

МЕХАНИКА  
шпаргалка

<b>Содержание</b>	
1. Механическое движение . . . . .	1аб
2. Кинематика вращательного движения . . . . .	2аб
3. Масса и импульс тела . . . . .	3аб
4. Законы Ньютона . . . . .	4аб
5. Кинетическая и потенциальная энергии . . . . .	5аб
6. Закон сохранения энергии . . . . .	6аб
7. Типы деформаций . . . . .	7аб
8. Упругие напряжения. Закон Гука . . . . .	8аб
9. Энергия упругой деформации . . . . .	9аб
10. Физический и математический маятники . . . . .	10аб
11. Закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса . . . . .	11аб
12. Силы инерции . . . . .	12аб
13. Абсолютно упругий и неупругий удар . . . . .	13аб
14. Сила Кориолиса . . . . .	14аб
15. Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета . . . . .	15аб
16. Движение тела, закрепленного на оси. Момент инерции . . . . .	16аб
17. Кинетическая энергия при плоском движении . . . . .	17аб
18. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная . . . . .	18аб
19. Гармонические и вынужденные колебания . . . . .	19аб
20. Резонанс . . . . .	20аб
21. Специальная теория относительности . . . . .	21аб
22. Релятивистское выражение для импульса и энергии . . . . .	22аб
23. Взаимосвязь массы и энергии. Уравнение Бернулли . . . . .	23аб
24. Силы внутреннего трения . . . . .	24аб
25. Ламинарное и турбулентное течения . . . . .	25аб
26. Продольные и поперечные деформации, деформация при сдвиге. Закон Гука . . . . .	26аб
27. Допускаемые напряжения. Расчеты на прочность . . . . .	27аб
28. Объемная деформация и потенциальная энергия при чистом сдвиге . . . . .	28аб
29. Единая теория прочности . . . . .	29аб
30. Изгиб с кручением брусьев круглого сечения . . . . .	30аб
31. Понятие об устойчивости равновесия упругих тел . . . . .	31аб
32. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности . . . . .	32аб
33. Переменные напряжения. Усталость . . . . .	33аб
34. Предел выносливости. Основные факторы, влияющие на предел выносливости . . . . .	34аб
35. Частные случаи ударного действия нагрузки . . . . .	35аб
36. Теория о взаимности работ и о взаимности перемещений . . . . .	36аб
37. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса большой кривизны . . . . .	37аб
38. Определение положения нейтральной оси при чистом изгибе . . . . .	38аб
39. Классические и энергетическая теории прочности . . . . .	39аб
40. Работа силы при ее статическом действии. Потенциальная энергия деформации . . . . .	40аб
41. Нагрузки. Расчетная схема . . . . .	41аб
42. Напряжения . . . . .	42аб
43. Фрикционные и зубчатые передачи . . . . .	43аб
44. Основная теорема зубчатого зацепления . . . . .	44аб
45. Материалы, термическая и термохимическая обработки . . . . .	45аб
46. Червячные передачи . . . . .	46аб
47. Корректирование червячных передач и коэффициент полезного действия и усилия в червячном зацеплении . . . . .	47аб
48. Материалы и конструкции плоских ремней . . . . .	48аб
49. Шкивы ременных передач. Цепные передачи . . . . .	49аб
50. Оси и валы . . . . .	50аб
51. Расчет вала на жесткость при кручении. Полые валы и оси . . . . .	51аб
52. Проверка жесткости вала при изгибе. Кривошипные и коленчатые валы . . . . .	52аб
53. Разъемные и неразъемные подшипники. Подшипники скольжения и материалы вкладышей . . . . .	53аб
54. Опоры корпусов подшипников . . . . .	54аб
55. Муфты жесткие неразъемные. Муфты кулачковые жесткие подвижные . . . . .	55аб
56. Клиновые соединения. Зубчатые и штифтовые соединения . . . . .	56аб

1a

## 1. Механическое движение

Простейшей формой движения материи является **механическое движение**, которое состоит в перемещении тел или их частей относительно друг друга.

Совокупность тел, выделенная для рассмотрения, называется **механической системой**. Какие тела следует включить в систему, зависит от характера решаемой задачи. В частном случае система может состоять из одного-единственного тела.

Если вообразить себе отдельное изолированное тело, находящееся в пространстве, где нет никаких других тел, то мы не сможем говорить о движении такого тела, потому что нет ничего, по отношению к чему это тело могло бы изменять свое положение. Отсюда следует, что если мы собираемся изучать движение какого-либо тела, то обязательно нужно указать, по отношению к каким другим телам происходит данное движение.

Совокупность неподвижных относительно друг друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов образует **систему отсчета**.

Движение одного и того же тела относительно различных систем отсчета может иметь разный характер.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения — **поступательное** и **вращательное**.

Поступательное движение — это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Ось вращения может находиться вне тела.

2a

## 2. Кинематика вращательного движения

Поворот тела на некоторый угол  $\varphi$  можно задать в виде отрезка, длина которого равна  $r$ , а направление совпадает с осью, вокруг которой производится поворот. Для того чтобы указать, в какую сторону совершается поворот вокруг данной оси, связывают направление поворота и изображающего его отрезка правилом правого винта: направление отрезка должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него (рис. 1), мы видели поворот, совершающийся по часовой стрелке (вращая головку правого винта по часовой стрелке, мы вызовем его перемещение от себя). Путь, проходимый любой точкой тела при очень малом повороте, можно считать прямолинейным (рис. 2). Поэтому два совершаемых последовательно малых поворота  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$  обуславливают, как видно из рисунка, такое же перемещение  $\Delta r_3 = \Delta r_1 + \Delta r_2$  любой точки тела, как и поворот  $\Delta\varphi_3$ , получаемый из  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$  сложением по правилу параллелограмма. Отсюда следует, что очень малые повороты можно рассматривать как векторы (мы будем обозначать эти векторы символами  $d\varphi$  или  $\varphi$ ). Направление вектора поворота связывается с направлением вращения тела. Следовательно,  $d\varphi$  является не истинным вектором, а псевдовектором. Векторная величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

где  $\Delta t$  — время, за которое совершается поворот  $\Delta\varphi$ , называется **угловой скоростью тела**.

Угловая скорость  $\omega$  направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую правилом правого винта, и представляет собой псевдовектор. Модуль угловой скорости равен  $d\varphi/dt$ . Вращение с постоянной угловой скоростью называется **рав-**

3a

## 3. Масса и импульс тела

В качестве количественной характеристики инертности используется величина, называемая **массой тела**.

Чтобы определить массу некоторого тела, нужно сравнить ее с массой тела, принятого за эталон массы. Можно также сравнить массу данного тела с массой некоторого тела с уже известной массой (определенной путем сравнения с эталоном). Операцию сравнения масс  $m_1$  и  $m_2$  двух материальных точек (частиц) можно осуществить следующим образом. Поставим эти частицы в такие условия, чтобы их взаимодействием с другими телами можно было пренебречь. Система тел, взаимодействующих только между собой и не взаимодействующих с другими телами, называется замкнутой. Следовательно, мы рассматриваем замкнутую систему двух частиц. Если заставить эти частицы взаимодействовать (например, посредством столкновения друг с другом), их скорости получат приращения  $\Delta v_1$  и  $\Delta v_2$ . Опыт дает, что эти приращения всегда имеют противоположные направления, т. е. отличаются знаком. Отношение же модулей приращений скоростей не зависит от способа и интенсивности взаимодействия данных двух тел. Это отношение принимается равным обратному отношению масс рассматриваемых тел:

$$\frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Приняв во внимание относительное направление векторов  $\Delta v_1$  и  $\Delta v_2$ , соотношение можно написать в виде:

$$m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2.$$

4a

## 4. Законы Ньютона

**Первый закон Ньютона** формулируется следующим образом: всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Оба названных состояния отличаются тем, что ускорение тела равно нулю.

Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется **инерциальной**. Сам закон называют иногда **законом инерции**. Система отсчета, в которой первый закон Ньютона не выполняется, называется **неинерциальной системой отсчета**. Инерциальных систем существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью), будет также инерциальной.

**Второй закон Ньютона** гласит, что скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе  $F$ :

$$dp/dt = F.$$

Уравнение называется **уравнением движения тела**.

Заменяя  $p$  произведением  $mv$  и учитывая, что в ньютоновской механике масса предполагается постоянной, можно представить соотношение в виде:

$$mw = F,$$

где  $w = v'$ .

Таким образом, мы пришли к другой формулировке второго закона Ньютона: произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе.

В частном случае, когда  $F = 0$ , ускорение равно нулю. Этот вывод совпадает с утверждением первого закона

**26 номерным.** Если вращение является равномерным,  $\omega = \varphi/t$ , где  $\varphi$  — конечный угол поворота за время  $t$ . Таким образом, при равномерном вращении  $\omega$  показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени.

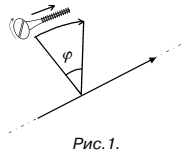


Рис. 1.

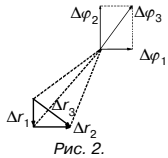


Рис. 2.

Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения  $T$ , под которым понимают время, за которое тело делает один оборот, т. е. поворачивается на угол  $2\pi$ . Поскольку промежуток времени  $\Delta t = T$  соответствует углу поворота  $\Delta\varphi = 2\pi$ ,

$$\omega = 2\pi/T,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega.$$

Число оборотов в единицу времени  $\nu$ , очевидно, равно

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi.$$

Из этого следует, что угловая скорость равна  $2\pi$ , умноженному на число оборотов в единицу времени:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

**46** Ньютона. Поэтому первый закон входит во второй как его частный случай.

При независимом выборе единиц массы, силы и ускорения выражение второго закона нужно писать в виде:

$$m\mathbf{w} = k\mathbf{F},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2 с силой  $F_{21}$ , то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с силой  $F_{12}$ .

**Третий закон Ньютона** утверждает, что силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела равны по величине и противоположны по направлению. Используя приведенные выше обозначения сил, содержание третьего закона можно представить в виде равенства:

$$F_{12} = -F_{21}.$$

Из третьего закона Ньютона вытекает, что силы возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно противопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу, взаимодействующему с данным.

**16** Для того чтобы получить возможность описывать движение количественно, приходится связывать с телами, образующими систему отсчета, какую-либо (например, декартову) систему координат. Тогда положение материальной точки можно определить, задав три числа  $x, y, z$  — декартовы координаты этой точки. Систему координат можно реализовать, набрав из одинаковых масштабных стержней или линеек прямоугольную решетку.

В узлах этой решетки нужно разместить одинаковые синхронизированные друг с другом часы. Положение материальной точки и соответствующий ему момент времени регистрируются по ближайшим к материальной точке масштабам и часам.

Иметь дело с материальной точкой проще, чем с протяженным телом. Поэтому мы сначала будем изучать механику материальной точки, а потом перейдем к механике твердого тела.

**36** Воспользовавшись постоянством массы, представим равенство следующим образом:

$$\Delta(m_i v_i) = -\Delta(m_j v_j).$$

Произведение массы тела на его скорость называется импульсом тела. Обозначив импульс буквой  $p$ , получим:

$$p = mv.$$

В случае протяженного тела, движущегося непоступательно, нужно представить тело как совокупность материальных точек с массами  $\Delta m_i$ , определить импульсы  $\Delta m_i v_i$  этих точек и затем сложить эти импульсы векторно. В результате получится полный импульс тела:

$$p = \sum_i \Delta m_i v_i.$$

При поступательном движении тела все  $v_i$  одинаковы. Заменяя произведения  $m_i v_i$  импульсами  $p_i$ , приходим к соотношению  $\Delta p_1 = -\Delta p_2$ , откуда  $\Delta(p_1 + p_2) = 0$ . Равенство нулю приращения величины означает, что сама величина остается неизменной. Таким образом, мы пришли к выводу, что полный импульс замкнутой системы двух взаимодействующих частиц остается постоянным:

$$p = p_1 + p_2 = \text{const.}$$

Приведенное выше утверждение составляет содержание закона сохранения импульса.

### 5а 5. Кинетическая и потенциальная энергии

Напишем уравнение движения частицы:

$$mv = F.$$

Здесь  $F$  — результирующая сил, действующих на частицу. Умножим уравнение на перемещение частицы:

$$mvdv = Fds.$$

Произведение  $vdt$  представляет собой приращение скорости частицы  $dv$  за время  $dt$ . Соответственно

$$mv^2 dt = mvdv = md(v^2/2) = d(mv^2/2).$$

Придем к соотношению

$$d(mv^2/2) = Fds.$$

Если система замкнута, т. е.  $F = 0$ , то  $d(mv^2/2) = 0$ , а сама величина  $T = mv^2/2$  остается постоянной. Эта величина называется **кинетической энергией частицы**.

Умножив на  $m$  числитель и знаменатель последнего выражения и приняв во внимание, что произведение  $mv$  равно импульсу тела  $p$ , выражению для кинетической энергии можно придать вид:

$$T = p^2/2.$$

Если на частицу действует сила  $F$ , кинетическая энергия остается постоянной. В этом случае приращение кинетической энергии частицы за время  $dt$  равно скалярному произведению  $F \times ds$  ( $ds$  — перемещение частицы за время  $dt$ ).

Работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы:

$$A_{12} = T_2 - T_1.$$

### 6а 6. Закон сохранения энергии

Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, можно подразделить на **внутренние и внешние**. Внутренними мы будем называть силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела системы, внешними — силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе. В случае, если внешние силы отсутствуют, система называется **замкнутой**.

Для замкнутых систем существуют такие функции координат и скоростей образующих систему частиц, которые сохраняют при движении постоянные значения. Эти функции носят название **интегралов движения**.

Для системы из  $N$  частиц, между которыми нет жестких связей, можно образовать  $6N - 1$  интегралов движения. Однако интерес представляют только те из них, которые обладают свойством аддитивности. Это свойство заключается в том, что значение интеграла движения для системы, состоящей из частей, взаимодействием которых можно пренебречь, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности. Аддитивных интегралов движения имеется три. Один из них называется **энергией**, второй — **импульсом**, третий — **моментом импульса**.

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  не взаимодействующих между собой частиц, находящихся в поле сил. Каждая из частиц обладает кинетической энергией  $T_i = 1/2mv_i^2$  ( $i$  — номер частицы) и потенциальной энергией  $U_i = U(x_i, y_i, z_i)$ . Рассматривая  $i$ -ю частицу независимо от других частиц, можно получить, что

$$E_i + T_i + U_i = \text{const}_i.$$

### 7а 7. Типы деформаций

**Деформация растяжения (сжатия)** стержня характеризуется абсолютным удлинением

$$\Delta l = l - l_0$$

и относительным удлинением

$$\varepsilon = \Delta l/l,$$

где  $l_0$  и  $l$  — начальная и конечная длина стержня.

При упругой деформации справедлив закон Гука: относительное удлинение пропорционально напряжению:

$$\frac{|\Delta l|}{l_0} = \frac{1}{E} \times \frac{F}{S}, \text{ или } \sigma = E|\varepsilon|,$$

где  $\sigma = F/S$  — напряжение в стержне, равное отношению действующей силы  $F$  к площади поперечного сечения  $S$ ;

$E$  — модуль Юнга (модуль продольной упругости). Закон Гука можно записать в виде:

$$F = k|\Delta l|,$$

где  $k$  — жесткость стержня, связанная с модулем Юнга и размерами стержня соотношением

$$k = SE/l_0.$$

Механическое напряжение в продольном направлении, кроме удлинения, вызывает **поперечное сжатие** стержня, при этом

$$(\Delta d)/d = -\mu(\Delta l)/l, \text{ или } \varepsilon_n = -\mu\varepsilon,$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона;

$d$  — поперечный размер стержня (диаметр, толщина стержня и т. д.);

$\Delta d$  — изменение поперечного размера;

### 8а 8. Упругие напряжения. Закон Гука

Упругие деформации наблюдаются в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый определенный для каждого конкретного тела предел (предел упругости).

Возьмем пружину, имеющую в недеформированном состоянии длину  $l$ , и приложим к ее концам равные по величине противоположно направленные силы  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 4). Под действием этих сил пружина растянется на некоторую величину  $\Delta l$ , после чего наступит равновесие. В состоянии равновесия внешние силы  $F_1$  и  $F_2$  будут уравновешены упругими силами, возникшими в пружине в результате деформации. Опыт дает, что при небольших деформациях удлинение пружины  $\Delta l$  оказывается пропорциональным растягивающей силе. Соответственно упругая сила оказывается пропорциональной удлинению пружины:  $F = k\Delta l$ .

Коэффициент пропорциональности  $K$  называется **коэффициентом жесткости пружины**.

Утверждение о пропорциональности между упругой силой и деформацией носит название **закона Гука**. Упругие натяжения возникают во всей пружине.

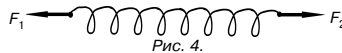


Рис. 4.

Заключаем, что при заданных материале пружины и размерах витка величина упругой силы определяется не абсолютным удлинением пружины  $\Delta l$ , а относительным удлинением  $\Delta l/l_0$ .

При сжатии пружины также возникают упругие натяжения, но другого знака. Закрепим один конец пружины неподвижно (рис. 5), а удлинение пружины будем рассматривать как координату  $x$  другого конца, отсчитываемую от его положения, отвечающего недеформированной пружине. Кроме того, обозначим проек-

**66** Просуммировав это равенство по всем частицам, приходим к соотношению

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i=1}^N U_i = \text{const.}$$

Из этого соотношения следует аддитивность полной механической энергии для рассматриваемой системы.

