .

Розрахункові співвідношення для КФ, АЧХ і ФЧХ ідеальної ДЛ і ДЛМВ при навантаженні на ємність (табл.5.32) порівняно просто виводяться безпосередньо з відповідних загальних формул, наведених у табл.5.26.

З аналізу формул (табл.5.32) виходять умови, за яких АЧХ мають відповідні резонансним частотам $\omega_{рез n}$ максимуми:

$$\cos(\omega_{рез n} \tau_3) = B'_C \sin(\omega_{рез n} \tau_3); \quad \text{ctg}(\omega_{рез n} \tau_3) = \omega_{рез n} C_H R_{XB}. \quad (5.160)$$

Трансцендентні рівняння (5.160) не мають аналітичних розв'язків, але їх можна розв'язати чисельними методами або графічно.

Приклад графічного визначення резонансних частот $\omega_{рез n}$ показано на рис.5.56, *a*, де, згідно з формулою (5.160), їхні значення отримані як ординати точок перетину графіків функцій $\text{ctg}\omega\tau_3$ та $\omega C_H R_{XB}$.

АЧХ, побудовані за формулами (табл.5.32) для ідеальної ДЛ (рис.5.56, *б, в*) і ДЛМВ (рис.5.57), які навантажено на ємність, дозволяють зробити такі висновки:

1) кожна з резонансних частот $\omega_{рез n}$ менша, ніж n -а резонансна частота (5.152) розімкненої лінії такої самої довжини; ці відмінності збільшуються із зростанням n , внаслідок чого резонансні частоти $\omega_{рез n}$ не кратні між собою;

2) на резонансних частотах АЧХ $H_U(\omega)$ ідеальної лінії, як і розімкненої ідеальної лінії, прямує до нескінченності;

3) мінімальні значення АЧХ $H_U(\omega)$ ідеальної лінії, на відміну від розімкненої ідеальної ДЛ, монотонно зменшуються за частотою;

4) АЧХ $H_U(\omega)$ ДЛМВ відрізняються від АЧХ такої самої розімкненої лінії монотонним зменшенням максимальних і мінімальних значень із зростанням частоти;

5) резонансні та мінімальні значення вхідної провідності ідеальної ДЛ і ДЛМВ збігаються з аналогічними значеннями розімкнених ліній.

Таблиця 5.32 – КФ і ЧХ ліній, які навантажено на ємність C_H

КФ, ЧХ	Ідеальна ДЛ	Приблизні співвідношення для ДЛМВ ($\alpha l \ll 1$)
$H_U(j\omega)$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3}$	$\frac{1}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3 + j\alpha l(\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)}$
АЧХ, $H_U(\omega)$	$\frac{1}{ \cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3 }$	$\frac{1}{\sqrt{(\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3)^2 + [\alpha l(\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)]^2}}$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega)$	$\begin{cases} 0, \text{ якщо } (\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3) > 0; \\ \pi, \text{ якщо } (\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3) < 0 \end{cases}$	$-\arctg \frac{\alpha l(\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3}$
$Y_{\text{вх}}(j\omega)$	$jG_{\text{XB}} \frac{B'_C \cos\omega\tau_3 + \sin\omega\tau_3}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3}$	$G_{\text{XB}} \frac{\alpha l(\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3) + j(\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)}{(\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3) + j\alpha l(\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)}$
АЧХ, $Y_{\text{вх}}(\omega)$	$G_{\text{XB}} \left \frac{B'_C \cos\omega\tau_3 + \sin\omega\tau_3}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3} \right $	$G_{\text{XB}} \frac{\sqrt{[\alpha l(\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3)]^2 + (\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)^2}}{\sqrt{(\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3)^2 + [\alpha l(\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)]^2}}$
ФЧХ, $\varphi_Y(\omega)$	$\begin{cases} \pi/2, \text{ якщо } \frac{B'_C \cos\omega\tau_3 + \sin\omega\tau_3}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3} > 0; \\ -\pi/2, \text{ якщо } \frac{B'_C \cos\omega\tau_3 + \sin\omega\tau_3}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3} < 0 \end{cases}$	$\arctg \frac{\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3}{\alpha l(\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3)} - \arctg \frac{\alpha l(\sin\omega\tau_3 + B'_C \cos\omega\tau_3)}{\cos\omega\tau_3 - B'_C \sin\omega\tau_3}$

Примітка: $B'_C = \omega C_H / G_{\text{XB}} = \omega C_H R_{\text{XB}}$ – нормована ємнісна провідність навантаження.

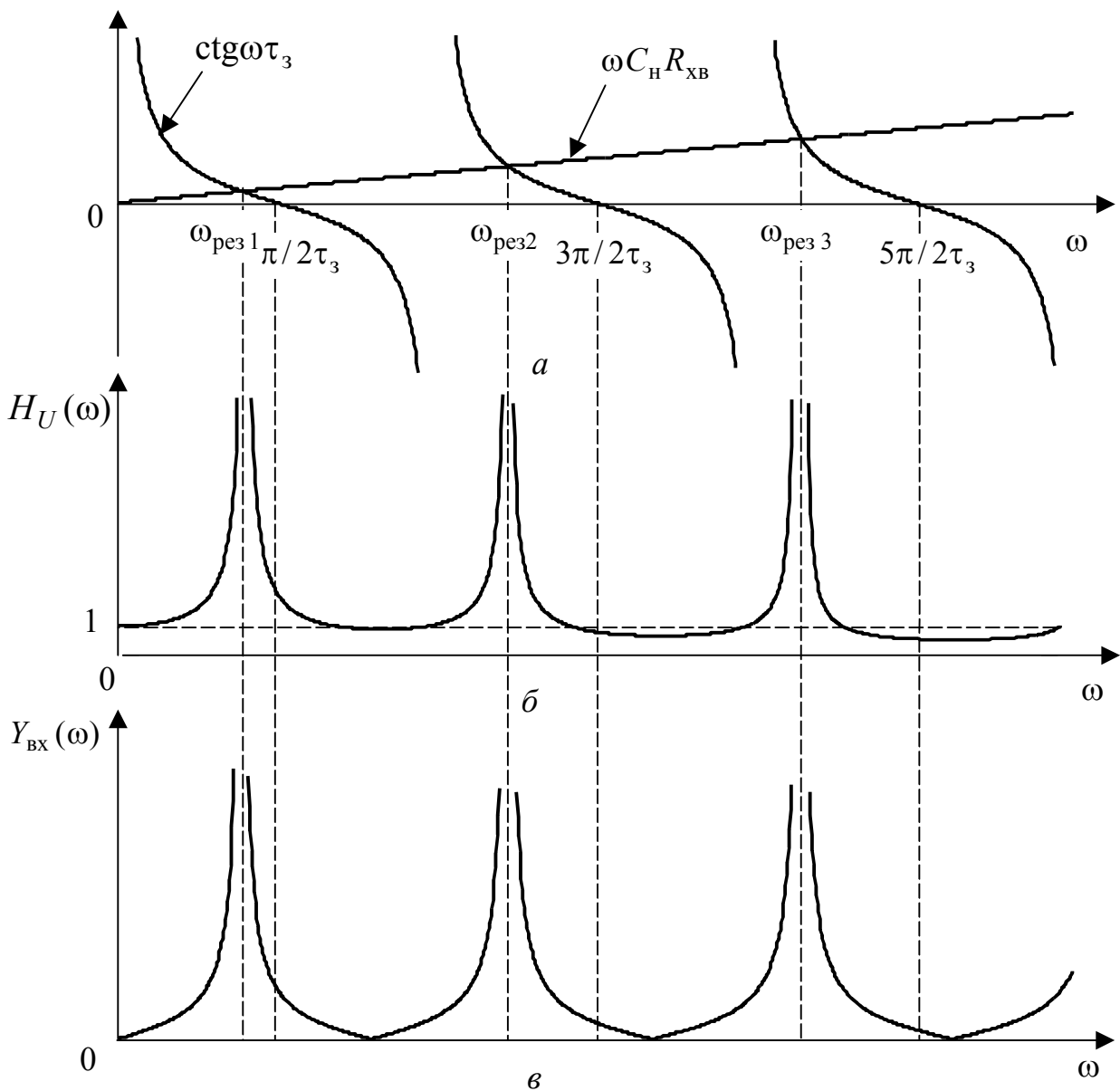


Рисунок 5.56 – ЧХ ідеальної ДЛ, яку навантажено на ємність:
а – графіки, які пояснюють принцип визначення резонансних частот;
б – АЧХ коефіцієнта передачі за напругою; *в* – АЧХ $Y_{\text{вх}}(\omega)$

При індуктивному навантаженні лінії доцільно розглядати ті самі КФ $H_I(j\omega)$, $Z_{\text{вх}}(j\omega)$, що і для замкненої лінії. Це пояснюється тим, що індуктивність можна замінити відрізком ДЛ довжиною $l_{\text{к.з}}$ (табл.5.15) і замкненими вихідними затискачами (див. табл.5.16).

Можна показати, що, подібно КФ розімкненої та замкненої ДЛ, КФ ліній, навантажених на ємність та індуктивність, дуальні. Це дозволяє використовувати для визначення КФ і ЧХ ліній, навантажених на $L_{\text{н}}$, формули (табл.5.32) і графіки (рис.5.56 і рис.5.57), виконавши дуальні заміни згідно з табл.5.33. Застосування дуальних співвідношень використано нижче у прикладі 5.28.

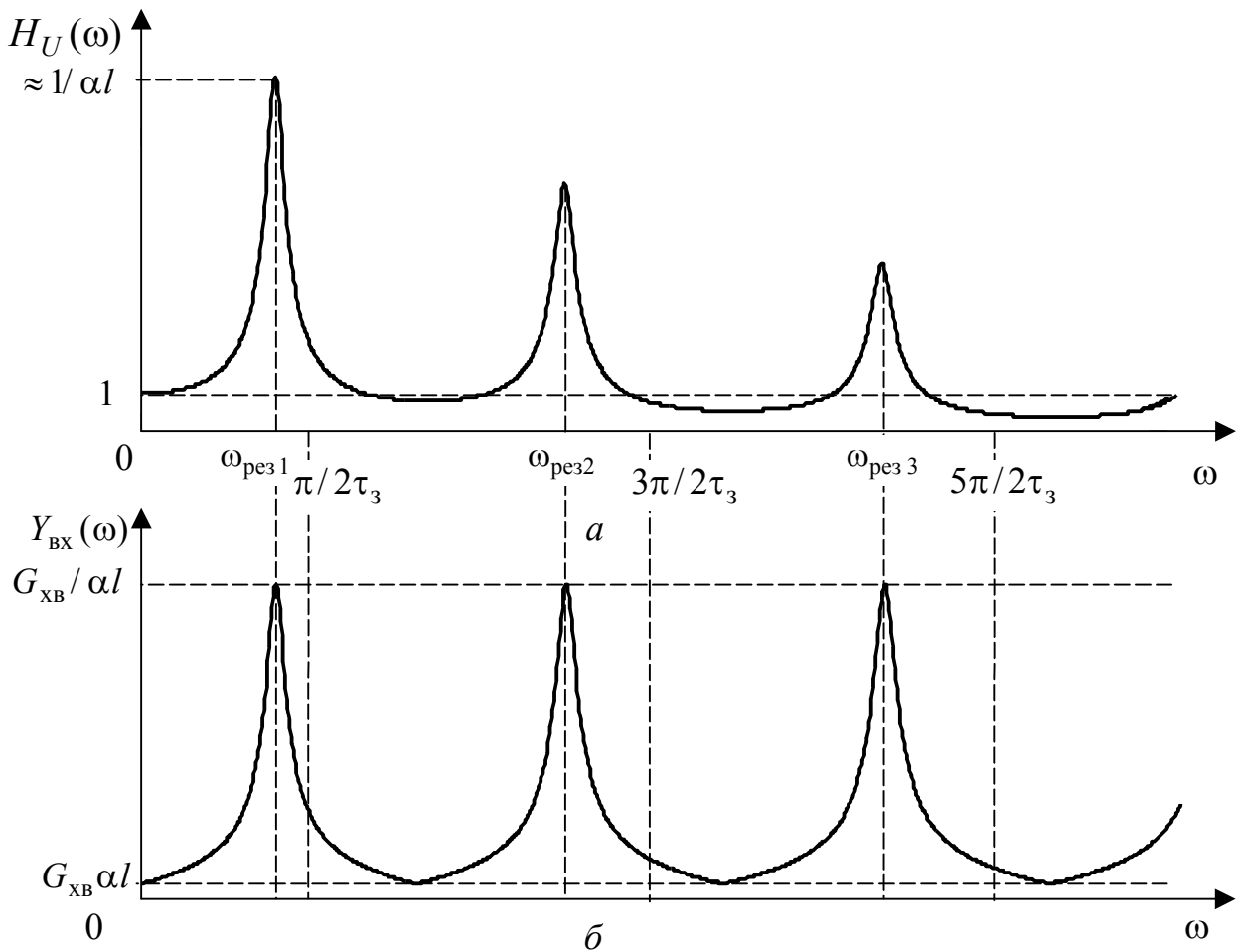


Рисунок 5.57 – ЧХ ДЛМВ ($\alpha l = 0,1$), яку навантажено на ємність:
 a – АЧХ коефіцієнта передачі за напругою; b – АЧХ $Y_{BX}(\omega)$

Таблиця 5.33 – Дуальні співвідношення між АЧХ, ФЧХ і розрахунковими формулами для ліній, які навантажено на ємність C_H та індуктивність L_H

C_H	L_H
$H_U(j\omega)$	$H_I(j\omega)$
АЧХ, $H_U(\omega)$	АЧХ, $H_I(\omega)$
ФЧХ, $\varphi_U(\omega)$	ФЧХ, $\varphi_Z(\omega)$
$Y_{BX}(j\omega)$	$Z_{BX}(j\omega)$
АЧХ, $Y_{BX}(\omega)$	АЧХ, $Z_{BX}(\omega)$
ФЧХ, $\varphi_Y(\omega)$	ФЧХ, $\varphi_Z(\omega)$
G_{XB}	R_{XB}
$B'_C = \omega C_H / G_{XB} = \omega C_H R_{XB}$	$X'_L = \omega L_H / R_{XB} = \omega L_H G_{XB}$
$\text{ctg}(\omega_{\text{рез } n} \tau_3) = \omega_{\text{рез } n} C_H R_{XB}$	$\text{ctg}(\omega_{\text{рез } n} \tau_3) = \omega_{\text{рез } n} L_H G_{XB}$

Приклад 5.26. Знайти $H_I(j\omega)$ і $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ замкненого на кінці коаксіального кабелю довжиною $l = 5$ м без урахування та з урахуванням втрат. Зобразити графіки АЧХ у діапазоні частот від 0 до 40 МГц. Обчислити СП і добротності еквівалентних контурів для першої і другої резонансних частот в кабелі з урахуванням втрат. Вторинні параметри кабелю наведені в табл.5.7 ($\alpha = 0,018$ Нп/м; $v \approx 2 \cdot 10^8$ м/с; $R_{\text{хв}} \approx 92,6$ Ом).

Розв'язання. За формулою (5.151) обчислимо фазову затримку в кабелі:

$$\tau_3 = \frac{l}{v} = \frac{5}{2 \cdot 10^8} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с} = 0,025 \text{ мкс}.$$

Щоб оцінити втрати, знайдемо ослаблення в кабелі:

$$\alpha l = 0,018 \cdot 5 = 0,09 \text{ Нп}.$$

Оскільки $\alpha l \ll 1$, при розрахунках з урахуванням втрат застосуємо співвідношення для ДЛМВ.

Використовуючи формули з табл.5.28, знайдемо шукані КФ:

1) без урахування втрат

$$H_I(j\omega) = \frac{1}{\cos \omega \tau_3} = \frac{1}{\cos(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}; \quad (5.161)$$

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = jR_{\text{хв}} \text{tg} \omega \tau_3 = j92,6 \text{tg}(2,5 \cdot 10^{-8} \omega) \text{ Ом};$$

2) з урахуванням втрат

$$H_I(j\omega) \approx \frac{1}{\cos \omega \tau_3 + j\alpha l \sin \omega \tau_3} = \frac{1}{\cos(2,5 \cdot 10^{-8} \omega) + j0,09 \sin(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}; \quad (5.162)$$

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) \approx R_{\text{хв}} \frac{\alpha l + j \text{tg} \omega \tau_3}{1 + j\alpha l \text{tg} \omega \tau_3} = 92,6 \frac{0,09 + j \text{tg}(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}{1 + j0,09 \text{tg}(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)} \text{ Ом}.$$

За знайденими КФ складемо необхідні для побудови графіків (рис.5.58) вирази для АЧХ:

1) без урахування втрат

$$H_I(f) = \frac{1}{|\cos(5\pi \cdot 10^{-8} f)|}; \quad Z_{\text{вх}}(f) = 92,6 |\text{tg}(5\pi \cdot 10^{-8} f)| \text{ Ом};$$

2) з урахуванням втрат

$$H_I(f) \approx \frac{1}{\sqrt{\cos^2(5\pi \cdot 10^{-8} f) + 0,09^2 \sin^2(5\pi \cdot 10^{-8} f)}};$$

$$Z_{\text{вх}}(f) \approx 92,6 \frac{\sqrt{0,09^2 + \text{tg}^2(5\pi \cdot 10^{-8} f)}}{\sqrt{1 + 0,09^2 \text{tg}^2(5\pi \cdot 10^{-8} f)}} \text{ Ом}.$$

На рис. 5.58 графіки АЧХ без урахування втрат зображено пунктирними, а з урахуванням втрат – суцільними лініями.

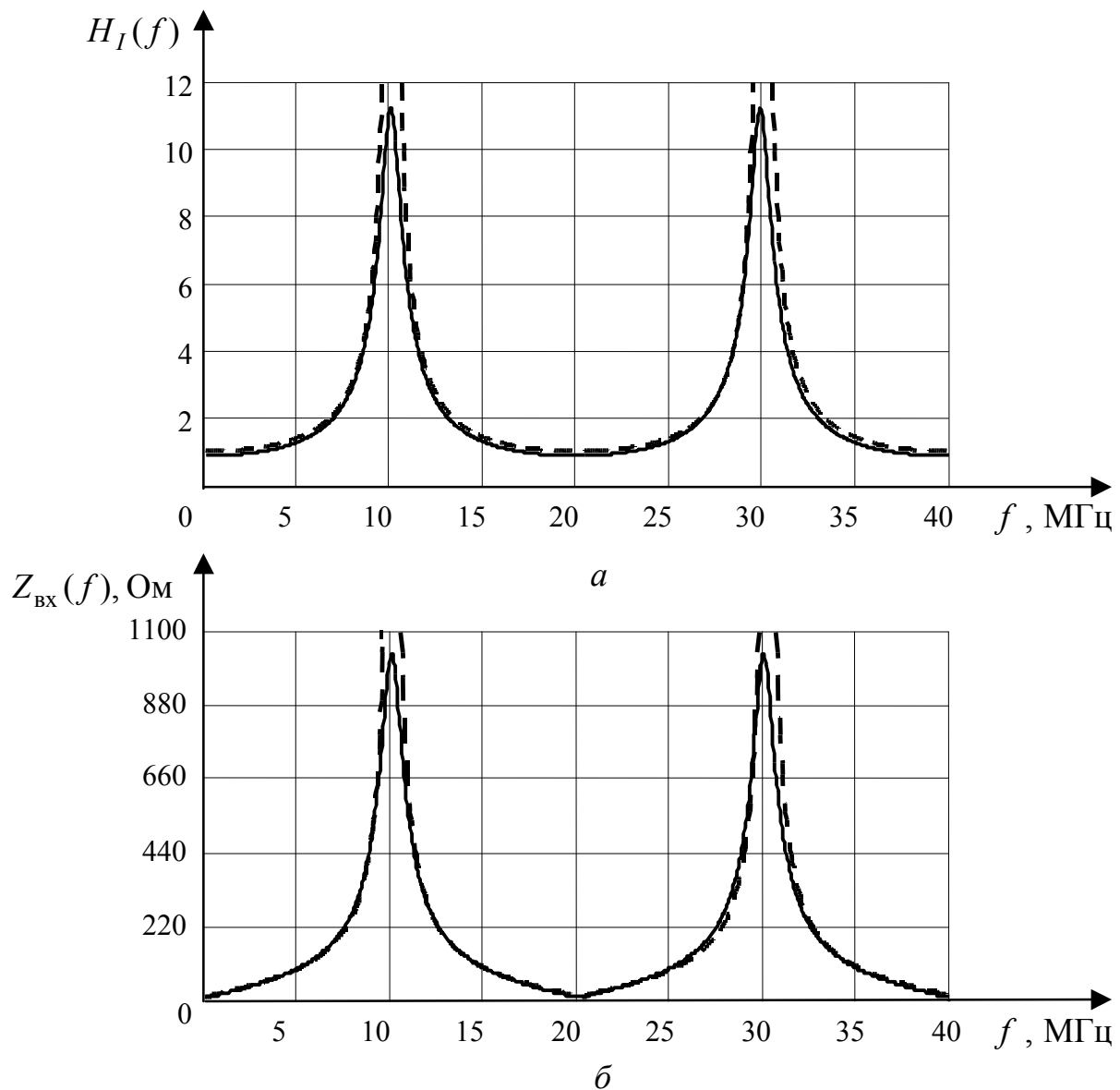


Рисунок 5.58 – АЧХ у прикладі 5.26:
a – коефіцієнта передачі за струмом; *б* – вхідного опору

Користуючись графіками АЧХ і співвідношенням (5.152), визначимо дві резонансні частоти, які лежать у заданому частотному діапазоні:

$$f_{\text{рез}1} = \frac{\omega_{\text{рез}1}}{2\pi} = \frac{1}{4\tau_3} = \frac{1}{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8}} = 10^7 \text{ Гц} = 10 \text{ МГц};$$

$$f_{\text{рез}2} = \frac{\omega_{\text{рез}2}}{2\pi} = \frac{3}{4\tau_3} = \frac{3}{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8}} = 3 \cdot 10^7 \text{ Гц} = 30 \text{ МГц}.$$

За формулами (5.154) перевіримо значення АЧХ на резонансних частотах:
 $Z(f_{\text{рез}n}) = R_{\text{рез}} = R_{\text{ХВ}} / \alpha l = 92,6 / 0,09 \approx 1029 \text{ Ом};$ $H_I(f_{\text{рез}n}) = 1 / \alpha l = 1 / 0,09 \approx 11,1.$

За формулами (5.156) і (5.158) обчислимо СП і добротності еквівалентних контурів для першої та другої резонансних частот у кабелі з урахуванням втрат:

$$2\Delta f_{\Pi} \approx \frac{4\alpha l}{\pi} f_{\text{рез } 1} = \frac{4 \cdot 0,09}{\pi} 10^7 = 11,5 \cdot 10^5 \text{ Гц} = 1,15 \text{ МГц};$$

$$Q_{e1} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha l} = \frac{\pi}{4 \cdot 0,09} \approx 8,7; \quad Q_{e2} = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{\alpha l} = \frac{3\pi}{4 \cdot 0,9} \approx 26,1.$$

Приклад 5.27. Знайти $H_U(j\omega)$ і $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ розімкненого на кінці кабелю, який має задані у прикладі 5.26 параметри, враховуючи та не враховуючи втрати. Побудувати графік АЧХ вхідної провідності в діапазоні частот від 0 до 40 МГц. Порівняти характеристики даного кабелю і кабелю із замкненими вихідними затискачами, який розглянуто у прикладі 5.26.

Розв'язання. Оскільки КПФ $H_U(j\omega)$ розімкненого кабелю (див. табл.5.30) збігається з КПФ $H_I(j\omega)$ замкненого кабеля (див. табл.5.28), скористаємось знайденими у прикладі 5.26 виразами (5.161) і (5.162) та запишемо $H_I(j\omega)$ ідеального і реального кабелю, відповідно:

$$H_U(j\omega) = \frac{1}{\cos(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}; \quad H_U(j\omega) \approx \frac{1}{\cos(2,5 \cdot 10^{-8} \omega) + j0,09 \sin(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}.$$

Щоб визначити КВФ $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ і АЧХ вхідної провідності, скористуємось формулами (табл.5.30):

1) без втрат

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = jG_{\text{хв}} \text{tg}\omega\tau_3 = j \frac{\text{tg}(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}{92,6} \approx j0,011 \text{tg}(2,5 \cdot 10^{-8} \omega) \text{ См};$$

$$Y_{\text{вх}}(f) \approx 0,011 \left| \text{tg}(5\pi \cdot 10^{-8} f) \right| \text{ См}; \quad (5.163)$$

3) з втратами

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) \approx G_{\text{хв}} \frac{\alpha l + j \text{tg}\omega\tau_3}{1 + j\alpha l \text{tg}\omega\tau_3} \approx 0,011 \frac{0,09 + j \text{tg}(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}{1 + j0,09 \text{tg}(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)} \text{ См};$$

$$Y_{\text{вх}}(f) \approx 0,011 \frac{\sqrt{0,09^2 + \text{tg}^2(5\pi \cdot 10^{-8} f)}}{\sqrt{1 + 0,09^2 \text{tg}^2(5\pi \cdot 10^{-8} f)}} \text{ См}. \quad (5.164)$$

За співвідношеннями (5.163) і (5.164) побудуємо графіки АЧХ (рис.5.59, пунктирна лінія – без втрат, суцільна – з урахуванням втрат).

Порівняння розглянутих у даному прикладі та прикладі 5.26 КФ і АЧХ одного і того ж кабелю, розімкненого та замкненого на кінці, підтверджує дуальність цих кіл. На резонансних частотах (10 і 30 МГц у заданому діапазоні частот) АЧХ розімкненого кабелю відповідають характеристикам послідовного резонансного контуру, а характеристики замкненого – характеристикам паралельного. СП еквівалентних контурів однакові для всіх, а добротності – тільки для одних і тих самих значень резонансних частот. При цьому добротність збільшується із зростанням резонансних частот.

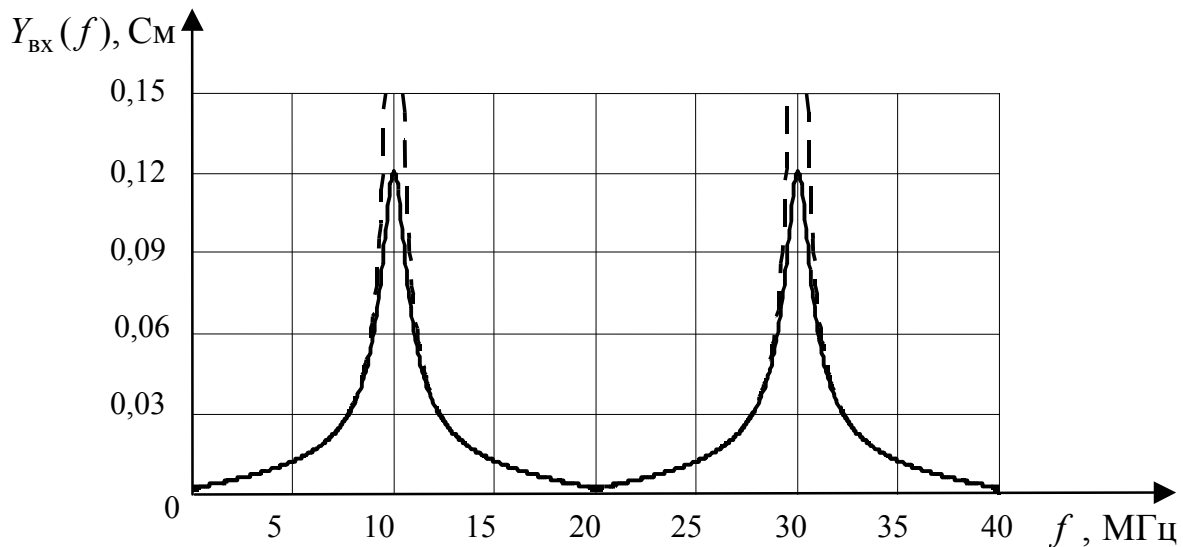


Рисунок 5.59 – АЧХ вхідної провідності у прикладі 5.27

Приклад 5.28. Розрахувати індуктивність L_H , якою необхідно навантажити кабель (див. приклад 5.27) так, щоб перша резонансна частота становила $f_{рез1} = 5$ МГц. Знайти $H_I(j\omega)$ і $Z_{BX}(j\omega)$ кабелю, навантаженого на L_H , враховуючи втрати. Побудувати графіки АЧХ у діапазоні частот від 0 до 40 МГц.

Розв’язання. Щоб визначити індуктивність, до рівняння, яке відповідає резонансним частотам (табл.5.33),

$$\text{ctg}(\omega_{рез n} \tau_3) = \omega_{рез n} L_H G_{XB}$$

підставимо задане значення резонансної частоти $f_{рез1} = 5$ МГц і розв’яжемо це рівняння відносно L_H :

$$L_H = \frac{\text{ctg}(\omega_{рез1} \tau_3)}{\omega_{рез1}} R_{XB} = \frac{\text{ctg}(2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8})}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 0,011} \approx 2,95 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 2,95 \text{ мкГн.}$$

За формулами з табл.5.32, використовуючи дуальність співвідношень для ліній, які навантажено на ємність та індуктивність (табл.5.33), знайдемо приблизні вирази для КФ:

$$H_I(j\omega) \approx \frac{1}{\cos \omega \tau_3 - X'_L(\omega) \sin \omega \tau_3 + j\alpha l [\sin \omega \tau_3 + X'_L(\omega) \cos \omega \tau_3]};$$

$$Z_{BX}(j\omega) \approx R_{XB} \frac{\alpha l [\cos \omega \tau_3 - X'_L(\omega) \sin \omega \tau_3] + j[\sin \omega \tau_3 + X'_L(\omega) \cos \omega \tau_3]}{\cos \omega \tau_3 - X'_L(\omega) \sin \omega \tau_3 + j\alpha l [\sin \omega \tau_3 + X'_L(\omega) \cos \omega \tau_3]},$$

де $X'_L(\omega) = \frac{\omega L_H}{R_{XB}} = \frac{\omega \cdot 2,95 \cdot 10^{-6}}{92,6} = 3,18 \cdot 10^{-8} \omega \text{ Ом}; \tau_3 = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с};$

$\alpha l = 0,09 \text{ Нп}; R_{XB} = 92,6 \text{ Ом.}$

За знайденими КФ запишемо вирази для АЧХ:

$$H_I(f) \approx \frac{1}{\sqrt{[\cos 2\pi f \tau_3 - X'_L(f) \sin 2\pi f \tau_3]^2 + (\alpha l)^2 [\sin 2\pi f \tau_3 + X'_L(f) \cos 2\pi f \tau_3]^2}};$$

$$Z_{\text{вх}}(f) \approx R_{\text{хв}} \frac{\sqrt{(\alpha l)^2 [\cos 2\pi f \tau_3 - X'_L(f) \sin 2\pi f \tau_3]^2 + [\sin 2\pi f \tau_3 + X'_L(f) \cos 2\pi f \tau_3]^2}}{\sqrt{[\cos 2\pi f \tau_3 - X'_L(f) \sin 2\pi f \tau_3]^2 + (\alpha l)^2 [\sin 2\pi f \tau_3 + X'_L(f) \cos 2\pi f \tau_3]^2}}.$$

Побудуємо графіки АЧХ (рис.5.60, б, в), а також функції (див. табл.5.33)

$$F(f) = \text{ctg} \omega \tau_3 - \omega L_{\text{н}} G_{\text{хв}} = \text{ctg} 2\pi f \tau_3 - 2\pi f L_{\text{н}} G_{\text{хв}},$$

абсциси нульових значень якої відповідають резонансним частотам (рис.5.60, а).

Графіки АЧХ підтверджують теоретичний висновок (п.5.11.5) про не кратність резонансних частот в лінії, яку навантажено на реактивність.

Приклад 5.29. Обчислити ємність $C_{\text{н}}$, на яку слід навантажити кабель (див. приклад 5.26), щоб значення першої резонансної частоти становило $f_{\text{рез1}} = 5$ МГц. Визначити, враховуючи втрати в лінії, $H_U(j\omega)$ і $Y_{\text{вх}}(j\omega)$, а також побудувати графік $Y_{\text{вх}}(f)$ у діапазоні частот від 0 до 40 МГц.

Розв'язання. Знайдемо $C_{\text{н}}$ з рівняння, яке відповідає резонансним частотам лінії, яку навантажено на ємність (табл.5.33):

$$C_{\text{н}} = \frac{\text{ctg}(\omega_{\text{рез1}} \tau_3)}{\omega_{\text{рез1}} R_{\text{хв}}} = \frac{\text{ctg}(2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8})}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 92,6} \approx 3,44 \cdot 10^{-10} \text{ Ф} = 344 \text{ пФ}.$$

Запишемо вирази для КФ і $Y_{\text{вх}}(f)$, використовуючи формули з табл.5.32 і дуальність даного кола та кола, розглянутого у прикладі 5.28:

$$H_U(j\omega) \approx \frac{1}{\cos \omega \tau_3 - B'_C(\omega) \sin \omega \tau_3 + j\alpha l (\sin \omega \tau_3 + B'_C(\omega) \cos \omega \tau_3)};$$

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) \approx G_{\text{хв}} \frac{\alpha l (\cos \omega \tau_3 - B'_C(\omega) \sin \omega \tau_3) + j(\sin \omega \tau_3 + B'_C(\omega) \cos \omega \tau_3)}{(\cos \omega \tau_3 - B'_C(\omega) \sin \omega \tau_3) + j\alpha l (\sin \omega \tau_3 + B'_C(\omega) \cos \omega \tau_3)},$$

$$Y_{\text{вх}}(f) \approx G_{\text{хв}} \frac{\sqrt{(\alpha l)^2 [\cos 2\pi f \tau_3 - B'_C(f) \sin 2\pi f \tau_3]^2 + [\sin 2\pi f \tau_3 + B'_C(f) \cos 2\pi f \tau_3]^2}}{\sqrt{[\cos 2\pi f \tau_3 - B'_C(f) \sin 2\pi f \tau_3]^2 + (\alpha l)^2 [\sin 2\pi f \tau_3 + B'_C(f) \cos 2\pi f \tau_3]^2}},$$

$$\text{де } B'_C(\omega) = \frac{\omega C_{\text{н}}}{G_{\text{хв}}} = \frac{\omega \cdot 3,44 \cdot 10^{-10}}{0,011} = 3,18 \cdot 10^{-8} \omega \text{ Ом};$$

$$B'_C(f) = 2\pi \cdot 3,18 \cdot 10^{-8} f = 2 \cdot 10^{-7} f \text{ Ом}.$$

Побудуємо графік $Y_{\text{вх}}(f)$ (рис.5.61). З графіка видно, що значення резонансних частот такі ж самі, як і при навантаженні на індуктивність. Крім того, максимальні значення провідності $Y_{\text{вх}}(f_{\text{рез}}) \approx 0,12 \text{ См}$ сходяться з відповідними значеннями для розімкненої лінії.

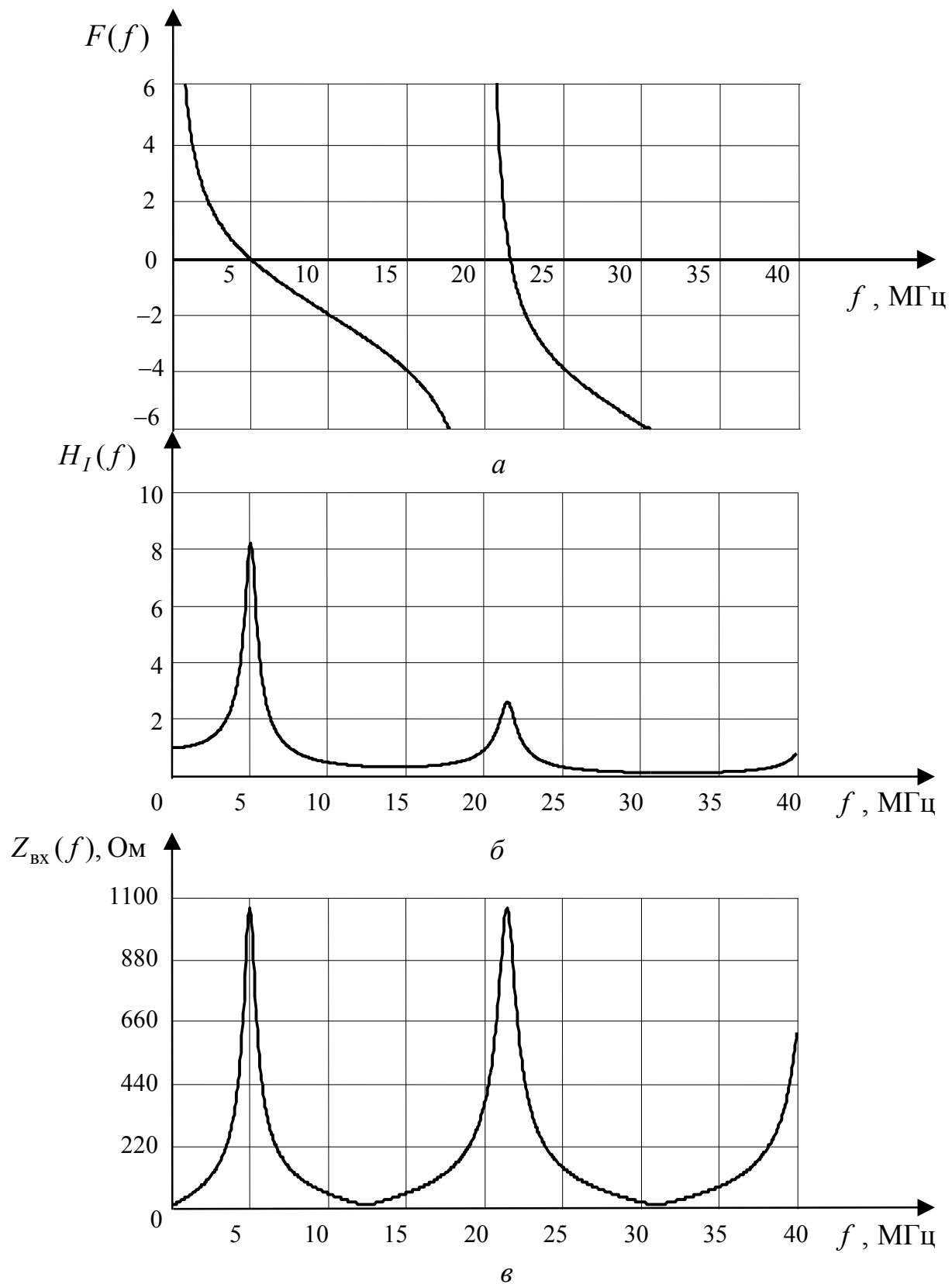


Рисунок 5.60 – ЧХ у прикладі 5.28: *a* – перевірка резонансних частот; *б* – АЧХ коефіцієнта передачі за струмом; *в* – АЧХ вхідного опору

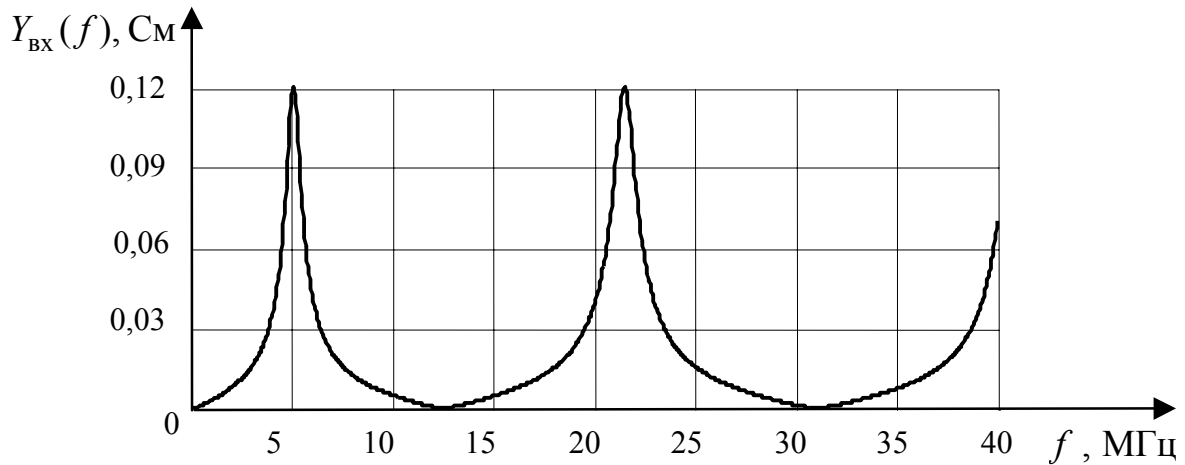


Рисунок 5.61 – АЧХ вхідної провідності у прикладі 5.29

Приклад 5.30. До входу розімкненого на кінці кабелю (параметри вказані у прикладі 5.26) увімкнене джерело напруги $\underline{U}_{m\text{дж}}$ з внутрішнім опором, який дорівнює хвильовому опору кабелю (рис.5.62). Визначити КПФ $H_U(j\omega) = \underline{U}_{m2} / \underline{U}_{m\text{дж}}$ та КВФ $Y_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{I}_{m1} / \underline{U}_{m\text{дж}}$, нехтуючи втратами. Побудувати графіки АЧХ $Y_{\text{вх}}(f)$ і ФЧХ $\varphi_Y(f)$ в діапазоні частот від 0 до 40 МГц.

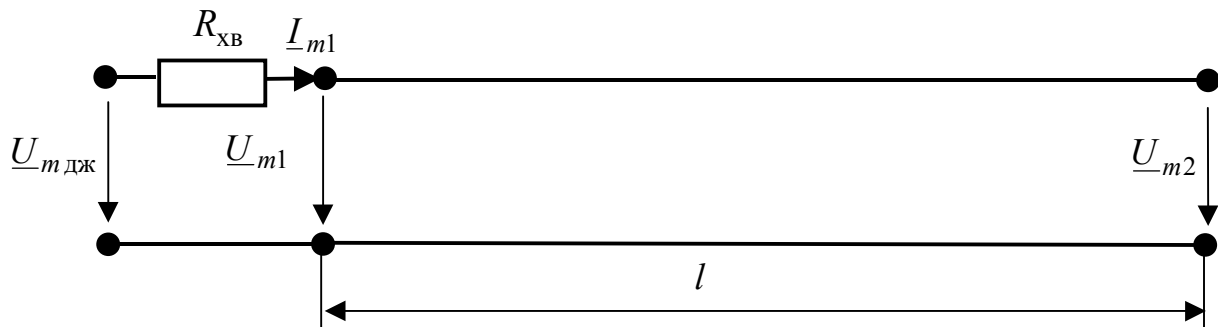


Рисунок 5.62 – Схема до прикладу 5.30

Розв’язання. Виразимо шукану КПФ через вхідний опір лінії $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ та її КПФ $H_{U\text{л}}(j\omega)$, яка не враховує внутрішній опір джерела:

$$H_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{U}_{m\text{дж}}} = \frac{\underline{U}_{m2}\underline{U}_{m1}}{\underline{U}_{m\text{дж}}\underline{U}_{m1}} = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{U}_{m\text{дж}}} H_{U\text{л}}(j\omega) = \frac{Z_{\text{вх}}(j\omega)}{R_{\text{хв}} + Z_{\text{вх}}(j\omega)} H_{U\text{л}}(j\omega). \quad (5.165)$$

Після підстановки у формулу (5.165) виразів з табл.5.30:

$$H_{U\text{л}}(j\omega) = \frac{1}{\cos\omega\tau_3}; \quad Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{1}{Y_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{1}{jG_{\text{хв}}\text{tg}\omega\tau_3} = -jR_{\text{хв}}\text{ctg}\omega\tau_3$$

і перетворень отримаємо співвідношення для КПФ та її ЧХ:

$$H_U(j\omega) = \frac{1}{\cos\omega\tau_3 + j\sin\omega\tau_3} = e^{-j\omega\tau_3} = e^{-j2,5 \cdot 10^{-8} \omega} \text{ СМ}; \quad (5.166)$$

$$H_U(\omega) = 1; \quad \varphi_U(\omega) = -\omega\tau_3 = -2,5 \cdot 10^{-8} \omega.$$

Визначимо у загальному вигляді вираз для шуканої КВФ:

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{1}{R_{\text{хв}} + Z_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{1}{R_{\text{хв}} - jR_{\text{хв}} \text{ctg}\omega\tau_3} = \frac{G_{\text{хв}} \sin \omega\tau_3}{\sin \omega\tau_3 - j\cos \omega\tau_3}. \quad (5.167)$$

Підставивши до рівняння (5.167) значення параметрів лінії, отримаємо кількісні співвідношення:

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) \approx \frac{0,011 \sin(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)}{\sin(2,5 \cdot 10^{-8} \omega) - j\cos(2,5 \cdot 10^{-8} \omega)} \text{ СМ};$$

$$Y_{\text{вх}}(f) \approx 0,011 |\sin(5\pi \cdot 10^{-8} f)| \text{ СМ};$$

$$\varphi_Y(f) = 5\pi \cdot 10^{-8} f + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sin(5\pi \cdot 10^{-8} f) > 0; \\ \pi, & \text{якщо } \sin(5\pi \cdot 10^{-8} f) < 0. \end{cases} \quad (5.168)$$

За формулами (5.168) побудуємо графіки АЧХ і ФЧХ (рис.5.63).

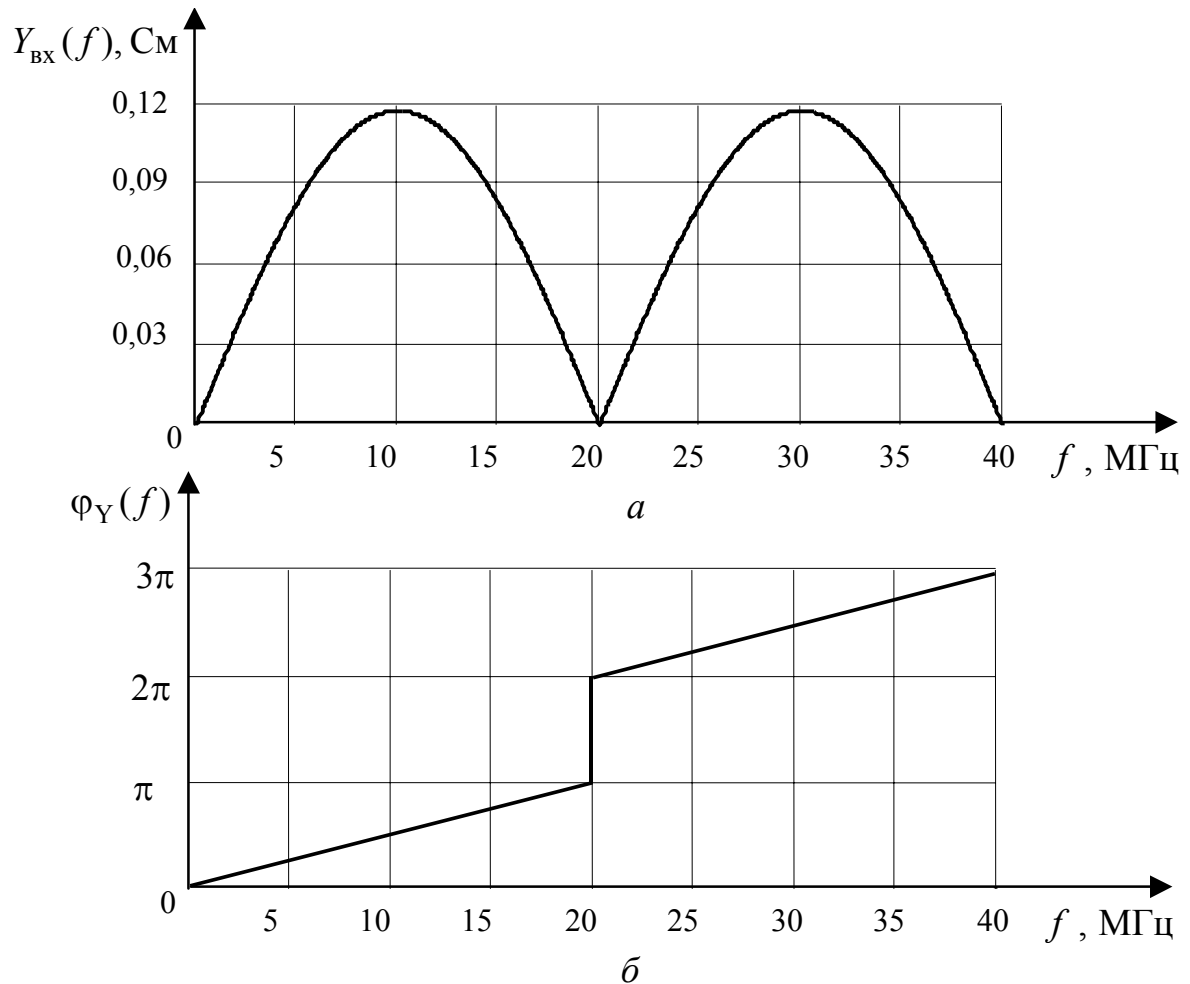


Рисунок 5.63 – Частотні характеристики вхідної провідності у прикладі 5.30: а – АЧХ; б – ФЧХ

5.12 Перехідні процеси в довгих лініях

Щоб обчислювати координатно-часові значення напруги і струму $u(x, t)$; $i(x, t)$ в довгій лінії при довільній дії джерела напруги (ЕРС) $e(t)$ (рис.5.64) або джерела струму $i_{дж}(t)$, зазвичай використовують операторний метод.

Аналізуючи перехідні процеси в лінії, яку розглядають як чотирьохполюсник (позначений пунктиром на рис.5.64), визначають миттєве значення відгуку – напруги або струму на зовнішніх затискачах. Щоб знайти відгук, крім безпосереднього застосування операторного методу, використовують ОПФ (чи ОВФ) або інтеграли накладання (при цьому необхідно попередньо знайти часові характеристики). Розгляду операторних функцій і часових характеристик присвячений підрозд. 5.13.

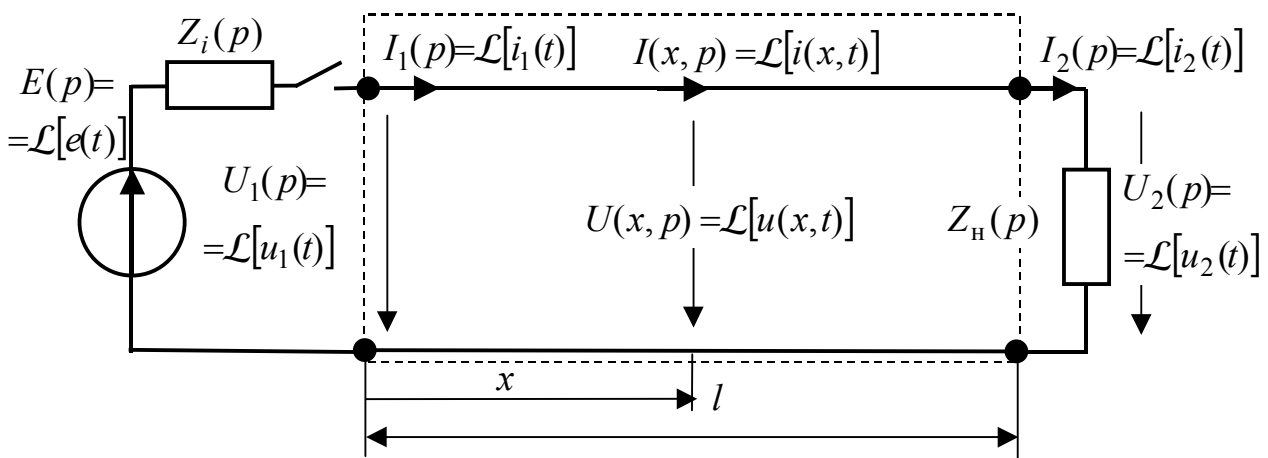


Рисунок 5.64 – До постановки задачі аналізу нестационарного режиму ДЛ операторним методом

5.12.1 Основні теоретичні положення для аналізу напруги і струму операторним методом

Приклад розв’язання одновимірних хвильових рівнянь ідеальної ДЛ (5.12) і (5.13) операторним методом наведений вище у підрозд. 5.3.

Застосування до диференціальних рівнянь (5.10) для реальних ліній перетворення Лапласа за змінною t дозволяє перейти до алгебраїчних рівнянь стосовно зображень $U(x, p)$; $I(x, p)$:

$$\begin{cases} -\frac{dU(x, p)}{dx} = (R_1 + pL_1)I(x, p) = Z_1(p)I(x, p); \\ -\frac{dI(x, p)}{dx} = (G_1 + pC_1)U(x, p) = Y_1(p)U(x, p), \end{cases} \quad (5.169)$$

де $Z_1(p) = R_1 + pL_1$; $Y_1(p) = G_1 + pC_1$ – первинні (погонні) операторні опір і провідність, відповідно.

Система (5.169) аналогічна рівнянням (5.39) і (5.40) з підрозд. 5.4, де розглянуто усталений синусоїдний режим. Тому можна скористатись здобутими там співвідношеннями, замінюючи в них комплексні амплітуди напруг і струмів зображеннями і вводячи аналогічні (див. табл.5.6 і співвідношення (5.58)) операторні вторинні параметри:

1) **операторний коефіцієнт поширення**

$$\gamma(p) = \sqrt{Z_1(p)Y_1(p)} = \sqrt{(R_1 + pL_1)(G_1 + pC_1)}; \quad (5.170)$$

2) **операторний хвильовий опір (провідність) лінії**

$$Z_{\text{хв}}(p) = 1/Y_{\text{хв}}(p) = \sqrt{Z_1(p)/Y_1(p)}; \quad (5.171)$$

3) **операторний коефіцієнт відбиття**

$$\begin{aligned} \rho(x, p) &= \frac{U_{\text{від}}(x, p)}{U_{\text{пад}}(x, p)} = -\frac{I_{\text{від}}(x, p)}{I_{\text{пад}}(x, p)} = \\ &= \frac{Z_{\text{вх}}(p) - Z_{\text{хв}}(p)}{Z_{\text{вх}}(p) + Z_{\text{хв}}(p)} e^{2\gamma(p)x} = \frac{Z_{\text{н}}(p) - Z_{\text{хв}}(p)}{Z_{\text{н}}(p) + Z_{\text{хв}}(p)} e^{-2\gamma(p)(l-x)}. \end{aligned} \quad (5.172)$$

Операторні вторинні параметри (5.170) і (5.171) дозволяють на підставі формул (5.52), (5.54) і (5.57) скласти вирази для зображень напруги, струму і вхідного опору лінії:

$$\begin{cases} U(x, p) = U_1(p)\text{ch}[\gamma(p)x] - Z_{\text{хв}}I_1(p)\text{sh}[\gamma(p)x]; \\ I(x, p) = I_1(p)\text{ch}[\gamma(p)x] - \frac{U_1(p)}{Z_{\text{хв}}(p)}\text{sh}[\gamma(p)x]; \end{cases} \quad (5.173)$$

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{U_1(p)}{I_1(p)} = Z_{\text{хв}}(p) \frac{Z_{\text{н}}(p) + Z_{\text{хв}}(p)\text{th}[\gamma(p)l]}{Z_{\text{хв}}(p) + Z_{\text{н}}(p)\text{th}[\gamma(p)l]}. \quad (5.174)$$

Система (5.173) не повністю відповідає поставленій задачі, оскільки шукані зображення в ній пов'язані з $U_1(p)$ та $I_1(p)$, а не із зображенням дії $E(p)$. Щоб усунути цю невідповідність, до системи (5.173) підставляють очевидні співвідношення, які виходять з аналізу схеми кола (рис.5.64):

$$U_1(p) = \frac{E(p)Z_{\text{вх}}(p)}{Z_i(p) + Z_{\text{вх}}(p)}; \quad I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_i(p) + Z_{\text{вх}}(p)}.$$

В результаті перетворень рівнянь (5.173) і підстановки до них виразу (5.174) ці рівняння матимуть вигляд:

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{E(p)\{Z'_{\text{н}}(p)\text{ch}[\gamma(p)(l-x)] + \text{sh}[\gamma(p)(l-x)]\}}{[1 + Z'_{\text{н}}(p)Z'_i(p)]\text{sh}[\gamma(p)l] + [Z'_i(p) + Z'_{\text{н}}(p)]\text{ch}[\gamma(p)l]}; \\ I(x, p) = \frac{E(p)}{Z_{\text{хв}}(p)} \cdot \frac{\text{ch}[\gamma(p)(l-x)] + Z'_{\text{н}}\text{sh}[\gamma(p)(l-x)]}{[1 + Z'_{\text{н}}(p)Z'_i(p)]\text{sh}[\gamma(p)l] + [Z'_i(p) + Z'_{\text{н}}(p)]\text{ch}[\gamma(p)l]}, \end{cases} \quad (5.175)$$

де $Z'_i(p) = Z_i(p)/Z_{\text{хв}}(p)$; $Z'_{\text{н}}(p) = Z_{\text{н}}(p)/Z_{\text{хв}}(p)$ – операторні нормовані опори джерела і навантаження, відповідно.

Щоб спростити перехід від зображень до оригіналів, гіперболічні функції в системі (5.175) доцільно виразити через експоненти:

$$\left\{ \begin{aligned} U(x, p) &= \frac{E(p) \{ [Z'_H(p) + 1] e^{\gamma(p)(l-x)} + [Z'_H(p) - 1] e^{-\gamma(p)(l-x)} \}}{[Z'_H(p) + 1][Z'_i(p) + 1] e^{\gamma(p)l} - [Z'_H(p) - 1][Z'_i(p) - 1] e^{-\gamma(p)l}}; \\ I(x, p) &= \frac{E(p)}{Z_{\text{xb}}(p)} \cdot \frac{[Z'_H(p) + 1] e^{\gamma(p)(l-x)} - [Z'_H(p) - 1] e^{-\gamma(p)(l-x)}}{[Z'_i(p) + 1][Z'_H(p) + 1] e^{\gamma(p)l} - [Z'_H(p) - 1][Z'_i(p) - 1] e^{-\gamma(p)l}}. \end{aligned} \right. \quad (5.176)$$

Систему (5.176) можна записати коротше і наочніше, якщо ввести:

1) **операторний коефіцієнт відбиття від джерела**

$$\rho_{Z_i}(p) = \frac{U_{\text{від}Z_i}(p)}{U_{\text{пад}Z_i}(p)} = -\frac{I_{\text{від}Z_i}(p)}{I_{\text{пад}Z_i}(p)} = \frac{Z'_i(p) - 1}{Z'_i(p) + 1} = \frac{1 - Y'_i(p)}{1 + Y'_i(p)}; \quad (5.177)$$

2) **операторний коефіцієнт відбиття від навантаження**

$$\rho_{Z_H}(p) = \frac{U_{\text{від}Z_H}(p)}{U_{\text{пад}Z_H}(p)} = -\frac{I_{\text{від}Z_H}(p)}{I_{\text{пад}Z_H}(p)} = \frac{Z'_H(p) - 1}{Z'_H(p) + 1} = \frac{1 - Y'_H(p)}{1 + Y'_H(p)}, \quad (5.178)$$

де $Y'_i(p) = Y_i(p)/Y_{\text{xb}}(p)$; $Y'_H(p) = Y_H(p)/Y_{\text{xb}}(p)$ – операторні нормовані провідності джерела і навантаження лінії, відповідно.

Операторні нормовані опори джерела і навантаження виражають через відповідні операторні коефіцієнти відбиття:

$$Z'_i(p) = \frac{1 + \rho_{Z_i}(p)}{1 - \rho_{Z_i}(p)}; \quad Z'_H(p) = \frac{1 + \rho_{Z_H}(p)}{1 - \rho_{Z_H}(p)}. \quad (5.179)$$

З огляду на формули (5.177) – (5.179) рівняння (5.176) запишуться у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} U(x, p) &= \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-\gamma(p)x} + \rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}]}{2[1 - \rho_{Z_H}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}; \\ I(x, p) &= \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-\gamma(p)x} - \rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}]}{2Z_{\text{xb}}(p)[1 - \rho_{Z_H}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]} \end{aligned} \right. \quad (5.180)$$

Окремими значеннями (5.180) є зображення відгуків:

$$U_2(p) = U(l, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_H}(p)]e^{-\gamma(p)l}}{2[1 - \rho_{Z_H}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}; \quad (5.181)$$

$$I_2(p) = I(l, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)]e^{-\gamma(p)l}}{2Z_{\text{xb}}(p)[1 - \rho_{Z_H}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]}; \quad (5.182)$$

$$I_1(p) = I(0, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)]e^{-2\gamma(p)l}}{2Z_{\text{xb}}(p)[1 - \rho_{Z_H}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}]} \quad (5.183)$$

Зображення (5.180) – (5.183) суттєво спрощуються для важливого у практиці режиму узгодження опору навантаження і (або) опору джерела з хвильовим опором лінії (табл.5.34). При цьому кількість членів ряду скорочується. Так, при узгодженні тільки з джерелом ($Z_i(p) = Z_{\text{xb}}(p)$) зображення містять два

доданки. Перші з них обумовлені падаючою, а другі – відбитою хвилею від навантаження.

Зображення (5.180) – (5.183) приймуть наочніший і зручніший для переходу до оригіналів вигляд, якщо дріб, який вони містять,

$$\frac{1}{1 - \rho_{Z_H}(p)\rho_{Z_i}(p)e^{-2\gamma(p)l}} \quad (5.184)$$

розвинути у біномний ряд вигляду:

$$1/(1 - y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \dots,$$

$$\text{де } y = \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-2\gamma(p)l}.$$

Таблиця 5.34 – Зображення відгуків для різних варіантів узгодження лінії

Відгук	Варіанти узгодження		
	$Z_i(p) = Z_{XB}(p);$ $Z'_i(p) = 1; \rho_{Z_i}(p) = 0$	$Z_H(p) = Z_{XB}(p);$ $Z'_H(p) = 1; \rho_{Z_H}(p) = 0$	$Z'_i(p) = 1;$ $Z'_H(p) = 1$
$U_2(x, p)$	$\frac{E(p)}{2} [e^{-\gamma(p)x} + \rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} e^{-\gamma(p)x}$	$\frac{E(p)}{2} e^{-\gamma(p)lx}$
$I_2(x, p)$	$\frac{E(p)}{2Z_{XB}(p)} [e^{-\gamma(p)x} + \rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{XB}(p)} e^{-\gamma(p)x}$	$\frac{E(p)}{2Z_{XB}(p)} e^{-\gamma(p)x}$
$\Omega^J(b)$	$\frac{E(p)}{2} [1 + \rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)l}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} e^{-\gamma(p)l}$	$\frac{E(p)}{2} e^{-\gamma(p)l}$
$I_2(p)$	$\frac{E(p)}{2Z_{XB}(p)} [1 - \rho_{Z_H}(p)]e^{-\gamma(p)l}$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{XB}(p)} e^{-\gamma(p)l}$	$\frac{E(p)}{2Z_{XB}(p)} e^{-\gamma(p)l}$
$I_1(p)$	$\frac{E(p)}{2Z_{XB}(p)} [1 - \rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)2l}]$	$\frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{XB}(p)}$	$\frac{E(p)}{2Z_{XB}(p)}$

Зображення (5.180) після розвинення функції (5.184) в ряд приймуть вигляд:

$$U(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2} \left[\overbrace{e^{-\gamma(p)x}}^{1} + \overbrace{\rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}}^{2} + \right. \\ \left. + \overbrace{\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)}}^{3} + \overbrace{\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}^2(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)}}^{4} + \dots \right]; \quad (5.185)$$

$$I(x, p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{\text{XB}}(p)} \left[\overbrace{e^{-\gamma(p)x}}^{1} - \overbrace{\rho_{Z_{\text{H}}}(p)e^{-\gamma(p)(2l-x)}}^{2} + \right. \\ \left. \overbrace{+\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_{\text{H}}}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)}}^{3} - \overbrace{\rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_{\text{H}}}^2(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} + \dots}^{4} \right]. \quad (5.186)$$

Кожен з доданків у виразах (5.185) і (5.186) відповідає оригіналу, що має **фізичний сенс хвилі¹, яка рухається вздовж лінії**. Так, наведені перші чотири доданки відповідають чотирьом типам хвиль напруги і струму:

1) хвилі № 1 пересуваються від входу лінії до виходу ($x = l$) і при $t = \tau_3 = l/v$ досягають навантаження;

2) хвилі № 2 спричинені відбиттям від навантаження і поширюються від виходу до входу лінії, досягаючи його у момент часу $t = 2\tau_3$;

3) хвилі № 3 – це відбиті від входу лінії хвилі № 2; вони рухаються від входу лінії до виходу і при $t = 3\tau_3$ досягають навантаження;

4) хвилі № 4 утворюються при відбитті від виходу лінії хвиль № 3; ці хвилі поширюються від виходу до входу лінії і при $t = 4\tau_3$ його досягають.

Зображення відбитих хвиль містять співмножники, складені з операторних коефіцієнтів відбиття. Склад множника кожної з хвиль визначається «історією» її відбиття. Від'ємні знаки окремих доданків у зображеннях для хвиль струму обумовлені знаком мінус, яким коефіцієнти відбиття за визначенням (5.177), (5.178) пов'язують падаючу та відбиту хвилі струму.

Наступні доданки, які не увійшли до запису (5.185) і (5.186), відповідають хвилям, що повторюють процеси поширення і відбиття від входу лінії до навантаження і навпаки.

Застосування рядів можливе і для запису відгуків у лінії:

$$U_2(p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_{\text{H}}}(p)][e^{-\gamma(p)l} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_{\text{H}}}(p)e^{-\gamma(p)3l} + \dots]}{2}; \quad (5.187)$$

$$I_2(p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_{\text{H}}}(p)][e^{-\gamma(p)l} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_{\text{H}}}(p)e^{-\gamma(p)3l} + \dots]}{2Z_{\text{XB}}(p)}; \quad (5.188)$$

$$I_1(p) = \frac{E(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)]\{1 - \rho_{Z_{\text{H}}}(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-\gamma(p)2l} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_{\text{H}}}(p)e^{-\gamma(p)4l} + \dots]\}}{2Z_{\text{XB}}(p)}. \quad (5.189)$$

Загалом, $\gamma(p)$ і $Z_{\text{XB}}(p)$ є нелінійними функціями оператора p , що ускладнює перехід від зображень до оригіналів.

Розв'язки суттєво спрощуються для ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, у яких: оператор-

²⁰Слід зазначити умовність терміну «хвиля» стосовно збудження довільної форми, яке рухається вздовж лінії зі швидкістю v .

ний хвильовий опір і коефіцієнт ослаблення є дійсними числами ($Z_{\text{ХВ}}(p) = \sqrt{L_1/C_1} = R_{\text{ХВ}}$, $\alpha = 0$ – ІДЛ; $\alpha = 0,5(R_1/R_{\text{ХВ}} + G_1R_{\text{ХВ}})$ – ДЛМВ; $R_1/R_{\text{ХВ}}$ – ЗДЛ); коефіцієнт поширення лінійно залежить від оператора p ($\gamma(p) = p\sqrt{L_1C_1} = p/v$ – ІДЛ; $\gamma(p) = \alpha + p/v$ – ДЛМВ і ЗДЛ); швидкість поширення хвиль не залежить від частоти і становить $v = 1/\sqrt{L_1C_1}$. Отримані з урахуванням згаданих спрощень операторні вирази наведені в табл.5.35 (величини $\tau_x = x/v$, $\tau_3 = l/v$ означають час затримки хвиль у перерізі x і в усій лінії).

В ІДЛ рівень хвиль при пересуванні вздовж лінії не змінюється, а в ДЛМВ і ЗДЛ зменшується за експоненціальним законом з коефіцієнтом ослаблення α (див. табл.5.35).

При дії джерела струму з параметрами $I_{\text{дж}}(p)$ і $Z_i(p)$ слід у згаданих співвідношеннях, згідно з умовою еквівалентності джерел, замінити $E(p)$ на $I_{\text{дж}}(p)Z_i(p)$.

Нижче розглянуто ДЛ з тими самими навантаженнями, що й у підрозд. 5.11. Як приклади аналізуються перехідні процеси при увімкненні постійних джерел. Це спрощує інтерпретацію результатів і використання їх для здобуття перехідних характеристик (підрозд. 5.13). Початкові умови вважаються нульовими:

$$i(x, -0) = 0; u(x, -0) = 0.$$

5.12.2 Лінії, узгоджені з навантаженням

В режимі узгодження лінії з навантаженням ($Z_{\text{н}}(p) = Z_{\text{ХВ}}(p)$) коефіцієнт відбиття від навантаження $\rho_{Z_{\text{н}}}(p) = 0$, і тому зображення відбитих хвиль відсутні. Співвідношення для зображень струму і напруги в узгоджених з навантаженням ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, увімкнених до ідеального джерела ($Z_i(p) = 0$), а також формули для миттєвих значень $u(x,t)$; $i(x,t)$; $u_2(t)$ зведені у табл.5.36. Ці зображення отримані внаслідок підстановки операторних параметрів згаданих ліній у відповідні формули табл.5.34. Для переходу від зображень до оригіналів (миттєві значення) використано теореми щодо перетворень Лапласа (лінійності та запізнення) і типові операторні відповідності (див. табл.3.1, 3.2).

З аналізу виразів (табл.5.36) виходять наступні висновки:

1) напруга і струм у довільному перерізі містять тільки падаючі хвилі, які збігаються за формою (у часі та за координатою) з ЕРС;

2) у ДЛМВ і ЗДЛ рівень хвилі зменшується за законом $e^{-\alpha x}$;

3) миттєві значення напруги і струму $u_2(t)$ та $i_2(t)$ на виході ІДЛ відрізняються від вхідних $u_1(t)$ та $i_1(t)$ тільки зсувом на час $\tau_3 = l/v$;

4) $u_2(t)$ та $i_2(t)$ в ДЛМВ і ЗДЛ відрізняються від $u_1(t)$ та $i_1(t)$ не тільки зсувом на час τ_3 , але й множителем $e^{-\alpha l}$.

Таблиця 5.35 – Операторні співвідношення для ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ

Пара-метр	Лінія	Зображення
$U(x, p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)]}{2} \left[e^{-p\tau_x} + \rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3-\tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3+\tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}^2(p)e^{-p(4\tau_3-\tau_x)} + \dots \right]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)]}{2} \left[e^{-\alpha x} e^{-p\tau_x} + \rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l-x)} e^{-p(2\tau_3-\tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l+x)} e^{-p(2\tau_3+\tau_x)} + \dots \right]$
$I(x, p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)]}{2R_{XB}} \left[e^{-p\tau_x} - \rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3-\tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-p(2\tau_3+\tau_x)} - \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}^2(p)e^{-p(4\tau_3-\tau_x)} + \dots \right]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)]}{2R_{XB}} \left[e^{-\alpha x} e^{-p\tau_x} - \rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l-x)} e^{-p(2\tau_3-\tau_x)} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-\alpha(2l+x)} e^{-p(2\tau_3+\tau_x)} - \dots \right]$
$U_2(p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)][1+\rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)][1+\rho_{Z_H}(p)][e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
$I_2(p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)][1-\rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2R_{XB}}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)][1-\rho_{Z_H}(p)][e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2R_{XB}}$
$I_1(p)$	ІДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)] \left\{ 1 - \rho_{Z_H}(p)[1-\rho_{Z_i}(p)][e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4p\tau_3} + \dots] \right\}}{2R_{XB}}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)] \left\{ 1 - \rho_{Z_H}(p)[1-\rho_{Z_i}(p)][e^{-2\alpha l} e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4\alpha l} e^{-4p\tau_3} + \dots] \right\}}{2R_{XB}}$

Таблиця 5.36 – Співвідношення для узгоджених з навантаженням ІДЛ, ДЛІМВ і ЗДЛ, увімкнених до ідеального джерела ЕРС

Зображення та оригінали	ІДЛ	ДЛІМВ і ЗДЛ
$U(x, p)$	$E(p)e^{-px/v} = E(p)e^{-p\tau_x}$	$E(p)e^{-(\alpha x + px/v)} = E(p)e^{-\alpha x} e^{-p\tau_x}$
$I(x, p)$	$E(p)e^{-p\tau_x} / R_{XB}$	$E(p)e^{-\alpha x} e^{-p\tau_x} / R_{XB}$
$u(x, t)$	$e(t - x/v) = e(t - \tau_x)$	$e(t - x/v)e^{-\alpha x} = e(t - \tau_x)e^{-\alpha x}$
$i(x, t)$	$e(t - \tau_x) / R_{XB}$	$i_1(t - \tau_x)e^{-\alpha x} / R_{XB}$
$u_2(t) = u(l, t)$	$e(t - l/v) = e(t - \tau_3)$	$e(t - l/v)e^{-\alpha l} = e(t - \tau_3)e^{-\alpha l}$
$i_2(t) = i(l, t)$	$e(t - \tau_3) / R_{XB}$	$e(t - \tau_3)e^{-\alpha \tau_3} / R_{XB}$

На рис.5.65 зображена схема, динаміка формування $u(t, x)$ і графік $u_2(t)$ при увімкненні узгодженої ІДЛ до ідеального джерела постійної ЕРС.

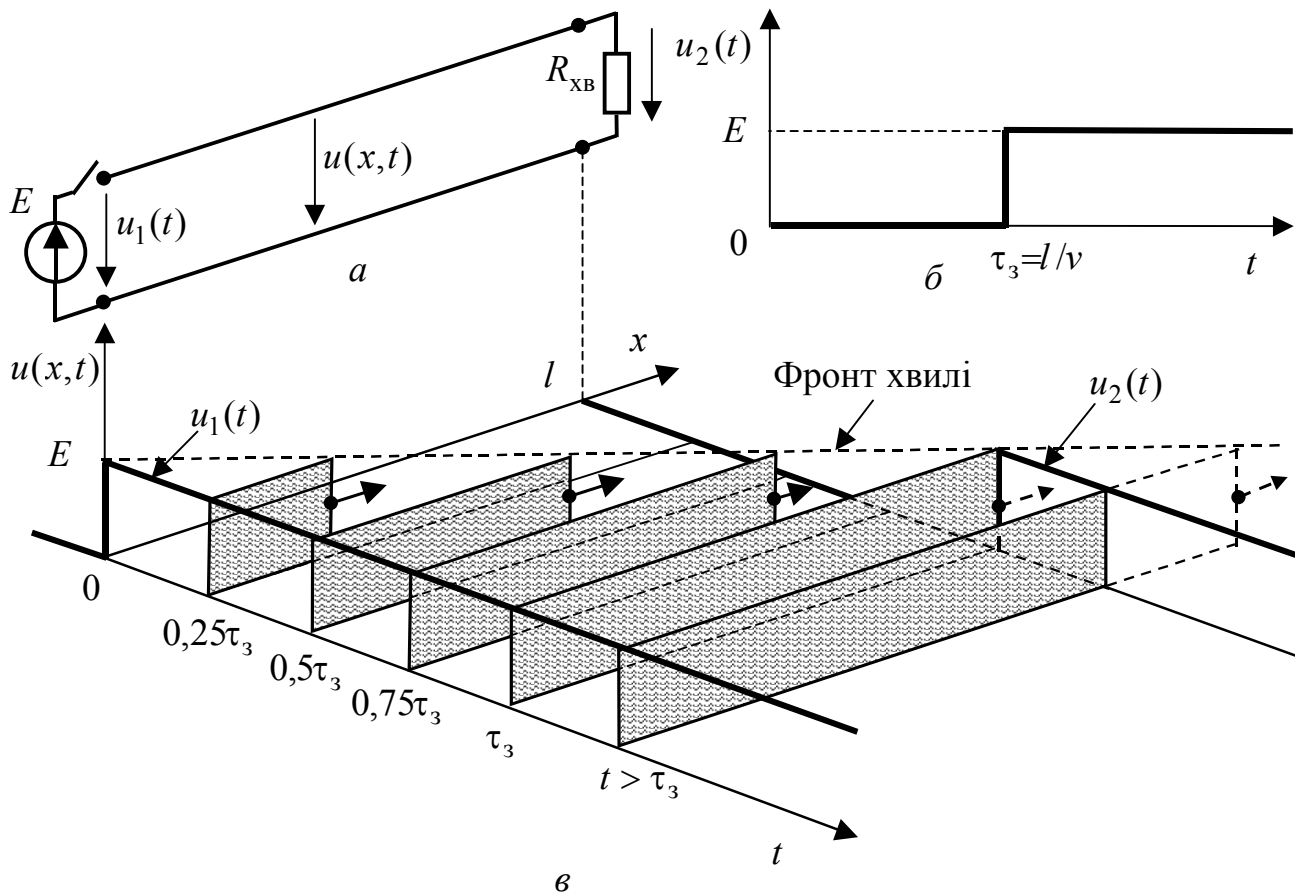


Рисунок 5.65 – Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до узгодженої ІДЛ: а – схема; б – вихідна напруга; в – динаміка формування напруги $u(x, t)$

5.12.3 Розімкнені лінії

Для розімкненої лінії $Z_H(p) \rightarrow \infty$, тому операторний коефіцієнт відбиття від навантаження (5.178) становить $\rho_{Z_H}(p) = 1$, що (як і для усталеного синусоїдного режиму) означає повне відбиття від навантаження.

Зображення струму і напруги загалом для лінії з втратами і довільному значенні опору джерела напруги виходять в результаті підстановки $\rho_{Z_H}(p) = 1$ у формули (5.185) і (5.186):

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, p) = \\ = \frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)]}{2} [e^{-\gamma(p)x} + e^{-\gamma(p)(2l-x)} + \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} + \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} + \dots]; \\ I(x, p) = \\ = \frac{E(p)[1-\rho_{Z_i}(p)]}{2Z_{XB}(p)} [e^{-\gamma(p)x} - e^{-\gamma(p)(2l-x)} + \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} - \rho_{Z_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} + \dots], \end{array} \right. \quad (5.190)$$

Система (5.190) дозволяє розв'язувати конкретні задачі, в яких задаються параметри лінії та значення внутрішнього опору джерела.

Уявлення про процеси у розімкнених ДЛ можна скласти, обмежившись розглядом ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, увімкнених до ідеального джерела напруги з внутрішнім опором $R_i = R_{XB}$.

Ідеальне джерело напруги. У ідеального джерела напруги $Z_i(p) = 0$. Тому хвилі повністю відбиваються від джерела, що відповідає значенню операторного коефіцієнта відбиття від джерела (5.177) $\rho_{Z_i}(p) = -1$.

Для ІДЛ підстановка у формули (табл.5.35) значень $\rho_{Z_H}(p) = 1$ і $\rho_{Z_i}(p) = -1$ призводить до зображень:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, p) = E(p)[e^{-p\tau_x} + e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} - e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} - e^{-p(4\tau_3 - \tau_x)} + \dots]; \\ I(x, p) = \frac{E(p)}{R_{XB}} [e^{-p\tau_x} - e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} - e^{-p(2\tau_3 + \tau_x)} + e^{-p(4\tau_3 - \tau_x)} + \dots]; \end{array} \right. \quad (5.191)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2(p) = E(p)[2e^{-p\tau_3} - 2e^{-3p\tau_3} + 2e^{-5p\tau_3} - 2e^{-7p\tau_3} \dots]; \\ I_1(p) = \frac{E(p)}{R_{XB}} [1 - 2e^{-2p\tau_3} + 2e^{-4p\tau_3} - 2e^{-6p\tau_3} + 2e^{-8p\tau_3} - \dots]. \end{array} \right. \quad (5.192)$$

Перехід від зображень (5.191) до оригіналів дає миттєві значення напруги і струму у довільному перерізі лінії:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \underbrace{e(t - \tau_x)}_1 + \underbrace{e(t - 2\tau_3 + \tau_x)}_2 - \underbrace{e(t - 2\tau_3 - \tau_x)}_3 - \underbrace{e(t - 4\tau_3 + \tau_x)}_4 + \dots; \\
i(x,t) &= \frac{e(t - \tau_x)}{R_{XB}} - \frac{e(t - 2\tau_3 + \tau_x)}{R_{XB}} - \frac{e(t - 2\tau_3 - \tau_x)}{R_{XB}} + \frac{e(t - 4\tau_3 + \tau_x)}{R_{XB}} + \dots,
\end{aligned} \tag{5.193}$$

де $e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(p)]$ – миттєве значення ЕРС.

Співвідношення (5.192) наочно підтверджують розглянуте у п. 5.12.1 фізичне подання перехідного процесу в лінії як накладання кількох хвиль. Доданки у виразі (5.193) є хвилями, які (за часом і координатою) збігаються за формою з миттєвими значеннями ЕРС джерела. Записані перші чотири хвилі мають такі особливості:

1) хвилі № 1 у часовому інтервалі $0 < t < \tau_3$ пересуваються до виходу лінії і при $t = \tau_3$ ($\tau_x = \tau_3$) їхній фронт досягає розімкнених затискачів лінії зі значеннями $e(0)$, $e(0)/R_{XB}$;

2) при $t < \tau_3$ хвилі № 2 дорівнюють нулю, а при $t > \tau_3$ вони формуються за рахунок повного відбиття хвиль № 1 від виходу лінії (напруга змінює знак, а струм – ні) і поширюються до входу лінії, досягаючи його при $t = 2\tau_3$;

3) хвилі № 3 при $t < 2\tau_3$ дорівнюють нулю, а при $t > 2\tau_3$ – це повністю відбиті (напруга змінює знак, а струм – ні) від входу лінії хвилі № 2; в інтервалі $2\tau_3 < t < 3\tau_3$ хвилі № 3 рухаються від входу до виходу лінії;

4) хвилі № 4 утворюються внаслідок відбиття від виходу лінії хвиль № 3 і поширюються протягом $3\tau_3 < t < 4\tau_3$ від виходу до входу лінії; при $t = 4\tau_3$ хвилі № 4 досягають входу лінії.

Аналіз доданків, не вказаних у виразі (5.193), показує, що процеси відбиття і поширення хвиль повторюються.

Оригіналами (5.192) є миттєві значення напруги на виході та струму на вході лінії:

$$\begin{cases} u_2(t) = 2e(t - \tau_3) - 2e(t - 3\tau_3) + 2e(t - 5\tau_3) - 2e(t - 7\tau_3) + \dots; \\ i_1(t) = \frac{e(t) - 2e(t - 2\tau_3) + 2e(t - 4\tau_3) - 2e(t - 6\tau_3) + \dots}{R_{XB}}. \end{cases} \tag{5.194}$$

На рис.5.66 і 5.67 зображено схему (рис.5.66, а і 5.67, а) та графіки $u_2(t)$, $u(x,t)$, $i_1(t)$, $i(x,t)$ для розімкненої ІДЛ, яку увімкнено до ідеального джерела постійної ЕРС. Графіки миттєвих значень вихідної напруги $u_2(t)$ (рис.5.66, б) і вхідного струму $i_1(t)$ (рис.5.67, б) побудовані відповідно за формулами (5.194). Процеси формування миттєвих значень напруги і струму ілюструють рис.5.66, в і 5.67, в.

Аналогічний аналіз для розімкнених ДЛМВ і ЗДЛ, увімкнених до ідеального джерела напруги, дозволяє записати:

1) миттєві значення напруги і струму у перерізі x лінії

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \underbrace{e^{-\alpha x} e^{-(t-\tau_x)}}_1 + \underbrace{e^{-\alpha(2l-x)} e^{-(t-2\tau_3+\tau_x)}}_2 + \underbrace{e^{-\alpha(2l+x)} e^{-(t-2\tau_3-\tau_x)}}_3 + \underbrace{e^{-\alpha(4l-x)} e^{-(t-4\tau_3+\tau_x)}}_4 + \dots \\
 i(x,t) &= \frac{e^{-\alpha x} e^{-(t-\tau_x)} - e^{-\alpha(2l-x)} e^{-(t-2\tau_3+\tau_x)} - e^{-\alpha(2l+x)} e^{-(t-2\tau_3-\tau_x)} + e^{-\alpha(4l-x)} e^{-(t-4\tau_3+\tau_x)} + \dots}{R_{XB}}
 \end{aligned} \tag{5.195}$$

2) миттєві значення вихідної напруги і вхідного струму

$$\begin{cases}
 u_2(t) = e^{-\alpha l} e^{-(t-\tau_3)} - 2e^{-3\alpha l} e^{-(t-3\tau_3)} + 2e^{-5\alpha l} e^{-(t-5\tau_3)} - \dots; \\
 i_1(t) = \frac{e^{-(t-\tau_3)} - 2e^{-2\alpha l} e^{-(t-2\tau_3)} + 2e^{-4\alpha l} e^{-(t-4\tau_3)} - 2e^{-6\alpha l} e^{-(t-6\tau_3)} + \dots}{R_{XB}}
 \end{cases} \tag{5.196}$$

Оригінали струму і напруги (5.195) описуються кількома доданками, що мають, як і в ІДЛ, фізичне значення багаторазово відбитих хвиль. Пронумеровані у виразі (5.195) хвилі характеризують ті самі стадії формування напруги і струму в лінії, як і описані вище для ІДЛ. Відмінність полягає у зменшенні за експоненційним законом $e^{-\alpha x}$ рівня хвилі при проходженні лінії.

Побудовані на підставі рівнянь (5.196) для $\alpha l = 0,1$ графіки $u_2(t)$ та $i_1(t)$ (рис.5.68, а, б) відрізняються від аналогічних для ІДЛ (рис.5.66, б і 5.67, б) зменшенням з часом рівня імпульсів. Враховуючи втрати у ДЛМВ і ЗДЛ, $u_2(t)$ та $i_1(t)$ в усталеному режимі становлять:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = E; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = 0.$$

Практична тривалість перехідного процесу (див. підрозд. 1.2) стосовно $u_2(t)$ та $i_2(t)$

$$t_{\text{пер}} = (4\dots 5)\tau_3 / \alpha l.$$

Періодичний характер функцій $u_2(t)$ та $i_1(t)$ в ІДЛ і квазіперіодичний – у ДЛМВ і ЗДЛ обумовлений параметрами частотних характеристик розімкнених ліній (п. 5.11.4). Період $u_2(t)$ та $i_1(t)$ становить $T = 4\tau_3$, що збігається з періодом першої резонансної частоти $f_{\text{рез1}}$ (5.152). Наявність кратних резонансних частот ($n = 1, 3, 5\dots$) пояснює кратність періоду ($4\tau_3$) і тривалості імпульсів ($2\tau_3$). Взаємозв'язок розглядуваного перехідного процесу з частотними властивостями розімкнених ліній підтверджує також порівняння графіків $u_2(t)$ та $u_{C_e}(t)$ – миттєвого значення напруги на ємності еквівалентного послідовного контуру для частоти $f_{\text{рез1}}$ (рис.5.68, а).

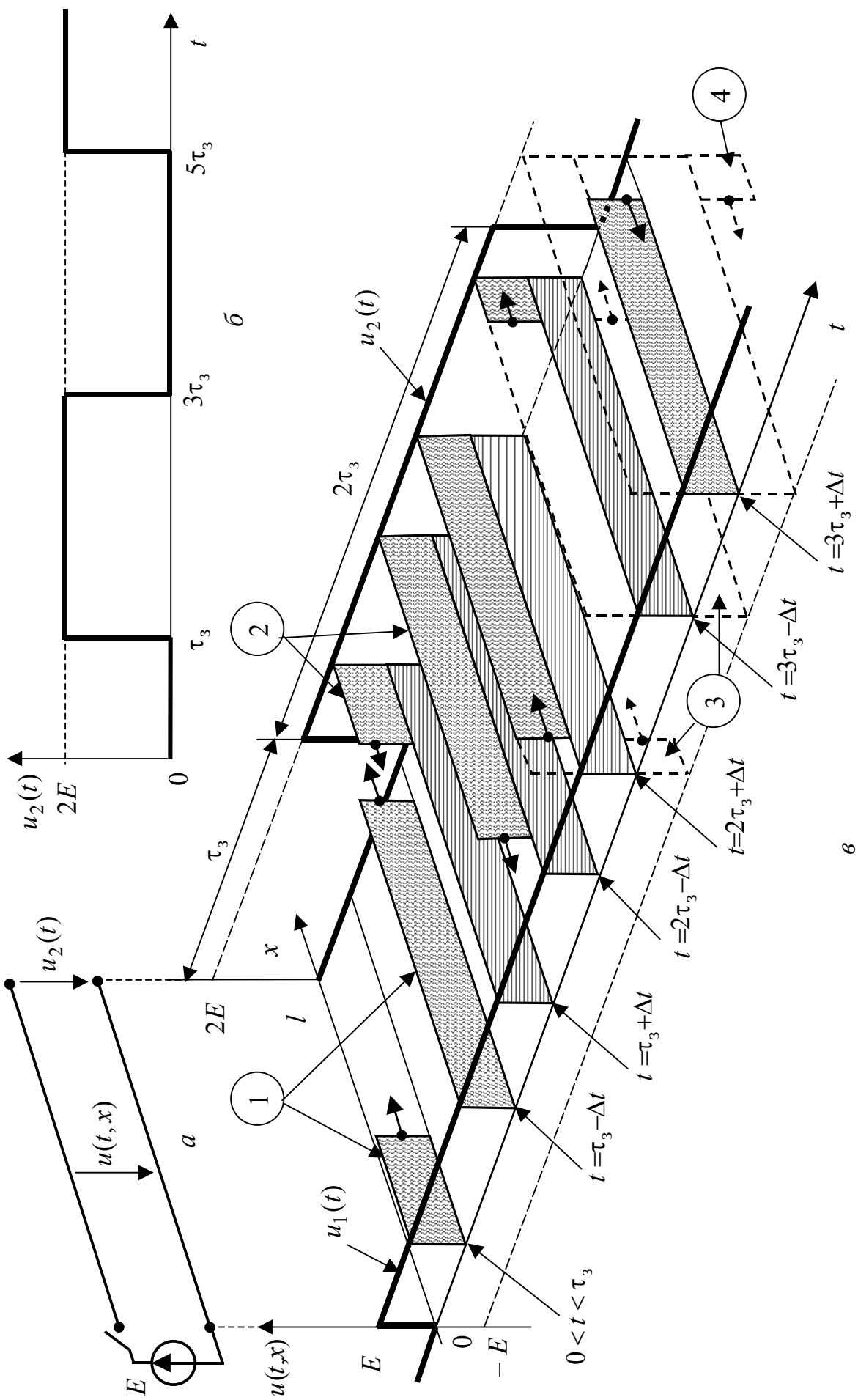


Рисунок 5.66 – Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до розімкненої ІДЛ: а – схема; б – часова діаграма вихідної напруги; в – динаміка формування напруги $u(t, x)$

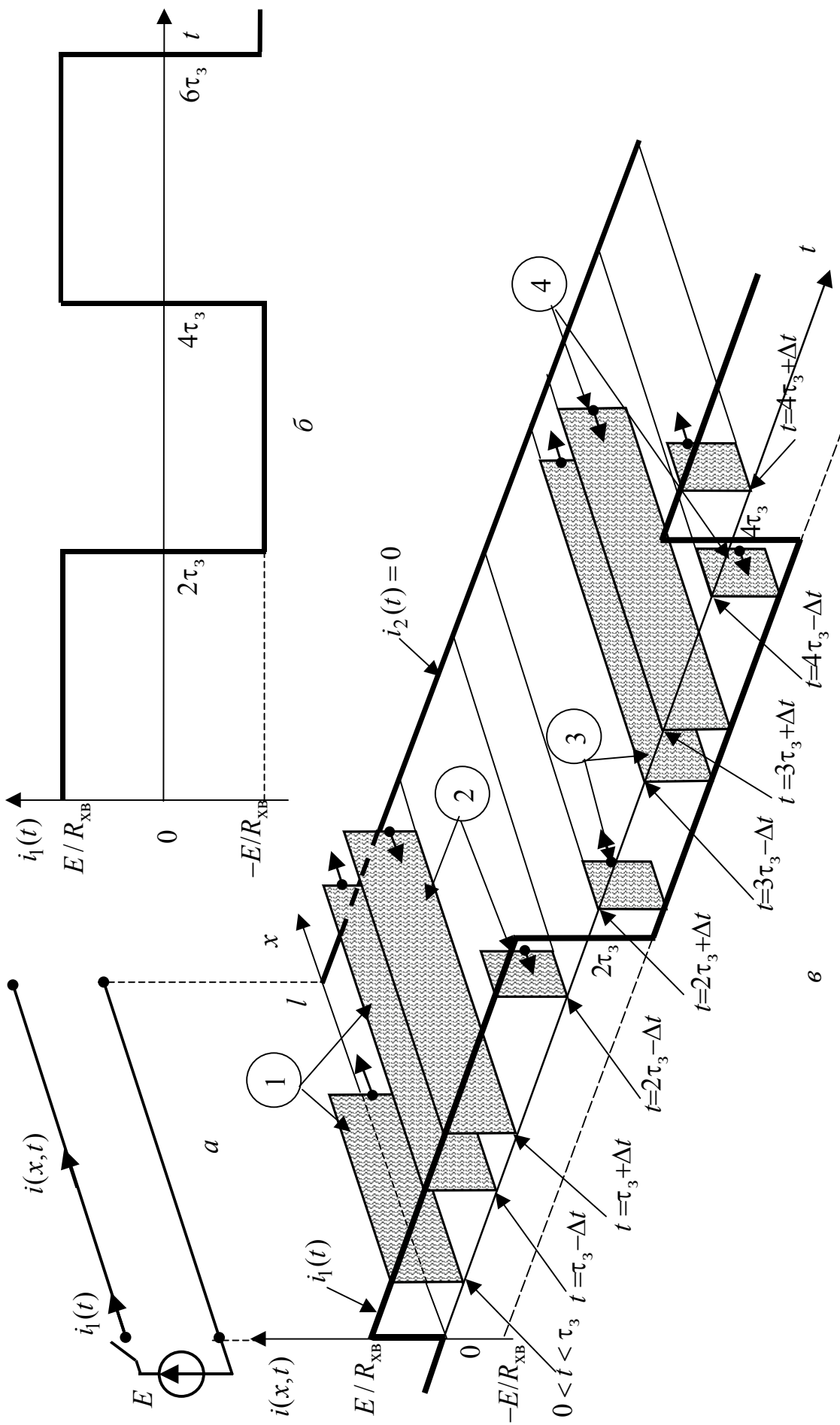


Рисунок 5.67 – Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до розімкненої ІДЛ: *a* – схема; *б* – часова діаграма вхідного струму; *в* – динаміка формування струму $i(x,t)$

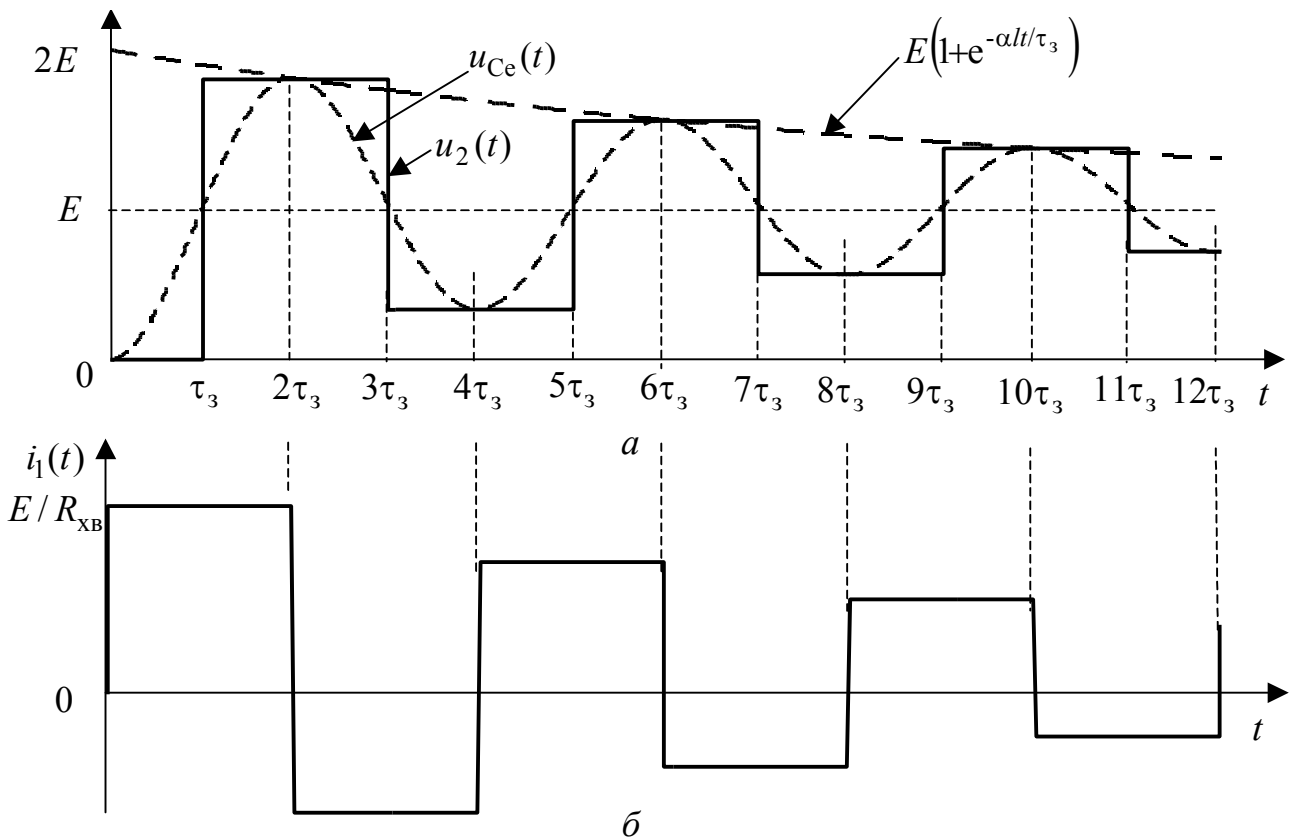


Рисунок 5.68 – Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до розімкнених ДЛМВ і ЗДЛ ($\alpha l = 0,1$): *a* – часові діаграми вихідної напруги і відгуку еквівалентного контуру на $f_{рез1}$; *б* – часова діаграма вхідного струму

Джерело ЕРС з внутрішнім опором, який дорівнює хвильовому. Схема розімкненої лінії, до якої увімкнено джерело ЕРС з $R_i = R_{XB}$, зображена на рис.5.69, *a*. При цьому операторний коефіцієнт відбиття від джерела $\rho_{Z_i}(p) = 0$. Отже, хвилі, які рухаються до джерела, не відбиваються від нього, внаслідок чого у виразах усіх зображень і оригіналів кількість доданків обмежена: відсутні хвилі, затримані на $3\tau_3$ і більше.

Не розглядаючи докладно даний режим, достатньо обмежитись аналізом відгуків, що мають вигляд:

1) для ІДЛ

$$u_2(t) = e(t - \tau_3); \quad i_1(t) = \frac{e(t) - e(t - 2\tau_3)}{2R_{XB}}; \quad (5.197)$$

2) для ДЛМВ і ЗДЛ

$$u_2(t) = e^{-\alpha l} e(t - \tau_3); \quad i_1(t) = \frac{e(t) - e^{-2\alpha l} e(t - 2\tau_3)}{2R_{XB}}. \quad (5.198)$$

Графіки відгуків (5.197) і (5.198) зображені на рис.5.69, *б, в*.

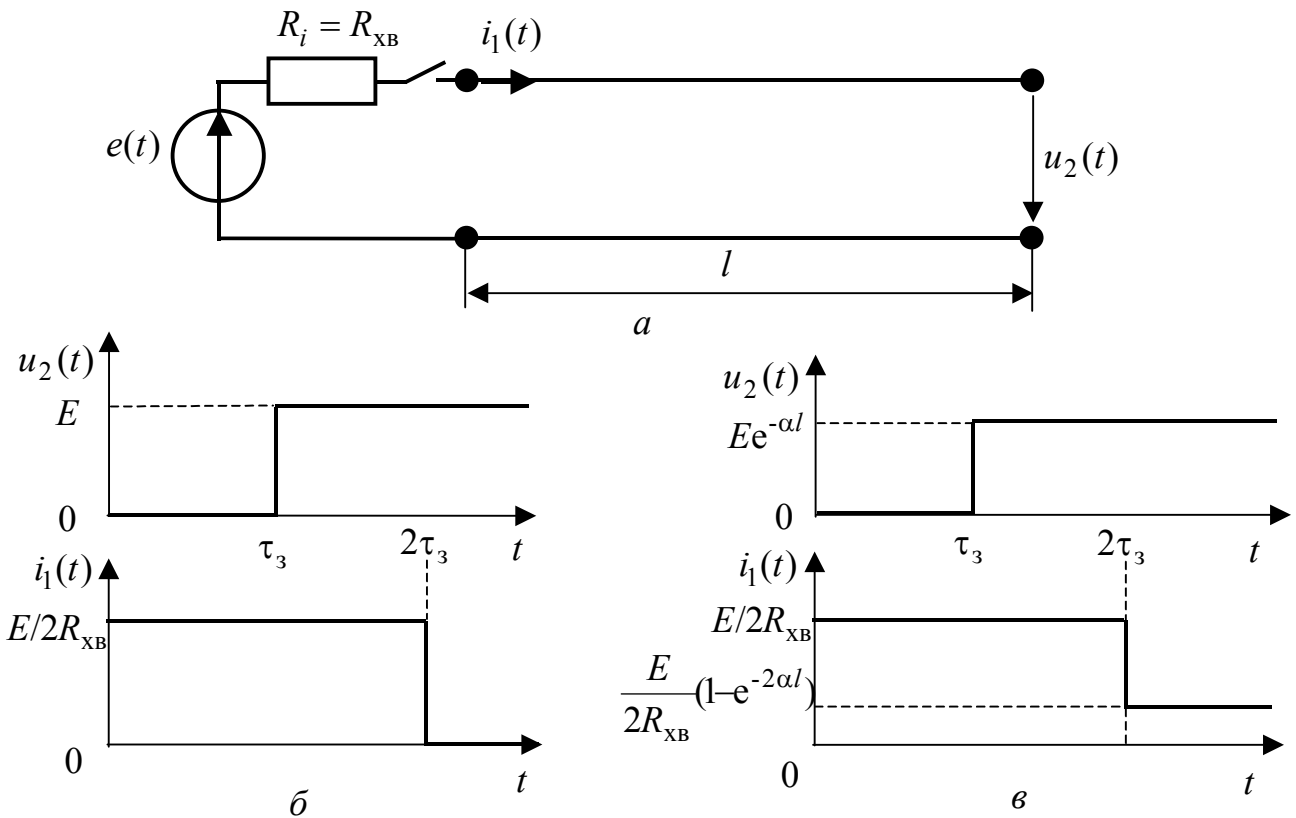


Рисунок 5.69 – Увімкнення джерела ЕРС з узгодженим внутрішнім опором до розімкнених ліній: *a* – схема; відгуки при $e(t) = E$: *б* – ІДЛ; *в* – ДЛМВ і ЗДЛ

5.12.4 Замкнені лінії

У замкненій лінії операторний коефіцієнт відбиття від навантаження (5.178) становить $\rho_{Z_H}(p) = -1$, оскільки $Z_H(p) = 0$.

Зазвичай перехідні процеси у замкнених лініях аналізують за умови увімкнення до джерела струму (рис.5.70, *a*).

В результаті підстановки у вирази (5.185) і (5.186) $\rho_{Z_H}(p) = -1$, $E(p) = I_{дж}(p)Z_i(p)$ і подальших перетворень, зображення напруги і струму в перерізі x приймуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, p) = \frac{I_{дж}(p)[1 + \rho_{Y_i}(p)]}{2Y_{xb}(p)} \times \\ \times [e^{-\gamma(p)x} - e^{-\gamma(p)(2l-x)} - \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} + \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} - \dots]; \\ I(x, p) = \frac{I_{дж}(p)[1 + \rho_{Y_i}(p)]}{2} \times \\ \times [e^{-\gamma(p)x} + e^{-\gamma(p)(2l-x)} - \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(2l+x)} - \rho_{Y_i}(p)e^{-\gamma(p)(4l-x)} + \dots], \end{array} \right. \quad (5.199)$$

де $Y_i'(p) = Y_i(p)/Y_{xb}(p)$ – операторна нормована провідність джерела

струму; $\rho_{Y_i}(p) = \frac{1 - Y_i'(p)}{1 + Y_i'(p)}$ – операторний коефіцієнт відбиття від джерела.

За умови рівності операторних нормованих опорів джерела напруги (для розімкненої лінії) і провідності джерела струму (для замкненої)

$$Z_i'(p) = Y_i'(p) \quad (5.200)$$

операторні коефіцієнти відбиття від джерел напруги і струму згідно з формулою (5.177) відрізняються тільки знаком:

$$\rho_{Z_i}(p) = -\rho_{Y_i}(p).$$

Отже, виконання умови (5.200) призводить до того, що зображення $U(x, p)$ та $I(x, p)$ в системі (5.190) для розімкненої лінії є дуальними зображеннями $I(x, p)$ і $U(x, p)$ відповідно у рівняннях (5.199) для замкненої лінії з тими самими вторинними параметрами.

Дуальність вихідних зображень (5.190) і (5.199) є обґрунтуванням дуальності інших зображень та оригіналів для розімкненої і замкненої ліній (див. табл.5.37). На рис.5.70, б, в побудовані графіки відгуків для замкнених ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ на підставі дуальних відповідностей з виразами (5.194) і (5.196) для розімкнених ліній.

Таблиця 5.37 – Дуальні відповідності розімкненої і замкненої ліній

Розімкнена лінія	Замкнена лінія
$Z_i'(p)$	$Y_i'(p)$
$E(p)$	$I_{дж}(p)$
$U(x, p)$	$I(x, p)$
$I(x, p)$	$U(x, p)$
$u(x, t)$	$i(x, t)$
$i(x, t)$	$u(x, t)$
$u_2(t)$	$i_2(t)$
$i_1(t)$	$u_1(t)$

5.12.5 ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ при активних опорах навантаження і внутрішньому опорі джерела

Визначальну роль при аналізі цього режиму відіграє той факт, що операторні коефіцієнти відбиття (5.177), (5.178) є дійсними числами:

$$\rho_{R_i} = \frac{R_i' - 1}{R_i' + 1}; \quad \rho_{R_H} = \frac{R_H' - 1}{R_H' + 1}, \quad (5.201)$$

значення яких лежать у межах: $-1 \leq \rho_{R_i} \leq 1$; $-1 \leq \rho_{R_H} \leq 1$.

Коефіцієнти відбиття від'ємні при опорах, менших хвильового, і додатні, якщо опори – більше хвильового.

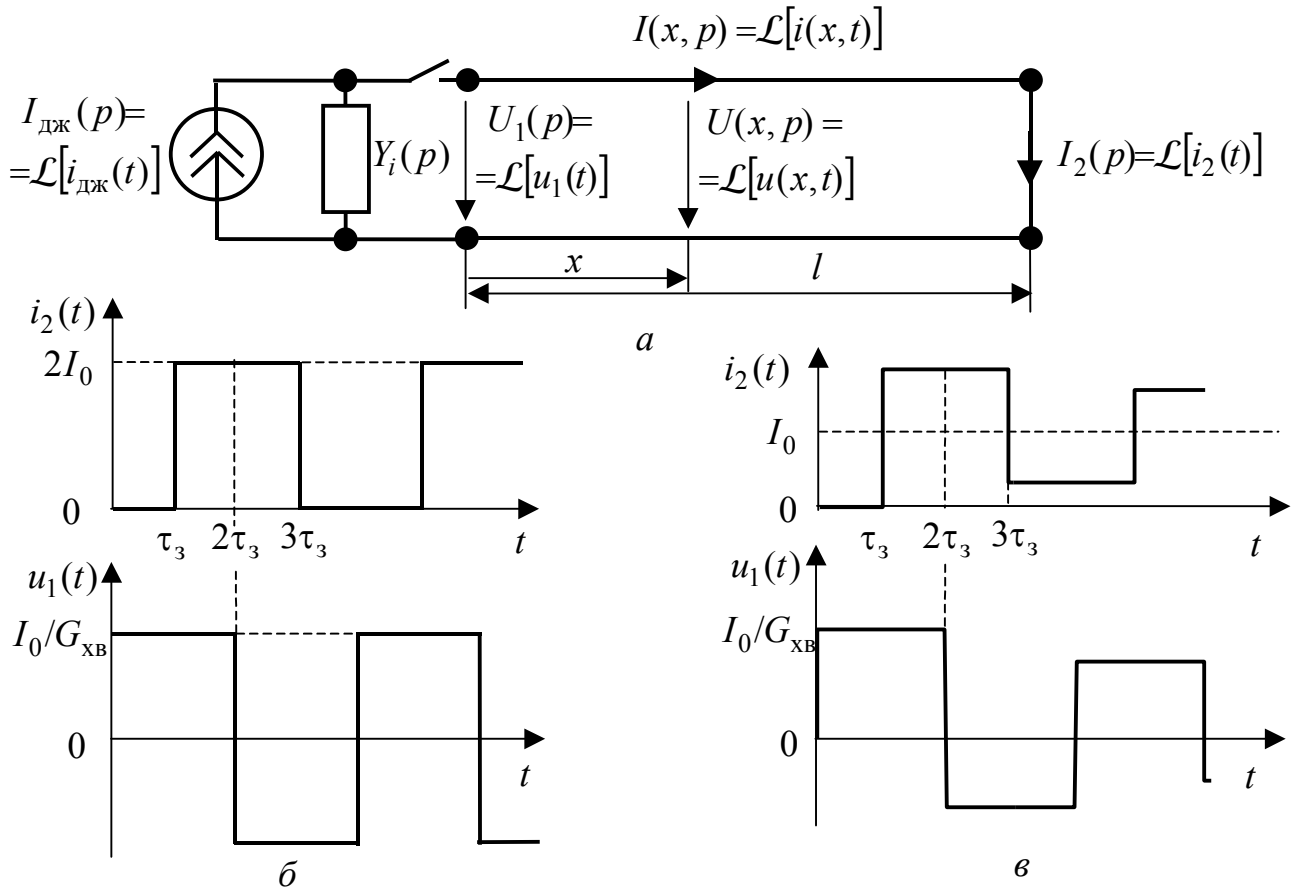


Рисунок 5.70 – Увімкнення ідеального джерела постійного струму ($i_{\text{дж}}(t) = I_0$; $Y_i(p) = 0$) до замкненої лінії: *a* – схема; відгуки: *б* – ІДЛ; *в* – ДЛМВ і ЗДЛ

Граничні та нульові значення коефіцієнтів відбиття відповідають:

- 1) $\rho_{R_n} = 1$; $R'_n \rightarrow \infty$ – розімкненій лінії;
- 2) $\rho_{R_n} = -1$; $R'_n = 0$ – замкненій лінії;
- 3) $\rho_{R_n} = 0$; $R'_n = 1$ – узгодженню лінії з навантаженням;
- 4) $\rho_{R_i} = -1$; $R'_i = 0$ – ідеальному джерелу напруги;
- 5) $\rho_{R_i} = 1$; $R'_i \rightarrow \infty$ – ідеальному джерелу струму;
- 6) $\rho_{R_i} = 0$; $R'_i = 1$ – узгодженню лінії з джерелом.

Підставляючи у формули (табл.5.35) коефіцієнти відбиття (5.201) і переходячи від зображень до оригіналів, здобувають вирази (табл.5.38) для миттєвих значень напруги і струму в лінії, а також відгуків.

На рис.5.71 зображені графіки відгуків ліній на дію ідеального джерела постійної напруги, побудовані за формулами з табл.5.38 для двох значень коефіцієнтів відбиття від навантаження ($\rho_{R_{n1}} = 0,6$; $\rho_{R_{n2}} = -0,6$) і відповідних нормованих активних опорів ($R'_{n1} = 4$; $R'_{n2} = 0,25$).

