МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
(ДДТУ)

Л. М. Мамаєв

О. В. Нікулін

В. Ю. Солод

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Кам'янське
«ДДТУ»
2018

УДК 531.8 (07)
М22

Рецензенти:

В. В. Лобода — д-р фіз.-мат. наук, проф., Дніпровський національний університет ім. О. Гончара;

С. В. Ракша — д-р техн. наук, проф., Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна:

В. І. Лавріненко — д-р техн. наук, проф., Інститут надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-23.2-43 від 25.10.2018 р.)

Мамаєв Л. М.
М22 Збірник задач з теоретичної механіки : навч. посіб. / Л. М. Мамаєв, О. В. Нікулін, В. Ю. Солод. — Кам'янське : ДДТУ, 2018. — 247 с.

ISBN 978-966-175-181-0

Посібник написано відповідно з навчальними і робочими програмами дисципліни теоретична механіка за результатами науково-педагогічної діяльності у галузях механічних спеціальностей технічного університету. В стислій формі представлені теоретичні відомості, які проілюстровані розв'язанням задач, прикладів та тестів зі статики, кінематики і динаміки. Наведено варіанти індивідуальних завдань для самостійної роботи і зразки виконання цих завдань.

Для науково-педагогічних працівників, аспірантів і студентів технічних університетів й академій.

ISBN 978-966-175-181-0 **УДК 531.8 (07)**

© Л. М. Мамаєв, О. В. Нікулін,
В. Ю. Солод, 2018
© ДДТУ, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП 5
РОЗДІЛ 1. СТАТИКА..... 10
1.1. Основні поняття і визначення статики.
Аксіоми, теореми та їх наслідки 10
1.2. Приклади розв'язування задач
на рівновагу плоскої системи сил 27
1.3. Приклади розв'язування задач
на рівновагу просторової системи сил 38
1.4. Приклади розв'язування задач
на рівновагу при дії тертя і знаходження центру ваги 45
Тестове завдання зі статики..... 51
Контрольні запитання зі статики 60
1.5. Варіанти індивідуальних завдань зі статики 61
РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА..... 73
2.1. Кінематика точки, поступальний рух тіла 73
2.2. Обертальний рух твердого тіла..... 85
2.3. Плоский рух твердого тіла 93
2.4. Складний рух точки.
Випадок переносного обертального руху 103
Тестове завдання з кінематики..... 112
Контрольні запитання з кінематики 121
2.5. Варіанти індивідуальних завдань з кінематики 122
РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА..... 130
3.1. Динаміка матеріальної точки 130
3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки..... 132
3.3. Перша задача динаміки точки..... 134
3.4. Друга (обернена) задача динаміки..... 134
3.5. Коливальний рух матеріальної точки..... 139
3.6. Динаміка відносного руху точки 150
3.7. Розв'язання задач на застосування
основного закону динаміки відносного руху точки 152
3.8. Диференціальні рівняння руху
системи матеріальних точок..... 156
3.9. Центр мас. Моменти інерції тіл 158

3.10. Загальні теореми динаміки механічної системи 162
3.10.1. Теорема про рух центра мас механічної системи 162
3.10.2. Теорема про зміну кількості руху..... 168
3.10.3. Теорема про зміну головного моменту кількості руху..... 172
3.10.4. Теорема про зміну кінетичної енергії 178
ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ 188
3.11. Метод кінетостатики (принцип Д'Аламбера) 188
3.12. Принцип можливих переміщень (принцип Лагранжа) 193
3.13. Динаміка в аналітичної механіці 197
3.14. Обчислення узагальнених сил..... 199
3.15. Розв'язання задач з використанням рівнянь Лагранжа 201
Тестове завдання з динаміки 204
Контрольні запитання з динаміки..... 214
3.16. Варіанти індивідуальних завдань з динаміки..... 215

ДОДАТКИ 227
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК — СЛОВНИК 240
ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ..... 245

ВСТУП

Україна вбудовується в світовий освітній простір і на нинішньому етапі розвитку привабливою є перспектива різнобічної модернізації процесів навчання. Один з обраних напрямів діяльності пов'язаний з вдосконаленням наявних розробок в існуючому методичному забезпеченні освітніх процесів та подальшому практичному розвитку механічної підготовки майбутніх фахівців. Тому чималий науковий та практичний інтерес представляють використання як структури, так елементів і підсистем дисципліни теоретична механіка в технічному університеті на прикладі ДДТУ.

Ефективним методом активізації навчального процесу є самостійна робота студентів. Людина, яка навчилась самостійно працювати з підручником або посібником, спроможна в подальшому поглиблювати свої компетентності та одержує привабну перспективу рухатись вперед.

Відомо, що теоретична механіка є однією з фундаментальних наук про природу, предмет дослідження цієї науки – механічний рух і механічні взаємодії твердих тіл та їх систем. Загальні аксіоми теоретичної механіки відображають фундаментальні закони механіки. Вона є науковою основою для багатьох галузей сучасної техніки та інженерних дисциплін (опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин, динаміки машин тощо). Для глибокого засвоєння матеріалу, який вивчається в теоретичній механіці, потрібні не тільки знання теорії, а й вміння використовувати їх при розв’язанні конкретних задач з кожного розділу курсу. Тому не випадково студентам пропонується виконати індивідуальні розрахунково-графічні завдання, які містять визначену кількість задач. Практика показує, що оволодіння способами розв’язку задач можливе як результат трудомісткого процесу для студентів. Це пояснюється тим, що у багатьох випадках для них складними є представлення конкретної задачі в абстрактній математичній формі та подальша реалізація отриманої моделі. Тому виникає необхідність у підготовці різного роду методичних вказівок та навчальних посібників, які б зорієнтували самостійну роботу студентів, допомогли б їм придбати навички у розв’язанні задач. Пропонується можливе рішення названої проблеми як подальший розвиток посібника [1] на основі набутого досвіду. Для досягнення мети можуть бути використані вдосконалені дидактичні технології, що дають змогу розробки і впровадження відповідної системи тестування з теоретичної механіки. Вони також забезпечують ефективність процесу засвоєння знань та

формування необхідних вмінь і навичок та оволодіння механічними компетентностями.

Загально відомо, що будь-яка задача складається з двох основних частин:

по-перше, з умов, які потрібні для розв'язання задачі;

по-друге, із запитань, на які треба дати відповіді.

Насамперед треба зрозуміти умови задачі. Зрозуміти – це значить почати конкретне розв'язання задачі. Потім необхідно вірно вибрати розрахункову схему. Вірно побудована розрахункова схема – це надійна основа відшукання розв'язку задачі. Отримання правильної відповіді залежить від методів і процедур обчислень, тому потрібний аналіз результатів розв'язання.

Розглянемо типову блок-схему дій при розв'язанні задач з теоретичної механіки (рис. 1).

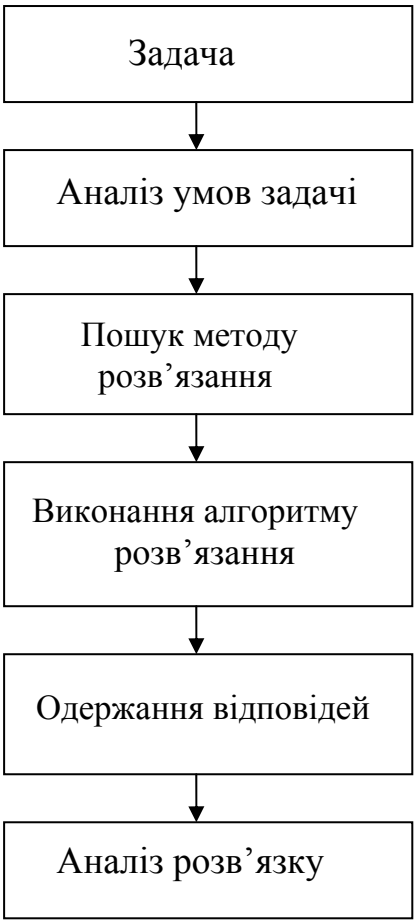


Рис. 1. Типова блок-схема розв'язання задачі

Зупинимося докладніше на її основних елементах (блоках).

1. *Аналіз умови задачі* містить у собі детальний розбір тексту задачі, з'ясування невідомих термінів, назв деталей конструкції, осмислення механічного змісту задачі, побудову схеми або креслень. При цьому проводиться аналіз вихідних даних, а також формулюється головне питання задачі або ланцюжок таких питань.

2. *Пошук методу розв'язання* складається з побудови аналітичного ланцюга послідовності дій, які починаються з питання задачі, використання даних з умови, визначення законів та теорем, на основі яких можна здійснити розв'язання й одержати відповідь.

3, 4. *Виконання алгоритму розв'язання та одержання відповідей* полягає в запису математичних формул і відношень згідно законів і теорем, на підставі яких буде здійснюватися рішення задачі, а також підстановці конкретних даних з умови задачі та здійсненні математичних перетворень, що ведуть до одержання відповідей.

5. *Аналіз розв'язків* і відповідей припускає встановлення відповідності з загальними принципами і законами механіки, розгляд загальних та/або частинних розв'язків задачі, перевірку розмірностей і знайдених значень величин.

Перш ніж приступити до розв'язання задачі, необхідно придбати або оновити знання законів і теорем відповідних розділів теоретичної механіки та їх використання.

Завдання, включені в посібник, відображають в собі деякі контексти майбутньої професійної діяльності і передбачають не тільки добре знання дисципліни, що вивчається і вміння користуватися цими знаннями, а й вимагає при розв'язанні навчальної творчої дії, тобто побудови деякого неочевидного ланцюжка міркувань, якій приводить до створення суб'єктивно нового знання.

З позиції навчальної пізнавальної діяльності хід розв'язання завдання повинен включати наступні етапи:

• занурення в інформаційне поле передбачуваного завдання через постановку проблеми, сприйняття умов і опису проблеми;

• розробка інформаційно-логічної моделі задачі через встановлення взаємозв'язку між вихідними даними, виявлення основних законів і границь їх застосування при вирішенні даного завдання;

• перевірка адекватності розробленої моделі умовам постановки завдання;

• розробка алгоритмічної структури процесу, визначення його оптимальності;

• розробка технології реалізації алгоритмічної структури завдання, проведення аналізу адекватності технології запропонованим засобам реалізації;

• проведення аналізу отриманих результатів з позиції коректності постановки проблеми, адекватності розробленої інформаційно-логічної моделі розв'язку, оптимальності алгоритмічної структури й ефективності технології реалізації.

При цьому треба враховувати основні фактори, що перешкоджають успішному пошуку рішення завдання:

• на етапі занурення в інформаційне поле деякі важливі елементи інформації можуть залишитися незатребуваними, і недолік або надлишок даних викличе психологічний дискомфорт;

• на етапі розробки інформаційно-логічної моделі взаємозв'язок між основними структурними елементами може встановлюватися без урахування основних закономірностей протікання процесу, що не дозволяє говорити про адекватність моделі поставленої проблемі;

• практично завжди відсутня перевірка проміжних етапів розв'язання і кінцевого результату на адекватність, що є неприпустимим для фахівця, який претендує на конкурентоспроможність.

При організації творчого саморозвитку з теоретичної механіки представляється можливим виділити п'ять класів найбільш поширених завдань, ранжируваних по зростанню впливу на процес розвитку креативності.

1. Завдання, в основі яких лежить знайома проблемна ситуація.

2. Завдання на знання базового курсу, які розраховані на комбінування відомих способів розв'язання завдань в новий спосіб.

3. Інформаційно-перевантажені, неповно поставленні, з розмитими умовами завдання, що вимагають здатності до «Бачення проблеми».

4. З парадоксальним формулюванням, які «провокують» на помилку, з невизначеною, неоднозначною відповіддю.

5. Завдання, що забезпечують міждисциплінарні зв'язки.

Для дисципліни теоретична механіка існують класичні науково-методичні збірники з великою кількістю задач та їх розв'язками [2, 3, 6 – 10, 12 – 14]. Але вони, як правило, представлені для студентів у застарілій

формі видання і в обмеженій кількості, оскільки не перевидаються останнім часом.

У запропонованому навчальному посібнику даються загальні рекомендації до розв'язання задач теоретичної механіки, наводяться розв'язки типових задач, робиться спроба навчити студента бачити за кожною розв'язаною задачею цілий клас прикладних задач, виконувати тестовий самоконтроль.

Щоб навчитися вирішувати задачі, треба насамперед запастися терпінням і завзятістю. Якщо цінити отримане, оновлювати і розвивати далі те, що робиш, тоді праця підніметься до дійсної творчості. Потрібно зрозуміти, що тільки в результаті самостійної і завзятої роботи можна дійсно набути навичок та досвіду у розв'язанні задач механіки.

В збірнику наведено методичне забезпечення розв'язання задач і виконання розрахунково-графічних завдань студентами технічних університетів та академій, варіанти завдань для самостійної роботи, показано на конкретних прикладах алгоритми і хід розв'язування типових задач. Також дається перелік необхідної для вивчення курсу навчально-методичної літератури та демонстраційні варіанти тестів з основних розділів дисципліни.

Автори висловлюють щиру вдячність співробітникам кафедри теоретичної та прикладної механіки ДДТУ та рецензентам за корисні зауваження та рекомендації, які були враховані при підготовці рукопису цього посібника.

Посібник рекомендується викладачам і фахівцям, аспірантам і студентам технічних, особливо механічних та транспортних спеціальностей.

РОЗДІЛ 1. СТАТИКА

1.1. Основні поняття і визначення статики. Аксіоми, теореми та їх наслідки

Статика розглядає методи перетворення одних систем сил в їм еквівалентні, вивчає умови рівноваги тіл під дією сил. ***Сила*** – це міра механічної взаємодії матеріальних тіл між собою. Взаємодія характеризується величиною і напрямком, тобто сила – величина векторна, що характеризується точкою прикладання, напрямком (лінією дії), величиною (модулем). У СІ одиницею вимірювання сили є ньютон (1Н = 1 кг·м/с^2). Вектор сили в статиці розглядається як ковзний вектор.

Сили бувають активні і реактивні. Активні сили можуть викликати переміщення тіла. В'язі, обмежуючи рух тіла, є джерелом сил, що прикладені до тіла. Реактивні сили прагнуть протидіяти переміщенню тіла під дією зовнішніх сил.

Системою сил називають сукупність сил, діючих на тіло (рис. 2). Еквівалентна система сил – система сил, діє так само, як задана.

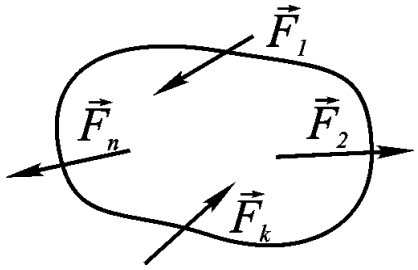


Рис. 2. $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ – система сил

Врівноваженою (*еквівалентної нулю*) *системою сил* називається така система, яка, будучи прикладеною до тіла, не змінює його механічного стану. Систему сил, що діють на тіло, можна замінити однією рівнодіючою, що діє так, як система сил.

Всі теореми і рівняння статики виводяться з декількох вихідних положень, які називаються аксіомами.

Перша аксіома. Під дією врівноваженої системи сил абсолютно тверде тіло або матеріальна точка знаходяться в рівновазі або рухаються рівномірно і прямолінійно (закон інерції).

Друга аксіома. Дві сили, рівні по модулю і направлені по одній прямій в різні боки, врівноважуються.

Третя аксіома. Не порушуючи механічного стану тіла, можна додати або прибрати врівноважену систему сил (принцип відкидання системи сил, еквівалентної нулю).

Наслідок з другої і третьої аксіом. Силу, що діє на тверде тіло, можна переміщати вздовж лінії її дії.

Четверта аксіома (правило паралелограма сил). Рівнодійна двох сил, що прикладені до однієї точки, прикладена до точки і є діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.

П'ята аксіома. При взаємодії тіл всякої дії відповідає рівна і протилежно спрямована протидія.

Всі тіла поділяються на вільні і зв'язані. Вільні тіла – це тіла, переміщення яких не обмежене. Пов'язані тіла – це тіла, переміщення яких обмежено іншими тілами. Всяке пов'язане тіло можна уявити вільним, якщо в'язі замінити їх реакціями (принцип звільнення від в'язів). В'язі діляться на кілька типів.

В'язь – гладка опора (без тертя) – реакція опори прикладена в точці опори і завжди спрямована перпендикулярно опорі (рис. 3).

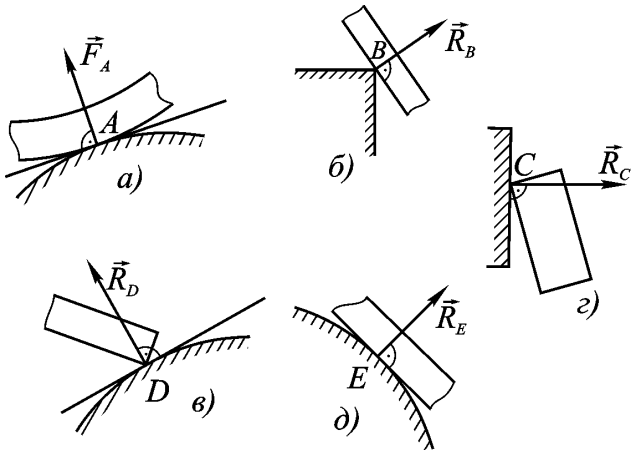


Рис. 3. Реакції гладких опор

Гнучка в'язь (нитка, вірьовка, трос, ланцюг) – тіло підвішене на нитках. Реакція нитки $\vec{T}$ спрямована вздовж нитки від тіла, при цьому нитка може бути тільки розтягнута (рис. 4).

Жорсткий стержень (стрижень) – стержень може бути стиснутий або розтягнутий. Реакція стержня $\vec{R}_B$ або $\vec{R}_C$ спрямована вздовж хорди стержня (рис. 5). Стержень працює на розтяг або стиск.

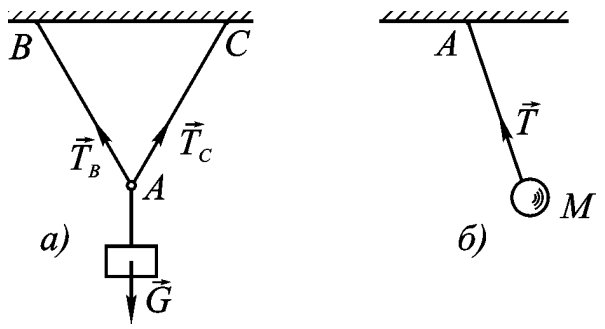


Рис. 4. Реакції гнучких зв’язків

Точний напрям реакції визначають, умовно прибравши стержень та розглянувши можливі переміщення тіла без цієї в’язі. Можливим переміщенням точки називається таке нескінченно мале уявне переміщення, яке допускається в даний момент.

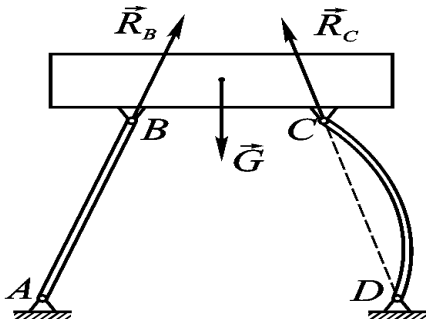


Рис. 5. Реакції стержнів

Шарнірна опора. Шарнір допускає поворот навколо точки закріплення. Розрізняють два види шарнірів.

Рухомий шарнір. Стержень, закріплений на шарнірі, може повертатися навколо шарніра, а точка кріплення може переміщатися уздовж напрямної (опорної поверхні). Реакція рухомого шарніра $\vec{R}_A$ спрямована перпендикулярно до опорної поверхні, так як не допускається тільки переміщення поперек опорної поверхні (рис. 6).

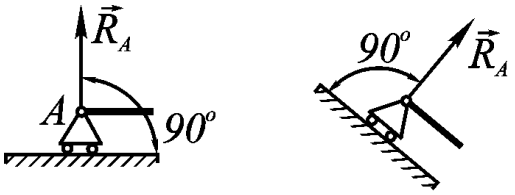


Рис. 6. Реакції рухомих шарнірів

Нерухомий шарнір. Точка кріплення переміщатися не може. Стержень може вільно обертатися навколо осі шарніра. Реакція такої опори проходить через вісь шарніра, але невідома за напрямом. Її зображують у вигляді двох складових: горизонтальної і вертикальної (R_x, R_y) (рис. 7).

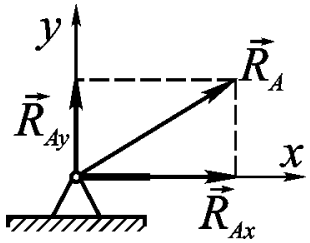


Рис. 7. Реакція нерухомого шарніра

Защемлення, або «закладення». Будь-які переміщення точки кріплення неможливі (рис. 8). Під дією зовнішніх сил в опорі виникають реактивна сила і реактивний момент M_A, що перешкоджає повороту. Реактивна сила представляється у вигляді двох складових вздовж осей координат:

$$\overline{R}_A = R_{Ax}\bar{i} + R_{Ay}\bar{j}\,.$$

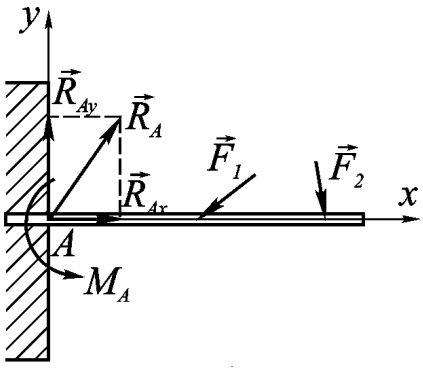


Рис. 8. Реакції у защемленні

Опори (в'язі) для валів та осей у механізмах і машинах прийнято називати підшипниками і підп'ятниками.

Підшипник А і підп'ятник В (рис. 9).

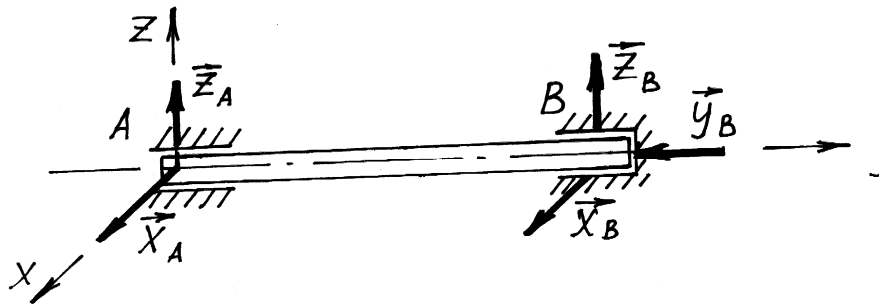


Рис. 9. Реакції підшипника *A* і підп'ятника *B*

Якщо циліндричний шарнір у точці *A* не перешкоджає переміщенню тіла тільки в одному напрямі вздовж осі циліндра, то такий циліндричний шарнір називається підшипником. Опорна реакція підшипника має дві складові по двом взаємно перпендикулярним напрямам

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A\,; \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}\,.$$

Якщо циліндричний шарнір у точці *B* не перешкоджає переміщенню тіла тільки в одному напрямі вздовж осі циліндра і перешкоджає переміщенню у протилежному напрямі, то такий циліндричний шарнір називається підп'ятником. Опорна реакція підп'ятника має три складові по трьох взаємно перпендикулярних напрямах

$$\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Y}_B + \vec{Z}_B\,.$$

Сферичний шарнір (рис. 10).

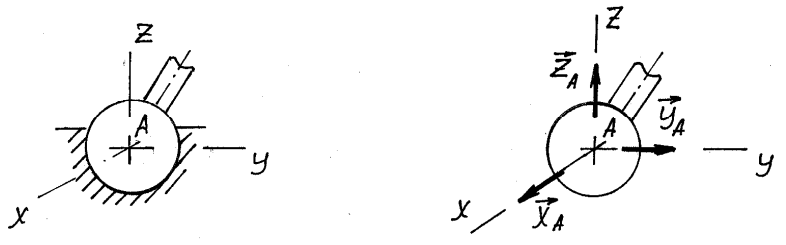


Рис. 10. Реакція сферичного шарніру

У випадку сферичного шарніра тіло може обертатися навколо центра шарніра, але не має змоги переміщуватись у будь-якому напрямі. Реакцію сферичного шарніра виражають трьома складовими у трьох взаємно перпендикулярних напрямах:

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A\,; \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}\,.$$

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається збіжною. Необхідно визначити рівнодіючу системи збіжних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, де n – кількість сил, що входять у систему. У відповідності з наслідками з аксіоми статики, всі сили системи можна переміщувати вздовж лінії дії, і всі сили виявляться доданими до однієї точки. Використовуючи властивість векторної суми сил, можна отримати рівнодіючу будь-якої збіжної системи сил, додаючи послідовно сили, що входять в систему. Утворюється багатокутник сил. При графічному способі визначення рівнодійної вектори сил можна викреслювати в будь-якому порядку, результат (величина і напрям рівнодійної) при цьому не зміниться. Вектор рівнодійної $\overline{R}$ спрямований назустріч векторів сил доданків (рис. 11). Такий спосіб отримання рівнодіючої називається геометричним.

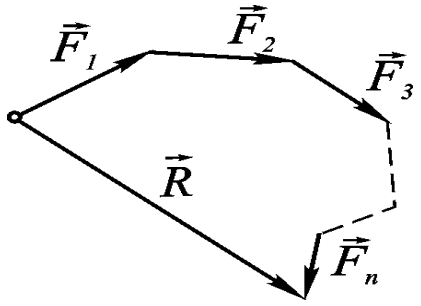


Рис. 11. Геометричне визначення рівнодіючої $\overline{R}$

Багатокутник сил будується в наступному порядку.

1. Вичертити вектори сил заданої системи в деякому масштабі один за іншим так, щоб кінець попереднього вектора збігся з початком наступного.

2. Вектор рівнодійної замикає отриману ламану лінію; він сполучає початок першого вектора з кінцем останнього і спрямований йому назустріч.

3. При зміні порядку креслення векторів у багатокутнику змінюється вигляд фігури. На результат порядок викреслювання не впливає.

Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил.

При рівновазі системи рівнодіюча сил повинна бути рівною нулю, отже, при геометричному побудові кінець останнього вектора повинен співпасти з початком першого. Якщо плоска система збіжних сил

перебуває в рівновазі, багатокутник сил цієї системи повинен бути замкнутий. Якщо в системі є три сили, утворюється трикутник сил. Геометричним способом користуються, якщо в системі три сили. При вирішенні задач на рівновагу тіло вважається абсолютно твердим (отверділим).

Завдання розв’язуються в наступному порядку.

1. Визначити можливий напрямок реакцій в'язів.

2. Вичертити багатокутник сил системи, починаючи з відомих сил, в деякому масштабі. (Багатокутник повинен бути замкнутий, всі вектори складові спрямовані в одну сторону з обходу контуру).

3. Виміряти отримані вектори сил і визначити їх величину, враховуючи обраний масштаб.

4. Для уточнення визначити величини векторів (сторін багатокутника) за допомогою геометричних залежностей.

Проекція сили на вісь визначається відрізком осі, який відсікаємо перпендикулярами, опущеними на вісь з початку і кінця вектора. Величина проекції сили на вісь дорівнює добутку модуля сили на косинус кута α між вектором сили $\vec{F}$ і додатним напрямком відповідної вісі. Проекція має знак: додатній при однаковому напрямку вектора сили і осі та від’ємний при напрямку в бік від'ємній півосі. Проекції сили $\vec{F}$ на дві взаємно перпендикулярні осі *Ox* і *Oy*:

$$F_x = \left|\vec{F}\right|\cos\alpha;\ F_y = \left|\vec{F}\right|\sin\alpha = \left|\vec{F}\right|\cos\beta .$$

Величина рівнодіючої $\overline{R}$ дорівнює векторній сумі векторів системи сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Визначимо рівнодіючу аналітичним способом за її проекціями. Використаємо систему координат *Oxy*, визначимо проекції всіх заданих векторів $\vec{F}_i$ на ці осі. Сумуємо проекції всіх векторів сил системи на осі *Ox* і *Oy* , вони дорівнюють проекціям рівнодіючої $\overline{R}$:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix};\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \quad .$$

Модуль (величину) рівнодіючої можна визначити за відомим проекціями:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} .$$

Напрямок вектора рівнодіючої можна визначити по величинам і знакам косинусів кутів, утворених рівнодіючими з осями координат.

Плоска система збіжних сил перебуває в рівновазі, якщо алгебраїчна сума проекцій всіх сил системи на будь-яку вісь дорівнює нулю. Система рівнянь рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \; .$$

При розв'язанні завдань координатні осі вибирають так, щоб рішення було найбільш простим. При цьому бажано, щоб хоча б одна невідома сила збігалася з віссю координат.

Пара сил. Момент сили

Парою сил називається система двох сил $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$, рівних за модулем, паралельних і спрямованих у протилежні сторони. Пара сил викликає обертання тіла, і її дія на тіло оцінюється моментом $\vec{M}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$ (рис. 12).

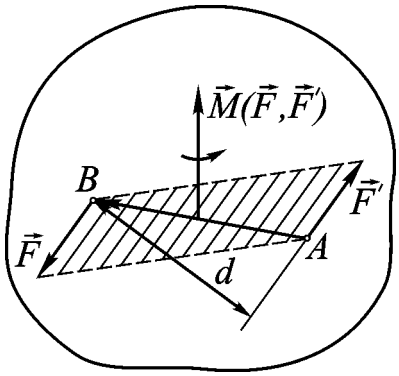


Рис. 12. Пара сил

Сили, що входять у пару, не врівноважуються, оскільки вони прикладені до двох точок. Дія цих сил на тіло не може бути замінена однією рівнодіючою силою.

Момент пари сил чисельно дорівнює добутку модуля сили F на відстань d між лініями дії сил, тобто плеча пари. Момент вважається додатнім, якщо пара обертає тіло проти годинниковою стрілки:

$$M\left(\vec{F}, \vec{F}'\right) = F \cdot d; \quad M > 0 \, .$$

Площина, що проходить через лінії дії сил пари, називається площиною дії пари. Властивості пари сил:

1. Пару сил можна переміщати в площині її дії.

2. Еквівалентність пар. Дві пари, моменти яких рівні між собою, еквівалентні (дія їх на тіло однакова).

3. Додавання пар сил. Систему пар сил можна замінити рівнодіючою парою. Момент рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар, які складають систему:

$$M_{\Sigma} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^m F_k \cdot d_k ,$$

де m – парне або непарне в залежності напрямку обертання k-ої пари сил.

Рівновага пар. Для рівноваги пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів пар системи дорівнювала нулю:

$$M_{\Sigma} = 0 .$$

Момент сили відносно точки. Сила, яка не проходить через точку O кріплення тіла, викликає обертання тіла відносно точки, тому дія сили на тіло оцінюється моментом $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$. Момент сили відносно точки чисельно дорівнює добутку F модуля сили на відстань d від точки до лінії дії сили. Відрізок перпендикуляру, опущеного з точки на лінію дії сили, називається плечем сили (рис. 13). Момент вважається додатнім, якщо сила розгортається проти годинниковою стрілки.

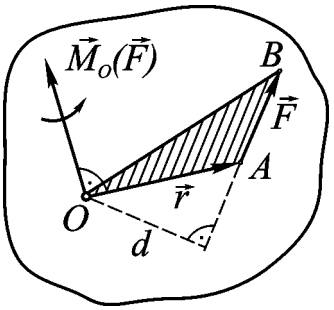


Рис. 13. Момент сили відносно точки O

Властивості векторного моменту сили відносно точки

1) векторний момент сили відносно точки не змінюється при переносі точки прикладання сили уздовж її лінії дії;

2) векторний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через точку, відносно якої обчислюється момент (плече дорівнює нулю).

Для плоскої системи сил вводиться поняття алгебраїчного моменту сили $\vec{F}$ відносно точки A:

$$M_A(\vec{F}) = \pm F \cdot d ,$$

де знак визначається напрямком обертання, d – відстань від лінії дії сили до т. A.

Момент сили відносно осі дорівнює

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_n\right) = \pm\, F_n \cdot d\,,$$

де $F_n = np_{\Pi}\vec{F}$ – проекція сили на площину Π (рис. 14).

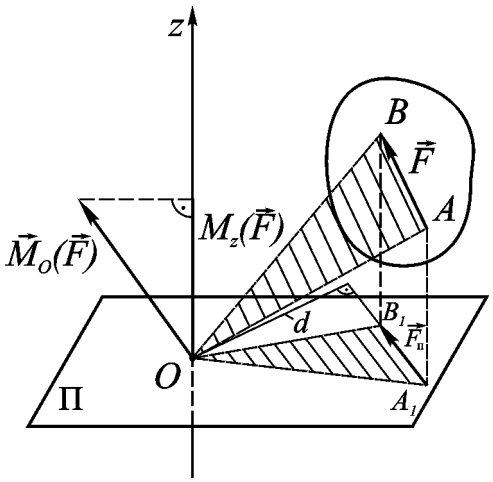


Рис. 14

Для того, щоб обчислити момент сили $\vec{F}$ відносно осі Oz, необхідно:

1) спроектувати силу $\vec{F}$ на площину Π, яка перпендикулярна до осі Oz.

2) Встановити точку перетину площини П з віссю Oz (точка O).

3) У площині Π обчислити алгебраїчний момент сили $\vec{F}_n$ відносно т. O.

Момент вважається додатнім, якщо сила розгортає тіло за годинниковою стрілкою (дивитися з боку позитивного напрямку осі). Одержаний результат і буде моментом сили $\vec{F}$ відносно осі Oz.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині або лінія дії сили паралельна осі.

Плоска система довільно розташованих сил

Теорема Пуансо про паралельне перенесення сил. Силу можна перенести паралельно лінії її дії, при цьому потрібно додати пару сил з моментом, рівним добутку модуля сили на відстань, на яку перенесена сила.

Розглядається приведення до обраної точки плоскої системи довільно розташованих сил. Всі сили системи переносять в одну довільно обрану точку, яка називається точкою приведення. При цьому застосовують теорему Пуансо. При будь-якому перенесенні сили в точку, яка не лежить на лінії дії, додають пару сил. Пари, що з'явилися при перенесенні, називають приєднаними парами. Утворювану систему пар сил

можна замінити однією еквівалентною парою – головним моментом системи. Головний вектор дорівнює геометричній сумі векторів довільної плоскої системи сил.

Головний момент системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно точки приведення:

$$M_{\Sigma A} = \sum_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right).$$

Вплив точки приведення. Точка приведення A обрана довільно. При зміні положення точки приведення величина головного вектора не зміниться. Величина головного моменту при перенесенні точки приведення зміниться, так як змінюються відстані векторів сил до нової точки приведення. Нехай можна визначити точку на площині, щодо якої головний момент дорівнює нулю. Тоді дана плоска система може бути замінена однією силою – рівнодіючою системи сил. Геометрично рівнодіюча дорівнює головному вектору системи сил, але прикладена до іншої точки, відносно якої головний момент дорівнює нулю. Рівнодіюча сила позначається $\vec{R} = \vec{F}_\Sigma$. Кількісно її значення визначається так само, як головний вектор системи сил.

При визначенні головного моменту використовується теорема Варіньона про момент рівнодіючий [6].

Можливо кілька варіантів приведення системи сил до точки:

1. $\vec{F}_\Sigma = \vec{0}$, $M_{\Sigma A} = \sum_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right) \neq 0$ $\Rightarrow$ тіло обертається навколо нерухомої осі.

2. $\vec{F}_\Sigma \neq \vec{0}$, $M_{\Sigma A} = \sum_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0$ $\Rightarrow$ тіло рухається прямолінійно прискорено.

3. $\vec{F}_\Sigma = \vec{0}$, $M_{\Sigma A} = \sum_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0 \Rightarrow$ тіло знаходиться в рівновазі.

Отримали системи рівнянь рівноваги тіла під дією плоскої системи сил:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0. & (3) \end{cases}$$

Балкові системи

Балка – це конструктивна деталь у вигляді прямого бруса, закріпленого на опорах, яка згинається доданими до неї силами. Висота перерізу балки незначна порівняно з її довжиною. По способу прикладання навантаження поділяють на зосереджені і розподілені. Якщо реально передача навантаження відбувається на незначно малому майданчику (в точці), навантаження називається зосередженим. Якщо навантаження розподілено по визначному майданчику або лінії (тиск води на греблю, снігу на дах тощо), то воно є розподіленим.

Рівномірно розподілене навантаження уздовж відрізка прямої

Нехай уздовж відрізка *AB* прямої довжиною *l* діє рівномірно-розподілене навантаження інтенсивності q (рис. 15)

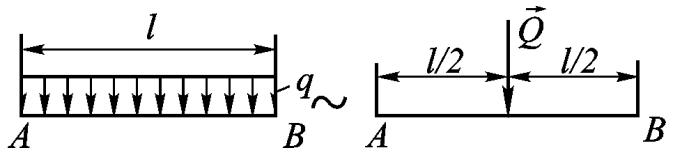


Рис. 15. Епюра навантаження

Дане навантаження еквівалентне рівнодійній Q , яка паралельна до розподіленого навантаження і прикладена по середині відрізка *AB*; модуль якої дорівнює:

$$Q = q \cdot l.$$

Розподілене навантаження, яке діє уздовж відрізка прямої інтенсивністю, яка змінюється за лінійним законом.

Дане навантаження (рис. 16) зводиться до рівнодійної *Q*, яка за величиною дорівнює $Q = 0{,}5l \cdot q_{\max}$, де $q_{\max}$ – найбільша інтенсивність навантаження. Точка прикладання *C* рівнодійної зміщена на (2/3)***l*** від вершини силового трикутника і на (1/3) *l* від основи цього трикутника.

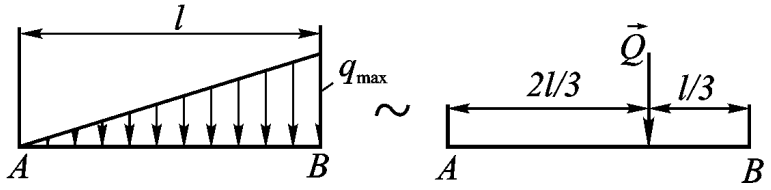


Рис. 16

Рівномірно розподілене навантаження уздовж дуги кола

Дане навантаження зводиться до рівнодійної, що напрямлена уздовж осі *Ox* (рис. 17),

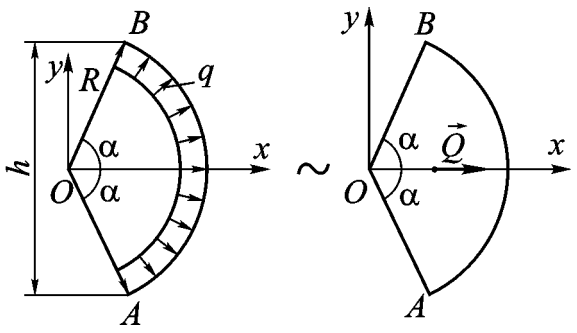


Рис. 17

модуль якої дорівнює

$$Q = q \cdot l = q \cdot R \cdot \sin\alpha.$$

Нехай розглядається навантажена балка, яка розташована у площині. Потрібно знайти реакції опор. Складаються рівняння моментів відносно точок кріплення балки. Оскільки момент сили, що проходить через точку кріплення, дорівнює нулю, у рівнянні залишається менше невідомих сил. З рівнянь рівноваги сил визначаються реакції, якщо одну з них можна знайти із рівняння моментів.

Для контролю правильності рішення використовується додаткове рівняння:

$$\sum M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

Якщо при рівновазі твердого тіла можна вибрати три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій, використовується система рівнянь в третій формі:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, & (1) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, & (2) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} M_C\left(\vec{F}_k\right) = 0. & (3) \end{cases}$$

Просторова збіжна система сил

Вектор сили в просторі. У просторі вектор сили $\overline{F}$ проектується на три взаємно перпендикулярні осі координат (рис. 18).

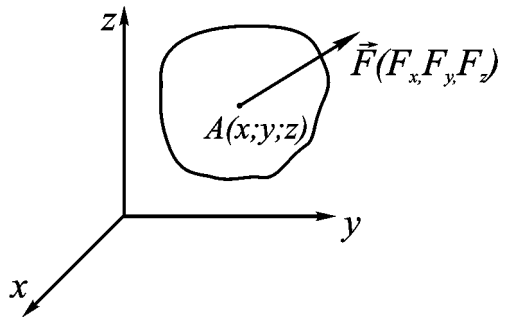


Рис. 18. Вектор сили в просторі

Проекції вектора утворюють ребра прямокутного паралелепіпеда, вектор сили збігається з діагоналлю. Модуль вектора визначається формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ ,$$

де $F_x = F \cdot \cos\alpha_x$; $F_y = F \cdot \cos\alpha_y$; $F_z = F \cdot \cos\alpha_z$; $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – кут між вектором $\vec{F}$ та осями координат.

Просторова збіжна система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ – це система сил, які не лежать в одній площині, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Рівнодіючу просторової системи сил $\vec{R} = \vec{F}_\Sigma$ можна визначити, побудувавши просторовий багатокутник:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n\ .$$

Рівнодійна системи збіжних сил прикладена в точці перетину ліній дії сил системи. Модуль рівнодійної можна визначити аналітично, використовуючи метод проекцій – поєднуючи початок координат з точкою перетину ліній дії сил системи, і, проектуючи всі сили на осі координат. Підсумовуємо відповідні проекції, отримуємо проекції рівнодійної на осі координат. Модуль рівнодійної системи збіжних сил:

$$F_\Sigma = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ ,$$

де $R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$, $R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$ – компоненти рівнодійної сили.

Напрям вектора визначається кутами рівнодійної $\vec{F}_\Sigma$ з осями координат.

Умови рівноваги тіла під дією просторової системи сил

Нехай тверде тіло знаходиться під дією деякої просторової системи сил. При дослідженні умов його рівноваги буде потрібним приводити дану

систему сил відносно обраного центру та знаходити головний вектор сил та головний момент сил відносно центра або осей координат.

Залежність між векторним моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі, яка проходить через дану точку.

Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь векторного моменту сили відносно довільної точки, яка лежить на цій осі.

Друге означення моменту сили відносно осі.

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь векторного моменту сили відносно будь-якої точки, яка лежить на цій осі, тобто

$$M_z(\vec{F}) = пр_z\, \vec{M}_O\left(\vec{F}\right).$$

Аналітичні формули для обчислення моментів сили відносно трьох координатних осей.

Якщо вектор сили $\vec{F}$ заданий своїми координатами $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$ і задано координати точки $A(x, y, z)$ прикладання сили $\vec{F}$, тоді мають місце залежності:

$$\begin{cases} M_x\left(\vec{F}\right) = y \cdot F_z - z \cdot F_y; \\ M_y\left(\vec{F}\right) = z \cdot F_x - x \cdot F_z; \\ M_z\left(\vec{F}\right) = x \cdot F_y - y \cdot F_x. \end{cases}$$

Умови рівноваги тіла під дією довільної просторової системи сил в векторній формі.

Для того щоб вільне тверде тіло під дією даної просторової системи сил знаходилось у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільної точки дорівнювали нулю, тобто:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases}$$

Умови рівноваги тіла під дією даної просторової системи сил в аналітичній формі.

Для того щоб вільне тверде тіло під дією даної просторової системи сил знаходилось у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на координатні осі x, y, z, і суми моментів сил відносно цих координатних осей дорівнювали нулеві, тобто:

головний вектор сил; головний момент векторів сил

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases}$$

Тертя. Види тертя

Тертям називається опір, який чиниться при русі або намаганні рухати одне тіло уздовж поверхні іншого. В області контакту тіл виникають сили тертя, як складові сил реакцій, що виникають в області контакту тіл. Причиною цього виду тертя є механічне зачеплення і деформації виступів на контактуючих поверхнях та інші чинники.

У залежності від характеру можливого або реалізуємого руху тіла сили тертя поділяються на сили тертя ковзання, кочення і вертіння. Тертя поділяється також на сухе тертя і тертя зі змащенням. Спочатку розглядаються закони сухого тертя.

Тертя ковзання

Сили тертя ковзання виникають при намаганні ковзати одне тіло по поверхні іншого. Сили тертя поділяються на тертя ковзання при спокої, або рівновазі тіла і тертя ковзання при русі одного тіла уздовж шорсткої поверхні іншого з деякою відносною швидкістю. При спокої тіла сили тертя ковзання залежать лише від активних сил.

Модуль і напрямок сил тертя ковзання при спокої тіла визначаються класичними законами Г. Амонтона і Ш. Кулона, які встановлено у 1781 році.

1. Сили тертя ковзання зводяться до рівнодійної. Напрямок рівнодійної сил тертя ковзання спокою протилежний до напрямку можливого руху тіла, який виник би під дією прикладених до тіла активних сил при відсутності тертя. Рівнодійна сил тертя ковзання знаходиться у спільній дотичній площині до поверхонь, що труться.

2. Величина рівнодійної сил тертя ковзання спокою залежить від активних сил, що прикладені до тіла і може приймати значення від нуля до свого максимального значення, тобто

$$0 \le F_{тр} \le F_{тр}^{\max}.$$

3. Максимальне значення сили тертя ковзання пропорційне нормальній реакції поверхні, тобто

$$F_{тр}^{\max} = f_0 \cdot N,$$

де f_0 – коефіцієнт тертя ковзання спокою.

4. Коефіцієнт тертя ковзання не залежить від нормальної реакції поверхні, а залежить від матеріалу і фізичного стану поверхонь, що труться. Коефіцієнт тертя ковзання f_0 визначається експериментально.

При русі тіла рівнодійна сил тертя ковзання напрямлена проти руху тіла і дорівнює добутку динамічного коефіцієнта тертя на нормальну реакцію поверхні, тобто

$$F_{тер} = f \cdot N,$$

де f – динамічний коефіцієнт тертя.

Зазвичай, $f < f_0$.

Коефіцієнт тертя ковзання (динамічний) залежить від відносної швидкості ковзання. Для більшості матеріалів коефіцієнт тертя зменшується при збільшенні відносної швидкості ковзання. Виняток складають деякі матеріали, наприклад тертя шкіри з металом.

У наближених технічних розрахунках вважається, що коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості ковзання.

Середні значення коефіцієнтів тертя ковзання для різних матеріалів, які отримані дослідним шляхом, тобто емпіричні значення f, наведено у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Матеріали тіл, що контактують	Коефіцієнт тертя	
	руху	спокою
Сталь – сталь	0,1	0,15
Сталь – чавун	0,3	0,18
Сталь – бронза	0,15	0,15
Чавун – дуб	0,65	0,3–0,5
Дерево – дерево	0,4–0,6	0,2–0,5
Шкіра - чавун	0,3–0,5	0,6

Розв'язуючи аналітично задачі граничної рівноваги тіл з урахуванням сил тертя, реакцію шорсткої поверхні зображають двома складовими $\vec{N}$ і $\vec{F}_{тер}$. Потім складають рівняння рівноваги і приєднують до них рівність

$$F_{тер} = f_0 \cdot N.$$

З одержаної системи рівнянь визначають шукані величини.

Центр ваги

Центром ваги твердого тіла називається геометрична точка C, незмінно пов'язана з тілом, яка є центром паралельних сил ваги елементарних об'ємів на які тіло умовно розбивається. Через центр ваги C проходить лінія дії рівнодійної сил ваги елементарних об'ємів, на які тіло умовно розбивається у довільному його положенні (рис. 19).

Координати центра ваги твердого тіла наближено визначаються за формулами:

$$x_c \approx \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta G_k / G;\ \ y_c \approx \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta G_k / G;\ \ z_c \approx \sum_{k=1}^{n} z_k \Delta G_k / G,$$

де ΔG_k – вага k-ої частини тіла; (x_k, y_k, z_k) – координати точки прикладання сили ваги; $\Delta \vec{G}_k$, G – вага тіла.

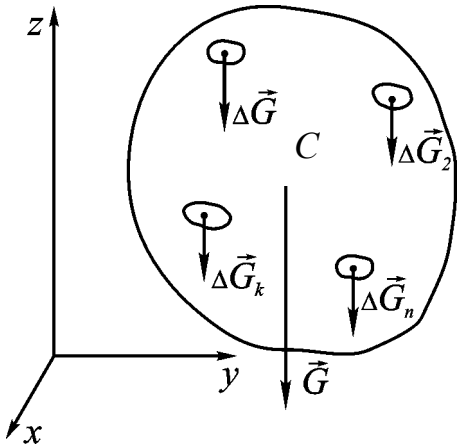


Рис. 19. Центр ваги тіла

Якщо виконати граничний перехід при діаметрах частин $d_k \to 0$ за формулами отримуємо точні результати. Відомі різні розрахункові та фізичні способи визначення координат центра ваги тіла.

1.2. Приклади розв'язування задач на рівновагу плоскої системи сил

При розв'язанні задач на рівновагу сил, які прикладені до твердого тіла, слід дотримуватись такого алгоритму:

1. Виділити тіло, рівновага якого розглядається.

2. Прикласти до нього всі задані сили, включаючи і вагу самого тіла, якщо вона задається.

3. Користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути в'язі, а їх дію замінити силами-реакціями в'язей.

4. Застосовуючи відповідні умови рівноваги, скласти рівняння рівноваги.

5. Розв'язати отримані рівняння відносно шуканих реакцій в'язей.

6. Провести аналіз одержаного розв'язку.

Розв'язуємо задачу у відповідності з наведеним алгоритмом.

Виконаємо розв'язання завдання докладно із застосуванням алгоритму.

Задача 1. Розглянемо зображену на рис. 20 механічну систему, що складається з бруса вагою *P*, який спирається кінцем на прямокутний виступ *D* і закріплений в точці *A* з підлогою через нерухому шарнірну опору. Визначимо реакції опор, якщо $\angle ADK = 60^\circ$ та силами тертя знехтуємо.

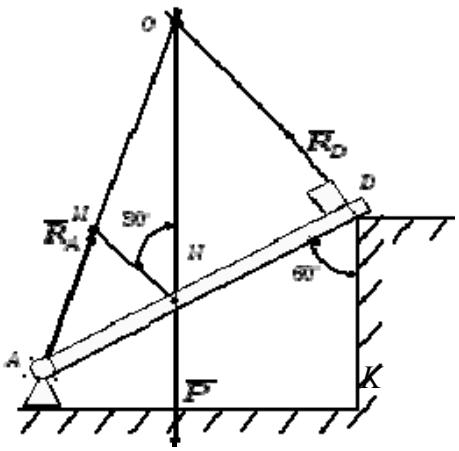


Рис. 20

Застосувавши до побудованої системи трьох сил $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{R_D}, \overrightarrow{R_A}$ геометричну умову рівноваги, дістаємо також, що трикутник сил $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{R_D}, \overrightarrow{R_A}$ буде замкнений: кінець третьої сили $\overrightarrow{R_A}$ буде збігатися з початком першої сили $\overrightarrow{P}$ (рис. 21).

Розв'язання

Лінії дії сили ваги $\overrightarrow{P}$ і реакції в'язі $\overrightarrow{R_D}$ у точці *D* відомі.

Через точку *O* їх перетину, відповідно до теореми про три сили, повинна проходити невідома лінія дії реакції $\overrightarrow{R_A}$. Будуємо її на схемі.

З урахуванням визначених ліній дій реакції $\overrightarrow{R_A}$, $\overrightarrow{R_D}$ і відомої сили $\overrightarrow{P}$ будуємо замкнений силовий трикутник (рис. 21), який подібний трикутнику *ONM* на рис. 20.

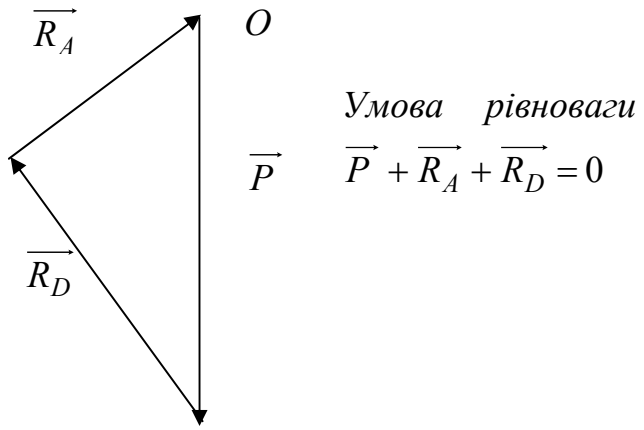


Рис. 21

Силовий трикутник дозволяє визначити не тільки напрями реакцій $\overrightarrow{R_A}, \overrightarrow{R_D}$, але і їх величини. Для цього треба використати умови пропорційності сторін подібних трикутників $\frac{MN}{ON} = \frac{R_D}{P}$, а також теорему косинусів $R_A = \sqrt{P^2 + R_D^2 - 2 \cdot P \cdot R_D \cdot \cos 30^\circ}$.

Відповідь: $R_D = P \cdot \frac{MN}{ON} = P \cdot \cos 30^\circ = P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; $R_A = \frac{P}{2}$.

Задача 2. Тверде тіло (рис. 22) перебуває в рівновазі під дією сил F_1 = 40 кН, F_2 = 25 кН і пари сил з моментом m = 30 кН·м. Геометричні розміри a = 2 м, b = 3 м.

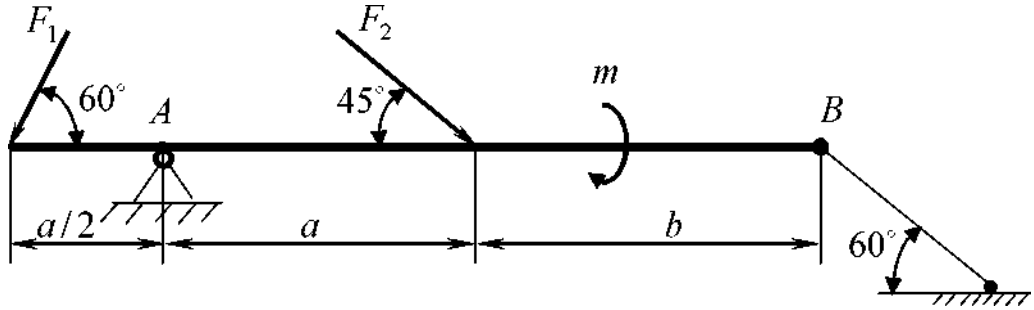


Рис. 22

Визначити реакції опор.

Розв'язання

Виділимо тіло, рівновага якого розглядається. Прикладаємо задані сили та шукані реакції в опорах *A* і *B,* відкидаючи в'язі. Опора в точці *A* – нерухомий шарнір, реакцію якого надаємо у вигляді двох складових, що направлені уздовж координатних осей. Опорою в точці *B* є стержень, реакція якого спрямована уздовж його осі.

Згідно з рекомендаціями, даними в підручнику [1], вісь *x* направляємо горизонтально, а вісь *y* вертикально (рис. 23).

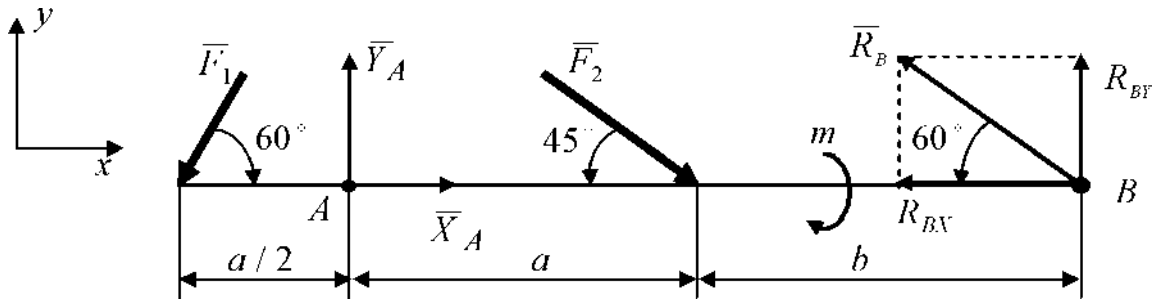


Рис. 23

У наступних прикладах для скорочення запису такого докладного аналізу приводити не будемо. Раціонально на рисунку (рис. 23) показати реакції й положення обраних осей.

З рис. 23 видно, що система сил, прикладених до балки *AB,* утворює деяку плоску систему сил, під дією якої балка знаходиться у рівновазі, тому повинні виконуватись три рівняння статики: два рівняння проекцій сил на координатні осі *x* і *y* та рівняння моментів відносно точки *A*. Складемо ці рівняння:

$$\sum_i X_i = 0,\ -F_1 \cdot \cos 60^\circ + X_A + F_2 \cdot \cos 45^\circ - R_B \cdot \cos 60^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_i Y_i = 0,\ -F_1 \cdot \sin 60^\circ + Y_A - F_2 \cdot \sin 45^\circ + R_B \cdot \sin 60^\circ = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_i m_A(F_i) = 0,\ F_1 \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ - F_2 \cdot a \cdot \cos 45^\circ - m + R_B(a+b) \cdot \sin 60^\circ = 0\ . \qquad (3)$$

При складанні останнього рівняння для моментів сил F_1 і F_2 відносно точки *A* використана теорема Варіньона про момент рівнодіючої, згідно з якою сили та реакція R_B розкладаються на складові по осям *x* і *y* та визначається момент від кожної складової відносно точки, інші сили розкладаються аналогічним образом, їхні компоненти можна взяти з рівнянь (1) і (2). У нашому прикладі моменти відносно точки *A* будуть

створювати тільки вертикальні складові, а горизонтальні складові ні, оскільки лінії їх дії проходять через точку A.

При виконанні цих рекомендацій завжди останнє рівняння (3) буде містити тільки одну невідому (у нашому випадку R_B). Розв'язуючи ці рівняння, одержимо:

$$R_B = \frac{m + F_2 \cdot a \cdot \sin 45^\circ - 0{,}5 \cdot F_1 \cdot \sin 60^\circ}{(a+b) \cdot \sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{30 + 25 \cdot 2 \cdot 0{,}707 - 0{,}5 \cdot 40 \cdot 0{,}866}{(2+3) \cdot 0{,}866} = 7{,}093 \text{ кН}.$$

При виконанні обчислень для більшості інженерних розрахунків достатня точність у тризначних цифрах. Для одержання такої точності всі проміжні обчислення повинні бути виконані з точністю на порядок вище, тобто чотирма значущими цифрами.

Підставляємо R_B в рівняння (1) і обчислюємо X_A.

$$X_A = F_1 \cdot \cos 60^\circ + R_B \cdot \cos 60^\circ - F_2 \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= 40 \cdot \cos 60^\circ + 7{,}093 \cdot \cos 60^\circ - 25 \cdot \cos 45^\circ = 5{,}869 \text{кН}.$$

Підставляємо R_B в рівняння (2) і обчислюємо Y_A.

$$Y_A = F_1 \cdot \sin 60^\circ + F_2 \cdot \sin 45^\circ - R_B \sin 60^\circ =$$

$$40 \cdot \sin 60^\circ + 25 \cdot \sin 45^\circ - 7{,}093 \cdot \sin 60^\circ = 46{,}18 \text{ кН}.$$

Відповідь: X_A = 17,32 кН, Y_A = 46,18 кН, M_A = 70 кН·м.

Перевірка

Знаходимо суму моментів сил відносно точки B

$$\sum_i m_B(F_i) = -m + F_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot b - Y_A \cdot (a+b) + F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot (1{,}5a + b) =$$

$$= -30 + 25 \cdot 0{,}707 \cdot 3 - 46{,}18 \cdot (2+3) + 40 \cdot 0{,}866 \cdot (1{,}5 \cdot 2 + 3) \approx 0.$$

Виконання умови рівноваги підтверджує вірність відповіді.

Зауваження: оскільки отриманий результат у більшості випадків не є остаточним і використається в подальших обчисленнях (опір матеріалів, деталі машин тощо), то отримана точність може бути залишена без округлення.

Задача 3. Тверде тіло (балка, рис. 24) жорстко закріплене в точці A й навантажене рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q, силою $\vec{F}_1$ та парою сил з моментом M = 25 кН·м.

Геометричні розміри a = 3 м, b = 2 м. Визначити реакції опори.

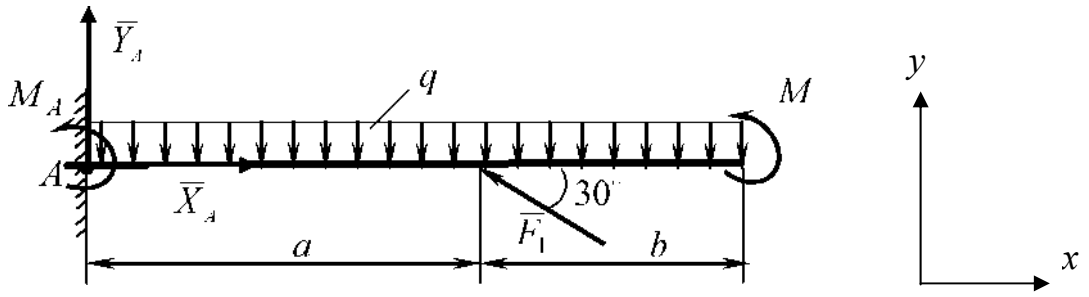


Рис. 24

Розв'язання

За умовами задачі тіло (рис. 24) жорстко закріплене в точці A. Реакція жорсткого затиснення складається з трьох складових [1]. Виберемо осі x, y (рис. 24) і покажемо на схемі складові реакції опори A: X_A, Y_A, M_A. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою Q, яка дорівнює $Q = q(a + b)$. Задане навантаження і реакції опори в точці A утворюють довільну плоску систему сил, під дією якої балка знаходиться у рівновазі. Тому повинні виконуватись три рівняння статики. Складаємо їх

$$\sum_i X_i = 0, \quad X_A - F_1 \cdot \cos 30^\circ = 0; \tag{4}$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad Y_A - q(a+b) + F_1 \cdot \sin 30^\circ = 0; \tag{5}$$

$$\sum_i m_A(F_i) = 0, \quad M_A - q(a+b) \cdot \frac{a+b}{2} + F_1 \cdot a \cdot \sin 30^\circ + M = 0. \tag{6}$$

Кожне з цих рівнянь містить по одній невідомій, тому з рівняння (4) визначимо складову реакції X_A

$$X_A = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0{,}866 = 17{,}32\ кН\ .$$

З рівняння (5) знаходимо

$$Y_A = q(a+b) - F_1 \cdot \sin 30^\circ = 10(3+2) - 20 \cdot 0{,}5 = 40\ кН\ .$$

З рівняння (6) визначимо величину реактивного моменту M_A:

$$M_A = q(a+b) \cdot \frac{a+b}{2} - F_1 \cdot a \cdot \sin 30^\circ - M =$$

$$= 10 \cdot (3+2) \cdot \frac{3+2}{2} - 20 \cdot 3 \cdot 0{,}5 - 25 = 70\ кН \cdot м\ .$$

Всі складові реакції опори одержали додатними. Це означає, що обрані напрямки X_A, Y_A і M_A відповідають дійсності.

Відповідь: X_A = 17,32 кН, Y_A = 40 кН, M_A = 70 кН·м.

Задача 4. Балка (рис. 25) у точці *A* прикріплена до стіни нерухомим шарніром, у точці *B* опирається на вістря. Визначити реакції опор, якщо F_1 = 15 кН, F_2 = 18 кН, F_3 = 22 кН, *a* = 1,5 м, *b* = 2 м.

Розв'язання

Опора *A*, нерухомий шарнір, реакція якого складається із двох складових. Виберемо осі *x*, *y* і покажемо складові реакції опори *A*: X_A і Y_A (рис. 25). Вістря опирається на абсолютно гладку поверхню балки *AB*, отже, якщо із двох контактуючих тіл одне є точкою, то реакція R_B в точці *B* буде спрямована перпендикулярно до площини *AB* (рис. 25).

Задані сили і реакції в'язей в точках *A* і *B*, утворюють довільну плоску систему сил, під дією якої балка *AB* знаходиться у рівновазі. Тому повинні виконуватись три рівняння статики.

Складемо три рівняння рівноваги, рівняння моментів складемо відносно точки *A*.

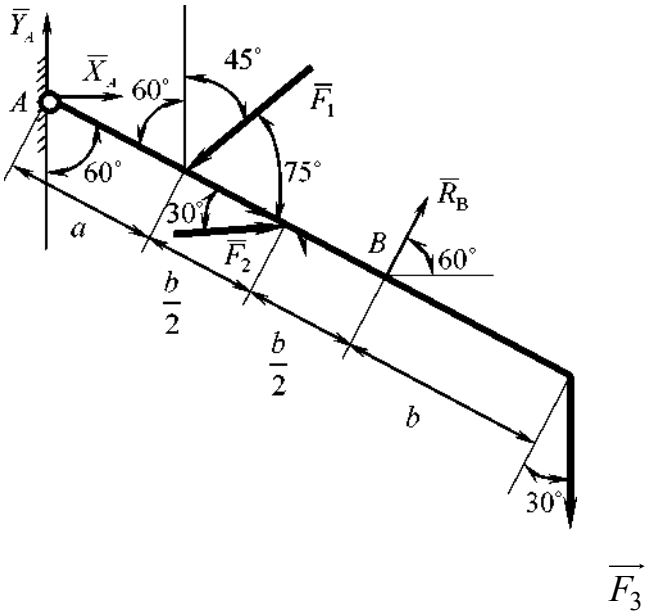


Рис. 25

$$\sum_i X_i = 0, \quad X_A - F_1 \cdot \sin 45^\circ + F_2 + R_B \cdot \cos 60^\circ = 0; \tag{7}$$

$$\sum_i Y_i = 0,\ -F_1 \cdot \cos 45^\circ + Y_A - F_3 + R_B \cdot \sin 60^\circ = 0; \tag{8}$$

$$\sum_i m_A(F_i) = 0,\ F_1 \cdot a \cdot \sin 75^\circ - F_2 \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) \cdot \sin 30^\circ + R_B(a+b) - \\ - F_3 \cdot (a + 2b) \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad . \tag{9}$$

З рівняння (9) визначаємо R_B:

$$R_B = \frac{F_3 \cdot (a+2b) \cdot \cos 30^\circ + F_1 \cdot a \cdot \sin 75^\circ - F_2 \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) \cdot \sin 30^\circ}{a+b} = \\ = \frac{22 \cdot (1{,}5+4) \cdot 0{,}866 + 15 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}966 - 18 \cdot (1{,}5+1) \cdot 0{,}5}{1{,}5+2} = 29{,}72\ кН.$$

Підставимо по черзі R_B в рівняння (7) і (8) і визначимо складові реакції в точці A (X_A і Y_A):

$$X_A = F_1 \cdot \sin 45^\circ - F_2 - R_B \cdot \cos 60^\circ = \\ = 15 \cdot 0{,}707 - 18 - 29{,}72 \cdot 0{,}5 = -22{,}25\ кН;$$

$$Y_A = F_1 \cdot \cos 45^\circ + F_3 - R_B \cdot \sin 60^\circ = \\ = 15 \cdot 0{,}707 + 22 - 29{,}72 \cdot 0{,}866 = 6{,}867\ кН.$$

Відповідь: X_A = – 22,25 кН, Y_A = 6,868 кН, R_B = 29,72 кН, реакція X_A спрямована в протилежний бік по відношенню до показаного на рис. 25.