Полная механическая энергия системы невзаимодействующих частиц, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной. Это утверждение выражает закон сохранения энергии для указанной механической системы.

Если, кроме консервативных сил, на частицы действуют неконсервативные силы  $m_1$ , полная энергия системы не остается постоянной, причем

$$E_2 - E_1 = \sum_{i=1}^N (A_{12}^i)_i,$$

где  $A_{12}^i$  — работа, совершаемая неконсервативной силой, приложенной к  $i$ -й частице, при перемещении этой частицы из ее начального положения в конечное.

Работа сил трения всегда отрицательна. Поэтому при наличии в системе сил трения полная механическая энергия системы уменьшается (рассеивается), переходя в немеханические формы энергии (например, во внутреннюю энергию тел, или, как принято говорить, в тепло). Такой процесс называется **диссипацией энергии**. Силы, приводящие к диссипации энергии, называются **диссипативными**.

Неконсервативные силы не обязательно являются диссипативными.

**86** Цию упругой силы  $F_{\text{упр}}$  на ось  $x$  через  $F_x$ . Тогда можно написать, что  $F_x = -kx$ .

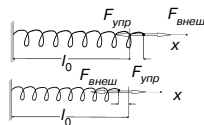


Рис. 5

Однородные стержни ведут себя при растяжении или одностороннем сжатии подобно пружине. Если к концам стержня приложить направленные вдоль его оси силы  $F_1$  и  $F_2$ ,  $F_1 = F_2 = F$ , действие которых равномерно распределено по всему сечению, то длина стержня  $l_0$  получит положительное (при растяжении) либо отрицательное (при сжатии) приращение  $\Delta l$ . В качестве величины, характеризующей деформацию стержня, естественно взять относительное изменение его длины:

$$\varepsilon = \Delta l / l_0.$$

Опыт дает, что для стержней из данного материала относительное удлинение при упругой деформации пропорционально силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня:

$$\varepsilon = \alpha F / S,$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности.

Величина, равная отношению силы к величине поверхности, на которую действует сила, называется **напряжением**.

**56** Потенциальная энергия во внешнем поле сил

В случае, когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит лишь от начального и конечного положений частицы, с каждой точкой поля можно сопоставить значение некоторой функции  $U(x, y, z)$ , такой, что разность значений этой функции в точках 1 и 2 будет определять работу сил при переходе частицы из первой точки во вторую:

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

Величина  $E = T + U$  для частицы, находящейся в поле консервативных сил, остается постоянной, т. е. является интегралом движения.

$U$  входит слагаемым в интеграл движения, имеющий размерность энергии. В связи с этим функцию  $U(x, y, z)$  называют **потенциальной энергией частицы во внешнем поле сил**. Величину  $E$ , равную сумме кинетической и потенциальной энергий, называют **полной механической энергией частицы**.

Работа, совершаемая над частицей консервативными силами, равна убыли потенциальной энергии частицы. Иначе можно сказать, что работа совершается за счет запаса потенциальной энергии.

Зная вид функции  $U(x, y, z)$ , можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля.

В частности, выражение для работы, совершаемой силой  $dA = aydx - axdy$ , не является полным дифференциалом. Не существует такой функции  $U$ , для которой  $-\partial U / \partial x = ay$ , а  $-\partial U / \partial y = ax$ . Соответственно не существует функции  $U$ , убыль которой определяла бы работу.

Следовательно, консервативными могут быть только силы, удовлетворяющие условию, т. е. такие силы, компоненты которых по координатным осям равны взятым с обратным знаком частным производным некоторой функции  $U(x, y, z)$  по соответствующим координатам. Эта функция представляет собой потенциальную энергию частицы.

**76**  $\Delta V$  — относительное изменение поперечного размера стержня.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала и не зависят от размеров и формы тела. Все прочие упругие постоянные выражаются через  $E$  и  $\mu$ .

При всестороннем (гидростатическом) сжатии тела относительное изменение его объема можно представить в виде:

$$\Delta V / V = -p / K,$$

где  $p$  — давление,

$K$  — модуль всестороннего сжатия тела, связанный с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$  соотношением  $K = E / (2(1 - 2\mu))$ .

**Деформация сдвига** возникает, когда к параллельным плоскостям тела приложены касательные силы, направленные в противоположные стороны. Деформация сдвига характеризуется углом сдвига  $\gamma$ . При упругой деформации

$$\gamma = (1/G) \times (F/S), \text{ или } \tau = G\gamma,$$

где  $F$  — сила, параллельная плоскости  $S$ ;

$S$  — площадь поверхности;

$\tau$  — касательное напряжение;

$G$  — модуль сдвига.

**Деформация изгиба** сводится к растяжениям и сжатиям в различных частях тела.

**Деформация кручения** представляет собой неоднородный сдвиг — отдельные слои тела, как и при сдвиге, остаются параллельными, но поворачиваются на некоторый угол относительно друг друга (рис. 3).

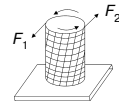


Рис. 3. Деформация кручения

**9а 9. Энергия упругой деформации**

Твердые тела делятся на кристаллические и аморфные. **Кристаллы** — твердые тела, атомы или молекулы которых занимают определенные упорядоченные положения в пространстве — образуют кристаллическую решетку. Кристаллы обладают анизотропией — их физические свойства зависят от направления внутри кристалла.

Деформации, полностью исчезающие с прекращением действия внешней силы, называются **упругими**. Деформации, не исчезающие после прекращения действия сил, называются **пластическими**.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала и не зависят от размеров и формы тела. Все прочие упругие постоянные выражаются через  $E$  и  $\mu$ .

Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело (например, сжатая пружина, растянутый стержень и т. п.). В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения отдельных частей тела (например, от расстояния между соседними витками пружины).

Как для растяжения, так и для сжатия пружины на величину  $x$  необходимо затратить работу  $A = (1/2)kx^2$ . Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Следовательно, зависимость потенциальной энергии пружины от удлинения  $x$  имеет вид:

$$U = kx^2/2,$$

где  $k$  — коэффициент жесткости пружины.

Формула написана в предположении, что потенциальная энергия недеформированной пружины равна нулю. На рис. 6 показан график зависимости  $U$  от  $x$ .

При упругой продольной деформации стержня совершается работа. В соответствии с этим потенциаль-

**10а 10. Физический и математический маятники**

Если колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку, маятник называется **физическим**. При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен:

$$N = -mgl\sin\varphi,$$

где  $m$  — масса маятника,  $l$  — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника.

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой  $I$ , можно написать:  $I = -mgl\sin\varphi$ .

В случае малых колебаний  $\varphi + \omega_0^2\varphi = 0$ . Через  $\omega_0^2$  обозначена в данном случае следующая величина:  $\omega_0^2 = mgl/I$ .

При малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром масс маятника. Период колебаний физического маятника определяется выражением:

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgl},$$

$$l_{пр} = I/ml.$$

Величину  $l_{пр}$  называют **приведенной длиной физического маятника**.

Точка прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется **центром качания физического маятника**.

**Математический маятник** называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\varphi$ , образованным нитью с

**11а 11. Закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса**

Сумма импульсов частиц, образующих механическую систему, называется **импульсом системы**. Обозначив этот импульс символом  $p$ , получим, что:

$$p = \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N m_i v_i.$$

Из этого соотношения следует, что импульс является аддитивной величиной:

$$\frac{d}{dt} p = \sum_{i=1}^N F_i.$$

Отсюда вытекает, что при отсутствии внешних сил  $dp/dt = 0$ . Следовательно, для замкнутой системы  $p$  постояен. Это утверждение составляет содержание закона сохранения импульса, который формулируется следующим образом: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

В случае, когда сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление есть нуль, сохраняется составляющая импульса в этом направлении.

Импульс системы частиц может быть представлен в виде произведения суммарной массы частиц на скорость центра инерции системы:  $p = mv_c$ .

Центром инерции (или центром масс) системы называется точка, положение которой задается радиусом-вектором  $r_c$ , определяемым следующим образом:

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_N r_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{m}$$

Здесь  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы,  $r_i$  — радиус-вектор, определяющий положение этой частицы,  $m$  — масса системы.

**12а 12. Силы инерции**

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем данное тело движется с одинаковым ускорением  $w$ . Любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальных систем с некоторым ускорением, поэтому ускорение тела в неинерциальной системе отсчета  $w'$  будет отличаться от  $w$ . Обозначим разность ускорений тела в инерциальной и неинерциальной системах символом  $a$ :  $w - w' = a$ .

Для поступательно движущейся неинерциальной системы  $a$  одинаково для всех точек пространства ( $a = \text{const}$ ) и представляет собой ускорение неинерциальной системы отсчета. Для вращающейся неинерциальной системы  $a$  в разных точках пространства будет различным ( $a = a(r')$ , где  $r'$  — радиус-вектор, определяющий положение точки относительно неинерциальной системы отсчета). Пусть результирующая всех сил, обусловленных действием на данное тело со стороны других тел, равна  $F$ . Тогда согласно второму закону Ньютона ускорение тела относительно любой инерциальной системы отсчета равно:  $w = F/m$ .

Ускорение же тела относительно некоторой неинерциальной системы можно представить в виде:

$$w' = w - a = F/m - a.$$

Отсюда следует, что даже при  $F = 0$  тело будет двигаться по отношению к неинерциальной системе отсчета с ускорением  $-a$ , т. е. так, как если бы на него действовала сила, равная  $ma$ .

Это означает, что при описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться **уравнениями Ньютона**, если наряду с силами, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать так называемые силы инерции  $F_{ин}$ , которые следует полагать равными произведению массы тела на взя-

**106** вертикаль (рис. 7). При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент  $\Delta l$ , равный по величине  $mg \sin \varphi$  ( $m$  — масса,  $l$  — длина маятника). Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и аналогичен в этом отношении квазиупругой силе. Выражение для вращательного момента имеет вид:  $N = -mg \sin \varphi$ .

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения. Обозначив угловое ускорение через  $\varphi$  и учитывая, что момент инерции маятника равен  $ml^2$ , получаем:  $m l^2 \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$ .

При малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону.

Частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и от ускорения силы тяжести и не зависит от массы маятника. Выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Можно найти для периода колебаний следующую формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right]},$$

где  $a$  — амплитуда колебаний, т. е. наибольший угол, на который отклоняется маятник из положения равновесия.

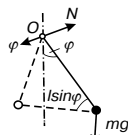


Рис. 7

**126** тую с обратным знаком разность его ускорений по отношению к инерциальной и неинерциальной системам отсчета:  $F_{in} = -m(w - w') = -ma$ .

Соответственно уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета будет иметь вид:

$$mw' = F + F_{in}.$$

Характерным свойством сил инерции является их **пропорциональность массе тела**. Благодаря этому свойству силы инерции оказываются аналогичными силам тяготения. Представим себе, что мы находимся в удаленной от всех внешних тел закрытой кабине, которая движется с ускорением  $g$  в направлении, которое мы назовем верхом. Тогда все тела, находящиеся внутри кабины, будут вести себя так, как если бы на них действовала сила инерции  $-mg$ . В частности, пружина, к концу которой подвешено тело массой  $m$ , растянется так, чтобы упругая сила уравновесила силу инерции  $-mg$ . Однако такие же явления наблюдались бы и в том случае, если бы кабина была неподвижной и находилась вблизи поверхности Земли. Не имея возможности выглянуть за пределы кабины, мы не смогли бы установить, чем обусловлена сила  $-mg$  — ускоренным движением кабины или действием гравитационного поля Земли. На этом основании говорят об эквивалентности сил инерции и тяготения. Эта эквивалентность лежит в основе общей теории относительности А. Эйнштейна.

**96** ная энергия упруго деформированного стержня равна

$$U = E\varepsilon^2 V/2,$$

где  $E$  — модуль Юнга;  
 $\varepsilon$  — относительное удлинение;  
 $V$  — объем стержня.

Введем в рассмотрение плотность энергии упругой деформации  $u$ , которую определим как отношение энергии  $dU$  к тому объему  $dV$ , в котором она заключена:

$$u = dU/dV.$$

Поскольку стержень предполагается однородным и деформация является равномерной, т. е. одинаковой в разных точках стержня, энергия распределена в стержне также равномерно. Поэтому можно считать, что

$$u = U/V = E\varepsilon^2/2.$$

Это выражение дает плотность энергии упругой деформации при растяжении (или сжатии) и в том случае, когда деформация неравномерна.

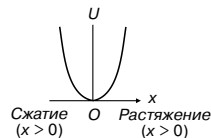


Рис. 6

**116** Декартовы координаты центра инерции равны проекциям  $r_C$  на координатные оси:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}.$$

Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр инерции совпадает с центром тяжести системы.

Скорость центра инерции получается путем дифференцирования радиуса-вектора по времени:

$$v_C = \dot{r}_C = \frac{\sum m_i \dot{r}_i}{m} = \frac{\sum m_i v_i}{m} = \frac{p}{m}.$$

Есть две аддитивные сохраняющиеся величины: энергия и импульс. Найдем третью такую величину. Для этого рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, на которые действуют внешние силы. Уравнения движения частиц имеют вид:  $m_1 v_1 = F_{12} + F_1$ ,  $m_2 v_2 = F_{21} + F_2$ . Умножим первое уравнение векторно слева на радиус-вектор первой частицы  $r_1$ , а второе — на радиус-вектор второй частицы  $r_2$ :  $m_1 [r_1, v_1] = [r_1, F_{12}] + [r_1, F_1]$ ,  $m_2 [r_2, v_2] = [r_2, F_{21}] + [r_2, F_2]$ .

Векторное произведение вида  $[r, v]$  эквивалентно выражению  $(d/dt)[r, v]$ . Действительно,  $d/dt[r, v] = [v, v] + [r, \dot{v}] = [r, \dot{v}]$ , так как  $[v, v] = 0$ . Произведем такую замену и учтя, что  $F_{21} = -F_{12}$ , придем к уравнениям  $m_1 d/dt[r_1, v_1] = [r_1, F_{12}] + [r_1, F_1]$ ,  $m_2 d/dt[r_2, v_2] = [r_2, F_{21}] + [r_2, F_2]$ .

Масса есть постоянная скалярная величина. Поэтому ее можно внести под знак производной по времени и в векторное произведение:  $m d/dt[r, v] = d/dt[r, mv] = d/dt[r, p]$ .

Если система замкнута, правая часть этого соотношения равна нулю, и следовательно,  $[r_1, p_1] + [r_2, p_2] = \text{const}$ .

Мы пришли к аддитивной сохраняющейся величине, которую называют **моментом импульса относительно центра**.



13а

### 13. Абсолютно упругий и неупругий удар

При соударении тела претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и в так называемую **внутреннюю энергию тел**. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры.

Существуют два предельных вида удара: **абсолютно упругий** и **абсолютно неупругий**.

**Абсолютно упругим** называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются двумя условиями — сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы тел.

При неупругом ударе механическая энергия не сохраняется — она частично переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел, что приводит к их нагреву.

**Абсолютно неупругий** удар характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, закон же сохранения механической энергии не соблюдается: имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов — **механической** и **внутренней**.

14а

### 14. Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, появляется еще одна сила, называемая **силой Кориолиса**, или **кориолисовой силой инерции**.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую  $OA$  (рис. 8а). Запустим в направлении от  $O$  к  $A$  шарик со скоростью  $v'$ . Если диск не вращается, шарик будет катиться вдоль прочерченной нами прямой. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по изображенной пунктиром кривой  $OB$ , причем его скорость относительно диска  $v''$  будет изменять свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила  $F_K$ , перпендикулярная скорости  $v'$ .

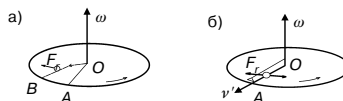


Рис. 8

Чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой, нужно сделать направляющую, например в виде ребра  $OA$  (рис. 8б). При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой  $F_K$ . Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно формально

15а

### 15. Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета

С учетом сил инерции уравнения движения в неинерциальной системе ничем не отличаются от уравнений движения в инерциальной системе отсчета. Поэтому все следствия, вытекающие из уравнений движения, в частности соотношения

$$E_2 - E_1 = A_{12\text{неконсерв}}, \quad \frac{d}{dt} p = \sum_{i=1}^N F_i$$

$$\text{и} \quad \frac{d}{dt} M = \sum N_{\text{внеш}},$$

остаются справедливыми и в неинерциальных системах отсчета.

В неинерциальной системе формула  $E_2 - E_1 = A_{12\text{неконсерв}}$  имеет вид:

$$E_2 - E_1 = A_{12\text{неконсерв}} + A_{12\text{инерц}},$$

где  $A_{12\text{инерц}}$  — работа сил инерции.

Формулы

$$\frac{d}{dt} p = \sum_{i=1}^N F_i \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} M = \sum N_{\text{внеш}}$$

выглядят в неинерциальной системе следующим образом:

$$\frac{d}{dt} p = \sum F_{\text{внеш}} + \sum F_{\text{инерц}},$$

$$\frac{d}{dt} M = \sum N_{\text{внеш}} + \sum N_{\text{инерц}},$$

где  $F_{\text{внеш}}$  — сила, обусловленная взаимодействием;  $F_{\text{инерц}}$  — сила инерции;  $N_{\text{внеш}}$  и  $N_{\text{инерц}}$  — моменты указанных сил.

