



*Томский межвузовский центр
дистанционного образования*

В.А. Кологривов

ОСНОВЫ АПР РЭУ

Учебное пособие

ТОМСК – 2002

Министерство образования Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра средств радиосвязи (СРС)

В.А.Кологривов

ОСНОВЫ АПР РЭУ

Учебное пособие

2002

Кологривов В.А.

Основы АПР РЭУ: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2001. – 247 с.

Учебное пособие предназначено для студентов дистанционной формы обучения высшего специального образования.

©Кологривов В.А., 2002 г.
© Томский межвузовский центр
дистанционного образования, 2002 г.

2 ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СХЕМ

2.1 Основные понятия теории графов

Под математической моделью понимают совокупность уравнений, описывающих цепь, решение которых позволяет определить ее характеристики. В качестве математических моделей обычно выступает системы линейных, нелинейных алгебраических и либо дифференциальных уравнений. В основе методов формирования математических моделей цепей лежит совокупность топологических и компонентных уравнений.

Топологию схем удобно описывать на языке теории графов, имеющей множество инженерных приложений. Топология схемы несет информацию о соединении элементов. Топологические уравнения цепи являются формой записи основных топологических законов (первый и второй законы Кирхгофа). Компонентные уравнения представляют собой запись законов Ома для компонент - элементов схемы.

Для описания топологии цепи каждый двухполюсный элемент замещается направленным отрезком линии, называемым ветвью графа. Соединение двух и более ветвей в точке называется узлом графа. Пронумеруем ветви и узлы электрической схемы и соответствующего ей графа.

Сформулируем законы Кирхгофа для электрических цепей.

Закон Кирхгофа для напряжений: сумма падений напряжений вдоль любого замкнутого контура цепи равна нулю.

Закон Кирхгофа для токов:

1. Алгебраическая сумма токов, втекающих в узел и вытекающих из узла, равна нулю.
2. В любом сечении, разделяющем цепь на две части, алгебраическая сумма токов, протекающих по соединительным ветвям через сечение, равна нулю.

Направления отрезков линий (токов) пассивных ветвей можно выбирать произвольно, однако условимся, что для источников тока направление совпадает с истинным, а для источников напряжения направлено против ЭДС. Узлы схемы нумеруются в произвольном порядке непрерывной последовательностью цифр, общий (заземлённый узел) обычно считается нулевым.

2.2 Топологические матрицы

Матрица инцидентий. Применение закона Кирхгофа для токов в узлах позволяет получить матрицу инцидентий, отображающую топологические свойства цепи. Рассмотрим простую цепь и соответствующий ей граф (рисунок 2.1).

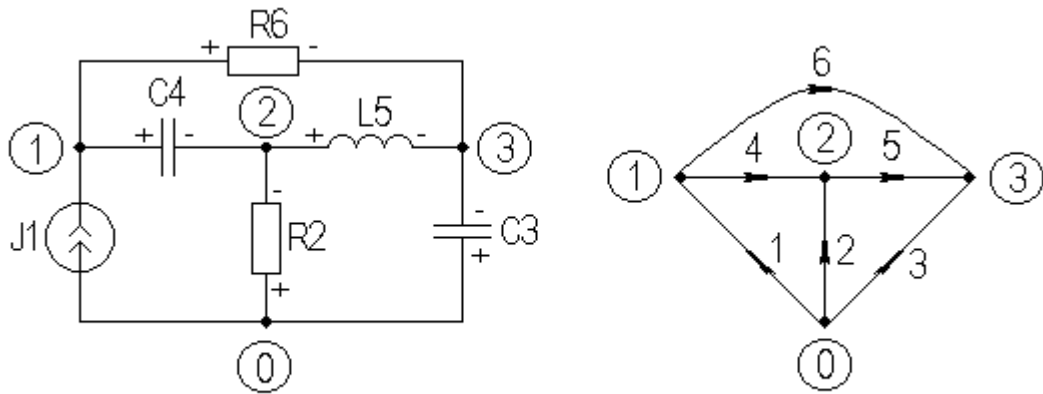


Рисунок 2.1 - Электрическая цепь и ее направленный граф

Запишем закон Кирхгофа для токов в узлах:

$$1: -i_1 + i_4 + i_6 = 0;$$

$$2: -i_2 - i_4 + i_5 = 0;$$

$$3: -i_3 - i_5 - i_6 = 0.$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме

$$A \cdot I_b = 0, \quad (2.1)$$

где A - матрица инциденций.

Для рассматриваемого примера матрица A имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{ветви} \\ \text{узлы} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица содержит n - строк и b - столбцов, где n - число независимых (незаземленных) узлов; b - число ветвей графа. Строки матрицы указывают ветви, инцидентные соответствующему узлу, и их направленность. Столбцы матрицы указывают узлы, инцидентные соответствующей ветви и порядок обхода.

Напряжения ветвей и узловые потенциалы также связаны через матрицу инциденций, соотношением, отвечающим закону Кирхгофа для напряжений

$$V_b = A^t \cdot V_n, \quad (2.2)$$

где A^t - транспонированная матрица инциденций; V_b - напряжение ветвей, V_n - напряжения узлов.

Матрицы сечений и контуров. Изобразим на рисунке 2.2 граф предыдущей цепи, но с тремя сечениями. Положительное направление сечений укажем стрелками.

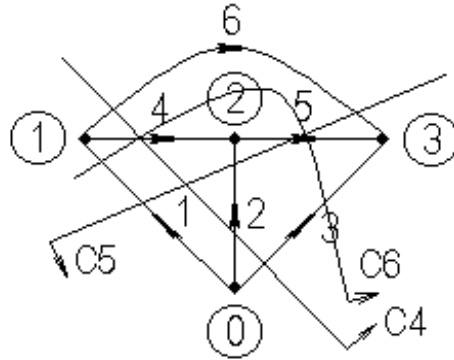


Рисунок 2.2 Граф схемы с сечениями

Составим уравнения для токов сечений

$$C4: \quad i_2 + i_3 + i_4 + i_6 = 0;$$

$$C5: \quad -i_1 - i_2 + i_5 + i_6 = 0;$$

$$C6: \quad i_1 + i_3 - i_4 + i_5 = 0.$$

Возникает вопрос - сколько необходимо иметь уравнений для определения всех токов и напряжений цепи? Для ответа следует воспользоваться понятием дерева графа.

Деревом связанного графа называется связанный подграф, включающий все узлы графа, но не содержащий замкнутых контуров. Ветви, не вошедшие в дерево графа, образуют дополнение дерева графа. Дерево графа цепи с $n + 1$ узлами, имеет n ветвей. Ветви графа, входящие в дерево, называются ребрами. Ветви дополнения графа называются хордами.

Главным сечением графа называют сечение, проходящее через одно ребро и произвольное число хорд. Т. к. в дерево входит только n ветвей, то существует n главных сечений, что соответствует n независимым уравнениям для токов.

Нумерация ветвей и узлов схемы представляет произвольную процедуру и диктуется соображениями удобства. Многие выкладки существенно упростятся, если:

- 1) выбираем направления ветвей;
- 2) выбираем дерево графа;
- 3) нумеруем ветви графа, в начале ребра, затем хорды.

На рисунке 2.3 изображен один из вариантов такого выбора. Уравнения для токов сечений в этом случае будут

$$C1: \quad i_1 - i_4 - i_6 = 0;$$

$$C2: \quad i_2 + i_4 - i_5 = 0;$$

$$C3: \quad i_3 + i_5 + i_6 = 0.$$

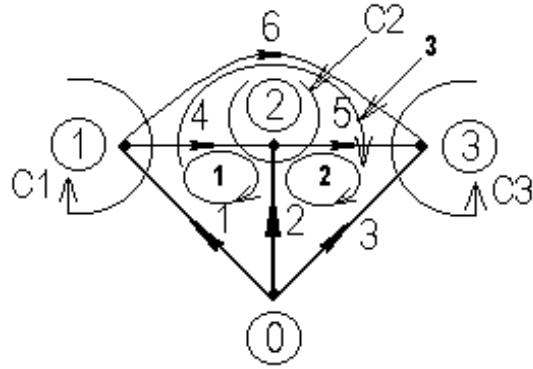


Рисунок 2.3 Граф схемы с выделенным деревом

В матричной форме эти уравнения можно записать в виде

$$Q \cdot I_b = 0, \quad (2.3)$$

где

	<i>ветви</i>					
<i>гл. сеч</i>	1	2	3	4	5	6
$Q =$	1	2	3	4	5	6
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$					

- матрица главных сечений. Направление сечения определяется соответствующим ребром. Строки матрицы указывают относительное направление рассеченных ветвей. Столбцы матрицы указывают сечения проходящее через ветвь и относительное направление. Напряжения ветвей можно выразить через напряжения ребер соотношением

$$V_b = Q^t \cdot V_p. \quad (2.4)$$

Рассмотрим, как изменится вид матрицы Q при другом выборе дерева графа и направлений его ветвей для той же цепи рисунок 2.4.

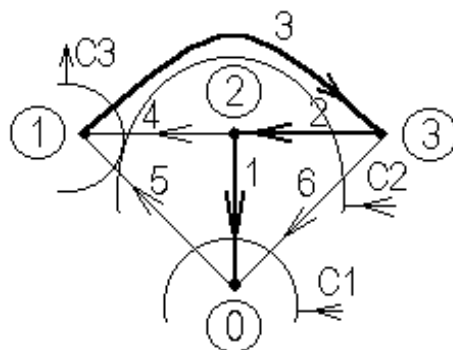


Рисунок 2.4 Граф схемы с другим деревом

Если будем следовать указанным правилам нумерации ветвей графа, то получим матрицу Q следующего вида

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

В обоих случаях подматрица, соответствующая дереву графа является единичной. Следовательно, матрицу Q можно записать

$$Q = [Q_p \quad Q_x] = [1 \quad Q_x], \quad (2.5)$$

где p - соответствует ребрам, а x - хордам. Ранг матрицы Q равен n . Из соотношений (2. 3) и (2. 5) следует

$$[1 \quad Q_x] \cdot \begin{bmatrix} I_p \\ I_x \end{bmatrix} = 0; \quad I_p = -Q_x \cdot I_x. \quad (2.6)$$

Использование закона Кирхгофа для напряжений приводит к другому описанию топологических свойств цепи, основанному на контурах. Ограничимся рассмотрением простых контуров, не проходящих два и более раза через одну ветвь или узел.

При этих ограничениях для графа цепи рисунке 2.1 можем записать систему уравнений

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 + v_4 &= 0; \\ v_2 - v_3 + v_5 &= 0; \\ v_4 + v_5 - v_6 &= 0; \\ v_1 - v_3 + v_5 &= 0; \\ v_2 - v_3 - v_4 + v_6 &= 0; \\ v_1 - v_2 - v_5 + v_6 &= 0; \\ v_1 - v_3 + v_4 + v_5 &= 0. \end{aligned}$$

Вновь необходимо решить, сколько и каких уравнений нужно взять, чтобы получить независимую систему. Опять на помощь приходят понятия дерева графа и его дополнения.

Определим главные контуры на основе выбранного дерева. Если возьмём некоторую хорду и добавим ее к дереву, то она совместно с ребрами образует замкнутый контур. Удалив эту хорду и добавив другую, получим следующий контур и т.д. Таким образом, для цепи с b - ветвями и $n + 1$ - узлом, граф содержит n ребер и $b - n$ хорд, соответствующих количеству независимых контуров.

Последовательность записи уравнений и направлений обхода контуров произвольны. Для упрощения записи системы контурных уравнений будем придерживаться следующего порядка:

1. Пронумеруем рёбра и хорды графа, как было предложено ранее.
2. Переберем хорды в соответствии с их номерами и пронумеруем контуры, начиная с единицы.
3. Направление обхода контура выбираем, совпадает с направлением

образующей хорды.

Запишем контурные уравнения для графов схемы рисунки 2.3, 2.4.

Для первого графа с учетом нумерации ветвей

$$v_1 - v_2 + v_4 = 0;$$

$$v_2 - v_3 + v_5 = 0;$$

$$v_1 - v_3 + v_6 = 0.$$

Для второго графа –

$$v_2 + v_3 + v_4 = 0;$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_5 = 0;$$

$$-v_1 - v_2 + v_6 = 0.$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$B \cdot V_b = 0, \quad (2.7)$$

где B - матрица контуров.

Токи ветвей выражаются через токи хорд (контуров) соотношением

$$I_b = B^t \cdot I_x. \quad (2.8)$$

Матрица B называется матрицей главных контуров. Вид матриц для указанных графов с выбранными деревьями следующий

<i>конт.</i>	1	2	3	4	5	6	<i>конт.</i>	1	2	3	4	5	6	
$B =$	1	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;	$B =$	1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	3	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ранг матрицы B равен $b - n$. Строки матрицы указывают ветви образующие данный контур и их направленность. Столбцы матрицы указывают контура проходящие через ветвь и их направленность. Видим, что подматрицы B соответствующие дополнению дерева есть единичные матрицы, в результате можно записать

$$B = \begin{bmatrix} B_p & B_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_p & \mathbb{1} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Из соотношений (2.7), (2.9) следует

$$\begin{bmatrix} B_p & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_p \\ V_x \end{bmatrix} = 0; \quad V_x = -B_p \cdot V_p. \quad (2.10)$$

2.3 Соотношения ортогональности

Между матрицами главных сечений и контуров существует фундаментальное соотношение. Если матрицы B и Q записать для одинаковой нумерации ветвей схемы, то выполняются соотношения

$$B \cdot Q^t = 0 \text{ или } Q \cdot B^t = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство: Согласно (2.7) $B \cdot V_b = 0$. Используя (2.4) можно записать $B \cdot Q^t \cdot V_p = 0$. Откуда, поскольку в общем случае $V_p \neq 0$, имеем $B \cdot Q^t = 0$. Второе соотношение, доказывается исходя из выражений (2.3) и (2.8), либо на основе свойства транспонирования произведения матриц. В качестве примера рассмотрим соотношение ортогональности для топологических матриц графа схемы рисунка 2.3

$$Q \cdot B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя блочное представление матриц, можно записать

$$B \cdot Q^t = \begin{bmatrix} B_p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ Q_x^t \end{bmatrix} = B_p + Q_x^t = 0; \text{ или } B_p = -Q_x^t. \quad (2.12)$$

Откуда следует

$$B = \begin{bmatrix} -Q^t & 1 \end{bmatrix}; \text{ либо } Q = \begin{bmatrix} 1 & B_p^t \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Т. е. матрицу главных контуров B легко получить из матрицы главных сечений Q и наоборот.

2.4 Независимые токи и напряжения

Результаты полученные в предыдущем разделе, используем для записи уравнений через независимые токи и напряжения. Согласно (2.6), токи ребер выражаются через токи хорд

$$I_p = -Q_x \cdot I_x.$$

Если воспользоваться (2.12), то можно записать

$$I_p = B_x^t \cdot I_x.$$

Эти соотношения можно переписать в виде

$$I_b = \begin{bmatrix} I_p \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_x \\ 1 \end{bmatrix} \cdot I_x = \begin{bmatrix} B_p^t \\ 1 \end{bmatrix} \cdot I_x = B^t \cdot I_x.$$

Т.е. токи хорд, как независимые переменные, определяют токи всех ветвей. Согласно (2.9) напряжения хорд выражаются через напряжения ребер

$$V_x = -B_p \cdot V_p.$$

На основании (2.12) можно также записать

$$V_b = \begin{bmatrix} V_p \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -B_p \end{bmatrix} \cdot V_p = \begin{bmatrix} 1 \\ Q_x^t \end{bmatrix} \cdot V_p = Q^t \cdot V_p.$$

Т.е. напряжения ребер графа являются независимыми переменными.

2.5 Включение независимых источников в граф

Рассмотрим особенности нумерации ветвей и выбора дерева графа для цепей содержащих независимые источники. Как было установлено в предыдущем разделе, токи хорд являются независимыми переменными. В то же время ток независимого источника не может быть зависимой переменной и его ветвь не должна входить в дерево графа. Напряжения рёбер также являются независимыми переменными. Напряжение независимого источника не может быть зависимой переменной, это означает, что его ветвь не должна входить в дополнение графа, т.е. хорды.

Предложенный ранее способ нумерации ветвей приводил к тому, что подматрицы Q_p и B_x были единичным. Чтобы сохранить это свойство для цепей с независимыми источниками уточним правило нумерации ветвей:

1. Пронумеруем источники ЭДС и поместим их в дерево графа.
2. Дополним дерево за счет пассивных элементов и пронумеруем их последовательностью целых чисел, начиная с единицы.
3. Продолжим нумерацию остальных ветвей из пассивных элементов, попадающих в дополнение графа.
4. Пронумеруем источники тока, также попадающие в дополнение графа.

В результате, таким образом, дополненная матрица главных сечений, представима в виде

$$Q_d = [Q_E \quad Q \quad Q_J].$$

2.6 Логический алгоритм формирования дерева графа

Алгоритм формирования дерева графа является неотъемлемой частью некоторых методов формирования математической модели цепи, например, метода переменных состояния. Если выделено дерево графа, то сразу могут быть сформированы матрицы главных сечений и контуров. Выбор дерева графа в общем случае задача неоднозначная, т.к. общее количество деревьев (без учёта направления ветвей) для цепи с n узлами выражается формулой n^{n-2} . Обычно выделяют правильное дерево. Правильное дерево строится с учетом приоритета ветвей.

Приоритет ветвей при нумерации обусловлен методом формирования математической модели цепи и зависимостью переменных. В частности, для метода переменных состояния принят следующий приоритет ветвей:

- 1) управляемые источники напряжения;
- 2) независимые источники напряжения;
- 3) емкостные элементы;
- 4) резистивные элементы;
- 5) индуктивные элементы;

6) независимые источники тока;

7) управляемые источники тока.

Нумерацию начинаем с ветвей высшего приоритета, исчерпав очередную группу ветвей, переходим к следующей группе.

Информация о ветвях обычно содержит следующие данные: номер ветви, признак типа ветви, начальный и конечный узлы подключения ветви, в соответствии с выбранным направлением, и значения параметра или параметров.

Основное условие выделения дерева, это отсутствие контуров из ветвей, принадлежащих дереву. В связи с этим, алгоритм выделения дерева графа, может быть построен следующим образом.

1. Нумеруем ветви в соответствии с приоритетом.

2. Перебираем ветви, начиная с высшего приоритета, и фиксируем в списках начальный и конечный узлы подключения.

3. При считывании информации очередной ветви организуем проверку на отсутствие замкнутого контура с ранее просмотренными ветвями. Для этого достаточно, чтобы хотя бы один из узлов нового элемента не содержался в соответствующем списке, ранее перечисленных ветвей.

4. Если текущий элемент образует контур, то он перемещается в конец списка, и переходят к рассмотрению следующего элемента.

5. Если текущий элемент не образует контура, то переходят к анализу информации следующего элемента. Алгоритм завершается, если выделено n ветвей, принадлежащих дереву.

Ветви, не вошедшие в дерево (хорды), образуют дополнение дерева графа. На основе упорядоченного и переупорядоченного таким образом списка ветвей можно построить матрицу инцидентий

$$A = \begin{bmatrix} A_p & A_x \end{bmatrix},$$

где A_p - блок, соответствующий дереву графа; A_x - блок соответствующий дополнению дерева графа. Для перехода к матрице главных сечений, учитывая, что блок A_p невырожденная квадратная подматрица, помножим

оба блока на A_p^{-1}

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & A_p^{-1} \cdot A_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Q_x \end{bmatrix}.$$

Проиллюстрируем данный алгоритм на конкретном примере, рисунок 2.5.

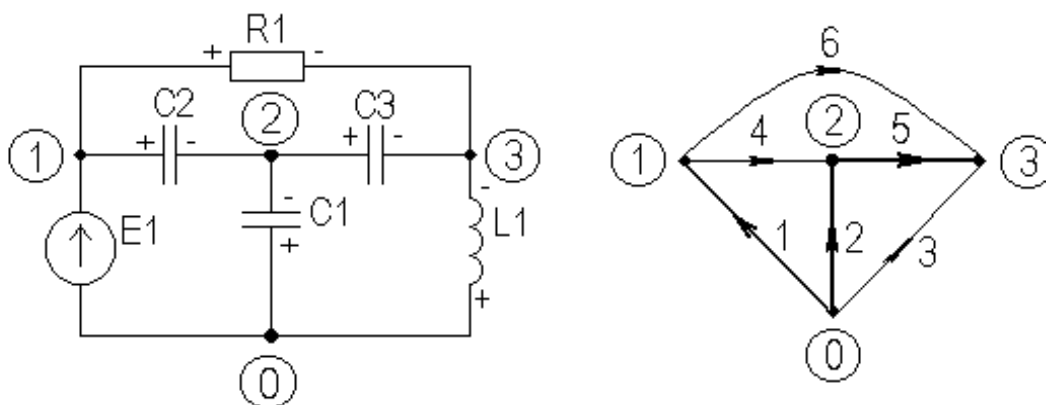


Рисунок 2.5 Электрическая схема и ее граф с выделенным деревом

Информация о ветвях схемы приведем в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1.

Входная информационная таблица ветвей схемы

Номер ветви	1	2	3	4	5	6
Обозначение	E1	C1	L1	C2	C3	R1
Начальный узел	0	0	0	1	2	1
Конечный узел	1	2	3	2	3	3

Информацию о результатах выделения дерева и перенумерации ветвей схемы также представим в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2.

Выходная информационная таблица ветвей схемы

Номер ветви	1	2	3	4	5	6
Обозначение	E1	C1	C3	C2	R1	L1
Начальный узел	0	0	2	1	1	0
Конечный узел	1	2	3	2	3	3

Первые три ветви таблицы представляют дерево графа см. рис. 2. 5. Матрица инцидентий, переупорядоченных таким образом ветвей схемы, запишется

$$A = \begin{bmatrix} A_p & A_x \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{matrix} \end{matrix}$$

После умножения этого соотношения справа на

$$A_p^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

получаем матрицу главных сечений

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2.7 Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Формирование матрицы главных сечений Q производится в два этапа. На первом этапе, на основании входных данных с учетом приоритета ветвей формируется матрица инцидентий A . На следующем этапе, преобразуя матрицу инцидентий, получаем матрицу главных сечений с единичной подматрицей Q_p .

Формирование матрицы инцидентий. Припишем столбцы матрицы ветвям, а строки узлам графа. Зададим элементам матрицы a_{ij} следующие обозначения:

- 0 – если j -тая ветвь не подключена к i -му узлу;
- 1 – если j -тая ветвь подключена к i -му узлу и направлена от него;
- 1 – если j -тая ветвь подключена к i -му узлу и направлена к нему.

Изложение алгоритма формирования матрицы главных сечений удобно вести на конкретном примере. Изобразим на рис. 2.6 схему и её граф с пронумерованными узлами и ветвями, учитывая приоритет.

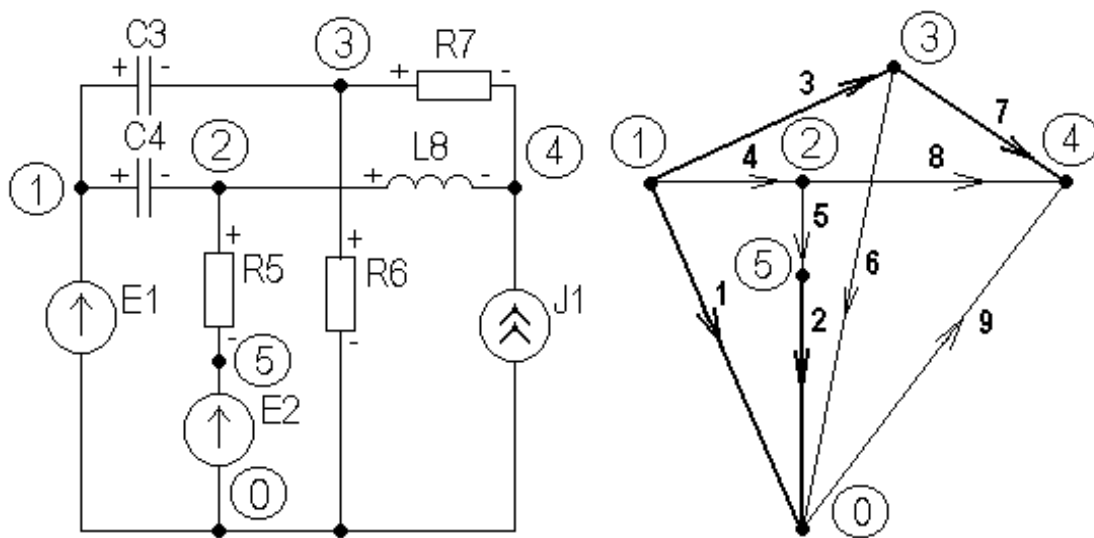


Рисунок 2.6 Электрическая схема и ее граф с выделенным деревом

Матрица инцидентий для заданной нумерации ветвей при исключении общего узла имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Раскроем содержимое матрицы инцидентий:

Каждая i -тая строка указывает ветви, подключенные к i -му узлу и их направление относительно узла;

Каждый j -тый столбец указывает, с какими узлами соединена j -ая ветвь.

Т. к. каждая ветвь подключена к двум узлам, то столбец расширенной матрицы инцидентий A , включающей общий узел, содержит два не нулевых элемента $+1$ и -1 . Следовательно, одна из строк расширенной матрицы A может быть определена через элементы других, таким образом, чтобы сумма значений по каждому столбцу равнялась нулю. Это означает, что одну из строк, например, соответствующую общему узлу, можно вычеркнуть. Т. е. из $n + 1$ -го узла, n узлов независимы.

Можно убедиться, что уравнение $A \cdot I_b = 0$ соответствует системе

$$\begin{aligned} i_1 + i_3 + i_4 &= 0; \\ -i_4 + i_5 + i_8 &= 0; \\ -i_3 + i_6 + i_7 &= 0; \\ -i_7 - i_8 - i_9 &= 0; \\ i_2 - i_5 &= 0. \end{aligned}$$

Для получения матрицы главных сечений Q необходимо данную систему уравнений разрешить относительно токов ребер. Эту операцию можно выполнить методом исключения переменных: из всех уравнений кроме первого исключается ток i_1 , затем из всех оставшихся уравнений кроме второго исключается ток i_2 и т. д. Операции исключения преобразуют матрицу A таким образом, что в левой ее части образуется единичная матрица, а правая соответствует Q_x

$$A \Rightarrow Q = [1 \quad Q_x].$$

Преобразования сводятся к перестановке строк и столбцов матрицы и суммированию либо вычитанию строк. Допустимость этих операций обусловлена тем, что: перестановка строк соответствует перестановке уравнений; перестановка столбцов соответствует перестановке компонент уравнений; суммирование либо вычитание строк соответствует суммированию либо вычитанию уравнений, оставляя систему эквивалентной.

Алгоритм формирования матрицы главных сечений можно представить следующими действиями:

1. Задаём номер опорной строки, столбца $i = 1$.
2. Пропуская $i - 1$ этапов алгоритма, начиная с элемента a_{ij} , ищут первый ненулевой элемент в i -том столбце. Пусть это оказывается элемент a_{ji} , где $j \leq n$.
3. Если ненулевой элемент в i -том столбце найден и $j \neq i$, то i -тая и j -тая строки меняются местами.
4. Если после перестановки строк элемент $a_{ii} = -1$, то меняют знак в i -той строке, на обратный.
5. Если после перестановки строк в i -том столбце, кроме элемента a_{ii} , есть еще ненулевые элементы, то они обнуляются прибавлением либо вычитанием опорной строки к соответствующим строкам.
6. Если в опорном столбце не оказалось ненулевого элемента, то поиск ведут вдоль опорной строки. Пусть это элемент a_{ik} .
7. Если элемент найден в опорной строке и $k = i$, то k -ый столбец становится на место i -го, а столбцы от i -го до $k - 1$ -го сдвигаются вправо.
8. Увеличиваем номер опорной строки, столбца $i - i + 1$. Если $i \leq n$, то переходим к пункту 2, иначе алгоритм заканчиваем.

В результате на месте матрицы инцидентий A имеем матрицу главных сечений Q .

Проиллюстрируем этапы предлагаемого алгоритма на рассматриваемом примере. Так после первого этапа матрица A останется неизменной. После второго этапа будут переставлены вторая и пятая строки

$$A_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

На третьем этапе будет изменен знак строки и удален ненулевой элемент на пересечении с первой строкой путем вычитания из фрагмента первой строки фрагмента третьей строки

$$A_3 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Четвёртый этап включает перестановку четвёртой и пятой строк, изменение знака и устранение ненулевого элемента на пересечении с первой строкой

$$A_4 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

На пятом этапе седьмой столбец перемещается на место пятого, столбцы пятый и шестой сдвигаются, изменяется знак пятой строки и устраняются нулевые элементы на пересечении с первой третьей строками

$$A_5 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

В результате преобразований матрицы инцидентий трансформировалась в матрицу главных сечений $Q = A_5$.

На этом завершим раздел по топологическому описанию электронных схем. В заключение стоит отметить, что формирование матрицы инцидентий может быть произведено по схеме, поэтому в прямых методах формирования математических моделей ей отдается предпочтение [1].

3 КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1 Обобщенный метод узловых потенциалов

Займемся топологическим обоснованием обобщенного метода узловых потенциалов, т.е. представим его как совокупность

топологических и компонентных уравнений. Перед применением метода узловых потенциалов все источники ЭДС схемы, если таковые имеются, должны быть преобразованы в эквивалентные источники тока, согласно преобразованиям Тевенина – Нортон. Это связано с тем, что свободные члены узловой системы уравнений представляют собой токи узлов.

Каждый пассивный элемент цепи можно описать законом Ома или компонентным уравнением

$$Y_b \cdot V_b = I_b, \quad (3.1)$$

где Y_b – диагональная матрица проводимости ветвей; V_b, I_b – векторы напряжений и токов.

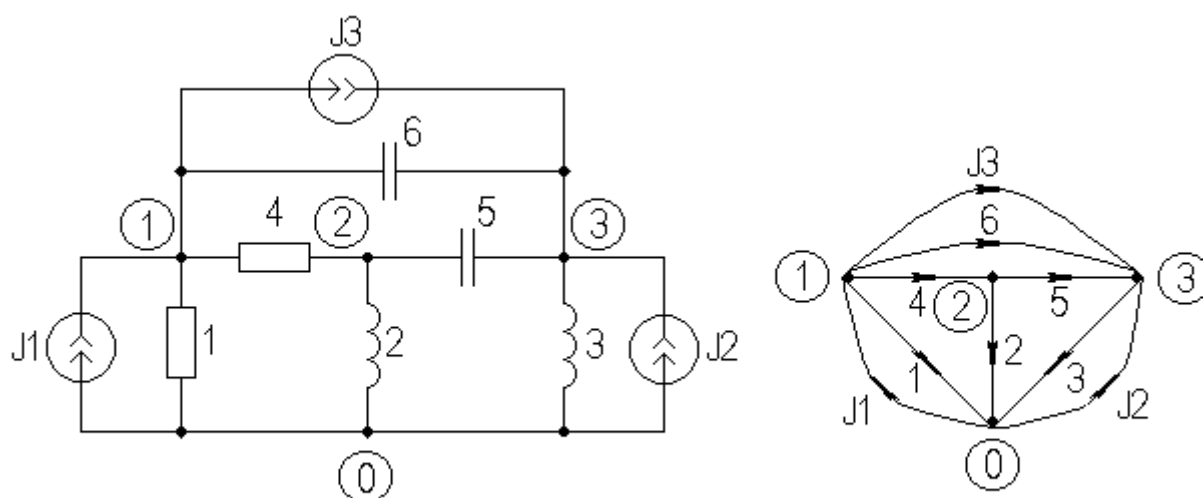


Рисунок 3.1 - Электрическая цепь и ее направленный граф

Для цепи, изображенной на рисунке 3.1, система компонентных уравнений имеет вид:

$$\begin{bmatrix} G_1 & & & & & & & & & & \\ & 1/sL_2 & & & & & & & & & \\ & & 1/sL_3 & & & & & & & & \\ & & & G_4 & & & & & & & \\ & & & & sC_5 & & & & & & \\ & & & & & sC_6 & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}.$$

Дополненная матрица инциденций A_d пассивных элементов и источников тока схемы рисунка 3.1 имеет вид

$$A_d = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = [A \quad A_J].$$

Порядок нумерации ветвей в матрицах Y_b и A должен быть одинаков.

Согласно закону Кирхгофа для токов

$$A_d \cdot I_b = [A \quad A_J] \cdot \begin{bmatrix} I_b \\ J_b \end{bmatrix} = 0,$$

запишем

$$A \cdot I_b = -A_J \cdot J_b,$$

где J_b – вектор известных источников токов.

Из последнего соотношения, используя (3.1), получаем

$$A \cdot Y_b \cdot V_b = -A_J \cdot J_b. \quad (3.2)$$

Соотношение, связывающее напряжения ветвей через узловые напряжения, имеет вид

$$V = A_d^t \cdot V_n = \begin{bmatrix} V_b \\ V_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t \\ A_J^t \end{bmatrix} \cdot V_n,$$

где V_J – напряжение на ветвях источников.

Последнее выражение можно представить двумя независимыми системами уравнений

$$V_b = A^t \cdot V_n,$$

$$V_J = A_J^t \cdot V_n.$$

Второе уравнение позволяет найти напряжения на источниках тока при найденных напряжениях на узлах. Если же первое из уравнений подставим в (3.2), то получим

$$A \cdot Y_b \cdot A^t \cdot V_n = -A_J \cdot J_b.$$

Если обозначить узловую матрицу проводимости

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t \cdot V_n, \quad (3.3)$$

а вектор эквивалентных источников тока

$$J_n = -A_J \cdot J_b, \quad (3.4)$$

то получим традиционную узловую систему уравнений

$$Y \cdot V_n = J_n. \quad (3.5)$$

Для схемы, изображенной на рисунке 3.1, в соответствии с (3.3) и (3.4), матрица проводимости и вектор узловых токов запишутся

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} G_1 + G_4 + sC_6 & -G_4 & -sC_6 \\ -G_4 & G_4 + sC_5 + 1/sL_2 & -sC_5 \\ -sC_6 & -sC_5 & sC_5 + sC_6 + 1/sL_3 \end{bmatrix},$$

$$J_n = -A_J \cdot J_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_3 \\ 0 \\ J_2 + J_3 \end{bmatrix}.$$

При топологическом обосновании обобщенного метода узловых потенциалов, кроме рассмотренного подхода, часто используют понятие обобщенной ветви (рисунок 3.2)

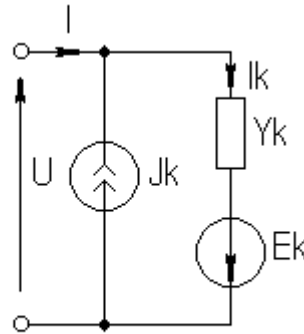


Рисунок 3.2 - Обобщенная ветвь

Компонентные уравнения в виде законов Ома для обобщенных ветвей запишутся

$$I = Y_k \cdot U, \quad (3.6)$$

где $I = I_k - J_k$; $U = U_k - E_k$; Y_k – диагональная матрица компонент. Если раскрыть равенство (3.6) и умножить обе части на матрицу инцидентий, то получим

$$A \cdot (I_k - J_k) = A \cdot Y_k \cdot (U_k - E_k).$$

Из предыдущего изложения известно, что

$$A \cdot I_k = 0;$$

$$A \cdot J_k = -J_n;$$

$$U_k = A^t \cdot U_n = A^t \cdot V_n.$$

В силу этих соотношений имеем

$$J_n = A \cdot Y_k \cdot A^t \cdot V_n - A \cdot Y_k \cdot E_k,$$

или учитывая (3.3), запишем

$$Y \cdot V_n = J_n + A \cdot Y_k \cdot E_k,$$

где J_n – вектор, обусловленный независимыми источниками тока; $A \cdot Y_k \cdot E_k$ – вектор, обусловленный независимыми источниками напряжения и соответствует преобразованию источников ЭДС в источники тока, в соответствии с преобразованиями Тевенина – Ньютона.

Представляет также интерес обоснование метода узловых потенциалов при использовании управляемых источников тока, связанных индуктивностей и других многополюсных элементов.

Сразу оговоримся, что в обобщенном узловом методе речь может идти об источниках тока управляемых, как током, так и напряжением. Изложение будем вести на конкретных примерах, поскольку обобщение результатов не представляет сложностей.

Рассмотрим обобщенную линейную модель биполярного транзистора, содержащую источник тока управляемый током (рисунок 3.3).

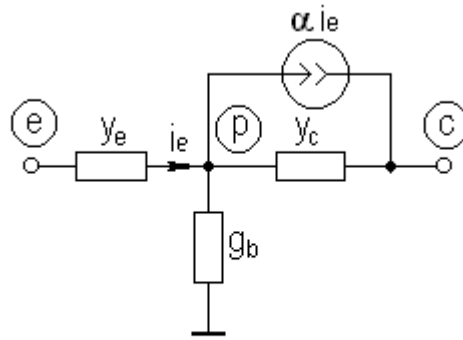


Рисунок 3.3 - Упрощенная линейная модель биполярного транзистора

Здесь $\alpha \cdot i_e$ описывает источник тока, управляемый током ветви y_e , поэтому в рассмотрение, помимо пассивных ветвей, будет введена ветвь управляемого источника с эквивалентной крутизной $\alpha \cdot i_e$, где α - коэффициент передачи по току в схеме с общей базой (ОБ), при коротком замыкании на выходе. В результате матрица инцидентий модели запишется в виде

$$A = \begin{matrix} & y_e & g_b & y_c & \alpha y_e \\ e & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ c & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица проводимостей ветвей схемы, в этом случае, запишется следующим образом

$$Y_b = \begin{bmatrix} y_e & & & \\ & g_b & & \\ & & y_c & \\ \alpha y_e & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что проводимость ветви управляемого источника тока записывается на пересечении строки, соответствующей номеру ветви источника и столбца с номером управляющей ветви. Осуществляя перемножение матриц, в соответствии с (3.3)

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} y_e & -y_e & 0 \\ -(1-\alpha) \cdot y_e & (1-\alpha) \cdot y_e + g_b + y_c & -y_c \\ -\alpha \cdot y_e & \alpha \cdot y_e - y_c & y_c \end{bmatrix},$$

получаем матрицу проводимости биполярного транзистора, включенного по схеме с ОБ.

Аналогично можно получить матрицу проводимости для модели полевого транзистора, использующей источник тока, управляемый напряжением. Изобразим упрощенную линейную модель полевого транзистора по схеме с общим истоком (ОИ) (рисунок 3.4).

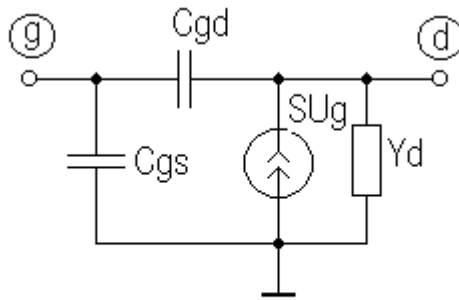


Рисунок 3.4 - Упрощенная линейная модель полевого транзистора

Матрица инцидентий изображенной модели

$$A = \begin{matrix} & C_{gs} & C_{gd} & S & Y_d \\ g & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

Матрица проводимостей ветвей модели

$$Y_b = \begin{bmatrix} j\omega C_{gs} & & & & \\ & j\omega C_{gd} & & & \\ & S & & 0 & \\ & & & & y_d \end{bmatrix}$$

Заметим, что крутизна S управляемого источника, как отдельной ветви записывается на пересечении соответствующей строки и столбца, с номером ветви с управляющим напряжением. После перемножения матриц, в соответствии с (3.3)

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} j \cdot \omega \cdot (C_{gs} + C_{gd}) & -j \cdot \omega \cdot C_{gd} \\ S - j \cdot \omega \cdot C_{gd} & j \cdot \omega \cdot C_{gd} + y_d \end{bmatrix},$$

получаем матрицу проводимости полевого транзистора, включенного по схеме с ОИ.

Теперь можно рассмотреть построение матрицы проводимости схемы, содержащей сложный элемент, на примере двух связанных индуктивностей (рисунок 3.5)

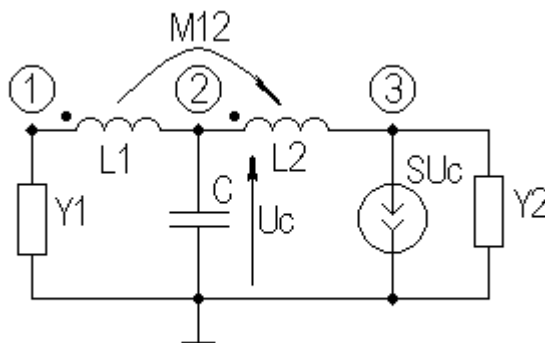


Рисунок 3.5 - Схема со взаимными индуктивностями

Матрица инцидентий запишется

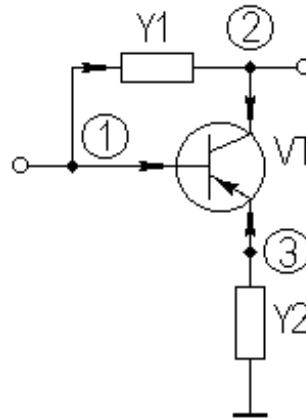


Рисунок 3.6 - Схема транзисторного каскада

Матрицу инцидентий схемы, в соответствии с указанными направлениями ветвей, можно записать

$$A = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & b & c & e \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где второй блок, из трех последних столбцов, представляет матрицу инцидентий транзистора, как подсхемы. Матрица проводимостей транзистора, как трехполюсника, в общем виде, запишется

$$Y_T = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей компонент схемы в этом случае запишется следующим образом

$$Y_b = \begin{bmatrix} y_1 & & & & & \\ & y_2 & & & & \\ & & y_{11} & y_{12} & y_{13} & \\ & & y_{21} & y_{22} & y_{23} & \\ & & y_{31} & y_{32} & y_{33} & \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы, в соответствии с (3.3)

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} y_1 + y_{11} & -y_1 + y_{12} & y_{13} \\ -y_1 + y_{21} & y_1 + y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_2 + y_{33} \end{bmatrix},$$

получим матрицу проводимости транзисторного каскада, выраженную через элементы матрицы проводимости транзистора.

3.2 Алгоритм формирования узловой системы уравнений

Формализованное изложение обобщенного метода узловых потенциалов, используя многополюсный подход, позволит сформулировать алгоритм формирования узловой системы уравнений на основе входной информации о ветвях схемы, без привлечения топологических матриц.

Суть многополюсного подхода заключается в следующем. Цепь представляется в виде тела многополюсника (рисунок 3.7) с $n + 1$ полюсами и один из них, обычно $n + 1$ -ый, принимается за общий узел.

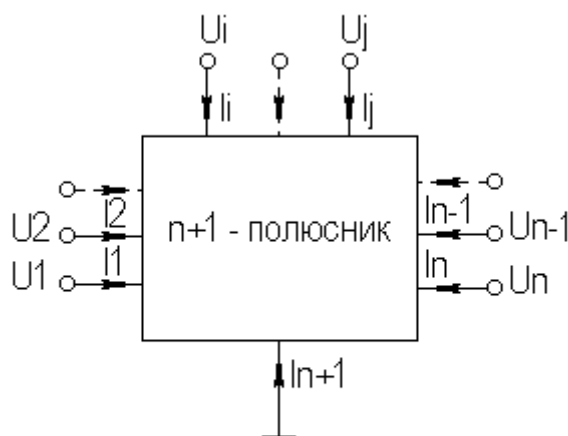


Рисунок 3.7 - Многополюсник

Все токи считаются направленными во внутрь многополюсника, а напряжения узлов (полюсов) отсчитываются относительно общего опорного узла. Такому представлению цепи соответствует система узловых уравнений (Y - параметров короткого замыкания), которая устанавливает связь между токами и напряжениями узлов

$$\begin{aligned}
 y_{11} \cdot u_1 + y_{12} \cdot u_2 + \dots + y_{1n} \cdot u_n &= i_1; \\
 y_{21} \cdot u_1 + y_{22} \cdot u_2 + \dots + y_{2n} \cdot u_n &= i_2; \\
 \dots & \\
 y_{n1} \cdot u_1 + y_{n2} \cdot u_2 + \dots + y_{nn} \cdot u_n &= i_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

В матричной форме эта система может быть записана

$$I = Y \cdot U.$$

Рассмотрим физический смысл Y - параметров. Из системы уравнений (3.7) следует, что

$$y_{ii} = I_i / U_i,$$

при $U_k = 0$, где $k = 1, \dots, n$ и $k \neq i$. То есть, собственная проводимость может быть определена, путем подключения к i - ому узлу источника

напряжения U_i и измерения тока этого узла I_i , при замкнутых на общий узел остальных узлах. Взаимная проводимость

$$y_{ij} = I_i / U_j,$$

при $U_k = 0$, где $k = 1, \dots, n$ и $k \neq j$, может быть определена, путем подключения к j -ому узлу источника напряжения U_j , и измерения тока I_i при замкнутых остальных узлах.

Из рассмотрения следует, что в случае пассивной цепи, собственная проводимость узла равна сумме проводимостей ветвей, подключенных к узлу, т.к. остальные узлы при этом закорачиваются. Взаимная проводимость равна суммарной проводимости ветвей, соединяющих узлы i и j , поскольку остальные узлы замкнуты. При определении собственной проводимости ток и напряжение измеряются на одном и том же узле, поэтому, учитывая их со направленность, собственную проводимость берут со своим знаком. При определении взаимной проводимости напряжение прикладывается к одному узлу, а ток измеряется в другом и имеет другое направление относительно узла, поэтому взаимная проводимость берется с противоположным знаком. Для наглядности представления смысла матрицы проводимости и правил формирования необходимо сделать ряд исходных предпосылок:

1. Если принять, что прикладываемое напряжение $U_i = 1$, в этом случае $i \cong y$ - ток пропорционален проводимости.
2. ЭДС, прикладываемая к узлу, имеет направление от общего провода к узлу, а ток, возникающий под действием ЭДС, направлен навстречу, из узла.
3. Источник ЭДС идеальный (внутреннее сопротивление равно нулю), следовательно, его энергия бесконечна, и ток, в каждой из ветвей, не зависит от наличия других ветвей (шунтирования нет).
4. Ток измеряется амперметром с внутренним сопротивлением равным нулю и его присутствие одновременно реализует режим короткого замыкания при измерении взаимных проводимостей.
5. При измерении ток, вытекающий из узла, считаем положительным, а втекающий - отрицательным.

С учетом этих предпосылок, проводя серию мысленных экспериментов, можно определить все элементы матрицы проводимости пассивной схемы. Для иллюстрации алгоритма заполнения матрицы проводимости компонентами пассивных ветвей изобразим на рисунке 3.8 отдельную пассивную ветвь с узлами подключения i и j .

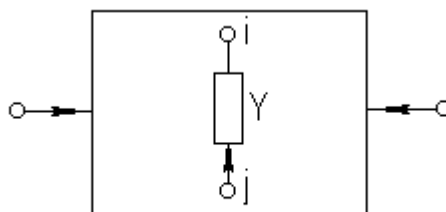


Рисунок 3.8 - Пассивная ветвь цепи

Компоненты матрицы проводимости пассивного элемента, в соответствии с выше сформулированными правилами и рисунка 3.8, можно изобразить следующим фрагментом

$$\begin{array}{c}
 i \qquad j \\
 \cdot \left[\begin{array}{ccc}
 +y & \cdot & -y \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 -y & \cdot & +y
 \end{array} \right] \cdot
 \end{array}$$

С другой стороны, модели активных элементов содержат управляемые источники тока. В узловом методе без предварительных преобразований допустимы лишь источники тока управляемые токами ветвей и напряжениями на узлах. Моделирование активности и невязности активных схем приводит, в отличие от пассивных схем, к несимметричным матрицам.

Влияние управляемых источников на матрицу проводимости опирается на следующие исходные предпосылки, в дополнение, к ранее названным, для пассивных схем:

6. Источник тока идеальный, с бесконечным внутренним сопротивлением.
7. Управляемый источник активизируется лишь при приложении управляющих токов либо напряжений.
8. Важно исходное со направление управляющих воздействий и управляемого источника, относительно узлов подключения. При изменении направления управляющих воздействий изменяется полярность источника.

Заметим, что действие управляемого источника, в отличие от независимого источника, проявляется, лишь при возникновении соответствующих управляющих токов либо напряжении. Наличие управляемых источников в цепи приводит к появлению дополнительных компонент матрицы проводимости.

Для физической интерпретации и выявления особенностей отражения управляемых источников, необходимо ввести в рассмотрение две пары полюсов (управляющих i, j и управляемых k, l) в соответствии с рисунком 3.9. Здесь важно исходное со направление, поскольку изменение знака управляющего тока либо напряжения ведет к изменению полярности источника.

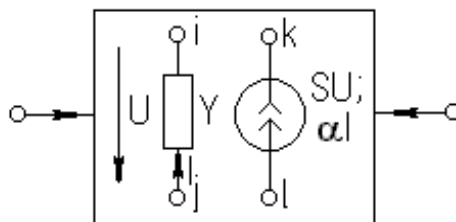


Рисунок 3.9 - Управляемые источники тока

Дополнительные составляющие матрицы проводимости, обусловленные управляемыми источниками, будут, в соответствии с вышеуказанными правилами, находиться на пересечении строк с номерами управляемых узлов и столбцов с номерами управляющих узлов. В соответствии с рисунком 3.9 и оговоренными правилами определения компонент матрицы проводимости, дополнительные компоненты, обусловленные управляемыми источниками, можно отразить следующими фрагментами матриц

$$\begin{matrix} & i & j \\ k & +\alpha y & -\alpha y \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l & -\alpha y & +\alpha y \end{matrix}; \quad \begin{matrix} & i & j \\ k & +S & -S \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l & -S & +S \end{matrix}.$$

На основании предпосылок и правил можно сформулировать алгоритм формирования матриц проводимости электронных схем.

1. Любой пассивный элемент, подключенный к узлам i и j , входит в компоненты матрицы на пересечении соответствующих строк и столбцов, причем в диагональные элементы ii и jj проводимость входит со своим знаком, а в недиагональные - ij и ji - с противоположным знаком.

2. Управляемый источник отображается компонентами матрицы проводимости на пересечении строк с номерами управляемых узлов k и l , и столбцов с номерами управляющих узлов i и j , причем со направленные компоненты ik и jl содержат составляющие со своим знаком, а разнонаправленные il и jk - с противоположным.

Сформулированный алгоритм несложно реализовать в виде процедуры формирования матриц проводимости на основе информации о ветвях схемы, содержащей признаки, номиналы и узлы подключения.

Кроме матрицы проводимости необходимо также рассмотреть вопрос о формировании вектора свободных членов узловой системы, содержащей токи узлов, обусловленные независимыми источниками тока. Заметим еще раз, что независимые источники напряжения должны быть предварительно преобразованы в независимые источники тока. Хотя, как отмечалось ранее, при использовании обобщенных ветвей независимые источники напряжения допустимы и автоматически преобразуются в источники тока, однако при условии, что проводимость обобщенной ветви

конечна. Поскольку в реальных схемах это не всегда соблюдается, в основном будем подразумевать обычные ветви.

Составляющие вектора, обусловленные независимыми источниками тока, формируются в соответствии с узлами подключения. Значение источника тока заносится в компоненты вектора свободных членов с плюсом, если источник направлен к узлу и с минусом, если направлен от узла. Проиллюстрируем это правило на примере рисунка 3.10, содержащего независимый источник тока.

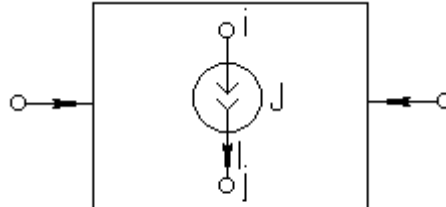


Рисунок 3.10 - Независимый источник тока

Компоненты вектора свободных членов, обусловленные источником в соответствии с рисунком 3.10 и сформулированными правилами, можно отобразить следующим фрагментом

$$\begin{matrix} i \\ \dots \\ j \end{matrix} \begin{bmatrix} + I \\ \dots \\ - I \end{bmatrix}.$$

Составляющие вектора, обусловленные источниками напряжения, предварительно преобразованные в источники тока, также формируется на основе узлов подключения. Т.к. направление ЭДС противоположно возникающему току, компоненты с номерами узлов, на которые указывает стрелка, следует брать с минусом, а компоненты с номерами узлов, откуда исходит стрелка - с плюсом. Кроме того, источники напряжения могут порождать дополнительные компоненты вектора тока через управляемые источники тока, если управляющая ветвь содержит источники ЭДС. Координаты компонент определяются узлами подключения управляемых источников тока, а значение определяется произведением крутизны на ЭДС с учетом направления источника, относительно узлов подключения и со направления с источниками ЭДС.

Если выполнены предварительные преобразования источников ЭДС в источники тока, то, перебирая значение сторонних источников и узлы подключения, вычисляем алгебраическую сумму сторонних токов каждого узла. Данная процедура формирования вектора свободных членов также просто реализуется на ЭВМ.

Таким образом, нами сформулировано содержание алгоритма формирования узловой системы уравнений на основе исходной информации о ветвях схемы. Рассмотрим применение этого алгоритма на конкретном примере схемы рисунка 3.11.

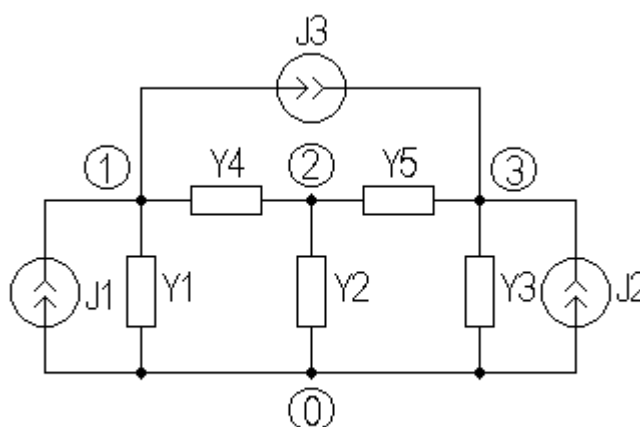


Рисунок 3.11 - Схема с источниками токов

В соответствии с изложенным алгоритмом, для приведенной схемы узловую систему уравнений, можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_4 & -y_4 & 0 \\ -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 & -y_5 \\ 0 & -y_5 & y_3 + y_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 + J_3 \\ 0 \\ J_2 - J_3 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формирование матрицы проводимости схем с подсхемами. Подсхемой называется независимая часть схемы. Под независимостью понимается совместное присутствие управляемых и управляющих ветвей в пределах данной подсхемы. С точки зрения шумов, независимость предполагает отсутствие взаимной корреляции шумовых источников разных подсхем.

Из правил формирования узловой системы и физического смысла Y -параметров следует, что собственные и взаимные проводимости схемы включают, как проводимости отдельных элементов, так и проводимости подсхем, матрицы которых по тем же правилам были сформированы ранее. Вектор свободных членов формируется, как и при отсутствии подсхем. Поэтому сформулируем последовательность действий при формировании матрицы проводимостей схемы с подсхемами.

1. Изобразить схему с подсхемами и пронумеровать узлы.
2. Изобразить подсхемы с пронумерованными узлами и их подматрицы.
3. Сформировать матрицу проводимости схемы без подсхем и добавить в нее подматрицы подсхем, в соответствии с индексацией.

В качестве примера, рассмотрим формирование матрицы проводимости схемы на двух транзисторах (рисунок 3-12), заданных, в свою очередь, подматрицами проводимости.

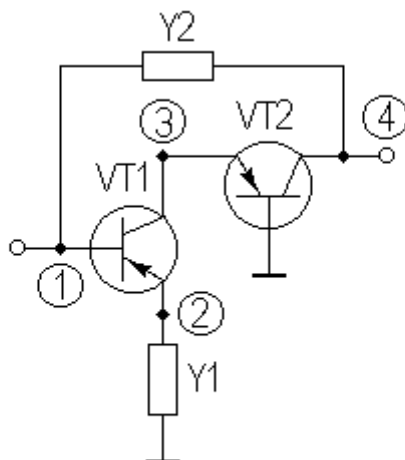


Рисунок 3.12 - Двухтранзисторная цепь

Выпишем матрицы проводимости компонент, включая двухполюсники обратных связей, как подсхем

$$Y_{VT1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y'_{11e} & y'_{12e} & y'_{13e} \\ y'_{21e} & y'_{22e} & y'_{23e} \\ y'_{31e} & y'_{32e} & y'_{33e} \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad Y_{VT2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 4 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y''_{11e} & y''_{12e} & y''_{13e} \\ y''_{21e} & y''_{22e} & y''_{23e} \\ y''_{31e} & y''_{32e} & y''_{33e} \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$Y_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_1 & -y_1 \\ -y_1 & y_1 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad Y_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_2 & -y_2 \\ -y_2 & y_2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Здесь индекс e - означает, что Y - параметры транзисторов измерялись в одной схеме включения (схеме с ОЭ). Для получения матрицы проводимости схемы достаточно свести подматрицы компонент в общую матрицу, в соответствии с индексацией

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y'_{11} + y_2 & y'_{13} & y'_{12} & -y_2 \\ y'_{31} & y'_{33} + y_1 & y'_{32} & 0 \\ y'_{21} & y'_{23} & y'_{22} + y''_{33} & y''_{32} \\ -y_2 & 0 & y''_{23} & y''_{22} + y_2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

По поводу формирования матрицы проводимости схемы состоящей из подсхем можно сделать следующие замечания:

1. Собственные проводимости объединенной матрицы равны сумме собственных проводимостей подсхем подключенных к узлу.

2. Взаимные проводимости подсхем равны нулю в силу их независимости.

3. Проводимости объединенной матрицы равны алгебраической сумме соответствующих проводимостей подсхем.

В силу последнего замечания формирование матрицы проводимости сложной схемы легко реализовать в виде универсального алгоритма.

3.3 Метод контурных токов

Метод контурных токов, в силу ряда особенностей, не нашел широкого применения при реализации программ машинного анализа электрических схем, и представляет интерес разве что в теоретическом плане. Прежде всего, это связано с некоторыми дополнительными трудностями определения главных контуров в не планарных схемах. Метод контурных токов применительно к машинным методам анализа электрических цепей описан в [1] и в данном пособии не рассматривается.

3.4 Основные элементы схемы

Базовыми элементами электрических цепей являются линейные, сосредоточенные и не зависящие от времени резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности.

Резистор - элемент, ток и напряжение которого связаны соотношением

$$v = R \cdot i = i / G, \quad (3.8)$$

где R - сопротивление [Om]; G - проводимость [Sim]; v - напряжение [V]; i - ток [A]. Различают линейные и нелинейные, зависящие от тока или напряжения, резисторы.

Конденсатор - элемент, емкость которого обозначается C , единица измерения [F]. Описывается уравнением

$$q = f(v), \quad (3.9)$$

где q - заряд [K], либо

$$q = C \cdot v, \quad (3.10)$$

для линейной постоянной емкости. Ток, протекающий через конденсатор

$$i = \partial q / \partial t, \quad (3.11)$$

Для линейной постоянной емкости

$$i = C \cdot \partial v / \partial t, \quad (3.12)$$

$$v = v_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau, \quad (3.13)$$

где v_0 - напряжение на конденсаторе, при $t = 0$.

Индуктивность - элемент, обозначаемый L , единица измерения [Hn]. Описывается уравнением

$$\Phi = f(i), \quad (3.14)$$

где Φ - магнитный поток [Wb].

Напряжение на катушке индуктивности

$$v = \partial \Phi / \partial t, \quad (3.15)$$

$$\Phi = L \cdot i, \quad (3.16)$$

$$v = L \cdot \partial i / \partial t, \quad (3.17)$$

$$i = i_0 + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

где i_0 – ток, протекающий через катушку индуктивности, при $t = 0$.

Уравнения, определяющие взаимосвязь токов и напряжений на основных элементах, называются компонентными.

3.5 Преобразование Лапласа для уравнений реактивных элементов

Компонентные уравнения реактивных элементов (емкостей и индуктивностей) описываются дифференциальными соотношениями. Для линейных и постоянных элементов L и C компонентные уравнения, как простейшие дифференциальные уравнения, преобразованием Лапласа трансформируются в алгебраические уравнения и наоборот. В результате соотношения из временного представления (относительно переменной t) переводятся в комплексную плоскость переменной $s = \alpha + j \cdot \omega$. При установившемся синусоидальном воздействии $s = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f = j \cdot \omega$.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3.12)

$$i = C \cdot \partial v / \partial t$$

получаем

$$I = s \cdot C \cdot V - C \cdot V_0. \quad (3.20)$$

Преобразование Лапласа уравнения (3.17)

$$v = L \cdot \partial i / \partial t,$$

дает

$$V = s \cdot L \cdot I - L \cdot I_0. \quad (3.21)$$

При нулевых начальных условиях $V_0 = 0$ и $I_0 = 0$

$$I = s \cdot C \cdot V; \quad (3.22)$$

$$V = s \cdot L \cdot I; \quad (3.23)$$

откуда

$$Y_C = s \cdot C; \quad (3.24)$$

$$Z_L = s \cdot L; \quad (3.25)$$

либо

$$Z_C = 1 / sC; \quad (3.26)$$

$$Y_L = 1 / sL. \quad (3.27)$$

Перепишем уравнения (3.20) и (3.21) в виде

$$I + C \cdot V_0 = s \cdot C \cdot V; \quad (3.28)$$

$$V + L \cdot I_0 = s \cdot L \cdot I, \quad (3.29)$$

здесь $C \cdot V_0$ - источник тока, включенный параллельно C ; $L \cdot I_0$ - источник напряжения, включенный последовательно с L . Можно также записать уравнения (3.20) и (3.21) в виде

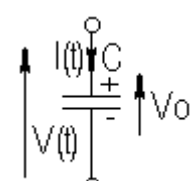
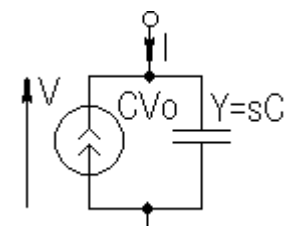
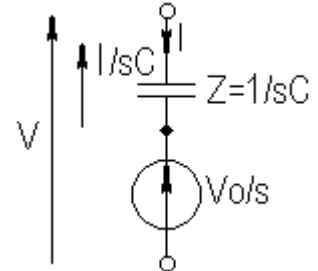
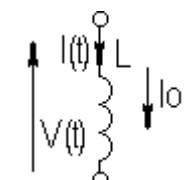
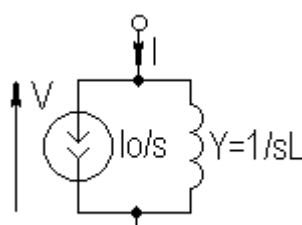
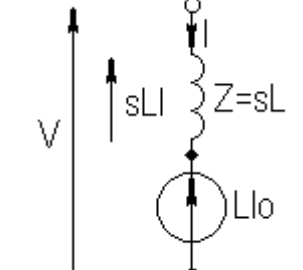
$$V - V_0 / s = (1 / sC) \cdot I; \quad (3.30)$$

$$I - I_0 / s = (1 / sL) \cdot V, \quad (3.31)$$

где V_0 / s - источник напряжения, включенный последовательно с C ; I_0 / s - источник тока, включенный параллельно с L .

