

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

*(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за
напрямом 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології»)*

Харків – ХНУМГ – 2015

УДК 351(075)

ББК 30.12я7

Ш 83

Автори:

В. П. Шпачук, доктор технічних наук, професор
М. С. Золотов, кандидат технічних наук, професор
В. О. Склярів, кандидат технічних наук, доцент

Рецензенти:

О. К. Морачковський, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету «ХПІ»;
В. Г. Солодов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки та гідравліки Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова як навчальний посібник (протокол № 9 від 25.04.2014 р.)

Шпачук В. П.

Ш 83 Технічна механіка: навчальний посібник (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології») / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 277 с.

Навчальний посібник містить основні питання зі статички твердого тіла, довільної системи сил, кінематики точки та твердого тіла, динаміки точки та твердого тіла як закони динаміки, диференціальні рівняння динаміки точки твердого тіла.

Посібник складено з метою допомоги студентам електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів при підготовці до занять, заліків та іспитів з розділу «Кінетостатика повітряних ліній електропередач» курсу технічної механіки.

**УДК 351(075)
ББК 30.12я7**

© Шпачук В. П., Золотов М. С.,
Склярів В. О.,
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015

ЗМІСТ

Вступ	7
1 Статика абсолютно твердого тіла	12
1.1 Основні визначення, поняття й аксіоми статички. Предмет статички	12
1.2 Аксіоми статички	14
2 В'язі та їх реакції	17
3 Система збіжних сил	21
3.1 Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил	21
3.2 Умови рівноваги збіжних сил	24
4 Момент сили відносно точки та осі. Складання паралельних сил. Пара сил, теореми про пари	26
4.1 Момент сили відносно точки	26
4.2 Момент сили відносно осі	28
4.3 Алгебраїчний момент сили відносно точки	29
4.4 Складання паралельних сил	30
4.4.1 Складання двох сил, напрямлених в один бік	30
4.4.2 Складання двох сил, напрямлених у різні боки	31
4.5 Пара сил. Момент пари. Теореми про пари	33
4.5.1 Визначення пари сил. Теореми про пари сил	33
4.5.2 Умови рівноваги системи пар сил	37
5 Довільна система сил у просторі та площині. Зведення до заданого центра (теорема Пуансо)	38
5.1 Лема про паралельний перенос сили	38
5.2 Зведення довільної системи сил у просторі до заданого центра. Теорема Пуансо (Основна теорема статички)	40
5.3 Окремі випадки зведення просторової системи сил	43
5.3.1 Приведення системи сил до пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) з моментом $\bar{m}_O = \overline{OA} \times \bar{F}$	43
5.3.2 Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O	43
5.3.3 Зрівноважена система сил	44
5.3.4 Приведення системи сил до головного вектора і головного моменту	44
5.3.4.1 Приведення до динами	44
5.3.4.2 Приведення до схрещеної системи двох сил	47
5.3.4.3 Приведення до однієї сили (рівнодійної)	48
5.4 Довільна система сил у площині	49
5.4.1 Приведення до пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*)	50

5.4.2	Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O	50
5.4.3	Зрівноважена система сил	51
5.4.4	У загальному випадку	51
5.5	Теорема Варіньона про момент рівнодійної	52
5.6	Приклад розв'язання задач зведення	55
6	Умови рівноваги системи сил. Окремі випадки рівноваги	57
6.1	Умови рівноваги довільної плоскої системи сил	57
6.2	Приклади розв'язання задач рівноваги	59
6.3	Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл	61
7	Розрахунок плоскої ферми	67
7.1	Основні визначення і припущення	67
7.2	Порядок розрахунку плоскої ферми	70
8	Центр паралельних сил і центр ваги	75
8.1	Центр паралельних сил	75
8.2	Центр ваги твердого тіла	77
8.2.1	Центр ваги однорідного твердого тіла	78
8.2.2	Центр ваги одонорідної пластини	78
8.2.3	Центр ваги однорідного стрижня	79
8.3	Способи визначення координат центра ваги	80
8.4	Центр ваги простіших фігур	83
Питання	для самоконтролю	85
9	Кінематика точки	88
9.1	Способи завдання руху точки	88
9.2	Визначення швидкості та прискорення точки	91
9.3	Приклади розв'язання задач	97
10	Поступальний і обертальний рухи твердого тіла	101
10.1	Поступальний рух твердого тіла	101
10.2	Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі	102
10.3	Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі	108
10.4	Приклади розв'язання задач	110
11	Плоскопаралельний рух твердого тіла	113
11.1	Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла	113
11.2	Визначення швидкостей точок плоскої фігури	114
11.3	Визначення прискорень точок плоскої фігури	118

11.4 Приклади розв'язання задач із визначення швидкостей точок тіла	118
11.5 Приклади розв'язання задач із визначення прискорень точок тіла	123
Питання для самоконтролю	127
12 Динаміка точки	130
12.1 Основні поняття і визначення. Закони динаміки	130
12.1.1 Основні поняття і визначення	130
12.1.2 Закони динаміки	130
12.2 Диференціальні рівняння динаміки точки	133
12.2.1 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	133
12.2.2 Дві основні задачі динаміки матеріальної точки ...	134
12.2.3 Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки	136
12.2.4 Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки	139
12.3 Прямолінійні коливання матеріальної точки	144
12.3.1 Вільні незгасні коливання	144
12.3.2 Вільні коливання за наявності сил опору (загасні коливання)	149
12.3.3 Вимушені коливання	152
12.3.3.1 Силове збудження коливань	152
12.3.3.2 Кінетичне збудження коливань	158
12.3.4 Приклади розв'язання задач з дослідження коливального руху матеріальної точки	162
Питання для самоконтролю	170
13 Основні положення опору матеріалів	173
13.1 Основні допущення	173
13.2 Метод перетинів. Види навантаження	174
13.3 Напруги	177
Питання для самоконтролю	179
14 Розтягання і стиск	180
14.1 Нормальні сили і напруги в поперечному перерізі бруса	180
14.2 Переміщення і деформації. Закон Гука	184
14.3 Напружений стан під час одноосьового розтягання	187
14.4 Статичні випробування матеріалів. Основні механічні характеристики	189
14.5 Розрахунки на міцність	192
14.6 Статично невизначені системи	194
Питання для самоконтролю	196
15 Практичні розрахунки на зріз і зминання	197

15.1 Основні розрахункові передумови і формули	197
Питання для самоконтролю	199
16 Крутіння	200
16.1 Чисте зрушення. Закон Гука під час зрушенні	200
16.2 Крутіння. Побудова епюр крутильних моментів	201
16.3 Крутіння круглого прямого бруса. Основні передумови і формули	203
16.4 Розрахунки на міцність і твердість	207
Питання для самоконтролю	209
17 Геометричні характеристики плоских перетинів	210
17.1 Момент інерції перетинів	210
17.2 Поняття про головні центральні моменти інерції	212
17.3 Осьові моменти інерції найпростіших перетинів	213
Питання для самоконтролю	217
18 Вигин прямого бруса	218
18.1 Прямий вигин чистий і поперечний	218
18.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів	220
18.3 Основні розрахункові передумови і формули під час вигину	227
18.4 Розрахунки на міцність	230
18.5 Дотичні напруження під час поперечного вигину	233
Питання для самоконтролю	237
19 Повітряні лінії електропередач	238
19.1 Класифікація й режими роботи повітряної лінії	239
19.2 Основні елементи повітряної лінії	240
19.3 Загальні відомості про опори	241
19.4 Проводи і троси	247
19.5 Ізолятори й арматура	252
19.6 Розрахунок проводу	255
19.6.1 Крива провисання проводу	255
19.6.2 Рівняння стану проводу. Критичні прольоти	258
19.6.3 Порядок розрахунку проводу (троса)	260
19.7 Прольоти повітряних ліній	261
19.8 Навантаження на елементи повітряної лінії. Розрахунок опор, ізоляторів, арматури повітряної лінії	262
19.9 Проектування повітряних ліній	266
19.10 Великі переходи	269
19.11 Розрахунок тяжіння проводів і тросів в аварійних режимах	270
Список використаних джерел	275

ВСТУП

Механікою називається наука про механічний рух або рівновагу матеріальних тіл і взаємодію між ними, що виникає при цьому. Механіку зараховують до природничих наук.

З розвитком механіки як науки в ній з'явився ціла низка самостійних галузей, пов'язаних із вивченням механіки твердих деформованих тіл, рідин і газів: теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка, опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, гідравліка, динаміка споруд та інші спеціальні інженерні дисципліни. В усіх цих галузях поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження, використовуються поняття, закони і методи механіки, які є загальними для них.

Теоретична механіка – це частина механіки, в якій вивчаються загальні закони механічного руху або рівноваги матеріальних тіл і механічної взаємодії між ними. *Механічний рух* – найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простого переміщення за часом фізичних тіл з одного положення в просторі в інше.

В основі теоретичної механіки лежать закони Ньютона, тому вона називається *ньютонівською* або *класичною*. Класична механіка, яка є граничним випадком релятивістської механіки А. Ейнштейна, з великою точністю задовольняє багатьом галузям сучасної техніки при швидкостях руху тіл, досить малих порівняно зі швидкістю світла.

Роль і значення теоретичної механіки в інженерній освіті визначається, по-перше, тим, що вона є *фундаментальною загальнонауковою дисципліною*, оскільки методи теоретичної механіки дозволяють з єдиних позицій описувати динаміку і процеси не тільки в механічних системах, а і в інших частинах фізичних (наприклад, утворення комірок Бенара за тепловою конвекції; явище резонансу в електричних та оптичних ланцюгах), хімічних (хімічна термодинаміка, коливання атомів і молекул, міжмолекулярна взаємодія, динамічні явища під час перебігу хімічної реакції Белоусова – Жаботинського), біологічних (динамічна поведінка системи хижак – жертва, життєвий цикл амеби), кліматичних (нерівноважність клімату Земної кулі), космічних (теорія розвитку Всесвіту) та інших системах. По друге, теоретична механіка є *основою інженерних розрахунків*, оскільки на її законах засновані статичні й динамічні розрахунки інженерних споруд (будівель, фундаментів, башт, мостів, гребель, трубопроводів, сховищ, технологічних споруд), транспортних засобів (вагонів, автомобілів, літаків, кораблів), виробничого устаткування (двигунів, насосів, компресорів), технологічних процесів (будівництва, транспортування, центрифугування, седиментації), параметрів польоту й керування літальними апаратами та ін.

Не беручи до уваги під час вивчення руху матеріальних тіл усе часткове, теоретична механіка розглядає тільки ті властивості, що є визначальними для певного завдання. Це приводить до розгляду різних моделей матеріальних тіл, які становлять ту чи іншу ступінь абстракції. До основних абстракцій теоретичної механіки зараховують поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла. *Матеріальною точкою* називається тіло, розмірами якого можна знехтувати під час розв'язання певних задач. Наприклад, під час наближеного дослідження рухів планет їх можна розглядати як матеріальні точки. *Абсолютно твердим* називається тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюється під час рівноваги або руху.

Теоретична механіка широко користується не тільки методом абстракцій, а й узагальненням, математичними методами і методами формальної логіки. Застосування цих методів і узагальнень результатів безпосередніх спостережень, виробничої практики і досліду дозволили встановити певні загальні закони, що відіграють роль аксіом. Усі подальші висновки теоретичної механіки можуть бути отримані з цих аксіом за допомогою логічних міркувань і математичних викладок. При цьому достовірність положень теоретичної механіки перевіряється дослідом і практикою.

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка складається з трьох розділів:

- *статики*, в якій вивчаються методи еквівалентних перетворень систем сил, а також умови рівноваги матеріальних тіл;
- *кінематики*, в якій вивчається механічний рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, тобто незалежно від мас та діючих на них сил;
- *динаміки*, в якій вивчається рух матеріальних тіл у зв'язку з діючими на них силами.

Окрім цих трьох розділів, у теоретичній механіці вивчаються також елементи *аналітичної механіки*, яка становить сукупність найбільш узагальнених аналітичних методів розв'язання задач механіки, котрі дозволяють не тільки однаково розв'язувати задачі динаміки, а й розповсюджувати їх на такі галузі, як класична теорія поля і квантова механіка.

Закони теоретичної механіки сформульовані завдяки плідній праці багатьох поколінь учених. Перші викладення загальних понять механіки містяться у творах старогрецького філософа Арістотеля (384-322 рр. до н.е.), який розглядав розв'язання практичних задач за допомогою важеля. Уперше наукове обґрунтування механіки з'являється в роботі сіракузького геометра і механіка Архімеда (287–212 рр. до н.е.). Він здійснив спробу аксіоматизації механіки (статики), зробив низку наукових узагальнень, що належать до вчення про рівновагу, центр ваги і гідростатики (закон Архімеда).

Будь-яка машина або будівля становить більш-менш складну матеріальну конструкцію, що, зберігаючи форму і розміри окремих елементів, повинна витримувати визначені, іноді дуже значні, навантаження. У теоретичній механіці під час визначення реакцій опор не виникало проблеми збереження форми і розмірів, розглянутих у задачах елементів конструкцій, тому що вони вважалися абсолютно твердими – незмінними. Насправді під дією зовнішніх сил усі тверді матеріальні тіла деформуються, тобто їх форма і розміри змінюються.

Уявимо собі балку AB (рис. 1, а), один кінець якої шарнірно закріплений на нерухомій опорі, а другий також шарнірно спирається на вертикальний стрижень BC .

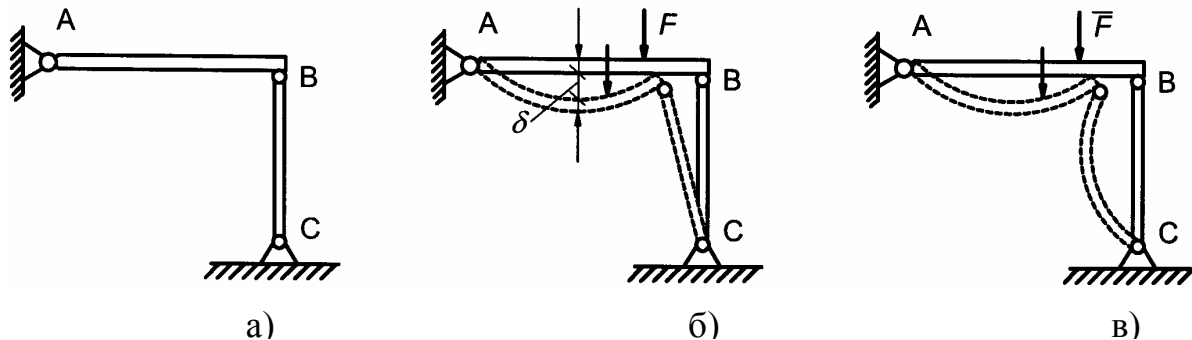


Рисунок 1

Якщо конструкцію навантажити силою F (рис. 1, б), то вона деформується: балка згинається, а стрижень коротшає і відхиляється від первісного вертикального положення, як показано штрихованими лініями на рис. 1, б. Після зняття навантаження F (за умови, що під дією сили F не відбудеться руйнування) конструкція або цілком відновлює первісну форму, показану на рисунку 1, а, або залишається деформованою, хоча й у трохи меншому ступені, чим на рисунку 1, б.

У першому випадку під дією сили F в елементах конструкції виникали пружні деформації, а в другому крім пружних з'явилися залишкові (пластичні) деформації. Виникнення залишкових деформацій може призвести до порушення нормальної роботи конструкції, і тому вони неприпустимі.

Здатність конструкції (або окремого її елемента) витримувати задане навантаження не руйнуючись без появи залишкових деформацій називається міцністю.

З рис. 1, б видно, що під дією сили F балка AB прогинається на величину δ , названу стрілою прогину. Якщо під час пружної деформації стріла прогину перевищила визначене припустиме значення, то також може порушитися нормальна робота конструкції.

Здатність конструкції (або окремого її елемента) пручатися пружним деформаціям називається твердістю.

Стрижень BC , що підтримує балку, при деякому значенні сили F , що діє на конструкцію, може зігнутися (як показано штриховими лініями на рис. 1, в). У цьому випадку стиснутий стрижень утрачає свій первісний прямолінійний стан рівноваги.

Здатність конструкції (або окремого її елемента) зберігати первісну форму пружної рівноваги називають стійкістю.

У машинобудуванні або будівництві під час проектування та виготовлення якої-небудь механічної конструкції необхідно виходити з неминучості виникнення пружних деформацій, висуваючи при цьому до кожного елемента визначені вимоги стосовно міцності, твердості та стійкості. Опір матеріалів, спираючись на закони і положення теоретичної механіки та математики, а також на результати, одержувані під час іспитів конкретних матеріалів, передбачає розробку прийомів і методів розрахунків на міцність, твердість і стійкість із метою забезпечення працездатності конструкції за мінімальної витрати матеріалів.

В опорі матеріалів, як і в теоретичній механіці, розв'язання задач починається з виявлення істотних факторів і відкидання несуттєвих, котрі не впливають помітно на роботу конструкції в цілому. Реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих особливостей, зветься розрахунковою схемою. Вибір розрахункової схеми зводиться в основному до схематизації геометрії реального об'єкта, системи сил, прикладених до елемента конструкції, і властивостей матеріалу. В опорі матеріалів усе різноманіття форм елементів конструкцій зведено в основному до трьох геометричних схем: брус, балка, оболонка і масив.

Брусом (балкою) називається тіло, один із вимірів якого (довжина) значно більше двох інших. У найпростішому випадку брус як геометричне тіло може бути отриманий переміщенням плоскої фігури уздовж деякої лінії (рис. 2) таким чином, щоб центр ваги фігури залишався на цій лінії, а площина була нормальна до неї. Лінія, уздовж якої переміщається центр ваги плоскої фігури, називається *віссю бруса*, а плоска фігура – його поперечним перерізом. Залежно від форми осі брус може бути прямим, кривим або просторово вигнутим. Прикладом останнього може бути гвинтова пружина. Крім брусів із незмінним поперечним перерізом уздовж всієї осі можуть бути бруси з безупинно змінювальними перетинами (рис. 3, а) або з перетинами, форма і площа яких змінюється стрибками (рис. 3, б), останні називаються східчастими брусами.

До *оболонок* належать тіла, один із вимірів яких (товщина) у багато разів менше двох інших розмірів. Прикладом оболонок можуть бути стінки баків, цистерн, корпусу ракет і т.п.

Масивом вважається тіло, усі три розміри якого мають один порядок (будівельний камінь, модульна цегла і под.).

Вище зазначалося про те, що деформування елементів конструкції відбувається внаслідок дії на них зовнішніх сил. З теоретичної механіки

відомо, що рівноважна система зовнішніх сил складається з активних сил і реакцій зв'язків. Таку систему сил прийнято називати навантаженням. Навантаження класифікують за двома ознаками – способу їхнього додатка до елемента конструкції і характеру дії на нього.

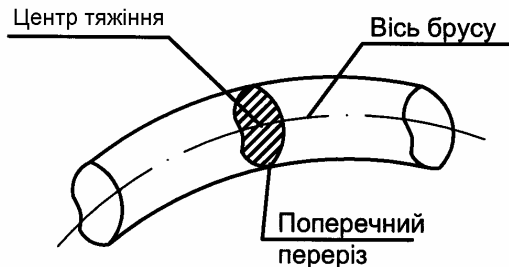


Рис. 2

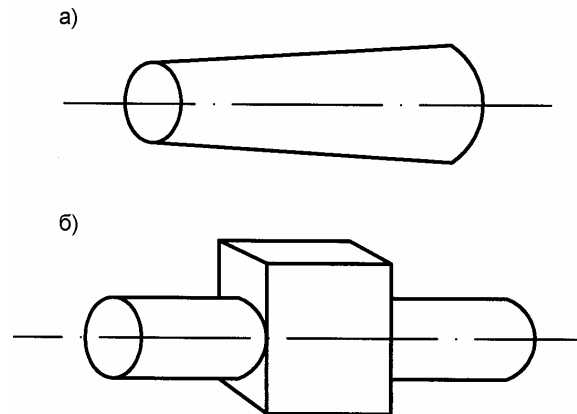


Рис. 3

За способом їхнього додатка до тіла навантаження поділяються на поверхневі й об'ємні. *Поверхневі сили* прикладені до ділянок поверхні та характеризують безпосередню контактну взаємодію розглянутого елемента конструкції з навколишніми тілами. У свою чергу, *поверхневі сили* поділяються на розподілені та зосереджені. Вважаючи силу зосередженою, умовно зневажають розмірами площі взаємодії дотичних тіл. Сили, розподілені за обсягом тіла, такі, як сили ваги, магнітні сили і сили інерції, належать до *об'ємних сил*.

За характером дії на тіло навантаження поділяються на статичні, змінні і динамічні (ударні).

До статичних належать відносяться такі, котрі повільно зростають від нуля і, досягши деякого кінцевого значення, далі залишаються незмінними. Прикладом статичного об'ємного навантаження може бути система відцентрових сил інерції, що діє на ротор електродвигуна в період його розгону і при подальшому рівномірному обертанні.

До повторно-перемінного (циклічного) належать навантаження, що багаторазово змінюються в часі за яким-небудь періодичним законом. До таких навантажень, зокрема, зараховують сили, що діють на зуби зубчастого колеса.

До динамічного (ударного) належать навантаження, що прикладаються раптово або навіть з деякою швидкістю в момент контакту. Прикладом такого навантаження може бути сила, прикладена до тіла в момент падіння на нього іншого тіла (забивання паль за допомогою копра тощо).

1 СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1 Основні визначення, поняття й аксіоми статyki.

Предмет статyki

Статикою називається розділ теоретичної механіки, у якому вивчаються загальні положення про сили, їх приведення до найпростішого вигляду та умови рівноваги матеріальних тіл, на які діють ці сили.

Під рівновагою розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. Умови рівноваги істотно залежать від того, чи є тіло твердим, пружним, рідким, газоподібним. У загальному курсі теоретичної механіки розглядаються тільки задачі про рівновагу абсолютно твердих тіл.

У статистиці розв'язуються такі основні задачі: 1) приведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду; 2) визначення умов рівноваги сил, які діють на абсолютно тверде тіло. Ці задачі статyki можна розв'язувати шляхом відповідних геометричних побудов або за допомогою числових розрахунків.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло, розмірами якого під час розв'язання конкретної задачі можна знехтувати, або геометрична точка, яка наділена певною масою.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між частками якого залишається постійною, тобто абсолютно тверде тіло зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

Сила – фізична величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами. Сила – величина векторна, її дія на абсолютно тверде тіло визначається: значенням або модулем сили; напрямом дії сили; точкою, у якій вона прикладена. Пряма aa (рис. 1.1), уздовж якої спрямована сила, називається *лінією дії сили*. Основною одиницею сили є 1 ньютон (Н). Це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в 1 м/с^2 ($1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м/с}^2$).

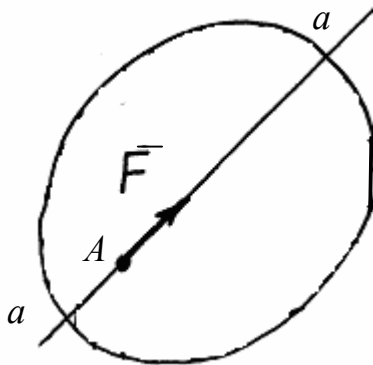


Рисунок 1.1

Графічно сила зображується спрямованим відрізком-вектором (рис. 1.1), довжина якого виражає у вибраному масштабі величину сили, а напрям відрізка відповідає напрямку сили. Силу позначатимемо буквою \vec{F} , а її величину (модуль) як F чи $|\vec{F}|$. Сукупність сил, що діють на абсолютно тверде тіло, називатимемо *системою сил* $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$.

Наведемо ще такі визначення:

1. Тіло, яке не взаємодіє з іншими тілами і яке з цього положення можна перемістити будь-куди у просторі, називається *вільним*.

2. Якщо одну систему сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$, що діють на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m)$, не порушуючи при цьому стану спокою чи руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються *еквівалентними*: $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m)$.

3. Система сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$, під дією якої вільне тверде тіло знаходиться у стані спокою, називається *зрівноваженою*, або *еквівалентною нулю*: $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim 0$.

4. Якщо задана система сил $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n)$ еквівалентна одній силі, то ця сила називається *рівнодійною* \bar{R} заданої системи сил: $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n) \sim \bar{R}$.

5. Сила, що прикладена до тіла в точці, називається *зосередженою*. *Точкою прикладання* сили називається та матеріальна частка тіла, до якої ця сила безпосередньо прикладена.

6. Сили, що діють на всі точки довжини, поверхні чи об'єму, називаються *розподіленими*.

Величину сили, яка припадає на одиницю довжини, площі або об'єму, називають *інтенсивністю*. зазвичай розподілену силу позначають буквою q , яка має розмірність Н/м, Н/м², Н/м³ відповідно. Прикладами розподілених сил є: тиск циліндричного котка на поверхню дороги; тиск колеса трамваю на рейку; тиск снігового шару на покрівлю; тиск рідини на стінки трубопроводу, посудини, греблі; сили ваги тіла та ін. Позначають характер дії розподілених сил графіком (епюрою). На рисунку 1.2, в наведено відповідно епюри рівномірної (а), трикуткової (б) і довільної інтенсивностей діючих сил (в).

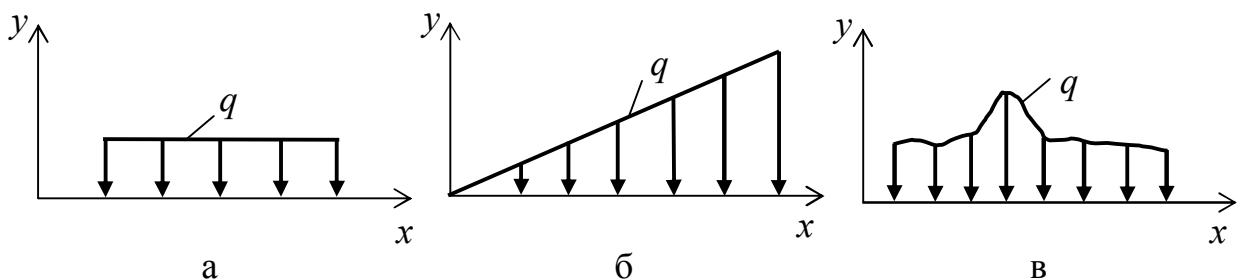


Рисунок 1.2

7. *Зовнішні сили* – це сили, що діють на тіло або механічну систему з боку матеріальних точок або інших тіл, які не входять в цю систему.

8. *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками однієї механічної системи.

1.2 Аксиоми статки

В основі статки лежить ряд аксіом, що становлять результат узагальнень численних дослідів і спостережень за рівновагою і рухом тіл, неодноразово підтверджених практикою. Аксиоми статки є вихідними положеннями дослідного характеру, що приймаються без доведення. Вони формулюються так.

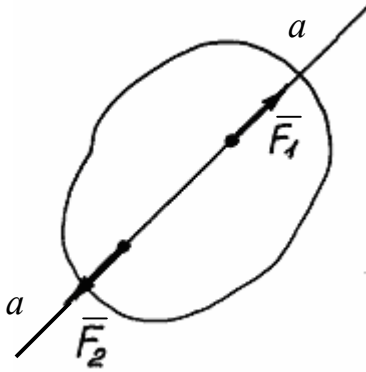


Рисунок 1.3

Аксиома 1. Вільне абсолютно тверде тіло може знаходитися під дією двох сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 у рівновазі тоді й тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ і діють уздовж однієї прямої aa у протилежних напрямках (рис. 1.3):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

У механіці така система сил має назву

«двійка сил».

Ця аксіома визначає найпростішу зрівноважену систему двох сил, оскільки досліди свідчать, що вільне тіло, на яке діє тільки одна сила, знаходиться в рівновазі не може.

Аксиома 2. Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не порушується, якщо до неї додати або відняти зрівноважену систему сил (наприклад, двійку сил).

Наслідок із аксіоми 2. Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, точку прикладання сили можна переносити вздовж її лінії дії.

Доведення. Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила \vec{F} , прикладена в точці A (рис. 1.4). Візьмемо на лінії дії aa цієї сили довільну точку B і прикладемо в ній дві сили \vec{F}_1, \vec{F}_1' (двійку сил), що дорівнюють за величиною силі \vec{F} , тобто ($F = F_1 = F_1'$).

Таку двійку сил можемо прикласти на підставі аксіоми 2. Сила \vec{F} , яка прикладена в точці A , і сила \vec{F}_1 , прикладена в точці B , складають, за побудовою, зрівноважену систему сил, тому її можна відкинути, не порушуючи стану рівноваги тіла. Отже, залишається сила \vec{F}_1' , яка прикладена в точці B і дорівнює за величиною початковій силі \vec{F} . За інженерними розрахунками цим наслідком можна користуватися лише тоді, коли визначаються умови рівноваги

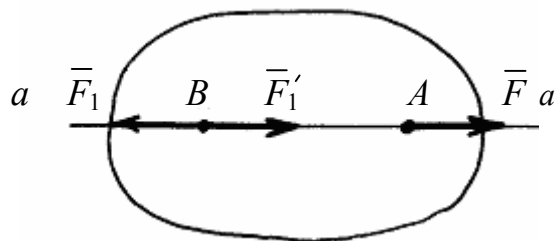


Рисунок 1.4

конструкції і не розглядаються внутрішні зусилля, що виникають в її окремих частинах. Цей наслідок визначає силу як вектор, що ковзає по власній лінії дії, не залишаючи тіло (сила є ковзним вектором).

Аксиома 3 (аксіома про паралелограм сил). Система двох сил, прикладених в одній точці до абсолютно твердого тіла, має рівнодійну, яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладена в тій самій точці (рис. 1.5).

Вектор \bar{R} , який дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на векторах \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , як на сторонах, називається *геометричною сумою* цих векторів:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2. \quad (1.1)$$

У цій аксіомі сформульовано правило векторного додавання сил, тому її можна сформулювати ще так: дві сили, які прикладені до абсолютно твердого тіла в одній точці, мають рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в тій самій точці.

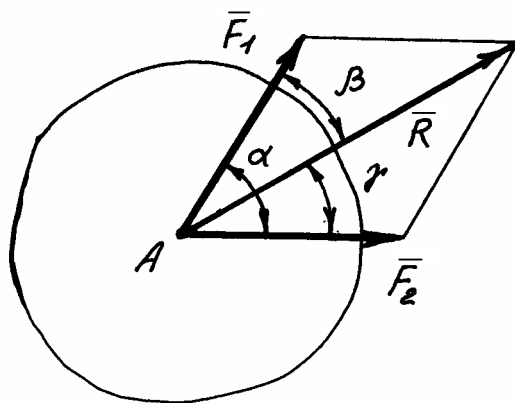


Рисунок 1.5

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}, \quad (1.2)$$

де α – кут між векторами \bar{F}_1 і \bar{F}_2 .

За однакового напрямку сил ($\cos \alpha = 1$) $R = F_1 + F_2$, а у разі протилежного ($\cos \alpha = -1$) $R = F_1 - F_2$.

Будь-яку силу \bar{R} також можна єдиним способом розкласти на дві складові сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 за двома заданими напрямками, які утворюють кути β і γ із напрямком цієї сили:

$$F_1 = R \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}; \quad F_2 = R \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}. \quad (1.3)$$

Аксиома 4. Сили взаємодії двох матеріальних тіл \bar{F}_{12} (сила дії тіла 1 на тіло 2) і \bar{F}_{21} завжди рівні за величиною ($F_{12} = F_{21}$) і діють по одній прямій aa у протилежних напрямках (рис. 1.6).

Ця аксіома є третім законом Ньютона. Сили взаємодії двох тіл не створюють систему зрівноважених сил (двійку сил), бо вони прикладені до різних тіл.

Аксиома 5. Рівновага здеформованого тіла не порушиться, якщо воно затвердіє.

Аксиома 6. Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Ця аксіома має також назву – принцип

звільнення від в'язей, який використовують під час складання рівнянь рівноваги будь-якої конструкції.

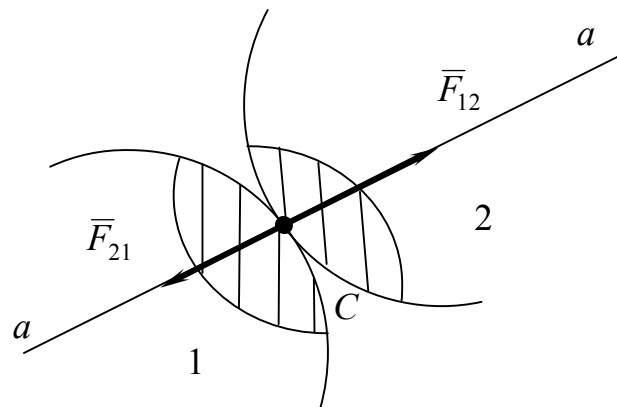


Рисунок 1.6

У статиці також зустрічаються задачі про рівновагу тіла, що складається з декількох твердих тіл, зв'язаних між собою. Таке тіло знаходиться в рівновазі, якщо в рівновазі перебувають усі складові тіла. У деяких випадках таке тіло розглядають як одне абсолютно тверде тіло.

Принцип затвердіння широко використовують в інженерних розрахунках.

2 В'ЯЗИ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

В'язями називають тіла або сукупність тіл, які обмежують рух певної тіла чи даної матеріальної системи. За аксіомою 6 невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Звільнення від в'язей на надає можливість звести рівновагу невільного твердого тіла до відповідного питання про рівновагу вільного твердого тіла, яке знаходиться під дією одночасно зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, щоб перешкодити будь-яким його переміщенням, називається *реакцією в'язі*. Визначення реакцій в'язей має велике практичне значення: знаючи їх, будемо знати і сили тиску тіла на в'язі, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (наприклад, сила тяжіння), будемо називати *активними силами*. Особливість активної сили полягає в тому, що її модуль і напрям безпосередньо не залежать від інших сил, які діють на тіло. Реакції в'язей відрізняються від діючих на тіло активних сил тим, що їх напрямок і величина завжди залежать від цих сил і наперед невідомі. Якщо ніякі активні сили на тіло не діють, то реакції в'язей дорівнюють нулю. Для визначення реакції в'язі потрібно розв'язати відповідну задачу статички. Правильне визначення напрямів реакцій в'язей відіграє під час розв'язуванні задач статички дуже важливу роль.

Розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких основних типів в'язей.

Ідеально гладка поверхня. Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні цієї опори у точці стикання з певним тілом (рис. 2.1, а).

У випадках, коли спільна нормаль до поверхонь в'язі й тіла виявляється неозначеною, наприклад, вироджується в точку, то реакція в'язі спрямована по нормалі до тієї поверхні, до якої можна провести нормаль. Прикладом може бути опора ребром (рис. 2.1, б) або вершиною кута (рис. 2.1, в).

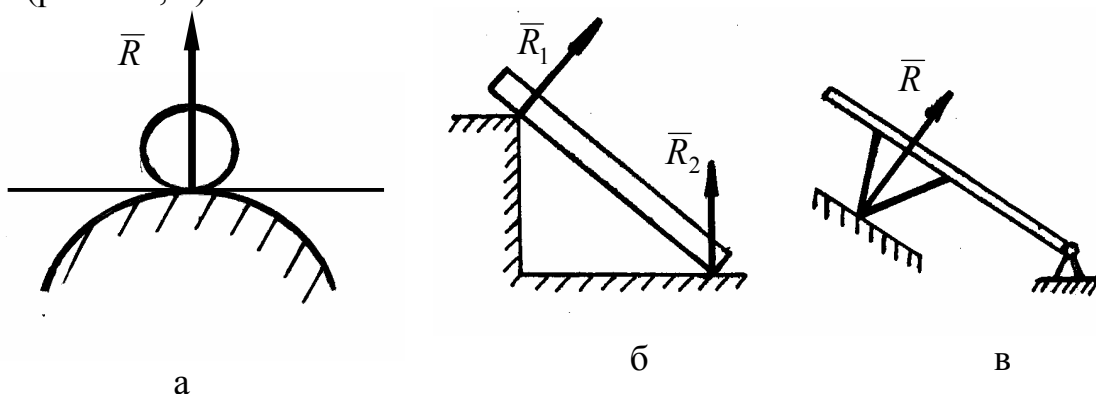


Рисунок 2.1

В'язь, що здійснюється гнучким тілом, ниткою або канатом, тросом, ланцюгом. Такі в'язі (рис. 2.2) працюють тільки на розтяг, їх реакції напрямлені по нитці. В'язь, реалізована в даному вигляді, не дає змоги тілу віддалятися від точки підвісу за напрямом AM . Тому реакція \bar{T} нитки AM спрямована завжди вздовж нитки до точки підвісу A . У задачах теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомою, гнучкою і нерозтяжною.

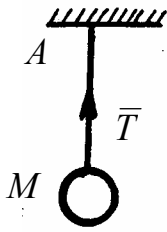


Рисунок 2.2

Шарнір циліндричний (сферичний), підп'ятник. З'єднання двох тіл, яке дає змогу одному тілу повертатися відносно іншого, не відділяючись, називається *шарніром*.

Нерухомий циліндричний шарнір. Він складається з обойми 1 , яка закріплена на нерухомій опорі 2 , і циліндричного вала 3 (рис. 2.3, а). Тут з'єднане з валом 3 тіло може обертатися тільки навколо осі O шарніра. Реакція \bar{R} циліндричного шарніра перпендикулярна до його осі і має напрям, який залежить від сил, прикладених до тіла. Отже її виражають у вигляді взаємно перпендикулярних координатних складових \bar{X}_0, \bar{Y}_0 , тобто $\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0$ і $R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$.

Рухомий циліндричний шарнір (коток). Цей вид в'язі не дає змогу тілу переміщатися в напрямі, перпендикулярному до опорної поверхні котка. Його реакція \bar{R} (рис. 2.3, б) напрямлена завжди по нормалі до опорної площини. Опора на котках застосовується звичайно в мостових конструкціях.

Сферичний шарнір. У разі сферичного шарніра тіло, яке з'єднане з обоймою C , має змогу обертатися навколо центру шарніра в будь-якому напрямі (рис. 2.3, в). Реакцію сферичного шарніра виражають трьома координатними складовими $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 + \bar{Z}_0; \quad R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}. \quad (2.1)$$

Підп'ятник. Якщо циліндричний шарнір перешкоджає переміщенню вала вздовж осі z вниз, то такий циліндричний шарнір називають підп'ятником (рис. 2.3, б). Опорна реакція підп'ятника має три координатні складові $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ (рис. 2.3, г):

$$\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 + \bar{Z}_0; \quad R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}. \quad (2.2)$$

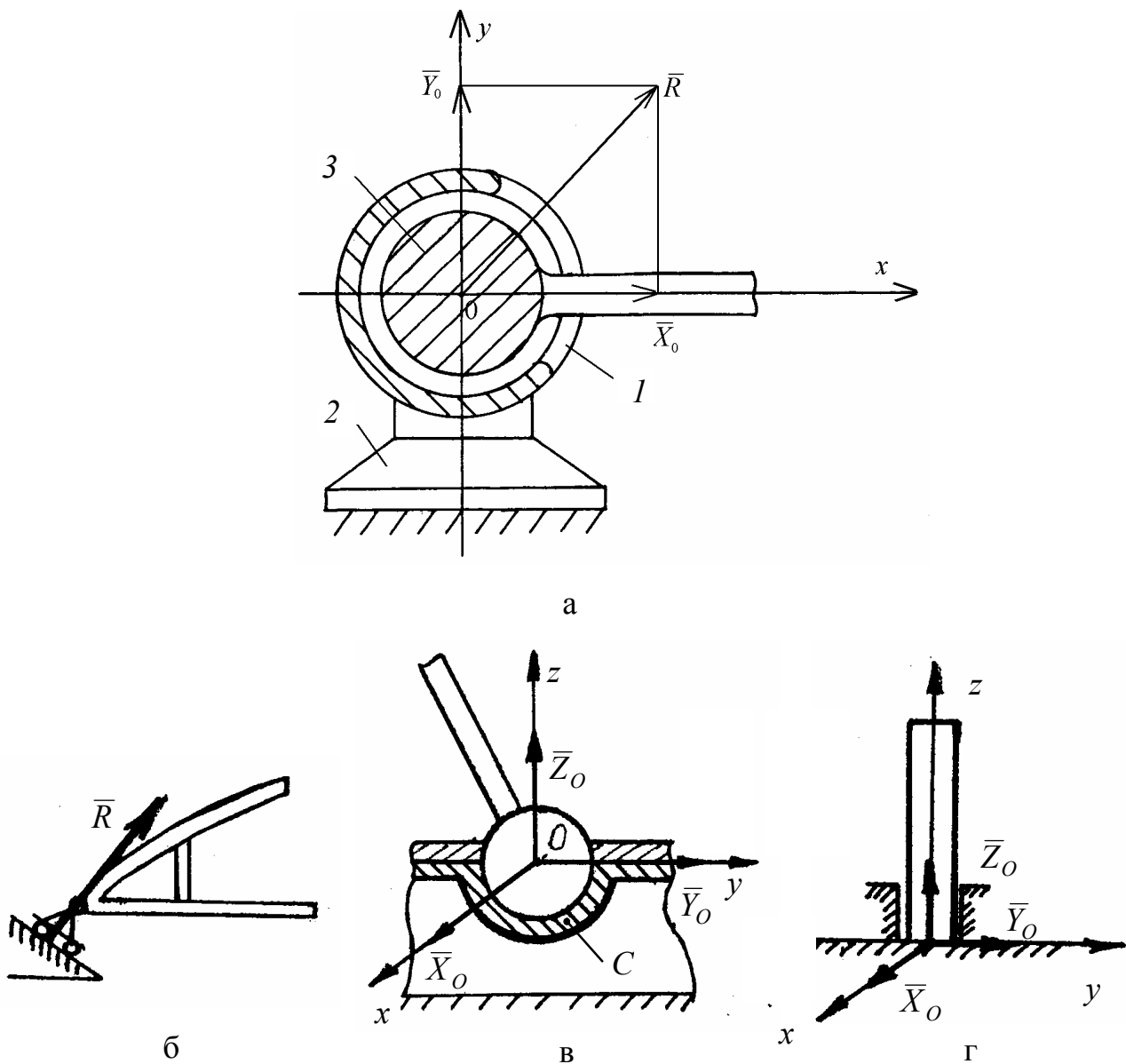


Рисунок 2.3

Ідеальний стержень. Так називається невагомий стержень AB , закріплений двома ідеальними шарнірами на його кінцях (рис. 2.4). Такий стержень працює тільки на розтяг або стиск.

Реакція \bar{R}_{AB} ідеального стержня напрямлена по осі стержня. Якщо стержень розтягнутий, то реакція спрямована від тіла до стержня; якщо стержень стиснутий – то по стержню (рис. 2.4) від нього до тіла.

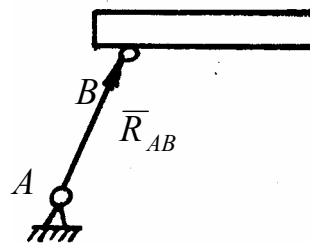


Рисунок 2.4

Жорстке зацмлення. Балка AB кінцем A жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець вільний (рис. 2.5). Якщо на балку діє задана сила \bar{F} , то в зацмленні виникають реакції \bar{X}_A, \bar{Y}_A і пара сил із моментом M_A .

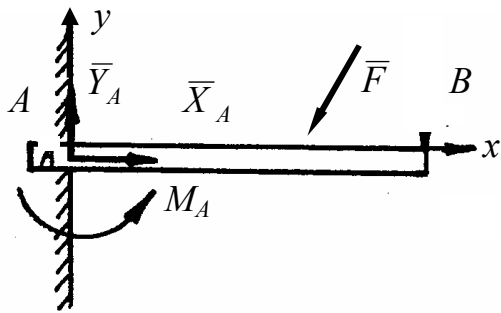


Рисунок 2.5

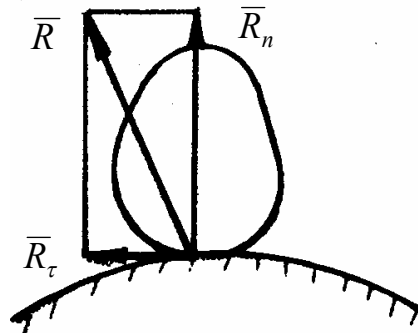


Рисунок 2.6

Опора з тертям. У цьому випадку реакцію опори \bar{R} розкладають на дві складові (рис. 2.6): силу \bar{R}_n , нормальну до поверхні опори, і силу \bar{R}_τ , дотичну до поверхні опори (силу тертя):

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{R}_n + \bar{R}_\tau; \\ R &= \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

3 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

3.1 Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил

Найпростішою є система *збіжних сил*, тобто система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (точці O збігу сил). Вона може бути просторовою чи плоскою. В останньому випадку всі лінії дії сил системи належать одній площині.

Теорема про рівновагу. Система збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ еквівалентна одній силі (рівнодійній \bar{R}), яка дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил $\left(\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i\right)$ і прикладена в точці O їх збігу.

Доведення. Розглянемо (рис. 3.1, а) вихідну систему збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ з лініями дії $a_1 a_1, \dots, a_n a_n$ і точками прикладання A_1, \dots, A_n .

Для кожної сили системи використовуємо аксіому 2 про перенесення сили уздовж лінії дії в точку O збігу (рис. 3.1, б). У результаті отримаємо систему сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$, прикладених в одній точці O .

На основі аксіоми 3 про паралелограм сил будь-яку кількість сил із загальною точкою прикладання можна складати геометрично. При цьому можна використовувати або правило паралелограма, або правило трикутника (многокутника).

У першому випадку (рис. 3.1, б), застосовуючи послідовно правило паралелограма, дістанемо спочатку рівнодійну $\bar{P}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, далі отримаємо рівнодійну $\bar{P}_2 = \bar{P}_1 + \bar{F}_3$ і, нарешті, рівнодійну $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ заданої системи сил (рис. 3.1, б).

За правилом многокутника рівнодійну сил (рис. 3.1, в) визначаємо як суму векторів цих сил: для цього з кінця вектора \bar{F}_1 відкладаємо вектор сили \bar{F}_2 , і т.д. З'єднавши початок першого вектора \bar{F}_1 з кінцем останнього \bar{F}_n , визначимо рівнодійну силу

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Одержаний таким чином многокутник має назву *многокутника сил*, або силового многокутника, замикальна сторона якого виявляється рівнодійною силою системи.

Отже, теорему доведено.

Доведена теорема дозволяє розв'язувати задачу приведення систем збіжних сил до рівнодійної сили графічно (нею зручно користуватись у разі плоскої довільної системи сил).

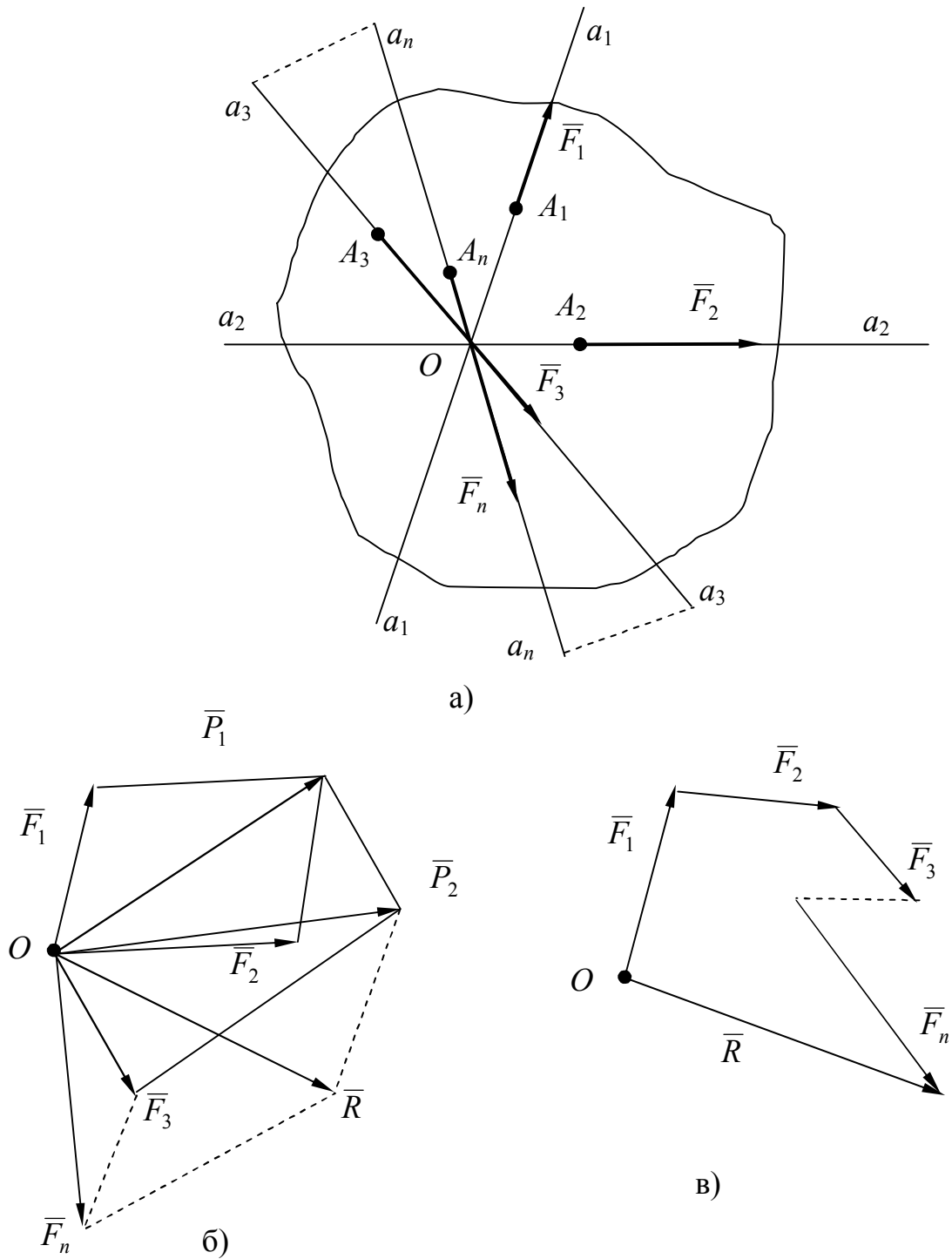


Рисунок 3.1

Рівнодійну \vec{R} можна визначити також аналітично за її проєкціями R_x, R_y, R_z на осі прямокутної системи координат методами векторної алгебри. У даному випадку рівнодійну \vec{R} представляють так:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z, \quad (3.1)$$

де $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$; $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$; $R_z = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iz}$; F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції сил системи на відповідні осі координат;

$\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ – координатні складові рівнодійної.

Величина (модуль) і напрямні косинуси рівнодійної сили \bar{R} визначають, враховуючи (3.1), за такими формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (3.2)$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{R}}) = R_x / R; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{R}}) = R_y / R; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{R}}) = R_z / R.$$

Визначивши проекції або величину і напрямні косинуси рівнодійної, можна побудувати і сам вектор \bar{R} у заданій системі координат для подальшого розв'язання задачі рівноваги тіла.

Розглянемо, наприклад, задану в площині xOy (рис. 3.2, а) систему двох збіжних сил $F_1 = 1$ Н, $F_2 = 1$ Н. Визначимо рівнодійну \bar{R} системи методом додавання векторів початкових сил за правилом паралелограма, а також методом додавання координатних складових рівнодійної за правилом прямокутника (плоска система сил) або паралелепіпеда (просторова система) чи за правилом «модуль-кут».

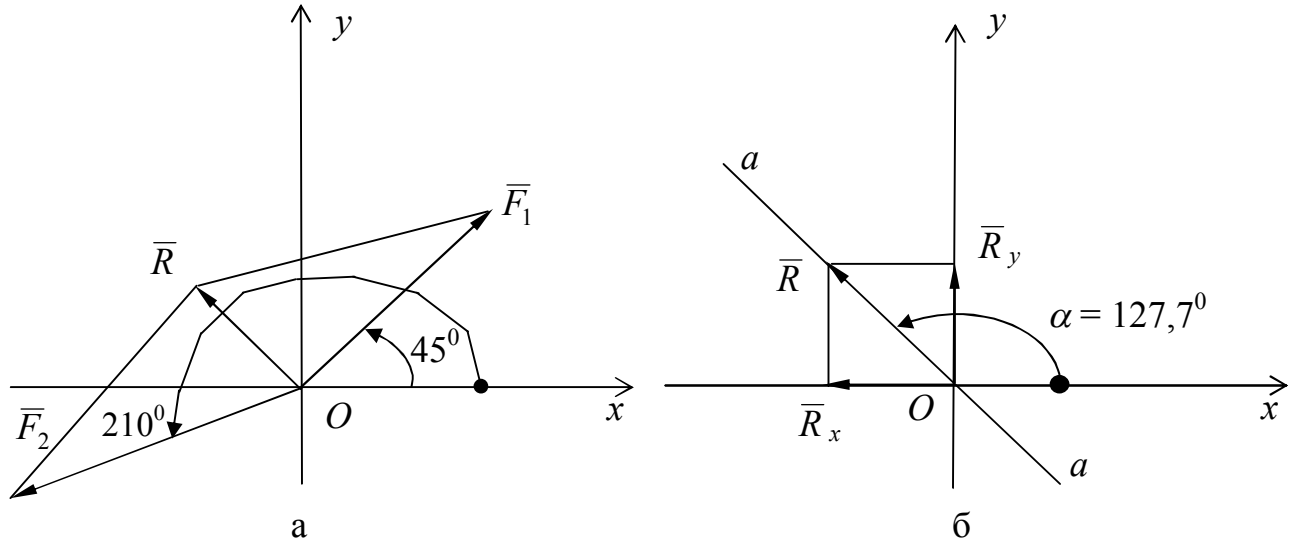


Рисунок 3.2

У першому випадку будуюмо на силах \bar{F}_1, \bar{F}_2 , як на сторонах, паралелограм (рис. 3.2, а), діагональ якого буде шуканою рівнодійною \bar{R} . Величину (модуль) рівнодійної визначаємо за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \cos 165^\circ} = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot 0,966} = 0,26 \text{ (Н)}.$$

У другому випадку отримаємо: проекції рівнодійної

$$R_x = F_{1x} - F_{2x} = F_1 \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,866 = 0,159 \text{ (Н)},$$

$$R_y = F_{1y} - F_{2y} = F_1 \cdot \sin 45^\circ - F_2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,5 = 0,207 \text{ (Н)},$$

координатні складові рівнодійної:

$$\bar{R}_x = R_x \cdot \bar{i} = -0,159 \cdot \bar{i}, \quad \bar{R}_y = R_y \cdot \bar{j} = 0,207 \cdot \bar{j}.$$

Вектори \bar{R}_x і \bar{R}_y будуюмо на рис. 3.2, б. Склавши їх за правилом прямокутника, отримаємо шукану рівнодійну \bar{R} .

За правилом «модуль-кут» визначаємо величину рівнодійної $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0,159)^2 + (0,207)^2} = 0,26 \text{ (Н)}$, її напрямний косинус

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-0,159}{0,26} = -0,61 \text{ і кут } \alpha = 127,7^\circ. \text{ Будуємо в площині } xOy \text{ лінію}$$

дії a -а рівнодійної (рис. 3.2, б), враховуючи визначений кут між нею і віссю Ox . Далі на лінії дії a -а будуюмо вектор рівнодійної, який починається в полюсі O системи координат і має величину (довжину) $R = 0,26 \text{ (Н)}$.

3.2 Умови рівноваги системи збіжних сил

Відповідно до теореми про рівнодійну будь-яка система збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ зводиться до прикладеної у точці O збігу сили \bar{R} , рівної геометричній сумі сил системи. За правилом багатокутника сила \bar{R} складає його замикальну сторону.

Під дією лише однієї сили, згідно з аксіомою 1 статички про двійку сил, тіло перебуватиме в рівновазі. Умови його рівноваги формулюються так: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо¹, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = 0. \quad (3.3)$$

Це геометрична (векторна) умова рівноваги.

Необхідність умови (3.3) очевидна, бо якщо вона не виконується, то тіло знаходиться під дією рівнодійної сили й не перебуватиме у рівновазі.

Достатність цієї умови доведемо так. Якщо рівнодійна системи діючих на тіло сил дорівнює нулю, то за визначенням вона є зрівноваженою (еквівалентною нулю), а тіло під дією такої системи знаходиться у стані спокою безумовно.

Слід зазначити, що з умови $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$ випливає замкненість багатокутника сил: кінець останньої сили \bar{F}_n повинен збігатися з початком першої (точкою O на рис. 3.1, в).

¹ Необхідність означає, що з фізичних умов рівноваги випливають математичні, а достатність, навпаки, – з математичних умов випливають фізичні.

Векторна рівність (3.3) перетворюється, з урахуванням формули (3.1), у аналітичну (алгебраїчну) форму рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0; \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0; \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Аналітична форма рівноваги формулюється таким чином: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій цих сил на кожен з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

Якщо система збіжних сил є плоскою, то з трьох умов рівноваги (3.4) залишаються лише дві, наприклад,

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (3.5)$$

Отримані умови рівноваги у випадку, коли деякі сили в рівностях (3.4), (3.5) є реакціями в'язей, перетворюються в рівняння відносно цих реакцій. При цьому кількість невідомих реакцій в'язів, якщо задача статично визначена, не повинна перевищувати кількості рівнянь.

4 МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. СКЛАДАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ. ПАРА СИЛ, ТЕОРЕМИ ПРО ПАРИ

4.1 Момент сили відносно точки

Силовий фактор, під дією якого тіло може здійснювати обертальний рух, називається *моментом сили відносно точки* (полюса). Це фізичне поняття.

З математичної точки зору момент сили \vec{F} відносно точки O (рис. 4.1) визначається вектором $\vec{M}_0(\vec{F})$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора \vec{r}_A точки A прикладання сили на її вектор \vec{F} :

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}. \quad (4.1)$$

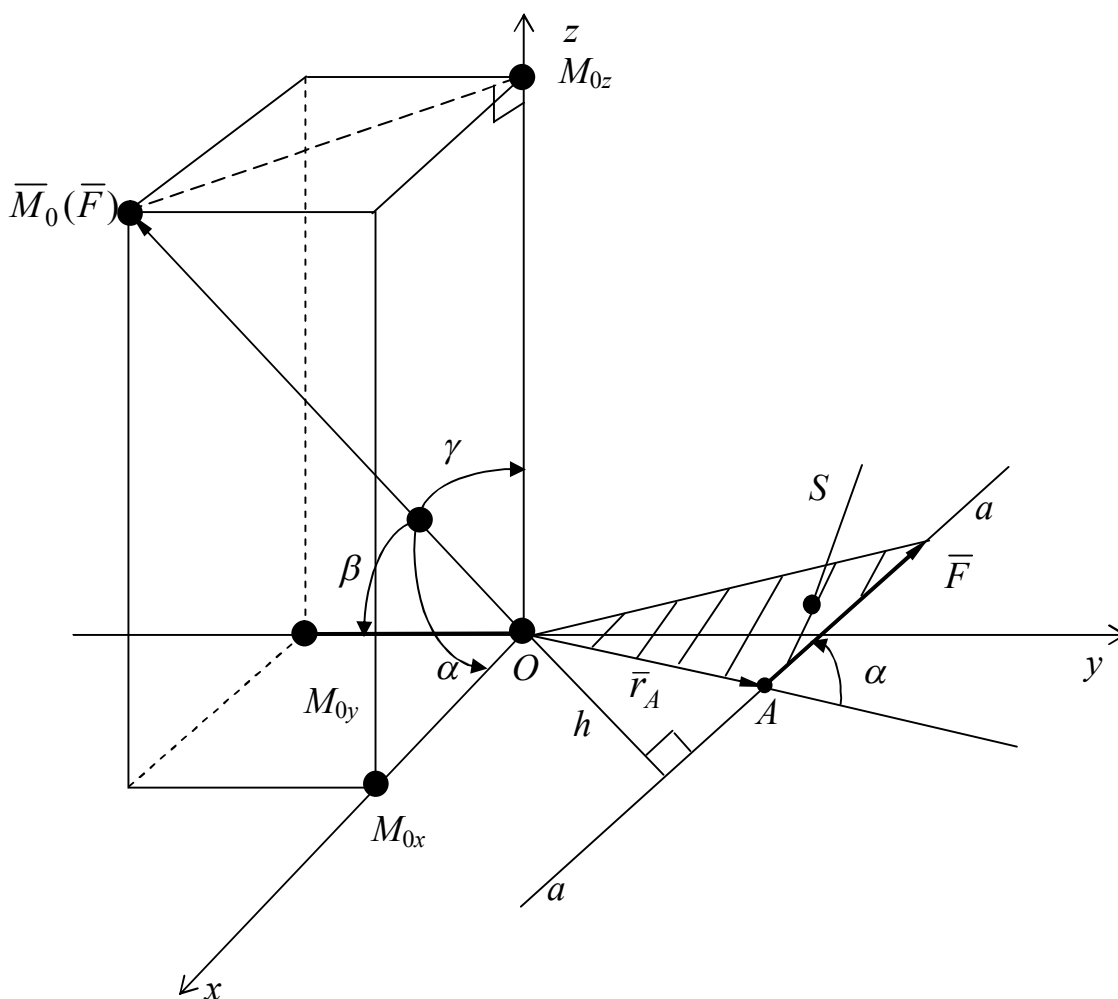


Рисунок 4.1

Отже, враховуючи поняття і визначення векторної алгебри, отримуємо такі властивості моменту сили відносно точки:

– момент сили відносно точки O є зв'язаним у точці вектором, який напрямлений перпендикулярно до площини S , що проходить через точку O

і лінію дії $a-a$ сили \vec{F} , у той бік, звідки обертання тіла під дією сили навколо точки видно проти ходу стрілки годинника;

– в координатній формі момент сили обчислюється так:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y) \cdot \vec{i} + (zF_x - xF_z) \cdot \vec{j} +$$

$$+ (xF_y - yF_x) \cdot \vec{k} = M_{0x} \cdot \vec{i} + M_{0y} \cdot \vec{j} + M_{0z} \cdot \vec{k},$$

де $\vec{r}_A = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$; M_{0x} ; M_{0y} ; M_{0z} – проєкції моменту сили відносно точки O на осі системи координат (рис. 4.1);

– основною одиницею вимірювання моменту сили відносно точки є 1 Н·м;

– за величиною момент сили дорівнює модулю вектора $\vec{M}_0(\vec{F})$:

$$M_0(\vec{F}) = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2},$$

або $M_0(\vec{F}) = |\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{r}_A \times \vec{F}| = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha = hF,$ (4.3)

де $h = r_A \cdot \sin \alpha$ – плече сили \vec{F} відносно точки O , тобто довжина перпендикуляра, який опущено (рис. 4.1) з точки O на лінію дії $a-a$ сили \vec{F} ;

– відповідно до формули (4.3) момент сили відносно полюса дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цей полюс (при цьому плече сили $h = 0$);

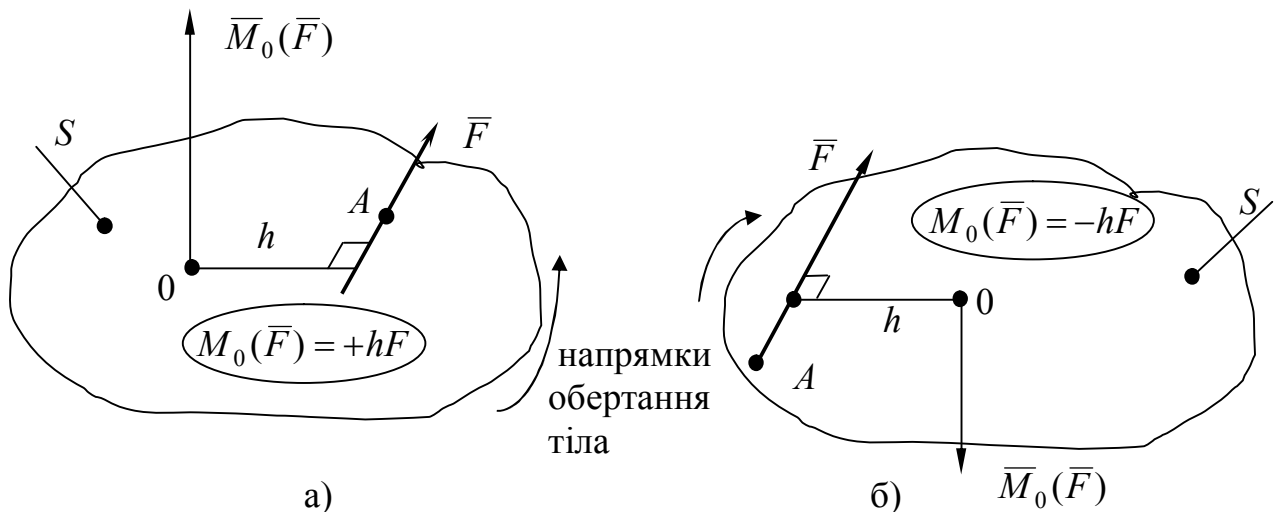


Рисунок 4.2

– момент сили відносно точки вважатимемо додатним (вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$ моменту сили на рис. 4.2, а спрямуємо перпендикулярно до горизонтальної площини S вертикально догори) у випадку, якщо сила намагається викликати обертання тіла (або плеча h навколо точки) проти ходу стрілки годинника, і від’ємним – навпаки (рис. 4.2, б).

4.2 Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо певної осі. Ним називається проекція на цю вісь вектора $\bar{M}_0(\bar{F})$ моменту сили відносно точки O , що лежить на цій осі (рис. 4.1).

Відповідно до схеми на рис. 4.1 і виразу (4.2) моменти сили \bar{F} відносно координатних осей Ox, Oy і Oz будуть визначитися так:

$$M_{0x}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \alpha; \quad M_{0y}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \beta; \quad M_{0z}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \gamma$$

або $M_{0x} = yF_z - zF_y; \quad M_{0y} = zF_x - xF_z; \quad M_{0z} = xF_y - yF_x.$

На практиці момент сили відносно осі визначають за такими правилами:

– проводять площину S , перпендикулярну до осі Oz , і знаходять точку O перетину осі з площиною (рис. 4.3);

– проєктують задану силу \bar{F} на зазначену площину, отримуючи силу \bar{F}_s ;

– обчислюють момент сили \bar{F}_s відносно точки O перетину площини S з віссю Oz , враховуючи наведені в розд. 4.2 його властивості: $M_0(\bar{F}_s) = \pm hF_s$;

– момент заданої сили \bar{F} відносно осі Oz визначають за формулою:

$$\bar{M}_{0z}(\bar{F}) = \bar{M}_0(\bar{F}_s).$$

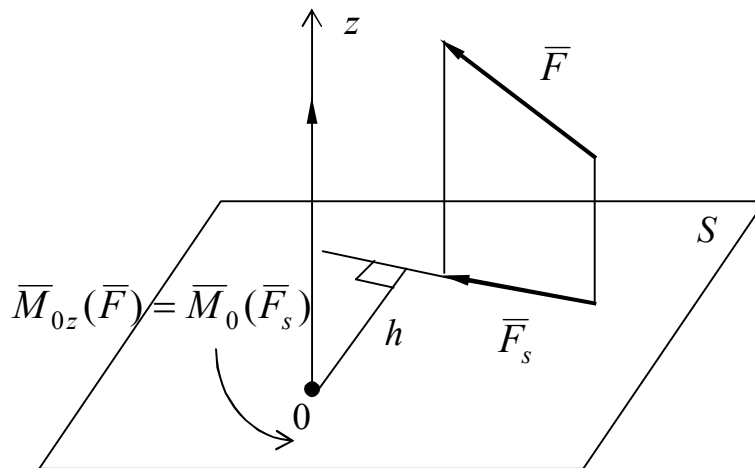


Рисунок 4.3

На рисунку 4.3 момент $\bar{M}_{0z}(\bar{F})$ – координатна складова \bar{M}_{0z} вектора моменту сили відносно точки O , який згідно з (4.2) дорівнює: $\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{M}_{0x} + \bar{M}_{0y} + \bar{M}_{0z}.$

- Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:
- сила паралельна осі (у цьому випадку проекція сили \vec{F} на площину S дорівнює нулю: $\vec{F}_s = 0$);
 - лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече $h = 0$).

4.3. Алгебраїчний момент сили відносно точки

Під час розв'язанні задач статки у площині під час складання рівнянь моментів використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

Алгебраїчним моментом сили відносно точки називається взятий з відповідним знаком добуток плеча на модуль сили. Береться знак “+”, якщо сила намагається повернути плече проти ходу стрілки годинника.

Таким чином, для визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки треба виконати такі дії (рис. 4.4, а,б):

- 1) провести лінію дії сили;
- 2) з вибраної точки опустити перпендикуляр до лінії дії сили (довжина перпендикуляра h – плече сили);
- 3) скласти добуток плеча на модуль сили;
- 4) взяти знак “+”, якщо сила намагається повернути плече відносно вибраної точки проти ходу стрілки годинника (рис. 4.4, а) і знак “–” – за ходом стрілки годинника (рис. 4.4, б).

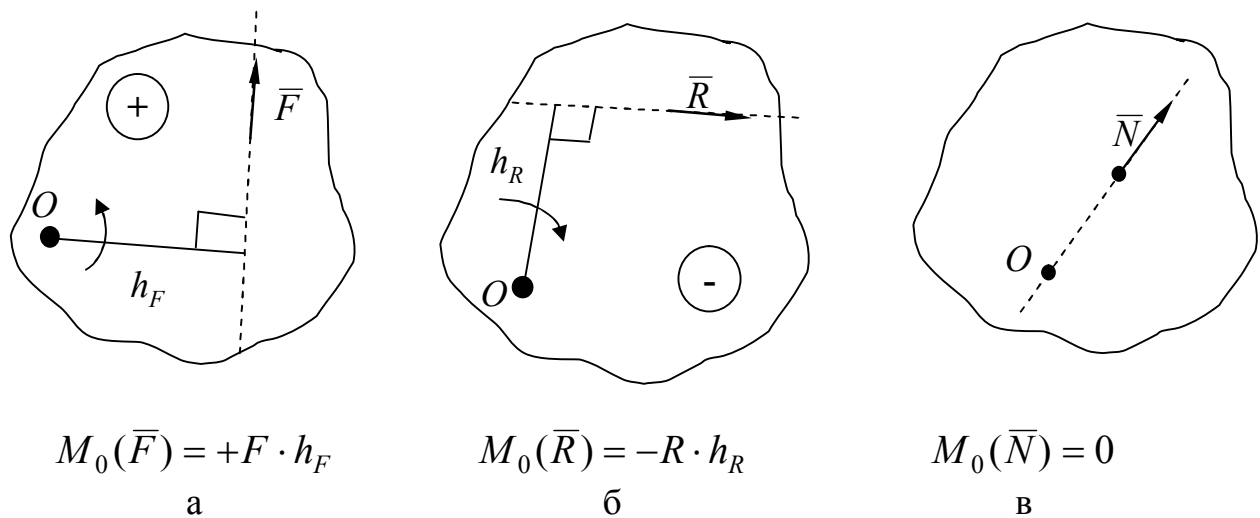


Рисунок 4.4

Окремий випадок (рис. 4.4, в): алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тут плече $h = 0$).

Зрівнюючи правила визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки і моменту сили відносно осі, робимо висновок, що алгебраїчний момент сили відносно точки є не чим іншим, як моментом

сили відносно осі, яка проходить через точку перпендикулярно до площини рисунка і напрямлена до спостерігача.

4.4 Складання паралельних сил

Прикладами паралельних сил є сили ваги вузлів машини, трамваю (рис. 4.5, а), реакції поверхні шляху на коток (рис. 4.5, б) та ін.

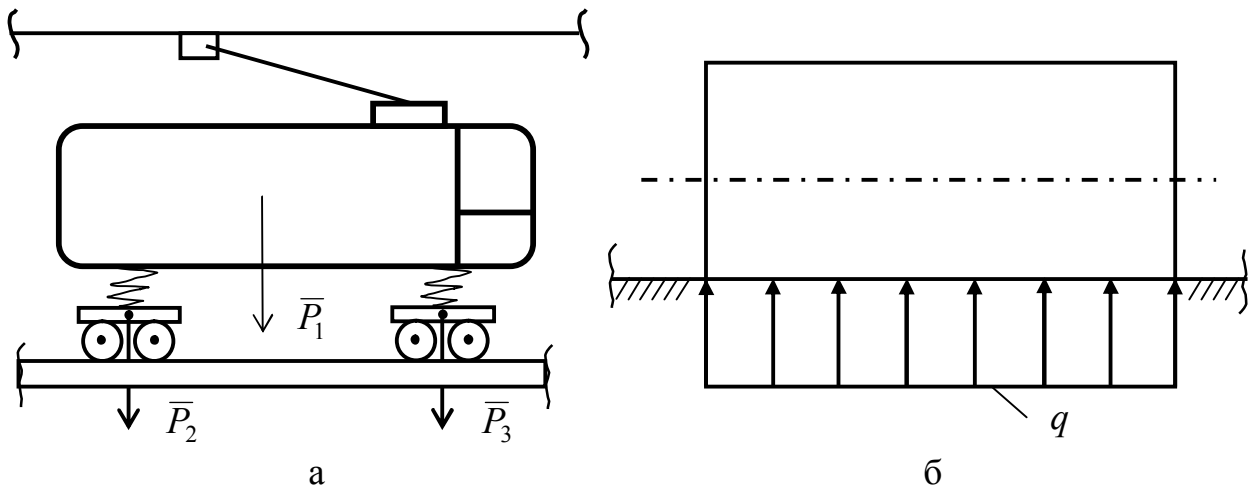


Рисунок 4.5

4.4.1 Складання двох сил, напрямлених в один бік

Розглянемо тверде тіло, на яке в точках A і B діють дві паралельні сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 (рис. 4.6). Приведемо вихідну систему паралельних сил до еквівалентної системи збіжних сил \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 . Для цього прикладемо в точках A і B дві зрівноважені, довільні за величиною сили \bar{P}_1 і $\bar{P}_2 = -\bar{P}_1$) і складемо їх за правилом паралелограма. Одержані сили \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 перенесемо до точки O перетину їх ліній дії. Після цього кожен з сил \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 розкладемо на дві складові, кожна з яких дорівнює аналогічним складовим сил \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 у точках A і B . За побудовою і визначенням отримані складові сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 складуть двійку сил, тому їх можна відкинути (закреслено на рис. 4.6). Залишені сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , за побудовою, будуть мати загальну лінію дії, тому перенесемо їх у точку C перетину зазначеної лінії дії з відрізком AB . У точці C їх складемо і замінюємо рівнодійною:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Для визначення положення точки C на відрізку AB розглянемо трикутники OAC , Oak , OBC , Obm . Вони подібні за побудовою, тому будуть виконуватись такі пропорційні співвідношення їх сторін:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{ak}{Ok}, \quad \frac{BC}{OC} = \frac{bm}{Om}. \quad (4.4)$$

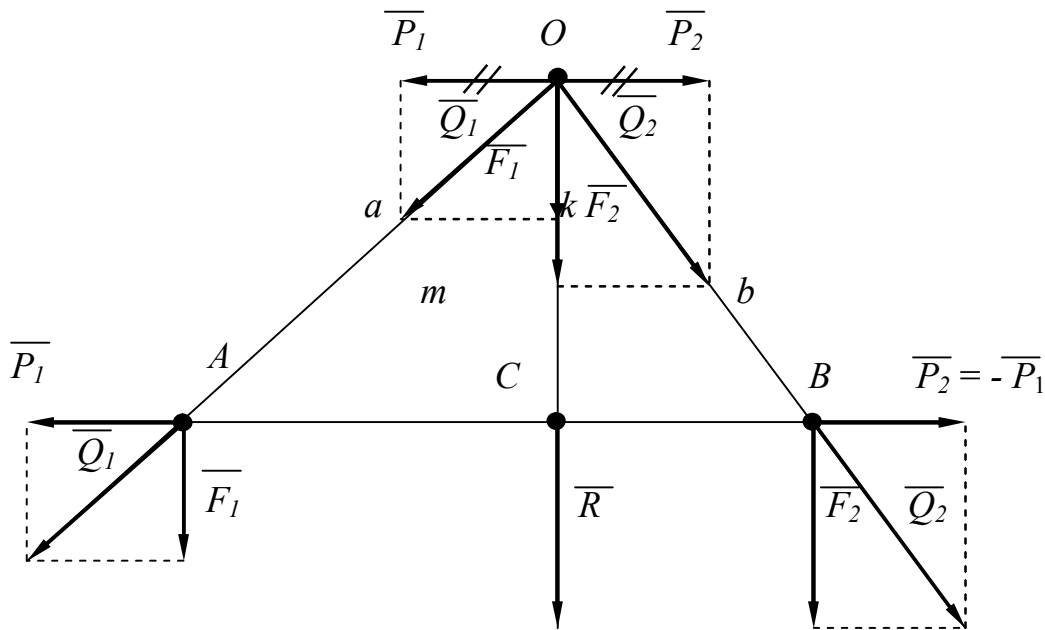


Рисунок 4.6

Розв'язавши пропорції (4.4) та враховуючи, що $BC + AC = AB$, а $Ok = F_1$, $Om = F_2$, одержимо

$$BC = AB \cdot \frac{F_1}{F_1 + F_2}; \quad AC = AB \cdot \frac{F_2}{F_1 + F_2}; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (4.5)$$

У результаті виконаних перетворень початкову систему паралельних сил \bar{F}_1 , \bar{F}_2 зведено до однієї сили рівнодійної $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$. Отримано також, що рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в один бік, дорівнює за модулем сумі модулів складових сил, їм паралельна і напрямлена у той же бік; лінія дії рівнодійної проходить між точками прикладання складових сил на відстані від цих точок, обернено пропорційній (4.5) силам.

4.4.2 Складання двох сил у різні боки

Зобразимо прикладені до тіла у точках A , B сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , причому нехай за величиною $F_1 > F_2$ (рис. 4.7). Візьмемо на продовженні відрізка BA точку C і прикладемо в ній двійку сил \bar{R} і \bar{R}' , які паралельні силам \bar{F}_1 і \bar{F}_2 . При цьому модулі сил і положення точки C оберемо так, щоб виконувались рівності:

$$R = F_1 - F_2, \quad \frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \quad (4.6)$$

Отже, складаючи сили \bar{F}_2 і \bar{R}' , знайдемо, що їх рівнодійна $\bar{Q} = \bar{F}_2 + \bar{R}'$, тобто дорівнює за величиною силі \bar{F}_1 , протилежно їй направлена і прикладена в точці A . Сили \bar{F}_1 і \bar{Q} , як зрівноважені, можна відкинути (закреслено на рис. 4.7). У результаті задані сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 будуть замінені однією силою \bar{R} , яка і є їх рівнодійною. Модуль цієї рівнодійної та точка її прикладання C визначається формулами (4.6).

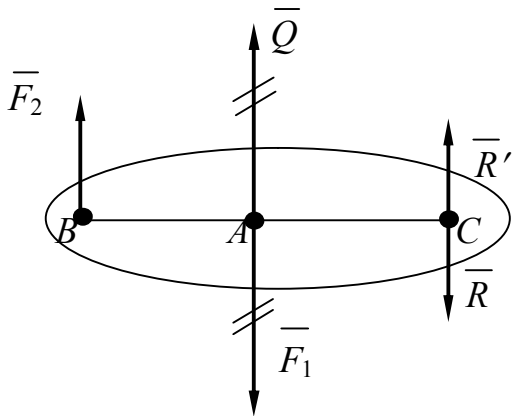


Рисунок 4.7

використовуючи правила складання двох паралельних сил.

Таким чином, рівнодійна двох напрямлених у різні боки паралельних сил дорівнює за величиною різниці модулів заданих сил, їм паралельна і направлена в бік більшої з сил; лінія дії рівнодійної проходить поза відрізком, який з'єднує точки прикладання складових сил, на відстані, обернено пропорційній силам.

Коли на тіло діють декілька паралельних сил, то їх рівнодійну можна знайти послідовно, використо-

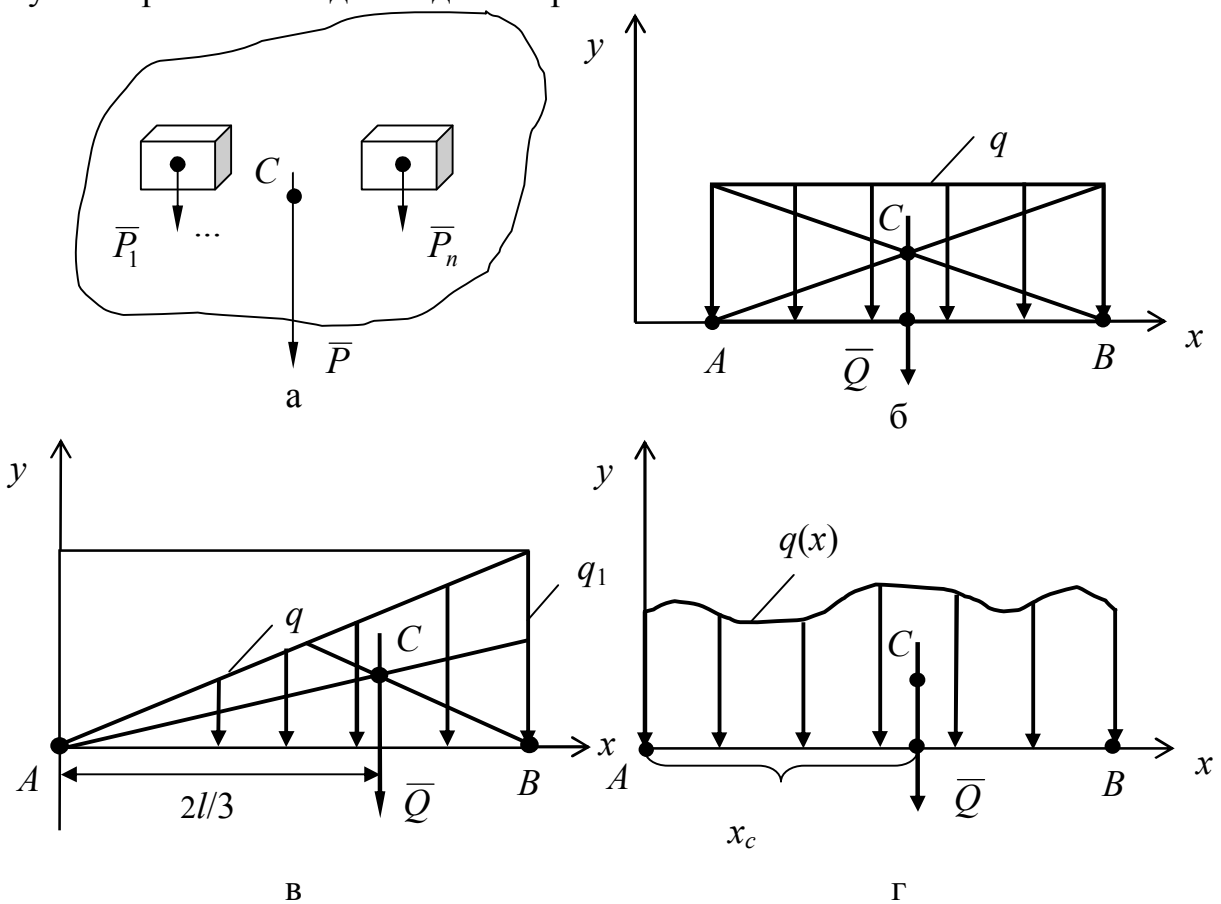


Рисунок 4.8

У випадку розподілених сил діють таким способом. Силу ваги тіла показують у вигляді рівнодійної, яка має початок у центрі С ваги і спрямована завжди вертикально донизу (рис. 4.8, а). Якщо сили розподілені за довжиною, то діють так: у випадку прямокутної епюри (рис. 4.8, б) сили замінюють рівнодійною $Q = q \cdot l$ (l – довжина відрізка АВ прикладання сил), яка прикладена у середині відрізка АВ; при лінійному законі розподілу сили (рис. 4.8, в) рівнодійна $Q = q_1 \cdot l/2$ прикладена у точці з координатою $2l/3$; при довільному законі (рис. 4.8, г) – величину рівнодійної сили визначають формулою $Q = \int_0^l q(x) dx$, а координату її

прикладання – $x_c = \left(\int_0^l q(x) \cdot x \cdot dx \right) / \left(\int_0^l q(x) dx \right)$. Однак завжди лінія дії

рівнодійної проходить через центр ваги площі епюри розподілених сил (наприклад, у випадку лінійного закону розподілу сил (рис. 4.8, в) вона проходить через точку перетину медіан трикутника).

4.5 Пара сил. Момент пари. Теореми про пари сил

4.5.1 Визначення пари сил

Парою сил називається система двох, розташованих в одній площині паралельних сил (\vec{F}, \vec{F}') , які рівні за величиною і протилежно направлені.

Площина S , яка проходить через лінії дії сил пари (рис. 4.8), називається *площиною дії пари*.

Дія пари сил на тіло призводить до його обертання навколо осі, яка перпендикулярна до площини дії пари сил.

Момент пари сил (\vec{F}, \vec{F}') математично визначається вектором $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$ (рис. 4.8), рівним векторному добутку $\vec{h} \times \vec{F}$. Отже, враховуючи його властивості, отримаємо, що век-

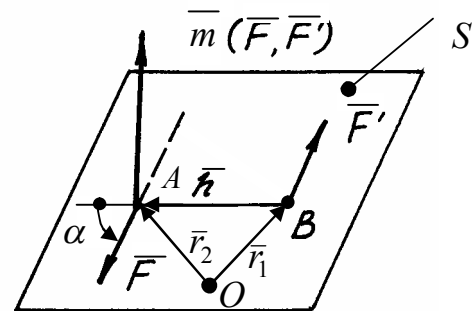


Рис. 4.8

тор $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$ моменту пари сил напрямлений перпендикулярно до площини S дії пари сил у той бік, звідки обертання пари відбувається проти ходу стрілки годинника.

Відповідно до механічної схеми на рис. 4.8 отримаємо такі властивості моменту пари сил:

– за величиною момент пари сил дорівнюватиме модулю вектора $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$:

$$m(\vec{F}, \vec{F}') = |\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')| = |\vec{h} \times \vec{F}| = h \cdot F \cdot \sin \alpha.$$

Прийнявши під час побудови схеми на рис. 4.8 кут $\alpha = 90^\circ$, матимемо $m(\bar{F}, \bar{F}') = h \cdot F$. У цьому випадку h визначають *плечем пари сил* (найкоротший відрізок між лініями дії сил, що складають пару);

– пара сил не має рівнодійної, тому що при $\bar{F} = -\bar{F}'$ виконується рівність $\bar{R} = \bar{F} + \bar{F}' = 0$; при цьому властивості сумісної механічної (обертальної) дії сил пари на тіло зберігаються і проявляються у вигляді моменту $\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{h} \times \bar{F}$ пари, рівному сумі моментів $\bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{F}')$ заданих сил відносно будь-якої точки O тіла. Нехай, наприклад, точка O на рис. 4.8 – довільна точка простору, а \bar{r}_1, \bar{r}_2 радіуси-вектори точок прикладання сил \bar{F}' і \bar{F} пари. З визначення моменту сили відносно точки маємо

$$\bar{M}_0(\bar{F}') + \bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r}_1 \times \bar{F}' + \bar{r}_2 \times \bar{F} = \bar{r}_1 \times (-\bar{F}) + \bar{r}_2 \times \bar{F} = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{F} = \bar{h} \times \bar{F}$$

або

$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{F}'). \quad (4.7)$$

З виразу (4.7) виходить, що момент прикладеної до тіла пари сил (\bar{F}, \bar{F}') дорівнює сумі моментів цих сил відносно точки O і не залежить від її положення у просторі.

Інші властивості пари сил визначаються нижчевикладеними теоремами.

Теорема про еквівалентність пар. Не змінюючи дії на тіло, пару сил можна замінити іншою парою, яка лежить у цій самій площині і має такий самий момент за величиною і напрямом.

Доведення. Нехай на тіло діє пара сил (\bar{F}, \bar{F}') з плечем d_1 (рис. 4.9). Проведемо у площині дії пари сил через довільні точки D і C дві паралельні прямі до перетину їх з лініями дії сил пари в точках A і B . Відстані між прямими AC і BD позначимо як d_2 . Розкладемо сили \bar{F} і \bar{F}' за напрямками AB, BD і AC . За побудовою очевидно, що $\bar{P} = -\bar{P}', \bar{Q} = -\bar{Q}'$,

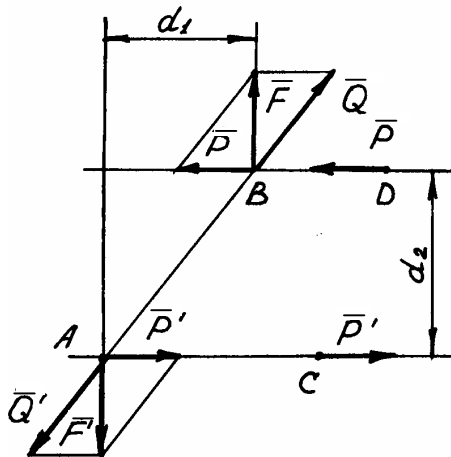


Рисунок 4.9

тоді сили \bar{Q} і \bar{Q}' як зрівноважені можна відкинути. Сили \bar{P} і \bar{P}' перенесемо уздовж їх ліній дії у точки D і C . У результаті проведених перетворень задану пару сил (\bar{F}, \bar{F}') було замінено новою парою (\bar{P}, \bar{P}') з іншим плечем d_2 та іншими силами. Через довільність вибору точок D, C і напрямів прямих BD і AC нова пара сил може бути розташована у площині її дії де завгодно.

Покажемо, що моменти нової і заданої пар сил (\bar{P}, \bar{P}') і (\bar{F}, \bar{F}') рівні. За побудовою сила $\bar{F} = \bar{P} + \bar{Q}$, а сила \bar{Q} проходить через точку A , тому буде виконуватись:

$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_A(\bar{F}) = \bar{M}_A(\bar{P}) + \bar{M}_A(\bar{Q}) = \bar{M}_A(\bar{P}) = \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}'),$$

тобто
$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}'); \quad Fd_1 = Pd_2. \quad (4.8)$$

З рівностей (4.8) випливають такі додаткові властивості пар сил:

– задану пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна переносити як завгодно у площині її дії;

– у заданій парі сил можна змінювати сили і довжину плеча, щоб залишався незмінним її момент;

– дві пари, що лежать в одній площині і мають однакові моменти, є еквівалентними;

– момент пари сил є вільним вектором: його можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла.

Теорема про перенесення пари в паралельну площину. Дія пари сил на тіло не порушиться, якщо її перенести із заданої площини у довільну іншу площину, яка паралельна заданій.

Доведення. Розглянемо пару сил (\bar{F}, \bar{F}') з площиною дії S_1 (рис. 4.10). Побудуємо площину S_2 , паралельну площині S_1 , і визначимо на ній відрізок ED , рівний і паралельний відрізку AB у площині S_1 . У точках D і E прикладемо двійку сил, у яких $F_1 = F'_1 = F'_2 = F_2 = F$.

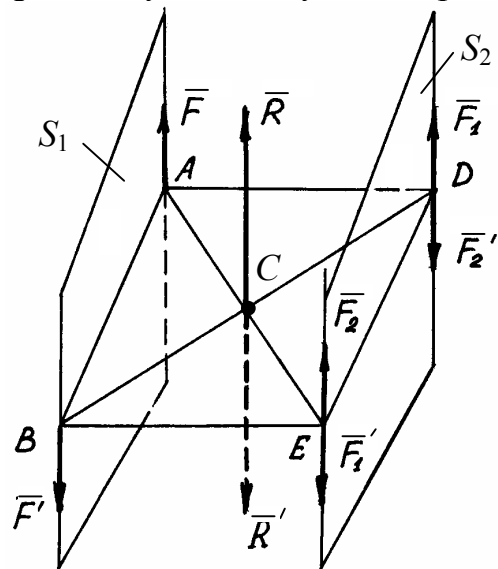


Рисунок 4.10

За побудовою фігура $ABED$ є паралелограмом. Далі додамо паралельні сили \bar{F} і \bar{F}_2 . Їх рівнодійна \bar{R} буде прикладена в точці C – середині відрізка AE . Аналогічно сили \bar{F}' і \bar{F}'_2 зводяться до рівнодійної \bar{R}' , прикладеної в середині відрізка BD , тобто в точці C . За побудовою і визначенням рівнодійні сили \bar{R} і \bar{R}' будуть рівними і протилежно направлені, тому їх можна відкинути. У результаті задана пара сил (\bar{F}, \bar{F}') перетворюється в пару сил (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) , яка розміщена у площині S_2 .

З доведеної теореми випливає, що дві пари, які лежать в одній площині або в паралельних площинах і мають однакові моменти, еквівалентні.

Теорема про додавання пар сил. Довільну систему двох пар сил можна замінити рівнодією парою. Момент рівнодієї пари дорівнює векторній сумі моментів початкових пар.

Доведення. Розглянемо пари сил з моментами \bar{m}_1 і \bar{m}_2 , які лежать у довільних площинах S_1 і S_2 , що перетинаються (рис. 4.11). Визначимо на лінії перетину цих площин відрізок $AB = d$ і позначимо його вектором \overline{AB} .