16а

### 16. Движение тела, закрепленного на оси. Момент инерции

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси (рис. 10). Чтобы удержать ось от перемещений в пространстве, заключим ее в подшипники. Опирающийся на нижний подшипник фланец  $Фл$  предотвращает перемещение оси в вертикальном направлении.

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему частиц (материальных точек) с неизменными расстояниями между ними. Для всякой системы частиц справедливо уравнение:

$$\frac{d}{dt} M = \sum N_{\text{внешн}}.$$

Это уравнение справедливо и для твердого тела. В последнем случае  $M$  есть момент импульса тела, справа стоит сумма моментов внешних сил, действующих на тело.



Рис. 10

Величина  $I$ , равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно данной оси:

$$I = \sum m_i R_i^2, \quad M_z = I \omega_z.$$

В случае вращения вокруг вертикальной оси однородного симметричного тела силы бокового давления подшипников на ось не возникают. В отсутствие силы

**146** объяснить тем, что сила  $F_r$  уравновешивается приложенной к шару силой инерции  $\vec{F}_k$ , перпендикулярной скорости  $v'$ . Сила  $F_k$  и есть кориолисова сила инерции.

**Примеры движений, в которых проявляется кориолисова сила инерции.**

При столкновении явлений, связанных с движением тел относительно земной поверхности, в ряде случаев необходимо учитывать влияние кориолисовых сил. Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обуславливающая отклонение к востоку от линии отвеса. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах.

Летающий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции. При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу — в южном. При стрельбе вдоль меридиана на юг направления отклонения будут противоположными. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в направлении на запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведен в восточном направлении.

**166** тяжести подшипники можно было бы убрать — ось и без них сохраняла бы свое положение в пространстве. Ось, положение которой в пространстве остается неизменным при вращении вокруг нее тела в отсутствие внешних сил, называется **свободной осью тела**.

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением массы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс тела оси, которые могут служить свободными осями; они называются **главными осями инерции тела**.

При наличии внешнего воздействия, например со стороны нити, на которой подвешено вращающееся тело, устойчивым оказывается только вращение вокруг главной оси, соответствующей наибольшему значению момента инерции. По этой причине тонкий стержень, подвешенный на нити, прикрепленной к его концу, при быстром вращении будет в конечном итоге вращаться вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр (рис. 11а). Аналогичным образом ведет себя диск, подвешенный на прикрепленной к его краю нити (рис. 11б).

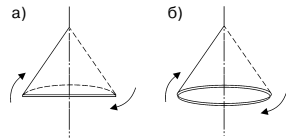


Рис. 11

**136** Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух частиц (материальных точек), образующих замкнутую систему. Пусть массы частиц равны  $m_1$  и  $m_2$ , а скорости до удара —  $v_{10}$  и  $v_{20}$ . В силу закона сохранения суммарный импульс частиц после удара должен быть таким же, как и до удара:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v + m_2 v = (m_1 + m_2) v$$

( $v$  — одинаковая для обеих частиц скорость после удара),

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

Для практических расчетов нужно спроектировать последнее соотношение на соответствующим образом выбранные направления.

**156** Центробежная сила инерции  $F_{цб} = m\omega R$  является консервативной. Действительно, работа этой силы равна:

$$A_{12цб} = \int_1^2 F_{цб} dr = m\omega^2 \int_1^2 R dr.$$

Из рис. 9 видно, что проекция вектора  $dr$  на направление вектора  $R$  равна  $dR$  — приращению модуля  $R$ . Следовательно,  $Rdr = R dR = d(R^2/2)$ . Таким образом,

$$A_{12цб} = m\omega^2 \int_1^2 d\left(\frac{R^2}{2}\right) = m\omega^2 \frac{R_2^2}{2} - m\omega^2 \frac{R_1^2}{2}.$$

Полученное выражение, очевидно, не зависит от пути, по которому происходило перемещение из точки 1 в точку 2.

Консервативность силы  $F_{цб}$  позволяет ввести потенциальную энергию частицы  $U_{цб}$  (центробежную энергию), убыль которой определяет работу центробежной силы инерции:

$$A_{12цб} = U_{цб1} - U_{цб2}, \quad U_{цб} = -(1/2)m\omega^2 R^2 + \text{const}.$$

Константу можно положить равной нулю. Тогда для центробежной энергии получится следующее выражение:

$$U_{цб} = -(1/2)m\omega^2 R^2.$$

Если это выражение добавить к потенциальной энергии частицы, то в величину  $A_{инерц}$  в первой формуле не следует включать работу центробежной силы инерции.

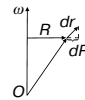


Рис. 9

17а

### 17. Кинетическая энергия при плоском движении

Совокупность тел, выделенная для рассмотрения, называется **механической системой**. Какие тела следует включить в систему, зависит от характера решаемой задачи. В частном случае система может состоять из одного-единственного тела.

Движение происходит как в пространстве, так и во времени (пространство и время — неотъемлемые формы существования материи). Поэтому для описания движения необходимо также определять время. Это делается с помощью часов.

Плоское движение тела может быть представлено как наложение двух движений — поступательного с некоторой скоростью  $v_0$  и вращения вокруг соответствующей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Скорость  $i$ -й элементарной массы тела равна:

$$v_i = v_0 + [\omega, r_i],$$

где  $v_0$  — скорость некоторой точки  $O$  тела;

$r_i$  — радиус-вектор, определяющий положение элементарной массы по отношению к точке  $O$ .

Кинетическая энергия  $i$ -й элементарной массы равна:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i [v_0 + [\omega, r_i]]^2.$$

Осуществив возведение в квадрат, получим:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i [v_0^2 + 2v_0[\omega, r_i] + [v, r_i]^2]$$

Векторное произведение  $\omega$  на  $r_i$  имеет модуль, равный  $\omega R_i$ , где  $R_i$  — расстояние массы  $m_i$  от оси вращения. Следовательно, третье слагаемое в фигурных

18а

### 18. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен И. Ньютоном и носит название **закона всемирного тяготения**. Согласно этому закону сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, пропорциональна массам этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной.

В векторном виде силу, с которой вторая материальная точка притягивает к себе первую, можно записать следующим образом:

$$F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} e_{12}.$$

Символом  $e_{12}$  обозначен единичный вектор, имеющий направление от первой материальной точки ко второй. Размерность гравитационной постоянной равна:

$$[\gamma] = \frac{[F][r^2]}{[m^2]} = \frac{(ML/T^2)L^2}{M^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

Численное значение  $\gamma$  было определено путем измерения силы, с которой притягиваются друг к другу тела известной массы.

Можно измерять массы различных тел. Действительно, выберем за эталон массы массу  $m_{\text{эт}}$  некоторого тела

19а

### 19. Гармонические и вынужденные колебания

**Колебаниями** называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Простейшими являются **гармонические колебания**, т. е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется **амплитудой колебания**. Амплитуда  $\alpha$  — постоянная положительная величина. Ее значение определяется величиной первоначального отклонения или толчка, которым система была выведена из положения равновесия.

Величина  $(\omega_0 t + \alpha)$ , стоящая под знаком косинуса, называется **фазой колебания**. Постоянная  $\alpha$  представляет собой значение фазы в момент времени  $t = 0$  и называется **начальной фазой колебания**. С изменением начала отсчета времени будет изменяться и  $\alpha$ . Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как значение  $x$  не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа  $2\pi$ , всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше  $\pi$ . Поэтому обычно рассматриваются только значения  $\alpha$ , лежащие в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

Поскольку косинус — периодическая функция с периодом  $2\pi$ , различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени  $T$ , за который фаза колебания получает приращение, равное  $2\pi$ . Этот промежуток времени  $T$  называется **периодом колебания**. Он может быть определен из следующего условия:  $[\omega_0(t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi$ , откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

20а

### 20. Резонанс

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота — **резонансной частотой**.

Чтобы определить резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$ , нужно найти максимум функции или, что то же самое, — минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по  $\omega$  и приравняв к нулю, мы получим условие, определяющее  $\omega_{\text{рез}}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Уравнение имеет три решения:  $\omega = 0$  и  $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено как не имеющее физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Выражение для амплитуды при резонансе:

$$a_{\text{рез}} = \frac{F_0 / m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

**186** и определим ее как отношение  $F_{2,et}/\omega_{et}^{(2)}$  ( $F_{2,et}$  — абсолютная величина силы, действующей на тело-эталон со стороны тела 2, а  $\omega_{et}^{(2)}$  — величина вызываемого этой силой ускорения тела-эталоны). Массу тела 1 можно определить, используя воздействие произвольного тела 3. Тогда отношение массы  $m_1$  к массе-эталоны будет равно:

$$\frac{m_1}{m_{et}} = \left( \frac{F_{31}}{\omega_1^{(3)}} \right) / \left( \frac{F_{2,et}}{\omega_{et}^{(2)}} \right).$$

Пользуясь способом измерения масс, сил и расстояний, можно экспериментально установить закон всемирного тяготения Ньютона, согласно которому сила гравитационного притяжения двух материальных точек пропорциональна произведению масс этих точек, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей точки. Из эксперимента находится и коэффициент пропорциональности — гравитационная постоянная  $\gamma$ . Таким образом, сила гравитационного воздействия одной точки на другую равна:

$$F_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \left( \frac{r_{21}}{r_{21}} \right).$$

**206** Из этого следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Резонансная частота при тех же условиях (при  $\beta = 0$ ) совпадает с собственной частотой колебаний системы  $\omega_0$ .

При малом затухании (т. е. при  $\beta \ll \omega_0$ ) амплитуда при резонансе приближенно равна:

$$a_{рез} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}.$$

Разделим это выражение на смещение  $x_0$  от положения равновесия под действием постоянной силы  $F_0$ , равное  $F_0/m\omega_0^2$ . В результате получим:

$$\frac{a_{рез}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.$$

Добротность  $Q$  показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы (это справедливо лишь при небольшом затухании).

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания  $\varphi$  лежит в пределах от 0 до  $\pi$ . Резонансная частота меньше собственной. Следовательно, в момент резонанса  $\varphi < \pi/2$ . При слабом затухании  $\omega_{рез} \approx \omega_0$ , и значение  $\varphi$  при резонансе можно считать равным  $\pi/2$ .

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различного рода сооружений.

**176** скобках равно  $\omega^2 R_i^2$ . Во втором слагаемом осуществим циклическую перестановку сомножителей. В результате придем к выражению:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \{ v_0^2 + 2v_0[v_0, \omega]r_i + \omega^2 R_i^2 \}$$

Чтобы получить кинетическую энергию тела, просуммируем последнее выражение по всем элементарным массам, причем вынесем постоянные множители за знаки сумм:

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \sum m_i + [v_0, \omega] \sum m_i r_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

Сумма элементарных масс  $\sum m_i$  есть масса тела  $m$ . Выражение  $\sum m_i r_i$  равно произведению массы тела на радиус-вектор  $r_c$  центра инерции тела. Наконец  $\sum m_i R_i^2$  есть момент инерции тела  $I_0$  относительно оси, проходящей через точку  $O$ . Поэтому можно написать, что

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m r_c [v_0, \omega] + \frac{1}{2} I_0 \omega^2.$$

Если в качестве точки  $O$  взять центр инерции тела  $C$ , радиус-вектор  $r_c$  будет равен нулю, так что второе слагаемое исчезнет. Следовательно, обозначив через  $v$  скорость центра инерции, а через  $I_c$  — момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через точку  $C$ , получим для кинетической энергии тела формулу

$$T = \frac{m v^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}.$$

**196** Число колебаний в единицу времени называется **частотой колебания**  $\nu$ .

Очевидно, что частота  $\nu$  связана с продолжительностью одного колебания  $T$  следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

За единицу частоты принимается частота такого колебания, период которого равен 1 с. Эту единицу называют герцем (Гц).

**Вынужденными** называются колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Примером служат колебания моста, возникающих при прохождении по нему солдат, шагающих в ногу.

В случае, когда вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону, колебания описываются дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

где  $\beta$  — коэффициент затухания;

$\omega_0$  — собственная частота системы  $f_0 = F_0/m$  ( $F_0$  — амплитуда вынуждающей силы);

$\omega_0$  — частота силы.

Уравнение является неоднородным. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ;

$a_0$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные.

21а

## 21. Специальная теория относительности

Созданная **А. Эйнштейном** в 1905 г. специальная теория относительности представляет собой физическую теорию пространства и времени. Основу этой теории образуют два постулата, которые носят название **принципа относительности Эйнштейна и принципа постоянства скорости света**.

Принцип относительности Эйнштейна является расширением механического принципа Галилея на все без исключения физические явления. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Неизменность вида уравнения при замене в нем координат и времени одной системы отсчета координатами и временем другой системы называется инвариантностью уравнения. Поэтому принцип относительности можно сформулировать следующим образом: уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Принцип постоянства скорости света утверждает, что скорость света в пустоте одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

Считалось совершенно очевидным, что два события, одновременные в какой-либо системе отсчета, будут одновременными и во всех остальных системах отсчета. Однако легко убедиться в том, что последнее утверждение находится в противоречии с принципом постоянства скорости света.

Возьмем две инерциальные системы отсчета, которые мы обозначим буквами  $K$  и  $K'$  (рис. 12). Пусть система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $v_0$ . Направим оси  $x$  и  $x'$  вдоль вектора  $v_0$ , оси  $y$

22а

## 22. Релятивистское выражение для импульса и энергии

Уравнения И. Ньютона инвариантны по отношению к преобразованиям Г. Галилея. Однако по отношению к преобразованиям К. Лоренца они оказываются неинвариантными. В частности, неинвариантен по отношению к преобразованиям К. Лоренца вытекающий из законов Ньютона закон сохранения импульса. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, как выглядит в системах  $K$  и  $K'$  абсолютно неупругий удар двух одинаковых шаров массы  $m$  (рис. 13).

Пусть в системе  $K$  шары движутся навстречу друг другу вдоль оси  $x$  с одинаковыми по величине скоростями, проекции которых на ось  $x$  равны:  $v_{x1} = v_0$  и  $v_{x2} = -v_0$  ( $v_0$  — относительная скорость систем  $K$  и  $K'$ ). При этих условиях после столкновения шары будут покоиться:  $v_{x1}' = v_{x2}' = 0$ . Таким образом, полный импульс системы  $p$  до, и после столкновения равен нулю — в системе  $K$  импульс сохраняется.

Теперь рассмотрим тот же процесс в системе  $K'$ . Найдем для скоростей шаров до столкновения значения  $v_{x1}' = 0$  и  $v_{x2}' = -2v_0/(1+v_0^2/c^2)$ , а для скоростей шаров после столкновения — совпадающее значение  $v_{x1}' = v_{x2}' = -v_0$ . Следовательно, суммарный импульс до столкновения равен  $-2mv_0/(1+v_0^2/c^2)$ , а после столкновения составляет  $-2mv_0$ . Мы пришли к выводу, что в системе  $K$  импульс не сохраняется.

Попытаемся найти такое выражение для импульса, чтобы закон сохранения импульса был инвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца при любых по величине скоростях. При этом мы будем исходить из того, что при малых скоростях ( $v \ll c$ ) справедливо ньютоновское выражение для импульса:  $p = mv = mdr/dt$ .

Если  $p = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \times \frac{dr}{dt}$ , учитывая, что  $dr/dt = v$ :

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

23а

## 23. Взаимосвязь массы и энергии. Уравнение Бернулли

Воспользовавшись релятивистской массой  $m_r = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , формулу  $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

можно написать в виде:  $E = m_r c^2$ .

Из этого соотношения вытекает, что энергия тела и его релятивистская масса всегда пропорциональны друг другу. Всякое изменение энергии тела  $\Delta E$  сопровождается изменением релятивистской массы тела  $\Delta m_r = \Delta E/c^2$ , и наоборот, всякое изменение релятивистской массы  $\Delta m_r$  сопровождается изменением энергии тела:  $\Delta E = c^2 \Delta m_r$ .

Это утверждение носит название **закона взаимосвязи релятивистской массы и энергии**.

В противоположность релятивистской массе суммарная масса покоя системы взаимодействующих частиц не сохраняется. Например, при неупругом соударении двух частиц, наблюдаемом в системе их центра инерции, масса покоя образовавшейся частицы равна  $m_2 = m_1 + m_2 + (T_1 + T_2)/c^2$  ( $m_1$  и  $T_1$  — масса покоя и кинетическая энергия первой исходной частицы;  $m_2$  и  $T_2$  — масса покоя и кинетическая энергия второй частицы).

Таким образом,  $m_2 > m_1 + m_2$ .

### Уравнение Бернулли

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока малого сечения (рис. 14). Рассмотрим объем жидкости, ограниченный стенками трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . За время  $\Delta t$  этот объем переместится вдоль трубки тока, причём сечение  $S_1$  переместится в положение  $S_1'$ , пройдя путь  $\Delta l_1$ , сечение  $S_2$  переместится в положение  $S_2'$ , пройдя путь  $\Delta l_2$ . В силу неразрывности струи заштрихованные объёмы будут иметь одинаковую величину:  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ .

24а

## 24. Силы внутреннего трения

В жидкость погружены две параллельные друг другу пластины (рис. 15), линейные размеры которых значительно превосходят расстояние между ними  $d$ . Нижняя пластина удерживается на месте, верхняя приводится в движение относительно нижней с некоторой скоростью  $v_0$ . Опыт даёт, что для перемещения верхней пластины с постоянной скоростью  $v_0$  необходимо действовать на нее вполне определенной постоянной по величине силой  $F$ . Раз пластина не получает ускорения, значит, действие этой силы уравновешивается равной ей по величине противоположно направленной силой, которая, очевидно, есть сила трения, действующая на пластину при ее движении в жидкости. Обозначим ее  $F_{тр}$ . Варьируя скорость пластины  $v_0$ , площадь пластин  $S$  и расстояние между ними  $d$ , можно получить, что

$$F_{тр} = \eta \frac{v_0}{d} S,$$

где  $\eta$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния (например, температуры) жидкости и называемый **коэффициентом внутреннего трения**, или **коэффициентом вязкости**, или просто **вязкостью жидкости (газа)**.

Нижняя пластина при движении верхней также оказывается подверженной действию силы  $F_{тр}$ , равной по величине  $F_{тр}$ . Для того чтобы нижняя пластина осталась неподвижной, силу  $F_{тр}$  необходимо уравновесить с помощью силы  $F_{тр}'$ .

Таким образом, при движении двух погруженных в жидкость пластин относительно друг друга между ними возникает взаимодействие, характеризующееся силой

$$F_{тр} = \eta \frac{v_0}{d} S.$$

**226** Масса тела не является постоянной инвариантной величиной, а зависит от скорости по закону:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

При такой трактовке инвариантную массу  $m$  называют **массой покоя** (ее часто обозначают символом  $m_0$ ). Зависящая от скорости неинвариантная масса  $m_r$  носит название релятивистской массы движения.

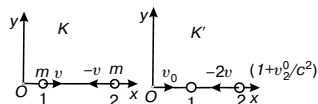


Рис. 13

**Релятивистское выражение для энергии**

Второй закон Ньютона гласит, что производная импульса частицы (материальной точки) по времени равна действующей на частицу силе. Уравнение второго закона оказывается инвариантным относительно преобразований Лоренца, если под импульсом подразумевать величину. Следовательно, релятивистское выражение второго закона Ньютона имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = F.$$

Умножим уравнение на перемещение частицы  $ds = vdt$ . В результате получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) vdt = Fds, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \text{const.}$$

**246** Если в любом месте зазора мысленно провести плоскость, параллельную пластинам (см. пунктирную линию на рис. 15), то можно утверждать, что часть жидкости, лежащая над этой плоскостью, действует на часть жидкости, лежащую под плоскостью, с силой  $F_{TP}$ , а часть жидкости, лежащая под плоскостью, в свою очередь действует на часть жидкости, лежащую над плоскостью, с силой  $F'_{TP}$ , причем значения  $F'_{TP}$  и  $F_{TP}$  определяются формулой

$$F_{TP} = \eta \frac{v_0}{d} S.$$

Таким образом, эта формула определяет не только силу трения, действующую на пластины, но и силу трения между соприкасающимися частями жидкости.

Если исследовать скорость частиц жидкости в разных слоях, то оказывается, что она изменяется в направлении  $z$ , перпендикулярном пластинам, по линейному закону:

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z.$$

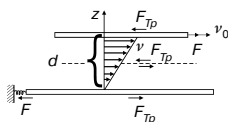


Рис. 15

**216** и  $y'$ , а также  $z$  и  $z'$  предположим параллельными друг другу. Рассмотрим в обеих системах один и тот же процесс, заключающийся в испускании телом, находящимся в начале координат  $O'$  системы  $K'$ , светового сигнала и достижении этим сигналом тел  $A$  и  $B$ . Источник сигнала и тела  $A$  и  $B$  покоятся относительно системы  $K'$ , причем измеренные в этой системе расстояния  $O'A$  и  $O'B$  одинаковы. Тогда в системе  $K'$  сигнал будет достигать тел  $A$  и  $B$  в один и тот же момент времени (скорость света во всех направлениях одинакова и равна  $c$ ). Рассмотрим тот же процесс в системе отсчета  $K$ . Относительно этой системы свет также распространяется по всем направлениям со скоростью  $c$ . Тело  $A$  движется навстречу лучу света, тело  $B$  лучу приходится догонять. Поэтому тела  $A$  и  $B$  достигнут раньше, чем тела  $B$ . Таким образом, события, которые в системе  $K'$  были одновременными, в системе  $K$  оказываются неодновременными. Отсюда вытекает, что время в разных системах течет неодинаковым образом.

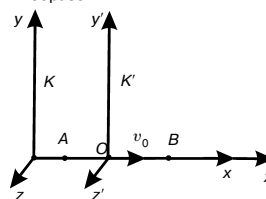


Рис. 12

**236** В идеальной жидкости силы трения отсутствуют. Поэтому приращение энергии должно равняться работе, совершаемой над выделенным объемом силами давления. Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частицы, к которым они приложены, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям  $S_1$  и  $S_2$ . Эта работа равна  $A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$ . Приравняв выражения, сократив на  $\Delta V$  и перенеся члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2.$$

Сечения  $S_1$  и  $S_2$  были взяты произвольно. Поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока выражение  $(\rho v^2/2) + \rho gh + p$  имеет одинаковое значение. Уравнение становится вполне точным лишь при стремлении поперечного сечения  $S$  к нулю, т. е. при стягивании трубки тока в линию. Таким образом, величины  $p$ ,  $v$  и  $h$ , фигурирующие в левой и правой частях уравнения, следует рассматривать как относящиеся к двум произвольным точкам одной и той же линии тока.

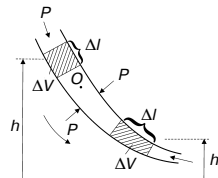


Рис. 14

25а

### 25. Ламинарное и турбулентное течения

Наблюдается два вида течения жидкости (или газа). В одних случаях жидкость как бы разделяется на слои, которые скользят относительно друг друга, не перемешиваясь. Такое течение называется **ламинарным (слоистым)**. Если в ламинарный поток ввести окрашенную струйку, то она сохраняется, не размываясь, на всей длине потока, так как частицы жидкости в ламинарном потоке не переходят из одного слоя в другой. Ламинарное течение стационарно.

При увеличении скорости или поперечных размеров потока характер течения существенным образом изменяется. Возникает энергичное перемешивание жидкости. Такое течение называется **турбулентным**. При турбулентном течении скорость частиц в каждом данном месте все время изменяется беспорядочным образом — течение нестационарно. Если в турбулентный поток ввести окрашенную струйку, то уже на небольшом расстоянии от места ее введения окрашенная жидкость равномерно распределяется по всему сечению потока.

Английский ученый О. Рейнольдс в 1883 г. установил, что характер течения зависит от значения безразмерной величины  $Re$ :

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta},$$

где  $\rho$  — плотность жидкости (или газа);

$v$  — средняя (по сечению трубы) скорость потока;

$\eta$  — коэффициент вязкости жидкости;

$l$  — характерный для поперечного сечения размер, например, сторона квадрата при квадратном сечении, радиус или диаметр при круглом сечении и т. д. Величина  $Re$  называется **числом Рейнольдса**. При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается

26а

### 26. Продольные и поперечные деформации, деформация при сдвиге. Закон Гука

Рассмотрим прямой брусок постоянного сечения длиной  $l$ , заделанный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой  $P$  (рис. 16а). Под действием силы  $P$  брусок удлиняется на некоторую величину  $\Delta l$ , которая называется **полным**, или **абсолютным, удлинением (абсолютной продольной деформацией)**.

В любых точках бруска имеется одинаковое напряженное состояние, и следовательно, линейные деформации  $\varepsilon_x$  для всех его точек одинаковы. Поэтому значение  $\varepsilon_x$  можно определить как отношение абсолютного удлинения  $\Delta l$  к первоначальной длине бруска  $l$ , т. е.  $\varepsilon_x = (\Delta l)/l$ . Линейную деформацию при растяжении или сжатии брусков называют обычно **относительным удлинением**, или **относительной продольной деформацией**, и обозначают  $\varepsilon$ . Следовательно,  $\varepsilon = (\Delta l)/l$ .

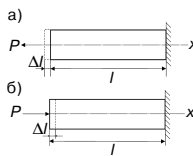


Рис. 16

Относительная продольная деформация измеряется в отвлеченных единицах. Деформацию удлинения условимся считать положительной (рис. 16а), а деформацию сжатия — отрицательной (рис. 16б).

27а

### 27. Допускаемые напряжения. Расчеты на прочность

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации.

Необходимо, чтобы наибольшие напряжения, полученные в результате расчета конструкции (**расчетные напряжения**), не превышали некоторой величины, меньшей предела прочности, называемой **допускаемым напряжением**. Значение допускаемого напряжения устанавливается путем деления предела прочности на величину, большую единицы, называемую **коэффициентом запаса**.

Следует стремиться к тому, чтобы допускаемые напряжения были полностью использованы, т. е. удовлетворялось условие  $\sigma = [\sigma]$ ; если это по ряду причин (например, в связи с необходимостью стандартизации размеров элементов конструкции) не удастся, то расчетные напряжения должны как можно меньше отличаться от допускаемых. Возможно незначительное превышение расчетных допускаемых напряжений, и следовательно, некоторое снижение фактического коэффициента запаса прочности (по сравнению с нормативным).

Расчет центрально растянутого или сжатого элемента конструкции на прочность должен обеспечить выполнение условия прочности для всех поперечных сечений элемента. При этом большое значение имеет правильное определение так называемых **опасных сечений элемента**, в которых возникают наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения. В тех случаях, когда допускаемые напряжения на растяжение или сжатие одинаковы, достаточно найти одно опасное сечение, в котором имеются наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения.

28а

### 28. Объемная деформация и потенциальная энергия при чистом сдвиге

Относительное изменение объема в случае чистого сдвига определяется по формуле:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Значения напряжений для рассматриваемых трех состояний:

$$X = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad Y = X - \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{3},$$

$$Z = X - \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}{3}.$$

При пространственном равномерном растяжении (или сжатии) изменяется объем параллелепипеда, но сохраняется его форма; при чистом же сдвиге изменяется его форма, но сохраняется его объем. Аналогично этому и полная удельная потенциальная энергия деформации распадается на две самостоятельные части: на **энергию изменения объема**  $u_{об}$ , накопленную при пространственном равномерном растяжении (или сжатии), и на **энергию изменения формы**  $u_{ф}$ , накопленную при деформациях чистого сдвига.

Допустим, что после того как закончилось статическое нарастание сил состояния  $X$ , на элементарный параллелепипед начали действовать статически возрастающие силы состояния  $Y$ . Выражение работы  $dA_{XY}$  сил состояния  $X$  на перемещениях, возникающих от сил состояния  $Y$  (и соответствующее ей выражение потенциальной энергии деформации  $dU_{XY}$ ), можно представить в следующем виде:

$$dA_{XY} = dU_{XY} = (X \times dl_2 \times dl_3) \varepsilon_{1Y} dl_1 + (X \times dl_1 \times dl_3) \varepsilon_{2Y} dl_2 + (X \times dl_2 \times dl_1) \varepsilon_{3Y} dl_3,$$

**266** Для случаев, когда напряжения в брусе не превышают предела пропорциональности, опытом установлена следующая зависимость:

$$\varepsilon = N/(EF),$$

где  $N$  — продольная сила в поперечных сечениях бруса;  
 $F$  — площадь поперечного сечения бруса;  
 $E$  — коэффициент, зависящий от физических свойств материала.

Учитывая, что нормальное напряжение в поперечном сечении бруса  $\sigma = N/F$ , получаем  $\varepsilon = \sigma/E$ , откуда  $\sigma = \varepsilon E$ .

Абсолютное удлинение бруса выражается формулой  $\Delta l = \varepsilon l = N/(EF)$  т. е. абсолютная продольная деформация прямо пропорциональна продольной силе.

Более общей является следующая формулировка закона Гука: относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению.

Каждая из граней параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани, это называется **абсолютным сдвигом**. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется **относительным сдвигом**, при малых деформациях оно равно величине **угла сдвига**  $\gamma$  — изменению первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда. Абсолютный сдвиг выражается в мерах длины, а относительный сдвиг — в радианах. Величина  $\gamma$ , как показывает опыт, прямо пропорциональна величине касательных напряжений. Эта зависимость между  $\gamma$  и  $\tau$ , называемая **законом Гука при сдвиге**, выражается в виде  $\gamma = \tau/G$ , или  $\tau = \gamma G$ .

**286** где  $X \times dl_2 \times dl_3$  — элементарная сила, действующая на грань площадью  $dl_2 \times dl_3$ . Эта сила остается постоянной (т. е. не изменяет своей величины) при статическом возрастании сил состояния  $Y$ ;  
 $\varepsilon_{1Y} dl_1$  — абсолютное удлинение ребра  $dl_1$  от действия сил состояния  $Y$ ;

$$\varepsilon_{1Y} \times dl_1 = \frac{1}{E} [Y - \mu(-Y)] dl_1 = \frac{1+\mu}{E} Y dl_1.$$

Произведение элементарной силы  $X \times dl_2 \times dl_3$  на величину  $\varepsilon_{1Y} dl_1$  представляет собой работу этой силы на удлинении ребра параллелепипеда от действия сил состояния  $Y$ . Так как эта сила при статическом возрастании сил состояния  $Y$  не изменяется, то выражение ее работы не содержит коэффициента  $1/2$ .

Аналогичное значение имеют и остальные слагаемые формулы для  $dA_{XY}$ .

Абсолютные удлинения остальных ребер параллелепипеда найдены по той же формуле:

$$\varepsilon_{2Y} dl_2 = \frac{1}{E} [-Y - \mu(Y)] dl_2 = \frac{1+\mu}{E} Y dl_2,$$

$$\varepsilon_{3Y} dl_3 = \frac{1}{E} [-\varepsilon(Y - Y)].$$

Подставляем полученные выражения удлинений ребер в формулу для  $dA_{XY}$ :

$$dA_{XY} dU_{XY} = \frac{X \times dl_1 \times dl_2 \times dl_3 [(1+\mu)Y - (1+\mu)Y + 0]}{E} = 0,$$

т. е. работа сил состояния  $X$  на перемещениях состояния  $Y$  равна нулю.

$$\text{Следовательно, } u_{XY} = \frac{dU_{XY}}{dl_1 \times dl_2 \times dl_3} = 0.$$

Работа сил состояния  $X$  на перемещениях состояния  $Z$  также равна нулю.

**256** ламинарное течение. Начиная с некоторого определенного значения  $Re$ , называемого **критическим**, течение приобретает турбулентный характер. Если в качестве характерного размера для круглой трубы взять ее радиус  $r$ , то критическое значение числа Рейнольдса (которое в этом случае имеет вид  $Re = \rho v r / \eta$ ) оказывается равным примерно 1000. В число Рейнольдса входят в виде отношения две величины, зависящие от свойств жидкости, — плотность  $\rho$  и коэффициент вязкости  $\eta$ . Отношение

$$v = \frac{\eta}{\rho}$$

называется **кинематической вязкостью**. В отличие от  $\nu$  величина называется **динамической вязкостью**. Используя кинематическую вязкость, числу Рейнольдса можно придать следующий вид:

$$Re = \frac{v l}{\nu}.$$

Число Рейнольдса может служить критерием подобия для течения жидкостей в трубах, каналах и т. д. Характер течения различных жидкостей (или газов) в трубах разных сечений будет совершенно одинаков, если каждому течению соответствует одно и то же значение  $Re$ .

**276** При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, различающихся формой использования условий прочности:

- 1) проверка напряжений (проверочный расчет);
- 2) подбор сечений (проектный расчет);
- 3) определение грузоподъемности (определение допускаемой нагрузки).

Рассмотрим эти виды задач на примере растянутого стержня из пластичного материала.

При проверке напряжений площади поперечных сечений  $F$  и продольные силы  $N$  известны, и расчет заключается в вычислении расчетных (фактических) напряжений  $\sigma$  в характерных сечениях элементов. Полученное при этом наибольшее напряжение сравнивают затем с допускаемым:

$$\sigma = N/F \leq [\sigma].$$

При подборе сечений определяют требуемые площади  $[F]$  поперечных сечений элемента (по известным продольным силам  $N$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$ ). Принимаемые площади сечений  $F$  должны удовлетворять условию прочности, выраженному в следующем виде:

$$F \geq [F] = N/[\sigma].$$

При определении грузоподъемности по известным значениям  $F$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  вычисляют допускаемые величины  $[N]$  продольных сил:  $[N] = F[\sigma]$ . По полученным значениям  $[N]$  затем определяют допускаемые величины внешних нагрузок  $[P]$ . Для этого случая условие прочности имеет вид:

$$P \leq [P].$$



### 29а 29. Единая теория прочности

При испытании материалов статической нагрузкой на центральное растяжение и сжатие устанавливается так называемое **опасное (или предельное) состояние**. Оно характеризуется наступлением текучести, сопровождаемой значительными остаточными деформациями или появлением трещин, свидетельствующих о начале разрушения. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней в момент наступления опасного состояния при образце из пластичного материала равны пределу текучести  $\sigma_T$ , а при образце из хрупкого материала равны пределу прочности  $\sigma_B$  (при растяжении  $\sigma_{дР}$  и при сжатии  $\sigma_{сЖ}$ ).

Обычно считают, что тело (элемент конструкции) находится в опасном состоянии, если такое состояние имеется в какой-либо его точке. Точку тела, в окрестности которой при пропорциональном возрастании нагрузки материал первым оказывается в опасном состоянии, называют **опасной точкой**.