Рассмотренные представления удобно свести в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Представление реактивных элементов

Элемент	Проводимость	Сопротивление
 $i(t) = C \cdot \partial v(t) / \partial t$ $v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$	 $I = s \cdot C \cdot V - C \cdot V_0$	 $V - \frac{V_0}{s} = (1 / sC) \cdot I$
 $v = L \cdot \partial i(t) / \partial t$ $i(t) = i_0 + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau$	 $I - \frac{I_0}{s} = (1 / sL) \cdot V$	 $V = s \cdot L \cdot I - L \cdot I_0$

3.6 Нормировка входных данных

В реальных схемах часто наблюдается большой разброс значений параметров. При решении уравнений описывающих подобные схемы может возникнуть потеря точности при вычислениях и переполнение разрядной сетки ЭВМ. Следует различать относительный и абсолютный разбросы. Абсолютный разброс представляет собой отношение верхнего предела номинала данного типа элемента к нижнему пределу. Относительный разброс - это абсолютный разброс, нормированный на среднегеометрическое значение верхнего и нижнего номинала. Если разброс симметричен относительно нуля, то абсолютный и относительный разбросы совпадают, и нормировка ничего не дает. Однако часто разброс

несимметричен относительно нуля и нормировка позволяет существенно повысить точность результатов и снизить вероятность переполнения разрядной сетки.

В схемотехническом проектировании в качестве основных единиц измерения используются: напряжение $U[V]$, ток $I[A]$, сопротивление $R[Om]$, емкость $C[F]$, индуктивность $L[Hn]$, частота $F[Hz]$, время $T[s]$. Из семи возможных единиц только три могут быть независимыми, причем не любые, а такие, чтобы остальные могли быть выражены через них, в соответствии с соотношениями:

$$U = R \cdot I; T = R \cdot C; T = R / L; F = 1 / T; Z = j \cdot \omega \cdot L = 1 / (j \cdot \omega \cdot C);$$

где $\omega = 2 \cdot \pi \cdot F$.

В качестве комбинаций независимых единиц могут выступать, например: U, R, Ω ; I, R, T ; U, R, L ; U, R, C ; I, L, C .

С другой стороны, в качестве комбинаций независимых единиц, не могут выступать, например: R, L, Ω ; U, Ω, T ; R, C, T ; I, C, Ω . Пусть имеем параметр x и масштабный коэффициент M_x , тогда нормированное значение параметра $X = x / M_x$. Если наоборот, вычислен нормированный параметр X , тогда истинное значение параметра $x = X \cdot M_x$.

В качестве нормирующего множителя (масштабного коэффициента), удобно брать, округленное до ближайшей степени десяти, среднегеометрическое значение верхнего и нижнего пределов.

На практике часто в качестве независимых единиц выбирают: U, R, Ω ; U, R, L ; U, R, C . Очевидно, что вместо U , можно брать I , а вместо Ω , можно брать T . Так, если комбинацией независимых единиц является (U, R, Ω) , то масштабные коэффициенты зависимых единиц определяются как

$$M_I = M_U / M_R; M_T = 1 / M_\Omega; M_L = M_R / M_\Omega; M_C = 1 / M_R / M_\Omega.$$

В качестве независимых единиц можно взять комбинацию с меньшим числом единиц. В этом случае масштабные множители, оставшихся независимых единиц подразумеваются равными единице. Так, если в качестве независимой единицы взять Ω , то масштабные множители остальных единиц равны

$$M_I = 1; M_U = 1; M_T = 1; M_L = 1 / M_\Omega; M_C = 1 / M_\Omega.$$

В заключение отметим, что классические методы формирования математических моделей отличаются относительной простотой и малой размерностью, однако они не позволяют описывать схемы с произвольным набором базовых элементов. Кроме того, классические методы не позволяют напрямую переходить из частотной области во временную область. От перечисленных недостатков свободны прямые методы формирования математических моделей, базирующиеся на табличном методе и его вариантах.

4 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

4.1 Табличный метод

Идея табличного метода заключается в объединении топологических и компонентных уравнений цепи. В качестве топологических уравнений используется уравнения для токов и напряжений ветвей, выраженные через матрицу инцидентий. При таком подходе все токи и напряжения ветвей и напряжения узлов рассматривается, как неизвестные переменные. Этот метод, очевидно, является наиболее общим, однако приводит к системе уравнений высокого порядка.

Допустим, что цепь имеет b ветвей и n независимых узлов, содержит R, L, C элементы, зависимые и независимые источники и другие, часто используемые элементы. Топологические свойства цепи можно отобразить матрицами инцидентий A , сечений Q , и контуров B . Т.к. матрица инцидентий, в отличие от матриц сечений и контуров, формируется непосредственно по схеме, именно она используется в табличном методе. Уравнение Кирхгофа для токов, как известно, запишется в виде

$$A \cdot I_b = 0. \quad (4.1)$$

Напряжения ветвей связаны с напряжениями узлов как

$$V_b = A^t \cdot V_n, \quad (4.2)$$

где V_b, I_b - напряжения и токи ветвей; V_n - напряжения узлов.

Компонентные уравнения в самом общем случае могут быть записаны как

$$\begin{array}{l} \text{токи} \\ \text{напряжения} \end{array} \begin{bmatrix} Y_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \cdot V_b + \begin{bmatrix} K_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \cdot I_b = \begin{bmatrix} W_{b1} \\ W_{b2} \end{bmatrix},$$

где Y_1, Z_2 - соответственно проводимость и импеданс; K_1, K_2 - безразмерные константы; W_{b1}, W_{b2} - токи и напряжения независимых источников, в том числе источников, учитывающих влияние начальных условий на конденсаторах и катушках индуктивности. Для компактности воспользуемся более краткой формой компонентных уравнений

$$Y_b \cdot V_b + Z_b \cdot I_b = W_b. \quad (4.3)$$

Заметим, что для различных типов ветвей Y_b и Z_b могут принимать конкретное значение: +1, -1, либо 0, а W_b - конкретное значение, либо 0.

В таблице 4.1 представлены значения Y_b, Z_b, W_b для некоторых типов ветвей.

Таблица 4.1 – Компонентные уравнения двухполюсников

Элемент	Компонентные уравнения	Y_b	Z_b	W_b
Резистор	$V_b - R_b \cdot I_b = 0$	1	$-R_b$	0
Проводимость	$G_b \cdot V_b - I_b = 0$	G_b	-1	0
Конденсатор	$s \cdot C_b \cdot V_b - I_b = C_b \cdot V_0$	$s \cdot C_b$	-1	$C_b \cdot V_0$
Катушка инд-ти	$V_b - s \cdot L_b \cdot I_b = -L_b \cdot I_0$	1	$-s \cdot L_b$	$-L_b \cdot I_0$
Источник напряж.	$V_b = E_b$	1	0	E_b
Источник тока	$I_b = J_b$	0	1	I_b

Заметим, что в таблице 4.1 конденсатор представлен как проводимость $S \cdot C_b$, а индуктивность как сопротивление $s \cdot L_b$.

В принципе, возможно и обратное представление, однако, забегая вперед, можно отметить, что для формального перехода, от алгебраических уравнений в частотной области к дифференциальным уравнениям во временной области, недопустимы множители типа $1/s$.

Таким образом, это ограничение необходимо соблюдать, если на основании математической модели предполагается вычисление временных характеристик путем перехода от алгебраических уравнений к дифференциальным уравнениям и их последующего интегрирования.

Табличную систему уравнений можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 V_b - A^t \cdot V_n &= 0, \\
 Y_b \cdot V_b + Z_b \cdot I_b &= W_b, \\
 A \cdot I_b &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

или в блочной матричной форме

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} b & b & n \end{matrix} \\
 \begin{matrix} b \\ b \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A^t \\ Y_b & Z_b & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_b \\ I_b \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_b \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{matrix} \tag{4.5}$$

или в общем, виде

$$T \cdot X = W. \tag{4.6}$$

Как следует из структуры уравнений, блочная матрица T имеет на главной диагонали квадратные матрицы. При табличном методе нет оснований, различать источники и пассивные компоненты, как в обобщенном узловом методе. Нумерация элементов также может быть произвольной и лишь в специальных теоретических исследованиях желательно иногда соблюдать определенную нумерацию.

В качестве простейшего примера, рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 4.1.

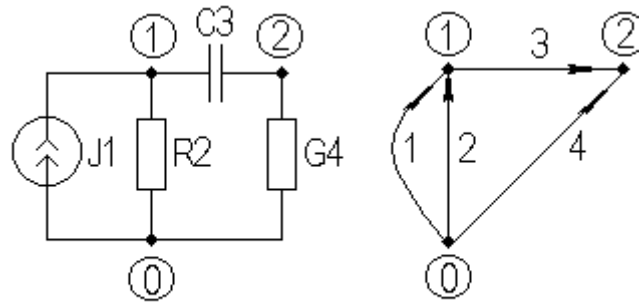


Рисунок 4.1 - Пассивная RC цепь

Матрица инцидентий схемы запишется

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Используя, матрицу инцидентий схемы и таблицу 4.1 компонентных уравнений ветвей, в соответствии с (4.5), получаем следующую табличную систему

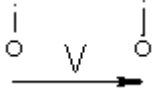
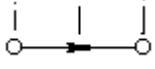
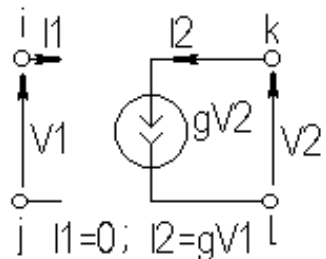
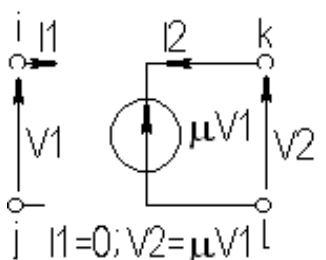
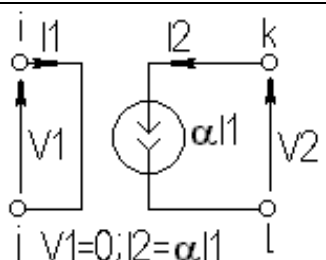
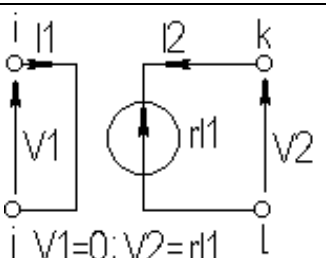
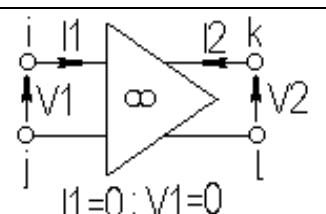
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \cdot C_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если в начальный момент времени на емкости C_3 есть напряжение V_0 , то седьмой элемент вектора источников равен $w_7 = C_3 \cdot V_0$.

В качестве достоинств табличного метода в сравнении с узловым либо контурным методами, следует отметить возможность представления более широкого набора типов ветвей, а также возможность представления некоторых ветвей, как в виде проводимости, так и в виде сопротивления.

В реальных схемах, кроме двухполюсных элементов, используются и более сложные элементы, например управляемые источники активных схем, поэтому расширим таблицу компонентных уравнений.

Таблица 4.2 – Компонентные уравнения идеальных элементов

Элемент	Обозначение	Компонентные уравнения
Разомкнутая цепь		$I = 0$
Короткозамк. цепь		$V = 0$
Источник тока, управляемый напряжением	 $i_1 = 0; i_2 = gV_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник напряжения, управляемый напряжением	 $i_1 = 0; V_2 = \mu V_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник тока, управляемый током	 $V_1 = 0; i_2 = \alpha i_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник напряжения, управляемый током	 $V_1 = 0; V_2 = r i_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Операционный усилитель	 $i_1 = 0; V_1 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Для иллюстрации табличного метода в качестве примера рассмотрим схему рисунка 4.2, содержащую источник напряжения управляемый напряжением.

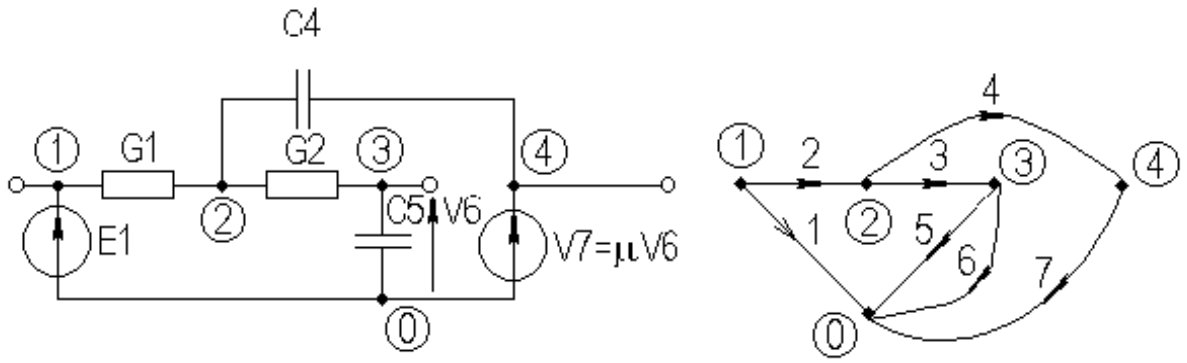


Рисунок 4.2 - Схема с источником напряжения управляемого напряжением

Ввиду громоздкости табличной матрицы, запишем лишь матрицу инцидентий

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и компонентные уравнения рассматриваемой схемы

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & G_2 & & & & & & \\ & & G_3 & & & & & \\ & & & sC_4 & & & & \\ & & & & sC_5 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & \mu & -1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из примера видно, что коэффициенты табличной системы получаются чрезвычайно разреженными. Для сравнения различных методов удобно ввести показатель заполнения

D = число ненулевых элементов/общее число элементов.

Для данного примера табличная система размерностью $18 \cdot 18$ имеет 39 ненулевых элементов. Следовательно, $D = 39 / 18^2 = 12\%$.

Недостаток табличного метода заключается в большом размере систем уравнений и требовании специальных алгоритмов решения разреженных систем уравнений. Причем структура уравнений такова, что затрудняет использование более простых алгоритмов для разреженных матриц с симметричной структурой.

4.2 Модификация табличного метода

Недостаток табличного метода, высокая размерность связана с тем, что в результате решения сразу определяются напряжения ветвей V_b , токи ветвей I_b и напряжения узлов V_n . В тоже время, напряжения ветвей легко вычислить из узловых напряжений

$$V_b = A^t \cdot V_n.$$

В связи с этим исключим из табличной системы переменную V_b , преобразуя, соответствующим образом, исходную систему (4.4). Так если подставить первое уравнение во второе, то получим

$$Y_b \cdot A^t \cdot V_n + Z_b \cdot I_b = W_b, \quad (4.7a)$$

$$A \cdot I_b = 0, \quad (4.7b)$$

или в матричной форме

$$\begin{matrix} & n & b \\ b & \begin{bmatrix} Y_b \cdot A^t & Z_b \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_b \\ 0 \end{bmatrix}. \end{matrix} \quad (4.8)$$

Соотношения (4.7) и (4.8) и представляют собой модифицированную табличную систему уравнений. Модифицированная табличная система сохраняет все основные достоинства табличного метода, но имеет меньшую размерность. Так размер матрицы коэффициентов равен $(n+b) \cdot (b+n)$, где b - число ветвей, а n - число независимых узлов. Снижение размерности упрощает решение системы.

Реализация модифицированного табличного метода практически не отличается от табличного метода. Информация о каждой ветви отображается в общем случае во всех блоках системы. Единственным пунктом, требующим пояснений, является, пожалуй, блок $Y_b \cdot A^t$. Дело в том, что нет необходимости вычислять предварительно произведение $Y_b \cdot A^t$. Покажем это на основе простых рассуждений. Пусть имеем две ветви проводимостью y_a и y_b , включенные соответственно между узлами i, j и k, l . Выполним умножение фрагментов матриц Y_b и A^t

$$Y_b \cdot A^t = \begin{matrix} & i & j & k & l \\ \begin{bmatrix} y_a & & & \\ & y_b & & \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ b & \end{matrix} = \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} y_a & -y_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b & -y_b \end{bmatrix} \\ b & \end{matrix} \end{matrix}.$$

Из анализа результатов умножения следует, что для формирования блока $Y_b \cdot A^t$ из двухполюсных ветвей достаточно в транспонированной матрице инцидентий заменить ± 1 на $\pm y_d$. Более сложный случай соответствует включению между узлами i, j управляющей ветви, а между узлами k, l управляемой ветви. В компонентной матрице этому фрагменту соответствует блок $(2 \cdot 2)$. Умножение фрагментов матриц Y_b и A^t в этом случае соответствует

$$Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} y_a & y_b \\ y_c & y_d \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} i & j & k & l \\ a \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ b \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} i & j & k & l \\ a \begin{bmatrix} y_a & -y_a & y_b & -y_b \\ y_c & -y_c & y_d & -y_d \end{bmatrix} \\ b \begin{bmatrix} y_a & -y_a & y_b & -y_b \\ y_c & -y_c & y_d & -y_d \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Откуда следует, что на пересечении строк a, b и столбцов i, k , блок входит со знаком плюс, а на пересечении тех же строк и столбцов j, l - со знаком минус.

Установим взаимосвязь табличного и узлового методов. Если все ветви схемы, кроме независимых источников, описать через проводимости, а независимые источники преобразовать в источники тока, то компонентные уравнения

$$Y_b \cdot V_b + Z_b \cdot I_b = W_b$$

могут быть записаны в виде

$$I_b = Y_b \cdot V_b - J_b, \quad (4.9)$$

т.к., согласно таблице 4.1, в этом случае $Z_b = -1$, а $I_b = J_b$. Подставляя в (4.9) уравнения связи напряжений ветвей и узлов, получим

$$I_b = Y_b \cdot A^t \cdot V_n - J_b$$

Наконец, используя уравнения Кирхгофа для токов

$$A \cdot I_b = A \cdot (Y_b \cdot A^t \cdot V_n - J_b) = 0,$$

или, используя известные соотношения

$$A \cdot Y_b \cdot A^t = Y,$$

$$A \cdot J_b = J_n,$$

можем записать

$$Y \cdot V_n = J_n. \quad (4.10)$$

Т.о., мы пришли к системе узловых уравнений и установили, при каких условиях табличная система преобразуется в узловую систему.

В заключение можно отметить, что табличный и модифицированный табличный методы позволяют представить, практически любые линейные и нелинейные ветви и в некоторых случаях (реактивные ветви при преобразовании алгебраических уравнений в дифференциальные) представлять ветви либо проводимостью, либо сопротивлением. Размерность уравнений остается, однако, довольно высокой и требуется алгоритмы для разряженных систем уравнений.

4.3 Модифицированный метод узловых потенциалов

Займемся модификацией узлового метода, с целью обеспечения возможности составления уравнений цепи, с произвольными идеальными элементами. Т.е. рассмотрим метод, совмещающий достоинства узлового и табличного методов. Идея этого метода заключена в разбиении элементов схемы на группы:

1) ветви, которые можно описать через проводимости (ток через них не будет определен);

2) ветви, которые нельзя описать через проводимости, либо важно определить протекающий через них ток;

3) ветви независимых источников тока.

В результате решения будем искать напряжения узлов V_n и токи ветвей второй группы I_2 . Напряжения ветвей можно определить позже по уравнению связи напряжений ветвей и узлов $V_b = A^t \cdot V_n$, а токи ветвей первой группы на основании компонентных уравнений $I_1 = Y_1 \cdot V_1$.

Как и в табличном методе, при расчете во временной области начальные токи в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах учитываются с помощью эквивалентных источников, следующих из преобразования Лапласа.

Итак, упорядочим элементы, оговоренным выше образом, и запишем уравнения Кирхгофа для токов в виде

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \end{bmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Уравнения Кирхгофа для напряжений упорядочиваются аналогично

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^t \\ A_2^t \\ A_3^t \end{bmatrix} \cdot V_n. \quad (4.12)$$

Это же уравнение можно расписать тремя уравнениями

$$V_1 = A_1^t \cdot V_n; \quad V_2 = A_2^t \cdot V_n; \quad V_J = A_3^t \cdot V_n. \quad (4.13)$$

Последнее уравнение используется для расчета напряжений на источниках тока. Компонентные уравнения для ветвей первой группы, как отмечалось выше, запишутся

$$Y_1 \cdot V_1 = I_1. \quad (4.14)$$

Запишем компонентные уравнения ветвей второй группы

$$Y_2 \cdot V_2 + Z_2 \cdot I_2 = W_2, \quad (4.15)$$

где W_2 содержит ненулевые элементы только для источников напряжения.

Перепишем уравнения Кирхгофа для токов (4.11) в виде

$$A_1 \cdot I_1 + A_2 \cdot I_2 = -A_3 \cdot J. \quad (4.16)$$

Используя компонентные уравнения первой группы (4.14), преобразуем их к виду

$$A_1 \cdot Y_1 \cdot V_1 + A_2 \cdot I_2 = -A_3 \cdot J. \quad (4.17)$$

В уравнениях (4.17) и (4.15) напряжения на ветвях первой группы выразим через узловые напряжения (4.13а)

$$A_1 \cdot Y_1 \cdot A_1^t \cdot V_n + A_2 \cdot I_2 = -A_3 \cdot J, \quad (4.18)$$

$$Y_2 \cdot A_2^t \cdot V_n + Z_2 \cdot I_2 = W_2. \quad (4.19)$$

Последние два уравнения запишем в матричном виде

$$\begin{bmatrix} A_1 \cdot Y_1 \cdot A_1^t & A_2 \\ Y_2 \cdot A_2^t & Z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_3 \cdot J \\ W_2 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Из узлового метода известно

$$A_1 \cdot Y_1 \cdot A_1^t = Y_{n1}; \quad (4.21a)$$

$$-A_3 \cdot J = J_n, \quad (4.21b)$$

где Y_{n1} - матрица узловых проводимостей ветвей первой группы; J_n - вектор эквивалентных узловых источников тока.

Конечная форма уравнений метода модифицированных узловых потенциалов имеет вид

$$\begin{bmatrix} Y_{n1} & A_2 \\ Y_2 \cdot A_2^t & Z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_n \\ W_2 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Таким образом, модифицированная узловая система представляет собой обычную узловую матрицу, построенную из ветвей первой группы и дополненную уравнениями ветвей второй группы по принципу модифицированных табличных уравнений. Вектор свободных членов, соответственно, представляет собой вектор эквивалентных узловых источников тока, дополненный напряжениями ветвей второй группы. Искомый вектор или вектор неизвестных содержит узловые напряжения и токи ветвей второй группы. Как следует из структуры уравнений, размерность системы равна $(n + n_2) \cdot (n + n_2)$, где n_2 - число ветвей второй группы.

Реализация модифицированного узлового метода достаточно проста и состоит в анализе признака ветви и внесении определенных коэффициентов либо в узловую матрицу или в ее дополнение. Источники тока вносятся в первую часть вектора свободных членов, а источники напряжения во вторую. Как и в модифицированном табличном методе, требуются пояснения лишь относительно блока $Y_2 \cdot A_2^t$. Реализация модифицированного узлового метода естественно совмещает признаки узлового и модифицированного табличного метода. Информация о каждой ветви отображается, в общем случае, либо в узловой матрице, либо в ее дополнении. Как и в модифицированном табличном методе, нет необходимости вычислять предварительно произведение $Y_2 \cdot A_2^t$. Повторим соответствующие выкладки еще раз. Две ветви проводимостью y_a и y_b , включенные, соответственно, между узлами i, j и k, l , в результате умножения фрагментов матриц Y_2 и A_2^t дают

$$Y_2 \cdot A_2^t = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} i & j & k & l \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_a & \\ & y_b \end{array} & \cdot \begin{array}{cccc} a & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} a & \begin{bmatrix} y_a & -y_a & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_b & -y_b \end{bmatrix} \end{array}.$$

Анализ результатов умножения показывает, что для формирования блока $Y_2 \cdot A_2^t$ из двухполюсных ветвей достаточно в транспонированной матрице инцидентий заменить ± 1 на $\pm y_d$. Включению, между узлами i, j , управляющей ветви, а между узлами k, l , управляемой ветви, в компонентной матрице соответствует блок (2·2). Умножение фрагментов матриц Y_2 и A_2^t в этом случае соответствует

$$Y_2 \cdot A_2^t = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} i & j & k & l \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_a & y_b \\ y_c & y_d \end{array} & \cdot \begin{array}{cccc} a & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} a & \begin{bmatrix} y_a & -y_a & y_b & -y_b \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} y_c & -y_c & y_d & -y_d \end{bmatrix} \end{array}.$$

Отсюда следует, что на пересечении строк a, b и столбцов i, k , блок входит со знаком плюс, а на пересечении тех же строк и столбцов j, l - со знаком минус.

Модифицированная узловая система уравнений сохраняет достоинства как узловой, так и табличной систем уравнений. Пониженная размерность системы сочетается с гибкостью представления различных типов ветвей.

Проиллюстрируем возможности модифицированного узлового метода на том же примере, что и для табличного метод (схема рисунка 4.2). Матрица инцидентий и компонентные уравнения ветвей второй группы (независимый источник напряжения E_1 и источник напряжения V_7 управляемый напряжением V_6) запишутся

$$A_2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} E_1 & V_6 & V_7 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \\ V_{n4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Полная модифицированная узловая система уравнений для рассматриваемого примера примет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & 6 & 7 \\
 1 & \left[\begin{array}{ccccccc}
 G_2 & & -G_2 & & 0 & & 0 & & -1 & 0 & 0 \\
 -G_2 & & G_2 + G_3 + sC_4 & & -G_3 & & -sC_4 & & 0 & 0 & 0 \\
 0 & & -G_3 & & G_3 + sC_5 & & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
 0 & & -sC_4 & & 0 & & sC_4 & & 0 & 1 & 0 \\
 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 1 \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & 1 & 0 \\
 0 & & 0 & & \mu & & -1 & & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{c}
 V_{n1} \\
 V_{n2} \\
 V_{n3} \\
 V_{n4} \\
 I_E \\
 I_2 \\
 I_3
 \end{array} = \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 E \\
 0 \\
 0
 \end{array}.
 \end{array}$$

Заметим, что коэффициент заполнения для этого метода равен $D = 17 / 49 = 34.69\%$, и существенно больше, чем у табличного метода.

4.4 Модифицированный узловой метод с проверкой

Модифицированный метод узловых потенциалов исключает из рассмотрения напряжения ветвей V_b и токи ветвей первой группы I_{b1} . При этом, однако, не исключаются лишние переменные, известные заранее (например, ток ветви ХХ источника тока управляемого напряжением, либо напряжение ветви КЗ источника тока управляемого током). Модифицированный узловой метод с проверкой свободен от этого недостатка, а также обходится без явного использования матрицы инцидентий. Все это делает его весьма привлекательным для реализации на ЭВМ.

Как и в модифицированном узловом методе, все ветви делятся аналогично на три группы. Внешне структура уравнений модифицированного узлового метода с проверкой также остается неизменной. Ветви независимых источников тока вносятся в первую часть вектора свободных членов. Ветви первой группы заносятся в блок, являющийся обычной подматрицей узловых проводимостей. Компонентные уравнения ветвей второй группы заносятся в дополнение блока узловой матрицы. Уравнения для напряжений, исходя из принятой структуры уравнений, заносятся в дополнительные строки, а для токов - в столбцы.

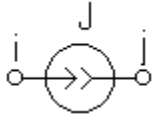
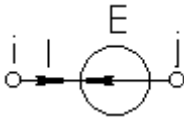
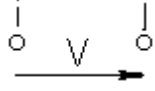
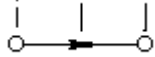
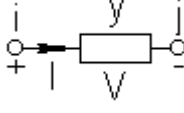
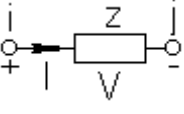
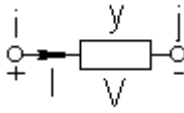
Для примера, пусть источник напряжения E включен между узлами i и j . Ток, протекающий от узла i к узлу j , обозначим как I . Тогда уравнение для напряжения и тока запишутся

$$\begin{aligned}
 V_i - V_j &= E, \\
 I_i &= I, \quad I_j = -I.
 \end{aligned}$$

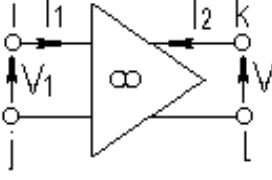
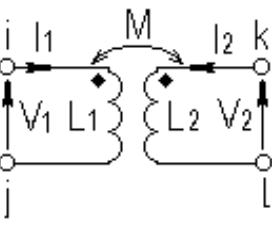
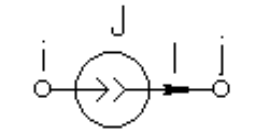
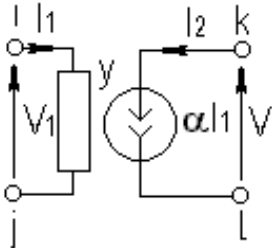
В результате, в текущую строку и столбец внесутся $+1$ и -1 , а в компоненту вектора свободных членов запишется ЭДС E . Аналогично записываются и отображаются уравнения и для других типов ветвей.

Представление элементов в модифицированной узловом методе с проверкой, показано в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Представление элементов в модифицированном узловом методе с проверкой

Элем.	Обозначения	Матрица / вектор	Уравнения
Ист. тока 3-гр.		$i \begin{bmatrix} -J \\ \dots \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}$	$I_i = J;$ $I_j = -J.$
Ист. напр. 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad I$ $i \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ E \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$V_i - V_j = E;$ $I_i = I;$ $I_j = -I.$
Цепь XX		-----	$V = V_i - V_j.$
Цепь КЗ 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad I$ $i \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$V_i - V_j = 0;$ $I_i = I;$ $I_j = -I.$
Проводимость 1-гр.		$v_i \quad \cdot \quad v_j$ $i \begin{bmatrix} y & \cdot & -y \end{bmatrix}$ $\cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} -y & \cdot & y \end{bmatrix}$	$I_i = y(V_i - V_j);$ $I_j = -y(V_i - V_j).$
Сопротивление 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad I$ $i \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} 1 & -1 & -z \end{bmatrix}$	$V_i - V_j - zI = 0;$ $I_i = I;$ $I_j = -I.$
Проводимость 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad I$ $i \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} y & -y & -1 \end{bmatrix}$	$y(V_i - V_j) - I = 0;$ $I_i = I;$ $I_j = -I.$

ИТУН Ист. тока, упр. током 1-гр.		$v_i \quad v_j$ $k \begin{bmatrix} g & \cdot & -g \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ $l \begin{bmatrix} -g & \cdot & g \end{bmatrix}$	$I_i = I_j = 0;$ $I_k = g(V_i - V_j);$ $I_l = -g(V_i - V_j).$
ИТУН Ист. тока, упр. током 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad v_k \quad v_l \quad I$ $i \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix}$ $k \begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ \\ \end{bmatrix}$ $l \begin{bmatrix} \\ \\ \\ -1 \\ \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} g & -g & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$I_k = -I_l = I_2;$ $g(V_i - V_j) = I_2.$
ИНУН Ист. напр., упр. напр. 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad v_k \quad v_l \quad I$ $i \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix}$ $k \begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ \\ \end{bmatrix}$ $l \begin{bmatrix} \\ \\ \\ -1 \\ \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$I_k = -I_l = I_2;$ $\mu(V_i - V_j) =$ $v_k - v_l = V_2.$
ИТУТ Ист. тока, упр. током 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad v_k \quad v_l \quad I$ $i \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ -1 \\ \end{bmatrix}$ $k \begin{bmatrix} \\ \\ \alpha \\ \\ \end{bmatrix}$ $l \begin{bmatrix} \\ \\ \\ -\alpha \\ \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$I_i = -I_j = I_1;$ $I_k = -I_l = \alpha I_1;$ $v_i - v_j = 0.$
ИНУТ Ист. напр., упр. напр. 2-гр.		$v_i \quad v_j \quad v_k \quad v_l \quad I_1 \quad I_2$ $i \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $j \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $k \begin{bmatrix} \\ \\ 0 & 1 \\ \\ \end{bmatrix}$ $l \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $m+1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -r & 0 \end{bmatrix}$	$I_i = -I_j = I_1;$ $I_k = -I_l = I_2;$ $v_i - v_j = 0;$ $v_k - v_l - rI_1 = 0.$

<p>ОУ Опер. усил. 2-гр.</p>		$ \begin{matrix} v_i & v_j & v_k & v_l & I \\ i & \left[\begin{matrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ m & \left[\begin{matrix} -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \right. \end{matrix} $	$ \begin{aligned} I_k &= -I_l = I_2; \\ v_i - v_j &= 0. \end{aligned} $
<p>Транс- фор- матор 2-гр.</p>		$ \begin{matrix} v_i & v_j & v_k & v_l & I_1 & I_2 \\ i & \left[\begin{matrix} & & & & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \\ m & \left[\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & x_1 & x_m \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_m & x_2 \end{matrix} \right] \end{matrix} \right. \\ m+1 & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & -1 & x_m & x_2 \end{matrix} \right] \end{matrix} $	$ \begin{aligned} I_i &= -I_j = I_1; \\ I_k &= -I_l = I_2; \\ v_i - v_j &= \\ sL_1 I_1 + sMI_2; \\ v_k - v_l &= \\ sMI_1 + sL_2 I_2. \end{aligned} $
<p>Ист. тока 2-гр.</p>		$ \begin{matrix} v_i & v_j & I \\ i & \left[\begin{matrix} \cdot & \cdot & 1 \\ j & \cdot & \cdot & -1 \\ m & \cdot & \cdot & 0 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ J \end{matrix} \right] \end{matrix} $	$ \begin{aligned} I_i &= -I_j = I; \\ I &= J. \end{aligned} $
<p>Ист. тока упр., током ветви 2-гр.</p>		$ \begin{matrix} v_i & v_j & v_k & v_l & I_1 & I_2 \\ i & \left[\begin{matrix} & & & & 1 & 0 \\ j & & & & -1 & 0 \\ k & & & & 0 & 1 \\ l & & & & 0 & -1 \\ m & \left[\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -1 \end{matrix} \right] \end{matrix} \right. \\ m+1 & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -1 \end{matrix} \right] \end{matrix} $	$ \begin{aligned} I_i &= -I_j = I_1; \\ I_k &= -I_l = I_2; \\ v_i - v_j &= 0; \\ \alpha I_1 - I_2 &= 0. \end{aligned} $

Из таблицы видно, как записываются и отображаются уравнения для токов и напряжений основных типов элементов. Вывод уравнений для других типов элементов не представит затруднений.

При таком подходе может быть описан, в частности идеальный ключ с двумя состояниями – КЗ и ХХ. ХХ удобно описать через проводимость $G \cdot (V_i - V_j) - I = 0$, положив $G = 0$, а КЗ – через сопротивление $V_i - V_j - R \cdot I = 0$, положив $R = 0$. Для обоих состояний можно записать $F \cdot V_i - F \cdot V_j - (F - 1) \cdot I = 0$, полагая для ХХ $F = 0$, для КЗ $F = 1$. Фрагмент матрицы коэффициентов для ключа имеет вид

$$\begin{array}{c}
 V_i \quad V_j \quad I \\
 i \left[\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & -1 \\ F & -F & F-1 \end{array} \right] \\
 j \\
 m
 \end{array}$$

Размерность модифицированной узловой системы с проверкой равна $(n + n'_2) \cdot (n + n'_2)$, где n'_2 – сокращенное число ветвей второй группы.

Проиллюстрируем возможности модифицированного узлового метода с проверкой на том же примере (схема рисунка 4.2.), что и предыдущие методы. Соблюдая преемственность с предыдущими методами, независимый E_1 и зависимый V_7 источники напряжения отнесем ко второй группе ветвей. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} G_2 & -G_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + s \cdot C_4 & -G_3 & -s \cdot C_4 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3 + s \cdot C_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s \cdot C_4 & 0 & s \cdot C_4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \\ V_{n4} \\ I_E \\ I_{V7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Коэффициент заполнения для этого метода составил $D = 15 / 36 = 41.67\%$.

Таким образом, модифицированный метод узловых потенциалов с проверкой позволяет дополнительно понизить порядок и повысить плотность заполнения матрицы коэффициентов.

Как и в табличном, модифицированном табличном и модифицированным узловым методами, можем по своему усмотрению менять представление ветвей (проводимостью либо сопротивлением). Это дает нам возможность получать математические модели в виде алгебраических систем уравнений удобных для преобразования Лапласа в систему обыкновенных дифференциальных и последующего расчета временных характеристик. Для формального преобразования алгебраической системы уравнений в систему обыкновенных дифференциальных уравнений недопустимо появление операторного выражения $1/s$ в матрице коэффициентов системы.

Это условие равносильно требованию, при расчете временных характеристик интегрированием дифференциальных уравнений, при формировании математической модели конденсаторы представлять проводимостями $j \cdot \omega \cdot C_i$, а катушки индуктивности – реактивными сопротивлениями $j \cdot \omega \cdot L_i$. Начальные условия в виде напряжений на

конденсаторах $C_i \cdot V_{0i}$ и токов через катушки индуктивности $L_i \cdot I_{0i}$ учитываются в векторе свободных членов W .

В результате матрица коэффициентов системы уравнений может быть разделена на действительную G и мнимую $s \cdot C$ части

$$T \cdot X = (G + s \cdot C) \cdot X = W. \quad (4.23)$$

Применив преобразование Лапласа, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$C \cdot X' = -G \cdot X + W. \quad (4.24)$$

Таким образом, достаточно подробно рассмотрены прямые методы формирования математических моделей электронных схем.

5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДЕЛИ

5.1 Основные понятия

При изучении сложных процессов и явлений обычно прибегают к моделям, выделяя из явления или процесса главное, позволяющее исследовать какую-либо его сторону в чистом виде – абсолютно твердое, упругое, черное тела в физике, стационарная, расширяющаяся, пульсирующая модели вселенной в астрономии и т.д.

В радиотехнике с первых шагов встречаемся с идеализированными моделями R, L, C элементов, накладывая условия квазистационарности электрических и магнитных полей, пренебрегая размерами, зависимостью от многих факторов. Токи и напряжения, также идеализация и производные понятия от напряженностей электрического и магнитного полей.

Таким образом, модель – это идеализация каких-то процессов и явлений путем отбрасывания несущественных факторов и взаимосвязей с целью выделить его из окружающего мира, оставляя наиболее важные связи.

Различают математические и физические модели. Математические модели обычно представляют собой системы уравнений (алгебраических, дифференциальных и т.д.). Физические модели чаще основываются на подобии закономерностей протекающих процессов и явлений. Для каждой модели существует свой диапазон применения – интервал изменения параметров.

Эквивалентные модели, используемые в радиотехнике, занимают промежуточное положение между математическими и физическими моделями. С одной стороны, в эти модели входят математические зависимости, описывающие процессы и явления. С другой стороны, построение эквивалентных моделей из идеализированных элементов ведется с учетом протекающих физических процессов. На основе эквивалентных моделей формируется математическая модель обычно в виде системы алгебраических либо дифференциальных уравнений.

Построение модели с учетом физики работы сложного элемента либо устройства в какой-то степени гарантирует адекватность таких моделей.

В радиотехнике в качестве моделей и идеальных элементов используются сопротивления R , индуктивности L , емкости C , а также такие идеализированные понятия, такие как токи I и напряжения U . На основе идеализированных элементов строятся модели – эквивалентные схемы более сложных элементов (диоды, транзисторы, микросхемы). В зависимости от решаемых задач различают и используют линейные и нелинейные, сигнальные, шумовые, температурные и т.д. модели.

5.2 Модели полупроводникового диода

Полупроводниковый диод (рисунок 5.1) – достаточно широко распространенный элемент, выполненный из полупроводникового материала n или p типа, на котором с помощью диффузии или другим способом образован контакт с полупроводниковым материалом противоположного типа проводимости – pn - переход. Диоды с барьером Шоттки представляют собой контакт полупроводникового материала с металлом.

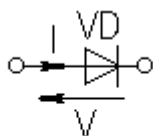


Рисунок 5.1 - Диод

Нелинейная статическая модель диода. Для полупроводникового диода характерна вольт - амперная зависимость (рисунок.5.2), описываемая выражением

$$I = I_r \cdot (\exp(q \cdot V / (k \cdot T)) - 1) = I_s - I_r, \quad (5.1)$$

где q – заряд электрона, $q = 1.6022 \cdot 10^{-19}$; k – постоянная Больцмана, $k = 1.3806 \cdot 10^{-23}$; T – температура в градусах Кельвина ($276.16^\circ C = 0^\circ K$); V – напряжение приложенное к диоду; I_s, I_r – прямой и обратный токи диода. Обратный ток диода соответствует току насыщения.

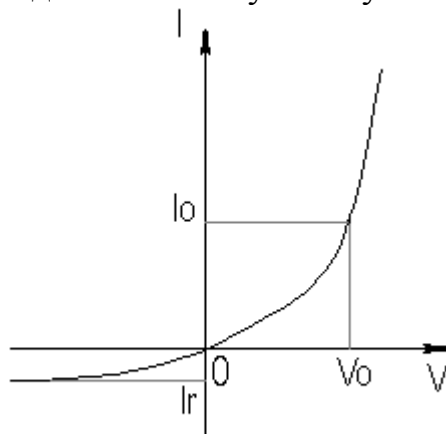


Рисунок 5.2 - ВАХ диода

Часто используют обозначение $V_T = k \cdot T / q$, называемое температурным потенциалом. Для полупроводникового диода $V_T \cong 25.6$ мВ. Ток насыщения принимает значения $I_r \cong (10^{-6} \div 10^{-9})$ А. Для закрытого диода при $V < -3 \cdot V_T$ ($V \cong 75$ мВ), $I \cong -I_r$, т.е. ток насыщения соответствует величине тока диода в закрытом состоянии. Для открытого диода, при $V > 4 \cdot V_T$, выражение (5.1) можно упростить до

$$I = I_r \cdot \exp(V / V_T) = I_s. \quad (5.2)$$

В соответствии с рисунком.5.2, прикладывая к диоду напряжение V_0 , получим ток диода I_0 . Величины V_0 и I_0 определяют рабочую точку диода

$$I_0 = I_r \cdot (\exp(V_0 / V_T) - 1) = I_s - I_r. \quad (5.3)$$

Производная вольт - амперной характеристики по напряжению в рабочей точке

$$dI / dV = g(V_0) = (I_r / V_T) \cdot \exp(V_0 / V_T) = (I_0 + I_r) / V_T \quad (5.4)$$

является динамической проводимостью диода и равна крутизне характеристики в точке (V_0, I_0) .

Иногда для гибкости представления вольт - амперной зависимости различных типов диодов вводят дополнительный коэффициент m_d

$$I_0 = I_r \cdot (\exp(V_0 / (m_d \cdot V_T)) - 1), \quad (5.5)$$

где m_d – эмпирический коэффициент, из диапазона (1÷2.5).

Все изложенное выше относится к так называемой нелинейной статической модели диода, обычно используемой при расчете по постоянному току. Для расчета на высоких частотах в режиме большого сигнала используется нелинейная динамическая модель диода (рисунок 5.3).

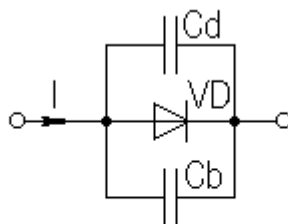


Рисунок 5.3 - Нелинейная динамическая модель диода

Нелинейная динамическая модель диода. Динамическая нелинейная модель, кроме диода, описываемого вольт – амперной характеристикой (соотношения 5.1-5.5), содержит барьерную (зарядную) C_b , и диффузионную C_d , емкости диода, отражающие его инерционные свойства на высоких частотах.

Заряды, накапливаемые на обратно смещенном переходе, вызывают запаздывание напряжения относительно тока. Для отражения этого

эффекта в эквивалентную модель диода включают барьерную емкость C_b , зависящую от напряжения на диоде

$$C_b = \begin{cases} \frac{C_{b0}}{(1-V/V_z)^\gamma} & \text{при } V \leq V_z - V, \\ K_1 \cdot V + K_2 & \text{при } V > V_z - V, \end{cases} \quad (5.6)$$

где $K_1 = dC_b / dV$, при $V = V_z - Z$; $K_2 = -K_1 \cdot (V_z - Z) + C_b$, при $V = V_z - Z$. Значение V_z определяется материалом ($\cong 0.8$ В- для кремния и $\cong 0.4$ В- для германия). Коэффициент γ принимает значения в интервале (1/2÷1/3). Емкость C_{b0} обычно составляет единицы либо доли пФ. Зависимость барьерной емкости от напряжения, в диапазоне от нуля до $V = V_z - Z$, подчиняется первой зависимости (5.6), а затем наблюдается довольно резкий максимум. Вторая зависимость (5.6), соответствует поведению производной в точке $V = V_z - Z$, где Z – принимает значения (0.05÷0.5). При такой аппроксимации, правда, не учитывается последующее падение емкости с ростом сопротивления, однако в ряде случаев такого представления достаточно. Для более точной аппроксимации можно воспользоваться сплайнами.

Диффузионная емкость C_d отображает явление диффузии носителей на открытом переходе

$$C_d = \begin{cases} \tau \cdot \frac{dI}{dV} & \text{при } V > 0, \\ 0 & \text{при } V \leq 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

где $\tau = 1 / (2 \cdot \pi \cdot f_{gr})$ – постоянная времени, определяющая граничную частоту диода f_{gr} ; dI / dV – динамическая проводимость диода в соответствии с (5.4).

Температурная модель диода. Вольт–амперная характеристика диода (5.1, 5.5) зависит от температуры. Прежде всего, необходимо учесть изменение температурного потенциала

$$V_T = (k \cdot T / q) \cdot (T / T_i), \quad (5.8)$$

где T_i – комнатная температура (293°К). Ток насыщения диода также зависит от температуры

$$I_r = I_{r0} \cdot (T_i / T) \cdot \exp((k_d \cdot (1 / T_i - 1 / T))), \quad (5.9)$$

где I_{r0} – ток насыщения диода при температуре 293°К; k_d – эмпирически определяемый коэффициент. Учет этих простейших зависимостей позволит производить расчет схем с полупроводниковыми диодами в довольно широком температурном интервале.

Линеаризованная модель диода. На низких частотах линеаризованная модель диода определяется средней составляющей тока диода и приращением, обусловленным сигналом (рисунок 5.4.)

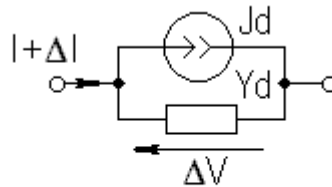


Рисунок 5.4 - Модель диода для приращений

На основании (5.1) и (5.4) имеем

$$I + dI = I_r \cdot (\exp(V / V_T) - 1) + (I_r / V_T) \cdot \exp(V / V_T) \cdot dV \quad (5.10)$$

или через приращения

$$I + \Delta I = I_r \cdot (\exp(V / V_T) - 1) + (I_r / V_T) \cdot \exp(V / V_T) \cdot \Delta V = J_d + Y_d \cdot \Delta V \quad (5.11)$$

Соотношение (5.11) соответствует представлению диода как нелинейного резистора в виде параллельного соединения источника тока J_d и эквивалентной проводимости диода Y_d . Такое представление диода иллюстрирует линеаризацию любого нелинейного элемента.

На малом сигнале, поскольку проводимость Y_d не зависит от тока источника J_d , последний исключают из рассмотрения.

Высокочастотная малосигнальная модель диода. На высоких частотах начинают сказываться дополнительные физические эффекты и диод нельзя трактовать как проводимость (рисунок 5.5).

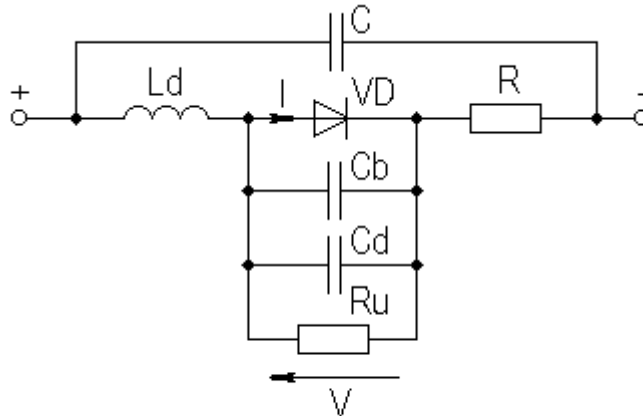


Рисунок 5.5 - Модель диода для высоких частот

Здесь R – объемное сопротивление материала;

C – межэлектродная емкость;

L_d – индуктивность выводов;

R_u – сопротивление утечки;

C_b – барьерная емкость перехода;

C_d – диффузионная емкость перехода.

Объемное сопротивление материала полупроводника для разных типов диодов составляет $R \cong (0.1 \div 100)$ Ом. Межэлектродная емкость зависит от конструкции и колеблется в пределах $C \cong (0.1 \div 50)$ пФ. Индуктивности выводов также определяются конструкцией и примерно

равны $L \cong (0.1 \div 50)$ нГ. Сопротивление утечки зависит от материала и технологии, и оценивается примерно $R_u \cong (1 \div 10)$ МОм. Барьерная и диффузионная емкости составляют от долей до единиц пФ для маломощных высокочастотных диодов и от единиц до десятков пФ для маломощных низкочастотных диодов. Более конкретные данные можно почерпнуть из справочных материалов.

Шумовая модель диода. Шумовые модели полупроводникового диода используются обычно в режиме малого сигнала. С диодом связывают три различных вида источников шума: тепловые – обусловленные омическими потерями, дробовые – обусловленные протеканием тока через $p-n$ - переход и фликкер шумы – зависящие от технологии изготовления и чистоты обработки поверхностей материала полупроводника. Интенсивность шумов принято выражать спектральной плотностью имеющей размерность $[Вт \cdot Гц]$ либо пропорциональными величинами $[В^2 \cdot Гц]$ или $[А^2 \cdot Гц]$. На схеме шумовые источники отображаются соответственно, либо последовательно включенным источником напряжения, либо параллельно включенным источником тока заданной интенсивности.

Тепловые шумы могут быть описаны следующими соотношениями

$$U_t = 4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot \Delta f, \quad (5.12)$$

$$I_t = 4 \cdot k \cdot T \cdot G \cdot \Delta f, \quad (5.13)$$

где k - постоянная Больцмана; T - температура в градусах Кельвина; R, G - сопротивление, проводимость потерь; Δf – полоса пропускания. Черта сверху означает усреднение по времени.

Дробовые шумы $p-n$ - перехода определяются током диода

$$I_f = 2 \cdot q \cdot I_d \cdot \Delta f, \quad (5.14)$$

либо с учетом (5.2) и раскрывая V_T , можем записать

$$I_f = 4 \cdot k \cdot T \cdot G_d \cdot \Delta f, \quad (5.15)$$

где $G_d = (q \cdot I_d) / (2 \cdot k \cdot T) = 0.5 \cdot g_d$.

Тепловые и дробовые шумы имеют белый спектр, т.е. спектральная плотность постоянна и не зависит от частоты.

Фликкер шумы имеют спектр типа $1/f$ и описываются эмпирической формулой

$$I_q = K \cdot I^v \cdot f^{-\psi} \cdot \Delta f, \quad (5.16)$$

где K, v, ψ - эмпирические коэффициенты, зависящие от типа диода. Фликкер шумы проявляются в основном в области низких частот, так как их интенсивность становится ниже тепловых и дробовых шумов на

частотах порядка (0.5-1.0) МГц.

Спектральные плотности шумовых источников или квадраты напряжений и токов пересчитываются через квадраты коэффициентов передачи либо квадраты передаточных проводимостей и сопротивлений.

Шумовые источники имеют случайную фазу, поэтому должны пересчитываться на выход схемы независимо.

5.3 Модели биполярного транзистора

Биполярный транзистор - это полупроводниковый элемент с двумя близко расположенными $p-n$ - переходами, образованными на подложке n - или p - типа. Материал подложки образует так называемую область базы, а области отделенные $p-n$ переходами с противоположной проводимостью, называют, соответственно, эмиттерной и коллекторной областями. Конфигурации и размеры $p-n$ - переходов зависят от мощности рассеиваемой на транзисторе, рабочих токов и напряжений, частотного диапазона. Для более эффективного отвода тепла коллекторная область имеет обычно большую площадь. В зависимости от материала подложки различают транзисторы $n-p-n$ и $p-n-p$ типа (рисунок. 5.6).

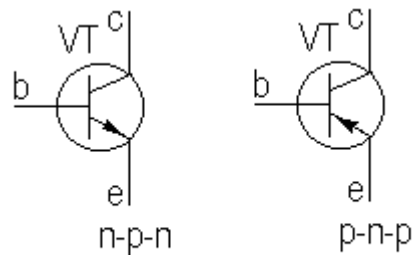


Рисунок 5.6 - Биполярные транзисторы

Внешние выводы транзистора называются, соответственно: b -база, c - коллектор, e - эмиттер. Статическая модель транзистора представляет собой выражения для токов эмиттера и коллектора, как функций разности напряжений на переходах $b e$ и $b c$

$$I_e = f(V_{be}, V_{bc});$$

$$I_c = f(V_{be}, V_{bc}).$$

Для определенности будем рассматривать $p-n-p$ транзистор, $n-p-n$ транзистор отличается лишь полярностью прикладываемых напряжений и направлением токов.

Статическая модель описывает так называемую активную область транзистора образованную двумя $p n$ - переходами без учета объемного сопротивления области базы (рисунок 5.7).

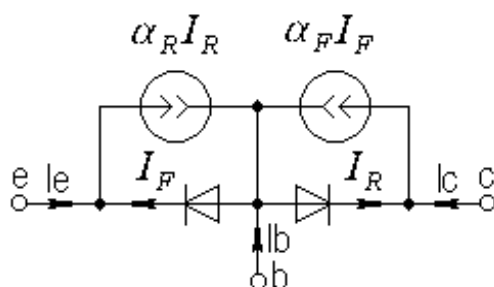


Рисунок 5.7 - Инжекционный вариант модели Эберса - Молла

Объемное сопротивление базы учитывают позже включением в модель соответствующего резистора.

Наиболее известной моделью биполярных транзисторов является модель Эберса – Молла (инжекционный вариант)

$$\begin{aligned} I_e &= -I_F + \alpha_R \cdot I_R; \\ I_c &= -I_R + \alpha_F \cdot I_F, \end{aligned} \quad (5.17)$$

при

$$\begin{aligned} I_F &= I_{e0} \cdot [\exp(V_{be} / V_T) - 1], \\ I_R &= I_{c0} \cdot [\exp(V_{bc} / V_T) - 1], \end{aligned} \quad (5.18)$$

где I_{e0}, I_{c0} – токи насыщения (обратные токи) переходов $b e$ – база - эмиттер и $b c$ – база - коллектор; V_{be}, V_{bc} – напряжения на переходах $b e$ и $b c$; α_F, α_R – коэффициенты прямой и обратной передачи тока транзистора в схеме с общей базой; V_T – температурный потенциал равный

$$V_T = k \cdot T / q. \quad (5.19)$$

В инжекционной модели константы α_F, α_R и токи насыщения I_{e0}, I_{c0} независимы, однако физические свойства транзистора требуют, чтобы выполнялось условие обратимости

$$\alpha_F \cdot I_{e0} = \alpha_R \cdot I_{c0} = I_0. \quad (5.20)$$

Используя это условие, можно сократить число независимых констант до трех и перейти к передаточному варианту модели Эберса - Молла (рисунок 5.8).

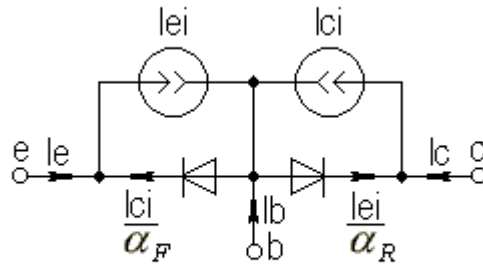


Рисунок 5.8 - Передаточный вариант модели Эберса - Молла

Это упрощение делает ее более предпочтительной для использования в автоматизированном проектировании. Уравнения передаточной модели запишутся

$$\begin{aligned} I_e &= I_{ei} - I_{ci} / \alpha_F; \\ I_c &= I_{ci} - I_{ei} / \alpha_R, \end{aligned} \quad (5.21)$$

при

$$\begin{aligned} I_{ei} &= I_0 \cdot [\exp(V_{be} / V_T) - 1] = I_{es} - I_{er}; \\ I_{ci} &= I_0 \cdot [\exp(V_{bc} / V_T) - 1] = I_{cs} - I_{cr}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $I_{es}, I_{er}, I_{cs}, I_{cr}$ – можно интерпретировать, как прямые и обратные токи эмиттерного и коллекторного переходов.

Часто, чтобы подчеркнуть зависимость от типа транзистора уравнения (5.22) записывают в виде

$$\begin{aligned} I_{ei} &= I_0 \cdot [\exp(V_{be} / (m_e \cdot V_T)) - 1]; \\ I_{ci} &= I_0 \cdot [\exp(V_{bc} / (m_c \cdot V_T)) - 1], \end{aligned} \quad (5.23)$$

где m_e, m_c – эмпирически определяемые коэффициенты.

Матричная форма записи передаточной модели Эберса – Молла имеет вид

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & -I_0 / \alpha_F \\ -I_0 / \alpha_R & I_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(V_{be} / V_T) - 1 \\ \exp(V_{bc} / V_T) - 1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Рассмотренные модели отображают лишь зависимости токов и напряжений активной области. Для более полного учета поведения транзистора на постоянном токе необходимо учесть объемные сопротивления r'_b, r'_c, r'_e – базовой, коллекторной и эмиттерной области.

Динамическая модель – режим большого сигнала. На переменном токе, особенно в области ВЧ, необходим учет барьерных и диффузионных емкостей $C_{eb}, C_{ed}, C_{cb}, C_{cd}$ – эмиттерного и коллекторного переходов, отображающих динамические эффекты накопления заряда (рисунок 5.9).

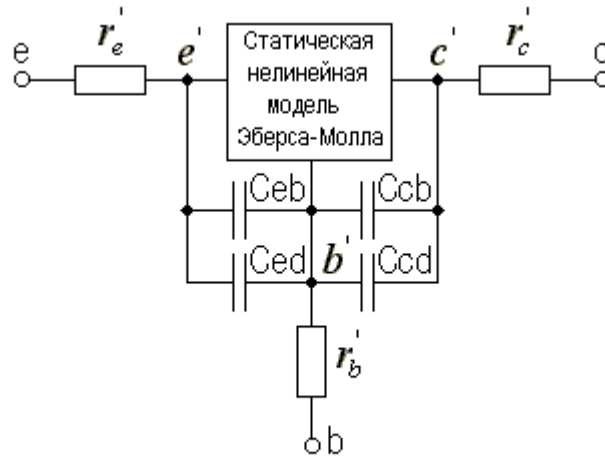


Рисунок 5.9 - Динамическая модель Эберса-Молла

Барьерные емкости переходов C_{be}, C_{bc} – являются, как и в случае с диодом, функциями напряжений на переходах. Так для барьерной емкости эмиттерного перехода можем записать

$$C_{be} = \begin{cases} \frac{C_{e0}}{(1 - V_{be}/V_e)^\gamma} & \text{при } V_{be} \leq V_e - Z_e, \\ K_1 \cdot V_{be} + K_2 & \text{при } V_{be} > V_e - Z_e, \end{cases} \quad (5.25)$$

где $K_1 = dC_e / dV_{be}$, при $V_{be} = V_e - Z_e$; $K_2 = -K_1 \cdot (V_e - Z_e) + C_{be}$, при $V_{be} = V_e - Z_e$. Значение V_e для эмиттерного перехода $\cong 0.6$ В. Коэффициент γ_e принимает значение $\cong 1/3$. Емкость C_{be} обычно составляет единицы либо доли пФ. Коэффициент Z_e принимает значения $(0.05 \div 0.5)$. Аналогичные уравнения описывают барьерную емкость коллекторного перехода. В выражениях (5.25) достаточно для этого заменить индекс e индексом c . Для коллекторного перехода $V_c \cong 0.8$ В, $\gamma_c \cong 1/2$. При постановке сопротивлений r_b', r_c', r_e' , в приведенных соотношениях, V_{be}, V_{bc} заменяют на V_{be}', V_{bc}' .

Диффузионная емкость эмиттерного перехода C_{de} отображает изменение концентрации носителей на открытом переходе на ВЧ

$$C_{de} = \begin{cases} \tau_F \cdot g_e & \text{при } V_{be} > 0, \\ 0 & \text{при } V_{be} \leq 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

где

$$\tau_F = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_T} & \text{при } I_c = 0, \\ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_T} - (V_T / I_{cF}) [C_e + C_c (1 + r_c' / (V_T / I_{cF}))] & \text{при } I_c \neq 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

и

$$g_e = dI_e / dV_{be} = (I_0 / V_T) \cdot \exp(V_{be} / V_T) = (I_{es} + I_{er}) / V_T. \quad (5.28)$$

Постоянная времени τ_F полу эмпирически определяется из так называемой зарядо - управляемой модели транзистора, которая здесь не

рассматривается. Через f_T обозначают верхнюю граничную частоту, при которой коэффициент передачи по току β , в схеме с ОЭ, становится равным единице; g_e – дифференциальная проводимость эмиттерного перехода в рабочей точке.

Диффузионная емкость коллекторного перехода C_{dc} – отображает изменение концентрации подвижных носителей заряда в коллекторной области при быстром изменении полярности

$$C_{dc} = \begin{cases} \tau_R \cdot g_c & \text{при } V_{bc} > 0, \\ 0 & \text{при } V_{bc} \leq 0, \end{cases} \quad (5.29)$$

где

$$\tau_R = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta_R = 0 \\ \frac{\tau_{sat}}{\beta_R} \cdot \left[1 + \beta_R - \frac{\beta_F \cdot \beta_R}{(1 + \beta_F)} \right] - \left[\frac{\beta_F \cdot (1 + \beta_F)}{\beta_R \cdot (1 + \beta_R)} \right] \cdot \tau_F & \text{при } \beta_R \neq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

$$g_c = dI_c / dV_{bc} = (I_0 / V_T) \cdot \exp(V_{bc} / V_T) = (I_{cs} + I_{cr}) / V_T, \quad (5.31)$$

$$\beta_F = \alpha_F / (1 - \alpha_F); \quad \beta_R = \alpha_R / (1 - \alpha_R). \quad (5.31)$$

Постоянные времени τ_R и τ_{sat} – полуэмпирически определяемые величины из так называемой зарядо - управляемой модели транзистора, g_c – дифференциальная проводимость коллекторного перехода.