Задача 5. Балка AB (рис. 26) у точці A закріплена нерухомим шарніром, у точці B гнучкою нерозтяжною ниткою, один кінець якої закріплений нерухомо в точці B', а другий кінець перекинуто через блок C і до нього прикріплений вантаж Q = 50 кН. Балка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q = 10 кН/м і зосередженою силою F_1 =20 кН. Геометричні розміри a = 3 м, b = 2 м.

Розв'язання

Реакцію нерухомого шарніра A розкладаємо на дві складові, як показано на рис. 26. Гнучка нерозтяжна нитка може бути тільки розтягнута, тому напрямок її реакції R_B відомий. Нитка BC також натягнута із зусиллям Q (тертям у блоці C нехтуємо).

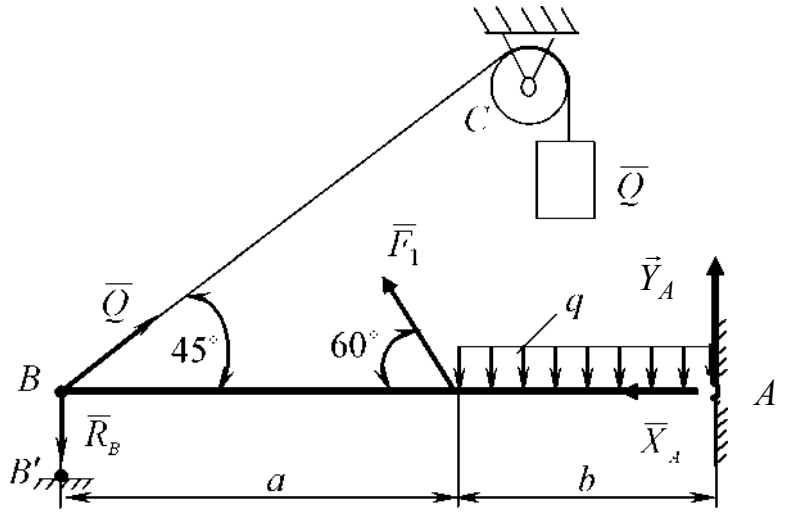


Рис. 26

Отримана система сил плоска, вибираємо осі координат x і y і складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_i X_i = 0, \quad -X_A - F_1 \cdot \cos 60^\circ + Q \cdot \cos 45^\circ = 0; \tag{10}$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad Y_A + F_1 \cdot \sin 60^\circ - R_B - q \cdot b + Q \cdot \sin 45^\circ = 0; \tag{11}$$

$$\sum_i m_A(F_i) = 0, \; -F_1 \cdot b \cdot \sin 60^\circ - Q \cdot (a+b) \cdot \sin 45^\circ + \\ + R_B(a+b) + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = 0 \quad . \tag{12}$$

З рівняння (10) знаходимо X_A:

$$X_A = -F_1 \cdot \cos 60^\circ + Q \cdot \cos 45^\circ = -20 \cdot 0{,}5 + 50 \cdot 0{,}707 = 25{,}35 \; кН \; .$$

З рівняння (12), яке містить одну невідому R_B, визначимо:

$$R_B = \frac{Q \cdot (a+b) \cdot \sin 45^\circ - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + F_1 \cdot b \cdot \sin 60^\circ}{a+b} = \\ = \frac{50 \cdot (3+2) \cdot 0{,}707 - 10 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 2 \cdot 0{,}866}{3+2} = 38{,}28 \; кН \; .$$

Слід зазначити, що реакція гнучкої нитки R_B повинна бути завжди додатною (якщо вірно обраний напрямок). Якщо в результаті розв'язання ми одержимо знак мінус, то точку кріплення B' необхідно змінити на протилежне, тобто розвернути нитку BB' на 180°, і про це потрібно обов'язково вказати в результатах розв'язання.

Знаючи R_B з рівняння (11) визначаємо Y_A:

$$Y_A = -F_1 \cdot \sin 60^\circ + R_B + q \cdot b - Q \cdot \sin 45^\circ =$$
$$= -20 \cdot 0{,}866 + 38{,}28 + 10 \cdot 2 - 50 \cdot 0{,}707 = 5{,}61\,кН\,.$$

Відповідь: X_A = 25,36 кН, Y_A = 5,61 кН, R_B = 38,28 кН.

Задача 6. Визначити реакції опор складеної конструкції та тиск у проміжному шарнірі (рис. 27), якщо P_1 = 20 кН, P_2 = 30 кН, M = 15 кН·м, q = 10 кН/м, α = 30°, β = 60°.

Розв'язання

Покажемо реакції в опорах *A, B, D* (рис. 27). Реакцій чотири X_A, Y_A, R_D , R_B , а рівнянь можна скласти тільки три, тому умовно роз'єднавши балку в шарнірі *C* розглянемо рівновагу лівої та правої частин конструкції окремо.

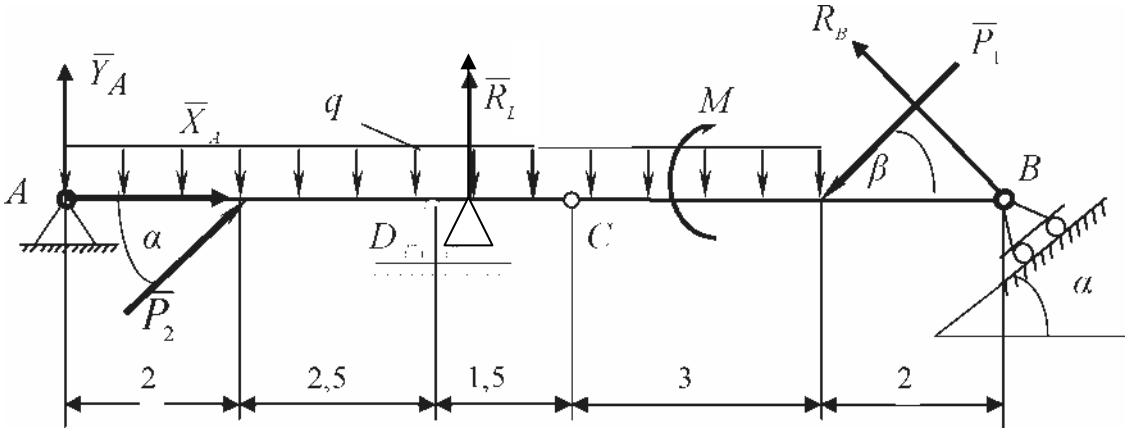


Рис. 27

Спочатку розглянемо праву частину (рис. 28).

Покажемо реакції в'язей (самі в'язі показувати не будемо, для спрощення схеми) і складемо рівняння рівноваги для цієї частини (напрямок осей показано на рис. 28):

$$\sum_i X_i = 0, \quad X_C - P_1 \cdot \cos\beta - R_B \cdot \sin\alpha = 0;$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad Y_C - P_1 \cdot \sin\beta + R_B \cdot \cos\alpha - q \cdot 3 = 0;$$

$$\sum_i m_C(F_i) = 0, \; -P_1 \cdot 3 \cdot \sin\beta - M + R_B \cdot 5 \cdot \cos\alpha - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0\,. \qquad (13)$$

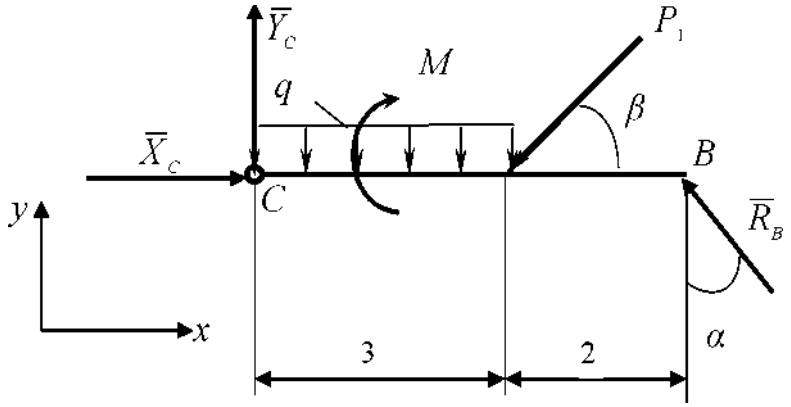


Рис. 28

Розв'яжемо спочатку останнє рівняння з системи (13), а потім інші.

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + M + q \cdot 3 \cdot 1{,}5}{5 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{20 \cdot 3 \cdot 0{,}866 + 15 + 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5}{5 \cdot 0{,}866} = 25{,}86\ кН\ .$$

$$Y_C = q \cdot 3 + P_1 \cdot \sin 60^\circ - R_B \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 3 + 20 \cdot 0{,}866 -$$
$$- 25{,}86 \cdot 0{,}866 = 24{,}93\ кН\ ;$$

$$X_C = P_1 \cdot \cos 60^\circ + R_B \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0{,}5 + 25{,}86 \cdot 0{,}5 = 22{,}93\ кН\ .$$

Розглянемо тепер рівновагу лівої частини (рис. 29).

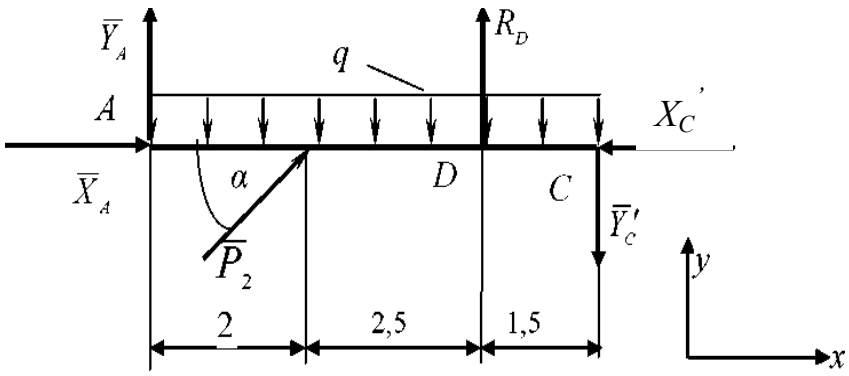


Рис. 29

У шарнірі C прикладаємо реакції X'_C й Y'_C такі ж за значенням, як і для правої частини, але протилежного напрямку. Складаємо рівняння рівноваги для цієї частини (положення і напрям координатних осей повинен бути таким самим, як і для частини *BC,* див. рис. 29).

$$\sum_i X_i = 0, \quad X_A + P_2 \cdot \cos\alpha - X'_C = 0\ ;$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad Y_A + P_2 \cdot \sin\alpha - q \cdot 6 + R_D - Y'_C = 0;$$

$$\sum_i m_A(F_i) = 0, \; P_2 \cdot 2 \cdot \sin\alpha + R_D \cdot 4{,}5 - q \cdot 6 \cdot 3 - Y'_C \cdot 6 = 0; \qquad (14)$$

$$X_C = X'_C; \; Y_C = Y'_C.$$

Починаючи з останнього рівняння (34), розв'яжемо послідовно всі рівняння

$$R_D = \frac{1}{4{,}5} \cdot (q \cdot 6 \cdot 3 + Y_C \cdot 6 - P_2 \cdot 2 \cdot \sin\alpha) =$$

$$= \frac{10 \cdot 6 \cdot 3 + 24{,}23 \cdot 6 - 30 \cdot 2 \cdot 0{,}5}{4{,}5} = 65{,}64\,кН;$$

$$Y_A = -P_2 \cdot \sin\alpha + q \cdot 6 - R_D + Y_C = -30 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 6 - 65{,}64 + 24{,}23 = 3{,}59\,кН;$$

$$X_A = X_C - P_2 \cdot \cos\alpha = 22{,}93 - 30 \cdot 0{,}866 = -3{,}05 \text{ кН}.$$

Відповідь: $X_A = -3{,}05$ кН, $Y_A = 3{,}95$ кН, $R_D = 65{,}64$ кН,

$X_C = 22{,}93$ кН, $Y_C = 24{,}93$ кН, $R_B = 25{,}86$ кН.

1.3. Приклади розв'язування задач на рівновагу просторової системи сил

При розв'язанні задач на рівновагу довільної просторової системи сил методами статики рекомендується дотримуватись наступної послідовності дій:

1. Визначити тіло, рівновагу якого треба розглянути.
2. Показати активні сили, що діють на тіло.
3. Визначити в'язі, які накладені на тіло, і замінити їх дію силами – реакціями в'язей.
4. Обрати систему координат.
5. Скласти шість рівнянь рівноваги.
6. Розв'язати одержані рівняння рівноваги, знаходячи з них невідомі реакції в'язей і сили.
7. Провести дослідження(перевірку) одержаного розв'язку.

а) Розглянемо задачі на рівновагу збіжної системи сил, що розташована в просторі.

Задача 7. Стержнева конструкція складається з 6 невагомих стержнів, з'єднаних шарнірно між собою у вузлах *K* і *M*, та з нерухомими шарнірними опорами в точках *A*, *B*, *C* і *D* (рис. 30). До вузлів *K* і *M*

прикладені сили F_1 і F_2, напрямки яких задано направляючими кутами α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 відповідно. Визначити зусилля в стрижнях, якщо F_1 = 100 кН, α_1 = 60°, β_1 = 60°, γ_1 = 45°, F_2 = 50 кН, α_2 = 45°, β_2 = 60°, γ_2 = 60°, a = 2 м, b = 2 м, c = 3 м.

Розв'язання

Визначимо на початку кути φ і θ (рис. 30), необхідні для складання рівнянь рівноваги. Оскільки $a = b = 2$ м, тобто $CD = DK = 2$ м, то кут $\varphi = 45°$.

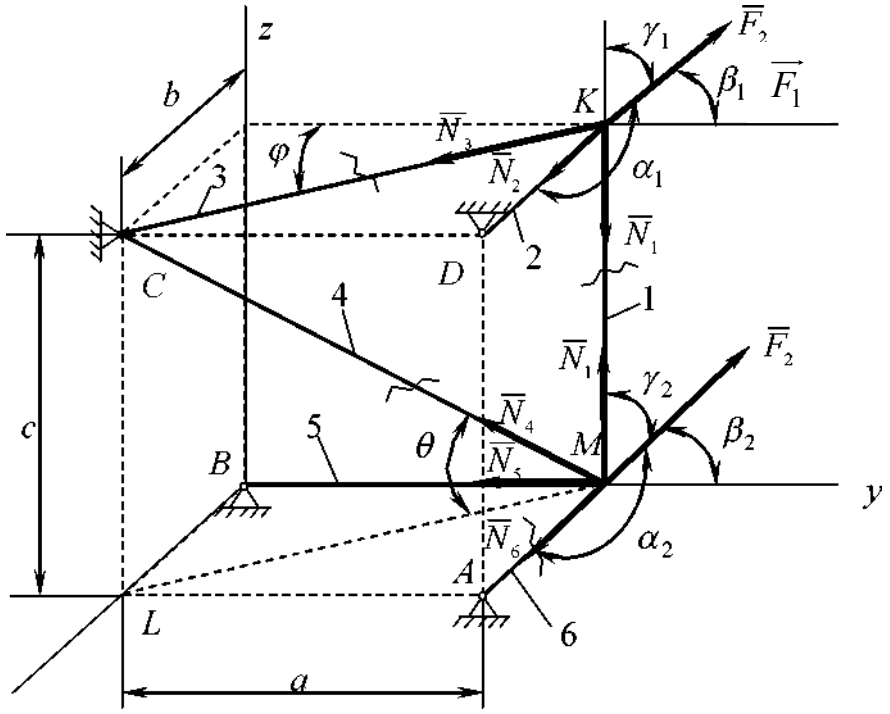


Рис. 30

Для визначення кута θ, розглянемо $\Delta\, CLM$

$$tg\theta = \frac{CL}{LM} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}};\ \theta = arctg\frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 46{,}7^\circ .$$

Стержнева система має два вузли K і M, до яких прикладені задані сили, в яких сходяться всі стержні. Тому розглянемо рівновагу цих вузлів. Спочатку розглянемо рівновагу вузла K, оскільки в ньому сходяться три стержні, отже невідомих буде 3. Вважаючи всі стержні розтягнутими, покажемо на рис. 30 їх реакції N_1, N_2, N_3.

Для збіжної системи сил складаємо 3 рівняння рівноваги відносно заданих осей x, y, z.

$$\sum_i X_i = 0, \quad N_2 + N_3 \cdot \sin\varphi + F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 0; \tag{15}$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad F_1 \cdot \cos\beta_1 - N_3 \cos\varphi = 0; \tag{16}$$

$$\sum_i Z_i = 0, \; F_1 \cdot \cos\gamma_1 - N_1 = 0 \quad . \tag{17}$$

Розв'язуємо ці рівняння:

$$N_3 = F_1 \cdot \frac{\cos\beta_1}{\cos\varphi} = 100 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}707} = 70{,}7\ кН;$$

$$N_1 = F_1 \cdot \cos\gamma_1 = 100 \cdot 0{,}707 = 70{,}7\ кН;$$

$$N_2 = -F_1 \cdot \cos\alpha_1 - N_3 \cdot \sin\varphi = -100 \cdot 0{,}5 - 70{,}7 \cdot 0{,}707 = -100\ кН.$$

Розглянемо тепер рівновагу вузла M, в якому сходяться чотири стержні, реакції яких N_1, N_4, N_5, N_6 (рис. 30). Оскільки містити тільки 3 невідомі величини – N_4, N_5 , N_6.

$$\sum_i X_i = 0, \quad F_2 \cdot \cos\alpha_2 + N_4 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + N_6 = 0; \tag{18}$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad F_2 \cdot \cos\beta_2 - N_4 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta - N_5 = 0; \tag{19}$$

$$\sum_i Z_i = 0, \; F_2 \cdot \cos\gamma_2 + N_1 + N_4 \cdot \sin\theta = 0 \quad . \tag{20}$$

Розв'язуємо одержані рівняння:

$$N_4 = \frac{-F_2 \cdot \cos\gamma_2 - N_1}{\sin\theta} = -\frac{50 \cdot 0{,}5 + 70{,}7}{0{,}7276} = -131{,}5\ кН;$$

$$N_5 = F_2 \cdot \cos\beta_2 - N_4 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta = 50 \cdot 0{,}5 -$$
$$-(-131{,}5) \cdot 0{,}6858 \cdot 0{,}707 = 88{,}774\ кН;$$

$$N_6 = -F_2 \cdot \cos\alpha_2 - N_4 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi =$$
$$= -50 \cdot 0{,}707 - (-131{,}5) \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}6858 = 28{,}41\ кН.$$

Відповідь: N_1= 70,7 кН; N_2 = – 100 кН; N_3 = 70,7 кН; N_4 = –131,5 кН; N_5 = 88,8 кН; N_6 = 28,4 кН.

Задача 8. Однорідна плита вагою P = 5 кН з розмірами $AB = 3l$ і $BC = 2l$ закріплена в точці A сферичним шарніром, в точці B – циліндричним шарніром (підшипником) і утримується в рівновазі невагомим стержнем CC' (рис. 31). На плиту діють: пара сил з моментом M = 6 кН·м, яка лежить в площині плити, сили F_1 = 4 кН і F_3 = 8 кН, які прикладені в точках D, H і утворюють з відповідними осями кути α_1 = 30° (з віссю Ax) і α_3 = 60° (з віссю Ay). Визначити реакції в'язей в точках А, B і C, якщо точки

прикладання сил знаходяться по середині відповідних сторін плити, а $l = 0{,}8$ м.

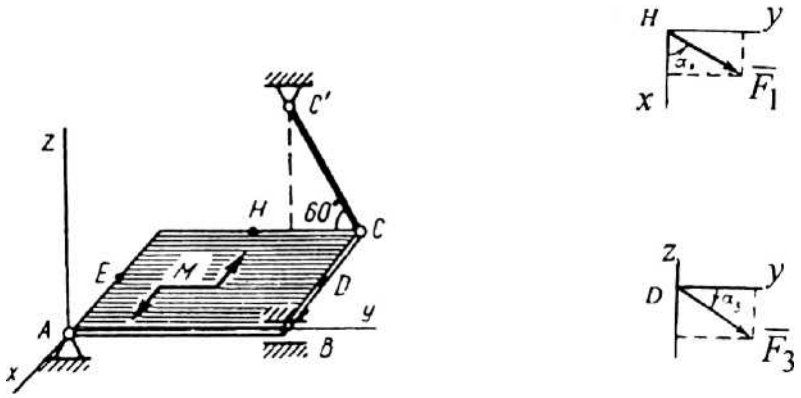


Рис. 31

Розв'язання

Розглянемо рівновагу плити, звільнивши її від в'язей.

Реакцію сферичного шарніра в точці A розкладаємо на три складові X_A, Y_A і Z_A, реакцію підшипника в точці B – на дві складові X_B і Z_B, які лежать в площині, перпендикулярній осі підшипника (осі Ay). Реакція стрижня N_C напрямлена вздовж осі стрижня CC'. Задані сили і реакції в'язей утворюють довільну просторову систему сил (рис. 32), під дією якої плита знаходиться у рівновазі, тому повинно виконуватись шість рівнянь статики.

Складаємо ці рівняння:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + F_1 \cos\alpha_1 = 0; \tag{21}$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + F_1 \sin\alpha_1 + F_3 \cos\alpha_3 - N_C \cos 60^\circ = 0; \tag{22}$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - P - F_3 \sin\alpha_3 + N_C \sin 60^\circ = 0; \tag{23}$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0; \quad Z_B \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} - F_3 \sin\alpha_3 \cdot AB + N_C \sin 60^\circ \cdot AB = 0; \tag{24}$$

$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0; \quad -P \cdot \frac{BC}{2} - F_3 \sin\alpha_3 \cdot \frac{BC}{2} + N_C \sin 60^\circ \cdot BC = 0; \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = 0; \quad M - X_B \cdot AB - F_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot BC - \\ - F_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \frac{BC}{2} - F_3 \cdot \cos\alpha_3 \cdot \frac{BC}{2} + N_C \cos 60^\circ \cdot BC = 0,\end{gathered} \tag{26}$$

де $AB = 3l = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ м, $BC = 2l = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ м.

Розв'язуючи одержану систему рівнянь, знаходимо з рівняння (25) N_C, виключивши BC,

$$N_C = \frac{1}{2 \cdot \sin 60^\circ} \cdot \left(F_3 \cdot \sin 60^\circ + P\right) = \frac{1}{1{,}732} \cdot \left(8 \cdot 0{,}866 + 5\right) = 6{,}89\ кН$$

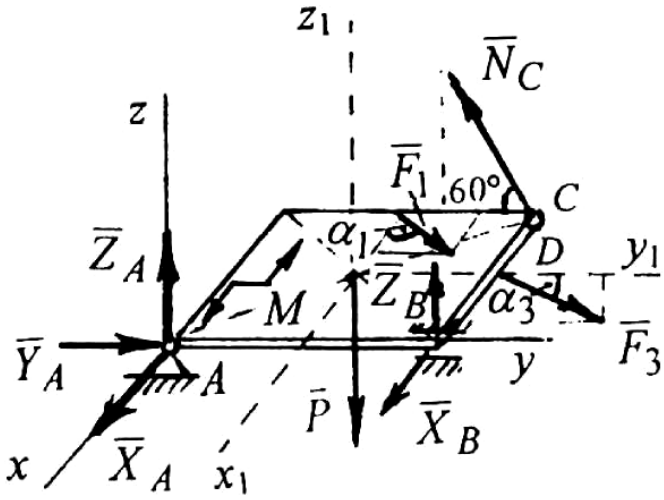


Рис. 32

Із рівняння (26) знаходимо X_B:

$$X_B = \frac{1}{AB}\left(M - F_1 \cos\alpha_1 \frac{AB}{2} - F_1 \sin\alpha_1 BC + N_C \cos 60^\circ BC - F_3 \cos\alpha_3 \frac{BC}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2{,}4}\left(6 - 4 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}6 + 6{,}89 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}6 - 8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8\right) = 0{,}398\ кН.$$

Із рівняння (24)

$$Z_B = F_3 \sin\alpha_3 + 0{,}5P - N_C \sin 60^\circ = 8 \cdot 0{,}866 + 0{,}5 \cdot 5 -$$
$$- 6{,}89 \cdot 0{,}866 = 3{,}46\ кН.$$

Із рівняння (23)

$$Z_A = F_3 \sin\alpha_3 + P - Z_B - N_C \sin 60^\circ = 8 \cdot 0{,}866 + 5 - 3{,}46 -$$
$$- 6{,}89 \cdot 0{,}866 = 2{,}5\ кН.$$

Тоді

$$Y_A = N_C \cos 60^\circ - F_1 \sin\alpha_1 - F_3 \cos\alpha_3 = \left(6{,}89 - 4 - 8\right) \cdot 0{,}5 = -2{,}56\ кН,$$
$$X_A = -X_B - F_1 \cos\alpha_1 = -0{,}398 - 4 \cdot 0{,}866 = -3{,}86\ кН.$$

Знак “ – “ свідчить про те, що сили X_A і Y_A напрямлені протилежно показаному на рис. 32.

Для перевірки результатів розв’язку задачі осі координат переносимо паралельно самім собі в центр плити (див. рис. 32) і складаємо рівняння моментів відносно осей x_1 і z_1 (рівняння моментів відносно осі y_1 можна

не складати, оскільки воно в якійсь мірі дублює рівняння моментів відносно осі x_1 – перевіряються ті ж самі величини, а саме Z_A, Z_B і N_C:

$$\sum m_{x1}\left(\vec{F}_k\right)=0,\ Z_B\frac{AB}{2}+N_C\sin 60^\circ\frac{AB}{2}-F_3\sin\alpha_3\frac{AB}{2}-Z_A\frac{AB}{2}=0\ . \quad (27)$$

Скорочуючи на множник $AB/2$, отримаємо

$$Z_B + N_C \sin 60° - F_3 \sin \alpha_3 - Z_A = 0.$$

Підставляючи сюди числові значення заданих та знайдених величин, матимемо

$$3{,}48 + 6{,}87\cdot\sin60° - 8\cdot\sin60° - 2{,}5 = 0,$$
$$9{,}43 - 9{,}43 = 0;$$

$$\sum m_{z1}\left(\vec{F}_k\right)=0,\ M+Y_A\frac{BC}{2}+X_A\frac{AB}{2}-X_B\frac{AB}{2}+$$
$$+N_C\cos 60^\circ\frac{BC}{2}-F_1\sin\alpha_1\frac{BC}{2}=0. \quad (28)$$

Підставляючи в рівняння (28) числові значення, отримаємо:

$$6 + (-2{,}56)\cdot1{,}6/2 + (-3{,}86)\cdot2{,}4/2 - 0{,}38\cdot2{,}4/2 +$$
$$+ 6{,}87\cos60°\cdot1{,}6/2 - 4\sin30^{o}\cdot1{,}6/2 = 0$$

або $$8{,}75 - 8{,}74 \approx 0.$$

Таким чином, задачу розв’язано вірно. Далі знаходимо числові значення реакцій в точках A і B

$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=\sqrt{(-3{,}86)^2+(-2{,}56)^2+2{,}5^2}=5{,}26\ кН\ ;$$

$$R_B=\sqrt{X_B^2+Z_B^2}=\sqrt{0{,}38^2+3{,}48^2}=3{,}5\ кН\ .$$

Відповідь: R_A = 5,26 кН, R_B = 3,5 кН, N_C = 6,89 кН.

Задача 9. До горизонтального вала AB жорстко прикріплено три шківа (рис. 33), до яких прикладені сили $\vec{F_1}$, $\vec{Q_1}$ $\vec{T_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{Q_2}$, $\vec{T_2}$ і $\vec{P}$, де $\vec{F_k}$, $\vec{Q_k}$ і $\vec{T_k}$ відповідно k - а дотична, осьова та радіальна сили.

Визначити реакції в опорному (точка A) і циліндричному (точка B) підшипниках, а також силу P, яка забезпечує рівновагу вала,

якщо F_1 = 5,2 кН, F_2 = 3,8 кН, G = 1,2 кН, a = 0,1 м, b = 0,2 м, c = 0,15 м, R = 0,4 м, r = 0,15 м, R_1= 0,5R, Q_1= 3,02 кН,

T_1 = 1,87 кН, Q_2 = 2,2 кН, T_2 = 1,37 кН.

Розв'язання

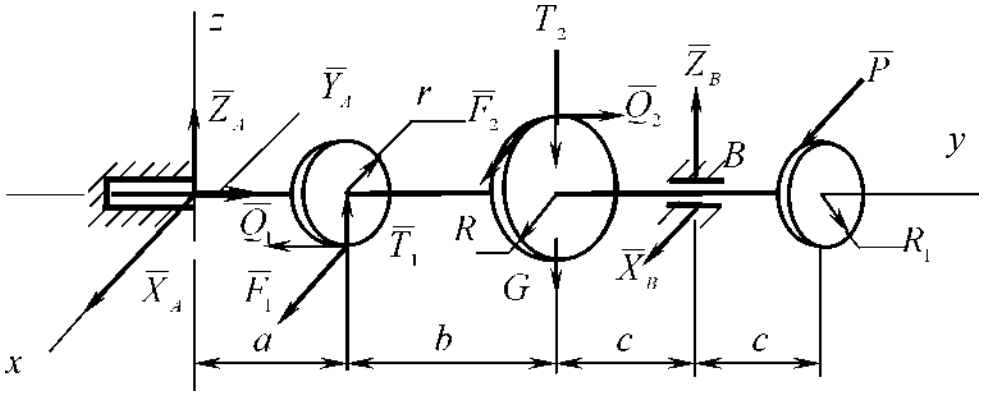


Рис. 33

Покажемо реакції опор в точках *A* і *B:* в точці *A* три складових X_A, Y_A, Z_A в опорі *B* – дві складових X_B, Z_B (рис. 33). Задані сили і реакції в'язей утворюють довільну просторову систему сил, під дією якої вал *AB* знаходиться у рівновазі. Складемо рівняння рівноваги відносно осей, показаних на рис. 33.

$$\sum_i X_i = 0, \quad X_A + F_1 + F_2 + X_B + P = 0; \tag{29}$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad Y_A - Q_1 + Q_2 = 0; \tag{30}$$

$$\sum_i Z_i = 0, \quad Z_A + T_1 - T_2 + Z_B = 0; \tag{31}$$

$$\sum_i M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \; T_1 \cdot a - Q_1 \cdot r - \left(T_2 + G\right)\left(a + b\right) - Q_2 \cdot R + Z_B \cdot \left(a + b + c\right) = 0; \tag{32}$$

$$\sum_i M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -F_1 \cdot r + F_2 \cdot R + P \cdot R_1 = 0; \tag{33}$$

$$\sum_i M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0, -F_1 \cdot a - F_2 \cdot \left(a + b\right) - X_B \cdot \left(a + b + c\right) - P \cdot \left(a + b + 2c\right) = 0. \tag{34}$$

Розв'язуємо одержану систему рівнянь. З рівняння (30) визначаємо Y_A:

$$Y_A = Q_1 - Q_2 = 3{,}02 - 2{,}2 = 0{,}82 \text{ кН}.$$

З рівняння (32) знаходимо Z_B:

$$Z_B = \frac{-T_1 \cdot a + Q_1 \cdot r + \left(T_2 + G\right) \cdot \left(a + b\right) + Q_2 \cdot R}{a + b + c} =$$

$$= \frac{-1{,}87 \cdot 0{,}1 + 3{,}02 \cdot 0{,}15 + \left(1{,}37 + 1{,}2\right) \cdot \left(0{,}1 + 0{,}2\right) + 2{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}15} = \; 4{,}26 \text{ кН}.$$

З рівняння (33) визначаємо P:

$$P = \frac{F_1 \cdot r - F_2 \cdot R}{R} = \frac{5{,}2 \cdot 0{,}15 - 3{,}8 \cdot 0{,}4}{0{,}5 \cdot 0{,}4} = -3{,}7 \text{ кН}.$$

З рівняння (34) знаходимо X_B з врахуванням значення P:

$$X_B = -\frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a+b) + P \cdot (a+b+2c)}{a+b+c} =$$

$$= -\frac{5{,}2 \cdot 0{,}1 + 3{,}8 \cdot (0{,}1+0{,}2) - 3{,}7 \cdot (0{,}1+0{,}2+2 \cdot 0{,}3)}{0{,}1+0{,}2+0{,}3} = -1{,}24 \text{ кН}.$$

З рівняння (29) визначаємо X_A:

$$X_A = -F_1 - F_2 - X_B - P = -5{,}2 - 3{,}8 + 1{,}24 + 3{,}7 = -4{,}06 \text{ кН}.$$

З рівняння (58) визначимо Z_A: $Z_A = T_2 - T_1 - Z_B = 1{,}37 - 1{,}87 - 4{,}26 = -4{,}76$ кН.

Відповідь: $P = -3{,}7$ кН, $X_B = -1{,}24$ кН, $X_A = -4{,}06$ кН, $Y_A = 0{,}82$ кН, $Z_A = 4{,}76$ кН, $Z_B = 4{,}26$ кН.

1.4. Приклади розв'язування задач на рівновагу при дії тертя і знаходження центру ваги

Задача 10. Визначити мінімальне значення сили P і реакції опор системи (рис. 34), яка знаходиться у рівновазі, якщо коефіцієнт тертя спокою між барабаном вагою $G = 2$ кН і гальмовою колодкою дорівнює $f = 0{,}25$.

Вага вантажу, який підвішений до канату на барабані $Q = 10$ кН, $a = 0{,}2$ м, $b = 0{,}3$ м, $c = 0{,}04$ м, $r = 0{,}3$ м, $R = 0{,}5$ м. Вагу рукояті, гальмової колодки та канату не враховувати, а тертям в осях знехтувати.

Розв'язання

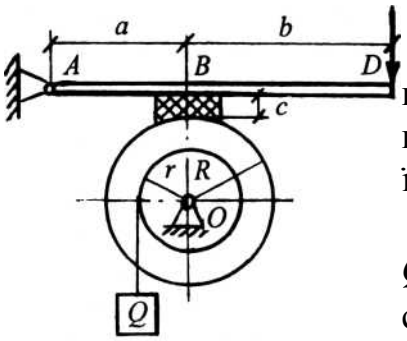


Рис. 34

Розглянемо спочатку рівновагу сил, які прикладені до барабана (рис. 35). Для цього відкидаємо накладені на нього в'язі, замінюючи їх силами – реакціями в'язей.

Дію вантажу на барабан замінюємо силою Q, а реакцію опори в точці O розкладаємо на дві складові X_0 і Y_0, які напрямлені вздовж координатних осей. Враховуючи шорсткість поверхні між гальмовою колодкою і барабаном, дію рукояті на барабан замінюємо силою, яка

розкладається на дві складові – нормальний тиск N_B та силу тертя F_{TB} (рис. 35).

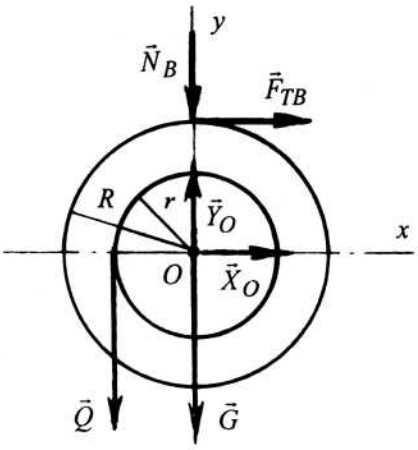


Рис. 35

За напрямом сила тертя протидіє силі Q, яка прагне повернути барабан в напрямі проти ходу годинникової стрілки. Таким чином сили, що діють на барабан (задані і реакції в'язей), утворюють довільну плоску систему сил, під дією якої барабан знаходиться у рівновазі. Тому повинні виконуватись три рівняння статики. Складаємо їх:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad F_{TB} + X_0 = 0;$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_0 - G - Q - N_B = 0;$$

$$\sum_i m_O\left(\overrightarrow{F_i}\right) = 0, \quad Q \cdot r - F_{TB} \cdot R = 0.$$

До цих рівнянь додаємо додаткове рівняння, яке встановлює залежність між силою тертя F_{TB} та нормальним тиском N_B:

$$F_{TB} = f \cdot N_B .$$

Розв'язуючи одержану систему рівнянь, знаходимо:

$$F_{TB} = \frac{Q \cdot r}{R} = \frac{Q \cdot 0{,}5R}{R} = 0{,}5Q = 5\ кН;$$

$$N_B = \frac{F_{TB}}{f} = \frac{5}{0{,}25} = 20\ кН;$$

$$X_O = -F_{TB} = -5\ кН;\ Y_O = G + Q + N_B = 32\ кН.$$

Тоді реакція опори в точці O

$$R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = \sqrt{(-5)^2 + 32^2} = 32{,}39\ кН.$$

Далі розглянемо рівновагу сил, які прикладені до рукояті. На неї діють: сила *P,* яку слід визначити, реакція шарнірного закріплення в точці *A,* яку розкладаємо на дві складові X_A і $У_а$ та сили N_B і F_{TB} (сили дії барабана на рукоять в точці *B*). Ці сили утворюють довільну плоску систему сил, під дією якої рукоять знаходиться у рівновазі, тому повинні виконуватись три рівняння статики. Складаємо їх:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad X_A - F_{TB} = 0;$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_A + N_B - P = 0;$$

$$\sum_i m_A\left(\overrightarrow{F_i}\right) = 0, \quad N_B \cdot a - P(a+b) - F_{TB} \cdot c = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння одержимо:

$$X_A = F_{TB} = 5\ кН;$$

$$P = \frac{1}{a+b} \cdot \left(N_B \cdot a - F_{TB} \cdot c\right) = \frac{1}{0{,}2+0{,}3}\left(20 \cdot 0{,}2 - 5 \cdot 0{,}04\right) = 7{,}6\ кН;$$

$$Y_A = P - N_B = 7{,}6 - 20 = -12{,}4\ кН.$$

Тоді реакція шарнірної опори в точці *A*

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5^2 + (-12{,}4)^2} = 13{,}37\ кН.$$

Для перевірки одержаних результатів складаємо рівняння моментів відносно точки *A*, розглядаючи рівновагу сил, які діють на конструкцію в цілому (рис. 36).

$$\sum_i m_A\left(\overrightarrow{F_i}\right) = 0; \ -P(a+b) - G \cdot a - Q \cdot (a-r) + X_O \cdot (R+c) + Y_O \cdot a = 0.$$

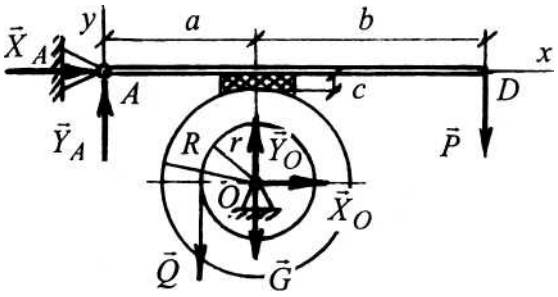


Рис. 36

Підставляючи в це рівняння значення заданих та одержаних при розв'язанні задачі величин, матимемо:

$$-7{,}6 \cdot (0{,}2+0{,}3) - 2 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot (0{,}2-0{,}3) + (-5) \cdot (0{,}6+0{,}04) + 32 \cdot 0{,}2 \approx 0.$$

Таким чином задачу розв'язано вірно.

Задача 11. Визначити положення центра ваги складної фігури, яку показано на рис. 37. Розміри на рисунку задані в міліметрах.

Розв'язання

Для розв’язання задачі розіб’ємо цю фігуру на три простих: I – півкола; II – прямокутник; III – прямокутник (див. рис. 37). Раціонально виберемо осі координат з початком у центрі ваги прямокутника III.

Визначаємо площі простих фігур і площу всієї фігури в цілому:

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3{,}14... \cdot 75^2}{2} = 8835{,}7 \approx 8836\,мм^2 \;;$$

$$A_2 = 60 \cdot 150 = 9000\,мм^2;$$

$$A_3 = 240 \cdot 60 = 14400\,мм^2;$$

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3\,; \quad A = 8836+9000+14400 = 32236\,мм^2.$$

Визначаємо координати центра ваги кожної простої фігури. При цьому для визначення центра ваги півкола скористаємося даними табл.1 (Додаток) з урахуванням того, що початок координат у центрі фігури III:

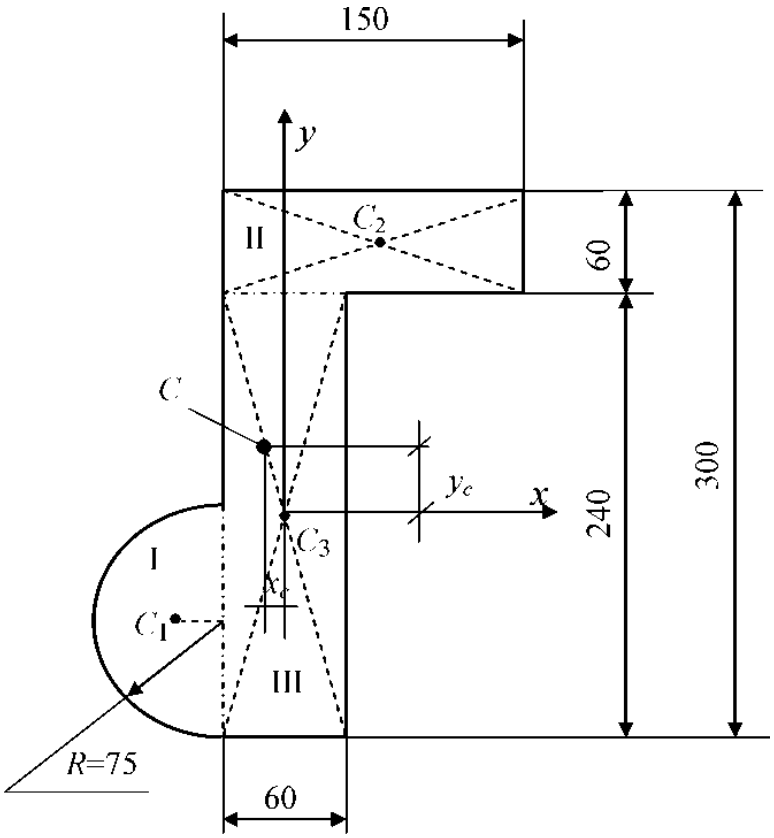


Рис. 37

$$x_1 = -\left(\frac{60}{2} + \frac{4R}{3\pi}\right) = -\left(\frac{60}{2} + \frac{4 \cdot 75}{3 \cdot 3{,}14...}\right) = -61{,}83\ мм;$$

$$y_1 = -\left(\frac{240}{2} - R\right) = -\left(\frac{240}{2} - 75\right) = -45\ мм;$$

$$x_2 = \frac{150}{2} - \frac{60}{2} = 45\ мм; \quad y_2 = \frac{240}{2} + \frac{60}{2} = 150\ мм;$$

$$x_3 = 0; \qquad y_3 = 0.$$

Обчислюємо статичні моменти всієї фігури відносно вибраних координатних осей:

$$S_x = \sum S_{xi} = \sum A_i \cdot y_i = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 =$$

$$= 8836 \cdot (-45) + 9000 \cdot 150 + 0 = 952390\ мм^3;$$

$$S_y = \sum S_{yi} = \sum A_i \cdot x_i = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 =$$

$$= 8836 \cdot (-61{,}83) + 9000 \cdot 45 + 0 = -141310\ мм^3.$$

Визначимо координати центра ваги фігури:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = -\frac{141310}{32236} = -4{,}38\ мм; \; y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{952390}{32236} = 29{,}54\ мм.$$

Положення центра ваги фігури відзначено точкою *C* на рис. 37.

Відповідь: x_C = – 4,38 мм; y_C = 29,54 мм.

Задача 12. Для заданої плоскої фігури (рис. 38) визначити координати центра ваги. Розміри задані в сантиметрах.

Розв'язання

Задану фігуру розбиваємо на три частини – прямокутник, трикутник і вирізане півколо (від'ємна площа). Оскільки дані частини прості, площі й координати їх центрів ваги відносно показаних осей запишемо без детального обчислення.

A_1 = 1200 см^2 , x_1 = 15 см, y_1 = 20 см ;

A_2 = 1000 см^2 , x_2 = 46,67 см, y_2 = 13,33 см;

A_3= – 628 см^2, x_3 = 8,5 см, y_3 = 20 см.

Статичні моменти фігури щодо координатних осей:

$$S_y = \sum S_{yi} = \sum A_i \cdot x_i = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 =$$

$$= 1200 \cdot 15 + 1000 \cdot 46{,}7 - 628 \cdot 8{,}5 = 59362\ см^3;$$

$$S_x = \sum S_{xi} = \sum A_i \cdot y_i = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 =$$
$$= 1200 \cdot 20 + 1000 \cdot 13{,}3 - 628 \cdot 20 = 24700 \text{ см}^3.$$

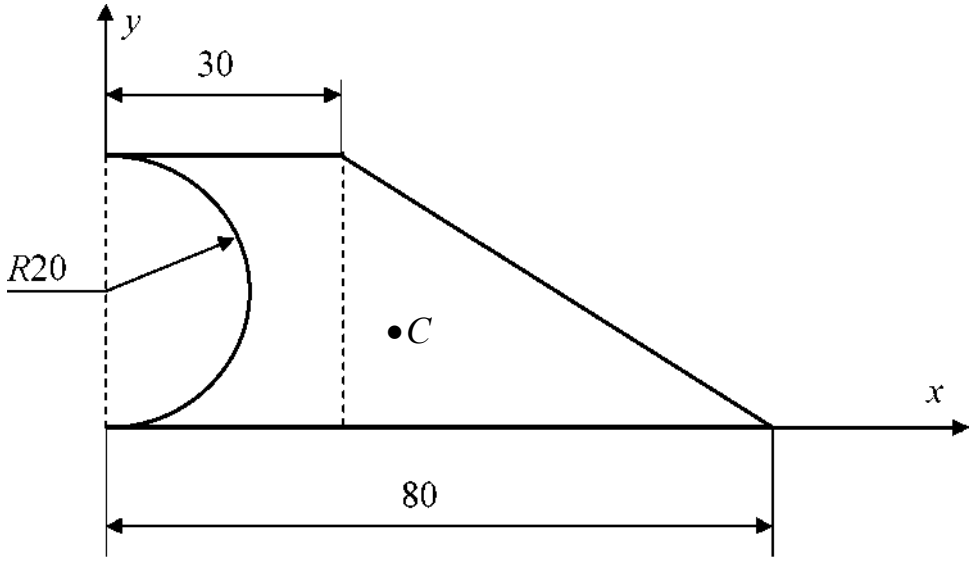


Рис. 38

Визначимо координати центра ваги заданої фігури:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1200+1000-628=1572 \text{ см}^2;$$

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{59362}{1572} = 37{,}8 \ см; \ y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{24700}{1572} = 15{,}7 \ см.$$

Положення центра ваги фігури відзначено точкою *C* на рис. 38.

Відповідь: x_C = 37,8 см, y_C = 15,7 см.

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ ЗІ СТАТИКИ

Демонстраційний варіант

Завдання 1 – 7 мають п’ять варіантів відповіді, серед яких лише один правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді, позначте його в бланку відповідей.

Проекція сили $\vec{F}$, зображеної на рис. Тс1, на вісь *Oy* дорівнює:

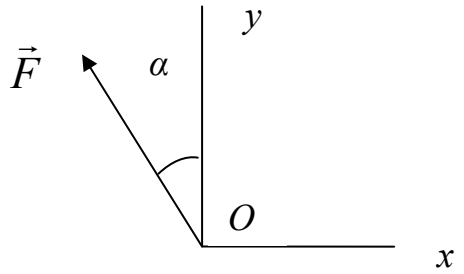


Рис. Тс1

а	б	в	г	д
F tg α	F cos α	F sin α	F ctg α	$-F$ sin α

2. Момент сили $\vec{F}$ відносно точки О (рис. Тс2) дорівнює :

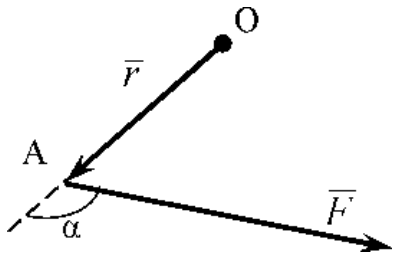


Рис. Тс2

а	б	в	г	д
$F{\cdot}r{\cdot}\sin\alpha$	$-F{\cdot}r{\cdot}\cos\alpha$	$F{\cdot}r{\cdot}\cos\alpha$	$F{\cdot}r^2{\cdot}\sin\alpha$	$-F{\cdot}r{\cdot}\sin\alpha$

3. Реакціям в'язей, які необхідно ввести для складання умов рівноваги балки *AB* (рис. Тс3), відповідають вектори:

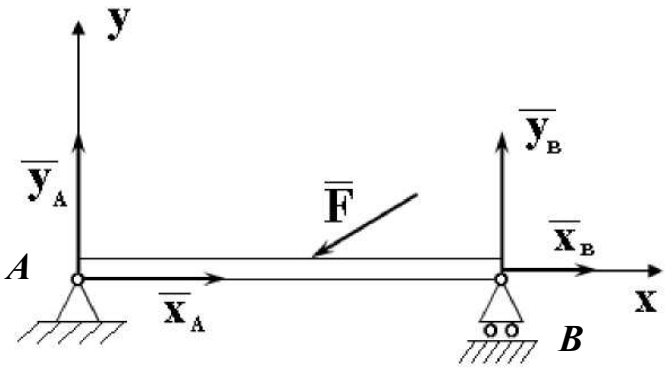


Рис. Тс3

а	б	в	г	д
$\vec{y}_A, \vec{F}, \vec{x}_A$	$\vec{y}_A, \vec{F}, \vec{x}_A, \vec{y}_B$	$\vec{y}_A, \vec{x}_A, \vec{y}_B$	$\vec{y}_A, \vec{x}_B, \vec{x}_A, \vec{y}_B$	$\vec{y}_A, \vec{x}_B, \vec{y}_B$

4. Балка *BC* має дві опори: рухомий шарнір у точці *A* і нерухомий шарнір у точці *B* (рис. Тс4). Вона навантажена рівномірно розподіленим навантаженням q = 1 кН/ м та силою F = 10 кН, як показано на рис. Тс4 . Знайти реакцію R_A , якщо a = 1 м, кут α дорівнює 45°.

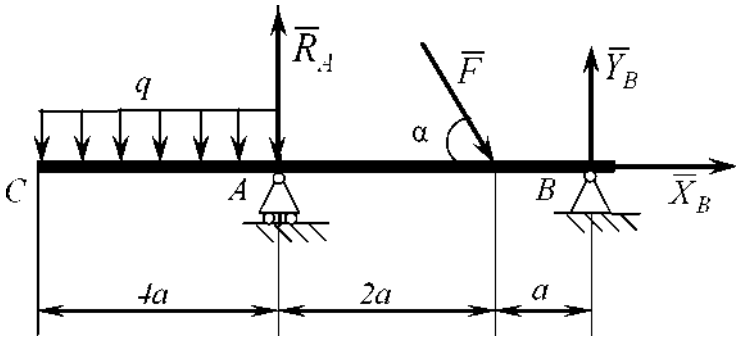


Рис. Тс4

а	б	в	г	д
9,02 кН	12,5 кН	1,83 кН	2,49 кН	– 8,04 кН

5. Для наведеної розрахункової схеми (рис. Тс5) M_{OZ} $(\vec{F})$ дорівнює:

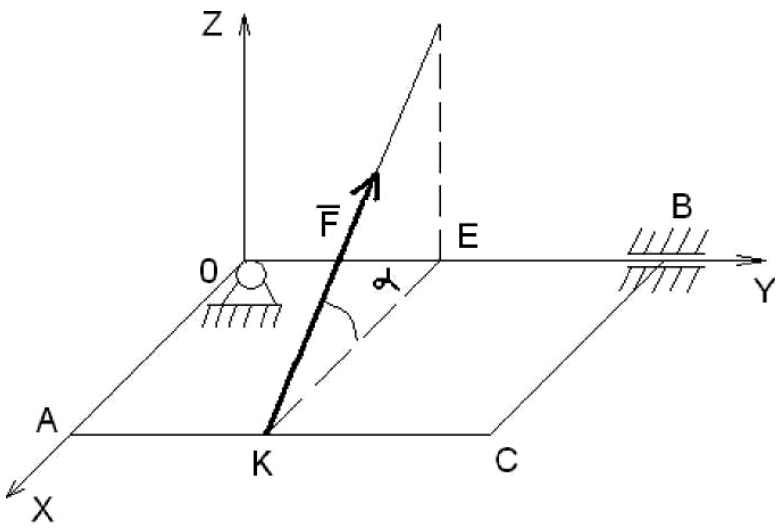


Рис. Тс5

а	б	в	г	д
F tg $\alpha\cdot OA$	F cos $\alpha\cdot OE$	$-F$ sin $\alpha\cdot OE$	F ctg $\alpha\cdot KE$	$-F$ cos $\alpha\cdot AK$

6. Тіло знаходиться у стані рівноваги на шорсткій нахиленої площині (рис. Тс6). Визначить коефіцієнт тертя, якщо кут нахилу площини α дорівнює 7°.

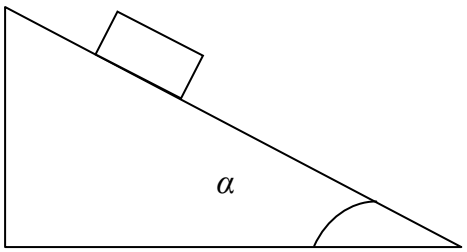


Рис. Тс6

а	б	в	г	д
$f = 0{,}054$	$f = 0{,}312$	$f = 0{,}213$	$f = 0{,}123$	$f = 0{,}085$

7. Якщо задані пари сил з моментами M_1 і M_2 розташовані у площинах Oyz та Oxy відповідно (рис. Тс7), тоді модуль моменту результуючої пари дорівнює:

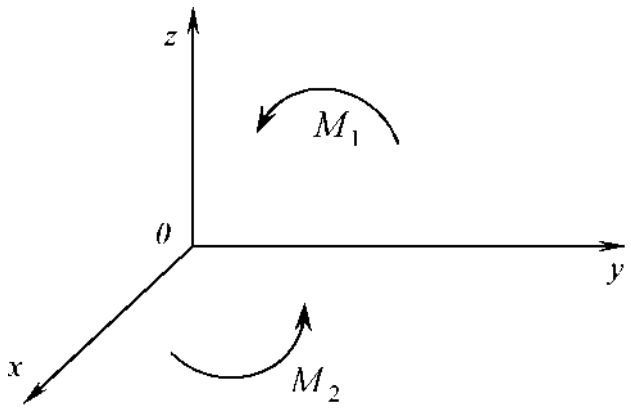


Рис. Тс7

а	б	в	г	д
$M_1 - M_2$	$\sqrt{M_1^2 + M_2^2}$	0	$\sqrt{M_1^2 - M_2^2}$	$M_1 + M_2$

У завданнях 8, 9 до кожного з чотирьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте в *бланку* позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

8. Установіть відповідність механічної величини (1 – 4) і математичного виразу для її знаходження (А – Д).

Механічна величина	*Математичний вираз*
1 коефіцієнт тертя	А $\sum \vec{F}_k$
2 головний момент системи	Б F/N
3 момент пари	В $(N+F)/N$
4 головний вектор сил	Г $\sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)$
	Д $\pm F \cdot d$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Кришка вагою P = 0,5 кН і розмірами 1×1,5 м знаходиться у рівновазі (Рис. Тс8). Установіть відповідність між реакціями в'язей (1 – 4) та їхніми значеннями (А – Д).

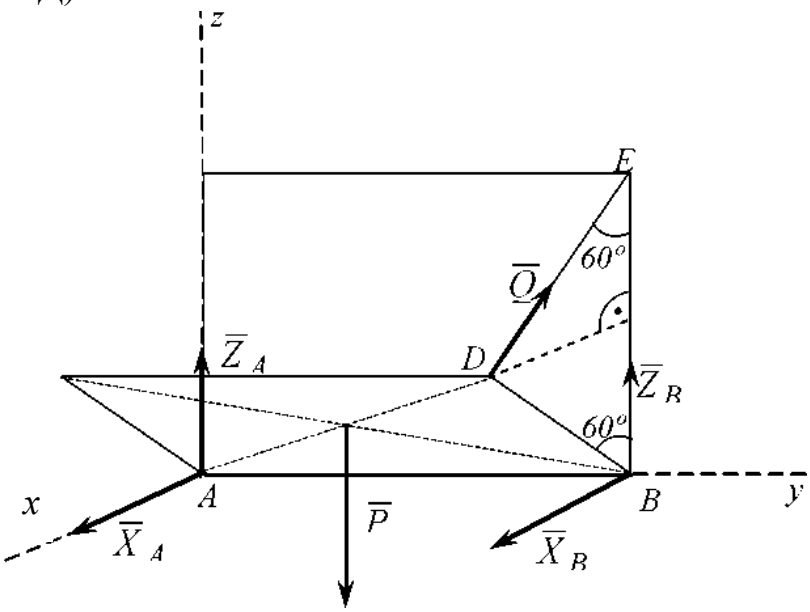


Рис. Тс8

Реакція підшипника	Значення
1. X_A, Н	А 216,5
2. X_B, Н	Б 125
3. Z_A, Н	В 0
4. Z_B, Н	Г 375
	Д 250

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Виконайте завдання 10 – 12. Числові розрахунки здійснюйте за остаточною формулою розв'язання задачі в загальному вигляді. Одержані числові відповіді запишіть у *бланку* на відповідних місцях. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, ураховуючи положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці. Одиниці фізичних величин явно зазначати не потрібно.

10. При рівновазі невагомої кранової балки AB (рис. Тс9) під дією сили $\vec{P}$ (P = 10 кН, α = 30°, a = 1 м, l = 2,5 м) знайдіть:
1. Натяг троса T .
2. Реакцію опори A.

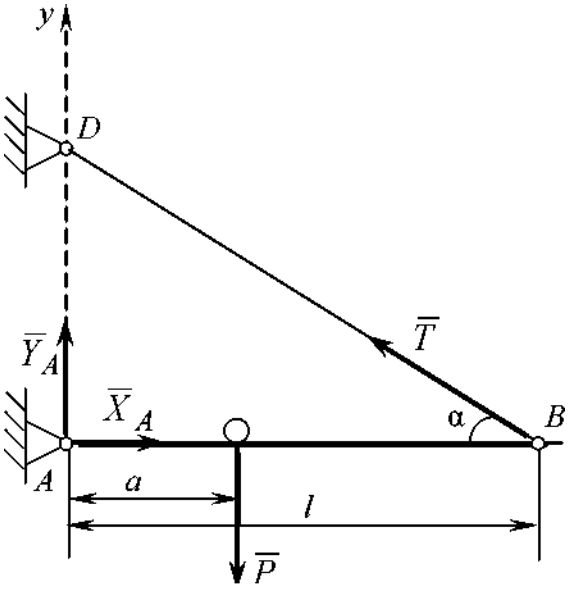


Рис. Тс9

11. Визначити проекцію на вісь Oy сили протилежної $\vec{F}$ (F = 15 Н, α = 45°, β = 30°), яка зображена на рис. Тс10:

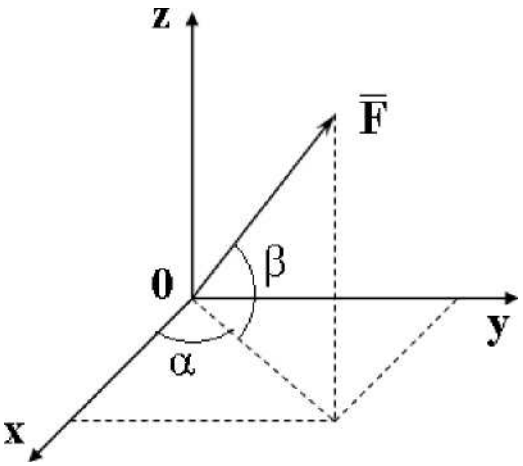


Рис. Тс10

12. З умов рівноваги прямокутної рамки вагою P = 400 Н (рис. Тс11) знайдіть реакцію зв'язку Z_B, якщо a = 0,25 *м*; b = 0,6 *м*:

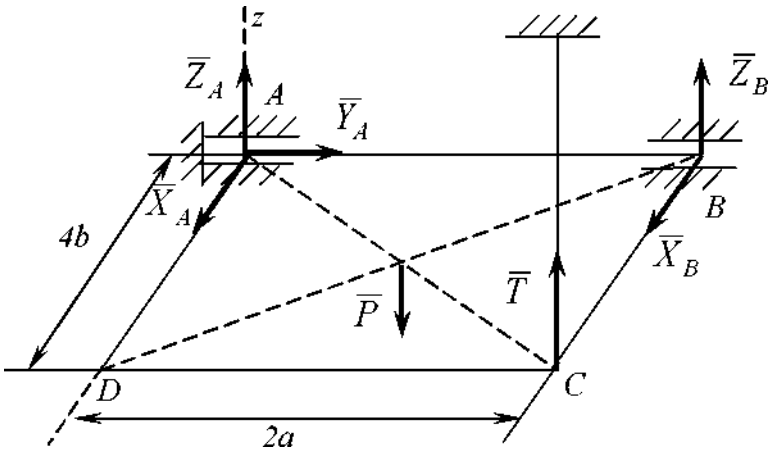


Рис. Тс11

Розв'язання

1. Кут β між силою $\vec{F}$ та віссю Ox дорівнює $90^\circ + \alpha$, за означенням проекція F_y сили на вісь Oy

$$F_y = F \sin\beta = F \sin(90^\circ + \alpha) = F \cos\alpha.$$

Обираємо 1.б.

2. Напрям обертання сили $\vec{F}$ навколо точки О проти ходу годинникової стрілки, тоді формула обчислення моменту сили

$$M_O(\vec{F}) = F{\cdot}h = F{\cdot}r \sin(180^\circ - \alpha) = F{\cdot}r \sin\alpha,$$

де F – модуль сили; $h = r \sin(180^\circ - \alpha)$ – плече сили відносно О.

Обираємо 2.а.

3. За умовами задачі в'язями балки AB є нерухомий шарнір у точці A і рухомий шарнір у точці B. Відомо, що їх реакції у обраній системі координат Axy можна повністю охарактеризувати трьома складовими $\vec{y}_A, \vec{x}_A, \vec{y}_B$.

Обираємо 3.в.

4. Складаємо рівняння моментів сил, діючих на балку після звільнення від в'язів, відносно точки B:

$$\sum M_B(F_k) = 0\ ;\ F \sin\alpha \cdot a - R_A \cdot 3a + q \cdot 4a \cdot 5a = 0.$$

Звідси

$$R_A = (F \sin\alpha + 20\, q \cdot a)/\,3 = (10 \cdot 0{,}707 + 20 \cdot 1 \cdot 1)/3 = 9{,}02 \text{ кН}.$$

Обираємо 4.а.

5. Розкладаємо силу $\vec{F}$ на складові у площині Oxy та перпендикулярну до неї. Ненульовий момент відносно Oz дає сила величини $F \cos\alpha$ з напрямком обертання проти ходу годинникової стрілки та плечем OE. Тоді

$$M_{OZ}(\vec{F}) = F \cos\alpha \cdot OE.$$

Обираємо 5.б.

6. Розглядаємо умови рівноваги тіла (рис. Тс12). Розкладаємо силу тяжіння на нормальну і дотичну до похилої площини складові. Тоді маємо

$$N = G\cos\alpha; \qquad F = G\sin\alpha.$$

За законом Амонтона – Кулона

$$F_{тер} = f \cdot N = f \cdot G\cos\alpha.$$

Умова рівноваги в дотичному напрямку $F_{тер} = F$. Після підстановки отримуємо

$$f \cdot G\cos\alpha = G\sin\alpha.$$

Знаходимо коефіцієнт тертя

$$f = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,7^\circ = 0{,}123.$$

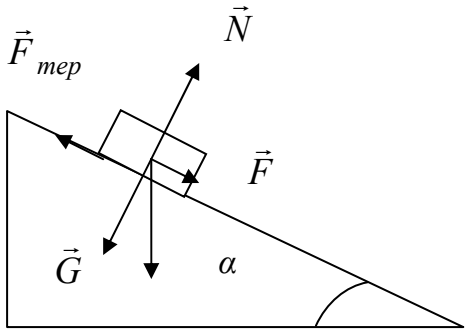


Рис. Тс12

Тоді обирається 6г.

7. За теоремою про додавання пар сил перейдемо до еквівалентної парі

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

де $\vec{M}_1 \perp \vec{M}_2$,

тоді $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$. Обираємо 7.б.

8. 1. Коефіцієнт тертя можна визначити відношенням F/N (1.Б).

2. Головний момент системи сил $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)$ (2.Г).

3. Момент пари сил можна визначити добутком з відповідним знаком $\pm F \cdot d$ (3.Г).

4. Головний вектор системи сил $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ (4.А).

Відмічаємо у таблиці відповідні комірки

	А	Б	В	Г	Д
1		Х			
2				Х	
3					Х
4	Х				

9. Складаємо систему рівнянь рівноваги:

$\sum F_{kx} = 0;\ X_A + X_B - Q\cos 30^\circ = 0$; (1)

$\sum F_{ky} = 0;\ 0 = 0$; (2)

$\sum F_{kz} = 0;\ Z_A + Z_B - P + Q\sin 30^\circ = 0$;

(3)

$\sum m_{Ax}(F_k) = 0;\ -0{,}75P + Q\sin 30^\circ \cdot 1{,}5 + Z_B \cdot 1{,}5 = 0$;

(4)

$\sum m_{Ay}(F_k) = 0;\ 0{,}433P - Q\sin 30^\circ \cdot 0{,}866 - Q\cos 30^\circ \cdot 0{,}5 = 0$; (5)

$\sum m_{Az}(F_k) = 0;\ -1{,}5X_B + Q\cos 30^\circ \cdot 1{,}5 = 0$. (6)

Розв'язуючи рівняння системи, знаходимо:

з рівняння (5) $Q = 0{,}5\,P = 0{,}5 \cdot 500 = 250$ Н;

з рівняння (6) $X_B = 0{,}433\,P = 0{,}433 \cdot 500 = 216{,}5$ Н;

з рівняння (1) $X_A = 0$ Н;

з рівняння (4) $Z_B = 0{,}25\,P = 0{,}25 \cdot 500 = 125$ Н;

з рівняння (3) $Z_A = 0{,}5\,P = 0{,}5 \cdot 500 = 250$ Н.

За умов задачі встановлюємо відповідність між реакціями підшипників та їхніми значеннями, обираємо комірки 1.В ; 2.А ; 3.Д ; 4.Б.

Заповнюємо таблицю

	А	Б	В	Г	Д
1			Х		
2	Х				
3					Х
4		Х			

10. Складаємо рівняння рівноваги балки *AB*:

$\sum F_{kx} = 0$; $X_A - T\cos\alpha = 0$; (1)

$\sum F_{ky} = 0$; $Y_A - P + T\sin\alpha = 0$; (2)

$\sum M_A(F_k) = 0$; $-P \cdot a + T\sin\alpha \cdot l = 0$. (3)

1. З рівняння (3) знаходимо натяг тросу
   $T = P \cdot a / \sin\alpha \cdot l = 10 \cdot 1 / (0{,}5 \cdot 2{,}5) = 8$ кН.
2. Після розв'язання рівнянь (1) і (2) знаходяться X_A і Y_A :
   $X_A = T\cos\alpha = 8 \cdot \cos 30^\circ = 6{,}93$ кН ;
   $Y_A = P - T\sin\alpha = 10 - 8 \cdot \sin 30^\circ = 6$ кН.