Таблиця 5.38 – Співвідношення для ліній з активними опорами навантаження і джерела напруги

Параметр	Лінія	Співвідношення
$u(x,t)$	ІДЛ	$\frac{1-\rho_{R_i}}{2} \left[e^{(t-\tau_x)} + \rho_{R_H} e^{(t-2\tau_3+\tau_x)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{(t-2\tau_3-\tau_x)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}^2 e^{(t-4\tau_3+\tau_x)} + \dots \right]$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{1-\rho_{R_i}}{2} \left[e^{-\alpha x} e^{(t-\tau_x)} + \rho_{R_H}(p) e^{-\alpha(2l-x)} e^{(t-2\tau_3+\tau_x)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{-\alpha(2l+x)} e^{(t-2\tau_3-\tau_x)} + \dots \right]$
$i(x,t)$	ІДЛ	$\frac{1-\rho_{R_i}}{2R_{XB}} \left[e^{(t-\tau_x)} - \rho_{R_H} e^{(t-2\tau_3+\tau_x)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{(t-2\tau_3-\tau_x)} - \rho_{R_i}\rho_{R_H}^2 e^{(t-4\tau_3+\tau_x)} + \dots \right]$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{1-\rho_{R_i}}{2R_{XB}} \left[e^{-\alpha x} e^{(t-\tau_x)} - \rho_{R_H} e^{-\alpha(2l-x)} e^{(t-2\tau_3+\tau_x)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{-\alpha(2l+x)} e^{(t-2\tau_3-\tau_x)} - \dots \right]$
$u_2(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H}) \left[e^{(t-\tau_3)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{(t-3\tau_3)} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2 e^{(t-5\tau_3)} \dots \right]}{2}$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H}) \left[e^{-\alpha l} e^{(t-\tau_3)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{-3\alpha l} e^{(t-3\tau_3)} + \dots \right]}{2}$
$i_2(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H}) \left[e^{(t-\tau_3)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{(t-3\tau_3)} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2 e^{(t-5\tau_3)} \dots \right]}{2R_{XB}}$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H}) \left[e^{-\alpha l} e^{(t-\tau_3)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{-3\alpha l} e^{(t-3\tau_3)} + \dots \right]}{2R_{XB}}$
$i_1(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i}) \left\{ e^{(t)} - \rho_{R_H} (1-\rho_{R_i}) \left[e^{(t-2\tau_3)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{(t-4\tau_3)} + \dots \right] \right\}}{2R_{XB}}$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i}) \left\{ e^{(t)} - \rho_{R_H} (1-\rho_{R_i}) \left[e^{-2\alpha l} e^{(t-2\tau_3)} + \rho_{R_i}\rho_{R_H} e^{-4\alpha l} e^{(t-4\tau_3)} + \dots \right] \right\}}{2R_{XB}}$

Аналіз співвідношень (табл.5.38) і графіків (рис.5.71) призводить до таких висновків:

1) при активному характері навантаження лінії і внутрішнього опору джерела форма хвиль, які формують миттєві значення напруги і струму в лінії, збігається з миттєвим значенням напруги джерела;

2) при увімкненні лінії до ідеального джерела напруги перехідний процес має імпульсно-коливальний характер при $R_H > R_{XB}$ ($\rho_{R_H} > 0$) і ступінчато-аперіодичний – при $R_H < R_{XB}$ ($\rho_{R_H} < 0$);

3) усталені значення відгуків ІДЛ при увімкненні до джерела напруги становлять:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = \frac{R_H E}{R_H + R_i}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R_H + R_i}.$$

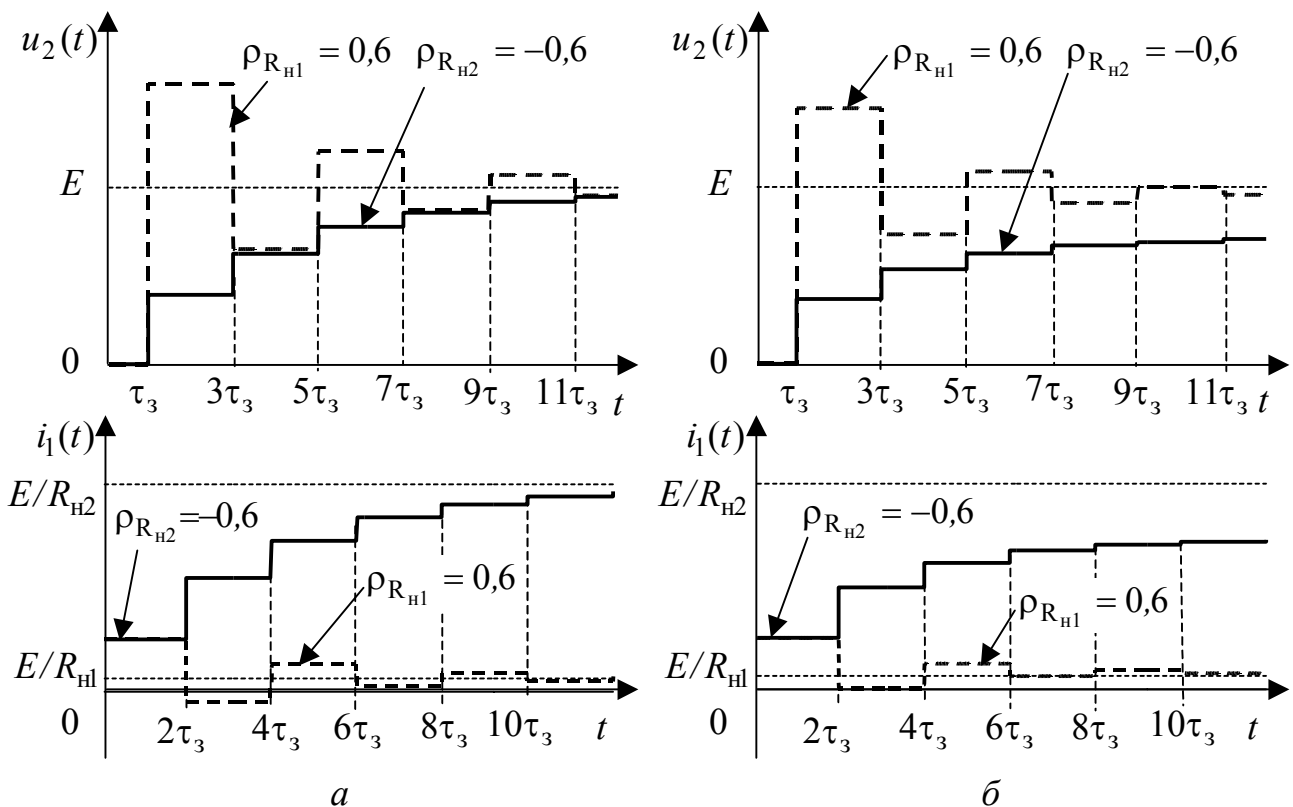


Рисунок 5.71 – Увімкнення ідеального джерела постійної ЕРС до ліній з активним навантаженням: *a* – відгуки ІДЛ; *б* – відгуки ДЛМВ і ЗДЛ ($\alpha l = 0,1$)

5.12.6 ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ з реактивним навантаженням

При навантаженні лінії на реактивність (C чи L) операторні опори навантаження і коефіцієнти відбиття є функціями змінної p :

$$Z_{HC}(p) = \frac{1}{pC}; \quad Z_{HL}(p) = pL;$$

$$\rho_{Z_{\text{HC}}}(p) = \frac{Z'_{\text{HC}}(p) - 1}{Z'_{\text{HC}}(p) + 1} = \frac{\frac{1}{pCR_{\text{XB}}} - 1}{\frac{1}{pCR_{\text{XB}}} + 1} = \frac{1 - pCR_{\text{XB}}}{1 + pCR_{\text{XB}}} = -\frac{p\tau_{RC} - 1}{p\tau_{RC} + 1}; \quad (5.202)$$

$$\rho_{Z_{\text{HL}}}(p) = \frac{Z'_{\text{HL}}(p) - 1}{Z'_{\text{HL}}(p) + 1} = \frac{\frac{pL}{R_{\text{XB}}} - 1}{\frac{pL}{R_{\text{XB}}} + 1} = \frac{pL - R_{\text{XB}}}{pL + R_{\text{XB}}} = \frac{p\tau_{RL} - 1}{p\tau_{RL} + 1}, \quad (5.203)$$

де $\tau_{RC} = CR_{\text{XB}}$; $\tau_{RL} = L/R_{\text{XB}}$ – сталі часу перехідних процесів в ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, навантажених на відповідний реактивний елемент.

Залежність від p коефіцієнтів відбиття (5.202) і (5.203) призводить до зміни форми хвилі при кожному відбитті від навантаження. Цим пояснюється те, що перехід від доданків, якими представлені зображення в табл.5.35, до оригіналів є вельми складним для членів, що відповідають другому і наступним відбиттям від навантаження.

Кількість відбиттів обмежується у разі узгодження лінії з джерелом ($R_i = R_{\text{XB}}$; $\rho_{Z_i}(p) = 0$).

ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, навантажені на ємність. Зображення напруги і струму в ІДЛ, узгодженої з джерелом і навантаженої на ємність, становлять:

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{E(p)}{2} \left[e^{-p\tau_x} + \rho_{Z_{\text{HC}}}(p) e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right] = \frac{E(p)}{2} \left[e^{-p\tau_x} - \frac{p\tau_{RC} - 1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right]; \\ I(x, p) = \frac{E(p)}{2R_{\text{XB}}} \left[e^{-p\tau_x} - \rho_{Z_{\text{HC}}}(p) e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right] = \frac{E(p)}{2R_{\text{XB}}} \left[e^{-p\tau_x} + \frac{p\tau_{RC} - 1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right]. \end{cases} \quad (5.204)$$

З системи (5.204) виходять зображення вихідних і вхідних напруг і струмів:

$$\begin{cases} U_2(p) = U(l, p) = E(p) \frac{1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-p\tau_3}; \\ U_1(p) = U(0, p) = \frac{E(p)}{2} \left(1 - \frac{p\tau_{RC} - 1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-2p\tau_3} \right); \end{cases} \quad (5.205)$$

$$\begin{cases} I_2(p) = I(l, p) = \frac{E(p)}{R_{\text{XB}}} \frac{p\tau_{RC}}{p\tau_{RC} + 1} e^{-p\tau_3}; \\ I_1(p) = I(0, p) = \frac{E(p)}{2R_{\text{XB}}} \left(1 + \frac{p\tau_{RC} - 1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-2p\tau_3} \right). \end{cases} \quad (5.206)$$

При увімкненні ліній до джерела постійної напруги (рис.5.72, а) $E(p) = E/p$ рівняння (5.204) приймуть вигляд:

$$\begin{cases} U(x, p) = \frac{E}{2} \left[\frac{1}{p} e^{-p\tau_x} - \frac{p\tau_{RC} - 1}{p(p\tau_{RC} + 1)} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right]; \\ I(x, p) = \frac{E}{2R_{XB}} \left[\frac{1}{p} e^{-p\tau_x} + \frac{p\tau_{RC} - 1}{p(p\tau_{RC} + 1)} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right]. \end{cases} \quad (5.207)$$

Застосування теорем щодо перетворень Лапласа та операторних відповідностей (див. табл.3.1 і 3.2) до зображень (5.207) дозволяє отримати оригінали:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}[U(x, p)] = \frac{E}{2} \left\{ 1(t - \tau_x) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p\tau_{RC} - 1}{p(p\tau_{RC} + 1)} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right] \right\} = \\ &= \frac{E}{2} \left[1(t - \tau_x) - \left(2e^{-\frac{t-2\tau_3+\tau_x}{\tau_{RC}}} - 1 \right) 1(t - 2\tau_3 + \tau_x) \right]; \end{aligned} \quad (5.208)$$

$$\begin{aligned} i(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}[I(x, p)] = \frac{E}{2R_{XB}} \left\{ 1(t - \tau_x) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p\tau_{RC} - 1}{p(p\tau_{RC} + 1)} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right] \right\} = \\ &= \frac{E}{2R_{XB}} \left[1(t - \tau_x) + \left(2e^{-\frac{t-2\tau_3+\tau_x}{\tau_{RC}}} - 1 \right) 1(t - 2\tau_3 + \tau_x) \right]. \end{aligned} \quad (5.209)$$

Перші доданки у рівняннях (5.208) і (5.209) відповідають падаючим хвилям, а другі – відбитим від навантаження. Процес формування миттєвих значень напруги в лінії $u(x, t)$ (5.208) як суми цих хвиль показаний на рис.5.72, в.

Падаючі хвилі за формою збігаються з миттєвим значенням ЕРС джерела, а їхній рівень обумовлено хвильовим опором лінії. Тому падаюча хвиля напруги (рис.5.72, в) має вигляд функції увімкнення, а її рівень становить $0,5E$. Падаюча хвиля струму у виразі (5.209) має таку саму форму і рівень $0,5E/R_{XB}$. В момент часу $t = \tau_3$ падаючі хвилі досягають кінця лінії з увімкненою ємністю і починається процес відбиття.

Незаряджена до початку перехідного процесу ємність еквівалентна при $t = \tau_3$ короткому замиканню. Це відповідає «миттєвому» значенню коефіцієнта відбиття $\rho_C|_{t=\tau_3} = -1$ і такому «миттєвому» рівню відбитої хвилі хвилі, щоб забезпечити значення $u_2(\tau_3) = 0$.

При увімкненні лінії до ідеального постійного джерела цей «миттєвий» рівень відбитої хвилі напруги дорівнює $-0,5E$. При $t > \tau_3$ ємність заряджається за експонентою зі сталою часу τ_{RC} і після заряду (теоретично $t \rightarrow \infty$, практично $t = (4...5)\tau_{RC}$) ємність еквівалентна розриву з коефіцієнтом відбиття $\rho_C|_{t \rightarrow \infty} = 1$. Тому по закінченні перехідного процесу рівні відбитої і падаючої хвиль однакові, а їхня сума при $t \rightarrow \infty$ становить E .

Миттєві значення вихідних і вхідних напруг і струмів, здобуті як оригінали зображень (5.205) і (5.206), зведені до табл.5.39. Графіки вхідної і вихідної напруг побудовані на рис.5.72, б, а струмів – на рис.5.73.

Часові діаграми $u_2(t)$ (рис.5.72, б) та $i_2(t)$ (рис.5.73) збігаються з аналогічними при увімкненні R, C кола до джерела постійної напруги (див. рис.1.11, а). Відмінність полягає тільки в тому, що заряд ємності, увімкненої до лінії, починається не одразу після комутації, а через деякий час $t = \tau_3$. Відповідно збільшується практична тривалість перехідного процесу в ємності.

Отримані аналогічно вирази для відгуків ДЛМВ і ЗДЛ наведені в табл.5.40.

Таблиця 5.39 – Відгуки ІДЛ

Відгук	Співвідношення
$u_2(t) = u(l, t)$	$E(1 - e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RC}}) \cdot 1(t - \tau_3)$
$u_1(t) = u(0, t)$	$\frac{E}{2} \left(1(t) - [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RC}} - 1] \cdot 1(t - 2\tau_3) \right)$
$i_2(t) = i(l, t)$	$\frac{E}{R_{XB}} e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RC}} \cdot 1(t - \tau_3)$
$i_1(t) = i(0, t)$	$\frac{E}{2R_{XB}} \left(1(t) + [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RC}} - 1] \cdot 1(t - 2\tau_3) \right)$

Таблиця 5.40 – Відгуки ДЛМВ і ЗДЛ

Відгук	Співвідношення
$u_2(t)$	$Ee^{-\alpha l} [1 - e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RC}}] \cdot 1(t - \tau_3)$
$u_1(t)$	$\frac{E}{2} \left(1(t) - e^{-2\alpha l} [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RC}} - 1] \cdot 1(t - 2\tau_3) \right)$
$i_2(t)$	$\frac{Ee^{-\alpha l}}{R_{XB}} e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RC}} \cdot 1(t - \tau_3)$
$i_1(t)$	$\frac{E}{2R_{XB}} \left(1(t) + e^{-2\alpha l} [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RC}} - 1] \cdot 1(t - 2\tau_3) \right)$

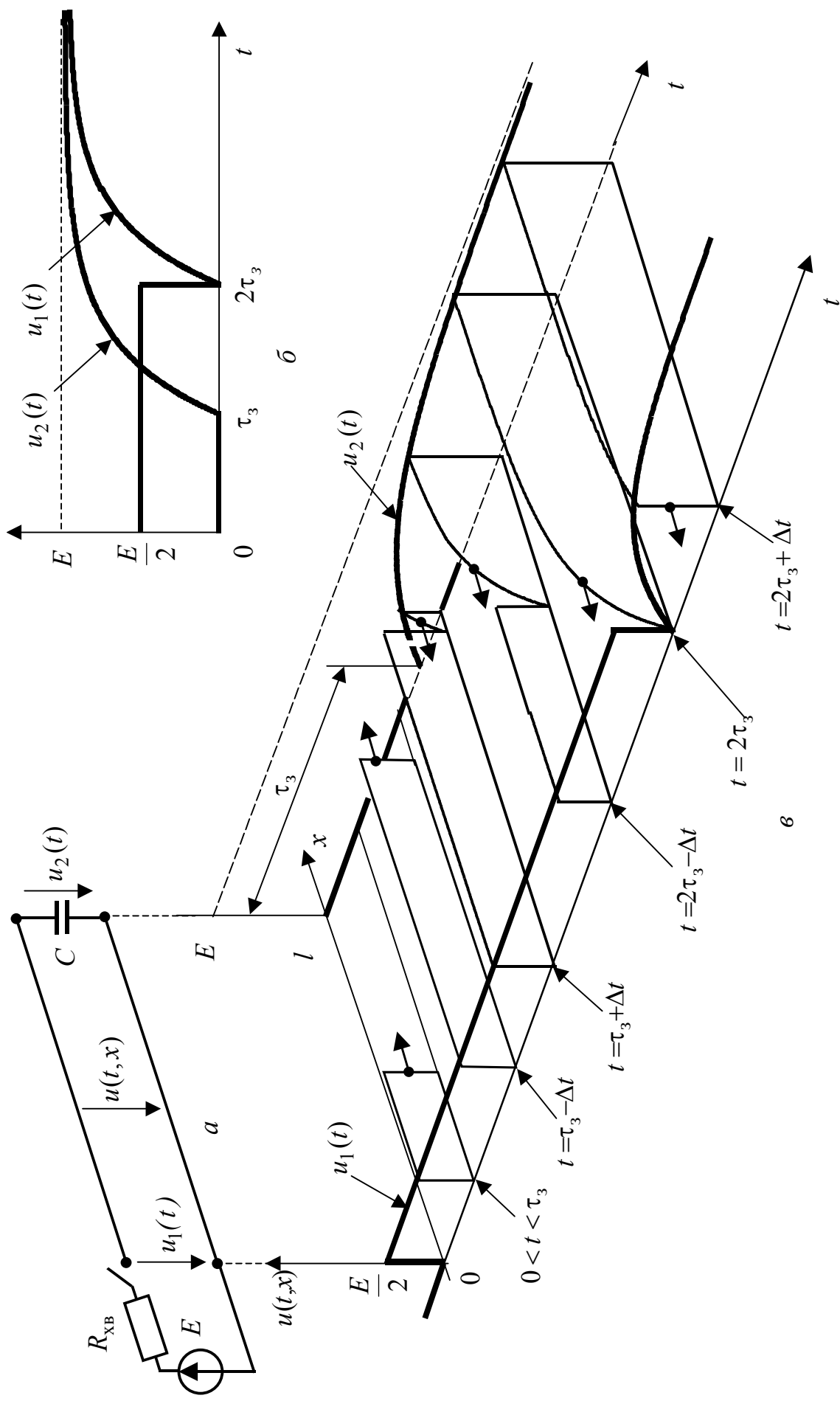


Рисунок 5.72 – Увімкнення ІДЛ, навантаженої на ємність, до узгодженого джерела постійної ЕРС:
a – схема; *б* – часові діаграми вхідної і вихідної напруги; ϵ – процес формування напруги

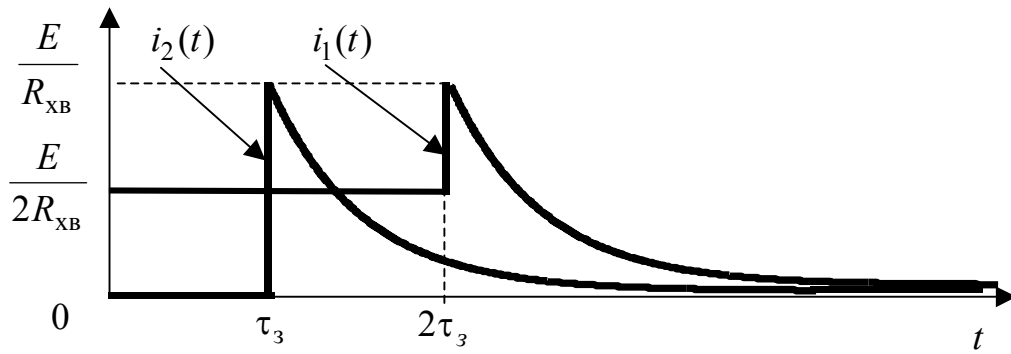


Рисунок 5.73 – Миттєві значення вхідного і вихідного струмів ІДЛ, навантаженої на ємність і увімкненої до узгодженого джерела постійної напруги

ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, навантажені на індуктивність. В ІДЛ, навантаженої на індуктивність і узгодженій з джерелом, зображення напруги і струму, з урахуванням виразу (5.203), становлять:

$$\begin{cases} U(x,p) = \frac{E(p)}{2} \left[e^{-p\tau_x} + \rho_{Z_{HL}}(p) e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right] = \frac{E(p)}{2} \left[e^{-p\tau_x} + \frac{p\tau_{RL} - 1}{p\tau_{RL} + 1} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right]; \\ I(x,p) = \frac{E(p)}{2R_{XB}} \left[e^{-p\tau_x} - \rho_{Z_{HL}}(p) e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right] = \frac{E(p)}{2R_{XB}} \left[e^{-p\tau_x} - \frac{p\tau_{RL} - 1}{p\tau_{RL} + 1} e^{-p(2\tau_3 - \tau_x)} \right]. \end{cases} \quad (5.210)$$

Зображення вихідних і вхідних напруг і струмів виходять з системи (5.210):

$$\begin{cases} U_2(p) = U(l,p) = E(p) \frac{p\tau_{RL}}{p\tau_{RL} + 1} e^{-p\tau_3}; \\ U_1(p) = U(0,p) = \frac{E(p)}{2} \left(1 + \frac{p\tau_{RL} - 1}{p\tau_{RL} + 1} e^{-2p\tau_3} \right); \end{cases} \quad (5.211)$$

$$\begin{cases} I_2(p) = I(l,p) = \frac{E(p)}{R_{XB}} \frac{1}{p\tau_{RL} + 1} e^{-p\tau_3}; \\ I_1(p) = I(0,p) = \frac{E(p)}{2R_{XB}} \left(1 - \frac{p\tau_{RL} - 1}{p\tau_{RL} + 1} e^{-2p\tau_3} \right). \end{cases} \quad (5.212)$$

Очевидна дуальність співвідношень (5.210) – (5.212), з одного боку, і (5.204) – (5.206) – з іншого. Це дозволяє використати для аналізу даного режиму результати, отримані у випадку навантаження на ємність: на підставі принципу дуальності складено табл.5.41, а також побудовано графіки (рис.5.74).

Зважаючи на нульову початкову умову ($i_L(0-) = 0$) і закон комутації ($i_L(0+) = 0$), до моменту приходу падаючої хвилі $i_L(\tau_3) = 0$, що відповідає розімкненому навантаженню і «миттєвому» коефіцієнту відбиття $\rho_L|_{t=\tau_3} = 1$.

Таблиця 5.41 – Відгуки ліній, навантажених на індуктивність

Відгук	Лінія	Співвідношення
$u_2(t)$	ІДЛ	$Ee^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-\tau_3)$
	ДЛМВ, ЗДЛ	$Ee^{-\alpha l} e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-\tau_3)$
$u_1(t)$	ІДЛ	$\frac{E}{2} \left(1(t) + [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}} - 1] \cdot 1(t-2\tau_3) \right)$
	ДЛМВ, ЗДЛ	$\frac{E}{2} \left(1(t) + e^{-2\alpha l} [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}} - 1] \cdot 1(t-2\tau_3) \right)$
$i_2(t)$	ІДЛ	$\frac{E}{R_{XB}} [1 - e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}}] \cdot 1(t-\tau_3)$
	ДЛМВ, ЗДЛ	$\frac{E}{R_{XB}} e^{-\alpha l} [1 - e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}}] \cdot 1(t-\tau_3)$
$i_1(t)$	ІДЛ	$\frac{E}{2R_{XB}} \left(1(t) - [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}} - 1] \cdot 1(t-2\tau_3) \right)$
	ДЛМВ, ЗДЛ	$\frac{E}{2R_{XB}} \left(1(t) - e^{-2\alpha l} [2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}} - 1] \cdot 1(t-2\tau_3) \right)$

При увімкненні ІДЛ, навантаженої на індуктивність, до ідеального джерела постійної ЕРС рівень відбитої хвилі при $t = \tau_3$ дорівнює рівню падаючої хвилі $0,5E$, внаслідок чого $u_2(\tau_3) = E$. При $t > \tau_3$ струм в індуктивності зростає, а напруга зменшується за експонентою зі сталою часу τ_{RL} . Після закінчення перехідного процесу (теоретично $t \rightarrow \infty$, практично $t = (4...5)\tau_{RL}$) індуктивність еквівалентна короткому замиканню, що відповідає коефіцієнту відбиття $\rho_L|_{t \rightarrow \infty} = -1$. Тому до моменту завершення перехідного процесу рівень відбитої хвилі становитиме $-0,5E$, що забезпечує нульове значення усталеної складової напруги на індуктивності.

Графіки $u_2(t)$ та $i_2(t)$ (рис.5.74) відрізняються тільки зсувом на $t = \tau_3$ від графіків при увімкненні R, L кола до джерела постійної напруги (див. рис.1.12, б); практична тривалість перехідного процесу в індуктивності збільшується на τ_3 , а у колі загалом – на $2\tau_3$.

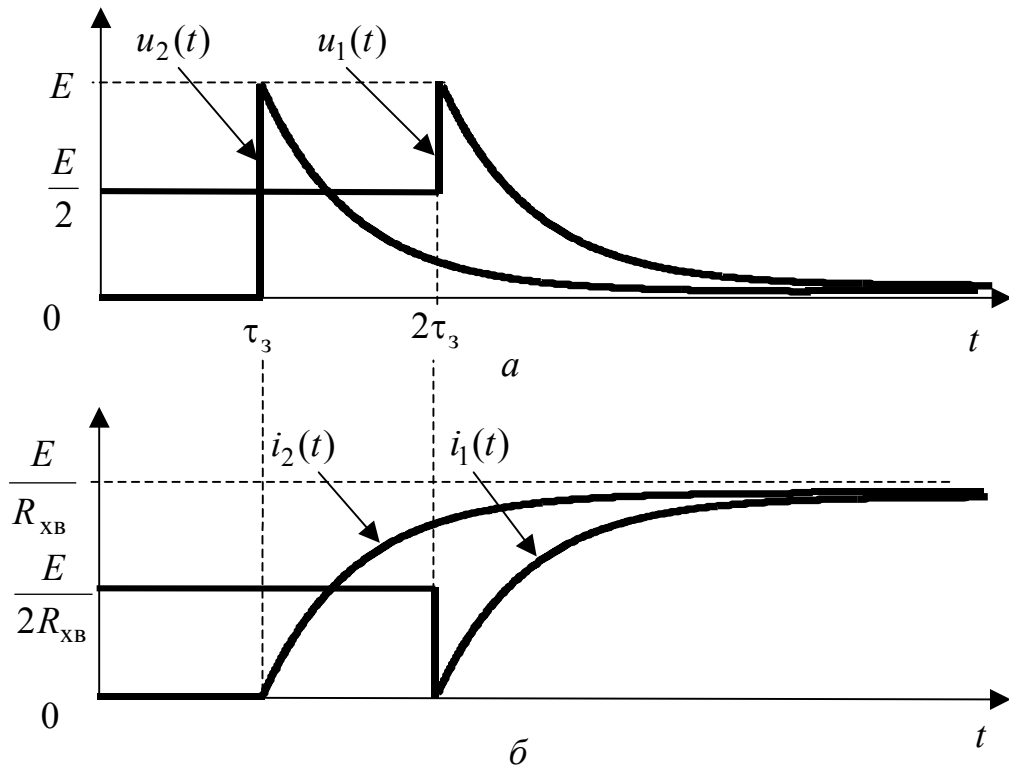


Рисунок 5.74 – ІДЛ, навантажена на індуктивність і увімкнена до узгодженого джерела постійної напруги:
a – вхідна і вихідна напруги; *б* – вхідний і вихідний струми

Приклад 5.31. До входу розімкненої лінії увімкнено ідеальне джерело синусоїдної ЕРС $e(t) = 5\sin(2\pi \cdot 10^8 t)$ В. Довжина лінії $l = 4$ м; швидкість поширення хвиль $v \approx 2 \cdot 10^8$ м/с. Визначити вихідну напругу для ІДЛ і ЗДЛ з погонним ослабленням $\alpha = 0,025$ Нп/м. Побудувати графіки $e(t)$ та $u_2(t)$.

Розв’язання. Обчислимо затримку та ослаблення коливань в лінії:

$$\tau_3 = \frac{l}{v} = \frac{4}{2 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с} = 20 \text{ нс}; \quad \alpha l = 0,025 \cdot 4 = 0,1 \text{ Нп.}$$

Щоб знайти вихідну напругу ІДЛ, скористаємось виразом (5.194):

$$u_2(t) = 2[e(t - \tau_3) - e(t - 3\tau_3) + e(t - 5\tau_3) - e(t - 7\tau_3) + \dots] = 10 \left\{ \sin[2\pi 10^8(t - 2 \cdot 10^{-8})] - \sin[2\pi 10^8(t - 6 \cdot 10^{-8})] + \sin[2\pi 10^8(t - 10^{-7})] - \sin[2\pi 10^8(t - 1,4 \cdot 10^{-7})] - \dots \right\} \text{ В.}$$

Розрахунок вихідної напруги ЗДЛ виконаємо на підставі формули (5.196):

$$u_2(t) = 2[e^{-\alpha l} e(t - \tau_3) - e^{-3\alpha l} e(t - 3\tau_3) + e^{-5\alpha l} e(t - 5\tau_3) - \dots] = 10 \left\{ e^{-0,1} \sin[2\pi 10^8(t - 2 \cdot 10^{-8})] - e^{-0,3} \sin[2\pi 10^8(t - 6 \cdot 10^{-8})] + e^{-0,5} \sin[2\pi 10^8(t - 10^{-7})] - e^{-0,7} \sin[2\pi 10^8(t - 1,4 \cdot 10^{-7})] - \dots \right\} \text{ В.}$$

Графіки шуканих величин побудовані на рис.5.75.

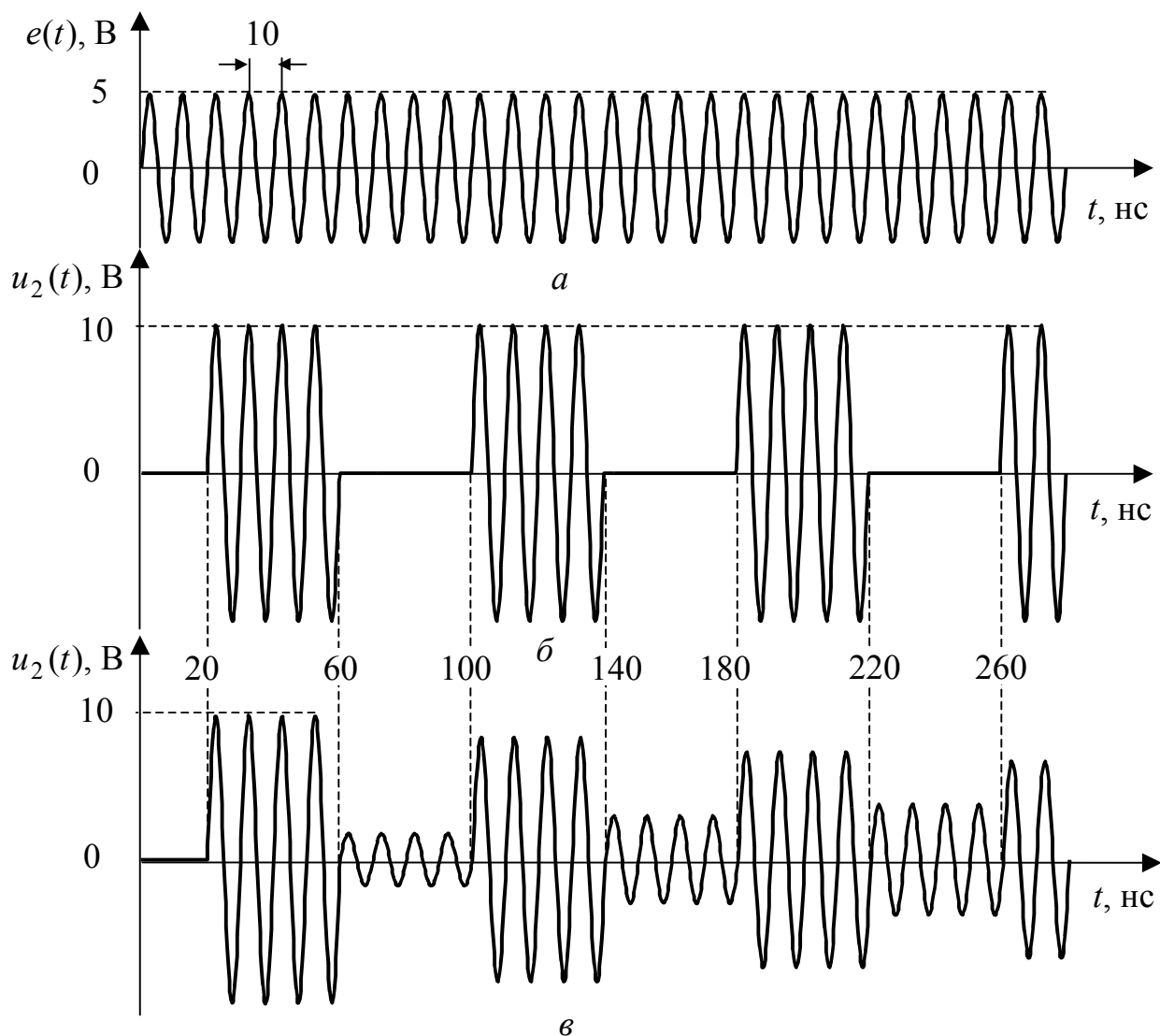


Рисунок 5.75 – Часові діаграми до прикладу 5.31: *a* – ЕРС джерела; напруги на виході: *б* – ІДЛ; *в* – ЗДЛ

Приклад 5.32. До ІДЛ, навантаженої на активний опір, увімкнено ідеальне джерело синусоїдного струму $i_{дж}(t) = 40\sin(2\pi \cdot 10^8 t)$ мА. Параметри лінії: хвильовий опір $R_{хв} = 50$ Ом; довжина $l = 4$ м; швидкість поширення хвиль $v \approx 2 \cdot 10^8$ м/с. Знайти вихідну напругу для двох значень опору навантаження $R_{н1} = 200$ Ом, $R_{н2} = 12,5$ Ом. Побудувати графіки $u_2(t)$.

Розв'язання. Використаємо знайдені у прикладі 5.31 значення часу затримки і ослаблення в лінії: $\tau_3 = 2 \cdot 10^{-8}$ с; $\alpha l = 0,1$ Нп.

Виведемо вираз для зображення вихідної напруги при увімкненні ІДЛ до ідеального джерела струму, використовуючи формулу для $U_2(p)$ (див. табл.5.35) і граничний перехід від джерела ЕРС до джерела струму при $R_i \rightarrow \infty$ ($\rho_{R_i} \rightarrow 1$):

$$\begin{aligned}
 U_2(p) &= \lim_{\substack{R_i \rightarrow \infty \\ \rho_{R_i} \rightarrow 1}} \frac{I_{\text{дж}}(p) R_i (1 - \rho_{R_i}) (1 + \rho_{R_H}) (e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i} \rho_{R_H} e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2 \rho_{R_H}^2 e^{-5p\tau_3} + \dots)}{2} = \\
 &= \lim_{R_i \rightarrow \infty} \frac{I_{\text{дж}}(p) R_{\text{ХВ}} R_i (1 + \rho_{R_H}) (e^{-p\tau_3} + \rho_{R_H} e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_H}^2 e^{-5p\tau_3} + \dots)}{R_i + 1} = \\
 &= I_{\text{дж}}(p) R_{\text{ХВ}} (1 + \rho_{R_H}) (e^{-p\tau_3} + \rho_{R_H} e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_H}^2 e^{-5p\tau_3} + \dots). \quad (5.213)
 \end{aligned}$$

Перейдемо від зображення (5.213) до оригіналу:

$$u_2(t) = R_{\text{ХВ}} (1 + \rho_{R_H}) (i_{\text{дж}}(t - \tau_3) + \rho_{R_H} i_{\text{дж}}(t - 3\tau_3) + \rho_{R_H}^2 i_{\text{дж}}(t - 5\tau_3) + \dots). \quad (5.214)$$

Обчислимо коефіцієнти відбиття:

$$\rho_{R_{H1}} = \frac{R_{H1} / R_{\text{ХВ}} - 1}{R_{H1} / R_{\text{ХВ}} + 1} = \frac{4 - 1}{4 + 1} = 0,6; \quad \rho_{R_{H2}} = \frac{R_{H2} / R_{\text{ХВ}} - 1}{R_{H2} / R_{\text{ХВ}} + 1} = \frac{0,25 - 1}{0,25 + 1} = -0,6.$$

Використовуючи співвідношення (5.214) і задані в умові задачі параметри, запишемо необхідні для побудови графіків (рис.5.76) рівняння:

$$u_2(t) = 3,2 \left[\sin 2\pi 10^8 (t - 2 \cdot 10^{-8}) + 0,6 \sin 2\pi 10^8 (t - 6 \cdot 10^{-8}) + 0,6^2 \sin 2\pi 10^8 (t - 10^{-7}) + \dots \right] \text{ В};$$

$$u_2(t) = 0,8 \left[\sin 2\pi 10^8 (t - 2 \cdot 10^{-8}) - 0,6 \sin 2\pi 10^8 (t - 6 \cdot 10^{-8}) + 0,6^2 \sin 2\pi 10^8 (t - 10^{-7}) + \dots \right] \text{ В}.$$

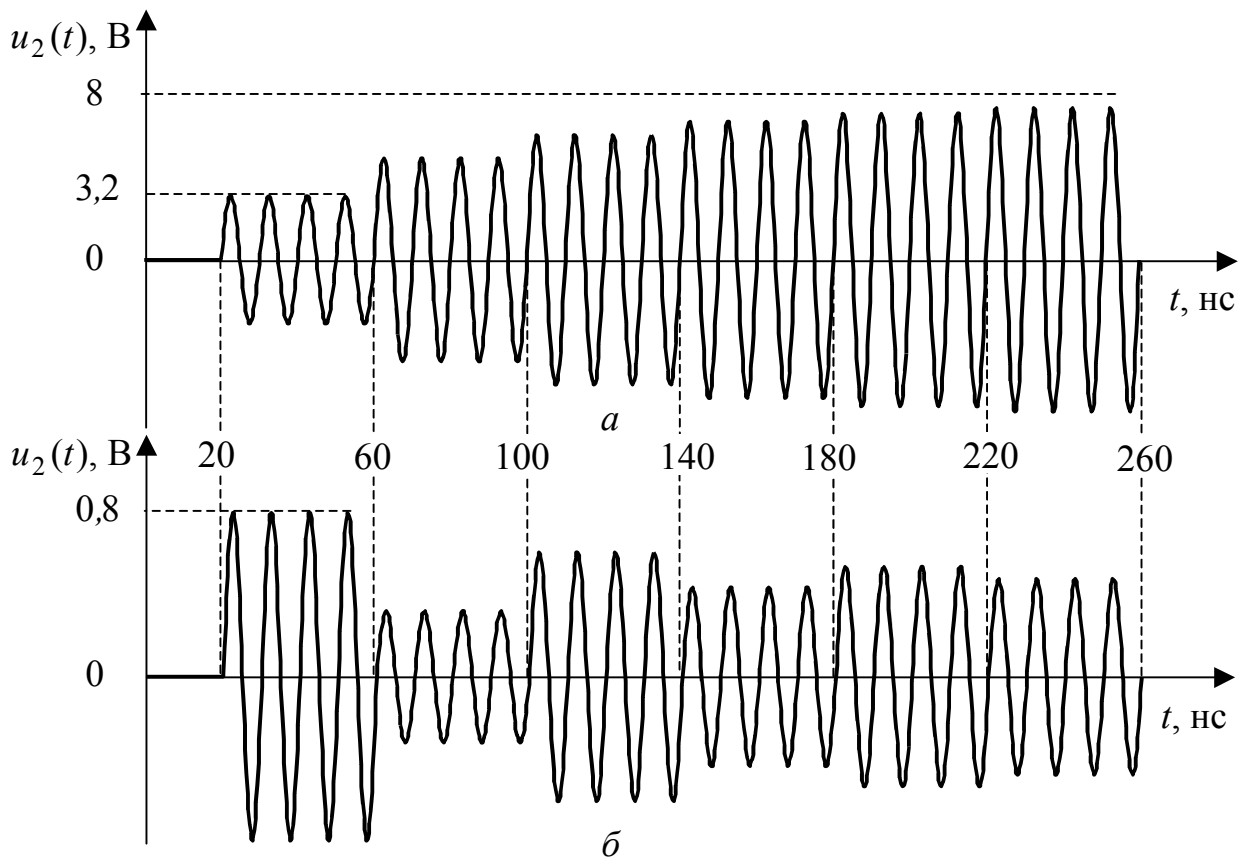


Рисунок 5.76 – Часові діаграми до прикладу 5.32:

$a - R_{H1} = 200 \text{ Ом}; \quad б - R_{H2} = 12,5 \text{ Ом}$

Приклад 5.33. Джерело напруги, узгоджене з ІДЛ, формує експоненційний імпульс $u_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{-t/\tau_{\text{вх}}} \cdot 1(t)$; $U_0 = 5 \text{ В}$; $\tau_{\text{вх}} = 5 \text{ нс}$. Параметри лінії наведені у прикладі 5.32. Лінію навантажено на індуктивну котушку: $R_{\text{н}} = 50 \text{ Ом}$; $L_{\text{н}} = 1 \text{ мкГн}$. Визначити вихідну напругу лінії.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнт відбиття від навантаження:

$$\rho_{Z_{\text{нЛ}}}(p) = \frac{Z_{\text{нЛ}}(p) - R_{\text{хв}}}{Z_{\text{нЛ}}(p) + R_{\text{хв}}} = \frac{R_{\text{н}} + pL - R_{\text{хв}}}{R_{\text{н}} + pL + R_{\text{хв}}} = \frac{p \cdot 10^{-6}}{p \cdot 10^{-6} + 100} = \frac{p}{p + 1/\tau_{\text{н}}},$$

де $\tau_{\text{н}} = \frac{L}{R_{\text{н}} + R_{\text{хв}}} = 10^{-8} \text{ с} = 10 \text{ нс}$ – стала часу навантаженої лінії.

Складемо вираз для зображення вхідної напруги:

$$U_{\text{вх}}(p) = \frac{U_0}{p + 1/\tau_{\text{вх}}} = \frac{5}{p + 2 \cdot 10^8}.$$

За формулою для зображення вихідної напруги ІДЛ (табл.5.35), враховуючи $\rho_{Z_i} = 0$ і вирази для $\rho_{Z_{\text{нЛ}}}(p)$ і $U_{\text{вх}}(p)$, запишемо у загальному вигляді:

$$U_2(p) = 0,5U_0 \left[\frac{1}{p + 1/\tau_{\text{вх}}} e^{-p\tau_3} + \frac{p}{(p + 1/\tau_{\text{вх}})(p + 1/\tau_{\text{н}})} e^{-p\tau_3} \right].$$

На підставі відповідностей (див. табл.3.1, п. 5 і 10) перейдемо від зображення $U_2(p)$ до оригіналу:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 0,5U_0 \left[e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{\text{вх}}}} + \frac{1}{1/\tau_{\text{вх}} - 1/\tau_{\text{н}}} \left(\frac{1}{\tau_{\text{вх}}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{\text{вх}}}} - \frac{1}{\tau_{\text{н}}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{\text{н}}}} \right) \right] = \\ &= 0,5U_0 \left(\frac{2 - \tau_{\text{вх}}/\tau_{\text{н}}}{1 - \tau_{\text{вх}}/\tau_{\text{н}}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{\text{вх}}}} - \frac{1}{\tau_{\text{н}}/\tau_{\text{вх}} - 1} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{\text{н}}}} \right). \end{aligned}$$

Для побудови графіка (рис.5.77) запишемо кількісний вираз:

$$u_2(t) = 2,5(3e^{-(t-2 \cdot 10^{-8})/5 \cdot 10^{-9}} - e^{-(t-2 \cdot 10^{-8})/10^{-8}}) \text{ В}.$$

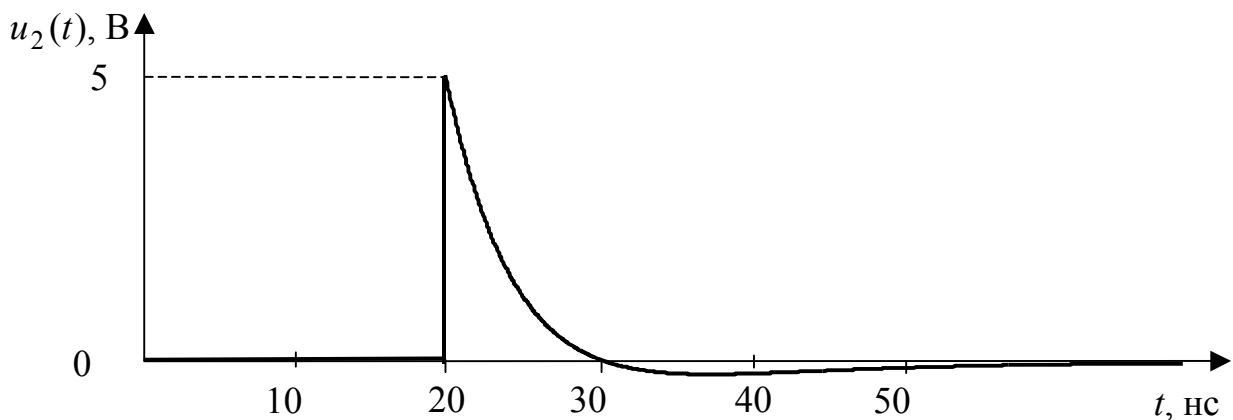


Рисунок 5.77 – До прикладу 5.33

5.13 Операторні функції і часові характеристики довгих ліній

Загалом операторні функції (ОПФ і ОВФ) для ліній з втратами визначають з огляду на співвідношення (5.181) – (5.183) або (5.187) – (5.189), а для ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ – використовуючи зображення відгуків (табл.5.35).

Оскільки подальше викладення обмежене розглядом характеристик ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, вирази для операторних функцій саме цих ліній зведено до табл.5.42.

Таблиця 5.42 – Операторні функції ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ

ОПФ, ОВФ	Лінія	Співвідношення
$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{E(p)}$	ІДЛ	$\frac{[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{[1 - \rho_{Z_i}(p)][1 + \rho_{Z_H}(p)][e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
$H_I(p) = \frac{I_2(p)}{I_{дж}(p)}$	ІДЛ	$\frac{[1 + \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)][e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{[1 + \rho_{Z_i}(p)][1 - \rho_{Z_H}(p)][e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + \dots]}{2}$
$Y_{вх}(p) = \frac{1}{Z_{вх}(p)}$	ІДЛ	$\frac{[1 - \rho_{Z_i}(p)]\{1 - \rho_{Z_H}(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4p\tau_3} + \dots]\}}{2Z_{вх}(p)}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{[1 - \rho_{Z_i}(p)]\{1 - \rho_{Z_H}(p)[1 - \rho_{Z_i}(p)][e^{-2\alpha l} e^{-2p\tau_3} + \rho_{Z_i}(p)\rho_{Z_H}(p)e^{-4\alpha l} e^{-4p\tau_3} + \dots]\}}{2Z_{вх}(p)}$

Застосування ОПФ або ОВФ для визначення відгуків ліній на довільні дії принципово не відрізняється від подібних розрахунків для кіл із зосередженими параметрами (див. розд. 3). Так, виходячи з визначення ОПФ (3.71), зображення відгуку лінії $F_2(p)$ становить:

$$F_2(p) = F_1(p)H(p), \quad (5.215)$$

де $F_1(p)$ – зображення дії.

Якщо для визначення відгуку ДЛ на довільну дію застосовують інтеграли накладання, тоді попередньо обчислюють одну з часових характеристик: перехідна характеристика $g(t)$ є оригіналом зображення, що дорівнює відношенню ОПФ (ОВФ) до оператора p (3.125); а імпульсна $h(t)$ – оригіналом ОПФ (ОВФ) (3.130).

Для переходу до оригіналів (часових характеристик) використовують типові операторні відповідності та властивості перетворення Лапласа (лінійності та запізнення) (див. табл.3.1, 3.2).

5.13.1 Лінії, узгоджені з навантаженням

У цьому режимі $\rho_{Z_H}(p) = 0$, $Z_{XB}(p) = R_{XB}$, отже, вирази операторних функцій і часових характеристик спрощуються (табл.5.43).

Таблиця 5.43 – Операторні функції та часові характеристики ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, узгоджених з навантаженням

ОПФ, ОВФ, $g(t), h(t)$	Лінія	Співвідношення
$H_U(p) = H_I(p)$	ІДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2} e^{-p\tau_3} = \frac{R_{XB}}{Z_i(p) + R_{XB}} e^{-p\tau_3}$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2} e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} = \frac{R_{XB}}{Z_i(p) + R_{XB}} e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3}$
$Y_{BX}(p) = \frac{1}{Z_{BX}(p)}$	ІДЛ, ДЛМВ, ЗДЛ	$\frac{1 - \rho_{Z_i}(p)}{2R_{XB}} = \frac{1}{Z_i(p) + R_{XB}}$
$g_u(t) = g_i(t)$	ІДЛ	$\frac{R_{XB}}{R_i + R_{XB}} \cdot 1(t - \tau_3)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{R_{XB}}{R_i + R_{XB}} e^{-\alpha l} \cdot 1(t - \tau_3)$
$h_u(t) = h_i(t)$	ІДЛ	$\frac{R_{XB}}{R_i + R_{XB}} \cdot \delta(t - \tau_3)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{R_{XB}}{R_i + R_{XB}} e^{-\alpha l} \cdot \delta(t - \tau_3)$
$g_Y(t)$	ІДЛ, ДЛМВ, ЗДЛ	$\frac{1}{R_i + R_{XB}} \cdot 1(t)$
$h_Y(t)$		$\frac{1}{R_i + R_{XB}} \cdot \delta(t)$

У табл.5.43 вирази для часових характеристик наведені для активного внутрішнього опору джерела: $Z_i(p) = R_i$. При цьому ОПФ і ОВФ відповідають операторним функціям неспотворюючого кола (3.119):

$$H(p) = H_0 e^{-pt_0},$$

де $H_0 = \frac{R_{XB}}{R_i + R_{XB}}$, $t_0 = \tau_3$ – для ОПФ; $H_0 = \frac{1}{R_i + R_{XB}}$, $t_0 = 0$ – для ОВФ.

Часові характеристики узгоджених ліній при дії ідеального джерела напруги становлять:

1) для ІДЛ

$$\begin{aligned} g_u(t) = g_i(t) &= 1(t - \tau_3); & h_u(t) = h_i(t) &= \delta(t - \tau_3); \\ g_Y(t) &= (1/R_{XB}) \cdot 1(t - \tau_3); & h_Y(t) &= (1/R_{XB}) \cdot \delta(t - \tau_3); \end{aligned} \quad (5.216)$$

2) для ДЛМВ і ЗДЛ

$$\begin{aligned} g_u(t) = g_i(t) &= e^{-\alpha t} \cdot 1(t - \tau_3); & h_u(t) = h_i(t) &= e^{-\alpha t} \cdot \delta(t - \tau_3); \\ g_Y(t) &= (1/R_{XB}) e^{-\alpha t} \cdot 1(t - \tau_3); & h_Y(t) &= (1/R_{XB}) e^{-\alpha t} \cdot \delta(t - \tau_3). \end{aligned} \quad (5.217)$$

Графіки часових характеристик (5.216) і (5.217) підтверджують неспотворюючий характер узгоджених ліній (рис.5.78).

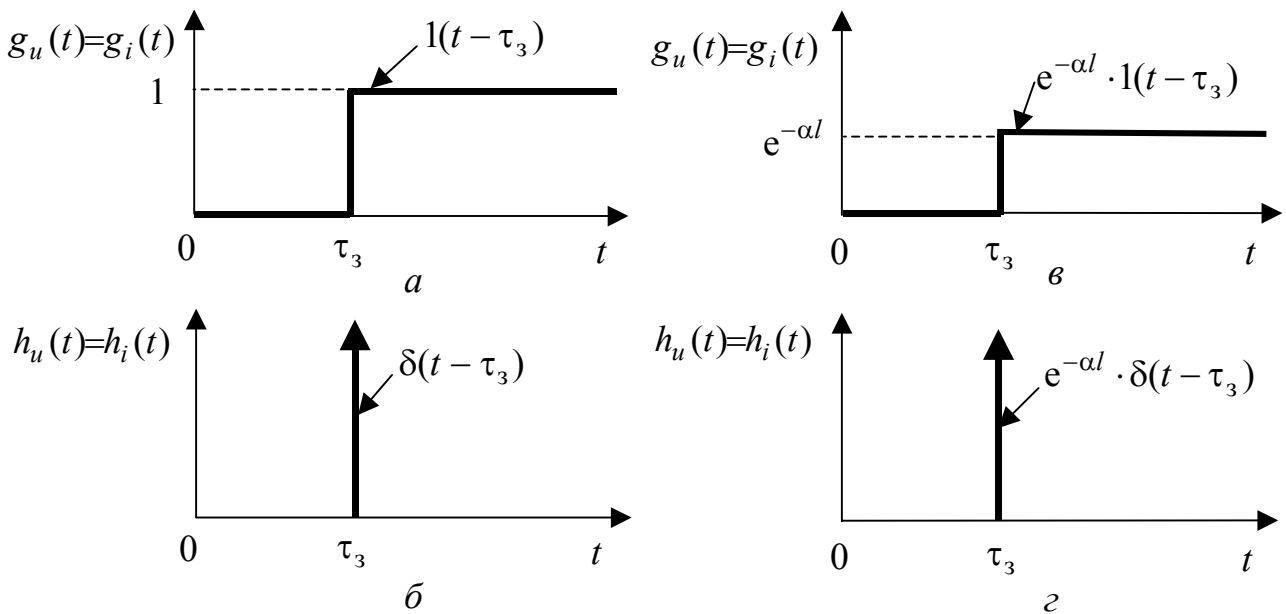


Рисунок 5.78 – Графіки часових характеристик узгоджених ліній:
а, б – ІДЛ; в, з – ДЛМВ і ЗДЛ

5.13.2 Лінії, навантажені на активний опір, при активному внутрішньому опорі джерела

Підстановка у формули (табл.5.42) дійсних значень коефіцієнтів відбиття від навантаження і джерела (5.201) призводить до виразів ОПФ і ОВФ для даного режиму ліній (табл.5.44). Співвідношення з табл.5.44 підтверджуються також результатами п. 5.12.5.

Часові характеристики, здобуті як оригінали ОПФ і ОВФ, наведені в табл.5.45.

Як приклад на рис.5.79 зображені графіки перехідних характеристик для навантажених на активний опір ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, які увімкнено до ідеального джерела напруги. Параметри навантаження такі ж самі, як у п. 5.12.5 (див. рис.5.71).

Таблиця 5.44 – Операторні функції ліній з активними опорами навантаження і джерела

ОПФ, ОВФ	Лінія	Співвідношення
$H_U(p)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})(e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5p\tau_3} + \dots)}{2}$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})(e^{-\alpha l}e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5\alpha l}e^{-5p\tau_3} + \dots)}{2}$
$H_I(p)$	ІДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})(e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5p\tau_3} + \dots)}{2}$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})(e^{-\alpha l}e^{-p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}e^{-3p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-5\alpha l}e^{-5p\tau_3} + \dots)}{2}$
$Y_{BX}(p)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})[1-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i})(e^{-2p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4p\tau_3} + \rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2e^{-6p\tau_3} + \dots)]}{2R_{XB}}$
	ДЛМВ іЗДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})[1-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i})(e^{-2\alpha l}e^{-2p\tau_3} + \rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4\alpha l}e^{-4p\tau_3} + \dots)]}{2R_{XB}}$

Аналіз виразів для часових характеристик (табл.5.45) і графіків (рис.5.79) показує:

4) перехідні характеристики мають ступінчастий характер, висоти і знаки «сходинок» визначаються величинами і знаками коефіцієнтів відбиття ρ_{R_H} і ρ_{R_i} , а тривалість дорівнює $2\tau_3$;

5) імпульсні характеристики є сукупністю дельта-функцій, інтервал між якими становить $2\tau_3$, а множники дорівнюють висотам відповідних «сходинок» $g(t)$ з урахуванням їхніх знаків;

6) усталені значення перехідних характеристик ІДЛ становлять:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_u(t) = \frac{R_H}{R_H + R_i}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_Y(t) = \frac{1}{R_H + R_i}.$$

Граничні значення опору навантаження відповідають розімкненій ($R_H \rightarrow \infty$) і замкненій ($R_H = 0$) лініям.

Таблиця 5.45 – Часові характеристики ліній з активними опорами навантаження і джерела

$g(t)$, $h(t)$	Лінія	Співвідношення
$g_u(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})[1(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}1(t-3\tau_3)+\rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^21(t-5\tau_3)+\dots]}{2}$
	ДПМВ іЗДП	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})[e^{-\alpha l}1(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}1(t-3\tau_3)+\dots]}{2}$
$h_u(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})[\delta(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}\delta(t-3\tau_3)+\rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2\delta(t-5\tau_3)+\dots]}{2}$
	ДПМВ іЗДП	$\frac{(1-\rho_{R_i})(1+\rho_{R_H})[e^{-\alpha l}\delta(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}\delta(t-3\tau_3)+\dots]}{2}$
$g_i(t)$	ІДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})[1(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}1(t-3\tau_3)+\rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^21(t-5\tau_3)\dots]}{2R_{XB}}$
	ДПМВ іЗДП	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})[e^{-\alpha l}1(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}1(t-3\tau_3)+\dots]}{2R_{XB}}$
$h_i(t)$	ІДЛ	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})[\delta(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}\delta(t-3\tau_3)+\rho_{R_i}^2\rho_{R_H}^2\delta(t-5\tau_3)\dots]}{2}$
	ДПМВ іЗДП	$\frac{(1+\rho_{R_i})(1-\rho_{R_H})[e^{-\alpha l}\delta(t-\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-3\alpha l}\delta(t-3\tau_3)+\dots]}{2}$
$g_Y(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})\{1(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i})[1(t-2\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}1(t-4\tau_3)+\dots]\}}{2R_{XB}}$
	ДПМВ іЗДП	$\frac{(1-\rho_{R_i})\{1(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i})[e^{-2\alpha l}1(t-2\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4\alpha l}1(t-4\tau_3)+\dots]\}}{2R_{XB}}$
$h_Y(t)$	ІДЛ	$\frac{(1-\rho_{R_i})\{\delta(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i})[\delta(t-2\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}\delta(t-4\tau_3)+\dots]\}}{2R_{XB}}$
	ДПМВ іЗДП	$\frac{(1-\rho_{R_i})\{\delta(t)-\rho_{R_H}(1-\rho_{R_i})[e^{-2\alpha l}\delta(t-2\tau_3)+\rho_{R_i}\rho_{R_H}e^{-4\alpha l}\delta(t-4\tau_3)+\dots]\}}{2R_{XB}}$

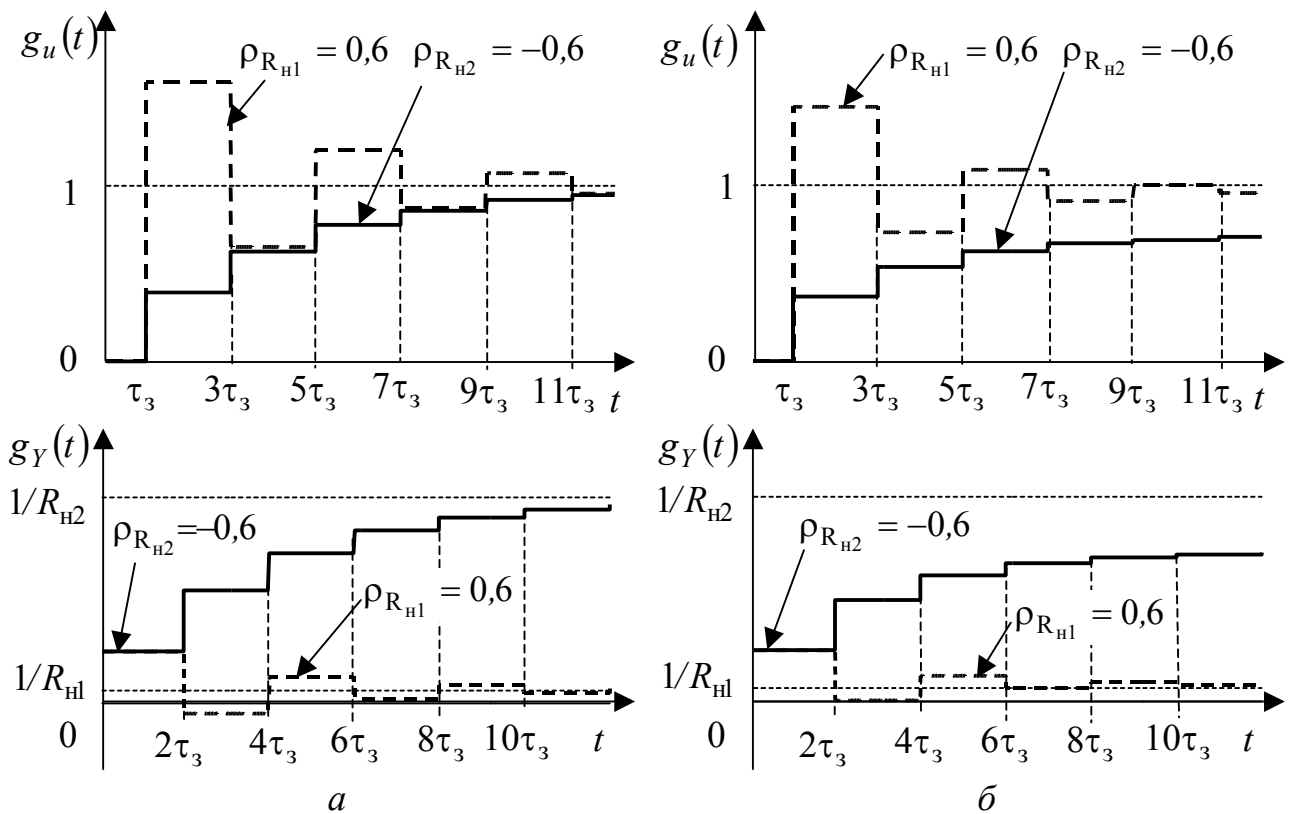


Рисунок 5.79 – Перехідні характеристики ліній з активним навантаженням та ідеальним джерелом : *a* – ІДЛ; *б* – ДЛМВ і ЗДЛ ($\alpha l = 0,1$)

5.13.3 Розімкнені та замкнені лінії

Операторні функції та часові характеристики розімкнених ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ виходять з формул (табл.5.44 і 5.45) при $\rho_{R_n} = 1$. Для ІДЛ операторні функції можна знайти, користуючись формулами (5.192).

Вирази для ОПФ і ОВФ, а також часові характеристики при дії ідеального джерела напруги ($\rho_{R_i} = -1$) наведені в табл.5.46.

Графіки перехідних характеристик (рис.5.80, *a, в* і 5.81, *a, в*) збігаються з графіками відгуків на дію ідеального постійного джерела (рис.5.66 – 5.68), якщо покласти $E = 1(t)$. Графіки імпульсних характеристик зображені на рис.5.80, *б, г* і 5.81, *б, г*.

Операторні функції та часові характеристики замкнених ліній можна отримати за співвідношеннями з табл.5.44 і 5.45 при $\rho_{R_n} = -1$ або на підставі дуальних відповідностей з розімкненими лініями.

5.13.4 ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, навантажені на реактивні опори та узгоджені з джерелами

Розгляд операторних функцій і часових характеристик для цього випадку ґрунтується на аналізі перехідних процесів (див. п. 5.12.6).

Таблиця 5.46 – Операторні функції та часові характеристики розімкнених ліній при дії ідеального джерела

$g(t), h(t)$	Лінія	Співвідношення
$H_U(p)$	ІДЛ	$2(e^{-p\tau_3} - e^{-3p\tau_3} + e^{-5p\tau_3} - \dots)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$2(e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3} - e^{-3\alpha l} e^{-3p\tau_3} + e^{-5\alpha l} e^{-5p\tau_3} - \dots)$
$\frac{Y_{\text{BX}}(p)}{G_{\text{XB}}}$	ІДЛ	$1 - 2e^{-2p\tau_3} + 2e^{-4p\tau_3} - 2e^{-6p\tau_3} + \dots$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$1 - 2e^{-2\alpha l} e^{-2p\tau_3} + 2e^{-4\alpha l} e^{-4p\tau_3} - \dots$
$g_u(t)$	ІДЛ	$2[1(t - \tau_3) - 1(t - 3\tau_3) + 1(t - 5\tau_3) - \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$2[e^{-\alpha l} 1(t - \tau_3) - e^{-3\alpha l} 1(t - 3\tau_3) + e^{-5\alpha l} 1(t - 5\tau_3) - \dots]$
$h_u(t)$	ІДЛ	$2[\delta(t - \tau_3) - \delta(t - 3\tau_3) + \delta(t - 5\tau_3) - \dots]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$2[e^{-\alpha l} \delta(t - \tau_3) - e^{-3\alpha l} \delta(t - 3\tau_3) + e^{-5\alpha l} \delta(t - 5\tau_3) - \dots]$
$\frac{g_Y(t)}{G_{\text{XB}}}$	ІДЛ	$1(t) - 2 \cdot 1(t - 2\tau_3) + 2 \cdot 1(t - 4\tau_3) - 2 \cdot 1(t - 6\tau_3) + \dots$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$1(t) - 2e^{-2\alpha l} \cdot 1(t - 2\tau_3) + 2e^{-4\alpha l} \cdot 1(t - 4\tau_3) - \dots$
$\frac{h_Y(t)}{G_{\text{XB}}}$	ІДЛ	$\delta(t) - 2 \cdot \delta(t - 2\tau_3) + 2 \cdot \delta(t - 4\tau_3) - 2 \cdot \delta(t - 6\tau_3) + \dots$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\delta(t) - 2e^{-2\alpha l} \cdot \delta(t - 2\tau_3) + 2e^{-4\alpha l} \cdot \delta(t - 4\tau_3) - \dots$

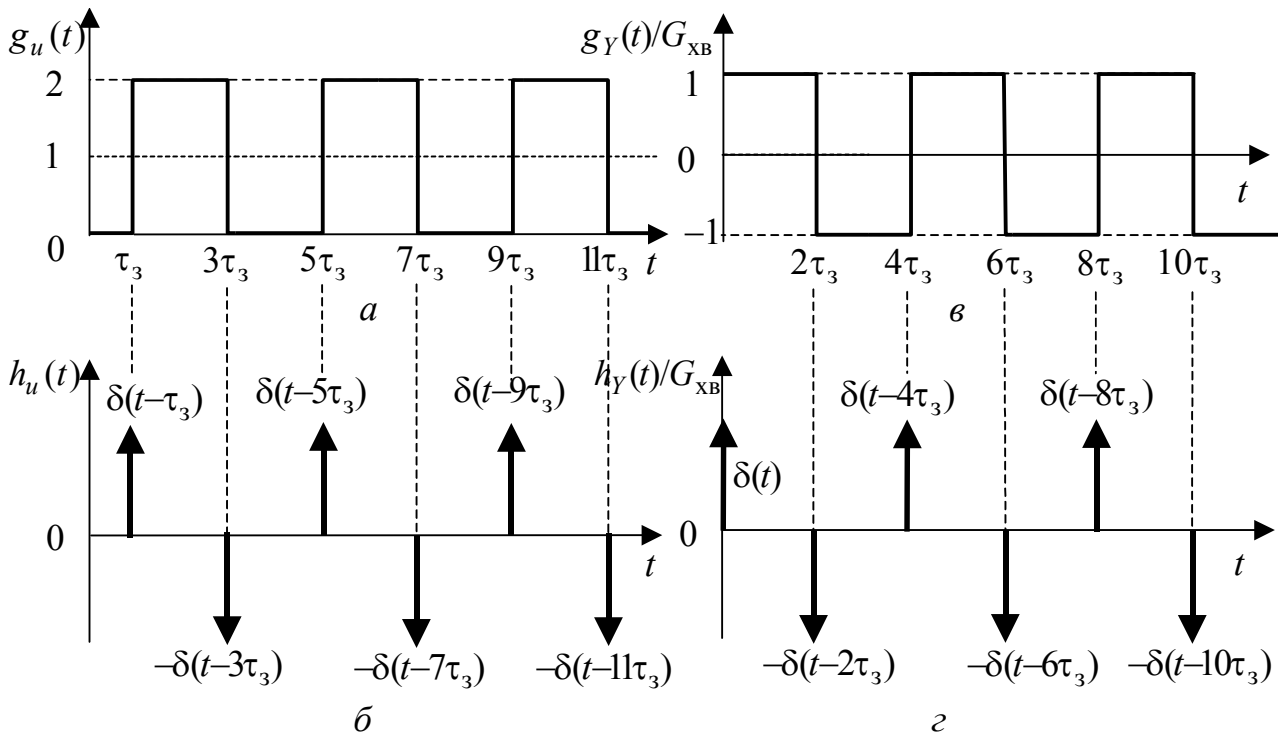


Рисунок 5.80 – Перехідні та імпульсні характеристики розімкненої ІДЛ: а, б – за напругою; в, г – вхідної провідності

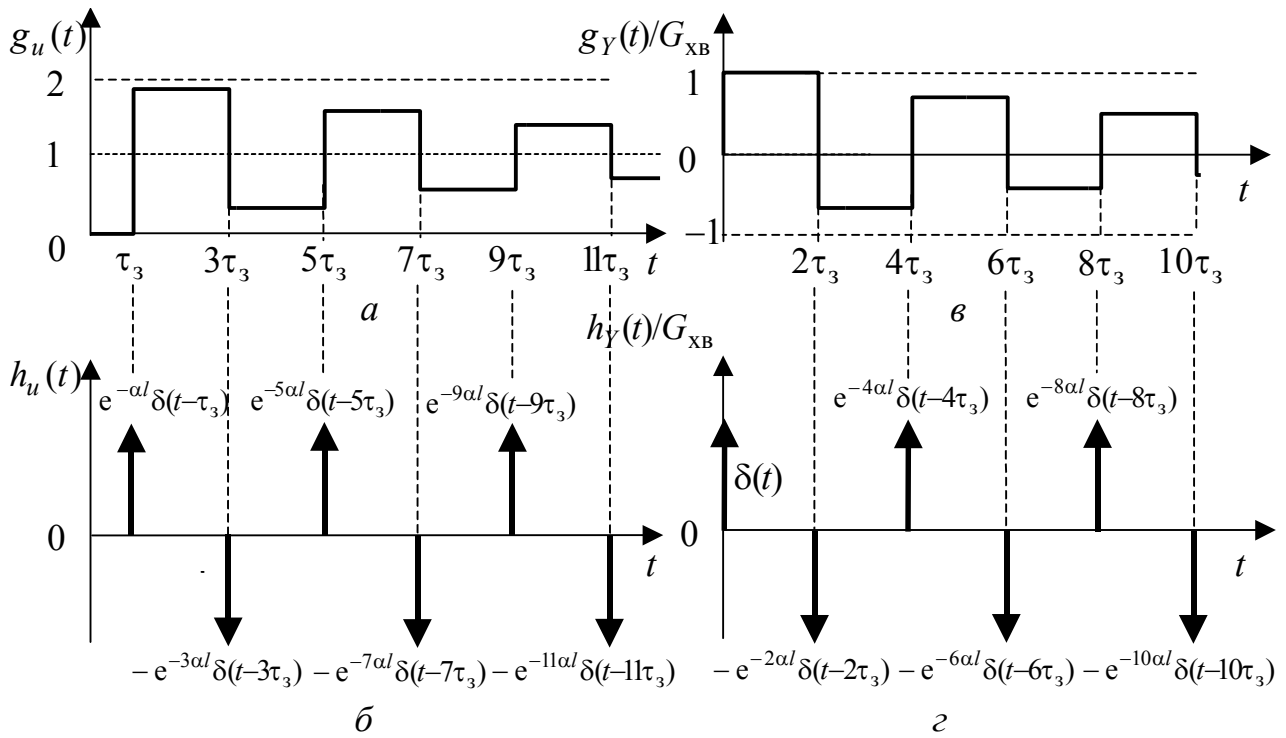


Рисунок 5.81 – Перехідні та імпульсні характеристики розімкнених ДЛМВ і ЗДЛ: *a, б* – за напругою; *в, г* – входної провідності

Лінії, навантажені на ємність. На підставі виразів (5.205) і (5.206) операторні функції ІДЛ, узгодженої з джерелом і навантаженої на ємність, становлять:

$$H_U(p) = \frac{1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-p\tau_3}; \quad Y_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{2R_{\text{XB}}} \left(1 + \frac{p\tau_{RC} - 1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-2p\tau_3} \right). \quad (5.218)$$

Передатні функції ДЛМВ і ЗДЛ, враховуючи ослаблення, можна записати у вигляді:

$$H_U(p) = \frac{e^{-\alpha l}}{p\tau_{RC} + 1} e^{-p\tau_3}; \quad Y_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{2R_{\text{XB}}} \left(1 + \frac{p\tau_{RC} - 1}{p\tau_{RC} + 1} e^{-2\alpha l} e^{-2p\tau_3} \right). \quad (5.219)$$

Застосування операторних відповідностей і теорем перетворення Лапласа (табл.3.1, 3.2) до співвідношень (5.218) – (5.219) призводить до часових характеристик:

1) для ІДЛ

1)

$$g_u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_U(p)}{p} \right] = \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{RC}}} \right) \cdot 1(t - \tau_3); \quad (5.220)$$

$$h_u(t) = \mathcal{L}^{-1} [H_U(p)] = \frac{1}{\tau_{RC}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{RC}}} \cdot 1(t - \tau_3); \quad (5.221)$$

$$g_Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Y_{\text{BX}}(p)}{p}\right] = \frac{G_{\text{XB}}}{2} \left\{ 1(t) + \left[2e^{-\frac{t-2\tau_3}{\tau_{RC}}} - 1 \right] \cdot 1(t-2\tau_3) \right\}; \quad (5.222)$$

$$h_Y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{\text{BX}}(p)] = G_{\text{XB}} \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{2} \delta(t-2\tau_3) - \frac{1}{\tau_{RC}} e^{-\frac{t-2\tau_3}{\tau_{RC}}} \cdot 1(t-2\tau_3) \right]; \quad (5.223)$$

2) для ДЛМВ і ЗДЛ

$$g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H_U(p)}{p}\right] = e^{-\alpha t} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{RC}}} \right) \cdot 1(t-\tau_3);$$

$$h_u(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_U(p)] = \frac{e^{-\alpha t}}{\tau_{RC}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{RC}}} \cdot 1(t-\tau_3);$$

$$g_Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Y_{\text{BX}}(p)}{p}\right] = \frac{G_{\text{XB}}}{2} \left\{ 1(t) + e^{-\alpha t} \left[2e^{-\frac{t-2\tau_3}{\tau_{RC}}} - 1 \right] \cdot 1(t-2\tau_3) \right\};$$

$$h_Y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{\text{BX}}(p)] = G_{\text{XB}} \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{2} e^{-2\alpha t} \cdot \delta(t-2\tau_3) - \frac{e^{-2\alpha t}}{\tau_{RC}} e^{-\frac{t-2\tau_3}{\tau_{RC}}} \cdot 1(t-2\tau_3) \right].$$

Часові характеристики за напругою (5.220) і (5.221) збігаються з відповідними характеристиками R, C кола (рис.2.19) з точністю до часового зсуву на τ_3 . Графіки характеристик (5.220) – (5.223) ІДЛ зображені на рис.5.82.

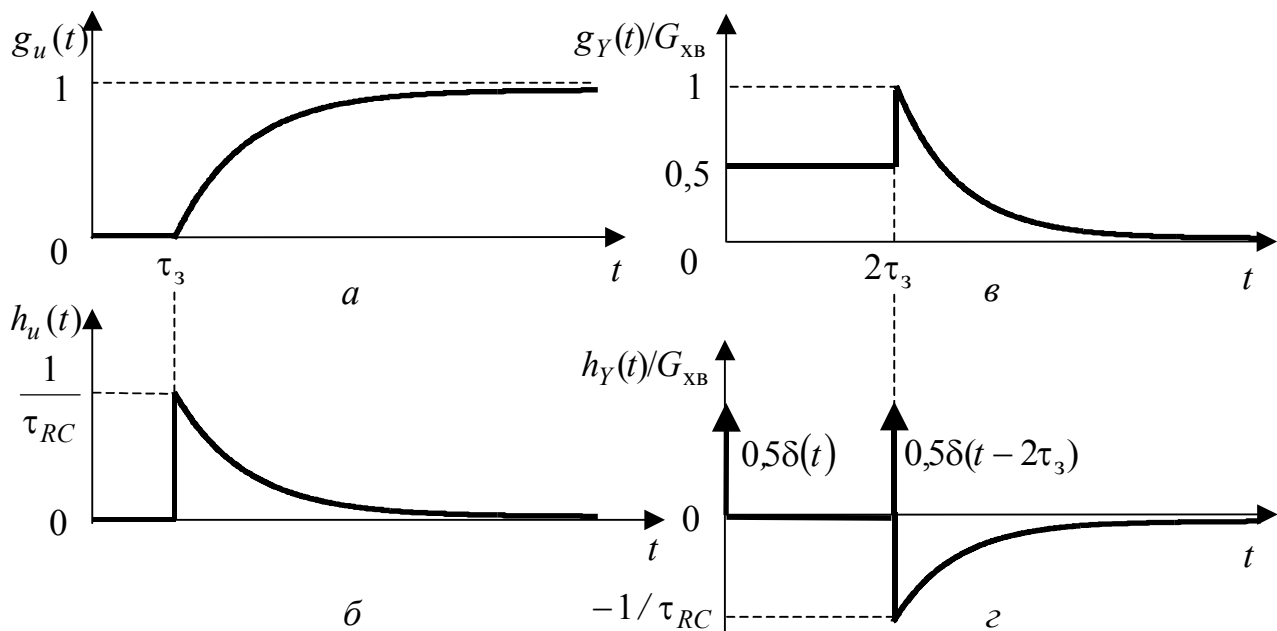


Рисунок 5.82 – Перехідні та імпульсні характеристики ІДЛ, навантаженої на ємність: a, \bar{b} – за напругою; b, \bar{c} – вхідної провідності

Часові характеристики ДЛМВ і ЗДЛ відрізняються від аналогічних для ІДЛ тільки безрозмірними множниками, які враховують ослаблення.

Лінії, навантажені на індуктивність. У ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ, навантажених на індуктивність і узгоджених з джерелом, внаслідок аналогічного (режиму навантаження на ємність) аналізу виходять такі операторні функції:

1) для ІДЛ

$$H_U(p) = \frac{p\tau_{RL}}{p\tau_{RL} + 1} e^{-p\tau_3}; \quad Y_{\text{вх}}(p) = \frac{G_{\text{ХВ}}}{2} \left(1 - \frac{p\tau_{RL} - 1}{p\tau_{RL} + 1} e^{-2p\tau_3} \right); \quad (5.224)$$

2) для ДЛМВ і ЗДЛ

$$H_U(p) = \frac{p\tau_{RL}}{p\tau_{RL} + 1} e^{-\alpha l} e^{-p\tau_3}; \quad Y_{\text{вх}}(p) = \frac{G_{\text{ХВ}}}{2} \left(1 - \frac{p\tau_{RL} - 1}{p\tau_{RL} + 1} e^{-\alpha l} e^{-2p\tau_3} \right). \quad (5.225)$$

Зображення (5.224) і (5.225) відповідають оригіналам, які є часовими характеристиками ліній (табл.5.47).

Таблиця 5.47 – Характеристики ліній, навантажених на індуктивність

$g(t), h(t)$	Лінія	Співвідношення
$g_u(t)$	ІДЛ	$e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-\tau_3)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$e^{-\alpha l} e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-\tau_3)$
$h_u(t)$	ІДЛ	$\delta(t-\tau_3) - \frac{1}{\tau_{RL}} e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-\tau_3)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$e^{-\alpha l} \delta(t-\tau_3) - \frac{e^{-\alpha l}}{\tau_{RL}} e^{-(t-\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-\tau_3)$
$g_Y(t)$	ІДЛ	$\frac{G_{\text{ХВ}}}{2} \left(1(t) + [1 - 2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}}] \cdot 1(t-2\tau_3) \right)$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$\frac{G_{\text{ХВ}}}{2} \left(1(t) + e^{-\alpha l} [1 - 2e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}}] \cdot 1(t-2\tau_3) \right)$
$h_Y(t)$	ІДЛ	$G_{\text{ХВ}} \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{2} \delta(t-2\tau_3) + \frac{1}{\tau_{RL}} e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-2\tau_3) \right]$
	ДЛМВ і ЗДЛ	$G_{\text{ХВ}} \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{e^{-2\alpha l}}{2} \delta(t-2\tau_3) + \frac{e^{-2\alpha l}}{\tau_{RL}} e^{-(t-2\tau_3)/\tau_{RL}} \cdot 1(t-2\tau_3) \right]$

Графіки часових характеристик ІДЛ побудовані на рис.5.83.

Перехідна та імпульсна характеристики ІДЛ за напругою (рис.5.83, а, б) відрізняються тільки зсувом на $t = \tau_3$ від характеристик R, L кола (див. рис.2.21).

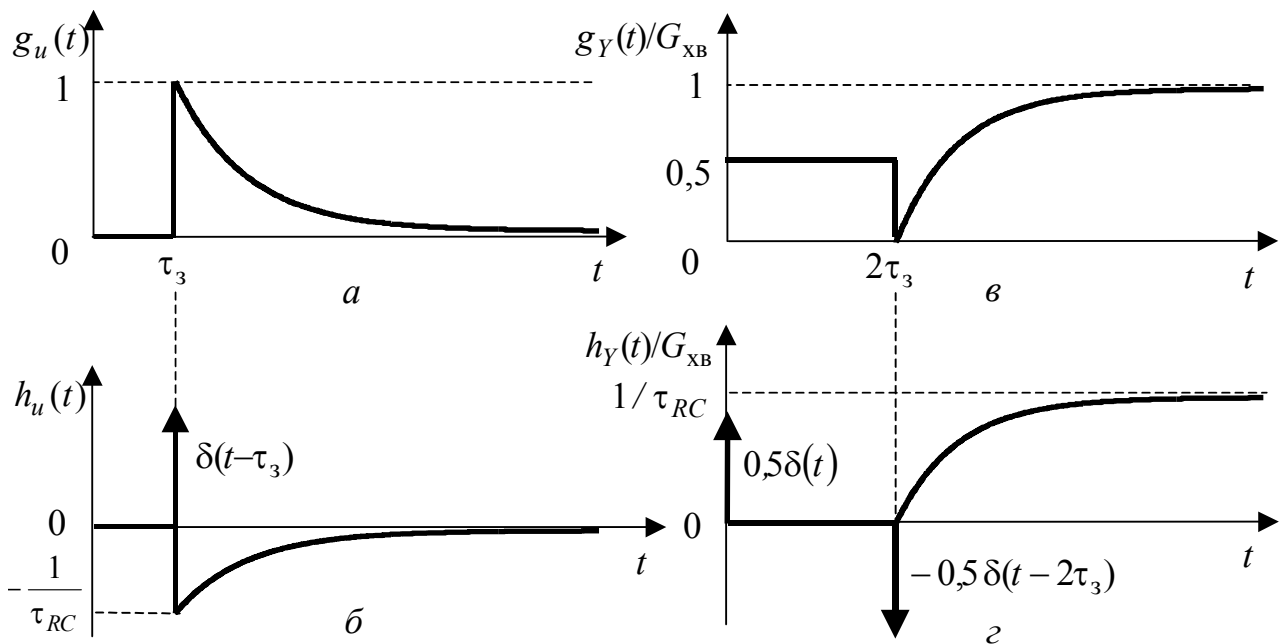


Рисунок 5.83 – Перехідні та імпульсні характеристики ІДЛ, навантаженої на індуктивність: а, б – за напругою; в, г – вхідної провідності

Приклад 5.34. Узгоджену ІДЛ з хвильовим опором R_{XB} увімкнено до джерела напруги, яке має операторний внутрішній опір $Z_i(p) = R_{XB} + pL_i$. Визначити у загальному вигляді ОПФ і часові характеристики лінії за напругою, вважаючи відомими R_{XB} , $Z_i(p)$ і τ_3 . Побудувати графіки часових характеристик.

Розв’язання. Знайдемо ОПФ, використовуючи формули (табл.5.43):

$$H_U(p) = \frac{R_{XB}}{Z_i(p) + R_{XB}} e^{-p\tau_3} = \frac{R_{XB}}{pL_i + 2R_{XB}} e^{-p\tau_3} = \frac{R_{XB}/L_i}{p + 2R_{XB}/L_i} e^{-p\tau_3} = \frac{0,5/\tau_{RL}}{p + 1/\tau_{RL}} e^{-p\tau_3},$$

де $\tau_{RL} = \frac{L_i}{2R_{XB}}$ – стала часу кола.

За допомогою оберненого перетворення Лапласа, визначимо часові характеристики:

$$g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H_U(p)}{p}\right] = 0,5 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{RL}}}\right) 1(t-\tau_3); \quad h_u(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_U(p)] = \frac{1}{\tau_{RL}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{RL}}} 1(t-\tau_3).$$

Графіки часових характеристик побудовано на рис.5.84.

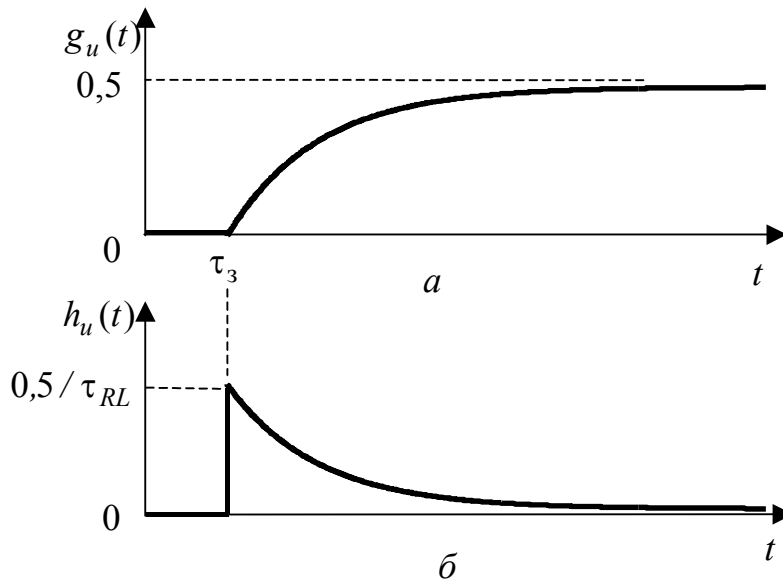


Рисунок 5.84 – Часові характеристики у прикладі 5.34:
a – перехідна; *б* – імпульсна

Приклад 5.35. Миттєве значення ідеального джерела напруги $e(t)$ має вигляд прямокутного відеоімпульсу (рис.5.85, *a*). ІДЛ, навантажену на активний опір, увімкнено до цього джерела (рис.5.86, *a*). Використовуючи перехідну характеристику, визначити у загальному вигляді вихідні напруги $u_2(t)$ для двох значень нормованих опорів навантаження $R'_{H1} = 0,25$ і $R'_{H2} = 4$, вважаючи заданими час затримки сигналу в лінії τ_3 , висоту та тривалість імпульсу: E_0 , $\tau_i = 0,5\tau_3$. Побудувати графіки $u_2(t)$. Пояснити процес формування вихідної напруги за допомогою відбитих хвиль.

Розв'язання. Запишемо у загальному вигляді перехідну характеристику за напругою для розглядуваної лінії на підставі формули (табл.5.45), підставивши до неї значення коефіцієнта відбиття від ідеального джерела напруги $\rho_{R_i} = -1$:

$$g_u(t) = (1 + \rho_{R_H}) [1(t - \tau_3) - \rho_{R_H} 1(t - 3\tau_3) + \rho_{R_H}^2 1(t - 5\tau_3) - \rho_{R_H}^3 1(t - 7\tau_3) + \dots]. \quad (5.226)$$

Використовуючи запис миттєвого значення ЕРС джерела

$$e(t) = E_0 \cdot 1(t) - E_0 \cdot 1(t - 0,5\tau_3),$$

рівняння перехідної характеристики (5.226) і принцип накладання, визначимо аналітичний вираз вихідної напруги:

$$u_2(t) = E_0(1 + \rho_{R_H}) \left\{ [1(t - \tau_3) - 1(t - \tau_3 - 0,5\tau_3)] - \rho_{R_H} [1(t - 3\tau_3) - 1(t - 3\tau_3 - 0,5\tau_3)] + \right. \\ \left. + \rho_{R_H}^2 [1(t - 5\tau_3) - 1(t - 5\tau_3 - 0,5\tau_3)] - \rho_{R_H}^3 [1(t - 7\tau_3) - 1(t - 7\tau_3 - 0,5\tau_3)] + \dots \right\} \quad (5.227)$$

Підставивши у формули (5.201) задані значення нормованих опорів навантаження, обчислимо коефіцієнти відбиття:

$$\rho_{R_{H1}} = \frac{R'_{H1} - 1}{R'_{H1} + 1} = \frac{0,25 - 1}{0,25 + 1} = -0,6; \quad \rho_{R_{H2}} = \frac{R'_{H2} - 1}{R'_{H2} + 1} = \frac{4 - 1}{4 + 1} = 0,6.$$

Виходячи з загального співвідношення (5.227) і знайдених значень коефіцієнтів відбиття від навантаження, побудуємо графіки вихідної напруги (рис.5.85, б, в).

Щоб пояснити отримані результати, скористаємось хвильовим просторово-часовим поданням напруги в лінії (див. п. 5.12.3; рис.5.66 і 5.67):

$$u(x,t) = E_0 \left\{ \underbrace{[1(t - \tau_x) - 1(t - \tau_3 - \tau_x)]}_{(1)} - 0,6 \underbrace{[1(t - 2\tau_3 + \tau_x) - 1(t - 2,5\tau_3 + \tau_x)]}_{(2)} + \underbrace{0,6[1(t - 2\tau_3 - \tau_x) - 1(t - 2,5\tau_3 - \tau_x)]}_{(3)} - \dots \right\}. \quad (5.228)$$

Графічні побудови згідно з виразом (5.228) показані на рис.5.86.

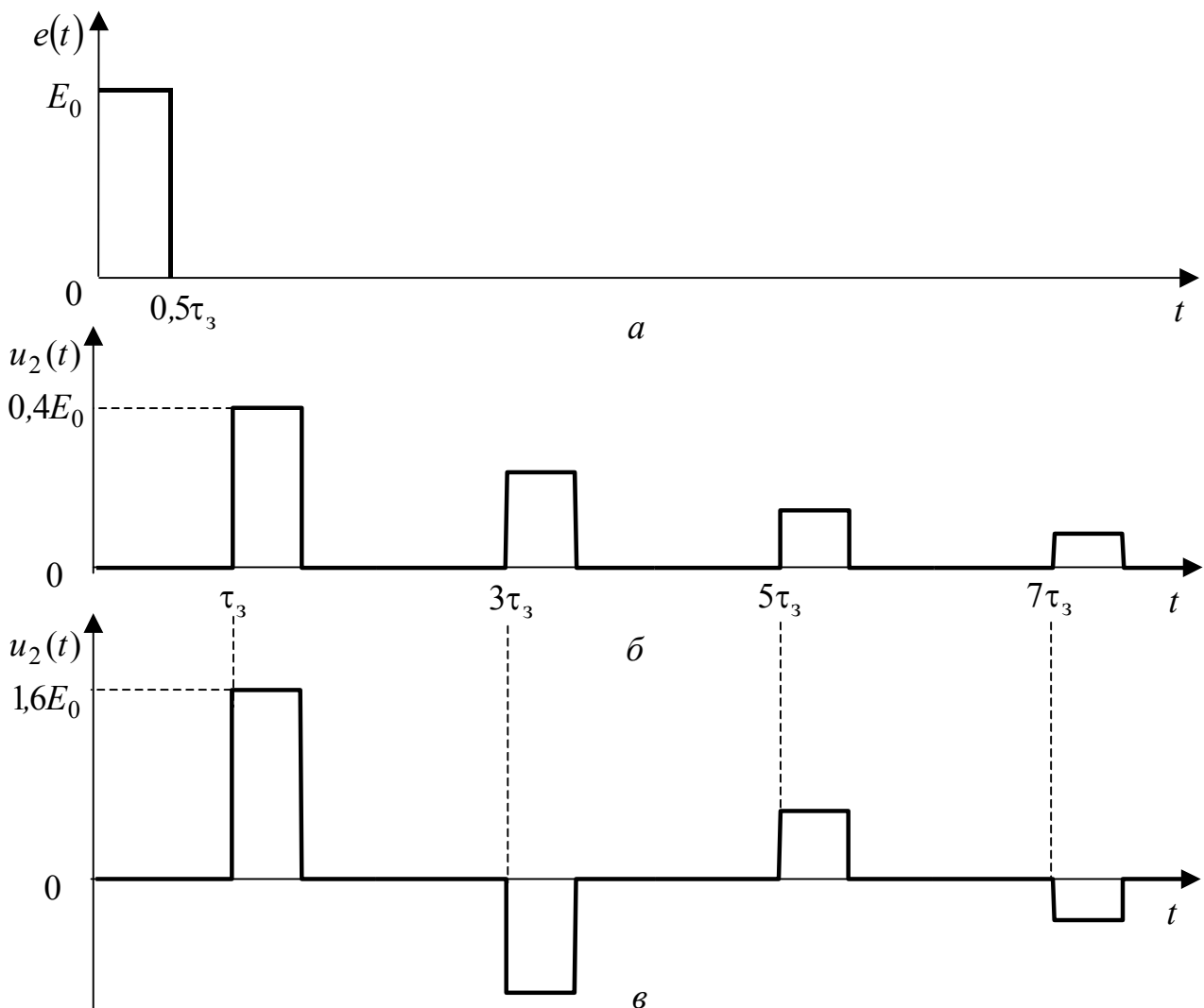
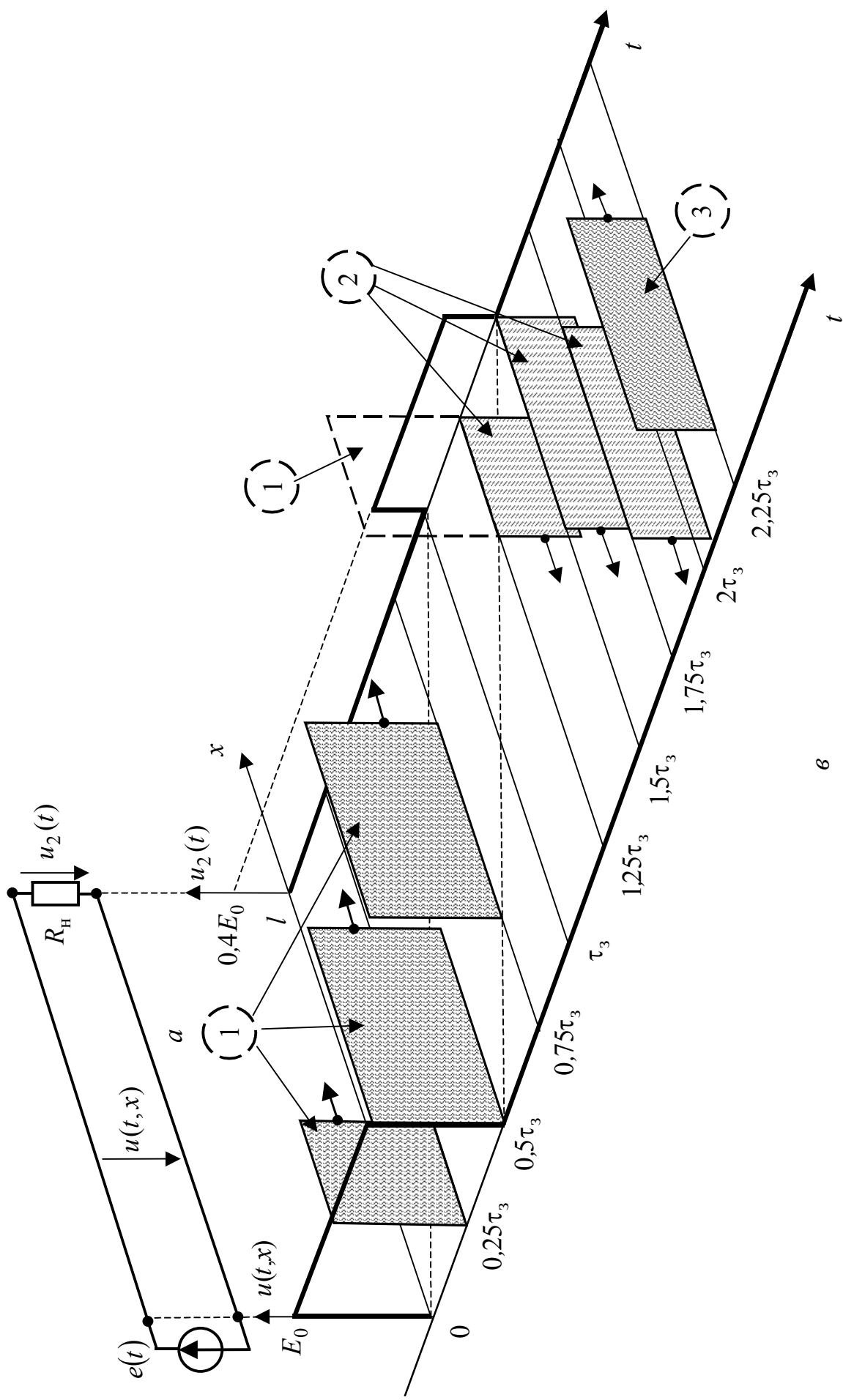


Рисунок 5.85 – Часові діаграми до прикладу 5.35: а – ЕРС джерела; вихідної напруги: б – для $R'_{н1} = 0,25$; в – для $R'_{н2} = 4$



б

Рисунок 5.86 – До прикладу 5.35: а – схема; б – формування напруги в лінії для $\rho_{H1} = -0,6$

Доданки рівняння (5.228) є хвилями, які у часі та за координатою мають форму прямокутного відеоімпульсу. Записаним у виразі (5.228) і побудованим на рис.5.86 першим трьом хвилям притаманні такі властивості:

1) хвиля № 1 протягом часу $0 < t < \tau_3$ рухається від джерела до виходу лінії і при $t = \tau_3$ ($\tau_x = \tau_3$) досягає навантаження з коефіцієнтом відбиття $\rho_{R_{H1}} = -0,6$;

2) при $t \geq \tau_3$ формується відбита хвиля № 2 з рівнем $-0,6E_0$, яка підсумовується з хвилею № 1 і дає у навантаженні імпульс висотою $0,4E_0$;

3) хвилі № 2 поширюються до входу лінії, досягаючи його при $t = 2\tau_3$;

4) при $t \geq 2\tau_3$ хвиля № 2, повністю відбиваючись від входу зі зміною знака ($\rho_{R_i} = -1$), формує хвилю № 3, яка пересувається від входу до виходу лінії.

Далі процеси відбиття хвиль від навантаження і джерела повторюються. Кожного відбиття хвиля змінює знак, причому при відбитті від навантаження зменшується також рівень хвилі.

Приклад 5.36. Використовуючи інтеграл накладання з імпульсною характеристикою, розв'язати у загальному вигляді приклад 5.33.

Розв'язання. Використовуючи операторний коефіцієнт відбиття (див. приклад 5.33), визначимо ОПФ та її оригінал – імпульсну характеристику лінії:

$$H_U(p) = \frac{[1 + \rho_{Z_{HL}}(p)]e^{-p\tau_3}}{2} = 0,5 \left(1 + \frac{pL}{2R_{XB} + pL} \right) e^{-p\tau_3} = \frac{p + 0,5/\tau_H}{p + 1/\tau_H} e^{-p\tau_3};$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{p + 0,5/\tau_H}{p + 1/\tau_H} e^{-p\tau_3} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(1 - \frac{0,5/\tau_H}{p + 1/\tau_H} e^{-p\tau_3} \right) = \delta(t - \tau_3) - \frac{0,5}{\tau_H} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_H}} 1(t - \tau_3),$$

де $\tau_H = \frac{L}{2R_{XB}}$ – стала часу навантаженої лінії.

Щоб визначити вихідну напругу, застосуємо другу форму інтеграла накладання з імпульсною характеристикою (2.112):

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_{\tau_3}^t U_0 e^{-\frac{t-x}{\tau_{BX}}} \left[\delta(x - \tau_3) - \frac{0,5}{\tau_H} e^{-\frac{x-\tau_3}{\tau_H}} \right] dx = U_0 \left[e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{BX}}} - \frac{0,5}{\tau_H} e^{-\frac{t}{\tau_{BX}} \frac{\tau_3}{\tau_H}} \int_{\tau_3}^t e^{\left(\frac{1}{\tau_{BX}} - \frac{1}{\tau_H} \right) x} dx \right] = \\ &= U_0 \left[e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{BX}}} - \frac{0,5\tau_{BX}}{\tau_H - \tau_{BX}} e^{-\frac{t}{\tau_{BX}} \frac{\tau_3}{\tau_H}} e^{\left(\frac{1}{\tau_{BX}} - \frac{1}{\tau_H} \right) x} \Big|_{\tau_3}^t \right] = U_0 \left[e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{BX}}} - \frac{0,5\tau_{BX}}{\tau_H - \tau_{BX}} \left(e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_H}} - e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{BX}}} \right) \right] = \\ &= U_0 \left(\frac{\tau_H - 0,5\tau_{BX}}{\tau_H - \tau_{BX}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{BX}}} - \frac{0,5\tau_{BX}}{\tau_H - \tau_{BX}} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_H}} \right) = 0,5U_0 \left[\frac{2 - \tau_{BX}/\tau_H}{1 - \tau_{BX}/\tau_H} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_{BX}}} - \frac{1}{\tau_H/\tau_{BX} - 1} e^{-\frac{t-\tau_3}{\tau_H}} \right]. \end{aligned}$$

Отже, результат сходиться з відповіддю у прикладі 5.33.

5.14 Застосування кіл з розподіленими параметрами

Основні застосування довгих ліній (без розгляду областей та особливостей практичного використання) зазначені у підрозд. 5.1. Окремі питання використання кіл з розподіленими параметрами розглянуто у підрозд. 5.9 (трансформатори і способи узгодження ДЛ) і 5.11 (резонансні властивості відрізків ДЛ). У цьому, заключному, підрозділі стисло розглянуті питання практичного застосування кіл з розподіленими параметрами, оскільки докладно їх вивчають у спеціальних технічних дисциплінах.

5.14.1 Передача високочастотної енергії та радіосигналів

Це застосування кіл з розподіленими параметрами зазвичай пов'язують з термінами **фідер** (від слова *feed* – живити) або **фідерна лінія**. Прикладами використання фідерів є антенно-фідерні пристрої (з'єднання передавальних і приймальних пристроїв з антеннами), міжблокові з'єднання, увімкнення до радіовимірвальних приладів тощо.

У діапазоні довжин хвиль до сантиметрових значень як фідери використовують промислові радіочастотні кабелі, зазвичай коаксіальної конструкції (рис.5.2, б). На вищих частотах застосовують стрічкові лінії (рис.5.2, в) і хвилеводи.

Радіочастотні кабелі мають такі переваги:

- 1) порівняно малий рівень ослаблення і спотворення сигналів у відносно широкому діапазоні частот;
- 2) високі показники електромагнітної сумісності (ЕМС) з іншими пристроями (мале випромінення і надійне екранування);
- 3) простота конструкції та монтажу, що поєднується з широкою номенклатурою та уніфікацією промислових зразків;
- 4) економічність.

Зважаючи на різноманіття літератури (у тому числі довідкової), присвяченої кабельній продукції, та постійне її вдосконалення, доцільно обмежитись розглядом лише деяких головних положень.

Конструюючи та експлуатуючи радіотехнічні пристрої та системи, слід враховувати класифікацію радіочастотних кабелів за основними ознаками (табл.5.48), а також їхні конструктивні та електричні параметри.

Для передачі високочастотної енергії та радіосигналів використовують коаксіальні та симетричні кабелі. Спіральні кабелі застосовують для затримки сигналів (див. п. 5.14.2).

До конструктивних параметрів належать: параметри внутрішнього провoda (діаметр одножильного провoda або кількість жил і діаметр кожної – для багатожильного); тип діелектрика і діаметр ізоляції; тип і матеріал зовнішнього провoda; товщина і матеріал зовнішньої захисної оболонки; розрахункова погонна вага (г/м); мінімальні радіуси згину і намотування на барабан.

Таблиця 5.48 – Класифікація радіочастотних кабелів

Ознака	Різновиди
Загальна конструкція	Коаксіальна
	Симетрична
	Спіральна
Тип ізоляції	Суцільна
	Напівповітряна (повітряно-пластмасова)
	Повітряна
Тип зовнішнього провода (екрана)	Суцільний (трубка)
	Одинарне оплетення
	Подвійне оплетення
	Обмотування пласкою стрічкою
Рівень потужності	Мала потужність – до 0,5 кВт
	Середня потужність – до 5 кВт
	Велика потужність – понад 5 кВт

Електричні характеристики радіочастотних кабелів:

- 1) хвильовий опір (у коаксіальних кабелів – 50 або 75 Ом; у симетричних – 75, 150, 200 Ом);
- 2) погонна ємність (у кабелів із суцільною ізоляцією – 50...100 пФ/м; з напівповітряною – 20...50 пФ/м);
- 3) відносна (до швидкості світла) швидкість поширення коливань (для кабелів із суцільною ізоляцією становить $\approx 0,66$);
- 4) погонне ослаблення (дБ/м або Нп/км) на різних частотах;
- 5) показники ЕМС (наприклад, для коаксіального кабелю із зовнішнім оплетенням рівень випромінення становить близько 30 дБ);
- 6) максимальна робоча частота;
- 7) гранично припустимі значення напруг і струмів.

За необхідності слід враховувати зв'язок умов експлуатації кабелю (температурний діапазон, тиск, рівень вібрації тощо) з його припустимими фізико-механічними характеристиками, які пов'язані з параметрами середовища.

Максимальна робоча частота визначається двома чинниками – припустимим ослабленням у робочому діапазоні частот і так званою критичною частотою, довжина хвилі якої сумірна з поперечним розміром кабелю. Для коаксіального кабелю критична частота визначається співвідношенням:

$$f_{кр} = \frac{c}{\pi(d + D)\sqrt{\epsilon}},$$

де c – швидкість світла у вільному просторі; d, D – поперечні розміри внутрішнього і зовнішнього провідників (рис.5.2, б); ϵ – відносна діелектрична проникність ізоляції (див. табл.5.2).

У кабелів з розподіленими за довжиною елементами кріплення

внутрішнього проводу (повітряна і напівповітряна ізоляції) частотний діапазон обмежений довжинами хвиль, сумірних з відстанню між елементами кріплення.

Для увімкнення кабелів до пристроїв та з'єднання між собою використовують з'єднувачі (спрощено їх ще називають рознімами та фішками). Існують з'єднувачі трьох типів:

- 1) вільні (кабельні), які монтують на кінцях кабелю;
- 2) фіксовані (приладові), які розташовані на пристроях;
- 3) перехідні, призначені для злучення і розгалуження кабелів.

Геометричні розміри розніму мають відповідати розмірам кабелю. Щоб забезпечити узгодження, величина хвильового опору з'єднувача має збігатися з хвильовим опором кабелю. Виходячи з умов експлуатації, вибирають конструкцію затискової частини з'єднувача (різьбова, байонетна тощо).

Для ослаблення сигналів без спотворення їхньої форми у пристроях передачі використовують **резистивні лінії**, первинні параметри яких становлять:

$$L_1 \approx 0; C_1 \approx 0; R_1 \neq 0; G_1 \neq 0,$$

а вторинні –

$$\underline{\gamma} = \sqrt{Z_1 Y_1} \approx \sqrt{R_1 G_1}; \alpha \approx \sqrt{R_1 G_1}; \beta \approx 0; \underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{Z_1 / Y_1} \approx \sqrt{R_1 / G_1} = R_{\text{хв}}.$$

Отже, резистивні лінії мають практично активні хвильові опори, кінцеву (яка не залежить від частоти) величину погонного ослаблення і нульову затримку сигналів. Ці властивості обумовлюють застосування резистивних ДЛ як ослаблювачів (атенюаторів) сигналів. Аналогічні характеристики мають атенюатори (рис.5.87), які складені з активних опорів і забезпечують стрибкоподібне (дискретне) ослаблення.

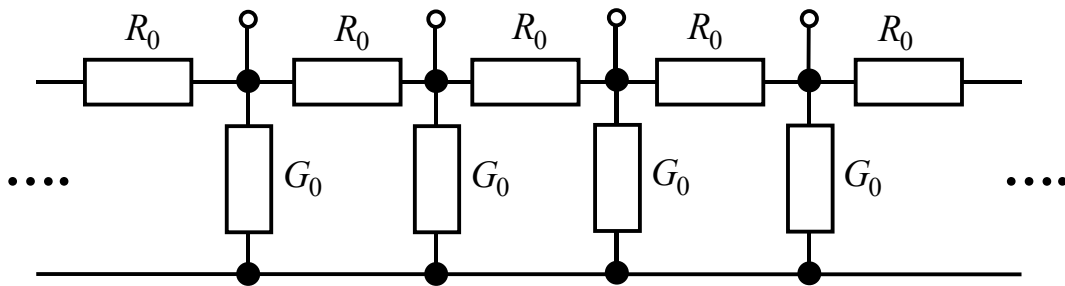


Рисунок 5.87 – Схема дискретного атенюатора

5.14.2 Затримка сигналів

Часова затримка сигналів використовується у телевізійних приймачах, осцилографіях, імпульсних пристроях, підсилювачах коливань НВЧ та ін.

Значення затримки порядку одиниць і десятків мікросекунд забезпечують коаксіальні та симетричні кабелі, однак через їхню велику довжину (погонна затримка $\tau_3 / l = 1/v = \sqrt{L_1 C_1} \approx 5$ нс/м) ефективніше застосовувати **спіральні кабелі** (кабелі затримки). Для реалізації більших значень часу затримки роз-

роблені ультразвукові та цифрові лінії.

Яскравим прикладом реалізації ефекту затримки сигналів є узгоджені (оптимальні) фільтри для обробки складних імпульсних сигналів, уперше застосовані в радіолокації, а згодом – в інших радіотехнічних системах для зв'язку, навігації тощо. Пріоритетні вітчизняні дослідження з розробки оптимальних фільтрів на базі коаксіальних кабелів, спеціальних спіральних ліній та ультразвукових ліній затримки проведені під керівництвом Ширмана².

Спіральні кабелі мають внутрішній провід у вигляді спіралі. Переважно застосовують коаксіальні кабелі затримки (рис.5.88). Зовнішній провід виконують як оплетення або (щоб зменшити втрати) ізольованими провідниками, які спрямовано вздовж осі кабелю.

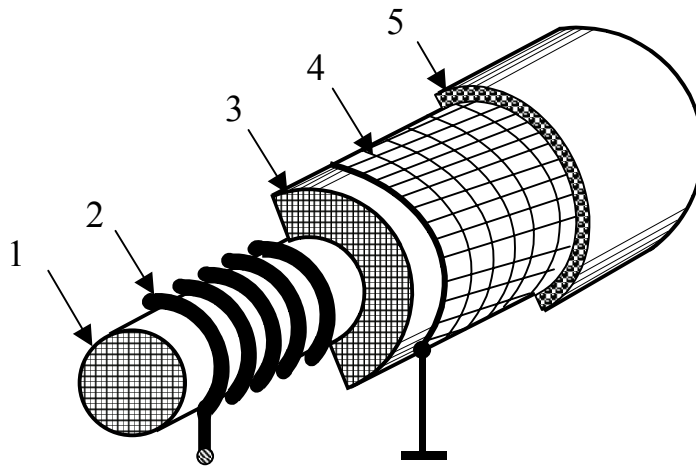


Рисунок 5.88 – Конструкція коаксіального спірального кабелю:
1 – осердя для внутрішнього провода; 2 – спіральний внутрішній провід;
3 – ізоляція; 4 – зовнішній провід (екран); 5 – зовнішня оболонка

Відмінною особливістю спіральних кабелів є підвищена погонна індуктивність L_1 , яка перевищує цей показник для звичайних кабелів у тисячі разів. Це забезпечує як спіралеподібний внутрішній провід, так і застосовані у деяких типах кабелів затримки як осердя 1 (рис.5.88) матеріали з підвищеною магнітною проникністю μ (магнітодіелектрики). Зниження товщини ізоляції 2 (рис.5.88) між внутрішнім і зовнішнім провідниками, а також збільшення площі між ними сприяють збільшенню погонної ємності C_1 .

² **Ширман Яков Давидович** (н. 1919 р.) – відомий вчений в області радіолокації, доктор технічних наук, професор. Закінчив Військово-повітряну академію ім. Можайського та ад'юнктуру (військову аспірантуру). З 1949 р. працює у Харкові (Артилерійська радіотехнічна академія ім. Говорова, нині – Харківський військовий ун-т). Зробив значний внесок у теорію і практику сучасної радіолокації (складні сигнали та методи їхньої обробки, автокомпенсатори завод тощо). Удостоєний двох Державних премій. Автор кількох підручників і монографій. Засновник наукової школи, яка виховала цілу плеяду вчених.

Збільшення як L_1 , так і C_1 призводить до зменшення швидкості поширення коливань і зростання погонної затримки до величин 0,1...3 мкс/м. За рахунок переважного збільшення L_1 порівняно з C_1 хвильовий опір зростає до 0,3...3 кОм. Змінюючи «крок» намотування, можна регулювати основні параметри – погонну затримку і хвильовий опір.

Порівняно зі звичайними у кабелів затримки менший робочий діапазон частот (до 10 МГц) і більше ослаблення (1..5 дБ/мкс). Для згаданих вище оптимальних фільтрів розроблено спіральні лінії з більшим частотним діапазоном і меншими втратами. Спіраль у цих ДЛ розташована із зовні, а екран – у середині. Цей прийом дозволяє виконувати довільне за рівнем і затримкою «зняття» сигналу за допомогою ємнісних або індуктивних давачів. У ХНУРЕ такі лінії використовуються у навчальному процесі при проведенні лабораторних робіт з дослідження ДЛ.

Як аналог кабелів затримки використовують змонтовані на елементах із зосередженими параметрами так звані штучні лінії затримки. Спрощена схема такої лінії без елементів, які враховують втрати, зображена на рис.5.89. Час затримки штучної лінії затримки, яка містить n елементів, становить:

$$\tau_3 \approx n\sqrt{L_0C_0}.$$

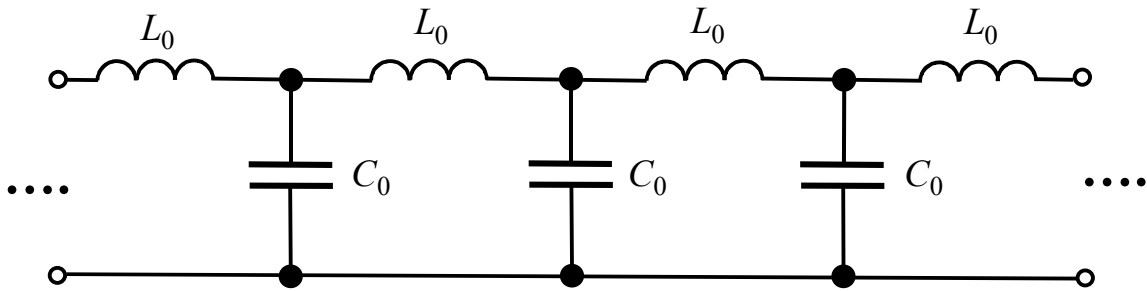


Рисунок 5.89 – Схема штучної лінії затримки

До спеціальних ліній затримки належать вельми технологічні розподілені R, C структури, які легко реалізуються сучасними методами мікроелектроніки. Це ДЛ, у яких $L_1 \approx 0$; $G_1 \approx 0$, і тому їхні вторинні параметри становлять:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{Z_1 Y_1} \approx \sqrt{R_1 j\omega C_1} = \sqrt{\omega R_1 C_1} e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega C_1 R_1}{2}} (1 + j); \quad \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega C_1 R_1}{2}};$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{C_1 R_1}}; \quad \underline{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} \approx \sqrt{\frac{R_1}{j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{R_1}{\omega C_1}} e^{-j\pi/4}.$$

До відмінних особливостей R, C ліній належать нелінійне змінювання швидкості поширення коливань від частоти та комплексний характер хвильового опору, який має постійне значення аргументу ($-\pi/4$) і частотно залежний модуль.