Температурные модели полупроводниковых транзисторов. Вольт – амперные зависимости коллекторного и эмиттерного переходов транзистора (5.17, 5.18, 5.21, 5.22) зависят от температуры. Прежде всего, необходимо учесть изменение температурного потенциала (5.19)

$$V_T = (k \cdot T / q) \cdot (T / T_i), \quad (5.33)$$

где T_i – комнатная температура (293°K).

Ток насыщения диода также зависит от температуры

$$I_{e0} = I_{e00} \cdot (T_i / T)^3 \cdot \exp(k_e \cdot (1 / T_i - 1 / T)), \quad (5.34)$$

$$I_{c0} = I_{c00} \cdot (T_i / T)^3 \cdot \exp(k_c \cdot (1 / T_i - 1 / T)), \quad (5.35)$$

где I_{e00}, I_{c00} – токи насыщения эмиттерного и коллекторного переходов при температуре (293°K); k_e, k_c – эмпирически определяемые коэффициенты. В случае передаточного варианта модели следует положить

$$I_{e0} = I_{c0} = I_0; \quad I_{e00} = I_{c00} = I_{00}; \quad k_e = k_c = k.$$

Температурной зависимостью α_F, α_R – коэффициентов прямой и обратной передачи тока в схеме с общей базой в первом приближении можно пренебречь.

Учет этих простейших зависимостей позволит производить расчет схем с полупроводниковыми транзисторами в довольно широком

температурном интервале.

Малосигнальная модель. При малых сигналах относительно постоянных сигналов и токов в рабочей точке используют малосигнальные линейные модели. Малосигнальные линейные модели можно получить дифференцированием вольт-амперных характеристик транзистора. Так для транзистора включенного, например, по схеме с общей базой в общем случае имеем

$$\begin{aligned} I_e &= f_1(V_{be}, V_{bc}); \\ I_c &= f_2(V_{be}, V_{bc}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Рабочая точка определяется подачей постоянных напряжений V_{be0}, V_{bc0} . Выражая дифференциалы этих функций по независимым переменным, в окрестности рабочей точки, получим

$$\begin{aligned} dI_e &= (\partial f_1 / \partial V_{be}) \cdot dV_{be} + (\partial f_1 / \partial V_{bc}) \cdot V_{bc}; \\ dI_c &= (\partial f_2 / \partial V_{be}) \cdot dV_{be} + (\partial f_2 / \partial V_{bc}) \cdot V_{bc}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Интерпретируя дифференциалы токов и напряжений как изменения токов и напряжений в окрестности рабочей точки, получим систему Y -параметров активной области транзистора включенного по схеме с общей базой

$$\begin{aligned} I_e &= y_{11} \cdot V_{be} + y_{12} \cdot V_{bc}; \\ I_c &= y_{21} \cdot V_{be} + y_{22} \cdot V_{bc}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Этим уравнениям соответствует эквивалентная модель с двумя управляемыми источниками (рисунок 5.10).

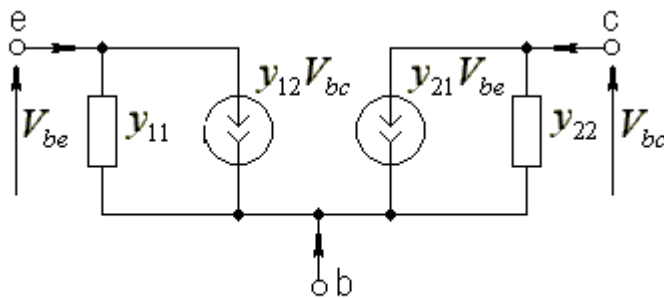


Рисунок 5.10 - Модель транзистора как активного четырехполюсника

Пренебрегая обратной крутизной y_{12} и произведя очевидные замены

$$\begin{aligned} y_{11} &= \partial I_e / \partial V_{be} = y_e = g_e + j \cdot \omega \cdot C_e; \\ y_{21} &= \partial I_c / \partial V_{be} = S = (\partial I_c / \partial I_e) \cdot (\partial I_e / \partial V_{be}) = \alpha \cdot y_e; \\ y_{22} &= \partial I_c / \partial V_{bc} = j \cdot \omega \cdot C_c, \end{aligned}$$

приходим к малосигнальной модели активной области транзистора (рисунок 5.11).

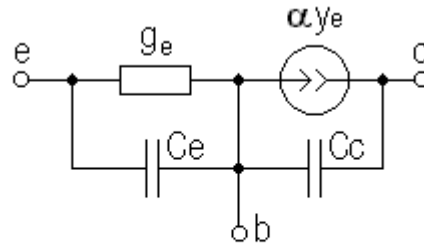


Рисунок 5.11 - Малосигнальная модель активной области транзистора

Высокочастотная модель. Дополняя эту модель, объемным сопротивлением области базы r_b , контактным сопротивлением эмиттерного вывода Δr_e , межэлектродными емкостями C_{be}, C_{bc} , индуктивностями выводов L_e, L_b, L_c , и, разделяя коллекторную емкость C_c , из физико-топологических соображений, на активную C_{ca} и пассивную C_{cp} части, получим физическую малосигнальную высокочастотную модель биполярного транзистора (рисунок 5.12).

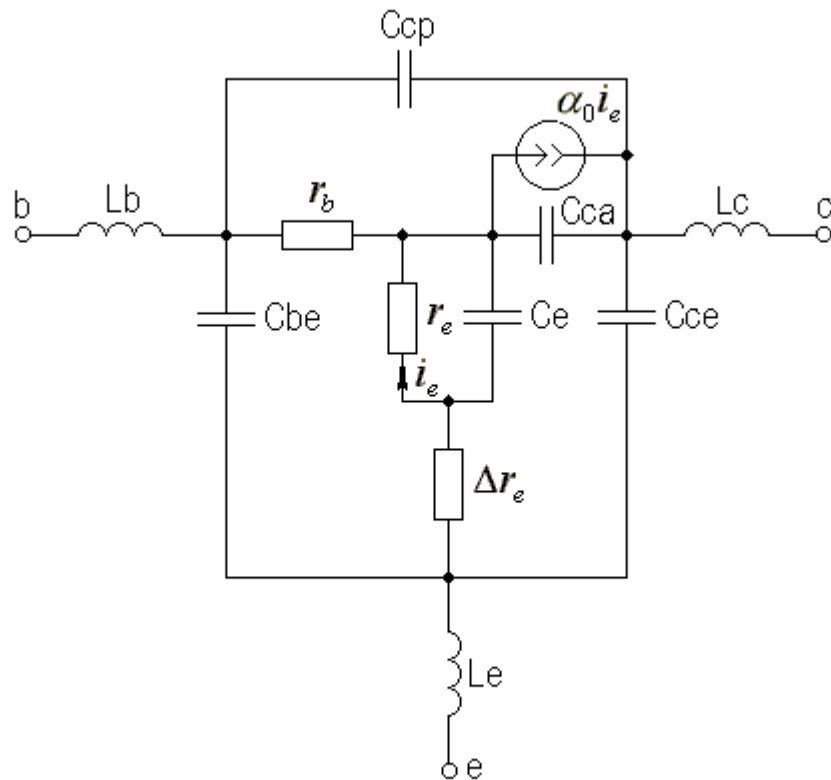


Рисунок 5.12 - Высокочастотная модель биполярного транзистора

В области СВЧ применяют и более сложные модели, в которых, с целью отображения распределенного характера структуры транзистора, сравнимой с длиной волны рабочего диапазона, область базы, сопротивление и пассивную емкость коллектора, разбивают на несколько участков. В аппроксимацию частотной зависимости коэффициента передачи по току, в схеме с общей базой, включают постоянные времени и фазовые поправки за счет эмиттерной, коллекторной и базовой областей, и

за счет времени пролета носителей через базовую область.

Шумовые модели биполярных транзисторов. Для биполярных транзисторов характерны тепловые шумы, обусловленные объемным сопротивлением области базы и другими резистивными потерями, дробовые шумы (шумы генерации-рекомбинации) эмиттерного и коллекторного $p-n$ - переходов за счет протекания токов и шумы разделения, обусловленные флуктуациями разделения тока эмиттера на токи коллектора и базы. Спектр тепловых, дробовых и шумов разделения считается белым. Необходимо отметить, что природа возникновения дробовых шумов и шумов разделения сходна, поэтому в некоторых моделях шумы разделения не выделяют и они как бы входят в состав дробовых шумов. Кроме перечисленных высокочастотных шумов, различают и низкочастотные шумы, имеющие ограниченный спектр. Это, прежде всего, фликкер-шумы, со спектром вида $1/f^n$, обусловленные поверхностными эффектами и утечкой. Наибольшее распространение среди прочих получили шумовые модели Джаколетто и Ван-дер-Зила (рисунок 5.13).

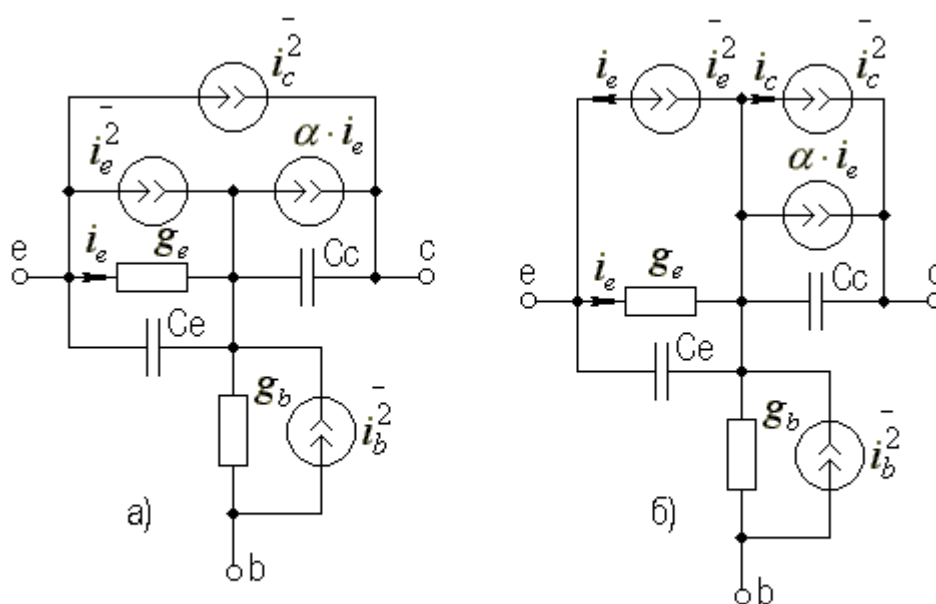


Рисунок 5.13 - Шумовые модели Джаколетто (а) и Ван-дер-Зила (б)

Из рисунка 5.13 видна локализация тепловых и дробовых источников шума. Фликкер-шумы локализуются, в основном, на коллекторном переходе, поскольку его площадь превышает площадь эмиттерного перехода.

Шумовые источники представляют генераторами усредненных по времени квадратов напряжения либо тока. Мы, в силу разных причин, отдадим предпочтение представлению в виде источника тока, тем более что преобразование генератора тока в генератор напряжения в соответствии с соотношениями Тевенина - Нортон элементарны.

Тепловые шумы базы для приведенных моделей запишутся

$$i_b = 4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f \cdot g_b, \quad (5.39)$$

где k – постоянная Больцмана; T – температура среды в градусах Кельвина; Δf – полоса пропускания; $g_b = 1/r_b$ – проводимость области базы.

Некоррелированные источники дробовых шумов для модели Джиаклетто запишутся

$$i_e = 2 \cdot q \cdot I_b \cdot \Delta f = 2 \cdot q \cdot (1 - \alpha) \cdot I_e \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot (1 - \alpha) \cdot g_e \cdot \Delta f, \quad (5.40)$$

$$i_c = 2 \cdot q \cdot I_c \cdot \Delta f = 2 \cdot q \cdot \alpha \cdot I_e \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot \alpha \cdot g_e \cdot \Delta f. \quad (5.41)$$

где q – заряд электрона; $g_e \cong I_e / V_T$.

Величина фликкер – шума может быть определена по формуле

$$i_g = K \cdot I^2 \cdot f^{-n} \cdot \Delta f, \quad (5.42)$$

где K – постоянная, зависящая от материала объема полупроводника; I – ток соответствующего перехода; n – эмпирический коэффициент, $n \cong (0.9 \div 1.2)$.

В модели Ван-дер-Зила используется иная локализация шумовых источников, но уже коррелированных и имеющих другие значения.

Источники дробовых шумов, на эмиттерном и коллекторном переходах, запишутся

$$i_e = 2 \cdot q \cdot I_e \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot g_e \cdot \Delta f, \quad (5.43)$$

$$i_c = 2 \cdot q \cdot I_c \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot \alpha \cdot g_e \cdot \Delta f. \quad (5.44)$$

Корреляция между этими источниками описывается следующим соотношением

$$i_e \cdot i_c = 2 \cdot k \cdot T \cdot \alpha \cdot y_e \cdot \Delta f, \quad (5.45)$$

где $y_e = g_e + j \cdot \omega \cdot C_e$.

Модели Джиаклетто и Ван-дер-Зила, на первый взгляд, существенно отличаются друг от друга, однако, если для каждой из них записать матрицу спектральных плотностей шумовых источников, то обнаружится, что они практически совпадают. Имеющиеся отличия проявятся лишь на очень высоких частотах из-за того, что $y_e \neq g_e$.

Кроме рассмотренных, известно большое число других шумовых моделей, однако, при детальном рассмотрении доказывается их практически полная эквивалентность. Это касается таких моделей, как Монтгомери и Кларка, Гугенбилля и Струтта.

5.4 Модели полевого транзистора

Полупроводниковые приборы, использующие модуляцию сопротивления полупроводникового материала поперечным электрическим полем, называют полевыми транзисторами (ПТ). Электрический ток в полевых транзисторах образуется либо электронами, либо дырками.

Транзистор представляет собой пластину или слой полупроводникового материала, нанесенного на металлическую либо полупроводниковую (с противоположным типом проводимости) подложку. Этот полупроводник образует канал, на концах которого сделаны электроды - выводы истока s и стока d . На канале между истоком и стоком определенным технологическим приемом выполняется затвор g в виде контакта с областью канала, который является еще одним электродом - выводом.

В зависимости от типа исполнения контакта, различают: МДП-транзисторы с контактом металл-диэлектрик-полупроводник; МОП-транзисторы с контактом металл-окисел-полупроводник; транзисторы с $p-n$ - переходом - контактом между полупроводниками разного типа проводимости; транзисторы с барьером Шоттки с контактом металл-полупроводник. Некоторое представление о типах ПТ и об их схемных обозначениях дает рисунок 5.14.

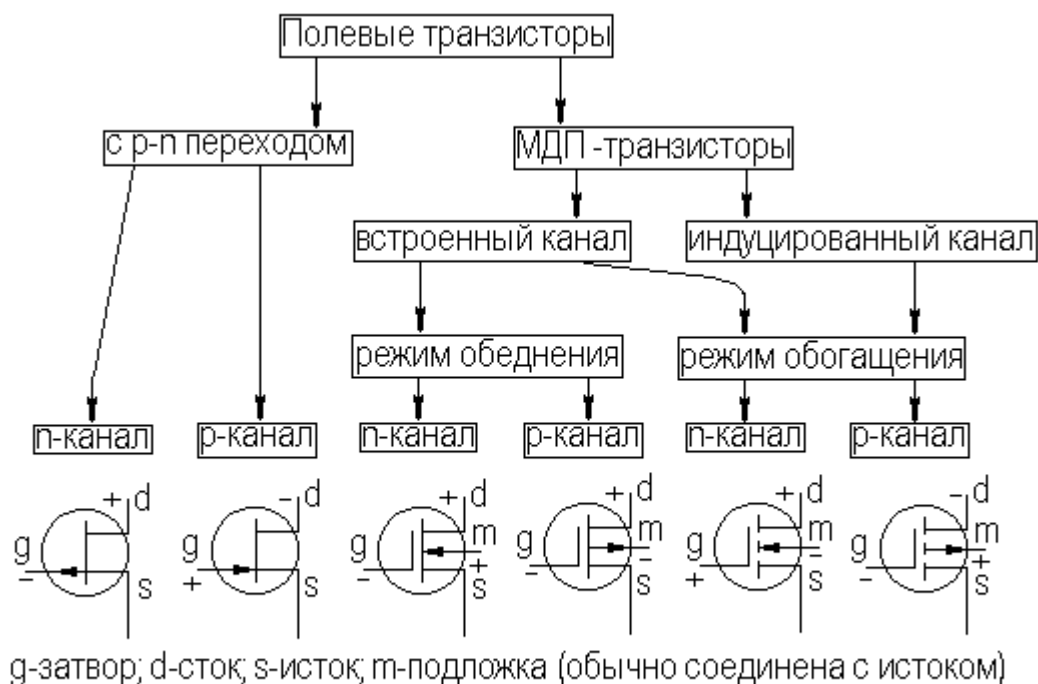


Рисунок 5.14 - Основные типы ПТ

МДП и МОП - транзисторы практически одинаковые, только в МОП транзисторах, вместо диэлектрика, используется оксид (диоксид) кремния. Эти типы транзисторов отличаются повышенным входным сопротивлением и, соответственно, большей инерционностью по сравнению транзисторами с $p-n$ - переходом и барьером Шоттки. В МДП и МОП транзисторах принципиально наличие подложки m из

полупроводникового материала противоположной проводимости с выводом в качестве дополнительного электрода. Подавая потенциал на электрод подложки, можно аналогично потенциалу затвора управлять характеристиками транзистора.

В основном принцип работы всех типов транзисторов примерно одинаков, поэтому в качестве примера для изложения возьмем транзисторы с $p-n$ -переходом. Различают транзисторы с каналами p - и n -типа, однако все рассуждения сохранят смысл при изменении полярности на электродах. Для определенности рассмотрим транзистор с каналом p -типа.

Приложение напряжения между истоком и стоком при постоянном напряжении на затворе вначале будет приводить почти к линейному возрастанию тока канала -это режим управляемого сопротивления. Дальнейшее увеличение напряжения сток-исток V_{ds} приведет к перекрытию канала под затвором со стороны стока, за счет возрастания разности потенциалов между затвором и каналом, из-за падения напряжения вдоль канала, за счет протекающего тока. При этом произойдет практическая стабилизация тока – это режим насыщения. При этом увеличение напряжения V_{ds} практически не приводит к увеличению тока, т.к. пропорционально увеличивается падение напряжения вдоль канала и переход запирается еще больше и перекрывает канал. Напряжение сток-исток, при котором наступает режим насыщения, называется напряжением насыщения V_N , а соответствующий ток - током насыщения I_N . При нулевом смещении на затворе напряжение и ток насыщения обозначим соответственно V_{0N}, I_{0N} .

Если на затвор подавать отрицательное относительно канала, а значит и затвора, напряжение V_{gs} , то это приведет к смещению перехода в обратном направлении, соответственно увеличению его размеров и уменьшению тока канала за счет перекрытия канала электрическим полем запираемого перехода. Увеличение отрицательного смещения на затворе будет приводить вначале к пропорциональному уменьшению тока. Однако, начиная с некоторой величины смещения, канал почти полностью перекрывается, и незначительной величины ток будет обусловлен поверхностными эффектами и утечками. Напряжение на затворе V_{gs} , при котором исчезает ток канала, называется напряжением отсечки V_0 .

Вольт-амперные характеристики полевого транзистора в схеме включения с общим истоком (ОИ) могут быть представлены следующими зависимостями

$$I_g = 0;$$

$$I_d = f(V_{gs}, V_{ds}).$$

Статическая нелинейная модель полевого транзистора. Током

затвора I_g , в первом приближении, можно пренебречь. Вольт-амперные выходные характеристики полевого транзистора определяется следующими выражениями:

для линейной области, где $V_{ds} < V_{gs} - V_0 - V_c$,

$$\frac{I_d}{I_{0N}} = 3V_{ds} / V_0 - 2[((V_{gs} - V_0 + V_c) / V_0)^{1.5} - ((V_{gs} + V_c) / V_0)^{1.5}] \quad (5.46)$$

для области насыщения, где $V_{ds} > V_{gs} - V_0 - V_c$,

$$\frac{I_d}{I_{0N}} = 1 - 3(V_{gs} - V_0 + V_c) / V_0 + 2((V_{gs} - V_{ds} + V_c) / V_0)^{1.5}] , \quad (5.47)$$

где V_0 - напряжение отсечки канала (обычно около 4 В); V_c - контактная разность потенциалов (порядка 0.7В), отрицательная, для n -канального и положительная, для p -канального полевых транзисторов. Приведенные соотношения соответствуют статической модели полевого транзистора (рисунок 5.15).

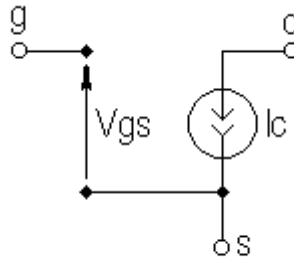


Рисунок 5.15 - Статическая модель ПТ

Динамическая нелинейная модель полевого транзистора. Для учета динамических эффектов в режиме большого сигнала статическую модель рисунка 5.15 необходимо дополнить нелинейной емкостью затвор – исток

$$C_{gs} = 2C_0 [1 + ((V_{gs} + V_c) / V_0)^{0.5}] / [1 + 2((V_{gs} + V_c) / V_0)^{0.5}]^2 , \quad (5.48)$$

где C_0 - половина полной емкости затвор-исток, при $V_{gs} + V_c = 0$ и $V_{ds} = -V_0$. Кроме того, обычно включают линейную емкость затвор-сток C_{gs} , величиной порядка (0.1÷0.01) пФ. В результате нелинейная динамическая модель имеет вид, показанный на рисунке 5.16.

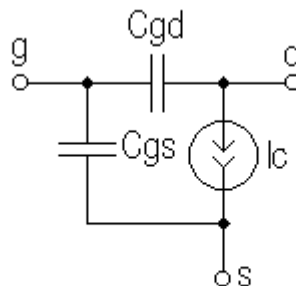


Рисунок 5.16 - Нелинейная динамическая модель ПТ

В режиме большого сигнала для вычисления крутизны и выходной

проводимости, на основании выражений (5.46, 5.47), необходимо взять отношения конечных приращений $\Delta I_d / \Delta V_{gs}$ и $\Delta I_d / \Delta V_{dc}$.

Температурные эффекты в полевом транзисторе. Влияние температуры на характеристики полевого транзистора с pn - переходом проявляется через изменение следующих параметров: скорости генерации не основных носителей в области пространственного заряда (ОПЗ); удельного сопротивления канала; величины барьерного потенциала перехода затвор - канал.

Зависимость тока затвора от температуры. Ток обратного смещенного кремниевого перехода определяется, в основном, процессами генерации и рекомбинации в ОПЗ. При постоянной плотности генерационно - рекомбинационного тока, обратный ток I_g линейно зависит от толщины ОПЗ и экспоненциально от температуры, так что при $V_{gs} \geq 0.1$ В

$$\Delta I_g = I_g - I_{g0} = V_{gs}^\gamma \cdot \exp(-E_a / V_T), \quad (5.49)$$

где I_{g0} - константа; γ - коэффициент, зависящий от распределения примеси на переходе ($\gamma \approx 1/2 \div 1/3$); E_a - энергия активации, при температурах близких к комнатной, составляет ($E_a \approx 0.55$ эВ- половина ширины запрещенной зоны); $V_T = k \cdot T / q$ - температурный потенциал. При температурах, более 100° С, начинает преобладать диффузионный ток, величина E_a в этом случае ≈ 1.1 эВ, а обратный ток, практически не зависит от V_{gs} , при ($V_{gs} \geq 0.1$ В).

Зависимость $I_g(V_{gs})$ достаточно сложна, так как, например, напряжение смещения изменяется вдоль перехода и зависит от V_{gs} до V_{ds} , а в обратный ток I_g дают вклад области ОПЗ, лежащие вне канала, однако влияние температуры по-прежнему описывается экспоненциальным множителем выражения (5.49).

Влияние температуры на канал. Температурная зависимость тока стока определяется в основном изменением величины удельной проводимости χ , не обедненной области канала, и барьерного потенциала V_c . Эти факторы влияют на ток стока в противоположных направлениях, что позволяет путем соответствующего выбора рабочей точки (термостабильная точка) добиться их взаимной компенсации.

Запишем условие выполнения равенства $dI_d / dT = 0$ в режиме насыщения

$$I_{dz} / g_{mz} = -(dV_c / dT) / ((1/\chi) \cdot (d\chi / dT)) \quad (5.50)$$

где индекс z - обозначает величины соответствующие нулевому температурному коэффициенту; g_m - крутизна в режиме насыщения.

Так как $(1/\chi) \cdot (d\chi / dT)$ является функцией температуры, точная компенсация возможна лишь при одном значении T . На практике, однако,

удается получить весьма малые изменения V_{gs} в широком диапазоне температур.

Часто представляет интерес связь величин температурного дрейфа V_{gs} и V_c в заданной рабочей точке

$$dV_{gs} / dT = dV_c / dT \cdot (1 - (I_d / I_{dz})^{1/n}), \quad (5.51)$$

где n – эмпирически определенный коэффициент, $n \cong 2$.

Это соотношение описывает температурную зависимость напряжения затвора, обеспечивающую постоянство тока стока. Из соотношения также следует, что температурный коэффициент напряжения затвора может быть положительным, нулевым и отрицательным в зависимости от соотношения I_d / I_{dz} .

Напряжение на затворе V_{gs} , обеспечивающее нулевой температурный дрейф описывается соотношением

$$|V_{gs}| = |V_{p0}| - n \cdot I_{dz} / g_{mz}, \quad (5.52)$$

где V_{p0} – напряжение смыкания (напряжение затвор – сток соответствующее смыканию ОПЗ).

Поскольку величина $|V_{p0}|$ обычно лежит в пределах (1 ÷ 5 В), нулевой температурный коэффициент часто реализуется при V_{gs} , близким к напряжению отсечки, когда крутизна g_m обычно мала.

Малосигнальная высокочастотная модель ПТ. Продифференцировав соотношения (5.46, 5.47) можно определить крутизну и проводимость канала, вычислив производные $g_m = dI_d / dV_{gs}$ и $y_d = dI_d / dV_{gs}$ в окрестности рабочей точки. В результате получим малосигнальную высокочастотную модель полевого транзистора (рисунок 5.17).

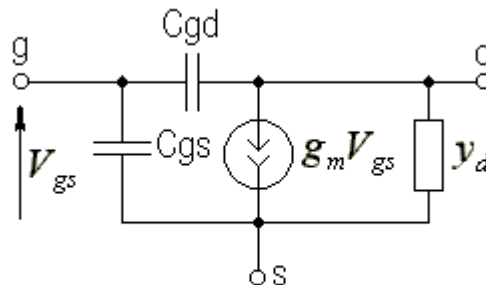


Рисунок 5.17 - Малосигнальная модель ПТ

Уточненная малосигнальная модель полевого транзистора может включать контактные сопротивления электродов. С точки зрения корректного учета шумов затвора, включают в цепь затвора последовательно с C_{gs} сопротивление потерь r_{gs} . В диапазоне СВЧ в

эквивалентную модель включают межэлектродные емкости и индуктивности выводов.

Шумовые модели полевых транзисторов. Среди основных источников шумов полевых транзисторов можно назвать: дробовые шумы затвора; тепловые шумы канала; тепловые шумы затвора, которые интерпретируются как наведенные (индуцированные) шумы затвора тепловым шумом канала через емкость канал-затвор.

Как известно, тепловые и дробовые шумы являются белыми. Наведенные шумы канала пропорциональны квадрату частоты. Кроме того, в силу своей природы наведенные шумы затвора и тепловые шумы канала взаимно коррелированы со спектральной плотностью, пропорциональной частоте. Тепловые шумы возникают на последовательных контактных сопротивлениях и сопротивлениях потерь затвора, стока, истока.

В области низких частот, наряду с упомянутыми шумами, заметно сказывается шум, возрастающий с уменьшением частоты. Основной причиной его возникновения является флуктуация плотности носителей заряда, протекающих через канал, обусловленная процессами генерации-рекомбинации на дефектных центрах канала и в обедненной области $p n$ -перехода затвора. Упрощенная эквивалентная шумовая модель полевого транзистора приведена на рис. 5.18.

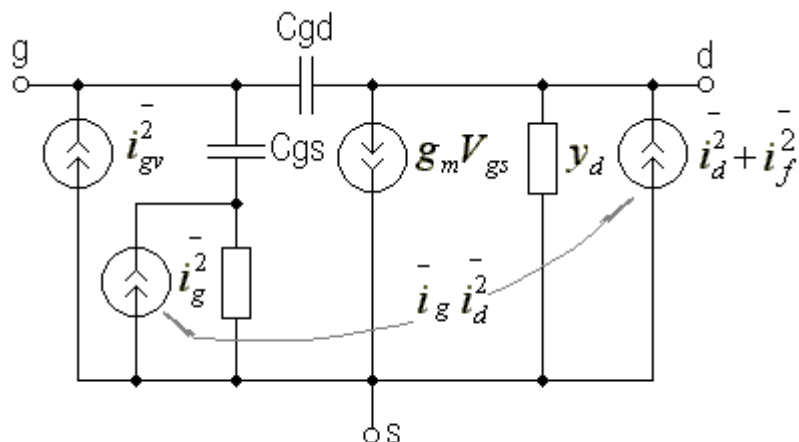


Рисунок 5.18 - Шумовая модель ПТ

На рисунке 5.18 показана локализация основных источников шума полевого транзистора. Опишем собственные и взаимные спектральные плотности шумов перечисленных источников.

Источник дробовых шумов затвора представляется выражением

$$i_{gv}^2 = 2 \cdot q \cdot I_g \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot g_{igs} \cdot \Delta f, \quad (5.53)$$

где $g_{igs} = I_g / V_T$ – проводимость обратно смещенного $p n$ -перехода.

Тепловые шумы затвора и канала можно представить выражениями

$$i_g^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot g_{gs} \cdot \Delta f, \quad (5.54)$$

$$i_d = 4 \cdot k \cdot T \cdot g_m \cdot \Delta f, \quad (5.55)$$

где $g_{gs} = 1/r_{gs}$ – проводимость активной части входного сопротивления полевого транзистора.

При интерпретации тепловых шумов затвора, как наведенных тепловыми шумами канала, и включенных параллельно затвору в целом, используют выражение

$$i_g = 4 \cdot k \cdot T \cdot \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot (R / g_m) \cdot \Delta f, \quad (5.56)$$

где R – константа, зависящая от режима транзистора и составляющая в режиме насыщения величину $\cong (0.2 \div 0.25)$. Пренебрегая влиянием проходной емкости C_{gd} , запишем входное сопротивление полевого транзистора

$$Z_{GS} = r_{gs} + 1 / (j \cdot \omega \cdot C_{gs}) = (1 + j \cdot \omega \cdot C_{gs} \cdot r_{gs}) / (j \cdot \omega \cdot C_{gs}). \quad (5.57)$$

Сделав необходимые преобразования, перейдем к выражению для входной проводимости

$$Y_{GS} = G_{GS} + j \cdot \omega \cdot C_{gs} = \frac{\omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}}{1 - \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}^2} + j \cdot \omega \cdot \frac{C_{gs}}{1 - \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}^2}. \quad (5.58)$$

Учитывая, что в рабочем диапазоне частот ($1 \geq \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}^2$), получаем приближенное выражение для активной составляющей входной проводимости

$$G_{GS} = \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}. \quad (5.59)$$

Теперь запишем тепловые шумы, обусловленные активной составляющей входной проводимости

$$i_g = 4 \cdot k \cdot T \cdot \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs} \cdot \Delta f, \quad (5.60)$$

Простое сравнение выражений (5.56) и (5.60) приводит нас к известному соотношению

$$r_{gs} = R / g_m, \quad (5.61)$$

показывающему, что наведенные шумы не что иное, как тепловые шумы затвора, обусловленные r_{gs} и пересчитанные на затвор в целом, при представлении цепи затвора в виде параллельного соединения активной и реактивной составляющей входной проводимости.

Взаимная спектральная плотность тепловых шумов канала и наведенных шумов затвора записывается в виде

$$i_g \cdot i_d = 4 \cdot k \cdot T \cdot j \cdot \omega \cdot C_{gs} \cdot \Delta f. \quad (5.62)$$

Низкочастотные шумы генерации - рекомбинации описываются следующим выражением

$$i_f^{-2} = 4 \cdot k \cdot T \cdot g_m^2 \cdot \left[\frac{\rho_0}{f} + \frac{\rho_0'}{1+(f/f_0)} \right] \cdot \Delta f, \quad (5.63)$$

где ρ_0, ρ_0', f_0 - постоянные, определяемые материалом и внутренней геометрией транзистора, а также, зависящие от температуры.

Иногда для согласования расчетных и экспериментальных данных в перечисленные соотношения вводят поправочные коэффициенты, зависящие от режима работы и геометрии. Так или иначе, подобные попытки усовершенствовать модели, дополняя классические зависимости, скорее просто свидетельствуют о несовершенстве моделей.

5.5 Модели операционного усилителя

Идеальный операционный усилитель (ОУ) представляет собой активный элемент с двумя входами (неинвертирующий и инвертирующий) и одним выходом, имеющий бесконечно большое усиление, бесконечно большое входное и бесконечно малое выходное сопротивления (рисунок 5.19).

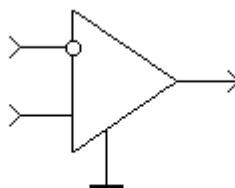


Рисунок 5.19 - Операционный усилитель

Модель идеального операционного усилителя может быть построена на основе источника напряжения управляемого напряжением (рисунок 5.20).

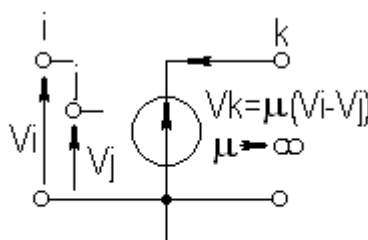


Рисунок 5.20 - Модель идеального ОУ

Неидеальный операционный усилитель отличается от идеального усилителя многими аспектами. Точную модель операционного усилителя можно получить заменой содержащихся в нем транзисторов и диодов их схемными моделями. Однако, учитывая сложность подобных моделей, обычно используют так называемые макромоделей. С помощью макромоделей можно отобразить конечные значения входных и выходного

сопротивлений, конечность коэффициента передачи и их частотную зависимость. В случае нелинейной макромодели можно также отобразить режим ограничения выходного напряжения и конечное значение скорости изменения выходного напряжения.

Ограничение выходного напряжения $|V_o| < V_{o\max}$ может имитироваться в модели использованием нелинейного сопротивления с характеристикой рисунка 5.21.

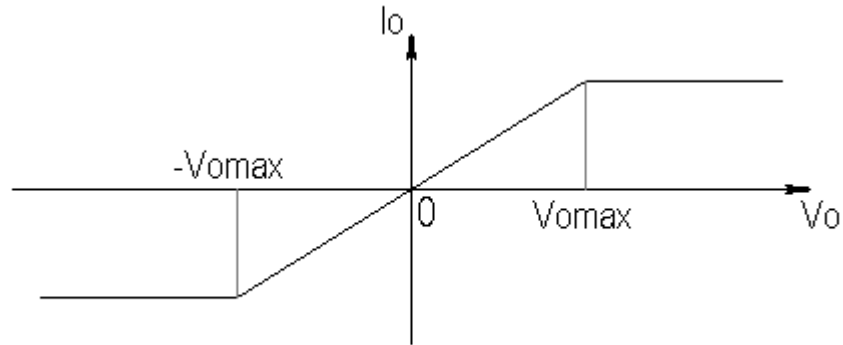


Рисунок 5.21 - Характеристика нелинейного сопротивления

Для имитации конечной скорости нарастания следует воспользоваться нелинейным блоком (рисунок 5.22), где нелинейный управляемый напряжением источник тока характеризуется кривой насыщения (рисунок 5.24).

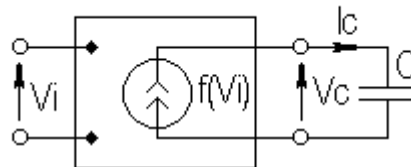


Рисунок 5.22 - Нелинейный блок имитации конечной скорости

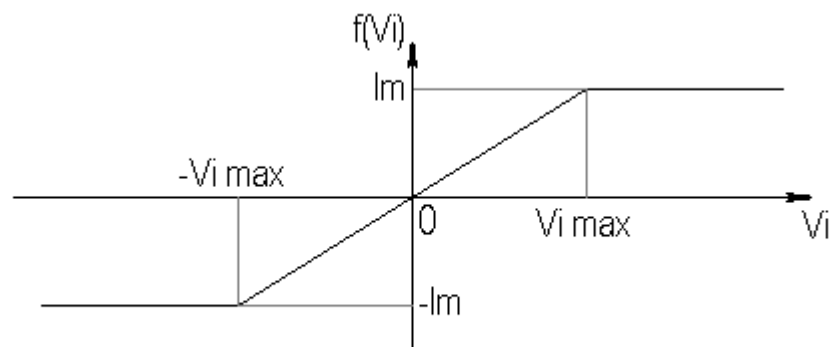


Рисунок 5.23 - Характеристика ограничения нелинейного блока

Скорость нарастания выходного напряжения будет определяться выходной емкостью C . Так как выходной ток управляемого источника не может быть больше I_m , то можно записать

$$|dV_c / dt| = |I_c| / C \leq I_m / C \cong S_r. \quad (5.64)$$

На рисунке 5.24 показаны типовые амплитудно - и фазочастотные зависимости (диаграммы Бode) коэффициента передачи операционного усилителя.

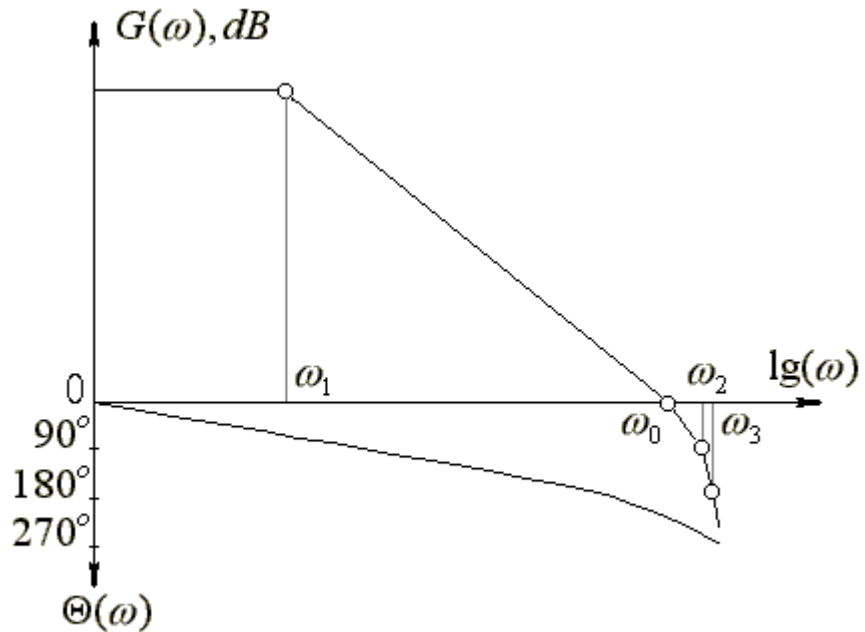


Рисунок 5-24 - Диаграмма Бode операционного усилителя

Первая угловая частота ω_1 , называется доминантно-поллюсной частотой; частота ω_0 , при которой кривая $G(\omega)$ пересекает ось абсцисс, называется частотой единичного усиления.

Используя предшествующие рассуждения, получаем возможную макромодель операционного усилителя (рисунок 5.25)

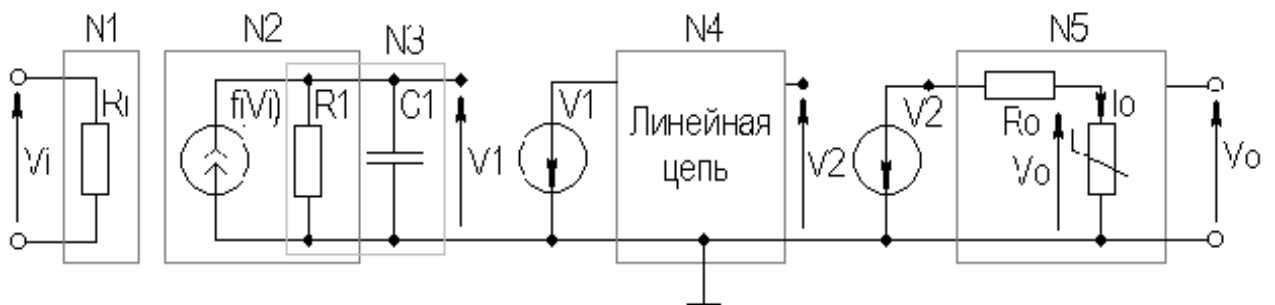


Рисунок 5.25 Макромодель операционного усилителя

Модель состоит из пяти ступеней – каскадов: входной – N_1 ; ступени ограничения скорости изменения (выходного напряжения) и коэффициента передачи N_2 ; ступени доминантного полюса N_3 ; ступени единичного усиления высшей полюсной частоты N_4 ; выходной ступени ограничения выходного напряжения N_5 .

Входная ступень с помощью R_1 , моделирует входное сопротивление в дифференциальном режиме. Вторая ступень содержит нелинейный управляемый напряжением источник тока, нагруженный на емкость C_1 .

При выборе большого сопротивления R_1 , соединение из $N_2 N_3$, моделирует скорость изменения выходного напряжения, в соответствии с (5.64), путем выбора I_m и C_1 . Третья ступень - цепь $R_1 C_1$ моделирует доминантный полюс

$$\omega_1 = 1 / (R_1 \cdot C_1), \quad (5.65)$$

в соответствии с диаграммой Боде (рисунок 5.25) предполагающей, что коэффициент передачи спадает обычно 6 дВ на октаву (20 дВ на декаду). Емкость C_1 в этой модели входит одновременно в ступени N_2 и N_3 , поэтому цепь $R_1 C_1$ выбирается как из условия нешунтирования нелинейного источника, так и доминантной частоты. Если частота доминантного усиления не указана в паспортных данных, то она может быть приближенно оценена из следующего соотношения

$$\omega_1 = \omega_0 / B_0, \quad (5.66)$$

где B_0 - статический коэффициент передачи. Вывод соотношения (5.66) основан на том факте, что на частотах, соизмеримых с ω_0 , большая часть тока нелинейного источника замыкается через C_1 , и можно записать

$$V_1 \cong g_m \cdot V_i / (j \cdot \omega_0 \cdot C_1), \quad (5.67)$$

где g_m - крутизна нелинейного источника. Откуда для частоты единичного усиления можно записать

$$|V_1 / V_i| \cong g_m / (\omega_0 \cdot C_1) = 1. \quad (5.68)$$

Если при этом сделать замену

$$g_m = B_0 / R_1, \quad (5.69)$$

то с учетом (5.65) получаем соотношение (5.66).

Четвертая ступень является в общем случае линейным четырехполюсником, имитирующим точки перегиба АЧХ и ФЧХ (диаграмма Боде), на высших полюсных частотах. Для этой цели можно предложить большое количество РС-схем, с уточнением их параметров известными методами аппроксимации и оптимизации. Обычно операционные усилители реализуют с минимально-фазовой передаточной функцией. Тогда в соответствии с интегральным соотношением Гильберта с помощью N_4 достаточно имитировать АЧХ, либо ФЧХ, так как между ними существует в этом случае связь.

Пятая ступень состоит из линейного и нелинейного сопротивлений, причем R_0 выбирается равным выходному сопротивлению операционного усилителя. Нелинейное сопротивление с характеристикой $V(I)$ (рисунок 5.21) выбирается так, чтобы точка перегиба напряжения, определяющая пиковое выходное напряжение операционного усилителя V_{0max} соответствовала паспортным данным. Заметим, что нелинейное сопротивление ведет себя как разомкнутая цепь для всех выходных напряжений $|V_0| < V_{0max}$. Следовательно, данная ступень используется для

имитации, как выходного сопротивления, так и ограничения выходного напряжения.

Остановимся на определении параметров I_m и g_m нелинейного блока на основе нелинейного источника тока управляемого напряжением. Поскольку статическое усиление N_4 , принимается равным единице, то при $-V_{0max} \leq V_0 \leq +V_{0max}$, можно записать

$$V_0 = V_1 = (g_m \cdot V_i) \cdot R_1. \quad (5.70)$$

Откуда находим крутизну

$$g_m = V_0 / (V_1 \cdot R_1) = B_0 / R_1. \quad (5.71)$$

Значение максимального тока I_m можно получить, подставляя C_1 из (5.65) в (5.64)

$$I_m = S_r / (\omega_1 \cdot R_1). \quad (5.72)$$

В свою очередь, из (5.71) и (5.72), следует

$$V_{imax} = I_m / g_m. \quad (5.73)$$

Заметим, что крутизны управляемых источников, ступеней N_4 и N_5 , используемых для развязки, равны единице.

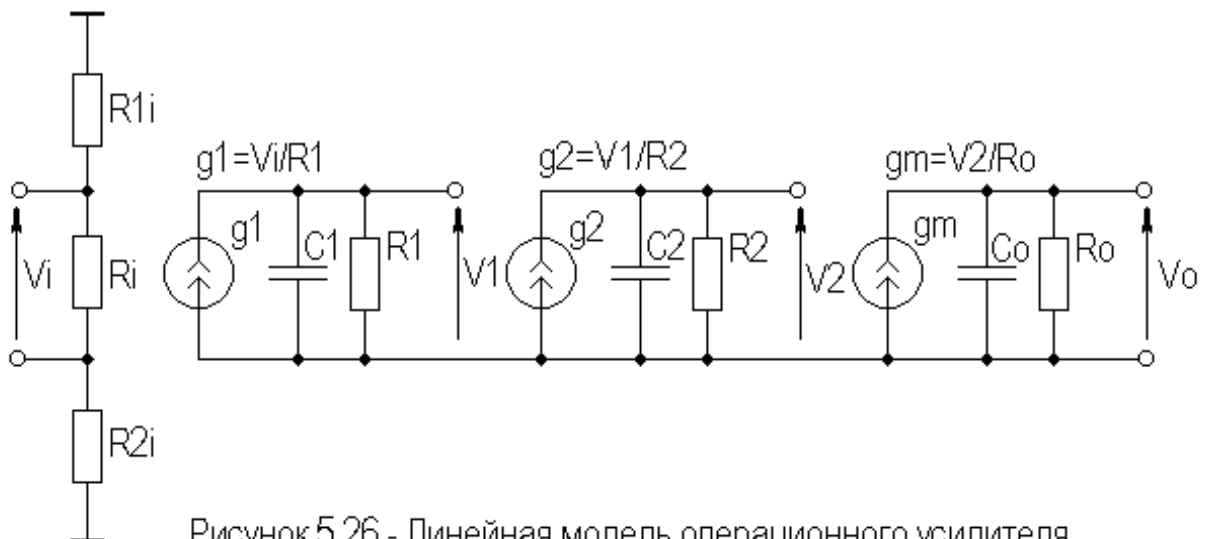
В результате все параметры модели операционного усилителя могут быть определены из паспортных данных, либо измерены экспериментально.

В случае линейной модели достаточно лишь имитировать входное и выходное сопротивления, коэффициент передачи и несколько ближайших полюсов. Причем, вместо источника напряжения, управляемого напряжением, часто используют источник тока управляемого напряжением с крутизной

$$g_m = \mu / R_{out}, \quad (5.74)$$

где R_{out} - выходное сопротивление ступени.

Один из вариантов линейной модели с имитацией первых двух полюсов приведен на рисунке 5.26



В этой модели входная цепь имитирует входное сопротивление дифференциального операционного усилителя. Первые две ступени с единичным коэффициентом передачи имитируют две ближайшие полюсные частоты

$$\omega_1 = 1 / (R_1 \cdot C_1); \quad \omega_2 = 1 / (R_2 \cdot C_2).$$

Третья ступень имитирует коэффициент передачи операционного усилителя $\mu = g_m \cdot R_0$ и выходной импеданс операционного усилителя параллельным соединением R_0, C_0 .

5.6 Модели связанных индуктивностей

На практике часто встречаются магнитно-связанные катушки индуктивности, которые необходимо отобразить в виде модели. Пусть имеем пару связанных катушек (рисунок 5.27).

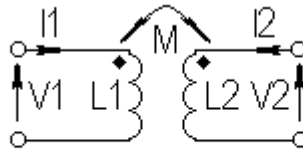


Рисунок 5.27 - Связанные катушки индуктивности

Здесь L_1, L_2 - собственные индуктивности первой и второй катушек, измеренные в связанной системе при режиме холостого хода. В связанных катушках M означает взаимоиנדуктивность, обозначаемую часто, как L_{12} . Символы \bullet призваны отображать со направленность токов катушек или, что тоже самое, знак взаимоиנדуктивности. Взаимосвязь катушек иногда удобнее отображать через коэффициент связи

$$k_{c0} = M / \sqrt{L_1 \cdot L_2} = L_{12} / \sqrt{L_1 \cdot L_2}, \quad (5.75)$$

модуль которого, по физическим соображениям, меньше единицы.

Запишем матрицу сопротивлений холостого хода для двух связанных катушек образующих два контура

$$Z = \begin{bmatrix} j \cdot \omega \cdot L_1 & j \cdot \omega \cdot L_{12} \\ j \cdot \omega \cdot L_{12} & j \cdot \omega \cdot L_2 \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

Для того чтобы представить связанные индуктивности набором несвязанных эквивалентных индуктивностей от матрицы сопротивлений перейдем к матрице проводимости короткого замыкания

$$Y = Z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} & \frac{-L_{12}}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} \\ \frac{-L_{12}}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} & \frac{L_1}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Из матрицы проводимости просматривается следующая простейшая структура модели связанных индуктивностей, через несвязанные эквивалентные индуктивности (рисунок 5.28).

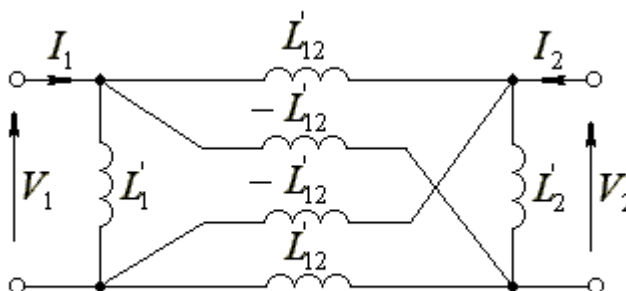


Рисунок 5.28 - Модель связанных индуктивностей

Выражения для эквивалентных индуктивностей, через исходные, непосредственно следуют из матрицы проводимости связанных индуктивностей (5.77)

$$L_1' = (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2) / L_2, \quad (5.78)$$

$$L_2' = (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2) / L_1, \quad (5.79)$$

$$L_{12}' = (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2) / L_{12}. \quad (5.80)$$

Выражения эквивалентных индуктивностей (5.78÷5.80), через исходные, используя выражение для коэффициента связи (5.75), легко представить в виде

$$L_1' = L_1 \cdot (1 - k_{c0}^2), \quad (5.81)$$

$$L_2' = L_2 \cdot (1 - k_{c0}^2), \quad (5.82)$$

$$L_{12}' = L_{12} \cdot (1 - k_{c0}^2) / k_{c0}^2. \quad (5.83)$$

Данное представление легко распространяется на магнитно-связанные катушки с отводами и произвольное число магнитно-связанных катушек индуктивности. Принцип построения модели, для каждой пары связанных катушек, при этом остается прежним, однако выражения для эквивалентных индуктивностей значительно усложнятся.

5.7 Модели распределенных структур

Различают однородные и неоднородные, одно- и многосвязанные, активные и пассивные распределенные структуры. Мы остановимся лишь на простейших однородных, одно-связанных пассивных структурах.

Модели распределенных структур обычно описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называемых телеграфными. При периодическом воздействии, уравнения в частных производных преобразуются в обыкновенные уравнения с постоянными

коэффициентами. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют аналитические решения, раскрывая которые, с учетом граничных условий, получают матрицу передачи конечного отрезка распределенной структуры. Определив матрицу передачи, легко перейти к любой другой системе параметров.

Матрица передачи либо проводимости полученная в результате решения дифференциальных уравнений записывается через характеристические параметры распределенных структур.

Модель LC- линии. Наиболее распространенной распределенной структурой является LC- линии самого разнообразного вида. Это могут быть и отрезки кабеля, симметричные и несимметричные полосковые линии и так далее. В случае распределенных структур корректно говорить лишь о модели бесконечно малого отрезка выраженной через погонные параметры. Погонные параметры - это параметры, отнесенные к единице длины. Так для LC- линии с потерями модель дифференциального участка

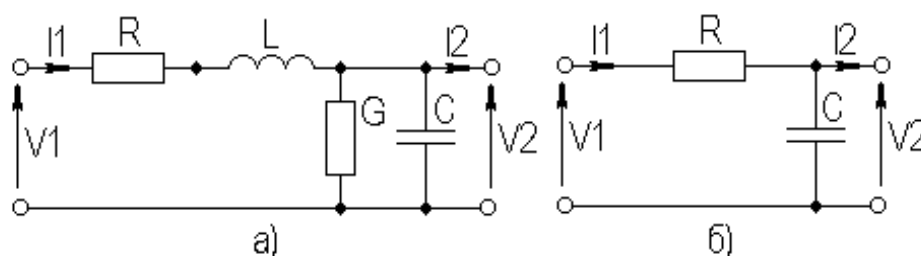


Рисунок 5.29 - Дифференциальные модели линий передачи

приведена на рисунке 5.29а.

Характеристические параметры LC- линии, волновое сопротивление ρ и постоянная распространения Θ , определяются выражениями

$$\rho = \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) / (G + j \cdot \omega \cdot C)}, \quad (5.84)$$

$$\Theta = l \cdot \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)}, \quad (5.85)$$

где l - длина отрезка LC- линии.

Модель RC- линии. Следующей распространенной простейшей распределенной структурой является RC- линия, представляющая собой частный случай LC- линии. RC- линии нашли применение в микроэлектронике, при реализации активных фильтров. Модель дифференциального участка RC- линии приведена на рисунке 5.29б.

Характеристические параметры RC- линии, характеристическое сопротивление ρ и постоянная распространения Θ , определяются

$$\rho = \sqrt{R / C}, \quad (5.86)$$

$$\Theta = l \cdot \sqrt{R \cdot C}, \quad (5.87)$$

где l - длина RC- линии.

Структура матриц Y- параметров отрезка LC- линии с потерями и RC- линии одинакова и может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(\rho \cdot th(\Theta)) & -1/(\rho \cdot sh(\Theta)) \\ -1/(\rho \cdot sh(\Theta)) & 1/(\rho \cdot th(\Theta)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (5.88)$$

где I_1, I_2, V_1, V_2 - токи и напряжения на входе и выходе отрезка структуры; sh, th - функции гиперболического синуса и тангенса комплексного аргумента.

Для LC - линии в случае отсутствия потерь, характеристические параметры становятся вещественными, и гиперболические функции вырождаются в тригонометрические функции.

6 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

6.1 Алгоритм Гаусса

Наиболее известным и эффективным из алгоритмов решения систем линейных уравнений общего вида является алгоритм Гаусса. В алгоритме Гаусса исходная линейная система уравнений

$$A \cdot X = Y \quad (6.1)$$

решается в два этапа.

На первом этапе, путем элементарных операций со строками и столбцами, матрица A приводится к треугольному виду. На втором этапе, путем обратной подстановки, находится вектор решения X . Чаще всего вектор решений X формируется на месте вектора свободных членов Y .

Для удобства изложения ограничимся порядком системы уравнений $n = 4$, а вектор свободных членов Y присоединим к матрице коэффициентов A , в качестве $(n + 1)$ -го столбца. В результате имеем следующую матрицу коэффициентов и свободных членов

$$[A \ Y] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

На первом, этапе для приведения матрицы коэффициентов к треугольному виду, необходимо путем элементарных операций, столбец за столбцом, все коэффициенты ниже диагонали, преобразовать в нули. В качестве первого шага, для обнуления коэффициентов первого столбца ниже диагонали: вычтем последовательно из второй строки первую умноженную на a_{21}/a_{11} ; - из третьей строки первую умноженную на a_{31}/a_{11} ; - и, наконец, из последней - первую умноженную на a_{41}/a_{11} . Покомпонентная запись этих операций имеет вид

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.2)$$

где i - текущий номер строки $(1, \dots, n)$; j - текущий номер столбца

$(k+1, \dots, n+1)$; k – номер опорной строки (столбца) $(1, \dots, n-1)$. После первого шага система имеет вид

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix},$$

где верхний индекс (i) – означает номер шага.

На втором шаге за опорную считаем вторую строку, полученную после первого шага, и вычтем ее последовательно из 3-ей и 4-ой строк, предварительно умножив соответственно на $a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$ и $a_{42}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$, после чего получаем

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & a_{35}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Выполняя третий шаг, приходим к треугольному виду матрицы

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & a_{35}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} & a_{45}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

На этом заканчивается первый этап и начинается второй – обратная подстановка.

Из последнего уравнения треугольной системы следует

$$a_{44}^{(4)} \cdot x_4 = a_{45}^{(4)} = y_4^{(4)},$$

в результате получаем

$$x_4 = a_{45}^{(4)} / a_{44}^{(4)} = y_4^{(4)} / a_{44}^{(4)}.$$

Из предпоследнего уравнения треугольной системы имеем

$$a_{33}^{(3)} \cdot x_3 + a_{34}^{(3)} \cdot x_4 = a_{35}^{(3)} = y_3^{(3)},$$

или

$$x_3 = (a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)} \cdot x_4) / a_{33}^{(3)},$$

а, подставив в него значение x_4 , получим

$$x_3 = (a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)} \cdot a_{45}^{(4)} / a_{44}^{(4)}) / a_{33}^{(3)} = (y_3^{(3)} - a_{34}^{(3)} \cdot y_4^{(4)} / a_{44}^{(4)}) / a_{33}^{(3)}.$$

Распространив далее подобные рассуждения, получим общее соотношение для произвольного шага обратной подстановки

$$x_i = \left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j \right) / a_{ii}, \quad (6.3)$$

где, перебирая значения $i = 1, \dots, n$, последовательно определим все компоненты вектора решений из рекуррентного выражения.

Рассмотрим обратную подстановку более подробно, чтобы полнее раскрыть ее содержание, как набор базовых операций над строками.

Прежде всего, учитывая, что общее решение линейной системы уравнений (6.1) может быть представлено в виде

$$x = A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y, \quad (6.4)$$

делаем вывод, что во время обратного хода исходная (треугольная) матрица должна быть приведена к единичной. Это означает, что элементы выше диагонали должны быть обнулены в результате элементарных операций над строками и строки должны быть нормированы относительно диагональных элементов. В соотношении (6.3) выражение в скобках как раз и соответствует операции над текущей строкой, а деление на a_{ii} – нормировке строки.

Так, в качестве первого шага обратной подстановки, для обнуления 4-го столбца над диагональю, необходимо из строк с 3-ей по 1-ую, вычесть 4-ую строку умноженную последовательно на

$$a_{34}^{(3)} / a_{44}^{(4)}, a_{24}^{(2)} / a_{44}^{(4)}, a_{14}^{(1)} / a_{44}^{(4)},$$

после чего нормировать 4-ую строку относительно a_{44} . Для экономии операций целесообразно вначале нормировать текущую строку, а затем вычитать ее из других строк, предварительно умножив ее на соответствующий элемент строки текущего столбца.

В результате после первого шага обратной подстановки имеем

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(5)} & a_{12}^{(5)} & a_{13}^{(5)} & 0 & y_1^{(5)} \\ 0 & a_{22}^{(5)} & a_{23}^{(5)} & 0 & y_2^{(5)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(5)} & 0 & y_3^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4^{(4)} / a_{44}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

На втором шаге нормируем третье уравнение и обнуляем, третий столбец выше диагонали и т.д., пока не дойдем до первой строки, и не нормируем ее.

В покомпонентной записи это соответствует операциям: нормировки для опорной строки k

$$a'_{kj} = a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.5)$$

при $k = n, \dots, 1$; $j = k, \dots, n + 1$; и обнуления элементов опорного столбца для строк, лежащих выше опорной

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad (6.6)$$

при $k = n, \dots, 1$; $i = k + 1, \dots, 1$; $j = k, \dots, n + 1$.

Таким образом, в результате прямого и обратного хода алгоритма Гаусса в $n + 1$ -ом столбце расширенной матрицы будет сформирован вектор решений X .

Сделаем несколько важных замечаний по алгоритму Гаусса.

1. Прямой ход Гаусса совершается элементарными операциями над строками, как известно, не изменяющими значение ранга. В данном случае элементарные операции не изменяют и значение определителя, поэтому, перемножив диагональные элементы (до нормировки), после прямого хода, получим значение определителя. Обычно на практике при решении линейной системы значение определителя получают как побочный продукт процедуры, предварительно заведя в ней соответствующую переменную, с начальным значением единица, и умножая эту переменную на каждом шаге прямого хода на диагональный элемент опорной строки.
2. Нормировка опорных элементов возможна и при прямом ходе, при этом перед нормировкой каждой строки значение опорного элемента умножается на текущее значение переменной определителя. В результате прямого хода получается верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Необходимость нормировки во время обратного хода в этом случае отпадает. Необходимо лишь скорректировать покомпонентные выражения, реализующие преобразования прямого и обратного хода.
3. Как отмечалось ранее (6.4), решение линейной системы, в соответствии с алгоритмом Гаусса, эквивалентно умножению исходной системы на обратную матрицу коэффициентов A^{-1} . Отсюда следует простейший алгоритм получения обратной матрицы: если исходную матрицу расширить единичной матрицей, то в соответствии с выражениями

$$A^{-1} \cdot [A \quad I] = [I \quad A^{-1}]$$

на месте единичной будет сформирована обратная матрица.

4. Алгоритм Гаусса легко интерпретировать как для нахождения вектора решения X , так и для обратной матрицы $B = A^{-1}$, не прибегая к расширенной матрице в целях экономии памяти.
5. С целью уменьшения ошибки вычислений, и исключения деления на нулевой диагональный элемент, обычно на каждом шаге прямого хода, ищут максимальный по модулю элемент, в оставшейся части матрицы либо в оставшихся строках, либо столбцах, и путем перестановок строк, и если нужно столбцов, делают его диагональным. Произведенные перестановки учитываются в результирующем векторе решений и знаке определителя. Модификация алгоритма с полным либо частичным выбором

главного значения требует большого числа операций, однако, обладает повышенной точностью.