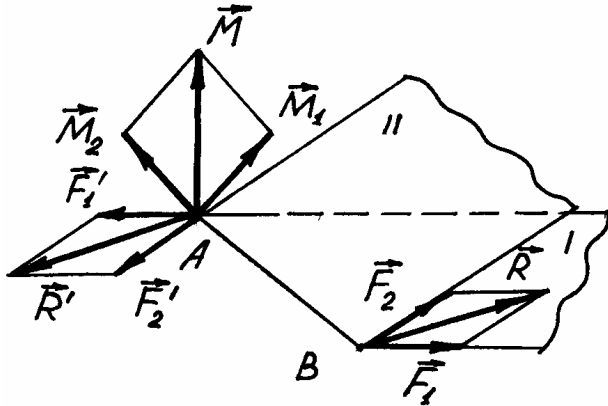


Рисунок 4.11

Визначимо пару сил із моментом \bar{m}_1 силами (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) , а пару сил із моментом \bar{m}_2 – силами (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) , прикладеними в точках A і B . При цьому виконуватиметься $m_1 = F_1 d$, $m_2 = F_2 d$. Додаючи прикладені в точках A і B сили, замінимо системи сил (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) і (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) силами \bar{R}, \bar{R}' , які за визначенням складуть пару сил (\bar{R}, \bar{R}') . Момент рівнодієї

пари (\bar{R}, \bar{R}') , оскільки $\bar{R}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2$ визначатиметься як

$$\bar{m}(\bar{R}, \bar{R}') = \overline{AB} \times \bar{R}' = \overline{AB} \times (\bar{F}'_1 + \bar{F}'_2) = (\overline{AB} \times \bar{F}'_1) + (\overline{AB} \times \bar{F}'_2) = \bar{m}_1 + \bar{m}_2. \quad (4.9)$$

Якщо на тіло діє n пар сил з моментами $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$, то, застосовуючи послідовно формулу (4.9), одержимо (рис. 4.12), що задана система пар сил зводиться до результуючої пари з моментом

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \quad (4.10)$$

Тут результуючу пару \bar{m} визначають (див. силовий багатокутник у розділі 3) замикаючою стороною багатокутника векторів \bar{m}_n .

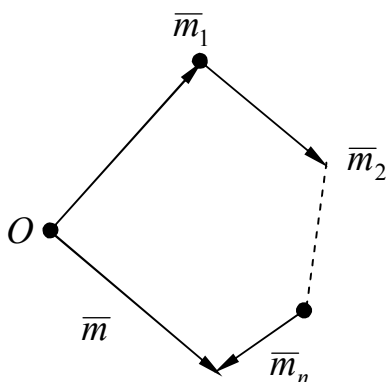


Рисунок 4.12

Якщо пари сил лежать в одній площині, то вектори їх моментів будуть паралельні, тому момент результуючої пари \bar{m} дорівнює алгебраїчній сумі складових моментів:

$$m = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Момент результуючої пари сил \bar{m} можна визначити аналітично, спроектувавши векторне рівняння (4.10) на осі системи координат:

$$m_x = \sum_{k=1}^n m_{kx} = m_{1x} + \dots + m_{nx};$$

$$m_y = \sum_{k=1}^n m_{ky} = m_{1y} + \dots + m_{ny};$$

$$m_z = \sum_{k=1}^n m_{kz} = m_{1z} + \dots + m_{nz}.$$

Величину (модуль вектора \bar{m}) результуючої пари визначають як

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}.$$

Під час побудови вектора \bar{m} у просторі, тобто при визначенні площини дії результуючої пари сил звичайно використовують його напрямні косинуси:

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{m}}) = m_x / m, \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{m}}) = m_y / m, \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{m}}) = m_z / m.$$

4.5.2 Умови рівноваги системи пар сил

Враховуючи властивості рівнодійної збіжних сил, результуючої пари сил, властивості вектора моменту пари сил як вільного вектора, а також умови рівноваги збіжної системи сил, отримаємо такі необхідні й достатні умови рівноваги тіла під дією системи пар сил $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)$:

– векторна (геометрична) форма рівноваги:

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = \bar{m}_1 + \dots + \bar{m}_n = 0, \quad (4.11)$$

тобто багатокутник моментів пар сил початкової системи (рис. 4.12) повинен бути замкненим: кінець останнього вектора \bar{m}_n повинен збігатися з початком (точкою O) першого;

– аналітична (алгебраїчна) форма рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \sum_{k=1}^n m_{kx} = m_{1x} + m_{2x} + \dots + m_{nx} = 0; \\ m_y &= \sum_{k=1}^n m_{ky} = m_{1y} + m_{2y} + \dots + m_{ny} = 0; \\ m_z &= \sum_{k=1}^n m_{kz} = m_{1z} + m_{2z} + \dots + m_{nz} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

тобто суми проєкцій m_{kx}, m_{ky}, m_{kz} моментів пар сил системи на кожен з трьох координатних осей (Ox, Oy, Oz) дорівнюватимуть нулю.

5 ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ У ПРОСТОРИ Й ПЛОЩИНІ. ЗВЕДЕННЯ ДО ЗАДАНОГО ЦЕНТРА (ТЕОРЕМА ПУАНСО)

У реальних умовах експлуатації на тіло, нехай-то електродвигун, кузов трамваю, лопатка турбіни, гребля, каркас будинку чи ін., діє система зовнішніх сил.

Існує декілька типових систем сил, що використовуються в розрахунках на практиці. Це довільна система сил у просторі, довільна система сил у площині, система паралельних сил і будь-яка їх комбінація.

Цей розділ присвячено питанням приведення вихідної системи сил у просторі й площині до найпростішого вигляду в загальному і окремих випадках.

5.1 Лема про паралельне перенесення сили

Відповідно до аксіоми 2 статички (див. розд. 1) прикладену до тіла силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку іншу його точку. При цьому дія сили на тіло, а також стан тіла не змінюються.

У ряді практичних задач рівноваги, пов'язаних зі спрощенням заданої системи сил, часто виникає необхідність перенесення сили до заданого центра паралельно самій до себе.

На відміну від попереднього випадку паралельне перенесення сили призводить в умовах збереження початкового механічного стану тіла до зміни системи діючих на нього силових факторів: до тіла необхідно додатково додати пару сил, параметри яких визначає наступна лема.

Лема. Прикладену до тіла в точці O (рис. 5.1, а) силу \vec{F} можна перенести паралельно самій собі в будь-яку його іншу точку O_1 (центр приведення), додаючи при цьому, для збереження механічного стану тіла, пару сил (\vec{F}, \vec{F}^*) з моментом $\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*)$, рівним моменту $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$ вихідної сили \vec{F} відносно центра приведення O_1 .

Доведення. Нехай у точці O (рис. 5.1, а) до тіла прикладена розташована в площині E сила \vec{F} . Позначимо систему сил, діючу на тіло, як (\vec{F}) . Виберемо в тілі, в пл. E , довільну точку O_1 , положення якої визначимо вектором $\vec{O_1O}$. Позначимо її як центр приведення “ O_1 ”. Прикладемо далі в пл. E у цьому центрі (рис. 5.1, б) еквівалентну нулю систему $(\vec{F}_1, \vec{F}^*) \sim 0$ двох сил (двійку сил) із параметрами: $\vec{F}_1 = -\vec{F}^*$, $\vec{F}^* = -\vec{F}$. При цьому, відповідно до аксіоми 2 статички, стан тіла не зміниться, а вихідна система сил (\vec{F}) перетвориться в еквівалентну систему трьох сил: $(\vec{F}) \sim (\vec{F}, (\vec{F}_1, \vec{F}^*)) \sim (\vec{F}_1, (\vec{F}, \vec{F}^*))$.

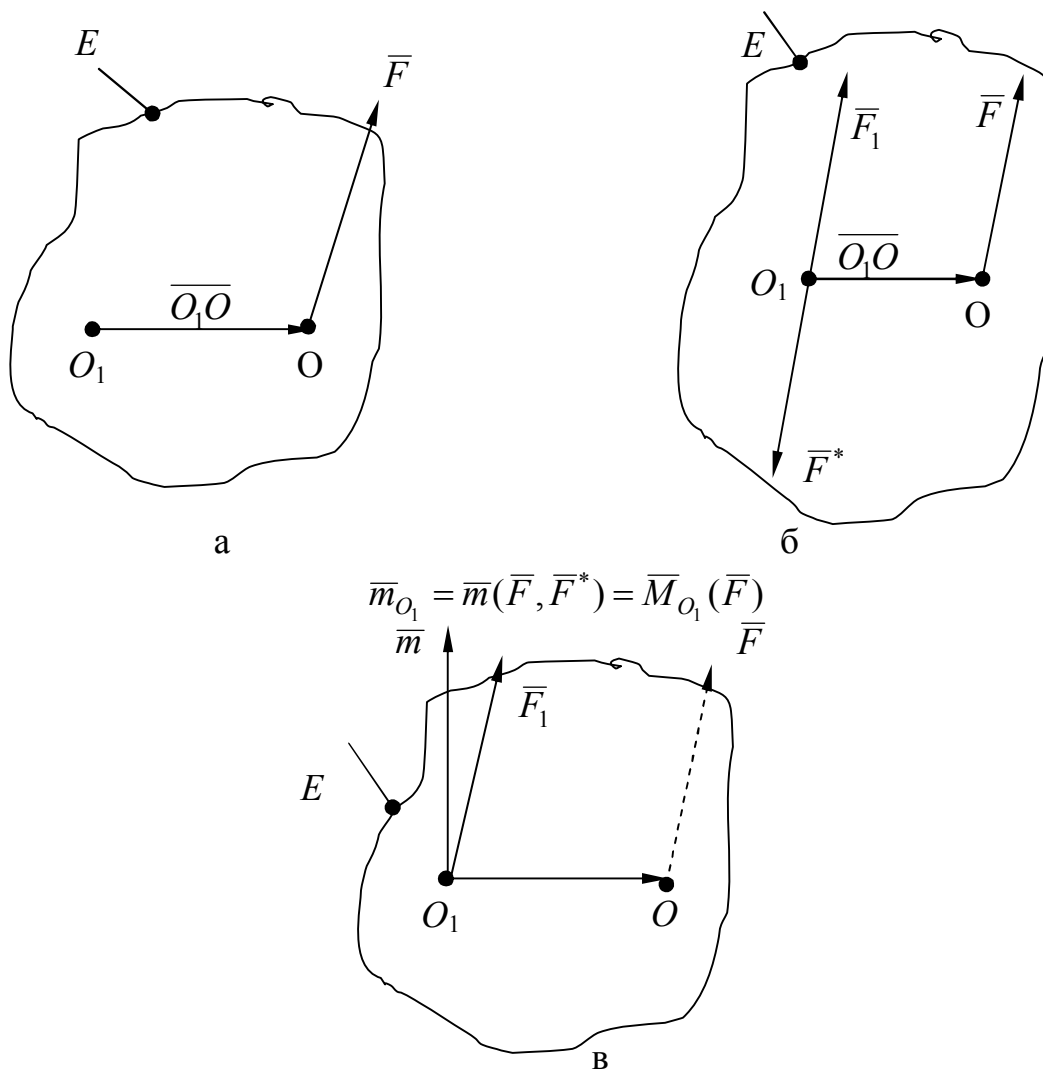


Рисунок 5.1

За побудовою на рисунку 5.1, б, сила \vec{F}_1 прикладена в точці приведення O_1 і дорівнює \vec{F} , а система двох сил (\vec{F}, \vec{F}^*) створює пару сил, що називається приєднаною парою сил. Далі в центрі приведення O_1 на рисунку 5.1, в побудуємо вектор $\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*) = \vec{O_1O} \times \vec{F}$, рівний моменту отриманої пари сил, і вектор $\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{O_1O} \times \vec{F}$, рівний моменту вихідної сили \vec{F} відносно полюса O_1 . За визначенням вони є перпендикулярними до пл. E , прикладеними в точці O_1 і рівними, тобто момент приєднаної пари сил дорівнює моменту вихідної сили відносно нового центра приведення O_1 :

$$\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*) = \vec{M}_{O_1}(\vec{F}). \quad (5.1)$$

Отже, лему доведено.

Рівняння (5.1) використовують на практиці під час визначення параметрів приєднаної пари сил (\vec{F}_1, \vec{F}^*) і сили \vec{F}_1 , які здебільшого становлять прикладений до ланки механізму крутний момент і силу тиску ланки на вісь.

Розглянемо, наприклад, барабан радіуса R (рис. 5.2, а), до якого в точці A з боку намотаної нитки прикладено силу \vec{F} . Використаємо для сили \vec{F} доведену лему, прийнявши за центр приведення точку O . У результаті отримаємо, що вихідна система сил (\vec{F}) зводиться: до сили \vec{F}_1 (рівній \vec{F}) і до пари сил (\vec{F}, \vec{F}^*) із моментом $m_0 = m(\vec{F}, \vec{F}^*)$ (рис. 5.2, а). При цьому на барабан діють: момент $m_0 = R \cdot F$, який обертає барабан, і

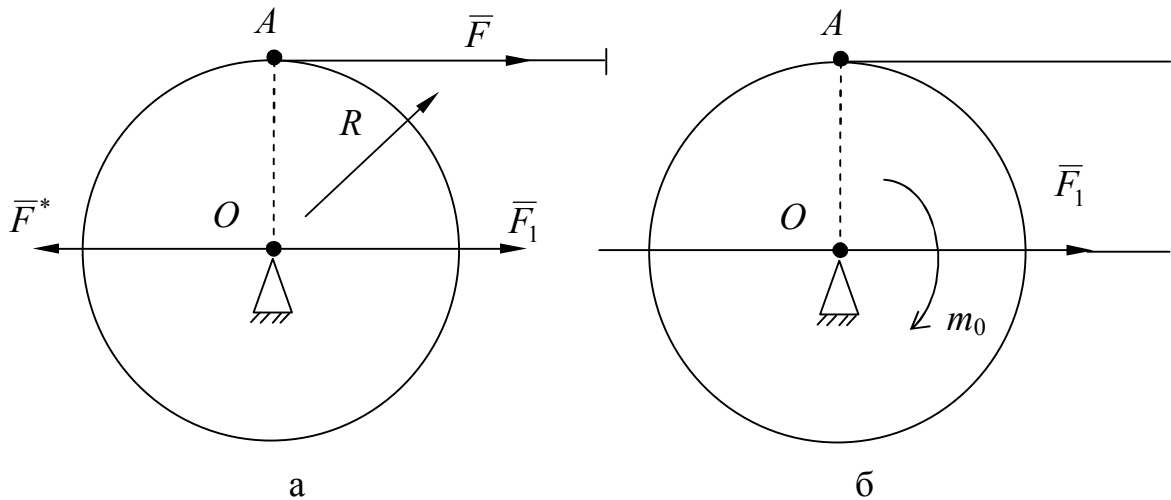


Рисунок 5.2

сила \vec{F}_1 , що здійснює тиск на вісь барабану (рис. 5.2, б). Їх величини використовуються в подальшому під час розв'язання задач динаміки і міцності системи «опора – вісь – барабан – нитка».

5.2 Зведення довільної системи сил у просторі до заданого центра. Теорема Пуансо (Основна теорема статyki)

Розглядаючи системи збіжних і паралельних сил у просторі, ми переконалися, що вони приводяться лише до одного силового фактора: рівнодійної сили або до пари сил.

Розглянемо тепер задачу приведення довільної систем сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ у просторі до заданого центра O (теорема належить Пуансо, 1777–1859 рр.).

Теорема: Довільна система сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ у просторі зводиться до заданого центра O сукупністю двох силових факторів: сили \vec{R} , рівної головному вектору \vec{F}_0 вихідної системи сил і прикладеної у центрі приведення O , і пари сил, момент \vec{m}_0 якої дорівнює головному моменту \vec{M}_0 системи сил відносно того ж центра.

Доведення. Розглянемо вихідну довільну систему сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ у просторі (рис. 5.3, а). Нехай сили є прикладеними до тіла в точках $A_{1, \dots, n}$, координати яких визначено радіусами-векторами $\vec{r}_{1, \dots, n}$ у системі координат $Oxyz$, полюс якої співпадає з центром приведення O .

Введемо такі позначення і поняття:

Головний вектор системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ – вектор \bar{F}_0 , який дорівнює геометричній сумі прикладених до тіла сил системи:

$$\bar{F}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (5.2)$$

де індекс O визначає точку прикладання вектора \bar{F}_0 до тіла.

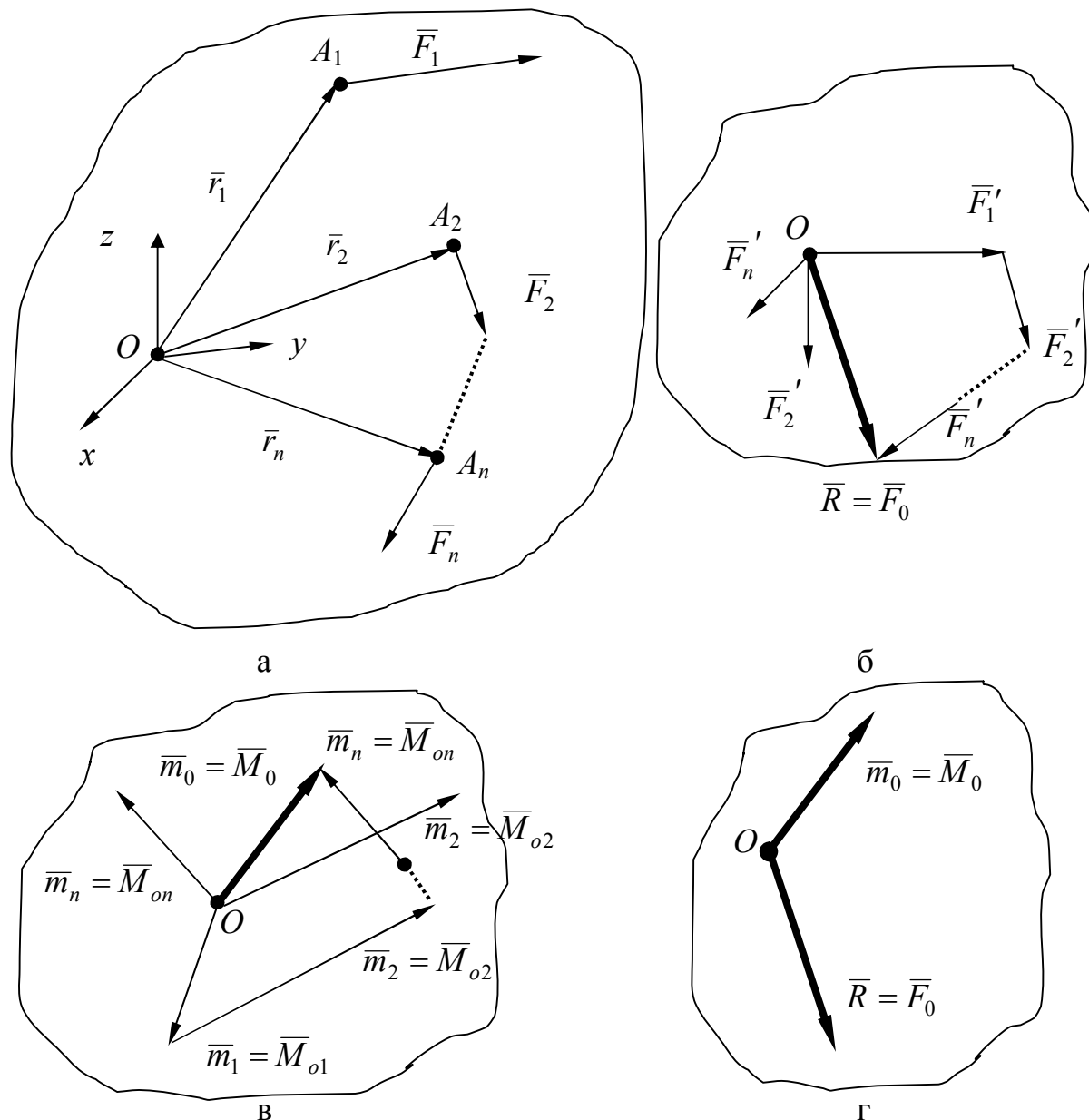


Рисунок 5.3

Головний момент системи сил відносно точки O – вектор \bar{M}_0 , що дорівнює геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї ж точки:

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k. \quad (5.3)$$

Таким чином, за визначенням, вектори \bar{F}_0 і \bar{M}_0 відносяться, з точки зору векторної алгебри, до зв'язаних у точці O векторів.

Для кожної з сил системи використовуємо лему про паралельне перенесення сили у полюс O . У результаті перетворень отримаємо систему збіжних у точці O (рис. 5.3,б) сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$, що, як нам відомо, еквівалентна одній силі \bar{R} (рівнодійній), що дорівнює їх геометричній сумі:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}'_k. \quad (5.4)$$

Між векторами \bar{F}'_k збіжної і \bar{F}_k вихідної систем сил існують співвідношення: $\bar{F}'_k = \bar{F}_k (k = 1; n)$. Якщо розглянути геометричну суму векторів \bar{F}_n сил вихідної системи у точці O як вектор математичний і позначити його, відповідно до (5.2), як головний вектор \bar{F}_0 вихідної системи сил, то отримаємо таку рівність

$$\bar{R} = \bar{F}_0. \quad (5.5)$$

З рівнянь (5.2), (5.4) і (5.5) виходить, таким чином, що сила \bar{R} за математичним змістом дорівнює головному вектору \bar{F}_0 вихідної системи. У свою чергу, на відміну від сили \bar{R} , головний вектор \bar{F}_0 не має, стосовно розглядуваного тіла фізичного змісту, тому що точки A_k прикладання складаючих сил \bar{F}_k (рис. 5.3, а) не співпадають з центром приведення O , в якому прикладений головний вектор.

При паралельному перенесенні сили \bar{F}_k до тіла необхідно приєднати одночасно пару сил (\bar{F}_k, \bar{F}_k^*) з моментом $\bar{m}_k = \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}_k^*) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k$, прикладеним (рис. 5.3, в) у точці O . Система приєднаних пар $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)$, відповідно до теореми про додавання пар сил, зводиться до результуючої пари з моментом

$$\bar{m}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k \quad (5.6)$$

у точці O .

Відповідно до (5.3) і (5.6) отримаємо, що момент $\bar{m}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k$ приєднаної пари дорівнює головному моменту $\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{0k}$ ($\bar{M}_{0k} = \bar{M}_o(\bar{F}_k)$) вихідної системи сил відносно центра приведення O , тобто (рис. 5.3, в)

$$\bar{m}_0 = \bar{M}_0. \quad (5.7)$$

Отже, (рис. 5.3, г) вихідну систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ зведено в довільно обраній точці O до еквівалентної системи (\bar{R}, \bar{m}_0) двох силових

факторів: сили \bar{R} , яка дорівнює головному вектору \bar{F}_0 цієї системи сил, і пари сил з моментом \bar{m}_0 , який дорівнює головному моменту \bar{M}_0 системи сил відносно центра приведення.

Таким чином, теорему доведено. Ця теорема має назву *основної теореми статички* (теорема Пуансо).

З доведеної вище теореми випливає, що дві системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ і $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k)$ будуть статично еквівалентними, якщо їх головні вектори й головні моменти у довільно обраному центрі приведення рівні між собою. Отже, для характеристики системи діючих на тіло сил є абсолютно достатнім визначити у довільному центрі O головний вектор \bar{F}_0 і головний момент \bar{M}_0 вихідної системи сил і задати їх на розрахунковій схемі (рис. 5.3, г). При цьому будемо враховувати, по-перше, те, що точки приведення сили \bar{R} і моменту \bar{m}_0 , а також точки прикладання головних векторів \bar{F}_0 і \bar{M}_0 співпадають за визначенням, а по-друге, що вектор \bar{R} і вектор \bar{m}_0 , на відміну від зв'язаних у точці O векторів \bar{F}_0 і \bar{M}_0 , є відповідно ковзним і вільним векторами.

5.3 Окремі випадки зведення просторової системи сил

Відповідно до теореми Пуансо довільна система сил у просторі в загальному випадку зводиться у центрі O до двох силових факторів: сили, яка дорівнює головному вектору \bar{F}_0 , і пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту \bar{M}_0 вихідної системи сил. Однак, на практиці між параметрами (величинами і взаємним напрямком) векторів \bar{F}_0 і \bar{M}_0 виникають різні співвідношення, що призводять до окремих випадків приведення довільної системи сил.

5.3.1 Приведення системи сил до пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) з моментом

$$\bar{m}_0 = \overline{OA} \times \bar{F} \quad (\text{рис. 5.4})$$

У цьому випадку в центрі приведення O головний вектор системи $\bar{F} = 0$, а головний момент $\bar{M}_0 = \bar{m}_0$ є перпендикулярним до пл. E дії пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) .

5.3.2 Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O

Відповідно до рисунку 5.5 виконується така умова: головний момент системи сил $\bar{M}_0 = 0$; головний вектор $\bar{F}_0 = \bar{R} \neq 0$ і належить пл. E ; система діючих на тіло сил належить до збіжної у точці O .

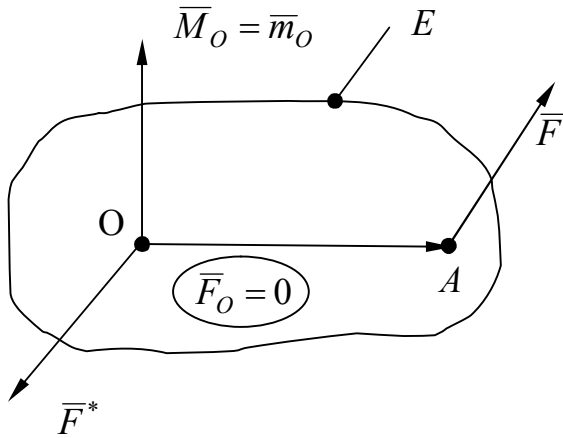


Рисунок 5.4

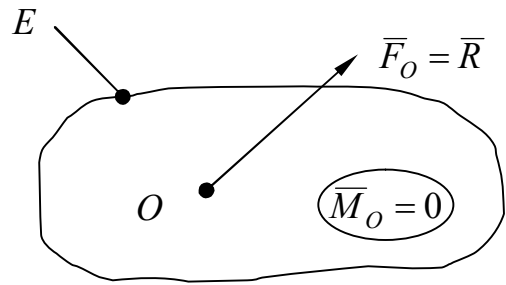


Рисунок 5.5

5.3.3 Зрівноважена система сил

У цьому випадку в центрі приведення O (рис. 5.6, 5.7) отримаємо: головний вектор $\bar{F}_O = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0$ і головний момент $\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_k} = 0$; вихідна система сил у будь-якій точці O тіла зводиться до еквівалентної нулю $((\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0)$ зрівноваженої системи; многокутники сил вихідної системи і многокутники векторів моментів сил відносно довільної точки O тіла є замкненими.

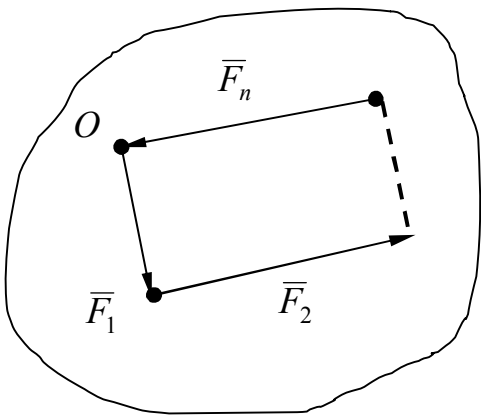


Рисунок 5.6

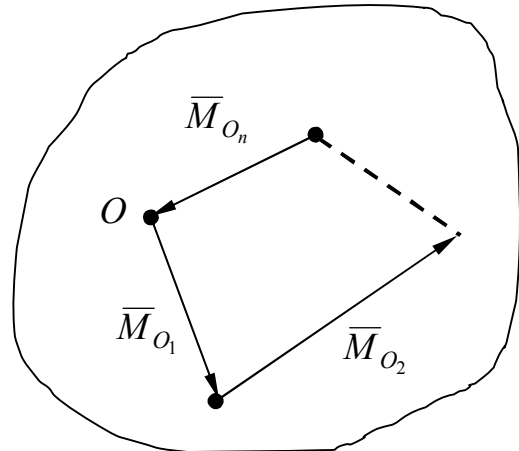


Рисунок 5.7

5.3.4 Приведення системи сил до головного вектора $\bar{F}_O \neq 0$ і головного моменту $\bar{M}_O \neq 0$

Коли $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_O)$. Тут мають місце, залежно від взаємної орієнтації векторів \bar{F}_O і \bar{M}_O , три окремі випадки.

5.3.4.1 Приведення до динами

Коли вектори \bar{F}_O і \bar{M}_O не є перпендикулярними, тобто кут $\widehat{(\bar{F}_O, \bar{M}_O)} \neq \pm \frac{\pi}{2}$ і скалярний добуток векторів $\bar{F}_O \cdot \bar{M}_O \neq 0$.

Розкладемо головний момент \bar{M}_O на дві ортогональні складові $(\bar{M}_O \sim (\bar{M}_1, \bar{M}_2))$, одна з яких спрямована вздовж головного вектора \bar{F}_O .

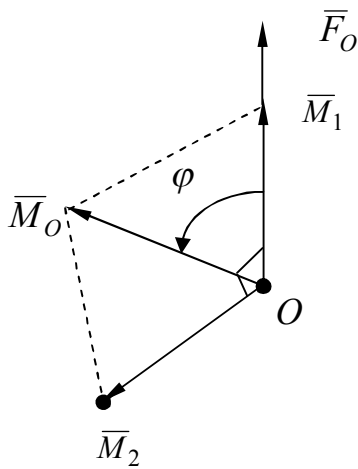


Рисунок 5.8

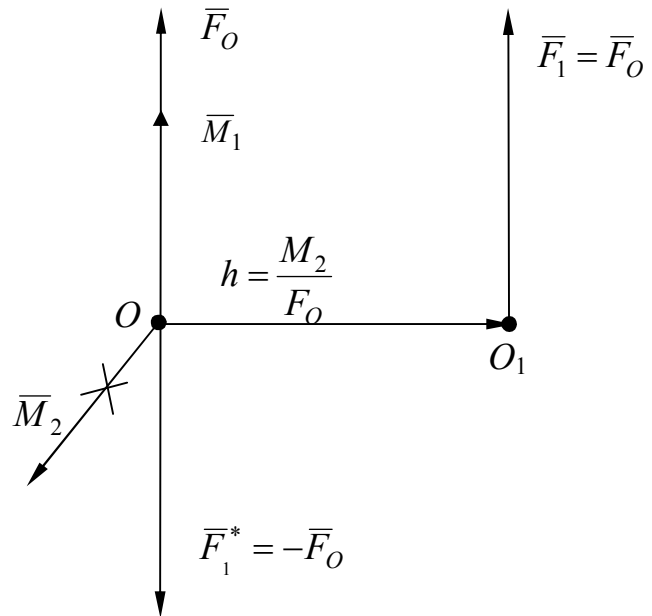


Рисунок 5.9

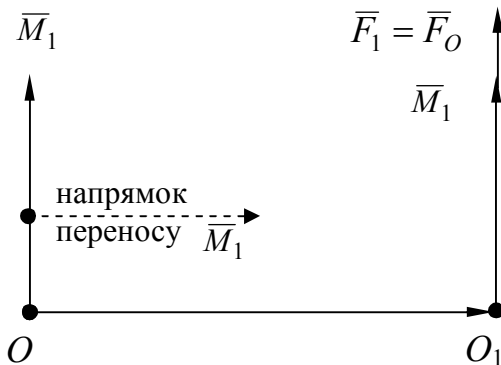


Рисунок 5.10

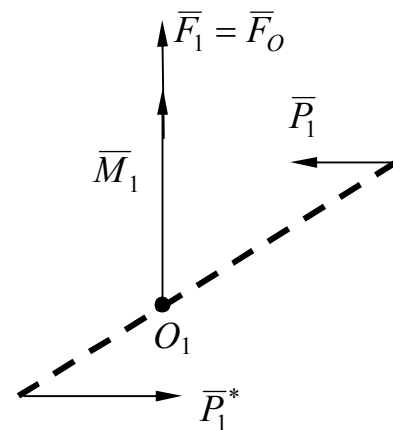


Рисунок 5.11

Представимо момент \bar{M}_2 (закреслено на рис. 5.9) у вигляді пари сил (\bar{F}_1, \bar{F}_1^*) , у якій плече $h = \frac{M_2}{F_O}$, а сила $\bar{F}_1 = \bar{F}_O$ прикладена в точці O_1 .

У цьому випадку буде виконуватись умова еквівалентності: $(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_1, \bar{M}_2) \sim ((\bar{F}_O, \bar{F}_1^*), \bar{M}_1, \bar{F}_1) \sim (\bar{M}_1, \bar{F}_1)$, тому що сили \bar{F}_O і \bar{F}_1^* за визначенням складають двійку сил, тобто $(\bar{F}_O, \bar{F}_1^*) \sim 0$.

Представимо далі вектор \bar{M}_1 у вигляді моменту пари сил і перенесемо його як вільний вектор з точки O в точку O_1 прикладання сили \bar{F}_1 (показано на рис. 5.10 штриховою стрілкою).

У результаті початкова система сил перетворилась у центрі O_1 в систему силових факторів (\bar{F}_1, \bar{M}_1) . Тут сила \bar{F}_1 дорівнює головному вектору \bar{F}_O за визначенням, а момент \bar{M}_1 пари сил за величиною – проекції головного моменту \bar{M}_O на напрямок головного вектора \bar{F}_O (рис. 5.8) системи сил: $M_1 = \Pi_{\rho_{\bar{F}_O}}(\bar{M}_O) = M_O \cdot \cos \varphi$. На рисунку 5.11 момент \bar{M}_1 для наочності показано одночасно у вигляді пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}_1^*) .

Сукупність діючих на тіло силових факторів у вигляді сили \bar{F}_1 і пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}_1^*) , вектори яких колінеарні (лежать на одній прямій), називають динамою чи динамічним гвинтом. Лінія, яка проходить через центр приведення O_1 вздовж цієї прямої, називається віссю динами.

У просторі рівняння осі динами отримаємо з урахуванням умови паралельності векторів \bar{F}_1 і \bar{M}_1 (рис. 5.10):

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \bar{M}_O - \overline{OO_1} \times \bar{F}_O = M_{1x} \cdot \bar{i} + M_{1y} \cdot \bar{j} + M_{1z} \cdot \bar{k} = \\ &= \rho \cdot \bar{F}_1 = \rho \cdot \bar{F}_O = \rho \cdot F_{Ox} \cdot \bar{i} + \rho \cdot F_{Oy} \cdot \bar{j} + \rho \cdot F_{Oz} \cdot \bar{k}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

де векторний добуток $\overline{OO_1} \times \bar{F}_O = \bar{M}_2$, ρ – параметр гвинта (скаляр);

$$\rho = M_1 \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{M_O \cdot F_O} \cdot \frac{1}{F_O} = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{F_O^2}; \quad \cos \varphi = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{M_O \cdot F_O}.$$

Враховуючи рівняння (5.8), отримаємо такі співвідношення між координатними складовими векторів \bar{F}_O , \bar{M}_O і \bar{M}_1 :

$$\left. \begin{aligned} M_{1x} &= \rho \cdot F_{Ox} = M_{Ox} - (y \cdot F_{Oz} - z \cdot F_{Oy}) \\ M_{1y} &= \rho \cdot F_{Oy} = M_{Oy} - (z \cdot F_{Ox} - x \cdot F_{Oz}) \\ M_{1z} &= \rho \cdot F_{Oz} = M_{Oz} - (x \cdot F_{Oy} - y \cdot F_{Ox}) \end{aligned} \right\}, \quad (5.9)$$

де x, y, z – координати точки O_1 на осі динами.

Співвідношення (5.9) дозволяють отримати рівняння прямої лінії, осі динами, у формі

$$\begin{aligned} \frac{M_{Ox} - (y \cdot F_{Oz} - z \cdot F_{Oy})}{F_{Ox}} &= \frac{M_{Oy} - (z \cdot F_{Ox} - x \cdot F_{Oz})}{F_{Oy}} = \\ &= \frac{M_{Oz} - (x \cdot F_{Oy} - y \cdot F_{Ox})}{F_{Oz}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Отже, існує пряма з канонічним рівнянням (5.10) у проекціях, у будь-якій точці якої система діючих на тіло сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ зводиться до динами.

Таким чином, встановлено, що прикладена до тіла вихідна довільна система сил, якщо другий статичний інваріант першої форми не дорівнює нулю, тобто при $\bar{F}_O \cdot \bar{M}_O = F_O \cdot M_O \cdot \cos \varphi \neq 0$ ($\varphi \neq \pi/2$), зводиться у точці

O_1 до динами, яка є сукупністю двох силових факторів: сили \bar{F}_1 і моменту пари сил \bar{M}_1 , вектори яких колінеарні. При цьому здається, що за величиною момент $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_1$ пари динами у точці O_1 буде найменшим (рис. 5.12), порівняно з моментами \bar{M}_{O_k} у будь-яких інших точках приведення O_k на осі Oy , тобто буде виконуватися співвідношення $M_{O_1} < M_{O_k} < M_O$.

Цю важливу властивість динами використовують на практиці під час розв'язання задач зрівноваження твердого тіла, а також відтворенні динамою заданого його руху за допомогою зовнішніх сил найменшої потужності.

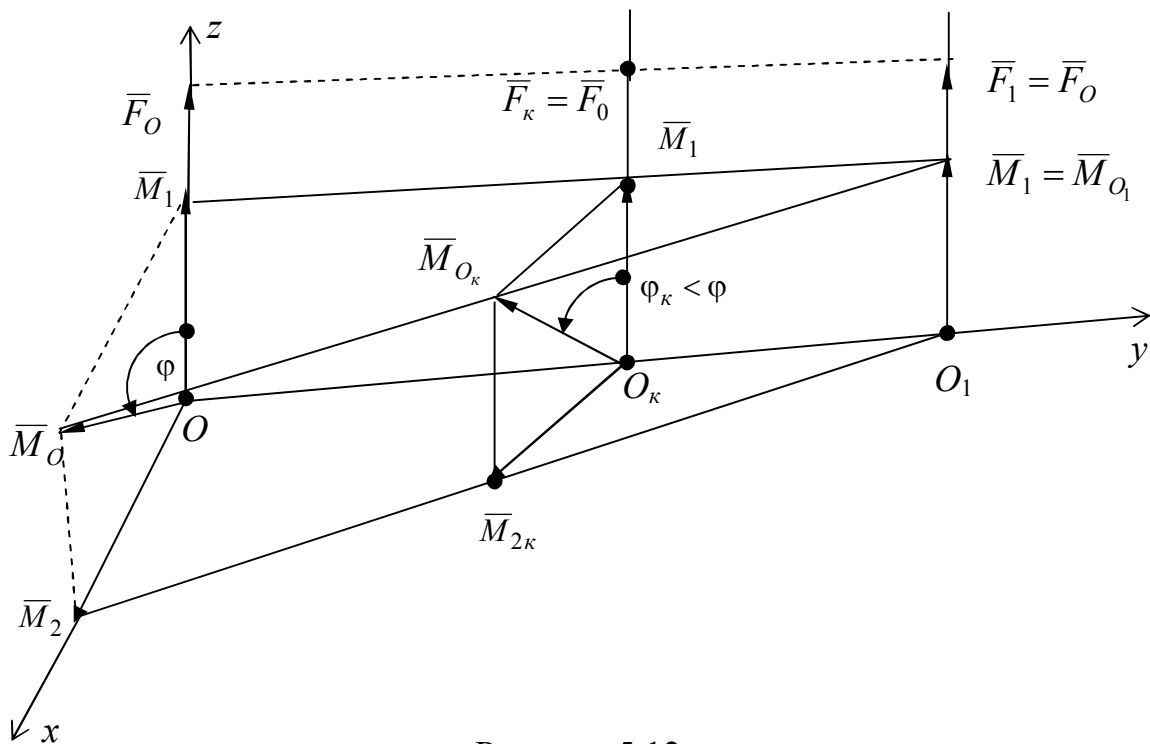


Рисунок 5.12

5.3.4.2 Приведення до схрещеної системи двох сил

Цей випадок має місце, коли вихідна система сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ приводиться у центрі O до головного вектора \bar{F}_O і головного моменту \bar{M}_O (рис. 5.13), а кут φ між векторами, як і у випадку приведення до динами, задовольняє співвідношенню $\varphi(\widehat{\bar{F}_O, \bar{M}_O}) \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Представимо момент \bar{M}_O (закреслено на рис. 5.13) у вигляді пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) із площиною дії E і плечем $h = \frac{M_0}{P}$ (за величиною сила \bar{P} пари може бути будь-якою). Далі додамо за правилом паралелограма вектори \bar{F}_O і \bar{P}^* , отримавши силу $\bar{Q} = \bar{F}_O + \bar{P}^*$.

Виконані перетворення призводять до такої, еквівалентної до вихідної, системи двох сил \bar{Q} і \bar{P} : $(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, \bar{P}^*, \bar{P}) \sim (\bar{Q}, \bar{P})$.

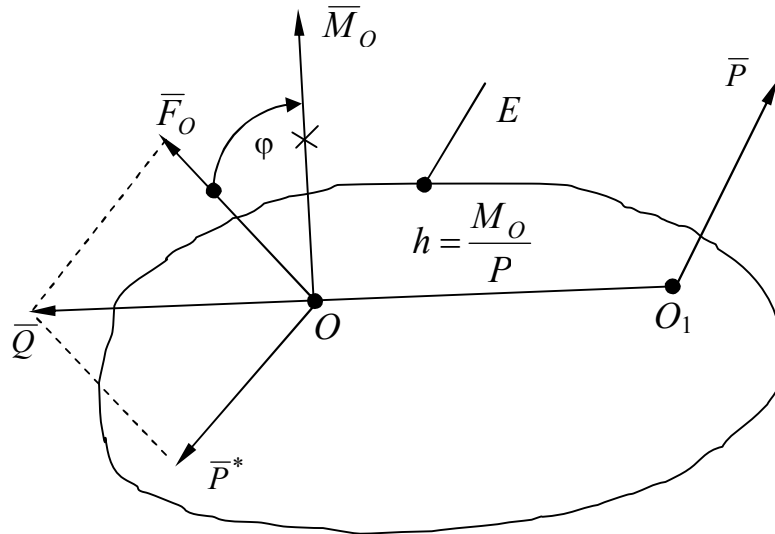


Рисунок 5.13

При цьому сила \bar{Q} є прикладеною у центрі приведення O , а точкою прикладання сили \bar{P} є точка O_1 кінця плеча h пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) . Важливою властивістю сили \bar{Q} є, однак, те, що вона не належить площині E дії пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) .

Така сукупність діючих на тіло двох сил складає систему сил, що схрещуються (не лежать в одній площині) і не мають рівнодійної.

На відміну від динами отримана система силових факторів включає лише дві сили \bar{Q} , \bar{P} , тобто тут відсутня пара сил.

5.3.4.3 Приведення до однієї сили (рівнодійної)

Коли вектори \bar{F}_O і \bar{M}_O є перпендикулярними, тобто $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ (рис. 5.14). У цьому випадку головний вектор \bar{F}_O лежить у площині E , яка перпендикулярна головному моменту \bar{M}_O системи, тобто в площині дії результуючої приєднаної пари сил.

Представимо момент \bar{M}_O (закреслено на рис. 5.14) у вигляді пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) з плечем $h = \frac{M_O}{F_O}$ і силою $\bar{P}^* = -\bar{F}_O$.

У результаті отримаємо, що сили \bar{F}_O і \bar{P}^* складають двійку сил, тобто систему сил $(\bar{F}_O, \bar{P}^*) \sim 0$, а вихідна система виявляється еквівалентною одній силі \bar{P} , яка належить площині E , прикладена у точці O_1 , що знаходиться на відстані $h = \frac{M_O}{F_O}$ від початкового центра приведен-

ня O . Проведені еквівалентні перетворення мають такий вигляд:

$$(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, (\bar{P}^* = -\bar{F}_O, \bar{P})) \sim ((\bar{F}_O, \bar{P}^*) \sim 0, \bar{P}) \sim (\bar{P}).$$

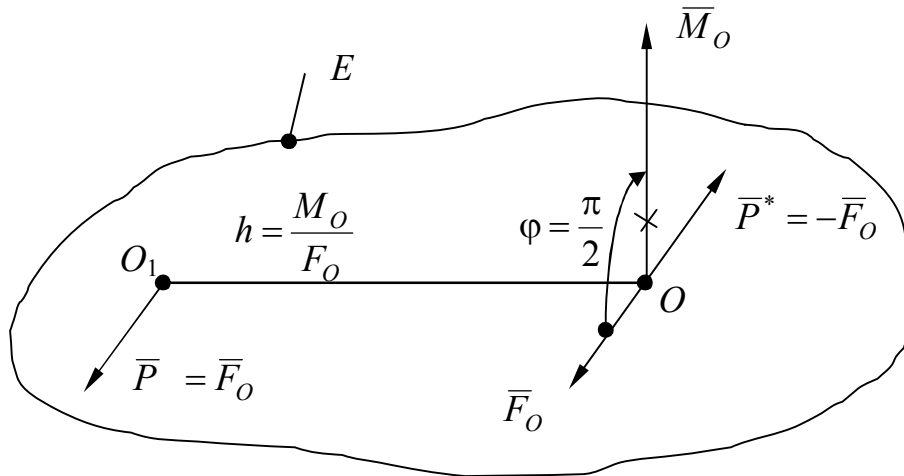


Рисунок 5.14

Вони зводять вихідну систему сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ до однієї сили \bar{P} (рівнодійної), яка дорівнює головному вектору \bar{F}_O системи і прикладена у новому центрі приведення O_1 .

5.4 Довільна система сил у площині

Особливістю досліджуваної системи сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ є приналежність ліній дій всіх сил системи площині E (рис. 5.15, а). У цьому випадку вихідну систему сил, використовуючи теорему Пуансо, у центрі приведення O (рис. 5.15, б) можна звести взагалі до двох силових факторів: сили \bar{R} , яка дорівнює головному вектору \bar{F}_O , і результуючої приєднаної пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) з моментом \bar{m}_O (показано також дуговою стрілкою на рис. 5.15, б), рівним головному моменту \bar{M}_O вихідної системи сил.

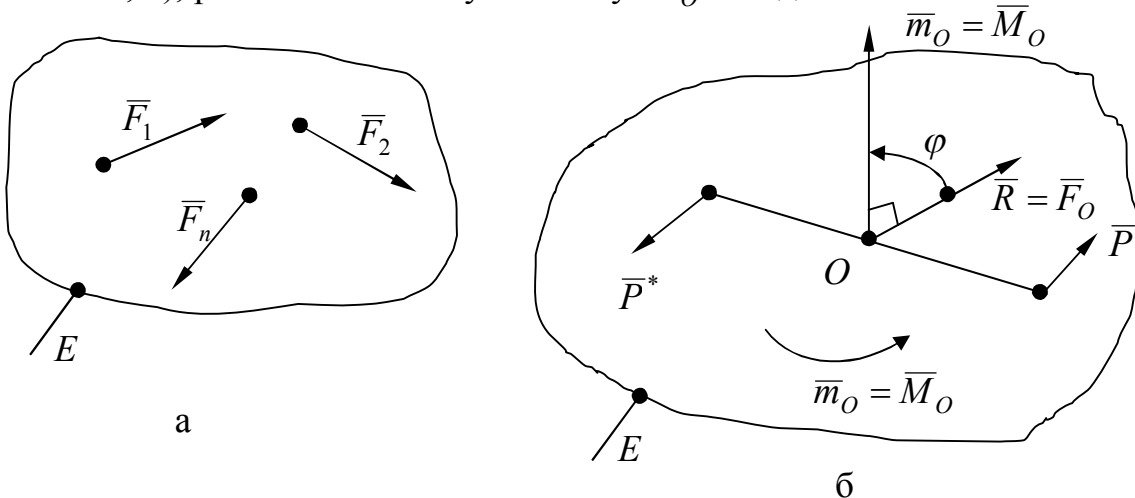


Рисунок 5.15

На відміну від довільної системи сил у просторі тут: головний вектор \bar{F}_O довільної плоскої системи сил завжди належить площині E , яка є площиною дії пари (\bar{P}, \bar{P}^*) ; головний момент $\bar{M}_O \perp \bar{F}_O$, тобто кут φ між векторами дорівнюватиме $\varphi(\bar{F}_O, \bar{M}_O) = \pm \frac{\pi}{2}$.

Відповідно до зображених на рис. 5.15, б силових факторів матимуть місце, залежно від величин головних векторів \bar{F}_O , \bar{M}_O зведеної у центрі O системи сил, такі випадки приведення довільної системи сил у площині.

5.4.1 Приведення до пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*)

Коли головний вектор системи $\bar{F}_O = 0$, а головний момент $\bar{M}_O = \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}^*) \neq 0$. Цей випадок за сукупністю діючих на тіло силових факторів повністю співпадає з випадком приведення довільної системи сил у просторі, розглянутому у п. 5.3.1 і на рис. 5.4. Наприклад, для зображених на рис. 5.16, а системи двох сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2 = -\bar{F}_1)$ отримаємо для центру приведення O (рис. 5.16, б): $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}_1 - \bar{F}_1 = 0$; $M_O = h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = F_1(h_1 + h_2) \neq 0$; $\bar{M}_O \perp \text{пл. } E$; система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{M}_O$.

5.4.2 Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O

Тут головний момент системи $\bar{M}_O = 0$, головний вектор $\bar{F}_O \neq 0$, а вихідна система сил зводиться тільки до однієї сили \bar{F}_O , що є рівнодійною \bar{R} , прикладеною у точці O . Випадок ідентичний розглянутому у п. 5.3.2 і на рис. 5.5.

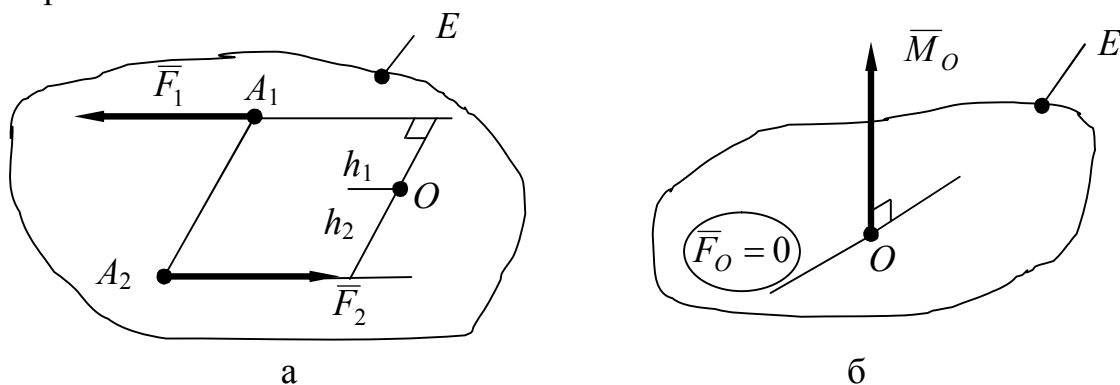


Рисунок 5.16

Приклад приведення: $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$ (рис. 5.17, а), $h_1 = h_2$. У точці O буде: $M_O = -h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = 0$; $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \neq 0$ (рис. 5.17, б); рівнодійна сила $\bar{R} = \bar{F}_O$ прикладена у центрі приведення O ; системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{R}$.

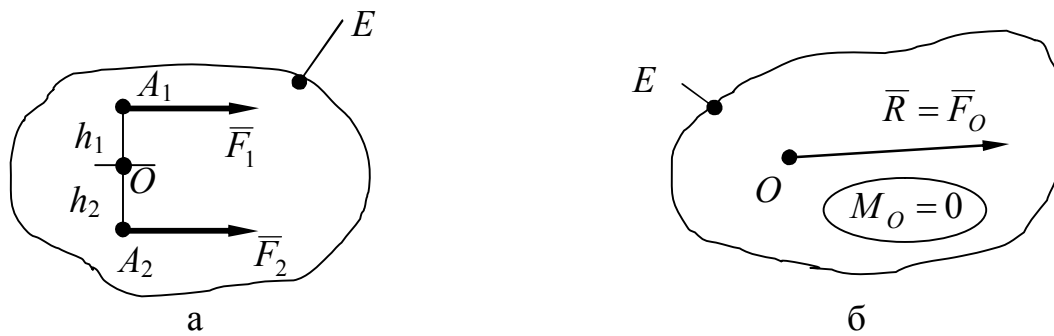


Рисунок 5.17

5.4.3 Зрівноважена система сил

У центрі приведення O маємо $\bar{F}_O = 0$ і $\bar{M}_O = 0$. При цьому (див. п. 5.3.3 і рис. 5.6, 5.7) багатокутники діючих на тіло сил \bar{F}_n і моментів приєднаних пар сил \bar{m}_k є замкненими і вихідна система сил еквівалентна нулю ($(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim 0$), тобто є зрівноваженою. Тут, наприклад, для системи двох сил: \bar{F}_1 і $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$ (рис. 5.18, а), буде: $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}_1 - \bar{F}_1 = 0$; $M_O = h_1 \cdot F_1 - h_2 \cdot F_2 = 0$ (рис. 5.18, б); система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$.

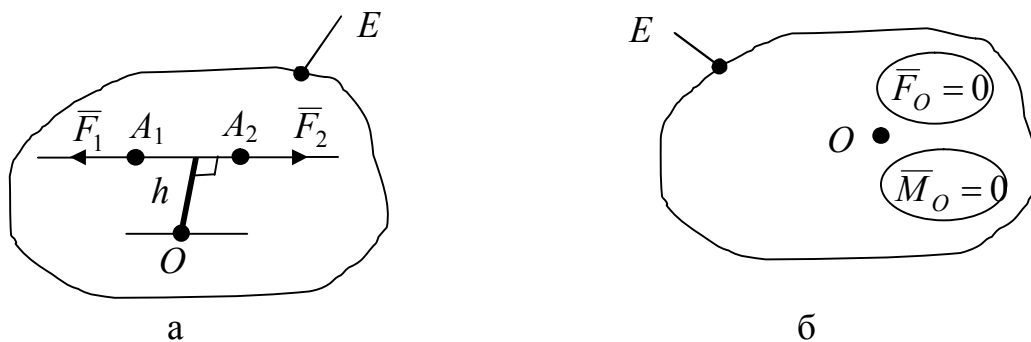


Рисунок 5.18

5.4.4 У загальному випадку

Зведену в центрі O до головного вектора $\bar{F}_O \neq 0$ і головного моменту $\bar{M}_O \neq 0$ вихідну систему сил можна подальшими спрощеннями звести до однієї сили, рівнодійної $\bar{R} = \bar{F}_O$, яка прикладена, на відміну від п. 5.4.2 у новому центрі O_1 на відстані $h = \frac{M_O}{F_O}$ від точки O . Цей випадок повністю співпадає за доведенням з випадком приведення, який розглянуто стосовно довільної системи сил у просторі у п. 5.3.4.3 і на рис. 5.14. Наприклад, для зображеної на рис. 5.19, а системи трьох сил: $(\bar{F}_1, \bar{F}_2 = -\bar{F}_1, \bar{F}_3 = k\bar{F}_1)$ отримаємо у центрах приведення O, O_1 : $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \bar{F}_3$ (рис. 5.19, б); $M_O = h_1 \cdot F_1 + h_3 \cdot F_3 + h_2 \cdot F_2$; $h = \frac{M_O}{F_O}$; $\bar{R} = \bar{F}_O = \bar{F}_3$ (рис. 5.23, в), система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \sim \bar{R}$.

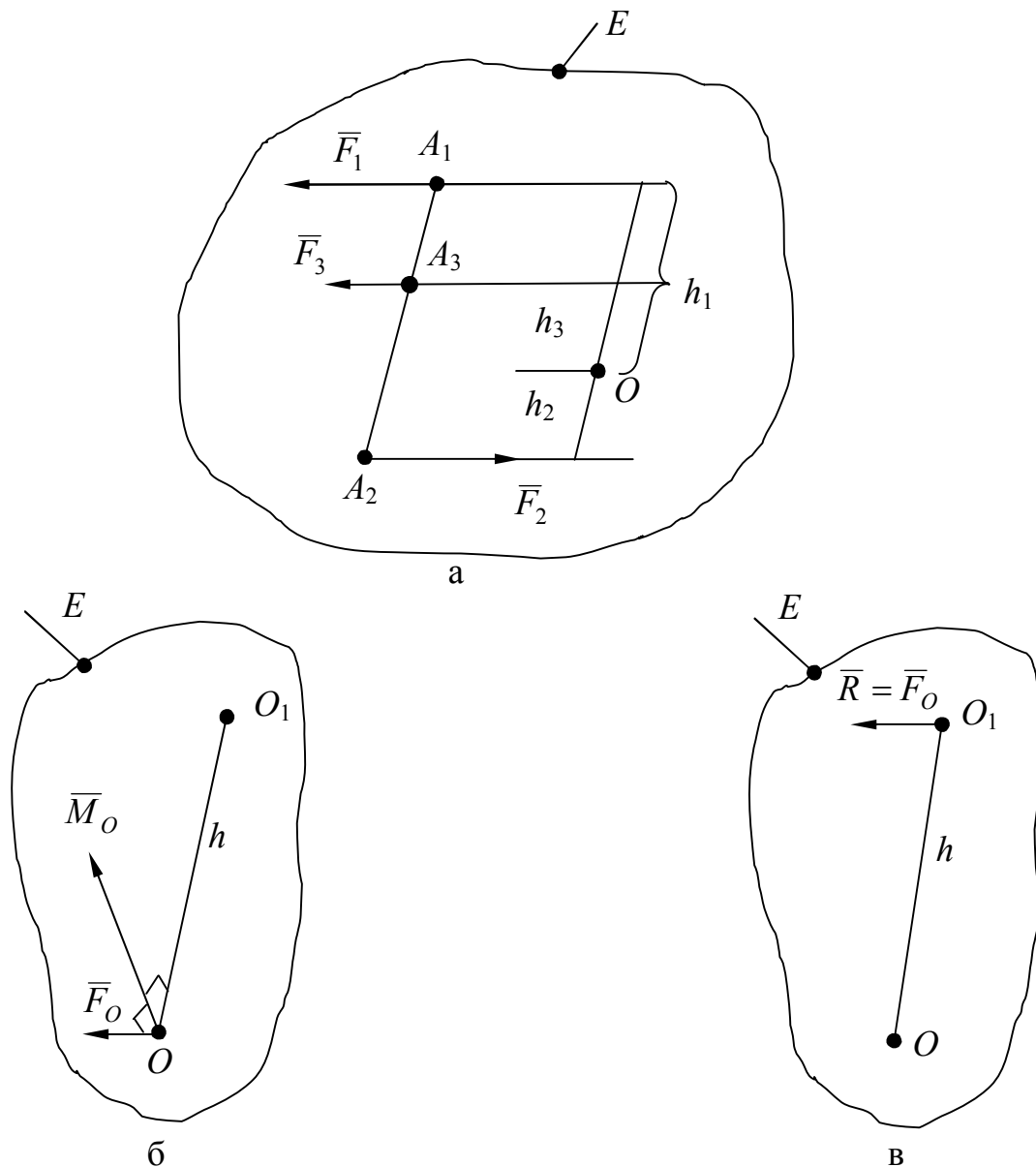


Рисунок 5.19

5.5 Теорема Варіньона про момент рівнодійної

На практиці важливе використання, наприклад, під час визначення координат ваги тіла, має така властивість головного вектора системи сил (теорема Варіньона про момент рівнодійної).

Теорема. Якщо є точка O , у якій система діючих сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ зводиться тільки до головного вектора \bar{F}_O , тобто рівнодійної $\bar{R} = \bar{F}_O$, то момент цієї рівнодійної відносно будь-якої іншої точки O_1 дорівнюватиме геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї самої точки O_1 .

Під час доведення теореми врахуємо вираз (5.5), а також те, що за умовою в точках O і O_1 на рис. 5.16 вектор $\bar{M}_O = 0$.

У результаті отримаємо:

у точці O $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}_O) \sim (\bar{R})$;

у точці O_1 $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O) = \bar{M}_{O_1}(\bar{R}) = \bar{r} \times \bar{F}_O = \sum_{k=1}^n \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k)$;

або
$$\bar{M}_{O_1}(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k). \quad (5.11)$$

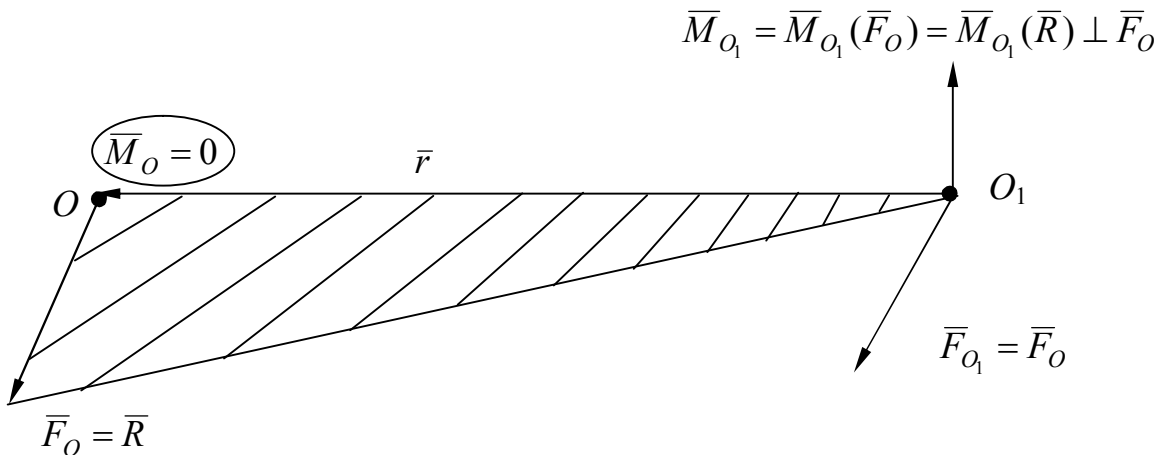


Рисунок 5.20

Рівняння (5.11) справедливе для будь-якої точки O_1 тіла в просторі чи площині.

Отже, теорему доведено.

Особливості використання теореми Варіньона розглянемо на прикладах.

Приклад 1. Для заданої у площині xO_1y (рис. 5.21, а) рівнодійної \bar{R} із точкою прикладання O визначити рівняння лінії її дії.

Розв'язання. Представимо базове рівняння (5.11) теореми Варіньона у вигляді

$$M_{O_1}(\bar{R}) = xF_{O_1y} - yF_{O_1x}, \quad (5.12)$$

де $F_{O_1x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}$, $F_{O_1y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}$ – проекції головного вектора \bar{F}_O сил \bar{F}_k ($k = \overline{1, n}$) системи;

M_{O_1} – головний момент системи сил відносно точки O_1

$$\left(M_{O_1} = \sum_{k=1}^n M_{O_1}(\bar{F}_k) \right).$$

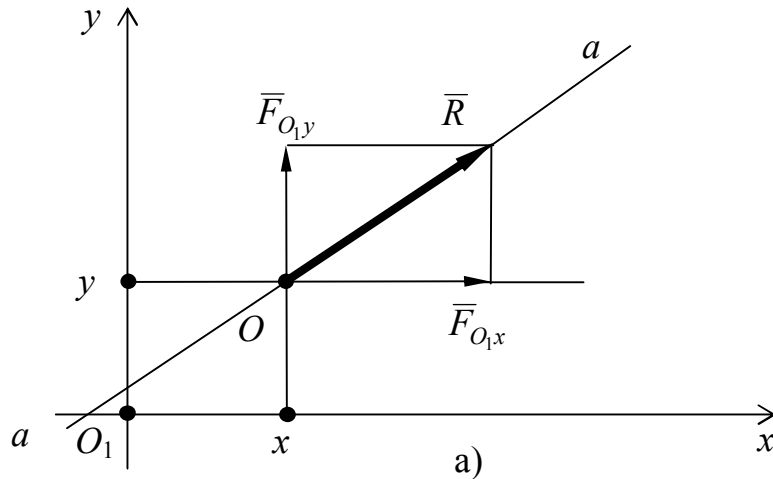


Рисунок 5.21

З (5.12) отримаємо рівняння прямої aa у відрізках

$$\frac{x}{\left(\frac{M_{O_1}}{F_{O_1y}}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{M_{O_1}}{F_{O_1x}}\right)} = 1 \quad (5.13)$$

чи з кутовим коефіцієнтом

$$y = \frac{F_{O_1y}}{F_{O_1x}} x - \frac{M_{O_1}}{F_{O_1x}} \quad (5.14)$$

у площині xO_1y .

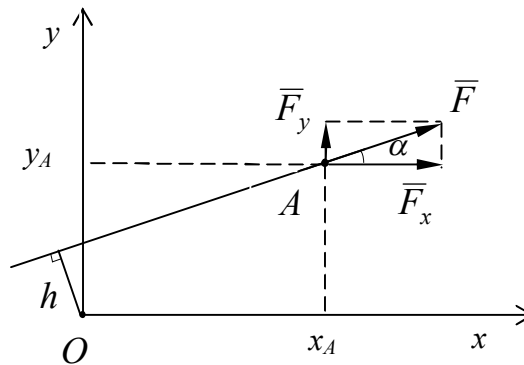
Рівняння (5.13) і (5.14) використовують на практиці в будівельній механіці під час визначення, наприклад, параметрів (величин і напрямків дії) реакцій в'язів.

Приклад 2. Визначити момент сили $F = 10$ Н відносно точки O початку системи координат xOy (рис. 5.21, б). Точка прикладання сили має координати A ($x_A = 8$ м, $y_A = 10$ м), а лінія її дії складає з віссю Ox кут $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання. Розкладемо силу \vec{F} на координатні складові \vec{F}_x і \vec{F}_y . Визначимо їх величини: $F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66$ Н, $F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5$ Н. За побудовою сила \vec{F} є рівнодійною сил \vec{F}_x і \vec{F}_y . Тому для знаходження її моменту відносно точки O використаємо теорему Варіньона:

$$\begin{aligned} M_O(\vec{F}) &= M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y) = x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x = 8 \cdot 5 - 10 \cdot 8,66 = \\ &= 40 - 86,6 = -40,6 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Тут знак „-” означає, що сила \vec{F} прагне повернути своє плече h за ходом стрілки годинника.



б)

Рисунок 5.21

Примітка. Визначити момент сили \vec{F} відносно полюса за загальною формулою $M_O(\vec{F}) = \pm h \cdot F$ дуже складно, тому що невідомим є її плече h відносно точки O . Для його визначення спочатку необхідно скласти рівняння (5.13) або (5.14) лінії дії сили. Потім рівняння перпендикуляра з точки O на цю пряму, і далі визначити його довжину, яка і становитиме плече h сили \vec{F} відносно полюса O .

5.6 Приклад розв'язання задач приведення

Приклад. Для зображеної на рисунку 5.22 довільної системи сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) у площині визначити в центрі O головний вектор \vec{F}_O , головний момент \vec{M}_O , параметри рівнодійної \vec{R} вихідної системи сил та її рівняння. Початкові дані: $F_1 = F_2$, $\alpha = 45^\circ$, координати точок прикладання сил: $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$.

Розв'язання. Визначимо, враховуючи рівняння (5.2) і (5.3), параметри головного вектора і головного моменту заданої системи сил стосовно центра O : $\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\vec{M}_O = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1$ (добуток $\vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = 0$, тому що вектори \vec{OA}_2 і \vec{F}_2 паралельні). Побудуємо вектори \vec{F}_O і \vec{M}_O . Під час побудови головного вектора \vec{F}_O використовуємо методику теореми Пуансо: сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 перенесемо в точку O паралельно самим до себе; отримані \vec{F}'_1 і \vec{F}'_2 додамо геометрично і результуючу силу визначимо як головний вектор \vec{F}_O вихідної системи сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) у центрі O .

Для заданої системи сил у точці O головний момент $M_O > 0$, тому його дугову стрілку спрямуємо у бік проти ходу стрілки годинника.

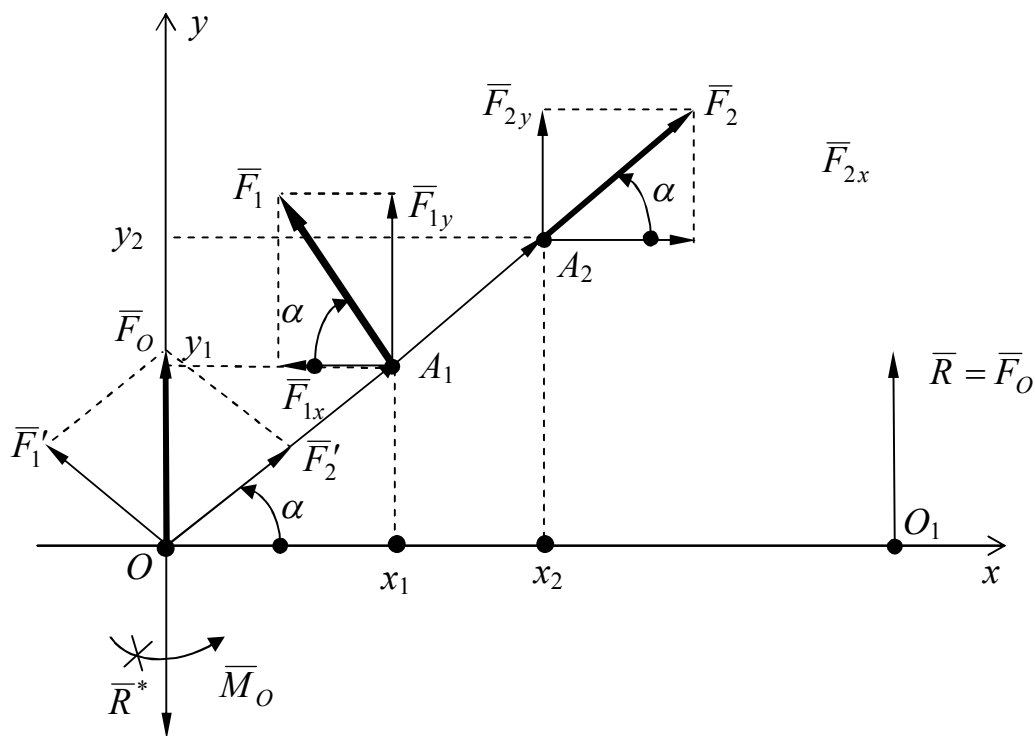


Рисунок 5.22

Проаналізуємо отримані результати.

За величинами $\bar{F}_O \neq 0$ і $\bar{M}_O \neq 0$, тому вихідна плоска система сил зводиться, відповідно до п. 5.5.4, до однієї рівнодійної сили \bar{R} .

Представимо далі момент \bar{M}_O (закреслено на рис. 5.22) у вигляді пари сил (\bar{R}, \bar{R}^*) , у якій сила $\bar{R}^* = -\bar{F}_O$, а плече $h = OO_1 = \frac{M_O}{F_O}$. За визначенням сили \bar{F}_O і \bar{R}^* складають двійку сил, тому система сил $(\bar{F}_O, \bar{R}^*) \sim 0$.

Отже, вихідну систему сил (\bar{F}_1, \bar{F}_2) еквівалентними системними перетвореннями

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, (\bar{R}, \bar{R}^*)) \sim ((\bar{F}_O, \bar{R}^*), \bar{R}) \sim (\bar{R})$$

зведено до однієї сили, рівнодійної \bar{R} з точкою прикладання O_1 на відстані OO_1 від полюса O в бік додатного відліку координати x . Лінією дії рівнодійної буде пряма з рівнянням $x = OO_1$, де OO_1 – число.

6 УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ СИЛ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ РІВНОВАГИ

6.1 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Як відомо (п. 5.5), довільна система сил у площині в загальному випадку зводиться у центрі O до сили \bar{R} , яка дорівнює головному вектору \bar{F}_0 системи, і пари сил із моментом \bar{m}_0 , який дорівнює головному моменту \bar{M}_0 системи. При цьому головний вектор належить площині дії пари \bar{m}_0 , що співпадає з площиною дії сил системи.

Для цієї системи сил існують три окремі випадки рівноваги.

Перша (основна) форма умов рівноваги. Припустимо, що площина дії системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ співпадає з координатною площиною xOy (рис. 6.1) системи координат $Oxyz$.

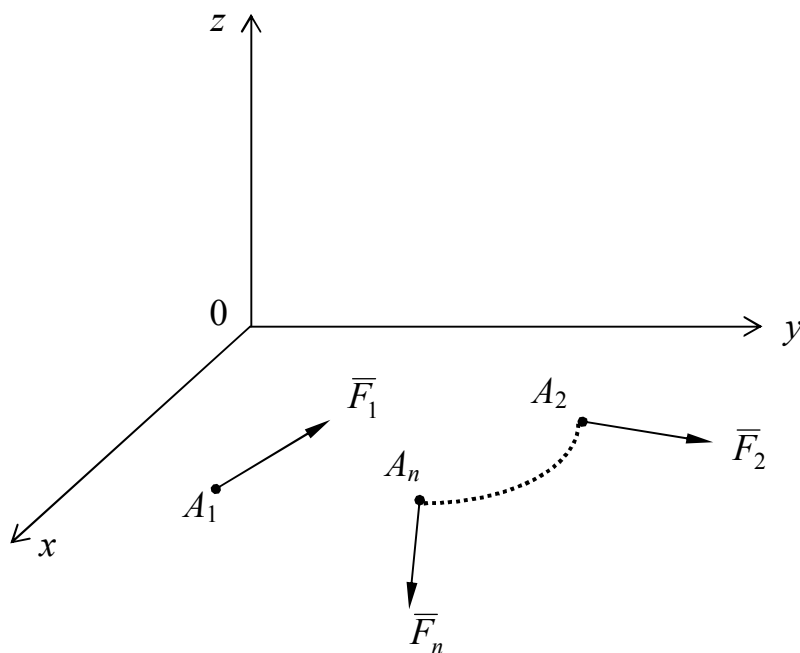


Рисунок 6.1

Проекції сил системи, а також радіусів-векторів точок їх прикладання на вісь Oz у цьому випадку дорівнюють нулю, тому система умов рівноваги перетворюється в таку:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (6.1)$$

Система (6.1) аналітичних (алгебраїчних) умов рівноваги твердого тіла формулюється таким чином: для рівноваги довільної системи сил у площині необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожен з координатних осей Ox і Oy й алгебраїчна сума їх моментів відносно осі Oz

(або довільного центра O у площині дії сил системи $\sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0$), дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги. У цьому випадку умови рівноваги формулюються так: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів сил відносно будь-яких двох точок у площині дії сил і сума проєкцій цих сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю. Для площини E дії сил системи, точок B, C на ній і осі Ox (рис. 6.2) буде:

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad F_{Bx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (6.2)$$

де F_{Bx} - проєкція головного вектора системи сил у точці B на вісь Ox .

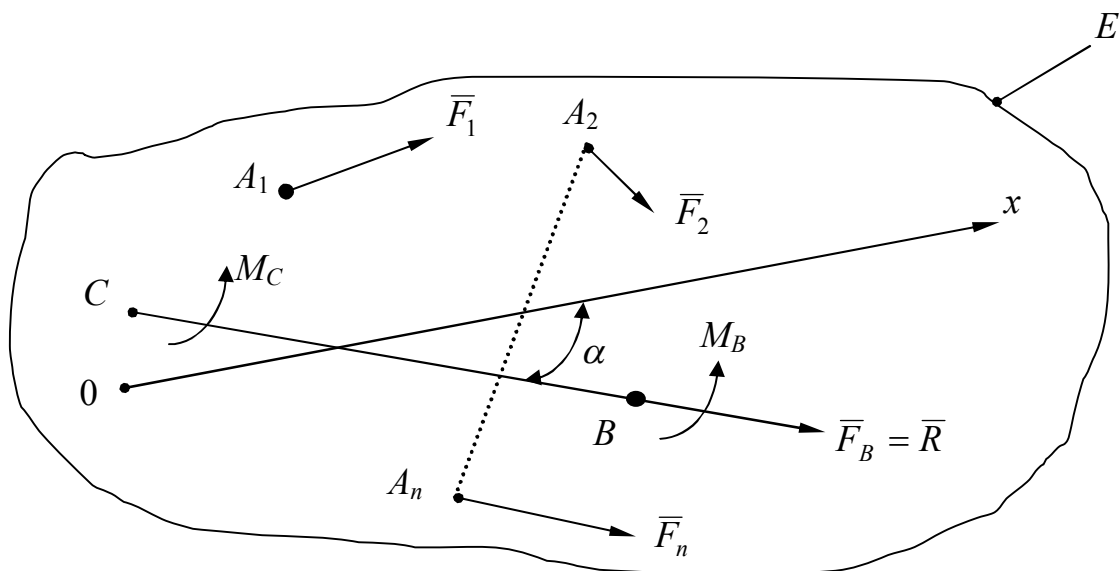


Рисунок 6.2

Необхідність цих умов очевидна, бо якщо будь-яка з умов не буде виконуватися, то або в точці B головний вектор системи $\bar{F}_B \neq 0$, або головний момент $\bar{M}_B \neq 0$ (чи $\bar{M}_C \neq 0$) і тоді рівноваги тіла не відбувається.

Достатність умов (6.2) доведемо таким чином. Якщо виконуються тільки перші з двох умов (6.2), тобто $M_B = 0$ і $M_C = 0$, то така система сил може мати лише рівнодійну $\bar{R} = \bar{F}_B$ (рис. 6.2), лінія дії якої проходить через точки B і C . Оскільки вісь Ox проходить під кутом $\alpha \neq \pi/2$ до відрізка BC , то остання умова (6.2) може бути виконана тільки коли $F_{Bx} = F_B \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \alpha = 0$, тобто коли $\bar{R} = \bar{F}_B = 0$. Це призводить до одночасного виконання всіх умов (6.5), що забезпечують рівновагу тіла безумовно.

Третя форма умов рівноваги. Ця форма умов рівноваги формулюється таким чином: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок, наприклад B, C, D , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю (рис. 6.3):

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad M_D = \sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = 0, \quad (6.3)$$

де B, C, D – точки приведення системи сил.

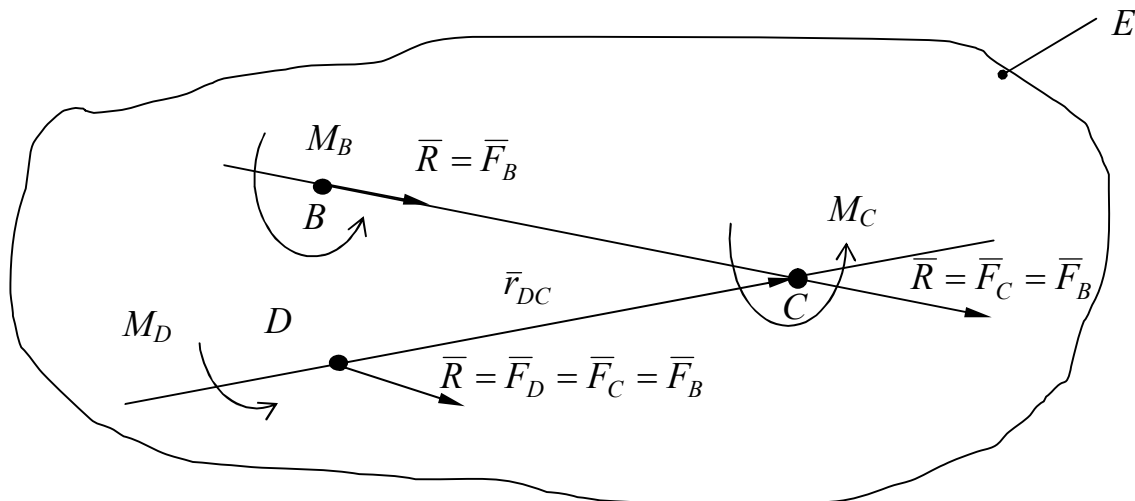


Рисунок 6.3

Необхідність цих умов, враховуючи (5.11), очевидна, бо за одночасного виконання, наприклад двох перших умов, головний момент системи при $\bar{r}_{DC} \neq 0$ може дорівнювати нулю у третій точці D ($\bar{M}_D = \bar{M}_C + \bar{r}_{DC} \times \bar{F}_B$) тільки коли головний вектор \bar{F}_B системи сил дорівнює нулю. Отже, за одночасного виконання умов (6.6) виконуються умови (6.1) рівноваги тіла і воно буде у рівновазі.

Достатність умов (6.3) впливає з того, що під час їх виконання система сил не знаходилася б у рівновазі тільки у випадку, коли її відмінна від нуля рівнодійна \bar{R} проходила одночасно через всі три точки BCD площини E , що неможливо за визначенням.

6.2 Приклади розв'язання задач рівноваги

Приклад 1. Рівновага довільної системи сил у площині.

Початкова схема конструкції наведена на рисунку 6.5, а. Тут на балку із зацемленим кінцем A на відрізку CD діє рівномірно розподілене навантаження $q = 0,8$ кН/м, у точці B – сила $F = 2$ кН під кутом 45° . Крім того, до балки прикладена пара сил із моментом $m = 1,2$ кН·м. Необхідно

визначити реакції защемлення у разі дії на балку заданої системи зовнішніх силових факторів. Розміри балки в метрах вказані на рисунку.

Розв'язання.

Розрахункова схема наведена на рисунку 6.4, б. Під час її побудови використано принцип звільнення від в'язів, розподілене навантаження замінено зосередженою силою $Q = 3 \cdot 0,8 = 2,4$ кН, а сила \bar{F} – координатними складовими \bar{F}_x , \bar{F}_y з величинами

$$F_x = F \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН,}$$

$$F_y = F \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН.}$$

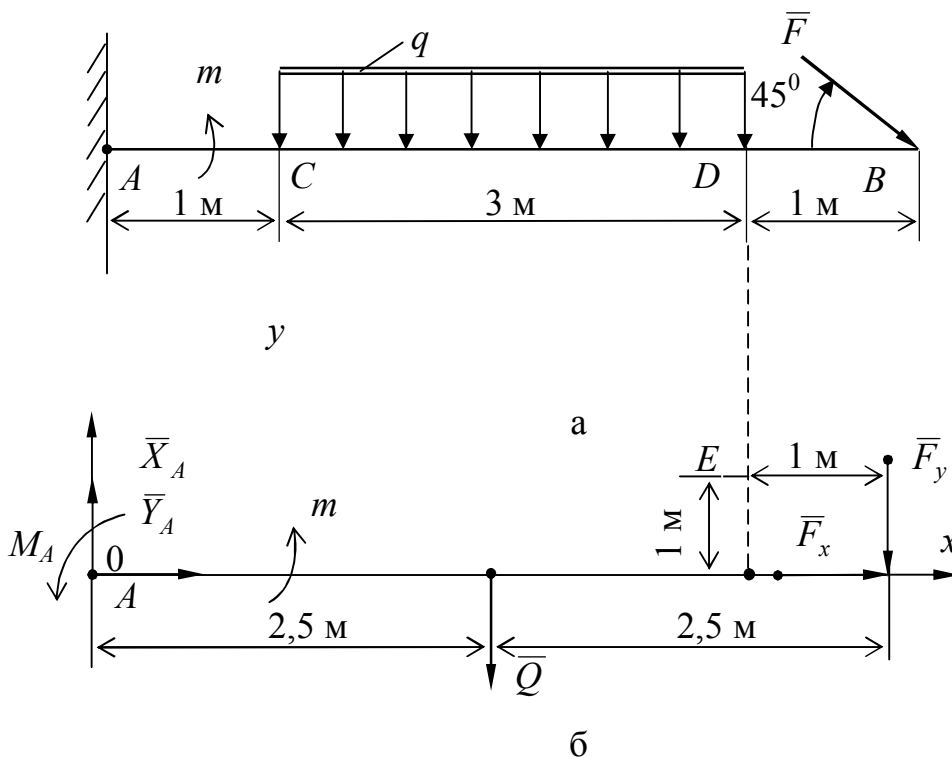


Рисунок 6.4

Відповідно до рисунку 6.4, б, балка як вільне тверде тіло, перебуває в рівновазі під дією заданих сил $\bar{Q}, \bar{F}_x, \bar{F}_y$, пари сил з моментом m і реакції защемлення у вигляді силових складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A та пари сил з моментом M_A .

Складемо рівняння рівноваги балки, використавши першу форму умов рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + F_x = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - Q - F_y = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad M_A + m - 2,5Q - 5F_y = 0.$$

З отриманих трьох рівнянь можна визначити три невідомі реакції:
з першого рівняння

$$X_A = -F_x = -1,41 \text{ (кН)};$$

з другого рівняння

$$Y_A = Q + F_y = 2,4 + 1,41 = 3,81 \text{ (кН)};$$

з третього рівняння

$$M_A = 5F_y + 2,5Q - m = 5 \cdot 1,41 + 2,5 \cdot 2,4 - 1,2 = 11,87 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Знак (-) отриманої реакції \bar{X}_A показує, що в дійсності вона направлена на розрахунковій схемі у протилежний бік.

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язів складемо рівняння моментів сил відносно точки E , що знаходиться на відстані 1 м від точки B і від балки (рис. 6.5, б).

Перевірка.

$$\begin{aligned} \sum M_E &= M_A - Y_A \cdot 4 + m + Q \cdot 1,5 - F_y \cdot 1 + X_A \cdot 1 + F_x \cdot 1 = \\ &= 11,87 - 3,81 \cdot 4 + 1,2 + 2,4 \cdot 1,5 - 1,41 \cdot 1 - 1,44 \cdot 1 + 1,41 \cdot 1 = 18,08 - 18,08 = 0. \end{aligned}$$

6.3 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним із двох способів:

- 1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що складають конструкцію;
- 2) початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

Приклад 1. Два невагомих стержні ADC і BC з'єднані між собою шарніром C і закріплені нерухомими шарнірами A і B . На конструкцію діють сили $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 20$ кН, розподілене навантаження інтенсивністю $q = 4$ кН/м і пара сил із моментом $M = 50$ кНм. Розміри задані на вихідній схемі (рис. 6.5). Треба визначити реакції опор A і B , а також тиск у проміжному шарнірі C складеної конструкції.

Розв'язання. Під час розв'язання задачі першим способом будемо розглядати рівновагу всієї складеної конструкції, а також стрижня CB окремо. Побудуємо розрахункову схему: відкинемо опори і замінимо їх реакціями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$, замінимо розподілене навантаження зосередженою силою $Q=3q$, прикладеною в середину ділянки AD , побудуємо осі координат.

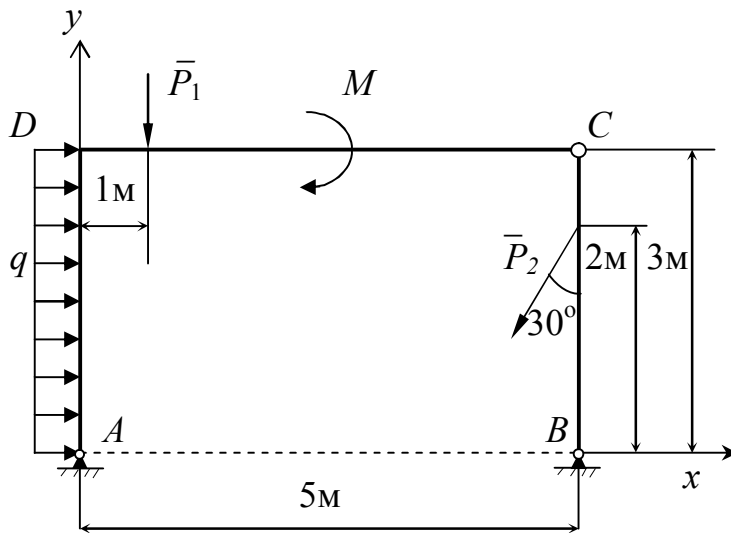


Рисунок 6.5

При цьому шарнір С вважатимемо нерухомим (закреслено на рис. 6.6), використавши аксіому 5 затвердіння.

Визначимо величини сил \bar{Q} , \bar{P}_{2x} і \bar{P}_{2y} :

$$Q = 3q = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН},$$

$$P_{2x} = P \cdot \sin 30^\circ,$$

$$P_{2y} = P \cdot \cos 30^\circ.$$

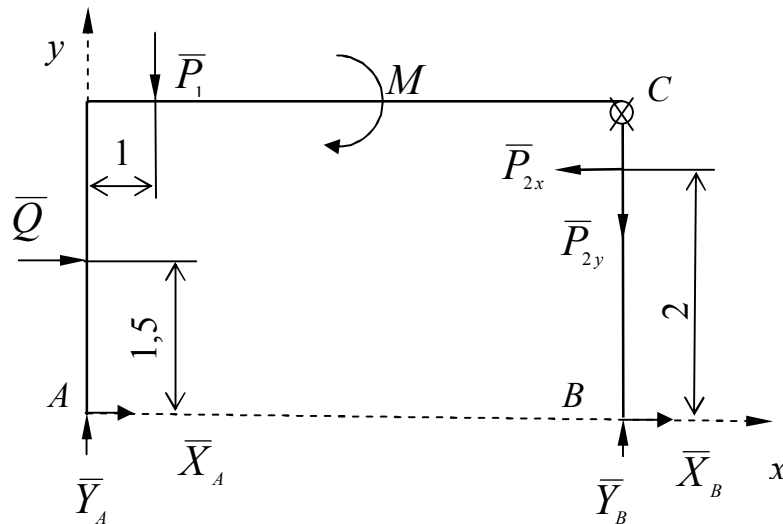


Рисунок 6.6

Складемо рівняння рівноваги нерозчленованої конструкції:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_B + Q - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_B - P_1 - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = -Y_A \cdot 5 - Q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 4 - M + P_{2x} \cdot 2 = 0.$$

Далі розчленимо конструкцію на складові елементи і розглянемо окремо стрижень BC. Дію відкинутої конструкції ADC замінимо реакціями \bar{X}_C , \bar{Y}_C у шарнірі C.

Примітка. Напрямки осей координат на обох розрахункових схемах (рис. 6.6, рис. 6.7) повинні співпадати.

Складемо рівняння рівноваги стрижня BC:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_B - X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_B + Y_C - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(F_i) = X_B \cdot 3 - P_{2x} \cdot 1 = 0.$$

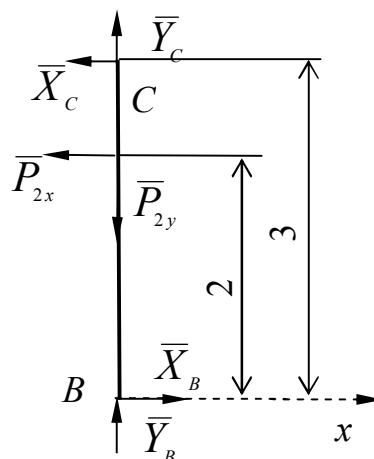


Рисунок 6.7

Відповідно до розглянутих на рисунку 6.6 і рисунку 6.7 розрахункових схем ми маємо шість невідомих реакцій опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ та реакції \bar{X}_C, \bar{Y}_C у шарнірі C. Визначимо їх із складених шести рівнянь рівноваги.

Із третього рівняння знаходимо

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot 4 + P_2 \sin 30^\circ \cdot 2 - M - Q \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \sin 30^\circ \cdot 2 - 50 - 12 \cdot 1,5}{5} =$$

$$= -1,6 \text{ кН},$$

із другого рівняння отримаємо

$$Y_B = -Y_A + P_1 + P_{2y} = -(-1,6) + 10 + 20 \cos 30^\circ = 28,92 \text{ кН}.$$

$$\text{Із шостого рівняння знаходимо } X_B = \frac{P_2 \sin 30^\circ}{3} = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{3} = 3,33 \text{ кН},$$

з п'ятого отримаємо $Y_C = P_2 \cos 30^\circ - Y_B = 20 \cdot \cos 30^\circ - 28,92 = -11,6 \text{ кН}$, з четвертого – $X_C = X_B - P_2 \sin 30^\circ = 3,33 - 20 \cdot \sin 30^\circ = -6,67 \text{ кН}$, і, нарешті, з першого – $X_A = -X_B - Q + P_2 \sin 30^\circ = -3,33 - 12 + 20 \cdot \sin 30^\circ = -5,33 \text{ кН}$.

Значення $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ менші нуля, відповідно ці реакції в дійсності спрямовані протилежно зображеним на рисунку.

Для перевірки одержаних величин реакцій опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ розглянемо складену конструкцію в цілому і складемо рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дій цих реакцій, наприклад, відносно точки E (рис. 6.8). Шарнір C знову будемо вважати нерухомим.

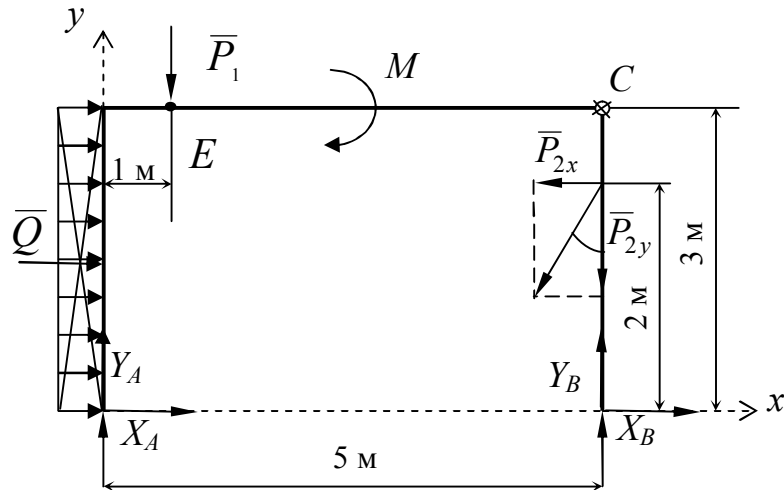


Рисунок 6.8

Перевірка.

$$\sum_{i=1}^n M_E(\bar{F}_i) = X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 1 + Q \cdot 1,5 - M - P_{2x} \cdot 1 - P_{2y} \cdot 4 + Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 3 =$$

$$= -5,33 \cdot 3 - (-1,6) \cdot 1 + 12 \cdot 1,5 - 50 - 20 \sin 30^\circ \cdot 1 - 20 \cos 30^\circ \cdot 4 + 28,92 \cdot 4 +$$

$$+ 3,33 \cdot 3 = -15,99 + 8 + 18 + 40 - 50 - 10 + 9,9 = -145,27 + 145,27 = 0.$$

При цьому рівність нулю суми моментів сил відносно точки E означає правильність визначених реакцій.