Теории прочности объясняют разрушение материала, происходящее только путем отрыва, а третья и четвертая — только путем сдвига. Поэтому каждая из них для некоторых видов напряженных состояний дает результаты, противоречащие опыту.

Комбинированная теория прочности (названная **единой теорией прочности**) объясняет разрушение материала как в результате отрыва, так и сдвига, и может поэтому использоваться при любом виде напряженного состояния. По этой теории, объединяющей вторую и третью теории прочности, допускаемое напряженное состояние должно одновременно удовлетворять двум условиям прочности:

$$\sigma_1 \leq [\sigma], \quad \tau_{\max} \leq [\tau].$$

При этом  $[\sigma]$  устанавливается из опытов на основное растяжение, а  $[\tau]$  — из опытов, при которых раз-

### 30а 30. Изгиб с кручением брусьев круглого сечения

В случае, когда моменты инерции сечения относительно главных осей равны между собой, кривой изгиб бруса невозможен. В связи с этим невозможен кривой изгиб брусьев круглого сечения. Поэтому в общем случае действия внешних сил брус круглого сечения испытывает сочетание следующих видов деформации: прямого поперечного изгиба, кручения и центрального растяжения (или сжатия).

Рассмотрим такой частный случай расчета бруса круглого сечения, когда в его поперечных сечениях продольная сила равна нулю. В этом случае брус работает на совместное действие изгиба и кручения. Для отыскания опасной точки бруса необходимо установить, как изменяются по длине бруса величины изгибающих и крутящих моментов, т. е. построить эпюры полных изгибающих моментов  $M$  и крутящих моментов  $M_k$ . Построение этих эпюр рассмотрим на конкретном примере вала, изображенного на рис. 17а. Вал опирается на подшипники  $A$  и  $B$  и приводится во вращение двигателем  $C$ .

На вал насажены шкивы  $E$  и  $F$ , через которые перекинута приводные ремни, имеющие натяжения  $T_1$  и  $t_1$ ,  $T_2$  и  $t_2$ . Предположим, что вал вращается в подшипниках без трения; собственным весом вала и шкивов пренебрегаем (в случае, когда их собственный вес значителен, его следует учесть). Направим ось поперечного сечения вала вертикально, а ось  $z$  — горизонтально.

Эпюра изгибающих моментов  $M_z$ , действующих в вертикальной плоскости, строится от вертикальных сил  $A_y$ ,  $(T_1 + t_1)\sin\alpha_1$ ,  $(T_2 + t_2)\sin\alpha_2$  и  $B_y$  (рис. 17в). Она показана на рис. 17г. Аналогично от горизонтальных сил  $A_x$ ,  $(T_1 + t_1)\cos\alpha_1$ ,  $(T_2 + t_2)\sin\alpha_2$  и  $B_x$  (рис. 17д) строится эпюра изгибающих моментов  $M_x$ , действующих в горизонтальной плоскости (рис. 17е).

### 31а 31. Понятие об устойчивости равновесия упругих тел

Равновесие твердых тел может быть устойчивым и неустойчивым. Например, шарик, расположенный на дне вогнутой сферы, находится в устойчивом равновесии (рис. 18а), а на вершине выпуклой сферы — в неустойчивом (рис. 18б).

При устойчивом равновесии тело, выведенное какой-либо внешней силой из положения равновесия, возвращается в это положение после прекращения действия силы.

Прямолинейная форма равновесия упругого стержня, заделанного нижним концом и нагруженного сверху центрально приложенной сжимающей силой, при некоторой величине этой силы может оказаться неустойчивой, и стержень резко искривится. Балка, жесткости поперечного сечения которой в главных плоскостях значительно отличаются друг от друга, при некоторой величине нагрузки оказывается неустойчивой и скручивается.

Устойчивость или неустойчивость формы равновесия упругого тела зависит от его размеров, материала, величин и направлений сил; например, прямолинейная форма равновесия центрально сжатого стержня устойчива при малых значениях сжимающей силы и неустойчива, когда величина этой силы превышает некоторый предел.

Прямолинейный стальной стержень при некотором значении сжимающей силы может находиться в состоянии устойчивого равновесия, а деревянный стержень таких же размеров при том же значении силы — в состоянии неустойчивого равновесия.

Значения силы, нагрузки и напряжения, при которых первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называются соответственно критической силой, критической нагрузкой и критическим напряжением.

### 32а 32. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

Формула  $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$  справедлива только тогда, когда напряжения  $\sigma_{кр}$  в материале, вызванные критической силой, не превышают предела пропорциональности, т. е. когда  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пл}$ . Это следует из того, что в основу вывода формул положено дифференциальное уравнение упругой линии, которым можно пользоваться лишь в пределах применимости закона Гука.

Подставляем в условие  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пл}$  значение  $\sigma_{кр}$ :

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{пл}$$

Из этого уравнения:

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{пл}}$$

Правая часть выражения представляет собой то наименьшее значение гибкости стержня, при котором формула Эйлера еще применима, — это так называемая **предельная гибкость**  $\lambda_{пред}$ :

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E / \sigma_{пл}}$$

Условие применимости формул Эйлера с учетом выражения можно представить в виде:

$$\lambda \geq \lambda_{пред}$$

Итак, формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня применима при условии, что его гибкость больше предельной.

**306** По значениям  $M$ , полученным с помощью этой формулы, строится эпюра полных изгибающих моментов (рис. 17ж).

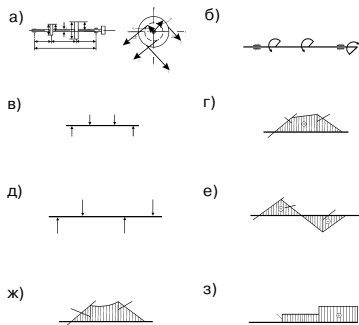


Рис. 17

**326** Приведем значения  $\lambda_{пред}$  для различных материалов. Для стали Ст3  $E = 2 \times 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\sigma_{пл} \approx 2000$  кгс/см<sup>2</sup> и, следовательно,

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E / \sigma_{пл}} = 3,14 \sqrt{2 \times 10^6 / 2000} \approx 100.$$

Для дерева  $\lambda_{пред} \approx 110$ ; для чугуна  $\lambda_{пред} \approx 80$ . Для стали с повышенным значением  $\sigma_{пл}$  предельная гибкость уменьшается. В частности, для некоторых марок легированной стали  $\lambda_{пред} \approx 60-70$ .

При гибкости стержня, меньшей предельной, критическое напряжение, если определять его по формуле Эйлера, получается выше предела пропорциональности пл. Так, например, при гибкости стального стержня (из стали Ст3)  $\lambda = 50$

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 = \pi^2 \times 2 \times 10^6 / 50^2 \approx 8000 \text{ кгс/см}^2,$$

т. е. величина  $\sigma_{кр}$  значительно больше не только предела пропорциональности, но также предела текучести и предела прочности (временного сопротивления).

Эмпирическая формула критических напряжений для стержней, имеющих гибкость  $\lambda$ , меньшую предельной:  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ , где  $a$  и  $b$  — определяемые экспериментально коэффициенты, зависящие от свойств материала. Например, для стали Ст3

$$a \approx 3100 \text{ кгс/см}^2; b \approx 11,4 \text{ кгс/см}^2.$$

**296** рушение материала (или пластическое течение его) вызывается сдвигом.

Условия прочности для хрупкого материала можно представить в виде:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma_P], (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 \leq [\tau].$$

Если  $[\tau]$  определяется из опытов на одноосное сжатие, то  $[\tau] = [\sigma_C] / 2$ , и последнее условие принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_C].$$

В случае пластичного материала условия прочности имеют вид:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma], \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

В некоторых конструкциях, например в балках нетонкостенного профиля, напряженное состояние в опасных точках близко к одноосному. При проверке прочности таких конструкций из хрупких материалов в точках, в которых напряженное состояние близко к одноосному растяжению, принимают  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ; для этого случая по условию прочности:

$$\sigma_1 \leq [\sigma_C].$$

При проверке же прочности в точках, в которых напряженное состояние близко к одноосному сжатию, принимают  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ; для этого случая по условию прочности:

$$\sigma_3 \leq [\sigma_C].$$

**316** Исследование устойчивости и определение критических сил или нагрузок имеет большое практическое значение, так как для любого сооружения в целом и каждого его элемента должна быть обеспечена устойчивость заданной (исходной) формы равновесия под действием приложенных к нему сил. Резкое изменение формы какого-либо элемента может вызвать разрушение всего сооружения.

Понятие устойчивости не следует смешивать с понятием прочности: каждое из них имеет самостоятельное значение. Так, например, сжатый стержень при действии на него нагрузки больше критической изогнется, но при этом деформации его могут быть упругими, и он после снятия нагрузки восстановит свою первоначальную форму. Следовательно, потеря устойчивости в этом случае не связана с потерей прочности.

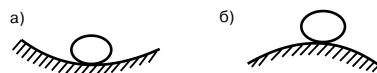


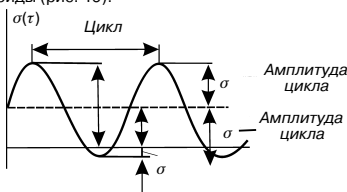
Рис. 18

**33а 33. Переменные напряжения. Усталость**

Напряжения, переменные во времени, возникают в элементах конструкций под действием нагрузок, переменных по величине или направлению, а также нагрузок, перемещающихся относительно рассматриваемого элемента. Так, например, вагонная ось изгибается под нагрузкой от веса вагона.

В верхней части каждого поперечного сечения оси возникают нормальные напряжения растяжения. При движении вагона колеса, а также жестко соединенные с ними оси вращаются, и каждая точка оси оказывается то в верхней (растянутой), то в нижней (сжатой) половине сечения. Переменные напряжения возникают также в валах различных машин, в элементах фермы моста при движении по нему поезда и т. п.

Изменение напряжений во времени можно изобразить с помощью графика, по оси абсцисс которого откладывают время  $t$ , а по оси ординат — значения нормальных (или касательных) напряжений. Обычно предполагают, что закон изменения напряжений во времени характеризуется кривой, имеющей вид синусоиды (рис. 19).



**34а 34. Предел выносливости. Основные факторы, влияющие на предел выносливости**

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений называют **выносливостью**, а проверку прочности элементов конструкции при действии таких напряжений — **расчетом на выносливость (или расчетом на усталостную прочность)**.

Для получения механических характеристик материала, необходимых для расчетов на прочность при переменных напряжениях, проводят специальные **испытания на выносливость** (на усталость).

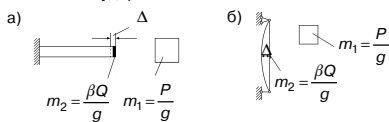
Наибольшее (предельное) максимальное напряжение цикла, при котором не происходит усталостного разрушения образца из материала после произвольного большого числа циклов, называют **пределом выносливости**. Предел выносливости равен ординате асимптоты кривой усталости. Его обозначают  $\sigma_R$ , при симметричном цикле коэффициент асимметрии  $R = -1$ , и предел выносливости при этом цикле обозначают  $\sigma_{-1}$ .

Пределы выносливости конкретной детали и материала, из которого она изготовлена, различны. Влияние факторов, от которых зависит соотношение между пределами выносливости материала (нормального образца) и детали, более или менее полно изучено лишь для симметричного цикла изменения напряжений. Поэтому примем, что величины различных факторов, влияющих на пределы выносливости, определены при испытаниях в условиях симметричных циклов изменения напряжений.

**Концентрация напряжений.** Снижение предела выносливости за счет наличия тех или иных концентраторов напряжений (выточек, отверстий, шпоночных канавок, прессовых посадок и т. д.) учитывается эффективным, или действительным, коэффициентом кон-

**35а 35. Частные случаи ударного действия нагрузки**

Рассмотрим удар горизонтально движущимся телом массой  $m_1 = P/g$  по упругой системе, масса которой  $Q/g$  (рис. 20а, б) заменена приведенной массой  $m_2 = \beta(Q/g)$ , сосредоточенной в месте удара. Обозначим  $\Delta$  наибольшее горизонтальное перемещение сечения в месте удара.



Потенциальная энергия, накопившаяся в системе к моменту возникновения наибольшей деформации  $\Delta$ , равна кинетической энергии системы в момент соприкосновения с ней груза  $P$ :

$$U = \frac{(P + \beta Q)c^2}{2g}$$

$$\text{или } U = \frac{P + \beta Q}{2g} \times \frac{P^2}{(P + \beta Q)^2} v^2 = \frac{P^2 v^2}{2g(P + \beta Q)}$$

Потенциальную энергию можно выразить и через деформацию  $\Delta = \Delta_{ст} k_D$ , вызванную силой  $Pk_D$ , действующей на систему в момент возникновения этой деформации  $\Delta$ :

$$U = \frac{Pk_D \times \Delta}{2} = \frac{Pk_D^2 \Delta_{ст}}{2}$$

где  $\Delta_{ст}$  — перемещение места удара по горизонтали, вызванное горизонтальной статически действующей силой, равной весу  $P$  ударяющего тела.

**36а 36. Теория о взаимности работ и о взаимности перемещений**

Перемещения (прогибы и углы поворота) системы в результате ее деформации условимся обозначать  $\Delta_{mn}$ , где индекс  $m$  указывает направление перемещения, а  $n$  — причину, вызвавшую его.  $\Delta_{mn}$  — перемещение по направлению «силы»  $m$ , вызванное «силой»  $n$ . Перемещение  $m$  может представлять собой либо линейное смещение, либо угол поворота (в радианах) в зависимости от того, является сила  $m$  сосредоточенной силой или сосредоточенным моментом.

Рассмотрим два состояния упругой системы, находящейся в равновесии. В каждом из этих состояний на систему (сооружение) действует некоторая статическая нагрузка, например в первом состоянии — сила  $P_1$ , а во втором — сила  $P_2$ .

Работу силы  $P_1$  (т. е. нагрузки первого состояния) на вызванных ею перемещениях (т. е. на перемещениях первого же состояния) обозначим  $A_{11}$ , а работу силы  $P_2$  на вызванных ею перемещениях —  $A_{22}$ .

Величины этих работ при статическом действии сил равны:

$$A_{11} = P_1 \Delta_{11}/2, \quad A_{22} = P_2 \Delta_{22}/2.$$

Работы  $A_{11}$  и  $A_{22}$  (в случае плоской задачи) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержней системы:

$$A_{11} = \sum_0^l \int \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \sum_0^l \int \frac{N_1^2 dx}{2EF} + \sum_0^l \int \frac{Q_1^2 dx}{2GF} \eta,$$

$$A_{22} = \sum_0^l \int \frac{M_2^2 dx}{2EJ} + \sum_0^l \int \frac{N_2^2 dx}{2EF} + \sum_0^l \int \frac{Q_2^2 dx}{2GF} \eta.$$

**346** центрации напряжений, обозначаемым  $k_n$  для нормальных и  $k_t$  — для касательных напряжений.

**Эффективный коэффициент концентрации напряжений** представляет собой отношение предела выносливости образца без концентрации напряжений к пределу выносливости образца (или детали) тех же размеров, но с концентратором напряжений.

**Влияние абсолютных размеров детали.** Снижение предела выносливости с ростом абсолютных размеров детали носит название **масштабного эффекта**. Влияние размеров детали учитывается масштабным фактором (или масштабным коэффициентом)  $\beta_{M\sigma}$ , представляющим собой отношение предела выносливости, определенного при испытании образцов диаметром 7 мм, к пределу выносливости, определенному при испытании геометрически подобных образцов (или деталей) больших размеров, т. е.:

$$\beta_{M\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1M}, \quad (\beta_{M\sigma} = \tau_{-1} / \tau_{-1M}).$$

**Влияние состояния поверхности детали.** Усталостные трещины, как правило, начинаются от поверхности детали. Поэтому состояние поверхностного слоя оказывает существенное влияние на прочность при переменных напряжениях.

**366** Работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Этот вывод носит название **теоремы о взаимности работ, или теоремы Бетти**.

Обозначим перемещения, вызванные единичными силами или моментами (т. е. силами  $P = 1$  или моментами  $M = 1$ ), знаком  $\delta$  в отличие от перемещений, вызванных силами и моментами, не равными единице, обозначаемых знаком  $\Delta$ . В соответствии с этим перемещение системы по направлению единичной силы  $P_2$  в первом состоянии (т. е. вызванное силой  $P_1 = 1$ ) обозначим  $\delta_{21}$ , а перемещение по направлению единичной силы  $P_1$  во втором состоянии обозначим  $\delta_{12}$ .

На основании теоремы о взаимности работ для рассматриваемых двух состояний:

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

но так как

$$P_1 = P_2 = 1,$$

то

$$\delta_{12} = \delta_{21},$$

или в общем случае действия любых единичных сил

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

Полученное равенство носит название **теоремы о взаимности перемещений (теоремы, или принципа, Максвелла)**: для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.

**336** Совокупность всех последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения называется **циклом напряжений**.

Наибольшее (в алгебраическом смысле) напряжение цикла называется **максимальным** и обозначается  $\sigma_{\max}$  (или  $\tau_{\max}$ , если рассматривается изменение касательных напряжений), а наименьшее — **минимальным**  $\sigma_{\min}$  (или  $\tau_{\min}$ ).

Алгебраическая полусумма максимального и минимального напряжений цикла называется его **средним напряжением** (или статической составляющей цикла):

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2.$$

Алгебраическая полуразность максимального и минимального напряжений называется **амплитудой цикла** (или его переменной составляющей):

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2.$$

Среднее напряжение цикла может быть как положительным, так и отрицательным. Амплитуда цикла всегда положительна.