6. Соотношения (6.2) алгоритма Гаусса, как его модификация используется для понижения порядка линейной системы уравнений, путем исключения части переменных. При этом коэффициенты исходной системы преобразуются, оставляя ее инвариантной по отношению к оставшимся переменным.

Поясним суть исключения переменных, на примере блочного представления системы

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix},$$

где X_1 – остающиеся переменные; X_2 – исключаемые переменные.

Записывая систему в виде

$$\begin{aligned} A_{11} \cdot X_1 + A_{12} \cdot X_2 &= Y_1 \\ A_{21} \cdot X_1 + A_{22} \cdot X_2 &= Y_2 \end{aligned}$$

выражая X_2 из второго уравнения

$$X_2 = -A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \cdot X_1 + A_{22}^{-1} \cdot Y_2,$$

и подставляя в первое уравнение, получим укороченную эквивалентную систему уравнений - блочную форму алгоритма Гаусса - понижения порядка линейной системы уравнений

$$(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}) \cdot X_1 = Y_1 - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot Y_2. \quad (6.7)$$

Это соотношение показывает, как трансформируется матрица коэффициентов и вектор свободных членов при понижении порядка системы.

Покомпонентная форма, соответствующая исключению по одной переменной, как следствие соотношения (6.7) имеет знакомый вид (см. (6.2))

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.8)$$

где k – индекс исключаемой переменной (строки столбца).

Для вектора свободных членов исключение k -ой переменной соответствует выражению

$$y'_i = y_i - a_{ik} \cdot y_k / a_{kk}, \quad (6.9)$$

которое при желании можно трактовать как преобразование $(n+1)$ -го столбца расширенной матрицы.

В соответствии с (6.8, 6.9), на каждом этапе исключения преобразуют все элементы, остающихся на данный момент строк и столбцов матрицы A и компонент вектора Y . Приведенные соотношения, соответствуют исключению одноименных компонент векторов X и Y , однако их можно трансформировать и на исключение разноименных компонент, что также имеет физическую интерпретацию.

7. Инверсию или обращение матрицы, также можно интерпретировать через блочный алгоритм исключения. Так, рассматривая в качестве исходной систему

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & +I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

и, исключая, по аналогии с (6.7), первую группу переменных на месте блока A_{22} , получим $A_{22} = A^{-1}$.

Таким образом, один и тот же алгоритм или соотношения Гаусса, применяются при решении линейных систем уравнений, исключении части переменных с целью сокращения размерности системы и при вычислении обратных матриц коэффициентов.

6.2 Алгоритм Гаусса – Жордана

Известно несколько модификаций алгоритма Гаусса, в частности, Жорданом была предложена модификация алгоритма позволяющая решать систему уравнений за один проход.

Отличие заключается в том, что после выбора и нормировки опорной строки, элементы опорного столбца обнуляются с помощью элементарных операций, как под, так и над диагональю.

Для пояснения вновь, ограничившись порядком $n = 4$, вновь обратимся к расширенной, за счет вектора свободных членов, матрице коэффициентов

$$[A \ Y] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

Пусть первая строка является опорной, а диагональный элемент a_{11} – ведущий. Нормируем опорную строку, относительно ведущего элемента и, для обнуления первого столбца за исключением ведущего элемента, вычтем из остальных строк первую – опорную, умноженную на элементы ведущего столбца соответствующих строк. В результате первого шага получим

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & a_{14}/a_{11} & a_{15}/a_{11} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

На втором шаге нормируем вторую строку относительно $a_{22}^{(2)}$ и вычтем ее из остальных, предварительно умножая на соответствующий элемент ведущего столбца

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & a_{15}^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & a_{35}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Продолжая выбор ведущей строки до последней, на месте исходной матрицы получим единичную матрицу, а на месте вектора свободных членов образуется вектор решений. Доказательство данного факта следует, хотя бы, из эквивалентности решения системы, действию на нее обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot [A \ Y] = [I \ X].$$

Последовательность операций алгоритма Гаусса – Жордана может быть представлена в виде

$$a'_{kj} = a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.10)$$

при $k = 1, \dots, n; j = k, \dots, n + 1;$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad (6.11)$$

при $k = 1, \dots, n; j = k, \dots, n + 1; i = 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$, где k – номер опорной строки.

Отметим некоторые особенности и модификации алгоритма Гаусса – Жордана:

1. Для повышения точности и надежности алгоритма также используют модификацию, с полным либо частичным выбором главного значения.
2. Используя дополнительную переменную, с единичным начальным значением, и умножая ее перед нормировкой очередной строки на ведущий элемент, получим в результате значение определителя.
3. Известный метод оптимального исключения, позволяющий решать большие системы с малой оперативной памятью ЭВМ, является модификацией алгоритма Гаусса – Жордана, при котором вся матрица коэффициентов храниться во внешней памяти, а в оперативной памяти хранятся попарно опорная и текущая строки. В результате, появляется возможность работать с системами уравнений, объем которых превышает оперативную память, но требуется многократный обмен с оперативной памятью, а значит и время, кроме того, затрудняется выбор ведущего элемента.
4. Как и в алгоритме Гаусса, используя матрицу коэффициентов A , расширенную единичной матрицей, в результате преобразований на месте единичной получим обратную матрицу.
5. Возможна модификация алгоритма для вычисления вектора решения X и вычисления обратной матрицы A^{-1} , без использования расширенной матрицы коэффициентов.
6. Интересна также модификация алгоритма Гаусса – Жордана, для вычисления обратной матрицы на месте исходной:

а) среди оставшихся строк и столбцов, ищем ведущий элемент, и перестановкой строк и столбцов, устанавливаем его на диагональ в опорной строке – вариант полного выбора главного значения;

б) заменяем ведущий элемент на обратный $a'_{kk} = 1/a_{kk}$;

с) элементы ведущей строки умножаем на обратное значение ведущего элемента $a'_{kj} = a_{kj} \cdot a'_{kk} = a_{kj}/a_{kk}$, где $j \neq k$;

д) элементы на пересечении текущих строк и опорного столбца умножаем на $(-a'_{kk})$ т.е. $a'_{ik} = -a_{ik} \cdot a'_{kk} = -a_{ik}/a_{kk}$, где $i \neq k$;

е) остальные элементы текущих строк преобразуются в соответствии с выражением $a'_{ij} = a_{ij} + a'_{ik} \cdot a'_{kj} / a'_{kk} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} / a_{kk}$, где $i, j \neq k$, что соответствует вычитанию из текущих строк опорной взвешенной на соответствующий элемент опорного столбца.

В алгоритме обращения матрицы на месте исходной важно строго соблюдать последовательность действий. Кроме перечисленной последовательности возможна следующая: вначале можно выполнить пункт е), пропустив элементы текущей строки и столбца, затем пункт с), пропустив ведущий элемент, за ним пункт б) и, наконец, пункт д), заменяя деление умножением на обратное значение опорного элемента – другими словами последовательность – а); е); с); б); д). Приемлема также последовательность - а); с); б); д); е).

Рассмотрим пример обращения матрицы на месте исходной для матрицы второго порядка по основной последовательности.

Изложение приведем в символьном виде, поэтому выбор главного значения будет отсутствовать. Пусть задана матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Первый шаг алгоритма по основной последовательности. Выбираем в качестве опорной 1-ую строку и ведущий элемент a_{11} . В результате нормировки ведущего элемента – пункт б), имеем

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Умножим элементы первой строки на обратное значение ведущего элемента – пункт с)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Нормируем элементы опорного столбца - пункт д)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Преобразуем элементы остальных строк и столбцов – пункт е)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} & a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}/a_{11} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что элемент $a'_{22} = a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}/a_{11} = \Delta/a_{11}$, где Δ - определитель матрицы второго порядка.

Второй шаг алгоритма – опорной является вторая строка, а ведущим элементом a_{22} . В результате нормировки ведущего элемента – пункт б) имеем

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Умножим элементы второй строки на обратное значение ведущего элемента – пункт с)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Нормируем элементы опорного столбца – пункт д)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & -a_{12}/\Delta \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Преобразуем элементы остающихся строк и столбцов – пункт е) и, учитывая, что $a'_{11} = 1/a_{11} + (-a_{21}/\Delta) \cdot (-a_{12}/\Delta)/(a_{11}/\Delta) = a_{22}/\Delta$, окончательно имеем

$$\begin{bmatrix} a_{22}/\Delta & -a_{12}/\Delta \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Результат, как мы видим, полностью совпадает с обратной матрицей. Другое замечание, которое можно сделать, анализируя алгоритм, – это принципиальная важность выполнения пунктов с) и д), до либо после пункта е).

Таким образом, алгоритмы Гаусса и Гаусса – Жордана позволяют решать системы уравнений общего вида, находить обратные матрицы, понижать порядок уравнений и вычислять определители.

6.3 Схема Халецкого (LU – факторизация)

Одним из лучших методов решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида является метод, основанный на разложении исходной матрицы на произведение треугольных, или метод LU – факторизации. Алгоритмы этого метода близки к алгоритмам метода Гаусса, хотя вычисления могут производиться в различной последовательности. Главным преимуществом метода LU – факторизации в сравнении с методом Гаусса является возможность более быстрого получения решений для различных векторов свободных членов, а также для транспонированной системы уравнений.

Это обстоятельство можно объяснить следующим образом. По числу операций необходимых для решения конкретной системы методы Гаусса и LU -факторизации практически неразличимы. Однако из всех операций решения в методе LU -разложения почти половину приходится на этап факторизации и следующая половина на собственно решение двух треугольных систем. В силу этого факта, при необходимости решения системы, отличающейся лишь вектором свободных членов, получаем экономию на операциях разложения. Аналогично, когда необходимо решать транспонированную систему после исходной, можно воспользоваться предыдущей факторизацией и лишь сменить порядок решения треугольных систем в силу операции транспонирования.

В методе решения систем линейных уравнений, основанном на факторизации, предполагается, что исходная система

$$A \cdot X = Y, \quad (6.12)$$

может быть представлена в виде

$$L \cdot U \cdot X = Y, \quad (6.13)$$

т.е.

$$A = L \cdot U \quad (6.14)$$

Причем для определенности полагается, что матрица L является нижнетреугольной, а U – верхнетреугольной, причем с единичной диагональю.

Забегаая несколько вперед, сразу отметим, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, а определитель произведения матриц равен произведению их определителей. Откуда следует, что определитель матрицы A равен произведению диагональных элементов нижнетреугольной матрицы L

$$\Delta = \prod_{i=1}^n l_{ii}. \quad (6.15)$$

Ограничившись для наглядности порядком $n = 4$, запишем L и U матрицы

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Схема Халецкого. Предполагая возможным разложение (6.14), вводя вспомогательный вектор Z

$$U \cdot X = Z, \quad (6.16)$$

и подставив в уравнение (6.13), получим

$$L \cdot Z = Y \quad (6.17)$$

две треугольные системы, эквивалентные исходной системе. Поскольку обе системы (6.16) и (6.17) треугольные, их решения достаточно

тривиальны, причем в начале решаем систему (6.17) и находим вектор Z , а затем из (6.16) окончательно находим X .

Распишем подробнее алгоритм решения. Записывая систему (6.17) в виде

$$\begin{aligned} l_{11} \cdot z_1 + \dots &= y_1 \\ l_{21} \cdot z_1 + l_{22} \cdot z_2 + \dots &= y_2 \\ l_{31} \cdot z_1 + l_{32} \cdot z_2 + l_{33} \cdot z_3 + \dots &= y_3 \cdot \\ &\dots\dots\dots \\ l_{n1} \cdot z_1 + l_{n2} \cdot z_2 + l_{n3} \cdot z_3 + \dots + l_{nn} \cdot z_n &= y_n \end{aligned}$$

Для первых компонент вектора Z можем записать

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1/l_{11}, \\ z_2 &= (y_2 - l_{21} \cdot z_1)/l_{22}, \\ z_3 &= (y_3 - l_{31} \cdot z_1 - l_{32} \cdot z_2)/l_{33}. \end{aligned}$$

Обобщая последовательность этих операций, называемых прямой подстановкой или прямым ходом, можем записать

$$z_1 = y_1/l_{11}; \quad z_i = \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot z_j \right) / l_{ii}, \quad (6.18)$$

при $i = 2, \dots, n$.

Для того чтобы, соотношение (6.18) имело смысл, l_{ii} не должны равняться нулю.

Теперь решим систему (6.16) в координатной форме

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12} \cdot x_2 + \dots + u_{1,n-2} \cdot x_{n-2} + u_{1,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{1n} \cdot x_n &= z_1, \\ x_2 + \dots + u_{2,n-2} \cdot x_{n-2} + u_{2,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{2n} \cdot x_n &= z_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n-2} + u_{n-2,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{n-2,n} \cdot x_n &= z_{n-2}, \\ x_{n-1} + u_{n-1} \cdot x_n &= z_{n-1}, \\ x_n &= z_n. \end{aligned}$$

Начиная с последней формулы, запишем выражения для нескольких компонент вектора решений X

$$\begin{aligned} x_n &= z_n, \\ x_{n-1} &= z_{n-1} - u_{n-2,n} \cdot x_n, \\ x_{n-2} &= z_{n-2} - u_{n-2,n-1} \cdot x_{n-1} - u_{n-2,n} \cdot x_n. \end{aligned}$$

Обобщая эту последовательность действий, называемую обратной подстановкой или обратным ходом, запишем

$$x_n = z_n, \quad x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} \cdot x_j, \quad (6.19)$$

при $i = n - 1, \dots, 1$.

Число операций, требуемых для выполнения, как прямой, так и обратной подстановок, равно примерно $n^2/2$, а в сумме для решения вместе с разложением требуется примерно n^2 операций.

Изучение соотношений (6.16, 6.17) показывает, что компоненты y_i используются только для определения z_i и позднее не требуются. Аналогично z_i не нужны после вычисления x_i . Следовательно, при такой системе расчетов векторы Y, Z и X могут быть размещены в одних и тех же ячейках памяти ЭВМ. Коэффициенты треугольных систем – матрицы L и U , если не хранить единичную диагональ матрицы U , могут быть размещены на месте исходной матрицы коэффициентов A . Следует также отметить эквивалентность обратных подстановок в схеме Халецкого и в методе Гаусса.

6.4 LU – факторизация (алгоритм Краута)

При изложении алгоритмов разложения для наглядности ограничимся порядком системы $n=4$, что не повлияет на общность рассуждений.

Суть алгоритма Краута. Предполагая, что разложение $A=L \cdot U$ существует, запишем произведение $L \cdot U$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & l_{11}u_{14} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} & l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} \\ l_{41} & l_{41}u_{12} + l_{42} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{34}u_{34} + l_{44} \end{bmatrix}.$$

Сравнивая компоненты этого произведения, с компонентами матрицы A , видим, что первый столбец произведения $L \cdot U$, равен первому столбцу матрицы A , т.е. $l_{i1} = a_{i1}$, при $i = 1, \dots, 4$. Первая строка произведения может быть использована для определения первой строки матрицы U . Действительно, т.к.

$$l_{11} \cdot u_{1j} = a_{1j},$$

при $j = 2, \dots, 4$, получаем

$$u_{1j} = a_{1j} / l_{11}.$$

Поскольку во втором столбце элементы u_{12} и l_{i1} известны, можем определить второй столбец матрицы L

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12},$$

где $i = 2, \dots, 4$. Теперь, т.к. известны l_{21}, l_{22} и u_{1j} , можно по второй строке произведения определить вторую строку матрицы U

$$u_{2j} = (a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}) / l_{22},$$

при $j = 3, \dots, 4$. Далее, чередуя строки и столбцы, можно аналогичным образом найти остальные элементы матриц L и U .

Чтобы получить общие соотношения, запишем произвольный элемент произведения $L \cdot U$

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^n l_{im} \cdot u_{mj} = \sum_{m=1}^{\min(i,j)} l_{im} \cdot u_{mj},$$

где верхний предел суммы учитывает наличие нулевых элементов в матрицах L и U . Рассмотрим произвольный элемент, на или под главной диагональю матрицы A , для которого $i \geq j$, и заменим индекс j на k . Учитывая при этом, что $u_{kk} = 1$, получим

$$a_{ik} = \sum_{m=1}^k l_{im} \cdot u_{mk} = l_{ik} + \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} \cdot u_{mk},$$

откуда

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} \cdot u_{mk}, \quad (6.20)$$

при $i \geq k$ и $k = 1, \dots, n$. Аналогичным образом, рассматривая произвольный элемент над главной диагональю, для которого $i < j$ и, используя k вместо i , находим

$$a_{kj} = \sum_{m=1}^k l_{mk} \cdot u_{mj} = l_{kk} \cdot u_{kj} + \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} \cdot u_{mj},$$

откуда

$$u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} \cdot u_{mj} \right) / l_{kk}, \quad (6.21)$$

при $j > k$ и $k = 1, \dots, n$.

Эти соотношения для l_{ik} и u_{kj} , есть алгоритм разложения на треугольные матрицы – алгоритм Краута. Заметим, что текущие элементы матриц L и U определяются текущим элементом матрицы A и предыдущими элементами матриц L и U . Отсюда, т.к. нулевые элементы и единичную диагональ матрицы U запоминать не нужно, в процессе вычислений, матрицы L и U , могут быть записаны на месте матрицы A , причем L расположена в нижнем треугольнике ($i \geq j$), а U – соответственно в верхнем треугольнике ($i < j$) матрицы A .

Коротко, алгоритм Краута, как вариант чередования столбцов и строк можно представить следующей последовательностью действий:

- 1) положим $k = 1$ и перейдем к пункту 3;
- 2) используя выражение (6.20), рассчитываем k -тый столбец матрицы L , и если $k = n$, закончим процедуру разложения;
- 3) используя выражение (6.21), рассчитываем k -тую строку матрицы U ;
- 4) положим $k = k + 1$ и перейдем к пункту 2.

Кроме варианта чередования столбцов и строк на основе соотношений (6.20) и (6.21) возможны варианты последовательного обхода по строкам либо по столбцам.

Если последовательно обходить $L \cdot U$ произведение по строкам, то можно заметить, что, используя предыдущие соотношения (6.20), для l_{ik} , при $i \geq k$ и (6.21) для u_{kj} , при $k < j$, можно беспрепятственно определить все элементы матриц L и U . Аналогично можно организовать алгоритм вычисления элементов матриц L и U , совершая обход по столбцам.

Преимущества этих вариантов алгоритма Краута проявляются при матрицах большого размера.

Известен также вариант алгоритма LU - факторизации, основанный на приведении исходной матрицы к верхней треугольной форме по Гауссу [1], однако по сравнению с алгоритмом Краута, он требует более частого обращения к матрице A .

6.5 Решение транспонированной системы уравнений

Транспонированная или присоединенная система уравнений соответствует транспонированной матрице коэффициентов

$$A^t \cdot X = Y. \quad (6.22)$$

В соответствии с операцией транспонирования соотношение (6.14) запишется в виде

$$A^t = U^t \cdot L^t. \quad (6.23)$$

В результате, используя LU -разложение исходной системы, присоединенная система запишется

$$U^t \cdot L^t \cdot X = Y. \quad (6.24)$$

Вводя промежуточный вектор Z

$$L^t \cdot X = Z, \quad (6.25)$$

и подставляя его в (6.24) получим

$$U^t \cdot Z = Y. \quad (6.26)$$

В результате, операции транспонирования нижнетреугольные матрицы становятся верхнетреугольными и наоборот. Так ограничившись $n = 4$, запишем транспонированные системы (6.25) и (6.26)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & 1 & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & 1 & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Из уравнений (6.25) и (6.26) следует, что для решения сопряженной системы (6.22) необходимо вначале решить нижнетреугольную систему (6.26), а затем верхнетреугольную систему (6.25).

Алгоритм вычисления компонент вектора Z из системы (6.26) запишется

$$z_1 = y_1; \quad z_j = y_j - \sum_{i=1}^{j-1} u_{ij} \cdot z_i, \quad (6.27)$$

при $j = 2, \dots, n$.

Вычисление компонент вектора неизвестных X из системы (6.25) в свою очередь запишется

$$x_n = z_n / l_{nn}; \quad x_j = \left(z_j - \sum_{i=j+1}^n l_{ij} \cdot x_i \right) / l_{jj}, \quad (6.28)$$

при $j = n - 1, \dots, 1$.

Таким образом, решение присоединенной системы уравнений может быть выполнено на основе LU -разложения исходной системы.

Сделаем ряд важных замечаний относительно методов основанных на LU факторизации матриц.

1. Определитель исходной матрицы A равен $\Delta_A = \prod_{i=1}^n l_{ii}$.
2. Результат факторизации матрицы A , т.е. матрицы L и U могут храниться на месте исходной.
3. Для нахождения нового решения системы при смене вектора свободных членов LU - разложение не повторяют, а лишь производят прямую и обратную подстановки.
4. Решение для транспонированной, по отношению к исходной, системы $A^t \cdot X = Y$, основывается на том же разложении, только верхнетреугольные системы становятся нижнетреугольными и наоборот.
5. Число операций LU - разложения оценивается выражением
$$\sum_{j=1}^{n-1} [(n-j) + (n-j)^2] = n^3 / 3 - n / 3.$$
6. Известны также эффективные алгоритмы обращения матриц на основе LU - разложения.

С точки зрения объема вычислений метод решений основанный на методе LU - факторизации эквивалентен методу исключения Гаусса. Преимущества метода факторизации проявляются лишь при повторном нахождении решений, например, при вычислении чувствительности либо переходных процессов с использованием сопровождающих моделей и решении транспонированной системы наряду с исходной, например, при вычислении чувствительности методом сопряженной системы.

6.6 Метод ортогонализации (QR - факторизации)

Основные понятия и определения. Существует серия матричных алгоритмов решения линейных систем уравнений общего вида,

основанных на идее ортогонализации. Однако прежде чем изложить содержание некоторых из них, дадим необходимые понятия и определения.

Два вектора X и Y называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0,$$

или

$$X^t \cdot Y = 0.$$

В комплексной плоскости операции транспонирования соответствует операция эрмитового сопряжения – знак ‘+’

$$X^+ \cdot Y = 0,$$

что соответствует понятию унитарности. Эрмитово сопряжение означает применение операции транспонирования и комплексного сопряжения *.

Длина вектора X , обозначаемая через $|X|$, и, называемая нормой вектора X , определяется выражением

$$|X| = \sqrt{(X, X^+)} = \sqrt{x_1 * x_1^* + x_2 * x_2^* + \dots + x_n * x_n^*}.$$

Вектор называется единичным, если его длина равна единице, при этом $(X, X^+) = 1$. В связи с этим различают нормированную и ненормированную системы векторов.

Так, если интерпретировать матрицы, как систему нормированных по строкам либо столбцам векторов, то можно дать следующие важные определения.

Матрица называется ортогональной, если выполняется соотношение

$$A^t = A^{-1}.$$

Матрица A^+ называется эрмитовой, если для ее элементов выполняется соотношение

$$a_{ij} = a_{ji}^*,$$

это означает, что диагональные элементы эрмитовых матриц вещественны.

Матрица называется унитарной, если

$$A^+ = A^{-1}.$$

Для ненормированных ортогональных и унитарных матриц имеют место соотношения

$$\begin{aligned} A^t &= D \cdot A^{-1}; & A \cdot A^t &= A^t \cdot A = D; \\ A^+ &= D \cdot A^{-1}; & A \cdot A^+ &= A^+ \cdot A = D, \end{aligned}$$

где D – диагональная матрица. Из этого соотношения следует, что элементы диагональной матрицы представляют собой скалярные произведения строк либо столбцов ортогональных по строкам либо столбцам матриц

$$d_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2; \quad d_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot a_{ij}^*;$$

$$d_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ji}^2; \quad d_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot a_{ji}^*,$$

при $j = 1, \dots, n$.

Для ортогональных и унитарных матриц соответственно имеем

$$A^t = A^{-1}; \quad A \cdot A^t = A^t \cdot A = 1;$$

$$A^+ = A^{-1}; \quad A \cdot A^+ = A^+ \cdot A = 1,$$

т.к. ортогональность, есть частный случай унитарности, то в дальнейшем при изложении для упрощения будем использовать термин ортогональность, подразумевая его расширение до унитарности для комплексных матриц.

Из введенных понятий и определений следуют основные свойства ортогональных матриц:

- 1) строки (столбцы) ортогональных матриц, ортогональны;
- 2) сумма квадратов элементов любой строки (столбца) ортогональной нормированной (ортонормированной) матрицы равна 1;
- 3) определитель ортонормальной матрицы равен ± 1 ;
- 4) транспонированная (эрмитово - сопряженная) ортогональной (унитарной) матрицы или, что тоже самое, матрица обратная ортогональной (унитарной) – ортогональна (унитарна).

Из линейной алгебры известно, что любую невырожденную матрицу можно разложить (факторизовать) на произведение ортогональной и верхней либо нижней треугольной матриц. Существует несколько алгоритмов ортогональной факторизации, для обобщенного названия которых, воспользуемся термином QR – факторизация, подразумевая под R – ортогональную, а под Q – треугольную матрицы. На основе QR – факторизации, можно реализовать решение линейных систем уравнений общего вида. Вначале рассмотрим идеи алгоритмов решения, основанных на QR – факторизации, а затем – алгоритмы QR - факторизации, как на основе ортогонализации матриц по Грамму-Шмидту, так и на основе элементарных операций над строками и столбцами исходной матрицы. При изложении алгоритмов решения подразумевается, что QR - факторизация реализована.

Ортогональные алгоритмы решения. Алгоритмы решения линейных систем основанные на ортогонализации исходной матрицы. Перейдем непосредственно к изложению алгоритмов решения линейных систем уравнений

$$A * X = Y, \tag{6.29}$$

основанных на различных способах ортогонального разложения матрицы коэффициентов исходной системы уравнений.

Вариант ортогонализации по столбцам. Используя алгоритм ортогонализации по столбцам, исходную систему можно записать в виде

$$R \cdot Q \cdot X = Y, \quad (6.30)$$

где R – ортогональная по столбцам матрица либо ортонормированная матрица; Q – верхнетреугольная матрица с единичной диагональю либо обычная.

Умножая уравнение (6.30) справа на R^t , в соответствии с соотношениями ортогональности, получаем

$$R^t \cdot R \cdot Q \cdot X = D \cdot Q \cdot X = R^t \cdot Y,$$

где $D = R^t \cdot R$ – диагональная матрица. Вводя обозначение

$$R^t \cdot Y = Z, \quad (6.31)$$

запишем

$$D \cdot Q \cdot X = Z,$$

откуда формально следует

$$X = (D \cdot Q)^{-1} \cdot Z = Q^{-1} \cdot D^{-1} \cdot Z.$$

Последнее соотношение, если ввести обозначение

$$D^{-1} \cdot Z = W, \quad (6.32)$$

можно записать в виде

$$X = Q^{-1} \cdot W \quad (6.33)$$

либо

$$Q \cdot X = W. \quad (6.34)$$

При этом, учитывая, что матрица Q – верхнетреугольная, мы фактически свели решение исходной системы к обратному ходу алгоритма Гаусса. Рассматривая расширенную вектором W матрицу Q , в соответствии с обратным ходом алгоритма Гаусса без нормировки имеем

$$q'_{ij} = q_{ij} - q_{kj} \cdot q_{ik}, \quad (6.35)$$

где $k = n - 1, \dots, 1$; $i = k, \dots, 1$; $j = n + 1, \dots, k$. В результате на месте вектора W будет сформирован вектор решений X . Для этих же целей, можно воспользоваться алгоритмом Гаусса - Жордана, исключив нормировку и ограничив перебор строк от 1 до $k - 1$, где $k = (2, \dots, n - 1)$ – номер ведущей строки.

Отметим, что вычисление векторов Z по выражению (6.31) и W по выражению (6.32), включая обращение диагональной матрицы D , достаточно тривиально.

Так, если воспользоваться ортонормальным разложением, то, как следует из соотношения ортогональности $R^t \cdot R = R^{-1} \cdot R = D = 1$, решение определится выражением

$$Q \cdot X = Z, \quad (6.36)$$

где Q – обычная верхнетреугольная матрица.

Вариант ортогонализации по строкам. В случае факторизации основанной на ортогонализации по строкам исходная система представляется в виде

$$Q \cdot R \cdot X = Y, \quad (6.37)$$

где Q – нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, либо обычная; R – ортогональная по строкам матрица, либо ортонормированная матрица.

Умножая соотношение (6.37) на Q^{-1} справа, получаем систему

$$R \cdot X = Q^{-1} \cdot Y,$$

или обозначая

$$Q^{-1} \cdot Y = W,$$

имеем

$$R \cdot X = W. \quad (6.38)$$

Решение этой системы с учетом соотношений ортогональности запишется

$$X = D^{-1} \cdot R^t \cdot W, \quad (6.39)$$

а в случае ортонормальной матрицы R имеем

$$X = R^t \cdot W. \quad (6.40)$$

Очень важно отметить тот факт, что, если факторизация, основанная на ортогонализации по строкам, осуществляется над, расширенным вектором Y , матрицей A , то на месте $n+1$ -го столбца формируется вектор W . В противном случае, алгоритм факторизации, основанный на ортогонализации строк, требует обращения нижнетреугольной матрицы. Для этой цели можно воспользоваться алгоритмом Гаусса – Жордана с учетом треугольности. Кроме того, алгоритм обращения треугольных матриц легко получить следующим способом.

Обращение треугольной матрицы. Обозначив элементы обратной матрицы, через α_{ij} , и, ограничившись, для наглядности, порядком матрицы $n=3$, распишем произведение $A \cdot A^{-1}$ для нижнетреугольных матриц

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha_{11} & 0 & 0 \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{22}\alpha_{22} & 0 \\ a_{31}\alpha_{11} + a_{32}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} & a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{32} & a_{33}\alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Проанализировав соотношения, описываемые этим выражением, легко записать алгоритм определения элементов матрицы обратной к нижнетреугольной

$$\alpha_{ij} = 0, \quad (6.41)$$

при $i < j$; $i = 1, \dots, n-1$; $j = 2, \dots, n$;

$$\alpha_{ii} = 1/a_{ii}, \quad (6.42)$$

при $i = j; i = 1, \dots, n;$

$$\alpha_{ij} = - \left(\sum_{k=j}^{i-1} a_{ik} \cdot \alpha_{kj} \right) / a_{ii}, \quad (6.43)$$

при $i > j; i = 2, \dots, n; j = 1, \dots, n-1.$

Аналогичным образом можно получить выражения для обращения верхнетреугольной матрицы.

Ортогональные алгоритмы решения линейных алгебраических систем уравнений можно интерпретировать через ортогонализацию исходной матрицы коэффициентов системы элементарными операциями над строками либо столбцами.

Вариант элементарных операций над строками. Факторизация на основе элементарных операций над строками в силу соотношения

$$R = Q^{-1} \cdot A \quad (6.44)$$

преобразует исходную систему (6.29) к виду

$$Q^{-1} \cdot A \cdot X = Q^{-1} \cdot Y \quad (6.45)$$

или

$$R \cdot X = Q^{-1} \cdot Y = W. \quad (6.46)$$

Умножив правую и левую части выражения (6.46) на R^t и, учитывая соотношение ортогональности, запишем решение в виде

$$X = D^{-1} \cdot R^t \cdot W, \quad (6.47)$$

где R – ортогональная, либо ортонормированная по строкам матрица; Q – нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, либо обычная.

В случае ортонормальной матрицы R , из соотношений ортогональности следует $D = 1$, и решение системы запишется в виде

$$X = R^t \cdot W. \quad (6.48)$$

Видим, что принципиальной разницы между данным алгоритмом решения, на основе факторизации, путем элементарных операций над строками, и предыдущим вариантом, основанном на факторизации, путем ортогонализации строк, практически нет. При изложении алгоритмов факторизации доказываем, что эти алгоритмы отличаются лишь порядком выполнения операций над строками.

Как и в предыдущем варианте алгоритма, на этапе факторизации, можно рассматривать матрицу A , расширенную вектором Y , тогда в результате преобразований на месте $n+1$ -го столбца образуется вектор W . В противном случае необходимо вычислять обратную матрицу Q^{-1} .

Вариант элементарных операций над столбцами. Факторизация на основе элементарных операций над столбцами, в силу соотношения

$$R \cdot Q = A, \quad (6.49)$$

преобразует исходную систему (6.32) к виду

$$R^t \cdot A \cdot X = R^t \cdot Y,$$

или

$$D \cdot Q \cdot X = R^t \cdot Y.$$

Вводя обозначение

$$R^t \cdot Y = Z, \quad (6.50)$$

можем записать

$$D \cdot Q \cdot X = Z,$$

откуда следует

$$X = (D \cdot Q)^{-1} \cdot Z = Q^{-1} \cdot D^{-1} \cdot Z.$$

Последнее соотношение, если ввести обозначение

$$D^{-1} \cdot Z = W, \quad (6.51)$$

то можно записать

$$X = Q^{-1} \cdot W, \quad (6.52)$$

либо

$$Q \cdot X = W, \quad (6.53)$$

где R – ортогональная, либо ортонормированная по столбцам матрица; Q – верхнетреугольная матрица с единичной диагональю, либо обычная.

В случае ортонормальной матрицы R , из соотношения ортогональности следует, $D = I$, и решение системы запишется в виде

$$Q \cdot X = Z. \quad (6.54)$$

Видим, что принципиальной разницы между данным алгоритмом решения, на основе факторизации путем элементарных операций над столбцами и предыдущим вариантом, основанном на факторизации путем ортогонализации столбцов, практически нет. При изложении алгоритмов факторизации доказывається, что эти алгоритмы отличаются лишь порядком выполнения операций над столбцами.

Метод QR – факторизации матрицы коэффициентов исходной системы уравнений, как и метод LU – факторизации, имеют преимущества перед методами исключения Гаусса и Гаусса – Жордана при многократном решении системы с разными правыми частями, встречающимися при вычислении чувствительности и численном интегрировании систем дифференциальных уравнений. Это обстоятельство, объясняется тем фактом, что разложение производится один раз и храниться в матрицах Q и R , что составляет примерно половину операций необходимых для решения.

Методы решений систем уравнений основанные на ортогональном разложении исходной матрицы коэффициентов отличаются повышенной устойчивостью и точностью вычислений. Дело в том, что погрешности вычислений при ортогональных преобразованиях минимизируются.

Остановимся подробнее на алгоритмах QR –факторизации на основе ортогонализации по Грамму-Шмидту и элементарных операций над строками и столбцами.

6.7 QR – факторизация (алгоритм Грамма - Шмидта)

Наиболее известным алгоритмом разложения матрицы на произведение ортогональной и треугольной матриц является алгоритм Грамма – Шмидта.

Вариант ортогонализации по столбцам. Суть алгоритма основана на утверждении, что всякую неособенную матрицу A можно представить в виде произведения, матрицы R с ортогональными столбцами на верхнетреугольную матрицу Q с единичной диагональю, либо в виде произведения ортонормальной по столбцам матрицы R на обычную верхнетреугольную матрицу Q

$$A = R \cdot Q. \quad (6.55)$$

Представим исходную матрицу как совокупность векторов – столбцов

$$A = [a^{(1)} \quad a^{(2)} \quad \dots \quad a^{(n)}],$$

где $a^{(j)} = [a_{1j} \quad a_{2j} \quad \dots \quad a_{nj}]^t; j = 1, \dots, n$.

Т.к. матрица A неособенная, то векторы $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ линейно независимы. Будем искать матрицу R в виде

$$R = [r^{(1)} \quad r^{(2)} \quad \dots \quad r^{(n)}],$$

где $r^{(j)}$ – искомые ортогональные столбцы.

Вначале положим $r^{(1)} = a^{(1)}$. Следующий вектор $r^{(2)}$ должен быть построен из $a^{(2)}$, ортогонально $r^{(1)}$. Для этого вектор $a^{(2)}$ разложим на составляющие

$$a^{(2)} = q_{12} \cdot r^{(1)} + r^{(2)},$$

при условии $(r^{(1)}, r^{(2)}) = 0$. Умножая это выражение, скалярно на $r^{(1)}$, с учетом ортогональности, получаем

$$q_{12} = (a^{(2)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{12} \cdot r^{(1)}.$$

Аналогично, вектор $a^{(3)}$, раскладываем на три составляющие

$$a^{(3)} = q_{13} \cdot r^{(1)} + q_{23} \cdot r^{(2)} + r^{(3)},$$

при условиях $(r^{(1)}, r^{(3)}) = 0$ и $(r^{(2)}, r^{(3)}) = 0$.

Последовательно умножая это выражение, скалярно на $r^{(1)}$, затем на $r^{(2)}$, получим

$$q_{13} = (a^{(3)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$q_{23} = (a^{(3)}, r^{(2)}) / (r^{(2)}, r^{(2)}),$$

$$r^{(3)} = a^{(3)} - q_{13} \cdot r^{(1)} - q_{23} \cdot r^{(2)}.$$

В общем виде, разложение исходных векторов $a^{(j)}$, на ортогональные вектора $r^{(j)}$, запишем

$$a^{(j)} = \sum_{k=1}^j q_{kj} \cdot r^{(k)}, \quad (6.56)$$

где $q_{jj} = 1$.

В соответствии с матричными операциями, разложение (6.56) исходной матрицы A , соответствует произведению ортогональной матрицы R на верхнетреугольную матрицу Q , с единичной диагональю.

Продолжая дальше процесс ортогонализации, приходим к следующей форме записи алгоритма

$$r^{(1)} = a^{(1)}, \quad (6.57)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki} \cdot r^{(k)}, \quad (6.58)$$

где $i = 2, \dots, n$,

$$q_{ij} = (a^{(j)}, r^{(i)}) / (r^{(i)}, r^{(i)}), \quad (6.59)$$

где $i < j$; $i = 1, \dots, j-1$; $j = 2, \dots, n$.

В результате данного алгоритма окажутся сформированными, ортогональная по столбцам матрица R и верхнетреугольная матрица Q , с единичной диагональю.

Если необходимо получить, вместо ортогональной, ортонормированную матрицу R (сумма квадратов элементов столбца равна 1), то следует нормировать каждый текущий вектор

$$\hat{r}^{(j)} = r^{(j)} / |r^{(j)}| \quad (6.60)$$

где $|r^{(j)}| = \sqrt{(r^{(j)}, r^{(j)})}$. Заметим также, что скалярное произведение вектора самого на себя, равно квадрату длины вектора

$$(r^{(j)}, r^{(j)}) = |r^{(j)}|^2. \quad (6.61)$$

В случае нормировки, разложение исходных векторов $a^{(j)}$, на ортонормальные вектора $\hat{r}^{(j)}$ запишется

$$a^{(j)} = \sum_{k=1}^j q_{kj} \cdot \hat{r}^{(k)}, \quad (6.62)$$

где $q_{jj} = |r^{(j)}|$.

В соответствии с матричными операциями, разложение (6.62) исходной матрицы A , соответствует произведению ортонормальной матрицы R на верхнетреугольную матрицу Q .

Процесс ортогонализации и нормировки, соответствующий разложению матрицы A на ортонормальную и верхнетреугольную с учетом (6.57) – (6.59) и (6.60), можно записать соотношениями

$$\hat{r}^{(1)} = a^{(1)} / |a^{(1)}|, \quad (6.63)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki} \cdot \hat{r}^{(k)}, \quad (6.64)$$

где $i = 2, \dots, n$,

$$\hat{r}^{(i)} = r^{(i)} / |r^{(i)}|, \quad (6.65)$$

$$q_{ij} = (a^{(j)}, \hat{r}^{(i)}). \quad (6.66)$$

где $i \leq j$; $i = 1, \dots, j-1$; $j = 2, \dots, n$. Этот процесс называется ортогонализацией Грамма – Шмидта.

Проиллюстрируем разложение матрицы, на ортогональную и верхнетреугольную с единичной диагональю, на простейшем примере матрицы порядка $n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 1 & q_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зададимся конкретными значениями элементов матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно алгоритму, полагаем вначале

$$r^{(1)} = a^{(1)} = [0 \ 1 \ 2]^t.$$

Тогда

$$q_{12} = (a^{(2)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}) = (1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2) / (0^2 + 1^2 + 2^2) = 2/5 = 0.4.$$

После чего находим

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{12} \cdot r^{(1)} = [1 \ 2 \ 0]^t - 0.4 \cdot [0 \ 1 \ 2]^t = [1 \ 1.6 \ -0.8]^t.$$

Для определения $r^{(3)}$, вычисляем

$$q_{13} = (a^{(3)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}) = (2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2) / 5 = 0.4,$$

$$q_{23} = (a^{(3)}, r^{(2)}) / (r^{(2)}, r^{(2)}) =$$

$$= (2 \cdot 1 + 0 \cdot 1.6 + 1 \cdot (-0.8)) / (1^2 + 1.6^2 + 0.8^2) = 1.2 / 4.2 \cong 0.3.$$

Откуда

$$r^{(3)} = a^{(3)} - q_{13} \cdot r^{(1)} - q_{23} \cdot r^{(2)} =$$

$$= [2 \ 0 \ 1]^t - 0.4 \cdot [0 \ 1 \ 2]^t - 0.3 \cdot [1 \ 1.6 \ -0.8]^t = [1.7 \ -0.88 \ 0.44]^t.$$

Проверяем результат разложения

$$R * Q = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.7 \\ 1 & 1.6 & -0.88 \\ 2 & -0.8 & 0.44 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

и взаимную ортогональность векторов $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}$

$$(r^{(1)}, r^{(2)}) = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1.6 + 2 \cdot (-0.88)) = 0,$$

$$(r^{(1)}, r^{(3)}) = (0 \cdot 1.7 + 1 \cdot (-0.88) + 2 \cdot 0.44) = 0,$$

$$(r^{(2)}, r^{(3)}) = (1 \cdot 1.7 + 1.6 \cdot (-0.88) + (-0.8) \cdot 0.44) \cong 0.$$

Правильность разложения и ортогональность векторов выполняется, однако вектора не нормированы.

Используя данный пример, рассмотрим процесс разложения матрицы на произведение ортонормальной и верхнетреугольной матриц.

Нормируем первый вектор

$$\hat{r}^{(1)} = r^{(1)} / |r^{(1)}| = 1/\sqrt{5} \cdot [0 \ 1 \ 2]^t \cong [0 \ 0.45 \ 0.9] \text{ } 0:0.45:0.9^t.$$

Вычислим

$$q_{11} = (a^{(1)}, \hat{r}^{(1)}) = (0 \cdot 0 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.9) = 2.25,$$

$$q_{12} = (a^{(2)}, \hat{r}^{(1)}) = (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.9) = 0.9.$$

Теперь можем найти

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{12} \cdot \hat{r}^{(1)} = [1 \ 2 \ 0]^t - 0.9 \cdot [0 \ 0.45 \ 0.9]^t \cong [1 \ 1.6 \ -0.81]^t.$$

Вычисляем норму

$$|r^{(2)}| \cong \sqrt{(1^2 + 1.6^2 + 0.81^2)} \cong \sqrt{4.22} \cong 2.05$$

и нормируем вектор

$$\hat{r}^{(2)} = r^{(2)} / |r^{(2)}| \cong 1/2.05 \cdot [1 \ 1.6 \ -0.81]^t \cong [0.49 \ 0.78 \ -0.4]^t.$$

Для определения $r^{(3)}$, вычислим

$$q_{13} = (a^{(3)}, \hat{r}^{(1)}) \cong (2 \cdot 0 + 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.9) \cong 0.9,$$

$$q_{22} = (a^{(2)}, \hat{r}^{(2)}) \cong (1 \cdot 0.49 + 2 \cdot 0.78 + 0 \cdot (-0.4)) \cong 2.05,$$

$$q_{23} = (a^{(3)}, \hat{r}^{(2)}) \cong (2 \cdot 0.49 + 0 \cdot 0.78 + 1 \cdot (-0.4)) \cong 0.58.$$

Далее находим

$$r^{(3)} = a^{(3)} - q_{13} \cdot \hat{r}^{(1)} - q_{23} \cdot \hat{r}^{(2)} \cong [2 \ 0 \ 1]^t - 0.9 \cdot [0 \ 0.45 \ 0.9]^t - 0.58 \cdot [0.49 \ 0.78 \ -0.4]^t \cong [1.72 \ -0.86 \ 0.42]^t.$$

Вычислим норму

$$|r^{(3)}| \cong \sqrt{(1.72^2 + 0.86^2 + 0.42^2)} \cong \sqrt{3.87} \cong 1.97$$

и нормируем вектор

$$\hat{r}^{(3)} = r^{(3)} / |r^{(3)}| \cong 1/1.97 \cdot [1.72 \quad -0.86 \quad 0.42]^t \cong [0.87 \quad -0.44 \quad 0.21]^t.$$

Вычислим

$$q_{33} = (a^{(3)}, \hat{r}^{(3)}) \cong (2 \cdot 0.87 + 0 \cdot (-0.44) + 1 \cdot 0.21) \cong 1.95.$$

Проверим результат разложения

$$R * Q \cong \begin{bmatrix} 0 & 0.49 & 0.87 \\ 0.45 & 0.78 & -0.44 \\ 0.9 & -0.4 & 0.21 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2.25 & 0.9 & 0.9 \\ & 2.05 & 0.58 \\ & & 1.95 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и взаимную ортогональность векторов $\hat{r}^{(1)}$, $\hat{r}^{(2)}$, $\hat{r}^{(3)}$

$$\begin{aligned} (\hat{r}^{(1)}, \hat{r}^{(2)}) &\cong (0 \cdot 0.49 + 0.45 \cdot 0.78 + 0.9 \cdot (-0.4)) \cong 0, \\ (\hat{r}^{(1)}, \hat{r}^{(3)}) &\cong (0 \cdot 0.87 + 0.45 \cdot (-0.44) + 0.9 \cdot 0.21) \cong 0, \\ (\hat{r}^{(2)}, \hat{r}^{(3)}) &\cong (0.49 \cdot 0.87 + 0.78 \cdot (-0.44) + (-0.4) \cdot 0.21) \cong 0. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что значения матриц R и Q существенно изменились в результате нормировки системы ортогональных векторов.

Вариант ортогонализации по строкам. Суть алгоритма основана на альтернативном утверждении, что всякую неособенную матрицу A , можно представить в виде произведения матрицы R с ортогональными строками и нижнетреугольной матрицы Q с единичной диагональю, либо, в виде произведения ортонормальной по строкам матрицы R и обычной нижнетреугольной матрицы Q

$$A = Q \cdot R. \quad (6.67)$$

Представим исходную матрицу, как совокупность векторов – строк

$$A = [a^{(1)} \quad a^{(2)} \quad \dots \quad a^{(n)}]^t,$$

где $a^{(i)} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]$; $i = 1, \dots, n$.

Т.к. матрица A неособенная, то векторы $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$, линейно независимы. Будем искать матрицу R в виде

$$R = [r^{(1)} \quad r^{(2)} \quad \dots \quad r^{(n)}]^t,$$

где $r^{(i)}$ - искомые ортогональные строки.

Вначале положим $r^{(1)} = a^{(1)}$. Следующий вектор $r^{(2)}$ должен быть построен из $a^{(2)}$, ортогонально $r^{(1)}$. Для этого вектор $a^{(2)}$ разложим на составляющие

$$a^{(2)} = q_{21} \cdot r^{(1)} + r^{(2)},$$

где $(r^{(1)}, r^{(2)}) = 0$. Умножая это выражение скалярно на $r^{(1)}$, с учетом ортогональности, получаем

$$q_{21} = (a^{(2)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{21} \cdot r^{(1)}.$$

Аналогично, вектор $a^{(2)}$, раскладываем на три составляющие

$$a^{(3)} = q_{31} \cdot r^{(1)} + q_{32} \cdot r^{(2)} + r^{(3)},$$

при условиях $(r^{(1)}, r^{(3)}) = 0$ и $(r^{(2)}, r^{(3)}) = 0$.

Последовательно умножая это выражение, скалярно на $r^{(1)}$, а затем на $r^{(2)}$, получим

$$q_{31} = (a^{(3)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$q_{32} = (a^{(3)}, r^{(2)}) / (r^{(2)}, r^{(2)}),$$

$$r^{(3)} = a^{(3)} - q_{31} \cdot r^{(1)} - q_{32} \cdot r^{(2)}.$$

В общем виде, разложение исходных векторов $a^{(i)}$, на ортогональные вектора $r^{(i)}$, запишется

$$a^{(i)} = \sum_{k=1}^i q_{ik} \cdot r^{(k)}, \quad (6.68)$$

где $q_{ii} = 1$.

В соответствии с матричными операциями разложения (6.68) исходной матрицы A , соответствует произведение нижнетреугольной матрицы Q , с единичной диагональю, на ортогональную матрицу R .

Продолжая дальше процесс ортогонализации, приходим к следующей форме записи алгоритма

$$r^{(1)} = a^{(1)}, \quad (6.69)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ik} \cdot r^{(k)}, \quad (6.70)$$

где $i = 2, \dots, n$,

$$q_{ij} = (a^{(j)}, r^{(i)}) / (r^{(i)}, r^{(i)}), \quad (6.71)$$

где $i < j$; $i = 1, \dots, j-1$; $j = 2, \dots, n$.

В результате данного алгоритма окажутся сформированными ортогональная по строкам матрица R и нижнетреугольная матрица Q с единичной диагональю.

В случае нормировки, разложение исходных векторов $a^{(i)}$ на ортонормальные вектора $r^{\wedge(i)}$, запишется

$$a^{(i)} = \sum_{k=1}^i q_{ik} \cdot r^{\wedge(k)}, \quad (6.72)$$

где $q_{ii} = |r^{(i)}|$.

В соответствии с матричными операциями разложение (6.72) исходной матрицы A соответствует произведению нижнетреугольной матрицы Q на ортонормальную матрицу R .

Процесс ортогонализации нормировки, соответствующий разложению матрицы A на ортонормальную и верхнетреугольную, с учетом (6.69) – (6.71) и (6.60), можно записать соотношениями

$$\hat{r}^{(1)} = a^{(1)} / |a^{(1)}|, \quad (6.73)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ik} \cdot \hat{r}^{(k)}, \quad (6.74)$$

где $i = 2, \dots, n$,

$$\hat{r}^{(i)} = r^{(i)} / |r^{(i)}|, \quad (6.75)$$

$$q_{ji} = (a^{(j)}, \hat{r}^{(i)}), \quad (6.76)$$

где $i \leq j$; $i = 1, \dots, j-1$; $j = 2, \dots, n$. Этот процесс, также соответствует ортогонализации Грамма – Шмидта.

При факторизации матрицы, с целью решения линейной системы, удобно рассмотреть матрицу, расширенную вектором свободных членов, в качестве $n+1$ -го столбца. В результате процесса ортогонализации на месте вектора свободных членов

$$Q^{-1} \cdot A \cdot X = Q^{-1} \cdot Y$$

или

$$R \cdot X = W \quad (6.77)$$

окажется трансформированный вектор W .

Помимо процесса ортогонализации Грамма-Шмидта, к ортогональным матрицам или QR -факторизации, можно прийти и в результате элементарных операций над строками либо столбцами. Под элементарными операциями, здесь понимаются операции алгебраического суммирования одной строки или столбца с другими, умноженными на коэффициенты и оставляющими неизменным ранг исходной матрицы, а в данном случае и определитель.

Ортогонализация на основе элементарных операций над строками. Утверждается, что в результате элементарных операций над строками, исходная матрица трансформируется в ортогональную по строкам матрицу

$$R = Q^{-1} \cdot A, \quad (6.78)$$

где Q - нижнетреугольная матрица с единичной диагональю и соответствующая последовательности элементарных операций.

Ортогонализация на основе элементарных операций над столбцами. Утверждается, что в результате элементарных операций над

столбцами, исходная матрица трансформируется в ортогональную по столбцам матрицу

$$R = A \cdot Q^{-1}, \quad (6.79)$$

где Q - верхнетреугольная матрица с единичной диагональю и соответствующая последовательности элементарных операций.

Более детально на данных алгоритмах останавливаться не будем в силу ограниченности объема учебного пособия. Можно лишь отметить, что алгоритмы ортогонализации на основе элементарных операций над строками и столбцами дают те же самые результаты, что и алгоритмы Грамма-Шмидта и представляют собой их модификацию.

В алгоритмах, основанных на ортогонализации Грамма-Шмидта, последовательно обходятся исходные вектора и каждый k -тый вектор разбивается на k ортогональных составляющих. В алгоритмах ортогонализации, основанных на элементарных операциях над векторами, обход повторяется $n-1$ раз со смещением и на каждом проходе выделяется очередная ортогональная составляющая.

Таким образом, эти алгоритмы отличаются лишь последовательностью действий и соответственно порядком определения компонент результирующих матриц.

На основе ортогонального разложения можно построить алгоритм обращения исходной матрицы, имея результат QR - разложения. На данном алгоритме также не будем акцентировать внимание.

Таким образом, на основе факторизации матрицы на произведение ортогональной и треугольной матриц, можно решать линейные системы алгебраических уравнений, вычислять определитель и обращать матрицы. Алгоритмы ортогональной факторизации отличает устойчивость и повышенная точность вычислений. Единственно, что требует доработки по сравнению с алгоритмами LU - факторизации, это вопрос о рациональном хранении результатов факторизации.

Методы QR - факторизации имеют аналогичные преимущества перед методами Гаусса и Гаусса – Жордана, что и методы LU - факторизации при многократном решении систем уравнений с изменяющейся правой частью.

Таким образом, нами рассмотрены основные универсальные алгоритмы решения линейных систем уравнений общего вида, которые находят самое широкое применение при реализации алгоритмов расчета и проектирования РЭУ.

7 ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

7.1 Классический подход

Обобщенный узловый метод. Под передаточными характеристиками будем понимать совокупность характеристик определяемых отношениями токов и напряжений в различных частях

схемы (чаще всего вход - выход). Поскольку понятие узла обобщенного узлового метода близко к понятию зажима (входа) он позволяет определить основные передаточные характеристики достаточно широкого класса схем.

Как известно система уравнений обобщенного узлового метода имеет вид

$$I = Y \cdot U, \quad (7.1)$$

где I - вектор задающих токов (источников сигнала); Y - матрица проводимости схемы; U - вектор искомых напряжений. В общем, виде решение системы можно записать в виде

$$U = Y^{-1} \cdot I. \quad (7.2)$$

Откуда следует, что в основу определения передаточных характеристик должен быть положен вектор узловых напряжений. В этом смысле обобщенный узловой метод мало, чем отличается от других методов формирования математических моделей, и подход к вычислению передаточных характеристик которых рассмотрим позднее.

Начнем же изложение методов вычисления передаточных характеристик с классического метода основанного на вычислениях алгебраических дополнений. Алгебраическое дополнение, как известно из линейной алгебры, это определитель матрицы образованный вычеркиванием соответствующих строк и столбцов, знак которого уточняется множителем $(-1)^{m+p}$, где m - сумма индексов вычеркнутых строк и столбцов, p - число перестановок индексов.

В соответствии с правилом Крамера компоненты вектора решений можно записать в виде

$$u_j = j \Delta / \Delta, \quad (7.3)$$

где $j \Delta$ - определитель, матрицы Y , в котором j - тый столбец, заменен вектором свободных членов I ; Δ - определитель исходной матрицы.

При выводе соотношений полагаем, что вход многополюсника образован одним из узлов относительно общего, а выход - другим узлом относительно общего. Под передаточной характеристикой схемы (многополюсника) понимается ее реакция на входное воздействие при отсутствии остальных. В результате при расчете передаточной характеристики только одна компонента вектора тока с индексом соответствующим входному узлу отлична от нуля. Кроме того, при выводе соотношений будем различать определители матрицы проводимости собственно схемы и матрицы проводимости с внесенными проводимостями источника сигнала и нагрузки.

Предположим, что источник тока (входного сигнала) действует на i - том входе (узле). Тогда напряжение

$$u_i = i \Delta / \Delta,$$

или учитывая, что

$$i \Delta = I_i \cdot \Delta_i$$

получаем

$$u_i = I_i \cdot \Delta_{ii} / \Delta.$$

Откуда входное сопротивление i -го входа равно

$$Z_i = \Delta_{ii} / \Delta. \quad (7.4)$$

Напряжение на j -том узле (выходе) от источника тока подключенным к i -му узлу (входу) определится выражением

$$u_j = I_i \cdot \Delta_{ij} / \Delta$$

или учитывая, что

$$I_j \Delta = I_i \cdot \Delta_{ij}$$

имеем

$$u_j = I_i \cdot \Delta_{ij} / \Delta.$$

Откуда передаточное сопротивление с входа i на выход j равно

$$Z_{ij} = u_j / I_i = \Delta_{ij} / \Delta. \quad (7.5)$$

Раскрыв отношение u_j / u_i из предыдущих выражений получаем коэффициент передачи по напряжению с i -го узла (входа) на j -ый узел (выход)

$$K_{Uij} = u_j / u_i = \Delta_{ij} / \Delta_{ii}. \quad (7.6)$$

Обозначив сопротивление нагрузки на выходе (j -ый узел), через Z_L , запишем очевидное соотношение

$$u_j = I_j \cdot Z_L,$$

и заменяя u_j его выражением, получим

$$u_j = I_j \cdot Z_L = I_i \cdot \Delta_{ij} / \Delta.$$

Откуда получаем коэффициент передачи по току с i -го узла (входа) на j -ый узел (выход)

$$K_{Iij} = I_j / I_i = \Delta_{ij} / (Z_L \cdot \Delta). \quad (7.7)$$

Получение выражений для других передаточных характеристик не представляет затруднений.

Отметим, что во всех предыдущих выражениях проводимость нагрузки подразумевалась внесенной в матрицу проводимости схемы. Используя свойства определителей, можно записать

$$\Delta = \overset{\wedge}{\Delta} + Y_L \cdot \Delta_{jj}, \quad (7.8)$$

где $\overset{\wedge}{\Delta}$ - определитель матрицы проводимости без проводимости нагрузки; Y_L - проводимость нагрузки. Следует также подчеркнуть, что реальные нагрузки других узлов (зажимов), кроме входного и выходного, подразумеваются, внесенными в матрицу проводимости схемы.

Полученные выражения справедливы для матриц любого порядка, а также для матриц полученных в результате исключения переменных (токов и напряжений внутренних узлов) при понижении их порядка. Столь

же просто можно получить передаточные выражения для случая, когда входная и выходная пары зажимов не имеют общего узла.

Аналогично можно получить выражения для передаточных характеристик схемы и в методе контурных токов, используя матрицу сопротивлений холостого хода Z .

Замечания относительно вычислений передаточных характеристик:

1. Прямое вычисление алгебраических дополнений нецелесообразно, т.к. вычисление каждого дополнения, как и определителя, по числу операций соизмеримо с решением исходной системы уравнений.

2. Предварительное обращение матрицы, в результате которого каждый элемент заменяется его алгебраическим дополнением, деленным на определитель, в некоторых случаях может оказаться избыточным, однако приемлемо для универсальных программ, содержащих расчет чувствительности, шумов, нелинейных эффектов, когда требуется определение реакции практически с любого узла.

3. Предварительное приведение схемы к внешним зажимам (вход - выход), путем исключения переменных (токов и напряжений внутренних узлов), наиболее предпочтительна с алгоритмической точки зрения в силу последовательного понижения порядка системы уравнений, что эквивалентно одновременному вычислению требуемого набора алгебраических дополнений, однако смена координат вход - выход требует повторения вычислений.

Метод подсхем. Необходимо несколько подробнее остановиться на методе подсхем, позволяющем вести расчет сложных линейных электронных схем по частям. Подход к расчету сложных схем, основанный на методе подсхем, способствует понижению порядка решаемой на каждом этапе систем уравнений, что сокращает требуемое время и память.

Подсхемой, как известно, называется независимая часть схемы. Независимость подсхемы подразумевает, например, выполнение таких требований, как принадлежность зависимых источников целиком одной из подсхем. Коррелированные шумовые источники также не могут принадлежать разным подсхемам.

В силу независимости подсхем, как было отмечено ранее (раздел 3, пункт 3.2), взаимные проводимости разных подсхем в общей матрице проводимости схемы равны нулю. Собственные проводимости общих узлов (соединений) равны алгебраической сумме собственных проводимостей подсхем. Заметим, что схема по отношению к подсхемам выступает также как независимая часть.

Использование метода подсхем, в силу сделанных замечаний позволяет, с целью снижения порядка систем уравнений, предварительно составить уравнения подсхемы, исключить токи и напряжения, соответствующие внутренним узлам, и внести результирующую матрицу коэффициентов в общую матрицу схемы. Этот прием будем для краткости называть приведением подсхемы к внешним узлам (зажимам).

Действительно, если взять полную матрицу схемы до разбиения на подсхемы и применить исключение переменных, соответствующих внутренним узлам, то в соответствии с алгоритмом Гаусса можем записать

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - y_{ik} \cdot y_{kj} / y_{kk}, \quad (7.9)$$

где k - индекс исключаемого узла схемы, принадлежащего подсхеме. Если при этом узлы i и j не принадлежат подсхеме, то в силу ее независимости имеем

$$y_{ik} = y_{kj} = 0,$$

откуда получаем

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij},$$

т.е. элементы матрицы проводимости, не принадлежащие подсхеме, при исключении ее внутреннего узла остаются без изменений. Для элементов матрицы проводимости схемы, соответствующих общим узлам (соединению подсхем между собой либо со схемой) i и j , и исключении узла k , принадлежащего подсхеме, соотношение (7.9) можно переписать в виде

$$\hat{y}_{ij} = y_{ext_ij} + y_{ins_ij} - y_{ik} \cdot y_{kj} / y_{kk}, \quad (7.10)$$

где y_{ext_ij} - проводимость внешняя по отношению к данной подсхеме; y_{ins_ij} - проводимость собственно подсхемы. Отсюда следует, что элементы матрицы проводимости схемы, принадлежащие подсхеме, после исключения внутренних переменных, по-прежнему входят в общую матрицу аддитивно. Таким образом, исключение внутренних переменных независимых подсхем можно провести предварительно, до внесения в общую матрицу проводимости.

В общем случае, можно строго доказать, что применение метода подсхем допустимо в тех системах параметров, где общие элементы матрицы коэффициентов можно представить линейным функционалом, для которого, как известно, выполняется свойство аддитивности.

Следует также отметить, что число подсхем и уровней подсхем может быть произвольно, необходимо лишь соблюдение условия независимости.

В качестве иллюстрации вычисления передаточных характеристик методом подсхем рассмотрим простую схему транзисторного каскада с комбинированной обратной связью (см. рисунок 7.1).

Пусть транзистор описан матрицей Y - параметров по схеме с ОЭ как четырехполюсника

$$Y = \begin{matrix} & b & c \\ \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Тогда на том основании, что неопределенная матрица проводимости любой схемы, не имеющей общего узла, имеет сумму элементов по любой строке и столбцу равную нулю, получим неопределенную матрицу проводимости транзистора через матрицу проводимости для схемы с ОЭ. Отсоединяя эмиттерный узел, от общего узла и дополняя матрицу строкой и столбцом, с элементами дающими сумму элементов по любой строке и столбцу равную нулю, получим неопределенную матрицу проводимости транзистора

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ c \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{22}) & \sum y \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где $\sum y = y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}$.