Далі обчислюється реакція опори A

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{6{,}93^2 + 6^2} = 9{,}165 \text{ кН}.$$

Перевірка

$$\sum M_B(F_k) = P\cdot(l - a) - Y_A \cdot l = 10 \cdot 1{,}5 - 6{,}0\cdot 2{,}5 = 0.$$

Відповідь: 1) $T = 8$ кН 2) $R_A = 9{,}165$ кН.

11. За означенням проекція сили $-\vec{F}$ на вісь Oy:

$-F_y = -F\cos\beta\sin\alpha = -15\cdot\cos 30^\circ\cdot\sin 45^\circ = -15\cdot 0{,}866\cdot 0{,}707 = -9{,}186$ Н.

При використанні MathCAD

$$Fy := -15\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow -\frac{15\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4} = -9.186$$

Відповідь: $-9{,}186$ Н.

12. Складаємо деякі(зручні для нас) рівняння рівноваги рамки:

$$\sum m_{AB}(F_k) = 0\ ; \qquad 2\,P\cdot b - 4\,T\cdot b = 0\ ; \qquad (1)$$

$$\sum m_{AD}(F_k) = 0\ ; \qquad 2\,T\cdot a + 2\,Z_B\cdot a - P\cdot a = 0\ . \qquad (2)$$

З рівняння (1) знаходимо

$$T = 0{,}5P = 200 \text{ Н}.$$

Після підстановки значень T і P з рівняння (2) отримуємо $Z_B = 0$.

Відповідь: $Z_B = 0$ Н.

Контрольні запитання зі статики

1. Яке тіло називається абсолютно твердим?
2. Дайте фізичне і математичне визначення поняття сили, вкажіть її розмірність.
3. Дайте визначення системи сил, які сходяться у просторі і на площині.
4. Дайте визначення в'язі. Що таке реакція в'язі ? У чому полягає «Принцип визволення від в'язів»?
5. Визначте момент сили відносно точки. Що таке плече сили?
6. Визначите момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості.
7. Що таке пара сил? Чому вона еквівалентна?
8. Знайдіть рівнодіючу системи рівномірно розподілених за довжиною сил для прямокутної епюри їхнього розподілу.
9. Дайте визначення проекції сили на вісь і площину.
10. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої довільної системи сил.

11. Як змінюється головний вектор системи сил при перенесенні центра зведення?
12. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, яка еквівалентна нулю?
13. Скільки рівнянь рівноваги в алгебраїчній формі існує для довільної просторової системи сил?
14. Що таке коефіцієнт тертя спокою і тертя ковзання? Вкажіть розмірності зазначених коефіцієнтів.
15. Для чого в техніці при конструюванні вузлів машин прагнуть перейти від тертя ковзання до тертя кочення?
16. Дайте визначення центра ваги твердого тіла. Як знайти координати центра ваги тіла?
17. Як визначається положення центра ваги складеного тіла при поділі на елементи?

1.5. Варіанти індивідуальних завдань зі статики

Задача С1. Жорстку раму (рис. С 1.1– С1.5, табл. С1) прикріплено в точці A за допомогою шарнірно нерухомої опори, а в точці B – або стержня BB_1, або шарнірно рухомої опори.

В точці C до рами прив'язано трос, який перекинуто через блок і на кінці якого висить вантаж вагою P = 10 Н. На раму діє пара сил з моментом M = 100 Н·м та дві сили, значення яких, напрям і точки прикладання вказані в таблиці С1.

Визначити реакції в'язей в точках A і B. При остаточних обчисленнях покласти, що a = 0,5 м.

Зауваження. *Задача* С1 *– на рівновагу тіла під дією довільної плоскої системи сил. Складаючи рівняння рівноваги слід враховувати, що рівняння моментів буде найпростішим (містити менше невідомих), якщо брати моменти відносно точки, де перетинаються лінії дії двох складових реакцій в'язей* (*у нашому випадку такою точкою є точка А*). *При обчисленні моменту сили* $\boldsymbol{F}$ *зручно розкласти її на складові* $\boldsymbol{F'}$ *і* $\boldsymbol{F''}$, *які паралельні координатним осям і для яких плече легко визначається, і скористатися теоремою Варіньона, згідно з якою* $m_0(\boldsymbol{F}) = m_0(\boldsymbol{F'}) + m_0(\boldsymbol{F''})$.

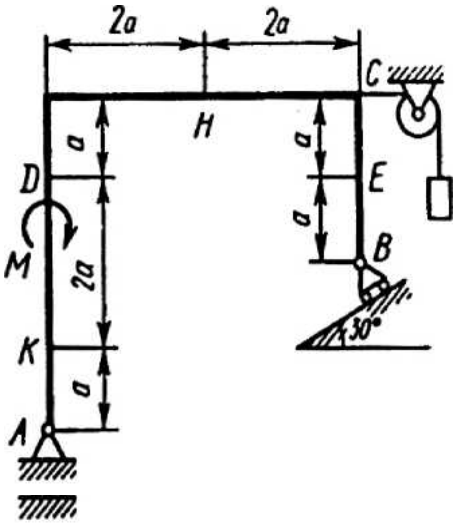


Рис. С1.1

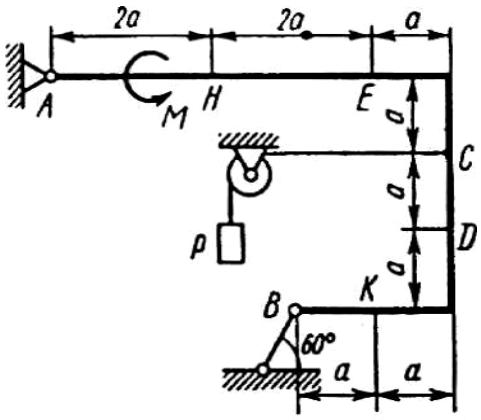


Рис. С1.2

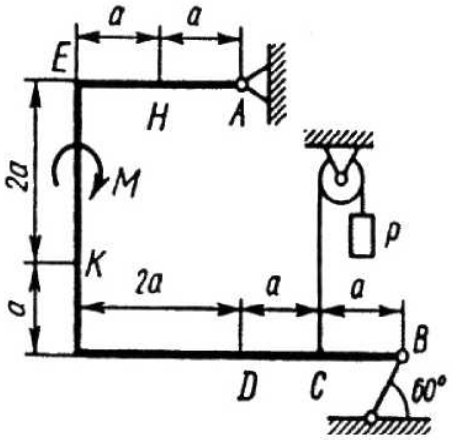


Рис. С1.3

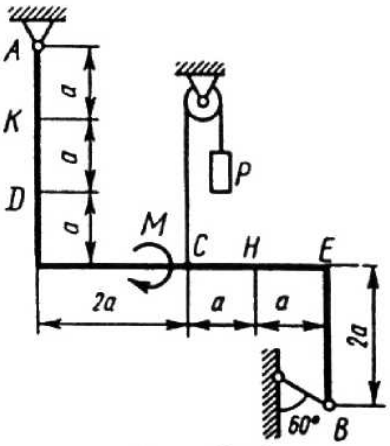


Рис. С1.4

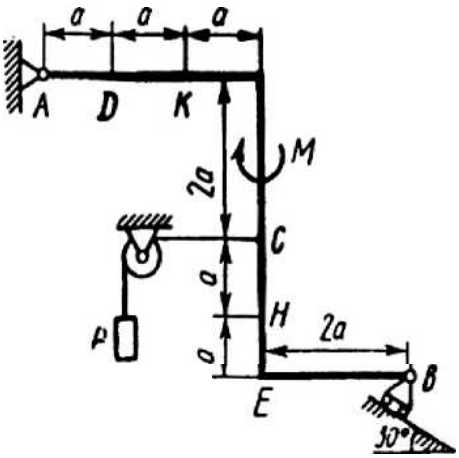
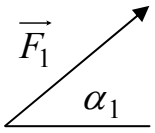
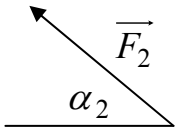
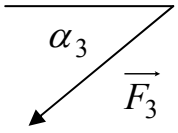
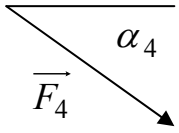


Рис. С1.5

Таблиця С1

Сили								
	F_1= 5 *кН*		F_2= 10 *кН*		F_3= 15 *кН*		F_4= 20 *кН*	
Номер умови	Точка прикладання сили	α_1°	Точка прикладання сили	α_2°	Точка прикладання сили	α_3°	Точка прикладання сили	α_4°
0	*H*	30	*K*	–	–	–	*K*	60
1	–	–	*D*	15	*E*	60	–	–
2	*K*	75	–	–	–	–	*E*	30
3	–	–	*K*	60	*H*	30	–	–
4	*D*	30	–	–	–	–	*E*	60
5	–	–	*H*	30	–	–	*D*	75
6	*E*	60	–	–	*K*	15	–	–
7	–	–	*D*	60	–	–	*H*	15
8	*H*	60	–	–	*D*	30	–	–
9	–	–	*E*	75	*K*	30	–	–

Задача С2. Для складеної конструкції (балки), яку показано на схемі (див. рис. С2.1– С2.5) при заданому навантаженні (табл. С2), визначити реакції опор і тиск у проміжних шарнірах.

На конструкцію діють: дві пари сил з моментами M_1 = 5 кН·м і M_2 = 8 кН·м, рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q = 2 кН/м та дві сили, напрям і точки прикладання яких вказані в табл. С2. При остаточних розрахунках покласти a = 1м, β = 60°.

Зауваження. Задача С2 належить до статики – на рівновагу складеної конструкції під дією довільної плоскої системи сил. Розв'язати задачу слід двома методами – розглядаючи рівновагу балки повністю, а потім розглянути рівновагу кожної частини балки, розірвавши конструкцію по шарнірам.

У варіантах з жорстким затисненням, слід пам'ятати, що реакція подається силою, модуль і напрям якої заздалегідь невідомі, та парою сил, момент якої теж невідомий. Тому слід задатись їх напрямом, а реакцію до того ж розкласти на складові, які направляють вздовж координатних осей. Рівномірно розподілене навантаження слід замінити зосередженою силою Q, величина якої дорівнює добутку інтенсивності q на довжину ділянки а*, на якій вона розташована, тобто Q = qa. Прикладають цю силу по середині ділянки в бік її розподіленого навантаження.*

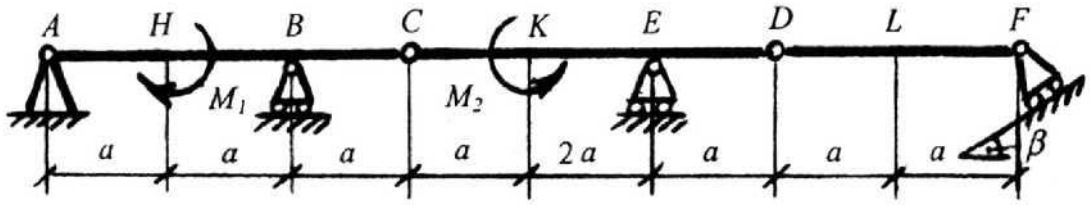


Рис. С2.1

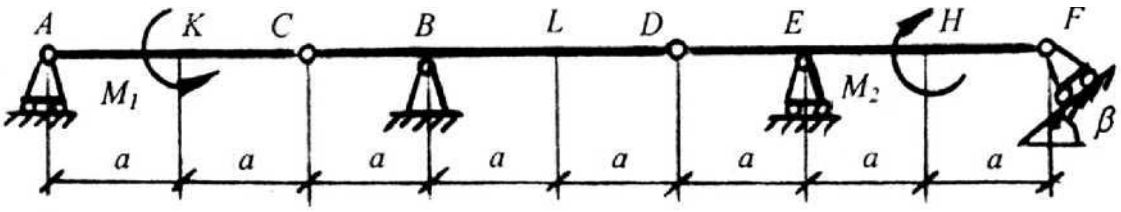


Рис. С2.2

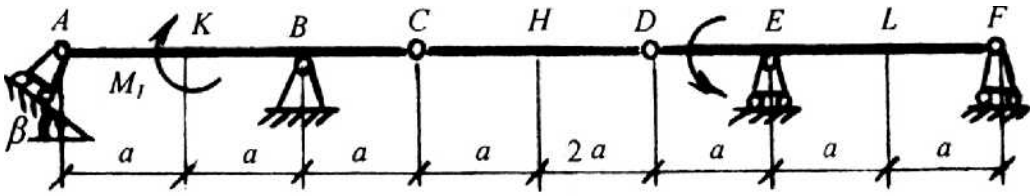


Рис. С2.3

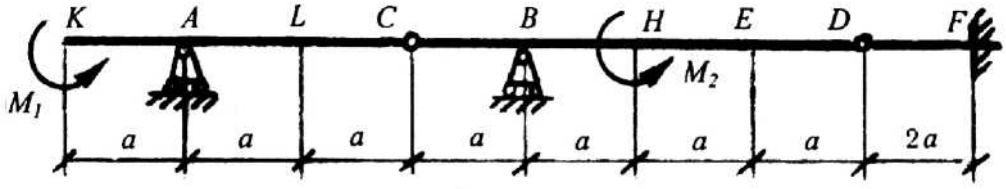


Рис. С2.4

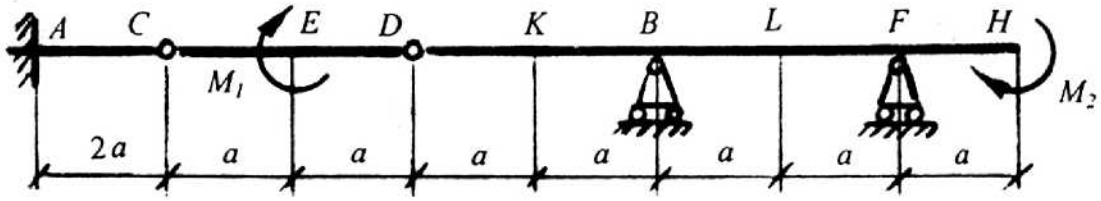


Рис. С2.5

Таблиця С2

Сили	$\vec{F_1}$ α_1		$\vec{F_2}$ α_2		α_3 $\vec{F_3}$		α_4 $\vec{F_4}$		*Рівномірно* навантажена ділянка
	F_1= 5 *кН*		F_2= 10 *кН*		F_3= 15 *кН*		F_4= 20 *кН*		
Номер умови	Точка прикладання сили	$\alpha_1{}^0$	Точка прикладання сили	$\alpha_2{}^0$	Точка прикладання сили	$\alpha_3{}^0$	Точка прикладання сили	$\alpha_4{}^0$	
0	*K*	60	–	–	*H*	30	–	–	*CL*
1	–	–	*L*	60	–	–	*H*	30	*CK*
2	*L*	15	–	–	*K*	60	–	–	*AB*
3	–	–	*K*	30	–	–	*H*	60	*CL*
4	*L*	30	–	–	*H*	60	–	–	*CK*
5	–	–	*L*	75	–	–	*K*	30	*AB*
6	*H*	60	–	–	*K*	75	–	–	*CL*
7	–	–	*H*	60	*L*	30	–	–	*CK*
8	–	–	*K*	30	–	30	*H*	15	*CL*
9	*H*	30	–	–	–	–	*L*	60	*CK*

Задача С3. Шість умовно невагомих стержнів з’єднані своїми кінцями шарнірами один з одним у двох вузлах та закріплені іншими кінцями (теж шарнірами) до нерухомих підпор *A*, *B, C, D* (рис. С3.1 – С3.5, табл. С3). Стержні та вузли (вузли розташовані при вершинах *H*, *K, L* або *M* прямокутного паралелепіпеда) на рисунках не показані та повинні бути зображені студентом, який розв’язує задачу, за даними таблиці С3. У вузлі, який у кожному стовпці таблиці вказано першим, прикладена сила

P = 200 Н; у другому вузлі прикладена сила Q =100 Н. Сила P направлена так, що кути між нею та напрямком координатних осей x, y, z відомі та відповідно дорівнюють: α_1 = 45°, β_1= 60°, γ_1 = 60°; а сила Q направлена так, що відповідні кути дорівнюють: α_2 = 60° , β_2 = 45° , γ_2 = 60° . Напрямок осей x, у, z для всіх рисунків вказано на рис. С3.1 (вісь y – праворуч, вісь z – вертикально вверх, вісь x – «до нас»). Грані паралелепіпеда, які паралельні площині xy – квадрати. Діагоналі інших бокових граней утворюють з площиною xy кут α = 60°, а діагональ паралелепіпеда утворює з тією ж площиною кут θ = 51°. Визначити зусилля у стержнях.

Зауваження. Задача С3 належить до статики – на рівновагу стержневої конструкції під дією просторової системи сил. Розв'язати задачу слід розглядаючи рівновагу вузлів конструкції, умовно розділивши конструкцію по стержням.

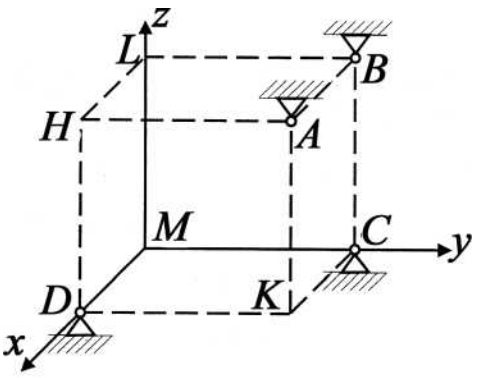


Рис. С3.1

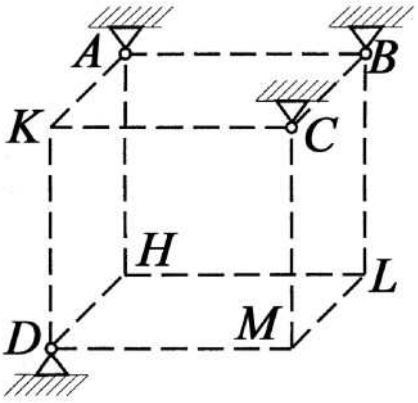


Рис. С3.2

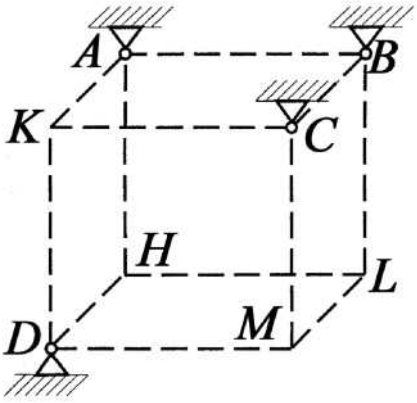


Рис. С3.3

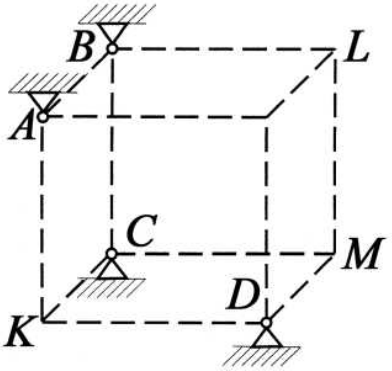


Рис. С3.4

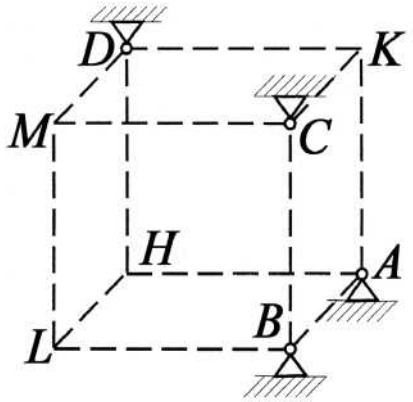


Рис. С3.5

Таблиця С3

Номер умови	1	2	3	4	5
Вузли	H, M	L, M	K, M	L, H	K, H
Стержні	HM, HA, HB, MA, MC, MD	LM, LA, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KB, MA, MC, MD	LH, LC, LD, HA, HB, HC	KH, KB, KC, HA, HC, HD
Номер умови	6	7	8	9	10
Вузли	M, H	L, H	K, H	L, M	K, M
Стержні	MH, MB, MC, HA, HC, HD	LH, LB, LD, HA, HB, HC	KH, KC, KD, HA, HB, HC	LM, LB, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KD, MA, MB, MC

Задача С4. Однорідна прямокутна плита вагою P = 5 кН, розміри якої $AB = 3l$, $BC = 2l$ (l = 0,8 м), закріплена в точці A сферичним шарніром, а в точці B – циліндричним шарніром (підшипником) і утримується у рівновазі за допомогою невагомого стержня CC' (рис. С4.1 – С4.5). На плиту діють: розташована в площині плити пара сил з моментом M = 6 кН·м та дві сили. Значення цих сил, їх напрям і точка прикладання вказані в табл. С4; при цьому сили F_1 і F_4 лежать в площинах, паралельних площині xy, сила F_2 – в площині, паралельній xz, сила F_3 – в площині, паралельній yz. Точки прикладання сил (D, E, H) знаходяться по середині сторін плити.

Визначити реакції в’язей в точках A, B, C.

Зауваження. Задача С4 – на рівновагу тіла під дією довільної просторової системи сил. Розв'язуючи задачу слід враховувати, що реакція сферичного шарніру *(*або підп'ятника*)* має три складові, а реакція циліндричного шарніру *(*підшипника*)* – дві складові, що лежать в площині, яка перпендикулярна до осі шарніра.

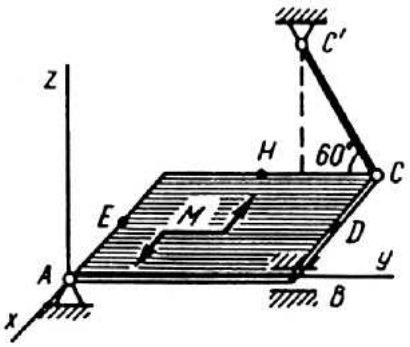


Рис. С4.1

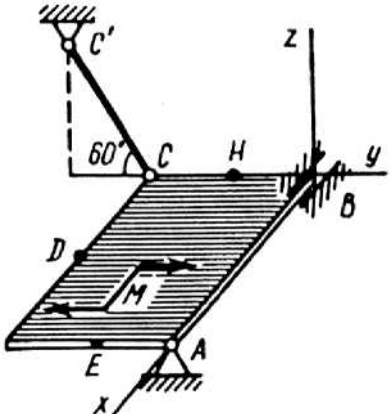


Рис. С4.2

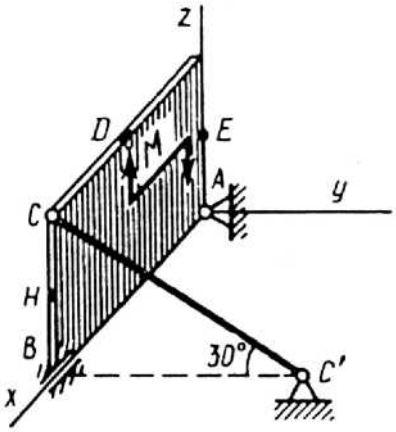


Рис. С4.3

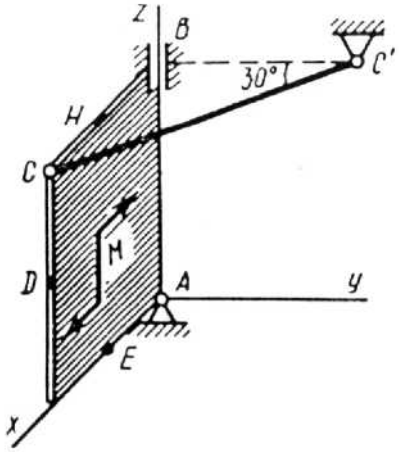


Рис. С4.4

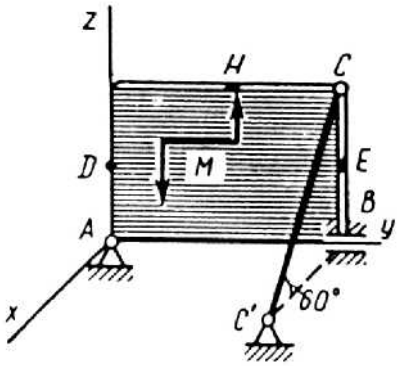
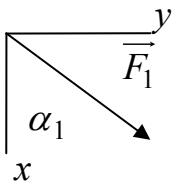
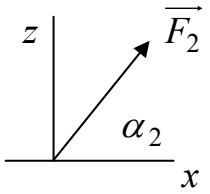
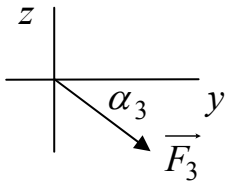
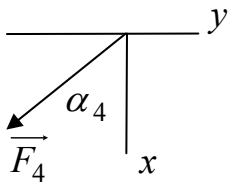


Рис. С4.5

Таблиця С4

Сили								
	$F_1 = 4$ *кН*		$F_2 = 8$ *кН*		$F_3 = 10$ *кН*		$F_4 = 12$ *кН*	
Номер умови	Точка прикладання сили	α_1	Точка прикладання сили	α_2	Точка прикладання сили	α_3	Точка прикладання сили	α_4
0	*H*	30	*K*	—	—	—	*K*	60
1	—	—	*D*	15	*E*	60	—	—
2	*K*	75	—	—	—	—	*E*	30
3	—	—	*K*	60	*H*	30	—	—
4	*D*	30	—	—	—	—	*E*	60
5	—	—	*H*	30	—	—	*D*	75
6	*E*	60	—	—	*K*	15	—	—
7	—	—	*D*	60	—	—	*H*	15
8	*H*	60	—	—	*D*	30	—	—
9	—	—	*E*	75	*K*	30	—	—

Задача С5. На горизонтальному валу вагою G = 10 кН (рис. С5.1 – С5.5) жорстко закріплено шківи 1, 2, до яких прикладені сили T, t, Q, P. Значення сил T, t, і Q наведені в табл. С5. Знайти величину сили P, яка забезпечує рівновагу вала, та реакції опор в точках A і B. При розв'язуванні задачі покласти:

r_1 = 0,4 м, r_2 = 0,15 м, a = 0,5 м, b = 0,3 м, c = 0,4 м.

Зауваження. Задача С5 – на рівновагу тіла під дією довільної просторової системи сил. Розв'язуючи задачу слід враховувати, що реакція опорного підшипника (підп'ятника) має три складові, а реакція циліндричного підшипника – дві складові, які лежать в площині, що перпендикулярна до осі підшипника. Сили T, P і t лежать в площинах шківів, тобто вони перпендикулярні осі y. Сила Q лежить в площині zy.

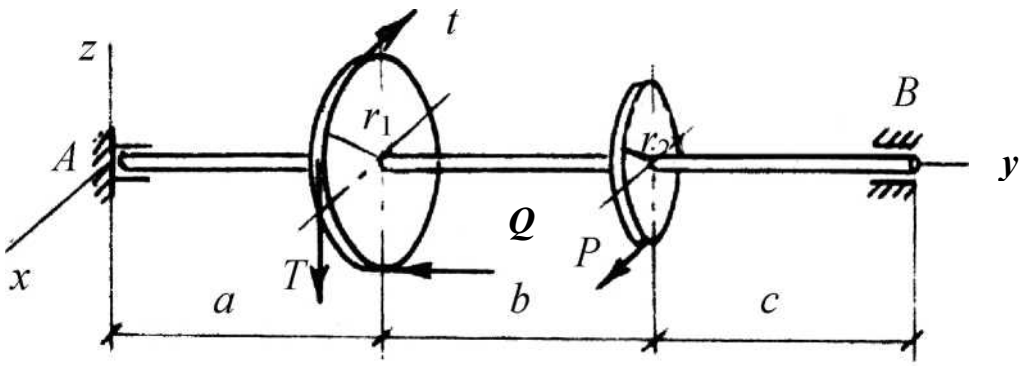


Рис. С5.1

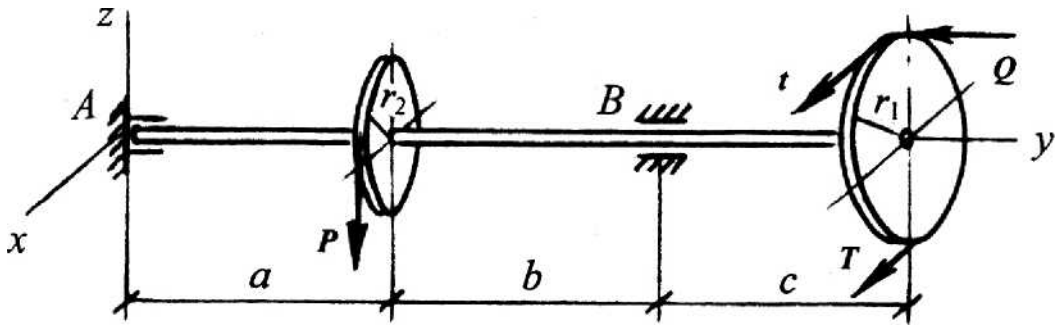


Рис. С5.2

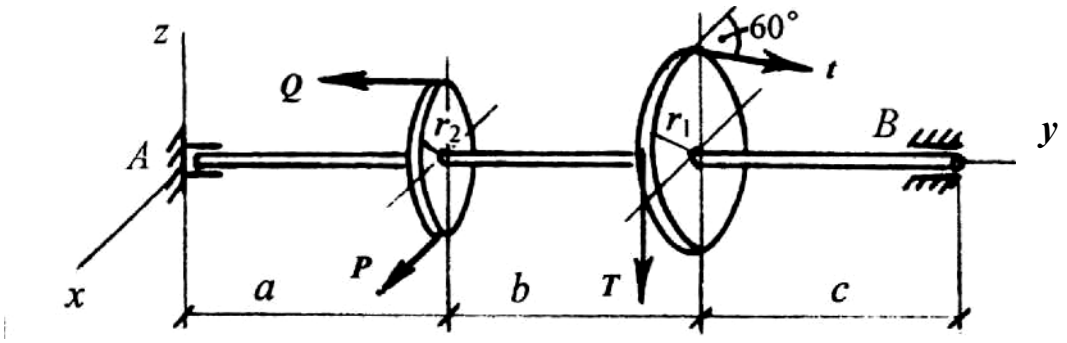


Рис. С5.3

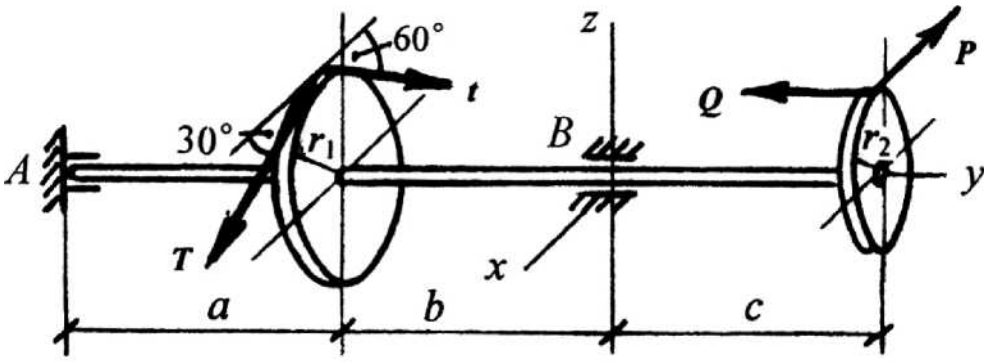


Рис. С5.4

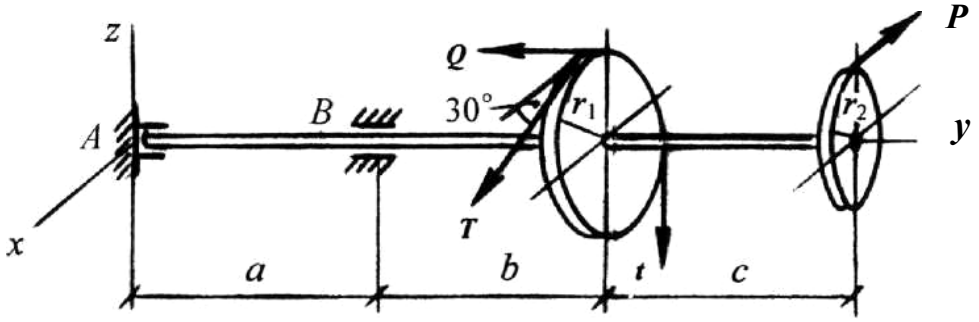


Рис. С5.5

Таблиця С5

Номер умови	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T, кН	60	50	40	60	30	40	80	60	40	50
t, кН	30	40	20	40	20	15	60	40	20	25
Q, кН	20	15	30	20	10	20	30	10	20	15

РОЗДІЛ 2. **КІНЕМАТИКА**

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних тіл (точки) без врахування їх маси та джерел цього руху.

При навчанні враховується, що з одного боку кінематика є частиною теоретичної механіки із загальним завданням – дослідженням, класифікацією та описом різних видів механічного руху матеріальних тіл, а з іншого боку, вона є теоретичною базою в теорії механізмів і машин та в деяких загальноінженерних і спеціальних дисциплінах.

Основне завдання кінематики – установлення так званих законів механічного руху й визначення різних кінематичних параметрів, які характеризують рух тіла у просторі в цілому, а також рух кожної його точки.

Простір у теоретичної механіці вважається тривимірним евклідовим, а час – універсальним. Таке наближення простору-часу відповідно з досвідом достатньо точно для потреб навчальної і виробничої діяльності у більшості технічних галузей. Далі вводиться система відліку, в якої треба описати рух.

Законом руху є взаємозв'язок між часом і положенням матеріального тіла в просторі, виражений функціональними залежностями, що мають ту або іншу форму для різних видів механічного руху.

2.1. Кінематика точки, поступальний рух тіла

Закон руху матеріальної точки може бути наданий у трьох різних формах: векторній, координатній та природній.

Якщо з якого-небудь центра O провести радіус-вектор у точку M, що рухається, то його модуль і напрямок (рис. 39) будуть залежати від часу, тобто радіус-вектор буде функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{35}$$

При цьому говорять, що закон руху точки M задано у векторній формі. Якщо ця функція задана або знайдена, то положення точки може бути визначене в будь-який момент часу.

При русі точки M у системі відліку $Oxyz$ координати x, y і z змінюються в часі, тобто координати точки M є деякими функціями часу:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (36)$$

Якщо ці функції задані, то положення точки *M* визначається в будь-який момент часу, і тоді говорять, що закон руху точки заданий у координатній формі.

Нехай задано траєкторію точки *M* тобто лінію, на якій вона знаходиться при русі. Відстань *S* по дузі траєкторії точки *M* від початку відліку *O* називається дуговою координатою (рис. 39). Вона змінюється в часі, тобто є деякою функцією часу:

$$S = S(t). \qquad (37)$$

Закон руху точки задано природним способом, якщо ця функція $S(t)$ відома.

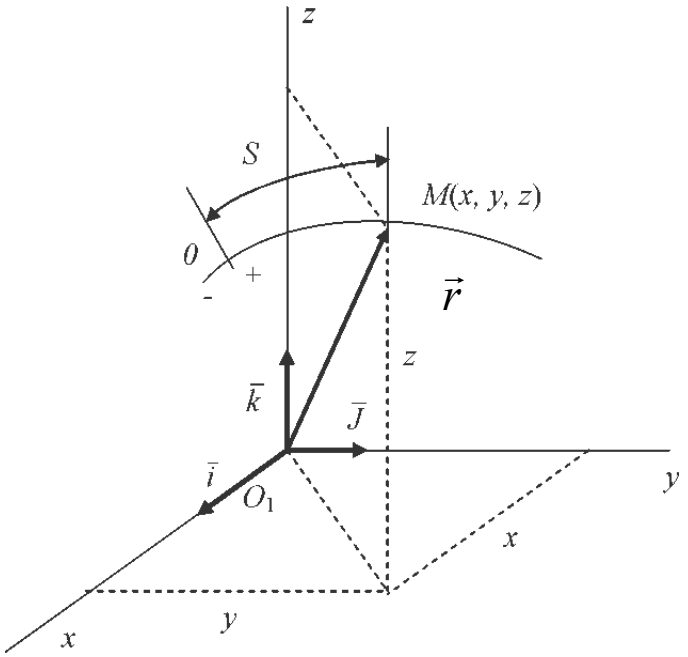


Рис. 39

Оскільки радіус-вектор може бути розкладений на складові вздовж координатних осей

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}, \qquad (38)$$

а його проекції r_x, r_y і r_z, як видно з рис. 39, дорівнюють координатам точки *M*, то взаємозв'язок між векторною і координатною формами закону руху запишеться у вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (39)$$

Існує взаємозв'язок між координатною і природною формами завдання закону руху. Якщо заданий закон руху в координатній формі:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \tag{40}$$

то ці рівності розглядають як рівняння руху точки в параметричній формі, і для визначення рівняння траєкторії в координатній формі виключають час t як параметр із рівності (40), а для визначення функції $S = S(t)$ користуються відомою формулою для елемента ds дуги кривої

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

і формулою для знаходження дугової координати

$$S = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Знак вибирають залежно від напрямку додатного “+” або від’ємного “–” відліку дугової координати.

1. Якщо точка за деякий інтервал часу Δt з даного положення M переміститься в деяке інше положення $M_1 = M(t+\Delta t)$, то вектор $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{MM_1}$ називається переміщенням точки за час Δt, а границя відношення $\overrightarrow{MM_1}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ називається (миттєвою) швидкістю точки в цей момент часу

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}. \tag{41}$$

Оскільки вектор переміщення $\overrightarrow{MM_1}$ спрямований по січної траєкторії точки з граничним положенням по дотичній, то швидкість $\overrightarrow{V}$ точки також є вектор, спрямований по дотичній до траєкторії у бік її руху (рис. 40).

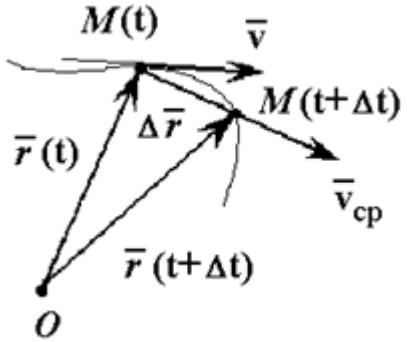


Рис. 40

Якщо закон руху точки задано у векторній формі, то, згідно з формулою (41), одержимо

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \tag{42}$$

тобто швидкість точки дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора точки.

Якщо закон руху точки заданий у координатній формі, то, згідно з формулами (39) і (40), одержимо для швидкості точки наступний вираз, маючи на увазі, що вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ постійні за напрямком і величиною:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\ . \tag{43}$$

Одержимо вектор швидкості, розкладений по координатним осям. Отже, для знаходження проекцій, модуля й напрямку швидкості справедливі наступні формули:

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z};$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\ ;$$

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V}; \quad \cos\beta = \frac{V_y}{V}; \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{V}. \tag{44}$$

Якщо закон руху точки заданий у природній формі, тобто задана траєкторія точки (див. рис. 39) і дугова координата, то з виразу (103) матимемо:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta S}{\Delta t}\right| = \left|\frac{dS}{dt}\right|, \tag{45}$$

тобто, по модулю швидкість дорівнює модулю першої похідної за часом від закону руху.

Досить часто V розглядають як алгебраїчну величину за формули

$$V = \frac{dS}{dt}.$$

Якщо $V > 0$, то точка рухається убік зростання дугової координати S, якщо $V < 0$, то точка рухається убік зменшення цієї координати.

3. Прискоренням точки називається векторна величина, що характеризує зміну швидкості за одиницю часу (рис. 41):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = \frac{d\vec{V}}{dt}\ , \tag{46}$$

тобто прискорення точки дорівнює першій похідній за часом від вектора швидкості точки.

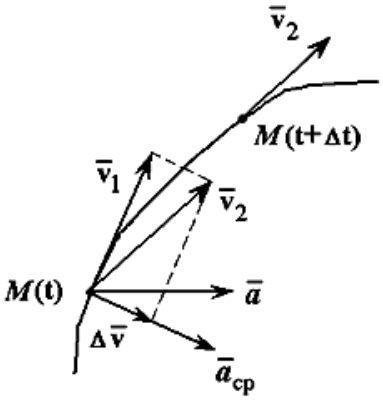


Рис. 41

Якщо закон руху заданий у векторній формі (рис. 41), то, згідно з формулами (43) і (46), одержимо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\,, \tag{47}$$

тобто прискорення точки дорівнює другій похідній за часом від радіуса-вектора точки.

Якщо закон руху точки заданий у координатній формі, тоді одержимо для вектора прискорення точки такий вираз:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k}\,. \tag{48}$$

Вектор прискорення точки може бути розкладений на складові уздовж координатних осей:

$$\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}\,.$$

Тоді для проекцій, модуля й напрямку прискорення точки мають місце формули

$$a_x = \ddot{x}\,;\quad a_y = \ddot{y}\,;\quad a_z = \ddot{z}\,;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\,;$$

$$\cos\alpha = \frac{\ddot{x}}{|\vec{a}|}\,;\quad \cos\beta = \frac{\ddot{y}}{|\vec{a}|}\,;\quad \cos\gamma = \frac{\ddot{z}}{|\vec{a}|}\,. \tag{49}$$

Якщо закон руху точки заданий у природній формі, тобто задані траєкторії (рис. 42) і закон руху S, то прискорення точки подається у вигляді геометричної суми нормального й дотичного прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau . \qquad (50)$$

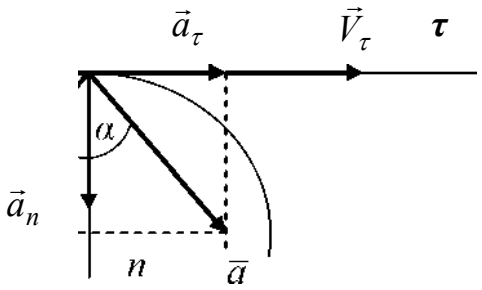


Рис. 42

Вектор дотичного прискорення спрямовано по дотичній до траєкторії точки і за величиною характеризує зміну величини швидкості в одиницю часу:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S} .$$

Нормальна складова прискорення спрямована по нормалі до центру кривини (убік увігнутості останньої) й характеризує зміну швидкості за напрямком в одиницю часу

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 , \qquad (51)$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

Радіус кривизни траєкторії ρ в даній точці може бути визначений за формули:

$$\rho = \frac{\left(1+\dot{y}^2\right)^{1,5}}{y}$$ – коли траєкторія задана явно $y = f(x)$;

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{1,5}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}$$ – якщо траєкторія задана параметрично

$$x = x(t), \quad y = y(t) ;$$

$$\rho = \frac{\left(\dot{F}_x^2 + \dot{F}_y^2\right)^{1,5}}{\begin{vmatrix} \ddot{F}_{xx} & \ddot{F}_{xy} & \dot{F}_x \\ \ddot{F}_{xy} & \ddot{F}_{yy} & \dot{F}_y \\ \dot{F}_x & \dot{F}_y & 0 \end{vmatrix}}$$ – коли траєкторія задана неявно

$$F(x, y) = 0.$$

Модуль і напрямок повного прискорення точки (рис. 42) визначаються за формулами:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad tg\,\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \tag{52}$$

Якщо знаки дотичного прискорення a_τ і швидкості V однакові, тобто вони спрямовані по дотичній до траєкторії в один бік, то точка рухається *прискорено*, у випадку протилежних знаків (вони спрямовані в протилежні боки) точка рухається *уповільнено*.

4. Рух точки, при якому вона в рівні проміжки часу проходить однакові шляхи, називається *рівномірним.*

Швидкість точки при рівномірному русі постійна і, оскільки $V = \frac{dS}{dt}$, то при відомій швидкості закон рівномірного руху запишеться в наступному вигляді:

$$S = S_0 + V \cdot t, \tag{53}$$

де S_0 – початкове значення дугової координати.

Рух точки, при якому її швидкість у рівні проміжки часу змінюється на одне й теж значення, називається *рівнозмінним*.

Якщо дотичне прискорення при рівнозмінному русі $a_\tau = \frac{dV}{dt} =$ const, то для швидкості і закону руху мають місце такі вирази:

$$V = V_0 + a_\tau \cdot t,$$

$$S = S_0 + V_0 \cdot t + 0{,}5\, a_\tau \cdot t^2,$$

де V_0 – початкова швидкість; S_0 – початкове положення точки.

5. *Поступальним рухом* називають такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма лінія, яка належить тілу, при русі залишається паралельної своєму початковому положенню (рис. 43).

Для будь-яких різних точок тіла A і B маємо:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB},$$

де $\overrightarrow{AB}$ – не змінюється, тому що тіло тверде.

Після диференціювання за часом визначаємо, що

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A\,; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A\,.$$

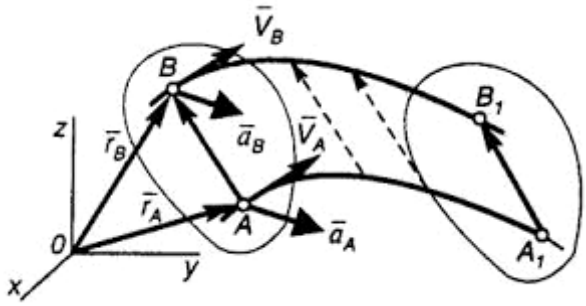


Рис. 43

При поступальному русі твердого тіла швидкості всіх точок та прискорення всіх точок тіла однакові як за напрямом, так і за моду лем. Траєкторії точок є конгруентними лініями.

Задача 1. По заданим рівнянням руху точки *M* (координати *x*, *y* виміряються в см): $x = -4\cos(\pi t/3)$; $y = -2\sin(\pi t/3) - 3$ встановити вид її траєкторії, визначити швидкість, повне, дотичне й нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії в момент часу $t_1 = 1\,c$.

Розв'язання

Рівняння руху точки *M* можна розглядати, як параметричні рівняння її траєкторії. Щоб одержати рівняння траєкторії у звичайній формі, необхідно виключити з цих рівнянь час *t*. Для цього перепишемо їх у такому вигляді:

$$\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = -\frac{x}{4}; \quad \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = -\frac{y+3}{2}.$$

Підносячи до квадрата обидві частини цих рівнянь і додаючи їх, матимемо:

$$\frac{x^2}{4^2} + \left(\frac{y+3}{2}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 1.$$

Одержаний вираз дає рівняння траєкторії в координатній формі і приводить до еліпса з півосями 4 і 2 і зсунутим на мінус три одиниці уздовж осі *Oy* центром (рис. 44).

Знаходимо положення точки M на траєкторії в заданий момент часу (t_1 = 1 с) за її координатами

$$x_M = -4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = -2\,см; \quad y_M = -2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - 3 = -4{,}73\,см,$$

тобто $M(-2; -4{,}73)$.

Для визначення швидкості точки M знаходимо проекції

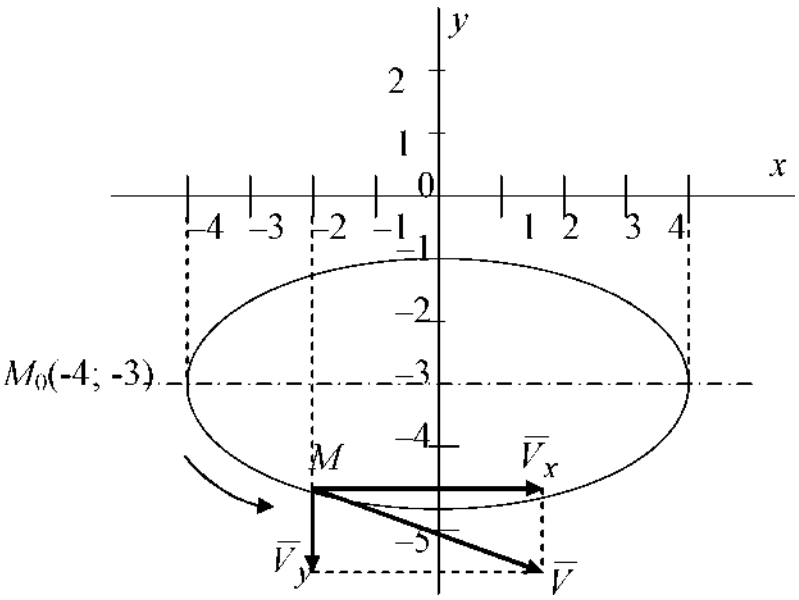


Рис. 44

швидкості на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = \frac{4 \cdot \pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}; \quad V_y = \dot{y} = -\frac{2 \cdot \pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}.$$

При t_1 = 1 с

$$V_{x1} = \dot{x}_1 = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}628\,см/с;$$

$$V_{y1} = \dot{y}_1 = -\frac{2 \cdot \pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} = -1{,}047\,см/с.$$

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{3{,}628^2 + (-1{,}047)^2} = 3{,}776\,см/с.$$

Напрямок руху точки по траєкторії – проти ходу годинникової стрілки, на рисунках для спрощення нижній індекс “1” пропущений. Вектор швидкості $\vec{V}$ спрямований по дотичній до траєкторії (рис. 44). При t = 0 точка M займала положення M_0. Визначаємо повне a, нормальне a_n,

дотичне a_τ прискорення точки, а також радіус кривизни траєкторії ρ при $t_1 = 1$ с.

Для визначення прискорення $\vec{a}$ знаходимо його проекції на осі координат (рис. 45).

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = \frac{4 \cdot \pi^2}{9} \cos\frac{\pi t}{3}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = -\frac{2 \cdot \pi^2}{9} \sin\frac{\pi t}{3}.$$

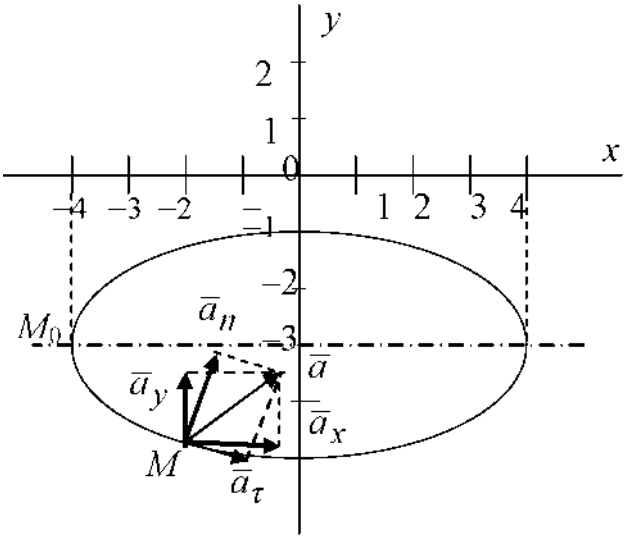


Рис. 45

При $t_1 = 1$ с $a_{x1} = 2{,}193$ см/с^2, $a_{y1} = 1{,}899$ см/с^2.

Модуль прискорення точки

$$a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \sqrt{2{,}193^2 + 1{,}899^2} = 2{,}901\, см/с^2.$$

Знаходимо дотичне прискорення точки при $t_1 = 1$ с

$$a_{\tau 1} = \dot{V}_1 = \frac{V_{x1} \cdot a_{x1} + V_{y1} \cdot a_{y1}}{V_1} = \frac{3{,}628 \cdot 2{,}193 - 1{,}047 \cdot 1{,}899}{3{,}776} = 1{,}58\ см/с^2$$

Знак «+» перед a_τ говорить про те, що рух точки по даній траєкторії є прискореним.

Нормальне прискорення точки в цей момент часу:

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{2{,}901^2 - 1{,}58^2} = 2{,}433\, см/с^2.$$

Радіус кривизни траєкторії ρ_1 в тій її точці, де перебуває при $t_1 = 1$ с точка M, буде

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{3{,}776^2}{2{,}433} = 5{,}86\, см.$$

Задача 2. Знайти траєкторію точки M шатуна кривошипно-шатунного механізму, якщо $r = l = 60$ см, $MB = \frac{1}{3}\boldsymbol{l}$, $\varphi = 4\pi t$, а також швидкість, прискорення й радіус кривизни траєкторії точки в момент, коли $\varphi = 0$ при $t = 0$.

Розв'язання

Кривошипно-шатунний механізм, що розглядається, складається з трьох ланок: кривошипа OA, шатуна AB і повзуна B**.** Для відповіді на питання, які поставлені в задачі, необхідно мати закон руху точки M. Визначимо рух точки M у координатній формі, для чого визначимо координати точки M у обраній системі координат Oxy**,** виражаючи їх через кут φ (рис. 46):

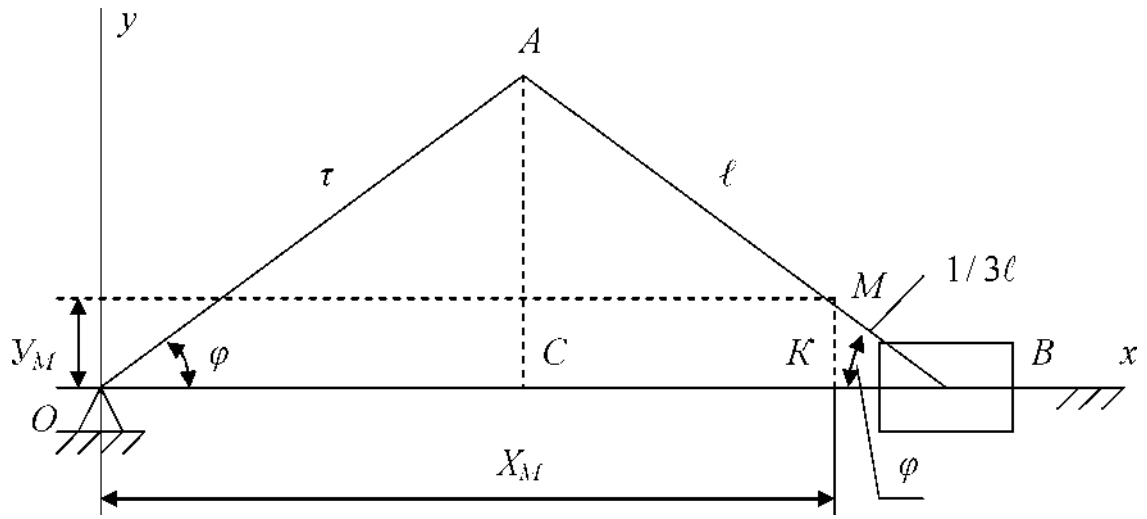


Рис. 46

$$x_M = OK = OC + CK = OA\cdot\cos\varphi + AM\cdot\cos\varphi =$$
$$= l\cdot\cos\varphi + 2/3\cdot l\cdot\cos\varphi = 100\cos\varphi = 100\cos 4\pi t\,;$$
$$y_M = MK = MB\sin\varphi = 1/3\cdot l\cdot\sin\varphi = 20\sin 4\pi t.$$

Для визначення рівняння траєкторії у звичайному вигляді необхідно виключити час t з отриманих рівнянь руху. Для цього перепишемо їх у вигляді:

$$\frac{x_M}{100} = \cos 4\pi t\,, \quad \frac{y_M}{20} = \sin 4\pi t\,,$$

піднесемо до квадрата й складемо:

$$\frac{x_M^2}{100^2} + \frac{y_M^2}{20^2} = 1\,.$$

Отримуємо рівняння еліпса.

Швидкість визначаємо, використовуючи формули (43):

$$V_x = \dot{x}_M = -400\pi \sin 4\pi t\,; \quad V_y = \dot{y}_M = 80\pi \cos 4\pi t\,,$$

далі знаходимо

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 80\pi\sqrt{24\sin^2 4\pi + 1}\ ,$$

при $t = 0$ $V = 80\,\pi \approx 251{,}33$ *см/с* .

Прискорення визначаємо, використовуючи формули (48):

$$a_x = \ddot{x} = -1600\pi^2 \cos 4\pi t\,;\, a_y = \ddot{y} = -320\pi^2 \sin 4\pi t\,;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 320\pi^2\sqrt{1 + 24\cos^2 4\pi t}\ ,$$

при $t = 0$ $a = 1600\pi^2 = 15791,\ 37$ *см /с*^{2}.

Обчислимо дотичне прискорення точки M:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 80\pi\frac{96\pi\cos 4\pi t \cdot \sin 4\pi t}{\sqrt{1 + 24\cos^2 4\pi t}}\,.$$

При $t = 0$, $a_\tau = 0$.

Оскільки $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, то $a_n = a = 1600\pi^2$ (см/с^2).

Радіус кривизни траєкторії знаходимо з формули (51):

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{6400\pi^2}{1600\pi^2} = 4\ см\,.$$

Задача 3. Поїзд, маючи початкову швидкість $V_0 = 54$ км/год, проходить $S_1 = 600$ м у перші $t_1 = 30$ с. Вважаючи рух поїзда рівнозмінним, визначити швидкість і прискорення поїзда наприкінці 30-ої секунди, якщо розглянутий рух поїзда відбувається на закругленні радіусом $R = 1$ км (рис. 47).

Розв'язання

При рівнозмінному русі швидкість і закон руху в будь-який момент t визначається за формулами:

$$V = V_0 + a_\tau \cdot t, \qquad S = V_0 \cdot t + 0{,}5\, a_\tau \cdot t^2, \qquad \text{при } S_0 = 0,$$

де початкова швидкість $V_0 = 54$ км/год $= 15$ м/с.

Запишемо ці співвідношення для моменту часу $t_1 = 30$ с :

$$V_1 = V_0 + a_\tau \cdot t_1; \qquad S_1 = V_0 \cdot t_1 + 0{,}5\, a_\tau \cdot t_1^2,$$

звідки

$$a_\tau = \frac{2(S_1 - V_0 t_1)}{t_1^2} = \frac{2(600 - 15 \cdot 30)}{30^2} = \frac{1}{3}\ м/с^2 \ ;$$

$$V_1 = 15 + \frac{30}{3} = 25\ м/с \ .$$

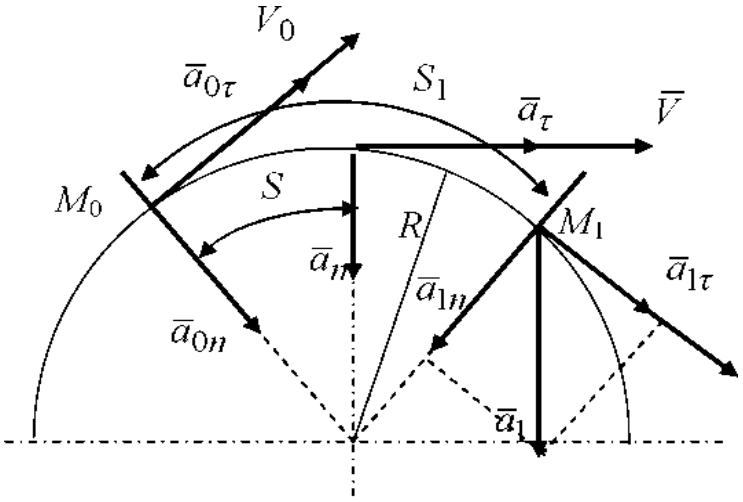


Рис. 47

При рівнозмінному русі дотичне прискорення є стала величина і дорівнює $a_{\tau 1} = a_\tau = 1/3$ м/с^2 , а нормальне прискорення на 30-й секунді

$$a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = \frac{25^2}{1000} = 0{,}625\ м/с^2 \ .$$

Повне прискорення визначається за формулою (52):

$$a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{\tau 1}^2} = \sqrt{0{,}625^2 + 0{,}333^2} = 0{,}708\ м/с^2 \ .$$

Відповідь: $V_1 = 25$ м/с; $a_1 = 0{,}708$ м/с^2.

2.2. Обертальний рух твердого тіла

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух тіла, при якому всі його точки рухаються по колам, центри яких лежать на одній прямій, що називається *віссю обертання.*

Відстань від точки тіла до осі обертання називається *радіусом обертання* точки.

Кут, на який повертається радіус обертання будь-якої точки відносно свого початкового положення називається *кутом повороту* тіла φ (рис. 48).

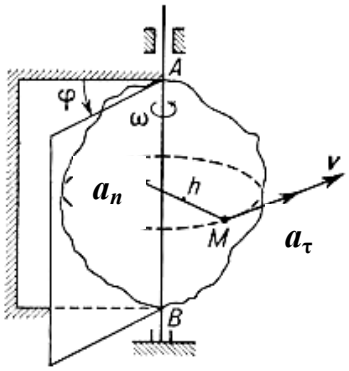


Рис. 48

Обертальний рух тіла відносно нерухомої осі вважається заданим, якщо задається закон зміни за часом кута повороту, тобто $\varphi = \varphi(t)$.

Кутовою швидкістю називається кінематична величина, що характеризує зміну кута повороту в одиницю часу.

Якщо $\Delta\varphi$ - зміна кута повороту тіла за час Δt, то відношення

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{cp} \tag{53}$$

називається середньою кутовою швидкістю тіла за час Δt, а *кутова швидкість* ω у цей момент часу t визначається як межа відношення (53) коли $\Delta t \to 0$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{54}$$

тобто кутова швидкість при обертанні дорівнює похідній за часом від кута повороту тіла.

Якщо $\omega > 0$, то тіло обертається убік зростання кута повороту, а при $\omega < 0$ – убік зменшення кута повороту. Розмірність кутової швидкості при куті φ, який вимірюється в радіанах, радіан у секунду (рад/с або $с^{-1}$).

Якщо кутова швидкість обертання тіла задана в оборотах у хвилину (n, об/хв), то кутову швидкість у рад/с визначають із співвідношення:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n,$$

а число обертів (N) і кут повороту (φ) в радіанах зв'язані між собою співвідношенням

$$\varphi = 2\pi N.$$

Кутовим прискоренням тіла називається величина, що характеризує зміну кутової швидкості в одиницю часу.

Якщо $\Delta\omega$ – зміна кутової швидкості тіла за час Δt , то відношення

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{cp} \tag{55}$$

називається *середнім кутовим прискоренням* за час Δt, а кутове прискорення ε у цей момент, що визначається як межа відносини (55) при $\Delta t \to 0$, рад/с^2:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} , \tag{56}$$

тобто кутове прискорення при обертанні дорівнює похідній за часом від кутової швидкості тіла або другій похідній від кута повороту тіла.

Якщо кутове прискорення ε і кутова швидкість ω мають однакові знаки, то тіло обертається прискорено, (значення ω зростає), якщо знаки протилежні – обертання тіла вповільнене.

При обертовому русі кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ є величинами векторними. При цьому вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ направляється уздовж осі обертання тіла в той бік, звідки це обертання видно таким, що відбувається проти ходу годинної стрілки, а вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ направляється уздовж вектора кутової швидкості при прискореному обертанні і у протилежний бік – при уповільненому (рис. 49) тому, що

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} .$$

Обертання тіла, при якому за однакові проміжки часу кут повороту φ змінюєтьсяна однакові значення, називається *рівномірним*. Кутова швидкість тіла ω при рівномірному обертанні є стала величина і закон рівномірного обертання записується у вигляді

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{57}$$

де φ_0 – початкове значення кута повороту тіла.

Обертання тіла, при якому його кутова швидкість за рівні проміжки часу змінюється на однакові значення, називається *рівнозмінним*.

Кутове прискорення ε при рівнозмінному обертанні стала величина і кутова швидкість визначається за формулою

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t, \tag{58}$$

а кут обертання визначається з виразу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + 0{,}5\, \varepsilon t^2 , \tag{59}$$

де φ_0 і ω_0 початкове значення відповідно кута повороту та кутової швидкості тіла.

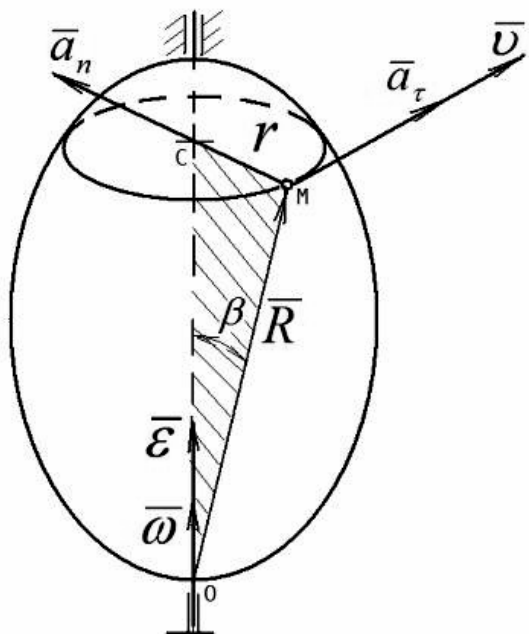


Рис. 49

Якщо закон обертального руху твердого тіла заданий, то кутова швидкість ω і кутове прискорення ε визначаються за формулами (54) і (56). Лінійна швидкість $\vec{v}$ точки, що знаходиться на відстані r від осі обертання, дорівнює

$$v = \frac{dS}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega \ , \tag{60}$$

а прискорення $\vec{a}$ подається у вигляді двох складових – доцентрового (нормального) $\vec{a}_n$ і обертального (дотичного) прискорення $\vec{a}_\tau$, причому їх величини відповідно дорівнюють

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon \cdot r \ ,$$

а величина повного прискорення точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \ . \tag{61}$$

Напрямок прискорення стосовно радіуса обертання визначається кутом α

$$tg\,\alpha = \frac{|\vec{a}_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \ .$$

Швидкості точок спрямовані перпендикулярно до радіусів обертання. Доцентрові (нормальні) прискорення $\vec{a}_n$ – до осі обертання, а обертальні (дотичні) прискорення при прискореному обертанні $\vec{a}_\tau$ – у бік швидкості, при вповільненому обертанні – у протилежному напрямі.

Задача 4. Вал радіуса R =10 см приводиться в обертання вантажем *P,* який підвішений до нього на нитці (рис. 50). Рух вантажу описується рівнянням $x = 100\ t^2$ см, (x – відстань від вантажу до місця сходу нитки з поверхні вала: t – час в с). Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала, а також повне прискорення a точки, яка лежить на поверхні вала, в
момент часу t.

Розв'язання

Вантаж здійснює поступальний прямолінійний рух за заданим законом $x = 100\ t^2$ см. Обчислимо швидкість і прискорення вантажу:

$$V = \dot{x} = 200t\ см/с\,;\ a_\tau = \ddot{x} = 200\ см/с^2 \ .$$

Очевидно, що швидкість вантажу дорівнює лінійній швидкості точок поверхні вала. Вал здійснює обертання навколо нерухомої осі. При обертанні тіла лінійна швидкість $V = \omega \cdot R$, звідки кутова швидкість вала

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{200t}{10} = 20t\ рад/с \ ,$$

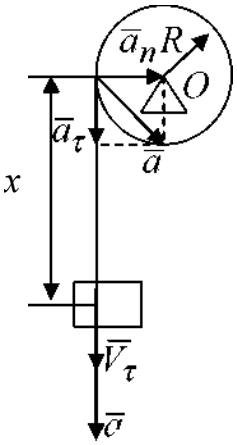


Рис. 50

а кутове прискорення вала $\varepsilon = \dot{\omega} = 20$ рад/с^2.

Оскільки повне прискорення точки на поверхні вала $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ (дотичне прискорення $a_\tau = \varepsilon \cdot R$, нормальне прискорення $a_n = \omega^2 \cdot R$), то модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = 200\sqrt{400t^4 + 1}\ см/с^2 .$$

Відповідь: $\omega = 20t$ с$^{-1}$; $\varepsilon = 20$ с$^{-2}$;
$a = 200\sqrt{400t^4 + 1}$ см/с^2.