Приклад 2. Знайти реакції опор A і B, а також тиск у проміжному шарнірі C складеної конструкції, на яку діють сили $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 10$ кН, розподілене навантаження інтенсивністю $q = 1,4$ кН/м і пара сил з моментом $M = 15$ кНм. Розміри задані на початковій схемі (рис. 6.9), кут $\alpha = 60^\circ$.

Розв'язання. При розв'язання задачі в інший спосіб будемо розглядати рівновагу стержнів ADC і BC конструкції окремо (рис. 6.10 і 6.11). Побудуємо розрахункові схеми за звичайним правилом. Тут слід враховувати, що відповідно до аксіоми 4 реакції \bar{X}_C, \bar{Y}_C і \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C у шарнірі C задовольняють таким рівностям: $X_C = X'_C, Y_C = Y'_C$. Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою $Q = 4q$, яку прикладемо в середині ділянки CB.

Визначимо величини сил $\bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}, \bar{Q}$, що діють на стрижень CB:

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН}, \quad P_{2y} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,7 \text{ кН},$$

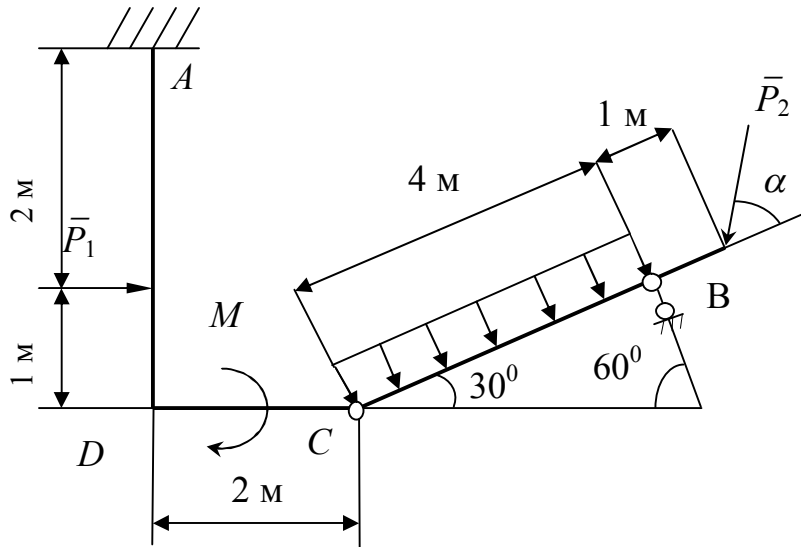
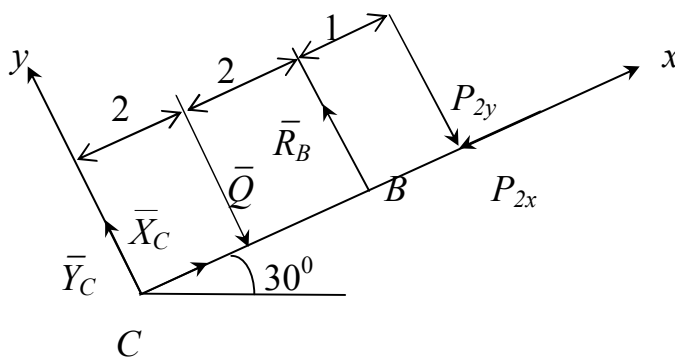


Рисунок 6.9



$$Q = 4q = 5,6 \text{ кН.}$$

Складемо рівняння рівноваги стрижня BC:

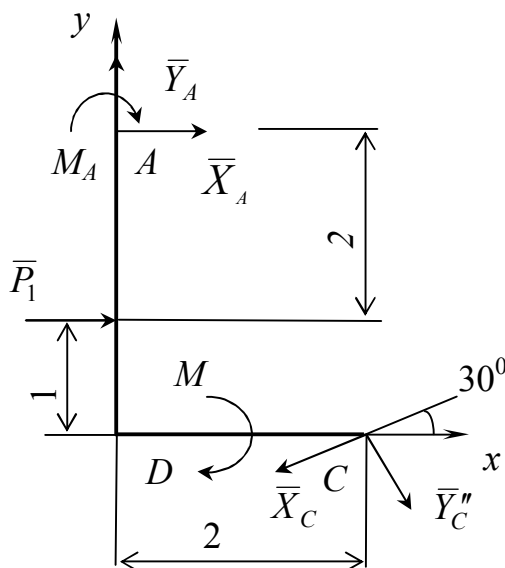
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_C - Q + R_B - P_{2y} = 0,$$

Рисунок 6.10

$$\sum_{i=1}^n M_C = -Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_{2y} \cdot 5 = 0.$$

Далі складемо рівняння рівноваги стрижня ADC:



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_1 - X_C \cos 30^\circ + Y_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Y_C \sin 60^\circ - X_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = -M_A + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - M - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 - Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = 0. \quad (6)$$

Рисунок 6.11

З отриманих шести рівнянь визначимо невідомі реакції: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C, \bar{R}_B$.

Із третього рівняння знаходимо

$$R_B = \frac{Q \cdot 2 + P_{2y} \cdot 5}{4} = \frac{5,6 \cdot 2 + 8,7 \cdot 5}{4} = 13,67 \text{ кН},$$

з першого рівняння $X_C = P_{2x} = 5 \text{ кН},$

з другого рівняння $Y_C = Q - R_B + P_{2y} = 5,6 - 13,67 + 8,7 = 0,63 \text{ кН},$

з п'ятого рівняння $Y_A = Y_C \sin 60^\circ + X_C \sin 30^\circ = 0,63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3,05 \text{ кН},$

з четвертого

$$X_A = -Y_C \cos 60^\circ + X_C \cos 30^\circ - P_1 = -0,63 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = -1,98 \text{ кН},$$

з шостого

$$\begin{aligned} M_A &= -M + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 - Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = \\ &= -15 + 6 \cdot 2 - 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + 0,63 \frac{1}{2} \cdot 3 - 5 \frac{1}{2} \cdot 2 - 0,63 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = -21,14 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Для перевірки розглянемо конструкцію в цілому і складемо для неї рівняння моментів відносно точки C , через яку не проходять лінії дій визначених реакцій. Шарнір C вважаємо затверділим (рис. 6.12).

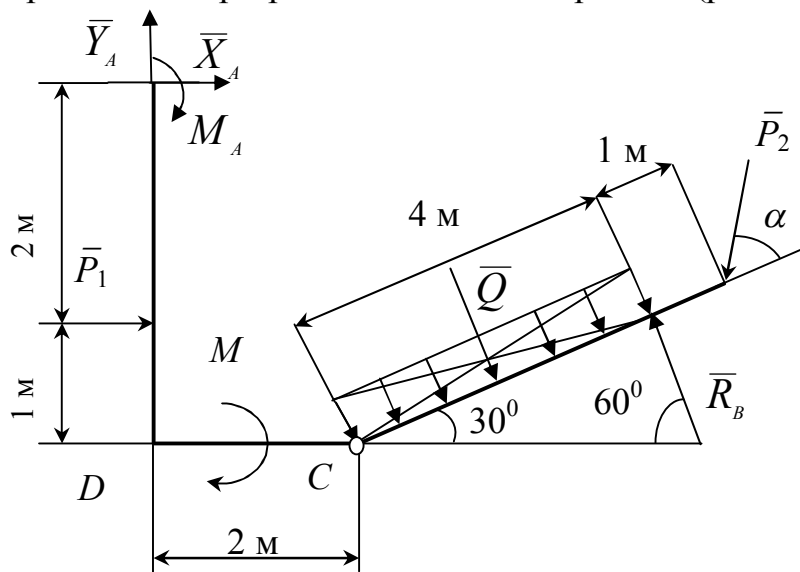


Рисунок 6.12

Перевірка.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) &= -M_A - X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 2 - P_1 \cdot 1 - M - Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_2 \cdot 4,33 = \\ &= -(-21,14) - (-1,98) \cdot 3 - 3,05 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 15 - 5,6 \cdot 2 + 13,67 \cdot 4 - 10 \cdot 4,33 \approx 0. \end{aligned}$$

Рівність нулю суми моментів сил відносно точки C означає, що задачу розв'язано правильно.

7 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

7.1 Основні визначення і припущення

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, що складається з прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою за допомогою шарнірів.

Ферми становлять (доволі) розповсюджені складові частини промислових і цивільних споруд. Їх використовують як опори трубопроводів і ліній електропередач (рис. 7.1), радіовежі (рис. 7.2), конструкції кранів, елементи великих прольотів будівельних та спортивних споруд, елементи мостів (рис. 7.3, 7.4, 7.5) та ін.

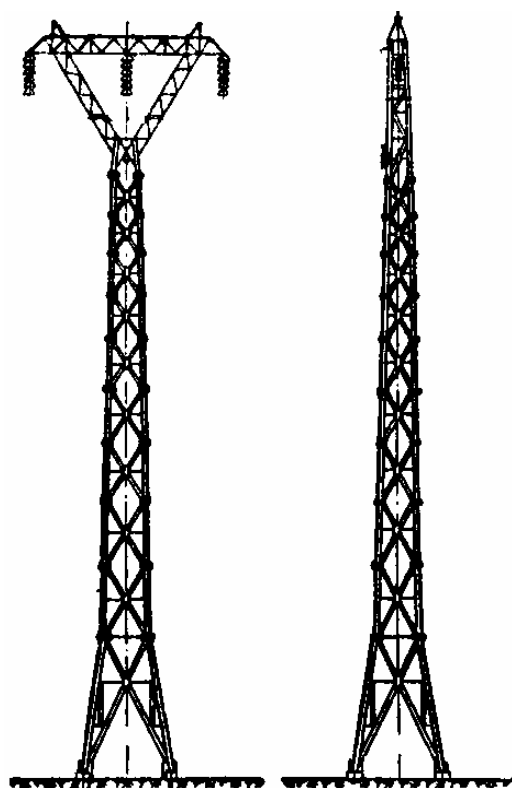


Рисунок 7.1 – Опори ЛЕП



Рисунок 7.2 – Ейфелева вежа
(Париж, Франція)

Якщо всі стержні ферми розташовані в одній площині, ферму називають *плоскою*. З'єднання стержнів ферми між собою називається *вузлами*.

Основним завданням розрахунку ферми є визначення зусиль, що виникають у стрижнях пвд час дії зовнішнього навантаження. При цьому розрахунки виконують за таких припущень:

- усі зовнішні навантаження прикладені тільки у вузлах;
- вагою стрижнів і тертям у вузлах, які є ідеальними шарнірами, нехтують.

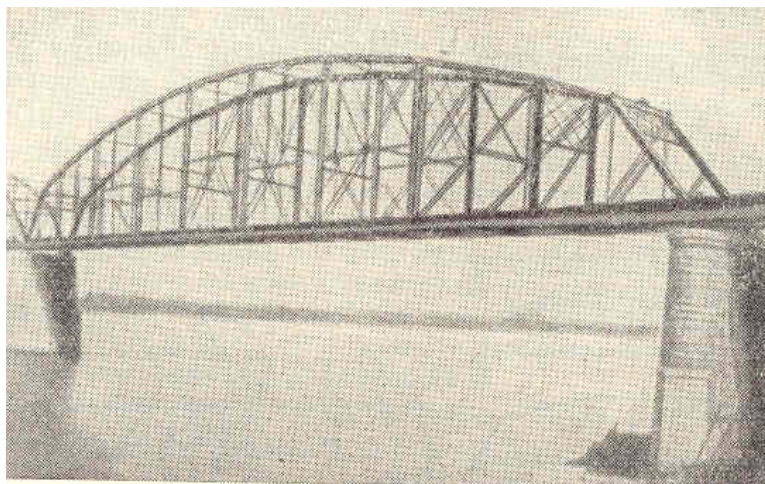


Рисунок 7.3 – Мостова ферма

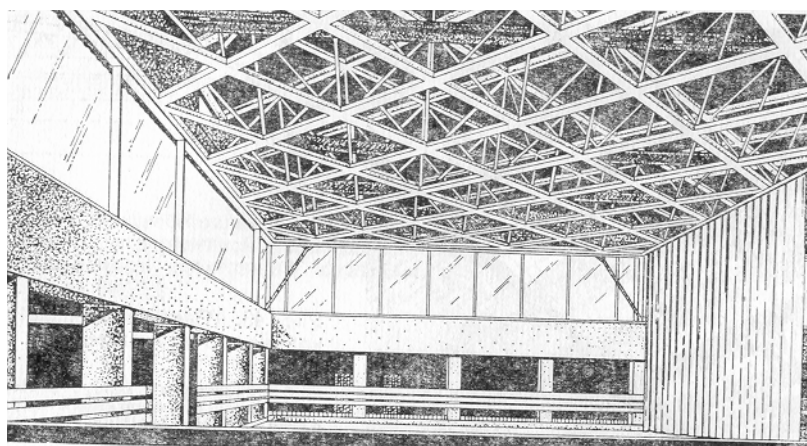


Рисунок 7.4 – Елемент даху спортивного залу в Парижі (Франція)



Рисунок 7.5 – Залізничний міст в Единбурзі (Шотландія)

Тоді на підставі першої аксіоми статки можна вважати, що стрижні ферми працюють тільки на розтяг або стиск. Наведені припущення вносять певну похибку в розрахунки порівняно з дійсним напруженим станом

стрижнів, але ця похибка невелика і отримані результати можна використовувати для технічних розрахунків елементів ферми на міцність.

Найпростішим прикладом ферми є система трьох стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами (рис. 7.6).

Простою плоскою фермою називається ферма, яка може бути побудована з трикутної шляхом послідовного приєднання кожного нового вузла за допомогою двох нових стрижнів (рис. 7.7).

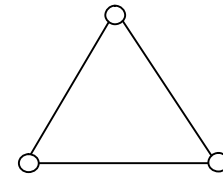


Рисунок 7.6

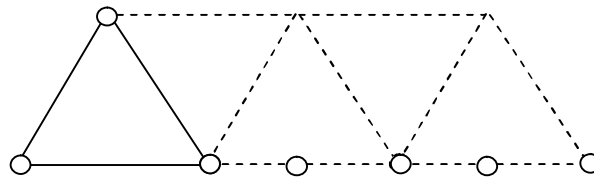


Рисунок 7.7

Розглянемо зв'язок між кількістю вузлів n і кількістю стрижнів k у простих фермах. Основний трикутник (рис. 7.6) має три вузли і три стержні. Для незмінного з'єднання з основним трикутником кожного з решти $n-3$ вузлів потрібно приєднати два стрижні. Отже, загальна кількість стержнів у простій фермі з урахуванням трьох стрижнів основного трикутника визначається так:

$$k = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \quad (7.1)$$

Покажемо, що проста ферма статично означена, якщо кількість опорних реакцій дорівнює трьом. Дійсно, для кожного вузла можна скласти два рівняння рівноваги, оскільки на нього діє збіжна система сил. Таким чином, усього можна скласти $2n$ рівнянь рівноваги. У ці рівняння будуть входити k невідомих зусиль у стрижнях і три реакції опор. З урахуванням формули (7.1) загальна кількість невідомих буде:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n,$$

тобто дорівнюватиме кількості рівнянь рівноваги. Таким чином, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Зазначимо, що якщо кількість стрижнів k менше, ніж підраховане за формулою (7.1), то така конструкція буде механізмом, тобто матиме можливість рухатися. Якщо кількість стрижнів більше, ніж підраховане за формулою (7.1), або кількість опорних реакцій більше трьох, ферма буде статично неозначена і для її розрахунку треба застосувати методи будівельної механіки.

7.2 Порядок розрахунку простої ферми

1. Спочатку складаємо три рівняння рівноваги для визначення реакцій опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій бажано скласти перевірочне рівняння.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають у себе умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і реакції опор. Але попереднє визначення опорних реакцій суттєво спрощує розв'язання задачі.

2. Далі визначаємо зусилля у стрижнях ферми.

Звичайно використовуємо два способи: вирізання вузлів і Ріттера.

а) *Спосіб вирізання вузлів.* Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в усіх стрижнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги збіжних систем сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох.

Для визначеності припускають, що всі зусилля направлені від вузла, тобто стрижні розтягнуті. Якщо в результаті розрахунків значення зусилля буде від'ємним, то це означатиме, що стрижень стиснутий. Останній вузол розглядають, як правило, для перевірки.

Зусилля в окремих стрижнях можуть виявитись нульовими, тобто стрижні будуть ненавантаженими. Такі стрижні можна визначити за допомогою кількох лем.

Лема 1. Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються два стрижні (рис. 7.8), то зусилля в цих стрижнях дорівнюватимуть нулю, тобто



Рисунок 7.8

Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються три стрижні (рис. 7.9), з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля у третьому стрижні дорівнює нулю: $S_3 = 0$.

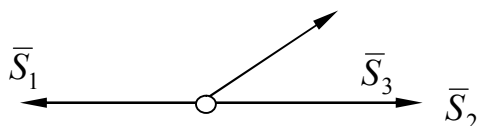


Рисунок 7.9

Лема 3. Якщо до вузла, у якому збігаються два стрижні, прикладена зовнішня сила \bar{P} у напрямку одного з стрижнів (рис. 7.10), то зусилля у другому стрижні дорівнює нулю: $S_2 = 0$.

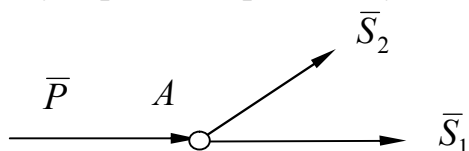


Рисунок 7.10

б) *Спосіб Ріттера*. Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в окремих стрижнях ферми, зокрема, для перевірочних розрахунків. Згідно з цим способом ферму розподіляють на дві частини перерізом, який проходить не більше, ніж через три стрижні, і розглядають рівновагу однієї з частин. Зусилля в перерізаних стрижнях направляють від перерізу, тобто припускають (як і в способі вирізання вузлів), що всі стрижні розтягнуті. Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стрижня, через який пройшов переріз. Для цього складають рівняння моментів відносно точки площини (цю точку називають *точкою Ріттера*), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стрижнів, які потрапили в переріз. Якщо два інших стрижні перерізу виявляються паралельними, то складають рівняння проєкцій сил на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стрижнів. Таким чином, спосіб Ріттера дає змогу визначити зусилля в будь-якому стрижні ферми незалежно від зусиль в інших стрижнях.

Аналізуючи вищеназвані способи визначення зусиль у стрижнях, зазначимо, що зусилля способом вирізання вузлів визначають послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Це може призвести до накопичення похибок, тому бажано значення знайдених зусиль під час розгляду наступних вузлів брати якомога точнішими. Крім того, помилка у визначенні одного зусилля призведе до неправильних розрахунків усіх інших стрижнів, що залишились.

Спосіб Ріттера на відміну від попереднього не призводить до накопичення похибок, бо всі зусилля визначаються незалежно одне від одного. Але одночасно це не дає можливості помітити грубі помилки, що можуть трапитись при обчисленні. У деяких фермах також не всі зусилля можуть бути визначені способом Ріттера незалежно одне від одного.

Таким чином, найкраща методика визначення зусиль у стрижнях ферми полягає в поєднанні способів вирізання вузлів і Ріттера. При цьому всі зусилля визначаються за способом вирізання вузлів і деякі з них перевіряють способом Ріттера.

Приклад 1. Визначити зусилля у стрижнях ферми (рис. 7.11), на яку діє задана сила $P = 10$ кН. Зусилля у стрижнях 2, 3, 4 перевірити способом Ріттера.

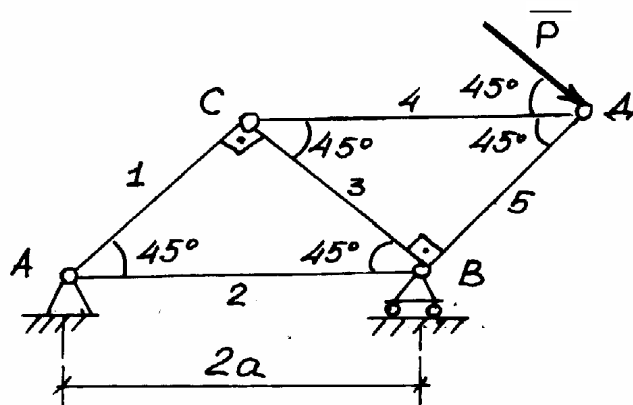


Рисунок 7.11

Розв'язання:

1) Розглянемо рівновагу ферми (рис. 7.12) і визначимо реакції опор А і В:

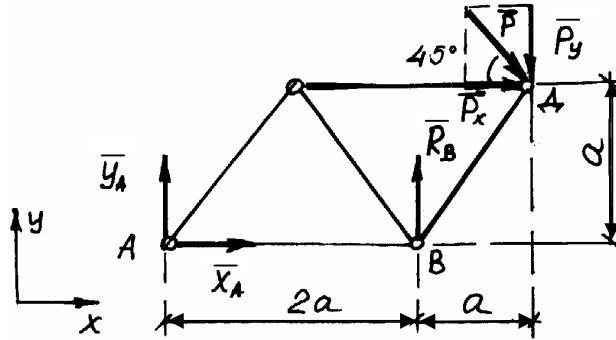


Рисунок 7.12

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0,$$

де P_x, P_y – модулі складових сили \bar{P} : $P_x = P \cdot \cos 45^\circ$, $P_y = P \cdot \sin 45^\circ$,

$$R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0;$$

$$Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$

$$= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$$

2) Визначимо зусилля у стрижнях ферми методом вирізання вузлів:

а) розглянемо рівновагу вузла А (рис. 7.13):

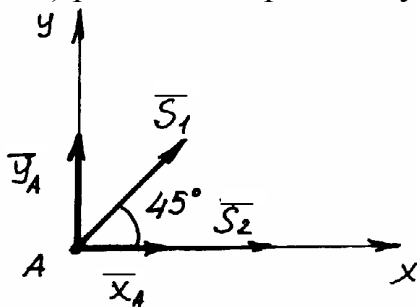


Рисунок 7.13

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0;$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

б) розглянемо рівновагу вузла С (рис. 7.14):

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

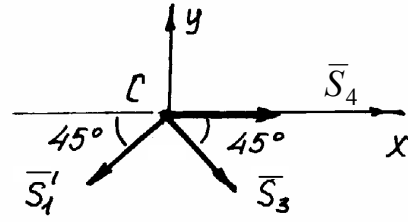


Рисунок 7.14

$$-S_1' \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = -S_1' = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1' \cdot \cos 45^\circ + S_3' \cos 45^\circ + S_4 = 0;$$

$$S_4 = S_1' \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

(за модулем $S_1' = S_1 = 10$ кН);

в) розглянемо рівновагу вузла В (рис. 7.15):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S_2' - S_3' \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

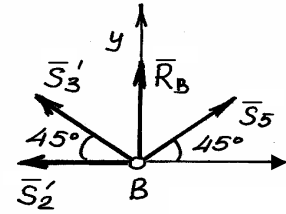


Рисунок 7.15

$$S_5 = \frac{S_2' + S_3' \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$

друге рівняння можна використати для перевірки:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iy} &= -S_3' \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ = \\ &= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0; \\ &\quad (S_2' = S_2; \quad S_3' = S_3); \end{aligned}$$

г) для перевірки розглянемо останній вузол Д (рис. 7.16):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \quad -S_4' - S_5' \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ = \\ &= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \sin 45^\circ - S_5' \sin 45^\circ =$$

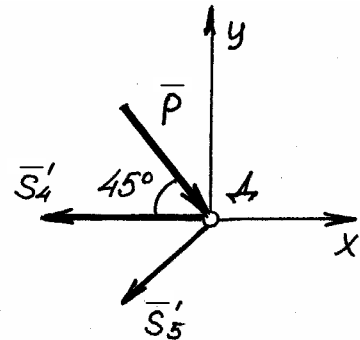


Рисунок 7.16

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

$$(S'_4 = S_4; S'_5 = S_5);$$

3) Визначимо зусилля у стрижнях 2, 3, 4 ферми методом Ріттера. Для цього проведемо переріз через ці стрижні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми (рис. 7.17):

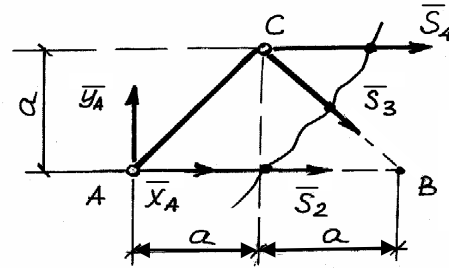


Рисунок 7.17

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0;$$

$$S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0; \quad S_4 - 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

Відповідь: 1) $X_A \approx -7$ кН; $Y_A \approx -7$ кН; $R_B = 14$ кН; знаки «-» означають, що справжній напрямок складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A протилежний показаним на рисунках;

2) $S_1 = 10$ кН; $S_2 = 0$; $S_3 = -10$ кН; $S_4 \approx 14$ кН; $S_5 = -10$ кН; стрижні 1, 4 – розтягнуті; 3, 5 – стиснуті; 2 – ненавантажений.

8 ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ

8.1 Центр паралельних сил

Розглянемо дві паралельні сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , направлені в один бік (рис. 8.1). Згідно з п. 4.4.1 така система сил зводиться до рівнодійної \vec{R} . При цьому виконуються співвідношення:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}. \quad (8.1)$$

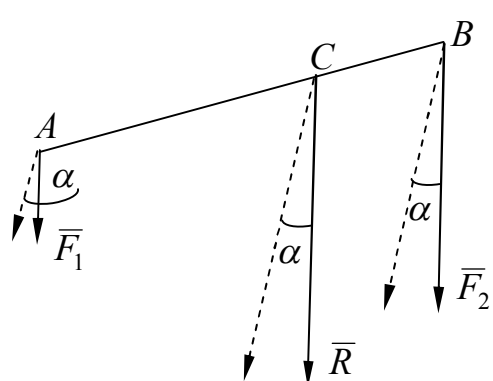


Рисунок 8.1

Якщо сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 повернути на однаковий кут α навколо точок їх прикладання A і B , то рівнодійна \vec{R} повернеться на той самий кут навколо точки C , оскільки співвідношення (8.1) не зміняться. Такі ж міркування можна привести і для двох паралельних сил, направлених у різні боки.

Точка C , через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил

за будь-яких поворотів цих сил навколо точок їх прикладання на однаковий кут, називається *центром паралельних сил*.

В яких випадках існує така точка C і як знайти їх координати? На це запитання дає відповідь теорема про *центр паралельних сил*.

Теорема. Якщо головний вектор системи паралельних сил не дорівнює нулю, то центр паралельних сил (точка C) існує і його положення визначається за формулою:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k^* \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (8.2)$$

де \vec{r}_k – радіуси-вектори точок прикладання сил; \vec{r}_c – радіус-вектор центра паралельних сил; F_k^* – модулі паралельних сил, які відрізняються знаком для сил, направлених у різні боки.

Доведення. Розглянемо систему n паралельних сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$. Якщо її головний вектор не дорівнює нулю, то, як показано у п. 5.4.4.3, така система паралельних сил зводиться до рівнодійної \vec{R} . Нехай точка O_1 – це якась точка лінії дії цієї рівнодійної (рис. 8.2), \vec{r}, \vec{r}_k – відповідно радіуси-вектори точки O_1 і точок прикладання сил \vec{R} і \vec{F}_k відносно выбраного центра O .

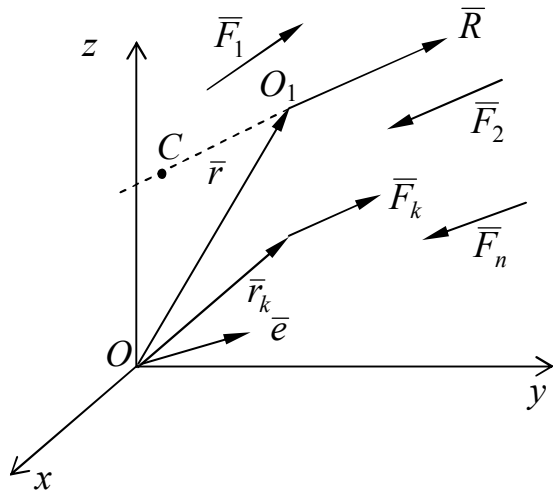


Рисунок 8.2

Згідно з теоремою Варіньона про момент рівнодійної (п. 5.6), отримаємо

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) \text{ або}$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) - \bar{M}_O(\bar{R}) = 0$$

$$\text{або } \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k - \bar{r}) \times \bar{F}_k = 0. \quad (8.3)$$

Рівність (9.3) запишемо у такі формі

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \bar{r} \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0. \quad (8.4)$$

Введемо у розгляд одиничний вектор \bar{e} , паралельний лініям дії сил \bar{F}_k . Тоді кожна із заданої системи сил може бути виражена через вектор \bar{e} :

$$\bar{F}_k = F_k^* \bar{e}, \quad (8.5)$$

де $F_k^* = F_k$, якщо напрями векторів \bar{F}_k і \bar{e} збігаються, і $F_k^* = -F_k$, якщо ці напрями протилежні. При цьому очевидно, що

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^*. \quad (8.6)$$

Підставляючи (8.5) і (8.6) у рівняння (8.4), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times F_k^* \bar{e} - \bar{r} \times \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0, \text{ або } \left[\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* \right] \times \bar{e} = 0.$$

Остання рівність виконується за будь-якого напрямку сил (напряму вектора \bar{e}) тільки за умовою, що перший множник дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0. \quad (8.7)$$

Ця рівність має єдиний розв'язок відносно радіуса-вектора \bar{r} , який визначає точку прикладання рівнодійної. Такою точкою і є центр паралельних сил, чим доводиться його існування. Позначимо радіус-вектор центра паралельних сил як \bar{r}_c . Тоді з рівняння (8.7) отримаємо вираз:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}.$$

Теорему доведено.

Формулу (8.2) можна подати у скалярній формі:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (8.9)$$

де $x_c, y_c, z_c, x_k, y_k, z_k$ – відповідно декартові координати центра C паралельних сил і точок прикладання сил \bar{F}_k .

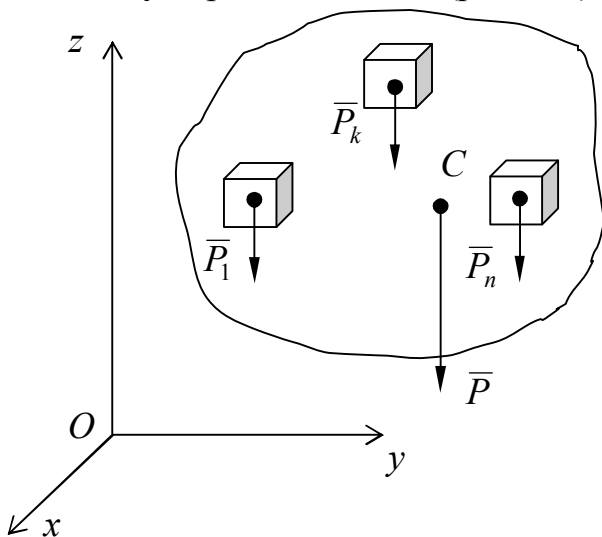
Вирази $\sum_{k=1}^n x_k F_k^*$, $\sum_{k=1}^n y_k F_k^*$, $\sum_{k=1}^n z_k F_k^*$ у формулах (8.9) називаються відповідно *статичними моментами* заданої системи сил відносно координатних площин yOz , xOz , xOy . Зазначимо, що коли початок координат сумістити з центром паралельних сил, то

$$x_c = y_c = z_c = 0$$

і статичні моменти заданої системи сил дорівнюватимуть нулю.

8.2 Центр ваги твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке знаходиться в полі сил тяжіння. Якщо розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, то можна вважати, що на частки цього тіла діють сили ваги \bar{P}_k , які складають систему паралельних сил (рис. 8.3).



Центром ваги твердого тіла називається центр паралельних сил ваги.

Для центра ваги тіла формули (8.9) набудуть вигляду:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{P},$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{P}, \quad (8.10)$$

Рисунок 8.3

де $P = \sum_{k=1}^n P_k$ – сила ваги (тіла);

x_k, y_k, z_k – координати точки прикладання сили ваги \bar{P}_k окремої частини тіла.

8.2.1 Центр ваги однорідного твердого тіла

Якщо тіло однорідне, то вага кожної частки тіла пропорційна його об'єму:

$$P_k = \gamma_1 V_k, \quad (8.11)$$

де V_k – об'єм елементарної частки тіла;

γ_1 – вага одиниці об'єму тіла.

Підставивши (8.11) у (8.10), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_1 V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^n x_k V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V}, \\ \text{аналогічно} \quad y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{V}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V}, \end{aligned} \right\} (8.12)$$

де $V = \sum_{k=1}^n V_k$ – об'єм тіла.

Із формул (8.12) видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів тіла. Тому точку C , яка визначається за формулами (8.12), називають *центром ваги об'єму тіла*.

8.2.2 Центр ваги однорідної пластини

Пластиною називають плоске тіло, один розмір якого (товщина) набагато менше двох інших (довжини і ширини):

$$P_k = \gamma_2 S_k, \quad (9.13)$$

де S_k – площа елементарної частки пластини;

γ_2 – вага одиниці площі.

Підставивши (9.13) у (9.10) і вважаючи, що координатна площина xOy збігається з площиною пластини, отримаємо:

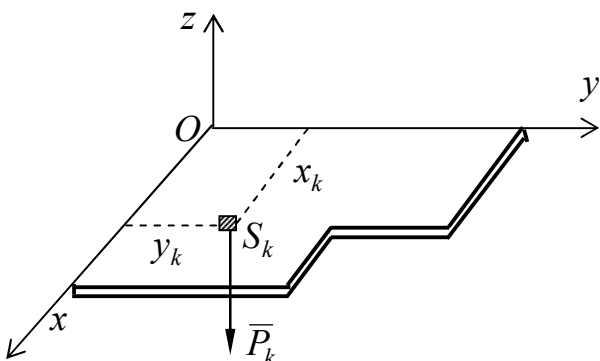


Рис. 8.4

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_2 S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n x_k S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S}, \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

аналогічно

де $S = \sum_{k=1}^n S_k$ – площа пластини.

Точку C , координати якої визначаються за формулами (8.14), називають *центром ваги площі*.

Вирази у чисельниках формулі (8.14) називають відповідно *статичними моментами площі* S_y і S_x відносно осей x і y :

$$S_y = \sum_{k=1}^n x_k S_k = x_c \cdot S, \quad S_x = \sum_{k=1}^n y_k S_k = y_c \cdot S. \quad (8.15)$$

8.2.3 Центр ваги однорідного стрижня

Стрижнем називають тіло, один розмір якого (довжина) набагато більше двох інших. У цьому випадку вага елементарної частки тіла пропорційна її довжині (рис. 8.5):

$$P_k = \gamma_3 l_k, \quad (8.16)$$

де l_k – довжина елементарної частки стрижня; γ_3 – вага одиниці довжини.

Підставивши (8.16) у (8.10), отримаємо:

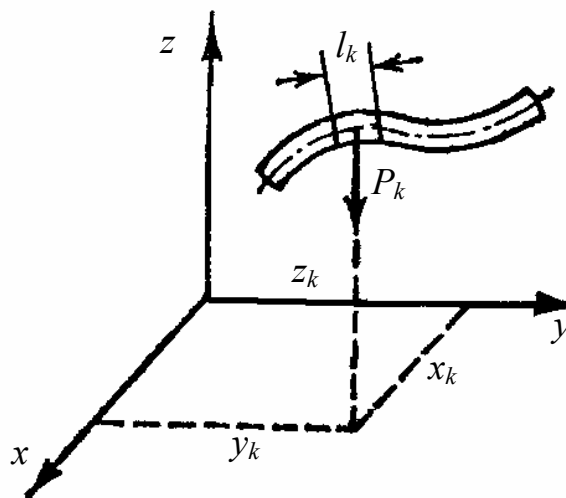


Рис. 8.5

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_3 l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\gamma_3 \sum_{k=1}^n x_k l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}, \\ \text{аналогічно} \quad y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

де $L = \sum_{k=1}^n l_k$ – довжина стрижня.

Точку C , координати якої визначаються за формулами (9.17), називають *центром ваги лінії*.

8.3 Способи визначення координат центра ваги

1. **Спосіб симетрії.** Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії.

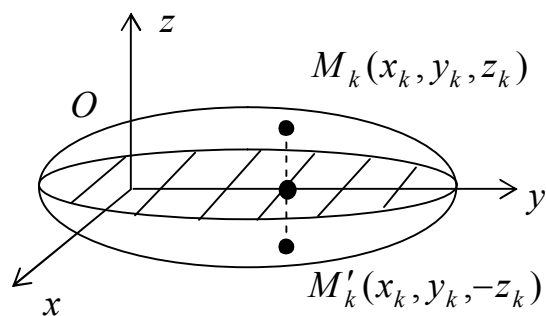


Рисунок 8.6

Доведемо це твердження для тіла, що має площину симетрії (рис. 8.6). Розташуємо координатну площину xOy у площині симетрії (на рис. 9.6 ця площина заштрихована). Візьмемо в тілі дві точки M_k і M'_k , які розташовані симетрично відносно площини xOy . У цих точок збігаються координати x_k, y_k , а координати z_k розрізняються тільки знаком. Виділимо навколо точок M_k, M'_k рівні елементарні об'єми V_k . Підсумуємо додатки:

$$z_k V_k + z'_k V_k = z_k V_k - z'_k V_k = 0.$$

Розглянувши всі елементарні об'єми, отримаємо: $\sum_{k=1}^n z_k V_k = 0$ і обчислимо координату z_c центра ваги тіла за формулою (8.12):

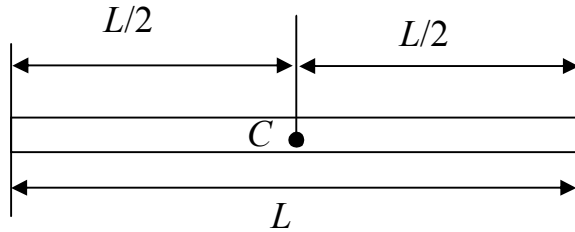
$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V} = 0.$$

Це означає, що центр ваги досліджуваного тіла знаходиться у площині симетрії.

Аналогічно можна довести твердження для тіла, що має вісь або центр симетрії.

Приклади. Розглянемо декілька прикладів.

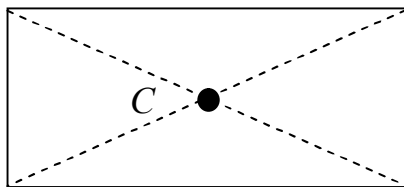
а) прямолінійний стрижень



Центр симетрії такого стрижня є точка у середині стрижня. Отже, центр ваги прямолінійного стрижня – точка C – знаходиться у середині стрижня (рис. 8.7).

Рисунок 8.7

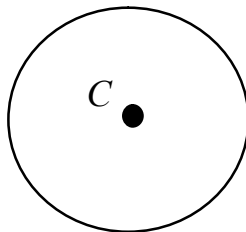
б) прямокутник



Центром симетрії прямокутника є точка перетину його діагоналей. Тоді центр ваги прямокутника – точка C – також знаходиться у точці перетину діагоналей (рис. 8.8). Як відомо, діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

Рисунок 8.8

в) коло



Центром симетрії, а значить і центром ваги кола є його центр (рис. 8.9).

Рисунок 8.9

2. Спосіб розбиття. Якщо тіло можна розбити на скінченну кількість таких часток, для яких положення центрів ваги відомі, то координати центра ваги тіла можна обчислити за формулами (8.10), (8.12), (8.14) або (8.17).

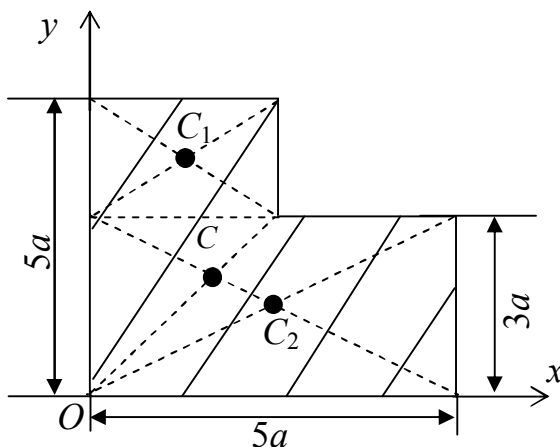


Рисунок 8.10

Приклад 1. Визначити координати центра ваги площі (рис. 8.10).

Розв'язання. Розіб'ємо площу на два прямокутники, центри ваги яких C_1 і C_2 знаходяться в точках перетину діагоналей. Виберемо систему координат Oxy . Дані про координати центрів ваги прямокутників та їх площі запишемо в таблицю 8.1.

Таблиця 8.1 – Координата центрів ваги прямокутників та їх площі

k	x_k	y_k	S_k
1	$1,5a$	$4a$	$6a^2$
2	$2,5a$	$1,5a$	$15a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (8.14):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{1,5a \cdot 6a^2 + 2,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{9a^3 + 37,5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a,$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a \cdot 6a^2 + 1,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{24a^3 + 22,5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a.$$

Значення координат точки $C(2,2a; 2,2a)$ свідчать, що вона лежить на бісектрисі кута, проведеної з центра координат, яка є лінією симетрії площі.

3. **Спосіб доповнення (або від'ємних площин).** Якщо тіло має порожнину (виріз), то цю порожнину (виріз) можна розглядати як тіло з від'ємною вагою (площею) і для розрахунків використовувати спосіб розбиття.

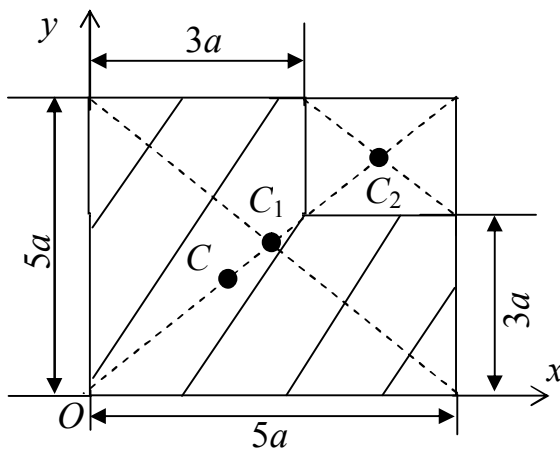


Рисунок 8.11

Таблиця 8.2 – Координата центрів ваги квадратів та їх площі

k	x_k	y_k	S_k
1	$2,5a$	$2,5a$	$25a^2$
2	$4a$	$4a$	$-4a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (8.14):

Приклад 2. Розглянемо задачу прикладу 1.

Розв'язання. Уявимо площу як квадрат (1) зі сторонами $5a \times 5a$, з якого вирізали квадрат (2) зі сторонами $2a \times 2a$ (рис. 8.11). Площу останнього квадрата будемо вважати від'ємною. Дані про координати центрів ваги квадратів і їх площі запишемо в табл. 8.2.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a;$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62,5a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a.$$

4. **Спосіб інтегрування.** Якщо тіло неможливо розбити на скінченне кількість часток, у формулах (8.10), (8.12), (8.14), (8.17) переходять до інтегралів.

Наприклад, формули (8.14) матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\int x dS}{S} \\ y_c &= \frac{\int y dS}{S} \end{aligned} \right\}, \quad (8.18)$$

де інтеграли поширюються на площу S .

8.4 Центри ваги простіших фігур

Розглянемо декілька простих фігур, з яких можуть складатись більш складні фігури.

Скористаємось способом розбиття і розділимо трикутник ABD на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні AD (рис. 8.12). Кожну таку смужку можна прийняти за прямокутник, центр симетрії якого лежить у середині, тобто на медіані BK трикутника. Розглядаючи смужки, паралельні стороні BD , доходимо висновку, що центр ваги трикутника має лежати на медіані AL . Отже, центр ваги трикутника знаходиться у точці перетину його медіан. Ця точка, як відомо, ділить кожен із медіан у відношенні 1:2, тобто $CK : CB = 1 : 2$, $CL : CA = 1 : 2$.

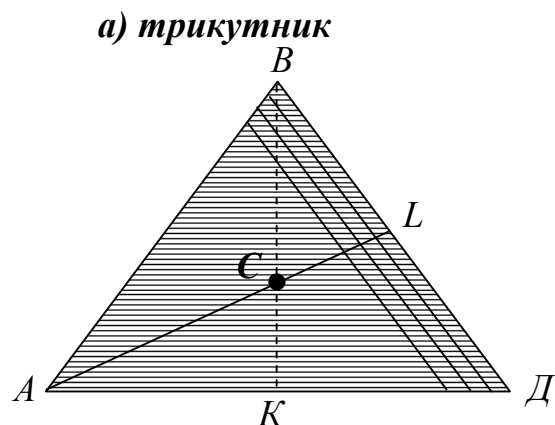


Рисунок 8.12

б) дуга кола

Розглянемо дугу AB кола радіусом R з центральним кутом 2α (рис. 8.13). Спрямуємо вісь Ox по осі симетрії дуги, яка є бісектрисою кута 2α . Центр ваги дуги кола лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$, і залишається знайти x_c . Для цього скористаємось формулою

$$x_c = \frac{\int_A^B x dl}{L}, \quad (8.19)$$

яка вийде, якщо у формулі (8.17) перейти до інтеграла. Для елементарної частки довжини dl , як виходить з рис. 8.13, $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$, $L = R \cdot 2\alpha$. Тоді

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \sin \alpha \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 2 \sin \alpha}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (8.20)$$

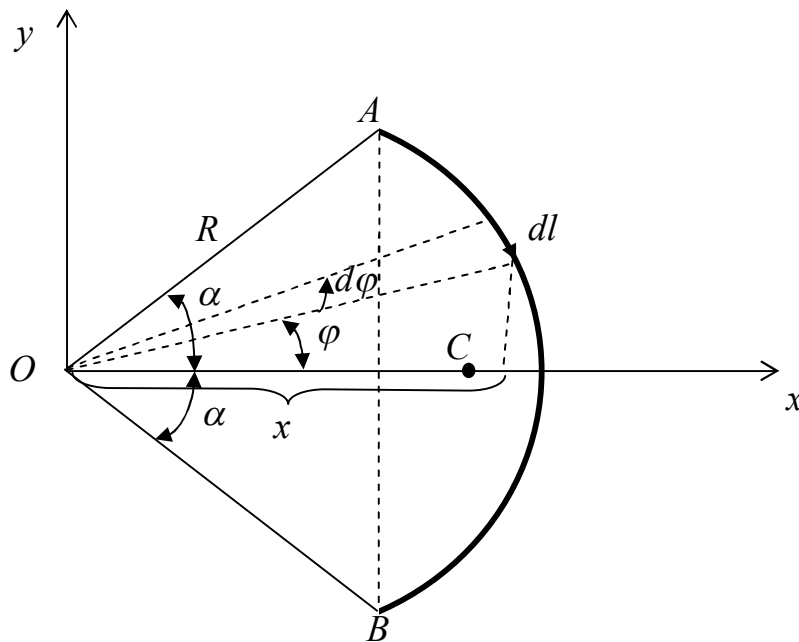


Рисунок 8.13

в) коловий сектор

Розглянемо коловий сектор з центральним кутом 2α і радіусом R (рис. 8.14). Спрямуємо вісь Ox по осі симетрії сектора, яка є бісектрисою кута 2α . Центр ваги сектора лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$. Розіб'ємо коловий сектор на елементарні сектори (заштрихований на рис. 8.14), кожен з яких можна прийняти за рівнобедрений трикутник. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані $2/3R$ від початку координат. Геометричним місцем центрів ваги всіх

елементарних трикутників буде дуга кола радіусом $2/3R$. У цьому випадку можна скористатись формулою для центра ваги дуги кола (8.20):

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (8.21)$$

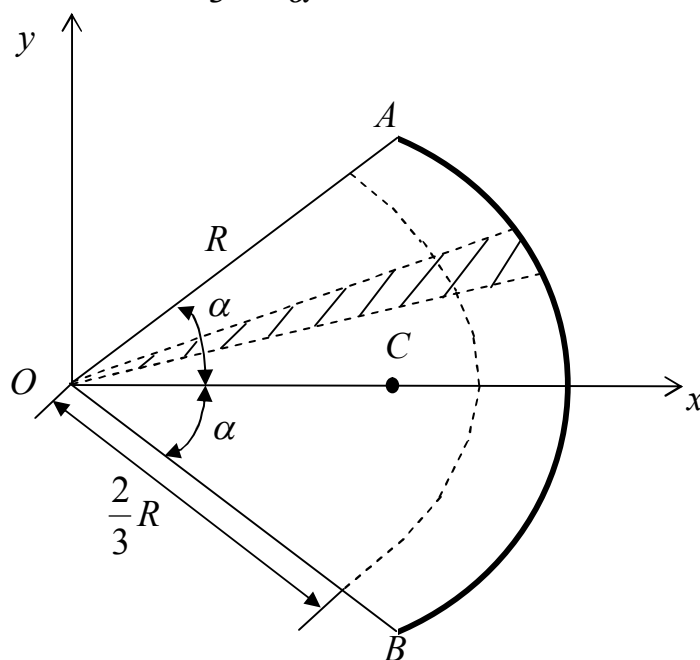


Рисунок 8.14

Зауваження. У формулах (8.20), (8.21) кут α треба брати в радіанах.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що є предметом статички?
2. Дайте фізичне і геометричне визначення поняття сили, вкажіть її розмірність.
3. Яке тіло називається абсолютно твердим?
4. Які системи сил називаються статично еквівалентними? Визначте формулою системи сил, еквівалентні нулю, а також одній силі. Як називається стан тіла, що знаходиться під дією системи сил першого типу? Як називається сила, до якої приводиться система другого типу?
5. Сформулюйте і проаналізуйте аксіоми статички.
6. Чи зміниться стан тіла, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії її дії?
7. Що таке двійка сил? Чому вона еквівалентна?
8. Дайте визначення в'язі.
9. Яке тіло називається вільним?
10. Наведіть приклади технічної реалізації в'язів. Що таке реакція в'язі? Покажіть реакції типових в'язів: абсолютно гладка поверхня, нитка, ідеальний стрижень, циліндричний шарнір, сферичний шарнір, нерухома опора з циліндричним шарніром, рухома опора з циліндричним шарніром, жорстке защемлення.

11. У чому полягає «Принцип визволення від в'язів»? Наведіть приклад.
12. Дайте визначення системи сил, що сходиться у просторі і на площині. Що таке точка сходу системи сил?
13. Чому еквівалентна система сил, що сходяться? Покажіть це на прикладі трьох сил.
14. Проаналізуйте на прикладі теорему про три сили (приклад задається викладачем).
15. Дайте визначення проекції сили на вісь і площину. Визначте проекції сил, що паралельні, перпендикулярні й розташовані під кутом до горизонтальної осі Ox .
16. Як формулюють умови рівноваги системи сил, що сходяться, у геометричній і алгебраїчній формах?
17. Визначте момент сили відносно точки і проаналізуйте його властивості. Що таке плече сили?
18. Як направлений вектор – момент сили відносно певної точки?
19. Запишіть векторну формулу, яка визначає модуль і напрям вектора момента сили відносно певної точки.
20. Визначте момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості.
21. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
22. Яка залежність між моментом сили відносно точки і моментом тієї ж сили відносно осі, яка проходить через цю точку?
23. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
24. За якого напрямку сили її момент відносно певної осі є найбільшим?
25. Дайте визначення алгебраїчного моменту сили.
26. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, і точку її прикладання.
27. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих у різні боки, і точку її прикладання.
28. Знайдіть рівнодіючу системи рівномірно розподілених сил за довжиною для прямокутної епюри їхнього розподілу.
29. Знайдіть рівнодіючу системи розподілених за довжиною сил для трикутної епюри їхнього розподілу при $q(0) = 0$.
30. Дайте визначення центра паралельних сил. Запишіть формули для визначення координат центра паралельних сил у геометричній формі в просторі й в алгебраїчній формі – у площині xOy .
31. Дайте визначення центра ваги твердого тіла. Як знайти координати центра ваги тіла.
32. Як визначають координати ваги однорідної пластини.
33. Сформулюйте способи визначення координат центра ваги твердого тіла (площі, лінії), дайте їхню математичну інтерпретацію.
34. Якою формулою визначається положення центра ваги площини сектора кола?
35. Як визначається положення центра ваги складеного тіла.
36. Дайте визначення пари сил. Чому пара сил не має рівнодіючої?
37. Які властивості мають пари сил? Сформулюйте теорему про перенесення пари сил у паралельну площину.
38. Чи залежить момент пари сил від її розташування у площині?

39. Складіть дві пари сил, що лежать у пересічних площинах.
40. Які пари сил називають еквівалентними? Коли дві пари будуть еквівалентними?
41. Як формулюють умови рівноваги системи пар сил у геометричній і алгебраїчній формах?
42. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
43. Дайте визначення головного вектора системи сил.
44. Що називається головним моментом системи сил?
45. Чому дорівнюють головний момент і головний вектор відносно певної точки довільної системи сил.
46. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор системи сил і рівнодійна?
47. До яких двох силових факторів можна звести довільну систему сил у просторі?
48. Які можливі випадки зведення просторової системи сил?
49. Що називається динамою (силовим гвинтом)?
50. У чому суть необхідних і достатніх умов рівноваги твердого тіла?
51. Як змінюється головний вектор системи сил у разі перенесення центра зведення?
52. Яку властивість має головний момент системи сил у разі перенесення центра зведення?
53. Коли плоска довільна система сил приводиться тільки до пари сил?
54. Сформулюйте умови зведення плоскої довільної системи сил тільки до однієї сили (рівнодійної).
55. Як орієнтовані в просторі головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил? Наведіть їх механічну схему.
56. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, що за визначенням еквівалентна нулю?
57. Сформулюйте геометричні й алгебраїчні умови рівноваги твердого тіла.
58. Скільки рівнянь рівноваги в алгебраїчній формі для довільної просторової системи сил? Запишіть їх.
59. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої довільної системи сил.
60. Сформулюйте першу форму умов рівноваги для плоскої довільної системи сил.
61. Сформулюйте другу форму умов рівноваги плоскої довільної системи сил.
62. Сформулюйте третю форму умов рівноваги довільної системи сил у площині.
63. Дайте поняття ферми як технічної конструкції. Наведіть приклади статично визначених плоских ферм.
64. Сформулюйте принцип розрахунку плоскої ферми методом вирізання вузлів.
65. Як розраховують плоскі ферми методом Ріттера? Чим він відрізняється від методу вирізання вузлів?

9 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, що вивчає геометричні властивості руху тіл, які розглядаються як чисто геометричні об'єкти – точки і тіла – без урахування їх матеріальних характеристик (маси та ін.). При цьому не розглядаються причини (дій на тіло сили), що викликають і змінюють рух об'єкта.

Під рухом у механіці розуміється зміна з плином часу взаємного положення в просторі певного тіла відносно якого-небудь іншого тіла. Характер руху, що спостерігається, істотно залежить від вибору тіла, з яким пов'язаний спостерігач. З твердим тілом, відносно якого вивчається рух, жорстко з'єднують систему координат, що утворить разом із ним *систему відліку*. Простір у механіці, у якому відбувається рух тіл, розглядається як евклідовий. Час вважається «універсальним», тобто він вважається однаковим для всіх розглянутих систем відліку. У задачах кінематики час (скалярна величина, що безупинно змінюється) приймають за незалежну змінну. Відлік часу ведеться від деякого умовно початкового моменту, вибір якого в кожному випадку обумовлюється.

Для розв'язання задач кінематики треба, щоб досліджуваний рух був заданий (описаний математичним виразом).

Кінематично задати рух точки (тіла) – означає задати положення цієї точки (тіла) відносно певної системи відліку в будь-який момент часу. Якщо положення точки (тіла) визначається якими-небудь координатами (параметрами), то треба задати залежність певних координат від часу t . Ця залежність називається кінематичним рівнянням руху або законом руху.

Основним завданням кінематики є встановлення завдання руху точок (тіл) і методів визначення кінематичних величин, які характеризують цей рух.

9.1 Способи завдання руху точки

Для завдання руху точки в просторі можна застосовувати один з трьох способів: векторний, координатний та натуральний.

Векторний спосіб завдання руху точки

Положення точки M , що рухається відносно системи відліку $Oxyz$, можна визначити, задаючи її радіус-вектор \vec{r} , проведений з початку координат O в дану точку M (рис. 9.1). Під час руху точки M її радіус-вектор \vec{r} буде з плином часу змінюватися за модулем, і напрямом, тобто буде вектором-функцією:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (9.1)$$

Рівність (9.1) визначає положення точки M у просторі, а отже, закон її руху у векторній формі.

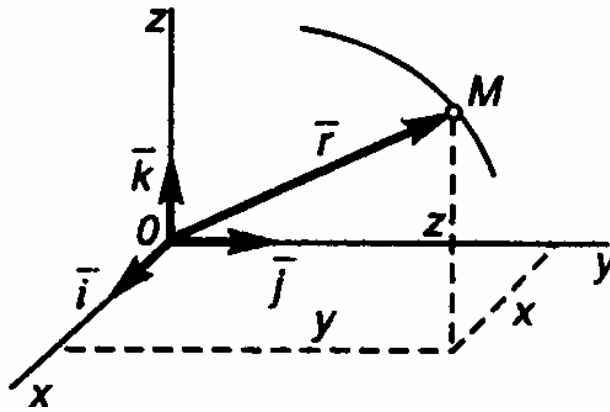


Рисунок. 9.1

Неперервна лінія, яку описує точка, що рухається, відносно певної системи відліку, називається *траєкторією точки*. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, рух точки називається прямолінійним, а якщо крива – криволінійним.

При векторному способі задання руху траєкторією точки є геометричне місце кінців її радіуса-вектора \vec{r} (годографа цього вектора).

Координатний спосіб завдання руху точки

Положення точки у просторі можна визначити також її декартовими координатами x, y, z , які під час руху точки будуть змінюватися з плином часу.

Отже, рівняння руху точки в будь-який момент часу має вигляд

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (9.2)$$

Функціональні залежності (9.2) є рівняннями руху (законом руху) точки в прямокутних декартових координатах. Зазначимо, що задати рух точки можна й іншими системами координат, наприклад, полярними, сферичними тощо.

Рівняння руху (9.2) можна розглядати як рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де параметром є час t . Вилучивши з рівнянь руху час t , можна визначити рівняння траєкторії в звичайній координатній формі, тобто у вигляді залежності між координатами x, y, z точки.

Перехід від координатного способу завдання руху точки до векторного, і навпаки, може бути здійснений у такий спосіб.

Задаючи одиничні вектори (орти) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатних осей і позначаючи проекції радіуса-вектора \vec{r} на ці осі $r_x = x, r_y = y, r_z = z$ (рис. 9.1), одержимо для вектора \vec{r} вираз

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (9.3)$$

Приклад. Нехай рух точки в площині Oxy задано рівняннями

$$x = 2t, \quad y = 1,5t^2. \quad (9.4)$$

За цих рівнянь можна визначити, що в момент часу $t_0 = 0$ точка знаходиться в положенні $M_0 (0, 0)$, а в момент часу $t_1 = 1$ с – у положенні $M_1 (2; 1,5)$ і т.д. Даючи часу t різні значення і зображуючи відповідні положення точок, можемо побудувати її траєкторію (рис. 9.2).

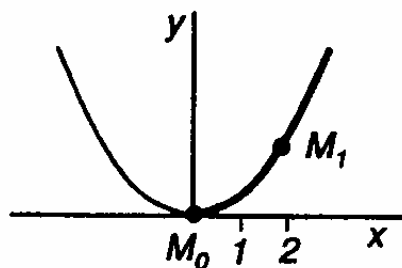


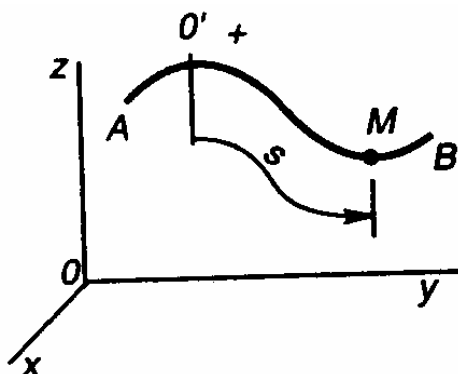
Рисунок 9.2

Іншим шляхом траєкторію можна знайти, вилучивши t з рівнянь (9.4). З першого рівняння знаходимо $t = x/2$ і, підставляючи це значення t у друге рівняння, одержуємо $y = (3/8)x^2$. Отже, точка рухається по дузі параболи, вершина якої розташована на початку координат. Траєкторією руху буде тільки права вітка параболи (оскільки при $t \geq 0$ буде $x \geq 0$).

Натуральний спосіб завдання руху точки

Цей спосіб завдання руху може бути застосований, якщо заздалегідь відома траєкторія руху точки (наприклад, заздалегідь відома траєкторія, залізничного вагона, що рухається по рейках, і т.д.). Нехай крива AB є траєкторією точки M щодо системи відліку $Oxyz$ (рис. 9.3). Зазначимо на траєкторії нерухому точку O' , яку прийемо за початок відліку дугової координати s , і домовимося про напрямки додатного і від'ємного відліку координати s .

Отже, на рисунку 9.3 координата s для точок, що знаходяться на траєкторії праворуч початку відліку O' , буде вважатися додатною, ліворуч O' – від'ємною.



Рисунку 9.3

Тоді, щоб визначити положення точки в будь-який момент часу, треба знати залежність дугової координати від часу:

$$s = f(t). \tag{9.4}$$

Рівняння (9.4) описує закон руху точки M уздовж траєкторії. Зазначимо, що величина s у рівнянні (9.4) визначає положення точки на лінії її руху, через відстань від точки O до точки M , вимірювану уздовж дуги траєкторії і взяту з відповідним знаком, а не пройдений точкою, що рухається, шлях.

9.2 Визначення швидкості та прискорення точки

Основними кінематичними характеристиками руху точки є векторні величини – швидкість і прискорення точки.

Визначення швидкості та прискорення точки при векторному способі завдання руху точки. Нехай точка, що рухається, знаходиться в момент часу t у положенні M , обумовленому радіусом-вектором \vec{r} , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – у положенні M_1 , обумовленому радіусом-вектором \vec{r}_1 (рис. 9.4, а). Переміщення точки за проміжок часу Δt визначається вектором переміщення точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$. Відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу Δt дає векторну величину, що називається середньою за модулем і напрямом швидкістю точки за проміжок часу Δt :

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (9.5)$$

Вектор \vec{V}_{cp} , відповідно до виразу (9.5), спрямований так само, як і вектор $\Delta\vec{r}$, тобто уздовж хорди MM_1 у бік руху точки.

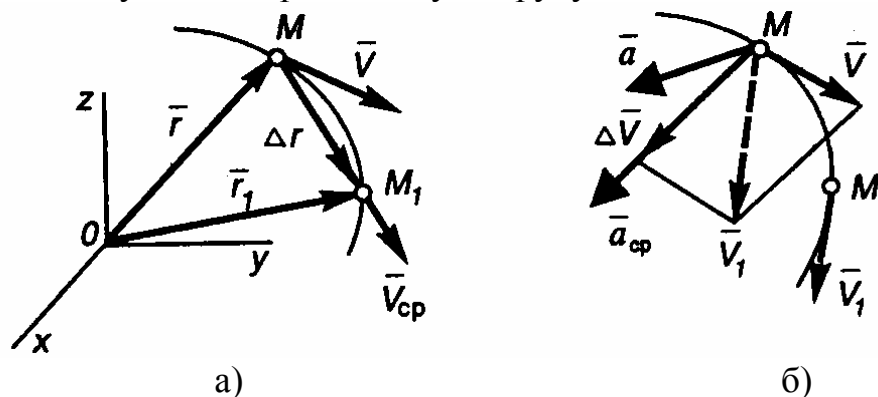


Рисунок 9.4

Швидкістю точки в цей момент часу t називається векторна величина \vec{V} , до якої прямує середня швидкість \vec{V}_{cp} , якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{V}_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) \text{ або } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (9.6)$$

Отже, вектор швидкості точки в певний цей момент часу дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки за часом.

Оскільки граничним напрямом січної MM_1 є дотична (по ній спрямований також вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$), то вектор швидкості в певний момент часу теж спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік її руху (рис. 9.4, а).

При криволінійному русі точки здебільшого змінюється і напрям вектора швидкості та його модуль (числове значення). Під час прямолінійного руху точки вектор швидкості увесь час спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка, і, отже, може змінюватися лише величина швидкості. Розмірність швидкості – м/с, км/ч.

Зміну вектора швидкості \vec{V} з плином часу характеризує векторна величина \vec{a} , яка має назву *прискорення \vec{a} точки*.

Нехай у деякий момент часу t точка, що рухається, знаходиться в положенні M і має швидкість \vec{V} , а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ переміщується у положення M_1 і має швидкість \vec{V}_1 (рис. 9.4, б). Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ швидкість точки отримала зміну $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Зазначимо, що вектор $\Delta\vec{V}$ завжди спрямований у бік угнутості розглянутої траєкторії точки. Вектор середнього прискорення точки за проміжок часу Δt :

$$\vec{a}_{cp} = \Delta\vec{V} / \Delta t. \quad (9.7)$$

Він має той самий напрям, що й вектор $\Delta\vec{V}$, тобто спрямований у бік угнутості ділянки траєкторії.

Прискоренням точки в певний момент часу t є векторна величина \vec{a} , до якої прямує середнє прискорення \vec{a}_{cp} , якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \right) = d\vec{V} / dt \quad (9.8)$$

або з урахуванням рівняння (1.6)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (9.9)$$

Отже, вектор прискорення точки в цей момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом. Розмірність прискорення – м/с².

З формули (9.9) маємо, що вектор прискорення \vec{a} буде спрямований за напрямом елементарного приросту вектора швидкості $d\vec{V}$. Виходячи з цього, встановимо розташування вектора \vec{a} відносно траєкторії точки. Під час прямолінійного руху вектор \vec{a} спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка. Під час криволінійного руху вектор \vec{a} спрямований у бік угнутості траєкторії (рис. 9.4, б) і розташовується в дотичній площині. Для різних точок просторової кривої положення дотичної площини буде своє. Якщо траєкторією точки є плоска крива, то дотична площина збігається з площиною цієї кривої.

Визначення швидкості та прискорення точки – координатним способом завдання руху точки. Загальні формули (9.6) і (9.9), котрі визначають величини \bar{V} і \bar{a} , містять похідні від вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Диференціюючи за часом цей вираз, одержимо

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \quad (9.10)$$

або

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}. \quad (9.11)$$

Звідси маємо, що проекція швидкості точки на координатні осі дорівнює першим похідним від координат точки за часом:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad (9.12)$$

де точка над буквою є символом диференціювання за часом.

Модуль швидкості та її напрям у просторі (позначивши кути, що утворить вектор \bar{V} з осями x, y, z відповідно α, β, γ) знайдемо за формулами:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \\ \cos\alpha = V_x/V, \quad \cos\beta = V_y/V, \quad \cos\gamma = V_z/V. \quad (9.13)$$

Вектор прискорення \bar{a} відповідно знайдемо диференціюванням за часом виразу (9.10) або (9.11). Одержимо

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$$

або

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\bar{i} + \frac{dV_y}{dt}\bar{j} + \frac{dV_z}{dt}\bar{k},$$

або

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \quad (9.14)$$

Звідси випливає, що проекції вектора прискорення точки на осі координат дорівнюють першим похідним від відповідних проекцій вектора швидкості або другим похідним від відповідних координат точки за часом:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}. \quad (9.15)$$

Модуль і напрям прискорення будуть

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \\ \cos\alpha_1 = a_x/a; \quad \cos\beta_1 = a_y/a; \quad \cos\gamma_1 = a_z/a, \quad (9.16)$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути між вектором \bar{a} і координатними осями x, y, z .

Визначення швидкості й прискорення точки – натуральним способом задання руху точки. Під час натурального способу задання руху задається траєкторія точки і закон її руху уздовж траєкторії у вигляді $s = f(t)$. У цьому випадку значення векторів \bar{V} і \bar{a} визначають за їх

проекціями не на осі нерухомої системи відліку $Oxyz$, а на осі рухомої прямокутної системи координат $M\tau nb$, що має початок у точці M і рухається разом із нею по траєкторії (рис. 9.5). Ці осі є осями натурального тригранника, спрямовані в такий спосіб: вісь $M\tau$ (дотична) – по дотичній до траєкторії у бік додатного відліку відстані s ; вісь Mn (головна нормаль) – по нормалі до траєкторії, що лежить у дотичній площині, у бік угнутості траєкторії; вісь Mb (бінормаль) – перпендикулярна до перших двох осей, утворюючи з ними праву систему осей. Тут $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – відповідно орти (одиничні вектори) осей системи координат $M\tau nb$.

Вектор швидкості за натурального способу завдання руху точки буде

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad (9.17)$$

де ds – елементарне переміщення точки по дузі траєкторії.

Введемо одиничний вектор $\bar{\tau} = d\bar{r}/ds$, спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік додатного відліку відстані s .

Тоді

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} \quad \text{або} \quad \bar{V} = V_{\tau} \cdot \bar{\tau}, \quad (9.18)$$

де

$$V_{\tau} = ds/dt = \dot{s}, \quad (9.19)$$

тобто V_{τ} – числове (алгебраїчне) значення швидкості в цей момент часу, яке дорівнює першій похідній від відстані (криволінійної координати) s цієї точки за часом.

Величина V_{τ} , будучи проекцією вектора \bar{V} на дотичну, матиме знак плюс або мінус: якщо $V_{\tau} > 0$, то швидкість спрямована у бік додатного відліку відстані s ; якщо $V_{\tau} < 0$ – у протилежний бік. Отже, знак V_{τ} визначає напрям вектора \bar{V} відносно осі τ . На рис. 9.5 вектор \bar{V} зображений для випадку, коли $V_{\tau} > 0$, тобто напрями вектора \bar{V} й осі τ збігаються. З (9.18) маємо, що модуль швидкості \bar{V} буде $V = |\bar{V}| = |V_{\tau}|$.

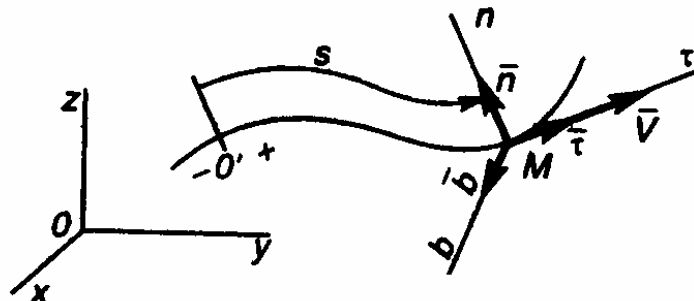


Рисунок 9.5

Визначимо прискорення точки за формулою (9.9), продиференціюючи за часом вираз (9.18):

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(V_\tau \cdot \bar{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt} \bar{\tau} + V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (9.20)$$

Знайдемо

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту вектора $\bar{\tau}$;

ρ – радіус кривини траєкторії в розглянутій точці.

Підставивши цей вираз в (9.20), маємо

$$\bar{a} = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \quad (9.21)$$

Отже, прискорення точки дорівнює геометричній сумі двох векторів, один із яких \bar{a}_τ спрямований по дотичній (дотичне прискорення), а другий – вектор \bar{a}_n спрямований по головній нормалі (нормальне прискорення):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (9.22)$$

Площина, що проходить через дотичну і головну нормаль, є дотичною до розташованого в ній вектора прискорення точки.

Проекції вектора \bar{a} на осі натурального тригранника визначають за формулами:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}; \quad a_b = 0. \quad (9.23)$$

Оскільки складові \bar{a}_τ і \bar{a}_n взаємно перпендикулярні, для модуля вектора \bar{a} одержимо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (9.24)$$

На підставі формул (9.23) маємо: величина a_τ (проекція вектора \bar{a} на напрям τ) може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю; величина a_n по криволінійній траєкторії завжди додатна. Цим визначається, що складова \bar{a}_n буде завжди спрямована у бік угнутості кривої; величина a_b (проекція прискорення на бінормаль) дорівнює нулю.

Кут μ відхилення вектора \bar{a} від нормалі Mn визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg} \mu = a_\tau / a_n, \quad (9.25)$$

його значення може бути в інтервалі $-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$.

Якщо $a_\tau < 0$, то $\mu < 0$ і вектор \bar{a} відхилений від нормалі M у бік, протилежну додатному напрямку осі $M\tau$ (рис. 9.6, а); за $a_\tau > 0$ кут $\mu > 0$ і вектор \bar{a} відхиляється від нормалі за напрямом осі $M\tau$ (рис. 9.6, в); якщо $a_\tau = 0$, то $\mu = 0$ і вектор \bar{a} спрямований по нормалі Mn (рис. 9.6, б).

У збільшеного під час руху точки може змінюватися і модуль, і напрям вектора швидкості. Аналіз формул (9.23) приводить до висновку:

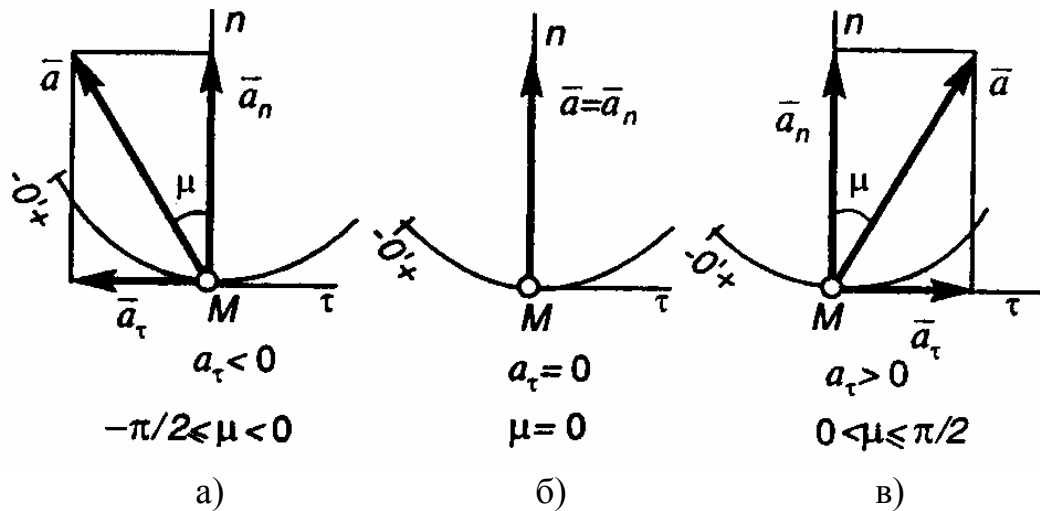


Рисунок 9.6

дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною, нормальне прискорення – зміну напрямку вектора швидкості.

Окремі випадки руху точки

Рівномірний рух. Рівномірним називається рух точки по траєкторії, за якого числове значення швидкості увесь час залишається постійним; отже, $V_\tau = const$. Тоді

$$a_\tau = dV_\tau / dt = 0.$$

Якщо рівномірний рух криволінійний, то прискорення точки буде представлено лише нормальною складовою $\bar{a} = \bar{a}_n$ і $a = a_n = V^2/\rho$. У цьому випадку прискорення обумовлене тільки зміною вектора швидкості точки за напрямком.

Якщо рівномірний рух точки відбувається по прямолінійній траєкторії, то $\rho = \infty$ й $a_n = V^2/\rho = 0$. У цьому випадку $a_n = a_\tau = 0$, а, отже, $a = 0$. Визначимо, що рівномірний прямолінійний рух є єдиним рухом, у якому прискорення точки увесь час дорівнює нулю.

Знайдемо закон рівномірного руху. З формули (9.19) маємо $ds = V_\tau \cdot dt$. Якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ точка має координату s_0 , то, беручи від лівої і правої частин рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $V_\tau = const$), отримаємо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t V_\tau \cdot dt \quad \text{або} \quad s - s_0 = V_\tau t.$$

Остаточно знаходимо закон рівномірного руху точки у вигляді

$$s = s_0 + V_\tau t. \quad (9.26)$$

Рівнозмінний рух. Рівнозмінним називається рух точки по траєкторії, за якого дотичне прискорення залишається увесь час постійним: $a_\tau = const$.

Знайдемо закон цього руху, вважаючи, що за $t_0 = 0$ виконується $s = s_0$ і $V_\tau = V_0$. Відповідно до першої з формул (9.23) $dV_\tau = a_\tau dt$. Беручи від обох

частин цього рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $a_\tau = const$), отримуємо закон зміни швидкості точки під час рівнозмінного руху:

$$V_\tau = V_0 + a_\tau t. \quad (9.27)$$

Формулу (9.27) подамо у вигляді

$$ds/dt = V_0 + a_\tau t \text{ або } ds = V_0 \cdot dt + a_\tau \cdot dt.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, знайдемо закон рівнозмінного руху точки:

$$s = a_\tau t^2 / 2 + V_0 t + s_0. \quad (9.28)$$

Величина швидкості під час рівнозмінного руху змінюється за законом (9.27). Якщо модуль швидкості зростає, то рух називається *прискореним*, а якщо зменшується – *уповільненим*. При прискореному русі величини V_τ і a_τ мають однакові знаки (кут між векторами \vec{V} і \vec{a} – гострий, рис. 9.7, а), за уповільненого руху величини V_τ і a_τ мають різні знаки (кут між векторами \vec{V} і \vec{a} тупий, рис. 9.7, б).

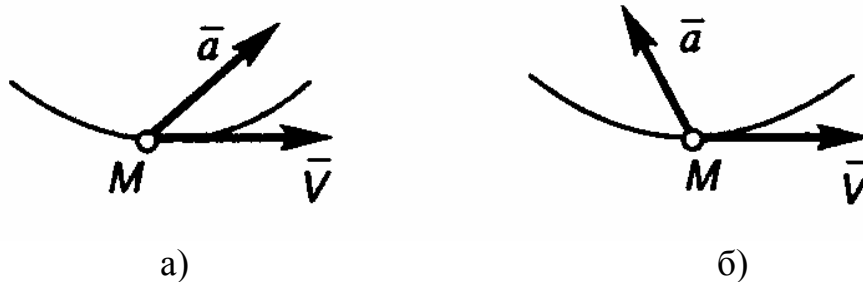


Рисунок 9.7

У випадку рівнозмінного прямолінійного руху точки $a_n = 0$ і у виразах (9.27), (9.28) слід приймати $a_\tau = a = const$.

9.3 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Закон руху точки M в площині Oxy заданий рівняннями $x = 4\sin(\pi t/6) - 1$, $y = 3\cos(\pi t/6) + 2$, де x , y – у сантиметрах, t – у секундах.

Визначити рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 2$ с знайти швидкість і прискорення точки, її дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії у відповідній її точці. Траєкторію і знайдені векторні величини відобразити на схемі.

Розв'язання. Рівняння траєкторії точки будемо шукати у вигляді залежності між координатами точки (у координатній формі). Для вилучення з рівнянь руху часу t , що входить в аргументи тригонометричних функцій, використовуємо формулу

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \text{ або, вважаючи } \alpha = \pi/6, \\ \sin^2(\pi/6) + \cos^2(\pi/6) &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вираз відповідних функцій і підставляємо в рівняння (1). Отримаємо

$$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+1}{4}, \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y-2}{3},$$

звідки

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1. \quad (2)$$

Отже, траєкторією точки є еліпс, центр C якого має координати $(-1, 2)$, а розміри півосей, паралельних осям x і y , відповідно 4 і 3 см (рис. 9.8, а).

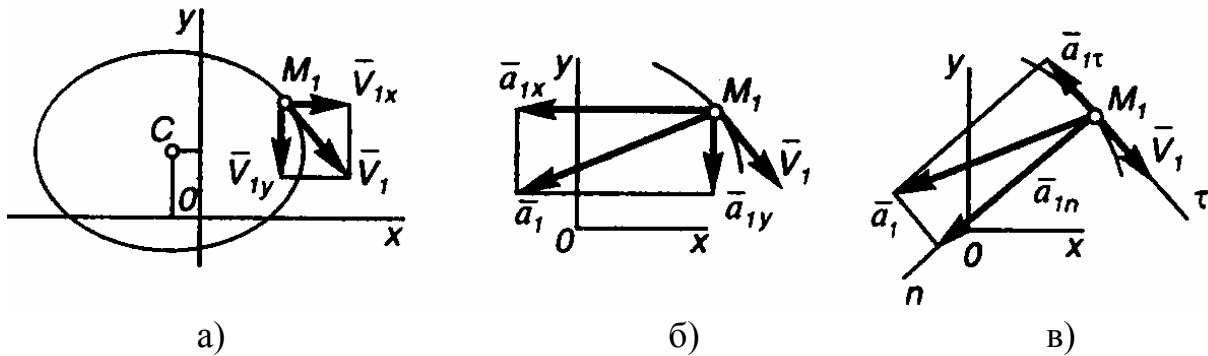


Рисунок 9.8

Швидкість точки знайдемо за її проекціями на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = \frac{2}{3}\pi \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad V_y = \dot{y} = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

Підставивши ці вирази у формулу

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad (3)$$

після спрощень отримуємо величину швидкості точки:

$$V = \frac{\pi}{6} \sqrt{9 + 7 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)}. \quad (4)$$

За $t_1 = 2$ с буде $V_{1x} = 1,05$ см/с, $V_{1y} = -1,36$ см/с і $V_1 = 1,72$ см/с.

Використовуючи отримані результати, побудуємо на схемі вектор \bar{V}_1 , попередньо визначивши координати точки M_1 : $x_1 = 2,46$ см, $y_1 = 3,5$ см (рис. 9.8, а).

Знайдемо далі прискорення точки:

$$a_x = \dot{V}_x = -\frac{\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad a_y = \dot{V}_y = -\frac{\pi^2}{12} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

За $t_1 = 2$ с буде $a_{1x} = -0,95$ см/с², $a_{1y} = -0,41$ см/с² і $a_1 = 1,02$ см/с².

За цими результатами будемо вектор \bar{a}_1 (рис. 9.8, б).

Визначимо тепер дотичне і нормальне прискорення точки, тобто проекції вектора \bar{a} на осі τ і n .

Дотичне прискорення знайдемо, продиференціюючи за часом рівняння (3):

$$\dot{V} = (2V_x \dot{V}_x + 2V_y \dot{V}_y) / 2V.$$

Тоді, враховуючи, що $\dot{V} = a_\tau$, $\dot{V}_x = a_x$, $\dot{V}_y = a_y$, маємо

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення величин для $t_1 = 2$ с, отримуємо $a_{1\tau} = -0,26$ см/с².

Нормальне прискорення точки за відомих значень величин a і a_τ обчислимо за формулою $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

Підставивши значення a_1 , $a_{1\tau}$, маємо $a_{1n} = 0,98$ см/с².

Зобразимо на рис. 9.8, в координатні складові $\bar{a}_{1\tau}$ і \bar{a}_{1n} , які знайдемо шляхом розкладання вектора \bar{a}_1 на напрями дотичної τ і головної нормалі n . Напрямок осі τ встановлюємо відповідно до знаку проекції $a_{1\tau}$ (оскільки $a_{1\tau} < 0$, то вісь $M_1\tau$ протилежна вектору $\bar{a}_{1\tau}$), вісь M_1n спрямована до неї перпендикулярно у бік угнутості траєкторії.

Радіус кривини траєкторії визначимо за формулою $\rho = V^2 / a_n$. Підставляючи числові значення V_1 і a_{1n} , знайдемо, $\rho_1 = 3,0$ см.

Відповідь: $V_1 = 11,72$ см/с; $a_1 = 11,02$ см/с²; $a_{1\tau} = -0,26$ см/с²; $a_{1n} = 0,98$ см/с²; $\rho_1 = 3,0$ см.

Задача 2. Матеріальна точка рухається у площині Oxy . Початкова швидкість \bar{V}_0 утворює з горизонталлю кут α . Рух точки задано рівняннями:

$$x = V_0 t \cos \alpha; \quad y = V_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2,$$

де g – постійна величина.

Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, а також висоту траєкторії і час підйому з початкового положення (точки O) до найвищої точки траєкторії.

Розв'язання. Для визначення траєкторії потрібно знайти залежність між координатами x і y точки, що рухається. Визначивши з першого рівняння $t = x / V_0 \cdot \cos \alpha$ і підставивши в друге, маємо рівняння траєкторії

$$y = xt g \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Траєкторія точки – парабола (рис. 9.9).

Диференціюючи рівняння руху за часом, знайдемо:

$$V_x = \dot{x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = \dot{y} = V_0 \sin \alpha - gt, \quad (2)$$

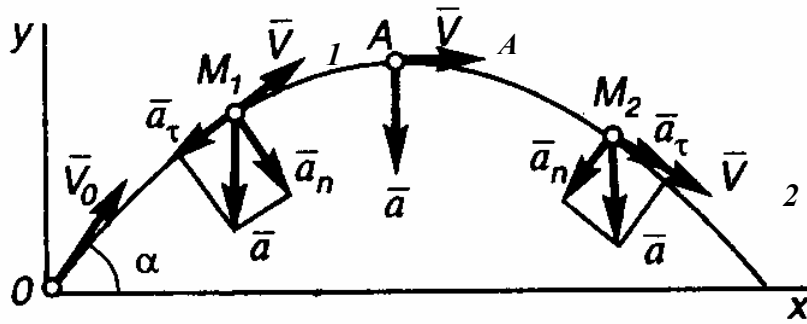


Рисунок 9.9

звідки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}. \quad (3)$$

Визначаємо прискорення точки. Для проєкцій прискорення \vec{a} на осі координат маємо:

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = -g. \quad (4)$$

Таким чином, точка рухається з постійним за модулем і напрямом прискоренням, паралельним вертикальній осі Oy (g – це прискорення вільного падіння). Звертаємо увагу на те, що оскільки $a = const$, рух точки не є рівнозмінним, оскільки умовою рівнозмінності руху є не $a = const$, а $a_\tau = const$. У розглянутому русі, як далі буде визначено, значення a_τ не постійно.

Знаходимо a_τ , диференціюючи вираз (3):

$$a_\tau = \dot{V} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{V}.$$

Тепер визначимо висоту траєкторії руху, тобто координату y_A найвищої точки (рис. 1.9). Оскільки $V_{Ay} = 0$ (вектор швидкості \vec{V}_A є перпендикулярним осі y), то підставивши це значення в друге рівняння (2), знайдемо час руху з точки O в точку A (час підйому): $t_A = V_0 \sin \alpha / g$. Підставивши значення $t = t_A$ в друге із заданих рівнянь руху, після спрощень отримуємо висоту траєкторії:

$$y_A = (V_0^2 / 2g) \sin^2 \alpha.$$

Оскільки розглянутий рух відбувається з постійним прискоренням $\vec{a} = const$, але воно є змінним, то на гілці підйому (від точки O до точки A) рух буде уповільненим (у точці M_1 вектори \vec{a}_τ і \vec{V}_1 спрямовані протилежно), а на гілці спуску – прискореним (у точці M_2 вектори \vec{a}_τ і \vec{V}_2 спрямовані в один бік).

10 ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

У вивченні кінематики твердого тіла можна визначити два завдання:

- 1) задання руху і визначення кінематичних характеристик руху тіла в цілому;
- 2) визначення кінематичних характеристик руху окремих точок тіла.

10.1 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, за якого будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається під час руху паралельною своєму початковому напрямку, тобто не повертається.

Точки тіла, що рухається поступально, можуть мати траєкторії будь-якого виду: прямолінійні або криволінійні.

Властивості поступального руху тіла визначаються теоремою: *під час поступального руху твердого тіла всі його точки описують геометрично однакові (у разі накладення співпадаючі) траєкторії і мають у кожний момент часу однакові за модулем і напрямом швидкості й прискорення.*

Для доказу розглянемо тіло, що робить поступальний рух (рис. 10.1). Для радіусів-векторів двох довільних точок A і B тіла справедлива рівність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (10.1)$$

Слід мати на увазі, що довжина вектора \overline{AB} постійна, як відстань між точками абсолютно твердого тіла, а його напрям залишається незмінним під час поступального руху тіла, отже, $\overline{AB} = const$.

Тоді з рівняння (10.1) отримуємо, що годограф радіуса-вектора точки A , що є траєкторією цієї точки, зміщений відносно годографа радіуса-вектора точки B (траєкторії точки B) на постійний вектор \overline{AB} і ці траєкторії у разі накладення збігаються.

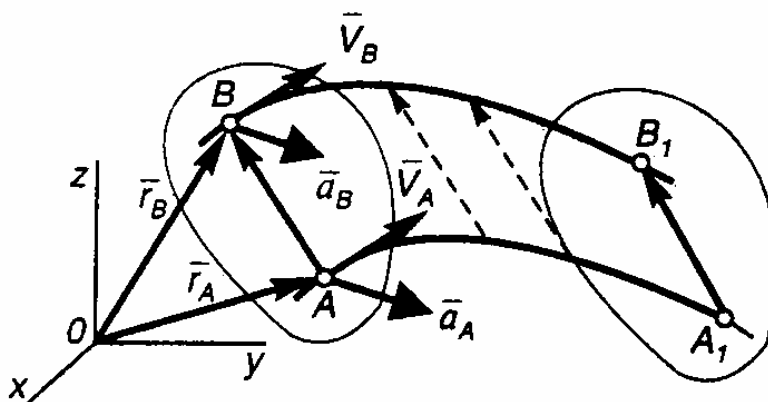


Рисунок 10.1

Продиференціювавши обидві частини рівняння (10.1), урахувавши при цьому, що $d(\overline{AB})/dt = 0$, маємо

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A \text{ і } \overline{a}_B = \overline{a}_A. \quad (10.2)$$

Отже, теорема доведена.

З теореми випливає, що поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї з його точок. Отже, вивчення кінематики поступального руху зводиться до задачі кінематики точки, нами вже розглянутої.

З огляду на вищенаведені властивості поступального руху, однакову для всіх точок тіла швидкість \overline{V} називають швидкістю поступального руху тіла, а прискорення точок \overline{a} – прискоренням поступального руху тіла.

Зазначимо, що поняття «швидкість тіла» і «прискорення тіла» мають сенс тільки у разі поступального руху тіла, оскільки тільки в цьому випадку ці характеристики однакові для всіх точок тіла.

10.2 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, за якого всі точки, що лежать на деякій прямій, незмінно зв'язаній з тілом, залишаються під час руху нерухомими (рис. 10.2). Ця пряма називається віссю обертання. Траєкторіями всіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

Відзначимо також, що всі прямі тіла, паралельні осі обертання (наприклад, пряма mm' на рис. 10.2), рухаються поступально, залишаючись паралельними цієї осі.

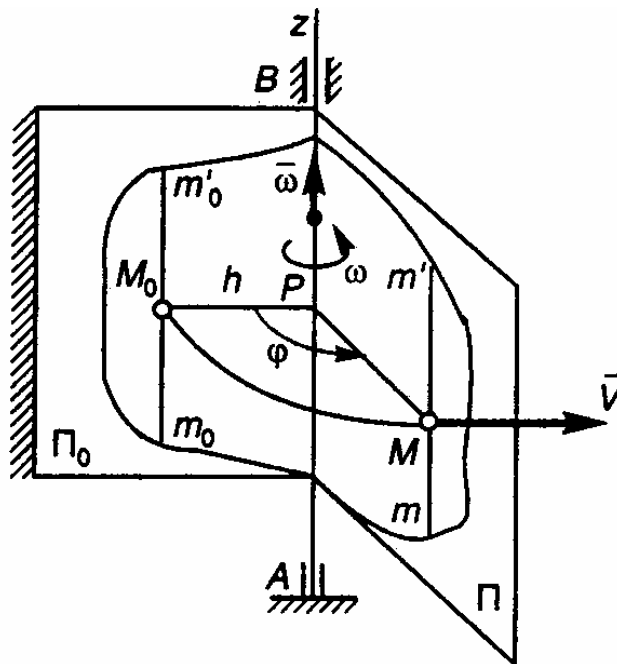


Рисунок 10.2

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла

Проведемо через вісь обертання Az тіла (рис. 10.2) дві півплощини: півплощину Π , незмінно зв'язану з тілом і обертову разом із ним, та нерухому в просторі півплощину Π_0 . Тоді положення тіла в будь-який момент часу визначається узятим з відповідним знаком кутом φ між цими півплощинами, що називається *кутом повороту тіла*. Кут вважається додатним, якщо він відлічений від нерухомої півплощини в напрямку проти ходу годинникової стрілки (для спостерігача, який дивиться з позитивного кінця осі Az), і від'ємним, якщо він відлічений за ходом годинникової стрілки. Вимірюється кут φ у радіанах: $[\varphi] = \text{рад}$.

Для того знати положення тіла в будь-який момент часу, треба знати залежність кута φ від часу t , тобто

$$\varphi = f(t). \quad (10.3)$$

Рівняння (10.3) виражає закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є його кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість характеризує зміну з часом кута повороту тіла, а її числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кута повороту за часом:

$$\omega = d\varphi / dt \text{ або } \omega = \dot{\varphi}. \quad (10.4)$$

Знак ω визначає напрям обертання: якщо $\omega > 0$, то обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки, якщо $\omega < 0$, то тіло обертається за ходом годинникової стрілки. Ця обставина відбивається і зображенням величини ω за допомогою дугової стрілки (рис. 10.2). Розмірність кутової швидкості – рад/с.