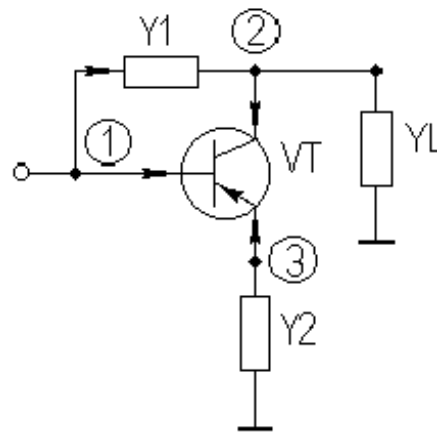


Рисунок 7.1- Схема транзисторного каскада

Запишем матрицу проводимости транзисторного каскада с комбинированной ОС, используя рассмотренные ранее (раздел.3, пункт 3.2) правила формирования

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} + Y_2 & -(y_{11} + y_{12}) & y_{12} - Y_2 \\ -(y_{11} + y_{22}) & \sum y + Y_1 & -(y_{12} + y_{22}) \\ y_{21} - Y_2 & -(y_{21} + y_{22}) & y_{22} + Y_2 + Y_L \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Входное сопротивление каскада и коэффициенты передачи по напряжению и току определяются выражениями

$$Z_{in} = \Delta_{11} / \Delta;$$

$$K_u = \Delta_{13} / \Delta;$$

$$K_I = \Delta_{13} \cdot Y_L / \Delta.$$

Если же, в соответствии с алгоритмом Гаусса, из матрицы проводимости предварительно исключить переменные, соответствующие

току и напряжению внутреннего узла 2, то получим матрицу эквивалентного четырехполюсника

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \Delta_{22} / \Delta_{12,12} & \Delta_{21} / \Delta_{12,12} \\ \Delta_{12} / \Delta_{12,12} & \Delta_{11} / \Delta_{12,12} \end{bmatrix},$$

переобозначив выходной узел с 3 на 2. Определитель этой матрицы в соответствии с теоремой Якоби равен

$$\hat{\Delta} = (\Delta_{33} \cdot \Delta_{11} - \Delta_{13} \cdot \Delta_{31}) / \Delta_{13,13}^2 = \Delta \cdot \Delta_{13,13} / \Delta_{13,13}^2 = \Delta / \Delta_{13,13}.$$

Вновь определим названные передаточные характеристики, но теперь по матрице проводимости каскада \hat{Y} , приведенной к внешним зажимам (вход - выход)

$$Z_{in} = \hat{\Delta}_{11} / \hat{\Delta} = (\Delta_{11} / \Delta_{13,13}) / (\Delta / \Delta_{13,13}) = \Delta_{11} / \Delta;$$

$$K_u = \hat{\Delta}_{12} / \hat{\Delta}_{11} = (\Delta_{13} / \Delta_{13,13}) / (\Delta_{11} / \Delta_{13,13}) = \Delta_{13} / \Delta_{11};$$

$$K_I = \hat{\Delta}_{12} \cdot Y_L / \hat{\Delta} (\Delta_{13} \cdot Y_L / \Delta_{13,13}) / (\Delta / \Delta_{13,13}) = \Delta_{13} \cdot Y_L / \Delta.$$

Из полученных выражений видно, что передаточные характеристики совпадают с таковыми, полученными из полной матрицы проводимости. Тем самым подтвердили правомерность идеи метода подсхем.

7.2 Функции цепи в современных методах

Передаточные характеристики в современной литературе называют иногда обобщенно функциями цепи либо схемы, понимая под этим зачастую не только передаточные характеристики, но и переходные, чувствительность и т.д.

Рассмотрим здесь альтернативный подход к определению функций цепи - передаточных характеристик по результатам решения соответствующих систем уравнений математической модели. Изложение, в основном, ориентируем на современные методы формирования математических моделей, такие как табличный, модифицированный табличный, модифицированный узловой, модифицированный узловой с проверкой. Однако данный подход в полной мере применим к классическим методам - обобщенных узловых потенциалов и контурных токов.

Математическая модель - алгебраическая система уравнений современных методов может быть записана в виде

$$T \cdot X = W, \quad (7.11)$$

где T - матрица коэффициентов системы уравнений; W - вектор свободных членов системы; X - вектор неизвестных или вектор решений системы. В зависимости от метода формирования математической модели вектор

неизвестных включает в себя в качестве переменных напряжения и токи ветвей, напряжения узлов.

Обозначим входные переменные как V_{in} или I_{in} , а выходные переменные как V_{out} или I_{out} . Функция цепи определится в этом случае, как отношение, какой либо выходной переменной к входной. Для цепи (схемы), имеющей один вход и один выход, можно определить наиболее известные передаточные функций: Z_{in} , Y_{in} , Z_{out} , Y_{out} - входные и выходные сопротивления и проводимости; Z_{con} , Y_{con} - переходные сопротивление и проводимость; K_u , K_I - коэффициенты передачи напряжения и тока. Эти функции, согласно определения передаточных характеристик, рассчитываются при нулевых начальных условиях. Для схем, имеющих несколько входов и или выходов необходимо использовать соответствующие индексы.

Предположим, что исходная система уравнений решена, тогда выходная переменная (величина) F , в простейшем случае, является линейной комбинацией компонент вектора решения X

$$F = d^t \cdot X \quad (7.12)$$

или

$$F = d^t \cdot T^{-1} \cdot W = d^t \cdot (adj(T) / det(T)) \cdot W, \quad (7.13)$$

где d^t - строка, состоящая из компонент равных 0, 1, -1; $adj(T)$ - присоединенная матрица, соответствующая транспонированию исходной матрицы и замене ее элементов алгебраическими дополнениями Δ_j ; $det(T) = \Delta_T$ - определитель исходной матрицы. Такое определение выходной переменной позволяет найти напряжение узла, напряжение ветви и ток ветви. Более сложная форма выходной функции, соответствующая, например, передаточной характеристике, пока не рассматривается.

Напоминаем, что исходная матрица в комплексной плоскости может быть представлена в виде

$$T = G + s \cdot C,$$

где G - действительная часть матрицы коэффициентов; C - мнимая часть матрицы коэффициентов; s - оператор Лапласа при чисто гармоническом воздействии равный $j \cdot \omega$. Отсюда следует, что определитель матрицы T и алгебраические дополнения матрицы T являются полиномами от переменной s , а функция F - рациональной функцией комплексной переменной s .

Таким образом, выходная функция F может быть представлена либо отношением полиномов

$$F(s) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot s^i / \sum_{i=0}^m b_i \cdot s^i, \quad (7.14)$$

где a_i и b_i - коэффициенты полинома, или в факторизованной форме через нули и полюса

$$F(s) = K \cdot \prod_{i=1}^n (s - z_i) / \prod_{i=1}^m (s - p_i), \quad (7.15)$$

где K - постоянный множитель; z_i - нули, а p_i - полюса данной функции цепи.

Формирование функции цепи с помощью ЭВМ. Для изложения алгоритма вычисления функции цепи запишем ее в виде

$$F(s) = N(s) / D(s), \quad (7.16)$$

где $N(s)$ - полином числителя; $D(s)$ - полином знаменателя.

Как известно, для расчета функции цепи необходимо решить исходную систему уравнений, используя, например, LU -разложение матрицы T на треугольные сомножители, и выполнив прямую и обратную подстановки. Это потребует примерно $n^3 / 3$ операций, если не учитывать разреженность матрицы. Если же представить выходную функцию в виде отношения полиномов от переменной s , то это позволит:

1) быстро вычислять значение выходной функции на различных частотах;

2) используя преобразование Лапласа, можно получить временной отклик цепи. Для того чтобы такое представление стало возможным, необходимо организовать вычисление коэффициентов полиномов числителя и знаменателя.

В табличном, модифицированном табличном, модифицированном узловом и модифицированном узлом с проверкой методах частотно - зависимые элементы входящие в матрицу T всегда можно представить в форме, содержащей переменную s в числителе ($s \cdot C$, $s \cdot L$), что позволит в последующем воспользоваться преобразованием Лапласа для перехода из частотной во временную область. Для этого необходимо емкости всегда представлять проводимостями, а индуктивности - сопротивлениями.

Числитель и знаменатель $F(s)$ это, как показали в общем случае, полиномы от переменной s , причем знаменатель $D(s)$ - соответствует определителю системы. Выберем произвольно $s = s_i$ и произведем LU -разложение

$$L \cdot U \cdot X = W.$$

С помощью прямой и обратной подстановок найдем вектор решения $X(s_i)$. Допуская, что выходная переменная определена, как $d^t \cdot X(s_i)$ получим отсчет передаточной функции

$$F(s_i) = N(s_i) / D(s_i) = d^t \cdot X(s_i). \quad (7.17)$$

Повторяя подобные вычисления, определим серию отсчетов передаточной функции, которая при необходимости может быть аппроксимирована либо интерполирована в виде полинома от переменной s .

Можно поставить задачу найти отдельно полиномы числителя и знаменателя. Прежде всего, заметим, что в нашем определении выходной функции знаменатель представляет собой определитель исходной системы. Следовательно, после определения отсчета $F(s_i)$ необходимо вычислить определитель системы при $s = s_i$. Определитель найдем, как произведение диагональных элементов матрицы L

$$D(s_i) = \det(T(s_i)) = \det(L(s_i)) = \prod_{j=1}^n l_{jj}. \quad (7.18)$$

Теперь отсчет значения полинома числителя можно получить как отношение

$$N(s_i) = F(s_i) \cdot D(s_i). \quad (7.19)$$

Таким образом, перебирая s_i , получим ряд отсчетов $N(s_i)$ и $D(s_i)$, по которым, используя интерполяцию, можно найти коэффициенты полиномов $N(s)$ и $D(s)$.

Можно и наоборот, определить полиномы $D(s)$ и $F(s)$, а полином числителя определить, как произведение полиномов

$$N(s) = F(s) \cdot D(s).$$

Задача нахождения коэффициентов полинома, по его значениям, при заданных s_i , известна в математике, как задача интерполяции и при этом точность интерполяции зависит от выбора значений s_i и вида интерполирующего полинома.

7.3 Интерполяция полиномов по точкам окружности

Допустим, что известны отсчеты функции и аргумента

$$y_i = f(x_i)$$

в $(n+1)$ -ой отдельной точке, причем y_i и x_i , могут быть, как вещественными, так и комплексными. Требуется найти коэффициенты полинома

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j, \quad (7.20)$$

проходящего через данные точки.

Подставив соответствующие значения x_i в полином (7.20), получим систему уравнений

$$a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + \dots + a_n \cdot x_i^n = y_i,$$

где $i = 0, 1, \dots, n$; a_j - неизвестные коэффициенты. Матричная форма записи данной системы

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

или

$$X \cdot A = Y. \quad (7.22)$$

Решение уравнения (7.22) позволяет определить неизвестные коэффициенты компоненты вектора A .

Возникает вопрос о наилучшем выборе точек x_i с точки зрения точности интерполяции. Как правило, интерполяция с реальными величинами x_i численно нестабильна. Можно показать, что наилучший выбор значений x_i соответствует равноотстоящим точкам, лежащим на единичной окружности комплексной плоскости.

Отметим, что здесь речь идет не о каком-то нормировании отсчетов аргумента x , а о замене этих отсчетов равным количеством отсчетов взятых равномерно на единичной окружности комплексной плоскости. Этим отсчетам, равным по модулю единице, и отличающимся только фазой ставятся в соответствие отсчеты значений интерполируемой функции и ищутся коэффициенты интерполирующего полинома. С помощью такого приема добиваются численной стабильности и точности результатов интерполяции. Применяя затем найденный интерполирующий полином к реальным значениям аргумента, надеются получить более стабильные результаты.

Задача интерполяции. Выведем соотношения для интерполяции по точкам единичной окружности. Обозначим матрицу X из (7.22) следующим образом

$$X = [x_i^j],$$

где индекс i и показатель степени j пробегает значения от 0 до n . Точки лежащие на единичной окружности, принимают значения

$$x_0 = 1; \quad x_k = \exp(j \cdot k \cdot \pi / (n + 1)), \quad (7.23)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Введем обозначение

$$w = \exp(j \cdot k \cdot \pi / (n + 1)). \quad (7.24)$$

Тогда

$$x_k = w^k, \quad (7.25)$$

$$X = [w^{ij}]. \quad (7.26)$$

Главное преимущество данного представления отсчетов x_i это простота и устойчивость вычислений. В частности покажем, что

$$X^{-1} = [w^{-ij}] / (n+1) = X^+ / (n+1), \quad (7.27)$$

где X^+ - транспонированная комплексно - сопряженная (эрмитово - сопряженная) матрица. При этом произведение

$$X \cdot X^{-1} = [w^{ij}] \cdot [w^{-ij}] / (n+1) = E$$

должно быть равно единичной матрице E . Произвольный элемент произведения можно записать в виде

$$(1/(n+1)) \cdot \sum_{k=0}^n w^{ik} \cdot w^{-kj}.$$

Для диагонального элемента, при $i = j$, имеем

$$(1/(n+1)) \cdot \sum_{k=0}^n w^{ik} \cdot w^{-kj} = (1/(n+1)) \cdot \sum_{k=0}^n w^0 = 1. \quad (7.28)$$

Для вне диагонального элемента, при $i \neq j$, получаем

$$(1/(n+1)) \cdot \sum_{k=0}^n w^{ik} \cdot w^{-kj} = (1/(n+1)) \cdot \sum_{k=0}^n (w^{i-j})^k.$$

Выражение в правой части представляет собой геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна нулю

$$(1/(n+1)) \cdot \sum_{k=0}^n (w^{i-j})^k = (1/(n+1)) \cdot (1 - (w^{i-j})^{n+1}) / (1 - w^{i-j}) = 0, \quad (7.29)$$

так как выражение в числителе может быть представлено в виде

$$(w^{i-j})^{n+1} = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n+1) \cdot (i-j) / (n+1)) = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (i-j)) = 1.$$

Таким образом, соотношение (7.27) доказано и из него, в частности, следует ортогональность матрицы X , что, как известно, является гарантией стабильности вычислительного процесса.

Решение системы (7.22) для отсчетов, выбранных в соответствии с соотношениями (7.23), можно записать как

$$A = X^{-1} \cdot Y = (1/(n+1)) / [w^{-ij}] \cdot Y, \quad (7.30)$$

или в координатной форме

$$a_j = \sum_{k=0}^n y_k \cdot w^{-jk}. \quad (7.31)$$

Исходный полином (7.20), определенный в точках x_k , представим в виде

$$y_k = \sum_{j=0}^n a_j \cdot w^{jk}. \quad (7.32)$$

Уравнения (7.31) и (7.32) являются взаимнообратными и соответствуют дискретному преобразованию Фурье. При числе отсчетов, кратном степени

$2^m = (n + 1)$, где положительное целое число, мы пришли к известной модификации алгоритма быстрого преобразования Фурье.

7.4 Алгоритм формирования символьных функций

Остановимся немного подробнее на алгоритме вычисления символьных функций от частоты на основании предыдущего материала и приведем небольшой пример.

Алгоритм формирования выходной функции в символьном виде можно описать следующей последовательностью действий:

1. По числу реактивностей оценивается порядок функции цепи n_0 , и выбираются точки s_i , равномерно распределенные на единичной окружности ($i = 0, 1, \dots, n_0$).

2. Полагаем $i = 0$.

3. Для текущего отсчета одним из методов формируем матрицу коэффициентов и вектор свободных членов. При этом компоненты, содержащие $1/s$, не допускаются. Источники входных воздействий тока либо напряжения полагаются единичными;

4. Решаем систему $T(s_i) \cdot X(s_i) = W$ методом LU - разложения.

5. Вычисляем текущее значение выходной функции $F(s_i) = d^t \cdot X(s_i)$.

6. Находим определитель матрицы $T(s_i)$ $D(s_i) = \prod_{k=1}^n l_{kk}$.

7. Определяем текущее значение числителя $N(s_i) = F(s_i) \cdot D(s_i)$.

8. Если $i < n_0$, то полагаем $i = i + 1$ и возвращаемся к пункту 2, иначе дальше к пункту 9.

9. Используя накопленные отсчеты аргумента s_i , числителя $N(s_i)$ и знаменателя $D(s_i)$, и применяя дискретное преобразование Фурье, определяем коэффициенты полиномов числителя и знаменателя.

Для иллюстрации алгоритма найдем передаточное сопротивление $Z_{trn} = V_2 / J$ простой цепи показанной на рисунке.7.2.

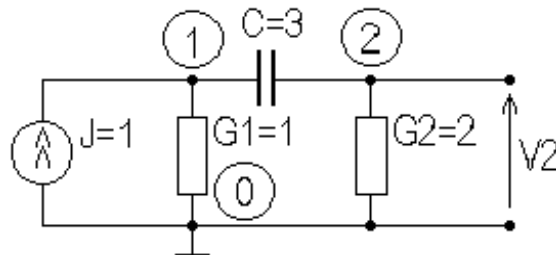


Рисунок 7.2 - Простая цепь

Для данной схемы, не содержащей индуктивностей, систему уравнений можно построить по методу узловых потенциалов

$$\begin{bmatrix} 1+3 \cdot s & -3 \cdot s \\ -3 \cdot s & 2+3 \cdot s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Схема содержит один конденсатор, следовательно, порядок функции цепи должен быть $n_0 = 1$. Выбираем две равноотстоящие точки, лежащие на единичной окружности: $s_0 = 1$, $s_1 = -1$. Подставим значение $s = 1$ и проведем LU -разложение матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 11/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(s_0) \\ v_2(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Используя прямую и обратную подстановки, получаем

$$\begin{bmatrix} v_1(s_0) \\ v_2(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/11 \\ 3/11 \end{bmatrix}$$

откуда следует значение

$$F(s_0) = N(s_0) / D(s_0) = d^t \cdot V(s_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/11 \\ 3/11 \end{bmatrix} = 3/11.$$

Определитель матрицы равен $D(s_0) = 4 \cdot (11/4) = 11$, следовательно, значение

числителя в этой точке равно $N(s_0) = F(s_0) \cdot D(s_0) = 11 \cdot (3/11) = 3$.

Выполнив аналогичные действия для $s_1 = -1$, найдем следующее разложение на треугольные сомножители

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 7/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(s_1) \\ v_2(s_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение системы дает

$$\begin{bmatrix} v_1(s_1) \\ v_2(s_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 3/7 \end{bmatrix},$$

следовательно $F(s_1) = 3/7$. Определитель системы $D(s_1) = -7$, откуда $N(s_1) = -3$.

По точкам $(1,3)$ и $(-1,-3)$ числителя и точкам $(1,11)$ и $(-1,-7)$ знаменателя, в соответствии с выражением (7.31), находим

$$a_0 = 0.5 \cdot (N_0 \cdot 1 + N_1 \cdot x_0) = 0.5 \cdot (3 - 3) = 0,$$

$$a_1 = 0.5 \cdot (N_0 \cdot 1 + N_1 \cdot x_1) = 0.5 \cdot (3 + 3) = 3,$$

$$b_0 = 0.5 \cdot (D_0 \cdot 1 + D_1 \cdot x_0) = 0.5 \cdot (11 - 7) = 2,$$

$$b_1 = 0.5 \cdot (D_0 \cdot 1 + D_1 \cdot x_0) = 0.5 \cdot (11 + 7) = 9.$$

Откуда, интерполирующие полиномы числителя и знаменателя, определяются как

$$N(s) = 3 \cdot s, \quad D(s) = 2 + 9 \cdot s,$$

а передаточное сопротивление в символьном виде запишется

$$Z_{trn} = 3 \cdot s / (2 + 9 \cdot s),$$

в чем легко убедится прямым анализом схемы.

Остановимся на некоторых особенностях алгоритма формирования символьных функций:

1. Когда порядок цепи неизвестен, можно положить n_0 , равным числу реактивных элементов. Вследствие высокой численной стабильности алгоритма интерполяции полиномов по точкам на единичной окружности можно пользоваться числом отсчетов больше или равным n_0 . При завышении порядка коэффициенты при высших степенях полиномов будут равны нулю.

2. При простом нормировании параметров элементов схемы иногда может случиться, что полюс совпадает с одной из точек интерполяции на единичной окружности. В этом случае определитель матрицы T равен нулю и система уравнений в этой точке вырождается. Для устранения этого положения можно увеличить число точек интерполяции либо выбрать другую нормирующую частоту для данной схемы.

Следует также предупредить о некоторых особенностях символьного анализа:

1. В цепях высокой размерности коэффициенты полиномов могут отличаться на несколько порядков, и если не использовать нормировку, то может произойти потеря точности. Нормировать можно либо непосредственно матрицу системы уравнений, либо параметры элементов цепи.

2. Центральную частоту полосового фильтра и частоту среза фильтра нижних частот рекомендуется нормировать к величине $\omega = 1$ [рад./сек]. Импедансы цепи следует преобразовать таким образом, чтобы одно из сопротивлений стало равным 1 Ом.

При машинном формировании символьных функций необходимо принять во внимание следующее:

1. Можно использовать только точки, лежащие на и над вещественной осью, т.к. комплексно - сопряженные точки дают комплексно - сопряженные решения. Этот прием позволяет почти в два раза сократить объем вычислений.

2. Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя по точкам $(s_i, N(s_i))$ и $(s_i, D(s_i))$ можно определять за один прием. Для этого необходимо сформировать комплексную функцию $c_i = N(s_i) + j \cdot D(s_i)$ и найти коэффициенты c_i . Вещественные части коэффициентов c_i будут соответствовать коэффициентам числителя, а мнимые части - коэффициентам знаменателя.

3. При вычислении определителя произведение диагональных элементов матрицы L следует искать в виде суммы логарифмов l_{kk} (в комплексной форме), а затем вычислять антилогарифм. Это позволит предотвратить переполнение разрядной сетки ЭВМ при существенном различии порядков величин l_{kk} .

8 РАСЧЕТ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

8.1 Определения чувствительности

Наиболее важной с точки зрения производства и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры характеристикой электронных схем является чувствительность их выходных функций к изменению параметров, как самих схем, так и параметров окружающей среды. Изменение параметров схемы может являться следствием технологического разброса параметров при производстве радиоэлектронных устройств (РЭУ) и элементной базы. При эксплуатации РЭУ также наблюдается изменение параметров элементов, как за счет старения, так и при изменении внешних факторов (температуры, радиации, влажности и т.д.).

Чувствительность определяется как производная дифференцируемой выходной функции F по параметру h

$$D_h^F = \partial F / \partial h. \quad (8.1)$$

Это определение удобно для вычисления на ЭВМ, однако, чаще используют безразмерное определение чувствительности - нормированную чувствительность.

Относительную или нормированную чувствительность определяют как

$$S_h^F = \partial \ln(F) / \partial \ln(h) = h \cdot \partial F / (F \cdot \partial h) = h \cdot D_h^F / F. \quad (8.2)$$

Иногда встречаются ситуации, когда номинальное значение функции F или параметра h равны нулю. В этом случае определение нормированной чувствительности неприемлемо и используют полуотносительные или полу - нормированные чувствительности

$$\tilde{S}_h^F = \partial F / \partial \ln(h) = h \cdot \partial F / \partial h = h \cdot D_h^F, \quad (8.3)$$

$$\hat{S}_h^F = \partial \ln(F) / \partial h = \partial F / (F \cdot \partial h) = D_h^F / F, \quad (8.4)$$

откуда следует, что

$$S_h^F = \tilde{S}_h^F / F, \quad S_h^F = \hat{S}_h^F \cdot h. \quad (8.5)$$

Чувствительность функций цепи. Часто выходная функция, например, в случае передаточной характеристики, определяется в виде отношения полиномов

$$F = T = N / D.$$

Логарифм этой функции продифференцируем по $\partial \ln(h)$ и в результате получим

$$S_h^T = S_h^N - S_h^D. \quad (8.6)$$

Комплексная выходная функция может быть представлена в алгебраической форме

$$T = a + j \cdot b. \quad (8.7)$$

Нормированная чувствительность выходной функции в этом случае запишется

$$\partial \ln(T) / \partial \ln(h) = \partial \ln(a + j \cdot b) / \partial \ln(h)$$

или

$$(h / T) \cdot (\partial T / \partial h = (h / (a + j \cdot b)) \cdot (\partial a / \partial h + j \cdot \partial b / \partial h))$$

откуда

$$(Re(\partial T / \partial h) + j \cdot Im(\partial T / \partial h)) = (a / h) \cdot S_h^a + j \cdot (b / h) \cdot S_h^b,$$

$$S_h^a = (h / a) \cdot Re(\partial T / \partial h), \quad (8.8)$$

$$S_h^b = (h / b) \cdot Im(\partial T / \partial h), \quad (8.9)$$

где Re , Im - реальная и мнимая части комплексной функции.

Другую удобную форму выражения чувствительности можно получить, если записать

$$T = |T| \cdot \exp(j \cdot \varphi), \quad (8.10)$$

где $|T|$ - модуль выходной функции, а φ - фаза (аргумент). Логарифмируя это выражение

$$\ln(T) = \ln(|T|) + j \cdot \varphi \quad (8.11)$$

и дифференцируя по h

$$\partial \ln(T) / \partial h = S_h^F = \partial \ln(|T|) / \partial h + j \cdot \partial \varphi / \partial h$$

с учетом (8.4) получаем

$$\hat{S}_h^{|T|} = Re(\hat{S}_h^T), \quad (8.12)$$

$$\hat{S}_h^\varphi = Im(\hat{S}_h^T) / \varphi, \quad (8.13)$$

т.к.

$$\hat{S}_h^\varphi = \partial \ln(\varphi) / \partial h = (1 / \varphi) \cdot \partial \varphi / \partial h$$

либо

$$D_h^{|T|} = |T| \cdot Re(\hat{S}_h^T), \quad (8.14)$$

$$D_h^\varphi = Im(\hat{S}_h^T). \quad (8.15)$$

Еще одно представление комплексной выходной функции в алгебраической форме получается, когда в (8.11) $\ln(|T|) = \alpha$ выражается в децибелах

$$\ln(T) = \alpha + j \cdot \varphi. \quad (8.16)$$

Дифференцируя это выражение по параметру h , получаем

$$\partial \ln(T) / \partial h = \hat{S}_h^T = \partial \alpha / \partial h + j \cdot \partial \varphi / \partial h,$$

$$(\partial \alpha / \partial h)_{[непер]} = \overset{\wedge}{Re}(S_h^T), \quad (8.17)$$

$$(\partial \varphi / \partial h) = \overset{\wedge}{Im}(S_h^T), \quad (8.18)$$

где $\partial \alpha / \partial h$ - выражена в неперах, а $\partial \varphi / \partial h$ - выражена в градусах либо радианах. Для выражения чувствительности модуля в децибелах необходимо $\partial \alpha / \partial h$ умножить на $20 \cdot \ln(e) / \ln(10) = 8.686$

$$(\partial \alpha / \partial h)_{[дБ]} = 8.686 \cdot (\partial \alpha / \partial h) = 8.686 \cdot (\partial |T| / \partial h). \quad (8.19)$$

Очевидно, что чувствительность цепи является в общем случае функцией частоты.

Чувствительность нулей и полюсов. Одним из недостатков чувствительности функции цепи является ее зависимость от частоты. В результате для оценки поведения цепи при отклонении параметров необходимо рассчитать чувствительность в ряде частотных точек диапазона частот. Выбор этих точек не всегда очевиден.

С другой стороны, полюса и нули выходной функции представляют собой конечный ряд комплексных чисел, которые полностью определяют отклик цепи.

При расчете чувствительности нуля полинома необходимо иметь в виду, что положение нуля зависит от параметра. Следовательно, для любого нуля z полинома P (числителя либо знаменателя), можно записать

$$P(h, s(h))_{/s=z} = 0.$$

Дифференцируя это выражение по h , получаем

$$\partial P / \partial h + (\partial P / \partial s) / (\partial s / \partial h)_{/s=z} = 0,$$

или

$$\partial s / \partial h = \partial z / \partial h = -(\partial P / \partial h) / (\partial P / \partial s)_{/s=z}. \quad (8.20)$$

Это выражение пригодно для вычисления чувствительности простых нулей. Нормированная чувствительность нуля запишется

$$S_h^z = (h / z) \cdot (\partial z / \partial h). \quad (8.21)$$

Учитывая, что нуль полинома в общем случае является комплексным числом $z = a + j \cdot b$, чувствительность действительной и мнимой частей нуля, в соответствии с (8.8) и (8.9), можно определить следующим образом

$$S_h^a = (h / a) \cdot \text{Re}(\partial z / \partial h), \quad (8.22)$$

$$S_h^b = (h / b) \cdot \text{Im}(\partial z / \partial h). \quad (8.23)$$

Многопараметрическая чувствительность. Обычная чувствительность определяет изменение функции цепи при вариации одного из параметров. Однако в общем случае функция F зависит от нескольких параметров

$$F = F(h_1, h_2, \dots, h_n) = F(h),$$

где h - вектор параметров.

Пусть необходимо оценить изменение функции F , когда некоторые или все параметры варьируются одновременно. Приращение функции F при бесконечно малых изменениях всех параметров определяется полной производной

$$dF = \sum_{i=1}^m (\partial F / \partial h) \cdot dh_i. \quad (8.24)$$

Для перехода к нормированной чувствительности разделим обе части выражения (8.24) на F , а каждый элемент суммы умножим и поделим на h_i

$$dF / F = \sum_{i=1}^m ((\partial F / \partial h) / (h_i / F)) \cdot (dh_i / h_i) = \sum_{i=1}^m S_{h_i}^F \cdot (dh_i / h_i). \quad (8.25)$$

Очень часто, более удобным оказывается использование приращений

$$\Delta F / F \cong \sum_{i=1}^m S_{h_i}^F \cdot \Delta h_i / h_i, \quad (8.26)$$

где $\Delta h_i / h_i$ - относительное изменение параметров, часто определяемое технологией изготовления элементов. Относительные изменения обычно таковы, что

$$|\Delta h_i / h_i| \leq t_i,$$

где t_i - допуск на i -ый элемент. Запишем отношение $\Delta F / F$ в наихудшем случае

$$|\Delta F / F| \leq \sum_{i=1}^m |S_{h_i}^F| \cdot t_i. \quad (8.27)$$

8.2 Алгоритмы расчета чувствительности

Расчет чувствительности, основанный на теореме о производной определителя по элементу. Как известно, в традиционных методах расчета электронных схем, таких как обобщенный узловый и контурный, все малосигнальные характеристики могут быть представлены выражениями, состоящими в основном из отношений алгебраических дополнений. С другой стороны известно, что определитель матрицы можно представить разложением по любой строке (столбцу) в виде

$$\Delta = \sum a_{ij} \cdot \Delta_{ij}. \quad (8.28)$$

Дифференцируя это выражение по элементу определителя a_{ij}

$$\partial \Delta / \partial a_{ij} = \Delta_{ij} \quad (8.29)$$

получаем, что производная определителя по элементу равна алгебраическому дополнению этого элемента. Используя этот факт, можно

предложить подход к определению чувствительности малосигнальных характеристик электронных схем к их параметрам.

Удобнее всего, данный подход проиллюстрировать на примере параметров рассеяния, выраженных через алгебраические дополнения нормированной к проводимостям нагрузок матрицы проводимости

$$S_{ij} = 2 \cdot \Delta_{ji} / \Delta - \delta_{ij}, \quad (8.30)$$

где S_{ij} - элемент матрицы рассеяния; δ_{ij} - символ Кронекера.

Определим функции чувствительности параметров рассеяния к проводимости пассивного двухполюсника y_0 , включенному в схему, между произвольными узлами k и l , учитывая, что его проводимость войдет в элементы матрицы проводимости лишь на пересечении указанных строк и столбцов

$$\begin{aligned} D_{y_0}^{S_{ij}} &= \partial S_{ij} / \partial y_0 = 2 \cdot (\Delta_{j(k+l),i(k+l)} \cdot \Delta - \Delta_{(k+l)(k+l)} \cdot \Delta_{ji}) \cdot \Delta^2 = \\ &= -2 \cdot \Delta_{j(k+l)} \cdot \Delta_{(k+l)i} / \Delta^2 \end{aligned} \quad (8.31)$$

Для электронных схем, содержащих активные элементы, определим чувствительность параметров рассеяния к проводимости управляющей ветви y_c и коэффициенту передачи тока источника тока α , управляемого током ветви y_c и включенных между узлами k, l и p, q

$$\begin{aligned} D_{y_c}^{S_{ij}} &= \partial S_{ij} / \partial y_c = 2 \cdot [(\Delta_{j(k+l),i(k+l)} + \alpha \cdot \Delta_{j(k+l),i(p+q)}) \cdot \Delta - \\ &\quad - (\Delta_{(k+l)(k+l)} + \alpha \cdot \Delta_{(k+l)(p+q)}) \cdot \Delta_{ji}] / \Delta^2 =, \\ &= 2 \cdot \Delta_{j(k+l)} \cdot (\Delta_{(k+l)i} + \alpha \cdot \Delta_{(p+q)i}) / \Delta^2 \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{S_{ij}} &= \partial S_{ij} / \partial \alpha = 2 \cdot (\Delta_{j(k+l),i(p+q)} \cdot \Delta - \Delta_{(k+l)(p+q)} \cdot \Delta_{ji}) \cdot \Delta^2 = \\ &= -2 \cdot \Delta_{j(k+l)} \cdot \Delta_{(p+q)i} / \Delta^2 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Отметим, что чувствительность к коэффициенту передачи по току α совпадает с чувствительностью по крутизне g_m источника тока управляемого напряжением на ветви y_c , в силу их одинаковой локализации в матрице проводимости.

При известных чувствительностях Y - параметров подсхемы y_{kl} к ее элементу y_0 , чувствительность параметров рассеяния схемы к этому элементу подсхемы, в соответствии с определением сложной производной можно записать

$$D_{y_0}^{S_{ij}} = (\partial S_{ij} / \partial y_{kl}) \cdot (\partial y_{kl} / \partial y_0) = D_{y_{kl}}^{S_{ij}} \cdot D_{y_0}^{y_{kl}}. \quad (8.34)$$

Последнее соотношение указывает на возможность применения метода подсхем при расчете чувствительности сложных электронных схем обобщенным методом узловых потенциалов.

Предлагаемый способ, столь же эффективно, может быть использован при определении чувствительности более высоких порядков и чувствительности других характеристик электронных схем, однако требует развитого вычислительного аппарата детерминантной алгебры.

Отметим также, что вычисление кратных алгебраических дополнений на основании теорем детерминантной алгебры всегда можно свести к вычислению обычных одинарных алгебраических дополнений. В этом случае реализация данного алгоритма расчета чувствительности сводится к вычислению присоединенной матрицы (например, путем обращения матрицы, ее транспонирования и умножения на определитель) и перебору соответствующих алгебраических дополнений, что удачно сочетается с вычислением других малосигнальных характеристик электронных схем в составе универсальных программ.

Вычисление чувствительности на основе дифференцирования матрицы по ее элементам. Данный подход также ориентирован в основном на традиционные методы - обобщенных узловых потенциалов и контурных токов.

Как известно, любой двухполюсный элемент, включенный между узлами i и j , войдет в элементы матрицы проводимости на пересечении строк и столбцов с этими индексами. В связи с этим, производная матрицы проводимости Y по элементу y_0 , включенному между узлами i и j равна

$$\partial Y / \partial y_0 = Y_{ij}, \quad (8.35)$$

где Y_{ij} - матрица с элементами $y_{ii} = y_{jj} = 1$ и $y_{ij} = y_{ji} = -1$, остальные элементы равны нулю.

Пусть требуется определить чувствительность передаточного импеданса Z_{pq} , являющегося элементом матрицы $Z = Y^{-1}$. Тогда, для определения $\partial Z / \partial y_0$, рассмотрим тождество $Z \cdot Y = 1$. Дифференцируя это тождество по y_0 , включенному между узлами i и j , получим

$$(\partial Z / \partial y_0) \cdot Y + Z \cdot Y_{ij} = 0.$$

Откуда, учитывая, что $Z = Y^{-1}$, можем записать

$$\partial Z / \partial y_0 = -Z \cdot Y_{ij} \cdot Z. \quad (8.36)$$

Для конкретного элемента матрицы Z , раскрывая выражение (8.36), можно записать

$$\partial Z_{pq} / \partial y_0 = (z_{pi} - z_{pj}) \cdot (z_{iq} - z_{jq}). \quad (8.37)$$

Если речь идет об элементах матрицы проводимости α и g_m (коэффициент передачи по току и крутизна управляемого источника), причем источник включен между узлами k и l , а управляющие узлы i и j , то производная равна

$$\partial Y / \partial x_{kl}^{ij} = Y_{kl}^{ij}, \quad (8.38)$$

где Y_{kl}^{ij} - матрица, с отличными от нуля элементами $y_{ik} = y_{jl} = 1$ и $y_{il} = y_{kj} = -1$. Раскрывая соотношение (8.36), можно записать

$$\partial Z_{pq} / \alpha = (z_{pi} - z_{pj}) \cdot (z_{kq} - z_{lq}). \quad (8.39)$$

Чувствительность решений линейных алгебраических систем уравнений. Чувствительность вектора решений линейной системы уравнений, как математической модели электронной схемы к изменению ее параметров, представляет несомненный интерес для разработчиков РЭУ, так как в конечном итоге определяет чувствительность всех характеристик.

Пусть имеем систему линейных уравнений

$$T \cdot X = W, \quad (8.40)$$

где T - матрица коэффициентов и W - вектор свободных членов могут быть функциями вектора параметров h с компонентами h_i . Формальное решение системы, как известно, имеет вид

$$X = T^{-1} \cdot W. \quad (8.41)$$

Для оценки чувствительности вектора X к некоторому параметру h , продифференцируем выражение (8.40)

$$T \cdot (\partial X / \partial h) + (\partial T / \partial h) \cdot X = \partial W / \partial h.$$

Результат дифференцирования запишем в виде

$$T \cdot (\partial X / \partial h) = -((\partial T / \partial h) \cdot X - \partial W / \partial h). \quad (8.42)$$

Анализ данного выражения показывает, что вектор X может быть определен из решения исходной системы, например, методом LU -факторизации. Производные матрицы $\partial T / \partial h$ и вектора $\partial W / \partial h$ по параметру h , как известно, определяются покомпонентным дифференцированием. В результате вектор правой части системы (8.41) определяется достаточно просто. Далее необходимо на основе того же LU -разложения, т.к. матрица коэффициентов T остается прежней, найти решение с новой правой частью. В результате прямой и обратной подстановок найдем вектор $\partial X / \partial h$, определяющий чувствительность вектора X к изменению конкретного параметра h .

Если требуется определить чувствительности вектора X по отношению к нескольким параметрам h_i , то уравнение (8.42) необходимо составить и решить для каждого h_i .

Заметим, что методы LU -факторизации, как и QR -факторизации дают в этом случае существенное сокращение вычислительных операций за счет экономии на повторных разложениях той же матрицы коэффициентов.

Метод присоединенных систем уравнений. На практике часто требуется оценить чувствительность лишь отдельных компонент вектора X , определяющих выходную функцию Φ . При этом требуется обычно

определить чувствительность $\partial \Phi / \partial h_i$ выходной функции к изменению параметра h . При этом будем рассматривать простейшую выходную функцию $\Phi(X)$, являющуюся линейной комбинацией компонент вектора X , определяемую выражением

$$\Phi = d^t \cdot X, \quad (8.43)$$

где d - вектор, выделяющий нужную комбинацию компонент и состоящий, в общем случае из $1, -1, 0$.

Формальное решение системы (8.42), определяющее чувствительность вектора X , запишется

$$(\partial X / \partial h) = -T^{-1} \cdot ((\partial T / \partial h) \cdot X - \partial W / \partial h). \quad (8.44)$$

Для определения чувствительности

$$\partial \Phi / \partial h = d^t \cdot (\partial X / \partial h), \quad (8.45)$$

воспользовавшись соотношением (8.44), получим

$$\partial \Phi / \partial h = -d^t \cdot T^{-1} \cdot ((\partial T / \partial h) \cdot X - \partial W / \partial h). \quad (8.46)$$

Проанализируем полученное соотношение. Прежде всего, обратим внимание на вектор - строку, $d^t \cdot T^{-1}$, которую можно интерпретировать, как решение транспонированной системы уравнений

$$Y^t = -d^t \cdot T^{-1}, \quad (8.47)$$

которую иначе можно записать в виде

$$T^t \cdot Y = -d. \quad (8.48)$$

Это означает, что вектор $Y^t = -d^t \cdot T^{-1}$ можно определить вслед за вектором X из решения исходной, но транспонированной системы методом LU - факторизации. Подставляя в (8.46) Y^t , вместо $-d^t \cdot T^{-1}$, получим

$$\partial \Phi / \partial h = Y^t \cdot (\partial T / \partial h) \cdot X - Y^y \cdot (\partial W / \partial h). \quad (8.49)$$

Анализируя записанное соотношение, видим, что для получения чувствительности выходной функции необходимо решить исходную и транспонированную системы уравнений, вычислить производные от матрицы и вектора свободных членов и результаты перемножить в соответствии с выражением (8.49). Для каждого параметра h_i заново формируются матрица $\partial T / \partial h$ и вектор $\partial W / \partial h$, а затем определяется правая часть. Векторы X и Y определяются один раз из исходной и транспонированной системы и не зависят от параметра h_i .

Таким образом, вычислительную процедуру метода присоединенной системы уравнений, можно представить в виде:

1) решаем исходную систему уравнений $T \cdot X = W$;

2) решаем транспонированную систему $T^t \cdot Y = -d$;

3) для каждого h_i формируем матрицу $\partial T / \partial h$ и вектор $\partial W / \partial h$ производных и в соответствии с (8.49) вычисляем $\partial \Phi / \partial h_i$.

При решении исходной и присоединенной систем необходимо использовать результаты одного LU -разложения. Пункт 3 можно упростить, воспользовавшись специальным расположением нулевых элементов в матрице $\partial T / \partial h_i$ и векторе $\partial W / \partial h_i$.

Рассмотрим два примера на вычисление чувствительностей узловых потенциалов через чувствительность решений линейной системы уравнений и чувствительности потенциала второго узла методом присоединенной системы уравнений для схемы с идеальным операционным усилителем изображенной на рисунке 8.1 к параметру G_1 .

Составим систему узловых уравнений схемы. Для этого, вместо идеального операционного усилителя, возьмем вначале реальный операционный усилитель, моделируемый источником напряжения управляемым напряжением, с конечным выходным сопротивлением R . Далее, заменим его источником тока управляемым напряжением с выходной проводимостью $G = 1/R$. После составления узловой системы исключим, в соответствии с соотношениями Гаусса, ток и напряжение выходного узла и осуществим предельный переход элементов матрицы проводимости, при $G \rightarrow \infty$.

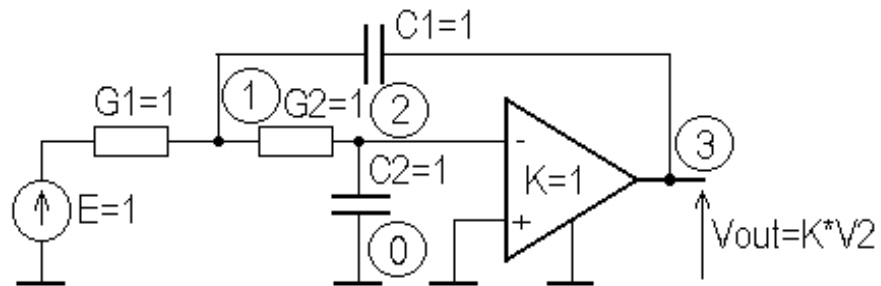


Рисунок 8.1 Схема с идеальным операционным усилителем

Узловая матрица проводимости схемы, учитывая, что крутизна источника тока управляемого напряжением равна $S = K \cdot G$, запишется

$$Y = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + s \cdot C_1 & -G_2 & -s \cdot C_1 \\ -G_2 & G_2 + s \cdot C_2 & 0 \\ -s \cdot C_1 & -K \cdot G & G + s \cdot C_1 \end{bmatrix},$$

где $s = j \cdot \omega$ - оператор Лапласа. Исключая напряжение и ток третьего узла, получим матрицу второго порядка

$$Y = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + s \cdot C_1 / (G + s \cdot C_1) & -G_2 - K \cdot G \cdot s \cdot C_1 / (G + s \cdot C_1) \\ -G_2 & G_2 + s \cdot C_2 \end{bmatrix}.$$

Осуществив предельный переход, при $G \rightarrow \infty$, и, заменив, источник напряжения на входе источником тока, получим следующую узловую систему уравнений для схемы с идеальным операционным усилителем

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + s \cdot C_1 & -G_2 - s \cdot C_1 \cdot K \\ -G_2 & G_2 + s \cdot C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \cdot E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Положим для определенности $s=2$, и, подставив численные значения в систему, получим решение

$$X = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/9 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношение (8.42), вычислим вектор правой части

$$((\partial T / \partial h) \cdot X - \partial W / \partial h) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда искомое решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \partial v_1 / \partial G_1 \\ \partial v_2 / \partial G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/9 \\ 2/27 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения чувствительности $\partial v_2 / \partial G_1$, воспользуемся соотношением (8.49). Как и прежде решение исходной системы равно

$$X = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/9 \end{bmatrix}.$$

Т.к. выходной величиной является v_2 , то $d = [0 \ 1]^t$ и сопряженная система $T^t \cdot Y = -d$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решение сопряженной системы запишется

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ -4/9 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношение (8.49), найдем чувствительность напряжения v_2 к изменению параметра G_1

$$\partial v_2 / \partial G_1 = [-1/9 \quad -4/9] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/9 \end{bmatrix} - [1/9 \quad -4/9] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2/27.$$

Как видим, результаты расчета чувствительности $\partial v_2 / \partial G_1$ по соотношениям (8.42) и (8.49) совпадают.

Сделаем одно замечание общего характера, касающееся использования понятия сопряженной системы уравнений. Дело в том, что в целом ряде случаев при решении линейных систем уравнений с разными правыми частями W интересует не весь вектор решений X , а отдельные компоненты либо линейная суперпозиция компонент. В этом случае, наряду с исходной системой уравнений

$$T \cdot X_i = W_i, \quad (8.50)$$

целесообразно ввести выходную функцию вида

$$\Phi_i = d^t \cdot X_i, \quad (8.51)$$

где $i = 1, \dots, m$; m - число различных правых частей системы уравнений. Прямое решение уравнений (8.50) требует LU - разложения исходной

матрицы коэффициентов T и последующей m -кратной прямой и обратной подстановок. Используя понятие присоединенной системы, формальное решение системы (8.50) запишется

$$\Phi_i = d^t \cdot T^{-1} \cdot W_i = (d^t \cdot T^{-1}) \cdot W_i = Y^t \cdot W_i, \quad (8.52)$$

где Y^t - решение присоединенной системы уравнений

$$T^t \cdot d = Y. \quad (8.53)$$

Чувствительность произвольной выходной функции. В отличие от рассмотренной линейной комбинации вектора решений выходная функция может иметь в общем случае произвольный вид

$$\Psi = \Phi(X, h), \quad (8.54)$$

где Φ - дифференцируемая функция; h - вектор параметров.

Дифференцирование (8.54), как сложной функции, по компоненте вектора h дает

$$\begin{aligned} \partial \Psi / \partial h &= \partial \Phi / \partial h + \sum (\partial \Phi / \partial X_i) \cdot (\partial X_i / \partial h) = \\ &= \partial \Phi / \partial h + (\partial \Phi / \partial X)^t \cdot (\partial X / \partial h), \end{aligned} \quad (8.55)$$

где $(\partial \Phi / \partial X)^t$ - вектор строки производных. Используя соотношение (8.44), для $(\partial X / \partial h)$ получаем

$$\partial \Psi / \partial h = \partial \Phi / \partial h - (\partial \Phi / \partial X)^t \cdot T^{-1} \cdot ((\partial T / \partial h) \cdot X - \partial W / \partial h). \quad (8.56)$$

Сравнивая полученное соотношение с (8.46), видим, что здесь, вместо d^t , используется $(\partial \Phi / \partial h)^t$, и, присоединенная система уравнений, в данном случае, имеет вид

$$T^t \cdot Y = (\partial \Phi / \partial h). \quad (8.57)$$

Таким образом, для решения присоединенной системы, вначале необходимо решить исходную систему для определения X . В результате, подставив в (8.56) решение присоединенной системы (8.57), получим

$$\partial \Psi / \partial h = \partial \Phi / \partial h - Y^t \cdot (\partial T / \partial h) \cdot X - Y^y \cdot (\partial W / \partial h). \quad (8.58)$$

Чувствительность более высокого порядка. Определение чувствительности высокого порядка требует вычисления производных более высокого порядка. Формально вычисление производной более высокого порядка не сложнее вычисления первой производной, однако требует больших затрат машинного времени. Для выяснения понятия чувствительности более высоких порядков получим соотношения для чувствительности второго порядка.

Вначале продифференцируем исходную систему уравнений (8.40) по параметру h_1

$$T \cdot (\partial X / \partial h_1) + (\partial T / \partial h_1) \cdot X = \partial W / \partial h_1. \quad (8.59)$$

Для простоты пусть источники не зависят от параметров, т.е. $\partial W / \partial h_i = 0$. Продифференцируем соотношение (8.59) по параметру h_2

$$\begin{aligned} & (\partial^2 T / (\partial h_1 \cdot \partial h_2)) \cdot X + (\partial T / \partial h_1) \cdot (\partial X / \partial h_2) + \\ & + (\partial T / \partial h_2) \cdot (\partial X / \partial h_1) + T \cdot (\partial^2 X / (\partial h_1 \cdot \partial h_2)) = 0 \end{aligned} \quad (8.60)$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} \partial^2 X / (\partial h_1 \cdot \partial h_2) = & -T^{-1} \cdot [(\partial^2 T / (\partial h_1 \cdot \partial h_2)) \cdot X + \\ & + (\partial T / \partial h_1) \cdot (\partial X / \partial h_2) + (\partial T / \partial h_2) \cdot (\partial X / \partial h_1)] \end{aligned} \quad (8.61)$$

Определим выходную функцию как

$$\Phi = d^t \cdot X. \quad (8.62)$$

Тогда на основании предыдущего соотношения можно записать

$$\begin{aligned} \partial^2 \Phi / (\partial h_1 \cdot \partial h_2) = & d^t \cdot \partial^2 X / (\partial h_1 \cdot \partial h_2) = \\ = & -d^t \cdot T^{-1} \cdot [(\partial^2 T / (\partial h_1 \cdot \partial h_2)) \cdot X + \\ & + (\partial T / \partial h_1) \cdot (\partial X / \partial h_2) + (\partial T / \partial h_2) \cdot (\partial X / \partial h_1)] \end{aligned} \quad (8.63)$$

Используя присоединенную систему уравнений

$$T^t \cdot Y = -d, \quad (8.64)$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \partial^2 \Phi / (\partial h_1 \cdot \partial h_2) = & Y^t \cdot [(\partial^2 T / (\partial h_1 \cdot \partial h_2)) \cdot X + \\ & + (\partial T / \partial h_1) \cdot (\partial X / \partial h_2) + (\partial T / \partial h_2) \cdot (\partial X / \partial h_1)] \end{aligned} \quad (8.65)$$

Как видим, для определения чувствительности необходимо знать векторы $\partial X / \partial h_1$ и $\partial X / \partial h_2$. Допустим также, что выполнено LU - разложение $T = L \cdot U$. Требуемые производные вектора X можно получить двумя путями. Если число параметров, по отношению, к которым необходимо определять вторую производную велико (больше размерности матрицы T), то производные получают повторным применением метода, рассматривая каждый компонент вектора в качестве выходной функции и используя соотношение (8.49). Если число параметров не велико, то можно непосредственно определять $\partial X / \partial h_i$ из (8.42), учитывая, что $\partial W / \partial h_i = 0$, будем иметь

$$T \cdot (\partial X / \partial h_i) = -(\partial T / \partial h_i) \cdot X. \quad (8.66)$$

Число прямых и обратных подстановок в этом случае равно числу параметров.

Если рассчитывается чувствительность к параметрам элементов, то $\partial^2 T / (\partial h_i \cdot \partial h_j) = 0$ т.к. элементы матрицы T линейно зависят от параметров, поэтому первые производные будут равны константам при элементах, а вторые производные соответственно равны нулю. Если параметры входят в матрицу коэффициентов функционально, то вторая производная в общем случае не будет равной нулю.

Как видим, определение чувствительности второго порядка требует существенно больших вычислительных затрат, сводящихся к многократному решению исходной системы с разными правыми частями и решению транспонированной системы. Вычисление чувствительностей

еще большего порядка потребует существенно больших вычислительных затрат.

Чувствительность второго порядка учитывает влияние на выходную функцию одновременного изменения двух параметров. В реальных условиях число параметров, подверженных изменению в силу различных факторов достаточно велико, что требует вычисления чувствительностей высоких порядков. Разумный объем вычислений заставляет с помощью чувствительностей первого порядка выделять наиболее существенные параметры, дающие основной вклад в изменение характеристик.

8.3 Применение метода присоединенных систем

Рассмотрим наиболее полезные приложения метода присоединенных систем уравнений, позволяющего рассчитывать, как собственно чувствительности различных характеристик, так и ряд других характеристик на их основе.

Чувствительность по частоте. При расчетах в частотной области, вектор свободных членов W , обычно не зависит от частоты, а производная $\partial T / \partial \omega$, при $T = G + j \cdot \omega \cdot C$, становится равной $j \cdot C$. При этом соотношение (8.49) переписывается в виде

$$\partial \Phi / \partial \omega = j \cdot Y^t \cdot C \cdot X. \quad (8.67)$$

При машинном формировании уравнений матрица C может существовать неявно. В этом случае чувствительность по частоте можно определить с помощью чувствительностей реактивных элементов

$$\partial \Phi / \partial \omega = (1 / \omega) \cdot [\sum C_i \cdot (\partial \Phi / \partial C_i) + \sum L_i \cdot (\partial \Phi / \partial L_i)]. \quad (8.68)$$

Так как Y и X , в общем случае, комплексные векторы, то выражение (8.67) будет иметь действительную и мнимую части. В соответствии с выражениями (8.14), (8.15), (8.17), (8.18), (8.19), можем записать

$$\partial |\Phi| / \partial \omega = |\Phi| \cdot \operatorname{Re}((1 / \Phi) \cdot (\partial \Phi / \partial \omega)), \quad (8.68)$$

$$\partial \varphi / \partial \omega = \operatorname{Im}((1 / \Phi) \cdot (\partial \Phi / \partial \omega)), \quad (8.69)$$

$$\partial \alpha / \partial \omega_{\text{дБ}} \cong 8.686 \cdot \operatorname{Re}((1 / \Phi) \cdot (\partial \Phi / \partial \omega)). \quad (8.70)$$

Соотношение (8.69), с точностью до знака определяет групповую задержку τ , так как

$$\tau = -\partial \varphi / \partial \omega. \quad (8.71)$$

Таким образом, τ может быть определена, как результат расчета чувствительности методом присоединенной системы уравнений. Чувствительность амплитуды $\partial \alpha / \partial \omega$ полезна при поиске максимума и минимума АЧХ.

Чувствительность нулей. Пусть z_i является нулем некоторой неявной выходной функции $\Phi(s, h)_{s=z_i} = 0$, определяющей ее вариации в

окрестности нуля при изменении параметра h . Следовательно, h можно рассматривать как независимую переменную, а z_i - как зависимую переменную. Дифференцирование сложной функции, как и в случае нуля полинома (8.20) дает

$$(\partial \Phi / \partial s) \cdot (\partial s / \partial h)_{/s=z_i} + (\partial \Phi / \partial h) = 0,$$

откуда с учетом того, что $s = j \cdot \omega$ и соотношения (8.67), получаем

$$\begin{aligned} \partial s / \partial h_{/s=z_i} &= \partial z_i / \partial h = \\ &= -(\partial \Phi / \partial h) \cdot (\partial \Phi / \partial s)_{/s=z_i} = -(\partial \Phi / \partial h) / (Y^t \cdot C \cdot X)_{/s=z_i}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Таким образом, это соотношение позволяет определить чувствительность нуля выходной функции, не выражая его алгебраической функцией параметров.

Чувствительность полюсов. Определение чувствительности полюса эквивалентно определению чувствительности нуля знаменателя дробно - рационального представления выходной функции цепи к ее параметру. Обозначим i -тый полюс через p_i . Если $s = p_i$, то матрица T становится вырожденной и векторы X и Y вычислить нельзя. Это требует иного подхода к определению чувствительности полюса.

Рассмотрим LU -разложение матрицы коэффициентов $T = L \cdot U$ и продифференцируем его по параметру h

$$\partial T / \partial h = (\partial L / \partial h) \cdot U + L \cdot (\partial U / \partial h). \quad (8.73)$$

Умножив обе части уравнения, слева на Y^t и справа на X , получим

$$Y^t \cdot (\partial T / \partial h) \cdot X = Y^t \cdot (\partial L / \partial h) \cdot U \cdot X + Y^t \cdot L \cdot (\partial U / \partial h) \cdot X. \quad (8.74)$$

Поскольку, в общем случае, векторы X и Y произвольны, определим их из уравнений

$$U \cdot X = e_n, \quad (8.75)$$

$$L^t \cdot Y = l_{nn} \cdot e_n, \quad (8.76)$$

где e_n - вектор с компонентой n , равной единице, остальные равны нулю; l_{nn} - (n,n) - тый элемент нижней треугольной матрицы L . Так как в полюсе матрица T вырождена, то элемент $l_{nn} = 0$ и правая часть уравнения (8.76) будет нулевым вектором. (Для обеспечения этого условия может понадобиться преобразование подобия с полным либо частичным выбором элемента равного нулю и установки его на место l_{nn} . Выбор и перестановки производятся при LU -разложении матрицы T .) Поскольку система (8.76) вырождена, есть возможность произвольного выбора одного компонента вектора Y . Для удобства вычислений положим $y_n = 1$.

Теперь можно показать, что решение уравнений определяющих X и Y , позволяет рассчитать чувствительность полюсов, для чего подставим (8.75) и (8.76) в (8.74)

$$Y^t \cdot (\partial T / \partial h) \cdot X = Y^t \cdot (\partial L / \partial h) \cdot e_n + l_{nn} \cdot e_n^t \cdot (\partial U / \partial h) \cdot X. \quad (8.77)$$

Так как матрица L является нижней треугольной, то произведение $(\partial L / \partial h) \cdot e_n$ равно вектору, у которого все элементы нулевые, за исключением последнего, равного $(\partial l_{nn} / \partial h)$, т.е.

$$(\partial L / \partial h) \cdot e_n = (\partial l_{nn} / \partial h) \cdot e_n.$$

Этот вектор умножается слева на вектор Y^t , последний элемент которого $y_n = 1$. Кроме того, произведение $e_n^t \cdot (\partial U / \partial h)$ является нулевым вектором, поскольку матрица U является верхней треугольной с единичными диагональными элементами $u_{ii} = 1$, т.е.

$$e_n^t \cdot (\partial U / \partial h) = e_n^t \cdot (\partial u_{nn} / \partial h) = 0.$$

В результате получаем

$$Y^t \cdot (\partial T / \partial h) \cdot X = \partial l_{nn} / \partial h. \quad (8.78)$$

Заметим, что в точке полюса вместо равенства $\Phi(s, h) = 0$ можно использовать соотношение $l_{nn}(s, h) = 0$.

Так как полюс является нулем знаменателя дробно - рационального представления выходной функции, то, используя соотношение (8.70), можно определить чувствительность полюса

$$\begin{aligned} \partial p_i / \partial h &= -(\partial l_{nn} / \partial h) / (\partial l_{nn} / \partial s)_{/s=p_i} = \\ &= -Y^t \cdot (\partial T / \partial h) \cdot X / (Y^t \cdot C \cdot X) \end{aligned} \quad (8.79)$$

Используя это уравнение, можно рассчитать чувствительность полюса выходной функции цепи.

Обобщая изложенное, представим алгоритм расчета чувствительности полюсов следующей последовательностью действий:

1) подставляя $s = p_i$ в матричное уравнение, проведем LU -факторизацию матрицы T ;

2) из уравнения $U \cdot X = e_n$ обратной подстановкой определим вектор X ;

3) из неопределенного уравнения $L^t \cdot Y = l_{nn} \cdot e_n$, полагая $y_n = 1$ обратной подстановкой, определим остальные компоненты вектора Y ;

4) с помощью соотношения (8.79), определим чувствительность текущего полюса p_i .

В тех случаях, когда необходимо произвести полный или частичный выбор ведущего элемента, чтобы l_{nn} был равен нулю, LU -факторизация запишется

$$P_1 \cdot T \cdot P_2 = L \cdot U,$$

откуда

$$\partial l_{nn} / \partial h = Y^t \cdot P_1 \cdot (\partial T / \partial h) \cdot P_2 \cdot X.$$

где P_1 и P_2 - преобразующие матрицы, полученные из единичных перестановкой соответствующих строк и столбцов. Можно считать, что P_1

и P_2 преобразуют вектора Y и X , изменяя порядок следования их элементов.

Температурная чувствительность. Как уже отмечалось, чувствительность по отношению к параметрам, не входящим напрямую в матрицу коэффициентов системы, но элементы, которой зависят от этих параметров, можно определить, пользуясь правилом дифференцирования сложных функций. Рассмотрим вопрос об определении чувствительности выходного напряжения к температуре $h=t^\circ$. Допустим, что m -тый элемент цепи имеет температурную зависимость, выражаемую соотношением

$$E_m = E_{m0} \cdot f_m(t^\circ). \quad (8.80)$$

Заменим функцию f_m несколькими первыми членами разложения ее в ряд Тейлора

$$E_m = E_{m0} \cdot (1 + r_m \cdot t^\circ + \dots). \quad (8.81)$$

Применим правило дифференцирования сложных функций для получения $\partial \Phi / \partial t^\circ$, при условии, что температура действует только на m -тый элемент

$$\partial \Phi / \partial t^\circ = (\partial \Phi / \partial E_m) \cdot (\partial E_m / \partial t^\circ). \quad (8.82)$$

Здесь $\partial \Phi / \partial E_m$ - чувствительность по отношению к параметру m -го элемента, которым может быть G, L, C или любой другой параметр, входящий в матрицу коэффициентов системы. Производную $\partial E_m / \partial t^\circ$ получаем из разложения в ряд Тейлора

$$\partial E_m / \partial t^\circ = E_{m0} \cdot [\partial f_m(t^\circ) / \partial t^\circ]. \quad (8.83)$$

Если использовать только линейный член разложения в ряд, то в соответствии с (8.81), получим

$$\partial E_m / \partial t^\circ = E_{m0} \cdot r_m. \quad (8.84)$$

Однако если от температуры зависят несколько элементов, то необходимо суммировать парциальные чувствительности по всем элементам

$$\partial \Phi / \partial t^\circ = \sum E_{m0} \cdot (\partial \Phi / \partial E_m) \cdot (\partial f_m(t^\circ) / \partial t^\circ). \quad (8.85)$$

В качестве примера, рассчитаем температурную чувствительность цепи рисунке 8.2.