Максимальное и минимальное напряжения можно выразить через среднее напряжение и амплитуду цикла:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a,$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

Если напряжения  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  равны друг другу по абсолютной величине и обратны по знаку, то цикл называют **симметричным**.

**356** Приравняем друг другу оба полученных выражения потенциальной энергии:

$$\frac{P^2 v^2}{2g(P + \beta Q)} = \frac{Pk_D^2 \Delta_{CT}}{2},$$

откуда динамический коэффициент

$$k_D = \sqrt{g \Delta_{CT} [1 + \beta(Q/P)]} / v.$$

В частном случае, когда массой упругой системы можно пренебречь, формула принимает вид:

$$k_D = \frac{v}{\sqrt{g \Delta_{CT}}}.$$

Выведем теперь формулу динамического коэффициента при ударе, вызванном внезапной остановкой барабана лебедки, опускающей (со скоростью  $v$ ) на канате груз весом  $P$  (рис. 21). В момент остановки длина каната от барабана до груза равна  $l$ . Кинетическая энергия груза в последний момент перед остановкой равна  $Pv^2/(2g)$ , а потенциальная энергия каната, растянутого силой  $P$ , равна:

$$\frac{\Delta_{CT} P}{2} = \frac{\Delta_{CT}^2 EF}{2l},$$

где  $\Delta_{CT} = Pl/(EF)$  — удлинение каната от статически действующей силы  $P$ .

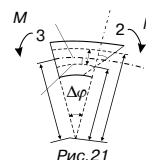


Рис. 21

### 37а 37. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса большой кривизны

Выведем формулы для определения нормальных напряжений в брусках большой кривизны.

При выводе этих формул предполагается, что:

- 1) кривой брус является плоским (т. е. ось его представляет собой плоскую кривую);
- 2) брус симметричен относительно плоскости, в которой расположена его ось, а внешние силы действуют в этой плоскости;
- 3) поперечные сечения бруса, плоские до его деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений);
- 4) давление продольных волокон бруса друг на друга существенно не влияет на распределение напряжений в бруске, а потому его можно не учитывать.

Рассмотрим случай чистого изгиба кривого бруса. Обозначим  $r$  радиус оси кривого бруса, т. е. оси, представляющей собой геометрическое место центров тяжести его поперечных сечений. Выделим из бруса двумя плоскостями, перпендикулярными его оси (следовательно, проходящими через центр кривизны) и наклоненными друг к другу под углом  $\varphi$  бесконечно малый элемент 1—2—3—4.

В результате деформации изгиба поперечное сечение 3—4 на угол  $\Delta\varphi$  и занимает положение 1'—2'. Длина волокна 0—0', проходящего через точку 0 пересечения прямых 1—2 и 1'—2', при деформации не изменяется, и, следовательно, это волокно расположено в нейтральном слое стержня. Волокно  $n$ - $n$  (с радиусом кривизны  $\rho$  и длиной  $l = \rho d\varphi$ ) в результате деформации удлиняется на величину  $n \cdot n'$ , равную  $\eta d\varphi$ , где  $\eta$  — расстояние от этого волокна до нейтрального слоя; относительное удлинение волокна  $n$ - $n$ :

$$\varepsilon = \frac{\eta \Delta d}{l} = \frac{\eta \Delta d}{\rho d}$$

### 38а 38. Определение положения нейтральной оси при чистом изгибе

При действии в поперечном сечении кривого бруса изгибающего момента  $M$  (т. е. при  $N = 0$ ) радиус  $r_0$  нейтрального слоя можно определить по формуле:

$$r_0 = F / \int \frac{dF}{\rho}$$

Однако удобнее вычислять этот радиус с помощью специальных формул, полученных для различных форм поперечных сечений.

Рассмотрим в качестве примера вывод такой формулы для поперечного сечения в виде прямоугольника шириной  $b$  и высотой  $h$  (рис. 23). Обозначим  $r_B$  и  $r_H$  радиусы соответственно внутренних и наружных волокон бруса.

Выделим в поперечном сечении элементарную полоску высотой  $d\rho$ , шириной  $b$  и площадью  $dF = b d\rho$ , отстоящую на расстоянии  $\rho$  от центра кривизны бруса.

По формуле

$$r_0 = \frac{F}{\int \frac{dF}{\rho}} = \frac{bh}{\int_{r_B}^{r_H} \frac{bd\rho}{\rho}} = \frac{dh}{d(\ln\rho)_{r_B}^{r_H}} = \frac{h}{\ln r_H - \ln r_B}$$

и следовательно:

$$r_0 = \frac{h}{\ln(r_H / r_B)}$$

Путем разложения в ряд правой части формулы можно получить следующую приближенную формулу:

$$r_0 = r[1 - (1/12)(h/r)^2].$$

### 39а 39. Классические и энергетическая теории прочности

При испытании материалов статической нагрузкой на центральное растяжение и сжатие устанавливается так называемое **опасное (или предельное) состояние**. Оно характеризуется наступлением текучести, сопровождаемой значительными остаточными деформациями или появлением трещин, свидетельствующих о начале разрушения. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней в момент наступления опасного состояния при образце из пластичного материала равны пределу текучести  $\sigma_T$ , а при образце из хрупкого материала равны пределу прочности  $\sigma_B$  (при растяжении  $\sigma_{Bp}$  и при сжатии  $\sigma_{Bc}$ ).

Обычно считают, что тело (элемент конструкции) находится в опасном состоянии, если такое состояние имеется в какой-либо его точке. Точку тела, в окрестности которой при пропорциональном возрастании нагрузки материал первым оказывается в опасном состоянии, называют **опасной точкой**.

В общем случае нагружения элемента конструкции определить его опасную точку можно лишь после выбора того или иного критерия наступления опасного состояния. Если причиной опасного состояния считаются растягивающие напряжения, то опасной является та точка тела, в которой возникает самое большое растягивающее напряжение. Если же причиной опасного состояния считаются касательные напряжения, то опасной является та точка, в которой возникает самое большое касательное напряжение, и т. д. Таким образом, положение опасной точки зависит от того, что считается причиной опасного состояния.

Опасное состояние материала допустить нельзя, а потому при расчете сооружения на прочность ориентируются обычно на так называемое **допускаемое состояние**. Допускаемое состояние соответствует на-

### 40а 40. Работа силы при ее статическом действии. Потенциальная энергия деформации

Рассмотрим нагружение бруса силой  $P$  (рис. 25а), величина которой медленно увеличивается от нуля до своего конечного значения. Такое нагружение называется **статическим**. Сила  $P$  вызывает продольную деформацию бруса, в результате чего сечение бруса, в котором она приложена, смещается. При этом сила  $P$  совершает работу.

**Диаграмма растяжения бруса силой  $P$ .** По оси ординат отложим величины силы  $P$ , а по оси абсцисс — соответствующие им перемещения  $\delta$  нижнего конца бруса (рис. 25б),  $t$  — момент времени, которому соответствуют некоторые значения силы  $P$  и перемещения  $\delta$ . В последующий бесконечно малый промежуток времени  $dt$  сила  $P$  получит приращение  $dP$ , а нижний конец бруса опустится на  $d\delta$ . Составим выражение работы силы  $P$  на перемещение  $d\delta$ , отбрасывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:  $dA = Pd\delta$ .

Работа  $dA$  равна (с учетом масштабов, в которых отложены значения  $P$  и  $\delta$ ) площади  $du$  (рис. 25б). Полную величину работы  $A$  при изменении силы  $P$  от нуля до  $P_1$  получим интегрированием последнего выражения:

$$F = \int_{P=0}^{P_1} dA = \int_{P=0}^{P_1} Pd\delta.$$

Работа  $A$  равна площади диаграммы растяжения, заштрихованной на рисунке.

Вся площадь диаграммы  $OABCD$  (рис. 25б) равна работе, затраченной на разрыв бруса.

**386** Для поперечного сечения в форме круга с диаметром  $d$  (рис. 24а) аналогичным путем можно получить следующие формулы:  
**точную:**

$$r_0 = \frac{r + \sqrt{r^2 - d^2/4}}{2},$$

**приближенную:**

$$r_0 = r[1 - (1/16)(d/r)^2].$$

Для поперечного сечения в форме трапеции (рис. 24б):

$$r_0 = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2[(r_H b_2 - r_B b_1) \ln(r_H/r_B) - (b_2 - b_1)h]}$$

Центр тяжести трапеции находится, как известно, на расстоянии  $a$  от основания (имеющего размер  $b_2$ ), равном:

$$a = \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \times \frac{h}{3}.$$

Можно получить формулы для прямоугольника (при  $b_1 = b_2$ ) и для треугольника (при  $b_1 = 0$  или  $b_2 = 0$ ).

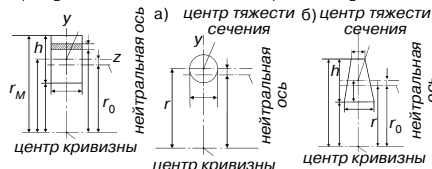


Рис. 23

Рис. 24

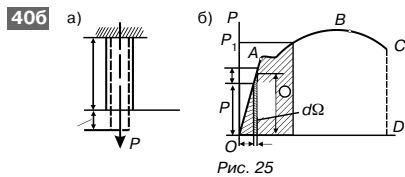


Рис. 25

Применение материала (например, стали) с более высокой прочностью может приводить к уменьшению работы, затрачиваемой на разрыв бруса, если эта сталь обладает меньшей пластичностью и площадь  $Q$  для нее меньше.

Если напряжения в бруске при действии силы  $P$  не превышают предела пропорциональности, то величина  $Q$  представляет собой площадь треугольника, имеющего высоту  $P$  и основание  $\delta$ , которое по закону Гука определяется выражением  $\delta = \Delta l = Pl/(EF)$ .

В этом случае работу можно определить по формуле:

$$A = \Omega = P\delta/2 = P^2 l / (2EF),$$

$$P = \delta EF/l \quad \text{и} \quad P = \sigma F,$$

тогда работа:

$$A = \delta^2 EF / (2l), \quad A = \delta^2 Fl / (2E).$$

**376** На основании закона Гука нормальные напряжения в волокне  $n$ - $n$ :

$$\sigma = \delta E = \frac{\eta \Delta d \rho E}{\rho d}.$$

Выделим элемент  $dF$  площади  $F$  поперечного сечения 1—2 кривого бруса. Элементарная сила, приходящаяся на этот элемент, равна  $\sigma dF$  (рис. 22) и направлена перпендикулярно поперечному сечению.

Составим уравнение равновесия элемента 1—2—3—4 кривого бруса (рис. 22) в виде суммы проекций сил на ось  $x$ :

$$\sum X = \int_F \sigma dF = 0,$$

откуда

$$\frac{\Delta d}{d} E \int_F \frac{\eta dF}{\rho} = 0.$$

Так как  $(\Delta d \rho / d \rho) E \neq 0$ , то  $\int_F \frac{\eta dF}{\rho} = 0$ .

Нейтральная ось кривого бруса не проходит через центр тяжести поперечного сечения. Она всегда расположена ближе к центру кривизны, чем центр тяжести поперечного сечения.

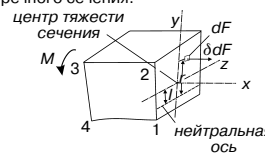


Рис. 22

**396** грузке, полученной путем деления опасной нагрузки (вызывающей опасное состояние) на некоторый коэффициент запаса, большой единицы.

Обозначим наибольшее нормальное напряжение, наибольшее касательное напряжение и наибольшую относительную продольную деформацию, возникающие в допусковом состоянии при одноосном растяжении или сжатии,  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$  и  $[\epsilon]$ . Полную удельную потенциальную энергию деформации обозначим  $[u]$ , а удельную потенциальную энергию изменения формы в этом состоянии —  $[u_\phi]$ .

В случае одноосного растяжения (или сжатия) элементов конструкции значение допускаемой нагрузки получится одинаковым независимо от того, будет она определена по значению  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$ ,  $[\epsilon]$ ,  $[u]$  или  $[u_\phi]$ . Это связано с тем, что при растягивающей (или сжимающей) силе, равной допускаемому ее значению, не только  $\sigma_{\max} = [\sigma]$ , но и  $\tau_{\max} = [\tau]$ ,  $\epsilon_{\max} = [\epsilon]$ ,  $u_{\max} = [u]$  и  $u_{\phi \max} = [u_\phi]$ .

При двухосном (плоском) и трехосном (пространственном) напряженных состояниях возможны самые различные соотношения между главными напряжениями.

#### 41а 41. Нагрузки. Расчетная схема

Нагрузки, действующие на конструкцию, являются по отношению к ней внешними силами. Эти силы приложены к тому или иному элементу конструкции по некоторым участкам его поверхности или распределены по объему.

В сопротивлении материалов расчет реальной конструкции на действие реальных внешних нагрузок производится с помощью так называемых **расчетных схем**. При составлении расчетных схем нагрузки, приложенную к небольшому участку поверхности бруса, все размеры которых малы по сравнению с его длиной, заменяют сосредоточенной силой, приложенной к точке поверхности, и переносят к оси бруса. Точки приложения сил на оси бруса сосредоточенных моментов, возникающих при переносе сил, располагают в тех же поперечных сечениях, в которых приложены нагрузки. На расчетной схеме вместо бруса изображается его ось. При составлении расчетной схемы конструкции применяются и другие упрощения, облегчающие ее расчет.

Нагрузки, приложенные к участкам больших размеров (например, к поверхности бруса на участке, составляющем существенную часть его длины), при составлении расчетной схемы нельзя заменять сосредоточенными силами. Такие нагрузки на расчетной схеме остаются **распределенными (не сосредоточенными)** по поверхности или приводятся к распределенным по линии.

Нагрузки, распределенные по объему тела (например, вес сооружения, силы инерции), называются **объемными силами**.

К внешним силам, действующим на элементы конструкции, кроме нагрузок — **активных сил**, относятся также реакции связей — **реактивные силы**.

**Постоянные нагрузки** (например, собственный вес конструкции) действуют на протяжении всего периода

#### 42а 42. Напряжения

Сосредоточенные внутренние силы и моменты, характеризующие взаимодействие между отдельными частями элемента (или между отдельными элементами конструкции), являются также лишь статическим эквивалентом внутренних сил, распределенных по площади сечения. Эти силы, так же как и внешние нагрузки, распределенные по поверхности, характеризуются их интенсивностью, которая равна:

$$\rho = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta R / \Delta F),$$

где  $\Delta R$  — равнодействующая внутренних сил на весьма малой площадке сечения.

Разложим силу  $\Delta R$  на две составляющие: касательную  $\Delta T$  и нормальную  $\Delta N$ , из которых первая расположена в плоскости сечения, а вторая перпендикулярна к этой плоскости. Интенсивность касательных сил в точке сечения называется **касательным напряжением** и обозначается  $\tau$ , а интенсивность нормальных сил — **нормальным напряжением** и обозначается  $\sigma$ . Напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  выражаются формулами:

$$\tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta F), \quad \sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta N / \Delta F).$$

Нормальное напряжение в определенной точке по сечению характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элемента конструкций, расположенных по обе стороны этого сечения, а касательное напряжение — интенсивность сил, сдвигающих эти частицы в плоскости рассматриваемого сечения. Величины напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  в каждой точке элемента зависят от направления сечения, проведенного через эту точку.

Нормальные и касательные напряжения имеют в сопротивлении материалов весьма важное значение, так как от их величин зависит прочность сооружения.

#### 43а 43. Фрикционные и зубчатые передачи

**Фрикционные передачи** служат для изменения угловых скоростей с постоянными или переменными передаточными отношениями для преобразования вращающихся моментов. Они состоят из пары прижатых друг к другу катков.

К **достоинствам** фрикционных передач следует отнести:

- 1) простоту изготовления катков по сравнению с зубчатыми колесами;
- 2) возможность плавного регулирования угловых скоростей в заданных пределах;
- 3) бесшумность работы;
- 4) ограничение величины передаваемого вращающего момента.

**Недостатками** фрикционных передач являются:

- 1) необходимость нажимных устройств, обеспечивающих сжимающую силу;
- 2) большие нагрузки на валы и подшипники, что ограничивает передаваемую мощность. Обычно  $N = 20$  кВт;
- 3) невозможность получения точного передаточного отношения вследствие проскальзывания катков;
- 4) большие (по сравнению с зубчатыми передачами) габариты.

Появление **зубчатых передач** относится к глубокой древности. В то время зубчатые колеса обычно изготовлялись из дерева. Меньшее зубчатое колесо было выполнено из нескольких деревянных пластин, волокна которых расположены по радиусу. В пластинках просверлено по шесть отверстий (так как окружность легко делится на шесть частей), в которых забиты цилиндрические стержни из твердого дерева. По внешнему виду это колесо не напоминает зубчатое, а так как оно имеет шесть стержней, то его называли **шестерней**.

Зубчатые передачи имеют ряд **достоинств**:

- 1) постоянство передаточного числа и компактность. При средних и малых мощностях зубчатые передачи много компактнее других, а передача больших мощ-

#### 44а 44. Основная теорема зубчатого зацепления

Возьмем одну пару сопряженных зубьев в произвольном положении. В точке касания  $K$  зубьев проведем общую нормаль  $TK$  и касательную  $TT$  к профилям зубьев. Точка  $K$ , принадлежащая зубу ведущего колеса, будет перемещаться с окружной скоростью  $v_1 = R_1\omega_1$  вокруг центра  $O_1$ , а та же точка  $K$ , принадлежащая зубу ведомого колеса, будет перемещаться с окружной скоростью  $v_2 = R_2\omega_2$  вокруг центра  $O_2$ .