Залежність від частоти швидкості поширення сигналу в лінії називають **частотною дисперсією**. Кола з частотною дисперсією, включаючи R, C лінії, використовують для формування і обробки складних сигналів.

Недоліком R, C структур є відносно велике ослаблення (при довжині лінії $l = \lambda = 2\pi/\beta$ ослаблення становить $\alpha l \approx 2\pi$ Нп або ≈ 55 дБ).

Кола затримки використовують також як фазообертачі. Затримці синусоїдного коливання з частотою ω на час t_3 відповідає його зсув за фазою на ωt_3 . У ліній затримки без дисперсії ($t_3 = \text{const}$) фазовий зсув лінійно залежить від частоти, а у дисперсійних ліній $t_3(\omega)$ є нелінійною функцією частоти.

5.14.3 Використання вибірних властивостей відрізків довгих ліній

Розглянуті у п. 5.11.3 – 5.11.5 вибірні властивості ДЛ в режимах короткого замикання, холостого ходу та навантаження на реактивність є теоретичним підґрунтям практичних застосувань ліній як резонансних контурів, смугових і загороджувальних фільтрів, ізоляторів, антенних комутаторів.

Резонансні контури. Головним достоїнством контурів у вигляді відрізків ДЛ є те, що значення добротності близько $10^3 \dots 10^4$ реалізуються у дециметровому діапазоні довжин хвиль. Щоб забезпечити низький рівень випромінювання, використовують лінії коаксіального типу. Підстроювання поблизу резонансної частоти здійснюється пересувним поршнем або конденсатором змінної ємності.

Найбільшу добротність має контур, складений із замкнутого відрізка коаксіального кабеля довжиною $l < \lambda/4$ як індуктивності та підстроювального конденсатора C_k . На рис.5.90, а зображена схема увімкнення такого контуру до входу 2 дециметрового приймача; антенний кабель увімкнено до перерізу 1 контурного кабеля на відстані l_1 від його замкнутого кінця.

Еквівалентна схема розглянутої конструкції (рис.5.90, б) без урахування втрат відповідає складному паралельному контуру з розподіленою індуктивністю. До приймача з великим вхідним опором контур увімкнено повністю, а до антенного кабелю – частково з коефіцієнтом увімкнення

$$p = \sqrt{\frac{L_1}{L_1 + L_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L}},$$

де $L_1 = \frac{R_{\text{хв}} \text{tg} \beta l_1}{\omega_0}$; $L = L_1 + L_2 = \frac{R_{\text{хв}} \text{tg} \beta l}{\omega_0}$ – індуктивності, показані на

рис.5.90, б; $R_{\text{хв}}, \beta$ – відповідно хвильовий опір і коефіцієнт фази кабелю; ω_0 – робоча частота.

Коефіцієнт увімкнення вибирають з умови узгодження антенного кабелю у перерізі 1:

$$R_{\text{хв}} = p^2 R_{\text{рез}},$$

де $R_{\text{рез}}$ – резонансний опір еквівалентного контуру, який визначають за

формулою (5.154).

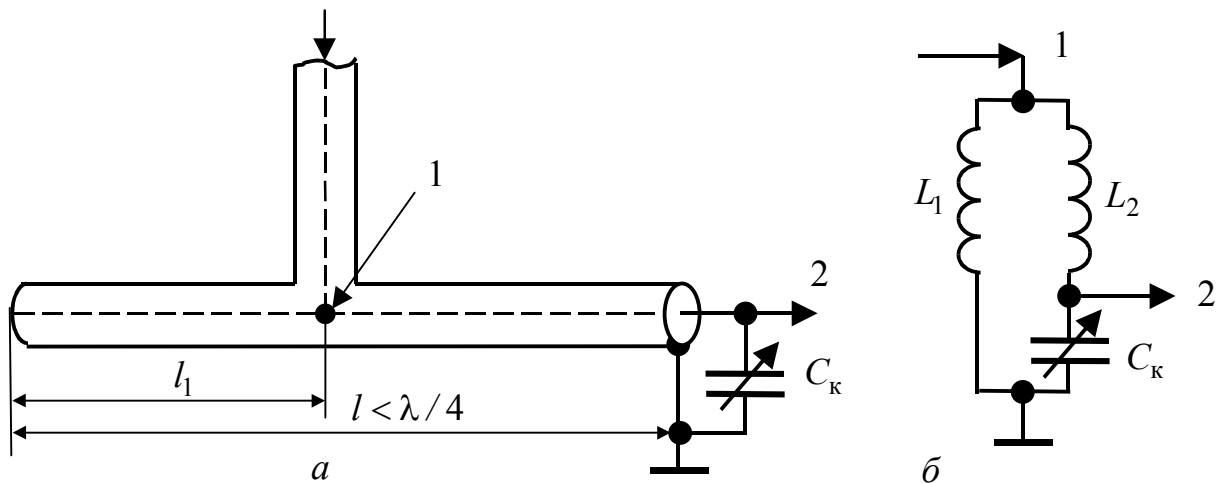


Рисунок 5.90 – Схеми увімкнення коаксіального паралельного контуру:
a – принципова; *б* – еквівалентна

Використовуючи відрізки ліній як контури, слід запобігати впливу коливань кратних резонансних частот.

Смугові та загороджувальні фільтри. Тут використовують ті ж самі принципи побудови, що й у фільтрів на елементах L, C [7, підрозд. 6.4].

Як приклад на рис.5.91 зображені принципові схеми T -подібних смугового (рис.5.91, *a*) і загороджувального (рис.5.91, *в*) фільтрів. На рис.5.91, *б, г* показано також еквівалентні схеми цих фільтрів на елементах L, C . Як паралельний і послідовний контури в них вибрано замкнені відрізки ліній відповідно довжиною $\lambda/4$ і $\lambda/2$.

Фільтри (рис.5.91) реалізують, застосовуючи симетричні лінії у подовжньому плечі (у ПФ – послідовний контур, у ЗФ – паралельний). Для побудови контурів у поперечному плечі можна використовувати симетричний або коаксіальний кабелі.

При реалізації T -подібних фільтрів на відрізках ліній необхідно, як і у звичайних фільтрів, забезпечити режим узгодження та усунути паразитні взаємні зв'язки між лініями. В інших типах фільтрів, навпаки, елементи взаємного зв'язку (як зосередженого, так і розподіленого) необхідні для здобуття заданих характеристик. Це – фільтри, аналогічні зв'язаним контурам, а також фільтри із зосередженою селекцією.

Ізолятори. Як «металевий» ізолятор використовують замкнений відрізок лінії довжиною $\lambda/4$, що має тим більший вхідний опір, чим менші втрати в лінії. Такі ізолятори застосовують для кріплення провідників симетричної лінії (рис.5.92, *a*) та внутрішнього провідника коаксіального кабелю (рис.5.92, *б*). Оскільки на кінці замкненої лінії довжиною $\lambda/4$ існує вузол напруги, цей кінець має бути заземлений.

«Металеві» ізолятори на резонансній частоті мають кращі характеристики ніж діелектричні, однак є вузькосмуговими. При розстроєнні за частотою на 5 % відбувається різке зменшення вхідного опору $\lambda/4$ -ізолятора.

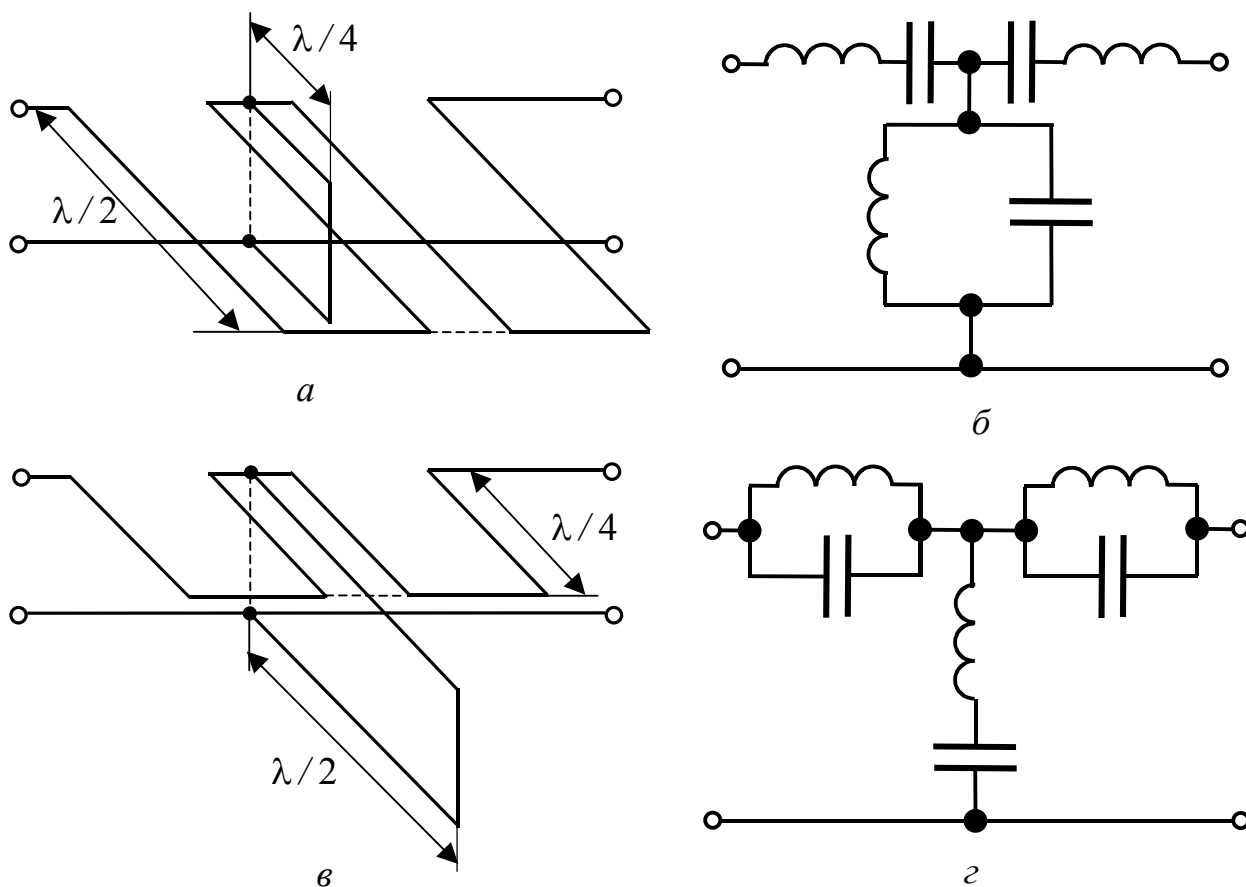


Рисунок 5.91 – Смугові та загороджувальні фільтри:
a – СФ; *б* – еквівалентна схема СФ; *в* – ЗФ; *г* – еквівалентна схема ЗФ

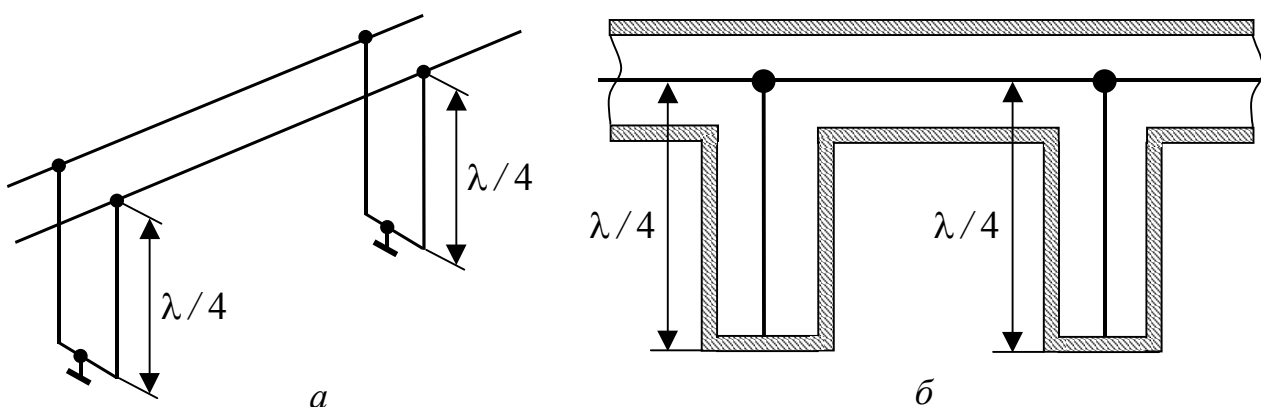


Рисунок 5.92 – Ізолятори з відрізків ліній:
a – симетричної; *б* – коаксимальної

Антенні комутатори. В радіолокаційних та інших системах для випромінення та приймання сигналів використовують одну й ту ж саму антену. Для захисту приймального пристрою від потрапляння на його вхід потужних імпульсних сигналів, що випромінює передавач, використовують антенні комутатори, до складу яких входять комутаційні елементи та відрізки ДЛ (рис.5.93), а іноді спрямовані відгалужувачі (рис.5.94).

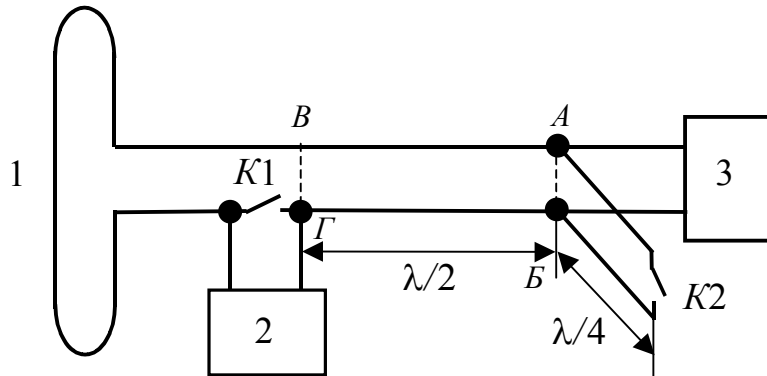


Рисунок 5.93 – Антенний комутатор:
1 – антена; 2 – приймач; 3 – передавач; K1, K2 – комутатори

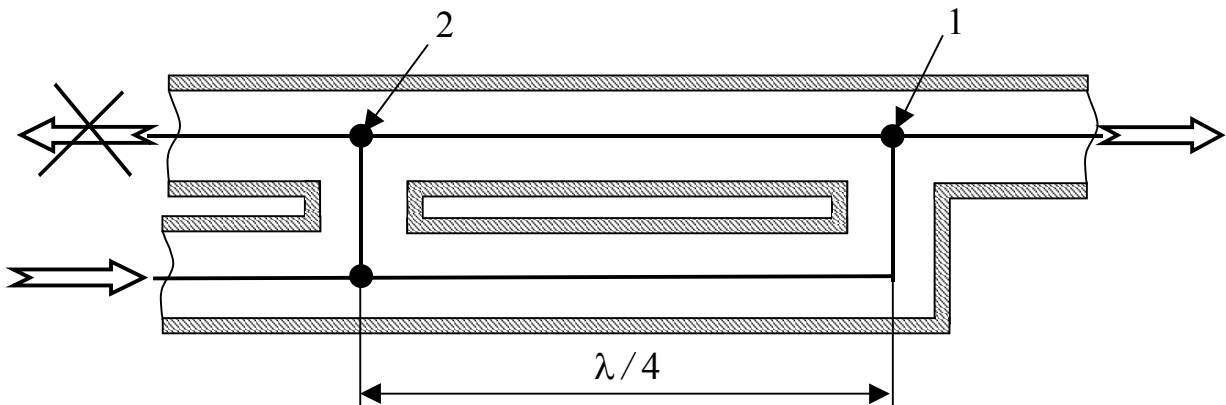


Рисунок 5.94 – Спрямований відгалужувач

Як елементи комутації ($K1$ і $K2$ на рис.5.93) використовують газорозрядні вакуумні прилади (розрядники) і спеціальні діоди.

Під дією імпульсів, що випромінюються, елементи комутації замикаються. Внаслідок цього в схемі антенного комутатора (рис.5.93) вхід приймача 1 шунтується, а відрізок лінії довжиною $\lambda/4$ виконує роль ізолятора.

Після закінчення випромінення комутатори $K1$ і $K2$ розмикаються. Лінія довжиною $\lambda/4$ розмикається, що призводить до короткого замикання у перерізі AB на вході передавача 3 і перерізі $B\Gamma$, розташованому на відстані $\lambda/2$. Це забезпечує проходження сигналів від антени 1 на вхід приймача 2.

Спрямовані відгалужувачі забезпечують передачу енергії або сигналів з однієї лінії до іншої тільки в одному напрямку. У відгалужувачі, показаному як

приклад на рис.5.94, для цього служать дві точки зв'язку між лініями, позначені цифрами 1 і 2. Оскільки відстань між точками 1 і 2 становить $\lambda/4$, коливання з нижньої лінії проходять до точки 1 верхньої лінії у фазі, а до точки 2 – у протифазі. Отже, у верхній лінії енергія (сигнали) поширюється тільки у напрямку, позначеному стрілкою.

Подібні принципи покладено до основи побудови антенних комутаторів більш високочастотних діапазонів, де замість ДЛ використовують хвилеводи.

5.14.4 Трансформатори та узгоджувальні пристрої

Розглянуті у підрозд. 5.9 способи узгодження лінії з навантаженням і застосування відрізків ДЛ довжиною $\lambda/4$ як трансформаторів мають суттєвий недолік – вузькосмуговість. Цього недоліку позбавлені узгоджувальні пристрої і трансформатори, створені на базі неоднорідних ліній експоненційного типу (рис.5.95, *a*).

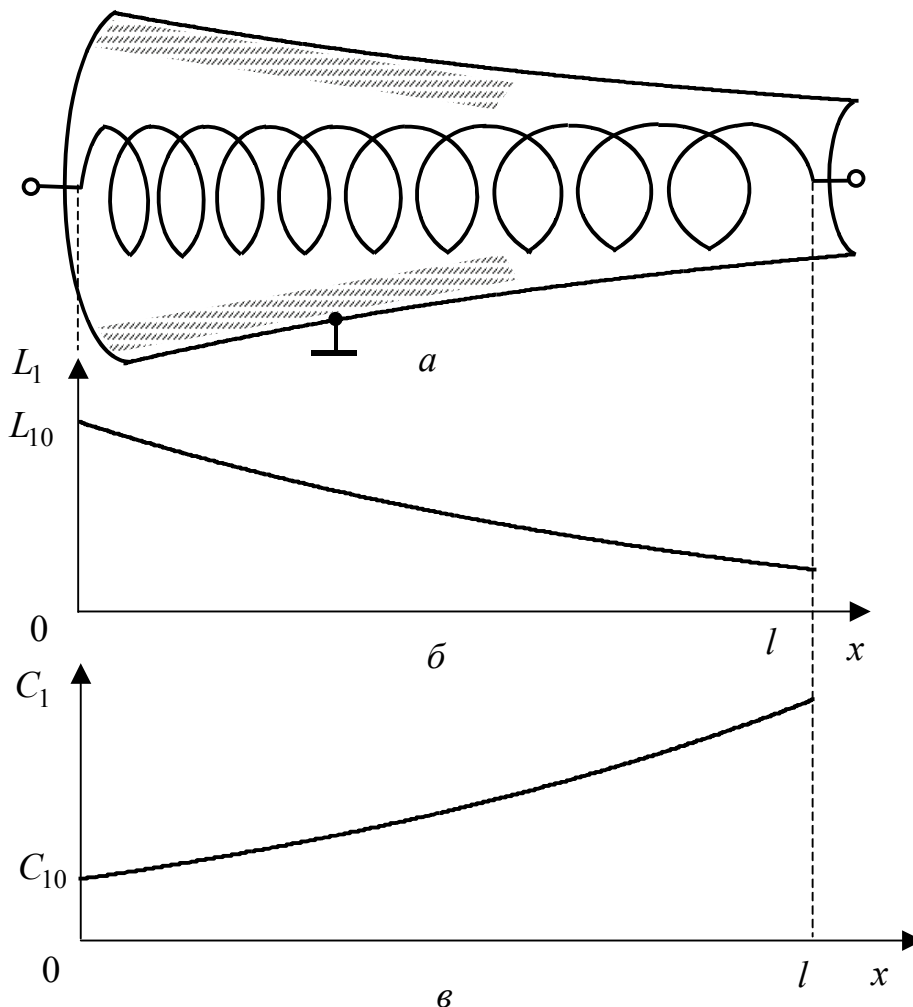


Рисунок 5.95 – Експоненційна лінія: *a* – варіант конструкції; залежність від координати: *б* – погонної індуктивності; *в* – погонної ємності

Термін **експоненційна лінія** (ЕЛ) обумовлений експоненційним законом змінювання первинних параметрів від координати (рис.5.95, б, в):

$$L_1(x) = L_{10}e^{-kx}; \quad C_1(x) = C_{10}e^{kx}, \quad (5.229)$$

де L_{10}, C_{10} – значення первинних параметрів на початку лінії; k – параметр, який визначає швидкість змінювання первинних параметрів вздовж ЕЛ і має розмірність Нп/м.

Параметр k може бути додатним або від'ємним. Значення $k = 0$ відповідає однорідній лінії.

Конструктивно коло з параметрами, які відповідають функції (5.229), можна реалізувати за допомогою коаксіальної спіральної лінії зі змінними кроком намотування і відстанню між спіраллю та екраном (рис.5.95, а).

Для аналізу усталеного синусоїдного режиму в ЕЛ без втрат можна використати систему рівнянь, аналогічну (5.39) і (5.40):

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} = j\omega L_1(x)\underline{I}_m(x); \\ -\frac{d\underline{I}_m(x)}{dx} = j\omega C_1(x)\underline{U}_m(x). \end{cases} \quad (5.230)$$

Перетворюючи систему (5.230), здобувають рівняння відносно $\underline{U}_m(x)$ або $\underline{I}_m(x)$. Так, рівняння для $\underline{U}_m(x)$ має вигляд:

$$\frac{d^2\underline{U}_m(x)}{dx^2} - \frac{1}{L_1(x)} \frac{dL_1(x)}{dx} \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} + \omega^2 L_1(x)C_1(x)\underline{U}_m(x) = 0. \quad (5.231)$$

Підстановка до рівняння (5.231) співвідношення (5.229) дає:

$$\frac{d^2\underline{U}_m(x)}{dx^2} + k \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} + \beta_0^2 \underline{U}_m(x) = 0, \quad (5.232)$$

де $\beta_0 = \omega\sqrt{L_1(x)C_1(x)} = \omega\sqrt{L_{10}C_{10}}$ – коефіцієнт фази ідеальної однорідної лінії з первинними параметрами $L_1 = L_{10}$; $C_1 = C_{10}$.

Характеристичне рівняння, яке відповідає диференціальному (5.232):

$$p^2 + kp + \beta_0^2 = 0,$$

має корені

$$p_{1,2} = -0,5k \mp j\sqrt{\beta_0^2 - (0,5k)^2}. \quad (5.233)$$

У діапазоні частот

$$0 < \omega < \frac{0,5|k|}{\sqrt{L_{10}C_{10}}} \quad (5.234)$$

підкореневий вираз у формулі (5.233) є від'ємною величиною, корені характеристичного рівняння дійсні, і тому процеси в лінії є аперіодичними. Отже, ЕЛ, подібно ФНЧ, не пропускає коливання у частотному діапазоні (5.234).

Поза діапазоном частот (5.234) коефіцієнт фази і швидкість поширення коливань залежать від частоти нелінійно:

$$\beta(\omega) = \sqrt{\beta_0^2 - (0,5k)^2} = \sqrt{\omega^2 L_{10} C_{10} - (0,5k)^2}; \quad v(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 L_{10} C_{10} - (0,5k)^2}}.$$

ЕЛ використовують як трансформатори та узгоджувальні пристрої для частот

$$\omega \gg \frac{0,5|k|}{\sqrt{L_{10} C_{10}}}, \quad (5.235)$$

де частотна дисперсія в ЕЛ практично відсутня.

За умови (5.235) коефіцієнт фази лінійно залежить від частоти:

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 = \omega \sqrt{L_{10} C_{10}}, \quad (5.236)$$

швидкість поширення буде постійною

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_{10} C_{10}}},$$

а саму умову (5.235) можна записати наочніше:

$$|k| \ll 4\pi / \lambda.$$

З урахуванням виразу (5.236) загальний розв'язок рівняння (5.232)

$$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m\text{пад}} e^{-0,5kx} e^{-j\beta_0 x} + \underline{U}_{m\text{від}} e^{-0,5kx} e^{j\beta_0 x}, \quad (5.237)$$

такий самий, як і розв'язок для однорідної ДЛ, утворений сумою падаючої та відбитої хвиль.

Якщо використати вираз (5.237) і перше рівняння системи (5.230), виходить приблизне співвідношення для комплексної амплітуди струму в ЕЛ:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m(x) &= -\frac{1}{j\omega L_1(x)} \frac{d\underline{U}_m(x)}{dx} \approx \frac{j\beta_0 \underline{U}_{m\text{пад}}}{j\omega L_{10} e^{-kx}} e^{-0,5kx} e^{-j\beta_0 x} - \frac{j\beta_0 \underline{U}_{m\text{від}}}{j\omega L_{10} e^{-kx}} e^{-0,5kx} e^{j\beta_0 x} = \\ &= \frac{\underline{U}_{m\text{пад}}}{R_{\text{хв}0}} e^{0,5kx} e^{-j\beta_0 x} - \frac{\underline{U}_{m\text{від}}}{R_{\text{хв}0}} e^{0,5kx} e^{j\beta_0 x}, \end{aligned} \quad (5.238)$$

де $R_{\text{хв}0} = \sqrt{L_{10} / C_{10}}$ – хвильовий опір на початку лінії.

Опір лінії у перерізі x становить:

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}_m(x)}{\underline{I}_m(x)} = R_{\text{хв}0} e^{-kx} \frac{\underline{U}_{m\text{пад}} e^{-j\beta_0 x} + \underline{U}_{m\text{від}} e^{j\beta_0 x}}{\underline{U}_{m\text{пад}} e^{-j\beta_0 x} - \underline{U}_{m\text{від}} e^{j\beta_0 x}}. \quad (5.239)$$

Опір $R_{\text{хв}0} e^{-kx}$, який входить до складу рівняння (5.239), слід розглядати як хвильовий опір у перерізі x :

$$R_{\text{хв}}(x) = R_{\text{хв}0} e^{-kx} = \sqrt{L_1(x) / C_1(x)}. \quad (5.240)$$

Якщо лінію навантажено на $R_{\text{хв}}(l) = R_{\text{хв}0} e^{-kl}$, вона буде узгодженою, оскільки рівність (5.239) при $x = l$ можлива тільки за відсутності відбитої хвилі ($\underline{U}_{m\text{від}} = 0$).

Узгоджена ідеальна ЕЛ має унікальні властивості розподіленого за довжиною ідеального трансформатора:

1) опір у довільному перерізі є активним і змінюється за експоненційним законом:

$$\underline{Z}(x) = R_{\text{ХВ}}(x) = R_{\text{ХВ}0} e^{-kx};$$

2) комплексні амплітуди напруги і струму описуються виразами:

$$\underline{U}_m(x) = \underline{U}_{m1} e^{-0,5kx} e^{-j\beta_0 x}; \quad \underline{I}_m(x) = \underline{I}_{m1} e^{0,5kx} e^{-j\beta_0 x},$$

що відповідає змінюванню амплітуд за експоненційним законом:

$$U_m(x) = U_{m1} e^{-0,5kx}; \quad I_m(x) = I_{m1} e^{0,5kx};$$

3) комплексні амплітуди напруги і струму на виході та вході лінії, як і в ідеальному трансформаторі, пов'язані коефіцієнтом трансформації:

$$n = e^{-0,5kl} = \frac{\underline{U}_m(l)}{\underline{U}_{m1}} = \frac{\underline{I}_{m1}}{\underline{I}_m(l)};$$

4) активна потужність незмінна у будь-якому перерізі:

$$P(x) = \text{Re}[\underline{U}(x)\underline{I}^*(x)] = U(x)I(x) = U_1 I_1 = U(l)I(l).$$

Приблизно такі ж властивості мають реальні ЕЛ з малими втратами.

Смуга робочих частот узгоджувальних пристроїв і трансформаторів на базі ЕЛ обмежується з боку нижніх частот нерівністю (5.235), а зверху – загасанням коливань в лінії. У цьому є перевага ЕЛ порівняно з вузькосмуговими методами, в яких використовують відрізки однорідних ліній ($\lambda/4$ -трансформатори або шлейфи).

Щоб узгодити однорідну лінію, яка має хвильовий опір $R_{\text{ХВ.Л}}$, з активним навантаженням $R_{\text{Н}}$, необхідна ЕЛ з хвильовим опором на початку лінії:

$$R_{\text{ХВ}0} = R_{\text{ХВ.Л}} = \sqrt{L_{10}/C_{10}}.$$

Для заданої довжини l ЕЛ співвідношення (5.240) записують у вигляді:

$$R_{\text{Н}} = R_{\text{ХВ.Л}} e^{-kl},$$

звідки шуканий параметр k становитиме:

$$k = \frac{1}{l} \ln \frac{R_{\text{ХВ.Л}}}{R_{\text{Н}}}.$$

Перш, ніж остаточно вибрати параметри ЕЛ, слід перевірити, чи виконується нерівність (5.235) для мінімальної робочої частоти. Інакше необхідно збільшити довжину лінії та перерахувати параметр k або (за можливості) зменшити величину $\sqrt{L_{10}C_{10}}$, змінюючи значення первинних параметрів.

5.14.5 Вимірювальні пристрої

Для вимірювання параметрів режиму на вході та виході ДЛ (струму, напруги, зсуву фаз тощо) використовують стандартні прилади (вольтметри, амперметри, осцилографи та ін.) і типові методи їхнього увімкнення. Однак ці методи не коректні для вимірювань у перерізах лінії, оскільки безпосереднє увімкнення приладів у лінію змінює її параметри, а іноді обмежене через конст-

руктивні особливості. Тому розроблені спеціальні методи, які передбачають застосування вимірювальних шлейфів і ліній.

Вимірювальний шлейф. Призначений для визначення напруги у місці його увімкнення. Шлейф навантажують на амперметр з малим внутрішнім опором. Якщо довжину шлейфа вибрати такою, щоб на його вході спостерігався максимум напруги, то показання амперметра будуть пропорційні напрузі на вході шлейфа, а отже, і напрузі в лінії в точці увімкнення шлейфа.

Вимірювальний шлейф, складений з відрізка лінії без втрат довжиною $\lambda/4$ і амперметра з нульовим внутрішнім опором, називається ідеальним (рис.5.96). Вихідний струм ідеального шлейфа (показання амперметра I_A) відповідає пучності струму, а вхідна напруга шлейфа (дорівнює напрузі в лінії $U_{\text{л}}$) – пучності напруги. Струм, що показує амперметр, і напруга в лінії пов'язані очевидним співвідношенням:

$$I_A = \frac{U_{\text{л}}}{R_{\text{хв.ш}}},$$

де $R_{\text{хв.ш}}$ – хвильовий опір лінії, з якої виконано шлейф.

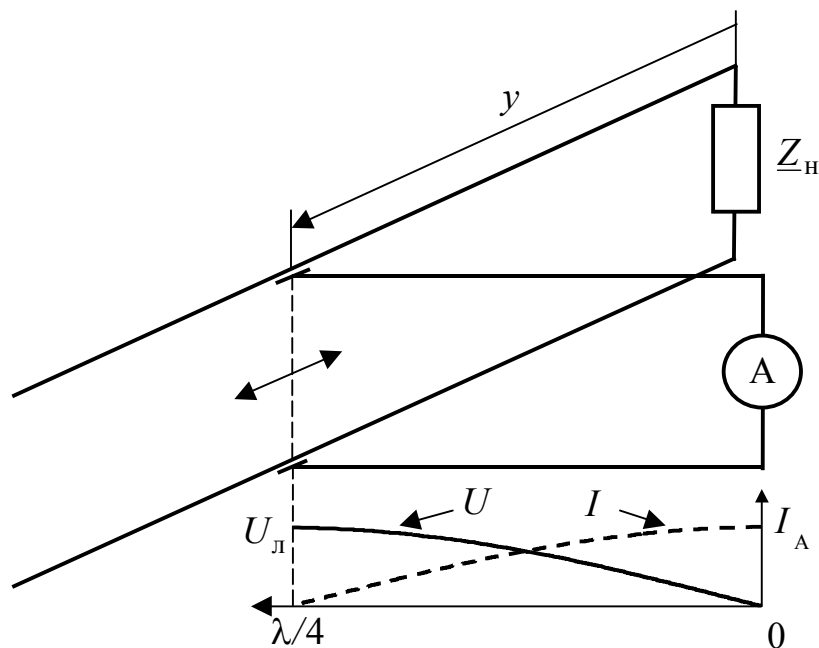


Рисунок 5.96 – Ідеальний вимірювальний шлейф

Ідеальний вимірювальний шлейф має нескінченно великий опір і не спотворює режим лінії, параметри якої вимірюються. Спотворення, які вносить реальний шлейф в лінію, тим менші, чим більший його вхідний опір.

Крім вимірювань напруги в лінії, вимірювальний шлейф дозволяє визначати параметри лінії (λ , $k_{\text{сх}}$, $k_{\text{бх}}$, α) і навантаження. Комплексний опір навантаження обчислюють за формулою (5.146) або за круговою діаграмою після

вимірювання $k_{\text{бк}}$ і відстані до найближчого мінімуму напруги лінії $l'_{U \text{ min}}$.

Застосування вимірювального шлейфа має два недоліки: вузькосмуговість і необхідність безпосереднього увімкнення шлейфа до лінії.

Вимірювальна лінія. Це – високоякісна однорідна коаксіальна лінія, вздовж якої рухається каретка з вимірювальним зондом і каналом вимірювання. Конструкцію вимірювальної лінії пояснює рис.5.97.

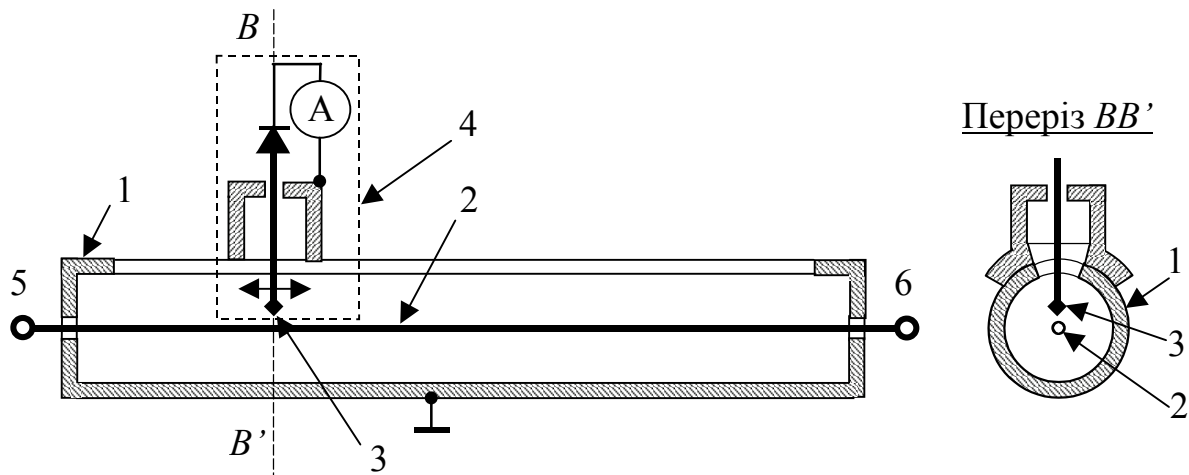


Рисунок 5.97 – Вимірювальна лінія:

- 1 – зовнішній провід (екран) з подовжнім вирізом; 2 – внутрішній провід;
3 – вимірювальний зонд; 4 – рухома коаксіальна каретка із зондом, діодним випрямлячем і амперметром; 5 – вхід лінії; 6 – вихід лінії

Вимірювальний зонд через подовжній виріз у зовнішньому проводі лінії введений в лінію і може пересуватися вздовж внутрішнього проводу разом з кареткою. Зонд виконує функцію ємнісного безконтактного «зняття», сигнал у якому пропорційний напрузі у перерізі лінії, де розташований зонд. Щоб визначити місце розташування зонда, вимірювальна лінія обладнана точною лінійною шкалою, а для увімкнення генератора і досліджуваних кіл (лінії або комплексного навантаження) передбачені вхідний і вихідний коаксіальні розніми.

Вимірювальна лінія дозволяє виконувати ті ж самі вимірювання, що й вимірювальний шлейф, однак не має його недоліків. Це обумовлено тим, що ємнісний вимірювальний зонд працює у широкій смузі частот, а оцінювання режиму і параметрів лінії виконують непрямо – шляхом її послідовного та узгодженого з'єднання з вимірювальною лінією.

5.14.6 Імпульсна техніка

Більшість з численних застосувань ДЛ в імпульсній техніці пов'язано з формуванням та обробкою імпульсних сигналів.

Вище (п. 5.14.2) згадано про застосування ліній затримки для формування

та обробки складних імпульсних сигналів. Формування здійснюють, подаючи на вхід лінії (яка має кілька дискретних або одне розподілене «зняття» певної конфігурації), короткого імпульсу, який відповідає дельта-функції. За рахунок вибору часових і амплітудних параметрів «зняття» утворюється імпульсна характеристика, яка збігається з сигналом, що формується. Такий самий пристрій, складений з лінії затримки і «зняття», використовують і для обробки сигналів. У цьому випадку сигнал подається на вхід лінії, а виходом є «зняття». Для обробки конкретного сигналу формується відповідна імпульсна характеристика.

ДЛ в імпульсній техніці є накопичувачами енергії при формуванні керувальних імпульсів у модуляторах передавальних пристроїв радіолокаційних систем.

Спрощена схема формувача потужних імпульсів для модулятора передавача зображена на рис.5.98, а. Формувач містить розімкнений відрізок лінії довжиною l та затримкою $\tau_3 = l/v$, джерело постійної напруги E , індуктивну котушку L , комутатор K . Вихідні імпульси формуються на активному опорі, який дорівнює хвильовому опору лінії $R_{\text{хв}}$. Діаграми, які пояснюють принцип роботи формувача, побудовані на рис.5.98, б, в, г.

Комутатор у строго визначені моменти часу вмикає лінію до кола заряду (джерело E і котушка L) і до опору $R_{\text{хв}}$.

Нехай в момент часу $-t_1$ лінію увімкнено до кола заряду при нульовому початковому значенні струму в котушці $i_L(-t_1) = 0$. При цьому утворюється коло, де лінію можна розглядати як незаряджену ємність. У випадку малих втрат в лінії та котушці перехідний процес буде коливальним, напруга на вході лінії $u_{\text{л}}(t)$ і струм $i_L(t)$ описуватимуться виразами (1.63) і (1.64), а графіки виглядатимуть, як показано на рис.5.98, в, г.

В момент часу, коли напруга на лінії максимальна ($u_{\text{л}}(-0) \approx 2E$), а струм $i_L(-0) = 0$, лінія підключається до опору $R_{\text{хв}}$. Оскільки у цей момент струм на вході лінії дорівнює нулю, напруга в лінії дорівнює $2E$ не тільки на вході, але й в інших перерізах лінії:

$$u(x, -0) = 2E. \quad (5.241)$$

Отже, при $t > 0$ існує перехідний процес, спричинений розрядом лінії на активний опір, який дорівнює хвильовому.

Зважаючи на ненульову початкову умову (5.241), рівняння (5.10) для ідеальної ДЛ в операторній формі приймуть вигляд:

$$\begin{cases} -\frac{dU(x, p)}{dx} = pL_1 I(x, p); \\ -\frac{dI(x, p)}{dx} = pC_1 U(x, p) - C_1 u(x, -0) = pC_1 U(x, p) - C_1 2E. \end{cases} \quad (5.242)$$

Перетворивши систему (5.242), можна здобути рівняння для напруги в лінії:

$$\frac{dU^2(x, p)}{dx^2} - L_1 C_1 p^2 U(x, p) = -p L_1 C_1 2E. \quad (5.243)$$

Рівняння (5.243), на відміну від виразу (5.17) для нульових початкових умов, є неоднорідним диференціальним рівнянням за змінною x . Розв'язок рівняння (5.243) є сумою загального розв'язку однорідного рівняння (5.17) і частинного розв'язку, який визначається правою частиною рівняння (5.243):

$$U(x, p) = U_{\text{пад}}(p)e^{-p\frac{x}{v}} + U_{\text{від}}(p)e^{p\frac{x}{v}} + \frac{2E}{p}. \quad (5.244)$$

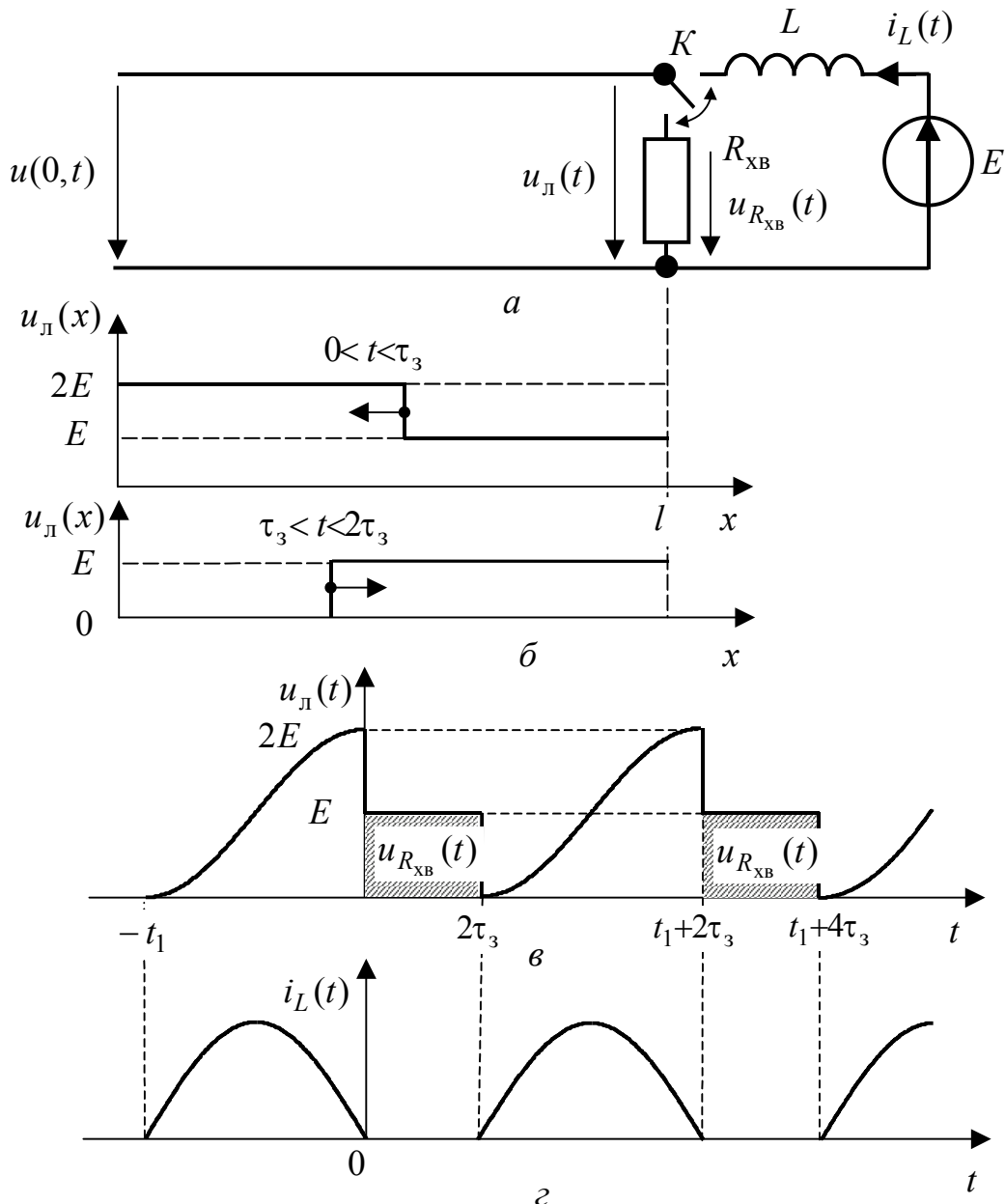


Рисунок 5.98 – Формування прямокутних імпульсів у модуляторі передавача: а – схема; б – динаміка напруги в лінії для $0 < t < 2\tau_3$; в – напруга на затискачах лінії та у навантаженні; г – струм в індуктивності

Підстановка виразу (5.244) в перше рівняння системи (5.242) дає розв'язок для струму:

$$I(x, p) = -\frac{1}{pL_1} \frac{dU(x, p)}{dx} = \frac{U_{\text{пад}}(p)}{R_{\text{ХВ}}} e^{-p\frac{x}{v}} - \frac{U_{\text{від}}(p)}{R_{\text{ХВ}}} e^{p\frac{x}{v}}. \quad (5.245)$$

Щоб визначити сталі інтегрування $U_{\text{пад}}(p)$, $U_{\text{від}}(p)$ у розв'язках (5.244) і (5.245) використовують граничні умови для $x = 0$ та $x = l$:

$$I(0, p) = 0; \quad \frac{U(l, p)}{I(l, p)} = R_{\text{ХВ}}. \quad (5.246)$$

Неважко показати, що застосування умов (5.246) до рівнянь (5.244) і (5.245) дає:

$$U_{\text{пад}}(p) = U_{\text{від}}(p) = -\frac{E}{p} e^{-p\frac{l}{v}};$$

$$U(x, p) = -\frac{E}{p} e^{-p\frac{x+l}{v}} - \frac{E}{p} e^{p\frac{x-l}{v}} + \frac{2E}{p}. \quad (5.247)$$

Обернене перетворення Лапласа від виразу (5.247) дає миттєве значення напруги у будь-якому перерізі лінії:

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[U(x, p)] = -E \cdot 1\left(t - \frac{x+l}{v}\right) - E \cdot 1\left(t + \frac{x-l}{v}\right) + 2E \cdot 1(t) =$$

$$= 2E \cdot 1(t) - E \cdot 1\left(t - \tau_3 - \frac{x}{v}\right) - E \cdot 1\left(t - \tau_3 + \frac{x}{v}\right). \quad (5.248)$$

При $0 < t < \tau_3$ третій доданок у сумі (5.248) дорівнює нулю і розподіл напруги в лінії має вигляд, показаний на верхньому графіку рис.5.98, б. Для інтервалу часу $\tau_3 < t < 2\tau_3$ у формуванні напруги приймають участь всі доданки (5.248), що відповідає нижньому графіку на рис.5.98, б. При $t = 2\tau_3$ напруга в лінії дорівнює нулю, що означає її повний розряд.

З формули (5.248) виходять вирази для напруги на затискачах лінії:

$$u(0, t) = 2E[1(t) - 1(t - \tau_3)];$$

$$u(l, t) = u_{\text{л}}(t) = E[1(t) - 1(t - 2\tau_3)]. \quad (5.249)$$

Вираз (5.249) для напруги на опорі $R_{\text{ХВ}}$ відповідає прямокутному імпульсу тривалістю $2\tau_3$ (заштриховано на рис.5.98, в).

Після закінчення формування прямокутного імпульсу лінія за допомогою комутатора знову підключається до кола заряду і процеси повторюються.

На відміну від конденсатора, який також іноді використовують у модуляторах як накопичувальний елемент, ДЛ забезпечує постійний рівень і стабільну тривалість імпульсів, що формуються.

Прикладом ще одного із застосувань відрізків ДЛ є диференціувальне коло на базі узгодженої на вході замкненої лінії (рис.5.99, *a*).

Дане коло є диференціувальним для вхідного джерела $e(t)$, якщо виходом є $u_1(t)$, а подвоєний час затримки лінії $2\tau_3$ значно менший тривалості оброблюваного імпульсу.

Часові характеристики диференціувального кола для ідеальної ДЛ зображені на рис.5.99, *б*. Приклад проходження через коло імпульсу дзвіноподібної форми ілюструє рис.5.99, *в*, який показує, що напруга $u_1(t)$ за формою практично збігається з похідною вхідної напруги, відрізняючись тільки масштабом по осі ординат і зсувом у часі на величину τ_3 .

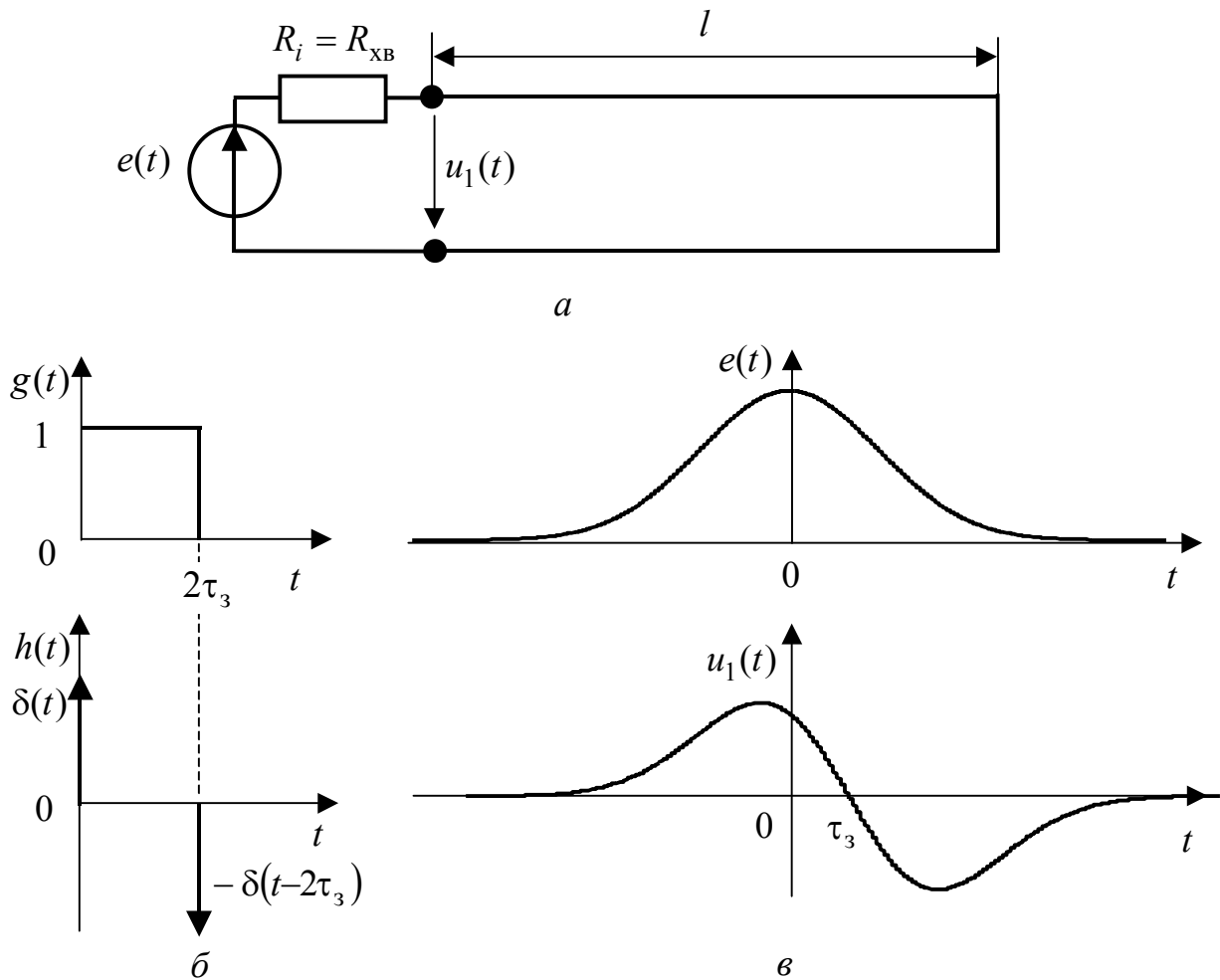


Рисунок 5.99 – Диференціувальне коло: *a* – схема; *б* – часові характеристики; *в* – проходження дзвіноподібного імпульсу

5.15 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Сформулювати головний критерій, за яким коло слід вважати колом з розподіленими параметрами? Які принципові відмінності існують між колами з розподіленими та зосередженими параметрами?

2. Які кола з розподіленими параметрами належать до довгих ліній? Перелічити області застосування ДЛ.

3. Назвати та пояснити різновиди конструкції ДЛ.

4. Дати визначення та пояснити значення первинних (погонних) параметрів ДЛ. Яка розмірність первинних параметрів?

5. Як, використовуючи характер і особливості первинних параметрів, класифікують довгі лінії?

6. Чому в диференціальних (телеграфних) рівняннях ДЛ вживають частинні похідні?

7. Який фізичний сенс мають падаюча та відбита хвилі, що входять до складу розв'язку диференціальних (телеграфних) рівнянь ІДЛ? Чому дорівнюють вторинні параметри ІДЛ – швидкість поширення хвиль та хвильовий опір?

8. Як зміниться хвильовий опір ідеального коаксіального кабелю з поліетиленовою ізоляцією, якщо діаметр внутрішнього провідника зменшити у два рази?

Відповідь: хвильовий опір збільшиться на 27,7 Ом.

9. Який вигляд мають диференціальні рівняння для усталеного процесу в ДЛ при синусоїдній дії, якщо використовувати комплексний метод? Яке значення в цих рівняннях мають комплексні первинні опір і провідність ДЛ?

10. Пояснити структуру розв'язків для струму та напруги в лінії при синусоїдній дії. Яке значення в цих розв'язках мають вторинні параметри: коефіцієнти поширення, ослаблення, фази; комплексний хвильовий опір?

11. Який фізичний сенс мають довжина хвилі та фазова швидкість поширення хвиль? Як ці параметри пов'язані з коефіцієнтом фази?

12. Записати рівняння ДЛ із втратами при синусоїдній дії за допомогою гіперболічних функцій?

13. Що таке комплексний коефіцієнт відбиття?

14. Які особливості мають розв'язки для струму і напруги в ІДЛ та ДЛМВ при синусоїдній дії? Записати за допомогою тригонометричних функцій рівняння ІДЛ з втратами при синусоїдній дії.

15. ІДЛ увімкнено до джерела з частотою $f = 25$ МГц. Первинні параметри лінії: $C_1 = 16$ пФ/м; $L_1 = 1$ мкГн/м. Обчислити фазову швидкість і довжину хвилі в лінії.

Відповідь: $v = 2,5 \cdot 10^8$ м/с; $\lambda = 10$ м.

16. Розрахувати хвильовий опір, коефіцієнт поширення і фазову швидкість хвиль в однорідній ДЛ на частоті $f_1 = 1$ кГц. Первинні параметри

лінії: $R_1 = 6,5 \cdot 10^{-3}$ Ом/м, $L_1 = 2,29 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, $C_1 = 5,22 \cdot 10^{-12}$ Ф/м;
 $G_1 = 0,5 \cdot 10^{-9}$ См/м.

Відповідь: $Z_{\text{хв}} \approx 694e^{-j0,205}$ Ом; $\gamma = (49,6 + j222) \cdot 10^{-7}$ 1/м; $v = 2,83 \cdot 10^8$ м/с.

17. Лінію, розглянуту в попередньому завданні, навантажено на активний опір $R_H = 200$ Ом. Знайти комплексний коефіцієнт відбиття в навантаженні ρ_H .

Відповідь: $\rho_H = 0,561e^{j3,015}$

18. Назвати режими роботи ДЛ при синусоїдній дії. За яких значень опору навантаження існує кожен з цих режимів?

19. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ідеальної та реальної ліній в режимі біжних хвиль? Яке значення має хвильовий опір у цьому перерізі?

20. Як зміняться графіки розподілу амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ в режимі біжних хвиль, якщо змінити частоту коливань?

21. Обчислити амплітуду напруги на виході узгодженої лінії, якщо амплітуда синусоїдної напруги на вході дорівнює 100 В, коефіцієнт ослаблення $\alpha = 0,05$ Нп/м, довжина лінії $l = 8$ м, довжина хвилі $\lambda = 10$ м. Знайти зсув фаз φ між напругами вході та виході лінії.

Відповідь: $U_m = 67,03$ В; $\varphi = 5,027$ рад.

22. Які особливості має режим стійних хвиль? Пояснити поняття “вузол” і “пучність”.

23. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у будь-якому перерізі розімкненої ідеальної лінії? Який характер має і як змінюється опір вздовж лінії у даному режимі?

24. Як змінюються графіки розподілів амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі розімкненої ІДЛ, якщо змінювати частоту коливань?

25. Чим відрізняються розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі розімкнених ліній: з втратами та ідеальної?

26. Хвильовий опір лінії без втрат становить 50 Ом. Знайти амплітуди напруги та струму на відстані $\lambda/8$ від розімкненого кінця, якщо діюче значення напруги у кінці лінії дорівнює 10 В. Визначити комплексний опір у даному перерізі.

Відповідь: $U_m = 10$ В; $I_m = 200$ мА; $Z = -j50$ Ом.

27. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі замкненої ІДЛ? Який має характер і як змінюється опір вздовж лінії у даному режимі?

28. Як змінюються графіки розподілів амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі замкненої ІДЛ, якщо змінювати частоту коливань?

29. Хвильовий опір лінії без втрат дорівнює 50 Ом. Обчислити амплітуди напруги і струму на відстані $\lambda/8$ від замкненого кінця лінії, якщо діюче значення струму у кінці становить 10 мА. Визначити комплексний опір у

даному перерізі.

Відповідь: $U_m = 0,5 \text{ В}; I_m = 10 \text{ мА}; \underline{Z} = j50 \text{ Ом}.$

30. Розрахувати вхідний опір лінії без втрат довжиною 0,5 м в режимах короткого замикання та холостого ходу її вихідних затискачів. Довжина хвилі в лінії 4 м, хвильовий опір 50 Ом.

Відповідь: $\underline{Z}_{\text{кз}} = 50e^{j\pi/2} \text{ Ом}; \underline{Z}_{\text{хх}} = 50e^{-j\pi/2} \text{ Ом}.$

31. Чим відрізняються розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі лінії з втратами та ідеальної лінії, замкнених на кінці?

32. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ, навантаженої на ємність? Який характер має і як змінюється опір вздовж лінії у даному режимі?

33. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ, навантаженої на індуктивність? Який характер має і як змінюється опір вздовж лінії у даному режимі?

34. Який вигляд мають розподіли амплітуд і початкових фаз у довільному перерізі ІДЛ в режимі змішаних хвиль?

35. Пояснити поняття коефіцієнтів біжної хвилі та стійної хвилі? Як ці коефіцієнти пов'язані один з одним та з коефіцієнтом відбиття?

36. В ідеальній лінії з хвильовим опором 200 Ом поширюється синусоїдне коливання з довжиною хвилі 2 м в режимі змішаних хвиль. Максимальна амплітуда струму становить 0,6 А, мінімальна – 0,2 А. Найближчий мінімум струму спостерігається на відстані 0,17 м від навантаження. Знайти комплексний опір навантаження і амплітуду струму в ньому.

Відповідь: $\underline{Z}_H = 195,25 + j228,13 \text{ Ом}; I_{mH} = 0,353 \text{ А}.$

37. Знайти вхідний опір і КСХ лінії довжиною $\lambda/4$ і хвильовим опором 75 Ом, послідовно з якою увімкнено узгоджену лінію з хвильовим опором 50 Ом. Лінії вважати ідеальними.

Відповідь: $R_{\text{вх}} = 112,5 \text{ Ом}; k_{\text{сх}} = 1,5.$

38. Визначити комплексний коефіцієнт трансформації за напругою $\underline{n} = \underline{U}_{m2} / \underline{U}_{m1}$ відрізка ідеальної ДЛ з параметрами $l = \lambda/4$ і $R_{\text{хв}} = 50 \text{ Ом}$, навантаженого на активний опір $R_H = 75 \text{ Ом}$.

Відповідь: $\underline{n} = -j1,5.$

39. Які ДЛ називають збалансованими? Які переваги таких ліній?

40. У чому полягає принцип узгодження ідеальної ДЛ та активного навантаження за допомогою $\lambda/4$ -трансформатора? Який режим має місце в $\lambda/4$ -трансформаторі?

41. Розрахувати хвильовий опір $\lambda/4$ -трансформатора для узгодження лінії ($R_{\text{хв}} = 75 \text{ Ом}$) з активним навантаженням $R_H = 50 \text{ Ом}$.

Відповідь: $R_{\text{хв.тр}} \approx 61,24 \text{ Ом}.$

42. Чи можна застосувати $\lambda/4$ -трансформатор для узгодження ІДЛ з комплексним навантаженням?

43. У чому полягає принцип узгодження ІДЛ єдиним шлейфом? Який режим існує на ділянках лінії та у шлейфі?

44. Які особливості має узгодження ІДЛ двома шлейфами? Який режим існує на ділянках узгодженої лінії та у шлейфах?

45. Для чого призначені відрізки ліній довжиною $\lambda/2$, які застосовують у пристроях узгодження симетричних вібраторів з коаксіальними кабелями?

46. Який параметр лежить в основі побудови кругової діаграми ліній? Яка структура КД?

47. Які задачі дозволяє розв'язувати кругова діаграма?

48. Чи можна застосовувати КД при розрахунках реальних ліній?

49. Розв'язати, використовуючи КД, завдання 17, 26, 29, 30, 36, 37, 38. Оцінити відносну похибку результатів порівняно з аналітичними розрахунками.

50. Яке практичне застосування мають узгоджені лінії, з огляду на характер їхніх АЧХ і ФЧХ?

51. Як впливає значення довжини узгоджених ідеальної та реальної ліній на їхні АЧХ і ФЧХ за напругою і струмом?

52. Назвати спільні та відмінні риси ЧХ послідовного резонансного контуру, складеного з елементів із зосередженими параметрами, і замкненої ДЛ.

53. Замкнена ідеальна повітряна ДЛ з хвильовим опором $R_{\text{хв}} = 100$ Ом з'єднана послідовно з ємністю $C = 20$ пФ. Обчислити довжину лінії, за якої перша резонансна частота становитиме 100 МГц.

Відповідь: $l = 0,32$ м.

54. Які параметри замкненої ДЛ з втратами (як послідовного резонансного контуру) впливають на резонансну частоту, добротність і смугу пропускання цього контуру?

55. До входу замкненої ІДЛ із заданим значенням часу затримки τ_3 увімкнено джерело напруги $\underline{U}_{\text{мдж}}$ з внутрішнім опором, який дорівнює хвильовому опору лінії $R_{\text{хв}}$. Визначити у загальному вигляді КВФ $Y_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{I}_{\text{м1}} / \underline{U}_{\text{мдж}}$, а також АЧХ і ФЧХ.

Відповідь: $Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{G_{\text{хв}} \cos\omega\tau_3}{\cos\omega\tau_3 + j\sin\omega\tau_3}$; $Y_{\text{вх}}(\omega) = G_{\text{хв}} |\cos\omega\tau_3|$;

$$\varphi_Y(\omega) = -\omega\tau_3 + \begin{cases} 0, & \text{якщо } \cos\omega\tau_3 \geq 0; \\ \pi, & \text{якщо } \cos\omega\tau_3 < 0. \end{cases}$$

56. Як впливає індуктивність, увімкнена до вихідних затискачів ДЛ, на її резонансні частоти?

57. Назвати спільні та відмінні риси ЧХ паралельного резонансного контуру, складеного з елементів із зосередженими параметрами, та відрізка розімкненої ДЛ.

58. Які параметри розімкненої ДЛ з втратами (як паралельного резонансного контуру) впливають на резонансну частоту, добротність і смугу пропускання цього контуру?

59. Як впливає ємність, увімкнена до вихідних затискачів ДЛ, на її резонансні частоти? Чи можна використати це явище у практиці?

59. Визначити у загальному вигляді КПФ $H_I(j\omega)$, а також АЧХ і ФЧХ для ідеальної ДЛ, навантаженої на ідеальний послідовний контур. При виведенні вважати відомими хвильовий опір лінії R_{XB} і час затримки τ_3 .

$$\text{Відповідь: } H_I(j\omega) = \frac{R_{XB}}{R_{XB} \cos \omega \tau_3 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \omega \tau_3};$$

$$H_I(\omega) = \frac{R_{XB}}{\sqrt{(R_{XB} \cos \omega \tau_3)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \sin^2 \omega \tau_3}}; \quad \varphi_I(\omega) = -\arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_{XB}} \operatorname{tg} \omega \tau_3 \right).$$

60. Навести приклади дуальних КПФ, КВФ і частотних характеристик ДЛ.

61. Який фізичний сенс мають доданки, з яких у загальному випадку складені миттєві значення струму та напруги у довільному перерізі лінії при перехідному процесі? Чим визначається форма цих доданків у ІДЛ, ДЛМВ і ЗДЛ?

62. Чим відрізняються миттєві значення струму (напруги) на виході та вході узгодженої ІДЛ при перехідному процесі?

63. Чим відрізняються миттєві значення струму (напруги) на виході та вході узгодженої ДЛМВ при перехідному процесі?

64. Чим відрізняються миттєві значення струму (напруги) на виході та вході узгодженої ЗДЛ при перехідному процесі?

65. Дати фізичне пояснення ступінчастого (імпульсного) характеру вихідної напруги розімкненої ІДЛ при увімкненні її до ідеального джерела постійної напруги.

66. Дати фізичне пояснення ступінчастого (імпульсного) характеру вихідного струму замкненої ІДЛ при увімкненні її до ідеального джерела постійного струму.

67. До узгодженої ЗДЛ увімкнено джерело постійної напруги E з внутрішнім опором, складеним з послідовно з'єднаних елементів R_i та L_i . Початкові умови в лінії та індуктивності L_i нульові. Визначити миттєве значення вихідної напруги $u_2(t)$, вважаючи заданими довжину лінії l , хвильовий опір R_{XB} , швидкість v та коефіцієнт ослаблення α .

$$\text{Відповідь: } u_2(t) = \frac{ER_{\text{XB}}e^{-\alpha l}}{R_i + R_{\text{XB}}} \left[1 - e^{-\frac{R_i + R_{\text{XB}}}{L_i}(t-l/v)} \right] \cdot 1(t-l/v).$$

68. ІДЛ, яка має довжину l , хвильовий опір R_{XB} та швидкість поширення хвиль v , навантажено на ідеальний послідовний L, C контур та увімкнено до узгодженого з нею джерела постійної напруги E . Визначити у загальному вигляді вихідну напругу лінії $u_2(t)$ за нульових початкових умов у лінії та контурі.

$$\text{Відповідь: } u_2(t) = E \left\{ 1 - \frac{R_{\text{XB}}}{L(p_1 - p_2)} \left[e^{p_1(t-\tau_3)} - e^{p_2(t-\tau_3)} \right] \right\} \cdot 1(t - \tau_3),$$

$$\text{де } p_{1,2} = -0,5R_{\text{XB}}/L \pm \sqrt{(0,5R_{\text{XB}}/L)^2 - \omega_{\text{рез}}^2}; \quad \omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}; \quad \tau_3 = l/v.$$

69. Здобути вираз для вихідної напруги лінії $u_2(t)$ у попередньому завданні для випадку, коли $p_{1,2} \approx -\delta \pm j\omega_{\text{рез}}$, $\delta = 0,5R_{\text{XB}}/L \ll \omega_{\text{рез}}$.

$$\text{Відповідь: } u_2(t) \approx E \left[1 - \frac{R_{\text{XB}}}{\omega_{\text{рез}}L} e^{-\delta(t-\tau_3)} \sin \omega_{\text{рез}}(t-\tau_3) \right] \cdot 1(t - \tau_3).$$

70. Визначити передатну функцію та часові характеристики кола, розглянутого у завданні 67.

$$\text{Відповідь: } H_U(p) = \frac{R_{\text{XB}}e^{-\alpha l}}{L_i[p + (R_i + R_{\text{XB}})/L]} e^{-pl/v};$$

$$g_{u_2}(t) = \frac{R_{\text{XB}}e^{-\alpha l}}{R_i + R_{\text{XB}}} \left[1 - e^{-\frac{R_i + R_{\text{XB}}}{L_i}(t-l/v)} \right] \cdot 1(t-l/v);$$

$$h_{u_2}(t) = \frac{R_{\text{XB}}e^{-\alpha l}}{L_i} e^{-\frac{R_i + R_{\text{XB}}}{L_i}(t-l/v)} \cdot 1(t-l/v).$$

71. Визначити передатну функцію та часові характеристики кола, розглянутого у завданні 68.

$$\text{Відповідь: } H_U(p) = \frac{p^2 + \omega_{\text{рез}}^2}{p^2 + pR_{\text{XB}}/L_i + \omega_{\text{рез}}^2} e^{-p\tau_3};$$

$$g_{u_2}(t) = \left\{ 1 - \frac{R_{\text{XB}}}{L(p_1 - p_2)} \left[e^{p_1(t-\tau_3)} - e^{p_2(t-\tau_3)} \right] \right\} \cdot 1(t - \tau_3);$$

$$h_{u_2}(t) = \left\{ -\frac{R_{\text{XB}}}{L(p_1 - p_2)} \left[p_1 e^{p_1(t-\tau_3)} - p_2 e^{p_2(t-\tau_3)} \right] \right\} \cdot 1(t - \tau_3) + \delta(t - \tau_3).$$

72. Визначити часові характеристики кола, розглянутого у завданні 69.

$$\text{Відповідь: } g_{u_2}(t) \approx \left[1 - \frac{R_{\text{XB}}}{\omega_{\text{рез}}L} e^{-\delta(t-\tau_3)} \sin \omega_{\text{рез}}(t-\tau_3) \right] \cdot 1(t - \tau_3);$$

$$h_{u_2}(t) \approx -\frac{R_{XB}}{L} e^{-\delta(t-\tau_3)} \cos \omega_{\text{рез}}(t-\tau_3) \cdot 1(t-\tau_3) + \delta(t-\tau_3).$$

73. Навести приклади використання ДЛ для передавання високочастотної енергії та радіосигналів.

74. В яких радіотехнічних пристроях ДЛ застосовують для реалізації часової затримки?

75. Які характерні властивості мають спіральні кабелі?

76. Навести приклади застосування резонансних властивостей відрізків ДЛ.

77. Які основні характеристики та властивості експоненційних ліній? З якою метою використовують експоненційні лінії?

78. В яких вимірювальних пристроях застосовують ДЛ?

79. Навести приклади використання ДЛ в імпульсній техніці.

80. У момент часу $t = 0$ заряджену до напруги $u(x, -0) = U_0$ розімкнену ДЛ з довжиною l , хвильовим опором R_{XB} та швидкістю поширення хвиль v увімкнено до опору навантаження $R_H \neq R_{XB}$. Визначити миттєве значення напруги на опорі навантаження $u_H(t)$ для $t > 0$.

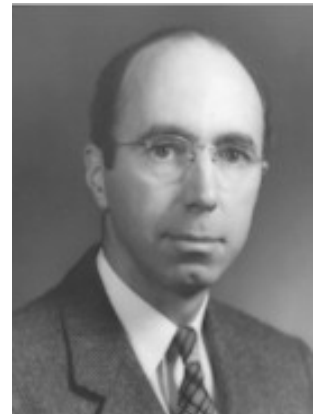
Відповідь:

$$u_H(t) = \frac{U_0 R_H}{R_H + R_{XB}} \left[1(t) - (1 - \rho_H) \cdot 1\left(t - \frac{2l}{v}\right) - \rho_H (1 - \rho_H) \cdot 1\left(t - \frac{4l}{v}\right) - \rho_H^2 (1 - \rho_H) \cdot 1\left(t - \frac{6l}{v}\right) - \dots \right],$$

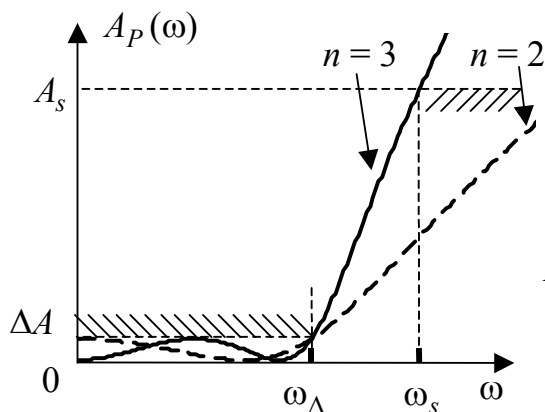
де $\rho_H = \frac{R_H - R_{XB}}{R_H + R_{XB}}$ – коефіцієнт відбиття від навантаження.

6 Основи синтезу електричних кіл

- ❑ Етапи розв'язання задачі синтезу
- ❑ Частотна залежність ослаблення та вимоги до неї
- ❑ Операторна передатна функція поліномного фільтра
- ❑ Фільтри з характеристиками Баттерворта
- ❑ Фільтри з характеристиками Чебишова
- ❑ Фільтри верхніх частот
- ❑ Смугові фільтри з симетричними характеристиками
- ❑ Загороджувальні фільтри з симетричними характеристиками
- ❑ Частотні залежності реактансних функцій
- ❑ Реалізація реактансних функцій за Фостером і Кауером
- ❑ Реалізація ОПФ східцевими реактивними колами, навантаженими з обох боків
- ❑ Перетворення схеми ФП у схеми інших типів
- ❑ Синтез фільтрів на операційних підсилювачах
- ❑ Синтез фільтрів на нетрадиційних ОП



Дарлінгтон



$$T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega)$$

$$A_p(\Omega) = 10 \lg[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)]$$

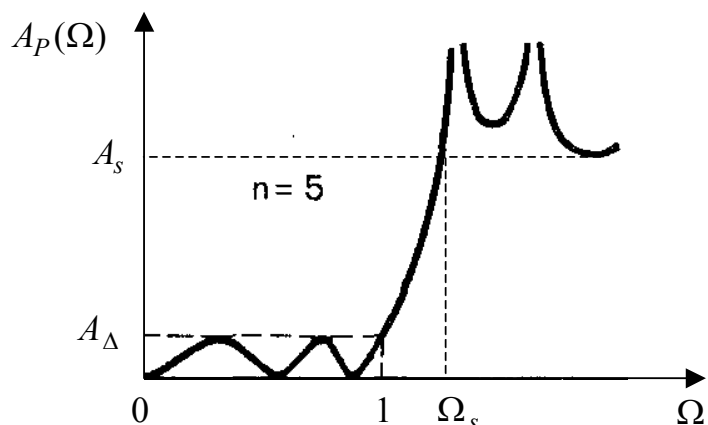
$$A_p(\Omega) = 10 \lg[1 + \varepsilon^2 F_n^2(\Omega)]$$



Золотар'ов



Чебишов



6 ОСНОВИ СИНТЕЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

6.1 Етапи розв'язання задачі синтезу

У задачах аналізу кіл, розглянутих у попередніх розділах, відомою була структура кола та, як правило, його параметри. За різних умов визначались відгуки на задану дію або характеристики кіл при типових діях. На відміну від аналізу, задача синтезу полягає у визначенні структури і параметрів кола, яке має певні частотні або часові характеристики. Задачу аналізу можна розв'язувати різними способами, але результат буде завжди однозначний, чого не можна сказати про задачу синтезу. Найчастіше у практиці синтезують кола (електричні фільтри, лінії затримки, амплітудні та фазові коректори тощо), формулюючи вимоги до їх передатних частотних характеристик.

Загалом розв'язання задачі синтезу кола поділяють на три етапи.

Перший – визначення операторної передатної функції, яка задовольняє певним вимогам до частотних характеристик кола і відповідає умовам фізичної реалізації. У цьому полягає задача **апроксимації**. Отримувати ОПФ з ідеальною АЧХ не має сенсу, бо таку ОПФ неможливо фізично реалізувати.

Другий – побудова у заданій елементній базі схемної структури, що має визначену ОПФ. Це так звана задача **структурного синтезу**.

Третій – визначення параметрів елементів, що утворюють синтезоване коло, – це задача **параметричного синтезу**.

Слід зауважити, що на всіх цих етапах не має однозначного результату і вибір конкретної схеми кола визначається додатковими вимогами (кількістю елементів кола, припустимими значеннями їхніх параметрів, масогабаритними, конструктивними та іншими показниками).

6.2 Частотна залежність ослаблення та вимоги до неї

Розв'язання задачі апроксимації доцільно розглянути за певних обмежень: по-перше, кола, ОПФ яких визначатимуться, належать до кіл мінімально-фазового типу; по-друге, вимоги до частотних характеристик стосуються тільки АЧХ, тобто ніяких вимог до ФЧХ не ставиться (мова йде про синтез за умови заданої АЧХ).

Згідно з виразом (3.100) передатна функція кола за потужністю $H_P(\omega)$ визначається за допомогою амплітудно-квадратичної характеристики кола $H_U^2(\omega)$, тобто квадрата модуля КПФ за напругою. Для електричних фільтрів переважно виконується умова $P_{\text{вих}} < P_{\text{вх}}$, тоді $\frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} < 1$; $\lg \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} < 0$. Щоб уникнути цього обмеження, вимоги до частотної характеристики фільтрів формулюють не до функції $H_P(\omega)$, а до логарифмічної оберненої функції $A_P(\omega)$, яка має назву **частотної характеристики ослаблення за потужністю**:

$$A_P(\omega), \text{дБ} = 10 \lg \frac{P_{\text{вх}}}{P_{\text{вих}}} = 10 \lg \frac{1}{H_P(\omega)}.$$

З урахуванням формули (3.99) виходить:

$$A_P(\omega), \text{дБ} = 10 \lg \frac{1}{k_R H_U^2(\omega)} = 10 \lg \frac{1}{H_U^2(\omega)} - 10 \lg k_R.$$

Постійна величина k_R не впливає на частотну залежність ослаблення, а тільки визначає рівень її відліку, тому константа $10 \lg k_R$ може мати довільне значення. За умови $k_R = 1$, виходить нульовий рівень відліку $A_P(\omega)$, якщо $k_R < 1$, крива $A_P(\omega)$ зміщується вгору, якщо $k_R > 1$, навпаки – вниз. Опускаючи надалі для спрощення одиниці вимірювання ослаблення, можна записати:

$$A_P(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H_U^2(\omega)}. \quad (6.1)$$

На рис.6.1, а зображена АЧХ, а на рис.6.1, б – частотна залежність ослаблення $A_P(\omega)$ ідеального ФНЧ.

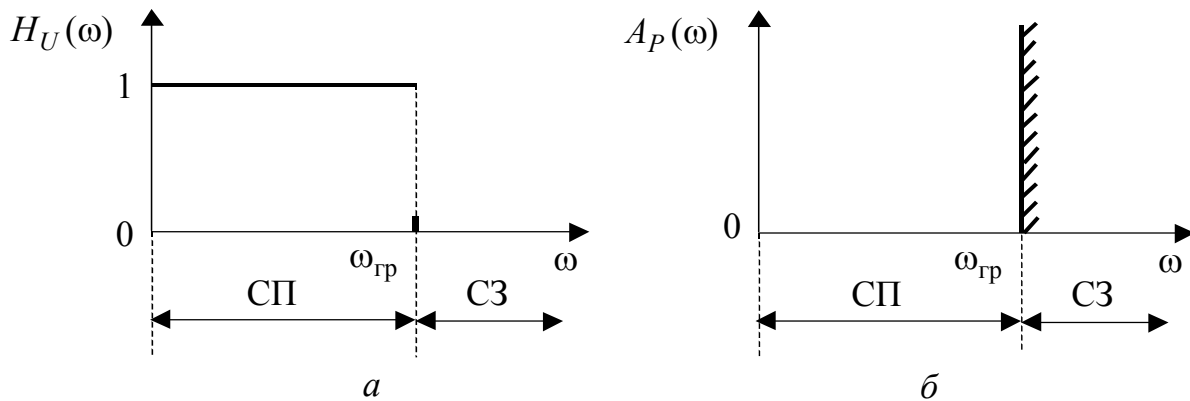


Рисунок 6.1 – Частотні характеристики ідеального ФНЧ:
а – коефіцієнт передачі за напругою; б – ослаблення

У смузі пропускання (СП) ідеальний ФНЧ має одиничне значення АЧХ ($H_U(\omega) = 1$), згідно з формулою (6.1) ослаблення $A_P(\omega) = 0$. У смузі затримання (СЗ), яку відділяє від СП гранична частота $\omega_{\text{гр}}$, АЧХ набуває нульового значення ($H_U(\omega) = 0$), а ослаблення – нескінченного, що умовно показано вертикальною лінією із штрихуванням справа.

Ослаблення $A_P(\omega)$ реальних фільтрів у смузі пропускання – ненульове, але не має перевищувати задане значення A_{Δ} . Частоту, для якої ця умова ще виконується, позначають ω_{Δ} , тобто $A(\omega_{\Delta}) = A_{\Delta}$ (рис.6.2). Ліва межа СП – нульова частота, а права – визначається граничною частотою $\omega_{\text{гр}}$: $A(\omega_{\text{гр}}) = A_{\text{гр}}$. Якщо рівень $A_{\text{гр}}$ збігається з A_{Δ} , тоді $\omega_{\text{гр}} = \omega_{\Delta}$. У смузі затримання ослаблення $A_P(\omega)$ не може бути меншим, ніж задане значення $A_s = A(\omega_s)$. Частота ω_s ви-

значає ліву межу СЗ, а права – прямує до нескінченності. Між частотами $\omega_{гр}$ і ω_s лежить смуга переходу.

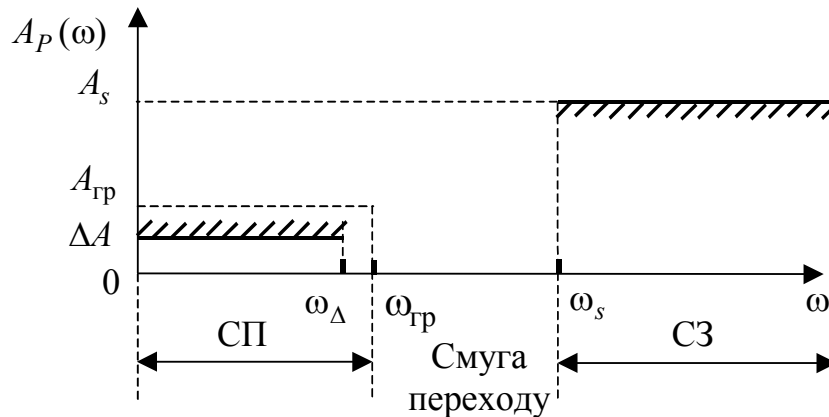


Рисунок 6.2 – Вимоги до частотної залежності ослаблення неідеального ФНЧ

6.3. Операторна передатна функція поліномного фільтра

Фільтри з ОПФ вигляду

$$H_U(p) = \frac{k'}{V(p)}, \quad (6.2)$$

мають назву **поліномних фільтрів**, оскільки їх частотні властивості визначаються поліномом Гурвіца $V(p)$. До значення константи k' ніяких вимог не ставиться, тобто поліномні фільтри відтворюють задану АЧХ з точністю до константи. Щоб перейти до функції ослаблення $A_p(\omega)$, спочатку слід визначити амплітудно-квадратичну характеристику $H_U^2(\omega)$ на підставі формули (3.97). Враховуючи співвідношення (6.2), можна записати:

$$H_U^2(\omega) = \frac{k_R}{V^2(\omega)}, \quad (6.3)$$

де k_R – константа (причому $k' = \sqrt{k_R}$), значення якої можна вибрати довільно. За умови $k_R = 1$ вирази (6.1) і (6.3) набувають вигляду:

$$A_p(\omega) = 10 \lg V^2(\omega); \quad (6.4)$$

$$H_U^2(\omega) = \frac{1}{V^2(\omega)}. \quad (6.5)$$

Виходячи з формули (3.91), дійсна та уявна частини полінома $V(j\omega)$ – це парні функції частоти ω . Отже, квадрат модуля $V(j\omega)$ також є парною функцією частоти ω :

$$V^2(\omega) = V_{\text{Re}}^2(\omega) + \omega^2 V_{\text{Im}}^2(\omega),$$

яку можна представити як поліном змінної ω^2 :

$$V^2(\omega) = C_n \omega^{2n} + C_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + C_2 \omega^4 + C_1 \omega^2 + C_0. \quad (6.6)$$

На підставі виразів (6.4) і (6.5) $A_p(\omega)$, $H_U^2(\omega)$ – також парні функції ω .

Задача апроксимації полягає у визначенні, по-перше, – таких коефіцієнтів полінома (6.6), які б задовольняли вимогам:

$$\begin{cases} A_p(\omega_\Delta) \leq A_\Delta; \\ A_p(\omega_s) \geq A_s, \end{cases} \quad (6.7)$$

а по-друге, – ОПФ за допомогою $A_p(\omega)$. Оскільки ця задача є неоднозначною, доцільно розглянути деякі способи її розв'язання.

6.4. Фільтри з характеристиками Баттєрворта

З огляду на співвідношення (6.4) вимоги до частотної характеристики ослаблення (рис.6.2) можна застосувати до функції $V^2(\omega)$ (6.6): чим менше у смузі пропускання відрізняється від нуля ослаблення $A_p(\omega)$, тим менше від одиниці має відрізнятись функція $V^2(\omega)$ у цій смузі. Така поведінка притаманна функціям, що представлені рядом Маклорена¹ поблизу точки $\omega = 0$, якщо виконуються вимоги:

$$V^2(\omega)|_{\omega=0} = 1; \quad (6.8)$$

$$V^{2'}(0) = 0; \quad V^{2''}(0) = 0; \quad \dots; \quad V^{2^{(n-1)}}(0) = 0. \quad (6.9)$$

Щоб врахувати умови (6.9), визначають похідні $V^2(\omega)$ за ω^2 :

$$\begin{cases} V^{2'}(\omega) = nC_n\omega^{2(n-1)} + (n-1)C_{n-1}\omega^{2(n-2)} + \dots + 2C_2\omega^2 + C_1; \\ V^{2''}(\omega) = n(n-1)C_n\omega^{2(n-2)} + (n-1)(n-2)C_{n-1}\omega^{2(n-4)} + \dots + 2C_2; \\ \dots \\ V^{2^{(n-1)}}(\omega) = n(n-1) \dots \cdot 2C_n\omega^2 + (n-1)(n-2) \dots \cdot 2C_{n-1}, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} V^{2'}(0) = C_1; \\ V^{2''}(0) = 2C_2; \\ \dots \\ V^{2^{(n-1)}}(0) = (n-1)(n-2) \dots \cdot 2C_{n-1}. \end{cases} \quad (6.10)$$

¹ **Маклорен Колін**, Maclaurin (1698–1746) – шотландський математик, професор, член Лондонської королівської спілки (1719), учень Ньютона. Працював у Шотландії (Абердін, Единбург), Франції. Лауреат премії Паризької АН за роботи з фізики (1740) разом з Д. Бернуллі, Л. Ейлером. В області аналізу встановив інтегральну ознаку збіжності числових рядів і формулу їх підсумовування. Кілька його теорем увійшли до сучасної теорії плоских кривих та проективної геометрії. Першим оприлюднив працю про розкладання функцій у степеневі ряди.

За умови (6.8) на підставі співвідношення (6.6) виходить:

$$V^2(0) = C_0 = 1. \quad (6.11)$$

З урахуванням рівнянь (6.10) виконання умов (6.9) призводить до вимог:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = 0. \quad (6.12)$$

За умов (6.11) і (6.12), рівняння (6.6) перетворюється до вигляду:

$$V^2(\omega) = 1 + C_n \omega^{2n}.$$

При $C_n = 1$ виходить:

$$V^2(\omega) = 1 + \omega^{2n}. \quad (6.13)$$

З метою узагальнення запису, доцільно ввести нормовану частоту:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}}. \quad (6.14)$$

Тоді вирази (6.13), (6.4), (6.5) відповідно матимуть вигляд:

$$V^2(\Omega) = 1 + \Omega^{2n}, \quad (6.15)$$

$$A_P(\Omega) = 10 \lg(1 + \Omega^{2n}); \quad (6.16)$$

$$H_U^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}. \quad (6.17)$$

Слід зауважити, що частотна характеристика ослаблення та АКХ – парні функції частоти Ω . Фільтри із залежностями (6.16), (6.17) мають назву фільтрів з характеристиками **Баттерворта**² (ФБ), причому n є порядком фільтра. За умови $\Omega = 1$ (на частоті $\omega = \omega_{\text{гр}}$) функція $V^2(1) = 2$, ослаблення ФБ становитиме $10 \lg 2 \cong 3$ дБ. Отже, $A_P(\omega_{\text{гр}}) = 3$ дБ; $H_U(\omega_{\text{гр}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ на підставі виразу (6.17).

Оскільки для ФБ виконуються умови (6.9), які при відході від частоти $\Omega = 0$ забезпечують повільне зростання функцій $V^2(\Omega)$, $A_P(\Omega)$ і, як наслідок, повільний спад $H_U(\Omega)$, ФБ мають ще назву фільтрів з **максимально плоскими характеристиками ослаблення**. Графіки залежностей $A_P(\omega)$ і $H_U(\omega)$ для різних значень n зображені на рис.6.3.

У смузі затримання для частот $\Omega \gg 1$ одиницею у виразі (6.16) можна знехтувати, і тоді ослаблення визначиться як $A_P(\Omega) = 20n \lg \Omega$. При збільшенні частоти удвічі ($\Omega_2 = 2\Omega_1$; $\lg \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \cong 0,3$), або на октаву, приріст ослаблення становитиме:

$$A_P(\Omega_2) - A_P(\Omega_1) = 20n \lg \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \cong 6n \text{ дБ}. \quad (6.18)$$

² **Баттерворт Стівен**, S. Butterworth – англійський інженер, вперше описав максимально плоску частотну характеристику фільтра у статті “On the Theory of Filter Amplifiers” (1930).

Отже, необхідний приріст ослаблення у СЗ можна забезпечити, збільшуючи значення n .

Оскільки від доданку Ω^{2n} у знаменнику формули (6.17) за умови $\Omega > 1$ залежить швидкість спадання АКХ, його пов'язують ще з функцією фільтрації і вводять позначення:

$$H_U^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)}, \quad (6.19)$$

де $\varphi^2(\Omega)$ – квадрат модуля функції фільтрації.

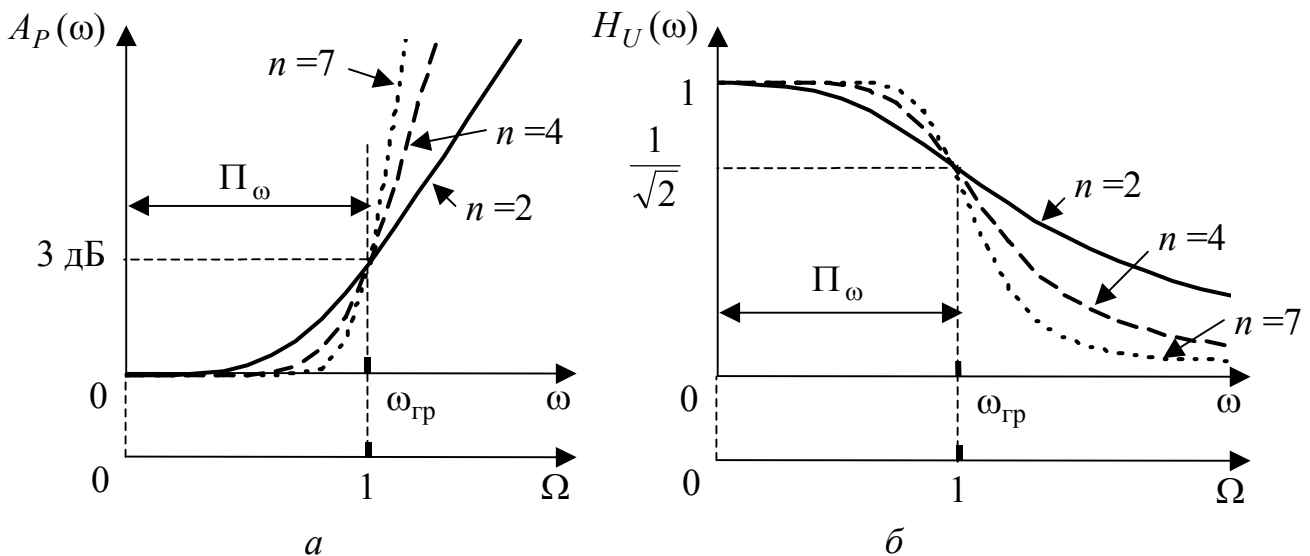


Рисунок 6.3 – Частотні залежності ФНЧ Баттерворта: a – ослаблення; b – коефіцієнта передачі за напругою

Тоді з урахуванням виразу (6.15) знаменник АКФ (6.19) можна записати:

$$V^2(\Omega) = 1 + \varphi^2(\Omega). \quad (6.20)$$

Функція фільтрації $\varphi(p)$ є функцією комплексного змінного p .

Порівнюючи вирази (6.17) і (6.19), можна зробити висновок, що для ФБ квадрат модуля функції фільтрації

$$\varphi^2(\Omega) = \Omega^{2n}. \quad (6.21)$$

Тоді частотна залежність ослаблення (6.16) становитиме:

$$A_p(\Omega) = 10 \lg(1 + \varphi^2(\Omega)). \quad (6.22)$$

Порядок фільтра n визначається кількістю ланок фільтра, тобто може бути тільки цілим числом. Щоб знайти n , до системи (6.7) слід підставити вираз (6.16) для відповідних частот:

$$\begin{cases} A_p(\Omega_\Delta) = 10 \lg(1 + \Omega_\Delta^{2n}) \leq A_\Delta; \\ A_p(\Omega_s) = 10 \lg(1 + \Omega_s^{2n}) \geq A_s. \end{cases} \quad (6.23)$$

Внаслідок переходу від нерівностей до рівностей система (6.23) приймає вигляд:

$$\begin{cases} 10 \lg(1 + \Omega_{\Delta}^{2n}) = A_{\Delta}; \\ 10 \lg(1 + \Omega_s^{2n}) = A_s. \end{cases} \quad (6.24)$$

Якщо поділити обидва рівняння системи (6.24) на 10 і пропотенціювати, виходить:

$$\begin{cases} 10^{0,1A_{\Delta}} = 1 + \Omega_{\Delta}^{2n}; \\ 10^{0,1A_s} = 1 + \Omega_s^{2n}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \Omega_{\Delta}^{2n} = 10^{0,1A_{\Delta}} - 1; \\ \Omega_s^{2n} = 10^{0,1A_s} - 1. \end{cases} \quad (6.25)$$

Оскільки $\Omega_s > \Omega_{\Delta}$ (див. рис.6.2), $\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_{\Delta}}\right)^{2n} = \frac{10^{0,1A_s} - 1}{10^{0,1A_{\Delta}} - 1}$, або після логарифмування:

$$2n \lg \frac{\Omega_s}{\Omega_{\Delta}} = \lg(10^{0,1A_s} - 1) - \lg(10^{0,1A_{\Delta}} - 1),$$

звідки

$$n^* = \frac{\lg(10^{0,1A_s} - 1) - \lg(10^{0,1A_{\Delta}} - 1)}{2 \lg \frac{\Omega_s}{\Omega_{\Delta}}}. \quad (6.26)$$

Як правило, отримане з цього рівняння значення орієнтовного порядку фільтра n^* – число дробове. Щоб визначити порядок фільтра, n^* слід збільшити до цілого значення:

$$n \geq n^*, \quad (6.27)$$

при цьому рівняння (6.24) перетворюються на вихідні нерівності (6.23).

Слід зауважити, що для визначення n^* не потрібно знати нормовані частоти, оскільки

$$\frac{\Omega_{\Delta}}{\Omega_s} = \frac{\omega_{\Delta}}{\omega_s} = \frac{f_{\Delta}}{f_s}. \quad (6.28)$$

Денормування частотних характеристик потребує визначення граничної частоти, яку можна знайти, користуючись саме дробовим значенням n^* з будь-якого рівняння системи (6.24). З огляду на формулу (6.25) виходить:

$$\frac{\omega_{\Delta}}{\omega_{\text{гр}}} = (10^{0,1A_{\Delta}} - 1)^{\frac{1}{2n^*}}, \quad \text{або} \quad \frac{\omega_s}{\omega_{\text{гр}}} = (10^{0,1A_s} - 1)^{\frac{1}{2n^*}}, \quad \text{звідки}$$

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\Delta}}{(10^{0,1A_{\Delta}} - 1)^{\frac{1}{2n^*}}} = \frac{\omega_s}{(10^{0,1A_s} - 1)^{\frac{1}{2n^*}}}. \quad (6.29)$$

Щоб отримати залежність ослаблення від абсолютних значень частоти, слід нормовану безрозмірну частоту Ω , що відкладена за віссю абсцис (рис.6.3), замінити частотою $\omega = \Omega \omega_{\text{гр}}$ на підставі співвідношення (6.14).

Щоб визначити ОПФ, на підставі виразу (3.88) записують аналогічне рівняння, яке встановлює зв'язок між комплексним коефіцієнтом передачі за напругою та ОПФ для нормованих значень аргументів:

$$H_U(j\Omega)|_{j\Omega=\bar{p}} = H_U(\bar{p}), \quad (6.30)$$

де \bar{p} – нормоване значення комплексної змінної:

$$\bar{p} = j\Omega = j \frac{\Omega}{\Omega_{гр}}; \quad (6.31)$$

звідки
$$\Omega = \frac{\bar{p}}{j} = -j\bar{p}. \quad (6.32)$$

Зв'язок між модулями лівої та правої частин рівняння (6.30) встановлюють, враховуючи вирази (6.5) і (6.32):

$$H_U^2(\Omega)|_{\Omega=-j\bar{p}} = \frac{1}{V^2(\Omega)|_{\Omega=-j\bar{p}}} = |H_U(\bar{p})|^2 = \frac{1}{|V(\bar{p})|^2}. \quad (6.33)$$

З огляду на формули (6.19), (6.20) і (6.32) виходить:

$$|V(\bar{p})|^2 = 1 + \varphi^2(\Omega)|_{\Omega=-j\bar{p}}. \quad (6.34)$$

Щоб визначити полюси $|H_U(\bar{p})|^2$, прирівнюють нулю знаменник (6.34):

$$|V(\bar{p})|^2 = 1 + (-j\bar{p})^{2n} = 0, \quad (6.35)$$

звідки
$$-j\bar{p}_k = \sqrt[2n]{-1} = e^{j \frac{2k-1}{2n} \pi}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

або
$$-j\bar{p}_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + j \sin \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

Поділивши обидві частини останнього виразу на $-j$, можна знайти нормоване значення кореня \bar{p} :

$$\bar{p}_k = -\sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \quad (6.36)$$

Визначені за формулою (6.36) нормовані корені ФБ лежать на колі одиничного радіуса на однаковій відстані один від одного. Як приклад на рис.6.4 показано розташування коренів \bar{p} на комплексній площині для $n = 3$.

Як видно з рис.6.4, кути між радіусами, проведеними у точки полюсів, однакові й загалом становлять величину $\varphi = \frac{\pi}{n}$; числові значення полюсів визначені нижче у прикладі 6.1 для $n = 3$.

Якщо у виразі (6.36) удвічі зменшити верхню межу значення k , тобто $k = 1, 2, \dots, n$, корені \bar{p}_k , належатимуть тільки лівій півплощині та утворять поліном Гурвіца, який, враховуючи визначений спосіб розташування коренів, має ще назву полінома Баттерворта і може бути представлений у вигляді:

$$V(\bar{p}) = \prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k). \quad (6.37)$$

Це дозволяє на підставі виразу (6.2) за умови $k' = 1$ визначити ОПФ поліномного фільтра:

$$H_U(\bar{p}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k)}. \quad (6.38)$$

Для двох комплексно-спряжених коренів $\bar{p}_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$, які лежать на колі одиничного радіуса ($\sigma^2 + \omega^2 = 1$), поліном $V(\bar{p})$ має вигляд:

$$V(\bar{p}) = (\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_2), \quad \text{або } V(\bar{p}) = \bar{p}^2 + 2\sigma\bar{p} + 1. \quad (6.39)$$

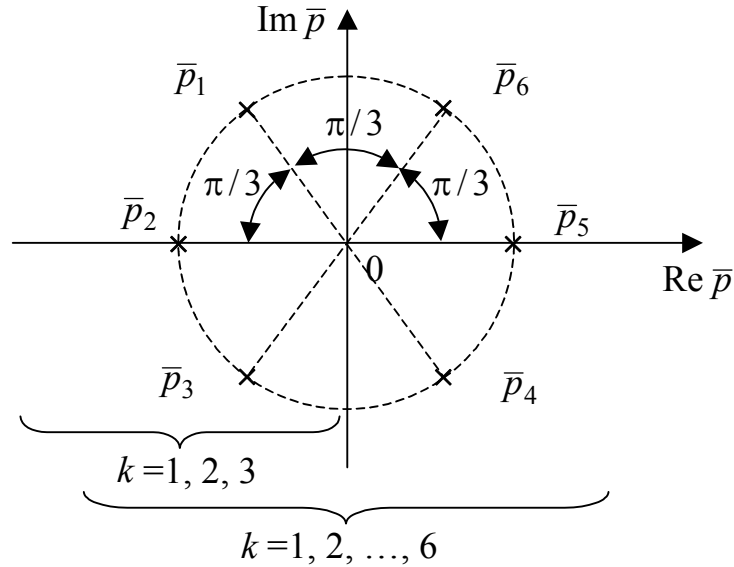


Рисунок 6.4 – Полюси ФБ третього порядку

З виразу (6.39) видно, що визначення нормованого полінома не потребує обчислення уявної частини комплексно-спряжених коренів.

Тому поліном Баттерворта (6.37) можна представити у вигляді:

$$V(\bar{p}) = \prod_{k=1}^m (\bar{p}^2 + 2\sigma_k\bar{p} + 1); \quad m = n/2, \quad (6.40)$$

де $\sigma_k = \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$ – реальна частина виразу (6.36).

Це дає можливість реалізовувати ОПФ (6.38) ланками другого порядку для парного n . Поліном Баттерворта для непарного n міститиме, крім m ланок другого, ще одну ланку першого (або $m-1$ другого та одну третього) порядку:

$$V(\bar{p}) = \prod_{k=1}^m (\bar{p}^2 + 2\sigma_k\bar{p} + 1)(\bar{p} + \sigma), \quad m = \frac{n-1}{2}. \quad (6.41)$$

Отже, залежно від того, парним чи непарним є порядок n ФНЧ Баттерворта, його ОПФ визначається на підставі виразу (6.38), до знаменника якого слід підставити добуток (6.40) або (6.41).

Загалом поліном Баттерворта має вигляд:

$$V(\bar{p}) = \bar{p}^n + b_{n-1}\bar{p}^{n-1} + \dots + b_1\bar{p} + 1. \quad (6.42)$$

Коефіцієнти поліномів Баттерворта для різних n наведено у табл.6.1.

Таблиця 6.1 – Коефіцієнти поліномів Баттерворта ($b_0 = 1; b_n = 1$)

n	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
2	1,4142136								
3	2,0000000	2,0000000							
4	2,6131259	3,4142136	2,6131259						
5	3,2360680	5,2360680	5,2360680	3,2360680					
6	3,8637033	7,4641016	9,1416202	7,4641016	3,8637033				
7	4,4939592	10,0978347	14,5917939	14,5917939	10,0978347	4,4939592			
8	5,1258309	13,1370712	21,8461510	25,6883559	21,8461510	13,1370712	5,1258309		
9	5,7587705	16,5817187	31,1634375	41,9863857	41,9863857	31,1634375	16,5817187	5,7587705	
10	6,3924532	20,4317291	42,8020611	64,8823963	74,2334292	64,8823963	42,8020611	20,4317291	6,3924532

Визначення денормованої ОПФ потребує підстановки до виразу (6.38) нормованого значення \bar{p} з урахуванням (6.14):

$$\bar{p} = j\Omega = j \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{p}{\omega_{\text{гр}}}, \quad (6.43)$$

тобто

$$H_U(p) = H_U(\bar{p}) = \frac{1}{V(\bar{p})} \Big|_{\bar{p} = \frac{p}{\omega_{\text{гр}}}}. \quad (6.44)$$

Після такої підстановки знаменник ОПФ ланки другого порядку (6.39) матиме вигляд:

$$V(p) = \bar{p}^2 + 2\sigma\bar{p} + 1 \Big|_{\bar{p} = \frac{p}{\omega_{\text{гр}}}} = \frac{p^2 + 2\omega_{\text{гр}}\sigma p + \omega_{\text{гр}}^2}{\omega_{\text{гр}}^2}. \quad (6.45)$$

Приклад 6.1. Визначити нормовані корені та ОПФ ФНЧ Баттерворта третього порядку, якщо гранична частота $\omega_{\text{гр}} = 10^3$ рад/с.

Розв'язання. Виходячи з виразу (6.36), обчислимо нормовані корені $|H_U(\bar{p})|^2$ для $n = 3$ при змінюванні величини k у межах $k = 1 \div 6$:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\sin \frac{\pi}{6} + j \cos \frac{\pi}{6} = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}; & \bar{p}_2 &= -\sin \frac{\pi}{2} = -1; \\ \bar{p}_3 &= -\sin \frac{5\pi}{6} + j \cos \frac{5\pi}{6} = -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2}; & \bar{p}_4 &= -\sin \frac{7\pi}{6} + j \cos \frac{7\pi}{6} = 0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \bar{p}_5 &= -\sin \frac{3\pi}{2} = 1; & \bar{p}_6 &= -\sin \frac{11\pi}{6} + j \cos \frac{11\pi}{6} = 0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Рис.6.4 ілюструє розташування знайдених коренів на комплексній площині, які розміщені на колі одиничного радіуса. Зліва лежать корені, що утворюють поліном Баттерворта ($k = 1, 2, 3$). За формулою (6.41) отримуємо:

$$V(\bar{p}) = (\bar{p}^2 + 2\sigma_1\bar{p} + 1)(\bar{p} + \sigma_2) = (\bar{p}^2 + \bar{p} + 1)(\bar{p} + 1) = \bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1.$$

Слід зауважити, що значення коренів відповідають табл.6.1.

З урахуванням співвідношення (6.44) денормована ОПФ має вигляд:

$$H_U(p) = \frac{10^9}{p^3 + 2 \cdot 10^3 p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 10^9}. \quad (6.46)$$

Приклад 6.2. Визначити ОПФ ФНЧ Баттерворта, якщо на частоті 750 рад/с ослаблення за потужністю $A_p(\omega)$ не має перевищувати 0,85 дБ, а на частоті 2600 рад/с – бути меншим 22 дБ.

Розв'язання. Формалізуємо вимоги до ослаблення за потужністю на підставі виразу (6.23):

$$\begin{cases} A_P(750) = 10 \lg(1 + \Omega_{\Delta}^{2n}) \leq A_{\Delta} = 0,85 \text{ дБ}; \\ A_P(2600) = 10 \lg(1 + \Omega_s^{2n}) \geq A_s = 22 \text{ дБ}. \end{cases} \quad (6.47)$$

Знайдемо орієнтовний порядок фільтра n^* за формулою (6.26) для рівностей у системі (6.47):

$$n^* = \frac{\lg(10^{0,1 \cdot 22} - 1) - \lg(10^{0,1 \cdot 0,85} - 1)}{2 \lg \frac{2600}{750}} = 2,6508.$$

Отже, порядок фільтра $n = 3$.

Обчислимо граничну частоту ФНЧ за формулою (6.29):

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{750}{(10^{0,1 \cdot 0,85} - 1)^{\frac{1}{2 \cdot 2,6508}}} = 1001 \approx 10^3 \text{ рад/с}.$$

Оскільки значення n і $\omega_{\text{гр}}$ виявились такими, як у попередньому прикладі, $H_U(p)$ визначатиметься виразом (6.46).

Слід зазначити, що за малої величини A_{Δ} реалізація максимально плоских характеристик ослаблення у смузі пропускання потребує високого порядку n . Уникнути цього можна, використовуючи фільтри з іншою апроксимацією ослаблення за потужністю.

6.5 Фільтри з характеристиками Чебишова

На відміну від виразу (6.20), знаменник АКХ ФНЧ може мати іншу функцію фільтрації $\varphi(\Omega)$ і відповідно інші частотні залежності ослаблення або АЧХ. Частотна залежність ослаблення у смузі пропускання не повинна виходити за межу A_{Δ} , але може мати коливальний характер. СП обмежена частотою ω_{Δ} ($A_P(\omega_{\Delta}) \leq A_{\Delta}$), тобто її гранична частота $\omega_{\text{гр}} = \omega_{\Delta}$. Таку залежність ослаблення A_P можуть забезпечити поліноми Чебишова³:

$$T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega), \quad (6.48)$$

де Ω – нормована частота, причому:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\Delta}}. \quad (6.49)$$

³ **Чебишов Пафнутій Львович** (1821–1894) – російський математик і механік, засновник петербурзької математичної школи, академік (1859), член багатьох іноземних АН. Автор понад 70 наукових праць з теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії наближення функцій, інтегрального числення. Довів так званий постулат Бертрана, встановив асимптотичний закон розподілу простих чисел. Довів загальні форми закону великих чисел, центральну граничну теорему. Заснував новий розділ теорії функцій, складовою якого є теорія найкращих наближень функцій поліномами. Конструював машини та механізми, створив та вдосконалив понад 80 механізмів.

Незважаючи на те, що функція $T_n(\Omega)$ визначається з рівняння (6.48) як трансцендентна, вона має всі ознаки полінома. Переконатися у цьому можна, якщо ввести позначення:

$$\arccos \Omega = Z, \quad (6.50)$$

де Z загалом є комплексною величиною:

$$\underline{Z} = u + jv. \quad (6.51)$$

Згідно з виразом (6.50)

$$\cos Z = \Omega. \quad (6.52)$$

Тоді рівняння (6.48) можна представити у вигляді:

$$T_n(\Omega) = \cos nZ. \quad (6.53)$$

Поліноми $T_n(\Omega)$ визначаються для різних значень n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) з урахуванням співвідношення (6.52):

$$T_0(\Omega) = 1; \quad T_1(\Omega) = \cos Z = \Omega; \quad T_2(\Omega) = \cos 2Z = 2\cos^2 Z - 1 = 2\Omega^2 - 1.$$

Загалом для поліномів Чебишова справедлива рекурентна формула:

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega), \quad (6.54)$$

звідки можна визначити $T_3(\Omega)$, $T_4(\Omega)$ тощо, наприклад:

$$T_3(\Omega) = 2\Omega T_2(\Omega) - T_1(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega.$$

Поліноми Чебишова вищих порядків наведено у табл.6.2.

Таблиця 6.2 – Поліноми Чебишова

n	$T_n(\Omega)$
1	Ω
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$
6	$32\Omega^6 - 48\Omega^4 + 18\Omega^2 - 1$
7	$64\Omega^7 - 112\Omega^5 + 56\Omega^3 - 7\Omega$
8	$128\Omega^8 - 256\Omega^6 + 160\Omega^4 - 32\Omega^2 + 1$
9	$256\Omega^9 - 576\Omega^7 + 432\Omega^5 - 120\Omega^3 + 9\Omega$
10	$512\Omega^{10} - 1280\Omega^8 + 1120\Omega^6 - 400\Omega^4 + 50\Omega^2 - 1$

Доцільно зауважити, що доданок $C_n \Omega^n$ полінома $T_n(\Omega)$ з аргументом Ω у максимальному степені, містить коефіцієнт C_n , який визначається як

$$C_n = 2^{n-1}. \quad (6.55)$$

Графіки частотних залежностей поліномів Чебишова першого, другого і третього порядків зображено на рис.6.5. Поліноми Чебишова з парним (непарним) n є парними (непарними) функціями Ω .

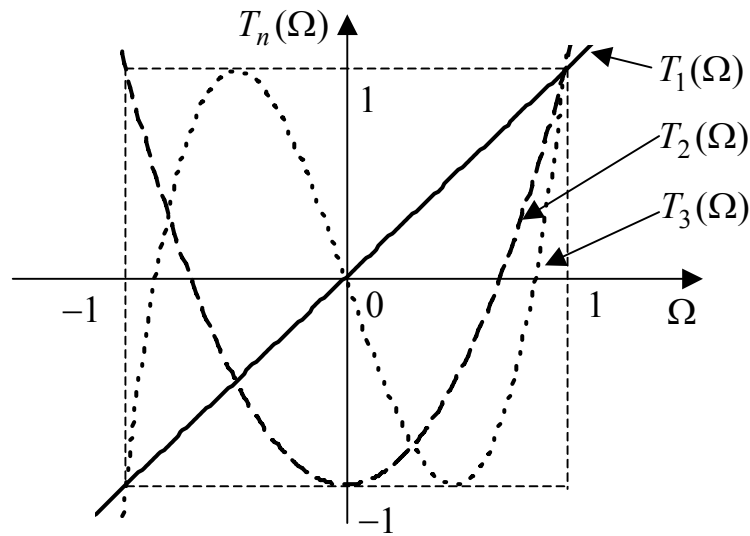


Рисунок 6.5 – Графіки поліномів $T_n(\Omega)$, $n = 1, 2, 3$.

З аналізу графіків виходить, що на інтервалі $-1 < \Omega < 1$:

по-перше, графік полінома $T_n(\Omega)$ перетинає вісь абсцис n разів;

по-друге, максимальні відхилення $T_n(\Omega)$ від нуля за модулем однакові, спостерігаються $n + 1$ разів і збігаються зі значенням відхилення на межі інтервалу ($T_n(1) = 1$);

по-третє, за межами інтервалу $|\Omega| > 1$ значення полінома монотонно зростають.

Перші два висновки виходять з виразу (6.53). У межах СП $\Omega \leq 1$, тоді відповідно до виразу (6.52), можна стверджувати, що Z – дійсна величина, тобто $Z = u$, $nZ = nu$ і змінюється у межах $\pm 2\pi$; $\cos Z = \cos u \leq 1$. На межі СП нерівність перетворюється на рівність.

Щоб у межах СП забезпечити відхилення ослаблення за потужністю від нуля на незначну величину $A_\Delta \ll 3$ дБ, необхідно, щоб функція фільтрації за модулем не перевищувала значення ε ($\varepsilon \ll 1$), тобто модуль функції фільтрації визначають як добуток полінома Чебишова і величини ε :

$$\varphi(\Omega) = \varepsilon T_n(\Omega). \quad (6.56)$$

Фільтри з такою частотною залежністю модуля функції фільтрації називають **фільтрами Чебишова (ФЧ)**, а ε – **коефіцієнтом нерівномірності ослаблення**. Згідно з формулою (6.22) частотна залежність ослаблення фільтра Чебишова становить:

$$A_p(\Omega) = 10 \lg[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)]. \quad (6.57)$$

Зменшення значення ε призводить до зменшення ослаблення не тільки у СП, а і смугах переходу і затримання, тому не слід зменшувати ослаблення у СП більше, ніж потрібно.