У техніці кутову швидкість часто визначають кількістю обертів за хвилину, зазначаючи цю величину через n об/хв. Оскільки за один оберт тіло повертається на кут 2π рад, а $1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$, то

$$\omega = 2\pi n / 60 = \pi n / 30.$$

Усі параметри кутової швидкості тіла можна відобразити у вигляді вектора $\vec{\omega}$, модуль якого дорівнює $|\dot{\varphi}|$ і який спрямований уздовж осі обертання у той бік, звідки видно, що обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.2; 2.3).

Кутове прискорення характеризує зміну з часом кутової швидкості тіла, а його числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла за часом:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (10.5)$$

Розмірність кутового прискорення – 1 рад/с^2 .

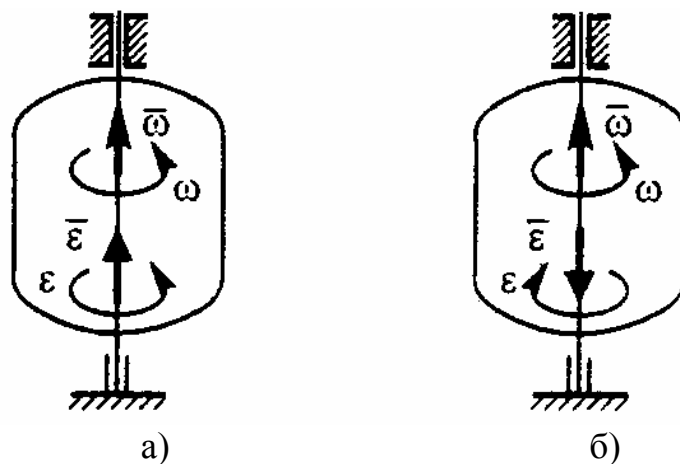


Рисунок 10.3

У разі збіжності знаків ε і ω їх дугові стрілки спрямовані однаково (рис. 10.3, а), у разі різних знаків – дугові стрілки будуть спрямовані взаємно протилежно (рис. 10.3, б). Кутове прискорення тіла можна зобразити у вигляді вектора $\vec{\varepsilon}$, спрямованого уздовж осі обертання. При цьому

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt. \quad (10.6)$$

Коли тіло обертається прискорено, то величини ω і ε мають однакові знаки і напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямом вектора $\vec{\omega}$ (рис. 10.3, а). Коли тіло обертається уповільнено, то величини ω і ε мають різні знаки і вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ спрямовані уздовж осі обертання в протилежні боки (рис. 10.3, б).

Якщо кутова швидкість тіла залишається за весь час руху постійною ($\omega = const$), то обертання тіла називається *рівномірним*.

Інтегруючи рівність $d\varphi = \omega \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$), одержимо *закон рівномірного обертання*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (10.7)$$

Якщо кутове прискорення тіла за весь час руху залишається постійним ($\varepsilon = const$), то обертання називається *рівнозмінним*.

Інтегруючи рівність $d\omega = \varepsilon \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$), одержимо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (10.8)$$

Представляючи цей вираз як $d\varphi/dt = \omega_0 + \varepsilon t$ або у вигляді $d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt$ і вдруге інтегруючи, знайдемо *закон рівнозмінного обертання*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \quad (10.9)$$

Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Як було зазначено раніше, прямі, проведені в тілі паралельно осі обертання (наприклад, пряма mm' на рис. 10.2), здійснюють поступальний

рух, тобто швидкості та прискорення усіх точок кожної такої прямої будуть однакові. Отже, для вивчення кінематичних характеристик точок тіла досить визначити відповідні величини для точок перетину, проведеного перпендикулярно осі обертання.

Траєкторіями усіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

Розглянемо яку-небудь точку M тіла, що знаходиться на відстані h від осі обертання (рис. 10.2). Якщо за час dt відбувається елементарне обертання тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому здійснює по своїй траєкторії елементарне переміщення $ds = h \cdot d\varphi$. Тоді числове (алгебраїчне) значення швидкості точки відповідно до формули (1.19) буде

$$V_{\tau} = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \text{ або } V = h\omega. \quad (10.10)$$

Таким чином, алгебраїчне значення величини швидкості точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання. Вектор швидкості \vec{V} спрямований по дотичній до описуваного точкою кола (або перпендикулярно площині Π , що проходить через вісь обертання і точку M , або перпендикулярно прямої MP , що з'єднує точку M з віссю обертання) по напрямку руху, що збігається з напрямком дугової стрілки кутової швидкості (рис. 10.2).

Вектори швидкостей усіх точок перерізу, перпендикулярного осі обертання, будуть розташовуватися в його площині, утворюючи поле швидкостей, вид якого зображений на рис. 10.4.

Відзначимо, що:

1) вектори швидкостей точок перпендикулярні прямим, що з'єднують точки з віссю обертання, і спрямовані у бік обертання тіла (дугової стрілки ω);

2) модулі швидкостей точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання.

Швидкість \vec{V} точки тіла, що обертається, іноді називають лінійною або коловою на відміну від кутової швидкості тіла.

Для знаходження прискорення точки M скористаємося формулами $a_{\tau} = dV_{\tau} / dt$, $a_n = V^2 / \rho$. Підставляючи до них значення V з рівності (10.10) і з урахуванням того, що в нашому випадку $\rho = h$, одержимо: $a_{\tau} = h\dot{\omega}$, $a_n = h^2\omega^2 / h$ або остаточно:

$$a_{\tau} = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \quad (10.11)$$

Дотична складова прискорення \vec{a}_{τ} спрямована по дотичній до траєкторії точки у бік дугової стрілки кутового прискорення ε , нормальна складова \vec{a}_n спрямована по радіусу MP до осі обертання (рис. 10.5).

Повне прискорення точки M буде

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \text{ або } a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (10.12)$$

Відхилення вектора \bar{a} від радіуса описуваного точкою кола (від нормалі до траєкторії) визначається кутом μ , що обчислюється за формулою (9.25) $\operatorname{tg}\mu = a_\tau / a_n$ і, використавши рівняння (10.11), одержимо

$$\operatorname{tg}\mu = \varepsilon / \omega^2. \quad (10.13)$$

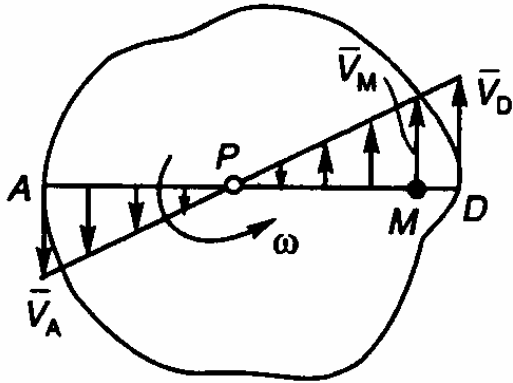


Рисунок 10.4

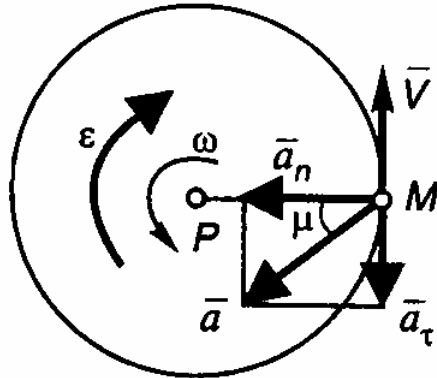


Рисунок 10.5

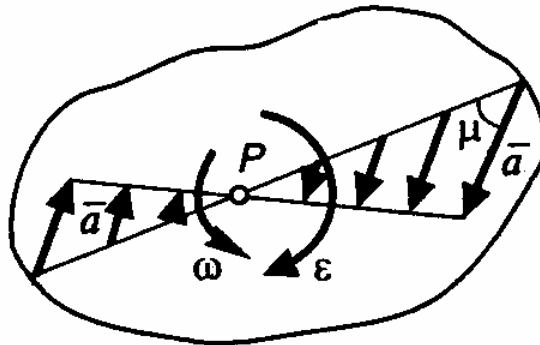


Рисунок 10.6

Зазначимо, що під час обчислення кінематичних характеристик різних точок тіла, що обертається, у формули (10.12), (10.13) для конкретного моменту часу будуть підставлятися ті самі значення величин ω і ε , оскільки вони є характеристиками руху всього тіла. Звідси випливає, що в певний момент часу кут μ для векторів прискорень усіх точок однаковий, а модулі прискорень точок пропорційні їх відстаням від осі обертання.

Поле прискорень точок тіла показано на рисунку 10.6.

Наведемо також векторні вирази швидкості та прискорення точки тіла, що обертається.

Нехай тіло здійснює обертальний рух і в цей момент часу відомі характеристики його руху $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ (рис. 10.7). З довільної точки O осі

обертання проведемо радіус-вектор \vec{r} точки M (причому $\angle MPO = 90^\circ$ і $MP = h = r \sin \alpha$).

З побудови на рисунку 10,7, а випливає, що вектор швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки (формула Ейлера):

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (10.14)$$

Модуль цього вектора $|\vec{V}| = |\omega| r \sin \alpha = |\omega| h$ збігається з раніше отриманим за формулою (10.10).

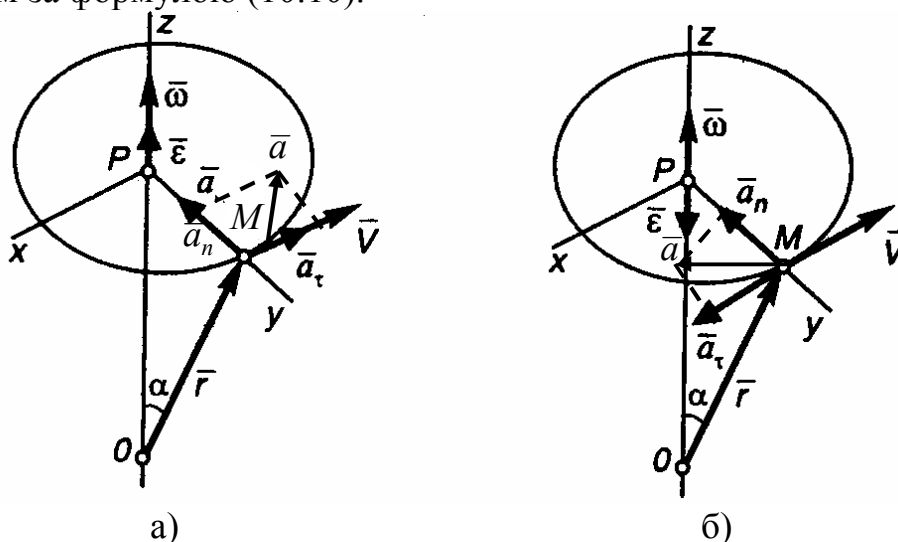


Рисунок 10.7

Вектор прискорення точки M визначимо як похідну вектора швидкості за часом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

або

$$\vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (10.15)$$

Формулу (10.15) називають формулою Рівальса, з якої випливає, що вектор прискорення точки \vec{a} дорівнює векторній сумі двох векторів. Перший доданок $\vec{\epsilon} \times \vec{r}$ називають *обертальною* складовою прискорення. Під час обертання тіла навколо нерухомої осі вектор $\vec{\epsilon} \times \vec{r}$ спрямований по дотичній до траєкторії точки M , тому його позначимо \vec{a}_t , а його модуль буде $|\vec{\epsilon} \times \vec{r}| = \epsilon r \sin \alpha = \epsilon h$. Другий доданок у формулі (10.15) називають *доосьовою* складовою прискорення. Під час обертання тіла навколо нерухомої осі вектор добутку $\vec{\omega} \times \vec{V}$ спрямований уздовж MP , тобто по головній нормалі до траєкторії точки M (позначимо його в цьому випадку \vec{a}_n), а його модуль буде

$$|\vec{\omega} \times \vec{V}| = \omega V \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h.$$

З урахуванням формул (10.11), (10.15) робимо висновок, що

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V}, \quad \bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (10.16)$$

Формули (10.16) є векторними виразами дотичного, нормального і повного прискорень точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Розташування цих векторів показано на рис. 10.7, а – під час прискореного обертання, рис. 10.7, б – під час уповільненого обертання).

10.3 Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі

Таке перетворення обертальних рухів розповсюджене в техніці. Якщо осі обертання паралельні чи перетинаються, то обертання паралельні чи перетинаються, їх обертання можна передати за допомогою зубчастих або фрикційних передач. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім (рис. 10.8, а, в), так і внутрішнім (рис. 10.8, б, г).

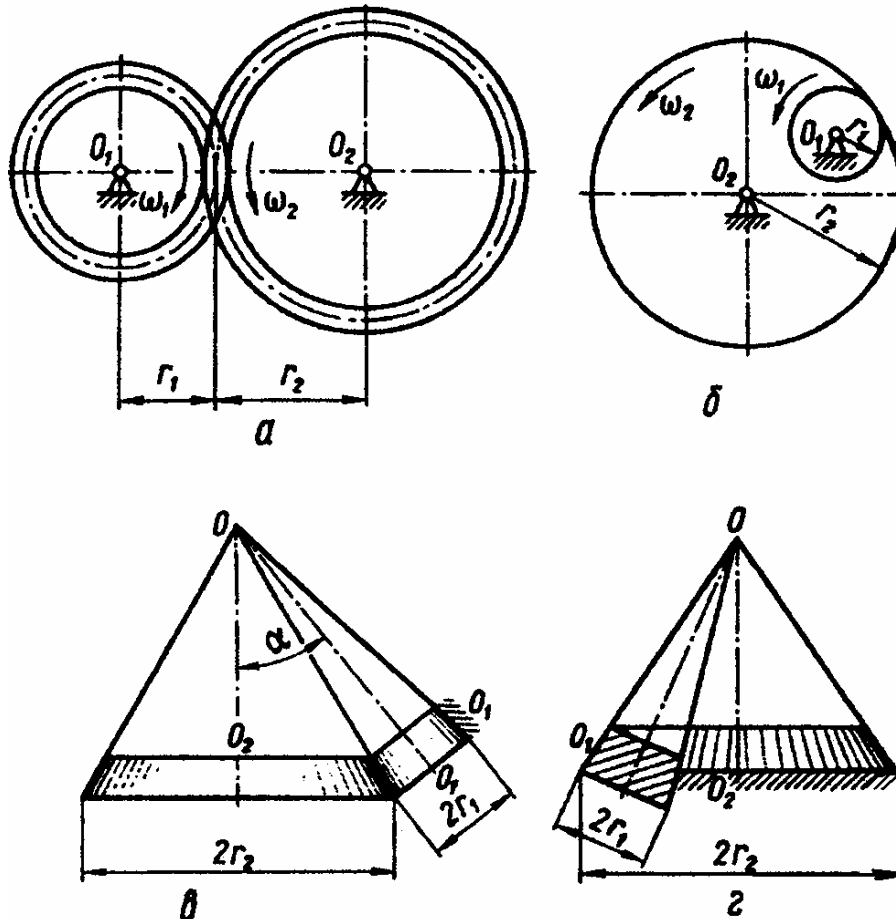


Рисунок 10.8

Перетворення обертальних рухів з паралельними осями можна реалізувати також і за допомогою пасових або ланцюгових передач. При цьому пасова передача із неперехресним рухом паса (рис. 10.9, а) еквівалентна внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, а з

перехресним рухом паса (рис. 10.9, б) – зовнішньому зчепленню. При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають провідним або ведучим, друге – веденим, а весь механізм називають передавальним.

Основною для кінематичного розрахунку цих передач (рис. 10.8, 10.9), є припущення, що в системі немає ковзання, зазорів між зубцями коліс, а паса, ланцюги тощо не деформуються. Це означає, що швидкості на ободі зубчастих коліс, які знаходяться у зчепленні, й швидкості на ободах шківів пасових і ланцюгових передач однакові, тобто в цих випадках має місце співвідношенням

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (10.17)$$

Отже, кутові швидкості коліс зубчастих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.18)$$

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передавальним числом:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.19)$$

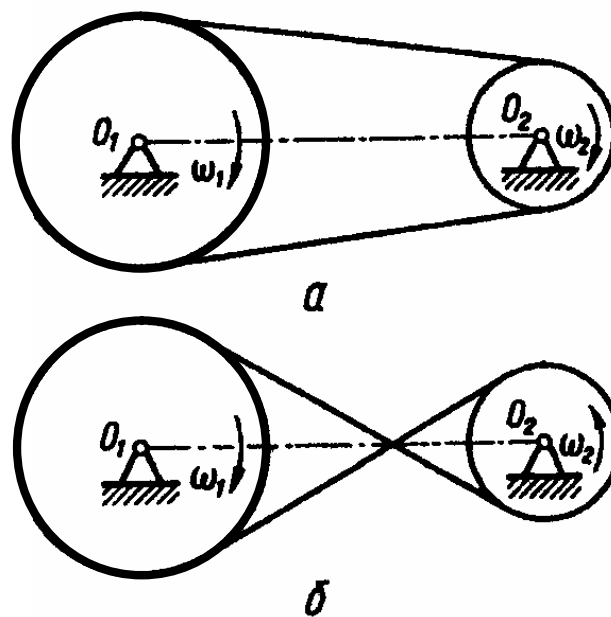


Рисунок 10.9

Коли врахувати, що кількість зубців пропорційна довжинам кіл, а значить і радіусам, то передавальне число можна визначити через відповідне відношення кількості зубців:

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (10.20)$$

10.4 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Маховик, що робить $n = 60$ об/хв, після вимикання двигуна ($t_0 = 0$) обертається рівноуповільнено і зупиняється через $t_2 = 20$ с. Визначити, скільки обертів зробив маховик до повної його зупинки, а також швидкість і прискорення точки, що лежить на ободі маховика радіуса $R = 0,4$ м, через $t_1 = 10$ с після вимикання двигуна.

Розв'язання. Оскільки маховик обертається рівноуповільнено, то для нього, вважаючи при $t_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$, справедливі такі залежності:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Початкова кутова швидкість дорівнює $\omega_0 = \pi n / 30 = 2\pi$ рад.с⁻¹.

У момент зупинки при $t_2 = 20$ с кутова швидкість маховика $\omega_2 = 0$. Підставляючи ці значення в друге з отриманих рівнянь, визначимо кутове прискорення маховика (ця величина під час розглянутого руху постійна):

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t_2 \text{ або } 0 = 2\pi + \varepsilon \cdot 20, \text{ відкіля } \varepsilon = -0,1\pi \text{ рад. с}^{-2}.$$

Якщо позначити через N кількість обертів, зроблених маховиком за час $t_2 = 20$ с, то кут повороту за той же час буде дорівнювати $\varphi_2 = 2\pi N$. Підставивши знайдені значення ε і ω_0 у перше з отриманих рівнянь, одержимо

$$2\pi N = 2\pi t_2 + (-0,1\pi)t_2^2 / 2,$$

звідки, з урахуванням значення t_2 , знайдемо $N = 10$ об.

Для визначення в момент часу $t_1 = 10$ с швидкості та прискорення точки, що лежить на ободі маховика, необхідно визначити ще кутову швидкість ω_1 . Використовуючи друге рівняння, одержимо:

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 \text{ або } \omega_1 = 2\pi - 0,1\pi \cdot 10 = \pi \text{ рад. с}^{-1}.$$

Визначимо швидкість й прискорення точки на ободі маховика:

$$V = \omega_1 R = \pi \cdot 0,4 = 1,26 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = |\varepsilon| R = 0,1\pi \cdot 0,4 = 0,126 \text{ м/с}^2; \quad a_n = V^2 / R = 1,26^2 / 0,4 = 3,97 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 3,98 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $N = 10$ об; $V = 1,26$ м/с; $a = 3,98$ м/с².

Задача 2. У механізмі, зображеному на рис. 10.10, обертання колеса 1 радіуса R_1 передається на двоступінчасте колесо 2 радіуса R_2 за допомогою пасової передачі; вантаж 3 прив'язаний до кінця нитки, намотаної на ступінь меншого діаметра r_2 колеса 2. Закон обертання колеса 1 $\varphi_1 = 5t - t^2$, радіуси $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см, $r_2 = 6$ см. Визначити: $\vec{V}_B, \vec{a}_B, \vec{V}_D, \vec{a}_D$ у момент часу $t_1 = 2$ с.

Розв'язання. У розглянутому механізмі колеса 1, 2 з'єднані пасом і здійснюють обертальні рухи. Частини паса, що охоплюють колеса (дуга $K_1K'_1$ на колесі 1 і дуга $K_2K'_2$ на колесі 2), здійснюють разом із ними

обертальний рух; частини паса K_1K_2 і $K'_1K'_2$ рухаються поступально. Відрізок DE нитки, як і вантаж 3, рухається поступально.

Визначаємо спочатку кутові швидкості коліс 1, 2 і швидкості точок D (вантаж 3), B (колеса 2). Знаючи закон обертання колеса 1, знаходимо його кутову швидкість

$$\omega_1(t) = \dot{\varphi}_1(t) = 5 - 2t. \quad (1)$$

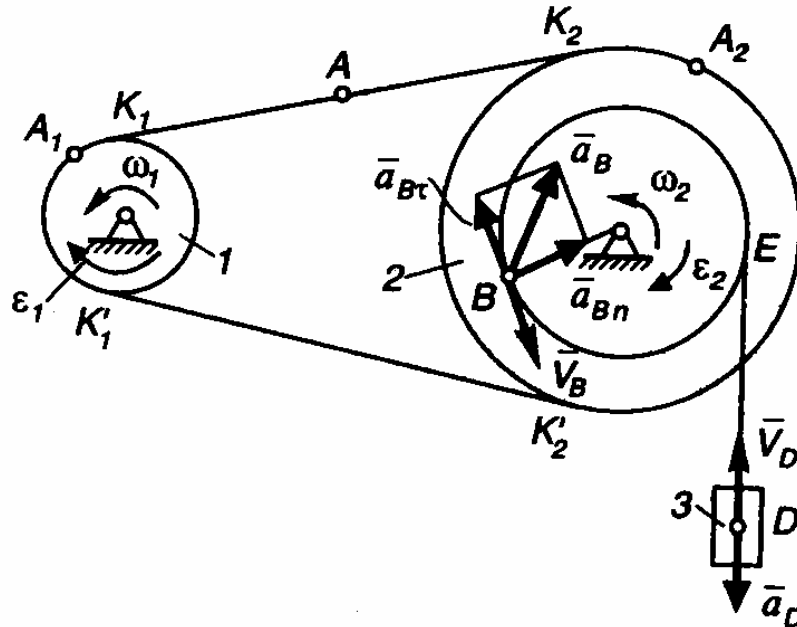


Рисунок 10.10

Вважаючи, що пас по ободу коліс не ковзає, одержимо, що швидкості всіх точок паса і, отже, точок на ободах охоплених пасом кожного з коліс, у цей момент часу чисельно однакові, тобто

$$V_{A1} = V_A = V_{A2}.$$

Швидкості точок A_1 і A_2 можна виразити через кінематичні характеристики руху коліс 1 і 2 у такий спосіб: $V_{A1} = \omega_1 R_1$, $V_{A2} = \omega_2 R_2$. Підставивши ці вирази в попереднє рівняння, одержимо

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \quad (2)$$

звідси знаходимо $\omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2$.

У момент часу $t_1 = 2$ с одержимо $\omega_2 = 0,5$ рад. с^{-1} .

Оскільки $V_D = V_B = \omega_2 r_2$, то при $t_1 = 2$ с одержимо $V_D = V_B = 3$ см/с. Зображуємо на рис. 2.8 вектори \vec{V}_D і \vec{V}_B .

Для визначення прискорень точок B , D встановимо залежність між кутовими прискореннями коліс 1, 2, зв'язаних пасовою передачею. Оскільки рівність (2) справедлива для будь-якого моменту часу, то, беручи похідну від обох її частин, одержимо:

$$\frac{d\omega_1}{dt} R_1 = \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \text{ або } \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2 \text{ або } \varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2. \quad (3)$$

Знаходимо далі $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1(t) = -2$ рад. с^{-2} . Для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо також $\varepsilon_2 = -1$ рад. с^{-2} .

На рис. 10.10 для моменту часу $t_1 = 2$ с величини ω і ε кожного колеса зображено дуговими стрілками відповідно до знаків їх числових значень.

Визначаємо прискорення точки B : $\bar{a}_B = \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn}$, де чисельно $a_{B\tau} = |\varepsilon_2| r_2$, $a_{Bn} = \omega^2 r_2$. Тоді для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо $a_{B\tau} = 6$ см/с², $a_{Bn} = 1,5$ см/с², $a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = 6,18$ см/с².

Прискорення точки D чисельно дорівнює дотичному прискоренню точки B : $a_D = a_{B\tau} = 6$ см/с².

Вектори прискорень точок B і D зображуємо на рисунку 10.8.

Відповідь: $V_B = V_D = 3$ см/с, $a_B = 6,18$ см/с², $a_D = 6$ см/с².

11 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

11.1 Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, за якого всі його точки рухаються у площинах, паралельних деякій площині, нерухомій в розглянутій системі відліку.

За такого руху тіла будь-яка пряма, перпендикулярна нерухомій площині Π (наприклад, прямі aa' , bb' на рис. 11.1), буде здійснювати поступальний рух, отже, усі кінематичні характеристики точок, що лежать на цій прямій, будуть тотожні. Звідси робимо висновок, що для вивчення руху всього тіла досить досліджувати як рухається в площині Oxy переріз цього тіла, що утворює деяку плоску фігуру. Тут площина Oxy є нерухомою і паралельною площині Π .

Положення плоскої фігури в площині Oxy визначається положенням будь-якого проведеного на цій фігурі відрізка AB (рис. 11.2). У свою чергу, положення відрізка AB визначається, наприклад, координатами x_A , y_A точки A та величиною кута φ між відрізком AB і віссю x . Точку A , яку вибрано для визначення положення плоскої фігури, називають *полюсом*.

Закон руху плоскої фігури в її площині, а отже, і плоскопаралельного руху твердого тіла щодо системи координат Oxy визначається трьома рівняннями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (11.1)$$

Аналізуючи залежності (11.1), можна зробити висновок, що рух плоскої фігури в її площині є сукупність двох рухів: поступального руху, за якого всі точки рухаються так само, як і полюс A , і обертального руху навколо цього полюса (при цьому фігура обертається навколо осі, що проходить через точку A перпендикулярно площині Π).

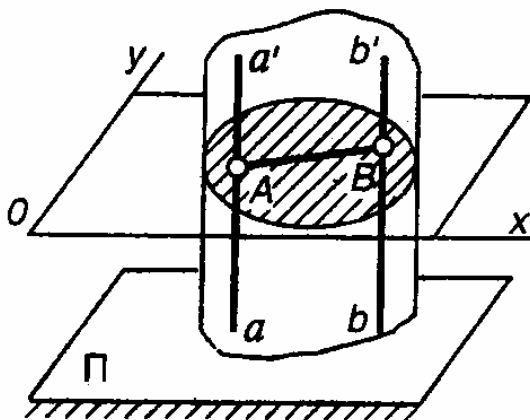


Рисунок 11.1

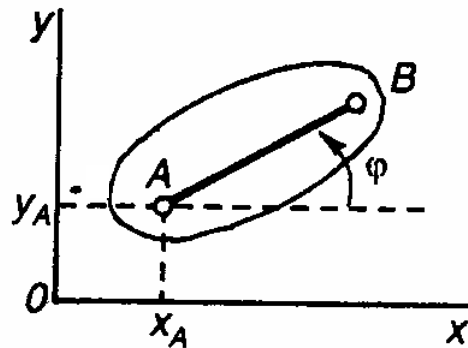


Рисунок 11.2

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла є швидкість і прискорення полюса (\vec{V}_A, \vec{a}_A – характеристики поступальної складової руху), а також кутова швидкість і кутове прискорення тіла (ω, ε – характеристики обертальної складової руху).

Як полюс можна вибирати будь-яку точку фігури. У разі зміни точки, вибраної за полюс, характеристики поступальної складової руху змінюються (швидкість і прискорення іншої точки фігури здебільшого будуть відрізнятися від \vec{V}_A і \vec{a}_A), а характеристики обертальної складової руху ω і ε залишаються незмінними (оскільки будь-яка пряма перерізу, паралельного площині Π при плоскопаралельному русі твердого тіла повертається на один і той же кут).

11.2 Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Нагадаємо, що рух плоскої фігури можна розглядати як складову з поступального руху разом з полюсом і обертального руху навколо полюса. Відповідно до цього швидкість довільної точки M плоскої фігури геометрично складається із швидкості будь-якої точки A , що прийнята за полюс, і швидкості, яку точка M одержує під час обертання фігури навколо цього полюса, тобто

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \quad (11.2)$$

При цьому швидкість \vec{V}_{MA} визначається за величиною і напрямом так само, якби тіло здійснювало обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку A , тобто

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{AM}, \quad \text{де} \quad V_{MA} = \omega \cdot AM, \quad \vec{V}_{MA} \perp \vec{AM}. \quad (11.3)$$

Таким чином, якщо відомі швидкість полюса \vec{V}_A і кутова швидкість тіла ω , то швидкість будь-якої точки M тіла визначається, відповідно до рівності (11.2), діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах \vec{V}_A і \vec{V}_{MA} , як на сторонах (рис. 11.3), а модуль швидкості V_M обчислюється за формулою:

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A \cdot V_{MA} \cdot \cos \gamma}, \quad (11.4)$$

де γ – кут між векторами \vec{V}_A і \vec{V}_{MA} .

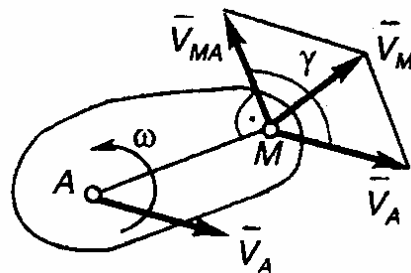


Рисунок 11.3

Теорема про проекції швидкостей двох точок твердого тіла

Відповідно до рівняння (11.2) для двох довільних точок A і B твердого тіла справедлива формула $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, згідно з якою виконуємо побудову, зображену на рис. 11.4. Проектуючи обидві частини цього рівняння на вісь Ax , спрямовану по відрізку AB , і, з урахуванням, що вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний прямій AB , знаходимо

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha. \quad (11.5)$$

Цей результат і виражає теорему: проекції швидкостей двох точок твердого тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні між собою.

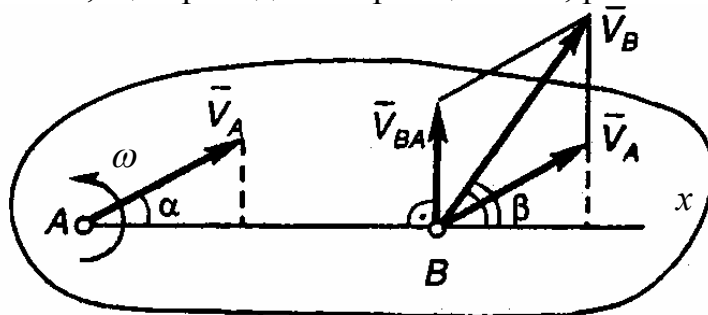


Рисунок 11.4

Природно, що рівність проекцій векторів означає рівність цих проекцій за їх модулем і знаком.

Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей

Для визначення швидкостей точок плоскої фігури виберемо за полюс будь-яку точку P . Тоді відповідно до формули (11.2) швидкість довільної точки M визначається як сума двох векторів \vec{V}_P і \vec{V}_{MP} :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}, \quad \text{де} \quad V_{MP} = \omega \cdot MP, \quad \vec{V}_{MP} \perp \overline{MP}.$$

Якби виявилось, що швидкість полюса P у цей момент часу дорівнює нулю, то права частина цього рівняння була б представлена одним доданком \vec{V}_{MP} , а швидкість будь-якої іншої точки визначалася б як її лінійна швидкість під час обертання тіла навколо полюса P :

$$V_M = \omega \cdot MP, \quad \vec{V}_M \perp \overline{MP}. \quad (11.6)$$

Отже, якщо вибрати як полюс точку P , швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю, то модулі швидкостей усіх інших точок фігури будуть пропорційні їхнім відстаням від полюса P , а напрями векторів швидкостей цих точок будуть перпендикулярні прямим, що з'єднують розглянуту точку і полюс P . Природно, що розрахунок швидкостей точок за формулами (11.6) значно простіше розрахунку за загальною формулою (11.2).

Точка плоскої фігури, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю, називається *миттєвим центром швидкостей* (МЦШ). Легко

переконалися, що коли фігура рухається непоступально, то така точка в кожний момент часу існує і при цьому єдина. Розглянемо способи визначення положення миттєвого центра швидкостей.

Спосіб 1. Нехай у момент часу t для плоскої фігури відомі її кутова швидкість ω і швидкість \vec{V}_A будь-якої її точки A (рис. 11.5, а). Тоді, вибираючи точку A за полюс, швидкість шуканої нами точки P можна визначити за формулою $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}$. Завдання полягає в тому, щоб знайти таку точку P , у якій лінійна швидкість $\vec{V}_P = 0$, а отже, $\vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = 0$ і звідси $\vec{V}_{PA} = -\vec{V}_A$. Тоді для точки P швидкість \vec{V}_{PA} , яку точка P одержує під час обертання фігури навколо полюса A , і швидкість \vec{V}_A полюса A будуть рівні за модулем ($V_{PA} = V_A$) і протилежні за напрямом. Крім того, точка P повинна лежати на перпендикулярі до вектора швидкості \vec{V}_A . Визначення положення точки P , що відповідає зазначеним умовам, здійснюється такою побудовою: з точки A (рис. 11.5, б) відновимо перпендикуляр до вектору \vec{V}_A і відкладемо на ньому відстань $AP = V_A / \omega$ у той бік від точки A , куди «покаже» вектор \vec{V}_A , якщо його повернути в напрямку дугової стрілки ω на 90° .

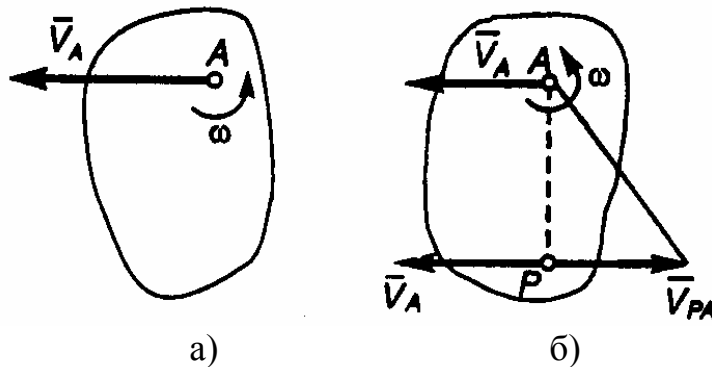


Рисунок 11.5

Зазначимо, що миттєвий центр швидкостей може бути розташований як на самій фігурі, так і на її уявному продовженні (тобто поза фігурою). Миттєвий центр швидкостей є єдиною точкою плоскої фігури, швидкість якої в цей момент часу дорівнює нулю. В інший момент часу миттєвим центром швидкостей буде вже інша точка плоскої фігури.

Спосіб 2. Якщо відомі напрями швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B двох точок A і B плоскої фігури, то миттєвий центр швидкостей буде знаходитися в точці перетину перпендикулярів, відновлених з точок A і B до векторів їх швидкостей. Така побудова виконана на рис. 11.6. Вона обґрунтована тим, що для будь-яких точок A і B фігури застосовані положення (11.6):

$$V_A = \omega \cdot AP, \vec{V}_A \perp \overline{AP} \text{ і } V_B = \omega \cdot BP, \vec{V}_B \perp \overline{BP}.$$

З цих рівностей випливає, що

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (11.7)$$

Отже, якщо МЦШ визначено, то швидкості точок плоскої фігури визначаються, начебто ця фігура в цей момент часу обертається навколо миттєвого центра швидкостей (точки Р).

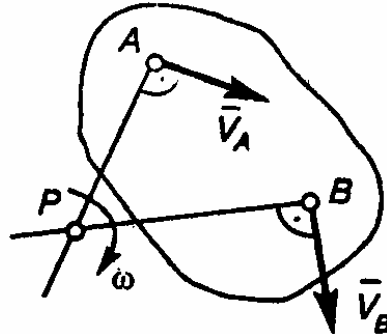


Рисунок 11.6

Спосіб 3. Якщо швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, то можливі три варіанти, зображені на рис. 11.7.

При цьому у випадку, коли швидкості точок A і B паралельні й пряма AB не перпендикулярна \vec{V}_A (рис. 11.7, в), то миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності ($AP = \infty$), тобто фактично не існує, а кутова швидкість обертання фігури $\omega = V_A / AP = V_A / \infty = 0$. Тут швидкості всіх точок фігури в певний момент часу рівні одна одній і фігура має розподіл швидкостей як під час поступального руху. Такий стан руху тіла називають *миттєво поступальним*.

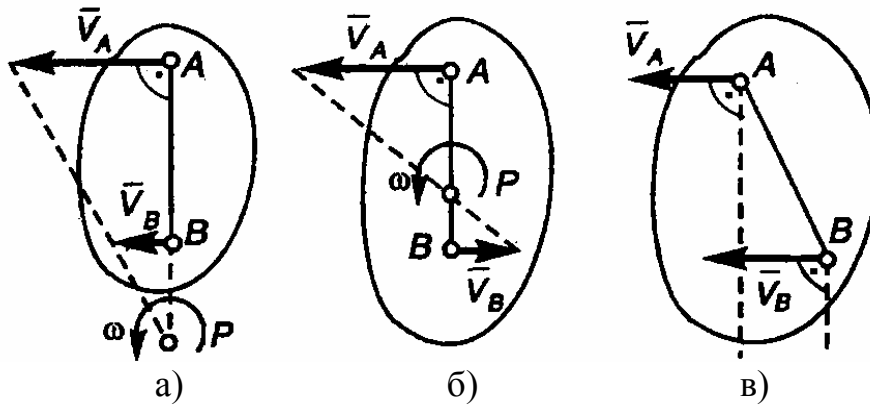


Рисунок 11.7

Спосіб 4. Якщо плоский рух тіла здійснюється шляхом кочення без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 11.8), то точка дотику P буде миттєвим центром швидкостей.

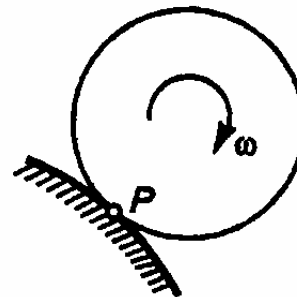


Рисунок 11.8

11.3 Визначення прискорень точок плоскої фігури

Прискорення будь-якої точки M плоскої фігури геометрично складається з прискорення будь-якої точки A , прийнятої за полюс, і прискорення, що точка M одержує під час обертання фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \quad (11.8)$$

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (11.9)$$

де ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення фігури.

Під час розв'язання задач зручніше вектори в правій частині рівняння (11.8) представити як суми дотичних і нормальних складових. Тоді отримаємо

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n, \quad (11.10)$$

де $\bar{a}_{A\tau}, \bar{a}_{An}$ – дотичне і нормальне прискорення точки A ;

$\bar{a}_{MA}^\tau, \bar{a}_{MA}^n$ – дотична і нормальна складова прискорення \bar{a}_{MA} точки M в її обертанні сумісно з тілом навколо полюса A .

При цьому модулі векторів \bar{a}_{MA}^τ і \bar{a}_{MA}^n , як прискорення точки тіла, що обертається, визначаються відповідно до формул (10.11):

$$a_{MA}^\tau = MA \cdot \varepsilon; \quad a_{MA}^n = MA \cdot \omega^2. \quad (11.11)$$

Тут вектор \bar{a}_{MA}^τ спрямований перпендикулярно MA у бік дугової стрілки ε , а вектор \bar{a}_{MA}^n спрямований від точки M до полюса A .

Якщо точка M рухається криволінійно, то вектор \bar{a}_M в лівій частині рівності (11.10) треба замінити сумою складових за напрямом координатних осей: \bar{a}_{Mx} і \bar{a}_{My} .

Подальші особливості використання рівняння (11.10) розглянемо під час розв'язання конкретних задач.

11.4 Приклади розв'язання задач з визначення швидкостей точок тіла

Задача 1. Колесо радіуса R котиться по нерухомій поверхні без ковзання (рис. 11.9, а). Знайти швидкість точок K і D колеса, якщо відомі швидкість \bar{V}_C центра C колеса і відстань $KC = b$ і кут α .

Розв'язання. Розглянутий рух колеса за визначенням є плоскопаралельним. Приймавши точку C за полюс (оскільки її швидкість відома) відповідно до загального рівняння (11.2) для точки K матимемо

$$\bar{V}_K = \bar{V}_C + \bar{V}_{KC}, \quad \text{де} \quad \bar{V}_{KC} \perp \overline{KC}, \quad V_{KC} = \omega \cdot KC.$$

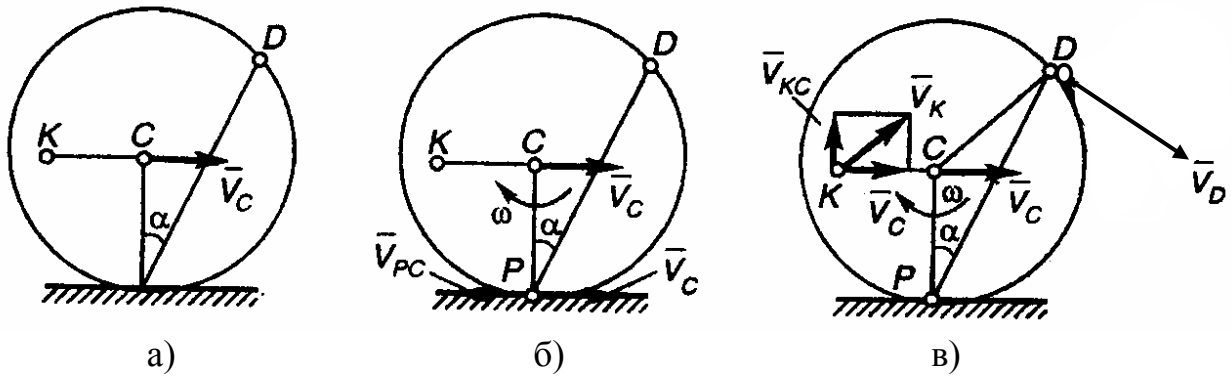


Рисунок 11.9

Особливістю точки P є те, що в цей момент часу її швидкість $V_P = 0$, оскільки колесо котиться без ковзання. Тоді отримане рівняння дає вираз

$$0 = \bar{V}_C + \bar{V}_{PC}.$$

Звідси випливає наступне: 1) швидкості \bar{V}_{PC} і \bar{V}_C повинні бути спрямовані в протилежні боки; 2) з рівності модулів $V_{PC} = V_C$ одержуємо $\omega \cdot PC = V_C$, звідси знайдемо величину $\omega = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_C}{R}$. Відповідно до напрямку вектора \bar{V}_{PC} визначаємо напрям ω і зображуємо його на кресленні.

Тепер повертаємося до визначення V_k . Знаходимо $V_{KC} = \omega \cdot KC = \frac{V_C \cdot b}{R}$. Знаючи напрям кутової швидкості ω , виконуємо побудову прямокутника на векторах \bar{V}_C і \bar{V}_{KC} (рис. 11.9,в). Остаточо знаходимо

$$V_k = \sqrt{V_C^2 + V_{KC}^2} = V_C \sqrt{1 + (b/R)^2}.$$

Швидкість точки D на ободі колеса визначимо за формулою (11.7), враховуючи, що точка P дотику колеса і поверхні є його МЦШ:

$$V_D = \omega \cdot DP = \frac{V_C}{R} \cdot (2R \cdot \cos \alpha) = 2V_C \cos \alpha, \quad \bar{V}_D \perp \bar{DP}.$$

Задача 2. Повзуни A і B з'єднані стержнем з шарнірами на кінцях, переміщуються по взаємно перпендикулярних напрямних (рис. 11.10, а). Визначити за цього кута α швидкість точки B , якщо відома швидкість \bar{V}_A .

Розв'язання. Проведемо вісь Ax через точки A і B . Знаючи напрям \bar{V}_A , знаходимо проекцію цього вектора на цю вісь: $V_{Ax} = V_A \cos \alpha$ (на рис. 11.10, б це буде відрізок Aa). Далі на схемі від точки B відкладаємо відрізок $Bb = Aa$ і, відновлюючи в точці b перпендикуляр до осі Ax , знаходимо точку C його перетину з віссю вертикальних напрямних, яка і буде визначати кінець невідомого вектора швидкості \bar{V}_B точки B .

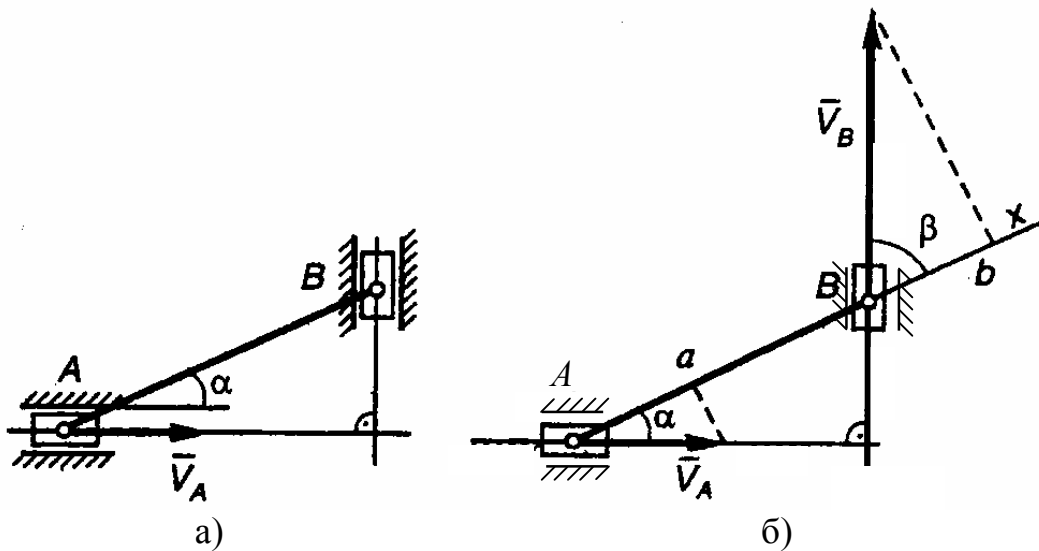


Рисунок 11.10

Відповідно до теореми про проекції швидкостей: $V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$.
 Звідси остаточно визначимо (врахувавши, що $\beta = 90^\circ - \alpha$)
 $V_B = V_A \cos \alpha / \cos(90^\circ - \alpha)$ або $V_B = V_A \operatorname{ctg} \alpha$.

Задача 3. Плоский механізм складається із стрижнів 1, 2, 3, 4 і повзуна B (рис. 11.11), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами в точках O_1 і O_2 шарнірами; точка D знаходиться всередині стрижня AB. Довжини стрижнів: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 0,7$ м, $l_4 = 0,3$ м. Кутова швидкість стрижня 1 у заданому положенні механізму $\omega_1 = 2$ рад. с^{-1} спрямована проти ходу годинникової стрілки. Визначити $\bar{V}_A, \bar{V}_B, \bar{V}_D, \bar{V}_E, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Розв'язання. У розглянутому механізмі стрижні 1, 4 здійснюють обертальний рух відповідно навколо точок O_1 і O_2 , повзун B – поступальний у своїх напрямних, а стрижні 2, 3 – плоскопаралельний рух.

Швидкість точки A визначимо як приналежну стрижню 1, який здійснює обертальний рух:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}, \quad \bar{V}_A \perp \overline{O_1 A}.$$

Розглянемо рух стрижня 2. Швидкість його точки A визначена, а напрям швидкості точки B співпадає з віссю напрямних, це обумовлено тим, що вона належить одночасно стрижню 2 і повзуну, що рухається уздовж напрямних. Далі, відновлюючи з точок A і B перпендикуляри до \bar{V}_A і напрямку швидкості повзуна B, знаходимо положення точки P_2 – МЦШ стрижня 2.

За напрямом вектора \bar{V}_A визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_2 стрижня 2 і знаходимо її числову величину

$$AP_2 = AB \cdot \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м (одержимо при розгляді } \Delta AP_2 B),$$

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = 0,8 / 1,04 = 0,77 \text{ рад. с}^{-1}.$$

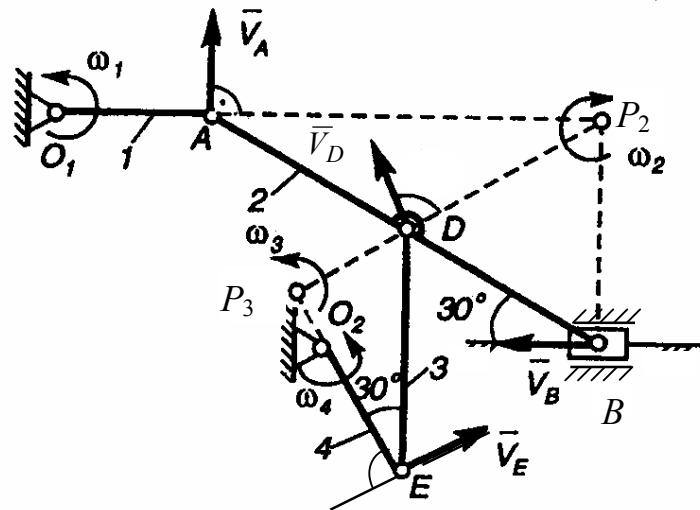


Рисунок 11.11

Тепер визначаємо числові значення і напрями швидкостей точок B і D стрижня 2 (з урахуванням, що $\triangle DP_2B$ – рівнобічний і $BP_2 = AB \cdot \cos 60^\circ = 0,6$ м, а $DP_2 = BP_2 = 0,6$ м):

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 0,62 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_B \perp \vec{P_2B};$$

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 = 0,62 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_D \perp \vec{P_2D}.$$

Розглянемо далі рух стрижня 3. Швидкість точки D відома. Оскільки точка E належить одночасно і стрижню 4, що обертається навколо точки O_2 , то лінія дії швидкості V_E буде перпендикулярною $\vec{O_2E}$. Тоді, відновлюючи в точках D і E перпендикуляри до швидкості \vec{V}_D і лінії дії швидкості \vec{V}_E , знаходимо положення точки P_3 – МЦШ стрижня 3. За напрямом вектора \vec{V}_D визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_3 стрижня 3. Її чисельну величину знаходимо (попередньо визначивши з прямокутного $\triangle DP_3E$ відрізок $DP_3 = DE \cdot \sin 30^\circ = 0,35$ м) так:

$$\omega_3 = V_D / P_3D = 1,77 \text{ рад. с}^{-1}.$$

Далі, обчисливши $P_3E = ED \cdot \cos 30^\circ = 0,605$ м, визначаємо швидкість $V_E = \omega_3 \cdot P_3E = 1,07$ м/с; $\vec{V}_E \perp \vec{P_3E}$. За напрям дугової стрілки ω_3 визначаємо напрям вектора швидкості \vec{V}_E .

Розглянемо тепер рух стрижня 4, що обертається навколо точки O_2 . Знаючи напрям і чисельну величину \vec{V}_E , знаходимо напрям і величину кутової швидкості ω_4 : $\omega_4 = V_E / O_2E = V_E / l_4 = 3,57$ рад. с⁻¹.

Відповідь: $V_A = 0,8$ м/с, $V_B = V_D = 0,63$ м/с, $V_E = 1,07$ м/с, $\omega_2 = 0,77$ рад.с⁻¹; $\omega_3 = 1,77$ рад. с⁻¹; $\omega_4 = 3,57$ рад. с⁻¹, напрями цих величин показано на рис. 11.11.

Задача 4. Плоский механізм складається зі стрижнів 1, 2, 3 і котка, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 11.12, а). З'єднання стрижнів між собою і стрижня 3 з котком у точці D – шарнірні. Довжини стрижнів: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 0,6$ м, $l_3 = 0,8$ м. При кутах $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, відомих величинах і напрямках кутової швидкості $\omega_1 = 2$ рад. с⁻¹ і швидкості центра O котка $V_0 = 0,346$ м/с, $\angle ABD = 90^\circ$ визначити швидкість точки B і кутову швидкість ω_2 стрижня 2.

Розв'язання. Аналіз принципу дії механізму показує наступне: стрижень 1 виконує обертальний навколо точки O_1 рух; стрижні 2, 3, а також коток – плоскопаралельні рухи.

Розглядаючи рух стрижня 1, знаходимо напрям і величину швидкості точки A : $V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0,8$ м/с; $\vec{V}_A \perp \vec{O_1A}$. Напрямок вектора швидкості \vec{V}_A визначаємо за напрямом дугової стрілки ω_1 .

Розглянемо далі рух котка. Його миттєвий центр швидкостей розташований у точці P дотику котка і поверхні, тоді V_D знайдемо як

$$V_D = V_0 \cdot DP / OP.$$

Оскільки в трикутнику ΔDOP за визначенням, кут $\beta = 30^\circ$, то $DP = 2 \cdot OP \cdot \cos 30^\circ = OP \cdot \sqrt{3}$. Тоді швидкість $V_D = V_0 \cdot DP / OP = V_0 \cdot \sqrt{3} = 0,6$ м/с. При цьому вектор \vec{V}_D спрямований перпендикулярно DP у бік дугової стрілки ω_1 стрижня 1.

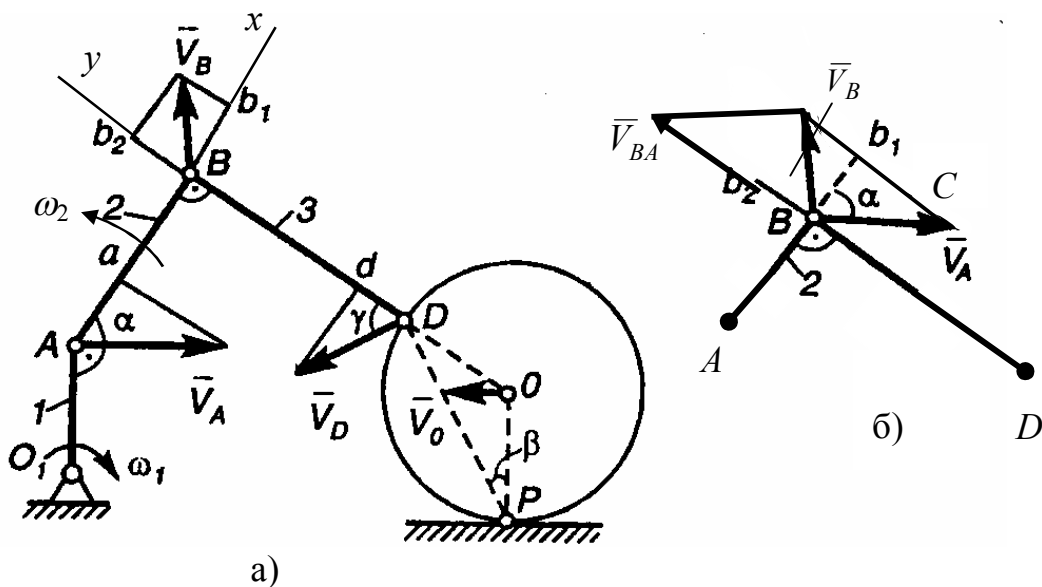


Рисунок 11.12

Оскільки точка B механізму належить одночасно стрижням AB і BD , то за теоремою про проекції швидкостей повинно виконуватись: 1) проекція вектора \vec{V}_B на вісь Ax дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{V}_A (відрізок Aa на рис. 11.12, а), тобто $Aa = V_A \cos \alpha = 0,4$ м/с; 2) проекція вектора \vec{V}_B на вісь Dy дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{V}_D (відрізок Dd на рис. 11.12, а), тобто $Dd = V_D \cos \gamma = 0,3$ м/с ($\gamma = 60^\circ$ за побудовою).

Далі розв'язуємо задачу графічно. Відкладаємо від точки B у відповідних напрямках відрізки $Bb_1 = Aa$ і $Bb_2 = Dd$. Відновлюємо з точки b_1 перпендикуляр до Bb_1 , а з точки b_2 – перпендикуляр до Bb_2 . Точка перетину цих перпендикулярів визначає кінець шуканого вектора \vec{V}_B .

Оскільки відрізки Bb_1 і Bb_2 у цьому випадку взаємно перпендикулярні, то

$$V_B = \sqrt{(Bb_1)^2 + (Bb_2)^2} = 0,5 \text{ м/с.}$$

Визначаємо ω_2 . На рисунку 3.12, б графічно зображено векторну рівність:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad \vec{V}_{BA} \perp \overline{AB},$$

де вектори \vec{V}_A і \vec{V}_B визначені, а за напрямом вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний стержню AB . Зі схеми (рис. 3.12, б) знаходимо

$$V_{BA} = Bb_2 + Cb_1 = V_D \cos \gamma + V_A \sin \alpha = 0,3 + 0,693 = 0,993 \text{ м/с.}$$

Остаточно $\omega_2 = V_{BA} / AB = 1,66$ рад. с^{-1} (напряв дугової стрілки ω_2 , враховуючи напрям швидкості \vec{V}_{BA} – проти ходу годинникової стрілки).

Відповідь: $V_B = 0,5$ м/с; $\omega_2 = 1,66$ рад. с^{-1} .

11.5 Приклади розв'язання задач із визначення прискорень точок тіла

Задача 1. Механізм (рис. 11.13) складається зі стрижнів $1, 2$ і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомою опорою O шарнірами. Стрижень 1 обертається навколо точки O за законом $\varphi = 0,5(3t - t^2)$ рад. У момент часу $t_1 = 1$ с механізм займає положення, зображене на рис. 11.13: кути $\alpha = \beta = 30^\circ$, а кут $\angle OAB = 120^\circ$.

Визначити для цього положення механізму швидкість \vec{V}_B і прискорення \vec{a}_B повзуна B , а також кутову швидкість ω_2 і кутове прискорення ε_2 стрижня 2 , якщо довжини стрижнів $l_1 = 2$ м, $l_2 = 4$ м.

Розв'язання. Знаходимо кутову швидкість і кутове прискорення стрижня 1 як функції часу: $\omega_1 = \dot{\varphi} = 0,5(3 - 2t)$, $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = -1$. Тоді для моменту часу $t_1 = 1$ с одержимо $\omega_1 = 0,5$ рад. с^{-1} , $\varepsilon_1 = -1$ рад. с^{-2} . Відповідно

до знаків цих величин зображуємо їх на рис. 11.13 дуговими стрілками: ω_1 проти ходу годинникової стрілки, ε_1 – за ходом годинникової стрілки.

Визначимо швидкість точки A \vec{V}_A , розглядаючи обертальний рух стрижня 1 :

$$V_A = \omega_1 l_1 = 1 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp \vec{OA}.$$

Кутову швидкість ω_2 стрижня 2 , а також швидкість його точки B визначимо методом МЦШ. Для цього будемо МЦШ стрижня 2 , відновлюючи перпендикуляри в точках A і B до \vec{V}_A і лінії швидкості точки B повзуна, яка співпадає з віссю напрямних останнього. Точка P_2 перетину перпендикулярів і буде МЦШ стрижня 2 .

З рис. 11.13 випливає, що всі кути трикутника AP_2B дорівнюють 60° , а трикутник є рівнобічним, тому отримаємо $P_2A = P_2B = AB = 4 \text{ м}$, а також

$$\omega_2 = V_A / P_2A = 0,25 \text{ рад. с}^{-1}, \quad V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{ м/с}.$$

Прискорення точки A , яка належить стрижню 1 , що здійснює обертання навколо точки O , представимо як (11.10)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An},$$

де числові значення

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_{An} = \omega_1^2 l_1 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Тут вектор \vec{a}_{An} спрямований уздовж AO від точки A до точки O , а $\vec{a}_{A\tau}$ перпендикулярний AO і спрямований у напрямку дугової стрілки ε_1 .

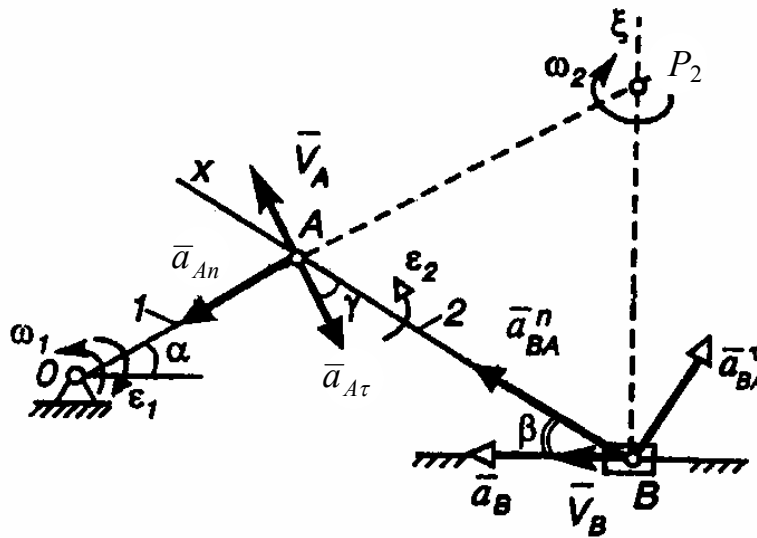


Рисунок 11.13

Оскільки точка B цього стрижня одночасно належить і повзуну, що рухається у напрямних прямолінійно, то вектор \vec{a}_B належить осі напрямним повзуна. Зображуємо вектор \vec{a}_B на схемі, припускаючи, що він спрямований у той же бік, що і \vec{V}_B .

Для визначення прискорення \bar{a}_B прийемо точку A як полюс і скористаємося формулою (11.10):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Зображуємо на схемі вектор \bar{a}_{BA}^n (уздовж відрізка BA від точки B до точки A) і знаходимо його числове значення (11.11):

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Числове значення \bar{a}_{BA}^τ , відповідно до (11.11), могло б бути визначено як $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, але в цьому випадку кутове прискорення ε_2 невідомо. Для вектора \bar{a}_{BA}^τ можемо вказати на кресленні його напрям (припустивши, що ε_2 спрямовано проти ходу годинникової стрілки). Зображуємо цей вектор перпендикулярно AB у відповідний бік.

Отже, з величин, що входять для \bar{a}_B , невідомі тільки числові значення двох величин a_B і a_{BA}^τ . Їх можна знайти, спроектувавши векторне рівняння на будь-які дві осі.

Для того щоб визначити a_B , спроектуємо спочатку обидві частини рівняння на вісь Bx :

$$a_B \cos \beta = -|a_{A\tau}| \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n.$$

Підставивши у рівняння числові значення усіх величин, знайдемо $a_B = -1,34 \text{ м/с}^2$. Оскільки $a_B < 0$, то, вектор \bar{a}_B буде насправді спрямованим протилежно зображеному на рис. 11.13.

Визначаємо далі кутове прискорення стрижня 2. Для того щоб знайти ε_2 , варто спочатку визначити a_{BA}^τ . Для цього обидві частини рівняння спроектуємо на напрям вісь $B\xi$:

$$0 = -|a_A^\tau| \cos \alpha - a_A^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \beta + a_{BA}^n \sin \beta.$$

Підставивши в рівняння числові значення усіх величин, знайдемо $a_{BA}^\tau = 2,43 \text{ м/с}^2$. Оскільки одержали $a_{BA}^\tau > 0$, то дійсний напрям вектора \bar{a}_{BA}^τ збігається з тим, що передбачалося під час розрахунку.

Тепер із рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$ одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 0,61 \text{ рад.с}^{-2}$. Напрямок ε_2 буде проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на схемі.

Відповідь: $V_B = 1 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,25 \text{ рад.с}^{-1}$, $a_B = -1,34 \text{ м/с}^2$ (знак указує, що напрям a_B насправді протилежний показаному на рис. 11.13), $\varepsilon_2 = 0,61 \text{ рад.с}^{-2}$.

Задача 2. Механізм (рис. 11.14, а) складається зі стрижнів 1, 2, 3, з'єднаних один із одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами. Довжини стрижнів $l_1 = 2 \text{ м}$, $l_2 = 4 \text{ м}$, $l_3 = 1,25 \text{ м}$. У момент часу, коли

$\alpha = \beta = 30^\circ$, і $\angle O_1AB = 120^\circ$, для стрижня 1 відомі величини і напрями кутової швидкості і кутового прискорення: $\omega_1 = 0,5 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 1 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-2}$. Для цього положення механізму визначити швидкість і прискорення точки B , кутові швидкості та кутові прискорення стрижнів 2 і 3.

Розв'язання. Визначення \vec{V}_B і ω_2 цілком збігаються з тим, що виконано під час розв'язання задачі 1:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}, \quad \gamma = 30^\circ, \quad \omega_2 = V_A / P_2A = 0,25 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1},$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{ м/с}.$$

Оскільки стрижень 3 здійснює обертальний рух навколо осі O_2 , то

$$\omega_3 = V_B / l_3 = 0,8 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Визначаємо прискорення точки B . Точка B рухається по колу радіуса O_2B , тому напрям прискорення \vec{a}_B заздалегідь невідомий.

У цьому випадку вектор \vec{a}_B варто представити як суму двох його складових $\vec{a}_{B\tau}$ і \vec{a}_{Bn} . Приймавши для стрижня 2 точку A за полюс, одержимо

$$\vec{a}_{B\tau} + \vec{a}_{Bn} = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n.$$

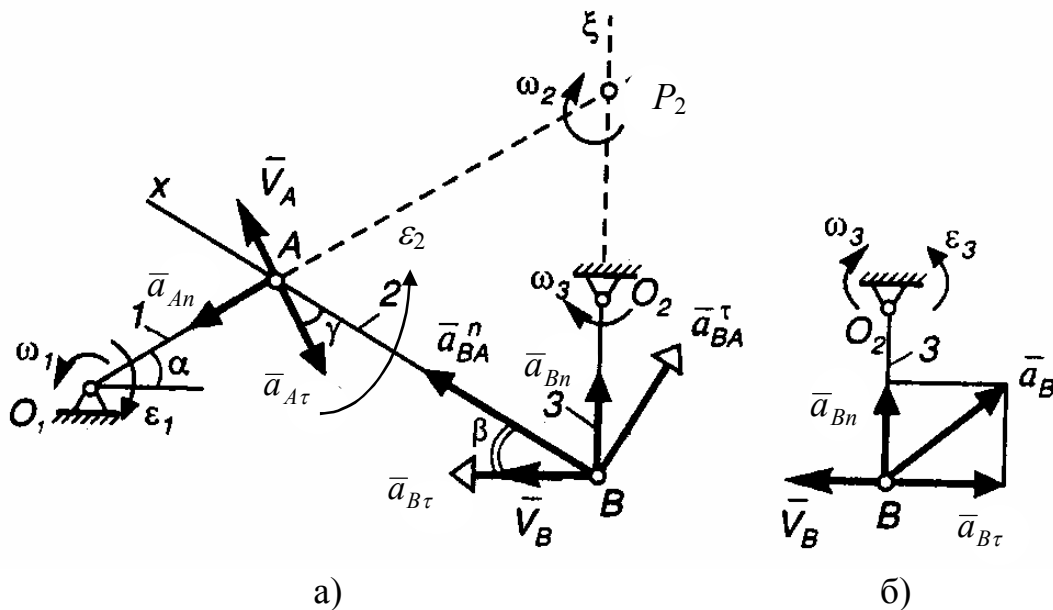


Рисунок 11.14

Для векторів, зазначених у правій частині цього рівняння, отримаємо

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_{An} = \omega_1^2 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2 = 0,25 \text{ м/с}^2,$$

напрями цих векторів показано на рисунку 11.14, а.

Вектори лівої частини рівняння визначаються для точки B , яка належить стержню 3, що робить обертальний рух навколо точку O_2 . Вектор \vec{a}_{Bn} буде спрямований уздовж BO_2 від точки B до точки O_2 і чисельно

$$a_{Bn} = V_B^2 / l_3 = \omega_3^2 l_3 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Невідомий вектор $\bar{a}_{B\tau}$ направимо перпендикулярно стрижню 3 у бік, за ходом годинникової стрілки.

Отже, з величин, що входять у векторне рівняння, невідомі тільки числові значення $a_{B\tau}$ і a_{BA}^τ , які можна знайти, спроектувавши обидві частини рівняння на вісь Bx :

$$a_{B\tau} \cos \beta + a_{Bn} \sin \beta = -a_{A\tau} \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n.$$

Підставивши числові значення усіх величин, знайдемо $a_{B\tau} = -1,8 \text{ м/с}^2$. Знак мінус указує, що напрям $\bar{a}_{B\tau}$ у дійсності є протилежним зображеному на рисунку 11.14, а.

Тепер обчислюємо величину прискорення

$$a_B = \sqrt{(a_{B\tau})^2 + (a_{Bn})^2} = 1,97 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо кутове прискорення стрижня 2. Спроектувавши обидві частини рівняння на напрям осі $B\xi$, одержимо

$$a_{Bn} = -a_{A\tau} \cos \alpha - a_{An} \sin \alpha + a_{BA}^n \sin \beta + a_{BA}^\tau \cos \beta.$$

Підставивши числові значення величин, знайдемо $a_{BA}^\tau = 3,36 \text{ м/с}^2$. Оскільки $a_{BA}^\tau > 0$, то фактично вектор \bar{a}_{BA}^τ спрямований, як показано на рис. 11.14,а. Тепер, користуючись формулою $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 0,84 \text{ рад.с}^{-2}$, напрям ε_2 – проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на рисунку 11.14, а.

Визначаємо кутове прискорення стрижня 3. Стрижень 3 (рис. 11.14, б) здійснює обертальний рух навколо точки O_2 . З рівняння $a_{B\tau} = \varepsilon_3 l_3$ одержимо $\varepsilon_3 = |a_{B\tau}| / l_3 = 1,44 \text{ рад.с}^{-2}$, напрям ε_3 – проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на рис. 11.14, б.

Відповідь: $V_B = 1 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,25 \text{ рад.с}^{-1}$, $\omega_3 = 0,8 \text{ рад.с}^{-1}$, $a_B = 1,97 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_2 = 0,84 \text{ рад.с}^{-2}$, $\varepsilon_3 = 1,44 \text{ рад.с}^{-2}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняється дугова координата s точки від пройденого нею шляху? Коли вони збігаються?

2. Чи залежить напрям орта $\bar{\tau}$ дотичної до траєкторії від напрямку руху точки?

3. Які зміни вектора швидкості характеризують дотичне і нормальне прискорення?

4. Чи може точка, що рівномірно рухається, мати прискорення?

5. Чи однакові поняття «рух точки з прискоренням» і «прискорений рух точки»?
6. Як визначити: рух точки є прискореним чи уповільненим?
7. Як напрямлена швидкість точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
8. Як напрямлене прискорення точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
9. Якими способами можна задати рух точки?
10. Як можна охарактеризувати рух точки, якщо її дотичне прискорення не від'ємне?
11. У якому випадку руху точки її дотичне і нормальне прискорення одночасно дорівнюють нулю?
12. Який рух точки називають рівномірним, рівнозмінним?
13. Що таке траєкторія руху точки?
14. Дайте визначення механічного руху точки.
15. Швидкості та прискорення двох точок тіла за весь час його руху однакові за модулями і напрямками. Чи можна стверджувати, що конкретне тіло рухається поступально?
16. Траєкторії всіх точок тіла є колами. Чи можна стверджувати, що тіло здійснює обертальний рух; поступальний рух?
17. Тіло обертається рівномірно. Чи можна стверджувати, що для всіх його точок $\bar{V} = const$?
18. Прискорення яких точок тіла, що обертається: а) мають рівні модулі; б) мають однакові напрями; в) однакові за модулем і напрямом?
19. Чи можливо таке обертання тіла навколо нерухомої осі, за якого вектори швидкості та прискорення довільної точки тіла взаємно перпендикулярні? Спрямовані по одній прямій?
20. Чи можна визначити, що обертання тіла прискорене або уповільнене, за знаком тільки ω або тільки ε ?
21. Вектор прискорення точок диска, що обертається, спрямований під кутом $\mu = 45^\circ$ до його радіуса. Яке співвідношення між модулями кутової швидкості та кутового прискорення цього диска?
22. Як перевести кутову швидкість, яка виражена в об/хв, у рад/сек?
23. Як спрямовані вектори кутової швидкості і кутового прискорення при уповільненому та прискореному обертаннях?
24. З яких рухів складається плоскопаралельний рух твердого тіла?
25. Що є основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла?
26. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла залежать / не залежать від вибору полюса?
27. Що називається миттєвим центром швидкостей?
28. Як розподілені швидкості точок плоскої фігури відносно МЦШ?

29. Скільки миттєвих центрів швидкостей може мати плоска фігура у певний момент часу?

30. Чи можлива ситуація, коли плоска фігура не має у певний момент часу миттєвого центра швидкостей?

31. Як звичайно можна побудувати миттєвий центр швидкостей. Яка інформація потрібна для цієї побудови?

32. У якому випадку рух плоскої фігури називають миттєво поступальним?

33. Де знаходиться МЦШ для колеса, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні?

34. Як визначається швидкість точки плоскої фігури?

35. Як визначається прискорення точки плоскої фігури?

12 ДИНАМІКА ТОЧКИ

12.1 Основні поняття і визначення. Закони динаміки

Динамікою називають розділ теоретичної механіки, у якому вивчається рух матеріальної точки, матеріальних тіл під дією сил.

У класичній механіці задачі динаміки поділяють традиційно умовно на два типи.

У першому типі задач звичайний рух тіла (або механічної системи) є заданим і треба визначити сили під дією яких здійснюється цей рух (пряма задача динаміки).

Другий тип задач за умовою звичайно має протилежний зміст: в них заданими є сили, а шуканим – рух тіла (обернена задача динаміки).

12.1.1 Основні поняття і визначення

У теоретичній механіці під *матеріальною точкою* розуміють тіло кінцевої маси, розмірами і різницею в русі окремих точок якого можна знехтувати. Наприклад, тіло, що поступально рухається, можна розглядати матеріальною точкою з масою, рівною масі всього тіла. Як правило, матеріальну точку моделюють геометричною точкою, яку наділяють кінцевою масою.

Класична механіка Ньютона використовує поняття *«абсолютна» система координат* і *«абсолютний» час*.

«Абсолютна» система координат – це абсолютно нерухома система координат, до якої справедлив закон інерції Галілея, тобто система координат, по відношенню до якої виконується закон інерції називається *інерціальною*.

«Абсолютний» час – це час, який не залежить від руху тіл і систем відліку, тобто однаковий для всіх спостерігачів, де б вони не знаходились і як би не рухались.

Досвід і спостереження показують, що інерціальною системою координат є геліоцентрична система, полюс якої знаходиться в центрі мас Сонця, а осі направлено на нерухомі зірки.

Будь-яка система координат, що рухається по відношенню до інерціальної нерухомої системи координат поступально, прямолінійно і рівномірно, також виявляється інерціальною.

12.1.2 Закони динаміки

В основу динаміки покладено три закони І. Ньютона, що викладені в «Математических началах натуральной философии» (1687 р.). Закони

Ньютона встановлені шляхом узагальнення і систематизації незлічених результатів досвідів і спостережень.

Перший закон динаміки (закон інерції Галілея). За перший закон динаміки в класичній механіці прийнято перший закон Ньютона. Він, у свою чергу, є узагальненням принципу інерції Галілея на базі понять абсолютно нерухомої системи координат і абсолютного часу.

Згідно з першим законом динаміки: ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямиолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Властивість ізольованої матеріальної точки зберігати стан рівномірного і прямиолінійного руху за відсутності сил називається рухом за інерцією.

Закон інерції відображає одне з основних властивостей матерії – перебувати незмінно в русі.

Із закону інерції також виходить: якщо сила, що діє на точку, дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), то точка перебуває у стані спокою ($\vec{V} = 0$) або рухається з постійною за величиною і напрямом швидкістю ($\vec{V} = const$). Прискорення точки при цьому дорівнює нулю ($\vec{a} = 0$).

Другий закон динаміки (основний закон динаміки). Якщо рух точок ні є рівномірним і прямиолінійним, то на точку діє сила. Закон встановлює, як змінюється швидкість точки під час дії на неї сили. Ним визначається кількісний зв'язок між прикладеною силою та викликаємим прискоренням.

У теоретичній механіці другий закон динаміки сформульовано на базі другого закону Ньютона: сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке пропорційне величині сили і має однаковий з нею напрям.

Другий закон динаміки, як і перший, має місце лише по відношенню до інерціальної системи координат.

Математично цей закон виражається у вигляді наступного основного рівняння динаміки вільної матеріальної точки:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (12.1)$$

де m, \vec{a} – маса і прискорення точки;

\vec{F} – сила, що діє на точку (сила \vec{F} здебільшого є рівнодійною активних сил і реакцій в'язей).

Рівняння (12.1) виражає кількісне співвідношення між трьома фізичними величинами: силою, масою і прискоренням. Відповідно, точки у разі дії однакових сил отримують однакові прискорення лише тоді, коли будуть рівними їх маси. За різних мас точка з більшою масою отримує менше прискорення, тому маса матеріальної точки є мірою її інертних властивостей. Під *інертністю* розуміють властивості точки отримувати під дією сили більше прискорення за меншої маси.

Експериментально доведено, що поблизу земної поверхні маса тіл визначається виразом

$$m = \frac{P}{g}, \quad (12.2)$$

де P – сила ваги тіла; g – прискорення вільного падіння.

У міжнародній системі (СІ) за одиницю маси приймають 1 кг (один кілограм), за одиницю довжини, часу і сили, відповідно, 1 м (один метр), 1 с (одну секунду), 1 Н (один Ньютон). Отже, з урахуванням (1.1), один Ньютон – це сила, що надає масі в 1 кг прискорення 1 м/с²: 1 Н = 1 кг · 1 м/с².

Третій закон динаміки (закон рівності дії і протидії). У теоретичній механіці як третій закон динаміки застосовують третій закон Ньютона. Ним встановлюється характер механічної взаємодії між матеріальними тілами.

На відміну від перших двох, третій закон динаміки справедливий у будь-якій системі координат, а не тільки в інерціальній, бо він не містить кінематичних характеристик руху тіл.

Для двох матеріальних точок (рис. 12.1) він формулюється у такий спосіб: сили взаємодії двох точок (дія і протидія) рівні за величиною, протилежно напрямлені і мають загальну лінію дії.

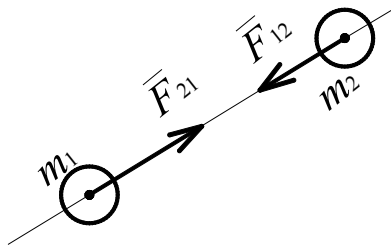


Рисунок 12.1

Тут m_1, m_2 – маси точок, що взаємодіють; \vec{F}_{12} – сила, що діє на тіло 2 з боку тіла 1, а \vec{F}_{21} – навпаки. Слід зазначити, що сила \vec{F}_{12} і \vec{F}_{21} , тобто ця взаємодія, не створює зрівноважену систему сил (двійку сил [22]), тому що прикладені до різних об'єктів.

Четвертий закон динаміки (закон незалежності дії сил або принцип суперпозиції). Якщо на точку діє водночас декілька сил $\vec{F}_k (k = 1, \dots, n)$, то вони еквівалентні одній силі [22] – рівнодійної $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$.

Припустимо, що прикладені до точки сили діють незалежно одна від одної. Тоді, використовуючи основне рівняння динаміки точки (12.1), отримаємо

$$m\vec{a} = \vec{R},$$

де $\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k$ – прискорення точки; \vec{a}_k – прискорення, яке отримує точка у разі дії k -ї сили \vec{F}_k .

Згідно з четвертим законом динаміки: прискорення матеріальної точки, що виникає під час дії на неї декількох сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, яких надають точці окремі сили.

12.2 Диференціальні рівняння динаміки точки

12.2.1 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної точки мають форму, що залежить від способу задання її руху, тому розглянемо кожен з форм окремо.

Векторна форма

Положення точки M масою m в інерціальній системі координат $Oxyz$ визначимо радіусом-вектором \vec{r} (рис. 12.2).

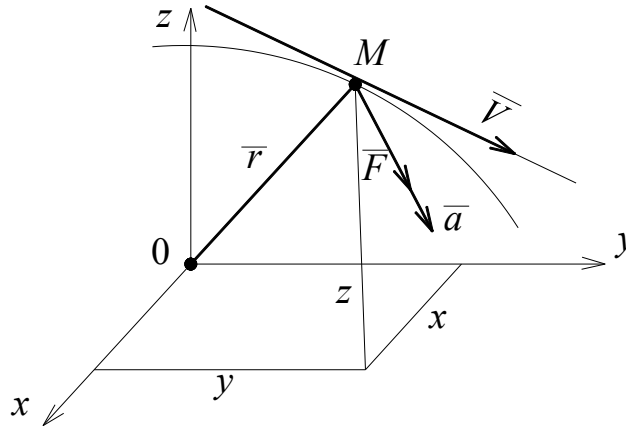


Рисунок 12.2

У здебільшого сила $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$, що діє на точку, може залежати від часу t , положення \vec{r} і швидкості $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$, тому рівняння (12.1) набере вигляду

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (12.3)$$

Координатна форма

Якщо рух точки M задано в координатній формі (рис. 12.2) рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то, спроектувавши рівняння (12.3) на координатні осі, отримаємо

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (12.4)$$

Під час руху точки в площині, наприклад Oxy , одержимо $z = 0$, $F_z = 0$ і такі два рівняння руху:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y.$$

У випадку руху точки вздовж прямої лінії, що співпадає з віссю, наприклад Ox , отримаємо одне диференціальне рівняння прямолінійного руху: $m\ddot{x} = F_x$.

Натуральна форма

Спроектуємо основне рівняння динаміки (12.1) на натуральні осі і врахувавши, що прискорення $a_\tau = \dot{V}_\tau$, $a_n = V^2 / \rho$, $a_b = 0$, одержуємо:

$$m\dot{V}_\tau = F_\tau, \quad mV^2 / \rho = F_n, \quad 0 = F_b, \quad (12.5)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії в точці M (рис. 12.3).

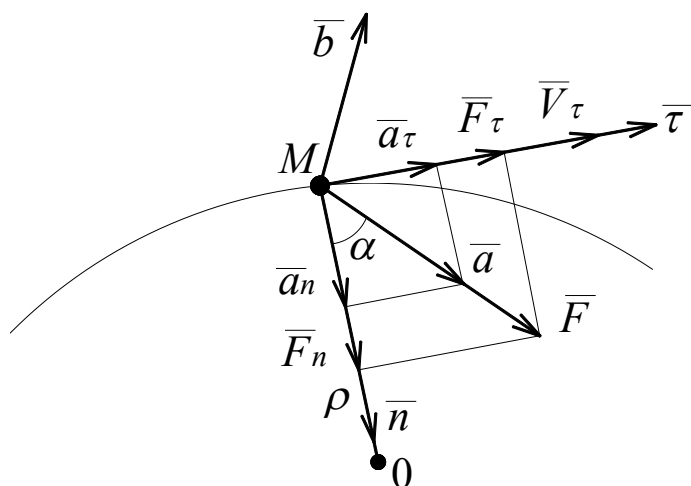


Рисунок 12.3

Якщо траєкторія точки є плоскою, то отримаємо

$$m\dot{V}_\tau = F_\tau,$$

$$mV^2 / \rho = F_n.$$

Рівняння (12.5) називаються також диференціальними рівняннями руху точки у формі Ейлера [12].

12.2.2 Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

Під час дослідження руху матеріальної точки розглядаються і розв'язуються дві основні задачі динаміки.

Пряма (перша) задача динаміки: задано масу m і закон руху точки, треба визначити рівнодійну прикладених до точки сил.

Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), то враховуючи рівняння (12.4) проекції рівнодійної визначаються за формулами

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Отже, модуль (величина) і напрямні косинуси рівнодійної сили будуть такі:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, Ox}) = F_x / F; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, Oy}) = F_y / F; \\ \cos(\widehat{\vec{F}, Oz}) = F_z / F.$$

Якщо рух матеріальної точки задано в натуральній формі, то за рівняннями (2.3) і рис. 12.2 отримаємо:

$$F_\tau = m\dot{V}_\tau = m\ddot{\sigma}; \quad F_n = mV^2 / \rho,$$

де σ – дугова координата точки.

Модуль сили і напрям визначимо (рис. 12.3) при цьому за формулами

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Друга (обернена) задача динаміки: задано масу m точки, прикладену до неї силу \vec{F} , а також початкове положення (x_0, y_0, z_0) точки та її початкова швидкість $(V_{0x} = \dot{x}_0, V_{0y} = \dot{y}_0, V_{0z} = \dot{z}_0)$, треба визначити рівняння руху точки.

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (12.3), (12.4) і (12.5).

Як правило, якщо рух точки задано в координатній формі (12.4), друга задача динаміки призводить до необхідності розв'язання системи трьох взаємозалежних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Проінтегрувавши систему рівнянь (12.6), отримаємо розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, \dots, C_6), \\ y &= y(t, C_1, \dots, C_6), \\ z &= z(t, C_1, \dots, C_6), \end{aligned} \quad (12.7)$$

де C_{1-6} – сталі інтегрування.

Кількість сталих інтегрування в окремому розв'язку системи (12.7) визначається в кожному конкретному випадку ступенем взаємозв'язності рівнянь початкової системи (12.6). Ця кількість може змінюватися від двох до шести.

Сталі інтегрування у розв'язку (12.7) визначаються завданням початкових умов руху точки, тобто значень координат точки і проєкцій її швидкості в початковий момент часу $t = t_0$ (звичайно приймають $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (12.8)$$

З метою використання початкової швидкості точки під час визначенні сталих інтегрування продиференціюємо за часом рівняння руху (12.4):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Якщо тепер в (12.7) і (12.9) підставимо початкові умови руху точки (12.8), то одержимо систему шести алгебраїчних рівнянь з шістьма невідомими сталими інтегрування:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{x}_0 &= \dot{x}(t_0, C_1, \dots, C_6); \\ y_0 &= y(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{y}_0 &= \dot{y}(t_0, C_1, \dots, C_6); \\ z_0 &= z(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{z}_0 &= \dot{z}(t_0, C_1, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (12.10)$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно сталих C_i ($i = 1, \dots, 6$), знайдемо

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (12.7), одержимо закон руху точки, що відповідає заданим початковим умовам (12.9):

$$\begin{aligned}x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).\end{aligned}$$

Розглядаючи рух точки в натуральній формі для розв'язання другої задачі динаміки застосовують рівняння (12.5). Початковими умовами руху в цьому разі є значення дугової координати $\sigma(t_0) = \sigma_0$ і початкової швидкості $V_\tau(t_0) = \dot{\sigma}_0$ при $t = t_0$. Розв'язок першого з рівнянь (12.5) стосовно дугової координати матиме вигляд

$$\sigma = \sigma(t, C_1, C_2). \quad (12.11)$$

Постійні інтегрування знаходимо з рівнянь

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sigma(t_0, C_1, C_2), \\ \dot{\sigma}_0 &= \dot{\sigma}(t_0, C_1, C_2).\end{aligned} \quad (12.12)$$

Розв'язок алгебраїчних рівнянь (12.12) надає сталі інтегрування

$$C_i = C_i(t_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0) \quad (i = 1, 2), \quad (12.13)$$

що залежать від заданих початкових умов σ_0 і $\dot{\sigma}_0$.

Підставивши співвідношення (12.13) у вираз (12.11) одержимо закон зміни дугової координати за часом:

$$\sigma = \sigma(t_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0).$$

Далі визначають звичайно радіус кривини ρ траєкторії рухомої точки з другого рівняння (12.5), приймаючи

$$V_\tau = \dot{\sigma}(t, \sigma_0, \dot{\sigma}_0).$$

Отже, узагальнена методика розв'язання другої задачі динаміки матеріальної точки включає такі етапи:

- 1) складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовою задачі;
- 2) інтегрування одержаних рівнянь;
- 3) визначення відповідних значень сталих інтегрування;
- 4) знаходження закону руху точки, а також інших шуканих в задачі величин.

12.2.3 Диференціальні рівняння руху невідільної матеріальної точки

Рух точки, на який накладено певні обмеження з боку накладених в'язей, є невідільним [22]. Отже, будемо називати матеріальну точку невідільною, а її рух – невідільним рухом, якщо внаслідок тих чи інших обмежень вона виконує рух у чітко фіксованій частині простору: по чітко фіксованій лінії, площині, або поверхні.

Під час вивчення невідільного руху точки застосовують звичайно теорему при звільненні від в'язей [22], замінюючи їх дію реакціями в'язей.

У такому випадку точку можна вважати вільною, але такою, на яку діють не тільки активні сили \bar{F} , а також і реакції в'язей \bar{R} .

У цьому випадку основне рівняння динаміки (12.1) у векторній формі можна записати у вигляді

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}. \quad (12.14)$$

Векторному рівнянню (12.14) за координатної форми завдання руху точки відповідають, враховуючи (12.14), рівняння

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (12.15)$$

Особливістю цих рівнянь є те, що в них реакції в'язей R_x, R_y, R_z є невідомими функціями часу, тому розв'язати їх неможливо. у цьому разі треба скласти ще три додаткових рівняння, які враховували б властивості в'язей, та їх відповідні реакції. Розглянемо особливості розв'язання задач динаміки невідільної точки, коли, наприклад, вона рухається по ідеальній гладкій нерухомій поверхні, по ідеально гладкій нерухомій кривій.

Рух невідільної точки по ідеально гладкій нерухомій поверхні

Для вивчення руху матеріальної точки M по ідеально гладкій нерухомій поверхні під дією сили \bar{F} застосуємо таке положення статички [22]: реакція \bar{R} абсолютно гладенької поверхні S спрямована завжди (рис. 12.4) перпендикулярно до поверхні у точці стику.

У випадку координатного способу задання руху точки M використовуємо рівняння (12.4):

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (12.16)$$

Тут координати точки $M(x, y, z)$ повинні задовольняти рівнянню поверхні S :

$$f(x, y, z) = 0. \quad (12.17)$$

Додатково використовуємо властивості в'язі точки – її ідеальність [12]:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad (12.18)$$

$$R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

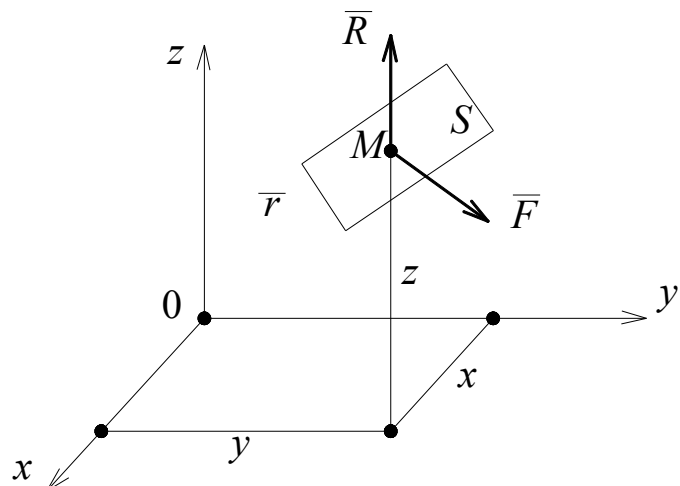


Рисунок 12.4

де λ – коефіцієнт, що відповідає умовам колінеарності векторів \bar{R} та $\overline{grad f}$.

З урахуванням (12.18) рівняння (12.16) набуває вигляду

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (12.19)$$

Приєднуючи до цих рівнянь рівняння в'язі (12.17), отримаємо систему з чотирма невідомими: x, y, z і λ .

Рівняння (12.19), з урахуванням (12.17), називаються рівняннями Лагранжа першого роду.

Після знаходження невідомих x, y, z, λ , а також за формулами (12.18) проєкцій реакції в'язі, визначають її модуль

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Рух невільної точки по ідеально гладкій нерухомій кривій

Врахуємо, що криволінійна траєкторія точки M утворюється внаслідок перетину двох поверхонь (рис. 12.5):

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0. \quad (12.20)$$

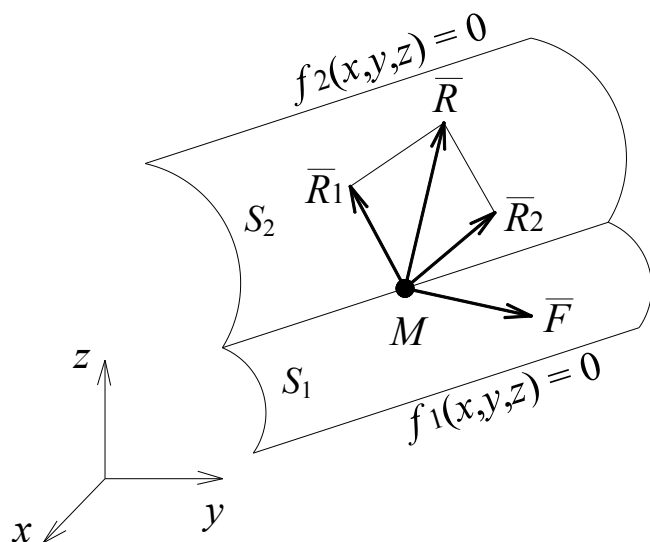


Рисунок 12.5

У цьому випадку в рівняннях (12.16) реакцію \bar{R} слід розглядати як суму реакцій:

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2, \quad (12.21)$$

де \bar{R}_1, \bar{R}_2 – реакції поверхонь S_1 і S_2 .

Отже, диференціальні рівняння точки M матимуть вигляд

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_{1x} + R_{2x}; \\ m\ddot{y} &= F_y + R_{1y} + R_{2y}; \\ m\ddot{z} &= F_z + R_{1z} + R_{2z}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Приєднаємо до рівнянь (12.22) два рівняння в'язей (поверхонь) та умови ідеальності в'язей (колінеарності векторів \bar{R}_1 і $\overline{grad} f_1$ [12]) отримаємо дев'ять рівнянь з дев'ятьма невідомими. З цих рівнянь виключимо проєкції в'язей, використавши доданки Лагранжа λ_1 та λ_2 :

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}; & F_{1y} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}; & F_{1z} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}; \\ F_{2x} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; & F_{2y} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; & F_{2z} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}$$

У результаті рівняння (21) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; & m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Система рівнянь (12.23) разом з рівняннями в'язей (12.20) утворює систему п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$.