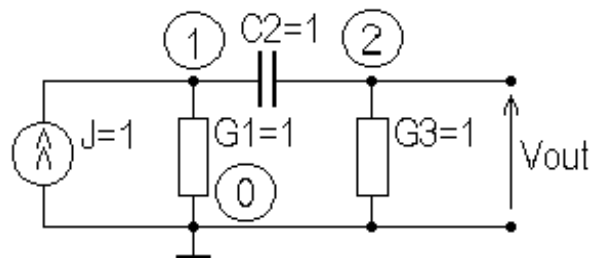


Рисунок 8.2 Простая цепь

Температурным коэффициентом емкости пренебрежем. Положим $s = j$.

Система узловых уравнений цепи имеет вид

$$\begin{bmatrix} G_1 + s \cdot C_2 & -s \cdot C_2 \\ -s \cdot C_2 & C_3 + s \cdot C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно (8.49), учитывая, что $\partial W / \partial t^\circ = 0$, можно записать

$$\partial \Phi / \partial E_m = Y^t \cdot (\partial T / \partial E_m) \cdot X.$$

Подставив значения элементов цепи и решая исходную и транспонированную системы, получаем

$$X = T^{-1} \cdot W = V = \begin{bmatrix} (3-j)/5 \\ (2+j)/5 \end{bmatrix},$$

$$Y = -(T^t)^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} (-2-j)/5 \\ (-3+j)/5 \end{bmatrix},$$

где

$$T = T^t = \begin{bmatrix} 1+j & -j \\ -j & 1+j \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = (T^t)^{-1} = \begin{bmatrix} (3-j)/5 & (2+j)/5 \\ (2+j)/5 & (3-j)/5 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $G_1 = G_1(t^\circ)$ и $G_3 = G_3(t^\circ)$, то

$$\partial T / \partial h_1 = \partial T / \partial E_1 = \partial T / \partial G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\partial T / \partial h_2 = \partial T / \partial E_2 = \partial T / \partial G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\partial \Phi / \partial G_1 = \partial v_2 / \partial G_1 = y_1 \cdot v_1 = (-7-j)/25,$$

$$\partial \Phi / \partial G_3 = \partial v_2 / \partial G_3 = y_2 \cdot v_2 = (-7-j)/25,$$

и

$$\begin{aligned} \partial \Phi / \partial t^\circ &= \partial v_2 / \partial t^\circ = \\ &= (\partial v_2 / \partial G_1) \cdot (\partial G_1 / \partial t^\circ) + (\partial v_2 / \partial G_3) \cdot (\partial G_3 / \partial t^\circ). \end{aligned}$$

Если проводимости $G_1 = G_3$ имеют одинаковый температурный коэффициент

$$\partial G_1 / \partial t^\circ = \partial G_3 / \partial t^\circ = r_m, \quad \text{то}$$

$$\partial v_2 / \partial t^\circ = 2 \cdot r_m \cdot (-7-j) / 25.$$

Эквивалентные генераторы тока и напряжения. Поведение цепи относительно любой выделенной пары зажимов можно описать с помощью эквивалентного генератора тока либо напряжения - так называемые эквиваленты Нортон и Тевенина. Для этого предлагается выполнить следующие преобразования. Вначале необходимо найти ток короткого замыкания или напряжение холостого хода выделенных зажимов. На втором этапе необходимо исключить независимые источники тока, закоротить независимые источники напряжения и путем подключения к выделенным зажимам единичного источника тока или источника напряжения вычислить напряжение на этих зажимах или протекающий ток. Условно эти преобразования можно отобразить в виде рисунка 8.3, где из схемы N вынесены независимые источники и для простоты показана цепь с одним независимым источником каждого типа.

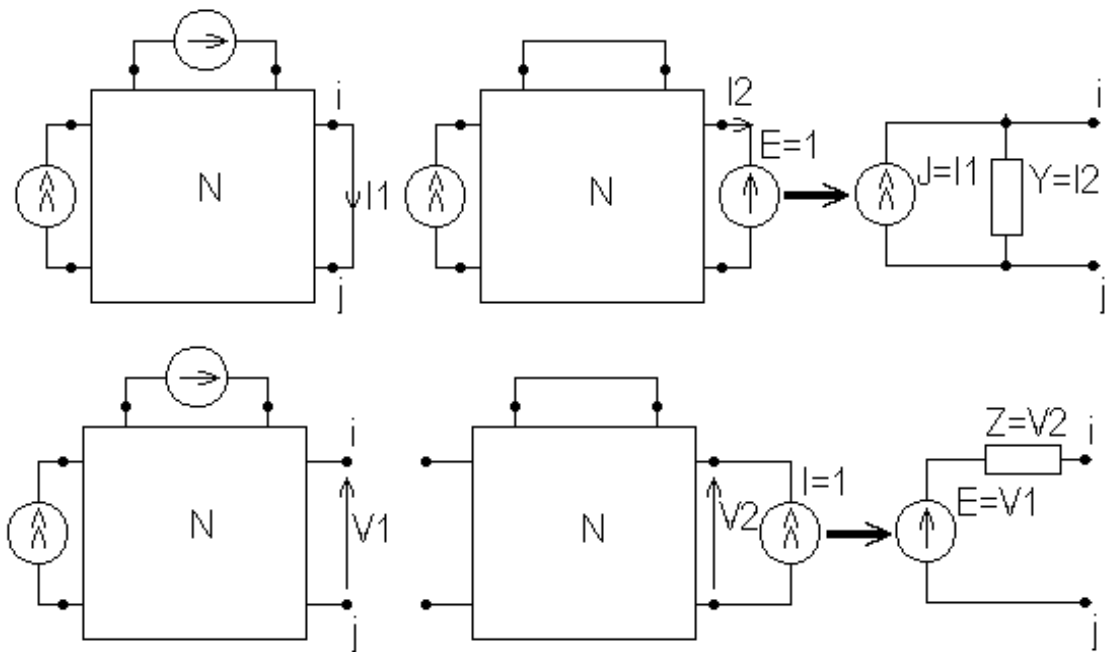


Рисунок 8.3 Представление эквивалентными генераторами

Прямое выполнение указанных преобразований неизбежно привело бы, по крайней мере, к двукратным вычислениям по двум различным схемам. Вначале по исходной схеме вычислили бы ток короткого замыкания или напряжение холостого хода, а затем, убрав внутренние независимые источники и, поставив на выделенные зажимы единичный генератор напряжения или тока, определили бы эквивалентную проводимость или сопротивление. Однако использование сопряженной системы уравнений позволяет выполнить необходимые вычисления гораздо эффективнее.

С математической точки зрения, требуемые преобразования можно представить уравнениями

$$T \cdot X_i = W_i, \quad (8.86)$$

$$\Phi_1 = d^t \cdot X_i, \quad (8.87)$$

где $i = 1, 2$; W_i - два вектора соответствующих источникам; Φ_i - требуемые выходные величины. Здесь предполагается, что в W_1 включены первоначальные источники, а W_2 содержит требуемый единичный источник. Предполагается также, что выходная ветвь представлена соответственно проводимостью либо сопротивлением.

Подставив решение уравнения (8.86) в (8.87) получим

$$\Phi_1 = d^t \cdot T^{-1} \cdot W_i = Y^t \cdot W_i, \quad (8.88)$$

где Y^t - решение присоединенной системы

$$T^t \cdot Y = d. \quad (8.89)$$

Таким образом, обе требуемые величины - ток или напряжение и эквивалентную проводимость либо сопротивление можно рассчитать, решив присоединенную систему уравнений и вычислив дважды произведение векторов, согласно уравнения (8.88).

Анализ шумов. Как уже отмечалось, наиболее важными шумовыми составляющими электронных схем являются - дробовой, тепловой и фликкер шумы. Два первых типа имеют вполне однозначную природу и выражения для их интенсивности. Третий вид шумов не поддается четкому описанию, и используются эмпирические соотношения.

Шумы обычно представляются в виде некоррелированных источников. Любую пару коррелированных источников шума, всегда можно представить набором некоррелированных источников, причем дополнительные источники включаются между исходными и имеют интенсивность, равную взаимной спектральной плотности источников.

Предметом анализа шумов является обычно определение вклада в выходной сигнал, как шумов источника сигнала, так и внутренних шумов устройства, т.е. речь, может идти о вычислении соотношения сигнал/шум на выходе устройства.

Интенсивность источников шума описывается спектральной плотностью, т.е. мощностью шумов, приходящейся на единицу полосы частот, таким образом, информация о фазе теряет смысл, что препятствует использованию принципа суперпозиции в обычном смысле. Поскольку спектральными плотностями в нашем подходе пользоваться неудобно, поэтому, учитывая, что спектральные плотности пропорциональны квадратам токов либо напряжений источников, опишем их интенсивность, как корень квадратный из спектральной плотности. Для учета независимости источников, т.е. исключения информации о фазе, вклад каждого источника будем рассматривать независимо.

Таким образом, необходимо последовательно рассчитать цепь с каждым из источников. Суммарная амплитуда источников на выходе равна корню квадратному из суммы квадратов каждого из вкладов. В сложных цепях число шумовых источников велико и могло бы потребоваться многократное решение системы уравнений. Однако, как было показано

ранее, можно воспользоваться решением присоединенной системы уравнений, что позволит существенно сократить объем вычислений.

Формально наша задача сводится к решению систем

$$T \cdot X_i = t_i \cdot W_i, \quad (8.90)$$

где $i = 0, \dots, m$; t_i - интенсивность i -го источника.

Выходная величина, как известно, есть линейная комбинация компонент вектора решений

$$\Phi_1 = d^t \cdot X_i. \quad (8.91)$$

Подставляя решение уравнения (8.90) в (8.91) получаем

$$\Phi_1 = d^t \cdot T^{-1} \cdot t_i \cdot W_i = t_i \cdot Y^t \cdot W_i, \quad (8.92)$$

где Y^t - решение присоединенной системы

$$T^t \cdot Y = d. \quad (8.93)$$

Индекс $i = 0$ соответствует источнику входного сигнала, индексы $i = 1, \dots, m$ соответствуют источникам шума.

Таким образом, при расчете шумов вначале находим решение присоединенной системы, а затем определяем вклад каждого источника в выходную величину. Так как каждый вектор W_i содержит информацию об одном источнике и включает не более двух ненулевых компонент ± 1 , то вычисление вклада сводится к одному вычитанию компонент y_i .

Амплитуду сигнала на выходе обозначим через $|\Phi_0|$, а амплитуду шумов представим выражением

$$A_N = \left(\sum_{i=1}^m |\Phi_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Интенсивности t_i зависят от типа элемента, так для тепловых шумов

$$t_i = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f \cdot G_i},$$

где k - постоянная Больцмана; T - температура в градусах Кельвина; Δf - ширина полосы; G_i - проводимость.

В качестве примера, вычислим соотношение сигнал/шум схемы, изображенной на рисунке 8.4.

Шумами зависимого источника пренебрежем, источник сигнала полагаем не шумящим. Узловая система уравнений для схемы имеет вид

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 - g & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix}$$

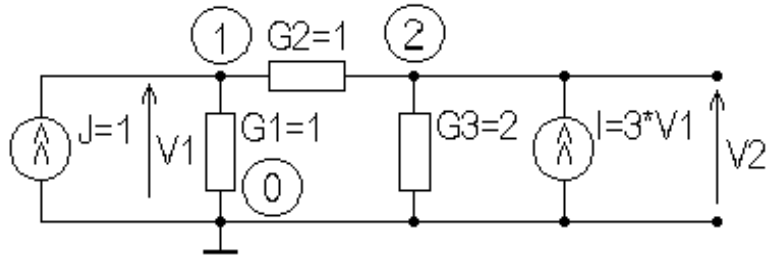


Рисунок 8.4 Схема для расчета шумов

Подставляя конкретные значения, запишем присоединенную систему уравнений $T^t \cdot Y = d$ в виде

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

решив которую, получим

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем сигнал на выходе цепи, используя соотношение (8.92)

$$\Phi_0 = t_0 \cdot Y^t \cdot W_0 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4.$$

Амплитуды шумов, обусловленные G_1 , G_2 , G_3 , соответственно равны

$$\Phi_1 = t_1 \cdot Y^t \cdot W_1 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot t_1,$$

$$\Phi_2 = t_2 \cdot Y^t \cdot W_2 = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = t_2,$$

$$\Phi_3 = t_3 \cdot Y^t \cdot W_3 = t_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t_3.$$

Найдем амплитуду шума на выходе

$$A_N = (4 \cdot t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^{1/2} = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f} \cdot (4 \cdot G_1 + G_2 + G_3)^{1/2} = \sqrt{28 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f}$$

и соотношение сигнал/шум на выходе цепи

$$\rho = 4 / \sqrt{28 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f \cdot G_i}.$$

На этом завершим раздел по расчету чувствительностей РЭУ и их приложений для вычисления других характеристик.

9 РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПО ПОСТОЯННОМУ ТОКУ

9.1 Алгоритм Ньютона – Рафсона

Определение рабочей точки или расчет по постоянному току электрических цепей по постоянному току является обычно первым шагом при анализе нелинейных схем.

Расчет по постоянному току включает в себя определение установившихся напряжений и токов цепи при включении источников питания и требует в общем случае решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Наиболее распространенным алгоритмом решения систем нелинейных алгебраических уравнений является алгоритм Ньютона–Рафсона. В этом разделе предстоит рассмотреть данный алгоритм применительно к наиболее известным методам формирования математических моделей электронных схем – обобщенному узловому, табличному, модифицированному узловому и модифицированному узловому с проверкой.

Алгоритм Ньютона–Рафсона. Алгоритм Ньютона–Рафсона часто используется как один из методов отыскания корней полиномов и имеет квадратичную сходимость при хорошем начальном приближении. В скалярном приближении, при решении в общем случае нелинейного уравнения $f(x)=0$ итерации вычисления очередного решения определяется выражением

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k = X^k + f(X^k) / f'(X^k), \quad (9.1)$$

где k - номер итерации.

Для некоторых простейших цепей возможно исключение промежуточных переменных и сведение задачи к поиску решения одного нелинейного уравнения. Для иллюстрации итерационной природы алгоритма рассмотрим подобный пример для схемы, изображенной на рисунке 9.1.

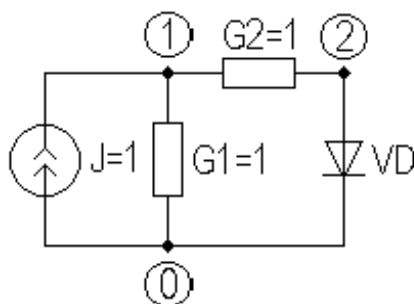


Рисунок 9.1 - Простая нелинейная схема

Пусть вольтамперная характеристика полупроводникового диода определяется упрощенным выражением

$$i_D = \exp(40 \cdot V_D) - 1,$$

здесь использовано $V_D / \varphi_T \cong V_D / 25.6 [mV] \cong 40 \cdot V_D$.

Значения номиналов других ветвей приведены на рисунке 9.1.

Узловая система уравнений для данной схемы запишется в виде

$$\begin{aligned} 3 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 &= 1, \\ -2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (\exp(40 \cdot v_2) - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку v_1 входит в оба уравнения линейно, исключим это напряжение, выразив из первого уравнения v_1 , через v_2

$$v_1 = 1/3 + 2/3 \cdot v_2,$$

и, подставив его во второе уравнение, получим

$$f(v_2) = 2/3 \cdot v_2 + \exp(40 \cdot v_2) - 5/3 = 0.$$

Производная от этой функции-выражения запишется

$$f'(v_2) = 2/3 + 40 \cdot \exp(40 \cdot v_2) = 0.$$

Приняв в качестве начального значения $v_2^0 = 0.1 \text{ В}$ и подставив полученные выражения в (9.1), в результате итераций с заданной точностью получим установившееся значение $v_2 = 1.264388E - 2 \text{ В}$, откуда однозначно следует $v_1 = 3.417626E - 1 \text{ В}$.

Небольшое изменение цепи, например замена проводимости G_1 диодом, приведет уже к двум нелинейным уравнениям, поэтому целесообразно рассмотреть развитие метода Ньютона–Рафсона применительно к системе нелинейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему n нелинейных уравнений с n переменными x_i

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Обозначим вектор переменных через X , а вектор функций через F , тогда, в общем виде, эту систему можно записать как

$$F(X) = 0. \quad (9.2)$$

Опишем решение системы нелинейных уравнений (9.2) основанное на ее линеаризации. Линеаризация представляет собой достаточно распространенный прием преобразования в окрестности решения, нелинейной системы в линейную систему, путем разложения ее в окрестности решения в ряд Тейлора и удержания первых линейных членов ряда, включая первые производные.

Итак, предполагая, что система имеет решение X^* , разложим каждую функцию системы в ряд Тейлора в окрестности решения

$$f_1(x^*) = f_1(x) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^* - x_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^* - x_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^* - x_n) + \dots;$$

$$f_2(x^*) = f_2(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^* - x_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^* - x_2) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^* - x_n) + \dots;$$

.....

$$f_n(x^*) = f_n(x) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^* - x_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^* - x_2) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^* - x_n) + \dots.$$

Предположив, что X близко к $X^* = X + \Delta X$, пренебрежем членами выше первого порядка и запишем систему в линеаризованной форме

$$F(X^*) \cong F(X) + M(X) \cdot (X^* - X),$$

где

$$M(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

матрица Якоби.

Если приравнять к нулю полученную систему уравнений, то решение не будет точно равно X^* из-за пренебрежения членами более высокого порядка и будет равно некоторому новому значению X . Отклонение от точного решения зависит от того, насколько хорошо многомерная поверхность, соответствующая нелинейной системе, аппроксимируется многомерной плоскостью в окрестности решения соответствующей линеаризованной системы. Кроме того, известно, что при соблюдении ряда условий и, в частности, при наличии хорошего начального приближения, повторное решение линеаризованной системы, при использовании предыдущего решения, в качестве нового начального приближения, обеспечивает снижение погрешности решения.

Таким образом, мы пришли к понятию итерации, основанной на повторном решении системы и понятию сходимости решения, т.е. уменьшении ошибки при использовании предыдущего решения для вычисления нового. Используя верхние индексы для обозначения последовательности итераций, можем записать линеаризованную систему в виде

$$F(X^k) + M(X^k) \cdot (X^{k+1} - X^k) = 0.$$

Формально решение этого уравнения на текущей итерации запишется

$$X^{k+1} = X^k - M^{-1}(X^k) \cdot F(X^k). \quad (9.3)$$

На практике стараются обойтись без явного обращения матрицы Якоби.

Так некоторые авторы, предлагают использовать итерационные соотношения для вычисления обратной матрицы Якоби текущей итерации через известную обратную матрицу на предыдущей итерации. Если новую матрицу Якоби представить как

$$M^{k+1} = M^k + \Delta M^k = M^k \cdot (E + (M^k)^{-1} \cdot \Delta M^k), \quad (9.4)$$

Тогда с определенным приближением можно записать

$$(M^{k+1})^{-1} \cong (E - (M^k)^{-1} \cdot \Delta M^k) \cdot (M^k)^{-1}, \quad (9.5)$$

где E - единичная матрица; ΔM^k - матрица приращения компонент матрицы Якоби на k -той итерации. Для малых приращений выражение (9.5) можем переписать в виде

$$(M^{k+1})^{-1} \cong (M^k)^{-1} - (M^k)^{-1} \cdot \Delta M^k \cdot (M^k)^{-1}. \quad (9.6)$$

Таким образом, получив однажды обратную матрицу и при условии малости приращений на очередной итерации, можно воспользоваться соотношением (9.6) для нахождения приближенного значения обратной матрицы следующей итерации. Использование этого соотношения, однако, ограничивается требованием обеспечения малости приращений. Обозначив $\Delta X^k = X^{k+1} - X^k$, перепишем уравнение (9.3) в виде

$$M(X^k) \cdot \Delta X^k = -F(X^k). \quad (9.7)$$

Решение уравнения, т.е. вектор приращений ΔX , найдем, например, с помощью LU-факторизации, а новое значение вектора переменных определим из уравнения

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k. \quad (9.8)$$

Совокупность уравнений (9.7) и (9.8) есть запись алгоритма Ньютона-Рафсона.

Отметим также, что если в соотношении (9.7) убрать знак минус в первой части, тогда знак минус появится в соотношении (9.8) перед вторым слагаемым. Алгоритм имеет довольно быструю сходимость – квадратичную вблизи точки решения. Недостаток алгоритма заключается в необходимости вычисления матрицы Якоби на каждой итерации.

Можно показать, что цель алгоритма заключается в уменьшении нормы ошибки от итерации к итерации

$$|F(X^{k+1})| \leq |F(X^k)|. \quad (9.9)$$

Для обеспечения сходимости зачастую используют модифицированную форму уравнения (9.8)

$$X^{k+1} = X^k + t^k \cdot \Delta X^k, \quad (9.10)$$

где t^k - параметр, выбираемый обычно в интервале $(0 \leq t^k \leq 1)$ для обеспечения сходимости, таким образом, чтобы выполнялось соотношение (9.9).

Проиллюстрируем применение алгоритма Ньютона-Рафсона, на примере решения системы нелинейных уравнений для двух диодной цепи, изображенной на рис.9.2.

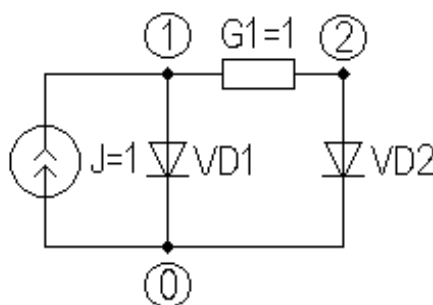


Рисунок 9.2 - Нелинейная цепь на двух диодах

Пусть каждый диод представлен упрощенной вольтамперной характеристикой

$$i_D = \exp(40 \cdot V_D) - 1,$$

а начальные значения для напряжений на диодах, совпадающие с узловыми потенциалами, примем равными $v_1^0 = v_2^0 = 0.1 \text{ В}$.

Метод узловых потенциалов дает следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} i_{D1} + G \cdot (v_1 - v_2) &= J, \\ -G \cdot (v_1 - v_2) + i_{D2} &= 0. \end{aligned}$$

Раскрывая выражение для токов диодов, и подставляя численные значения, получаем

$$\begin{aligned} f_1(v_1, v_2) &= \exp(40 \cdot v_2) + v_1 - v_2 - 2 = 0, \\ f_2(v_1, v_2) &= -v_1 + v_2 + \exp(40 \cdot v_2) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Вектор нелинейных функций и Якобиан системы определяется выражениями

$$\begin{aligned} f_1(v_1, v_2) &= -J + (\exp(40 \cdot V_{D1}) - 1), \\ f_2(v_1, v_2) &= (\exp(40 \cdot V_{D2}) - 1), \\ M(v_1, v_2) &= \begin{bmatrix} 40 \cdot \exp(40 \cdot v_1) + 1 & -1 \\ -1 & 40 \cdot \exp(40 \cdot v_2) + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При заданных начальных значениях, нелинейные функции и Якобиан, равны

$$\begin{aligned} f_1 &= 52.59815; \quad f_2 = 53.59815; \\ M &= \begin{bmatrix} 2184.926 & -1 \\ -1 & 2184.926 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Решение исходной нелинейной системы дает

$$\Delta v_1 = -0.0240844; \quad \Delta v_2 = -0.0245419.$$

Прибавляя полученные значения к начальным приближениям, получим

$$\begin{aligned} v_1^1 &= v_1^0 + \Delta v_1^0 = 0.0759156; \\ v_2^1 &= v_2^0 + \Delta v_2^0 = 0.0754581. \end{aligned}$$

Расчеты значений на ЭВМ, с точностью до пятого знака после запятой, дают следующие результаты для напряжений: $v_1 = 0.01712 \text{ В}$; $v_2 = 0.00041 \text{ В}$. Хотя начальное приближение далеко отстояло от полученного решения, алгоритм сошелся за 7 итераций.

Модификация Бroyдена. Как уже отмечалось, алгоритм Ньютона–Рафсона имеет хорошую сходимость, однако требует вычисления матрицы Якоби, либо решения линеаризованной системы уравнений на каждом шаге итераций, что естественно ведет к большим затратам машинного времени. Бройденом была предложена модификация алгоритма Ньютона–Рафсона, лишенная этого недостатка. Модификация Бройдена имеет два следующих отличия:

- 1) на каждой итерации не формируют матрицу Якоби и не вычисляют обратную, не вычисляют дополнительные функции для получения численных оценок отклонения, а используют лишь функции, определяемые из постоянной матрицы схемы;
- 2) на каждой итерации рассчитывают коэффициент затухания, указывающей на сходимость и коэффициент позволяющий оценить ошибку вычисления до окончания решения.

Суть метода Бroyдена заключается в использовании ранее упоминаемого весового коэффициента t^k , который, в модификации Бroyдена, может быть больше единицы для обеспечения большей скорости сходимости

$$\Delta X^k = -M^{-1}(X^k) \cdot F(X^k), \quad (9.11)$$

$$X^{k+1} = X^k + t^k \cdot \Delta X^k. \quad (9.12)$$

Вместо $M^{-1}(X^k)$, используется приближение к ней, вычисляемое на каждой итерации, в соответствии с выражением

$$H^{k+1} = H^k - \frac{\left[t^k \cdot \Delta X^k + H^k \cdot (F(X^{k+1}) - F(X^k)) \right] \cdot (\Delta X^k)^T \cdot H^k}{(\Delta X^k)^T \cdot H^k \cdot (F(X^{k+1}) - F(X^k))}, \quad (9.13)$$

где $H^0 = M^{-1}$ - обратная матрица Якоби.

Таким образом, модификацию Бroyдена, алгоритма Ньютона-Рафсона, можно представить следующей последовательностью действий.

1. Задание начального значения вектора переменных X^0 .
2. Вычисление начального значения H^0 путем обращения матрицы Якоби M^{-1} .
3. Вычисление $F(X^k)$.
4. Вычисление $\Delta X^k = H^k \cdot F(X^k)$.
5. Выбор t^k , при котором $|F(X^{k+1})| \leq |F(X^k)|$.
6. Расчет $X^{k+1} = X^k + t^k \cdot \Delta X^k$.
7. Проверка нормы вектора $|F(X^{k+1})|$ на сходимость.
8. Расчет $F(X^{k+1}) - F(X^k)$.
9. Вычисление H^{k+1} по соотношению (9.13).
10. Повторение вычислений, начиная с этапа 4.

9.2 Формирование нелинейных математических моделей

Обобщим, ранее изложенные методы формирования математических моделей линейных схем, на нелинейные схемы. Как и прежде, рассмотрим наиболее распространенные прямые методы формирования математических моделей – обобщенный метод узловых потенциалов,

табличный, модифицированный табличный, модифицированный узловой и модифицированный узловой с проверкой.

При отыскании решения по постоянному току в цепи все катушки индуктивности закорачиваются (ветвь КЗ), а все конденсаторы исключаются, т.е. заменяются ветвью холостого хода (ХХ).

Обобщенный метод узловых потенциалов. Прежде всего, заметим, что уравнения для узловых потенциалов требуют, чтобы резисторы с нелинейным сопротивлением описывались в форме

$$i_b = g(v_b). \quad (9.14)$$

Индекс b будет обозначать напряжения и токи ветвей, а индекс n используется для обозначения узловых переменных. Предполагается также, что все независимые источники представлены источниками тока.

Запишем закон Кирхгофа для токов ветвей и выразим напряжения ветвей через напряжения узлов

$$A \cdot i_b = 0, \quad (9.15)$$

$$V_b = A^t \cdot V_n. \quad (9.16)$$

Разделив все ветви на две группы – ветви независимых источников тока и другие, можем переписать соотношение (9.15) в виде

$$A \cdot i_b = -A_J \cdot i_J, \quad (9.17)$$

или обозначив узловые токи J_n

$$J_n = -A_J \cdot i_J, \quad (9.18)$$

окончательно получим

$$A \cdot i_b = J_n. \quad (9.19)$$

Подставив линейное уравнение ветви (9.14) в (9.19) получим

$$A \cdot g(V_b) = J_n, \quad (9.20)$$

а, используя (9.16), можем записать обобщенную форму узловых уравнений нелинейной цепи

$$A \cdot g(A^t \cdot V_n) = J_n. \quad (9.21)$$

Для представления алгоритма Ньютона-Рафсона перепишем узловую систему нелинейной цепи в виде

$$F(V_n) \equiv A \cdot g(A^t \cdot V_n) - J_n = 0. \quad (9.22)$$

Дифференцированием сложной функции получаем матрицу Якоби узловой системы нелинейной цепи

$$M(V_n) = \partial F(V_n) / \partial V_n = A \cdot (\partial g(V_b) / \partial V_b) \cdot (\partial V_b / \partial V_n). \quad (9.23)$$

Вводя обозначение

$$G_b(V_b) = \partial i_b / \partial V_b = \partial g(V_b) / \partial V_b, \quad (9.24)$$

и учитывая, что дифференцирование по ∂V_n , соотношений для напряжений ветвей (9.16), дает

$$\partial V_b / \partial V_n = A^t, \quad (9.25)$$

и выражение для Якобиана примет вид

$$M(V_n) = A \cdot G(V_b) \cdot A^t. \quad (9.26)$$

Для линейных сопротивлений соотношение (9.14) примет вид

$$i_b = F(V_b) = G \cdot V_b. \quad (9.27)$$

Вектор узловых токов, с учетом (9.19), можно, как известно, записать

$$J_n = A \cdot i_b = A \cdot G \cdot V_b = A \cdot G \cdot A^t \cdot V_n, \quad (9.28)$$

откуда вектор правой части системы уравнений Ньютона–Рафсона можно представить

$$F(V_n) = A \cdot G \cdot A^t \cdot V_n - J_n. \quad (9.29)$$

Выражение для производной тока ветви по напряжению ветви, представленное через разность узловых напряжений, запишется

$$M(V_n) = \partial F(V_n) / \partial V_n = \partial i_b / \partial V_n = A \cdot G \cdot A^t. \quad (9.30)$$

Откуда следует вывод, что Якобиан узловой системы уравнений для линейной цепи совпадает с дифференциальной матрицей проводимости. Компоненты вектора функции, правой части системы уравнений Ньютона–Рафсона для линейных ветвей, совпадают с линейными узловыми компонентными уравнениями ветвей.

Обозначив через V^0 начальное приближение вектора решений, распишем основные пункты алгоритма Ньютона–Рафсона в терминах обобщенного метода узловых потенциалов.

1. Установить $k=0$ и вычислить вектор узловых токов

$$J_n = -A_j \cdot i_j.$$

2. Определить напряжения на ветвях $V_b^k = A^t \cdot V_n^k$.

3. Найти токи нелинейных $i_b^k = g(V_b^k)$ и линейных $i_b^k = G \cdot V_b^k$ ветвей.

4. Вычислить компонентную матрицу $G_b(V_b^k) = \partial g(V_b^k) / \partial V_b^k$. Для линейных ветвей элементы матрицы $G_b(V_b^k)$ совпадают со значениями их проводимостей.

5. Вычислить $M(V_n^k) = A \cdot G(V_b^k) \cdot A^t$ и $F(V_n^k) = A \cdot i_b^k - J_n$.

6. Решить уравнение Ньютона–Рафсона $M(V_n^k) \cdot \Delta V_n^k = -F(V_n^k)$.

7. Уточнить вектор решений $V_n^{k+1} = V_n^k + \Delta V_n^k$.

8. Если точность не достигнута, то установить $k = k + 1$ и перейти к пункту 2.

Проиллюстрируем использование алгоритма Ньютона–Рафсона в обобщенном узловом методе, на примере простой нелинейной цепи, используемой нами в начале раздела (рисунок 9.3).

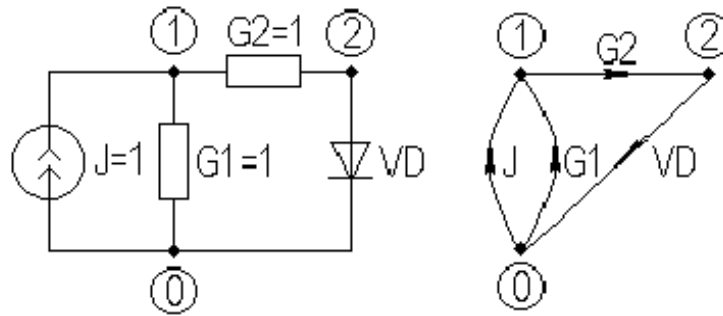


Рисунок 9.3 - Простая нелинейная цепь и ее граф

Пусть вектор начальных узлов напряжений определен как $V_n^0 = [0.3 \ 0.02]^t$. Уравнение диода опишем простейшей вольт-амперной характеристикой $i_D = \exp(40 \cdot V_D) - 1$. Значения номиналов других ветвей приведены на рисунке 9.3.

Дополненная матрица инцидентий ветвей схемы, согласно рисунку 9.3, имеет вид

$$A_d = [A \ A_J] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Через матрицу инцидентий ветвей независимых источников можно определить вектор узловых токов

$$J_n = -A_j \cdot J_b = - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

По матрице инцидентий ветвей и начальному значению вектора узловых напряжений определим вектор начальных напряжений ветвей

$$V_b^0 = A^t \cdot V_n^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.28 \\ 0.02 \end{bmatrix}.$$

Вектор токов ветвей согласно компонентным уравнениям определится

$$I_b = \begin{bmatrix} G_1 \cdot v_{b1} \\ G_2 \cdot v_{b2} \\ \exp(40 \cdot v_D) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.56 \\ 1.22554093 \end{bmatrix}.$$

Матрица дифференциальных проводимостей ветвей равна

$$\frac{\partial I_b}{\partial V_b} = G_b = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \cdot \exp(40 \cdot v_D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 89.02163712 \end{bmatrix}.$$

Через матрицу инцидентий и линеаризованную матрицу дифференциальных проводимостей ветвей определим линеаризованную узловую матрицу проводимости

$$M(V_n) = A \cdot G_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 91.02163712 \end{bmatrix}.$$

Соответственно определяется вектор функций правой части системы Ньютона-Рафсона

$$F(V_n) = A \cdot I_b - J_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.56 \\ 1.22554093 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.14 \\ 0.66554093 \end{bmatrix}.$$

В результате система уравнений Ньютона-Рафсона, на основе обобщенного узлового метода, при заданных начальных значениях, примет вид

$$M(V_n^0) \cdot \Delta V_n^0 = F(V_n^0) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 91.02163712 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_{n1}^0 \\ \Delta v_{n2}^0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0.14 \\ 0.66554093 \end{bmatrix}.$$

Решение системы на первой итерации равно

$$\Delta V_n^0 = \begin{bmatrix} \Delta v_{n1}^0 \\ \Delta v_{n2}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04241336145 \\ -0.00637995784 \end{bmatrix}.$$

Соответственно, уточненные значения узловых напряжений после первой итерации при весовом коэффициенте $t^0 = 1$, будут равны

$$V_n^1 = V_n^0 + t_0 \cdot \Delta V_n^0 = \begin{bmatrix} 0.3424133614 \\ 0.01362004216 \end{bmatrix}.$$

Расчет на ЭВМ, с точностью до пятого знака после запятой, уже на четвертой итерации привел к результатам

$$\Delta v_{n1}^3 = -0.00001; \Delta v_{n2}^3 = -0.00002; v_{n1}^4 = 0.34176; v_{n2}^4 = 0.01264.$$

Таким образом, получен тот же результат, что и в первом примере данного раздела.

При выводе соотношений алгоритма Ньютона-Рафсона, применительно к узловому методу, был использован классический подход, основанный на совокупности компонентных и топологических уравнений. При этом топологические соотношения отображались матрицей инцидентий. Однако в обобщенном узловом методе, можно, как отмечалось при изложении метода, использовать и формальный подход. При этом матрицу Якоби и вектор функций правой части системы Ньютона-Рафсона можно сформировать напрямую по информации о ветвях схемы.

Матрица Якоби имеет такую же структуру, что и матрица проводимости. Проводимости линейных ветвей включаются в матрицу Якоби методом добавления, в соответствии с узлами подключения. Нелинейная проводимость $i_b = g(v_b)$, включенная между узлами k и l , вызовет узловые токи $i_k = g(v_k - v_l)$; $i_l = -g(v_k - v_l)$. Дифференцируя эти соотношения по узловым напряжениям, получаем следующий фрагмент матрицы Якоби

$$\begin{array}{c}
 k \quad \cdot \quad l \\
 k \left[\begin{array}{ccc} \partial g / \partial v_k & \dots & -\partial g / \partial v_l \\ \dots & \dots & \dots \\ -\partial g / \partial v_k & \dots & \partial g / \partial v_l \end{array} \right] \cdot
 \end{array}$$

Эти производные вычисляются при напряжениях, полученных на предыдущей итерации. Аналогично вносятся и другие нелинейные проводимости. Структура Якобиана фиксирована и дает возможность использовать алгоритмы, предназначенные для разреженных матриц при расчете сложных схем.

Правая часть системы уравнений Ньютона-Рафсона, определяемая соотношением $f(v_n^k) = A \cdot i_b^k - j_n$, также может быть сформирована напрямую из компонентных уравнений ветвей, методом добавления, в соответствии с узлами подключения. Компонентные уравнения представляют собой токи линейных и нелинейных ветвей, подключенных к узлу, а также токи независимых источников тока, подключенных к узлу.

Так диод, изображенный на схеме рисунка 9.4, определит следующие элементы Якобиана, и вектора правой части

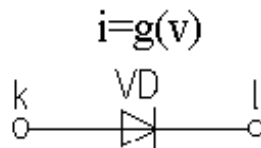


Рисунок 9.4 - Диод в качестве ветви схемы

$$\begin{array}{c}
 k \quad \cdot \quad l \\
 M(V_n) = \cdot \left[\begin{array}{ccc} \partial g / \partial v_k & \dots & -\partial g / \partial v_l \\ \dots & \dots & \dots \\ -\partial g / \partial v_k & \dots & \partial g / \partial v_l \end{array} \right]; \quad F(V_n) = \begin{array}{c} k \\ l \end{array} \left| \begin{array}{c} + g(v) \\ - g(v) \end{array} \right|.
 \end{array}$$

Таким образом, обобщенный узловый метод может рассматриваться, как метод формирования математической модели нелинейной цепи.

Табличный метод. Перейдем к рассмотрению табличного метода формирования системы уравнений Ньютона-Рафсона.

Табличную систему, как совокупность компонентных и топологических уравнений, можно записать в общем виде

$$V_b - A^t \cdot V_n = 0, \quad (9.31)$$

$$P(V_b, I_b) = W_b, \quad (9.32)$$

$$A \cdot I_b = 0. \quad (9.33)$$

Компонентные уравнения (9.33) определяют связь между токами и напряжениями ветвей в неявной форме. Для линейных ветвей

компонентные уравнения, как известно, принимают обобщенную линейную форму

$$Y_b \cdot V_b + Z_b \cdot I_b = W_b. \quad (9.34)$$

Соответственно, правая часть уравнения Ньютона-Рафсона может быть записана в виде

$$F(X) = \begin{bmatrix} V_b - A^t \cdot V_n \\ P(V_b, I_b) - W_b \\ A \cdot I_b \end{bmatrix} = 0,$$

где $X^t = [V_b \ I_b \ V_n]^t$. Матрица Якоби на k -той итерации, как производная вектора $F(X)$ по компонентам вектора X , будет иметь вид

$$M(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A^t \\ G^k & R^k & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix},$$

где $G_k = \partial P / \partial V_b^k$; $R^k = \partial P / \partial I_b^k$.

Как видим, структура Якобиана совпадает с блочной формой табличной системы. Более того, в случае линейных цепей, вместо компонентного уравнения (9.32), можно записать уравнение (9.34) и в результате дифференцирования вектора $F(X)$ убедимся, что Якобиан линейной цепи совпадает с традиционной матрицей коэффициентов табличной системы уравнений.

Система уравнений Ньютона-Рафсона построенная на основе табличного метода, как обычно, имеет вид

$$M(X^k) \cdot \Delta X^k = -F(X^k),$$

где $\Delta X^k = [\Delta V_b \ \Delta I_b \ \Delta V_n]^t$. После определения вектора приращений уточняем вектор неизвестных

$$X^{k+1} = X^k + t^k \cdot \Delta X^k.$$

Таким образом, табличный метод также может рассматриваться, как метод формирования математической модели нелинейной цепи.

Модифицированный табличный метод. В модифицированном табличном методе по сравнению с табличным методом с целью сокращения размерности системы уравнений (9.31-9.33) из рассмотрения исключается уравнение связи напряжений ветвей и узлов. При этом блочное уравнение (9.31) подставляется в уравнение (9.32) в результате чего получаем модифицированную табличную систему уравнений

$$P(A^t \cdot V_n, I_b) = W_b, \quad (9.35)$$

$$A \cdot I_b = 0. \quad (9.36)$$

Следовательно, вектор правой части системы уравнений Ньютона–Рафсона, запишется

$$F(X) = \begin{vmatrix} P(A^t \cdot V_n, I_b) - W \\ A \cdot I_b \end{vmatrix} = 0,$$

где $X = [I_b \ V_n]^t$ - вектор неизвестных. Взяв производную на k -той итерации от вектора функций $F(X)$, по компонентам вектора неизвестных X , получим Якобиан

$$M(X) = \begin{bmatrix} G^k \cdot A^t & R^k \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

где $G^k \cdot A^t = \partial P / \partial V_n^k$; $R^k = \partial P / \partial I_b^k$. Как видим, структура Якобиана совпадает со структурой матрицы коэффициентов модифицированной табличной системы уравнений. Более того, в случае линейных цепей, воспользовавшись компонентным уравнением (9.34), вместо (9.32), после подстановки в него (9.31), получим

$$Y_b \cdot A^t \cdot V_n + Z_b \cdot I_b = W_b, \quad (9.37)$$

вместо уравнения (9.35), и, дифференцируя полученную систему (9.37) и (9.36), убеждаемся, что Якобиан линейной цепи вырождается в матрицу коэффициентов модифицированной табличной системы уравнений.

Таким образом, система уравнений Ньютона–Рафсона, как математическая модель нелинейной цепи, может быть сформирована модифицированным табличным методом.

Модифицированный узловый метод. В модифицированном узловом методе, объединяющем достоинства узлового и табличного методов, как известно, все ветви цепи делят на три группы:

- 1) группа ветвей представимых проводимостью, причем токи этих ветвей не определяются в результате решения;
- 2) группа ветвей, не представимых проводимостью и, либо представимых проводимостью, но необходимо определить токи этих ветвей;
- 3) группа ветвей независимых источников тока вносимых в вектор узловых токов.

В обобщенном виде, узловые уравнения ветвей первой и третьей групп и компонентные уравнения ветвей второй группы, можно записать как

$$P_1(V_{n1}) - A_2 \cdot I_{b2} = J_{n1}, \quad (9.38)$$

$$P_2(V_{b2}, I_{b2}) = W_{b2}, \quad (9.39)$$

где $P_1(V_{n1}) = A_1 \cdot g(V_{b1}) \cdot A_1^t$; $J_{n1} = -A_J \cdot I_J$; $V_{b2} = A_2^t \cdot V_{n1}$.

Это позволяет записать вектор функций правой части системы уравнений Ньютона–Рафсона в виде

$$F(X) = \begin{bmatrix} P_1(V_{n1}) - A_2 \cdot I_{b2} - J_{n1} \\ P_2(A_2^t \cdot V_{n1}, I_{b2}) - W_{b2} \end{bmatrix} = 0,$$

где $X = [V_{n1} \quad I_{b2}]^t$ - вектор неизвестных. Дифференцируя на k -той итерации вектор функций, по компонентам вектора неизвестных, получаем Якобиан системы уравнений Ньютона–Рафсона

$$M(X) = \begin{bmatrix} G_{n1}^k & A_2 \\ G_2^k \cdot A_2^t & R_2^k \end{bmatrix}$$

где $G_{n1}^k = \partial P_1 / \partial V_{n1}$; $G_2^k \cdot A_2^t = \partial P_2 / \partial V_{n1}$; $R_2^k = \partial P_2 / \partial I_{b2}$.

Как видим, структура Якобиана аналогична структуре матрицы коэффициентов модифицированного узлового метода.

Для линейных цепей узловые уравнения ветвей первой и второй групп и компонентные уравнения второй группы, вместо (9.38) и (9.39), как известно, запишутся в виде

$$Y_{n1} \cdot V_{n1} + A_2 \cdot I_{b2} = J_{n1}, \quad (9.40)$$

$$Y_{b2} \cdot V_{b2} + Z_{b2} \cdot I_{b2} = W_{b2}, \quad (9.41)$$

где $V_{n1} = A_1 \cdot Y_{b1} \cdot A_1^t$; $J_{n1} = -A_J \cdot I_J$; $V_{b2} = A_2^t \cdot V_{n1}$.

Дифференцированием этих уравнений можно убедиться, что Якобиан линейной цепи совпадает с обычной матрицей коэффициентов модифицированной узловой системы уравнений.

Таким образом, модифицированный узловой метод можно рассматривать как метод формирования математической модели нелинейной цепи.

Модифицированный узловой метод с проверкой.

Модифицированный узловой метод с проверкой, как известно, отличается от модифицированного узлового метода тем, что с целью снижения порядка, из системы уравнений исключаются те переменные, значения которых заранее известны. Речь идет, в основном, о токах ветвей холостого хода и напряжениях ветвей короткого замыкания, встречающихся в идеальных управляемых источниках. При этом ветви также разбиваются на три группы, но ветви второй группы вносимые в дополнение матрицы проводимости предполагается заносить в соответствии с таблицей. При этом, однако, структура матрицы коэффициентов остается аналогичной структуре матрицы коэффициентов модифицированного узлового метода.

В обобщенном виде узловые уравнения первой и второй групп и компонентные уравнения ветвей второй группы можно записать как

$$P_1(V_{n1}) - A_2' \cdot I_{b2}' = J_{n1}, \quad (9.42)$$

$$P_2(V_{b2}', I_{b2}') = W_{b2}', \quad (9.43)$$

где $P_1(V_{n1}) = A_1 \cdot g(V_{b1}) \cdot A_1^t$; $J_{n1} = -A_J \cdot I_J$; $V'_{b2} = (A_2')^t \cdot V_{n1}$. Это позволяет записать вектор функций правой части системы уравнений Ньютона–Рафсона в виде

$$F(X) = \begin{bmatrix} P_1(V_{n1}) - A_2' \cdot I'_{b2} - J_{n1} \\ P_2((A_2')^t \cdot V_{n1}, I'_{b2}) - W'_{b2} \end{bmatrix} = 0,$$

где $X = [V_{n1} \quad I'_{b2}]^t$ - вектор неизвестных. Дифференцируя на k -той итерации вектор функций по компонентам вектора неизвестных, получаем Якобиан системы уравнений Ньютона–Рафсона

$$M(X) = \begin{bmatrix} G_{n1}^k & A_2' \\ G_2^k \cdot (A_2')^t & R_2^k \end{bmatrix},$$

где $G_{n1}^k = \partial P_1 / \partial V_{n1}$; $G_2^k \cdot (A_2')^t = \partial P_2 / \partial V_{n1}$; $R_2^k = \partial P_2 / \partial I'_{b2}$. Как видим, структура Якобиана аналогична структуре матрицы коэффициентов модифицированного узлового метода с проверкой.

Для линейных цепей узловые уравнения ветвей первой и второй групп и компонентные уравнения ветвей второй группы вместо (9.42) и (9.43), как известно, запишутся в виде

$$Y_{n1} \cdot V_{n1} + A_2' \cdot I'_{b2} = J_{n1}, \quad (9.44)$$

$$Y'_{b2} \cdot V'_{b2} + Z'_{b2} \cdot I'_{b2} = W'_{b2}, \quad (9.45)$$

где $Y_{n1} = A_1 \cdot Y_{b1} \cdot A_1^t$; $J_{n1} = -A_J \cdot I_J$; $V'_{b2} = (A_2')^t \cdot V_{n1}$.

Дифференцированием этих уравнений можно убедиться, что Якобиан линейной цепи совпадает с обычной матрицей коэффициентов модифицированной узловой системы с проверкой.

Таким образом, модифицированный узловой метод с проверкой можно рассматривать как метод формирования математической модели нелинейной цепи.

Сходимость в диодно-транзисторных схемах. Применение метода Ньютона–Рафсона к расчету режимов диодно-транзисторных схем может привести к переполнению разрядной сетки ЭВМ. Это связано с тем, что в процессе итерационного поиска решения значения переменных, в частности напряжений, претерпевают значительные отклонения от начального значения. В тоже время вольт - амперные характеристики диодов и транзисторов описываются в основном экспоненциальными зависимостями, небольшие изменения аргументов которых (напряжений на переходах), могут привести весьма к большим значениям функций (токов через переход), что и является основной причиной срыва итерационного процесса и переполнения разрядной сетки ЭВМ.

Поясним этот факт с помощью рисунка 9.5, на котором изображена вольт - амперная характеристика (ВАХ) диода.

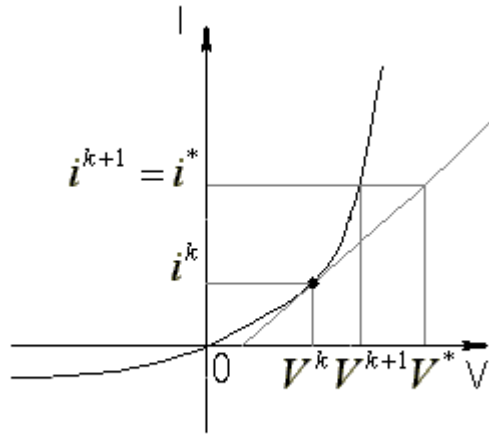


Рисунок 9.5 - ВАХ диода

Пусть ток диода описывается вольт-амперной характеристикой диода вида $i_D = I_S \cdot (\exp(40 \cdot v_D) - 1)$. Предположим, что на k -той итерации получена точка (v_k, i_k) и алгоритм предсказал на линеаризованной характеристике новую точку (v^*, i^*) . Согласно алгоритму, необходимо определить $i^{k+1} = g(v^*)$, что может, в случае экспоненциальной характеристики, повлечь переполнение разрядной сетки ЭВМ. В качестве альтернативного шага определения $i^{(k+1)}$, предлагается брать горизонтальную проекцию на вольт-амперную характеристику точки пересечения вертикальной проекции точки v^* . Тогда $i^{k+1} = i^*$, а инверсия вольт-амперной характеристики дает $v^{k+1} = 1/40 \cdot \ln(1 + i^*/I_S)$. Горизонтальную проекцию на вольт-амперную характеристику можно использовать для всех напряжений на диоде превышающих 0.7 В. Напряжение 0.7 В соответствует $\exp(40 \cdot 0.7) = 1.4463E + 12$ А, что вполне представимо в современных ЭВМ.

Другое эвристическое правило рекомендует использовать горизонтальную проекцию, при $v^* - v^k > 0$, а вертикальную, в противном случае.

Трудности могут возникнуть и при отрицательных смещениях на диоде, так как при итерациях вычисляются производные от вольт-амперной характеристики $i'_D = 40 \cdot I_S \cdot \exp(40 \cdot v_D)$, которые, при $v < 0$, могут оказаться слишком малыми. Во избежание этой ситуации, при отрицательных напряжениях на диоде, предлагается заменить вольт-амперную характеристику касательной, при $v_D = (-0.3 \div -0.5)$ В.

Аналогично, в качестве альтернативного подхода, при прямом смещении на диоде, превышающем 0.7 В, можно предложить заменять вольт-амперную характеристику, на ее производную в точке 0.7 В.

Подобные способы преодоления переполнения разрядной сетки ЭВМ, в процессе итерационного поиска решения нелинейных систем уравнений, можно рекомендовать и в схемах на биполярных транзисторах, так как

вольтамперные характеристики переходов, также имеют экспоненциальную зависимость от напряжений на переходах.

10 РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

10.1 Исходные определения

Переходный процесс определяется как реакция цепи на входное воздействие во времени. В качестве входного воздействия используют как реальные сигналы, так и идеальные тестовые воздействия – единичный скачок или единичную дельта функцию, позволяющие проводить сравнение реакций различных цепей. Так реакция цепи на единичный скачок называется переходной характеристикой, а реакция на единичную дельта функцию носит название импульсной характеристики. Причем переходная и импульсная характеристики определяются при отсутствии других воздействий на схему. Реакцию на реальное воздействие будем называть обобщенно переходным процессом.

Как известно, для определения реакции цепи во времени необходимо иметь математическую модель цепи в виде системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние цепи во временной области. Причем лучше всего иметь математическую модель в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши – разрешенных относительно производных. Дело в том, что именно для системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши разработаны методы аналитического и численного интегрирования, позволяющие находить систему функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям. Аналитические решения имеют, в основном, лишь линейные системы дифференциальных уравнений. Уравнения с периодическими и нелинейными коэффициентами имеют решения в отдельных частных случаях. Кроме того, аналитическое решение, как правило, представляется функцией от матрицы коэффициентов системы, т.е. требует нахождения корней характеристического уравнения, либо решения полной проблемы собственных значений. Это, как известно, весьма трудоемкая задача, поэтому для их интегрирования используются численные методы, пригодные для решения по единым алгоритмам различных типов уравнений.

В данном разделе будут рассмотрены лишь численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, пригодные, как для линейных, так и для нелинейных систем дифференциальных уравнений.

В качестве метода формирования математической модели цепи во временной области в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши широко применяется так называемый метод переменных состояния, позволяющий на основе построения дерева

графа цепи выбрать систему независимых переменных состояния. Однако метод переменных состояния весьма трудоемок, и существенно усложняется при наличии особенностей, управляемых источников и нелинейностей.

В связи с этим в данном разделе будут рассмотрены известные нам методы формирования математических моделей линейных и нелинейных цепей – табличный, модифицированный табличный, модифицированный узловой и модифицированный узловой с проверкой, которые позволяют управлять представлением ветвей в виде сопротивлений, либо проводимостей. На этапе формирования математической модели этими методами в виде системы линейных либо нелинейных алгебраических уравнений накладываются ограничения на представление емкостных ветвей в виде проводимостей и индуктивных ветвей в виде сопротивлений. Сформированные таким образом системы алгебраических уравнений позволяют вынести оператор Лапласа перед мнимой частью матрицы коэффициентов системы и, используя формально преобразование Лапласа, перейти от системы алгебраических к системе дифференциальных уравнений, которые интегрируются затем численными методами. В случае нелинейных реактивностей в качестве переменных вводят дополнительно заряды на емкостях и магнитные потоки на индуктивностях, которые, в отличие от напряжений на емкостях и токов на индуктивностях, меняются непрерывно. При численном интегрировании систем нелинейных дифференциальных уравнений используют итерационные алгоритмы решения систем нелинейных алгебраических уравнений типа Ньютона–Рафсона.

Численные методы интегрирования основаны на конечно разностном представлении системы дифференциальных уравнений. Широко известны два класса методов – это методы Рунге–Кутты и линейные многошаговые формулы. Методы Рунге–Кутты нашли широкое применение во многих областях науки и техники, однако, при интегрировании дифференциальных уравнений электронных схем используются реже в связи с особой жесткостью этих систем уравнений.

Под жесткостью систем дифференциальных уравнений понимают большой разброс корней характеристических уравнений связанных с постоянными времени цепей и, приводящий к выбору минимального шага интегрирования из соображений устойчивости и, соответственно, увеличению числа шагов и времени счета.

Линейные многошаговые формулы, особенно так называемые формулы дифференцирования назад, обеспечивают большую устойчивость и позволяют проводить интегрирование с большим шагом по времени. Для сокращения времени интегрирования можно использовать численные методы с адаптирующим шагом. Линейные многошаговые методы, сочетающие прямые и обратные формулы интегрирования – “прогноз” и “коррекцию”, позволяют находить компромисс между быстродействием и точностью при соблюдении устойчивости решения.

Кроме подхода, основанного на формировании и интегрировании системы дифференциальных уравнений, получил распространение подход, основанный на конечно-разностном представлении компонентных уравнений реактивных элементов. Метод, основанный на конечно-разностном представлении дифференциальных соотношений реактивных ветвей, получил название метода конечно-разностных моделей реактивных элементов.

При таком подходе каждый реактивный элемент цепи интерпретируется как сопротивление или проводимость с номиналом, определяемым номиналом реактивности и шагом интегрирования, с включенными, соответственно, последовательно либо параллельно источниками напряжения, либо тока определенной величины и зависящими от предыдущих значений этих переменных на реактивностях. Сложность модели зависит от способа представления производных конечными разностями.

В результате такого подхода цепи, содержащие реактивные элементы, преобразуются в цепи с резисторами и источниками. По существу, при данном подходе вычисление переходного процесса сводится к расчету резистивной цепи с источниками. Вычисление переходного процесса представляет процесс итерационного решения алгебраической системы уравнений с подстановкой на каждой итерации текущего решения в качестве предыдущего до тех пор, пока не получим установившееся решение.

Для линейных цепей это сводится к переформированию на каждом шаге итераций вектора правой части, зависящего от предыдущего решения и повторному решению системы уравнений с неизменной матрицей коэффициентов. В этой ситуации предпочтение, как известно, имеют методы основанные на факторизации матрицы коэффициентов системы – методы LU- и QR- факторизации, позволяющие почти вдвое быстрее получить повторное решение.

Данный подход применим и к нелинейным цепям, в том числе и с нелинейными реактивными элементами. При этом на каждом этапе итерации, кроме переформирования вектора правой части системы, переформированию подлежит и матрица коэффициентов, зависящая от переменных, найденных на предыдущей итерации. Для решения таких систем на каждом шаге итерации по времени следует применять итерационные методы типа Ньютона–Рафсона, используемые для решения нелинейных систем.

Важно также подчеркнуть, что в данном случае снимаются ограничения на представление реактивных элементов на этапе формирования математической модели цепи. Таким образом, кроме выше перечисленных методов формирования математической модели цепи, можно использовать и обобщенный узловый метод, который не позволяет представлять индуктивности в виде сопротивлений и использовать

предыдущий подход основанный на переходе от алгебраической системы к системе дифференциальных уравнений с последующим интегрированием.

10.2 Простые методы интегрирования

Дифференциальное уравнение в нормальной форме Коши – разрешенное относительно производной можно записать в следующем виде

$$x' = \partial x / \partial t = f(x, t), \quad (10.1)$$

где $x = x(t)$ - функция времени t . Соответствующий этому уравнению интеграл запишется

$$x(t) = x(a) + \int_a^b f(x, t) \cdot \partial t, \quad (10.2)$$

где a, b – нижний и верхний пределы интегрирования.

Задача численного интегрирования дифференциального уравнения на каждом шаге интегрирования сводиться к нахождению отсчета функции $x_{n+1} = x_{n+1}(t_{n+1})$ в момент времени t_{n+1} , при известном значении функции $x_n = x_n(t_n)$ в предыдущий момент времени t_n , и заданном шаге интегрирования $h = \Delta t = t_{n+1} - t_n$. Естественно, что задача интегрирования предполагает задание начального значения функции $x_0 = x(t_0) = x(a)$ в начальный момент времени $t_0 = a$.

Начальные значения в задачах интегрирования называются начальными условиями или, при использовании других переменных интегрирования, граничными условиями и позволяют однозначно определить функцию, удовлетворяющую этим условиям.

При численном методе интегрирования и заданных начальных условиях, найденное значение функции $x_{n+1} = x_{n+1}(t_{n+1})$ в момент времени t_{n+1} , естественно, будет отличаться от истинного значения. Причем ошибка интегрирования будет зависеть от размера шага и метода интегрирования. Проиллюстрируем на простейшем рисунке 10.1 вывод простых формул численного интегрирования и происхождение присущих им погрешностей.

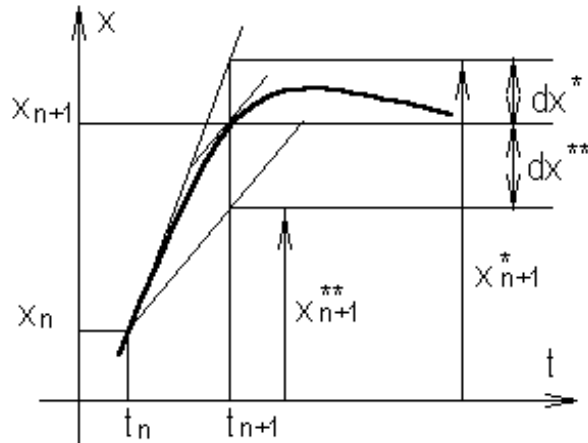


Рисунок 10.1 - Иллюстрация простых формул численного интегрирования

По известному значению функции x_n в момент времени t_n , найдем приближенное значение x_{n+1} в момент времени t_{n+1} , предполагая, что на малом интервале $h = t_{n+1} - t_n$ наклон функции остается неизменным. Тогда в соответствии с рисунком 10.1, учитывая, что $x' = tg\alpha$ можем записать

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot x'_n. \quad (10.3)$$

Это выражение известно, как прямая формула Эйлера. Здесь значение функции в следующей точке вычисляется через значение функции и ее производную в предыдущей точке. Как видно из рисунка 10.1, ошибка вычисления тем больше, чем больше шаг интегрирования.

Можно попытаться выразить значение функции в следующей точке через ее значение в предыдущей точке и значение производной в искомой точке. Как и прежде, полагаем, что наклон функции на интервале h остается неизменным. Тогда в соответствии с рисунком 10.1, учитывая, что $x' = tg\alpha$ можем записать

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot x'_{n+1}. \quad (10.4)$$

Это выражение известно как обратная формула Эйлера. Обратим внимание, что здесь значение функции x_{n+1} в точке t_{n+1} входит в правую и левую части выражения (10.4), поскольку $x'_{n+1} = f(x_{n+1}, t_{n+1})$. Трансцендентный характер формулы (10.4) требует для вычислений итерационные методы расчета, причем значение в предыдущей точке должно быть известно, а приближенное значение функции в искомой точке предсказано, например, по прямой формуле Эйлера. Тогда в результате итераций, по известному приближенному значению функции в искомой точке x_{n+1} и выражению для производной $x'_{n+1} = f(x_{n+1}, t_{n+1})$, найдется ее значение с заданной точностью.