Щоб зрозуміти третю властивість поліномів Чебишова, треба усвідомити, що за межею СП ($\Omega > 1$) рівність (6.52) може виконуватись тільки за умови комплексного значення \underline{Z} (6.51), точніше чисто уявного:

$$\underline{Z} = jv. \quad (6.58)$$

Тоді, виходячи з виразу (6.52) і враховуючи (6.58), можна стверджувати, що

$$\cos \underline{Z} = \cos jv = \operatorname{ch} v = \Omega, \quad (6.59)$$

звідки

$$v = \operatorname{Arch} \Omega. \quad (6.60)$$

З огляду на це поліном Чебишова (6.53) для $\Omega > 1$ з урахуванням виразу (6.58) набуває вигляду:

$$T_n(\Omega) = \operatorname{ch} n v, \quad (6.61)$$

а після підстановки виразу (6.60):

$$T_n(\Omega) = \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} \Omega). \quad (6.62)$$

Отже, враховуючи значення нормованої частоти Ω у різних смугах, частотну залежність ослаблення фільтра Чебишова відповідно до співвідношень (6.48), (6.57), (6.62) можна представити у вигляді:

$$A_p(\Omega) = \begin{cases} 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \cos^2(n \arccos \Omega)], & \Omega \leq 1; \\ 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{Arch} \Omega)], & \Omega > 1. \end{cases} \quad (6.63)$$

Графіки частотних залежностей ослаблення для ФЧ другого і третього порядків, а також відповідні АЧХ зображено на рис.6.6. Граничну частоту смуги пропускання Π_ω визначено на рівні A_Δ : $\omega_{\text{гп}} = \omega_\Delta$.

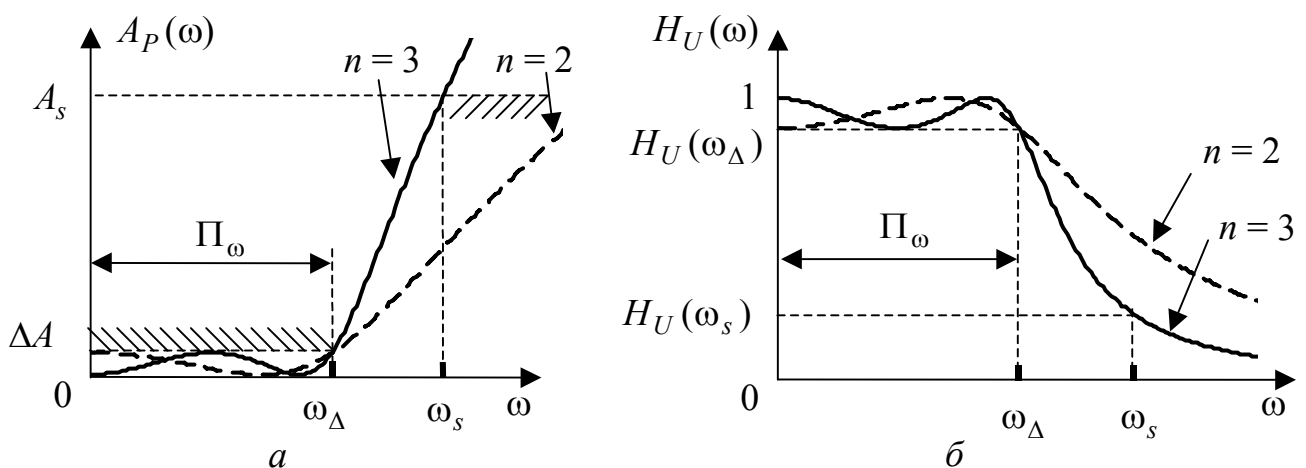


Рисунок 6.6 – Частотні залежності ФНЧ Чебишова ($n = 2, 3$):
 a – ослаблення; b – коефіцієнта передачі за напругою

Оскільки частотні залежності $A_p(\omega)$ і $H_U(\omega)$ у середині СП мають хвильові відхилення відповідно від нуля і одиниці, причому в однакових межах, ФЧ називають також фільтрами з **рівнохвильовими характеристиками**.

Визначення параметрів ε і n для ФЧ базується на вимогах (6.7):

$$\begin{cases} A_p(1) = A_\Delta; \\ A_p(\Omega_s) = A_s, \end{cases} \quad (6.64)$$

які трансформуються до вимог стосовно полінома $T_n(\Omega)$.

З урахуванням співвідношення (6.63) рівності (6.64) набувають вигляду:

$$\begin{cases} 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \cos^2(n \arccos 1)] = A_\Delta; \\ 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{Arch} \Omega_s)] = A_s. \end{cases} \quad (6.65)$$

Враховуючи, що $\arccos 1 = 0$, з першого рівняння виходить:

$$\lg(1 + \varepsilon^2) = 0,1A_\Delta, \quad \text{або} \quad 1 + \varepsilon^2 = 10^{0,1A_\Delta},$$

звідки коефіцієнт нерівномірності ослаблення

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_\Delta} - 1}. \quad (6.66)$$

З другого рівняння системи (6.65) виходить:

$$10^{0,1A_s} = 1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{Arch} \Omega_s), \quad \text{або} \quad \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} \Omega_s) = \frac{\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}}{\varepsilon},$$

звідки

$$n \operatorname{Arch} \Omega_s = \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}}{\varepsilon}.$$

Остаточно порядок фільтра n можна обчислити за формулою:

$$n \geq \frac{\operatorname{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}}{\varepsilon}}{\operatorname{Arch} \Omega_s}. \quad (6.67)$$

Значення n слід округлювати до більшого цілого значення, яке задовольняє вихідним нерівностям (6.7).

Щоб знайти полюси ОПФ ФНЧ Чебишова (корені $V(p)$), спочатку визначають полюси АКХ. На підставі формули (6.34) з урахуванням виразу (6.56) виходить:

$$|V(\bar{p})|^2 = 1 + \varphi^2(\Omega) \Big|_{\Omega=-\bar{p}} = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega) \Big|_{\Omega=-\bar{p}}. \quad (6.68)$$

Прирівнявши праву частину виразу (6.68) до нуля, після підстановки (6.53) можна записати рівняння, корені якого збігаються з полюсами АКХ:

$$1 + \varepsilon^2 \cos^2 n\underline{Z} = 0, \quad (6.69)$$

звідки

$$\cos n\underline{Z} = \pm \frac{j}{\varepsilon}. \quad (6.70)$$

Тепер \underline{Z} вважається комплексною величиною (6.51). Саме визначення \underline{Z} дозволяє знайти комплексні нормовані корені рівняння (6.68).

З урахуванням виразу (6.51) можна записати:

$$\cos n(u + jv) = \cos nu \cdot \operatorname{ch} nv - j \sin nu \cdot \operatorname{sh} nv = \pm \frac{j}{\varepsilon} \quad (\cos jv = \operatorname{ch} v, \sin jv = j \operatorname{sh} v).$$

Якщо прирівняти дійсні та уявні частини отриманого рівняння, виходить система:

$$\begin{cases} \cos nu \cdot \operatorname{ch} nv = 0; \\ \sin nu \cdot \operatorname{sh} nv = \mp \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Перше рівняння системи виконується за умови: $\cos nu_k = 0$, тобто $nu_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k = 1, 2, \dots, n$, або

$$u_k = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.71)$$

Якщо застосувати умову (6.71) до другого рівняння, виходить:

$\sin nu_k = \pm 1$, тоді $\operatorname{sh} nv = \mp \frac{1}{\varepsilon}$, звідки

$$v = \mp \frac{1}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (6.72)$$

Величина v не має індексу, оскільки не залежить від k . Підставивши вирази (6.71), (6.72) до формули (6.51), можна записати:

$$\underline{Z}_k = u_k + jv = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2} \mp j \frac{1}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{\varepsilon}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.73)$$

Нормовану частоту Ω_k , яка пов'язана з нормованим значенням кореня ($\bar{p}_k = j\Omega_k$), можна знайти на підставі співвідношення (6.52): $\cos \underline{Z}_k = \Omega_k$.

Після множення на j виходить:

$$j \cos \underline{Z}_k = j \Omega_k = \bar{p}_k. \quad (6.74)$$

Позначивши дійсну та уявну частини нормованого значення кореня

$$\bar{p}_k = -\Delta_k + j\Omega_k \quad (6.75)$$

і враховуючи формулу (6.51), вираз (6.74) можна записати:

$-\Delta_k + j\Omega_k = j \cos \underline{Z}_k = j \cos(u_k + jv) = j \cos u_k \operatorname{ch} v - j^2 \sin u_k \operatorname{sh} v$, $k = 1, 2, \dots, n$, звідки виходять співвідношення для дійсної та уявної частин \bar{p}_k :

$$\begin{cases} \Delta_k = -\sin u_k \operatorname{sh} v; \\ \Omega_k = \cos u_k \operatorname{ch} v; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.76)$$

З системи (6.76) визначають:

$$\sin u_k = \frac{\Delta_k}{\operatorname{sh} v}; \quad \cos u_k = \frac{\Omega_k}{\operatorname{ch} v}.$$

Після піднесення до квадрата та підсумовування виходить рівняння:

$$\frac{\Delta_k^2}{sh^2 \nu} + \frac{\Omega_k^2}{ch^2 \nu} = 1,$$

з аналізу якого можна зробити висновок, що дійсні та уявні частини нормованих коренів ФЧ (Δ_k , Ω_k) належать до геометричного місця точок, утвореного еліпсом з малою піввіссю $sh \nu$ і великою $ch \nu$, відповідно (рис.6.7).

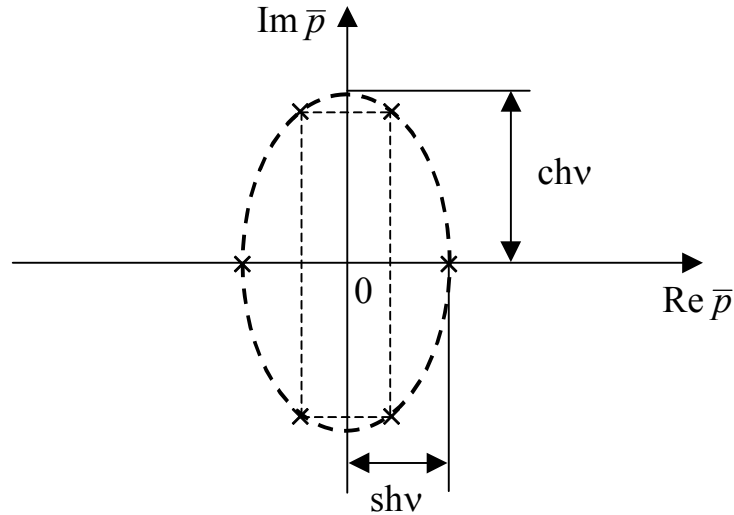


Рисунок 6.7 – Розташування коренів АКХ ФЧ за умови $n = 3$

Знаменник нормованої АКХ (6.68) можна перетворити до вигляду:

$$|V(\bar{p})|^2 = \varepsilon^2 C_n^2 \prod_{k=1}^{2n} (\bar{p} - \bar{p}_k), \quad (6.77)$$

де значення коефіцієнта C_n відповідає виразу (6.55). Нормована ОПФ має знаменник з удвічі меншою кількістю коренів з від'ємною дійсною частиною, тобто:

$$V(\bar{p}) = 2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k). \quad (6.78)$$

Добуток у виразі (6.78) за умови двох комплексно-спряжених коренів $\bar{p}_{1,2} = -\Delta \pm j\Omega$ є поліномом другого порядку від \bar{p} з дійсними коефіцієнтами:

$$(\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_2) = \bar{p}^2 + 2\Delta \bar{p} + \Delta^2 + \Omega^2. \quad (6.79)$$

Загалом ОПФ поліномного ФЧ (6.2), згідно з виразом (6.78), матиме вигляд:

$$H_U(\bar{p}) = \frac{k_R}{\prod_{k=1}^n (\bar{p} - \bar{p}_k)}, \quad (6.80)$$

де коефіцієнт $k_R = \frac{1}{2^{n-1} \varepsilon}$, але може мати інше значення, оскільки не змінює форми частотної залежності, а впливає тільки на її рівень.

Корені \bar{p}_k визначаються зі співвідношення (6.76) з урахуванням формул (6.71) і (6.72). Аналогічно фільтрам Баттерворта перехід до денормованої ОПФ ФЧ здійснюється на підставі виразу (6.44).

Фільтри Чебишова з малою смугою переходу ($\omega_\Delta \div \omega_s$) і значною величиною ослаблення A_s мають ОПФ з великим n . Це пояснюється монотонним зростанням ослаблення у смузі затримання, тобто A_s має полюс за умови $\omega \rightarrow \infty$. Зменшити порядок фільтра, не погіршуючи його характеристики $A_p(\Omega)$, дозволяє використання іншої апроксимації, ніж у виразі (6.57), яка на відміну від поліномних фільтрів, має у смузі затримання декілька полюсів. Наявність полюса поблизу частоти ω_s забезпечує різке зростання A_s у смузі переходу. Решта полюсів формує „сплески” ослаблення у СЗ на частотах, що відповідають нулям ОПФ. Графік такої частотної залежності ослаблення показаний на рис.6.8.

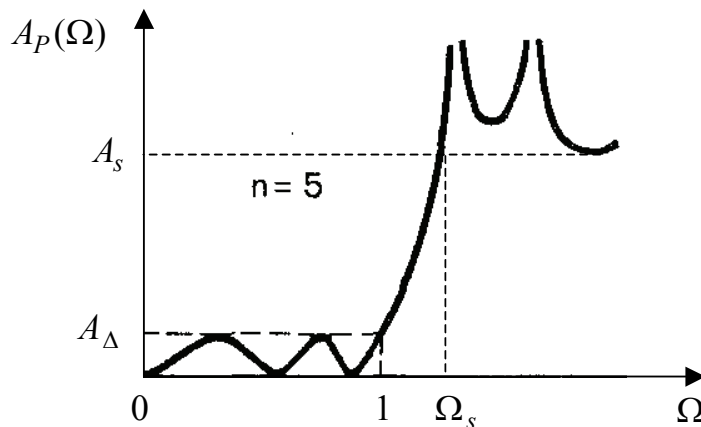


Рисунок 6.8 – Частотна залежність ослаблення ФНЧ, що має „сплески” у СЗ

Частотна залежність ослаблення таких фільтрів замість $T^2(\Omega)$ у виразі (6.57) містить $F^2(\Omega)$, де $F(\Omega)$ – дріб Золотарьова⁴. Ці фільтри називають **фільтрами з характеристиками Золотарьова або Кауера**⁵, який першим використав властивості дроби Золотарьова щодо частотних характеристик фільтрів. Такі фільтри ще мають назву **еліптичних фільтрів**, оскільки полюси і нулі їхніх ОПФ визначають еліптичні функції (відомості про ці функції можна знайти у спеціальній літературі).

⁴ **Золотарьов Єгор Іванович** (1847–1878) – російський математик, ад’юнкт Петербурзької АН. Закінчив Петербурзький ун-т (1867). Працював приват-доцентом (1868), магістром математики, професором (1876). Займався дослідженням питання про мінімуми додатних квадратичних форм при цілих значеннях змінних. У докторській дисертації (1874) виклав теорію подільності цілих алгебраїчних чисел. Розв’язав кілька окремих проблем з теорії найкращого наближення функцій.

⁵ **Кауер Вільгельм**, W. Sauer (1900–1945) – німецький вчений, математик. Працював в області математики, математичної фізики, електротехніки, синтезу електричних кіл.

На відміну від ФНЧ, визначення ОПФ фільтрів верхніх частот, смугових та загороджувальних фільтрів передбачає два етапи.

Спочатку від вимог до ослаблення за потужністю ФВЧ, СФ, ЗФ переходять до відповідних вимог ослаблення за потужністю ФНЧ. Перетворення частотних характеристик фільтрів інших типів до частотних характеристик ФНЧ, який має назву **фільтра-прототипу (ФП)**, здійснюють за допомогою **перетворення частоти**. ОПФ ФП визначають за допомогою розглянутих вище способів. Потім від ОПФ ФП переходять до ОПФ вихідного фільтра. Нижче розглянуто обидва ці етапи для фільтрів різних типів.

6.6 Фільтри верхніх частот

Враховуючи, що корені ОПФ лежать у лівій півплощині комплексної площини, комплексна змінна p має від'ємну дійсну частину: $p = -\delta \pm j\omega$, відповідно, $\bar{p} = -\Delta \pm j\Omega$ – нормована комплексна змінна, $\tilde{p} = -\tilde{\Delta} \pm j\tilde{\Omega}$ – нормована комплексна змінна ФП.

Перетворення СП у СЗ і навпаки, тобто трансформацію частотних діапазонів для ФВЧ, виконують, замінюючи нормовану комплексну змінну \tilde{p} ФП на нормовану комплексну змінну \bar{p} ФВЧ відповідно до співвідношення:

$$\tilde{p} = \frac{1}{\bar{p}}, \quad \text{або} \quad j\tilde{\Omega} = \frac{1}{j\Omega}, \quad \text{або} \quad \tilde{\Omega} = \frac{1}{\Omega}, \quad (6.81)$$

де $\Omega = \omega / \omega_{\text{гр}}$ для ФБ ($\omega_{\text{гр}}$ відповідає ослабленню 3 дБ, СП визначається діапазоном: $\omega_{\text{гр}} \div \infty$); $\Omega = \omega / \omega_{\Delta}$ для ФБ (на частоті ω_{Δ} ослаблення $A_p(\Omega) \leq A_{\Delta}$, СП: $\omega_{\Delta} \div \infty$). Перетворення частотних смуг можливо завдяки парності функцій $H_U(\Omega)$ і $A_p(\Omega)$, причому їхні значення не змінюються при заміні частоти Ω на $\tilde{\Omega}$ і навпаки, тобто

$$\begin{cases} H_U(\Omega) = H_U(\tilde{\Omega}); \\ A_p(\Omega) = A_p(\tilde{\Omega}). \end{cases} \quad (6.82)$$

У табл.6.3 наведені значення \bar{p} , отримані за формулою (6.81) для ФВЧ, які відповідають вибраним значенням \tilde{p} ФП (значення $\tilde{p} = -j0$ ФП означає наближення до нуля з боку від'ємних уявних значень \tilde{p}).

Таблиця 6.3 – Співвідношення між комплексними нормованими частотами ФНЧ і ФВЧ

\tilde{p}	$-j0$	$-j1$	$-j\infty$
$\bar{p} = 1/\tilde{p}$	$j\infty$	$j1$	$j0$

Перетворення частотного діапазону ФНЧ (ліворуч) у частотний діапазон ФВЧ (праворуч) ілюструє рис.6.9 згідно з даними табл.6.3.

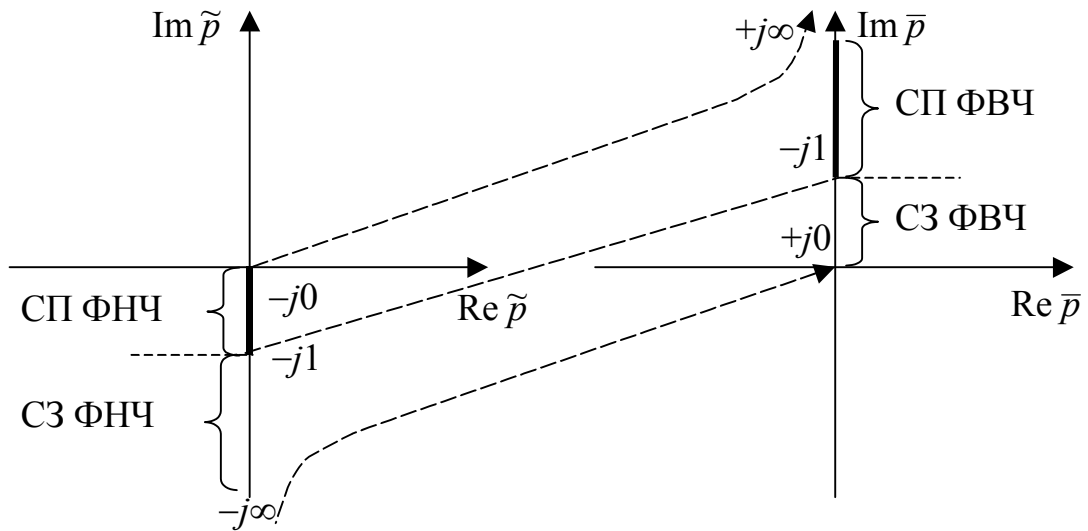


Рисунок 6.9 – Перетворення частотних діапазонів ФНЧ–ФВЧ

На рис.6.10 і 6.11 показано трансформування частотних характеристик $H_U(\tilde{\Omega})$ і $A_p(\tilde{\Omega})$ ФНЧ відповідно у частотні характеристики ФВЧ для ФБ, а на рис.6.12 і 6.13 – для ФЧ.

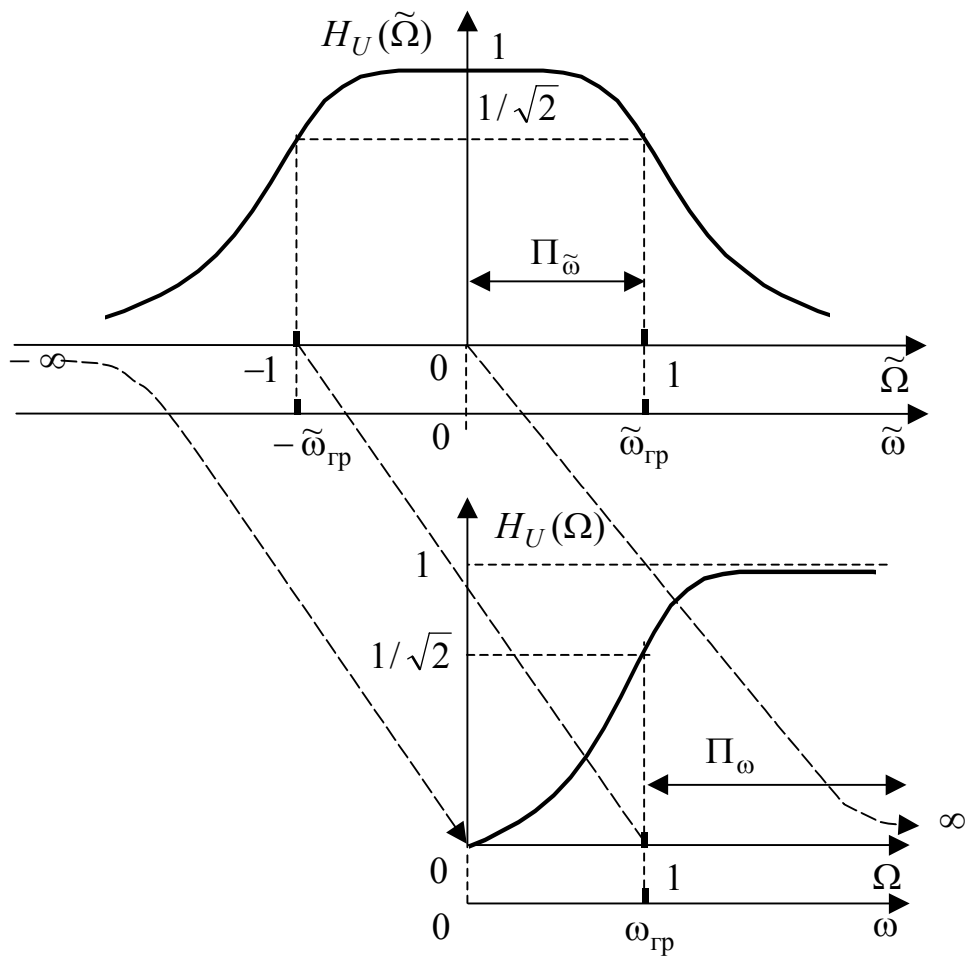


Рисунок 6.10 – Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФБ:
 $H_U(\tilde{\Omega}) \rightarrow H_U(\Omega)$

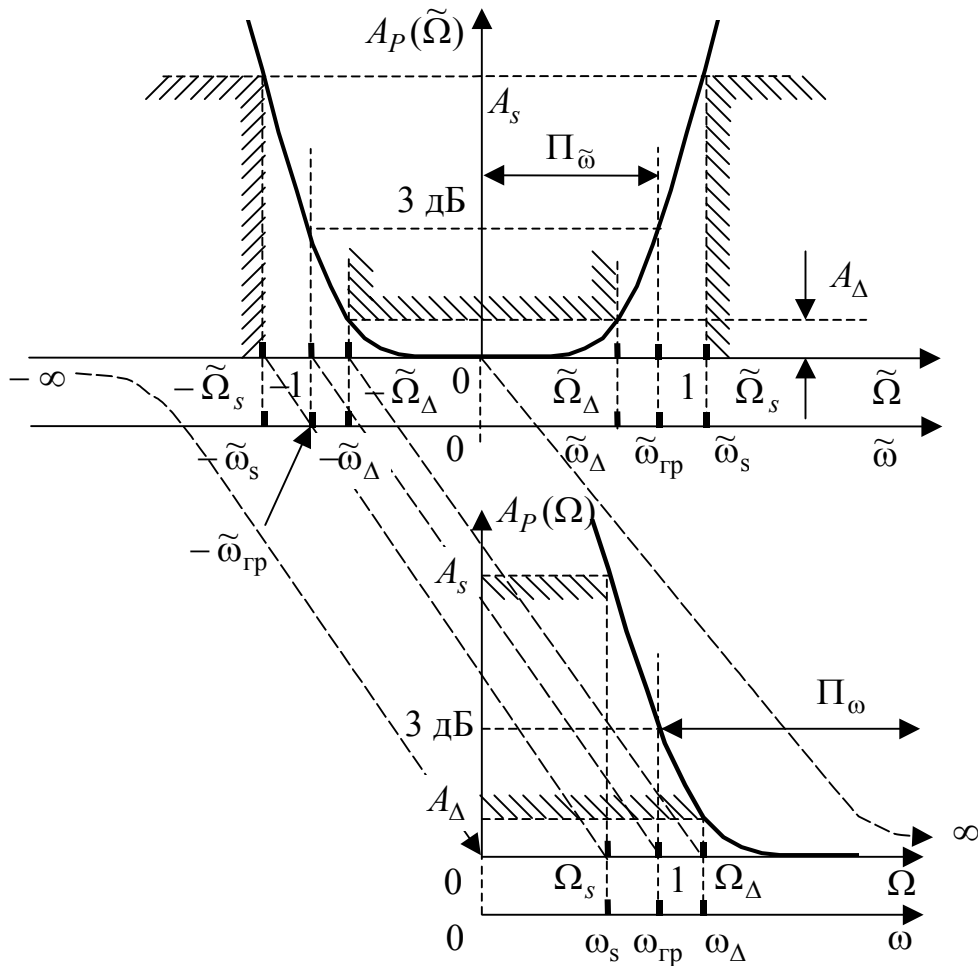


Рисунок 6.11 – Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФБ:
 $A_P(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_P(\Omega)$

Розрахунок ФВЧ передбачає, що задано значення ослаблення за потужністю на частотах f_Δ і f_s (ω_Δ і ω_s) (рис.6.11 і 6.13):

$$\begin{cases} A_P(f_\Delta) \leq A_\Delta; \\ A_P(f_s) \geq A_s, \end{cases} \quad (6.83)$$

або для нормованих частот:

$$\begin{cases} A_P(\Omega_\Delta) \leq A_\Delta; \\ A_P(\Omega_s) \geq A_s. \end{cases} \quad (6.84)$$

Щоб знайти ОПФ ФВЧ Баттерворта, визначають нормовану частоту ФБ $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{гр}} = \frac{f}{f_{гр}}$, причому частоті $\omega_{гр}$ відповідає ослаблення 3 дБ. Враховуючи співвідношення (6.81) між нормованими частотами ФВЧ і ФП, згідно з рівнянням (6.26) можна обчислити орієнтовний порядок ФВЧ Баттерворта:

$$n^* = \frac{\lg(10^{0,1A_s} - 1) - \lg(10^{0,1A_\Delta} - 1)}{2 \lg \frac{\Omega_\Delta}{\Omega_s}}. \quad (6.85)$$

У знаменнику рівняння (6.26) замість відношення частот $\frac{\tilde{\Omega}_s}{\tilde{\Omega}_\Delta}$ для ФП стоїть відношення нормованих частот ФВЧ $\frac{\Omega_\Delta}{\Omega_s}$, яке можна замінити відношенням $\frac{\omega_\Delta}{\omega_s}$. Отримане за формулою (6.85) орієнтовне значення порядку фільтра n^* , як правило, число дробове, яке слід округлити до найближчого більшого цілого значення:

$$n \geq n^*. \quad (6.86)$$

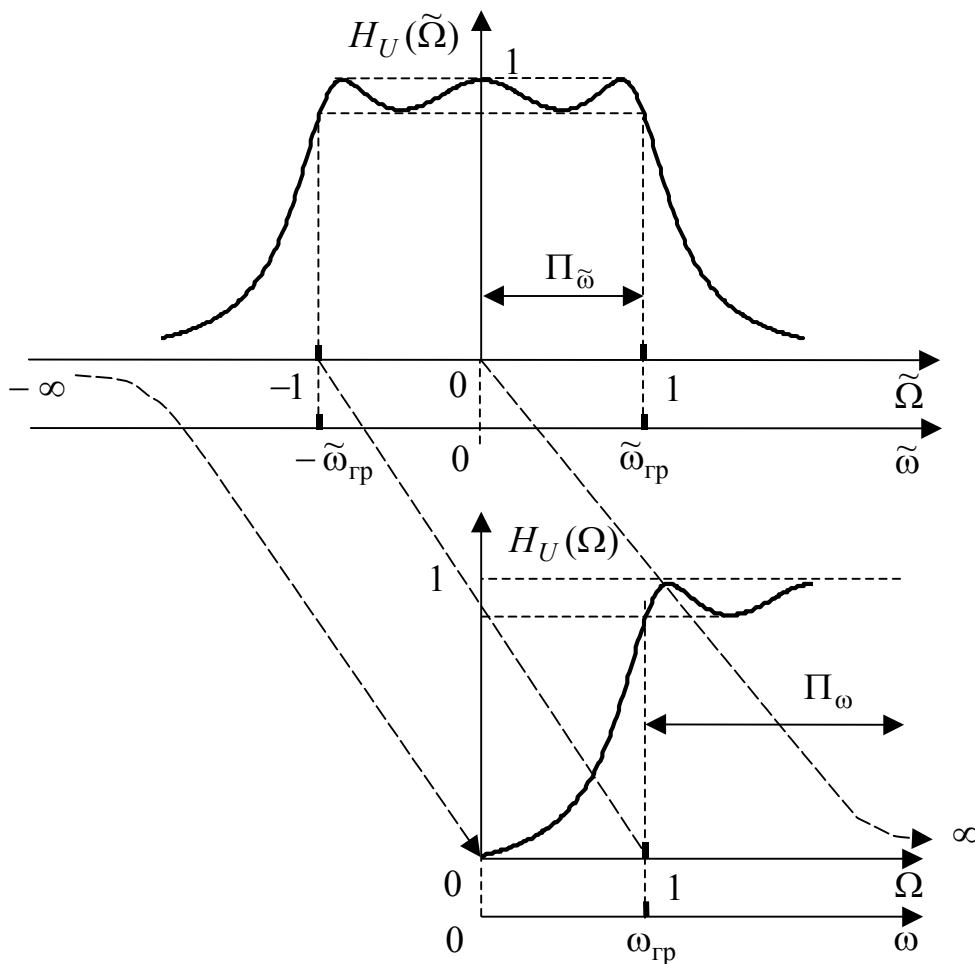


Рисунок 6.12 – Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФЧ:
 $H_U(\tilde{\Omega}) \rightarrow H_U(\Omega)$

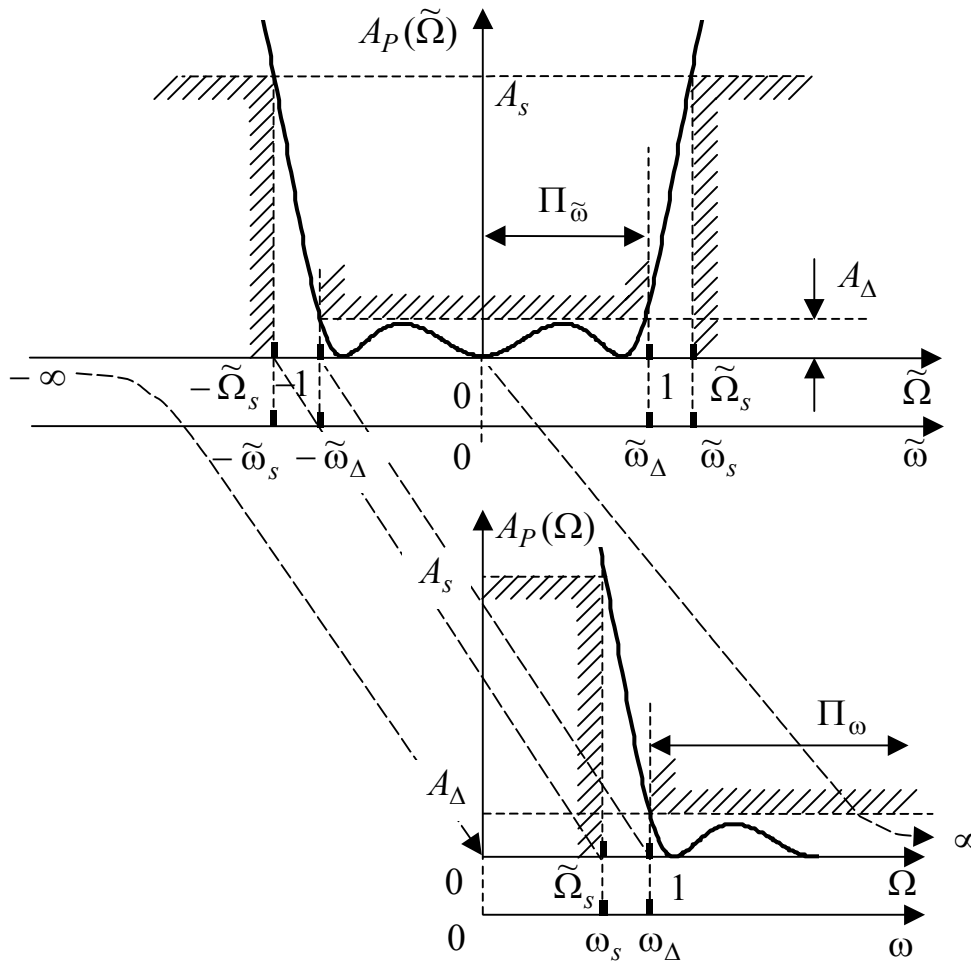


Рисунок 6.13 – Перетворення частотної характеристики ФНЧ–ФВЧ для ФЧ:
 $A_P(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_P(\Omega)$

Оскільки порядки ФВЧ і ФНЧ збігаються, враховуючи вирази (6.36)–(6.38), можна визначити нормований поліном Гурвіца та ОПФ ФП:

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{1}{V(\tilde{p})}. \quad (6.87)$$

Визначення нормованої ОПФ ФВЧ потребує попереднього розрахунку $\omega_{гр}$. Згідно з виразами (6.81)

$$\frac{\tilde{\omega}_\Delta}{\tilde{\omega}_{гр}} = \frac{\omega_{гр}}{\omega_\Delta}, \quad \frac{\tilde{\omega}_s}{\tilde{\omega}_{гр}} = \frac{\omega_{гр}}{\omega_s}, \quad (6.88)$$

де $\tilde{\omega}_\Delta$, $\tilde{\omega}_s$, $\tilde{\omega}_{гр}$ – частоти ФП; ω_Δ , ω_s , $\omega_{гр}$ – частоти ФВЧ.

Тоді гранична частота ФВЧ, виходячи з формули (6.88), визначається як

$$\omega_{гр} = \frac{\tilde{\omega}_\Delta}{\tilde{\omega}_{гр}} \omega_\Delta,$$

а з урахуванням виразу (6.25)

$$\omega_{гр} = \omega_\Delta (10^{0,1A_\Delta} - 1)^{\frac{1}{2n^*}} = \omega_s (10^{0,1A_s} - 1)^{\frac{1}{2n^*}}, \quad (6.89)$$

де n^* обчислюють за формулою (6.85).

Співвідношення (6.81) дозволяє встановити зв'язок між нормованою частотою ФП \tilde{p} і денормованою частотою \bar{p} ФВЧ:

$$\tilde{p} = \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{j\Omega} \bigg|_{\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}}} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{j\omega} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{p}. \quad (6.90)$$

Тоді денормовану ОПФ ФВЧ можна отримати за формулою (6.87):

$$H_U(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)} \bigg|_{\tilde{p} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{p}}, \quad (6.91)$$

де \tilde{p}_k – нормовані значення коренів ФП.

Визначення ОПФ ФВЧ з характеристиками Чебишова здійснюється на підставі співвідношення (6.84), причому частоти нормують за формулою (6.49):

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\Delta}} = \frac{f}{f_{\Delta}}; \quad \Omega_{\Delta} = 1; \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_{\Delta}}. \quad (6.92)$$

Коефіцієнт нерівномірності ослаблення у смузі пропускання визначається за формулою (6.66), яка прийнятна для ФЧ будь-якого типу. Формула (6.67) дозволяє знайти порядок n ФНЧ, тобто ФП. Щоб скористатись нею, необхідно перейти до нормованої частоти $\tilde{\Omega}_s$ ФП згідно з виразом (6.81): $\tilde{\Omega}_s = \frac{1}{\Omega_s}$. До речі, порядки ФВЧ і ФП збігаються, а знайдене n округлюється до більшого цілого значення.

Для отриманого значення n порядку ФП, використовуючи співвідношення (6.75), (6.76), (6.78), записують нормований поліном Гурвіца, тобто знаменник ОПФ ФП: $V(\tilde{p}) = 2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)$, і саму ОПФ ФП згідно з виразом (6.80). Денормована ОПФ ФВЧ визначається з урахуванням формул (6.90) і (6.49):

$$H_U(p) = \frac{k_R}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)} \bigg|_{\tilde{p} = \frac{\omega_{\Delta}}{p}}, \quad (6.93)$$

де $k_R = \frac{1}{2^{n-1} \varepsilon}$, але може мати довільне значення.

Приклад 6.3. Визначити ОПФ ФВЧ Чебишова, якщо на частоті 5000 рад/с ослаблення за потужністю $A_p(\omega)$ не має перевищувати 0,97 дБ, а на частоті 2500 рад/с – бути меншим 22 дБ.

Розв'язання. Обчислимо нормовану частоту ФП:

$$\tilde{\Omega}_s = \frac{1}{\Omega_s} = \frac{\omega_\Delta}{\omega_s} = \frac{f_\Delta}{f_s} = \frac{5000}{2500} = 2.$$

Коефіцієнт нерівномірності ослаблення у СП і порядок ФП знайдемо за формулами (6.66) і (6.67), відповідно: $\varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot 0,97}} - 1 = 0,500259$;

$$n \geq \frac{\text{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1A_s}} - 1}{\varepsilon}}{\text{Arch} \tilde{\Omega}_s} = \frac{\text{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1 \cdot 22}} - 1}{0,500259}}{\text{Arch} 2} = 2,972804.$$

Візьмемо $n = 3$, тоді коефіцієнт, що впливає на рівень ОПФ,

$$k_R = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}} = \frac{1}{4\varepsilon} \cong 0,5.$$

Визначення цього коефіцієнта не потребує високої точності.

Щоб знайти корені ФП, спочатку за формулою (6.72) обчислимо значення v : $v = \mp \frac{1}{n} \text{Arsh} \frac{1}{\varepsilon} = \mp 0,481057$. Дійсні та уявні частини нормованих коренів ФП розрахуємо, виходячи з виразів (6.71), (6.76):

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_k = -\sin u_k \text{sh}(\pm v); \\ \tilde{\Omega}_k = \cos u_k \text{ch} v, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3.$$

Значення $\tilde{\Delta}$ вибираємо такими:

$$k = 1: u_1 = \pi/6; \tilde{\Delta}_1 = 0,249914; \tilde{\Omega}_1 = 0,968179; \tilde{p}_1 = -0,249914 + j0,968179;$$

$$k = 2: u_1 = \pi/2; \tilde{\Delta}_2 = 0,5; \tilde{\Omega}_2 = 0; \tilde{p}_2 = -0,5;$$

$$k = 3; u_1 = 5\pi/6; \tilde{\Delta}_3 = 0,249914; \tilde{\Omega}_3 = -0,968179; \tilde{p}_3 = -0,249914 - j0,968179.$$

Для всіх k значення v – від'ємне.

При $k = 1, 3$ маємо комплексно-спряжені корені. У цьому випадку доцільно скористатись виразом (6.79), тоді для ФП можна записати:

$$(\tilde{p} - \tilde{p}_1)(\tilde{p} - \tilde{p}_3) = \tilde{p}^2 + 2\tilde{\Delta}_1 \tilde{p} + \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2; 2\tilde{\Delta}_1 = 0,499827; \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2 = 0,999827.$$

Щоб спростити запис, вважатимемо, що $2\tilde{\Delta}_1 \cong 0,5$; $\tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2 \cong 1$. Загалом обчислення коренів слід виконувати з точністю не менше як до шостого знака включно, оскільки це впливає на можливість фізичної реалізації ОПФ.

Нормовані значення ФП дозволяють визначити нормований поліном Гурвіца і нормовану ОПФ ФП згідно з виразами (6.78) і (6.80), відповідно:

$$V(\tilde{p}) = 4\varepsilon(\tilde{p} - \tilde{p}_1)(\tilde{p}^2 + 2\tilde{\Delta}_1 \tilde{p} + \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2);$$

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{k_R}{(\tilde{p} - \tilde{p}_2)(\tilde{p}^2 + 2\tilde{\Delta}_1 \tilde{p} + \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Omega}_1^2)},$$

або після підстановки числових значень

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{0,5}{(\tilde{p} + 0,5)(\tilde{p}^2 + 0,5\tilde{p} + 1)}.$$

Нормовану ОПФ ФП перетворимо у денормовану ОПФ ФВЧ, використовуючи співвідношення (6.93):

$$H_U(p) = \frac{0,5}{(\tilde{p} + 0,5)(\tilde{p}^2 + 0,5\tilde{p} + 1)} \Big|_{\tilde{p} = \frac{\omega_\Delta}{p}} = \frac{0,5}{\left(\frac{\omega_\Delta}{p} + 0,5\right)\left(\frac{\omega_\Delta^2}{p^2} + 0,5\frac{\omega_\Delta}{p} + 1\right)},$$

або

$$H_U(p) = \frac{0,5 p^3}{(0,5 p + \omega_\Delta)(p^2 + 0,5 \omega_\Delta p + \omega_\Delta^2)}.$$

За умови $\omega_\Delta = 5 \cdot 10^3$ рад/с вираз ОПФ ФВЧ Чебишова має вигляд:

$$H_U(p) = \frac{p^3}{(p + 10^4)(p^2 + 2,5 \cdot 10^3 p + 25 \cdot 10^6)}.$$

Реалізувати таку передатну функцію можна двома ланками відповідно першого і другого порядків:

$$H_U(p) = \frac{p}{p + 10^4} \cdot \frac{p^2}{p^2 + 2,5 \cdot 10^3 p + 25 \cdot 10^6}.$$

Щоб перевірити результат апроксимації, обчислимо частотну залежність ослаблення за потужністю за формулою (6.1):

$$A_p(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H_U^2(\omega)} = 10 \lg \left| \frac{(j\omega + 10^4)[(j\omega)^2 + 2,5 \cdot 10^3 j\omega + 25 \cdot 10^6]}{(j\omega)^3} \right|^2,$$

Після визначення модуля і піднесення його до квадрата виходить:

$$A_p(\omega) = 10 \lg \frac{(\omega^2 + 10^8)[(25 \cdot 10^6 - \omega^2)^2 + 6,25 \cdot 10^6 \omega^2]}{\omega^6}.$$

Частотна залежність $A_p(\omega)$, розрахована за цією формулою (рис.6.14), показує відповідність функції $A_p(\omega)$ заданим умовам.

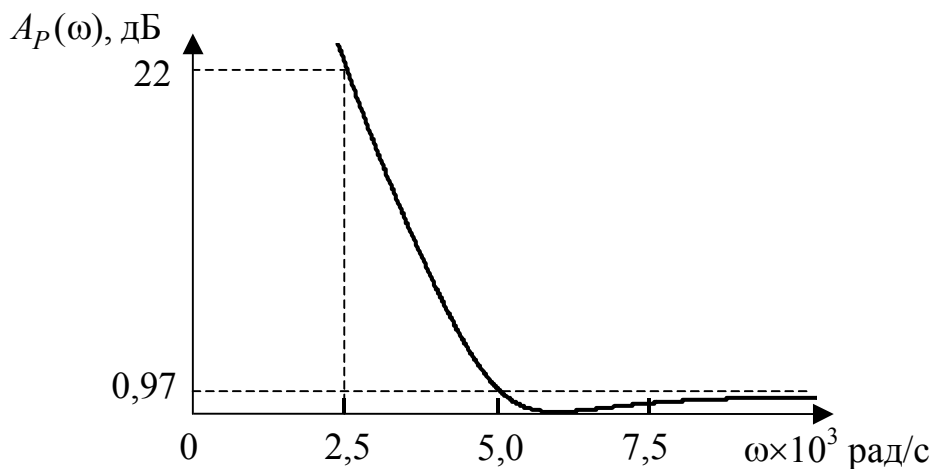


Рисунок 6.14 – Частотна залежність ослаблення ФВЧ у прикладі 6.3

6.7 Смугові фільтри з симетричними характеристиками

Трансформування ФНЧ-прототипу у смуговий фільтр (СФ) виконується за допомогою заміни нормованої комплексної змінної \tilde{p} ФП на нормовану комплексну змінну \bar{p} СФ за формулою:

$$\tilde{p} = \frac{\bar{p}^2 + k_{\Delta}^2}{\bar{p}}, \text{ або } j\tilde{\Omega} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega}, \quad (6.94)$$

де нормовані змінні СФ відповідно становлять:

$$\bar{p} = \frac{p}{\Pi_{\omega}}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\Pi_{\omega}}, \quad (6.95)$$

де Π_{ω} – смуга пропускання СФ;

$$k_{\Delta} = \frac{\omega_0}{\Pi_{\omega}}. \quad (6.96)$$

У формулі (6.96) ω_0 – так звана **центральна частота** СФ.

Перетворення виразу (6.94) до вигляду:

$$\bar{p}^2 - \tilde{p}\bar{p} + k_{\Delta}^2 = 0 \quad (6.97)$$

дозволяє визначити нормовані корені СФ через нормовані корені ФП:

$$\bar{p} = \frac{\tilde{p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{p}}{2}\right)^2 - k_{\Delta}^2}. \quad (6.98)$$

Підстановка $\bar{p} = j\Omega$; $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$ до виразу (6.98) дозволяє встановити зв'язок між нормованими частотами СФ (Ω) і ФП ($\tilde{\Omega}$):

$$j\Omega = \frac{j\tilde{\Omega}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{j\tilde{\Omega}}{2}\right)^2 - k_{\Delta}^2} = \frac{j\tilde{\Omega}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{j\tilde{\Omega}}{2}\right)^2 + (jk_{\Delta})^2} = j\left[\frac{\tilde{\Omega}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\Omega}}{2}\right)^2 + k_{\Delta}^2}\right],$$

звідки виходить:

$$\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{\Omega}}{2}\right)^2 + k_{\Delta}^2}. \quad (6.99)$$

У виразі (6.99) знак мінус перед коренем опущено, щоб забезпечити додатне значення Ω . На підставі формули (6.94) можна довести, що інтервал $\bar{p} = j0 \dots j\infty$ перетворюється відповідно в інтервал $\tilde{p} = -j\infty \dots j\infty$. Діапазон частот ФП $2\tilde{\Omega}_i$, межах якого відповідають частоти $\pm\tilde{\Omega}_i$, перетворюється у діапазон $\tilde{\Omega}_i$ СФ, тобто удвічі скорочується. Щоб переконатись у цьому, згідно з виразом (6.99) обчислюють частоту СФ, яка відповідає частоті $\tilde{\Omega}_i$ ФП:

$$\Omega_{i2} = \frac{\tilde{\Omega}_i}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{\Omega}_i}{2}\right)^2 + k_{\Delta}^2}, \quad (6.100)$$

тоді у відповідність частоті $-\tilde{\Omega}_i$ можна поставити частоту

$$\Omega_{i1} = -\frac{\tilde{\Omega}_i}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{\Omega}_i}{2}\right)^2 + k_{\Delta}^2}. \quad (6.101)$$

Отже, частотний інтервал СФ

$$\Omega_{i2} - \Omega_{i1} = \tilde{\Omega}_i \quad (6.102)$$

дійсно вдвічі скоротився. Частотному інтервалу ФП від $-j\infty$ до $j\infty$ відповідатиме також удвічі менший частотний інтервал СФ на уявній осі від $j0$ до $j\infty$. У перетворенні $\tilde{p} = j0$ на $\bar{p} = jk_{\Delta}$ можна переконатись підстановкою $\tilde{\Omega} = 0$ до виразу (6.100). Отримані співвідношення зведено у табл.6.4.

Таблиця 6.4 – Співвідношення між комплексними нормованими частотами ФП і СФ

\tilde{p}	$j\infty$	$j\tilde{\Omega}$	$j0$	$-j\tilde{\Omega}$	$-j\infty$
\bar{p}	$j\infty$	$j\Omega_2$	jk_{Δ}	$j\Omega_1$	$j0$

Перетворення частотного діапазону ФНЧ-прототипу (ліворуч) у частотний діапазон СФ (праворуч) показано на рис.6.15 відповідно до значень, наведених у табл.6.4.

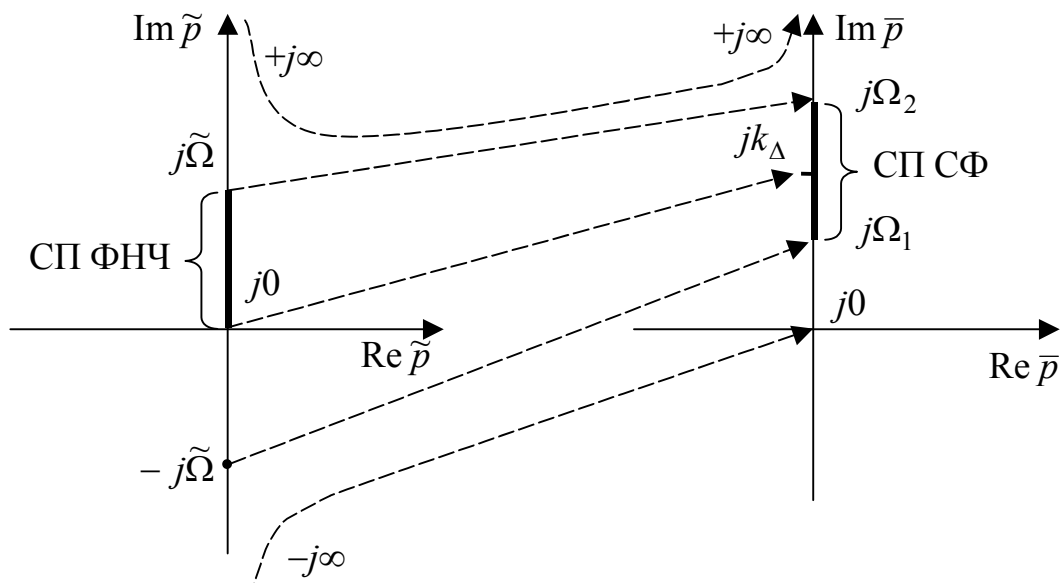


Рисунок 6.15 – Перетворення частотних діапазонів ФНЧ–СФ

Перетворення частотного діапазону ФП у вдвічі менший частотний діапазон СФ відбувається при збереженні відповідних значень ослаблення за потужністю: $A_p(\tilde{\Omega}_i) = A_p(\Omega_i)$. Таке перетворення частотних характеристик ілюстровано графіками (рис.6.16 для ФБ; рис.6.17 для ФЧ).

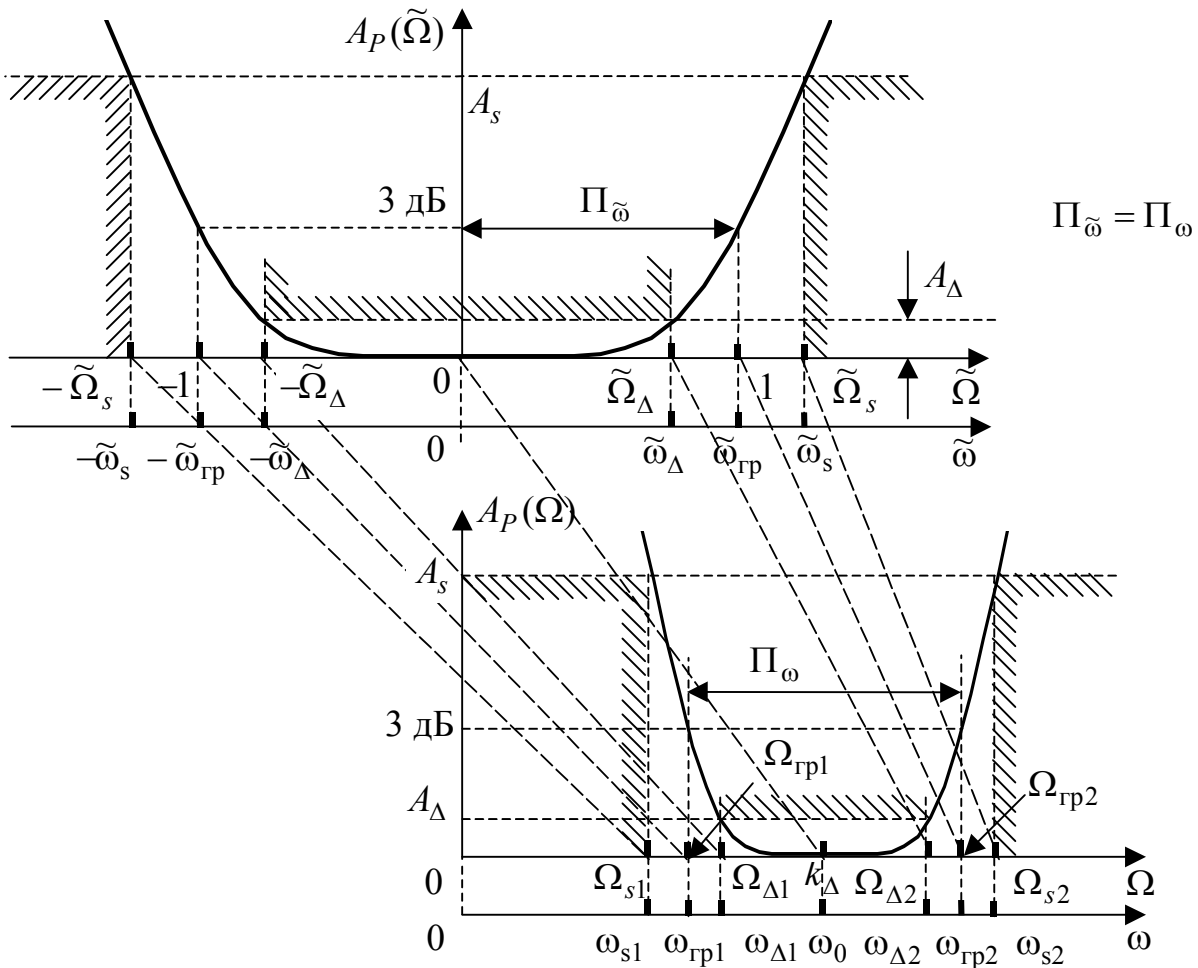


Рисунок 6.16 – Перетворення частотної характеристики ФНЧ–СФ для ФБ:
 $A_p(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_p(\Omega)$

Властивість, визначена співвідношенням (6.102), відображає **принцип збереження довжини частотного інтервалу**. Це означає, що ФП з нормованою смугою пропускання $\Pi_{\tilde{\Omega}} = 0 \dots \tilde{\Omega}_{гр}$ перетворюється на СФ, який має таку саму нормовану смугу пропускання.

Дійсно, частоті $\tilde{\omega}_{гр}$ ($\tilde{\Omega}_{гр} = 1$) ФП відповідають частоти $\omega_{гр2}$ і $\omega_{гр1}$ СФ, нормовані значення яких $\Omega_{гр2}$ і $\Omega_{гр1}$ визначають за формулами (6.100), (6.101), відповідно:

$$\Omega_{гр2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k_{\Delta}^2}; \quad \Omega_{гр1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k_{\Delta}^2}.$$

Нормована СП СФ визначається як $\Pi_{\Omega} = \Omega_{гр2} - \Omega_{гр1} = 1$.

Отже, смуга Π_{Ω} дійсно не змінилася.

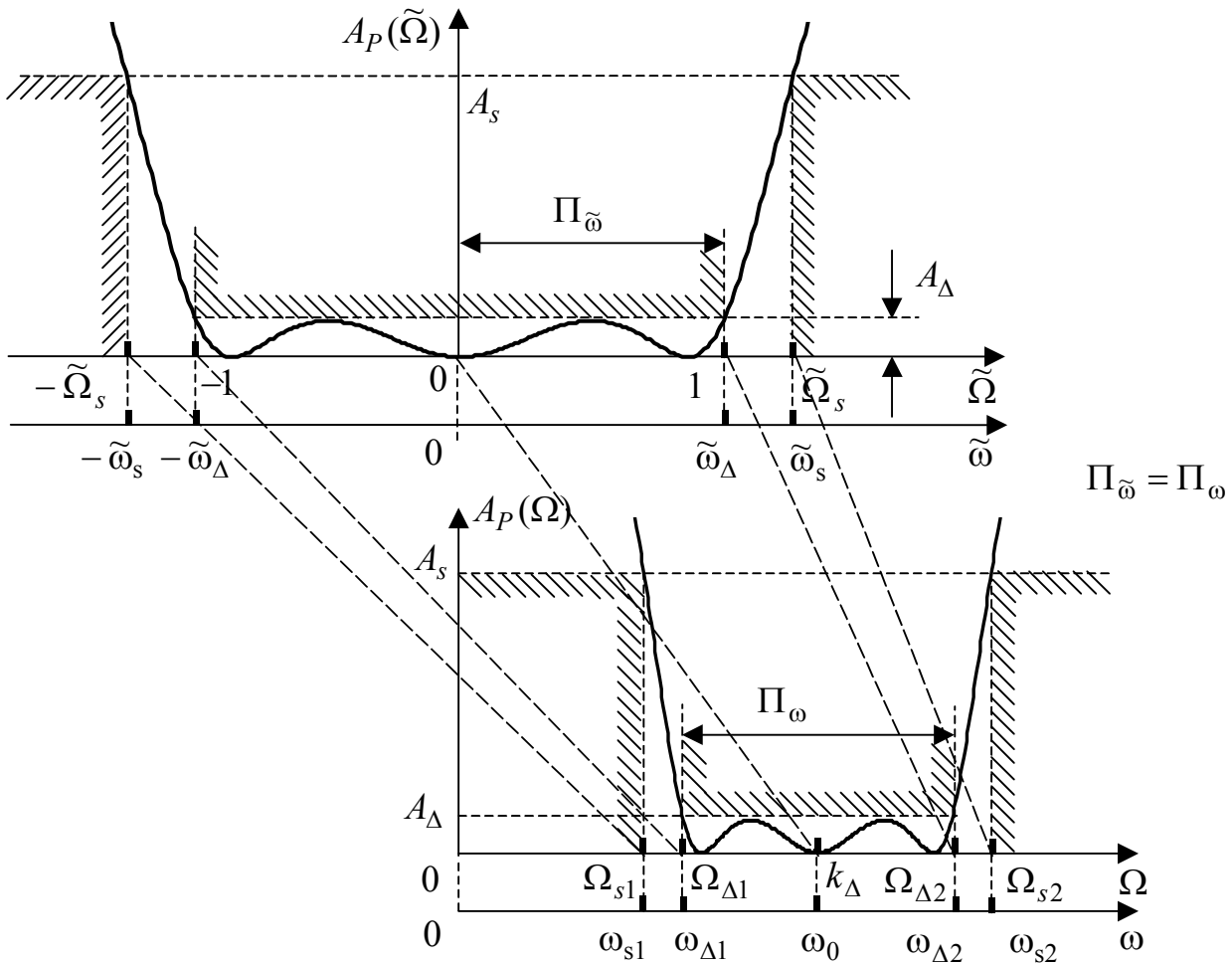


Рисунок 6.17 – Перетворення частотної характеристики ФНЧ–СФ для ФЧ:
 $A_p(\tilde{\Omega}) \rightarrow A_p(\Omega)$

Слід зауважити, що згаданий принцип визначення нормованих частот виконується як для ФБ, так і для ФЧ, різним є тільки рівень ослаблення $A_p(\omega_{гр})$.

Щоб дослідити ще одну важливу властивість, визначимо добуток нормованих частот (6.100), (6.101) СФ:

$$\Omega_{i2} \Omega_{i1} = \left(\frac{\tilde{\Omega}_i^2}{4} + k_{\Delta}^2 \right) - \frac{\tilde{\Omega}_i^2}{4} = k_{\Delta}^2.$$

З урахуванням співвідношень (6.95), (6.96) цей добуток набуває вигляду:

$$\frac{\omega_{гр2}}{\Pi_{\omega}} \cdot \frac{\omega_{гр1}}{\Pi_{\omega}} = \frac{\omega_0^2}{\Pi_{\omega}^2},$$

звідки

$$\omega_{гр1} \omega_{гр2} = \omega_0^2. \quad (6.103)$$

Рівність (6.103) визначає властивість **геометричної симетрії** частотної залежності A_p СФ відносно центральної частоти ω_0 . Справедливими будуть також аналогічні добутки для частот $\omega_{\Delta 1,2}$, $\omega_{s1,2}$:

$$\omega_{\Delta 1} \omega_{\Delta 2} = \omega_{s1} \omega_{s2} = \omega_0^2. \quad (6.104)$$

Вихідними даними для розрахунку СФ є смуга пропускання Π_{ω} , центральна частота ω_0 та співвідношення, аналогічні нерівностям (6.7):

$$\begin{cases} A_P(\omega_{\Delta 1}) = A_P(\omega_{\Delta 2}) \leq A_{\Delta} ; \\ A_P(\omega_{s1}) = A_P(\omega_{s2}) \geq A_s , \end{cases} \quad (6.105)$$

причому $\omega_{s1} < \omega_{\Delta 1} < \omega_{\Delta 2} < \omega_{s2}$. З двох значень частоти, об'єднаних рівністю (6.104), як правило, відоме тільки одне. Тому, симетричні частоти обчислюють, використовуючи умову (6.104), за заданими частотами (наприклад: $\omega_{\Delta 2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\Delta 1}}$;

$\omega_{s1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{s2}}$), що дозволяє перейти до співвідношень (6.7), складених стосовно

ФП для тих самих ослаблень:

$$\begin{cases} A_P(\tilde{\omega}_{\Delta}) \leq A_{\Delta} ; \\ A_P(\tilde{\omega}_s) \geq A_s , \end{cases} \quad (6.106)$$

де відповідні частоти $\tilde{\omega}$ ФП визначають з огляду на формулу (6.102):

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{\Delta} = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1} ; \\ \tilde{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1} . \end{cases} \quad (6.107)$$

Умови (6.106) дозволяють знайти n^* – орієнтовний порядок ФБ (див. формулу (6.26)), а потім і порядок $n \geq n^*$ (n – ціле число), а також граничну частоту $\omega_{\text{гп}}$ за формулою (6.29). Для ФЧ, виходячи з умов (6.106), обчислюють коефіцієнт нерівномірності ослаблення ε і порядок фільтра n за формулами (6.66) і (6.67) відповідно.

Щоб визначити ОПФ, необхідно знайти поліном Гурвіца. Спочатку визначають нормований поліном $V(\tilde{p})$. Так, для ФБ згідно з виразом (6.37) записують нормований поліном Гурвіца:

$$V(\tilde{p}) = \prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.108)$$

де \tilde{p}_k – нормовані корені ФП, які розраховують за формулою (6.36):

$$\tilde{p}_k = -\sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \quad (6.109)$$

Для ФЧ нормований поліном Гурвіца ФП визначають згідно з виразом (6.78):

$$V(\tilde{p}) = 2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k), \quad (6.110)$$

де \tilde{p}_k – нормовані корені ФП ($\tilde{p}_k = -\tilde{\Delta}_k \pm j\tilde{\Omega}_k$), дійсну та уявну частини яких обчислюють за формулою (6.76):

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_k = -\sin u_k \operatorname{sh} v ; \\ \tilde{\Omega}_k = \cos u_k \operatorname{ch} v . \end{cases} \quad (6.111)$$

Значення u_k, v розраховують за формулами (6.71), (6.72), відповідно. Dodatne значення $\tilde{\Delta}_k$ забезпечують вибором знака у виразі (6.72).

Перехід від нормованої ОПФ ФП $H_U(\tilde{p}) = \frac{1}{V(\tilde{p})}$ з порядком n до нормованої ОПФ СФ удвічі збільшує порядок. Оскільки нормовані корені \tilde{p}_k ФП відомі, ОПФ ФП доцільно представити як добуток ОПФ ланок другого порядку $H_{U_i}^{(2)}(\tilde{p})$ для парного n :

$$H_U(\tilde{p}) = \prod_{i=1}^{n/2} H_{U_i}^{(2)}(\tilde{p}). \quad (6.112)$$

Якщо n – непарне, слід виділити одну ланку з передатною функцією першого порядку $H_U^{(1)}(\tilde{p}) = \frac{1}{\tilde{p} + \tilde{\Delta}}$, ($-\tilde{\Delta}$ – нормований дійсний корінь ФП).

Тоді інші ланки, що увійдуть до добутку, матимуть другий порядок:

$$H_U(\tilde{p}) = H_U^{(1)}(\tilde{p}) \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} H_{U_i}^{(2)}(\tilde{p}). \quad (6.113)$$

У виразі (6.113) ОПФ ФП i -ї ланки другого порядку

$$H_{U_i}^{(2)}(\tilde{p}) = \frac{1}{(\tilde{p} - \tilde{p}_i)(\tilde{p} - \tilde{p}_i^*)}, \quad (6.114)$$

де \tilde{p}_i і \tilde{p}_i^* – нормовані комплексно-спряжені корені, а $H_U^{(1)}(\tilde{p})$ – ОПФ ФП ланки першого порядку з коренем $-\tilde{\Delta}$, яка перетворюється згідно з виразом (6.94) у ОПФ ланки другого порядку СФ з двома комплексно-спряженими коренями (рис.6.18, а).

Перетворення ОПФ i -ої ланки ФП (6.114) до ОПФ СФ доцільно виконувати для кожного кореня окремо:

$$H_{U_i}^{(2)}(\bar{p}) = \frac{1}{\tilde{p} - \tilde{p}_i} \Big|_{\tilde{p} = \frac{\bar{p}^2 + k_{\tilde{\Delta}}^2}{\bar{p}}} \times \frac{1}{\tilde{p} - \tilde{p}_i^*} \Big|_{\tilde{p} = \frac{\bar{p}^2 + k_{\tilde{\Delta}}^2}{\bar{p}}}. \quad (6.115)$$

Перший добуток у виразі (6.115) перетворюється на передатну функцію з двома комплексними коренями \bar{p}_1 і \bar{p}_2 (не комплексно-спряженими), а другий – на ОПФ з комплексними коренями \bar{p}_3 і \bar{p}_4 (також не спряженими), причому пари \bar{p}_1 і \bar{p}_3 , а також \bar{p}_2 і \bar{p}_4 є комплексно-спряженими (рис.6.18, б), тобто $\bar{p}_{1,3} = -\Delta_1 \mp j\Omega_1$; $\bar{p}_{2,4} = -\Delta_2 \pm j\Omega_2$. Це дозволяє представити ОПФ СФ у вигляді:

$$H_U(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{(\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_3)} \cdot \frac{\bar{p}}{(\bar{p} - \bar{p}_2)(\bar{p} - \bar{p}_4)}, \quad (6.116)$$

причому знаменник кожного співмножника – поліном другого порядку відносно \bar{p} з дійсними додатними коефіцієнтами (6.39) або (6.79). Отже, ланка

другого порядку ФП перетворюється на СФ, порядок якого $n = 4$. Щоб отримати вираз (6.116), слід безпосередньо від коренів $\tilde{p}_{1,2}$ перейти до коренів $\bar{p}_1, \bar{p}_4, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ на підставі співвідношення (6.98).

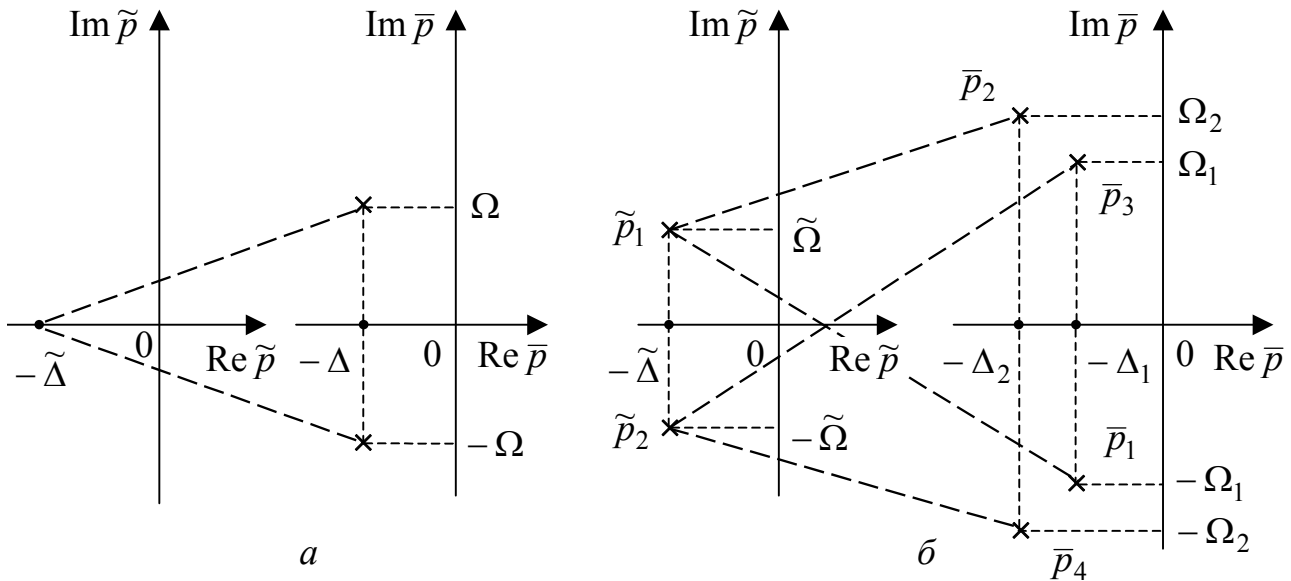


Рисунок 6.18 – Відповідність між нормованими коренями ФП і СФ: *a* – дійсний корінь ФП, *б* – комплексно-спряжені корені ФП

Денормування ОПФ СФ здійснюється з урахуванням виразу (6.95):

$$H_U(p) = H_U(\bar{p}) \Big|_{\bar{p} = \frac{p}{\Pi_\omega}} \quad (6.117)$$

Приклад 6.4. Визначити ОПФ СФ Чебишова, якщо на частоті $\omega_{\Delta 1} = 404,75 \cdot 10^3$ рад/с ослаблення за потужністю не має перевищувати 0,97 дБ, а на частоті $\omega_{s2} = 512,68 \cdot 10^3$ рад/с – бути меншим, ніж 24 дБ. Центральна частота СФ становить $424,279 \cdot 10^3$ рад/с, а смуга пропускання – $40 \cdot 10^3$ рад/с.

Розв’язання. На підставі властивості геометричної симетрії частотної залежності A_p (6.104) визначимо частоти $\omega_{\Delta 2}$ і ω_{s1} :

$$\omega_{\Delta 2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\Delta 1}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{404,75 \cdot 10^3} = 444,75 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_{s1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{s2}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{512,68 \cdot 10^3} = 351,120 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

За принципом збереження довжини частотного інтервалу визначимо частоти $\tilde{\omega}_\Delta$ і $\tilde{\omega}_s$ (рис.6.6, *a*) фільтра-прототипу:

$$\tilde{\omega}_\Delta = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1} = 444,75 \cdot 10^3 - 404,75 \cdot 10^3 = 40 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

яка дорівнює значенню смуги пропускання СФ, тобто $\Pi_\omega = \tilde{\omega}_\Delta$;

$$\tilde{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1} = 512,68 \cdot 10^3 - 351,12 \cdot 10^3 = 161,56 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Виходячи з виразу (6.49), обчислимо нормовану частоту ФП:

$$\tilde{\Omega}_s = \frac{\tilde{\omega}_s}{\tilde{\omega}_\Delta} = \frac{161,56 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 4,039.$$

За формулами (6.66) і (6.67) визначимо ε і n :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_\Delta} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 0,97} - 1} = 0,500259;$$

$$n \geq \frac{\text{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}}{\varepsilon}}{\text{Arch} \tilde{\Omega}_s} = \frac{\text{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1 \cdot 24} - 1}}{0,500259}}{\text{Arch} 4,039} = 2,000.$$

Нормовані корені ФП знайдемо за формулою (6.76) для $k=1, 2$, використовуючи співвідношення (6.71) і (6.72). Якщо $k=1$:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_1 = -\sin u_1 \text{sh } v; \\ \tilde{\Omega}_1 = \cos u_1 \text{ch } v, \end{cases}$$

$$\text{де } u_1 = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2} \Big|_{k=1} = \frac{\pi}{4}; \quad v = -\frac{1}{n} \text{Arsh} \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \text{Arsh} \frac{1}{0,5} = -0,721818, \text{ причому}$$

від'ємний знак v забезпечує від'ємне значення $\tilde{\Delta}_1$.

Отже,

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_1 = -\sin \frac{\pi}{4} \text{sh}(-0,721818) = 0,555893; \\ \tilde{\Omega}_1 = \cos \frac{\pi}{4} \text{ch}(-0,721818) = 0,899454. \end{cases}$$

За умови $k=2$:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_2 = -\sin u_2 \text{sh } v; \\ \tilde{\Omega}_2 = \cos u_2 \text{ch } v, \end{cases} \quad \text{де } u_2 = \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2} \Big|_{k=2} = \frac{3\pi}{4};$$

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_2 = -\sin \frac{3\pi}{4} \text{sh}(-0,721818) = 0,555893; \\ \tilde{\Omega}_2 = \cos \frac{3\pi}{4} \text{ch}(-0,721818) = -0,899454, \end{cases}$$

$$\text{тобто } \tilde{p}_{1,2} = -\tilde{\Delta}_1 \pm j\tilde{\Omega}_1 = -0,555893 \pm j0,899454.$$

Щоб знайти нормовані корені СФ, попередньо визначимо згідно з виразом

$$(6.96) \text{ коефіцієнт } k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Pi_\omega} = \frac{424,26 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 10,6065. \text{ Нормовані корені СФ об-}$$

числимо за формулою (6.98):

$$\bar{p}_{1,2} = \frac{\tilde{p}_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\tilde{p}_1^2}{4} - k_\Delta^2}; \quad \bar{p}_{3,4} = \frac{\tilde{p}_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\tilde{p}_2^2}{4} - k_\Delta^2}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\bar{p}_1 = -0,266168 - j10,16267 = -\Delta_1 - j\Omega_1; \bar{p}_2 = -0,289725 + j11,062124 = -\Delta_2 + j\Omega_2;$$

$$\bar{p}_3 = -0,266168 + j10,16267 = -\Delta_1 + j\Omega_1; \bar{p}_4 = -0,289725 - j11,062124 = -\Delta_2 - j\Omega_2,$$

звідки видно, що корені \bar{p}_1, \bar{p}_3 , а також \bar{p}_2, \bar{p}_4 утворюють комплексно-спряжені пари. Нормовану ОПФ СФ четвертого порядку представимо як добуток двох ОПФ ланок другого порядку (6.116):

$$H_U(\bar{p}) = H_{U_1}^{(2)}(\bar{p}) H_{U_2}^{(2)}(\bar{p}), \text{ або спростивши позначення}$$

$$H_U(\bar{p}) = H_1(\bar{p}) H_2(\bar{p}).$$

З урахуванням виразу (6.79) запишемо:

$$H_1(\bar{p}) = \frac{k_R \bar{p}}{\bar{p}^2 + 2\Delta_1 \bar{p} + \Delta_1^2 + \Omega_1^2}; H_2(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + 2\Delta_2 \bar{p} + \Delta_2^2 + \Omega_2^2}, \text{ де } k_R = \frac{1}{2\varepsilon} = 1.$$

Підставимо значення дійсних і уявних частин коренів:

$$H_1(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + 0,532336 \bar{p} + 103,350727}; H_2(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + 0,57945 \bar{p} + 122,454527}.$$

Денормовані ОПФ ланок другого порядку отримаємо на підставі співвідношення (6.117):

$$H_1(p) = \frac{\frac{p}{\Pi_\omega}}{\frac{p^2}{\Pi_\omega^2} + 0,532336 \frac{p}{\Pi_\omega} + 103,350727} = \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,532336 \Pi_\omega p + 103,350727 \Pi_\omega^2};$$

$$H_2(p) = \frac{\frac{p}{\Pi_\omega}}{\frac{p^2}{\Pi_\omega^2} + 0,57945 \frac{p}{\Pi_\omega} + 122,454527} = \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,57945 \Pi_\omega p + 122,454527 \Pi_\omega^2}.$$

Для перевірки отриманих результатів, визначимо частотну залежність ослаблення СФ, використовуючи вираз (6.1):

$$A_p(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H_1^2(\omega) H_2^2(\omega)},$$

де $H_1^2(\omega)$ і $H_2^2(\omega)$ – АКХ ланок другого порядку.

Так,

$$H_1^2(\omega) = |H_1(p)|^2 \Big|_{p=j\omega} = \frac{\Pi_\omega^2 \omega^2}{(103,350727 \Pi_\omega^2 - \omega^2)^2 + (0,532336 \Pi_\omega \omega)^2},$$

аналогічно визначається $H_2^2(\omega)$. Графік частотної залежності $A_p(\omega)$ зображено на рис.6.19.

З графіка видно, що значення $A_p(\omega_{\Delta 1,2})$ і $A_p(\omega_{s1,2})$ задовольняють заданим умовам.

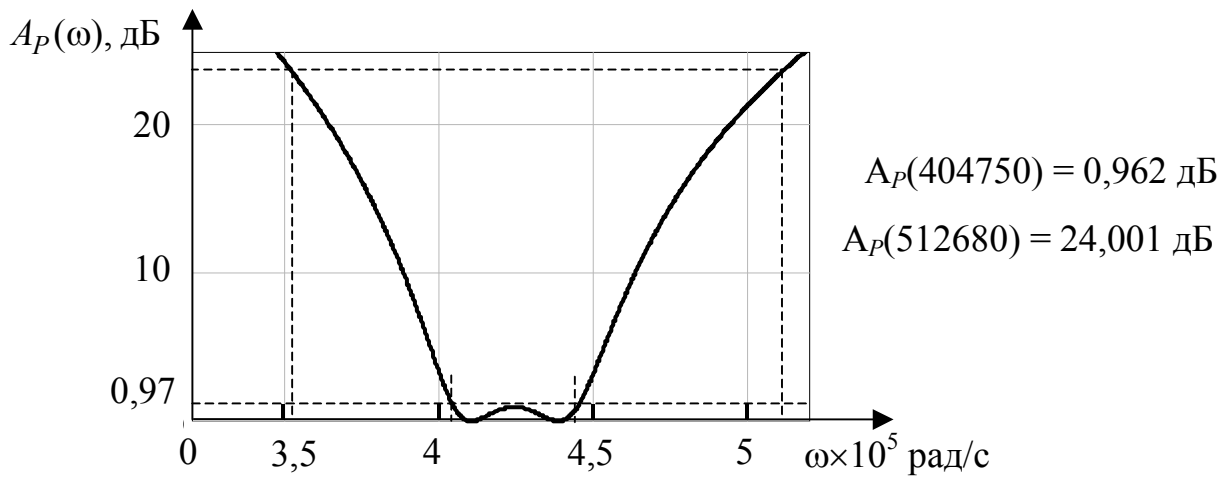


Рисунок 6.19 – Частотна залежність ослаблення СФ порядку $n = 4$

6.8 Загороджувальні фільтри з симетричними характеристиками

Нормовану ОПФ загороджувального фільтра (ЗФ) можна отримати перетворенням ОПФ ФП, оберненим виразу (6.94):

$$\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_{\Delta}^2}, \quad \text{або} \quad j\tilde{\Omega} = \frac{j\Omega}{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}, \quad (6.118)$$

де $\tilde{p} = j\tilde{\Omega} = j \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_{\text{тр}}}$ – нормована комплексна частота ФП;

\bar{p} – нормована комплексна частота ЗФ:

$$\bar{p} = j\Omega = j \frac{\omega}{\Delta\omega_3}. \quad (6.119)$$

Нормування здійснюють відносно смуги затримання $\Delta\omega_3$, яка для ФБ визначається на рівні 3 дБ, а для ФЧ – на рівні A_{Δ} .

Константа k_{Δ} у виразі (6.118) становить:

$$k_{\Delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_3}, \quad (6.120)$$

де ω_0 – центральна частота ЗФ. Перетворення (6.118) трансформує нормовану частотну характеристику ослаблення ФНЧ у характеристику $A_p(\Omega)$, симетричну відносно центральної частоти ЗФ, із дотриманням принципу збереження довжини частотного інтервалу (6.102).

Якщо до ОПФ ФП спочатку застосувати перетворення (6.81) (тобто перетворити ФНЧ у ФВЧ), а потім використати перетворення (6.94) (ФВЧ–СФ), виходить відповідність (6.118). Така послідовність перетворень (рис.6.20) ілюструє, по-перше, трансформування смуг пропускання і затримання ФП для комплексної змінної $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} < 0$ у відповідні смуги ФВЧ відносно ком-

плексної змінної $\tilde{p} = \frac{1}{\bar{p}}$, $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$ при збереженні рівності: $A_p(\tilde{\Omega}_i) = A_p(\tilde{\Omega}_i)$.

Від'ємне значення $\tilde{\Omega}$ не впливає на перетворення частотної залежності A_p , яка є парною функцією частоти. По-друге, показано перетворення СП і СЗ ФВЧ в інші смуги ЗФ для комплексної змінної $\bar{p} = j\Omega$, $\Omega > 0$, причому зв'язок комплексної змінної \bar{p} ЗФ з комплексною змінною \tilde{p} ФВЧ встановлюється за формулою (6.94):

$$\tilde{p} = \frac{\bar{p}^2 + k_{\Delta}^2}{\bar{p}}.$$

Це перетворення також передбачає незмінність значень ослаблення ФВЧ і ЗФ на відповідних частотах:

$$A_p(\tilde{\Omega}_i) = A_p(\Omega_i). \quad (6.121)$$

Дані про комплексні змінні різних типів фільтрів наведено у табл.6.5.

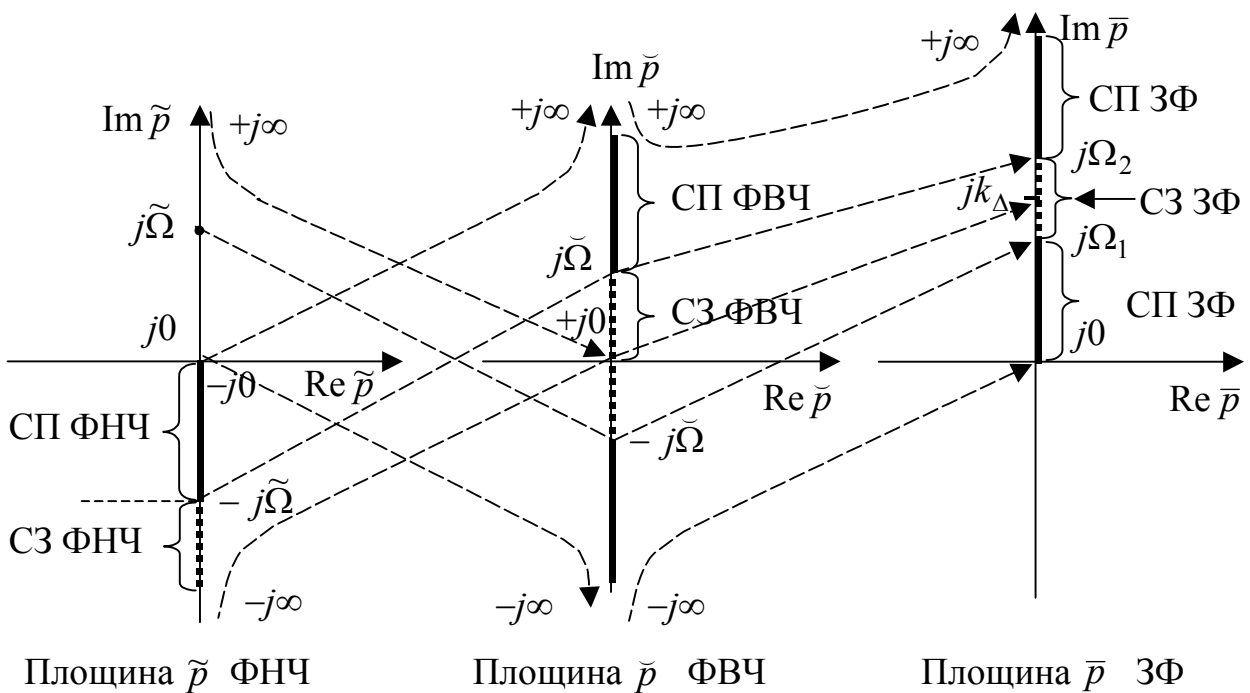


Рисунок 6.20 – Перетворення частотних діапазонів ФНЧ–ФВЧ і ФВЧ–ЗФ

Таблиця 6.5 – Співвідношення між комплексними нормованими частотами ФП, ФВЧ і ЗФ

ФП	\tilde{p}	$j0$	$j\tilde{\Omega}$	$-j\infty$	$-j\tilde{\Omega}$	$-j0$
ФВЧ	$\tilde{p} = 1/\bar{p}$	$-j\infty$	$-j\tilde{\Omega}$	$j0$	$j\tilde{\Omega}$	$j\infty$
ЗФ	\bar{p}	$j0$	$j\Omega_1$	jk_{Δ}	$j\Omega_2$	$j\infty$

Оскільки перетворення ОПФ ФВЧ у ОПФ ЗФ здійснюється за умови (6.121) на підставі перетворення (6.94), для якого виконується принцип збереження довжини частотного інтервалу, смуга пропускання ФВЧ збігається зі смугою затримання ЗФ. Крім того, частотні характеристики ЗФ також мають властивість геометричної симетрії (6.104), притаманну перетворенню (6.94). На рис.6.21 показано трансформацію частотних залежностей A_p для ФБ.

Щоб визначити ОПФ ЗФ, слід від вимог до частотних характеристик ослаблення ЗФ спочатку перейти до вимог A_p ФВЧ, а потім – до ФП (ФНЧ). Вихідними даними для розрахунку ЗФ є смуга затримання $\Delta\omega_3$, центральна частота ω_0 та співвідношення, аналогічні нерівностям (6.7):

$$\begin{cases} A_p(\omega_{\Delta 1}) = A_p(\omega_{\Delta 2}) \leq A_{\Delta} ; \\ A_p(\omega_{s1}) = A_p(\omega_{s2}) \geq A_s . \end{cases} \quad (6.122)$$

Умови (6.122) ЗФ аналогічні умовам (6.105) для СФ, але відрізняються співвідношеннями між частотами: так, для ЗФ виконуються нерівності $\omega_{\Delta 1} < \omega_{s1} < \omega_{s2} < \omega_{\Delta 2}$.

З двох значень частоти ω_{s_i} (ω_{Δ_i}), як правило, відоме тільки одне. Тому, виходячи з геометричної симетрії частотної залежності A_p (6.104), за заданими частотми обчислюють симетричні частоти (наприклад: $\omega_{\Delta 2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\Delta 1}}$; $\omega_{s1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{s2}}$).

Далі від вимог (6.122) переходять до співвідношень щодо ФВЧ для тих самих значень ослаблення:

$$\begin{cases} A_p(\tilde{\omega}_{\Delta}) \leq A_{\Delta} ; \\ A_p(\tilde{\omega}_s) \geq A_s , \end{cases} \quad (6.123)$$

$$\text{де} \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_{\Delta} = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1} ; \\ \tilde{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1} . \end{cases} \quad (6.124)$$

Для ФБ порядок ФВЧ $n \geq n^*$ (n – ціле округлене n^*) визначається на підставі формули (6.85) за умови рівностей у системі (6.123):

$$n^* = \frac{\lg(10^{0,1A_s} - 1) - \lg(10^{0,1A_{\Delta}} - 1)}{2 \lg \frac{\tilde{\Omega}_{\Delta}}{\tilde{\Omega}_s}}, \quad \frac{\tilde{\Omega}_{\Delta}}{\tilde{\Omega}_s} = \frac{\tilde{\omega}_{\Delta}}{\tilde{\omega}_s}. \quad (6.125)$$

Оскільки гранична частота ФВЧ, яка визначається на рівні 3 дБ, збігається із смугою затримання ЗФ, її можна знайти, виходячи з виразу (6.89):

$$\Delta\omega_3 = \tilde{\omega}_{гр} = \tilde{\omega}_{\Delta} (10^{0,1A_{\Delta}} - 1)^{\frac{1}{2n^*}} = \tilde{\omega}_s (10^{0,1A_s} - 1)^{\frac{1}{2n^*}}, \quad (6.126)$$

де n^* – дробове число (6.125).

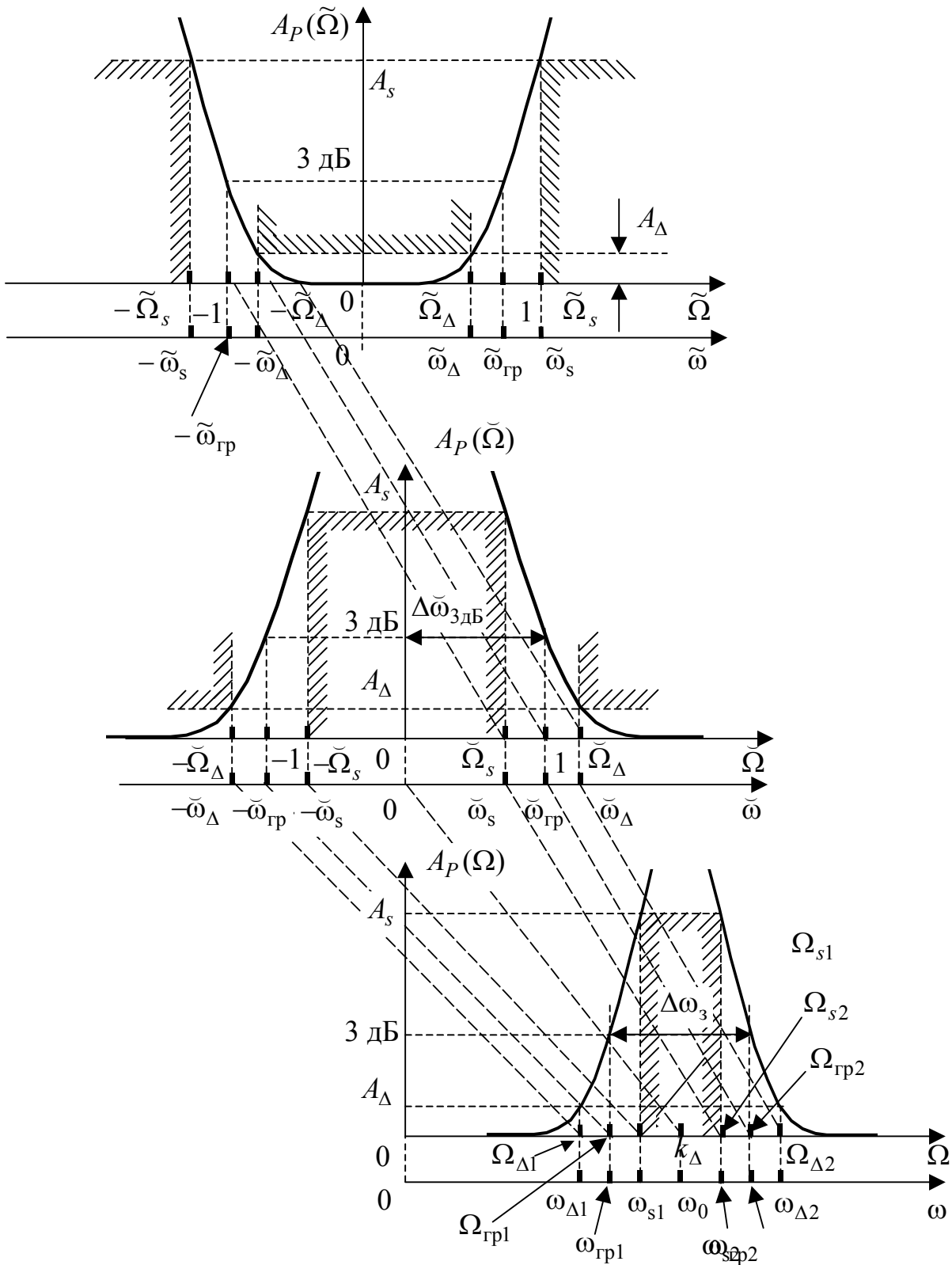


Рисунок 6.21 – Перетворення частотних характеристик ослаблення ФНЧ–ФВЧ і ФВЧ–ЗФ для ФБ

Оскільки порядки ФНЧ і ФВЧ однакові, можна записати ОПФ ФП, використовуючи вираз (6.38):

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)}, \quad (6.127)$$

де нормовані корені ФНЧ Баттерворта \tilde{p}_k обчислюють за формулою (6.109).

Для ФЧ порядок n ФВЧ визначають, виходячи з виразів (6.67), (6.81):

$$n \geq \frac{\text{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1A_s} - 1}}{\tilde{\Omega}_s}}{\text{Arch} \frac{1}{\tilde{\Omega}_s}}, \quad (6.128)$$

де $\tilde{\Omega}_s = \frac{\tilde{\omega}_s}{\tilde{\omega}_\Delta}$ – нормована частота ФВЧ, яку розраховують за формулою (6.92); частоти $\tilde{\omega}_\Delta$ і $\tilde{\omega}_s$ – згідно з системою (6.124); коефіцієнт нерівномірності ослаблення ε – за формулою (6.66).

З огляду на збіг порядків ФВЧ і ФП на підставі співвідношення (6.80), ОПФ ФП можна записати у вигляді:

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{k_R}{\prod_{k=1}^n (\tilde{p} - \tilde{p}_k)},$$

де коефіцієнт $k_R = \frac{1}{2^{n-1}\varepsilon}$ (загалом k_R може мати довільне значення).

При $k_R = 1$ аналітичний вираз ОПФ ФЧ збігається з (6.127), але для ФЧ нормовані корені $\tilde{p}_k = -\tilde{\Delta}_k + j\tilde{\Omega}_k$ визначатимуться з урахуванням формул (6.71) і (6.72) відповідно до співвідношення (6.111).

Перехід від ОПФ ФП (6.127) до нормованої ОПФ ЗФ потребує встановлення відповідності між нормованими коренями ФП і ЗФ згідно із співвідношенням (6.118). Розв'язання рівняння (6.118) відносно \bar{p} дає:

$$\tilde{p} \bar{p}^2 - \bar{p} + k_\Delta^2 \tilde{p} = 0, \quad \text{або} \quad \bar{p}^2 - \frac{1}{\tilde{p}} \bar{p} + k_\Delta^2 = 0, \quad \text{звідки:}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2\tilde{p}} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tilde{p}^2} - k_\Delta^2}. \quad (6.129)$$

За умови $\bar{p} = j\Omega$ для двох комплексно-спряжених значень $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$ і $\tilde{p}^* = -j\tilde{\Omega}$, виходячи з виразу (6.129), можна встановити безпосередній зв'язок між нормованими частотами ФП $\tilde{\Omega}$ і ЗФ Ω (опускаючи знак «мінус» перед коренем, що забезпечує додатне значення частоти Ω):

$$\Omega = \pm \frac{1}{2\tilde{\Omega}} + \sqrt{\frac{1}{4\tilde{\Omega}^2} + k_\Delta^2}. \quad (6.130)$$

Як і у випадку СФ, знайдену нормовану ОПФ ФП $H_U(\tilde{p})$ (6.127) доцільно представити у вигляді (6.112) для парного n або (6.113), якщо n – непарне. За умови непарного n з функції $H_U(\tilde{p})$ виділяється $H_U^{(1)}(\tilde{p})$ – ОПФ ланки першого порядку з коренем $\tilde{p} = -\tilde{\Delta}$, котра перетворюється на нормовану ОПФ ЗФ з двома нулями і полюсами, які відповідно є комплексно-спряженими:

$$H_U^{(2)}(\bar{p}) = H_U^{(1)}(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}} = \frac{1}{\tilde{p} + \tilde{\Delta}} \Big|_{\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_\Delta^2} + \tilde{\Delta}} = \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\tilde{\Delta} \bar{p}^2 + \bar{p} + \tilde{\Delta} k_\Delta^2} = \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\tilde{\Delta} (\bar{p}^2 + \frac{1}{\tilde{\Delta}} \bar{p} + k_\Delta^2)} = \hat{k} \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}^2 + \frac{1}{\tilde{\Delta}} \bar{p} + k_\Delta^2},$$

$$\text{де } \hat{k} = \frac{1}{\tilde{\Delta}} = \frac{1}{|\tilde{p}_n|}.$$

ОПФ $H_{U_i}^{(2)}(\tilde{p})$ i -х ланок другого порядку ФП, виділених з функції (6.112), з коренями $\tilde{p}_i = -\tilde{\Delta}_i \pm j\tilde{\Omega}_i$ перетворюються у нормовану ОПФ ЗФ четвертого порядку.

Якщо ОПФ однієї ланки другого порядку представити у вигляді $H_{U_i}^{(2)}(\tilde{p}) = \frac{1}{\tilde{p} - \tilde{p}_i} \cdot \frac{1}{\tilde{p} - \tilde{p}_i^*}$ і виконати перетворення для кожного з комплексно-спряжених коренів окремо, виходять ланки ЗФ з ОПФ другого порядку:

$$\frac{1}{\tilde{p} - \tilde{p}_i} \Big|_{\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}} = -\frac{1}{\tilde{p}_i} \cdot \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}^2 - \frac{\bar{p}}{\tilde{p}_i} + k_\Delta^2} = -k_i \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{(\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_2)}.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{\tilde{p} - \tilde{p}_i^*} \Big|_{\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}} = -\frac{1}{\tilde{p}_i^*} \cdot \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}^2 - \frac{\bar{p}}{\tilde{p}_i^*} + k_\Delta^2} = -k_i^* \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{(\bar{p} - \bar{p}_3)(\bar{p} - \bar{p}_4)},$$

де $k_i = \frac{1}{\tilde{p}_i}$; $k_i^* = \frac{1}{\tilde{p}_i^*}$, причому $\bar{p}_{1,3}$, а також $\bar{p}_{2,4}$ утворюють комплексно-

спряжені пари подібно перетворенням щодо СФ. Тому достатньо визначити тільки корені \bar{p}_1 і \bar{p}_2 , скориставшись формулою (6.129).

З урахуванням зроблених перетворень нормовану ОПФ ланки четвертого порядку ЗФ можна записати у вигляді:

$$H_U(\bar{p}) = H_{U_i}^{(2)}(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}} = \frac{1}{|\tilde{p}_i|^2} \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{(\bar{p} - \bar{p}_1)(\bar{p} - \bar{p}_3)} \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{(\bar{p} - \bar{p}_2)(\bar{p} - \bar{p}_4)}, \quad (6.131)$$

$$\text{де } \frac{1}{|\tilde{p}_i|^2} = k_i k_i^* = \frac{1}{\tilde{\Delta}_i^2 + \tilde{\Omega}_i^2},$$

тобто як добуток двох ОПФ ланок другого порядку з двома комплексно-спряженими полюсами і двома комплексно-спряженими нулями. Така форма найбільш прийнятна при каскадній реалізації фільтра.

Враховуючи співвідношення (6.79), знаменник у виразі (6.131) слід представити у вигляді поліномів відносно \bar{p} . Денормування ОПФ ЗФ здійснюється підстановкою (6.119):

$$H_U(p) = H_U(\bar{p}) \Big|_{\bar{p} = \frac{p}{\Delta\omega_3}}. \quad (6.132)$$

Приклад 6.5 Визначити ОПФ ЗФ Чебишова за такими вимогами: центральна частота ЗФ становить $\omega_0 = 424,279 \cdot 10^3$ рад/с, смуга затримання $\Delta\omega_3 = 161,66 \cdot 10^3$ рад/с. На частоті $\omega_{s1} = 404,75 \cdot 10^3$ рад/с ослаблення за потужністю не має бути меншим 24 дБ, на частоті $\omega_{\Delta 2} = 512,74 \cdot 10^3$ рад/с – не повинне перевищувати 0,97 дБ.

Розв'язання. Скориставшись властивістю геометричної симетрії частотної залежності A_p (6.104), визначимо частоти $\omega_{\Delta 1}$ і ω_{s2} :

$$\omega_{\Delta 1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\Delta 2}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{512,74 \cdot 10^3} = 351,08 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_{s2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{s1}} = \frac{424,279^2 \cdot 10^6}{404,75 \cdot 10^3} = 444,75 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

За принципом збереження довжини частотного інтервалу визначимо частоти $\check{\omega}_\Delta$ і $\check{\omega}_s$ (6.124) ФВЧ:

$$\check{\omega}_\Delta = \omega_{\Delta 2} - \omega_{\Delta 1} = 512,74 \cdot 10^3 - 351,08 \cdot 10^3 = 161,66 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

($\check{\omega}_\Delta$ така ж сама, як і смуга затримання);

$$\check{\omega}_s = \omega_{s2} - \omega_{s1} = 444,75 \cdot 10^3 - 404,75 \cdot 10^3 = 40 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

За нормованою частотою ФВЧ $\check{\Omega}_s = \frac{\check{\omega}_s}{\check{\omega}_\Delta}$ обчислимо нормовану частоту

$$\text{ФП: } \check{\Omega}_s = \frac{1}{\check{\Omega}_s} = \frac{160,66 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 4,0415 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

За формулами (6.66) і (6.67) розрахуємо ε і n ФП:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_\Delta} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 0,97} - 1} = 0,500259;$$

$$n \geq \frac{\text{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1A_s}} - 1}{\varepsilon}}{\text{Arch} \tilde{\Omega}_s} = \frac{\text{Arch} \frac{\sqrt{10^{0,1 \cdot 24}} - 1}{0,500259}}{\text{Arch} 4,0415} = 1,9992. \text{ Нехай } n = 2.$$

Оскільки значення ε і n ФП зійшлися з результатами прикладу 6.4, скористаємось отриманими там значеннями нормованих коренів:

$$\tilde{p}_{1,2} = -\tilde{\Delta} \pm j\tilde{\Omega} = -0,555893 \pm j0,899454; \quad |\tilde{p}_1|^2 = 1,118035.$$

На підставі виразу (6.129) обчислимо нормовані корені ЗФ:

$$\bar{p}_1 = -0,210778 + j2,24152 = -\Delta_1 + j\Omega_1; \quad \bar{p}_2 = -0,286428 - j3,046015 = -\Delta_2 - j\Omega_2; \\ \bar{p}_3 = -0,210778 - j2,24152 = -\Delta_1 - j\Omega_1; \quad \bar{p}_4 = -0,286428 + j3,046015 = -\Delta_2 + j\Omega_2.$$

Нормована ОПФ ЗФ, виходячи з виразу (6.80) за умови $k_R = 1$ згідно з формулами (6.131) і (6.79), набуває вигляду:

$$H_U(\bar{p}) = \frac{1}{|\tilde{p}_1|^2} \cdot \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}^2 + 2\Delta_1 \bar{p} + \Delta_1^2 + \Omega_1^2} \cdot \frac{\bar{p}^2 + k_\Delta^2}{\bar{p}^2 + 2\Delta_2 \bar{p} + \Delta_2^2 + \Omega_2^2};$$

$$k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_3} = 2,624514, \text{ або після підстановки числових значень}$$

$$H_U(\bar{p}) = 0,894426 \frac{\bar{p}^2 + 6,888076}{\bar{p}^2 + 0,421556 \bar{p} + 5,068838} \cdot \frac{\bar{p}^2 + 6,888076}{\bar{p}^2 + 0,57945 \bar{p} + 9,36215}.$$

Денормовану ОПФ ЗФ отримаємо, використовуючи вираз (6.132):

За знайденою ОПФ визначимо частотну залежність ослаблення (6.1), яка зображена на рис.6.22.

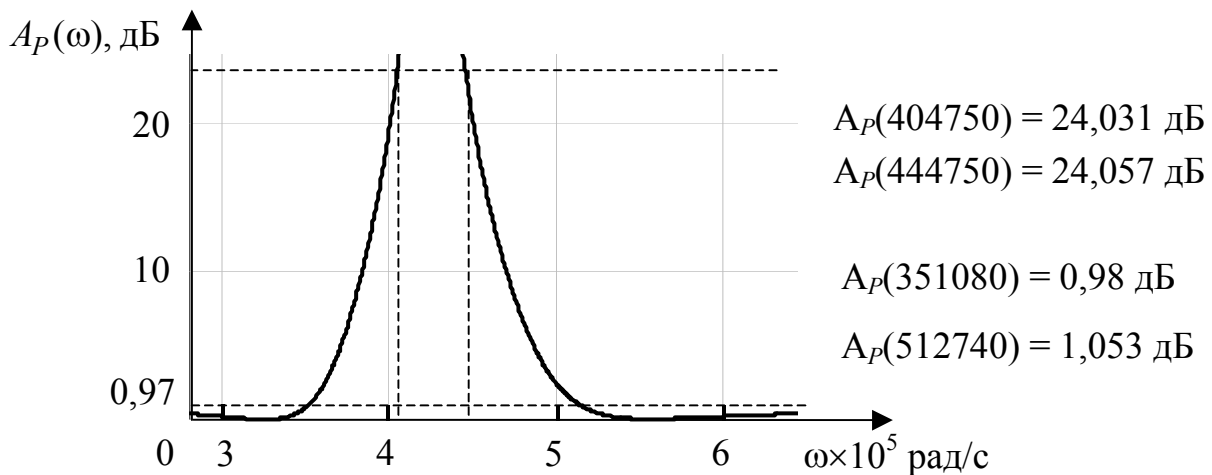


Рисунок 6.22 – Частотна залежність ЗФ порядку $n = 4$

Незначні розбіжності A_p із заданими значеннями ослаблення A_Δ обумовлені недостатньою точністю обчислення коренів, вплив якої помітний, оскільки розрахований порядок фільтра n (1,9992) і прийнятий (2), майже збігаються. Щоб усунути вказані розбіжності, слід розраховувати значення коренів з більшою точністю (як для ФП, так і ЗФ).

6.9 Частотні залежності реактансних функцій

Властивості реактансних функцій, які належать до класу ОВФ – операторних вхідних функцій комплексного змінного p , розглянуті вище у підрозд.3.8. Всі подальші докази і висновки щодо ОВФ двополюсника $Z_{\text{вх}}(p)$ цілком стосуються і операторної вхідної провідності $Y_{\text{вх}}(p)$. Раніше було доведено (3.82), (3.83), що ОВФ кола з втратами є дробово-раціональною функцією аргумента p , поліноми чисельника і знаменника якої $M(p)$, $N(p)$ – поліноми Гурвіца, їх корені належать лівій півплощини комплексної площини p . Наслідком зменшення втрат у колі є наближення коренів до осі $j\omega$. За умови відсутності втрат (коло з ідеальними реактивними елементами) корені поліномів $M(p)$, $N(p)$ розташовуються на осі $j\omega$, а самі поліноми вироджуються у парну (або непарну) частину полінома Гурвіца $V(p)$ і можуть бути представлені у вигляді:

$$\begin{cases} M(p) = V(p) \pm V(-p); \\ N(p) = V(p) \mp V(-p). \end{cases} \quad (6.133)$$

Якщо

$$V(p) = a_{2k} p^{2k} + a_{2k-1} p^{2k-1} + a_{2k-2} p^{2k-2} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

тоді

$$V(-p) = a_{2k} p^{2k} - a_{2k-1} p^{2k-1} + a_{2k-2} p^{2k-2} + \dots + a_2 p^2 - a_1 p + a_0.$$

Після підстановки останнього виразу до системи (6.133) виходить:

$$\begin{cases} M(p) = 2a_{2k} p^{2k} + 2a_{2k-2} p^{2k-2} + \dots + 2a_2 p^2 + 2a_0, & m = 2k; \\ N(p) = 2a_{2k-1} p^{2k-1} + 2a_{2k-3} p^{2k-3} + \dots + 2a_1 p, & n = 2k - 1. \end{cases} \quad (6.134)$$

Оскільки коефіцієнти полінома $V(p)$ – дійсні додатні величини, які залежать від параметрів кола, такими самими будуть і коефіцієнти поліномів $M(p)$, $N(p)$.

На підставі формули (3.82) реактансну функцію можна подати у вигляді:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2k} p^{2k} + a_{2k-2} p^{2k-2} + \dots + a_2 p^2 + a_0}{a_{2k-1} p^{2k-1} + a_{2k-3} p^{2k-3} + \dots + a_1 p}. \quad (6.135)$$

Поліноми $M(p)$, $N(p)$ у виразі (6.134) утворені згідно з виразом (6.133) за умови врахування верхніх знаків; якщо взяти нижні – $Z_{\text{вх}}(p)$ стане функцією, оберненою (6.135) з $m = 2k - 1$, $n = 2k$. Ця функція матиме інші властивості, ніж ОПФ (6.135), але вони збігатимуться з властивостями провідності кола, вхідний опір якого дорівнює (6.135). Отже, $Z_{\text{вх}}(p)$ – парно-непарна або непарно-парна функція, максимальні степені чисельника і знаменника якої відрізняються на одиницю, причому можливе як співвідношення $m > n$, так і $m < n$. Ознаками реактансних функцій вважаються їх значення при $p \rightarrow 0$ і $p \rightarrow \infty$.

Властивості реактансних функцій можна розглянути на прикладі $Z_{\text{BX}}(p)$ (6.135). Це парно-непарна функція із співвідношенням $m > n$. Корені полінома $M(p)$ позначено «0» у нижньому індексі.

Так, за умови додатної уявної частини

$$p_{01} = j\omega_{01}; p_{02} = j\omega_{02}; \dots; p_{0(k-1)} = j\omega_{0(k-1)}; p_{0k} = j\omega_{0k}. \quad (6.136)$$

Корені (6.136) є **нулями** реактансної функції $Z_{\text{BX}}(p)$:

$$\lim_{p \rightarrow p_{01}} Z_{\text{BX}}(p) = 0. \quad (6.137)$$

Для пари комплексно-спряжених нулів можна записати:

$$(p - j\omega_{01})(p + j\omega_{01}) = p^2 - p_{01}^2,$$

тоді поліном $M(p)$ із системи (6.134) матиме вигляд:

$$M(p) = 2a_{2k}(p^2 - p_{01}^2)(p^2 - p_{02}^2)\dots(p^2 - p_{0k}^2). \quad (6.138)$$

Корені полінома $N(p)$ (за умови додатної уявної частоти) позначають:

$$p_1 = j\omega_1; p_2 = j\omega_2; \dots; p_{k-1} = j\omega_{k-1} \quad (6.139)$$

і вони визначають **полюси** реактансної функції:

$$\lim_{p \rightarrow p_r} Z_{\text{BX}}(p) \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2, \dots, k-1. \quad (6.140)$$

Як було зазначено вище (див. підрозд.3.8), **нулі та полюси реактансних функцій чергуються**.

Аналогічно рівності (6.138) поліном $N(p)$ із системи (6.134) можна записати у вигляді:

$$N(p) = 2a_{2k-1}p(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)\dots(p^2 - p_{k-1}^2). \quad (6.141)$$

Якщо $M(p)$ – парна функція p ($m = 2k$), вона матиме k пар комплексно-спряжених коренів і не може мати (непарного) кореня у точці $p = 0$. Якщо $N(p)$ – непарна функція p ($n = 2k - 1$), вона має $k - 1$ пар комплексно-спряжених коренів і один корень у точці $p = 0$.

Отже, можна зробити такі висновки:

1. За умови парності поліномів $M(p)$ або $N(p)$ реактансна функція $Z_{\text{BX}}(p)$ не має нулів (або полюсів) у точці $p = 0$.
2. За умови непарності $M(p)$ або $N(p)$ реактансна функція $Z_{\text{BX}}(p)$ має полюси (або нулі) у точці $p = 0$.

Проведений аналіз дає можливість визначити, нуль або полюс має реактансна функція в нулі ($p = 0$). Щоб визначити границю функції у точці $p \rightarrow \infty$, достатньо порівняти степені поліномів $M(p)$ і $N(p)$:

$$3. \quad \begin{cases} \lim_{p \rightarrow \infty} Z_{\text{BX}}(p) \rightarrow \infty, & m > n; \\ \lim_{p \rightarrow \infty} Z_{\text{BX}}(p) \rightarrow 0, & m < n. \end{cases} \quad (6.142)$$

Підстановка виразів (6.138) і (6.141) до формули (6.135) дає:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \alpha \frac{(p^2 - p_{01}^2)(p^2 - p_{02}^2)\dots(p^2 - p_{0k}^2)}{p(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)\dots(p^2 - p_{k-1}^2)}; \quad \alpha = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}, \quad (6.143)$$

де α – постійний множник, який залежить від параметрів кола, котрі визначають коефіцієнти a_{2k}, a_{2k-1} .

На підставі узагальнюючих висновків ознаки реактансних функцій зведені до табл.6.6. Парність функцій $M(p)$ і $N(p)$ позначена як $2k$, а непарність відповідно $2k \pm 1$. Під і над позначкою $2k$ стоїть знак « \leftarrow » як підтвердження висновку 1. Якщо функція не може мати нуля за умови $p = 0$, вона, за методом виключення, повинна мати у цій точці полюс, або навпаки (висновок 2). Наявність протилежної ознаки позначено у табл.6.6 символом \oplus . Співвідношення між m і n за висновком 3 визначає наявність полюса чи нуля у нескінченності. На підставі двох ознак, позначених символами « $+$ » і « \oplus », заповнюється останній рядок у кожному стовпці таблиці.