12.2.4 Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

У класичній механіці диференціальні рівняння (12.3), (12.4), (12.5) і (12.14) описують абсолютний рух вільної або невільної матеріальної точки незмінної маси в інерціальній нерухомій системі координат. На практиці часто виникає необхідність дослідити рух матеріальної точки відносно довільної неінерціальної системи координат, тобто визначення диференціальних рівнянь відносного руху точки в системі координат, що зв'язана з тілом, котре виконує здебільшого складний рух.

Отже, представимо абсолютний рух точки сукупністю відносного та переносного рухів. При цьому, відповідно до теореми про додавання прискорень (теореми Коріоліса), абсолютне прискорення точки \bar{a}_a дорівнює векторній сумі відносного \bar{a}_r , переносного \bar{a}_e прискорень та прискорення Коріоліса \bar{a}_c [22]:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (12.24)$$

Уявимо далі інерційну систему координат $Oxyz$ (рис. 12.6), яку вважатимемо нерухомою. Відносно неї рухається система координат $O_1x_1y_1z_1$, зв'язана з деяким несучим тілом. Розглянемо рух матеріальної точки M масою m , на яку діють активна сила \bar{F} і реакція в'язі \bar{R} з боку несучого тіла. Рух цієї точки відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ є абсолютним, а відносно рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ – відносним. Характер переносного руху точки встановлюється при цьому рухом рухомої системи координат відносно нерухомої.

Підставимо далі (12.24) в диференціальне рівняння руху (12.14) невільної матеріальної точки:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c) = \bar{F} + \bar{R},$$

звідки одержимо

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c, \quad (12.25)$$

де $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_c$, $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ – відповідно переносна і коріолісова сила інерції.

Рівняння (12.25) називається *основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки*. На відміну від звичайних сил (наприклад, сили ваги) переносна $\bar{\Phi}_e$ і коріолісова $\bar{\Phi}_c$ сили інерції залежать від вибору неінерціальної системи координат $O_1x_1y_1z_1$, її розташування на несучому тілі. Їх прикладають до точки фіктивно, виключно для моделювання рівняння (12.25) у формі другого закону Ньютона.

Розглянемо окремі випадки відносного руху точки.

Якщо матеріальна точка відносно рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ рухається рівномірно та прямолінійно, то відносна швидкість $\bar{V}_r = const$, а відносне прискорення $\bar{a}_r = 0$, тому за (12.25) матиме

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c = 0.$$

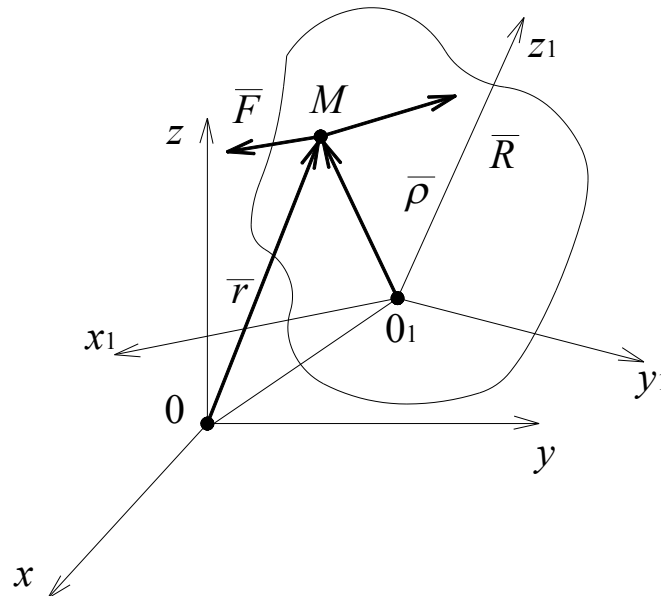


Рисунок 12.6

Якщо матеріальна точка перебуває у стані спокою відносно рухомої системи координат, то її відносні швидкості і прискорення та коріолісове прискорення дорівнюють нулю. Отже, дістанемо рівність

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0,$$

що виражає умову відносної рівноваги матеріальної точки.

Якщо рухома система координат здійснює відносно інерціальної системи координат поступальний, рівномірний і прямолінійний рух, то у цьому разі переносна та коріолісова сили інерції дорівнюють нулю. Тоді основне рівняння динаміки відносно руху набере вигляду

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R}. \quad (12.26)$$

Це рівняння за формою збігається з рівнянням (12.14) для невільної точки, тобто прискорення точки відносно рухомої і інерційної систем координат співпадають. Отже, другий закон Ньютона справедливий у даному випадку і для відносного руху матеріальної точки, тому рухома система координат $O_1x_1y_1z_1$, що рухається поступально, рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної нерухомої системи координат $Oxyz$ є також інерціальною. Ця особливість виражає принцип відносності класичної механіки, який стверджує: за однакових початкових умов механічні явища в різних інерціальних системах координат відбуваються однаково.

Приклад 12.1. Важка точка M піднімається по шорсткій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. У початковий момент швидкість точки дорівнювала 15 м/с . Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$. Який шлях пройде точка до зупинки? За який час точка пройде цей шлях?

Розв'язання

Нарисуємо ділянку руху AB і зобразимо матеріальну точку M в довільному положенні (рис. 12.7).

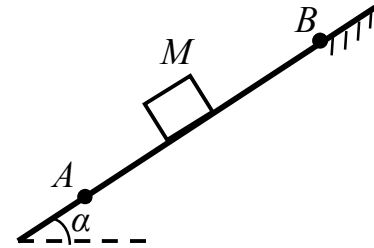


Рисунок 12.7

Виберемо систему координат Axy , помістивши її початок у початковій точці A ділянки AB і спрямувавши вісь Ax уздовж прямої AB у бік руху (рис. 12.8). За такого вибору системи координат початкові умови будуть такими:

$$x_0 = 0, \quad V_{0x} = V_{Ax} = V_A.$$

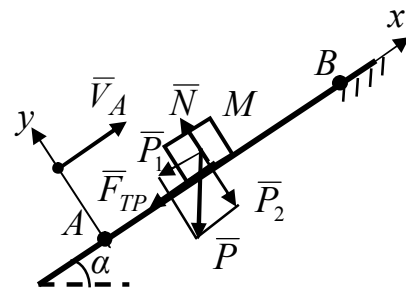


Рисунок 12.8

У кінцевій точці B ділянки:

$$x_B = AB, \quad V_{Bx} = V_B = 0,$$

де $V_B = 0$, тому що точка M за умовою задачі зупиняється в кінцевій точці B ділянки.

Покажемо швидкість \vec{V}_A на схемі руху. Швидкість $V_B = 0$, тому на схемі руху її не показано.

Покажемо сили і реакції в'язей (рис. 12.9). На точку M будуть діяти: сила ваги \vec{P} , яку розкладемо на координатні складові \vec{P}_1 ($P_1 = P \cdot \sin \alpha$) і \vec{P}_2 ($P_2 = P \cdot \cos \alpha$), нормальна реакція поверхні \vec{N} ; сила тертя ковзання \vec{F}_{TP} ($F_{TP} = fN$) спрямована у бік, протилежний руху точки.

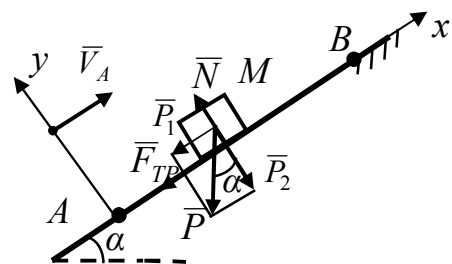


Рисунок 12.9

Складемо диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P_1 - F_{TP}; \\ 0 = N - P_2 \Rightarrow N = P_2 = P \cos \alpha. \end{cases} \quad (12.27)$$

Спочатку виразимо силу ваги $P = mg$ через масу точки m і прискорення вільного падіння g , а силу тертя визначимо, скориставшись другим рівнянням системи (12.27):

$$F_{TP} = fN = fP \cos \alpha = fmg \cos \alpha .$$

Тоді перше рівняння (12.27) набуде вигляду

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

Скоротимо обидві частини рівняння на m :

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Для інтегрування отриманого диференціального рівняння замінімо \ddot{x} на $\frac{d\dot{x}}{dt}$ і розділимо змінні:

$$d\dot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot dt .$$

Візьмемо невизначені інтеграли від обох частин рівняння:

$$\int d\dot{x} = \int -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot dt .$$

Вираз $-g(\sin \alpha + f \cos \alpha) = const$, тому його можна винести з-під знака інтеграла. У результаті одержимо

$$\dot{x} = V_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1, \quad (12.28)$$

де C_1 – постійна інтегрування.

Представивши $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ і зробивши аналогічні дії, одержимо

$$x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad (12.29)$$

де C_2 – постійна інтегрування.

Підставимо початкові умови ($V_{ox} = V_A$, $x_0 = 0$) у вирази (12.28) і (12.29):

$$\begin{cases} V_A = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 \\ 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2. \end{cases} \quad (12.30)$$

Розв'язавши рівняння (12.30), визначимо постійні інтегрування:

$$\begin{aligned} C_1 &= V_A; \\ C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Підставивши (12.31) у (12.28) і (12.29), одержимо:

$$\begin{aligned} \dot{x} = V_x &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot t + V_A; \\ x &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + V_A t. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Підставимо далі умови в кінцевій точці B ділянки ($V_B = 0$, $x_B = AB$) у вираз (2.30):

$$\begin{cases} 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \tau + V_A \\ AB = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau. \end{cases} \quad (12.33)$$

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (12.33), визначимо шукані величини τ й AB .

З першого рівняння (12.33)

$$\tau = \frac{V_A}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{15}{10 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,87)} = \frac{15}{5,87} = 2,5 \text{ (с)}.$$

З другого рівняння (12.32):

$$\begin{aligned} AB &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau = -5,87 \cdot \frac{15^2}{2 \cdot 5,87^2} + 15 \cdot \frac{15}{5,87} = \\ &= \frac{15^2}{5,87} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{15^2}{5,87 \cdot 2} = \frac{225}{11,74} = 20 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Відповідь: Точка до зупинки пройде шлях $AB = 20$ м за час $\tau = 2,5$ с.

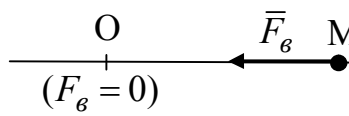
12.3 Прямолінійні коливання матеріальної точки

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються *механічними коливаннями*. При цьому на матеріальну точку можуть діяти відновлююча сила (сила, що залежить від положення точки і намагається повернути точку в положення рівноваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, та збурююча сила, задана функцією часу. Розглянемо один із простіших випадків руху – прямолінійні коливання матеріальної точки.

Залежно від комбінації цих сил в лінійних системах розрізняють такі види коливального руху: вільні незатухаючі, затухаючі і вимушені.

12.3.1 Вільні незатухаючі коливання

Існує клас сил, що називаються *відновлюючими*, модулі яких у лінійних задачах є пропорційними відхиленню точки від положення, де ці сили дорівнюють нулю, і напрямленими до цього положення:



$$F_g = c \cdot MO, \quad (12.34)$$

де c – коефіцієнт пропорційності.

Як буде показано в подальшому, відновлюючі сили надають руху точки коливальний характер. Коливання, які відбуваються під дією тільки відновлюючої сили, називаються *вільними незатухаючими*.

Фізична природа відновлюючих сил може бути різною. Це може бути пружна сила пружини, сила Архімеда у випадку тіла, що плаває на поверхні рідини та ін. У подальшому як відновлюючу будемо розглядувати силу пружності пружини, за допомогою якої, до речі, моделюються пружні властивості реальних тіл. У лінійних задачах сила пружності відповідає закону Гука:

$$F_{np} = c \cdot \lambda, \quad (12.35)$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини, що показує, яку силу треба прикласти до кінця пружини для її деформації на одиницю довжини;

λ – деформація пружини (різниця між довжиною пружини у певному стані (розтягнутому або стиснутому) і недеформованому).

Розглянемо вертикальні коливання вантажу маси m , що підвішений до пружини жорсткості c і здійснює поступальний рух. У цьому випадку вантаж можна вважати матеріальною точкою маси m . Визначимо рівняння руху точки.

Для цього зобразимо точку на розрахунковій схемі у довільному положенні (рис. 12.10). Тут \bar{P} – сила ваги ($P = m \cdot g$); \bar{F}_{np} – сила пружності.

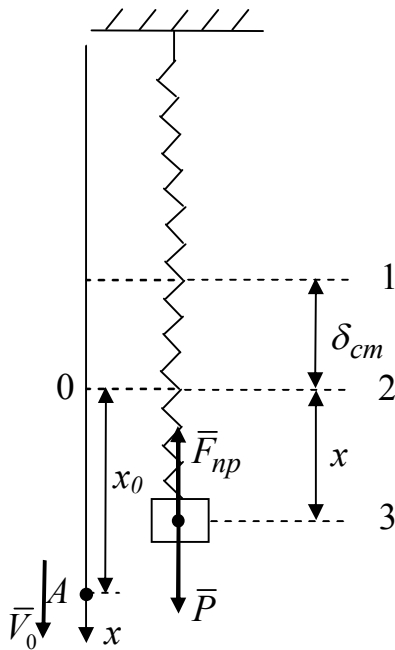


Рисунок 12.10

Послідовно позначимо на схемі три характерних рівня:

Рівень 1 – відповідає вільному кінцю недеформованої пружини (у цьому положенні $F_{np} = 0$);

Рівень 2 – положення статичної рівноваги точки, рух якої досліджується (це положення буде нижчим за рівень 1, оскільки під час приєднання вантажу до кінця недеформованої пружини остання буде розтягнутою під дією сили ваги \bar{P} точки). Відстань між рівнями 1 (недеформованої пружини) і 2 (статичної рівноваги точки) називається *статичною деформацією пружини* і позначається δ_{cm} .

У положенні рівноваги точки $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$,

або $P - F_{np} = 0$. Остання рівність, враховуючи формулу (12.35), де деформація пружини $\lambda = \delta_{cm}$ набуде вигляду

$$P - c \cdot \delta_{cm} = 0. \quad (12.36)$$

Рівень 3 – довільне положення точки під час коливань (як правило, рівень 3 зображують так, щоб рівні 1, 2, 3 йшли на схемі послідовно).

Початок системи координат вибираємо в положенні рівноваги точки (рівень 2), а вісь x направляємо у бік зростання цифр 1, 2, 3 на схемі (рис. 12.10). У такому разі довільне положення буде знаходитись в області додатних значень координати x .

Складемо диференціальне рівняння руху точки. Для цього спроектуємо основне рівняння динаміки

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

на вісь x :

$$m\ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x),$$

де $\lambda = \delta_{\text{ст}} + x$ – повна деформація пружини у довільному положенні. З урахуванням рівності (12.26) права частина останнього рівняння спроститься:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (12.37)$$

Після перетворень *диференціальне рівняння вільних коливань* матеріальної точки набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12.38)$$

$$\text{де } \omega_0 = \sqrt{c/m}.$$

Таким чином, рух матеріальної точки під дією тільки відновлюючої сили описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння (12.38). Оскільки корені характеристичного рівняння $z^2 + \omega_0^2 = 0$, що відповідає рівнянню (12.38), є уявними ($z_{1,2} = \pm i\omega_0$, де $i = \sqrt{-1}$), то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (12.38) буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \quad (12.39)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Отримаємо далі похідну за часом від координати x :

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (12.40)$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначимо, склавши початкові умови. Припустимо, що матеріальна точка почала рухатись, маючи додатні значення початкової координати (точка А на рис. 12.10) і проекції швидкості:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0. \quad (12.41)$$

Підставляючи умови (12.41) у вирази функцій координати (12.39) і швидкості (12.40) точки, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідки сталі інтегрування } C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Після підставки сталих інтегрування вираз (12.39), набуде вигляду

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (12.42)$$

Рівняння (12.42) називається *рівнянням вільних незатухаючих коливань* матеріальної точки.

Проаналізуємо їх властивості.

Для зручності аналізу перетворимо рівняння (12.39) (або (12.42)), вводячи позначки $C_1 = A \cdot \sin s \varphi_0$, $C_2 = A \cdot \cos \varphi_0$, у форму

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.43)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ (або з урахуванням початкових умов

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}}, \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0}{V_0}.$$

У законі коливань точки (12.43) параметр A є *амплітудою коливань* (найбільше відхилення точки від положення рівноваги), аргумент $\omega_0 t + \varphi_0$ називається *фазою коливань*, а величина φ_0 – *початковою фазою*. Параметр ω_0 має назву *колової частоти коливань* (або *власної частоти*). Колова частота визначає кількість коливань за проміжок часу 2π секунд і вимірюється у *рад/с* (або *1/с*). Слід зазначити, що в технічній літературі використовується і звичайна частота f , яка визначає кількість коливань за 1 секунду, вимірюється в *Гц* (Герц) і зв'язана з коловою частотою співвідношенням $\omega_0 = 2\pi f$.

Побудуємо графік вільних коливань (функції (12.43)).

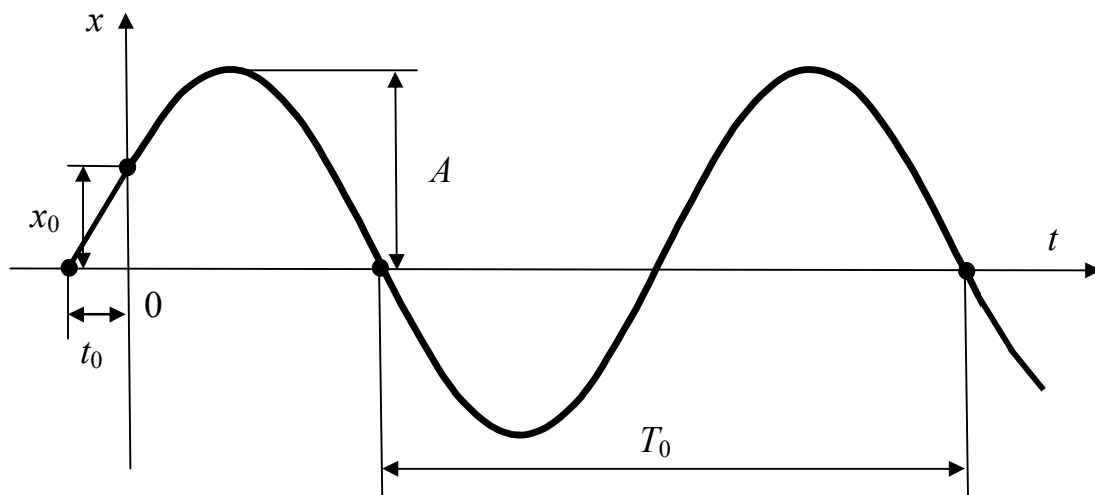


Рисунок 12.11

На рисунку 12.11 маємо: x_0 – початкове відхилення точки від положення її рівноваги; A – амплітуда коливань; t_0 – інтервал часу, $t_0 = \varphi_0 / \omega_0$; T_0 – період коливань (проміжок часу, протягом якого відбувається повне коливання).

Залежність між періодом і коловою частотою визначається з умови періодичності руху і має вигляд

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f}. \quad (12.44)$$

Вільні коливання мають такі властивості:

1. Згідно з формулою (12.43) вільні коливання є незатухаючими гармонійними, бо здійснюються за законом синуса з власною частотою ω_0 . Це обумовлено дією на точку лише консервативної сили \bar{F}_{np} пружини, тому розглянута на рисунку 12.10 механічна система називається консервативною.

2. Як видно з формул (12.37) і (12.44), власна частота ω_0 і період T_0 від початкових умов не залежать, а визначаються тільки параметрами системи (жорсткістю c і масою m). Така властивість механічної системи має назву ізохронності коливань.

3. Амплітуда A і початкова фаза φ_0 , як витікає зі співвідношень (12.43), залежать від початкових умов. За $x_0 = 0$; $V_0 = 0$ коливання не виникають.

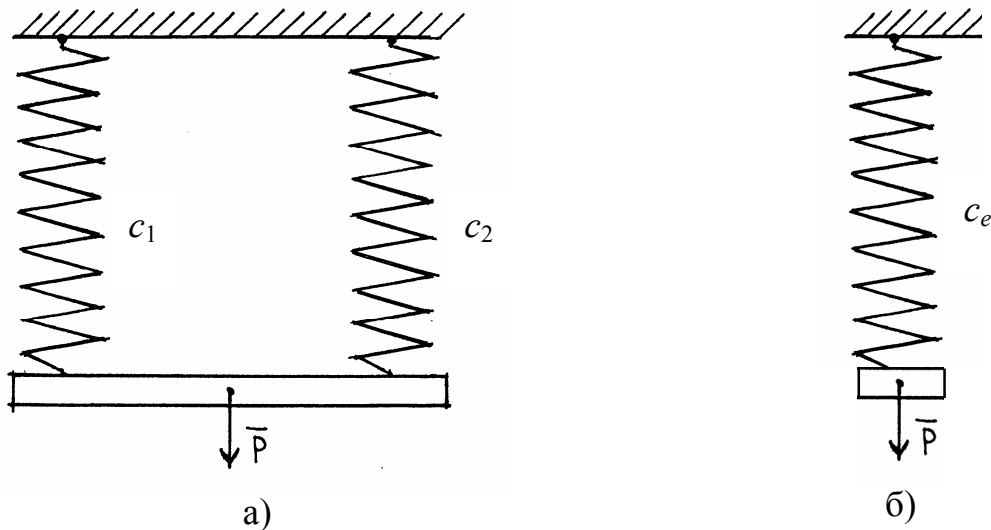


Рисунок 12.12

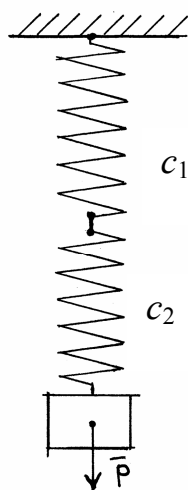


Рисунок 12.13

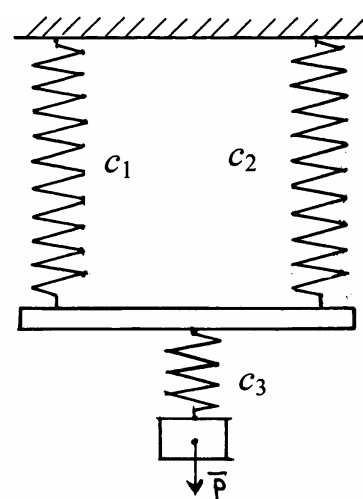


Рисунок 12.14

На практиці в реальних вузлах, агрегатах машин пружини (амортизатори), які з'єднують вантаж з основою, можуть утворювати

систему паралельно, послідовно і паралельно-послідовно (змішано) з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку початкові механічні схеми системи необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість c_e . Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі під час паралельного з'єднання пружних елементів (рис. 12.12, а) буде мати жорсткість $c_e = c_1 + c_2$ (рис. 12.12, б). Під час послідовного з'єднання пружних елементів (рис. 12.13) еквівалентна жорсткість $c_e = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2)$. Під час змішаного з'єднання елементів (рис. 12.13) отримаємо $c_e = (c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3) / (c_1 + c_2 + c_3)$ (рис. 12.14).

12.3.2 Вільні коливання за наявності сил опору (затухаючі коливання)

У випадку з'єднання вантажу з основою за допомогою металевих амортизаторів, а також під час руху в середовищі (рідині) на матеріальну точку діє сила опору, яку за малих швидкостей руху вважають прямо пропорційною швидкості точки і напрямленою в бік, протилежний швидкості: $\bar{R} = -b\bar{V}$, де b – коефіцієнт опору середовища, його розмірність Н·с/м або кг/с. Коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору (в'язкого тертя), називаються *затухаючими*, а механічна схема називається дисипативною.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як і на рис. 12.10, тільки додається сила опору \bar{R} (під час зображення сили опору вважаємо, що точка рухається в бік додатного напрямку осі x) (рис. 12.15). Умовні позначення на рисунки 12.10 і 12.15 співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки матиме вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R}$$

або $m\ddot{x} = P - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x}$,

або, враховуючи (12.36), $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.

Розділимо всі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad (12.45)$$

де h – коефіцієнт демпфірування коливань, його розмірність c^{-1} .

Тоді диференціальне рівняння вільних коливань за наявності сил опору буде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (12.46)$$

Характеристичне рівняння для (12.46)

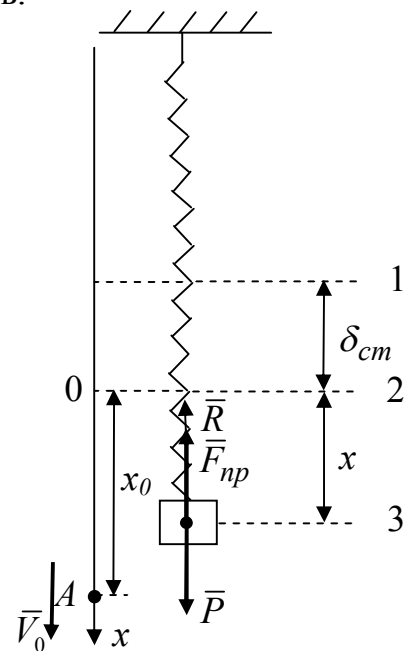


Рисунок 12.15

має вигляд

$$z^2 + 2hz + \omega_0^2 = 0,$$

а його корені дорівнюють

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (12.47)$$

Із (12.47) видно, що характер руху точки істотним чином залежить від співвідношення h і ω_0 : якщо $h \geq \omega_0$, то корені характеристичного рівняння дійсні, якщо $h < \omega_0$ – то комплексні. Розглянемо ці випадки.

За $h > \omega_0$ (випадок великого опору) загальний розв'язок диференціального рівняння (12.46) матиме вигляд

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (12.48)$$

Це рівняння описує *аперіодичний (не коливальний) згасаючий рух*. Координата x точки за $t \rightarrow \infty$ монотонно зменшується по експоненті (оскільки корені p_1 і p_2 від'ємні), і точка наближається до положення статичної рівноваги. Графіки функції (12.48) за різних початкових умов (криві 1, 2, 3 за $V_0 > 0$; $V_0 \leq 0$ і $|V_0| < |p_2| x_0$; і $V_0 > 0$ і $|V_0| > |p_2| x_0$ відповідно) наведені на рис. 12.16.

Якщо $h = \omega_0$ (граничний випадок), то загальний розв'язок диференціального рівняння (12.46) матиме вигляд

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t), \quad (12.49)$$

де $C_1 = x_0$; $C_2 = \dot{x}_0 + h \cdot x_0$.

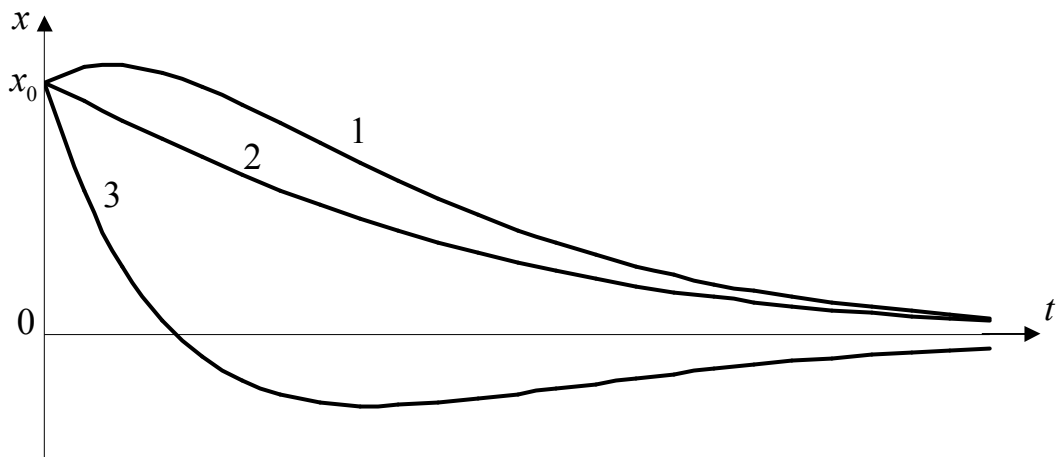


Рисунок 12.16

Такий рух також є *аперіодичним згасаючим* ($x \rightarrow 0$ за $t \rightarrow \infty$).

За $h < \omega_0$ (випадок малого опору) загальний розв'язок диференціального рівняння (12.46) матиме вигляд

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t), \quad (12.50)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов ($C_1 = x_0$; $C_2 = (V_0 + hx_0) / \omega_0^*$), а величина

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} . \quad (12.51)$$

Рівняння (12.50) називається рівнянням затухаючих коливань матеріальної точки. Для зручності графічного аналізу перетворимо рівняння (12.51), аналогічно (12.43), у форму

$$x = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(\omega_0^* t + \varphi_0), \quad (12.52)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ (або з урахуванням початкових умов

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + hx_0)^2}{\omega_0^{*2}}, \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0^*}{V_0 + hx_0}).$$

З рівняння (12.52) видно, що рух точки має *затухаючий коливальний характер* (оскільки $e^{-ht} \rightarrow 0$ за $t \rightarrow \infty$), а величина ω_0^* є *коловою частотою затухаючих коливань*. Графік функції (12.52) наведений на рис. 12.17.

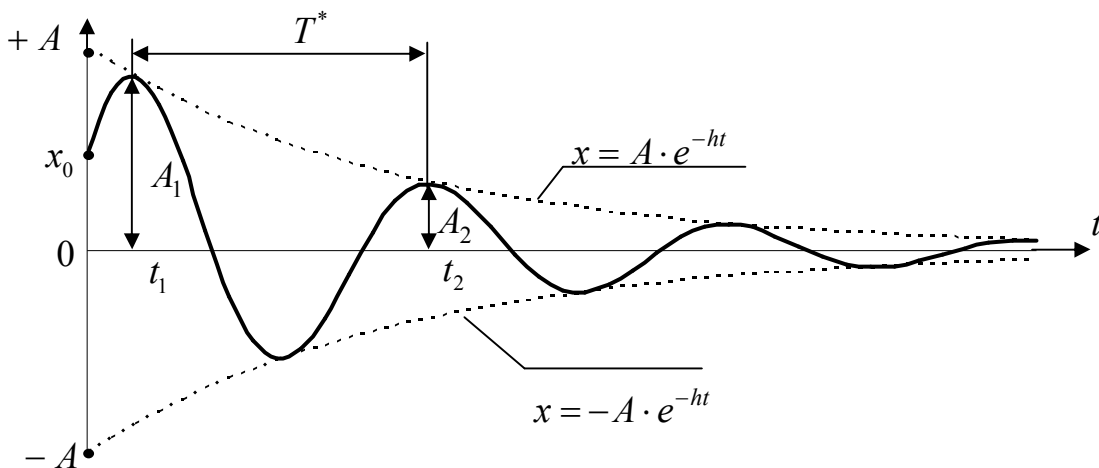


Рисунок 12.17

На рисунку 12.17 $x_0 = A \cdot \sin \varphi_0$, а криві $x = A \cdot e^{-ht}$ і $x = -A \cdot e^{-ht}$ є границями області, усередині якої розташовується графік руху. Рух точки є коливальним, але не періодичним, оскільки з часом послідовні максимальні відхилення точки від положення рівноваги A_1, A_2, \dots зменшуються. Проте проміжок часу T^* між цими відхиленнями є величиною сталою і дорівнює

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (12.53)$$

Величину T^* умовно називають *періодом затухаючих коливань*. Зрівнюючи формули (12.44) і (12.53), можна зробити висновок, що період затухаючих коливань більший за період відповідних вільних незатухаючих коливань точки, тобто завжди $T^* > T$.

Розглянемо відношення послідовних максимальних відхилень точки від положення рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{\cancel{A} \cdot e^{-ht_2} \cdot \sin(\omega_0^* t_2 + \varphi_0)}{\cancel{A} \cdot e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-h(t_1+T^*)} \cdot \sin(\omega_0^* (t_1 + T^*) + \varphi_0)}{e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \\ &= \frac{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot e^{-hT^*} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + 2\pi + \varphi_0)}{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-hT^*} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)}{e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = e^{-hT^*}. \end{aligned}$$

Таким чином, відношення послідовних амплітуд затухаючих коливань стало і дорівнює

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = e^{-hT^*}. \quad (12.54)$$

Величина η (знаменник геометричної прогресії, за якою спадають амплітуди затухаючих коливань) називається *декрементом затухаючих коливань*, а модуль натурального логарифма цієї величини

$$\Lambda = |\ln \eta| = hT^* \quad (12.55)$$

називається *логарифмічним декрементом затухаючих коливань*. Поняття про декремент затухаючих коливань використовують під час експериментального визначення коефіцієнта опору середовища.

12.3.3 Вимушені коливання

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім відновлюючої сили, діє збурювання, яке змінюється за часом, або якщо відбувається переміщення точки прикріплення до основи пружини чи пружного тіла.

12.3.3.1 Силowe збудження коливань

У цьому випадку коливання виникають у разі безпосередньої дії на точку збурюючої сили. Ця сила може бути довільною функцією часу, проте розглянемо простіший, але практично важливий випадок, коли сила змінюється за гармонійним законом

$$Q = H_B \cdot \sin \omega_B t, \quad (12.56)$$

де H_B , ω_B – амплітуда і колова частка збурюючої сили.

Випадок консервативної системи

Механічна система, яка моделює такий випадок коливань зображена на рис. 12.18. Умовні позначення на рис. 12.10 ф 12.18 співпадають, однак тут до матеріальної точки окрім сил ваги \bar{P} і пружності \bar{F}_{np} прикладена збурююча сила \bar{Q} .

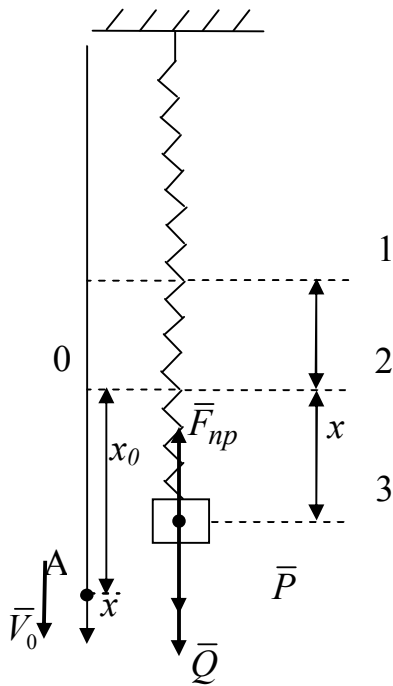


Рисунок 12.18

Отже, рівняння динаміки точки матиме вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_y + \bar{Q}$$

$$\text{або } m\ddot{x} = mg - c(\delta_{\text{ст}} + x) + H_B \sin \omega_B t,$$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + cx = H_B \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{H_B}{m}. \quad (12.57)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (12.58)$$

Рівняння (12.58) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (12.58) подамо у вигляді

$$x = x_1 + x_2, \quad (12.59)$$

де x_1 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;

x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (12.39):

$$x_1 = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t. \quad (12.60)$$

Під час визначення частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_B \neq \omega_0; \quad \omega_B \approx \omega_0; \quad \omega_B = \omega_0.$$

У випадку $\omega_B \neq \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота механічної системи різні) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot \sin \omega_B t. \quad (12.61)$$

Підставляючи (12.59) у (12.56), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$-\omega_B^2 A_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_0^2 A_B \cdot \sin \omega_B t = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Це рівняння виконується для будь-якого t , якщо

$$A_B = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2}. \quad (12.62)$$

Підставляючи (12.60) у (12.59), а (12.59) і (12.587) у (12.57), отримаємо загальний розв'язок рівняння (12.56):

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (12.63)$$

Визначимо сталі інтегрування C_1, C_2 , які входять у формулу (12.63), за допомогою початкових умов (12.41). Для цього продиференціюємо за часом формулу (12.61):

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.64)$$

Підставляючи початкові умови (12.41) у вирази (12.63) і (12.64), отримаємо

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

З останніх рівнянь сталі інтегрування будуть:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right).$$

Підставляючи знайдені сталі інтегрування у вираз (12.63), отримаємо

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (12.65)$$

Рівняння (12.65) називається *рівнянням вимушених коливань* матеріальної точки без урахування сил опору або рівнянням вимушених коливань консервативної систем.

Проаналізуємо *властивості вимушених коливань*:

– вимушені коливання є *бігармонійними* (типовий графік коливань наведено на рис. 12.19), тобто складаються з вільних коливань з частотою ω_0 (описуються першими двома доданками рівняння (12.65)) і чисто вимушених коливань з частотою збуджуючої сили ω_B (останній доданок рівняння (12.65));

– особливим є те, що за наявності збуджуючої сили вільні коливання збуджуються і за нульових умов (коли $x_0 = 0, V_0 = 0$);

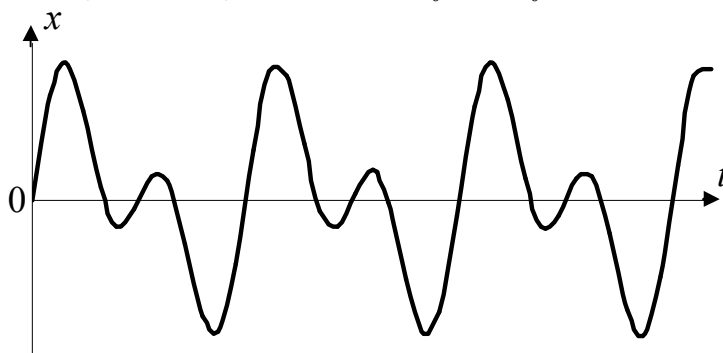


Рисунок 12.19

- амплітуда чисто вимушених коливань (модуль виразу (12.62)) не залежить від початкових умов, а визначається параметрами збурюючої сили і механічної системи.

Розглянемо далі випадок, коли частота збурюючої сили і власна частота близькі за значенням: $\omega_B \approx \omega_0$.

Припустимо, що початкові умови нульові ($x_0 = 0, V_0 = 0$). Тоді, поклавши $\omega_B/\omega_0 \approx 1$, але $\omega_0^2 - \omega_B^2 \neq 0$ і $\omega_0 + \omega_B \approx 2\omega_B$, з виразу (12.65) отримаємо

$$x = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot (\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t) = 2 \cdot \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.66)$$

Графік цього руху наведено на рисунку 12.20.

Такий рух називається *биттям*: коливальних рух, який відбувається з частотою ω_B збурюючої сили та амплітудою, що є періодичною (з частотою $(\omega_B - \omega_0)/2$) функцією часу.

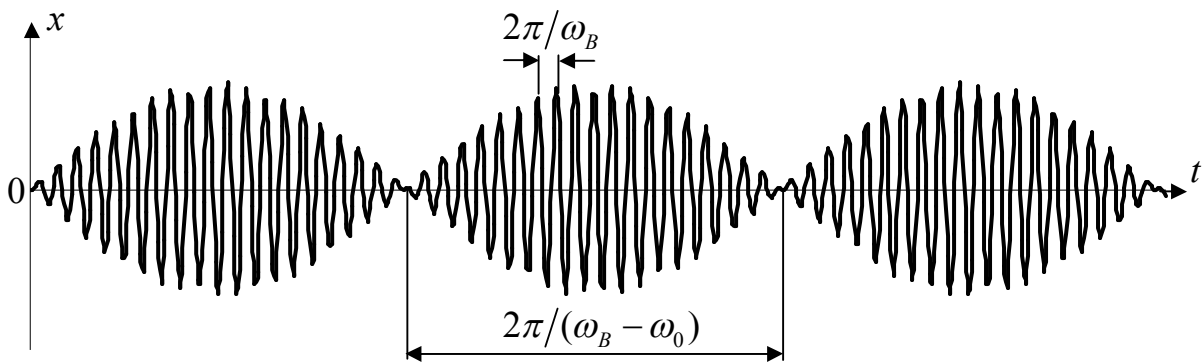


Рисунок 12.20

У разі виконання $\omega_B = \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота співпадають) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot t \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.67)$$

Підставляючи (12.67) у (12.58), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$A_B \cdot (-t \cdot \omega_B^2 \cdot \cos \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_B^2 \cdot t \cdot \cos \omega_B t) = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Оскільки $\sin \omega_B t \neq 0$ для довільного t , то справедливе рівняння

$$A_B (-2\omega_B) = H,$$

звідки

$$A_B = -\frac{H}{2\omega_B}. \quad (12.68)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (12.58) матиме вигляд:

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{H \cdot t}{2\omega_B} \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.69)$$

Як неважко помітити, амплітуда чисто вимушених коливань $\frac{H \cdot t}{2\omega_B}$

збільшується прямо пропорційно часу і за $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається *резонансом*, а рівність $\omega_B = \omega_0$ – умовою резонансу. Графік залежності частинного розв’язка (12.69) від часу показаний на рисунку 12.21.

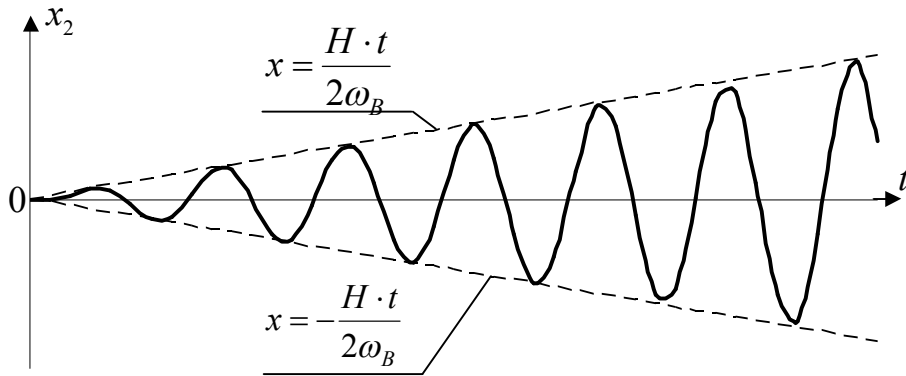
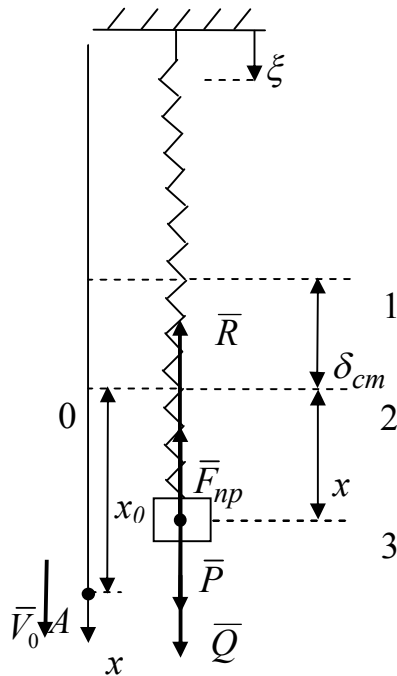


Рисунок 12.21

У реальних будівельних конструкціях транспортних машин, явище резонансу може бути причиною їхнього руйнування. У вібраційних машинах технологічного призначення, однак, його використовують за для зменшення потужності, що споживається.

Випадок дисипативної системи



Механічна система, яка моделює (рис. 12.22) в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вигляд, як на рис. 12.20, тільки додається сила опору \bar{R} . Умовні позначення на рис. 12.20 і 12.22 співпадають.

Рівняння динаміки точки має вигляд

$$m\ddot{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R} + \bar{Q}$$

або $m\ddot{x} = mg - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x} + H_B \sin \omega_B t$,

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H_B \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad H = \frac{H_B}{m}. \quad (12.70)$$

Рисунок 12.22

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань з урахуванням опору набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (12.71)$$

Загальне розв'язання неоднорідного диференціального рівняння (8.38) складається з суми розв'язків

$$x = x_1 + x_2, \quad (12.72)$$

де x_1 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;

x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

У цьому випадку загальний розв'язок x_1 визначається отриманим раніше виразом (12.50). Частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x_2 = A_B \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B).$$

Амплітуду A_B і початкову фазу φ_B розв'язку x_2 визначимо методом комплексних амплітуд [23].

Для цього праву частину виразу (12.71) подамо в комплексній формі:

$$H \cdot \sin \omega_B t = \text{Im}(H \cdot e^{j\omega_B t}) = \text{Im}(H \cos \omega_B t + jH \sin \omega_B t),$$

де j – уявна одиниця;

Im – уявна частина комплексного числа.

Відповідно до [23] отримаємо

$$x_2 = \text{Im} \left(\frac{H}{|D(j\omega_B)|} \cdot e^{j\varphi_B} \cdot e^{j\omega_B t} \right), \quad (12.73)$$

де $|D(j\omega_B)| = \left((\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2 \right)^{1/2}$ – модуль комплексного числа

$$D(j\omega_B) = (\omega_0^2 - \omega_B^2) + j2h\omega_B;$$

$$\varphi_B = -\arctg \frac{\text{Im}(D(j\omega_B))}{\text{Re}(D(j\omega_B))} = -\arctg \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2};$$

$\text{Re}(D(j\omega_B)) = \omega_0^2 - \omega_B^2$, $\text{Im}(D(j\omega_B)) = 2h\omega_B$ – дійсна і уявна частини комплексного числа $D(j\omega_B)$.

У формулі (12.73) комплексне число $D(j\omega_B)$ отримується, якщо підставити в операторну форму $D(p) = p^2 x + 2hp x + \omega_0^2 x$ лівої частини рівняння (12.71) замість оператора p вираз: $p = j\omega_B$.

Після перетворень (12.73) матиме

$$x_2 = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} \sin(\omega_B t + \varphi_B) = A_B \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B), \quad (12.74)$$

де $A_B = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}}$, $\varphi_B = -\arctg \frac{2h\omega_B}{(\omega_0^2 - \omega_B^2)}$ – амплітуда і

зсув фаз вимушених коливань точки.

Підставляючи (12.74) у (12.72) отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$x = e^{-ht} \left(C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t \right) + \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B). \quad (12.75)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо за допомогою початкових умов (12.41). Після перетворень матиме:

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} \cdot \sin \varphi_B;$$

$$C_2 = \frac{V_0 + x_0 h}{\omega_0^*} - \frac{h \cdot \sin \varphi_B + \omega_B \cdot \cos \varphi_B}{\omega_0^*} \cdot \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}}.$$

З рівняння руху (12.75) витікає, що коливання точки є бігармонійними (двочастотними): вони відбуваються одночасно як з частотою ω_0^* затухаючих коливань, так і з частотою ω_B чисто вимушених коливань. На відміну від вільних коливань (12.52) згасаючі коливання матеріальної точки з частотою ω_0^* виникають і у випадку рівності нулю початкових умов x_0 і V_0 . Наявність множника e^{-ht} у першому доданку призводить до швидкого затухання коливального руху точки з частотою ω_0^* . Проте чисто вимушені коливання з частотою збурюючої сили ω_B (другий доданок у рівнянні (12.75)) відбуваються постійно, незалежно від часу, з амплітудою $A_B = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}}$ і зсувом фази

$\varphi_B = -\arctg \left(\frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right)$, величини яких визначаються параметрами системи і збурюючої сили.

12.3.3.2 Кінематичне збудження коливань

Під час кінематичного збудження коливань заданий рух здійснює основа у точці прикріплення до нього кінця пружини за законом

$$\xi = A_\xi \cdot \sin \omega_B t, \quad (12.76)$$

де A_ξ – амплітуда переміщення основи, ω_B – її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), зображена на рис. 12.23. Умовні позначення на рис. 12.10 і 12.23 співпадають.

Для консервативної системи диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

або

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x - \xi),$$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + cx = c \cdot a_\xi \cdot \sin \omega_B t.$$

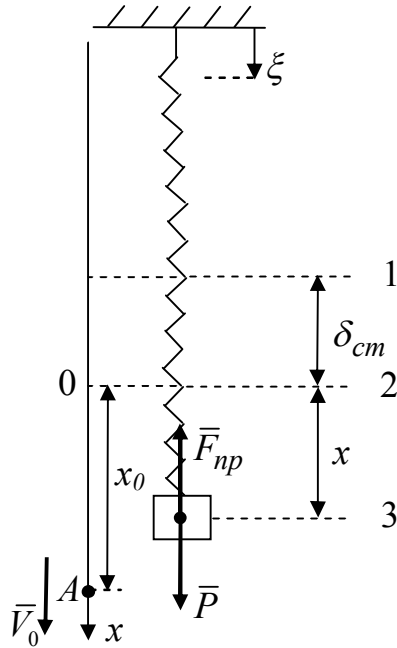


Рисунок 12.23

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{c \cdot a_\xi}{m}. \quad (12.77)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (12.78)$$

Диференціальне рівняння повністю співпадає з рівнянням (12.58). Отже, закон вимушених коливань консервативної системи під час кінематичного збудження і його властивості будуть такими ж, як і під час силового (див. п. 12.3.3.1).

Частотні та динамічні характеристики коливальних систем

Під час дослідження динамічної поведінки, визначенні очікуваних параметрів вібрації, власних частот, форм і коефіцієнтів демпфірування коливальних механічних систем аналізують залежності амплітуди і зсуву фаз процесу $x(t)$ від частоти збуджуючої сили $\bar{Q}(t)$. З виразу (12.73) отримаємо функції

$$W(\omega) = \frac{1}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2},$$

які мають назву: відповідно амплітудно-частотна (АЧХ) і фазово-частотна (ФЧХ) характеристики. Вказані характеристики не залежать від параметрів збуджуючої сили \bar{Q} , тому є універсальними для механічної системи.

На практиці використання АЧХ і ФЧХ дозволяє визначити амплітуду і зсув фаз чисто вимушених коливань матеріальної точки, збільшивши амплітуду і фазу коливань збуджуючої сили у $W(\omega_B)$ раз і на $\varphi(\omega_B)$ відповідно.

Графіки залежностей $W(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ наведено на рис. 12.24. Аналіз графіків дисипативної системи (рис. 12.24, а) дає змогу отримати такі результати.

За частоти збуджуючої сили $\omega_B = 0$ отримуємо $W(0) = \frac{1}{c}$ і зсув фаз $\varphi(0) = 0$.

За частоти збурення $\omega_B = \omega_0$ буде $\varphi(\omega_0) = -\text{arctg} \frac{2h\omega_0}{0} = -\frac{\pi}{2}$.

У системі виникає явище резонансу.

За частоти збудження $\omega_B \rightarrow \infty$ маємо $W(\omega_B) \rightarrow 0$, а $\varphi(\omega_B) \rightarrow -\pi$.

Дослідження на екстремум функції $W(\omega)$ надає такі значення частоти ω_{\max} , АЧХ і ФЧХ:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}; \quad W(\omega_{\max}) = \frac{1}{2mh\omega_0}; \quad \varphi(\omega_{\max}) = -\text{arctg} \frac{\omega_{\max}}{h}.$$

У випадку консервативної системи (враховуючи (12.71) і умову $h \rightarrow 0$) отримуємо такі вирази для частотних характеристик:

$$W(\omega) = \frac{1}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}; \quad \varphi(\omega_{\max}) = -\text{arctg} \frac{\text{Im}(D(j\omega_B))}{\text{Re}(D(j\omega_B))},$$

залежність яких від частоти подано на рис. 12.24, б.

АЧХ і ФЧХ консервативної системи мають такі особливості. У діапазоні частот $\omega_B \in [0; \omega_0)$ виконується $\text{Im}(D(j\omega_B)) = 0$, а $\text{Re}(D(j\omega_B)) \in [\omega_0^2; 0)$ і залишається завжди більше нуля, тому зсув фаз $\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{0}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = 0$ для будь-якого значення частоти збуджуючої сили.

сили.

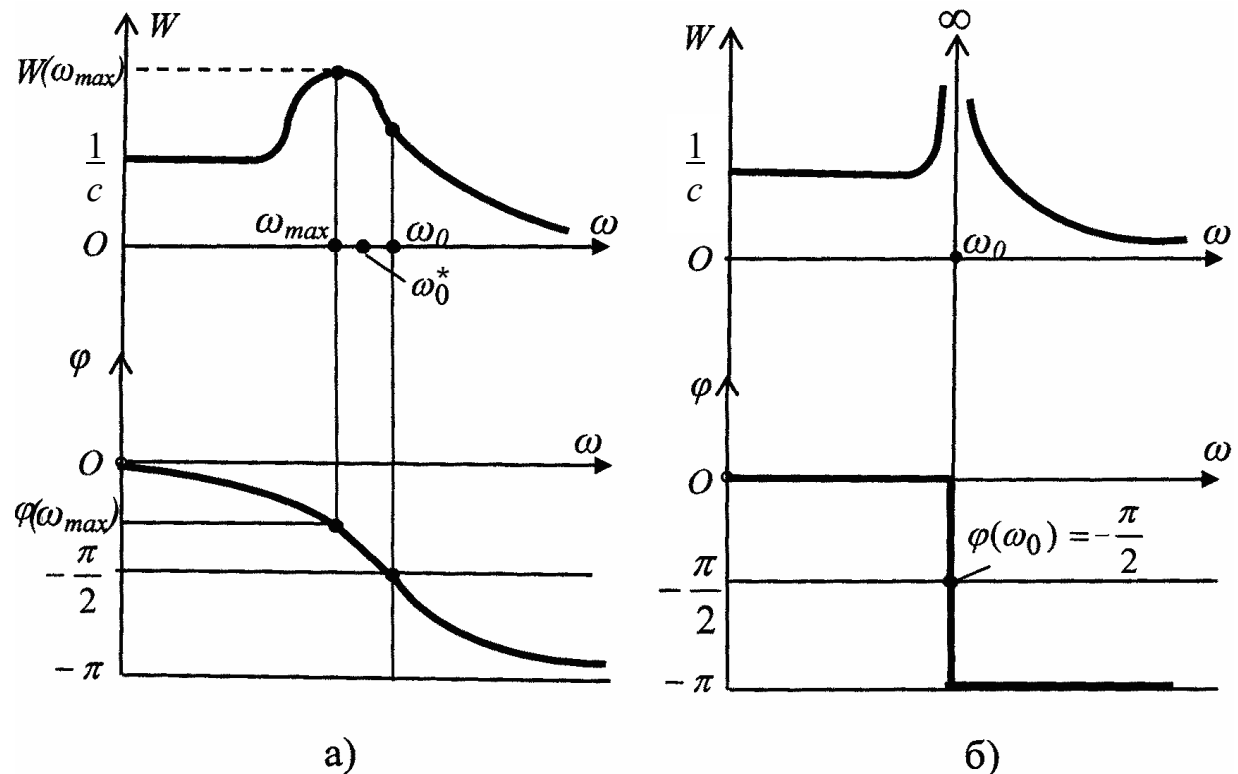


Рисунок 12.24 – АЧХ і ФЧХ дисипативної (а) і консервативної (б) систем

за частоти збудження $\omega_B = \omega_0$ отримаємо за $h \rightarrow 0$, що

$$Jm(D(j\omega_B)) \rightarrow 0, \quad \text{Re}(D(j\omega_B)) = 0, \quad \text{а} \quad \varphi(\omega_B = \omega_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Якщо $\omega_B \in (\omega_0, +\infty)$, то буде $Jm(D(j\omega_B)) = 0$ і $\text{Re}(D(j\omega_B)) \in (0; -\infty)$, а зсув фаз $\varphi(\omega) = -\pi$ для частоти $\omega_B > \omega_0$.

На практиці під час розв'язання прикладних задач теорії коливань і, зокрема, задач віброзахисту використовують поняття коефіцієнта динамічності механічної системи. За для цього перетворюють вираз амплітуди чисто вимушених коливань A_B , помноживши і поділивши її праву частину на величину ω_0^2 :

$$A_B = \frac{\frac{H}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{h^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}}}.$$

Величина у чисельнику $\frac{H}{\omega_0^2} = \frac{H \cdot m}{c} = \frac{H_B}{c} = x_{cm}$ є статичним переміщенням точки під дією сталої сили H_B , що дорівнює амплітуді збуджуючої сили (12.56).

Введемо позначення: $z = \frac{\omega_B}{\omega_0}$ – безрозмірна частота коливань;

$\beta = \frac{h}{\omega_0}$ – безрозмірний коефіцієнт демпфірування, тоді

$$A_B = \frac{x_{cm}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (12.79)$$

Коефіцієнтом динамічності μ називається відношення амплітуди вимушених коливань (8.46) до статичного переміщення x_{cm} :

$$\mu = \frac{A_B}{x_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (12.80)$$

Він є власною характеристикою коливальної системи, яка не залежить від амплітуди збурення, і показує, у скільки разів амплітуда вимушених коливань перевершує статичне переміщення, тобто характеризує динамічний ефект стосовно амплітуди коливань, що викликається збуджуючою силою. Графік залежності $\mu(z)$ у разі вирівнювання коефіцієнта демпфірування β наведений на рис. 12.25.

Аналізуючи рисунок 12.25, можна зробити такі висновки:

1) коефіцієнт динамічності набуває максимуму при значенні $z = \sqrt{1 - 2\beta^2}$;

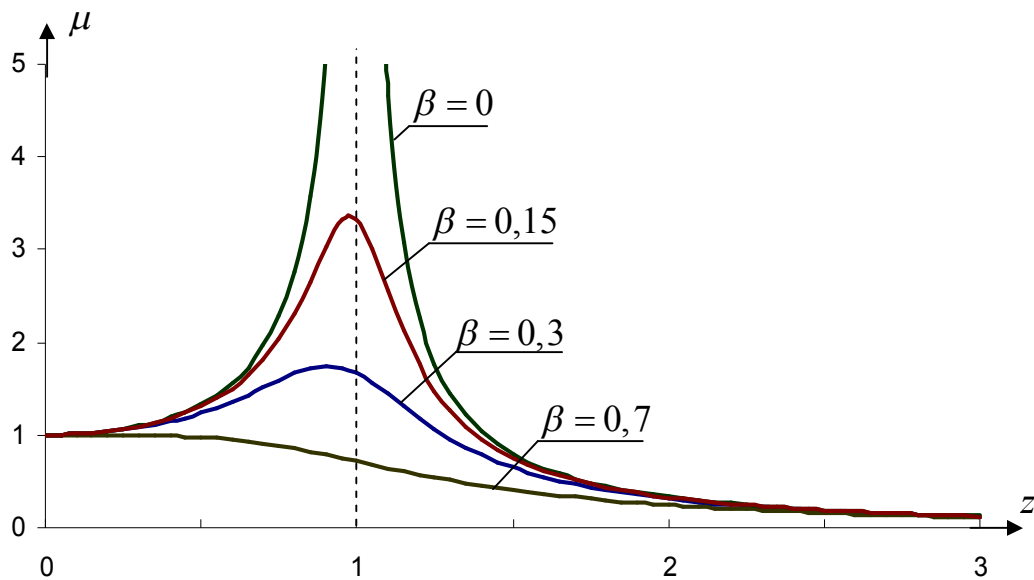


Рисунок 12.25

2) При значенні коефіцієнта опору $\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ зростання амплітуди вимушених коливань в зоні резонансу не відбувається, більше того, за будь-якою частоти збудуючої сили амплітуда вимушених коливань не перевищує статичне переміщення x_{cm} .

12.3.4 Приклади розв'язання задач із дослідження коливального руху матеріальної точки

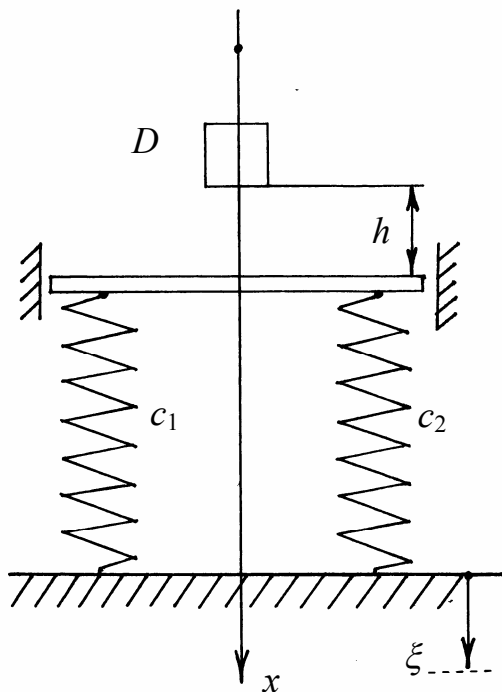


Рисунок 12.26

Приклад 1. Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі x з моменту дотику ним плити, вважаючи, що у разі подальшого руху вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рухи плити та основи вважати поступальними (рис. 12.26).

Умови задачі. Пролетівши без початкової швидкості відстань $h = 0,2$ м, вантаж D ($m_D = 20$ кг) з'єднується у момент часу $t = 0$ з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору

$c_1 = 100 \text{ Н/см}$, $c_2 = 200 \text{ Н/см}$, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа починає здійснювати рух за законом $\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t = 0,5 \cdot \sin 30t \text{ (см)}$.

Розв'язання

Спочатку розглянемо допоміжну задачу про вільне падіння матеріальної точки (вантажу) з висоти $h = A_0A$ до моменту дотику з плитою.

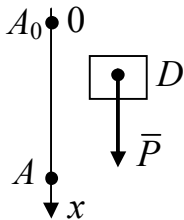


Рисунок 12.27

Розрахункова схема цієї задачі наведена на рис. 12.27. Диференціальне рівняння руху має вигляд: $m_D \ddot{x} = P$ або $m_D \ddot{x} = m_D g$, або $\ddot{x} = g$. Інтегруючи за часом обидві частини останнього рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = gt + C_1, \\ x = gt^2 / 2 + C_1 t + C_2. \end{cases}$$

За нульових початкових умов сталі інтегрування C_1, C_2 дорівнюють нулю. Записуючи функції \dot{x}, x у кінцевій точці А відрізка руху A_0A , матимемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} V_A = g\tau, \\ h = g\tau^2 / 2, \end{cases}$$

звідки, виключаючи час руху на відріжку падіння τ , отримаємо розрахункову формулу для швидкості точки в момент дотику з плитою $V_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} = 2 \text{ (м/с)}$.

Розглянемо основну задачу про коливання матеріальної точки (вантажу).

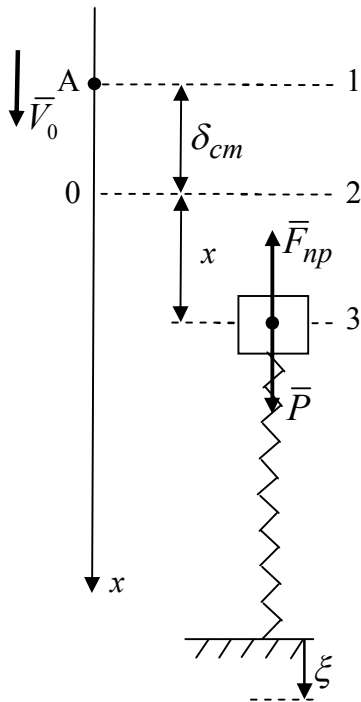
Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 12.28, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу і його довільне положення під час коливань, точка А – положення вантажу в момент дотику плити, δ_{cm} – статична деформація пружини під дією вантажу, \bar{P}, \bar{F}_{np} – відповідно сила ваги вантажу й сила пружності пружини, ξ – напрямок кінематичного збудження в точці кріплення пружини до рухомої опори.

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис. 12.12):

$$c = c_1 + c_2 = 100 + 200 = 300 \text{ Н/см} = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$\begin{aligned} m_D \ddot{x} &= P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x - \xi) = \\ &= P - c\delta_{cm} - cx + c\xi = -cx + ca_\xi \sin \omega_B t, \end{aligned}$$



і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = ca_\xi \sin \omega_B t$$

або
$$\ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = \frac{ca_\xi}{m_D} \sin \omega_B t .$$

Позначимо $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$, $H = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D}$, тоді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t .$$

Отримане рівняння має форму (12.58) диференціального рівняння вимушених коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вигляд (12.63), (12.64):

Рисунок 8.19

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t ,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t .$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови. В точці A на рисунку 12.28:

$$x|_{t=0} = -\delta_{cm}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0 .$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$:

$$\begin{cases} -\delta_{cm} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = -\delta_{cm}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) .$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -\delta_{cm} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t .$$

Визначимо далі

величину статичної деформації $\delta_{\text{ст}} = \frac{g \cdot m_D}{c} = \frac{10 \cdot 20}{3 \cdot 10^4} = 0,67 \cdot 10^{-2} \text{ м}$,

значення власної частоти $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^4}{20}} = 38,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$,

$$H = \frac{c \cdot a_{\xi}}{m_D} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{20} = 7,5 \frac{\text{М}}{\text{с}^2},$$

$$\frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{7,5}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} = \frac{7,5}{1500 - 900} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{1}{38,7} \cdot \left(2 - \frac{7,5 \cdot 30}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} \right) = \frac{1}{38,7} \cdot (2 - 0,375) = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t \text{ (м)}.$$

Перевірка: За $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,67 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Графік залежності координати x від часу t наведено на рисунку 12.29.

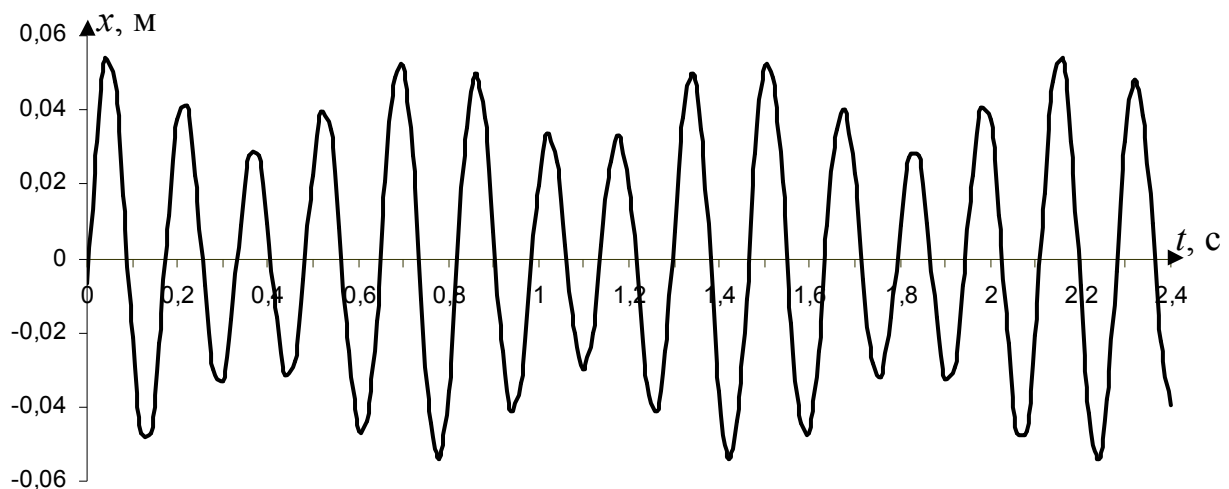


Рисунок 12.29

Відповідь: Вантаж здійснює вимушені коливання за законом $x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t \text{ (м)}$, з коловими частотами $38,7$ і $30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Приклад 2. Знайти рівняння коливального руху вантажу D по гладенькій похилій площині у напрямку осі x , що співпадає з віссю двох послідовно з'єднаних пружин (рис. 12.30).

Умова задачі. Система встановлена на пружинах вантажів D ($m_D = 20$ кг) і E ($m_E = 10$ кг) знаходиться в положенні статичної рівноваги.

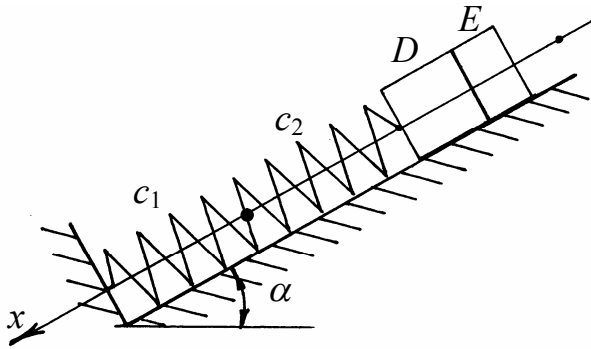


Рисунок 12.30

У момент часу $t = 0$ вантаж E знімають з вантажу D . Одночасно вантажу D надають початкову швидкість $V_0 = \dot{x}_0 = 0,1$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x . Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють $c_1 = c_2 = 400$ Н/см. Кут $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рисунку 12.31, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D у момент початку коливань (положення рівноваги системи вантажів D і E), δ_{cm_D} – статична деформація пружини під дією вантажу D , $\bar{P}_D, \bar{N}, \bar{F}_{np}$ – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні та сила пружності пружини.

У цій схемі в положенні статичної рівноваги вантажу D сила пружності \bar{F}_{np} пружини зрівноважує не всю силу ваги вантажу \bar{P}_D , а тільки її складову $P_{Dx} = P_D \cdot \sin \alpha$ у напрямку осі Ox , яка співпадає з віссю пружини.

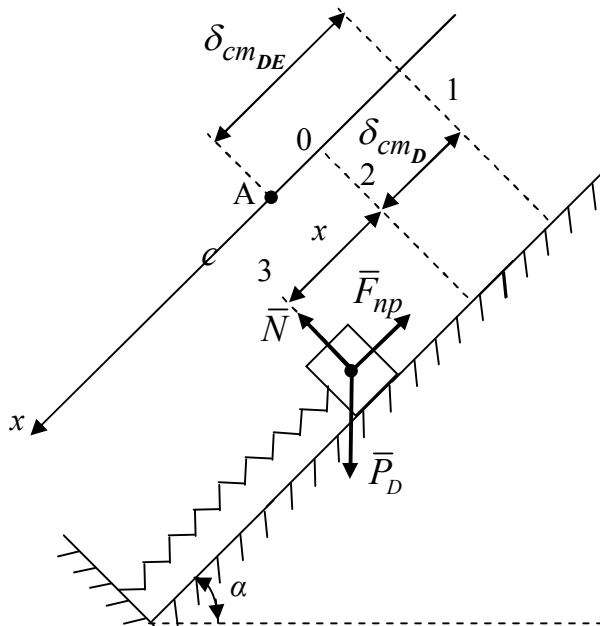


Рисунок 12.31

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис. 12.13):

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{400 \cdot 400}{400 + 400} = 200 \text{ Н/см} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = P_D - F_{np} = P_D \cdot \sin \alpha - c(\delta_{cm_D} + x) = P_D \cdot \sin \alpha - c\delta_{cm_D} - cx = -cx,$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

$$\text{або } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{c}{m_D}.$$

Отримане рівняння має форму (12.38) диференціального рівняння вільних коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (12.39), (12.40)

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \\ \dot{x} &= -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 12.31):

$$x|_{t=0} = \delta_{cm_{DE}} - \delta_{cm_D} = \delta_{cm_E} \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$:

$$\begin{cases} \delta_{cm_E} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = \delta_{cm_E}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = \delta_{cm_E} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:
величина статичної деформації

$$\delta_{cm_E} = \frac{m_E g \cdot \sin \alpha}{c} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

значення власної частоти

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{20}} = \sqrt{1000} = 31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

величину

$$\frac{V_0}{\omega_0} = \frac{0,1}{31,6} = 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t \text{ (м)}.$$

Перевірка: За $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь: Вантаж здійснює вільні коливання за законом $x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t$ (м), з коловою частотою $31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t наведений на рисунку 12.32.

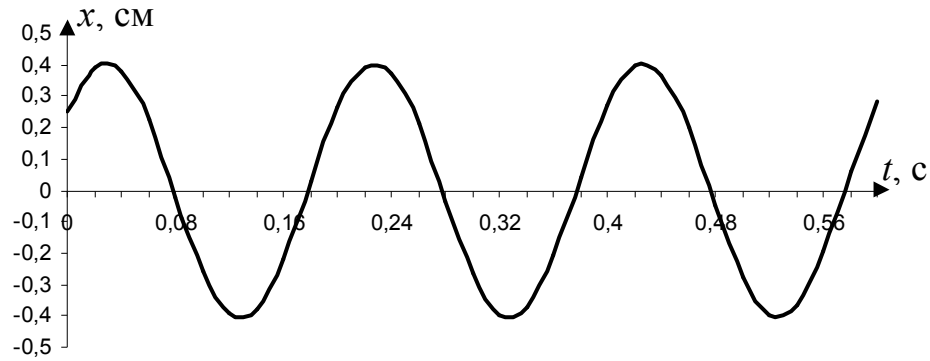


Рисунок 12.32

Приклад 3. Знайти рівняння коливального руху вантажу D (рис. 12.33), вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі x . Брусок, який зв'язує пружину і демпфер, є невагомим. Рух бруска, який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним.

Умова задачі. Маса вантажу $m_D = 4$ кг. Коефіцієнти жорсткості двох пружин $c_1 = 2$ Н/см, $c_2 = 3$ Н/см, коефіцієнт опору демпфера $b = 16$ Н·с/м.

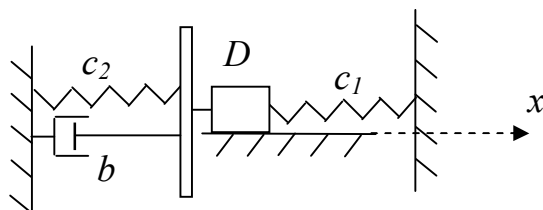


Рисунок 12.33

Перед початком руху вантаж відхиляють на величину $\lambda = 3$ см у напрямку від'ємного відліку координати x , надаючи йому у момент часу $t = 0$ початкову швидкість $V_0 = 0,6$ м/с, спрямовану вліво.

Розв'язання

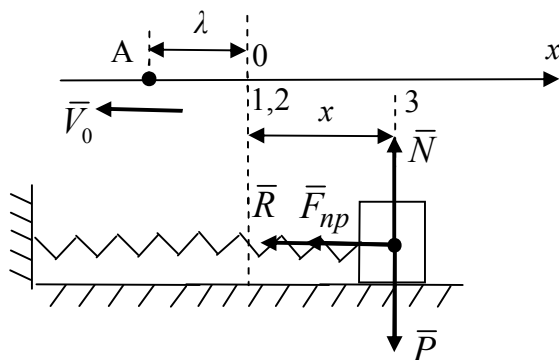


Рисунок 12.34

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 12.34, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D (яке для горизонтальної пружини співпадає з рівнем 1; в цьому разі $\delta_{cm} = 0$) і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D у момент початку коливань, \vec{V}_0 – вектор початкової швидкості, $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{пр}, \vec{R}$ – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні, сила пружності пружини й сила опору. Демпфер на рис. 12.34 не показано.

Схема розташування вантажу поміж двома пружинами еквівалентна паралельному з'єднанню пружних елементів (див. рис. 12.12).

Знаходимо еквівалентну жорсткість c :

$$c = c_1 + c_2 = 2 + 3 = 5 \text{ Н/см} = 5 \cdot 10^2 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = -F_{np} - R = -cx - b\dot{x},$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \text{ або } \ddot{x} + \frac{b}{m_D} \dot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

$$\text{або } \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{c}{m_D}, \quad 2h = \frac{b}{m}.$$

Отримане рівняння має форму (12.44) диференціального рівняння вільних коливань за наявності опору. Підрахуємо значення власної частоти

$$\text{вільних коливань } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^2}{4}} = \sqrt{125} = 11,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$\text{та коефіцієнта демпфірування } h = \frac{b}{2m} = \frac{16}{2 \cdot 4} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Зрівнюючи ці параметри, маємо $h < \omega_0$ – випадок малого опору. У цьому разі функція $x(t)$ і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t),$$

$$\dot{x} = -h \cdot e^{-ht} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega_0^* t + C_2 \cdot \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin \omega_0^* t + C_2 \cdot \cos \omega_0^* t).$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 12.34):

$$x|_{t=0} = -\lambda, \quad \dot{x}|_{t=0} = -V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\lambda = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ -V_0 = -h \cdot e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0). \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = -\lambda; \quad C_2 = \frac{-V_0 - h\lambda}{\omega_0^*}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -e^{-ht} \cdot \left(\lambda \cdot \cos \omega_0^* t + \frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} \cdot \sin \omega_0^* t \right).$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

значення власної частоти затухаючих коливань

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{125 - 4} = \sqrt{121} = 11 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

величину
$$\frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} = \frac{0,6 + 2 \cdot 0,03}{11} = \frac{0,66}{11} = 0,06 \text{ м.}$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t) \text{ (м)}.$$

Перевірка: При $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,03$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

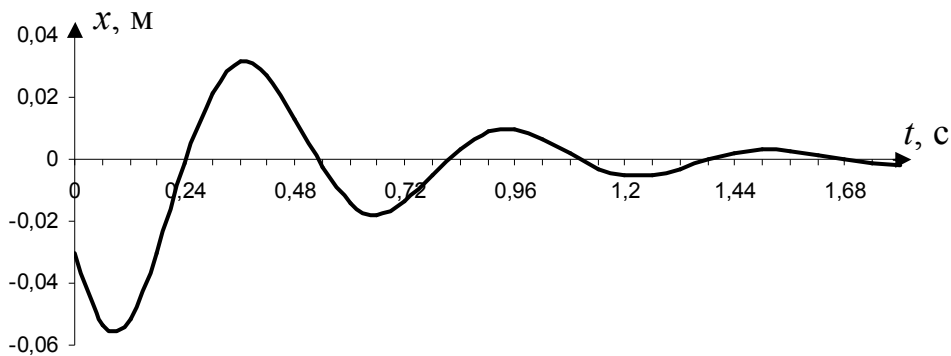


Рисунок 12.35

Відповідь: Вантаж здійснює затухаючі коливання за законом $x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t)$ (м) з коловою частотою $11 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.
Графік залежності координати x від часу t наведений на рисунку 12.35.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте закони Ньютона.
2. Яка система відліку називається інерціальною?
3. Який закон називається основним законом динаміки?
4. Що розуміють під «інертністю» матеріальної точки?
5. Які рівняння називаються диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
6. Які рівняння називаються натуральними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
7. Сформулюйте дві основні задачі динаміки матеріальної точки.
8. Яка різниця між диференціальними рівняннями вільної і невільної матеріальної точки?
9. Як зміниться диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки при її складному русі?

10. Під дією якої сили здійснюються вільні коливання матеріальної точки?
11. Який вид має диференціальне рівняння вільних коливань і який його загальний розв'язок?
12. У якому положенні доцільно розміщувати початок відліку?
13. Що називається амплітудою, періодом і частотою вільних коливань матеріальної точки і від чого вони залежать?
14. Який вид має графік вільних коливань матеріальної точки?
15. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих коливань і який його загальний розв'язок?
16. Який вид має загальний розв'язок диференціальне рівняння затухаючих коливань за $h = \omega_0$, $h < \omega_0$ і $h > \omega_0$.
17. Що називається декрементом і логарифмічним декрементом коливань?
18. Який вид мають графіки затухаючих коливань і періодичного руху матеріальної точки?
19. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору і який його загальний розв'язок?
20. За якої умови виникає резонанс і який вид мають рівняння і графік вимушених коливань матеріальної точки під час резонансу?
21. Надайте визначення кінематичного збудження коливань матеріальної точки.
22. Який вид мають графіки АЧХ і ФЧХ дисипативної і консервативної систем?
23. Чому дорівнюють значення ω_{\max} , $W(\omega_{\max})$ і $\varphi(\omega_{\max})$ під час дослідження АЧХ на екстремум?
24. Надайте поняття, формулу властивості коефіцієнта динамічності механічної системи.
25. Під дією якої сили здійснюються вільні коливання матеріальної точки?
26. Який вид має диференціальне рівняння вільних коливань і який його загальний розв'язок?
27. У якому положенні доцільно розміщувати початок відліку?
28. Що називається амплітудою, періодом і частотою вільних коливань матеріальної точки і від чого вони залежать?
29. Який вид має графік вільних коливань матеріальної точки?
30. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих коливань і який його загальний розв'язок?
31. Який вид має загальний розв'язок диференціальне рівняння затухаючих коливань за $h = \omega_0$, $h < \omega_0$ і $h > \omega_0$.
32. Що називають декрементом і логарифмічним декрементом коливань?

33. Який вид мають графіки затухаючих коливань і періодичного руху матеріальної точки?

34. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору і який його загальний розв'язок?

35. За якої умови виникає резонанс і який вид мають рівняння і графік вимушених коливань матеріальної точки під час резонансу?

36. Дайте визначення кінематичного збудження коливань матеріальної точки.

37. Який вид мають графіки АЧХ і ФЧХ дисипативної і консервативної систем?

38. Чому дорівнюють значення ω_{\max} , $W(\omega_{\max})$ і $\varphi(\omega_{\max})$ під час дослідження АЧХ на екстремум?

39. Чому дорівнює головний вектор і головний момент сил інерції у разі поступального руху твердого тіла?

40. Чому дорівнює проекція головного моменту сил інерції твердого тіла на нерухому вісь обертання?

41. Як визначають головний вектор і головний момент сил інерції у разі плоского руху тіла, котре має головну вісь інерції тіла, що перпендикулярна площині руху?

42. Які умови повинні виконуватись під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, щоб динамічні реакції підшипників дорівнювали нулю?

13 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

13.1 Основні допущення

Для того, щоб наука про опір матеріалів могла рекомендувати загальні теоретичні основи розрахунку елементів конструкцій, виконуваних з різних матеріалів, необхідно виходити з низки допущень про їхні властивості, а також з допущень про характер деформацій.

Допущення про властивості матеріалів:

1. Матеріал *однорідний*, тобто його властивості не залежать від розмірів виділеного з тіла обсягу. У дійсності однорідних матеріалів у природі немає. Наприклад, структура металів складається з безлічі хаотично розташованих мікроскопічно дрібних кристалів (зерен). Розміри елементів конструкцій, що розраховуються ж, як правило, незмірно перевищують розміри кристалів, тому допущення про однорідність матеріалу тут цілком застосовно.

2. Матеріал становить *суцільне середовище* і безупинно заповнює весь обсяг елемента конструкції. Це допущення впливає безпосередньо з першого про однорідність матеріалу – і дозволяє застосовувати математичний аналіз.

3. Матеріал *ізотропний*, тобто фізико-механічні властивості однакові в усіх напрямках. Таким чином, виділений із суцільного середовища елемент не залежить від орієнтації щодо обраної системи координат. Метали завдяки своїй дрібнозернистій структурі вважаються ізотропними. Але є багато неізотропних – анізотропних – матеріалів. До них належать деревина, тканини, фанера, багато пластмас. В опорі матеріалів розглядаються в основному матеріали ізотропні.

4. Матеріал у визначених межах навантаження тіла має ідеальну пружність, тобто після зняття навантаження тіло цілком відновлює первісні форми і розміри.

Допущення про характер деформування елементів конструкцій:

1. Переміщення точок елемента конструкції, обумовлені його пружними деформаціями, незначні порівняно з розмірами самого тіла. Відповідно до цього допущення, деформований елемент конструкції (або вся конструкція цілком) несуттєво відрізняється від недеформованого, тому під час складання рівнянь рівноваги сил, що діють на деформоване тіло, можна зневажати тими змінами, що відбулися після прикладення зовнішніх сил (див. рис. 1, а, б). Отже варто виходити з первинної форми тіла (елемента конструкції) і його початкових розмірів. Це положення коротко називається принципом початкових розмірів.

2. Переміщення точок пружного тіла у відомих межах навантаження прямо пропорційні силам, що викликають ці переміщення. Наприклад, якщо сила F викликала переміщення точки B на відстань δ (рис. 13.1, а), то

сила $2F$ викликає переміщення точки B на відстань 2δ (рис. 13.1, б). Конструкції, для яких справедливо це допущення, називаються лінійно-деформованими.

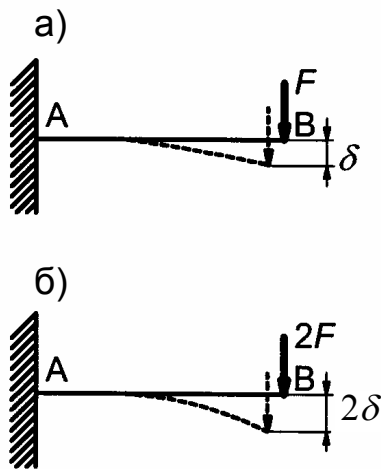


Рисунок 13.1

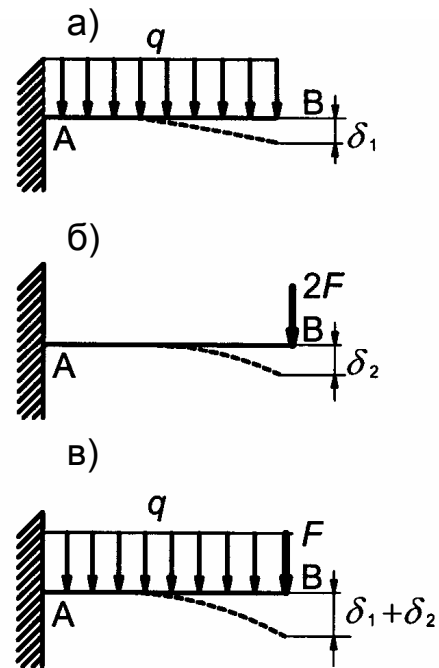


Рисунок 13.2

3. Для лінійно-деформованих конструкцій справедливий відомий з теоретичної механіки *принцип незалежності дії сил* – результат дії декількох сил не залежить від послідовності навантаження ними певної конструкції і дорівнює сумі результатів дії кожної сили окремо. Отже, якщо під дією рівномірно розподіленого навантаження точка B бруса (рис. 13.2, а) переміститься на відстань δ_1 , а під дією зосередженої сили (рис. 13.2, б) – на відстань δ_2 , то за одночасної дії обох сил переміщення точки B дорівнює сумі переміщень δ_1 і δ_2 (рис. 13.2, в).

13.2 Метод перетинів. Види навантаження

Розтягуючи руками гумовий джгут або згинаючи товстий сталевий дріт ми відчуваємо опір цих тіл, іноді сили наших рук виявляється недостатньо, щоб ще більш розтягти джгут або зігнути дріт. Здатність тіла пручатися зміні первинної форми визначається силами зчеплення між усіма суміжними частками тіла, що на відміну від зовнішніх сил, прикладених до тіла, називаються внутрішніми силами. Внутрішні сили (іноді них називають силами пружності), як свідчить досвід, зростають разом зі збільшенням навантажень, але до відомої межі, після чого зчеплення між частками тіла припиняється і тіло руйнується.

Для того правильно розрахувати конструкцію на міцність або на твердість, необхідно уміти визначати внутрішні сили за заданим

навантаженням. Для виявлення внутрішніх сил в опорі матеріалів застосовується метод перетинів, суть якого викладена нижче.

Подумки поділимо думкою брус, навантажений урівноваженою системою сил F_k (рис. 13.3, а), поперечним перерізом A на частині I і II і відкинемо одну з них, наприклад частину II . З метою зберігання рівноваги частини бруса, що залишився, (рис. 13.3, б), замінимо дію на неї відкинutoї частини системою сил, що є внутрішніми для цілого бруса і зовнішніми стосовно відсіченої частини. У результаті приведення цієї системи сил до центра ваги перетину одержимо головний вектор $F_{2л}$ і головний момент $M_{2л}$ (рис. 13.3, в).

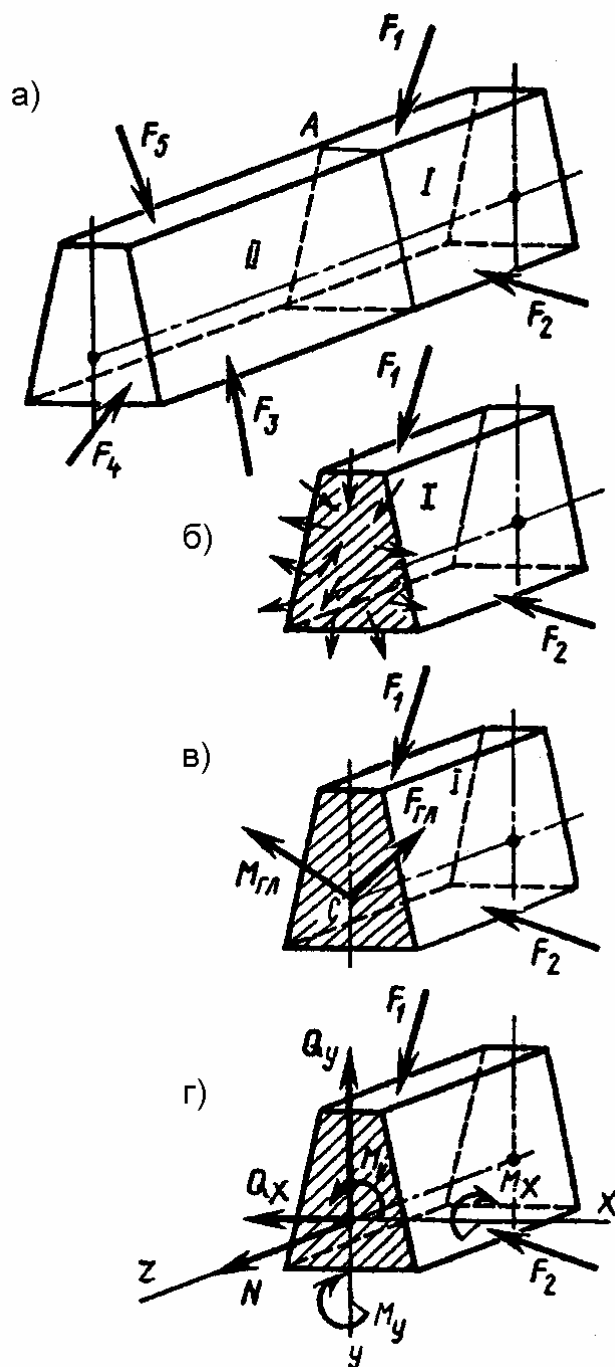


Рисунок 13.3

Виберемо систему координатних осей x, y, z таким чином, щоб вісь z була спрямована перпендикулярно перетині, тобто збігалася з віссю бруса, а осі x і y розташовувалися в площині перетину, причому одна з осей (вісь y) збігалася з її віссю симетрії (рис. 13.3, г). Розклавши головний вектор і головний момент на складові по обраних осях, одержимо три сили N, Q_x, Q_y і три моменти M_x, M_y, M_z , які називаються внутрішніми силовими факторами.

Шість внутрішніх силових факторів разом із відомими зовнішніми силами на частині бруса, що залишилася, утворять урівноважену систему сил, для якої можна скласти шість рівнянь рівноваги. Легко побачити, що в кожне з цих рівнянь входить один з невідомих внутрішніх силових факторів. Отже, вирішуючи рівняння, знайдемо

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \sum F_{xx}; & M_x &= \sum M_x(F_k); \\ Q_y &= \sum F_{xy}; & M_y &= \sum M_y(F_k); \\ N &= \sum F_{xz}; & M_k &= \sum M_z(F_k). \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Складова N головного вектора внутрішніх сил, спрямована перпендикулярно площині поперечного переріза бруса, називається *нормальною (подовжньою) силою*. Складові Q_x, Q_y , лежачі в площині поперечного переріза, називаються *перцевими силами*. Складового головного моменту внутрішніх сил момент M_k , що виникає в площині поперечного переріза бруса, називається *крутильним моментом*. Складові моменти M_y і M_z , що виникають у площинах, перпендикулярних поперечному перерізу бруса, називаються *згинальними моментами*.

З рівності (13.1) випливає, що нормальна сила N дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь z зовнішніх сил, які діють на частину бруса, що залишилася; кожна з поперечних сил (Q_x і Q_y) дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на відповідну вісь зовнішніх сил, які діють на частину бруса, що залишилася; *крутильний момент* M_k дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на розглянуту частину бруса, щодо нормальної до перетину осі z ; кожний зі згинальних моментів M_x і M_y дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, які діють на частину бруса, що залишилася, щодо *осей* x або y відповідно.

Правила визначення знаків проєкцій або моментів зовнішніх сил під час їхнього алгебраїчного підсумовування сформульовані далі у відповідних главах.

За аналогією з наведеними найменуваннями внутрішніх силових факторів наводиться класифікація видів навантаження бруса. Так, якщо в поперечних перерізах бруса виникає тільки нормальна сила N , то брус розтягнутий (сила N спрямована від перетину) або стиснутий (сила N спрямована до перетину). Якщо в поперечному перерізі виникає тільки момент M_k , то брус у цьому перетині працює на *крутіння*. Якщо в

поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент M_x (або M_y), то відбувається *чистий вигин*. Якщо в поперечних перерізах поряд зі згинальним моментом (наприклад, M_x) виникає і поперечна сила Q_y , то це *поперечний вигин*. Можливі випадки, коли брус працює на крутіння і вигин або розтягання одночасно.

Таким чином, метод перетинів дозволяє визначити внутрішні силові фактори і види навантаження. Практично метод перетинів зводиться до виконання такими операцій:

- 1) розрізаємо брус на дві частини;
- 2) відкидаємо одну з частин (доцільно відкинути частину, на яку діє більше число зовнішніх сил, або частину, що містить закладення);
- 3) замінюємо дію відкинutoї частини на залишену шістьма внутрішніми силовими факторами;
- 4) визначаємо значення внутрішніх силових факторів з умов рівноваги для відсіченої частини бруса;
- 5) установлюємо вид навантаження.

Як зазначалося вище, внутрішні сили визначають взаємодію між частинами бруса, причому ця взаємодія підкоряється аксіомі статки про рівність дії і протидії. Отже внутрішні силові фактори, що виникають у перетині праворуч, дорівнюють внутрішнім силовим факторам у перетині ліворуч, але спрямовані в протилежні боки (рис. 13.4).