Задача 5. Рейка 1, ступінчасте колесо 2 з радіусами R_2 і r_2 і колесо 3 радіуса R_3, яке скріплене з валом радіуса r_3, перебувають у зачепленні: на вал намотано нитку з вантажем 4 на кінці (рис. 51).

Рейка рухається за законом $S_1 = 3t^3$ см.

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $t = 3$ с.

А – точка на обіді колеса 3.

Визначити: ω_3, V_4, ε_3, a_A у момент часу $t_1 = 3$ с.

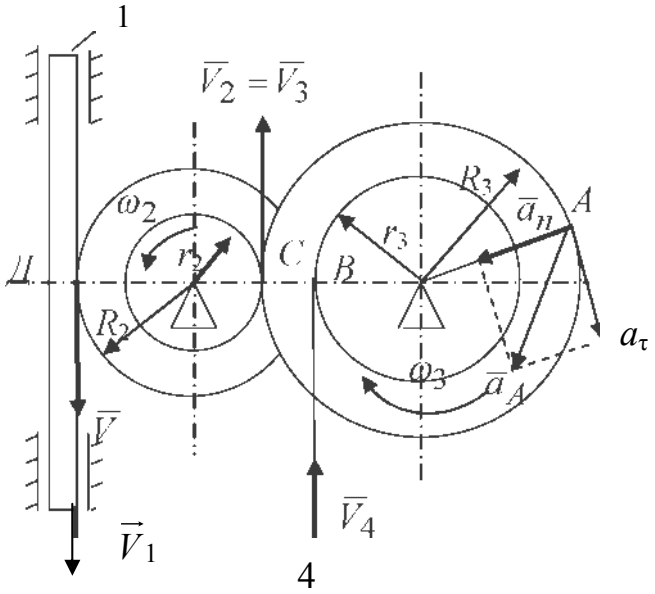


Рис. 51

Розв'язання

Швидкість точок рейки

$$V_1 = \dot{S}_1 = 9t^2 \ см/с.$$

Кутова швидкість ступінчастого колеса

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{9t^2}{6} = 1{,}5t^2 \ .$$

Швидкість точки *С*:

$$V_2 = \omega_2 \cdot r_2 = 6t^2 \ см/с \ .$$

Кутова швидкість вала й колеса 3 буде:

$$\omega_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{6t^2}{8} = 0{,}75t^2 \ рад/с \ .$$

Кутове прискорення вала й колеса 3 буде

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t \; рад/с^2 .$$

У момент часу $t = 3$ с :

$$\omega_3 = 0{,}75 \cdot 3^2 = 6{,}75 \; рад/с \; ;$$

$$\varepsilon_3 = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5 \; рад/с^2 ;$$

$$V_4 = \omega_3 \cdot r_3 = 6{,}75 \cdot 3 = 20{,}25 \; см/с ;$$

$$a_A = \sqrt{a_{An}^2 + a_{A\tau}^2} \; ;$$

$$a_{An} = \omega_3^2 \cdot R_3 = 6{,}75^2 \cdot 8 = 364{,}5 \; см/с^2 ;$$

$$a_{A\tau} = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 4{,}5 \cdot 8 = 36 \; см/с^2 ;$$

$$a_A = \sqrt{a_{An}^2 + a_{A\tau}^2} = \sqrt{364{,}5^2 + 36^2} = 366{,}27 \; см/с^2 .$$

Відповідь: $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$; $V_4 = 20{,}25$ см/с; $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с$^{-2}$; $a_4 = 366{,}3$ см/с^2 .

Задача 6. Визначити швидкість і прискорення вантажу 1, а також швидкість і прискорення точки M механізму, показаного на рис. 52 у момент часу $t_1 = 1$ с, якщо рух вантажу заданий рівнянням $x = 36t^2 + 5t + 14$, де x - у метрах, а радіуси відповідно дорівнюють $R_2 = 0{,}5$ м, $r_2 = 0{,}25$ м, $R_3 = 0{,}65$ м, $r_3 = 0{,}4$ м.

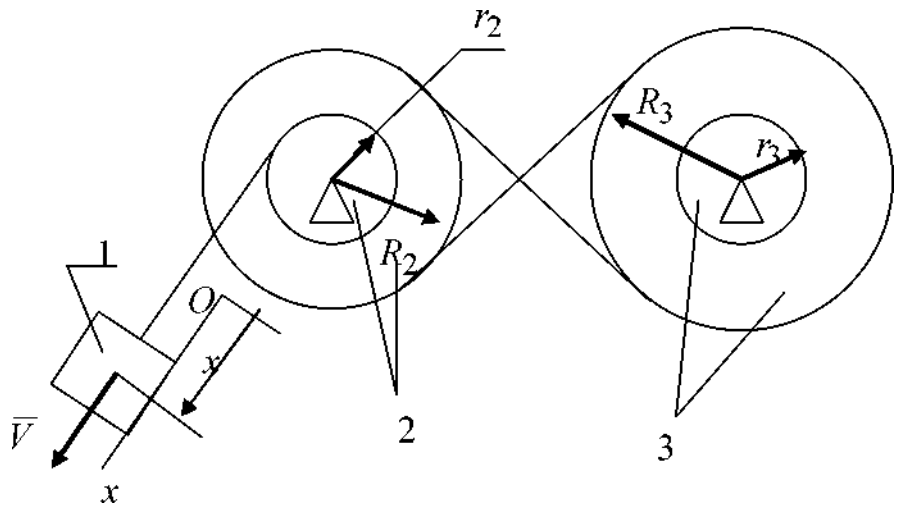


Рис. 52

Розв'язання

Швидкість вантажу 1 визначаємо як похідну за часом від його закону

$$V_1 = \dot{x} = 72t + 5 \text{ см/с}.$$

Коли $t = t_1 = 1$ с

$$V_1 = 72 \cdot 1 + 5 = 77 \text{ см/с } (0{,}77 \text{ м/с}).$$

Прискорення вантажу 1 дорівнює першій похідній від швидкості, тобто $a_1 = \ddot{x} = 72$ см/с^2 .

Для визначення швидкості та прискорення точки M запишемо рівняння, що зв'язують швидкість вантажу V_1 і кутові швидкості коліс ω_2 і ω_3 (рис. 53).

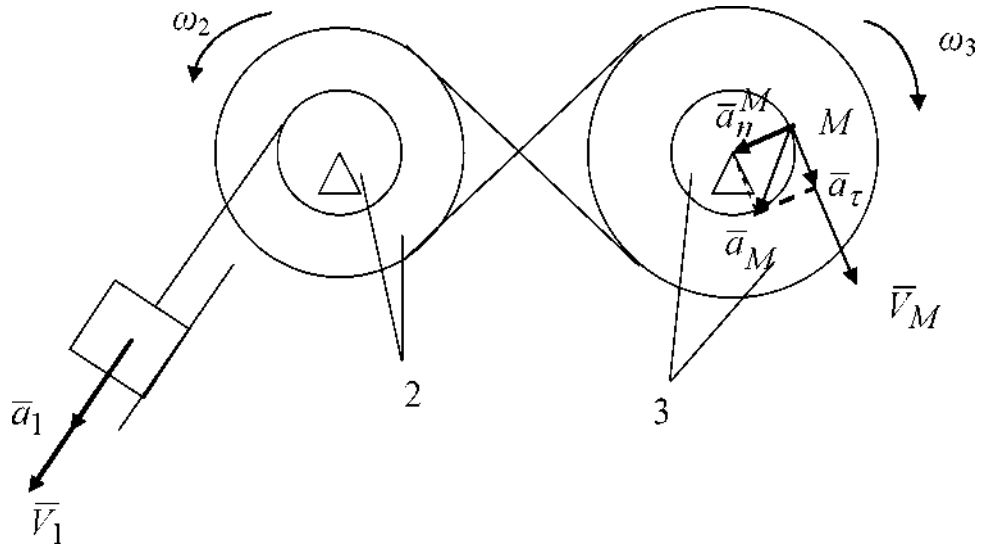


Рис. 53

У відповідності зі схемою механізму

$$V_1 = r_2 \cdot \omega_2; \quad R_2 \cdot \omega_2 = R_3 \cdot \omega_3 \ ,$$

звідки

$$\omega_3 = \frac{R_2 \cdot \omega_2}{R_3} = \frac{R_2 \cdot V_1}{r_2 \cdot R_3} \ ; \omega_3 = \frac{0{,}5 \cdot (72t + 5) \cdot 10^{-2}}{0{,}25 \cdot 0{,}65} = 2{,}215t + 0{,}154 \ c^{-1}.$$

Коли $t = t_1 = 1$ с $\omega_3 = 2{,}215t + 0{,}154 = 2{,}369$ с$^{-1}$.

Кутове прискорення колеса 3

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2{,}215 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість точки M, її дотичне, нормальне та повне прискорення в момент часу $t_1 = 1$ с дорівнюють:

$$V_M = \omega_3 \cdot r_3 = (2{,}215 \cdot 1 + 0{,}154) \cdot 0{,}4 = 0{,}9476 \text{ м/с},$$

$$a_\tau = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 0{,}4 \cdot 2{,}215 = 0{,}886 \text{ м/с}^2,$$

$$a^M_n = r_3 \cdot \omega_3^2 = 0{,}4 \cdot 2{,}369^2 = 2{,}245 \text{ м/с}^2,$$

$$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + \left(a_n^M\right)^2} = \sqrt{0{,}866^2 + 2{,}245^2} = 2{,}41 \text{ м/с}^2 .$$

Відповідь: V_1= 0,77 м/с; a_1 = 0,72 м/с^2; ω_3 = 2,37 с$^{-1}$; ε_3= 2,22 с$^{-2}$; V_M = 0,95 м/с; a_τ = 0,89 м/с^2; $a^M{}_n$ = 2,25 м/с^2; a_M = 2,41 м/с^2.

2.3. Плоский рух твердого тіла

Плоским називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині. Слід зазначити, що більшість механізмів здійснюють саме такий рух, наприклад – кочення колеса, рух деталей кривошипно-шатунного механізму, кулісного механізму привода стругального верстата, планетарних редукторів, тощо.

Нехай тіло здійснює рух паралельно деякої площини *П.* Проекції точок *A* і *B* на площині *П* будуть A_1, і B_1. Відстані AA_1 і BB_1 будуть залишатися постійними за весь час руху. Замість руху тіла можна розглядати рух його проекції на площину *П*. Положення проекції в площині *П* визначається положенням відрізка A_1B_1. Таким чином, розгляд плоского руху тіла зводиться до розгляду руху відрізка прямої у площині (рис. 54).

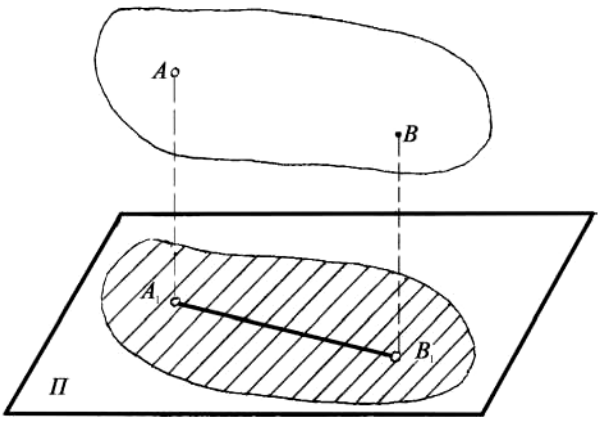


Рис. 54

Швидкість довільної точки *B* плоскої фігури визначається векторним рівнянням (рис. 55)

$$\dot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_{BA},$$

тобто

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{BA}, \qquad (62)$$

де $\vec{V}_A$ – швидкість точки A, що приймається за полюс і швидкість якої, як правило, відома; $\vec{V}_{BA}$ – швидкість точки B в обертальному русі навколо полюса; $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості плоскої фігури (цей вектор перпендикулярний до плоскої фігури).

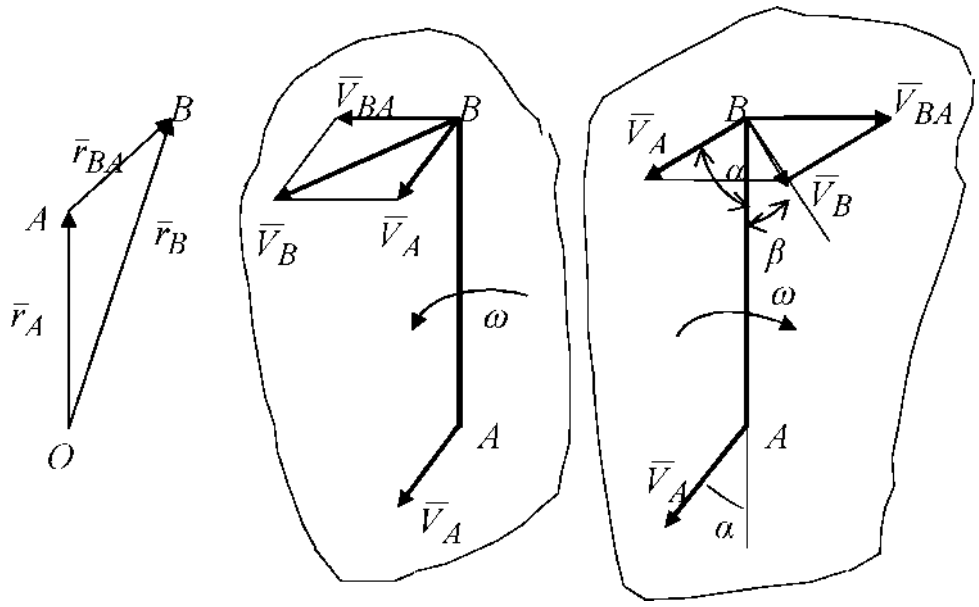


Рис. 55

Оскільки вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{AB}$ взаємно перпендикулярні, то модуль швидкості $\vec{V}_{BA}$ дорівнює

$$V_{BA} = \omega \cdot AB. \qquad (63)$$

При цьому вектор $\vec{V}_B$, перпендикулярний відрізку AB.

Швидкість точки B, залежно від напрямку обертання плоскої фігури, показана на рис. 55. Для визначення швидкості довільної точки плоскої фігури використовують теорему про проекції швидкостей двох точок. Спроектувавши рівняння (62) на пряму, обумовлену відрізком AB, одержимо

$$пр_{AB}\left(\vec{V}_B\right) = пр_{AB}\left(\vec{V}_A\right) + пр_{AB}\left(\vec{V}_{BA}\right).$$

Остання проекція дорівнює нулю, оскільки $V_{BA} \perp AB$, тому, згідно рис. 55

$$V_B \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha. \qquad (64)$$

Оскільки напрямки векторів швидкостей точок не завжди відомі, то при визначенні швидкостей точок плоскої фігури широко використають поняття миттєвого центра швидкостей (МЦШ) – це точка плоскої фігури, швидкість якої в цей момент часу дорівнює нулю. Знаючи положення МЦШ і швидкість однієї точки плоскої фігури, легко визначити швидкість будь-якої іншої точки плоскої фігури (рис. 56):

$$V_A = \omega \cdot PA, \quad V_B = \omega \cdot PB, \quad V_C = \omega \cdot PC, \tag{65}$$

Наприклад, якщо відомі модуль і напрямок швидкості точки *A* і напрямок швидкості точки *B*, то МЦШ визначають шляхом знаходження точки, де перетинаються перпендикуляри, які проведені до відповідних векторів швидкостей в точках *A* і *B*.

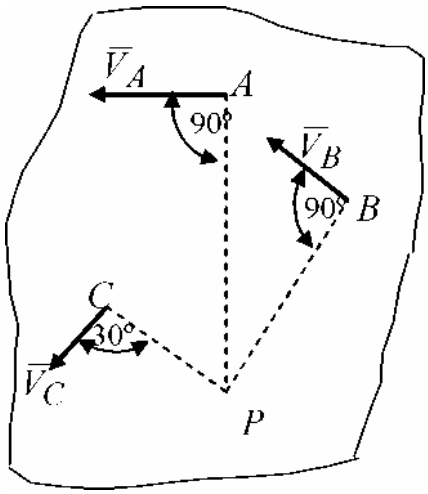


Рис. 56

Кутову швидкість ω визначають на підставі рівняння (65):

$$\omega = \frac{V_A}{PA}.$$

Тоді швидкості точок *B* і *C* будуть:

$$V_B = \omega \cdot PB = \frac{V_A}{PA} \cdot PB, \quad V_C = \omega \cdot PC = \frac{V_A}{PA} \cdot PC.$$

При визначенні МЦШ можливі такі окремі випадки:

а) якщо колесо котиться без ковзання по нерухомій поверхні, то МЦШ знаходиться в точці контакту колеса з поверхнею (рис. 57, а);

б) якщо швидкості двох точок $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$ – паралельні й спрямовані в один бік (рис. 57, б), то перпендикуляри до векторів цих швидкостей

збігаються. При цьому МЦШ знаходиться поза відрізком *AB* на відстанях пропорційних швидкостям точок, тобто:

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \omega;$$

в) якщо швидкості паралельні, але протилежні за напрямком (рис. 57, в), МЦШ знаходиться усередині відрізка *AB* також на відстанях пропорційних швидкостям:

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \omega \qquad \text{і} \qquad PA + PB = AB;$$

г) якщо швидкості паралельні, спрямовані в один бік і однакові за модулем (рис. 57, г), то перпендикуляри до векторів $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$ паралельні, а МЦШ знаходиться у нескінченості, тобто тверде тіло здійснює миттєво поступальний рух (швидкості всіх точок твердого тіла будуть однакові і в тому випадку, коли перпендикуляри збігаються (рис. 57, д).

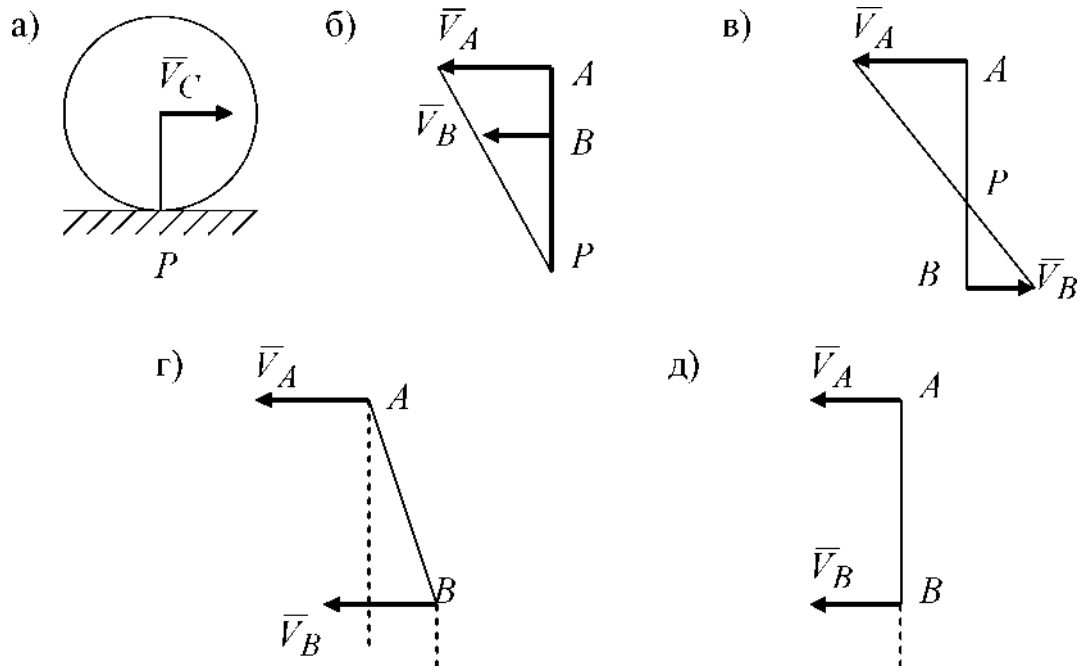


Рис. 57

Прискорення довільної точки твердого тіла (плоскої фігури) визначається з векторного рівняння

$$\vec{a}_a = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,\tau}_{BA} + \vec{a}^{\,n}_{BA}, \qquad (66)$$

де $\vec{a}_A$ – прискорення полюса (як правило, це прискорення задається);

$\vec{a}^{\tau}{}_{BA}$ – дотична складова прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса; $\vec{a}^{n}{}_{BA}$ – нормальна складова прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса.

Модулі останніх двох складових визначаються рівняннями

$$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{BA} \cdot BA; \quad a^{n}_{BA} = \omega^{2}_{BA} \cdot BA, \tag{67}$$

де BA – відстань від точки B до полюса (точки A).

Якщо точка A, яка приймається за полюс, здійснює криволінійний рух, то прискорення полюса також розкладається на дотичну та нормальну складові і тоді

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{\tau}{}_A + \vec{a}^{n}{}_A + \vec{a}^{\tau}{}_{BA} + \vec{a}^{n}{}_{BA}. \tag{68}$$

Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла розглянемо на конкретних прикладах.

Задача 7. Плоский механізм складається з ланок 1, 2, 3, 4 та повзуна E (рис. 58), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1,O_2 шарнірами; точка Д знаходиться по середині ланки AB. Довжини ланок: l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,6 м. Положення механізму визначається кутами: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 60^0$, $\varphi = 90°$, $\theta = 30°$.

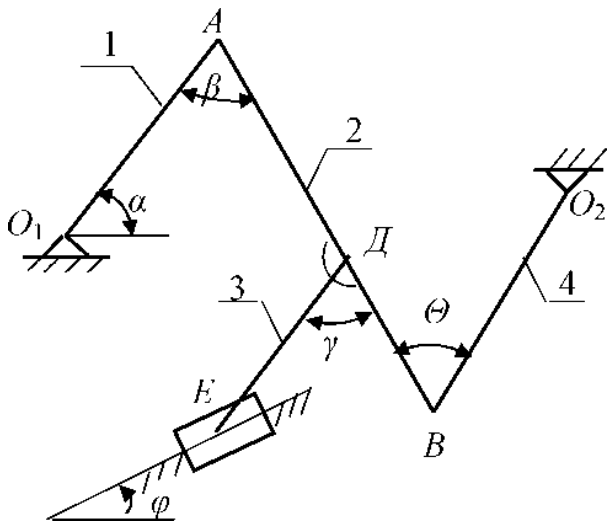


Рис. 58

Кутова швидкість ланки 1 ω_1 = 2 с$^{-1}$ та його кутове прискорення ε_1 = 4 с$^{-2}$. Визначити швидкості й прискорення точок A і B, а також кутові швидкості й кутові прискорення всіх ланок.

Розв'язання

Будуємо схему механізму в масштабі (рис. 59) відповідно до заданих довжин ланок та кутів (кути відкладати в напрямку, показаному на початковій схемі).

Визначаємо швидкості точок і ланок механізму. Швидкість точки A кривошипа O_1A ($\vec{V}_A \perp O_1A$):

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Ланка AB здійснює плоский рух, тому визначаємо МЦШ цієї ланки (він знаходиться у точці, де перетинаються перпендикуляри, що проведені до векторів швидкостей в точках A і B). Позначимо цю точку C_2 (див. рис. 59). Вона і буде – МЦШ другої ланки.

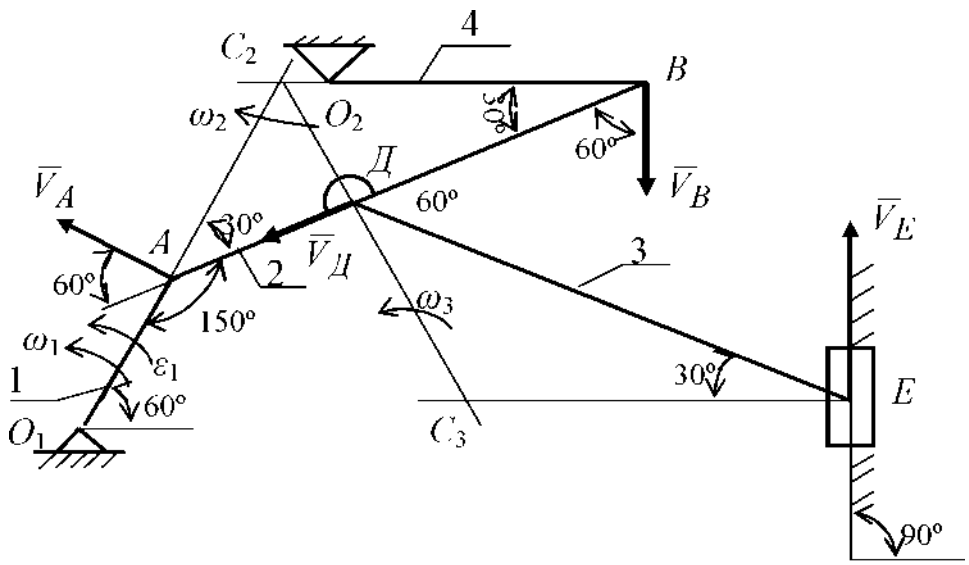


Рис. 59

Трикутник ΔAC_2B рівнобедрений (рис. 59) $C_2A = C_2B$, тому модулі швидкостей точок A і B будуть однаковими:

$$V_A = V_B = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Швидкість точки B напрямлена перпендикулярно кривошипу O_2B в бік повороту ланки 2, тобто у напрямку ω_2. Кутова швидкість ланки 2 визначається за формулою

$$\omega_2 = \frac{V_A}{C_2A} = \frac{V_B}{C_2B}.$$

З $\Delta AC_2Д$ (рис. 59) визначимо C_2A, кут $\angle C_2ДA$ прямий, оскільки ΔAC_2B рівнобедрений, а точка $Д$ перебуває по середині AB, тому

$$C_2A = \frac{AB}{2\cos 30^\circ} = \frac{l_2}{2\cos 30^\circ} = \frac{1{,}2}{2\cos 30^\circ} = 0{,}693\ м.$$

Тоді

$$\omega_2 = \frac{V_A}{C_2A} = \frac{0{,}8}{0{,}693} = 1{,}154\ с^{-1}.$$

Знаючи кутову швидкість ланки 2, можна визначити швидкість точки *Д*. Для цього з'єднуємо МЦШ з точкою *Д* і знаходимо з $\Delta AC_2Д$ катет $C_2Д$ (див. рис. 59):

$$C_2Д = AД \cdot tg30^\circ = \frac{AB}{2} \cdot tg30^\circ = \frac{1{,}2}{2} \cdot 0{,}577 = 0{,}346\ м.$$

Тоді $V_Д = \omega_2 \cdot C_2Д = 0{,}346 \cdot 1{,}154 = 0{,}4$ м/с.

Цей результат можна одержати й іншим способом, наприклад, застосовуючи теорему про проекції швидкостей точок на пряму лінію, яка з'єднує ці точки (див. рис. 59)

$$V_A \cdot \cos 60^\circ = V_B \cdot \cos 60^\circ = V_Д = 0{,}4\ м/с.$$

Визначаємо МЦШ ланки 3 (*ДЕ*). Для цього продовжимо лінію $C_2Д$ до перетинання її в точці C_3 з перпендикуляром до швидкості $\overrightarrow{V_E}$, який проведено з точки *Е* (див рис. 59).

Оскільки $\Delta ДC_3E$ рівнобедрений ($\angle C_3ДE = \angle C_3EД = 30°$, $C_3Д = C_3E$), тому $V_Д = V_E = 0{,}4$ м/с.

Кутова швидкість ланки 3

$$\omega_3 = \frac{V_Д}{C_3Д} = \frac{V_Д \cdot 2\cos 30^\circ}{ДE} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}866}{1{,}4} = 0{,}495\ c^{-1},$$

де

$$C_3Д = EC_3 = \frac{ДE}{2\cos 30^\circ}.$$

Визначаємо кутову швидкість ланки 4 (O_2B)

$$\omega_4 = \frac{V_B}{O_2B} = \frac{V_B}{l_4} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1{,}333\ c^{-1}.$$

Для визначення прискорень точок і ланок механізму покажемо механізм у заданому положенні (рис. 60).

Визначаємо прискорення точки *А*, яка належить ланці 1 і здійснює обертальний рух. Прискорення цієї точки складається з двох складових, які дорівнюють

$$a^\tau_A = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6\ м/с^2,$$

$$a^n_A = \omega_1^2 \cdot l_1 = 2^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}6\ м/с^2.$$

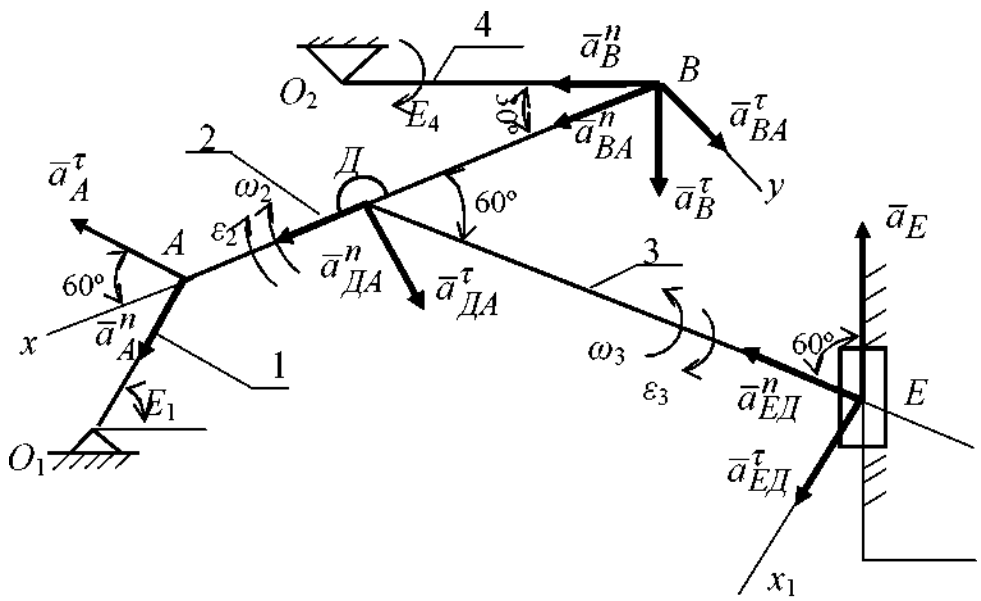


Рис. 60

Тоді

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2} = \sqrt{1{,}6^2 + 1{,}6^2} = 2{,}263\ м/с^2.$$

Покажемо ці вектори $\vec{a}_A^\tau$ й $\vec{a}_A^n$ на схемі відповідно до напрямку кутового прискорення ε_1 (див. рис. 60).

Визначаємо прискорення точки *B* ланки 2, яка здійснює плоский рух, на підставі рівняння (68)

$$\vec{a}_B = \vec{a}^\tau{}_A + \vec{a}^n{}_A + \vec{a}^\tau{}_{BA} + \vec{a}^n{}_{BA}.$$

Оскільки прискорення точки *B*, яка одночасно належить й ланці 4, що здійснює обертальний рух, складається з двох складових $\vec{a}^\tau{}_B$ і $\vec{a}^n{}_B$, то це рівняння набуває вигляду

$$\vec{a}^\tau{}_B + \vec{a}^n{}_B = \vec{a}^\tau{}_A + \vec{a}^n{}_A + \vec{a}^\tau{}_{BA} + \vec{a}^n{}_{BA}. \qquad (69)$$

Покажемо також вектори $\vec{a}^n{}_{BA}$ й $\vec{a}^\tau{}_{BA}$ (вектор $\vec{a}^n{}_{BA}$ напрямлено в припущенні, що ланка 2 здійснює прискорений рух, тобто напрямки ε_2 і ω_2 (рис. 59) збігаються). Обчислимо модулі прискорень, що входять у рівняння (69)

$$a_B^n = \omega_4^2 l_4 = 1{,}333^2 \cdot 0{,}6 = 1{,}066\ м/с^2\ ,\quad a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 1{,}154^2 \cdot 1{,}2 = 1{,}6\ м/с^2\ .$$

Вибираємо осі координат *Bxy* (див. рис. 60) і проектуємо ліву й праву частини рівняння (69) на ці осі:

$$a_B^n \cdot \cos 30^\circ + a_B^\tau \cdot \cos 60^\circ = a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^n,$$

$$-a_B^n \cdot \sin 30^\circ + a_B^\tau \cdot \cos 30^\circ = a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_A^\tau \cdot \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau.$$

Розв'язуючи отримані рівняння відносно невідомих a_B^τ і a_{BA}^τ, знаходимо

$$a_B^\tau = \frac{a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^n - a_B^n \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} =$$

$$= \frac{1{,}6 \cdot 0{,}866 + 1{,}6 \cdot 0{,}5 + 1{,}6 - 1{,}067 \cdot 0{,}866}{0{,}5} = 5{,}72\ м/с^2;$$

$$a_{BA}^\tau = -a_B^n \cdot \sin 30^\circ + a_B^\tau \cdot \cos 30^\circ - a_A^n \cdot \sin 30^\circ + a_A^\tau \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= -1{,}066 \cdot 0{,}5 + 5{,}72 \cdot 0{,}866 - 1{,}6 \cdot 0{,}5 + 1{,}6 \cdot 0{,}866 = 5{,}006\ м/с^2.$$

Додатні значення цих складових прискорень відповідають тим напрямкам які передбачалися. По цим складовим визначимо кутові прискорення ланок 2 і 4:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{BA} = \frac{5{,}006}{1{,}2} = 4{,}172\ с^{-2}; \quad \varepsilon_4 = \frac{a_B^\tau}{O_2B} = \frac{5{,}72}{0{,}6} = 9{,}533\ с^{-2}.$$

Прискорення точки *B*:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} = \sqrt{1{,}067^2 + 5{,}72^2} = 5{,}819\ м/с^2.$$

Покажемо на рис. 60 напрямки цих прискорень. Прийнявши за полюс точу *A*, визначаємо прискорення точки *Д* ланки 2

$$\vec{a}_Д = \vec{a}^\tau{}_A + \vec{a}^n{}_A + \vec{a}^\tau{}_{ДA} + \vec{a}^n{}_{ДA}. \qquad (70)$$

Модулі складових $a^n{}_{ДA}$ та $a^\tau{}_{ДA}$ цього рівняння дорівнюють:

$$a^n{}_{ДA} = \omega_2{}^2 \cdot ДA = 1{,}154^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}799\ м/с^2,$$

$$a^\tau{}_{ДA} \cdot ДA = \varepsilon_2 \cdot ДA = 4{,}174 \cdot 0{,}6 = 2{,}5\ м/с^2.$$

Покажемо складові на рис. 60 і спроектуємо ліву та праву частини рівняння (70) на осі *Bxy,* звідки:

$$a_{Дx} = a^n{}_A \cdot \cos 30^\circ + a^\tau{}_A \cdot \cos 60^\circ + a^n{}_{ДA} =$$

$$= 1{,}6 \cdot 0{,}866 + 1{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 = 2{,}986\ м/с^2,$$

$$a_{Дy} = a^n{}_A \cdot \sin 30^\circ - a^\tau{}_A \cdot \sin 60^\circ + a^\tau{}_{ДA} =$$

$$= 1{,}6 \cdot 0{,}5 - 1{,}6 \cdot 0{,}866 + 2{,}5 = 1{,}914\ м/с^2.$$

Модуль прискорення точки *Д*

$$a_Д = \sqrt{a_{Дx}^2 + a_{Дy}^2} = \sqrt{2{,}986^2 + 1{,}914^2} = 3{,}547\ м/с^2.$$

Ланка 3 також здійснює плоский рух, тому приймаємо за полюс точку *Д* і визначаємо прискорення точки *Е*, напрямок якого відомо, припускаємо, що це прискорення спрямоване вгору (див. рис. 60).

$$\vec{a}_E = \vec{a}_Д + \vec{a}^{\tau}_{ЕД} + \vec{a}^{n}_{ЕД}. \qquad (71)$$

Обчислимо модуль прискорення $\vec{a}^{n}_{ЕД}$ й покажемо цей вектор на рис. 60, а також можливий напрямок вектора $\vec{a}^{\tau}_{ЕД}$.

$$a^{n}_{ЕД} = \omega_3^2 \cdot ЕД = 0{,}495^2 \cdot 1{,}4 = 0{,}343 \text{ м/с}^2.$$

Вибираємо осі координат *Exy* (рис. 60) і проектуємо ліву та праву частини рівняння (71) на ці осі, заміняючи в цьому рівнянні прискорення $\vec{a}_Д$ його проекціями $a_{Дx}$ і $a_{Дy}$.

$$-a_E \cdot \cos 30^\circ = a_{Дx} \cdot \cos 30^\circ + a_{Дy} \cdot \sin 30^\circ + a^{\tau}_{ЕД},$$

$$-a_E \cdot \cos 60^\circ = -a_{Дx} \cdot \cos 60^\circ + a_{Дy} \cdot \cos 30^\circ - a^{n}_{ЕД}.$$

Знаходимо з цих рівнянь модулі прискорень a_E й $a^{\tau}_{ЕД}$:

$$a_E = \frac{1}{\cos 60^\circ}\,(a_{Дx} \cdot \cos 60^\circ - a_{Дy} \cdot \cos 30^\circ + a^{n}_{ЕД}) =$$

$$= 2 \cdot (2{,}985 \cdot 0{,}5 - 1{,}914 \cdot 0{,}866 + 0{,}343) = 0{,}356 \text{ м/с}^2;$$

$$a^{\tau}_{ЕД} = -a_E \cdot \cos 30^\circ - a_{Дx} \cdot \cos 30^\circ - a_{Дy} \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= -0{,}356 \cdot 0{,}866 - 2{,}985 \cdot 0{,}866 - 1{,}914 \cdot 0{,}5 = -3{,}85 \text{ м/с}^2.$$

Знак (–) свідчить про те, що вектор $\vec{a}^{\tau}_{ЕД}$ спрямований в бік, протилежний відносно прийнятого напрямку.

Кутове прискорення ланки 3

$$\varepsilon_3 = \frac{a^{\tau}_{ЕД}}{l_3} = \frac{-3{,}85}{1{,}4} = -2{,}75 \text{ с}^{-2}.$$

Це прискорення також спрямоване в бік, протилежний прийнятому напрямку (рис. 60).

В результаті ми визначили швидкості й прискорення всіх вказаних точок і ланок заданого механізму, тобто типова задача на вивчення плоского руху розв’язана повністю.

Відповідь: $V_A = V_B = 0{,}8$ м/с, $V_Д = V_E = 0{,}4$ м/с, $\omega_2 = 1{,}154$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 0{,}495$ с$^{-1}$, $\omega_4 = 1{,}333$ с$^{-1}$, $a_A = 2{,}263$ м/с^2, $a_B = 5{,}818$ м/с^2, $a_Д = 3{,}547$ м/с^2, $a_E = 0{,}329$ м/с^2, $\varepsilon_2 = 4{,}172$ с$^{-2}$, $\varepsilon_3 = -2{,}75$ с$^{-2}$, $\varepsilon_4 = 9{,}533$ с$^{-2}$.

2.4. Складний рух точки. Випадок переносного обертального руху

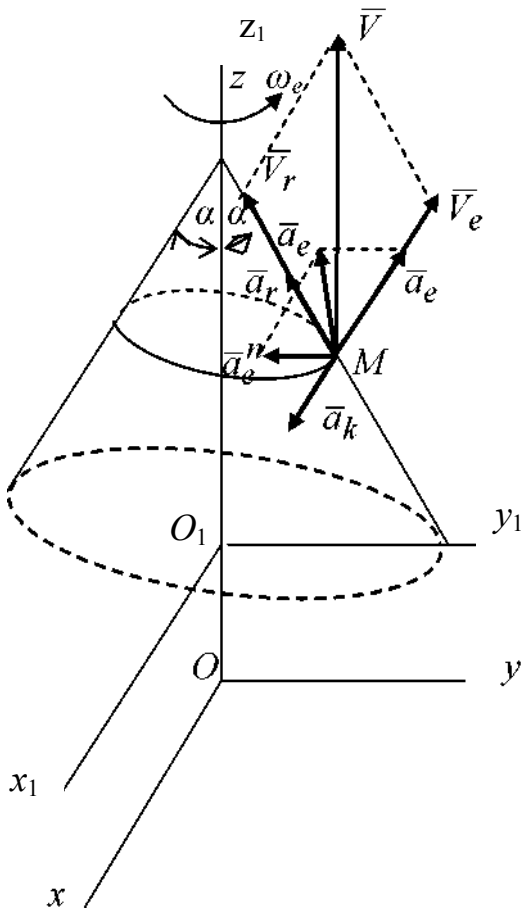


Рис. 61

Нехай тіло здійснює рух відносно нерухомих осей координат (*Oxyz*). Зв'яжемо з тілом рухомі осі координат ($O_1x_1y_1z_1$). Розглянемо рух довільної точки *M* відносно тіла, яке в свою чергу рухається відносно рухомої системи (рис. 61).

Рух точки *M* відносно рухомої системи координат ($O_1x_1y_1z_1$) називається *відносним рухом*. *Переносним рухом точки M* називається рух тієї точки рухомої системи, яка збігається з точкою *M*. Рух точки відносно нерухомих осей координат називається *абсолютним або складним рухом*. Абсолютна швидкість точки $\vec{V}_a$ складається з геометричної суми вектора відносної $\vec{V}_r$ та вектора переносної $\vec{V}_e$ швидкостей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e .$$

Якщо $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$, то величина абсолютної швидкості дорівнює

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} .$$

У загальному випадку величина абсолютної швидкості визначається формулою:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\vec{V}_r \hat{\ } \vec{V}_e)} .$$

Абсолютне прискорення точки a_a в загальному випадку дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного a_r, переносного a_e та коріолісова a_K прискорень:

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_K}$$

Модуль прискорення Коріоліса

$$a_K = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \hat{\ } \vec{V}_r) .$$

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю якщо:

1. $\omega_e = 0$, тобто переносний рух поступальний;

2. $\sin(\vec{\omega}_e \hat{} \vec{V}_r) = 0$, тобто $\vec{\omega}_e \| \vec{V}_r$;

3. $V_r = 0$, тобто відносний рух відсутній (точка знаходиться в стані відносного спокою).

Напрямок вектора прискорення Коріоліса визначається за правилом векторного добутку або за правилом Жуковського, згідно з яким для визначення напрямку вектора $\overrightarrow{a_K}$ необхідно спроектувати вектор відносної швидкості $\vec{V}_r$ на площину, перпендикулярну до осі переносного обертання тіла (або до вектора $\vec{\omega}_e$), а потім отриману проекцію відносної швидкості повернути на кут 90° убік переносного обертання тіла.

Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки розглянемо на конкретних прикладах обертального переносного руху.

Задача 8. Прямокутна пластина обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = 3t^2 - 8t$. Додатній напрямок відліку кута φ показане на рис. 62 дуговою стрілкою. При цьому вісь обертання перпендикулярна до площини пластини і проходить через точку *O*. По пластині уздовж прямої *BD* рухається точка *M* (рис. 62) за законом:

$$S = AM = 50(3t - t^2) - 64, \text{ см } (t \text{ – у секундах}); \quad a = 12 \text{ см}.$$

Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки *M* у момент часу $t_1 = 1$ с.

Розв'язання

Розглядаємо рух точки *M* як складний рух. При цьому рух точки *M* вздовж прямої *BD* є відносним (*AM* – відносна траєкторія точки), а обертання пластини разом з точкою – переносним рухом. Тоді абсолютна швидкість $\vec{V}_a$ і абсолютне прискорення $\vec{a}_a$ точки визначаються за формулами:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e, \quad \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_K},$$

де $\overrightarrow{a_K} = 2\overrightarrow{\omega_e} \times \vec{V}_r$ – коріолісове прискорення.

Визначимо всі складові, що входять до цих виразів. Оскільки у відносному русі точка *M* рухається за законом:

$$S_r = AM = 50(3t - t^2) - 64. \tag{72}$$

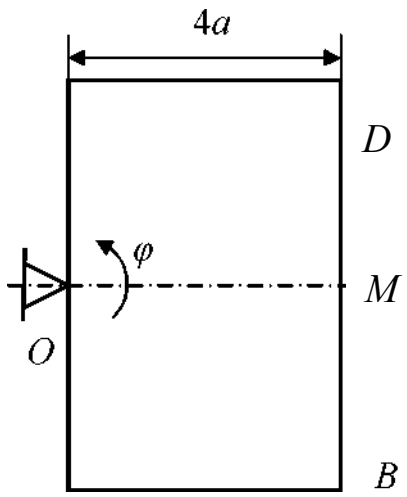


Рис. 62

уздовж прямої BD, то спочатку встановимо її положення на прямій BD у момент часу $t_1 = 1$ с.

Підставляючи в рівняння $t_1 = 1$ с, одержимо:

$$AM_1 = 50(3t_1 - t_1^{\,2}) - 64 = 36 \text{ см}.$$

Показуємо на рис. 63 точку в заданому положенні і визначаємо чисельні значення відносної швидкості V_r та відносного прискорення a_r (для $t_1 = 1$ с) :

$$V_r = \dot{S} = 50(3 - 2t)\ ,\ V_{r1} = 50\cdot(3 - 2) = 50 \text{ см/с};$$

$$a_r = \ddot{S} = \dot{V}_r = -100 \text{ см/с}^2\ ,\ a_{r1} = -100 \text{ см/с}^2.$$

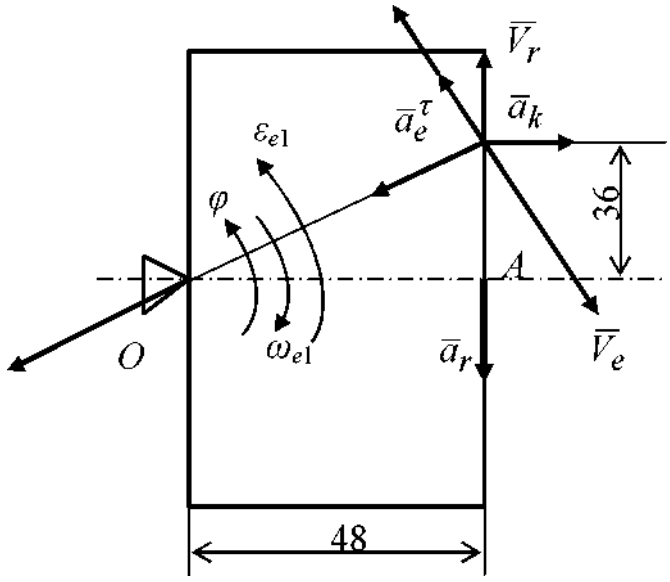


Рис. 63

Знаки показують, що вектор $\vec{V}_r$ спрямований убік зростання координати S_r, а вектор $\vec{a}_r$ – у протилежному напрямі (рис. 63).

Переносний рух є обертальним і відбувається за законом $\varphi = 3t^2 - 8t$.

Знаходимо кутову швидкість ω_e і кутове прискорення ε_e, переносного обертання:

$$\omega_e = \dot{\varphi} = 6t - 8 \text{ с}^{-1},\ \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \ddot{\varphi} = 6 \text{ с}^{-2}$$

і при $t_1 = 1$ с

$$\omega_e = -2 \text{ с}^{-1},\ \varepsilon_e = 6 \text{ с}^{-2}.$$

Знаки вказують про те, що при t_1 = 1 с ω_e спрямована убік зменшення кута φ і обертання є уповільненим (див. рис. 63).

Переносну швидкість $\vec{V}_e$ і переносне прискорення $\vec{a}_e$ визначаємо як швидкість і прискорення точки пластини, з якою збігається точка M_1 у цей момент. Для їх визначення знаходимо відстань OM_1 (див. рис. 63):

$$OM_1 = \sqrt{OA^2 + AM_1^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60 \text{ см.}$$

Оскільки пластина здійснює обертальний рух відносно осі, що проходить через центр O, то вектор $\vec{V}_e$ буде напрямлений перпендикулярно до OM_1 у відповідності з напрямком $\vec{\omega}_e$, вектор нормального прискорення $\vec{a}_e^n$ – вздовж OM_1 від M_1 до O, а вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_e^\tau$ спрямований перпендикулярно до OM_1 у відповідності з напрямком $\vec{\varepsilon}_e$ (рис. 63). В момент часу t_1 =1 с:

$$V_e = |\omega_e| \cdot OM_1 = 2 \cdot 60 = 120 \text{ см/с},$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 2^2 \cdot 60 = 240 \text{ см/с}^2,$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM_1 = 6 \cdot 60 = 360 \text{ см/с}^2.$$

Визначаємо абсолютну швидкість за формулою:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos\alpha} = \sqrt{50^2 + 120^2 - 2 \cdot 50 \cdot 120 \cdot 0{,}8} = 85{,}4 \text{ см/с},$$

$$\text{де } \cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = -\frac{OA}{OM_1} = -\frac{48}{60} = -0{,}8 .$$

Прискорення Коріоліса чисельно дорівнює

$$a_K = 2\,\omega_e \cdot V_r \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r) = 2 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 1 = 200 \text{ см/с}^2,$$

оскільки кут між векторами $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$ дорівнює 90°, то $\sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r) = 1$.

Напрямок цього вектора визначаємо за правилом Жуковського, повернувши $\vec{V}_r$ на 90^0 навколо вектора $\vec{\omega}_e$ в напрямку обертання. Абсолютне прискорення точки M_1 визначаємо через його проекції на осі x і y (рис. 63):

$$a_{ax} = a^n_e + a_r \sin\beta - a_K \cos\beta = 240 \cdot 100 \cdot 0{,}6 - 200 \cdot 0{,}8 = 140 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{ay} = a^\tau_e - a_r \cos\beta - a_K \sin\beta = 360 - 100 \cdot 0{,}8 - 200 \cdot 0{,}6 = 160 \text{ см/с}^2.$$

Тоді

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{140^2 + 160^2} = 212{,}6 \text{ см/с}^2$$

Відповідь: V_a =85,4 см/с; a_a =212,6 см/с^2 .

Задача 16. По ободу диска радіуса R, що обертається навколо свого діаметра з постійною кутовою швидкістю ω**,** рухається точка M зі сталою за модулем відносною швидкістю V_r (рис. 64). Знайти абсолютне прискорення точки M в залежності від кута φ між радіусом-вектором та віссю обертання диска.

Розв'язання

Розглянемо рух точки як складний, вважаючи, що рух її по ободу дискає відносним, а обертання диска – переносним. Тоді абсолютне прискорення точки M визначиться за формулою

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_K},$$

де $$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau}, \quad \vec{a}_t = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}.$$

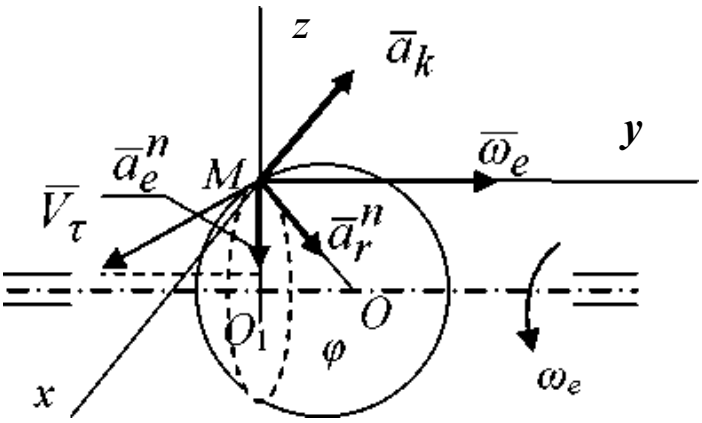


Рис. 64

Точка рухається по ободу диска з постійною по модулю швидкістю V_r**,** тому модуль вектора a^τ_r буде дорівнювати

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 0\ ;$$

а модуль вектора $\vec{a}_r^{\,n}$ знаходиться за формули $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$.

Вектор $\vec{a}_r^{\,n}$ спрямований по радіусу до центра диска O.

Диск обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega_e = \omega$, тому кутове прискорення $\varepsilon_e = \dfrac{d\omega_e}{dt} = 0$, а модуль вектора $a^\tau_e = \varepsilon_e \cdot R_1 = 0$, де R_1 – відстань від точки M до осі обертання ($R_1 = O_1M = R \sin\varphi$).

Вектор $\vec{a}_e^n$ спрямований по перпендикуляру до осі обертання. Модуль вектора $\left|\vec{a}_e^n\right| = \omega_e^2 R_1 = \omega^2 R \sin\varphi$.

Прискорення Коріоліса $\vec{a}_K = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right)$.

Кут між $\vec{V}_r$ і віссю обертання дорівнює (90°– φ). Тоді модуль вектора $\vec{a}_K$ дорівнює

$$a_K = 2\omega_e V_r \sin(90° - \varphi) = 2\omega V_r \cos\varphi.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_K$ знаходять, як відомо, за правилом Жуковського. У нашому випадку вектор $\vec{a}_K$ спрямований перпендикулярно до площини креслення, «від нас».

Для визначення абсолютного прискорення $\vec{a}_a$ проведемо координатні осі *Mxyz* і обчислимо проекції вектора $\vec{a}_a$ на ці осі:

$$a_{ax} = -a_K = -2\omega V_r \cos\varphi; \qquad a_{ay} = a_r^n \cos\varphi = \frac{V_r^2}{R}\cos\varphi;$$

$$a_{az} = -a_e^n - a_r^n \sin\varphi = -\omega^2 R \sin\varphi - \frac{V_r^2}{R}\sin\varphi .$$

Звідси одержимо абсолютне прискорення точки *M*

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} =$$

$$= \sqrt{4\omega^2 V_r^2 \cos^2\varphi + \omega^4 R^2 \sin^2\varphi + 2\omega^2 V_r^2 \sin^2\varphi + \frac{V_r^4}{R^2}\sin^2\varphi + \frac{V_r^4}{R^2}\cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{V_r^4}{R^2} + \omega^4 R^2 \sin^2\varphi + 2\omega^2 V_r^2\left(1 + \cos^2\varphi\right)} .$$

Відповідь : $a_a = \sqrt{\frac{V_r^4}{R^2} + \omega^4 R^2 \sin^2\varphi + 2\omega^2 V_r^2\left(1 + \cos^2\varphi\right)}$.

Задача 18. Кільцева трубка радіуса R = 16 см обертається навколо горизонтального діаметра *OA* за законом $\varphi = 2 + 0{,}25t^3$ рад. Усередині трубки рухається рідина згідно з рівнянням $OM = S_r = 3\pi t^2$ см. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення частини *M* рідини в момент часу t_1 = 2 с , якщо в початковий момент частинка була в точці *O*.

Розв'язання

Визначаємо положення точки *M* у момент часу t_1. Положення точки зручно визначити кутом α , який дорівнює

$$\alpha = \frac{S_r}{R} = \frac{3\pi \cdot 4}{16} = \frac{3\pi}{4} \ .$$

Положення точки M у заданий момент часу показано за умови, що трубка знаходиться у площині креслення (рис. 65).

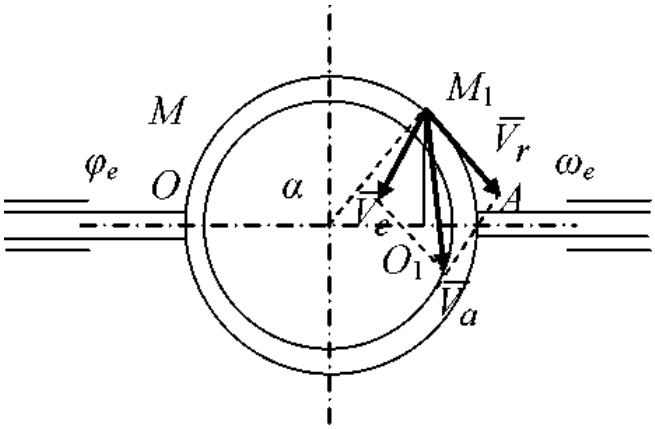


Рис. 65

Вибираємо рухому систему координат, яку жорстко зв'яжемо з кільцевою трубкою.

Розглянемо переносний рух точки. Для цього скріплюємо точку M з рухомою системою координат. У цьому випадку точка буде описувати коло у площині, перпендикулярній діаметру OA, з радіусом O_1M_1, який дорівнює

$$O_1M_1 = h = R\cos 45° = 8\sqrt{2} = 11{,}28 \text{ см}.$$

Обчислимо переносну швидкість точки M як швидкість обертання навколо осі OA за формулою $V_e = \omega_e h$.

Визначаємо кутову швидкість обертання трубки

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 + 0{,}25t^3\right) = 0{,}75t^2 \ \text{с}^{-1}.$$

В момент часу $t_1 =$ 2 с $\omega_e = 0{,}75t_1^2 = 0{,}75 \cdot 2^2 = 3$ с$^{-1}$.

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ спрямований уздовж осі обертання.

Далі обчислюємо величину переносної швидкості точки M

$$V_e = \omega_e \cdot O_1M_1 = 3 \cdot 11{,}28 = 33{,}84 \text{ см/с}.$$

Вектор переносної швидкості $\vec{V}_e$ спрямований по нормалі до площини креслення в напрямку обертання, тобто паралельно осі z (рис. 66).

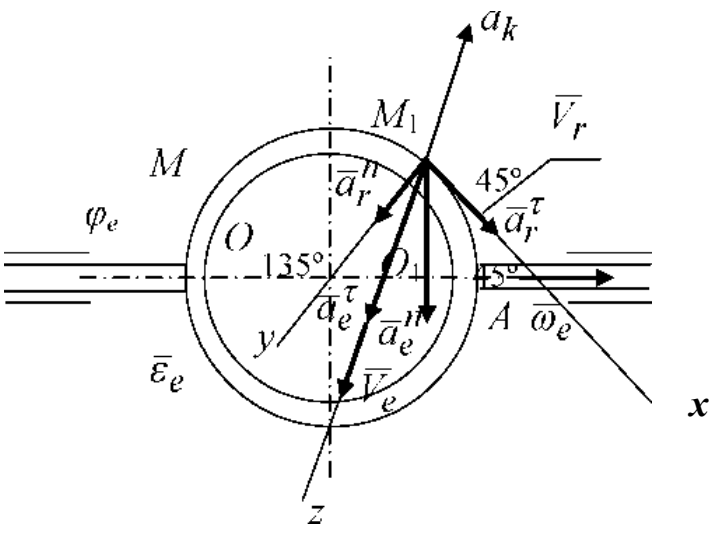


Рис. 66

Відносний рух точки M – це рух рідини щодо трубки. У цьому випадку точка M буде рухатися по колу діаметром OA.

Обчислюємо відносну швидкість точки M

$$V_r = \frac{d\,S_r}{d\,t} = 6\pi\,t \text{ см/с.}$$

Для моменту часу $t_1 =$ 2 с $V_r = 6\pi\cdot 2 = 12\pi = 37{,}7$ см/с.

Напрямлений вектор відносної швидкості по дотичній до кола в точці M_1 (див. рис. 65).

Оскільки вектори $\vec{V}_r$ й $\vec{V}_e$ взаємно перпендикулярні, то величина абсолютної швидкості дорівнює:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{33{,}84^2 + 37{,}7^2} = 50{,}66 \text{ м/с.}$$

Абсолютне прискорення $\vec{a}_a$ точки M визначається за формулою:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_K = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_K\,.$$

Знаходимо a_e^n переносне нормальне прискорення точки M

$$a_e^n = \omega_e^{\,2}\cdot h = 3^2\cdot 11{,}28 = 101{,}52 \text{ см/с}^2.$$

Вектор переносного нормального прискорення спрямовано вздовж радіуса до осі обертання (див. рис. 66).

Переносне дотичне прискорення точки M за величиною дорівнює $a_e^\tau = \varepsilon_e h$.

Визначимо кутове прискорення трубки

$$\varepsilon_e = \frac{d\,\omega_e}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(0{,}75\,t^2\right) = 1{,}5\,t \text{ с}^{-2}.$$

Для моменту часу $t_1 = 2$ с маємо

$$\varepsilon_e = 1{,}5\cdot t_1 = 3 \text{ с}^{-2}.$$

Кутове прискорення додатне, отже, обертання трубки прискорене.

Обчислюємо переносне дотичне прискорення

$$a_e^{\tau} = \varepsilon_e h = 3\cdot 11{,}28 = 33{,}84 \text{ см/с}^2 .$$

Спрямований вектор переносного дотичного прискорення точки, так само як і переносна швидкість, перпендикулярно до площини трубки (рис. 66).

Знаходимо величину відносного дотичного прискорення точки M

$$a_r^{\tau} = \frac{d V_r}{d t} = \frac{d}{d t}(6\pi t) = 18{,}84 \text{ см/с}^2.$$

Вектор відносного дотичного прискорення збігається по напрямку з відносною швидкістю, тому відносний рух є прискореним.

Обчислимо відносне нормальне прискорення (величину)

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{36\pi^2 t^2}{16} = 2{,}25\pi^2 t^2 \text{ см/с}^2.$$

Для моменту часу $t_1 = 2$ с маємо

$$a_r^n = 2{,}25\pi^2 \cdot 4 = 9\pi^2 = 88{,}83 \text{ см/с}^2.$$

Спрямований вектор нормального відносного прискорення по радіусу до центра кільця трубки.

Знаходимо величину прискорення Коріоліса

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin 45° = 2\cdot 3\cdot 37{,}7\cdot 0{,}707 = 159{,}92 \text{ см/с}^2.$$

Спрямований вектор прискорення Коріоліса перпендикулярно до площини, у якій лежать вектори $\vec{\omega}_e$ й $\vec{V}_r$, так, що якщо подивитися з додатного кінця цього вектора, то поворот від $\vec{\omega}_e$ до $\vec{V}_r$ на найменший кут відбувається проти ходу годинникової стрілки. Таким чином, вектор прискорення Коріоліса спрямований по одній прямій з вектором переносного дотичного прискорення, але в протилежний бік.

Вектори відносного, переносного й прискорення Коріоліса показані на рис. 66.

Виберемо осі координат системи M_1xyz , як показано на рис. 66, і спроектуємо на ці осі векторну рівність, що визначає абсолютне прискорення точки M:

$$a_x = a^{\tau}_r + a_e^n \cos 45° = 18{,}84 + 101{,}52\cdot 0{,}707 = 90{,}61 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a^n_r + a_e^n \cos 45° = 88{,}83 + 101{,}52\cdot 0{,}707 = 160{,}6 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a^{\tau}_e - a_k = 33{,}84 - 160{,}52 = -126{,}68 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного прискорення дорівнює:

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{90{,}61^2 + 160{,}6^2 + (-126{,}68)^2} = 223{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Відповідь: $V_a = 50{,}66$ см/с; $a_a = 223{,}7$ см/с^2.

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ З КІНЕМАТИКИ

Демонстраційний варіант

Завдання 1–7 мають п'ять варіантів відповіді, серед яких лише один правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді, позначте його в *бланку відповідей*.

1. Закон руху тіла $x = -4 + 5t + t^2$, м. Визначте проекцію швидкості тіла v_x при
$t_1 = 0{,}5$ с.

а	б	в	г	д
1,25 м/с	– 1,25 м/с	6 м/с	4,5 м/с	– 5 м/с

2.

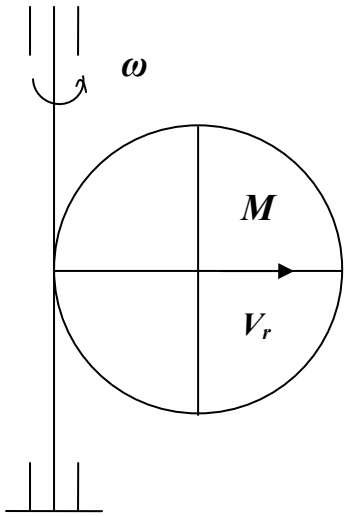


Рис. Тк1

По діаметру диска, який обертається навколо вертикальної вісі з кутовою швидкістю $\omega = 3t$, рухається точка M з відносною швидкістю $V_r = 2t$ (рис. Тк1). Визначити модуль прискорення Коріоліса (м/с^2) у момент часу $t_1 = 1{,}5$ с, якщо дані задані в SI.

а	б	в	г	д
27	64	13,5	18	– 36

3. По паралельним шляхам в одному напрямку рухаються потяг зі швидкістю 72 км/год та довжиною 150 м і мотоцикліст зі швидкістю 90 км/год. Визначте, скільки часу потрібно мотоциклісту, щоб обігнати потяг.

а	б	в	г	д
18 с	20 с	45 с	30 с	27,5 с

4. Стержень рухається у вертикальній площині, спираючись одним кінцем у підлогу, а другім – у стену. В момент часу, коли стержень створює кут α з підлогою, швидкість його верхнього кінця дорівнює V. Яка швидкість його нижнього кінця в обраний момент часу?

а	б	в	г	д
$V\sin\alpha$	$Vctg\alpha$	$2V$	$V\cos\alpha$	$V\,tg\alpha$

5. Колесо котиться по прямолінійній рейці без ковзання (рис.Тк2). Яка з наведених точок A, B, C, D, O має найменшу швидкість?

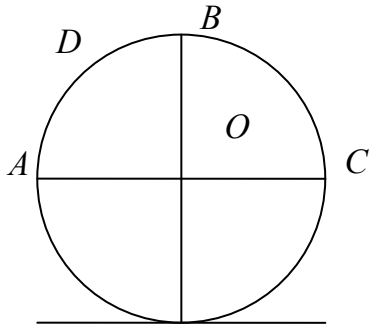


Рис. Тк2

а	б	в	г	д
D	O	B	C	A

6. На рисунках зображено вектори миттєвої швидкості $\vec{v}$ та прискорення $\vec{a}$ тіла. У якому з випадків тіло може рівномірно рухатися по колу?

а	б	в	г	д
$\vec{v}$ → $\vec{a}$ →	$\vec{v}$ → $\vec{a}$ ←	$\vec{v}$ → $\vec{a}$ ↘	$\vec{v}$ → $\vec{a}$ ↓	$\vec{v}$ → $\vec{a}$ ↗

7. Точка рухається прямолінійно за законом $x = Ae^{-4t}$, де A – стала величина. Знайдіть початкове значення прискорення точки a_0.

а	б	в	г	д
$a_0 = A$	$a_0 = 4A$	$a_0 = -4A$	$a_0 = 16A$	$a_0 = -16A$

У завданнях 8, 9 до кожного з чотирьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте в *бланку* позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

8. Установіть відповідність між основними кінематичними поняттями (1–4) та їх змістом (А–Д).

Кінематичне поняття	***Зміст***
1. Механічний рух	**А** характеризує інтенсивність зміни переміщення з часом
2. Система відліку	**Б** характеризує швидкість зміни швидкості у часі
3. Швидкість	**В** вводиться для визначення розташування тіла в будь-який момент часу
4. Прискорення	**Г** характеризує зміну з часом розташування одного тіла відносно інших
	Д характеризує залежність координати тіла від часу

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

9. В механізмі компресора (рис. Тк3) кривошип *OA* обертається за рухом годинникової стрілки із сталою частотою обертання $n_1 = 1200$ об/хв.

Знайти швидкості точок *A*, *B*, *C* і прискорення точки *A*, якщо l_{OA}=0,05 м; l_{AB}= 0, 25 м; a = 0,1 м; кут φ = 45°. Установіть відповідність між кінематичними величинами (1 – 4) та їх значеннями (А – Д).