Таблиця 6.6 – Наявність нулів і полюсів $Z_{\text{вх}}(p)$ за умови $p = 0$ і $p \rightarrow \infty$ (ознаки ОВФ)

Варіант	1	2	3	4
m, n	$m > n$		$m < n$	
m	$2k$	$2k + 1$	$2k$	$2k - 1$
Наявність нуля, якщо $p = 0$	–	\oplus	–	\oplus
Наявність полюса, якщо $p = 0$	\oplus	–	\oplus	–
n	$2k - 1$	$2k$	$2k + 1$	$2k$
Наявність нуля, якщо $p \rightarrow \infty$			+	+
Наявність полюса, якщо $p \rightarrow \infty$	+	+		
Ознаки $Z_{\text{вх}}(p)$	$\infty - \infty$	$0 - \infty$	$\infty - 0$	$0 - 0$

Загальна кількість нулів і полюсів реактансної функції, які відповідають скінченним значенням частоти (включаючи точку $p = 0$, тобто нульову частоту), збігається як із порядком того поліному, степінь якого максимальний, так і з кількістю реактивних елементів кола. Значення $p \rightarrow \infty$ не входить до загальної кількості нулів і полюсів. Ця точка, яка умовно належить уявній осі, додає до загальної кількості ще один нуль чи полюс.

Щоб перейти до частотних характеристик реактансних функцій, необхідно до виразу (6.143) підставити $p = j\omega$, а також значення нулів p_{0r} і полюсів p_r відповідно до співвідношень (6.136) і (6.139):

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \alpha \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)\dots(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{j\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)\dots(\omega_{k-1}^2 - \omega^2)}, \quad \text{або}$$

$$Z_{\text{BX}}(j\omega) = -j\alpha \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)\dots(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)\dots(\omega_{k-1}^2 - \omega^2)}. \quad (6.144)$$

Зважаючи, що $Z_{\text{BX}}(j\omega) = jX_{\text{BX}}(\omega)$, частотну функцію реактивного опору $X_{\text{BX}}(\omega)$ визначають з формули (6.144):

$$X_{\text{BX}}(\omega) = -\alpha_1 \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)\dots(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)\dots(\omega_{k-1}^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_1 = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}; \quad (6.145)$$

$$X_{\text{BX}}(\omega) = \alpha_2 \frac{\omega(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)\dots(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)\dots(\omega_k^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_2 = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}; \quad (6.146)$$

$$X_{\text{BX}}(\omega) = -\alpha_3 \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)\dots(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)\dots(\omega_k^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_3 = \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}; \quad (6.147)$$

$$X_{\text{BX}}(\omega) = \alpha_4 \frac{\omega(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)\dots(\omega_{0(k-1)}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)\dots(\omega_k^2 - \omega^2)}; \quad \alpha_4 = \frac{a_{2k-1}}{a_{2k}}. \quad (6.148)$$

Частотні функції відповідно до варіантів 2–4 (табл.6.6) відображені у формулах (6.146)–(6.148). Графіки залежностей $X_{\text{BX}}(\omega)$ показані на рис.6.23.

Частотні залежності реактивних провідностей матимуть такий самий вигляд, як на рис.6.23, якщо провідності $Y_{\text{BX}}(p)$ реактансних функцій матимуть такі ж ознаки, як і розглянуті опори $Z_{\text{BX}}(p)$.

Пошук схемних структур, які відповідають реактансним функціям $Z_{\text{BX}}(p)$ або $Y_{\text{BX}}(p)$, є задачею структурного синтезу. Цю задачу, як і задачу апроксимації, доцільно розв'язувати стосовно нормованих величин, що дає можливість не тільки узагальнити отримані результати, а й підвищити точність розрахунків. Так, поліномні коефіцієнти, якими не можна нехтувати, ненормованих ОВФ можуть відрізнятись один від одного на десятки порядків на відміну від коефіцієнтів нормованих функцій. Так само, як і раніше (наприклад, підрозд.6.4), від комплексної змінної $p = -\delta \pm j\omega$ переходять до нормованої комплексної частоти $\bar{p} = -\Delta \pm j\Omega$. Оскільки реактансні функції – функції кіл без втрат (дійсна складова комплексного кореня $\delta = 0$), тоді відповідно $p = \pm j\omega$, а $\bar{p} = \pm j\Omega$, де Ω – нормована частота:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{норм}}}. \quad (6.149)$$

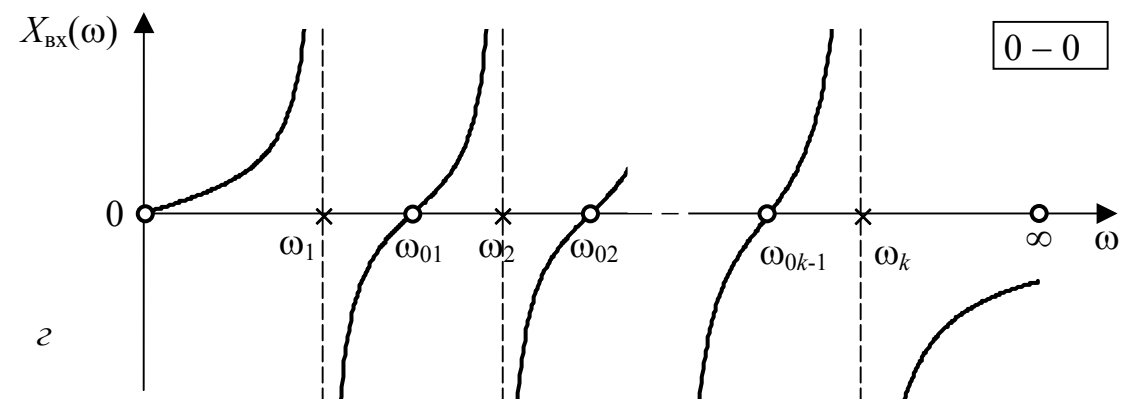
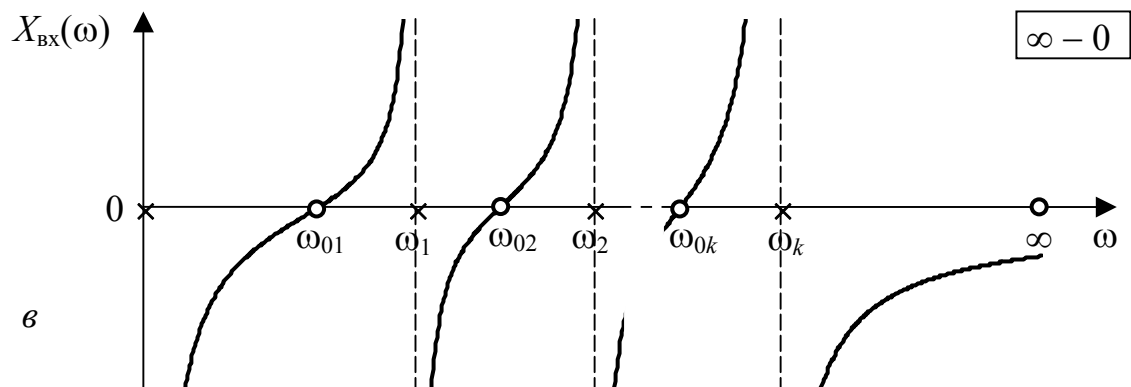
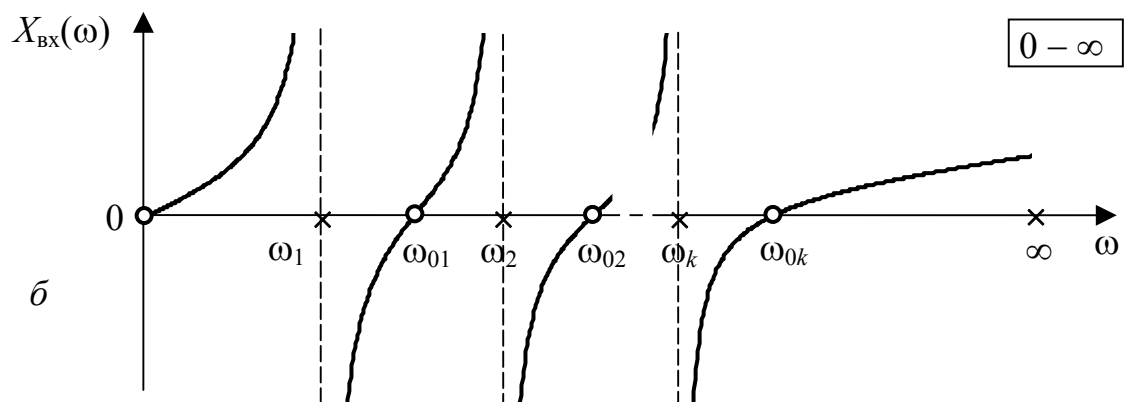
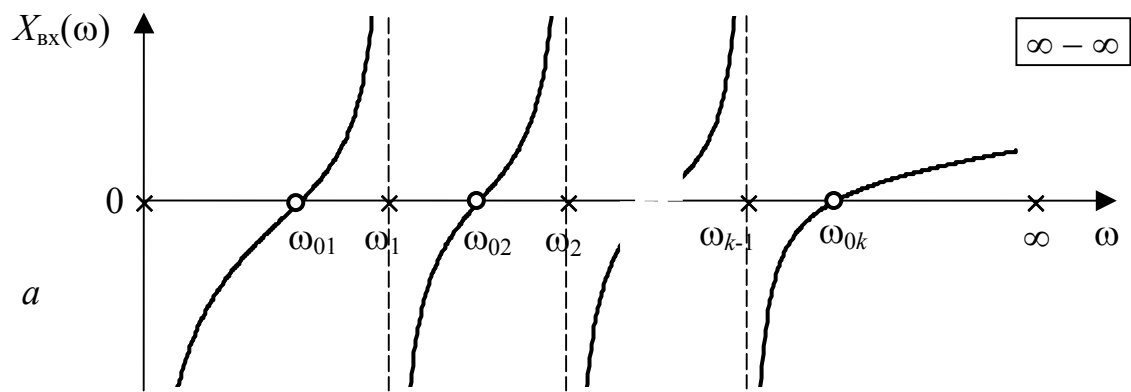


Рисунок 6.23 – Частотні залежності реактивного опору різних за ознаками реактансних функцій

Частота $\omega_{\text{норм}}$, за якою виконують нормування, може бути частотою якогось-небудь полюса або нуля.

Якщо реактивний двополіусник живиться від джерела з опором R_i , нормування операторних і реактивних опорів здійснюється відносно R_i :

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{Z_{\text{вх}}(\bar{p})}{R_i}; \quad \tilde{X}(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{R_i}. \quad (6.150)$$

Нормовані елементи двополіусника матимуть однаковий порядок і будуть безрозмірними. Так нормована індуктивність \tilde{L} і нормована ємність \tilde{C} мають відповідно нормовані опори: $\Omega\tilde{L} = \frac{\omega L}{R_i}$; $\frac{1}{\Omega\tilde{C}} = \frac{1/\omega C}{R_i}$, звідки з урахуванням виразу (6.149) можна визначити денормовані індуктивність та ємність:

$$L = \tilde{L} \frac{R_i}{\omega_{\text{норм}}}; \quad C = \frac{\tilde{C}}{\omega_{\text{норм}} R_i}, \text{ або}$$

$$L = \tilde{L} k_L; \quad C = \tilde{C} k_C, \quad (6.151)$$

$$\text{де } k_L = \frac{R_i}{\omega_{\text{норм}}}; \quad k_C = \frac{1}{R_i \omega_{\text{норм}}}.$$

Константи k_L і k_C обумовлюються тільки нормувальними параметрами. Денормований опір визначають операцією, оберненою співвідношенню (6.150). Формули для визначення денормованих елементів зведені до табл. 6.7.

Таблиця 6.7 – Визначення денормованих елементів

Нормований елемент	\tilde{R}	\tilde{L}	\tilde{C}
Формула денормування	$R = \tilde{R} R_i$	$L = \tilde{L} k_L$	$C = \tilde{C} k_C$
Нормувальний коефіцієнт	–	$k_L = \frac{R_i}{\omega_{\text{норм}}}$	$k_C = \frac{1}{R_i \omega_{\text{норм}}}$

6.10 Реалізація реактансних функцій за Фостером

Поширеними методами структурної реалізації реактансних функцій є методи, запропоновані Фостером⁶ і відомі як перша і друга форми Фостера. Реалізацію за першою формою Фостера доцільно розглянути на прикладі операторної реактансної функції (6.135), яку відносно нормованої комплексної частоти записують у вигляді:

⁶ **Фостер**, Р.М. Foster – американський вчений, співробітник Лабораторії Бела, започаткував систематичні дослідження синтезу фільтрів у роботі «A reactance theorem», Bell System Techn. J., 3: 259–267, 1924.

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{a}_{2k}\bar{p}^{2k} + \bar{a}_{2k-2}\bar{p}^{2k-2} + \dots + \bar{a}_2\bar{p}^2 + \bar{a}_0}{\bar{a}_{2k-1}\bar{p}^{2k-1} + \bar{a}_{2k-3}\bar{p}^{2k-3} + \dots + \bar{a}_1\bar{p}}, \quad (6.152)$$

$$\text{де } \bar{p} = j\Omega = j \frac{\omega}{\omega_{\text{норм}}}.$$

Слід зазначити, що коефіцієнти поліномів чисельника $M(\bar{p})$ і знаменника $N(\bar{p})$ функції (6.152) мають приблизно однаковий порядок. Оскільки у цієї функції $m > n$ ($m = 2k$, $n = 2k - 1$), можна виділити цілу частину дробу:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_{\infty}\bar{p} + \frac{M_1(\bar{p})}{N(\bar{p})}, \quad (6.153)$$

де $A_{\infty}\bar{p}$ – ціла частина, $M_1(\bar{p})$ – остача, а $N(\bar{p})$ – знаменник функції (6.152), який згідно з виразом (6.141) можна записати у вигляді:

$$N(\bar{p}) = \bar{a}_{2k-1}\bar{p}(\bar{p}^2 - \bar{p}_1^2)(\bar{p}^2 - \bar{p}_2^2)\dots(\bar{p}^2 - \bar{p}_{k-1}^2). \quad (6.154)$$

Правильний дріб $\frac{M_1(\bar{p})}{N(\bar{p})}$ у формулі (6.153) з огляду на вираз (6.154) можна розкласти на прості дроби і тоді функцію (6.153) представити у вигляді:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_{\infty}\bar{p} + \frac{A_0}{\bar{p}} + \sum_r \frac{A_r\bar{p}}{\bar{p}^2 - \bar{p}_r^2}, \quad r = 1, 2, \dots, k-1. \quad (6.155)$$

Цілу частину $A_{\infty}\bar{p}$ ставлять у відповідність нормованому операторному індуктивному опору $\bar{p}\tilde{L}_{\infty}$, звідки:

$$\tilde{L}_{\infty} = A_{\infty}; \quad A_{\infty} = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})}{\bar{p}}. \quad (6.156)$$

Індекс « ∞ » має сенс, оскільки наявність коефіцієнта A_{∞} вказує на наявність полюса функції $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ за умови $\bar{p} \rightarrow \infty$ ($\lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} A_{\infty}\bar{p} \rightarrow \infty$). Доданок $\frac{A_0}{\bar{p}}$ у виразі (6.155) відповідає операторному опору ємності $\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_0}$,

отже:

$$\tilde{C}_0 = \frac{1}{A_0}; \quad A_0 = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \bar{p}\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}). \quad (6.157)$$

Індекс «0» позначає наявність полюса у точці $\bar{p} = 0$.

Останній доданок під знаком суми $\frac{A_r\bar{p}}{\bar{p}^2 - \bar{p}_r^2}$ ($\bar{p}_r = j\Omega_r$) функції (6.155) можна поставити у відповідність операторному опору ідеального паралельного контуру з елементами \tilde{L}_r , \tilde{C}_r :

$$\frac{\bar{p}\tilde{L}_r}{\bar{p}^2\tilde{L}_r\tilde{C}_r + 1} = \frac{\bar{p}/\tilde{C}_r}{\bar{p}^2 + \Omega_r^2},$$

де Ω_r – резонансна частота ідеального паралельного контуру ($\Omega_r^2 = \frac{1}{\tilde{L}_r \tilde{C}_r}$).

З останнього рівняння виходить:

$$\frac{1}{\tilde{C}_r} = A_r; \quad \tilde{L}_r = \frac{1}{\tilde{C}_r \Omega_r^2}; \quad A_r = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow \bar{p}_r^2} \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_r^2}{\bar{p}} \tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}). \quad (6.158)$$

Отже, на підставі формули (6.155) реактансній функції $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ відповідає схема з послідовним з'єднанням елементів \tilde{L}_∞ , \tilde{C}_0 і $k-1$ паралельних контурів (рис.6.24, а відповідно до варіанта 1, табл.6.6). На рис.6.24, б, в, г наведено схеми, які реалізують реактансні функції відповідно до варіантів 2, 3, 4 табл.6.6.

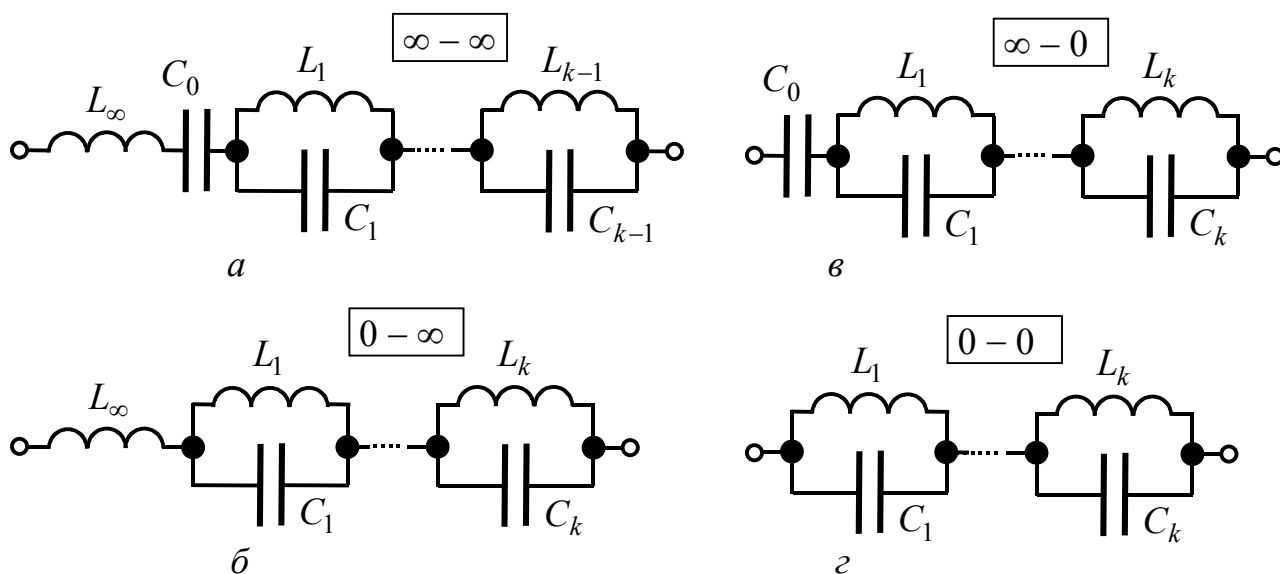


Рисунок 6.24 – Схемні реалізації за першою формою Фостера

Схеми реалізації реактансних функцій, отримані за першою формою Фостера, мають мінімальну кількість елементів, яка збігається з найбільшим із степенів поліномів $M(\bar{p})$, $N(\bar{p})$. Ці схеми називають **канонічними**, оскільки вони побудовані за певним каноном (правилом). Дивлячись на схему, можна визначити ознаки відповідної реактансної функції. Схема реалізує нуль за нульової частоти, якщо до вхідних затискачів увімкнено низку послідовно з'єднаних індуктивностей (опір ідеальних індуктивностей за нульової частоти – нульовий). Наявність індуктивності L_∞ забезпечує полюс за нескінченної частоти (опір індуктивності – нескінченна величина). Нуль за нескінченної частоти забезпечує низка послідовно з'єднаних ємностей, які увімкнено між вхідними затискачами (опір ідеальної ємності за нескінченної частоти нульовий). Полюс за нульової частоти реалізує елемент C_0 , завдяки нескінченному опору ємності за цих умов.

Частотна залежність реактивного опору реактансної функції (6.152) виходить з формули (6.155) за умови $\bar{p} = j\Omega$, з огляду на те, що $Z_{\text{вх}}(j\Omega) = jX_{\text{вх}}(\Omega)$:

$$X_{\text{вх}}(\Omega) = A_{\infty}\Omega - \frac{A_0}{\Omega} + \sum_r \frac{A_r\Omega}{\Omega_r^2 - \Omega^2}, \quad r = 1, 2, \dots, k-1. \quad (6.159)$$

Графік залежності $X_{\text{вх}}(\Omega)$ відповідно до формули (6.159) показаний на рис.6.23, а. Графік (рис.6.23, б) відповідає частотній залежності (6.159) за умови $A_0 = 0$; графік (рис.6.23, в) – за умови $A_{\infty} = 0$, а для графіка (рис.6.23, г) мають виконуватися умови: $A_{\infty} = 0, A_0 = 0$.

З графіків видно, що функції $X_{\text{вх}}(\Omega)$ зростають із збільшенням частоти, на частотах паралельних резонансів Ω_r спостерігається розрив частотних характеристик від $+\infty$ (індуктивний характер) до $-\infty$ (ємнісний характер). Частоти нулів ЧХ однозначно визначаються частотами полюсів. На рис.6.25 наведено частотну залежність реактивного опору паралельного контуру з резонансною частотою Ω_1 (крива 1) і послідовного контуру, утвореного елементами L_{∞} і C_0 , з резонансною частотою Ω_0 (крива 2). Для сумарної частотної залежності складного двополюсника (крива 3) частота паралельного резонансу (частота полюса) не змінилась, але з'явилось два значення частоти, які відповідають послідовним резонансам: Ω_{01}, Ω_{02} (частоти нулів). Функція $X_{\text{вх}}(\Omega)$ має два полюси (один за нульової частоти) і два нулі, реалізовані чотирма елементами.

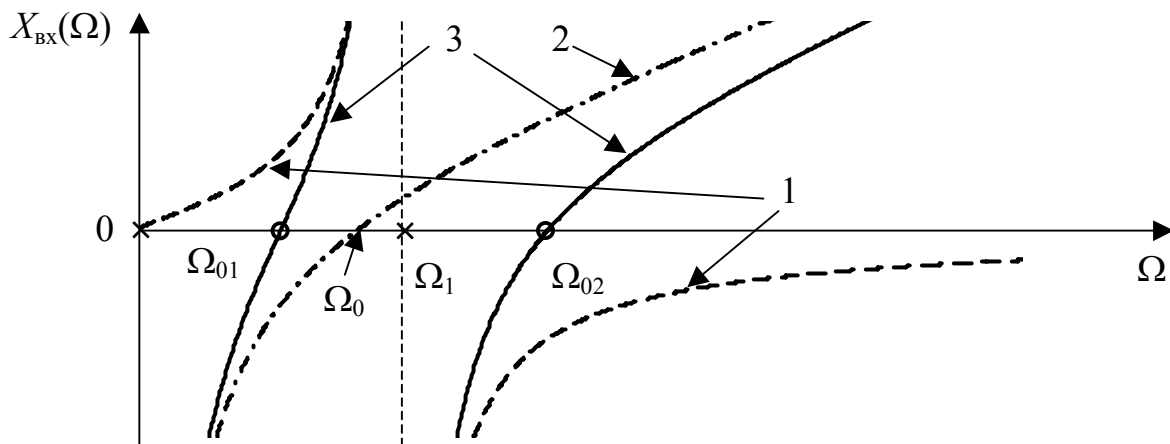


Рисунок 6.25 – Частотна залежність реактивного опору складного двополюсника

Далі розглянуто реалізацію реактансних функцій за другою формою Фостера.

Операторною характеристикою реактивного двополюсника може бути як вхідний опір, так і вхідна провідність, яку аналогічно виразу (6.155) можна представити у вигляді:

$$\tilde{Y}_{\text{BX}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_\infty + \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_0} + \sum_r \frac{\bar{p}/\tilde{L}_r}{\bar{p}^2 + \Omega_r^2}, \quad r=1, 2, \dots, k, \text{ або } r=1, 2, \dots, k-1, \quad (6.160)$$

причому верхня межа визначається порядком полінома знаменника ДРФ $\tilde{Y}_{\text{BX}}(\bar{p})$. Елементи, провідності яких підсумовуються, увімкнено паралельно вхідним затискачам кола. Елементи \tilde{C}_∞ і \tilde{L}_0 реалізують полюси за умов $\bar{p} \rightarrow \infty$ і $\bar{p} \rightarrow 0$. Під знаком суми у виразі (6.160) записано провідність ідеального послідовного контуру з резонансною частотою $\Omega_r^2 = \frac{1}{L_r C_r}$ (контур реалізує полюс на цій частоті). Елементи складного двополюсника визначаються у такий спосіб:

$$\begin{cases} \tilde{C}_\infty = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Y}_{\text{BX}}(\bar{p})}{\bar{p}}; & \frac{1}{\tilde{L}_0} = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \bar{p}\tilde{Y}_{\text{BX}}(\bar{p}); \\ \frac{1}{\tilde{L}_r} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -\Omega_r^2} \frac{\bar{p}^2 + \Omega_r^2}{\bar{p}} \tilde{Y}_{\text{BX}}(\bar{p}); & \tilde{C}_r = \frac{1}{\Omega_r^2 \tilde{L}_r}. \end{cases} \quad (6.161)$$

На рис.6.26 показані схемні реалізації, які відповідають варіантам 1, 2, 3, 4 (табл.6.6).

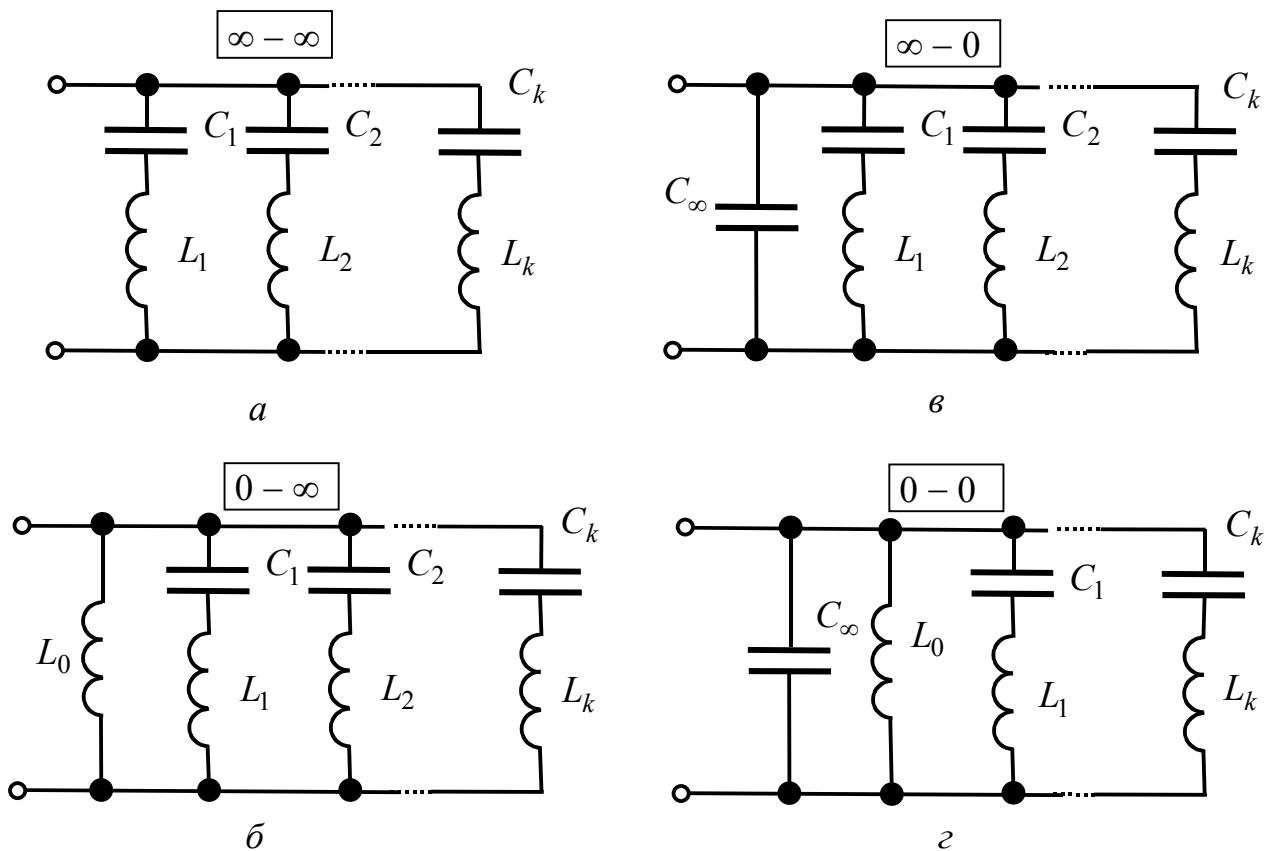


Рисунок 6.26 – Схемні реалізації за другою формою Фостера

Приклад 6.6. Визначити схемну реалізацію нормованого операторного вхідного опору $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ двополюсника за першою формою Фостера:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{4\bar{p}^3 + 2\bar{p}},$$

причому функція згідно з табл.6.6 має ознаки $\infty - \infty$.

Розв'язання. Порядок полінома чисельника становить $m=4$, тобто $M(\bar{p})$ – парна функція і не може мати кореня за умови $\omega=0$. Отже, функція $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ не може мати нуля не нульової частоти і, як наслідок, – матиме полюс.

Порядок полінома знаменника становить $n=3$, тобто $N(\bar{p})$ – непарна функція і має корінь за умови $\omega=0$, отже, $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ має полюс за нульової частоти (підтвердження першої ознаки). Оскільки $m > n$, $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ матиме полюс у нескінченності (підтвердження другої ознаки).

Визначимо полюси $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$:

$$4\bar{p}^3 + 2\bar{p} = 0; \quad 2\bar{p}(2\bar{p}^2 + 1) = 0; \quad \bar{p}_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \bar{p}_2 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \bar{p}_3 = 0.$$

За формулами (6.156) – (6.158) обчислимо:

$$A_\infty = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{\bar{p}(4\bar{p}^3 + 2\bar{p})} = 0,5; \quad A_0 = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \frac{(2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1)\bar{p}}{\bar{p}(4\bar{p}^2 + 2)} = 0,5;$$

$$A_1 = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -0,5} \tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_1^2}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -0,5} \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{4\bar{p}(\bar{p}^2 + 0,5)} \cdot \frac{\bar{p}^2 + 0,5}{\bar{p}} = 0,25.$$

Згідно з виразом (6.155) запишемо:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = 0,5\bar{p} + \frac{0,5}{\bar{p}} + \frac{0,25\bar{p}}{\bar{p}^2 + 0,5}.$$

Отже, розглянуту ОВФ можна представити схемою, яка має чотири елементи (рис.6.27, а), нормовані значення параметрів яких становлять:

$$\tilde{L}_\infty = A_\infty = 0,5; \quad \tilde{C}_0 = \frac{1}{A_0} = 2; \quad \tilde{C}_1 = \frac{1}{A_1} = 4; \quad \Omega_1^2 = -\bar{p}_1^2 = 0,5; \quad \tilde{L}_1 = \frac{1}{\Omega_1^2 \tilde{C}_1} = \frac{1}{0,5 \cdot 4} = 0,5.$$

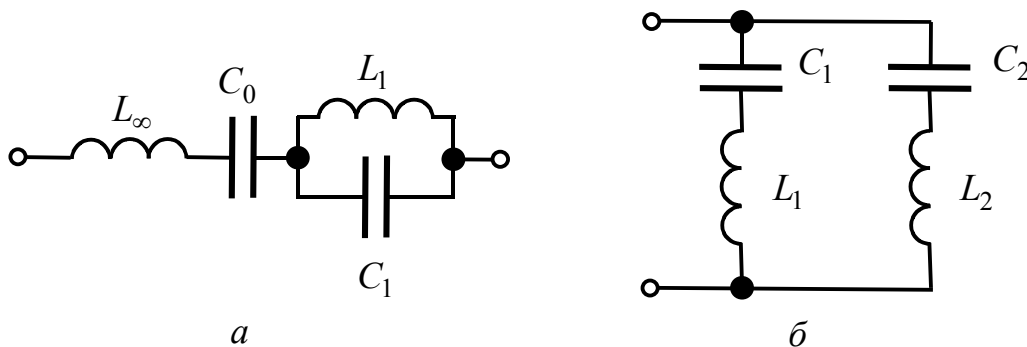


Рисунок 6.27 – Схемні реалізації до прикладів: а – 6.6; б – 6.7

Приклад 6.7. За другою формою Фостера визначити схемну реалізацію нормованої ОВФ двополюсника:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}^3 + 2,25\bar{p}}{\bar{p}^4 + 5\bar{p}^2 + 6},$$

яка згідно з табл.6.6 має ознаки $\infty - \infty$.

Розв'язання. Визначимо корені знаменника $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$:

$$\bar{p}^2 = -2,5 \pm 0,5; \quad \bar{p}_1^2 = -2; \quad \bar{p}_2^2 = -3; \quad \Omega_1^2 = 2; \quad \Omega_2^2 = 3.$$

На підставі співвідношень (6.161) знайдемо значення параметрів елементів схеми:

$$\tilde{C}_\infty = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p} \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}^3 + 2,25\bar{p}}{\bar{p}(\bar{p}^4 + 5\bar{p}^2 + 6)} = 0;$$

$$\frac{1}{\tilde{L}_0} = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \bar{p} \tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \lim_{\bar{p} \rightarrow 0} \frac{\bar{p}^2(\bar{p}^2 + 2,25)}{\bar{p}^4 + 5\bar{p}^2 + 6} = 0;$$

$$\frac{1}{\tilde{L}_1} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow \bar{p}_1^2} \tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_1^2}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -2} \frac{\bar{p}(\bar{p}^2 + 2,25)}{(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 3)} \frac{\bar{p}^2 + 2}{\bar{p}} = 0,25;$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{1}{\Omega_1^2 \tilde{L}_1} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8};$$

$$\frac{1}{\tilde{L}_2} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow \bar{p}_2^2} \tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) \frac{\bar{p}^2 - \bar{p}_2^2}{\bar{p}} = \lim_{\bar{p}^2 \rightarrow -3} \frac{\bar{p}(\bar{p}^2 + 2,25)}{(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 3)} \frac{\bar{p}^2 + 3}{\bar{p}} = \frac{3}{4};$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{1}{\Omega_2^2 \tilde{L}_2} = \frac{3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Отже, за відсутності елементів \tilde{C}_∞ і \tilde{L}_0 , схема, яка реалізує задану ОВФ $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$, містить чотири елементи (рис.6.27, б), нормовані значення яких становлять:

$$\tilde{L}_1 = 4; \quad \tilde{C}_1 = 1/8; \quad \tilde{L}_2 = 4/3; \quad \tilde{C}_2 = 1/4.$$

Приклад 6.8. Обчислити денормовані значення елементів схеми (рис.6.27, б), якщо двополюсник живиться від джерела з внутрішнім опором 1 кОм, а нормувальна частота $\omega_{\text{норм}} = 10^6$ рад/с.

Розв'язання. На підставі формул (табл.6.7) обчислимо:

$$L_1 = \tilde{L}_1 k_L = 4 \frac{10^3}{10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 4 \text{ мГн}; \quad L_2 = \tilde{L}_2 k_L = \frac{4}{3} \text{ мГн};$$

$$C_1 = \tilde{C}_1 k_C = \frac{1}{8} \frac{1}{10^6 \cdot 10^3} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = \frac{1}{8} \text{ нФ}; \quad C_2 = \tilde{C}_2 k_C = \frac{1}{4} \text{ нФ}.$$

6.11 Реалізація реактансних функцій за Кауером

Реалізація за Кауером передбачає перетворення операторної реактансної функції до вигляду безперервного або ланцюгового дроби. Розкладання у ланцюговий дріб відносно \bar{p} з додатними степенями відповідає схемам, які реалізовані за першою формою Кауера. Розглядаючи це перетворення на прикладі операторної реактансної функції (6.135), з якої виділено цілу частину $\bar{p}\tilde{L}_1$, вираз (6.153) можна переписати у вигляді:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_1 + \frac{M_1(\bar{p})}{N(\bar{p})} = \bar{p}\tilde{L}_1 + Z_1(\bar{p}). \quad (6.162)$$

Рівності (6.162) відповідає двополюсник, вхідний опір якого визначається послідовним з'єднанням індуктивності \tilde{L}_1 і операторного опору $Z_1(\bar{p})$ (рис.6.28, а). Якщо замість $Z_1(\bar{p})$ ввести обернену величину, виходить вираз:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_1 + \frac{1}{Y_1(\bar{p})}; \quad Y_1(\bar{p}) = \frac{N(\bar{p})}{M_1(\bar{p})}. \quad (6.163)$$

Функція $Y_1(\bar{p})$ – неправильний дріб, з якого можна виділити цілу частину $\bar{p}\tilde{C}_1$, тоді

$$Y_1(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_1 + \frac{N_1(\bar{p})}{M_1(\bar{p})} = \bar{p}\tilde{C}_1 + Y_2(\bar{p}). \quad (6.164)$$

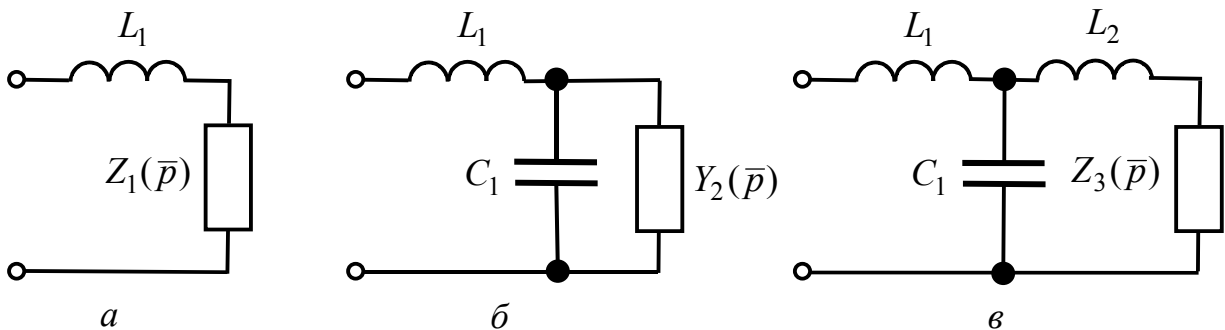


Рисунок 6.28 – Утворення східцевої схеми з полюсом у нескінченності

Провідність ділянки кола з опором $Z_1(\bar{p})$ на підставі рівняння (6.164) відповідає паралельному з'єднанню ємності \tilde{C}_1 і ділянки кола, яка має провідність $Y_2(\bar{p})$ (рис.6.28, б). Від правильного дроби $Y_2(\bar{p})$ можна перейти до оберненої величини – операторного опору $Z_2(\bar{p}) = \frac{M_1(\bar{p})}{N_1(\bar{p})}$, який є неправильним дробом:

$$Y_1(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_1 + \frac{1}{Z_2(\bar{p})}. \quad (6.165)$$

Підстановка провідності (6.165) до формули (6.163) призведе до виразу:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_1 + \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1 + \frac{1}{Z_2(\bar{p})}}. \quad (6.166)$$

Якщо цілу частину неправильного дроби $Z_2(\bar{p})$ позначити $\bar{p}\tilde{L}_2$, тоді

$$Z_2(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_2 + \frac{1}{Y_3(\bar{p})}. \quad (6.167)$$

Ділянка з опором $Z_2(\bar{p})$ – це послідовне з'єднання індуктивності \tilde{L}_2 і опору $Z_3(\bar{p})$ (рис.6.28, в), від $Z_3(\bar{p})$ знову переходять до $Y_3(\bar{p})$. Якщо підставити опір (6.167) до виразу (6.166), виходить:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_1 + \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1 + \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_2 + \frac{1}{Y_3(\bar{p})}}}. \quad (6.168)$$

Отже, на кожному етапі перетворення виділяється ціла частина неправильного дроби. Якщо ціла частина еквівалентна нормованому операторному опору, він приєднується до попереднього елемента послідовно, якщо ціла частина – нормована операторна провідність, вона приєднується до попереднього елемента паралельно. У такий спосіб утворюється східцева схема, а форма подання ОВФ у вигляді (6.168) має назву неперервного або ланцюгового дроби. Східцеві схеми, які починаються з індуктивності у подовжній вітці (рис.6.29, а, б) мають полюс у нескінченності. Від того, який елемент містить остання ланка, залежить значення вхідного опору за нульової частоти. Якщо остання ланка містить елементи \tilde{L}_k, \tilde{C}_k , за нульової частоти ОВФ має полюс. Така схема відповідає парно-непарній функції (рис.6.29, а) з частотною залежністю реактивного опору (рис.6.23, а). Якщо остання ланка східцевої схеми містить елемент \tilde{L}_{k+1} (рис.6.29, б), ОВФ – непарно-парна функція з частотною залежністю реактивного опору (рис.6.23, б) – матиме нуль за нульової частоти.

Східцеву схему за першою формою Кауера можна отримати і за умови, коли $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ – правильний дріб ($m > n$). У цьому випадку на першому етапі слід перейти до оберненого дроби – провідності $Y_{\text{вх}}(\bar{p})$, яку аналогічно виразу (6.168) можна представити як ланцюговий дріб:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_1 + \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1 + \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2 + \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_2 + \dots}}}. \quad (6.169)$$

Східцеві схеми, які відповідають виразу (6.169), утворені за принципом, розглянутим вище. Вони починаються з ємності \tilde{C}_1 , яка увімкнена паралельно вхідним затискачам кола і реалізує нуль у нескінченності (рис.6.29, в, г). Схема (рис.6.29, в), яка містить в останній ланці елементи \tilde{L}_k, \tilde{C}_k , має полюс за нульо-

вої частоти (частотна залежність реактивного опору зображена на рис.6.23, в).
 Схема (рис.6.29, з) з індуктивністю \tilde{L}_k в останній ланці має нуль за нульової частоти (частотна залежність реактивного опору зображена на рис.6.23, з).

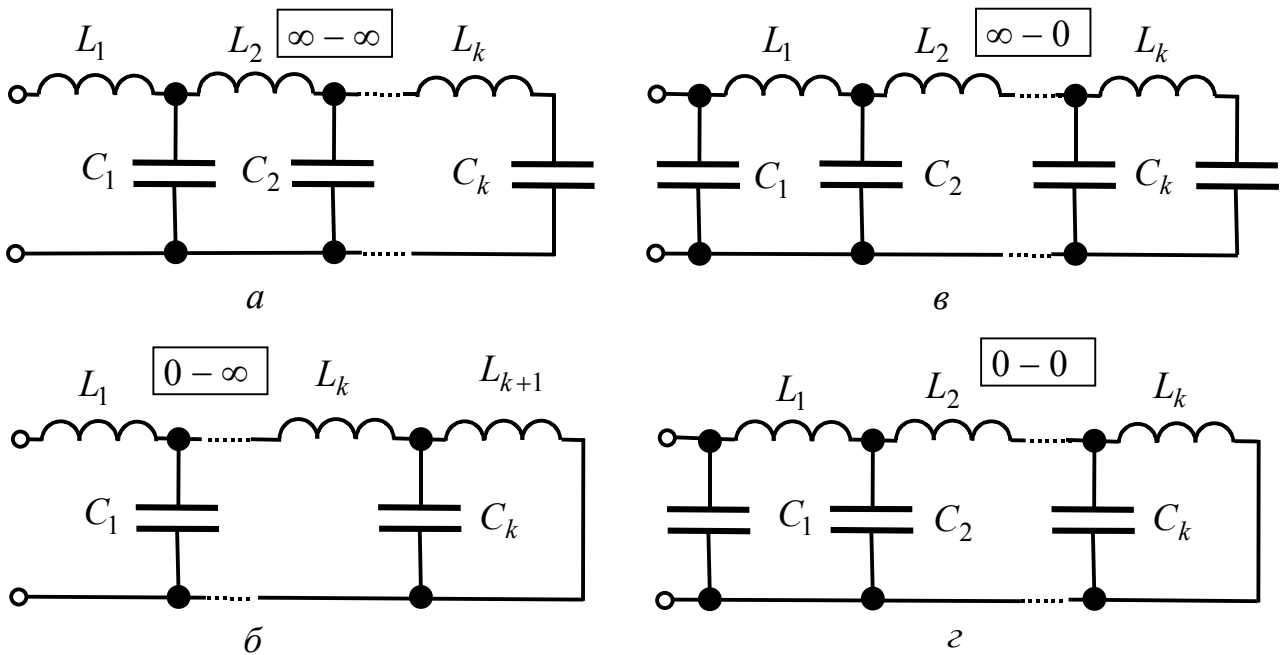


Рисунок 6.29 – Схемні реалізації за першою формою Кауера

За другою формою Кауера можна скласти ще чотири схеми. При цьому ОВФ розкладають у ланцюговий дріб за від’ємними степенями \bar{p} ($\bar{p}^{-1} = 1/\bar{p}$). Якщо ОВФ – операторний опір, наприклад парно-непарна функція (6.143), яка має полюс у точці $\bar{p} = 0$, розкладання починають з виділення доданку $1/\bar{p}\tilde{C}_1$:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + Z_1(\bar{p}). \quad (6.170)$$

Схема, яка відповідає виразу (6.170), має у подовжній вітці ємність \tilde{C}_1 , з якою послідовно з’єднується ланка з операторним опором $Z_1(\bar{p})$ (рис.6.30, а). Опір $Z_1(\bar{p})$ – вже непарно-парна функція, а відповідна цьому опору провідність $Y_1(\bar{p})$ буде знову парно-непарною функцією з простим коренем у нулі:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{Y_1(\bar{p})}. \quad (6.171)$$

Якщо виділити цей корінь, провідність $Y_1(\bar{p})$ можна записати як суму провідностей:

$$Y_1(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + Y_2(\bar{p}). \quad (6.172)$$

На рис.6.30, а ланку з опором $Z_1(\bar{p})$ (провідністю $Y_1(\bar{p})$) на підставі виразу (6.172) слід замінити на паралельне з’єднання індуктивності \tilde{L}_1 з провідністю

$Y_2(\bar{p})$ (рис.6.30, б). Цій схемі відповідає ОВФ (6.169) з урахуванням рівняння (6.172):

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + Y_2(\bar{p})}. \quad (6.173)$$

Надалі знову провідність $Y_2(\bar{p})$ (непарно-парну функцію) слід представити через обернену парно-непарну функцію $Z_2(\bar{p})$: $Y_2(\bar{p}) = \frac{1}{Z_2(\bar{p})}$, яку аналогічно формулі (6.171) можна записати як $Z_2(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + Z_3(\bar{p})$. Тоді замість провідності $Y_2(\bar{p})$ на рис.6.30, б буде послідовне з'єднання ємності \tilde{C}_2 з ланкою, яка має опір $Z_3(\bar{p})$ (рис.6.30, в), а провідність $Y_2(\bar{p})$ матиме вигляд:

$$Y_2(\bar{p}) = \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + Z_3(\bar{p})}. \quad (6.174)$$

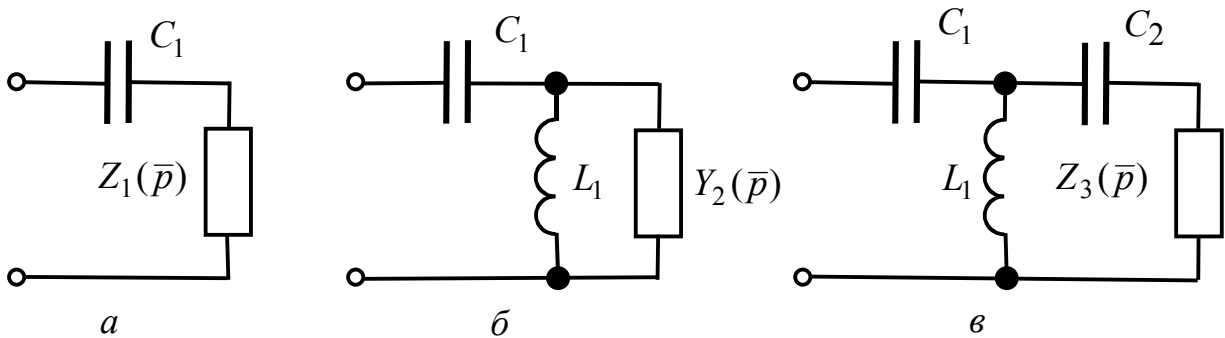


Рисунок 6. 30 – Утворення східцевої схеми з полюсом у точці $\bar{p} = 0$

Якщо провідність (6.174) підставити до формули (6.173), виходить подання ОВФ схеми у вигляді ланцюгового дробу:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + \dots}}. \quad (6.175)$$

Перетворення ОВФ (3.82) з форми (6.135) до форми (6.175) здійснюється у процесі ділення парного полінома $M(\bar{p})$ на непарний $N(\bar{p})$, причому доданки обох поліномів розташовують у порядку за зростаючими степенями \bar{p} . Співвідношення між степенями m і n визначає склад останніх ланок східцевої схеми, які обумовлюють ознаку ОВФ при нескінченній частоті.

Якщо $m > n$, остання ланка містить \tilde{L}_k, \tilde{C}_k . Завдяки елементу \tilde{L}_k коло має полюс у нескінченності (рис.6.31, а) і частотну залежність реактивного опору (рис.6.23, а).

За умови $m < n$ остання ланка містить тільки ємність \tilde{C}_{k+1} (рис.6.31, в), а низка послідовно з'єднаних ємностей реалізує нуль у нескінченності (залежність $X_{\text{вх}}(\Omega)$ зображена на рис.6.23, в).

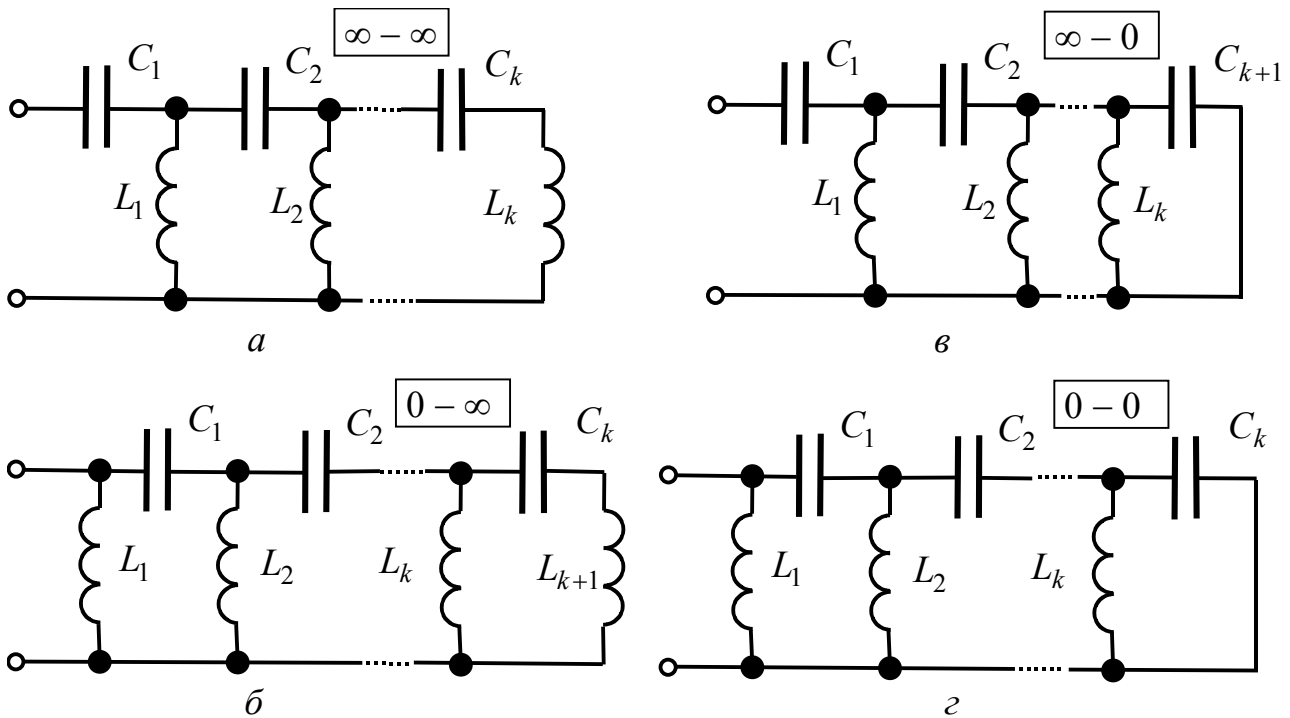


Рисунок 6.31 – Схемні реалізації за другою формою Кауера

У випадку, коли $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ – непарно-парна функція, слід одразу перейти до провідності $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$, яка буде парно-непарною, і представити її на зразок дроби (6.175) у вигляді:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_2} + \dots}} \quad (6.176)$$

Індуктивна провідність, яку увімкнено паралельно входним затискачам (поперечна вітка) (рис.6.31, б, г), реалізує нуль у точці $\bar{p} = 0$. Якщо $m > n$, елементами останньої ланки є $\tilde{C}_k, \tilde{L}_{k+1}$ (рис.6.31, б). Завдяки індуктивності ОВФ має полюс у нескінченності (рис.6.23, б). За умови $m < n$ до складу останньої ланки входить тільки ємність \tilde{C}_k (рис.6.31, г). Утворена у такий спосіб низка ємностей реалізує нуль у нескінченності. Відповідна залежність $X_{\text{вх}}(\Omega)$ наведена на рис.6.23, г).

Розглянуті методи синтезу реактансних ОВФ можна застосовувати і для синтезу ДДФ (для кіл з втратами). Так, вхідний операторний опір R, C кола аналогічно виразу (6.155) можна представити як суму доданків:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_{\infty} + \frac{A_0}{\bar{p}} + \sum_r \frac{A_r}{\bar{p} + \sigma_r}, \quad (6.177)$$

де

$$A_{\infty} = \tilde{R}_{\infty}; \quad A_0 = \frac{1}{\tilde{C}_0}; \quad A_r = \frac{1}{\tilde{C}_r}; \quad \sigma_r = \frac{1}{\tilde{R}_r \tilde{C}_r}. \quad (6.178)$$

Тут позначення коефіцієнтів такі ж самі, як у формулі (6.155), але вони мають інше значення. Перший доданок у сумі (6.177) відповідає резистивному опору, другий – ємнісному, а вираз під знаком суми еквівалентний операторному опору паралельного з'єднання елементів \tilde{R}_r, \tilde{C}_r (рис.6.32, а). Сума у виразі (6.177) еквівалентна послідовному з'єднанню ланок з цими опорами. Така реалізація є аналогом першої форми Фостера.

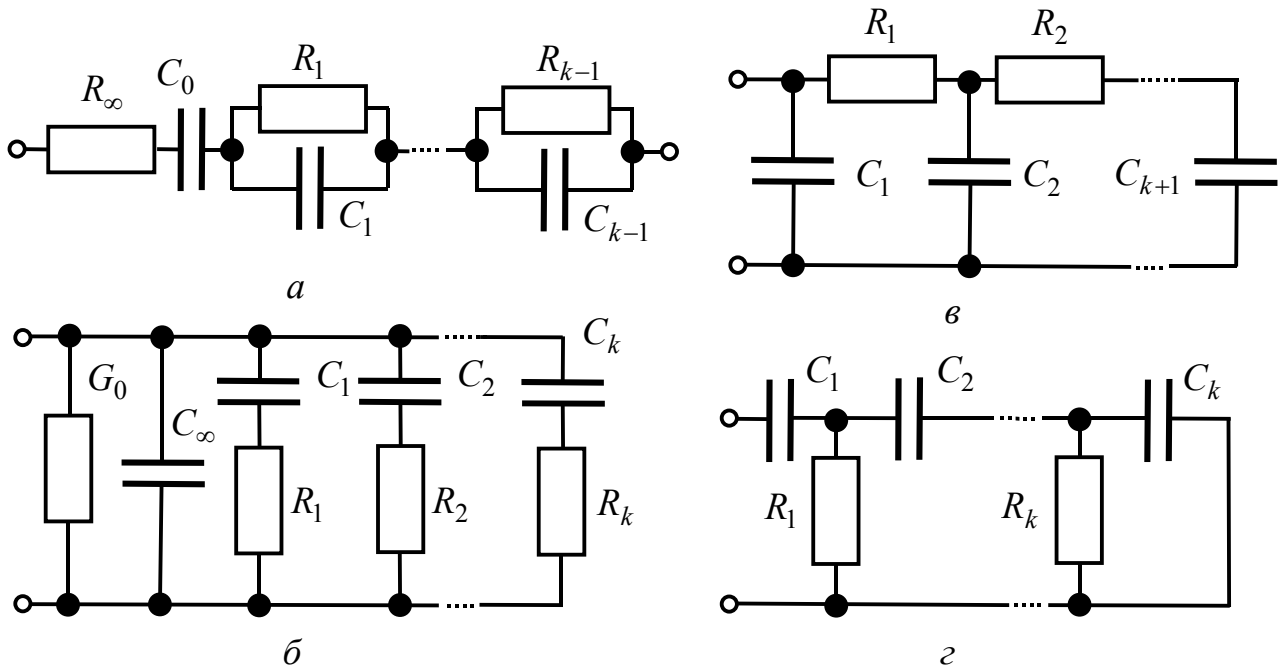


Рисунок 6.32 – Схемні реалізації складних R, C двополіусників

R, C реалізація за другою формою Фостера виходить, якщо аналогічно виразу (6.160) записати операторну вхідну провідність:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = A_0 + A_{\infty} \bar{p} + \sum_r \frac{A_r \bar{p}}{\bar{p} + \sigma_r}, \quad (6.179)$$

де

$$A_0 = \tilde{G}_0; \quad A_{\infty} = \tilde{C}_{\infty}; \quad A_r = \frac{1}{\tilde{R}_r}; \quad \sigma_r = \frac{1}{\tilde{R}_r \tilde{C}_r}. \quad (6.180)$$

Оскільки у правій частині рівняння (6.179) підсумовуються провідності, схемна реалізація функції $Y_{\text{вх}}(\bar{p})$ матиме паралельно з'єднані вітки: перша

містить провідність \tilde{G}_0 , друга – ємність \tilde{C}_∞ , а решта – послідовні з’єднання резисторів \tilde{R}_r та ємностей \tilde{C}_r (рис.6.32, б – аналог другої форми Фостера).

Синтез R, L структур за першою і другою формами Фостера здійснюється аналогічно.

R, C реалізація за першою формою Кауера виходить, якщо перетворити дробово-раціональну функцію $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у ланцюговий дріб, виділяючи на кожному етапі перетворення опір \tilde{R}_k у подовжній вітці та ємність (операторну провідність $\bar{p}\tilde{C}_k$) – у поперечній.

R, L структури, отримані за першою формою Кауера, містять у подовжній вітці індуктивність (операторний опір $\bar{p}\tilde{L}_k$), а у поперечній – опір \tilde{R}_k (операторна провідність $1/\tilde{R}_k$). При перетворенні на ланцюговий дріб функції $\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p})$ першим елементом схеми R, C буде ємність, яку вмикають у поперечну вітку (рис.6.32, в); схема R, L у поперечній вітці міститиме резистор \tilde{R}_k .

Розкладання за другою формою Кауера передбачає виділення ємнісного опору у подовжніх вітках і резистивного – у поперечних (рис.6.32, г) для R, C структур. Схеми R, L , які утворюють за другою формою Кауера, у подовжніх вітках містять опори, а в поперечних – індуктивності. Схемні реалізації складних R, C двополісників (рис.6.32), отримують з відповідних L, C двополісників заміною індуктивностей опорами. Схеми R, L двополісників утворюють з L, C двополісників, замінюючи ємності опорами.

Приклад 6.9. Реалізувати за першою формою Кауера ОВФ $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$, розглянуту в прикладі 6.6.

Розв’язання. Розкладемо $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у ланцюговий дріб за додатними степенями \bar{p} :

$$\begin{aligned} & \frac{2\bar{p}^4 + 4\bar{p}^2 + 1}{2\bar{p}^4 + \bar{p}} \left| \frac{4\bar{p}^3 + 2\bar{p}}{\bar{p}/2} \rightarrow \bar{p}\tilde{L}_1 \right. \\ & \frac{4\bar{p}^3 + 2\bar{p}}{4\bar{p}^3 + \frac{4}{3}\bar{p}} \left| \frac{3\bar{p}^2 + 1}{\frac{4}{3}\bar{p}} \rightarrow \bar{p}\tilde{C}_1 \right. \\ & \frac{3\bar{p}^2 + 1}{3\bar{p}^2} \left| \frac{\frac{2}{3}\bar{p}}{\frac{9}{2}\bar{p}} \rightarrow \bar{p}\tilde{L}_2 \right. \\ & \frac{2}{3}\bar{p} \left| \frac{1}{\frac{2}{3}\bar{p}} \rightarrow \bar{p}\tilde{C}_2 \right. \end{aligned}$$

Отже, ОВФ кола матиме вигляд:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{2} + \frac{1}{\frac{4}{3}\bar{p} + \frac{1}{\frac{9}{2}\bar{p} + \frac{1}{\frac{2}{3}\bar{p}}}},$$

а нормовані значення елементів відповідної східцевої схеми (рис.6.33, а) становитимуть: $\tilde{L}_1 = 1/2$; $\tilde{C}_1 = 4/3$; $\tilde{L}_2 = 9/2$; $\tilde{C}_2 = 2/3$.

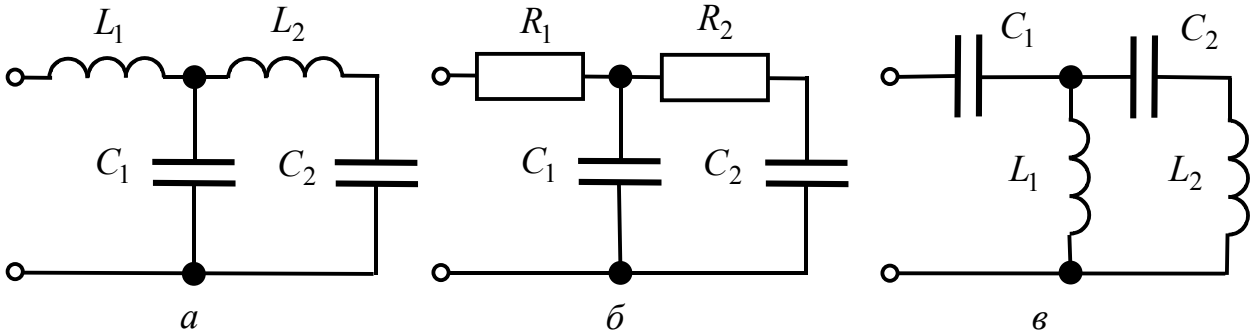


Рисунок 6.33 – Схемні реалізації у прикладах: а – 6.9; б – 6.10; в – 6.11

Приклад 6.10. Знайти схемну реалізацію нормованої ОВФ двополюсника, якщо

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{4\bar{p}^2 + 8\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 3\bar{p}}.$$

Розв’язання. Задана ОВФ не належить до реактансних функцій, оскільки її чисельник не є парною функцією \bar{p} . Розкладемо $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у ланцюговий дріб за першою формою Кауера:

$$\begin{aligned} & \frac{4\bar{p}^2 + 8\bar{p} + 1}{4\bar{p}^2 + 6\bar{p}} \left| \frac{2\bar{p}^2 + 3\bar{p}}{2} \rightarrow \tilde{R}_1 \right. \\ & \frac{2\bar{p}^2 + 3\bar{p}}{2\bar{p}^2 + \bar{p}} \left| \frac{2\bar{p} + 1}{\bar{p}} \rightarrow \bar{p}\tilde{C}_1 \right. \\ & \frac{2\bar{p} + 1}{2\bar{p}} \left| \frac{2\bar{p}}{1} \rightarrow \tilde{R}_2 \right. \\ & \frac{2\bar{p}}{2\bar{p}} \left| \frac{1}{2\bar{p}} \rightarrow \bar{p}\tilde{C}_2 \right. \end{aligned}$$

Отже, ОВФ кола матиме вигляд:
$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = 2 + \frac{1}{\bar{p} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2\bar{p}}}},$$

а нормовані значення елементів відповідної східцевої схеми (рис.6.33, б) становитимуть: $\tilde{R}_1 = 2$; $\tilde{R}_2 = 1$; $\tilde{C}_1 = 1$; $\tilde{C}_2 = 2$.

Приклад 6.11. Реалізувати за другою формою Кауера ОВФ $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$, розглянуту в прикладі 6.6.

Розв'язання. Подамо $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у вигляді ланцюгового дробу, який розкладено за від'ємними степенями \bar{p} . Для цього розташуємо доданки поліномів чисельника і знаменника $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ за зростаючими степенями \bar{p} :

$$\begin{aligned} & \frac{-1 + 4\bar{p}^2 + 2\bar{p}^4}{1 + 2\bar{p}^2} \left| \frac{2\bar{p} + 4\bar{p}^3}{\frac{1}{2\bar{p}}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} \right. \\ & \frac{-2\bar{p} + 4\bar{p}^3}{2\bar{p} + 2\bar{p}^3} \left| \frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p}^4}{\frac{1}{\bar{p}}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} \right. \\ & \frac{-2\bar{p}^2 + 2\bar{p}^4}{2\bar{p}^2} \left| \frac{2\bar{p}^3}{\frac{1}{\bar{p}}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} \right. \\ & 2\bar{p}^3 \left| \frac{2\bar{p}^4}{\frac{1}{\bar{p}}} \rightarrow \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_2} \right. \end{aligned}$$

В результаті одержимо:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{1}{2\bar{p}} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}}}} = \frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_1} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}\tilde{C}_2} + \frac{1}{\bar{p}\tilde{L}_2}}}$$

Отже, східцева схема (рис.6.33, в), яка реалізує задану ОВФ, містить 4 елементи, нормовані значення яких становлять: $\tilde{L}_1 = 1$; $\tilde{L}_2 = 1$; $\tilde{C}_1 = 2$; $\tilde{C}_2 = 1$.

6.12 Реалізація ОПФ східцевими реактивними колами, навантаженими з обох боків

Вихідними для розв'язання задачі структурного синтезу є нормовані ОПФ. Тому пошук схемних реалізацій чотиріполосників виконують відносно нормованих величин. У попередніх підрозділах докладно розглядалися методи синтезу двополосників за ОВФ. Необхідно встановити зв'язок, який існує між ОПФ і ОВФ. Ця задача розв'язується аналітично за таких умов: по-перше, ОПФ – передатна функція поліномного фільтра; по-друге, фільтр реалізований еле-

ментами L, C ; по-третє, з одного боку до фільтра увімкнено навантаження – активний опір R_2 , а з іншого – джерело напруги з внутрішнім опором R_i . Це один із поширених способів застосування фільтрів. Схема, яка відповідає означеним вимогам, зображена на рис.6.34, де фільтр умовно позначений як L, C чотириполюсник. Оскільки даний фільтр містить частотно залежні елементи, його ОПФ буде функцією нормованої частоти Ω .

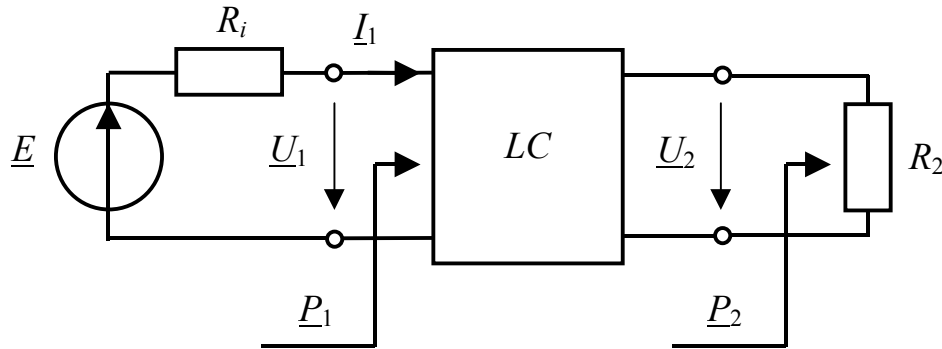


Рисунок 6.34 – Реактивний чотириполюсник, навантажений з обох боків

Нехай вихідна потужність, яка передається до навантаження, $P_{\text{вих}} = P_2$, а потужність джерела $P_{\text{вх}} = P$. Тоді коефіцієнт передачі за потужністю становить:

$$H_P(\Omega) = \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{P_2}{P}, \quad (6.181)$$

де

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}. \quad (6.182)$$

За певних умов потужність, яка надходить до навантаження, набуває максимального значення, тоді

$$H_{P_{\text{max}}}(\Omega) = \frac{P_{2_{\text{max}}}}{P}. \quad (6.183)$$

Нормований коефіцієнт передачі за потужністю становить:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{H_P(\Omega)}{H_{P_{\text{max}}}(\Omega)}. \quad (6.184)$$

Підстановка величин (6.181) і (6.183) до формули (6.184) призводить до виразу:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{P_2}{P_{2_{\text{max}}}}, \quad (6.185)$$

тобто нормований коефіцієнт передачі за потужністю залежить тільки від передатних властивостей чотириполюсника за різних умов передачі та не залежить від потужності джерела.

Аналогічно виразу (6.181) можна визначити коефіцієнт передачі за напругою:

$$H_U(j\Omega) = \frac{U_2(j\Omega)}{E}. \quad (6.186)$$

Позначивши напругу, що відповідає значенню $P_{2\max}$, як $U_{2\max}$, а коефіцієнт передачі за напругою

$$H_{U\max}(j\Omega) = \frac{U_{2\max}(j\Omega)}{E}, \quad (6.187)$$

можна записати нормований коефіцієнт передачі за напругою:

$$\tilde{H}_U(j\Omega) = \frac{U_2(j\Omega)}{U_{2\max}(j\Omega)}. \quad (6.188)$$

КПФ (6.188) враховує передатні властивості кола за напругою за різних умов. Згідно з виразом (3.99), який встановлює зв'язок між передатними функціями кола за потужністю і за напругою, для нормованих передатних функцій можна записати:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = k_R H_U^2(\Omega). \quad (6.189)$$

З урахуванням співвідношення (6.19) виходить рівність, яка пов'язує нормований коефіцієнт передачі за потужністю з функцією фільтрації навантаженого L, C чотиріполосника:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{k_R}{1 + \varphi^2(\Omega)}.$$

Оскільки задача реалізації розв'язується з точністю до постійного множника, можна взяти $k_R = 1$, тоді

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)}. \quad (6.190)$$

З іншого боку, передатні властивості кола (рис.6.34) можна дослідити за схемою (рис.6.35). На рис.6.35, а зображено навантажений L, C чотиріполосник, вхідний опір якого є комплексною величиною:

$$Z_{\text{вх}}(j\Omega) = R_{\text{вх}}(\Omega) + jX_{\text{вх}}(\Omega). \quad (6.191)$$

Якщо замінити навантажений L, C чотиріполосник його вхідним опором, замість кола (рис.6.34) виходить одноконтурне коло (рис.6.35, б), комплексне діюче значення струму I_1 в якому визначається за законом Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)}.$$

Активна потужність P_1 , яка виділяється в опорі $R_{\text{вх}}(\Omega)$ на частоті Ω , визначається квадратом діючого значення струму:

$$P_1 = I_1^2 R_{\text{вх}}(\Omega) = \frac{E^2 R_{\text{вх}}(\Omega)}{|R_i + Z_{\text{вх}}(j\Omega)|^2}.$$

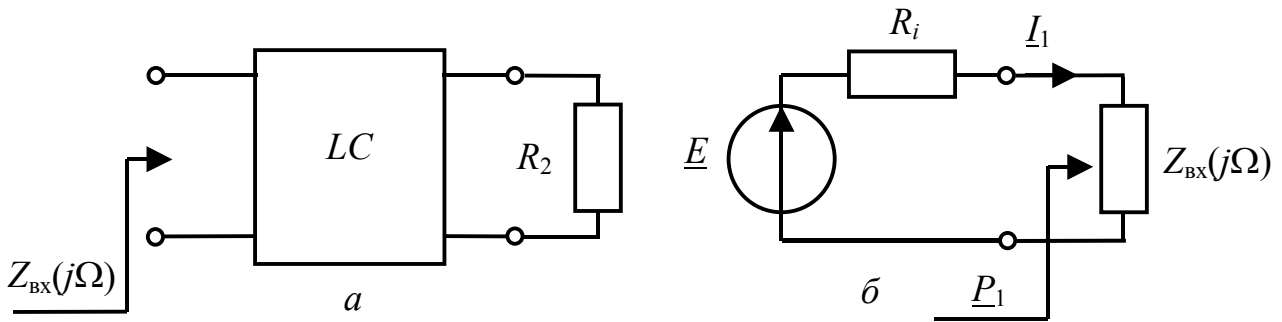


Рисунок 6.35 – Еквівалентні схеми відносно входніх затискачів чотириполосника

Якщо вважати, що L, C чотириполосник не має втрат і тому потужність P_1 , яка надходить до нього, цілком потрапляє до навантаження, тобто $P_2 = P_1$, тоді:

$$P_2 = \frac{E^2 R_{BX}(\Omega)}{|R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2}. \quad (6.192)$$

Потужність P_1 (і відповідно P_2) набуває **максимального значення за умови узгодження джерела з навантаженням** $Z_{BX}(j\Omega)$ (рис.6.35, б):

$$P_{1\max} = P_{2\max} = \frac{E^2}{4R_i}. \quad (6.193)$$

Вираз для нормованого коефіцієнта передачі за потужністю, визначений через параметри джерела і входній опір навантаженого чотириполосника, виходить в результаті підстановки співвідношень (6.192) і (6.193) до формули (6.185):

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{E^2 R_{BX}(\Omega)}{|R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2} \cdot \frac{4R_i}{E^2} = \frac{4R_{BX}(\Omega)R_i}{|R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2}. \quad (6.194)$$

Щоб перетворити вираз (6.194), використовують рівність:

$$4R_{BX}(\Omega)R_i = |R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2 - |R_i - Z_{BX}(j\Omega)|^2, \quad (6.195)$$

квадрати модулів у якій, зважаючи на співвідношення (6.191), становлять:

$$\begin{cases} |R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2 = (R_i + R_{BX}(\Omega))^2 + X_{BX}^2(\Omega); \\ |R_i - Z_{BX}(j\Omega)|^2 = (R_i - R_{BX}(\Omega))^2 + X_{BX}^2(\Omega). \end{cases} \quad (6.196)$$

Якщо тепер до чисельника виразу (6.194) підставити співвідношення (6.195), виходить:

$$\tilde{H}_P(\Omega) = \frac{|R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2 - |R_i - Z_{BX}(j\Omega)|^2}{|R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2} = 1 - \frac{|R_i - Z_{BX}(j\Omega)|^2}{|R_i + Z_{BX}(j\Omega)|^2}. \quad (6.197)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (6.190) і (6.197), можна записати:

$$\frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)} = 1 - \left| \frac{R_i - Z_{\text{BX}}(j\Omega)}{R_i + Z_{\text{BX}}(j\Omega)} \right|^2, \text{ або}$$

$$1 - \frac{1}{1 + \varphi^2(\Omega)} = \frac{\varphi^2(\Omega)}{1 + \varphi^2(\Omega)} = \left| \frac{R_i - Z_{\text{BX}}(j\Omega)}{R_i + Z_{\text{BX}}(j\Omega)} \right|^2.$$

Зважаючи на співвідношення (6.20), останнє рівняння набуває вигляду:

$$\left| \frac{\varphi(\Omega)}{V(\Omega)} \right|^2 = \left| \frac{R_i - Z_{\text{BX}}(j\Omega)}{R_i + Z_{\text{BX}}(j\Omega)} \right|^2, \text{ або}$$

$$\frac{\varphi(j\Omega)}{V(j\Omega)} = \frac{R_i - Z_{\text{BX}}(j\Omega)}{R_i + Z_{\text{BX}}(j\Omega)}. \quad (6.198)$$

Для нормованих опорів рівність (6.198) становитиме:

$$\frac{\varphi(j\Omega)}{V(j\Omega)} = \frac{1 - \tilde{Z}_{\text{BX}}(j\Omega)}{1 + \tilde{Z}_{\text{BX}}(j\Omega)}, \quad (6.199)$$

де $\tilde{Z}_{\text{BX}}(j\Omega) = \frac{Z_{\text{BX}}(j\Omega)}{R_i}$ – нормований вхідний опір навантаженого чотири-

полюсника.

Розв'язок рівняння (6.199) відносно $\tilde{Z}_{\text{BX}}(j\Omega)$ має вигляд:

$$\tilde{Z}_{\text{BX}}(j\Omega) = \frac{V(j\Omega) \mp \varphi(j\Omega)}{V(j\Omega) \pm \varphi(j\Omega)}.$$

Підстановка $j\Omega = \bar{p}$ дає:

$$\tilde{Z}_{\text{BX}}(\bar{p}) = \frac{V(\bar{p}) \mp \varphi(\bar{p})}{V(\bar{p}) \pm \varphi(\bar{p})}. \quad (6.200)$$

Формула (6.200) дозволяє знайти нормований вхідний операторний опір навантаженого L, C чотириполюсника через поліном Гурвіца $V(\bar{p})$ і функцію фільтрації $\varphi(\bar{p})$, які визначаються згідно з вимогами до частотної характеристики ослаблення за потужністю A_p на підставі формул (6.42), (табл.6.1) і (6.21) для поліномних фільтрів Баттерворта і відповідно (6.78) та (6.56) для фільтрів Чебишова.

Приклад 6.12. Визначити $\tilde{Z}_{\text{BX}}(\bar{p})$ фільтра-прототипу Баттерворта порядку $n = 3$.

Розв'язання. На підставі табл.6.1 для $n = 3$

$$V(\bar{p}) = \bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1.$$

За формулою (6.21) визначаємо модуль функції фільтрації:

$$\varphi(\Omega) = \Omega^n, \text{ або } |\varphi(j\Omega)| = \Omega^n.$$

Після заміни $j\Omega = \bar{p}$ і підстановки n отримаємо:

$$\varphi(\bar{p}) = \pm \bar{p}^3. \quad (6.201)$$

Тоді

$$1) \begin{cases} V(\bar{p}) - \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1; \\ V(\bar{p}) + \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1 \end{cases} \quad \text{за умови } \varphi(\bar{p}) = \bar{p}^3;$$

$$2) \begin{cases} V(\bar{p}) - \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1; \\ V(\bar{p}) + \varphi(\bar{p}) = 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1, \end{cases} \quad \text{якщо } \varphi(\bar{p}) = -\bar{p}^3.$$

Відповідно, буде два варіанти функцій нормованого опору:

$$\tilde{Z}'_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}; \quad (6.202)$$

$$\tilde{Z}''_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}. \quad (6.203)$$

Приклад 6.13. Визначити $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ ФП Чебишова, який має порядок $n = 2$, а його нормовані корені $\bar{p}_{1,2} = -0,555893 \pm j0,899454$.

Розв'язання. Щоб скористатись формулою (6.79), спочатку визначимо:

$$2\Delta = 1,111786; \quad \Delta^2 + \Omega^2 = 1,118035, \quad \text{тоді}$$

$$V(\bar{p}) = 2\varepsilon(\bar{p}^2 + 2\Delta\bar{p} + \Delta^2 + \Omega^2) = 2\varepsilon(\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,118035).$$

На підставі формули (6.56) і табл.6.2 запишемо модуль функції фільтрації:
 $\varphi(\Omega) = \varepsilon T_2(\Omega) = \varepsilon(2\Omega^2 - 1)$, або $|\varphi(j\Omega) = \varepsilon(2\Omega^2 - 1)|$.

Щоб визначити функцію фільтрації $\varphi(\bar{p})$, слід скористатись формулою:

$$\varphi(\bar{p}) = \frac{\varepsilon}{j^n} T_n(\Omega) \Big|_{\Omega=j\bar{p}}, \quad (6.204)$$

на підставі якої для $n = 2$

$$\varphi(\bar{p}) = \frac{\varepsilon}{j^2} (2(j\bar{p})^2 - 1) = \varepsilon(2\bar{p}^2 + 1) = 2\varepsilon(\bar{p}^2 + 0,5).$$

Тоді для нижніх знаків у виразі (6.200) матимемо:

$$\begin{cases} V(\bar{p}) + \varphi(\bar{p}) = 2\varepsilon(2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,618035); \\ V(\bar{p}) - \varphi(\bar{p}) = 2\varepsilon(1,111786\bar{p} + 0,618035); \end{cases}$$

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,618035}{1,111786\bar{p} + 0,618035}.$$

Обернену функцію отримаємо, якщо скористаємося верхніми знаками у формулі (6.200).

Здобуті у прикладах 6.12–6.13 ОВФ не реактансні, а мають всі ознаки ДДФ. Отже, доведено, що ОВФ L, C чотириполюсника, навантаженого на активний опір R_2 , це – ДДФ.

Обернене твердження належить Дарлінгтону⁷ і відоме в теорії синтезу як **теорема Дарлінгтона**: ОВФ може бути реалізована реактивним чотириполюсником, навантаженим на активний опір. Як і реактансні функції, ОВФ навантаженого ФП можна реалізувати східцевими схемами за першою формою Кауера. Порядок ОВФ визначає кількість реактивних елементів східцевої структури, яка утворює чотириполюсник. На кожному етапі розкладання у ланцюговий дріб виділяється або операторний нормований опір індуктивності подовжньої вітки, або операторна нормована провідність ємності поперечної вітки поліномного ФНЧ. На останньому етапі одразу виділяються два доданки: або операторний опір індуктивності з послідовно з'єднаним резистивним навантаженням R_2 , або операторна провідність ємності, до якої паралельно приєднується провідність навантаження G_2 . При реалізації фільтрів з характеристиками Баттерворта, а також з характеристиками Чебишова за умови непарного n , внутрішній опір джерела і навантаження мають однакові значення ($R_i = R_2$). За умови парного n фільтри Чебишова мають різні значення R_2 і R_i .

Наступні два приклади ілюструють реалізацію ОВФ, розглянутих у прикладах 6.12 і 6.13.

Приклад 6.14. Знайти схему L, C фільтра, навантаженого з обох боків, зі вхідним опором (6.202).

Розв'язання. Від функції $\tilde{Z}'_{\text{вх}}(\bar{p})$ перейдемо до неправильного дробу:

$$\tilde{Y}'_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1},$$

який запишемо у вигляді ланцюгового дробу:

$$\begin{array}{l} \frac{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^3 + 2\bar{p}^2 + \bar{p}} \left| \frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{\bar{p}} \rightarrow \tilde{Y}_1(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_1 \right. \\ \frac{2\bar{p}^2 + 2\bar{p} + 1}{2\bar{p}^2 + 2\bar{p}} \left| \frac{\bar{p} + 1}{2\bar{p}} \rightarrow \tilde{Z}_2(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{L}_2 \right. \\ \bar{p} + 1 \left| \frac{1}{\bar{p} + 1} \rightarrow \tilde{Y}_3(\bar{p}) = \bar{p}\tilde{C}_3 + G_2 \right. \end{array}$$

⁷ **Дарлінгтон Сідней**, Sidney Darlington (1906–1997) – американський вчений, закінчив Гарвардський ун-т (1928), захистив дисертацію у Колумбійському ун-ті (1940). Працював (1929–1971) у лабораторії Бела, разом з колегою К. Шеноном заклав підвалини значних досягнень у мережах зв'язку, які сприяли впровадженню інтегральних схем, комп'ютерів і сучасного зв'язку. Розробив методи синтезу електричних кіл. Працював в області радіолокації, зокрема запропонував використання радіоімпульсу з лінійною частотною модуляцією (1947). Винайшов спосіб об'єднання кількох транзисторів в одному корпусі, так звану схему Дарлінгтона.

Отже, ОВФ кола матиме вигляд:
$$\tilde{Y}'_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p} + \frac{1}{2\bar{p} + \frac{1}{\bar{p}+1}},$$

а нормовані значення елементів відповідної схеми (рис.6.36) становитимуть: $\tilde{C}_1 = 1; \tilde{L}_2 = 2; \tilde{C}_2 = 1; \tilde{G}_2 = \tilde{R}_2 = 1.$

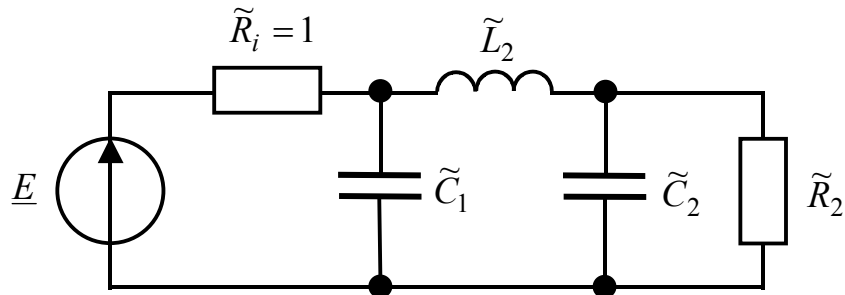


Рисунок 6.36 – Схема, реалізована у прикладі 6.14

Якщо розкласти у ланцюговий дріб функцію (6.203), отримаємо:

$$\tilde{Z}''_{\text{вх}}(\bar{p}) = \bar{p} + \frac{1}{2\bar{p} + \frac{1}{\bar{p}+1}},$$

а нормовані значення елементів відповідної схеми (рис.6.37, а) становитимуть: $\tilde{L}_1 = 1; \tilde{C}_2 = 2; \tilde{L}_2 = 1; \tilde{G}_2 = \tilde{R}_2 = 1.$

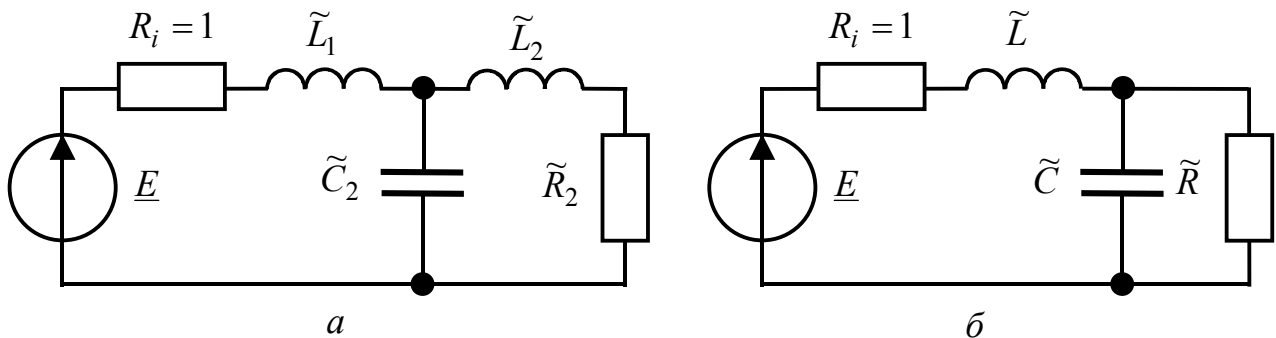


Рисунок 6.37 – Схеми, реалізовані у прикладах: а – 6.14; б – 6.15

Приклад 6.15. Знайти схему L, C фільтра, навантаженого з обох боків, якщо його вхідний опір відповідає виразу, знайденому у прикладі 6.13.

Розв'язання. Запишемо функцію $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$ у вигляді ланцюгового дробу:

$$\frac{2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p} + 1,618035}{2\bar{p}^2 + 1,111786\bar{p}} \left| \frac{1,111786\bar{p} + 0,618035}{1,798907\bar{p}} \rightarrow \bar{p}\tilde{L} \right.$$

$$1,111786\bar{p}^2 + 0,618035 \left| \frac{1,618035}{0,687121\bar{p} + 0,3819664} \rightarrow \bar{p}\tilde{C} + \tilde{G}_2 \right.$$

Отже, ОВФ кола матиме вигляд:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = 1,798907\bar{p} + \frac{1}{0,687121\bar{p} + 0,3819664},$$

а нормовані значення елементів відповідної схеми (рис.6.37, б) становитимуть:
 $\tilde{L} = 1,798907$; $\tilde{C} = 0,687121$; $\tilde{R} = 2,618$.

6.13 Перетворення схеми ФП у схеми інших типів. Денормування елементів перетворених схем

В задачах апроксимації від вимог до частотної характеристики ослаблення фільтрів інших типів переходять до вимог відносно ФНЧ, який вважається прототипом. Саме для ФП визначається нормована ОВФ, а потім і схемна реалізація, від якої переходять до схеми заданого фільтра. В даному підрозділі на прикладі кола (рис.6.3, а) розглянуто, як вирішується ця задача.

Перехід від схеми ФП до схеми ФВЧ.

Перетворення нормованої ОПФ ФВЧ у відповідну ОПФ ФП виконують заміною $j\Omega$ (нормованої комплексної частоти ФВЧ) на $\frac{1}{j\tilde{\Omega}}$ ($j\tilde{\Omega}$ – нормована комплексна частота ФП). Перехід від схеми ФП (рис.6.38, а) до схеми ФВЧ відбувається зворотньою заміною в операторному опорі $j\tilde{\Omega}\tilde{L}$ (\tilde{L} – нормована індуктивність ФП) частоти $j\tilde{\Omega}$ на $\frac{1}{j\Omega}$. При цьому утворюється операторний опір $\frac{\tilde{L}}{j\Omega}$, який можна поставити у відповідність операторному опору $\frac{1}{j\Omega\tilde{C}_в}$ нормованої ємності $\tilde{C}_в$ ФВЧ (індекс «в» означає належність елемента до фільтра верхніх частот). Ємність $\tilde{C}_в$ визначають з рівності: $\frac{\tilde{L}}{j\Omega} = \frac{1}{j\Omega\tilde{C}_в}$, звідки

$$\tilde{C}_в = \frac{1}{\tilde{L}}. \quad (6.205)$$

Нормований ємнісний опір ФП $\frac{1}{j\tilde{\Omega}\tilde{C}}$ перетворюється на нормований опір ФВЧ $j\Omega\frac{1}{\tilde{C}}$, який відповідає індуктивному опору $j\Omega\tilde{L}_в$. Із рівності $j\Omega\frac{1}{\tilde{C}} = j\Omega\tilde{L}_в$ визначають нормовану індуктивність ФВЧ через нормовану ємність ФП:

$$\tilde{L}_в = \frac{1}{\tilde{C}}. \quad (6.206)$$

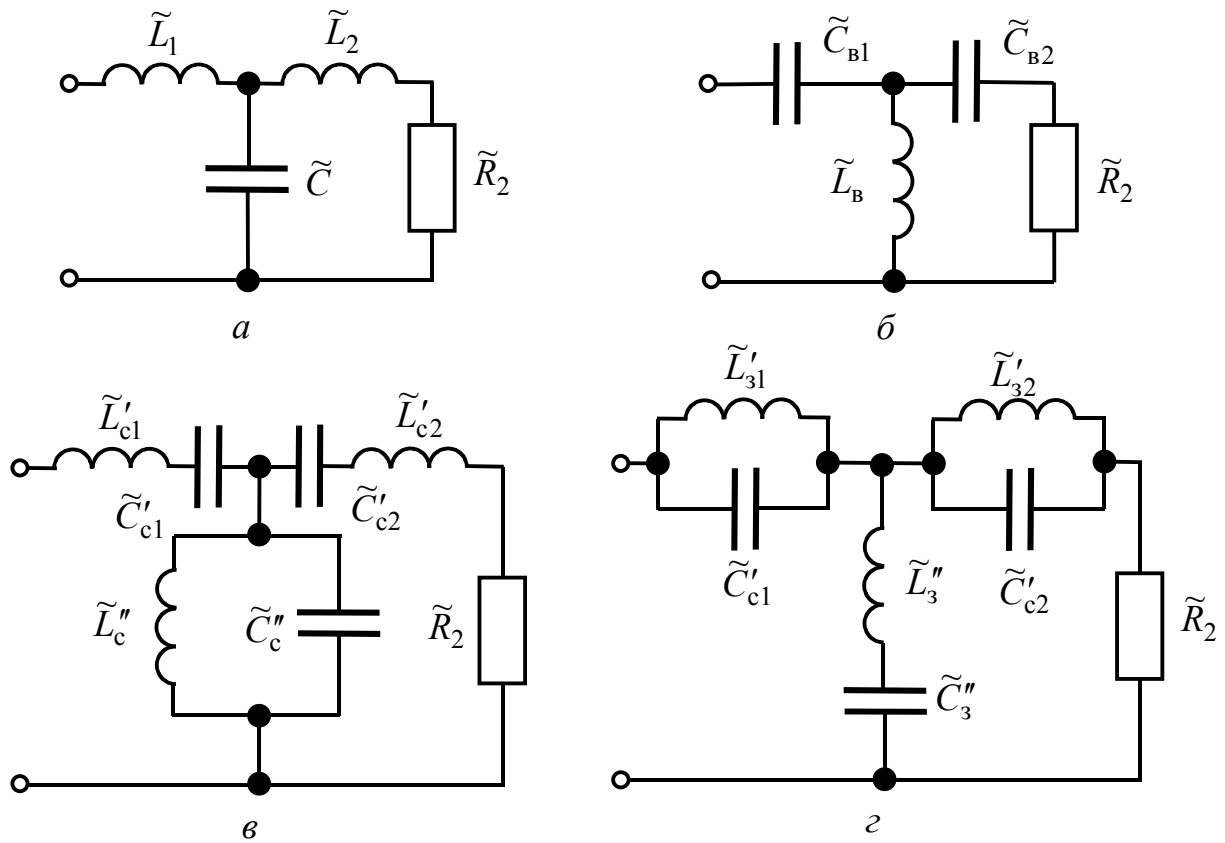


Рисунок 6.38 – Перетворення схеми ФП у схеми фільтрів інших типів

Отже, перетворення схеми ФП–ФВЧ відбувається заміною індуктивності \tilde{L} та ємності \tilde{C} відповідно на ємність \tilde{C}_B та індуктивність \tilde{L}_B (рис.6.38, б).

Перехід від схеми ФП до схеми СФ.

Нехай СФ має центральну частоту ω_0 і смугу пропускання Π_{ω} .

Нормовану ОПФ ФП перетворюють у ОПФ СФ за формулою (6.95).

Щоб перейти до схеми СФ, необхідно до виразу операторного опору $j\Omega\tilde{L}$ підставити відповідність (6.94):

$$j\Omega\tilde{L} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \tilde{L} = j\Omega\tilde{L} + \frac{k_{\Delta}^2\tilde{L}}{j\Omega}.$$

Позначивши елементи СФ, операторні опори яких визначено у процесі перетворення, нижнім індексом «с» (смуговий) і одним штрихом зверху, можна записати:

$$j\Omega\tilde{L} + \frac{k_{\Delta}^2\tilde{L}}{j\Omega} = j\Omega\tilde{L}'_c + \frac{1}{j\Omega\tilde{C}'_c},$$

звідки виходить співвідношення для обчислення нормованих елементів:

$$\tilde{L}'_c = \tilde{L}; \quad \tilde{C}'_c = \frac{1}{k_{\Delta}^2\tilde{L}}, \quad (6.207)$$

де $k_{\Delta} = \frac{\omega_0}{\Pi_{\omega}}$.

За формулою (6.95) також визначають ємнісну провідність ФП:

$$j\tilde{\Omega}\tilde{C} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \tilde{C} = j\Omega\tilde{C} + \frac{k_{\Delta}^2\tilde{C}}{j\Omega}.$$

Якщо позначити елементи, провідності яких визначено, нижнім індексом «с» і двома штрихами зверху, виходить:

$$j\Omega\tilde{C} + \frac{k_{\Delta}^2\tilde{C}}{j\Omega} = j\Omega\tilde{C}_c'' + \frac{1}{j\Omega\tilde{L}_c''},$$

звідки нормовані елементи СФ визначають через нормовані елементи ФП:

$$\tilde{C}_c'' = \tilde{C}; \quad \tilde{L}_c'' = \frac{1}{k_{\Delta}^2\tilde{C}}. \quad (6.208)$$

Отже, перехід від схеми ФП до схеми СФ супроводжується заміною нормованої індуктивності \tilde{L} у подовжній вітці ідеальним послідовним контуром з нормованими елементами \tilde{L}'_c і \tilde{C}'_c , який також увімкнено у подовжню вітку. Нормована ємність \tilde{C} поперечної вітки ФП перетворюється в ідеальний паралельний контур з нормованими елементами \tilde{L}''_c і \tilde{C}''_c , який також увімкнено у поперечну вітку СФ (рис.6.38, в).

Перехід від схеми ФП до схеми ЗФ.

Нехай ЗФ має центральну частоту ω_0 і смугу затримання $\Delta\omega_3$. Виконуючи перетворення ФП–ЗФ, слід скористатись співвідношенням (6.118), тоді операторна провідність подовжньої вітки ФП $\frac{1}{j\tilde{\Omega}\tilde{L}}$ становитиме:

$$\frac{1}{j\tilde{\Omega}\tilde{L}} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \cdot \frac{1}{\tilde{L}} = \frac{j\Omega}{\tilde{L}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{L}}.$$

Доданки у правій частині відповідають ємнісній та індуктивній провідностям. Позначивши елементи, провідності яких визначено, нижнім індексом «з» (загороджувальний) і одним штрихом зверху, можна записати:

$$\frac{j\Omega}{\tilde{L}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{L}} = j\Omega\tilde{C}'_3 + \frac{1}{j\Omega\tilde{L}'_3}, \text{ звідки}$$

$$\tilde{L}'_3 = \frac{\tilde{L}}{k_{\Delta}^2}; \quad \tilde{C}'_3 = \frac{1}{\tilde{L}}. \quad (6.209)$$

Ємнісний опір поперечної вітки ФП з урахуванням виразу (6.118) набуває вигляду: $\frac{1}{j\tilde{\Omega}\tilde{C}} = \frac{(j\Omega)^2 + k_{\Delta}^2}{j\Omega} \cdot \frac{1}{\tilde{C}} = \frac{j\Omega}{\tilde{C}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{C}}$.

Елементи ЗФ, опори яких підсумовують, позначено нижнім індексом «з» і двома штрихами зверху:


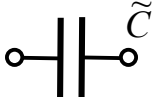
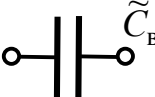
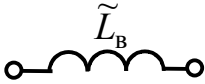
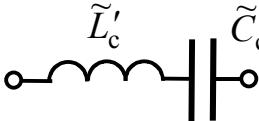
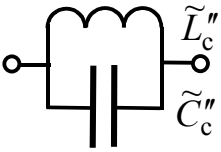
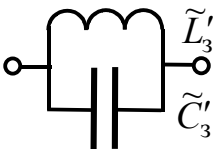
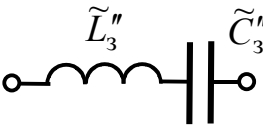
$$\frac{j\Omega}{\tilde{C}} + \frac{k_{\Delta}^2}{j\Omega\tilde{C}} = j\Omega\tilde{L}''_3 + \frac{1}{j\Omega\tilde{C}''_3}, \text{ тоді}$$

$$\tilde{L}_3'' = \frac{1}{\tilde{C}}; \quad \tilde{C}_3'' = \frac{\tilde{C}}{k_\Delta^2}. \quad (6.210)$$

Отже, перехід від схеми ФП до схеми ЗФ супроводжується заміною індуктивності \tilde{L} у подовжній вітці ідеальним паралельним контуром з елементами $\tilde{L}'_3, \tilde{C}'_3$ та заміною ємності \tilde{C} ідеальним послідовним контуром з елементами $\tilde{L}''_3, \tilde{C}''_3$ (рис.6.38, з).

Схеми перетворення елементів ФП у відповідні елементи фільтрів інших типів, а також формули, за якими визначають перетворені нормовані параметри елементів, зведені до табл.6.8.

Таблиця 6.8 – Перетворення елементів ФП

Тип фільтра	Схема ланки		Розрахункові формули
ФП			\tilde{L}, \tilde{C}
ФВЧ			$\tilde{L}_B = \frac{1}{\tilde{C}}, \quad \tilde{C}_B = \frac{1}{\tilde{L}}$
СФ			$\tilde{L}'_c = \tilde{L}; \quad \tilde{C}'_c = \frac{1}{k_\Delta^2 \tilde{L}}; \quad k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Pi_\omega}$ $\tilde{C}''_c = \tilde{C}; \quad \tilde{L}''_c = \frac{1}{k_\Delta^2 \tilde{C}}$
ЗФ			$\tilde{L}'_3 = \frac{\tilde{L}}{k_\Delta^2}; \quad \tilde{C}'_3 = \frac{1}{\tilde{L}}; \quad k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_3}$ $\tilde{L}''_3 = \frac{1}{\tilde{C}}; \quad \tilde{C}''_3 = \frac{\tilde{C}}{k_\Delta^2}$

Денормування параметрів елементів здійснюють за формулами (табл.6.7). Значення нормувальної частоти $\omega_{\text{норм}}$ залежить від типу фільтра. Якщо синтезується фільтр Баттерворта, $\omega_{\text{норм}} = \omega_{\text{гр}}$, а гранична частота визначається за формулами (6.29) для ФНЧ і (6.89) для ФВЧ на рівні 3 дБ ослаблення за потужністю. При синтезуванні фільтра Чебишова гранична частота збігається з частотою ω_Δ , яка відповідає ослабленню за потужністю на рівні A_Δ (це, як правило, вихідні величини).

Приклад 6.16. Визначити схемну реалізацію і параметри елементів СФ, нормований вхідний опір якого дорівнює $\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p})$, визначеному у прикладі 6.13.

СФ живиться від джерела напруги з внутрішнім опором $R_i = 100$ Ом, смуга пропускання фільтра $\Pi_\omega = 10^4$ рад/с.

Розв'язання. Схему ФП визначено у прикладі 6.15. На підставі співвідношень (табл.6.8) перетворимо схему ФП до схеми СФ (рис.6.39) і обчислимо нормовані параметри її елементів:

$$\tilde{L}'_c = \tilde{L} = 1,798907; \quad k_\Delta = \frac{\omega_0}{\Pi_\omega} = \frac{10^6}{10^4} = 100;$$

$$\tilde{C}'_c = \frac{1}{k_\Delta^2 \tilde{L}} = \frac{1}{10^4 \cdot 1,798907} = 0,555893 \cdot 10^{-4};$$

$$\tilde{C}''_c = \tilde{C} = 0,687121; \quad \tilde{L}''_c = \frac{1}{k_\Delta^2 \tilde{C}} = \frac{1}{10^4 \cdot 0,687121} = 1,455348 \cdot 10^{-4}.$$

Денормуємо значення елементів СФ, використовуючи коефіцієнти з табл.6.7:

$$k_L = \frac{R_i}{\Pi_\omega} = \frac{100}{10^4} = 10^{-2}; \quad k_C = \frac{1}{R_i \Pi_\omega} = \frac{1}{10^2 10^4} = 10^{-6};$$

$$\tilde{L}'_c = \tilde{L}'_c k_L \approx 0,0179 \text{ Гн} = 17,9 \text{ мГн}; \quad L''_c = \tilde{L}''_c k_L \approx 1,455 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 1,455 \text{ мкГн};$$

$$C'_c = \tilde{C}'_c k_C \approx 0,556 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-6} = 55,6 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 55,6 \text{ нФ};$$

$$C''_c = \tilde{C}''_c k_C \approx 0,687 \cdot 10^{-6} = 0,687 \text{ мкФ}.$$

Як видно з проведених розрахунків, фільтри Чебишова мають значний розкид параметрів елементів, що ускладнює їхню реалізацію.

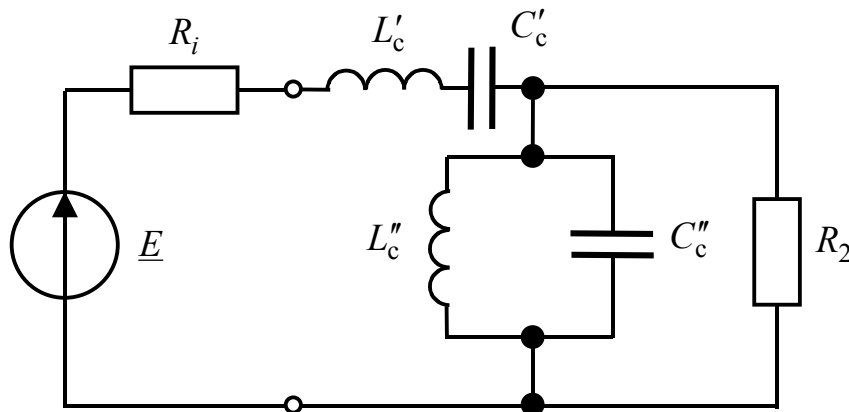


Рисунок 6.39 – Схема до прикладу 6.16

6.14 Синтез фільтрів на операційних підсилювачах

Вище у розд.6 розглянуто перший етап синтезу кола – визначення ОПФ, яка задовольняє певним вимогам до частотних характеристик кола і відповідає умовам фізичної реалізації. Не менш важливими є другий і третій етапи – це задачі структурного і параметричного синтезу кола. Розв’язання цих задач за допомогою схем з ОП ілюструє наступний приклад.

Приклад 6.17. Знайти структуру та параметри елементів кола, за допомогою яких можна реалізувати ОПФ СФ Чебишова, отриману в прикладі 6.4.

Розв’язання. У прикладі 6.4 отримано ОПФ СФ четвертого порядку у вигляді:

$$H_U(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,532336 \Pi_\omega p + 103,350727 \Pi_\omega^2} \times \frac{\Pi_\omega p}{p^2 + 0,57945 \Pi_\omega p + 122,454527 \Pi_\omega^2}.$$

Підставивши значення смуги пропускання $\Pi_\omega = 40 \cdot 10^3$ рад/с, матимемо:

$$H_1(p) = \frac{40 \cdot 10^3 p}{p^2 + 21293,44 p + 1,6536116 \cdot 10^{11}}; \quad (6.211)$$

$$H_2(p) = \frac{40 \cdot 10^3 p}{p^2 + 23178 p + 1,9592724 \cdot 10^{11}}. \quad (6.212)$$

Оскільки функція $H_U(p)$ дорівнює добутку $H_1(p) \times H_2(p)$, вона може бути реалізована у вигляді каскадного з’єднання чотиріполіусників (рис. 6.40).

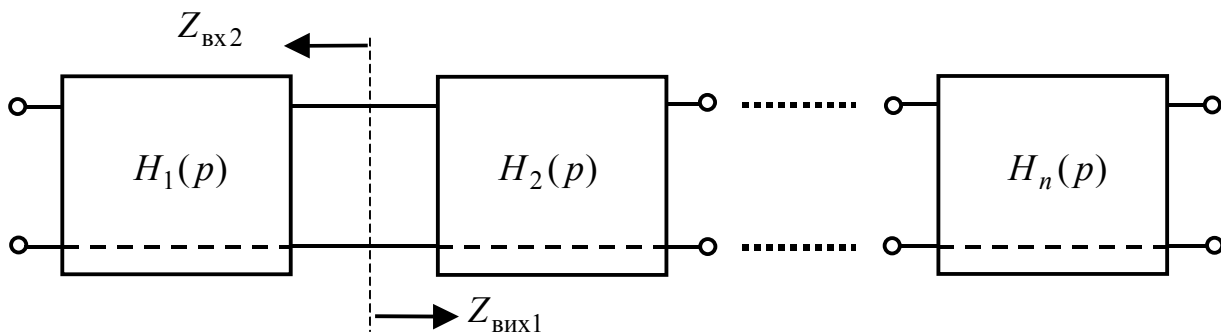


Рисунок 6.40 – Каскадне з’єднання чотиріполіусників

Загалом існує два способи каскадної реалізації:

1) каскадно-узгоджена, коли вхідний опір наступного каскаду збігається з вихідним опором попереднього ($Z_{вхn} = Z_{вих(n-1)}$); цей спосіб застосовують при реалізації мостовими або східцевими реактивними чотиріполіусниками;

2) каскадно-розв’язана, коли вхідний опір наступного каскаду значно більший вхідного опору попереднього ($Z_{вхn} \gg Z_{вих(n-1)}$); здійснюється за до-

помогою схем з ОП (активних R, C фільтрів), у яких вхідний і вихідний опір відрізняються на декілька порядків (див. п.4.8.1).

З аналізу функцій $H_1(p)$ і $H_2(p)$ видно, що вони відповідають ланкам другого порядку типу СФ (див. [7, підрозд.6.2]), кожен з яких можна реалізувати за допомогою активного R, C фільтра. Згідно з другим способом реалізації шукана ОПФ СФ четвертого порядку забезпечується каскадним з'єднанням двох активних ланок другого порядку.

Користуючись відомою методикою (див. приклад 3.10, а також [7, підрозд.6.4]), знайдемо ОПФ активного фільтра другого порядку (рис.6.41).

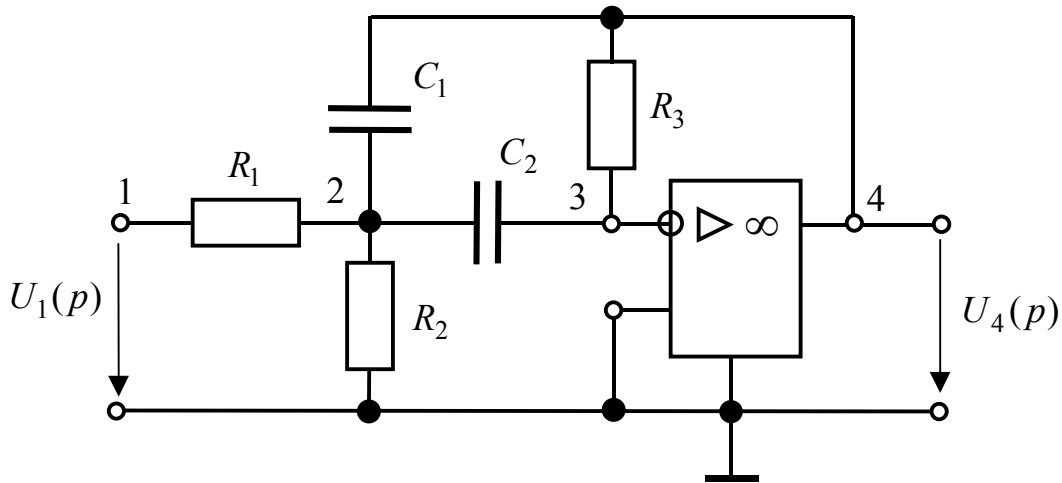


Рисунок 6.41 – Схема активного СФ другого порядку

ОПФ цього фільтра визначимо за формулою:

$$H_1(p) = \frac{U_4(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}},$$

яка містить відношення алгебраїчних доповнень матриці операторних провідностей кола:

$$(Y(p)) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + pC_1 + pC_2 & -pC_2 & -pC_1 \\ 0 & -pC_2 & G_3 + pC_2 & -G_3 \\ 0 & -pC_1 & -G_3 & G_3 + pC_1 \end{array} \right) \end{matrix}.$$

Відповідні алгебраїчні доповнення отримаємо, враховуючи відомі правила визначення знаків [7, підрозд. 6.4] та викреслюючи у чисельнику і знаменнику 1 і 4-й рядки, 4 і 3-й стовпці – у чисельнику та 1 і 3-й – у знаменнику:

$$\Delta_{14,43} = -pG_1C_2; \quad \Delta_{11,43} = p^2C_1C_2 + pG_3(C_1 + C_2) + G_3(G_1 + G_2).$$

Остаточно матимемо:

$$H_1(p) = -\frac{pG_1C_2}{p^2C_1C_2 + pG_3(C_1 + C_2) + G_3(G_1 + G_2)}. \quad (6.213)$$

Переходячи від провідностей до опорів і вважаючи для спрощення однаковими значення ємностей $C_1 = C_2 = C$, отримуємо:

$$H_1(p) = -\frac{p/R_1C}{p^2 + 2p/R_3C + (R_1 + R_2)/(R_1R_1R_3C^2)}. \quad (6.214)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p у виразах для ОПФ (6.211) і (6.214), можна скласти систему рівнянь для визначення елементів першої ланки СФ:

$$\begin{cases} 1/R_1^{(1)}C^{(1)} = 4 \cdot 10^4; \\ 2/R_3^{(1)}C^{(1)} = 21293,44; \\ (R_1^{(1)} + R_2^{(1)})/R_1^{(1)}R_2^{(1)}R_3^{(1)}(C^{(1)})^2 = 1,6536116 \cdot 10^{11}, \end{cases} \quad (6.215)$$

де верхніми індексами позначено приналежність елементів до першої ланки.

Оскільки в системі (6.215) кількість невідомих більше кількості рівнянь, слід задатися значенням певного параметра, виходячи з додаткових умов, пов'язаних з конструктивною чи схемною реалізацією, типовою схемою увімкнення каскаду тощо.

Нехай $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = C^{(1)} = 100$ пФ. Тоді з першого рівняння системи (6.215) знайдемо $R_1^{(1)} = 250$ кОм, з другого – $R_3^{(1)} = 939,256$ кОм, з третього – $R_2^{(1)} = 645,5$ Ом.

Аналогічно, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p у виразах для ОПФ (6.212) і (6.214), складемо систему рівнянь для другої ланки:

$$\begin{cases} 1/R_1^{(2)}C^{(2)} = 4 \cdot 10^4; \\ 2/R_3^{(2)}C^{(2)} = 23178; \\ (R_1^{(2)} + R_2^{(2)})/R_1^{(2)}R_2^{(2)}R_3^{(2)}(C^{(2)})^2 = 1,9592724 \cdot 10^{11}. \end{cases} \quad (6.216)$$

Якщо вважати (з метою уніфікації елементів), що $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = C_1^{(2)} = C_2^{(2)}$, з системи (6.216) виходить: $R_1^{(2)} = 250$ кОм; $R_2^{(2)} = 593,2$ Ом; $R_3^{(2)} = 862,387$ кОм.

6.15 Синтез фільтрів на нетрадиційних операційних підсилювачах

У розд. 4 були розглянуті нові конструктивні елементи сучасних електронних кіл – трибрамні конвертори та конвеєри, трансїмпедансні, транскондуктивні підсилювачі та побудовані на їх основі універсальні три-, чотири- та п'ятибрамники. Ці нові елементи (нетрадиційні для класичних методів схемотехнічної реалізації) нині займають провідне місце у розробленні електронної

апаратури, а одержані на їх базі кола мають значно вищі технічні показники, ніж створені на класичних ОП.