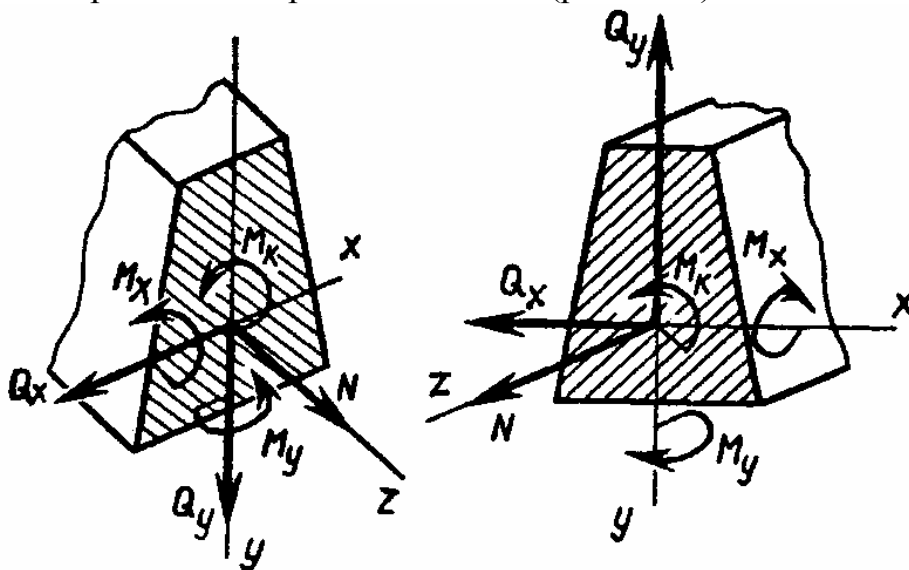


Рисунок 13.4

13.3 Напруги

Метод перетинів дозволяє розрахувати внутрішні силові фактори. Для оцінки міцності необхідно вміти визначати внутрішні сили в будь-якій точці перетину розглянутого бруса, тому введемо числову міру інтенсивності внутрішніх сил – *напругу*.

Розглянемо брус, до якого прикладене деяке навантаження. Брус під дією навантаження знаходиться в рівновазі. Застосовуючи метод перетинів, розсічемо брус поперечною площиною, відкинемо ліву частину бруса, замінимо дію відкинутої частини на розглянуту системою внутрішніх сил. Виділимо навколо довільної точки малу площадку ΔA (рис. 1.8, а). Рівнодіючу внутрішніх сил у межах цієї площадки позначимо ΔF . Відношення

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = p_{cp}, \quad (13.2)$$

називається середньою напругою по площадці ΔA . Вектор середньої напруги збігається по напрямку з вектором рівнодіючої ΔF .

Під час поступового зменшення площадки ΔA змінюються як модуль, так і напрямок рівнодіючої внутрішніх сил ΔF , а отже, вектор p_{cp} поступово наближається до дійсного значення напруги p у заданій точці (рис. 13.5, б).

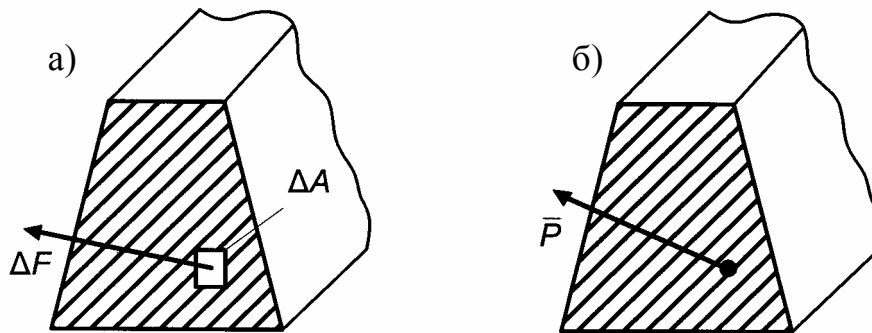


Рисунок 13.5

Числове значення цієї напруги виражається рівністю

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (13.3)$$

Відповідно до формул (1.2) і (1.3), одиницею виміру напруги служить одиниця сили, поділена на одиницю виміру площі. У Міжнародній системі одиниць (СИ) одиниця сили – H , одиниця площі – m^2 , значить одиниця напруги в цій системі – H/m^2 названа паскалем, тобто $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Паскаль – дуже мала одиниця напруги, тому більш уживаною є величина – мегапаскаль: $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$, що чисельно дорівнює 1 Н/мм^2 .

Вектор p повної напруги в точці перетину можна розкласти на два складові вектори: σ і τ (рис. 13.6, а). Вектор σ , спрямований перпендикулярно перетині, називається *нормальною напругою*. Вектор τ , що лежить у площині перетину, називається *дотичним напруженням*. Оскільки вектори σ і τ взаємно перпендикулярні, залежність між числовими значеннями напруг p , σ і τ виражається формулою:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} . \quad (13.4)$$

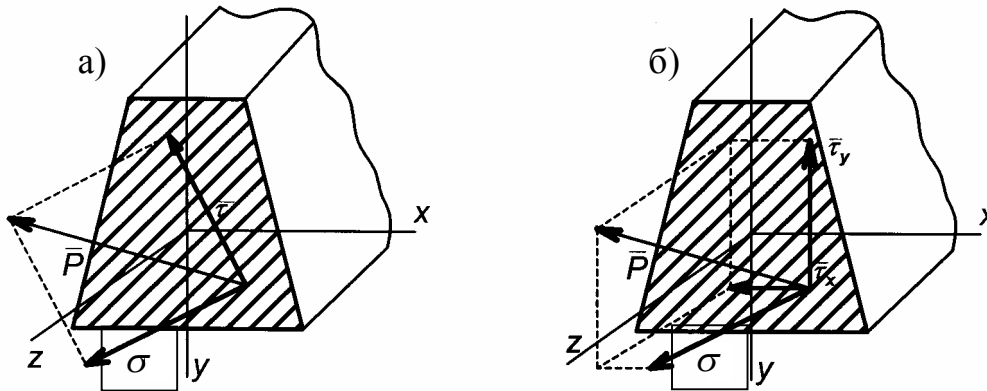


Рисунок 13.6

Частіше виявляється доцільним, відповідно з обраними осями координат x, y, z (рис. 13.6, б), розкласти вектор p не на два, а на три складові вектори: σ (нормальна напруга), рівнобіжний осі Z , τ_x і τ_y (дотичні напруження), рівнобіжні відповідно осям x та y . У цьому випадку

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2} . \quad (13.5)$$

Між внутрішніми силовими факторами і напруженнями σ, τ_x і τ_y існують визначені залежності, до встановлення яких ми перейдемо в наступних главах. Проте зазначимо: наявність нормальної напруги σ у будь-якій точці поперечного переріза обумовлено виникненням у цьому перетині нормальної сили N або згинальних моментів M_x і M_y . Наявність дотичних напружень τ або τ_x і τ_y обумовлено внутрішніми силовими факторами, що виникають у площині перетину, тобто поперечними силами Q_x, Q_y або крутильним моментом M_k .

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається міцністю, твердістю і стійкістю деталі (конструкції)?
2. За якими ознаками і як класифікуються навантаження в опорі матеріалів?
3. Яка мета застосування методу перетинів? Укажіть у процесі застосування цього методу послідовність операцій.
4. З якими внутрішніми силовими факторами пов'язане виникнення в поперечних перерізах бруса нормальних напружень і з якими – дотичних напружень?
5. Формула і розмірність напруги p .

14 РОЗТЯГАННЯ І СТИСК

14.1 Нормальні сили і напруги в поперечному перерізі бруса

Вид навантаження бруса, при якому в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – нормальна сила N , називається *розтяганням* або *стиском*. Прямий брус, що працює тільки на розтягання (стиск), називають *стрижнем*.

Брус розтягнуть, якщо зовнішні сили F , прикладені до його кінців, діють уздовж осі бруса і спрямовані в сторони від бруса (рис. 14.1, а). При дії осьових навантажень F , спрямованих до бруса, він стиснутий (рис. 14.1, б).

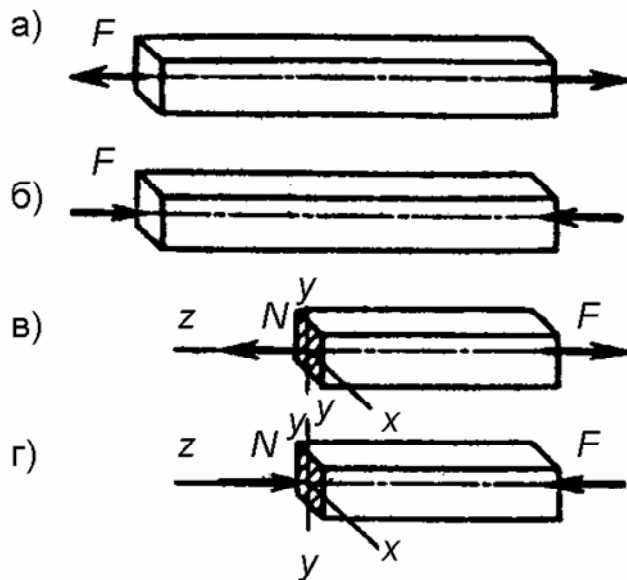


Рисунок 14.1

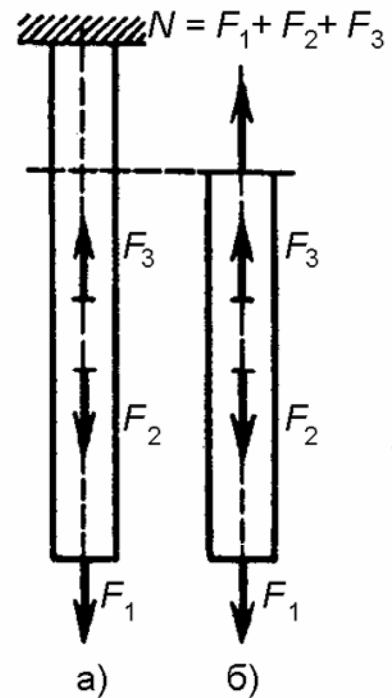


Рисунок 14.2

За таких навантажень у поперечних перерізах виникає тільки подовжня сила N . Дійсно, якщо відповідно до методу перетинів розрізати розтягнутий брус і відкинути, наприклад, його ліву частину (рис. 14.1, в), то для зрівноважування зовнішньої сили F досить у перетині прикласти тільки один внутрішній силовий фактор – нормальну силу N , направивши її по осі Z від перетину. Відповідно до першого з рівнянь (13.1)

$$N = F.$$

Інші внутрішні силові фактори у цьому випадку дорівнюють нулеві (проекції сили F на вісь v і на вісь x дорівнюють нулеві і моменти сили F щодо кожної з осей x , y , z також дорівнюють нулеві). Отже, нормальна сила N є рівнодіюча внутрішніх сил у цьому перетині. Аналогічний результат одержимо, розрізавши стиснутий брус (рис. 14.1, г), з тією лише

різницею, що в останньому випадку нормальна сила N спрямована до перетину.

Якщо брус навантажений не двома, як на рис. 14.1, а, а великою кількістю осьових сил (рис. 14.2, а) і по один бік від обраного перетину маються сили, спрямовані в протилежні боки (рис. 2.2, б), то доцільно визначитися з правилом знаків для проєкцій зовнішніх сил під час визначення нормальної сили в перетині: *проєкції зовнішніх сил, спрямованих від перетину, позитивні і, навпаки, проєкції зовнішніх сил, спрямованих до перетину, негативні.*

Це правило справедливе для будь-якої залишеної частини бруса – правої або лівої (у разі горизонтального положення бруса), нижньої або верхньої (у разі вертикального розташування бруса).

Якщо в результаті алгебраїчного додавання проєкцій зовнішніх сил вийшло, що $N > 0$, то нормальна сила спрямована від перетину і брус у цьому перетині випробує розтягання; коли значення $N < 0$ нормальна сила спрямована до перетину і брус випробує стиск. У тих випадках, коли під час переходу від одного перетину до іншого нормальна сила змінюється, будують графіки зміни значень нормальної сили N по довжині бруса. Такі графіки називаються епюрами (рис. 14.3).

Епюра N зображується у виді ліній рівнобіжних базової і вилучених від неї на величину відповідному значенню нормальної сили цієї ділянки бруса.

Переходимо тепер до визначення напружень у поперечних перерізах бруса.

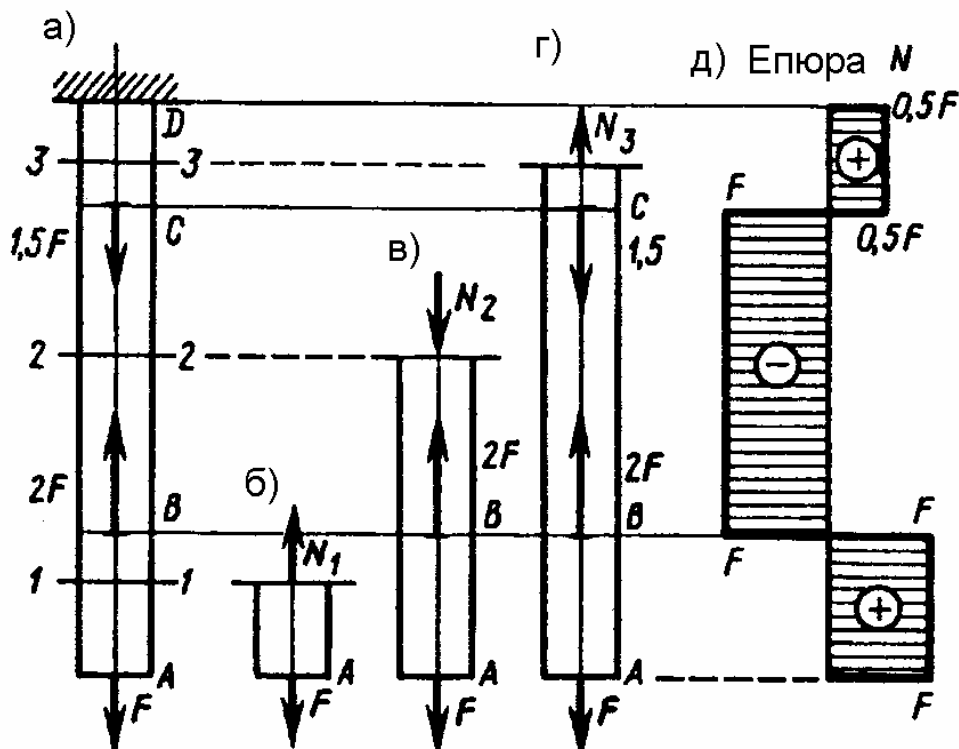


Рисунок 14.3

Ця задача розв'язується на основі *гіпотези плоских перетинів*, (Я. Бернуллі старший (1654 – 1705 рр.)). Стосовно до розглянутого виду навантаження гіпотеза говорить: перпендикулярний осі недеформованого бруса плоский перетин A (рис. 14.4, а) залишається також плоским і перпендикулярним осі і під час розтягання (стиску) бруса (рис. 14.4, б).

Виходячи з того, що в розтягнутому (стиснутому) брусі поперечні перерізи залишаються рівнобіжними один одному, природно припустити, що внутрішні сили розподілені по перетині рівномірно (рис. 14.4, в). Нормальна сила N є рівнодіючою внутрішніх сил у поперечному перерізі, тоді нормальна напруга в будь-якій точці перетину

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (14.1)$$

де A – площа поперечного переріза бруса. Нормальна напруга спрямована так само, як і нормальна сила: під час розтягання бруса – від перетину, при стиску – до перетину.

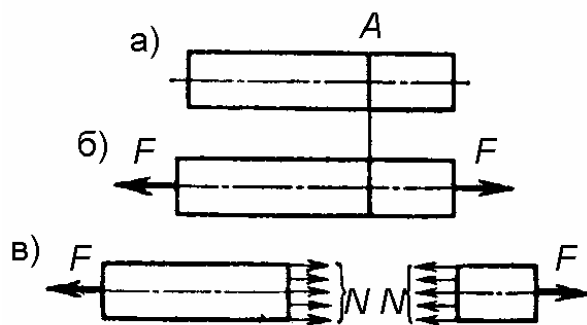


Рисунок 14.4

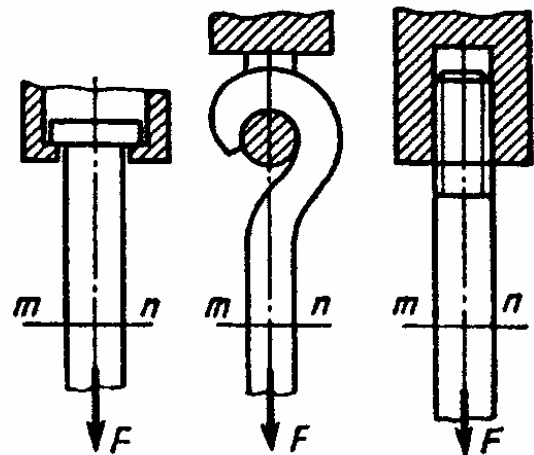


Рисунок 14.5

Розглядаючи розтягання бруса осьовими силами, прикладеними до його торців, ми не торкалися питання про те, яким способом сили, що розтягують, прикладені до бруса. Під час кожного зі способів (рис. 14.5) поблизу закріплень брус випробує більш складний вид навантаження, ніж просте розтягання. Разом із тим експериментальні дослідження показують, що особливості прикладення або застосування зовнішніх сил до розтягнутого бруса впливають на розподіл напруження у його поперечних перерізах тільки поблизу місць навантаження і закріплення.

У поперечних перерізах $m-n$ (рис. 14.5) на відстані, що перевищує їхній найбільший розмір, під час визначення нормальних навантажень досить брати до уваги тільки значення заданої осьової сили F і площі A .

Це положення відоме як *принцип Сен-Венана* в застосуванні до розтягання (стиску) бруса.

Застосовуючи цей принцип надалі, ми не будемо брати до уваги конкретний спосіб прикладання до бруса зовнішніх сил.

Якщо нормальні напруги в різних перетинах бруса не однакові або через зміну нормальних сил уздовж осі бруса, або через зміну площі поперечних перерізів (рис. 14.6, а), то будують епюри нормальних напруг (епюра σ), що наочно характеризує напружений стан бруса по всій його довжині (рис. 14.6, в).

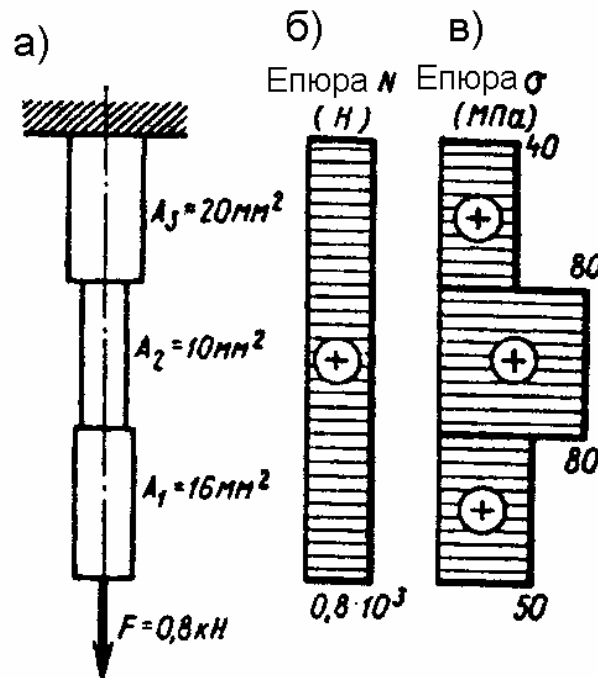


Рисунок 14.6

Приклад 1. Триступінчастий брус із площами поперечних перерізів ступінів $A_1 = 16 \text{ мм}^2$, $A_2 = 10 \text{ мм}^2$ і $A_3 = 20 \text{ мм}^2$ навантажений примусово $F = 0,8 \text{ кН}$, як показано на рис. 14.6. Визначити подовжні сили N і нормальні напруги в поперечних перерізах бруса, побудувати епюри N і σ .

1. Будуємо епюри подовжньої сили.

Брус розтягнуть силою $F = 0,8 \text{ кН} = 0,8 \times 10^3 \text{ Н}$. Застосовуючи метод перетинів, визначаємо, що в будь-якому перетині бруса $N = F = 0,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Епюра N зображена на рисунку 14.6, б.

2. Будуємо епюри нормального напруження.

Площі поперечних перерізів ступінів задані. Підставляючи їхнє значення у формулу (14.1), знаходимо нормальні напруги:

у поперечному перерізі нижнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_1} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{16} = 50 \text{ Н/мм}^2;$$

у поперечному перерізі середнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_2} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{10} = 80 \text{ Н/мм}^2;$$

у поперечному перерізі верхнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_3} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{20} = 50 \text{ Н/мм}^2.$$

Епюра нормальних напруг по всій довжині бруса зображена на рисунку 14.6, в.

Нормальні напруги в поперечних перерізах однієї ступіні не змінюються, тому епюра σ для кожного ступеня зображується відрізком, рівнобіжним (ліворуч або праворуч залежно від знака «+» або «-») базової лінії; відстані між цими відрізками і базовою лінією пропорційні нормальним напругам у перетинах ступінів.

14.2 Переміщення і деформації. Закон Гука

Під час розтягання прямолінійного бруса круглого перетину його первинна довжина l збільшиться на величину Δl (рис. 14.7, а), а первинний поперечний розмір (діаметр d) зменшиться на Δd (рис. 14.7, б).

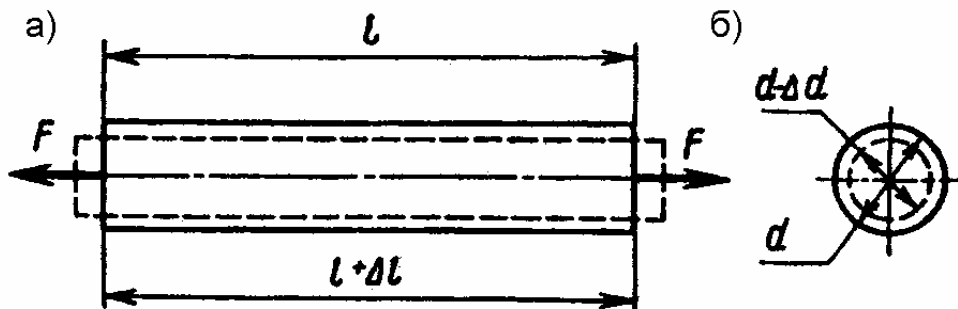


Рисунок 14.7

Величина Δl називається *абсолютним подовженням бруса*, а величина Δd – *абсолютним поперечним звуженням*. Під час стиску бруса його довжина відповідно коротшає на Δl , а поперечний розмір збільшується на Δd . Розглядаючи кожен з цих величин як різницю між початковим (до навантаження) і кінцевим (після навантаження) розмірами, їм варто приписувати протилежні знаки: у разі розтягання бруса $\Delta l > 0$, $\Delta d < 0$, у разі стиску $\Delta l < 0$, $\Delta d > 0$.

Про ступінь деформування бруса не можна оцінювати за значеннями Δl або Δd , тому що останні залежать не тільки від зовнішніх сил, але і від початкових розмірів бруса. Деформування бруса під час розтягання (стиску) характеризують величини

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta l}{l}, \quad (14.2)$$

$$i \quad \varepsilon' = \pm \frac{\Delta d}{d}. \quad (14.3)$$

де ε – подовжня деформація;
 ε' – поперечна деформація бруса.

З формул (14.2) і (14.3) видно, що ε і ε' – величини безрозмірні.

Експериментально доведено, що подовжня і поперечна деформації пропорційно один одному, тобто

$$|\varepsilon'| = \mu|\varepsilon|, \quad (14.4)$$

де коефіцієнт пропорційності μ , що залежить від матеріалу, називається *коефіцієнтом Пуассона*. Експериментально встановлено, що його значення для різних матеріалів коливається в межах 0...0,5. Наприклад, у пробки $\mu = 0$ (під час розтягання або стиску пробочного брусочка його поперечні розміри практично не змінюються), у каучуку (гуми) значення μ близько до 0,5; для сталі $\mu = 0,25...0,3$.

У межах пружних деформацій між нормальною напругою і подовжньою деформацією існує прямо пропорційна залежність, що носить назву *закону Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (14.5)$$

Коефіцієнт пропорційності E називається модулем пружності, і його значення виражається в одиницях напруги, тому що ε – величина безрозмірна.

Значення модуля пружності E для деяких матеріалів:

стали всіх марок –	$2,1 \times 10^5$ МПа;
мідь технічна –	$1,2 \times 10^5$ МПа;
бронза олов'яниста –	1×10^5 МПа;
алюмінієві сплави –	$0,7 \times 10^5$ МПа;
каучук (гума) –	7,85 МПа.

Модуль пружності характеризує твердість матеріалу, тобто здатність чинити опір деформаціям. Відповідно до закону Гука [10], за тих самих значеннях нормальної напруги в поперечних перерізах бруса його подовжні деформації ε тим менше, чим більше модуль пружності E .

Якщо в рівності (2.5) замінити ε вираженням з формули (14.2)

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

то одержимо вираження

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E}. \quad (14.6)$$

Замінивши тут σ його вираженням з формули (2.1), одержимо

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}. \quad (14.7)$$

Тут вираження AE/l називається *твердістю бруса або окремої його ділянки під час розтягання (стиску)*.

Під час розв'язання рішенні деяких практичних задач виникає необхідність поряд із подовженнями у разі розтягання (стиску) враховувати також і його температурні подовження $\Delta l_1 = \alpha_1 l$, де α_1 – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу. У цьому випадку

$$\varepsilon = \frac{\sigma l}{E} + \alpha t,$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE} + \alpha tl. \quad (14.8)$$

Приклад 2. Визначити повне подовження бруса, розглянутого в прикладі 1 (див. рис. 14.6), якщо довжини ступінів бруса $l_1 = l_2 = l_3 = 200$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Рішення. Під час розв'язання рішенні задачі в прикладі 2 побудована епюра нормальних напруг (див. рис. 14.6,в), з якої видно, що в поперечному перерізі верхнього ступеня $\sigma_3 = 40$ Н/мм², середньої ступені $\sigma_2 = 80$ Н/мм² і нижньої $\sigma_1 = 50$ Н/мм². Довжини ступінів і модуль пружності відомі, тому для визначення подовження ступінів бруса доцільно скористатися формулою (14.6).

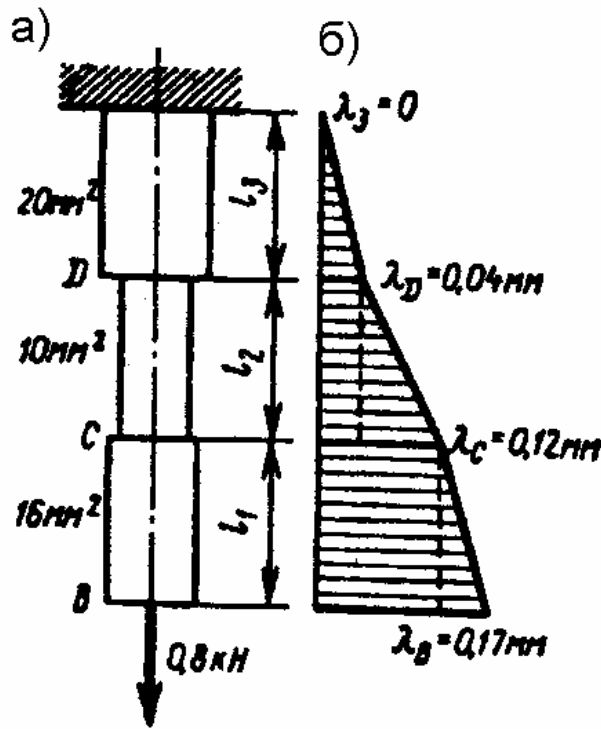


Рисунок 14.8

У результаті одержимо:

Верхній ступінь

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{40 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,04 \text{ мм};$$

середній ступінь

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{80 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,08 \text{ мм};$$

нижній ступінь

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{50 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,05 \text{ мм.}$$

Визначивши подовження ступінів, можна побудувати епюри переміщень λ перетинів. Для цього поруч із кресленням бруса (рис. 2.8, а) паралельно його осі проводимо базову лінію, а переміщення перетинів зображуємо перпендикулярними до неї відрізками, узятими у визначеному масштабі.

Переміщення перетину в закладенні дорівнює нулеві, тобто $\lambda_3 = 0$; переміщення перетину D дорівнює подовженню верхнього ступеня бруса, тобто $\lambda_D = \Delta l_3 = 0,04$ мм; переміщення перетину 3 дорівнює сумі подовжень верхнього і середнього ступінів бруса, тобто $\lambda_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,04 + 0,08 = 0,12$ мм; переміщення перетину B дорівнює сумі подовжень усіх трьох ступінів, інакше кажучи, повному подовженню бруса Δl , тобто $\lambda_B = \Delta l = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,04 + 0,08 + 0,05 = 0,17$ мм.

З'єднавши кінці відрізків, що зображують переміщення розглянутих перетинів прямими, одержимо епюри переміщень по всій довжині бруса (рис. 14.8, б).

14.3 Напружений стан під час одноосьового розтягання

Напружений стан у точці характеризується незліченною безліччю нормальних і дотичних напружень, що виникають на площадках, які можна провести через цю точку.

Для дослідження напруженого стану бруса з поперечним перерізом A у разі розтягання силами F , що діють уздовж його осі (одноосьове розтягання), виберемо яку-небудь точку B (рис. 14.9, а) і зобразимо її у виді малого елемента у формі прямокутного паралелепіпеда з площею бічної грані d окремо від бруса (рис. 14.9, б).

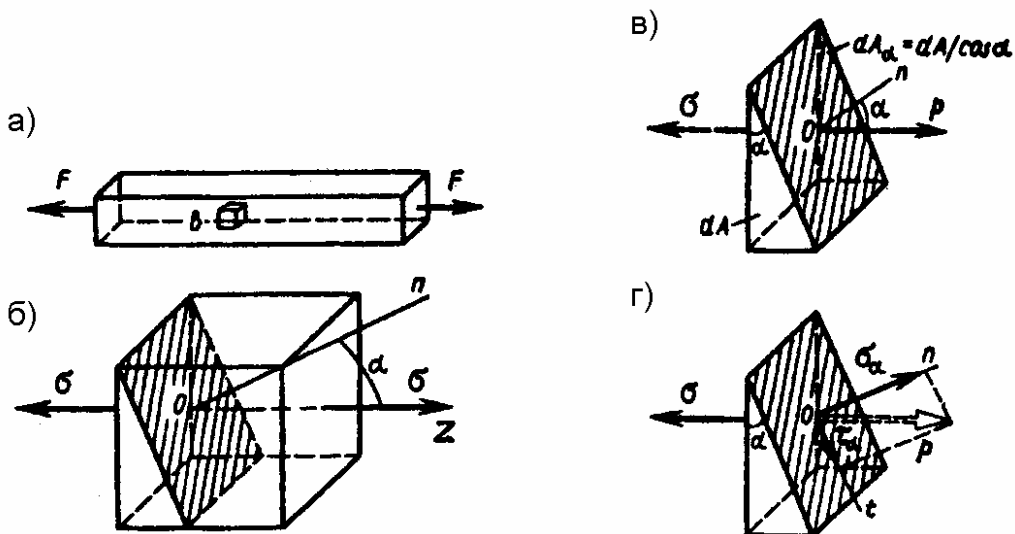


Рисунок 14.9

Якщо припустити, що брус складається з нескінченно великої кількості дуже тонких подовжніх волокон і вважати, що всі ці волокна не надавлюють один на одного, а тільки розтягуються (гіпотеза про ненависнення волокон), то можна дійти висновку, що на гранях паралелепіпеда, рівнобіжних поперечним перерізам бруса, виникають тільки нормальні напруги σ , а на інших гранях напруги дорівнюють нулеві.

Розріжемо виділений елемент по перетині (на рис. 14.9, б воно заштриховано), нормаль On до якого утворить з віссю z кут α , і відкинемо частину елемента правіше перетину. Залишена ліва частина (рис. 14.9, в) зберігає рівновагу, тому що сила σd , що діє на перпендикулярну осі z площадку d , урівноважується силою $p d A \alpha$, що діє на нахилену до осі z площадку $d_\alpha = d / \cos \alpha$, тобто

$$\sigma d = p d A / \cos \alpha.$$

Розкладемо вектор p повної напруги на площадці d_α на складові σ_α і τ_2 .

Отже, виникла на похилій площадці повна напруга

$$p = \sigma \cos \alpha. \quad (14.9)$$

Розклавши напругу p на дві складові по нормалі On і дотичної O_t до похилої площадки (рис. 14.9, г), знаходимо

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha \quad \text{і} \quad \tau_\alpha = p \sin \alpha.$$

Підставимо сюди замість p його значення з рівняння (14.9) і враховуючи, що $\sin \alpha \cos \alpha = 0,5 \sin 2\alpha$, одержимо

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (14.10)$$

$$\tau_\alpha = 0,5 \sigma \sin 2\alpha \quad (14.11)$$

Таким чином, знаючи нормальну напругу σ у поперечному перерізі розтягнутого (стиснутого) бруса, можна за формулами (2.10) і (2.11) визначити нормальне σ_α і дотичне τ_α напруги в перетині бруса, нахиленому до осі бруса під будь-яким кутом α .

З формул (14.10) і (14.11) випливає:

а) за $\alpha = 0^\circ$ (перетин бруса перпендикулярно осі z $\cos^2 \alpha = \cos^2 0^\circ = 1$; $\sin 2\alpha = \sin 0^\circ = 0$), $\sigma_0 = \sigma$, $\tau_0 = 0$;

б) за $\alpha = 90^\circ$ (подовжній перетин бруса $\cos^2 \alpha = \cos^2 90^\circ = 0$; $\sin 2\alpha = \sin 180^\circ = 0$), $\sigma_{90} = \sigma$, $\tau_{90} = 0$;

в) за $\alpha = 45^\circ$ ($\cos^2 \alpha = \cos^2 45^\circ = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$; $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$), $\sigma_{45} = \sigma/2$, $\tau_{45} = \sigma/2$.

У такий спосіб встановлено, що під час одноосьового розтягання максимальна нормальна напруга $\sigma_{\max} = \sigma = F/A$ виникає в поперечних перерізах бруса ($\alpha = 0$); максимальне дотичне напруження $\tau_{\max} = \tau_{45} = \sigma/2$ виникає в перетинах, нахилених до осі бруса під кутом 45° .

Крім того, з рівності (14.11) випливає, що перехід від довільної площадки з нахилом α до площадки з нахилом $\alpha+90^\circ$ (рис. 2.10) ніяк не відбиває на абсолютному значенні дотичних напружень. Дійсно, якщо

$$|\tau_\alpha| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right|, \text{ те } |\tau_{\alpha+90}| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha + 180) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right| = |\tau_\alpha|.$$

Отже,

$$|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha+90}|.$$

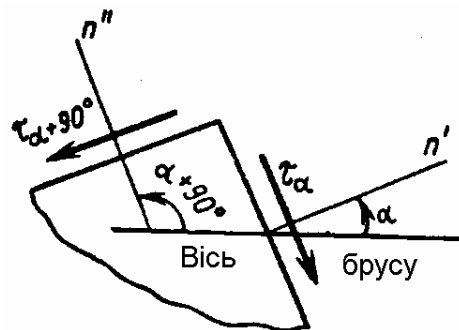


Рисунок 14.10

Ця рівність виражає **закон парності дотичних напружень**: дотичні напруження, що виникають у двох взаємно перпендикулярних площадках, рівні один одному за модулем і спрямовані або від ребра, або до ребра, утвореному площадками.

14.4 Статичні випробування матеріалів. Основні механічні характеристики

Під час вибору матеріалу для якого-небудь елемента конструкції в розрахунках необхідно знати механічні властивості матеріалу, що визначають його міцність, пружність, твердість і пластичність. Необхідні знання про різні механічні властивості матеріалів одержують експериментально в процесі механічних випробувань на розтягання, стиск, зріз, крутіння і вигин.

Найпоширенішими є випробування на розтягання. Для них з випробуваного матеріалу виготовляють стандартні зразки, один із яких зображений на рисунку 14.11. Зразки випробовують на розривних машинах, де осьові навантаження розтягують їх і доводять до розриву. Поводження зразків у міру росту навантаження фіксується за допомогою записуючого пристрою.

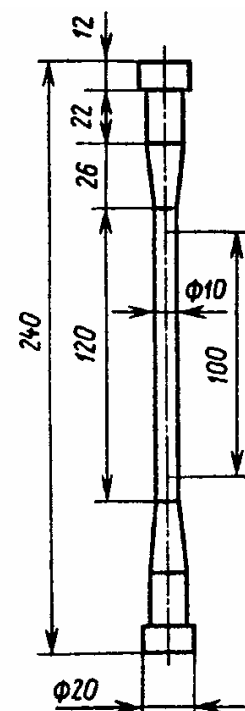


Рис. 14.11

На рисунку 14.12 зображена зразкова діаграма, записана під час випробування зразка з низьковуглеродистої сталі. По осі абсцис у визначеному масштабі зафіксоване зростання подовження Δl зразка, а по осі ординат – виникаюча в його поперечному перерізі нормальна сила N , кількісно дорівнює осьовому навантаженню F , прикладеної до зразка. Характерні точки на діаграмі відзначені цифрами 1, 2, 3 і 4.

На початку випробування (до оцінки 1 з ординатою N_{m1}) подовження Δl росте пропорційно силі N , тим самим підтверджується справедливість закону Гука. Далі подовження Δl зростає непропорційно силі N . За деякого значення нормальної сили N_m (оцінка 2) зразок подовжується без збільшення навантаження. Це явище називається *плинністю матеріалу*.

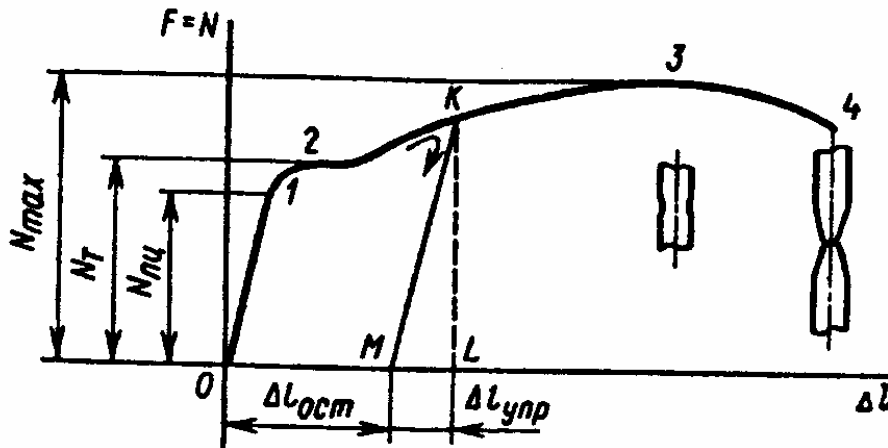


Рисунок 14.12

Після закінчення стадії плинності матеріал зразка знову починає чинити опір навантаженню до оцінки 3 з ординатою N_{max} , після якої спостерігається зниження опірності зразка навантаженню. Ця обставина обгрунтовується тим, що на зразку починає утворюватися місцеве звуження (шейка) і надалі діаграма фіксує вже розтягання не всього зразка, а тільки його ділянки в зоні шийки, що утворилася. Момент остаточного руйнування зразка відзначений цифрою 4.

Якщо після переходу через стадію плинності, наприклад у момент, відзначений на діаграмі точкою 2 (рис. 14.12), зразок розвантажити, то процес розвантаження зобразиться відрізком КМ, рівнобіжним відрізкові на початку випробування. Як бачимо, після розвантаження залишкове подовження $\Delta l_{ост}$ не стало рівним подовженню зразка, вираженому відрізком OL , а зменшилося на значення пружного подовження $\Delta l_{упр}$. Тепер, якщо цей же зразок піддати повторному навантаженню, то виявиться, що лінія навантаження збіжиться з лінією MK , тобто частина діаграми лівіше цієї лінії не повториться. Отже, після попередньої витяжки зразка за стадію плинності його матеріал здатний сприймати великі навантаження без залишкових деформацій. Явище підвищення пружних властивостей матеріалу в результаті попередньої витяжки вище границі текучості називається *наклепом*.

Нормальні сили, що виникають у зразку, і його подовження не можуть бути об'єктивними критеріями для оцінки властивостей матеріалу, тому що залежать від абсолютних розмірів самого зразка.

Для того одержати механічні характеристики матеріалу, діаграму (рис. 14.12), зняту під час випробувань зразка, потрібно перебудувати в *діаграму розтягання* в координатах (ε, σ) , що не залежать від абсолютних розмірів зразка (рис. 2.13). Для цього всі абсциси й ординати на діаграмі в координатах $(\Delta l, N)$ необхідно розділити відповідно на початкову розрахункову довжину l_0 і на початкову площу поперечного переріза A_0 зразка (рис. 2.14, а).

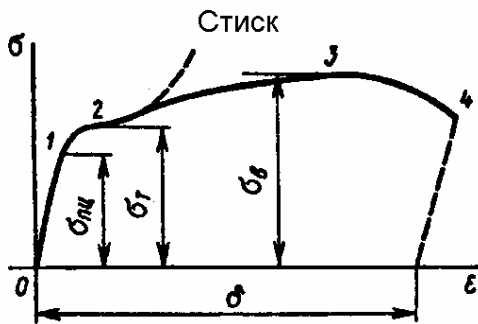


Рисунок 14.13

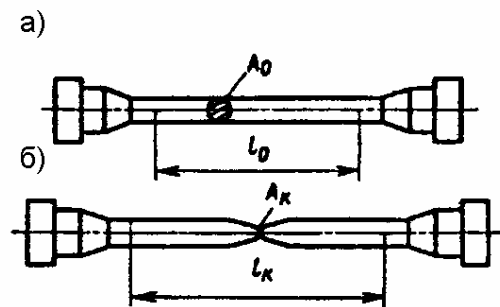


Рисунок 14.14

Розділивши ординату $N_{пц}$ на A_0 одержимо *межу пропорційності* $\sigma_{пц} = N_{пц}/A_0$, тобто найбільша напруга, до якої справедливий закон Гука; розділивши ординату N_T на A_0 одержимо *границю плинності* $\sigma_T = N_T/A_0$, тобто напруга, за якої відбувається зростання пластичної деформації під час незмінного навантаження; розділивши N_{max} на A_0 одержимо *межу міцності (тимчасовий опір)* $\sigma_B = N_{max} / A_0$, тобто напруга, що відповідає найбільшому навантаженню, що витримується зразком до руйнування.

Для маловуглеродистої сталі, що має площадку плинності, наприклад, для сталі Ст2, ці характеристики такі: $\sigma_{пц} = 200$ МПа, $\sigma_T = 220 - 260$ МПа, $\sigma_B = 340-420$ МПа.

Під час випробування деяких пластичних матеріалів (середньовуглеродиста сталь, мідь, свинець, алюміній) на діаграмі розтягання не утвориться чітко вираженої площадки плинності (рис. 14.15). Для таких матеріалів уводиться умовна границя плинності, що дорівнює напрузі, за якої подовжня деформація зразка $\varepsilon = 0,002$, тобто 0,2 %. Умовна границя плинності позначається $\sigma_{0,2}$.

Пластичні властивості матеріалу оцінюються залишковою деформацією під час розриву

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100 \%,$$

де l_k і l_0 – довжини розрахункової частини зразка після розриву і до початку випробування (див. рис. 14.14, б, а). Наприклад, для сталі Ст2 відносне подовження після розриву $\delta = 31\%$.

Під час випробування на стиск пластичні матеріали до границі плинності поведуться так само, як і під час розтягання, але далі пластична деформація зростає повільніше. Зразок поступово сплющується. На рис. 14.13 і 14.15 залежність між σ і ϵ під час стиску зразків показана штриховою лінією.

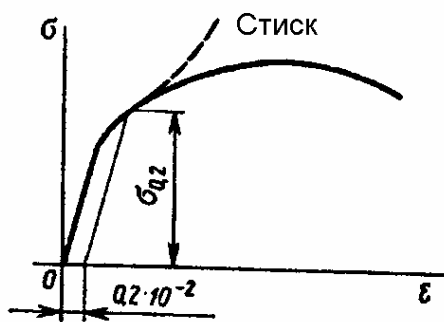


Рисунок 14.15

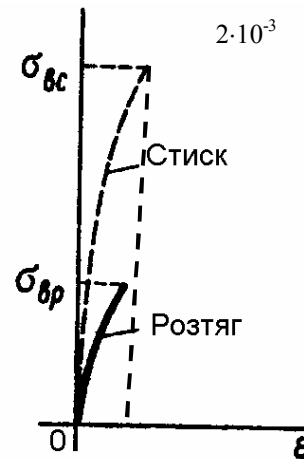


Рисунок 14.16

Під час випробування крихких матеріалів (загартована сталь, чавун, скло, бетон і ін.) установлено, що вони здатні витримувати набагато великі навантаження під час стиску, ніж під час розтягання. Вид діаграм під час випробування чавунних зразків показано на рисунку 14.16. Суцільною лінією зображена залежність між σ і ϵ під час розтягання, штриховою лінією – під час стиску. За цими діаграмами визначають межі міцності під час розтягання ($\sigma_{вр}$) і під час стиску ($\sigma_{вс}$) для крихких матеріалів

$$\sigma_{вр} < \sigma_{вс}.$$

Наприклад, для сірого звичайного чавуна тимчасовий опір під час розтягання і стиску складає: $\sigma_{вр} = (0,55 - 0,65)\sigma_{вс}$ МПа; $\sigma_{вс} = 800-1000$ МПа.

Аналогічна діаграма, але з більш високими ординатами виходить для загартованих сталей.

14.5 Розрахунки на міцність

Під час проектування елемента конструкції необхідно визначити розміри, що забезпечують його безпечну роботу при заданих навантаженнях. Для успішного розв'язання цієї задачі необхідно виходити з того, щоб найбільша розрахункова напруга в поперечному перерізі елемента конструкції, що виникла при заданому навантаженні, була менше тієї граничної напруги, за якої виникає небезпека появи пластичної деформації або небезпека руйнування.

Відношення граничної напруги $\sigma_{пред}$ до розрахункової σ називається *коефіцієнтом запасу міцності* s :

$$s = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma}. \quad (14.12)$$

Під час розрахунку елемента конструкції коефіцієнт запасу міцності задається заздалегідь і називається *нормативним або необхідним* і позначається $[s]$.

Міцність елемента конструкції забезпечується, якщо дійсний коефіцієнт запасу міцності не нижче необхідного, тобто

$$s \geq [s]. \quad (14.13)$$

Нерівність (2.13) виражає умову міцності елемента конструкції.

Розділивши граничну напругу на нормативний коефіцієнт запасу, одержимо *напругу, що допускається*, $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}. \quad (14.14)$$

Тоді умову міцності можна виразити нерівністю

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (14.15)$$

тобто міцність елемента конструкції забезпечується, якщо найбільша напруга, яка виникає в ньому, не перевищує тієї, що допускається.

Для пластичних матеріалів як під час розтягання, так і під час стиску граничною напругою є границя плинності σ_T , тому для них напругу, що допускається, одержують виходячи з границі плинності σ_T :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{s_T}. \quad (14.16)$$

У практиці конструювання, розрахунку й експлуатації машин і споруджень величину запасу міцності s_T приймають рівною: $[s_T] = 1,4 \dots 2$.

Для крихких матеріалів напругу розтягання, що допускається, $[\sigma_p]$ і напругу стиску, що допускається, $[\sigma_c]$ одержують виходячи з меж міцності $\sigma_{вр}$ або $\sigma_{вс}$:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{S_е} \text{ та } [\sigma_c] = \frac{\sigma_{вс}}{S_е} \quad (14.17)$$

У цьому випадку приймають, що запас міцності $[S_B] = 2,5 \dots 5$, а іноді і вище.

Умова міцності (2.15) стосовно до розрахунків на міцність під час розтягання (стиску) записується у виді:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (14.18)$$

Виходячи з цієї умови роблять три види розрахунків.

Проектувальний розрахунок. При цьому розрахунку відомі навантаження, що діють на брус, задані $\sigma_е$ або обраний матеріал та заданий нормативний запас міцності $[S]$. Розміри поперечного переріза бруса, що

забезпечують необхідну міцність, визначаємо в такий спосіб: вважають $\sigma = [\sigma]$, площу перетину, з огляду на (2.18), визначають за формулою:

$$\frac{N}{[\sigma]} \leq A. \quad (14.19)$$

Визначивши з цієї формули необхідну площу поперечного переріза, залежно від форми (коло, квадрат і ін.) знаходять його розміри.

Визначення навантаження, що допускається. У цьому випадку відомі розміри бруса і його матеріал, а потрібно визначити максимально припустиме навантаження. Для цього, прийнявши $\sigma = [\sigma]$, з умови (14.18) одержуємо

$$[N] \leq A[\sigma]. \quad (14.20)$$

Потім за допомогою методу перетину за знайденим значенням подовжньої сили, що допускається, $[N]$ визначаємо значення навантаження, що допускається.

Перевірочний розрахунок. При цьому розрахунку навантаження бруса, його матеріал і розміри відомі та потрібно перевірити, чи виконується умова (14.18). Для цього визначають найбільшу розрахункову напругу $\sigma = N/A$ у поперечному перерізі бруса і порівнюють із тією, що допускається. Найбільша розрахункова напруга не повинна бути більше тієї, що допускається. Розрахункову напругу вважають безпечною, якщо вона перевищує ту, що допускається не більш ніж на 5 %. Поперечний переріз бруса, у якому виникає найбільша розрахункова напруга під час розтягання (стиску), називається *небезпечним*.

14.6 Статично невизначені системи

Механічна система, для якої реакції зв'язків і внутрішніх силових факторів не можуть бути визначені за допомогою рівнянь рівноваги статички і методу перетинів, називається *статично невизначеною*. Статично невизначені системи відрізняються від статично визначених великою кількістю накладених зв'язків.

На рисунку 14.17 подані статично визначені системи, нормальні сили N у яких визначаються за допомогою одного рівняння проєкцій на вісь $x(a)$, двох рівнянь проєкцій на осі x і y (б), одного рівняння моментів щодо нерухомого шарніра (в).

На рисунку 14.18 подані статично невизначені системи. Нормальна сила N у поперечному перерізі бруса, жорстко заробленого з обох кінців (рис. 14.18, а), не може бути визначена з рівняння проєкцій на вісь x , тому що в нього входять дві невідомі величини – нормальна сила N і реакція R . Системи з кількістю невідомих сил, на одиницю перевищуючими кількість рівнянь статички, які можна скласти для цієї системи, називаються один раз статично невизначеними. Для того, щоб розв'язати задачу, необхідно

скласти додаткове рівняння переміщень з умови, що загальна довжина бруса залишається незмінною.

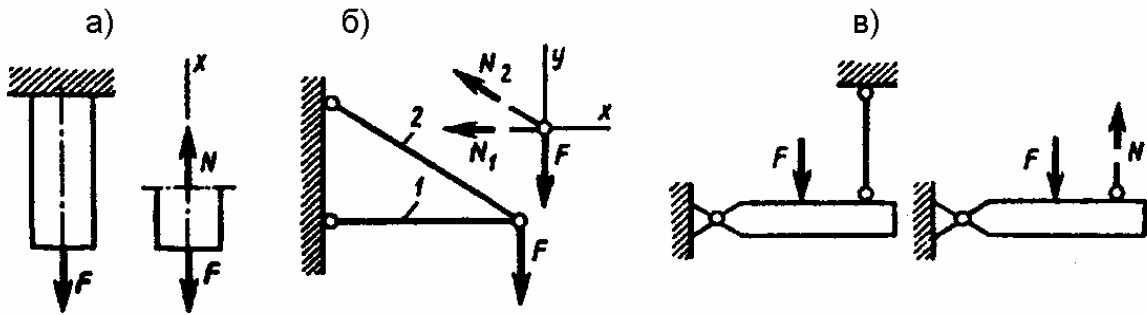


Рисунок 14.17

Система на рисунку 14.18, б також один раз статично невизначена, тому що в два рівняння проєкцій сил, які можна скласти в цьому випадку, входять три невідомі величини: N_1 , N_2 , N_3 .

Система на рисунку 14.18, в два рази статично невизначена – у ті ж два рівняння статички входять чотири невідомі. Для розв’язання цих задач у першому випадку потрібно скласти одне додаткове рівняння переміщень, а у другому – два, виходячи з умови, що у разі зміни довжини стержнів вузол A залишається для них загальним.

Система на рисунку 14.18, г один раз статично невизначена і до рівняння моментів сил щодо точки A , що містить дві невідомі сили (N_1 і N_2), потрібно додатково скласти одне рівняння переміщень. На рисунку 14.18, д зображена два рази статично невизначена система і додаткових рівнянь переміщень необхідно скласти два. У подібних випадках рівняння переміщень складають з умови, що місця закріплення стержнів на твердій балці AB залишаються на одній прямій.

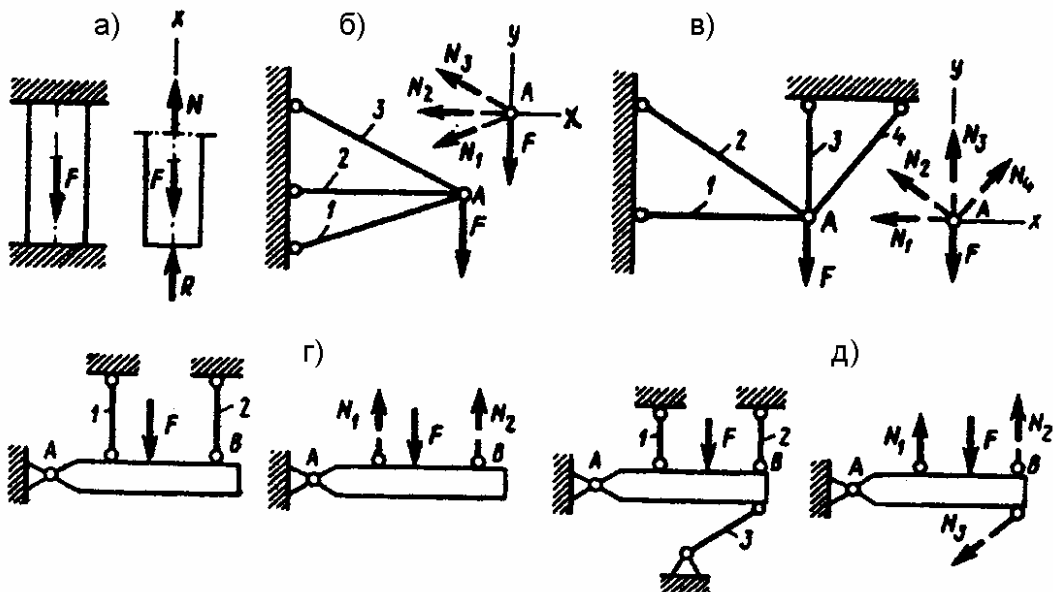


Рисунок 14.18

Узагалі говорячи, якщо число невідомих сил системи на n перевищує число рівнянь статички, які можна скласти для неї, то система називається n раз статично невизначеною і для розв'язання задачі необхідно скласти n рівнянь переміщень.

У статично невизначених системах іноді необхідно враховувати напруги, що виникають у разі зміни температури системи в цілому або окремих її елементах. Так, наприклад, у стержні, жорстко забитому з обох кінців у непіддатливих стінках (рис. 14.19, а), під час нагрівання виникають напруги стиску (рис. 14.19, б), а під час охолодження – напруги розтягання (рис. 14.19, в).



Рисунок 14.19

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як потрібно навантажити прямий брус, щоб він працював тільки на розтягання (стиск)?

2. Сформулюйте закон Гука. Який фізичний зміст модуля подовжньої пружності E ?

3. Круглий брус діаметром d і довжиною l , навантажений подовжньою силою P подовжувався на Δl . Яке подовження одержить виготовлений з того ж матеріалу і навантажений примусово P брус:

а) довжиною $l_1 = 2l$ і діаметром $d_1 = d/2$;

б) довжиною $l_2 = 2l$ і $d_2 = 2d$ діаметром?

4. Що таке «гранична напруга» і що таке «розрахункова напруга»?

5. Що таке напруга, що допускається, і як вона вибирається залежно від властивостей матеріалів?

6. На якому-небудь прикладі пояснить, як можна певну статично визначену систему перетворити в статично невизначену?

7. Чому під час нагрівання одного зі стрижнів кронштейна (див. рис. 14.17, б) в обох стрижнях не виникне додаткова (температурна) напруга, а під час нагрівання, наприклад, стрижня 2 (див. рис. 14.18, б) у всіх стрижнях виникають ці напруги?

15 ПРАКТИЧНІ РОЗРАХУНКИ НА ЗРІЗ І ЗМІНАННЯ

15.1 Основні розрахункові передумови і формули

Якщо два бруси з'єднати між собою штифтом, а потім навантажити спрямованими в протилежні боки силами F (рис. 15.1), то при значних силах або невеликому діаметрі штифта він може бути зруйнований по перетину, розташованому в площині стикування поверхонь брусів, що з'єднуються, (рис. 15.1, б). Таке руйнування сполучних деталей (штифта, болта, шпильки, заклепки, шпонки), що відбувається під дією навантажень, перпендикулярних їхнім власним осям (поперечні навантаження), називається *зрізом*.

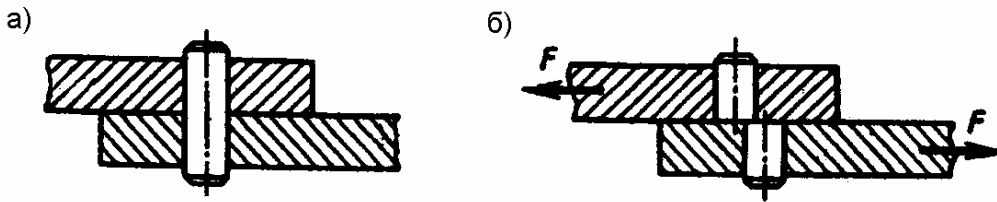


Рисунок 15.1

Практичні розрахунки сполучних деталей на зріз носять умовний характер і ґрунтуються на трьох допущеннях: у поперечному перерізі можливого зрізу деталі виникає тільки один внутрішній силовий фактор – поперечна сила Q ; дотичні напруження, що виникають у поперечному перерізі, розподілені по перетину рівномірно; якщо з'єднання здійснене декількома однаковими деталями (болтами, заклепками та ін.), то вважається, що усі вони навантажені однаково. Виходячи з цих допущень, умова міцності під час розрахунку на зріз запишеться у вигляді:

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau_{cp}], \quad (15.1)$$

де τ_{cp} – розрахункова напруга зрізу в поперечному перерізі деталі;

$Q = F/i$ – поперечна сила, що виникає в цьому перетині;

A_{cp} – площа поперечного перерізу деталі, що зрізується, (площа зрізу);

i – кількість сполучних деталей;

$[\tau_{cp}]$ – напруга, що допускається, під час розрахунків на зріз, що залежить від матеріалу сполучної деталі й умов роботи конструкції.

Під час розрахунку болтів, штифтів, шпонок та іншого приймають $[\tau_{cp}] = (0,25 \dots 0,35)\sigma_m$ або $[\tau_{cp}] = (0,55 \dots 0,60)[\sigma]$.

З умови міцності (15.1) роблять три види розрахунків: а) перевірочний; б) проектний (визначають кількість сполучних деталей при заданих розмірах або визначають розміри деталей при заданій їхній кількості); в) визначають навантаження, що допускається.

За невеликої товщини брусів, що з'єднуються, (аркушів) і значному навантаженню між поверхнею сполучної деталі і стінками отвору виникає великий взаємний тиск, у результаті якого стінка отвору може обім'ятися, форма отвору зміниться і з'єднання зруйнується.

Тиск, що виник між поверхнями сполучної деталі й отвору, називається *напругою зминання* $\sigma_{см}$.

Розрахунки на зминання, так само як і розрахунки на зріз, носять умовний характер. Вважають, що сили тиску розподілені по поверхні зминання рівномірно і перпендикулярні їй. Звідси умова міцності на зминання має такий вигляд:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{iA_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (15.2)$$

де F/i – навантаження на один сполучний елемент (i – число елементів);

$A_{см}$ – площа зминання;

$[\sigma_{см}]$ – напруга зминання, що допускається. Для низьковуглеродистої сталі $[\sigma_{см}] = 60 \dots 120$ Н/мм.

Якщо поверхня зминання плоска, як, наприклад, при з'єднанні вала 1 і втулки 2 призматичною шпонкою 3 (рис. 15.2), то площа зминання буде визначатися як:

$$A_{см1} = t_1 a \text{ і } A_{см2} = t_2 a.$$

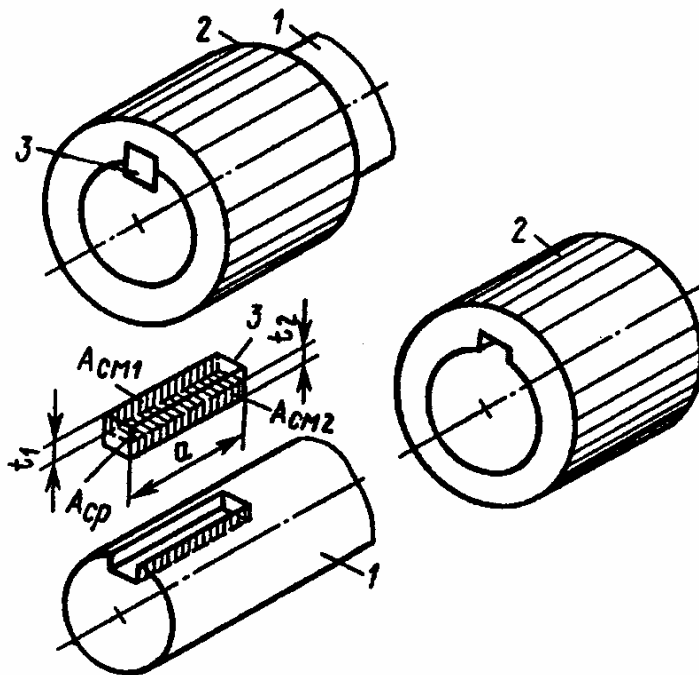


Рисунок 15.2

площа ослабленого поперечного переріза (площа «нетто») $A = (a - d)h$.

Розглянемо зварене з'єднання двох листів кутовими швами (рис. 15.4). Зварені з'єднання не дають ослаблення елементів, менш трудомісткі, ніж інші види з'єднань, і тому більш економічні.

Руйнування швів у з'єднанні, що розглядається, відбувається внаслідок

Якщо поверхня зминання циліндрична, то в розрахункову формулу (15.2) підставляється умовна площа зминання, рівна площі проекції поверхні на діаметральну площину. На рис. 3.2 умовна площа зминання $A_{см1} = dh$.

Крім перевірки деталей на зминання за відносно невеликої ширини листів, що з'єднуються, або пластин їх перевіряють на розрив за поперечним перерізом, ослабленому отворами. На рисунку 15.3

док зрізу по найменшій можливій площі зрізу, розташованої в бісекторній площині кута, де наплавляється шов (рис. 3.4, б). При цьому площа зрізу на два шви буде $A_{cp} = 2lh_{шв}\beta$, де β – коефіцієнт форми кутового шва. Він залежить від виду зварювання: для однопрохідного автоматичного $\beta = 1$; однопрохідного напівавтоматичного ручного $\beta = 0,8$; багатопрохідного авто- і напівавтоматичного $\beta = 0,7$; $h_{шв}$ – висота катета кутового шва.

Припускаючи рівномірний розподіл дотичних напружень по площі зрізу шва, умову міцності подамо у вигляді:

$$\tau = \frac{N}{A_{cp}} = \frac{N}{2l\beta h_{шв}} \leq R_{cp}, \quad (15.3)$$

де R_{cp} – розрахунковий опір матеріалу кутового звареного шва на зріз;

l – розрахункова довжина шва, що береться на 10 мм менше фактичної через можливе погіршення якості зварювання по кінцях шва. Для того щоб не припускати надмірної нерівномірності розподілу напруг по довжині шва, вводяться обмеження на його довжину $l \leq 60h_{шв}$. За формулою (15.3), якщо задати який-небудь один розмір шва, наприклад $h_{шв}$, можна визначити довжину шва l .

а)

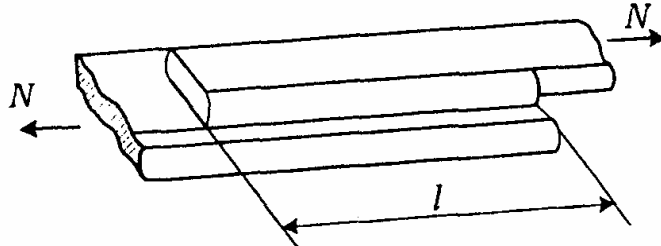


Рисунок 15.4. Зварене з'єднання кутовими швами

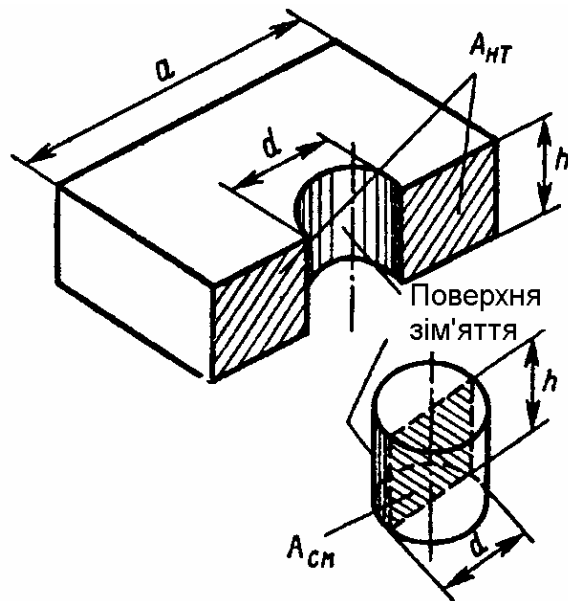
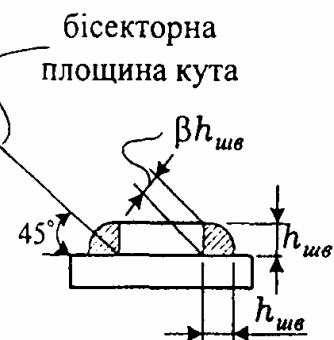


Рисунок 15.3

б)



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. На яких допущеннях засновані розрахунки на зріз і зминання?
2. Як визначається площа зминання, якщо поверхня зминання: а) плоска; б) циліндрична?

16 КРУТІННЯ

16.1 Чисте зрушення. Закон Гука під час зрушення

Як приклад напруженого стану в точці бруса розглядався (див. гл. 2) одноосьовий напружений стан і в зв'язку з цим був установлений закон парності дотичних напружень. Розглянемо ще один напружений стан, що носить назву *чисте зрушення* (рис. 16.1, а). При чистому зрушенні на чотирьох гранях виділеного елемента виникають тільки дотичні напруження, а дві грані вільні від напруг.

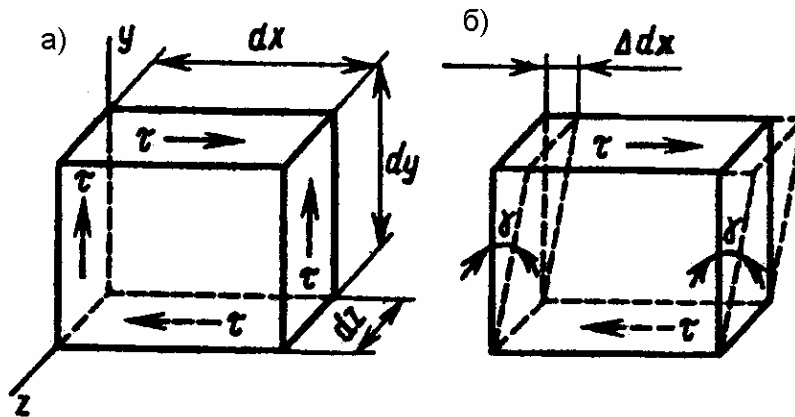


Рисунок 16.1

Відповідно до закону парності, дотичні напруження τ на всіх чотирьох площях рівні за абсолютною величиною, але спрямовані по суміжних гранях або від ребра, або до ребра. Легко довести, що виділений елемент під час зрушення знаходиться в рівновазі (рис. 16.1, а).

На вертикальних площадках $dA_y = dz \cdot dy$ діють сили $\tau \cdot (dz \cdot dy)$, що утворюють пари з моментом щодо осі z :

$$\tau (dz \cdot dy) \cdot dx.$$

На горизонтальних площадках $dA_x = dx \cdot dz$ діють сили $\tau (dx \cdot dz)$ утворюючої пари з моментом щодо осі z :

$$-\tau (dx \cdot dz) \cdot dy,$$

а алгебраїчна сума моментів пар щодо осі z :

$$\tau (dz \cdot dy) dx - \tau (dx \cdot dz) dy = 0.$$

Явище зрушення полягає в тому, що під дією зовнішніх сил первинна форма виділеного елемента спотворюється (рис. 16.1, б), тобто, наприклад, горизонтальні площадки зрушуються відносно один одного на відстань Δdx , яка називається *абсолютним зрушенням*, і прямий кут $\pi/2$ між суміжними площадками змінюється на величину γ . Цей кут не залежить від розмірів виділеного елемента, тому він є мірою деформації зрушення і називається *кутом зрушення* або *кутовою деформацією*. Установлено, що дотичні напруження і кут зрушення в межах пружних деформацій зв'язані між собою прямою пропорційною залежністю

$$\tau = G\gamma, \quad (16.1)$$

яка називається *законом Гука під час зрушення*. Коефіцієнт пропорційності G називається *модулем пружності під час зрушення і характеризує твердість матеріалу під час зрушення*.

Для того самого матеріалу між модулем пружності E , модулем зрушення G і коефіцієнтом Пуассона μ існує така залежність:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (16.2)$$

За цією формулою, знаючи E та μ , легко знайти G . Наприклад, для сталі $\mu = 0,25$ і тоді одержимо $G = 0,4 E$.

16.2 Крутіння. Побудова епюр крутильних моментів

Крутінням називається такий вид навантаження бруса, за якого в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – крутильний момент. Для того щоб одержати такий вид навантаження в найпростішому випадку, брус необхідно навантажити діючими в площинах, перпендикулярних його осі, і в протилежних напрямках двома парами сил (рис. 16.2, а), моменти T_1 і T_2 яких називаються зовнішніми скручуючими моментами. Надалі будемо вважати, що алгебраїчна сума зовнішніх моментів, прикладених до бруса, дорівнює нулеві, тобто брус знаходиться в рівновазі (у стані спокою або рівномірного обертання).

Розріжемо брус по перетину A на частини I і II (рис. 16.2, а) і, відкинувши частину I, розглянемо рівновагу залишеної частини II. З рис. 4.2, б бачимо, що рівновага забезпечується виникненням у перетині тільки крутильного моменту M_k . При цьому алгебраїчні суми проєкцій зовнішніх сил, що утворюють пари, на кожен з осей дорівнюють нулеві, дорівнюють нулеві і моменти пар сил щодо осей x та y . Отже, одержимо, що

$$N = 0; \quad Q_x = 0; \quad Q_y = 0; \quad M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_k = T_2.$$

Якщо ж відкинути частину II бруса (рис. 16.2, в), то одержимо, що в перетині A , крутильний момент, $M_k = T_1$ не зміниться ні за величиною, ні за напрямком, тому що за умови рівноваги бруса $T_1 = T_2$.

У тих випадках, коли на брус діють не два, а кілька скручуючих моментів, доцільно під час обчислення крутильних моментів, прийняти таке правило знаків: під час розгляду кожної із залишених частин бруса з боку перетину зовнішні моменти, що діють по ходу годинникової стрілки, вважаємо позитивними, діючі проти ходу годинникової стрілки – негативними.

Для одержання наочної картини зміни крутильних моментів, у різних перетинах будують їх епюри по всій довжині бруса. Порядок побудови епюри крутильних моментів, M_k розглянемо на прикладі.

На рис. 16.3, а зображений брус, навантажений чотирма моментами. З умови рівноваги бруса випливає, що $T_1 + T_2 + T_3 + T_0 = 0$. Перетинами, у яких прикладені скручуючі моменти, брус розділений на чотири ділянки: I, II, III і IV. Розсічемо брус на ділянці I, і відкинувши частину бруса правіше перетину, бачимо (рис. 16.3, б), що залишена ліва частина не навантажена. Виходить, $M_{KI} = 0$. Розсічемо брус на ділянці II, відкинемо праву частину бруса і розглянемо ліву частину з боку перетину. З рис. 4.3, в побачимо, що $M_{KII} = T_1$ (якщо дивитися з боку перетину, то момент T_1 діє по ходу годинникової стрілки). Розглядаючи далі ліву частину бруса з боку перетину на ділянці III (рис. 16.3, г), бачимо, що $M_{KIII} = T_1 + T_2$. З розгляду лівої частини бруса з боку перетину на ділянці IV (рис. 16.3, д) випливає $M_{KI} = T_1 + T_2 - T_0$. З умови рівноваги всіх скручуючих чотирьох моментів ($T_0 = T_1 + T_2 + T_3$) ясно, що $-T_0 + T_1 + T_2 < 0$. Тому $M_{KI} < 0$.

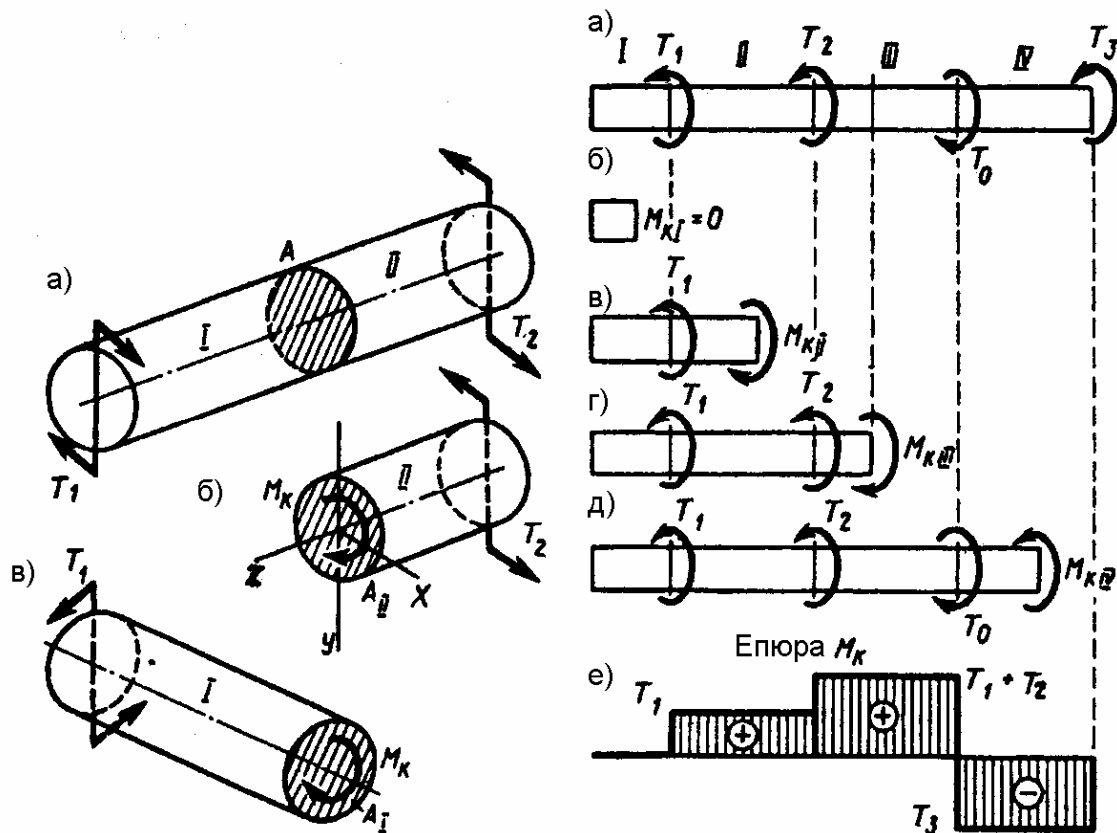


Рисунок 16.2

Рисунок 16.3

На рисунку 16.3, е результати обчислень зображені у виді епюри. На будь-якій ділянці між перетинами бруса, навантаженими скручуючими моментами, крутильні моменти залишаються постійними. При переході від однієї ділянки до іншої на епюрі виникають стрибки, чисельно рівні моментам зовнішніх пар, що скручують.

Епюри M_K можна було б будувати і праворуч, і ліворуч. Тоді, відкидаючи щораз ліву частину бруса, ми одержали б для ділянки IV $M_I = -T_3$ (з умови рівноваги зовнішніх моментів випливає, що $T_3 = -T_0 +$

$+ T_1 + T_2$), для ділянки III $M_{кIII} = -T_3 + T_0$ (легко бачити, що $-T_3 + T_0 = T_1 + T_2$) і т.д.

16.3 Крутіння круглого прямого бруса. Основні передумови і формули

Залежності між величинами, що характеризують крутіння бруса, представляються в найбільш простому виді при круглому поперечному перерізі бруса. Розглядаючи крутіння круглого прямого бруса, виходимо з трьох допущень: обраний в брусі до навантаження поперечний переріз залишається плоским і перпендикулярним осі і після навантаження (гіпотеза Я. Бернуллі); відстані між поперечними перерізами під час навантаження бруса не змінюються; радіуси поперечних перерізів бруса не викривляються.

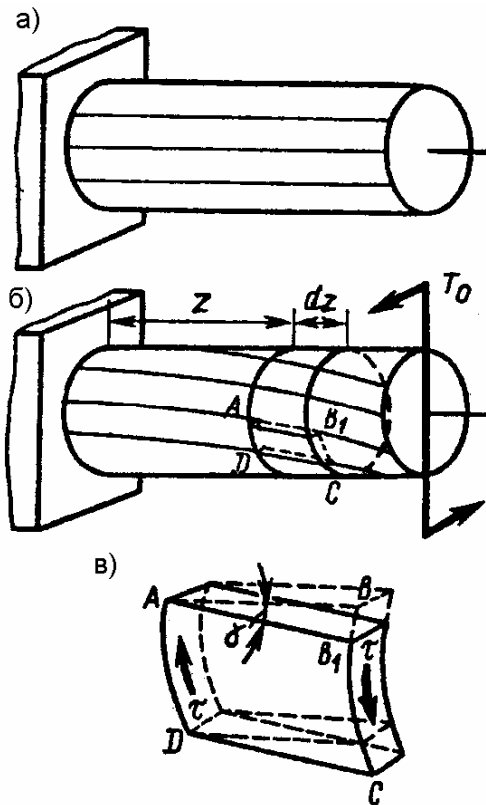


Рисунок 16.4

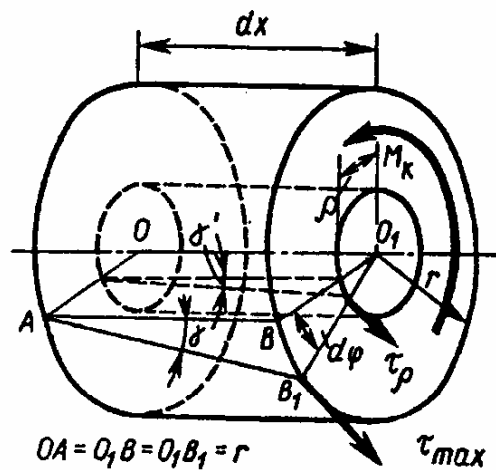


Рисунок 16.5

Уявимо собі забитий одним кінцем у непіддатливій стінці брус круглого поперечного перерізу радіуса r , на циліндричній поверхні якого уздовж утворюючих нанесені прямі лінії (рис. 16.4, а). Якщо вільний кінець бруса навантажити моментом T_0 , то брус деформується (скручується) і лінії на циліндричній поверхні приймають вид гвинтових ліній (рис. 16.4, б). Для того щоб досліджувати деформований стан бруса, виділимо з нього на відстані x від закладення елемент довжиною dx і зобразимо цей елемент окремо в збільшеному виді (рис. 16.5).

Припустимо, що лівий перетин виділеного елемента повернувся на деякий кут φ , тоді правий перетин, розташований трохи далі від нерухомого перетину бруса в закладенні, повернувся на кут $\varphi + d\varphi$. Кут $d\varphi = \sphericalangle BO_1B_1$ називається *кутом закручування* виділеного елемента. Цей кут залежить від довжини елемента dx , тому при тому самому деформованому стані може бути різним.

Деформація бруса під час крутіння характеризується величиною

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (16.3)$$

що називається відносним кутом закручування. Це кут взаємного повороту двох перетинів, віднесений до відстані між ними.

Якщо в поверхні виділеного елемента вирізати шар AB_1CD (див. рис. 16.4, б, в), що через малість розмірів можна вважати призмою, то цей призматичний елемент знаходиться в стані чистого зрушення, тобто $\sphericalangle BAB_1$ на циліндричній поверхні елемента (рис. 16.5) є кутом зрушення γ . Наближено можна вважати $BB_1 = d\varphi \cdot r = \gamma \cdot dx$, звідси з урахуванням рівності (16.3)

$$\gamma = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) r = \varphi_0 r. \quad (16.4)$$

Для того щоб виразити максимальні дотичні напруження τ_{\max} у крайніх точках поперечного переріза бруса, знайдене значення γ підставимо у вираження (16.1):

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r. \quad (16.5)$$

Якщо думкою вирізати призматичний елемент на відстані ρ від осі бруса, то кут зрушення у цього елемента $\gamma' < \gamma$ (рис. 16.4) і тоді в будь-якій точці поперечного переріза на відстані ρ від центра

$$\tau_\rho = G\varphi_0 \rho. \quad (16.6)$$

Рівність (16.6) виражає лінійний закон зваді розподілу дотичних напружень за поперечним перерізом під час крутінні. Розподіл дотичних напружень по перетину відповідно до цього закону показано на рис. 16.6, а, максимальні дотичні напруження крутіння τ_{\max} виникають у краю перетину, а в міру наближення до центра зменшуються до нуля. Таким чином, у більшому ступені чинять опір крутінню ті частини бруса, що розташовані ближче до його поверхні. Тому для економії матеріалу бруси, що працюють на крутіння, іноді виготовляють пустотілими. Поперечний переріз такого бруса для порожнього вала має форму плоского кругового кільця, розподіл дотичних напружень у ньому показано на рис. 16.6,б. Дотичні напруження внаслідок закону парності виникають і в поздовжніх перетинах бруса (рис. 16.7).

Знаючи закон розподілу дотичних напружень по перетину, установимо залежність між виниклим у ньому крутильним моментом M_k , відносним кутом φ_0 закручування і максимальним дотичним напруженням τ_{\max} .

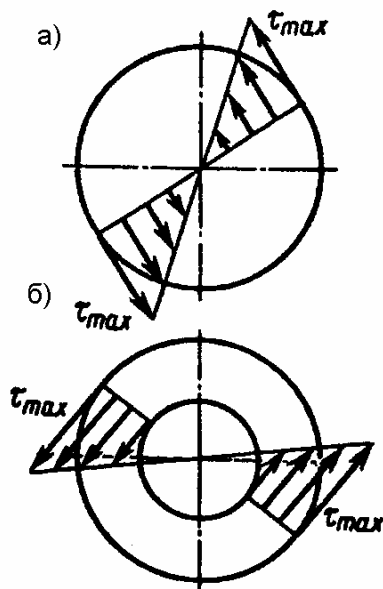


Рисунок 16.6

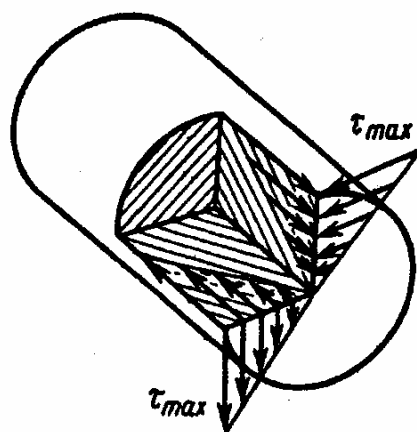


Рисунок 16.7

Нехай у деякому перетині (рис. 16.8, а) виник крутильний момент M_k який, як відомо з попереднього пункту, можна визначити через зовнішні моменти. На деякій відстані ρ від центра виберемо в перетині нескінченно малу площадку dA і допустимо, що напруга по цій площадці τ_ρ . Тоді з урахуванням рівності (16.6) елементарний крутильний момент

$$dM_k = \tau_\rho dA \rho = G \varphi_0 \rho^2 dA.$$

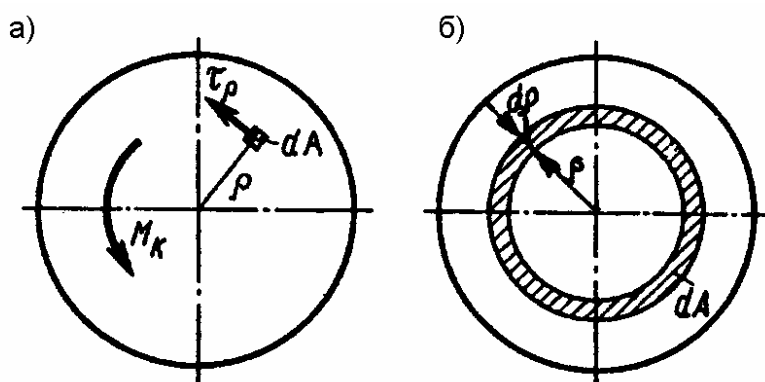


Рисунок 16.8

Підсумовуючи елементарні крутильні моменти dM_k по всій площі і з огляду на те, що $G \varphi_0$ і ρ – величини постійні, одержуємо $M_k = G \varphi_0 \int_A \rho^2 dA$.

Позначивши J_ρ вираженням $\int_A \rho^2 dA$, одержимо

$$M_k = G\varphi_0 J_\rho. \quad (16.7)$$

Величина

$$\int_A \rho^2 dA = J_\rho, \quad (16.8)$$

тобто сума добутків всіх елементарних площадок поперечного переріза на квадрати їхніх відстаней від центра називається *полярним моментом інерції перетину*.

У рівнянні (16.8) ρ виражається в м, см або мм, а d – у м², см², або мм². Отже, полярний момент інерції виражається в м⁴, см⁴, або мм⁴.

З рівності (16.7) одержуємо вираження відносного кута закручування

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_\rho}. \quad (16.9)$$

Повний кут закручування бруса (значення кутового переміщення під час крутіння)

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_\rho} \quad (16.10)$$

Легко побачити, що ця формула в принципі аналогічна формулі (14.1) для подовження Δl . Добуток GJ_ρ називається *твердістю перетину бруса під час крутіння*.

У формулі (16.9) φ_0 виражається в рад/м або рад/мм, у формулі (4.10) φ виражається в рад.

Замінивши в рівності (16.7) добуток $G\varphi_0$ його вираженням з формули (16.5) ($G\varphi_0 = \tau_{\max}/r$) одержимо $M_k = \frac{\tau_{\max} J_\rho}{r}$. Звідки максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_k r}{J_\rho}. \quad (16.11)$$

Відношення полярного моменту інерції круглого перетину до його радіуса називається *полярним моментом опору* і позначається W_p :

$$W_p = \frac{J_\rho}{r}, \quad (16.12)$$

де W_p виражається в м³, см³ або мм³. Таким чином,

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (16.13)$$

Максимальне дотичне напруження в поперечному перерізі бруса дорівнює частці від розподілу крутильного моменту на полярний момент опору.

Під час обчислення значень φ_0, φ і τ_{\max} відповідно за формулами (16.9), (16.10) і (16.11) крім крутильного моменту M_k , модуля зрушення G , довжини l потрібно знати значення полярного моменту інерції J_p або полярного моменту опору W_p , що залежать від форми і розмірів перетину.

Для того щоб одержати формулу полярного моменту інерції кола, виділимо в його площі на відстані ρ від центра елемент dA у вигляді плоского кільця шириною $d\rho$ (рис. 16.8, б). Якщо зневажити різницею між довжинами зовнішнього і внутрішнього контурів кільцевого елемента, то його площа $dA=2\pi\rho d\rho$. Підставляючи значення dA у вираження (4.8) і приймаючи до уваги, що при інтегруванні по всій площі ρ змінюється від 0 до $d/2$ (де d – діаметр круглого перетину), одержуємо

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2}.$$

Звідси

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (16.14)$$

Аналогічно, для кільцевого перетину

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_0^4) = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4), \quad (16.15)$$

де d – зовнішній, а d_0 – внутрішній діаметри кільця, $c = d_0/d$.

Підставляючи у формулу (4.12) значення J_p з рівностей (16.14) і (16.15) і маючи, що $r = d/2$ одержуємо полярні моменти опору круглого перетину

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (16.16)$$

і кільцевого перетину

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4). \quad (16.17)$$

16.4 Розрахунки на міцність і твердість

Умова міцності під час крутіння має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k] \quad (16.18)$$

Границя плинності під час крутіння зв'язана із границею плинності під час розтягання залежністю $\tau_T \approx (0,55 \dots 0,60)[\sigma_T]$, для пластичних матеріалів приймають $\tau_k \approx (0,55 \dots 0,60)[\sigma_p]$.

За умовою міцності під час крутіння (16.18) виконують три види розрахунків.

Проектувальний розрахунок. Визначивши крутильний момент у перетині бруса і прийнявши $\tau_{\max} = [\tau_k]$, знаходимо необхідне значення полярного моменту опору:

$$W_p = \frac{M_k}{[\tau_k]}. \quad (16.19)$$

Потім, виходячи з формули поперечного переріза (коло або кільце), знаходимо діаметр бруса з формули (16.16) або (16.17). Отримане значення діаметра в міліметрах варто округлити до найближчого більшого парного числа або числа, що закінчується на 5.

Розрахунок навантаження, що допускається. Визначивши полярний момент опору перетину бруса і прийнявши $\tau_{\max} = [\tau_k]$ знаходимо значення крутильного моменту, що допускається:

$$[M_k] = W_p [\tau_k]. \quad (16.20)$$

Потім, виходячи зі схеми навантаження, знаходимо навантаження, що максимально допускається.

Перевірочний розрахунок. Визначивши максимальний крутильний момент у поперечному перерізі бруса і полярний момент опору перетину, $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}$ знаходимо і порівнюємо його з $[\tau_k]$.

Умова твердості бруса під час крутіння полягає в тому, щоб відносний кут закручування φ_0 не перевершував деякого заданого значення, що допускається $[\varphi_0]$ тобто

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\varphi_0]. \quad (16.21)$$

У Міжнародній системі одиниць (СИ) кут закручування, що допускається $[\varphi_0]$ виражається в рад/м, але в практиці розрахунку на закручування часто кут, що допускається, задається в град/м. Тоді це значення потрібно перевести в одиниці СИ, помноживши на відношення $\pi/180$, тобто

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{180^\circ} [\varphi_0^\circ]. \quad (16.22)$$

Застосовувані в машинобудуванні значення кутів, що допускаються, закручування коливаються в досить широких межах: найчастіше приймають $[\varphi_0] = (4,38 \dots 17 \dots 17,5) 10^{-3}$ рад/м = $(4,38 \dots 17 \dots 17,5) \cdot 10^{-6}$ рад/мм або $[\varphi_0^\circ] = (0,25 \dots 1 \dots 1,0)$ град/м = $(0,25 \dots 1 \dots 1,0) 10^{-3}$ град/мм.

За умовою твердості (4.21) виконують теж три види розрахунків: **перевірочний** – безпосередньо за розрахунковою формулою (16.21); **проектувальний** – за розрахунковою формулою:

$$J_p = \frac{M_k}{G[\varphi_0]}. \quad (16.23)$$

Далі, залежно від форми перетину (коло або кільце) за знайденим значенням з формул (16.14) або (16.15) визначають діаметр або діаметри d і d_0 .

Розрахунок навантаження, що допускається, виконують за формулою

$$[M_k] = GJ_p[\varphi_0]. \quad (16.24)$$

Об'єктом розрахунків на міцність або твердість часто стає брус, що називається валом. На вал при передачі потужності завжди діють принаймні два скручуючих моменти (іноді три і більше). Під час розрахунку валів необхідно пам'ятати відому з теоретичної механіки формулу, що виражає залежність між обертаючим (скручуючим) моментом $T_{вр}$, переданою потужністю P і кутовою швидкістю ω :

$$T_{вр} = \frac{P}{\omega}, \quad (16.25)$$

а також формулу, що виражає залежність між кутовою швидкістю ω (c^{-1}) і частотою обертання n ($хв^{-1}$):

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (16.26)$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте закон Гука під час зрушення. Який фізичний зміст модуля зрушення G ?
2. Як потрібно навантажити брус, щоб він працював тільки на крутіння?
3. Брус навантажений системою трьох пар у площинах поперечних перерізів, причому дія двох із них урівноважується дією третьої. Як варто розташувати уздовж бруса ці три пари, щоб крутильний момент у будь-якому перетині бруса був за абсолютним значенням менше найбільшого з трьох прикладених?
4. Від яких геометричних характеристик перетину залежить під час крутіння міцність бруса, а від яких – його твердість? Чому міцність і твердість під час крутіння залежать від цих характеристик, а не від площі поперечного переріза?
5. Два круглих бруси мають рівні площі поперечних перерізів, але один із цих перетинів суцільне коло, а інше – кругове кільце. Який із брусків має: а) велику міцність; б) велику твердість?
6. Чи в однаковій мірі змінюється твердість і міцність бруса круглого поперечного переріза у разі зміни його діаметра?