Обратную формулу Эйлера можно интерпретировать как выражение значения функции в предыдущей точке через неизвестные значения функции и ее производной, в последующей точке

$$x_n = x_{n+1} - h \cdot x'_{n+1}.$$

Прямую и обратную формулы Эйлера можно записать также в виде

$$(x_{n+1} - x_n) / h = x'_n,$$

$$(x_{n+1} - x_n) / h = x'_{n+1}.$$

Из этих выражений следует, что приращение искомой функции на шаге интегрирования определяется значением производной этой функции в начале либо в конце интервала $h = t_{n+1} - t_n$. Такая интерпретация, прямой и обратной формул Эйлера, подводит к выводу о возможности получения других конечно –разностных формул интегрирования. Так, определив приращение искомой функции на шаге интегрирования линейной комбинацией производных x'_n и x'_{n+1}

$$(x_{n+1} - x_n) / h = b_0 \cdot x'_n + b_1 \cdot x'_{n+1},$$

и полагая $b_0 = b_1 = 1/2$, получаем известную формулу трапеций

$$x_{n+1} = x_n + 0.5 \cdot h \cdot x'_n + 0.5 \cdot h \cdot x'_{n+1}. \quad (10.5)$$

Формула трапеций является простейшей многошаговой формулой, когда для определения значения функции в текущей точке используются значения функции и ее производных в предыдущих точках. Подробнее на многошаговых формулах интегрирования остановимся позже, а сейчас рассмотрим вопросы, касающиеся точности и устойчивости алгоритмов численного интегрирования.

Иллюстрацию алгоритмов численного интегрирования проведем на примере простого линейного неоднородного дифференциального уравнения $x' = x + t^2$. Определим начальное значение $x_0 = 1$, при $t = 0$ и шаге $h = 0.025$. Точное решение этого уравнения имеет вид $x = 3 \cdot e^t - t^2 - 2 \cdot t - 2$, что позволит оценить точность численных методов интегрирования.

Вначале воспользуемся для интегрирования прямой формулой Эйлера (10.3). В начальный момент времени $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ и $x'_0 = x_0 + t^2 = 1$. В следующий момент времени $t_1 = 0.025$,

$$x_1 = x_0 + h \cdot x'_0 = 1 + 0.025 \cdot 1 = 1.025$$

и

$$x'_1 = x_1 + t_1^2 = 1.025 + 0.000625 = 1.025625.$$

Результаты численного интегрирования на ЭВМ, включая ошибку e , сведены в таблицу 10.1.

Таблица 10.1 Результаты интегрирования по прямой формуле Эйлера

t	x	e
0.000	1.0000000	0.0000000
0.025	1.0250000	-0.0003204
0.050	1.0506406	-0.0006727
0.075	1.0766991	-0.0010583

0.100	1.1040340	-0.0014788
0.125	1.1318848	-0.0019355
0.150	1.1605726	-0.0024301
0.175	1.1901494	-0.0029642
0.200	1.2206688	-0.0035395

В обратной формуле Эйлера и формуле трапеций для вычисления значения функции в текущей точке используются значения производных в искомой точке. Для нахождения решения в данной ситуации используют итерационные методы, которые требуют начальное приближение значения функции.

В качестве начального значения можно использовать либо значение функции в предыдущей точке, либо определить ее по прямой формуле Эйлера. Таким образом, мы приходим к понятию **прогноза**, когда предсказывается значение искомой функции в следующей точке.

На основе предсказания значения функции по исходному соотношению $x'_{n+1} = f(x_{n+1}, t_{n+1})$ можно определить значение производной в этой точке и уточнить – скорректировать, это значение, используя обратную формулу Эйлера или формулу трапеций. Таким образом, мы приходим к понятию **коррекция**. По уточненному значению функции можно найти уточненное значение производной и уточнить значение функции еще раз т.д. Уточнение продолжают до тех пор, пока значение искомой функции не установится с заданной точностью. После этого по прямой формуле Эйлера предсказывается значение функции в следующей точке и вновь уточняется и т.д.

Описанная методика численного интегрирования, когда для предсказания используются прямые формулы, а для коррекции обратные получила название **метода прогноза–коррекции**. Итерации уточнения позволяют фиксировать ошибку и адаптировать шаг численного интегрирования.

Метод прогноза–коррекции. Проиллюстрируем метод прогноза–коррекции, используя линейное неоднородное дифференциальное уравнение из предыдущего примера. Для прогноза воспользуемся прямой формулой Эйлера, а для коррекции – обратной, причем уточнение будем производить в три этапа.

При $t = 0$, $x_0 = 1$, $h = 0.025$, и $x'_0 = 1$, предсказанное по прямой формуле Эйлера значение x_1^P , составляет $x_1^P = x_0 + h \cdot x'_0 = 1 + 0.025 \cdot 1 = 1.025$. Первая итерация, в соответствии с заданным уравнением и обратной формулой Эйлера, дает

$$x_1'^{(0)} = x_1^P + t_1^2 = 1.025 + 0.000625 = 1,025625;$$

$$x_1^{(1)} = x_0 + h \cdot x_1'^{(0)} = 1.02564063.$$

Вторая итерация:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(1)} + t_1^2 = 1.02626563; \quad x_1^{(2)} = x_0 + h \cdot x_1^{(1)} = 1.02565664.$$

Третья итерация:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(2)} + t_1^2 = 1.02628164; \quad x_1^{(3)} = x_0 + h \cdot x_1^{(2)} = 1.02565704.$$

Результаты численного интегрирования на ЭВМ, включая ошибку интегрирования ϵ , сведены в таблицу 10.2

Таблица 10.2 - Результаты интегрирования методом прогноз-коррекция.

t	x^p	x^c	ϵ
0.000	1.0000000	1.0256410	0.0000000
		1.0256567	
		1.0256570	
0.025	1.0256570	1.0250036	0.0003367
		1.0520196	
		1.0520200	
0.050	1.0520200	1.0791222	0.0007067
		1.0791387	
		1.0791391	
0.075	1.0791391	1.1070483	0.0011117
		1.1070653	
		1.1070658	
0.100	1.1070658		0.0015530

Сравнение ошибок интегрирования по прямой формуле Эйлера и методу прогноз–коррекция на основе прямой и обратной формулы Эйлера показывает, что для прямой формулы Эйлера ошибки отрицательны, тогда как для обратной формулы Эйлера они положительны. По интуиции комбинация этих двух формул, например, формула трапеций, может дать меньшую ошибку.

Проиллюстрируем результат интегрирования по формуле трапеций того же дифференциального уравнения, используя для предсказания прямую формулу Эйлера (таблица 10.3).

Таблица 10.3 - Результаты интегрирования методом трапеций

t	x^p	x^c	ϵ
0.000	1.0000000	1.02532031	0.0000000
		1.02532432	
		1.02532437	
0.025	1.02532437	1.05131715	0.0000040
			0
		1.05132145	
		1.05132150	
0.050	1.05132150	1.07803542	0.0000082
			1
		1.07804002	
		1.07804008	
0.075	1.07804008	1.10552504	0.0000126

		1.10552996	3
		1.10553002	
0.100	1.10553002		0.0000172
			6

Ошибка действительно уменьшилась, что будет обсуждено позже при изложении ошибок усечения.

Полученные формулы численного интегрирования пригодны как для линейных, так и для нелинейных дифференциальных уравнений. Получим выражения этих формул интегрирования для систем линейных дифференциальных уравнений.

Пусть имеем систему линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши и векторно-матричном представлении

$$X' = A \cdot X + W, \quad (10.6)$$

где X - вектор искомых функций времени t ; A - матрица коэффициентов системы; W - вектор воздействий, известных функций времени.

Применив прямую формулу Эйлера (10.3), к системе (10.6), в конечно-разностном представлении, получим

$$X_{n+1} = X_n + h \cdot X'_n = X_n + h \cdot (A \cdot X_n + W_n).$$

Откуда, приводя подобные, можем записать матричную форму прямой формулы Эйлера

$$X_{n+1} = (1 + h \cdot A) \cdot X_n + h \cdot W_n. \quad (10.7)$$

Формула (10.7) имеет итерационный характер, т.е. по известному на предыдущем шаге вектору неизвестных, находим его текущее значение, затем, подставляя в правую часть, находим следующее значение и т.д.

Используя обратную формулу Эйлера (10.4), получаем

$$X_{n+1} = X_n + h \cdot X'_{n+1} = X_n + h \cdot (A \cdot X_{n+1} + W_{n+1}).$$

Приведя подобные, запишем матричную форму обратной формулы Эйлера

$$(1 - h \cdot A) \cdot X_{n+1} = X_n + h \cdot W_{n+1}. \quad (10.8)$$

Как видим в случае линейных систем дифференциальных уравнений, трансцендентность обратной формулы Эйлера исчезла, хотя, как и предыдущая формула (10.7), имеет итерационный характер. Решая на каждом шагу систему (10.8) находим очередное значение вектора неизвестных, затем, подставляя его в правую часть, находим новое значение и т.д.

Для нахождения решения системы (10.8) лучше воспользуемся методами, основанными на LU- или QR- факторизации исходной матрицы коэффициентов $(1 - h \cdot A)$. При этом, выполнив один раз разложение исходной матрицы на сомножители и, зафиксировав их, при повторных итерациях, будем решать факторизованные системы

с новым вектором свободных членов, экономя время на повторных факторизациях.

В случае формулы трапеций матричное уравнение имеет вид

$$X_{n+1} = X_n + 0.5 \cdot h \cdot (A \cdot X_n + W_n + A \cdot X_{n+1} + W_{n+1}).$$

Перегруппировывая компоненты, получим уравнение

$$(1 - 0.5 \cdot h \cdot A) \cdot X_{n+1} = (1 + 0.5 \cdot h \cdot A) \cdot X_n + 0.5 \cdot h \cdot (W_n + W_{n+1}), \quad (10.9)$$

которое решается аналогично (10.8), т.е. путем решения системы при заданных начальных условиях X_n , подстановки найденного решения X_{n+1} в правую часть на место X_n , нахождения нового решения и т.д.

10.3 Порядок метода интегрирования и ошибки усечения

Под порядком метода интегрирования, в общем случае, будем понимать число предыдущих отсчетов функции, используемых при вычислении текущего значения функции. Ошибка, заложенная при выводе формулы интегрирования соответствующего порядка за счет отбрасывания старших членов разложения функции в ряд Тейлора, называется ошибкой усечения.

Как уже отмечалось, в формулу трапеций значения производных в предыдущей и текущей точках входят с одинаковыми весами. Очевидно, что эти производные можно взять с разными весами, точно также, можно поступить и со значениями функций. В общем случае, формулу интегрирования можно записать

$$a_0 \cdot x_0 + a_1 \cdot x_1 - h \cdot (b_0 \cdot x'_0 + b_1 \cdot x'_1) = 0. \quad (10.10)$$

При изложении вопроса ограничимся случаем, когда значение искомой функции x_1 , в точке $t_1 = t_0 + h$, определяется через ее значение в предыдущей точке и значения ее производных в предыдущей и текущей точках. Значение функции в текущей точке можно в принципе определить через значения функции и производных в текущей и нескольких предыдущих точках, что будет соответствовать так называемым многошаговым формулам интегрирования.

Используя выражение (10.10), при соответствующих коэффициентах $a_{0,1}$ и $b_{0,1}$, можно получить все три ранее рассмотренные формулы интегрирования. Рассмотрим некоторые свойства этих формул, переписав соотношение (10.10), в виде

$$a_0 \cdot x(t_0) + a_1 \cdot x(t_0 + h) - h \cdot (b_0 \cdot x'(t_0) + b_1 \cdot x'(t_0 + h)) = 0.$$

Разложим функции $x(t_0 + h)$ и $x'(t_0 + h)$ в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot x(t_0) + a_1 \cdot [x(t_0) + \frac{h}{1!} \cdot x'(t_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot x''(t_0) + \frac{h^3}{3!} \cdot x'''(t_0) + \dots] - \\ & - h \cdot b_0 \cdot x'(t_0) - h \cdot b_1 \cdot [x'(t_0) + \frac{h}{1!} \cdot x''(t_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot x'''(t_0) + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Перенесем слагаемые второго и более высоких порядков в правую часть и запишем

$$\begin{aligned} & [a_0 + a_1] \cdot x(t_0) + [a_1 - b_0 - b_1] \cdot h \cdot x'(t_0) = \\ & = - \left[\frac{a_1}{2!} - b_1 \right] \cdot h^2 \cdot x''(t_0) - \left[\frac{a_1}{3!} - \frac{b_1}{2!} \right] \cdot h^3 \cdot x'''(t_0) - \dots \end{aligned}$$

Это выражение будет удовлетворяться тождественно, при любых значениях $x(t)$ и ее производных в точке $t = t_0$, в случае обращения в нуль сомножителей в квадратных скобках. Это приводит к следующим равенствам:

- 1) для левой части - $a_0 + a_1 = 0$; $a_1 - b_0 - b_1$;
- 2) для правой части - $\frac{a_1}{2!} - b_1 = 0$; $\frac{a_1}{3!} - \frac{b_1}{2!} = 0$.

Из анализа следует:

1. Выбором четырех различных коэффициентов $a_{0,1}, b_{0,1}$, нельзя обратить в нуль все сомножители в квадратных скобках.

2. Наибольшее число первых сомножителей, которое может быть обращено в нуль, равно трем и это соответствует следующему выбору коэффициентов - $a_0 = -1$; $a_1 = 1$; $b_0 = b_1 = 0.5$. Подстановка их в исходное уравнение (10.10) приводит к формуле трапеций. Из уравнения для коэффициентов находим, что множители находящиеся перед производными, начиная с третьего порядка и выше, не равны нулю. Обозначив выражения в квадратных скобках через c_n , где n - порядок производной, получим значение первого множителя, отличного от нуля - $c_3 = -0.5$.

3. Если взять набор коэффициентов $a_{0,1}, b_{0,1}$, приводящий к формуле трапеций и принять, что искомая функция $x(t)$ является полиномом второй степени, то уравнение разложенное в ряд будет удовлетворяться точно, поскольку в этом случае все производные, начиная с третьей, равны нулю.

Из сказанного следует, что в формуле трапеций искомая функция аппроксимирована полиномом второй степени и говорят, что метод численного интегрирования, опирающийся на метод трапеций, имеет порядок $p = 2$. Погрешность описания функции $x(t)$ является полиномом второй степени и определяется отброшенными членами ряда Тейлора, содержащими производные третьего и более высоких порядков.

В связи с этим первый, не равный нулю сомножитель в уравнении разложенным в ряд Тейлора обозначают c_{p+1} и называют ошибкой усечения. Для формулы трапеций: $c_{p+1} = c_3 = -0.5$. Определив значения коэффициентов $a_{0,1}, b_{0,1}$, для прямой и обратной формул Эйлера, найдем, что порядок интегрирования у этих формул равен 1, а ошибка усечения c_2

составляет, соответственно, -0.5 и 0.5 . Вспомнив, что в рассматриваемом примере, формула трапеций дала меньшую погрешность и это, как видим, связано с более высоким порядком метода и соответственно с меньшей ошибкой усечения. Более высокое значение порядка p и меньшая ошибка усечения c_{p+1} предпочтительны при оценке формул численного интегрирования.

10.4. Устойчивость методов интегрирования

Для характеристики метода численного интегрирования недостаточно знать его порядок и ошибку усечения. Важно еще одно свойство - устойчивость метода. Устойчивость метода численного интегрирования характеризует поведение ошибки интегрирования во времени. Нарастание ошибки интегрирования свидетельствует о неустойчивости метода. Устойчивость метода интегрирования, как будет изложено далее, зависит от шага интегрирования и значения корней характеристического уравнения. Поскольку точность также зависит от шага интегрирования, выбор размера шага часто является результатом компромисса таких характеристик, как точность и устойчивость метода интегрирования.

Изложим проблему устойчивости на примере простейшего дифференциального уравнения

$$x' = \lambda \cdot x, \quad (10.11)$$

имеющего аналитическое выражение решения, в виде

$$x = x_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t),$$

где λ - корень характеристического уравнения, действительная, либо комплексная константа. Отметим также, что отклик линейной цепи на единичный скачок на входе, как результат решения системы дифференциальных уравнений в случае простых полюсов описывается соотношением вида

$$x(t) = \sum A_i \cdot \exp(\lambda_i \cdot t),$$

где λ_i - корни характеристического уравнения. Таким образом, решение простейшего уравнения соответствует одной компоненте этого отклика, а результаты его исследования можно экстраполировать на общий случай.

Исследование устойчивости численных методов начнем с прямой формулы Эйлера

$$x_1 = x_0 + h \cdot x_0'$$

Используя (10.11) и, подставляя в формулу, вместо x_0' , его значение $\lambda \cdot x_0$, получим

$$x_1 = (1 + \lambda \cdot h) \cdot x_0.$$

На следующем шаге интегрирования, соответственно, получим

$$x_2 = x_1 + h \cdot x_1' = (1 + \lambda \cdot h) \cdot x_1 = (1 + \lambda \cdot h)^2 \cdot x_0.$$

Продолжив процедуру интегрирования в пределах n шагов, получим

$$x_n = (1 + \lambda \cdot h)^n \cdot x_0.$$

Предположим, что время интегрирования $t \Rightarrow \infty$ и, соответственно, $n \Rightarrow \infty$, тогда, для того чтобы x_n было ограниченным, для устойчивого дифференциального уравнения, когда $Re \lambda < 0$, необходимо выполнение условия

$$|1 + \lambda \cdot h| \leq 1,$$

где h - размер шага (действительное число); λ - корень характеристического уравнения (возможно комплексный).

Найдем области устойчивости, удовлетворяющие неравенству. Введя обозначение

$$\lambda \cdot h = q = u + j \cdot v,$$

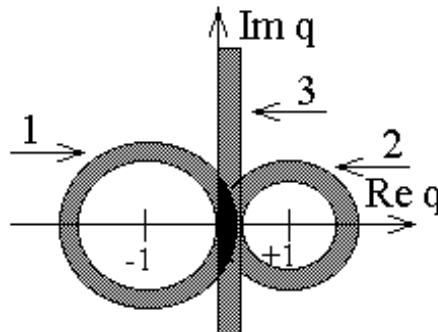
и подставив его в неравенство, получим

$$|1 + u + j \cdot v| \leq 1$$

или

$$(1 + u)^2 + v^2 \leq 1.$$

Это выражение описывает область устойчивости решения внутри круга с центром в точке $(-1, 0)$, изображенную на рисунке 10.2.



- 1) прямая формула Эйлера, устойчивые решения внутри единичной окружности
- 2) обратная формула Эйлера, устойчивые решения снаружи единичной окружности
- 3) формула трапеций, устойчивые решения в левой полуплоскости

Рисунок 10.2 - Области устойчивости формул интегрирования

Полученный результат используется следующим образом. При $Re \lambda < 0$, шаг выбирается, исходя из условия $q = \lambda \cdot h < 1$, что соответствует точке внутри единичной окружности. В этом случае прямая формула Эйлера дает устойчивые решения, т.е. значение функции $x(t)$ при увеличении n будет оставаться конечной величиной. Величина шага определяет и устойчивость, и точность

численного интегрирования и из соображений устойчивости может оказаться меньше, чем того требует точность. Так, при больших $|\lambda|$, шаг выбирается малым для обеспечения устойчивости.

$Re \lambda > 0$ соответствует физически неустойчивой схеме, однако при выборе малого шага и удовлетворения условия устойчивости решений будем получать конечное решение не соответствующее реальному поведению схемы.

В качестве иллюстрации, применим прямую формулу Эйлера к простейшему дифференциальному уравнению вида $x' = -x$, при $x_0 = 1$, соответствующему уравнению вида (10.11), при $\lambda = -1$. Результаты численного интегрирования, при разных h , сведены в таблицу 10.4.

Таблица 10.4 Результаты интегрирования уравнения $x' = -x$, при различных h , по прямой формуле Эйлера.

Шаг n	Значения при		
	h=0.1	h=2	h=3
0	1	1	1
1	0.9	-1	-2
2	0.81	1	4
3	0.729	-1	-8
4	0.6561	1	16
5	0.59049	-1	-32
6	0.53144	1	64

Первая колонка решений, при $h = 0.1$, соответствует $q = \lambda \cdot h = -1$, т.е. области внутри единичной окружности и устойчивому решению. Вторая колонка соответствует решению, при $h = 2$, $q = -2$, т.е. на границе области устойчивости. Решение в этом случае осцилирует, но не нарастает. В третьей колонке решение, при $h = 3$, $q = -3$, находится вне области устойчивости. Решение нарастает и осцилирует, хотя, в соответствии с аналитическим решением равным $\exp(-t)$, должно уменьшаться.

Продолжим исследование проблемы устойчивости для обратной формулы Эйлера

$$x_1 = x_0 + h \cdot x_1'$$

Используя (10.11), и подставляя в формулу, вместо x_1' , его значение $\lambda \cdot x_1$, получим

$$x_1 = x_0 + h \cdot \lambda \cdot x_1,$$

или

$$x_1 = x_0 / (1 - \lambda \cdot h) = x_0 / (1 - q).$$

На следующем шаге интегрирования, соответственно получим

$$x_2 = x_1 + h \cdot x'_2 = x_1 / (1 - \lambda \cdot h) = x_0 / (1 - \lambda \cdot h)^2.$$

Продолжив процедуру интегрирования в пределах n шагов, получим

$$x_n = x_0 / (1 - \lambda \cdot h)^n = x_0 / (1 - q)^n.$$

Для устойчивого решения, устойчивого дифференциального уравнения, когда $Re \lambda < 0$, при $t \Rightarrow \infty$ и, соответственно, при $n \Rightarrow \infty$, необходимо выполнение условия

$$|1 / (1 - q)| \leq 1.$$

Найдем области устойчивости, удовлетворяющие неравенству. Раскрывая обозначение q , получаем

$$1 \leq (1 - u)^2 + v^2.$$

Этому выражению при равенстве соответствует окружность единичного радиуса с центром в точке $(1, 0)$, изображенной на рисунке 10.2. Неравенство удовлетворяется вне окружности. Таким образом, обратная формула Эйлера устойчива для устойчивых схем, когда $Re \lambda < 0$ при любом шаге h . Размер шага при этом должен выбираться лишь из соображений точности интегрирования.

При $Re \lambda > 0$, схема неустойчива, однако при шаге h , удовлетворяющем неравенству, получим устойчивое решение, хотя реальный отклик безгранично растет. Рассмотрим, в заключение, формулу трапеций

$$x_1 = x_0 + 0.5 \cdot h \cdot (x'_0 + x'_1).$$

В соответствии с (10.11) подставив значения $x'_0 = \lambda \cdot x_0$ и $x'_1 = \lambda \cdot x_1$, получим

$$x_1 = x_0 + 0.5 \cdot h \cdot \lambda \cdot (x_0 + x_1),$$

или

$$x_1 = x_0 \cdot (1 + 0.5 \cdot h \cdot \lambda) / (1 - 0.5 \cdot h \cdot \lambda).$$

Соответственно для n -го шага, получим

$$x_n = [(2 + q) / (2 - q)]^n \cdot x_0.$$

В предельном случае, при $n \Rightarrow \infty$, условие устойчивости имеет вид

$$|(2 + q) / (2 - q)| \leq 1,$$

или

$$|(2 + u + j \cdot v) / (2 - u - j \cdot v)| \leq 1.$$

Преобразуя это условие, получим его в виде

$$4 \cdot u \leq 0,$$

показывающем, что границей устойчивости в этом случае является мнимая ось, а областью устойчивости - левая полуплоскость рисунок 10.2. Таким образом, формула трапеций устойчива для устойчивых схем, когда $Re \lambda < 0$, при любом шаге интегрирования h .

Обратим внимание на то, что, по сравнению с обратной формулой Эйлера, область устойчивости уменьшилась, а также на то, что метод интегрирования, основанный на формуле трапеций, имеет наибольший порядок из методов, использующих значения функции и ее производных в предыдущей и текущей точках.

Кроме того, формула трапеций дает устойчивый отклик для устойчивых цепей и нестабильный отклик для неустойчивых цепей. Это ценное свойство метода интегрирования, когда поведение цепи заранее не известно.

Следует также осознавать, что выполнение условий устойчивости численного метода не подразумевает правильности расчетов. Это лишь означает, что любая ошибка не увеличивается при последующих шагах. На величину ошибки, как уже отмечалось, влияют остаточные члены ряда Тейлора, которыми пренебрегают

$$\sum_{p+1}^{\infty} h_i \cdot c_i \cdot x^{(i)}(t_0),$$

так называемая ошибка усечения, пропорциональная шагу интегрирования h .

Одним из путей обеспечения точности при выбранном шаге h , является использование формулы с наивысшим порядком p . Можно так же показать, что увеличение порядка метода интегрирования может сопровождаться уменьшением устойчивости, что мы и отмечали для формулы трапеций по сравнению с обратной формулой Эйлера.

С другой стороны, при выбранном методе интегрирования необходимо выбрать такой шаг интегрирования h , чтобы выполнялось условие устойчивости, и обеспечивалась требуемая точность. В первую очередь, конечно необходимо, обеспечить условие устойчивости, иначе бессмысленно выполнять вычисления. При этом может оказаться размер шага h настолько малым, что потребуются значительное число шагов интегрирования. В частности, это наиболее вероятно для прямых методов интегрирования и менее вероятно для обратных методов интегрирования.

Следует, наконец, отметить, что полученные нами для простых методов интегрирования границы областей устойчивости справедливы лишь для рассматриваемого дифференциального

уравнения вида (10.11). Для других дифференциальных уравнений и других методов интегрирования границы областей будут другими. Исследование границ устойчивости, для простых методов интегрирования и частного вида дифференциального уравнения, предпринято с целью, обозначить основные тенденции и дать сравнительную характеристику методов.

Дадим не формальное объяснение, некоторым часто используемым терминам и понятиям.

Формулы интегрирования, основанные на значениях функции и ее производных в предыдущие моменты времени, подобные прямой формуле Эйлера называют иногда явными. Явные формулы, в силу их слабой устойчивости используются главным образом для предсказания начальных значений при использовании других, неявных формул интегрирования.

Неявными формулами интегрирования, аналогичными обратной формуле Эйлера и формуле трапеций, называются формулы, связывающие значение функции в следующей точке с ее производной в этой точке, а также значениями функции и ее производными в предыдущих точках. Неявные формулы, как правило, более устойчивые, используются, в основном, для коррекции решения, и в силу трансцендентного характера, когда неизвестное значение находится в правой и левой частях уравнения, решаются итерационными методами, используемыми при решении нелинейных алгебраических уравнений.

Объединение явных и неявных формул интегрирования приводит, как уже отмечалось, к методу прогноз - коррекция. При этом за счет итераций уточнения решения неявных формул, требуется большее число операций, однако, большая устойчивость неявных формул может позволить увеличить шаг интегрирования, в пределах обеспечения точности, и, следовательно, позволяет наоборот уменьшить число требуемых операций.

Формулы интегрирования, использующие для нахождения значения функции либо производной, в текущий момент времени, значения функции и ее производных в нескольких предшествующих моментах времени, носят название линейных многошаговых методов интегрирования (ЛММ).

Линейные многошаговые формулы, интегрирования, содержащие значение функции и ее производной в искомый момент времени, и произвольное число значений функции без значений производных, в предшествующие моменты времени, называются формулами дифференцирования назад (ФДН).

Формулу интегрирования называют A - устойчивой, если она дает ограниченное решение тестового дифференциального

уравнения $x' = \lambda \cdot x$, для произвольных размеров шага и любого числа шагов, при $Re \lambda < 0$. Обратная формула Эйлера и формула трапеций обладают этим свойством.

Область абсолютной устойчивости, какой-либо формулы интегрирования, это часть плоскости $q = h \cdot \lambda$, в которой интегрирование дифференциального уравнения $x' = \lambda \cdot x$, при $Re \lambda < 0$, дает ограниченный результат при любом числе шагов. Так прямая формула Эйлера абсолютно устойчива внутри единичной окружности с единичным радиусом и центром в точке $(-1, 0)$. Обратная формула Эйлера и формула трапеций абсолютно устойчивы во всей левой полуплоскости.

Большинство цепей встречающихся на практике, являются устойчивыми. Для линейной цепи это означает, что действительные части корней характеристических уравнений отрицательны. В связи с этим, говоря об интегрировании уравнения $x' = \lambda \cdot x$, имеем в виду решение, при $Re \lambda < 0$.

Однако встречаются ситуации, например автоколебательные системы, когда схема в рабочей точке неустойчива и в установившемся режиме в ней наблюдаются периодические колебания. При численном интегрировании дифференциальных уравнений таких цепей следует применять методы, учитывающие эти свойства. Обратная формула Эйлера, например, в этой ситуации не подходит, т.к. дает затухающие решения. В этом случае предпочтительны, формула трапеций и другие методы интегрирования.

Жесткая система дифференциальных уравнений, это система имеющая несколько полюсов вблизи начала координат и несколько полюсов весьма удаленных, причем все полюсы расположены в левой полуплоскости. Такая система устойчива, а компоненты решения, соответствующие далеким полюсам быстро затухают.

При интегрировании такой системы по прямой формуле Эйлера для обеспечения устойчивости потребуется очень малый шаг, чтобы $q = h \cdot \lambda$ попала для удаленных полюсов в область устойчивости. Выбор малого шага потребует огромного числа операций, хотя компоненты, обусловленные далекими полюсами, быстро затухают и сказываются лишь на начальном этапе.

С другой стороны, обратная формула Эйлера не вызывает таких проблем, т.к. она устойчива при любых h . Для обеспечения точности в обратной формуле Эйлера можно начать с малого значения шага h и перейти на большие значения, как только быстрые компоненты затухнут.

Для интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений разработаны и другие эффективные методы, не требующие малого шага. Для этих целей широко применяются линейные многошаговые формулы, имеющие повышенную точность и специфическую форму границ областей устойчивости, отражающих особенности жестких систем. Для повышения эффективности методов интегрирования - точности и устойчивости используют адаптивные формы алгоритмов интегрирования, при которых в процессе интегрирования меняются шаг и порядок метода.

10.5 Расчет переходных процессов цепей

Как уже отмечалось, рассмотренные нами формулы численного интегрирования применимы как к линейным, так и нелинейным дифференциальным уравнениям.

Если цепь описана линейной системой дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, относительно переменных состояния

$$x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot w(t), \quad (10.12)$$

то вычисление $x(t)$ не вызывает проблем. Так вычисление переменных состояния может быть осуществлено на основании полученных нами выражений в матричной форме (10.7 - 10.9).

Непосредственно метод переменных состояния нами не рассматривался ввиду того, что этот метод в настоящее время используется редко из-за сложности алгоритма формирования системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши для произвольного вида цепей. Заметим только, что метод переменных состояния достаточно широко освещен в литературе. В качестве переменных состояния выступают независимые токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. Для формирования системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши в методе переменных состояния используются топологические уравнения, описывающие дерево графа через матрицу главных сечений и компонентные уравнения ветвей цепи.

Однако уравнения состояния, вида (10.12) для частного вида цепей, можно получить и на основе других методов. В качестве примера формирования и решения уравнений переменных состояния рассмотрим уравнения RC - цепи (рисунок 10.3), полученные обобщенным методом узловых потенциалов.

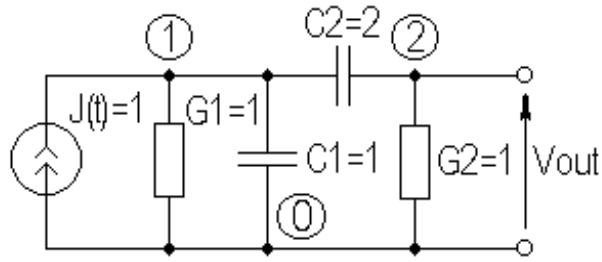


Рисунок 10.3 - Простая RC - цепь

Найдем временной отклик цепи на единичный скачок тока. Примем начальные напряжения на конденсаторах нулевыми, а шаг интегрирования $h = 0.05$. Так как в этой цепи нет индуктивностей, и узловые напряжения определяют переменные состояния, т.е. напряжения на емкостях, то для формирования уравнений состояния воспользуемся обобщенным узловым методом.

Система узловых уравнений, при заданных номиналах, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1+s \cdot 3 & -s \cdot 2 \\ -s \cdot 2 & 2+s \cdot 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Разделяя матрицу проводимости, на действительную и мнимую части и, вынося, оператор Лапласа s , как общий множитель, получим

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \cdot v_1 \\ s \cdot v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Умножая систему на обратную матрицу мнимой части, получаем

$$\begin{bmatrix} s \cdot v_1 \\ s \cdot v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J(s) \\ J(s) \end{bmatrix}.$$

Применив преобразование Лапласа, получаем систему линейных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами, описывающих состояние цепи

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(t) \\ j(t) \end{bmatrix},$$

где $j(t) = 1$.

В соответствии с обратной формулой Эйлера (10.8) для системы линейных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами

$$(1 - h \cdot A) \cdot X_{n+1} = X_n + h \cdot W_{n+1}$$

определяем

$$(1 - h \cdot A) = \begin{bmatrix} 1+h & 2 \cdot h \\ h & 1+3 \cdot h \end{bmatrix}.$$

Соответственно отклик цепи определяется системой уравнений

$$\begin{bmatrix} 1+h & 2 \cdot h \\ h & 1+3 \cdot h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,n+1} \\ v_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ v_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix}.$$

Результат расчета нескольких шагов по времени приведен в таблице 10.5.

Подобный вывод уравнений состояния из узловых уравнений возможен лишь для RC - цепей, так как в этом случае s входит в числитель и, используя преобразование Лапласа, легко перейти к системе дифференциальных уравнений. Для перехода к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши необходимо также существование обратной матрицы C^{-1} .

Таблица. 10.4 - Результат интегрирования уравнений состояния по обратной формуле Эйлера

t	v_1	v_2
0.050	0.04366	0.04158
0.100	0.08195	0.07607
0.150	0.11571	0.10460
0.200	0.14562	0.12810
0.250	0.17227	0.14738
0.300	0.19615	0.16311
0.350	0.21768	0.17585

Расчет временных характеристик прямыми методами.

Расчет временных характеристик возможен на основе табличного и модифицированного узлового методов. Как известно, в табличном, модифицированном табличном, модифицированном узлом и модифицированном узлом с проверкой - методах, существует возможность управлять представлением реактивных ветвей, таким образом, чтобы оператор Лапласа можно было вынести перед мнимой частью матрицы коэффициентов, как общий множитель. Для соблюдения этого условия необходимо емкостные ветви представлять через адмитанс, а индуктивные ветви через импеданс, тогда оператор Лапласа окажется во всех компонентах реактивной части матрицы в числителе. Преобразование Лапласа, примененное к, таким образом, сформированной системе алгебраических уравнений, трансформирует ее в систему дифференциальных уравнений с той же самой матрицей коэффициентов.

Итак, матрица коэффициентов, алгебраических систем уравнений, сформированная выше названными методами, при соблюдении указанных условий представления реактивных ветвей, может быть представлена в виде

$$T = G + s \cdot C,$$

где G - матрица действительной части; C - матрица мнимой части; s - оператор Лапласа. Соответственно алгебраическая система уравнений может быть записана

$$(G + s \cdot C) \cdot X = W. \quad (10.13)$$

Применяя к такой алгебраической системе, преобразование Лапласа, получим систему дифференциальных уравнений

$$G \cdot X + C \cdot X' = W,$$

или

$$C \cdot X' = W - G \cdot X. \quad (10.14)$$

Поскольку матрица мнимой части C , в общем случае, может быть вырождена, необходимо найти переход к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, не требующий существования C^{-1} .

Рассмотрим обратную формулу Эйлера, предварительно помноженную на матрицу C

$$C \cdot X_{n+1} = C \cdot X_n + h \cdot C \cdot X'_{n+1},$$

и, подставляя, вместо $C \cdot X'_{n+1}$, значение, из дискретизированного, для этого случая, уравнения (10.14), получим

$$C \cdot X_{n+1} = C \cdot X_n + h \cdot (W_{n+1} - G \cdot X_{n+1}),$$

или, группируя компоненты, окончательно получим

$$(C + h \cdot G) \cdot X_{n+1} = C \cdot X_n + h \cdot W_{n+1}. \quad (10.16)$$

Это уравнение представляет собой обратную формулу Эйлера для интегрирования систем дифференциальных уравнений при матрице коэффициентов, заданной в комплексной форме. Это уравнение также показывает, что нет необходимости описывать цепь дифференциальными уравнениями в нормальной форме Коши, если известны действительные и мнимые части G и C , матрицы коэффициентов T . Матрицы G и C по отдельности могут быть вырождены, в то время как матрица $h \cdot G + C$, не вырождена.

Получим аналогичное соотношение, опираясь на метод трапеций

$$C \cdot X_{n+1} = C \cdot X_n + 0.5 \cdot h \cdot C \cdot X'_n + 0.5 \cdot h \cdot C \cdot X'_{n+1}.$$

Используя исходное уравнение (10.14) для замены $C \cdot X'_n$ и $C \cdot X'_{n+1}$, получаем

$$C \cdot X_{n+1} = C \cdot X_n + 0.5 \cdot h \cdot (W_n - G \cdot X_n) + 0.5 \cdot h \cdot (W_{n+1} - G \cdot X_{n+1}).$$

Группируя члены, содержащие X_{n+1} в правой части, получаем

$$\begin{aligned} (C + 0.5 \cdot h \cdot G) \cdot X_{n+1} = \\ = (C - 0.5 \cdot h \cdot G) \cdot X_n + 0.5 \cdot h \cdot (W_n + W_{n+1}). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Это уравнение представляет собой формулу трапеций для интегрирования систем дифференциальных уравнений при матрице коэффициентов, заданной в комплексной форме.

Рассмотрим пример использования обратной формулы Эйлера для систем дифференциальных уравнений, коэффициенты которых заданы в комплексной форме, для схемы, изображенной на рисунке 10.4.

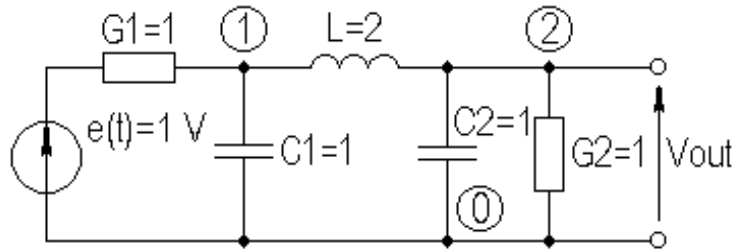


Рисунок 10.4 - Схема для расчета переходного процесса

Начальные условия положим нулевые, размер шага $h = 0.1$, источник напряжения представляет единичный скачок. Запишем составляющие системы уравнений, сформированной модифицированным узловым методом

$$G \cdot X + C \cdot X' = W,$$

где

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 1 \\ -G_1 & G_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$W = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ e(t)]^T.$$

Хотя матрица C является особой, суммарная матрица $(C + h \cdot G)$, не вырождена и решение (10.15) существует. Результаты расчета нескольких шагов интегрирования на ЭВМ сведены в таблицу 10.6.

Таблица 10.6. Результаты интегрирования по обратной формуле Эйлера

t	V_{out}
-----	-----------

0.0	0.0
0.1	0.09500·D-04
0.2	1.55650·D-03
0.3	3.69602·D-03
0.4	7.01808·D-03
0.5	1.16553·D-02
0.6	1.76897·D-02

Заметим, что в случае линейных цепей формирование матрицы коэффициентов производится один раз, и на каждом шаге интегрирования необходимо лишь переформировывать вектор правой части, с учетом предыдущего решения, а также входящий в него вектор свободных членов исходной алгебраической системы W , если входное воздействие является функцией времени. В таких ситуациях, когда матрица коэффициентов системы уравнений остается постоянной, а меняется лишь вектор правой части, предпочтительно, как отмечалось ранее, применение алгоритмов решения линейных систем уравнений, основанные на факторизации матрицы коэффициентов.

Как видим, методы интегрирования или вычисления переходных процессов цепей свелись к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений.

В случае нелинейных цепей, матрицы коэффициентов G , C и вектор свободных членов W , в общем случае, являются функциями вектора переменных X , т.е. система алгебраических уравнений становится нелинейной. Применение преобразования Лапласа для перехода к системе алгебраических уравнений становится проблематичным, однако, с определенной степенью условности, его формальное применение приведет к системе нелинейных дифференциальных уравнений. Так, обратную формулу Эйлера и формулу трапеций для интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, с комплексной матрицей коэффициентов исходной нелинейной алгебраической системы уравнений, можно записать

$$[C(X_n) + h \cdot G(X_n)] \cdot X_{n+1} = C(X_n) \cdot X_n + h \cdot W_{n+1}(X_n). \quad (10.17)$$

$$[C(X_n) + 0.5 \cdot h \cdot G(X_n)] \cdot X_{n+1} = [C(X_n) - 0.5 \cdot h \cdot G(X_n)] \cdot X_n + h \cdot [W_n(X_n) + W_{n+1}(X_n)]. \quad (10.18)$$

Для решения таких систем дифференциальных уравнений можно применять те же самые численные методы интегрирования. Однако, если, в случае линейных систем, достаточно один раз

сформировать исходную алгебраическую систему уравнений и на каждом шаге переформировывать вектор свободных членов в формуле интегрирования с учетом предыдущего решения, то, в случае нелинейных цепей, необходимо на каждом шаге интегрирования переформировывать, как исходную алгебраическую систему, так и систему дифференциальных уравнений, с учетом решения на предыдущем шаге.

Прямое применение формул численного интегрирования для нелинейных систем дифференциальных уравнений не нашло, однако, широкого применения в силу низкой устойчивости и точности получаемых решений.

Более корректный подход к вычислению переходных процессов нелинейных цепей, основан на том, что система нелинейных дифференциальных уравнений, представленная в нормальной форме Коши, интерпретируется как система нелинейных уравнений, и к ней применяются известные итерационные методы решения типа Ньютона-Рафсона. Формулы интегрирования в этом случае есть результат применения итерационных алгоритмов к традиционным численным методам. Такой подход обеспечивает необходимую устойчивость и точность.

10.6 Метод дискретных моделей реактивных элементов

Кроме подхода, изложенного в предыдущем разделе и основанного на формировании и численном интегрировании системы дифференциальных уравнений, получил распространение альтернативный подход, использующий так называемые дискретные или сопровождающие модели реактивных элементов. При этом подходе компонентные дифференциальные уравнения реактивных элементов аппроксимируются соотношениями, соответствующей формулы численного интегрирования, а результаты аппроксимации интерпретируются, как резистивные дискретные модели реактивных элементов, значения которых зависят от шага интегрирования и результатов решения на предыдущем шаге.

После замены реактивных элементов резистивными моделями, известными методами формирования математических моделей формируется система алгебраических уравнений, в вектор свободных членов которой входят источники резистивных моделей, зависящие от результатов решения на предыдущем шаге. Решая систему алгебраических уравнений, находим очередное решение, подставляя найденное решение в правую часть, как предыдущее решение, можем найти решение в следующей точке и т.д.

Рассмотрим дискретные модели конденсатора, описываемого компонентным уравнением вида

$$i = C \cdot dv / dt. \quad (10.19)$$

Заменяя производную конечной разностью

$$dv / dt = v'_{n+1} = (v_{n+1} - v_n) / (t_{n+1} - t_n) = (v_{n+1} - v_n) / h,$$

и используя компонентное уравнение (10.19), получим соотношение

$$i_{n+1} = C \cdot (v_{n+1} - v_n) / h,$$

которое можно переписать в виде

$$i_{n+1} = C / h \cdot v_{n+1} - C / h \cdot v_n, \quad (10.20)$$

или

$$v_{n+1} = h / C \cdot i_{n+1} + v_n. \quad (10.21)$$

Те же соотношения можно получить, подставляя в компонентное уравнение (10.19), вместо производной, ее выражение из обратной формулы Эйлера

$$v'_{n+1} = 1/h \cdot v_{n+1} - 1/h \cdot v_n.$$

Уравнениям (10.20, 10.21) соответствуют резистивные модели, изображенные на рисунке 10.5.

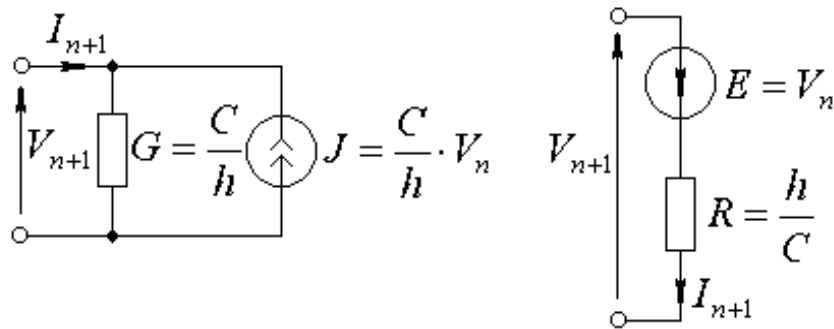


Рисунок 10.5 - Резистивные модели емкости на основе обратной формулы Эйлера

Заменяя производную, полусуммой производных в текущей и предыдущей точках, или конечной разностью половинного шага

$$\begin{aligned} dv / dt &= (v'_{n+1} + v'_n) / 2 = (v_{n+1} - v_{n+1/2}) / h + (v_{n+1/2} - v_n) / h = \\ &= (v_{n+1} - v_n) / h, \end{aligned}$$

или

$$v'_{n+1} = -v'_n + 2/h \cdot (v_{n+1} - v_n),$$

и, используя компонентное уравнение (10.19), получим соотношение

$$i_{n+1} = -i_n + 2 \cdot C / h \cdot (v_{n+1} - v_n),$$

которое можно переписать в виде

$$i_{n+1} = 2 \cdot C / h \cdot v_{n+1} - 2 \cdot C / h \cdot v_n - i_n, \quad (10.22)$$

или

$$v_{n+1} = h/(2 \cdot C) \cdot i_{n+1} - h/(2 \cdot C) \cdot i_n + v_n. \quad (10.23)$$

Те же соотношения можно получить, подставляя в компонентное уравнение (10.19), вместо производной, ее выражение из формулы трапеций

$$v'_{n+1} = -v'_n + 2/h \cdot v_{n+1} - 2/h \cdot v_n.$$

Уравнениям (10.22, 10.23) соответствуют резистивные модели, изображенные на рисунке 10.6.

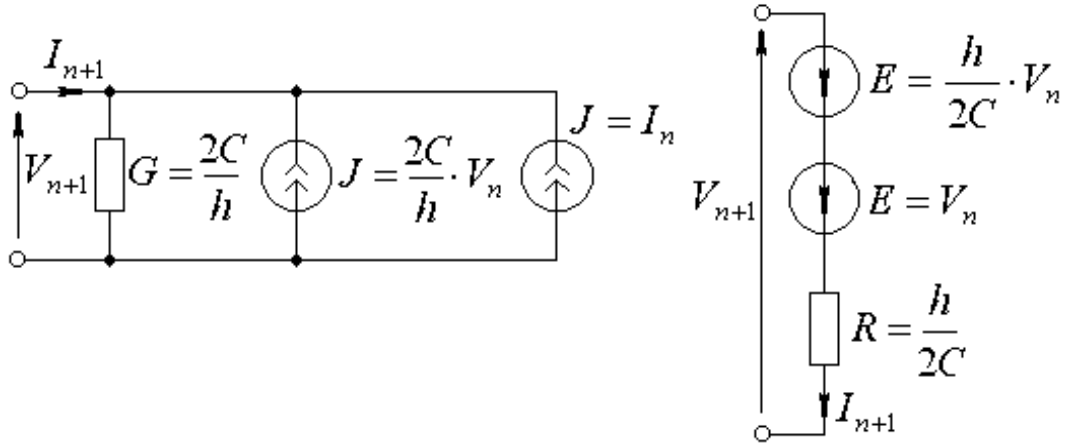


Рисунок 10.6 - Резистивные модели емкости на основе формулы трапеций

Перейдем к рассмотрению дискретных моделей катушки индуктивности, описываемой компонентным уравнением вида

$$v = L \cdot di / dt. \quad (10.24)$$

Заменяя производную конечной разностью

$$di / dt = i'_{n+1} = (i_{n+1} - i_n) / (t_{n+1} - t_n) = (i_{n+1} - i_n) / h,$$

и используя компонентное уравнение (10.24), получим соотношение

$$v_{n+1} = L \cdot (i_{n+1} - i_n) / h,$$

которое можно переписать в виде

$$v_{n+1} = L/h \cdot i_{n+1} - L/h \cdot i_n, \quad (10.25)$$

или

$$i_{n+1} = h/L \cdot v_{n+1} + i_n. \quad (10.26)$$

Те же соотношения можно получить, подставляя в компонентное уравнение (10.24) вместо производной, ее выражение из обратной формулы Эйлера

$$i'_{n+1} = 1/h \cdot i_{n+1} - 1/h \cdot i_n.$$

Уравнениям (10.25, 10.26) соответствуют резистивные модели, изображенные на рисунке 10.7.

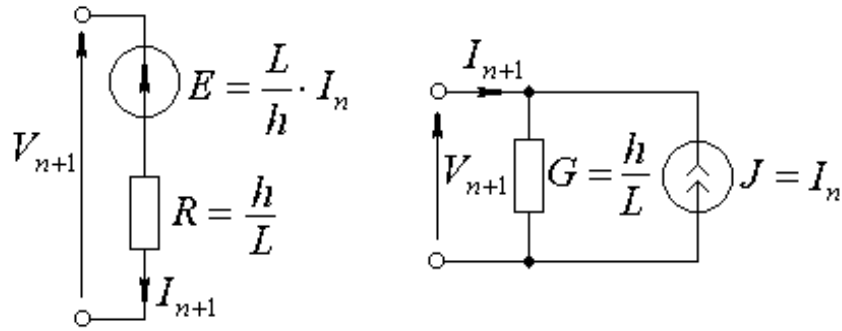


Рисунок 10.7 - Резистивные модели индуктивности на основе обратной формулы Эйлера

Заменяя производную, полусуммой производных в текущей и предыдущей точках или конечной разностью половинного шага

$$\begin{aligned} di/dt &= (i'_{n+1} + i'_n)/2 = (i_{n+1} - i_{n+1/2})/h + (i_{n+1/2} - i_n)/h = \\ &= (i_{n+1} - i_n)/h, \end{aligned}$$

или

$$i'_{n+1} = -i'_n + 2/h \cdot (i_{n+1} - i_n),$$

и, используя компонентное уравнение (10.24), получим соотношение

$$v_{n+1} = -v_n + 2 \cdot L/h \cdot (i_{n+1} - i_n),$$

которое можно переписать в виде

$$v_{n+1} = 2 \cdot L/h \cdot i_{n+1} - 2 \cdot L/h \cdot i_n - v_n, \quad (10.27)$$

или

$$i_{n+1} = h/(2 \cdot L) \cdot i_{n+1} - h/(2 \cdot L) \cdot v_n + i_n. \quad (10.28)$$

Те же соотношения можно получить, подставляя в компонентное уравнение (10.24), вместо производной, ее выражение из формулы трапеций

$$i'_{n+1} = -i'_n + 2/h \cdot i_{n+1} - 2/h \cdot i_n.$$

Уравнениям (10.27, 10.28) соответствуют резистивные модели, изображенные на рисунке 10.8.

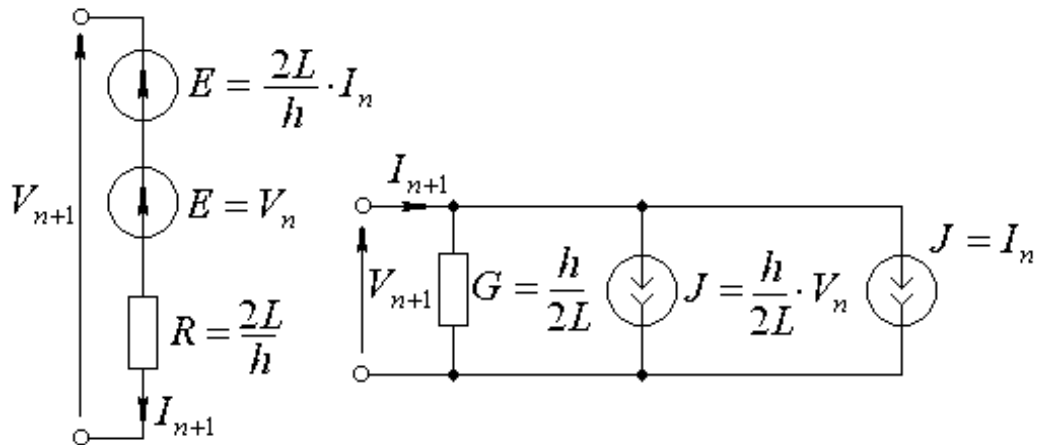


Рисунок 10.8 - Резистивные модели индуктивности на основе формулы трапеций

Используя другие конечноразностные представления производной, или подставляя в компонентные уравнения реактивных ветвей, ее выражение из других формул интегрирования, можем получить более сложные резистивные модели реактивных элементов.

Таким образом, применение дискретных моделей к реактивным элементам приводит к следующему:

1. Цепь становится резистивной, каждый реактивный элемент заменяется резистором либо проводимостью с номиналами, определяемыми номиналом реактивности и шагом интегрирования.
2. Последовательно с резистором или параллельно проводимости подключаются дополнительные источники, соответственно, напряжения или тока, число и номиналы которых зависят от используемого конечно-разностного представления, значений токов и напряжений в предыдущие моменты времени и шага интегрирования.

В результате описываемого подхода цепь становится резистивной с источниками, зависящими от значения переменных в предыдущие моменты времени. Математическая модель такой цепи представляет собой систему алгебраических уравнений с дополнительным вектором свободных членов, зависящим от состояния цепи в предыдущие моменты времени

$$T \cdot X_{n+1} = W + W(X_n). \quad (10.29)$$

Для формирования математической модели цепи, реактивные элементы которой заменены резистивными моделями, можно воспользоваться любым из известных методов в зависимости от используемых моделей.

Для определения переходного процесса необходимо задаться начальными значениями вектора переменных, сформировать систему уравнений, решая которую, находим значение вектора неизвестных в текущий момент времени. Подставляя найденное значение вектора неизвестных, в качестве начального значения, ищем следующее значение и т.д.

Необходимо отметить, что в случае линейных цепей матрицу коэффициентов системы достаточно сформировать лишь один раз перед итерационным циклом по времени, в котором вектор свободных членов системы переформируется каждый раз с учетом предыдущего решения.

В качестве иллюстрации рассматриваемого подхода рассмотрим формирование системы уравнений (10.29) для цепи изображенной на рисунке 10.9.

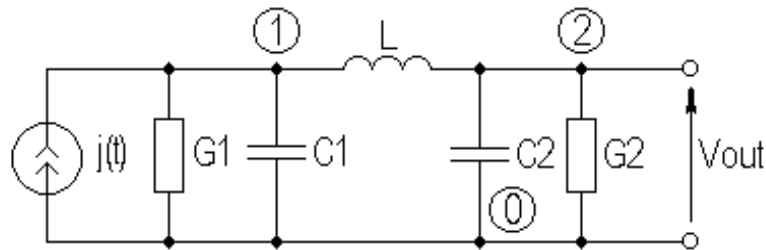


Рисунок 10.9 - Цепь для иллюстрации конечно-разностных моделей реактивных элементов

Используя конечно - разностные или сеточные модели, соответствующие обратной формуле Эйлера, и представляя конденсаторы проводимостями и источниками тока (10.20), а катушку индуктивности резистором и источником напряжения (10.25), составим систему алгебраических уравнений резистивной цепи модифицированным методом узловых потенциалов

$$\begin{bmatrix} G_1 + C_1/h & 0 & 1 \\ 0 & G_2 + C_2/h & -1 \\ 1 & -1 & -L/h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,n+1} \\ v_{2,n+1} \\ v_{3,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1/h \cdot v_{1,n} \\ C_2/h \cdot v_{2,n} \\ -L/h \cdot i_{L,n} \end{bmatrix}$$

Рассмотренный пример позволяет сделать несколько важных для первоначального усвоения замечаний:

1. Источники резистивных моделей не порождают дополнительных ветвей и узлов, а входят как начальные условия в вектор свободных членов системы.
2. Данный пример не совсем удачен в том плане, что конденсаторы подключены вторым зажимом к общему проводу, поэтому вместо разности узловых потенциалов ($v_{i,n} - v_{j,n}$) использованы просто узловые потенциалы.
3. Систему, аналогичную (10.29) можно получить, используя обратную формулу Эйлера для интегрирования систем

дифференциальных уравнений (10.15)
 $(C + h \cdot G) \cdot X_{n+1} = C \cdot X_n + h \cdot W_{n+1}$, разделив ее на h , но это чисто внешняя связь.

Итак, для вычисления временных характеристик цепей, на основе сеточных или сопровождающих моделей, необходимо многократно решать систему линейных уравнений с разными правыми частями. Для решения систем в такой ситуации целесообразно использование методов решения, основанных на факторизации матрицы коэффициентов.

В случае определения реакции отдельных компонент вектора решений можно воспользоваться идеей решения сопряженной системы уравнений изложенной ранее. Для этого перепишем систему (10.29) в виде

$$T \cdot X_{n+1} = W(X_n). \quad (10.30)$$

Вводя выходную функцию от вектора решения

$$\Phi(X_{n+1}) = d^t \cdot X_{n+1},$$

где d - вектор выбора компонент, и сопряженную систему уравнений в виде

$$T^t \cdot Y = -d,$$

можем записать

$$Y^t = -d^t \cdot T^{-1}.$$

Выходную функцию из (10.30) можем определить как

$$\Phi(X_{n+1}) = d^t \cdot T^{-1} \cdot W(X_n),$$

откуда, используя предыдущее соотношение, получаем

$$\Phi(X_{n+1}) = -Y^t \cdot W(X_n).$$

Т.е. решая один раз сопряженную систему, находим вектор Y^t , каждое новое значение выходной функции определяем, как скалярное произведение этого вектора на новый вектор правой части.

В случае нелинейных цепей матрица коэффициентов системы (10.28) также зависит от вектора решений

$$T(X_n) \cdot X_{n+1} = W(X_n). \quad (10.31)$$

В результате, на каждом шаге итерации по времени, необходимо заново формировать матрицу коэффициентов и вектор свободных членов.

Для решения нелинейной системы с малым шагом по времени, можно попытаться решать ее как линейную на каждом шаге итерации, предполагая, что нелинейность слабо проявляется в пределах шага интегрирования. Однако в общем случае необходимо использовать итерационные методы решения

нелинейных систем алгебраических уравнений, например, метод Ньютона-Рафсона.

11 ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

11.1 Введение в теорию оптимизации

Теория оптимизации находит широкое применение при проектировании электронных схем по заданному набору требований к характеристикам и ограничений на изменение параметров. Ее используют для максимизации или минимизации некоторой скалярной целевой функции нескольких переменных, на которые наложены дополнительные ограничения.

Оптимизация является по существу основным универсальным методом проектирования РЭУ, поскольку синтез развит в основном для пассивных цепей фильтрации и согласующе - трансформирующих цепей, а любые методики проектирования конкретного класса устройств носят частный характер.

Под оптимизацией или параметрическим синтезом, в общем случае, понимают процедуру целенаправленного перебора параметров заданного схемного решения РЭУ, с целью удовлетворения набора характеристик заданным требованиям. Критерием достижения заданных требований выступает значение ошибки или отклонение заданного набора характеристик от требуемых, являющаяся функцией внутренних и внешних параметров устройства, и принимающая нулевое значение при достижении заданных требований. Функцию ошибки называют чаще целевой функцией, и оптимизация сводится к задаче минимизации целевой функции в заданном пространстве параметров и заданных ограничениях на их значения.

Разработчику схем не требуется знать все аспекты теории оптимизации, но он должен знать основные понятия, например о градиенте, иметь представление о возможностях методов и уметь формировать целевую функцию. Чтобы сформировать целевую функцию, разработчик должен иметь представление об основах теории оптимизации, быть знаком с техническими терминами, используемыми в этой области, знать набор основных характеристик и их взаимообусловленность, а также основные практические ограничения на параметры.

Под пространством параметров оптимизации будем понимать основной набор варьируемых параметров схемы - номиналов элементов, режима работы и внешних параметров среды, например, температуры. Пространство параметров описывается вектором варьируемых параметров X .

Под целевой функцией оптимизации $F(X)$, будем понимать скалярную функцию, содержащую, в общем случае, информацию об отклонении требуемых характеристик (выходных функций) от заданных, и стремящуюся, при достижении оптимума, к нулю. Чтобы избавиться от влияния знака отклонения, в целевой функции берется сумма квадратов или четных степеней отклонений, из которой вычисляется корень четной степени. Для исключения влияния абсолютных значений характеристик их отклонения нормируются относительно требуемых значений. Влияние отдельных характеристик в целевой функции подчеркивается с помощью весовых коэффициентов. Таким образом, целевую функцию, в общем виде, можно записать

$$F(X) = \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot [f_{0i}(X) - f_i(X)]^p \right]^{1/p}, \quad (11.1)$$

где m - число выходных функций; p - показатель четной степени; α_i - весовой коэффициент; $f_{0i}(X)$ - требуемая выходная функция; $f_i(X)$ - текущая выходная

функция. Кроме того, предполагается, что отклонения функций нормированы относительно требуемых значений.

Достижение минимума целевой функции $F(X)$ должно выполняться при соблюдении ряда ограничений на параметры либо функций от параметров в виде равенств

$$e_i(X) = 0, \quad (11.2)$$

или неравенств

$$g_i(X) \geq 0. \quad (11.3)$$

Функции ограничения могут быть, как линейными, так и нелинейными. Вектор решения X должен удовлетворять этим ограничениям.

Типичным примером линейного ограничения типа неравенства является условие

$$x_i - l_i \geq 0, \quad (11.4)$$

которое определяет, что переменная x_i , должна быть больше, чем нижний предел l_i .

Диапазон изменения x_i может быть ограничен и сверху

$$u_i - x_i \geq 0. \quad (11.5)$$

В частности, нельзя реализовать отрицательные параметры элементов схемы и их следует ограничить с помощью верхнего и нижнего пределов, чтобы получить технически приемлемое решение.

Для ограничения пространства параметров удовлетворяющего ограничениям иногда используют так называемую штрафную функцию, зависящую от степени нарушения ограничений. Штрафная функция входит множителем в целевую функцию, вызывая ее увеличение при нежелательном наборе параметров.

Почти все современные методы оптимизации основаны на определении такой последовательности векторов X , при которой выполняются условия

$$F(X^0) > F(X^1) > \dots > F(X^k). \quad (11.6)$$

Эта последовательность будет сходиться к минимуму, если функция выпукла и такой минимум будет глобальным. Если функция не выпукла, то, в общем случае, можно говорить лишь о локальном минимуме. В большинстве случаев ничего не известно о виде функции, в особенности, если она зависит от многих переменных.