Отсюда следует, что

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R_1} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{v_2}{R_2}.$$

Скорости  $v_1$  и  $v_2$  разложим на направления  $TT$  и  $NN$  и получим составляющие  $v'_1$  и  $v'_2$ , а также  $C_1C_2$ .

Если предположим, что  $v'_1 < v'_2$ , то зуб ведущего колеса должен отставать от зуба ведомого колеса, чего не может быть; если же предположить, что  $v'_1 > v'_2$ , то зуб ведущего колеса будет врезаться в зуб ведомого колеса, чего не должно быть.

Следовательно, остается единственно правильное предположение, что  $v'_1 = v'_2$ .

Из подобных треугольников  $KDB$  и  $KO_1n$ , а также  $KO_2m$  и  $KD'B'$  со взаимно перпендикулярными сторонами следует, что:

$$\frac{v'_1}{\rho_1} = \frac{v_1}{R_1} \quad \text{и} \quad \frac{v'_2}{\rho_2} = \frac{v_2}{R_2},$$

откуда

$$v'_1 = \frac{v_1}{R_1} \rho_1 = \omega_1 \rho_1, \quad v'_2 = \frac{v_2}{R_2} \rho_2 = \omega_2 \rho_2.$$

**426** Нормальные и касательные напряжения в каждом поперечном сечении бруса связаны определенными зависимостями с внутренними усилиями, действующими в этом сечении.

**Контактные напряжения**

Во многих узлах машин, в том числе во фрикционных зубчатых и червячных передачах, усилия от данной детали к другой передаются путем непосредственного контакта их рабочих поверхностей.

Если начальный контакт представляет собой точку, то под действием нормальной силы на поверхность контакта возникают местные деформации. Вследствие этого начальный точечный контакт переходит в контакт по малой площадке, имеющей в общем случае форму эллипса.

При начальном (без нагрузки) контакте по линии, что имеет место во фрикционных передачах с цилиндрическими или коническими катками и в зубчатых передачах с прямыми зубьями, в результате деформации получается площадка контакта в виде весьма узкой прямоугольной полоски.

Силы взаимодействия между деталями распределены по ширине указанной площадки неравномерно, в точках средней линии площадки контакта давление максимально. В материале контактирующих деталей возникает объемное напряженное состояние — трехосное сжатие; при этом наибольшие по абсолютной величине напряжения для точек средней линии контактной полоски равны внешнему давлению на единицу длины.

**416** эксплуатации конструкции. **Временные нагрузки** (например, вес поезда) действуют в течение ограниченного промежутка времени. Величина статической нагрузки медленно возрастает от нуля до ее конечного значения, а потому эта нагрузка вызывает в конструкции весьма малые ускорения, в связи с чем возникающими при этом силами инерции можно в расчете пренебречь. **Динамическая нагрузка** (например, ударная) вызывает в конструкции или отдельных ее элементах большие ускорения, которыми при расчете пренебречь нельзя. Величина этой нагрузки значительно изменяется за малые промежутки времени.

Временная нагрузка может сохранять более или менее постоянную величину в течение всего периода ее действия, а может непрерывно изменяться по некоторому закону; в последнем случае она называется **переменной нагрузкой**.

Если переменная нагрузка изменяется по циклическому (повторяющемуся) закону, то она называется **циклической**.

**446** Но так как  $v_1' = v_2'$ , то  $\omega_1 \rho_1 = \omega_2 \rho_2$ ; передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Очевидно, что передаточное отношение  $i$  будет постоянным в том случае, если будет постоянным отношение радиусов  $r_2$  и  $r_1$ .

Эту основную теорему зубчатого зацепления можно сформулировать так: нормаль в точке контакта профилей делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Для обеспечения постоянного передаточного отношения профили зубьев должны быть такими, чтобы общая нормаль  $NN$  в точке контакта профилей проходила через неизменную точку  $P$  на линии центров  $O_1O_2$  и тем самым делила бы последнюю в неизменном отношении:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1} = \text{const.}$$

Точку  $P$  называют **полосом зацепления**, а отрезок  $NP$  нормали  $NN$  — **линией зацепления**.

Окружности, очерченные радиусами  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , называют **основными**. Для построения профилей зубьев обычно используют эвольвенту и циклические кривые, в соответствии с чем различают эвольвентные и циклоидные профили зубьев.

**436** ностей (до 50 000 кВт и более) вообще неосуществима без зубчатых передач;

2) высокий КПД. При хорошей смазке потери мощности в зацеплении одной пары зубчатых колес не более 1—3%;

3) большой срок службы. Если передача надежно защищена от пыли и грязи, то при хорошей смазке правильно спроектированная и хорошо изготовленная зубчатая передача работает весьма длительное время без заметного износа;

4) простота ухода. Надежно защищенные от пыли и грязи передачи требуют лишь периодической смены масла;

5) не дефицитность материалов. Для зубчатых передач общего назначения можно использовать углеродистые или низколегированные стали, а также чугуны.

К **недостаткам** зубчатых передач относится следующее:

1) для изготовления среднескоростных и быстроходных передач требуются специальные высокой точности станки и режущие инструменты;

2) зубчатые передачи в отличие от фрикционных и ременных не могут быть предельными и при перегрузке не предохраняют от поломки другие детали машины;

3) зубчатые передачи не смягчают вибраций, а в ряде случаев могут сами создавать вибрации;

4) посредством только зубчатых передач нельзя осуществить бесступенчатое, плавное изменение передаточного числа;

5) при большом расстоянии между осями валов передача одной парой колес получается очень громоздкой по сравнению с ременной или цепной передачей.



45а

#### 45. Материалы, термическая и термохимическая обработки

Для стальных колес существуют следующие **способы термической и термохимической обработки**.

1. **Нормализация**, т. е. нагрев несколько выше верхней критической точки и охлаждение в спокойном воздухе. Этой обработке подвергаются заготовки, полученные поковкой или штамповкой, для снятия наклепа и получения равномерной структуры и твердости во всей массе заготовки. Нормализации подвергаются также литые стальные заготовки для снятия литейных напряжений в местах сопряжений спиц с ободом и для улучшения структуры металла по всему ободу. Нормализации подвергаются углеродистые стали марок Ст5 и 6, а также качественные стали марок 40, 45, 50.

2. **Улучшение**, т. е. нагрев до 550—650 °С (в зависимости от химического состава), закалка и высокий отпуск. Улучшенные стали хорошо поддаются чистовой обработке. Улучшению обычно подвергаются стали 40, 45, 50, 50Г и легированные — 50С2Г, 40Х, 40ХН, 35ХГС, 30ХНЗМ и др.

3. **Цементация**, т. е. поверхностное науглероживание и закалка, применяется для хромистых сталей 15Х и 20Х. Для особо ответственных передач с возможными перегрузками и ударными нагрузками для цементации применяются стали 12ХНЗА, 15ХФ, 18ХГТ, 18ХНВА, 20Х2Н4А.

Углеродистые стали для зубчатых колес цементации не подвергаются, так как науглероженный закаленный слой имеет свойство отслаиваться от сердцевины зуба.

4. **Азотирование** — насыщение азотом поверхностного слоя толщиной 0,1—0,3 мм в специальных печах сухим аммиаком при  $t = 490—560$  °С. После закалки азотированный слой имеет особо высокую твердость, но так как он очень тонкий, то при ударных нагрузках может продавливаться.

46а

#### 46. Червячные передачи

Червячная передача состоит из червяка (винта) и червячного колеса (гайки). Рассмотрим процесс передачи движения от червяка к колесу.

Винт 1 и гайку 2 с трапецидальной резьбой установим в опорах так, чтобы винт мог вращаться вокруг своей оси, но не мог перемещаться вдоль нее. Очевидно, что при вращении винта гайка будет перемещаться вдоль него. Далее поступим так: возьмем длинную гайку, разрежем ее в продольном направлении и оставим только сектор, заштрихованный на чертеже. Этот сектор будет совершать те же перемещения, что и целая гайка.

Теперь выберем центр  $O$ , выгнем по кругу сектор гайки резьбой наружу относительно этого центра и соединим концы сектора. Мы получим червячное колесо.

При вращении червяка колесо будет вращаться вокруг своей оси, перпендикулярной оси червяка и не лежащей с ним в одной плоскости.

При повороте однозаходного червяка (рис. 26а) на один оборот зуб червячного колеса переместится по начальной окружности на один шаг  $t_s$ . На рис. 26а, б, в видно, что независимо от числа заходов червяка между двумя витками червяка может поместиться только один зуб червячного колеса. Таким образом, шаг червяка должен быть равен шагу колеса. За время одного оборота двухзаходного (рис. 26б) или трехзаходного червяка (рис. 26в) зуб колеса соответственно сместится на  $2t_s$  или на  $3t_s$ .

Червячные передачи применяются в машиностроении в тех случаях, когда оси ведущего и ведомого валов перекрещиваются, т. е. лежат не в одной, а в двух плоскостях. Оси могут находиться друг к другу под углом  $\sigma \neq 90^\circ$ , но обычно — под углом  $\sigma = 90^\circ$ .

Показанные на рис. 26 червяки имеют резьбу трапецидального профиля в осевой плоскости сечения. Если такой червяк расщепить плоскостью, перпендикулярной оси червяка, то сечение витка будет очерчено по

47а

#### 47. Корректирование червячных передач и коэффициент полезного действия и усилия в червячном зацеплении

Для червячных редукторов с целью уменьшения числа типоразмеров корпусов установлены стандартные межосевые расстояния  $A$ , мм (80; 100; 120; 150; 180; 210; 240; 270; 300; 360; 420; 480; 540; 600). Для червячных передач, являющихся узлами машин, желательно применять межосевые расстояния, оканчивающиеся на 0 и 5. Для получения указанных межосевых расстояний применяют корректирование передач. Нарезание зубьев некорректированных колес и корректирование производят одной и той же фрезой, имеющей размеры парного червяка. Поэтому корректированию подвергается только червячное колесо путем смещения фрезы, как это делается и для зубчатых передач.

С изменением  $A$  у корректированного червячного колеса размеры  $D_{вк}$  и  $D_{вк}$  отличаются от размеров некорректированного колеса.

Коэффициент сдвига  $\xi$  определяется:

$$\xi = \frac{A}{m} - 0,5(q + z_K).$$

Межосевое расстояние

$$A = 0,5m(q + z_K + 2\xi).$$

Диаметр впадин

$$D_{вк} = m(z_K + 2\xi - 2,4).$$

Диаметр выступов

$$D_{вк} = m(z_K + 2\xi + 2).$$

48а

#### 48. Материалы и конструкции плоских ремней

Кожаные ремни однослойные или двухслойные изготавливаются из полос кожи крупного рогатого скота. Концы полос срезаются «на ус» и склеиваются специальным клеем или сшиваются ушивальником из сыромятной кожи.

Места стыков полос в двухслойных (двойных) ремнях не должны совпадать. Обе полосы должны быть прошиты по всей длине ремня.

Прорезиненные ремни бывают:

- 1) **нарезные** с резиновыми прослойками между слоями ткани; выполняются разной ширины нарезанием лент из широкой заготовки; эти ремни могут применяться в пыльных и сухих помещениях при высокой температуре;
- 2) **завернутые** — эти ремни не имеют резиновых прослоек и могут применяться в сырых помещениях, где воздух содержит пары воды и кислот.

Прорезиненные ремни надо тщательно оберегать от попадания на них минеральных масел.

Хлопчатобумажные тканые ремни можно применять при неравномерной и переменной нагрузках, но при сильных колебаниях нагрузки, толчках и ударах применять их не рекомендуется.

Хлопчатобумажные шитые и тканые ремни чувствительны к воздействию паров щелочей и кислот, применяются в сухих помещениях при температуре до 50 °С и совершенно непригодны для работы в сырых помещениях с большими колебаниями температуры.

Шерстяные тканые ремни изготавливаются с основой из шерсти; они обладают значительной упругостью и пригодны для работы с неравномерной и ударной нагрузкой. Эти ремни, будучи пропитаны специальными составами, малочувствительны к колебаниям влажности и температуры и более стойки, чем все остальные ремни, при воздействии пыли, кислот, едких паров, газов и др.

**466** архимедовой спирали (рис. 26г). Такие червяки называются архимедовыми.

В настоящее время получают распространение так называемые звольвентные червяки. Если такой червяк расщеп плоскостью, перпендикулярной оси червяка, то сечение нитки будет очерчено по звольвенте.

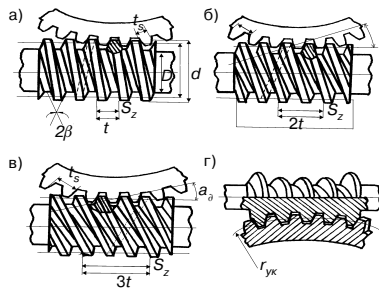


Рис. 26

**486** Шелковые ремни изготавливаются из искусственного шелка; они достаточно прочны, эластичны, легки, тонки. Применяются при больших окружных скоростях.

Прорезиненные и шитые хлопчатобумажные ремни в силу многослойности требуют шкивов большего диаметра по сравнению с кожаными, хлопчатобумажными ткаными и шерстяными ремнями.

Наименьшие диаметры требуются при шелковых ремнях, имеющих наименьшую толщину. Для различных условий работы ремня (температура, влажность, вредные пары, кислоты, щелочи, пыль, минеральные масла, характер нагрузки) следует подбирать наиболее подходящие ремни.

Кожаные и резиновые ремни соединяются склейкой специальными клеями, нечувствительными к влаге. Концы ремней склеиваются, склеиваемые поверхности покрываются клеем и сушатся под прессом. Концы склеенных ремней полезно закрепить тонкой (1 мм) жильной струной. Эти же ремни часто сшиваются ушивальниками из сыромятной кожи.

**456** 5. Цианирование, т. е. насыщение на глубину 0,1—0,3 мм углеродом и азотом, бывает низко-, средне- и высокотемпературным. При низкотемпературном цианировании насыщенный азотом слой приобретает высокую твердость и закалке не подвергается.

При выборе материалов и назначении термической или термохимической обработки следует иметь в виду, что зубья шестерен по сравнению с зубьями колес подвергаются большему наклепу и износу, пропорциональному передаточному числу.

Поэтому чем больше  $t$ , тем прочнее и тверже должен быть материал шестерни по сравнению с материалом колеса. Здесь имеются в виду металлы, а не пластмассы.

**476** Часть подводимой к передаче мощности затрачивается на трение винта и гайки, а часть — на трение зубьев колеса по профилям витков червяка, на трение в опорах и на перемешивание масла внутри корпуса редуктора. Когда мощность передается от червяка к колесу, получаем КПД передачи

$$\eta_{ч.л.} = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda_0 + \rho)}$$

При передаче вращения от колеса к червяку

$$\eta_{к.ч.} = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_0 - \rho)}{\operatorname{tg} \lambda_0}$$

где  $j$  — коэффициент, учитывающий потери в зацеплении, в опорах и на перемешивание масла.

В зависимости от вида подшипников и вязкости масла  $\varphi = 0,94—0,97$ .

КПД червячных передач значительно ниже зубчатых, и это является их основным недостатком. Затрата мощности на трение переходит в тепло, вследствие чего червячные передачи могут сильно нагреваться.

Из условия равенства работ на ведущем и ведомом валах передачи можно получить зависимость между вращающимися моментами на валах червячного колеса и червяка:

$$M_K = M_{ч.к} j \eta_{ч.к}$$

где  $M_K$  — вращающий момент на валу колеса;

$M_{ч.к}$  — вращающий момент на червяке;

$i_{ч.к}$  — передаточное отношение между червяком

и колесом;

$\eta_{ч.к}$  — КПД передачи при передаче вращения от червяка к колесу.

**49а Шкивы ременных передач. Цепные передачи**

В машиностроении применяются шкивы из чугуна, стали, алюминиевых сплавов и из дерева.

Чугунные шкивы используются при окружных скоростях  $v \leq 30$  м/сек, при  $v > 30$  м/сек применяются стальные литые и сварные шкивы, а деревянные — при  $v \leq 15$  м/сек.

Разъемные шкивы выполняются с разъемом по спицам или между спицами.

При ширине шкива  $B > 300$  мм делают два ряда спиц. Стальные сварные шкивы выполняются из прокатного листового и тянутого круглого материала.

Рядом с рабочим шкивом на валу станка или промежуточной трансмиссии часто устанавливают холостой шкив. В этом случае ширина ведущего шкива берется равной

$$B_1 = 2B + \Delta B,$$

где  $\Delta B = 1-3$  мм.

По мере необходимости ремень с помощью передовного устройства (вилки) перемещают или на рабочий шкив, и тогда механизм станка придет в движение, или на холостой шкив, и тогда он будет вращаться на втулке, а станок будет находиться в покое.

Ступенчатые шкивы применяются в тех случаях, когда требуется изменять число оборотов ведомого вала при постоянном числе оборотов ведущего вала. На ведущем валу ступени шкива направлены в противоположную сторону. Ступенчатый шкив, состоящий из 2-4 шкивов разных диаметров, является одной деталью с одной ступицей и с внутренними ребрами жесткости, выполняющими также функции спиц.