17 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

17.1 Момент інерції перетинів

З деякими геометричними характеристиками перетинів ми знайомі. Кожний перетин бруса має визначену геометричну форму і площу. У формули для визначення координат центра ваги перетину входить алгебраїчна сума добутків елементарних площ на координати їхніх центрів ваги; ця величина називається *статичним моментом перетину*. В інтегральній формі статичні моменти перетину S_x і S_y щодо осей x та y можна подати так:

$$S_x = \int_A y dA \quad \text{і} \quad S_y = \int_A x dA \quad (17.1)$$

З формул статики випливає:

$$S_x = Ay_c \quad \text{і} \quad S_y = Ax_c, \quad (17.2)$$

де A – площа перетину;

x_c і y_c – координати центра ваги перетину. Легко помітити, що за $y_c = 0$, коли вісь x проходить через центр ваги перетину, $S_x = 0$: *статичні моменти перетину щодо центральних осей дорівнюють нулеві*.

Під час дослідження залежності між крутильним моментом і дотичними напруженнями виникла ще одна геометрична характеристика – *полярний момент інерції перетину J_p* . Поява цієї величини обумовлена нерівномірністю розподілу дотичних напружень по перетину під час крутіння.

Познайомимося з новими геометричними характеристиками перетину – *осьовими і відцентровими моментами інерції* щодо координатних осей (рис. 17.1).

Уявимо собі, що перетин розділений на безліч елементарних площадок dA (на рис. 17.1 зображена одна з них), координати яких x та y . Тоді інтеграли

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad \text{і} \quad J_y = \int_A x^2 dA \quad (17.3)$$

називаються *моментами інерції перетину* щодо осей x або y , а інтеграл

$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad (17.4)$$

прийнято називати *відцентровим моментом інерції* перетину щодо осей x та y .

Так само як і полярний момент інерції, осьові і відцентрові моменти інерції виражаються в м^4 , см^4 і мм^4 .

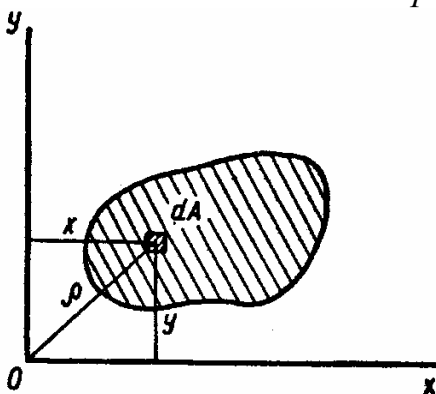


Рисунок 17.1

Величина площадки dA позитивна, тому незалежно від знака координати, x або y в осеві моменти інерції завжди позитивні, а відцентровий момент інерції може бути як позитивним, так і негативним залежно від розташування перетину щодо осей x або y .

Відстань ρ між елементарною площадкою dA і початком координат зв'язана з координатами площадки очевидною залежністю (рис. 17.1)
 $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Помноживши на dA обидві частини цієї рівності, а потім проінтегрувавши їх по всій площі перетину:

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

одержимо важливу залежність між осевими і полярними моментами інерції

$$J_p = J_x + J_y. \quad (17.5)$$

Сума осевих моментів інерції перетину – відносно взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції щодо точки перетинання цих осей. Моменти інерції щодо осей, що проходять через центр ваги перетину, називаються центральними.

Між моментами інерції перетину щодо рівнобіжних осей, з яких одна центральна, існує важлива залежність, використовувана далі в розрахунках. Розташуємо перетин в осях координат x_1Oy_1 , а потім через центр ваги з перетину проведемо осі $Cx \parallel Ox_1$ і $Cy \parallel Oy_1$ (рис. 17.2). Координати елементарної площадки dA перетину в осях x_1Oy_1 зв'язані з координатами в центральних осях рівностями

$$y_1 = y + a \text{ і } x_1 = x + e,$$

де a і e – відстані між осями.

Зведемо обидві частини першої рівності в другий ступінь:

$$y_1^2 = y^2 + a^2 + 2ay.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на dA і проінтегруємо по всій площі перетину:

$$\int_A y_1^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA.$$

Розглядаючи кожен інтеграл окремо, бачимо: $\int_A y_1^2 dA = J_{x_1}$ – момент інерції перетину відносно осі, рівнобіжної центральній; $\int_A y^2 dA = J_x$ – центральний момент інерції перетину; $\int_A dA$ – площа

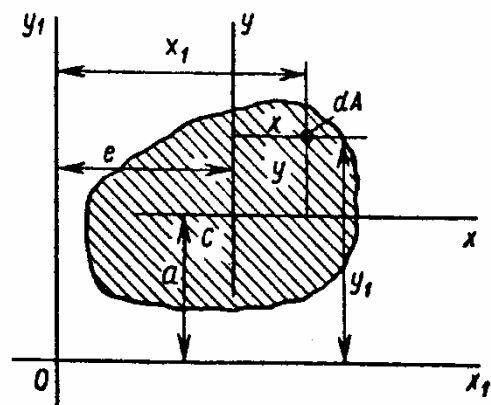


Рисунок 17.2

перетину; $\int_A y dA = S_x = 0$ – статичний момент перетину щодо центральної осі, як відомо, дорівнює нулеві.

Отже, в остаточному вигляді остання рівність запишеться так:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A. \quad (17.6)$$

Аналогічно, з рівності $x_1 = x + e$ одержимо

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A. \quad (17.7)$$

Таким чином, *момент інерції перетину щодо осі, рівнобіжної центральної, завжди більше центрального моменту інерції на добуток квадрата відстані між осями на площу перетину.*

17.2 Поняття про головні центральні моменти інерції

Осі, щодо яких осьові моменти інерції перетину приймають екстремальні значення, а відцентровий момент дорівнює нулеві, називаються *головними*.

Допустимо, що деякий перетин розташований в осях $x_1 O y_1$ як показано на рисунку 17.3, а. Ясно, що відцентровий момент інерції $J_{x_1 y_1} > 0$, тому що за такого положення перетину всі елементарні відцентрові моменти інерції $x_i y_i dA_i > 0$. При поступовому повороті осей (рис. 17.3, б) значення $J_{x_1 y_1}$, стане зменшуватися, тому що для площадок dA_i над віссю x_1 елементарні відцентрові моменти інерції $x_i y_i dA_i > 0$, а для площадок dA_k нижче осі x_1 – $x_k y_k dA_k < 0$, оскільки в цих площадок $y_k < 0$. Нарешті, за визначеного положення осей відцентровий момент інерції $J_{x_1 y_1} = 0$. Осі $x_1 O y_1$ у цей момент займають положення головних осей (рис. 17.3, б).

Практичне значення мають не будь-які головні осі, а тільки головні центральні осі. Положення головних центральних осей зовсім просто знаходити для симетричних перетинів. Центр ваги симетричного перетину обов'язково лежить на осі симетрії. Тому, якщо сполучити з віссю симетрії одну з осей координат, а іншу провести до неї перпендикулярно через центр ваги, одержимо систему *головних центральних осей* (рис. 17.4). По один бік осі симетрії є площадка dA з елементарним відцентровим моментом інерції $+xy dA$, по іншу площадка dA з елементарним відцентровим моментом $-xy dA$ і при підсумовуванні їх по всьому перетину $J_{xy} = 0$.

Щодо однієї з головних центральних осей момент інерції перетину максимальний, а щодо другої – мінімальний. Для перетину на рис. 17.4 $J_{\max} = J_x$ і $J_{\min} = J_y$.

Якщо перетин має дві осі симетрії (наприклад, прямокутник), то обидві вони є головними центральними, тому що їхнє перетинання

визначає положення центра ваги перетину. Багато перетинів мають по дві, три (і більше) пари осей симетрії, які можна приймати за головні центральні осі.

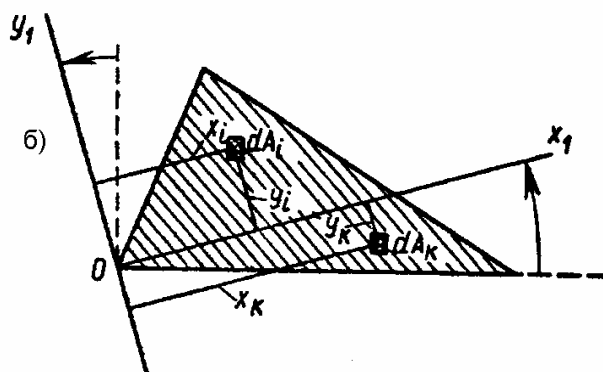
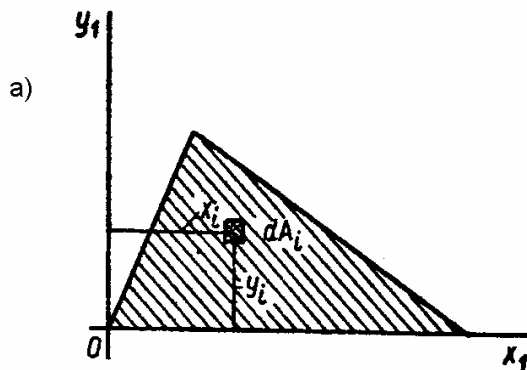


Рисунок 17.3

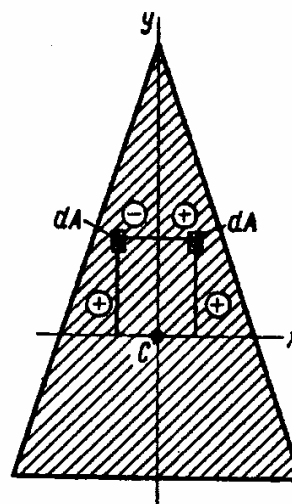


Рисунок 17.4

Наприклад, у квадрата (рис. 17.5) таких осей симетрії дві пари, у правильного шестикутника – три пари, а в кола – незліченна безліч пар.

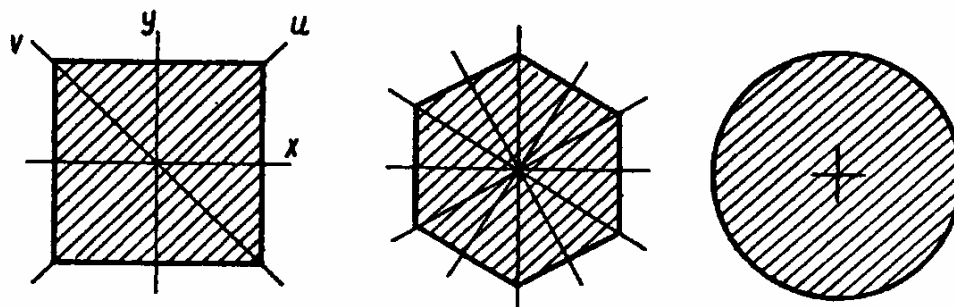


Рисунок 17.5

Моменти інерції перетину щодо головних центральних осей називаються *головними центральними моментами інерції*. Площини, проведені через вісь бруса і головні осі інерції його поперечного переріза, називаються *головними площинами*.

17.3 Осьові моменти інерції найпростіших перетинів

Прямокутник. Прямокутний перетин має дві осі симетрії, а головні центральні осі C_x і C_y проходять через середини рівнобіжних сторін (рис. 17.6). Головний центральний момент інерції щодо осі x

$$J_x = \int_A y^2 dA.$$

Елементарну площадку d у цьому випадку можна подати у вигляді смужки у всю ширину перетину і товщиною, значить $dA=b \cdot dy$. Підставивши під знак інтеграла значення dA і проінтегрував по всій площі, тобто в межах зміни ординати у від $-h/2$ до $+h/2$, одержимо

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{24} - \left(\frac{bh^3}{24} \right).$$

Остаточно

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (17.8)$$

Аналогічно одержимо формулу головного центрального моменту інерції прямокутника щодо осі v :

$$J_y = \frac{bh^3}{12}. \quad (17.9)$$

Іноді необхідно знати моменти інерції прямокутника щодо осей x та y , рівнобіжних головним центральним. Для одержання цих значень скористаємося формулами (17.6) і (17.7):

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 bh$$

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A = \frac{b^3 h}{12} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 bh$$

тобто

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{3} \text{ і } J_{y_1} = \frac{b^3 h}{3} \quad (17.10)$$

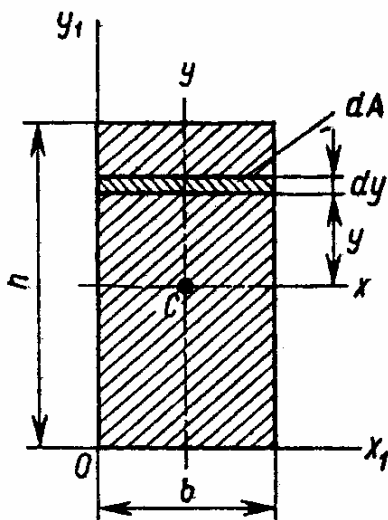


Рисунок 17.6

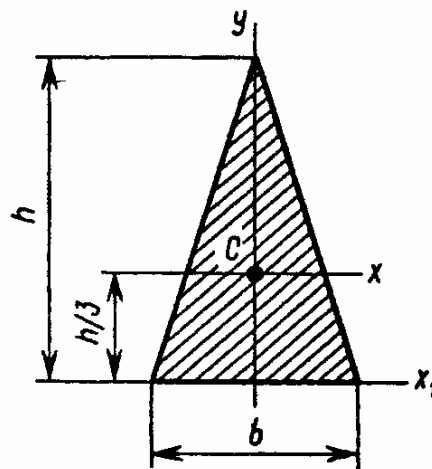


Рисунок 17.7

Легко зрозуміти, що для квадрата, тобто за $h = b$, формули (17.8) і (17.9) приймуть вигляд

$$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}, \quad (17.11)$$

а формули (5.10) – вигляд

$$J_{x1} = J_{y1} = \frac{b^4}{3}. \quad (17.12)$$

Рівнобедрений трикутник. Центр ваги рівнобедреного трикутника лежить на його осі симетрії на відстані $y_c = h/3$ від підстави (рис. 17.7). Головні центральні моменти інерції перетину, що має форму рівнобедреного трикутника, такі:

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{y1} = \frac{b^3h}{48}. \quad (17.13)$$

Момент інерції трикутного перетину щодо осі x_1 минаючої уздовж підстави b ,

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{12}. \quad (17.14)$$

Коло, кільце. Для кола або кільця (рис. 17.8) головні центральні моменти інерції щодо осей x та y рівні між собою. Тому з рівності (17.5), що виражає залежність між осьовими і полярними моментами інерції, одержуємо

$$J_p = 2J_x = 2J_y \text{ або } J = J_x = J_y = \frac{J_p}{2}.$$

Підставивши значення J_p , з формули (17.14), одержимо для круглого перетину

$$J = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (17.15)$$

Для кільцевого перетину після підстановки з формули (17.15) одержимо

$$J = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4), \quad (17.16)$$

де

$$c = d_0 / d.$$

Варто зазначити, що якщо в перетину два головних центральних моменти інерції рівні між собою (до таких перетинів належать коло, кільце, квадрат і т.п.), то у цих перетинів будь-яка центральна вісь – головна і всі центральні моменти інерції однакові.

У багатьох конструкціях для окремих елементів використовують сталевий прокат, форма і розміри якого передбачені відповідними ГОСТами. Для прокату з поперечними перерізами, відмінними від таких простих геометричних фігур, як прямокутник або коло, розроблені таблиці, що містять усі необхідні для розрахунків характеристики.

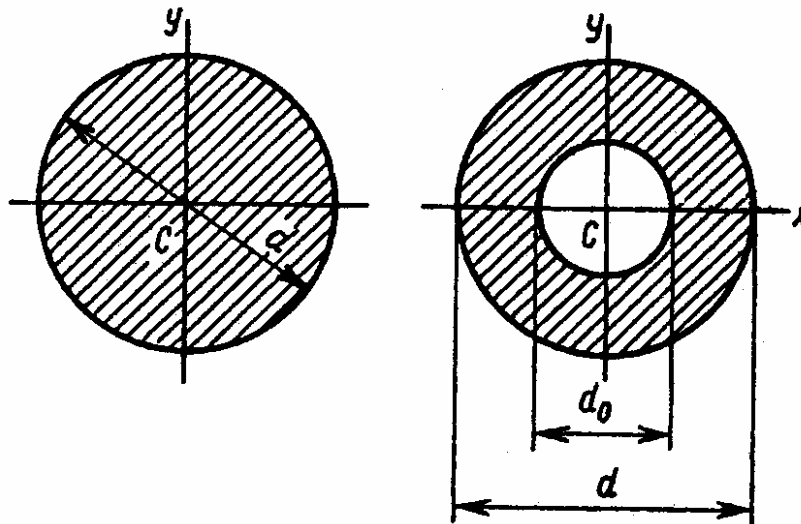


Рисунок 17.8

Для сталі прокатної кутової рівнополочної (ДСТ 8509-86) (рис. 17.9) у таблиці зазначені: розміри (мм) b , d , R і r ; площа поперечного переріза (см^2); маса 1 м довжини прокату (кг); J_x і J_{x_1} – моменти інерції площ перетинів щодо осей x та x_1 ; $J_{x_0\text{max}}$ і $J_{y_0\text{min}}$ – моменти інерції щодо головних центральних осей (см^4); значення z_0 (см), що визначає положення центра ваги профілю щодо осі x_1 , сполученої з зовнішньою гранню полиці профілю.

Для сталі прокатної нерівнополочної (ДСТ 8510-86) (рис. 17.10) крім розмірів B , b , d , R і r , площі поперечного переріза і маси 1 м прокату наведені моменти інерції щодо осей x , y , x_1 і y_1 (J_x , J_y , J_{x_1} і J_{y_1}), а також значення X_0 і Y_0 , що визначають положення центра ваги перетину в осях x_1 і y_1 .

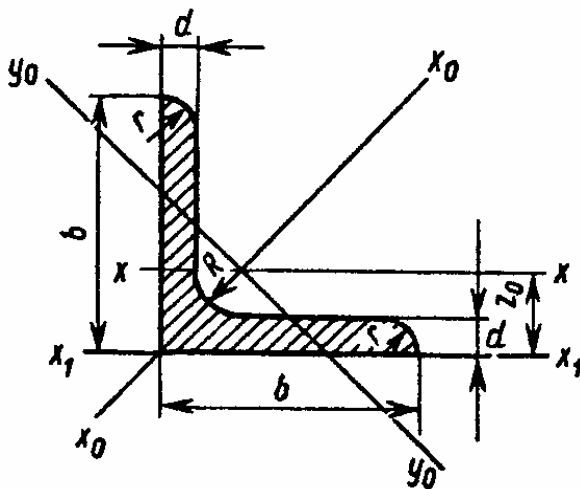


Рисунок 17.9

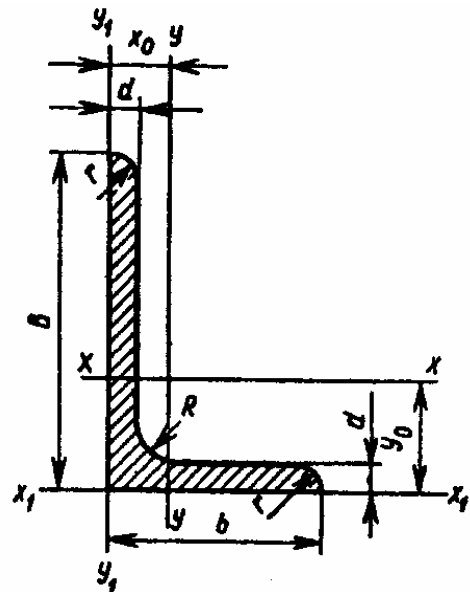


Рисунок 17.10

ГОСТ 8239-89* на сталеві двотаврові балки (рис. 5.11) містить дані про всі розміри, площу перетину і масу 1 м балки; значення J_x і J_y – моментів інерції щодо осей x та y , що для цього перетину – головні центральні осі, а також значення W_x і W_y – моментів опору перетину щодо тих же осей (см³).

ГОСТ 8240-89* на сталеві швелери з ухилом внутрішніх граней полиць (рис. 17.12) містить дані про розміри h , b , d , t , R і r , площі, маси, J_x , J_y , W_x і W_y , а також значення визначальне положення центра ваги щодо осі y_1 . У кожному з чотирьох ГОСТів нумерація профілів відповідає основному розмірові, вираженому в сантиметрах. Так, № 7,5 рівнополочного куточка належить до профілю, у якого $b = 75$ мм; № 6,3/4,0 нерівнополочного куточка належить до профілю з розмірами полиць $B = 63$ мм і $b = 40$ мм, № 20 двотавру належить до профілю висотою $h = 200$ мм, аналогічна і нумерація швелерів.

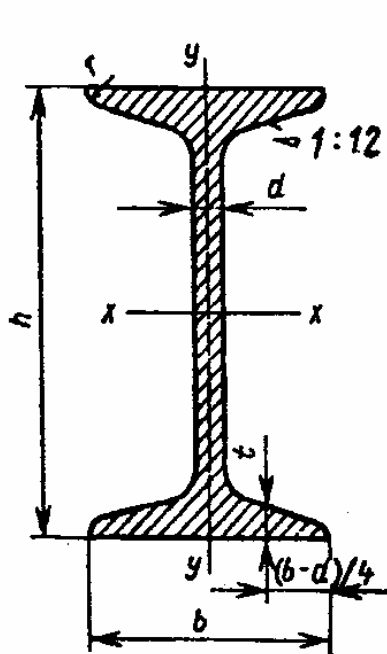


Рисунок 17.11

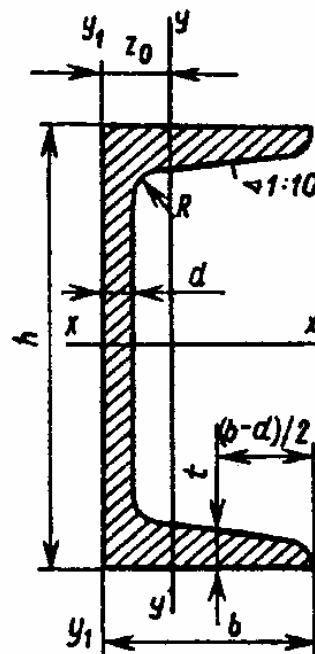


Рисунок 17.12

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому статичний момент будь-якого перетину щодо центральної осі дорівнює нулеві?
2. Чому дорівнює полярний момент інерції прямокутного перетину зі сторонами 4 і 5 см: а) щодо його центра ваги; б) щодо однієї з вершин перетину? (Відповідь: а) 120 см⁴; б) 416 см⁴.)
3. У скільки разів момент інерції трикутника щодо осі, що проходить уздовж його підстави, менше моменту інерції щодо осі, що проходить через вершину паралельно підставі? (Відповідь у 3 рази.)

18 ВИГИН ПРЯМОГО БРУСА

18.1 Прямий вигин чистий і поперечний

Прямим чистим вигином називають такий вид навантаження бруса, за якого в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор згинальний момент. Якщо крім згинаючого моменту виникає поперечна сила, то має місце *прямий поперечний вигин*. Усі зовнішні сили при прямому вигині бруса діють у його головній площині (рис. 18.1), скривлення осі бруса відбувається в тій же площині.

Бруси, що працюють на вигин, називають *балками*. На розрахунковій схемі балку прийнято замінити її віссю. При цьому всі сили повинні бути приведені до осі балки, а силова площина (площина дії навантаження) збігатися з площиною креслення.

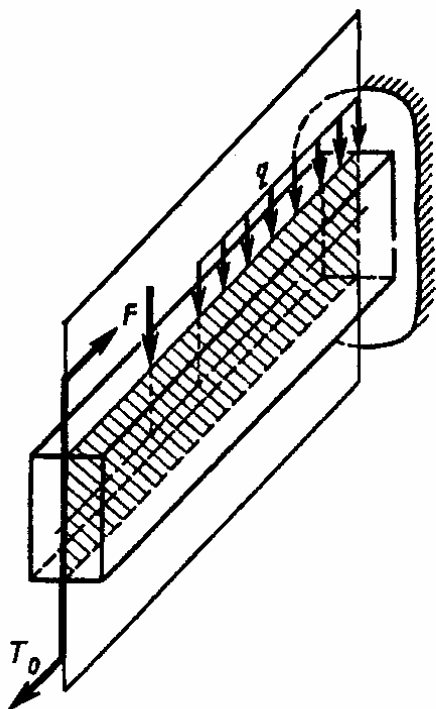


Рисунок 18.1

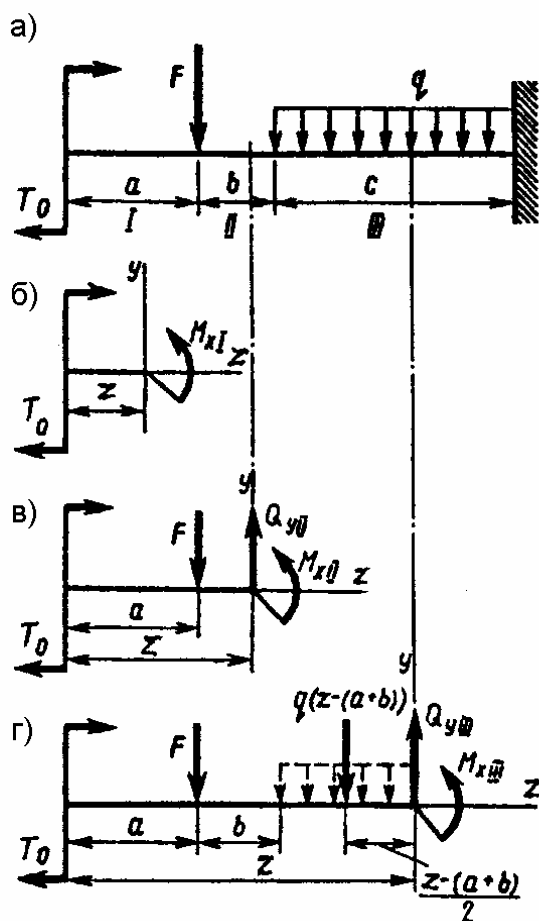


Рисунок 18.2

Додавши балці, поданої на рисунку 18.1, умовне зображення (рис. 18.2, а), визначимо внутрішні силові фактори в її поперечних перерізах. Відповідно до місця прикладення навантажень – пари сил з моментом T_0 , зосередженої сили F і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q – розділимо балку на три ділянки: I, II і III.

Розсічемо балку на ділянці I перетином, розташованим на відстані z від місця додатка моменту T_0 і відкинемо праву частину балки (рис. 18.2, б). Тоді на підставі рівняння (13.1)

$$Q_{yI} = 0.$$

Оскільки проекції сил, що утворюють пари, на вісь z дорівнюють нулеві і рівновага частини балки, що залишилася, забезпечується одним згинальним моментом M_x . У разі зміни z від 0 до a , тобто в будь-якому перетині на ділянці I (якщо $0 \leq z \leq a$), згинальний момент

$$M_{xI} = T_0.$$

Отже, ділянка I балки знаходиться в стані чистого вигину.

Розсічемо балку на ділянці II перетином, розташованим на відстані z [тепер $a \leq z \leq (a + b)$] від лівого кінця балки, і, відкинувши її праву частину (рис. 18.2, в) знайдемо, що поперечна сила дорівнює проекції зовнішньої сили на вісь y , тобто

$$Q_{yII} = -F,$$

а згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моменту пари і моменту сили F щодо центра ваги перетину:

$$M_{zII} = T_0 - F(z-a).$$

Дія моменту $F(z-a)$ протилежна дії моменту T_0 , тому він узятий зі знаком мінус. Балка на ділянці II знаходиться в стані поперечного вигину, тому що в перетинах цієї ділянки виникають поперечна сила і згинальний момент. Значимо, що в цьому випадку значення поперечної сили Q_{yII} на ділянці II не залежить від z , тобто в будь-якому перетині $Q_{yII} = -F = \text{const}$. Числове значення згинаючого моменту знаходиться в лінійній залежності від z , тобто змінюється під час переходу від одного перетину до іншого.

Розсічемо балку на ділянці III перетином на відстані z $[(a + b) \leq z \leq (a + b + c)]$ від лівого її кінця і, відкинувши праву частину (рис. 18.2, г) знайдемо поперечну силу

$$Q_{yIII} = -Fq[z - (a + b)]$$

і згинальний момент

$$M_{xIII} = M_0 - F(z - a) - q \frac{[z - (a + b)]^2}{2}.$$

На цій ділянці виникає теж поперечний вигин. Причому через наявність тут рівномірно розподіленого навантаження поперечна сила залежить від місця перетину на ділянці: у міру пересування перетину вправо (при зростанні z) збільшується абсолютне значення другого, що складається $q[x - (a + b)]$; згинальний момент змінюється залежно від z за параболічним законом.

Між згинальним моментом M_x , поперечною силою й інтенсивністю q рівномірно розподіленого навантаження існують такі диференціальні залежності:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q \quad (18.1)$$

– похідна від згинаючого моменту по довжині балки дорівнює поперечній силі;

$$\frac{dQ}{dz} = -q \quad (18.2)$$

– похідна від поперечної сили по довжині балки дорівнює інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження узятій зі зворотним знаком.

Справедливість залежностей можна перевірити для значень M_x і Q_y , знайдених, наприклад, для ділянки III балки (рис. 18.2, г), яким можна надати такий вид:

$$M_{xIII} = T_0 - F_x + Fa - \frac{qx^2}{2} + xq(a+b) - \frac{q(a+b)^2}{2};$$

$$Q_{yIII} = -F - qx + q(a+b).$$

Продиференціювавши перше вираження по x , маючи на увазі, що T_0 , F , a , b і q – величини постійні:

$$\frac{dM_x}{dx} = -F - qx + q(a+b) = Q_{yIII}.$$

Продиференціювавши вираз поперечної сили, одержимо

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q \text{ або } \frac{dQ_y}{dx} = q.$$

З диференціальних залежностей (18.1) і (18.2) випливає: 1) якщо $M_x = const$, то $Q = 0$; 2) якщо $Q = const$, то $q = 0$, а M_x змінюється за лінійним законом, причому коли $Q > 0$ M_x зростає, а коли $Q < 0$ зменшується; 3) якщо Q змінюється за лінійним законом, то M_x змінюється за параболічним законом.

18.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Визначаючи поперечну силу і згинальний момент у різних перетинах балки (рис. 18.2), ми бачимо, що їхні значення змінюються по довжині балки залежно від виду навантажень і місця їхнього прикладання. Під час розрахунків дуже важливо знати зміну Q і M_x у перетинах по всій довжині балки, а цього можна досягти побудовою епюр.

Виходячи з того, що при поперечному вигині напрямок зовнішніх сил перпендикулярний осі балки, а при її розсіченні можна відкинути будь-яку частину – праву або ліву, сформулюємо правила визначення значень Q і M_x .

Поперечна сила Q_y в довільному поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі значень зовнішніх сил, прикладених

до балки по один бік від перетину, при цьому силам, що повертають щодо перетину залишену частину балки по ходу годинної стрілки, приписується знак «плюс» (рис. 18.3, а), а силам, що повертають щодо перетину залишену частину балки проти ходу годинникової стрілки, приписується знак «мінус» (рис. 18.3, б).

Згинальний момент M_x у довільному поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, що діють по одну сторону від перетину, щодо тієї точки осі бруса, через яку проходить перетин, при цьому зовнішнім моментам, що згинають вісь балки опуклістю вниз, приписується знак «плюс» (рис. 18.4, а), а моментам, що згинають вісь балки опуклістю нагору, знак «мінус» (рис. 18.4, б).

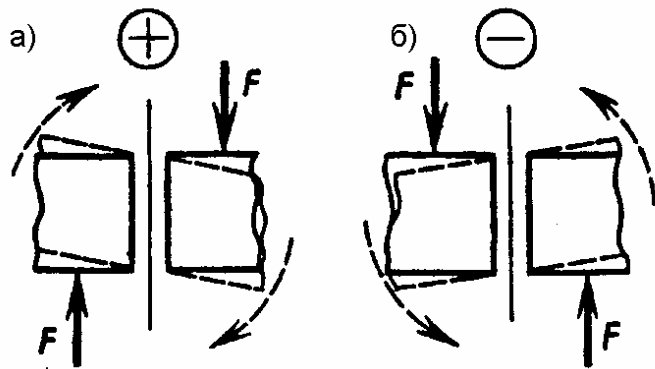


Рисунок 18.3

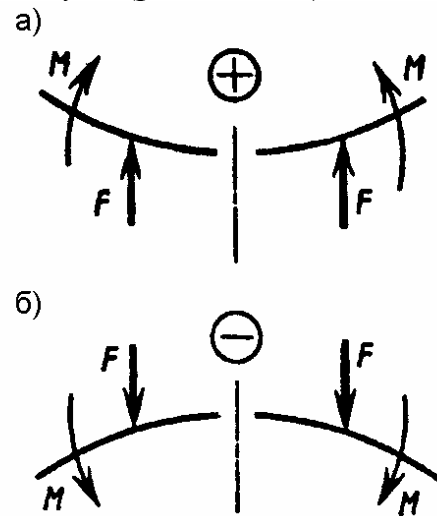


Рисунок 18.4

Розглянемо кілька прикладів побудови епюр Q і M_x за типових навантажень балки.

Балка, затиснена одним кінцем (консоль) і навантажена двома чисельно рівними силами, як подано на рис. 18.5, а, має ділянки I і II. Застосовуючи метод перетинів і використовуючи правило знаків (див. рис. 18.3 і 18.4), знаходимо, що на ділянці I (рис. 18.5, б) поперечна сила

$$Q_y = F,$$

тобто не залежить від x . Отже, епюра Q_y на ділянці I зобразиться відрізком прямої, рівнобіжної базової лінії.

На ділянці II (рис. 18.5, в) поперечна сила

$$Q_{yII} = F - F = 0$$

Епюра Q_y для всій балки подана на рис. 18.5, г.

Згинальний момент на ділянці I (рис. 18.5, б)

$$M_{xI} = Fz,$$

тобто під час зміни z від 0 до $(0 \leq z < a)$ значення M_x рівномірно збільшується від 0 до F_a , тобто $M_{OX} = 0$, $M_{XB} = F_a$.

На ділянці II (рис. 18.5, в) значення згинаючого моменту

$$M_{xII} = F_z - F(z-a) = F_a.$$

Епюра по всій довжині балки зображена на рис. 18.5, д. Як бачимо, у поперечних перерізах балки на ділянці II виникає тільки один внутрішній силовий фактор – згинальний момент; отже, ділянка II знаходиться в стані чистого вигину. Епюри Q_y і M_x на рисунку 18.5 ілюструють справедливість наслідків 18.2 і 18.1: на ділянці I $Q_y = F = const$, причому $Q_y > 0$, а M_{xI} зростає за лінійним законом; на ділянці II $Q_{yII} = 0$ і значення $M_{xII} = F_a = const$.

Двоопірна балка навантажена між опорами A і B силою F (рис. 18.6, а). На відміну від попереднього випадку тут попередньо необхідно визначити реакції R_A і R_B опор балки. З рівняння моментів щодо опори B знаходимо $R_A = Fb/(a + b)$, а з рівняння моментів щодо опори A знаходимо $R_B = Fa/(a + b)$.

Балка має дві ділянки. Розсікаючи балку на ділянці I і відкидаючи частину балки правіше перетину, знаходимо:

$$Q_{yI} = R_A = \frac{Fb}{a+b} \text{ і } M_{xI} = R_A z = \frac{Fbz}{a+b}.$$

У такий спосіб на ділянці I поперечна сила постійна і дорівнює $Fb/(a + b)$ (рис. 18.6, б), а згинальний момент під час зміни z від 0 до a ($0 \leq z < a$) збільшується від 0 до $Fab/(a + b)$ (рис. 18.6, в).

Розсікаючи балку на ділянці II і відкидаючи частину балки правіше перетину, знаходимо:

$$Q_{yII} = R_A - F = \frac{Fb}{a+b} - F = \frac{-F_a}{a+b};$$

$$M_{xII} = R_A z - F(z - a) = \frac{Fbz}{a+z} - F(z - a).$$

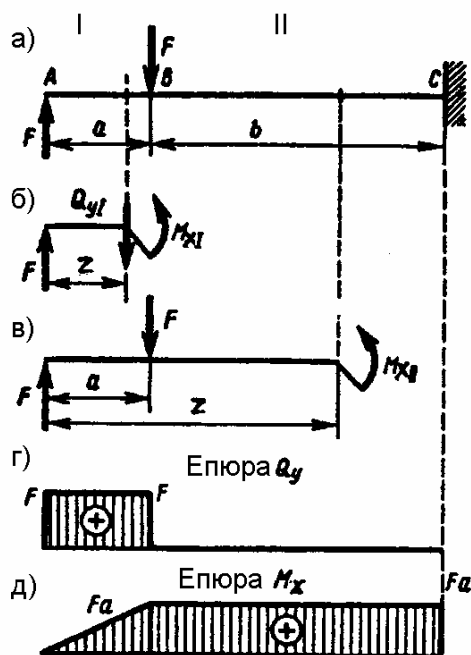


Рисунок 18.5

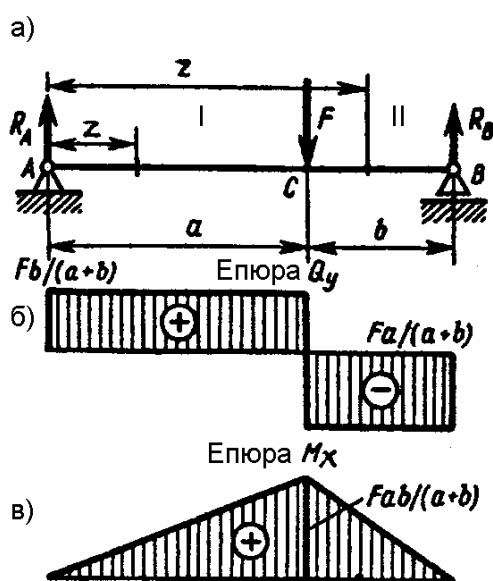


Рисунок 18.6

Поперечна сила на ділянці II має значення, рівне $-Fa/(a + b) = -R_B$ (рис. 18.6, б). На ділянці II змінюється в межах $a \leq z \leq (a+b)$, тому коли $z = a$ згинальний момент $M_x = Fab/(a+b)$, а коли $z = a + b$

$$M_{xB} = \frac{Fb(a+b)}{a+b} - F(a+b-a) = 0,$$

тобто під час зміни z від 0 до $(a - b)$ згинальний момент зменшується або зменшується від $Fab/(a+b)$ до 0 (рис. 18.6, в).

Епюри Q і M_x на рис. 6.6 ілюструють справедливості наслідку 18.2 (див. п. 18.1): рівномірно розподілених навантажень на балці немає ($q = 0$) і на кожній з обох ділянок балки Q_y зберігає постійне значення, тому M_x на тій і на іншій ділянці змінюється за лінійним законом, але $Q_y > 0$ і на ділянці I M_x зростає, а $Q_{yII} < 0$ і на ділянці II M_x зменшується.

Двоопірна балка навантажена між опорами парою сил, момент якої T (рис. 18.7, а). Діючі на балку пари сил можна зрівноважити тільки парою, тому реакції опор утворять пари сил (R_A, R_B) і $R_A = R_B = T/(a+b)$.

Розсікаючи балку на ділянці I, а потім на ділянці II і відкидаючи в обох випадках праву частину балки, одержуємо

$$Q_{yI} = Q_{yII} = R_A = \frac{T}{(a+b)},$$

тобто значення поперечної сили Q_y по всій довжині балки постійно (рис. 18.7, б). Згинальний момент на ділянці I

$$M_{xI} = R_A z = \frac{Tz}{a+b}$$

і під час зміни z від 0 до a ($0 \leq z < a$) значення згинаючого моменту збільшується від 0 до $\frac{Ta}{a+b}$.

Згинальний момент на ділянці II

$$M_{xII} = R_A z - T = \frac{Tz}{a+b} - T.$$

Коли $z = a$ одержимо $M_{xII} = \frac{Ta}{(a+b)} - T = -\frac{Tb}{(a+b)}$;

коли $z = a+b$ $M_{xII} = \frac{T(a+b)}{(a+b)} - T = 0$.

Отже, під час зміни z у бокових вівтарях $a \leq z < (a+b)$ значення M_{xII} збільшується від $-\frac{Tb}{(a+b)}$ до 0.

Таким чином, у перетині балки, де прикладена пара сил з моментом T , на епюрі M_x виникає стрибок від $\frac{Ta}{a+b}$ до $-\frac{Tb}{(a+b)}$ (рис. 18.7, в), тобто на значення моменту прикладеної пари.

Епюри на рис. 18.7 ще раз ілюструють справедливості положення, що під час $Q = const$ і $Q > 0$ згинальний момент M_x зростає за лінійним законом (див. п. 18.1, наслідок 18.2).

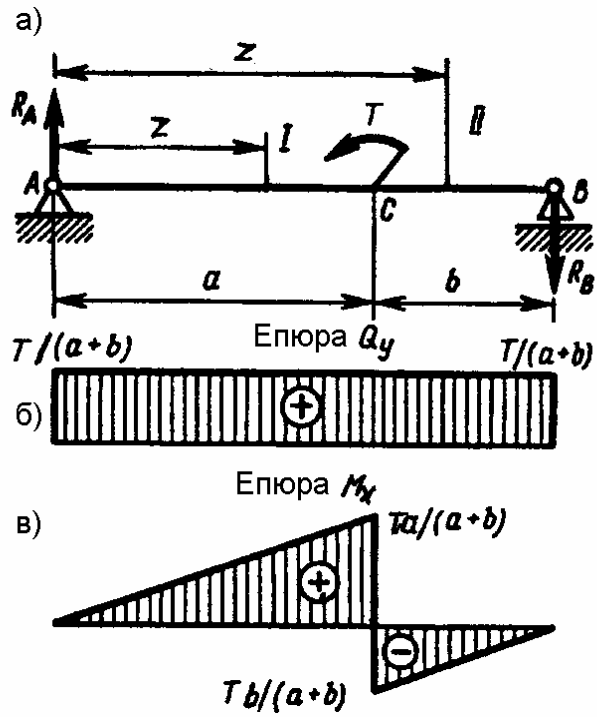


Рисунок 18.7

Двоопірна балка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q , як показано на рисунку 18.8, а. Реакції опор A і B цієї балки: $R_A = \frac{2qa}{3}$ і $R_B = \frac{4qa}{3}$. Як і в попередніх випадках, балка має дві ділянки.

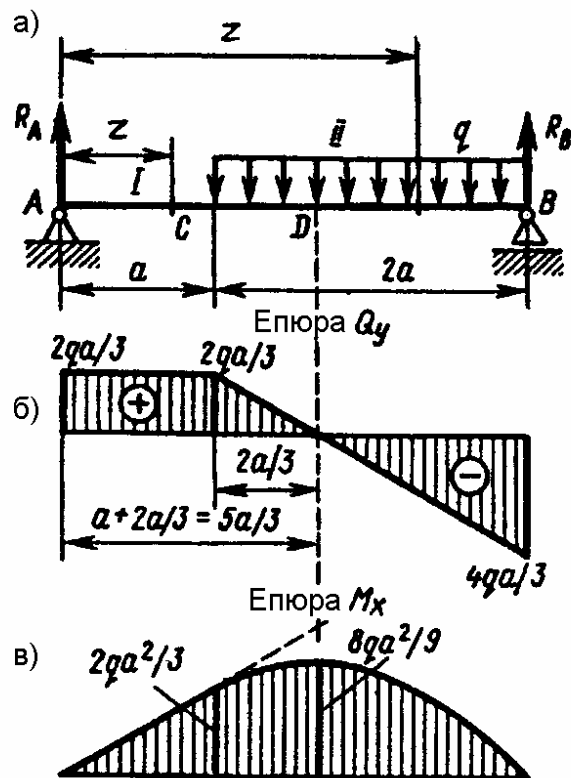


Рисунок 18.8

На ділянці I $Q_{yI} = R_A = \frac{2qa}{3} = const$;

$$M_{xI} = R_A z = \frac{2qaz}{3}$$

і у разі зміни z у межах $0 \leq z < a$ згинальний момент збільшується за лінійним законом від $M_{ox} = 0$ у перетині над опорою A до $M_{xc} = 2q^{2/3}$ у перетині, що проходить через точку C .

На ділянці II $Q_{yII} = R_A - q(z - a) = \frac{2}{3}qa - q(z - a)$;

$$M_{xII} = R_A z - \frac{q(z - a)(z - a)}{2} = \frac{2}{3}qaz - \frac{q(z - a)^2}{2}.$$

Як бачимо, на ділянці II і поперечна сила і згинальний момент змінюються залежно від z . Під час зміни z в інтервалі $a \leq z < 3a$ поперечна сила змінюється за лінійним законом від $Q_{yC} = 2qa/3$ в перетині, проведеному через точку C , до $Q_{yB} = (2/3)qa - q(3a - a) = -4qa/3$ у перетині над опорою B , проходячи в деякому перетині балки через нульове значення (рис. 18.8, б). Положення перетину, де $Q_y = 0$, необхідно визначити, оскільки виходячи з диференціальної залежності (18.1) у перетині, де поперечна сила змінює знак, переходячи від $Q_y > 0$ до $Q_y < 0$, згинальний момент досягає максимального значення.

З рівняння $Q_{yII} = 2qa/3 - q(z - a) = 0$ випливає, що перетин D , у якому $Q_y = 0$ (рис. 18.8, а, б), відстоїть від лівої опори A на відстані

$$z = a + \frac{2a}{3} = \frac{5a}{3}.$$

Згинальний момент, як видно з наведеної вище рівності, є квадратична функція від z , тому на ділянці, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням, епюра згинаючого моменту зображується параболою: коли $z = a$ у перетині $M_{xc} = \frac{2}{3}qa^2$;

$$\text{коли } z = \frac{5}{3}a \text{ у перетині } D \quad M_{xD} = \frac{2qa}{3} \times \frac{5a}{3} \times \frac{q}{2} \left(\frac{5a}{3} - a \right)^2 = \frac{8qa^2}{9};$$

$$\text{коли } z = 3a \text{ у перетині } B \quad M_{xB} = \frac{2qa}{3} \times 3a - \frac{q}{2} (3a - a)^2 = 2qa^2 - 2qa^2 = 0$$

(рис. 18.8, в).

Побудова епюри ілюструє справедливість наслідків 18.1 і 18.2 з п. 18.1, що впливають з диференціальних залежностей між M_x , Q_y , і q .

Сформулюємо основні правила побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів, що є як наслідками диференціальних залежностей q , Q_y і M_x , так і впливають безпосередньо з методу перетинів.

1. На ділянці балки без рівномірно розподіленого навантаження ($q = 0$) поперечна сила $Q = const$ та її епюра зображується відрізком

прямої, рівнобіжним базової лінії, а згинальний момент змінюється за лінійним законом та епюра M_x зображується нахиленим до базової лінії відрізком прямої.

2. На ділянці балки, що несе рівномірно розподілене навантаження, поперечна сила Q змінюється за лінійним законом і її епюра зображується похилою прямою, а згинальний момент змінюється за квадратичним законом і його епюра зображується дугою параболи, опуклість якої звернена убік, протилежну напрямкові дії навантаження.

3. Якщо на ділянках, зазначених у п.1 і 2, $Q > 0$, то згинальний момент зростає; якщо $Q < 0$, то згинальний момент зменшується; якщо $Q = 0$, то згинальний момент постійний.

4. Якщо поперечна сила, змінюючись за лінійним законом, проходить через нульове значення, то в перетині, де $Q = 0$, згинальний момент досягає екстремального значення: максимального – у разі переходу ліворуч праворуч від $Q > 0$ до $Q < 0$ і мінімального – у разі переходу також ліворуч праворуч від $Q < 0$ до $Q > 0$.

5. Якщо границею ділянки балки є точка прикладення зосередженої сили F , то епюра Q у цьому місці змінюється стрибкоподібно на значення F , а на епюрі M_z виникає злам, тобто відбувається різка зміна кута нахилу відрізка прямої або дуги параболи.

6. Якщо границею ділянки балки є точка прикладення зосередженої пари сил, то на епюрі Q це не відбиває, а на епюрі M_z виникає стрибок, дорівнює значенню моменту пари.

7. Якщо границею ділянки є початок або закінчення дії рівномірно розподіленого навантаження, то на епюрі Q виникає злам (перехід від рівнобіжного до базової лінії відрізка до похилого або, навпаки, від похилого до рівнобіжного), а на епюрі M_z прямолінійна і параболічна ділянки сполучаються плавно (прямолінійна ділянка є дотичним до дуги параболи в їхній загальній точці).

8. У перетині на вільному або шарнірно обертому кінці балки згинальний момент дорівнює нулеві, якщо в цьому місці не прикладена зосереджена пара сил.

Поперечна сила в цьому перетині дорівнює зовнішній зосередженій силі.

9. У перетині, що збігається з закладенням, значення Q і M_x , що вийшли на епюрах, рівні відповідно опорній реакції і реактивному моменту.

Під час побудови епюр Q і M_x рекомендується дотримуватися такої послідовності:

- 1) знайти опорні реакції (для консолі їх можна не знаходити);
- 2) розбити брус на ділянки, границями яких є перетини, у яких прикладені зосереджені сили і пари, і починається або закінчується

розподілене навантаження. Такі перетини прийнято називати характерними;

3) застосовуючи метод перетинів, побудувати епюри поперечних сил. Якщо поперечна сила, змінюючись безупинно, проходить через нульове значення, то необхідно визначити абсцису перетину, де Q звертається в нуль;

4) обчислити в характерних перетинах значення згинальних моментів і за знайденими ординатами побудувати епюри M_x .

18.3 Основні розрахункові передумови і формули під час вигину

Вище встановлено, що під час чистого вигину в поперечних перерізах виникають тільки нормальні напруги. Для з'ясування закону їхнього розподілу по поперечному перерізі балки і висновку формули, що визначає напругу в довільній точці поперечного переріза, уведемо такі допущення:

1) *перпендикулярний осі недеформованого бруса плоский перетин залишається і після вигину плоским і нормальним до вигнутої осі бруса (гіпотеза плоских перетинів);*

2) *подовжні волокна бруса під час його деформації не надавлюють один на одного.*

Картина деформованого стану підчас чистого вигину, що підтверджує гіпотезу плоских перетинів, добре видна на гумовій моделі бруса прямокутного перетину з нанесеної на бічній грані сіткою з подовжніх і поперечних ліній (рис. 18.9, а), що імітують подовжні шари і поперечний переріз бруса. У разі навантаження обох кінців бруса протилежно спрямованими парами сил подовжні лінії викривляються, утворюючи дуги окружності, а поперечні, залишаючись прямими, лише повертаються на деякий кут (рис. 18.9, б).

Таким чином, під час чистого вигину поперечні перерізи повертаються і подовжні шари бруса на опуклій частині бруса подовжуються, а на увігнутої – коротшають. Очевидно, що десь повинен знаходитися шар, первинна довжина якого не змінилася. Цей шар називається *нейтральним* (НС на рис. 18.9, б). Його положення поки не відомо.

Візьмемо в брусі (рис. 18.9) два суміжних поперечних переріза, розташованих одне від іншого на відстані dz , і допустимо, що під час вигину між ними утворився кут $d\theta$ (рис. 18.10), вершина якого лежить у центрі кривизни нейтрального шару.

Кривизна нейтрального шару

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} \quad (18.3)$$

З рис. 6.9 зрозуміло, що відрізок AB довільного шару вигнутого бруса одержав подовження $\Delta dz = \cup B'B = d\theta y$, де y – відстань від цього шару до нейтрального. Тоді за формулою (6.3) знаходимо

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{d\theta}{dz} y$$

або з урахуванням рівності (6.3)

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (18.4)$$

Для переходу від деформацій до напруг застосуємо закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E y}{\rho}. \quad (18.5)$$

Можливість застосування закону Гука в розглянутій формі обумовлена прийнятим допущенням про ненатиснення волокон балки один на одного, тобто припущенням, що кожне з них знаходиться в стані одноосьового розтягання або стиску.

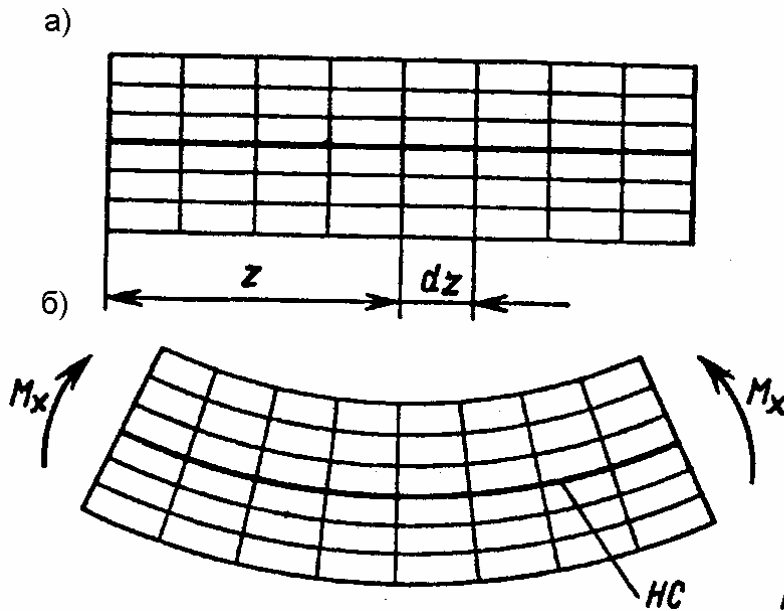


Рисунок 18.9

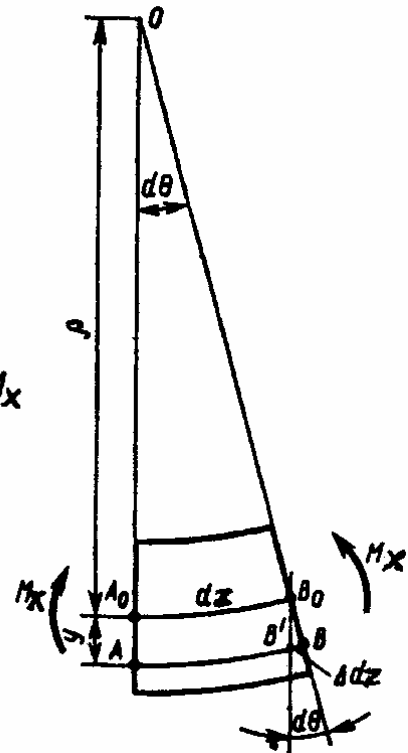


Рисунок 18.10

Виразження (18.5) показує, що нормальна напруга в довільній точці поперечного переріза прямо пропорційна її відстані y від нейтральної осі. Графічне тлумачення формули (18.5) показано на рисунку 18.11. Лінія перетинання нейтрального шару з поперечним перерізом називається *нейтральною віссю* (НО). У точках, розташованих на нейтральній осі, $\sigma = 0$ (оскільки для цих точок $y = 0$) і в будь-яких інших точках перетину нормальні напруги пропорційні їхній відстані від нейтрального шару,

тобто вони змінюються за лінійним законом. Якщо, як звичайно, напругу розтягання направити від перетину, а напругу стиску – до перетину, то одержимо картину розподілу напруження, показану на рисунку 18.11.

Положення нейтральної осі визначимо з умови, що нормальна сила в поперечному перерізі у разі чистого вигину дорівнює нулеві. Розбивши поперечний переріз на безліч елементарних площадок dA (рис. 18.12) підсумував елементарні подовжні сили

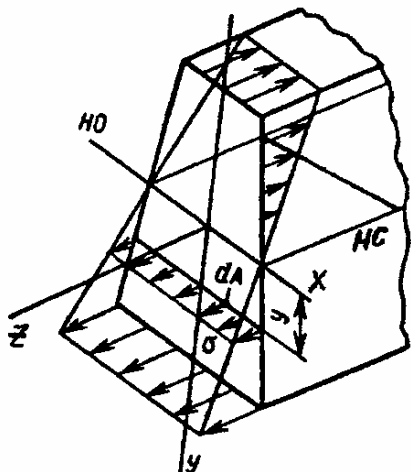


Рисунок 18.11

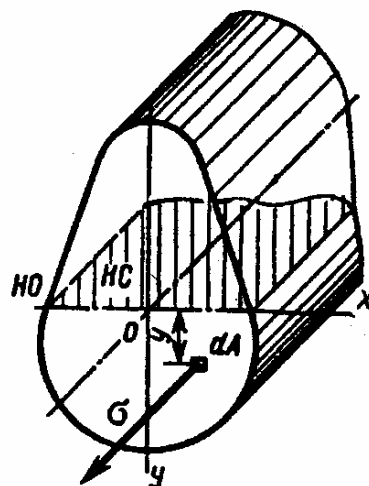


Рисунок 18.12

$$dN = \sigma \cdot dA = \frac{E y dA}{\rho}$$

по всій площі перетину, одержимо

$$N = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Винесена за знак інтеграла постійна величина $E/\rho \neq 0$, оскільки радіус кривизни деформованого бруса не дорівнює нескінченності. Отже, ця рівність має сенс лише при

$$\int_A y dA = 0.$$

Цей інтеграл становить статичний момент поперечного переріза щодо нейтральної осі. З п. 17.1 відомо, що статичний момент перетину дорівнює нулеві лише щодо центральної осі. Отже, *нейтральна вісь збігається з центральною віссю x*. У розглянутому випадку (рис. 18.11) силова лінія (вісь Oy) збігається з віссю симетрії перетину, тобто є однією з головних центральних осей. Нейтральна вісь їй перпендикулярна і проходить, як ми установили, через центр ваги, тобто це друга головна центральна вісь. Опускаючи доказ, можна стверджувати, що *під час прямого вигину, тобто у випадку, коли силова площина збігається з головною площиною, нейтральна вісь збігається з головною центральною віссю*.

Для визначення радіуса кривизни нейтрального шару використовуємо залежність між згинальним моментом і нормальними напругами:

$$M_x = \int_A \sigma y dA,$$

де dA – елементарна площадка поперечного переріза (рис. 18.12);

σdA – елементарна нормальна сила;

$\sigma dAy = \sigma y dA$ елементарний момент внутрішніх сил щодо осі x .

Підставивши замість σ його вираження з (18.5), знаходимо

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,$$

де $\int_A y^2 dA = J_x$ – момент інерції перетину щодо осі x (див. формулу

(17.3)). Таким чином, $M_x = \frac{1}{\rho} EJ_x$. Звідси $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$.

За цією формулі визначається *кривизна вигнутої осі бруса, що характеризує деформацію вигину*. Тут величина EJ_x називається *твёрдістю перетину бруса під час вигину*.

Виключивши ρ з рівностей (18.4) і (18.5), одержимо формулу для визначення нормальної напруги в довільній точці поперечного переріза

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x}. \quad (18.6)$$

Формула (18.6), виведена з розгляду прямого чистого вигину, як показують дослідження, цілком прийнятна і для визначення нормальних напруг під час поперечного вигину.

18.4 Розрахунки на міцність

Балки розраховують на міцність за найбільшими нормальними напругами, що виникають в їхніх поперечних перерізах. Під час поперечного вигину балок поряд з нормальними виникають і дотичні напруження, обумовлені наявністю поперечної сили, але вони в переважній більшості випадків невеликі і під час розрахунків на міцність не враховуються.

Міцність балки забезпечена, якщо найбільші за абсолютним значенням нормальні напруги, що виникають у небезпечному перерізі, не перевищують припустимих. Для балки, поперечні розміри якої по всій довжині постійні, небезпечний переріз той, у якому виникає найбільший по модулю згинальний момент. Найбільші нормальні напруги виникають у точках небезпечного поперечного переріза, максимально вилучених від нейтральної осі. Ці точки прийнято називати *небезпечними*. Значення максимальних напруг у небезпечних точках знайдемо за формулою (18.6):

$$\max \sigma_p = \frac{M_x y_1}{J_x}; \quad \max \sigma_c = \frac{M_x y_2}{J_x};$$

де y_1 і y_2 – відстані від нейтральної осі до найбільш вилучених точок відповідно в розтягнутій і стиснутій зонах перетину.

Якщо матеріал балки крихкий, наприклад загартована сталь, чавун, текстоліт та ін., то розрахунок на міцність під час вигину проводять за напругами розтягання і стиску. У крихких матеріалів межа міцності під час стиску вище межі міцності під час розтягання ($\sigma_{вс} > \sigma_{вр}$). Отже, поперечним перерізам балок з крихких матеріалів доцільно додавати асиметричну форму щодо нейтральної осі (рис. 18.13) і розташовувати балки так, щоб велика частина матеріалу знаходилася в розтягнутій зоні.

Таким чином, під час розрахунків балок з крихкого матеріалу використовують дві умови міцності:

– для розтягнутої зони

$$\max \sigma_p = \frac{M_x y_1}{J_x} \leq [\sigma_p]$$

– для стиснутої зони

$$\max \sigma_c = \frac{M_x y_2}{J_x} \leq [\sigma_c]$$

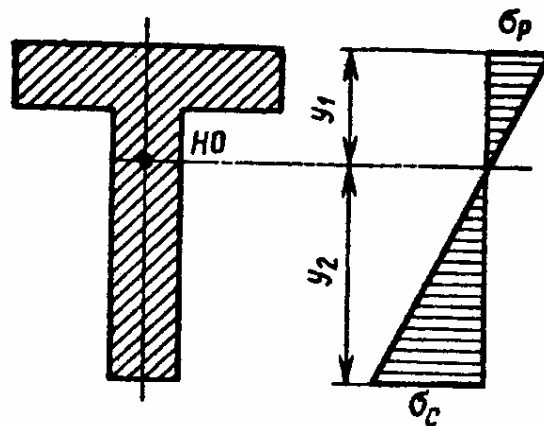


Рисунок 18.13

Причому найкраще використання матеріалу відбувається при формі перетину, що задовольняє умові $y_1/y_2 = \sigma_p/\sigma_c$.

Під час розрахунку балок із пластичних матеріалів, наприклад з низьковуглецевої сталі або кольорових металів, напруги, що допускаються на розтяг і стиск однакові: $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$, тому для таких балок доцільними є перетини, симетричні щодо нейтральної осі (рис. 18.14), тому що в цьому випадку найбільш вилучені точки в розтягнутій і стиснутій зонах перетину розташовуються на однаковій відстані $e = h/2$ від нейтральної осі. І, отже,

$$\max \sigma_p = \max \sigma_c = \sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{h}{2}.$$

Розділимо чисельник і знаменник правої частини цієї рівності на $h/2$:

$$\sigma_{\max} = M_x \div \frac{J_x}{\frac{h}{2}}.$$

Величина $\frac{J_x}{\frac{h}{2}} = W_x$, що виражається в м^3 , см^3 або мм^3 , називається

моментом опору перетину під час вигину.

Для прямокутного перетину (рис. 18.14), розміри якого $d \times h$, момент опору

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{h}{2}} \div \frac{12}{2} = \frac{dh^2}{6}. \quad (18.7)$$

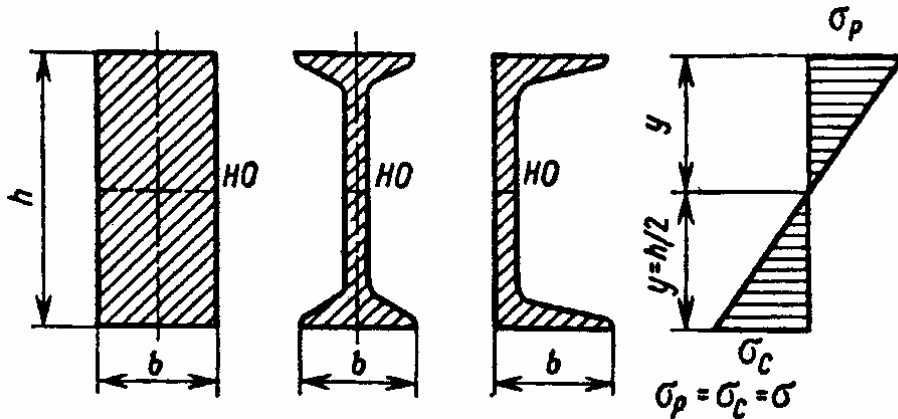


Рисунок 18.14

Для круглого перетину

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{d}{2}} \div \frac{\pi d^4}{32} \div \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (18.8)$$

Найбільш економічні під час вигину такі форми перетину, за яких матеріал бруса розташований якнайдалі від нейтральної осі. У таких брусах за найменшої витрати матеріалів виходить найбільший момент опору W_x , тому і виникли профілі стандартного прокату (рис. 18.14), усі необхідні геометричні характеристики яких містяться в ДСТ 8239-89 «Двотаври сталеві гарячевальцьовані. Сортамент», ДСТ 8240-89 «Швелери сталеві гарячевальцьовані. Сортамент».

Таким чином, найбільші напруги розтягання або стиску в симетричному щодо нейтральної осі перетині знаходять за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$$

і умова міцності балки з пластичного матеріалу має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (18.9)$$

виходячи з якого виконують три види розрахунків.

Проектувальний розрахунок. Приймавши $\sigma_{\max} = [\sigma]$, за згинальним моментом M_x у небезпечному перерізі знаходять необхідне значення моменту опору

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]}.$$

Потім, виходячи з прийнятої для балки форми поперечного переріза, знаходять його розміри.

Розрахунок навантаження, що допускається, виконується якщо $\sigma_{\max} = [\sigma]$ за формулою:

$$[M_x] = W_x [\sigma]. \quad (18.10)$$

Потім, виходячи зі схеми навантаження балки, знаходять значення навантаження, що допускається.

Перевірочний розрахунок. Визначивши максимальний згинальний момент і момент опору перетину, знаходять за формулою (18.9) значення σ і порівнюють його з $[\sigma]$.

Аналогічно виконують розрахунки балок з умови міцності (18.9).

18.5 Дотичні напруження під час поперечного вигину

Під час поперечного вигину крім нормальних напруг у поперечному перерізі бруса виникають дотичні напруження, а відповідно до закону парності, такі ж напруги з'являються й у поздовжніх перетинах бруса. Виникнення дотичних напружень у поздовжніх перетинах можна проілюструвати таким прикладом. Якщо брус прямокутного перетину висотою $2h$ навантажити силою F , він зігнеться, як показано на рис. 18.15, а. Якщо з такого ж матеріалу виготовити два брус висотою h кожний, то під час навантаження їх силою P і відсутності тертя між ними вони зігнуться кожен сам по собі (рис. 18.15, б). Звідси видно, що під час вигину цілого бруса висотою $2h$ між частинами бруса, розділеними подовжніми шарами, виникає взаємодія, у результаті якої і виникають дотичні напруження (рис. 18.15, в).

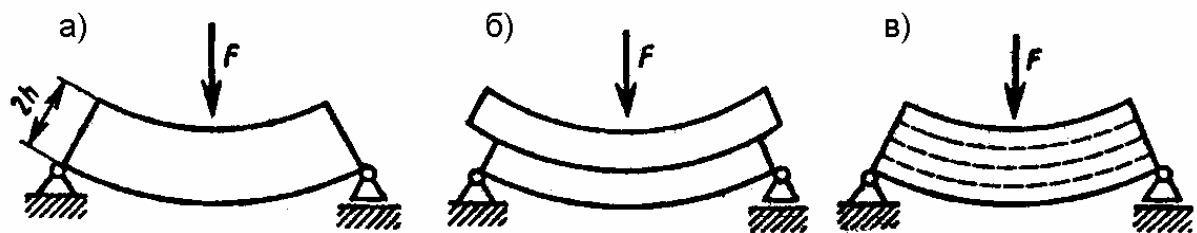


Рисунок 8.15

Числові значення дотичних напружень у поперечних перерізах визначають, використовуючи закон парності, через напруги, що виникають у поздовжніх перетинах.

Під час поперечного вигину, згинальний момент, під час переходу від одного перетину до іншого уздовж осі бруса змінюється. Отже, якщо в брусі виділити елемент довжиною dz (рис. 18.16, а), то в його перетині, наприклад, праворуч згинальний момент відрізняється від згинаючого моменту ліворуч на dM_x . Відповідно максимальні нормальні напруги в перетині праворуч на $d\sigma$ більше, ніж ліворуч (рис. 18.16, б). Поздовжнім перетином, проведеним на відстані y від осі z (рис. 18.16, в), відокремимо від елемента його верхню частину і переконаємося в тім, що її рівновага можлива лише за наявності дотичних напружень у поздовжньому перетині.

Рівнодіюча елементарних нормальних сил у перетині ліворуч

$$N_{\text{лів}} = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Підставивши сюди значення σ з формули (18.6), одержимо

$$N_{\text{лів}} = \int_A \frac{M_x}{J_x} y_i dA = \frac{M_x}{J_x} \int_A y_i dA$$

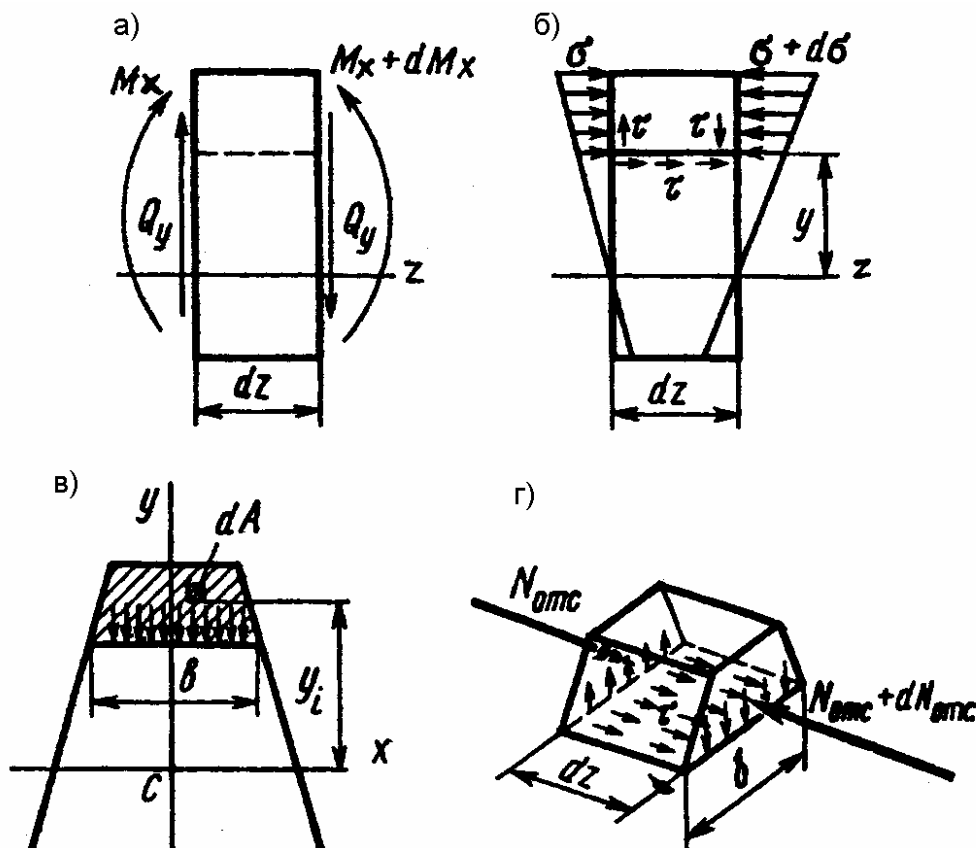


Рисунок 18.16

де $\int_A y_i dA = S_{x_{\text{оом}}}$ — статичний момент щодо осі x площі поперечного переріза відсіченої частини. Отже,

$$N_{omc} = \frac{M_x S_{xomc.}}{J_x}.$$

Аналогічним образом знаходимо значення нормальної сили в правому перетині

$$N_{omc} + dN_{omc.} = \frac{(M_x + dM_x) S_{xomc.}}{J_x}.$$

Як бачимо, нормальні сили, що виникають праворуч і ліворуч відсіченої частини елемента, не врівноважують один одного, а тим часом розглянута частина елемента бруса знаходиться в рівновазі. Отже, різниця нормальних сил

$$dN_{omc.} = \frac{dM_x S_{xomc.}}{J_x}$$

повинна врівноважуватися дотичними силами, що виникають у поздовжньому перетині відділеного елемента (рис. 18.16, г). Вважаючи, що дотичні напруження по ширині b перетину розподілені рівномірно, одержимо

$$\frac{dM_x S_{xomc.}}{J_x} = \tau b dz \quad \text{або} \quad \frac{dM_x S_{xomc.}}{dz J_x} = \tau b.$$

Звідки, пам'ятаючи, що $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, [див. (18.1)], одержимо формулу Журавського

$$\tau = \frac{Q_y S_{xomc.}}{J_x b} \quad (18.11)$$

Визначаючи за цією формулою значення дотичних напружень у поздовжніх перетинах бруса, знаходимо рівні їм за законом парності дотичні напруження й у поперечному перерізі.

Застосуємо формулу Журавського до прямокутного поперечного переріза бруса (рис. 18.17, а), у якому виникла поперечна сила Q_y . Момент інерції прямокутного перетину $J_x = bh^3/12$, ширина перетину $b = const$ по усій висоті. Отже, дотичні напруження τ у точках перетину, розташованих на відстані y від центральної осі, залежать від зміни статичного моменту $S_{omc.}$ заштрихованої частини перетину вище рівня v .

Статичний момент заштрихованої частини перетину

$$S_{x omc.} = A_{omc.} \cdot y_1,$$

де заштрихована площа

$$A_{omc.} = b (h/2 - y),$$

а ордината центра ваги цієї площі

$$y_1 = 1/2(h/2 + y).$$

Отже,

$$S_{x omc.} = A_{omc.} \cdot y_1 = b(h/2 - y)1/2(h/2 + y) = b/2(h^2/4 - y^2).$$

Підставляючи знайдені значення J_x , $S_{омс.}$ у формулу (18.11), одержимо

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Як бачимо, епюра дотичних напружень по висоті перетину (рис. 18.17, б) зображується квадратичною параболою. Максимальна напруга виникає в точках перетину, розташованих на центральній осі (коли $b = 0$):

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}.$$

Таким чином, максимальне дотичне напруження в 1,5 рази перевищує середнє значення напруги

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q_y}{A} = \frac{Q_y}{bh}$$

у верхньої і нижньої крайки перетину (коли $y = H/2$) $\tau = 0$.

У балці прямокутного, а також круглого перетинів максимальні дотичні напруження виникають у тих точках, де нормальні напруги дорівнюють нулеві, і, навпаки, у крайніх точках перетину, де нормальні напруги максимальні, дотичні напруження дорівнюють нулеві. Тому за небезпечні можна прийняти точки, найбільш вилучені від нейтральної осі, що підтверджується практикою експлуатації балок, що працюють на вигин. Однак у випадку тонкостінних профілів (наприклад, двотавру) необхідно перевірити міцність балки й у точках, де полка з'єднується зі стінкою, оскільки тут виникають значні як нормальні, так і дотичні напруження.

Якщо поперечний переріз двотаврової балки спрощено представити складеним з трьох прямокутників (рис. 18.18, а), то епюри дотичних напружень у стінці балки (рис. 18.18, б) одержимо в такий спосіб.

Напруги у верхній (і нижній) точці стінки знаходимо, підставивши у формулу Журавського (18.11) статичний момент полиці S_{xII} щодо осі x і прийнявши ширину перетину b рівній товщині стінки двотавру d (див. рис. 18.2):

$$\tau_K = \frac{Q_y S_{xII}}{J_x d}.$$

Максимальні дотичні напруження, що виникають у точках на нейтральній осі x , знаходимо з формули

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x}{J_x d},$$

де S_x – статичний момент напівперетину щодо осі x . Величина S_x береться з таблиць ДСТ 8239-89.

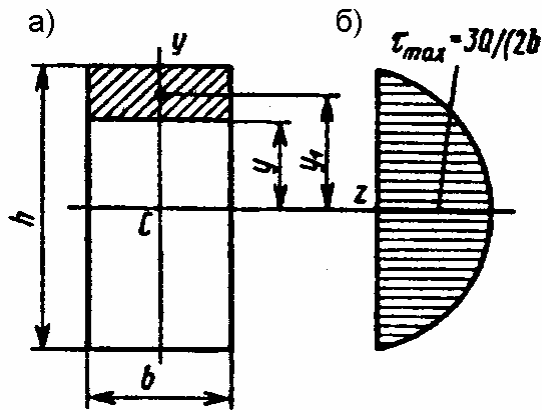


Рисунок 18.17

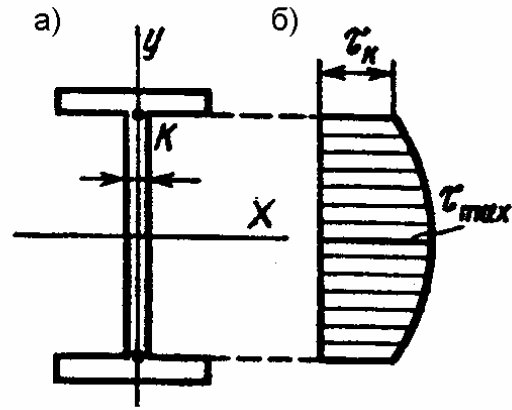


Рисунок 18.18

У коротких двотаврових балках великої висоти дотичні напруження можуть досягати великих значень у випадках значних навантажень, прикладених поблизу опор. У таких випадках крім основного розрахунку на міцність за нормальними напруженнями варто визначати максимальні дотичні напруження в тому перетині, де виникла найбільша поперечна сила, і порівняти їх із тими, що допускаються. Як правило, для сталевих балок приймають $[\tau] = 0,6[\sigma]$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Виникненням яких внутрішніх факторів характеризується прямий чистий вигин і прямий поперечний вигин?

Наведіть приклади навантаження бруса зосередженими силами, за яких на ділянці (ділянках) бруса в поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент?

2. Як визначити напругу в будь-якій точці певного поперечного переріза під час прямого вигину?

3. В скільки разів зменшиться міцність балки прямокутного перетину з підставою b і висотою h , якщо балку покласти пліском (тобто щоб висота стала основою, а підстава висотою)?

4. Які особливості розрахунку балок з крихких матеріалів?

5. Чому під час вигину в поздовжніх перетинах балок виникають дотичні напруження?

6. У скільки разів збільшиться прогин:

а) двохопорної;

б) консольної балки, якщо рівномірно розподілене навантаження по всій довжині балки замінити зосередженим, у першому випадку прикладеним посередині між опорами, а в другому – на кінці консолі?

(Відповідь: а) у 4 рази; б) у 1,6 рази.)

19 ПОВІТРЯНІ ЛІНІЇ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧ

Пристрій для передачі або розподілу електроенергії по проводах, які закріплені за допомогою траверс, ізоляторів та арматури до опор або інженерних споруджень (мостам, шляхопроводам і ін.), що перебувають на відкритому повітрі, називають *повітряною лінією електропередачі* (ПЛ).

Проектування конструкцій, спорудження, монтаж ПЛ повинні відповідати нормам ПУЕ (Правила улаштування електроустановок) і СНіП (Будівельні норми й правила). Вимоги ПУЕ є обов'язковими для всіх ліній електропередач, крім спеціальних – наприклад, контактних мереж трамвая, тролейбуса, залізниці та ін.

Зао напругою ПЛ поділяються ПУЕ на дві групи: напругою до 1 кВ і вище 1 кВ. Для кожної із цих груп установлені технічні вимоги до їхнього пристрою.

Електростанції, трансформаторні підстанції, ПЛ, електродвигуни – тобто всілякі електроустановки для виробництва, перетворення й споживання електроенергії також повинні відповідати нормам і вимогам ПУЕ. Під час будівництва й монтажу електроустановок необхідно керуватися нормами й правилами СНіПа.

Основні вимоги до постачання енергії електроприймачам це *надійність й безперебійність*.

Установлено такі ступені номінальної напруги електропостачання: 0,22; 0,38; 0,66; 3; 6; 10; 20; 35; 110; 220; 330; 500; 750 кВ.

За призначенням ПЛ поділяються на:

– *Наддалекі, напругою 500 кВ і вище* – в основному для зв'язку окремих енергосистем.

– *Магістральні, напругою 220 й 330 кВ* – для передачі енергії від потужних електростанцій, а також для зв'язку окремих енергосистем й об'єднання електростанцій усередині енергосистем (з'єднання електростанцій з розподільними пунктами).

– *Розподільні, напругою 35, 110 і 150 кВ* – для електропостачання підприємств і населених пунктів великих районів, які з'єднують розподільні пункти зі споживачами і становлять розгалужені мережі із трансформаторними підстанціями;

– *Лінії електропередачі 20 кВ і нижче* для передачі енергії на невеликі відстані до споживачів.

Безпосередньо до електроприймачів живлення підводять підземними кабельними лініями низької напруги. Електростанції й споживачі об'єднані в одну загальну мережу – енергетичну систему. Енергетична система – це комплекс споруджень, що складається з електростанцій, ліній електропередачі, підстанцій і приймачів енергії. В енергетичну систему входять також теплові мережі зі споживачами.

Потужність ПЛ залежить від сили струму й напруги. Для зниження втрат під час передавання енергії необхідно зменшувати силу струму й збільшувати напругу, тому що втрати енергії пропорційні квадрату струму, а пропускна здатність пропорційна квадрату напруги. Для зменшення сили струму й збільшення напруги споруджують на початку ПЛ підвищувальні, а наприкінці лінії понижуючі підстанції. Основою ПЛ є лінії високої напруги. Повітряні лінії електропередачі і трансформаторні підстанції напругою 220 кВ і більше вважаються магістральними.

Траса ПЛ – це смуга землі, на якій споруджена лінія.

19.1 Класифікація й режими роботи повітряних ліній електропередач

За родом струму ПЛ можуть бути постійного й змінного струму. Як правило, вздовж повітряних ліній передають змінний струм. Лінії постійного струму використовують лише в окремих випадках (наприклад, для зв'язку між енергосистемами, живлення контактної мережі залізничних шляхів, трамвая, тролейбуса). У цьому курсі розглядається тільки ПЛ змінного струму.

Залежно від механічного стану ПЛ розрізняють такі режими:

Нормальний – проводи й троси змонтовані й не обірвані;

Аварійний – у разі повного або часткового обриву проводів і тросів;

Монтажний – під час монтажу опор, проводів і тросів.

Механічні навантаження на елементи ПЛ великою мірою залежать від кліматичних умов району й характеру місцевості, якою проходить лінія. Уся територія країни залежно від швидкості вітру й максимально можливої товщини стінки ожеледі розподілена ПУЕ на райони кліматичних умов.

При цьому за основу беруть найвищу швидкість вітру й товщину стінки ожеледі під час спостереження в певному районі один раз у 15, 10 і 5 років відповідно для ПЛ 500, 6-330 і до 3 кВ.

Зміна температури повітря викликає збільшення або зменшення довжини проводу, відповідно змінюється стріла прогину, механічна напруга й тяжіння його. Ожеледь, що викликає додаткове навантаження на проводи, утворюється за температури повітря від 0 до -5°C . Навантаження від ожеледі й паморозі разом з відповідними вітровими навантаженнями істотно впливають на напруження й погіршують роботу проводу.

Залежно від доступності для людей, транспорту й сільськогосподарських машин місцевість, якою проходить ПЛ, поділяється згідно з ПУЕ на три категорії.

До населеної місцевості зараховують територію міст і селищ у межах міст.

До *ненаселеної* – зараховують незабудовану територію, частково відвідувану людьми, і доступну для транспорту й машин.

До *важкодоступної* – територію, недоступну для транспорту й машин.

19.2 Основні елементи ПЛ

Лінія передач містить такі конструктивні елементи:

1. Опорні конструкції різноманітних типів для закріплення проводів і грозозахисних тросів;
2. Фундаменти опор;
3. Проводи різноманітних конструкцій і перерізу для передачі електричного струму;
4. Грозозахисні троси для захисту лінії від грозових розрядів;
5. Ізолятори або гірлянди ізоляторів для ізоляції проводу від опори;
6. Лінійна арматура для закріплення проводів і тросів до ізоляторів та опор, а також для з'єднання проводів і тросів;
7. Заземлюючих пристроїв для відведення струму блискавки або струму замикання в землю.

До складу ПЛ входять також пристрої, що забезпечують безперебійне електропостачання споживачів і нормальну роботу лінії.

Для підтримки проводів ПЛ на заданій відстані один від одного й від землі використовують опори (рис. 19.1).



Рисунок 19.1

Конструкцію, яка встановлена в ґрунт, або яка спирається на його й передає на ґрунт навантаження від опори з ізоляторами й проводами (тросами) і зовнішніх впливів (ожеледь, вітер), називають фундаментом опори.

Вертикальна відстань між нижчою точкою проводу в прольоті й прямій, що з'єднує точки його кріплення на опорах, називають *стрілою прогину проводу f*.

На рис. 19.1 позначено: 1 – фундамент опори; 2 – анкерно-кутова опора (А-К); 3 – шлейф; 4 – натяжна гірлянда ізоляторів; 5 – грозозахисний трос; 6 – провід; 7 – підтримуюча гірлянда ізоляторів; 8 – проміжна опора (П); 9 – поверхня землі.

Вертикальна відстань h від нижньої точки проводу в прольоті до пересічних споруджень, поверхні землі чи води називають *габаритом проводу*. Визначають габарит для найважчих кліматичних умов. Такими випадками є найвища температура повітря (звичайно, $+40^{\circ}\text{C}$) чи максимальна ожеледь. Габаритні відстані нормуються для різної місцевості й напруги мережі.

Відрізок проводу, який з'єднує на анкерній опорі проводи суміжних анкерних прольотів, називають шлейфом або петлею.

Горизонтальна відстань між центрами двох сусідніх опор, на яких підвішені проводи, називають *прольотом*.

Анкерна ділянка (прольот) обмежена анкерними опорами (рис. 19.1) і складається з декількох *проміжних прольотів* (іноді це один проліт). Анкерний чи проміжний проліт, що перетинає будь-яке спорудження або природну перешкоду (залізниця, яр, ріка та інше), називають *перехідним прольотом*.

Кут α або α_1 між напрямками траси ПЛ називають *кутом повороту лінії* (рис. 19.1).

Періодичну зміну розташування проводу різних фаз називають *транспозицією проводів*. Транспозицію виконують на опорах, а іноді в прольоті для зниження несиметричності напруги і струмів в електричній системі.

Зусилля, з яким натягнуто провід чи трос, називають *тяжінням проводу*. Залежно від сили вітру, температури повітря, товщини стінки ожеледі тяжіння змінюється.

19.3 Загальні відомості про опори

Типи опор

За призначенням опори поділяють на проміжні (П), анкерні (А), кутові (К) (рис. 19.1), кінцеві (Кц) і спеціальні (С).

На рис. 19.2 подано профіль (а) і план (б) ділянки траси ПЛ. Тут позначено: 1 – расподільний пункт; 2 – лінія зв'язку; 3 – шосе; 4 – понижуючий трансформатор; Кц-1 і Кц-17 – кінцеві опори; П-2, П-3, П-5, П-7, П-8, П-9, П-12, П-13, П-15, П-16 – проміжні опори; КП-4 – кутова проміжна опора; КА-6, КА-10, КА-11 – кутові анкерні опори; А-14 – анкерна опора; 12° і 63° – кути повороту траси.

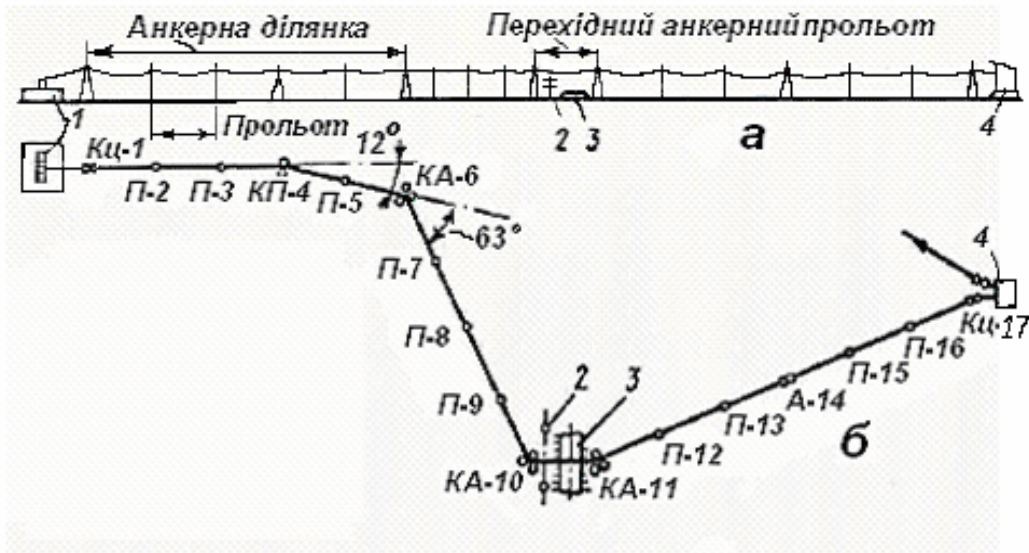


Рисунок 19.2

- *Проміжні опори* – розташовані на прямих ділянках траси (рис. 19.2), і призначені для підтримки проводів. Гірлянди ізоляторів 7 на цих опорах розташовані вертикально (рис. 19.1). Ці опори й гірлянди ізоляторів не розраховуються на навантаження від тяжіння проводів. Проміжні опори в нормальному режимі сприймають вертикальне й горизонтальне навантаження від ваги проводів, ожеледі, ізоляторів, арматури й тиску вітру. В аварійному режимі (у разі обриву одного чи декількох проводів або троса) проміжні опори сприймають навантаження від тяжіння проводів, що залишилися, і піддаються крученню й згину. На ПЛ 80-90 % – проміжні опори.

- *Анкерні опори* – обмежують деякі ділянки траси. Ці опори використовують для натягу проводів і тросів. Гірлянди ізоляторів 4 на цих опорах розташовані вдовж проводу (рис. 19.1). Такі опори сприймають навантаження від різниці тяжінь проводів і тросів у суміжних прольотах і вагу проводів, ожеледі, ізоляторів, арматури й тиск вітру. Під час монтажу лінії анкерні опори сприймають навантаження від тяжіння проводів, які підвішені з одного боку. Конструкція анкерних опор повинна бути міцна й жорстка. Анкерні опори використовують також для переходу ПЛ через інженерні споруди (рис. 19.1 – перехід лінії через лінію зв'язку, шосе – опори КА-10, КА-11) або природні перешкоди (шляхи сполучень, яри, ріки та ін.).

- *Кутові опори* – ставлять на кутах повороту траси (рис. 19.2 – опори КП-4, КА-6, КА-10, КА-11). За нормальних режимів вони сприймають рівнодіючу сил тяжіння проводів і тросів суміжних прольотів і вагу проводів, ізоляторів, арматури й тиск вітру. Як кутові опори за малих кутів α використовують проміжні опори (до 15° – рис. 19.2 опора КП-4, кут повороту лінії 12°), а за великих кутів повороту траси – анкерні опори (рис. 19.2 – опори КА-6, КА-10, КА-11).

- *Кінцеві опори* є різновидом анкерних опор і встановлюються наприкінці чи спочатку лінії (рис. 19.2 – опори Кц-1 і Кц-17).

- *Спеціальні опори:*

- *транспозиційні* – для періодичної зміни порядку розташування проводів різних фаз на опорах;

- *відгалуженні* – для пристрою відгалужень від магістральної лінії;

- *перехресні* – для перетинання ПЛ двох перехресних напрямків;

- *перехідні* – для перетинання ПЛ через деякі спорудження і природні перешкоди.

За конструкцією опори поділяють на опори, які розташовані *вільно* (рис. 19.3, а), і *з відтягненнями* (рис. 19.3, б). Обидва типи опор можуть бути *одностояковими й порталними*. На рис. 19.3 позначено: 1 – стояк опори, 2 – провід, 3 – гірлянда ізоляторів, 4 – відтягнення.

Опори, які розташовані вільно, передають навантаження безпосередньо через стояки на ґрунт чи фундамент. Стояки опор з відтягненнями передають на ґрунт тільки вертикальні навантаження, поперечні й подовжні (щодо осі ПЛ) навантаження передаються на відтягнення, які закріплюють за анкерні плити.

За кількістю проводів як опори, так і ПЛ можуть бути *одно-, дво- і багатоколовими*.

Одноколова ПЛ складається із трьох фазних проводів, тобто одного кола (рис. 19.3, а). На опорах двоколових ПЛ (рис. 19.3, б) підвішують два рівнобіжні кола – тобто шість проводів. Споруджують також ПЛ *із розщепленими фазами*, на яких замість одного фазного проводу великого перерізу підвішують декілька проводів меншого перерізу – так на ПЛ 330 кВ – два горизонтальних проводи, ПЛ 500 кВ – три проводи, які розташовані по вершинах трикутника. Розщеплені фази дозволяють збіль-

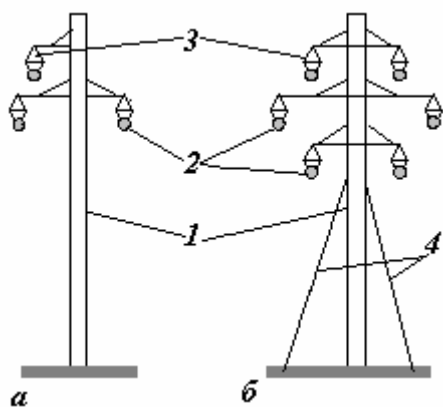


Рисунок 19.3

шити передану потужність і зменшити втрати за рівної площі перерізу проводів фази.

Розташування проводів на опорах може бути горизонтальним (один ярус), вертикальним (два яруси) і змішаним, при якому вертикально розташовані проводи зміщені по горизонталі (рис. 19.3, а, б). На одноколових опорах проводи часто розташовують «трикутником» (рис. 19.3, а), а на двоколових – «бочкою» (рис. 19.3, б).

Згідно з матеріалом опори бувають *металеві* (як правило, сталеві, іноді дюралеві) і *залізобетонні*.

Під час виготовлення металевих опор використовуються прокатні профілі зі звичайної вуглецевої сталі Ст. 3 або низьколегованої високоміцної сталі різних марок. Основним недоліком сталевих опор є

корозія. У разі корозії знижується міцність конструкції, що може призвести до аварії. Для захисту опор від корозії використовується гаряче оцинкування деталей ПЛ або фарбування.