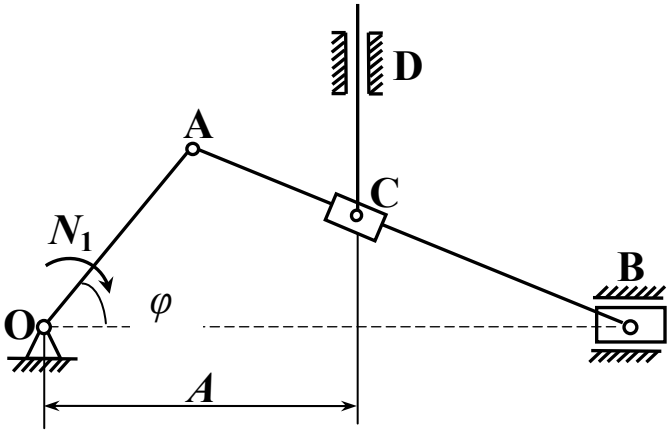


Рис. Тк3

Величина	Значення	
1. Швидкість V_A, м/с	**А**	896,7
2. Швидкість V_B, м/с	**Б**	5,66
3. Швидкість V_C, м/с	**В**	5,08
4. Прискорення a_A, м/с^2	**Г**	789,5
	Д	6,28

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

Виконайте завдання 10–12. Числові розрахунки здійснюйте за остаточною формулою розв’язання задачі в загальному вигляді. Одержані числові відповіді запишіть у ***бланку*** **на відповідних місцях.** Відповідь записуйте лише десятковим дробом, ураховуючи положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці. Одиниці фізичних величин явно зазначати не потрібно.

10. Кулька вільно скочується по нахиленої площини *AB*, довжина якої дорівнює 1,25 м. Початкова швидкість кульки дорівнює нулю. Зробивши

п'ять експериментів, студент визначив час, за який кулька пройшла шлях *AB*:
t_1= 0,993 с, t_2= 0,987 с, t_3= 1,013 с, t_4= 0,995 с, t_5= 1,012 с.

1. Визначити середнє прискорення (м/с^2) кульки.
2. Визначити середню швидкість (м/с), яку отримала кулька у точці *B*.

11. Для тіла, що рухається прямолінійно, за графіком залежності швидкості v_x від часу t (рис. Тк4) визначте модуль переміщення тіла S за перші 6 с руху. Відповідь наведіть у метрах.

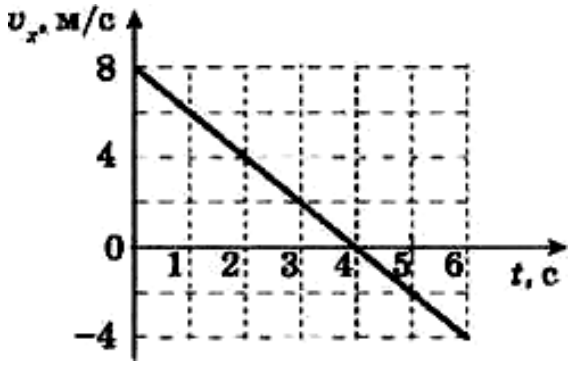
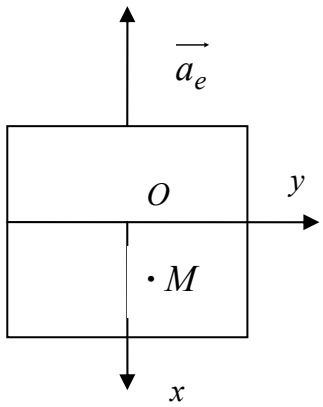


Рис. Тк4 Зміна швидкості тіла з часом

12. Підйомник рухається поступально уверх зі сталим прискоренням a_e = 2 м/с (рис. Тк5).



Всередині підйомника у площині креслення рухається точка *M* за законом

$$x = 0{,}4t^2\,;\ y = 0{,}3t^2$$

у системі *Oxy*.
Визначити абсолютне прискорення точки *M*.

Рис. Тк5

Розв'язання

1. Знаходимо швидкість тіла у будь-який момент часу $v_x = \dfrac{dx}{dt} = 5 + 2t$.

При t_1 = 0,5 с маємо v_x = 5 + 2·0,5 = 6 (м/с). Обираємо 1.в.

2. Модуль прискорення Коріоліса визначається за формули

$$a_K = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin\left(\overrightarrow{\omega_e} \wedge \vec{V}_r\right) = 2\omega V_r = 2 \cdot 3t \cdot 2t = 12t^2,$$

тому що $\overrightarrow{\omega_e} \perp \vec{V}_r$. При t_1 =1,5 с маємо a_K= 12· 1,5^2 =27 м/с. Обираємо 2.а.

3. За умовами задачі паралельну проекцію мотоцикліста на потяг можна розглядати, як точку. Якщо вона вийде за межи потягу, тоді мотоцикліст обгонить його. Формула розрахунку часу події

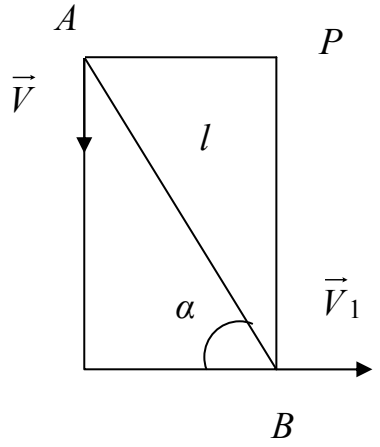
$$t = \frac{S}{v_м - v_п} = \frac{150}{25 - 20} = 30c \quad ,$$

де $v_м$ = 90 км/год = 25 м/с – швидкість мотоцикліста;

$v_п$ = 72 км/год = 20 м/с – швидкість потягу.

Обираємо 3.г.

4. Стержень знаходиться у плоскому русі. Можна визначити напрямки швидкостей його кінців – точок *A* і *B* (рис. Тк6). При перетинанні



нормалей до швидкостей кінців $\vec{V}$ і $\vec{V}_1$ визначається МЦШ – точка *P*. За властивостями МЦШ:

$$\frac{V}{AP} = \frac{V_1}{BP}$$

Звідки $V_1 = V \cdot \frac{BP}{AP} = V \cdot \frac{l \sin\alpha}{l \cos\alpha} = V \cdot tg\alpha$.

Рис. Тк6

Обираємо 4.д.

5. Визначаємо МЦШ колеса. Точка *P* контактування колеса з рейкою має нульову швидкість, тому це є миттєвий центр швидкостей (рис. Тк7).

За властивостями МЦШ величина швидкості точки дорівнює добутку кутової швидкості колеса на відстань від точки до полюсу *P*. Зрозуміло, що відстані точок *A*, *B*, *C*, *D*, *O* від полюсу задовольняють нерівностям

$OP < AP = CP < DP < BP$.

Тоді найменшу лінійну швидкість з обраних точок має т. *O*.

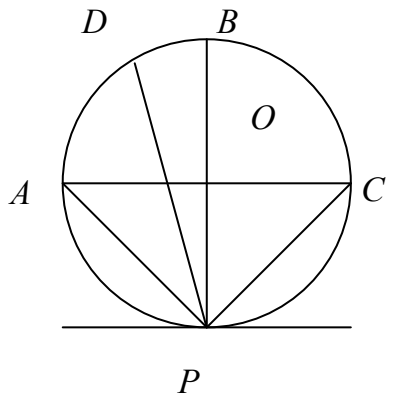


Рис. Тк7 Обираємо 5.б.

6. При рівномірному обертанні тіла швидкість кожної точки напрямлена по дотичній до кола траєкторії, прискорення точки співпадає з доцентровою складовою, яка напрямлена до осі обертання перпендикулярно вектору швидкості (рис. Тк8).

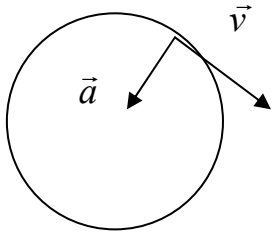


Рис. Тк8. Взаємне розташування векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}$

Тоді обирається схема 6г.

7. Знаходимо прискорення точки $a = \ddot{x} = (-4)^2 A e^{-4t}$. При t = 0 отримаємо $a_0 = 16 A e^{-4 \cdot 0} = 16 A$. Обираємо 7.г.

8. ***Відповідь:*** **1.** Прискорення характеризує швидкість зміни швидкості у часі (1.Б)

2. Механічний рух характеризує зміну з часом розташування одного тіла відносно інших (2.Г)

3. Система відліку вводиться для визначення розташування тіла в будь-який момент часу (3.В)

4. Швидкість характеризує інтенсивність зміни переміщення з часом (4.А)

Відмічаємо у таблиці відповідні комірки

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1		X			
2				X	
3			X		
4	X				

9. ***Відповідь:*** Кривошип *OA* обертається із сталою кутовою швидкістю $\omega_{OA} = \pi n/30 = 125{,}66$ с$^{-1}$, тоді $\vec{V}_A \perp OA$, $\overrightarrow{a_A} = \vec{a}_A^{\,n}$;

$V_A = \omega_{OA} \cdot l_{OA} = 125{,}66 \cdot 0{,}05 = 6{,}28$ м/с;

$a_A = \omega_{OA}{}^2 \cdot l_{OA} = 125{,}66^2 \cdot 0{,}05 = 789{,}5$ м/с^2 ;

кривошип *AB* знаходиться у плоскому русі, МЦШ – точку *P* можна визначити як точку перетинання $AP \perp \vec{V}_A$ та $BP \perp \vec{V}_B$ $\left(\vec{V}_B || OB\right)$;

розраховуємо трикутники ΔOAB, ΔOBP, ΔAPC :

$\sin\gamma = 0{,}2 \cdot \sin 45^\circ = 0{,}141$; $\gamma = 8{,}13^\circ$;

$OB = (0{,}05/\sin 8{,}13^\circ) \cdot \sin(180^\circ - 45^\circ - 8{,}13^\circ) = 0{,}283$ м;

$OP = OB/\cos 45^\circ = 0{,}283/0{,}707 = 0{,}400$ м;

$AP = OP - OA = 0{,}40 - 0{,}05 = 0{,}35$ м; $BP = OB = 0{,}283$ м;

$\omega_{AB} = V_A/AP = 6{,}28/0{,}35 = 17{,}943$ с$^{-1}$;

$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 17{,}943 \cdot 0{,}283 = 5{,}08$ м/с;

$OA \cdot \cos 45^\circ + AC \cdot \cos 8{,}13^\circ = 0{,}1$ м;

$AC = (0{,}1 - OA \cdot \cos 45^\circ)/\cos 8{,}13^\circ = (0{,}1 - 0{,}05 \cdot 0{,}707)/0{,}99 = 0{,}065$ м;

$$CP = \sqrt{AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos 53{,}13^\circ} =$$

$$= \sqrt{0{,}35^2 + 0{,}065^2 - 2 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}065 \cdot 0{,}6} = 0{,}315 \text{ м};$$

$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 17{,}943 \cdot 0{,}315 = 5{,}66$ м/с.

Тоді обираємо комірки 1.Д ; 2.В ; 3.Б ; 4.Г.

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					X
2			X		
3		X			
4				X	

10. Відмічаємо, що кулька при скочуванні на *AB* знаходиться у прискореному русі, де a = const. За умови $v_0 = 0$ маємо $a = \dfrac{2S}{t^2}$; $v_B = a \cdot t = \dfrac{2S}{t}$. Тоді за даними експериментів знаходимо середні значення:

$$1)\ a=\frac{2\cdot S}{5}\left(\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+\frac{1}{t_3^2}+\frac{1}{t_4^2}+\frac{1}{t_5^2}\right)=$$

$$=\frac{2{,}5}{5}\left(\frac{1}{0{,}993^2}+\frac{1}{0{,}987^2}+\frac{1}{1{,}013^2}+\frac{1}{0{,}995^2}+\frac{1}{1{,}012^2}\right)=2{,}5\ \text{м/с}^2.$$

$$2)\ v_B=\frac{2\cdot S}{5}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}+\frac{1}{t_5}\right)=$$

$$=\frac{2{,}5}{5}\left(\frac{1}{0{,}993}+\frac{1}{0{,}987}+\frac{1}{1{,}013}+\frac{1}{0{,}995}+\frac{1}{1{,}012}\right)=2{,}5\ \text{м/с}.$$

Відповідь: 1) a = 2,5 м/с^2 ; 2) v_B = 2,5 м/с.

11. Позначимо через S переміщення тіла, тоді при врахуванні зв'язку швидкості v_x та S

$$S=\int_0^6 v_x\,dt=\{v_x=8-2t\}=\int_0^6(8-2t)dt=\left(8t-t^2\right)\Big|_0^6=12\,(м).$$

Якщо при розв'язанні задачі використовується математична система MathCAD, тоді можливий запис одержання відповіді (рис. Тк9)

$V(t) := 8 - 2\cdot t$

$$\left(\int_0^6 V(t)\,dt\right) = 12$$

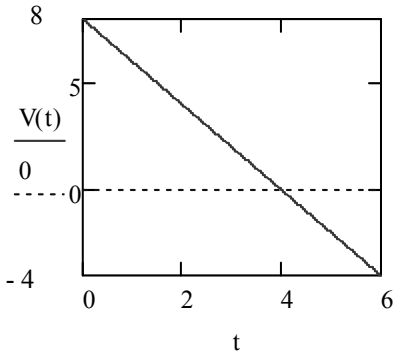


Рис. Тк9

***Відповідь*:** S = 12 *м.*

12. Рух точки M розглядається як складний, причому переносний рух (рух підйомника) – поступальний, $\vec{a}_K=0$. Тоді абсолютне прискорення точки M визначається за формули

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} .$$

Маємо

$$a_x = a_e - \ddot{x} = 2 - 0{,}8 = 1{,}2; \quad a_y = 0{,}6 .$$

Тоді

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}6^2} = 1{,}342\, м/с^2 .$$

Розглядаємо площину основи піраміди. Діагоналі поділяють ромб основи на чотири рівних прямокутних трикутника з гострими кутами 15° і 75°.

Відповідь: a_a = 1,342 м /с^2.

Контрольні запитання з кінематики

1. Способи завдання руху точки. Які величини входять у запис закону руху?
2. Як знайти швидкість та прискорення точки?
3. На які складові розкладається прискорення при природному способі завдання руху? Радіус кривизни траєкторії.
4. Поступальний рух твердого тіла. Як пов'язані одна з одною траєкторії точок тіла? Швидкості та прискорення точок тіла.
5. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Як знайти кутову швидкість та кутове прискорення тіла?
6. Вектори кутової швидкості та кутового прискорення. Векторні формули обчислення швидкостей та прискорень точок тіла.
7. Плоский рух твердого тіла. Розкладання плоского руху на поступальний та обертальний. Рівняння руху.
8. Кутова швидкість та кутове прискорення тіла при плоскому русі та способи їх обчислення.
9. Швидкості точок тіла при плоскому русі. Миттєвий центр швидкостей. Способи обчислення швидкостей точок тіла.
10. Прискорення точок тіла при плоскому русі. Миттєвий центр прискорень. Способи обчислення прискорень точок тіла.
11. Складний рух точки. Абсолютний, відносний та переносний рухи точки.
12. Теорема про додавання швидкостей точки при складному русі.
13. Теорема про додавання прискорень точки при складному русі.
14. Як визначити модуль і напрямок прискорення Коріоліса?
15. Як знайти швидкість та прискорення точки у складному русі при поступальному переносному?

2.5. Варіанти індивідуальних завдань з кінематики

Задача К1. Точка *B* рухається в площині *xy* (рис. К1), табл. К1; (на схемі показана умовна траєкторія точки). Закон руху точки задано рівняннями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, де розмірність *x* і *y* в сантиметрах, а *t* – в секундах. Функціональні залежності $x = f_1(t)$,
$y = f_2(t)$ вказано у табл. К1.

Знайти рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити швидкість і прискорення точки, а також дотичне (тангенціальне) і нормальне прискорення та радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Зауваження. *Задача К1 належить до кінематики точки і розв'язується за допомогою формул, за якими визначаються швидкість і прискорення точки в декартових координатах (координатний спосіб задавання руху точки). Шукані величини треба визначити тільки для моменту часу $t_1 = 1$ с. В деяких варіантах задачі при визначенні траєкторії або в подальших розрахунках (для їх спрощення) слід враховувати відомі з тригонометрії формули:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

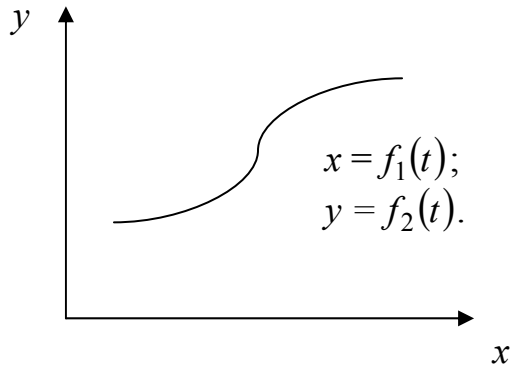


Рис. К1

Таблиця К1

Номер варіанту	$f_1(t)$	$f_2(t)$	Номер варіанту	$f_1(t)$	$f_2(t)$
1	$6\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)-3$	$12\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	16	$3-6\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$12\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
2	$4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-6\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	17	$2t+2$	$-2/(t+1)$
3	$2-3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-3\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	18	$4\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
4	$t-4$	$2t^2+2$	19	$7t^2-3$	$t+1$
5	$6\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)-3$	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	20	$-2\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$4\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
6	$4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$10\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	21	$-2t-2$	$2/(t+1)$
7	$2-3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	22	$4\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)-1$	$4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
8	$4-2t$	$2-3t^2$	23	$3/(t+1)$	$-3t-3$
9	$8\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)-2$	$4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	24	$-5\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$5\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
10	$2t+2$	$3t^2-2$	25	$6t$	$2t^2+4$
11	$3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)-2$	$2-3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	26	$2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)-3$	$-2\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
12	$6\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)-2$	$12\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	27	$5\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)-3$	$8\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
13	$2\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	28	$4\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$
14	$-2t$	$4+2t^2$	29	$3t^2+3$	$2t+1$
15	$4-8\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+6$	30	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$

Задача К2. Механізм утворюється зі складених із дисків різних розмірів коліс 1–3 зачеплення, зубчастої рейки 4, вантажу 5, що прив'язаний до кінця нерозтяжної нитки, яка намотана на одне з коліс (рис. К2.1 – К2.5, табл. К2). Радіуси дисків складених коліс дорівнюють відповідно: у колеса 1 – r_1 = 0,02 м, R_1 = 0,04 м, у колеса 2 – r_2 = 0,06 м, R_2 = 0,08 м, у колеса 3 – r_3 = 0,12 м, R_3 = 0,16м. На поверхні коліс розташовані точки *A*, *B*, *C*. У стовпці «Дано» таблиці К2 вказано закон руху або закон зміни швидкості провідної ланки механізму, де $\varphi_1(t)$ – закон обертального руху колеса 1, $S_4(t)$ – закон руху рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон зміни кутової швидкості колеса 2, $V_5(t)$ – закон зміни швидкості тягарця 5 тощо (тут усюди φ вимірюється у радіанах, *S* – у сантиметрах, *t* – в секундах). Додатний напрямок для φ, ω – проти руху годинникової стрілки, для S_4, S_5, V_4, V_5 – вниз. Визначити у момент часу t_1 = 2 с вказані у таблиці у стовпцях «Знайти» швидкості (*V* – лінійні, ω – кутові) та прискорення (*a* – лінійні, ε – кутові) відповідних точок або тіл (V_5 – швидкість тягарця 5).

Зауваження. *Задача К2 – на дослідження обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. При розв 'язанні задачі треба враховувати, що коли два колеса є у зачепленні, швидкість точки зачеплення одна й таж, а коли обидва колеса зв'язані пасовою передачею, то швидкості всіх точок ременя і, відповідно, тих, що лежать на поверхні кожного з цих коліс, у кожну мить часу дорівнюють одна одній (при цьому вважається, що ремінь по поверхні колеса не ковзає).*

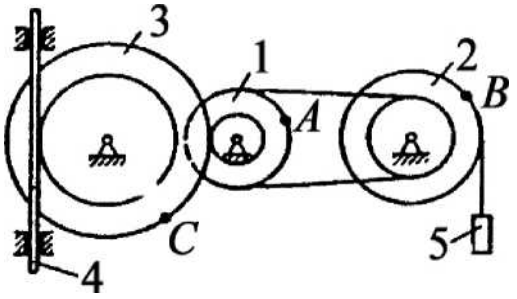


Рис. К2.1

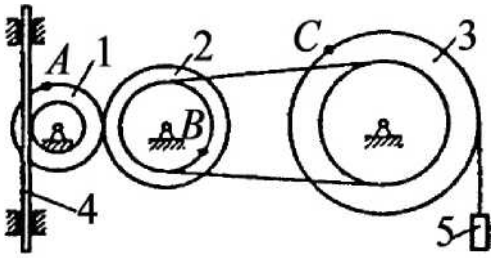


Рис. К2.2

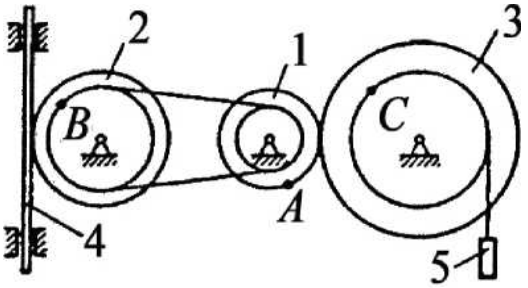


Рис. К2.3

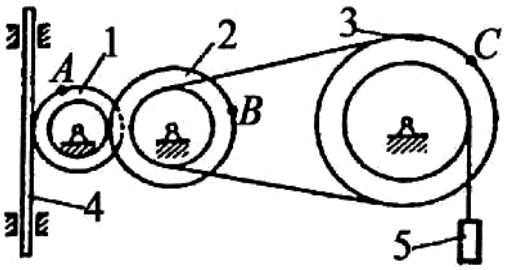


Рис. К2.4

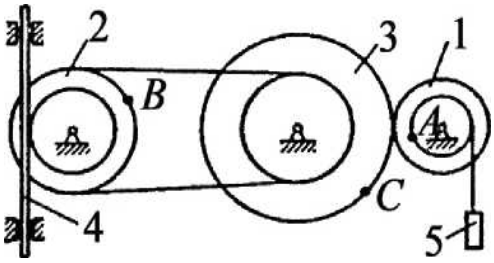


Рис. К2.5

Таблиця К2

Номер умови	Дано	Знайти швидкості	Знайти прискорення
0	$S_4 = 4(7t - t^2)$	V_B , V_C	ε_2 , a_A , a_5
1	$V_5 = 2\,(t^2 - 3)$	V_A , V_C	ε_3 , a_B , a_5
2	$\varphi_1 = 2\cdot t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2 , a_A , a_5
3	$\omega_2 = 7\cdot t - 3\cdot t^2$	V_5, ω_3	ε_2 , a_A , a_4
4	$\varphi_3 = 3\cdot t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1 , a_B , a_5
5	$\omega_1 = 5\cdot t - 2\cdot t^2$	V_5 , V_B	ε_2 , a_C , a_4
6	$\varphi_2 = 2\,(t^2 - 3\cdot t)$	V_4, ω_1	ε_1 , a_C , a_5
7	$V_4 = 3\cdot t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3 , a_B , a_5
8	$S_5 = 2\cdot t^2 - 5\cdot t$	V_4, ω_2	ε_1 , a_C , a_4
9	$\omega_1 = 8\cdot t - 2\cdot t^2$	V_5 , V_B	ε_2 , a_A , a_4

Задача К3. Плоский механізм складається з стержнів 1–4 та повзуна *B*, які з'єднані між собою і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами (рис. К3.1 – К3.5). Довжини стержнів: l_1 = 0,4 м,
l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,8 м. Положення механізму задається кутами α, β, γ, φ, θ, які надаються в табл. К3 разом з іншими величинами. Точка *D* на всіх схемах і точка *K* на рис. К3.5 знаходяться по середині відповідного

стержня. Дугові стрілочки на схемах показують, як при побудові креслення повинні відкладатися відповідні кути, тобто за ходом або проти ходу годинникової стрілки. Побудову креслення починати зі стержня, напрям якого визначається кутом α; напрям руху повзуна *B* визначається кутом φ. Задану кутову швидкість ω вважати напрямленою проти ходу годинникової стрілки, задану швидкість V_B повзуна *B* – від точки *B* до *b*.

Зауваження. Задача К3 – на дослідження плоско-паралельного руху твердого тіла. При її розв'язуванні для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок слід скористатись поняттям про миттєвий центр швидкостей, використовуючи це поняття до кожної ланки механізму окремо.

Таблиця К3

Номер умови	Кути					Дано			Знайти
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	V, м/с	
0	30	150	120	0	60	2	—	—	**Швидкості точок, кутові швидкості ланок та прискорення точок *A, B, D* (рис. К3.1, К3.2, К3.3, К3.4) або *A, K* (рис. К3.5).**
1	60	60	60	90	120	—	3	—	
2	0	120	120	0	60	—	—	10	
3	90	120	90	90	60	3	—	—	
4	0	150	30	0	60	—	4	—	
5	60	150	120	90	30	—	—	8	
6	30	120	30	0	60	5	—	—	
7	90	150	120	90	30	—	5	—	
8	0	60	30	0	120	—	—	6	
9	30	120	120	0	60	4	—	—	

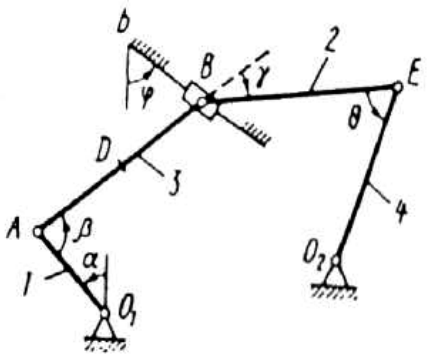


Рис. К3.1

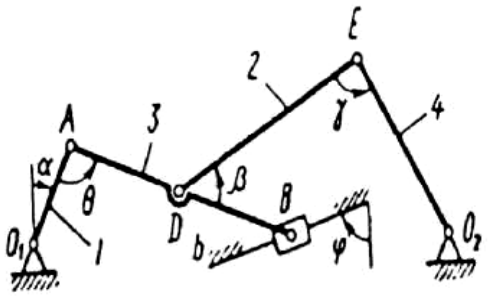


Рис. К3.2

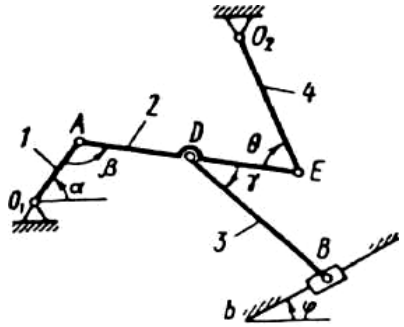


Рис. К3.3

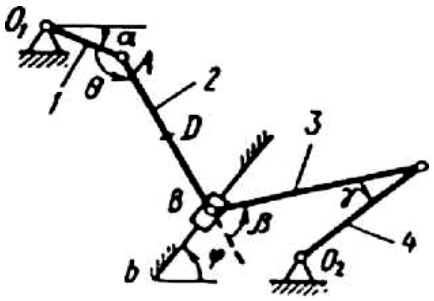


Рис. К3.4

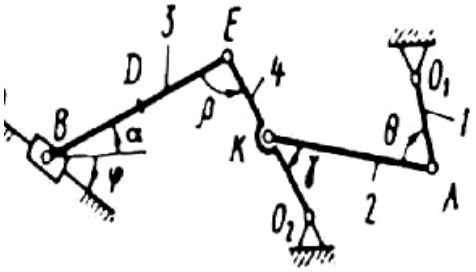


Рис. К3.5

Задача К4. Прямокутна плита (рис. К4.1–К4.3) або кругла пластинка радіуса R = 40 см (рис. К4.4, К4.5) обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = f_1(t)$, який задано в табл. К4. Додатний напрямок відліку кута показано на схемах. На рис. К4.1, К4.2, К4.4 вісь обертання перпендикулярна до площини пластинки і проходить через точку O (пластинка обертається у своїй площині); на рис. К4.3, К4.5, вісь обертання OO_1 вертикальна.

По пластинці вздовж прямої BD (рис. К4.1– К4.3) або по колу радіуса R (рис. К4.4, К4.5) рухається точка M; закон її відносного руху, тобто залежність $s = AM = f_2(t)$, задано в табл. К4. Додатний напрямок відліку від точки A до точки D (на всіх схемах точка M показана в положенні, при якому $s = AM$ має додатне значення).

Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу t_1 = 1 с.

Зауваження. *Задача К4 – на складний рух точки. При її розв'язанні рух точки відносно пластинки вважати відносним, а обертальний рух самої пластинки – переносним і скористатись теоремами про додавання*

швидкостей та прискорень. Перш ніж виконувати розрахунки, слід за умовою задачі визначити, де знаходиться точка M на пластинці в момент часу t_1 = 1 с і показати точку саме в цьому положенні (*а не в довільному, яке показано на схемах в умові задачі*).

У випадках, які належать схемам на рис. К4.4, К4.5, при розв'язанні задачі не підставляти чисельного значення доти, поки не буде визначене положення точки в момент часу t_1 = 1 с і кут між радіусами *CM* і *CA* в цей момент.

Таблиця К4

Номер умови	Для усіх схем $\varphi = f_1(t)$	Для рис. К4.1 – К4.3		Для рис. К4.4, К4.5	
		a, см	$s = AM = f_2(t)$	*h*	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	*R*	$\pi R\cdot(4t^2 - 2t^3)/3$
1	$2t^2 - 8t$	16	$40(4t - t^3) - 36$	*4R/3*	$\pi R\cdot(3t^2 - t^3)/2$
2	$6t^3 - 9t^2$	10	$20(t^2 - t) + 40$	*R*	$\pi R\cdot(4t^2 - 2)/3$
3	$2t^2 - 4t^3$	16	$60(t^4 - t^3) + 20$	*R*	$\pi R\cdot(4t - 2t^3)/3$
4	$10t - 2t^3$	8	$40(2t^2 - t^3) - 30$	*R*	$\pi R\cdot(3t^2 - 2t^3)/6$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2) + 40$	*R*	$\pi R\cdot(2t^2 - t)/4$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(2t^2 - t) + 32$	*3R/4*	$\pi R\cdot(t^3 - 2t^2)/3$
7	$12t - 2t^2$	8	$30(4t - t^3) + 24$	*R*	$\pi R\cdot(t^2 - 2t)/6$
8	$2t^3 - 10t$	10	$50(2t^2 - t) - 20$	*R*	$\pi R\cdot(3t^2 - t)/3$
9	$6t^2 - 3t$	20	$40(t - t^3) - 40$	*4R /3*	$\pi R\cdot(t - 2t^2)/2$

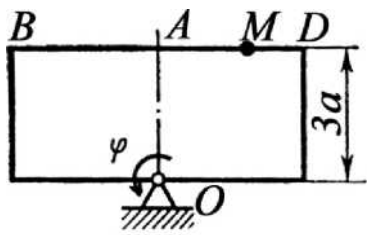


Рис. К4.1

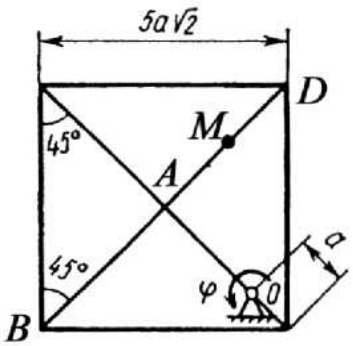


Рис. К4.2

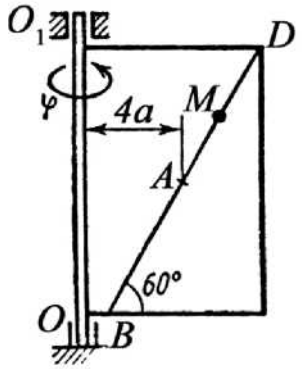


Рис. К4.3

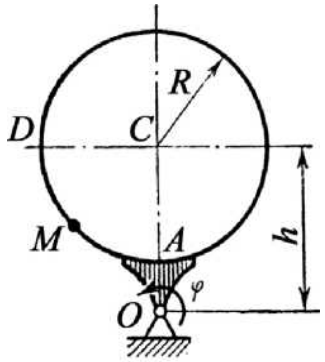


Рис. К4.4

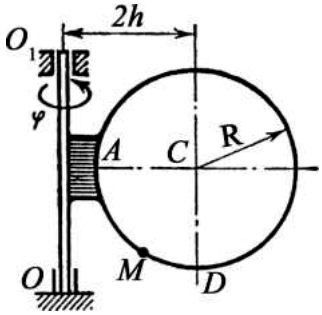


Рис. К4.5

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА

3.1. Динаміка матеріальної точки

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчаються механічні рухи тіл в залежності від сил, під впливом яких відбувається цей рух.

Динаміка – це найбільш складний і важливий розділ теоретичної механіки. Якщо у *статиці* вивчаються умови рівноваги твердих тіл без урахування руху, в *кінематиці,* навпаки, вивчається рух тіл без урахування сил, що викликають цей рух, то в *динаміці* розглядаються і рух та причини, що викликали цей рух.

З позицій дидактики динаміку зручно поділити на динаміку матеріальних точок і динаміку системи матеріальних точок.

Матеріальною точкою називається тіло, розмірами якого під час розв'язування даної задачі нехтують.

Матеріальна точка називається *вільною,* якщо на її рух не накладено ніяких обмежень (в'язей).

Матеріальна точка називається *невільною* (*зв'язаною*), якщо на неї накладено в'язі, які обмежують її рух.

Інертністю тіла називається властивість тіла спричиняти опір зміні швидкості свого руху під впливом прикладених сил.

Закони механіки встановлені в передбаченні, що механічні рухи відбуваються в інерціальній системі координат.

Інерціальною системою відліку називається така система, відносно до якої будь-яка матеріальна точка під впливом взаємно зрівноважених сил рухається прямолінійно та рівномірно. Деякі інерціальні системи розглядають як нерухомі.

Безумовно в природі, де рухаються і взаємодіють матеріальні тіла, нерухомих осей взагалі не існує, але в залежності від вимог, які подаються до результатів розрахунків, можна й інші координатні системи приблизно вважати „нерухомими". Так, при розв'язанні багатьох технічних задач координатні осі, які зв'язують з Землею, можна вважати „нерухомими".

Динаміка базується на чотирьох законах Галілея-Ньютона.

Перший закон (закон інерції). Будь-яке тіло продовжує триматися в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки прикладені сили не спонукають його змінити цей стан.

Другий закон (основний закон динаміки). Добуток маси точки на

прискорення, яке вона отримує під впливом прикладеної сили, дорівнює за модулем цій силі, а напрямок прискорення збігається з напрямком сили.

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} .$$

Масою тіла називається величина, яка визначає міру його інертності та залежить від кількості речовини даного тіла.

Маса тіла взагалі змінна величина. Згідно з формулою Ейнштейна-Лоренца маса

$$m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2} ,$$

де m_0 – маса тіла у стані спокою; v – швидкість, з якою рухається тіло; c – швидкість світла.

Якщо $v << c$, то $m \approx m_0$ = const. Тому в класичній механіці або в механіці „малих” швидкостей масу матеріальних тіл вважають сталою величиною.

Поняття „маси” вперше введене Ньютоном (до нього розглядалася тільки вага тіла).

Рівняння $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ виражає *основний закон динаміки, який встановлює залежність між силою та прискоренням.*

На кожне тіло, що перебуває близько до земної поверхні, діє сила тяжіння величиною P. Враховуючи, що під дією сили P кожне тіло у вільному падінні має одне і те саме прискорення g, яке називають *прискоренням вільного падіння,* то згідно з рівнянням $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ матимемо:

$$P = m g \text{ або } m = P / g .$$

Отримали різні форми зв’язку маси і сили тяжіння (ваги) точки (тіла).

Закон третій (закон дії та протидії). Два тіла діють одне на одне з силами, які рівні за модулем і спрямовані за однією прямою в протилежні боки

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} .$$

Четвертий закон (закон незалежності дії сил). Якщо на матеріальну точку діє декілька сил і дія кожної сили не залежить від дії інших сил, то кожна з них дає точці таке прискорення, яке б точка мала при дії тільки однієї цієї сили. Отже, під впливом декількох сил $\vec{F_t}$ точка отримує прискорення $\vec{a}$ таке, яке б вона отримала під впливом їх рівнодійної $\vec{R} = \sum_{t=1}^{n} \vec{F_t}$.

Тому маємо

$$m\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{R}=\sum_{t=1}^{n}\overrightarrow{F_t},$$

у проекціях на координатні вісі

$$m\cdot a_x=\sum_{t=1}^{n}F_{tx};\quad m\cdot a_y=\sum_{t=1}^{n}F_{ty};\quad m\cdot a_z=\sum_{t=1}^{n}F_{tz}.$$

3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Якщо спроектувати основне рівняння динаміки на осі декартової системи координат, можна отримати диференціальні рівняння руху матеріальної точки у координатному вигляді:

$$m\ddot{x}=\sum_k F_{kx};\quad m\ddot{y}=\sum_k F_{ky};\quad m\ddot{z}=\sum_k F_{kz},$$

де $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$; $\ddot{y}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$; $\ddot{z}=\dfrac{d^2z}{dt^2}$ – проекції прискорення; F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції k-ої сили на відповідні осі координат.

У випадку невільної точки в правих частинах цих рівнянь до діючих на точку сил додаються реакції в'язей.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в природній системі координат запишуться у такому вигляді:

$$m\frac{dV}{dt}=\sum_k F_{k\tau};\quad m\frac{V^2}{\rho}=\sum_k F_{kn};\quad 0=\sum_k F_{kb},$$

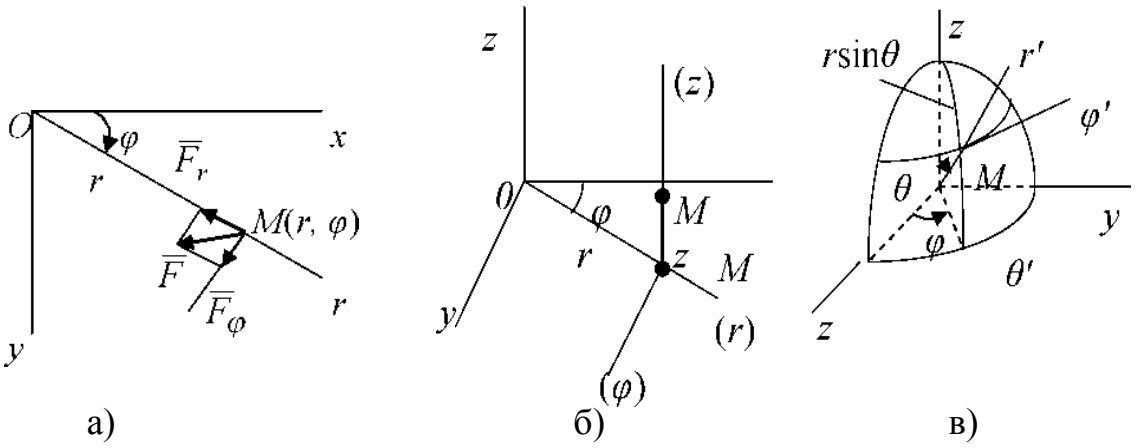
де V – швидкість точки, $F_{k\tau}$, F_{kn}, F_{kb} – проекції сили F_k на природні осі: дотичну, нормаль і бінормаль.

Записані диференціальні рівняння називаються *Ейлеревими або природними рівняннями руху матеріальної точки.*

Диференціальні рівняння плоского руху матеріальної точки в *полярних координатах* мають вигляд (рис. 67, а):

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}\right)=\sum_k F_{kr};\quad \frac{m}{r}\cdot\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\right)}{dt}=\sum_k F_{k\varphi},$$

де r – полярний радіус точки; φ – полярний кут .



а) б) в)

Рис. 67

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в циліндричних координатах (рис. 67, б) записуються у виді:

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}\right)=\sum_k F_{kr};\quad \frac{m}{r}\cdot\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\right)}{dt}=\sum_k F_{k\varphi};\, m\ddot{z}=\sum_k F_{kz}.$$

Такими рівняннями зручно користуватися у випадках, коли рух точки пов'язаний з осьовою симетрією: в основному положення точки і відповідної площини перерізу визначається координатою z, на площині – полярними координатами r і φ .

В сферичній системі координат (r,φ,θ) диференціальні рівняння руху матеріальної точки (рис. 67,в) мають вигляд:

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta-r\dot{\theta}^2\right)=\sum_k F_{kr};$$

$$\frac{m}{r\sin\theta}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right)=\sum_k F_{k\varphi};$$

$$\frac{m}{r}\cdot\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cdot\cos\theta\right]=\sum_k F_{k\theta}.$$

За допомогою наведених вище диференціальних рівнянь руху точки можна розв’язувати задачі динаміки, які умовно можна розділити на дві групи – дві основні задачі динаміки точки.

3.3. Перша задача динаміки точки

До *першої (прямої) задачі* динаміки належать задачі, в яких по заданому руху точки слід визначити рівнодійну всіх сил, що діють на точку (в тому числі й реакції в'язей, якщо точка не вільна). Розв'язання цієї задачі зводиться до визначення прискорень, тобто до диференціювання за часом заданих рівнянь руху точки.

Ці задачі умовно можна розділити на два основних типи в залежності від траєкторії руху матеріальної точки:

а) задачі, в яких розглядається прямолінійний рух точки;

б) задачі, в яких розглядається криволінійний рух точки.

Задача 1. Визначити модуль рівнодіючої сили, яка прикладена до тіла маси m = 2 кг у момент часу t_1 = 3 с. Тіло рухається прямолінійно уздовж Ox за законом $x = 0{,}05t^3$ (м).

Розв'язання

Маємо першу задачу динаміки точки – визначення сил при заданому руху. З рівняння руху вільної точки, яка рухається тільки вздовж Ox:

$$m a_x = \sum F_{kx} ,$$

де прискорення тіла $a_x = 0{,}05\cdot 3\cdot 2\cdot t$ в момент часу t_1 = 3 с дорівнює a_{x1}= 0,9 м/с ; після підстановки знаходиться величина рівнодіючої

$$R_x = \sum F_{kx} = 2\cdot 0{,}05\cdot 3\cdot 2\cdot 3 = 1{,}8 \text{ Н}.$$

Відповідь: R_x = 1,8 Н – модуль рівнодіючої сили.

3.4. Друга (обернена) задача динаміки точки

Друга задача динаміки полягає у визначенні руху точки за заданими силами. На матеріальну точку масою m діють деякі сили і треба визначити закон руху точки.

Це можна зробити, скориставшись основним рівнянням динаміки у виді

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

оскільки прискорення $$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} .$$

У проекціях на координатні осі переходять до запису

$$m\ddot{x}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\,;\,m\ddot{y}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\,;\,m\ddot{z}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}\quad,$$

тобто системи диференціальних рівнянь другого порядку. Ці рівняння називаються диференціальними рівняннями руху матеріальної точки.

Загальний розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь має вигляд:

$$x = x\,(\,t,\ C_1,\ C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$y = y\,(\,t,\ C_1,\ C_2\,, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$z = z\,(\,t,\ C_1,\ C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).$$

Для визначення довільних сталих інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 необхідно знати початкові умови руху точки, а саме: початкове положення точки та її початкову швидкість.

При $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ (положення точки);

$\dot{x} = \dot{x}_0$; $\dot{y} = \dot{y}_0$; $\dot{z} = \dot{z}_0$ (початкова швидкість точки). Підставляючи ці умови у загальне рішення, одержимо такі
рівняння (взагалі шість)

$$x_0 = x\,(\,t_0\,,\ C_1\,,\ C_2\,, C_3\,, C_4\,, C_5\,, C_6) \text{ і } \dot{x}_0 = \dot{x}\left(t_0\,, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);$$

$$y_0 = y(\,t_0\,,\ C_1\,,\ C_2\,, C_3\,, C_4\,, C_5\,, C_6) \text{ і } \dot{y}_0 = \dot{y}\left(t_0\,, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);$$

$$z_0 = z\,(\,t_0\,,\ C_1\,,\ C_2\,, C_3\,, C_4\,, C_5\,, C_6) \text{ і } \dot{z}_0 = \dot{z}\left(t_0\,, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right),$$

із яких визначаються сталі інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6.

У результаті отримаємо конкретний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який і є законом руху точки.

Якщо рух точки відбувається в площині xy, то диференціальні рівняння руху будуть такі:

$$m\ddot{x}=\sum_{k}F_{kx} \text{ і } m\ddot{y}=\sum_{k}F_{ky}\,,$$

а початкові умови запишуться у вигляді:

при $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$.

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно, то, спрямовуючи вісь Ox за траєкторією, отримаємо диференціальне рівняння руху точки у вигляді:

$$m\ddot{x}=\sum_{k}F_{kx}\,.$$

Початкові умови будуть: при $t=t_0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$.

Задача 2. (Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки – *друга задача динаміки*). При розв'язуванні цієї задачі слід дотримуватися такої послідовності:

– вибрати систему координат (додатний напрямок вісі повинен збігатися з напрямком руху тіла);

– показати тіло у вигляді матеріальної точки;

– прикласти до точки сили, які діють на тіло (задані сили і реакції в'язей);

– записати рівняння руху матеріальної точки в проекції на осі декартової системи координат або в проекціях на дотичну, нормаль і бінормаль;

– визначити праві частини цих рівнянь, як алгебраїчні суми проекцій сил на вибрані координатні осі;

– підставити праві частини в рівняння і розв'язати їх, інтегруючи методами, відомими з вищої математики (метод розподілення змінних, метод заміни змінних, інтегрування по частинам і таке інше);

– знайти сталі інтегрування з початкових умов задачі (заданих значень переміщення і швидкості при $t = 0$) і записати рівняння руху в остаточному вигляді.

В нашому випадку розв'язок задачі розбивається на дві частини. Спочатку розглядається рух тіла на ділянці *AB*; складаються рівняння руху, які інтегруються методом розподілення змінних з врахуванням початкових умов задачі, і визначається швидкість, яке буде мати тіло в кінці ділянки (в точці *B*). Потім, приймаючи цю швидкість за початкову, розглядається рух тіла на ділянці *BC*. Після складання диференціальних рівнянь руху тіла на цій ділянці і їх інтегрування з врахуванням початкових умов знаходиться закон руху тіла на ділянці *BC*.

Умова задачі. Вантаж *D* масою $m = 3$ кг, отримавши в точці *A* початкову швидкість V_0, рухається вздовж вигнутої труби *ABC*, яка розташована у вертикальній площині; ділянка *AB* труби розташована горизонтально, а ділянка *BC* нахилена до горизонту під кутом 45° (рис. 68).

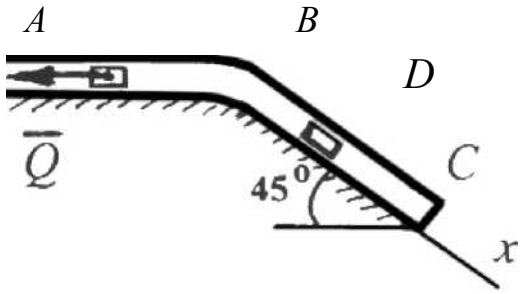


Рис. 68

Розв'язання

Розглянемо рух тіла на ділянці *AB*. Вибираємо осі координат Ax_1y_1, вантаж зображаємо матеріальною точкою і прикладаємо до неї задані сили P_1, Q, R і реакцію труби N_1 (рис. 69).

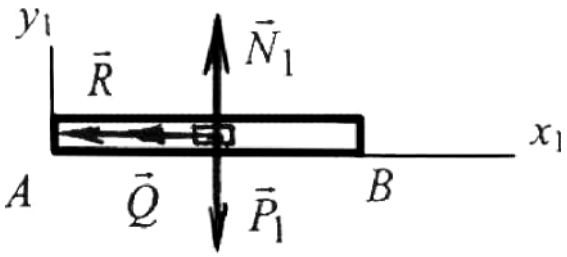


Рис. 69

Рівняння руху точки на *AB* записується у вигляді

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{ix1}; \quad m\ddot{x}_1 = -Q - R = -Q - 0{,}6 \cdot V_{x1}^2 ,$$

де $V = V_{x1}$.

Тоді

$$\ddot{x}_1 = -\frac{Q}{m} - \frac{0{,}6}{m} \cdot V_{x1}^2 = -1{,}33 - 0{,}2 \cdot V_{x1}^2 = -0{,}2 \cdot \left(V_{x1}^2 + 6{,}65\right). \qquad (73)$$

Оскільки в задачі задається довжина ділянки *AB*, то проекцію прискорення запишемо у вигляді $\ddot{x}_1 = \frac{V_{x1}\, d V_{x1}}{d x_1}$. Тоді рівняння (73) набуває вигляду:

$$\frac{V_{x1}\, d V_{x1}}{d x_1} = -0{,}2 \cdot \left(V_{x1}^2 + 6{,}65\right).$$

Розв'язуємо це рівняння методом розподілення змінних

$$\frac{V_{x1}\, d V_{x1}}{V_{x1}^2 + 6{,}65} = -0{,}2 \cdot d x_1 \quad \text{або} \quad \frac{2 \cdot V_{x1}\, d V_{x1}}{V_{x1}^2 + 6{,}65} = -0{,}4 \cdot d x_1 \ .$$

Після інтегрування одержимо

$$\ln\left(V_{x1}^2 + 6{,}65\right) = -0{,}4 \cdot dx_1 + C_1 \ . \qquad (74)$$

Сталу інтегрування C_1 визначаємо з початкових умов задачі (коли $t = 0$ $x_1 = 0$ $V_{x1} = V_0$), які підставляємо в рівняння (74):

$$\ln(V_0^2 + 6{,}65) = -0{,}4 \cdot 0 + C_1 \text{ звідки } C_1 = \ln(V_0^2 + 6{,}65).$$

З врахуванням значення C_1 рівняння (154) набуває вигляду

$$\ln(V_{x1}^2 + 6{,}65) = -0{,}4 \cdot x_1 + \ln(V_0^2 + 6{,}65).$$

Зробивши нескладні перетворення

$$\ln (V_{x1}^2 + 6{,}65) - \ln (V_0^2 + 6{,}65) = -0{,}4 \cdot x_1 ,$$

знаходимо з цього виразу V_{x1}

$$V_{x1} = \sqrt{(V_0^2 + 6{,}65) \cdot e^{-0{,}4l} - 6{,}65} . \qquad (75)$$

Коли тіло попадає в точку B, $t_1 = \tau$, $x_1 = l$, $V_{x1} = V_B$. Підставляючи ці значення у вираз (75), одержимо:

$$V_B = \sqrt{(V_0^2 + 6{,}65) \cdot e^{-0{,}4l} - 6{,}65} =$$

$$= \sqrt{(20^2 + 6{,}65) \cdot e^{-1{,}6} - 6{,}65} = 8{,}686 \text{ м/с}.$$

Приймаючи цю швидкість за початкову, розглянемо рух тіла на ділянці BC. Згідно з умовою задачі на цій ділянці на тіло, яке вважаємо матеріальною точкою, діють сили: P і F, проекція якої на вісь Bx дорівнює $-F_x = 6\cos(2t)$ Н (рис. 70).

Рух тіла на цій ділянці описується рівнянням

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} ,$$

де $\Sigma F_{ix} = F_x + P \sin 45° = 6\cos(2t) + mg \sin 45°$.

Тоді $$m\ddot{x} = 6\cos(2t) + mg\sin 45^\circ ,$$

або

$$\ddot{x} = \frac{6}{m} \cos(2t) + g\sin 45° = 2\cos(2t) + 6{,}86. \qquad (76)$$

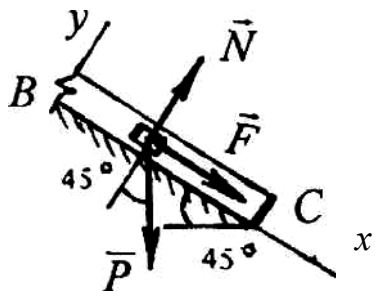


Рис. 70

Розв'язуємо одержане рівняння. Оскільки права частина рівняння (76) є функцією часу, то $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$ і рівняння (76) набуває вигляду

$$\frac{dV_x}{dt} = 2\cos(2t) + 6{,}86 \text{ або } dV_x = 2\cos(2t)dt + 6{,}86dt .$$

Після інтегрування рівняння отримаємо

$$V_x = \sin(2t) + 6{,}86t + C_2 . \qquad (77)$$

Оскільки $V_x = \frac{dx}{dt}$, то від (77) приходимо до рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \sin(2t) + 6{,}86t + C_2 \quad \text{або} \quad dx = \sin(2t)dt + 6{,}86dt + C_2\,dt\,.$$

Після інтегрування обох частин останнього отриманого виразу, матимемо

$$x = -0{,}5\cos(2t) + 3{,}43t^2 + C_2 t + C_3\ . \qquad (78)$$

Сталі інтегрування C_2 і C_3 визначаємо з початкових умов задачі (при $t = 0$, $x = 0$, $V_x = V_B$), які підставляємо в рівняння (77) і (78):

$V_B = 0 + 6{,}86\cdot 0 + C_2$ звідки $C_2 = V_B = 8{,}68$ м/с,

$0 = -0{,}5\cdot 1 + 3{,}43\cdot 0 + C_2\cdot 0 + C_3$ звідки $C_3 = 0{,}5$ м.

Підставляючи одержані значення сталих інтегрування в рівняння (78), остаточно матимемо

$$x = -0{,}5\cos(2t) + 3{,}43t^2 + 8{,}68t + 0{,}5 =$$
$$= 0{,}5\cdot[1 - \cos(2t)] + 3{,}43\cdot t^2 + 8{,}68\cdot t = \sin^2 t + 3{,}43\cdot(t + 2{,}53)\cdot t, \text{ м.}$$

Таким чином рух тіла на ділянці BC здійснюється за законом

$$x = \sin^2 t + 3{,}43\cdot(t + 2{,}53)\cdot t, \text{ м.}$$

Відповідь: $x = \sin^2 t + 3{,}43\cdot(t + 2{,}53)\cdot t$, м.

3.5. Коливальний рух матеріальної точки

Коливаннями у механіці та техніці називається рух, який має певний ступінь (цикл) повторюваності.

З коливальним рухом ми зустрічаємось в різних галузях науки і техніки. Тому теорія малих коливань, яка розроблена досить детально, має велике значення.

Незважаючи на різну природу виникнення, цей рух підпорядковується одним і тим самим законам і описується одними й тими ж рівняннями. В залежності від характеру сил, що сприяють коливанням точки, розрізняють коливання вільні (або власні), згасаючі та вимушені.

Розглянемо ці типи коливань.

У задачах, які ми розглянемо, на матеріальну точку буде діяти відновлююча сила, сила збурення та сила опору.

Відновлюючою силою F називається сила, що намагається повернути матеріальну точку до положення рівноваги.

Силою опору R називається сила, що намагається уповільнити процес руху. Ця сила залежить від швидкості точки $R = R(x\square)$.

Силою збурення Q(t) називається сила, що викликає вимушені коливання.

Вільні коливання

Нехай матеріальна точка масою m рухається прямолінійно вдовж Ox (рис. 71) під впливом відновлюючої сили, яка по модулю дорівнює (закон Гука) $F = cx$, де c – постійний коефіцієнт пропорційності (жорсткість пружини), x – відхилення.

Диференціальне рівняння руху точки у проекції на вісь Ox

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx,$$

де x – абсциса точки; m – маса точки.

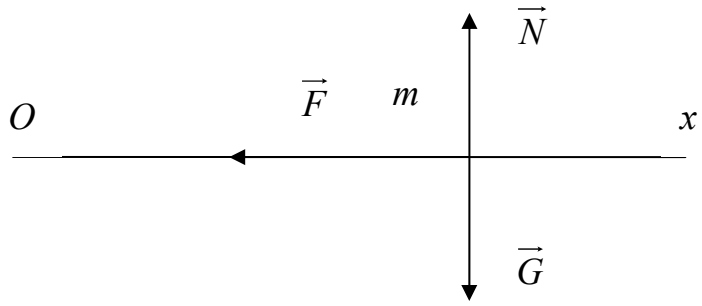


Рис. 71

Перепишемо рівняння у виді

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\cdot x = 0,$$

позначивши $\frac{c}{m} = k^2$, отримаємо $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ або $\ddot{x} + k^2x = 0$.

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння $\lambda^2 + k^2 = 0$ має тільки уявні корені $\lambda = \pm ki$. Загальний інтеграл цього рівняння буде записаний у вигляді $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Для їх визначення треба знати початкові умови:
при $t = 0$, $x = x_0$, $V = V_0$. Враховуючи їх, знаходимо C_1 і C_2:

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{V_0}{k}.$$

Тоді загальний інтеграл $x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt$.

Якщо у рівнянні $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ покласти $C_1 = A \sin\alpha$, $C_2 = A \cos\alpha$, де A та α нові сталі, то $x = A \sin(kt+\alpha)$.

Сталі A та α визначаються за формулами:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{k x_0}{V_0}.$$

Величина A називається *амплітудою коливання* і вона показує найбільше відхилення точки від положення рівноваги.

Величина$(kt + \alpha)$ називається *фазою коливання*,
де α – початкова фаза, k – колова частота коливань, яка дорівнює числу коливань за 2π секунд.

Частота k не залежить від початкових умов, а визначається лише параметрами системи (маса та жорсткість пружини). Тому її називають *власною частотою*.

Періодом коливання T називається відрізок часу, за який відбувається одне повне коливання.

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Таким чином, період, як ми бачимо, також не залежить від початкових умов і амплітуди.

Згасаючі коливання

Розглянемо, як впливає на вільні коливання матеріальної точки опір середовища, вважаючи, що сила опору пропорційна першій степені швидкості $R = -\mu V = -\mu \dot{x}$.

Розглянемо рух матеріальної точки M вздовж осі x (рис. 72) під дією відновлюючої сили $F_x = -cx$ та сили опору $R_x = -\mu \dot{x}$.

Запишемо диференціальне рівняння руху, в цьому випадку

$$m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x}.$$

Позначивши через $2n = \frac{\mu}{m}$ та $k^2 = \frac{c}{m}$, отримаємо:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0.$$

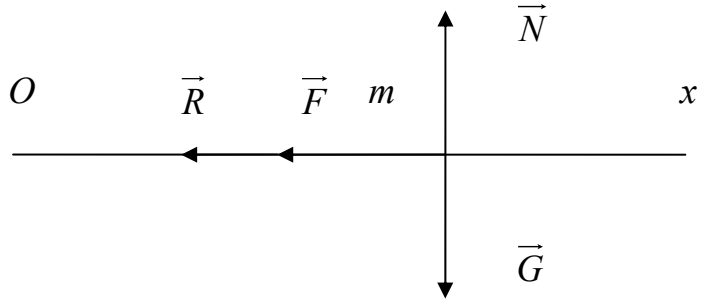


Рис. 72

Одержане диференціальне рівняння описує вільні коливання матеріальної точки за наявності сили опору, яка пропорційна першій ступені швидкості. Це рівняння є однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Щоб знайти його розв'язок, складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, корені якого будуть:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,.$$

Якщо сили опору в порівнянні з відновлюючою силою малі, тобто $k > n$, то корені $\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1$ характеристичного рівняння будуть комплексними, де $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

У цьому випадку розв'язок диференціального рівняння запишеться у вигляді $x = e^{-nt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t)$.

Вважаючи, що $C_1 = A \cos \alpha$, $C_2 = A \sin \alpha$, де A і α – нові сталі, одержимо $x = Ae^{-nt}(\sin kt + \alpha)$. Значення довільних сталих A і α визначаються з початкових умов.

Коливання, які відбуваються за законом $x = Ae^{-nt}(\sin kt + \alpha)$, називаються *згасаючими*.

Значення x з часом спадає. Графік цих коливань має вигляд згасаючої хвилі (рис. 73).

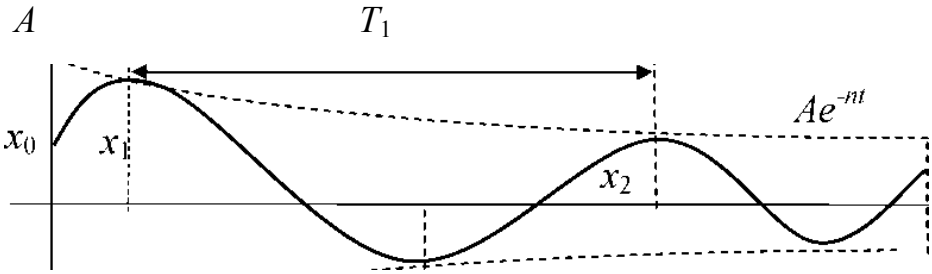


Рис. 73

Періодом згасаючих коливань *називається проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання*

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Наявність сил опору дещо збільшує період коливань порівняно до системи, в якій сили опору відсутні. Амплітуда згасаючих коливань утворює спадну геометричну прогресію, знаменник якої називається *декрементом* спадання та позначається літерою η

$$\eta = \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-nT}.$$

Модуль натурального логарифма цієї величини $A = nT$ називається логарифмічним декрементом.

Вимушені коливання матеріальної точки

Вимушеними коливаннями матеріальної точки називаються коливання, які викликаються силовим або кінематичним збудженням.

Кінематичним збудженням називається збудження системи за рахунок передачі будь-яким її точкам заданих рухів, незалежних від стану системи. *Силове збудження* – збудження, яке обумовлене дією збурюючих сил або моментів сил. Найчастіше мають справу з силовим збудженням, коли сила, що діє на механічну систему, змінюється за будь-яким законом.

Найважливішим є випадок, коли збурююча сила Q змінюється за гармонічним законом. Проектуючи її на вісь x, напрямлену за напрямком руху точки, одержимо

$$Q_x = H\sin(pt + \delta),$$

де H – амплітуда збурюючої сили; p – частота зміни збурюючої сили; $(pt + \delta)$ – фаза зміни збурюючої сили; δ – початкова фаза збурюючої сили.

Період m зміни збурюючої сили Q визначається за її частотою:

$$\tau = \frac{2\pi}{p}.$$

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки M під дією відновлюючої сили F і збурюючої сили Q, що змінюється за гармонічним законом (рис. 74).

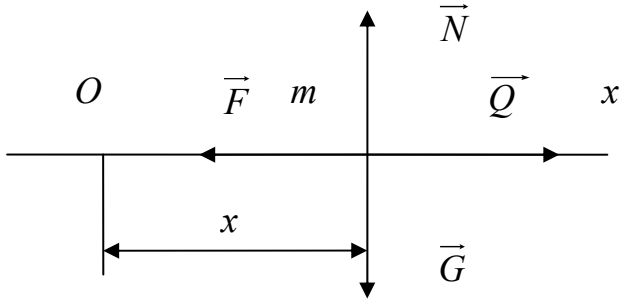


Рис. 74

Направимо вісь Ox за прямолінійною траєкторією точки M, а початок координат помістимо в положення спокою точки M, за відсутності сили збурення.

У цьому випадку диференціальне рівняння руху точки запишеться у вигляді

$$m\ddot{x} = -F + Q = -cx + H\sin(pt + \delta)$$

або $\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt + \delta)$.

Позначаючи $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{H}{m} = h$, одержимо $\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta)$.

Це диференціальне рівняння описує вимушені коливання матеріальної точки при відсутності сил опору середовища.

Загальний розв'язок цього неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами складається із загального розв'язку x_1 відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР II)

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

і частинного розв'язку x_2 даного неоднорідного рівняння, тобто

$$x = x_1 + x_2.$$

ЛОДР II має розв'язок

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Відповідно до виду функції правої частини частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta)$$

шукаємо при $p \neq k$ у вигляді

$$x_2 = B \sin(pt + \delta).$$

Знайшовши $\ddot{x}_2$ і підставляючи вирази $\ddot{x}_2$ і x_2 у неоднорідне диференціальне рівняння, знаходимо

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} \ .$$

Таким чином, розв'язок x_2 запишеться у вигляді:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta),$$

а загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння набуває вигляду:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

Якщо вважати, що $C_1 = A \sin \alpha$, $C_2 = A \cos \alpha$, то одержимо

$$x = A\sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

Перший член правої частини цього виразу описує вільні коливання, а другий член – вимушені коливання точки.

Таким чином, при одночасній дії відновлюючої і збурюючої сил матеріальна точка здійснює складний коливальний рух, що є результатом накладення вільних і вимушених коливань точки.

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаються за початковими умовами руху. Оскільки окремий розв'язок x_2 не містить сталих інтегрування, то вимушені коливання не залежать від початкових умов задачі.

Якщо частота p менше частоти k, тобто $(p < k)$, то вимушені коливання називаються *вимушеними коливаннями низької частоти.*

Якщо p більше k, тобто $(p > k)$, то коливання називаються *вимушеними коливаннями високої частоти.*

Амплітуда вимушених коливань $B = \dfrac{h}{k^2 - p^2}$.

Коефіцієнтом динамічності називається величина, яка дорівнює

$$\eta = \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \left(1 - p^2 / k^2\right)^{-1} \ .$$

Явищем резонансу називається явище, при якому частоти вимушених і вільних коливань точки збігаються, тобто $p = k$.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta)$$

в цьому випадку має вигляд:

$$x = A\sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2p}\cos(pt + \delta).$$

Амплітуда вимушених коливань у випадку резонансу необмежено зростає за рахунок множника t.

Якщо на матеріальну точку діють три сили з величинами: відновлююча F, збурююча Q, яка змінюється за гармонічним законом, і сила опору $R = -\mu V$, то диференціальне рівняння руху в проекції на вісь x запишеться у вигляді:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H\sin(pt + \delta)$$

або

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta),$$

де

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд:

$$x = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha\right) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt + \delta + \gamma)$$

при $n < k$.

Амплітуда вимушених коливань при наявності сил тертя

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}.$$

Звідси випливає, що більшій величині опору середовища, тобто більшому значенню коефіцієнта згасання n, відповідає менша величина амплітуди вимушених коливань.

Задача 3 – на дослідження коливального руху матеріальної точки. Розв'язання цієї задачі рекомендується виконувати в такій послідовності:

1) вибрати систему відліку, взявши початок відліку в положенні статичної рівноваги матеріальної точки;
2) записати початкові умови руху точки;
3) при складанні диференціального рівняння треба зобразити матеріальну точку в проміжному положенні, яке відповідає її додатній координаті, припускаючи, що точка переміщуються в бік зростання цієї координати;
4) зобразити на рисунку сили, прикладені до матеріальної точки. Застосовуючи принцип звільнення від в'язей, додати сили реакцій в'язей, що діють на точку;
5) скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки в

проекції на відповідну вісь;

6) після складання диференціального рівняння руху розглянути умови статичної рівноваги точки, яка коливається.

Використавши цю умову, часто вдається скоротити ряд сталих доданків в правій частині диференціального рівняння;

7) інтегруючи одержане диференціальне рівняння руху і використовуючи початкові умови, визначити сталі інтегрування.

Розв'язуючи задачу про вільні коливання матеріальної точки, можна довести розв'язок до результату в загальному вигляді з параметрами, а потім підставити числові дані.

Розглядаючи задачу про згасаючі коливання, треба підставити числові дані в складене диференціальне рівняння і визначити коефіцієнти n і k через те, що залежно від їх співвідношення розв'язок записується у вигляді:

коли $n < k$ $\quad x = e^{-nt}(A_1 \cos k_1 t + A_2 \sin k_1 t)$;

коли $n > k$ $\quad x = e^{-nt}(A_1 e^{rt} + A_2 e^{-rt})$;

коли $n = k$ $\quad x = e^{-nt}(A_1 \cdot t + A_2)$,

де A_1, A_2, – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов задачі.