6.15.1 Фільтри з інтегральним підсилювачем струму

Недоліком класичних активних R, C фільтрів з ОП є обмежений діапазон частот, в якому можуть бути використані ці кола. Верхня гранична частота фільтрів на класичних ОП зазвичай обмежується значенням 100 кГц. Нові активні компоненти та функціональні блоки, запропоновані вже в монолітному інтегральному вигляді, дозволяють синтезувати аналогові фільтри, що працюють не в класичному базисі напруг (НБ), а в струмовому базисі (СБ). Кола в струмовому базисі, зокрема трансадмітансний ОП (ОТП, див. п.4.8.5), мають певні переваги. Паразитні полюси активних компонентів в цьому випадку не є домінуючими, оскільки легко компенсуються, що дає можливість оброблення сигналів зі значно вищою частотою. При цьому значно зменшується час затримки сигналу, втрати енергії, покращуються шумові характеристики, забезпечується більша лінійність АЧХ при більших миттєвих значеннях сигналів. Фільтри у струмовому базисі легше налаштовувати та перестроювати.

Синтезуючи фільтри, виходять із класичних, добре розроблених активних R, C структур у базисі напруг. Щоб спростити викладення, доцільно обмежитися фільтром 2-го порядку з одним активним компонентом – ідеальним підсилювачем напруги. Для цього фільтра застосовують дуальне перетворення, яке не змінює вигляд ОПФ та чутливість фільтра (при цьому відбувається лише заміна змінних – струмів та напруг).

Дуальне перетворення виконують у такий спосіб:

1. Взаємно поміняти входи кола. Збуджуюче джерело живлення видалити. Вхід прототипу замкнути (в нього потече струм дуального кола). До нового входу (раніше виходу) увімкнути джерело струму.

2. Підсилювач напруги, керований напругою, замінити підсилювачем струму, керованим струмом, з тими самими значеннями коефіцієнта передачі $B_i = A_i$.

3. Підсумовуючий підсилювач напруги, який описується рівнянням

$$U_{\text{вих}}(p) = A_1 U_1(p) + A_2 U_2(p), \quad (6.217)$$

де A_1, A_2 – коефіцієнти передачі за напругою,

замінити зворотно увімкненим підсилювачем струму з двома виходами:

$$I_1(p) = B_1 I_0(p); \quad I_2(p) = B_2 I_0(p), \quad (6.218)$$

де B_1, B_2 – коефіцієнти передачі за струмом.

4. Коло зворотного зв'язку залишити незмінним.

Наведений алгоритм можна проілюструвати на прикладі ФВЧ другого порядку (рис.6.42), який має обмежений коефіцієнт підсилення.

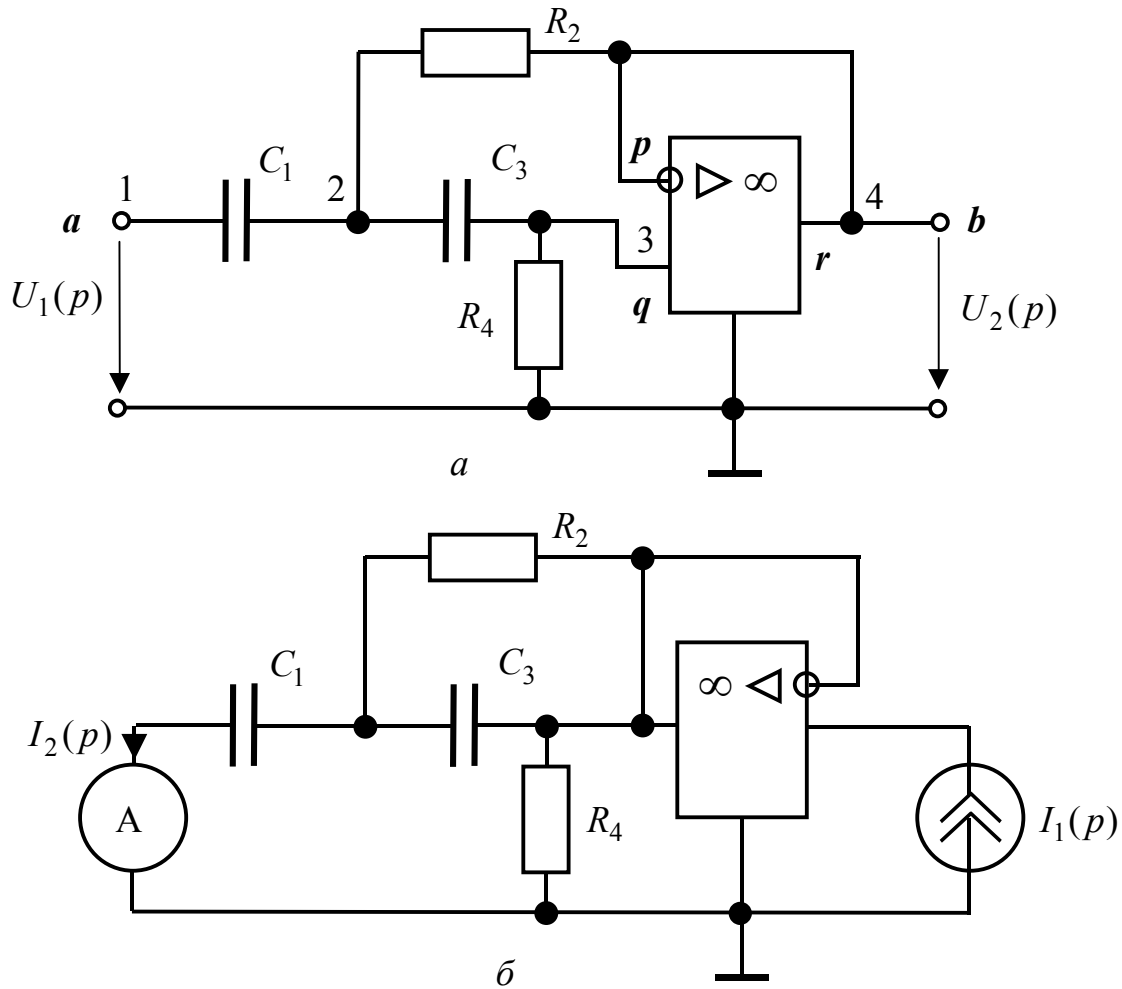


Рисунок 6.42 – Схеми активного ФВЧ у базисах:
a – напруг (ФВЧ–НБ); *б* – струмів (ФВЧ–СБ)

У класичному базисі напруг ОПФ фільтра (ФВЧ–НБ) можна визначити за формулою [7, (6.57)]:

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{ab,r(p+q)}}{\Delta_{aa,r(p+q)}} = \frac{\Delta_{14,4(4+3)}}{\Delta_{11,4(4+3)}}.$$

З огляду на відомі з теорії визначників співвідношення: $\Delta_{nm,mm} = 0$; $\Delta_{ab,r(p+q)} = \Delta_{ab,rp} - \Delta_{ab,rq}$, виходить:

$$H_U(p) = \frac{\Delta_{14,44} - \Delta_{14,43}}{\Delta_{11,44} - \Delta_{11,43}} = \frac{-\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,44} - \Delta_{11,43}}. \quad (6.219)$$

Матриця провідностей фільтра має вигляд:

$$(Y(p)) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} pC_1 & -pC_1 & 0 & 0 \\ -pC_1 & G_2 + pC_1 + pC_3 & -pC_3 & -G_2 \\ 0 & -pC_3 & G_4 + pC_3 & -G_3 \\ 0 & -G_2 & & G_2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Обчисливши алгебраїчні доповнення (аналогічно підрозд. 6.14) у виразі (6.219), можна записати вираз для ОПФ:

$$\begin{aligned} H_U(p) &= \frac{p^2 C_1 C_3}{p^2 C_1 C_3 + p G_4 (C_1 + C_3) + p C_3 G_2 - p C_3 G_2 + G_2 G_4} = \\ &= \frac{p^2 H_\infty}{p^2 + p \left(\frac{1}{C_3 R_4} + \frac{1}{C_1 R_4} + \frac{1 - H_\infty}{C_1 R_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_3 R_2 R_4}}. \end{aligned}$$

Останній вираз можна записати компактніше, якщо використати відповідні позначення:

$$H_U(p) = \frac{p^2 H_\infty}{p^2 + \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.220)$$

де H_∞ – значення АЧХ фільтра при $\omega \rightarrow \infty$; резонансна частота –

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_3 R_2 R_4}}; \quad (6.221)$$

$Q = H(\omega_{\text{рез}})$ – добротність полюса, причому

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{C_1 R_2}{C_3 R_4}} + \sqrt{\frac{C_3 R_2}{C_1 R_4}} + (1 - H_\infty) \sqrt{\frac{C_3 R_4}{C_1 R_2}}. \quad (6.222)$$

Вище (див. табл.6.1) наведені значення коефіцієнтів b_n нормованого полінома Баттерворта (6.42). Якщо пронормувати вираз (6.220) за значенням $\omega_{\text{рез}}$, для реалізації фільтра Баттерворта другого порядку необхідно, щоб $\frac{1}{Q} = b_1 = 1,41$. Тоді відповідно до співвідношень (6.221), (6.222) для фільтра Баттерворта ($Q = 0,707$) з параметрами $f_{\text{гр}} = 20$ кГц, $H_{\text{гр}} = -3$ дБ, $f_{\text{рез}} = 2$ кГц, $H_{\text{рез}} = -39$ дБ параметри компонентів (при $H_\infty = 1$) для схеми (рис.6.42) становитимуть: $C_1 = C_3 = 2,2$ нФ; $R_2 = 5,085$ кОм; $R_4 = 2,543$ кОм.

Згідно з наведеним вище алгоритмом дуального перетворення необхідно:

- схему ФВЧ–НБ (рис.6.42, а) перетворити у схему ФВЧ–СБ (рис.6.42, б);

- підсилювач напруги з коефіцієнтом підсилення A замінити підсилювачем струму з коефіцієнтом підсилення B , причому $B = A = 1$;

- одночасно замінити вхід та вихід підсилювача і всього фільтра; тоді реакція (струм) буде замкнута на виході, при цьому збудження буде також струмовим.

Для коефіцієнта передачі за струмом будуть справедливі ті самі вирази (6.220)—(6.222), що і для коефіцієнта передачі за напругою. Спрощену схему ФВЧ–СБ зображено на рис.6.43, в якій необхідна величина підсилення за струмом забезпечується навісними резисторами R_1, R_2 .

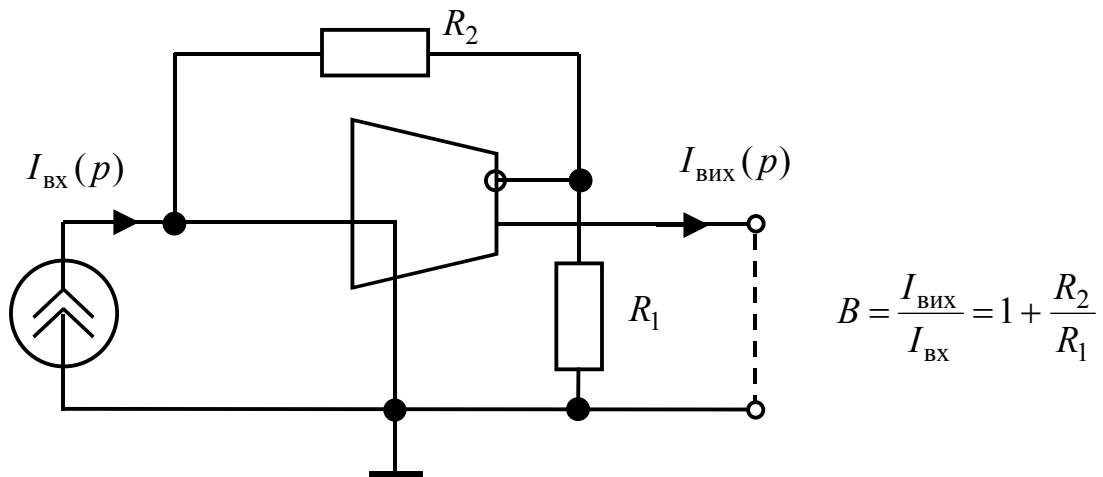


Рисунок 6.43 – Спрощена схема ФВЧ зі струмовим ОП

На рис.6.44 наведено амплітудно-частотні характеристики ФВЧ–НБ та ФВЧ–СБ. Видно, що в НБ небажано проявляються паразитні полюси підсилювача (LM 741).

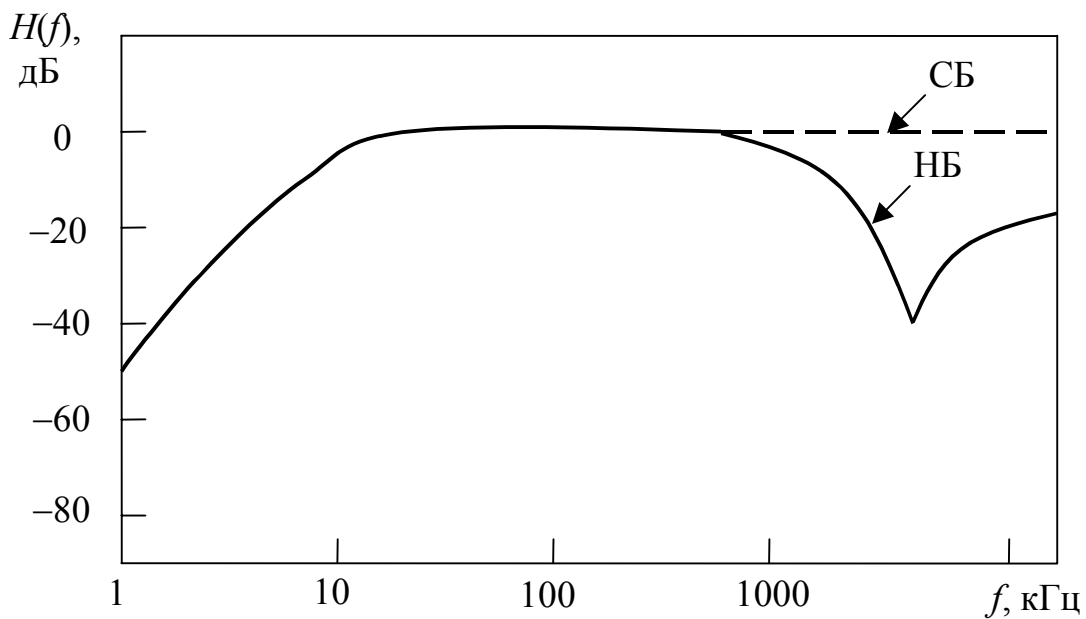


Рисунок 6.44 – АЧХ ФВЧ–НБ і ФВЧ–СБ

Порівняння амплітудних характеристик в обох базисах підтверджує переваги струмового базису. Струмовий ОП дозволяє також синтезувати складніші фільтри, коли слід використовувати їх багатовходове увімкнення.

6.15.2 Фільтри з трансїмпедансними операційними підсилювачами

При синтезі цих фільтрів також доцільно виходити із класичних, добре розроблених структур, що працюють у НБ, перетворюючи їх за допомогою дуального алгоритму (див п.6.15.1). Коефіцієнт передачі за напругою широко розповсюдженої схеми фільтрів другого порядку з двома петлями зворотного зв'язку і звичайними ОП (рис.6.45, а) описується виразом:

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-Y_1(p)Y_3(p)}{Y_5(p)[Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p)] + Y_2(p)Y_3(p)}. \quad (6.223)$$

Вибираючи окремі провідності відповідно до табл.6.9, отримують необхідний тип фільтра (ФВЧ, СФ, ФНЧ).

Таблиця 6.9 – Провідності елементів фільтрів різних типів

Тип фільтра	$Y_1(p)$	$Y_2(p)$	$Y_3(p)$	$Y_4(p)$	$Y_5(p)$
ФВЧ	pC_1	pC_2	pC_3	G_4	G_5
СФ	pC_1	G_2	G_3	pC_4	pC_5
ФНЧ	G_1	G_2	G_3	pC_4	pC_5

Частина кола, позначена на рис.6.45, а штриховою лінією, є узагальненим (частотно-залежним) джерелом напруги $U_2(p)$, керованим струмом, яке описується передатним опором:

$$Z_{\text{пер}}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{1}{Y_5(p)}. \quad (6.224)$$

Заміна цієї частини схеми трансїмпедансним підсилювачем (ТОП), у якого до компенсаційного входу Z увімкнено провідність $Y_5(p)$, дозволяє отримати дуальне коло (рис.6.45, б), що працює у змішаному базисі С/Н–Б, оскільки сам ТОП працює у СБ.

Дуальне коло в ідеальному випадку має коефіцієнт передачі за струмом (6.223). Реальне коло С/Н–Б доцільніше використовувати в області вищих частот, ніж коло НБ, оскільки ОПФ (6.223) менше залежатиме від зменшення коефіцієнта передачі на верхніх частотах. Коло С/Н–Б (рис.6.45, б) можна дуальним перетворенням представити у вигляді кола СБ (рис.6.46, б). Згідно з алгоритмом дуального перетворення необхідно:

- змінити місцями вхід та вихід як ТОП, так і всього фільтра;

- новий вихід фільтра замкнути; через нього потече струм $I_2(p)$, який є новою реакцією.

Дуальне коло в СБ (рис.6.46, б) має такий самий коефіцієнт передачі за струмом $H_I(p) = I_2(p)/I_1(p)$, як і коефіцієнт передачі за напругою (6.223) у НБ.

Аналогічно можна перетворити коло НБ (рис.6.45, а). Якщо при цьому залишити класичний ОП, вийде дуальне коло (рис.6.46, а) у змішаному С/Н базисі. Для цього кола коефіцієнт передачі також описується співвідношенням (6.223).

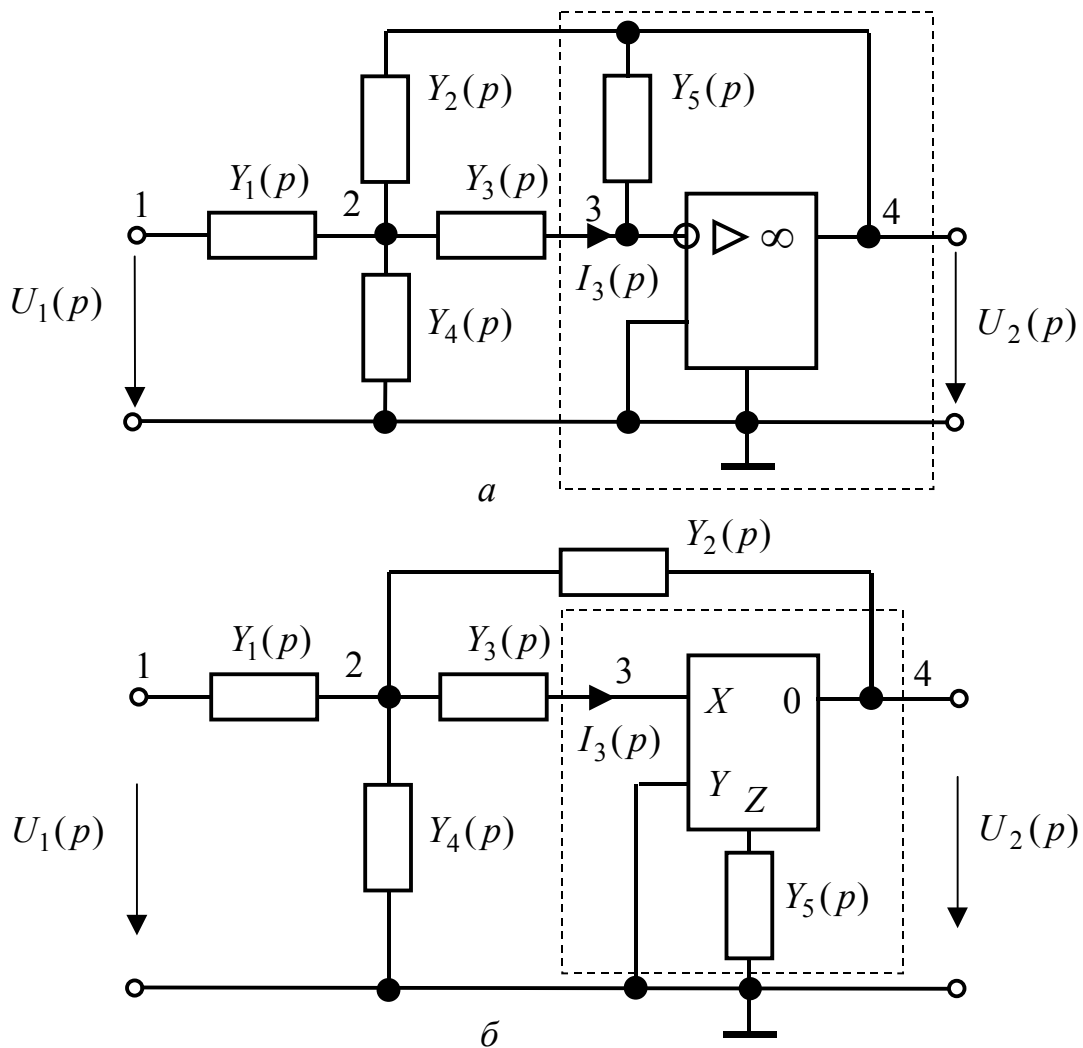


Рисунок 6.45 – Схеми активних фільтрів другого порядку:
 а – з ОП у НБ; б – з ТОП у С/Н–Б

Реалізувати струмовий базис (рис.6.46, б), зокрема СФ–СБ, можна, вибравши з табл.6.9 відповідні провідності для смугового фільтра. ОПФ дуальних схем (рис.6.45, а і 6.46, б) визначають за формулою (6.223) або за відомою методикою (див. приклад 6.17):

$$H_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{14,43}}{\Delta_{11,43}} =$$

$$= -\frac{pC_1G_3}{p^2C_5(C_1 + C_4) + pC_5(G_2 + G_3) + G_2G_3}.$$

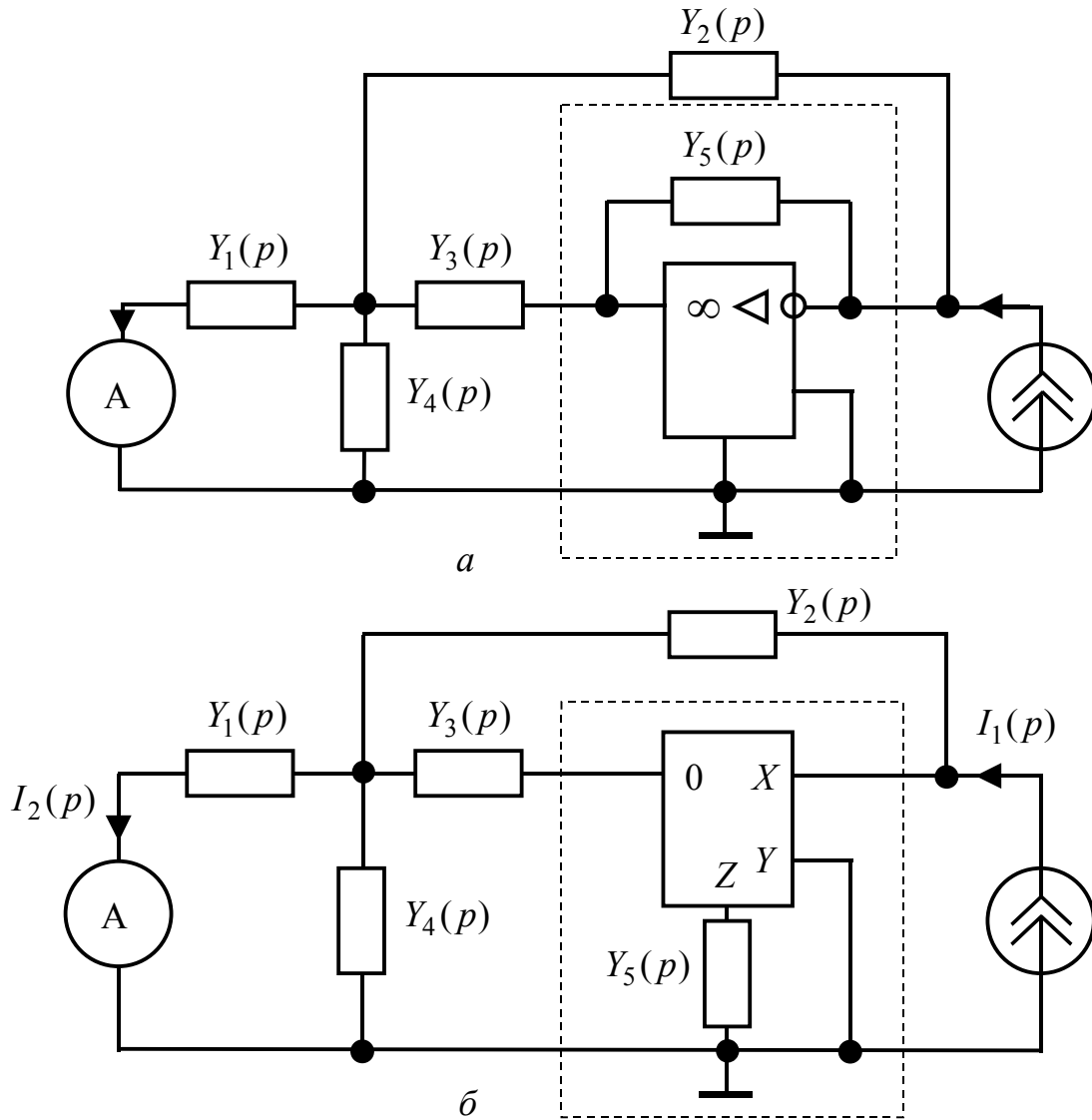


Рисунок 6.46 – Схеми активних фільтрів другого порядку:
a – з ОП у С/Н-Б; *б* – з ТОП у СБ

Якщо не враховувати ємність C_4 (вона дозволяє коригувати значення H_{\max} АЧХ фільтра на резонансній частоті $\omega = \omega_{\text{рез}}$ та добротність Q), тоді:

$$H_U(p)|_{C_4=0} = -\frac{p/C_5R_3}{p^2 + p(R_2 + R_3)/C_1R_2R_3 + 1/C_1C_5R_2R_3} =$$

$$= \frac{-pH_{\max} \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q}}{p^2 + \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.225)$$

де

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_5 R_2 R_3}}; \quad (6.226)$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 R_3 C_1}}{(R_2 + R_3) \sqrt{C_5}}; \quad (6.227)$$

$$H_{\max} = \frac{C_1 R_2}{C_5 (R_2 + R_3)} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} Q^2. \quad (6.228)$$

Параметри розглянутої схеми визначають за формулами (6.225)–(6.228) та коефіцієнтами заданої ОПФ (аналогічно прикладу 6.17).

6.15.3 Модифіковані активні ФНЧ другого порядку в базисі струмів

Еліптичні кола другого порядку дозволяють реалізовувати нулі ОПФ на заданій частоті. Нульові провали АЧХ є найбільш крутими (але при цьому амплітудна характеристика також складніша) при використанні інверсної апроксимації Чебишова або Кауера.

У загальному вигляді ОПФ таких кіл задається співвідношенням:

$$H_U(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} = \frac{a'_2 p^2 + a'_1 p + a'_0}{p^2 + b'_1 p + b'_0} = \frac{a'_2 p^2 + \frac{\omega_{\min}}{Q_{\min}} p + \omega_{\min}^2}{p^2 + \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.229)$$

де $a'_k = a_k / b_2$; $b'_k = b_k / b_2$ – коефіцієнти ОПФ, нормовані за значенням b_2 , а в окремому випадку режекторних фільтрів ($a_1 = 0$):

$$H_U(p) = \frac{H_{\max} (p^2 + \omega_{\min}^2)}{p^2 + \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} p + \omega_{\text{рез}}^2}, \quad (6.230)$$

де H_{\max} – максимальне значення АЧХ фільтра.

Залежно від співвідношень між частотами полюса $f_{\text{рез}}$ та нуля f_{\min} розрізняють такі типи фільтрів (див. [7, підрозд.6.3]): РФ ($f_{\text{рез}} = f_{\min}$), ФНЧ з режекцією (РФНЧ) ($f_{\text{рез}} < f_{\min}$) та ФВЧ з режекцією ($f_{\text{рез}} > f_{\min}$).

На рис.6.47, а зображено широко розповсюджену схему еліптичного фільтра другого порядку з одним ОП, яку можна перевести з класичного НБ у новий СБ, використовуючи струмові конвеєри ССП.

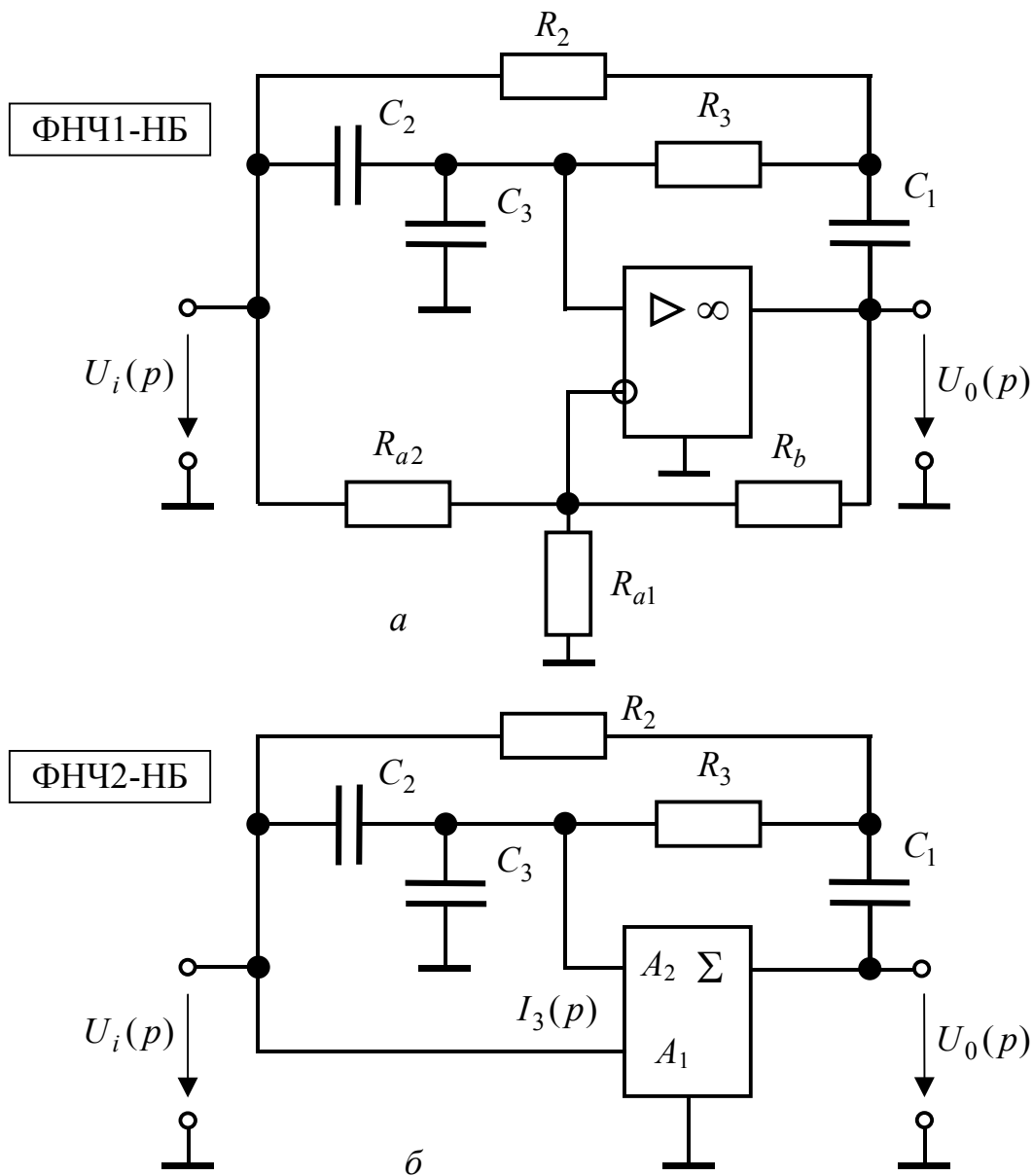


Рисунок 6.47 – Схеми активних фільтрів другого порядку у НБ:
a – з ОП ; *б* – з підсумовуючим підсилювачем напруги

Фільтр (рис.6.47, *a*) працює у класичному НБ. Аналіз схеми дає такі співвідношення між її параметрами та коефіцієнтами ОПФ (6.229):

$$b'_0 = \omega_{\text{рез}}^2 = \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_{23}}; \quad b'_1 = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q} = \frac{1}{C_1 R_{23}} - \frac{H}{R_3 C_{23}}; \quad (6.231)$$

$$a'_0 = \omega_{\text{мін}}^2 = \frac{1 + H - R_b / R_{a2}}{R_2 R_3 C_1 C_{23}}; \quad a'_2 = \frac{(1 + H) C_2}{C_{23}} - R_b / R_{a2}; \quad (6.232)$$

$$a'_1 = \frac{\omega_{\text{мін}}}{Q_{\text{мін}}} = \frac{1 + H}{R_{23} C_1 C_{23} / C_2} - \frac{R_b}{R_{a2}} \left(\frac{1}{R_3 C_{23}} + \frac{1}{R_{23} C_1} \right), \quad (6.233)$$

де

$$R_a = \frac{R_{a1}R_{a2}}{R_{a1} + R_{a2}}; H = \frac{R_b}{R_a}; C_{23} = C_2 + C_3; R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}. \quad (6.234)$$

Для реалізації ОПФ (6.230) коефіцієнт a_1 має дорівнювати нулю. Для фільтра ФНЧ1–НБ з параметрами $f_{\text{рез}} = 100$ кГц; $f_{\text{мін}} = 300$ кГц та $Q = 1$ за умови

$$R_2 = R_3 = R; C_1 = C; C_{23} = \frac{C}{4Q^2}; \frac{1}{RC} = \frac{2Q}{\omega_{\text{рез}}}, \quad (6.235)$$

виходять такі значення елементів: $R_2 = R_3 = 1,59$ кОм; $C_1 = 1$ нФ; $C_2 = 270$ пФ; $C_3 = 730$ пФ; $R_{a1} = 15,7$ кОм; $R_{a2} = 27,5$ кОм; $R_b = 9,9$ кОм. У колі використовується класичний ОП типу LM741, а для порівняння – сучасніший LF356. АЧХ фільтра зображено на рис.6.48. При використанні ОП типу LM741 (крива б) існує суттєва різниця АЧХ порівняно з елементом LF356 (крива а), але значно кращі характеристики має коло, яке працює у струмовому базисі (крива в).

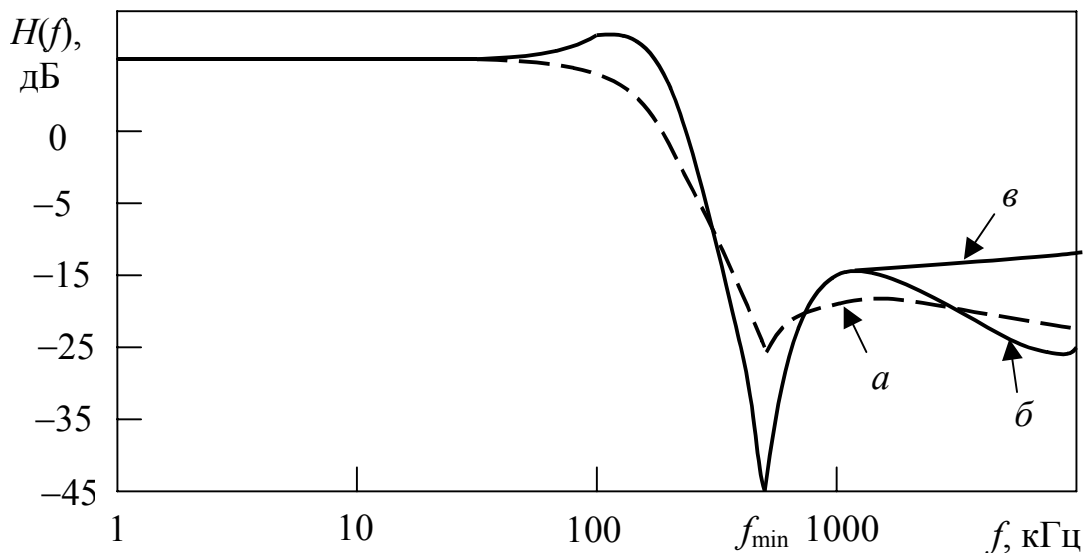


Рисунок 6.48 – АЧХ ФНЧ–НБ і ФНЧ–СБ

Схему кола у струмовому базисі можна отримати, перетворивши схему ФНЧ1–НБ. Коло ФНЧ1–НБ (рис.6.47, а) збуджується незалежним джерелом напруги U_i , а реакцією є напруга U_0 . Нехай коефіцієнт передачі за напругою $H_U(p) = U_0/U_i$ цієї схеми задається формулою (6.229). За принципом суперпозиції в тому ж базисі ФНЧ можна перетворити на коло (рис.6.47, б), в якому підсумовуючий підсилювач напруги замінює ОП з частотно-незалежним зворотнім зв'язком. Параметри підсилювача:

$$A_1 = -\frac{R_b}{R_{a2}} = -0,3618; A_2 = 1 + \frac{R_b}{R_a} = 1,9955, \quad (6.236)$$

де R_a визначається співвідношенням (6.234). Підсумовуючий підсилювач заміщує два паралельно з'єднаних джерела напруги, які керуються напругою.

Вихідна напруга підсилювача описується виразом:

$$U_0(p) = A_1U_1(p) + A_2U_2(p) = -0,3168U_1(p) + 1,9955U_2(p). \quad (6.237)$$

Коло ФНЧ2–НБ (рис.6.47, б) модифікують за допомогою дуального перетворення. Для цього необхідно поміняти місцями вхід та вихід схеми, збудження у вигляді джерела напруги видалити, вхід прототипу замкнути (через нього потече струм дуального кола), збудження нового входу (раніше виходу) здійснити джерелом струму. Оскільки замість підсилювача напруги (ДНКН) слід увімкнути підсилювач струму (ДСКС) з однаковими коефіцієнтами підсилення $B_i = A_i$ та поміняти місцями входи, підсумовуючий підсилювач напруги, який описується рівнянням (6.237), замінюють зворотно увімкненим підсилювачем струму з двома виходами (рис.6.49), для якого вірні співвідношення:

$$I_1(p) = B_1I_v(p); \quad I_2(p) = B_2I_v(p), \quad (6.238)$$

де $B_1 = A_1 = -0,3615$; $B_2 = A_2 = -1,9955$.

Значення елементів R , C віток зворотного зв'язку не змінюють. В результаті виходить коло ФНЧ–СБ (рис.6.49).

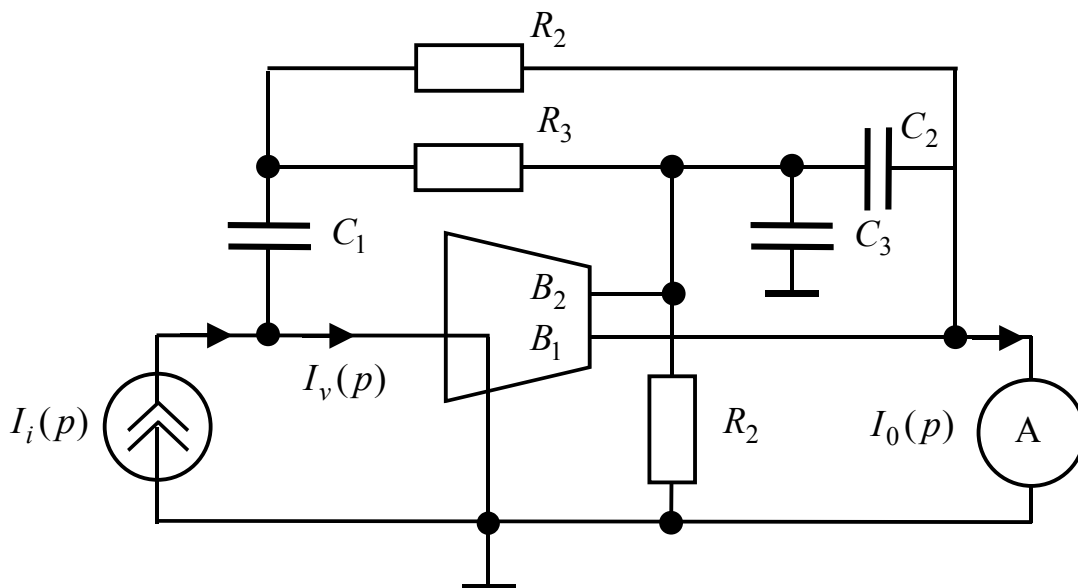


Рисунок 6.49 – Схема ФНЧ–СБ з підсилювачем струму

Отже, проведене дуальне перетворення зберігає незмінними формули ОПФ, включаючи числові значення коефіцієнтів.

Підсилювач струму з двома виходами (рис.6.49) найближчим часом випускатиметься в інтегральному виконанні. Нині його можна реалізувати двома джерелами струму з навісними резисторами (рис.6.50), які забезпечують необхідні значення коефіцієнтів B_1 та B_2 .

Аналіз кола (рис.6.50) підтверджує загальний висновок про переваги струмового базису (рис.6.48, крива в). Підсилювач струму з багатьма виходами можна також використати при реалізації складніших активних R , C фільтрів у струмовому базисі.

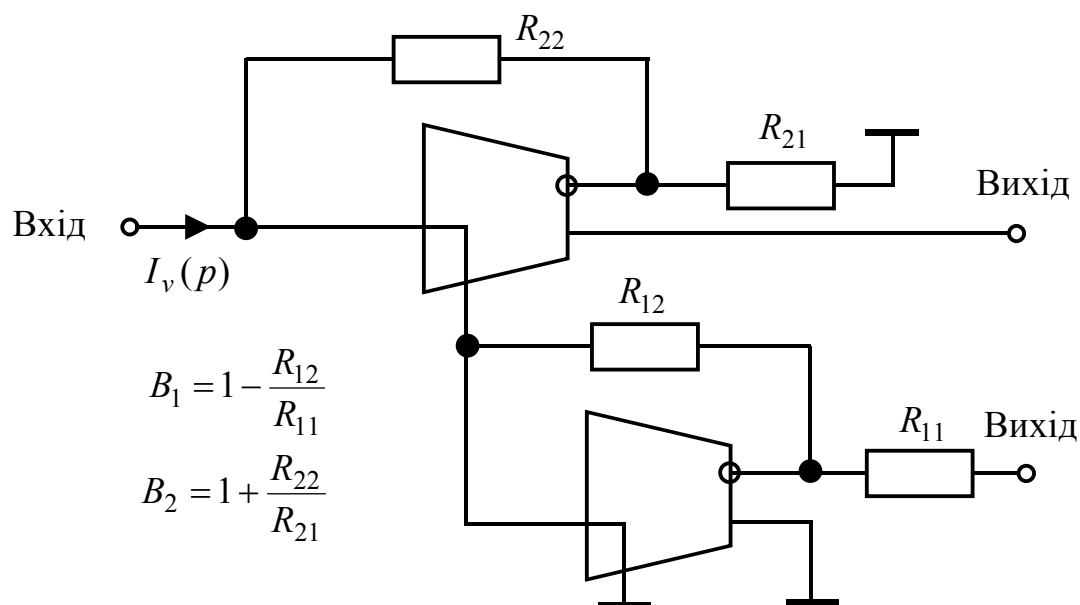


Рисунок 6.50 – Схема ФНЧ–СБ з двома джерелами струму

6.16 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. З яких етапів складається розв'язання задачі синтезу електричного кола? Пояснити зміст кожного етапу.
2. Який зв'язок існує між АКХ кола та ослабленням кола за потужністю? Які вимоги ставлять до частотної залежності ослаблення?
3. Які фільтри називають поліномними?
4. Пояснити особливості частотних характеристик фільтрів Баттерворта. Зобразити якісно графіки цих характеристик для ФНЧ Баттерворта різних порядків.
5. Як розташовані на комплексній площині корені полінома Баттерворта?
6. Які особливості мають частотні характеристики фільтрів Чебишова? Зобразити якісно АЧХ ФВЧ Чебишова другого і третього порядків.
7. Які особливості мають поліноми Чебишова? Розрахувати коефіцієнти полінома Чебишова 11-го порядку.
8. Чим відрізняються частотні характеристики фільтрів Чебишова і Золотарьова?
9. У чому відмінність синтезу ФНЧ від синтезу фільтрів інших типів? Пояснити поняття «фільтр-прототип».
10. Пояснити, як здійснюється перетворення частотних діапазонів ФНЧ-ФВЧ. Яке співвідношення пов'язує комплексні нормовані частоти ФНЧ і ФВЧ?
11. Пояснити, як здійснюється перетворення частотних діапазонів ФНЧ-СФ. У чому полягає принцип збереження довжини частотного інтервалу?

12. Як використовують властивість геометричної симетрії частотної характеристики для синтезу смугового фільтра?

13. Визначити ОПФ ФНЧ Баттерворта, якщо на частоті 750 Гц ослаблення за потужністю $A_p(f)$ не повинне перевищувати 2 дБ, а на частоті 1600 Гц – бути меншим 20 дБ.

Відповідь:

$$H_U(p) = \frac{2526,62 \cdot 10^4}{p^2 + 3847,32p + 2526,62 \cdot 10^4} \times \frac{2526,62 \cdot 10^4}{p^2 + 9288,06p + 2526,62 \cdot 10^4}.$$

14. Пояснити, чи можна реалізувати ОПФ, знайдену у завданні 13, за допомогою двох каскадно-з'єднаних активних ланок другого порядку (рис.3.10). Знайти значення елементів цих ланок, якщо для кожної з них $R_1 = R_2 = R_3 = 51$ кОм.

Відповідь: $C_1^{(1)} = 15,3$ нФ; $C_2^{(1)} = 1$ нФ; $C_1^{(2)} = 6,33$ нФ; $C_2^{(2)} = 2,4$ нФ.

15. Визначити ОПФ ФВЧ Баттерворта, якщо на частоті 20 кГц ослаблення за потужністю $A_p(f)$ не повинне перевищувати 1 дБ, а на частоті 4500 Гц – бути меншим 20 дБ.

Відповідь: $H_U(p) = \frac{p^2}{p^2 + 12,58 \cdot 10^4 p + 79,6 \cdot 10^8}.$

16. Користуючись відомою методикою (див. приклад 3.10, а також [7, підрозд.6.4]), знайти ОПФ активного фільтра (рис.6.51) та порівняти з результатом задачі 15. Реалізувати ОПФ, знайдену у завданні 15, за допомогою активного ФВЧ. Знайти значення елементів активного фільтра, поклавши $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ нФ.

Відповідь: $R_1 = 5,27$ кОм; $R_2 = 23,85$ кОм.

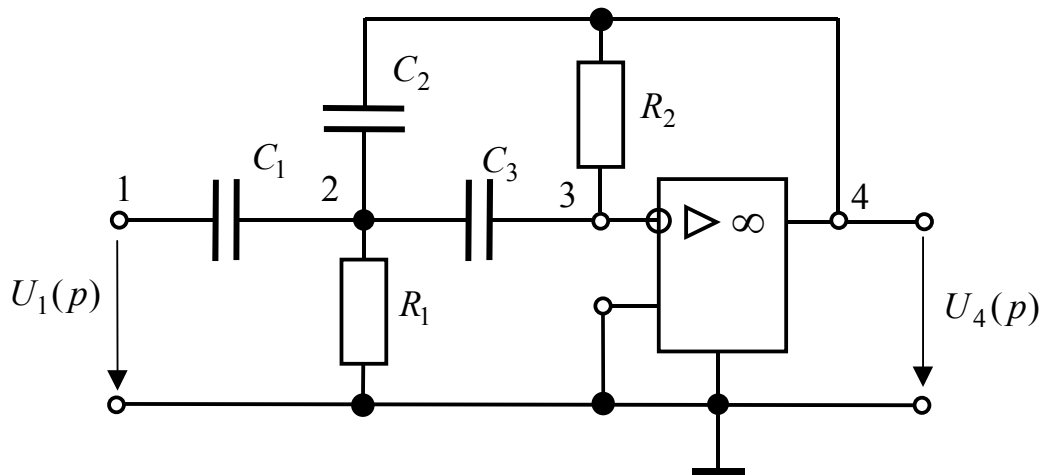


Рисунок 6.51 – Схема активного ФВЧ другого порядку

17. Реалізувати ОПФ фільтра Чебишова (див. приклад 6.3) за допомогою диференціувальної ланки першого порядку (рис.2.18, а) і активної ланки дру-

гого порядку (рис.6.51). Знайти значення опорів цих ланок, поклавши $C = C_1 = C_2 = C_3 = 2 \text{ нФ}$.

Відповідь: $R = 50 \text{ кОм}; R_1 = 16,7 \text{ кОм}; R_2 = 600 \text{ кОм}$.

18. Визначити ОПФ СФ Баттерворта за такими даними: $f_0 = 40 \text{ кГц}; f_{\Delta 1} = 35 \text{ кГц}; f_{s2} = 54 \text{ кГц}; A_{\Delta} = 1 \text{ дБ}; A_s = 17 \text{ дБ}$. Знайти порядок та граничну частоту фільтра-прототипу.

Відповідь: $n = 4; f_{\text{гр}} = 12,68 \text{ кГц}$;

$$H_U(p) = \frac{6347,4348 \cdot 10^6 p^2}{p^4 + 60980 p^3 + 69512,9 \cdot 10^6 p^2 + 3851,83 \cdot 10^{12} p + 3989,88 \cdot 10^{18}} \times \\ \times \frac{6347,4348 \cdot 10^6 p^2}{p^4 + 147215,69 p^3 + 69512,9 \cdot 10^6 p^2 + 9298,95 \cdot 10^{12} p + 3989,88 \cdot 10^{18}}.$$

19. Якщо значення нулів операторної функції: $p_{01} = j2; p_{01} = j4$, а значення полюсів: $p_1 = 0; p_2 = j; p_3 = j3$, чи належить вона до реактансних функцій? Відповідь аргументувати.

Відповідь: Ні.

20. Пояснити, яка з наведених нижче функцій належить до класу реактансних?

$$1. \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_0}{b_3 p^2 + b_1 p} \quad 2. \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{p^2 (b_3 p + b_1)} \\ 3. \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{b_3 p^3 + b_1 p} \quad 4. \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{p (b_3 p^2 + b_1 p)}$$

Відповідь: 3.

21. Пояснити, яка з наведених нижче функцій може бути ОПФ?

$$1. \frac{a_0}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_1 p + b_0} \quad 2. \frac{a_1 p}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \\ 3. \frac{a_2 p^2}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_0} \quad 4. \frac{p}{(p^2 + 2)(p^2 + 3) + 1}$$

Відповідь: 2.

22. Реалізувати за першою та другою формою Фостера операторну вхідну провідність:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}^2 + 4}{2\bar{p}^3 + 10\bar{p}}.$$

Відповідь: 1. $\tilde{L}_{\infty} = 2; \tilde{L}_1 = 0,5; \tilde{C}_1 = 0,5$ (рис.6.52, а);

2. $\tilde{L}_0 = 2,5; \tilde{L}_1 = 10; \tilde{C}_1 = 0,02$ (рис.6.52, б).

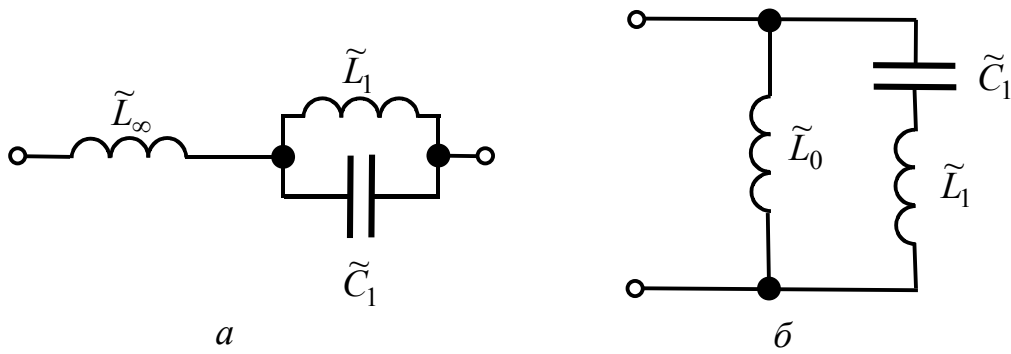


Рисунок 6.52 – Схемні реалізації до завдання 22

23. За першою формою Фостера знайти схему, яка відповідає нормованому операторному опору

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{19\bar{p}^4 + 64\bar{p}^2 + 32}{20\bar{p}(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 4)}.$$

Відповідь: $\tilde{C}_0 = 5$; $\tilde{C}_1 = 4$; $\tilde{C}_2 = 2$; $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2 = 0,125$ (рис.6.53, а).

24. За відомою нормованою операторною провідністю

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(p) = \frac{19\bar{p}^4 + 64\bar{p}^2 + 32}{20\bar{p}(\bar{p}^2 + 2)(\bar{p}^2 + 4)}$$

знайти нормовані елементи та схему кола.

Відповідь: $\tilde{L}_0 = 5$; $\tilde{C}_1 = 4$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0,125$ (рис.6.53, б).

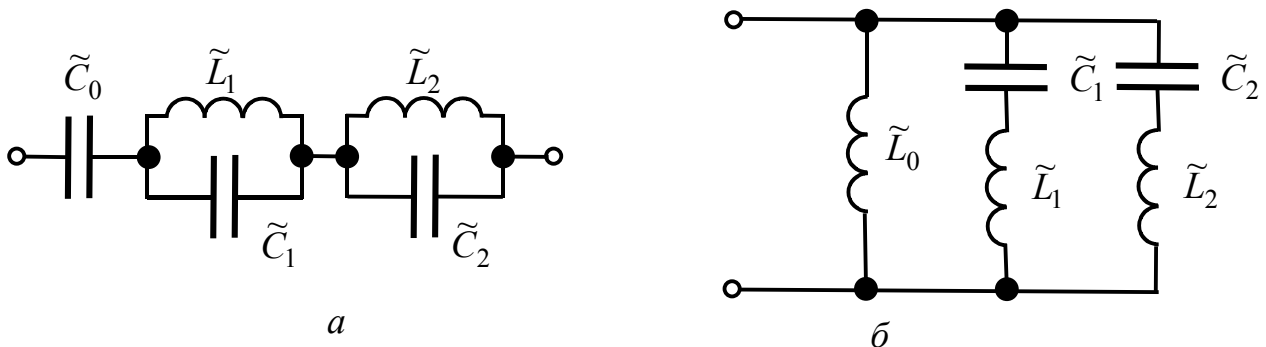


Рисунок 6.53 – Схемні реалізації до завдань: а – 23; б – 24

25. Визначити схему і нормовані елементи кола за першою формою Кауєра, якщо відомий нормований операторний опір

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{12\bar{p}^5 + 23\bar{p}^3 + 6\bar{p}}{12\bar{p}^4 + 11\bar{p}^2 + 1}.$$

Відповідь: $\tilde{L}_1 = 1$; $\tilde{C}_2 = 2$; $\tilde{L}_3 = 3$; $\tilde{C}_1 = 1$; $\tilde{C}_2 = 2$ (рис.6.54, а).

26. Визначити схему і нормовані елементи кола за другою формою Кауєра, якщо відомий нормований операторний опір

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{18\bar{p}^3 + 3\bar{p}}{12\bar{p}^4 + 9\bar{p}^2 + 1}.$$

Відповідь: $\tilde{L}_1 = 3$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{C}_1 = 1$; $\tilde{C}_2 = 2$ (рис.6.54, б).

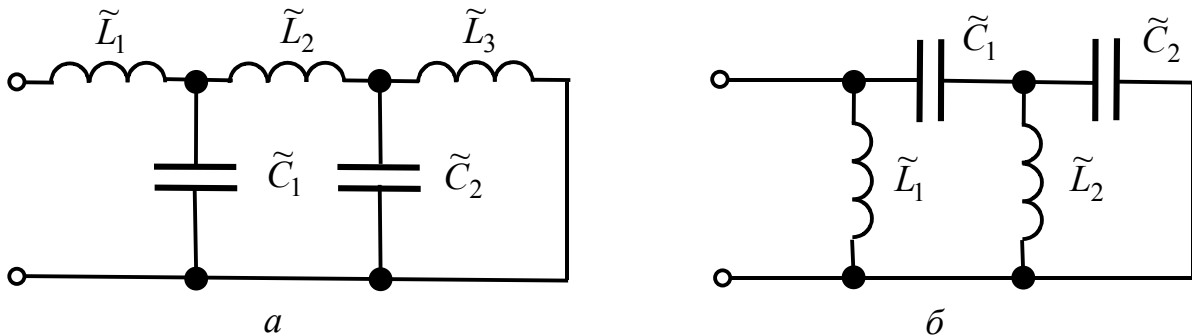


Рисунок 6.54 – Схемні реалізації до завдань: а – 25; б – 26

27. За другою формою Кауера синтезувати схему і обчислити нормовані елементи відповідно до заданого нормованого операторного опору

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{12\bar{p}^4 + 9\bar{p}^2 + 1}{18\bar{p}^3 + 3\bar{p}}.$$

Відповідь: $\tilde{L}_1 = 1$; $\tilde{L}_2 = 2$; $\tilde{C}_1 = 3$; $\tilde{C}_2 = 2$ (рис.6.55, а).

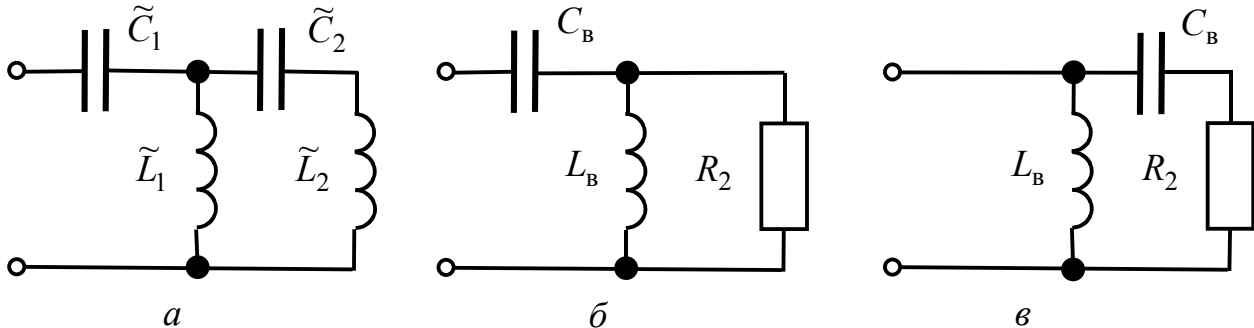


Рисунок 6.55– Схемні реалізації до завдань: а – 27; б, в – 28

28. Визначити схему та параметри елементів ФВЧ Чебишова, який живиться від джерела з внутрішнім опором $R_i = 100$ Ом. На частоті $\omega_\Delta = 10^5$ рад/с ослаблення за потужністю становить $A_\Delta = 0,5$ дБ, а на частоті $\omega_s = 0,728 \cdot 10^6$ рад/с – $A_s = 30$ дБ.

Відповідь: 1. $C_B = 71,2$ нФ; $L_B = 1,414$ мГн; $R_2 = 198,4$ (рис.6.55, б).

2. $C_B = 141,42$ нФ; $L_B = 0,712$ мГн; $R_2 = 50,4$ (рис.6.55, в).

29. За нормованою ОПФ ФП Чебишова (див. приклад 6.3):

$$H_U(\tilde{p}) = \frac{0,5}{(\tilde{p} + 0,5)(\tilde{p}^2 + 0,5\tilde{p} + 1)}$$

визначити вхідний операторний опір та схему фільтра-прототипу.

$$\text{Відповідь: } \tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2\bar{p}^3 + \bar{p}^2 + 2\bar{p} + 0,5}{\bar{p}^2 + 0,5\bar{p} + 0,5};$$

$$\tilde{L}_1 = 2; \tilde{L}_2 = 2; \tilde{C}_1 = 1; \tilde{R}_2 = 1 \text{ (рис.6.56, а).}$$

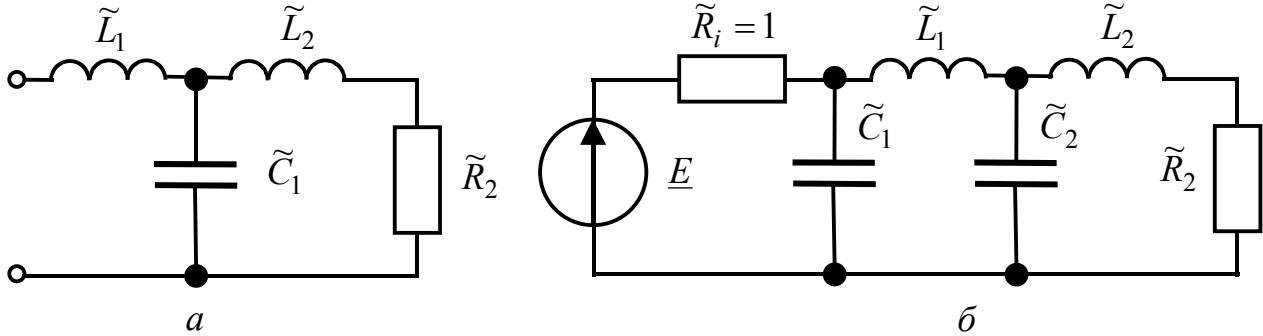


Рисунок 6.56 – Схемні реалізації до завдань: а – 29; б – 30

30. Визначити вхідний операторний опір ФНЧ Баттерворта четвертого порядку. Яка схема відповідає даній ОВФ?

$$\text{Відповідь: } \tilde{Z}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{2,613\bar{p}^3 + 3,414\bar{p}^2 + 2,613\bar{p} + 1}{2\bar{p}^4 + 2,613\bar{p}^3 + 3,414\bar{p}^2 + 2,613\bar{p} + 1};$$

$$\tilde{C}_1 = 0,765; \tilde{L}_1 = 1,848; \tilde{C}_2 = 1,848; \tilde{L}_2 = 0,765; \tilde{R}_2 = 1 \text{ (рис.6.56, б).}$$

31. Визначити схему ФП Баттерворта, якщо вхідна провідність становить:

$$\tilde{Y}_{\text{вх}}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}^2 + 0,5\bar{p} + 0,5}{2\bar{p}^3 + \bar{p}^2 + 2\bar{p} + 0,5}.$$

$$\text{Відповідь: } \tilde{C}_1 = 1; \tilde{L}_2 = 2; \tilde{C}_3 = 1 \text{ (рис.6.57, а).}$$

32. Від схеми ФП Чебишова (рис.6.56, а) перейти до схеми ФВЧ з граничною частотою 10^5 рад/с. Джерело, яке живить фільтр, має внутрішній опір $R_i = 10^3$ Ом.

$$\text{Відповідь: } C_1 = C_2 = 5 \text{ нФ; } L_1 = 10 \text{ мГн; } R_2 = 1 \text{ кОм (рис.6.57, б).}$$

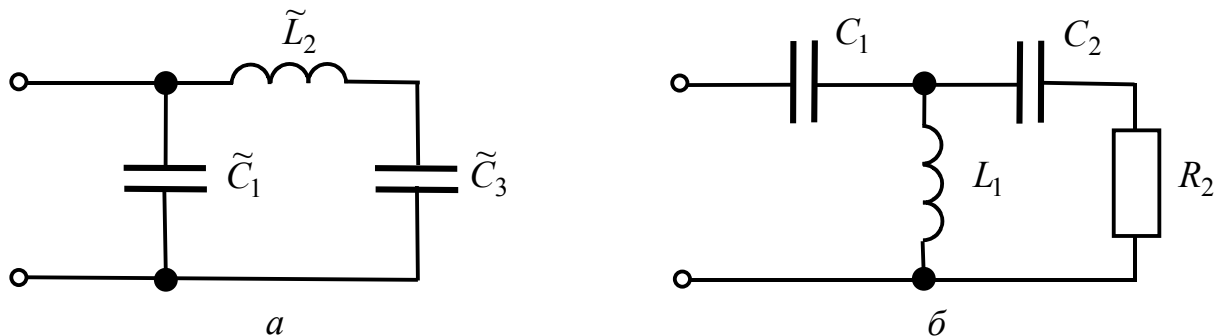


Рисунок 6.57 – Схемні реалізації до завдань: а – 31; б – 32

33. Якщо ФП Баттерворта має схему з нормованими елементами (рис.6.57, а), знайти схему і параметри елементів ФВЧ з граничною частотою 10^5 рад/с. До фільтра увімкнено джерело напруги з внутрішнім опором $R_i = 10^3$ Ом.

Відповідь: $L_{B1} = 326,8$ мкГн; $L_{B3} = 135,28$ мкГн; $C_{B2} = 266$ нФ;
 $C_{B4} = 523$ нФ (рис.6.58).

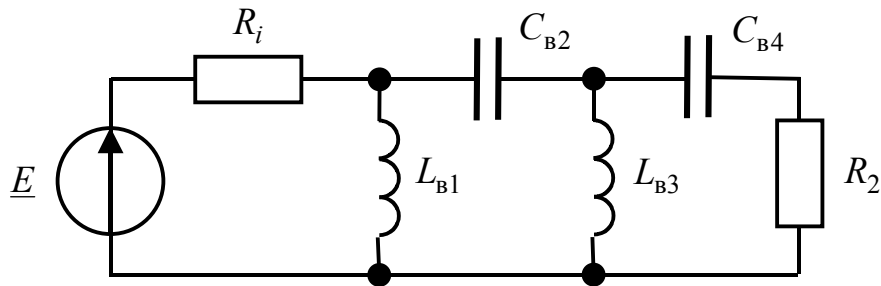


Рисунок 6.58 – Схема до завдання 33

34. На підставі схеми ФП (рис.6.57, а), знайти схему і параметри елементів СФ з центральною частотою 10^5 рад/с і смугою пропускання $2 \cdot 10^4$ рад/с. До фільтра увімкнено джерело напруги з внутрішнім опором $R_i = 50$ Ом.

Відповідь: $L_{c1} = L_{c3} = 100$ мкГн; $L_{c2} = 5$ мкГн; $C_{c1} = C_{c3} = 1$ мкФ;
 $R_2 = 50$ Ом; $C_{c2} = 20$ нФ (рис.6.59).

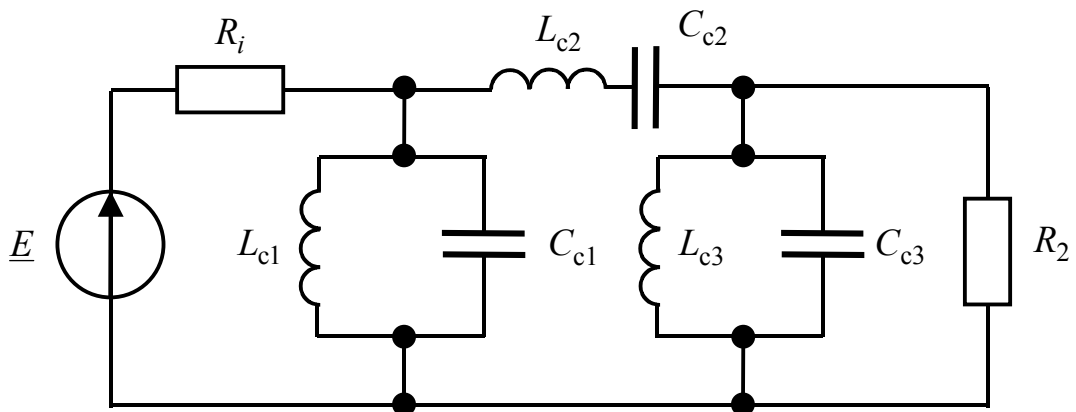
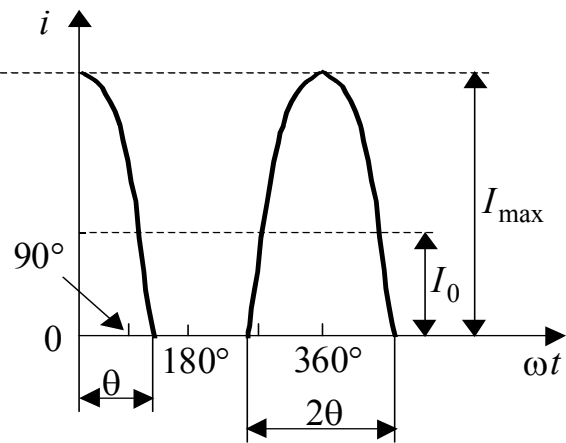
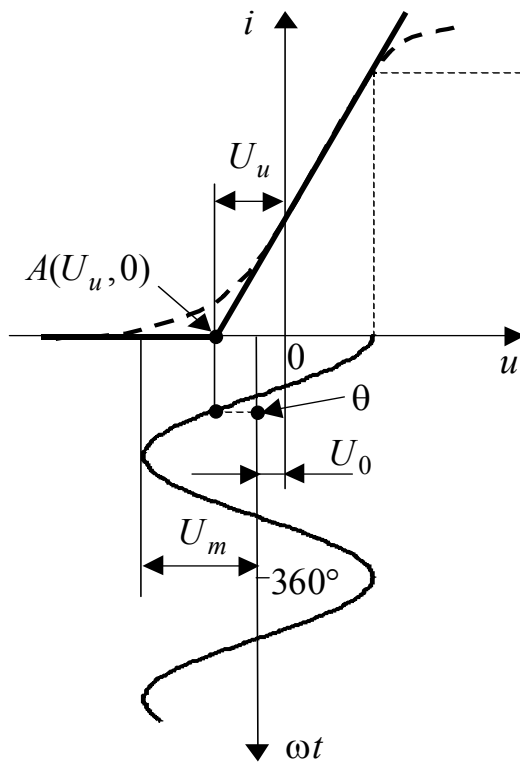
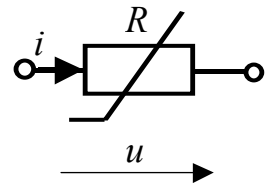


Рисунок 6.59 – Схема до завдання 34

7

Нелінійні кола

- ❑ Особливості теорії нелінійних кіл
- ❑ Характеристики і параметри нелінійних елементів
- ❑ Класифікація нелінійних елементів
- ❑ Диференціальні рівняння нелінійних кіл
- ❑ Нелінійні кола постійного струму
- ❑ Апроксимація характеристик нелінійних елементів
- ❑ Нелінійний активний опір при синусоїдній дії



$$\cos \theta = \frac{U_u - U_0}{U_m}$$

$$I_{\max} = S U_m (1 - \cos \theta)$$

$$\alpha_0 = \frac{I_0}{I_{\max}}; \quad \alpha_1 = \frac{I_{m1}}{I_{\max}}; \quad \dots \quad \alpha_k = \frac{I_{mk}}{I_{\max}}$$



Берг

7 НЕЛІНІЙНІ КОЛА

7.1 Особливості теорії нелінійних кіл

У першій частині підручника [7, підрозд. 1.5, 1.8, 1.9] вже згадувалося про нелінійні елементи і кола, а також про параметричні елементи і кола (слід підкреслити, що параметричні кола не є нелійними, а є лінійними колами зі змінними параметрами). Однак все подальше викладення стосувалося тільки лінійних кіл з постійними параметрами. В даному розділі розглядатимуться нелінійні елементи і кола.

Загалом задачі аналізу нелінійних і лінійних кіл збігаються, оскільки тут розглядаються способи здобуття та розв'язування системи розрахункових рівнянь. Ці рівняння ґрунтуються на **законх Кірхгофа, які чинні** як для лінійних, так і для **нелінійних кіл** (чинним залишається і баланс потужностей). Однак для нелінійних кіл складання системи рівнянь ускладнюється тим, що характеристики нелінійних елементів, як правило, задано таблицею чи графіком, отриманими експериментально. Складаючи рівняння кола, такі експериментальні характеристики необхідно апроксимувати, тобто приблизно подавати в аналітичній формі.

Здобуття розв'язку системи розрахункових рівнянь ускладнюється нелінійністю системи, що виключає застосування принципу суперпозиції, який широко використовують для лінійних кіл. Тому **для розрахунку нелінійних кіл не можна використовувати метод накладання** та інші методи, які базуються на цьому принципі (метод контурних струмів та ін.). Крім того, для нелінійних кіл рідко можна знайти точний аналітичний розв'язок системи рівнянь. Як правило, знаходять приблизний або чисельний розв'язок.

7.2 Характеристики і параметри нелінійних елементів

Нелійними називають такі пасивні елементи електричного кола, параметри яких залежать від напруги на елементі чи від струму в ньому. Існують нелінійні опори, індуктивності та ємності.

До нелінійних опорів належать електронні лампи, напівпровідникові діоди, транзистори, тиристори. Нелінійні індуктивності – це котушки з феромагнітним осердям. Нелінійну ємність мають конденсатори з сегнетодіелектричною ізоляцією (вариконди), а також напівпровідникові діоди – варактори.

Слід зазначити, що будь-який електричний елемент є нелійним. Наприклад, величина будь-якого опору змінюється із-за нагрівання струмом. Аналогічна залежність спостерігається від величини струму для індуктивності та від напруги – для ємності. З іншого боку, іноді можна вважати лінійними (у певних межах) навіть суттєво нелійними елементами, наприклад індуктивність котушки з феромагнітним осердям.

Електричне коло, яке разом з лінійними елементами має хоча б один нелінійний, називається нелінійним колом.

Властивості лінійних і нелінійних елементів електричного кола описуються їх статичними характеристиками, які мають вигляд функціональної залежності

$$y = f(x). \quad (7.1)$$

Функцію y можна розглядати як відгук на дію x .

Статичною характеристикою активного опору є вольт-амперна характеристика, тобто залежність між струмом і напругою в опорі:

$$i = \varphi_R(u) \quad \text{або} \quad u = f_R(i). \quad (7.2)$$

У першому випадку незалежною змінною (дією) є напруга u , залежною (відгуком) – струм i , в у другому – навпаки.

Для індуктивності статичною характеристикою є вебер-амперна (магнітна) характеристика – залежність між потокозчепленням Ψ і струмом i :

$$i = \varphi_L(\Psi) \quad \text{або} \quad \Psi = f_L(i). \quad (7.3)$$

Властивості ємності визначаються кулон-вольтною (електричною) характеристикою, яка є залежністю між електричним зарядом ємності q і напругою на ємності u :

$$q = \varphi_C(u) \quad \text{або} \quad u = f_C(q). \quad (7.4)$$

Так само, як для лінійних елементів, для нелінійних елементів можна розглядати параметри – опір, індуктивність та ємність. Але для нелінійних елементів є параметри двох видів – статичні та динамічні (диференціальні).

Статичним параметром елемента кола з огляду на формулу (7.1) називається відношення

$$p = \frac{y}{x}.$$

Динамічний параметр дорівнює похідній

$$p_d = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Динамічний параметр також називають крутістю S , оскільки p_d є крутістю статичної характеристики в даній точці.

$$\text{Залежність} \quad S = p_d = \frac{dy}{dx} = F(x)$$

є диференціальною характеристикою елемента кола.

Оскільки параметри лінійного елемента не залежать від дії x , статична характеристика є прямою, яка проходить через початок координат (рис.7.1, а), а диференціальна характеристика – це пряма, паралельна осі абсцис. Значення статичного і динамічного параметрів лінійного елемента збігаються:

$$p = p_d = \frac{m_y}{m_x} \operatorname{tg} \alpha,$$

де m_y та m_x – масштаби, в яких відкладено по координатних осях величини x та y , відповідно.

Навпаки, параметри нелінійного елемента залежать від режиму роботи, тобто від дії x . Характеристики нелінійного елемента мають той чи інший вигляд залежно від його типу.

В табл.7.1 наведені величини x та y , статичні та динамічні параметри нелінійних елементів, а також їхні графічні позначення.

На рис.7.1, б зображена статична характеристика деякого нелінійного опору.

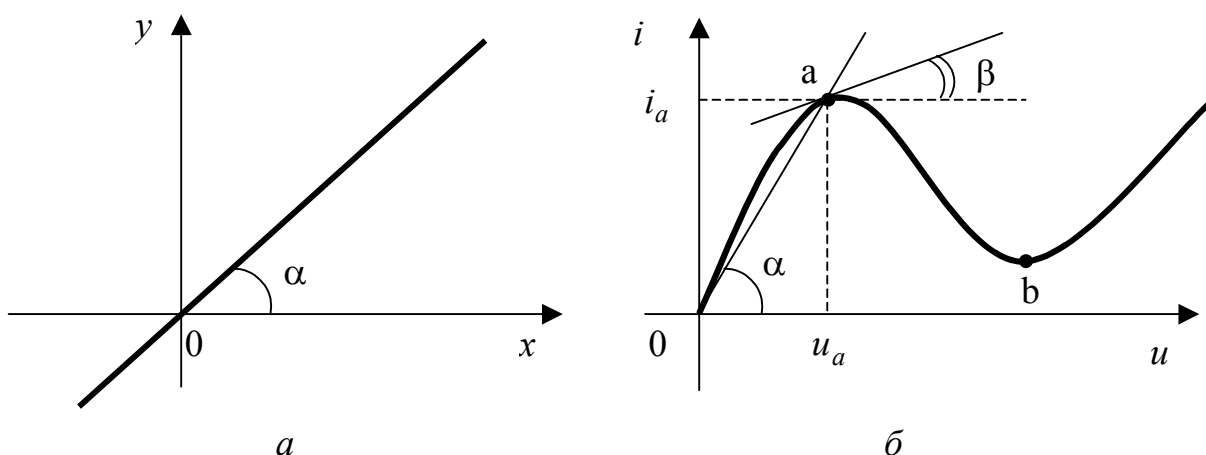


Рисунок 7.1 – Статичні характеристики:
 а – лінійного елемента; б – нелінійного опору

У довільній точці статичної характеристики статичний параметр пропорційний тангенсу кута нахилу прямої, проведеної із початку координат в цю точку. Наприклад, у точці a (рис.7.1, б) величина статичної провідності

$$G = \frac{i_a}{u_a} = \frac{m_i}{m_u} \operatorname{tg} \alpha,$$

де m_i та m_u – масштабні коефіцієнти графічного побудування по осях струму і напруги.

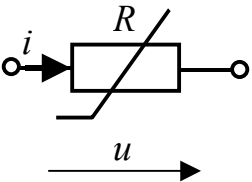
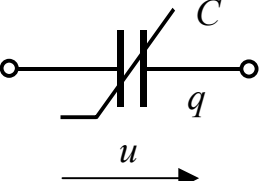
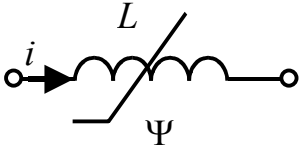
При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина G змінюється, але вона завжди додатна.

Динамічний параметр є пропорційним тангенсу кута між дотичною до кривої в даній точці та віссю абсцис:

$$G_d = \frac{di_a}{du_a} = \frac{m_i}{m_u} \operatorname{tg} \beta.$$

Якщо ВАХ нелінійного елемента є монотонно зростаючою, динамічний параметр в будь-якій точці більший за нуль. Але для деяких елементів, наприклад для тунельного діода, ВАХ містить спадаючу ділянку, як на рис.7.1, б. Тому на ділянках $0a$ та $b\infty$ параметр $G_d > 0$, а на ділянці ab $G_d < 0$.

Таблиця 7.1 – Параметри нелінійних елементів

Схеми	x	y	p	p_d
	u	i	Статична провідність $G = \frac{i}{u} = \frac{1}{R}$	Динамічна провідність (крутість) $G_d = S = \frac{di}{du} = \frac{1}{R_d}$
	u	q	Статична ємність $C = \frac{q}{u}$	Динамічна ємність $C_d = \frac{dq}{du}$
	i	Ψ	Статична індуктивність $L = \frac{\Psi}{i}$	Динамічна індуктивність $L_d = \frac{d\Psi}{di}$

Статичні параметри називають також параметрами постійного струму, оскільки їх зазвичай використовують, розглядаючи нелінійні кола постійного струму. Статична індуктивність і ємність визначають відповідно запас енергії в магнітному та електричному полі:

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi i = \frac{1}{2} L(i) i^2; \quad W_e = \frac{1}{2} q u = \frac{1}{2} C(u) u^2.$$

Динамічні параметри називають також параметрами змінного струму, оскільки їх використовують, розраховуючи змінні у часі процеси в нелінійних колах.

7.3 Класифікація нелінійних елементів

Крім поділу на нелінійні опори, індуктивності та ємності, нелінійні елементи класифікують на інерційні та безінерційні, а також на керовані та некеровані.

В **інерційних** елементах зміна струму чи напруги змінює стан елемента не миттєво, а з **витримкою у часі**. Наприклад, металева нитка накалу лампи розжарювання є нелінійним опором, величина якого залежить від прикладеної напруги. Чим вища напруга, тим більша потужність перетворюється в тепло, тим більший опір нитки накалу. Однак значення опору встановлюється не миттєво, а після певного часу, необхідного для досягнення усталеної температури нитки.

Інерційність нелінійних опорів обумовлюється не тільки тепловими процесами, а також запізненням перемагнічування, поляризації тощо.

Інерційність існує також в нелінійних індуктивностях та ємностях. Для індуктивності причинами інерційності є запізнення процесів перемагнічування або вихрові струми у феромагнітних матеріалах, а для ємності – затримка процесів поляризації сегнетодіелектриків¹.

Прикладом практично **безінерційного** нелінійного елемента є напівпровідниковий діод, властивості якого змінюються майже **миттєво** при змінюванні прикладеної напруги.

Властивості **некерованого** нелінійного елемента залежать тільки від струму в ньому або прикладеної напруги. Некерований елемент повністю визначається однією характеристикою: вольт-амперною – для опору, вебер-амперною – для індуктивності та кулон-вольтною – для ємності. Приклад некерованого нелінійного елемента – котушка з феромагнітним осердям.

Але, додавши на це осердя ще одну обмотку, яка живиться від іншого джерела, можна перетворити першу котушку в керовану нелінійну індуктивність, оскільки при даному значенні струму першої котушки її індуктивність залежатиме від керуючого струму другої котушки.

У **керованих** нелінійних елементах можна змінювати характеристику за рахунок керуючого параметра.

Оскільки в радіотехніці широко застосовують багато видів **нелінійних активних опорів**, які функціонують на різних фізичних принципах та мають різну конструкцію, доцільно розглянути їх класифікацію докладніше.

За виглядом характеристик опори поділяють на симетричні та несиметричні.

Симетричними називають такі опори, у яких $i(u) = -i(-u)$. Характеристика симетричного опору є непарною функцією, а його параметри залежать тільки від величини (і не залежать від знака) прикладеної напруги.

Прикладом симетричного опору є варистор, що має характеристику, зображену на рис.7.2, а. Варистори виготовляють з керамічних напівпровідників на основі карбіда кремнія.

У **несиметричному** опорі $i(u) \neq -i(-u)$. Наприклад у діода, вітки характеристик (рис.7.2, б) значно відрізняються при різній полярності прикладеної напруги: при “прямому” знаку напруги провідність значно більша, ніж при “зворотньому”. Характеристика діода в “прямому” напрямі має при малих напругах крутість, що збільшується, а при великих (у стані насичення) – таку, що зменшується.

Електрично **керованими** називають **нелінійні** опори (багатоелектродні радіолампи, транзистори, тиристоры, фоторезистори, фотодіоди), струм через які є функцією однієї чи кількох керуючих напруг (струмів). Так, струм колек-

¹ Сегнетодіелектриками називають речовини, діелектрична проникність яких є функцією електричного поля. Назва «сегнетодіелектрики» виникла тому, що вперше цю властивість було знайдено у кристалів сегнетової солі.

тора i_k транзистора залежить не тільки від напруги $u_{ке}$ між колектором і емітером, але й від струму бази $i_б$ (рис.7.3):

$$i_k = f(u_{ке}, i_б).$$

Керовані опори описуються сім'єю характеристик, а отже, сім'єю параметрів, визначаючи котрі беруть як незалежну змінну (дію) ту чи іншу напругу (струм). Так, використовуючи систему g -параметрів для біполярного транзистора, увімкненого за схемою зі спільним емітером, можна записати динамічні провідності:

$$g_{11} = \left. \frac{di_б}{du_б} \right|_{u_k=const} ; g_{12} = \left. \frac{di_б}{du_k} \right|_{u_б=const} ; g_{21} = \left. \frac{di_k}{du_б} \right|_{u_k=const} ; g_{22} = \left. \frac{di_k}{du_k} \right|_{u_б=const} .$$

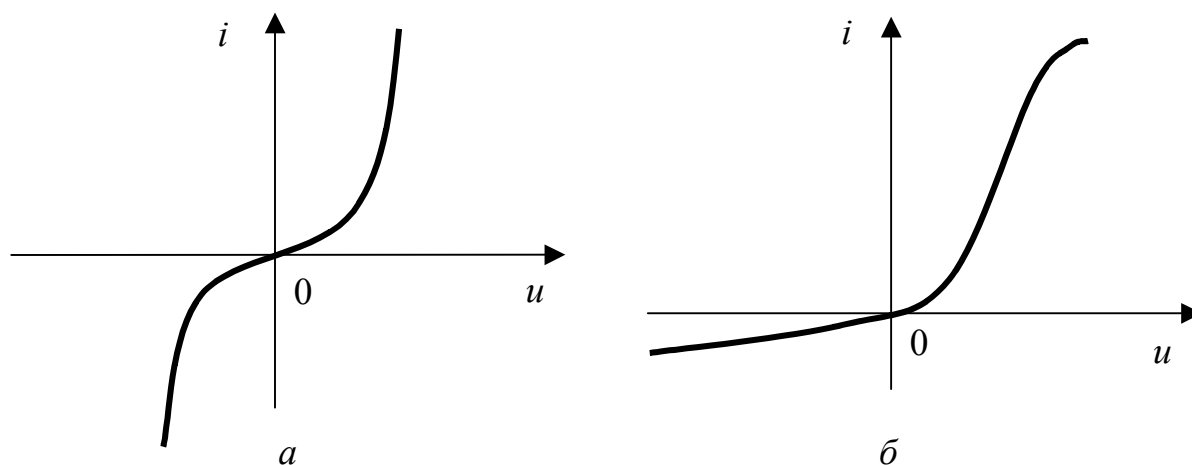


Рисунок 7.2 – Статичні характеристики нелінійних опорів

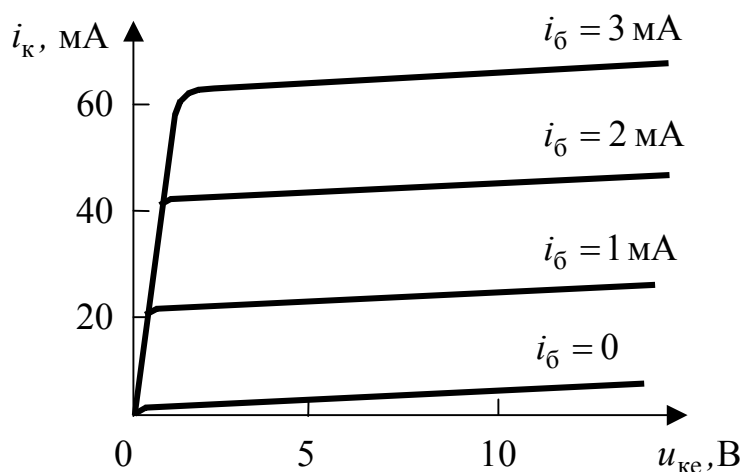


Рисунок 7.3 – Сім'я вихідних статичних характеристик біполярного транзистора в схемі із спільним емітером

Більшість нелінійних опорів можна вважати практично безінерційними. До **інерційних опорів**, крім розглянутої вище лампи розжарювання, належать так звані **терморезистори** (термістори), які бувають двох видів: напівпровідникові та металеві. У перших опір зменшується із збільшенням температури, у других – навпаки. Приклад металевого термістора – це **баретер**, котрий конструктивно виконують у вигляді сталеві спіралі, розміщеної у скляному посуді, заповненому воднем під певним тиском.

Якщо ВАХ елемента має ділянку з від’ємною крутістю (*ab* на рис.7.1, б), то цей елемент має **від’ємний опір**. Двополюсники, котрі мають характеристики, подібні до зображеної на рис.7.1, б, широко використовують в генераторах коливань різної частоти і форми.

Загалом, нелінійні опори надають електричним колам властивості, принципово недосяжні в лінійних колах, наприклад, за їх допомогою здійснюють стабілізацію струму, стабілізацію напруги, підсилення постійної напруги тощо.

7.4 Диференціальні рівняння нелінійних кіл

Щоб отримати систему рівнянь, яка визначає процеси в нелінійних колах, використовують закони Кірхгофа. При цьому справедливі всі правила визначення кількості вузлів і контурів, сформульовані для лінійних кіл.

Методику отримання диференціального рівняння доцільно розглянути на прикладі нелінійного кола з послідовним (рис.7.4, а) та паралельним (рис.7.4, б) з’єднанням нелінійних елементів.

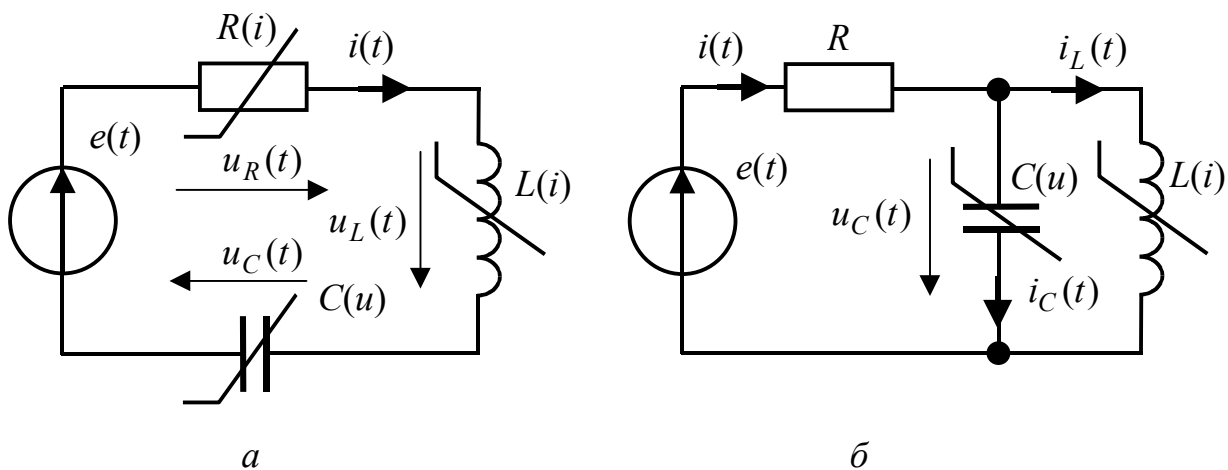


Рисунок 7.4 – Схеми нелінійних кіл

Застосувавши другий закон Кірхгофа для кола (рис.7.4, а), можна записати:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t). \quad (7.5)$$

Якщо вирази (7.2), (7.4), а також співвідношення

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(i)}{dt} = \frac{d\Psi}{di} \frac{di}{dt}$$

підставити до рівняння (7.5), останнє матиме вигляд:

$$f_R(i) + \frac{d\Psi}{di} \frac{di}{dt} + f_C(q) = e(t). \quad (7.6)$$

Оскільки $i(t) = \frac{dq}{dt}$, диференціювання (7.6) за часом дозволяє ввести до рівняння струм:

$$\frac{df_R}{di} \frac{di}{dt} + \frac{d^2\Psi}{di^2} \left(\frac{di}{dt} \right)^2 + \frac{d\Psi}{di} \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{df_C}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{de}{dt},$$

і після перетворення отримати диференціальне рівняння відносно струму:

$$\frac{d\Psi}{di} \frac{d^2i}{dt^2} + \left[\frac{df_R}{di} + \frac{d^2\Psi}{di^2} \frac{di}{dt} \right] \frac{di}{dt} + \frac{df_C}{dq} i(t) = \frac{de}{dt}. \quad (7.7)$$

Оскільки

$$\frac{d\Psi}{di} = L_d(i); \quad \frac{d^2\Psi}{di^2} = \frac{L_d(i)}{di}; \quad \frac{df_R}{di} = R_d(i); \quad \frac{df_C}{dq} = \frac{1}{C_d(u_C)},$$

де $R_d(i)$, $L_d(i)$, $C_d(u_C)$ – відповідно динамічний опір, індуктивність та ємність, то диференціальне рівняння для струму можна записати у вигляді:

$$L_d \frac{d^2i}{dt^2} + \left[R_d + \frac{dL_d}{di} \frac{di}{dt} \right] \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_d} i(t) = \frac{de}{dt}. \quad (7.8)$$

Як у формі (7.7), так і у вигляді (7.8), диференціальне рівняння нелінійне. У вигляді (7.7) нелінійні коефіцієнти визначаються характеристиками елементів, а у вигляді (7.8) – динамічними параметрами елементів.

Застосувавши закони Кірхгофа до кола з лінійним опором R і паралельним з'єднанням нелінійних L і C (рис.7.4, б), можна записати:

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t); \quad (7.9)$$

$$Ri(t) + \frac{d\Psi(i_L)}{dt} = e(t); \quad (7.10)$$

$$\frac{d\Psi(i_L)}{dt} - u_C(t) = 0. \quad (7.11)$$

Оскільки $i_C(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \frac{du_C}{dt}$, з урахуванням виразу (7.11) виходить:

$$i_C(t) = \frac{dq}{du_C} \frac{d^2\Psi(i_L)}{dt^2} = \frac{dq}{du_C} \left[\frac{d^2\Psi(i_L)}{di_L^2} \left(\frac{di_L}{dt} \right)^2 + \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \frac{d^2i_L}{dt^2} \right].$$

Підстановка останнього співвідношення до виразу (7.9) призводить до рівняння:

$$i(t) = i_L(t) + \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d^2\Psi(i_L)}{di_L^2} \frac{di_L}{dt} \right) \frac{di_L}{dt} + \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \right) \frac{d^2i_L}{dt^2}. \quad (7.12)$$

Підставивши вираз (7.12) до (7.10), а також враховуючи, що

$$\frac{d\Psi(i_L)}{dt} = \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \frac{di_L}{dt},$$

можна знайти нелінійне диференціальне рівняння відносно струму i_L :

$$R \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \right) \frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[R \left(\frac{dq}{du_C} \frac{d^2\Psi(i_L)}{di_L^2} \frac{di_L}{dt} \right) + \frac{d\Psi(i_L)}{di_L} \right] \frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = e(t), \quad (7.13)$$

або, використовуючи динамічні параметри нелінійних елементів:

$$RC_d L_d \frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(RC_d \frac{dL_d}{di_L} \frac{di_L}{dt} + L_d \right) \frac{di_L}{dt} + Ri_L(t) = e(t). \quad (7.14)$$

Аналіз розглянутих у даному підрозділі прикладів дозволяє зробити такі висновки:

1. За однакової конфігурації схеми порядок диференціального рівняння кола з нелінійними елементами буде такий самий, як і лінійного кола (вище визначалися рівняння другого порядку).
2. Диференціальне рівняння можна записати у двох формах – за допомогою нелінійних характеристик (7.2) – (7.4) або через динамічні параметри.
3. Нелінійні коефіцієнти диференціального рівняння залежать від того, який аналітичний вигляд мають характеристики нелінійних елементів.

7.5 Нелінійні кола постійного струму

Принципи аналізу стаціонарного режиму нелінійного кола постійного струму доцільно розглянути на прикладі простих схем з послідовним (рис.7.5, а) та паралельним (рис.7.5, б) з'єднанням нелінійних опорів.

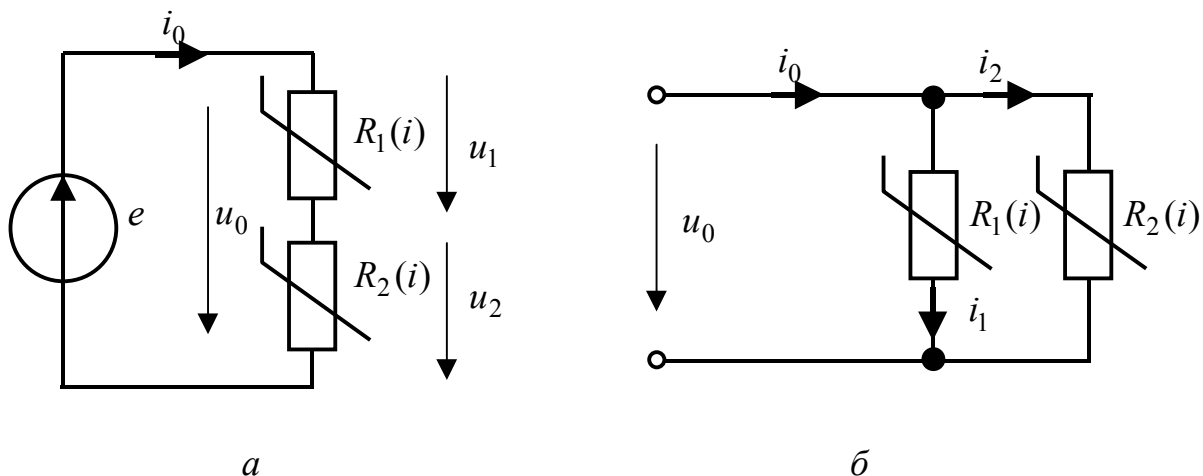


Рисунок 7.5 – Схеми кіл з послідовним і паралельним з'єднанням нелінійних опорів

Напруги та струми позначено в даному підрозділі малими літерами, оскільки цей матеріал справедливий не тільки для постійного струму, але й для миттєвих значень змінного струму.

Нехай відомо значення прикладеної ЕРС e та ВАХ нелінійних опорів (рис.7.6, а):

$$i = \varphi_1(u); \quad (7.15)$$

$$i = \varphi_2(u). \quad (7.16)$$

Рівняння кола за другим законом Кірхгофа можна записати у вигляді:

$$e = u_1 + u_2 \quad (7.17)$$

або

$$e = R_1(i_0)i_0 + R_2(i_0)i_0,$$

де $R_1(i_0)$, $R_2(i_0)$ – статичні опори елементів, які є функціями струму i_0 .

З останнього рівняння виходить, що

$$i_0 = \frac{e}{R_1(i_0) + R_2(i_0)}. \quad (7.18)$$

Визначення струму за формулою (7.18), яка фактично є законом Ома, ускладнене тим, що опори $R_1(i_0)$ та $R_2(i_0)$ є функціями струму, і задача зводиться до розв'язання нелінійного диференціального рівняння. Крім того, як правило, точні аналітичні вирази ВАХ нелінійних опорів невідомі, а тільки апроксимуються з деякою точністю.

Якщо ВАХ елементів задано графічно (рис.7.6, а), режим кола розраховують у такий спосіб.

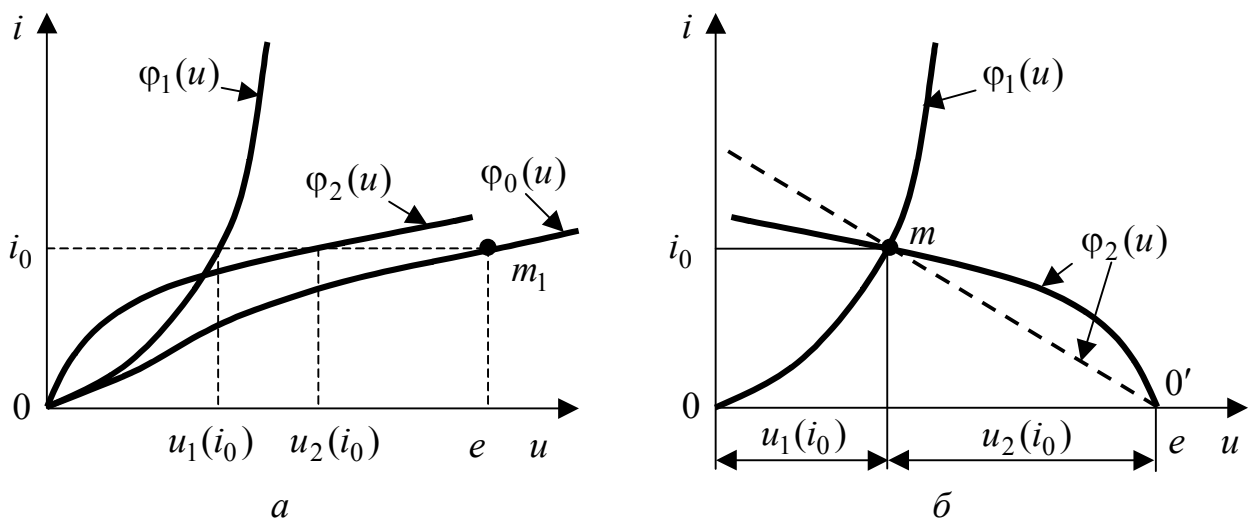


Рисунок 7.6 – Графічний розрахунок кола послідовно з'єднаних нелінійних опорів

Обидві характеристики будують в одній системі координат (i, u) , але для однієї ВАХ $i = \varphi_1(u)$ початком координат є точка 0 і напругу відкладають **вправо** від цієї точки. Для іншої ВАХ $i = \varphi_2(u)$ початком координат є точка $0'$

осі абсцис, де $u = e$, і значення напруг відкладають **вліво** від цієї точки (рис.7.6, б). Криві перетинаються в точці m , котра і визначає режим кола.

Дійсно, в цій точці струм i_0 , спільний для двох опорів, задовольняє рівнянням (7.15) і (7.16), а напруги $u_1(i_0)$ та $u_2(i_0)$ – рівнянню (7.17).

Для окремого випадку, коли один з опорів, наприклад R_2 , лінійний, його ВАХ будують як пряму (на рис.7.6, б позначена пунктиром), проведену з точки $0'$ під кутом, пропорційним опорі R_2 .

Зазначимо, що струм i_0 можна знайти інакше, підсумовуючи, згідно з рівністю (7.17), величини u_1 та u_2 при кожному значенні струму i , тобто додаючи графіки $i = \varphi_1(u)$ та $i = \varphi_2(u)$ за напругою. Точка m_1 перетину сумарної ВАХ $i = \varphi_0(u)$ з вертикаллю, проведену з точки e на осі абсцис, і визначатиме шуканий струм i_0 (рис.7.6, а).

Аналогічно розв'язують задачу розрахунку паралельного кола (рис.7.5, б). Згідно з першим законом Кірхгофа

$$i_0 = i_1 + i_2.$$

Якщо заданий загальний струм i_0 , а слід знайти загальну напругу u_0 і струми віток i_1 та i_2 , на одному графіку будують ВАХ елементів $u = f_1(i)$ та $u = f_2(i)$, причому для однієї з характеристик початком координат є точка $i = i_0$ (рис.7.7, а). Точка n перетину двох ВАХ визначає величини u_0, i_1, i_2 .

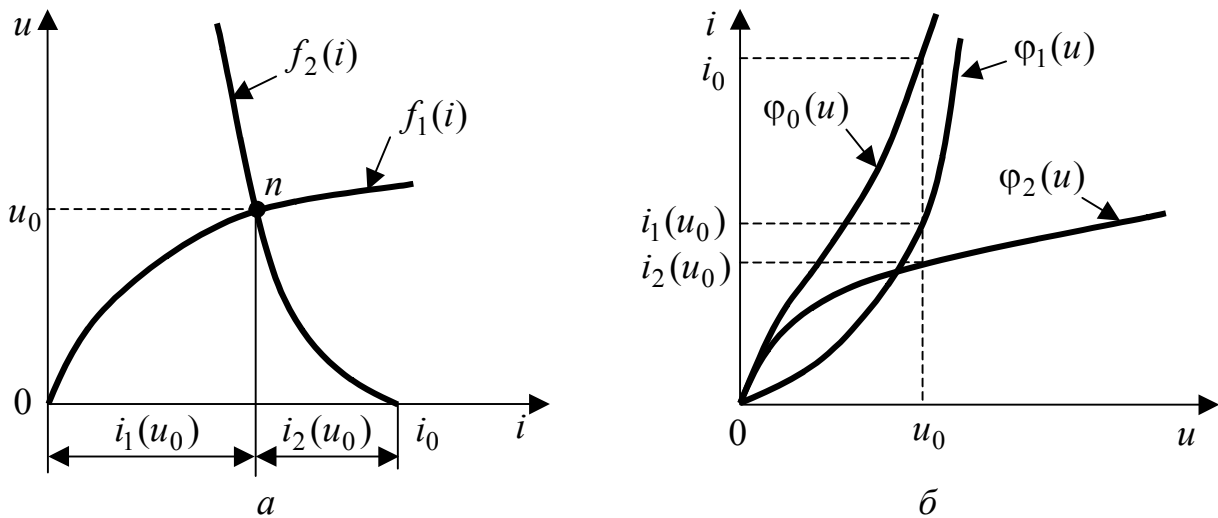


Рисунок 7.7 – Графічний розрахунок кола паралельно з'єднаних нелінійних опорів

Якщо задано напругу u_0 , доцільніше побудувати характеристики (рис.7.7, б) $i = \varphi_1(u)$ та $i = \varphi_2(u)$. Ординати цих ВАХ для заданого значення u_0 визначають струми $i_1(u_0)$ та $i_2(u_0)$, а сума цих ординат – загальний струм i_0 . На рис.7.7, б сумарну ВАХ позначено $i = \varphi_0(u)$.

Приклад 7.1. Схема кола постійного струму з нелінійним опором R_3 зображена на рис.7.8, а. Параметри кола: $E = 1,5$ В, $R_1 = 33$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. ВАХ нелінійного елемента $R_3(i)$ наведена в табл.7.2. Розрахувати струми усіх віток графічним методом.

Таблиця 7.2 – ВАХ нелінійного елемента

u , В	0	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
i , мА	0	0	2	6	13	25	80	135

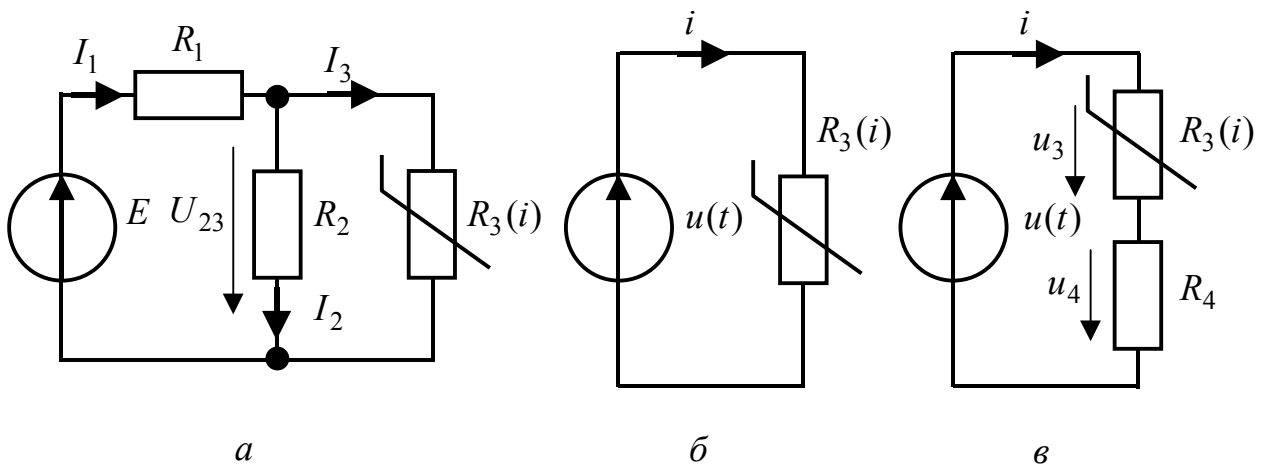


Рисунок 7.8 – Схеми нелінійних кіл з мішаним і послідовним з'єднанням опорів

Розв'язання.

1. Будуємо ВАХ нелінійного опору $i_3(u)$ за даними табл.7.2 і ВАХ лінійного опору $i_2(u) = \frac{u}{R_2}$ (рис.7.9). Пряма $i_2(u)$ проходить через початок координат. Другу точку для її побудови візьмемо таку: $i_2(1) = 1/20 = 0,05$ А.

2. Підсумовуючи ці характеристики, знаходимо $i_{23}(u)$ – ВАХ еквівалентного нелінійного опору, утвореного лінійним опором R_2 та нелінійним $R_3(i)$.

3. Будуємо ВАХ $i_1(u)$ лінійного опору R_1 як пряму (на рис.7.9 позначена пунктиром), проведену з точки $u = E$ під кутом, пропорційним опором R_2 , причому значення напруг відкладаємо вліво від цієї точки. Рівняння цієї ВАХ має вигляд:

$$i_1(u) = -\frac{1}{R_1}(u - E) = \frac{E - u}{R_1}.$$

Щоб побудувати цю пряму, знайдемо значення

$$i_1(0) = (1,5 - 0) / 33 = 0,0454 \text{ A.}$$

4. ВАХ $i_1(u)$ та $i_{23}(u)$ перетинаються в точці m , котра і визначає режим кола: $U_{23} \approx 0,53 \text{ В}$; $I_1 \approx 30 \text{ мА}$; $I_2 \approx 27 \text{ мА}$; $I_3 \approx 3 \text{ мА}$.

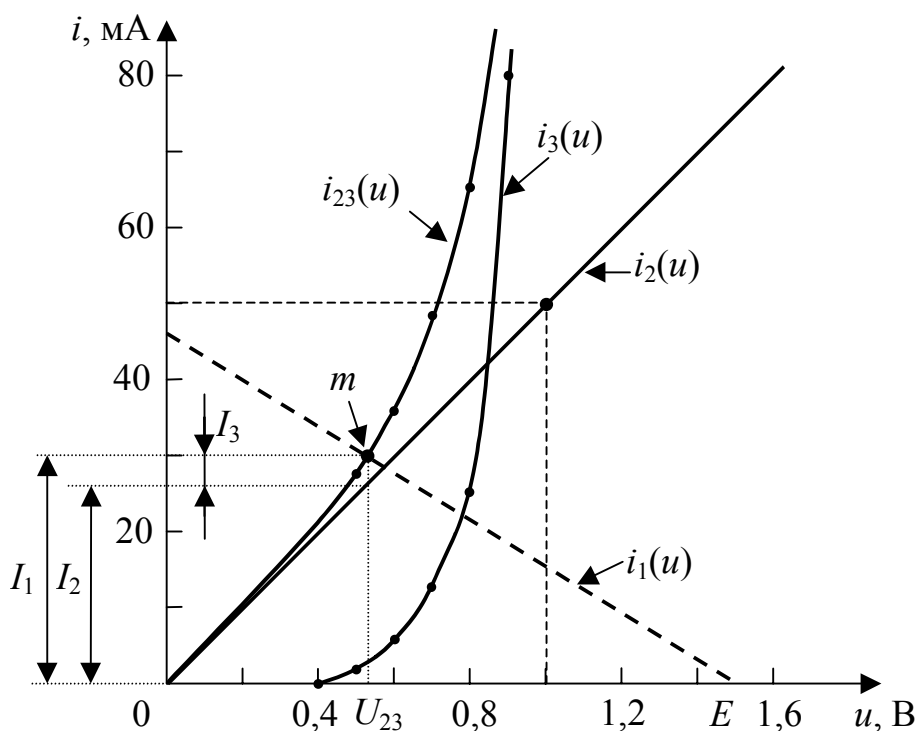


Рисунок 7.9 – Графічний розрахунок кола у прикладі 7.1

7.6 Апроксимація характеристик нелінійних елементів

Зазвичай характеристика $y = f(x)$ нелінійного елемента визначається не теоретично, а експериментально і тому задається графіком чи таблицею. Але для аналізу кола ці характеристики мають бути подані в аналітичній формі. Зрозуміло, що аналітична залежність лише приблизно визначає фактичну форму характеристики, хоча наближення може бути як завгодно точним. Приблизне подання нелінійної характеристики називають **апроксимацією**.

Вибір способу апроксимації безпосередньо не пов'язаний з фізичною природою елемента; цей спосіб обумовлюється формою нелінійної характеристики та розрахунковими міркуваннями.

Якщо дія на елемент не виходить за певні межі (наприклад, $x_1 \dots x_2$ на рис.7.10, б), апроксимуюча функція має апроксимувати тільки так звану робочу ділянку характеристики, тобто ділянку, в межах якої може переміщуватися робоча точка (MN на рис.7.10). Чим менша робоча ділянка кривої, тим простішою може бути апроксимуюча функція.

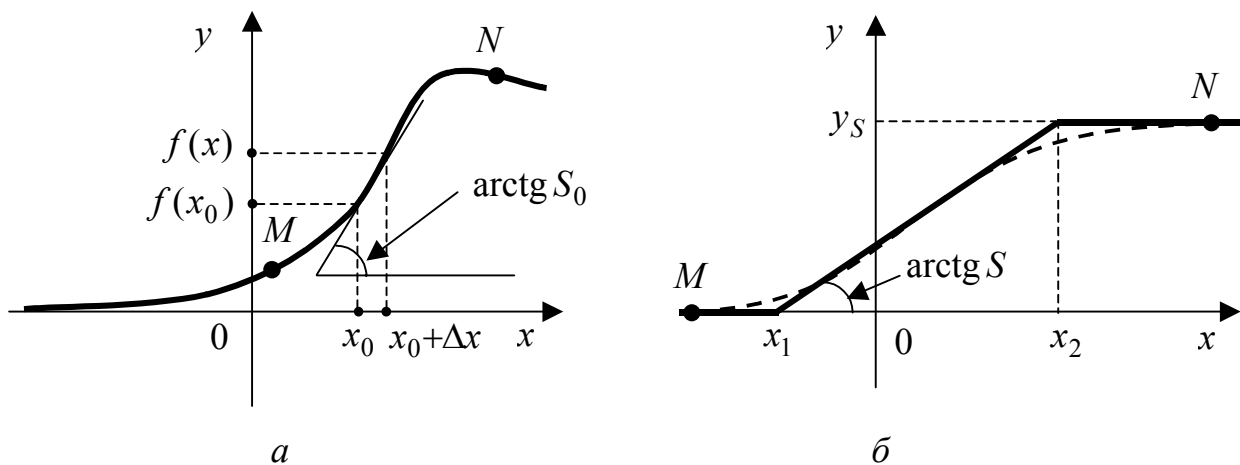


Рисунок 7.10 – Апроксимація характеристик нелінійних елементів

Існує багато різних методів апроксимації характеристик нелінійних елементів. До найрасповсюдженіших методів належать апроксимація степеневим поліномом та кусково-лінійна (метод А.І. Берга²).

Нехай до нелінійного елемента прикладена постійна дія x_0 (рис.7.10), так зване “зміщення”. Тоді $y_0 = f(x_0)$ – значення функції в точці x_0 .

Змінюючи x_0 на Δx , функцію y можна розвинути в ряд Тейлора і записати:

$$y = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)\Delta x^3 + \dots, \quad (7.19)$$

де $f'(x_0) = S_0$ (крутість), $f''(x_0), \dots$ – значення похідних функції $f(x)$ в точці $x = x_0$.