Для споруди ПЛ напругою до 500 кВ включно широко застосовуються залізобетонні опори. Для їх виготовлення потрібно значно менше металу, вони не схильні до корозії й не потребують великих витрат на обслуговування під час експлуатації. Залізобетонні опори мають високу механічну міцність, вони довговічні. Витрати праці на їхню зборку значно нижче, ніж на зборку металевих. Недоліком залізобетонних опор є велика маса, що здорожує транспортні витрати і під час спорудження лінії викликає необхідність застосування кранів великої вантажопідйомності. На ПЛ частка залізобетонних опор складає близько 80-90 % від усієї кількості опор.

Уніфікація та позначення опор. За результатами практики будівництва, проектування та експлуатації ПЛ визначають найбільш доцільні й економічні типи й конструкції опор для відповідних кліматичних районів, напруги ПЛ і марок проводів і проводять їхню уніфікацію. При цьому скорочується кількість типів лінійної арматури й інших деталей.

Прийнята така система позначень металевих і залізобетонних опор ПЛ 35-330 кВ.

Літерами позначається:

- П – проміжні опори,
- К – кутові й анкерно-кутові,
- С – спеціальні (транспозиційні, відгалуженні, перехресні, перехідні та ін.).

Літерою Б позначають залізобетонні опори.

Відсутність літери Б указує, що опори металеві.

Цифри 35, 110, 220 і т. ін., що розташовують після букв, указують напругу ПЛ (кВ), а цифри за ними – порядковий номер опор, де одноколові опори позначаються непарними цифрами, а двоколові – парними.

Наприклад, шифр ПБ110-1 расшифровують так: проміжна, залізобетонна, одноколова опора ПЛ 110 кВ;

КБ35-3 – анкерно-кутова, залізобетонна, одноколова опора на напругу 35 кВ;

ПКС220-1 – проміжна-кутова, спеціальна, сталева, одноколова опора на напругу 220 кВ;

ПСБ220-1 – проміжна, спеціальна, залізобетонна, одноколова опора на напругу 220 кВ;

П110-6 – проміжна, сталева, двоколова опора ПЛ 110 кВ.

Уніфікація опор дозволяє застосовувати індустріальні методи їх виготовлення, зборки і монтажу, а також організувати масове виробництво елементів і арматури на заводах. Це скорочує час будівництва ПЛ.

На ПЛ 35-220 кВ як проміжні встановлюють залізобетонні одностоякові вільностоячі одне й двоколові опори, а на ПЛ 330-500 кВ – одноколові з металевими траверсами порталні опори.

Як кутові анкерні опори на ПЛ 35-110 кВ використовують одностоякові залізобетонні опори з відтягненнями, а на лініях більш високої напруги – металеві.

Металеві опори встановлюють на ПЛ усіх напруг, що проходять у районах з важкими кліматичними умовами району місцевості, якою проходить лінія (зокрема й у гірській місцевості). За необхідності застосовують опори з відтягненнями. Кутові й анкерні металеві опори використовують на ПЛ 110-500 кВ сумісно з проміжними залізобетонними, а також, як перехідні опори для великих переходів.

Залізобетонні уніфіковані опори. На ПЛ 35 – 500 кВ застосовують опори, які розташовані вільно (рис. 19.3, а; рис. 19.4), і з відтягненнями (рис. 19.3, б), а також порталні (рис. 19.4, в). Основними елементами залізобетонних опор є: стояк 1, траверси (кронштейни) 2 і тросостійка 3 (рис. 19.4). У середині уздовж стояка прокладений дрiт, що заземлює опору. Траверси закріплюють до стояка хомутами (рис. 19.5, б) чи наскрізними болтами (рис. 19.5, а). У траверсах і тросостійках роблять отвори для установки скоб, хомутів, до яких кріплять деталі зчiпної арматури. Тросостійки мають зварену металеву конструкцію і кріпляться до стояка хомутами (рис. 19.5). Як кутові і анкерні опори на ПЛ 35-110 кВ використовують одностоякові залізобетонні опори з відтягненнями, а на лініях більш високої напруги – металеві опори. Стояки армовані арматурою і під час навантаження на розтяг зусилля сприймається арматурою, а під час стиску – бетоном.

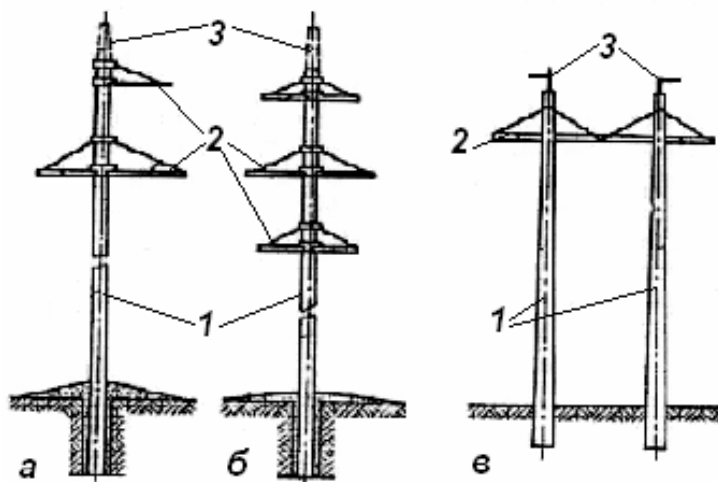


Рисунок 19.4

Залізобетонні стояки виготовляють на спеціальних відцентрових машинах, які формують й ущільнюють бетон. Стояки прямокутного перерізу виготовляють способом вібрування. У траверсах і тросостійках виконують отвори для установки скоб, хомутів, валиків, до яких кріплять деталі зчiпної арматури.

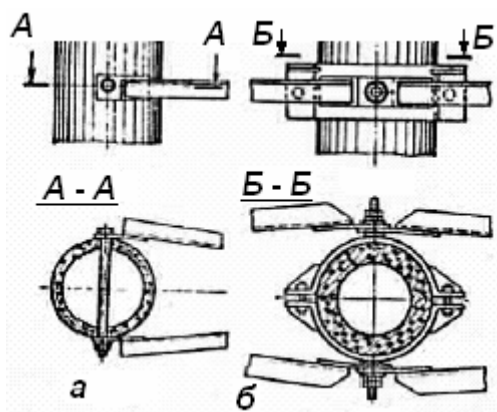


Рисунок 19.5

місцевостях.

Кутові й анкерні металеві опори встановлюють на ПЛ 110-500 кВ разом із проміжними залізобетонними, а також як перехідні на переходах великої довжини. Сталеві опори можуть бути одностояковими (баштовими) (рис. 19.6) і порталними, а по закріпленню на фундаментах – опори, які розташовані вільно (рис. 19.6, а, б), і з відтягненнями – 7 (рис. 19.6, в).

Основними елементами металевих опор (рис. 19.6) є стовбур 1, траверси 2 і тросостійка 3. Стовбур 1, звичайно, виконується у вигляді чотиригранної решітчастої піраміди з діафрагмами 5. Опора виготовляється зі сталевого прокату – кутики. Грані піраміди – це пояса 6, решітка 8, відтягнення 7, анкерні плити 9, фундаменти 10.

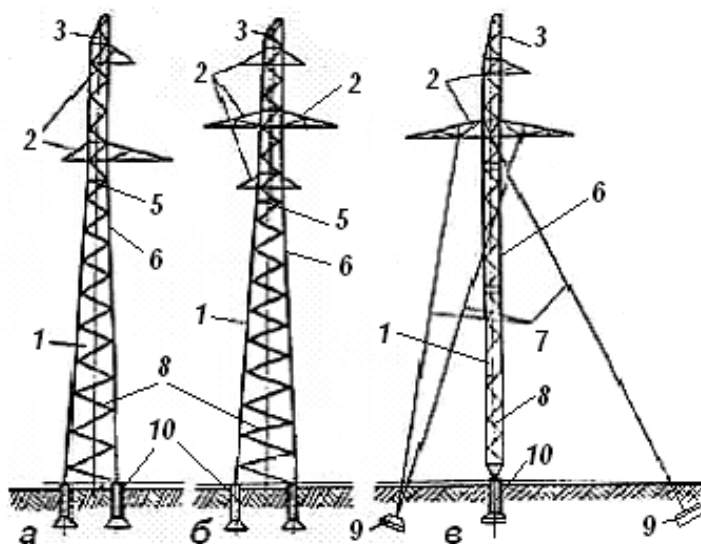


Рисунок 19.6

працевзатрат на зборку (у 1,5-2 рази).

Закріплення опор у ґрунті. Залежно від конструкції опор закріплення (закладення) їх у ґрунт може бути виконане по-різному.

Металеві опори (рис. 19.6) виготовляють зі сталі, а іноді з алюмінієвих сплавів. Металеві опори витримують великі механічні навантаження, але вони значно дорожче залізобетонних. Сфера застосування металевих опор не обмежена.

Їх встановлюють на лініях усіх напруг, що проходять у районах з важкими кліматичними умовами, на важкодоступних трасах і в гірських

За способом з'єднання елементів опори поділяють на зварені і болтові. Останні виготовляють у вигляді окремих просторових секцій чи плоских оцинкованих елементів з отворами для наступної зборки на трасі ПЛ. Під час транспортування зварених опор у край низько використовується вантажопідйомність транспорту. Болтові опори економічні в перевезенні, але вимагають великих

Сталеві опори, які розташовані вільно, мають фундаменти – 10 (рис. 19.6) у вигляді бетонних блоків. Стояки металевих і залізобетонних опор з відтягненнями (рис. 19.6, в) встановлюють на залізобетонні фундаменти, а відтягнення кріплять за анкерні плити – 9 (рис. 19.6, в). Проміжні опори, які розташовані вільно, для ПЛ 1 кВ – 220 кВ (крім металевих), а також анкерні – кутові залізобетонні опори ПЛ до 35 кВ зі штировими ізоляторами встановлюють безпосередньо в ґрунт без фундаменту (рис. 19.7). Котловани для цих опор виконують буровими машинами на 5-10 см більше діаметра опори.

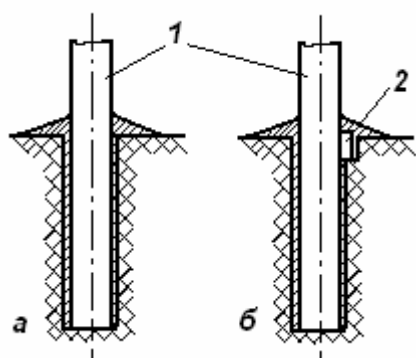


Рисунок 19.7

Таким чином, стояк 1 закріплюють у практично непорушеному ґрунті що має більш високі механічні характеристики, ніж порушений ґрунт. Для посилення закладення у верхній частині котловану встановлюють один чи два ригелі – 2 (рис. 19.7, б).

Для опор ПЛ застосовують монолітні, збірні та пальові фундаменти. Найчастіше часто під металеві опори використовують збірні фундаменти – підніжки, які встановлюють під опорні башмаки стовбурів (рис. 7.8). Такі фундаменти мають опорну плиту – 1, на яку спирається стійка – 2 з анкерними болтами 3.

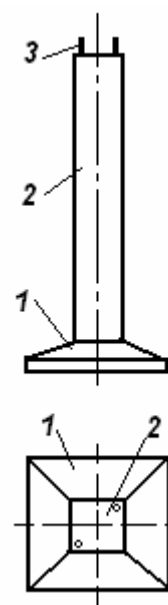


Рисунок 19.8

7.4 Проводи і троси

Проводи ПЛ призначені для передачі енергії від джерела до споживачів.

Основна вимога до матеріалу проводів – малий електричний опір. Чим вище провідність проводу, тим менше втрати енергії під час передачі. Крім того, матеріал проводів повинен мати достатню механічну міцність, бути стійким до впливу вологи і хімічних речовин у повітрі, а також бути дешевим. Зараз проводи виготовляють з алюмінію й сталі. Іноді використовують бронзу і сплави алюмінію.

Матеріал проводів. Мідь має високу провідність і достатню механічну міцність, добре протистоїть шкідливим впливам.

Алюміній уступає міді за провідністю й механічною міцністю. Для передачі на ту саму відстань однакової потужності за однакової напруги та втрати алюмінієві проводи важать приблизно в 2 рази менше мідних.

Алюміній досить стійкий до дії хімічно активних речовин, за винятком лугів, соляної кислоти і солей, що містяться в морській воді. Усе це обумовило широке застосування алюмінію для виготовлення проводів ПЛ. Невелика механічна міцність алюмінію, однак, приводить до зменшення довжини прольотів і тому алюмінієві проводи використовують для ліній напруг 6 кВ – 10кВ, де довжина прольотів не перевищує 100-120 м.

Сталь має низьку електричну провідність і високу механічну міцність, тому сталеві проводи застосовують для передачі невеликих потужностей на короткі відстані і як грозозахисні троси.

Бронза – сплав міді, олова й інших речовин. Бронзові проводи мають достатню міцність і стійкість до різних впливів.

Конструкція проводів. Для ПЛ застосовують неізольовані одно- і багато дротові проводи, дроти яких можуть бути виконані з одного (монометалічні) (рис. 19.9, а) чи двох різних (біметалічні) (рис. 19.9, б) металів.

Однодротові монометалічні мідні й сталеві проводи виготовляють відповідно перерізом 4-10 і 10-16 мм², а біметалічні – перерізом 10-25 мм² зі сталевого дроту, покритого шаром міді або алюмінію.

Багатодротовий провід (рис. 19.9, в, г) виготовляють скруткою окремих дротів. Як правило, провід має один центральний дріт і наступні повіви (ряди).

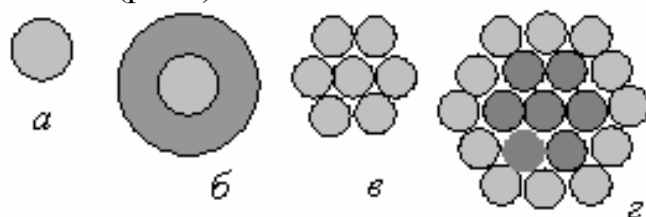


Рисунок 19.9

Проводи такої конструкції виготовляють з алюмінію чи алюмінієвих сплавів (рідше з міді). Виготовляють також багатодротові комбіновані проводи із двох металів, які мають осердя зі сталевих дротів великої механічної

міцності, на які накладають повіви дротів з металу, котрі мають гарну провідність. Найбільше поширення одержали комбіновані сталеалюмінієві проводи. Виготовляють сталеалюмінієві проводи з різним співвідношенням площ перерізів алюмінієвої й сталеві частин: для проводів нормальної міцності – приблизно 6:1, для посиленних – 4:1 і для особливо посиленних – 1,5:1.

Провід із полегшеними осердями мають співвідношення близько 8:1, а особливо полегшені – (12-18):1. Для великих переходів (км і більш) застосовують сталебронзові проводи, які мають значно більшу механічну міцність, чим сталеалюмінієві.

За умовами механічної міцності на ПЛ використовують тільки багатодротові проводи. Виключення допускається тільки для ПЛ 1-10 кВ, для яких іноді використовуються однодротові проводи. Для збільшення терміна служби проводи покривають захисним мастилом.

Маркування проводів. У маркування проводів входять букви й цифри, що вказують їхній матеріал і площу поперечного перерізу. Так, мідний провід перерізом 120 мм^2 позначається М-120, алюмінієвий перерізом 95 мм^2 – А-95, сталевий перерізом 25 мм^2 – ПС-25. Провід зі звичайного алюмінієвого сплаву позначають літерами АН (наприклад, АН-25), а з термостійкого – АЖ (АЖ-50).

Однодротові сталеві оцинковані проводи позначають літерами ПСО й цифрами, що вказують діаметр у міліметрах (ПСО-4).

У позначення комбінованих проводів входять букви й цифри. Наприклад, АС-70/11 – сталеоалюмінієвий провід з алюмінієвими повіями перерізом 70 мм^2 і сталевим осердям перерізом 11 мм^2 .

Умови роботи проводів. Вибір проводів для конкретної ПЛ залежить не тільки від переданої потужності, але й від очікуваних під час експлуатації механічних навантажень. Крім постійних навантажень ПЛ зазнають впливу перемінних навантажень, що виникають у разі зміни температури навколишнього повітря, намерзання ожеледі, вітру, а також вібрації й «танцю» проводів. Вплив цих факторів залежить від кліматичних умов району, де розташована траса.

Зміна температури повітря викликає збільшення чи зменшення довжини проводу, відповідно змінюється його стріла прогину, напруження й тяжіння.

Ожеледь, що викликає додаткове навантаження на проводи, утворюється за температури повітря від 0 до $-5 \text{ }^\circ\text{C}$. Крім того, у морозну погоду за температури біля $-5 \text{ }^\circ\text{C}$ на проводах може з'явитися паморозь. Такі навантаження істотно впливають на роботу ПЛ.

Вітрове навантаження на провід залежить від швидкості вітру, напрямку його щодо траси, а також навітряної площі поверхні. Чим більше діаметр проводу, тим більше тиск вітру на нього. Найбільше значення тиску – при поперечному напрямку вітру до осі ПЛ. Вплив вітру залежить від кліматичного району: на узбережжі морів і водойм тиск вище, у лісі тиск падає. На висоті тиск також більше, ніж у низині. Особливо небезпечний вітер під час ожеледі, тому що розміри проводу значно збільшуються. Навантаження від ожеледі й паморозі разом з вітровими навантаженнями на площу ожеледі істотно впливають на роботу проводу.

Вібрація проводів виникає при рівному вітрі зі швидкістю не менш $0,5 \text{ м/с}$ і найбільш інтенсивна за швидкості $3\text{-}5 \text{ м/с}$. Під час зриву завихрень повітряного потоку виникають поштовхи на проводи й під час збігу (резонансі) власних частот проводу й частоти поштовхів він починає коливатися. Такі коливання мають довжину хвилі до 10 м з амплітудою до $2\text{-}3$ розміру діаметра проводу. Частота вібрації залежить від швидкості вітру, довжини прольоту, діаметра проводу і його тяжіння. Під час вібрації провід ушкоджується в місцях виходу із затискача на опорах – відбувається злам дротів. Для зменшення амплітуди коливань проводів

установлюють так звані гасителі коливань (рис. 19.10). Гасителі коливань (рис. 19.10, а) закріплюють за допомогою затискача 3 до проводу 2. Вони включають відрізок сталевого тросу 4, на якому закріплені чавунні вантажі 1. Вібрація проводу викликає коливання вантажів, які запізнюються за часом від коливань проводу. Зустрічні коливання проводу і вантажів взаємно компенсують один одного і амплітуда вібрацій значно зменшується.

Для захисту проводів перерізом не більше 95 мм² на ПЛ 6-35 кВ з підвісними ізоляторами іноді застосовують гасителі коливань (рис. 19.10, б) у вигляді петлі. У цьому випадку петля із проводу 8 закріплюється дротом 7 до проводу 2 лінії під підтримуючим затискачем 6 гірлянди ізоляторів 5. Гасителі можуть значно знижувати амплітуду вібрацій (до 0,1-0,2 мм).

«Танець» проводів іноді виникає в районах, схильних до ожеледі, за сильного рвучкого вітру і становить собою коливання з великою амплітудою (до 5-6 м) і малою частотою. Довжина хвилі при цьому може досягати декількох сотень метрів. Під час «танцю» проводів може бути зруйнована арматура, розірвана гірлянда ізоляторів чи зламана опора. Однією з мір захисту проводів від «танцю» є плавлення ожеледі електричним струмом або застосування гасителів «танцю».

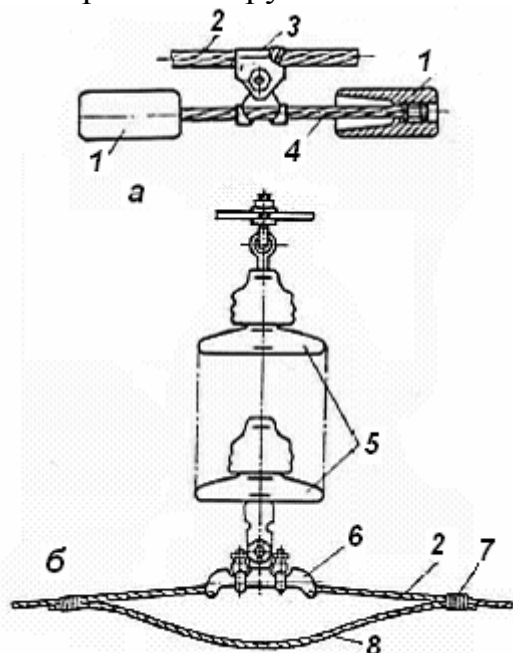


Рисунок 19.10

Приведене навантаження на провід. Під час розрахунку ПЛ визначаються так зване приведенне навантаження або питому вагу проводу (тросу). Приведене навантаження позначається γ з відповідним індексом від 1 до 7; це погонне навантаження, яке припадає на одиницю (мм²) площі перерізу проводу або тросу. Розмірність приведенного навантаження – Н/(м·мм²).

Приведене навантаження від власної ваги проводу γ_1 . Для алюмінієвих, сталевих і сталеалюмінієвих проводів наведені в ПУЕ.

Приведене навантаження від ожеледі

$$\gamma_2 = 2,83 \cdot b \cdot (d + b) \cdot 10^{-2} / F,$$

де b – товщина стінки ожеледі для відповідного району по ожеледі (мм);

d – діаметр проводу (мм);

F – площа перерізу проводу (мм²). Це вага шару ожеледі, товщина стінки якого b на проводі діаметром d .

Приведене навантаження проводу покритого ожеледдю

$$\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Приведене вітрове навантаження на провід без ожеледі

$$\gamma_4 = \alpha_v \cdot k_e \cdot c_x \cdot q \cdot d \cdot 10^{-3} / F,$$

де q – максимальний нормативний швидкісний напір вітру для відповідного кліматичного району (H/m^2);

α_v – коефіцієнт нерівномірності тиску вітру, який залежить від значення q ;

k_e – коефіцієнт впливу довжини прольоту l ;

c_x – коефіцієнт лобового опору, який залежить від діаметра проводу d .

Приведене вітрове навантаження на провід, покритий ожеледдю,

$$\gamma_5 = \alpha_v \cdot k_e \cdot c_x \cdot q_o (d + 2b) \cdot 10^{-3} / F,$$

де $q_o = 0,25 \cdot q$ – вітрове навантаження при ожеледі; але в районах із товщиною стінки ожеледі $b \geq 15$ мм приймати не менше $140 \text{ H}/\text{m}^2$, α_v залежно від q_o , k_e залежно від l ; коефіцієнт $c_x = 1,2$ для проводів, покритих ожеледдю, d – діаметр проводу; b – товщина стінки ожеледі.

Приведене навантаження від ваги проводу і вітрового навантаження на провід без ожеледі

$$\gamma_6 = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_4^2}.$$

Приведене вагове навантаження від ваги проводу, покритого ожеледдю, і вітрового навантаження на провід, покритою ожеледдю,

$$\gamma_7 = \sqrt{\gamma_3^2 + \gamma_5^2}.$$

Примітка: Значення коефіцієнтів α_v , k_e , c_x , а також величини b (товщина стінки ожеледі) і q (максимальний нормативний швидкісний напір вітру) знаходяться за довідковими таблицями ПУЕ.

Грозозахисні троси становлять протяжні блискавковідводи, натягнуті уздовж ПЛ над проводами. Під дією зовнішніх (атмосферних) або внутрішніх (комутаційних) факторів напруга мережі може значно перевищити номінальну. Це може викликати пошкодження ізоляції й апаратури. Такі перенапруження лінії також загрожують безпеці людей. Після заземлення струм розтікається навколо опори. Різке падіння потенціалу поблизу опори небезпечно для життя людей і тварин. Щоб обмежити перенапруги й убезпечити людей, опір розтіканню зменшують, для чого влаштовують захисне заземлення.

Грозозахисні троси можуть бути підвішені на опорах таким чином:

Спосіб а. Трос заземлений на всіх проміжних опорах (без ізоляторів) і кріпиться за допомогою ізоляторів тільки на металевих й залізобетонних анкерних опорах.

Спосіб б. Трос на всіх опорах кріпиться на ізоляторах, які шунтуються іскровими проміжками. Кожна анкерна ділянка заземлена в одній точці. Така підвіска усуває втрати потужності, що викликані

індукованими струмами в тросі, і дає можливість застосувати плавлення ожеледі на тросі і дозволяє контролювати опір заземлення на кожній опорі.

Спосіб с. Трос повністю ізолюється на всій лінії або на окремих ділянках. Ізолятори шунтуються іскровими проміжками.

Згідно з ПУЕ на лініях 150 кВ і нижче кріплення троса виконується за способом «а». Другий спосіб («б») застосовується на лініях 220-550 кВ.

У випадку використання троса для високочастотного зв'язку застосовується третій спосіб («с»).

Повітряні лінії 110 кВ і більше на металевих і залізобетонних опорах захищають тросом по усій лінії, а ПЛ 35 кВ – тільки поблизу підстанцій.

Для ліній 110-330 кВ допускається не встановлювати троси в районах з малою інтенсивністю гроз (кількість грозових годин у році менше 20).

Як грозозахисні троси застосовують:

– ПЛ 35 кВ – канат 8,0-Н-1200-1-СС ДЕРЖСТАНДАРТ 3062-69;

– ПЛ 110 кВ і 150 кВ – канат 9,1-Г-1-СС-Н-1400 ДЕРЖСТАНДАРТ 3063-66;

– ПЛ 220 кВ і вище - канат 11,0-Г-1-СС-Н-1400 ДЕРЖСТАНДАРТ 3063-66.

Пояснення позначень: 8,0; 9,1; 11,0 – діаметр каната; Г – вантажний; 1 – першої марки; СС – дріт оцинкований; Н – трос, що не розкручується; 1200; 1400 - межа міцності (МПа).

19.5 Ізолятори й арматура

Лінійні ізолятори використовують для ізоляції проводів і кріплення їх до опор ПЛ. Ізолятори знаходяться під електричною напругою й одночасно сприймають механічне навантаження від ваги проводів, ожеледі, напору вітру, вібрації, тому ізолятори повинні забезпечити як електричну, так і механічну міцність.

Виготовляють ізолятори з електротехнічної порцеляни, а також зі спеціального загартованого скла. Механічна міцність скляних ізоляторів вище, ніж порцелянових, вони мають менші розміри й масу і старіють значно повільніше.

Залежно від засобу кріплення на опорах ізолятори поділяються на штирові, що кріпляться на штирях, і підвісні, котрі збирають у гірлянду і кріплять до опори спеціальною арматурою.

Штирові ізолятори (рис. 19.11) застосовують на ПЛ до 35 кВ включно. На ПЛ до 1кВ згідно з рис. 19.11, а, б; на ПЛ 6 – 10 кВ – рис. 19.11, в, г; ПЛ 10-20 кВ – рис. 19.11, д; на ПЛ 35 кВ – рис. 19.11, е. Їх позначають літерами, що вказують конструкцію (Ш – штирові), матеріал (Ф – порцеляна, С – скло) типорозмір (А, Б, В, Г), призначення (Т – телеграфні, Н – невеликої напруги), а також цифри, що вказують

номінальну напругу. Наприклад, ізолятори для ПЛ 35 кВ позначають ШФ35-Б.

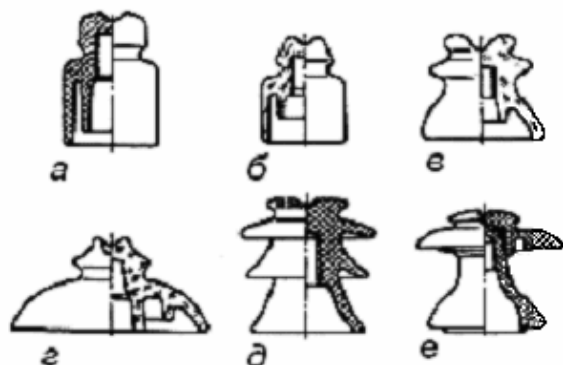


Рисунок 19.11

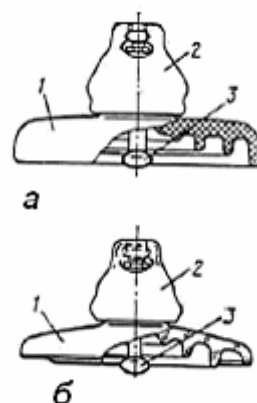


Рисунок 19.12

Підвісні ізолятори (рис. 19.12) застосовують на ПЛ 35 кВ і вище, а також на ПЛ 6-10 кВ, якщо механічне навантаження перевищує механічну міцність штирових ізоляторів. У позначенні підвісних ізоляторів входять букви (П – підвісний, Ф – порцеляновий, С – скляний, Г – брудостійкий), а також цифри і букви А, Б, В, що указують відповідно гарантовану механічну міцність і типорозмір. На рисунку 19.11, а – порцеляновий ізолятор ПФ6-В, гарантована механічна міцність 60 кН, а на рисунку 19.2, б – скляний ПС22-А. На рисунку. 19.12 позначено: 1 – ізолююча деталь, 2 – шапка, 3 – стрижень.

Найпоширеніші підвісні ізолятори із загартованого скла. Для того щоб забезпечити необхідну ізоляцію проводів, підвісні ізолятори збирають у гірлянди, що закріплюють до траверсів опор (рис. 19.12).

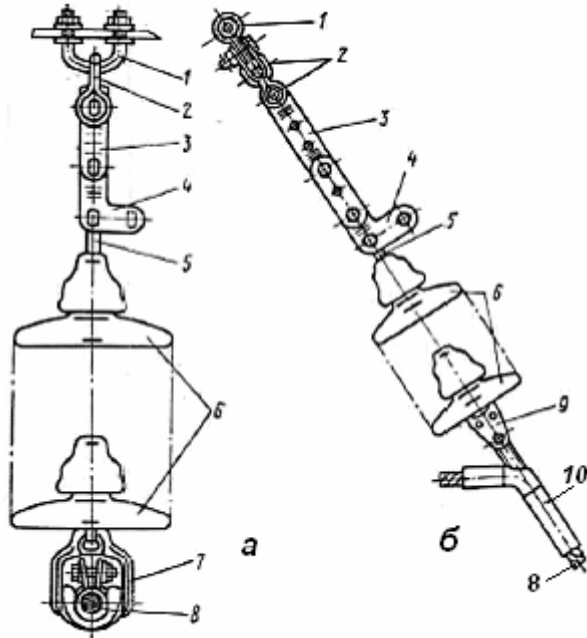
Розрізняють підтримуючі гірлянди (рис. 19.12, а), що несуть тільки масу проводу, ожеледі й тиск вітру, і натяжні гірлянди (рис. 19.12, б), що сприймають додатково тяжіння проводів і кріплять проводи до анкерних і кутових опор. На рисунку. 19.13 позначено: 1 – вузол кріплення до траверси; 2, 3, 4, 5 – зчїпна арматура; 6 – ізолятори; 7, 10 – підтримуючий і натяжний затискач; 8 – провід.

Арматура – спеціальні деталі, призначені для з'єднання ізоляторів у гірлянди, кріплення до них проводів, закріплення гірлянд на опорах, з'єднання проводів і т. ін. Арматура повинна мати високу механічну міцність, низький коефіцієнт тертя (для зменшення механічних навантажень), високу корозійну стійкість.

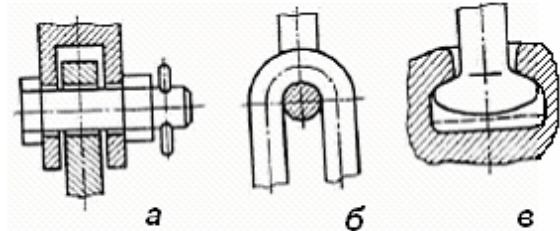
Зчїпна арматура призначена для з'єднання елементів гірлянд підвісних ізоляторів і кріплення їх до опор. Деталі зчїпної арматури з'єднуються рухливо і при цьому використовуються шарніри трьох типів.

Шарнірне з'єднання палець – вушко дозволяє рух тільки у одній площині (рис. 19.14, а). Ланцюгове з'єднання (рис. 19.14, б) дозволяє рух у двох площинах, а сферичний шарнір (рис. 19.14, в) – в якій завгодно площині.

Підтримуючі затиски (рис. 19.15) і роликові підвіси призначені для кріплення проводів до гірлянд ізоляторів на проміжних опорах. На рисунку 19.15, а – затискач для одного проводу, а на рисунку 19.15, б для трьох проводів у фазі. Тут позначено: 1 – «човник», 2 – болт, 3 – підвіска до траверси, 4 – провід, 5 – затискач, 6 – «коромисло».



Рисунку 19.13



Рисунку 19.14

Натяжна арматура (рис. 19.16) – це натяжні затискачі, призначені для кріплення на анкерних опорах проводів і тросів. Клиновий затискач (рис. 19.16, а) призначений для монтажу проводів перерізом до 95 мм^2 , а затискач

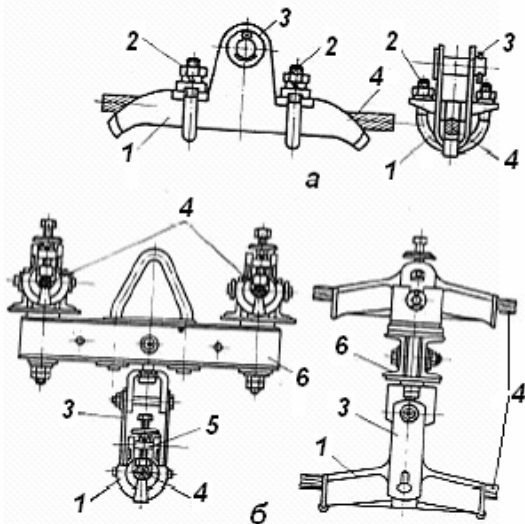


Рисунок 19.15

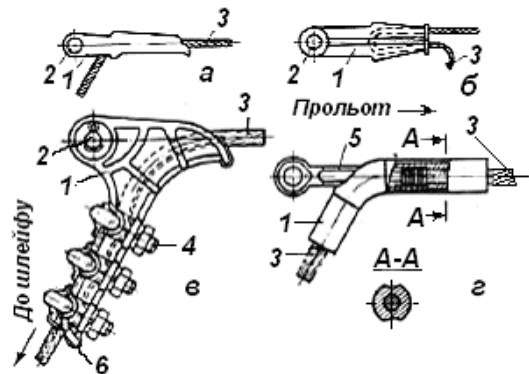


Рисунок 19.16

(рис. 19.16, б) – проводів і тросів перерізом до 50 мм^2 . Болтові натяжні затискачі (рис. 19.16, в) призначені для кріплення проводів перерізом від 70 мм^2 до 240 мм^2 , а затискачі (рис. 19.16, г) для пресування проводів перерізом більше 240 мм^2 . На рисунку 19.16: 1 – корпус, 2 – палець, 3 – провід, 4 – болт, 5 – анкер, 6 – прокладка.

Захисною арматурою є дистанційні розпірки, гасителі вібрації й інші деталі, призначені для захисту проводів і підвісок від механічних і електричних ушкоджень.

Сполучною арматурою є різні затискачі, призначені для з'єднання проводів і тросів.

19.6 Розрахунок проводу

19.6.1 Крива провисання проводу

Для визначення кривої провисання проводу розглянемо спочатку провід (або трос) у прольоті, коли точки закріплення проводу A , B розташовані на одній висоті (рис. 19.17, а).

Уведемо позначення: p – погонне навантаження (вага одного метра проводу); γ – приведенне (питоме) навантаження,

$$\gamma = p / F, \quad (19.1)$$

де F – площа поперечного перерізу проводу;

T – повне тяжіння проводу;

H, V – складові повного тяжіння;

l – довжина прольоту (прогону);

f – стріла провисання проводу,

$$\sigma = T / F \quad (19.2)$$

– напруження розтягу проводу.

Припускаємо, що погонне навантаження рівномірно розподілене по довжині прольоту.

Розглядаємо рівновагу частини проводу OD (рис. 19.17, б). Вага цієї частки $P_x = px$. Рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{kx} = H_x - H = 0, \quad \Sigma F_{ky} = V_x - P_x = 0, \quad \Sigma m_D = P_x \cdot x/2 - H_y = 0.$$

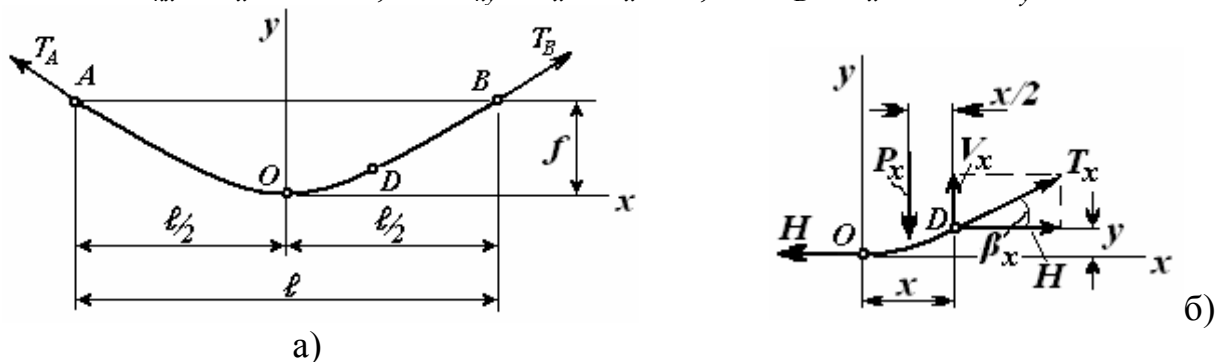


Рисунок 19.17

З цих рівнянь знаходимо

$$H_x = H, \quad (19.3)$$

$$V_x = p \cdot x, \quad (19.4)$$

$$y = px^2 / (2H). \quad (19.5)$$

Таким чином, горизонтальна складова тяжіння однакова в усіх точках проводу.

Крива провисання проводу – парабола з вершиною на початку координат, яку можна записати також такою формулою:

$$\gamma = \gamma x^2 / (2 \sigma_0), \quad (19.6)$$

де $\sigma_0 = H/F$ – напруження в перерізу O , $\gamma = p/F$.

Стріла провисання проводу

$$f = \gamma l^2 / (8 \sigma_0). \quad (19.7)$$

Якщо прийняти, що вага розподілена по довжині проводу, а не по горизонталі, то крива провисання буде

$$y = h_0 [ch(x/h_0) - 1], \quad (19.8)$$

де $h_0 = H/p = \sigma_0 / \gamma$, $ch(x/h_0)$ – гіперболічний косинус.

При великих прольотах (800-1000 м) похибка визначення стріли провисання, що визначається за формулою (19.7), може бути занадто великою. У такому разі необхідно використовувати формулу, яка отримана під час розкладення (19.8) у ряд Маклорена:

$$f = \gamma l^2 / (8 \sigma_0) + \gamma^3 l^4 / (384 \sigma_0^3) \quad (19.9)$$

Приклад: Визначити стрілу провисання проводу в прольоті $l = 800$ м, коли $\sigma_0 = 130$ МПа, для двох значень приведенного навантаження: $\gamma_1 = 0,035$ Н/м·мм² і $\gamma_2 = 0,099$ Н/м·мм².

Обчислюємо: (для $\gamma_1 = 0,035$ Н/м·мм²)

$$f_1 = 0,035 \cdot 800^2 / (8 \cdot 130) + 0,035^3 \cdot 800^4 / (384 \cdot 130^3) = 21,54 + 0,02 = 21,56 \text{ м};$$

(для $\gamma_2 = 0,099$ Н/м·мм²)

$$f_2 = 0,099 \cdot 800^2 / (8 \cdot 130) + 0,099^3 \cdot 800^4 / (384 \cdot 130^3) = 60,92 + 0,47 = 61,39 \text{ м}.$$

Похибка у разі нехтування другим доданком становить відповідно 0,02 м і 0,47 м, тобто необхідно для другого випадку використовувати точну формулу (19.9).

Далі розглянемо випадок, коли точки А і В розташовані на різних відмітках (рис. 19.18).

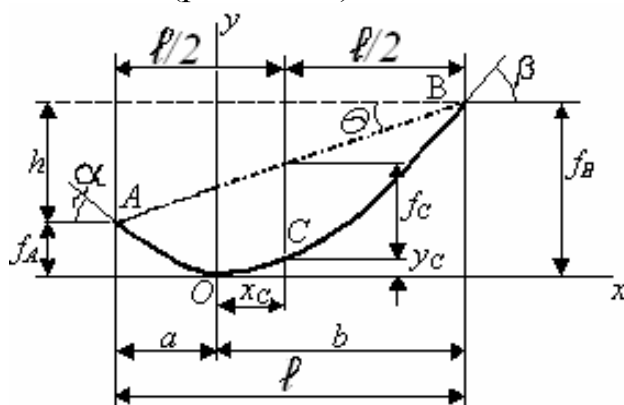


Рисунок 19.18

Крива провисання проводу (19.6) – парабола з вершиною в початку координат

$$y = \gamma x^2 / (2 \sigma_0).$$

Для визначення a і b

підставимо в (6.6) $x = -a$ і $x = b$:

$$f_A = \gamma a^2 / (2 \sigma_0), \quad (19.10)$$

$$f_B = \gamma b^2 / (2 \sigma_0). \quad (19.11)$$

Крім того, маємо

$$h = f_B - f_A, \quad a + b = l \quad \text{або} \quad b = l - a. \quad \text{тобто}$$

$$h = f_B - f_A = [\gamma l / (2 \sigma_0)] (l - 2a). \quad (19.12)$$

З цього рівняння і рівності $b = l - a$ знаходимо

$$a = l / 2 - \sigma_0 h / (\gamma l) \quad (19.13)$$

$$b = l/2 + \sigma_0 h / (\gamma l). \quad (19.14)$$

Таким чином обчислюються значення a і b , які визначають положення точки O .

Стріла провисання проводу в середині прольоту f_C знаходиться так:

$$f_C = f_B - h/2 - y_C = \gamma l^2 / (8 \sigma_0), \quad (19.15)$$

$$\text{де} \quad y_C = \gamma x_C^2 / (2 \sigma_0) = \sigma_0 (h/l)^2 / (2 \gamma), \quad (19.16)$$

$$x_C = b - l/2 = \sigma_0 h / (\gamma l). \quad (19.17)$$

Формула (19.15) для f_C в середині прольоту співпадає з формулою (19.7) для стріли провисання в середині прольоту за однакової висоти точок закріплення проводу A, B .

Іноді необхідно визначити вертикальну відстань від проводу до деяких перетинаємих споруд або до природних перешкод (лінії зв'язку, залізниця, яр, ріка та інше). У таких розрахунках доцільно прийняти систему координат, яка подана на рисунку 19.19.

Тоді використовуються такі залежності:

$$y = \gamma x(l-x) / (2 \sigma_0) + xh/l, \quad (7.18)$$

$$f_x = \gamma x(l-x) / (2 \sigma_0). \quad (7.19)$$

Знайдемо тяжіння у точках закріплення (рис. 19.19) проводу.

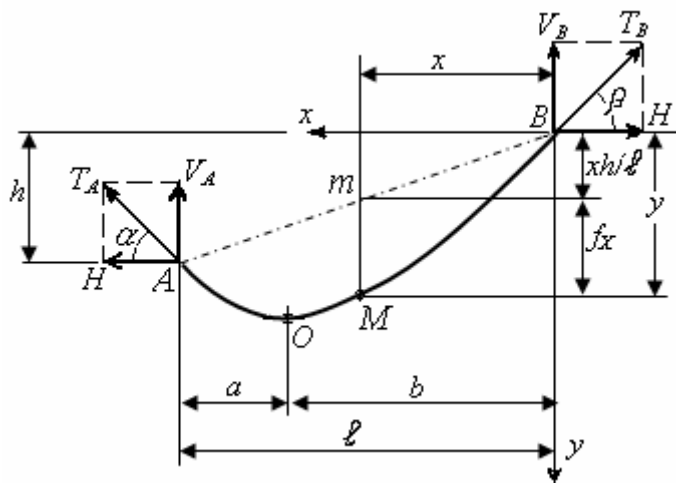


Рисунок. 19.19

За рис. 19.17, б запишемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{kx} = T_x \cos \beta_x - H = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = T_x \sin \beta_x - px = 0,$$

звідки

$$H = T_x \cos \beta_x$$

$$V_x = T_x \sin \beta_x = px. \quad (19.20)$$

Отже, горизонтальна складова тяжіння постійна (19.3) і дорівнює тяжінню у нижчій точці кривій провисання. Вертикальна складова дорівнює вазі проводу від нижчої

точки O до точки M , яка розглядається (рис. 19.19).

Повне тяжіння проводу

$$T_x = \sqrt{H^2 + V_x^2} = \sqrt{H^2 + (px)^2}. \quad (19.21)$$

Тяжіння також можна знайти за горизонтальною складовою H :

$$T_x = H / \cos \beta_x \quad (19.22)$$

$$\text{де} \quad \cos \beta_x = H / T_x = H / \sqrt{H^2 + (px)^2}. \quad (19.23)$$

Формулу (19.20), враховуючи розкладення згідно з біномом Ньютона і залежністю $p = \gamma F$, можна записати так

$$T_x = H + \gamma F y. \quad (19.24)$$

За не однакової висоти точок закріплення проводу (рис. 19.19) знаходимо:

$$T_B = H + \gamma F f_B, \quad (19.25)$$

$$T_A = H + \gamma F f_A, \quad (19.26)$$

Якщо поділити останні формули на площу перерізу F проводу, то отримаємо відповідні напруження

$$\sigma_A = \sigma_0 + \gamma f_A; \quad \sigma_B = \sigma_0 + \gamma f_B. \quad (19.27)$$

Розрахунки проводів ПЛ виконуються по напруженням у нижчій точці кривій провисання проводу. Згідно з ПУЕ напруження в точках закріплення проводу можуть перевищувати допустимі напруження не більш ніж на 10 %. Отже, при великих прольотах необхідно перевіряти напруження в точках закріплення проводу по формулах (19.27) і за необхідності зменшувати напруження в нижчій точці.

Вертикальні складові тяжіння за не однакової висоти точок закріплення проводу знаходяться з (19.20) з урахуванням (19.13) і (19.14) зі співвідношень:

$$V_A = p \cdot (l/2 - H h / pl), \quad (19.28)$$

$$V_B = p \cdot (l/2 - H h / pl). \quad (19.29)$$

Значення тяжіння (19.25), (19.26) необхідні для розрахунків гірлянд ізоляторів, величина напружень σ_A, σ_B – формули (19.27) – для розрахунків проводу при великих прольотах. Для розрахунків опор необхідні значення горизонтальних H й вертикальних V складових тяжіння.

Довжина проводу в прольоті L (рис. 19.19) знаходиться згідно з формулою довжини дузі параболи:

$$L = l + 8f^2 / (3l). \quad (19.30)$$

Іноді зручно використовувати таку формулу довжини проводу

$$L = l + \gamma^2 f^3 / (24\sigma_0). \quad (19.31)$$

Формули (19.30), (19.31) дійсні приблизно й для прольотів, якщо точки кріплення проводу розташовані на різній висоті. У разі значної величини відношення h/l (рис. 19.19) необхідно множити довжину L на величину h^2/l .

19.6.2 Рівняння стану проводу. Критичні прольоти

Напруження й стріли провисання проводу змінюються залежно від температури й навантаження. У разі підвищення температури довжина проводу збільшується, стріла провисання також збільшується, а напруження зменшується. У разі зниження температури довжина проводу зменшується – стріла провисання буде також зменшуватися, а напруження збільшуватись.

У разі намерзання ожеледі вага проводу збільшується й також збільшується стріла провисання. Під впливом вітрових навантажень, які діють у горизонтальній площині, провід відхиляється й стріла провисання розташовується в похилій площині. Під час проектування ПЛ необхідно визначати напруження й стріли провисання в різних режимах роботи ПЛ. Для вирішення цих завдань залежність напружень від навантаження й температури виражають рівнянням, яке називають *рівнянням стану проводу*.

Якщо визначити й порівняти зміну довжини проводу L (19.23) для різних значень приведенного навантаження γ з урахуванням впливу зміни напруження й температури, то можна одержати рівняння стану проводу, яке зв'язує напруження, навантаження і температуру в двох режимах:

$$\sigma - \gamma^2 El^2 / (24\sigma_0^2) = \sigma_{ex} - \gamma_{ex}^2 El^2 / (24\sigma_{ex}^2) - \alpha_t E(t - t_{ex}), \quad (19.32)$$

де σ, γ, t – відповідно напруження, приведене навантаження і температура в шуканому режимі;

$\sigma_{ex}, \gamma_{ex}, t_{ex}$ – напруження, приведене навантаження і температура у вихідному стані;

E, l, α_t – модуль пружності матеріалу проводу, проліт, коефіцієнт температурного подовження.

За допомогою рівняння (19.32) можна визначити напруження у проводі в будь-яких умовах, якщо відомі напруження, приведене навантаження і температура у вихідному стані. Рівняння стану проводу можна записати так

$$\sigma^2 = D / (\sigma - B). \quad (19.33)$$

$$\text{Тут } B = \sigma_{ex} - \gamma_{ex}^2 El^2 / (24\sigma_{ex}^2) - \alpha_t E(t - t_{ex}) \quad (19.34)$$

$$D = \gamma^2 El^2 / 24. \quad (19.35)$$

ПУЕ встановлює для сталевих і алюмінієвих проводів допустимі напруження за найбільшого навантаження, нижчої або середньорічної температури.

Напруження, які діють у проводах і тросах під час експлуатації ПЛ, повинні дорівнювати або бути менше допустимих напружень для цих режимів.

У разі обмежування напружень допустимими напруженнями для трьох вихідних режимів: найбільше навантаження, нижча або середньорічна температура, постає питання, який з цих режимів необхідно прийняти як вихідний під час розрахунку проводів і тросів. Це питання вирішується шляхом обчислення так званих *критичних прольотів*.

Критичний проліт – це проліт, який обчислено з рівняння стану проводу (19.32) за умови, що напруження у проводі або тросі досягли значень допустимих напружень для двох з трьох вихідних режимів – найбільше навантаження, нижча або середньорічна температура.

Загальна формула для критичного прольоту для двох режимів I і II, які характеризуються допустимими напруженнями в проводі $[\sigma]_I$, $[\sigma]_{II}$, приведеним навантаженням γ_I , γ_{II} і температурою t_I , t_{II} має вигляд:

$$l_k = \frac{\sigma_{II}}{\gamma_I} \sqrt{\frac{24[(\sigma]_{II} - [\sigma]_I)/E + \alpha_t(t_{II} - t_I)}{(\gamma_{II}/\gamma_I)^2 - (\sigma_{II}/\sigma_I)^2}}. \quad (19.36)$$

Таким чином, вихідний стан визначається за допомогою критичних прольотів, які шукаються для сталевалюмінієвих проводів і грозозахисних тросів з трьох режимів:

- режим нижчої температури (індекс “–”; допустиме напруження $[\sigma]_-$ – приведені навантаження γ_1 ; нижча температура t_-),
- режим найбільшого навантаження (γ_7 або γ_6) за температури ожеледі t_0 (індекс «0»; допустиме напруження при ожеледі $[\sigma]_0$; приведені навантаження $\gamma_{\max} - \gamma_7$ або γ_6 ; температура ожеледі t_0),
- режим середньорічної температури (індекс “E”; допустиме напруження $[\sigma]_E$; приведені навантаження γ_1 ; середньорічна температура t_E).

Критичні прольоти для сталевалюмінієвих проводів обчислюються за такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} l_{1k} &= \frac{1}{\gamma_1} \sqrt{\frac{24[(\sigma]_- - [\sigma]_A)/E + \alpha(t_- - t_A)}{1/[\sigma]_-^2 - 1/[\sigma]_A^2}} \\ l_{2k} &= [\sigma]_0 \sqrt{\frac{24\alpha_t(t_0 - t_-)}{\gamma_{\max}^2 - \gamma_1^2}} \\ l_{3k} &= \sqrt{\frac{24[(\sigma]_0 - [\sigma]_E)/E + \alpha_t(t_0 - t_E)}{\gamma_{\max}^2 / [\sigma]_0^2 - \gamma_1^2 / [\sigma]_A^2}} \end{aligned} \right\} \quad (19.37)$$

Вихідний режим знаходиться зі співвідношення між критичними прольотами й заданим прольотом. Вибір вихідного режиму виконується за табл. 19.1.

19.6.3 Порядок розрахунку проводу (троса)

Розрахунки сталевалюмінієвих проводів і грозозахисного троса виконують за методом допустимих напружень у такий послідовності.

1. Обчислюємо приведені навантаження (див. пункт 4) на провід (трос) $\gamma_1 - \gamma_7$.

2. Розраховуємо критичні прольоти (19.37).

3. За співвідношенням між критичними прольотами й заданим прольотом (таблиця 19.1) обираємо вихідний режим розрахунку – найбільш важкий режим, за якого напруження в нижчих точках провисання проводу дорівнюють допустимому напруженню.

4. З рівняння стану проводу обчислюємо у всіх необхідних режимах напруження в нижчих точках проводу (19.32-19.35) у прольоті й стрілу провисання (19.7-19.9).

5. Обчислюємо найбільше напруження в точках закріплення проводу на опори:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ex}} + \gamma_{\text{ex}} f_{\max} \cdot \quad (19.38)$$

Таблиця 19.1 – Співвідношення між критичними й заданими прольотами

Співвідношення критичних прольотів	Співвідношення заданого і критичних прольотів	Вихідний режим розрахунку
$l_{1к} < l_{2к} < l_{3к}$	$l < l_{1к}$	$[\sigma]_-; \gamma_1; t_-$
	$l_{1к} < l < l_{3к}$	$[\sigma]_E; \gamma_1; t_E$
	$l > l_{3к}$	$[\sigma]_o; \gamma_{\max}; t_o$
$l_{1к} > l_{2к} > l_{3к}$	$l < l_{2к}$	$[\sigma]_-; \gamma_1; t_-$
	$l > l_{2к}$	$[\sigma]_o; \gamma_{\max}; t_o$
$l_{1к} < l_{2к}$ $l_{3к}$ – мнімний або $l_{3к} \rightarrow \infty$	$l < l_{1к}$	$[\sigma]_-; \gamma_1; t_-$
	$l > l_{1к}$	$[\sigma]_E; \gamma_1; t_E$
$l_{2к} < l_{3к}$ $l_{1к}$ – мнімний	$l < l_{3к}$	$[\sigma]_E; \gamma_1; t_E$
	$l > l_{3к}$	$[\sigma]_o; \gamma_{\max}; t_o$

де f_{\max} – найбільше значення f_A або f_B з (15.7; 15.8), σ_{ex} ; γ_{ex} – напруження у нижчих точках проводу й відповідне приведенне навантаження у вихідному режиму.

Розрахунки проводів виконують завжди за напруженням у нижчих точках проводу, але найбільші напруження будуть у точках закріплення проводу. Згідно з ПУЕ перевищення напружень у точці підвісу порівняно з допустимим напруженням не повинні перевищувати 110 % для сталевалюмінієвих проводів і 105 % для алюмінієвих і сталевих проводів.

7.7 Прольоти повітряних ліній

Навантаження на конструкції ПЛ визначаються кліматичними умовами, до яких належать вітрові навантаження й навантаження під час ожеледі, навантаження від ваги проводів, ізоляторів, арматури, тросів та ін.

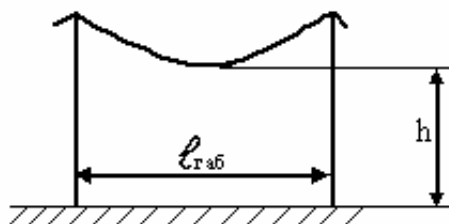


Рисунок 19.20

Для розрахунку навантажень на опори та інші конструкції ПЛ використовують значення габаритних, вітрових і вагових прольотів.

Габаритний проліт ($l_{\text{габ}}$) – проліт, довжина якого визначається найбільшою стрілою провисання проводу при забезпеченні габариту h – найменшої

допустимої відстані до поверхні землі від нижчої точки проводу у разі розташування опор на ідеальній гладенькій поверхні (рис. 19.20). Якщо траса ПЛ проходить по рівній поверхні, то опори можна розміщувати на відстані не більше ніж значення габаритного прольоту.

Вітровим прольотом ($l_{\text{вiтp}(i)}$) – для „ i^{oi} ” опори зветься довжина ділянки ПЛ, з якої навантаження від вітру на проводи або троси переймається опорою (рис. 7.21):

$$l_{\text{вiтp}(i)} = (l_{(i-1)} + l_{(i)} / 2 + [l_{(i-1)} (h_{(i-1)} / l_{(i-1)})^2 + l_{(i)} (h_{(i)} / l_{(i)})^2] / 4). \quad (19.39)$$

Якщо опори розташовані на малопересіченій місцевості, то можна приймати, що вітровий проліт дорівнює полусумі суміжних прольотів:

$$l_{\text{вiтp}(i)} = l_{(i-1)} + l_{(i)} / 2. \quad (19.40)$$

Ваговим прольотом ($l_{\text{ваг}(i)}$) зветься довжина ділянки ПЛ, з якого навантаження від ваги проводів й тросів переймається опорою:

$$l_{\text{ваг}(i)} = l_{(i-1)} + l_{(i)} / 2 + (\pm h_{(i-1)} / l_{(i-1)} \pm h_{(i)} / l_{(i)}) \sigma / \gamma, \quad (19.40a)$$

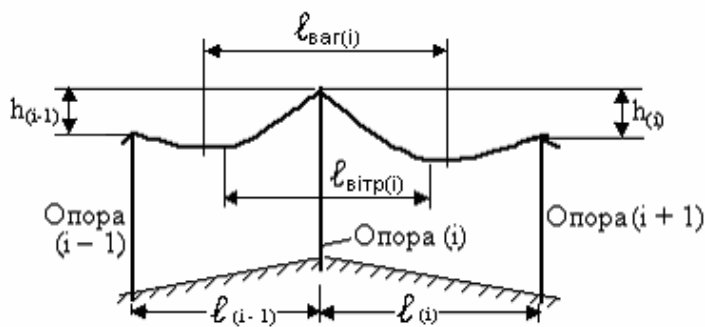


Рисунок 19.21

де $h_{(i-1)}$, $h_{(i)}$ – різниця висот суміжних опор – відповідно $(i)^{\text{ii}}$ і $(i-1)^{\text{ii}}$ та $(i+1)^{\text{ii}}$ і $(i)^{\text{ii}}$ опор; якщо суміжна опора розташована нижче, ніж опора для якої знаходиться ваговий проліт, то в (19.3) приймається знак „+”, а якщо вище – то „-”; $l_{(i-1)}$, $l_{(i)}$ – суміжні прольоти до „ i^{oi} ” опори; σ, γ – напруження й приведені навантаження проводу.

19.8 Навантаження на елементи повітряної лінії.

Розрахунок опор, ізоляторів, арматури повітряної лінії

Навантаження від власної ваги конструкцій, проводів, тросів й гірлянд ізоляторів, а також від тяжіння проводів і тросів при середньорічній температурі належать до *постійних навантажень*.

Навантаження від ваги ожеледі, тиску вітру, тяжіння проводу, троса понад їх значень при середньорічній температурі, а також монтажні навантаження належать до *короткочасних навантажень*.

Навантаження, які виникають у разі обриву проводів і тросів, а також навантаження під час сейсмічних впливів належать до *особливих тимчасових навантажень*.

Навантаження на опори, ізолятори та арматуру ПЛ визначаються за допомогою вітрового (19.39), (19.40) і вагового (19.40,а) прольотів ПЛ і відповідних приведених навантажень.

Опори і фундаменти ПЛ розраховуються на сполучення навантажень, які діють в нормальних, аварійних і монтажних режимах роботи. Сполучення кліматичних та інших факторів за різних режимів роботи ПЛ (дія вітру, вага ожеледі, зміна температури та ін.) визначаються згідно з ПУЕ.

Нормативне вагове навантаження:

$$\text{вага проводу (тросу)} \quad G_1^H = \gamma_1 Fl_{ваг}, \quad (19.41)$$

$$\text{вага проводу (тросу) з ожеледдю} \quad G_3^H = \gamma_3 Fl_{ваг}, \quad (19.42)$$

Нормативне вітрове навантаження:

$$\text{на провід (трос) без ожеледі} \quad P_4^H = \gamma_4 Fl_{вiмр}, \quad (19.43)$$

$$\text{на провід (трос) з ожеледдю} \quad P_5^H = \gamma_5 Fl_{вiмр}. \quad (19.44)$$

Розрахункове навантаження визначається добутком нормативних навантажень на відповідні коефіцієнти перевантаження n (ПУЕ), які наведені в таблиці 19.2.

Таблиця 19.2

Найменування навантажень	Коефіцієнти перевантаження
Від власної ваги будівельних конструкцій, проводів, тросів й устаткування ПЛ	1,1 (0,9)*
Від ваги ожеледі на проводах і тросах	2,0
Від ваги ожеледі на конструкції опори	1,3
Від тиску вітру на конструкції опори: - без ожеледі на проводах і тросах - при ожеледі на проводах і тросах	1,2 1,0 (1,2)**
Від тиску вітру на проводи й троси: - без ожеледі - при ожеледі	1,2 1,4
Горизонтальні навантаження від тяжіння проводів і тросів, які вільні від ожеледі або з ожеледдю	1,3

* Значення, котре вказано в дужках, використовується у випадках, коли зменшення вертикального постійного навантаження погіршує умови роботи конструкції.

** Значення, котре вказано в дужках, використовується у випадках урахування ожеледі на конструкціях опори.

Розрахунок опор

Нормативні навантаження на опори від проводів і тросів обчислюються згідно з (19.41) – (19.44). Нормативні вертикальні навантаження від власної ваги опор приймаються по конструктивним розмірам елементів опор за їх кресленнями. Також ураховуються навантаження від ваги монтера з монтажними пристроями. Нормативний тиск вітру знаходиться як сума статичної й динамічної складових навантаження.

Нормативне значення повного навантаження з урахуванням статичної й динамічної складових навантаження дорівнює:

$$P^H = c_x \cdot q_0 \cdot \beta S, \quad (19.45)$$

де c_x – коефіцієнт лобового опору (таблиці СНіПа);

q_0 – нормативний швидкісний напір вітру для певного кліматичного району (ПУЕ);

β – коефіцієнт динамічності, який для сталевих вільно розташованих опор дорівнює 1,5, для опор з відтягненнями 1,65, для вільно стоячих порталних опор 1,6, для залізобетонних опор $\beta = 1$;

S – площа проекції конструкції на площу, яка перпендикулярна напрямку вітру.

Далі визначаються розрахункові навантаження на елементи ПЛ у відповідному режимі і згідно з розрахунковою схемою перевіряється міцність опори.

Усі одностоякові опори без відтягнення – це консолі, які закріплені у ґрунті. Під дією системи горизонтальних і вертикальних навантажень G_i, P_i опора деформується (рис. 19.22) – відхиляється від вертикалі. Розрахунковий згинаючий момент M_{pi} , який діє в перерізі стійки з координатами x, y , обчислюється з урахуванням вертикальних G_i , горизонтальних P_i сил і моментів M_i вертикальних сил, прикладених з ексцентриситетом.

Розроблена спрощена методика розрахунку уніфікованих залізобетонних опор. Згідно з цією методикою обирається тип опори по відповідним параметрам. При цьому, враховується напруга мережі, район по ожеледі, марка проводу, вид опори – проміжна, анкерна або анкерна – кутова.

Обчислюється розрахункове навантаження на опору – вагове й вітрове і складається розрахункова схема.

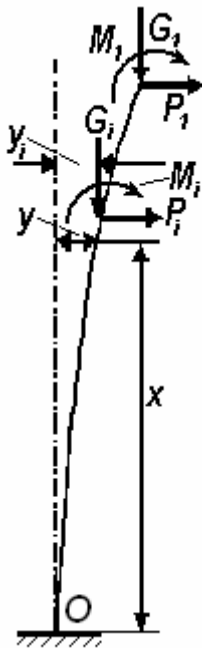


Рисунок 19.22

Розраховується найбільший розрахунковий згинаючий момент M_p у защемлені опори методом послідовних наближень з урахуванням деформації опори.

Перевіряється для прийнятої опори виконання умови міцності:

$$[n] \cdot M_p \leq M_{i\delta} \quad (19.46)$$

де $[n] = 1,25$ – допустимий коефіцієнт запасу міцності, $M_{ми}$ – граничний момент міцності опори, який знаходять з каталогу опор.

Під час виконання умови міцності опора застосовується у проекті, а якщо умова міцності не виконується здійснюються необхідні заходи – обирається інша опора, або зменшуються прольоти (при цьому також зменшуються вагові й вітрові навантаження).

Перевірка міцності підвісних ізоляторів і лінійної арматури

За напруженням мережі обирається тип ізоляторів або відповідної арматури.

Розраховується нормативне навантаження на ізолятори або на арматуру:

– для підтримуючих гірлянд на проміжних опорах, що несуть тільки масу проводу, ожеледі й тиск вітру, нормативне навантаження знаходиться згідно з формулами (19.42), (19.44) і для підтримуючих гірлянд і відповідної арматури враховується також вага гірлянди ізоляторів;

– для натяжних гірлянд на анкерних і кутових опорах, що сприймають додатково тяжіння проводів, нормативне навантаження знаходиться згідно з формулами (19.25) і для гірлянд і відповідної арматури враховується вага гірлянди ізоляторів.

Визначається найбільше розрахункове навантаження P_{\max} у відповідному режимі – нормальному, режиму середньорічної температури й аварійному режимі.

Перевіряється виконання умови міцності

$$n = P_p / P_{\max} \geq [n], \quad (19.47)$$

де P_p – руйнуюче навантаження для обраного типу ізоляторів згідно з каталогом;

n , $[n]$ – коефіцієнти запасу міцності й допустимий коефіцієнт запасу міцності згідно з ПУЕ.

Перевірка міцності елементів траверс

Визначаються розрахункове навантаження на траверси у відповідному режимі. Під час розрахунку в нормальному режимі враховується вагове (власна вага й вага ожеледі), вітрове навантаження на провід і на провід з ожеледдю й тяжіння проводу для анкерних і кутових опор. В аварійному режимі (обірвано один або кілька проводів – розглядається гірший варіант) і навантаження, відповідно до ПУЕ, приймається для режиму середньорічної температури. Ураховується тяжіння проводу, який залишився, для усіх опор, або нормальний режим для анкерних і кутових опор.

Згідно з розрахунковою схемою обчислюються внутрішні силові фактори в елементах траверси: під час розтягу – стиску – поздовжня сила N ; під час згину – згинальні моменти M .

З умов міцності визначаються розміри перерізу елемента:

$$\text{– під час розтягу } \sigma = N_{\max} / F \leq [\sigma], \quad (19.48)$$

$$\text{– під час стиску } \sigma = N_{\max} / (\phi F) \leq [\sigma], \quad (19.49)$$

$$\text{– під час згину } \sigma = N_{\max} / W_x \leq [\sigma], \quad (19.50)$$

де F – площа перерізу елемента;

$[\sigma]$ – допустиме напруження;

φ – коефіцієнт поздовжнього згину, який залежить від гнучкості елемента λ ;

W_x – осевий момент опору перерізу.

19.9 Проектування повітряних ліній

Проектування ПЛ виконується у такий послідовності.

Першим етапом виконуються електричні розрахунки енергопостачання й обґрунтовується необхідність спорудження ПЛ. При цьому визначається напруга лінії й необхідний переріз проводів (у цьому курсі не розглядається).

Наступний етап – вишукування, за яких вибирається траса ПЛ, уточнюються кліматичні умови в районі траси, роблять топографічну зйомку, знімають поздовжній профіль траси ПЛ і визначають геологічні умови для закріплення опор у ґрунті й вибору фундаментів. Вибір оптимальної траси, що забезпечує найбільшу економічність спорудження ПЛ – один з відповідальних етапів проекту.

Для ліній від 1 до 20 кВ, що споруджують із невеликими прольотами, профіль траси ПЛ, як правило, не складається.

Для ліній на рівній місцевості можна проектувати й лінії більш високих напруг без складання поздовжнього профілю траси.

Спочатку виконується вибір траси на карті, потім огляд траси ПЛ на місцевості. При виборі траси ПЛ повинні бути враховані умови доставки матеріалів на трасу ПЛ і звертається увага на перетинання й зближення ПЛ із дорогами, іншими ПЛ, лініями зв'язку та ін.

Як правило, розглядається два або більше варіантів траси ПЛ. З досвіду відомо, що питома вартість 1 км лінії в гірських умовах приблизно в два рази, а на болотистих ґрунтах в 1,5 рази вище, ніж на малопересіченій місцевості. Особлива увага повинна бути звернена на вибір зручних місць переходів через ріки, трубопроводи, інженерні спорудження, залізниці, шосе й великі водні перешкоди. Так, питома вартість переходу через ріку може бути більше вартості 10 км звичайної лінії.

Сполучення кута повороту траси із точкою установки перехідної опори вкрай небажано, тому що в цьому випадку необхідно встановлювати високу анкерно-кутову опору великої маси (і великої вартості).

Переходи через залізниці, шосе 1-ї категорії повинні бути обмежені анкерними опорами. У цьому випадку доцільне сполучення кута повороту траси із точкою установки перехідної анкерної опори.

Перетинання й зближення двох ПЛ бажано виконувати ближче до середини пересічного прольоту – 2, а опору верхньої лінії 1, встановлювати ближче до нижньої пересічної ПЛ – 2 (рис. 19.23).

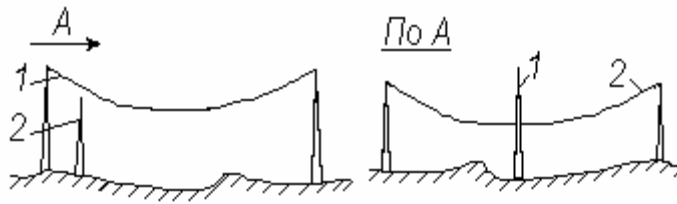


Рисунок 19.23

проводами згідно з ПУЕ.

Лінії більше високої напруги 1 повинні бути вище ніж лінії більш низької напруги 2. При цьому повинні бути витримані нормовані відстані між

Профіль траси

На поздовжньому профілі траси ПЛ позначають пересічні перешкоди й інженерні спорудження – указують відмітку полотна доріг, для пересічних ПЛ і ліній зв'язку – кількість проводів та їхні відмітки; для рік – відмітку рівня води.

Тут же показують геологічний розріз по трасі – залягання різних ґрунтів, підземних вод і їхньої відмітки.

Вимоги до проекту повітряної лінії

Під час проектування повинні бути враховані:

1) Відстані від проводів до землі, перешкод й інженерних споруд, які повинні відповідати ПУЕ, тобто, повинні бути витримані найменші габаритні відстані до поверхні землі від нижчої точки проводу, які нормовані ПУЕ для відповідної місцевості й заданої напруги лінії (див. рис. 19.1).

2) Навантаження, яке сприймають опори, не повинно перевищувати значень, прийнятих у розрахунках опор відповідних типів.

Варто уникати розташування опор на місцях, що вимагають складних фундаментів – наприклад, болотиста місцевість.

На рівній поверхні траси опори можна встановлювати на відстані габаритного прольоту не виконуючи перевірку габаритної відстані до поверхні землі від нижчої точки проводу (див. рис. 19.20). Для пересіченої і гірській місцевості розташування опор виконується за допомогою шаблону.

Під час проектування рекомендується застосовувати уніфіковані опори, для яких установлена область застосування: напруга лінії, кількість кіл, райони по ожеледі, діапазон марок проводів, марки грозозахисних тросів.

При виборі опори враховується розташування проводів на опорі.

З погляду електричних процесів бажано мати симетричне розташування проводів (у кутах рівностороннього трикутника). На лініях з підвісними ізоляторами, однак, доводиться розташовувати один провід над іншими. Це дає ймовірність замикання проводів під час «танцю». За цих міркувань зручно застосовувати горизонтальне розташування проводів (портальні опори – рис. 19.4, в). Такі опори, однак, значно дорожчі, тому що мають два стояки, і тому, звичайно, застосовують одноколові опори, які

мають розташування проводів у кутах нерівностороннього трикутника, а на двухколові у вигляді бочки (рис. 19.4, а, б).

Кріплення проводів і тросів до підвісних ізоляторів виконується за допомогою підтримуючих або натяжних затискачів. Підтримуючі затискачі для підвіски проводів можуть бути глухими або з обмеженим защемленням. Рекомендується використання глухих затискачів. Підвіску грозозахисних тросів на опорах необхідно виконувати тільки за допомогою глухих затискачів.

Механічний розрахунок проводів і грозозахисних тросів ПЛ напругою вище 1000 В повинен виконуватися згідно з ПУЕ за таких умов:

- 1) у разі найбільшого навантаження;
- 2) у разі нижчої температури й відсутності тимчасових навантажень;
- 3) у разі середньорічної температури й відсутності тимчасових навантажень.

Напруження, що виникають у точках закріплення алюмінієвих і сталевих проводів не повинні перевищувати 105 % значень напружень, що допускаються.

Для сталеалюмінієвих проводів напруження в точках закріплення проводів повинні становити не більше 110 % напружень, що допускаються.

На ПЛ із підвісними ізоляторами повинні бути захищені від вібрації:

1) одиночні алюмінієві й сталеалюмінієві проводи та проводи з алюмінієвого сплаву:

- перерізом до 95 мм² у прольотах більше 80 м;
- перерізом до 120-240 мм² у прольотах більше 100 м;
- перерізом 300 мм² і більше в прольотах більше 120 м;
- сталеві проводи й троси в прольотах більше 120 м.

2) Під час проходження ПЛ відкритою рівною місцевістю, якщо механічні напруження при середньорічній температурі становить більше:

- для алюмінієвих проводів – 35 МПа;
- для сталеалюмінієвих проводів – 40 МПа;
- для сталевих проводів і грозозахисних тросів – 180 МПа.

Під час проходження ПЛ сильнопересіченою місцевістю, а також рідким або низькорослим (нижче висоти підвіски проводів) лісом довжина прольотів і значення напруг, у разі перевищення яких необхідний захист від вібрації, збільшується на 20 %.

3) Проводи розщепленої фази, що складаються з двох проводів у фазі при прольотах більше 150 м;

4) Під час проходження ПЛ відкритою рівною місцевістю, якщо механічні напруження при середньорічній температурі становить більше:

- для алюмінієвих проводів 40 МПа;
- для сталеалюмінієвих проводів 45 МПа.

Під час проходження ПЛ сильнопересіченою місцевістю, а також рідким або низькорослим (нижче висоти підвіски проводів) лісам довжина прольотів і значення напруг, у разі перевищення яких необхідний захист від вібрації, збільшується на 10 %.

5) Проводи й грозозахисні троси під час перетинання рік, водоймищ із прольотами більше 500 м. При цьому захисту від вібрації підлягають всі прольоти ділянки переходу.

ПЛ 110-500кВ повинні бути захищені від прямих ударів блискавки по всій довжині.

Припускається спорудження ПЛ 110-500 кВ без тросів:

- 1) У районах із кількістю грозових днів у році менше 20.
- 2) На окремих ділянках ПЛ у районах з погано провідними ґрунтами ($\rho \geq 10^3$ ом/м).
- 3) На ділянках траси ПЛ у районах, де товщина стінки ожеледі більше 20 мм.

На ПЛ повинні бути заземлені:

- опори, що мають грозозахисний трос або інші пристрої грозозахисту;
- залізобетонні й металеві опори напругою 3-35 кВ;
- опори, що мають силові трансформатори, роз'єднувачі й інші апарати;
- залізобетонні й металеві опори напругою 110-500 кВ без тросів й інших пристроїв грозозахисту.

19.10 Великі переходи

ПЛ має безліч перетинань із різними об'єктами – шляхами, іншими ПЛ, лініями зв'язку, трубопроводами й великими водними перешкодами. Найчастіше перетинання з різними об'єктами здійснюється із застосуванням уніфікованих опор. Для перетинання з великими водними перешкодами найчастіше потрібне проектування, розроблення й спорудження спеціальних перехідних конструкцій.

У ПУЕ великі переходи визначаються як перетинання судноплавних рік, проток, каналів, на яких установлюються опори висотою більше 50 м, а також перетинання будь-яких водних просторів із прольотом більше 700 м незалежно від висоти опор. Великі переходи можуть бути однопрогоновими й багатопрогоновими.

Опори й фундаменти великих переходів є значними інженерними спорудженнями, а ізоляція й арматура для підвіски проводів – складними комплексами з ізоляторів і сполучних деталей. Особливу складність представляє спорудження опор і фундаментів опор, які можна зрівняти з будівництвом мостових опор. Вартість 1 км переходу в кілька разів (іноді в десятки разів більше вартості 1 км самої лінії. Особливо ця різниця велика

для ліній 35-220 кВ, тому вибір схеми й конструкції великих переходів дуже важливі.

Насамперед вартість великих переходів залежить від правильного вибору створу переходу. Часто найкраще місце виявляється осторонь від траси ПЛ, але воно може забезпечити найбільшу економічність рішення, незважаючи на деяке подовження ПЛ. Згідно з ПУЕ на великих переходах з регулярним судноплавством повинні встановлюватися опори анкерного типу (кінцеві опори), тому міцність ділянки переходу не залежить від міцності інших ділянок лінії.

Однопрогоновий перехід через р. Ангари ПЛ 110 кВ (рис. 19.24). Перехід збудовано за схемою К – К – дві кінцеві опори, які обмежують прольот. Довжина прольоту 1100 м.

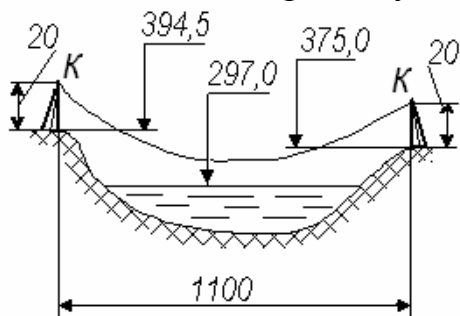


Рисунок 19.24

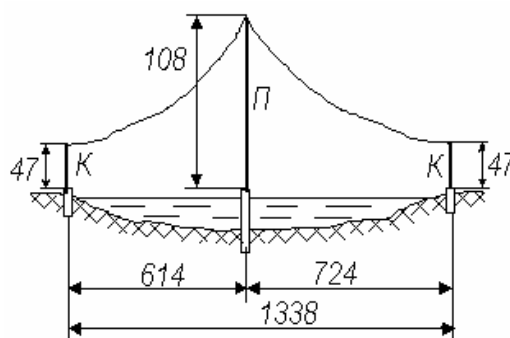


Рисунок 19.25

Проводи сталеві С-300. Висота кінцевих опор 20 м, маса кожної опори 40 т. Відносно невелика вартість переходу пояснюється вдалим вибором створу переходу з великою висотою берегів.

Двопрогінний перехід через р. Даугава (рис. 19.25) побудовано за схемою К – П – К – дві кінцеві і одна проміжна опори. Перехідна опора встановлена в заплаві ріки.

Довжина прольотів 614 і 724 м. Проводи АС-300/204, маса перехідної проміжної опори 192 т, висота 108 м.

19.11 Розрахунок тяжіння проводів і тросів в аварійних режимах

Під аварійним режимом розуміють стан ПЛ при повністю або частково обірваних проводах і тросах. Ушкодження лінії може відбутися під час дії зовнішніх навантажень, що перевершують розрахункові – наприклад, намерзання ожеледі, вага якої значно перевищує розрахункові значення, ушкодження проводів у затискачах під час монтажу, у разі вібрації проводів та ін.

Якщо анкерна ділянка складається з одного прольоту, то з боку проводів у суміжних прольотах на опори діють зусилля, які дорівнюють повному тяжінню проводів, що залишилися. У цьому випадку анкерна опора розраховується на ці розрахункові зусилля.

Якщо ж анкерна ділянка складається з декількох прольотів, то у разі обриву проводу в одному із цих проміжних прольотів на проміжні опори передаються зусилля, рівні тяжінню проводів, що залишилися. Однобічне тяжіння викликає відхилення гірлянди ізоляторів, що призводить до ослаблення тяжіння по проводах, що залишилися цілими.

Відбувається також відхилення опор у бік тяжіння проводів, що залишилися. Зміна тяжіння проводів зветься редуцією, а нове тяжіння *редукованим*.

Метою розрахунку аварійного режиму ПЛ є визначення редукованого тяжіння. Це тяжіння дозволяє визначити нормативні навантаження на проміжну опору в аварійному режимі й використовується під час розрахунку проміжної опори. Під час конструювання нових опор величина редукованого тяжіння використовується як вихідні дані щодо навантажень на опору. Якщо використовуються уніфіковані опори, то редуковане тяжіння порівнюють із найбільшим, за яким виконувався розрахунок обраного типу уніфікованих опор.

Крім того, за редукованим тяжінням визначають стріли прогину й перевіряють габарит проводу до землі й пересічних споруджень.

Редуковане тяжіння залежить від матеріалу й конструкції опори, типу ізоляторів, навантаження на провід і величини прольоту.

Розрахунок проводів в аварійному режимі виконується для таких кліматичних умов (табл. 19.3).

За режимами 1 і 2 знаходять найбільше навантаження, що діє на анкерні опори у разі обриву проводу. Таке навантаження може виникнути під час ожеледі або за найменшої температури. Режим 3 використовують для розрахунку проміжних опор, визначення стріл прогину й перевірки габариту проводу до землі й пересічних споруджень.

Таблиця 19.3 – Кліматичні умови експлуатації проводів

Сполучення кліматичних умов			
№	Температура t °C	Вітрові навантаження	Навантаження від ожеледі
1	Ожеледі $t_0 = -5^\circ$	Відсутні	Провід та троси покриті ожеледдю ($\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$)
2	Найменша $t_{\text{н}}$	Відсутні	Відсутні ($\gamma_2 = 0$)
3	Середньорічна t_E	Відсутні	Відсутні ($\gamma_2 = 0$)

Проміжні опори з підвісними ізоляторами розраховуються на умовні зусилля у разі обриву тих проводів і тросів, які дають найбільший згинаючий або крутний момент на опору.

Розрахунок проміжних опор виконується при середньорічній температурі й при обліку власної ваги (t_E, γ_1) для таких умов:

- 1) Обірвано один провід, а троси не обірвані.
- 2) Обірвано один трос, проводи не обірвані.

Для уніфікованих опор перевірка зводиться до порівняння знайденого під час проектування лінії редукованого тяжіння з нормативним тяжінням у разі обриву проводу, на яке була розрахована уніфікована опора.

Величина найбільшого тяжіння проводу

$$T_{\max} = [\sigma] \cdot F, \quad (19.51)$$

де $[\sigma]$ – найбільше напруження, що допускається, для цієї марки проводу;

F – найбільший переріз проводу з усього діапазону перерізів, для якого може бути застосована ця уніфікована опора.

Редуковане тяжіння

$$T_{ред} = K \cdot T_{\max}, \quad (19.52)$$

де $K = 0,25 \dots 0,5$ – коефіцієнт редукації, що є залежним від кількості проміжних прольотів анкерованої ділянки, що залишилися цілими.

У разі перетинання ПЛ із залізницями, шосе, іншими лініями ПЛ, лініями зв'язку й ін. перевіряється відстань від нижніх проводів до пересічного спорудження й порівняння цих відстаней із відстанями, що допускає ПУЕ.

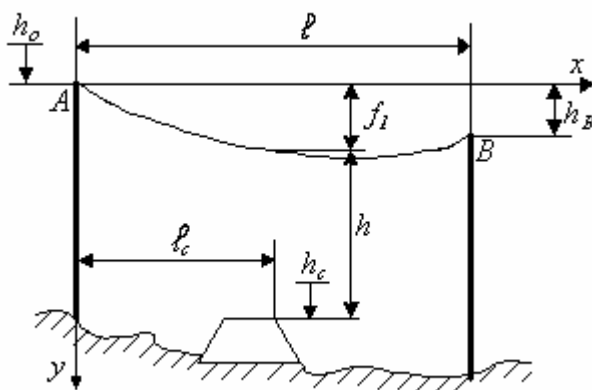


Рисунок 19.26

Відстань від проводу (рис. 19.26) до пересічної споруди

$$h = h_0 - h_c - f_1, \quad (19.53)$$

де h_0 – висотна оцінка точки підвісу нижнього проводу; h_c – висотна оцінка верхньої частини інженерної споруди на профілі траси; f_1 – стріла прогину проводу в місці перетинання, що визначається з рівняння провисання проводу в

системі координат xAy (рис. 19.26):

$$f_1 = \gamma l_C \cdot (l - l_C) / (2\sigma) + l_C \cdot h_B / l, \quad (19.54)$$

γ, σ – у **нормальному режимі** це приведені навантаження й напруження у проводу, що відповідають режиму найбільшої стріли прогину – це режим вищої температури (t_{\max}, γ_1) або режим ожеледі без вітру (t_0, γ_3);

l_C – координата місця перетинання;

h_B – вертикальна координата точки підвісу нижнього проводу на наступній опорі В;

l – проліт.

В *аварійному режимі* стрілу прогину f_1 у місці перетинання ПЛ визначають для режиму середньорічної температури t_E за відсутності вітру й ожеледі (γ_1) з використанням редукованого тяжіння. При цьому

$$\sigma_{ред} = \sigma_E K, \quad (19.55)$$

де σ_E – напруження проводу для середньорічної температури t_E ;

K – коефіцієнт редуції, що є залежним від кількості проміжних прольотів анкерованої ділянки, що залишилися цілими.

У разі обриву проводу в суміжному з перетинанням прольоті при одному прольоті, що залишився цілим, коефіцієнт редуції визначається таким чином (рис. 19.27):

$$K_1 = [1 / \sqrt{1 + 0,375 \lambda_{zip} (l_1 + l_{np}) / (2f_E^2)}] + 0,01, \quad (19.56)$$

де A – анкерна опора;

Π – проміжна опора;

C – споруда або перешко-да.

У разі обриву проводу в суміжному з перетинанням прольоті при шести цілих прольотах, що залишилися, коефіцієнт редуції визначається формулою (рис. 19.28):

$$K_6 = [1 / \sqrt{1 + (\lambda_{zip} / f_E)(\sqrt[3]{l_{np} / f_E})} - 0,1]. \quad (19.57)$$

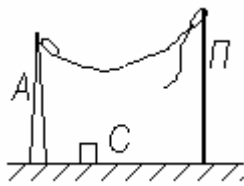


Рисунок 19.27

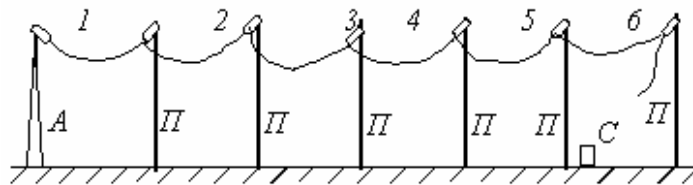


Рисунок 19.28

При двох, трьох, чотирьох і п'яти цілих прольотах, що залишилися, коефіцієнт редуції відповідно визначається так:

$$\begin{aligned} K_2 &= (K_1 + K_6) / 2, & K_3 &= (K_1 + 3K_6) / 4, \\ K_4 &= (K_1 + 7K_6) / 8, & K_5 &= (K_1 + 15K_6) / 16, \end{aligned} \quad (19.58)$$

де λ_{zip} – довжина гірлянди ізоляторів; l_1 – фактична довжина першого прольоту; l_{np} – приведена довжина прольоту анкерної ділянки,

$$l_{i0} = \sqrt{(\sum l_i^3) / (\sum l_i)}. \quad (19.59)$$

f_E – стріла прогину при середньорічній температурі t_E за відсутності вітру та ожеледі, тобто приведене навантаження – γ_1 .

Найменше редуковане тяжіння, а отже, і найбільша зміна стріли прогину, виникає тоді, коли між місцем обриву й анкерною опорою залишається один уцілілий проліт.

Для розрахунку переходу в *аварійному режимі важливо правильно вибрати розрахункову схему*. Для знаходження найбільшої стріли прогину треба приймати розрахункову схему, у якій обрив проводу перебуває в

прольоті, сусідньому із прольотом перетинання. Якщо перехід перебуває в п'ятому прольоті від анкерної опори й більше, то можна приймати розрахункову схему, що складається з п'яти вцілілих прольотів. За меншої кількості прольотів до анкерної опори розрахункова схема приймається з фактичною кількістю прольотів. Якщо один проліт перетинається з декількома інженерними спорудами, то перевірка габаритів повинна виконуватися до кожного з них.

При обраній висоті опор ПЛ відстані до пересічних інженерних споруджень можуть виявитися менше припустимих. У цьому випадку повинні бути розроблені відповідні заходи. Насамперед варто спробувати збільшити габарити шляхом переміщення опори проекрованої лінії ближче до місця перетинання й за рахунок цього зменшити стрілу прогину над інженерним спорудженням.

У низці випадків допускається перебудова пересічних ПЛ і ліній зв'язку шляхом зниження опор або прокладки цих ПЛ у підземні кабелі. Може виявитися доцільно застосування підвищених опор проекрованої лінії в місці перетинання.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанилидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1984. – Т. 1. – 504 с.
2. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 240 с.
3. Гернет М. М. Курс теоретической механики / М. М. Гернет. – М. : Высш. шк., 1981. – 303 с.
4. Глонь О. А. Основы теоретической механики / О. А. Глонь. – К. : ВКЦ «Софія», 1997. – 144 с.
5. Добронравов В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин, А. Л. Дворников. – М. : Высш. шк., 1974. – 528 с.
6. Кильчевский Н. А. Основы теоретической механики / Н. А. Кильчевский, Н. И. Ремизова, Е. Н. Кильчевская. – К. : Вища школа, 1986. – 296 с.
7. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1984. – Т. 1. – 352 с.
8. Павловский М. А. Теоретична механіка / М. А. Павловский. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
9. Павловский М. А. Теоретическая механика / М. А. Павловский, Л. Ю. Акинфиева, О. Ф. Бойчук. – К. : Вища школа, 1985. – Ч. 1. – 351 с.
10. Попов М. В. Теоретическая механика / М. В. Попов. – М. : Наука, 1986. – 335 с.
11. Савин Г. Н. Курс теоретической механики / Г. Н. Савин, Т. В. Путья, Б. Н. Фрадлин. – К. : Вища школа, 1973. – 359 с.
12. Старжинский В. М. Теоретическая механика / В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1980. – 464 с.
13. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механки / С. М. Тарг. – М. : Высш. шк., 2001. – 416 с.
14. Романенко Л. Г. Теоретична механіка: навч. посіб. для технічних ВУЗів / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. – Х.: ХДАДТУ, 2000. – 268 с.
15. Теоретична механіка: навч.-метод. пос. для студентів технічних спеціальностей і завдання для контрольних робіт студентів факультету післядипломної освіти / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Х.: ХДАМГ, 2001. – 124 с.
16. Яблонский А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М.: Высш. шк., 1984. – Ч. 1. – 344 с.
17. Шпачук В. П. Методичні вказівки до курсового проекту «Механічний розрахунок повітряних ліній електропередач» / В. П. Шпачук, В. Ф. Жуков. – Х.: ХДАМГ, 2002.

18. Сірий О. М. Розрахунки при проектуванні та реконструкції систем електропостачання промислових підприємств / О. М. Сірий, В. Е. Шестеренко. – К., 1993.
19. Правила технічної експлуатації електроустановок споживачів. – К., 2007.
20. Прикладная механика / К. И. Заблонський, М. С. Беляев, И. Я. Телис, С. И. Филипович, Н. А. Цецорин. – К. : Вища школа, 1984. – 280 с.
21. Правила безпечної експлуатації електроустановок споживачів. ДНАОП 0.00-1.21-98. – К., 2004.
22. Справочник по проектированию линий электропередачи / Вяземский М.Б. и др. / под ред. Реута М. А. – М. : Энергия, 1980.
23. Крюков К. П. Конструкции и механический расчет линий электропередач / К. П. Крюков, Б. П. Новгородцев. – М. : Энергия, 1979.
24. Кесельман Л. М. Основы механики воздушных линий электропередачи / Л. М. Кесельман. – М.: Энергоатомиздат, 1992.
25. Правила устройства электроустановок // Разд. II. Канализация электроэнергии. – 5 изд. – М.: Атомиздат, 1978.
26. Правила устройства электроустановок. – 6 изд. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
27. Жуков В. Ф. К вопросу упрощенного расчета унифицированных железобетонных свободостоящих опор / В. Ф. Жуков, П. В. Бакуменко // Коммунальное хозяйство городов: науч.-техн. сб. – К. : Техніка, 2001. – Вип. 30.
28. Кореняко А. С. Теория механизмов и машин / А. С. Кореняко, А. И. Кременгтейн. – К.: Гостехиздат, 1955. – 574 с.
29. Курс сопротивления материалов: в 2-х ч. / М. М. Филоненко-Бородач, С. М. Изюмов, Б. А. Олисов, И. Н. Кудрявцев, Л. И. Мальзинов. – М. : Гостехтеоретиздат, 1955. – Ч. 1. – 644 с. – Ч. 2. – 656 с.
30. Сопротивление материалов / Г. А. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка, В. Г. Попков, Э. С. Уманский. – К. : Вища школа, 1986. – 775 с.
31. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов: в 2-х т. / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965.
32. Александров А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М., 2003. – 560 с.
33. Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів / Е. Д. Чихладзе. – Харків : УкрДАЗТ, 2002. – 362 с.

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович,
ЗОЛОТОВ Михайло Сергійович,
СКЛЯРОВ В'ячеслав Олександрович

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

*(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.050701 «Електротехніка та електротехнології»)*

Відповідальний за випуск *В.О. Скляров*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерний набір та верстання *О. В. Мамаєва*

Підп. до друку 23.10.2013 р.
Друк на ризографі.
Тираж 50 пр.

Формат 60x84 1/16
Ум. друк. арк. 7,88
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.