Розв'язуючи задачу про вимушені коливання матеріальної точки, потрібно визначити числові значення коефіцієнтів диференціального рівняння тому, що вигляд частинного розв'язку залежить від співвідношення між коловими частотами вимушених і вільних коливань, тобто між p і k.

Умова задачі. До системи пружин, коефіцієнти жорсткості яких $C_1 = 8$ Н·см$^{-1}$, $C_2 = 4$ Н·см$^{-1}$, $C_3 = 10$ Н·см$^{-1}$, $C_4 = 14$ Н·см$^{-1}$, прикріплено вантаж масою $m_1 = 6$ кг (рис. 75). Точки B і D кріплення пружин розташовані від осей пружин на відстанях $a_1 / b_1 = C_2 / C_1$ і $a_2 / b_2 = C_3 / C_4$. У деякий момент часу до вантажу $m_1 = 6$ кг прикріплюють вантаж 2 масою $m_2 = 2$ кг і одночасно надають системі вантажів швидкість $V_0 = 0{,}8$ м/с. Знайти закон руху системи вантажів, якщо на неї діє сила опору середовища, яка змінюється за законом $R = \mu \cdot V$, де $\mu = 96$ Н·м$^{-1}$с.

Розв'язання

Замінюємо систему пружин однією, жорсткість якої визначаємо за формули

$$C = C_{ek} = \frac{(C_1 + C_2)\cdot(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = \frac{(8+4)\cdot(10+14)}{8+4+10+14} = 8 \text{ Н/см}$$

або 800 Н/м.

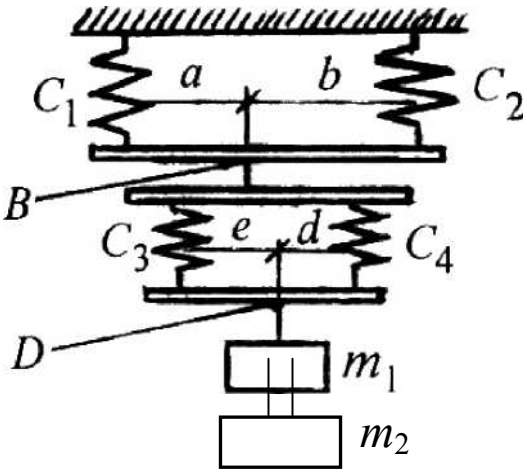


Рис. 75

Будуємо розрахункову схему (рис. 76), показуючи на ній пружину в недеформованому стані (рис. 76, а), в положенні статичної рівноваги (рис. 76, б) з вантажем 1, в положенні статичної рівноваги (рис. 76, в) з двома вантажами і у відхиленому стані по відношенню до положення рівноваги двох вантажів на величину x (рис. 76, г). Загальна деформація Δ пружини при цьому дорівнює сумі деформацій від кожного з вантажів ($\delta_{cm} = \delta_{cm1} + \delta_{cm2}$) та відхиленню x, тобто

$$\Delta = x + \delta_{cm} = x + \delta_{cm1} + \delta_{cm2}.$$

Система вантажів 1 і 2 показана на рис. 76, д у вигляді точки. При цьому вісь Ox напрямлена вертикально вниз в бік зростання координати x. В положенні статичної рівноваги двох вантажів у порівнянні з початковим положенням, коли був один вантаж (див. рис. 76 б,в), деформація пружини збільшилась на величину $8_{cm\,2}$. Величина цієї деформації дорівнює

$$\delta_{cm2} = \frac{m_2 g}{C} = \frac{2 \cdot 9{,}8}{800} = 0{,}0245\ м.$$

Згідно з умовою задачі на систему вантажів діють:

сила ваги

$$G = G_1 + G_2 = (m_1 + m_2)\, g = mg,$$

де $m = m_1 + m_2 = 6 + 2 = 8$ кг,

сила пружності пружини

$$F = C \cdot \Delta = C(x + \delta_{cm}),$$

де $$\delta_{cm} = \delta_{cm1} + \delta_{cm2},$$

та сила опору середовища

$$R = \mu \cdot \dot{x}.$$

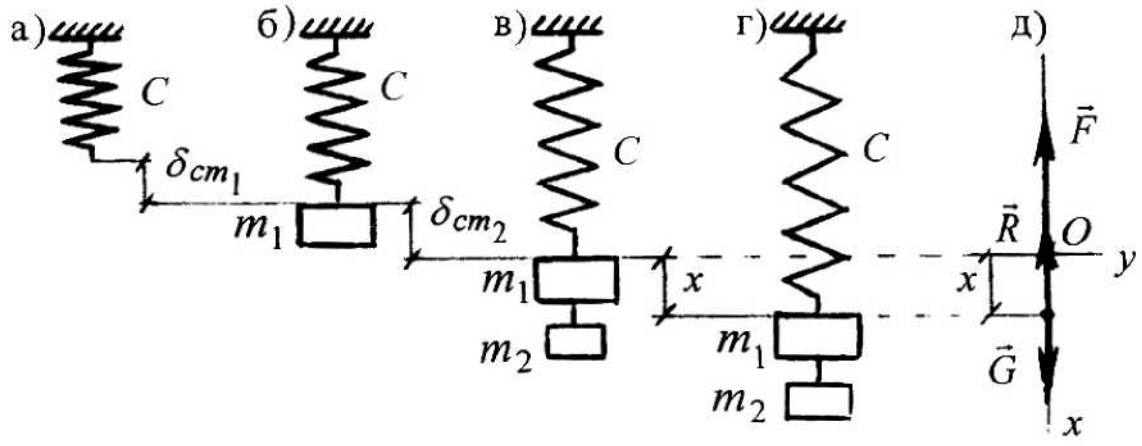


Рис. 76

На підставі основного рівняння динаміки, яке випливає з другого закону Ньютона, диференціальне рівняння руху вантажів у проекціях на координатну вісь *Ox* має вигляд

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} \ ,$$

де $$\sum F_{ix} = G - F - R = mg - C\left(x + \delta_{cm}\right) - \mu\dot{x} = -Cx - \mu\dot{x}\,.$$

Тут mg і $C\,\delta_{cm}$ взаємно знищуються, тому що в положенні статичної рівноваги двох вантажів сила пружності пружини врівноважується вагою вантажів.

Тоді отримуємо

$$m\ddot{x} = -Cx - \mu\dot{x} \text{ або } m\ddot{x} + \mu\dot{x} + Cx = 0\,.$$

Поділивши ліву й праву части рівняння на m і зробивши позначення $2n = \mu / m$, $k^2 = C / m$, остаточно матимемо

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0\,. \tag{79}$$

Розв’язок цього рівняння залежить від значень n і k та результатів їх порівняння. Оскільки в нашому випадку

$$n = \frac{\mu}{2m} = \frac{96}{2\cdot 8} = 6\,c^{-1}\,,\ k = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{800}{8}} = 10\,c^{-1},$$

тобто $n < k$ (випадок малих сил опору), то розв’язок рівняння (79) має вигляд

$$x = e^{-nt}\left(A_1 \cos k_1 t + A_2 \sin k_1 t\right), \tag{80}$$

далі визначається швидкість

$$\dot{x} = -n e^{-nt}\left(A_1 \cos k_1 t + A_2 \sin k_1 t\right) + \\ + e^{-nt}\left(-k_1 A_1 \sin k_1 t + k_1 A_2 \cos k_1 t\right), \tag{81}$$

де $$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8c^{-1}\ .$$

Для визначення сталих інтегрування A_1 і A_2 скористуємося початковими умовами задачі, які в нашому випадку будуть такі: при $t = 0$

$$x_0 = -\delta_{cm2} = -0{,}0245 \text{ м},\ \dot{x}_0 = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Підставляючи початкові умови в рівняння (80) і (81), одержимо

$$A_1 = x_0 = -\delta_{cm2} = -0{,}0245 \text{ м},$$

$$A_2 = \frac{x_0 + n A_1}{k_1} = \frac{0{,}8 + 6\cdot(-0{,}0245)}{8} = 0{,}082 \text{ м}.$$

Підставляючи одержані значення сталих інтегрування в рівняння (160), остаточно одержимо

$$x = e^{-6t}(-0{,}0245 \cos 8t + 0{,}082 \sin 8t) \text{ м}.$$

Як видно з одержаного розв'язку, система вантажів буде здійснювати згасаючі коливання з коловою частотою $n = 8$ с$^{-1}$ і періодом

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\cdot 3{,}142}{8} = 0{,}785 \text{ с}.$$

При цьому амплітуда згасаючих коливань

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{(-0{,}0245)^2 + 0{,}082^2} = 0{,}0856 \text{ м}$$

зменшується за кожний період за законом геометричної прогресії, знаменник якої (декремент коливань)

$$\eta = e^{-nT1} = e^{-6\cdot 0{,}785} = 0{,}009.$$

3.6. Динаміка відносного руху точки

Закони динаміки, встановлені Ньютоном, описують рух матеріальної точки відносно так званих „нерухомих осей". Основне рівняння динаміки має вигляд

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k\ ,$$

де m – маса точки, $\vec{a}$ – її прискорення, $\vec{F}_k$ – k-а сила, яка прикладена до точки.

Із кінематики відома теорема Коріоліса, згідно з якою:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K ,$$

де $\vec{a}_a$ – абсолютне прискорення точки,

$\vec{a}_e$ – переносне прискорення точки,

$\vec{a}_r$ – відносне прискорення точки,

$\vec{a}_K$ – прискорення Коріоліса.

Звідси

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_K .$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на *m,* отримаємо:

$$m\vec{a}_r = m\vec{a}_a - m\vec{a}_e - m\vec{a}_K .$$

Позначимо $-m\vec{a}_e = \vec{F}_e^{in}$, $-m\vec{a}_K = \vec{F}_K^{in}$ і назвемо відповідно переносною $\vec{F}_e^{in}$, та коріолісовою $\vec{F}_K^{in}$ силами інерції, оскільки вони мають розмірність сили.

Тоді основний закон динаміки для відносного руху запишеться у вигляді

$$m\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \sum \vec{F}_k + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_K^{in} ,$$

де $\vec{V}_r$ – швидкість точки відносно рухомої системи координат.

Нагадаємо, що $\vec{a}_e$ – це прискорення точки у переносному русі, тобто прискорення тієї точки рухомої системи координат, в якій в даний момент знаходиться точка, яку вивчають; прискорення Коріоліса $\vec{a}_K = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right)$, де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість обертання рухомої системи координат відносно „нерухомої”, $\vec{V}_r$ – відносна швидкість точки.

Таким чином, *диференціальне рівняння відносного руху матеріальної точки має такий же вигляд, як і рівняння руху відносно „нерухомої” системи координат, якщо до активних сил додати переносну та коріолісову сили інерції.*

Якщо рухома система координат здійснює поступальний рух, то коріолісова сила інерції дорівнює нулю $\vec{F}_K^{in} = 0$. В цьому випадку відносний рух описується рівнянням

$$m\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \sum \vec{F}_k + \vec{F}_e^{in} .$$

Якщо переносний рух рухомої системи координат є прямолінійним і рівномірним, то сила інерції $\vec{F}_e^{in}=0$, коріолісова сила інерції $\vec{F}_K^{in}=0$ і рівняння руху матеріальної точки приймає вигляд

$$m\frac{d\vec{V}_r}{d\,t}=\sum\vec{F}_k\,,$$

тобто диференціальне рівняння відносного руху точки не відрізняється від диференціального рівняння руху точки відносно „нерухомої” системи координат.

Отже, „абсолютний” рух матеріальної точки може розглядатися не тільки по відношенню до „нерухомої” системи координат, а й по відношенню до будь-якої системи координат, що рухається прямолінійно і рівномірно відносно нерухомих осей координат.

Системи координат, які рухаються прямолінійно і рівномірно по відношенню до „нерухомої” системи відліку, *називаються інерціальними або галілеєвими системами.*

Звідси випливає *принцип відносності класичної механіки:* ніякі механічні явища, що відбуваються в інерційній системі, не можуть виявити її прямолінійний і рівномірний рух.

Рівняння відносного спокою матеріальної точки записується так:

$$\sum\vec{F}_k+\vec{F}_e^{in}=0\,.$$

3.7. Розв’язання задач на застосування основного закону динаміки відносного руху точки

Задачі динаміки відносного руху матеріальної точки слід розв’язувати, дотримуючись наступного алгоритму:

1. Розкласти „абсолютний” рух на відносний і переносний рухи.

2. Обрати і зобразити на схемі нерухому і рухому системи координат.

3. Встановити характер переносного руху, тобто з’ясувати який рух (поступальний, обертальний, плоский, сферичний чи вільний) здійснює тіло, з яким пов’язана рухома система координат.

4. Зобразити на схемі матеріальну точку та її швидкість в поточному положенні, при цьому рекомендується обрати її з додатними координатами і додатними проекціями швидкості.

5. Прикласти до точки всі діючі на точку активні сили та реакції в'язей.

6. Визначити переносне прискорення $\vec{a}_e$ точки і відповідну йому переносну силу інерції $\vec{F}_e^{in}$.

7. Визначити коріолісове прискорення $\vec{a}_K$ і коріолісову силу інерції $\vec{F}_K^{in}$, використовуючи формулу $\vec{a}_K = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right)$ або по модулю

$$\left|\vec{a}_K\right| = 2\left|\vec{\omega}_e\right| \cdot \left|\vec{V}_r\right| \sin\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right),$$

тоді $\vec{F}_K^{in} = -m\vec{a}_K = -2m\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right)$.

8. Зобразити на схемі переносну і коріолісову силу інерції.

9. Записати диференціальне рівняння відносного руху у векторній формі:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_j + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_K^{in}$$

залежно від умови задачі, яку розв'язують.

10. Записати диференціальне рівняння відносного руху в проекціях на осі координат. Розв'язати отримані рівняння, враховуючи початкові умови.

Задача 4. За заданими рівняннями відносного руху тіла M : $s_r = OM = (3t^2 + 4t)\cdot 10^{-2}$, м і переносного руху тіла $Д$:$\varphi_e = 2t - 0{,}25t^2$, рад (рис. 77) визначити тиск кульки M масою $m = 0{,}1$ кг на стінку каналу і силу тертя ковзання, яка виникає під час руху кульки вздовж каналу, для моменту часу $t_1 = 2$ с. При розв'язанні задачі слід прийняти $\alpha = 30°$.

Розв'язання

Систему рухомих координат $Oxyz$ вибираємо таким чином, щоб вісь Ox була напрямлена уздовж осі каналу OM (рис. 78). Покажемо сили, що діють на кульку. Це сила ваги $\vec{G}$, сила тертя $\vec{F}_{тер}$ та реакція стінки каналу $\vec{N}$, яку можна розкласти на дві складові $\vec{N}_y$ та $\vec{N}_z$.

Умовно прикладаємо до кульки переносну $\vec{F}_e^{in}$ і коріолісову $\vec{F}_K^{in} = \vec{F}_c^{in}$ сили інерції, які напрямлені в бік, протилежний напряму відповідних прискорень.

В нашому випадку тіло $Д$ здійснює обертальний рух відносно нерухомої осі Az_1 тому переносне прискорення кульки складається з

обертального $\vec{a}_e^{об}$ і доцентрового $\vec{a}_e^{доц}$, а прискорення початку рухомої системи координат (точки O) дорівнює нулю.

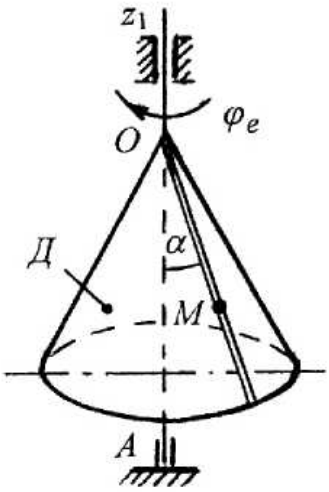


Рис. 77

Тоді остаточно можна записати, що переносне прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{об} + \vec{a}_e^{доц}$, а модулі складових цього прискорення:

$$a_e^{доц} = \omega_e^2 h = \dot{\varphi}_e^2 OM \sin\alpha =$$

$$= (2-0{,}5t)^2 \left(3t^2+4t\right)\cdot 10^{-2} \sin\alpha \quad \text{м/с},$$

$$a_e^{об} = \varepsilon_e h = \ddot{\varphi}_e OM \sin\alpha =$$

$$= -0{,}5\cdot\left(3t^2+4t\right)\cdot 10^{-2} \sin\alpha, \ \text{м/с}^2,$$

де ω_e – кутове прискорення обертання тіла *Д* відносно осі Az_1

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t - 0{,}25t^2\right) = 2 - 0{,}5t, \ \text{с}^{-1},$$

ε_e – кутове прискорення обертання тіла *Д* відносно осі Az_1

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi}_e = \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{d}{dt}(2-0{,}5t) = -0{,}5 \ \text{с}^{-2}.$$

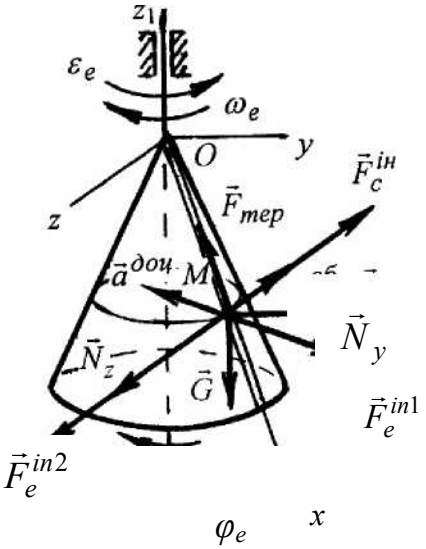


Рис. 78

Тоді модулі складових переносної сили інерції будуть дорівнювати

$$F_e^{in1} = m\, a_e^{доц} = (2-0{,}5t)^2(3t^2+4t)\cdot 10^{-2}\, m \sin\alpha, \ \text{Н};$$

$$F_e^{in2} = m\, a_e^{об} = -0{,}5(3t^2+4t)\cdot 10^{-2}\, m \sin\alpha, \ \text{Н}.$$

Для визначення коріолісового прискорення визначаємо за заданим законом відносного руху кульки її відносну швидкість та відносне прискорення

$$V_r = \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(3t^2 + 4t\right)\cdot 10^{-2} = \left(6t + 4\right)\cdot 10^{-2},\ \text{м/с};$$

$$a_r = \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 6\cdot 10^{-2},\ \text{м/с}^2.$$

Напрям коріолісового прискорення визначаємо за правилом Жуковського, згідно з яким вектор відносної швидкості $\vec{V}_r$ проектуємо на площину, яка перпендикулярна до вектору кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ (вектор $\vec{\omega}_e$ лежить на осі Az_1 і напрямлений вниз), а потім проекцію повертаємо на кут 90°. Одержаний напрям і буде напрямом $\vec{a}_K$, тобто вздовж осі z у додатному напрямі (див. рис. 79).

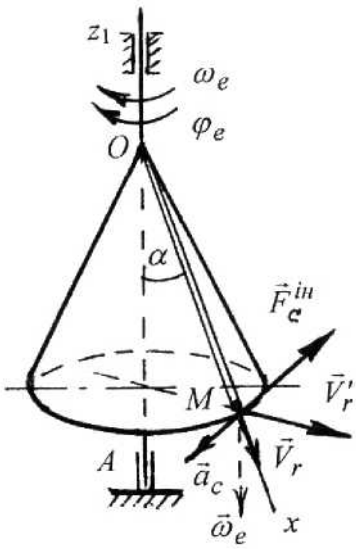


Рис. 79

Що ж стосується коріолісової сили інерції $\vec{F}_K^{in}$, то вона буде напрямлена в протилежний бік, тобто вздовж осі z у від'ємному напрямі. По модулю коріолісова сила інерції дорівнює

$F_K^{in} = m\,a_K = 2m\omega_e V_r \sin\alpha = 2\cdot(2 - 0{,}5t)\cdot(6t + 4)\cdot 10^{-2}\,m \sin\alpha$, Н.

Рівняння відносного руху кульки у векторній формі має вид:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_j + \vec{F}_e^{in1} + \vec{F}_e^{in2} + \vec{F}_K^{in},$$

або в проекціях на рухомі осі координат ($Oxyz$):

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= G\cos\alpha - F_{тер} + F_e^{in1}\sin\alpha, \\ 0 &= N_y - G\sin\alpha + F_e^{in1}\cos\alpha, \\ 0 &= N_z + F_e^{in2} - F_K^{in}. \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

З останніх двох рівнянь системи (82) знаходимо

$N_y = G\sin\alpha - F_e^{in1}\cos\alpha = m\,g\sin\alpha - (2 - 0{,}5t)^2\cdot(3t^2 - 4t)\cdot 10^{-2}\cdot$

$m\sin\alpha\cos\alpha = m\sin\alpha\,[g - (2 - 0{,}5t)^2(3t^2 - 4t)\cdot 10^{-2}\cos\alpha]$, Н;

$N_z = F_K^{in} - F_e^{in2} = m\sin\alpha[2(2 - 0{,}5t)(6t + 4) + 0{,}5(3t^2 + 4t)]\cdot 10^{-2}$, Н.

Підставляючи в ці вирази значення m і час t_1, отримаємо N_y = 0,48 Н і N_z = 0,021 Н, а саму реакцію стінки каналу визначаємо за формулою

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = \sqrt{0{,}48^2 + 0{,}021^2} = 0{,}481 \text{ Н}.$$

Тоді шуканий тиск кульки M на стінку каналу за величиною буде дорівнювати значенню реакції N, а напрям - протилежний напряму $\vec{N}$.

Величину сили тертя ковзання при $t = t_1 = 2$ с отримаємо з першого рівняння системи (163)

$$F_{тер} = G\cos\alpha - m\ddot{x} + F_e^{in1}\sin\alpha =$$

$$= 0{,}1\cdot[(2 - 0{,}5\cdot 2)^2(3\cdot 2^2 + 4\cdot 2)\cdot 10^{-2}\sin^2 30° + 9{,}8\cos 30° - 6\cdot 10^{-2}] = 0{,}851 \text{ Н}.$$

Відповідь: N = 0,481 Н; $F_{тер}$ = 0,851 Н.

3.8. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок

Системою матеріальних точок (механічною системою) називається сукупність матеріальних точок, положення й рух кожної з яких залежить від положення й руху інших точок, що входять у дану систему.

Сили, що діють на точку механічної системи, розділяються на зовнішні й внутрішні.

Зовнішніми силами називаються сили, прикладені до матеріальних точок системи з боку точок і тіл, які не входять до складу цієї системи. Ці сили позначають як $\vec{F}^e$.

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між матеріальними точками (тілами), що входять до складу розглянутої системи. Для цих сил

користуються позначенням $\vec{F}^i$. Внутрішні сили існують попарно і мають такі властивості:

головний вектор внутрішніх $\vec{R}^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0$

і головний момент $\vec{M}_O^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^i\right) = 0$.

Розглянемо систему матеріальних точок M_1, M_2,..., M_n, маси яких m_1, m_2,..., m_n, а радіуси-вектори точок – $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$.

Запишемо диференціальні рівняння руху k-ї точки, на яку діють сили $\vec{F}_k^e$ $\vec{F}_k^i$

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \text{ або } m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{d t^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

У проекціях на осі координат диференціальні рівняння руху k-ї точки системи запишуться у вигляді:

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \; m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \; m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i.$$

Диференціальні рівняння руху системи n матеріальних точок запишуться у формі

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{array}\right\}$$

Щоб визначити рух системи з n матеріальних точок, що входять у дану систему, потрібно розв'язати $3n$ звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\left.\begin{array}{l} m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \\ m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \\ m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i. \end{array}\right\}; \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При розв'язанні цих рівнянь отримаємо $6n$ довільних сталих інтегрування C_1, C_2, $\ldots C_{6n}$, для визначення яких потрібно знати $6n$ початкових умов. Такими умовами є значення координат точок системи в початковий момент та їхніх швидкостей в початковий момент.

Розв'язання такої системи диференціальних рівнянь руху матеріальних точок пов'язане з великими математичними труднощами. Однак у багатьох задачах динаміки ці труднощі можна обійти, якщо скористатися загальними теоремами динаміки.

3.9. Центр мас. Момент інерції тіл

У геометрії мас вивчається розподіл мас у механічній системі. Основними поняттями в геометрії мас є: центр мас системи матеріальних точок, моменти інерції твердих тіл, еліпсоїд інерції.

Масою системи матеріальних точок називається сума мас усіх точок, що входять у дану систему.

Центром мас системи матеріальних точок називається точка, положення якої визначається радіус-вектором $\vec{r}_C$:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k ,$$

де m_k – маса k-ї точки; $\vec{r}_k$ – її радіус-вектор; $M = \sum m_k$ – маса системи матеріальних точок.

У декартовій системі координат центр мас визначається за формулами:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k , \quad y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k , \quad z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k .$$

Центр мас називають також *центром інерції.*

Поняття центру мас є більш загальним, ніж поняття про центр ваги. Центр мас характеризує розподілення мас в механічній системі, але не повністю.

Розглянемо систему, яка складається з двох куль однакової маси і які знаходяться на рівній відстані h_1 від осі z. Центр мас цієї системи лежить на осі обертання. Тепер відсунемо кулі на однакові відстані h_2 від осі. Центр ваги залишиться на тому ж місці, а розподіл мас матеріальних точок змінився. Тому для врахування цього розподілу мас і вводять поняття моменту інерції відносно осі обертання (рис. 80).

Момент інерції J_z системи матеріальних точок відносно осі дорівнює сумі добутків мас на квадрати відстаней їх до осі обертання і характеризує розподіл мас матеріальних точок відносно цієї осі

$$J_z = \sum m_k h_k^2 .$$

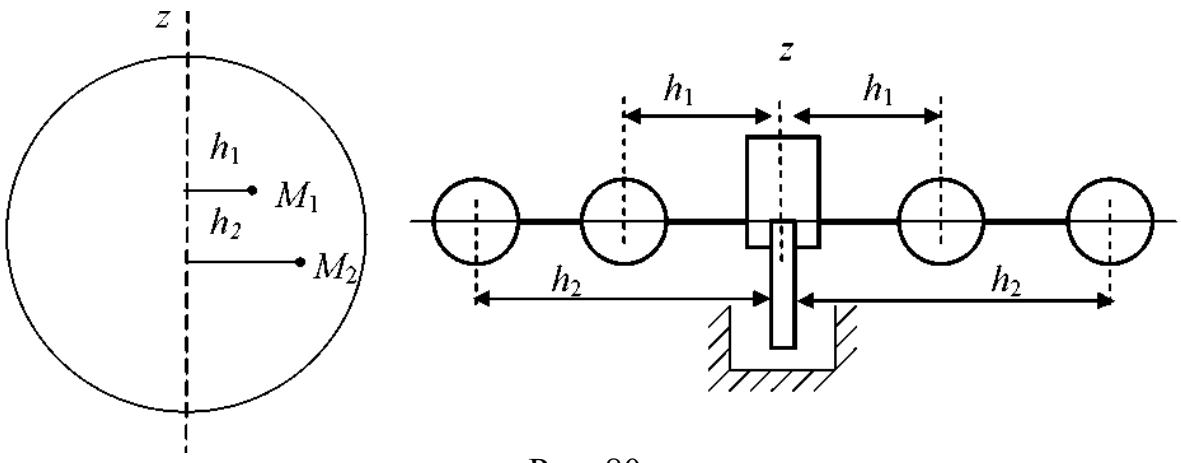


Рис. 80

Осьовий момент інерції, як випливає з визначення, завжди додатній. У міжнародній системі (СІ) момент інерції виміряється в кг·м^2 , в технічній системі кГ·м·сек^2.

При безперервному розподілі мас матеріальних точок у твердому тілі, яке займає область V, момент інерції обчислюється за формулою

$$J_z = \int_V r^2 d\,m\,.$$

Якщо тіло однорідне, то $$J_z = \frac{M}{V}\int_V r^2 d\,v\,,$$

де M – маса тіла, V – об'єм тіла, dv – диференціал об'єму V.

Якщо вісь обертання не проходить через центр мас тіла, то момент інерції обчислюють за теоремою Гюйгенса-Штейнера, яка читається так:

Момент інерції твердого тіла відносно даної осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла С, до якого додається добуток маси тіла на квадрат відстані між паралельними осями

$$J_{z1} = J_{zC} + M\cdot d^2,$$

де J_{zC} – момент інерції відносно осі, яка паралельна осі z_1 і проходить через центр мас тіла, M – маса тіла, d – відстань між паралельними осями.

Радіусом інерції ρ твердого тіла відносно осі називається лінійна величина, добуток квадрата якої на масу тіла дорівнює моменту інерції твердого тіла відносно цієї осі

$$J_z = M\,\rho^2.$$

Для кільця (матеріального кола) момент інерції відносно осі, що проходить через центр кола й перпендикулярна до площини, у якій лежить кільце, дорівнює: $J_z = M\,r^2$.

Для кільця в цьому випадку радіус інерції ρ дорівнює радіусу кола r (рис. 81).

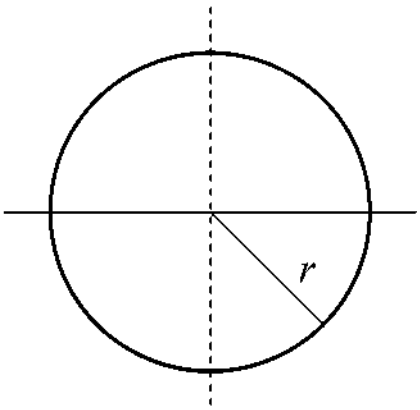


Рис. 81

Якщо система складається із кількох тіл, моменти яких відносно деякої осі відомі, то момент інерції системи відносно цієї осі дорівнює сумі моментів інерції всіх тіл, що входять у систему, відносно тієї ж осі.

Якщо відомі моменти інерції тіла відносно координатних осей, то момент інерції відносно будь-якої іншої осі L, що проходить через початок координат, визначається за формулою

$$J_L = J_x \cos^2 \alpha + Jy \cos^2\beta + J_z \cos^2 \gamma -$$

$$- 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2\, J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2\, J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma,$$

де α, β, γ – кути між віссю L і координатними осями,

J_x, J_y, J_z – осьові моменти інерції тіла,

J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} – відцентрові моменти інерції твердого тіла, які визначаються за формулами:

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k ,$$

$$J_{xz} = \sum m_k x_k z_k ,$$

$$J_{yz} = \sum m_k y_k z_k .$$

Якщо тіло має рівномірний розподіл мас, то відцентрові моменти інерції обчислюються за формулами:

$$J_{xy} = \frac{M}{V} \iiint\limits_V x\, y\, d\, V \,,\; J_{xz} = \frac{M}{V} \iiint\limits_V x\, z\, d\, V \,,\; J_{yz} = \frac{M}{V} \iiint\limits_V y\, z\, d\, V \,.$$

Якщо тіло є однорідною пластиною, то

$$J_{xy} = \frac{M}{S}\iint_S x\,y\,d\,S,\; J_{xz} = \frac{M}{S}\iint_S x\,z\,d\,S,\; J_{yz} = \frac{M}{S}\iint_S y\,z\,d\,S.$$

Еліпсоїдом інерції твердого тіла в точці O називається геометричне місце точок, що лежать на осі L при будь-яких її напрямках на відстані

$$OD = \frac{1}{\sqrt{J_L}}.$$

Рівняння еліпсоїда інерції в даній точці твердого тіла має вигляд

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2\,J_{yz}yz - 2\,J_{xz}xz = 1,$$

де x, y, z – поточні координати точок, що лежать на поверхні еліпсоїда.

Якщо відцентрові моменти інерції $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$, то рівняння еліпса запишеться у вигляді

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1.$$

У цьому випадку осі еліпсоїда інерції в даній точці твердого тіла називаються головними осями інерції.

Тому у кожній точці твердого тіла є три головні осі інерції.

Якщо координатні осі збігаються з головними осями інерції, то $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$. У цьому випадку момент інерції твердого тіла відносно осі L обчислюється за формулою

$$J_L = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma.$$

Головна вісь інерції, що проходить через центр ваги тіла, називається *головною центральною віссю інерції* і є головною в будь-якій своїй точці.

При наявності в тілі осі матеріальної симетрії доцільно одну з координатних осей направити по цій осі, вона й буде головною.

Якщо у твердому тілі є площина матеріальної симетрії, то одну з осей потрібно направити перпендикулярно до цієї площини. Ця координатна вісь – головна вісь інерції твердого тіла в точці перетину з площиною симетрії.

При наявності головної осі симетрії в даній точці тіла два відцентрових моменти інерції відносно осей, одна з яких є головною віссю інерції, дорівнюють нулю, а третій відцентровий момент не дорівнює нулю.

Наприклад, якщо вісь z – головна, то $J_{yz} = J_{xz} = 0$, а $J_{xy} \neq 0$.

3.10. Загальні теореми динаміки системи матеріальних точок

Розв'язання задач динаміки системи матеріальних точок зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь руху, що природно пов'язане з певними труднощами. Їх можна обійти, якщо скористатися загальними теоремами динаміки. Ці теореми дозволяють знаходити основні динамічні характеристики руху матеріальних тіл і розв'язувати різні задачі, що мають широке застосування в інженерній практиці.

До загальних теорем динаміки системи належать чотири теореми: теорема про рух центру мас, теорема про зміну кількості руху, теорема про зміну кінетичного моменту, теорема про зміну кінетичної енергії.

3.10.1. Теорема про рух центра мас механічної системи

Теорема: *центр мас системи матеріальних точок під дією зовнішніх сил рухається так само, як і матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи*

$$M \cdot \vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e .$$

У проекціях на осі координат теорема запишеться у вигляді

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e ;\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e ;\ M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e .$$

Зрозуміло, що рух центра мас залежить тільки від зовнішніх сил, прикладених до механічної системи. Внутрішні сили не впливають на рух центру мас. Це дуже важливо, тому що внутрішні сили системи найчастіше бувають заздалегідь невідомі.

І ще одне зауваження яке стосується динаміки поступального руху: при поступальному русі тіла достатньо знати рух тільки однієї точки (такою точкою є центр мас).

У випадку, коли головний вектор зовнішніх сил, що діють на механічну систему, дорівнює нулю, то центр мас системи рухається прямолінійно зі сталою швидкістю. Дійсно, якщо

$$M\frac{d\vec{V}_C}{dt} = 0, \text{ то } \vec{V}_C = \text{const}.$$

Якщо в окремому випадку швидкість центру маси дорівнює нулю, то положення центру мас залишається незмінним, він перебуває в стані спокою, матеріальні точки системи можуть переміщуватися при цьому тільки за умови, що $\sum m_k \vec{v}_k = 0$.

Отже, якщо сума зовнішніх сил, що діють на систему матеріальних точок, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається зі сталою по модулю й напрямку швидкістю, тобто рівномірно й прямолінійно.

Це і є закон збереження руху центру мас.

Якщо механічна система така, що сума проекцій всіх зовнішніх сил системи на яку-небудь вісь, наприклад *Ox,* дорівнює нулю $\sum F_{kx}^{e}=0$, то проекція швидкості $\dot{x}_C$ центру мас на цю ж вісь є величина стала. Якщо $\dot{x}_C=0$, то $\sum m_k v_{kx}=0$.

Якщо сума проекцій всіх діючих сил на яку-небудь вісь дорівнює нулю, то проекція швидкості центру мас на цю вісь є стала величина.

Розглянемо механічну систему, що складається з *n* матеріальних точок $M_1, M_2,..., M_n,$ маси яких дорівнюють $m_1, m_2,..., m_n,$ а система зовнішніх сил, що діє на неї, така, що сума проекцій цих сил на вісь *Ox* дорівнює нулю й система в початковий момент перебуває в спокої, тоді

$$x_C=\frac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n}.$$

Припустимо, що всі точки системи отримали для абсолютного руху переміщення $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, тоді

$$x_C=\frac{m_1(x_1+\xi_1)+m_2(x_2+\xi_2)+...+m_n(x_n+\xi_n)}{m_1+m_2+...+m_n}.$$

Оскільки центр мас системи залишається в спокої, то, порівнюючи праві частини рівнянь, отримаємо

$$\frac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n}=\frac{m_1(x_1+\xi_1)+m_2(x_2+\xi_2)+...+m_n(x_n+\xi_n)}{m_1+m_2+...+m_n},$$

звідки

$$m_1\xi_1+m_2\xi_2+...+m_n\xi_n=0.$$

Задача 6 – на застосування теореми про рух центру мас до дослідження руху механічної системи.

Умова задачі. Механічна система складається з вантажів D_1 масою m_1 = 6 кг і D_2 масою m_2 = 8 кг та прямокутної вертикальної плити масою m_3 = 12 кг, що рухається уздовж горизонтальних напрямних в момент t_o = 0, коли система перебуває в спокої; під дією внутрішніх сил вантажі починають рухатися по жолобам, кожний з яких є коло радіуса *r* = 0,6 м та *R* = 1,2 м, відповідно (рис. 82).

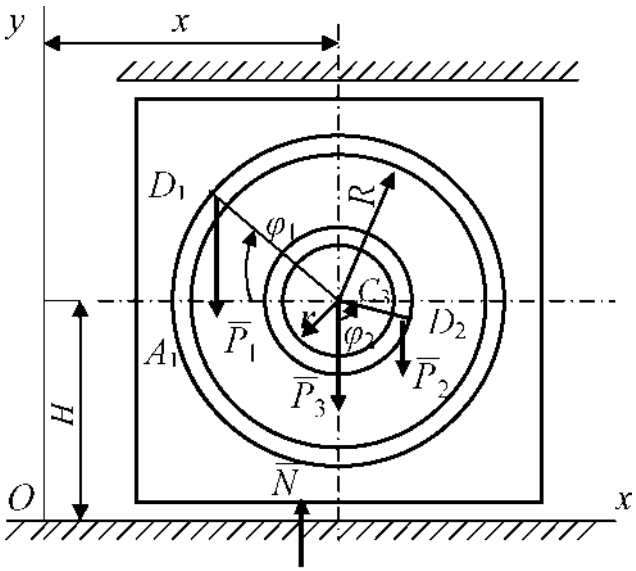


Рис. 82

При русі вантажів кут $\varphi_1 = \angle A_1C_3D_1$ змінюється за законом $\varphi_1 = = f_1(t)$, а кут $\varphi_2 = \angle A_2C_3D_2$ – за законом $\varphi_2 = f_2(t)$.

Вважаючи вантажі матеріальними точками і нехтуючи всіма опорами, визначити закон зміни за часом

$$x_3 = f_3(t) \text{ і } N = f(t),$$

де x_3 – координата центра C_3 плити (залежність $x_3 = f_3(t)$ визначає закон руху плити), N – повна нормальна реакція направляючих.

Дано: $m_1 = 6$ кг, $m_2 = 8$ кг, $m_3 = 12$ кг, $r = 0{,}6$ м, $R = 1{,}2$ м, $\varphi_1 = \pi/6(t+2)$ радіан, $\varphi_2 = \pi/4(1-t)$ радіан, t – у секундах).

Визначити: $x_3 = f_3(t)$ – закон руху плити, $N = f(t)$ – закон зміни з часом повної нормальної реакції направляючих.

Розв'язання

Розглянемо механічну систему, що складається з плити й двох вантажів D_1 і D_2 у довільному положенні (рис. 82). Зобразимо на кресленні діючі на систему зовнішні сили ваги $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ та реакцію направляючих $\vec{N}$.

Виберемо систему координат Oxy так, щоб вісь Oy проходила через центр C_{30}, де знаходиться центр мас плити в момент часу $t_o = 0$, а вісь Ox направимо уздовж однієї з направляючих.

Визначимо переміщення x_3. Для визначення закону руху $x_3 = f_3(t)$ скористаємося теоремою про рух центру мас системи. Запишемо диференціальне рівняння руху центру мас у проекції на вісь Ox:

$$M\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}.$$

Оскільки проекції всіх зовнішніх сил на вісь Ox дорівнюють нулю, то має місце закон збереження руху центру мас $M\ddot{x}_C = 0$.

Після інтегрування цього рівняння, знайдемо $M\dot{x}_C = C_1$, тобто проекція швидкості центру мас системи на цю вісь є стала величина.

Визначимо C_1 з початкових умов: при $t = 0$, $V_C = 0$. Отже $C_1 = 0$.

Інтегруючи рівняння $M\dot{x}_C = C$, отримаємо $x_C = C_2 = \text{const}$, тобто центр мас уздовж осі Ox переміщатися не буде. Визначаємо значення $M\,x_C$. Як видно з рис. 105 в довільний момент часу абсциси вантажів дорівнюють

$$x_1 = x_3 - R\cos\varphi_1,$$
$$x_2 = x_3 + r\cos\varphi_2.$$

Оскільки центр мас має координати

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M},$$

то підставляючи у формулу значення x_1 і x_2, одержимо

$$M\,x_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1R\cdot\cos\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] + m_2r\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right].$$

Відповідно до закону збереження руху центру мас системи координати центру мас x_C всієї системи в початковому і кінцевому положеннях будуть рівні. Тоді, враховуючи, що при $t = 0$ $x_3 = 0$, $x_1 = -R$, а $x_2 = r$, отримаємо

$$-m_1R + m_2r = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1R\cdot\cos\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] + m_2r\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right].$$

Звідси знайдемо x_3 як функцію часу t

$$x_3 = \frac{-m_1R + m_2r + m_1R\cdot\cos\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] - m_2r\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right]}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, отримаємо

$$x_3 = \frac{-6\cdot1{,}2 + 8\cdot0{,}6 + 6\cdot1{,}2\cdot\cos\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] - 8\cdot0{,}6\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right]}{6+8+12} =$$

$$= -0{,}0923 + 0{,}2769\cdot\cos\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] - 0{,}1846\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right].$$

Визначаємо реакцію N. Для її визначення складемо диференціальне рівняння руху центру мас системи в проекціях на вертикальну вісь Oy:

$$M\,\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} \quad \text{або} \quad M\,\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3 .$$

Оскільки $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $P_3 = m_3\, g$, то

$$N = M\,\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)\cdot g .$$

Координата центру мас системи

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

тому $M\,y_c = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$,

де $y_1 = H + R\sin\varphi_1$, $y_2 = H - r\cos\varphi_2$, $y_3 = H = \text{const}$.

Після підстановки

$$M\,y_C = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] - m_2\, r\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}(t-1)\right].$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності двічі за часом *t,* отримаємо

$$M\,\ddot{y}_C = -\,m_1 R\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \sin\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] + m_2\, r\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}(t-1)\right].$$

Підставляючи це значення $M\,\ddot{y}_C$ в рівняння, що визначає реакцію *N,* отримаємо

$$N = -\,m_1 R\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \sin\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] + m_2\, r\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}(t-1)\right] + (m_1 + m_2 + m_3)g .$$

Чисельне значення реакції буде

$$N = -1{,}9739\sin\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] + 2{,}9609\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}(t-1)\right] + 255{,}06 .$$

Відповідь: $x_3 = -0{,}0923 + 0{,}2769\cdot\cos\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] - 0{,}1846\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right]$, (м);

$$N = -1{,}9739\sin\left[\frac{\pi}{6}(t+2)\right] + 2{,}9609\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}(t-1)\right] + 255{,}06 \text{, (Н).}$$

Кількість руху та імпульс сили

Кількістю руху системи матеріальних точок називається вектор $\vec{Q}$, який дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх точок системи $\vec{q}_k = m_k\,\vec{v}_k$ (рис. 83).

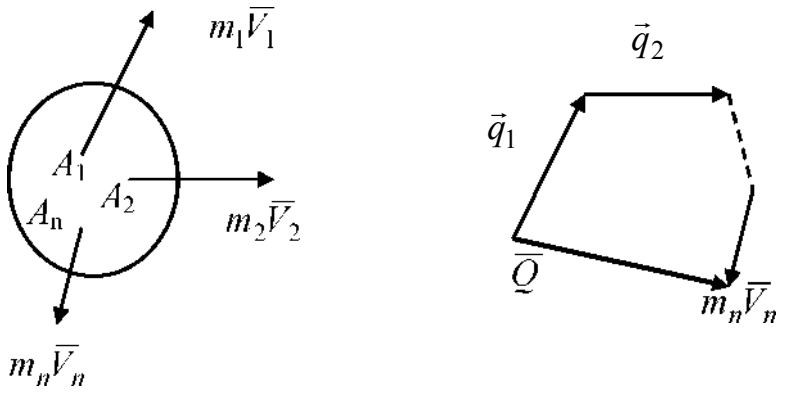


Рис. 83

Маємо $\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} \vec{q}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k$.

Вектор кількості руху системи можна записати в іншій формі, якщо врахувати, що

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = M\vec{V}_C.$$

Тоді

$$\vec{Q} = M\vec{V}_C,$$

де M – маса всієї системи матеріальних точок, $\vec{V}_C$ – швидкість центра мас.

Отже, *кількість руху системи дорівнює добутку маси всієї системи на швидкість її центра мас*.

Цією формулою зручно користуватися при обчисленні кількостей руху тіл. Якщо тверде тіло рухається так, що центр мас залишається нерухливим, то кількість руху тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, що проходить через центр мас, буде дорівнювати нулю.

Якщо рух тіла є складним, то величина кількостей руху не буде залежати від його обертального руху навколо центру мас. Наприклад, для колеса, що котиться, $\vec{Q} = M\vec{V}_C$ незалежно від того як обертається колесо навколо центру мас.

Узагальнюючі, кількість руху $\vec{Q}$ можна розглядати як характеристику поступального руху системи.

Проекції головного вектора кількостей руху на осі координат запишуться у вигляді

$Q_x = \sum m_k v_{kx} = MV_{Cx}$, $Q_x = \sum m_k v_{ky} = MV_{Cy}$, $Q_z = \sum m_k v_{kz} = MV_{Cz}$.

Тоді $\vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}$.

По модулю $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}$.

Для характеристики дії сил системи протягом деякого часу t вводяться поняття імпульсу сил системи.

Імпульсом зовнішніх сил системи називається векторна величина, яка дорівнює сумі імпульсів усіх сил прикладених до системи матеріальних точок

$$\vec{S}^e = \sum \int_0^t \vec{F}_k^e \, dt .$$

3.10.2. Теорема про зміну кількості руху

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок формулюється так: *зміна кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі імпульсів усіх зовнішніх сил системи за той же проміжок часу*.

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e .$$

У проекціях на осі координат теорема записується у вигляді:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum S^e_{kx}, \; Q_{2y} - Q_{1y} = \sum S^e_{ky}, \quad Q_{2z} - Q_{1z} = \sum S^e_{kz} .$$

Цю теорему можна записати й у такому вигляді:

$$M V_{Cx2} - M V_{Cx1} = \sum S^e_{kx}, \; M V_{Cy2} - M V_{Cy1} = \sum S^e_{ky},$$

$$M V_{Cz2} - M V_{Cz1} = \sum S^e_{kz}.$$

Окремий випадок або закон збереження кількості руху:

1. *Якщо зовнішні сили, що діють на систему такі, що геометрична сума цих сил дорівнює нулю, то вектор кількості руху системи стала величина як по модулю, так і за напрямком*

$$\vec{Q}_2 = \vec{Q}_1 .$$

2. *Якщо зовнішні сили, що діють на механічну систему, такі, що сума проекцій цих сил на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проекція головного вектора кількості руху системи на цю вісь є стала величина*

$$Q_{2x} = Q_{1x}.$$

Задачі, які розв’язуються за допомогою теореми про зміну кількості руху системи, можна розділити на три типи

1) задачі на визначення кількості руху системи;

2) задачі на визначення різних кінематичних або динамічних характеристик системи за допомогою теореми про зміну кількості руху;

3) задачі, в яких треба також визначити кінематичні або динамічні характеристики руху системи, але за допомогою закону збереження кількості руху системи.

Теорема про зміну головного вектора кількості руху системи широко застосовується до суцільних середовищ.

Розглянемо течію рідини, наприклад води, в трубі (рис. 84). При стаціонарній течії секундна маса M_c, тобто маса рідини, що протікає за 1с через будь-який поперечний переріз труби, стала величина

$$M_c = \rho_1 V_{1n} S_1 = \rho_2 V_{2n} S_2,$$

де ρ_1 й ρ_2 – густини рідини, S_1 і S_2 – площі поперечних перерізів, V_{1n} і V_{2n} – нормальні проекції швидкості рідини в перерізах 1 і 2.

Секундна кількість руху рідини в перерізах 1 і 2 визначається так:

$$M_c \vec{V}_1 = M \vec{V}_1 \text{ і } M_c \vec{V}_2 = M \vec{V}_2 .$$

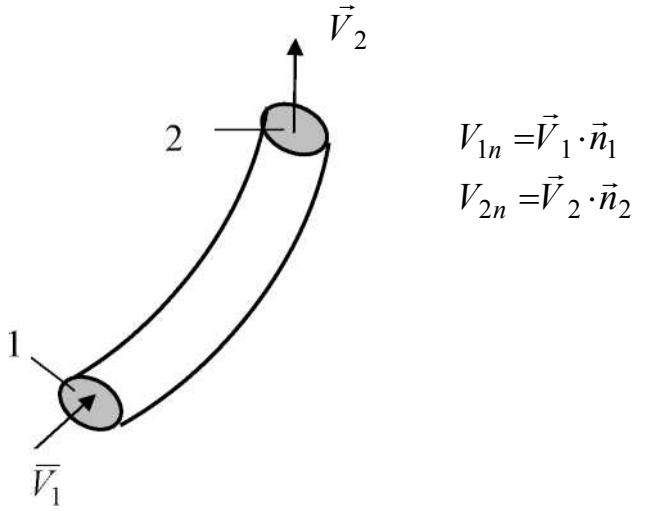


Рис. 84

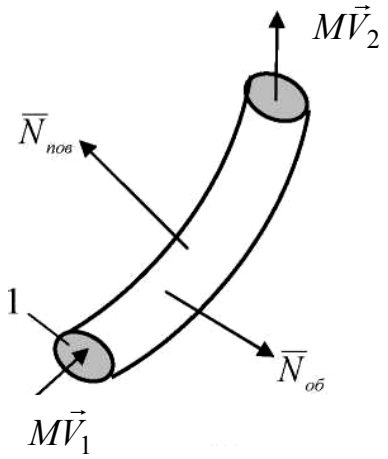
На об’єм рідини діють об’ємні $\vec{N}_{об}$ й поверхневі $\vec{N}_{пов}$ сили.

Об'ємними силами називають сили, що діють на частки рідини, розташовані усередині об’єму.

Поверхневими силами називають сили, що діють на частки рідини, що лежать на зовнішній поверхні об’єму.

До перших, наприклад, ставляться сили ваги часток рідини, до других – реакції стінок труби, прикладені до часток рідини, що стикаються зі стінками труби.

Відповідно до теореми про зміну кількості руху у випадку стаціонарної течії рідини маємо рівність (рис. 85), яка приводить до теореми



$$M\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right) = \vec{N}_{об} + \vec{N}_{пов}.$$

Рис. 85

Теорема Ейлера. Сума головних векторів об'ємних і поверхневих сил, а також векторів секундних кількостей руху рідини, що протікає через два перерізу труби, дорівнюють нулю, якщо вектори секундних кількостей руху направити усередину виділеного перерізами об’єму.

Це означає, що дані вектори утворять замкнутий багатокутник (рис. 85).

Задача 7. Тіло вагою P =1,0 кН під дією сили F, яка утворює з напрямком руху кут β = 45°, підіймається поступально вгору по шорсткій похилій площині, що утворює з горизонтом кут α = 30°. Чому дорівнює модуль сили F, якщо через час t =12 с після початку руху швидкість тіла дорівнює v = 5 м/с? Коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1 (рис. 86).

Розв’язання

Тіло, яке рухається поступально, розглядаємо як матеріальну точку C, в якій зосереджена вся маса тіла. На неї діють такі сили: сила ваги тіла P, нормальна реакція N площини, рушійна сила F та сила тертя $F_{тер}$ (див. рис. 86).

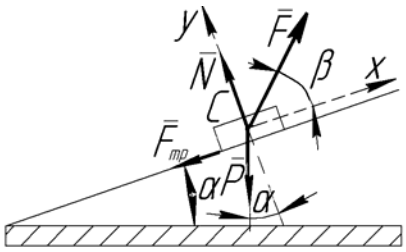


Рис. 86

Напрямок осі x визначається прямою, по якій рухається точка C. Згідно теореми про зміну кількості руху точки:

$$m\,v_{1x} - m\,v_{0x} = \sum S_{kx}. \qquad (82)$$

Імпульси сил знаходяться за умови сталості їх величин:

$$\sum S_{kx} = t\sum F_{kx} = t\cdot\,(F\cos\beta - P\sin\alpha - F_{тер}).$$

Для визначення $F_{тер}$ треба знайти нормальну реакцію площини N. Після проектування всіх сил на вісь y, вздовж якої тіло не рухається:

$$\sum F_{ky} = N + F\sin\beta - P\cos\alpha = 0,$$

звідки

$$N = P\cos\alpha - F\sin\beta.$$

Далі знаходиться

$$F_{тер} = f\cdot N = f\cdot(P\cos\alpha - F\sin\beta).$$

За умовою задачі $v_{0x} = 0$, $v_{1x} = v$.

Після підстановки знайдених значень сил у рівняння (82) та алгебраїчних перетворень, отримаємо:

$$\frac{P}{g}v = \left[F\left(\cos\beta + f\sin\beta\right) - P\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\right]\cdot t\,.$$

Розв’яжемо останнє рівняння відносно сили F:

$$F\cdot t\left(\cos\beta + f\sin\beta\right) = \frac{P}{g}v + P\cdot\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot t\,.$$

Далі маємо:

$$F = \frac{P\left[v + gt\cdot\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\right]}{gt\left(\cos\beta + f\sin\beta\right)}.$$

Знайдене значення

$$F = \frac{1000\cdot\left[5 + 9{,}8\cdot 12\cdot\left(0{,}5 + 0{,}1\cdot 0{,}866\right)\right]}{9{,}8\cdot 12\cdot\left(0{,}707 + 0{,}1\cdot 0{,}707\right)} = 808{,}95\,\text{Н}.$$

Відповідь: F = 808,95 Н ≈ 0, 809 кН.

3.10.3. Теорема про зміну головного моменту кількості руху

Розглянемо систему матеріальних точок M_1, M_2,..., M_n , маси яких m_1, m_2, ..., m_n, а швидкості – відповідно $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$,..., $\vec{V}_n$.

Головним моментом кількості руху (або кінетичним моментом) системи відносно центра O називається вектор $\vec{L}_O$, який дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху всіх точок системи відносно того ж центру

$$\vec{L}_O = \sum \vec{m}_O\left(m_k\vec{V}_k\right) = \sum\left(\vec{r}_k \times m_k\vec{V}_k\right).$$

Головні моменти кількостей руху системи відносно координатних осей запишуться у вигляді:

$$L_x = \sum m_x\left(m_k\vec{V}_k\right),\ L_y = \sum m_y\left(m_k\vec{V}_k\right),\ L_z = \sum m_z\left(m_k\vec{V}_k\right).$$

Кінетичний момент системи характеризує обертальний рух системи.

Якщо розглядати обертання тіла навколо нерухомої осі z, то L_z – кінетичний момент системи відносно осі обертання, який дорівнює

$$L_z = J_z\,\omega,$$

де J_z – момент інерції тіла, ω – кутова швидкість обертання тіла навколо осі.

Теорема про зміну головного моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно центру (теорема моментів) формулюється так: перша похідна за часом від головного моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно деякого нерухомого центру дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил системи відносно цього ж центру

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right).$$

У проекціях на осі координат ця теорема запишеться у вигляді:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum m_x\left(\vec{F}_k^e\right), \qquad \frac{dL_y}{dt} = \sum m_y\left(\vec{F}_k^e\right), \qquad \frac{dL_z}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right).$$

Теорема про зміну головного моменту кількостей руху системи застосовується при вивченні обертального руху тіл.

Висновки з теореми або закони збереження моментів кількості руху механічної системи (широко застосовуються при розв’язанні задач).

1. Якщо сума моментів всіх, діючих на систему зовнішніх сил відносно центру O, дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно цього ж центру буде сталою величиною як за модулем, так і за напрямком.

Якщо $\sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right)=0$, то $\vec{L}_O$ = const.

2. Якщо механічна система така, що сума моментів всіх прикладених до системи сил відносно будь-якої осі z дорівнює нулю, то головний момент кількостей руху системи відносно цієї ж осі буде сталою величиною.

Наприклад, якщо $\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то L_z = const.

Якщо система обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω, то $L_z = J_z\,\omega$.

У випадку, коли $\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $J_z\,\omega$ = const.

Отже, якщо система матеріальних точок незмінна (абсолютно тверде тіло), то J_z = const і в цьому випадку ω = const, тобто тіло обертається зі сталою кутовою швидкістю.

Якщо матеріальна система може змінюватися, то під дією внутрішніх сил можна змінити момент інерції J_z і тоді зміниться кутова швидкість обертання, але їхній добуток буде сталою величиною.

Приступаючи до розв'язання задач динаміки за допомогою теореми про зміну моменту кількості руху (або кінетичного моменту) механічної системи, треба вміти проводити наступні операції:

1. Знаходити моменти сил відносно центру та осі.
2. Знаходити момент кількості руху системи відносно центру і осі.
3. Знати умови, при яких має місце закон збереження моменту кількості руху системи.

Алгоритм розв'язання задач.

1. Розглянути тіло, яке обертається навколо нерухомої осі.
2. Вибрати систему координат, направивши одну з осей уздовж нерухомої осі обертання.
3. Прикласти до системи всі зовнішні сили (задані і реакції в'язей).
4. Записати формулу, що виражає теорему про зміну кінетичного моменту.
5. Обчислити головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої осі

$$\left(\sum M_z^e = \sum m_z\left(m_k\vec{V}_k\right)\right).$$

6. Визначити головний момент кількості руху (кінетичний момент) системи відносно нерухомої осі (L_z).
7. Підставити отримані значення моментів у формулу

$$\frac{d\,L_z}{d\,t} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right).$$

При використанні закону про збереження головного моменту кількості руху рекомендується обчислити $\sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right)$ і, якщо головний момент зовнішніх сил дорівнює нулю, то необхідно обчислити головні моменти кількостей руху системи матеріальних точок відносно осі в початковий і кінцевий моменти часу й дорівняти їх $L_{z1} = L_{z2}$, а потім визначити з цього рівняння шукану величину.

Задача 8 – на застосування теореми про зміну кінетичного моменту до визначення кутової швидкості твердого тіла.

Розв'язуючи за допомогою цієї теореми задачу, в якій до механічної системи входять тіло H (пластинка або стержень) і точка, слід пам'ятати, що кінетичний момент L_z системи відносно осі z визначається як сума моментів тіла і точки. При цьому слід враховувати, що абсолютна швидкість точки $\vec{V}_a$ складається з відносної $\vec{V}_r$ та переносної $\vec{V}_e$ швидкостей $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$. Тому і кількість руху точки буде дорівнювати $m\vec{V}_a = m\vec{V}_r + m\vec{V}_e$.

Скориставшись відомою із статики теоремою Варіньйона, можна записати $m_z(m\vec{V}_a) = m_z(m\vec{V}_r) + m_z(m\vec{V}_e)$.

Розв'язання задачі складається з двох етапів. На першому етапі використовується безпосередньо сама теорема, а на другому – висновок з неї (закон збереження кінетичного моменту механічної системи).

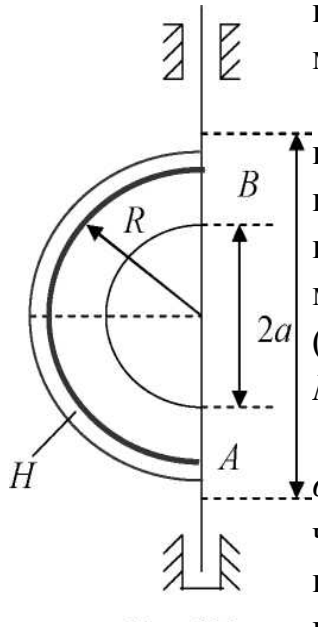


Рис. 87

Умова задачі. Тіло H маси m_1 обертається навколо вертикальної осі z зі сталою кутовою швидкістю ω_0; при цьому в точці O жолоба AB тіла H на відстані AO від точки A уздовж жолоба знаходиться матеріальна точка K маси m_2. У деякий момент часу ($t = 0$) на систему починає діяти пара сил з моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = \tau$ дія пари сил припиняється.

Тіло H обертається по інерції з кутовою швидкістю ω_τ. У деякий момент $t_1 = 0$ (t_1 – новий початок відліку часу) точка K (самохідний механізм) починає відносний рух із точки O уздовж жолоба AB (у напрямку до точки B) за законом $OK = s = s(t_1)$.

Визначити кутову швидкість ω_m тіла H в момент часу $t = m$ та кутову швидкість ω_m тіла H при $t_1 = T$. Тіло H розглядати як однорідну пластину, що має форму, показану на рис. 87; радіус жолоба R = 1,2 м.

Дано: m_1 = 32 кг, a = 1 м, m_2 = 1кг, b = 1,5 м,

$$\omega_0 = -1 \text{ рад/с}, \; M_z = -29{,}6\, t^2,$$

$$t_1 = T_1 = 1 \text{ с}, \; AO = \frac{\pi R}{6}, \; \tau = 3 \text{ с},$$

$$S = OK = \left(\frac{5\pi R}{12}\right)\cdot t_1, \; R = 1{,}2 \text{ м}, \; \omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Визначити: ω_τ, ω_T.

Розв'язання

Дану задачу розв'яжемо за допомогою теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right) = \sum M_z^e,$$

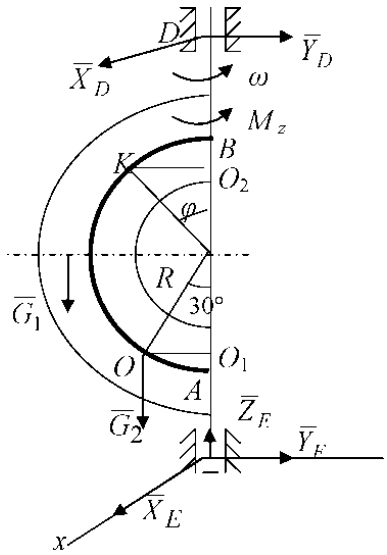


Рис. 88

де L_z – кінетичний момент відносно осі z системи, яка складається з тіла H та точки масою m_2; $\sum M_z^e = M_z^e$ – головний момент зовнішніх сил, які прикладені до системи.

Розглянемо рух тіла H в проміжок часу $0 \le t \le \tau$ (рис. 88). Кутова швидкість тіла змінюється в межах $\omega_0 \le \omega \le \omega_\tau$. В цей час на систему діють сили: G_1 – вага тіла H; G_2 – вага точки; пара сил з моментом M_z і реакції підп'ятника та підшипника в точках E і D.

Положення точки на жолобі визначається кутом $\alpha = \dfrac{AO}{R} = \dfrac{\pi R}{6R} = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Приймаємо, що обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки. Будемо вважати цей напрямок додатним при визначенні знаків кінетичних моментів.

Кінетичний момент системи L_z дорівнює сумі кінетичного моменту тіла H ($l_{z1} = J_z \cdot \omega$) та моменту кількості руху точки, що знаходиться в точці O жолоба AB тіла H і має швидкість $V_e = \omega \cdot OO_1$. Тоді

$$l_{z2} = m_z\left(m_2\vec{V}_e\right) = m_2 V_e \cdot OO_1 = m_2\,\omega OO_1^2 .$$

В результаті

$$L_z = l_{z1} + l_{z2} = J_z\,\omega + m_2\,\omega\cdot OO_1^2 = (J_z + m_2\cdot OO_1^2)\cdot\omega.$$

Визначимо головний момент зовнішніх сил. Він дорівнює M_z, оскільки сили ваги паралельні осі z і їхній момент відносно осі z дорівнює нулю. Реакції підп'ятника та підшипника перетинають вісь z і їхні моменти відносно осі z також дорівнюють нулю. В результаті знаходимо

$$\sum M_z^e = M_z = -\,29{,}6t^2.$$

Отже за теоремою про зміну кінетичного моменту системи,

$$\frac{d}{dt}\left(J_z + m_2\cdot OO_1^2\right)\cdot\omega = -29{,}6t^2.$$

Розв'язуємо це диференціальне рівняння методом відокремлення змінних і інтегруємо в межах зміни змінних:

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\left(J_z + m_2\cdot OO_1^2\right)d\,\omega = -29{,}6\int_0^{\tau} t^2\,dt,$$

$$(J_z + m_2\cdot OO_1^2)\cdot(\omega - \omega_0) = -\,29{,}6\cdot\tau^3/3. \qquad (83)$$

Момент інерції J_z тіла H дорівнює

$$J_z = \frac{m_1\left(a^2 + b^2\right)}{4} = \frac{32\left(1^2 + 1{,}5^2\right)}{4} = 26\ \text{кг}\cdot\text{м}^2,$$

відстань точки від осі обертання –

$$OO_1 = R\sin\alpha = R\sin 30° = 0{,}5\,R = 0{,}5\cdot 1{,}2 = 0{,}6\ \text{м}.$$

Знайдемо чисельне значення $J_{z(зв)}$ зведеного моменту інерції системи

$$J_{z(зв)} = J_z + m_2\,OO_1^2 = 26 + 10\cdot 0{,}6^2 = 29{,}6\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 .$$

Тоді, підставляючи значення $J_{z(зв)}$, τ і ω_0 у рівняння (83), одержимо:

$$29{,}6[\omega_\tau - (-1)] = -\,29{,}6\cdot 3^3/3 = -\,29{,}6\cdot 9 \quad \text{або}$$

$$\omega_\tau + 1 = -\,9,\ \text{звідки}\ \omega_\tau = -\,10\ \text{рад/с}.$$

Розглянемо тепер рух механічної системи в проміжок часу $0 \le t_1 \le T$. При цьому кутова швидкість тіла H змінюється в межах $\omega_\tau \le \omega \le \omega_T$. Згідно з умовою задачі в цей проміжок часу дія пари сил з моментом M_z припиняється, а точка починає відносний рух вздовж жолоба AB. На систему діють тільки сили G_1, G_2 та реакції підп'ятника і підшипника,

моменти яких відносно осі z дорівнюють нулю. Тому рівняння, що виражає теорему про зміну кінетичного моменту, запишеться у вигляді

$$\frac{d\,L_z}{d\,t} = 0.$$

Отже, L_z = const або $L_{z\tau} = L_{zT}$ = const.