Оскільки $\Delta x = x - x_0$, вираз (7.19) можна записати так:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots. \quad (7.20)$$

Формула (7.20) є аналітичним виразом характеристики нелінійного елемента у вигляді степеневого ряду. Якщо обмежитись деяким числом n доданків, отриманий **поліном n -го степеня** буде приблизно апроксимувати цю характеристику:

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k. \quad (7.21)$$

Коефіцієнти a_k не обов'язково мають бути пропорційними похідним функції в точці x_0 . Коефіцієнти a_k підбирають так, щоб апроксимуючий

² **Берг Аксель Іванович** (1893–1979) – російський вчений у галузі радіоелектроніки та кібернетики, академік (1946), інженер-адмірал (1955), Герой Соціалістичної Праці (1963). Основні праці присвячені розробці теорій і методів проектування та розрахунку приймально-передавальних пристроїв, стабілізації частоти генераторів, питанням радіопеленгування і радіолокації. Автор багатьох підручників з радіотехніки.

поліном (7.21) найкраще відображав робочу ділянку характеристики, а число n було мінімально можливим.

Інший метод апроксимації – кусково-лінійний – ґрунтується на тому, що характеристика $y = f(x)$ поділяється на кілька (у найпростішому випадку – на дві чи три) ділянок, які наближено вважаються прямими. Для характеристики, показаної як приклад на рис.7.10, б, вираз для апроксимуючої функції матиме вигляд:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ S(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2; \\ y_S, & x > x_2, \end{cases} \quad (7.22)$$

де $S = y_S / (x_2 - x_1)$ – крутість ділянки функції між точками x_1, x_2 .

Використовувати кусково-лінійну апроксимацію доцільно, якщо робоча ділянка охоплює значну частину характеристики (наприклад, MN на рис.7.10, б). Застосування степеневого полінома в цьому випадку ускладнюється тим, що для забезпечення апроксимації із заданою точністю необхідне велике значення n .

Залежно від вигляду нелінійної характеристики, застосовують також інші методи апроксимації, зокрема, степеневою, показниковою або логарифмічною функціями, але ці методи менш поширені.

7.7 Нелінійний активний опір при синусоїдній дії

Нехай до нелінійного опору $R(i)$ прикладено напругу

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t. \quad (7.23)$$

На рис.7.11 зображена ВАХ опору і показана побудова кривої струму $i(t)$ через цей опір. Внаслідок нелінійності характеристики форма струму відрізняється від косинусоїдної. Функцію $i(t)$ можна подати рядом Фур'є:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t - \psi_k), \quad (7.24)$$

де I_0 – постійна складова струму; I_{mk} ; ψ_k – амплітуди та початкові фази гармонічних складових, причому

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i(\omega t) d\omega t; \quad I_{mk} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i(\omega t) \cos(k\omega t) d\omega t. \quad (7.25)$$

Поява у складі струму вищих ($k \geq 2$) гармонік обумовлена нелінійністю ВАХ. Отже, нелінійні елементи, загалом, і нелінійні опори, зокрема, мають властивість перетворення частоти, оскільки функція відгуку містить коливання з новими частотами, яких немає у складі функції дії. Цим нелінійні кола принципово відрізняються від лінійних, в яких виникнення вищих гармонік неможливе.

В радіотехніці нелінійні перетворення використовують для генерування коливань складної форми, множення частоти тощо.

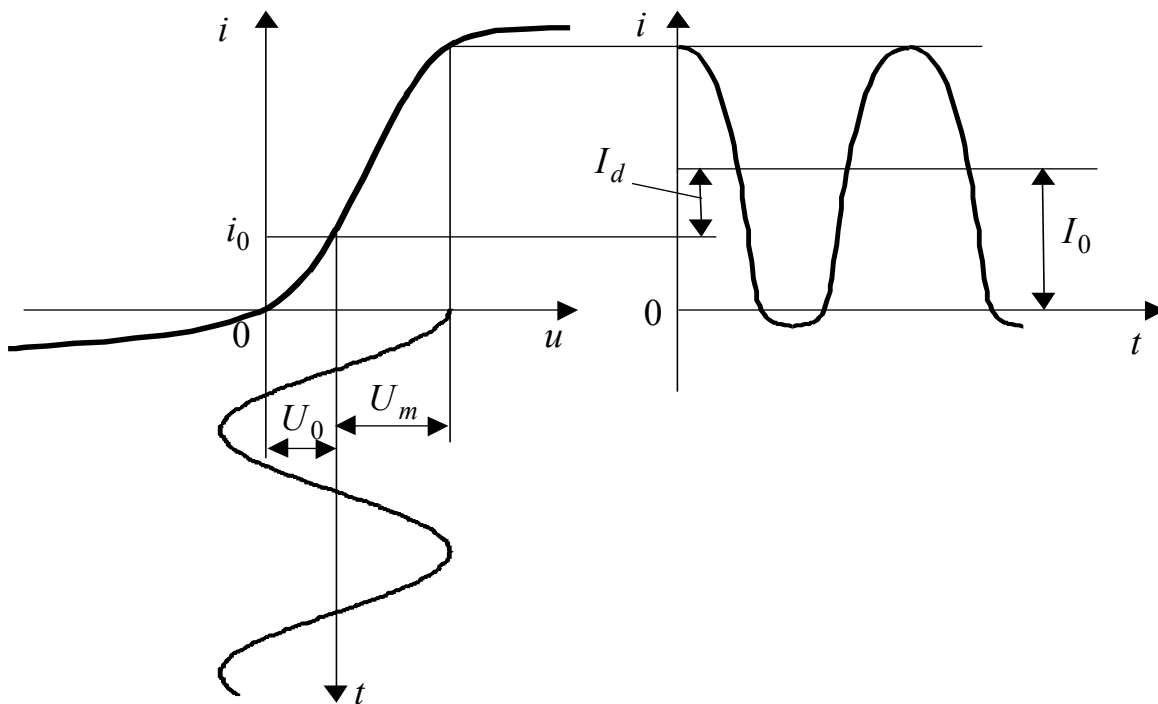


Рисунок 7.11 – Режим великих коливань

Розрахунок складових струму $i(t)$ при заданих величинах амплітуди змінної напруги U_m та постійного зміщення U_0 виконують різними способами, залежно від методу апроксимації нелінійної характеристики.

1. Якщо ВАХ нелінійного опору можна апроксимувати степеневим поліномом (7.21), тоді поблизу точки $u_0 = U_0$

$$i = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (u - u_0)^k . \quad (7.26)$$

У виразі (7.26)

$$a_0 = i_0 = u_0 / R(u_0) ,$$

де i_0 – так званий струм спокою, тобто струм, який проходить через нелінійний елемент, коли на нього діє тільки постійна напруга u_0 (рис.7.11); $R(u_0)$ – статичній опір при $u = u_0$.

Коефіцієнт $a_1 = S_0 = 1 / R_d(u_0)$ дорівнює крутості у вихідній точці.

Оскільки у нашому випадку $u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t$ і розвинення в ряд проведене відносно напруги, яка дорівнює зміщенню ($u_0 = U_0$), миттєве значення струму становитиме:

$$i = i_0 + S_0 U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t + \dots + a_n U_m^n \cos^n \omega t = i_0 + \sum_{k=1}^n a_k U_m^k \cos^k \omega t . \quad (7.27)$$

У разі так званих **малих коливань**, коли змінна напруга настільки мала, що робочу ділянку характеристики можна вважати прямою (ab на рис.7.12), членами полінома (7.27) другого і вищих степенів можна знехтувати:

$$i \approx i_0 + S_0 U_m \cos \omega t .$$

При цьому постійна складова I_0 у виразі (7.24) дорівнює струму спокою $I_0 = i_0$ як у статичному (за відсутності змінної напруги), так і у динамічному режимах, тобто в обох режимах через опір проходить однаковий постійний струм.

Оскільки $i_0 = u_0 / R(u_0)$, то $I_0 = U_0 / R(U_0)$ і тому статичний опір називають опором постійному струму.

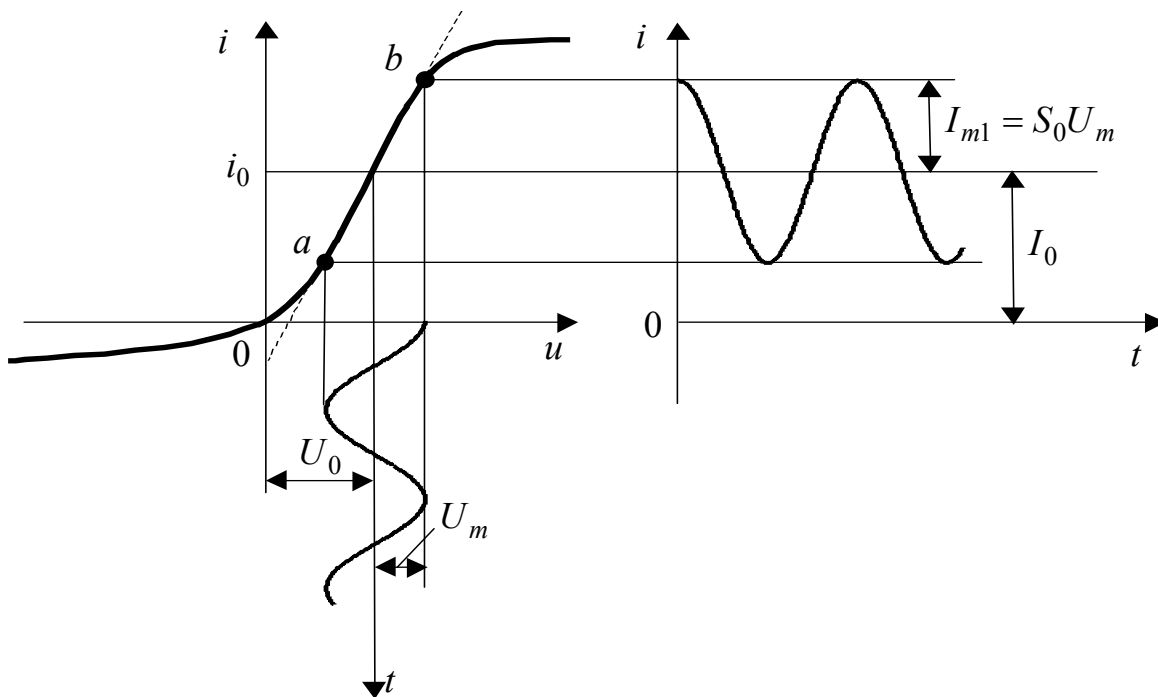


Рисунок 7.12 – Режим малих коливань

Оскільки амплітуда струму основної частоти (першої гармоніки), позначена у формулі (7.24) як I_{m1} , становить:

$$I_{m1} = S_0 U_m = U_m / R_d(U_0),$$

то динамічний опір називають опором змінному струму.

В режимі малих коливань величина I_{m1} від зміщення U_0 не залежить.

В режимі **великих коливань** (рис.7.11) складовими вищих степенів ряду (7.27) нехтувати не можна, а отже, форма струму відрізнятиметься від синусоїдальної. Щоб визначити амплітуди гармонічних складових струму, користуються відомими тригонометричними формулами кратних аргументів.

На відміну від режиму малих коливань, режим великих коливань має такі особливості:

– постійна складова I_0 не дорівнює струму спокою i_0 . Загалом величина I_0 може бути як менше, так і більше i_0 . Різниця величин $I_d = |I_0 - i_0|$ залежить за інших однакових умов від амплітуди змінної напруги U_m , і тому дозволяє виявляти (детектувати) цю напругу;

– між амплітудами першої гармоніки струму і прикладеної напруги немає лінійної залежності.

Наведений аналіз використання даного методу апроксимації показує, що при заданій дії характер і величина продуктів нелінійності визначаються коефіцієнтами розкладання a_1, a_2, \dots, a_k , які у свою чергу залежать від напруги зміщення $U_0 = u_0$. Отже, зміна U_0 призводить до зміни характеру відгуку нелінійного кола, хоча сам нелінійний елемент залишається тим самим.

2. Якщо ВАХ нелінійного опору можна апроксимувати двома прямолінійними відрізками за формулою (7.22):

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_u; \\ S(u - U_u), & u \geq U_u, \end{cases} \quad (7.28)$$

зручніше користуватися методом А.І. Берга, згідно з яким розрахунок відгуку нелінійного елемента визначається єдиним параметром – абсцисою точки переходу $A(U_u, 0)$ між апроксимуючими відрізками (рис.7.13).

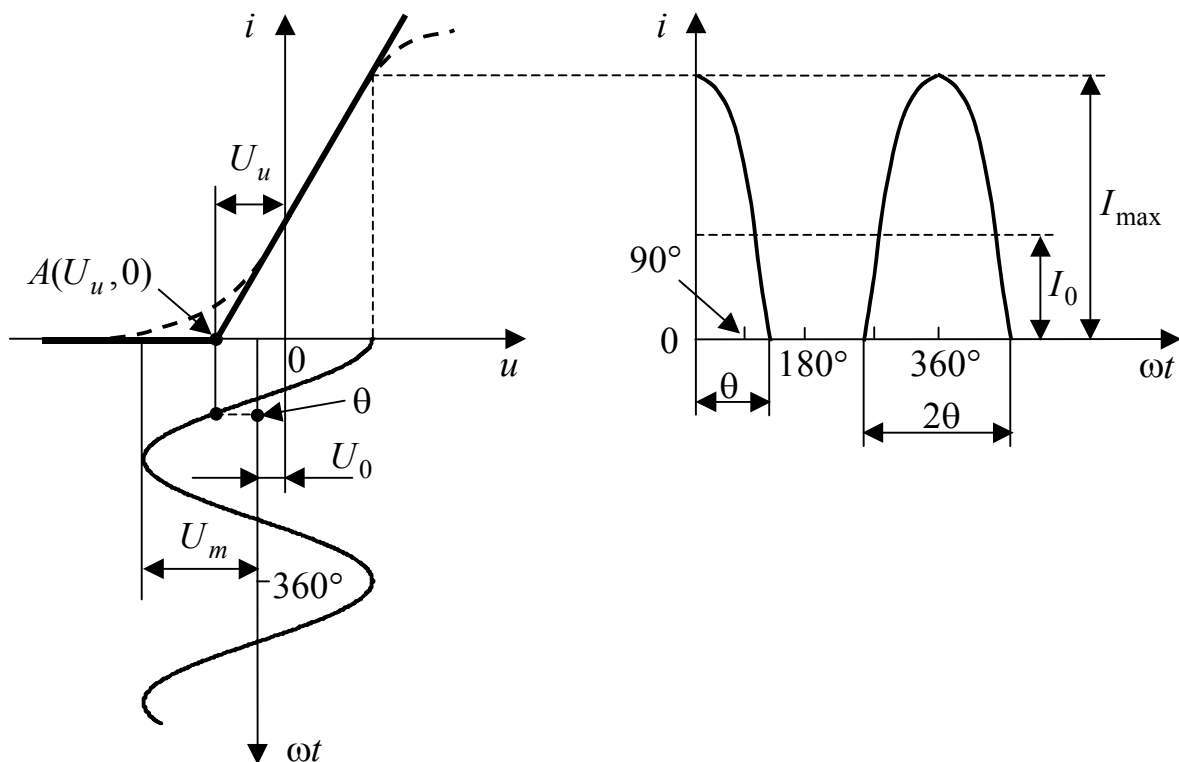


Рисунок 7.13 – До розрахунку відгуку за методом А.І. Берга

На рис.7.13 побудована крива миттєвих значень струму через нелінійний опір. При заданих значеннях U_0 та U_m струм матиме форму імпульсів, які є

“відсіченими” відрізками косинусоїди. Якщо виразити тривалість імпульсів у градусах, тоді кут відсікання θ – це половина тривалості імпульсу струму. Очевидно, що θ змінюється в межах: $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

При заданій апроксимації ВАХ (7.28), можна обмежитись розглядом області характеристики правіше точки A . Якщо підставити миттєве значення напруги (7.23) до виразу (7.28) при $u \geq U_u$, миттєве значення струму

$$i(t) = S(U_m \cos \omega t + U_0 - U_u). \quad (7.29)$$

Згідно з визначенням кута відсікання при $\omega t = \theta$ струм $i = 0$:

$$0 = S(U_m \cos \theta + U_0 - U_u), \quad (7.30)$$

звідки

$$\cos \theta = \frac{U_u - U_0}{U_m}. \quad (7.31)$$

Параметр ВАХ нелінійного опору U_u може бути додатним, від’ємним або нульовим залежно від властивостей нелінійного елемента.

Враховуючи вираз (7.31), миттєве значення струму (7.29) становитиме:

$$i(t) = S(U_m \cos \omega t - U_m \cos \theta) = SU_m (\cos \omega t - \cos \theta). \quad (7.32)$$

Тоді за формулами (7.25) постійна складова і амплітуди гармонічних складових струму дорівнюватимуть:

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi_0}^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta);$$

$$I_{m1} = \frac{2}{\pi} \int_{\pi_0}^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos \omega t d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta);$$

$$I_{mk} = \frac{2}{\pi} \int_{\pi_0}^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos(k\omega t) d\omega t = \frac{2SU_m}{\pi} \frac{\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{k(k^2 - 1)}, \quad k > 1.$$

Максимальне значення струму можна знайти з виразу (7.32) за умови $\omega t = 0$:

$$I_{\max} = SU_m (1 - \cos \theta). \quad (7.33)$$

Використовуючи співвідношення (7.33), обчислюють нормовані значення струму, або коефіцієнти Берга:

$$\alpha_0 = \frac{I_0}{I_{\max}}; \quad \alpha_1 = \frac{I_{m1}}{I_{\max}}; \quad \dots \quad \alpha_k = \frac{I_{mk}}{I_{\max}}, \quad (7.34)$$

які залежать (для даної гармоніки) тільки від кута відсікання.

Знаючи коефіцієнти α_k , можна одразу визначати амплітуди гармонік струму. На рис.7.14 як приклад показані графіки коефіцієнтів Берга.

Режими роботи нелінійного кола класифікують за величиною кута відсікання. Режим класу A буде, якщо $\theta = \pi$. При цьому струм містить тільки постійну складову і коливання основної частоти – подібно до розглянутого вище випадку малих коливань. Інші режими розділяють так: клас AB відповідає $\pi/2 < \theta < \pi$; для класу B значення $\theta = \pi/2$; для класу C – $\theta < \pi/2$.

Отже, метод Берга дозволяє виразити всі величини, що характеризують режим кола, через кут відсікання, величина якого (при заданій амплітуді дії U_m) визначається зміщенням U_0 . Тобто, варіація кута θ відповідає описаній у попередньому методі зміні виду нелінійності кола за рахунок вибору U_0 .

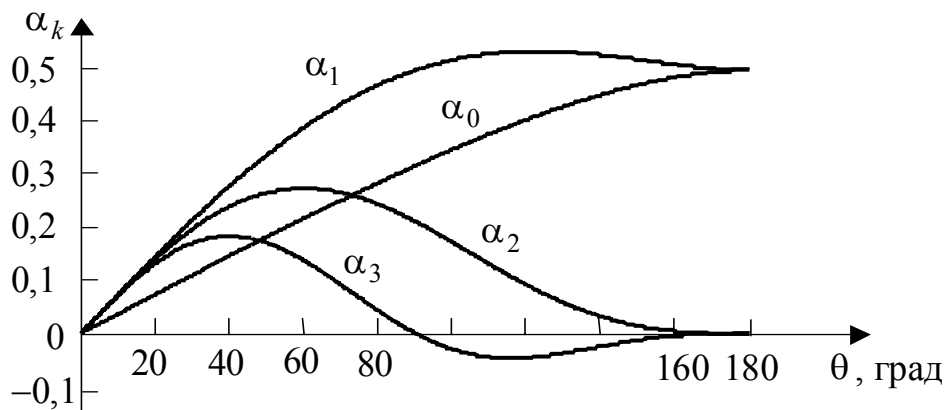


Рисунок 7.14 – Графіки коефіцієнтів А.І. Берга

Існують також інші методи розрахунку нелінійного кола при синусоїдній дії, наприклад, квазілінійний. Відомо, що з усіх гармонічних складових відгуку найбільшу величину зазвичай має перша гармоніка, яка використовується в різних пристроях, наприклад, у генераторах синусоїдної напруги. Тому суттю квазілінійного методу є встановлення зв'язку між амплітудою першої гармоніки струму I_{m1} з амплітудою синусоїдної дії U_m за допомогою так званої коливальної характеристики $I_{m1}(U_m)$. Щоб розрахувати середню крутизну коливальної характеристики $S_{сер} = I_{m1} / U_m$, використовують розглянуті вище методи степеневого полінома та Берга.

Приклад 7.2. До нелінійного опору (рис.7.8, б), ВАХ якого задана в табл.7.2, прикладена напруга $u(t) = U_0 + U_m \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ В. Визначити графічно залежність струму через нелінійний елемент від часу, якщо $U_0 = 0,8$ В, $U_m = 0,2$ В. Як зміниться $i(t)$, якщо послідовно з нелінійним елементом увімкнути лінійний опір $R_4 = 5,1$ Ом (рис.7.8, в)?

Розв'язання.

1. Згідно з даними табл.7.2 будемо ВАХ нелінійного опору $i = \varphi_3(u)$, а також графік миттєвого значення напруги $u(t)$, попередньо визначивши період її повторення: $T = 1/f = 1/10^3 = 10^{-3}$ с⁻¹ (рис.7.15, а).

Будемо часову діаграму струму (рис.7.15, б), проектуючи відповідні точки ВАХ на вісь ординат $i(t)$ та зберігаючи однаковий масштаб по осі часу для часової діаграми струму і прикладеної напруги (рис.7.15, а).

2. Якщо послідовно з нелінійним елементом увімкнено опір $R_4 = 5,1 \text{ Ом}$, струм $i(t)$ знайдемо аналогічно. Для цього використовуємо сумарну ВАХ $i = \varphi(u)$, яку визначимо, підсумовуючи, згідно з другим законом Кірхгофа, величини u_3 та u_4 при кожному значенні струму i (рис.7.8, в), тобто додаючи графіки $i = \varphi_3(u)$ та $i = \varphi_4(u) = \frac{u}{R_4}$ за напругою. Часова діаграма струму для цього випадку зображена на рис.7.15, б пунктирною лінією.

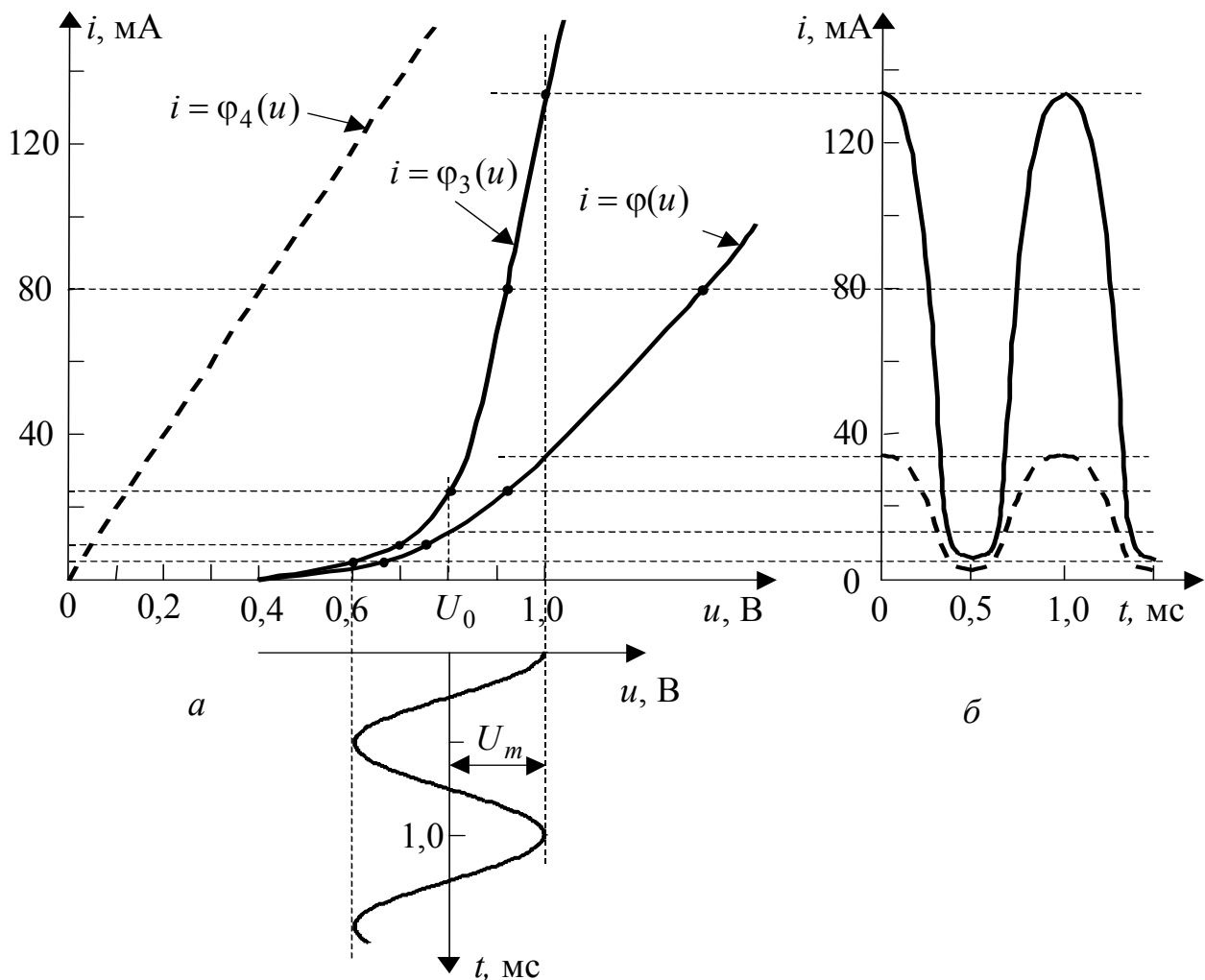


Рисунок 7.15 – Визначення струму графічним методом у прикладі 7.2

Приклад 7.3. Апроксимувати ВАХ нелінійного резистивного елемента (див табл.7.2) поблизу робочої точки $U_0 = 0,8 \text{ В}$ поліномом другого степеня, вибравши такі вузли інтерполяції: $U_0 - 0,2 \text{ В}$; $U_0 \text{ В}$; $U_0 + 0,2 \text{ В}$.

Знайти постійну складову і амплітуди гармонічних складових струму через нелінійний елемент, якщо до нього прикладено напругу $u(t)$, параметри якої задані у прикладі 7.2.

Розв'язання.

1. Скористаємось формулою (7.26) і запишемо ВАХ нелінійного елемента у вигляді полінома другого степеня:

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2.$$

Використовуючи значення струму в заданих точках інтерполяції, знайдемо коефіцієнти a_0 , a_1 , a_2 з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0,006 = a_0 + a_1(0,6 - 0,8) + a_2(0,6 - 0,8)^2; \\ 0,025 = a_0 + a_1(0,8 - 0,8) + a_2(0,8 - 0,8)^2; \\ 0,135 = a_0 + a_1(1,0 - 0,8) + a_2(1,0 - 0,8)^2. \end{cases}$$

Виконавши перетворення, матимемо:

$$\begin{cases} 0,006 = a_0 - 0,2a_1 + 0,04a_2; \\ 0,025 = a_0; \\ 0,135 = a_0 + 0,2a_1 + 0,04a_2. \end{cases} \quad (7.35)$$

Підсумовуючи та віднімаючи перше та третє рівняння системи (7.35), знаходимо: $a_2 = 1,1375$ См; $a_1 = 0,3225$ См.

Отже, апроксимовану ВАХ нелінійного елемента запишемо у вигляді:

$$i = 0,025 + 0,3225(u - 0,8) + 1,1375(u - 0,8)^2 \text{ А.} \quad (7.36)$$

2. Щоб знайти постійну складову і амплітуди гармонічних складових струму, підставимо вираз для напруги $u(t) = 0,8 + 0,2 \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ до рівняння (7.36):

$$\begin{aligned} i &= 0,025 + 0,3225 \cdot 0,2 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + 1,1375 \cdot 0,2^2 \cos^2(2\pi \cdot 10^3 t) = \\ &= 0,025 + 0,0645 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + 0,0455 \cdot 0,5 \cdot [1 + \cos(4\pi \cdot 10^3 t)] = \\ &= 0,04775 + 0,0645 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + 0,02275 \cdot \cos(4\pi \cdot 10^3 t). \end{aligned}$$

Отже, постійна складова струму становить $I_0 = 0,04775$ А; амплітуда першої гармоніки $I_{m1} = 0,0645$ А; другої – $I_{m2} = 0,02275$ А.

Приклад 7.4. Виконати кусково-лінійну апроксимацію ВАХ транзистора КТ315, яку задано таблично (табл.7.3).

Таблиця 7.3 – ВАХ транзистора КТ315

$u_{\bar{6}}$, В	0	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
$i_{\bar{к}}$, мА	0	0,05	0,25	0,6	1,0	1,4

Розв'язання. За даними табл.7.3 побудуємо ВАХ транзистора (рис.7.16, а). Провівши дотичну до лінійної ділянки характеристики, знайдемо абсцису точки переходу $A(U_u, 0)$ між апроксимуючими відрізками прямих:

$U_u = 0,6$ В. За графіком знайдемо крутість ВАХ поблизу робочої точки $B(1,1; 0,75)$ на середині лінійної ділянки:

$$S = \left. \frac{\Delta i_k}{\Delta u_{\delta}} \right|_{u_{\delta}=1,1} = \frac{1,0 - 0,6}{1,25 - 1,0} = \frac{0,4}{0,25} = 1,6 \text{ мА/В.}$$

Отже, апроксимовану ВАХ транзистора можна записати у вигляді:

$$i_k(u) = \begin{cases} 0, & u_{\delta} < 0,6 \text{ В} \\ 1,6(u_{\delta} - 0,6), & u_{\delta} \geq 0,6 \text{ В} \end{cases} \text{ мА.}$$

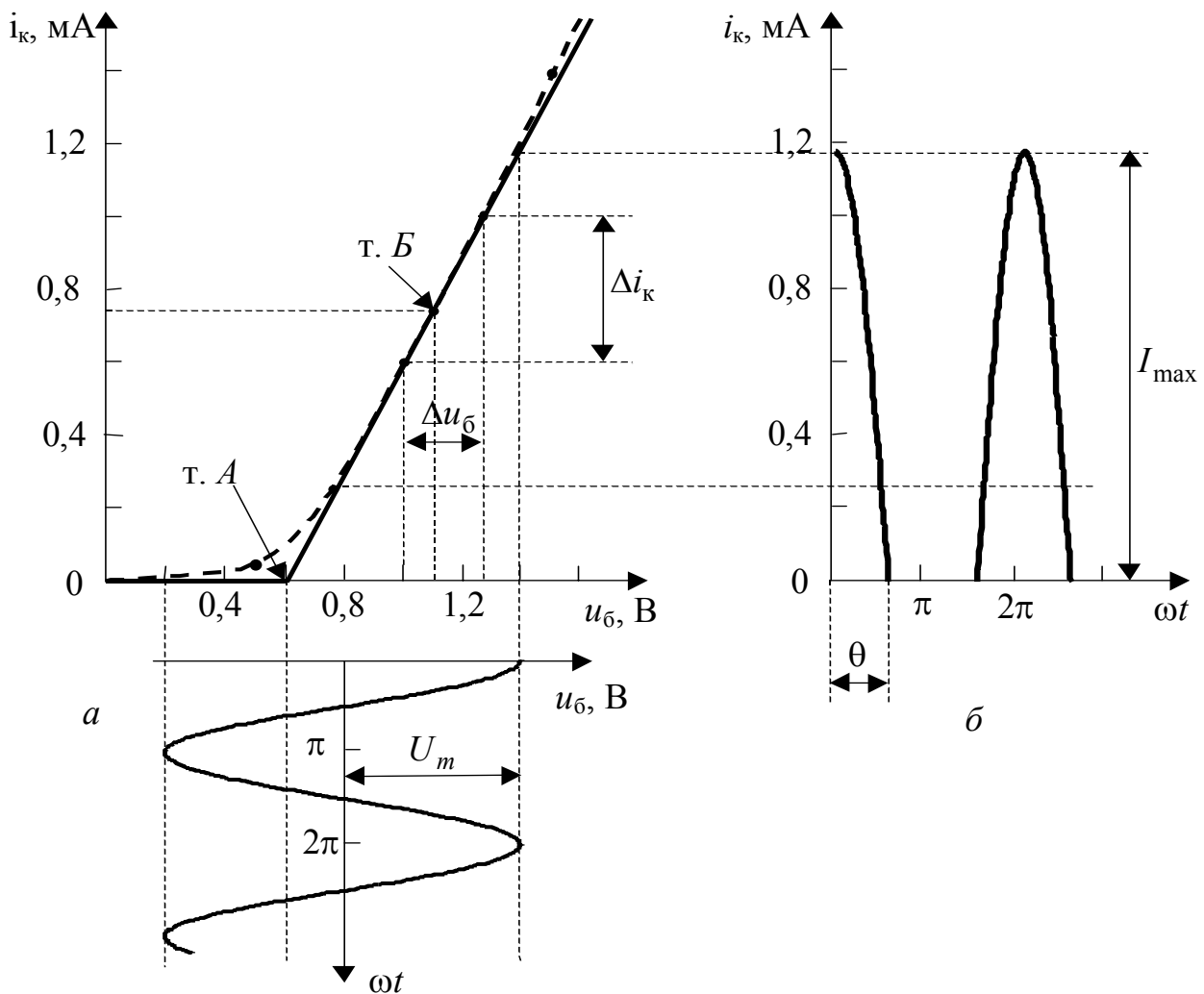


Рисунок 7.16 – Графіки до прикладів 7.4 – 7.5: *a* – кусково-лінійна апроксимація ВАХ; *б* – визначення струму методом А.І. Берга

Приклад 7.5. На вхід транзистора з апроксимованою ВАХ (див. приклад 7.4), діє коливання $u(t) = 0,8 + 0,6 \cos \omega_0 t$ В. Знайти постійну складову і амплітуди гармонічних складових струму через нелінійний елемент.

Розв’язання.

1. Визначимо кут відсікання за формулою (7.31):

$$\cos \theta = \frac{U_u - U_0}{U_m} = \frac{0,6 - 0,8}{0,6} = -0,33; \theta = 109,5^\circ \approx 110^\circ.$$

2. Визначимо максимальне значення струму за формулою (7.33):

$$I_{\max} = SU_m(1 - \cos \theta) = 1,6 \cdot 0,6 \cdot 1,33 = 1,28 \text{ мА}.$$

3. За графіками (рис.7.14) знайдемо значення коефіцієнтів Берга:

$$\alpha_0(110^\circ) = 0,38; \alpha_1(110^\circ) = 0,53; \alpha_2(110^\circ) = 0,13; \alpha_3(110^\circ) = -0,05.$$

4. За формулами (7.34) розрахуємо амплітуди гармонічних складових струму колектора:

$$I_0 = \alpha_0 I_{\max} = 0,38 \cdot 1,28 = 0,48 \text{ мА};$$

$$I_{m1} = \alpha_1 I_{\max} = 0,53 \cdot 1,28 = 0,68 \text{ мА};$$

$$I_{m2} = \alpha_2 I_{\max} = 0,13 \cdot 1,28 = 0,17 \text{ мА};$$

$$I_{m3} = |\alpha_3| I_{\max} = 0,05 \cdot 1,28 = 0,06 \text{ мА}.$$

7.8 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Визначити поняття: нелінійне коло, нелінійний елемент, статичний та динамічний параметр нелінійного елемента.

2. Які методи розрахунку чинні для нелінійних кіл? Чи можна застосувати до нелінійного кола метод еквівалентного генератора?

3. За якими ознаками класифікують нелінійні елементи? Які види нелінійних опорів ви знаєте?

4. Назвати властивості нелінійних кіл, які принципово недосяжні в лінійних колах.

5. Розрахувати струми усіх віток кола постійного струму з нелінійним опором R_3 графічним методом (рис.7.8, а). Параметри кола: $E = 1,1 \text{ В}$, $R_1 = 62 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$. ВАХ нелінійного елемента $R_3(i)$ наведена у табл.7.4.

Таблиця 7.4 – ВАХ нелінійного елемента

$u, \text{ В}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
$i, \text{ мА}$	0	0	0	0,5	2	5	10	18	28	42	60

Відповідь: $I_1 \approx 8 \text{ мА}$; $I_2 \approx 5 \text{ мА}$; $I_3 \approx 3 \text{ мА}$.

6. Міст на рис.7.17, а складено з лінійних опорів $R_1 = R_3 = 1 \text{ кОм}$ і $R_2 = R_4 = 2 \text{ кОм}$. На вихід моста увімкнено нелінійний опір R_5 , ВАХ якого наведена у табл.7.5. На вході моста діє джерело постійної ЕРС 120 В. Знайти напругу і струм на виході моста.

Таблиця 7.5 – ВАХ нелінійного елемента

u , В	0	8	10	12	14	15	16	17	18	19	20
i , мА	0	1	3	9	20	30	48	75	120	207	310

Вказівка. Скористатись теоремою про еквівалентне джерело напруги.

Відповідь: $U_{\text{вих}} = 14$ В; $I_{\text{вих}} = 20$ мА.

7. Чутливим елементом у системі автоматичного регулювання напруги є міст (рис.7.17, б). У кожному з двох протилежних плеч моста увімкнений нелінійний опір $R(i)$, ВАХ якого наведена у табл.7.6. У двох інших плечах моста увімкнені однакові лінійні опори R . Міст не навантажений.

Визначити: 1) величину опорів R , при яких міст врівноважено, якщо напруга живлення моста $U_1 = 220$ В; 2) напруги на виході моста при змінюванні напруги U_1 на $+20$ та -20 В.

Таблиця 7.6 – ВАХ нелінійного елемента

u , В	0	20	40	60	80	100	110	120
i , мА	0	1,5	4,0	7,5	14,0	36,0	63,0	95,0

Відповідь: $R = 1,75$ кОм; $U_2 = \pm 12$ В.

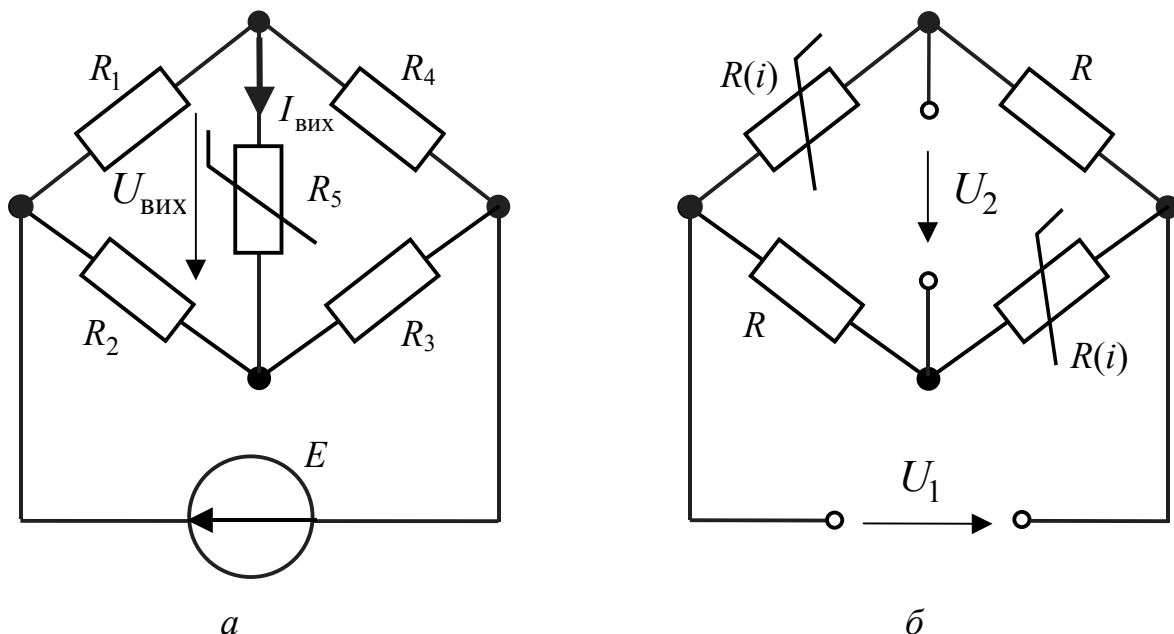


Рисунок 7.17 – Мостові схеми з нелінійними опорами

8. Пояснити суть основних методів апроксимації нелінійних характеристик. Як впливає форма характеристики на вибір методу апроксимації?

9. Чим визначається вибір степеня полінома, яким апроксимують ВАХ?

10. Апроксимувати ВАХ нелінійного елемента, задану в табл.7.7, поліномом другого степеня в діапазоні $u = -5 \dots 0$ В. Визначити похибку апроксимації при значенні напруги -1 В.

Таблиця 7.7 – ВАХ нелінійного елемента

u , В	0	-0,5	-1,0	-1,5	-2,0	-2,5	-3,0	-3,5	-4,0	-4,5	-5,0
i , мА	7,5	6,5	5,5	4,5	3,6	2,7	2,0	1,4	0,75	0,4	0,25

Відповідь: $i(u) = 7,5 + 2,37u + 0,1865u^2$ мА; $\Delta i = 3,3\%$.

11. На нелінійний елемент з ВАХ $i(u) = 20 + 5u + 0,2u^2$ мА діє напруга $u(t) = -5 + 5 \cos \omega_0 t$ В. Знайти постійну складову і амплітуди гармонічних складових струму через цей елемент.

Відповідь: $I_0 = 2,5$ мА; $I_{m1} = 15$ мА; $I_{m2} = 2,5$ мА.

12. Чим відрізняють режими великих і малих коливань у нелінійному колі при синусоїдній дії?

13. Пояснити поняття «кут відсікання». У чому полягає зміст розрахунку нелінійного кола за методом А.І. Берга?

14. Які значення кута відсікання відповідають режимам нелінійного кола А, АВ, В, С?

15. ВАХ нелінійного елемента апроксимована двома відрізками прямих:

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_u; \\ S(u - U_u), & u \geq U_u; \end{cases} \quad U_u = -6 \text{ В}; S = 5 \text{ мА/В}.$$

На вхід подано напругу $u(t) = U_0 + U_m \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ В. Знайти кут відсікання, постійну складову і амплітуди першої, другої і третьої гармонічних складових струму через цей елемент, якщо $U_0 = -10$ В, $U_m = 8$ В. Побудувати часову діаграму струму.

Відповідь: $\theta = 60^\circ$; $I_0 = 4,4$ мА; $I_{m1} = 7,8$ мА; $I_{m2} = 5,6$ мА; $I_{m3} = 2,8$ мА.

16. За яких значень напруги зміщення U_0 і кута відсікання θ струм у попередній задачі міститиме тільки постійну складову I_0 і першу гармоніку I_{m1} ? Знайти I_0 та I_{m1} .

Відповідь: $U_0 = 2$ В; $\theta = 180^\circ$; $I_0 = 40$ мА; $I_{m1} = 40$ мА.

8 Методи автоматизованого аналізу кіл

- Вступні положення
- Класифікація методів аналізу електронних кіл
- Похибки обчислень та їх класифікація
- Чисельні методи розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь
- Оцінка точності розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь:
 - норми;
 - зумовленість систем рівнянь рівноваги кола;
 - дублікації та еквівалентні перетворення
- Символьні та символічно-чисельні методи аналізу лінійних електронних кіл:
 - білінійне розкладання;
 - граф матриці;
 - теоретико-множинні методи;
 - метод взаємних похідних;
 - метод модифікацій.



Евклід

$$\|\alpha\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad E = E_1 \times E_2$$

$$\beta_M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \\ 5 & 3 & 4 & 5 & \end{pmatrix}$$

$$D = \det \beta = \det(\beta_M)_{\text{mod } 2}$$



Декарт



Гаусс

$$(B^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & b_{12}^{(3)} & b_{13}^{(3)} & b_{14}^{(3)} \\ 2 & 0 & 1 & b_{23}^{(3)} & b_{24}^{(3)} \\ 3 & 0 & 0 & 1 & b_{34}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$(B^{(N)}) = (E | X)$$



Жордан

8 МЕТОДИ АВТОМАТИЗОВАНОГО АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

8.1 Вступні положення

Сучасні електронні кола вирізняються великою складністю. Для аналізу складних електричних кіл природним є використання комп'ютера, але це часто призводить до накопичення великих операційних похибок внаслідок операцій над числами з обмеженою розрядністю операндів (тобто чисел, над якими виконуються операції). Відомо, що розв'язання задачі аналізу полягає в обчисленні за наданою структурою (еквівалентною схемою) та вагами параметрів компонентів реакції кола на задану дію.

Загалом дія та реакція є функціями часу, до яких можна застосувати перетворення Лапласа (див. розд.3), а інтегро-диференційні співвідношення між оригіналами замінити алгебраїчними (операторними) співвідношення між їхніми зображеннями.

Найпоширенішим алгебраїчним способом надання моделі електронного кола є канонічна система рівнянь рівноваги (контурних струмів або вузлових напруг), яка в матричному представленні має вигляд:

$$(A(p))(X(p)) = (Q(p)), \quad (8.1)$$

де $(A(p))$ – квадратна матриця коефіцієнтів порядку N (матриця операторних опорів або провідностей в системах рівнянь рівноваги контурних струмів або вузлових напруг відповідно); $(X(p))$ – стовпець зображень шуканих реакцій (контурних струмів або вузлових напруг) розміру $N \times 1$; $(Q(p))$ – стовпець зображень незалежних дій (джерел напруги або струму для рівнянь контурних струмів або вузлових напруг, відповідно) розміру $N \times 1$.

Розв'язання системи (8.1) у вигляді

$$(X(p)) = (A(p))^{-1}(Q(p)), \quad (8.2)$$

і є розв'язанням задачі аналізу, внаслідок чого будуть знайдені реакції $(X(p))$, за якими у подальшому, за законами Кірхгофа і Ома, можна визначити струми і напруги усіх віток аналізованого кола. У виразі (8.2) $(A(p))^{-1}$ – матриця, обернена матриці $(A(p))$. При цьому слід зауважити, що для радіоелектронних кіл порядок N системи рівнянь (8.1) великий – становить $N = 10, \dots, 1000$ і більше. Це зумовлює складність розв'язання задачі аналізу (8.2) і робить доцільним використання комп'ютера. Крім того, матриця $(A(p))$ (див. розд.4), є розрідженою, тобто кількість ненульових елементів рядка матриці коефіцієнтів становить 3...9 (при $N = 10, \dots, 1000$). Це викликає необхідність використання методів аналізу, що враховують структуру кола (яка й забезпечує згадану вище розрідженість). Отже, стандартні математичні методи розв'язання систем рівнянь рівноваги, хоча й можна використовувати, але загалом це робити не доцільно, оскільки вони не враховують структуру кола.

Чисельне розв'язання систем рівнянь рівноваги часто призводить до великої операційної похибки, виникнення і накопичення якої пов'язане з округленням десяткового (або двійкового) подання чисел. Внаслідок такого округлення виникає похибка, наявність якої робить некоректними усі відомі закони арифметики, вірні для символів (чисел з нескінченною розрядністю). Тобто від переставлення доданків (множників) сума (добуток) змінюється, від способу подання (внаслідок тотожних алгебраїчних перетворень) результату в символічному вигляді (винесення за дужки, зведення подібних, скорочення спільних множників тощо) результат обчислень змінюється.

Все це зумовило ситуацію, коли дослідники у галузі теорії кіл були змушені створювати нові оригінальні методи, що враховують як жорстку структурованість електронних кіл, так і особливості аналізу кіл (при використанні ЕОМ і створенні для розв'язання громіздких задач відповідних систем автоматизованого проектування) з обмеженою розрядністю операндів.

8.2 Класифікація методів аналізу електронних кіл

Сучасні методи аналізу електронних кіл можна умовно поділити на три великі групи:

- символні;
- чисельні;
- чисельно-символьні.

Символьні (аналітичні) методи побудовано на базі аналітичного перетворення вихідної математичної моделі (з відображенням параметрів кола відповідними символами). В результаті таких перетворень одержують розрахункові формули, в яких (на завершальному етапі) символи параметрів заміняють їх числовими значеннями, і внаслідок відповідної послідовності арифметичних операцій знаходять шуканий розв'язок. Символьне подання лежить в основі класичної математики та фізики, що їх вивчають в середній і вищій школі. При цьому інтуїтивно зрозуміло, що для відносно складних кіл (які містять хоча б 8...10 вузлів) такі символні вирази будуть надзвичайно громіздкими і незручними для ЕОМ. Традиційні символні методи дозволяють врахувати особливості структури математичної моделі кола (для символів усі закони арифметики коректні, бо саме для них вони були відкриті), що у свою чергу, дозволяє підвищити точність обчислень, але громіздкість цих методів ускладнює їх формалізацію та автоматизацію за допомогою комп'ютерів.

Чисельні методи ґрунтуються на використанні формалізованої математичної моделі кола (наприклад, систем рівнянь рівноваги контурних струмів та вузлових напруг). Над числовими значеннями параметрів цієї моделі (за заздалегідь складеною за символними методами обчислювальною схемою) виконують відповідну послідовність арифметичних операцій, одержуючи розв'язок вихідної системи рівнянь у чисельному вигляді. Ці методи надзвичайно зручні для програмування комп'ютерів, але не враховують інформації про структуру

аналізованого кола, що часто призводить до значних похибок результатів аналізу.

Чисельно-символьні методи виникли як компроміс між чисельними і символьними методами з метою подолання їх незручності та обмеження. У сучасній практиці чисельно-символьні методи можна вважати найперспективнішими. При їх застосуванні частково використовують символьні вирази, в які, на відповідному кроці, підставляють чисельні значення параметрів, продовжуючи вважати інші параметри символами. При цьому можна забезпечити підвищену точність (властиву символьним методам) і зменшену громіздкість (підвищену швидкодію) обчислень, що характерно для чисельних методів.

За видом використовованого математичного апарату методи аналізу можна поділити на такі:

- алгебраїчні (матричні);
- структурні (топологічні);
- теоретико-множинні

та їх комбінації.

Алгебраїчні методи основані на побудові алгебраїчних рівнянь рівноваги кола (в однорідному базисі контурних струмів та вузлових напруг або в неоднорідному, в якому коефіцієнти матриці $(A(p))$ в системі (8.1) мають різне фізичне значення) та на застосуванні у подальшому методів лінійної алгебри.

Структурні (топологічні) методи ґрунтуються на використанні математичного апарату топології (різного виду графів і операцій над ними).

Теоретико-множинні методи базуються на використанні опису структури кола за допомогою множин чисел, над якими за відповідними законами і правилами провадять математичні операції з метою одержання теоретико-множинного опису кінцевого результату (методи контурних чисел, узагальнених чисел, кореневих чисел тощо). Комбінації цих математичних апаратів (завжди з урахуванням структури кола) дозволяють гнучко пристосувати відомі методи і підходи до розв'язання задачі аналізу.

8.3 Похибки обчислень та їх класифікація

Незалежно від вибору методу аналізу чисельне значення a розв'язку будь-якої інженерної задачі завжди є наближеним і відрізняється від точного a^* значення фізичної величини на величину дійсної **абсолютної похибки**:

$$\Delta = a - a^* . \quad (8.3a)$$

Але таке значення a^* невідоме (виключенням є лише тестові задачі), тому точність його обчислення оцінюють **граничною абсолютною похибкою**:

$$\varepsilon_a = (a_{\max} - a_{\min}) / 2, \quad (8.3б)$$

що дорівнює половині інтервалу, в якому, за відомою інформацією, лежить точне значення a^* .

У практиці зручніше оцінювати точність за **граничною відносною похибкою**:

$$\delta_a = \varepsilon_a / a, \quad (8.3\text{в})$$

або у відсотках $\delta_a \% = 100\delta_a$.

Точність числа можна також оцінити за кількістю k вірних цифр в його десятковому поданні з плаваючою комою:

$$a = M \cdot 10^m, \quad (8.3\text{г})$$

де M – мантиса числа з комою після першої значущої цифри; m – порядок числа a . **Вірними** називають перші k цифр мантиса, якщо похибка не перевищує половини одиниці k -го десяткового розряду.

За кількістю k вірних цифр мантиса для числа a можна одержати граничні похибки:

$$\varepsilon_a = 5 \cdot 10^{m-k}; \delta_a = 5 \cdot 10^{-k} / M. \quad (8.3\text{д})$$

Причинами похибок результатів математичного моделювання є:

- похибки моделей;
- похибки обчислень.

Похибки моделей неминучі, оскільки структура моделі принципово не може відобразити усі процеси у модельованому об'єкті. До того ж параметри моделі можна виміряти з точністю лише до 3 – 5 значущих цифр.

Похибки обчислень поділяють на операційні та методичні.

Головною причиною **операційних похибок** є похибки округлень до r розрядів мантиса. При округленні відкиданням надлишкової частини числа його абсолютна та відносна похибки становлять:

$$\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{m-r+1}; \delta_1 = 10^{-r+1} / M.$$

Похибки округлень є причиною невиконання основних законів арифметики. Наприклад, при розрядності $r = 8$

- 1) $A = 10^9$; $a = 1$ одержимо: $a + A - A = 0$,
в той час, як $A - A + a = a = 1$;
- 2) при обчисленнях за формулою

$$X = [(3 - 10/a)3 + 1] \cdot 10^{50} = 10^{42}$$

при $a = 3$, в той час як ясно, що $X = 0$. Така похибка одержана внаслідок округлення частки від значення $10/3$.

При розрахунках на комп'ютері за складною обчислювальною схемою наведені ситуації можуть повторюватись багаторазово, про що (так само, як і про велику можливу похибку та іноді катастрофічно хибний результат) користувач може навіть не здогадуватися.

Методичні похибки звичайно пов'язують з апроксимацією фізичних величин функціями з великою (або нескінченною) кількістю членів, обмеження яких призводить до методичної (скінченної) похибки. Але методичні похибки обумовлені методикою вибору розрахункової математичної схеми та особливостями її реалізації. Наявність методичної похибки впливає на швидкість обчислень і кінцеве значення накопичуваної в процесі обчислень похибки за рахунок

скінченної розрядності операндів. Аналізуючи радіоелектронні кола, можна виділити такі джерела виникнення методичної похибки:

- 1) близькість аналізованого кола до режиму самозбудження (визначник матриці коефіцієнтів системи рівнянь рівноваги прямує до нуля);
- 2) наявність дублікацій (протилежних за знаком, але однакових за величиною подібних членів, які виникають при розкладанні визначника матриці коефіцієнтів або його доповнень);
- 3) еквівалентні перетворення;
- 4) урахування впливу паразитних параметрів одночасно з впливом регулярних (номінальних);
- 5) погана зумовленість системи рівнянь рівноваги;
- 6) сама процедура розв'язання задачі аналізу, коли систему рівнянь рівноваги складають в одному базисі (де великі параметри, які слабо впливають на кінцевий розв'язок, маскують малі параметри, які значно впливають на нього), а результат аналізу оцінюють в оберненому базисі.

Детальніше вплив джерел методичної похибки розглядатиметься нижче при подальшому викладенні методів аналізу радіоелектронних кіл.

8.4 Чисельні методи розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь

Теоретично чисельні методи дозволяють розв'язати будь-яку задачу аналізу лінійних кіл. Але практична можливість такого розв'язання суттєво обмежена похибками результатів, які можуть виявитися повністю хибними.

У даному підрозділі наведено короткий розгляд деяких з чисельних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Більшість методів базується на методі виключення (редукції) Гаусса¹ та його модифікаціях.

Метод Гаусса (або метод єдиного ділення) для розв'язання системи (8.1) полягає у складанні з квадратної матриці (A) і стовпця дії (Q) прямокутної матриці (B) розміру $N \times (N + 1)$:

¹ **Гаусс Карл Фрідріх**, Gauss (1777–1855) німецький математик, астроном, фізик і геодезист. Народився у Брауншвейзі. Вчився у Геттінгенському ун-ті. Захистив докторську дисертацію (1799), яка містила перше доведення основної теореми алгебри. З 1807 р. – директор Геттінгенської астрономічної обсерваторії. Праці Гаусса вплинули на розвиток вищої алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії тяжіння, класичної теорії електрики і магнетизма, геодезії, теоретичної астрономії.

В області астрономії розрахував орбіту малої планети Церери, займався теорією збурень та теорією руху небесних тіл. Складаючи карту Ганноверського королівства (1820—1830), створив вищу геодезію, винайшов геодезичний прилад – геліотроп. Оприлюднив метод найменших квадратів (1821–1823). Спільно з Г. Вебером створив абсолютну систему електромагнітних одиниць (1832). Побудував перший у Німеччині електромагнітний телеграф (1833), створив загальну теорію магнетизму, заклав основи теорії потенціалу тощо.

$$(B) = (A | Q). \quad (8.4)$$

Далі для кожного s -го кроку ($s = 1, 2, \dots, N$) елементи s -го (ведучого) рядка обчислюють за їх попередніми значеннями за формулою:

$$b_{sj}^{(s)} = b_{sj}^{(s-1)} / b_{ss}^{(s-1)}, \quad j = s, s+1, \dots, n, n+1, \quad (8.5)$$

а елементи наступних (за s) рядків – за формулою:

$$b_{ij}^{(s)} = b_{ij}^{(s-1)} - b_{is}^{(s-1)} b_{sj}^{(s)}, \quad j = s, s+1, \dots, n, n+1; \quad i \geq s. \quad (8.6)$$

Наприклад, за системою рівнянь третього порядку ($N = 3$)

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

складають матрицю

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q_3 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

На першому кроці ($s = 1$) за формулою (8.5) одержують перший рядок (B_1) матриці (B):

$$(B_1) = (1 \quad b_{12}/b_{11} \quad b_{13}/b_{11} \quad b_{14}/b_{11}).$$

Далі, записавши елементи для другого і третього рядків за формулою (8.6), одержують матрицю ($B^{(1)}$) у вигляді:

$$(B^{(1)}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}/b_{11} & b_{13}/b_{11} & b_{14}/b_{11} \\ 0 & b_{22} - \frac{b_{21}b_{12}}{b_{11}} & b_{22} - \frac{b_{21}b_{13}}{b_{11}} & b_{22} - \frac{b_{21}b_{14}}{b_{11}} \\ 0 & b_{32} - \frac{b_{31}b_{12}}{b_{11}} & b_{32} - \frac{b_{31}b_{13}}{b_{11}} & b_{32} - \frac{b_{31}b_{14}}{b_{11}} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & b_{14}^{(1)} \\ 0 & b_{22}^{(1)} & b_{23}^{(1)} & b_{24}^{(1)} \\ 0 & b_{32}^{(1)} & b_{33}^{(1)} & b_{34}^{(1)} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

На другому кроці ($s = 2$) другий (ведучий) рядок матиме вигляд:

$$(B_2) = (0 \quad 1 \quad b_{23}^{(1)}/b_{22}^{(1)} \quad b_{24}^{(1)}/b_{22}^{(1)}),$$

а нова матриця ($B^{(2)}$) перетвориться до вигляду:

$$(B^{(2)}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & b_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & b_{23}^{(1)}/b_{22}^{(1)} & b_{24}^{(1)}/b_{22}^{(1)} \\ 0 & 0 & b_{33}^{(1)} - \frac{b_{32}^{(1)}b_{23}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} & b_{34}^{(1)} - \frac{b_{32}^{(1)}b_{24}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & b_{14}^{(2)} \\ 0 & 1 & b_{23}^{(2)} & b_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & b_{33}^{(2)} & b_{34}^{(2)} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Нарешті на останньому, третьому, кроці ($s = 3$) можна скористатися лише формулою (8.5), оскільки $N = 3$, і одержати матрицю $(B^{(3)})$:

$$(B^{(3)}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & b_{14}^{(2)} \\ 0 & 1 & b_{23}^{(2)} & b_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34}^{(2)}/b_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(3)} & b_{13}^{(3)} & b_{14}^{(3)} \\ 0 & 1 & b_{23}^{(3)} & b_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34}^{(3)} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Останній рядок в матриці $(B^{(3)})$ згідно з правилом (8.4) формування матриці (B) слід розуміти як рівняння

$$1 \cdot x_3 = b_{34}^{(3)}.$$

Зворотню підстановкою x_3 у друге рівняння знаходять x_2 і підстановкою x_2, x_3 у перше – значення x_1 .

Крім того, добуток

$$\Delta = b_{11} b_{22}^{(1)} b_{33}^{(2)}$$

дорівнює визначнику матриці (A) , тобто у загальному випадку

$$\Delta = b_{11} b_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot b_{N-1N-1}^{(N-2)} b_{NN}^{(N)}. \quad (8.7)$$

Схема єдиного ділення вирізняється мінімальною кількістю операцій, оскільки кількість K арифметичних операцій дорівнює:

$$K = 2N(N+1)(N+2)/3 + N(N-1). \quad (8.8)$$

Значення K для $N > 7$ можна оцінювати за формулою:

$$K \cong N^3.$$

Якщо скористатися вже розглянутою обчислювальною схемою, але формулу (8.6) використовувати не лише для рядків $i > s$, а для усіх рядків матриці ($i \neq s$), то такий розв'язок системи рівнянь має назву **метода Гаусса – Жордана**².

При цьому матриця $(B^{(N)})$ після виконання усіх кроків має вигляд:

$$(B^{(N)}) = (E | X), \quad (8.9)$$

де (E) – одинична матриця; (X) , тобто останній стовпець матриці $(B^{(N)})$, – шуканий стовпець розв'язків у системі (8.1).

² **Жордан Каміль Марі Едмон**, Jordan (1838 – 1922) – французький математик. Народився у Ліоні, працював у Політехнічній школі та Коллеж де Франс. У 1885-1921 рр. видавав математичний журнал, чл.-кор. Петербурзької АН (1895). Праці Жордана присвячені алгебрі, теорії чисел, теорії функцій, геометрії, топології, диференціальним рівнянням і кристалографії. З його ім'ям пов'язані теорема Жордана-Гельдера про композиційні ряди груп, нормальна (жорданова) форма матриць, крива, теорема, міра та ін. За його тритомним «Курсом аналізу» (1882—1887) у Петербурзькому ун-ті вивчали диференціальне та інтегральне числення.

Серед найрозповсюджених прямих методів розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь слід назвати **LU-розкладання**. У цьому методі вихідна матриця коефіцієнтів (A) перетворюється у матрицю (B) розміру $N \times 2N$ додаванням до матриці (A) одиничної матриці (E):

$$(B) = (A | E), \quad (8.10)$$

Подальша редукція матриці (B) виконується так само, як і в методі Гаусса з єдиним діленням. Так, для матриці (A) третього порядку ($N = 3$) одержують:

$$(B) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (8.11a)$$

Після першого кроку (8.5), отримавши рядок (B_1) = (1 b_{12}/b_{11} b_{13}/b_{11} $1/b_{11}$ 0 0), за формулою (8.6) записують:

$$(B^{(1)}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}/b_{11} & b_{13}/b_{11} & 1/b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} - \frac{b_{21}b_{12}}{b_{11}} & b_{22} - \frac{b_{21}b_{13}}{b_{11}} & 0 - \frac{b_{21}b_{14}}{b_{11}} & 1 & 0 \\ 0 & b_{32} - \frac{b_{31}b_{12}}{b_{11}} & b_{32} - \frac{b_{31}b_{13}}{b_{11}} & 0 - \frac{b_{31}b_{14}}{b_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & b_{11}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}^{(1)} & b_{23}^{(1)} & b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{32}^{(1)} & b_{33}^{(1)} & b_{31}^{(1)} & 0 & b_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (8.11б)$$

Після другого кроку LU-розкладання можна записати:

$$(B^{(2)}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & b_{11}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23}^{(1)} & b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}^{(1)} - \frac{b_{32}^{(1)}b_{23}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} & b_{31}^{(1)} - \frac{b_{32}^{(1)}b_{21}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} & 0 - \frac{b_{32}^{(1)}b_{22}^{(1)}}{b_{22}^{(1)}} & b_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \\ = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & b_{11}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23}^{(2)} & b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}^{(2)} & b_{31}^{(2)} & b_{32}^{(2)} & b_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (8.11в)$$

Нарешті, за формулою (8.5), поділивши третій рядок на $b_{33}^{(2)}$, знаходять:

$$\begin{aligned}
(B^{(3)}) &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & b_{14}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23}^{(2)} & b_{24}^{(2)} & b_{22'}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{31'}^{(2)}/b_{33}^{(2)} & b_{32'}^{(2)}/b_{33}^{(2)} & 1/b_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \end{matrix} = \\
&= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^{(3)} & b_{13}^{(3)} & b_{11'}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23}^{(3)} & b_{21'}^{(3)} & b_{22'}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{31'}^{(3)} & b_{32'}^{(3)} & b_{33'}^{(3)} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (8.11\Gamma)
\end{aligned}$$

Матрицю (8.11Г) ($N = 3$) можна скорочено записати так:

$$(B^{(N)}) = (B_U^{(N)} | B_L^{(N)}), \quad (8.12)$$

де $(B_U^{(N)})$ – верхньо трикутна; $(B_L^{(N)})$ – нижньо трикутна матриці, які пов'язують між собою дію (Q) та реакцію (X) у вигляді рівняння:

$$(B_U^{(N)})(X) = (B_L^{(N)})(Q). \quad (8.13)$$

Розв'язок рівняння (8.13) має вигляд:

$$(X) = (B_U^{(N)})^{-1} (B_L^{(N)})(Q). \quad (8.14)$$

LU -розкладання називають також **методом Краута³ або Халецького**.

Обернену матрицю $(A)^{-1}$ також можна обчислити за методом Гаусса-Жордана, утворивши попередньо прямокутну матрицю (B) (8.10) або виконавши віднімання також і рядків матриці $(B^{(1)})$, які лежать вище ведучого. Результат має вигляд:

$$(B^{(N)}) = (E | A^{-1}), \quad (8.15)$$

тобто у виразі (8.10) на місці матриці (A) одержують матрицю (E) , а на місці одиничної матриці – обернену $(A)^{-1}$.

8.5 Оцінка точності розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

8.5.1 Норми

Точність розв'язання системи рівнянь $(A)(X) = (Q)$ оцінюють за вектором **нев'язок рівнянь**:

$$\alpha = AX^* - Q, \quad (8.16)$$

де X^* – вектор обчислених значень шуканих реакцій x_i^* ;

³ **Краут**, Crout P.D. – вчений, який запропонував цей метод у роботі “A short Method for Evaluating Determinants and Solving Systems of Linear Equations with Real or Complex Coefficients”, AIEE Trans., 1941. – Vol.69, P. 1235-1241.

α_i – складові вектора нев’язок, які розраховують за формулою:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^* - q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.17)$$

Вектор нев’язок характеризують числом, яке називають **нормою вектора нев’язок**:

$$\|\alpha\|_s = \left(\sum_{i=1}^N |\alpha_i|^s \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (8.18)$$

При цьому найчастіше використовують **Евклідову⁴ норму**

$$\|\alpha\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.18a)$$

Використовують також інші норми:

$$\|\alpha\|_1 = \left(\sum_{i=1}^N |\alpha_i| \right), \quad (8.18б)$$

або
$$\|\alpha\|_\infty = \max \alpha_i; \quad 1 \leq i \leq N. \quad (8.18в)$$

У випадку обернення матриць коефіцієнтів точність розв’язання задачі аналізу оцінюють за матрицею відхилень:

$$(D) = (A)(A)^{-1} - (E). \quad (8.19)$$

Тоді критерієм точності є одна з матричних норм:

$$\|D\|_m = \max \sum_{j=1}^N |d_{ij}|, \quad (8.19a)$$

що дорівнює максимальній сумі модулів елементів рядка, або

$$\|D\|_l = \max \sum_{i=1}^N |d_{ij}|, \quad (8.19б)$$

що дорівнює максимальній з сум модулів елементів стовпця, або

$$\|D_k\| = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |d_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.19в)$$

Крім того, аналогічно виразу (8.18), можна ввести ще інші норми. Серед них, аналогічно формулі (8.18в), часто зустрічається норма:

$$\|D\|_\infty = \max d_i; \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (8.19г)$$

⁴ **Евклід** (365–300 до н. е.) – давньогрецький учений, філософ і математик. Автор перших теоретичних трактатів з математики. Родом з Афін, учень Платона. Працював в Олександрії. Головна праця «Начала» (латинізована назва – «Елементи») містить викладення планіметрії, стереометрії і низки питань теорії чисел, алгебри, загальної теорії відношень і метода визначення площ та об’ємів. У «Началах» підсумовані всі попередні досягнення грецької математики і вперше зроблено спробу логічної побудови геометрії на базі аксіоматики. З 1482 р. ця книга витримала більше 500 видань усіма мовами світу.

8.5.2 Зумовленість систем рівнянь рівноваги кола

Результати розв'язання систем лінійних рівнянь можуть мати великі похибки або бути повністю хибними і в тому випадку, коли норми векторів нев'язок або матриці відхилень близькі до нуля. Це свідчить про те, що при обчисленнях з обмеженою розрядністю операндів (самих таких норм) ці норми сходяться не в тій точці метричного простору, що відповідає точному розв'язку, а в деякій іншій.

Особливість рівнянь з такими властивостями полягає в тому, що малі відхилення параметрів, тобто коефіцієнтів матриці (A), або дій, призводять до значних змін реакцій. Це характерно для електронних кіл, які близькі до режиму самозбудження. Визначник матриці (A) таких систем рівноваги прямує до нуля. Але обчислення визначника, наприклад методом Гаусса (8.7), є досить складною процедурою, до того ж обчислюваною з такими самими похибками, що й розв'язок (реакція). Тому для перевірки **зумовленості** системи рівнянь вводять **числа зумовленості**. Ці числа зумовленості $cond_s A$ (різні для різних s у виразі (8.18)) розраховують за формулою:

$$cond_s A = \|A\|_s \cdot \|A^{-1}\|_s, \quad (8.20)$$

де $\|A\|_s = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^s \right)^{1/s}$ – норма вихідної матриці (A); $\|A^{-1}\|_s$ – така сама

норма, але для оберненої матриці.

При точному розв'язанні системи рівнянь (наприклад, у символьному вигляді або у звичайних дробах) число зумовленості тотожне одиниці. При обмеженій розрядності операндів за рахунок методичної та операційної похибок число зумовленості зростає. Чим більше $cond_s A$, тим гірша зумовленість системи рівнянь і тим більша похибка обчислень.

Причиною поганої зумовленості системи рівнянь (при фіксованій розрядності операндів для чисел з плаваючою комою) є **великий порядок** ($N \geq 1000$) **матриці** (A), тобто велика кількість арифметичних операцій ($N^3 \geq 10^9$) з обмеженою розрядністю операндів, для яких точно не виконуються основні закони арифметики.

Іншою причиною є близькість стану електронного кола до самозбудження (при цьому, як відомо, визначник матриці коефіцієнтів прямує до нуля).

Нарешті, якщо **коефіцієнти матриці** (A) **мають великий розкид** своїх значень, це теж призводить до поганої зумовленості системи рівнянь рівноваги.

Для ілюстрації згаданих причин доцільно розглянути декілька прикладів.

Приклад 8.1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \left(\begin{array}{cc} 3,1 \cdot 10^{50} & -2,1 \cdot 10^{-49} \\ 2 \cdot 10^{50} & -1,5 \cdot 10^{-49} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 14 \\ -65 \end{array} \right). \end{matrix}$$

Розв'язання. Вибираючи ведучим перший рядок, за методом Гаусса одержимо:

$$x_1^* = 4,516129 \cdot 10^{-50}; \quad x_2^* = 4,93544838 \cdot 10^{50}.$$

У той же час точні значення x_1 , x_2 становлять:

$$x_1 = 3,5 \cdot 10^{-48}; \quad x_2 = 5,1 \cdot 10^{51}.$$

Отже, помилка при обчисленнях з обмеженою розрядністю ($m = 8$) сягає декількох порядків. Це зумовлено тим, що на першому кроці алгоритму Гаусса одержуємо:

$$x_1 = 4,516129 \cdot 10^{-50} + \frac{2,1 \cdot 10^{-49}}{3,1 \cdot 10^{50}} x_2$$

і величина $\frac{2,1 \cdot 10^{-49}}{3,1 \cdot 10^{50}} = 0$ при обчисленні з обмеженою розрядністю („машинний нуль”).

Якщо тепер в системі змінити порядок обчислень:

$$\begin{pmatrix} 2,1 \cdot 10^{-49} & -3,1 \cdot 10^{50} \\ 1,5 \cdot 10^{-49} & -2 \cdot 10^{50} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 65 \end{pmatrix},$$

одержимо практично точний розв'язок:

$$x_1^* = 3,5000018 \cdot 10^{-48}; \quad x_2^* = 5,0999997 \cdot 10^{51},$$

бо при розв'язанні такої системи майже відсутні „машинні нескінченності”.

Цей приклад ілюструє вплив великого розкиду значень коефіцієнтів матриці (A) на зумовленість системи. Такий вплив часто (але не завжди) можна зменшити нормуванням.

Використаємо заміну змінної:

$$\tilde{x}_1 = x_1 \cdot 10^{50}; \quad \tilde{x}_2 = x_2 \cdot 10^{-49},$$

тоді $x_1 = \tilde{x}_1 \cdot 10^{-50}$; $x_2 = \tilde{x}_2 \cdot 10^{49}$, а система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3,1 & -2,1 \\ 2 & -1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -65 \end{pmatrix}.$$

За методом Гаусса одержимо:

$$\tilde{x}_1 = 350; \quad \tilde{x}_2 = 5,0999996 \cdot 10^2,$$

звідки $x_1 = 3,5 \cdot 10^{-48}$; $x_2 = 5,0999996 \cdot 10^{51}$, тобто знову ж таки практично точний результат.

Приклад 8.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 7+d & -d \\ -2 & -d & 8+d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Розв'язання. Якщо $d \rightarrow \infty$ (включення d до системи рівнянь часто є наслідком нерационального формулювання задачі аналізу), тоді $d + 7 \rightarrow d$; $d + 8 \rightarrow d$. При цьому $x_2 \rightarrow x_3$, а визначник системи

$$D_d = 6(7 + d)(8 + d) - 12d - 9(8 + d) - 4(7 + d) - 6d^2 \Big|_{d \rightarrow \infty} = \quad (8.22)$$

$$= 6d^2 - 12d - 4d - 9d - 6d^2 .$$

Останній вираз є невизначеністю $\infty - \infty$. Оскільки при обчисленнях з обмеженою розрядністю результат залежить лише від порядку підсумовування доданків, для наведеної послідовності обчислення визначника одержимо:

$$D_d = 6d^2 - 25d = 6d^2; \quad D_d = 6d^2 - 6d^2 = 0 .$$

Оскільки в даному випадку „великий” параметр d при підсумовуванні у комірках матриці маскує інші параметри, то нормування параметрів не призведе до зміни ситуації.

Обернена матриця, враховуючи округлення при підсумовуванні доданків з $d \rightarrow \infty d$, має вигляд:

$$\frac{1}{D_d} \begin{pmatrix} 0 & 5d & 5d \\ 5d & 6d & 6d \\ 5d & 6d & 6d \end{pmatrix} = (A)^{-1} .$$

Навіть у разі нерівності нулю визначника (чого можна досягти, змінюючи порядок підсумовування у формулі (8.22)), результат розв'язку буде хибним і усі значення x_1 , x_2 , x_3 значно відрізнятимуться від точних. Єдине, що можна було б сказати за одержаним результатом, це те, що $x_2^* = x_3^*$.

Система рівнянь (8.21) відповідає схемі (рис.8.1, а), коли провідність вітки між вузлами 2, 3 значно більша, ніж провідності⁵ інших віток.

З рис.8.1, б ясно, що замкнувши вузли 2, 3 (оскільки $d \gg G_i$), матимемо систему рівнянь другого порядку:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix} . \quad (8.23)$$

Одержана система рівнянь має розв'язки:

$$x_1 = 19/13; \quad x_2 = 88/65 .$$

Аналогічного результату можна було б досягти, підсумувавши в системі (8.21) друге та третє рівняння і записавши цю суму на місце другого, а також врахувавши, що $x_3 = x_2$:

⁵ У цій схемі та нижче, якщо розмірності параметрів розглядуваних схем не вказано, вважається, що провідності задані у сименсах, струми джерел – в амперах, а шукані реакції x_i (вузлові напруги) – у вольтах.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Підставивши в перше та друге рівняння цієї системи $x_3 = x_2$, одержимо систему (8.23).

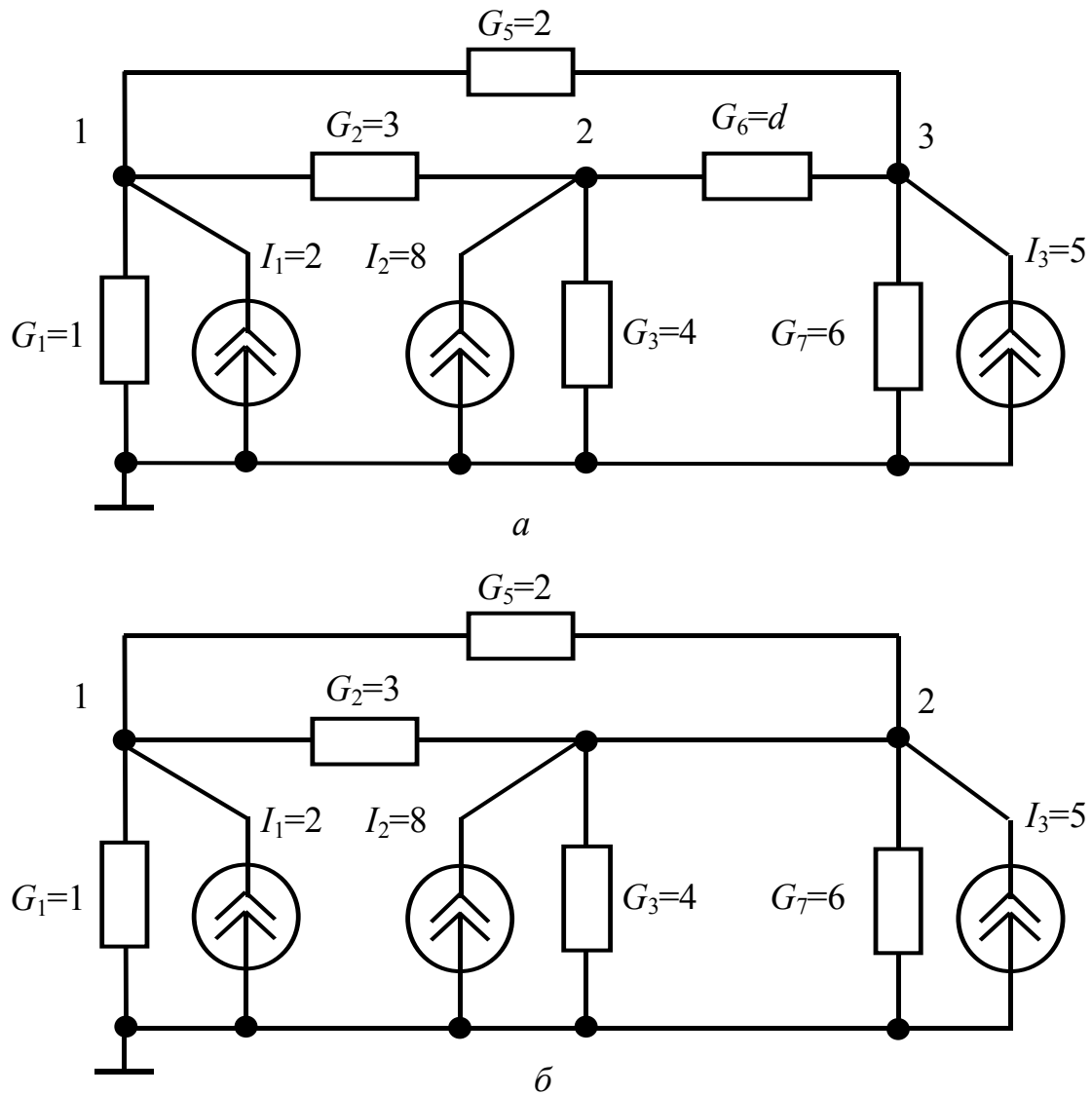


Рисунок 8.1 – Ліквідація невизначеності $d \rightarrow \infty$ об'єднанням вузлів 2 і 3

Позначимо тепер провідність d символом та знайдемо обернену матрицю $(A)_d^{-1}$. У цьому випадку підсумовування $7+d$, $8+d$ у чисельному вигляді не виконують, і одержані результати мають чисельно-символьний вигляд. Чисельне значення параметра d підставляють у здобуті вирази на останньому етапі обчислень. Тоді обернена матриця матиме вигляд:

$$(A)_d^{-1} = \frac{1}{65d + 236} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 15d + 56 & 5d + 24 & 5d + 14 \\ 5d + 24 & 6d + 44 & 6d + 6 \\ 5d + 14 & 6d + 6 & 6d + 33 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Цікаво, що одержана обернена матриця у чисельно-символьному вигляді повністю відрізняється від оберненої матриці, здобутої при попередньому округленні (підсумовуванні провідності d і провідностей інших віток). Так, повністю відрізняється від (8.22) (навіть знаком) одержаний вираз для визначника, а також елемент Δ_{11} оберненої матриці. Щоб одержати точні значення розв'язків (корені лінійного рівняння) при $d \rightarrow \infty$, розкриємо невизначеності:

$$x_1 = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{(15d + 56) \cdot 2 + (5d + 24) \cdot 8 + (5d + 14) \cdot 5}{65d + 236} = \frac{95}{65} = \frac{19}{13};$$

$$x_2 = x_3 = 88/65.$$

Аналогічно, точні результати для реакцій (x_i) можна одержати для усіх інших значень $d \gg G_i$, які викликають погану зумовленість системи рівнянь.

Приклад 8.3. Знайти обернену матрицю провідностей з розрядністю 4 для кола (рис.8.2), якщо $G_1 = G_2 = 1$; $G_3 = 0,01$; $S = 100$.

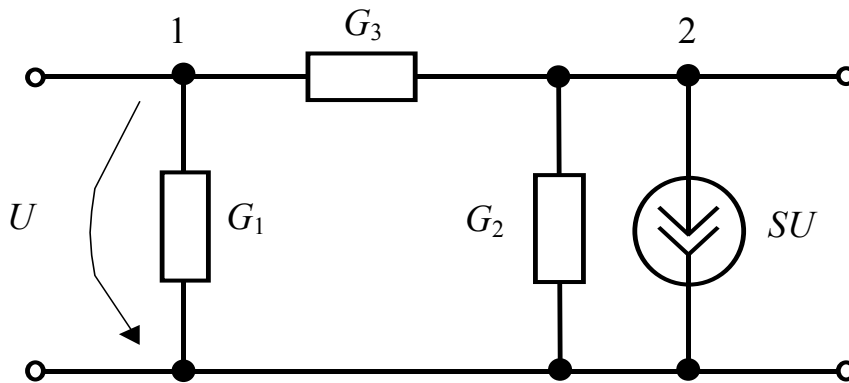


Рисунок 8.2 – Схема кола у прикладі 8.3

Розв'язання. Запишемо матрицю за методом LU -розкладання:

$$(B) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 & 1 & 0 \\ -S - G_3 & G_2 + G_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1,01 & -0,01 & 1 & 0 \\ -100 & 1,01 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись алгоритмом обернення за методом Гаусса-Жордана, одержимо результат $(B^{(2)})$ у вигляді (8.15):

$$(B^{(2)}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 49,99 & 0,495 \\ 0 & 1 & 4950 & 50 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Добуток:

$$(A)^{-1}(A) = \begin{pmatrix} 49,99 & 0,495 \\ 4950 & 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,01 & -0,01 \\ -100 & 1,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,53 & 0 \\ 0,51 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця відхилень:

$$(A)^{-1}(A) - (E) = \begin{pmatrix} -0,47 & 0 \\ 0,51 & 0 \end{pmatrix}.$$

З тією самою розрядністю ($m = 4$) обчислимо результат у символьному вигляді. Тоді обернена матриця має вигляд:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{G_1 G_2 + G_3 (G_1 + G_2 - S)} \begin{pmatrix} G_2 + G_3 & G_3 \\ S + G_3 & G_1 + G_3 \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

а її чисельна оцінка (після підставлення чисельних значень параметрів) становить:

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 50,5 & 0,5 \\ 5 \cdot 10^3 & 50,5 \end{pmatrix}.$$

При цьому добуток матриць дорівнює:

$$(A)^{-1}(A) = \begin{pmatrix} 50,5 & 0,5 \\ 5 \cdot 10^3 & 50,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,01 & -0,01 \\ -100 & 1,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і матриця відхилень нульова.

Даний приклад ілюструє можливість підвищення точності аналізу за рахунок використання символьних методів. Відносні відхилення елементів більш точної $(A)^{-1}$ і менш точної $(A)^{-1}_F = \begin{pmatrix} 49,99 & 0,495 \\ 4950 & 50 \end{pmatrix}$ матриць (враховуючи розрядність операндів) не дуже великі. Але аналіз символьного виразу (8.24) свідчить про можливість одержання значної похибки чисельного обернення матриці провідностей, оскільки визначник (8.24)

$$D = G_1 G_2 + G_3 (G_1 + G_2 - S)$$

залежно від G_3 може наближатися до нуля, що призведе до великих похибок обчислень, а також до великих похибок матриці відхилення і відповідних норм для оцінки точності розв'язання задачі.

Нехай тепер для кола (рис.8.2) параметр G_3 відхилиться від свого номінального значення на 1,5%, тобто $G_3 = 1,015 \cdot 10^{-2}$. Тоді з розрядністю 4 оцінка такого символьного результату (8.24) оберненої матриці має вигляд:

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 168,3 & 1,691 \\ 1,666 \cdot 10^4 & 168,3 \end{pmatrix},$$

а добуток

$$(A)^{-1}(A) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 930 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Матриця відхилень дорівнює:

$$(A)^{-1}(A) - (E) = \begin{pmatrix} -0,2 & 0 \\ 930 & -0,9 \end{pmatrix},$$

що свідчить про значну чисельну нестійкість оцінки за точною аналітичною формулою.

Результат обернення за методом Гаусса виявляється повністю хибним, оскільки в матриці

$$(A) = (G) = \begin{pmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -S - G_3 & G_2 + G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,01 & -0,01015 \\ -100 & 1,01 \end{pmatrix}$$

внаслідок округлень (до чотирьох значущих цифр) значення прирощення ΔG_3 маскуються в усіх комірках, крім G_{12} , а визначник $D^* = 0,0051$ (точне значення $D = 0,005402$).

З виразу визначника у формулі (8.24) видно, що при

$$G_3 = -\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 - S} = \frac{1}{98} = 0,10204$$

він дорівнюватиме нулю і усі результати (як знайдені за формулою (8.24), так і обчислені за методом Гаусса) будуть повністю хибними.

Останній випадок ілюструє чисельну нестійкість результатів у разі близькості кола до стану самозбудження. При цьому малі зміни параметра G_3 призводять до великих змін результатів обчислень.

Наведені вище приклади були вибрані, виходячи з простоти ілюстрації та перевірки одержуваних результатів. Ясно, що сучасні ЕОМ дозволяють проводити обчислення із значно більшою розрядністю, ніж у розглянутих прикладах. Але й аналізовані кола і відповідні їм системи лінійних алгебраїчних рівнянь будуть значно складнішими. Тому похибки (менші, ніж розглянуті, але принципово ненульові) накопичуються і так само можуть викликати повністю невірні результати.

8.5.3 Дублікації та еквівалентні перетворення

Причиною поганої зумовленості систем рівнянь рівноваги (зокрема, вузлових напруг) електронних кіл є „незаземлені” елементи еквівалентної схеми, параметри яких записують у двох рядках, або двох стовпцях матриці коефіцієнтів $(Y(p)) = (A(p))$, а їх пари добутоків входять до розкладання визначника (алгебраїчного доповнення) з протилежними знаками.

При розкладанні визначника або його доповнень виникають протилежні за знаком, але однакові за величиною подібні члени, які називають **дублікаціями**.

Процес впливу дублікацій ілюструє наступний приклад.

Приклад 8.4. Обчислити визначник та обернену матрицю провідностей для кола (рис.8.3).

Розв’язання. Матриця провідностей схеми (рис.8.3) має вигляд:

$$(G) = \begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{pmatrix}.$$

Визначник

$$D = (G_1 + G_2)(G_2 + G_3) - G_2^2 = G_1G_2 + G_2^2 + G_1G_3 + G_2G_3 - G_2^2. \quad (8.25)$$

У символічному виразі (8.25) наявна дублікація $\pm G_2^2$, яку можна ліквідувати, і тоді

$$D = G_1G_2 + G_1G_3 + G_2G_3.$$

Але при обчисленнях у чисельному вигляді дужки в лівій частині виразу (8.25) не розкривають, що може призвести до великих похибок.

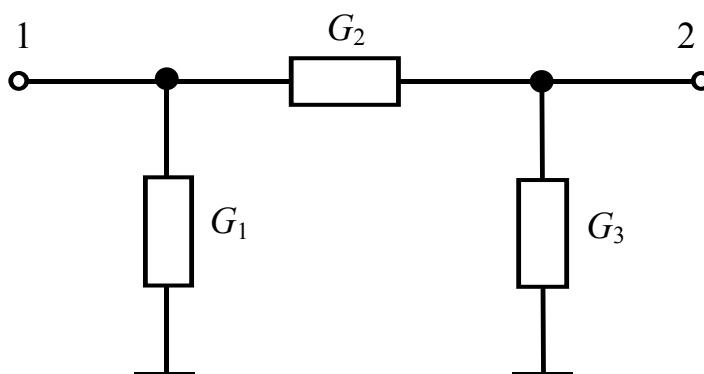


Рисунок 8.3 – Схема кола у прикладі 8.4

Нехай, наприклад, $G_1 = G_2 = G_3 = 1$,

тоді:
$$(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = 4 - 1 = 3,$$

обернена матриця

$$(R) = (G)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Нехай розрядність обчислень $m = 4$. Тоді для наданих значень і розрядності обчислень G_i одержимо практично вірний результат.

Тепер нехай $G_1 = G_3 = 1$; $G_2 = 10^4$.

Тоді

$$(G) = \begin{pmatrix} 1+10^4 & -10^4 \\ -10^4 & 1+10^4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 10^4 & -10^4 \\ -10^4 & 10^4 \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

визначник

$$D^* = 10^8 - 10^8 = 0,$$

і обернена матриця не існує.

Отже, чисельний метод аналізу дає повністю хибний результат.

Знайдемо тепер символний вираз оберненої матриці та підставимо до нього чисельні значення (операції проведемо з тією самою розрядністю $m = 4$):

$$(R) = \frac{1}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3} \begin{pmatrix} G_2 + G_3 & G_2 \\ G_2 & G_1 + G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

тобто одержимо практично точний результат.

Даний приклад ілюструє, що таке джерело методичної похибки, як наявність провідності $G_2 = 10^4$, значно впливає на формування коефіцієнтів системи (8.26) і практично не впливає на результат в оберненому базисі (8.27). Провідність G_2 при розрядності $m = 4$ можна вважати коротким замиканням між вузлами 1 і 2, що видно з виразу (8.27), де опори відносно цих вузлів тожні.

Досить точного результату у виразі (8.27) вдалося досягти, ліквідувавши у визначнику дублікацію. Оскільки будь-яке коло містить велику кількість „незаземлених” („плаваючих”) віток, блоків та підсхем, дублікації у чисельних розв’язках з’являються масово, а отже, їх усунення є однією з головних проблем обчислювальної математики у теорії кіл.

На сучасному етапі розвитку теорії кіл розрізняють дублікації першого, другого та третього роду.

Дублікації першого роду виникають внаслідок наявності „плаваючих” елементів схеми з провідностями $Y_k(p)$, які входять у чотири комірки матриці $(Y(p))$ і призводять до появи квадратів провідностей $Y_k^2(p)$. Наприклад, для схеми рис.8.3 у розкладанні визначника буде дублікація першого роду $\pm G_2^2$.

Дублікації другого роду виникають внаслідок наявності незаземлених (плаваючих) контурів, утворених незаземленими (плаваючими) вітками схеми. Наприклад, в схемі (рис.8.4) дублікації другого роду утворені добутками провідностей $\pm G_2 G_4 G_6$.

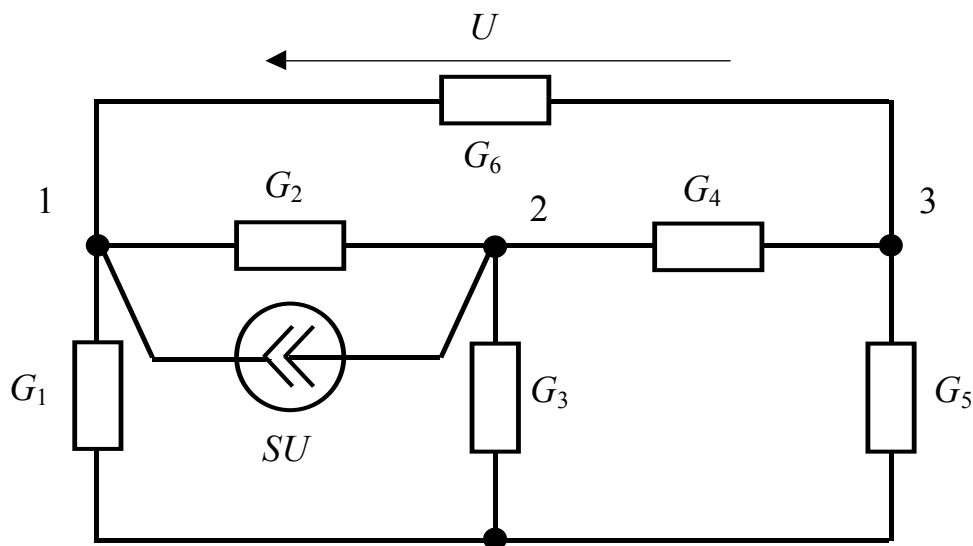


Рисунок 8.4 – Схема кола з дублікаціями другого роду

Дублікації третього роду породжуються провідностями S керованих джерел струму різного знаку, помноженими на однакові провідності пасивних віток, а також квадратами S^2 і добутками передатних провідностей різних залежних джерел.

Ще одним джерелом методичної похибки є **еквівалентні перетворення**, особливо, коли такі перетворення виконують з використанням паразитних параметрів кола, що показує наступний приклад.

Приклад 8.5. Нехай надана схема кола (рис.8.5, *a*). Матриця підсхеми (A) відома. Розв'язати задачу аналізу методом вузлових напруг.

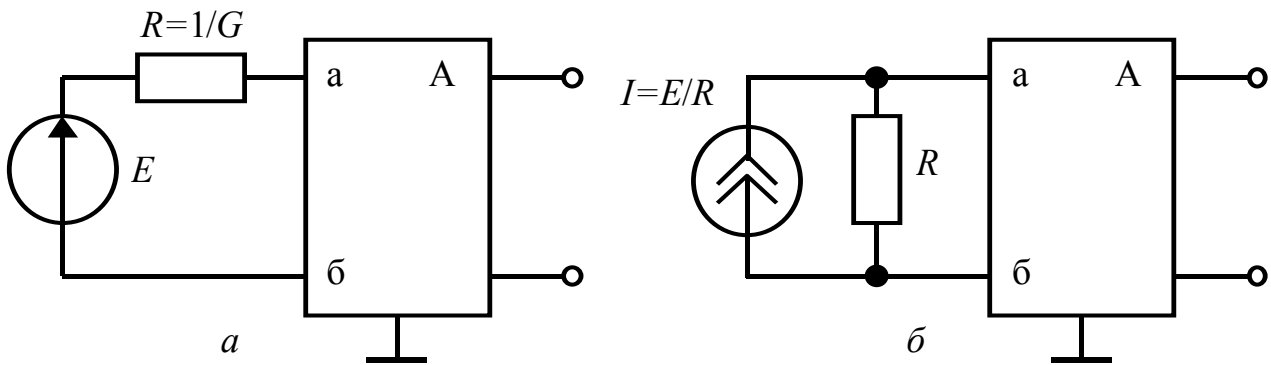


Рисунок 8.5 – Схема кола у прикладі 8.5

Розв'язання. У методі вузлових напруг зазвичай джерело напруги перетворюють у джерело струму, що в даному випадку незручно, оскільки підсхема A представлена матрицею провідностей багатобрамника. Якщо послідовно з джерелом напруги увімкнути „малий” опір R , то таке перетворення можливе (рис.8.5, *б*). Але для того, щоб значення струмів і напруг після додання опору R не змінилися, треба, щоб $R \rightarrow 0$ ($G \rightarrow \infty$).

Але при цьому $I \rightarrow \infty$; $R \rightarrow 0$ і між вузлами a, b виникає невизначеність $E = IR = 0 = 0 \times \infty$, яка (що видно зі схеми рис.8.5, *a*) розкривається як E . Але при чисельному аналізі таке розкриття невизначеності неможливе, що призводить до великих похибок.

Часто як опір R враховують паразитний опір джерела напруги R_i . Але і в цьому випадку $|R_i| \ll |Z_{аб}|$, де $Z_{аб}$ вхідний опір підсхеми A , і чисельна невизначеність $0 \times \infty$ знов буде мати місце.

8.6. Символьні та символно-чисельні методи аналізу лінійних електронних кіл

8.6.1 Вступні зауваження

Символьні методи аналізу полягають у заміні значень параметрів компонентів кола літерними символами і подальшому обчисленні відповідних ре-

акцій у вигляді формул. При цьому в процесі одержання розрахункових формул аналітичними методами можуть бути розкриті невизначеності, зведені подібні члени (в тому числі ліквідовані дублікації), винесені за дужки загальні множники тощо. Внаслідок ліквідації або послаблення впливу джерел методичної похибки чисельні результати, одержувані після підстановки замість літерних символів їх чисельних значень, мають меншу похибку, ніж такі самі результати, одержані чисельними методами. Велика громіздкість символічних виразів для відносно нескладних схем є суттєвим обмеженням використання символічних методів для обчислення обернених матриць, тобто багатьох передатних функцій кола. Тому символічні методи використовують одночасно з чисельними, що дозволяє зменшити громіздкість обчислень і виразів і підвищити точність обчислень. Використовуючи символічні методи, як правило, у символічному вигляді одержують лише обмежену кількість алгебраїчних доповнень (та визначник) для обчислення усіх, або деяких функцій двобрамника. Тому у подальшому основну увагу приділено здобуттю символічних або чисельно-символічних виразів для визначника (алгебраїчного доповнення).

8.6.2 Білінійне розкладання

Найпростішим і найзручнішим при невеликій кількості символічних параметрів є розвинення визначника (алгебраїчного доповнення) в ряд Тейлора за провідностями компонентів:

$$\Delta(W) = \Delta^0 + W(p)\Delta_{(\gamma+\delta)(\alpha+\beta)}, \quad (8.28)$$

де $W(p)$ – передатна провідність джерела струму, увімкненого між вузлами γ, δ (струм тече від вузла γ до вузла δ), керованого напругою між вузлами α, β (потенціал вузла α вищий потенціалу вузла β), рис.8.6, а; Δ^0 – визначник матриці провідності при $W(p) \equiv 0$; $\Delta_{(\gamma+\delta)(\alpha+\beta)}$ – сумарне алгебраїчне доповнення, тобто визначник матриці провідностей, де рядок δ додано до рядка γ , стовпець β – до стовпця α , рядок δ і стовпець β з матриці викреслені.

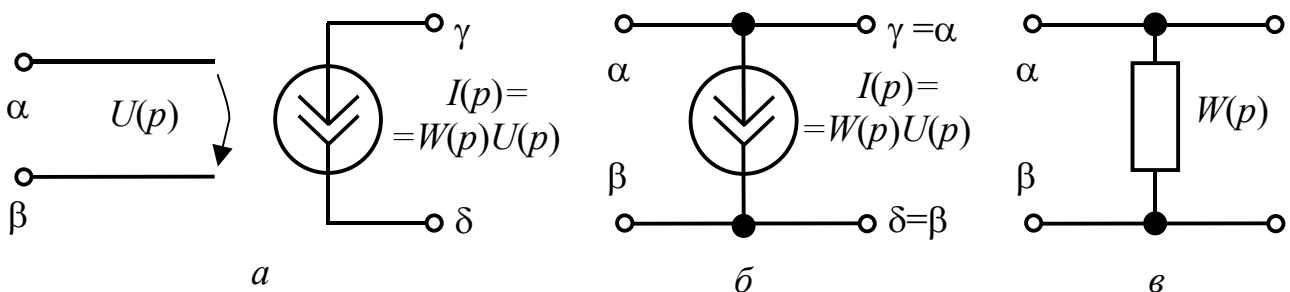


Рисунок 8.6 – Джерело струму, кероване напругою: а – еквівалентна схема; б – схема увімкнення; в – передатна провідність

Сумарне алгебраїчне доповнення пов'язане з простими доповненнями матриці провідностей канонічної системи вузлових напруг співвідношенням:

$$\Delta_{(\gamma+\delta)(\alpha+\beta)} = \Delta_{\gamma\alpha} - \Delta_{\gamma\beta} - \Delta_{\delta\alpha} + \Delta_{\delta\beta}. \quad (8.29)$$

Отже, вираз (8.28) можна записати у вигляді:

$$\Delta(W) = \Delta^0 + W(p)(\Delta_{\gamma\alpha} - \Delta_{\gamma\beta} - \Delta_{\delta\alpha} + \Delta_{\delta\beta}). \quad (8.30)$$

Якщо провідність $W(p)$ увімкнено між вузлами α, β (рис.8.6, в), тоді $\alpha = \gamma$ і $\beta = \delta$ (рис.8.6, б). Отже, після заміни γ на α та δ на β з формул (8.28)–(8.30) виходить вираз:

$$\Delta(W) = \Delta^0 + W(p)\Delta_{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}^0 = \Delta^0 + W(p)(\Delta_{\alpha\alpha} - \Delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\beta\alpha} + \Delta_{\beta\beta}). \quad (8.31)$$

Якщо який-небудь з вузлів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ або два вузли (наприклад β і δ) увімкнені до загального (з номером нуль), то у виразах (8.29)–(8.31) доповнення, що мають нульові індекси, дорівнюють нулю. Тоді, наприклад, при $\beta = 0$ з формули (8.31) виходить:

$$\Delta(W) = \Delta^0 + W(p)\Delta_{(\alpha+0)(\alpha+0)} = \Delta^0 + W(p)\Delta_{\alpha\alpha}.$$

Якщо ж треба знайти символний вираз визначника як функцію двох провідностей $W_1(p), W_2(p)$ (у загальному випадку це передатні провідності джерел струму, керованих напругою, увімкнених до брам $(\alpha_1 + \beta_1), (\gamma_1 + \delta_1)$ та $(\alpha_2 + \beta_2), (\gamma_2 + \delta_2)$), то у формулі (8.28), записаній стосовно $W_1(p)$, треба врахувати ще й символні вирази Δ^0 та $\Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1)}$ як функції $W_2(p)$, тобто:

$$\Delta(W_2) = \Delta^0 + W_2(p)\Delta_{(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2)} \quad (8.32a)$$

та

$$\Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1)}(W_2) = \Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1)} + W_2(p)\Delta_{(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2),(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1)}.$$

У підсумку можна записати:

$$\begin{aligned} \Delta(W_1, W_2) = & \Delta^0 + W_1(p)\Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1)} + W_2(p)\Delta_{(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2)} + \\ & + W_1(p)W_2(p)\Delta_{(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2),(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1)}, \end{aligned} \quad (8.32б)$$

де усі чисельні значення визначника Δ^0 та доповнень обчислені за матрицею провідностей $(Y(p))$ при $W_1(p) = W_2(p) = 0$.

Аналогічно попереднім перетворенням, для трьох передатних провідностей $W_1(p), W_2(p), W_3(p)$ одержують:

$$\begin{aligned} \Delta(W_1, W_2, W_3) = & \Delta^0 + W_1(p)\Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1)} + W_2(p)\Delta_{(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2)} + \\ & + W_3(p)\Delta_{(\gamma_3+\delta_3)(\alpha_3+\beta_3)} + W_1(p)W_2(p)\Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1),(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2)} + \\ & + W(p)_1W_3(p)\Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1),(\gamma_3+\delta_3)(\alpha_3+\beta_3)} + W_2(p)W_3(p)\Delta_{(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2),(\gamma_3+\delta_3)(\alpha_3+\beta_3)} + \\ & + W_1(p)W_2(p)W_3(p)\Delta_{(\gamma_1+\delta_1)(\alpha_1+\beta_1),(\gamma_2+\delta_2)(\alpha_2+\beta_2),(\gamma_3+\delta_3)(\alpha_3+\beta_3)}. \end{aligned} \quad (8.32в)$$

Якщо усі індекси $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ не дорівнюють нулю і різні, то усі сумарні доповнення ненульові. Кількість членів розкладання одного визначника за символними параметрами залежить від кількості k символів W_1, W_2, \dots, W_k .

Так, за відсутності символів $W_i(p)$ ($k = 0$) у виразі для визначника маємо єдине число Δ^0 , а для одного символу ($k = 1$) за формулою (8.32a) – два числа.

У формулах (8.32б) ($k = 2$) та (8.32в) ($k = 3$) кількість доданків дорівнює чотирьом та восьми відповідно.

Отже, кількість чисельних коефіцієнтів при сполученнях k символів становить:

$$r = 2^k. \quad (8.32г)$$

Останній вираз ілюструє обмеження використання подібних методів внаслідок їх громіздкості. Так, при $k = 100$, у схемі кола з $N \geq 100$ вузлами кількість коефіцієнтів при сполученнях літерних символів (якщо вітки з провідностями $W_i(p)$ не утворюють замкнених контурів)

$$r = 2^{100} > 10^{30}.$$

Слушно нагадати, що маса Землі становить близько $0,6 \cdot 10^{30}$ міліграмів, а кола із 100 і більше вузлами в сучасній практиці є досить розповсюдженими.

Те, що визначник і усі доповнення обчислюють при $W_i(p) = 0$, є дуже зручним при розв'язанні задач проектування. Нехай аналізоване коло (для якого обчислені усі функції кола, тобто усі алгебраїчні доповнення) не задовольняє вимогам технічного завдання. Ясно, що можна забезпечити кращий збіг функцій кола з вимогами технічного завдання, „підбираючи” деякі параметри або „вмикаючи” між парами вузлів додаткові вітки. Тоді довільно (або цілеспрямовано) обирають пари вузлів $(\alpha + \beta)$, $(\gamma + \delta)$ і одержують функцію провідності (символа) $W(p)$. Перебираючи пари вузлів, обирають такі, де увімкнення $W(p)$ призводить до бажаної корекції передатної функції кола.

При побудові символічних виразів у вигляді (8.32) можливий збіг номерів вузлів, до яких увімкнені різні вітки з провідностями $W_i(p)$. Нехай, наприклад, пасивну вітку з провідністю $W_1(p)$ увімкнено між вузлами a , b , а вітку з провідністю $W_2(p)$ – між вузлами a , d . Тоді сумарне доповнення (8.32б) при добутку символів $W_1(p)$, $W_2(p)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta_{(a+b)(a+b),(a+d)(a+d)} &= \Delta_{aa,(a+d)(a+d)} - \Delta_{ab,(a+d)(a+d)} + \Delta_{ba,(a+d)(a+d)} - \Delta_{bb,(a+d)(a+d)} = \\ &= \Delta_{aa,aa} - \Delta_{aa,ad} - \Delta_{aa,da} + \Delta_{aa,dd} - (\Delta_{ab,aa} - \Delta_{ab,ad} - \Delta_{ab,da} + \Delta_{ab,dd}) - \\ &\quad - (\Delta_{ba,aa} - \Delta_{ba,ad} - \Delta_{ba,da} + \Delta_{ba,dd}) + \Delta_{bb,aa} - \Delta_{bb,ad} - \Delta_{bb,da} + \Delta_{bb,dd}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Доповнення, для одержання яких треба двічі викреслити той самий рядок або стовпець, тотожні нулю (що можна показати, спираючись на правило диференціювання визначника). Отже, в одержаному виразі (8.33):

$$\Delta_{aa,aa} = \Delta_{aa,ad} = \Delta_{aa,da} = \Delta_{ab,aa} = \Delta_{ab,ad} = \Delta_{ba,aa} = \Delta_{ba,da} = 0$$

і він має вигляд

$$\Delta_{(a+b)(a+b),(a+d)(a+d)} = \Delta_{aa,dd} + \Delta_{ab,da} - \Delta_{ab,dd} + \Delta_{ba,ad} - \Delta_{ba,dd} + \Delta_{bb,aa} - \Delta_{bb,ad} - \Delta_{bb,da} + \Delta_{bb,dd}.$$

При одержанні розкладання (8.32) часто виникає ситуація, коли алгебраїчне доповнення при добутку символів $W_1(p)$ утворюється викресленням (по одному разу) усіх рядків та стовпців матриці. Визначник такої „порожньої”

матриці дорівнює одиниці. Це пов'язано з тим, що матрична „система” рівнянь першого порядку має збігатися з відповідним алгебраїчним рівнянням.

Нехай є рівняння:

$$ax = b.$$

Ясно, що

$$x = b/a.$$

Якщо подати це рівняння у матричному вигляді

$$(a)(x) = (b),$$

то обернену матрицю $(a)^{-1}$ можна обчислити, як $\frac{\Delta_{11}}{\Delta}$. Тут $\Delta = a$, Δ_{11} – доповнення, утворене викресленням першого рядка та стовпця з матриці (a) . Тобто, наявна „порожня” матриця і, оскільки $(a)^{-1} = 1/a$, треба, щоб $\Delta_{11} = 1$.

Можливості чисельно-символьного методу білінійного розкладання функцій кола ілюструють наступні приклади.

Приклад 8.6. Для схеми рис.8.7, а знайти вхідний опір $Z_{(1+0)(1+0)}$ та коефіцієнт передачі за напругою $H_{U(3+0)(1+0)}$. Параметри транзисторів за змінним струмом у лінійному режимі однакові, а їхні матриці провідностей у схемі вимірювання із загальним емітером (рис.8.7, б) мають вигляд:

$$(Y)_{\text{бк}} = \begin{matrix} \text{б} & \text{к} \\ \text{к} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \text{ мСм.}$$

Обчислити також, при якому значенні провідності W вхідний опір кола дорівнює нескінченності.

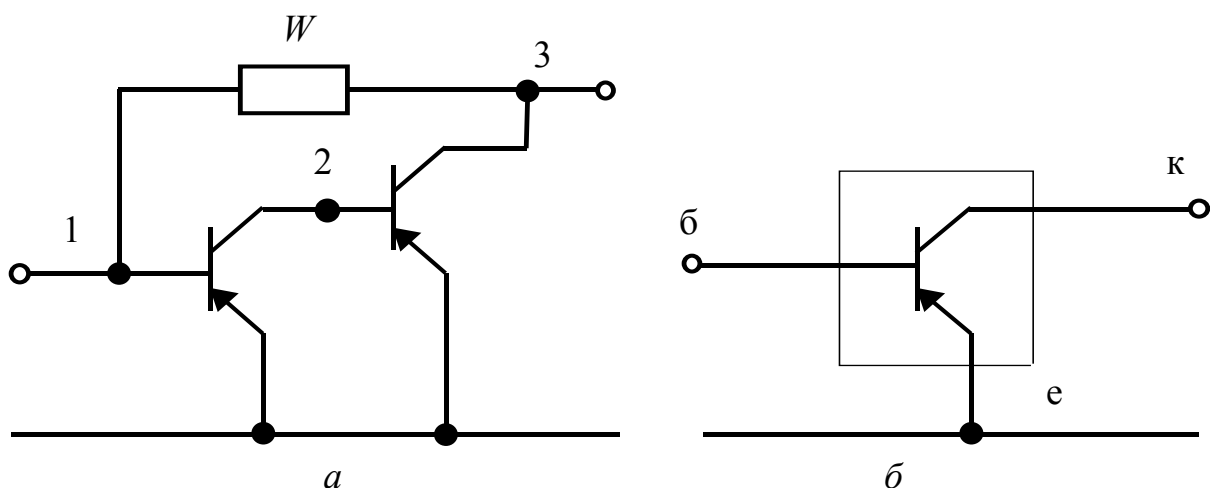


Рисунок 8.7 – До прикладу 8.6: а – схема кола;
б – схема вимірювання із загальним емітером

Розв'язання. Вхідний опір кола становить (див. формулу (4.23а)):

$$Z_{\text{вх}} = Z_{(1+0)(1+0)} = Z_{11} = \Delta_{11} / \Delta,$$

а коефіцієнт передачі за напругою дорівнює (4.23г):

$$H_{U(3+0)(1+0)} = H_{U31} = \Delta_{13} / \Delta_{11}.$$

Обчислимо номінальні значення цих величин (при $W = 0$). Для цього складемо матрицю провідностей:

$$(Y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad \Delta^0 = 2; \quad \Delta_{11}^0 = 2; \quad \Delta_{13}^0 = 100.$$

Тоді $Z_{11}^0 = 1 \text{ кОм}; \quad H_{U31}^0 = 50.$

Символьна залежність визначника та доповнень визначається виразом:

$$\begin{aligned} \Delta(W) &= \Delta^0 + W\Delta_{(1+3)(1+3)} = \Delta^0 + W(\Delta_{11} - \Delta_{13} - \Delta_{31} + \Delta_{33}) = \\ &= 2 + W(2 - 100 - 0 + 2) = 2 - 96W; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(W) &= \Delta_{11}^0 + W\Delta_{11,(1+3)(1+3)} = \Delta_{11}^0 + W(\Delta_{11,11} - \Delta_{11,13} - \Delta_{11,31} + \Delta_{11,33}) = \\ &= \Delta_{11}^0 + W\Delta_{11,33} = 2 + 2W; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{13}(W) &= \Delta_{13}^0 + W\Delta_{13,(1+3)(1+3)} = \Delta_{13}^0 + W(\Delta_{13,11} - \Delta_{13,13} - \Delta_{13,31} + \Delta_{13,33}) = \\ &= \Delta_{13}^0 - W\Delta_{13,31} = 100 - 2W. \end{aligned}$$

Отже, формули для вхідного опору та коефіцієнта передачі такі:

$$Z_{11}(W) = \frac{\Delta_{11}(W)}{\Delta(W)} = \frac{\Delta_{11}^0 + W\Delta_{11,33}}{\Delta^0 + W(\Delta_{11} - \Delta_{13} - \Delta_{31} + \Delta_{33})} = \frac{2 + 2W}{2 - 96W};$$

$$H_{U31}(W) = \frac{\Delta_{13}(W)}{\Delta_{11}(W)} = \frac{\Delta_{13}^0 + W\Delta_{13,31}}{\Delta_{11}^0 + W\Delta_{11,33}} = \frac{100 - 2W}{2 + 2W}.$$

Опір $Z_{11}(W_{\text{кр}}) \rightarrow \infty$, якщо знаменник дорівнює нулю, тобто

$$0 = 2 - 96W_{\text{кр}}; \quad W_{\text{кр}} = 1/48 \text{ мСм}.$$

При цьому коефіцієнт передачі за напругою становитиме:
 $H_{U31}(W_{\text{кр}}) = 49,96.$

Приклад 8.7. Для схеми (рис.8.8) обчислити визначник матриці провідностей канонічної системи вузлових напруг, коефіцієнт передачі за напругою та вхідний опір. Провідність $G = 5 \text{ мСм}$, матриці провідностей двобрамників A і B відомі:

$$(Y)_A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ мСм}; \quad (Y)_B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ мСм};$$

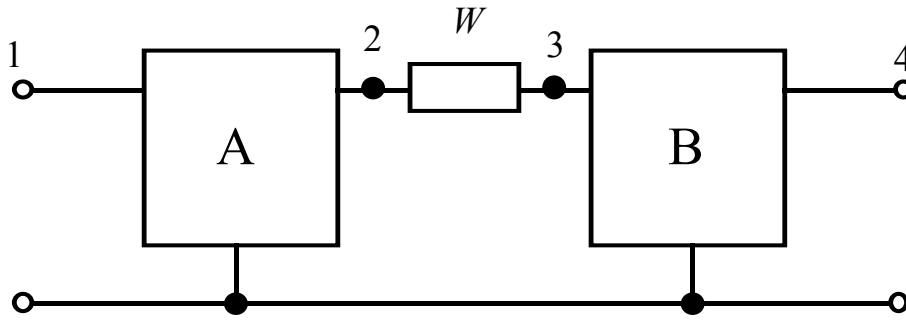


Рисунок 8.8 – Схема кола до прикладу 8.7

Розв’язання. Як символічний параметр оберемо провідність $W = G$. При $W = G = 0$ матриця провідностей має вигляд:

$$(Y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ мСм.}$$

а визначник $\Delta^0 = \Delta_1 \Delta_2 = 14 \cdot 9 = 126 \text{ мСм}^4$.