Формально, под оптимизацией понимают процедуру целенаправленного подбора параметров, приводящую к минимизации целевой функции $F(X)$, при соблюдении ограничений $E(X)$ и $G(X)$. Различные методы оптимизации отличаются друг от друга стратегией и тактикой поиска оптимума, способом получения информации о направлении поиска, способом определения оптимума в заданном направлении и критерием останова при достижении заданных требований.

Поиск оптимума всегда начинают с какой-то начальной точки X^0 пространства параметров, называемой нулевым приближением. Выбор нулевого приближения в многоэкстремальном пространстве существенно влияет на найденное решение, поэтому выбор нулевого приближения требует определенного опыта в данной области. Часто для обеспечения поиска глобального оптимума, нулевое приближение выбирают, используя датчики случайных последовательностей.

Формирование целевой функции $F(X)$ требует понимания сути задачи. Например, задачу отыскания решения X системы m , в общем случае, нелинейных уравнений с n неизвестными, где $m \leq n$, $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, можно сформулировать как задачу нахождения минимума скалярной функции нескольких переменных

$$F(X) = \sum_{j=1}^m f_j^2(X). \quad (11.7)$$

Минимум этой функции, для которого $F(X^*) = 0$, является, очевидно, решением системы нелинейных уравнений.

Максимизация или минимизация проводится по одним и тем же алгоритмам, так как, если функция $F(X)$ имеет минимум в точке X , то функция $-F(X)$ имеет максимум в той же точке.

Большинство современных оптимизационных алгоритмов является итерационными использующими на каждом шаге расчет требуемых характеристик. Два важных момента оптимизации связаны с выбором направления поиска оптимума, задаваемое вектором S , и отыскание самого оптимума X^* , в заданном направлении пространства параметров.

Для того чтобы двигаться вниз по склону многомерного пространства в окрестности оптимума, требуется информация о направлении убывания целевой функции. Это направление можно определить с помощью пробных шагов и оценок целевой функции, либо рассчитав производную функции. В многомерном пространстве информация о функции многих переменных содержится в градиенте. Градиент функции $F(X)$ от n переменных представляет, собой многомерный вектор

$$\nabla F = \nabla F(X) = [\partial F / \partial X_1, \partial F / \partial X_2, \dots, \partial F / \partial X_n]^t. \quad (11.8)$$

Градиент указывает направление возрастания функции и, следовательно, вектор $-\nabla F$ направлен по склону. Если рассмотреть другое направление S , то производная функции в этом направлении определяется выражением $S^t \cdot \nabla F$, и функция убывает в этом направлении при выполнении условия

$$-S^t \cdot \nabla F > 0. \quad (11.9)$$

11.2 Классическая теория оптимизации

Из математики известно, что для определения максимума или минимума функции одной переменной нужно найти ее производную, приравнять ее нулю и найти точку X^* , являющуюся решением этого уравнения. Данный подход справедлив и для функций нескольких переменных, только в этом случае уже градиент приравнивается нулю

$$\nabla F(X) = 0 \quad (11.10)$$

и вектор решения системы уравнений (11.10) определяет точку оптимума в много мерном пространстве X^* .

Для примера определим минимум функции

$$F(X) = (x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Приравняем градиент функции нулю

$$\nabla F(X) = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 2 \\ 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

что можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы уравнений дает вектор

$$X = [1 \quad 1]^t.$$

Заметим, что данная задача приводит к решению системы линейных уравнений. В общем же случае возникает необходимость решения системы нелинейных алгебраических уравнений, которые, как известно, решаются итерационными методами.

Метод множителей Лагранжа. Более сложным случаем является задача нахождения минимума при определенных ограничениях, метод решения которой, впервые был предложен Лагранжем. Ставится задача нахождения минимума функции $F(X)$, при условии, что $e_j(X) = 0$, где $j = 1, \dots, k$. При этом формируется новая, объединяющая функция, называемая лагранжианом

$$L(X, \Lambda) = F(X) - \sum_{j=1}^{k_1} \lambda_j \cdot e_j(X), \quad (11.11)$$

где $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1}]^t$ - вектор дополнительных переменных, называемых множителями Лагранжа. Для нахождения оптимума с ограничениями, выразим производные от функции $L(X, \Lambda)$ по переменным X и Λ , и, приравняв их нулю, получим систему уравнений

$$\partial L / \partial x_i = \partial F / \partial x_i - \sum_{j=1}^{k_1} \partial e_j(X) / \partial x_i = 0; \quad (11.12)$$

$$\partial L / \partial \lambda_j = -e_j(X) = 0,$$

где $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k_1$. Решение данной системы соответствует оптимуму с ограничениями.

В качестве примера, найдем минимум функции

$$F(X) = (x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2,$$

при условии

$$E(X) = x_1 + x_2 - 4 = 0.$$

Сформируем Лагранжиан

$$L(X, \Lambda) = (x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2 - \lambda_1 \cdot (x_1 + x_2 - 4),$$

и, продифференцировав его, по x_1, x_2 и λ_1 , получим систему линейных уравнений

$$\partial L / \partial x_1 = 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - \lambda_1 - 2 = 0,$$

$$\partial L / \partial x_2 = -2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - \lambda_1 = 0,$$

$$\partial L / \partial \lambda_1 = -x_1 - x_2 + 4 = 0.$$

Решение системы дает точку оптимума $x_1 = 9/5$; $x_2 = 11/5$; $\lambda_1 = 4/5$.

Метод множителей Лагранжа имеет в основном теоретическое значение. Современные методы оптимизации в процессе итераций ищут последовательные приближения оптимального решения.

Основной итерационный алгоритм. Пусть заданы функция n переменных $F(X)$ и произвольная начальная точка

$$X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^t.$$

Желательно двигаться от этой точки к другим, так чтобы выполнялись неравенства

$$F(X^0) > F(X^1) > \dots > F(X^k). \quad (11.13)$$

Вначале следует определить направление поиска оптимума. Произвольное направление в n - мерном пространстве определяет вектор $S = [s_1, s_2, \dots, s_n]^t$. Предположим, что сделан шаг d в каком-либо направлении. Для k - той итерации следующей точкой будет вектор

$$X^{k+1} = X^k + d_k \cdot S^k, \quad (11.14)$$

где d - шаг, вещественная константа. Шаг в процессе поиска может изменяться, в соответствии с определенной стратегией, отражающей успешность предыдущего поиска. Приращение вектора параметров отсюда равно

$$\Delta X^k = X^{k+1} - X^k = d_k \cdot S^k. \quad (11.15)$$

Для эффективности поиска, такие шаги следует проводить по линейно независимым направлениям, т.е. необходимо построить ортогональную систему координат в исходной точке пространства параметров. Векторы, соответствующие n направлениям в пространстве параметров, можно объединить в матрицу размера $n * n$

$$S = [S^0, S^1, \dots, S^{n-1}], \quad (11.16)$$

где S^i - вектор столбец, соответствующий i - му направлению. Эта матрица преобразуется в процессе поиска в соответствии с некоторой стратегией.

В качестве примера, рассмотрим процедуру поиска минимума функции

$$F(X) = x_1^2 + x_2^2 + 3 \cdot x_3^2,$$

с использованием матрицы направлений. Для простоты выберем матрицу направлений единичной

$$S = \begin{matrix} & s^0 & s^1 & s^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

и в качестве начальной точки возьмем

$$X^0 = [1 \ 2 \ 1]^T.$$

Очевидно, что функция имеет глобальный минимум, при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Начальное значение функции $F(X^0) = 8$. Выберем S^0 , в качестве первого направления, и сделаем шаг длиной $d_0 = -0.5$ (пока выбор d произволен). В соответствии с (11.14), получаем следующую точку

$$X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В точке X^1 значение функции $F(X^1) = 7.25 < F(X^0)$ и отметим этот результат, как успешный. Делая шаг во втором направлении S^1 и, выбирая его длину большей, скажем, $d_1 = -1$, получаем

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и $F(X^2) = 4.25 < F(X^1)$. Можно сделать шаг и в третьем направлении, а затем повторить процедуру поиска сначала, до тех пор, пока не будет найден минимум.

Обсудим, однако, процедуру поиска на предмет усовершенствования. Несколько возможных усовершенствований видны, с первого взгляда. Так можно отказаться от принятия любого решения уменьшающего значение целевой функции, а попробовать найти минимум при движении в заданном направлении. При этом число шагов, необходимых для достижения оптимума, может быть сокращено. Следовательно, необходима теория минимизации функции при движении вдоль линии (одной переменной). Можно использовать производные целевой функции для определения наилучших направлений. Наконец, можно использовать вторые производные или их аппроксимации для улучшения направлений поиска. Желательно также определить стратегии изменения шага поиска в зависимости от его предшествующих результатов.

В случае сложного рельефа многомерного пространства и областей оптимумов можно предложить стратегию изменения ориентации направлений независимого поиска.

Методы, не требующие знания производных целевой функции, называются методами прямого поиска. Методы, использующие значения производных для определения направления поиска называются градиентными. Мы не будем на них пока останавливаться, так как в

разделе, посвященном расчету чувствительностей, были рассмотрены эффективные алгоритмы вычисления градиента. Однако минимизация функции при движении в заданном направлении весьма актуальна и будет рассмотрена несколько позднее.

Если градиент в точке известен, то эта информация может быть использована для ускорения процесса минимизации. Действительно, так называемые методы наискорейшего спуска основаны на предположении, что наискорейшее убывание функции достигается в направлении, противоположном направлению градиента. Однако эти методы не учитывают информации, полученной на предыдущих шагах. Если предварительная информация используется для определения следующего направления поиска, то можно надеяться на ускорение сходимости. Такие методы объединены под названием методов сопряженного градиента.

В некоторых случаях используют информацию о вторых производных, обычно их непосредственно не получают, а вычисляют приближенно, используя различные аппроксимации. Такие методы известны под названием методов с переменной метрикой или иногда их еще называют квазиньютоновскими.

Итерационный алгоритм поиска минимума. Обобщим материал, представив общий алгоритм, пригодный для многих итерационных методов минимизации. Различия появляются только в выборе направлений поиска S^k , а также в некоторых деталях критерия окончания.

1. Полагаем $k = 0$ и выбираем точку начального приближения X^0 .
2. Вычислим $F(X^k)$ и $\nabla F(X^k)$, если метод требует градиента.
3. Определяем направление поиска S^k и нормируем вектор направления поиска к единичной длине.
4. В направлении поиска S^k найдем длину шага d_k такую, что $F(X^k + d_k \cdot S^k) < F(X^k)$ или функция $F(X^k + d_k \cdot S^k)$, минимальна в направлении S^k .
5. Вычислим $\Delta X^k = d_k \cdot S^k$ и $X^{k+1} = X^k + \Delta X^k$.
6. Если $|F(X^{k+1}) - F(X^k)| < \varepsilon_1$ и $\|\Delta X^k\| < \varepsilon_2$, то процесс сошелся, иначе положим $k = k + 1$ и перейдем к шагу 2.

Напомним, что норма вектора S определяется выражением $\|S\| = \sqrt{\sum S_i^2}$. Для нормировки вектора к единичной длине необходимо каждую компоненту вектора разделить на его норму.

Поиск вдоль заданного направления. Общий алгоритм поиска, изложенный выше, требует определения длины шага d_k вдоль направления поиска S^k . Там же была упомянута процедура выбора d_k для

минимизации $F(X)$ вдоль направления $X^k + d_k \cdot S^k$. Рассмотрим два возможных способа представления направления поиска.

Первый способ не требует информации о градиенте, а использует параболическую интерполяцию по трем точкам, в направлении поиска, второй основывается на применении кубического интерполирующего полинома.

Параболическая интерполяция. Поясним первый метод поиска, на примере задачи с одной действительной переменной u . Обозначим функцию символом v . Рассмотрим рисунок 11.1.

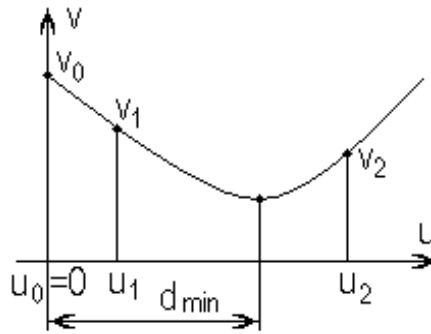


Рисунок 11.1 - Параболическая аппроксимация по трем точкам

Первое значение функции v_0 является результатом предыдущего шага минимизации. Установим начало координат таким образом, что $u_0 = 0$. Выберем произвольно величины двух шагов u_1 и u_2 , рассчитаем соответствующие им значения функции v_1 и v_2 . Таким образом получаем три точки $(0, v_0)$, (u_1, v_1) и (u_2, v_2) , которые используются для интерполяции параболой $v = C \cdot u^2 + B \cdot u + A$. Подставив в это уравнение координаты трех точек, получим три уравнения относительно неизвестных A , B и C :

$$\begin{aligned} v_0 &= A; \\ v_1 &= C \cdot u_1^2 + B \cdot u_1 + A; \\ v_2 &= C \cdot u_2^2 + B \cdot u_2 + A. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Решение этой системы имеет вид

$$C = \frac{u_2 \cdot (v_1 - v_0) - u_1 \cdot (v_2 - v_0)}{u_1^2 \cdot u_2 - u_2^2 \cdot u_1}; \quad (11.18)$$

$$B = \frac{-u_2^2 \cdot (v_1 - v_0) + u_1^2 \cdot (v_2 - v_0)}{u_1^2 \cdot u_2 - u_2^2 \cdot u_1}; \quad (11.19)$$

$$A = v_0. \quad (11.20)$$

Минимум параболы найдем, положив производную $v' = 2 \cdot C \cdot u + B = 0$, при условии, что $v'' = 2 \cdot C > 0$. Откуда расстояние до минимума параболы определится

$$d_{min} = \frac{-B}{2 \cdot C} = \frac{u_2^2 \cdot (v_1 - v_0) - u_1^2 \cdot (v_2 - v_0)}{2 \cdot [u_2 \cdot (v_1 - v_0) - u_1 \cdot (v_2 - v_0)]}, \quad (12.21)$$

при условии, что $C > 0$.

В качестве иллюстрации, рассмотрим процедуру одномерного поиска минимума функции из предыдущего примера $F(X) = x_1^2 + x_2^2 + 3 \cdot x_3^2$, с начальной точкой $X^0 = [1 \ 2 \ 1]^t$ и значением функции в этой точке $F(X^0) = 8$. Первая точка соответствует $u_0 = 0$, $v_0 = 8$. Выберем длину шага $d_0 = -0.5$ вдоль направления S^0 . Это также было сделано в предыдущем примере и $F(X^0 + 0.5 \cdot S^0) = 7.25$. Вторая точка имеет координаты $u_1 = -0.5$, $v_1 = 7.25$. Необходимо сделать еще один шаг, скажем, при $d = 0.5$, для которого $F(X^0 + 0.5 \cdot S^0) = 9.25$. Третья точка соответствует $u_2 = 0.5$, $v_2 = 9.25$. Откуда, в соответствии с (11.21), имеем $d_{min} = -1$. Эта величина используется для перехода от точки X^0 к точке X^1 и, в соответствии с (11.14), $X^1 = [1 \ 2 \ 1]^t + (-1) \cdot [1 \ 0 \ 0]^t = [0 \ 2 \ 1]^t$, для которой $F(X^1) = 7$.

Так как в примере используется квадратичная функция трех переменных, то минимум в направлении S^0 получен точно. В более сложных случаях шаги можно продолжить вновь до достижения минимума. С другой стороны, поиск можно вести только до получения $F(X^1) < F(X^0)$, а затем перейти к поиску по другому направлению.

Интерполяция кубическим полиномом. Если градиенты определяются относительно просто, то вместе со значением функции можно рассматривать и ее производную. Это дает информацию для интерполяции кубическим полиномом

$$v = D \cdot u^3 + C \cdot u^2 + B \cdot u + A. \quad (11.22)$$

Его производная равна

$$v' = 3 \cdot D \cdot u^2 + 2 \cdot C \cdot u + B. \quad (11.23)$$

Два экстремума находятся приравниванием производной к нулю

$$u_{opt} = \frac{-2 \cdot C \pm \sqrt{4 \cdot C^2 - 12 \cdot B \cdot D}}{6 \cdot D}. \quad (11.24)$$

При выборе конкретного экстремума заметим, что для минимума вторая производная должна быть положительной

$$6 \cdot D \cdot u + 2 \cdot C > 0.$$

Подставив в это выражение u_{opt} можно показать, что знак плюс в этой формуле соответствует минимуму.

Коэффициенты A, B, C, D пока неизвестны, но, используя интерполяционный полином и его производную, для двух точек отсчета функции, получаем

$$\begin{aligned} v_0 &= A; \\ v'_0 &= B; \\ v_1 &= D \cdot u_1^3 + C \cdot u_1^2 + B \cdot u_1 + A; \\ v'_1 &= 3 \cdot D \cdot u_1^2 + 2 \cdot C \cdot u_1 + B. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Так как коэффициенты A и B стали известны, подставим их в последние два уравнения и получим систему

$$\begin{bmatrix} u_1^3 & u_1^2 \\ 3 \cdot u_1^2 & 2 \cdot u_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - B \cdot u_1 - A \\ v'_1 - B \end{bmatrix}, \quad (11.26)$$

решение которой, даст значения коэффициентов C и D . Тогда, в соответствии с (11.24), имеем

$$d \min = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 3 \cdot B \cdot D}}{3 \cdot D}, \quad (11.27)$$

если $D \neq 0$. При $D = 0$, интерполирующая кривая становится квадратичной параболой и, в соответствии с этим, модифицируются уравнения.

В качестве иллюстрации рассмотрим процедуру одномерного поиска минимума функции из предыдущего примера

$$F(X) = x_1^2 + x_2^2 + 3 \cdot x_3^2,$$

с начальной точкой $X^0 = [1 \ 2 \ 1]^t$, значением функции в этой точке $F(X^0) = 8$ и направлением $S^0 = [1 \ 0 \ 0]^t$.

Градиент этой функции запишется $\nabla F(X) = [2 \cdot x_1 \ 2 \cdot x_2 \ 6 \cdot x_3]^t$, и в начальной точке он равен $\nabla F(X_0) = [2 \ 4 \ 6]^t$. Выберем произвольный размер шага, например $d_0 = -3$.

Используя (11.14), найдем следующую точку

$$X^1 = X^0 - 3 \cdot S^0 = [1 \ 2 \ 1]^t - 3 \cdot [1 \ 0 \ 0]^t = [-2 \ 2 \ 1]^t.$$

Значения функции и ее градиента в этой точке равны

$$F(X^0 - 3 \cdot S^0) = 11;$$

$$\nabla F(X^0 - 3 \cdot S^0) = [-4 \ 4 \ 6]^t.$$

Производные функции в направлении поиска рассчитываются с помощью произведений векторов $S^t \cdot \nabla F(X)$, следовательно,

$$(S^0)^t \cdot \nabla F(X^0) = [1 \ 0 \ 0] \cdot [2 \ 4 \ 6]^t = 2;$$

$$(S^0)^t \cdot \nabla F(X^0 - 3 \cdot S^0) = [1 \ 0 \ 0] \cdot [-4 \ 4 \ 6]^t = -4.$$

Теперь определим значения переменных интерполирующего полинома и его производной

$$u_0 = 0,$$

$$u_1 = d_0 = -3,$$

$$v_0 = F(X^0) = 8,$$

$$v_1 = F(X^0 - 3 \cdot S^0) = 11,$$

$$v'_0 = (S^0)^t \cdot \nabla F(X^0) = 2,$$

$$v'_1 = (S^0)^t \cdot \nabla F(X^0 - 3 \cdot S^0) = -4.$$

В соответствии с (11.25) и (11.26), получим $D=0$ и $C=1$. Интерполирующая кривая является параболой второй степени, что и следовало ожидать для данной задачи. Вместо (11.27) используем аналогичное выражение для параболы (11.21), откуда, как и в предыдущем примере, получим $d_{min} = -1$.

11.3 Квадратичные функции многих переменных

Выбор направления поиска, является наиболее сложной частью теории алгоритмов минимизации, при котором необходимо учитывать множество моментов. С одной стороны, желательно, чтобы алгоритм требовал расчета производных только первого порядка, так как производные более высокого порядка в общем случае рассчитать слишком сложно. С другой стороны, первые производные не содержат полной информации о кривизне функции. По этим причинам многие современные алгоритмы минимизации используют аппроксимацию вторых производных с помощью специальных формул. Для вывода таких формул необходимо понимать свойства квадратичных функций n переменных. В связи с этим, обсудим основные свойства квадратичных функций, что поможет разобраться и понять специфические моменты излагаемые в работах по оптимизации.

Произвольную дифференцируемую функцию можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться квадратичными членами

$$F(X + \Delta X) = F(X) + (\Delta X)^t \cdot \nabla F(X) + 1/2 \cdot (\Delta X)^t \cdot G(X) \cdot \Delta X + \dots \quad (11.28)$$

Здесь $\nabla F(X)$ - градиент функции, определяемый выражением (11.8), а $G(X)$ - симметричная квадратная матрица называемая матрицей Гессе

$$G(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X_1 \cdot \partial X_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial X_1 \cdot \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial X_1 \cdot \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \cdot \partial X_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \cdot \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \cdot \partial X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X_n \cdot \partial X_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial X_n \cdot \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial X_n \cdot \partial X_n} \end{bmatrix}. \quad (11.29)$$

В начале изучения квадратичных функций сделаем важное замечание, справедливое для любых дифференцируемых функций. Предположим, что дифференцируется функция $F(X)$, в заданном направлении S^k , и достигнут ее минимум в точке X^{k+1} . Градиент в точке должен быть ортогонален направлению поиска, т.е.

$$(S^k)^t \cdot \nabla F^{k+1} = (\nabla F^{k+1})^t \cdot S^k = 0. \quad (11.30)$$

Предположим, что это неверно. В этом случае градиент должен иметь компоненту в направлении поиска, указывающую на то, что дальнейшее уменьшение функции еще возможно. Так как это противоречит предположению о том, что достигнут минимум, справедливость (11.30) подтверждается. Эта ситуация подставлена на рисунке 11.2, где изображен фрагмент уровней трехмерной поверхности.

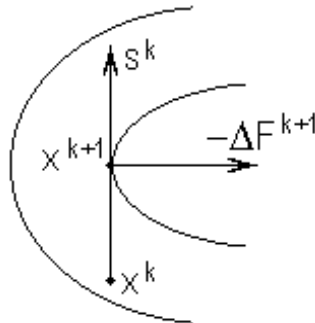


Рисунок 11.2 - Ортогональность векторов направления поиска s^k и градиента в точке минимума по этому направлению

Возвращаясь к квадратичной функции (11.28), предположим, что достигнута особая точка - экстремум \hat{X} , в которой градиент является нуль - вектором

$$\nabla F(\hat{X}) = 0. \quad (11.31)$$

При этом (11.28) упрощается

$$F(\hat{X} + \Delta X) = F(\hat{X}) + 1/2 \cdot (\Delta X)^t \cdot G(\hat{X}) \cdot \Delta X. \quad (11.32)$$

Произведение $(\Delta X)^t \cdot G(X) \cdot \Delta X$, называемое квадратичной формой, и определяет тип функции, с которой будем иметь дело.

Могут встретиться три возможных варианта значения этого произведения, определяемого второй производной $G(X)$:

1. Если квадратичная форма больше нуля для произвольно выбранного вектора ΔX , то эта точка является минимумом (возможно локальным).

2. Если квадратичная форма меньше нуля, для любых ΔX , то точка должна быть максимумом.

3. Если выбор ΔX может сделать квадратичную форму положительной, либо отрицательной, то точка \hat{X} является седловой. Это название происходит от формы двумерной поверхности.

Эти три возможности определяются свойствами матрицы G , и для произвольной матрицы G размера $n \times n$ вводятся следующее определение:

$$G = \begin{cases} \text{положительно – определена, если : } S^t \cdot G \cdot S > 0, \\ \text{отрицательно – определена, если : } S^t \cdot G \cdot S < 0, \\ \text{неопределенная, если : } S^t \cdot G \cdot S = 0. \end{cases} \quad (11.33)$$

для всех ненулевых S .

Поскольку в дальнейшем будем рассматривать минимизацию функции, то положительная определенность матрицы G будет иметь первостепенное значение.

В качестве иллюстрации покажем, что матрица Гессе G , ранее рассматриваемой нами функции

$$F(X) = (x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2,$$

положительно определена в точке минимума $X^* = [1 \quad 1]^t$. В соответствии с (11.29), матрица Гессе имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

и, в данном случае, не зависит от X . Выберем произвольное направление $S = [s_1 \quad s_2]$. Образую квадратичную форму, видим, что

$$S^t \cdot G \cdot S = [s_1 \quad s_2] \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = 2 \cdot [(s_1 - s_2)^2 + s_1^2] > 0,$$

для произвольного ненулевого вектора S .

Соотношение (11.33) устанавливает специальные свойства матрицы G , по отношению к вектору S .

Независимость векторов. Теперь определим основные свойства n векторов S^i , при $i = 0, 1, \dots, n-1$, по отношению к положительно определенной матрице G , размера $n \times n$. Если

$$(S^i)^t \cdot G \cdot S^j = \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq j, \\ k_j > 0, \text{ при } i = j, \end{cases} \quad (11.34)$$

то векторы S^i , S^j называют G -сопряженными и линейно независимыми. Линейная независимость может быть установлена по определению: n векторов линейно независимы, если уравнение

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot S^j = 0 \quad (11.35)$$

удовлетворяется только при всех a_j , равных нулю. Для сопряженных векторов умножим уравнение (11.35) слева на $(S^i)^t \cdot G$. Как следует из (11.34), сумма должна быть равна $a_j \cdot k_j$.

Поскольку, по определению $k_j > 0$, коэффициент a_j , должен быть равен нулю. Повторив это для всех $j = 0, 1, \dots, n-1$, установим линейную независимость векторов.

Существует широкий класс G -сопряженных векторов, что демонстрируется в следующем простом примере.

Используя, матрицу Гессе из предыдущего примера

$$G = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

найдем:

а) направление, сопряженное к $S^0 = [1 \ 0]^t$;

б) направление, сопряженное к $S^0 = [1 \ -1]^t$.

Для первого случая сформируем произведение

$$G \cdot S^0 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Определим сопряженный вектор, как $S^1 = [a_1 \ a_2]^t$ и потребуем, чтобы, $[a_1 \ a_2] \cdot [-4 \ 2]^t = 0$, откуда $a_2 = 2 \cdot a_1$. Выберем, например, вектор $S_1 = [1 \ 2]^t$, который является решением.

Аналогично для второго случая сформируем произведение

$$G \cdot S^0 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Определим вектор $S^1 = [b_1 \ b_2]^t$ и потребуем, чтобы, $[b_1 \ b_2] \cdot [6 \ -4]^t = 6 \cdot b_1 - 4 \cdot b_2 = 0$, откуда $b_2 = 3/2 \cdot b_1$. Выбрав, например, $b_1 = 2$, получим, что сопряженное направление определяется вектором $S^1 = [2 \ 3]^t$. Отсюда видно, что для любого ненулевого вектора можно найти G -сопряженный вектор.

Определим другие свойства, справедливые для произвольной квадратичной функции общего вида

$$F(X) = a + b^t \cdot X + 1/2 \cdot X^t \cdot G \cdot X, \quad (11.36)$$

имеющей положительно определенную матрицу G . Градиент этой функции запишется

$$\nabla F = b + G \cdot X. \quad (11.37)$$

Рассмотрим градиенты на двух соседних шагах итерации:

$$\nabla F^k = b + G \cdot X^k; \quad \nabla F^{k+1} = b + G \cdot X^{k+1}.$$

Разность градиентов равна

$$\gamma^k = \nabla F^{k+1} - \nabla F^k = G \cdot (X^{k+1} - X^k). \quad (11.38)$$

Возьмем аналогично разность двух соседних точек

$$X^{k+1} - X^k = \Delta X^k = d_k \cdot S^k, \quad (11.39)$$

что соответствует выражению (11.15), где S^k - k -тое направление поиска.

Подставив (11.39) в (11.38), получим

$$\gamma^k = \nabla F^{k+1} - \nabla F^k = G \cdot (X^{k+1} - X^k) = G \cdot \Delta X^k = d_k \cdot G \cdot S^k. \quad (11.40)$$

В последующем рассмотрении будем предполагать, что длина шага d_k выбрана таким образом, что найден минимум в направлении S_k , т.е. $d_k = d_{k \min}$. Как следствие этого предположения, автоматическое выполнение условия ортогональности (11.30).

Преобразуем теперь (11.30) к следующему равенству

$$\nabla F^{k+1} = \nabla F^k + d_k \cdot G \cdot S^k. \quad (11.41)$$

Так как верхний индекс обозначает номер итерации, можно, повторно используя эту формулу, получить

$$\nabla F^{k+1} = \nabla F^{k-1} + d_{k-1} \cdot G \cdot S^{k-1} + d_k \cdot G \cdot S^k; \quad (11.42)$$

$$\nabla F^{k+1} = \nabla F^{k-2} + d_{k-2} \cdot G \cdot S^{k-2} + d_{k-1} \cdot G \cdot S^{k-1} + d_k \cdot G \cdot S^k; \quad (11.43)$$

и т.д.

Рассмотрим вектор - градиент (11.41), транспонируем его и помножим справа на вектор S^{k-1} , учитывая, что $G^t = G$

$$(\nabla F^{k+1})^t \cdot S^{k-1} = (\nabla F^k)^t \cdot S^{k-1} + d_k \cdot (S^k)^t \cdot G \cdot S^{k-1}.$$

Первый член в правой части равен нулю согласно (11.30). Если векторы S^k и S^{k-1} являются G -сопряженными, то второй член также равен нулю.

Выполним аналогичные действия для (11.42), транспонируя и умножая на вектор S^{k-2}

$$(\nabla F^{k+1})^t \cdot S^{k-2} = (\nabla F^{k-1})^t \cdot S^{k-2} + d_{k-1} \cdot (S^{k-1})^t \cdot G \cdot S^{k-2} + d_k \cdot (S^k)^t \cdot G \cdot S^{k-2}$$

По тем же причинам заключаем, что правая часть этого равенства равна нулю.

Проводя далее аналогичные выкладки, получаем следующую общую формулу

$$(\nabla F^{k+1})^t \cdot S^j = 0, \quad (11.44)$$

при $j = 0, 1, \dots, k$. Полагая, $k + 1 = n$, можем записать

$$(\nabla F^n)^t \cdot S^j = 0, \quad (11.45)$$

при $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Так как векторы направлений поиска S^j , линейно независимы и уже все использованы, то градиент, на n -ом шаге, должен быть равен нулю $\nabla F^n = 0$.

Отсюда заключаем, что минимум, квадратичной положительно определенной функции, может быть достигнут, с помощью вышеописанного процесса, самое большое за n итераций. При этом предполагается, что на каждом направлении минимум находится за один шаг, а направления поиска линейно независимы.

Полученные результаты устанавливают некоторые общие правила, которых следует придерживаться при проведении процесса минимизации и при выборе направлений поиска. Выбор самих направлений пока не излагался. Существует большое число различных вариантов, которые излагается ниже.

11.4 Метода спуска при минимизации

Опишем некоторые хорошо известные методы, используемые при безусловной минимизации по мере их усложнения. Некоторые специальные детали приводятся без вывода и доказательства.

Наискорейший спуск. Метод наискорейшего спуска самый ранний и наименее эффективный метод минимизации. При этом методе, в каждой точке рассчитывается вектор градиента, и направление поиска выбирается противоположно градиенту

$$S^k = -\nabla F^k. \quad (11.46)$$

Метод имеет тенденции к колебаниям, если минимум представляет собой удлиненную изгибающуюся долину изображенную на рисунке 11.3.

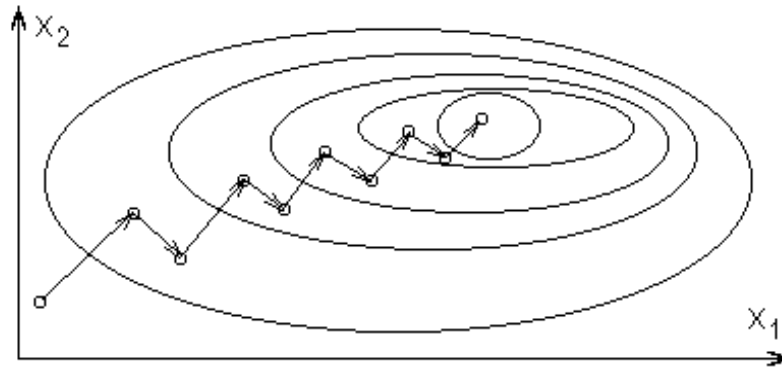


Рисунок 11.3 - Колебательный характер поиска в методе наискорейшего спуска

В результате сходимость метода наискорейшего спуска получается медленной. Позднее было предложено несколько модификаций этого метода, уменьшающих возможные колебания.

Метод сопряженного градиента. Этот метод использует информацию, полученную на предыдущих шагах, для определения нового направления. В предыдущем подразделе было показано, что для квадратичных функций можно найти ее минимум за n шагов, при условии, что в каждом направлении, минимум определяется точно.

Предполагается, что квадратичная функция также определяется выражением (11.28), однако информация о второй производной непосредственно не используется. Первое направление поиска выбирается так же, как и в методе наискорейшего спуска, а последующие направления являются линейными комбинациями вектора градиента и других выбранных предварительно направлений

$$\begin{aligned}
 S^0 &= -\nabla F^0; \\
 S^1 &= -\nabla F^1 + k_{11} \cdot S^0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 S^k &= -\nabla F^k + \sum_{i=1}^k k_{ik} \cdot S^{i-1},
 \end{aligned}
 \tag{11.47}$$

где $1 \leq k \leq n-1$.

Предполагая законченную минимизацию в каждом направлении поиска, получим, как это следует из (11.30)

$$(S^i)^t \cdot \nabla F^{i+1} = 0, \tag{11.48}$$

где $i = 0, 1, \dots, n-1$. Так как первое направление поиска определено, второе направление находится из условия G -сопряженности (11.34)

$$(S^1)^t \cdot G \cdot S^0 = (-\nabla F^1 + k_{11} \cdot S^0)^t \cdot G \cdot S^0 = 0. \tag{11.49}$$

Коэффициент k_{11} можно рассчитать из этого выражения, если известна матрица G . Поскольку, в общем случае, она не известна, будем заменять матрицу G во всех выражениях значениями функции и или градиентов в соответствующих точках, предполагая квадратичность функции. В частности воспользуемся (11.40), переписав его в виде

$$G \cdot S^0 = (\nabla F^1 - \nabla F^0) / d_0. \quad (11.50)$$

Подставляя (11.50) в (11.49) и, принимая во внимание (11.47), получаем

$$(-\nabla F^1 - k_{11} \cdot \nabla F^0)^t \cdot (\nabla F^1 - \nabla F^0) / d_0 = 0.$$

Сократив на не равный нулю множитель d_0 , и перемножив скобки, получим

$$-(\nabla F^1)^t \cdot \nabla F^1 + (\nabla F^1)^t \cdot \nabla F^0 - k_{11} \cdot (\nabla F^0)^t \cdot \nabla F^1 + k_{11} \cdot (\nabla F^0)^t \cdot \nabla F^0 = 0.$$

Учитывая из (11.47), что, $-\nabla F^0 = S^0$, а также условие ортогональности направления поиска и сопряженного градиента в точке минимума (11.30) или (11.48) видим, что второе и третье слагаемые равны нулю. Это позволяет записать последнее соотношение в виде

$$k_{11} \cdot (\nabla F^0)^t \cdot \nabla F^0 = (\nabla F^1)^t \cdot \nabla F^1,$$

или

$$\alpha_1 = k_{11} = [(\nabla F^1)^t \cdot \nabla F^1] / [(\nabla F^0)^t \cdot \nabla F^0].$$

Выполнив аналогичные действия для следующих направлений, можно показать, что

$$\alpha_k = k_{kk} = [(\nabla F^k)^t \cdot \nabla F^k] / [(\nabla F^{k-1})^t \cdot \nabla F^{k-1}], \quad (11.51)$$

а остальные коэффициенты k_{ik} равны нулю.

Итерационные шаги общего алгоритма, приведенные в предыдущем подразделе, остаются справедливыми, лишь третий шаг уточняется следующим образом: вычисляем α_k из (11.51) и, полагая

$$S^k = -\nabla F^k + \alpha_k \cdot S^{k-1}, \quad (11.52)$$

производим его нормировку к единичной длине.

Если соотношения (11.51) и (11.52) применяются для не квадратичной функции, то наблюдается линейная сходимость до тех пор, пока направление поиска не начнет периодически повторяться. Это, как отмечалось, происходит после n шагов по направлениям $S^n = -\nabla F^n$.

Рассмотренный алгоритм прост для реализации и требует умеренный объем оперативной памяти, необходимо запоминать только предыдущее направление поиска и предыдущий градиент. Этот алгоритм часто используют для задач, имеющих большое число переменных. В литературе данный метод известен под названием метода сопряженного градиента Флетчера и Ривса. Известны и другие версии метода сопряженного градиента с лучшей сходимостью, но требующие несколько большей

памяти. При этом модификации подвергается формула определения направлений поиска (11.52) и изменяется последовательность шагов алгоритма.

Метод Ньютона. Итерационный метод, основанный на явном использовании вторых производных, известен под общим названием метод Ньютона. Пусть снова функция $F(X)$ разложена в ряд Тейлора и в нем удержано три члена. Результат разложения представленный в выражении (11.28) перепишем в виде

$$F(X^k + \Delta X) - F(X^k) = (\Delta X)^t \cdot \nabla F^k + 1/2 \cdot (\Delta X)^t \cdot G^k \cdot \Delta X \quad (11.53)$$

Пусть требуется минимизировать разность, стоящую в левой части. Это можно сделать дифференцированием (11.53), по ΔX и приравняв результаты к нулю

$$\partial [F(X^k + \Delta X) - F(X^k)] / \partial \Delta X = \nabla F^k + G^k \cdot \Delta X = 0,$$

откуда

$$G^k \cdot \Delta X = -\nabla F^k.$$

Это уравнение можно решить соответствующими методами относительно ΔX , например, с помощью LU -разложения. Формально решение можно записать

$$\Delta X = -(G^k)^{-1} \cdot \nabla F^k = -H^k \cdot \nabla F^k,$$

где $H = G^{-1}$. Направление поиска теперь полагаем совпадающим с вектором

$$S^k = \Delta X^k = -H^k \cdot \nabla F^k, \quad (11.54)$$

и вновь повторяем общий алгоритм, изложенный в предыдущем подразделе.

При подходе к минимуму матрица Гессе G^k будет положительно определенной и можно использовать полный размер шага $d_k = 1$, т.е. не нужен поиск в направлении S^k . Однако вдали от минимума матрица Гессе может и не быть положительно определенной. Более того, вычисление этой матрицы требует больших затрат, поэтому разработан целый класс других методов, называемых методами с переменной метрикой или квазиньютоновскими, которые лишены этого недостатка.

Методы с переменной метрикой. Эти методы были разработаны сравнительно давно, однако обобщены в последнее время. Они базируются на оценке градиентов и на аппроксимации матрицы Гессе или обратной от матрицы Гессе. Аппроксимация достигается преобразованием исходной положительно, определенной матрицы или тождественной ей матрицы таким образом, чтобы сохранить ее положительно определенность.

Только при достижении минимума получаемая матрица аппроксимирует матрицу Гессе или обратную к ней.

Детальный вывод аппроксимирующих соотношений сложен и здесь не приводится, а используются лишь готовые выражения. Во всех методах направление поиска определяется, как и в методе Ньютона

$$S^k = -H^k \cdot \nabla F^k. \quad (11.55)$$

На каждой итерации по матрице H^k , согласно специальной формуле, получают матрицу H^{k+1} . Существует много формул для определения H^{k+1} . Приведем эту формулу в наиболее общей форме

$$H^{k+1} = f(\alpha^k, \phi^k, H^k, \Delta X^k, \gamma^k), \quad (11.56)$$

где

$$\begin{aligned} f(\alpha, \phi, H, \Delta X, \gamma) = & \alpha \cdot H + \left[1 + \alpha \cdot \phi \cdot \frac{\gamma^t \cdot H \cdot \gamma}{(\Delta X)^t \cdot \gamma} \right] \cdot \frac{(\Delta X) \cdot (\Delta X)^t}{(\Delta X)^t \cdot \gamma} - \\ & - \alpha \cdot \frac{1 - \phi}{\gamma^k \cdot H \cdot \gamma} \cdot H \cdot \gamma \cdot \gamma^t \cdot H - \frac{\alpha \cdot \phi}{(\Delta X)^t \cdot \gamma} \cdot \left[(\Delta X) \cdot \gamma^t \cdot H + H \cdot \gamma \cdot (\Delta X)^t \right] \end{aligned} \quad (11.57)$$

Эта прямая формула пригодна только в случае, когда $(\Delta X)^t \cdot \gamma \neq 0$ и $\gamma^t \cdot H \cdot \gamma \neq 0$. Здесь α и ϕ - скалярные величины, а $\gamma^k = \nabla F^{k+1} - \nabla F^k$. Другие хорошо известные формы, следуют из (11.57) при выборе соответствующих значений α и ϕ .

Например:

1. Если $\alpha^k \equiv 1$, $\phi^k \equiv 0$, то

$$f(1, 0, H, \Delta X, \gamma) = H + \frac{(\Delta X) \cdot (\Delta X)^t}{(\Delta X)^t \cdot \gamma} - \frac{H \cdot \gamma \cdot \gamma^t \cdot H}{\gamma^t \cdot H \cdot \gamma}. \quad (12.58)$$

Эта формула получена Дэвидоном, Флетчером и Пауэлом и ее иногда называют ДФП - формулой.

2. Если $\alpha^k \equiv 1$, $\phi^k \equiv 1$, то

$$\begin{aligned} f(1, 1, H, \Delta X, \gamma) = & H + \left[1 + \frac{\gamma^t \cdot H \cdot \gamma}{(\Delta X)^t \cdot \gamma} \right] \cdot \frac{(\Delta X) \cdot (\Delta X)^t}{(\Delta X)^t \cdot \gamma} - \\ & - \frac{1}{(\Delta X)^t \cdot \gamma} \cdot \left[(\Delta X) \cdot \gamma^t \cdot H + H \cdot \gamma \cdot (\Delta X)^t \right] \end{aligned} \quad (11.59)$$

Эта формула была получена независимо Бройденом, Флетчером, Гольдфарбом и Шенно и ее обычно называют БФГШ - формулой.

Существуют также и другие упрощения. Современные программы часто основываются на комбинации выражений (11.58) и (11.59). На

каждой итерации правила решения заданы таким образом, что выбирается та или иная формула.

АННОТАЦИЯ

Данное учебное пособие представляет собой расширенный конспект лекций по основам автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств для студентов радиотехнических специальностей очной и заочной форм обучения.

Особенностью данного пособия является систематическое использование модифицированных методов формирования математических моделей, позволяющих с единой позиции изложить методологию расчета рабочих режимов, частотных и временных характеристик, чувствительности их к изменению параметров устройств и внешних факторов.

Достаточно подробно рассмотрены модели основных элементов электронных схем, современные методы формирования математических моделей, решения линейных и нелинейных систем алгебраических и дифференциальных уравнений и оптимизации характеристик устройств.

Изложение методов и алгоритмов ориентировано на реализацию программ автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств.

Пособие может быть рекомендовано и студентам смежных специальностей по направлениям радиоэлектроники и телекоммуникаций, интересующимся вопросами автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронной аппаратуры.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Введение

1. Задачи и содержание курса "Основы АПР РЭУ"
2. Топологическое описание схем
 - 2.1. Основные понятия теории графов
 - 2.2. Топологические матрицы
 - 2.3. Соотношение ортогональности
 - 2.4. Независимые токи и напряжения
 - 2.5. Включение независимых источников в граф
 - 2.6. Логический алгоритм формирования дерева графа
 - 2.7. Алгоритм формирования матрицы главных сечений
3. Классические методы формирования математических моделей
 - 3.1. Обобщенный метод узловых потенциалов
 - 3.2. Алгоритм формирования узловой системы уравнений
 - 3.3. Метод контурных токов

- 3.4. Основные элементы схемы
- 3.5. Преобразование Лапласа для уравнений реактивных элементов
- 3.6. Нормировка входных данных
4. Прямые методы формирования математических моделей
 - 4.1. Табличный метод
 - 4.2. Модификация табличного метода
 - 4.3. Модифицированный метод узловых потенциалов
 - 4.4. Модифицированный узловой метод с проверкой
5. Эквивалентные модели
 - 5.1. Основные понятия
 - 5.2. Модели полупроводникового диода
 - 5.3. Модели биполярного транзистора
 - 5.4. Модели полевого транзистора
 - 5.5. Модели операционного усилителя
 - 5.6. Модели связанных индуктивностей
 - 5.7. Модели распределенных структур
6. Методы решения линейных систем уравнений
 - 6.1. Алгоритм Гаусса
 - 6.2. Алгоритм Гаусса - Жордана
 - 6.3. Схема Халецкого (LU – факторизация)
 - 6.4. LU- факторизация (алгоритм Краута)
 - 6.5. Решение транспонированной системы уравнений
 - 6.6. Метод ортогонализации (QR - факторизации)
 - 6.7. QR - факторизация (алгоритм Грама – Шмидта)
7. Передаточные характеристики электронных схем
 - 7.1. Классический подход
 - 7.2. Функции цепи в современных методах
 - 7.3. Интерполяция полиномов по точкам окружности
 - 7.4. Алгоритм формирования символьных функций
8. Расчет чувствительности электронных схем
 - 8.1. Определения чувствительности
 - 8.2. Алгоритмы расчёта чувствительности
 - 8.3. Применение метода присоединенных систем
9. Расчет цепей по постоянному току
 - 9.1. Алгоритм Ньютона – Рафсона
 - 9.2. Формирование нелинейных математических моделей
10. Расчет переходных процессов электронных схем
 - 10.1. Исходные определения
 - 10.2. Простые методы интегрирования
 - 10.3. Порядок метода интегрирования и ошибки усечения
 - 10.4. Устойчивость методов интегрирования
 - 10.5. Расчет переходных процессов цепей
 - 10.6. Метод дискретных моделей реактивных элементов
11. Оптимизация электронных схем
 - 11.1. Введение в теорию оптимизации

- 11.2. Классическая теория оптимизации
- 11.3. Квадратичные функции многих переменных
- 11.4. Методы спуска при минимизации
- 11.5. Минимизация при ограничениях
- 11.6. Алгоритмы оптимизации

Заключение

Список литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию пособие представляет собой расширенный конспект лекций по основам автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств.

Пособие адресовано инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами автоматизации проектирования в радиоэлектронике, и студентам старших курсов радиотехнических специальностей, имеющих базовую подготовку по математике, программированию, теории цепей и сигналов и элементной базе радиоэлектронных устройств.

Имеющаяся литература по автоматизированному схемотехническому проектированию отражает в основном подход, базирующийся на методе переменных состояния, отличающегося повышенной сложностью формирования математической модели для цепей произвольного вида. В настоящее время при автоматизации схемотехнического проектирования предпочтение отдается подходу, использующему прямые методы формирования математической модели, в которых, соответствующая система уравнений, формируется непосредственно по схеме устройства. Суть данного подхода обстоятельно изложена в монографии: Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 560 с., вышедшей тиражом 20000 экземпляров.

В предлагаемом пособии сделана попытка адаптированного изложения подхода, развиваемого в упомянутой монографии, применительно к нашим условиям, в виде расширенного конспекта лекций по дисциплине «Основы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств», читаемой студентам радиотехнического факультета ТУСУРа. При адаптации некоторые разделы исключены, другие – переработаны и дополнены, в соответствии с рабочей программой. В основном переработаны и дополнены разделы, посвященные моделям элементной базы, методам решения систем линейных алгебраических уравнений и методам оптимизации характеристик устройств.

Содержание данного пособия отражает опыт преподавания данной дисциплины для студентов специальности радиотехника на

радиотехническом факультете ТУСУРа с 1991 года, в соответствии с образовательным стандартом.

В заключение хотелось бы выразить слова благодарности всем сотрудникам кафедр РЗИ и СРС, оказавших помощь при постановке данной дисциплины и проведении занятий. Персонально слова благодарности выражаю коллегам, сотрудникам кафедры РЗИ М.Ю. Покровскому и А.С. Красько, которые в течение ряда лет помогали в проведении курсовых и лабораторных работ со студентами. Красько А.С. благодарен также за большую помощь, оказанную при подготовке электронного варианта конспекта лекций. Особые слова благодарности выражаю Г.Н. Глазову, прочитавшему первый вариант рукописи и сделавшему целый ряд ценных замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время инженер в процессе своей деятельности нередко использует ЭВМ для проведения различных вычислений, а в ряде случаев проектировщик современной аппаратуры просто не может обойтись без ЭВМ, как основного рабочего инструмента. При этом разработчик использует современные системы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств (РЭУ) либо решает нестандартные задачи проектирования, опираясь на системы для инженерных и научных расчетов.

Автоматизированное проектирование позволяет существенно сократить финансовые затраты и время на разработку радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), повышая точность расчетов и сокращая объем экспериментальных исследований. Продуктивное использование ЭВМ немислимо без развитого прикладного программного обеспечения, позволяющего быстро и надежно моделировать и оптимизировать предлагаемые решения. В связи, с выше указанным, актуальна подготовка современных специалистов, владеющих основами автоматизированного проектирования.

Предлагаемое вниманию пособие представляет собой расширенный конспект лекций по дисциплине «Основы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств» (Основы АПР РЭУ) и предназначено для подготовки студентов радиотехнических специальностей.

Цель данного пособия – раскрыть содержание, принципы и методологию современного состояния автоматизированного схемотехнического проектирования.

В задачи дисциплины входит – изучение: моделей элементной базы; современных методов и алгоритмов формирования математических моделей расчета режимов, частотных и временных характеристик, чувствительности к изменению параметров и оптимизация характеристик устройств.

Для достижения указанной цели и решения поставленных задач в конспекте лекций излагаются основные понятия и определения, модели элементной базы, совокупность современных методов и алгоритмов расчета основных характеристик, принципы построения программного обеспечения и методология автоматизированного схемотехнического проектирования.

При изложении материала, из всего многообразия тем, относящихся к автоматизированному схемотехническому проектированию, нами выбран минимум необходимый для овладения проблематикой, методологией, основными принципами, методами и алгоритмами, позволяющий решать широкий круг полезных задач.

Основное внимание при изложении дисциплины уделено расчету электронных схем, как электрическим моделям реальных узлов РЭУ. Однако вопросы автоматизированного расчета и проектирования невозможно охватить в одном пособии, поэтому пришлось ограничиться в основном аналоговыми устройствами, хотя излагаемые методы могут быть, в большинстве своем, распространены и на дискретные или импульсные устройства. К сожалению, за пределами нашего внимания, кроме дискретных устройств, остаются: специфические моменты расчета и проектирования распределенных устройств СВЧ диапазона, спектральные задачи нелинейных устройств, электродинамический расчет конструкций и целый ряд других не менее важных вопросов. Частично с этими вопросами можно ознакомиться при изучении других дисциплин, а идеи и методы данного предмета помогут Вам успешно освоить перечисленные разделы моделирования, расчета и проектирования.

В пособии, для линейных и нелинейных аналоговых устройств, даны основные понятия и определения, рассмотрены модели основных элементов, изложены методы и алгоритмы формирования математических моделей, расчета частотных и временных характеристик, режима по постоянному току, чувствительности к изменению параметров и внешних факторов, методология и принципы автоматизированного проектирования с использованием методов параметрического синтеза.

В основу курса лекций вместо традиционного метода переменных состояния положены более простые, но не менее эффективные, прямые методы формирования математических моделей, совмещающие достоинства узлового и табличного методов, позволяющих реализовать идею сквозного проектирования. Суть данного подхода изложена в прекрасной монографии Влаха И. и Синкхала К. [1]. Этого подхода, как наиболее удачного, мы и придерживаемся в данном пособии. Структура конспекта лекций, методология и часть примеров заимствованы из этой монографии. Естественно, что, исходя из рабочей программы, собственного опыта и интересов, часть специфических разделов были исключены, сокращены или переработаны, но идеология изложения материала по возможности сохранена. Часть отсутствующего материала,

разбросанного по разным учебникам, добавлена в качестве новых разделов.

Материал по разделам распределен следующим образом:

1. В первом разделе сформулированы цели, задачи и содержание автоматизированного проектирования РЭУ.
2. Во втором разделе даны основные элементы топологического описания электронных схем.
3. В третьем разделе дано обоснование классических методов (узлового и контурного) формирования математических моделей с позиций компонентного и топологического описания электронных схем.
4. В четвертом разделе дано развернутое содержание прямых методов формирования математических моделей, их сравнительная характеристика и основной идеи сквозного проектирования.
5. В пятом разделе рассмотрено содержание понятия модели, их классификация и описание моделей основных элементов РЭУ.
6. В шестом разделе излагаются основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида, на которых собственно и базируются все вычислительные алгоритмы.
7. В седьмом разделе изложены методы расчета передаточных характеристик электронных схем и сопутствующие вопросы.
8. Восьмой раздел посвящен алгоритмам расчета чувствительности электронных схем к изменению параметров и их использованию для вычисления других характеристик.
9. Девятый раздел посвящен расчету режимов цепей по постоянному току и вопросам сходимости алгоритмов.
10. Десятый раздел посвящен вопросам численного интегрирования дифференциальных уравнений, способам их формирования и расчету временного отклика цепей.
11. В последнем разделе рассмотрены постановка задачи оптимизации, основные понятия, методы и алгоритмы оптимизации, а также вопросы автоматизации проектирования РЭУ с заданными характеристиками.

По краткому содержанию пособия следует заметить, что первые три раздела закладывают основные понятия описания электронных схем, как моделей реальных устройств. Содержание подхода сквозного проектирования базируется на прямых методах формирования математических моделей и в этом смысле четвертый раздел наиболее важен. Модели элементной базы РЭУ лежат в основе их компьютерного моделирования. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений лежат в основе практически всех алгоритмов расчета характеристик. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений и проблема обеспечения их точности и устойчивости являются базовыми для расчета реакции устройств во временной области.

Последующие разделы конкретизируют алгоритмы расчета основных характеристик в частотной и временной областях. Чувствительность характеристик к изменению параметров устройств важны, как на этапе производства, так и эксплуатации РЭУ. Расчет режимов цепей по постоянному току всегда предшествует расчету любых характеристик, так как режимы работы активных приборов (рабочие точки) в основном и определяет параметры реальных устройств. Оптимизация рассматривается в данной дисциплине, как основной прием автоматизированного проектирования узлов РЭУ с заданными характеристиками, именно параметрический синтез лежит в основе методологии автоматизированного проектирования.

Изучение всех перечисленных вопросов и их взаимосвязи и составляет основу автоматизированного проектирования РЭУ.

1 Задачи и содержание курса «Основы АПР РЭУ»

Цель курса - изучение комплекса вопросов связанных с использованием ЭВМ при автоматизации проектирования РЭУ, идеологии разработки и структуры современных систем, пакетов и универсальных программ АПР РЭУ.

Задачи курса - на базе, ранее полученных знаний, по математике, программированию, численным методам, теории цепей и сигналов, элементной базе РЭУ, аналоговым устройствам и т.п., сформулировать основные принципы построения программного обеспечения автоматизации проектирования, изучить основные методы и алгоритмы расчета и проектирования, ознакомиться с имеющимися пакетами машинного расчета РЭУ.

Под автоматизированным проектированием, в общем случае, понимают последовательность проектных операций от выдачи ТЗ до разработки необходимой документации на производство РЭУ. В связи с этим, применительно к автоматизированному проектированию, часто говорят о сквозном проектировании, выделяя при этом следующие этапы:

1. Системное или функциональное проектирование, в процессе которого возникает функциональная схема устройства, и просчитываются общесистемные характеристики.

2. Схемотехническое проектирование - каждому функциональному узлу ставится в соответствие схемное решение с учетом существующей элементной базы (для цифровых устройств этот этап называют логическим проектированием).

3. Конструкторское проектирование - прорабатываются основные конструктивные параметры устройства с учетом необходимой элементной базы, назначения, заданными массогабаритными параметрами, диапазоном частот, потребляемой мощностью, температурным режимом и т.п.

4. Технологическое проектирование – выбирается подходящая последовательность технологических операций, для каждой операции конкретная технология, материалы, режим технологического

оборудования и т.п.

Каждый из этапов заканчивается выдачей необходимой документации. Процесс проектирования, чаще всего, является итерационной процедурой, при которой приходится неоднократно возвращаться к исходному варианту схемного решения. Полномасштабное автоматизированное проектирование, включающее все этапы, вероятно дело будущего, хотя известны его реализации при разработке БИС.

Разработка программного обеспечения, даже для отдельного этапа проектирования, требует огромных предварительных затрат. В разработке программного обеспечения обычно принимают участие, как программисты математики, так и инженеры соответствующих специальностей. В связи с тем, что ЭВМ все шире внедряется в инженерную практику, изучение вопросов автоматизации проектирования входит в современные учебные планы радиотехнических специальностей. В частности, при подготовке студентов по специальности "Радиотехника", образовательным стандартом предусмотрено изучение вопросов автоматизированного схемотехнического проектирования.

При изучении курса автоматизированного проектирования электронных схем можно преследовать две основные цели:

1. Подготовку пользователей имеющихся программных продуктов для схемотехнического проектирования.
2. Подготовку специалистов, владеющих методологией, методами, алгоритмами и принципами построения программного обеспечения схемотехнического проектирования.

Второй подход, на наш взгляд более предпочтителен, так как доступных лицензионных продуктов не так много, они постоянно совершенствуются и зачастую отсутствуют подробные инструкции и описания. Кроме того, в рамках учебного пособия, трудно уследить за новинками, появляющимися на рынке программного обеспечения (ПО). В тоже время, освоение готовых программных продуктов не представляет особого труда для подготовленного специалиста. Зная идеологию построения, содержание и методы реализации, специалист может участвовать в разработке новых автоматизированных систем, их модернизации, быстром освоении и грамотной эксплуатации. При разработке РЭУ, часто возникают нестандартные задачи проектирования и специалист, владеющий принципами и методами вычислений, способен успешно их решить с помощью современных общематематических систем для инженерных и научных расчетов типа MathCad, MatLab, Maple V и т. д.

Под схемотехническим проектированием обычно понимают синтез схемного решения устройства, либо оптимизацию заданного исходного решения по совокупности требований технического задания (ТЗ).

При синтезе, ограничиваясь классом устройств на основе формализованных процедур, достаточно однозначно находят структуру устройства, либо, задавшись структурой, - варианты схемотехнических

реализаций.

При оптимизации, задавшись одним из методов, исходным решением и требованиями в виде целевой функции, путём многократного расчета и перебора параметров, в соответствии со стратегией метода, находят приемлемую схемную реализацию.

При автоматизированном схемотехническом проектировании используют в основном различные методы оптимизации, поскольку процедура синтеза разработана лишь для отдельных классов устройств.

Схемотехническое проектирование РЭУ традиционно включает вопросы: выбора адекватной модели, автоматического формирования математической модели цепи, в виде соответствующей системы уравнений и решения уравнений математической модели с целью определения интересующих токов и напряжений, их отношений, амплитуд и форм, при заданных входных сигналах, определение чувствительности характеристик к разбросу и изменению параметров устройства и внешних факторов, поиск оптимального по совокупности характеристик схемного решения.

Этап схемотехнического проектирования далеко продвинут в теоретическом и практическом отношениях, имеет свою историю и традиции, произошел отбор наиболее перспективных методов и алгоритмов, утвердилась методология и принципы, однако постоянно идет поиск новых направлений, подходов, адекватных моделей.

Машинный расчет электронных схем, как современная область знаний, использует результаты трех основных дисциплин:

1. Математика - матричный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы решения линейных и нелинейных алгебраических и дифференциальных систем уравнений.

2. Радиотехнические цепи и сигналы - основные законы теории цепей, топологические соотношения, модели основных элементов, теория сигналов, прохождение сигналов в цепях, спектральные и временные характеристики.

3. Программирование - операционные системы, языки программирования высокого уровня, технология программирования, численные методы, прикладное программное обеспечение и библиотеки научно-технических программ.

С математической точки зрения, используемые методы машинного схемотехнического проектирования, могут быть разделены на следующие группы:

1. Методы формирования математической модели исследуемой схемы устройства (метод узловых потенциалов, табличный, модифицируемый узловой и т.п.).

2. Методы решения линейных систем уравнений общего вида (Гаусса, Гаусса-Жордана, LU- и QR- факторизации и т.п.).

3. Методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений (итерационные методы Ньютона-Рафсона, Гаусса-Зайделя, Якоби и т.п.).

4. Метода интегрирования систем линейных и нелинейных

дифференциальных уравнений (прямые и обратные, простые и многошаговые).

5. Методы параметрической оптимизации (прямые - Хука-Дживса, Розенброка и т.п., градиентные – наискорейшего спуска, сопряженных градиентов, Флетчера-Пауэла и т.п.).

Заметим, что схемотехническое проектирование не исчерпывается перечисленными методами и разделами фундаментальных дисциплин, они лишь отражают круг рассматриваемых вопросов.

Для технического обеспечения этапа схемотехнического проектирования требуется соответствующее аппаратное обеспечение, в частности, профессиональные либо персональные ЭВМ с набором периферийных устройств - принтеров, плоттеров, сканеров, составляющих в совокупности автоматизированные рабочие места (АРМ) проектировщика. Большое распространение получили сети ЭВМ различной конфигурации.

Базовое программное обеспечение современных ЭВМ широкого распространения:

операционные системы - MS-DOS, MS Windows, Windows NT и т.п.

компиляторы с языков высокого уровня - Фортран, Паскаль, Си и т.п.

инструментальные интегрированные пакеты различного назначения - MathCad, MatLab, Maple V, Mathematica-4 и т.п.

текстовые редакторы - Lexicon, Word и т.п.

базы данных - dBase, FoxBase, FoxPro и т.п.

специализированные пакеты для автоматизированного проектирования электронных схем - Nap, MicroCap, PcSpice, Electronics WorkBanch (EWB) и т.п.

В основу курса положены идеи и методы, излагаемые в [1], которая по своему содержанию наиболее соответствует методике изложения курса ОАПРЭУ студентам специальности "Радиотехника". Примеры необходимые для иллюстрации излагаемых методов также заимствованы в основном из этой работы. Однако применительно к нашим условиям, часть материала была исключена по различным причинам, а используемая часть переработана и дополнена.

При подготовке методического пособия использовались и другие доступные источники. Список литературы существенно расширен и позволяет интересующимся ознакомиться с историей и современным состоянием вопроса и существенно углубить свои знания в нужном направлении.

Таким образом, в предлагаемом пособии по дисциплине «Основы АПРЭУ» рассмотрен очерченный круг вопросов автоматизированного схемотехнического проектирования.