Визначимо два значення кінетичного моменту L_z при обраних значеннях часу (при $t_1 = 0$ і $t_1 = T$) та дорівняємо їх:

$$L_{z\tau} = (J_z + m_2\ OO_1{}^2)\cdot\omega_\tau = J_{z(зв)}\cdot\ \omega_\tau = 29{,}6\cdot(-10) = -\ 296\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\ /\text{с}.$$

При $t_1 > 0$ швидкість точки K складається з відносної швидкості $\vec{V}_r$ відносно тіла H та переносної швидкості $\vec{V}_e$ в русі разом з тілом H. Для моменту часу $t_1 = T$ точка масою m_2 знаходиться в точці K: $V_K = 5\ \pi R/12$. При цьому кут

$$\varphi = \frac{OK}{R} = \frac{5\pi R}{12\ R} = \frac{5\pi}{12} = 75^\circ.$$

Кінетичний момент системи дорівнюватиме

$$L_{zT} = J_z\,\omega_T\ + m_z\,(m_2\vec{V}_e) + m_z\,(m_2\vec{V}_r)\ = J_z\ \omega_T + m_2\,O_2\,K^2\ \omega_T =$$

$$= (J_z + m_2\,O_2\,K^2)\cdot\omega_T.$$

У відносному русі $m_z(m_2\vec{V}_r) = 0$, оскільки вектор $m_2\vec{V}_r$ перетинає вісь z. Находимо

$$O_2K = R\ \sin\varphi = R\ \sin 75^0 = 1{,}2\cdot 0{,}96 = 1{,}15\ \text{м},$$

$$V_e = \omega_T\cdot O_2\,K = 1{,}15\ \omega_T,\ V_r = \frac{d\,S}{d\,t} = \frac{5\pi}{12}R.$$

Підставляючи ці значення у вираз для L_{zT}, одержимо:

$$L_{zT} = \omega_T\,(26 + 10\cdot 1{,}15^2) = 39{,}22\ \omega_T.$$

Тоді з незмінності кінетичного моменту

$$L_{z\tau} = L_{zT} \qquad \text{або} \qquad -\,296 = 39{,}22\ \omega_T,$$

звідки

$$\omega_T\ = -\,296/39{,}22 = -\,7{,}55\ \text{рад/с}.$$

Відповідь: $\omega_\tau = -\,10\ \text{с}^{-1}$, $\omega_T = -\,7{,}55\ \text{с}^{-1}$.

3.10.4. Теорема про зміну кінетичної енергії

Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи

Однією з основних динамічних характеристик механічної системи є кінетична енергія. Вона є мірою перетворення механічної енергії як в механічну, так і в інші види енергій (теплову, електричну тощо). У СІ одиницею вимірювання енергії є джоуль (Дж).

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна величина, що дорівнює половині добутку маси m точки на квадрат її швидкості V

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називається скалярна величина T, яка дорівнює сумі кінетичних енергій всіх точок, що входять до системи

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Якщо система складається з n тіл, то кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять до системи, і визначається в залежності від характеру руху того чи іншого тіла.

Кінетична енергія тіла, яке здійснює поступальний рух дорівнює:

$$T_{пост} = \frac{M V_C^2}{2},$$

де M – маса тіла, V_C – швидкість центра мас.

Кінетична енергія тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі Oz,

$$T_{об} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, ω – кутова швидкість обертання тіла.

Кінетична енергія тіла, яке здійснює плоскопаралельний рух

$$T_{плоск} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2,$$

де M – маса тіла, J_c – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, V_c – швидкість центру мас, ω – кутова швидкість тіла.

Елементарна і повна робота сили

Для характеристики дії сили на тіло на деякому його переміщенні вводиться поняття *роботи сили.*

Елементарною роботою сили $\vec{F}$ називається скалярна величина, яка дорівнює

$$dA = F_\tau ds,$$

якщо рух задається природним способом.

Позначення F_τ – проекція сили $\vec{F}$ на дотичну до траєкторії, яка напрямлена у бік переміщення точки, ds – диференціал переміщення точки. Оскільки

$$F_{\tau:} = F\cos\alpha, \qquad \text{то } dA = F \cdot ds \cdot \cos\alpha.$$

Враховуючи властивості скалярного добутку, одержимо вираз для елементарної роботи сили $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Якщо $\vec{F}$ має своїми проекціями на осі координат F_x, F_y, F_z, а $d\vec{r}$ – dx, dy, dz, то $dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$.

Робота сили $\vec{F}$ (рис. 89) на будь-якому скінченому переміщенні M_0M_1 дорівнює інтегралу від елементарної роботи, тобто

$$A_{(M_0,M_1)} = \int\limits_{M_0M_1} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Наведений вище інтеграл є криволінійним.

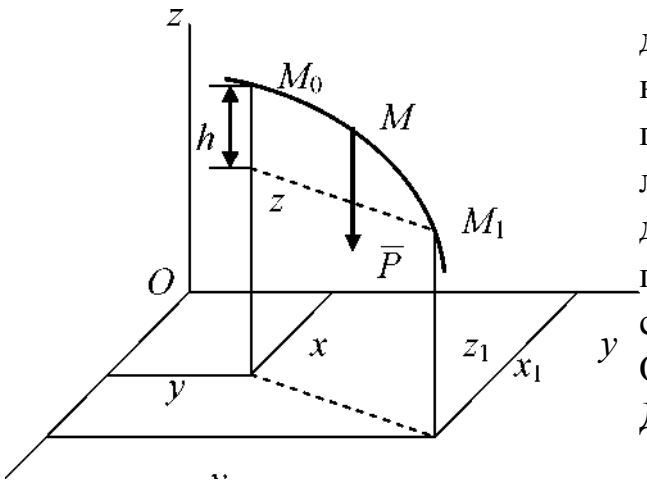


Рис. 89

Якщо діюча сила, яка прикладена до точки, стала за модулем і напрямком (рис. 90), а точка, до якої прикладена сила, рухається прямолінійно, то $A = Fs\cos\alpha$,
де F – модуль сили, s – величина переміщення, α – кут між напрямком сили і напрямком руху точки. Одиницею вимірювання роботи є Джоуль (1 Дж = 1 Н·м).

Розглянемо, як обчислюється робота різних сил на заданому переміщенні точки (з положення M_0 до M_1):

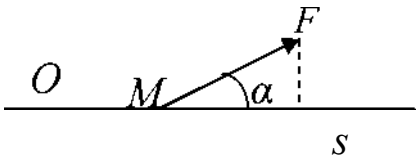


Рис. 90

Робота сили ваги

$$A(_{M_0,M_1}) = \pm Ph,$$

де P – сила ваги, що діє на точку,

h – вертикальне переміщення точки її прикладання (рис. 89).

Робота сил ваги, що діють на систему

$$A = \pm PH_C,$$

де P – вага системи, а H_C – вертикальне переміщення центра ваги (або центра мас).

Робота сил пружності

$$A_{(M_0,M_1)} = \frac{c}{2}\left(x_0^2 - x_1^2\right),$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини, x_0 і x_1 – координати початкового і кінцевого подовження пружини.

Таким чином, робота пружної сили дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості на різницю квадратів початкового і кінцевого подовжень (або стиснення) пружини.

Робота сили тертя

При коченні тіла без ковзання робота сили тертя, що перешкоджає ковзанню, на будь-якому переміщенні тіла дорівнює нулю.

Опір коченню, який виникає внаслідок деформації поверхонь, створює пару, момент якої $M = \delta N$, де δ – коефіцієнт тертя кочення, N – нормальна реакція.

Якщо N = const, то повна робота сил опору кочення дорівнює

$$A = -\delta N \varphi = -\frac{\delta}{R} N s_C,$$

де s_C – переміщення центра мас ($s_C = \varphi R$); φ – кут повороту.

Оскільки величина $\frac{\delta}{R}$ мала, то при наявності інших опорів опором коченню в першому наближенні можна знехтувати.

Робота сил тертя завжди від'ємна.

Робота пари сил, яка прикладена до тіла, що обертається навколо осі z

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z \, d\varphi,$$

де M_z – обертаючий момент, $d\varphi$ – диференціал кута повороту.

Якщо M_z = const, то $A = M_z \varphi_1$.

Потужність – це робота, що виконується за одиницю часу (характеризує зміну роботи за часом). Вона позначається буквою W і визначається за формули:

$$W = \frac{d\,A}{d\,t} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,.$$

Якщо робота виконується рівномірно, то потужність

$$W = \frac{A}{t},$$

де t – час, за який здійснено роботу A.

У загальному випадку $W = \dfrac{d\,A}{d\,t} = \dfrac{F_\tau\, d\,s}{d\,t} = F_\tau V$.

Потужність при поступальному русі:

$$W = F \cdot v_{cp} \cdot \cos\alpha,$$

де F – модуль сили, що діє на тіло; v_{cp} – середня швидкість руху тіла.

Середня потужність при поступальному русі дорівнює добутку модуля сили на середню швидкість переміщення і на косинус кута α між напрямком сили і швидкості.

Потужність при обертанні.

$$N = M_{об} \cdot \omega_{cp},$$

де $M_{об}$ – обертаючий момент; ω_{cp} – середня кутова швидкість.

Потужність сили при обертанні тіла дорівнює добутку обертаючого моменту на середню кутову швидкість.

Одиницею вимірювання потужності в системі СІ є ват (Вт = 1 Дж/с).

Коефіцієнт корисної дії (ККД). Будь-яка машина і механізм, здійснюючи роботу, витрачає частину енергії на подолання опорів. Крім корисної роботи, машина здійснює ще і додаткову роботу. Відношення корисної роботи до повної роботі або корисної потужності до всієї витраченої потужності називається коефіцієнтом корисної дії (ККД):

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{вит}} = \frac{W_{кор}}{W_{вит}}.$$

Корисна робота $A_{кор}$ (потужність $W_{кор}$) витрачається на рух із заданою швидкістю. Витрачена потужність $W_{вит}$ більше корисної $W_{кор}$ на величину потужності, що йде на подолання тертя в ланках машини, на витоку і подібні втрати, тому $\eta < 1$. Чим вище ККД, тим досконаліша машина.

ККД виражають у десяткових дробах або у відсотках. Наприклад, для сучасних авіаційних двигунів ККД – 0,4...0,5 (40 ... 50 %), для електрогенераторів – 0,9... 0,95 (90 ... 95%).

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки та механічної системи

Теорему про кінетичну енергію матеріальної точки можна виразити трьома способами:

Диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сили, що діє на цю точку

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=d\,A\,.$$

Похідна за часом від кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює потужності сили, що діє на цю точку

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\frac{d\,A}{dt}=N\,.$$

Теорема: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому переміщенні дорівнює роботі сили, що діє на точку на тому ж переміщенні

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int\limits_{M_0M_1}F\cos\alpha\,d\,s=A\Big|_{M_0}^{M_1}\,.$$

Якщо на точку діють декілька сил, то до правої частини рівнянь входить робота рівнодіючої цих сил, яка дорівнює сумі робіт усіх складових сил.

Кінетична енергія системи відрізняється від головного вектора кількостей руху й кінетичного моменту тим, що вона є скалярною величиною і на її зміну впливають не тільки зовнішні, а й внутрішні сили системи.

Теорема про зміну кінетичної енергії систем формулюється в диференціальній формі таким чином: диференціал кінетичної енергії системи дорівнює сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему

$$d\,T=\sum d\,A_k^e+\sum d\,A_k^i$$

Теорема про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі формулюється так: *зміна кінетичної енергії системи на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт всіх прикладених до системи зовнішніх і внутрішніх сил на цьому ж переміщенні*

$$T - T_0 = \sum A^e_k + \sum A^i_k .$$

Окремі випадки: Незмінна система (система, у якої відстань між точками прикладання внутрішніх сил під час її руху не змінюється). Сума робіт внутрішніх сил у цьому випадку дорівнює нулю, тому теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи запишеться так:

$$dT = \sum dA^e_k \quad \text{або} \quad T - T_0 = \sum A^e_k. \tag{84}$$

Система з ідеальними в'язями. Якщо в'язі ідеальні, тобто в'язі такі, що не змінюються за часом, то сума робіт усіх реакцій на елементарному переміщенні системи дорівнює нулю і в цьому випадку зміна кінетичної енергії системи на будь-якому її переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх активних сил.

За допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи можна описати як поступальний, так і обертальний рухи системи, а також складати диференціальні рівняння руху системи, тому теорема широко використовується при розв'язанні задач динаміки. При цьому необхідно дотримуватись такої послідовності:

а) визначати кінетичну енергію системи при різних видах руху її елементів;

б) знаходити роботу сил, які прикладені до системи, та роботу моментів сил, що діють на систему;

в) визначати потужності діючих на систему сил;

г) знаходити швидкості, прискорення та інші кінематичні характеристики точок або тіл системи.

Щоб визначити кінетичну енергію системи необхідно:

1) виявити, які тіла входять до системи;

2) встановити характер руху кожного з тіл системи;

3) знайти вираз для кінетичної енергії кожного з тіл, що входять у систему, відповідно до руху, який воно здійснює (поступальний, обертальний, плоскопаралельний);

4) визначити кінетичну енергію системи шляхом додавання кінетичної енергії тіл, що входять у систему.

Якщо система має один ступінь волі, то кінетичну енергію кожного з тіл, що входить до системи, необхідно виразити через будь-яку одну лінійну або кутову швидкість, прийняту за незалежну.

Для знаходження роботи, яку здійснюють прикладені до системи сили, необхідно:

а) з’ясувати й показати на розрахунковій схемі всі зовнішні й внутрішні сили, які здійснюють роботу. Якщо система незмінна то робота внутрішніх сил дорівнює нулю;

б) знайти переміщення точок прикладення сил, що здійснюють роботу під час руху системи, а також кути повороту тіл, до яких прикладені моменти;

в) скласти вирази для робіт, що здійснюються зовнішніми та внутрішніми силами та знайти їхню суму.

У тих випадках, коли необхідно знаходити потужність, доцільно застосовувати формули:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{V} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{V}\right| \cos\left(\vec{F} \wedge \vec{V}\right), \quad W = M_z \omega_e .$$

Задача 9 – на використання теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи.

Умова задачі. Механічна система складається з вантажу 1 масою m_1 = 4 кг (коефіцієнт тертя між площиною і вантажем f = 0,1), циліндричного суцільного однорідного котка 3 масою m_3 = 2 кг і ступінчастих шківів 4 і 5 з радіусами R_4 = 0,3 м, $r_4 = r_5$ =0,1 м, R_5 =0,2 м (масу шківа 5 (m_5 = 6 кг) вважати рівномірно розподіленою по його зовнішньому ободу). Тіла з’єднані між собою нерозтяжними нитками, які намотані на шківи, ділянки ниток паралельні відповідним площинам (рис. 91).

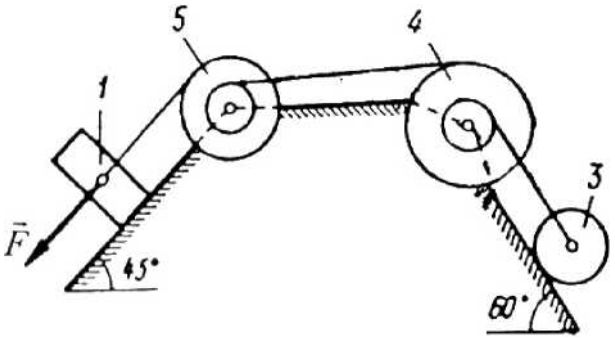


Рис. 91

Під дією сили F = 50(3 + 2S) Н, яка залежить від переміщення точки прикладання сили, система починає рух із стану спокою. Під час руху системи на шків 4 діє сталий момент сил опору, який дорівнює M_4 = 0,8 Н·м.

Визначити значення швидкості тіла 1 в той момент часу, коли переміщення точки прикладання сили дорівнюватиме S_1 = 1,0 м.

Розв'язання

Розглянемо рух механічної системи, яка складається з трьох тіл і невагомого шківа 4 (m_4 = 0), з'єднаних між собою нерозтяжними нитками (див. рис. 91).

Для визначення швидкості руху тіла 1 скористуємося теоремою про зміну кінетичної енергії механічної системи, яка записується у вигляді (171). Знаходимо величини, які входять в це рівняння. Покажемо швидкості центрів мас тіл та кутові швидкості шківів і котка (рис. 92).

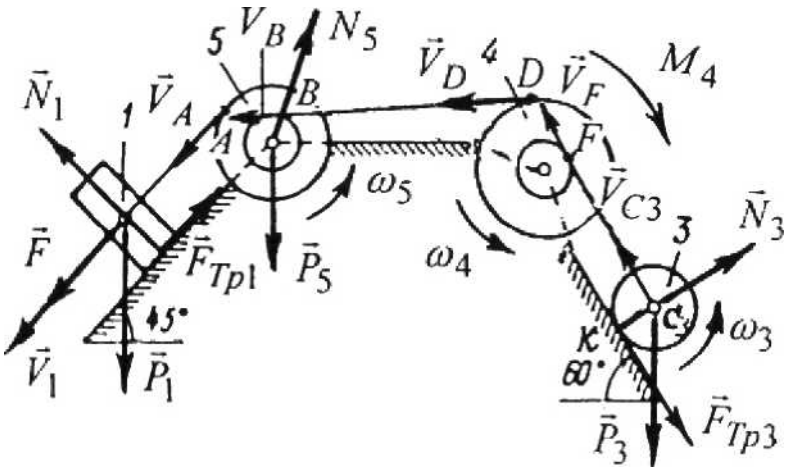


Рис. 92

Оскільки в початковий момент система знаходилася в стані спокою, то T_0 = 0. В кінцевому положенні кінетична енергія системи дорівнюватиме сумі кінетичних енергій тіл, що входять до системи, тобто

$$T_\Sigma = T_1 + T_3 + T_5. \qquad (85)$$

Тіло 1 рухається поступально. Тому його кінетична енергія визначається за формулою

$$T_1 = 0{,}5\cdot m_1 V_1^2 = 0{,}5\cdot 4\cdot V_1^2 = 2\cdot V_1^2.$$

Тіло 5 здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, яка перпендикулярна до площини шківа і проходить через центр мас, тому його кінетична енергія

$$T_5 = 0{,}5\cdot J_{z5}\cdot \omega_5^2 = 0{,}5\cdot 6\cdot R_5^2\cdot V_1^2 / R_5^2 = 3V_1^2,$$

де J_{z5} – момент інерції шківа, який згідно з умовою задачі визначається за формулою $J_{z5} = m_5 R_5^2$; ω_5 – кутова швидкість шківа, яка дорівнює

$$\omega_5 = \frac{V_A}{R_5} = \frac{V_1}{R_5}$$

(оскільки нитка нерозтяжна, то $V_A = V_1$).

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух, тому його кінетична енергія

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + \frac{1}{2} J_{z3}\,\omega_3^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{V_1^2}{6^2} + \frac{1}{2}\cdot R_3^2\cdot\frac{V_1^2}{6^2\cdot R_3^2} = \frac{3\cdot V_1^2}{72} = 0{,}0417 V_1^2$$

де V_{C3} – швидкість центру мас котка, яка (див. рис. 117) дорівнює

$$V_{C3} = V_F = \omega_4\cdot r_4 = V_D\cdot r_4/R_4 = V_B\cdot r_4/R_4 = \omega_5\cdot r_5\cdot r_4/R_4 =$$

$$= \frac{V_A}{R_5}\cdot\frac{r_5\cdot r_4}{R_4} = \frac{V_1\cdot r_5\cdot r_4}{R_5\cdot R_4} = \frac{V_1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1}{0{,}2\cdot 0{,}3} = \frac{V_1}{6}$$

($V_A = V_1$, $V_D = V_B$, $V_{C3} = V_F$ оскільки нитки нерозтяжні);

ω_3 – кутова швидкість котка, яка визначається за формулою

$$\omega_3 = \frac{V_{C3}}{CK} = \frac{V_{C3}}{R_3} = \frac{V_1}{6\cdot R_3}$$

(оскільки миттєвий центр швидкостей точка K – точка контакту котка з площиною); J_{z3} – момент інерції котка (оскільки він однорідний суцільний, тому $J_{z3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot R_3^2 = R_3^2$).

Таким чином, кінетична енергія механічної системи в кінцевому положенні згідно з (85) дорівнює

$$T_\Sigma = 2\cdot V_1^2 + 3\cdot V_1^2 + 0{,}042\cdot V_1^2 = 5{,}042\cdot V_1^2. \qquad (86)$$

Прикладаємо до механічної системи (див. рис. 92) всі діючі на неї зовнішні сили (активні $\vec{F}, \vec{P_1}, \vec{P_3}, \vec{P_5}$, момент опору M_4, реакції $\vec{N_1}, \vec{N_3}, \vec{N_5}$ і сили тертя $\vec{F}_{тр1}$ і $\vec{F}_{тр3}$) і визначаємо суму робіт цих сил на тому переміщенні, яке буде мати система, коли тіло 1 пройде шлях s_1.

$$\sum A_k^e = A_F + A_{N1} + A_{P1} + A_{Fтр1} + A_{P5} + A_{N5} + A_{M4} + A_{P3} + A_{Fтр3} + A_{N3}.$$

Маємо

$$A_F = \int_0^{s_1} F\,ds = \int_0^{s_1} 50\cdot(3+2\cdot s)\,ds = 50\cdot\left(3\cdot s_1 + s_1^2\right) =$$

$$= 50\cdot(3\cdot 1{,}0 + 1{,}0^2) = 200 \text{ Дж};$$

$$A_{P1} = P_1 \cdot H_1 = m_1 \cdot g \cdot H_1 = 4 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}7 = 27{,}44 \text{ Дж},$$

де H_1 – переміщення вантажу 1 по вертикалі, тобто відстань між початковим і кінцевим положеннями вантажу

$$(H_1 = s_1 \cdot \sin 45^0 = 1{,}0 \cdot \sin 45^0 = 0{,}7 \text{ м});$$

$$A_{Fmp1} = -F_{mp1} \cdot s_1 = -f \cdot N_1 \cdot s_1 = -f \cdot m_1 \cdot g \cdot s_1 \cdot \cos 45° =$$

$$= -0{,}1 \cdot 4 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}0 \cdot \cos 45° = -2{,}744 \text{ Дж};$$

$$A_{M4} = -M_4 \cdot \varphi_4 = -0{,}8 \cdot 1{,}67 = -1{,}34 \text{ Дж},$$

де φ_4 – кут повороту шківа 4 при переміщенні тіла 1 на величину s_1 (залежність між переміщенням s_1 і кутом φ_4 така ж сама як і між швидкістю V_1 і кутовою швидкістю ω_4, тобто

$$\varphi_4 = \frac{s_1 \cdot r_5}{R_4 \cdot R_5} = \frac{1{,}0 \cdot 0{,}1}{0{,}3 \cdot 0{,}2} = 1{,}67 \text{ рад}).$$

Знак « – » свідчить про те, що напрям сил тертя $\vec{F}_{mp1}$ і моменту опору M_4 протилежний переміщенню тіл, до яких вони прикладаються.

$$A_{P3} = -P_3 \cdot H_3 = -m_3 \cdot g \cdot H_3 = -2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}145 = -2{,}84 \text{ Дж},$$

де H_3 – переміщення центру мас тіла 3 із початкового положення в кінцеве, яке визначається за формулою

$$H_3 = s_3 \cdot \sin 60° = \varphi_4 \cdot r_4 = s_1 \cdot r_4 \cdot \sin 60°/6 =$$

$$= 1{,}0 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 60°/6 = 0{,}145 \text{ м}$$

(оскільки тіло 3 піднімається по нахиленій площині, а сила ваги P_3 напрямлена вниз, то робота цієї сили зі знаком мінус).

Робота всіх інших сил дорівнює нулю, оскільки $\vec{N}_1$ перпендикулярна переміщенню $\vec{s}_1$, $\vec{N}_5$ прикладена в нерухомій точці – в центрі мас тіла 5, а точка K, де прикладені сили $\vec{N}_3$ і $\vec{F}_{mp3}$, є миттєвий центр швидкостей котка 3.

Підставляючи одержані значення робіт в рівняння (84), матимемо

$$\sum A_k^e = 200 + 27{,}44 - 2{,}744 - 1{,}34 - 2{,}84 = 220{,}516 \text{ Дж}. \qquad (87)$$

З врахуванням значень T_Σ, T_0 і $\sum A_k^e$ рівняння (84) набуває вигляду $5{,}042 \cdot V_1^2 = 220{,}516$ звідки

$$V_1 = \sqrt{\frac{220{,}516}{5{,}042}} = 6{,}61 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $V_1 = 6{,}61$ м/с.

ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ

3.11. Метод кінетостатики (принцип Д'Аламбера)

Методом кінетостатики називається формальний прийом, який заснований на запису рівнянь руху тіл у вигляді рівнянь рівноваги.

Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки полягає в тому, що, додаючи в кожний момент часу до діючих на точку сил та реакцій в'язей сили інерції, ми отримуємо врівноважену систему сил

$$\vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}^{in} = 0,$$

де $\vec{F}^a$ – рівнодіюча активних сил, які діють на матеріальну точку,

$\vec{R}$ – рівнодіюча реакцій в'язей, накладених на точку,

$\vec{F}^{in}$ – сила інерції матеріальної точки, рівна за модулем добутку маси точки на модуль її прискорення і напрямлена протилежно напряму прискорення [6, 8]:

$$\vec{F}^{in} = -m\vec{a}.$$

Сили інерції вважаються фіктивними, оскільки вони до точки безпосередньо не прикладені. В дійсності вони прикладені до в'язей. *Принцип Д'Аламбера* формулюється наступним чином: *якщо в будь-який момент часу до діючих на точку активних сил і реакції в'язей приєднати силу інерції, то отримана система сил буде врівноваженою, тобто*

$$\vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}^{in} = 0.$$

Отримане рівняння еквівалентне другому закону Ньютона. Принцип Д'Аламбера дозволяє рівнянням руху матеріальної точки надати вигляд рівнянь статики і це робить однаковим підхід до розв'язання задач і значно спрощує відповідні розрахунки.

Якщо розглядається рух невільної матеріальної системи, яка складається з n матеріальних точок, то, застосовуючи принцип Д'Аламбера для кожної точки системи, можна записати рівняння

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{in} = 0, k = \overline{1,n},$$

де $\vec{F}_k^e$ – рівнодійна зовнішніх сил, діючих на k-ту точку системи;

$\vec{F}_k^i$ – рівнодійна внутрішніх сил, діючих на *k*-ту точку системи;

$\vec{R}_k$ – рівнодійна реакцій в'язей, прикладених до *k*-ої точки системи;

$\vec{F}_k^{in}$ – сила інерції *k*-ої точки системи.

Додаючи ці рівняння одержимо

$$\sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i + \sum \vec{R}_k + \sum \vec{F}_k^{in} = 0 .$$

Позначимо

$\sum \vec{F}_k^e = \vec{F}^e$ – головний вектор заданих зовнішніх сил;

$\sum \vec{F}_k^i = 0$ на підставі властивостей внутрішніх сил;

$\sum \vec{R}_k = \vec{R}$ – головний вектор реакцій в'язей;

$\sum \vec{F}_k^{in} = \vec{\Phi}^{in}$ – головний вектор сил інерції точок системи.

Таким чином можна записати

$$\vec{F}^e + \vec{R} + \vec{\Phi}^{in} = 0 . \qquad (88)$$

Проводячи з довільного нерухомого центру *O* в кожну точку системи радіуси-вектори $\vec{r}_k$ і помноживши векторне зліва радіус-вектор $\vec{r}_k$ кожної точки на суму векторів сил, діючих на кожну точку системи, одержимо

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i + \vec{r}_k \times \vec{R}_k + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{in} = 0 .$$

Додаючи ці рівняння, матимемо

$$\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i + \sum \vec{r}_k \times \vec{R}_k + \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{in} = 0 .$$

Оскільки тут $\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e = \vec{M}_O^e$ – головний момент зовнішніх сил відносно центру *O*, $\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = 0$ – на основі властивостей внутрішніх сил, $\sum \vec{r}_k \times \vec{R}_k = \vec{M}_O^R$ – головний момент реакцій в'язей відносно центру *O*, $\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{in} = \vec{M}_O^{in}$ – головний момент сил інерції точок системи відносно центру *O*, то

$$\vec{M}_O^e + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^{in} = 0\,. \qquad (89)$$

В результаті рівняння (88) і (89) виражають принцип Д'Аламбера для матеріальної системи.

У випадку, коли матеріальна система складається з декількох твердих тіл, то для спрощення обчислень головного вектора $\vec{\Phi}^{in}$ і головного моменту $\vec{M}_O^{in}$ сил інерції, доцільно враховувати характер руху тіл. Так при поступальному русі твердого тіла всі сили інерції зводяться до головного вектора, який дорівнює

$$\vec{\Phi}^{in} = -M\,\vec{a}_C\,,$$

де M – маса тіла, $\overrightarrow{a_C}$ – прискорення центру мас.

При обертальному русі тіла відносно нерухомої осі, яка проходить через центр мас тіла, всі сили інерції зводяться до пари, момент якої дорівнює

$$\vec{M}_O^{in} = -J_{Cz}\,\vec{\varepsilon}\,,$$

де J_{Cz} – момент інерції тіла відносно осі обертання, $\vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення.

У загальному випадку, тобто коли тіло здійснює одночасно і поступальний і обертальний рухи, всі сили інерції зводяться до головного вектора і головного моменту, які дорівнюють

$$\vec{\Phi}^{in} = -M\,\vec{a}_C\,, \qquad \vec{M}_O^{in} = -J_{Cz}\,\vec{\varepsilon}\,.$$

Розв'язуючи задачі на застосування принципу Д'Аламбера, *слід дотримуватись такої послідовності:*

1. Зробити схематичне креслення і прикласти активні сили до точки в поточному її положенні.
2. Звільнитися від в'язей, замінивши їх дію силами – реакціями в'язей.
3. Додати до активних сил і реакцій в'язей сили інерції.
4. Записати принцип Д'Аламбера.
5. Визначити невідомі величини.

Задача 10. Вертикальний вал *АК (АВ = BD = DE = EK = b* = 0,4 м), який обертається зі сталою кутовою швидкістю ω = 10 с$^{-1}$, закріплено в

точці A підп'ятником, а в точці E – підшипником. До валу в точці K під кутом $\alpha = 60^\circ$ жорстко прикріплено невагомий стержень 1 довжиною $l_1 = 0{,}4$ м з точковою масою $m_1 = 6$ кг на кінці, а в точці D під кутом $\beta = 45^\circ$ однорідний стержень 2 довжиною $l_2 = 0{,}6$ м і масою $m_2 = 4$ кг ; обидва стержня лежать в одній площині (рис. 93).

Нехтуючи вагою вала, визначити реакції підшипника і підп'ятника.

Розв'язання

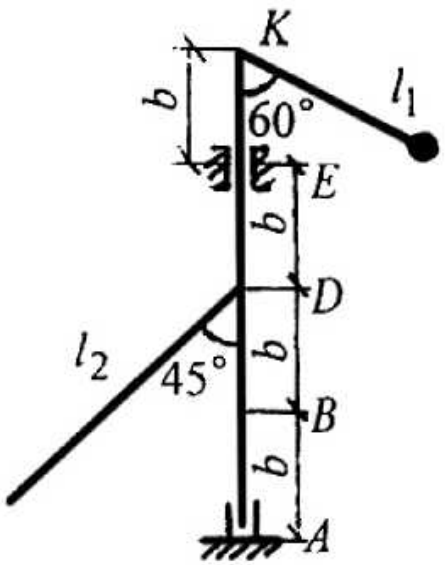


Рис. 93

Для визначення шуканих реакцій розглянемо рух матеріальної системи, яка складається з вала AK, однорідного стержня 2 і точкової маси на кінці невагомого стержня 1, скористуємося принципом Д'Аламбера.

Вибираємо осі координат Ax і Ay, які обертаються разом з валом і розташовані так, що стержні 1 і 2 лежать Axy. Показуємо всі діючі на механічну систему зовнішні сили P_1, P_2 і реакції в'язей – складові X_A, Y_A реакції підп'ятника в точці A і реакцію підшипника R_E в точці E (рис. 94).

Згідно з принципом Д'Аламбера приєднуємо до цих сил сили інерції елементів стержня 2 і точкової маси. Оскільки вал обертається зі сталою кутовою швидкістю (ω = const), то елементи стержня 2 з масою Δm_k мають тільки нормальні складові прискорення $\vec{a}_k^n$, які перпендикулярні до осі обертання і дорівнюють $a^n{}_k = \omega^2 \cdot h_k$ (h_k відстань від елемента до осі обертання).

Тоді сили інерції $\Delta\vec{F}_k^{in}$ будуть напрямлені від осі обертання і чисельно дорівнюватимуть $\Delta F_k^{in} = \Delta m_k\, a^n{}_k = \Delta m_k\, \omega^2\, h_k$. Оскільки всі $\Delta\vec{F}_k^{in}$ пропорційні h_k, то епюра цих сил утворює трикутник і їх можна замінити однією силою – рівнодійною $\vec{R}_2^{in}$, лінія дії якої проходить через центр ваги цього трикутника, тобто на відстані H від його вершини ($H = \frac{2}{3} l_2 \cos 45°$). Чисельне значення головного вектора сил інерції дорівнює

$$R^{in}{}_2 = m_2 a_{c2} = m_2 a_{c2}{}^n = m_2\omega^2 h_2 = m_2\omega^2 l_2 \sin 45°/2 =$$
$$= 4\cdot 10^2 \cdot 0{,}6\cdot 0{,}707/2 = 84{,}8 \text{ Н}.$$

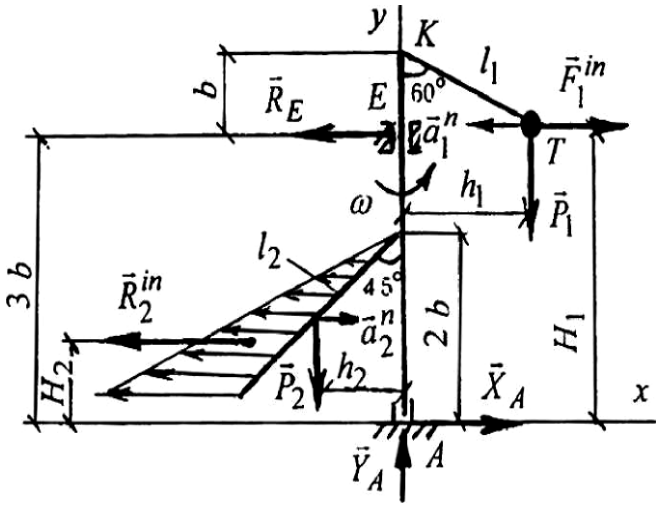


Рис. 94

Аналогічно визначається сила інерції точкової маси на кінці невагомого стержня 1 та її величина

$$F^{in}{}_1 = m_1 a_1{}^n = m_1\omega^2 h_1 = m_1\omega^2 l_1 \sin 60° = 6\cdot 10^2 \cdot 0{,}4\cdot \sin 60° = 207{,}8 \text{ Н}.$$

Згідно з принципом Д'Аламбера всі діючі на механічну систему сили і сили інерції утворюють зрівноважену систему сил, які розташовані в площині *Axy*. Тому повинно виконуватись три рівняння статики.

Складаємо їх:

$$\sum F_{ix} = 0,\ X_A + F^{in}{}_1 - R_E - R^{in}{}_2 = 0, \tag{90}$$

$$\sum F_{iy} = 0,\ Y_A - P_1 - P_2 = 0, \tag{91}$$

$$\sum m_A(F_i) = 0,\ P_2 h_2 + R^{in}{}_2 H_2 + R_E\cdot 3b - F^{in}{}_1 H_1 - P_1 h_1 = 0. \tag{92}$$

Маємо $P_1 = m_1 g = 6\cdot 9{,}8 = 58{,}8$ Н, $P_2 = m_2 g = 4\cdot 9{,}8 = 39{,}2$ Н,

$$h_1 = l_1 \sin 60° = 0{,}4\cdot 0{,}866 = 0{,}346 \text{ м},$$

$$h_2 = 0{,}5\, l_2 \sin 45° = 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}707 = 0{,}212 \text{ м},$$

$$H_1 = 4b - l_1 \cos 60° = 4\cdot 0{,}4 - 0{,}4\cdot \cos 60° = 1{,}4 \text{ м},$$

$$H_2 = 2b - 2l_2 \cos 45°/3 = 2\cdot 0{,}4 - 2\cdot 0{,}6\cdot \cos 45°/3 = 0{,}517 \text{ м}.$$

Розв'язуємо одержану систему рівнянь.

Знаходимо з рівняння (91)

$$Y_A = P_1 + P_2 = 58{,}8 + 39{,}2 = 98 \text{ Н},$$

з рівняння (92)

$$R_E = \frac{1}{3 \cdot b}\left(P_1 \cdot h_1 - P_2 \cdot h_2 - R_2^{in} \cdot H_2 + F_1^{in} \cdot H_1\right) =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 0{,}4} \cdot \left(58{,}8 \cdot 0{,}346 - 39{,}2 \cdot 0{,}212 - 84{,}8 \cdot 0{,}517 + 207{,}8 \cdot 1{,}4\right) = 215{,}93 \text{ Н}$$

з рівняння (90)

$$X_A = -F^{in}{}_1 + R_E + R^{in}{}_2 = -207{,}8 + 215{,}93 + 84{,}8 = 92{,}93 \text{ Н}.$$

Для перевірки одержаних результатів складемо рівняння моментів усіх сил (заданих і реакцій в'язей) відносно точки E:

$$\sum m_E(F_i) = X_A \cdot H_1 - Y_A \cdot h_1 + P_1 (h_1 + h_2) -$$

$$- R^{in}{}_2 (H_1 - H_2) - R_E(b - l_1 \cos 60^\circ) = 0.$$

Підставляємо в це рівняння значення всіх величин

$$92{,}93 \cdot 1{,}4 - 98 \cdot 0{,}346 + 39{,}2 \cdot (0{,}346 + 0{,}212) -$$

$$- 84{,}8 \cdot (1{,}4 - 0{,}517) - 215{,}93 \cdot (0{,}4 - 0{,}4 \cdot \cos 60^\circ) = 0$$

або $151{,}98 - 151{,}97 \approx 0.$

Отриманий результат підтверджує, що задачу розв'язано вірно.

Відповідь: X_A =92,93 Н, Y_A =98 Н, R_E =215,93 Н.

3.12. Принцип можливих переміщень (принцип Лагранжа)

Принцип можливих переміщень встановлює умови рівноваги будь-якої механічної системи. У статиці вивчалася рівновага системи шляхом розгляду кожного з тіл системи окремо. При цьому накладені на систему в'язі замінювали відповідними наперед невідомими реакціями, що приводило до розв'язання великої кількості рівнянь. На відміну від цього підходу принцип можливих переміщень дає можливість не вводити невідомі реакції.

Можливими (*віртуальними*) *переміщеннями* називаються переміщення, що задовольняють трьом умовам: переміщення повинні бути нескінченно малими; переміщення не порушують в'язей, накладених на

систему; час є фіксованим. Можливі переміщення це мислимі, а не дійсні переміщення.

Принцип можливих (віртуальних) переміщень формулюється так: *для рівноваги механічної системи з ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх діючих на неї активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю*.

$$\sum \delta A_k = 0 \text{ або } \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx}\, \delta x_k + F_{ky}\, \delta y_k + F_{kz}\, \delta z_k \right) = 0 \ ,$$

де δx_k , δy_k , δz_k – проекції можливого переміщення $\delta \vec{r}_k$ на осі координат; F_{kx} , F_{kx} , F_{kx} – проекції сили на координатні осі.

Задачі, які розв'язуються за допомогою принципу можливих переміщень, можна розбити на дві групи:

1. Задачі, в яких об'єктом рівноваги є матеріальні системи, що не мають ступенів вільності, для яких необхідно визначити реакції в'язей або зусилля в їх елементах.

2. Задачі, в яких розглядаються матеріальні системи, що мають одну або декілька ступенів волі, і треба знайти активні сили або положення ланок механізму, які забезпечують рівновагу системи.

У задачах, які розв'язуються за допомогою принципу можливих переміщень, як правило, розглядається невільна матеріальна система, що знаходиться в стані рівноваги, і для якої потрібно визначити реакції в'язей або деякі активні сили, що прикладені до системи.

Для визначення реакції опори необхідно:

1. Зобразити схему матеріальної системи, у якій дана опора вилучена чи зняте одне з накладених обмежень.

2. Прикласти до системи реакцію в тому напрямку, у якому знімаються обмеження.

3. Записати математичний вираз принципу можливих переміщень і з отриманого рівняння визначити невідому реакцію.

Для визначення можливої роботи активних сил, прикладених до системи, необхідно:

1. Вибрати узагальнені координати.

2. Виразити декартові координати точок прикладання сил через узагальнені координати

$$x_k = x_k(q), \quad y_k = y_k(q), \quad z_k = z_k(q).$$

3. Варіюючи отримані вирази, визначити варіації декартових координат як функції від варіацій узагальнених координат

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q}\delta q \ , \ \delta y_k = \frac{\partial y_k}{\partial q}\delta q \ , \ \delta z_k = \frac{\partial z_k}{\partial q}\delta q \, .$$

4. Записати вираз для можливої роботи і дорівняти її нулю.

Якщо тіло, на яке діє сила, здійснює обертальний рух, то елементарну роботу даної сили на можливому переміщенні слід визначати як добуток моменту сили відносно осі обертання на кут повороту $\delta\varphi$:

$$\delta A = \pm M\,\delta\varphi \ .$$

Розв'язуючи задачі за допомогою даного принципу, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

1. Зобразити схематично матеріальну систему, рівновага якої розглядається.

2. Докласти всіх зусиль, що діють на систему, за винятком реакцій ідеальних в'язей. Якщо в'язі неідеальні (з тертям), то сили тертя додати до активних сил.

3. Визначити число степенів вільності системи, виявити число невідомих параметрів, що однозначно визначають положення системи.

4. Вибрати узагальнені координати, надати системі можливі переміщення, написати вирази для можливої роботи і дорівняти їх нулю.

5. Визначити з отриманих рівнянь невідому шукану величину.

Задача 11 – на рівновагу сил, які прикладені до механічної системи з однією степеню вільності з використанням принципу Лагранжа (принципу можливих переміщень). Розв'язуючи цю задачу, слід додержуватися такої послідовності дій:

а) вибрати систему координат, відносно якої визначаються можливі переміщення точок механічної системи (система координат повинна бути нерухомою);

б) провести аналіз усіх сил, що діють на механічну систему, поділяючи їх на активні і реакції в'язей (реакції неідеальних в'язей, наприклад, сили тертя, відносять до активних сил, а реакції ідеальних в'язей на розрахунковій схемі не показують);

в) визначити число ступенів вільності механічної системи;

г) надати можливе переміщення одній з точок механічної системи і виразити можливі переміщення точок прикладання сил через нього;

д) записати рівняння, яке випливає з принципу Лагранжа, і обчислити суму робіт усіх сил, про які йшла мова в п. б), на відповідних переміщеннях, дорівнюючи цю суму нулю;

е) розв'язуючи одержане рівняння, знайти шукану величину.

Умова задачі. Механізм (рис. 95, а), який розташовано у горизонтальній площині, під дією сил *P, F* та пари з моментом *M* знаходиться у рівновазі. Положення механізму визначається кутами α, β, γ, φ, θ. Довжина кривошипів O_1A та O_2E дорівнює відповідно l_1 = 0,4 м, l_4 = 0,8 м (довжина l_2 і l_3 ланок *AE* і *CB* – довільна). Точки *C* і *K* знаходяться по середині відповідних ланок. Визначити величину і напрям сили р, якщо:

$$\alpha = \beta = \gamma = 60°,\ \varphi = 90°,\ \theta = 120°,\ M_1 = 5\ \text{кН·м},\ P = 4\ \text{кН}.$$

Задачу розв'язати користуючись принципом Лагранжа (принципом можливих переміщень).

Розв'язання

Будуємо схему механізму у відповідності з заданими кутами. Прикладаємо до ланок механізму пару сил з моментом M_1, силу *P* та силу *F,* яку слід визначити (напрям сили *F* вибираємо довільно).

Механізм має одну ступінь волі, тобто одне незалежне переміщення. Надаємо механізму можливе переміщення і обчислюємо суму елементарних робіт всіх діючих активних сил і пар на цьому переміщенні, дорівнюючи її нулю.

$$\sum \delta A_k^a = 0 \quad \text{або} \quad M_1\,\delta\varphi_1 + P\delta S_B - F\,\delta S_K = 0. \tag{93}$$

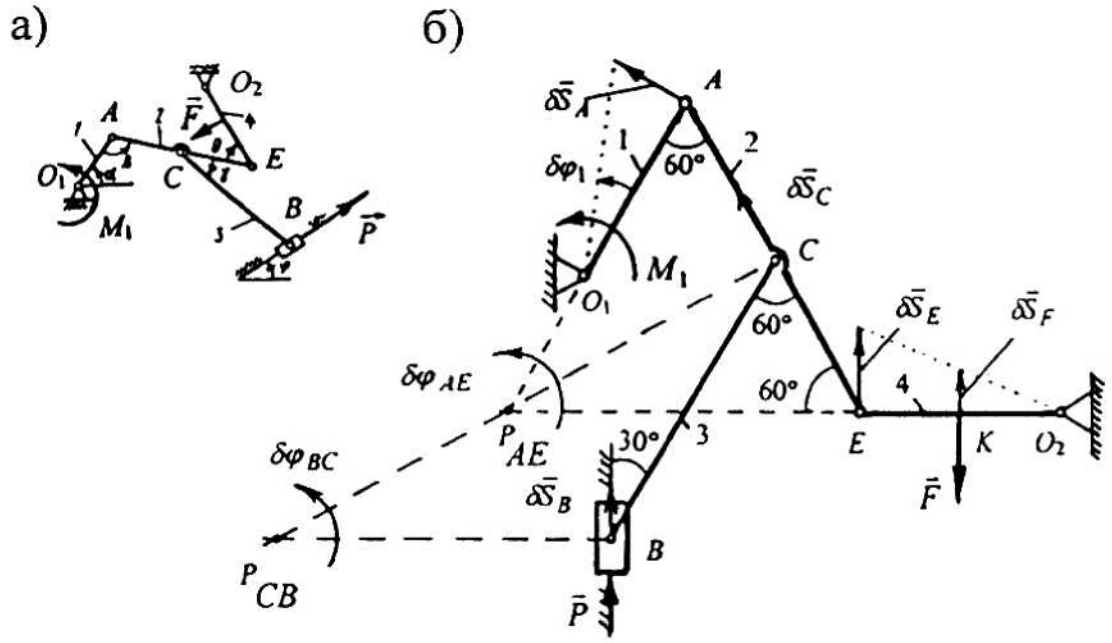


Рис. 95

Всі можливі переміщення, що входять у рівняння (93), виражаємо через будь-яке одне, наприклад через $\delta\varphi_1$:

$$\delta S_A = \delta\varphi_1 \cdot l_1; \quad \delta S_E = \delta S_A ,$$

оскільки ΔAEP_{AE} рівнобічний;

$$\delta S_C = \delta S_A \cdot \cos 30^\circ = \delta\varphi_1 \cdot l_1 \cdot \cos 30^\circ;$$

$$\delta S_K = \frac{\delta S_E \cdot KO_2}{EO_2} = \frac{\delta S_E}{2} = 0,5\delta\varphi_1 \cdot l_1;$$

$\delta S_B \cdot \cos 30^\circ = \delta S_C \cdot \cos 60^\circ$ звідки $\delta S_B = \delta\varphi_1 \cdot l_1 \cdot \cos 60^\circ$.

Підставляючи одержані співвідношення у рівняння (93), одержимо:

$$M_1 \cdot \delta\varphi_1 + P \cdot \delta\varphi_1 \cdot l_1 \cos 60^\circ - 0,5F \cdot \delta\varphi_1 \cdot l_1 = 0$$

або після зведення подібних

$$(M_1 + P \cdot l_1 \cdot \cos 60^\circ - 0,5 \cdot F \cdot l_1) \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Оскільки множник, що стоїть при незалежному можливому переміщенні у добутку, внаслідок необхідності і достатності принципу можливих переміщень повинен дорівнювати нулю, то дістанемо одне рівняння з одним невідомим, тобто

$$M_1 + P \cdot l_1 \cdot \cos 60^\circ - 0,5 \cdot F \cdot l_1 = 0,$$

звідки

$$F = \frac{2 \cdot M_1}{l_1} + P = \frac{2 \cdot 5}{0,4} + 4 = 29 \text{ кН}.$$

Значення сили F одержано зі знаком « + », тому напрям сили F на схемі (див. рис. 95,б) було обрано вірно. В результаті умова рівноваги механізму буде забезпечуватися, якщо F = 29 кН, а її напрям збігатиметься з напрямом, показаним на рис. 95, б.

Відповідь: F = 29 кН.

3.13. Динаміка в аналітичної механіці

Методами аналітичної механіки можна розв’язувати задачі динаміки при використанні диференціальних рівнянь руху механічної системи в узагальнених координатах. До рівнянь входять узагальнені сили.

Узагальнені координати. Узагальнені сили

Як відомо, узагальненими координатами називаються незалежні параметри, що однозначно визначають положення механічної системи.

Число узагальнених координат системи матеріальних точок дорівнює числу степенів вільності.

Розглянемо систему матеріальних точок, положення яких визначається відповідним радіусом-вектором

$$\vec{r_k} = \vec{r_k}(q_1, q_2, \ldots, q_s, t),$$

де: $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – узагальнені координати.

Похідні за часом від q_j (j = 1, 2,..., s) називаються узагальненими швидкостями системи $\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$.

Розмірність узагальненої швидкості залежить від розмірності відповідної узагальненої координати.

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок, на які діють сили з величинами $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Якщо система має s ступенів волі, то її положення визначається узагальненими координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Надамо системі можливого переміщення і підрахуємо суму елементарних робіт на цьому переміщенні:

$$\sum \delta A_k = \sum_{j=1}^{s} \vec{F_k} \frac{\partial \vec{r_k}}{\partial q_j} \delta q_j .$$

Узагальненими силами Q_j називаються коефіцієнти, що стоять у виразі суми можливих робіт активних сил на відповідних узагальнених можливих переміщеннях:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \vec{F_k} \cdot \frac{\partial \vec{r_k}}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

де n – число матеріальних точок, s – число узагальнених координат, $\vec{F_k}$ – рівнодіюча активних сил, прикладених до k-ої точки.

Вираз, що стоїть під знаком суми, являє собою скалярний добуток векторів $\vec{F_k}$ і $\dfrac{\partial \vec{r_k}}{\partial q_j}$.

Оскільки

$$\vec{F}_k = F_{kx}\vec{i} + F_{ky}\vec{j} + F_{kz}\vec{k}, \quad \frac{\partial \vec{r_k}}{\partial q_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}\vec{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_j}\vec{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_j}\vec{k},$$

то у проекціях на осі декартової системи координат узагальнена сила запишеться у виді:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Якщо сили, що діють на систему, потенціальні, то узагальнені сили дорівнюють частинним похідним від потенційної енергії системи по відповідним узагальненим координатам, узятим зі знаком мінус, тобто

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

3.14. Обчислення узагальнених сил

Узагальнені сили можуть обчислюватися безпосередньо за формулою

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right),$$

але простіше узагальнені сили обчислюються як коефіцієнти у виразі суми елементарних робіт активних сил при відповідних узагальнених можливих переміщеннях δq_j, тобто

$$\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s.$$

Щоб визначити узагальнену силу треба:

1. З'ясувати число степенів вільності і вибрати відповідні узагальнені координати.

2. Прикласти активні сили до точок системи.

3. Якщо не всі в'язі ідеальні, то необхідно додати до активних сил відповідні реакції в'язей.

4. Для визначення узагальненої сили Q_j, що відповідає j-й узагальненій координаті q_j, треба обчислити суму робіт усіх сил на можливому узагальненому переміщенні δq_j.

Наприклад, щоб знайти Q_j, треба у виразі елементарної роботи покласти $\delta q_1 \neq 0$, а варіації інших узагальнених координат покласти рівними нулю і визначити Q_1 за формулою:

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta q_1}.$$

5. Якщо всі сили, що діють на матеріальну систему, потенційні, то треба знайти вираз для потенційної енергії, виразивши її через узагальнені

координати і знайти узагальнену силу за формулою

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Відповідно до принципу можливих переміщень необхідною і достатньою умовою рівноваги механічної системи є рівність нулю суми елементарних робіт сил на будь-якому можливому переміщенні системи.

В узагальнених координатах ця умова записується у виді

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + ... + Q_s \cdot \delta q_s = 0.$$

Оскільки δq_j незалежні варіації і можуть приймати будь-які значення, то ця рівність виконується за умови:

$$Q_1 = Q_2 = ... = Q_s = 0.$$

В результаті для того, щоб механічна система знаходилася в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб всі узагальнені сили дорівнювали нулю.

Рівняння Лагранжа другого роду

Лагранж запропонував оригінальний метод складання диференціальних рівнянь руху матеріальної системи.

Цей метод відрізняється простотою, носить загальний характер і може бути застосованим до розв'язання широкого класу задач.

Рівняння Лагранжа другого роду записуються у виді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

де T – кінетична енергія системи; Q_j – узагальнена сила, що відповідає координаті q_j, $\dot{q}_j$ – узагальнена швидкість, s – число ступенів волі.

У випадку потенціальних сил рівняння Лагранжа записуються так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

де Π – потенціальна енергія механічної системи.

Якщо увести функцію Лагранжа L, яка дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергій, тобто $L = T - \Pi$, то рівняння Лагранжа набувають такого вигляду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Рівняння Лагранжа складаються за єдиною схемою і мають великі переваги у порівнянні з іншими методами. Основні труднощі, які виникають при розв'язанні задач динаміки, полягають у виборі теорем, за допомогою яких розв'язується та чи інша задача. Метод Лагранжа цього не вимагає і є універсальним методом складання диференціальних рівнянь руху механічної системи.

3.15. Розв'язання задач з використанням рівнянь Лагранжа

Алгоритм складання рівнянь Лагранжа другого роду такий:

Визначити число ступенів волі матеріальної системи.

1. Вибрати систему координат і узагальнені координати.
2. Обчислити кінетичну енергію системи в узагальнених координатах.
3. Визначити узагальнені сили, що відповідають узагальненим координатам.
4. Знайти частинні похідні від кінетичної енергії по узагальненим координатам і узагальненим швидкостям.
5. Підставити значення частинних похідних від кінетичної енергії та значення узагальнених сил в рівняння Лагранжа.

У випадку потенціальних сил потрібно записати вирази для кінетичної і потенціальної енергій матеріальної системи.

Задача 12 – на використання рівнянь Лагранжа другого роду для дослідження руху механічної системи.

Умова задачі. Через блок *Д* перекинуто нитку з двома вантажами *A* і *B* масою m_1 і m_2 на кінцях (рис. 96, а). Нехтуючи масою нитки і блока, знайти рух системи, вважаючи, що блок підвішений на вертикальній пружині з жорсткістю *c* (така схема враховує вплив пружних деформацій на осі блока). Рух починається із стану спокою.

Розв'язання

За умовою задачі вантажі *A* і *B* будуть здійснювати переміщення по вертикалі. Положення механічної системи визначається двома координатами *x* і *y* ($q_1 = x$, $q_2 = y$), де *x* – зсув осі блока з положення статичної рівноваги; *y* – відстань вантажу *A* від осі блока (рис. 96, б).

Для складання рівнянь руху нашої механічної системи скористуємось рівняннями Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad j=1,2.$$

Вираз кінетичної енергії механічної системи у відповідності з обраними узагальненими координатами має вигляд

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}+\dot{y}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}-\dot{y}\right)^2.$$

Обчислюємо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальненим швидкостям і координатам

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m_1\left(\dot{x}+\dot{y}\right)+m_2\left(\dot{x}-\dot{y}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m_1\left(\dot{x}+\dot{y}\right)-m_2\left(\dot{x}-\dot{y}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial y}=0.$$

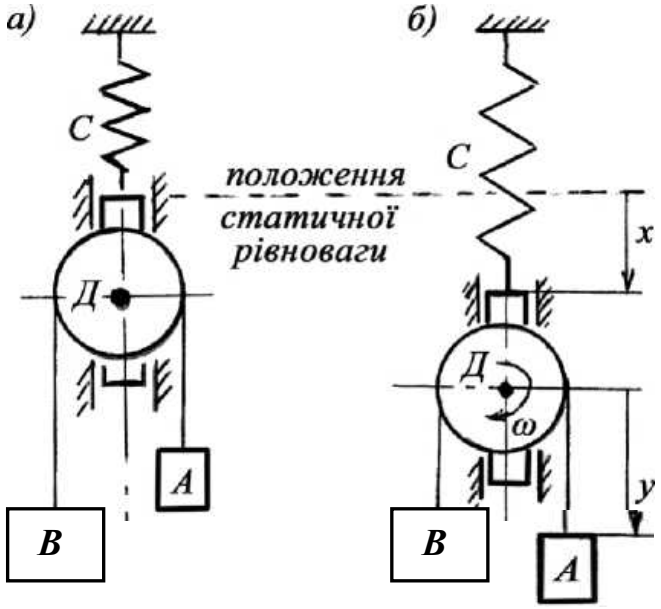


Рис. 96

Обчислимо узагальнені сили, які відповідають обраним узагальненим координатам. Для цього надамо системі можливого переміщення, при якому координата x набуває приросту (варіації) δx, а y = const ($\delta y = 0$). Враховуючи, що x відраховується від положення статичної рівноваги пружини, тобто коли сила ваги двох вантажів $(m_1+m_2)g$ врівноважується пружною силою пружини, будемо мати:

$$\delta A_1 = -cx \cdot \delta x, \quad \text{тоді} \quad Q_1 = -cx.$$

Далі, надаючи системі можливого переміщення, при якому координата y набуває приросту δy, а $x = \text{const}$ ($\delta x = 0$), одержимо:

$$\delta A_2 = (m_1 - m_2)g \cdot \delta y, \quad \text{тоді} \quad Q_2 = (m_1 - m_2)\, g.$$

Підставляючи значення частинних похідних і узагальнених сил в рівняння Лагранжа, одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 - m_2)\ddot{y} &= -c\,x, \\ (m_1 - m_2)\ddot{x} + (m_1 + m_2)\ddot{y} &= (m_1 - m_2)g. \end{aligned}\right\}$$

Виключаючи з цієї системи рівнянь y, одержимо одне рівняння виду

$$\ddot{x} + k^2 x = -a,$$

де
$$k^2 = \frac{(m_1 + m_2)c}{4\,m_1 m_2}, \; a = \frac{(m_1 - m_2)^2}{4\,m_1 m_2}.$$

Розв'язок одержаного рівняння при початкових умовах $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, має вигляд

$$x = -\frac{a}{k^2}(1 - \cos kt).$$

Таким чином ми бачимо, що вісь блока здійснює гармонійні коливання з частотою k й амплітудою A

$$A = \frac{a}{k^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2 g}{(m_1 + m_2)c}.$$

Інтегруючи двічі друге рівняння наведеної вище системи з врахуванням початкових умов, одержимо:

$$(m_1 + m_2)y = (m_1 - m_2)\frac{g\,t^2}{2} - (m_1 - m_2)x,$$

звідки з врахуванням одержаного значення x маємо

$$y = \frac{(m_1 - m_2)g\,t^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt).$$

Одержане рівняння і визначає закон відносного руху вантажу A. Абсолютний рух вантажу A, очевидно, буде описуватись рівнянням $y_A = y + x$, а вантажу B відповідно рівнянням $y_B = y - x$, якщо величина y_B відраховується вгору.

Відповідь:
$$y_A = \frac{(m_1 - m_2)g\,t^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{2\,m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt),$$

$$y_B = \frac{(m_1 - m_2)g\,t^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt).$$

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ З ДИНАМІКИ
Демонстраційний варіант

Завдання 1–7 мають п’ять варіантів відповіді, серед яких лише один правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді, позначте його в *бланку відповідей*.

1. Вкажіть рядок, у якому наведено тільки механічні величини:

1) час, метр, секунда;
2) швидкість, об'єм, кілограм;
3) прискорення, час, метр;
4) квадратний метр, секунда, довжина;
5) час, довжина, маса.

а	б	в	г	д
1	4	5	2	3

2.

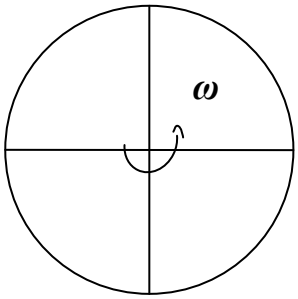


Рис. Тд1

Момент інерції маховика (рис. Тд1) дорівнює I_z = 0,2 кг·м^2. Корисна потужність двигуна N = 0,2 кВт. Через який час маховик матиме частоту обертання n = 1200 об/хв.?

а	б	в	г	д
9,7 с	10,5 с	2,8 с	17,4 с	7,9 с

3. На візку, що рухається прямолінійно зі сталою швидкістю V = 3 м/с, встановлена лебідка з барабаном радіуса r = 0,5 м, який рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω = 4 с$^{-1}$. За допомогою каната, намотаного на барабан, здійснюється підйом вантажу (рис. Тд2). Визначити у скільки разів кінетична енергія вантажу відносно шляху більше його кінетичної енергії відносно візка.

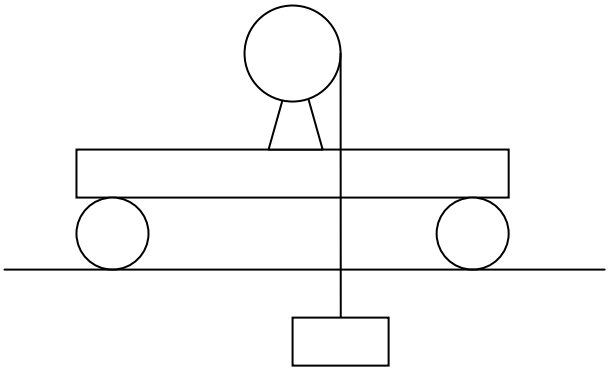


Рис. Тд2

а	б	в	г	д
1,8	4,5	5	3,25	2,75

4. Стержень довжиною 1 м і масою 3 кг рухається у вертикальній площині, спираючись одним кінцем у підлогу, а другім – у стену. В момент часу, коли стержень створює кут $\alpha = 60^\circ$ з підлогою, прискорення центру мас у проекції на Oy дорівнює $-1{,}8$ м/с^2. Визначити нормальну реакцію підлоги в обраний момент часу.

а	б	в	г	д
12 Н	42,5 Н	18 Н	24 Н	20,4 Н

5. Точка маси $m = 0{,}5$ кг рухається по колової траєкторії радіуса $r = 2$ м за законом $S = 2t^2$ (м). Визначити модуль сили інерції точки при $t_1 = 1{,}5$ с.

а	б	в	г	д
10 Н	9,22 Н	8,15 Н	12,43 Н	7,64 Н

6. Визначить вагу G вантажу, якій рівномірно переміщується по шорсткій горизонтальній площині під дією сили F (рис. Тд3), якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}125$.

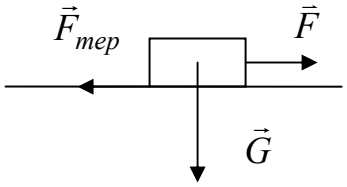


Рис. Тд3

а	б	в	г	д
$G = 5F$	$G = 2F$	$G = 4F$	$G = 8F$	$G = 3F$

7. Для розтягу пружини на 10 *см* необхідно прикласти силу 200 *Н*. Визначте величину F сили, яку треба прикласти, щоб розтягнути на 2 *см* дві такі пружини, з'єднані паралельно:

а	б	в	г	д
$F = 400$ Н	$F = 80$ Н	$F = 200$ Н	$F = 10$ Н	$F = 40$ Н

У завданнях 8, 9 до кожного з чотирьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте в *бланку* позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

8. Установіть відповідність між назвою механічної величини (**1–4**) і математичним виразом, за яким її можна визначити (**А – Д**).

Механічна величина	***Математичний вираз***
1 імпульс системи	**А** $\sum m_i h_i^2$
2 момент інерції	**Б** $0{,}5\sum m_i \vec{v}_i^2$
3 кінетична енергія	**В** $\vec{F} \cdot d\vec{r}$
4 елементарна робота сили	**Г** $\sum m_i \vec{v}_i$
	Д $\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

9. Для даної механічної системи (рис. Тд4) визначити кінетичну енергію відповідних тіл, якщо $m_1 = 4m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 2m$, $m_4 = m$; $i_{2x} = 0{,}8R$, $i_{3x} = R\sqrt{2}$.

Установіть відповідність між кінетичними енергіями тіл (**1–4**) та їх значеннями (**А – Д**) за умови, що кутова швидкість тіла 3 дорівнює ω.

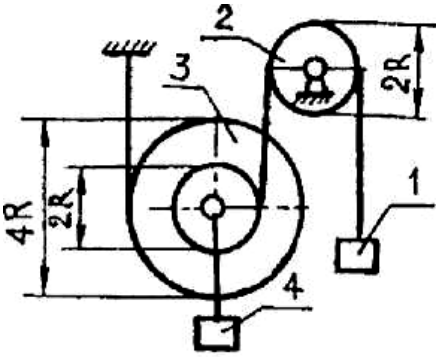


Рис. Тд4

Величина	Значення
1. Кінетична енергія тіла 1	**А** $16mR^2\omega^2$
2. Кінетична енергія тіла 2	**Б** $6mR^2\omega^2$
3. Кінетична енергія тіла 3	**В** $36mR^2\omega^2$
4. Кінетична енергія тіла 4	**Г** $8{,}64mR^2\omega^2$
	Д $2mR^2\omega^2$

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

Виконайте завдання 10–12. Числові розрахунки здійснюйте за остаточною формулою розв’язання задачі в загальному вигляді. Одержані числові відповіді запишіть у ***бланку*** **на відповідних місцях**. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, ураховуючи положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці. Одиниці фізичних величин явно зазначати не потрібно.

10. Світлі і темні важки, з яких складено вантажі (рис. Тд5), мають однакову масу m = 50 г, маса блока m_1 = 80 г. Тертям у блоці й масою нитки знехтувати.

1. Обчислити модуль прискорення (м/с^2), з яким рухатиметься система, якщо прибрати підставку з-під лівого вантажу.

2. Визначте силу натягу (Н) лівої вітки нитки, до якої підвішені вантажі, при цьому русі.

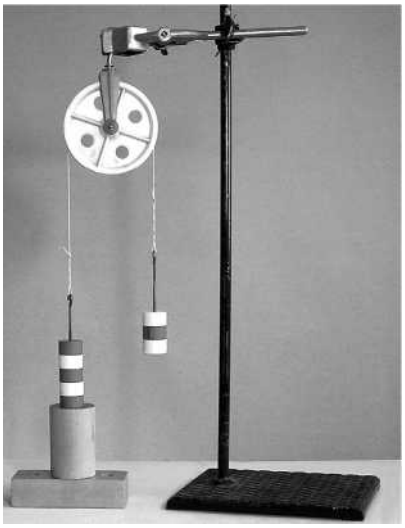


Рис. Тд5

11. Локомотив потяга, що рухається прямолінійно і горизонтально, розвиває силу тяги F = 150 кН. Визначте силу опору рухові $F_{оп}$, якщо на ділянці 500 м його швидкість збільшилась від 36 км/год до 54 км/год. Маса потяга 1000 т.

12. Вантаж масою m = 2 кг, отримавши в точці A початкову швидкість V_0 = 5 м/с, рухається вздовж труби AB, яка нахилена до горизонту під кутом α = 30° (рис. Тд6). На вантаж окрім сили ваги діє сила опору середовища R, яка напрямлена проти руху і залежить від швидкості вантажу $R = 0{,}2V^2$. Знайти швидкість вантажу в точці B, якщо довжина труби l_{AB} = 2 м.

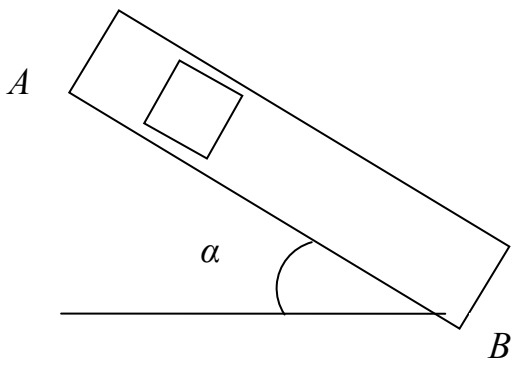


Рис. Тд6

Розв'язання

1. Треба розрізняти механічні величини та одиниці цих величин. З наведених рядків тільки один рядок вміщує механічні величини: **5)** час, довжина, маса.