Деревянные шкивы небольших диаметров (до 500 мм) выполняются из деревянных секторов, расположенных в несколько рядов. Набор хорошо подогнанных и промазанных клеем секторов скрепляют посред-

**50а Оси и валы**

Оси служат для поддержания вращающихся деталей. Оси бывают вращающиеся и невращающиеся. На рис. 27а изображен канатный блок 4, вращающийся относительно неподвижной оси 1, а сама ось своими концами закреплена в серьгах 2 посредством шпона 3. Эта ось — невращающаяся. Между ступицей блока и серьгой помещена втулка 5, фиксирующая положение блока на оси. На рис. 27б блок закреплен шпонкой на оси, а ось вращается в серьгах. Эта ось — вращающаяся. Оси подвергаются только изгибу: они не воспринимают и не передают вращающих моментов. Невращающиеся оси рассчитывают по первому случаю нагрузки, когда она постоянная, и по второму случаю нагрузки — когда она меняется от  $p_{\min}$  до  $p_{\max}$ . Вращающиеся оси независимо от рода нагрузки всегда рассчитывают по третьему роду нагрузки, так как меняется положение волокон осей: они то растягиваются, то сжимаются. Валы, как и оси, служат для поддержания деталей, чаще всего — закрепленных на них.

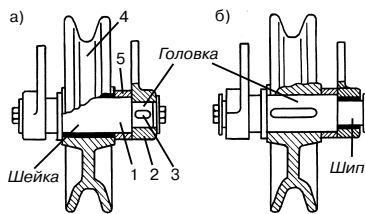


Рис. 27

Во время работы машины валы всегда вращаются: они воспринимают и передают вращающие моменты.

**51а Расчет вала на жесткость при кручении. Полые валы и оси**

На рис. 28 показан взаимный поворот на угол  $\varphi$  двух поперечных сечений вала, расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга. Угол  $\varphi$  называется **углом закручивания**. Во многих случаях по условиям кинематики механизма угол закручивания вала ограничивается вперед заданной величиной, т. е. вал должен обладать необходимой жесткостью на кручение. Поскольку, как известно из курса сопротивления материалов, угол закручивания участка вала зависит от его длины, обычно расчет ведут по углу закручивания на единицу длины. Обозначая этот, как его называют, **относительный угол закручивания**  $\theta$ , а его допустимое значение  $[\theta]$ , получаем условие жесткости  $\theta \leq [\theta]$ .

Учитывая, что

$$\varphi = \frac{M_K L}{GJ_P} \text{ и } \theta = \frac{\varphi}{L},$$

можем представить условие жесткости в виде:

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_P} \leq [\theta].$$

Из формулы вытекает зависимость для определения диаметра вала по условию жесткости на кручение (проектный расчет на жесткость):

$$d = \sqrt[4]{\frac{M_K}{0,1G[\theta]}}$$

При указанных выше единицах измерения  $d$  получается в метрах.

**52а Проверка жесткости вала при изгибе. Кривошипные и коленчатые валы**

Расчет на прочность не всегда обеспечивает достаточную жесткость вала. Между тем, если перемещения (прогибы, углы поворота), обусловленные **упругими деформациями валов**, будут недопустимо велики, то они вызовут нарушение правильности работы деталей, сидящих на валах. Так, перекашивание цапфы в опоре влечет за собой неравномерный износ, нагревание и др.; в редукторах значительный прогиб вала приводит к неравномерности распределения нагрузки по длине зубьев зубчатых колес и т. п.

Поэтому в ряде случаев валы рассчитывают на жесткость при изгибе, определяя перемещения по формулам, полученным в курсе сопротивления материалов. Общепринятых норм допустимых величин перемещений (прогибов и углов поворота) не существует; они определяются в каждом отдельном случае конкретными условиями. В общем машиностроении наибольший допустимый прогиб вала часто берут

$$[y_{\max}] = 0,003L,$$

где  $L$  — расстояние между опорами.

Для валов станков, где требуется повышенная жесткость, эта норма  $[y_{\max}] = 0,002L$ .

В зубчатых передачах (коробки скоростей, зубчатые редукторы и другие) допустимую величину прогиба вала иногда определяют как:

$$[y_{\max}] = (0,005-0,03)m,$$

где  $m$  — модуль зубчатых колес, расположенных на данных валах. Наибольший допустимый угол поворота опорного сечения вала обычно:

$$[\varphi] = 0,001 \text{ рад.}$$

**506** Валы бывают **прямые, кривошипные и коленчатые**. Их рассчитывают на кручение, на кручение с изгибом, растяжением, сжатием. На осях и валах имеются участки, носящие определенные названия. Участки, помещающиеся в опорах, называют **цапфами**. Если цапфа расположена на конце оси или вала, то ее называют **шипом**, а если в средней части — то **шейкой**. Опоры, в которых помещаются цапфы, называют **подшипниками**. Участки, на которых крепят вращающиеся детали, называют **подступичными частями (головками)**.

**496** ством стальных пластин и болтов так, что каждый сектор стягивается двумя болтами. После просушки и окончательного стягивания болтами шкив обрабатывается на токарном станке: обтачиваются диски, обод, отверстие для вала. Центрирование и установка на станке при обработке должны производиться по окружности центров болтов.

**Цепные передачи**

Цепные передачи по сравнению с другими имеют следующие **достоинства**:

- 1) возможность передавать вращательное движение на большие по сравнению с зубчатыми передачами расстояния;
- 2) возможность привода в движение одной цепью нескольких валов;
- 3) возможность передавать большие мощности и большие окружные усилия;
- 4) компактность по сравнению с ременной передачей;
- 5) меньшее давление на валы;
- 6) большой диапазон окружных скоростей;
- 7) сравнительно высокий КПД — 0,96—0,98.

**Недостатками** передачи являются:

- 1) удлинение цепи вследствие износа шарниров;
- 2) более тщательный монтаж по сравнению с ременными передачами;
- 3) сложность подвода смазки к шарнирам цепи;
- 4) невозможность передачи движения между непараллельными валами;
- 5) повышенный по сравнению с ременными шум при работе.

**526 Кривошипные и коленчатые валы**

Эти валы применяют в устройствах для преобразования возвратно-поступательного движения во вращательное, и наоборот.

Кривошипные валы называются так потому, что концевые цапфы (шпильки), закрепленные одним концом в щеках, находятся на расстоянии от оси вращения вала. Шейки, называемые **коренными**, помещаются в опорах. Кривошипные валы могут иметь не более двух шпилек, к которым присоединяются шатуны.

Коленчатый вал может иметь шпильку на оси, если для передачи вращающего момента используется только один конец вала, и не иметь шпилек, если используются оба конца вала.

Шейка, закрепленная обоими концами в щеках, называется **коленом**. Для соединения с шатунами коленчатый вал может иметь одно, два колена и более.

**516** Нормы жесткости (значения  $\theta$ ), принятые в различных отраслях машиностроения, отличаются большим разнообразием.

В целях уменьшения собственного веса валов и осей, а также для пропуска сквозь них других деталей их выполняют пустотелыми. На рис. 29 изображено поперечное сечение такого вала (или оси). Штриховой окружностью показана пропущенная сквозь вал деталь.

**Моменты сопротивления кольцевого сечения:** полярный —

$$W_p \approx 0,2 \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1}$$

осевой —

$$W_{\text{ц}} \approx 0,1 \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1}$$

Для исключения одного неизвестного задаются отношением  $d_2/d_1 = \alpha < 1$ , откуда  $d_2 = \alpha d_1$ .

**Расчетные формулы:**

1) для расчета оси —

$$\sigma_u = \frac{Mu}{0,1d^3(1-\alpha^4)} \leq [\sigma_u]_{\text{III}}$$

2) для расчета вала на кручение —

$$\tau_K = \frac{Mu}{0,2d^3(1-\alpha^4)} \leq [\tau_K]$$

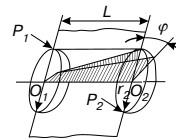


Рис. 28

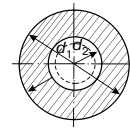


Рис. 29

**53а** **53. Разъемные и неразъемные подшипники скольжения и материалы вкладышей**

**Неразъемный подшипник** представляет собой цельную втулку с фланцем, которым подшипник крепится к станине. Неразъемные подшипники имеют широкое применение в ручных лебедках, в станках — как опоры ходовых винтов и ходовых валиков, во многих механизмах и приборах, где они часто бывают частью станины. Эти подшипники можно применять в тех случаях, когда валы или оси вращаются с малой угловой скоростью или со значительной скоростью, но при небольших давлениях на подшипник. Как в том, так и в другом случае работа силы трения между трущимися поверхностями цапфы и подшипника будет незначительной, и, следовательно, износ трущихся поверхностей также будет небольшим.

**Разъемный подшипник** состоит из корпуса, крышки и вкладышей. Корпус болтами, проходящими через отверстия в лапах, прикрепляется к какому-либо основанию (настенный угольник, фундамент, рама или станина машины). Корпус подшипника может быть и частью станины. Через отверстия в крышке и в корпусе проходят болты для крепления крышки к корпусу подшипника. Вместо болтов в корпус могут быть ввернуты шпильки. Бронзовая втулка разрезана по образующей на две части, называемые вкладышами: верхний и нижний. Вкладыши должны плотно, без зазора, прилегать друг к другу. По мере износа вкладышей и образования зазора между ними и цапфой вкладыши в месте их касания припиливают или убирают установленные ранее прокладки и вновь плотно стягивают.

**Подпятники скольжения**

Подпятники воспринимают нагрузку, направленную вдоль оси вращения. Подпятник состоит из литого стального или чугунного корпуса, крышки, прикрепленной к корпусу винтами, бронзового вкладыша и бронзового или закаленного стального опорного вкладыша.

**54а** **54. Опоры корпусов подшипников**

Корпуса подшипников скольжения или качения обычно конструируют как часть рамы, станины или корпуса, например в редукторах.

В тех случаях, когда валы установлены не в корпусах машин, применяют подшипники, выполненные как самостоятельные узлы в отдельных корпусах.

В этих случаях корпуса подшипников прикрепляют к потолку, стене или к полу посредством так называемых подвесок, кронштейнов, стоек или башмаков.

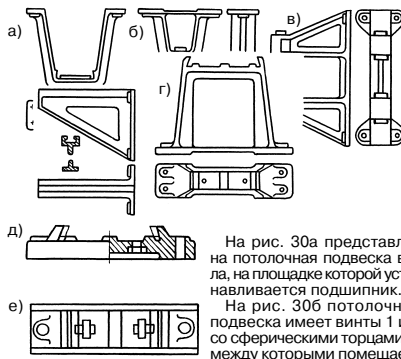


Рис. 30

На рис. 30а представлено потолочная подвеска вала, на площадке которой устанавливается подшипник. На рис. 30б потолочная подвеска имеет винты 1 и 2 со сферическими торцами 3, между которыми помещается самоустанавливающийся подшипник. На рис. 30в представлен настенный кронштейн, имеющий винты со сферическими торцами для самоустанавливающегося подшипника, а на рис. 30г — на-

**55а** **55. Муфты жесткие неразъемные. Муфты кулачковые жесткие подвижные**

Устройства, называемые **муфтами**, служат для соединения труб, электрокабелей, стержней и другого, а в машиностроении — для соединения валов.

Жесткая неразъемная муфта представляет собой втулку, в которой помещают концы валов. Чтобы валы не проворачивались относительно муфты, в ней делают шпоночные канавки.

В зависимости от диаметра вала по таблицам ГОСТа определяют сечение шпонки  $b \times h$ , а длину ее  $l$  — находят из условия прочности на смятие материала вала (муфты) по уравнению:

$$l = \frac{Mk}{\frac{h}{2} \times \frac{d}{2} [\sigma_{см}]}$$

где  $M$  — вращающий момент;  
 $d$  — диаметр вала;  
 $[\sigma_{см}]$  — допускаемое напряжение на смятие;  
 $k$  — коэффициент режима работы.

Диаметр  $d_1$  муфты определяют из условия прочности на кручение по уравнению:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{Mk}{0,2(1-\alpha^4)[\tau_K]}}$$

где  $[\tau_K]$  — допускаемое напряжение;

$$\alpha = \frac{d}{d_1} \approx (0,6 - 0,8),$$

$k = 1,15/5$  в зависимости от рода двигателя, типа производственной машины (станка).

**56а** **56. Клиновые соединения. Зубчатые и штифтовые соединения**

Клиновые соединения относятся к числу разъемных и состоят из стальных стержня и клина и стальной или чугунной втулки.

В цилиндрическом стержне и во втулке имеются отверстия для клина. Если приложить усилие  $Q$  к клину, то он будет перемещаться, создавая давление на стержень и втулку, которые имеют возможность переместиться относительно друг друга на величину зазора. При этом в деталях соединения не будут возникать какие-либо деформации и напряжения.

**Зубчатые (шлицевые) соединения**

Для этого типа соединений вал фрезеруют так, что продольные выступы образуют как бы несколько зубьев (шпонок), расположенных по окружности. В ступице, сидящей на валу детали, делается отверстие с пазами соответствующей формы посредством инструмента, называемого протяжкой.

Рабочими поверхностями, так же как и в призматическом шпоночном соединении, являются боковые поверхности зубьев вала и ступицы.

Эти стороны (в поперечном сечении) могут быть плоскими параллельными, плоскими наклонными и криволинейными, очерченными по эвольвенте. Центрирование сидящей на валу детали с выступами может осуществляться по внешнему диаметру вала или по внутреннему, или по боковым сторонам выступов, а центрирование — только по боковым сторонам.

Размеры элементов прямобоковых соединений и эвольвентных выбираются по ГОСТу.

Эвольвентные шлицевые соединения хорошо центрируют детали на валу. Зубья этих соединений утолщаются к основанию, имеют меньшую концентрацию напряжений, и следовательно, прочнее по сравнению с выступами. В тех случаях, когда допустимая несоос-

**546** стальной кронштейн для крепления подшипника. Паз 1 дает возможность перемещать подшипник вдоль опорной поверхности 2.

Стойка на рис. 30д служит для крепления подшипника на поверхности 1 при установке трансмиссии на полу. Башмак на рис. 30е применяется для крепления подшипников на фундаменте. Наклонные поверхности  $\Gamma$  служат для более точного перемещения подшипника вдоль опорной поверхности посредством клиньев  $K$ .

**536** Благодаря вкладышу такая опора может также воспринимать и радиальную нагрузку.

В целях самоустановки опорный вкладыш опирается на корпус сферической поверхностью, а от проворачивания предохраняется стопорным штифтом, запрессованным в корпус. Масло для смазки подшипника подается снизу; оно смазывает торцовую опорную поверхность пяты и цилиндрическую поверхность вкладыша, откуда через сборник крышки направляется в маслоотводящую трубку.

**Материалы вкладышей**

Серый чугун, имеющий в своем составе свободный углерод в виде графита, обладает хорошими антифрикционными свойствами.

Бронзовые вкладыши имеют наиболее широкое распространение при всевозможных режимах работы, так как в случае нагревания подшипника не происходит задиранья поверхности цапфы.

Баббиты применяют для заливки чугунных, стальных и бронзовых вкладышей. Баббит хорошо и быстро прирабатывается к цапфе.

**566** ность вала и сидящей на нем детали ограничена жесткими пределами, центрирование соединения боковыми гранями применить нельзя.

Если деталь в процессе работы должна перемещаться вдоль вала, то выступы делают на валу по всей длине продольного хода детали.

**Штифтовые соединения**

Штифтовое соединение отличается простотой изготовления. Отверстие для штифта сверлится одновременно в ступице и в вале, после чего обрабатывается разверткой. Недостатком штифтового соединения является значительное ослабление вала отверстием под штифт. Поэтому это соединение не рекомендуется применять для крепления деталей в средней части вала и особенно тогда, когда вращающий момент передается в обе стороны вала.

В ответственных машинах, где возможна случайная перегрузка, например в продольно-строгальных станках с реечной подачей стола, это соединение применяется как средство предохранения от поломки ответственных деталей.

**556** Шкивы, свободно вращающиеся в разные стороны на валу, имеют боковые выступы — кулачки. Муфта имеет с обеих сторон такие же кулачки. Перемещаясь вдоль вала по направляющей шпонке, муфта входит своими кулачками в соответствующие впадины правого или левого шкива и включает вал во вращение в ту или другую сторону.

Размеры кулачковой муфты определяют конструктивно, выступы проверяют на прочность — на изгиб и на смятие. На изгиб кулачки проверяют по уравнению:

$$\sigma_u = \frac{M_u}{zW_u} = \frac{6 \times 97400Nkh}{zd_{cp}b^2an} \leq [\sigma_u] \text{ кг/см}^2$$

или

$$\sigma_u = \frac{kM_u h}{W_u d_{cp} z} \leq [\sigma_u] \text{ кг/см}^2,$$

где  $[\sigma_u] = (700—800) \text{ кг/см}^2$  для сталей Ст5 и Ст6;

$[\sigma_u] = (150—180) \text{ кг/см}^2$  для чугуна;

$b$  — длина кулачка по среднему диаметру;

$a$  — толщина кулачка;

$z$  — число кулачков;

$M$  — вращающий момент на валах;

$N$  — мощность в квт;

$W$  — число оборотов в минуту;

$h$  — высота кулачка;

$d_{cp}$  — средний диаметр кулачков.

Предполагая, что давление на рабочую поверхность  $F_1$  распределяется равномерно, уравнение для проверки на смятие получим в таком виде:

$$\sigma_{cm} = \frac{P_{OKPK}}{F_1} = \frac{2M_{KPK}}{zhd_{CP}} \leq [\sigma_{cm}].$$