Коефіцієнт передачі за напругою

$$H_{U41}^0 = \Delta_{14}^0 / \Delta_{11}^0 = 0 / 18 = 0, \text{ оскільки } \Delta_{14}^0 = 0 \text{ мСм}^3; \quad \Delta_{11}^0 = 18 \text{ мСм}^3.$$

Символьна залежність визначника і доповнень має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta(W) &= \Delta^0 + W\Delta_{(2+3)(2+3)} = \Delta^0 + W(\Delta_{22} - \Delta_{23} - \Delta_{32} + \Delta_{33}) = \\ &= 126 + G(18 - 0 - 0 + 28) = 126 + 46G; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(W) &= \Delta_{11}^0 + W\Delta_{11,(2+3)(2+3)} = \Delta_{11}^0 + W(\Delta_{11,22} - \Delta_{11,23} - \Delta_{11,32} + \Delta_{11,33}) = \\ &= 18 + G(9 - 0 - 0 + 4) = 18 + 13G; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{14}(W) &= \Delta_{14}^0 + W\Delta_{14,(2+3)(2+3)} = \Delta_{14}^0 + G(\Delta_{14,22} - \Delta_{14,23} - \Delta_{14,32} + \Delta_{14,33}) = \\ &= 0 + G(0 - 0 - 50 + 0) = -50G. \end{aligned}$$

Коефіцієнт передачі напруги за напругою

$$H_{U41}(W)|_{W=G=5} = -250/83.$$

Вхідний опір

$$Z_{11}(W)|_{W=G=5} = 83/356 \text{ кОм.}$$

8.6.3 Граф матриці

При розв’язанні задач аналізу радіотехнічних кіл, пов’язаних з обчисленням функцій кола, широкого розповсюдження набули топологічні методи аналізу. Їх велике розмаїття не дозволяє через обмежений обсяг книги навести усі (або хоча б значну частину) існуючих топологічних методів. Один з таких

методів, в якому використовується неспрямований граф, вже описаний у першій частині підручника [7, підрозд.6.5]. Нижче розглянуто метод, оснований на побудові графа матриці провідностей кола, який дозволяє оцінити як позитивні властивості (що виявляються особливо при розрахунках вручну) топологічних методів, так і їхні негативні властивості (які виявляються при аналізі схем великої складності).

Довільну систему рівнянь можна відобразити графом (системи рівнянь), побудованим за наступними принципами.

1. Кожному рівнянню (вузлу схеми) відповідає вершина графа, номер якої збігається з номером рівняння.

2. Кожне рівняння відображає сукупності спрямованих дуг (віток). Ці дуги мають вагу, що дорівнює відповідному коефіцієнту, з яким дана змінна входить до рівняння.

3. Дуга, що відповідає коефіцієнту $Y_{ij}(p)$ при j -й змінній $U_j(p)$, яка входить до i -го рівняння, з'єднує між собою вузли (вершини) графа з номерами i, j . Ця дуга спрямована до вузла i (від вузла j).

4. Незалежні джерела відображають вершинами, які називають витокami (з вагою джерел), що об'єднані з вузлами увімкнення дугами (спрямованими до цих вузлів) з вагою -1 .

Нехай відома система рівнянь:

$$\begin{cases} Y_{11}(p)U_1(p) + Y_{12}(p)U_2(p) + Y_{13}(p)U_3(p) = I_1(p); \\ Y_{21}(p)U_1(p) + Y_{22}(p)U_2(p) = 0; \\ Y_{32}(p)U_2(p) + Y_{33}(p)U_3(p) + Y_{34}(p)U_4(p) = 0; \\ Y_{43}(p)U_3(p) + Y_{44}(p)U_4(p) = 0, \end{cases} \quad (8.34a)$$

яка у матричній формі запису має вигляд:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} Y_{11}(p) & Y_{12}(p) & Y_{13}(p) & 0 \\ Y_{21}(p) & Y_{22}(p) & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32} & Y_{33}(p) & Y_{34}(p) \\ 0 & 0 & Y_{43}(p) & Y_{44}(p) \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ U_3(p) \\ U_4(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.34b)$$

Граф системи рівнянь (8.34) зображено на рис.8.9.

На відміну від матричного рівняння, в якому позначені відповідні нульові елементи (з якими при реалізації стандартного методу Гаусса проводять операції), **граф системи рівнянь** (рис.8.9) **не містить дуг з нульовими вагами**, що дозволяє спростити обчислення.

У процедурі обчислення функцій кола дія $I_1(p)$ відповідає незалежній брамі. Запис цієї дії за допомогою алгебраїчних доповнень матриці коефіцієнтів системи вузлових напруг дозволяє відкинути джерело і одержати граф (рис.8.10) матриці (у даному випадку – провідностей).

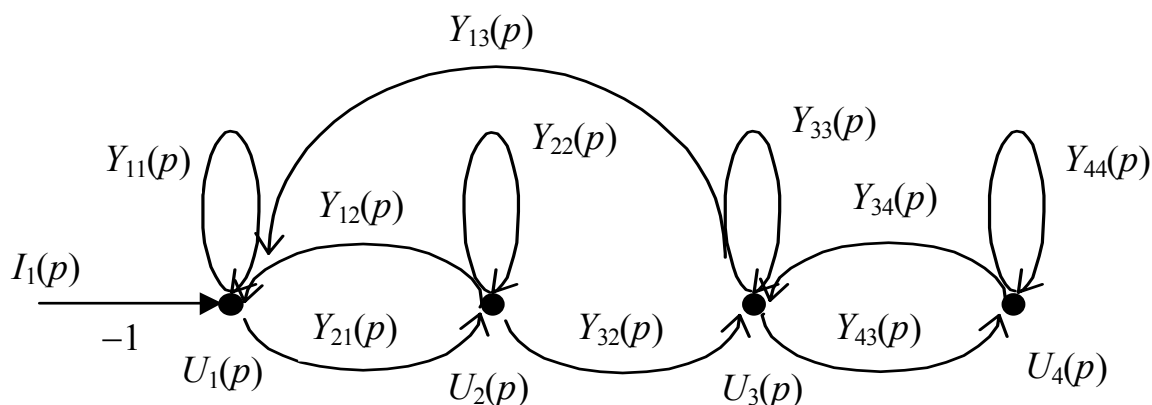


Рисунок 8.9 – Граф системи рівнянь (8.34)

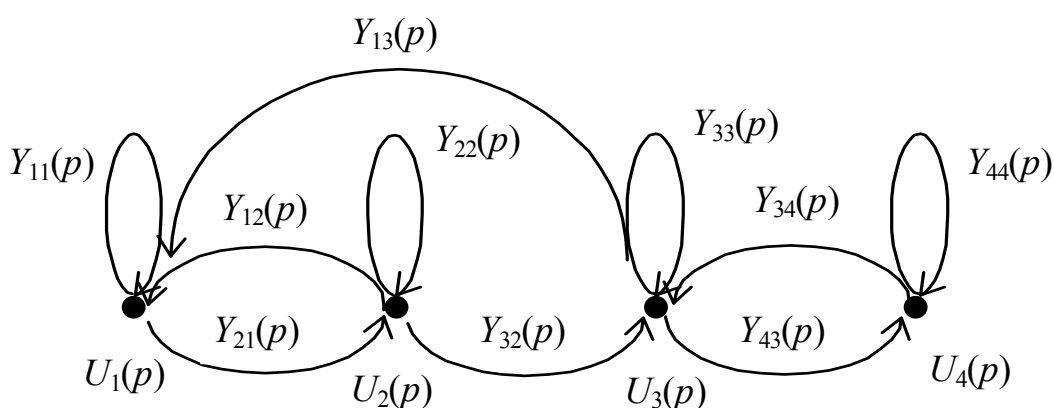


Рисунок 8.10 – Граф матриці провідностей

За цим графом можна розрахувати визначник і довільне алгебраїчне доповнення.

Для обчислення визначника за графом виконують такі процедури.

1. Обчислюють усі фактори графа.

Фактором графа, який містить n вершин, називають підграф, утворений сукупністю контурів, що не мають спільних вершин і охоплюють усі n вершин графа.

Для графа (рис.8.10) на рис.8.11, $a, б, в, г, д$ показані усі його фактори.

2. Фактори графа зважують, тобто розраховують їх власну вагу. **Вагою фактора** називають добуток ваг усіх дуг, що утворюють даний фактор. Отже, ваги w_i наведених п'яти факторів (рис.8.11) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 w_a &= Y_{11}(p)Y_{22}(p)Y_{33}(p)Y_{44}(p); & w_б &= Y_{11}(p)Y_{22}(p)Y_{34}(p)Y_{43}(p); \\
 w_в &= Y_{12}(p)Y_{21}(p)Y_{33}(p)Y_{44}(p); & w_г &= Y_{13}(p)Y_{21}(p)Y_{32}(p)Y_{44}(p); \\
 w_д &= Y_{12}(p)Y_{21}(p)Y_{34}(p)Y_{43}(p).
 \end{aligned}$$

3. **Визначають знаки ваг факторів** за формулою $(-1)^{\delta_i}$, де δ_i – **декремент підстановки**⁶, який знаходять як різницю між кількістю n вершин і k контурів фактора, тобто:

$$\delta_i = n - k_i.$$

Для факторів (рис.8.11) знаки такі:

$$\delta_a = 4 - 4 = 0; \quad \delta_b = 4 - 3 = 1; \quad \delta_c = 4 - 3 = 1; \quad \delta_d = 4 - 2 = 2; \quad \delta_e = 4 - 2 = 2.$$

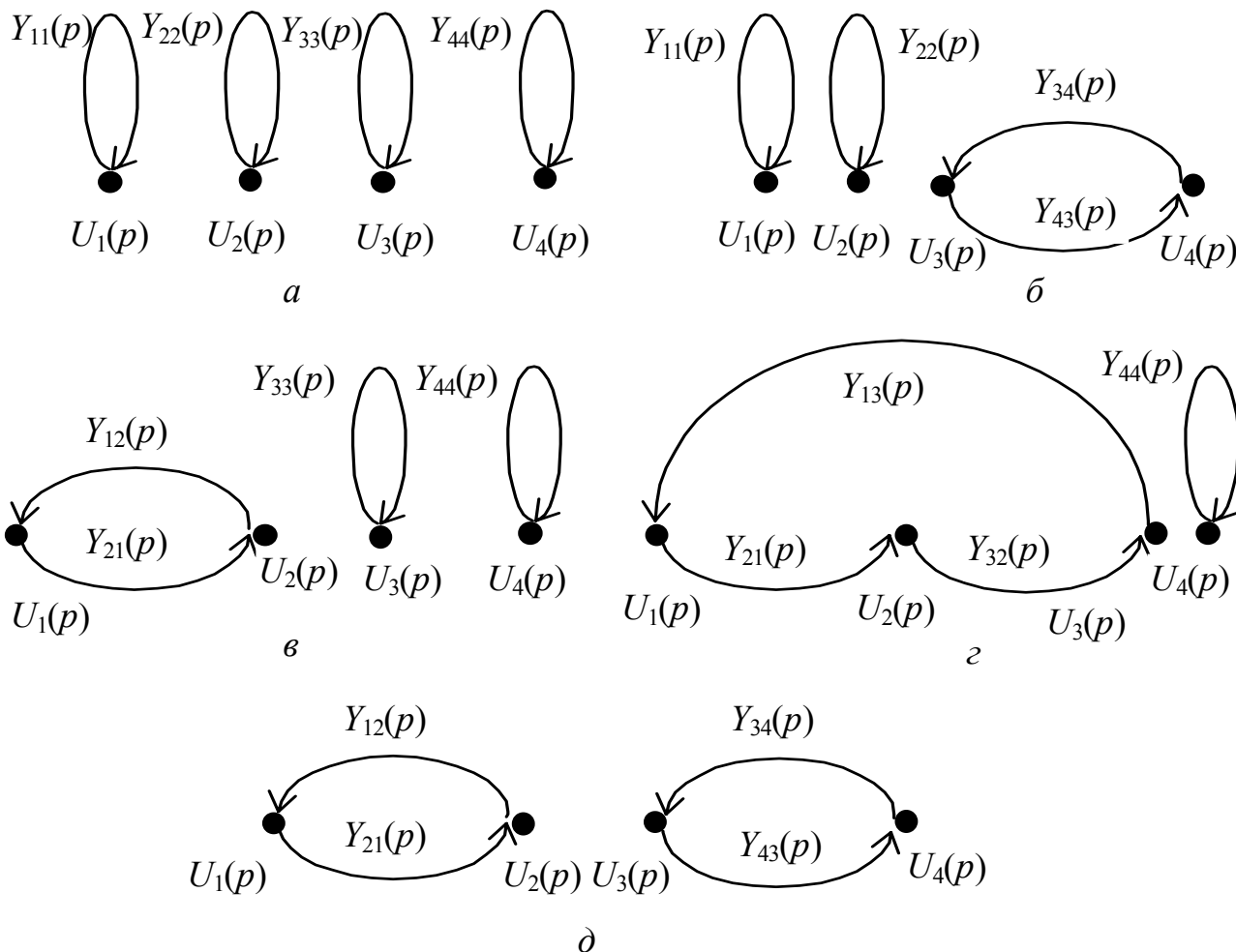


Рисунок 8.11 – Фактори графа (рис.8.10)

4. **Обчислюють визначник** як суму ваг усіх факторів, взятих з визначеним за декрементом знаком:

⁶ Підстановкою n -го порядку називають таблицю з n стовпців:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

де верхнє і нижнє числа r -го стовпця дорівнюють відповідно номеру i рядка та номеру j стовпця матриці, з яких взятий r -й співмножник q -го члена визначника.

$$\Delta_Y = (-1)^0 w_a + (-1)^1 w_6 + (-1)^1 w_b + (-1)^2 w_r + (-1)^2 w_d =$$

$$= Y_{11}(p)Y_{22}(p)Y_{33}(p)Y_{44}(p) - Y_{11}(p)Y_{22}(p)Y_{34}(p)Y_{43}(p) - Y_{12}(p)Y_{21}(p)Y_{33}(p)Y_{44}(p) +$$

$$+ Y_{13}(p)Y_{21}(p)Y_{32}(p)Y_{44}(p) + Y_{12}(p)Y_{21}(p)Y_{34}(p)Y_{43}(p).$$

Щоб знайти алгебраїчне доповнення, наприклад Δ_{14} , граф (рис.8.10) треба перетворити у такий спосіб:

1. У вихідному графі (матриці) відкинути усі дуги, спрямовані до вершини 1, а також усі дуги, що виходять з вершини 4.

2. Вершини 1 та 4 об'єднати .

Одержаний граф відповідає мінору M_{14} . Для обчислення доповнення результат треба помножити на $(-1)^{1+4}$.

3. Розрахувати визначник здобутого графа.

Результуючий граф мінора M_{14} зображений на рис.8.12.

Доповнення $\Delta_{14} = -Y_{21}(p)Y_{32}(p)Y_{43}(p)$.

Зручність розглянутого методу для аналізу кіл з розрідженою матрицею коефіцієнтів (з малою зв'язністю графа матриці) очевидна. Але зі зростанням кількості вузлів схеми (вершин графа) процес перебору усіх факторів стає складною задачею, яка потребує подальшої математичної формалізації. Результатом такої формалізації стала поява численних методів (кореневого графа, d -дерев, K -дерев тощо), яким присвячена спеціальна література теорії кіл.

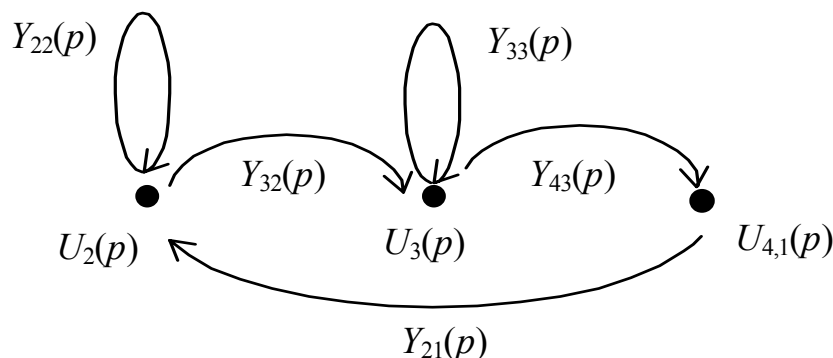


Рисунок 8.12 – Граф мінора для графа (рис.8.10)

Аналіз складних кіл за методом графа матриці можливий також за допомогою еквівалентних перетворень графа із зменшенням його порядку (тобто кількості вершин). Ці перетворення виконують, встановлюючи відповідність між матрицею коефіцієнтів системи рівнянь вузлових напруг перед та після виключення внутрішнього вузла схеми (вершини графа). Як приклад на рис.8.13-8.15 показані перетворення ділянок графа.

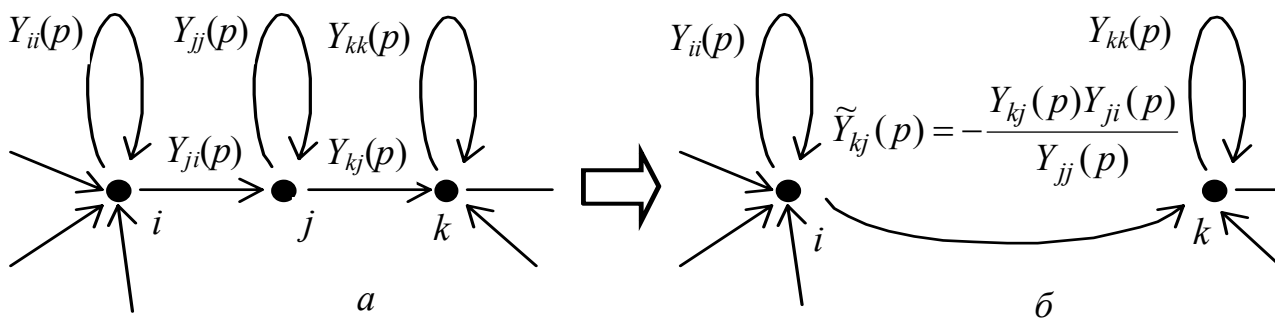


Рисунок 8.13 – Еквівалентні перетворення графа схеми

Такі (та їм подібні) еквівалентні перетворення графа виключенням єдиної вершини можна звести у таблицю, використовуючи яку легко згорнути вихідний граф до простішого, і за наведеним вище методом обчислити його визначник та алгебраїчне доповнення.

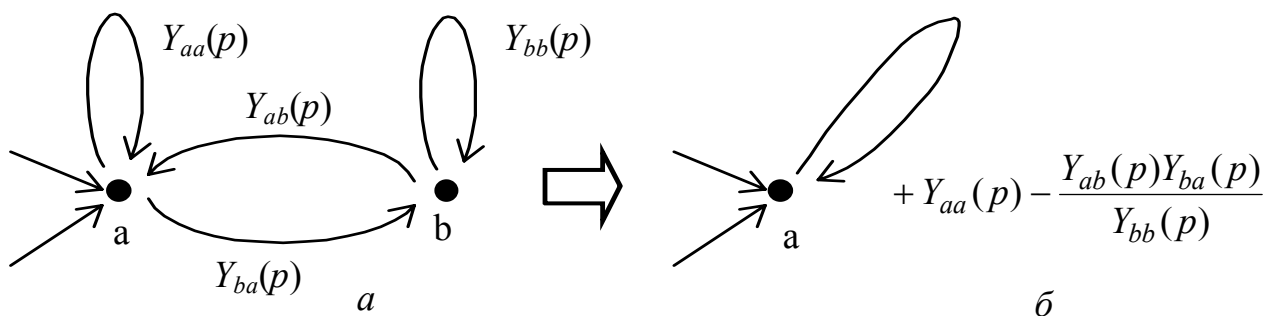


Рисунок 8.14 – Еквівалентні перетворення графа схеми

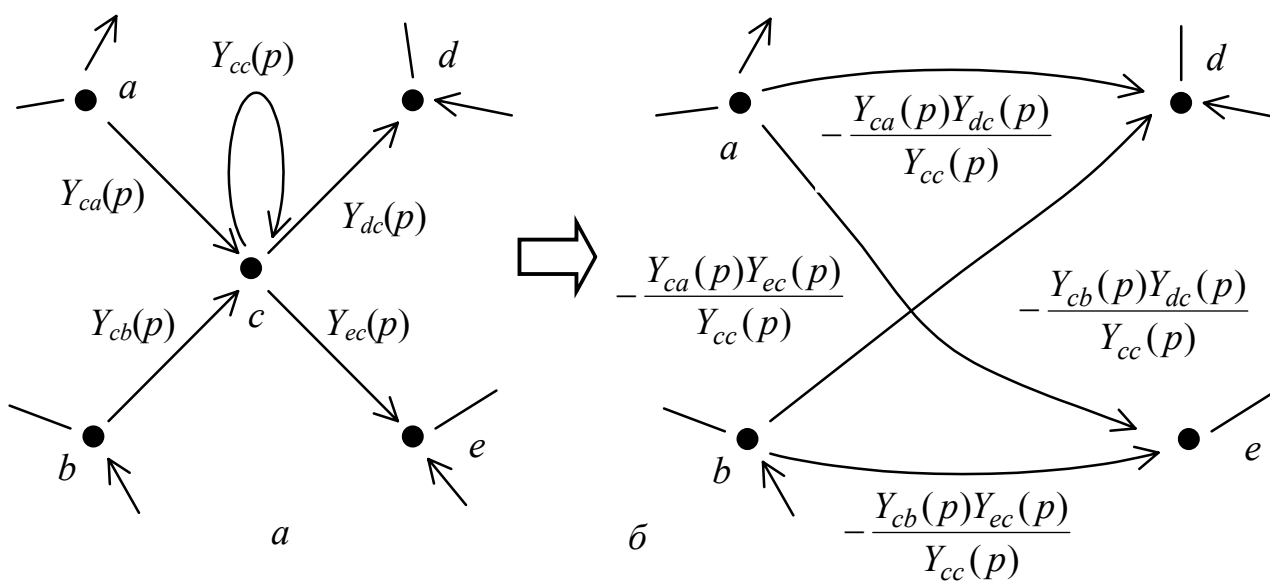


Рисунок 8.15 – Еквівалентні перетворення графа схеми

8.6.4 Теоретико-множинні методи

При виборі та розробці методики аналізу лінійних кіл у багатьох випадках використання графів є доцільним через наочність подання графами причинно-наслідкових зв'язків між змінними. Разом з цим слід відзначити, що при аналізі складних кіл їх моделювання графами має другорядну роль, оскільки такі графи стають надмірно громіздкими і втрачають головну перевагу – наочність. Для вводу до ЕОМ графи все одно треба відображати матрицями (двовимірними масивами) символів або чисел. Це обумовлює застосування **теоретико-множинних** методів для оперування над масивами символів або чисел, що однозначно пов'язані (є ізоморфними) з відповідними графами.

Як приклад, що ілюструє можливості теоретико-множинних методів, доцільно розглянути методи **контурних** та **узагальнених чисел**.

Нехай схема надана набором двополюсних (однобрамних) провідностей, увімкнених до загального вузла, та джерелами струму, керованими напругою (входи яких мають спільний вузол, теж увімкнений до загального вузла схеми). У цьому випадку в матриці вузлових провідностей кожен елемент $Y_{ij}(p)$ ізоморфний (взаємно однозначно відповідає) власній або передатній провідності схеми.

Тоді задачу розкладання визначника за символами провідностей $Y_{ij}(p)$ можна звести до операцій над індексами m, l ненульових елементів $Y_{ml}(p)$ матриці, які виконують, щоб знайти множину всіх підстановок членів визначника (зважених факторів графа матриці).

Структуру матриці визначено розташуванням її ненульових елементів, тобто множиною індексів m, l .

Наприклад, структуру матриці провідностей

$$(Y(p)) = \begin{pmatrix} Y_{11}(p) & Y_{12}(p) & 0 & 0 & 0 \\ Y_{21}(p) & Y_{22}(p) & Y_{23}(p) & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32}(p) & Y_{33}(p) & Y_{34}(p) & Y_{35}(p) \\ 0 & 0 & Y_{43}(p) & Y_{44}(p) & Y_{45}(p) \\ 0 & 0 & Y_{53}(p) & Y_{54}(p) & Y_{55}(p) \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

відображають множиною її ненульових елементів

$$\{m, l\} = \{11, 12, 21, 22, 23, 32, 33, 34, 35, 43, 44, 45, 53, 54, 55\},$$

оскільки за елементами цієї множини можна повністю відновити розташування ізоморфних елементів у матриці.

Для кожного m -го рядка матриці індекси m, l мають спільний індекс m , тому таку множину індексів можна частково упорядкувати, якщо в m -му рядку записувати лише індекси l . Таку частково впорядковану множину індексів m, l називають **матричним числом** β_m .

Наприклад, структуру матриці (8.35) повністю відображено матричним числом

$$\beta_m = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \\ & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 3 & 4 & 5 & \\ & 3 & 4 & 5 & \end{pmatrix}. \quad (8.35a)$$

У такому матричному числі індексам m та l ненульових елементів матриці $(Y(p))$ відповідають індекс m , винесений за дужки, та індекс l у дужках.

Щоб знайти усі підстановки (членів розкладання визначника), достатньо визначити впорядковані стовпці, утворені різними сполученнями індексів l , взятих по одному від кожного рядка матричного числа. При цьому усі індекси рядків m вже впорядковані у матричному числі. **Сполучення з індексів l , взятих по одному з кожного рядкового числа, називають членами Декартового⁷ добутку⁸ цих рядкових множин.** Але ці члени можуть мати сполучення індексів l з однаковими значеннями (у формулі (8.35a) такі сполучення дають нульові значення коефіцієнтів при добутках символів).

Ці члени можна виключити, виконавши Декартове множення рядкових множин над полем модуля 2 (оскільки **операціями над полем модуля 2 називають такі, результат яких над однаковими об'єктами дорівнює нулю**).

Записавши **сполучення різних індексів l** , взятих по одному з кожного рядка матричного числа, одержимо шукану множину усіх підстановок індексів членів визначника. Таку множину підстановок називають **контурним числом $\beta(m/l)$** .

Оскільки кожній підстановці відповідає один з доданків визначника, для його запису у звичайній алгебраїчній формі можна скористатися формулою:

$$D = \det \beta = \det(\beta_m)_{\text{mod } 2}.$$

Реалізацію цієї формули забезпечують наступним алгоритмом розкладання визначника за ненульовими елементами $Y_{ml}(p)$ квадратної матриці:

1. Для наданої матриці скласти матричне число.

⁷ **Декарт Рене**, Descartes (1596–1650) – французський математик, фізик, філософ і фізіолог. Математичні дослідження тісно пов'язані з його філософськими та фізичними працями. В «Геометрії» (1637) уперше запровадив поняття змінної величини і функції. Від'ємні числа тлумачив у вигляді спрямованих ординат. Увів загальноприйняті тепер знаки для змінних і шуканих величин (x, y, z, \dots), літерних коефіцієнтів (a, b, c, \dots), а також степенів (x^3, a^6, \dots). В аналітичній геометрії створив метод прямолінійних координат. Зазначив той факт, що степінь рівняння кривої не залежить від вибору прямокутної системи координат. Виклав алгебраїчний спосіб побудови нормалей і дотичних до плоских кривих. З ім'ям Декарта пов'язані такі поняття, як координати, добуток, парабола, лист, овал тощо.

⁸ Декартовим добутком $E = E_1 \times E_2$ множин E_1 та E_2 називають сукупність множин (e_1, e_2) , утворених усіма можливими сполученнями елементів, взятих по одному з кожної з множин, що перемножуються.

2. Прийняти номер рядка матричного числа $m = 1$.

3. Під кожним елементом m -го рядка матричного числа провести лінії, під якими виписати усі індекси l з $(m + 1)$ -го рядка, які відрізняються від усіх верхніх номерів, відділених лініями, в даному стовпці.

4. Якщо $m \neq N$, де N – порядок матриці, то прийняти $m = m + 1$ та перейти до кроку 3, інакше – до кроку 5.

5. В одержаному контурному числі зберегти лише стовпці, утворені індексами l у найнижчому рядку та записати над ними індексами l решту рядків. Усі стовпці, які мають менш, ніж N членів, викреслити.

6. Визначити у кожному стовпці кількість інверсій, яка дорівнює сумі кількості більших індексів над кожним індексом l стовпця, та підкреслити стовпці з непарною кількістю інверсій.

7. Замінити елементи m, l (з урахуванням номеру рядка) для кожного стовпця відповідними елементами $Y_{ml}(p)$ матриці та надати від'ємні знаки членам, які відповідають підкресленим стовпцям. Лінії, які відділяють більш ніж один елемент l , відповідають відкриттю дужок в алгебраїчному запису розкладання визначника.

Для матричного числа (8.35а) виходить:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \\ 5 & 3 & 4 & 5 & \end{pmatrix}_{\text{mod } 2} = 3 \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 2 & 3 & & \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= Y_{11}(p) \{ Y_{22}(p) [Y_{33}(p) (Y_{44}(p) Y_{55}(p) - Y_{45}(p) Y_{54}(p)) + Y_{34}(p) (Y_{45}(p) Y_{53}(p) - Y_{43}(p) Y_{55}(p)) +$$

$$+ Y_{35}(p) (Y_{43}(p) Y_{54}(p) - Y_{44}(p) Y_{53}(p))] + Y_{23}(p) Y_{32}(p) (Y_{45}(p) Y_{54}(p) - Y_{44}(p) Y_{55}(p)) \} +$$

$$+ Y_{12}(p) Y_{21}(p) [Y_{33}(p) (Y_{45}(p) Y_{54}(p) - Y_{44}(p) Y_{55}(p)) +$$

$$+ Y_{34}(p) (Y_{43}(p) Y_{55}(p) - Y_{45}(p) Y_{53}(p)) + Y_{35}(p) ((Y_{43}(p) Y_{54}(p) - Y_{44}(p) Y_{55}(p))] .$$

Такий саме алгоритм використовують і для розкладання (за ненульовими елементами) мінорів M_{ab} , для чого попередньо треба в матричному числі викреслити a -й рядок та усі індекси $l = b$.

Для розглянутого прикладу:

$$\Delta_{15} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & \\ 5 & 3 & 4 & \end{pmatrix}_{\text{mod } 2} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & \\ 5 & 4 & 3 & \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 3 & 2 & & \\ 4 & 3 & 4 & \\ 5 & 4 & 3 & \end{vmatrix} =$$

$$= Y_{21}(p) Y_{32}(p) [Y_{43}(p) Y_{54}(p) - Y_{44}(p) Y_{53}(p)] .$$

Якщо схема кола містить незаземлені взаємні вітки, перехід від одержаних числових виразів до виразів, що мають символи-літери, відповідні до провідностей цих віток, стає складним, оскільки треба зводити подібні члени. Це є

наслідком відомого факту, що кожен елемент матриці провідностей вже є комбінацією (алгебраїчною сумою) провідностей віток.

Метод узагальнених чисел дозволяє відобразити положення окремих віток у матриці провідностей за допомогою множини чисел, які називають **узагальненими числами**.

Розкладання визначника матриці за символами-літерами параметрів віток базується на заміні ненульових елементів матриці сумами відповідних параметрів віток еквівалентної схеми.

Якщо в кожному контурному числі замінити кожен елемент m, l множиною k віток схеми, параметри яких є складовими елементами $Y_{ml}(p)$ матриці, та знайти для кожного стовпця Декартів добуток множини номерів над полем модуля 2, то виходить множина стовпців з різними індексами k .

Для еквівалентної схеми із взаємними вітками кожен такий стовпець відповідає **дереву** схеми, утвореному увімкненням N віток із всіма її $N + 1$ вузлами. Тому одержану частково впорядковану множину стовпців з різними номерами k називають **деревним** числом $\beta(k)$.

У деревному числі мають бути також викреслені пари стовпців з однаковими сполученнями індексів (дублікації), які відповідають "незаземленим контурам" з віток схеми, що не утворюють дерева.

Наведений метод ілюструє обчислення визначника D матриці провідностей для схеми рис.8.16.

Матриця провідностей

$$\begin{aligned}
 (Y(p)) &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} Y_{11}(p) & Y_{12}(p) & Y_{13}(p) \\ Y_{21}(p) & Y_{22}(p) & Y_{23}(p) \\ Y_{31}(p) & Y_{32}(p) & Y_{33}(p) \end{pmatrix} \end{matrix} = \\
 &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} Y_1(p)+Y_2(p) & -Y_1(p) & -Y_2(p) \\ Y_4(p)-Y_1(p) & Y(p)_1+Y_3(p)+Y_5(p) & -Y_5(p) \\ -Y_2(p) & -Y_5(p) & Y_2(p)+Y_5(p)+Y_6(p) \end{pmatrix} \end{matrix}.
 \end{aligned}$$

Контурне число

$$\beta(m/l) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{\text{mod } 2} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right|.$$

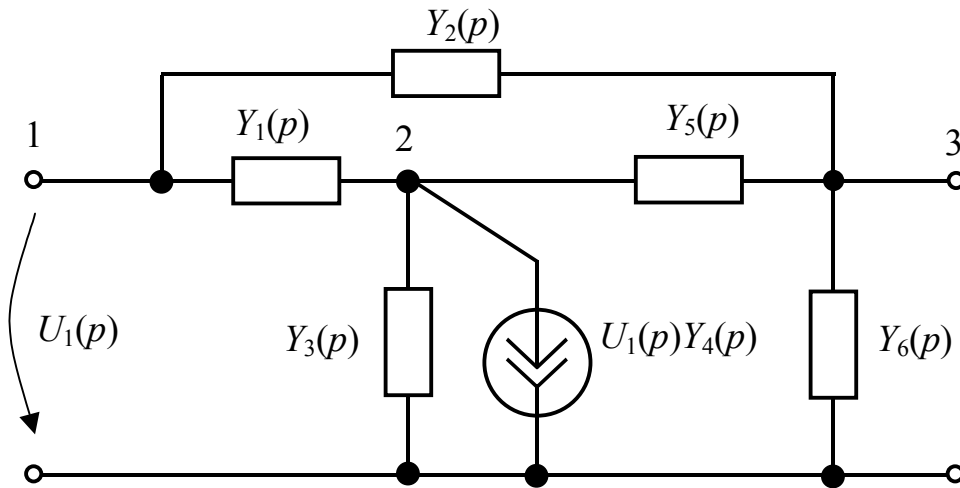


Рисунок 8.16 – Схема кола для ілюстрації методу узагальнених чисел

Заміна l в індексі m, l множиною k з урахуванням знака провідності у матриці $(Y(p))$ дає таке співвідношення:

$$\beta(k) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ \underline{1\ 3\ 5} & \underline{-5} & \underline{4\ -1\ -5} & \underline{4\ -1\ 1\ 3\ 5} \\ 2 & 5 & 6 & \underline{-5} & \underline{2\ 5\ 6} & -2 & -5 & \underline{-2} \end{array} \right|_{\text{mod } 2} =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ \underline{3} & \underline{5} & \underline{1\ 3\ 5} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{1} \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 6 & \underline{2\ 5\ 6} & \underline{2} & \underline{5} & \underline{5} \end{array} \right|.$$

В одержаній множині стовпців є дві пари дублікацій, що відповідають "незаземленому" контуру, утвореному вітками $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, $Y_5(p)$. Якщо усунути ці дублікації, формула для обчислення визначника матиме вигляд:

$$D = \det \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ \underline{3} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{4} & \underline{4} \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 6 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{array} \right| =$$

$$= [Y_1(p) + Y_2(p)][Y_3(Y_5(p) + Y_6(p)) + Y_5(p)Y_6(p)] +$$

$$+ Y_1(p)Y_2(p)[Y_3(p) + Y_6(p)] + Y_4(p)[Y_1(p)(Y_2(p) + Y_5(p) + Y_6(p)) + Y_2(p)Y_5(p)].$$

8.6.5. Метод взаємних похідних

Розглянуті вище символічні та чисельно-символічні методи аналізу електричних кіл спрямовані на обчислення однієї функції кола, тобто визначника та алгебраїчних доповнень, які цю функцію кола визначають.

Існує інша група чисельно-символічних методів, яка використовує обчислення елементів оберненої матриці коефіцієнтів системи рівнянь рівноваги та їх

залежність від літерних символів. До таких методів належать метод взаємних похідних та метод модифікацій.

Якщо у розкладанні визначника (8.28) за дужки винести значення визначника Δ^0 , з огляду на формули (4.21а, б) можна записати чисельно-символьний вираз:

$$\begin{aligned} \Delta(W) &= \Delta^0 [1 + W(p)(Z_{ac}(p) - Z_{bc}(p) - Z_{ad}(p) + Z_{bd}(p))] = \\ &= \Delta^0 [1 + W(p)Z_{(a+b)(c+d)}(p)] = \Delta^0 [1 + W(p)\xi], \end{aligned} \quad (8.36)$$

де a, b номери вузлів, напруга на яких (потенціал вузла a вищий за потенціал вузла b) керує струмом джерела струму, увімкненого між вузлами c, d (струм джерела спрямовано від вузла c до вузла d) з передатною провідністю $S(p) = W(p)$; $Z_{ij}(p)$ – елементи оберненої матриці, обчисленої при $W(p) = 0$.

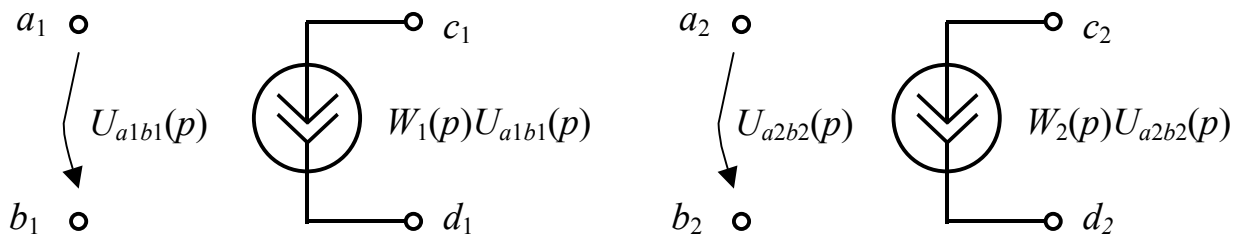


Рисунок 8.17 – Керовані джерела з передатними провідностями $W_1(p)$, $W_2(p)$

Для двох керованих джерел (рис.8.17) з передатними провідностями $W_1(p)$, $W_2(p)$ символьний вираз $\Delta(W_1, W_2)$ матиме вигляд:

$$\Delta(W_1, W_2) = \Delta^0 W_1(p) W_2(p) \begin{vmatrix} \frac{1}{W_1(p)} + \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \frac{1}{W_2(p)} + \xi_{22} \end{vmatrix}, \quad (8.37)$$

де за аналогією з нормованими (значенням Δ^0) власними похідними

$$\xi_{ii} = Z_{(a_i+b_i)(c_i+d_i)}(p)$$

від визначника Δ за параметрами $W_i(p)$, коефіцієнти ξ_{12} , ξ_{21} можна вважати похідними від визначника за передатними провідностями $W_{12}(p)$, $W_{21}(p)$ (значення яких дорівнюють нулю) джерел струму, керованих напругою, в яких керуюча вітка належить до однієї брами (наприклад, $a_1 + b_1$ на рис.8.17), а керована – до іншої (взаємної, тобто $c_2 + d_2$).

Такі нормовані похідні у подальшому називаються взаємними похідними, обчислюваними за формулами:

$$\xi_{ij} = Z_{a_i c_j}(p) - Z_{b_i c_j}(p) - Z_{a_i d_j}(p) + Z_{b_i d_j}(p). \quad (8.38)$$

Введення взаємних похідних дозволяє у компактному вигляді записати визначник як функцію k провідностей:

$$\Delta(W_1, W_2, \dots, W_k) = \Delta^0 W_1(p) W_2(p) \dots W_k(p) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{1}{W_1(p)} + \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1k} \\ \xi_{21} & \frac{1}{W_2(p)} + \xi_{22} & \dots & \xi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \dots & \frac{1}{W_k(p)} + \xi_{kk} \end{vmatrix}. \quad (8.38a)$$

Оскільки довільне алгебраїчне доповнення Δ_{ij} можна записати у вигляді:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{(i+0)(j+0)} = \Delta^0 Z_{ij}(p) = \Delta^0 Z_{(j+0)(i+0)}(p) = \Delta^0 \xi_{ij},$$

тобто як похідну від визначника за передатною провідністю джерела струму, керуюча вітка якого увімкнена до брами $i+0$, а керована – до брами $j+0$, причому сама передатна провідність такого джерела дорівнює нулю, то алгебраїчне доповнення Δ_{ij} можна подати як похідну від виразу (8.38a) у вигляді:

$$\Delta_{ij}(W_1, \dots, W_k) = \left. \frac{\partial \Delta(W_1, \dots, W_k)}{\partial W_{ij}} \right|_{W_{ij}=0} =$$

$$= \Delta^0 W_1(p) W_2(p) \dots W_k(p) \begin{vmatrix} \frac{1}{W_1(p)} + \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1k} & \xi_{1i} \\ \xi_{21} & \frac{1}{W_2(p)} + \xi_{22} & \dots & \xi_{2k} & \xi_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \dots & \frac{1}{W_k(p)} + \xi_{kk} & \xi_{ki} \\ \xi_{j1} & \xi_{j2} & \dots & \xi_{jk} & \xi_{ji} \end{vmatrix}, \quad (8.39)$$

$$\text{де } \xi_{ij} = Z_{a_i j}(p) - Z_{b_i j}(p) = Z_{(a_i + b_i)(j+0)}(p);$$

$$\xi_{is} = Z_{ic_s}(p) - Z_{id_s}(p) = Z_{(i+0)(c_s + d_s)}(p).$$

Обчислюючи функції кіл у виразах (8.38), (8.39), множники $\Delta^0 W_1(p) \dots W_k(p)$ можна одразу ж відкинути, оскільки вони скорочуються і будь-яка функція кола утворюється відношеннями комбінацій доповнень (8.39), або доповнень і визначника (8.38a).

Наприклад, для передатного опору з брами $i+0$ або брами $j+0$ справедливе співвідношення:

$$Z_{ij}(W_i, \dots, W_k) =$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{W_1} + \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1k} & \xi_{1i} \\ \xi_{21} & \frac{1}{W_2} + \xi_{22} & \dots & \xi_{2k} & \xi_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \dots & \frac{1}{W_k} + \xi_{kk} & \xi_{ki} \\ \xi_{j1} & \xi_{j2} & \dots & \xi_{jk} & \xi_{ji} \end{array} \right| / \left| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{W_1} + \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1k} & \\ \xi_{21} & \frac{1}{W_2} + \xi_{22} & \dots & \xi_{2k} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \dots & \frac{1}{W_k} + \xi_{kk} & \end{array} \right|. \quad (8.40)$$

Підрахунок кількості коефіцієнтів, необхідних, щоб зберегти символну залежність у вигляді (8.38), (8.39), порівняно із розкладанням (8.28) за сумарними алгебраїчними доповненнями, якщо кількість k символів менша N (N – кількість вузлів схеми), а вітки, провідності яких замінені символами $W_i(p)$, не утворюють контурів, дає такі результати. При $k = 100$, кількість коефіцієнтів r у виразі (8.28) становить $r = 2^{100} > 10^{30}$, тоді як у виразі (8.38а) кількість коефіцієнтів ξ_{sq} дорівнює $100^2 = 10^4$.

8.6.6 Метод модифікацій

Метод взаємних похідних дозволяє записати символний вираз для визначника (алгебраїчного доповнення) при великій кількості символів у значно компактнішому вигляді (матриці взаємних похідних), ніж при запису за білінійним розкладанням. Але необхідність оперувати зі зручними для користувача виразами часто призводить до розкриття визначника у вигляді впорядкованого запису за взаємними похідними. При цьому весь вигащ (компактність) втрачається. Тому метод взаємних похідних вимагає інших підходів до оцінки впливу на результат параметрів, представлених символами. Це призводить до матрично-структурного **методу модифікацій**, який одержано саме з методу взаємних похідних.

Як вже розглядалося вище у п.8.6.5, залежність одного алгебраїчного доповнення Δ_{ij} (8.39) матриці провідностей від k провідностей $W_i(p)$ віток кола в узагальненому вигляді можна записати як

$$\frac{1}{W_1(p) \dots W_k(p)} \Delta_{ij}(W_1, \dots, W_k) = \Delta^0 \begin{vmatrix} (\xi_{00}(1/W_i)) & (\xi_{0i}) \\ (\xi_{j0}) & Z_{ji} \end{vmatrix}. \quad (8.41)$$

Розв'язок цього рівняння відносно $Z_{ji}(p)$ можна одержати у вигляді:

$$(Z_{ji}(W_1, \dots, W_k)) = \frac{\Delta_{ij}(W_1, \dots, W_k)}{\Delta(W_1, \dots, W_k)} = (Z_{ji}(p)) - (\xi_{j0}) (\xi_{00}(1/W_i))^{-1} (\xi_{0i}), \quad (8.42)$$

де (ξ_{j0}) та (ξ_{0i}) – відповідно рядок та стовпець у виразі (8.39), що окаймляє матрицю (ξ_{00}) ; $(\xi_{00}(1/W_i))^{-1}$ – обернена матриця взаємних похідних з наданими значеннями $W_i(p)$.

Для усіх елементів оберненої матриці провідностей $(Z(p))$ вираз (8.42) має вигляд:

$$(Z(W_1, \dots, W_k)) = (Z(p))^0 - (\xi_{Z0}) (\xi_{00}(1/W_i))^{-1} (\xi_{0Z}), \quad (8.43)$$

де $(Z(p))^0$ – обернена матриця при нульових провідностях $W_1, \dots, W_k \equiv 0$; (ξ_{Z0}) – прямокутна матриця розміру $n \times k$, складена зі стовпців (ξ_{0i}) у виразі (8.42); (ξ_{0Z}) – прямокутна матриця $k \times n$, складена з рядків (ξ_{j0}) у формулі (8.42) для кожної з k провідностей $W_i(p)$; $(\xi_{00}(1/W_i))$ – матриця взаємних похідних порядку k , до головної діагоналі якої додані значення $diag(1/W_i)$ провідностей $W_i(p)$.

На жаль, матриця $(\xi_{00}(1/W_i))$ може бути погано зумовленою, що для радіотехнічних кіл є скоріше нормою, ніж винятком. Тому формулу (8.43) для обчислень значень оберненої матриці при зміні параметрів компонентів використовувати недоцільно (хоча вона є точним аналітичним виразом, який узагальнює на випадок оберненої матриці символічне розкладання функцій кола за сумарними алгебраїчними доповненнями).

Найвдалішим методом обчислення оберненої матриці за виразом (8.43) є метод модифікацій, суть якого полягає в покроковому урахуванні («вирощуванні») параметрів $W_i(p)$ з використанням інформації про структуру схеми аналізованого кола, що дозволяє підвищити швидкодію обчислень, а також ввести відповідний до методу зручний та прозорий параметричний критерій оцінки точності обернення матриці провідностей.

Нехай коло містить лише провідності (в тому числі передатні – джерел струму, керованих напругою) та незалежні джерела струму. Нехай надана схема рис.8.18, а, для якої слід знайти обернену матрицю провідностей. Для реалізації методу, який базується на модифікаціях, тобто «вирощуваннях» провідностей $W_i(p)$, слід розбити схему (рис.8.18, а) наданням значення $W_i(p) \equiv 0$ провідностям деяких віток, що з'єднують між собою окремі блоки A, B, C і одержати у такий спосіб нульову модифікацію схеми (рис.8.18, б).

За схемою (рис.8.18, б) для окремих підсхем A, B, C можна знайти їхні обернені матриці провідностей (нульова модифікація схеми, нульова модифікація матриці провідностей, нульова модифікація оберненої матриці). Обернені матриці підсхем $(Z(p))_A, (Z(p))_B, (Z(p))_C$ утворюють блоки діагоналі оберненої $(Z(p))^0$ матриці провідностей $(Y(p))^0$ всієї схеми.

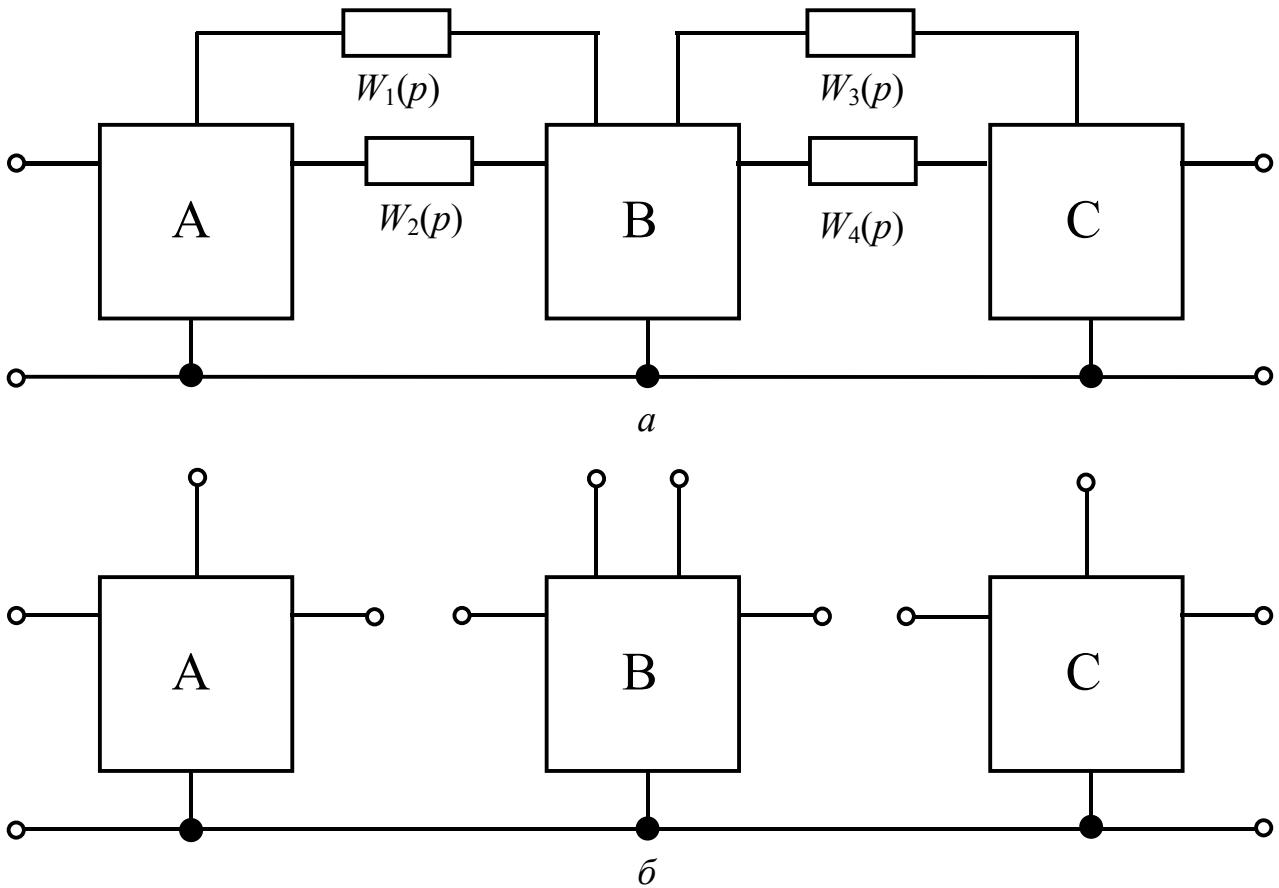


Рисунок 8.18 – Пояснення методу модифікацій для обернення матриць:
 а – вихідна схема кола; б – нульова модифікація схеми

Кожен елемент (блок) діагоналі $(Y(p))_A, (Y(p))_B, (Y(p))_C$ має порядок менший, ніж $(Y(p))^0$. Тому його обернення потребує значно менших часових витрат і пов'язане з накопиченням меншої операційної похибки.

Крім того, при оберненні матриці $(Y(p))^0$ краще враховується розрідженість матриці вузлових провідностей, оскільки при цьому з операцій автоматично виключені усі нулі, якими заповнені підматриці ззовні від головної діагоналі.

Далі схему модифікують послідовним «вирощуванням» провідностей віток $W_1(p), \dots, W_k(p)$, які об'єднують підсхеми A, B, C .

Після кожного кроку «вирощування» одержують нову модифікацію схеми і оберненої матриці. Так, після m -го кроку одержимо m -ту модифікацію оберненої матриці за формулою:

$$\begin{aligned}
 (Z(p))_m &= (Y(p))_m^{-1} = (Z(p))_{m-1} - \frac{W_m(p)}{1 + W_m(p)\xi_{mm}} (A(p))_{m-1} = \\
 &= (Z(p))_{m-1} - \frac{1}{1/W_m(p) + \xi_{mm}} (A(p))_{m-1},
 \end{aligned}
 \tag{8.44}$$

де $(Z(p))_{m-1}$ – $(m-1)$ -та модифікація оберненої матриці; ξ_{mm} – взаємна похідна, обчислювана за формулою:

$$\xi_{mm} = Z_{(a+b)(c+d)}(p) = Z_{ac}(p) - Z_{ad}(p) - Z_{bc}(p) + Z_{bd}(p), \quad (8.44a)$$

де a, b – номери вузлів, до яких увімкнена керуюча вітка (вважається, що вузол a має потенціал більший, ніж вузол b), а c, d – номери вузлів, до яких увімкнена керована вітка (струм тече від вузла c до вузла d) джерела струму, керованого напругою, передатна провідність якого $W_m(p) = S_m(p)$ (якщо якийсь з вузлів a, b, c, d увімкнено до загального, то елемент оберненої матриці з відповідним нульовим індексом дорівнює нулю);

$$(A(p))_{m-1} = (\xi_{Z0})(\xi_{0Z}),$$

де

$$\begin{aligned} (\xi_{Z0}) &= (Z_{1c}(p) - Z_{1d}(p) \quad Z_{2c}(p) - Z_{2d}(p) \quad \dots \quad Z_{nc}(p) - Z_{nd}(p))^t; \\ (\xi_{0Z}) &= (Z_{a1}(p) - Z_{b1}(p) \quad Z_{a2}(p) - Z_{b2}(p) \quad \dots \quad Z_{bn}(p) - Z_{an}(p)), \end{aligned} \quad (8.44б)$$

де n – порядок матриці $(Z(p))$; t – знак транспонування.

Усі значення $Z_{ij}(p)$ у виразах (8.44) слід брати з матриці $(Z(p))_{m-1}$.

Якщо при модифікації схеми (матриці) «вирощують» провідність двополосника (вітки), тоді $a = c$; $b = d$.

Оцінити **ефективність методу** можна, обчисливши кількість операцій множення/ділення при оберненні матриці провідностей.

Так, якщо схема кола має n незалежних вузлів, то кількість операцій множення/ділення r за методом Гаусса становить $r \cong n^3$.

При аналізі радіотехнічних кіл розрідженість матриць провідностей є дуже великою (кількість нульових елементів рядка становить 3–10). Це зумовлює можливість дуже простого (розриванням малої кількості віток) приведення її до блочно-діагонального вигляду. Якщо наприклад, порядки матриць у блоках діагоналі однакові (n_k), так що $n = \sum_k n_k = K_0 n_k$, тоді кількість операцій множення/ділення для обернення підматриць за методом Гаусса становить $r_k = K_0 n_k^3$, що значно менше, ніж $(K_0 n_k)^3$. Нехай наприклад, схема аналізованого кола має $n = 100$ вузлів. Якщо її розбити на $K_0 = 10$ однакових підсхем ($n_k = 10$), то для обернення матриці провідностей кола без розбиття потрібно $r_1 = 10^6$ операцій множення/ділення, а для обчислення нульової модифікації – $r_2 = 10^4$ таких операцій. Різниця в кількості операцій буде зростати із зростанням n порядку матриці провідностей і залежатиме від більш або менш вдалого поділу вихідної схеми на підсхеми. Результуюча економія кількості операцій також залежатиме від кількості кроків модифікації (8.44), оскільки на один крок модифікації треба виконати $2n^2$ операцій множення матриць для обчислення

$$k(A(p))_{m-1} = (\xi_{Z0})(\xi_{0Z})k, \text{ де } k = \frac{1}{1/W(p) + \xi_{mm}}. \quad (8.44\text{в})$$

Виграш у кількості операцій буде повністю відсутнім при аналізі схеми з повним графом (коли кожен вузол з'єднаний вітками з усіма іншими).

Наведений вище метод модифікацій дозволяє одержати обернену матрицю без зменшення порядку цієї матриці n , а також із зменшенням порядку оберненої матриці.

Алгоритм методу модифікацій обернення матриці провідностей без зменшення порядку матриці.

1. Розбити вихідну схему кола на підсхеми, розірвавши вітки, що з'єднують між собою окремі підсхеми.

2. Для кожної підсхеми довільним методом (Гаусса, теоретико-множинним, методом модифікацій) знайти обернені матриці провідностей блоків діагоналей.

3. Прийняти номер кроку $m = 1$.

4. За формулами (8.44) для m -го кроку модифікації знайти обернену матрицю.

5. Якщо $m < M$ (M – загальна кількість розірваних віток), тоді $m = m + 1$ і повернутися до пункту 3 алгоритму, інакше закінчити обчислення.

У більшості випадків аналізу кіл потрібно обчислити лише деякі функції кола відносно обмеженої кількості входів (брам), які будемо називати безумовними. У цьому випадку обернена матриця повинна мати тільки ті рядки і стовпці, номери яких збігаються з номерами вузлів, що утворюють цю обмежену кількість брам.

Щоб реалізувати метод модифікацій зі зменшенням порядку (редукцією) **результуючої матриці**, слід використовувати наступний алгоритм.

1. Розбити вихідну схему на поодинокі підсхеми, розірвавши вітки (надавши провідностям цих віток нульові значення).

2. Будь-яким відомим методом знайти обернені матриці окремих блоків.

3. Викреслити в одержаних обернених матрицях рядки і стовпці, номери яких відповідають внутрішнім вузлам, тобто таким, які не збігаються з вузлами, що утворюють безумовні входи, або до яких не увімкнені ще не «вирощені» вітки.

4. Скласти ієрархію об'єднання підсхем (пари елементарних підсхем, які треба об'єднати за методом модифікацій, пари для цих пар та ін., поки усі схеми не будуть об'єднані).

5. Прийняти $m = 1$.

6. Для m -ї модифікації за формулами (8.44) обчислити m -ту модифікацію оберненої матриці. При цьому після обчислення ξ_{mm} викреслити з матриці $(Z(p))_{m-1}$ усі рядки та стовпці, що відповідають вузлам увімкнення провідності $W_m(p)$, і сформувані зредуковані матриці $(\xi_{Z0}), (\xi_{0Z}), (A)_{m-1}, k(A)_{m-1}$. Одержана у такий спосіб матриця $(Z(p))_m$ буде зредукована (матиме менший порядок).

7. Якщо $m < M$, тоді $m = m + 1$, перейти до пункту 6 алгоритму. Інакше – закінчити обчислення.

При реалізації цього алгоритму кількість операцій (множення/ділення) порівняно з алгоритмом без редукції зменшується на 1 – 3 порядки.

Метод модифікацій (8.44) зручний для обернення матриці вузлових провідностей, коли, наприклад, метод Гаусса може створювати значні похибки (внаслідок обмеженої розрядності операндів). Це зумовлено тим, що для кожної модифікації формула (8.44) є аналітичною залежністю усіх елементів оберненої матриці $(Z(p))_m$ від «вирощуваного» параметра $W_m(p)$.

Наприклад, при короткому замиканні між двома вузлами схеми ($W_m(p) = \infty$) або дуже великої провідності (машинна нескінченність) невизначеність ∞/∞ легко розкривається:

$$(Z(p))_m = (Z(p))_{m-1} - \frac{1}{\xi_{mm}} (A(p))_{m-1}. \quad (8.45)$$

При реалізації методу модифікацій часто виникають ситуації, коли треба об'єднати підсхему, яка має загальний (заземлений) вузол в обраній системі координат, і таку підсхему, яка до загального вузла не увімкнена (рис.8.19). Таку ситуацію можна визначити як «вирощування» **незаземленої підсхеми**.

Для «заземленої» підсхеми A і «плаваючої» підсхеми B (рис.8.19, *a*) спочатку об'єднують вузли a, a' , після чого об'єднання вузлів b та b' ніякої проблеми не становить. (Проблема при об'єднанні вузлів a та a' за методом модифікацій полягає в тому, що обернена матриця підсхеми B не існує).

При «вирощуванні» плаваючої підсхеми алгоритм об'єднання є таким.

1. Знайти обернену матрицю підсхеми A (розірвавши попередньо її зв'язки з «плаваючою» підсхемою B).

2. Якщо перший з відновлюваних («вирощуваних») зв'язків – вітка a, a' з нульовим опором (рис.8.19, *a*), то слід обернути матрицю провідностей підсхеми B з «заземленим» вузлом a' (рис.8.19, *б*).

3. Утворити з обох обернених матриць блочно-діагональну матрицю нульової модифікації схеми (рис.8.19, *б*). Для визначеності нехай першим блоком діагоналі буде матриця $(Z(p))_A$, а другим – $(Z(p))_B$.

4. Стовець з номером a матриці $(Z(p))_A$ записати в усі нульові стовпці підматриці, яка лежить над матрицею $(Z(p))_B$.

5. Рядок з номером a матриці $(Z(p))_A$ записати в усі нульові рядки підматриці ліворуч від матриці $(Z(p))_B$.

6. Значення елемента $Z_{aa}(p)$ додати до усіх елементів матриці $(Z(p))_B$.

Після об'єднання вузлів a та a' за формулою (8.44) «вирощуються» зв'язки між вузлами b та b' і так далі.

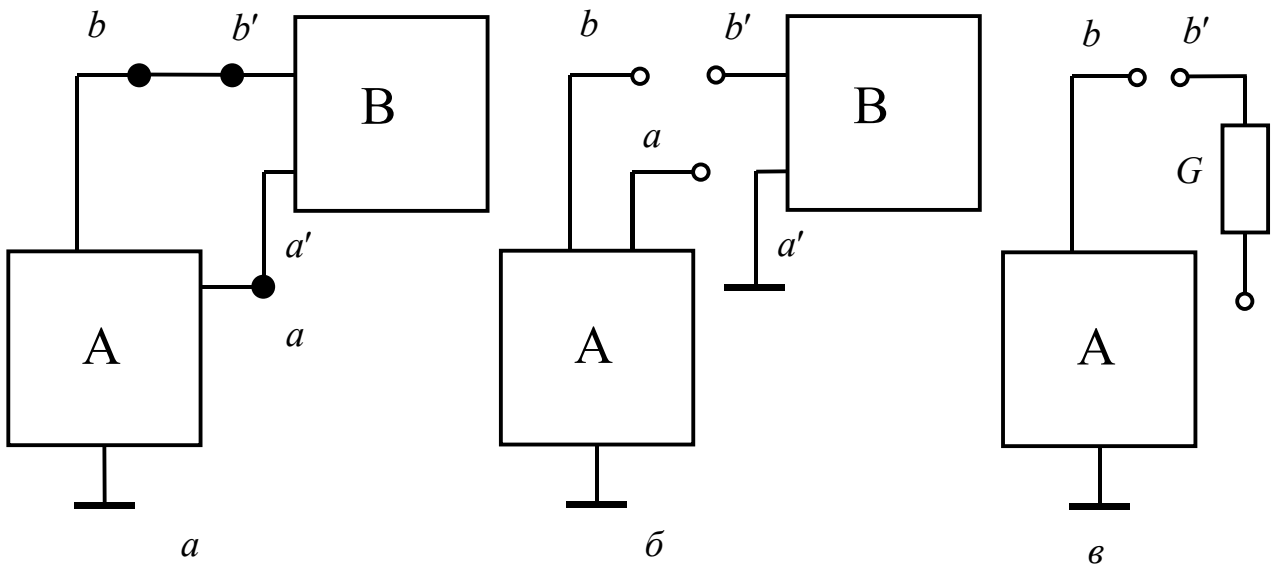


Рисунок 8.19 – «Вирощування» незаземленої підсхеми

Приклад 8.8. «Виростити» за наданим алгоритмом підсхему B (рис.8.19, в) у вигляді вітки з провідністю $G = 10$.

Розв'язання.

1. Нехай матриця $(Z)_A$, обчислена за відомою структурою і вагою віток підсхеми A , має вигляд:

$$(Z)_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Для «заземленого» вузла підсхеми B одержимо:

$$(Z)_B = |1/G| = 0,1.$$

3. Блочно-діагональна матриця має вигляд:

$$(Z)_{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

4. Перенесемо 3-й стовпець матриці $(Z)_A$ в нульовий стовпець матриці $(Z)_{AB}$:

$$(\tilde{Z})_{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

5. Перенесемо 3-й рядок матриці $(Z)_A$ у нульовий рядок матриці $(\tilde{Z})_{AB}$:

$$(\tilde{Z})_{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

6. Додамо до елементів матриці $(Z)_B$ у матриці $(\tilde{Z})_{AB}$ значення $Z_{33} = 4$:

$$(Z)_{AB\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 4,1 \end{pmatrix}.$$

Отже, метод модифікацій є досить зручним для обернення погано зумовлених матриць.

Вплив обмеженої розрядності операндів на результати обчислень пояснює наступний приклад.

Приклад 8.9. Нехай надано схему рис.8.20, *a* зі значеннями параметрів: $G_1 = 4$; $G_2 = 0,01$; $G_3 = 3$; $G_4 = 1$; $S_1 = 40$; $S_2 = 30$. Знайти обернену матрицю провідностей за методом модифікацій. Розрахунок провести з розрядністю 3.

Розв'язання.

1. Розірвемо вітки G_2 , S_1 , S_2 і утворимо нульову модифікацію схеми (рис.8.20, *б*). Матриця $(Y)^0$ системи рівнянь вузлових напруг має вигляд:

$$(Y)^0 = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

звідки

$$(Z)^0 = (Y^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Виростимо спочатку (перша модифікація) передатну провідність $S_1 = 40$ (рис.8.20, *в*). Оскільки вузли увімкнення керованого джерела $(2+0), (1+0)$, то

$$\xi_{11} = Z_{(1+0)(2+0)} = Z_{12} = 0;$$

$$(\xi_{Z0}) = (Z_{12} \quad Z_{22} \quad Z_{32})^t = (0 \quad 1/3 \quad 0)^t;$$

$$(\xi_{0Z}) = (Z_{11} \quad Z_{12} \quad Z_{13}) = (1/4 \quad 0 \quad 0).$$

За формулою (8.44) отримаємо:

$$(Z)_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 40 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,333 \\ 0 \end{pmatrix} (0,25 \quad 0 \quad 0) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ -3,33 & 0,333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

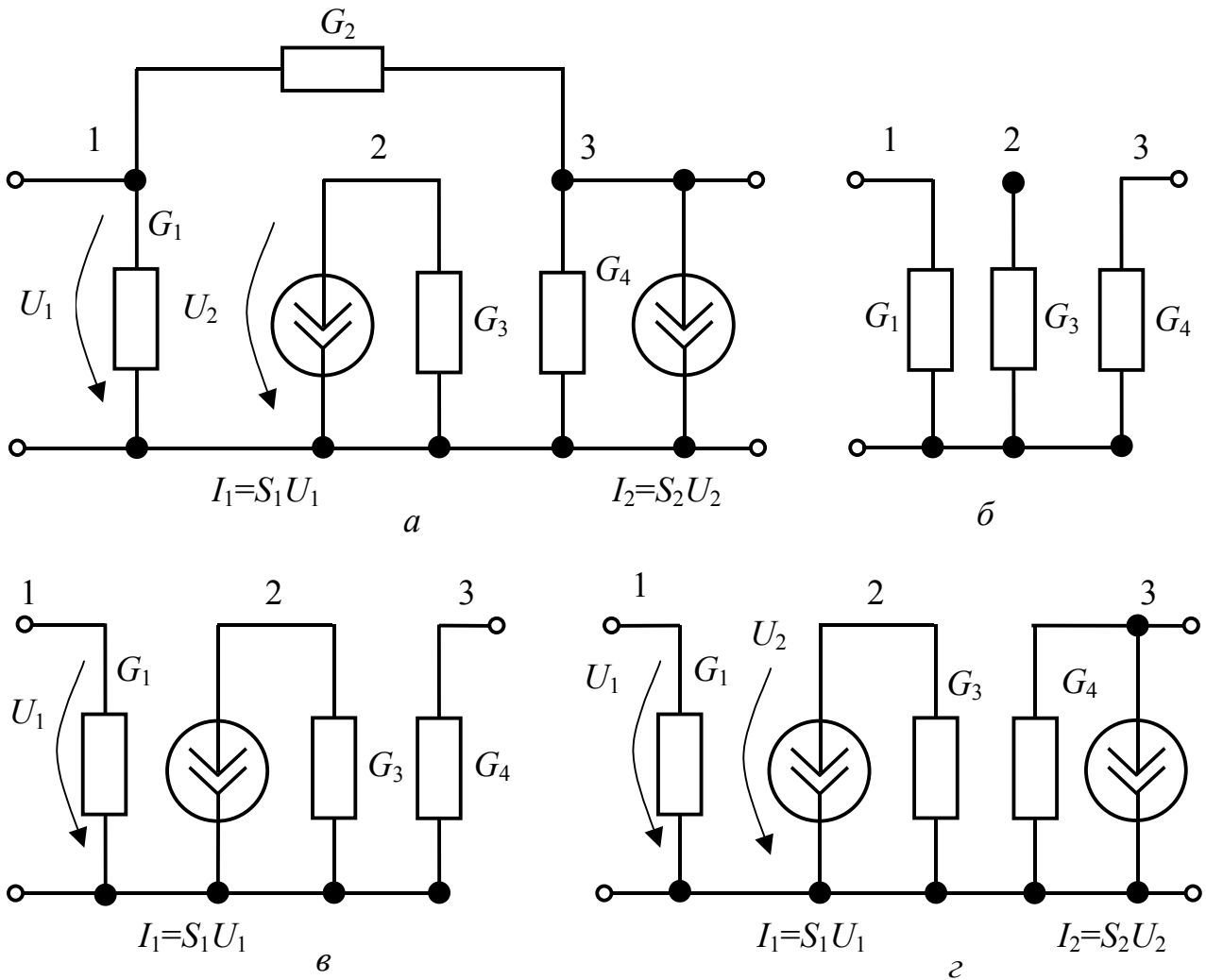


Рисунок 8.20 – До прикладу 8.9: *a* – вихідна схема; *б* – нульова модифікація; *в* – перша модифікація; *г* – друга модифікація

Виростимо тепер (рис.8.20, *г*) передатну провідність $S_2 = 30$. Одержимо:

$$\xi_{22} = Z_{(2+0)(3+0)} = 0;$$

$$(\xi_{Z0}) = (Z_{13} \quad Z_{23} \quad Z_{33})^t = (0 \quad 0 \quad 1)^t;$$

$$(\xi_{0Z}) = (Z_{21} \quad Z_{22} \quad Z_{23}) = (-3,33 \quad 0,333 \quad 0)$$

і обернену матрицю:

$$(Z)_2 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ -3,33 & 0,333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 30 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3,33 & 0,333 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ -3,33 & 0,333 & 0 \\ 99,9 & -9,99 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, на третьому кроці виростимо $G_2 = 0,01$ і повернемося до схеми (рис.8.20, *a*).

Точні значення оберненої матриці для схеми (рис.8.20, *a*) $(Z)_T$, матриця $(Z)_\xi$, одержана за методом модифікацій, та матриця $(Z)_\Gamma$, одержана за методом

Гаусса (дві останні знайдені з розрядністю 3 і плаваючою комою), наведено у табл.8.1.

Таблиця 8.1 – Результати розрахунків у прикладі 8.9

$(Z)_T$			$(Z)_\xi$			$(Z)_\Gamma$		
20,2	-2	0,2	19,5	-1,95	0,19	-0,075	0,018	-0,007
$-293\frac{1}{3}$	$27\frac{1}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	-256	25,7	-2,54	-0,033	0,003	0,036
8000,2	-802	80,2	7700	-711	77,1	-1	0,1	-0,01

Розрахунок із розрядністю 3 проводився, щоб на простому прикладі підкреслити вплив обмеженої розрядності операндів на результат обчислень.

Результат, наведений у табл.8.1, легко пояснити. Для цього визначимо за матрицею $(Z)_T$, яке додаткове прирощення до провідності G_2 призведе значення визначника матриці провідностей схеми (рис.8.20, а) до нульового:

$$\xi_{44} = Z_{(1+3)(1+3)} = -7900.$$

У множнику (8.44в) $k_4 = 1/(1/W_4 + \xi_{44})$ знаменник дорівнюватиме нулю при прирощенні $\Delta G_2 = W_4 = 1/7900$, що менше розрядності операндів при обчисленні матриць $(Z)_\xi$ і $(Z)_\Gamma$. З табл.8.1 також видно, що точність обчислень $(Z)_\xi$ за методом модифікацій значно вища, ніж точність обчислення $(Z)_\Gamma$.

Висока точність обчислень за методом модифікацій є наслідком того, що кожен крок методу є явною аналітичною залежністю матриці від „вирощуваного” параметра. Крім того, точність обчислень також залежить від порядку „вирощувань” провідностей при реалізації методу модифікацій.

Вплив порядку „вирощувань” провідностей на точність обчислень ілюструє наступний приклад.

Приклад 8.10. Значення параметрів кола (рис.8.21) становлять: $G_1 = 4$; $G_2 = 3$; $G_3 = 1$; $W_5 = 0,01$; $W_4 = 0,02$; $W_3 = 1,0126581 \cdot 10^{-2}$; $S_1 = 40$; $S_2 = 30$. За методом модифікацій знайти обернені матриці провідностей, змінюючи порядок «вирощування» провідностей.

Розв’язання. Розірвавши вітки S_1, S_2, W_3, W_4, W_5 і послідовно „вирощуючи” провідності (саме у цій послідовності), за методом модифікацій обчислимо обернену матрицю, яка у табл.8.2 позначена як $(Z)_a$. Аналогічно знайдемо обернену матрицю $(Z)_b$, але в послідовності вирощувань S_1, S_2, W_3, W_4, W_5 (алгоритм вибору головного елемента схеми). Нарешті, обчисливши обернену матрицю у символічному вигляді, підставимо в одержаний результат значення

параметрів S_1, S_2, W_3, W_4, W_5 і після розрахунків з нескінченною розрядністю відкинемо в десяткових дробах значущі цифри за межами розрядності 8. Позначимо цю обернену матрицю як $(Z)_B$.

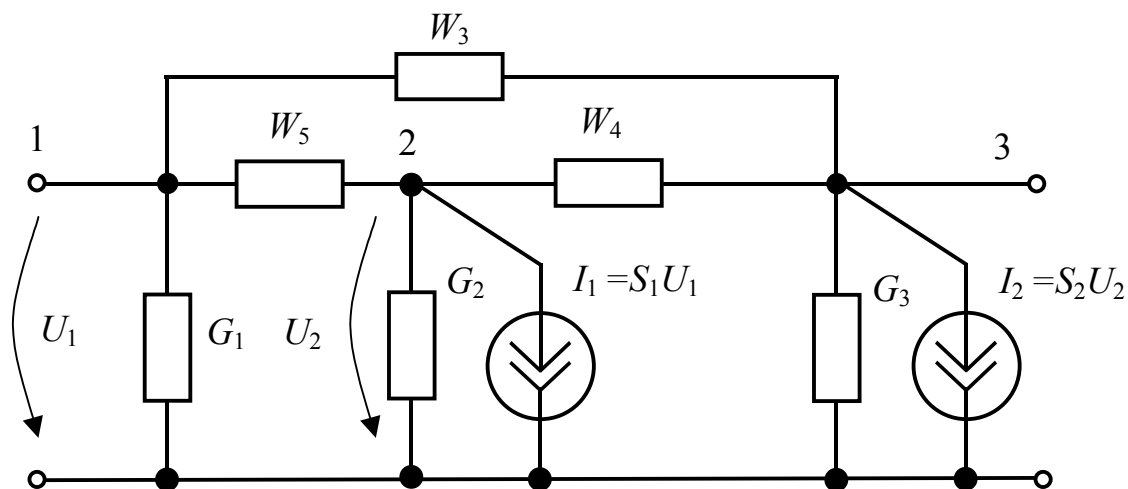


Рисунок 8.21 – Схема кола у прикладі 8.10

Таблиця 8.2 – Обернені матриці провідностей для схеми (рис.8.21)

$(Z)_a$	$8,377949 \cdot 10^2$	$1,6521725 \cdot 10^{-1}$	$-2,461200 \cdot 10^{-1}$
	$-1,113069$	$1,127207 \cdot 10^{-1}$	$3,263411$
	$2,1539091 \cdot 10^{-1}$	$-2,1773842 \cdot 10^{-2}$	$-5,3480187 \cdot 10^{-1}$
$(Z)_b$	$1,1522276$	$-9,0822804 \cdot 10^{-2}$	$9,5635552 \cdot 10^{-3}$
	$-12,756516$	$1,2823654$	$-1,0050475$
	$371,26704$	$-37,321854$	$3,8958603$
$(Z)_B$	$1,1522268$	$-9,0822723 \cdot 10^{-2}$	$9,5635446 \cdot 10^{-3}$
	$-12,756507$	$1,2823653$	$-1,0050464$
	$371,25733$	$-37,321854$	$3,8958574$

Як бачимо з табл.8.2, матриця $(Z)_b$, обчислена за алгоритмом вибору головного елемента схеми, є близькою до точної матриці $(Z)_B$ і дуже відрізняється від $(Z)_a$.

8.7 Запитання та завдання для самоперевірки і контролю засвоєння знань

1. Сформулювати задачу аналізу електричних кіл. Чому стандартні математичні методи розв'язання систем рівнянь рівноваги не задовольняють дослідників у галузі теорії кіл?

2. Назвати основні методи аналізу електронних кіл. Порівняти між собою символічні та чисельні методи аналізу.

3. Як класифікують методи аналізу за видом використовуваного математичного апарата?

4. Які існують причини похибок результатів математичного моделювання кіл? Пояснити поняття операційної та методичної похибки.

5. Назвати основні джерела виникнення методичної похибки при аналізі радіоелектронних кіл.

6. У чому полягає метод Гаусса для розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь? Чим метод LU -розкладання відрізняється від методу Гаусса?

7. Розв'язати систему рівнянь за методом Гаусса:

$$\begin{aligned}2,0x_1 + 1,0x_2 - 0,1x_3 + 1,0x_4 &= 2,7; \\0,4x_1 + 0,5x_2 + 4,0x_3 - 8,5x_4 &= 21,9; \\0,3x_1 - 1,0x_2 + 1,0x_3 + 5,2x_4 &= -3,9; \\1,0x_1 + 0,2x_2 + 2,5x_3 - 1,0x_4 &= 9,9.\end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = -1$.

8. Показати, що кількість операцій (множення і ділення), необхідних, щоб розв'язати систему рівнянь порядку N методом Гаусса, становить:

$$\frac{N^3}{3} + N^2 - \frac{N}{3}.$$

Обчислити кількість таких операцій у попередній задачі.

Відповідь: 36.

9. Розрахувати повний машинний час, необхідний для розв'язання рівняння (8.1) за методом виключення Гаусса, якщо кожна арифметична операція триває 0,002 мкс, а порядок матриці (A) дорівнює 100; 500; 1000?

Відповідь: 1,393 мс; 0,168 с; 1,339 с.

10. Обчислити коефіцієнти матриць $(B_U^{(N)})$, $(B_L^{(N)})$ методом Краута, якщо вихідна матриця становить:

$$(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } \left(B_U^{(N)} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \left(B_L^{(N)} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & -6 & -19 & -9 \end{pmatrix}.$$

11. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом LU -розкладання:

$$\begin{pmatrix} 5,320 & 0,570 & 0,610 & 0,480 \\ 0,660 & 7,040 & 0,770 & 0,360 \\ 0,340 & 0,820 & 6,810 & 0,180 \\ 0,110 & 0,160 & 0,900 & 8,330 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,720 \\ -6,960 \\ 8,330 \\ 26,050 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1,012$; $x_2 = -1,375$; $x_3 = 1,259$; $x_4 = 3,004$.

12. Як оцінюють точність розв'язання системи рівнянь $(A(p))(X(p)) = (Q(p))$? Які існують основні критерії точності розв'язання задачі аналізу?

13. Пояснити поняття зумовленості систем рівнянь рівноваги кола. За допомогою якого параметра оцінюють зумовленість системи рівнянь, які чинники спричиняють погану зумовленість?

14. Пояснити поняття «дублікація», з яких причин виникають дублікації першого, другого та третього роду?

15. Довести, що у схемі (рис.8.4) дублікації другого роду утворені добутками провідностей $\pm G_2 G_4 G_6$.

16. Які можливості має чисельно-символьний метод білінійного розкладання функцій кола? Чим обмежується ефективність застосування цього методу?

17. Для схеми, розглянутої у прикладі 8.9 (рис.8.8), за методом білінійного розкладання обчислити визначник матриці провідностей канонічної системи вузлових напруг, коефіцієнт передачі за напругою та вхідний опір, якщо двобрамники A і B поміняти місцями.

Відповідь: $\Delta = 356 \text{ мСм}^4$; $H_{U41} = -2,12$; $Z_{11} = 331 \text{ Ом}$.

18. Які особливості мають топологічні методи аналізу кіл? Дати визначення основним елементам топологічної структури кола (вітка, контур, граф схеми, дерево графа, фактор графа).

19. За якими принципами будують граф системи рівнянь, яка описує електричне коло? Побудувати граф схеми (рис.8.4).

20. Обчислити ваги факторів та визначник графа матриці провідностей для схеми (рис.8.22).

Відповідь:

$$w_a = Y_{11}(p)Y_{22}(p)Y_{33}(p); \quad w_6 = Y_{13}(p)Y_{31}(p)Y_{22}(p); \quad w_b = Y_{13}(p)Y_{21}(p)Y_{32}(p); \\ \Delta = G_1 G_2 G_3 + G_2 G_3 W_3 + G_1 G_2 W_3 + S_1 S_2 W_3.$$

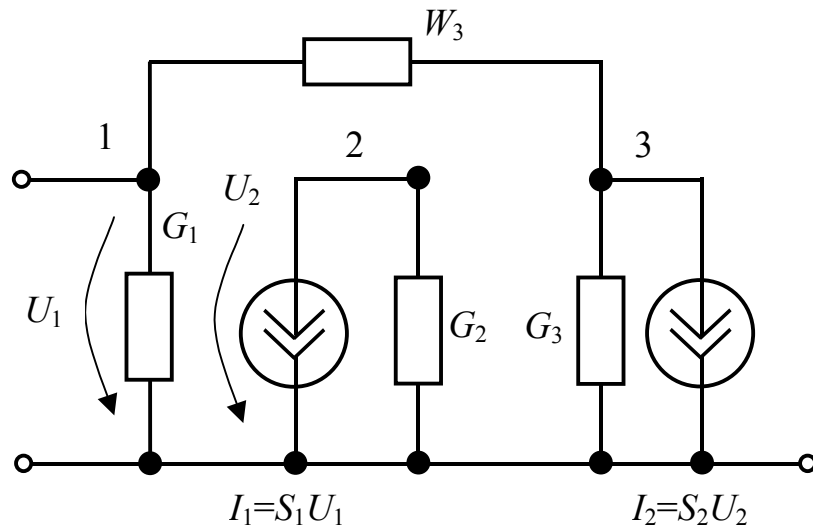


Рисунок 8.22 – Схема до задачі 20

21. Скласти систему рівнянь вузлових напруг, яка описує схему (рис.8.23), якщо між вузлами 1, 2 увімкнено джерело задавального струму i_0 . Побудувати спрямований граф, який відображає цю систему.

За графом матриці провідностей схеми знайти фактори графа, визначник Δ та алгебраїчні доповнення Δ_{11} , Δ_{12} . Записати вираз для операторних характеристик кола: входного опору і коефіцієнта передачі за напругою, вважаючи дією напругу u_1 , а реакцією – напругу u_2 .

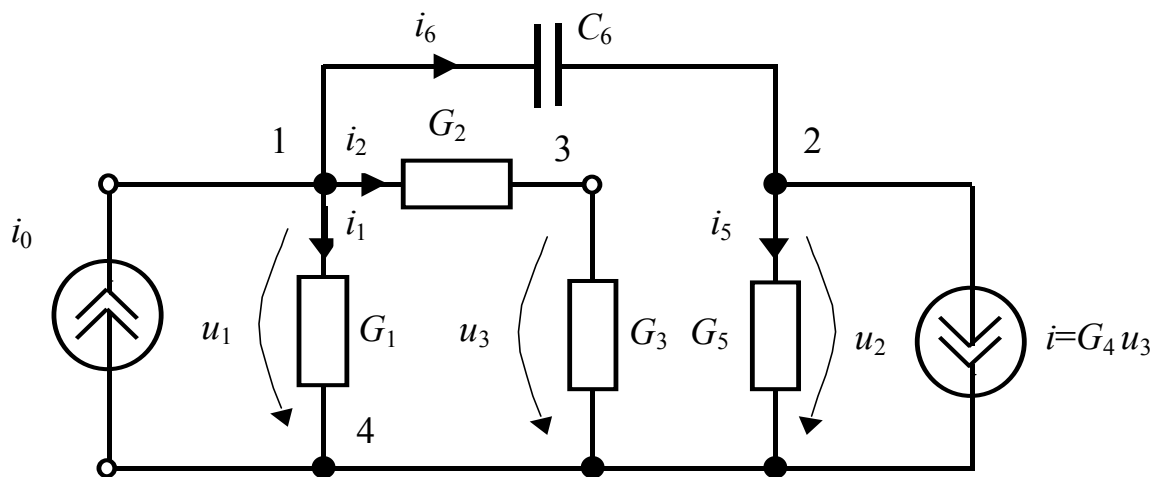


Рисунок 8.23 – Схема до задачі 22

Відповідь: $\Delta_{11} = Y_{22}(p)Y_{33}(p)$; $\Delta_{12} = Y_{31}(p)Y_{23}(p) - Y_{21}(p)Y_{33}(p)$;
 $\Delta = Y_{11}(p)Y_{22}(p)Y_{33}(p) - Y_{13}(p)Y_{22}(p)Y_{31}(p) - Y_{12}(p)Y_{21}(p)Y_{33}(p) + Y_{12}(p)Y_{31}(p)Y_{23}(p)$;

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{(G_2 + G_3)(pC_6 + G_5)}{pC_6[G_2(G_3 + G_4) + (G_1 + G_5)(G_2 + G_3)] + G_5[G_2G_3 + G_1(G_2 + G_3)]}$$
;

$$H_U(p) = \frac{pC_6(G_2 + G_3) - G_4G_2}{(pC_6 + G_5)(G_2 + G_3)}.$$

22. Які особливості мають теоретико-множинні методи аналізу кіл? Назвати основні з цих методів.

23. Структуру матриці провідностей $(Y(p))$ відображено множиною її ненульових елементів:

$$\{m, l\} = \{11, 13, 21, 22, 24, 33, 34, 35, 41, 43, 44, 52, 54, 55\}.$$

Записати матрицю $(Y(p))$, її матричне число. Знайти визначник матриці $(Y(p))$, користуючись методом контурних чисел.

Відповідь:

$$D = Y_{11}(p)[Y_{22}(p)(Y_{33}(p)Y_{44}(p)Y_{55}(p) - Y_{34}(p)Y_{43}(p)Y_{55}(p) + Y_{35}(p)Y_{43}(p)Y_{54}(p)) - Y_{24}(p)Y_{35}(p)Y_{43}(p)Y_{52}(p)] - Y_{13}(p)[Y_{21}(p)Y_{35}(p)Y_{44}(p)Y_{52}(p) - Y_{22}(p)(Y_{34}(p)Y_{41}(p)Y_{55}(p) - Y_{35}(p)Y_{41}(p)Y_{54}(p)) - Y_{24}(p)Y_{35}(p)Y_{41}(p)Y_{52}(p)].$$

24. Користуючись методом узагальнених чисел, обчислити визначник D матриці провідностей для схеми (рис.8.23).

25. Який принцип покладено в основу методу взаємних похідних та методу модифікацій?

26. Обчислити, користуючись методом модифікацій, обернену матрицю провідностей кола, схема якого зображена на рис.8.2. Порівняти результати, отримані при зміні порядку модифікацій $(S, G_3$ на $G_3, S)$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Атабеков Г.И. Основы теории цепей: Учеб. для вузов. М.: Энергия, 1969. 424 с.
2. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей. М.: Радио и связь, 2000. 592 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учеб. для вузов. Изд. 10-е. М.: Гардарики, 2002. 638 с.
4. Бирюков В.Н., Попов В.П., Семенцов В.И. Сборник задач по теории цепей. М.: Высш. шк., 1998.
5. Задачник по теоретическим основам электротехники. (Теория цепей) Под общ. ред. проф. К.М. Поливанова. М.: Энергия, 1967. 256 с.
6. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. М.: Энергия, 1972. 816 с.
7. Коваль Ю.О., Гринченко Л.В., Милютченко І.О., Рибін О.І. Основи теорії кіл: Підручник для студентів ВНЗ. Ч. 1. Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2004. 436 с.
8. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей: Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 1985. 496 с.
9. Попов В.П. Основы теории цепей: Учеб. для вузов. Изд. 3-е, испр. – М.: Высш. шк., 2000. 575 с.
10. Радіотехніка: Енциклопедичний навч. довідник: Навч. посібник. /За ред. Ю.Л. Мазора, Є.А. Мачуського, В.І. Правди. К.: Вища шк., 1999. 838с.
11. Соболев Ю.В., Бабаєв М.М., Давиденко М.Г. Теорія електричних і магнітних кіл. Харків: ХФВ «Транспорт України», 2002. 264 с.
12. Татур Т.А., Татур В.Е. Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. 407 с.
13. Теория электрорадиотехнических цепей. Ч.2 /Е.Г. Гринберг, Ю.А. Коваль, Д.С. Колобков и др.; Под. ред. Д.С. Колобкова. Харьков: ВИРТА, 1972. 298 с.
14. Фриск В.В. Основы теории цепей: Учеб. пособие. – М.: ИП Радио-Софт, 2002. 288 с.
15. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Б		Л	
Баркер	115	Лаплас	153
Баттеворт	479, 480		
Берг	588	М	
Бернуллі	276	Маклорен	479
		Меллін	167
В			
Ващенко-Захарченко	153	О	
Вольперт	365	Ом	30, 36
		П	
Г		Пістолькорс	360
Гаусс	606	Пупін	351
Гельмгольц	286		
Гурвіц	181	Р	
		Ріман	167
Д			
Даламбер	277	С	
Дарлінгтон	545	Сміт	365
Декарт	634	Соболев	81
Дірак	79	Стілтєс	119
Діріхле	116		
Дюамель	118	Т	
		Татарінов	357
З		Тейлор	90
Золотарьов	494	Томсон	266
Е		Ф	
Евклід	611	Фостер	523
Ейлер	276	Фур'є	187, 277
Ж			
Жордан	608	Х	
		Халецький	610
К		Хевісайд	64
Кауер	494, 532		
Кірхгоф	20, 266	Ч	
Коваленков	365	Чебишов	487
Коші	21		
Краруп	351	Ш	
Краут	610	Ширман	452

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

- Активна потужність 293, 299,
305, 317, 334
– провідність 354, 358
Активний чотириполюсник 212,
245
– елемент 181
– опір 17, 94, 297, 333
Амплітуда 216, 257, 266
– комплексна 22, 52, 162, 208,
219, 284, 290, 382
Амплітудно-частотна
характеристика 89, 98, 145,
199, 229, 383
Атенюатор 267

Б

- Багатополусник (багатобрамник)
205, 206
Базис 206, 556
– вузлових напруг 219, 226,
244, 604
– дуальний 227
– контурних струмів 224, 226, 244
604
Базисний вузол 206
Балансування лінії 350, 351
Биття 58, 59, 103, 136
Біцистор 253, 255
Брама (вхід) 207

В

- Вектор нев'язок 610, 611
Векторна діаграма 58
Вершина графа 628, 631
Взаємна індуктивність 163
Визначник матриці 221, 223,
232, 254, 606, 612
Вібратор симетричний 360
– петльовий 360
Відгалужувач 457
Відгук (реакція) кола 21, 153, 165,
205, 207, 213, 405, 409
Вітка 30, 222, 226, 232, 255
Властивість геометричної симетрії
506, 509, 514
– перетворення Лапласа 155, 435
– фільтрувальна 80, 118, 130, 136
Вольт-амперна характеристика 576
Вузлова напруга 206, 217, 219, 603
Вузловий струм джерел 218, 219
Вузол 205, 314
– базисний 206
– внутрішній 218
Вхідна провідність кола 23, 185
219, 224, 382

Г

- Гармоніки 589, 592
Гіратор 241, 242, 245
Гранична частота 91, 477, 490, 507
Граничні значення 188, 190
– співвідношення 157, 197

- умови 290, 314, 320
 - Граф неспрямований 628
 - матриці 627, 631
 - системи рівнянь 628
- Д**
- Двобрамник (чотириполюсник) 207
 - Двополюсник 162, 185, 234, 253, 382, 520
 - Декремент загасання 47
 - підстановки 630
 - Дельта-функція 79, 108, 110, 118, 155, 198, 437
 - Джерело залежне 174, 211
 - електричної енергії 29
 - ЕРС 32, 405
 - напруги 174, 206
 - постійної напруги 38, 40, 48, 154, 177, 424
 - синусоїдної дії 51, 54, 55, 264, 276
 - струму 23, 32, 66, 154, 158, 207, 419
 - Дисперсія частотна 454
 - Діаграма векторна 58
 - Діаграма кругова 365, 372
 - Діелектрик 269, 270
 - Дійсна змінна 153, 188
 - Діюче значення комплексне 76, 216
 - Дія довільна 208, 297
 - постійна 24
 - синусоїдна 24, 51, 162, 187, 208, 284, 297
 - складна 64, 162
 - ступінчаста 64, 104, 198
 - типова 64, 103
 - Добротність 48, 57, 100, 386
 - полюса 558
 - Довга лінія 264, 267
 - Довжина хвилі 264, 266
 - Другий закон Кірхгофа 33, 76, 98, 160, 174, 274, 581
 - Дуальність 39, 86, 93, 227, 392, 399, 420, 428
 - Дублікація 606, 618, 620
 - Дуга графа 628
- Е**
- Еквівалентна добротність 389
 - Еквівалентний чотириполюсник 213, 218
 - опір 30, 72, 224, 248
 - схема 30, 69, 176, 205, 211, 240
 - Еквівалентні джерела напруги і струму 410
 - перетворення 175, 217, 231, 621
 - Електричне поле 44, 268, 578
 - Електричний заряд 18, 264
 - фільтр 267
 - Елемент кола 157, 160, 205
 - активний 181
 - ідеальний 264, 268
 - нелінійний 575
 - пасивний 264, 268, 757
 - реактивний 17, 18, 186, 193, 253, 424
 - реактивний кратний 253
 - Енергія 22, 44, 215, 290

Є

Ємнісна провідність 372
 Ємнісний опір 314
 Ємність 32, 159, 241, 298, 320, 424
 – кратна 255, 256
 – нелінійна 575

З

Загасання 42, 48, 56
 Задача аналізу 205, 218
 – апроксимації 476
 – параметричного синтезу 476
 – синтезу 188, 255, 476
 – структурного синтезу 476, 523
 Закон Ома 30, 36, 153, 157, 281, 290, 303
 Закони Кірхгофа 20, 25, 27, 29, 95, 153, 160, 264, 274, 575
 – комутації 19, 25, 29, 56, 100
 Згортка 133, 134, 136, 157
 З'єднання 212
 – каскадне 213, 244, 268
 – паралельне 162, 213
 – паралельне-послідовне 213
 – послідовне 41, 160
 – послідовне – паралельне 213
 – регулярне 213, 214
 З'єднувач 451
 Значення миттєве 19, 29, 52, 153, 157, 264, 266, 284
 Зображення 153, 154, 277, 405
 Зсув фаз 216, 305, 317, 334

І

Ідеальний елемент кола 264, 268
 Ізолятор 267, 455
 Імітанс 247, 253
 Імпульс експоненційний 124, 155, 433
 – дзвіноподібний 467
 – одиничний 79
 – прямокутний 81, 104, 131, 448, 466
 Індуктивна провідність 372
 Індуктивний опір 314
 Індуктивність 18, 30, 157, 253, 298, 323, 428
 – взаємна 163
 – кратна 255
 – нелінійна 575, 579
 Індуктивно зв'язані контури 98
 Інтеграл Дюамеля 116, 118, 119
 – накладання 118, 121, 132, 133, 448

К

Кабель коаксіальний 270, 281, 295, 303, 308, 328
 Каскадне з'єднання 213, 244
 Кірхгофа закони 20, 25, 27, 29, 95, 153, 160, 264, 274
 Коди Баркера 115
 Коефіцієнт Берга 593, 598
 – біжної хвилі 332
 – відбиття 291, 313
 – операторний 406, 407
 – загасання 42, 47, 48, 99

- зв'язку 99, 100
 - корисної дії 257, 305, 342
 - масштабний 374, 577
 - нерівномірності ослаблення 489
 - ослаблення 216, 286, 293, 317
 - передачі за напругою 179,
216, 219, 220, 228, 382
 - передачі за струмом 219, 222, 382
 - підсилення 236, 239
 - поширення 286, 293, 317
 - операторний 406
 - прямокутності 90
 - стійної хвилі 332
 - трансформації 352
 - фази 216, 286, 293, 317
 - Коло дуальне 316, 556,
560, 566
 - еліптичне 563
 - лінійне 17, 22, 179
 - мінімально-фазове 190
 - нелінійне 576
 - немінимально-фазове 190
 - неспотворююче 194, 195
 - Комплексна амплітуда 22, 52, 208,
219, 284, 290, 382
 - вхідна функція 23, 219, 382
 - передатна функція 22, 219, 382
 - потужність 293
 - провідність 356
 - функція 218, 382
 - Комплексне діюче значення 76, 216
 - Комплексний опір 291, 298
 - Компонент кола 205, 208, 245, 621
 - Комутатор 267, 464
 - антенний 457
 - Комутація 17
 - Конвеєр 247, 249
 - напруговий 205, 248
 - струмовий 205, 248
 - Конвертор 247, 248
 - Конденсатор 33, 264
 - Контур 26, 42, 47, 76, 206, 218
 - одиночний 86, 93, 388
 - паралельний 86, 93, 314, 385,
526
 - послідовний 86, 93, 184, 314,
387, 415, 529
 - резонансний 200, 267, 351, 454
 - Контурна ЕРС 32
 - Контурний струм 32, 164, 206,
225
 - Корені дійсні 23, 42, 166
 - комплексно-спряжені 24, 42,
166
 - кратні 23, 42, 166, 167
 - прості 23, 42, 165
 - Коротке замикання 41, 96, 208,
242, 314, 316, 385, 425
 - Котушка самоіндукції 264
 - Краупізація 351
 - Кругова діаграма 365, 372
 - опорів 372
 - провідностей 372
 - Крутість 576, 578, 588
 - Кутова частота 42
 - Кут відсікання 593, 594, 597
- Л**
- Ланка диференціувальна 85
 - інтегрувальна 85
 - Ланцюговий дріб 532, 533

- Лишки 167, 172
- Лінійне електричне коло 17,
208, 219, 244
- Лінія довга 264, 267
- вимірювальна 267, 463
 - двопровідна 267, 325
 - експоненційна 459
 - затримки 267, 452, 463, 476
 - збалансована 350, 351, 409
 - ідеальна 280, 281, 310, 320,
409
 - коаксіальна 267
 - лінійна 268
 - неоднорідна 269, 283
 - однорідна 269
 - параметрична 268
 - передачі 267, 269
 - реальна 316
 - резистивна 267, 451
 - спіральна 267
 - стрічкова 267, 272
 - ультразвукова 452
 - фідерна 449
 - цифрова 452
 - штучна 267, 453
- М**
- Магнітне поле 44, 268
- Матриця провідностей 205, 228, 622
- обернена 217, 218, 602, 610
 - одинична 608
 - опорів 32, 206, 602
 - плаваюча 232
 - розріджена 205
- Метал 269, 271
- Метод Берга 588, 592, 594
- взаємних похідних 637
 - вузлових напруг 162, 176, 621
 - Гаусса 606, 612, 643
 - графічний 586
 - еквівалентних перетворень 162,
175, 185
 - еквівалентних підсхем 234
 - еквівалентного чотириполюсника
218
 - Жордана 608
 - класичний 19, 21, 25
 - комплексних амплітуд 52, 55
 - контурних струмів 32, 162, 176
 - контурних чисел 604, 633
 - Краута 610
 - матричний 604
 - модифікацій 640, 644
 - накладання 31, 162, 176, 757
 - операторний 19, 153, 174, 277
 - символний 603, 621
 - символно-чисельний 604, 621
 - спектральний 19
 - структурний 604
 - теоретико-множинний 604, 633
 - топологічний 627
 - узагальнених чисел 633, 636
 - часовий 19, 64
 - чисельний 339, 603, 606
- Миттєве значення 19, 29, 52,
153, 157, 264, 266, 284
- Н**
- Навантаження 29, 214, 242, 275
- Надструм 18

Накладання метод 31, 162, 176,
575

Напруга

– вузлова 206, 217, 219

Непер 293

Норма вектора 611

Нуль функції 178, 181, 186, 522

О

Обвідна 58, 153

– комплексна 134, 136

Операційний підсилювач 205,
236

– зі струмовим зворотним зв'язком
259

Опір 157

– активний 17, 94, 297, 333

– внутрішній джерела 413, 418

– вхідний 23, 184, 214, 219,
223, 291, 329, 382

– еквівалентний 30, 72, 248

– ємнісний 314

– індуктивний 314

– комплексний 291, 299, 316

– нелінійний 575, 578

– нормований 333

– операторний 160

– передатний 219, 223

– повний 333

– погонний активний 268

– погонний комплексний 285,
293

– реактивний 187, 310, 320

– резонансний 385

– характеристичний 42, 94, 214

– хвильовий 280, 290

Оригінал 153, 154, 277, 406

П

Паралельне з'єднання 162, 213

Параметри вторинні 281, 293

– чотиріполюсника 208

– динамічні 576

– енергетичні 293

– зосереджені 264

– короткого замикання 215

– первинні (погонні) 266, 268, 270

– операторні 405

– розподілені 217, 266

– символні 622, 623, 627

– статичні 576

– характеристичні 214

– холостого ходу 215, 217

Передатна провідність 219, 223, 250

Передатний опір 219, 223

Перенапруга 18

Перетворення Лапласа 153, 277, 405

– обернене 157, 187

– пряме 153

Перетворення Фур'є 187

– обернене 198

– пряме 198

Перетворення частоти 495

Період 103, 266

Перший закон Кірхгофа 33, 93,
162, 174, 212, 231, 274

Підсилювач операційний 553

– струму (струмовий) 259, 556

– трансадмітансний 257, 555

– трансімпедансний 257, 555, 560

- транскондуктивний 257, 555
- Підсхема 230, 233
- Повна потужність 214
- Повний опір 333
- Поле магнітне 44, 268, 578
- Поліном характеристичний 22
 - Баттерворта 483, 484, 558
 - Гурвіца 181, 185, 191, 478, 520
 - степеневий 588
 - Чебишова 487, 488
- Поліус схеми 205
 - функції 178, 181, 186, 522
- Порядок кола 22, 99, 181, 255
 - фільтра 480
- Послідовне з'єднання 41, 160
- Постійний струм 30, 68, 101
- Потенціал 220, 241
- Потокозчеплення 18
- Потужність активна 293, 299, 305, 317, 334
 - комплексна 293
 - повна 214
 - реактивна 293, 313, 334
- Похідні взаємні 637, 638, 640, 643
 - власні 638
- Похибка абсолютна 604
 - відносна 604
 - гранична 604
 - методична 605, 606, 620
 - моделі 605
 - обчислень 605
 - операційна 603, 605
- Початкова фаза 54, 59, 90, 115, 216, 284, 304, 310, 314
- Початкові умови 18, 24
 - ненульові 19, 174
 - нульові 19, 66, 82, 158, 160
- 277
- Початкові значення 19, 24, 69, 96, 153, 277
 - залежні 19
 - незалежні 19
- Принцип дуальності 227, 266, 428
 - збереження довжини частотного інтервалу 505, 509, 512
 - накладання 64, 82, 105, 117, 119, 132, 133, 445, 565
- Провідність 67, 235
 - активна 354, 358
 - вхідна 23, 185, 219, 224, 382
 - ємнісна 372
 - індуктивна 372
 - комплексна 356
 - операторна 160, 162
 - передатна 219, 223, 250
 - питома 271
 - погонна активна 268
 - погонна комплексна 285, 293
 - реактивна 357
 - хвильова 358
- Проникність відносна
 - діелектрична 270
 - магнітна 271, 281
- Прохідний чотириполіусник 193, 207
- Процес вільний 64, 82, 92, 104, 186
 - перехідний 17, 64, 182, 200, 405
 - стаціонарний (усталений) 17, 22
 - хвильовий 266, 286
- Пупенізація 351

Пучність 314, 323, 332

Р

Радіан 293

Радіоімпульс 57, 141, 143, 146

Реактивна потужність 293, 313, 334

– провідність 357

Реактивний опір 187, 310, 320

Реалізація функції 537, 540

– за Кауером 532, 538

– за Фостером 525, 537

– каскадно-розв'язана 553

– каскадно-узгоджена 553

Режим аперіодичний 42, 94, 95,
127

– біжних хвиль 291, 303, 354

– великих коливань 591

– вимушений 22

– вільний 22, 25, 36

– змішаних хвиль 298, 332, 354

– коливальний 42, 45, 94, 97

– короткого замикання 242,
314, 389, 391

– критичний 42, 45, 94, 95

– малих коливань 591

– нестационарний 153, 162

– перехідний 68

– синусоїдний 284

– стійних хвиль 298, 310, 356

– узгодження 214, 293, 336, 360,
407, 410

– усталений 17, 64, 68, 73, 153,
175, 198, 264, 406, 415

– холостого ходу 242, 314, 393

Резистор 205, 264

Резонансна частота 42, 94, 99,
127, 385

Рівняння диференціальне 20, 21,
68, 76, 93, 99, 153, 178, 195,
207, 264, 274, 405, 581

– передачі 217

– рівноваги 217, 224, 233

– телеграфне 374

– характеристичне 19, 22, 68
127, 178, 181, 184, 286

– хвильове 276

Розкладання білінійне 625

– в ряд Тейлора 90, 588. 622

Розмикання 34

Розподіл амплітуд 314, 320

– зсуву фаз 334, 339

– нормованих опорів 339

– потужностей 334, 339

– початкових фаз 317, 320

Ряд гармонічний (Фур'є) 277, 589

– біномний 408

С

Синтез 205, 259, 476

Складова вільна 22, 25, 72, 77, 122,
153

– вимушена 24, 25, 69, 72, 77,
122, 153

– гармонічна 589, 591, 593

– дельтоподібна 85, 101

– струму постійна 589

Смуга затримання 490, 514

– переходу 478, 490

– пропускання 89, 92, 98, 200,
385, 503

- Спектральна густина 199
- Стала інтегрування 24, 25, 34,
69, 73, 153, 277, 286
- електрична 270
 - магнітна 270
 - передачі характеристична 215
 - ослаблення характеристична 216
 - фази характеристична 216
 - часу 30, 36, 37, 68, 72, 89, 92,
107, 121, 163, 424
- Струм вузловий 207, 218
- контурний 164, 206
 - постійний 30, 68, 101, 198
 - синусоїдний 431
- Струму джерело 23, 32, 66, 154,
158, 207
- Схема заміщення 93, 264, 268,
361
- операторна 174
- Схема дуальна 93
- еквівалентна 30, 31, 69, 176
 - канонічна 527
 - східцева 533, 546
 - увімкнення 239, 352
- Т**
- Теорема Дарлінгтона 546
- диференціювання 157, 178
 - запізнення 157, 277, 410
 - згортки 157
 - інтегрування 157, 158
 - лінійності 157, 160, 410
- Трансформатор чвертьхвильовий
352, 458
- Трибрамник 230, 236, 555
- універсальний 255
- У**
- Узгодження 98, 214, 215, 336,
350, 407, 543
- Усталений режим 17, 64, 68,
73, 153, 175, 198, 264, 406, 415
- Ф**
- Фаза 104
- поточна 216
 - початкова 54, 59, 90, 115,
181, 216, 284, 304
- Фазовий зсув 216, 305, 313
- Фазообертач 360, 454
- Фазочастотна характеристика 89, 91,
193, 195, 383
- Фактор графа 629
- зв'язку 100
- Фільтр 86, 250, 267
- активний 554, 556, 563, 567
 - Баттерворта 479, 558
 - верхніх частот 495
 - електричний 476
 - еліптичний 494, 563
 - загороджувальний 512
 - Золотарьова 494
 - Кауера 494
 - нижніх частот 90
 - поліномний 478, 484, 493
 - прототип 495
 - режекторний 563
 - смуговий 93, 503
 - Чебишова 489

Формувач 267, 464
 Фронт хвилі 287, 414
 Функція гіперболічна 129, 290, 303, 319
 – дельта 79, 108, 110, 118, 155, 198, 437
 – Дірака 79
 – додатна дійсна 185
 – дробово-раціональна 164, 180, 189
 – комплексна 218, 382
 – комплексна вхідна 22, 23, 219, 382
 – комплексна передатна 22, 219, 382
 – кусково-неперервна 116, 119, 154
 – непарна-парна 520
 – неперервна 119, 120
 – одинична 64, 66, 81, 104, 119, 196, 198
 – операторна 434
 – операторна вхідна 185, 434, 520
 – операторна передатна 178, 179, 187, 194, 255, 434, 476
 – парна–непарна 520
 – реактансна 186, 520
 – системна 179
 – спеціальна 65, 79
 – увімкнення 64
 – узагальнена 80
 – фільтрації 481, 487
 – Хевісайда 64, 154

Х

Характеристика ампер-вольтна 244
 – амплітудно-квадратична 187, 188
 – амплітудно-частотна 89, 91, 98, 145, 199, 229, 383
 – вебер-амперна 576
 – вольт-амперна 576
 – імпульсна 79, 82, 196, 434
 – коливальна 594
 – кулон-вольтна 576
 – операторна 179
 – ослаблення 476
 – перехідна 64, 67, 196, 434
 – рівнохвильова 491
 – фазочастотна 89, 91, 193, 195, 383
 – часова 64, 86, 195, 200, 434, 434
 – частотна 86, 193, 195, 200, 382, 415
 Хвиля 409

– відбита (зворотня) 277, 280, 313
 – падаюча (пряма) 277, 280, 313

Хвильовий опір 280, 290

– операторний 406

Холостий хід 209, 242, 310. 316, 390

Ч

Частота вільних коливань 42, 45

– гранична 91, 477, 490, 507

– зв'язку 100, 103

- комплексна 153, 182, 187
- кутова (кутова) 42
- нормована 480, 487, 495
- нормувальна 531, 551
- резонансна 42, 94, 99, 127,
385, 527
- центральна 503, 512
- циклічна 264
- Частотна дисперсія 454
- Чотиріполюсник (двобрамник) 219,
382
- активний 212, 245
- взаємний 214
- еквівалентний 213, 218
- врівноважений 268
- неврівноважений 193, 268
- несиметричний 214, 268
- прохідний 193, 207
- реактивний 546, 553
- симетричний 214, 215, 268
- узгоджений 216
- Число деревне 636
- зумовленості 612
- контурне 634
- матричне 633, 634
- рядкове 634
- узагальнене 636

Ш

- Швидкість світла 264
- фазова 287, 297
- Шлейф 355
- вимірювальний 462

Навчальне видання

КОВАЛЬ Юрій Олександрович
ГРИНЧЕНКО Людмила Василівна
МИЛЮТЧЕНКО Іван Олександрович
РИБІН Олександр Іванович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ

Частина 2

Підручник для студентів
вищих навчальних закладів

За загальною редакцією проф. В.М. Шокало та проф. В.І. Правди

Редактор Л.І. Сащенко
Виконавець комп'ютерної верстки І.О. Милютченко

Підп. до друку 05.09.06. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$
Умов. друк. арк. 35,7. Облік.- вид. арк. 31,9. Друк. ризограф.
Тираж 300. Ціна договірна

Харківський національний університет радіоелектроніки
Україна, 61166 Харків, просп. Леніна, 14

Надруковано в ПФ “Колегіум”, (0572) 28-53-74