Обираємо 1.в.

2. При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі маємо

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z .$$

Зв'язок з потужністю дається за формули

$$N = M_z \cdot \omega .$$

Далі складається диференціальне рівняння

$$N = I_z \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega .$$

Після відокремлювання змінних та інтегрування

$$N \cdot t = 0{,}5 I_z \omega^2 .$$

Формула для знаходження часу дає

$$t = \frac{0{,}5 I_z}{N} \cdot \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}2}{200} \cdot \left(\frac{3{,}142 \cdot 1200}{30}\right)^2 = 7{,}90 c .$$

Обираємо 2.д.

3. Рух вантажу (відносний та абсолютний) розглядається як поступальний. Тоді кінетичну енергію тіла у русі можна визначати за формули

$$E = 0{,}5 \cdot mv^2 .$$

У відносному русі (рух вантажу відносно візку зі швидкістю $v_r = \omega \cdot r$) маємо

$$E_r = 0{,}5\cdot mv_r^2 = 0{,}5\cdot m\omega^2 r^2.$$

Кінетична енергія вантажу відносно шляху системи (в абсолютному русі $v_a^2 = v_e^2 + v_r^2$, $v_e = V$)

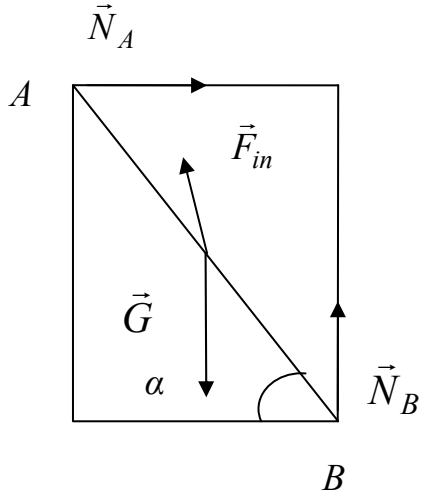
$$E_a = 0{,}5\cdot mv_a^2 = 0{,}5\cdot m\cdot(v_e^2 + v_r^2) = 0{,}5\cdot m\cdot(V^2 + \omega^2 r^2).$$

Далі знаходиться відношення

$$\frac{E_a}{E_r} = \frac{V^2 + \omega^2 r^2}{\omega^2 r^2} = 1 + \frac{V^2}{\omega^2 r^2} = 1 + \frac{9}{4} = 3{,}25.$$

Обираємо 3.г.

4. Стержень AB знаходиться у плоскому русі: вісь ординат – вертикальна, вісь абсцис – горизонтальна, поверхні – гладенькі. Можна визначити напрямки сил $G = mg$ –сили тяжіння, F_{in} – сила інерції та реакції у точках A і B (рис. Т6). За принципом Д'Аламбера для цих сил виконується умова рівноваги у проекції на Oy:



$$F_{in,y} - G + N_B = 0,$$

звідки

$$N_B = G - F_{in} = m\cdot(g - a_C) = 3\cdot 8 = 24 \text{ Н}.$$

Рис. Т6

Обираємо 4.г.

5. За визначенням модуль сили інерції точки

$$F^{in} = m\cdot a,$$

де a – модуль прискорення точки.

За формулою

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{dS}{dt}\right)^2\right)^2}\ .$$

Далі визначаються

$$\frac{dS}{dt}=4t\,;\quad \frac{d^2S}{dt^2}=4\,.$$

При t_1 = 1,5 с

$$\frac{dS}{dt}=6\ м/с;\ \frac{d^2S}{dt^2}=4\ м/с^2\,.$$

Після підстановки

$$F^{in}=0{,}5\cdot\sqrt{4^2+\left(\frac{6^2}{2}\right)^2}=0{,}5\cdot\sqrt{16+324}=9{,}22\ \text{Н}.$$

Обираємо 5.б.

6. При прямолінійному рівномірному русі тіла виконується рівність $F_{тер}=F$. За законом тертя ковзання $F_{тер}=f\cdot G$. Тоді маємо

$$G=F/f=F/0{,}125=8F.$$

За результатами обирається 6г.

7. За законом Гука $F=k\cdot\Delta x$, де $k=2\cdot c=2\cdot 200/10=40$ Н /см – жорсткість пружної системи, Δx = 2 см. Після підстановки значень отримаємо F = 80 Н. Обираємо 7.б.

8. ***Відповідь:***

1. Імпульс системи можна визначити за формули $\sum m_i\vec{v}_i$ (1.Г)

2. Момент інерції можна визначити за формули $\sum m_i h_i^2$ (2.А)

3. Кінетичну енергію можна визначити за формули $0{,}5\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}$ (3.Б)

4. Елементарну роботу сили можна визначити за формули $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ (4.В)

Відмічаємо у таблиці відповідні комірки

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1				Х	
2	Х				
3		Х			
4			Х		

9. ***Відповідь:*** Тіло 3 здійснює плоский рух, тому формула для знаходження його кінетичної енергії

$$E_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{C3}^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 .$$

Маємо

$$\omega_3 = \omega; v_{C3} = 2\omega R; I_3 = m_3 i_{3x}^2 = 2m \cdot 2R^2 = 4mR^2 .$$

Тоді

$$E_3 = 4mR^2\omega^2 + 2mR^2\omega^2 = 6mR^2\omega^2 .$$

Тіло 4 здійснює поступальний рух, формула для знаходження його кінетичної енергії

$$E_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 .$$

Маємо

$$v_4 = 2\omega R; m_4 = m, \qquad E_4 = 2mR^2\omega^2 .$$

Тіло 2 здійснює обертальний рух, формула для знаходження його кінетичної енергії

$$E_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 .$$

Маємо

$$\omega_2 = 3\omega; I_2 = m_2 i_{2x}^2 = 3m \cdot 0{,}64R^2 = 1{,}92mR^2 .$$

Тоді

$$E_2 = 8{,}64mR^2\omega^2 .$$

Тіло 1 здійснює поступальний рух, формула для знаходження його кінетичної енергії

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 .$$

Маємо

$$v_1 = 3\omega R; m_1 = 4m; \qquad E_1 = 36mR^2\omega^2 .$$

Тоді обираємо комірки 1.В ; 2.Г ; 3.Б ; 4.Д.

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1			X		
2				X	
3		X			
4					X

10. Сили натягу віток нитки $T_{лів}$ і $T_{пр}$ з урахуванням того, що прискорення вантажів дорівнює a, за другим законом Ньютона

$$T_{лів} = 5m\cdot (g - a); \; T_{пр} = 3m\cdot (g + a).$$

Блок прискорено обертається проти годинникової стрілки ($T_{лів} > T_{пр}$). Обертальний момент, що діє на блок

$$M = (T_{лів} - T_{пр})\cdot R.$$

Момент інерції блока дорівнює $I = 0{,}5m_1\cdot R^2$. Зв'язок лінійного прискорення точок поверхні блока та кутового прискорення блока

$$a = \varepsilon\cdot R.$$

За основним законом динаміки обертального руху блока

$$\frac{m_1 R^2}{2}\cdot\frac{a}{R} = \left(T_{лів} - T_{пр}\right)\cdot R.$$

Після підстановки і перетворень

$$0{,}5 m_1 a = 2mg - 8ma,$$

звідки

$$a = \frac{2m}{8m + 0{,}5m_1}g = \frac{2\cdot 0{,}05}{8\cdot 0{,}05 + 0{,}5\cdot 0{,}08}\cdot 9{,}8 = 2{,}227 \text{ м/с}^2.$$

Далі знаходиться

$$T_{лів} = 5\cdot 0{,}05\cdot (9{,}8 - 2{,}2) = 1{,}9 \text{ Н}.$$

Відповідь: 1) $a = 2{,}2$ м/с^2 2) $T_{лів} = 1{,}9$ Н.

11. За другим законом Ньютона рівняння руху потяга

$$m\cdot a = F - F_{оп},$$

звідси

$$F_{оп} = F - m\cdot a.$$

Рух потягу – прямолінійний і рівноприскорений, тоді за формулами кінематики

$$t = \frac{2\cdot S}{v_0 + v_1}; \quad a = \frac{v_1 - v_0}{t}.$$

За умовами задачі

$$S = 500 \text{ м}; \quad v_0 = 10 \text{ м/с}; \; v_1 = 15 \text{ м/с}.$$

Після підстановки значень

$$t = \frac{2\cdot 500}{10 + 15} = 40\,c; \quad a = \frac{15 - 10}{40} = 0{,}125\,м/c^2.$$

$$F_{оп} = 150 - 1000\cdot 0{,}125 = 25\,кН.$$

Якщо при розв’язанні задачі використовується математична система MathCAD, тоді можливий запис одержання відповіді (рис. Т9)

$t := \frac{(2\cdot 500)}{10+15} \rightarrow 40$ с $\quad a := \frac{(15-10)}{40} = 0.125$ м/с^2 $\quad Fon := 150 - 1000\cdot 0.125 = 25$ кН

***Відповідь*:** $F_{оп} = 25$ кН.

12. Якщо вісь абсцис напрямлена вздовж AB, то диференціальне рівняння руху в проекції на Ax:

$$m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{dx}\cdot V = mg\sin\alpha - R.$$

Після відокремлювання змінних отримуємо рівняння

$$\frac{V\,dV}{g\sin\alpha - R/m} = dx.$$

Далі рівняння інтегрується

$$\int_{V_0}^{V_B} \frac{V\,dV}{g\sin\alpha - 0{,}2V^2/m} = \int_0^{l_{AB}} dx$$

з результатом

$$-2{,}5m\ln\left(g\sin\alpha - 0{,}2V^2/m\right)\Big|_{V_0}^{V_B} = l_{AB}.$$

Після потенціювання знаходиться

$$g\sin\alpha - 0{,}2V_B^2/m = \left(g\sin\alpha - 0{,}2V_0^2/m\right)\cdot\exp\left(-0{,}4l_{AB}/m\right).$$

Тоді

$$V_B = \sqrt{5m\left(g\sin\alpha - \left(g\sin\alpha - 0{,}2V_0^2/m\right)\cdot\exp\left(-0{,}4\cdot l_{AB}/m\right)\right)}.$$

Після підстановки значень параметрів

$$V_B = \sqrt{5\cdot 2\cdot\left(9{,}8\cdot 0{,}5 - \left(9{,}8\cdot 0{,}5 - 0{,}2\cdot 25/2\right)\cdot\exp\left(-0{,}4\cdot 2/2\right)\right)} = 5{,}737 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $V_B = 5{,}74$ м/с.

Контрольні запитання з динаміки

1. Предмет динаміки. Які основні закони динаміки?
2. Диференційні рівняння руху точки. Сформулюйте дві задачі динаміки точки.
3. Вільні лінійні коливання без урахування опору та при наявності опору, пропорційного швидкості.
4. Вимушені лінійні коливання без урахування опору та при наявності опору, пропорційного швидкості. Резонанс.

5. Динаміка відносного руху точки.
6. Класифікація сил, що діють на точки системи. Зовнішні та внутрішні сили. Властивості внутрішніх сил.
7. Центр мас механічної системи. Як знайти радіус-вектор та координати центру мас?
8. Осьові моменти інерції однорідних тіл. Радіус інерції.
9. Кількість руху точки та системи. Формули обчислення кількості руху системи.
10. Чому дорівнює імпульс сили за скінченний проміжок часу у випадку $\vec{F}$ = const?
11. Теорема про зміну кінетичного моменту системи. При яких умовах виконується закон збереження кінетичного моменту?
12. Елементарна та повна робота сили. Потужність сил.
13. Теорема про зміну кінетичної енергії точки та механічної системи. Закон збереження повної механічної енергії.
14. Принцип Д'Аламбера для точки та механічної системи. Який вид мають рівняння кінетостатики?
15. Наслідки з принципу Д'Аламбера. Обчислення головного вектора та головного моменту сил інерції.
16. Дійсні, можливі та віртуальні переміщення. Як знайти кількість ступенів вільності механічної системи?
17. Узагальнені координати та узагальнені сили. Способи обчислення узагальнених сил.
18. Як скласти рівняння Лагранжа другого роду?

3.16. Варіанти індивідуальних завдань з динаміки

Задача Д1. Вантаж *D* масою *m,* отримавши в точці *A* початкову швидкість V_0, рухається вздовж вигнутої труби *ABC,* яка розташована у вертикальній площині; ділянки труби або обидві нахилені, або одна горизонтальна, а інша нахилена (рис. Д1.1–Д1.5, табл. Д1). На ділянці *AB* на вантаж окрім сили ваги діє стала сила *Q* (її напрям показано на схемах) та сила опору середовища *R*, яка залежить від швидкості вантажу *V* (ця сила напрямлена проти руху). В точці *B* вантаж, не змінюючи значення своєї швидкості, переходить на ділянку *BC* труби, де на нього окрім сили ваги діє змінна сила, проекція якої на вісь *x* задається в таблиці Д1.

Вважаючи вантаж матеріальною точкою і знаючи довжину ділянки *AB* (*AB* = *l*) або час руху тіла від точки *A* до точки *B*, знайти закон руху вантажу на ділянці *BC,* тобто $x = f(x)$, де $x = BD$. Тертям між вантажем і трубою знехтувати.

Зауваження. *Задача Д1 – на інтегрування диференціальних рівнянь руху точки (розв'язування основної задачі динаміки). Розв'язок задачі розбивається на дві частини. Спочатку треба скласти і проінтегрувати методом розподілення змінних диференціальне рівняння руху точки (вантажу) на ділянці AB, враховуючи початкові умови. Потім, знаючи час руху на ділянці AB або її довжину, визначити швидкість, яку буде мати вантаж в точці B. Ця швидкість буде початковою для руху вантажу на ділянці BC. Після цього треба скласти і проінтегрувати диференціальне рівняння руху вантажу на ділянці BC також з врахуванням початкових умов, починаючи відлік часу з моменту, коли вантаж знаходиться в точці B, і покладаючи, що в цей момент часу t = 0. При інтегруванні рівняння руху на ділянці AB у випадку, коли задається довжина ділянки, доцільно переходити в рівнянні до змінної x,враховуючи, що* $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}$.

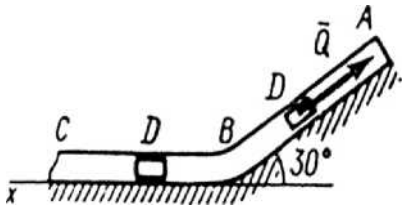


Рис. Д1.1

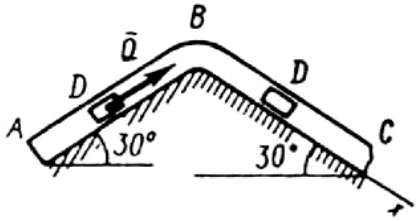


Рис. Д1.2

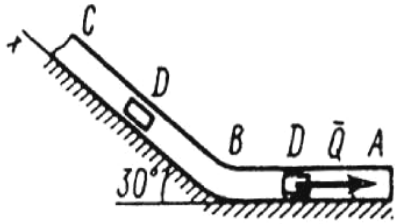


Рис. Д1.3

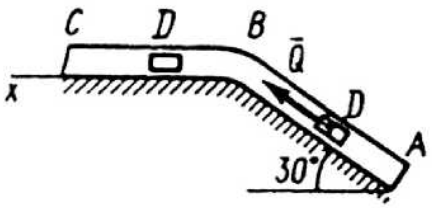


Рис. Д1.4

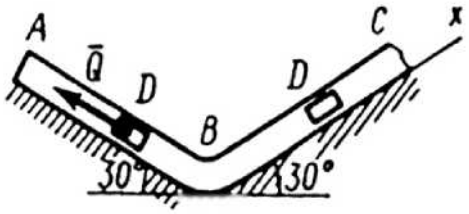


Рис. Д1.5

Таблиця Д1

Номер умови	m, кг	V_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2,4	12	5	$0{,}8\ V^2$	1,5	–	$4\sin(4t)$
1	2	20	6	$0{,}4\ V$	–	2,5	$-5\cos(4t)$
2	8	10	16	$0{,}5V^2$	4	–	$6t^2$
3	1,8	24	5	$0{,}3V$	–	2	$-2\cos(2t)$
4	6	15	12	$0{,}6V^2$	5	–	$-5\sin(2t)$
5	4,5	22	9	$0{,}5\ V$	–	3	$3t$
6	4	12	10	$0{,}8\ V^2$	2,5	–	$6\cos(4t)$
7	1,6	18	4	$0{,}4\ V$	–	2	$-3\sin(4t)$
8	4,8	10	10	$0{,}2\ V^2$	4	–	$4\cos(2t)$
9	3	22	9	$0{,}5\ V$	–	3	$4\sin(2t)$

Задача Д2. Вантаж масою m, який прикріплено до системи пружин з жорсткістю С1, С2 і С3 відповідно, рухається вздовж направляючої ab (рис. Д2.1–Д2.5, табл. Д2). На вантаж окрім сил ваги і пружності пружини діють: сила R опору середовища, яка пропорційна першій ступені швидкості ($R = \mu \cdot V$), та збурююча сила Q, яка змінюється за законом

$$Q = A \sin pt + B \cos pt.$$

Знайти закон руху вантажу, якщо в початковий момент вантаж відхилено від положення рівноваги на величину λ_0 і надано швидкості V_0. Тертям між направляючою ab і вантажем знехтувати.

Зауваження. Задача Д2 – на дослідження коливального руху матеріальної точки. Розв'язуючи цю задачу, систему пружин, до яких прикріплено вантаж, слід замінити однією – їм еквівалентною, жорсткість якої визначається в залежності від характеру з'єднання пружин.

Після складання рівняння руху вантажу його слід проінтегрувати, враховуючи початкові умови.

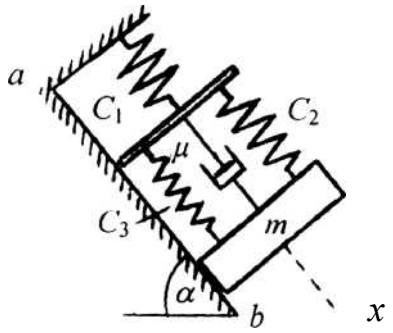


Рис. Д 2.1

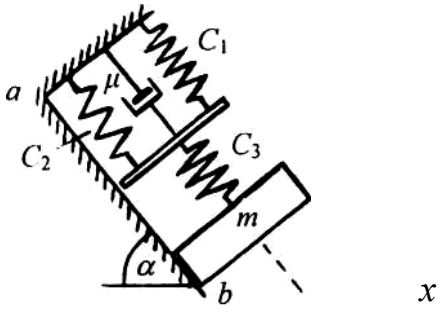


Рис. Д 2.2

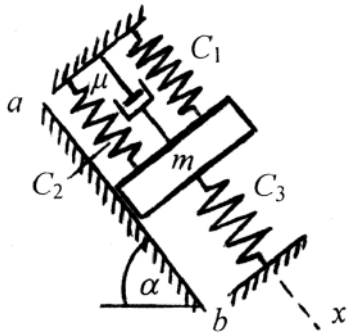


Рис. Д 2.3

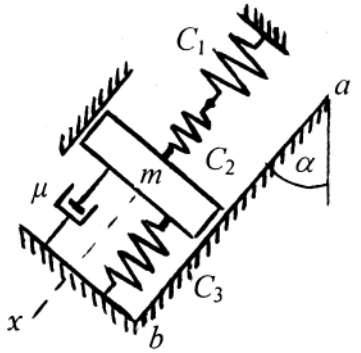


Рис. Д 2.4

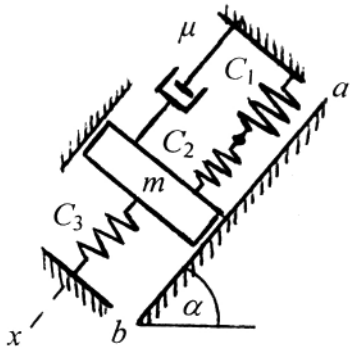


Рис. Д 2.5

Таблиця Д2

Номер умови	m, кг	C_1, Н/м	C_2, Н/м	C_3, Н/м	α, град	μ, Нс/м	p, $с^{-1}$	A, Н	B, Н	λ_0, м	V_0, м/с
0	0,2	100	200	300	0	0	9	0	5	0,01	0
1	0,4	200	300	400	30	0	8	9	0	0	0,2
2	0,6	300	400	500	45	8	6	0	7	0,01	0
3	0,8	400	500	300	60	4	7	0	0	0,04	0,4
4	0,3	150	250	400	90	6	5	6	0	0	0,3
5	0,5	250	650	100	0	0	8	0	8	0,03	0,2
6	0,7	350	450	200	30	0	9	4	0	0	0
7	1,0	450	550	200	45	4	5	0	0	0,02	0,5
8	0,2	200	300	300	60	0	7	7	0	0	0
9	0,4	300	400	100	90	0	6	0	6	0	0

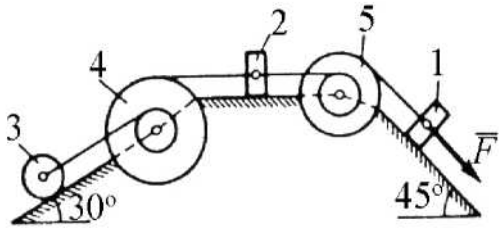
Задача Д3. Механічна система (рис. Д3.1–Д3.5) складається з вантажів 1 і 2 масою m_1 і m_2 відповідно (коефіцієнт тертя між площиною і вантажами f = 0,1), циліндричного суцільного однорідного котка 3 масою m_3 і ступінчастих шківів 4 і 5 з радіусами R_4 = 0,3 м, $r_4 = r_5$ = 0,1 м, R_5 = 0,2 м (масу кожного шківа вважати рівномірно розподіленою по його зовнішньому ободу). Тіла з'єднані між собою нерозтяжними нитками, які намотані на шківи (ділянки ниток паралельні відповідним площинам).

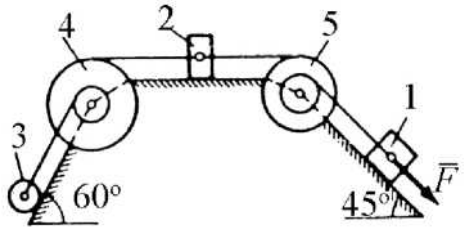
Під дією сили $F = f(s)$, яка залежить від переміщення точки прикладання сили, система починає рух із стану спокою. Під час руху системи на шківи 4 і 5 діють сталі моменти сил опору, які дорівнюють M_4 і M_5, відповідно.

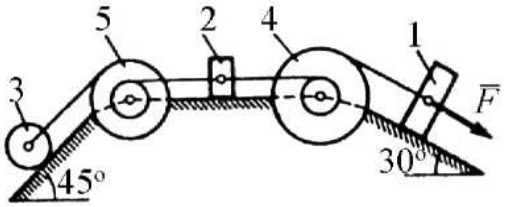
Визначити значення шуканої величини, яку вказано в табл. Д3, в той момент часу, коли переміщення точки прикладання сили F дорівнюватиме s_1.

Зауваження. *Задача Д3 – на використання теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи, яка записується в такому вигляді:* $T_1 - T_0 = \sum A^e_k$. *Розв'язуючи задачу за допомогою цієї теореми, слід пам'ятати, що кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій усіх тіл, які входять до системи. Кінетичну енергію кожного тіла треба записати як функцію тієї швидкості* (*лінійну або кутову*), *яку треба визначити згідно з умовою задачі. При обчисленні кінетичної енергії*

котка, який здійснює плоский рух, для встановлення залежності між його кутовою швидкістю і швидкістю його центру мас доцільно скористатись поняттям про миттєвий центр швидкостей. При обчисленні роботи всі переміщення тіл слід виразити через задане переміщення s_1 (залежність між переміщеннями буде такою ж, як між відповідними швидкостями). Коли в таблиці маса вантажу $m_1=0$ (або $m_2 = 0$), то цей вантаж на схемі не показувати; шківи 4 і 5 слід завжди показувати на схемі (навіть в тому випадку, коли їхня маса дорівнює нулю).







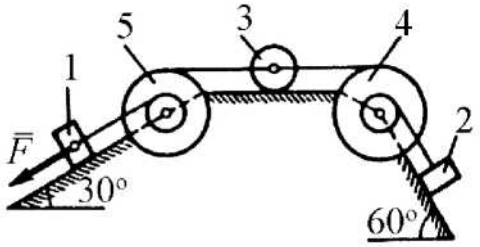


Рис. Д3.1

Рис. Д3.2

Рис. Д3.3

Рис. Д3.4

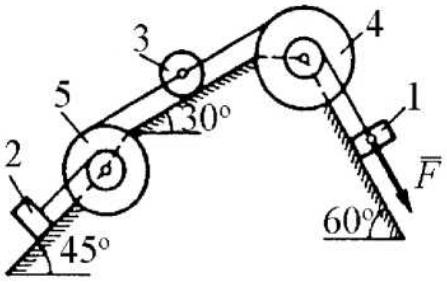


Рис. Д3.5

Таблиця Д3

Номер умови	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н·м	M_5, Н·м	$F=f(s)$	s_1, м	Знайти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	$50(2+3s)$	1,0	V_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	$20(5+2s)$	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	$80(3+4s)$	0,8	V_{C3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	$40(4+5s)$	0,6	V_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	$30(3+2s)$	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	$40(3+5s)$	1,6	V_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	$60(2+5s)$	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	$30(8+3s)$	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	$40(2+5s)$	1,6	V_{C3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	$50(3+2s)$	1,4	V_2

Задача Д4. Вертикальний вал *АК* (рис.Д4.1 – Д4.5), який обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 10\text{с}^{-1}$, закріплено в точці *А* підп'ятником і циліндричним підшипником в точці, яку вказано в стовпчику 2 табл. Д4. $AB = BD = DE = EK = b = 0{,}4$ м. До валу жорстко прикріплено невагомий стержень 1 довжиною $l_1 = 0{,}4$ м з точковою масою $m_1 = 6$ кг на кінці та однорідний стержень 2 довжиною $l_2 = 0{,}6$ м і масою $m_2 = 4$ кг; обидва стержня лежать в одній площині. Точки кріплення стержнів до валу вказані в таблиці Д6 в стовпчиках 3 і 4, а значення кутів α і β – в стовпчиках 5 і 6.

Нехтуючи вагою вала, визначити реакції підшипника і підп'ятника.

Зауваження. *Задача Д4 – на використання до вивчення руху механічної системи принципу Д'Аламбера. При розв'язанні задачі слід врахувати, що коли сили інерції частинок тіла (в нашому випадку – стержня 2) мають рівнодійну $R^н$, то чисельно вона дорівнює $R^н = ma_c$, де a_c – прискорення центру мас С стержня, але лінія дії сили $R^н$ в загальному випадку не проходить через точку С.*

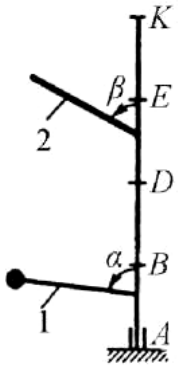


Рис. Д4.1

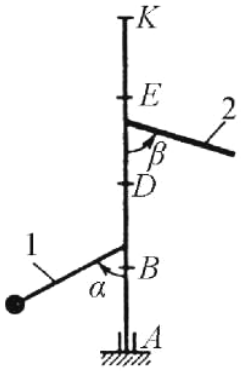


Рис. Д4.2

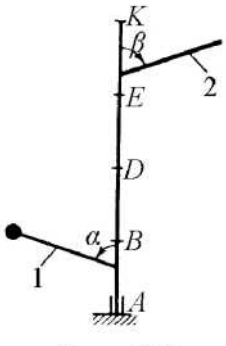


Рис. Д4.3

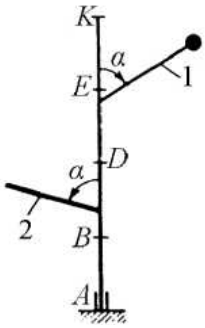


Рис. Д4.4

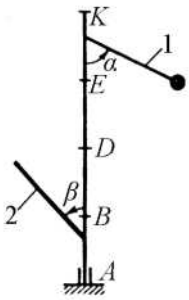


Рис. Д4.5

Таблиця Д4

Номер умови	Підшипник в точці	Кріплення		$\alpha°$	$\beta°$	Номер умови	Підшипник в точці	Кріплення		$\alpha°$	$\beta°$
		стержня 1 в точці	стержня 2 в точці					стержня 1 в точці	стержня 2 в точці		
0	*B*	*D*	*K*	30	45	5	*D*	*K*	*B*	30	45
1	*D*	*B*	*E*	45	60	6	*E*	*B*	*K*	45	30
2	*E*	*D*	*B*	60	75	7	*K*	*E*	*B*	60	75
3	*K*	*D*	*E*	75	30	8	*D*	*E*	*K*	75	60
4	*B*	*E*	*D*	90	60	9	*E*	*K*	*D*	90	45

Задача Д5. Механізм, розташований в горизонтальній площині, знаходиться у рівновазі під дією прикладених до нього сил. Положення рівноваги визначається кутами α, β, γ, φ, θ (рис. Д5.1– Д5.5, табл. Д5). Довжини ланок механізму дорівнюють: l_1 = 0,4 м, $l_4 = 1,0$ м (довжини ланок l_2 і l_3, у випадку необхідності приймаються довільними); точка *E* знаходиться по середині відповідної ланки.

На механізм діють: дві пари сил з моментами M_1 і M_2, які прикладені до ланок 1 і 4.

Механізм урівноважується силою *Q*, яка діє на повзун *B*. Визначити величину і напрям цієї сили.

Зауваження. *Задача Д5 – на визначення умов рівноваги механічної системи за допомогою принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа). Механізм, який пропонується в задачі, має одну ступінь волі, оскільки має одне незалежне переміщення. Для розв'язання задачі слід надати механізму можливого переміщення, обчислити суму елементарних робіт усіх діючих на механізм сил і пар сил на цьому переміщенні і порівняти суму з нулем. Після цього, щоб отримати шуканий результат, треба виразити всі елементарні переміщення, які входять до рівняння через якесь одне. Слід пам'ятати, що залежність між елементарними переміщеннями буде такою ж, як і між швидкостями точок і кутовими швидкостями ланок при русі механізму (треба скористатись відомими з кінематики методами знаходження цих залежностей, див. приклад виконання задачі Д5).*

Побудову схеми механізму слід починати з ланки, положення якої визначається кутом α.

Таблиця Д5

Номер умови	Кути					Моменти, Н·м	
	α°	β°	γ°	φ°	θ°	M_1	M_2
0	60	60	60	90	120	100	560
1	90	120	90	90	60	120	520
2	60	150	120	90	30	140	480
3	30	150	120	0	60	160	440
4	0	120	90	0	45	180	400
5	30	120	30	0	60	200	360
6	30	120	120	0	60	220	320
7	0	150	30	0	60	240	280
8	0	60	30	0	120	260	240
9	90	150	120	90	30	280	200

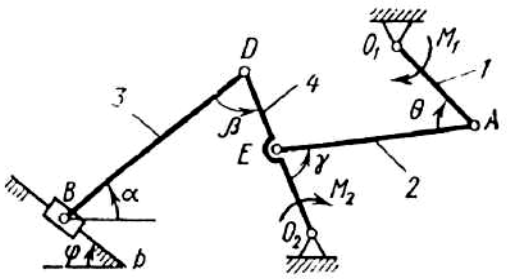


Рис. Д5.1

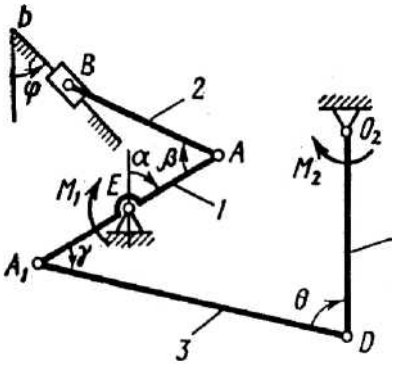


Рис. Д5.2

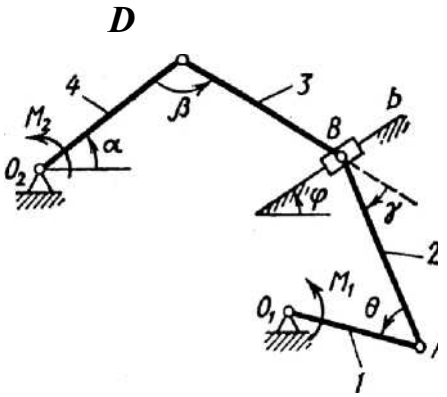


Рис. Д5.3

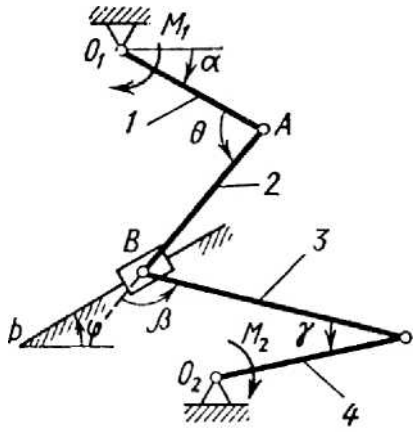


Рис. Д5.4

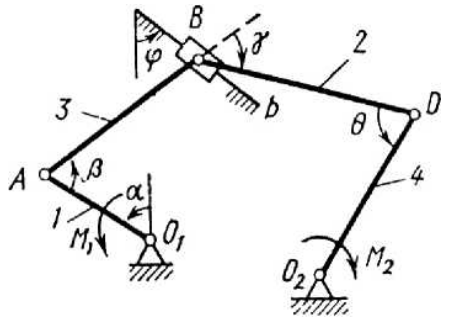


Рис. Д5.5

Задача Д6. Для заданої механічної системи (рис. Д6.1 – Д6.5, табл. Д6) з одним ступенем вільності визначити прискорення відповідних тіл. Масами ниток, силами опору в підшипниках знехтувати. Система починає рух із стану спокою.

Зауваження. *Задача Д6 – на використання до вивчення руху механічної системи рівнянь Лагранжа. Оскільки система має одну ступінь вільності, то її положення визначається однією узагальненою координатою.*

Розв'язання задачі слід почати з вибору узагальненої координати q, яка відповідає переміщенню тіла 1 або 4.

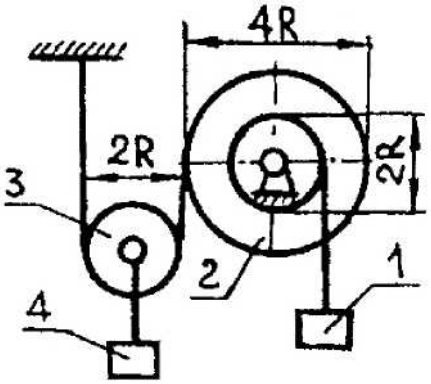


Рис. Д6.1

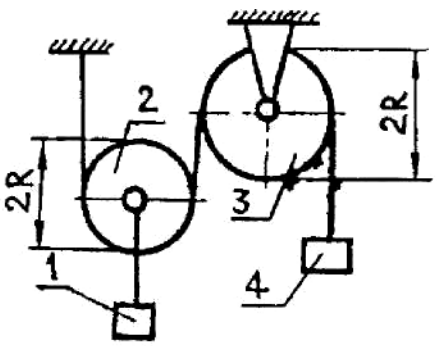


Рис. Д6.2

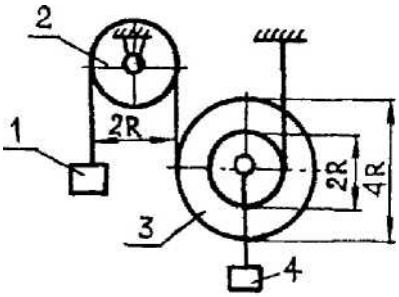


Рис. Д6.3

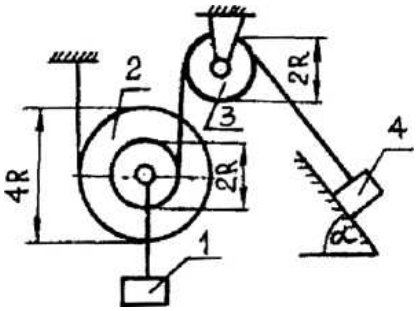


Рис. Д6.4

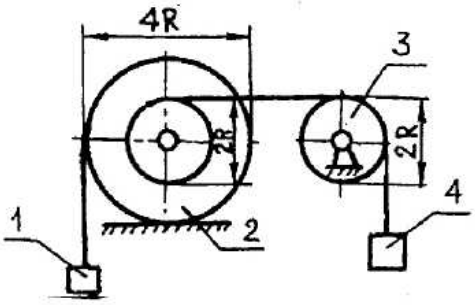


Рис. Д6.5

Таблиця Д6

Номер умови	m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	m_4 кг	i_{2x} см	i_{3x} см
0	$3m$	$2m$	m	m	$R\sqrt{3}$	–
1	$4m$	$2m$	m	m	$R\sqrt{2}$	–
2	$5m$	$2m$	$2m$	$2m$	$1{,}5R$	–
3	$2m$	$3m$	m	$2m$	–	$R\sqrt{2}$
4	$4m$	$3m$	m	m	$1{,}6\,R$	–
5	$3m$	$2m$	$2m$	m	$R\sqrt{2}$	$1{,}6\,R$
6	$2m$	m	m	$4m$	–	$1{,}2R$
7	$6m$	$3m$	$2m$	m	$R\sqrt{3}$	$1{,}5R$
8	$3m$	$2m$	m	m	$R\sqrt{2}$	–
9	$5m$	$3m$	$2m$	m	$R\sqrt{3}$	–

ДОДАТКИ

Додаток 1

Відомості з тригонометрії

Значення тригонометричних функцій

α, ° /рад	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0 / 0	0	1,0	0	∞
15° / (π/12)	0,2588	0,9659	0,2679	3,732
30° / (π/6)	0,5	0,866	0,5774	1,732
45° / (π/4)	0,7071	0,7071	1,0	1,0
60° / (π/3)	0,866	0,5	1,732	0,5774
75° / (5π/12)	0,9659	0,2588	3,732	0,2679
90° / (π/2)	1,0	0	∞	0

Формули зведення

функція	кут			
	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm\alpha$	$\beta = \pi \pm\alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm\alpha$	$\beta = 2\pi \pm\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\,\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\,\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\,\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mp\,\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\,\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\,\mathrm{ctg}\,\alpha$

Формули перетворення

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Добутки векторів та їх властивості

Нехай $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, тоді $|\overline{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$.

Напрям ненульового вектора $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$ визначається кутами α, β, γ, які даний вектор утворює з додатними напрямами координатних осей Ox, Oy, Oz. Косинуси цих кутів, так звані *напрямні косинуси вектора*, знаходяться за формулами: $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|}; \cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|}; \cos\gamma=\frac{a_z}{|\overline{a}|}$.

Напрямні косинуси вектора пов'язані співвідношенням $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi,$$ де φ — кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Основні властивості скалярного добутку двох векторів:

1	$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$	**4**	$\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$, або $\overline{a}=\overline{0}\vee\overline{b}=\overline{0}$
2	$(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\overline{b})=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$	**5**	$\overline{a}^2=\overline{a}\cdot\overline{a}=\|\overline{a}\|^2\Rightarrow\|\overline{a}\|=\sqrt{\overline{a}^2}$
3	$\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$	**6**	$\overline{a}\cdot\overline{b}=\|\overline{a}\|np_{\overline{a}}\overline{b}=\|\overline{b}\|np_{\overline{b}}\overline{a}$

Якщо ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задано своїми координатами $\overline{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\overline{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то їх скалярний добуток визначається формулою

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Кут φ між векторами $\overline{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\overline{b}=(b_x,b_y,b_z)$ визначається рівністю $\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Векторним добутком вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається третій вектор $\overline{a}\times\overline{b}$, який визначається трьома умовами:

1) Довжина вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ дорівнює $|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$, де $\varphi=\angle(\overline{a},\overline{b})$

2) Вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

3) Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{a}\times\bar{b}$ утворюють праву тройку векторів.

Основні властивості векторного добутку двох векторів:

1	$\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$	**4**	$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}\Leftrightarrow\bar{a}\parallel\bar{b}$, або $\bar{a}=\bar{0}\vee\bar{b}=\bar{0}$
2	$\left(\lambda\bar{a}\right)\times\bar{b}=\bar{a}\times\left(\lambda\bar{b}\right)=\lambda\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$	**5**	$\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|=S$, S – площа паралелограму, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах
3	$\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$		

Якщо ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задано своїми координатами $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, то їх векторний добуток дорівнює символічному визначнику третього порядку

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\bar{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\bar{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\bar{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right).$$

Мішаним добутком трьох векторів називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $\bar{c}$ на векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Основні властивості мішаного добутку трьох векторів:

1	$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=-(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\bar{b}$	**4**	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0\Leftrightarrow$ вектори компланарні
2	$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$	**5**	$V=\left\|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right\|$, V – об'єм паралелепіпеду, побудованого на даних векторах, як на ребрах
3	$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$		

Якщо вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ задано своїми координатами $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, $\bar{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$, їх мішаний добуток обчислюється за формулою

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}.$$

Додаток 2

Довідкові відомості з вищої математики [16]

Основні правила диференціювання	
1	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
2	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
3	$(C \cdot u)' = C(u)'$
4	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$
5	$y'_x = f'(u) \cdot u'(x)$, якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$
6	$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, $y(x)$ і $x(y)$ взаємно обернені функції
7	$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ — похідна параметричної функції

Похідні основних елементарних функцій	
$C' = 0$	
$x' = 1$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\mathrm{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\mathrm{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\mathrm{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Властивості невизначеного інтегралу

$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ або $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; $\int 0 \cdot dx = C$.

$\int\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx \quad \forall\alpha,\beta\in R$;

$\int f'(x)dx=f(x)+C$;

$\int f(u)du=F(u)+C$, в незалежності від того, чи є u незалежною змінною, або ж функцією від x — *інваріантність форми невизначеного інтегралу* (де $F(x)$ – первісна функція, якщо $F'=f(x)$).

$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad \forall a,b\in R,\ a\neq 0$.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int du=u+C.$

2. $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1.$

3. $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C.$

4. $\int e^{u}du=e^{u}+C.$

5. $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C, a>0,\ a\neq 1.$

6. $\int\sin u\ du=-\cos u+C.$

7. $\int\cos u\ du=\sin u+C.$

8. $\int\frac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}u+C.$

9. $\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}u+C.$

10. $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C.$

14. $\int\mathrm{tg}u\ du=-\ln|\cos u|+C.$

15. $\int\mathrm{ctg}u\ du=\ln|\sin u|+C.$

16. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$

17. $\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C.$

18. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C.$

19. $\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right|+C.$

20. $\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

21. $\int\frac{du}{1+u^2}=\mathrm{arctg}u+C.$

22. $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a}+C.$

23. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C.$

$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F\left[\varphi(t)\right]+C$ — формула заміни змінної у невизначеному інтегралі.

$\int udv = uv - \int vdu$ — формула інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.

Визначений інтеграл на відрізку $[a;b]$ від неперервної на цьому відрізку функції $y = f(x)$ можна знайти за *формули Ньютона - Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = ... = \int_a^b f(u)du$; 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; 4. $\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \left(f(x) \le g(x)\right)$; 6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$; 8. $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$;

9. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, $f(-x) = f(x)$ та $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, $f(-x) = -f(x)$.

Механічний зміст визначеного інтеграла

– шлях S, пройдений тілом при прямолінійному русі зі швидкістю $v(t)$ за проміжок часу від t_1 до t_2 обчислюється за формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

– маса стержня з довжиною L та густиною $\rho = \rho(x)$ дорівнює $m = \int_0^L \rho(x)dx$.

Аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь

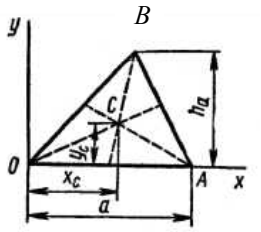
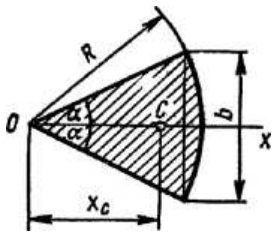
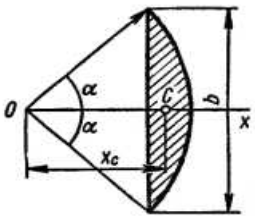
Диференціальне рівняння	Метод розв'язання
Диференціальні рівняння першого порядку	
Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінним $f(x)g(y)dy + f_1(x)g_1(y)dx = 0$	$\int \frac{g(y)}{g_1(y)}dy + \int \frac{f_1(x)}{f(x)}dx = C$
Однорідне диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x,y), \quad f(tx,ty) = f(x,y)$	$y = x \cdot v(x)$
Лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + P(x)y = Q(x)$	$y = u(x) \cdot v(x)$
Рівняння Бернуллі $y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$y = u(x) \cdot v(x)$
Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку	
$y^{(n)} = f(x)$	$n-$кратне інтегрування
$F(x, y', y'') = 0$	$y' = p(x)$
$F(y, y', y'') = 0$	$y' = p(y), \; y'' = pp'$
Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків	
$y'' + py' + qy = 0$ (ЛОДР) $k^2 + pk + q = 0$ — характеристичне рівняння, $k_{1,2}$ — його корені	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \quad k_1 \neq k_2$ $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}, \quad k_1 = k_2$ $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$ $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
$y'' + py' + qy = f(x)$ (ЛНДР)	$y = \overline{y} + y^*$ $\overline{y}$ — загальний розв'язок ЛОДР y^* — частинний розв'язок ЛНДР
$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}P_n(x)$	$y^* = e^{\alpha x}Q_n(x), \; k_1 \neq \alpha, k_2 \neq \alpha$ $y^* = xe^{\alpha x}Q_n(x), \; k_1 = \alpha, k_2 \neq \alpha$ $y^* = x^2e^{\alpha x}Q_n(x), \; k_1 = \alpha, k_2 = \alpha$
$y'' + py' + qy = A\cos mx + B\sin mx$	$y^* = a\cos mx + b\sin mx, \; k_{1,2} \neq mi$ $y^* = x\left(a\cos mx + b\sin mx\right), \; k_1 = mi$

Додаток 3

Геометричні характеристики плоских перерізів

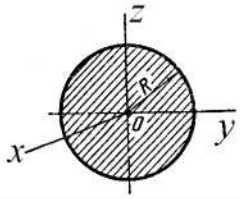
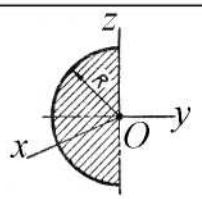
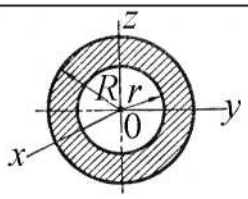
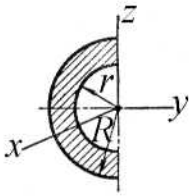
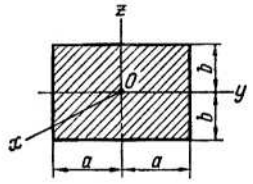
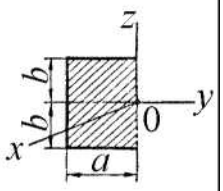
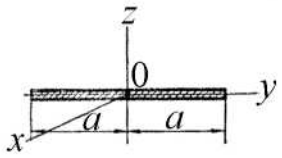
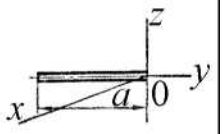
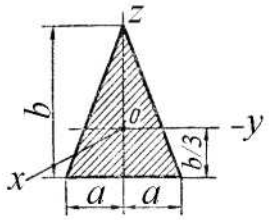
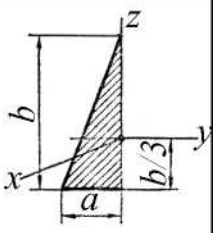
Таблиця 1

Визначення центру ваги деяких фігур [10]

Плоска фігура	Площа	Координати центру ваги
	$S=\frac{1}{2}a\,h_a$	$x_C=\frac{1}{3}(x_O+x_A+x_B);$ $y_C=\frac{1}{3}h_a$
Трикутник		
	$S=\alpha R^2$	$x_C=\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha};$ $y_C=0$
Круговий сектор		
	$S=\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{2}R^2$	$x_C=\frac{4R\sin^3\alpha}{3(2\alpha-\sin 2\alpha)}=$ $=\frac{b^3}{12S};\quad y_C=0$
Круговий сегмент		

Таблиця 2

Осьові моменти інерції однорідних пластинок [10]

	J_x	J_y	J_z	
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(R^2+r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2+r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2+r^2)}{4}$	
	$\frac{m(a^2+b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2+b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	

Додаток 4

What is classical mechanics? *(By Richard Fitzpatrick 2006-02-02)*

Classical mechanics is the study of the *motion* of bodies (including the special case in which bodies remain at rest) in accordance with the general principles first enunciated by Sir Isaac Newton in his *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), commonly known as the *Principia*. Classical mechanics was the first branch of Physics to be discovered, and is the foundation upon which all other branches of Physics are built. Moreover, classical mechanics has many important applications in other areas of science, such as Astronomy (*e.g.*, celestial mechanics), Chemistry (*e.g.*, the dynamics of molecular collisions), Engineering (*e.g.*, the equilibrium and stability of structures), and Geology (*e.g.*, the propagation of seismic waves, generated by earthquakes, through the Earth's crust). Classical mechanics is also of great significance outside the realm of science. After all, the sequence of events leading to the discovery of classical mechanics-starting with the ground-breaking work of Copernicus, continuing with the researches of Galileo, Kepler, and Descartes, and culminating in the monumental achievements of Newton-involved the complete overthrow of the Aristotelian picture of the Universe, which had previously prevailed for more than a millennium, and its replacement by a recognizably modern picture in which humankind no longer played a privileged role.

In our investigation of classical mechanics we shall study many different types of motion, including:

Translational motion – motion by which a body shifts from one point in space to another (*e.g.*, the motion of a bullet fired from a gun).

Rotational motion – motion by which an extended body changes orientation, with respect to other bodies in space, without changing position (*e.g.*, the motion of a spinning top).

Oscillatory motion – motion which continually repeats in time with a fixed period (*e.g.*, the motion of a pendulum in a grandfather clock).

Circular motion – motion by which a body executes a circular orbit about another fixed body [*e.g.*, the (approximate) motion of the Earth about the Sun].

Of course, these different types of motion can be combined: for instance, the motion of a properly bowled bowling ball consists of a combination of translational and rotational motion, whereas wave propagation is a combination of translational and oscillatory motion. Furthermore, the above mentioned types of motion are not entirely distinct: *e.g.*, circular motion contains elements of both rotational and oscillatory motion. We shall also study *statics*: *i.e.*, the subdivision of mechanics

which is concerned with the forces that act on bodies *at rest* and in equilibrium. Statics is obviously of great importance in civil engineering: for instance, the principles of statics were used to design the building in which this lecture is taking place, so as to ensure that it does not collapse.

mks units

The first principle of any exact science is *measurement*. In mechanics there are three fundamental quantities which are subject to measurement:

1. Intervals in space: *i.e.*, lengths.
2. Quantities of inertia, or mass, possessed by various bodies.
3. Intervals in time.

Any other type of measurement in mechanics can be reduced to some combination of measurements of these three quantities.

Each of the three fundamental quantities – *length*, *mass*, and *time* – is measured with respect to some convenient standard. The system of units currently used by all scientists, and most engineers, is called the *mks system* – after the first initials of the names of the units of length, mass, and time, respectively, in this system: *i.e.*, the *meter*, the *kilogram*, and the *second*.

The mks unit of length is the *meter* (symbol m), which was formerly the distance between two scratches on a platinum-iridium alloy bar kept at the International Bureau of Metric Standard in Sèvres, France, but is now defined as the distance occupied by 1650763,73 wavelengths of light of the orange-red spectral line of the isotope Krypton 86 in vacuum.

The mks unit of mass is the *kilogram* (symbol kg), which is defined as the mass of a platinum-iridium alloy cylinder kept at the International Bureau of Metric Standard in Sèvres, France.

The mks unit of time is the *second* (symbol s), which was formerly defined in terms of the Earth's rotation, but is now defined as the time for 9192631,770 oscillations associated with the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the isotope Cesium 133.

In addition to the three fundamental quantities, classical mechanics also deals with *derived quantities*, such as velocity, acceleration, momentum, angular momentum, *etc.* Each of these derived quantities can be reduced to some particular combination of length, mass, and time. The mks units of these derived quantities are, therefore, the corresponding combinations of the mks units of length, mass, and time. For instance, a velocity can be reduced to a length divided by a time. Hence, the mks units of velocity are meters per second:

$$[v]=\frac{[L]}{[T]}=\frac{m}{s}=m\,s^{-1}. \qquad (1)$$

Here, v stands for a velocity, L for a length, and T for a time, whereas the operator […] represents the units, or *dimensions*, of the quantity contained within the brackets.

Momentum can be reduced to mass multiply a velocity. Hence, the mks units of momentum are kilogram-meters per second:

$$[p]=[M][v]=\frac{[M][L]}{[T]}=\frac{kg\cdot m}{s}=kg\,m\,s^{-1}. \qquad (2)$$

Here, p stands for a momentum, and M for a mass. In this manner, the mks units of all derived quantities appearing in classical dynamics can easily be obtained.

Standard prefixes

mks units are specifically designed to conveniently describe those motions which occur in everyday life. Unfortunately, mks units tend to become rather unwieldy when dealing with motions on very small scales (*e.g.*, the motions of molecules) or very large scales (*e.g.*, the motion of stars in the Galaxy). In order to help cope with this problem, a set of standard prefixes has been devised, which allow the mks units of length, mass, and time to be modified so as to deal more easily with very small and very large quantities: these prefixes are specified in Tab. 1. Thus, a *kilometer* (km) represents 10^3 m, a *nanometer* (nm) represents 10^{-9} m, and a *femtosecond* (fs) represents 10^{-15} s. The standard prefixes can also be used to modify the units of derived quantities.

Table 1: *Standard prefixes*

Factor	*Prefix*	*Symbol*	*Factor*	*Prefix*	*Symbol*
10^{18}	exa-	E	10^{-1}	deci-	d
10^{15}	peta-	P	10^{-2}	centi-	c
10^{12}	tera-	T	10^{-3}	milli-	m
10^{9}	giga-	G	10^{-6}	micro-	μ
10^{6}	mega-	M	10^{-9}	nano-	n
10^{3}	kilo-	k	10^{-12}	pico-	p
10^{2}	hecto-	h	10^{-15}	femto-	f
10^{1}	deka-	da	10^{-18}	atto-	a

Other units

The mks system is not the only system of units in existence. Unfortunately, the obsolete cgs (centimeter-gram-second) system and the even more obsolete fps

(foot-pound-second) system are still in use today, although their continued employment is now *strongly discouraged* in science and engineering (except in the US!). Conversion between different systems of units is, in principle, perfectly straightforward, but, in practice, a frequent source of error. Witness, for example, the recent loss of the Mars Climate Orbiter because the engineers who designed its rocket engine used fps units whereas the NASA mission controllers employed mks units. Table 2 specifies the various conversion factors between mks, cgs, and fps units. Note that, rather confusingly (unless you are an engineer in the US!), a pound is a unit of force, rather than mass. Additional non-standard units of length include the inch (1 ft = 12 in), the yard (1 ya = 3 ft), and the mile (1 mi = 5280 ft). Additional non-standard units of mass include the ton (in the US, 1 ton = 2000 lb; in the UK, 1 ton = 2240 lb), and the metric ton (1 tonne = 1000 kg). Finally, additional non-standard units of time include the minute (1 min = 60 s), the hour (1 hr = 3600 s), the day (1 da = 86400 s), and the year (1yr = 365.25 da = 31558464s).

Table 2: *Conversion factors*
1 cm = 10^{-2} m
1 g = 10^{-3} kg
1 ft = 0,3048 m
1 lb = 4,448 m
1 slug = 14,59 kg

Precision and significant figures

In this course, you are expected to perform calculations to a relative accuracy of 1%: *i.e.*, to *three significant figures*. Since rounding errors tend to accumulate during lengthy calculations, the easiest way in which to achieve this accuracy is to perform all intermediate calculations to *four significant figures*, and then to round the final result down to three significant figures. If one of the quantities in your calculation turns out to the small difference between two much larger numbers, then you may need to keep *more* than four significant figures. Incidentally, you are strongly urged to use *scientific notation* in *all* of your calculations: the use of non-scientific notation is generally a major source of error in this course. If your calculators are capable of operating in a mode in which *all* numbers (not just very small or very large numbers) are displayed in scientific form then you are advised to perform your calculations in this mode.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК – СЛОВНИК

А

абсолютний рух, 103	абсолютное движение	absolute motion
аксіоми статики, 10	аксиомы статики	axioms of statics
амплітуда коливань,141	амплитуда колебаний	amplitude of oscillations

Б

балкові системи, 21	балочные системы	beam systems

В

вага тіла, 131	вес тела	body weight
ват, 181	ватт	watt
вектор сили, 10	вектор силы	force vector
види в’язі , 11	виды связи	types of connection
відносний рух, 103	относительное движение	relative motion
відхилення, 140	отклонение	deviation
вісь обертання, 85	ось вращения	axis of rotation

Г

головний вектор сил, 20	главный вектор сил	the main force vector
головний момент сил, 20	главный момент сил	the main moment of forces
густина, 169	плотность	density

Д

декремент, 143	декремент	decrement
деформація, 25	деформация	deformation
джоуль, 179	джоуль	joule
динаміка, 130	динамика	dynamic
добуток векторів, 228	произведение векторов	vector product
– – скалярний, 228	– – скалярное	– scalar product
– – векторний, 229	– – векторное	– cross product
– – мішаний, 229	– – смешанное	– mixed product
додавання сил, 15	сложение сил	adding the forces

Е

елементарна робота сили, 179	элементарная работа силы	elementary work of force
емпіричне значення, 26	эмпирическое значение	empirical value

енергія кінетична, 178	энергия кинетическая	kinetic energy
– потенційна, 200	– потенциальная	potential energy
епюра навантаження,21	эпюра нагрузки	load diagram
З		
закон Гука, 140	закон Гука	Hooke's law
– незалежності дії сил, 131	– независимости действия сил	principle of independence of action
закони динаміки, 130	законы динамики	the laws of dynamics
защемлення, 13	защемление	anchorage
збурююча сила, 140	возмущающая сила	disturbing force
І		
імпульс сили, 168	импульс силы	impulse of force
інертність, 130	инерция	inertia
інерціальна система відліку, 130	инерциальная система отсчета	inertial reference system
інтеграл невизначений, 230	интеграл неопределенный	indefinite integral
– визначений, 232	– определенный	– definite
– кратний, 160	– кратный	– multiple
інтервал часу, 75	интервал времени	time interval
К		
кількість руху, 166	количество движения	momentum
кінематика, 73	кинематика	kinematics
коефіцієнт корисної дії, 181	коэффициент полезного действия	efficiency
коефіцієнт тертя, 26	коэффициент трения	coefficient of friction
координати, 73	координаты	coordinates
– полярні, 132	– полярные	– polar
– сферичні, 133	– сферические	– spherical
– циліндричні, 133	– цилиндрические	– cylindrical
кутова швидкість, 86	угловая скорость	angular velocity
Л		
лінія дії сили, 10	линия действия силы	line of action of the force
М		
маса, 131	масса	mass

матеріальна точка, 130	материальная точка	mass point
механіка, 5	механика	mechanics
механічна система, 5	механическая система	mechanical system
метод, 7	метод	method
– кінетостатики, 188	– кинетостатики	– of kinetostatics
миттєвий центр швидкостей, 95	мгновенный центр скоростей	instantaneous velocity center
момент інерції, 153	момент инерции	moment of inertia
– кількості руху, 172	– количества движения	angular momentum
– сили, 17,24	– силы	moment of a force
Н		
навантаження, 21	нагрузка	load, loading
нескінченість, 96	бесконечность	infinity
нормаль, 78	нормаль	normal
нормальне (доцентрове) прискорення, 78	нормальное (центростремительное) ускорение	normal (centripetal) acceleration
ньютон, 10	ньютон	Newton
О		
обернена задача динаміки, 134	обратная задача динамики	inverse problem of dynamics
обертальний рух, 85	вращательное движение	rotational motion, turning
основна задача кінематики, 73	основная задача кинематики	the basic problem of kinematics
основне рівняння динаміки, 132	основное уравнение динамики	the basic equation of dynamics
осьова лінія, 85	осевая линия	axial line
П		
параметр, 80	параметр	parameter
пара сил, 17	пара сил	a force couple
переміщення, 75	перемещение	displacement, distance
переносний рух, 103	переносное движение	portable movement
період коливань, 141	период колебаний	oscillation period
плече пари, 17	плечо пары	arm of the couple
площина, 17	плоскость	plane

полюс, 94	полюс	pole
потужність, 181	мощность	power
принципи механіки,188	принципы механики	principles of mechanics
прискорення, 76	ускорение	acceleration
проекція, 16	проекция	projection
пружності сила, 148	сила упругости	elastic force
Р		
радіус-вектор, 73	радиус-вектор	radius vector
реакція в'язі, 11	реакция связи	coupling reaction
резонанс, 145	резонанс	resonance
рівнодійна сила, 15	равнодействующая сила	equivalence force
рівномірний рух, 79	равномерное движение	uniform movement
рівняння рівноваги, 20	уравнение равновесия	equilibrium equation
– руху диференційне, 132	– движения дифференциальное	differential equation of motion
робота сили, 179	работа силы	work of power
розв'язок диференціального рівняння, 135	решение дифференциального уравнения	solution of the differential equation
розклад, 94, 97	разложение	decomposition
рух, 73	движение	motion, movement
С		
сила, 10	сила	force
система механічна,156	система механическая	mechanical system
– диференціальних рівнянь руху, 132	– дифференциальных уравнений движения	system of differential equations of motion
складова сила, 13	составляющая сила	component force
статика, 10	статика	statics
статична рівновага, 28	статическое равновесие	static equilibrium
стаціонарний, 170	стационарный	stationary, stable
Т		
тангенціальне прискорення, 78	тангенциальное ускорение	tangential acceleration
теорема, 7	теорема	theorem
– Варіньона, 20	– Вариньона	Varignon's theorem
– Пуансо, 19	– Пуансо	Puanso's theorem

тертя, 25	трение	friction
траєкторія, 74	траектория	trajectory, path
тяжіння, 131	тяготение	gravitation
У		
узагальнені координати, 198	обобщенные координаты	generalized coordinates
умовне роз'єднання, 36	условное разделение	conditional separation
Ф		
фаза коливань, 141	фаза колебаний	phase of oscillation
фокус, 29	фокус	focus
формула Ейнштейна-Лоренца, 131	Формула Эйнштейна-Лоренца	Einstein-Lorentz formula
фундаментальний закон, 5	фундаментальный закон	fundamental, basic law
функція Лагранжа, 200	функция Лагранжа	Lagrange function
Х		
характеристика, 10	характеристика	characteristic, feature
хід, 7	ход	throw, travel
Ц		
центр ваги, 27	центр тяжести	center of gravity
– мас, 158	– масс	center of mass
цикл, 139	цикл	cycle
Ч		
час, 73	время	time
частота коливань, 141	частота колебаний	frequency of oscillations
частинний розв'язок, 144	частное решение	partial solution
число степенів вільності, 195	число степеней свободы	number of degrees of freedom
Ш		
шарнір, 12	шарнир	hinge
швидкість, 75	скорость	speed
шлях, 75	путь	path, way
шорстка поверхня, 25	шероховатая поверхность	rough surface

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Порадник до виконання розрахунково-графічних робіт з основ інженерної механіки та варіанти завдань. Розділ 1 : Теоретична механіка / Л. М. Мамаєв, О. М. Коробочка, В. О. Костюченко та ін. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2010. – 268 с.

2. Божидарнік В. В. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки : навч. посіб. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко. – Луцьк : Надстир'я, 2003. – 496 с.

3. Бондаренко А. А. Збірник завдань розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки : навч. посіб. / А. А. Бондаренко, О. О. Дубінін, О. М. Переяславцев. – Вінниця : Нова книга, 2004. – 288 с.

4. Порадник до розв'язування задач з основ інженерної механіки. Т. 1. Теоретична механіка: статика, кінематика / В. І. Зінченко, Л. М. Мамаєв, Б. І. Кущев, В. М. Колодежнов. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2006. – 312 с.

5. Порадник до розв'язування задач з основ інженерної механіки. Т. 2. Теоретична механіка : динаміка / В. І. Зінченко, Л. М. Мамаєв, Б. І. Кущев, В. М. Колодежнов. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2007. – 384 с.

6. Потехін А. Ф. Короткий курс теоретичної механіки в запитаннях та відповідях з аналізом базових понять : навч. посіб. / А. Ф. Потехін. – Вид. 2-ге, випр. – Львів : Новий Світ-2000, 2004. – 200 с.

7. Токар А. В. Теоретична механіка. Кінематика : навч. посіб. / А. В. Токар. – К. : Либідь, 2001. – 416 с.

8. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка : Методи і задачі : навч. посіб. / А. М. Токар. – К. : Либідь, 2006. – 440 с.

9. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С. М. Тарг. – 10-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 2005. – 416 с.

10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А. А. Яблонский, А. А. Норейко, С. А. Вольфсон и др.; под. ред. А. А. Яблонского. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1985. – 367 с.

11. Прикладная механика : учеб. пособ. / А. Т. Скойбеда, А. А. Миклашевич, Е. Н. Левковский и др.; под общ. ред. А. Т. Скойбеды. – Мн. : Выш. шк., 1997. – 522 с.

12. Фомін В. М. Курс теоретичної механіки : навч. посіб. / В. М. Фомін, І. П. Фоміна, Т. О. Козаченко. – Одеса : Поліграф, 2012. – 200 с.

13. Іванов Б. О. Конспект лекцій із теоретичної механіки : навч. посіб. / Б. О. Іванов, М. В. Максюта. – К. : Вид.-поліграф. центр "Київський університет", 2012. – 207 с.

14. Пастушенко С. І. Практикум з теоретичної механіки. Ч. 1. Статика. Кінематика : навч. посіб. / С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко, В. В. Іщенко. – Вінниця : Нова Книга, 2006. – 384 с.

15. Serway R.A . Physics for scientists and engineers. Vol. 1/ R. A. Serway, R. J. Beichner. – 6-th edition. – Orlando FL : Saunders College Publishing, 2004. – 1296 p.

16. Нікулін О. В. Вища математика: факти і формули, задачі і тести: навч. посіб. / О. В. Нікулін, Т. В. Наконечна. – Дніпропетровськ : Біла К.О., 2015. – 188 с.

Навчальне видання

Мамаєв Леонід Михайлович
Нікулін Олександр Вікторович
Солод Володимир Юрійович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Навчальний посібник

Підписано до друку 24.10.2018 р. Формат 60×84 1/16
Папір друк. Друк. – різограф. Ум.-друк. арк. 14,36.
Тираж – 300. Зам. № 73/18.

Видавець і виготовлювач
Дніпровський державний технічний університет
51918, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до державного реєстру видавництв серія ДК № 5399
від 26.07.2017 р.